

# Trafic aérien : détermination optimale et globale des trajectoires d'avion en présence de vent

Brunilde Girardet

▶ **To cite this version:**

Brunilde Girardet. Trafic aérien : détermination optimale et globale des trajectoires d'avion en présence de vent. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Toulouse, 2014. Français. NNT : 2014ISAT0027 . tel-01127339

**HAL Id: tel-01127339**
**https://theses.hal.science/tel-01127339**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.




# THÈSE

**En vue de l'obtention du**

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**
*l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)*

**Discipline ou spécialité :**
*Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques*

---

**Présentée et soutenue le** *02/12/2014* **par :**

BRUNILDE GIRARDET

## Trafic Aérien :
## Détermination optimale et globale des trajectoires d'avions en présence de vent

---

**JURY**

| | | |
|---|---|---|
| ÉRIC FERON | Georgia Institute of Technology | Examinateur |
| JACCO HOEKSTRA | TU Delf (Pays-Bas) | Rapporteur |
| FRANÇOIS SOUMIS | École Polytechnique de Montréal (Canada) | Rapporteur |
| CHRISTOPHE RABUT | INSA | Directeur de thèse |
| DANIEL DELAHAYE | ENAC | Directeur de thèse |
| LAURENT LAPASSET | Capgemini | Examinateur |

---

**École doctorale :**
*EDAA (École Doctorale Aéronautique Astronautique)*
**Unité de Recherche :**
*Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien (MAIAA), ENAC (École Nationale de l'Aviation Civile) et Capgemini*

# Remerciements

DURANT *ces trois années de thèse, j'ai eu l'opportunité de rencontrer de nombreuses personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce projet. Je tiens donc à remercier ici toutes ces personnes.*

*Ces remerciements sont en particulier destinés à :*

- *Laurent Lapasset, l'initiateur de ce projet, pour son dynamisme et son adnégation dans le développement de l'équipe de recherche au sein de l'entreprise Capgemini. Merci pour ton soutien indéfectible tout au long de la thèse.*

- *Christophe Rabut, directeur de thèse. Merci pour ta disponibilité, tes conseils et l'intérêt que tu as montré à mes travaux ainsi que les nombreuses remarques et questions qui m'ont permis d'avancer.*

- *Daniel Delahaye, co-directeur de thèse, pour ton encadrement tout au long de la thèse*

- *Stéphane Puechmorel, responsable du laboratoire MAIAA (Mathématiques Appliquées, Informatique et Automatique pour l'Aérien à l'Enac (École Nationale de l'Aviation Civile). Merci Stéphane pour ta disponiblité et ta patience pour m'expliquer des concepts mathématiques.*

- *Capgemini, pour avoir financé ces travaux, et plus particulièrement à Dominique Lecocq. Merci Dominique pour avoir permis un traitement optimal des aspects d'intendance, de gestion de mission..., et cela toujours avec le sourire.*

- *J'adresse mes plus sincères remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail. À M. François Soumis et M. Jacco Hoekstra pour avoir accepter d'être rapporteurs de cette thèse et à M. Éric Féron de me faire l'honneur de participer au jury.*

- *Marcel Mongeau, pour les nombreuses heures de relecture et de papier noirci de remarques et corrections toujours pertinentes.*

✦ *Laureline Guys, pour les cinq années passées ensemble à l'INSA ou en thèse. Nos chemins se séparent, mais le petit canard jaune peut aussi fonctionner par mail ou téléphone. Merci d'avoir été là pendant ces trois années à me supporter et me remonter le moral dans les moments difficiles.*

✦ *Je tiens aussi à remercier toute l'équipe du laboratoire MAIAA pour leur accueil et l'ambiance au quotidien. Le bureau était toujours vivant entre Ludo pour venir vider le stock de M&Ms, Pascal et ses discussions pour refaire le monde, et Georges et ses photocopies.*

✦ *Un grand merci à tous les anciens du CENA du bâtiment Z, restés à l'Enac ou délocalisés à la mounède. Merci à vous tous pour votre accueil et pour toutes ces aventures partagées dans la bonne humeur... Et plus particulièrement merci à Caro, François, Bob, Éric, Alex, JP, Gwen, Rémi, Nico, Géraud, Christophe, Serge.*

*Merci aussi à tous les membres du club photo de l'Enac, vous n'aurez plus à exposer de photos avec mon modèle favori, ma petite soeur ou des paysages de montagne.*

*Je tiens aussi à remercier les sportifs du midi, les footings le long du canal, les séances de piscine vont terriblement me manquer.*

✦ *Je pense aussi à tous les doctorants : les anciens doctorants du laboratoire MAIAA qui ont passé le flambeau Clément, Nour ; les nouveaux qui débute l'aventure Clément, Romaric, François ; sans oublier ceux qui ont commencé ces trois années en même temps, Loïc et Olga ; Caro, l'ergonome du bâtiment qui nous a permis de travailler dans les meilleures condition grâce à sa bonne humeur communicative ; Cécile, délocalisée à Météo France mais toujours là pour discuter de mes travaux ou de tout autres choses ; aux anciens stagiaires passés à l'Enac, Marie, Emmanuel et notamment Yohann pour les travaux réalisés ensemble à la fin de la deuxième année, mais surtout pour l'instauration obligatoire des pauses cafés ; Marianne, la traileuse doctorante, dont les longs entrainements dans les côteaux ou sur le canal nous a permis de nous raconter tous nos déboires de thèse.*

✦ *Je finis mes remerciements par une note un peu plus personnelle qui concerne ma famille et mes amis de longues dates, Sandrine, Florence, Julie. Merci pour votre soutien sans faille durant ces trois années et toutes les précédentes.*

# Table des matières

**Remerciements** **3**

**Liste des symboles** **10**

**Introduction** **13**

**Chapitre 1 :**
***La gestion du trafic aérien et problématique*** **15**

1 Comment est géré aujourd'hui le trafic aérien en Europe ? . . . . 16

1.1 Le déroulement d'un vol . . . . . 16

1.2 L'organisation de l'espace aérien. . . . . 16

*1.2.1 Les règles de navigation* . . . . . *17*

*1.2.2 La structuration de l'espace aérien*. . . . . *17*

1.3 La planification et la régulation du trafic européen . . . . . 20

*1.3.1 Le Network Manager, unité chargée de la planification du trafic européen* . . . . . *20*

*1.3.2 La préparation d'un vol* . . . . . *20*

*1.3.3 La planification du trafic en différents niveaux : stratégique, pré-tactique, tactique*. . . . . *20*

