



HAL
open science

Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes

Dinh Hai Nguyen

► **To cite this version:**

Dinh Hai Nguyen. Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes. Autre. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1067 . tel-01127312

HAL Id: tel-01127312

<https://theses.hal.science/tel-01127312>

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS EST

ANNÉE 2014

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS EST

Discipline : Génie Civil

présentée par

NGUYEN Dinh Hai

Titre :

**Analyse asymptotique, modélisation micromécanique
et simulation numérique des interfaces courbées
rugueuses dans des matériaux hétérogènes**

soutenue le 24 Septembre 2014 devant le jury composé de

M. FRANCIOSI Patrick

Président

M. AMMARI Habib

Rapporteur

M. BERBENNI Stéphane

Rapporteur

M. LE QUANG Hung

Co-directeur de thèse

M. HE Qi-Chang

Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle (MSME) - UMR 8208 CNRS.

En premier lieu, je voudrais adresser mes remerciements à mon directeur de thèse monsieur Qi-Chang HE qui m'a dirigé tout au long du travail et qui m'a témoigné de son aide scientifique et de sa patience. Sans lui, la thèse n'aurait jamais vu ce jour.

Je remercie également monsieur Hung LE QUANG, pour son encadrement et sa disponibilité ainsi que sa gentillesse. J'ai particulièrement apprécié ses qualités pédagogiques qui m'ont permis d'avancer dans mes recherches.

Je remercie très chaleureusement mes deux rapporteurs, monsieur Habib AMMARI et monsieur Stéphane BERBENNI qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteur de thèse, qui ont pris le temps d'examiner avec une grande attention mon travail et apporté des critiques profondes et constructives.

J'adresse mes plus vifs remerciements à monsieur Patrick FRANCIOSI pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de présider le jury de la thèse.

J'exprime du fond de mon coeur mes sincères remerciements à ma famille qui m'a soutenu tout au long de mes études. En particulier, merci à ma femme Thoa et à mon fils Duy Long qui sont toujours à mon côté.

Résumé

Dans ce travail de thèse, il s'agit essentiellement de déterminer les propriétés mécaniques et physiques linéaires effectives des composites dans lesquels l'interface entre deux phases n'est pas lisse mais très rugueuse. Une approche efficace pour surmonter les difficultés provenant de la présence de rugosités d'interface consiste d'abord à homogénéiser une zone d'interface rugueuse comme une interphase équivalente par une analyse asymptotique et ensuite à appliquer des schémas micromécaniques pour estimer les propriétés effectives en tenant en compte de la présence de l'interphase équivalente. L'objectif principal de ce travail est de développer cette approche dans un cadre général où la surface autour de laquelle l'interface oscille périodiquement et rapidement peut être courbée et les phénomènes physiques concernés peuvent être couplés. Pour atteindre cet objectif, la conduction thermique est premièrement étudiée comme un prototype des phénomènes de transport non couplés pour élaborer dans un cadre simple les éléments essentiels de notre approche. Cette étude, préliminaire mais très utile au vu de l'importance des phénomènes de transport, montre que des résultats généraux et compacts peuvent s'obtenir quand l'interface est ondulée dans une seule direction et que des méthodes numériques sont en général nécessaires dans le cas où l'interface oscille suivant deux directions. L'approche développée et les résultats obtenus pour la conduction thermique sont étendus d'abord à l'élasticité linéaire et ensuite aux phénomènes physiques linéaires couplés tels que la thermoélectricité et la piézoélectricité. Dans ces cas plus complexes, des résultats généraux sont obtenus pour les composites stratifiés avec les interfaces ondulées dans une seule direction et des méthodes numériques sont élaborées pour les composites dans lesquels les interfaces oscillent suivant deux directions.

Mots-clés : matériaux composites, homogénéisation, micromécanique, interfaces rugueuses, analyse asymptotique, schémas micromécaniques, transformée de Fourier rapide, conduction thermique, élasticité, phénomènes couplés.

Abstract

This work is essentially concerned with determining the effective linear mechanical and physical properties of composites in which the interface between two phases is not smooth but very rough. An efficient approach to overcome the difficulties arising from the presence of interfacial roughness is first to homogenize a rough interface zone as an equivalent interphase by an asymptotic analysis and then to apply micromechanical schemes to estimation of the effective properties while accounting for the equivalent interphase. The present work aims mainly to develop this approach in a general situation where the surface around which an interface oscillates periodically and quickly can be curved and the physical phenomena involved can be coupled. To achieve this goal, thermal conduction is first studied as a prototype of transport phenomena so as to elaborate key elements of our approach in a simple situation. This study,

even preliminary but very useful in view of the importance of transport phenomena, shows that general and compact results can be obtained when the interface is corrugated in only one direction and that numerical methods are generally required when an interface is curved along two directions. The approach developed and the results obtained for thermal conduction are extended first to linear elasticity and then to linear coupled physical phenomena such as thermoelectricity and piezoelectricity. In these more complex cases, general results are obtained for composite laminates with interfaces oscillating in only one direction, and numerical methods are elaborated for composites in which the interfaces oscillate in two directions.

Keywords : composite materials, homogenization, micromechanics, rough interfaces, asymptotic analysis, micromechanical schemas, fast Fourier transform, thermal conduction, elasticity, coupled phenomena.

Table des matières

Introduction	12
1 Interfaces thermiques ondulées autour d'une courbe lisse quelconque	15
1.1 Equations fondamentales du problème local	15
1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse bidimensionnelle	18
1.3 Composites bidimensionnels avec interfaces elliptiques rugueuses	20
1.4 Exemples numériques	26
2 Interfaces thermiques ondulées autour d'une surface lisse quelconque	29
2.1 Position du problème	29
2.2 Homogénéisation de la zone d'interface courbée rugueuse	31
2.3 Interfaces thermiques oscillant autour d'une surface plane et suivant deux directions . . .	35
2.3.1 Description du problème	35
2.3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	36
2.3.3 Application du schéma auto-cohérent généralisé (SACG)	37
2.3.4 Application de la méthode de Chen et Kuo	41
2.3.5 Homogénéisation d'un stratifié triphasique suivant la direction d'épaisseur . . .	44
2.3.6 Application numérique	45
3 Interfaces élastiques ondulées autour d'une surface lisse quelconque	50
3.1 Description et formulation du problème local	50
3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	52
3.3 Interfaces ondulées autour d'une surface plane et suivant deux directions	55
3.3.1 Description et formulation du problème	55
3.3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse	57
3.3.3 Méthode numérique basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT)	58
3.3.4 Schéma auto-cohérent généralisé	59
3.3.5 Homogénéisation des composites élastiques stratifiés avec interfaces périodique- ment rugueuses	63

3.4	Exemples numériques	64
4	Interfaces ondulées autour d'une surface lisse quelconque dans le cas général des phénomènes multiphysiques couplés	69
4.1	Formulation du problème	69
4.2	Homogénéisation de la zone d'interface ondulée	72
4.2.1	Interface ondulée suivant une seule direction	72
4.2.2	Interface ondulée suivant deux directions	78
4.3	Homogénéisation des composites stratifiés avec interfaces ondulées	81
4.3.1	Résultats généraux	81
4.3.2	Application à la thermoélectricité	82
4.3.3	Application à la piézoélectricité	86
5	Homogénéisation des zones d'interface ondulée suivant deux directions par la transformée de Fourier rapide	95
5.1	Homogénéisation des zones d'interface thermoélectrique ondulée suivant deux directions	96
5.1.1	Loi constitutive locale	96
5.1.2	Homogénéisation numérique de la zone d'interface thermoélectrique rugueuse .	96
5.1.3	Exemples numériques	101
5.2	Homogénéisation des zones d'interface piézoélectrique ondulée suivant deux directions .	104
5.2.1	Loi constitutive locale	104
5.2.2	Homogénéisation numérique de la zone d'interface rugueuse	105
5.2.3	Exemples numériques	108
	Conclusion et perspectives	113
	Bibliographie	114
	Annexes	124
A	Coefficients paramétriques des coordonnées curvilignes	124
B	Expression des composantes $B_{ij}^{(1)}$ de $B^{(1)}$ dans l'équation 1.52	126
C	Expression des composantes $B_{ij}^{(2)}$ de $B^{(2)}$ dans l'équation 1.58	128
D	Méthode d'analyse asymptotique pour les phénomènes couplés	130

Introduction

En mécanique des matériaux composites, l'interface entre deux phases constituantes d'un composite est habituellement supposée lisse. Cependant, dans une variété de situations d'intérêt pratique, cette hypothèse peut apparaître trop idéale et sa relaxation devient indispensable. De plus, d'une façon générale, une interface nominale lisse à une échelle donnée se révèle rugueuse à une autre échelle plus fine. Ce travail de thèse vise à déterminer les propriétés mécaniques et physiques linéaires effectives des composites dans lesquels l'interface entre deux phases n'est pas lisse mais très rugueuse.

Les méthodes micromécaniques classiques (voir, par exemple, Mura, 1987 ; Nemat-Nasser et Hori, 1999 ; Milton, 2002 ; Torquato, 2002) ne sont plus applicables pour calculer les propriétés effectives des composites quand l'interface entre deux phases est fortement rugueuse. Une approche efficace pour surmonter les difficultés provenant de la présence de rugosités d'interface a été proposée dans le travail de thèse de H. T. LE (2011). Cette approche consiste d'abord à homogénéiser une zone d'interface périodiquement rugueuse comme une interphase équivalente par une analyse asymptotique et ensuite à appliquer des schémas micromécaniques pour estimer les propriétés effectives en tenant en compte de la présence de l'interphase équivalente. Le travail de thèse présente pour objectif principal de développer cette approche dans deux directions. Premièrement, la surface autour de laquelle l'interface oscille périodiquement et rapidement n'est plus nécessairement plane mais en général courbée. Deuxièmement, les phénomènes physiques en jeu ne sont plus nécessairement isolés mais en général couplés.

La méthode d'analyse asymptotique adoptée pour homogénéiser une zone d'interface périodiquement rugueuse a été initiée par Kohler et al. (1981) et développée par un certain nombre de chercheurs (Kohn et Vogelius, 1984 ; Nevard et Keller, 1997 ; Chechkin et al., 1999 ; Fyrrillas et Pozrikidis, 2001 ; Amirat et al. 2004, 2007, 2008 ; Kristensson, 2005 ; Blanchard et al. 2007 ; Madureira et Valentin, 2007 ; Melnik et al. 2009 ; Vinh et Tung, 2010, 2010a). Le traitement des surfaces courbées est grandement facilité sur le plan mathématique par l'utilisation des coordonnées curvilignes orthonormées (voir, par exemple, Van Bladel, 2001 ; Nelson, 2012).

Pour atteindre l'objectif énoncé ci-dessus, ce mémoire de thèse est, à part l'introduction et les conclusions, composé des 5 chapitres résumés ci-dessous.

Dans le premier chapitre, l'étude porte sur une interface entre les deux phases thermiques ondulée périodiquement suivant une seule direction et autour d'une courbe lisse quelconque. En appliquant la

méthode d'analyse asymptotique, la zone d'interface rugueuse bi-phasique est remplacée par une interphase équivalente qui est homogène le long de la courbe mais hétérogène suivant la direction perpendiculaire correspondante. Les conductivités de l'interphase équivalente sont analytiquement et exactement données. Ce résultat est appliqué dans le cas d'un composite bidimensionnel où des inclusions elliptiques avec surfaces périodiquement rugueuses sont noyées dans une matrice. Les conductivités effectives du composite à l'échelle macroscopique sont déterminées en utilisant la notion d'une inclusion enrobée neutre.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude d'une interface entre deux phases thermiques, qui oscille autour d'une surface lisse quelconque et suivant deux directions. A l'aide d'une analyse asymptotique, la zone d'interface rugueuse est remplacée par une interphase équivalente qui est hétérogène suivant son épaisseur mais homogène dans la surface transverse. La détermination du tenseur de conductivité thermique de l'interphase équivalente nécessite la résolution d'un problème d'homogénéisation 2D périodique paramétré. Par conséquent, deux méthodes de résolution approximatives sont élaborées : une basée sur le schéma auto-cohérent généralisé (SACG) et l'autre sur la méthode présentée par Chen et Kuo (2005). Les résultats ainsi obtenus sont utilisés pour déterminer les conductivités effectives des composites stratifiés dont l'interface entre deux couches oscille autour d'une surface plane et suivant deux directions. Ces résultats sont finalement comparés avec ceux issus de la méthode des éléments finis.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude d'une interface entre deux phases élastiques linéaires, qui est ondulée autour d'une surface lisse quelconque et suivant deux directions. Cette étude peut être considérée comme une extension de celle présentée dans le chapitre 2. L'application d'une analyse asymptotique montre également que l'homogénéisation d'une zone d'interface périodiquement rugueuse comme une interphase équivalente revient à résoudre un problème d'homogénéisation 2D paramétré. Pour ceci, deux méthodes sont proposées : une basée sur le SACG et l'autre sur la transformée de Fourier rapide (TFR). Ces deux méthodes sont appliquées pour trouver les modules élastiques effectifs des composites stratifiés dont l'interface entre deux couches est ondulée périodiquement et rapidement autour d'une surface plane et suivant deux directions. Les résultats ainsi obtenus sont finalement validés à l'aide des résultats numériques donnés par la méthode des éléments finis.

Dans le chapitre 4, une formulation générale permettant de traiter de façon unifiée les phénomènes linéaires découplés et couplés est d'abord rappelée. A l'aide de cette formulation, les méthodes élaborées et les résultats obtenus dans les trois chapitres précédents sont étendus au cas générique où un nombre fini quelconque de phénomènes linéaires découplés ou couplés sont concernés. Les résultats généraux sont particularisés et illustrés pour la thermoélectricité et la piézoélectricité dans le cas où les interfaces oscillent périodiquement suivant une seule direction.

Dans le chapitre 5, la méthode numérique basée sur la transformée de Fourier rapide (TFR) est construite dans un contexte multi-physique et pour homogénéiser un composite 2D périodique dont la

cellule de base est constituée d'une matrice avec une inclusion. Cette méthode, qui est beaucoup plus rapide que la méthode des éléments finis pour traiter le problème en question, peut être en particulier appliquée à l'homogénéisation d'une zone d'interface rugueuse périodique à condition d'introduire un paramètre qui définit la position où se situe la surface composite périodique dans la direction de l'épaisseur de la zone d'interface rugueuse. Des exemples sont étudiés et illustrés. Plus précisément, les phénomènes traités sont la thermoélectricité et la piézoélectricité et les composites examinés sont des stratifiés dont l'interface entre deux couches oscille rapidement et périodiquement autour d'un plan et suivant deux directions. Les propriétés effectives de ces composites sont obtenus et comparés avec les résultats numériques correspondants fournis par la méthode des éléments finis dans le logiciel Comsol Multiphysique.

A la fin de ce mémoire, nous donnons des conclusions et présentons des perspectives de ce travail de thèse.

Chapitre 1

Interfaces thermiques ondulées autour d'une courbe lisse quelconque

1.1 Equations fondamentales du problème local

Dans un espace bidimensionnel Euclidien \mathbb{R}^2 , considérer un volume représentatif élémentaire (VER), Ω , d'un milieu composite constitué d'une phase matrice, appelée la phase 2, dans laquelle sont noyées des inclusions dénotées par la phase 1 (Fig. 1). Les deux sous-domaines de Ω occupés par les phases 1 et 2 sont désignés respectivement par $\Omega^{(2)}$ et $\Omega^{(1)}$. Soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ une base orthonormée à laquelle est associé le système des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) . Afin de déterminer le tenseur de conductivité thermique effectif du milieu composite en question, supposer que sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω est prescrite la température

$$\theta(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.1)$$

ou la composante normale du flux de chaleur

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Dans (1.1) et (1.2), \mathbf{e}_0 et \mathbf{q}_0 sont deux vecteurs constants et $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur unitaire normal sortant de $\partial\Omega$.

Par hypothèse, les matériaux formant la matrice et les inclusions sont curvilignement homogènes, périodiques et parfaitement collés à travers les interfaces correspondantes. Précisément, par rapport au système des coordonnées (y_1, y_2) associées à une base curviligne orthonormée $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$, le comportement de conduction thermique de la phase i avec $i = 1, 2$ est décrit par la loi de Fourier

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla \theta^{(i)}. \quad (1.3)$$

Ici, $\mathbf{q}^{(i)}$ et $\theta^{(i)}$ représentent respectivement le flux de chaleur et la température, et $\mathbf{K}^{(i)}$ est un tenseur de second ordre caractérisant la conductivité thermique de la phase i . L'hypothèse que les deux phases

sont curvilignement homogènes consiste à dire que chacun des tenseurs de conductivité thermique $\mathbf{K}^{(i)}$ est indépendant des coordonnées curvilignes (y_1, y_2) . Cette hypothèse implique que les phases sont homogènes par rapport aux coordonnées curvilignes (y_1, y_2) mais hétérogènes vis-à-vis des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) .

Dans (1.3), le gradient du champ de température $\theta^{(i)}$ dépendant des coordonnées curvilignes orthogonales (y_1, y_2) est calculé par

$$\nabla\theta^{(i)} = \theta_{,1}^{(i)} \mathbf{f}_1 + \theta_{,2}^{(i)} \mathbf{f}_2 \quad (1.4)$$

où

$$(\bullet)_{,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1}, \quad (\bullet)_{,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2} \quad (1.5)$$

avec h_1 et h_2 étant les coefficients métriques des coordonnées curvilignes, qui sont détaillés dans l'annexe A. Le flux de chaleur locale $\mathbf{q}^{(i)}$ doit satisfaire l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} + p^{(i)} = \eta^{(i)} c_p^{(i)} \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial t} \quad (1.6)$$

où $p^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ et $c_p^{(i)}$ représentent respectivement la source de chaleur, la densité de masse et la capacité thermique spécifique de la phase i . La divergence du flux de chaleur $\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)}$ est calculée par

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 q_1^{(i)})}{\partial y_1} + \frac{\partial (h_1 q_2^{(i)})}{\partial y_2} \right] \quad (1.7)$$

avec

$$q_j^{(i)} = -K_{j1} \theta_{,1}^{(i)} - K_{j2} \theta_{,2}^{(i)}. \quad (1.8)$$

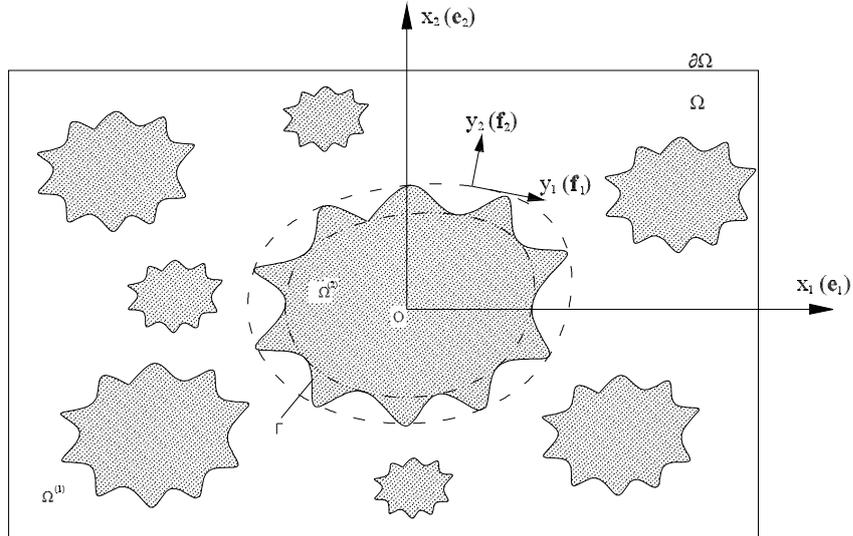


FIGURE 1.1: Composite biphasique avec des interfaces courbées rugueuses.

Dans ce travail, les interfaces entre la matrice et les inclusions sont supposées parfaites et périodiquement rugueuses suivant la direction curviligne \mathbf{f}_1 . Plus Précisément, dans le système des coordonnées

curvilignes orthogonales (y_1, y_2) , l'interface Γ entre la matrice et une inclusion peut être exprimée comme suit

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega \mid y_2 = \gamma(\alpha), \quad \alpha = \frac{y_1}{\epsilon} \right\}. \quad (1.9)$$

où $\gamma(\alpha)$ est une fonction périodique à la période ϵ , dont les valeurs minimale et maximale sont respectivement γ_{min} et γ_{max} . De plus, l'équation $y_2 = \gamma(\alpha)$ est supposée avoir deux solutions réelles dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ pour chaque valeur de $y_2 \in (\gamma_{min}, \gamma_{max})$. L'interface Γ est fortement rugueuse au sens que la période ϵ de $\gamma(\alpha)$ est très petite par rapport à l'amplitude $\delta = \gamma_{max} - \gamma_{min}$, c'est-à-dire que $0 < \epsilon \ll \delta$. Du fait que l'interface Γ est parfaite, la température et la composante normale du flux de chaleur sont continues à travers Γ :

$$[[\theta]] = 0 \quad \text{et} \quad [[K_{ij}\theta_{,j}n_i]] = 0 \quad (1.10)$$

où $[[\bullet]] = \bullet^{(2)} - \bullet^{(1)}$ dénote le saut de \bullet et n_i sont les composantes du vecteur normal unitaire sortant \mathbf{n} de l'interface Γ qui peut être calculé par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma_{,\alpha}}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}} \left[\frac{\gamma_{,\alpha}}{\epsilon}, -\frac{1}{h_2} \right]^T \quad (1.11)$$

avec

$$(\bullet)_{,\alpha} = \frac{\partial(\bullet)}{h_1 \partial \alpha}. \quad (1.12)$$

Pour la suite, on définit la zone d'interface

$$\omega^{(c)} = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega \mid \gamma_{min} < y_2 < \gamma_{max} \} \quad (1.13)$$

et la courbe

$$\pi(y_2) = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \omega^{(c)} \mid y_2 = y_2^0, \gamma_{min} < y_2 < \gamma_{max} \right\} \quad (1.14)$$

ayant y_2 comme un paramètre.

A l'échelle macroscopique, le composite est supposé statistiquement homogène. Sa loi de comportement thermique effectif est donné par

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^* \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.15)$$

où \mathbf{K}^* est le tenseur de conductivité thermique effectif, $\bar{\mathbf{q}}$ et $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ sont respectivement le flux de chaleur et l'intensité (ou du gradient de température à un signe près) macroscopiques définis par

$$\bar{\epsilon}_i = \langle \epsilon_i \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \epsilon_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} -\theta(\mathbf{x}) \nu_i dS, \quad (1.16)$$

$$\bar{q}_i = \langle q_i \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.17)$$

où $|\Omega|$ est l'aire de Ω et ν est le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$.

1.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse bidimensionnelle

Considérer la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ décrite par (1.13). Le tenseur de conductivité thermique effectif $\mathbf{K}^{(c)}(y_2)$ de $\omega^{(c)}$ peut être déterminé en appliquant la méthode d'analyse asymptotique, qui est présentée, par exemple, dans les travaux de Bensoussan *et al.* (1978), Sanchez-Palencia (1980), Bakhvalov et Panasenko (1989), Persson *et al.* (1993), Zhikov *et al.* (1994). Selon cette méthode, le champ de la température est considéré comme une fonction des variables macroscopiques (ou lentes) y_1 , y_2 et microscopique (ou rapide) $\alpha = y_1/\epsilon$:

$$\theta(y_1, y_2, t) = \theta_\epsilon(y_1, y_2, \alpha, t). \quad (1.18)$$

Puis, le champ de température $\theta_\epsilon(y_1, y_2, \alpha, t)$ est exprimé par l'expansion asymptotique :

$$\begin{aligned} \theta_\epsilon(y_1, y_2, \alpha, t) = & T + \epsilon \left(A^{(1)}T + A^{(11)}T_{,1} + A^{(12)}T_{,2} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(A^{(2)}T + A^{(21)}T_{,1} + A^{(22)}T_{,2} + A^{(211)}T_{,11} \right. \\ & \left. + A^{(212)}T_{,12} + A^{(222)}T_{,22} \right) + 0(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans cette expression, $T = T(y_1, y_2, t)$ est une fonction scalaire indépendante de la variable microscopique α et correspond par conséquent au champ de la température à l'échelle macroscopique ; $A^{(\bullet)} = A^{(\bullet)}(\alpha, y_2)$ sont des fonctions scalaires de α et y_2 déterminées à partir de l'équation de la conservation de l'énergie (1.6) et les conditions de continuité (1.10).

Puisque $\alpha = y_1/\epsilon$, les dérivées du champ de la température par rapport aux variables spatiales sont données par

$$\theta_{,1} = \theta_{\epsilon,1} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\alpha}, \quad \theta_{,2} = \theta_{\epsilon,2}, \quad (1.20)$$

$$\theta_{,11} = \theta_{\epsilon,11} + 2\epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\alpha 1} + \epsilon^{-2}\theta_{\epsilon,\alpha\alpha}, \quad \theta_{,12} = \theta_{,21} = \theta_{\epsilon,12} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\alpha 2}, \quad \theta_{,22} = \theta_{\epsilon,22}. \quad (1.21)$$

Dans (1.20) et (1.21), les dérivées du champ de la température par rapport aux y_1 , y_2 et α sont déterminées par (1.5) et (1.12) dans lesquelles les coefficients métriques h_1 et h_2 ne sont que des fonctions de y_1 et y_2 .

En introduisant (1.20) et (1.21) dans (1.6) et (1.10) et en demandant que les coefficients associés à ϵ^{-1} et à ϵ^0 soient zéro, nous pouvons obtenir les expressions des composantes du tenseur de conductivité thermique effectif $\mathbf{K}^{(c)}(y_2)$ de la zone d'interface $\omega^{(c)}$. En effet, d'abord, en insérant (1.20) et (1.21) dans l'équation de la conservation de l'énergie (1.6) et dans les conditions de continuité (1.10) et en exigeant que les coefficients associés à ϵ^{-1} soient égaux à zéro, nous obtenons les équations suivantes :

$$\left[K_{11}A_{,\alpha}^{(1)} \right]_{,\alpha} T + \left[K_{11}A_{,\alpha}^{(11)} + K_{11} \right]_{,\alpha} T_{,1} + \left[K_{11}A_{,\alpha}^{(12)} + K_{12} \right]_{,\alpha} T_{,2} = 0, \quad (1.22)$$

$$\left[\left[K_{11}A_{,\alpha}^{(1)} T \right] \right] + \left[\left[(K_{11} + K_{11}A_{,\alpha}^{(11)}) T_{,1} \right] \right] + \left[\left[(K_{12} + K_{11}A_{,\alpha}^{(12)}) T_{,2} \right] \right] = 0. \quad (1.23)$$

Pour que ces équations soient satisfaites, les termes $A_{,\alpha}^{(1)}$, $A_{,\alpha}^{(11)}$ et $A_{,\alpha}^{(12)}$ sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} A_{,\alpha}^{(1)} &= 0, \\ A_{,\alpha}^{(11)} &= [K_{11}]^{-1} \left\langle [K_{11}]^{-1} \right\rangle^{-1} - 1, \\ A_{,\alpha}^{(12)} &= [K_{11}]^{-1} \left\{ \left\langle [K_{11}]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle [K_{11}]^{-1} K_{12} \right\rangle - K_{12} \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $\langle \bullet \rangle$ symbolise la moyenne relative à une cellule de base de la courbe $\pi(y_2)$, qui est définie comme suit :

$$\langle \bullet \rangle = \int_0^1 \bullet d\alpha. \quad (1.25)$$

Ensuite, en insérant (1.20) et (1.21) dans (1.10) et en demandant que les coefficients associés à ϵ^0 soient nuls, il vient que

$$\begin{aligned} \left[[K_{11} A_{,\alpha}^{(2)} + K_{12} A_{,2}^{(1)}] \right] &= 0, \\ \left[[K_{11} A^{(1)} + K_{11} A_{,\alpha}^{(21)} + K_{12} A_{,2}^{(11)}] \right] &= \frac{1}{\gamma_{,\alpha} h_2} \left[[K_{21} (1 + A_{,\alpha}^{(11)})] \right], \\ \left[[K_{11} A_{,\alpha}^{(22)} + K_{12} A^{(1)} + K_{12} A_{,2}^{(12)}] \right] &= \frac{1}{\gamma_{,\alpha} h_2} \left[[K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)}] \right], \\ \left[[K_{11} A^{(11)} + K_{11} A_{,\alpha}^{(211)}] \right] &= 0, \\ \left[[K_{11} A^{(12)} + K_{11} A_{,\alpha}^{(212)} + K_{12} A^{(11)}] \right] &= 0, \\ \left[[K_{11} A_{,\alpha}^{(222)} + K_{12} A^{(12)}] \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

En introduisant (1.20) et (1.21) dans (1.6) et en posant la condition que la moyenne du coefficient associé à ϵ^0 sur une cellule de base de la courbe $\pi(y_2)$ est égal au zéro, nous avons

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial \left[h_2 \left(K_{11} + K_{11} A_{,\alpha}^{(11)} \right) \right]}{h_1 h_2 \partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 K_{21} \left(1 + A_{,\alpha}^{(11)} \right) \right]}{h_1 h_2 \partial y_2} \right\rangle T_{,1} \\ &+ \left\langle \frac{\partial \left[h_2 \left(K_{12} + K_{11} A_{,\alpha}^{(12)} \right) \right]}{h_1 h_2 \partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 \left(K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)} \right) \right]}{h_1 h_2 \partial y_2} \right\rangle T_{,2} \\ &+ \frac{1}{h_2 \gamma_{,\alpha}} \left[[K_{21} (1 + A_{,\alpha}^{(11)})] \right] T_{,1} + \frac{1}{h_2 \gamma_{,\alpha}} \left[[K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)}] \right] T_{,2} \\ &+ \left\langle K_{11} + K_{11} A_{,\alpha}^{(11)} \right\rangle T_{,11} + \left\langle K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)} \right\rangle T_{,22} \\ &+ \left\langle K_{11} A_{,\alpha}^{(12)} + K_{12} + K_{21} A_{,\alpha}^{(11)} + K_{21} \right\rangle T_{,12} + \langle p \rangle = \langle \eta \rho_c \rangle \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En appliquant le lemme A1 de Kristensson (2005) et en tenant compte la périodicité de $A^{(1k)}$, nous

obtenons

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \left[h_1 \left(K_{21} + K_{21} A_{,\alpha}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \left[h_1 \left\langle K_{21} + K_{21} A_{,\alpha}^{(11)} \right\rangle \right]}{\partial y_2} \\
&\quad - \frac{1}{h_2 \gamma_{,\alpha}} \left[\left[K_{21} (1 + A_{,\alpha}^{(11)}) \right] \right], \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \left[h_1 \left(K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \left[h_1 \left\langle K_{22} + K_{21} N_{,\alpha}^{(12)} \right\rangle \right]}{\partial y_2} \\
&\quad - \frac{1}{h_2 \gamma_{,\alpha}} \left[\left[K_{22} + K_{21} N_{,\alpha}^{(12)} \right] \right]. \tag{1.28}
\end{aligned}$$

En substituant (1.28) dans (1.27) et en comparant l'équation résultante avec l'équation de la conservation de l'énergie, nous obtenons

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(c)} &= \left\langle K_{11} + K_{11} A_{,\alpha}^{(11)} \right\rangle, & K_{22}^{(c)} &= \left\langle K_{22} + K_{21} A_{,\alpha}^{(12)} \right\rangle, \\
K_{12}^{(c)} &= \left\langle K_{12} + K_{11} A_{,\alpha}^{(12)} \right\rangle, & K_{21}^{(c)} &= \left\langle K_{21} + K_{21} A_{,\alpha}^{(11)} \right\rangle. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Finalement, en introduisant (1.24) dans (1.29), les expressions (1.30) des composantes du tenseur de conductivité thermique effectif $\mathbf{K}^{(c)}$ sont données par

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(c)}(y_2) &= \left\langle [K_{11}]^{-1} \right\rangle^{-1}, \\
K_{22}^{(c)}(y_2) &= \left\langle K_{22} - K_{21} [K_{11}]^{-1} K_{12} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle K_{21} [K_{11}]^{-1} \right\rangle \left\langle [K_{11}]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle [K_{11}]^{-1} K_{12} \right\rangle, \\
K_{12}^{(c)}(y_2) &= K_{21}^{(c)}(y_2) = \left\langle [K_{11}]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle K_{12} [K_{11}]^{-1} \right\rangle. \tag{1.30}
\end{aligned}$$

A ce stade, la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ a été homogénéisée selon la coordonnée curviligne y_1 mais elle reste en général hétérogène suivant la coordonnée curviligne y_2 . Ainsi, la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ est maintenant remplacée par une couche équivalente dont le tenseur de conductivité thermique effectif $\mathbf{K}^{(c)}$ est déterminé par (1.30). Il est important de noter que $\mathbf{K}^{(c)}$ est en général hétérogène par rapport au système des coordonnées Cartésiennes (x_1, x_2) .

1.3 Composites bidimensionnels avec interfaces elliptiques rugueuses

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de déterminer les conductivités effectives des composites bidimensionnels formés d'une matrice dans laquelle sont noyées des inclusions elliptiques périodiquement rugueuses. Les phases formant la matrice et les inclusions sont individuellement homogènes et isotropes. Les conductivités de la matrice et des inclusions sont désignées respectivement par k_2 et k_1 . L'interface Γ entre la matrice et une inclusion générique est supposée périodiquement rugueuse autour d'une courbe elliptique et présente un profil en dents de scie.

Pour décrire l'interface Γ , un système des coordonnées elliptiques (ρ, m) associé à une base orthonormée $\{\mathbf{f}_\rho, \mathbf{f}_m\}$ est introduit (Fig 1.2). Ces coordonnées elliptiques, (ρ, m) , sont reliées aux coordonnées Cartésiennes (x_1, x_2) par les équations suivantes (voir, par exemple, Milton 2002).

$$\frac{x_1^2}{c_1^2 + \rho} + \frac{x_2^2}{c_2^2 + \rho} = 1 \quad (\text{ellipses confocales}), \quad (1.31)$$

$$\frac{x_1^2}{c_1^2 + m} - \frac{x_2^2}{c_2^2 + m} = 1 \quad (\text{hyperboles d'excentricité}), \quad (1.32)$$

avec les restrictions $\rho > -c_1^2 > m > -c_2^2$ où c_1 et c_2 sont deux constantes positives. La coordonnée ρ joue un rôle similaire à celui du rayon dans les coordonnées polaires.

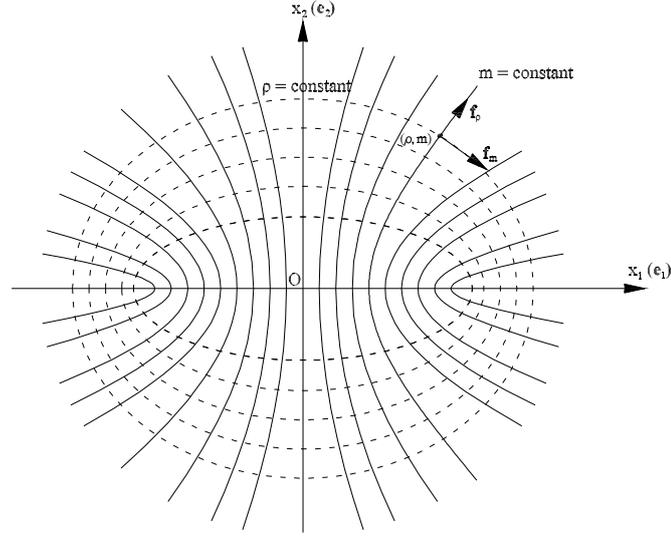


FIGURE 1.2: Système des coordonnées elliptiques.

Afin de déterminer le tenseur de conductivité thermique effectif du composite en question, le modèle d'assemblage d'ellipses emboîtées (AEE) est utilisé. Ce modèle micromécanique a été introduit initialement par Milton (1981) pour déterminer la conductivité thermique effective des matériaux hétérogènes, puis étendu par Grabovsky et Kohn (1995) à l'élasticité et généralisé par Benveniste et Milton (2003) aux phénomènes multi-physiques. Pour construire le modèle d'AEE, nous supposons que le domaine Ω décrit dans la Section 2 est constitué d'un matériau homogène dont le tenseur de conductivité thermique relatif au système des coordonnées cartésiennes associé à une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ est donné par

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{k}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \tilde{k}_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.$$

Puis, sur sa frontière $\partial\Omega$, les conditions aux limites (1.1) sont imposées. Le champ de la température $\theta(\mathbf{x})$ et celui du flux de chaleur $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ induits dans Ω ont les expressions suivantes :

$$\theta(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{e}_0. \quad (1.33)$$

On extrait une ellipse de Ω et y insère au retour une ellipse composite ω , en imposant les mêmes conditions aux limites sur $\partial\Omega$ que précédemment. L'ellipse composite ω est formée d'un noyau elliptique

enrobé de deux couches confocales (Fig 1.3). Le noyau de cette ellipse composite est constitué de la phase d'inclusion (phase 2). La couche externe est constituée de la phase matrice (phase 1) alors que la couche interne (phase c) est formée de la couche équivalente obtenue par l'homogénéisation de la zone d'interface rugueuse.

Dans le cas où la matrice et les inclusions sont isotropes et l'interface Γ entre la phase matrice et une inclusion est périodiquement rugueuse le long de la direction elliptique et sous forme des dents de scie, la conductivité thermique effective de la couche équivalente $\mathbf{K}^{(c)}$ est obtenue explicitement à l'aide de (1.30) par

$$\mathbf{K}^{(c)} = k_\rho^{(c)} \mathbf{f}_\rho \otimes \mathbf{f}_\rho + k_m^{(c)} \mathbf{f}_m \otimes \mathbf{f}_m \quad (1.34)$$

avec

$$k_m^{(c)} = \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2} \right)^{-1}, \quad k_\rho^{(c)} = v_1 k_1 + v_2 k_2 \quad (1.35)$$

où v_1 et v_2 sont respectivement les fractions surfaciques des phase 1 et 2 dans la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$. Le rayon du noyau et ceux de ses couches interne et externe sont dénotés respectivement par ρ_1 , ρ_c et ρ_2 . Ces rayons sont définis de façon à être compatibles avec les fractions surfaciques de la phase matrice, de la phase d'inclusion et de la phase issue de la zone d'interface rugueuse. Pour l'utilisation ultérieure, on définit

$$\varphi_1 = \frac{g(\rho_1)}{g(\rho_2)}, \quad \varphi_c = \frac{g(\rho_c) - g(\rho_1)}{g(\rho_2)}, \quad \varphi_2 = \frac{g(\rho_2) - g(\rho_c)}{g(\rho_2)} \quad (1.36)$$

avec $g(\rho) = \sqrt{(c_1^2 + \rho)(c_2^2 + \rho)}$. Noter que les paramètres géométriques φ_1 , φ_c et φ_2 se comportent comme les fractions surfaciques du noyau, des couches internes et externe de l'ellipse composite ω .

La présence de l'ellipse doublement enrobée fait que Ω est hétérogène. Il est donc naturel de se poser la question suivante : sous les conditions aux limites (1.1) et avec les propriétés de la phase matrice et des phases d'inclusion 1 et 2 ainsi que les paramètres géométriques c_1 , c_2 , ρ_2 , φ_1 , φ_c et φ_2 , quelles sont les propriétés de conductivité, \tilde{k}_1 et \tilde{k}_2 , du milieu extérieur, telles que la présence de l'ellipse doublement enrobée ne change pas les champs initiaux du milieu extérieur ? Si cette condition est vérifiée, l'ellipse doublement enrobée est appelé une inclusion neutre (Fig 1.4).

Supposer que, les champs du milieu d'origine donnés par (1.33) ne sont pas perturbés après le remplacement susmentionné, on cherche les valeurs correspondantes de \tilde{k}_1 et \tilde{k}_2 en fonction des propriétés de la matrice et des inclusions et des paramètres géométriques c_1 , c_2 , ρ_2 , φ_1 , φ_c et φ_2 . D'abord, pour déterminer \tilde{k}_1 , on considère le cas où les conditions aux limites (1.1) sont appliquées sur $\partial\Omega$ uniquement selon la direction x_1 , à savoir $e_{01} \neq 0$ and $e_{02} = 0$. Sous ces conditions, on cherche les champs de la température dans le noyau, ses couches interne et externe sous les formes suivantes :

$$\theta^{(i)}(\mathbf{x}) = \phi^{(i)}(\rho)x_1 \quad (1.37)$$

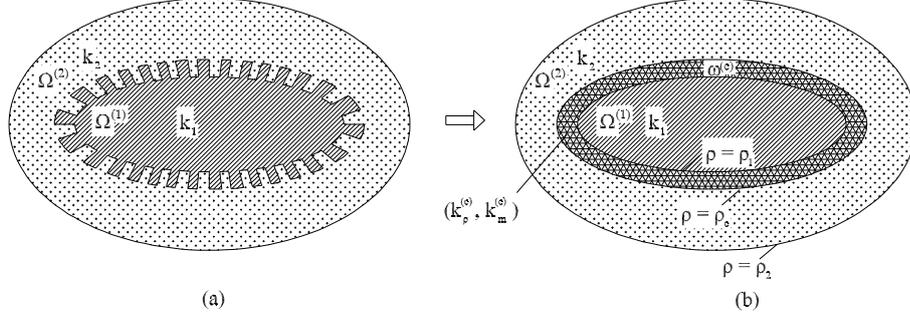


FIGURE 1.3: Deux configurations équivalentes : (a) Composite elliptique biphasique matrice/inclusion avec interface en dent de scie ; (b) composite elliptique triphasique matrice/interphase/inclusion

où $\phi^{(i)}(\rho)$ est une fonction scalaire du rayon ρ . Ci-dessus et ci-après, l'exposant i ($= 1, c, 2$) est relatif au noyau et aux couches interne et externe. Du fait que les matériaux formant le noyau et la couche externe sont isotropes, les fonctions scalaires $\phi^{(1)}(\rho)$ et $\phi^{(2)}(\rho)$ prennent les formes suivantes (Milton, 2002) :

$$\phi^{(1)}(\rho) = a_1 \quad \text{pour } \rho \leq \rho_1, \quad (1.38)$$

$$\phi^{(2)}(\rho) = a_2 + b_2 \int_{\rho_c}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(c_1^2 + \rho)^3 (c_2^2 + \rho)}} \quad \text{pour } \rho_c \leq \rho \leq \rho_2 \quad (1.39)$$

où a_1, a_2 et b_2 sont les constants inconnus à déterminer à partir des conditions aux limites et d'interface. La fonction scalaire $\phi^{(c)}(\rho)$ du revêtement interne doit vérifier l'équation de la conservation de l'énergie faisant intervenir les coordonnées elliptiques comme suit :

$$2 \frac{d}{d\rho} \left[k_\rho^{(c)} g(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\phi^{(c)}(\rho) \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \right] = \phi^{(c)}(\rho) k_m^{(c)} \frac{d}{d\rho} \left[\frac{g(\rho)}{\sqrt{c_1^2 + \rho}} \right]. \quad (1.40)$$

La solution générale de cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} \phi^{(c)}(\rho) = & d_1 \frac{(c_2^2 + \rho)^{\frac{1}{4}}}{(c_1^2 + \rho)^{\frac{1}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2} (\sqrt{k_m^{(c)}/k_\rho^{(c)}} - 1), \frac{1}{2}, \frac{c_1^2 + c_2^2 + 2\rho}{c_1^2 - c_2^2} \right] \\ & + d_2 \frac{(c_2^2 + \rho)^{\frac{1}{4}}}{(c_1^2 + \rho)^{\frac{1}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2} (\sqrt{k_m^{(c)}/k_\rho^{(c)}} - 1), \frac{1}{2}, \frac{c_1^2 + c_2^2 + 2\rho}{c_1^2 - c_2^2} \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes inconnues, L_P et L_Q sont respectivement les fonctions de Legendre associées des premier et deuxième genres.

Dans le cas particulier important où les ellipses confocales $\rho = \rho_1, \rho = \rho_c$ et $\rho = \rho_2$ deviennent des cercles concentriques, i.e. $c_1 = c_2 = c$, les fonctions scalaires $\phi^{(2)}(\rho)$ et $\phi^{(c)}(\rho)$ données par (1.39) et (1.40) réduisent à

$$\phi^{(2)}(\rho) = a_2 + \frac{b_2}{r^2} \quad \text{for } \rho_c \leq \rho \leq \rho_2 \quad (1.42)$$

$$\phi^{(c)}(\rho) = d_1 r^{-\left(\sqrt{k_m^{(c)}/k_\rho^{(c)}} + 1\right)} + d_2 r^{\left(\sqrt{k_m^{(c)}/k_\rho^{(c)}} - 1\right)} \quad \text{for } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_c \quad (1.43)$$

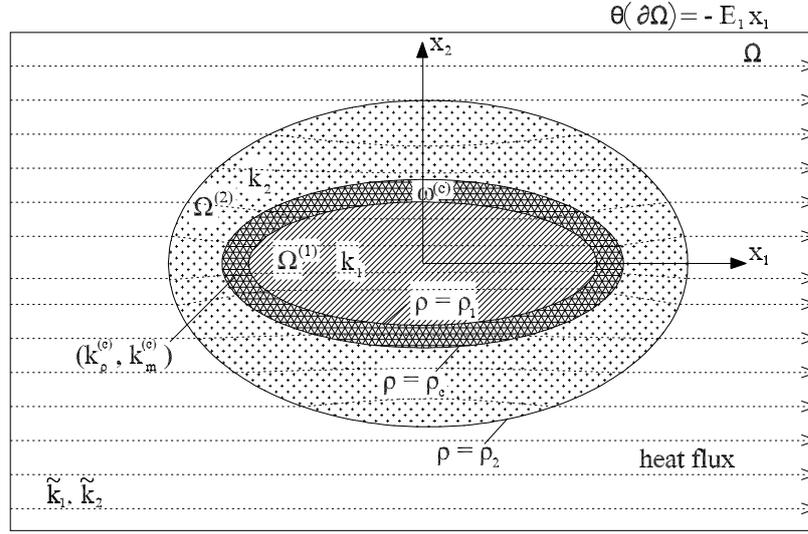


FIGURE 1.4: Inclusion neutre en forme des ellipses composites enrôbées.

avec $r = \sqrt{c^2 + \rho}$.