1.4 Le contrôle du trafic européen . . . . . 22

*1.4.1 Les activités du contrôleur aérien* . . . . . *22*

*1.4.2 Différents types de contrôle* . . . . . *22*

*1.4.3 Techniques de contrôle pour le contrôle en route* . . . . . *23*

*1.4.4 Dernier recours : le TCAS* . . . . . *25*

1.5 Points faibles du système actuel de gestion de l'espace aérien . . . . . 25

2 Transformations du système de contrôle aérien . . . . . 26
2.1 Pourquoi ce changement ? . . . . . 27
2.2 Le projet SESAR, un changement majeur dans la gestion du trafic aérien 28
*2.2.1 Objectifs globaux* . . . . . *28*
*2.2.2 Les nouveaux concepts opérationnels* . . . . . *28*
3 La Météorologie aéronautique . . . . . 34
3.1 Pourquoi s'intéresser à la météorologie en aéronautique ? . . . . . 34
3.2 Les événements météorologiques à prendre en compte . . . . . 35
3.3 Les données disponibles . . . . . 36
4 Bilan et problématique de la thèse . . . . . 36

**Chapitre 2 :**
***Différentes méthodes de planification de trajectoires*** **41**

1 Planification d'une trajectoire . . . . . 42
1.1 Représentation de la trajectoire sur une base de fonctions . . . . . 44
*1.1.1 Exemple de décomposition* . . . . . *44*
*1.1.2 Méthodes d'optimisation* . . . . . *46*
1.2 Discrétisation de l'espace de recherche . . . . . 49
*1.2.1 Les méthodes déterministes* . . . . . *49*
*1.2.2 Les méthodes non déterministes* . . . . . *53*
1.3 Les champs de potentiel . . . . . 55
1.4 Recherche de la commande optimale . . . . . 58
*1.4.1 Les méthodes directes* . . . . . *59*
*1.4.2 Les méthodes indirectes* . . . . . *60*
*1.4.3 Équation d'Hamilton-Jacobi / Programmation dynamique* . . . . . *61*
1.5 Bilan . . . . . 67
2 Planification de plusieurs trajectoires . . . . . 70
2.1 Approche séquentielle . . . . . 70
2.2 Méthodes itératives . . . . . 71
2.3 Commande prédictive . . . . . 72
2.4 Mouvements coordonnées . . . . . 73
2.5 Multi-agents . . . . . 74
2.6 Bilan . . . . . 75

**Chapitre 3 :**
***Optimisation d'une trajectoire aérienne*** **77**

1 Modélisation du problème de planification d'une trajectoire . . . 78

1.1 Contexte opérationnel et hypothèses de travail . . . . . 78

*1.1.1 Atmosphère de référence . . . . . 78*

*1.1.2 Niveaux de vol . . . . . 79*

*1.1.3 Vitesse de l'avion . . . . . 79*

*1.1.4 Consommation de l'avion . . . . . 81*

*1.1.5 Hypothèses de travail . . . . . 82*

1.2 Modèle de l'avion . . . . . 82

2 Mise en équation sous la forme d'un problème d'optimisation . . 83

2.1 Problème de commande optimale . . . . . 83

2.2 Équation d'Hamilton-Jacobi . . . . . 84

3 Algorithme Ordered Upwind . . . . . 85

3.1 Principe général . . . . . 85

3.2 Algorithme . . . . . 87

*3.2.1 Discrétisation semi-Lagrangienne . . . . . 89*

*3.2.2 Discrétisation Eulérienne . . . . . 90*

*3.2.3 Complexité de l'algorithme . . . . . 92*

4 Application à l'optimisation d'une trajectoire d'avion . . . . . 93

4.1 Discrétisation Eulérienne : formulation quadratique du problème . . . . . 93

4.2 Calcul de la trajectoire . . . . . 95

4.3 Prise en compte d'obstacles . . . . . 95

4.4 Transformation en coordonnées sphériques . . . . . 96

*4.4.1 Principe. . . . . 97*

*4.4.2 Projection conique de Lambert . . . . . 99*

*4.4.3 Le module linéaire . . . . . 101*

*4.4.4 Algorithme . . . . . 102*

5 Bilan . . . . . 103

**Chapitre 4 :**
***Résultats pour l'optimisation d'une trajectoire*** **105**

1 Validation de l'algorithme : Problème de navigation de Zermelo . 106
1.1 Présentation du problème . . . 106
1.2 Résolution du problème . . . 106
1.3 Comparaison des résultats . . . 107
2 Optimisation d'une trajectoire en prenant en compte des obstacles fixes . . . 112
3 Optimisation des trajectoires au-dessus de l'Europe . . . 112
3.1 Analyse des données . . . 112
*3.1.1 Trafic* . . . *112*
*3.1.2 Vent* . . . *113*
3.2 Résultats . . . 114
*3.2.1 Analyse sur une trajectoire* . . . *115*
*3.2.2 Analyse sur le trafic européen* . . . *116*
4 Bilan . . . 118

**Chapitre 5 :**
***Optimisation du trafic aérien en réduisant la congestion* 121**

1 Modélisation du problème de réduction de la congestion . . . 122
1.1 Modélisation du trafic . . . 122
1.2 Définition de la congestion . . . 123
2 Formulation de la réduction de la congestion sous la forme d'un problème d'optimisation . . . 128
2.1 Objectifs de l'optimisation . . . 128
2.2 Données du problème . . . 128
2.3 Variables de décision . . . 128
2.4 Fonction objectif . . . 132
3 Résolution du problème d'optimisation via un algorithme de Recuit Simulé . . . 132
3.1 Principe de l'algorithme de Recuit Simulé . . . 133
3.2 Adaptation du Recuit Simulé pour la réduction de la congestion . . . 134
3.3 Choix des paramètres . . . 134
*3.3.1 Fonction de voisinage* . . . *134*
*3.3.2 Température initiale* . . . *136*

*3.3.3 Schéma de refroidissement* . . . . . *137*
*3.3.4 État d'équilibre* . . . . . *137*
*3.3.5 Critère d'arrêt* . . . . . *137*
3.4 Discussions et commentaires . . . . . 138
3.5 Bilan . . . . . 138

**Chapitre 6 :**
***Résultats de l'optimisation des trajectoires en réduisant la congestion*** **141**

1 Présentation du cas d'étude . . . . . 142
2 Choix des paramètres pour la résolution . . . . . 144
3 Résultats de la minimisation de la congestion . . . . . 145
4 Expérimentation sur le comportement de la congestion suite à des retards au décollage . . . . . 148
5 Bilan . . . . . 150

**Conclusion** **153**

**Annexe A :**
***Le trafic aérien en détail*** **157**

1 Les règles de navigation . . . . . 157
2 L'attribution des niveaux de vol . . . . . 158
3 La sectorisation de l'espace aérien : . . . . . 158