Les champs d'intensité dans le noyau et les couches interne et externe sont donnés par

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\frac{g(\rho) x_1}{2\sqrt{\rho - m}} \left[\frac{a_1}{(c_1^2 + \rho)} \mathbf{f}_\rho + \frac{a_1}{(c_1^2 + m)} \mathbf{f}_m \right], \\
\varepsilon^{(c)}(\mathbf{x}) &= -\frac{g(\rho) x_1}{\sqrt{(c_1^2 + \rho)(\rho - m)}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\phi^{(c)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \mathbf{f}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial m} \left(\phi^{(c)} \sqrt{c_1^2 + m} \right) \mathbf{f}_m \right], \\
\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}) &= -\frac{g(\rho) x_1}{\sqrt{(c_1^2 + \rho)(\rho - m)}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\phi^{(2)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \mathbf{f}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial m} \left(\phi^{(2)} \sqrt{c_1^2 + m} \right) \mathbf{f}_m \right].
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Les champs du flux de chaleur correspondants dans le noyau et les couches de revêtement prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\frac{k_1 g(\rho) x_1}{2\sqrt{\rho - m}} \left[\frac{a_1}{(c_1^2 + \rho)} \mathbf{f}_\rho + \frac{a_1}{(c_1^2 + m)} \mathbf{f}_m \right], \\
\mathbf{q}^{(c)}(\mathbf{x}) &= -\frac{g(\rho) x_1}{\sqrt{(c_1^2 + \rho)(\rho - m)}} \left[k_\rho^{(c)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\phi^{(c)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \mathbf{f}_\rho \right. \\
&\quad \left. + k_m^{(c)} \frac{\partial}{\partial m} \left(\phi^{(c)} \sqrt{c_1^2 + m} \right) \mathbf{f}_m \right], \\
\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x}) &= -\frac{k_2 g(\rho) x_1}{\sqrt{(c_1^2 + \rho)(\rho - m)}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\phi^{(2)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \mathbf{f}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial m} \left(\phi^{(2)} \sqrt{c_1^2 + m} \right) \mathbf{f}_m \right].
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Le collage parfait aux interfaces $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_c$ et $\rho = \rho_2$ implique la continuité de la température et

celle de la composante normale du flux de chaleur. Ces conditions se traduisent par

$$k_{\rho}^{(c)} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\phi^{(c)}(\rho) \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \right]_{\rho=\rho_1} = \frac{k_1 a_1}{2\sqrt{c_1^2 + \rho_1}}, \quad (1.46)$$

$$\phi^{(c)}(\rho_1) = a_1, \quad (1.47)$$

$$k_{\rho}^{(c)} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\phi^{(c)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \right]_{\rho=\rho_c} = k_2 \left[\frac{d}{d\rho} \left(\phi^{(2)} \sqrt{c_1^2 + \rho} \right) \right]_{\rho=\rho_c}, \quad (1.48)$$

$$\phi^{(c)}(\rho_c) = \phi^{(2)}(\rho_c), \quad (1.49)$$

$$\tilde{k}_1 E_1 = -2k_2 (c_1^2 + \rho_2) \left[\frac{d\phi^{(2)}}{d\rho} + \frac{\phi^{(2)}}{2(c_1^2 + \rho)} \right]_{\rho=\rho_2}, \quad (1.50)$$

$$\phi^{(2)}(\rho_2) = -e_{01}. \quad (1.51)$$

En insérant (1.47) dans (1.46), on obtient, à partir de (1.46), (1.48)-(1.51), un système de 5 équations linéaires homogènes pour cinq inconnus a_2, b_2, d_1, d_2 et \tilde{k}_1 qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (1.52)$$

où $\mathbf{B}^{(1)}$ est une matrice 5×5 dont les composantes $B_{ij}^{(1)}$ sont précisées dans l'annexe B et $\mathbf{X}^{(1)}$ est le vecteur défini par

$$\mathbf{X}^{(1)} = [a_2, b_2, d_1, d_2, e_{01}]^T. \quad (1.53)$$

Une solution non triviale du système (1.52) existe si et seulement si le déterminant de la matrice $\mathbf{B}^{(1)}$ est égal à zéro :

$$F^{(1)}(\tilde{k}_1) = \det \mathbf{B}^{(1)} = 0. \quad (1.54)$$

Cette condition nécessaire et suffisante conduit à l'équation linéaire permettant de déterminer la conductivité thermique \tilde{k}_1 :

$$F^{(1)}(\tilde{k}_1) = \lambda_1^{(1)} \tilde{k}_1 + \lambda_0^{(1)} = 0 \quad (1.55)$$

où les coefficients λ_0 et λ_1 sont spécifiés par

$$\lambda_0^{(1)} = F^{(1)}(0), \quad \lambda_1^{(1)} = F^{(1)}(1) - F^{(1)}(0). \quad (1.56)$$

Finalement, la conductivité thermique \tilde{k}_1 est donnée par

$$\tilde{k}_1 = -\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}}. \quad (1.57)$$

Pour déterminer \tilde{k}_2 , on étudie le deuxième cas où l'intensité uniforme suivant la direction x_2 est appliquée sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , à savoir $e_{02} \neq 0$ et $e_{01} = 0$. Dans cette situation, on obtient également un système de cinq équations homogènes linéaires pour les inconnues a_2, b_2, d_1, d_2 et \tilde{k}_2 . L'existence de la solution non triviale nous conduit à une équation pour \tilde{k}_2 :

$$F^{(2)}(\tilde{k}_2) = \det \mathbf{B}^{(2)} = 0. \quad (1.58)$$

Les composantes $B_{ij}^{(2)}$ de la matrice $\mathbf{B}^{(2)}$ d'ordre 5×5 sont données dans l'Annexe C. Cette équation peut être réécrite sous la forme équivalente :

$$F^{(2)}(\tilde{k}_2) = \lambda_1^{(2)} \tilde{k}_2 + \lambda_0^{(2)} = 0 \quad (1.59)$$

avec

$$\lambda_0^{(2)} = F^{(2)}(0), \quad \lambda_1^{(2)} = F^{(2)}(1) - F^{(2)}(0). \quad (1.60)$$

Puis, on en déduit

$$\tilde{k}_2 = -\frac{\lambda_0^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}. \quad (1.61)$$

Par conséquent, quand les conditions aux limites (1.1) sont prescrites et si les conductivités thermiques \tilde{k}_1 et \tilde{k}_2 sont données par (1.57) et (1.61), les champs dans le milieu et en dehors de l'ellipse enrobée restent uniformes et inchangés. Pour cette raison, on peut continuer à introduire d'autres ellipses enrobées similaires de différentes tailles dans le milieu sans perturber les champs initiaux. Ce processus de remplacement permet au milieu d'être complètement rempli par des ellipses composites similaires. Le modèle micromécanique ainsi obtenu est donc appelé le modèle d'AEE.

Du fait que, pendant le processus de remplissage précédent, les champs dans le milieu extérieur restent inchangés, la moyenne du flux de chaleur $\langle q_i \rangle_{CEC}$ dans chaque ellipse composite est égale à la moyenne $\langle q_i \rangle_{\Omega}$ du flux de chaleur dans Ω et a donc l'expression suivante :

$$\langle q_i \rangle_{CEC} = -\tilde{k}_i e_{0i} = \langle q_i \rangle_{\Omega} \quad (\text{pas de sommation sur } i). \quad (1.62)$$

Cette équation montre que la microstructure obtenue par le processus de remplacement ci-dessus a la conductivité thermique effectif caractérisé par le tenseur de conductivité thermique $\mathbf{K}^* = k_1^* \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + k_2^* \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ où k_1^* et k_2^* correspondent respectivement aux \tilde{k}_1 et \tilde{k}_2 donnés par (1.57) et (1.61) :

$$k_1^* = \tilde{k}_1, \quad k_2^* = \tilde{k}_2. \quad (1.63)$$

1.4 Exemples numériques

Pour illustrer numériquement les résultats obtenus ci-dessus concernant les conductivités effectives, nous considérons dans le premier exemple un composite constitué d'une matrice dans laquelle des inclusions sont insérées. La phase formant les inclusions a la conductivité k_1 et est supposée plus conductrice que la phase constituant la matrice. Plus précisément, on choisit $k_2 = k_1/10$. Pour définir les paramètres géométriques du modèle micromécanique, les deux constantes c_1, c_2 , le rayon ρ_1 du noyau et la fraction surfacique φ_1 de la zone d'interface $\omega^{(c)}$ sont tels que $c_1/c_2 = 5$, $\rho_1/c_2^2 = 5$ et $\varphi_c = 0.1$. D'ailleurs, la fraction surfacique φ_1 du noyau de l'ellipse composite se varie de 0 à 0.9. En plus, les fractions surfaciques v_1 et v_2 des phases 1 et 2 dans la zone d'interface $\omega^{(c)}$ sont données par $v_1 = v_2 = 0.5$. Dans (Fig 1.5), les conductivités thermiques effectives normalisées par rapport à celle de la matrice, à savoir

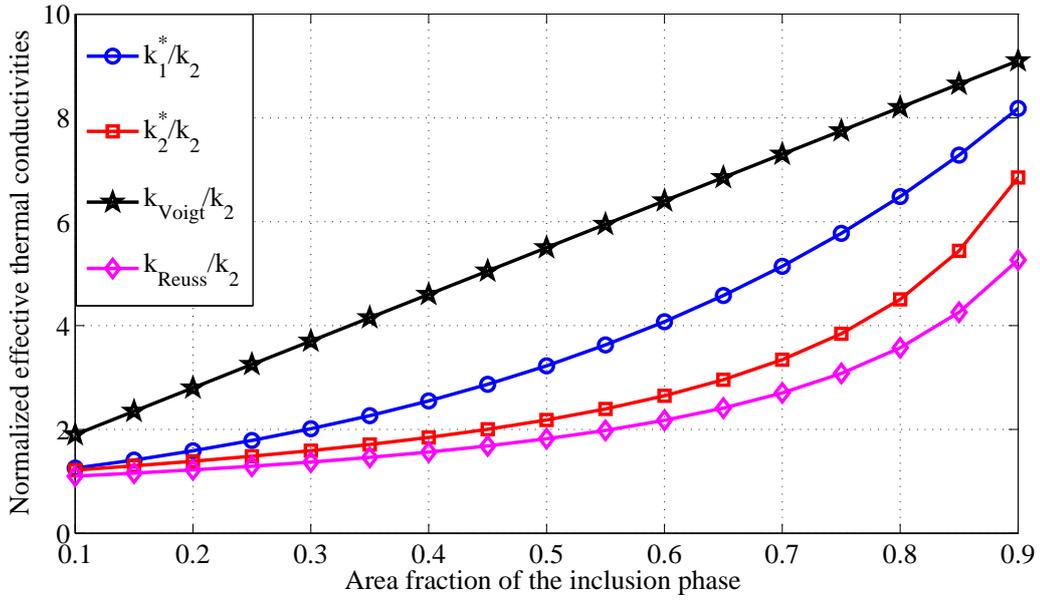


FIGURE 1.5: Conductivités thermiques effectives normalisées k_1^*/k_2 et k_2^*/k_2 en fonction de la fraction surfacique de la phase d'inclusion

k_1^*/k_2 et k_2^*/k_2 avec k_1^* et k_2^* données par (1.63), (1.61) et (1.57), sont tracées en fonction de la fraction surfacique f_1 de la phase d'inclusion. Les valeurs de k_1^*/k_2 et k_2^*/k_2 sont comparées avec les bornes de Reuss et Voigt dans la Fig. 5. On peut voir dans la (Fig 1.5) que les conductivités thermiques effectives k_1^* et k_2^* sont situées entre les bornes de Reuss et de Voigt. En outre, nous pouvons observer dans la (Fig 1.5) que, dans le cas où $c_1 > c_2$, la conductivité effective k_1^* est plus importante que la conductivité effective k_2^* .

Dans le deuxième exemple, les conductivités de la phase de matrice et de la phase d'inclusion ainsi que les paramètres géométriques du modèle micromécanique sont choisis comme dans le premier exemple sauf les fractions surfaciques v_1 et v_2 des phases 1 et 2 dans la zone d'interface $\omega^{(c)}$ qui sont données par $v_1 = 1 - v_2 = 0.3$. Dans (Fig 1.6), les conductivités thermiques effectives k_1^* et k_2^* données par (1.63), (1.61) et (1.57) sont tracées et comparées avec les bornes inférieure et supérieure de Hashin-Shtrikman sur les conductivités effectives d'un composite anisotrope constituant de deux phases isotropes. Ces bornes ont les expressions suivantes (voir, par exemple, Milton 2004) :

$$\frac{v_1}{k_1^* - k_2} + \frac{v_1}{k_2^* - k_2} \leq \frac{2}{k_1 - k_2} + \frac{v_2}{k_2}, \quad (1.64)$$

$$\frac{v_2}{k_1 - k_1^*} + \frac{v_2}{k_1 - k_2^*} \leq \frac{2}{k_1 - k_2} - \frac{v_1}{k_1}. \quad (1.65)$$

Noter que les bornes (1.64) et (1.65) sont optimales pour les conductivités thermiques effectives d'un composite anisotrope constituant de deux phases isotropes. Dans le (Fig 1.6), les conductivités thermiques effectives k_1^* et k_2^* obtenues sont en bon accord avec les bornes (1.64) et (1.65).

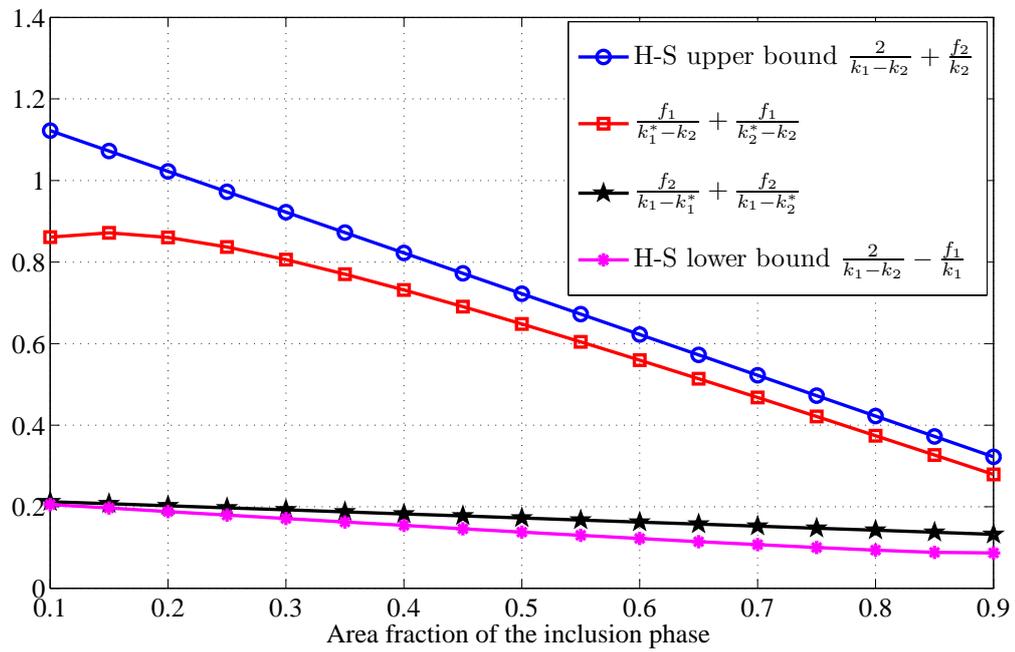


FIGURE 1.6: Conductivités thermiques effectives normalisées en comparaison avec les bornes de Hashin-Strickman pour le composite anisotrope formé par deux phases isotropes

Chapitre 2

Interfaces thermiques ondulées autour d'une surface lisse quelconque

Dans le chapitre précédent, nous avons résolu le problème d'une interface thermique ondulée périodiquement suivant une seule direction et autour d'une courbe lisse quelconque. Du fait que l'interface en question est rugueuse dans une seule direction, l'interphase résultant de l'homogénéisation asymptotique de la zone d'interface rugueuse admet des expressions analytiques caractérisant les conductivités "équivalentes" de l'interphase. Dans ce chapitre, on étudie le problème d'une interface dont l'oscillation périodique se fait autour d'une surface lisse quelconque. Ce dernier problème est nettement plus complexe que celui ayant été traité dans le chapitre précédent. En effet, l'homogénéisation asymptotique de la zone d'interface rugueuse ne conduit pas à celle d'un stratifié qui admet une solution analytique mais à celle d'un matériau hétérogène à inclusions qui nécessite en général une résolution numérique.

2.1 Position du problème

Dans un espace 3D euclidien \mathbb{R}^3 , on s'intéresse à un composite Ω constitué de deux phases. Les deux sous-domaines occupés par la phases 1 et 2 sont désignées par $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. Soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ une base orthonormée à laquelle est associé le système des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) . Pour déterminer le tenseur de conductivité thermique effectif du composite Ω , on prescrit sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ de Ω la condition d'intensité uniforme

$$\theta(\mathbf{x}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2.1)$$

ou la condition du flux de chaleur normal uniforme

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Ci-dessus, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la borne $\partial\Omega$, $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ est le vecteur du flux de chaleur local et \mathbf{Q} est le vecteur du flux de chaleur à l'échelle macroscopique.

Supposer que les deux phases du composite en question sont parfaitement collées entre elles à travers leur interface Γ . Par rapport au système des coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) associé à une base orthonormée $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, le comportement de conduction thermique de la phase i , avec $i = 1, 2$, est décrit par la loi Fourier :

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla \theta^{(i)}. \quad (2.3)$$

Ci-dessus, $\mathbf{q}^{(i)}$ et $\theta^{(i)}$ sont le flux de chaleur et la température de la phase i et $\mathbf{K}^{(i)}$ est le tenseur de conductivité thermique d'ordre deux de cette dernière. Par hypothèse, chacune des deux phase est homogène au sens que $\mathbf{K}^{(i)}$ ne dépend pas des coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) . Noter que $\mathbf{K}^{(i)}$ dépend cependant des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) .

Dans l'équation (2.3), le gradient de la température $\theta^{(i)}$ est calculé dans le système des coordonnées curvilignes orthogonales par

$$\nabla \theta^{(i)} = \theta_{,1}^{(i)} \mathbf{f}_1 + \theta_{,2}^{(i)} \mathbf{f}_2 + \theta_{,3}^{(i)} \mathbf{f}_3 \quad (2.4)$$

avec

$$(\bullet)_{,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1}, (\bullet)_{,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2} \quad \text{et} \quad (\bullet)_{,3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_3}, \quad (2.5)$$

où h_1, h_2 et h_3 sont les coefficients métriques des coordonnées curvilignes. Le flux de chaleur local $\mathbf{q}^{(i)}$ doit satisfaire à l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} + p^{(i)} = \eta^{(i)} c_p^{(i)} \frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

où $p^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ et $c_p^{(i)}$ sont respectivement la source de chaleur, la densité massive et la capacité thermique spécifique de la phase i . La divergence du flux de chaleur $\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)}$ est exprimée dans le système des coordonnées curvilignes orthogonales par

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 q_1^{(i)})}{\partial y_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 q_2^{(i)})}{\partial y_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 q_3^{(i)})}{\partial y_3} \right] \quad (2.7)$$

avec

$$q_j^{(i)} = -K_{j1} \theta_{,1}^{(i)} - K_{j2} \theta_{,2}^{(i)} - K_{j3} \theta_{,3}^{(i)}. \quad (2.8)$$

De plus, on suppose que l'interface Γ entre les phases 1 et 2 est périodiquement ondulée selon les directions curvilignes \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 . Plus précisément, dans le système des coordonnées curvilignes orthogonales (y_1, y_2, y_3) , l'interface Γ est décrite par

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid y_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon}, \quad \xi_2 = \frac{y_2}{\epsilon} \right\}. \quad (2.9)$$

ou $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ est une fonction périodique de la période ϵ par rapport à chacune des deux variables ξ_1 et ξ_2 . Les valeurs minimale et maximale sont respectivement γ_{min} et γ_{max} . En plus, on suppose que l'équation $y_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2)$ a deux couples de solutions réelles dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ pour une valeur donnée de $y_3 \in (\gamma_{min}, \gamma_{max})$. La période ϵ de $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ doit être très petite par rapport à $\delta = \gamma_{max} - \gamma_{min}$, i.e. $0 < \epsilon \ll \delta$. Cette condition a l'implication physique que l'interface Γ est très rugueuse.

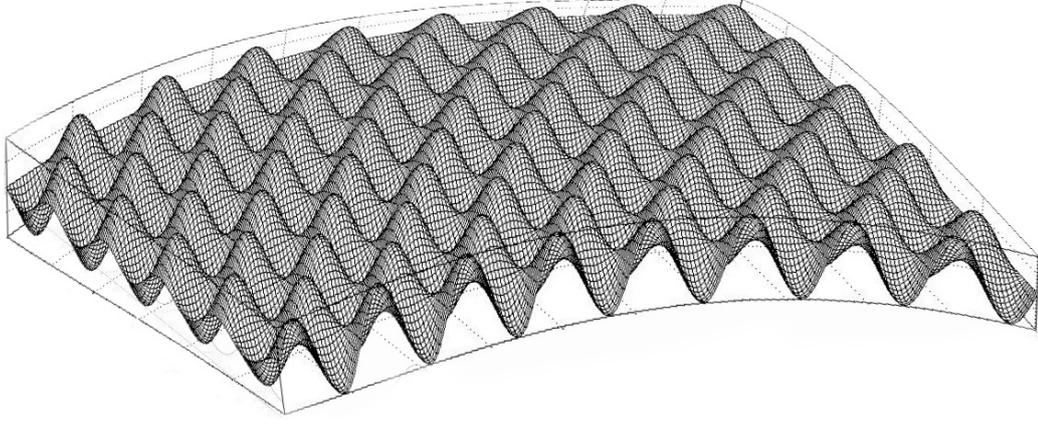


FIGURE 2.1: Surface ondulée selon deux directions dans le système des coordonnées curvilignes.

L'hypothèse que l'interface Γ entre les phases 1 et 2 est parfaite implique que la température et la composante normale du flux de chaleur sont continus à travers Γ :

$$[[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad [[\theta]] = 0, \quad (2.10)$$

où $[[\bullet]] = \bullet^{(2)} - \bullet^{(1)}$ désigne le saut d'une quantité \bullet à travers Γ et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à Γ et dirigé de la phase 2 vers la phase 1, qui est calculé par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} (\gamma_{,\xi_1}^2 + \gamma_{,\xi_2}^2) + \frac{1}{h_3^2}}} \left(-\frac{\gamma_{,\xi_1}}{\epsilon}; -\frac{\gamma_{,\xi_2}}{\epsilon}; \frac{1}{h_3} \right)^T$$

avec $(\bullet)_{,\xi_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_1}$ et $(\bullet)_{,\xi_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_2}$. On définit la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ par

$$\omega^{(c)} = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid \gamma_{min} < y_3 < \gamma_{max} \}, \quad (2.11)$$

et introduit la surface

$$\pi(y_3) = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \omega^{(c)} \mid y_3 = y_3^0, \gamma_{min} < y_3 < \gamma_{max} \right\}. \quad (2.12)$$

ayant y_3 comme le paramètre.

2.2 Homogénéisation de la zone d'interface courbée rugueuse

Maintenant, on se propose de déterminer le tenseur de conductivité thermique effectif $\mathbf{K}^{(c)}(y_3)$ de la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ définie par (2.11) en appliquant la méthode d'analyse asymptotique. Selon cette méthode, le champ de la température θ est considérée comme une fonction des variables lentes (ou macroscopiques) y_1, y_2, y_3 et des variables rapides (ou microscopiques) ξ_1, ξ_2 :

$$\theta(y_1, y_2, y_3, t) = \theta_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2, t).$$

La fonction $\theta_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2, t)$ est ensuite développée comme suit :

$$\begin{aligned}\theta_\epsilon &= T + \epsilon(N^{(1)}T + N^{(11)}T_{,1} + N^{(12)}T_{,2} + N^{(13)}T_{,3}) + \epsilon^2(N^{(2)}T + N^{(21)}T_{,1} \\ &+ N^{(22)}T_{,2} + N^{(23)}T_{,3} + N^{(211)}T_{,11} + N^{(212)}T_{,12} + N^{(213)}T_{,13} + N^{(222)}T_{,22} \\ &+ N^{(223)}T_{,23} + N^{(233)}T_{,33}) + 0(\epsilon^3)\end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous la forme plus compacte

$$\begin{aligned}\theta_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2, t) &= T + \epsilon \left(N^{(1)}T + N^{(1i)}T_{,i} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(N^{(2)}T + N^{(2i)}T_{,i} + N^{(2ij)}T_{,ij} \right) + 0(\epsilon^3).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Ci-dessus, $T = T(y_1, y_2, y_3, t)$ est une fonction scalaire indépendante des variables microscopiques ξ_1 et ξ_2 et correspond à la température à l'échelle macroscopique ; $N^{(\bullet)}$ sont des fonctions scalaires de y_3 , ξ_1 et ξ_2 mais indépendantes de y_1 , y_2 et t . Donc $T_{,\xi_1} = T_{,\xi_2} = 0$ et $N_{,y_1} = N_{,y_2} = 0$.

Puisque $\xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon}$ et $\xi_2 = \frac{y_2}{\epsilon}$, les dérivées du premier ordre de la température θ par rapport aux variables spatiales y_1, y_2, y_3 sont données par

$$\theta_{,1} = \theta_{\epsilon,1} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\xi_1}, \quad \theta_{,2} = \theta_{\epsilon,2} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\xi_2}, \quad \theta_{,3} = \theta_{\epsilon,3},$$

ou de façon compacte par

$$\theta_{,\alpha} = \theta_{\epsilon,\alpha} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,\xi_\alpha}, \quad \theta_{,3} = \theta_{\epsilon,3}.\quad (2.14)$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\theta_{,11} &= \theta_{\epsilon,11} + 2\epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,1\xi_1} + \epsilon^{-2}\theta_{\epsilon,\xi_1\xi_1}, \quad \theta_{,22} = \theta_{\epsilon,22} + 2\epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,2\xi_2} + \epsilon^{-2}\theta_{\epsilon,\xi_2\xi_2}, \\ \theta_{,12} &= \theta_{,21}\theta_{\epsilon,12} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,1\xi_2} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,2\xi_1} + \epsilon^{-2}\theta_{\epsilon,\xi_1\xi_2}, \quad \theta_{,33} = \theta_{\epsilon,33}, \\ \theta_{,13} &= \theta_{,31} = \theta_{\epsilon,13} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,3\xi_1}, \quad \theta_{,23} = \theta_{,32} = \theta_{\epsilon,23} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,3\xi_2}.\end{aligned}$$

En introduisant (2.13) dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}\theta_{,\alpha} &= T_{,\alpha} + N_{,\xi_\alpha}^{(1)}T + N_{,\xi_\alpha}^{(1i)}T_{,i} \\ &+ \epsilon(N^{(1)}T_{,\alpha} + N^{(1i)}T_{,i\alpha} + N_{,\xi_\alpha}^{(2)}T + N_{,\xi_\alpha}^{(2i)}T_{,i} + N_{,\xi_\alpha}^{(2ij)}T_{,ij}) \\ &+ \epsilon^2(N^{(2)}T_{,\alpha} + N^{(2i)}T_{,i\alpha} + N^{(2ij)}T_{,ij\alpha}) + 0(\epsilon^3).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Dans ce chapitre, les indices latins, tels que i, j, k, l , prennent les valeurs 1, 2 ou 3 alors que les indices grecques, par exemple α, β , ne varient qu'entre 1 et 2.

Les expressions précédentes délivrant les dérivées des premier et deuxième ordres font intervenir la formule (2.5) où les coefficients métriques h_1, h_2, h_3 dépendent de y_1, y_2 et y_3 mais pas de ξ_1 et ξ_2 . En introduisant les expressions des dérivées correspondantes dans l'équation de continuité 2.10₁ et en demandant que le coefficient associé à ϵ^{-1} soit égal au zéro, on obtient

$$\left[\left[\left(K_{\alpha\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1)} \right) \gamma_{,\xi_\alpha} \right] \right] T + \left[\left[\left(K_{\alpha\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1k)} + K_{\alpha k} \right) \gamma_{,\xi_\alpha} \right] \right] T_{,k} = 0.$$

De façon similaire, en exigeant que le coefficient associé à ϵ^{-1} dans l'équation de la conservation de l'énergie (2.6), on arrive à

$$\left[K_{\alpha\beta} N_{,\xi\beta}^{(1)} \right]_{,\xi\alpha} T + \left[K_{\alpha\beta} N_{,\xi\beta}^{(1k)} + K_{\alpha k} \right]_{,\xi\alpha} T_{,k} = 0.$$

De ces dernières équations on déduit les expressions définissant les composantes de $N^{(1)}$ et $N^{(1k)}$:

$$\begin{aligned} \left[K_{\alpha\beta} N_{,\xi\beta}^{(1)} \right]_{,\xi\alpha} &= 0, \quad \xi \in \mathcal{S}, \quad \xi \notin \mathcal{L}, \\ \left[K_{(\alpha\beta)} N_{,\xi\beta}^{(1k)} + K_{\alpha k} \right]_{,\xi\alpha} &= 0, \quad \xi \in \mathcal{S}, \quad \xi \notin \mathcal{L}, \\ \left[\left[\left(K_{\alpha\beta} N_{,\xi\beta}^{(1)} \right) \gamma_{,\xi\alpha} \right] \right] &= 0, \quad \xi \in \mathcal{L}, \\ \left[\left[\left(K_{\alpha\beta} N_{,\xi\beta}^{(1k)} + K_{\alpha k} \right) \gamma_{,\xi\alpha} \right] \right] &= 0, \quad \xi \in \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{y_3} \cup \Omega^r$ et $\mathcal{L} = \mathcal{S} \cup \Gamma$ avec \mathcal{S}_{y_3} étant la surface décrite par $y_3 - \gamma(y_1, y_2) = 0$. A partir des équations dans (2.16) on peut montrer que $N_{,\xi\alpha}^{(1)} = 0$. De manière analogue, pour que le coefficient relatif à ϵ^0 dans l'équation de continuité 2.10₁ soit égal à zéro, on doit avoir

$$\begin{aligned} \left[\left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2)} + K_{\beta 3} N_{,3}^{(1)} \right] \right] &= 0, \\ \left[\left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2ij)} + K_{\beta j} N^{(1i)} \right] \right] &= 0, \\ \gamma_{,\xi\beta} \left[\left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2k)} + K_{\beta k} N^{(1)} + K_{\beta 3} N_{,3}^{(1k)} \right] \right] &= \left[\left[\frac{K_{3\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(1k)} + K_{3k}}{h_3} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec $k = 1, 2, 3$ et $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ et $(1, 3)$.

De plus, en mettant le coefficient associé à ϵ^0 dans l'équation de la conservation de l'énergie à zéro, on obtient

$$\begin{aligned} &\left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2)} + K_{\beta 3} N_{,3}^{(1)} \right]_{,\xi\beta} T + \left\{ \left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2k)} + K_{\beta k} N^{(1)} + K_{\beta 3} N_{,3}^{(1k)} \right]_{,\xi\beta} \right. \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(K_{3\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(1k)} + K_{3k} \right) \right]}{\partial y_3} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left(K_{1\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(1k)} + K_{1k} \right) \right]}{\partial y_1} \\ &\left. + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(K_{2\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(1k)} + K_{2k} \right) \right]}{\partial y_2} \right\} T_{,k} \\ &+ \left\{ \left[K_{\beta\alpha} N_{,\xi\alpha}^{(2ij)} + K_{\beta j} N^{(1i)} \right]_{,\xi\beta} + K_{ji} + K_{j\beta} N_{,\xi\beta}^{(1i)} \right\} T_{,ij} - P = -\rho_c \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En intégrant l'équation (2.18) sur la surface \mathcal{S} de la cellule de base, en appliquant le théorème de diver-

gence et en tenant compte (2.17), il vient que

$$\begin{aligned}
& \left\langle K_{ji} + K_{j\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1i)} \right\rangle_S T_{,ij} + \left\langle \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{3k} \right) \right]}{\partial y_3} \right. \\
& + \left. \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left(K_{1\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{1k} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(K_{2\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{2k} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle_S T_{,k} \\
& + \left\{ |S|^{-1} \int_{\mathcal{L}} \left[\left[\frac{1}{h_3} \left(K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{3k} \right) \right] \right] \frac{dl}{|\nabla h(\boldsymbol{\xi})|} \right\} T_{,k} - \langle P \rangle_S = -\langle \rho_c \rangle_S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

où $|\nabla h(\boldsymbol{\xi})| = \sqrt{\gamma_{,\xi_1}^2 + \gamma_{,\xi_2}^2}$ et

$$\langle \bullet \rangle_S = |S|^{-1} \int_S (\bullet) dS = |S|^{-1} \int \int (\bullet) d\xi_1 d\xi_2.$$

En appliquant le Lemme A.1 de Kristenson (2005) et en prenant en compte la périodicité des termes $N^{(1k)}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(K_{3k} + K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} \right) \right]}{\partial y_3} \right\rangle_S \quad (2.20) \\
& = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left\langle K_{3k} + K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} \right\rangle_S \right]}{\partial y_3} - \left\{ \frac{1}{S} \int_{\mathcal{L}} \left[\left[\frac{1}{h_3} \left(K_{3k} + K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} \right) \right] \right] \frac{dl}{|\nabla h(\mathbf{y}_3)|} \right\}.
\end{aligned}$$

En remplaçant (2.20) à l'équation (2.19), on arrive à

$$\begin{aligned}
& \left\langle K_{ji} + K_{j\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1i)} \right\rangle_S T_{,ij} + \left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left\langle K_{3\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{3k} \right\rangle_S \right]}{\partial y_3} \right. \\
& + \left. \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left\langle K_{1\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{1k} \right\rangle_S \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left\langle K_{2\alpha} N_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + K_{2k} \right\rangle_S \right]}{\partial y_2} \right) T_{,k} \\
& + \langle P \rangle_S = -\langle \rho_c \rangle_S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Donc, l'équation de la conservation de l'énergie à l'échelle macroscopique prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \bar{K}_{ji}(\mathbf{y}_3) T_{,ij} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial \left[h_1 h_2 \bar{K}_{3k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_3} + \frac{\partial \left[h_2 h_3 \bar{K}_{1k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 h_3 \bar{K}_{2k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_2} \right) T_{,k} \\
& + \bar{P} = -\bar{\rho}_c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

En comparant les équations (2.21) et (2.22), on arrive à déterminer toutes les composantes du tenseur de conductivité thermique de la zone d'interface rugueuse :

$$\bar{K}_{(ik)}(y_3) = \left\langle K_{ik} + K_{i\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1k)} \right\rangle_S. \quad (2.23)$$

où le crochet $\langle \bullet \rangle$ représente la moyenne par rapport à une cellule de base de la surface d'intersection entre y_3 et Γ , qui est définie par

$$\langle \bullet \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \bullet d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.24)$$

A ce stade, la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ est homogénéisée suivant les directions curvilignes y_1 et y_2 mais elle reste hétérogène selon la direction y_3 . Ainsi, $\omega^{(c)}$ est remplacée par une interphase équivalente dont le tenseur de conductivité thermique effectif est défini par (2.23).

2.3 Interfaces thermiques oscillant autour d'une surface plane et suivant deux directions

Le problème décrit et étudié dans les deux sections précédentes est simplifié dans cette section au sens que la surface autour de laquelle une interface oscille rapidement et périodiquement suivant deux directions n'est pas courbée mais plane. Cette simplification, combinée avec la théorie d'homogénéisation classique des stratifiés, nous permet d'obtenir des résultats originaux pour les stratifiés dont l'interface entre deux couches n'est pas lisse mais rugueuse.

2.3.1 Description du problème

Soit un domaine Ω constitué de deux sous-domaines $\tilde{\Omega}^-$ et $\tilde{\Omega}^+$ dans un espace cartésien 3D. Les matériaux formant Ω^- et Ω^+ sont supposés individuellement homogènes. Le domaine supérieur Ω^+ est formé de la phase 1 alors que le domaine inférieur Ω^- est constitué de la phase 2. L'interface Γ entre $\tilde{\Omega}^-$ et $\tilde{\Omega}^+$ est une surface qui oscille rapidement autour du plan $x_1 - x_2$ et suivant les directions Ox_1 et Ox_2 . L'interface Γ est décrite par l'équation $x_3 = \tilde{h}(x_1, x_2)$. On suppose que la rugosité est telle que h est une fonction périodique des variables x_1 et x_2 et que les deux périodes sont égales ϵ . Donc, il convient de réécrire l'équation $x_3 = \tilde{h}(x_1, x_2)$ sous la forme

$$x_3 = h(y_1, y_2) \quad (2.25)$$

avec $(y_1, y_2) = (x_1/\epsilon, x_2/\epsilon)$.

La valeur minimale de $h(y_1, y_2)$ est désignée par $-H_0$ et sa valeur maximale est choisie comme étant zéro. On divise Ω en trois zones. La zone d'interface rugueuse, symbolisée par $\Omega^{(r)}$, est définie par

$$\Omega^{(r)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid -H^{(0)} < x_3 < 0 \right\}, \quad (2.26)$$

Les deux autres zones, constituées respectivement de la phase 1 et de la phase 2, sont décrites par

$$\Omega^{(-)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(1)} \mid x_3 < -H^{(0)} \right\}, \quad (2.27)$$

$$\Omega^{(+)} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^{(2)} \mid x_3 > 0 \right\}. \quad (2.28)$$

La conduction thermique est gouvernée par la loi de Fourier

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)} \nabla \theta^{(i)}$$

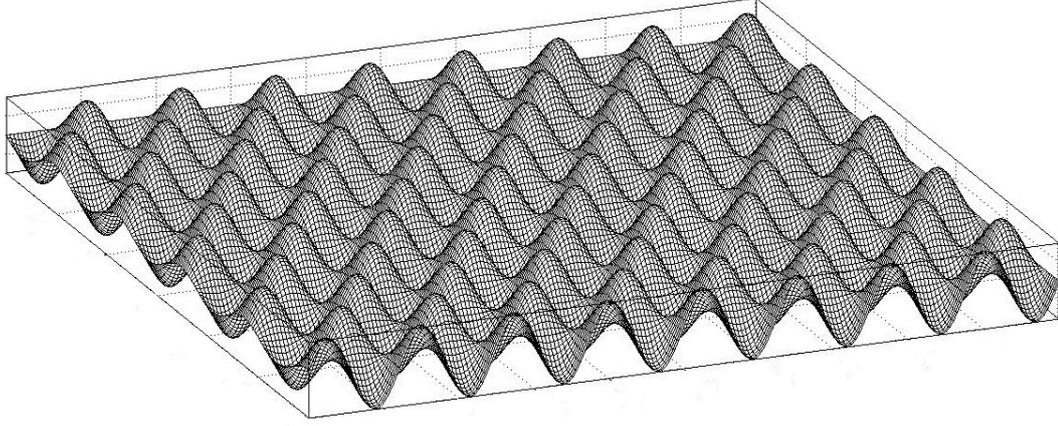


FIGURE 2.2: Surface plane ondulée selon deux directions.

où $\mathbf{q}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$, et $\theta^{(i)}$ sont respectivement le flux de chaleur, le tenseur de conductivité et la température dans la phase $i = 1$ ou 2 . Le tenseur $\mathbf{K}^{(i)}$ est un tenseur symétrique et défini positif du second ordre.

Le flux de chaleur $\mathbf{q}^{(i)}$ doit vérifier l'équation de chaleur :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{(i)} + P = \rho_c^{(i)} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

où $\rho_c^{(i)}$ est la chaleur spécifique de la phase i ayant l'unité $J.K^{-1}.m^{-3}$ et P est une source de chaleur en $W.m^{-3}$. En la loi de Fourier dans la dernière équation, on obtient

$$-(K_{jk}^{(i)} \theta_{,k})_{,j} + P = \rho_c^{(i)} \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

L'interface Γ est supposée parfaite. Donc, la température et la composante normale du flux de chaleur doivent être continus à elle :

$$[[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad (2.29)$$

$$[[\theta]] = 0. \quad (2.30)$$

Le vecteur normal unitaire \mathbf{n} est défini par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_{,y_1}^2 + h_{,y_2}^2}{\epsilon^2}}} \left[\frac{h_{,y_1}}{\epsilon}; \frac{h_{,y_2}}{\epsilon}; -1 \right]^T.$$

2.3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

La méthode d'analyse asymptotique est utilisée pour homogénéiser la zone d'interface rugueuse. Plus précisément, on développe la température $\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \theta_\epsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_\epsilon(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = & T + \epsilon \left(N^{(1)}T + N^{(1i)}T_{,i} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(N^{(2)}T + N^{(2i)}T_{,i} + N^{(2ij)}T_{,ij} \right) + 0(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dans cette expression, $T = T(x_1, x_2, x_3, t)$ est indépendant de y_1 et y_2 ; les scalaires $N^{(\bullet)}$ sont des fonctions de y_1, y_2 et x_3 mais elles sont indépendantes de x_1, x_2 et t . Donc $T_{,y_1} = T_{,y_2} = 0$ et $N_{,x_1} = N_{,x_2} = 0$. Comme $y_1 = \frac{x_1}{\epsilon}$ et $y_2 = \frac{x_2}{\epsilon}$, on a

$$\theta_{,\alpha} = \theta_{\epsilon,\alpha} + \epsilon^{-1}\theta_{\epsilon,y_\alpha}, \quad \theta_{,3} = \theta_{\epsilon,3}.$$

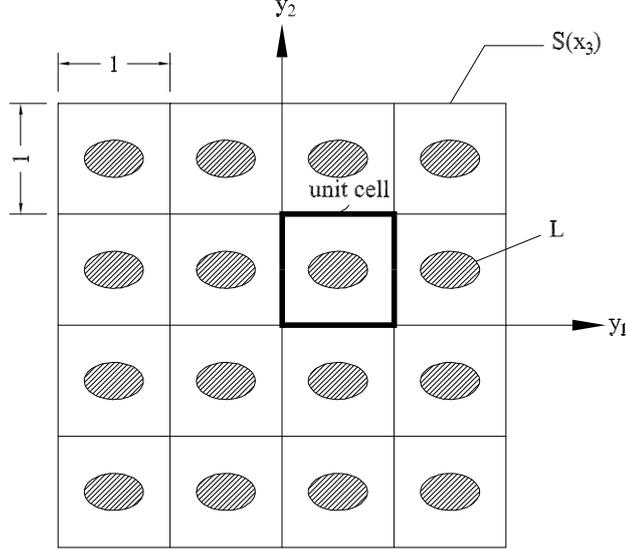


FIGURE 2.3: Intersection entre la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(r)}$ et le plan $x_3 = cste$.

La formule (2.23) se réduit à

$$\bar{K}_{(ik)}(x_3) = \left\langle K_{ik} + K_{i\beta} N_{,\xi_\beta}^{(1k)} \right\rangle_S. \quad (2.32)$$

avec

$$\langle \bullet \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \bullet \, dy_1 dy_2.$$

Ainsi, la zone d'interface rugueuse $\Omega^{(r)}$ est homogénéisée comme une interphase équivalente dont les propriétés thermiques sont déterminées par l'équation (2.32). Cette interphase est homogène dans le plan $x_1 - x_2$ mais hétérogène selon x_3 . L'expression de la fonction scalaire $N^{(1k)}$ ne peut pas être analytiquement calculée dans le cas présent où l'interface est rugueuse selon les deux directions x_1 et x_2 . Pour cette raison, des méthodes approximatives sont proposées ci-dessous pour calculer d'abord $N^{(1k)}$ et ensuite $\bar{K}_{(ik)}(x_3)$.

2.3.3 Application du schéma auto-cohérent généralisé (SACG)

On considère maintenant le cas particulier où Γ est une interface périodique entre deux phases thermiques isotropes caractérisées par les tenseurs de conductivité thermique $\mathbf{K}_1 = k_1 \mathbf{I}$ et $\mathbf{K}_2 = k_2 \mathbf{I}$ avec \mathbf{I} le

tenseur d'identité d'ordre 2. On suppose que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{x_3} \cap \Omega^i$ est un cercle de rayon r_i . Si l'interface rugueuse se présente sous forme conique circulaire, r_i est une fonction affine de x_3 :

$$r_i = \frac{R(H_0 + x_3)}{H_0}.$$

Ci-dessus, H_0 est l'épaisseur de la zone rugueuse et R correspond au rayon du fond d'un cône.

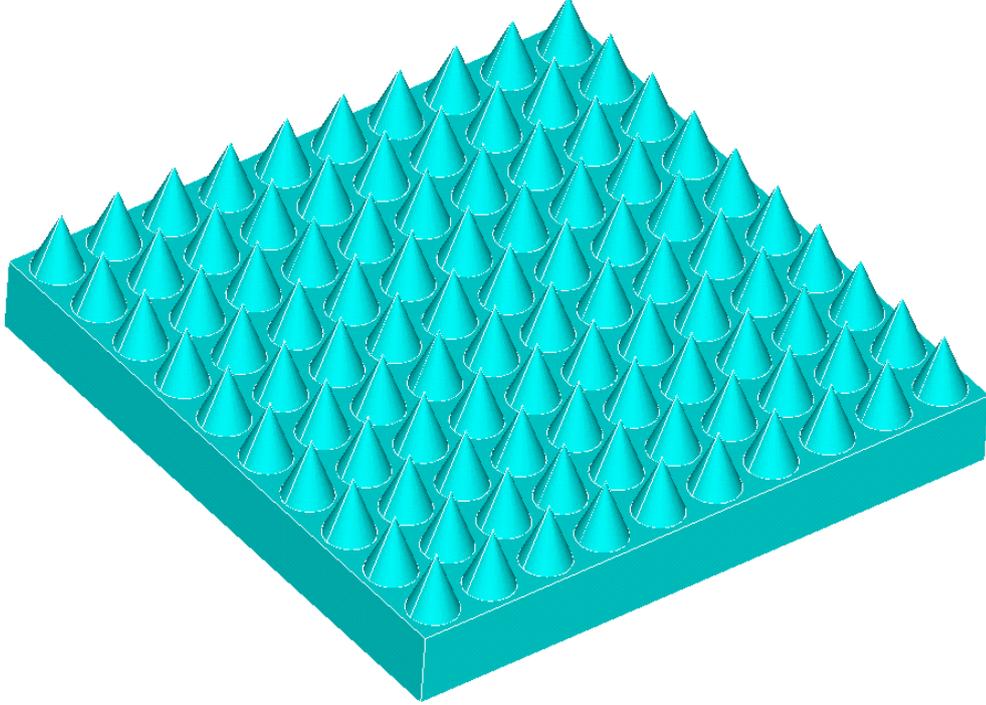


FIGURE 2.4: Interface rugueuse constituée de cônes circulaires.

Pour déterminer les propriétés thermiques de l'interphase équivalente, il faut calculer $N_{,y1}^{(1k)}$ et $N_{,y2}^{(1k)}$. En considérant une cellule de base (Fig. 2.3) et d'après la technique d'homogénéisation des milieux périodiques, on peut exprimer la température θ sous la forme :

$$\theta_\epsilon(\mathbf{y}, x_3, t) = \bar{\theta}_\epsilon(\mathbf{y}, x_3, t) + \tilde{\theta}_\epsilon(\mathbf{y}, x_3, t)$$

avec $\tilde{\theta}_\epsilon(\mathbf{y}, x_3, t) = \chi_i \theta_{\epsilon,i}$. En comparant cette dernière équation avec (2.16₂) et (2.16₄), on déduit que

$$N^{(1i)} = \chi_i.$$

A la frontière du domaine Ω , on impose la température $\theta = \mathbf{E}\mathbf{y}$ avec \mathbf{E} le gradient de la température. Alors, on a

$$\theta_\epsilon = \mathbf{E}\mathbf{y} + \chi(\mathbf{y}, x_3)\mathbf{E}. \quad (2.33)$$

Dans cette section, le champ de la température θ_ϵ est calculé approximativement par SACG (voir Lee, Yang et Gau 2006 et Zaoui 2000). Plus précisément, on remplace une cellule avec un cercle dans un carré par les 2 cercles concentriques dont le rayon équivalent du cercle extérieur est égale à $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et on demande que les fractions surfaciques de la matrice et des inclusions soient préservées. Alors, pour trouver la fonction χ_i , on résout les deux problèmes suivants.

A) Sur la frontière du domaine Ω , on prescrit $\mathbf{E} = (0 \quad 1)^T$.

Dans ce problème, le champ de la température dans le système des coordonnées polaires prend la forme

$$\theta_\epsilon = f(r) \sin \theta.$$

En régime isothermique, l'équation de la conservation de l'énergie est donnée par

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0.$$

Si le matériau est isotrope, on a alors

$$\Delta \theta_\epsilon = 0.$$

Il est bien connu que la solution de cette dernière équation harmonique est telle que

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r.$$

Finalement, les champs de la température dans l'inclusion et dans la matrice ont les formes classiques :

$$\theta_i = \left(\frac{C_{i1}}{r} + C_{i2} r \right) \sin \theta, \quad (2.34)$$

$$\theta_m = \left(\frac{C_{m1}}{r} + C_{m2} r \right) \sin \theta. \quad (2.35)$$

Pour déterminer les constantes dans les équations (2.34) et (2.35), on fait appel aux conditions suivantes :

– La condition au centre de l'inclusion : $\theta_i = 0$ quand $r = 0$. Donc, on a

$$C_{i1} = 0.$$

– La condition de continuité de la température à travers l'interface Γ :

$$\left(\frac{C_{i1}}{r_i} + C_{i2} r_i \right) \sin \theta = \left(\frac{C_{m1}}{r_i} + C_{m2} r_i \right) \sin \theta.$$

– La condition de continuité du flux normal de chaleur à travers l'interface Γ :

$$k_1 \left(-\frac{C_{i1}}{r_i^2} + C_{i2} \right) \sin \theta = k_2 \left(-\frac{C_{m1}}{r_i^2} + C_{m2} \right) \sin \theta.$$

– La condition aux limites pour $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$:

$$\theta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \theta.$$

L'utilisation des conditions précisées ci-dessus nous permet d'obtenir les expressions des constantes :

$$C_{m1} = \frac{r_i^2 (-k_1 + k_2)}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2}, \quad (2.36)$$

$$C_{m2} = \frac{k_1 + k_2}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2}, \quad (2.37)$$

$$C_{i1} = 0, \quad (2.38)$$

$$C_{i2} = \frac{2k_2}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2}. \quad (2.39)$$

En insérant ces expressions dans (2.34) et (2.35), on trouve les champs de la température θ_m et θ_i .

Finalement, on en la formule de χ_2 pour l'inclusion :

$$\chi_{i2} = \frac{2k_2 r \sin \theta}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2} - r \sin \theta. \quad (2.40)$$

B) Sur la frontière du domaine Ω , on applique $\mathbf{E} = (1 \ 0)^T$

Ce problème est similaire au problème précédent. Le champ de la température dans système des coordonnées polaires prend la forme

$$\theta = f(r) \cos \theta.$$

Ensuite, on trouve facilement la fonction χ_1 pour l'inclusion :

$$\chi_{i1} = \frac{2k_2 r \cos \theta}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2} - r \cos \theta. \quad (2.41)$$

Maintenant on s'intéresse au calcul de la moyenne de chacun des termes $N_{,y1}^{(1k)}$ et $N_{,y2}^{(1k)}$ dans l'inclusion.

D'abord, noter que

$$\frac{df(r, \theta)}{dy_1} = \frac{y_1}{r} \frac{df(r, \theta)}{dr} - \frac{y_2}{r^2} \frac{df(r, \theta)}{d\theta}, \quad (2.42)$$

$$\frac{df(r, \theta)}{dy_2} = \frac{y_2}{r} \frac{df(r, \theta)}{dr} + \frac{y_1}{r^2} \frac{df(r, \theta)}{d\theta}, \quad (2.43)$$

avec $y_1 = r \cos \theta$ et $y_2 = r \sin \theta$. En faisant l'intégration dans l'inclusion et en variant θ de 0 à 2π et r de 0 à r_i on trouve les expressions de $N_{,y1}^{(1k)}$ et $N_{,y2}^{(1k)}$. Pour calculer la moyenne de chacun des termes $N_{,y1}^{(1k)}$ et $N_{,y2}^{(1k)}$ dans la matrice, on utilise le fait que, dans le SACG, l'intégration de l'intensité \mathbf{E} dans le cercle composite est exactement égale à l'intensité \mathbf{E} appliquée au contour. Donc, on a

$$\left\langle \frac{\partial \chi(\mathbf{y}, x_3)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{E} \right\rangle_S = \left\langle \frac{\partial \chi(\mathbf{y}, x_3)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{E} \right\rangle_{inclusion} + \left\langle \frac{\partial \chi(\mathbf{y}, x_3)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{E} \right\rangle_{matrice} = 0.$$

En substituant les moyennes de $N_{,y\alpha}^{(1k)}$ dans la matrice et l'inclusion dans l'équation (2.32), on obtient les composantes non nulles du tenseur de conductivité thermique de la zone d'interface rugueuse comme suit :

$$K_{11}^{eff} = (1 - \pi r_i^2) k_2 + k_1 \pi r_i^2 + \frac{\pi r_i^2 (k_1 - k_2) (k_2 - k_2 \pi r_i^2 - k_1 + k_1 \pi r_i^2)}{k_2 + k_2 \pi r_i^2 + k_1 - k_1 \pi r_i^2}, \quad (2.44)$$

$$K_{22}^{eff} = K_{11}^{eff}, \quad (2.45)$$

$$K_{33}^{eff} = (1 - \pi r_i^2) k_2 + k_1 \pi r_i^2. \quad (2.46)$$

Notant que la fraction surfacique des inclusions est donnée par $f_i = \pi r_i^2$, on peut réécrire les formules précédentes :

$$K_{11}^{eff} = (1 - f_i) k_2 + k_1 f_i + \frac{f_i (k_1 - k_2) (k_2 - k_2 f_i - k_1 + k_1 f_i)}{k_2 + k_2 f_i + k_1 - k_1 f_i}, \quad (2.47)$$

$$K_{22}^{eff} = K_{11}^{eff}, \quad (2.48)$$

$$K_{33}^{eff} = (1 - f_i) k_2 + k_1 f_i. \quad (2.49)$$

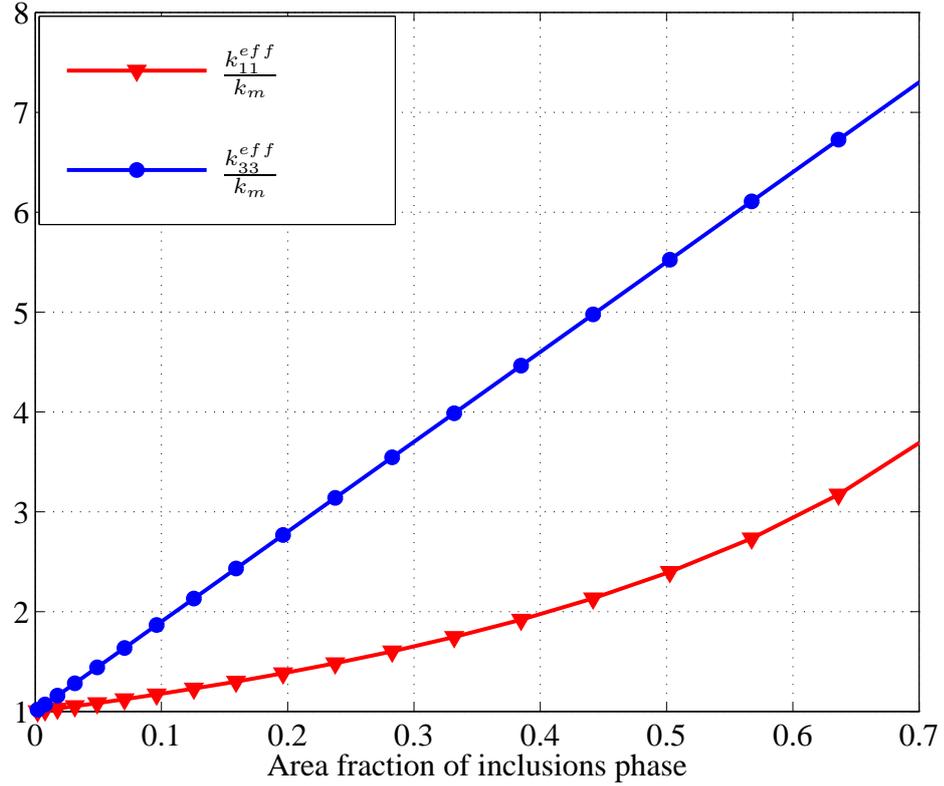


FIGURE 2.5: Conductivité thermique effective normalisée de la zone d’interface rugueuse en fonction de la fraction surfacique de la phase 1.

Pour tracer les courbes des composantes non nulles du tenseur de conductivité pour l’interphase équivalente, on posant $\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{3}$ et varie $r_i = 0$ à $0,5$.

2.3.4 Application de la méthode de Chen et Kuo

Dans le SACG précédent, on a analytiquement et approximativement calculé la fonction χ . Afin de déterminer cette dernière de façon plus précise, on applique maintenant la méthode proposée par Chen et Kuo (2005). Dans cette méthode, la forme géométrique de la cellule de base constituée d’une inclusion circulaire insérée dans une matrice carrée de côté a est préservée.

Dans ce travail, le matériau constituant la matrice est isotrope homogène et celui formant les inclusions circulaires est isotrope homogène par rapport aux coordonnées polaires. Chaque cellule de base est un carré de côté a . En tenant compte de la périodicité du composite en question, on prescrit les conditions aux limites suivantes :

$$\theta |_{x_1=-a/2} = \frac{1}{2}Ea, \quad \theta |_{x_1=a/2} = -\frac{1}{2}Ea, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} |_{x_2=\pm a/2} = 0 \quad (2.50)$$

où E représente l’intensité macroscopique suivant la direction x_1 . La symétrie de la cellule de base

implique les relations suivantes :

$$\theta(x_1, x_2) = \theta(x_1, -x_2), \quad \theta(x_1, x_2) - \theta(0, 0) = -[\theta(-x_1, x_2) - \theta(0, 0)].$$

En utilisant l'équation de la conservation de l'énergie $\text{div}[\mathbf{K}(x)\nabla\theta] = 0$ pour les matériaux isotropes dans le système des coordonnées polaires (r, ϕ) , on a

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi^2} = 0. \quad (2.51)$$

La solution générale de l'équation (2.51) est donnée par

$$\theta_i = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\phi \quad (2.52)$$

pour l'inclusion et par

$$\theta_m = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n-1} r^{2n-1} + B_{2n-1} r^{-2n+1}] \cos(2n-1)\phi \quad (2.53)$$

pour la matrice. Dans les 2 équations ci-dessus, C_0 et A_0 et présentent physiquement la température de référence pour l'inclusion et celle pour la matrice. Par simplicité, on choisit $A_0 = C_0 = 0$. En considérant la condition de continuité de la température à travers l'interface donnée par $r = r_i$ entre l'inclusion et la matrice, on obtient

$$\begin{aligned} A_{2n-1} &= \frac{k_m + k_i}{k_m - k_i} r_i^{2(1-2n)} B_{2n-1}, \\ C_{2n-1} &= \left(\frac{k_m + k_i}{k_m - k_i} + 1 \right) r_i^{(1-2n)(1+k)} B_{2n-1}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Les champs de la température dans l'inclusion et la matrice, θ_i et θ_m , doivent se conformer aux conditions de périodicité (2.50). De plus, on impose la condition de cohérence de l'identité de Rayleigh (voir, par exemple, Chen et Kuo, 2005). Le respect de cette condition nous conduit à l'équation

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\phi = -E x_1 + \sum_{j \neq 0} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r_j^{-2n+1} \cos(2n-1)\phi_j. \quad (2.55)$$

Ci-dessus, l'indice j désigne un des cercles sauf celui à l'origine, r et ϕ sont les coordonnées polaires mesurées à partir du centre O du cercle central, (r_j, ϕ_j) sont les coordonnées du point O , (r, ϕ) sont mesurées par rapport aux coordonnées polaires locales pour le j -ème cercle. En assimilant la $(2n-1)$ -ème dérivée partielle selon x_1 des deux membres de l'équation (2.55) au point O , on obtient

$$A_{2n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{2m+2n-3}{2n-1} \Sigma_{2m+2n-2} B_{2m-1} = -E \delta_{n1} \quad (2.56)$$

où $\Sigma_m = \sum_{j \neq 0} \cos m\phi_j$.

En substituant les équations (2.54) dans (2.56), on obtient le système des équations pour déterminer B_{2n-1} :

$$(\mathbf{T} + \mathbf{W}) \mathbf{x} = \mathbf{u}. \quad (2.57)$$

Ci-dessus, \mathbf{T} est une matrice diagonale avec les composantes non nulles données par $\frac{k_m + k_i}{k_m - k_i}$; \mathbf{u} est un vecteur dont la seule composante non nulle est $u_1 = -\delta_{n1}$; \mathbf{x} est le vecteur dont les composantes sont fournies par $x_{2m-1} = \frac{B_{2m-1}}{Er_i^{2(2m-1)}}$; la matrice \mathbf{W} a les composantes $W_{mn} = \frac{(2m+2n-3)!\Sigma_{2m+2n-2}r_i^{2(2m-1)}}{(2m-2)!(2n-1)!}$. En résolvant l'équation (2.57) et en tenant compte des équations (2.54), on trouve les expressions de B_{2n-1} , A_{2n-1} et C_{2n-1} . En utilisant ces expressions dans (2.52), on obtient le champ de la température dans l'inclusion. En utilisant la relation (2.33), on peut déterminer la première composante χ_1 de χ .

De façon similaire, si l'on impose les conditions de périodicité suivantes :

$$\theta|_{x_2=-a/2} = \frac{1}{2}Ea, \quad \theta|_{x_2=a/2} = -\frac{1}{2}Ea, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_1}|_{x_1=\pm a/2} = 0$$

où E représente physiquement l'intensité suivant la direction x_2 . La symétrie de la cellule de base carrée implique que

$$\theta(x_1, x_2) = \theta(-x_1, x_2), \quad \theta(x_1, x_2) - \theta(0, 0) = -[\theta(x_1, -x_2) - \theta(0, 0)].$$

En tenant compte de la symétrie de la cellule de base, on a immédiatement

$$\theta_i = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} r^{2n-1} \sin(2n-1)\phi$$

pour l'inclusion et

$$\theta_m = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n-1} r^{2n-1} + B_{2n-1} r^{-2n+1}] \sin(2n-1)\phi$$

pour la matrice.

La moyenne du flux de chaleur est donnée

$$\begin{aligned} \langle q_\alpha \rangle &= (1-f) \langle q_\alpha \rangle_{matrice} + f \langle q_\alpha \rangle_{inclusion} \\ &= (1-f) k_m \langle e_\alpha \rangle_{matrice} + f k_i \langle e_\alpha \rangle_{inclusion}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Par la loi de Fourier, on a également les 2 composantes de l'intensité dans la matrice :

$$\begin{aligned} \langle e_1 \rangle_{matrice} &= \frac{k_m E \left(1 + \frac{2fB_1}{r_i^2 E}\right) - f k_i \langle e_1 \rangle_{inclusion}}{(1-f) k_m} \\ \langle e_2 \rangle_{matrice} &= \frac{-f k_i \langle e_2 \rangle_{inclusion}}{(1-f) k_m}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

A partir de l'équation (2.33), on obtient

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} - \frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{y}} \mathbf{E}.$$

Cette équation revient à écrire

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 - \frac{\partial\chi_1}{\partial y_1} E_1 - \frac{\partial\chi_2}{\partial y_1} E_2, \\ e_2 &= E_2 - \frac{\partial\chi_1}{\partial y_2} E_1 - \frac{\partial\chi_2}{\partial y_2} E_2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dans le cas où $E_1 = 1$ et $E_2 = 0$, les équations (2.60) nous donnent

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right\rangle_{matrice} &= -\frac{\langle e_1 \rangle_{matrice}}{E_1} + 1, \\ \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \right\rangle_{matrice} &= \frac{\langle e_2 \rangle_{matrice}}{E_1}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans le cas où $E_1 = 0$ et $E_2 = 1$, les équations (2.60) nous conduisent à

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right\rangle_{matrice} &= -\frac{\langle e_2 \rangle_{matrice}}{E_2} + 1, \\ \left\langle \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} \right\rangle_{matrice} &= \frac{\langle e_1 \rangle_{matrice}}{E_2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Les conductivités effectives K_{11}^{eff} et K_{33}^{eff} sont finalement données par

$$\begin{aligned} K_{11}^{eff} &= k_i f + (1-f) k_m + f k_i \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right\rangle_{inclusion} + (1-f) k_m \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right\rangle_{matrice}, \\ K_{33}^{eff} &= k_i f + (1-f) k_m. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dans Fig. 2.6, on trace les diagrammes qui comparent les résultats obtenus par les différentes méthodes pour les propriétés effectives du tenseur de conductivité thermique de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1 pour une section de la zone d'interface qui est définie par une valeur donnée de x_3 .

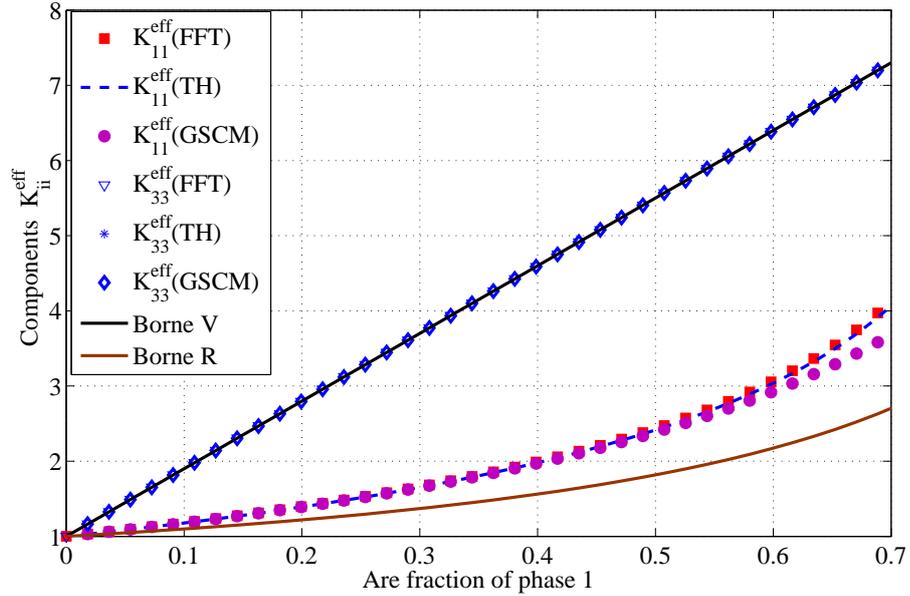


FIGURE 2.6: Comparaison des résultats obtenus par le Schéma ACG, la méthode proposée par Chen et Kuo et la méthode basée sur TFR.

2.3.5 Homogénéisation d'un stratifié triphasique suivant la direction d'épaisseur

On considère maintenant un domaine Ω occupé par un composite formé de 3 couches planes perpendiculaires à l'axe x_3 . La couche supérieure d'épaisseur H_1 est constituée de la phase 1, la couche in-

férieure d'épaisseur H_2 constituée de la phase 2 et la couche intermédiaire d'épaisseur H_0 composée de l'interphase équivalente remplaçant la zone d'interface rugueuse. L'épaisseur totale du composite est $H = H_1 + H_0 + H_2$. Les composantes du tenseur de conductivité thermique effective de ce composite stratifié sont données par les formules classiques suivantes (voir, par exemple, Milton 2002) :

$$K_{33}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1}, \quad (2.64)$$

$$K_{22}^* = \langle K_{22} \rangle_{\Omega} + \langle K_{23} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} - \langle K_{23}^2 K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}, \quad (2.65)$$

$$K_{11}^* = \langle K_{11} \rangle_{\Omega} + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^2 \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} - \langle K_{13}^2 K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}, \quad (2.66)$$

$$K_{12}^* = \langle K_{12} \rangle_{\Omega} + \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega} \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega} - \langle K_{13} K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega}, \quad (2.67)$$

$$K_{13}^* = \langle K_{13} K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega} \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1}, \quad (2.68)$$

$$K_{23}^* = \langle K_{33}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle K_{33}^{-1} K_{23} \rangle_{\Omega}. \quad (2.69)$$

Ci-dessus, l'opérateur de moyenne $\langle \bullet \rangle_{\Omega}$ est défini par

$$\langle \bullet \rangle_{\Omega} = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H_0+H_1)}^{-H_0} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H_0}^0 \bullet^{(r)} dx_3 + \int_0^{H_2} \bullet^{(2)} dx_3 \right). \quad (2.70)$$

2.3.6 Application numérique

Les résultats établis pour un composite constitué de deux phases dont l'interface est très rugueuse sont numériquement illustrés et examinés ci-dessous. On considère un composite formée de deux phases isotropes dont les conductivités K_1 et K_2 telles que $K_1/K_2 = 10$ et dont l'interface rugueuse a une forme conique. Pour étudier l'influence de la zone d'interface sur les propriétés thermiques effectives du composite stratifié en question, on choisit la période ϵ de l'interface rugueuse et les longueurs l_1 et l_2 du composite telles que $l_1 = l_2 = 15\epsilon$ tandis que $H_1 = H_0 = H_2$ se varie de 1 à 10ϵ (Fig. 2.7).

Les propriétés effectives normalisées du conductivité thermique $\frac{K_{11}^*}{K_2}$, $\frac{K_{22}^*}{K_2}$ et $\frac{K_{33}^*}{K_2}$ du composite stratifié sont calculées avec les formules (2.64)-(2.69), dans lesquelles les propriétés équivalentes de conductivité thermique de la zone d'interface rugueuse sont obtenues successivement par les méthodes basées sur la transformée de Fourier rapide, sur le schéma auto-cohérent généralisé et la procédure proposée par Chen et Kuo (2005) et par la méthode des éléments finis dans le logiciel Comsol Multiphysics. Ces résultats numériques sont illustrés et comparés dans Fig. 2.11. La cellule de base et son maillage à l'aide du logiciel Comsol Multiphysics par éléments finis sont illustrés dans Fig. 2.8.

Les conditions périodiques sont appliquées sur les deux surfaces perpendiculaires à la direction x_1 et sur celles perpendiculaires à la direction x_2 . Pour calculer K_{33}^* , on impose l'intensité thermique $E = (0 \ 0 \ 1)^T$ à la cellule de base qui cause un flux de chaleur dans la direction x_3 (voir Fig. 2.10). Les composantes K_{11}^* et K_{22}^* du tenseur de conductivité thermique effective du composite sont calculées en choisissant $E = (1 \ 0 \ 0)^T$ et $E = (0 \ 1 \ 0)^T$ (voir Fig. 2.9).

En examinant Fig. 2.11, on constate que : (i) les valeurs obtenues pour la composante K_{33}^* par les méthodes analytiques et la méthode des éléments finis coïncident quasiment ; (ii) les valeurs de la composantes

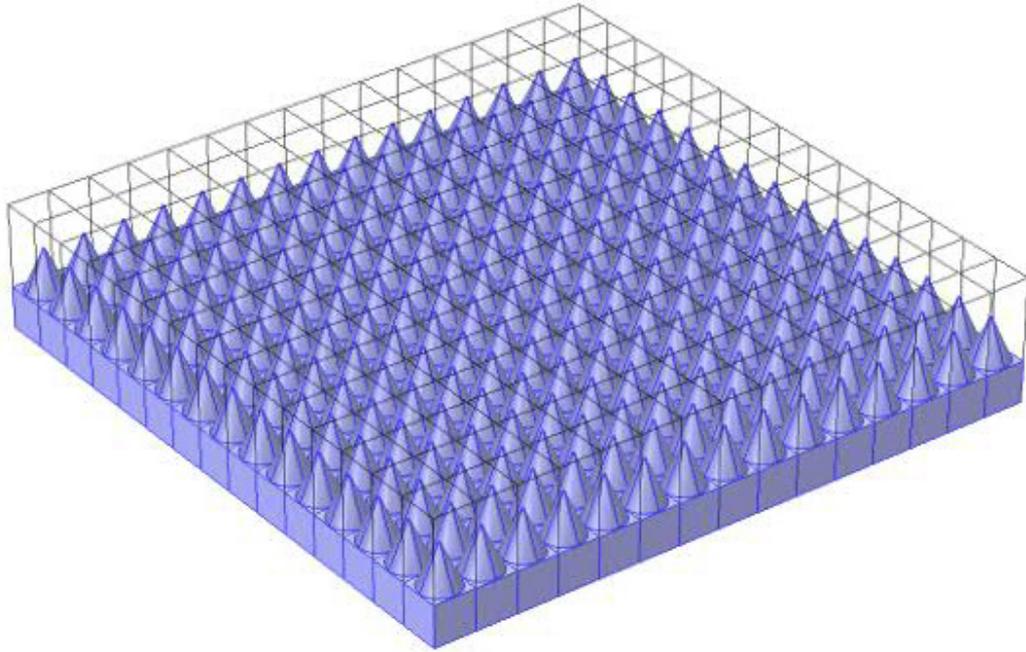


FIGURE 2.7: Interface rugueuse périodique dont la cellule de base a une forme conique.

K_{11}^* fournies par les différentes méthodes sont approximativement identiques ; (iii) la valeur obtenue par la méthode des éléments finis décroît avec le rapport $\frac{H_0}{\epsilon}$ et s'approche des valeurs obtenues par les méthodes analytiques avec l'augmentation du rapport $\frac{H_0}{\epsilon}$. Par conséquent, on conclut que, quand le rapport $\frac{H_0}{\epsilon}$ est suffisamment important, les valeurs des composantes du tenseur de conductivité thermique obtenues par les différentes méthodes analytiques et par la méthode des éléments finis (Comsol) sont en bon accord.

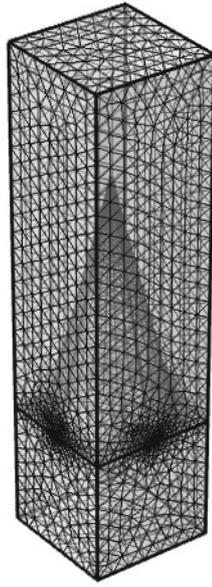
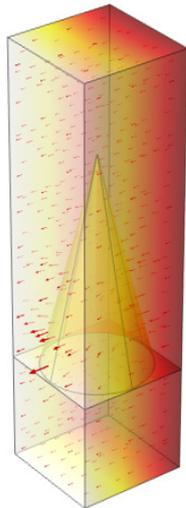
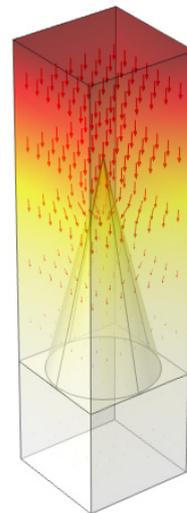


FIGURE 2.8: Maillage d'une cellule de base.



x



z

FIGURE 2.9: Gradient thermique selon la direction x

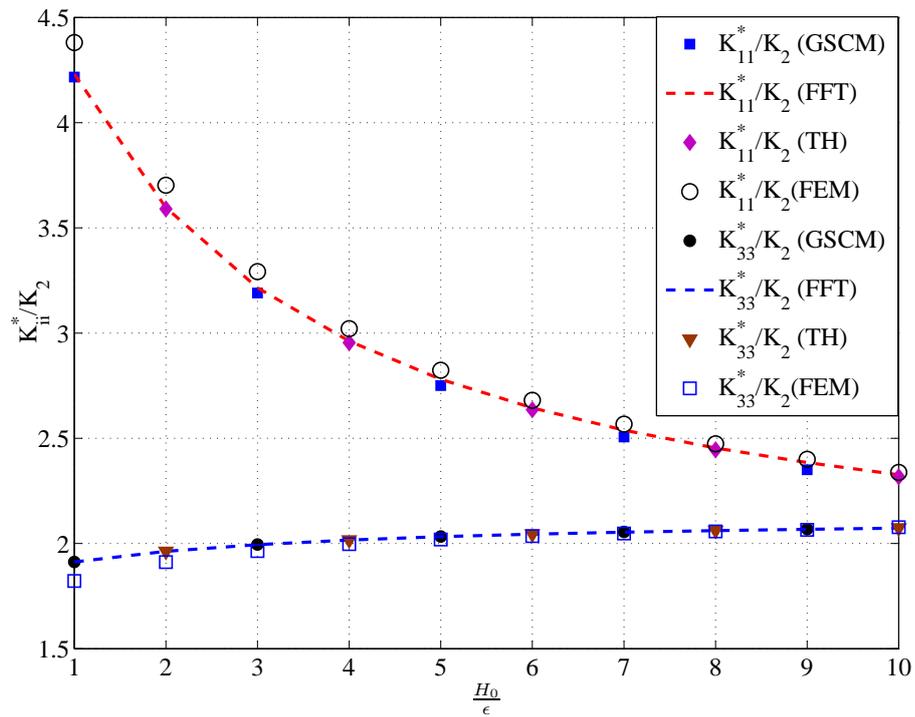


FIGURE 2.11: Propriétés effectives normalisées $K_{11}^*/K_2 = K_{22}^*/K_2$ et K_{33}^*/K_2 en fonction du rapport $\frac{H_0}{\epsilon}$.

Chapitre 3

Interfaces élastiques ondulées autour d'une surface lisse quelconque

3.1 Description et formulation du problème local

Soit Ω un domaine tridimensionnel (3D) formé de deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. On introduit le système des coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) associé à une base orthonormée $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. On symbolise la frontière de Ω par $\partial\Omega$ et celle de $\Omega^{(\alpha)}$ par $\partial\Omega^{(\alpha)}$ avec $\alpha = 1, 2$. L'interface Γ entre $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ est une surface périodiquement ondulée suivant les directions y_1 et y_2 avec ϵ comme la période. Plus précisément, Γ est décrite par

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid y_3 = g(\xi_1, \xi_2), \xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon}, \xi_2 = \frac{y_2}{\epsilon} \right\}, \quad (3.1)$$

où $g(\xi_1, \xi_2)$ est une fonction périodique telle que $g(\xi_1 + 1, \xi_2 + 1) = g(\xi_1, \xi_2)$.

Les valeurs minimale et maximale sont notées par g_{min} et g_{max} . On suppose que, pour une valeur $y_3 \in (g_{min}, g_{max})$ donnée, l'équation $y_3 = g(\xi_1, \xi_2)$ a deux paires de solutions réelles dans l'intervalle $(0, 1)$. La période ϵ est très petite par rapport à $\delta = g_{max} - g_{min}$ au sens que $0 < \epsilon \ll \delta$. Comme dans les deux chapitres précédents, on dit alors que l'interface Γ est très rugueuse. On définit la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ et la surface $\pi(y_3^0)$:

$$\omega^{(c)} = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid g_{min} < y_3 < g_{max} \},$$

$$\pi(y_3^0) = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \omega^{(c)} \mid y_3 = y_3^0 \right\}.$$

Pour le problème élastique 3D en question, les déplacements sont des fonctions des coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) et du temps t :

$$u_i = u_i(y_1, y_2, y_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Les matériaux formant les sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ sont supposés linéairement élastiques, hétérogènes

selon y_3 mais homogènes selon y_1 et y_2 . Ainsi, on a la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) = \mathbb{L}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}, t), \quad (3.2)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}, t)$ est le tenseur des déformations infinitésimales, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t)$ le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbb{L} le tenseur d'élasticité donné par

$$\mathbb{L}(\mathbf{y}) = \chi^{(1)}(\mathbf{y})\mathbb{L}^{(1)}(\mathbf{y}) + \chi^{(2)}(\mathbf{y})\mathbb{L}^{(2)}(\mathbf{y}). \quad (3.3)$$

Ici, $\chi^{(\alpha)}(\mathbf{y})$ est la fonction caractéristique du sous-domaine $\Omega^{(\alpha)}$ telle que $\chi^{(\alpha)}(\mathbf{y}) = 1$ si $\mathbf{y} \in \Omega^{(\alpha)}$ et $\chi^{(\alpha)}(\mathbf{y}) = 0$ si $\mathbf{y} \notin \Omega^{(\alpha)}$. Le tenseur $\mathbb{L}^{(\alpha)}$ a les symétries indicielles suivantes :

$$L_{ijkl}^{(\alpha)} = L_{jikl}^{(\alpha)} = L_{klij}^{(\alpha)}. \quad (3.4)$$

Ci-dessus et ci-après, comme une règle générale, les indices latins, tels que i, j, k et l , prennent les valeurs 1, 2 et 3 alors que les indices grecs comme α et β varient de 1 à 2. Le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$ est lié au vecteur des déplacements \mathbf{u} par

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3.5)$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ doit vérifier l'équation du mouvement

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, t), \quad (3.6)$$

où \mathbf{p} est la force volumique et $\ddot{\mathbf{u}}$ est le vecteur d'accélération.

En substituant (3.2) dans (3.6), on obtient l'équation du mouvement. Il convient de réécrire cette dernière sous la forme plus compacte

$$(\mathbf{C}^{(lk)} \mathbf{u}_{,k})_{,l} + \mathbf{p} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{ou} \quad (C_{ij}^{(lk)} u_{j,k})_{,l} + p_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (3.7)$$

Ci-dessus, le symbole $\bullet_{,i}$ dénote la dérivée de \bullet par rapport à y_i , $\mathbf{C}^{(lk)}$ est la matrice 3×3 dont les composantes $C_{ij}^{(lk)}$ sont données comme dans la thèse de Huy Toan Le (2011) :

$$C_{ij}^{(lk)} = L_{iljk}. \quad (3.8)$$

De façon similaire, on introduit la notation

$$C_{ij}^{(\alpha)(lk)} = L_{iljk}^{(\alpha)}. \quad (3.9)$$

Ainsi, la loi de Hooke peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(h)} = \mathbf{C}^{(hk)} \mathbf{u}_{,k}. \quad (3.10)$$

Dans les coordonnées curvilignes orthogonales, en utilisant les équations (3.9) et (3.10), l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 \mathbf{C}^{(1k)} \mathbf{u}_{,k})}{\partial y_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 \mathbf{C}^{(2k)} \mathbf{u}_{,k})}{\partial y_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \mathbf{C}^{(3k)} \mathbf{u}_{,k})}{\partial y_3} \right] + \mathbf{p} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.11)$$

En supposant que l'interface rugueuse entre les deux phases est parfaite, alors le vecteur des déplacements et celui des contraintes sont continus à travers Γ . Donc,

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left[\left[\mathbf{C}^{(lk)} \mathbf{u}_{,k} n_l \right] \right] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

où $[[\bullet]] = \bullet^{(2)} - \bullet^{(1)}$ désigne le saut d'une quantité \bullet à travers Γ et n_l représente les composante du vecteur unitaire normal à l'interface Γ dirigé de $\Omega^{(1)}$ vers $\Omega^{(2)}$.

Dans le système des coordonnées curvilignes orthogonales en question, on définit

$$(\bullet)_{,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1}, \quad (\bullet)_{,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2}, \quad (\bullet)_{,3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_3} \quad (3.13)$$

avec h_1, h_2 et h_3 étant les coefficients métriques des coordonnées curvilignes. Le vecteur unitaire normal à Γ se calcule par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} (g_{,\xi_1}^2 + g_{,\xi_2}^2) + \frac{1}{h_3^2}}} \left(-\frac{g_{,\xi_1}}{\epsilon}, -\frac{g_{,\xi_2}}{\epsilon}, \frac{1}{h_3} \right)^T \quad (3.14)$$

où $(\bullet)_{,\xi_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_1}$ et $(\bullet)_{,\xi_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_2}$.

3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

Selon la méthode asymptotique, le champ des déplacements est considéré comme une fonction des variables macroscopiques (y_1, y_2, y_3) et des variables microscopiques (ξ_1, ξ_2) :

$$\mathbf{u}(y_1, y_2, y_3, t) = \mathbf{u}_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2, \epsilon, t).$$

Ensuite, le champ des déplacements $\mathbf{u}_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2, \epsilon, t)$ est exprimée sous forme d'une expansion asymptotique :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\epsilon(y_1, y_2, y_3, t) &= \mathbf{U} + \epsilon \left(\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{U} + \mathbf{A}^{(1i)} \mathbf{U}_{,i} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{A}^{(2)} \mathbf{U} + \mathbf{A}^{(2i)} \mathbf{U}_{,i} + \mathbf{A}^{(2ij)} \mathbf{U}_{,ij} \right) + 0(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans cette expression, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(y_1, y_2, y_3, t)$ est une fonction indépendante des variables microscopiques (ξ_1, ξ_2) , correspondant au champ des déplacements à l'échelle macroscopique. De plus, $\mathbf{A}^{(\bullet)} = \mathbf{A}^{(\bullet)}(\xi_1, \xi_2, y_3)$ sont des matrices 3×3 qui sont des fonctions périodiques de ξ_1 et ξ_2 .

Avec les définitions $\xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon}$ et $\xi_2 = \frac{y_2}{\epsilon}$, les dérivées du champ des déplacements par rapport aux variables y_i se calculent par

$$\mathbf{u}_{,\alpha} = \mathbf{u}_{\epsilon,\alpha} + \epsilon^{-1} \mathbf{u}_{\epsilon,\xi_\alpha}, \quad \mathbf{u}_{,3} = \mathbf{u}_{\epsilon,3}. \quad (3.16)$$

En introduisant (3.15) dans (3.16), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= \mathbf{U}_{,\alpha} + \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1)} \mathbf{U} + \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1i)} \mathbf{U}_{,i} \\ &+ \epsilon \left(\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{U}_{,\alpha} + \mathbf{A}^{(1i)} \mathbf{U}_{,i\alpha} + \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2)} \mathbf{U} + \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2i)} \mathbf{U}_{,i} + \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2ij)} \mathbf{U}_{,ij} \right) \\ &+ \epsilon^2 \left(\mathbf{A}^{(2)} \mathbf{U}_{,\alpha} + \mathbf{A}^{(2i)} \mathbf{U}_{,i\alpha} + \mathbf{A}^{(2ij)} \mathbf{U}_{,ij\alpha} \right) + 0(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,3} = & \mathbf{U}_{,3} + \epsilon \left\{ [\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{U}]_{,3} + [\mathbf{A}^{(1i)}\mathbf{U}_{,i}]_{,3} \right\} \\ & + \epsilon^2 \left\{ [\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{U}]_{,3} + [\mathbf{A}^{(2i)}\mathbf{U}_{,i}]_{,3} + [\mathbf{A}^{(2ij)}\mathbf{U}_{,ij}]_{,3} \right\} + 0(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

En substituant (3.17) et (3.18) dans (3.7) et en demandant que le coefficient associé à ϵ^{-1} soit égal à zéro, on déduit que

$$\left[\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1)} \right]_{,\xi_\alpha} \mathbf{U} + \left[\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(\alpha k)} \right]_{,\xi_\alpha} \mathbf{U}_{,k} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

De façon similaire, en introduisant (3.17) et (3.18) dans (3.12)₂ et en exigeant que le coefficient associé à ϵ^{-1} soit nul, il vient que

$$\left[\left[\left(\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1)} \right) g_{,\xi_\alpha} \right] \right] \mathbf{U} + \left[\left[\left(\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(\alpha k)} \right) g_{,\xi_\alpha} \right] \right] \mathbf{U}_{,k} = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Les équations (3.19) et (3.20) impliquent que

$$\left[\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1)} \right]_{,\xi_\alpha} = \mathbf{0}, \quad \xi \in \mathcal{S}, \quad \xi \notin \mathcal{L}, \quad (3.21)$$

$$\left[\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(\alpha k)} \right]_{,\xi_\alpha} = \mathbf{0}, \quad \xi \in \mathcal{S}, \quad \xi \notin \mathcal{L}, \quad (3.22)$$

$$\left[\left[\left(\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1)} \right) g_{,\xi_\alpha} \right] \right] = \mathbf{0}, \quad \xi \in \mathcal{L}, \quad (3.23)$$

$$\left[\left[\left(\mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(\alpha k)} \right) g_{,\xi_\alpha} \right] \right] = \mathbf{0}, \quad \xi \in \mathcal{L} \quad (3.24)$$

où $k = 1, 2$ ou 3 ; $\mathcal{S}(y_3) = \pi(y_3) \cup \mathcal{Y}$ et $\mathcal{L}(y_3) = \mathcal{S}(y_3) \cup \Gamma$. En outre, la condition de continuité (3.12)₁ du champ des déplacements à travers l'interface Γ et la condition de périodicité font que

$$\left[\left[\mathbf{A}^{(1)} \right] \right] = \mathbf{0}, \quad \left[\left[\mathbf{A}^{(1k)} \right] \right] = \mathbf{0}, \quad \xi \in \mathcal{L}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\xi_1, 0, y_3) = \mathbf{A}^{(1)}(\xi_1, 1, y_3), \quad \mathbf{A}^{(1)}(0, \xi_2, y_3) = \mathbf{A}^{(1)}(1, \xi_2, y_3), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{A}^{(1k)}(\xi_1, 0, y_3) = \mathbf{A}^{(1k)}(\xi_1, 1, y_3), \quad \mathbf{A}^{(1k)}(0, \xi_2, y_3) = \mathbf{A}^{(1k)}(1, \xi_2, y_3). \quad (3.27)$$

Remarquons que les équations de (3.21) à (3.27) constituent la formulation du problème de localisation. La résolution de ce problème nous conduit à dériver les matrices de localisation $\mathbf{A}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(1k)}$ avec $k = 1, 2$ ou 3 . On peut montrer que la matrice $\mathbf{A}^{(1)}$ correspond à une constante d'intégration par rapport à ξ_1 et ξ_2 . Donc, $\mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1)} = 0$ dans (3.21)-(3.27). Par ailleurs, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une interface ondulée périodiquement suivant une seule direction, les expressions de $\mathbf{A}^{(1k)}$ ne peuvent pas être analytiquement déterminées dans le cas présent où les ondulations se produisent suivant deux directions. Pour cette raison, une méthode numérique ou analytique approximative est nécessaire pour calculer $\mathbf{A}^{(1k)}$.