**Annexe B :**
***La météorologie aéronautique en détail*** **161**

**Annexe C :**
***Passage de la formulation de Bolza à l'équation d'Hamilton-Jacobi*** **165**

**Annexe D :**
***Calcul de la vitesse du front*** **169**

**Annexe E :**
***Discrétisation Eulérienne : équation quadratique*** **173**

**Annexe F :**
***Résolution du problème de navigation de Zermelo*** **175**

**Bibliographie** **187**

**Communications et publications** **189**

**Liste des acronymes** **191**

# Liste des symboles

| | |
|---|---|
| $\langle ., . \rangle$ | Produit scalaire |
| $\nabla$ | Gradient |
| $J_\Psi$ | Matrice jacobienne de l'application $\Psi$ |
| $t$ | Temps |
| $(x, y)$ | Coordonnées cartésiennes de la position de l'avion |
| $(\theta, \phi)$ | Coordonnées sphériques de la position de l'avion |
| $\theta$ | Longitude |
| $\phi$ | Latitude |
| $(R, \gamma)$ | Coordonnées polaires de la position de l'avion |
| X | Vecteur position dans l'espace de travail |
| $\Theta$ | Cap de l'avion : angle entre l'axe longitudinal de l'avion et le nord magnétique |
| $c$ | Vitesse du son |
| $M$ | Nombre de Mach |
| $V_{GS}$ | Vitesse sol de l'avion |
| $V_{TAS}$ ou $V_a$ | Vitesse propre de l'avion |
| $W$ | Vent |
| $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ | Ensemble de trois nœuds du maillage formant un élément triangulaire |
| $\mathbb{X}$ | Ensemble des positions sur la grille |
| $\mathbf{a}$ | Variable de contrôle |
| $\mathbf{n}$ | Normal au front |
| $f(\mathrm{X}(t), \mathbf{a}(t))$ | Vitesse sol de l'avion au temps $t$ |
| $F(\mathrm{X}, \mathbf{n})$ | Vitesse du front |
| $h$ | Distance maximale entre deux nœuds adjacents |

| | |
|---|---|
| $u(\mathrm{X})$ | Temps minimum d'arrivée au point X |
| $\Psi$ | Projection cartographique |
| $\phi_0$ | Latitude de référence pour la projection de Lambert |
| $\mathrm{X}^S$ | Vecteur position de l'avion en coordonnées sphériques |
| $\mathrm{X}^L$ | Vecteur position de l'avion en projection |
| $m$ | Module linéaire |
| $r$ | Rayon de la Terre |
| $\lambda$ | Densité d'avions |
| $\mathrm{X}_t^i$ | Position de l'avion $i$ à l'instant $t$ |
| $\xi$ | Indice de congestion compris entre 0 et 1 |
| $d$ | distance maximum entre deux avions en intéraction |
| $F_{obj}$ | Fonction objectif à minimiser |
| $g_t^i(\mathrm{X})$ | Fonction décrivant la contribution de l'avion $i$ à l'instant $t$ en tout point X à la congestion |
| $h$ | bande passante |
| $\gamma$ | Trajectoire |
| $\overrightarrow{\gamma} = \gamma_1, ..., \gamma_N$ | Ensemble de trajectoires |
| $N$ | Nombre de vols |
| $\gamma_{optim}$ | Trajectoire optimisée indépendamment des autres avions en fonction du vent |
| $\gamma_{cong}$ | Trajectoire optimisée en tenant compte de la congestion et du vent |
| $\alpha$ | Coefficient aléatoire entre $[-0,5; 1,5]$ |
| $\beta$ | Coefficient de décroissance géométrique |
| $N_i$ | Nombre d'itérations à chaque paliers |
| $n_t$ | Nombre de pas de temps de discrétisation |
| $T$ | Température |
| $T_0$ | Température initiale |

# Introduction

Au cours de ces dernières années, deux grands projets ont été initiés pour transformer la gestion du trafic aérien, un aux États-Unis, le projet NextGen et un en Europe, le projet SESAR. Ces deux projets ont pour objectif d'améliorer la gestion du trafic aérien. Les principaux axes d'amélioration sont l'augmentation de la capacité de l'espace aérien tout en garantissant un niveau de sécurité toujours plus élevé, une amélioration de la prévisibilité des vols et la diminution des coûts engendrés par le trafic. Pour répondre à ces objectifs, de nouveaux concepts et méthodes ont été étudiés. Nous nous intéresserons, dans cette thèse, plus particulièrement aux concepts introduits dans le projet SESAR.

Dans ce contexte, nous nous sommes basés sur deux nouveaux concepts envisagés qui modifieraient de manière fondamentale la structure du trafic aérien. Ces deux concepts sont : la trajectoire 4D et le concept de free-route ; le suivi d'une trajectoire 4D par les avions permettant une meilleure prévisibilité des vols et le free-route donnant une plus grande liberté aux avions dans la planification des trajectoires. Sous l'hypothèse de la mise en place de ces concepts, nous nous sommes intéressés à développer une nouvelle stratégie pour planifier les trajectoires en tenant compte des nouvelles possibilités offertes par le free-route ; celui-ci permettant une plus grande liberté dans le choix des trajectoires. C'est pourquoi la prise en compte des conditions météorologiques prend alors plus d'importance.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'optimisation d'une seule trajectoire en tenant compte du vent et d'obstacles pouvant représenter des zones météorologiques dangereuses ou des zones interdites de survol. L'optimisation est effectuée en minimisant le temps de vol de la trajectoire.

Le trafic aérien ne se résumant pas à une seule trajectoire, nous nous sommes ensuite intéressés à la planification du trafic dans sa globalité. L'objectif est ici de planifier l'ensemble des trajectoires. Ce problème est beaucoup plus complexe puisque la modification d'une trajectoire a une répercussion sur les autres trajectoires. Nous avons choisi dans cette thèse de regarder le trafic de manière macroscopique et d'essayer de minimiser l'ensemble de la congestion, c'est-à-dire l'ensemble des interactions entre les trajectoires tout en minimisant la durée de vol des trajectoires.

Pour présenter les travaux effectués, cette thèse se découpe en six chapitres. Le premier chapitre présente le fonctionnement actuel du contrôle aérien et ses futurs enjeux. À partir de cet aperçu, la problématique de cette thèse est présentée, l'objectif étant de développer

une nouvelle méthode pour planifier les trajectoires en accord avec les objectifs souhaités dans le nouveau système de gestion du trafic aérien. Le deuxième chapitre donne un aperçu des différentes méthodes déjà étudiées pour la planification d'une trajectoire ainsi que pour la planification de plusieurs trajectoires.

Le troisième chapitre présente la méthode choisie pour planifier une trajectoire. Cette méthode a été adaptée à notre problème de planification aérienne. Le quatrième chapitre s'intéresse aux différents résultats obtenus.

Les cinquième et sixième chapitres s'intéressent à la planification du trafic dans sa globalité. L'objectif est maintenant de prendre en compte les interactions entre les trajectoires. Dans ce contexte, un algorithme hybride est développé pour minimiser la congestion, c'est-à-dire le nombre d'avions en interaction, tout en minimisant le temps de vol. Pour cela, l'algorithme associe un algorithme de Recuit Simulé, qui nous permet de travailler avec plusieurs vols, avec l'algorithme développé pour optimiser une seule trajectoire. Les résultats obtenus sont présentés pour une journée

Nous exposerons à la fin les conclusions et les perspectives d'amélioration de notre modèle de planification.