Ensuite, en insérant (3.17) et (3.18) dans l'équation du mouvement (3.7) et en posant le coefficient associé

à ϵ^0 égal à zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2)} + \mathbf{C}^{(\beta3)} \mathbf{A}_{,3}^{(1)} \right]_{,\xi_\beta} \mathbf{U} + \left\{ \left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(\beta k)} \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{C}^{(\beta3)} \mathbf{A}_{,3}^{(1k)} \right]_{,\xi_\beta} \right. \\
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right) \right]}{\partial y_3} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left(\mathbf{C}^{(1\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(1k)} \right) \right]}{\partial y_1} \\
& \left. + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(2\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(2k)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\} \mathbf{U}_{,k} \\
& + \left\{ \left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(\beta j)} \mathbf{A}^{(1i)} \right]_{,\xi_\beta} + \mathbf{C}^{(ji)} + \mathbf{C}^{(j\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1i)} \right\} \mathbf{U}_{,ij} + \mathbf{p} = \rho \ddot{\mathbf{U}}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Dans cette équation, les matrices de localisation d'ordre deux $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(2k)}$ et $\mathbf{A}^{(2ij)}$ sont déterminées en termes de $\mathbf{A}^{(1)}$ et $\mathbf{A}^{(1k)}$ de telle sorte qu'elles sont continues à travers \mathcal{L} , périodiques de période 1 en ξ_1 et ξ_2 et qu'elles vérifient les équations obtenues par la substitution de (3.17) et (3.18) dans (3.12)₂ et par la demande que le coefficient associé à ϵ^0 soit égal à zéro :

$$\left[\left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2)} + \mathbf{C}^{(\beta3)} \mathbf{A}_{,3}^{(1)} \right] \right] = \mathbf{0}, \tag{3.29}$$

$$\left[\left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(\beta j)} \mathbf{A}^{(1i)} \right] \right] = \mathbf{0}, \tag{3.30}$$

$$g_{,\xi_\beta} \left[\left[\mathbf{C}^{(\beta\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(\beta k)} \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{C}^{(\beta3)} \mathbf{A}_{,3}^{(1k)} \right] \right] = \left[\left[\frac{\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)}}{h_3} \right] \right]. \tag{3.31}$$

En intégrant l'équation (3.28) sur la surface \mathcal{S} d'une cellule de base \mathcal{Y} , en tenant compte des équations (3.29)-(3.31) et en appliquant le théorème de divergence, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\langle \mathbf{C}^{(ji)} + \mathbf{C}^{(j\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1i)} \right\rangle_{\mathcal{S}} \mathbf{U}_{,ij} + \left\langle \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right) \right]}{\partial y_3} \right. \\
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left(\mathbf{C}^{(1\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(1k)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(2\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(2k)} \right) \right]}{\partial y_2} \left. \right\rangle_{\mathcal{S}} \mathbf{U}_{,k} \\
& + \left\{ |S|^{-1} \int_{\mathcal{L}} \left[\left[\frac{1}{h_3} \left(\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right) \right] \right] \frac{dl}{|\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})|} \right\} \mathbf{U}_{,k} + \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \rho \rangle_{\mathcal{S}} \ddot{\mathbf{U}} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

où $|\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi})| = \sqrt{g_{,\xi_1}^2 + g_{,\xi_2}^2}$ et

$$\langle \bullet \rangle_{\mathcal{S}} = |S|^{-1} \int_{\mathcal{S}} (\bullet) dS = |S|^{-1} \int \int (\bullet) d\xi_1 d\xi_2. \tag{3.33}$$

De l'autre côté, en appliquant le lemme A.1 dans Kristensson (2005), on peut montrer que

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left(\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right) \right]}{\partial y_3} \right\rangle_{\mathcal{S}} + \left\{ |S|^{-1} \int_{\mathcal{L}} \left[\left[\frac{1}{h_3} \left(\mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right) \right] \right] \frac{dl}{|\nabla \mathbf{h}(\mathbf{y})|} \right\} \\
& = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\left[h_1 h_2 \left\langle \mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right\rangle_{\mathcal{S}} \right]}{\partial y_3}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

En combinant (3.34) et (3.32), il arrive que

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{C}^{(ji)} + \mathbf{C}^{(j\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1i)} \right\rangle_S \mathbf{U}_{,ij} + \left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_2 \left\langle \mathbf{C}^{(3\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(3k)} \right\rangle_S \right]}{\partial y_3} \right. \\ & \left. + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_2 h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(1\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(1k)} \right\rangle_S \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(2\alpha)} \mathbf{A}_{,\xi_\alpha}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(2k)} \right\rangle_S \right]}{\partial y_2} \right) \mathbf{U}_{,k} \\ & + \langle \mathbf{p} \rangle_S = \langle \rho \rangle_S \ddot{\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donc, l'équation du mouvement à l'échelle macroscopique prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{C}}_{ji}(\mathbf{y}_3) \mathbf{U}_{ij} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial \left[h_1 h_2 \bar{\mathbf{C}}^{3k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_3} + \frac{\partial \left[h_2 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{1k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{2k}(\mathbf{y}_3) \right]}{\partial y_2} \right) \mathbf{U}_{,k} \\ & + \bar{\mathbf{p}} = \bar{\rho} \ddot{\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

En comparant l'équation (3.35) avec l'équation (3.36), on voit que

$$\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(\mathbf{y}_3) = \left\langle \mathbf{C}^{(ik)} + \mathbf{C}^{(i\beta)} \mathbf{A}_{,\xi_\beta}^{(1k)} \right\rangle_S. \quad (3.37)$$

Le résultat de la cette section montre que la zone d'interface rugueuse peut être remplacée par une interphase équivalente dont les propriétés élastiques sont déterminées par (3.37). Cette interphase est homogène suivant la surface (y_1, y_2) mais hétérogène selon la direction y_3 .

3.3 Interfaces ondulées autour d'une surface plane et suivant deux directions

Dans le reste de ce chapitre, les résultats généraux obtenus ci-dessus seront appliqués au cas particulier où la surface autour de laquelle une interface oscille suivant deux direction n'est plus courbée mais plane.

3.3.1 Description et formulation du problème

Le domaine Ω occupé par le composite en question est constitué de deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. L'interface Γ entre ces derniers est parfaite. Dans le système des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , l'interface Γ oscille rapidement et périodiquement entre les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = -H_0$ avec $H_0 > 0$ et suivant les directions x_1 et x_2 avec la même période ϵ . Plus précisément, Γ est décrite par

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 = \hat{h}(x_1, x_2) \right\} \quad (3.38)$$

où $\hat{h}(x_1, x_2)$ est une fonction périodique ayant la propriété $\hat{h}(x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon) = \hat{h}(x_1, x_2)$. De plus, on suppose que la période ϵ est très petite par rapport à H_0 , i.e. $0 < \epsilon \ll H_0$. Ainsi, on dit que l'interface Γ est très rugueuse.

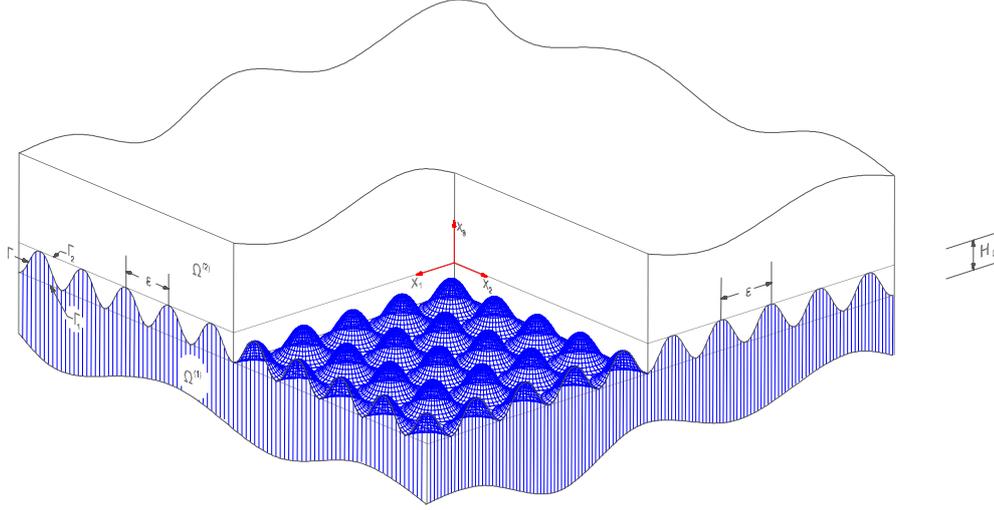


FIGURE 3.1: Domaine tridimensionnel Ω constitué de deux phases occupant deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ dont l'interface rugueuse Γ oscille périodiquement entre deux surfaces planes parallèles Γ_1 ($x_3 = -H_0$) et Γ_2 ($x_3 = 0$) et suivant les directions x_1 et x_2 avec la même période ϵ .

Pour les utilisations ultérieures, il est commode de définir la zone d'interface rugueuse

$$\omega^{(0)} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid -H_0 < x_3 < 0\} \quad (3.39)$$

et d'introduire le plan

$$\pi(x_3^0) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \omega^{(0)} \mid x_3 = x_3^0, -H_0 < x_3 < 0 \right\}. \quad (3.40)$$

Les dimensions de $\pi(x_3)$ suivant les directions x_1 et x_2 sont désignées respectivement par $l_1(x_3)$ et $l_2(x_3)$. Pour ce qui suit, il convient de définir les sous-domaines

$$\omega^{(1)} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 < -H_0\}, \quad (3.41)$$

$$\omega^{(2)} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid 0 > x_3\}. \quad (3.42)$$

L'interface entre $\omega^{(0)}$ et $\omega^{(\alpha)}$ est dénotée par Γ_α avec $\alpha = 1$ ou 2 .

Dans le système des coordonnées cartésiennes, l'équation de mouvement s'écrit :

$$(\mathbf{C}^{(lk)} \mathbf{u}_{,k})_{,l} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{or} \quad (C_{ij}^{(lk)} u_{j,k})_{,l} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (3.43)$$

Comme l'interface Γ est parfaite, le vecteur des déplacements et celui des contraintes sont continus à travers Γ :

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad [[\mathbf{C}^{(lk)} \mathbf{u}_{,k} m_l]] = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

où $[[\bullet]] = \bullet^{(2)} - \bullet^{(1)}$ dénote le saut de \bullet à travers Γ et m_l est une composante du vecteur unitaire \mathbf{m} normal à Γ :

$$\mathbf{m} = \frac{\epsilon^{-1}}{\sqrt{1 + \epsilon^{-2}(h_{,y_1}^2 + h_{,y_2}^2)}} [h_{,y_1}, h_{,y_2}, -\epsilon]^T. \quad (3.45)$$

À l'échelle mésoscopique, la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ est homogénéisée dans le plan $x_1 - x_2$ mais reste généralement hétérogène selon direction x_3 . En d'autres termes, la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ est remplacée par une interphase équivalente dont la loi de comportement effective est exprimée par

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{C}}(x_3)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3.46)$$

où $\bar{\mathbf{C}}(x_3)$ est le tenseur de rigidité effectif de la couche équivalente, \mathbf{S} et \mathbf{E} sont respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations à l'échelle mésoscopique.

3.3.2 Homogénéisation de la zone d'interface rugueuse

Considérons la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ caractérisée par (3.39) et obtenue à partir de la duplication périodique de la cellule de base \mathcal{Y} selon les directions x_1 et x_2 . La méthode d'analyse asymptotique est appliquée pour déterminer le tenseur d'élasticité effectif $\bar{\mathbf{C}}(x_3)$ de $\omega^{(0)}$. D'après la formule (3.37), on a

$$\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3) = \left\langle \mathbf{C}^{(ik)} + \mathbf{C}^{(i\beta)} \mathbf{A}_{,y_\beta}^{(1k)} \right\rangle_{\mathcal{S}}. \quad (3.47)$$

Les matrices de localisation $\mathbf{A}^{(1k)}$ ne peuvent pas être analytiquement et exactement déterminées dans le cas présent où l'interface Γ est ondulée dans deux directions. Par conséquent, une méthode numérique ou une méthode analytique approximative devient nécessaire pour calculer $\mathbf{A}^{(1k)}$ à partir des équations (3.22), (3.24), (3.25)₂ et (3.27). Ensuite, on pourra calculer le tenseur d'élasticité effectif $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$ de la zone d'interface rugueuse défini par (3.47).

Pour une valeur donnée de $x_3 \in (-H_0, 0)$, dans le but de calculer $\mathbf{A}^{(1k)}(y_1, y_2, x_3)$ et $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$, on considère un domaine tridimensionnel M défini via $M = \pi(x_3) \times]-H_0, 0[$. Par simplification, les deux phases constituantes de M sont supposées individuellement homogènes. On fait M subir à une déformation uniforme sur la surface externe ∂M comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial M \quad (3.48)$$

où \mathbf{E} est un tenseur des déformations macroscopique qui est constant. Puisque la microstructure de M est invariant dans la direction x_3 et périodique dans les directions x_1 et x_2 , en considérant une cellule de base arbitraire \mathcal{Z} de M , par exemple $\mathcal{Z} = \mathcal{S}(x_3) \times]-H_0, 0[$, le champ des déplacements dans \mathcal{Z} peut être représenté sous la forme générale suivante :

$$u_i(y_1, y_2, x_3) = E_{i\alpha} y_\alpha + E_{i3} x_3 + \varphi_{ijk}(y_1, y_2) E_{jk}, \quad (3.49)$$

où $\varphi_{ijk}(y_1, y_2)$ est la fonction de localisation possédant la symétrie indicelle $\varphi_{ijk}(y_1, y_2) = \varphi_{ikj}(y_1, y_2)$. Remarque que, les premier et deuxième termes dans le membre droit de (3.49) correspondent au champ

des déplacements globaux tandis que le troisième dans le membre droit de (3.49) représente la fluctuation microscopique des déplacements. Donc, les composantes du tenseur des déformations microscopiques sont données par

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha j k, y_\beta} + \varphi_{\beta j k, y_\alpha}) E_{j k}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \varepsilon_{3\alpha} = E_{\alpha 3} + \frac{1}{2} \varphi_{3 j k, y_\alpha} E_{j k}, \quad \varepsilon_{33} = E_{33}.\end{aligned}\quad (3.50)$$

En comparant les équations (3.22), (3.24), (3.25)₂ et (3.27) avec celles obtenues par l'introduction de (3.49) dans (3.7) en absence de toute force volumique et en tenant compte des conditions de continuité (3.12) et des conditions de périodicité sur la surface externe de \mathcal{Z} , on peut montrer que

$$A_{ij}^{(1k)}(y_1, y_2) = \varphi_{ijk}(y_1, y_2), \quad A_{ij, y_\beta}^{(1k)}(y_1, y_2) = \varphi_{ijk, y_\beta}(y_1, y_2). \quad (3.51)$$

Donc, la matrice de localisation $\mathbf{A}^{(1k)}$ peut être déterminé à partir du champ solution des déplacements $\mathbf{u}(y_1, y_2, x_3)$ à l'aide de la relation (3.51). Par conséquent, les composantes du tenseur d'élasticité effective pour la zone d'interface rugueuse sont déterminées par

$$\begin{aligned}\bar{L}_{piqk}(x_3) &= \bar{C}_{pq}^{(ik)}(x_3) = \left\langle C_{pq}^{(ik)} + C_{pm}^{(i\beta)} \varphi_{mqk, y_\beta} \right\rangle_{\mathcal{S}} \\ &= \eta_1 C_{pq}^{(1)(ik)} + \eta_2 C_{pq}^{(2)(ik)} + \eta_1 C_{pm}^{(1)(i\beta)} \langle \varphi_{mqk, y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}_1} \\ &\quad + \eta_2 C_{pm}^{(2)(i\beta)} \langle \varphi_{mqk, y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}_2}\end{aligned}\quad (3.52)$$

où η_α est la fraction surfacique de la phase α telle que $\eta_1 + \eta_2 = 1$ et $\langle \bullet \rangle_{\mathcal{S}_\alpha}$ désigne la moyenne surfacique de \bullet pour la phase α .

3.3.3 Méthode numérique basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT)

Pour trouver numériquement le champ des déplacements \mathbf{u} qui prend la forme (3.49) et intervient dans la formule (3.52) permettant de calculer le tenseur d'élasticité effectif $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$), on propose ici une méthode basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT) et faisant intervenir une procédure itérative. L'algorithme correspondant est récapitulé comme suit :

– Itération $i = 1$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^1(y_1, y_2) &= \mathbf{E}, \\ \sigma^1(y_1, y_2) &= \mathbb{L}(y_1, y_2) \varepsilon^1(y_1, y_2).\end{aligned}$$

– Itération $i > 1$:

Supposant que $\varepsilon^i(y_1, y_2)$, $\sigma^i(y_1, y_2)$ sont connus, alors

$$\hat{\sigma}^i(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}(\sigma^i(y_1, y_2)).$$

Test de convergence :

– Le processus d’itération est stoppé si

$$\frac{\|\hat{\sigma}^i(\xi_1, \xi_2) - \hat{\sigma}^{i-1}(\xi_1, \xi_2)\|}{\|\hat{\sigma}^i(\xi_1, \xi_2)\|} < \delta.$$

– Sinon,

$$\hat{\varepsilon}^{i+1}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\varepsilon}^i(\xi_1, \xi_2) - \hat{\Gamma}^0(\xi_1, \xi_2)\hat{\sigma}^{i+1}(\xi_1, \xi_2),$$

$$\varepsilon^{i+1}(y_1, y_2) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varepsilon}^{i+1}(\xi_1, \xi_2)),$$

$$\sigma^{i+1}(y_1, y_2) = \mathbb{L}(y_1, y_2)\varepsilon^{i+1}(y_1, y_2).$$

Ci-dessus, $\mathcal{F}(\bullet)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\bullet)$ signifient la transformée de Fourier discrète et son inverse ; $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ est le vecteur d’onde discrète ; $\hat{\Gamma}^0$ représente la transformée de Fourier de l’opérateur de Green associé au milieu homogène de référence dont le tenseur de rigidité élastique est \mathbb{L}^0 . Pour plus de détails sur cette méthode, le lecteur peut se référer aux articles de Moulinec et Suquet (1994) et Bonnet (2007).

Il est important de noter que la méthode numérique basée sur la transformé de Fourier rapide et sur la méthode itérative est valable indépendamment des anisotropies que les phases constituantes peuvent avoir. En plus, ces phases peuvent être hétérogènes selon la direction x_3 . Pour une valeur donnée de $x_3 \in (-H_0, 0)$, le schéma numérique ci-dessus est valable pour toute microstructure périodique de la surface plane $\pi(x_3)$.

3.3.4 Schéma auto-cohérent généralisé

Dans le but de déterminer analytiquement et approximativement le tenseur d’élasticité effectif $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$) de la zone d’interface rugueuse décrite par (3.52), le schéma auto-cohérent généralisé (SACG) est maintenant adopté pour calculer le champ des déplacements \mathbf{u} . Ce modèle fut initié par Kerner (1956), Van der Poel (1958), amélioré par Smith (1974, 1975) et complété par Christensen and Lo (1979).

Plus précisément, dans notre cas, l’application du SACG consiste d’abord à considérer un cylindre composite circulaire de hauteur H_0 , composé d’un noyau (phase 1) qui est enrobé par la phase 2. Ce cylindre composite est noyé dans un milieu homogène M de la même hauteur H_0 mais infini dans le plan transversal. Le rayon du noyau et le rayon extérieur de la couche enrobant le noyau, dénotés respectivement par r_1 et r_2 , sont choisis de telle manière qu’ils sont compatibles avec les fractions volumiques des phases 1 et 2. Dans ce qui suit, les deux phase constituantes sont supposées individuellement homogènes et

isotropes. Donc, le tenseur d'élasticité $\mathbb{L}^{(\alpha)}$ de la phase α prend la forme simple

$$\mathbb{L}^{(\alpha)} = (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\mathbb{J} + 2\mu_\alpha\mathbb{K} \quad (3.53)$$

où $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ avec \mathbf{I} and \mathbb{I} étant respectivement les tenseur d'identité d'ordre deux et d'ordre quatre ; λ_α et μ_α sont les constantes de Lamé de la phase α . Le milieu homogène externe du cylindre composite est constitué du matériau élastique effectif caractérisé par le tenseur d'élasticité effectif inconnu $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$) et il est soumis aux conditions aux limites (3.48) sur sa frontière externe ∂M .

Le SACG de Christensen and Lo (1979) demande que la présence du cylindre composite circulaire ne modifie pas l'énergie initiale des déformations. Il a été prouvé que cette condition énergétique d'auto-cohérence est équivalente à la demande que la moyenne volumique du tenseur des déformations du cylindre composite soit égale au tenseur des déformations macroscopiques \mathbf{E} intervenant dans les conditions aux limites (3.48) imposées sur ∂M (voir Hervé and Zaoui, 1990, 1995). En tenant compte (3.49), cette condition revient à écrire

$$\langle \varphi_{mqk,y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}} = \eta_1 \langle \varphi_{mqk,y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}_1} + \eta_2 \langle \varphi_{mqk,y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}_2} = 0. \quad (3.54)$$

En combinant (3.52) avec (3.54), l'expression de $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbf{C}}^{(ik)}(x_3)$) réduit à

$$\bar{L}_{piqk}(x_3) = \bar{C}_{pq}^{(ik)}(x_3) = \eta_1 C_{pq}^{(1)(ik)} + \eta_2 C_{pq}^{(2)(ik)} + \eta_1 (C_{pm}^{(1)(i\beta)} - C_{pm}^{(2)(i\beta)}) B_{mqk\beta}, \quad (3.55)$$

avec $B_{mqk\beta} = \langle \varphi_{mqk,y_\beta} \rangle_{\mathcal{S}_1}$.

On se propose maintenant de calculer toutes les composantes $B_{mqk\beta}$ du tenseur d'ordre quatre \mathbb{B} . Pour ceci, on suppose que M est soumis successivement aux conditions aux limites suivantes :

– Chargement hydrostatique dans le plan :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma_1(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{x} \in \partial M; \quad (3.56)$$

– Traction normal :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma_2 x_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x} \in \partial M; \quad (3.57)$$

– Cisaillement longitudinal anti-plan :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma_3(x_3\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{x} \in \partial M; \quad (3.58)$$

– Cisaillement transversal anti-plan :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma_4(x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{x} \in \partial M, \quad (3.59)$$

Dans les conditions aux limites (3.56)-(3.59), γ_1 , γ_2 , γ_3 , et γ_4 sont des constantes. Pour chacune de ces conditions aux limites, on peut analytiquement et exactement trouver les champs des déplacements,

des déformations et des contraintes dans le noyau, dans la couche d'enrobage et le milieu externe du cylindre composite circulaire. Les détails de calcul et les solutions sont donnés dans les papiers de Christensen and Lo (1979) et Hashin (2002).

En utilisant les résultats donnés par Christensen and Lo (1979) et Hashin (2002) et en tenant compte de (3.50), on trouve les composantes non nulles de \mathbb{B} :

$$\begin{aligned}
B_{1111} &= B_{2222} = \frac{1}{2}\zeta_1(\lambda_2 + 2\mu_2) + \frac{1}{2}\zeta_2 - 1, \\
B_{2112} &= B_{1221} = \frac{1}{2}\zeta_1(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{1}{2}\zeta_2 \\
B_{3131} &= B_{3232} = \frac{2\mu_2}{\eta_1(\mu_2 - \mu_1) + \mu_2 + \mu_1} - 1, \\
B_{1331} &= B_{2332} = \frac{1}{2}\zeta_1\eta_2(\lambda_2 - \lambda_1), \\
B_{2121} + B_{1122} &= \zeta_2 - 1, \quad B_{2231} + B_{1232} = 0, \\
B_{1112} + B_{2111} &= 0, \quad B_{2221} + B_{1222} = 0, \\
B_{1132} + B_{2131} &= 0, \quad B_{2331} + B_{1332} = 0,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

où

$$\zeta_1 = \frac{1}{\eta_1(\lambda_2 + \mu_2 - \lambda_1 - \mu_1) + \mu_2 + \mu_1 + \lambda_1}, \quad \zeta_2 = \frac{3}{2\lambda_1}d_1\eta_1(\mu_1 + \lambda_1) + c_1.$$

Dans cette équation, c_1 et d_1 sont deux constantes inconnues qui peuvent être déterminées à l'aide du système des 7 équations linéaires suivant :

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Z}. \tag{3.61}$$

Ci-dessus, la matrice \mathbf{Y} et les vecteurs \mathbf{X} and \mathbf{Z} sont fournis par

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & -\frac{1}{\eta_1^2} & -\frac{1}{\eta_1} & -1 & -\eta_1 & 0 \\ 1 & \frac{(3\mu_1+2\lambda_1)\eta_1}{\lambda_1} & \frac{1}{\eta_1^2} & \frac{\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -1 & -\frac{(3\mu_2+2\lambda_2)\eta_1}{\lambda_2} & 0 \\ \mu_1 & 0 & \frac{3\mu_2}{\eta_1^2} & \frac{2(\mu_2+\lambda_2)\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -\mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \frac{3(\mu_1+\lambda_1)\mu_1\eta_1}{\lambda_1} & -\frac{3\mu_2}{\eta_1^2} & -\frac{(\lambda_2+\mu_2)\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -\mu_2 & -\frac{3(\mu_2+\lambda_2)\mu_2\eta_1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2} & -1 & -\frac{3\mu_2+2\lambda_2}{\lambda_2} & -1 \\ 0 & 0 & 3\mu_2 & \frac{2(\lambda_2+\mu_2)\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2} & -\mu_2 & 0 & -3m_e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = [c_1 \quad d_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2 \quad a_e]^T, \quad \mathbf{Z} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad -m_e]^T.$$

Ici, m_e correspond à la solution positive de l'équation quadratique suivante :

$$f(m_e) = \xi_2(m_e)^2 + \xi_1 m_e + \xi_0 = 0, \tag{3.62}$$

où le déterminant $f(m_e)$ est précisé par

$$f(m_e) = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & -\frac{1}{\eta_1^2} & -\frac{1}{\eta_1} & -1 & -\eta_1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{(3\mu_1+2\lambda_1)\eta_1}{\lambda_1} & \frac{1}{\eta_1^2} & \frac{\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -1 & -\frac{(3\mu_2+2\lambda_2)\eta_1}{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & \frac{3\mu_2}{\eta_1^2} & \frac{2(\mu_2+\lambda_2)\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \frac{3(\mu_1+\lambda_1)\mu_1\eta_1}{\lambda_1} & -\frac{3\mu_2}{\eta_1^2} & -\frac{(\lambda_2+\mu_2)\mu_2}{(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} & -\mu_2 & -\frac{3(\mu_2+\lambda_2)\mu_2\eta_1}{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2} & -1 & -\frac{3\mu_2+2\lambda_2}{\lambda_2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3\mu_2 & \frac{2(\lambda_2+\mu_2)\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2} & -\mu_2 & 0 & -3m_e & -m_e \\ 0 & 0 & 3\mu_2 & \frac{(\mu_2+\lambda_2)\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2} & \mu_2 & \frac{3(\mu_2+\lambda_2)\mu_2}{\lambda_2} & -3m_e & -m_e \end{vmatrix} \quad (3.63)$$

et les coefficients ξ_0 , ξ_1 et ξ_2 sont déterminés par

$$\xi_2 = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1)] - f(0), \quad \xi_1 = \frac{1}{2}[f(1) - f(-1)], \quad \xi_0 = f(0). \quad (3.64)$$

Finalement, en introduisant les expressions (3.60) de \mathbb{B} dans (3.55), on obtient les formules pour les composantes non nulles du tenseur d'élasticité effectif $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbb{C}}^{(ik)}(x_3)$) :

$$\begin{aligned} \bar{L}_{1111} &= \bar{L}_{2222} = \bar{C}_{11}^{(11)} = \bar{C}_{22}^{(22)} = \lambda_2 + 2\mu_2 + \eta_1\zeta_1\theta(\lambda_2 + 2\mu_2) \\ &\quad + \eta_1\zeta_2(\mu_1 - \mu_2), \\ \bar{L}_{1122} &= \bar{L}_{2211} = \bar{C}_{12}^{(12)} = \bar{C}_{21}^{(21)} = \lambda_2 + \eta_1\zeta_1\theta(\lambda_2 + 2\mu_2) - \eta_1\zeta_2(\mu_1 - \mu_2), \\ \bar{L}_{1133} &= \bar{L}_{3311} = \bar{L}_{2233} = \bar{L}_{3322} = \bar{C}_{13}^{(13)} = \bar{C}_{23}^{(23)} = \bar{C}_{31}^{(31)} = \bar{C}_{32}^{(32)} \\ &= \eta_1\lambda_1 + \eta_2\lambda_2 + \eta_1\eta_2\zeta_1\theta(\lambda_2 - \lambda_1), \\ \bar{L}_{3333} &= \bar{C}_{33}^{(33)} = \eta_1(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \eta_1\eta_2\zeta_1(\lambda_1 - \lambda_2)^2, \\ \bar{L}_{2323} &= \bar{L}_{2332} = \bar{L}_{3223} = \bar{L}_{3232} = \bar{L}_{1313} = \bar{L}_{1331} = \bar{L}_{3113} = \bar{L}_{3131} = \bar{C}_{22}^{(33)} \\ &= \bar{C}_{11}^{(33)} = \bar{C}_{33}^{(11)} = \bar{C}_{33}^{(22)} = \bar{C}_{32}^{(23)} = \bar{C}_{23}^{(32)} = \bar{C}_{31}^{(13)} = \bar{C}_{13}^{(31)} \\ &= \eta_1\mu_1 + \eta_2\mu_2 - \frac{\eta_1\eta_2(\mu_1 - \mu_2)^2}{\eta_1(\mu_2 - \mu_1) + \mu_2 + \mu_1}, \\ \bar{L}_{1212} &= \bar{L}_{1221} = \bar{L}_{2112} = \bar{L}_{2121} = \bar{C}_{11}^{(22)} = \bar{C}_{12}^{(21)} = \bar{C}_{21}^{(12)} = \bar{C}_{22}^{(11)} \\ &= \eta_1\mu_1 + \eta_2\mu_2 + \eta_1(\mu_1 - \mu_2)(\zeta_2 - 1). \end{aligned} \quad (3.65)$$

où

$$\theta = \lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2.$$

En résumé, en appliquant le SACG, toutes les composantes du tenseur d'élasticité effectif $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ (ou $\bar{\mathbb{C}}^{(ik)}(x_3)$) de la zone d'interface rugueuse sont estimées de façon analytique explicite. Cependant, on rappelle que ces résultats sont valables sous la condition que les deux phases constituantes du composite sont individuellement homogènes et isotropes.

3.3.5 Homogénéisation des composites élastiques stratifiés avec interfaces périodiquement rugueuses

Le stratifié $\Omega =]0, l_1[\times]0, l_2[\times] - H_0 - H_1, H_2[$ considéré dans cette section est initialement constitué de deux phases parfaitement collées à travers leur interface Γ qui oscille rapidement autour d'un plan et périodiquement suivant deux directions. Après avoir homogénéisé la zone d'interface rugueuse $\omega^{(0)}$ définie par (3.39) via une méthode numérique ou analytique approximative comme celles présentées dans les deux sous-sections précédentes, le stratifié est maintenant composé des trois couches $\omega^{(1)}$, $\omega^{(0)}$ et $\omega^{(2)}$. Les interfaces Γ_α entre $\omega^{(0)}$ et $\omega^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) sont parfaitement collées et les propriétés de $\omega^{(0)}$ et $\omega^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) sont précisées par

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{L}^{(1)}(x_3), & \text{if } -(H_0 + H_1) \leq x_3 \leq -H_0, \\ \bar{\mathbb{L}}(x_3), & \text{if } -H_0 < x_3 < 0, \\ \mathbb{L}^{(2)}(x_3), & \text{if } 0 \leq x_3 \leq H_2, \end{cases} \quad (3.66)$$

où les composantes du tenseur de rigidité $\bar{\mathbb{L}}(x_3)$ sont données par (3.65).

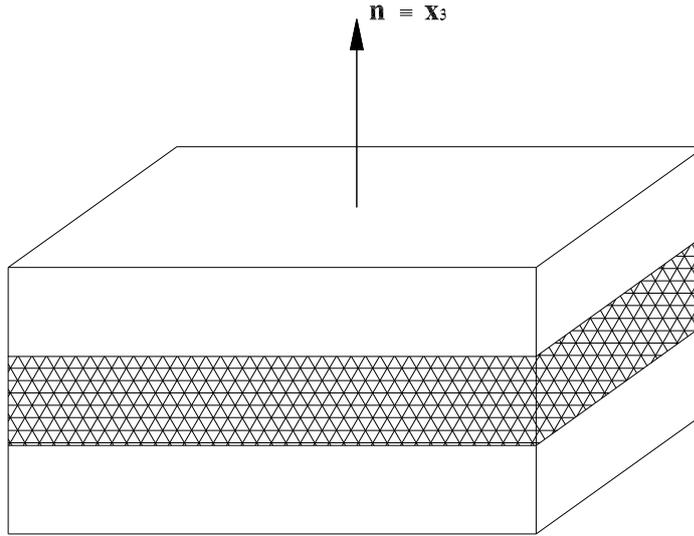


FIGURE 3.2: Composite stratifié à trois couches

Il convient d'écrire la loi de Hooke sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & \sqrt{2}L_{1123} & \sqrt{2}L_{1113} & \sqrt{2}L_{1112} \\ L_{1122} & L_{2222} & L_{2233} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{2213} & \sqrt{2}L_{2212} \\ L_{1133} & L_{2233} & L_{3333} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{1123} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{3323} & 2L_{2323} & 2L_{2313} & 2L_{2312} \\ \sqrt{2}L_{1113} & \sqrt{2}L_{2213} & \sqrt{2}L_{3313} & 2L_{2313} & 2L_{1313} & 2L_{1312} \\ \sqrt{2}L_{1112} & \sqrt{2}L_{2212} & \sqrt{2}L_{3312} & 2L_{2312} & 2L_{1312} & 2L_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \sqrt{2}\epsilon_{23} \\ \sqrt{2}\epsilon_{13} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Si l'on divise la matrice d'élasticité $\mathbb{L}(\mathbf{x}_3)$ en blocs comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{33} &= \begin{bmatrix} L_{3333} & \sqrt{2}L_{3332} & \sqrt{2}L_{3331} \\ \sqrt{2}L_{3332} & 2L_{3232} & 2L_{3231} \\ \sqrt{2}L_{3331} & 2L_{3231} & 2L_{3131} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{31} &= \begin{bmatrix} L_{3311} & L_{3322} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{1132} & \sqrt{2}L_{2232} & 2L_{1232} \\ \sqrt{2}L_{1131} & \sqrt{2}L_{2231} & 2L_{1231} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{11} &= \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & \sqrt{2}L_{1112} \\ L_{1122} & L_{2222} & \sqrt{2}L_{2212} \\ \sqrt{2}L_{1112} & \sqrt{2}L_{2212} & 2L_{1212} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

avec $\mathbf{C}_{13} \equiv \mathbf{C}_{13}^T$, le tenseur de rigidité effectif \mathbb{L}^* du stratifié à trois couches est déterminé par les expressions classiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{33}^* &= \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \\ \mathbf{C}_{31}^* &= \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle, \\ \mathbf{C}_{11}^* &= \langle \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{13} \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle + \langle \mathbf{C}_{13} \mathbf{C}_{11} \rangle \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{C}_{33}^{-1} \mathbf{C}_{31} \rangle. \end{aligned} \quad (3.68)$$

avec

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H_0+H_1)}^{-H_0} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H_0}^0 \bar{\bullet} dx_3 + \int_0^{H_2} \bullet^{(2)} dx_3 \right) \quad (3.69)$$

où $H = H_0 + H_1 + H_2$.

3.4 Exemples numériques

Les résultats obtenus dans la section précédente pour la zone d'interface rugueuse et pour le composite stratifié avec interfaces très rugueuses sont maintenant numériquement illustrés et étudiés en considérant un exemple dans lequel une interface périodique rugueuse a une cellule de base du profil conique. Les deux phases isotropes constituantes choisies ont les modules d'Young et les coefficients de Poisson suivants :

$$E_1 = 73.1GPa, \quad \nu_1 = 0.22, \quad E_2 = 3.45GPa, \quad \nu_2 = 0.35.$$

En appliquant la méthode numérique basée sur la transformée de Fourier rapide (TFR) et le SACG, les composantes non nulles normalisées du tenseur d'élasticité effectif $\bar{L}_{ijkl}/L_{ijkl}^{(2)}$ pour la zone d'interface rugueuse sont tracées dans les figures (3.3) et (3.4) en fonction de la fraction surfacique η_1 de la phase 1. En comparant les résultats des figures (3.3) et (3.4), on trouve que avec $\eta_1 \leq 0.3$, les résultats approximatifs obtenus par le SACG sont très proches de ceux obtenus par la méthode numérique basée sur la TFR.

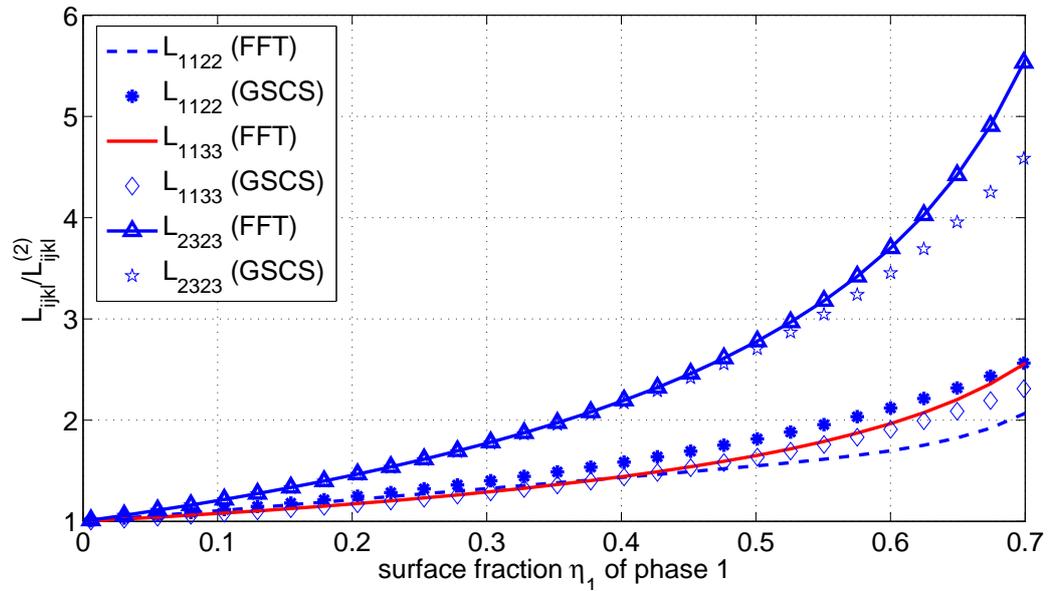


FIGURE 3.3: Module effectif normalisé $\bar{L}_{1122}/L_{1122}^{(2)}$, $\bar{L}_{1133}/L_{1133}^{(2)}$ et $\bar{L}_{2323}/L_{2323}^{(2)}$ de la zone d'interface rugueuse obtenu par la méthode basée sur TFR et le schéma ACG en fonction de la fraction surfacique η_1 de la phase 1

Ensuite, pour examiner l'influence de la zone d'interface rugueuse sur les propriétés élastiques effectives du composite stratifié, on considère un composite stratifié dans lequel la période ϵ de l'interface rugueuse et les épaisseurs H_1 et H_2 du composite stratifié sont constants, tant que l'épaisseur H_0 de la zone d'interface varie de ϵ à 10ϵ . La zone d'interface rugueuse est homogénéisée comme une interphase équivalente en utilisant la TFR et le SACG. Les composantes non nulles normalisées du tenseur d'élasticité effectif $L_{ijkl}^*/L_{ijkl}^{(2)}$ du composite stratifié sont déterminées par l'équation (3.68) et tracées dans la figure (3.5) et (3.6) en fonction du rapport H_0/ϵ . Les valeurs des propriétés élastiques effectives du composite stratifié sont comparées dans les figures (3.5) et (3.6) avec celles obtenue en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et celles obtenues par le SACG. Les figures (3.5) et (3.6) montrent un bon accord entre les résultats obtenus par TFR, SACG et FEM pour les propriétés élastiques effectives. Ceci confirme la validité des résultats numériques et analytique approximatif obtenus par TFR, SACG et la théorie classique d'homogénéisation des composites stratifiés avec interfaces planes lisses pour le tenseur d'élasticité effectif de ces derniers avec interfaces très rugueuses.

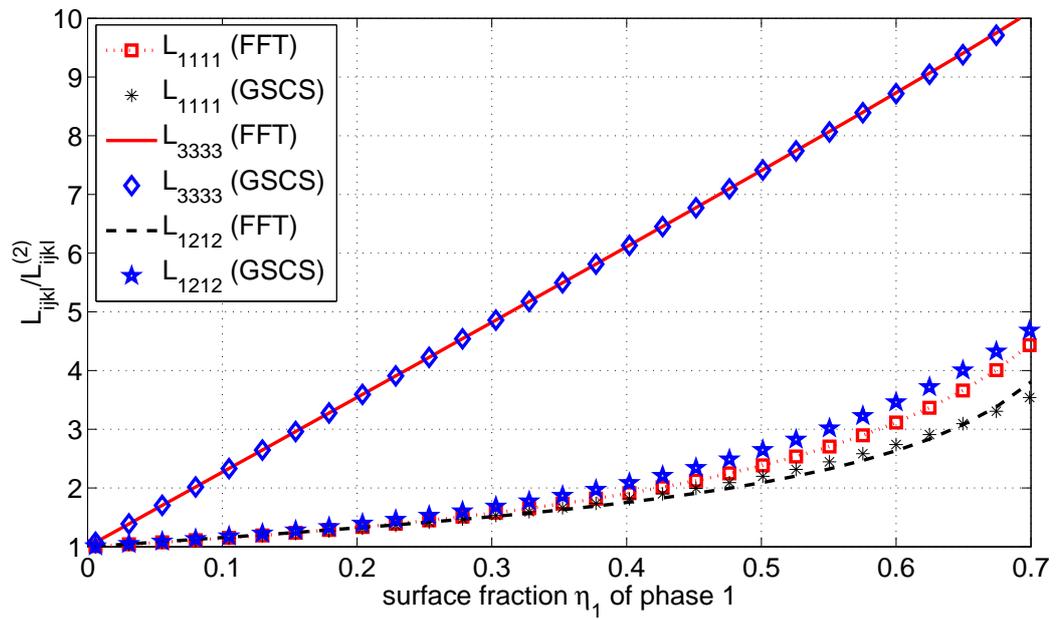


FIGURE 3.4: Module effectif normalisé $\bar{L}_{1111}/L_{1111}^{(2)}$, $\bar{L}_{3333}/L_{3333}^{(2)}$ et $\bar{L}_{1212}/L_{1212}^{(2)}$ de la zone d'interface rugueuse obtenu par la méthode basée sur TFR et le schéma ACG en fonction de la fraction surfacique η_1 de la phase 1

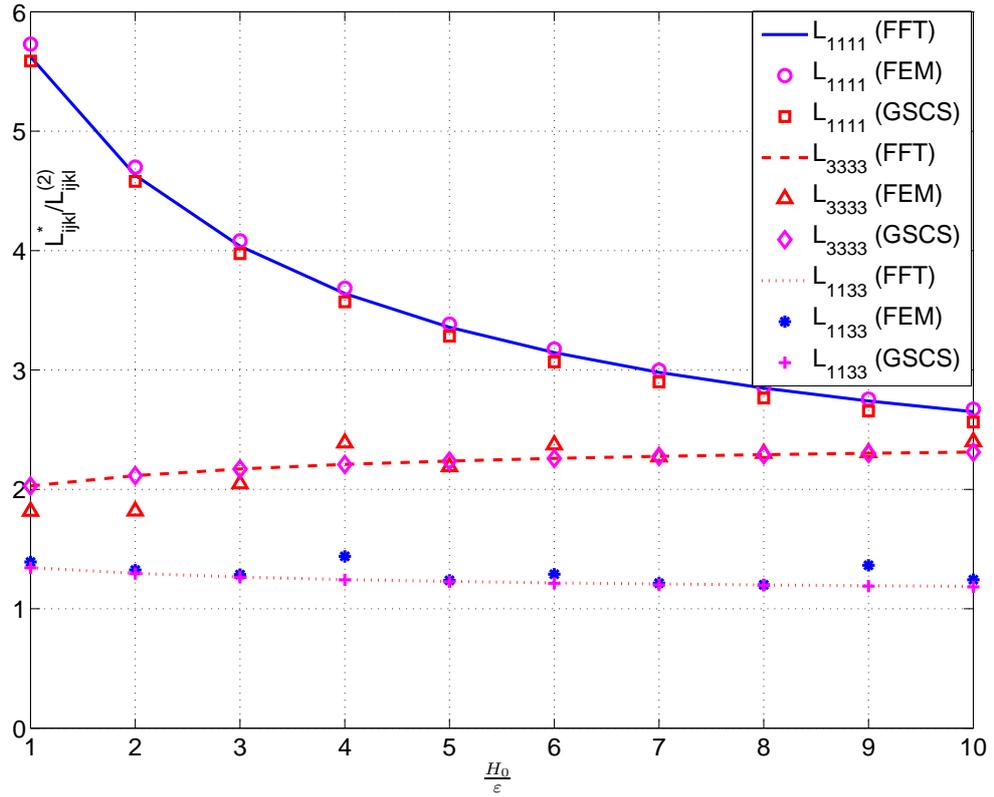


FIGURE 3.5: Module effectif normalisé $L_{1111}^*/L_{1111}^{(2)}$, $L_{3333}^*/L_{3333}^{(2)}$ et $L_{1133}^*/L_{1133}^{(2)}$ en fonction du rapport H_0/ϵ du composite stratifié avec $H_1 = H_2 = \epsilon$ obtenu par la méthode basée sur TFR, la méthode des EF et le schéma ACG.

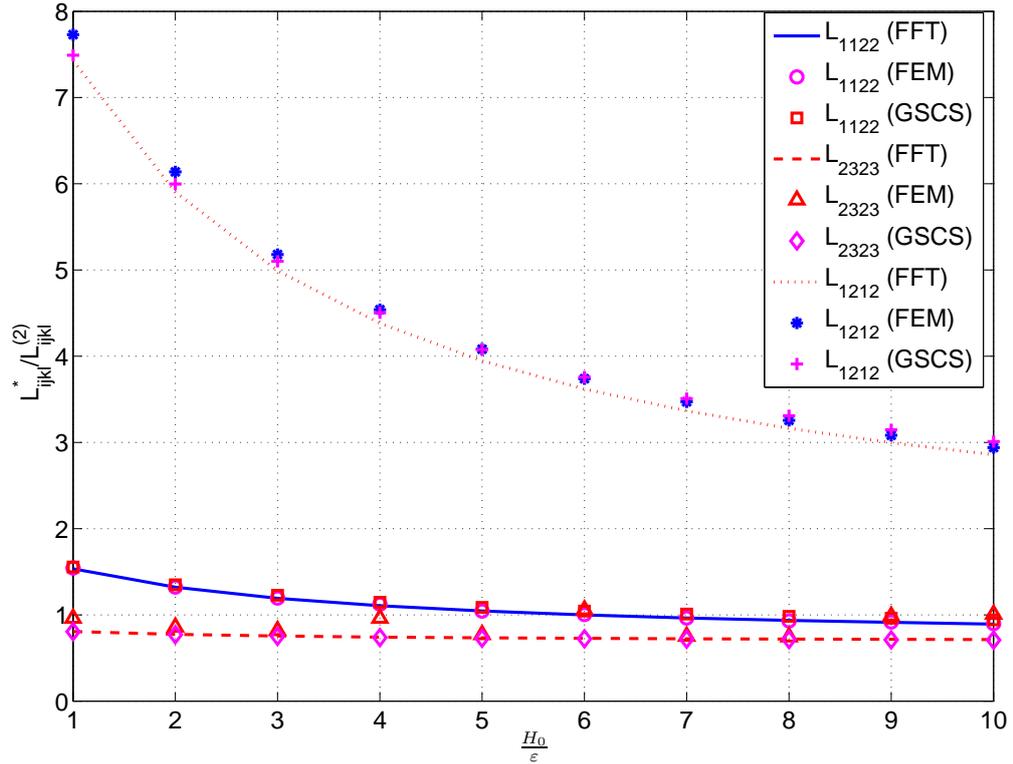


FIGURE 3.6: Module effectif normalisé $L_{1122}^*/L_{1122}^{(2)}$, $L_{2323}^*/L_{2323}^{(2)}$ et $L_{1212}^*/L_{1212}^{(2)}$ en fonction du rapport H_0/ϵ du composite stratifié avec $H_1 = H_2 = \epsilon$ obtenu par la méthode basée sur TFR, la méthode des EF et le schéma ACG.

Chapitre 4

Interfaces ondulées autour d'une surface lisse quelconque dans le cas général des phénomènes multiphysiques couplés

Dans les chapitres précédents, les interfaces ondulées entre les phases d'un composite ont été étudiées dans les problèmes simples en élasticité et en conduction thermique afin de déterminer tout d'abord les propriétés effectives de la zone d'interface rugueuse à l'échelle mésoscopique et estimer ensuite les propriétés effectives du composite en question à l'échelle macroscopique. Avec les mêmes objectifs, ce chapitre consiste à généraliser les résultats obtenus précédemment à des phénomènes multiphysiques couplés et complexes quelconques. Pour illustrer les résultats établis dans ce chapitre, deux problèmes couplés en thermoélectrique et en piézoélectrique seront présentés en détail.

4.1 Formulation du problème

Dans un espace tridimensionnel Euclidien \mathbb{R}^3 , nous considérons un domaine Ω constitué de deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. L'interface entre deux sous-domaines, notée par Γ , est considérée parfaite. La surface extérieure de Ω est désignée par $\partial\Omega$.

Supposons maintenant que les deux matériaux occupant les deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ sont anisotropes curvilignement homogènes et possèdent des comportements linéairement multiphysiques couplés. En introduisant les coordonnées curvilignes $\{y_1, y_2, y_3\}$ associée à une base orthonormée $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ comme dans le chapitre 2, les lois constitutives des phases peuvent être exprimées par les relations linéaires suivantes (cf. p. ex. Milton, 2001 ; Benveniste et Milton, 2003 ; Gu et He, 2011) :

$$\mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{y}) = \mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{y})\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{y}) \quad \text{ou} \quad J_i^{(\alpha)}(\mathbf{y}) = L_{ij}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{y})D_j^{(\beta)}(\mathbf{y}). \quad (4.1)$$

Dans (4.1), les lettres latines i et j prennent les valeurs 1, 2 et 3 mais les lettres grecques α et β prennent les valeurs de 1 jusqu'à r ($r \geq 2$); $\mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{y})$ est le tenseur contenant des propriétés du matériau au point \mathbf{y} ; $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ est le vecteur de flux, à divergence nulle, à savoir

$$\operatorname{div}\mathbf{J}^{(\alpha)} = 0 \quad (4.2)$$

et le vecteur d'intensité $\mathbf{D}^{(\beta)}$, à rotationnel nul $\operatorname{rot}\mathbf{D}^{(\beta)} = \mathbf{0}$, est lié à un potentiel $w^{(\beta)}$ par l'équation suivante

$$\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{y}) = \nabla w^{(\beta)}(\mathbf{y}) \quad \text{ou} \quad D_i^{(\beta)}(\mathbf{y}) = w_{,i}^{(\beta)}(\mathbf{y}). \quad (4.3)$$

Rappelons que la divergence, le rotationnel et la dérivée sont calculés dans les coordonnées curvilignes. Les lois de comportement (4.1) peuvent s'écrire sous la forme matricielle équivalente suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \mathbb{L}(\mathbf{y})\mathbf{D}(\mathbf{y}) \quad (4.4)$$

où

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(1)} \\ \mathbf{J}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{J}^{(r)} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{(11)} & \mathbf{L}^{(12)} & \dots & \mathbf{L}^{(1r)} \\ \mathbf{L}^{(21)} & \mathbf{L}^{(22)} & \dots & \mathbf{L}^{(2r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}^{(r1)} & \mathbf{L}^{(r2)} & \dots & \mathbf{L}^{(rr)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(1)} \\ \mathbf{D}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{D}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

avec chaque élément $\mathbf{L}^{(\alpha\beta)}$ de \mathbb{L} étant une matrice 3×3 .

Comme dans les chapitres précédents, l'interface Γ entre les deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ est supposée périodiquement rugueuse soit dans une seule direction ou soit dans deux directions. Pour le premier cas où l'interface est ondulée selon une seule direction, l'équation exprimant l'interface rugueuse s'écrit dans les coordonnées curvilignes $\{y_1, y_2, y_3\}$ par

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid y_3 = \gamma(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon} \right\} \quad (4.6)$$

où $\gamma(\xi_1)$ est une fonction périodique de période ϵ dont la valeur minimale est γ_{min} et la valeur maximale est γ_{max} . En plus, on suppose que l'équation $y_3 = \gamma(\xi_1)$ a deux solutions réelles et distinctes dans l'intervalle $(0, \epsilon)$ pour chaque valeur de $y_3 \in (\gamma_{min}, \gamma_{max})$.

Concernant le cas où l'interface est ondulée selon deux directions, l'équation caractérisant l'interface rugueuse devient

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid y_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \frac{y_1}{\epsilon}, \xi_2 = \frac{y_2}{\epsilon} \right\}. \quad (4.7)$$

La période ϵ de $\gamma(\xi_1)$ dans (4.6) et $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ dans (4.7) sont considérées très petites par rapport à $\delta = \gamma_{max} - \gamma_{min}$, c-à-d $0 < \epsilon \ll \delta$, cela signifie que l'interface est très rugueuse. Pour l'utilisation ultérieure,

on définit $\omega^{(c)}$ comme la zone d'interface caractérisée par

$$\omega^{(c)} = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega \mid \gamma_{min} < y_3 < \gamma_{max}\}, \quad (4.8)$$

et la surface $\pi(y_3)$ est définie par

$$\pi(y_3) = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \omega^{(c)} \mid y_3 = y_3^0, \gamma_{min} < y_3 < \gamma_{max} \right\}. \quad (4.9)$$

Puisque l'interface Γ est parfaite, le champ potentiel $w^{(\alpha)}$ et la composante normale du vecteur de flux $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ sont simultanément continus à travers Γ . Ces conditions nous amènent aux équations suivantes

$$[[\mathbf{J}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{n}]] = \mathbf{0}, \quad [[\mathbf{w}]] = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

où $\mathbf{w} = [w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(r)}]^T$ et la normale unitaire extérieure à Γ , notée par \mathbf{n} , est définie par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma_{,\xi_1}}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_3}\right)^2}} \left[\frac{\gamma_{,\xi_1}}{\epsilon}, 0, -\frac{1}{h_3} \right]^T, \quad (4.11)$$

pour l'interface ondulée suivant une seule direction et

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} (\gamma_{,\xi_1}^2 + \gamma_{,\xi_2}^2) + \frac{1}{h_3^2}}} \left[-\frac{\gamma_{,\xi_1}}{\epsilon}; -\frac{\gamma_{,\xi_2}}{\epsilon}; \frac{1}{h_3} \right]^T \quad (4.12)$$

pour l'interface ondulée suivant deux directions. Dans (4.11) et (4.12) et dans la suite de ce chapitre, par la définition, nous désignons :

$$(\bullet)_{,\xi_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_1}, \quad (\bullet)_{,\xi_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \xi_2}, \quad (\bullet)_{,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_1}, \quad (\bullet)_{,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2}, \quad (\bullet)_{,3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_3}. \quad (4.13)$$

Nous appliquons ensuite des champs de potentiels linéaires sur toute la surface $\partial\Omega$ de Ω tels que

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4.14)$$

où \mathbf{D}^0 est un vecteur constant imposé.

A l'échelle mésoscopique, lorsque la zone de l'interface ondulée $\omega^{(c)}$ est homogénéisée suivant les directions de l'ondulation, nous pouvons remplacer cette zone par une interphase équivalente dont les lois de comportement effectives s'écrivent par

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbb{L}}(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{y}) \quad (4.15)$$

où $\bar{\mathbb{L}}(\mathbf{y})$ est le tenseur multiphysique effectif de l'interphase équivalente ; $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y})$ et $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{y})$ sont respectivement les mesoscopiques vecteurs de flux et d'intensité.

A l'échelle macroscopique, le domaine Ω est supposé statistiquement homogène. Les lois de comportement macroscopiques correspondantes sont caractérisées par

$$\langle \mathbf{J} \rangle_{\Omega} = \mathbb{L}^* \langle \mathbf{D} \rangle_{\Omega} \quad (4.16)$$

où \mathbb{L}^* désigne le tenseur multiphysique macroscopique ; $\langle \mathbf{J} \rangle_{\Omega}$ et $\langle \mathbf{D} \rangle_{\Omega}$ représentent respectivement les macroscopiques vecteurs de flux et d'intensité qui sont égaux aux moyens volumiques des champs microscopiques correspondants sur le domaine Ω , c-à-d

$$\langle \mathbf{J} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \langle \mathbf{D} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{D}^0 \quad (4.17)$$

avec $|\Omega|$ étant le volume de Ω .

4.2 Homogénéisation de la zone d'interface ondulée

Dans ce paragraphe, nous montrons que la zone d'interface rugueuse $\omega^{(c)}$ définie par (4.8) sera homogénéisée par une méthode d'analyse asymptotique. Par conséquence, nous pouvons remplacer cette zone par une interphase équivalente dont le tenseur effectif multiphysique mésoscopique $\bar{\mathbb{L}}$ sera déterminé par l'application de la méthode d'analyse asymptotique.

4.2.1 Interface ondulée suivant une seule direction

Nous considérons le premier cas où l'interface Γ est ondulée autour une surface lisse suivant la direction y_1 . En appliquant la méthode d'analyse asymptotique, le vecteur des champs de potentiels \mathbf{w} est tout d'abord considéré comme une fonction vectoriel dépendant de deux types des variables : les variables mésoscopiques (ou les variables lentes) y_1, y_2 et y_3 et la variable microscopique (ou la variable rapide) ξ_1 tels que

$$\mathbf{w}(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{w}_{\epsilon}(y_1, y_2, y_3, \xi_1). \quad (4.18)$$

Le développement asymptotique du vecteur des champs de potentiels \mathbf{w} s'écrit ensuite par :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\epsilon} = \mathbf{W} &+ \epsilon(\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{W} + \mathbf{N}^{(11)}\mathbf{W}_{,1} + \mathbf{N}^{(12)}\mathbf{W}_{,2} + \mathbf{N}^{(13)}\mathbf{W}_{,3}) \\ &+ \epsilon^2(\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{W} + \mathbf{N}^{(21)}\mathbf{W}_{,1} + \mathbf{N}^{(22)}\mathbf{W}_{,2} + \mathbf{N}^{(23)}\mathbf{W}_{,3} + \mathbf{N}^{(211)}\mathbf{W}_{,11} + \mathbf{N}^{(212)}\mathbf{W}_{,12} \\ &+ \mathbf{N}^{(213)}\mathbf{W}_{,13} + \mathbf{N}^{(222)}\mathbf{W}_{,22} + \mathbf{N}^{(223)}\mathbf{W}_{,23}) + \mathbf{N}^{(233)}\mathbf{W}_{,33} + 0(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où le vecteur $\mathbf{W} = \mathbf{W}(y_1, y_2, y_3)$ indépendant de la variable microscopique ξ_1 correspond au vecteur des champs de potentiels globaux du matériau à l'échelle mésoscopique ; les matrices $\mathbf{N}^{(\bullet)} = \mathbf{N}^{(\bullet)}(y_2, y_3, \xi_1)$ de taille $r \times r$ dépendant simultanément des variables lentes y_2 et y_3 et de variable rapide ξ_1 seront déterminées à partir de l'équation (4.2) et des conditions de continuité (4.10) du champ de potentiel et de la

composante normale du vecteur de flux à travers l'interface Γ . Donc $\mathbf{W}_{,\xi_1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{N}_{,y_1}^{(\bullet)} = \mathbf{0}$. Puisque $\xi_1 = y_1/\epsilon$, les dérivées partielles de premier d'ordre du vecteur des champs de potentiels \mathbf{w} par rapport aux variables mésoscopiques sont

$$\mathbf{w}_{,1} = \mathbf{w}_{\epsilon,1} + \epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1}, \quad \mathbf{w}_{,2} = \mathbf{w}_{\epsilon,2}, \quad \mathbf{w}_{,3} = \mathbf{w}_{\epsilon,3}. \quad (4.20)$$

et les dérivées partielles d'ordre 2 de $w^{(\alpha)}$ par rapport aux variables mésoscopiques sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{,11} &= \mathbf{w}_{\epsilon,11} + 2\epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1 1} + \epsilon^{-2}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1 \xi_1}, & \mathbf{w}_{,12} &= \mathbf{w}_{,21} = \mathbf{w}_{\epsilon,12} + \epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1 2}, & \mathbf{w}_{,22} &= \mathbf{w}_{\epsilon,22}, \\ \mathbf{w}_{,13} &= \mathbf{w}_{,31} = \mathbf{w}_{\epsilon,13} + \epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1 3}, & \mathbf{w}_{,23} &= \mathbf{w}_{,32} = \mathbf{w}_{\epsilon,23}, & \mathbf{w}_{,33} &= \mathbf{w}_{\epsilon,33}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans l'équation (4.21), nous remarquons que les dérivées partielles du champ de potentiel $w^{(\alpha)}$ par rapport aux variables y_1, y_2 et ξ_1 sont définies par (4.13) dans lesquelles les coefficients paramétriques h_1, h_2 et h_3 ne dépendent que de y_1, y_2 et y_3 .

En introduisant (4.19) dans l'équation (4.3), puis dans (4.4) et (4.10) avec prise en compte de (4.21) et en posant le coefficient associé à ϵ^{-1} égal à zéro, nous obtenons l'équation suivante :

$$[[\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)}]]\mathbf{W} + [[(\mathbf{C}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1i)})]]\mathbf{W}_{,i} = \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

où $\mathbf{C}^{(ij)}$ est une matrice de taille $r \times r$ dont les composantes $C_{\alpha\beta}^{(ij)}$ sont liées à celles de la matrice des propriétés \mathbb{L} par

$$C_{\alpha\beta}^{(ij)} = L_{ij}^{(\alpha\beta)}. \quad (4.23)$$

En combinant (4.2) avec (4.3), (4.19), (4.4) et (4.21) et mettant le coefficient associé à ϵ^{-1} égal à zéro, nous avons

$$[\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)}]_{,\xi_1}\mathbf{W} + [\mathbf{C}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1i)}]_{,\xi_1}\mathbf{W}_{,i} = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Pour satisfaire les équations (4.22) et (4.23), les matrices $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$ et $\mathbf{N}^{(13)}$ sont choisies de telle façon que

$$\begin{aligned} [[\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)}]] &= \mathbf{0}, & [[\mathbf{N}^{(1)}]] &= \mathbf{0} \quad \text{à} \quad \xi_1^0, \xi_2^0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}^{(1)}(0) = \mathbf{N}^{(1)}(1), \\ [[\mathbf{C}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1i)}]] &= \mathbf{0}, & [[\mathbf{N}^{(1i)}]] &= \mathbf{0} \quad \text{à} \quad \xi_1^0, \xi_2^0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}^{(1i)}(0) = \mathbf{N}^{(1i)}(1), \\ [\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)}]_{,\xi_1} &= \mathbf{0}, & 0 < \xi_1 < 1, & \quad \xi_1 \neq \xi_1^0, \xi_2^0, \\ [\mathbf{C}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1i)}]_{,\xi_1} &= \mathbf{0}, & 0 < \xi_1 < 1, & \quad \xi_1 \neq \xi_1^0, \xi_2^0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où $i = 1, 2, 3$; ξ_1^0 et ξ_2^0 avec $0 < \xi_1^0 < \xi_2^0 < 1$ sont les deux solutions réelles de l'équation $\gamma(\xi) = y_3$. Il résulte de (4.24) que $N_{,\xi}^{(1)} = 0$, et les autres termes sont définis tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} &= [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \left\langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \right\rangle^{-1} - \mathbf{I}, \\ \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} &= [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \left\{ \left\langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \mathbf{C}^{(12)} \right\rangle - \mathbf{C}^{(12)} \right\}, \\ \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} &= [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \left\{ \left\langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \mathbf{C}^{(13)} \right\rangle - \mathbf{C}^{(13)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

où $\langle \bullet \rangle$ désigne la moyenne de \bullet sur une périodicité, à savoir

$$\langle \bullet \rangle = \int_0^1 \bullet d\xi_1. \quad (4.27)$$

Les matrices $\mathbf{N}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(21)}$, $\mathbf{N}^{(22)}$, $\mathbf{N}^{(23)}$, $\mathbf{N}^{(211)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$, $\mathbf{N}^{(222)}$, $\mathbf{N}^{(213)}$, $\mathbf{N}^{(223)}$ et $\mathbf{N}^{(212)}$ sont déterminées de telle manière que leurs composantes soient simultanément périodiques et continues lorsque $\xi_1 = \xi_1^0$ et $\xi_1 = \xi_2^0$ et vérifient également les équations obtenues en mettant le coefficient associé à ϵ^0 égal à zéro dans les équations de continuité (4.10) :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(1)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(1)}]] &= \mathbf{0}, \\ [[\mathbf{C}^{(11)} (\mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(212)}) + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(11)}]] &= \mathbf{0}, \\ [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(223)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(12)}]] &= \mathbf{0}, \\ \gamma_{,\xi_1} h_3 [[\mathbf{C}^{(11)} (\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(21)}) + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(11)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(11)}]] &= \mathbf{C}^{(31)} (\mathbf{I} + \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)}), \\ \gamma_{,\xi_1} h_3 [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(22)} + \mathbf{C}^{(12)} (\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,2}^{(12)}) + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(12)}]] &= \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \mathbf{C}^{(32)}, \\ \gamma_{,\xi_1} h_3 [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(23)} + \mathbf{C}^{(13)} (\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}_{,3}^{(13)}) + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(13)}]] &= \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \mathbf{C}^{(33)}, \\ [[\mathbf{C}^{(11)} (\mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(211)})]] &= \mathbf{0}, \quad [[\mathbf{C}^{(11)} (\mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(213)}) + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(11)}]] = \mathbf{0}, \\ [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(222)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(12)}]] &= \mathbf{0}, \quad [[\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(233)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(13)}]] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Similairement, en posant le coefficient associé à ϵ^0 égal à zéro dans l'équation (4.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(1)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(1)} \right)_{,\xi_1} \mathbf{W} + \left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_1} \right. \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_2} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_3} \\
& + \left. \left(\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(21)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(11)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(11)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,1} \\
& + \left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_2} \right. \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_3} + \left. \left(\mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(22)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(12)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(12)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,2} \\
& + \left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_2} \right. \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_3} + \left. \left(\mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(23)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}_{,2}^{(13)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}_{,3}^{(13)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,3} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} + \left(\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(211)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,11} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \left(\mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(222)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,22} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \left(\mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(233)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,33} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} + \left(\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(212)} + \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(11)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,12} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} + \left(\mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(213)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(11)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,13} \\
& + \left\{ \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \left(\mathbf{C}^{(12)} \mathbf{N}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(223)} + \mathbf{C}^{(13)} \mathbf{N}^{(12)} \right)_{,\xi_1} \right\} \mathbf{W}_{,23} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En intégrant de l'équation (4.29) par rapport à ξ_1 de 0 à 1, nous trouvons

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_3} \right) \right\rangle + \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right] \right] \right\} \mathbf{W}_{,1} \\
& \left\{ \left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_3} \right) \right\rangle + \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right] \right] \right\} \mathbf{W}_{,2} \\
& \left\{ \left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_1} + \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_3} \right) \right\rangle + \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right] \right] \right\} \mathbf{W}_{,3} \\
& + \left\langle \mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle \mathbf{W}_{,11} + \left\langle \mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle \mathbf{W}_{,22} \\
& + \left\langle \mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle \mathbf{W}_{,33} + \left\langle \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} + \mathbf{C}^{(21)} \right\rangle \mathbf{W}_{,12} \\
& + \left\langle \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} + \mathbf{C}^{(31)} \right\rangle \mathbf{W}_{,13} \\
& + \left\langle \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} + \mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} + \mathbf{C}^{(32)} \right\rangle \mathbf{W}_{,23} = \mathbf{0}. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Puisque les coefficients paramétriques h_1 et h_3 sont indépendants de ξ_1 et les deux solutions ξ_1^0 et ξ_2^0 de l'équation $y_3 = \gamma(\xi)$ sont également indépendantes de y_1 et y_2 , cela nous amène à

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_1} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle \right]}{\partial y_1}, \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle \right]}{\partial y_2}, \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_1} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle \right]}{\partial y_1}, \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle \right]}{\partial y_2}, \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left(\mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_1} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle \right]}{\partial y_1}, \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left(\mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_2} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 h_3 \left\langle \mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle \right]}{\partial y_2}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme A1 prouvé par Kristensson (2005) et en considérant la périodicité des matrices $\mathbf{N}^{(1k)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right) \right]}{\partial y_3} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left\langle \mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle \right]}{\partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right] \right], \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right) \right]}{\partial y_3} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left\langle \mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle \right]}{\partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right] \right], \\
\left\langle \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left(\mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right) \right]}{\partial y_3} \right\rangle &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \left[h_1 \left\langle \mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle \right]}{\partial y_3} \\
&\quad - \frac{1}{h_3 \gamma_{,\xi_1}} \left[\left[\mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right] \right]. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

En introduisant (4.31) et (4.32) dans l'équation (4.30), nous obtenons une équation équivalente à l'échelle mésoscopique

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(11)})}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(21)})}{\partial y_2} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 \bar{\mathbf{C}}^{(31)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,1} + \left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(12)})}{\partial y_1} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(22)})}{\partial y_2} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 \bar{\mathbf{C}}^{(32)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,2} + \left\{ \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(13)})}{\partial y_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(23)})}{\partial y_2} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 \bar{\mathbf{C}}^{(33)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,3} + \bar{\mathbf{C}}^{(11)} \mathbf{W}_{,11} + \bar{\mathbf{C}}^{(22)} \mathbf{W}_{,22} + \bar{\mathbf{C}}^{(33)} \mathbf{W}_{,33} + (\bar{\mathbf{C}}^{(12)} + \bar{\mathbf{C}}^{(21)}) \mathbf{W}_{,12} \\
&+ (\bar{\mathbf{C}}^{(13)} + \bar{\mathbf{C}}^{(31)}) \mathbf{W}_{,13} + (\bar{\mathbf{C}}^{(23)} + \bar{\mathbf{C}}^{(32)}) \mathbf{W}_{,23} = \mathbf{0}. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{(11)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(11)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle, & \bar{\mathbf{C}}^{(22)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(22)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(33)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(33)} + \mathbf{C}^{(33)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle, & \bar{\mathbf{C}}^{(12)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(12)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(21)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(21)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle, & \bar{\mathbf{C}}^{(13)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(13)} + \mathbf{C}^{(11)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(31)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(31)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)} \right\rangle, & \bar{\mathbf{C}}^{(23)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(23)} + \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)} \right\rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(32)} &= \left\langle \mathbf{C}^{(32)} + \mathbf{C}^{(31)} \mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)} \right\rangle. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(11)}$, $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(12)}$ et $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(13)}$ obtenues par (4.26) dans l'équations (4.34), nous avons

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{(11)}(y_3) &= \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1}, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(22)}(y_3) &= \langle \mathbf{C}^{(22)} - \mathbf{C}^{(21)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(12)} \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{C}^{(21)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1} \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(12)} \rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(33)}(y_3) &= \langle \mathbf{C}^{(33)} - \mathbf{C}^{(31)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(13)} \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{C}^{(31)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1} \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(13)} \rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(12)}(y_3) &= (\bar{\mathbf{C}}^{(21)})^T(y_3) = \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1} \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(12)} \rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(13)}(y_3) &= (\bar{\mathbf{C}}^{(31)})^T(y_3) = \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1} \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(13)} \rangle, \\
\bar{\mathbf{C}}^{(23)}(y_3) &= \langle \mathbf{C}^{(23)} - \mathbf{C}^{(21)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(13)} \rangle \\
&\quad + \langle \mathbf{C}^{(21)}[\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1} \rangle^{-1} \langle [\mathbf{C}^{(11)}]^{-1}\mathbf{C}^{(13)} \rangle. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Finalemnt, les composantes $\bar{L}_{ij}^{(\alpha\beta)}(y_3)$ de la matrice des propriétés multiphysiques mésoscopiques $\bar{\mathbf{L}}^{(\alpha\beta)}(y_3)$ de la zone d'interface sont déterminées par :

$$\bar{L}_{ij}^{(\alpha\beta)}(y_3) = \bar{C}_{\alpha\beta}^{(ij)}(y_3). \tag{4.36}$$

où $\bar{C}_{\alpha\beta}^{(ij)}(y_3)$ sont les composantes de la matrice $\bar{\mathbf{C}}^{(ij)}(y_3)$ obtenue par (4.35).

4.2.2 Interface ondulée suivant deux directions

Similairement à la méthode présentée dans le paragraphe précédent pour homogénéiser la zone d'interface ondulée suivant une seule direction, lorsque l'interface est ondulée autour d'une surface lisse suivant deux directions y_1 et y_2 , nous faisons tout d'abord l'hypothèse que

$$\mathbf{w}(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{w}_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2). \tag{4.37}$$

Nous faisons ensuite le développement asymptotique de $\mathbf{w}_\epsilon(y_1, y_2, y_3, \xi_1, \xi_2)$ comme suivant :

$$\mathbf{w}_\epsilon = \mathbf{W} + \epsilon(\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{W} + \mathbf{N}^{(1k)}\mathbf{W}_{,k}) + \epsilon^2(\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{W} + \mathbf{N}^{(2k)}\mathbf{W}_{,k} + \mathbf{N}^{(2ij)}\mathbf{W}_{,ij}) + 0(\epsilon^3). \tag{4.38}$$

Dans cette équation, $\mathbf{W} = \mathbf{W}(y_1, y_2, y_3)$ est un vecteur r -dimensionnel indépendant de ξ_1 et ξ_2 ; $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$, $\mathbf{N}^{(1k)}$ et $\mathbf{N}^{(2ij)}$ sont des matrices $r \times r$ dépendant de y_3 , ξ_1 et ξ_2 , mais indépendantes de y_1 et y_2 .

Comme $\xi_1 = y_1/\epsilon$ et $\xi_2 = y_2/\epsilon$, nous avons

$$\mathbf{w}_{,1} = \mathbf{w}_{\epsilon,1} + \epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_1}, \quad \mathbf{w}_{,2} = \mathbf{w}_{\epsilon,2} + \epsilon^{-1}\mathbf{w}_{\epsilon,\xi_2}, \quad \mathbf{w}_{,3} = \mathbf{w}_{\epsilon,3}. \tag{4.39}$$

En combinant (4.38), (4.39), (4.4) avec (4.10) et en demandant le coefficient associé à ϵ^{-1} égal à zéro, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&[[(\mathbf{C}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_2}]]\mathbf{W}_{,k} \\
&+ [[(\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)})\gamma_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)})\gamma_{,\xi_2}]]\mathbf{W} = \mathbf{0}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.38), (4.39), (4.4) dans (4.2), pour que le coefficient associé à ϵ^{-1} soit égal à zéro, il faut que

$$\begin{aligned} & \left\{ (\mathbf{C}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)}),_{\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)}),_{\xi_2} \right\} \mathbf{W}_{,k} \\ & + \left\{ (\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)}),_{\xi_1} + (\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)}),_{\xi_2} \right\} \mathbf{W} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A partir des équations (4.40) et (4.41), les matrices $\mathbf{N}^{(1)}$ et $\mathbf{N}^{(1k)}$ sont déterminées de telle façon qu'elles soient périodiques et continues à travers l'interface Γ et satisfassent les équations suivantes

$$\begin{aligned} & (\mathbf{C}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_2} = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_1\xi_2}^{(1)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1\xi_2}^{(1)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2\xi_2}^{(1)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.42)$$

pour $\mathbf{y} \in \Omega$ et $\mathbf{y} \notin \Gamma$ et

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{C}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})\gamma_{,\xi_2}] = \mathbf{0}, \\ & [(\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)})\gamma_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)})\gamma_{,\xi_2}] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.43)$$

pour $\mathbf{y} \in \Gamma$. Nous pouvons démontrer que $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1)} = \mathbf{0}$ vérifient les équations (4.42) et (4.43). D'une façon analogue, en posant le coefficient associé à ϵ^0 égal à zéro dans l'équation de continuité (4.10), nous trouvons

$$\begin{aligned} & [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)})]] \mathbf{W} \\ & + [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(1k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(2k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} \\ & + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)}) - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(31)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(32)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)} - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(3k)}}] \mathbf{W}_{,k} \\ & + [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(1i)}\mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(1j)}\mathbf{N}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(2i)}\mathbf{N}^{(1j)} \\ & + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(2j)}\mathbf{N}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)})]] \mathbf{W}_{,ij} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour que cette équation soit satisfaisante, il faut que

$$\begin{aligned} & [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)})]] = \mathbf{0}, \\ & [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(1k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(2k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} \\ & + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)}) - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(31)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(32)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)} - h_3^{-1}\mathbf{C}^{(3k)}}] = \mathbf{0}, \\ & [[\gamma_{,\xi_1}(\mathbf{C}^{(1i)}\mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(1j)}\mathbf{N}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)}) + \gamma_{,\xi_2}(\mathbf{C}^{(2i)}\mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} \\ & + \mathbf{C}^{(2j)}\mathbf{N}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)})]] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

De plus, en posant que le coefficient associé à ϵ^0 dans (4.2) égal à zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\{ (\mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)})_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1)})_{,\xi_2} \right\} \mathbf{W} \\
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial [h_2 h_3 (\mathbf{C}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})]}{\partial y_1} \right\} \mathbf{W}_{,k} \\
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial [h_1 h_3 (\mathbf{C}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})]}{\partial y_2} \right\} \mathbf{W}_{,k} \\
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial [h_1 h_2 (\mathbf{C}^{(3k)} + \mathbf{C}^{(31)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1k)} + \mathbf{C}^{(32)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1k)})]}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,k} \\
& + \left\{ (\mathbf{C}^{(1k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(13)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)})_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2k)}\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2k)} \right. \\
& + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2k)} + \mathbf{C}^{(23)}\mathbf{N}_{,3}^{(1k)})_{,\xi_2} \left. \right\} \mathbf{W}_{,k} + \left\{ (\mathbf{C}^{(1i)}\mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(11)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(1j)}\mathbf{N}^{(1i)} \right. \\
& + \mathbf{C}^{(12)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)})_{,\xi_1} + (\mathbf{C}^{(2i)}\mathbf{N}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(21)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(2ij)} + \mathbf{C}^{(2j)}\mathbf{N}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(22)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(2ij)})_{,\xi_2} + \mathbf{C}^{(ij)} + \mathbf{C}^{(ji)} \\
& + \mathbf{C}^{(1j)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(2j)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1i)} + \mathbf{C}^{(1i)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(2i)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1j)} \left. \right\} \mathbf{W}_{,ij} = \mathbf{0}. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

En intégrant (4.46) sur une surface $\mathcal{S}(y_3)$ d'une cellule de base et en appliquant le théorème divergence et le lemme de A.1 de Kristensson (2005), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(11)})}{\partial y_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(21)})}{\partial y_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \bar{\mathbf{C}}^{(31)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(12)})}{\partial y_1} \right. \\
& + \left. \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(22)})}{\partial y_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 \bar{\mathbf{C}}^{(32)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,2} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (h_2 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(13)})}{\partial y_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 \bar{\mathbf{C}}^{(23)})}{\partial y_2} \right. \\
& + \left. \frac{\partial (h_1 h_2 \bar{\mathbf{C}}^{(33)})}{\partial y_3} \right\} \mathbf{W}_{,3} + \bar{\mathbf{C}}^{(11)} \mathbf{W}_{,11} + \bar{\mathbf{C}}^{(22)} \mathbf{W}_{,22} + \bar{\mathbf{C}}^{(33)} \mathbf{W}_{,33} + (\bar{\mathbf{C}}^{(12)} + \bar{\mathbf{C}}^{(21)}) \mathbf{W}_{,12} \\
& + (\bar{\mathbf{C}}^{(13)} + \bar{\mathbf{C}}^{(31)}) \mathbf{W}_{,13} + (\bar{\mathbf{C}}^{(23)} + \bar{\mathbf{C}}^{(32)}) \mathbf{W}_{,23} = \mathbf{0}, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

avec

$$\bar{\mathbf{C}}^{(ij)} = \left\langle \mathbf{C}^{(ij)} + \mathbf{C}^{(1i)}\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1j)} + \mathbf{C}^{(2i)}\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1j)} \right\rangle. \tag{4.48}$$

Dans la dernière équation, la moyenne $\langle \bullet \rangle$ est définie par

$$\langle \bullet \rangle = |\mathcal{S}|^{-1} \int_0^1 \int_0^1 (\bullet) d\xi_1 d\xi_2. \tag{4.49}$$

où $|\mathcal{S}|$ signifie l'aire de $\mathcal{S}(y_3)$.

Comme dans le cas d'interface ondulée suivant une seule direction, les composantes $\bar{L}_{ij}^{(\alpha\beta)}(y_3)$ de la matrice des propriétés multiphysiques mésoscopiques $\bar{\mathbf{L}}^{(\alpha\beta)}(y_3)$ de la zone d'interface sont finalement obtenues par :

$$\bar{L}_{ij}^{(\alpha\beta)}(y_3) = \bar{C}_{\alpha\beta}^{(ij)}(y_3). \tag{4.50}$$

avec $\bar{C}_{\alpha\beta}^{(ij)}(y_3)$ étant les composantes de la matrice $\bar{\mathbf{C}}^{(ij)}(y_3)$ déterminée par l'équation (4.48).

Enfin, nous remarquons de (4.48) que la détermination des propriétés multiphysiques mésoscopiques de la zone d'interface nécessite de connaître les valeurs de $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1j)}$ et $\mathbf{N}_{,\xi_2}^{(1j)}$ qui correspondent aux solutions du problème local défini par (4.42) et (4.43). De plus, contrairement au cas d'interface ondulée suivant une seule direction où les expressions de $\mathbf{N}_{,\xi_1}^{(1j)}$ peuvent être analytiquement et explicitement déterminées, lorsque l'interface est ondulée suivant deux directions, la résolution du problème local n'est effectuée que par une méthode numérique. Pour cette raison, nous présenterons dans le chapitre 5, une approche numérique basée sur la méthode de transformée de Fourier rapide pour résoudre ce problème.

4.3 Homogénéisation des composites stratifiés avec interfaces ondulées

4.3.1 Résultats généraux

Le domaine Ω décrit précédemment dans le paragraphe 4.1 est maintenant considéré comme un composite stratifié constitué de deux couches $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. L'interface entre ces deux couches, notée par Γ , est parfaite et ondulée suivant une ou deux directions autour d'une surface plane parallèle au plan du composite stratifié. Comme nous avons montré dans le paragraphe 4.2, la zone d'interface rugueuse entre deux couches peut être remplacée par une couche homogénéisée équivalente de la même épaisseur. Les propriétés multiphysiques effectives de cette couche équivalente sont obtenues par (4.36) et (4.35) pour le cas d'interface ondulée suivant une seule direction ou par (4.50) et (4.48) pour le cas d'interface ondulée suivant deux directions. Plus précisément, à l'échelle mésoscopique, les propriétés des couches du composite sont décrites par :

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbb{L}^{(1)}, & \text{if } -(H_0 + H_1) \leq x_3 \leq -H_0; \\ \bar{\mathbb{L}}(x_3), & \text{if } -H_0 < x_3 < 0; \\ \mathbb{L}^{(2)}, & \text{if } 0 \leq x_3 \leq H_2, \end{cases} \quad (4.51)$$

où H_1 et H_2 sont respectivement les épaisseurs des couches occupées par la phase 1 et la phase 2 ; H_0 désigne l'épaisseur de la couche équivalente située entre les deux phases.

Ensuite, en utilisant la formulation récemment établie par He et Feng (2012) ; Gu et He (2011), nous pouvons déterminer les propriétés effectives du composite stratifié comme suit

$$\mathbb{L}^* = \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega} + \langle \mathbb{L} \mathbb{A} \rangle_{\Omega} \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle \mathbb{A} \mathbb{L} \rangle_{\Omega}, \quad \mathbb{M}^* = \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega} + \langle \mathbb{M} \mathbb{B} \rangle_{\Omega} \langle \mathbb{B} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle \mathbb{B} \mathbb{M} \rangle_{\Omega}. \quad (4.52)$$

Dans cette équation, $\mathbb{M} = \mathbb{L}^{-1}$ et la moyenne $\langle \bullet \rangle_{\Omega}$ est définie par

$$\langle \bullet \rangle_{\Omega} = \frac{1}{H} \left(\int_{-(H_0+H_1)}^{-H_0} \bullet^{(1)} dx_3 + \int_{-H_0}^0 \bar{\bullet} dx_3 + \int_0^{H_2} \bullet^{(2)} dx_3 \right) \quad (4.53)$$

avec $H = H_0 + H_1 + H_2$; les matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} sont respectivement les inverses partiels de $\mathbb{P}^\perp \mathbb{L} \mathbb{P}^\perp$ et $\mathbb{P}^\parallel \mathbb{M} \mathbb{P}^\parallel$ au sens que

$$\mathbb{A} \left(\mathbb{P}^\perp \mathbb{L} \mathbb{P}^\perp \right) = \left(\mathbb{P}^\perp \mathbb{L} \mathbb{P}^\perp \right) \mathbb{A} = \mathbb{P}^\perp, \quad \mathbb{B} \left(\mathbb{P}^\parallel \mathbb{M} \mathbb{P}^\parallel \right) = \left(\mathbb{P}^\parallel \mathbb{M} \mathbb{P}^\parallel \right) \mathbb{B} = \mathbb{P}^\parallel, \quad (4.54)$$

où \mathbb{P}^\perp et \mathbb{P}^\parallel sont respectivement les opérateurs de projections orthogonale et tangentielle qui sont définis par

$$\left(\mathbb{P}^\perp \right)_{ij}^{(\alpha\beta)} = \delta^{(\alpha\beta)} N_{ij}, \quad \left(\mathbb{P}^\parallel \right)_{ij}^{(\alpha\beta)} = \delta^{(\alpha\beta)} T_{ij}. \quad (4.55)$$

où $\delta^{(\alpha\beta)}$ est le symbole de Kronecker et $\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{T} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ avec \mathbf{n} étant la normale unitaire perpendiculaire au plan du composite stratifié.

Gu et He (2011) a également proposé une méthode permettant de déterminer directement les matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} comme suit :

$$A_{ij}^{(\alpha\beta)} = G^{(\alpha\beta)} N_{ij}, \quad \mathbb{B} = \mathbb{L} - \mathbb{L} \mathbb{A} \mathbb{L}, \quad (4.56)$$

où $\mathbf{G} = \mathbf{Q}^{-1}$ et $Q_{\alpha\beta} = L_{ij}^{(\alpha\beta)} N_{ij}$.

4.3.2 Application à la thermoélectricité

Pour illustrer la méthode d'homogénéisation à deux échelles dans les phénomènes couplés présentée dans les paragraphes précédents, nous nous intéressons tout d'abord au phénomène thermoélectrique. Nous considérons un composite stratifié Ω , dont la normale perpendiculaire au plan du composite $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, composé de deux couches. La couche supérieure est constituée de la phase 1 et la couche inférieure est formée de la phase 2. L'interface entre deux couches est supposée ondulée suivant la direction x_1 . L'épaisseur de la zone d'interface rugueuse est notée par H_0 (voir Fig. 4.1).