# Chapitre 1

# La gestion du trafic aérien et problématique

*Ce chapitre a pour objectif de présenter brièvement la gestion du trafic aérien afin de comprendre les enjeux, les transformations en cours et les évolutions envisagées pour l'améliorer. À partir de ces informations, ce chapitre nous amènera ainsi à la définition de la problématique de cette thèse.*

Cette partie a pour but de présenter un aperçu général de la gestion du trafic aérien en Europe pour comprendre son fonctionnement, ses enjeux et ses limites afin d'appréhender les évolutions prévues.

# 1 Comment est géré aujourd'hui le trafic aérien en Europe ?

La **gestion du trafic aérien** ou en anglais, Air Traffic Management (ATM) a pour enjeu d'**organiser la circulation des vols afin d'en assurer la sécurité et l'efficacité**. La sécurité est l'enjeu essentiel. Concrètement, cela se traduit, pour les avions, par l'évitement des zones congestionnées, des zones météorologiques dangereuses, et bien sûr, des autres avions. Le deuxième enjeu concerne l'efficacité du trafic c'est-à-dire arriver à améliorer la capacité du trafic aérien tout en essayant de respecter au plus près les planifications effectuées.

Pour répondre à ses deux objectifs, la gestion du trafic aérien se découpe en deux étapes. La première consiste en une phase de **planification et régulation du trafic**. Elle a pour but d'organiser les flux aériens afin de faciliter la gestion et répondre aux mieux aux demandes de chacun. La deuxième phase concerne la **supervision des vols** pour en assurer la sécurité. Elle consiste à surveiller le trafic, coordonner et résoudre des conflits aériens.

La section suivante présente les différentes phases d'un vol et son découpage pour faciliter la gestion de la circulation des vols.

## 1.1 Le déroulement d'un vol

Les principales étapes d'un vol sont représentées sur la figure 1.1. Tout au long du vol, l'avion est soumis à différentes règles de régulation et de contrôle pour garantir la sécurité.

**Dans le cadre de nos recherches, nous nous sommes intéressés particulièrement à la phase de croisière d'un avion,** c'est-à-dire entre le Top Of Climb (TOC), point d'atteinte de l'altitude optimale, et le Top Of Descent (TOD), point de début de la descente. La partie de la gestion du trafic qui nous concerne est donc la **phase en-route**. Nous décrirons spécifiquement cette phase, néanmoins les autres étapes seront brièvement détaillées pour donner un aperçu global de la gestion du trafic aérien.

La section suivante présente la structure de l'espace aérien permettant une meilleure gestion de la phase en-route.

## 1.2 L'organisation de l'espace aérien

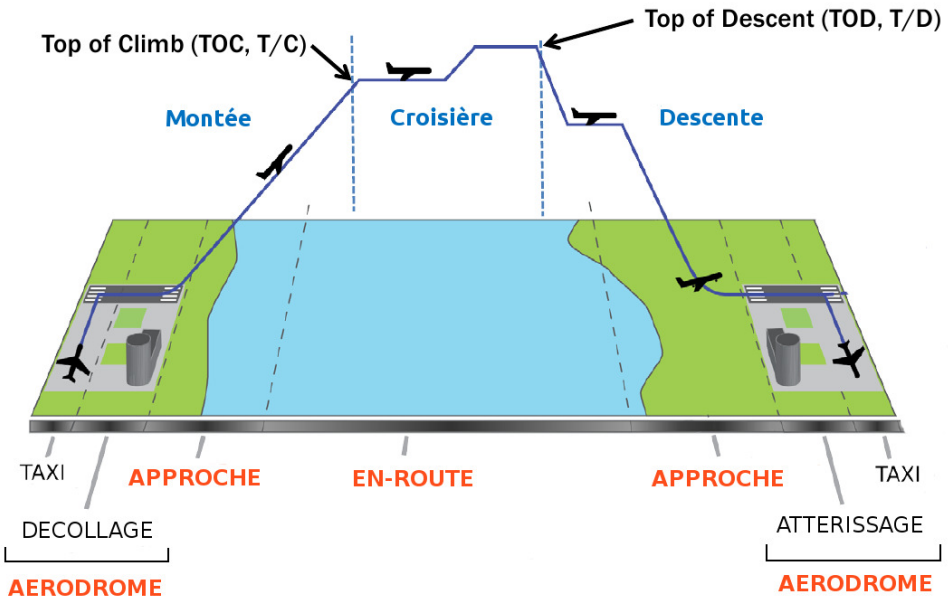



FIGURE 1.1 – *Les différentes étapes d'un vol, du décollage à l'atterrissage.*

### 1.2.1 Les règles de navigation

Pour permettre d'avoir un système de transport aérien sûr et efficace, un ensemble de règles et de procédures doit être suivi par l'ensemble de la communauté du transport aérien. L'organisme chargé d'élaborer la coopération entre tous les acteurs est l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI) ou en anglais, International Civil Aviation Organization (ICAO).

Dans la suite de la thèse, nous nous intéresserons uniquement aux règles appliquées, dans cadre de la **circulation aérienne générale**, pour des **vols Instrumental Flight Rules (IFR)** (règles de vol aux instruments) dans des **zones aériennes contrôlées**. La définition de ces différents termes est présentée en Annexe A.

### 1.2.2 La structuration de l'espace aérien

Au vu du trafic important à gérer, l'espace aérien est découpé verticalement et horizontalement pour faciliter le contrôle. Nous nous intéresserons ici uniquement aux zones contrôlées où un service de contrôle est rendu. La structure de l'espace aérien présentée ci-dessous est décrite pour les vols dans leur phase en-route.

**Un découpage vertical, les niveaux de vol :** À partir d'une certaine altitude, 3000 ft (environ 914 m), l'espace aérien est découpé verticalement en niveau de vol ou en anglais Flight Level (FL). Les avions peuvent alors évoluer uniquement à ces niveaux. Le niveau de vol est défini comme la distance verticale entre un point et le niveau de pression de référence donné à 1013,25 hPa. Il est exprimé en centaines de pieds, un niveau de vol

noté FL correspond à 100 ft (soit 30,48 m). En aéronautique, les termes de hauteur et d'altitude sont aussi utilisés. Une hauteur est la distance verticale entre un aéronef et la surface qu'il survole (terre ou eau). Une altitude est la distance verticale d'un aéronef au-dessus du niveau moyen des mers.

L'unité en niveau de vol est utilisée durant la phase de croisière pour garantir que tous les avions utilisent la même référence et soient sur la même échelle ; la pression n'étant pas constante à une altitude donnée. Les lignes isobares ne sont donc pas horizontales et parallèles entre elles. Lorsqu'un avion vole à un niveau de vol donné, son altitude n'est donc pas constante au cours du vol en suivant une ligne isobare.

Les niveaux de vol permettent de faciliter la séparation des avions en fonction de leur régime de vol et de leur destination. Les détails sur les règles d'attribution des niveaux de vol sont présentés en Annexe A.