Pour simplifier les calculs, les deux phases du composite sont supposées isotropes dont les tenseurs thermoélectriques sont exprimés par :

$$L_{ij}^{(p)(11)} = \sigma_p \delta_{ij}, \quad L_{ij}^{(p)(12)} = L_{ij}^{(p)(21)} = \zeta_p \sigma_p \delta_{ij}, \quad L_{ij}^{(p)(22)} = \left(\frac{\kappa_p}{T} + \zeta_p^2 \sigma_p \right) \delta_{ij}. \quad (4.57)$$

où $p = 1, 2$; σ_p , ζ_p et κ_p sont respectivement la conductivité électrique, la thermoélectricité et la conductivité thermique de la phase p . Dans cette étude, pour simplifier les calculs, nous supposons que le champ de température varie légèrement autour de la température de référence T_0 . Avec cette hypothèse, les composantes $L_{ij}^{(p)(22)}$ de la matrice des propriétés $\mathbf{L}^{(p)(22)}$ sont considérées invariables par rapport à

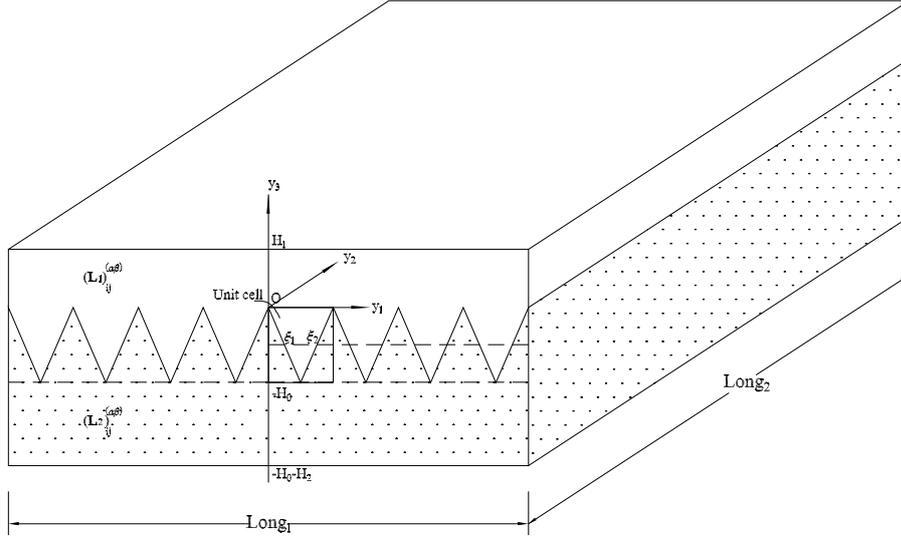


FIGURE 4.1: Composite biphasique avec l'interface très rugueuse à profil en dent de scie

la température T . L'équation (4.57) peut être réécrite sous la forme matrice comme suit :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{L}_p)^{(11)} &= \begin{pmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p \end{pmatrix}, & (\mathbf{L}_p)^{(12)} = (\mathbf{L}_p)^{(21)} &= \begin{pmatrix} \zeta_p \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_p \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_p \sigma_p \end{pmatrix}, \\
 (\mathbf{L}_p)^{(22)} &= \begin{pmatrix} k_p + \zeta_p^2 \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & k_p + \zeta_p^2 \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & k_p + \zeta_p^2 \sigma_p \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

avec $k_p = \kappa_p / T_0$. Lorsque l'interface est ondulée suivant une seule direction, la moyenne $\langle \bullet \rangle$ sur une cellule de base dans (4.27) peut être exprimée par

$$\langle \bullet \rangle = (\xi_2^0 - \xi_1^0) \bullet^{(1)} + (1 - \xi_2^0 + \xi_1^0) \bullet^{(2)}. \tag{4.59}$$

En plus, quand l'interface entre les deux phases est en dent de scie, les termes dans (4.58) peuvent être calculés par

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{y_3 + H_0}{H_0}; \quad 1 - \xi_2 + \xi_1 = -\frac{y_3}{H_0}. \tag{4.60}$$

En substituant (4.58)-(4.58) dans (4.26), on obtient l'expression des composantes non nulles du tenseur de conductivité thermoélectrique de la couche équivalente :

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{11}^{(11)}(y_3) &= \frac{\alpha_1 f + \beta_1}{af^2 + bf + c}, & \bar{L}_{22}^{(11)}(y_3) &= \bar{L}_{33}^{(11)}(y_3) = \sigma_2 - f\sigma_2 + f\sigma_1, \\
\bar{L}_{11}^{(12)}(y_3) &= \bar{L}_{11}^{(21)}(y_3) = \frac{\alpha_2 f + \beta_2}{af^2 + bf + c}, \\
\bar{L}_{22}^{(12)}(y_3) &= \bar{L}_{33}^{(12)}(y_3) = \bar{L}_{22}^{(21)}(y_3) = \bar{L}_{33}^{(21)}(y_3) = s_2 - fs_2 + fs_1, \\
\bar{L}_{11}^{(22)}(y_3) &= \frac{\alpha_3 f + \beta_3}{af^2 + bf + c}, & \bar{L}_{22}^{(22)}(y_3) &= \bar{L}_{33}^{(22)}(y_3) = \gamma_2 - f\gamma_2 + f\gamma_1,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

où

$$f = -\frac{y_3}{H_0}, \quad s_1 = \zeta_1 \sigma_1, \quad s_2 = \zeta_2 \sigma_2, \quad \gamma_1 = k_1 + \zeta_1^2 \sigma_1, \quad \gamma_2 = k_2 + \zeta_2^2 \sigma_2,$$

et les coefficients $a, b, c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ et β_3 sont définis par :

$$\begin{aligned}
a &= (s_1 - s_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\gamma_2 - \gamma_1), & b &= 2\sigma_1\gamma_1 - \gamma_1\sigma_2 - \gamma_2\sigma_1 + 2s_1s_2 - 2s_1^2, \\
\alpha_1 &= \sigma_2\sigma_1\gamma_1 - \sigma_1\sigma_2\gamma_2 + \sigma_1s_2^2 - \sigma_2s_1^2, & \beta_1 &= \sigma_2s_1^2 - \sigma_2\sigma_1\gamma_1, & c &= s_1^2 - \sigma_1\gamma_1 \\
\alpha_2 &= s_2\sigma_1\gamma_1 - s_1\sigma_2\gamma_2 + s_1s_2^2 - s_2s_1^2, & \beta_2 &= s_2s_1^2 - s_2\sigma_1\gamma_1, \\
\alpha_3 &= \gamma_2\sigma_1\gamma_1 - \gamma_1\sigma_2\gamma_2 + \gamma_1s_2^2 - \gamma_2s_1^2, & \beta_3 &= \gamma_2s_1^2 - \gamma_2\sigma_1\gamma_1.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

En utilisant (4.52), nous trouvons les composantes non nulles du tenseur de conductivité thermoélectrique effectif du composite stratifié :

$$\begin{aligned}
L_{11}^{*(11)} &= \nu_0 [(\sigma_2\sigma_1\gamma_1 - \sigma_2s_1^2 - \sigma_1\sigma_2\gamma_2 + \sigma_1s_2^2) \xi - (4a\sigma_2\sigma_1\gamma_1 - 4a\sigma_2s_1^2 + 2b\sigma_2\sigma_1\gamma_1 \\
&\quad - 2b\sigma_2s_1^2 - 2b\sigma_1\sigma_2\gamma_2 + 2b\sigma_1s_2^2) \mu] + \nu_1\sigma_1 + \nu_2\sigma_2, \\
L_{22}^{*(11)} &= \nu_0 \left(\frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \right) + \nu_1\sigma_1 + \nu_2\sigma_2, \\
L_{33}^{*(11)} &= \frac{\nu_0 [(\sigma_2 - \sigma_1) \xi - (2b\sigma_2 - 2b\sigma_1 + 4a\sigma_2) \mu] + \Sigma}{\Upsilon}, \\
L_{11}^{*(12)} &= \nu_0 [(s_2\sigma_1\gamma_1 - s_2s_1^2 - s_1\sigma_2\gamma_2 + s_1s_2^2) \xi - (4as_2\sigma_1\gamma_1 - 4as_2s_1^2 + 2bs_2\sigma_1\gamma_1 \\
&\quad - 2bs_2s_1^2 - 2bs_1\sigma_2\gamma_2 + 2bs_1s_2^2) \mu] + \nu_1s_1 + \nu_2s_2, \\
L_{22}^{*(12)} &= \nu_0 \left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \right) + \nu_1s_1 + \nu_2s_2, \\
L_{33}^{*(12)} &= \frac{\nu_0 [(s_2 - s_1) \xi - (2bs_2 - 2bs_1 + 4as_2) \mu] - S}{\Upsilon}, \\
L_{11}^{*(22)} &= \nu_0 [(\gamma_2\sigma_1\gamma_1 - \gamma_2s_1^2 - \gamma_1\sigma_2\gamma_2 + \gamma_1s_2^2) \xi - (4a\gamma_2\sigma_1\gamma_1 - 4a\gamma_2s_1^2 + 2b\gamma_2\sigma_1\gamma_1 \\
&\quad - 2b\gamma_2s_1^2 - 2b\gamma_1\sigma_2\gamma_2 + 2b\gamma_1s_2^2) \mu] + \nu_1\gamma_1 + \nu_2\gamma_2, \\
L_{22}^{*(22)} &= \nu_0 \left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 \right) + \nu_1\gamma_1 + \nu_2\gamma_2, \\
L_{33}^{*(22)} &= \frac{\nu_0 [(\gamma_2 - \gamma_1) \xi - (2b\gamma_2 - 2b\gamma_1 + 4a\gamma_2) \mu] + \Lambda}{\Upsilon}, \\
L_{11}^{*(21)} &= L_{11}^{*(12)}, \quad L_{22}^{*(21)} = L_{22}^{*(12)}, \quad L_{33}^{*(21)} = L_{33}^{*(12)},
\end{aligned} \tag{4.63}$$

où

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{H_1}{H_1 + H_0 + H_2}, \quad \nu_2 = \frac{H_2}{H_1 + H_0 + H_2}, \quad \nu_0 = \frac{H_0}{H_1 + H_0 + H_2}, \\ \xi &= \frac{\ln\left(\frac{a+b+c}{c}\right)}{2a}, \quad \Lambda = \frac{\nu_1 \gamma_1}{\sigma_1 \gamma_1 - s_1^2} + \frac{\nu_2 \gamma_2}{\sigma_2 \gamma_2 - s_2^2}, \quad S = \frac{\nu_1 s_1}{\sigma_1 \gamma_1 - s_1^2} + \frac{\nu_2 s_2}{\sigma_2 \gamma_2 - s_2^2}, \\ \Sigma &= \frac{\nu_1 \sigma_1}{\sigma_1 \gamma_1 - s_1^2} + \frac{\nu_2 \sigma_2}{\sigma_2 \gamma_2 - s_2^2}, \quad \mu = \frac{\arctan\left(\frac{2a+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{2a\sqrt{4ac-b^2}}, \\ \Upsilon &= \{\nu_0 [\xi (\gamma_2 - \gamma_1) - \mu (2b\gamma_2 - 2b\gamma_1 + 4a\gamma_2)] + \Lambda\} \{\nu_0 [\xi (\sigma_2 - \sigma_1) - \mu (2b\sigma_2 - 2b\sigma_1 + 4a\sigma_2)] + \Sigma\} \\ &\quad - \{\nu_0 [\xi (s_1 - s_2) - \mu (2bs_1 - 4as_2 - 2bs_2)] + S\}^2. \end{aligned}$$

Cet exemple a pour objectif d'illustrer numériquement les résultats analytiques obtenus dans la section ci-dessus pour les conductivités thermoélectriques effectives d'un composite biphasique dont l'interface entre eux est rugueuse suivant une seule direction. Les propriétés de deux phases isotropes sont choisies de manière que $k_1/k_2 = 10$, $\zeta_1/\zeta_2 = 7$ et $\sigma_1/\sigma_2 = 5$. Les épaisseurs des couches sont prises avec $H_1 = H_2 = H$ et H_0 se varie de H à $10H$.

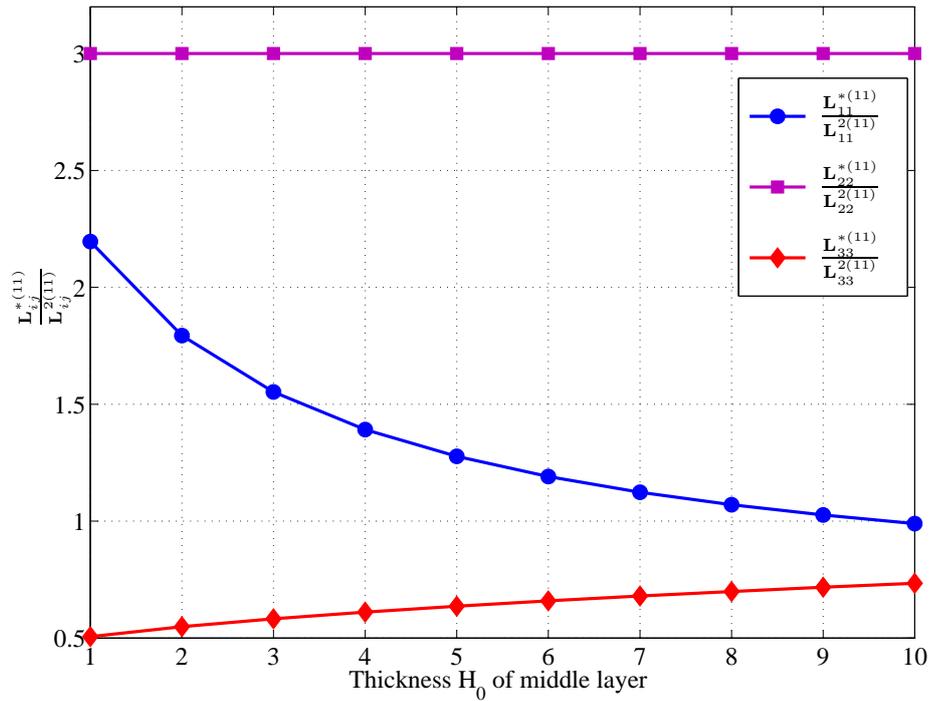


FIGURE 4.2: Variation de la composante normalisée $L_{ij}^{*(11)}/L_{ij}^{(2)(11)}$ en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

Pour étudier l'influence de la zone d'interface rugueuse sur les conductivités thermoélectriques effectives du composite lorsque l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse se varie de H à $10H$, nous dessinons dans les figures (Fig4.2), (Fig4.3) et (Fig4.4) les courbes qui décrivent les variations des propriétés effec-

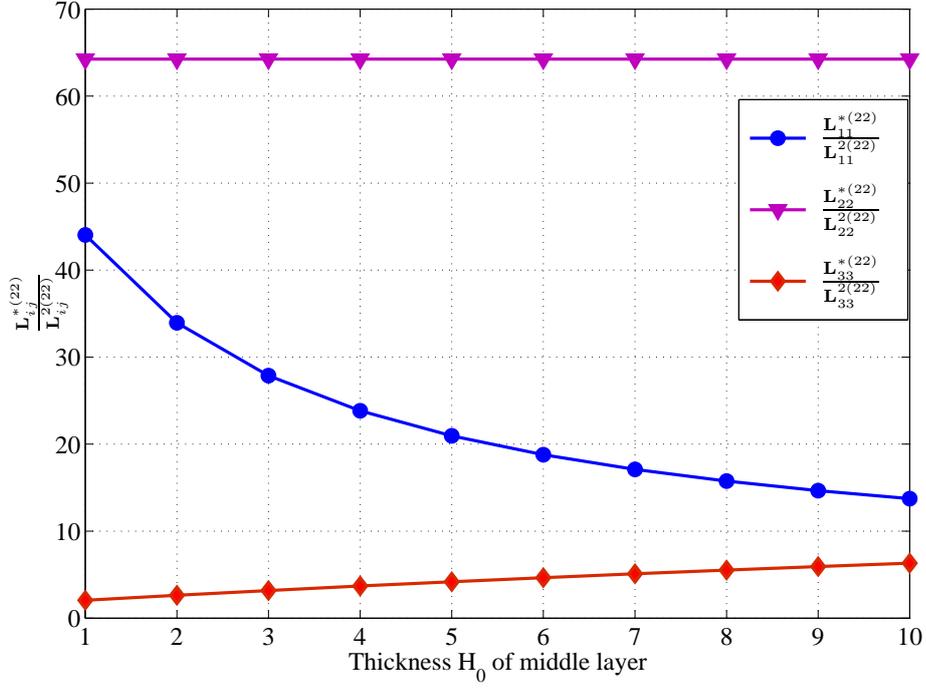


FIGURE 4.3: Variation de la composante normalisée $L_{ij}^{*(22)}/L_{ij}^{(2)(22)}$ en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

tives normalisées $L_{ij}^{*(\alpha\beta)}/L_{ij}^{(2)(\alpha\beta)}$ en fonction du rapport des épaisseurs H_0/H . En observant ces figures, nous constatons que, quand la valeur H_0 augmente, les valeurs de $L_{33}^{*(11)}/L_{33}^{(2)(11)}$, $L_{33}^{*(22)}/L_{33}^{(2)(22)}$, $L_{33}^{*(12)}/L_{33}^{(2)(12)}$ augmentent tandis que les valeurs de $L_{11}^{*(11)}/L_{11}^{(2)(11)}$, $L_{11}^{*(22)}/L_{11}^{(2)(22)}$, $L_{11}^{*(12)}/L_{11}^{(2)(12)}$ diminuent. Suivant la direction 2, le matériau composite est homogène, donc $L_{22}^{*(11)}/L_{22}^{(2)(11)}$, $L_{22}^{*(22)}/L_{22}^{(2)(22)}$ et $L_{22}^{*(12)}/L_{22}^{(2)(12)}$ restent constantes.

4.3.3 Application à la piézoélectricité

Considérons un composite stratifié biphasique à propriétés piézoélectriques dont l'interface entre ces deux phases est rugueuse selon une direction. Le profil de rugosité est supposé en peigne (Fig. 4.5). Les lois constitutives des matériaux piézoélectriques s'écrivent :

$$\sigma_{ij}^{(p)} = C_{ijkl}^{(p)} \epsilon_{kl}^{(p)} + E_{kij}^{(p)} e_k^{(p)}, \quad d_i^{(p)} = E_{ikl}^{(p)} \epsilon_{kl}^{(p)} - K_{ij}^{(p)} e_j^{(p)}. \quad (4.64)$$

Dans cette équation, $p = 1, 2$; σ_{ij} et ϵ_{kl} sont respectivement les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation; d_i et e_k sont respectivement les composantes des vecteurs du déplacement électrique et de l'intensité électrique; $C_{ijkl}^{(p)}$, $K_{ij}^{(p)}$ et $E_{kij}^{(p)}$ sont respectivement les modules élastiques, diélectriques et piézoélectriques de la phase p du composite stratifié en question. Les lois constitutives piézoélectriques (4.64) peuvent être exprimées par la forme matricielle (4.4) et (4.5) en posant $r = 4$ et en utilisant les

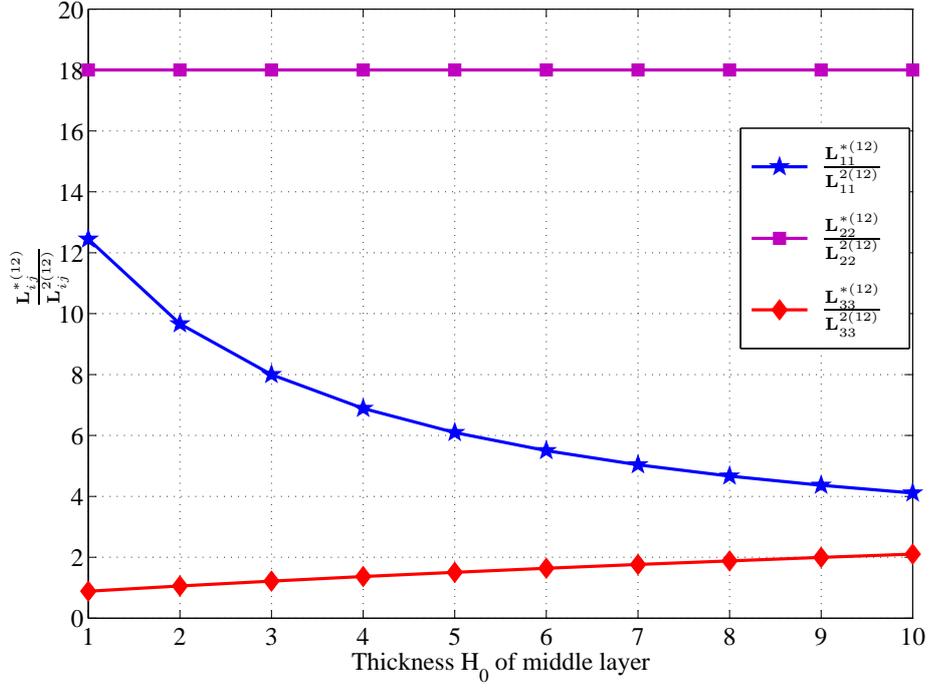


FIGURE 4.4: Variation de la composante normalisée $L_{ij}^{*(12)} / L_{ij}^{(2)(12)}$ en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 J_i^{(1)} &= \sigma_{1i}, & J_i^{(2)} &= \sigma_{2i}, & J_i^{(3)} &= \sigma_{3i}, & J_i^{(4)} &= d_i, \\
 D_i^{(\alpha)} &= w_{\alpha,i}, & \text{avec } \mathbf{w} &= (u_1, u_2, u_3, V)^T.
 \end{aligned}$$

Le tenseur piézoélectrique \mathbb{L} est donné par

$$\mathbb{L} = L_{ij}^{(\alpha\beta)} = \begin{pmatrix} C_{i1j1} & C_{i1j2} & C_{i1j3} & E_{ji1} \\ C_{i2j1} & C_{i2j2} & C_{i2j3} & E_{ji2} \\ C_{i3j1} & C_{i3j2} & C_{i3j3} & E_{ji3} \\ E_{i1j} & E_{i2j} & E_{i3j} & -K_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Pour simplifier les calculs, nous considérons le cas où le composite stratifié se compose de deux phases, la phase 1 est supposé isotrope transverse et la phase 2 est isotrope. Toutes les deux phases sont individuellement homogènes. Les fractions surfaciques des phases 1 et 2 sont respectivement c_1 et c_2 avec $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

Dans un premier temps, en utilisant la méthode d'analyse asymptotique, la zone d'interface rugueuse est homogénéisée. En utilisant la notation de Voigt, nous obtenons les composantes non nulles de la

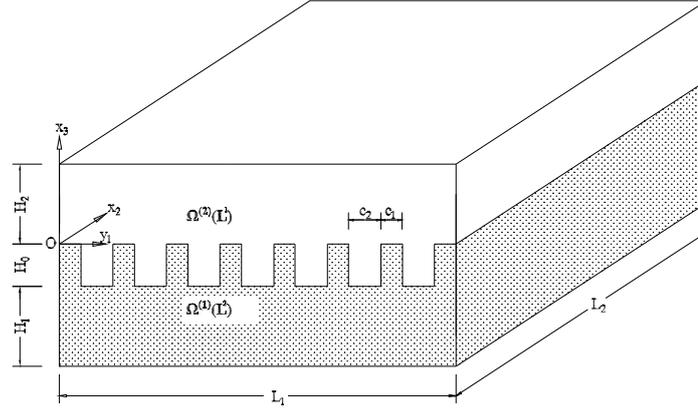


FIGURE 4.5: Composite biphasique avec l'interface très rugueuse à profil en peigne.

couche comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \frac{2C_{11}^{(1)}C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}}, \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1}{2} \left[C_{11}^{(2)} + C_{22}^{(1)} - \frac{\left(C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)}\right)^2}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}} \right], \\ \bar{C}_{33} &= \frac{1}{2} \left[C_{11}^{(2)} + C_{33}^{(1)} - \frac{\left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(2)}\right)^2}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}} \right], \\ \bar{C}_{12} &= \frac{C_{12}^{(1)}C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}}, \\ \bar{C}_{13} &= \frac{C_{13}^{(1)}C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}}, \\ \bar{C}_{23} &= \frac{1}{2} \left[C_{13}^{(1)} + C_{12}^{(2)} + \frac{C_{12}^{(2)}\left(C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)}\right)}{C_{11}^{(2)}} + \frac{C_{13}^{(1)}\left(C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)}\right)}{C_{11}^{(1)}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{44} &= \frac{1}{2} \left(C_{44}^{(1)} + C_{66}^{(2)} \right), \\
\bar{C}_{55} &= \frac{2 \left[K_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \left(E_{15}^{(1)} \right)^2 + C_{44}^{(1)} K_{11}^{(2)} \right] C_{66}^{(2)}}{K_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(1)} K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(1)} C_{66}^{(2)} + \left(E_{15}^{(1)} \right)^2 + C_{66}^{(2)} K_{11}^{(2)}}, \\
\bar{C}_{66} &= \frac{2 C_{66}^{(1)} C_{66}^{(2)}}{C_{66}^{(1)} + C_{66}^{(2)}}, \\
\bar{C}_{21} &= \bar{C}_{12}, \quad \bar{C}_{31} = \bar{C}_{13}, \quad \bar{C}_{32} = \bar{C}_{23}, \\
\bar{K}_{11} &= \frac{2 \left[K_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \left(E_{15}^{(1)} \right)^2 + C_{66}^{(2)} K_{11}^{(1)} \right] K_{11}^{(2)}}{K_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(1)} K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(1)} C_{66}^{(2)} + \left(E_{15}^{(1)} \right)^2 + C_{66}^{(2)} K_{11}^{(2)}}, \\
\bar{K}_{22} &= \frac{1}{2} \left(K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} \right), \\
\bar{K}_{33} &= \frac{1}{2} \left[K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} + \frac{\left(E_{31}^{(1)} \right)^2}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}} \right], \\
\bar{E}_{31} &= \frac{E_{31}^{(1)} C_{11}^{(2)}}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}}, \\
\bar{E}_{32} &= \frac{1}{2} \frac{\left(C_{11}^{(1)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(1)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} K_{11}^{(1)} \right) E_{31}^{(1)}}{C_{11}^{(1)} C_{11}^{(2)}}, \\
\bar{E}_{33} &= \frac{1}{2} \left[E_{33}^{(1)} - \frac{\left(C_{13}^{(1)} - C_{12}^{(2)} \right) E_{31}^{(1)}}{C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}} \right], \\
\bar{E}_{15} &= \frac{2 E_{15}^{(1)} K_{11}^{(2)} C_{66}^{(2)}}{K_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + C_{44}^{(1)} K_{11}^{(2)} + K_{11}^{(1)} C_{66}^{(2)} + \left(E_{15}^{(1)} \right)^2 + C_{66}^{(2)} K_{11}^{(2)}}. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

En deuxième temps, nous effectuons l'homogénéisation du composite stratifié à trois couches. Les formules analytiques des composantes du tenseur de piézoélectricité du composite en question est très grande. Donc on choisit les matériaux concrets pour illustrer les résultats analytiques, le domaine $\Omega^{(1)}$ est occupé par PZT-7A qui est isotrope transverse, et le domaine $\Omega^{(2)}$ constituant LaRC-Si qui est isotrope. La valeur des composantes du tenseur de piézoélectricité des matériaux du composite sont données par

Propriété	PZT-7A	LaRC-SI
$C_{11}(GPa)$	148.0	8.1
$C_{12}(GPa)$	76.2	5.4
$C_{13}(GPa)$	74.2	5.4
$C_{22}(GPa)$	148	8.1
$C_{23}(GPa)$	74.2	5.4
$C_{33}(GPa)$	131.0	8.1
$C_{44}(GPa)$	25.4	1.35
$C_{55}(GPa)$	25.4	1.35
$C_{66}(GPa)$	35.9	1.35
K_1/K_0	460	2.8
K_2/K_0	460	2.8
K_3/K_0	235	2.8
$E_{15}(C/m^2)$	9.2	0
$E_{31}(C/m^2)$	-2.1	0
$E_{32}(C/m^2)$	-2.1	0
$E_{33}(C/m^2)$	9.5	0

Pour étudier l'influence de la rugosité de l'interface entre les deux phases sur le composite, on considère le cas où les épaisseurs H_1 , H_2 des couches inférieures et supérieures sont constants et égaux à $1m$, par contre l'épaisseur de la couche intermédiaire (phase équivalente de la zone d'interface rugueuse) se varie de $1m$ à $10m$. La variation des composantes du tenseur de piézoélectricité effectif du composite en question \mathbb{L}^* est en fonction de l'épaisseur H_0 est tracée dans les figures Fig4.6, Fig4.7 et Fig4.8. En étudiant les figures (Fig4.6), (Fig4.7) et (Fig4.8) on constate qu'avec l'augmentation de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface, pour la partie d'élasticité les composantes C_{22}^* , C_{33}^* , C_{44}^* , C_{23}^* augmentent, cependant les composantes C_{11}^* , C_{66}^* diminuent, et en même temps C_{12}^* , C_{13}^* , C_{55}^* ne varient pas beaucoup. Dans la partie de conductivité électrique la composante K_{22}^* reste constante, K_{11}^* diminue, K_{33}^* croit avec l'augmentation de H_0 . Dans la partie couplée des phénomènes les composantes E_{31}^* , E_{32}^* légèrement augmentent, la composante E_{15}^* diminue et E_{33}^* augmente si H_0 se croit.

A cause des grosses formules analytiques des propriétés effectives du composite multicouche à propriétés piézoélectriques dont l'interface entre deux domaines est en dent de scie. Le composite est décrit comme dans la figure (Fig 4.1), avec la couche supérieure se compose du PZT-7A à l'épaisseur H_1 , la couche inférieure se constitue du LaRC-Si à l'épaisseur H_2 , et la couche intermédiaire est la zone d'interface rugueuse où le profil de l'interface est en dent de scie. La valeur des composantes des matériaux constitués du composite est décrite à la subsection (4.5.1). En respectant le procédure de calcul analytique comme dans la section (4.1) pour obtenir la formule des composantes du tenseur des propriétés

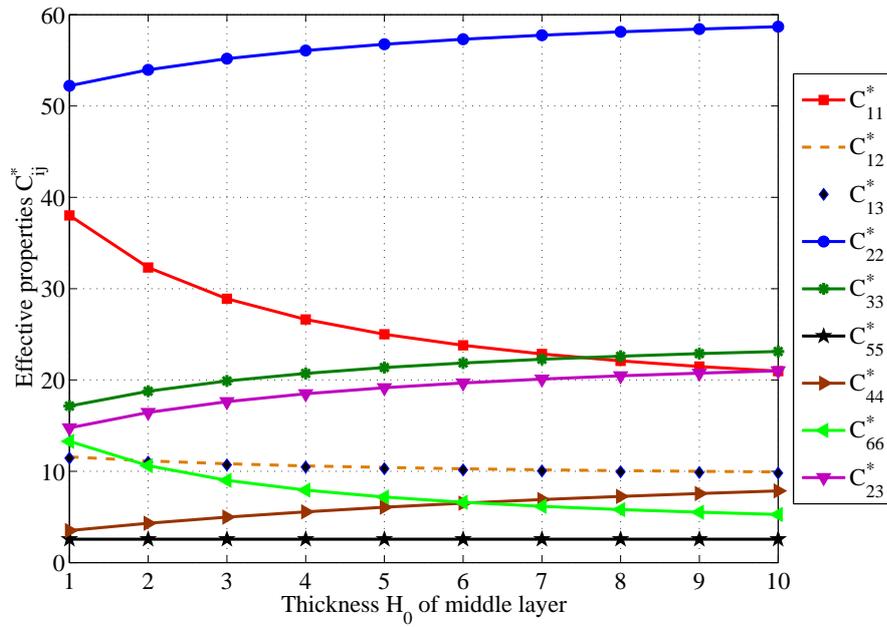


FIGURE 4.6: Variation des composantes effectives C_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

piézoélectriques équivalente de la zone d'interface et puis les formules du tenseur des propriétés piézoélectriques effectif du composite en question sont obtenues en appliquant les calcul comme dans la section (4.3). L'étude de l'influence de la zone d'interface sur les propriétés du composite est effectuée en variant l'épaisseur H_0 de la couche intermédiaire de $1m$ à $10m$ et les épaisseurs des couches inférieure et supérieure sont constantes et égales à $1m$. La variation des composantes du tenseur des propriétés effectives \mathbb{L}^* du composite considéré en fonction de l'épaisseur H_0 est présentée par les figures (Fig4.9), (Fig4.10), (Fig4.11),

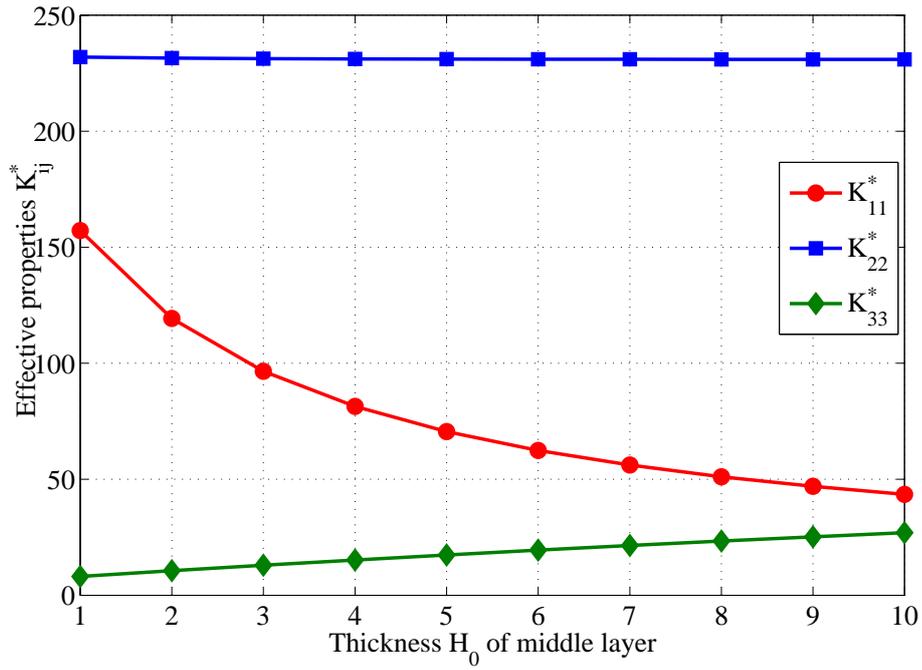


FIGURE 4.7: Variation des composantes effectives K_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

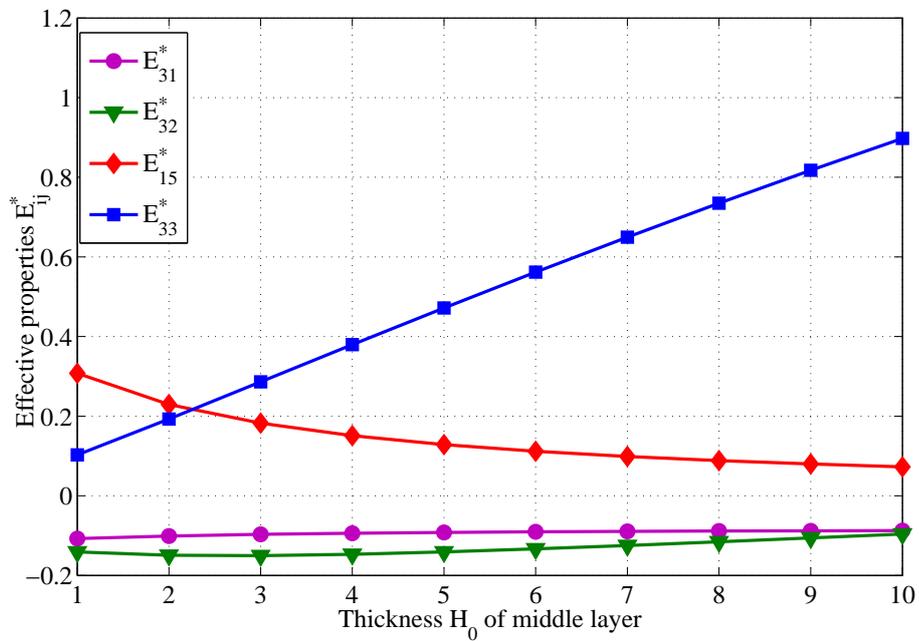


FIGURE 4.8: Variation des composantes effectives E_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

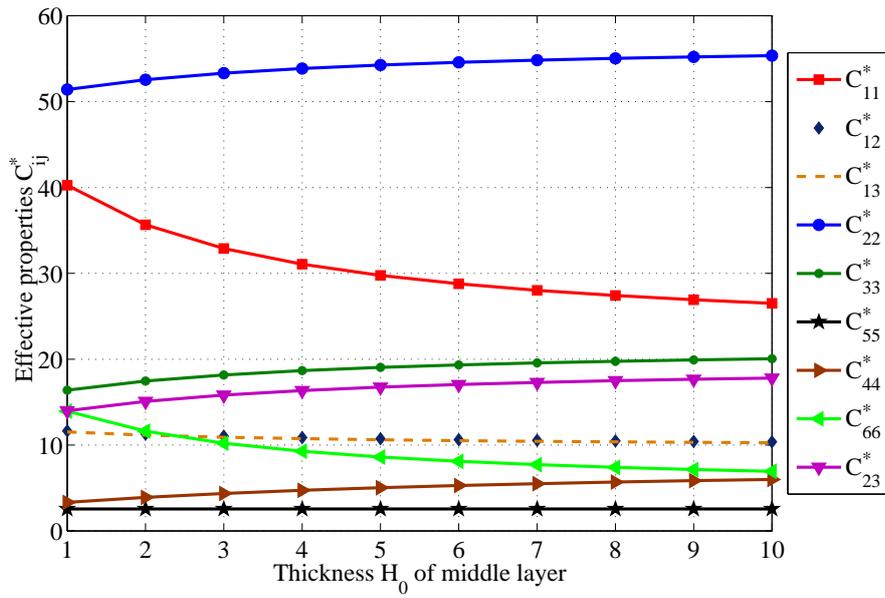


FIGURE 4.9: Variation des composantes effectives C_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

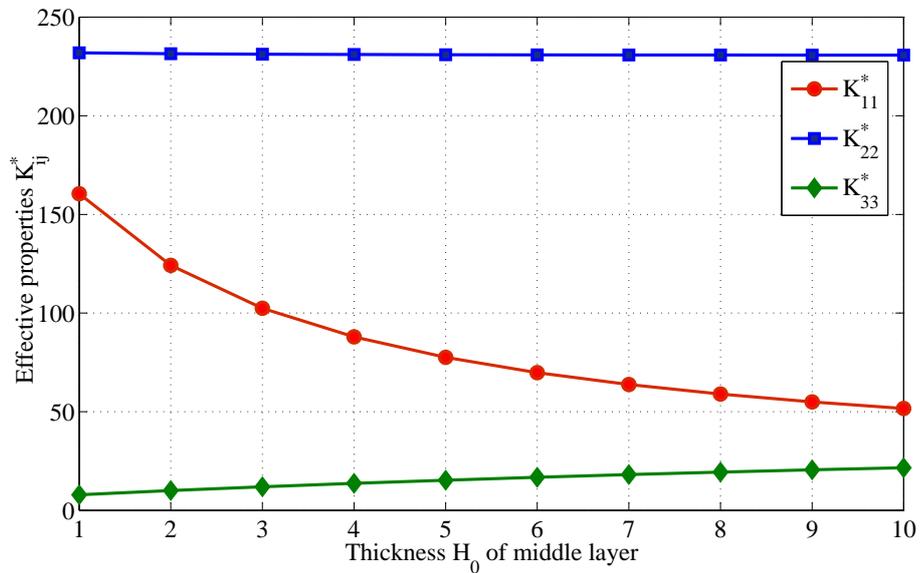


FIGURE 4.10: Variation des composantes effectives K_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

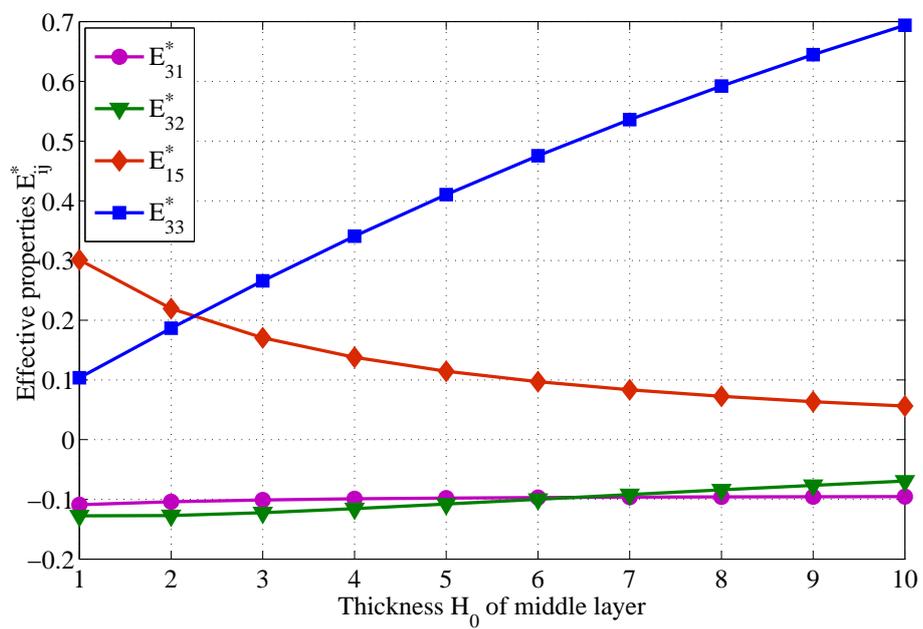


FIGURE 4.11: Variation des composantes effectives E_{ij}^* en fonction de l'épaisseur H_0 de la zone d'interface rugueuse.

Chapitre 5

Homogénéisation des zones d'interface ondulée suivant deux directions par la transformée de Fourier rapide

Nous revenons au problème qui a été décrit à la section 4.1. Cependant, le problème que nous allons traiter dans ce chapitre est considéré comme un cas particulier dont quelques particularités peuvent être citées comme suit :

(i) Le matériau composite Ω étudié dans cette section est un composite stratifié et l'interface entre les deux phases est considérée ondulée suivant deux directions et autour une surface plane. Cela signifie que les coordonnées curvilignes utilisées pour décrire l'interface deviennent les coordonnées cartésiennes usuelles.

(ii) Les phénomènes couplés étudiés dans cette section sont la thermoélectricité avec le couplage entre l'électricité et la thermique ($r = 2$) et la piézoélectricité avec le couplage entre l'élasticité et l'électricité ($r = 4$).

(iii) Dans cette section, l'interface rugueuse entre les deux phases est supposée en dent à la forme des cônes.

Comme nous avons démontré dans le chapitre 4 que la détermination des propriétés mésoscopiques de la zone d'interface ondulée a besoin de la résolution d'un problème local défini par (4.42) et (4.43). Pour résoudre ce problème, il nécessite d'utiliser une méthode numérique. Dans cette section, nous proposons une méthode numérique basée sur la transformée de Fourier rapide pour atteindre cet objectif.

5.1 Homogénéisation des zones d'interface thermoélectrique ondulée suivant deux directions

5.1.1 Loi constitutive locale

Le phénomène thermoélectrique a été découvert au cours du XIXe siècle grâce aux travaux de Seebeck, Peltier et Lord Kelvin. Un matériau est dit thermoélectrique lorsqu'il est capable de transformer directement la chaleur en électricité, ou de déplacer des calories par l'application d'un courant électrique. Les applications des matériaux thermoélectriques comportent les deux volets : (micro)-refroidissement ou production d'électricité à partir de sources de chaleur perdue. Un grand nombre des matériaux thermoélectriques ont été découverts au cours des décennies 1950 et 1960, par exemple, le tellure de bismuth (Bi_2Te_3) utilisé dans les modules Peltier commerciaux, ou des alliages silicium-germanium (SiGe) utilisés pour l'alimentation des sondes spatiales dans les générateurs thermoélectriques à radioisotope.

Considérons un matériau thermoélectrique et homogène. Les vecteurs du courant électrique \mathbf{J} et du courant d'entropie \mathbf{q}/T sont reliés au potentiel électrique V et à la température T par la loi constitutive présentée dans Straley (1981) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{q}/T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{K}/T + \mathbf{s}^2\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\nabla V \\ -\nabla T \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{s} , et \mathbf{K} sont respectivement les tenseurs de conductivité électrique, de thermoélectricité et de conductivité thermique. Dans cette relation, nous faisons une hypothèse que la variation de la température est très petite autour de la température T_0 à l'état d'équilibre et pouvons considérer que $\mathbf{K}/T + \mathbf{s}^2\boldsymbol{\sigma}$ est invariant (voir Yang, 2013). Pour simplifier, nous définissons

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ -T \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(1)} \\ \mathbf{D}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla w_1 \\ \nabla w_2 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(1)} \\ \mathbf{J}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{q}/T \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J}^{(\alpha)} = \mathbf{L}^{(\alpha\beta)} \mathbf{D}^{(\beta)}, \quad (5.3)$$

où $\alpha, \beta = 1, 2$ et $\mathbf{L}^{(\alpha\beta)}$ sont des tenseurs définis par

$$\begin{aligned} (\mathbf{L})_{ij}^{(11)} &= (\boldsymbol{\sigma})_{ij}, & (\mathbf{L})_{ij}^{(12)} &= (\mathbf{L})_{ij}^{(21)} = (\mathbf{s}\boldsymbol{\sigma})_{ij}, \\ (\mathbf{L})_{ij}^{(22)} &= \left(\frac{1}{T} \mathbf{K} + \mathbf{s}^2 \boldsymbol{\sigma} \right)_{ij}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les équations de conservation peuvent s'écrire

$$\text{div} \left[\mathbf{L}^{(\alpha\beta)} \nabla \mathbf{w}^{(\beta)} \right] = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

5.1.2 Homogénéisation numérique de la zone d'interface thermoélectrique rugueuse

Nous rappelons que Ω est soumis à un champ d'intensité uniforme à la frontière $\partial\Omega$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (5.6)$$

Puisque la rugosité est périodique et à la même période ϵ le long de Ox_1 et Ox_2 et l'interface rugueuse est en dent à la forme des cônes, donc le problème à résoudre se réduit au problème dans lequel des fibres cylindriques sont distribués périodiquement dans une matrice suivant deux directions x_1 et x_2 (voir Fig. 5.1).

En introduisant un milieu de référence caractérisé par \mathbf{L}^0 , l'équation de conservation (5.5) devient

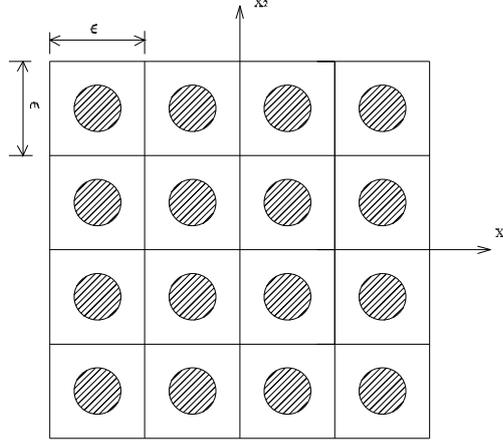


FIGURE 5.1: Intersection entre la zone d'interface rugueuse et le plan x_3 .