À partir d'un niveau de vol donné (différent pour chaque pays), on distingue deux espaces :

- **l'espace supérieur**, qui se situe au-dessus de FL195 pour la France ;
- **l'espace inférieur**, qui s'étend du niveau du sol ou de la mer jusqu'au niveau de vol FL195.

La gestion de la circulation aérienne dans chacun d'eux est différente.

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement aux **avions évoluant dans l'espace supérieur** ; en effet, les vols commerciaux évoluent à des niveaux de vols supérieurs à FL195 dans leur phase en-route.

**Un découpage horizontal, la sectorisation de l'espace aérien :** Un découpage horizontal de l'espace est aussi effectué pour faciliter le contrôle de l'ensemble des avions. Au vu du volume de trafic important, il n'est pas envisageable pour un opérateur humain de contrôler l'ensemble des avions. L'espace aérien est alors divisé en différents secteurs, appelés **secteurs de contrôle**, qui se répartissent la charge de travail. Une coordination entre ces différents secteurs est nécessaire. Des détails sur le découpage en secteurs sont proposés en Annexe A.

Chaque secteur est chargé de contrôler la portion d'espace qui lui est affectée. Ce regroupement est défini à partir de la capacité maximale associée à chaque secteur.

La **capacité d'un secteur de contrôle** correspond en Europe au nombre maximal d'avions qui peuvent entrer dans le secteur en une heure. Elle est définie à partir de plusieurs critères, parmi lesquels :

- La taille du secteur : un secteur de petite taille laisse peu de place pour croiser les avions et induit une capacité plus faible ;
- La nature des flux : un flux d'avions évolutifs (des montées et des descentes) est souvent plus délicat à gérer que des avions stables ;
- la présence de zones militaires : elles restreignent l'espace utilisable par les contrôleurs aériens civils et peuvent complexifier énormément la gestion du trafic.

Cette liste n'est pas exhaustive car les critères sont multiples.

Il existe aussi des zones particulières à l'intérieur des régions d'information de vol qui ont des contraintes particulières et qui peuvent être interdites de survol. Ces zones sont les zones dangereuses, réglementées, interdites et les zones de ségrégation temporaire. Elles peuvent être temporaires ou définitives. La plupart de ces zones sont au-dessus de zones militaires et sont interdites lors des entraînements. Ces zones sont une contrainte supplémentaire à prendre en compte pour la gestion des vols.

**Les routes aériennes :** Aujourd'hui, pour faciliter la gestion du trafic, les avions évoluent le long de routes aériennes. Ces routes aériennes sont des successions de segments dans le plan horizontal reliés entre eux par des balises (ou en anglais waypoint). C'est souvent à l'intersection de ces segments, au niveau des balises, qu'apparaissent des conflits. La figure 1.2 montre un exemple de route aérienne aux alentours de Toulouse.

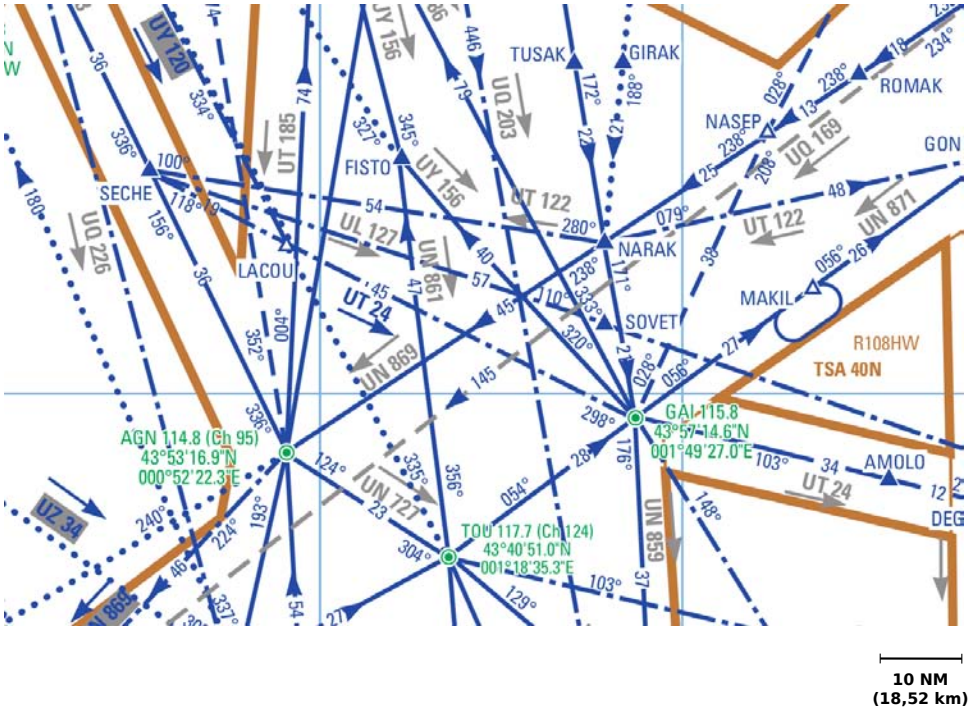



FIGURE 1.2 – *Extrait d'une carte répertoriant les routes aériennes de l'espace supérieur près de Toulouse. Les balises sont représentées par des petits triangles, celles-ci sont reliées entre elles par les routes aériennes matérialisées par les lignes droites. Les points verts représentent les balises au-dessus des villes par exemple Toulouse.*

La partie suivante a pour but de donner un aperçu de la planification du trafic européen, première étape pour faciliter la gestion de la circulation aérienne. Cela consiste à organiser les flux aériens afin d'assurer la sécurité des vols et d'améliorer la capacité de l'espace aérien.

## 1.3 La planification et la régulation du trafic européen

Cette partie présente l'unité chargée de la planification du trafic européen et son fonctionnement.

### *1.3.1 Le Network Manager, unité chargée de la planification du trafic européen*

En 2011, la commission européenne a nommé Eurocontrol comme Network Manager. L'objectif premier est d'améliorer la performance du trafic européen. Le Network Manager prend la suite de la CFMU (Central Flow Management Unit). Il a pour mission de **planifier de façon centralisée les flux de trafic** dans le but d'améliorer la sécurité et d'optimiser la capacité de l'espace aérien.

### *1.3.2 La préparation d'un vol*

Avant toute planification, il est nécessaire de connaître les demandes des utilisateurs de l'espace aérien. Pour cela, chaque vol doit déposer et faire valider un **plan de vol** pour définir ses caractéristiques. Ces données doivent être transmises suffisamment à l'avance au Network Manager pour permettre d'anticiper les flux et planifier au mieux le trafic. Ces informations permettent aussi d'adapter les ressources de contrôle à déployer pour garantir la sécurité.

Le plan de vol contient donc tous les éléments pertinents décrivant le vol prévu pour un avion avec, en particulier, les informations suivantes :

- L'identification de l'avion ;
- Le type d'avion ;
- L'aérodrome de départ ;
- L'heure de départ ;
- La vitesse de croisière ;
- Le niveau de vol souhaité pour la croisière ;
- La route prévue décrite par une série de balises ;
- L'aérodrome de destination.

### *1.3.3 La planification du trafic en différents niveaux : stratégique, pré-tactique, tactique*

Le but de la **gestion des flux** (en anglais, Flow Management) est d'**équilibrer la demande des vols** dans l'espace aérien européen à long et court terme en fonction de la capacité de contrôle du trafic aérien. Il doit également réagir de manière efficace et en temps opportun sur des événements imprévus jusqu'au jour des opérations. L'objectif du Network Manager est d'optimiser ces flux pour permettre aux compagnies aériennes d'exploiter des vols sûrs et efficaces.

Les planifications du Network Manager se divisent en trois phases :

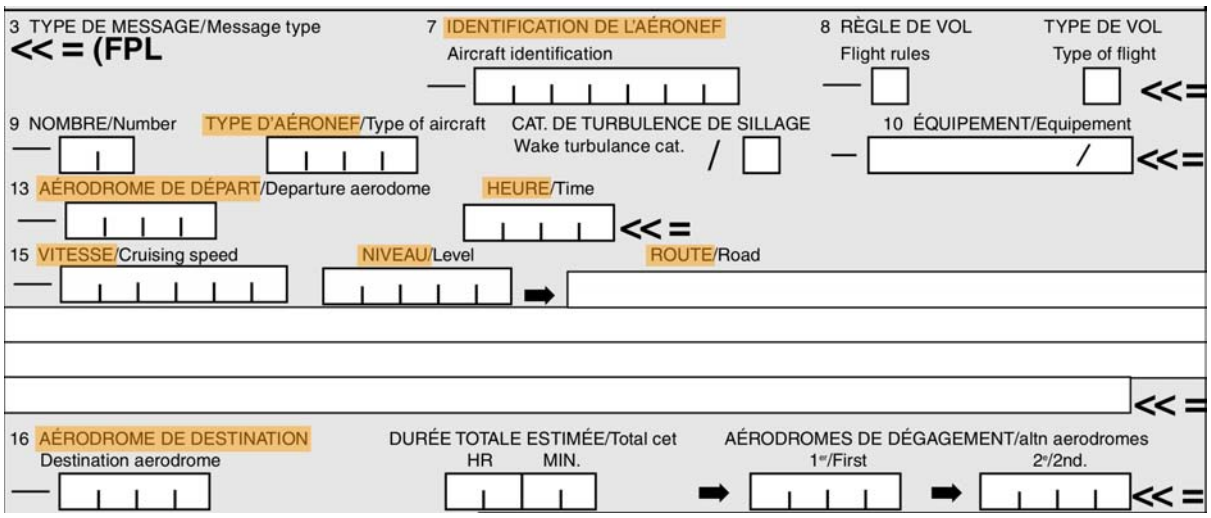



FIGURE 1.3 – *Un extrait du formulaire de dépôt d'un plan de vol avec les informations demandées dont l'identification de l'avion, le type d'avion, l'aérodrome de départ, l'heure de départ, la vitesse de croisière, le niveau de vol, la route et l'aérodrome de destination.*

- **La planification stratégique.** Cette phase se déroule environ un an jusqu'à une semaine avant le vol. Son but n'est pas, au sens strict, d'éviter des conflits, mais plutôt d'organiser le trafic de façon macroscopique. Elle fixe les volumes et les flux de trafic de manière à optimiser la sécurité et la capacité de l'espace aérien.
  Pour cela, le Network Manager Operations Center (NMOC) aide les fournisseurs de services de la navigation aérienne, ou en anglais Air Navigation Service Providers (ANSP), à prédire les capacités que devra gérer chaque centre de contrôle.
- **La planification pré-tactique.** Elle comprend les six jours avant le jour des opérations. Elle a pour but d'organiser la journée de trafic en minimisant les coûts et les retards. Ce planning s'effectue en collaboration avec tous les acteurs impliqués.

- **La planification tactique.** Cette phase se déroule le jour des opérations. Elle a pour but de surveiller et de remettre à jour le planning en fonction du déroulement des opérations et des différents aléas pouvant se produire (retards, météo, grèves ...). Le Network Manager ajuste ainsi les plannings en tenant compte des demandes en temps réels pour utiliser au mieux la capacité disponible. Ces ajustements peuvent induire des allocations différentes de créneaux de décollage, des routes différentes ou des niveaux de vols différents.

**Dans ces travaux, nous nous intéresserons particulièrement à la planification pré-tactique.** Néanmoins, intéressons-nous brièvement à la phase de contrôle qui suit la planification et permet d'assurer du bon suivi de celle-ci et l'adapter si la situation compromet la sécurité des vols.

## 1.4 Le contrôle du trafic européen

Après la planification du trafic, la deuxième étape consiste au contrôle de celui-ci. Les objectifs du contrôle aérien sont d'**assurer le bon suivi de la planification** des routes empruntées et les modifier dans certaines situations où la sécurité des vols est remise en cause. Ce contrôle est effectué par les contrôleurs ou aiguilleurs du ciel.

### *1.4.1 Les activités du contrôleur aérien*

L'objectif des services de la navigation aérienne est d'**assurer la sécurité des vols**, tout en assurant un trafic fluide, ainsi que la ponctualité de celui-ci. En effet, même si l'espace aérien est vaste, le trafic est important et nécessite un contrôle permanent des vols pour assurer la sécurité. Le rôle des contrôleurs aériens consiste à :

- assurer la **sécurité** de tous les usagers de l'espace aérien ;
- **communiquer** de façon permanente et précise avec les équipages ;
- garantir la meilleure **ponctualité** des vols possible.

### *1.4.2 Différents types de contrôle*

Au cours d'un vol, les méthodes de contrôle ne sont pas uniques et varient suivant les différentes phases du vol vu dans la section 1.1. Il existe trois types de contrôle : le contrôle d'aérodrome, le contrôle d'approche et le contrôle en route. Ces différents services de contrôle aérien sont en permanence en interaction pour assurer la prise en charge des vols tout le long de leur trajet.