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \left[\left(\mathbf{L}^{0(\alpha\beta)} + \Delta \mathbf{L}^{(\alpha\beta)} \right) \mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) \right] = 0, \quad (5.7)$$

où $\Delta \mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}^{0(\alpha\beta)}$. Nous décomposons le champ d'intensité $\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x})$ en deux parties, la partie uniforme \mathbf{D}^0 et la partie de perturbation périodique $\mathbf{D}^{*(\beta)}(\mathbf{x})$, tel que $\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{(\beta)} + \mathbf{D}^{*(\beta)}(\mathbf{x})$. Le champ potentiel associé au champ d'intensité périodique $\mathbf{D}^{*(\beta)}(\mathbf{x})$ est noté par $w^{*(\beta)}(\mathbf{x})$. Alors l'équation (5.7) peut être réécrite sous la forme équivalente

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{L}^{0(\alpha\beta)} \nabla w^{*(\beta)}(\mathbf{x}) \right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.8)$$

où le champ de polarisation $\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ est défini par

$$\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}^{*(\beta)}(\mathbf{x}) \right). \quad (5.9)$$

Précisément

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{(1)} &= \Delta \mathbf{L}^{(11)} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{L}^{(12)} \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}^{(a)} + \boldsymbol{\tau}^{(b)}, \\ \boldsymbol{\tau}^{(2)} &= \Delta \mathbf{L}^{(21)} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{L}^{(22)} \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}^{(c)} + \boldsymbol{\tau}^{(d)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{(a)} &= \Delta \mathbf{L}^{(11)} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\tau}^{(b)} &= \Delta \mathbf{L}^{(12)} \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\tau}^{(c)} &= \Delta \mathbf{L}^{(21)} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\tau}^{(d)} &= \Delta \mathbf{L}^{(22)} \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

On peut réécrire l'équation (5.8) sous la forme équivalente

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{L}^{0(11)} \mathbf{D}^{*(1)}(\mathbf{x}) \right] + \nabla \cdot \left[\mathbf{L}^{0(12)} \mathbf{D}^{*(2)}(\mathbf{x}) \right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(a)}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{L}^{0(21)} \mathbf{D}^{*(1)}(\mathbf{x}) \right] + \nabla \cdot \left[\mathbf{L}^{0(22)} \mathbf{D}^{*(2)}(\mathbf{x}) \right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(c)}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(d)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

La résolution des équations (5.10) et (5.11) est effectuée dans l'espace Fourier. Par la transformée de Fourier des champs de potentiel, d'intensité et de polarisation, on obtient

$$w^{*(\beta)}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{w}^{*(\beta)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(\alpha)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \sum_{\xi}^{N_k} \hat{\mathbf{D}}^{(\beta)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \quad (5.12)$$

où $i = \sqrt{-1}$, et $\hat{w}^{*(\beta)}(\xi)$, $\hat{\mathbf{D}}^{(\beta)}(\xi)$ et $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(\alpha)}(\xi)$ sont les transformées de Fourier discrétisées de $w^{*(\beta)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ respectivement, ξ est vecteur d'onde arrangé selon un réseau de discrétisation au période $2\pi/\lambda_m$ selon la direction m , N_k est le nombre des vecteurs d'onde discrétisés.

La transformée Fourier des équations (5.10) et (5.11) sont

$$\sum_{\xi=1}^{N_k} \left\{ -\xi \mathbf{L}^{0(11)} \xi \hat{u}^{*(1)} - \xi \mathbf{L}^{0(12)} \xi \hat{u}^{*(2)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}(\xi) + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}(\xi) \right\} e^{i\xi \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

$$\sum_{\xi=1}^{N_k} \left\{ -\xi \mathbf{L}^{0(21)} \xi \hat{u}^{*(1)} - \xi \mathbf{L}^{0(22)} \xi \hat{u}^{*(2)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)}(\xi) + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}(\xi) \right\} e^{i\xi \mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

Les équations (5.13) et (5.14) peuvent se déduire à

$$\sum_{\xi=1}^{N_k} \left\{ -\xi \mathbf{L}^{0(11)} \xi \hat{u}^{*(1)} - \xi \mathbf{L}^{0(12)} \xi \hat{u}^{*(2)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)}(\xi) + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}(\xi) \right\} = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

$$\sum_{\xi=1}^{N_k} \left\{ -\xi \mathbf{L}^{0(21)} \xi \hat{u}^{*(1)} - \xi \mathbf{L}^{0(22)} \xi \hat{u}^{*(2)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)}(\xi) + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}(\xi) \right\} = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

Les deux équations ci-dessus nous permettent d'explicitier les valeurs de $\hat{w}^{*(1)}(\xi)$ et $\hat{w}^{*(2)}(\xi)$ en fonction des termes de polarisation

$$\hat{w}^{*(1)}(\xi) = \frac{[i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}] (\xi \mathbf{L}^{0(12)} \xi) - [i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}] (\xi \mathbf{L}^{0(22)} \xi)}{(\xi \mathbf{L}^{0(21)} \xi) (\xi \mathbf{L}^{0(12)} \xi) - (\xi \mathbf{L}^{0(11)} \xi) (\xi \mathbf{L}^{0(22)} \xi)}, \quad (5.17)$$

$$\hat{w}^{*(2)}(\xi) = \frac{[i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}] (\xi \mathbf{L}^{0(11)} \xi) - [i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)} + i\xi \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}] (\xi \mathbf{L}^{0(21)} \xi)}{(\xi \mathbf{L}^{0(22)} \xi) (\xi \mathbf{L}^{0(11)} \xi) - (\xi \mathbf{L}^{0(12)} \xi) (\xi \mathbf{L}^{0(21)} \xi)}. \quad (5.18)$$

Les champs de flux $\hat{\mathbf{D}}(\xi)$ dans l'espace Fourier sont alors déterminés par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\xi) &= \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\xi) + \hat{\mathbf{D}}^{*(1)}(\xi) = \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\xi) + \widehat{\nabla \cdot w^{*(1)}}(\xi) = \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\xi) + i\xi \hat{u}^{*(1)}(\xi) \\ &= \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\xi) + \hat{\Gamma}^{(11)}(\xi) [\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)} + \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}] + \hat{\Gamma}^{(12)}(\xi) [\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)} + \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}], \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\xi) &= \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\xi) + \hat{\mathbf{D}}^{*(2)}(\xi) = \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\xi) + \widehat{\nabla \cdot w^{*(2)}}(\xi) = \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\xi) + i\xi \hat{u}^{*(2)}(\xi) \\ &= \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\xi) + \hat{\Gamma}^{(21)}(\xi) [\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)} + \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)}] + \hat{\Gamma}^{(22)}(\xi) [\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)} + \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)}], \end{aligned} \quad (5.20)$$

où les tenseurs $\hat{\Gamma}^{(\alpha\beta)}$ sont les transformées de Fourier des opérateurs de Green. En tenant compte de la relation $\hat{\mathbf{D}}^{*(\beta)}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla \cdot \hat{w}^{*(\beta)}(\boldsymbol{\xi})$ et en comparant les équations de (5.17) à (5.20), on obtient les composantes des tenseurs $\hat{\Gamma}^{(\alpha\beta)}$

$$\hat{\Gamma}^{(11)} = \frac{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(22)} \boldsymbol{\xi}\right) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(21)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(12)} \boldsymbol{\xi}\right) - \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(11)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(22)} \boldsymbol{\xi}\right)}, \quad (5.21)$$

$$\hat{\Gamma}^{(12)} = \frac{-\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(12)} \boldsymbol{\xi}\right) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(21)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(12)} \boldsymbol{\xi}\right) - \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(11)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(22)} \boldsymbol{\xi}\right)}, \quad (5.22)$$

$$\hat{\Gamma}^{(21)} = \frac{-\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(21)} \boldsymbol{\xi}\right) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(12)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(21)} \boldsymbol{\xi}\right) - \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(22)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(11)} \boldsymbol{\xi}\right)}, \quad (5.23)$$

$$\hat{\Gamma}^{(22)} = \frac{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(11)} \boldsymbol{\xi}\right) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{\left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(12)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(21)} \boldsymbol{\xi}\right) - \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(22)} \boldsymbol{\xi}\right) \left(\boldsymbol{\xi} \mathbf{L}^{0(11)} \boldsymbol{\xi}\right)}. \quad (5.24)$$

Les vecteurs de polarisations sont déterminés par

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(a)} = \left[\mathbf{L}^{M(11)} - \mathbf{L}^{0(11)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(11)} - \mathbf{L}^{M(11)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(1)} \right](\boldsymbol{\xi}), \quad (5.25)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(b)} = \left[\mathbf{L}^{M(12)} - \mathbf{L}^{0(12)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(12)} - \mathbf{L}^{M(12)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(2)} \right](\boldsymbol{\xi}), \quad (5.26)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(c)} = \left[\mathbf{L}^{M(21)} - \mathbf{L}^{0(21)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(21)} - \mathbf{L}^{M(21)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(1)} \right](\boldsymbol{\xi}), \quad (5.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(d)} = \left[\mathbf{L}^{M(22)} - \mathbf{L}^{0(22)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(22)} - \mathbf{L}^{M(22)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(2)} \right](\boldsymbol{\xi}). \quad (5.28)$$

Dans cette expression, $\hat{\chi}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')$ est la transformée de Fourier de la fonction caractéristique des inclusions $\chi(\mathbf{x})$ qui est définie par $\chi(\mathbf{x}) = 1$ si \mathbf{x} appartient à la phase i , sinon $\chi(\mathbf{x}) = 0$. Dans l'espace Fourier, on a

$$\hat{\chi}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') = \frac{e^{-i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \mathbf{x}}}{|\Omega|} \int_{\Omega^{(i)}} e^{-i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \tilde{\mathbf{x}}} d\tilde{\mathbf{x}}. \quad (5.29)$$

Le tenseur de conductivité thermoélectrique local $\mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x})$ peut s'écrire

$$\mathbf{L}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)}(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{L}^{I(\alpha\beta)} - \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)} \right) \chi(\mathbf{x}). \quad (5.30)$$

Les champs de flux $\mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ sont donnés par

$$\mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)} \mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{L}^{I(\alpha\beta)} - \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)} \right) \chi(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{x}). \quad (5.31)$$

Dans l'espace de la transformée de Fourier, les champs de flux sont calculés par

$$\hat{\mathbf{J}}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)} \hat{\mathbf{D}}^{(\beta)}(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbf{L}^{I(\alpha\beta)} - \mathbf{L}^{M(\alpha\beta)} \right) \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(\beta)} \right](\boldsymbol{\xi}). \quad (5.32)$$

Le signe $*$ désigne le produit de convolution dans l'espace de Fourier. Plus précisément,

$$\left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{(\beta)} \right](\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}'=1}^{N_k} \hat{\chi}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') e^{i(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \mathbf{x}} \hat{f}_j^{(\beta)}(\boldsymbol{\xi}') e^{i\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{x}}. \quad (5.33)$$

Les champs locaux $\hat{\mathbf{D}}^{(\beta)}(\boldsymbol{\xi})$ sont déterminés par les calculs itératifs à partir des équations (5.19)-(5.28).

Le détail des calculs est décrit par :

• Initialisation

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \hat{\mathbf{D}}^{1(1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{D}}^{0(1)}(\boldsymbol{\xi}), \\
\hat{\mathbf{D}}^{1(2)}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{D}}^{0(2)}(\boldsymbol{\xi}), \\
\text{(b)} \quad \hat{\mathbf{J}}^{1(1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{L}^{M(11)} \hat{\mathbf{D}}^{1(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(11)} - \mathbf{L}^{M(11)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{1(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \mathbf{L}^{M(12)} \hat{\mathbf{D}}^{1(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(12)} - \mathbf{L}^{M(12)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{1(2)} \right](\boldsymbol{\xi}), \\
\hat{\mathbf{J}}^{1(2)}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{L}^{M(21)} \hat{\mathbf{D}}^{1(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(21)} - \mathbf{L}^{M(21)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{1(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \mathbf{L}^{M(22)} \hat{\mathbf{D}}^{1(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(22)} - \mathbf{L}^{M(22)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{1(2)} \right](\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

• Itération $i + 1$

Supposons que $\hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\mathbf{J}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\mathbf{J}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi})$ sont connus, on effectue les calculs

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{D}}^{i+1(1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(11)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(11)} - \mathbf{L}^{0(11)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(11)} - \mathbf{L}^{M(11)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(12)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(12)} - \mathbf{L}^{0(12)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(12)} - \mathbf{L}^{M(12)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(2)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(21)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(21)} - \mathbf{L}^{0(21)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(21)} - \mathbf{L}^{M(21)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(22)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(22)} - \mathbf{L}^{0(22)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(22)} - \mathbf{L}^{M(22)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(2)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
\hat{\mathbf{D}}^{i+1(2)}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(21)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(11)} - \mathbf{L}^{0(11)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(11)} - \mathbf{L}^{M(11)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(22)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(12)} - \mathbf{L}^{0(12)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(12)} - \mathbf{L}^{M(12)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(2)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(11)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(21)} - \mathbf{L}^{0(21)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(21)} - \mathbf{L}^{M(21)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^{(12)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left[\mathbf{L}^{M(22)} - \mathbf{L}^{0(22)} \right] \hat{\mathbf{D}}^{i(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(22)} - \mathbf{L}^{M(22)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i(2)} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
\hat{\mathbf{J}}^{i+1(1)} &= \mathbf{L}^{M(11)} \hat{\mathbf{D}}^{i+1(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(11)} - \mathbf{L}^{M(11)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i+1(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \mathbf{L}^{M(12)} \hat{\mathbf{D}}^{i+1(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(12)} - \mathbf{L}^{M(12)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i+1(2)} \right](\boldsymbol{\xi}) \\
\hat{\mathbf{J}}^{i+1(2)} &= \mathbf{L}^{M(21)} \hat{\mathbf{D}}^{i+1(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(21)} - \mathbf{L}^{M(21)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i+1(1)} \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \mathbf{L}^{M(22)} \hat{\mathbf{D}}^{i+1(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \left[\mathbf{L}^{I(22)} - \mathbf{L}^{M(22)} \right] \left[\hat{\chi} * \hat{\mathbf{D}}^{i+1(2)} \right](\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

Le calcul itératif s'arrête lorsque

$$\frac{\| \hat{\mathbf{J}}^{i+1(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\mathbf{J}}^{i(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) \|}{\| \hat{\mathbf{J}}^{i+1(\alpha)}(\boldsymbol{\xi}) \|} < \gamma, \tag{5.34}$$

avec γ est une valeur suffisamment petite choisie.

Le champ du flux $J_i^{(\alpha)}$ mésoscopique peut être déterminé à l'aide de la transformée de Fourier du champ du flux local. En fin, les champs $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ à l'échelle mésoscopique sont calculés par

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{J}^{(1)} \rangle &= \bar{\mathbf{L}}^{(11)} \mathbf{D}^{0(1)} + \bar{\mathbf{L}}^{(12)} \mathbf{D}^{0(2)} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)}(0), \\ \langle \mathbf{J}^{(2)} \rangle &= \bar{\mathbf{L}}^{(21)} \mathbf{D}^{0(1)} + \bar{\mathbf{L}}^{(22)} \mathbf{D}^{0(2)} = \hat{\mathbf{J}}^{(2)}(0).\end{aligned}\quad (5.35)$$

En prenant alternativement $D_i^{0(1)} = 1$ ou $D_i^{0(2)} = 1$, l'équation (5.35) nous permet d'identifier les composantes des tenseurs $\bar{\mathbf{L}}^{(11)}$, $\bar{\mathbf{L}}^{(12)}$, $\bar{\mathbf{L}}^{(21)}$ et $\bar{\mathbf{L}}^{(22)}$.

5.1.3 Exemples numériques

Dans un premier temps, on effectue l'homogénéisation à l'échelle mésoscopique dans chaque plan en utilisant la méthode de la transformée de Fourier rapide (TFR). Pour illustrer les résultats obtenus par la méthode TFR on considère un composite constituant deux matériaux thermoélectriques qui sont individuellement isotropes et homogènes, l'interface entre ces deux phases est supposée en dent à forme des cônes distribuées périodiquement. Les tenseurs de conductivité électrique donnés par $\sigma_1 = \sigma_1 \mathbf{I}$, $\sigma_2 = \sigma_2 \mathbf{I}$ avec $\sigma_1 = 7\sigma_2$. Les tenseurs de conductivité thermique sont pris $\mathbf{K}_1 = k_1 \mathbf{I}$, $\mathbf{K}_2 = k_2 \mathbf{I}$ avec $k_1 = 10k_2$. Les tenseurs de thermoélectricité sont choisis $\mathbf{s}_1 = s_1 \mathbf{I}$ et $\mathbf{s}_2 = s_2 \mathbf{I}$ avec $s_1 = 5s_2$. La température de référence T_0 est égale à 1. En effectuant la procédure du calcul itératif comme avoir présenté ci-dessus, on obtient les courbes qui font apparaître la variation des composantes non nulles du tenseur de conductivité thermoélectrique effective de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1.

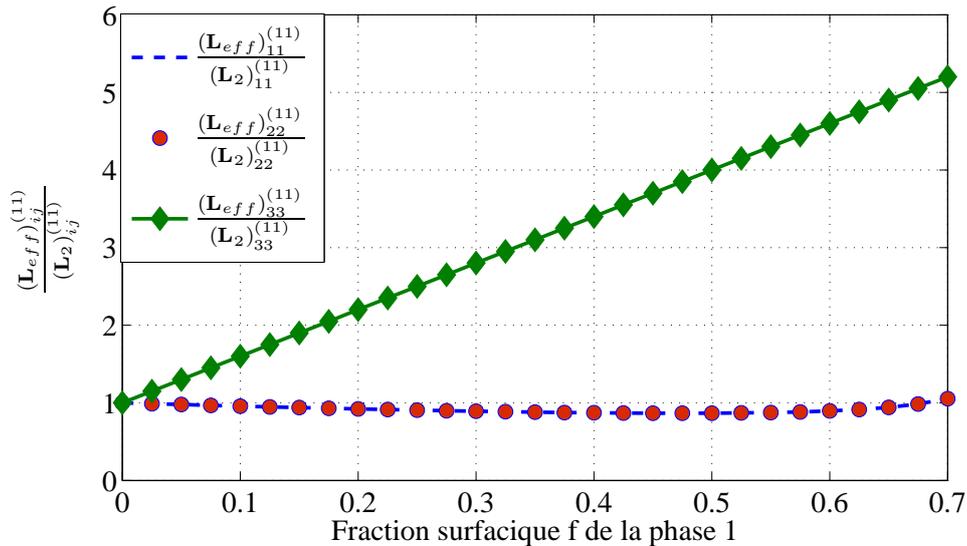


FIGURE 5.2: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}_{eff})_{ij}^{(11)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(11)}}$ de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1

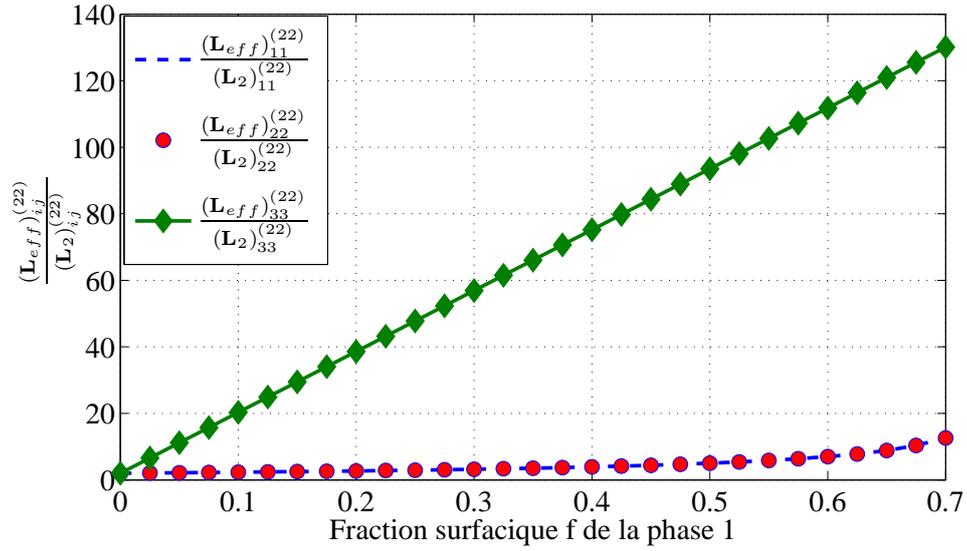


FIGURE 5.3: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}_{eff})_{ij}^{(22)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(22)}}$ de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1

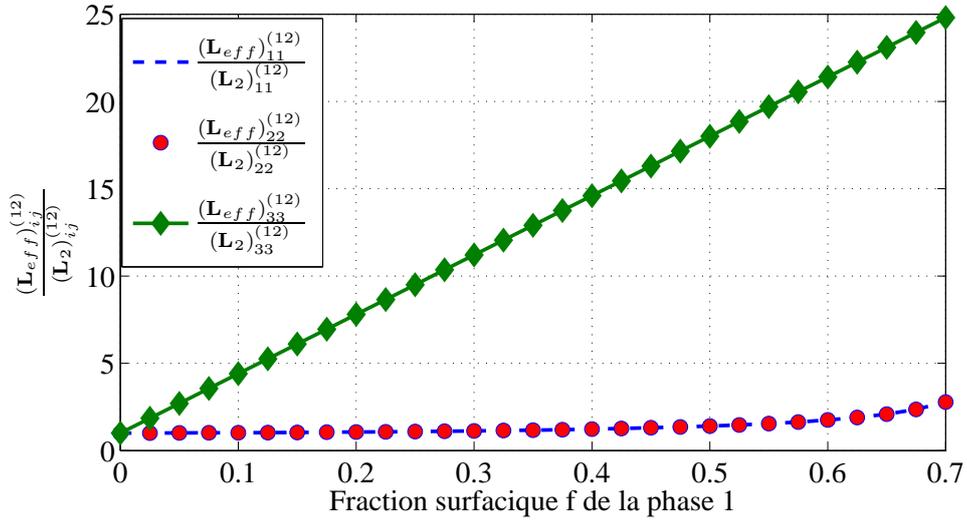


FIGURE 5.4: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}_{eff})_{ij}^{(12)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(12)}}$ de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1

En observant les figures (5.2), (5.3) et (5.4), on constate que dans la zone d'interface rugueuse, lorsque la fraction surfacique de la phase 1 augmente, les valeurs des composante $\bar{L}_{33}^{(11)}$, $\bar{L}_{33}^{(12)}$, et $\bar{L}_{33}^{(22)}$ augmentent, tandis que les valeurs des composantes $\bar{L}_{11}^{(11)} = \bar{L}_{22}^{(11)}$, $\bar{L}_{11}^{(12)} = \bar{L}_{22}^{(12)}$, et $\bar{L}_{11}^{(22)} = \bar{L}_{22}^{(22)}$ sont faiblement variées.

Dans un deuxième temps, on effectue l'homogénéisation à l'échelle macroscopique pour étudier l'influence de la zone d'interface rugueuse sur les propriétés effectives du composite. La description du

composite étudié est présentée comme dans la figure 3.1 au chapitre 3 avec H_1 , H_2 et H_0 étant respectivement les épaisseurs de la phase 1, 2 et de la zone d'interface rugueuse. La période de rugosité $\epsilon = 1$ est suivant les deux directions x_1 et x_2 . Dans cet exemple, on choisit $H_1 = H_2 = H$ et H_0 se varie de H à $10H$.

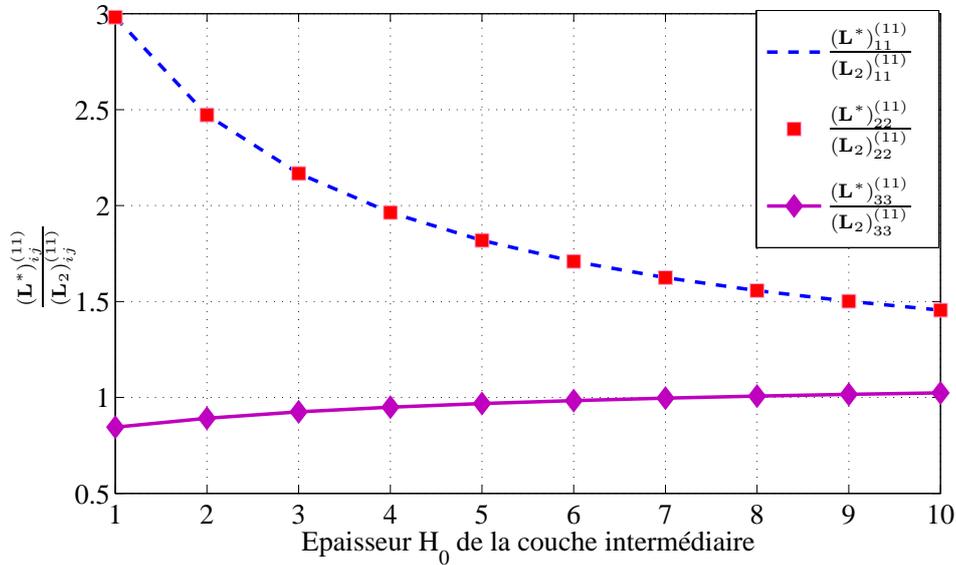


FIGURE 5.5: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}^*)_{ij}^{(11)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(11)}}$ en fonction de l'épaisseur H_0

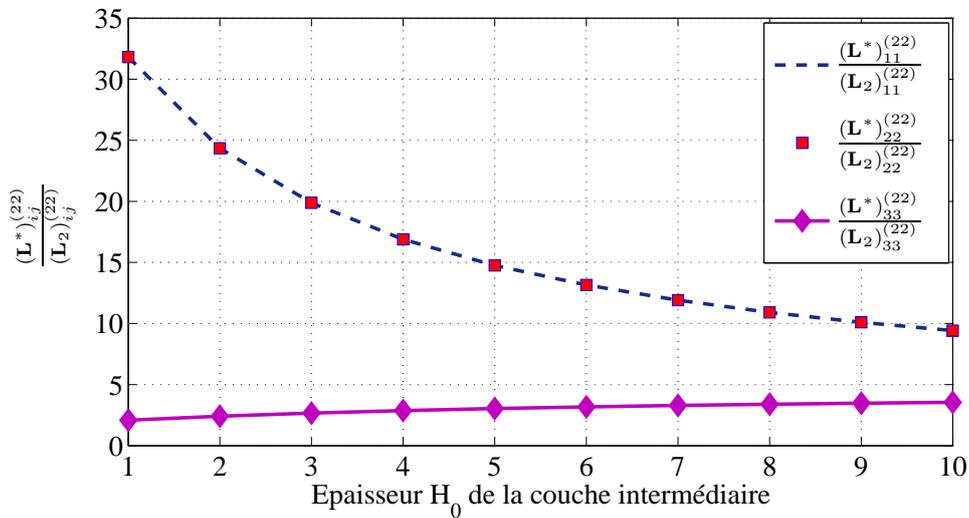


FIGURE 5.6: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}^*)_{ij}^{(22)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(22)}}$ en fonction de l'épaisseur H_0

Les propriétés effectives normalisées $(\mathbf{L}^{*(\alpha\beta)})_{ij} / (\mathbf{L}_2)^{(\alpha\beta)}_{ij}$ sont tracés en fonction de H_0 dans les figures (5.5), (5.6) et (5.7). Ces diagrammes montrent que les courbes des composantes $(\mathbf{L}^{*(\alpha\beta)})_{11}$ coïncident avec celles des composantes $(\mathbf{L}^*)^{(\alpha\beta)}_{22}$ avec $\alpha\beta = 11, 12, 21, 22$ due à l'isotropie des phases constituants

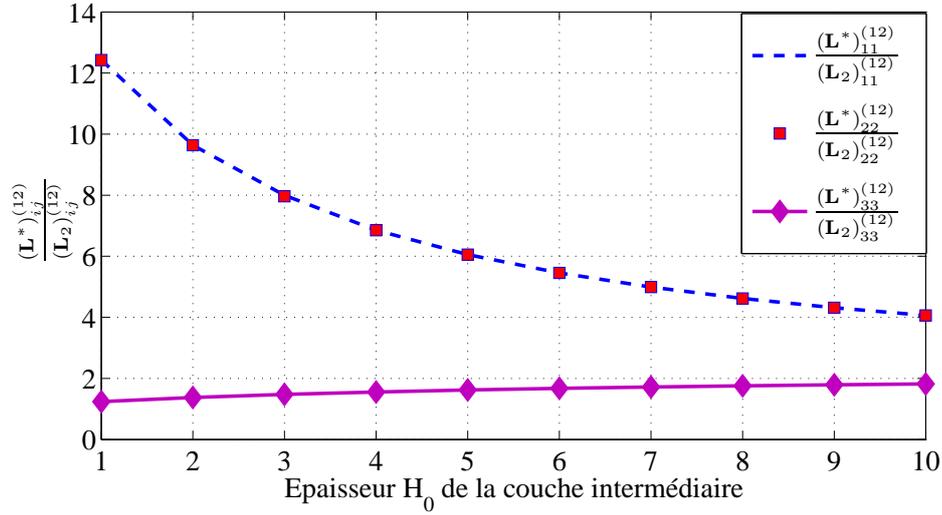


FIGURE 5.7: Les composantes normalisées $\frac{(\mathbf{L}^*)_{ij}^{(12)}}{(\mathbf{L}_2)_{ij}^{(12)}}$ en fonction de l'épaisseur H_0

du composite et à la même période de rugosité dans les deux directions. On constate également que les valeurs des $(\mathbf{L}^*)_{11}^{(\alpha\beta)}$ diminuent lorsque H_0 augmente. Contrairement, les valeurs des composantes $(\mathbf{L}^*)_{33}^{(\alpha\beta)}$ se croissent avec l'augmentation de H_0 .

5.2 Homogénéisation des zones d'interface piézoélectrique ondulée suivant deux directions

5.2.1 Loi constitutive locale

Considérer un matériau composite constitué deux phases individuellement homogènes et l'interface entre eux est supposée parfaite. Les équations constitutives des matériaux piézoélectriques sont données (voir Odegard, 2004)

$$\sigma_{ij}^{(i)} = C_{ijkl}^{(i)} \epsilon_{kl}^{(i)} + H_{ijk}^{(i)} e_k^{(i)}, \quad d_i^{(i)} = L_{ikl}^{(i)} \epsilon_{kl}^{(i)} + K_{ik}^{(i)} e_k^{(i)} \quad (5.36)$$

où $\sigma_{ij}^{(i)}$, $\epsilon_{ij}^{(i)}$, $e_i^{(i)}$, $d_i^{(i)}$ sont respectivement le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation, le vecteur du champ électrique et le vecteur de déplacement électrique de la phase (i) avec $i = 1, 2$. Les composantes $C_{ijkl}^{(i)}$, $H_{ijk}^{(i)} = -L_{kij}^{(i)}$, et K_{ij} sont respectivement le tenseur d'élasticité du quatrième ordre le tenseur de piézoélectricité du troisième ordre, et le tenseur de permittivité du second ordre de la phase (i) . Le tenseur de contrainte doit vérifier l'équation d'équilibre

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.37)$$

dans le cas d'absence de force volumique. Le tenseur de déformation $\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(\mathbf{x})$ à partir du vecteur de déplacement $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x})$ comme suit

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}) + \left(\nabla \mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}) \right)^T \right]. \quad (5.38)$$

Le champ électrique $\mathbf{e}^{(i)}(\mathbf{x})$ est lié au potentiel électrique $\phi^{(i)}(\mathbf{x})$ par

$$\mathbf{e}^{(i)}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (5.39)$$

Le déplacement électrique $\mathbf{d}^{(i)}(\mathbf{x})$ doit vérifier l'équation de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{d}^{(i)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.40)$$

en absence de charge électrique.

Noter que les tenseurs de rigidité élastique, de piézoélectricité et de permittivité ont les symétries suivantes :

$$C_{ijkl}^{(i)} = C_{jikl}^{(i)} = C_{klij}^{(i)}, \quad L_{ijk}^{(i)} = L_{ikj}^{(i)}, \quad H_{ijk}^{(i)} = H_{jik}^{(i)}, \quad K_{ij}^{(i)} = K_{ji}^{(i)}. \quad (5.41)$$

5.2.2 Homogénéisation numérique de la zone d'interface rugueuse

Premièrement, les champs $\epsilon(\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ sont décomposés en deux parties telles que $\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 + \epsilon^*(\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^*(\mathbf{x})$. Les premières parties \mathbf{E}^0 et \mathbf{e}^0 représentent les valeurs moyennes correspondant aux grandeurs macroscopiques tandis que les deuxièmes parties $\epsilon^*(\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ sont les fluctuations périodiques autour des valeurs moyennes correspondantes.

En introduisant un milieu de référence avec tenseurs d'élasticité $\mathbb{C}^{(0)}$, de piézoélectricité $\mathbb{H}^{(0)} = -\mathbb{L}^{(0)T}$ et de permittivité $\mathbb{K}^{(0)}$, on peut réécrire les équations d'équilibre (5.37) et de Maxwell (5.40) sous les formes équivalentes

$$\nabla \cdot \left(\mathbb{C}^{(0)} \epsilon^*(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\mathbb{H}^{(0)} \mathbf{e}^*(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^{(3)}(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^{(4)}(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (5.42)$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbb{L}^{(0)} \epsilon^*(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\mathbb{K}^{(0)} \mathbf{e}^*(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{x}) \right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (5.43)$$

où les champs de polarisation $\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}^{(2)}(\mathbf{x})$, et $\boldsymbol{\tau}^{(3)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}^{(4)}(\mathbf{x})$ sont définis par

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbb{L}(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}^{(2)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbb{K}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad (5.44)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(3)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbb{C}(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}^{(4)}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbb{H}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad (5.45)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \mathbb{C}(\mathbf{x}) &= \mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^{(0)}, & \Delta \mathbb{H}(\mathbf{x}) &= \mathbb{H}(\mathbf{x}) - \mathbb{H}^{(0)}, \\ \Delta \mathbb{L}(\mathbf{x}) &= \mathbb{L}(\mathbf{x}) - \mathbb{L}^{(0)}, & \Delta \mathbb{K}(\mathbf{x}) &= \mathbb{K}(\mathbf{x}) - \mathbb{K}^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Le champ de déformation solution $\epsilon^*(\mathbf{x})$ et le champ électrique solution $\mathbf{e}^*(\mathbf{x})$ sont liés linéairement aux tenseurs et vecteurs $\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}^{(2)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\tau}^{(3)}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\tau}^{(4)}(\mathbf{x})$ par

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) &= \Gamma_{ijk}^{(3)} \left(\tau_k^{(1)} + \tau_k^{(2)} \right) + \Gamma_{ijkl}^{(4)} \left(\tau_{kl}^{(3)} + \tau_{kl}^{(4)} \right), \\ e_i^*(\mathbf{x}) &= \Gamma_{ij}^{(1)} \left(\tau_j^{(1)} + \tau_j^{(2)} \right) + \Gamma_{ijk}^{(2)} \left(\tau_{jk}^{(3)} + \tau_{jk}^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (5.47)$$

La résolution des équations (5.42) et (5.43) est effectuée dans l'espace de Fourier. Par la transformée de Fourier des champs de déplacement, de potentiel électrique, de déformation et de polarisation, on obtient

$$\begin{aligned}
\phi^*(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\phi}^*(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, & \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\mathbf{u}}^*(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, \\
\epsilon^*(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} i\xi \hat{\mathbf{u}}^*(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, & \mathbf{e}^*(\mathbf{x}) &= -\sum_{\xi} i\xi \hat{\phi}^*(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, \\
\boldsymbol{\tau}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(1)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, & \boldsymbol{\tau}^{(2)}(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, \\
\boldsymbol{\tau}^{(3)}(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(3)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, & \boldsymbol{\tau}^{(4)}(\mathbf{x}) &= \sum_{\xi} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(4)}(\xi) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Les équations (5.42) et (5.43) peut se réécrire dans l'espace Fourier par

$$-\xi_l C_{ijkl}^{(0)} \xi_j \hat{u}_k^* + \xi_k H_{ijk}^{(0)} \xi_j \hat{\phi}^* + i\xi_j (\hat{\tau}_{ij}^{(3)} + \hat{\tau}_{ij}^{(4)}) = 0, \tag{5.49}$$

$$-\xi_i L_{ijk}^{(0)} \xi_j \hat{u}_k^* + \xi_i K_{ij}^{(0)} \xi_j \hat{\phi}^* + i\xi_i (\hat{\tau}_i^{(1)} + \hat{\tau}_i^{(2)}) = 0, \tag{5.50}$$

En posant, $c_{ik}(\xi) = \xi_l C_{ijkl}^{(0)} \xi_j$, $h_i(\xi) = \xi_k H_{ijk}^{(0)} \xi_j$, $l_i(\xi) = \xi_j L_{ijk}^{(0)} \xi_k$, $k(\xi) = \xi_i K_{ij}^{(0)} \xi_j$, les équations (5.49) et (5.50) deviennent

$$-c_{ik} \hat{u}_k^* + h_i \hat{\phi}^* + i\xi_j (\hat{\tau}_{ij}^{(3)} + \hat{\tau}_{ij}^{(4)}) = 0, \tag{5.51}$$

$$-l_k \hat{u}_k^* + k \hat{\phi}^* + i\xi_i (\hat{\tau}_i^{(1)} + \hat{\tau}_i^{(2)}) = 0. \tag{5.52}$$

Les équations (5.51) et (5.52) nous permettent d'exprimer les valeurs $\hat{\phi}^*(\xi)$ et $\hat{\mathbf{u}}^*(\xi)$ en fonction des termes de polarisation comme suit

$$\hat{u}_k^* = \frac{i}{k} \xi_j B_{ik} \left[h_i (\hat{\tau}_j^{(1)} + \hat{\tau}_j^{(2)}) - k (\hat{\tau}_{ij}^{(3)} + \hat{\tau}_{ij}^{(4)}) \right], \tag{5.53}$$

$$\hat{\phi}^* = -\frac{i}{k} \xi_k B_{ij} l_j (\hat{\tau}_{ik}^{(3)} + \hat{\tau}_{ik}^{(4)}) - \frac{i}{k} \xi_l \left[1 - \frac{1}{k} B_{ij} l_j h_i \right] (\hat{\tau}_l^{(1)} + \hat{\tau}_l^{(2)}). \tag{5.54}$$

où B_{ik} est le tenseur inverse du tenseur $\left(\frac{l_k}{k} h_i - c_{ik} \right)$. A partir des équations (5.38) et (5.39) et en utilisant (5.53) et (5.54), on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}_{kl}^* &= \frac{1}{2} [i\xi_k \hat{u}_l^* (\xi) + i\xi_l \hat{u}_k^* (\xi)] \\
&= -\frac{1}{2k} [B_{ik} \xi_j \xi_l h_i + B_{il} \xi_j \xi_k h_i] (\hat{\tau}_j^{(1)} + \hat{\tau}_j^{(2)}) + \frac{1}{2} [B_{ik} \xi_j \xi_l + B_{il} \xi_j \xi_k] (\hat{\tau}_{ij}^{(3)} + \hat{\tau}_{ij}^{(4)})
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n^* &= -i\xi_n \hat{\phi}^*, \\
&= \frac{\xi_l \xi_n}{k} \left(\frac{1}{k} B_{ij} l_j h_i - 1 \right) (\hat{\tau}_l^{(1)} + \hat{\tau}_l^{(2)}) - \frac{\xi_k \xi_n B_{ij}}{k} l_j (\hat{\tau}_{ik}^{(3)} + \hat{\tau}_{ik}^{(4)}).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

En comparant les équations (5.55) et (5.56) avec l'équation (5.47), on peut exprimer les expressions de $\hat{\Gamma}_{ijkl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\Gamma}_{ilk}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\Gamma}_{ijl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi})$ et $\hat{\Gamma}_{il}^{(4)}(\boldsymbol{\xi})$ comme suit

$$\hat{\Gamma}_{ijkl}^{(4)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} [B_{ik}\xi_j\xi_l + B_{il}\xi_j\xi_k], \quad (5.57)$$

$$\hat{\Gamma}_{jkl}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2k} [B_{ik}h_i\xi_j\xi_l + B_{il}h_i\xi_k\xi_j], \quad (5.58)$$

$$\hat{\Gamma}_{ikn}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\xi_k\xi_n B_{ij}}{k} l_j, \quad (5.59)$$

$$\hat{\Gamma}_{nl}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_n\xi_l}{k} \left(\frac{1}{k} B_{ij} l_j h_i - 1 \right). \quad (5.60)$$

En tenant compte de (5.44) et (5.45), les équations (5.55) et (5.56) sont ensuite transformées dans l'espace de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{mn}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{E}_{mn}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) &+ \hat{\Gamma}_{mnip}^{(4)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(C_{ipjk}^{(2)} - C_{ipjk}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_{jk}(\boldsymbol{\xi}) + \left(C_{ipjk}^{(1)} - C_{ipjk}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{jk} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{mnip}^{(4)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(H_{ipj}^{(2)} - H_{ipj}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_j(\boldsymbol{\xi}) + \left(H_{ipj}^{(1)} - H_{ipj}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_j \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{mnp}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(L_{pij}^{(2)} - L_{pij}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) + \left(L_{pij}^{(1)} - L_{pij}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{ij} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{mnp}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(K_{pi}^{(2)} - K_{pi}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_i(\boldsymbol{\xi}) + \left(K_{pi}^{(1)} - K_{pi}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\}, \quad (5.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_n(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\epsilon}_n^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) &+ \hat{\Gamma}_{nip}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(C_{ipjk}^{(2)} - C_{ipjk}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_{jk}(\boldsymbol{\xi}) + \left(C_{ipjk}^{(1)} - C_{ipjk}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{jk} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{nip}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(H_{ipj}^{(2)} - H_{ipj}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_j(\boldsymbol{\xi}) + \left(H_{ipj}^{(1)} - H_{ipj}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_j \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{nm}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(L_{mij}^{(2)} - L_{mij}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) + \left(L_{mij}^{(1)} - L_{mij}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{ij} \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\ &+ \hat{\Gamma}_{nm}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(K_{mi}^{(2)} - K_{mi}^{(0)} \right) \hat{\epsilon}_i(\boldsymbol{\xi}) + \left(K_{mi}^{(1)} - K_{mi}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\}, \quad (5.62) \end{aligned}$$

où $\hat{\chi}^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$ représente la transformée de Fourier de la fonction caractéristique des inclusions $\hat{\chi}^{(1)}(\mathbf{x})$.

Dans l'espace Fourier, les champs de contrainte et de déplacement électrique correspondants sont calculés par

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{mn}(\boldsymbol{\xi}) &= C_{mnjk}^{(2)} \hat{\epsilon}_{jk}(\boldsymbol{\xi}) + \left(C_{mnjk}^{(1)} - C_{mnjk}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{jk} \right](\boldsymbol{\xi}) \\ &+ H_{mnj}^{(2)} \hat{\epsilon}_j(\boldsymbol{\xi}) + \left(H_{ipj}^{(1)} - H_{ipj}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_j \right](\boldsymbol{\xi}), \quad (5.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_m(\boldsymbol{\xi}) &= L_{mij}^{(2)} \hat{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) + \left(L_{mij}^{(1)} - L_{mij}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_{ij} \right](\boldsymbol{\xi}) \\ &+ K_{mi}^{(2)} \hat{\epsilon}_i(\boldsymbol{\xi}) + \left(K_{mi}^{(1)} - K_{mi}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\epsilon}_i \right](\boldsymbol{\xi}). \quad (5.64) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (5.61) et (5.62) et tenant compte de (5.63) et (5.64), on peut déterminer $\hat{\epsilon}_{mn}(\boldsymbol{\xi})$ et $\hat{\epsilon}_n(\boldsymbol{\xi})$ par des calculs itératifs comme suit

- Initialisation

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{\epsilon}^1(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{E}}^0(\boldsymbol{\xi}), \quad \hat{\mathbf{e}}^1(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mathbf{e}}^0(\boldsymbol{\xi}), \\ (b) \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{C}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^1(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{C}^{(1)} - \mathbb{C}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^1 \right](\boldsymbol{\xi}) \\ &+ \mathbb{H}^{(2)} \hat{\mathbf{e}}^1(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{H}^{(1)} - \mathbb{H}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^1 \right](\boldsymbol{\xi}), \\ \hat{\mathbf{d}}^1(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{L}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^1(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^1 \right](\boldsymbol{\xi}) \\ &+ \mathbb{K}^{(2)} \hat{\mathbf{e}}^1(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{K}^{(1)} - \mathbb{K}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^1 \right](\boldsymbol{\xi}), \end{aligned}$$

• Itération i+1

(a) supposons que $\hat{\sigma}^i(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi})$, $\hat{\mathbf{d}}^i(\boldsymbol{\xi})$ et $\hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi})$ sont connus,

(b) calculons ensuite

$$\begin{aligned}
(c) \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{E}}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(4)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(0)} \right) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{C}^{(1)} - \mathbb{C}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(4)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{H}^{(2)} - \mathbb{H}^{(0)} \right) \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{H}^{(1)} - \mathbb{H}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{L}^{(2)} - \mathbb{L}^{(0)} \right) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(3)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(0)} \right) \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\}, \\
\hat{\mathbf{e}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) &= \hat{\mathbf{e}}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(0)} \right) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{C}^{(1)} - \mathbb{C}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{H}^{(2)} - \mathbb{H}^{(0)} \right) \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{H}^{(1)} - \mathbb{H}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbb{L}^{(2)} - \mathbb{L}^{(0)} \right) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\} \\
&+ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \left(\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(0)} \right) \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \right\}, \\
(d) \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{C}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{C}^{(1)} - \mathbb{C}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&+ \mathbb{H}^{(2)} \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{H}^{(1)} - \mathbb{H}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}), \\
\hat{\mathbf{d}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbb{L}^{(2)} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbb{L}^{(1)} - \mathbb{L}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i \right](\boldsymbol{\xi}) \\
&+ \mathbf{K}^{(2)} \hat{\mathbf{e}}^i(\boldsymbol{\xi}) + \left(\mathbf{K}^{(1)} - \mathbf{K}^{(2)} \right) \left[\hat{\chi}^{(1)} * \hat{\mathbf{e}}^i \right](\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

Les calculs itératifs s'arrêtent lorsque

$$\frac{\| \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\sigma}^i(\boldsymbol{\xi}) \|}{\| \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) \|} < \gamma, \quad \text{et} \quad \frac{\| \mathbf{d}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{d}^i(\boldsymbol{\xi}) \|}{\| \mathbf{d}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) \|} < \gamma, \quad (5.65)$$

où γ est la précision dont la valeur choisie est 0.001 dans nos calculs.