- **Le contrôle d'aérodrome.** Il a la charge d'une zone restreinte autour de l'aérodrome. Ses fonctions sont d'assurer les phases de décollage et d'atterrissage des avions, ainsi que tous les déplacements au sol entre les terminaux de l'aéroport et les pistes de décollage et d'atterrissage [1]. Ce contrôle s'effectue depuis la tour de contrôle située aux pieds des pistes.
- **Le contrôle d'approche.** Il gère les avions en phase de montée et de descente dans les zones à proximité des aéroports (entre 10 et 30 Milles Nautiques (NM) des pistes). Pour les avions au départ, le contrôle d'approche vise à amener l'avion de son point de sortie de la zone de contrôle d'aérodrome à sa route en phase de croisière. Pour les arrivées, le contrôle d'approche a pour fonction de disposer les avions les uns derrière les autres en direction des pistes afin de faciliter le travail du contrôle d'aérodrome.
- **Le contrôle en-route.** Il gère la progression des avions évoluant en dehors des zones proches des aéroports. Dans ces zones, les grandes majorités des avions circulent le long des routes aériennes préétablies, appelées couloirs aériens (en anglais airways), comme décrites dans la section 1.2.2. Ces routes permettent aux

1. Sur les grands aéroports, le contrôleur d'aérodrome transfère la responsabilité du contrôle de l'avion au contrôleur au sol, sitôt la piste dégagée. Ce dernier guide les appareils jusqu'aux parkings comme il le fait dans l'autre sens pour le décollage.

contrôleurs d'avoir une visualisation plus aisée de la situation spatiale des avions qui facilite la gestion des croisements des voies aériennes.

Le travail de recherche détaillé dans ce manuscrit porte sur la **phase en-route** des vols, c'est pourquoi la suite du texte portera principalement sur le déroulement de cette phase de vol.

### *1.4.3 Techniques de contrôle pour le contrôle en route*

À chaque secteur de contrôle (voir la section 1.2.2 pour la définition) est associé une position de contrôle. À l'intérieur, les contrôleurs maintiennent chaque avion séparé du reste du trafic en donnant aux pilotes des instructions. Chaque avion doit **respecter une séparation horizontale et verticale avec les autres avions** de façon à se protéger de tout risque de collision ou de perturbation aérodynamique.

Lorsque cette norme de séparation est violée, le terme de **conflit aérien** est utilisé. Elle est définie de la manière suivante. Deux avions sont séparés lorsque la distance qui sépare leurs projections sur un plan horizontal est supérieure à la séparation standard horizontale OU quand la distance qui sépare leurs projections sur un plan vertical est supérieure à la séparation standard verticale. La séparation horizontale est exprimée en milles nautiques (NM) et la séparation verticale en pieds (ft).Dans le cas du trafic en-route, la séparation standard horizontale est de 5 NM (environ 9km) et la séparation standard verticale de 1000 ft (environ 300m). Ainsi, il existe une zone (ou plus mathématiquement correcte un volume) de protection autour de chaque avion dans lequel aucun autre avion ne doit pénétrer comme illustré sur la figure 1.4, on appelle conflit si un tel événement se produit. Cette zone peut paraître importante, mais la vitesse des avions fait que deux avions peuvent rentrer en collision dans un temps très court. Par exemple, si deux avions volent face à face à une vitesse de 900 km/h, ils se rapprochent à une vitesse de 1800 km/h (20 km/min). Si les deux avions sont séparés de 20 km, en une minute, ils peuvent être en collision. La détection du conflit potentiel et la prise de décision adéquate doivent être rapides.

Cette norme de séparation est plus importante au-dessus des océans et des espaces inhabités où la surveillance radar n'existe pas.

Pour garantir la séparation entre chaque avion, chaque position de contrôle est séparée en deux rôles. Le contrôleur organique assure la coordination avec les secteurs voisins et fait de la pré-détection de conflits. Le contrôleur radar surveille le trafic, prend les mesures d'évitement nécessaires et communique avec les pilotes.

**Différentes mesures d'évitement** peuvent être prises par le contrôleur radar. Les trois instructions données à un pilote peuvent être : une modification du niveau de vol, un changement de cap ou une modification de sa vitesse. Les avions évoluant de manière différente pour un contrôle en approche ou en-route, le choix de la mesure d'évitement à prendre diffère suivant le type de contrôle.

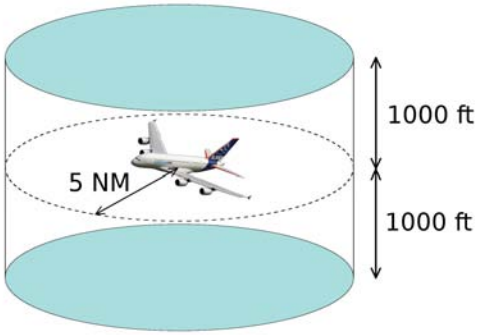



FIGURE 1.4 – *Norme de séparation pour la phase en-route. Aucun autre avion ne doit pénétrer dans ce volume de protection.*

L'ordre donné aux avions durant la phase en-route est le plus souvent un changement de cap. Pourquoi ce choix est-il pris le plus souvent ?

- Un **changement de niveau de vol** induit une hausse significative de la consommation et n'est pas toujours possible pour respecter les contraintes aérodynamiques (poids de l'avion, vitesse ...).
- Un **changement de vitesse** peut être difficile à visualiser pour le contrôleur puisque celui-ci doit être très faible. Le contrôleur ne peut pas visualiser directement sur le radar si le pilote a bien effectué l'ordre qu'il lui a été demandé, un changement de vitesse n'étant pas immédiat.
- Le **changement de cap** est quant à lui immédiat et permet au contrôleur de visualiser facilement la modification. On peut citer deux manœuvres standards : l'offset (voir figure 1.5) et le point tournant (voir figure 1.6). Le point tournant consiste à modifier le cap d'un avion et le ramener ensuite sur sa trajectoire. L'offset induit un décalage latéral. Cette modélisation est indispensable pour un conflit de rattrapage (un avion rattrape l'autre sur une même trajectoire).

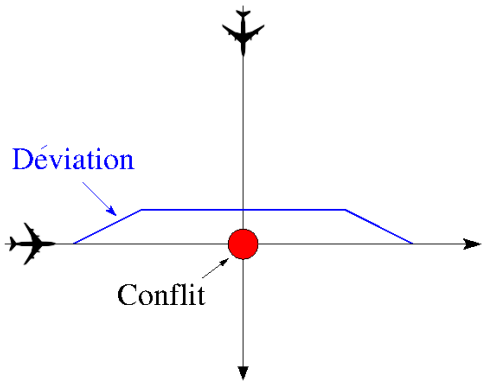



FIGURE 1.5 – Offset

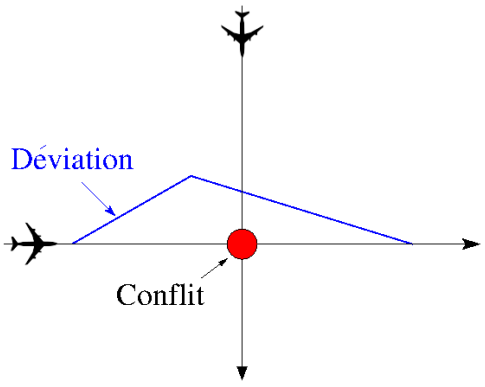



FIGURE 1.6 – Point tournant

### 1.4.4 Dernier recours : le TCAS

En dernière solution pour éviter un conflit, il existe une alternative : le Traffic alert and Collision Avoidance System (TCAS). Le TCAS est **système d'anti-collision d'urgence** embarqué sur l'avion. Son but est de détecter la présence du trafic environnant et d'en informer le pilote et en dernier recours de lui fournir des avis d'évitement lorsqu'une collision est anticipée. L'horizon temporel de l'anti-collision est d'environ 45 secondes avant la collision présumée. Ce système n'est cependant utilisé que très rarement puisque c'est le dernier recours.