Les champs de contrainte et de déplacement électrique mésoscopiques sont déterminés par

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \overline{\mathbb{C}} \mathbf{E}^0 + \overline{\mathbb{H}} \mathbf{e}^0 = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(0), \quad \langle \mathbf{d} \rangle = \overline{\mathbb{L}} \mathbf{E}^0 - \overline{\mathbf{K}} \mathbf{e}^0 = \hat{\mathbf{d}}(0). \quad (5.66)$$

En prenant alternativement $E_{ij}^0 = 1$ et $e_i^0 = 1$, l'équation (5.66) nous permet d'identifier toutes les composantes des tenseurs effectifs $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{H}}$, $\overline{\mathbb{L}}$ et $\overline{\mathbf{K}}$ du composite piézoélectrique considéré.

5.2.3 Exemples numériques

Pour illustrer la variation des composantes des propriétés piézoélectriques effectives de la zone d'interface rugueuse du composite en fonction de la fraction surfacique de la phase 1, on fait une étude sur un exemple numérique dans lequel le composite étudié se compose deux phases dont les propriétés des phases sont données comme suit

Propriété	phase 1	phase 2
$C_{11}(GPa)$	148.0	8.1
$C_{12}(GPa)$	76.2	5.4
$C_{13}(GPa)$	74.2	5.4
$C_{22}(GPa)$	148	8.1
$C_{23}(GPa)$	74.2	5.4
$C_{33}(GPa)$	131.0	8.1
$C_{44}(GPa)$	25.4	1.35
$C_{55}(GPa)$	25.4	1.35
$C_{66}(GPa)$	35.9	1.35
K_1/K_0	460	2.8
K_2/K_0	460	2.8
K_3/K_0	235	2.8
$e_{15}(C/m^2)$	9.2	0
$e_{31}(C/m^2)$	-2.1	0
$e_{32}(C/m^2)$	-2.1	0
$e_{33}(C/m^2)$	9.5	0

Les résultats numériques obtenus par la méthode de la transformée de Fourier rapide sont présentés dans les diagrammes (Fig 5.8), (Fig 5.9) et (Fig 5.10).

Après avoir homogénéisé la zone d'interface rugueuse à l'échelle mésoscopique. On s'intéresse à la homogénéisation à échelle macroscopique du composite stratifié en question. La couche supérieure d'épaisseur H_2 est constituée de la phase 2 alors que la couche inférieure d'épaisseur H_1 est composé de la phase 1. La couche intermédiaire d'épaisseur H_0 est formée du matériau équivalent de la zone d'interface rugueuse. L'homogénéisation du composite à trois couches est effectuée selon la méthode exposée au chapitre 4. Pour illustrer l'influence de la zone d'interface rugueuse sur les propriétés piézoélectriques effectives du composite, on considère le cas où $H_1 = H_2 = H$ et H_0 de la zone d'interface se varie de H à $10H$ et la période de la rugosité de l'interface est fixée et prise égal à H , la fraction surfacique maximal de la phase 1 est 0,7238. Les diagrammes (Fig. 5.11), (Fig. 5.12) et (Fig 5.13) présentent les variations des composantes du tenseur de piézoélectricité effective du composite stratifié en fonction du rapport des épaisseurs H_0/H_1 .

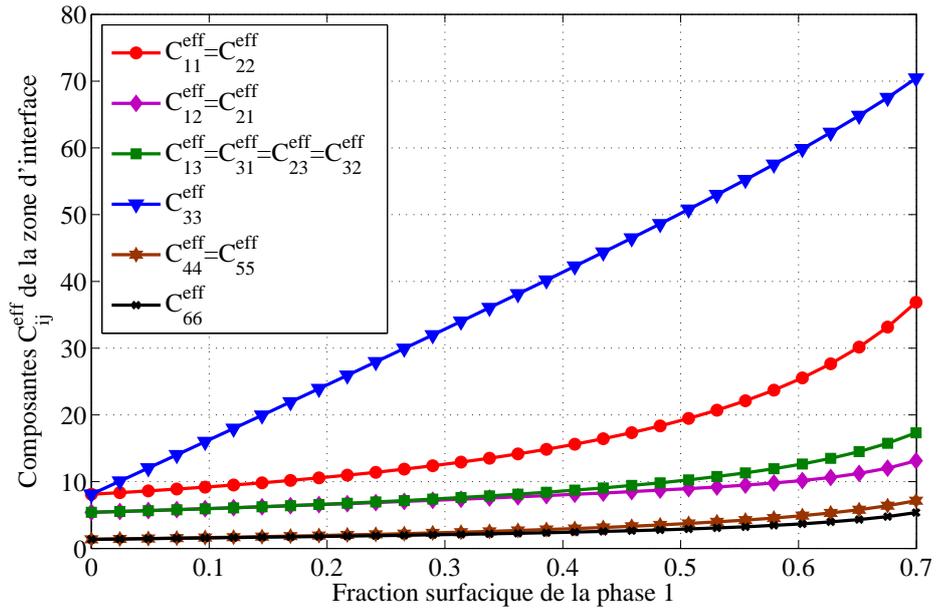


FIGURE 5.8: Variation des composantes C_{ij}^{eff} de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1.

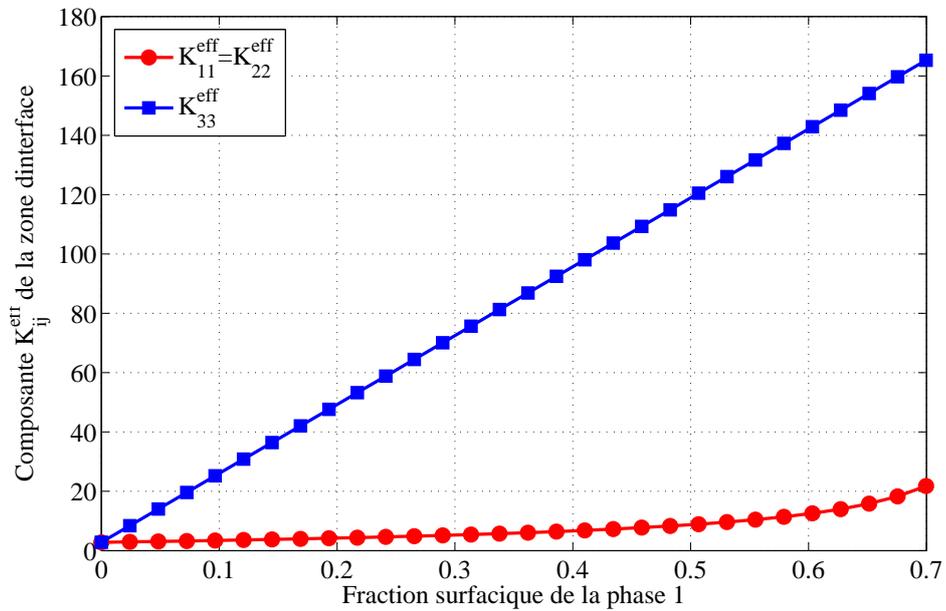


FIGURE 5.9: Variation des composantes K_{ij}^{eff} de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1.

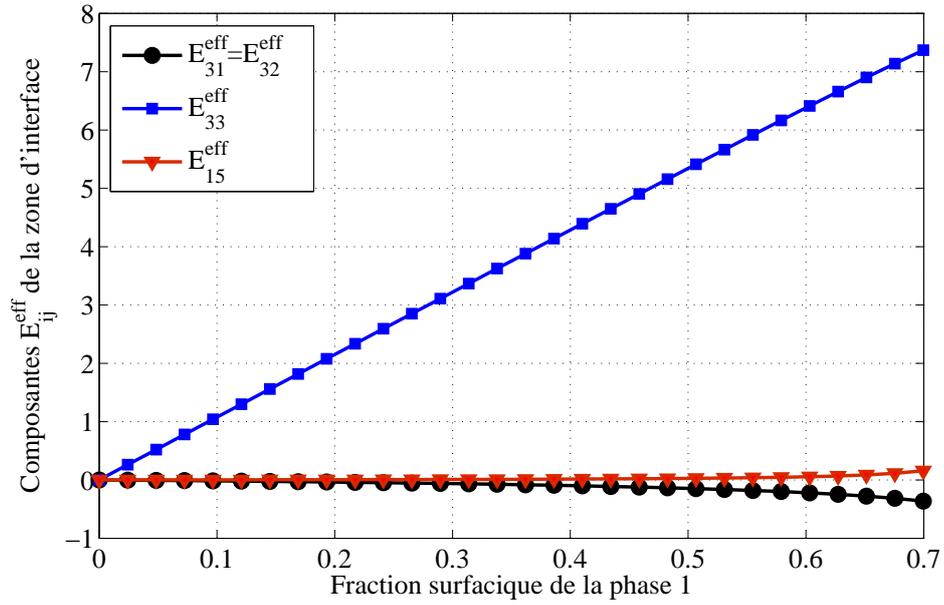


FIGURE 5.10: Variation des composantes E_{ij}^{eff} de la zone d'interface en fonction de la fraction surfacique de la phase 1.

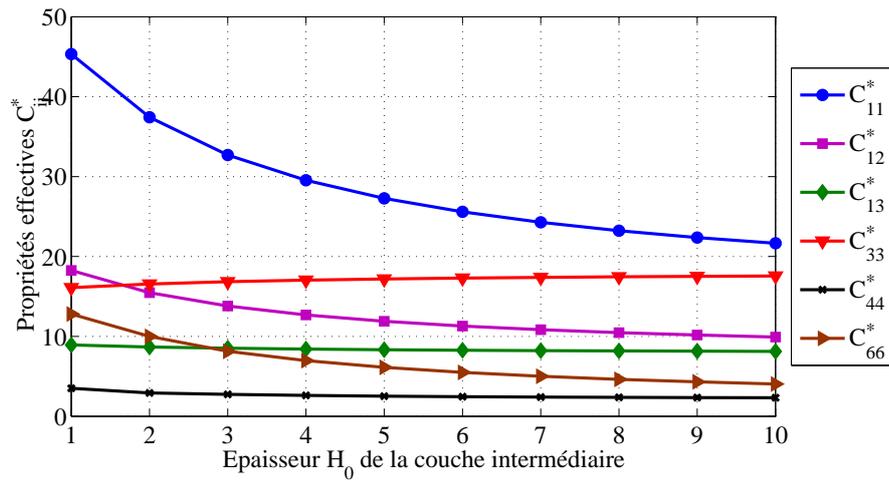


FIGURE 5.11: Propriétés effectives C_{ij}^* du composite tricouche en fonction de l'épaisseur H_0 .

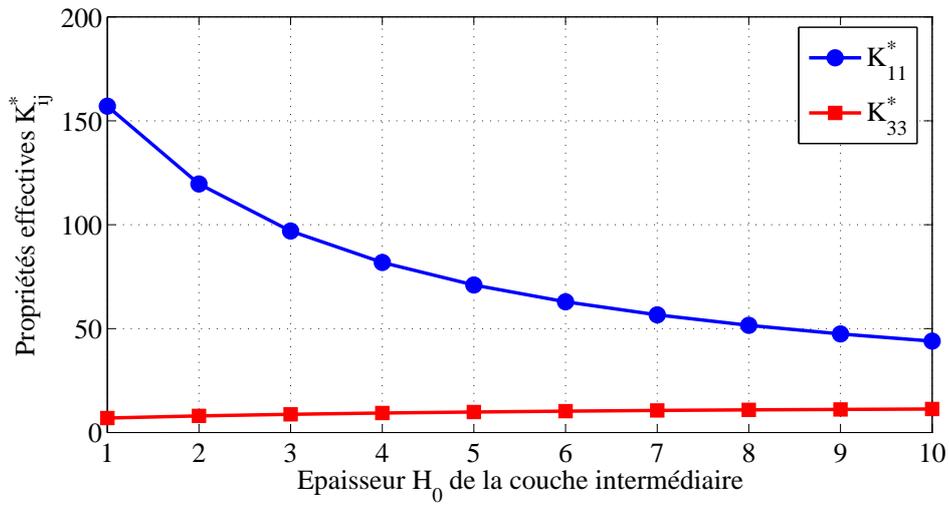


FIGURE 5.12: Propriétés effectives K_{ij}^* du composite tricouche en fonction de l'épaisseur H_0 .

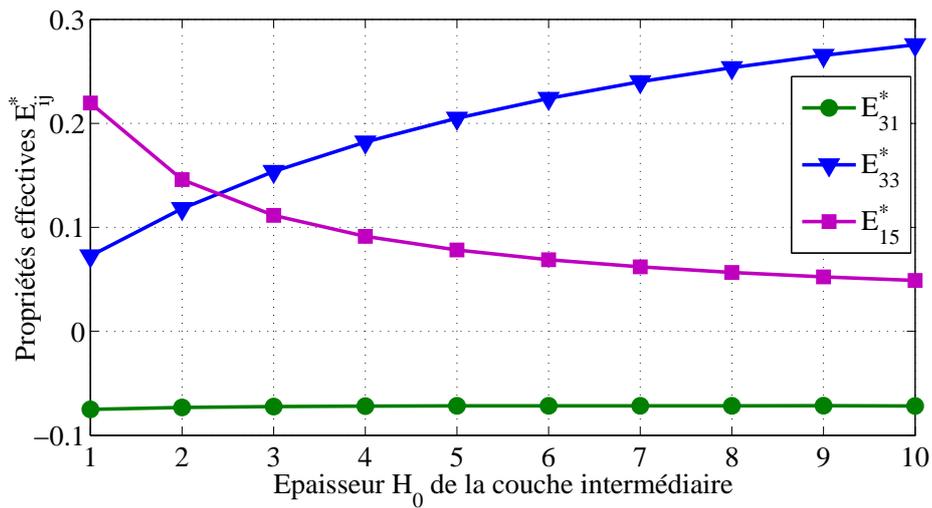


FIGURE 5.13: Propriétés effectives E_{ij}^* du composite tricouche en fonction de l'épaisseur H_0 .

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse avait pour objectif principal de contribuer au développement d'une approche multi-échelle permettant de déterminer les propriétés mécaniques et physiques linéaires effectives des composites dans lesquels l'interface entre deux phases n'est pas lisse mais très rugueuse. Cet objectif a été atteint par la généralisation de l'approche multi-échelle proposée dans le travail de thèse de H.T. LE (2011) dans deux directions : (i) la surface lisse autour de laquelle une interface oscille périodiquement et rapidement est généralement courbée ; (ii) les phénomènes linéaires en question sont généralement couplés.

La généralisation a été effectuée étape par étape :

- Dans le contexte de conduction thermique, le problème d'une interface ondulée périodiquement et rapidement autour d'une seule courbe a été étudié soigneusement et de façon exhaustive pour élaborer des éléments clés de la méthodologie nécessaire.
- Toujours dans le cadre de conduction thermique, le problème plus complexe d'une interface ondulée périodiquement et rapidement autour d'une surface courbée et suivant deux directions a été ensuite étudié. Cette étude a été grandement facilitée sur le plan mathématique par l'utilisation des coordonnées curvilignes orthonormées. Elle montre la nécessité de résoudre un problème auxiliaire d'homogénéisation 2D par une méthode analytique approximative ou par une méthode numérique.
- L'approche développée et les résultats obtenus pour la conduction thermique ont été étendus à l'élasticité linéaire et à un nombre fini quelconque de phénomènes physiques linéaires découplés ou couplés. Cette extension a été grandement aidée par un formalisme permettant de traiter tous les phénomènes physiques de façon unifiée. Les exemples donnés ont essentiellement porté sur l'élasticité, la thermoélectricité et la piézoélectricité et sur les composites stratifiés avec interfaces rugueuses.
- La méthode basée sur la transformée de Fourier rapide a été proposée et implantée afin d'homogénéiser la zone d'interface rugueuse périodique dans un contexte multi-physique. Cette méthode s'est avérée beaucoup plus simple et efficace par rapport à la méthode des éléments finis pour résoudre le problème en question.

La méthodologie élaborée et les résultats obtenus dans ce travail de thèse contribuent au développement de la micromécanique des matériaux hétérogènes. Ils ont été validés par des exemples pour lesquels la méthode des éléments finis a été appliquée.

Les extensions suivantes du travail présent sont relativement faciles et peuvent être envisagées dans un futur proche :

- (i) Dans ce travail, les exemples traités ont la particularité que les ondulations périodiques et rapides d'une interface se produisent suivant deux directions perpendiculaires et présentent la même période. Cette simplification pourra être relaxée sans trop de difficultés.
- (ii) Les interfaces rugueuses est supposées parfaites dans ce travail. Nous pourrions étendre de façon relativement directe l'approche et les résultats du travail présent aux interfaces rugueuses linéaires imparfaites.
- (iii) La rugosité d'une interface est systématiquement supposée périodique dans ce mémoire de thèse. Le cas où la rugosité d'une interface est aléatoire pourra être traité sans trop de difficultés à condition qu'un élément représentatif existe et qu'une approche stochastique soit adoptée.
- (iv) Les méthodes développées et les résultats obtenus dans ce travail pourront être de façon relativement directe étendus aux surfaces fortement rugueuses. Cette extension semble ouvrir de nombreuses perspectives.

Les deux questions listées ci-dessous méritent d'être étudiées mais apparaissent beaucoup plus difficiles :

- (a) En régime dynamique, dans quelle mesure les résultats obtenus dans ce travail de thèse sont-ils utilisables ?
- (b) Comment homogénéiser une interface parfaite mais fortement rugueuse entre deux matériaux non linéaires ?

Enfin, nous notons que, même si ce travail de thèse portait sur les matériaux hétérogènes, les méthodologies élaborées et les résultats obtenus pourront être utiles pour l'étude de certaines structures dont les surfaces ou interfaces sont rugueuses.

Bibliographie

- [1] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : TM and TE cases, homogenization. *J. Math. Anal. Appl.*, 202 : 995 - 1026, 1996.
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover publications, 1964.
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comput. Phys.*, 147 : 187 - 218, 1998.
- [4] Y. Amirat, O. Bodart, U. De Maio and A. Gaudiello. Asymptotic approximation of the solution of the Laplace equation in a domain with highly oscillating boundary. *SIAM J. Math. Anal.*, 35 : 1598-1616, 2004.
- [5] Y. Amirat, G.A. Chechkin and R.R. Gadylshin. Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary : multiple eigenvalues. *Appl. Anal.*, 86 : 873-897, 2007.
- [6] Y. Amirat, G.A. Chechkin and R.R. Gadylshin. Asymptotics of the solution of a Dirichlet spectral problem in a junction with highly oscillating boundary. *C. R. Mech.*, 336 : 693-698, 2008.
- [7] G.E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.*, 67 : 4427-4440, 1962.
- [8] N. S. Bakhvalov and G . Panasenko. *Homogenisation : Averaging of Processes in Periodic Media : Mathematical Problems of the Mechanics of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1989.
- [9] G. Bao and E. Bonnetier. Optimal design of periodic diffractive structures. *Appl. Math. Opt.*, 43 : 103-116, 2001.
- [10] A.G. Belyaev, A.G. Mikheev and A.S. Shamaev. Diffraction of a plane wave by rapidly oscillating surface. *Comp. Math. Math. Phys.*, 32 : 1121 - 1133, 1992.
- [11] A.G. Belyaev, A.L. Pyatnitskii and G.A. Chechkin. Asymptotic behavior of a solution to a boundary value problem in a perforated domain with oscillating boundary. *Siberian Math. J.*, 39 : 621-644, 1998.
- [12] A. Bensoussan, J. L. Lions and G. Papanicolau. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. 1978.

- [13] Y. Benveniste and T. Chen. The Saint-Venant torsion of a circular bar consisting of a composite cylinder assemblage with cylindrically orthotropic constituents. *Int. J. Solids Struct.*, 40 : 7093 - 7107, 2003.
- [14] Y. Benveniste and G. W. Milton. New exact results for the effective electric, elastic, piezoelectric and other properties of composite ellipsoid assemblages. *J. Mech. Phys. Solids.*, 51 : 1773 - 1813, 2003.
- [15] Y. Benveniste, T. Chen and G. J. Dvorak. The effective thermal conductivity of composites reinforced by coated cylindrically orthotropic fibers. *J. Appl. Phys.*, 67 : 2878-2884, 1990.
- [16] D. Blanchard, A. Gaudiello and J. Mossino. Highly oscillating boundaries and reduction of dimension : the critical case. *Appl. Anal.*, 5 : 137-163, 2007.
- [17] G. Bonnet. Effective properties of elastic periodic composite media with fibres. *J. Mech. Phys. Solids*, 55 : 881-899, 2007.
- [18] L. Chan and E.S. Cheb Terrab. Non - liouvillian solutions for second order linear odes. *Proc. of ISSAC*, 80 - 86, 2004.
- [19] G. A. Chechkin, A. Friedman and A. L. Piatnitski. The boundary - value problem in domains with very rapidly oscillating boundary. *J. Math. Anal. Appl.*, 231 : 213 - 234, 1999.
- [20] K. T. Cheng and N. Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, 17 : 305 - 323, 1981.
- [21] P.C. Chou, J. Carleone and C.M. Hsu. Elastic constants of layered media. *J. Comp. Mat.*, 6 : 80-93, 1972.
- [22] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 : 315 - 330, 1979.
- [23] H. Dumontet. Homogénéisation d'un matériaux à structure périodique stratifié, de comportement élastique linéaire et non linéaire et viscoélastique. *C. R. Acad. Sci.*, 295 : 633-636, 1982.
- [24] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problem. *Proc. Roy. Soc. London*, A241 : 376-396, 1957.
- [25] N.M. Fyrrillas and C. Pozrikidis. Conductive heat transport across rough surfaces and interfaces between two conforming media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 : 1789 - 1801, 2001.
- [26] Y. Grabovsky and R. V.Kohn. Microstructures minimizing the energy of a two phase elastic composite in two space dimensions. I. The confocal ellipse construction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, 43 : 933-947 (1995).
- [27] S. T. Gu and Q. C. He. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interfaces as imperfect interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, 59 : 1413-1426, 2011.

- [28] R. P. Gilbert and M. Ou. Acoustic wave propagation in a composite of two different poroelastic materials with a very rough periodic interface : a homogenization approach. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 1 : 10 - 20, 2003.
- [29] M.E. Gurtin and A. Ian Murdoch. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 57 : 291-323, 1975.
- [30] Z. Hashin. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites. *Mech. Mater.*, 8 : 293 - 308, 1990.
- [31] Q. C. He and Z. Q. Feng. Homogenization of layered elastoplastic composites : Theoretical results. In *Int. J. Non-linear Mech.*, 47, 367-376.
- [32] Q. C. He and Z. Q. Feng. Homogenization of layered elastoplastic composites. In *International Conference on Material Modelling, Dortmund, Germany, 2009*.
- [33] Q.C. He and A. Curnier. A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations. *Int. J. Solids Struct.*, 32 : 1433-1457, 1995.
- [34] E. Hervé and A. Zaoui. Elastic behaviour of multiply coated fibre - reinforced composites. *Int. J. Eng. Sci.*, 33 : 1419 - 1433, 1995.
- [35] R. Hill. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials : I. Elastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*, 12 : 199 - 212, 1964.
- [36] Y. Huang and K.X. Hu. A generalized selfnext term - consistent mechanics method for composite materials with multiphase inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*, 42 : 491 - 504, 1994.
- [37] J. P. Straley *Thermoelectric properties of inhomogeneous materials*. Department of Physics and Astronomy, The University of Alabama, PO Box 1921, University, Alabama 35486, USA.
- [38] W. Kohler, G. Papanicolaou and S. Varadhan. Boundary and interface problems in regions with very rough boundaries. In *Multiple Scattering and Waves in Random Media*, 1 : 165-197, 1981.
- [39] R. V. Kohn and M. Vogelius. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids Struct.*, 20 : 333 - 350, 1984.
- [40] G. Kristensson. Homogenization of corrugated interfaces in electromagnetics. *Progress in electromagnetics research*, PIER 55 : 1 - 31, 2005.
- [41] Q. V. Le. *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : Application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 2008.
- [42] H. T. Le. *Homogénéisation des interfaces ondulées dans les composites*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, 2011.

- [43] H. Le Quang, T. L. Phan and G. Bonnet. Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces. *International Journal of Thermal Sciences*, 50 : 1428-1444, 2011.
- [44] H. Le Quang, G. Bonnet and Q.C. He. Size-dependent Eshelby tensor fields and effective conductivity of composites made of anisotropic phases with highly conducting imperfect interfaces. *Physical Review B*, 81 : 64203, 2010.
- [45] H. Le Quang and Q.C. He. Thermoelastic composites with columnar microstructure and cylindrically anisotropic phases. Part I : Exact results. *Int. J. Eng. Sci.*, 45 : 402-423, 2007.
- [46] H. Le Quang and Q.C. He. Thermoelastic composites with columnar microstructure and cylindrically anisotropic phases. Part II : One-parameter generalized self-consistent estimates. *Int. J. Eng. Sci.*, 45 : 424-435, 2007.
- [47] Y.M. Lee, R.B. Yang and S.S. Gau. A generalized self-consistent method for calculation of effective thermal conductivity of composites with interfacial contact conductance. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(2) : 142 - 150, 2006.
- [48] Y. Yang, F.Y. Ma, C.H. Lei, Y.Y. Liu, J.Y. Li Nonlinear asymptotic homogenization and the effective behavior of layered thermoelectric composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, : 1768 - 1783, 2013.
- [49] T. Lewinski. Effective models of composite periodic plates–I, asymptotic solution. *Int. J. Solids Struct.*, 27 : 1155 - 1172, 1991.
- [50] S. Li. *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics*. University of California, Berkeley, 2000.
- [51] L. Liu. *A continuum theory of thermoelectric bodies and effective properties of thermoelectric composites*. Internal Journal of Engineering Science, Rutgers University, 2012.
- [52] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover publications, 1927.
- [53] A.L. Madureira and F. Valentin. Asymptotics of the poisson problem in domains with curved rough boundaries. *SIAM J. Math. Anal.*, 38 : 1450 - 1473, 2007.
- [54] R.S. Maier. The 192 solutions of the heun equation. *Math. Comp.*, 76 : 811 - 843, 2007.
- [55] T.A. Melnik, G.A. Chechkin and T.P. Chechkina. Convergence theorems for solutions and energy functionals of boundary value problems in thick multilevel junctions of a new type with perturbed neumann conditions on the boundary of thin rectangles. *J. Math. Sci.*, 159 : 113-132, 2009.
- [56] J. Michel, H. Moulinec and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Method Appl. Mech. Eng*, 172 : 109-143, 1999.
- [57] M. Milgrom and S. Shtrikman. A layered-shell model of isotropic composites and exact expressions for the effective properties. *J. Appl. Phys.*, 66 : 3429-3436, 1989.

- [58] G. W. Milton. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [59] G. W. Milton. Bounds on the complex permittivity of a two-component composite material. *Journal of Applied Physics.*, 52 : 5286-5293, 1981.
- [60] T. Mura. *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer academic publishers, 1987.
- [61] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C.R. Acad. Sci.*, II 318 : 1417-1423, 1994.
- [62] S. Nemat Nasser and M. Hori. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Elsevier, Amsterdam - Lausanne - New York - Oxford - Shannon - Singapore - Tokyo, 1999.
- [63] J. Nevard and J. B. Keller. Homogenization of rough boundaries and interfaces. *SIAM J. Appl. Math.*, 57 : 1660 - 1686, 1997.
- [64] A.N. Norris. The effective moduli of layered media- a new look at an old problem. *Micromechanics and inhomogeneity- The Toshio Mura 65 th anniversary volume*, 321-339, 1990.
- [65] J. F. Nye. *Physical Properties Of Crystals : Their Representation By Tensors And Matrices*. Oxford University Press, Usa, 1985.
- [66] G. M. Odegard. Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites. *Acta Materialia*, 52 : 5315-5330, 2004.
- [67] N. J. Pagano. Exact moduli of anisotropic laminates. *Comp. Mat., edited by G. P. Sendeckyj (Academic, New York)*, 2 : 23-45, 1974.
- [68] S. Pecullan, L.V. Gibiansky and S. Torquato. Scale effects on the elastic behavior of periodic andhierarchical two-dimensional composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 : 1509-1542, 1999.
- [69] L.E. Persson, L. Persson, N. Svanstedt and J. Wyller. *The Homogenization Method : An Introduction*. Studentlitteratur, 1993.
- [70] P. R. Nelson *Orthogonal Curvilinear Coordinates*. Electrical and Computer Engineering California State Polytechnic University, Pomona Spring 2012.
- [71] J. Pinho-da Cruz, J.A. Oliveira and F. Teixeira-Dias. Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part I : Mathematical formulation and finite element modelling. *Comput. Mat. Sci.*, 45 : 1073-1080, 2009.
- [72] G. W. Postma. Wave propagation in a stratified medium. *Geophysics*, 20 : 780-806, 1955.
- [73] H. Le Quang. *Microstructures solubles et relations exacts en micromécanique*. PhD thesis, Université de Marne - la - Vallée, 2005.
- [74] H. Le Quang and Q.C. He. A one-parameter generalized self-consistent model for isotropic multi-phase composites. *Int. J. Solids Struct.*, 44 : 6805-6825, 2007.
- [75] A. Ronveaux. *Heun's Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford, 1995.

- [76] K. Sab. *Propriétés homogénéisées des matériaux hétérogènes élastiques : Définition des bornes*. Cours de DEA de l'Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, 2005.
- [77] E. Sanchez Palencia. *Non - Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, Heidelberg, 1980.
- [78] S.S. Singh and S.K. Tomar. Quasi - p - waves at a corrugated interface between two dissimilar monoclinic elastic half - spaces. *Int. J. Solids Struct.*, 44 : 197 - 228, 2007.
- [79] D. R. S. Talbot, J. B. Titchener and J. R. Willis. The reflection of electromagnetic waves from very rough interfaces. *Wave Motion*, 12 : 245 - 260, 1990.
- [80] T. Chen and H. Kuo. Transport properties of composites consisting of periodic arrays of exponentially graded cylinders with cylindrically orthotropic materials. *Journal of Applied Physics*, 98 : 033716, 2005.
- [81] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New York, 2002.
- [82] T. L. Phan. *Contribution à l'homogénéisation de structures périodiques en élasticité et piézoélectricité*. Thèse, Université Paris-Est, 2009.
- [83] J. G. Van Bladel. *Electromagnetic fields*. Wiley-Intersciences, Publication, 2001.
- [84] P.C. Vinh and D.X. Tung. Homogenized equations of the linear elasticity in two-dimensional domains with very rough interfaces. *Mech. Res. Commun.*, 37 : 285-288, 2010.
- [85] P.C. Vinh and D.X. Tung. Homogenized equations of the linear elasticity theory in two - dimensional domains with interfaces highly oscillating between two circles. *Acta Mech.*, 1-16, 2010.
- [86] Y. Wang, J. Weissmuller and H.L. Duan. Mechanics of corrugated surfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 58 : 1552 - 1566, 2010.
- [87] P.C. Waterman. Scattering by periodic surfaces. *J. Acous. Soc. America*, 57 : 791 - 802, 1975.
- [88] K. Zaki and A. Neureuther. Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal height profile : TE polarization. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 19 : 208 - 214, 1971.
- [89] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours à l'Ecole Polytechnique - Ed. Presses de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [90] Q. S. Zheng and D. X. Du. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, 49 : 2765 - 2788, 2001.
- [91] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag Heidelberg, 1994.

Annexes

Annexe A

Coefficients paramétriques des coordonnées curvilignes

Supposer qu'on passe des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) aux coordonnées curvilignes (u_1, u_2, u_3) , où on définit chaque u_i est une fonction des x_i

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x_1, x_2, x_3) \\u_2 &= u_2(x_1, x_2, x_3) \\u_3 &= u_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Ici u_i doit être unique, sauf peut être à certains points, donc la transformation inversée est donnée par

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3).\tag{A.2}$$

Un point peut être désigné par ses coordonnées cartésiennes x_i , ou par ses coordonnées curvilignes u_i . On considère un vecteur de position

$$\mathbf{R} = x_i(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_i,\tag{A.3}$$

où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont les vecteurs de la base cartésienne.

Un système de coordonnées curvilignes est appelé système orthogonal si les trois vecteurs $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2, 3$) (les vecteurs tangents aux coordonnées courbées) sont mutuellement orthogonales. Dans le système des coordonnées curvilignes orthogonales, la direction et la grandeur de $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}$ ($i = 1, 2, 3$) peuvent être variées en fonction de la position.

Les coefficients paramétriques sont définis par

$$h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i} \right\| \quad (i = 1, 2, 3),\tag{A.4}$$

ou bien

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\right)^2}.\tag{A.5}$$

Si \mathbf{v}_i est le vecteur unitaire le long d'une ligne de coordonnée u_i (le long de laquelle les deux autres coordonnées sont constants) et si \mathbf{v}_i est dirigé vers l'augmentation de u_i , alors on a :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \mathbf{v}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \mathbf{v}_3, \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 a_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 a_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 a_3)}{\partial u_3} \right].\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Exemples de systèmes de coordonnées curvilignes :

– Le système des coordonnées cartésiennes $u_i = (x, y, z)$

$$h_x = 1, \quad h_y = 1, \quad h_z = 1. \quad (\text{A.7})$$

– Le système des coordonnées cylindriques : $u_i = (r, \theta, z)$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z, \\ x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \\ h_r &= 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1.\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

– Le système des coordonnées sphériques : $u_i = (r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \\ h_r &= 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Expression des composantes $B_{ij}^{(1)}$ de $\mathbf{B}^{(1)}$ dans l'équation 1.52

Par définition

$$f(\rho) = \frac{c_1^2 + c_2^2 + 2\rho}{c_1^2 - c_2^2}, \quad l(\rho) = \frac{\sqrt{c_2^2 + \rho}}{\sqrt{c_1^2 + \rho}}, \quad \xi = \sqrt{k_m^{(c)} k_\rho^{(c)}}, \quad \mu = \sqrt{k_m^{(c)} / k_\rho^{(c)}}, \quad (\text{B.1})$$

Les composantes $B_{ij}^{(1)}$ de la matrice $\mathbf{B}^{(1)}$ dans (1.52) sont données par

$$\begin{aligned} B_{11}^{(1)} &= 0, \quad B_{12}^{(1)} = 0, \quad B_{15}^{(1)} = 0, \\ B_{13}^{(1)} &= -\frac{c_2^2(2k_1 + \xi) + c_1^2\xi + 2(k_1 + \xi)\rho_1}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right] \\ &\quad + \frac{\xi(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right], \\ B_{14}^{(1)} &= -\frac{c_2^2(2k_1 + \xi) + c_1^2\xi + 2(k_1 + \xi)\rho_1}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right] \\ &\quad + \frac{\xi(c_2^2 - c_1^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right], \\ B_{21}^{(1)} &= -1, \quad B_{22}^{(1)} = 0, \quad B_{25}^{(1)} = 0 \\ B_{23}^{(1)} &= \frac{(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}}{(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\ B_{24}^{(1)} &= \frac{(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}}{(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\ B_{31}^{(1)} &= -\frac{k_2}{2\sqrt{c_1^2 + \rho_c}}, \quad B_{32}^{(1)} = -\frac{k_2[1 - l^2(\rho_c)]}{(c_1^2 - c_2^2)l(\rho_c)\sqrt{c_1^2 + \rho_c}}, \\ B_{33}^{(1)} &= -\frac{\xi(c_1^2 + c_2^2 + 2\rho_c)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\ &\quad + \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{34}^{(1)} &= -\frac{\xi(c_1^2 + c_2^2 + 2\rho_c)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
&\quad + \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
B_{35}^{(1)} &= 0, \\
B_{41}^{(1)} &= 1, \quad B_{42}^{(1)} = \frac{2[l(\rho_2) - l(\rho_c)]}{c_1^2 - c_2^2}, \quad B_{43}^{(1)} = 0, \quad B_{44}^{(1)} = 0, \quad B_{45}^{(1)} = 1, \\
B_{51}^{(1)} &= k_2, \quad B_{52}^{(1)} = \frac{2k_2[1 - l(\rho_2)l(\rho_c)]}{(c_1^2 - c_2^2)l(\rho_2)}, \quad B_{53}^{(1)} = 0, \quad B_{54}^{(1)} = 0, \quad B_{55}^{(1)} = \tilde{k}_1. \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

Annexe C

Expression des composantes $B_{ij}^{(2)}$ de $\mathbf{B}^{(2)}$ dans l'équation 1.58

En gardant les définitions dans (B.1), les composantes $B_{ij}^{(2)}$ de la matrice $\mathbf{B}^{(2)}$ dans (1.58) sont données par

$$\begin{aligned}
 B_{11}^{(2)} &= 0, & B_{12}^{(2)} &= 0, & B_{15}^{(2)} &= 0, \\
 B_{13}^{(2)} &= -\frac{c_1^2(2k_1 + \xi) + c_2^2\xi + 2(k_1 + \xi)\rho_1}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right] \\
 &\quad + \frac{\xi(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right], \\
 B_{14}^{(2)} &= -\frac{c_1^2(2k_1 + \xi) + c_2^2\xi + 2(k_1 + \xi)\rho_1}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right] \\
 &\quad + \frac{\xi(c_2^2 - c_1^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_1) \right], \\
 B_{21}^{(2)} &= -1, & B_{22}^{(2)} &= 0, & B_{25}^{(2)} &= 0 \\
 B_{23}^{(2)} &= \frac{(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}}{(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
 B_{24}^{(2)} &= \frac{(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}}{(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{1}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
 B_{31}^{(2)} &= -\frac{k_2}{2\sqrt{c_2^2 + \rho_c}}, & B_{32}^{(2)} &= \frac{k_2[1 - l^{-2}(\rho_c)]}{(c_1^2 - c_2^2)l^{-1}(\rho_c)\sqrt{c_2^2 + \rho_c}}, \\
 B_{33}^{(2)} &= -\frac{\xi(c_1^2 + c_2^2 + 2\rho_c)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
 &\quad + \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_P \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{34}^{(2)} &= -\frac{\xi(c_1^2 + c_2^2 + 2\rho_c)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu - 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
&\quad + \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{4(c_1^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}(c_2^2 + \rho_c)^{\frac{3}{4}}} L_Q \left[\frac{1}{2}(\mu + 1), \frac{1}{2}, f(\rho_c) \right], \\
B_{35}^{(2)} &= 0, \\
B_{41}^{(2)} &= 1, B_{42}^{(2)} = \frac{2[l^{-1}(\rho_2) - l^{-1}(\rho_c)]}{c_2^2 - c_1^2}, B_{43}^{(2)} = 0, B_{44}^{(2)} = 0, B_{45}^{(2)} = 1, \\
B_{51}^{(2)} &= k_2, B_{52}^{(2)} = \frac{2k_2[1 - l(\rho_2)l(\rho_c)]}{(c_1^2 - c_2^2)l(\rho_c)}, B_{53}^{(2)} = 0, B_{54}^{(2)} = 0, B_{55}^{(2)} = \tilde{k}_2. \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Annexe D

Méthode d'analyse asymptotique pour les phénomènes couplés

Cette annexe cible à montrer comment on obtient l'expansion asymptotique du champ de potentiel dans le cas des phénomènes couplés. A partir de l'expansion d'asymptotique classique pour un paramètre petit ϵ du champ de potentiel dans la zone d'interface

$$\mathbf{w}^{(\alpha)}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon^2 \mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + O(\epsilon^3), \quad (\text{D.1})$$

où $\mathbf{w}^{(r)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ avec $r = 0, 1, 2$ sont les fonctions périodiques selon les directions 1 et 2 et appelées les correcteurs d'ordre r du champ potentiel. En utilisant la relation (4.3) entre le vecteur d'intensité $\mathbf{D}^{(\beta)}$ et le potentiel $w^{(\beta)}$, alors l'expression du vecteur $\mathbf{D}^{(\beta)}$ est donnée par

$$\mathbf{D}^{(\beta)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \epsilon^{-1} \mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon^0 \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon^1 \mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + O(\epsilon^2) \quad (\text{D.2})$$

où

$$D_i^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \frac{\partial \mathbf{w}^{(0)}}{\partial \xi_i}, \quad (\text{D.3})$$

$$D_i^{(r)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \frac{\partial \mathbf{w}^{(r-1)}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(r)}}{\partial \xi_i}, \quad (\text{D.4})$$

avec $r = 1, 2$. En appliquant la relation (4.1), on obtient l'expression du champ de divergence libre comme suit

$$\mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \epsilon^{-1} \mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon^0 \mathbf{J}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + \epsilon^1 \mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) + O(\epsilon^2) \quad (\text{D.5})$$

avec

$$J_i^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = L_{ij}^{(\alpha\beta)} \frac{\partial \mathbf{w}^{(0)}}{\partial \xi_j}, \quad (\text{D.6})$$

$$J_i^{(r)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = L_{ij}^{(\alpha\beta)} \left(\frac{\partial \mathbf{w}^{(r-1)}}{\partial y_j} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(r)}}{\partial \xi_j} \right). \quad (\text{D.7})$$

En remplaçant (D.5) dans l'équation du mouvement on obtient

$$\epsilon^{-2} \frac{\partial J_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial J_i^{(0)}}{\partial y_i} + \frac{\partial J_i^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) + \epsilon^0 \left(\frac{\partial J_i^{(1)}}{\partial y_i} + \frac{\partial J_i^{(2)}}{\partial x_i} \right) + O(\epsilon^1) = 0. \quad (\text{D.8})$$

En demandant que les équations D.2, D.5 et D.8 sont satisfaites pour quelque soit $\epsilon \rightarrow 0$ implique que tous les coefficients associés à ϵ aux puissances négatives et zéro doivent être égaux à zéro. Alors il est nécessaire que

$$\mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \mathbf{W}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \mathbf{0}, \quad (\text{D.9})$$

$\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[L_{ij}^{(\alpha\beta)} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) \right] = 0, \quad (\text{D.10})$$

et $\mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$L_{ij}^{(\alpha\beta)} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(1)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[L_{ij}^{(\alpha\beta)} \left(\frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)}}{\partial \xi_i} \right) \right] = 0. \quad (\text{D.11})$$

Rappeler que $\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ et $\mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ sont les solutions de D.10 et D.11 et doivent être Y-périodique. Par d'ailleurs, le terme $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y_i}$ est constant par rapport à l'opérateur $\frac{\partial(\cdot)}{\partial y_i}$, le principe de superposition nous amène à trouver la solution $\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$ de l'équation (D.10) comme suit

$$\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) = \mathbf{N}^{(11)} \mathbf{W}_{,1} + \mathbf{N}^{(12)} \mathbf{W}_{,2} + \mathbf{N}^{(13)} \mathbf{W}_{,3} + \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{W} \quad (\text{D.12})$$

où les fonctions Y-périodique $\mathbf{N}^{(11)}$, $\mathbf{N}^{(12)}$ et $\mathbf{N}^{(13)}$ caractérisent le champ potentiel et ils ne sont en fonction que de y_3 , ξ_1 et ξ_2 ; $\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{W}$ est une constante d'intégration dans la surface (ξ_1, ξ_2) , il est choisi pour que $\partial \mathbf{N}^{(1)} / \partial \xi_i = \mathbf{0}$.

En introduisant (D.12) dans l'équation (D.11) et en appliquant le principe de superposition, on trouve la solution $\mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{y}, \xi_1, \xi_2, t) &= \mathbf{N}^{(213)} \mathbf{W}_{,13} + \mathbf{N}^{(223)} \mathbf{W}_{,23} + \mathbf{N}^{(212)} \mathbf{W}_{,12} + \mathbf{N}^{(211)} \mathbf{W}_{,11} + \mathbf{N}^{(222)} \mathbf{W}_{,22} \\ &+ \mathbf{N}^{(233)} \mathbf{W}_{,33} + \mathbf{N}^{(21)} \mathbf{W}_{,1} + \mathbf{N}^{(22)} \mathbf{W}_{,2} + \mathbf{N}^{(23)} \mathbf{W}_{,3} + \mathbf{N}^{(2)} \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

où \mathbf{N}^\bullet ne dépendent que ξ_1, ξ_2 et y_3 et sont Y-périodique d'ordre deux qui caractérise le champ du potentiel. Finalement en substituant D.9, D.12, et D.13 dans l'équation D.1 on obtient l'expression asymptotique du champ potentiel $\mathbf{w}^{(\beta)}(\mathbf{y}, t)$.