Maintenant que le fonctionnement du système actuel de gestion de l'espace aérien est décrit, intéressons-nous aux points faibles constatés de celui-ci.

## 1.5 Points faibles du système actuel de gestion de l'espace aérien

**Saturation de l'espace aérien** Le découpage de l'espace en secteurs de contrôle a permis de diminuer la charge des contrôleurs en augmentant leur nombre et en leur répartissant le trafic. Cependant, aujourd'hui, il arrive que des secteurs atteignent leur capacité maximale. Un découpage plus fin permettrait en théorie d'augmenter la capacité de cet espace en réduisant la charge de travail du contrôleur, mais le temps passé à réaliser la charge de coordination augmenterait de manière rédhibitoire, si bien que les secteurs de contrôle actuels sont déjà à leur taille minimale.

Plusieurs études ont été effectuées sur la notion de capacité d'un secteur. La métrique actuelle est-elle adaptée à la mesure de charge de travail d'un contrôleur ? Avec une métrique plus adaptée, un découpage différent des secteurs permettrait-il d'augmenter le trafic tout en maintenant le niveau de sécurité actuel ? Les travaux [Delahaye 2010] mettent en évidence une nouvelle métrique pour mesurer la charge des contrôleurs en fonction de la complexité du trafic. Pour cela, ils prennent en compte la topologie du trafic. En effet, la difficulté du contrôle est différente si les flux de trafic à travers un secteur sont parallèles ou si les flux se croisent en de nombreux embranchements.

**Retards** Chaque année, Eurocontrol [Eurocontrol 2013b] publie des informations sur la ponctualité des vols en Europe. Comme le montre le graphique 1.7, sur un échantillon de 68,6 % des vols commerciaux en Europe en 2013, chaque vol est retardé en moyenne de 9,3 minutes. Cet échantillon de vols est assez conséquent et reflète donc bien la réalité. Le fonctionnement de la gestion du trafic aérien reste encore imparfait, l'objectif de respecter au mieux les planifications peut encore être amélioré avec pour objectif de diminuer les retards.

Pour mieux comprendre ces retards, analysons les causes. D'après le graphique 1.7, sur la totalité des causes, la météorologie pour le trafic en-route représente 5% des causes de retards et la gestion des flux aériens pour le trafic en-route représente 4%. La cause principale intitulée reactionnary représente ce qu'on pourrait appeler l'effet boule de neige

c'est-à-dire la propagation du retard d'un vol sur un autre vol (correspondance, utilisation du même avion ...). En regardant une deuxième fois le graphique sans prendre en compte cette cause puisque celle-ci est liée au retard induit par les autres causes. On s'aperçoit que la météorologie représente 9 % des retards et la gestion des flux 7%. Ces deux causes représentent alors ensemble 16% des retards, ce qui est non négligeable.

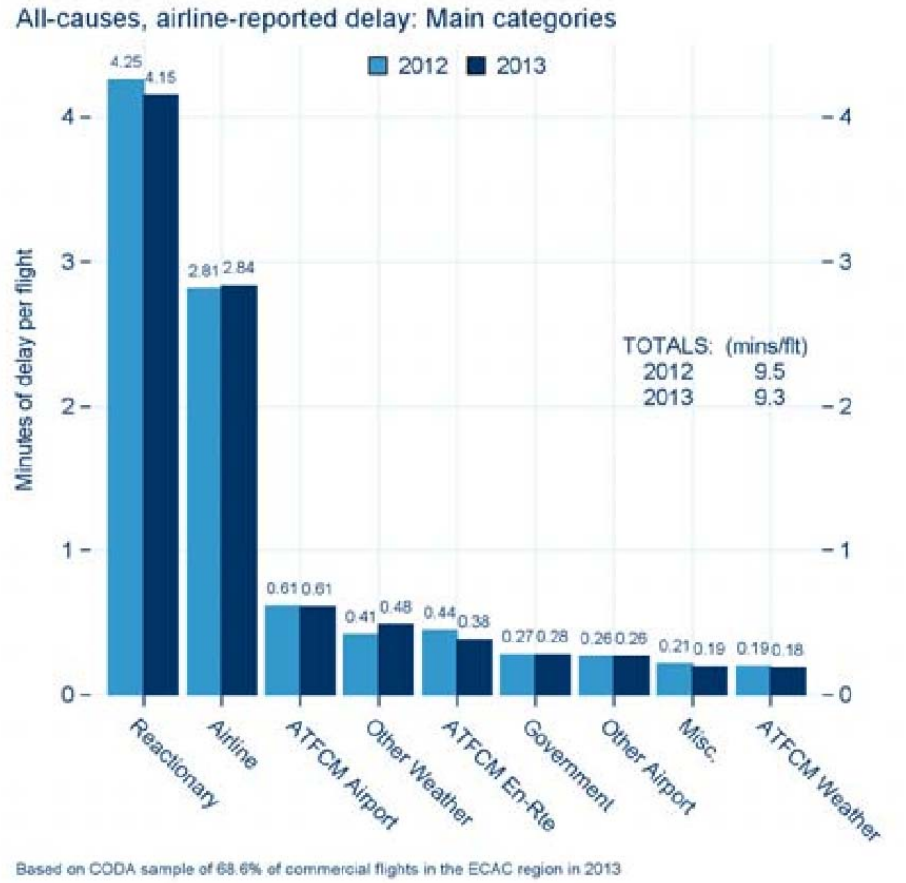



FIGURE 1.7 – *Totalité des causes des retards des vols commerciaux pour l'année 2012 et 2013 en Europe.* © Eurocontrol [Eurocontrol 2013b]

Nous avons donné, dans cette partie, l'état actuel du système de contrôle aérien. Avec le constat de ces différents points faibles, de nouveaux projets ont été initiés pour l'améliorer. Les transformations envisagées sont évoquées dans la partie suivante.

# 2 Transformations du système de contrôle aérien

## 2.1 Pourquoi ce changement ?

Malgré les points faibles évoqués dans la section 1.5, le système de gestion du trafic aérien actuel reste efficace et réactif surtout en terme de sécurité. Néanmoins, la saturation de l'espace aérien et les retards observés mettent en évidence les limites du système. Deux constats expliquent ce besoin de réformer le système de contrôle aérien : le premier se base sur les prévisions actuelles de croissance du trafic aérien réalisées par Eurocontrol et le deuxième sur la nécessité de diminuer les impacts écologiques pour la planète.

**Évolutions du trafic aérien en Europe** Un rapport d'Eurocontrol [Eurocontrol 2013a] présente une étude sur la prévision du nombre de mouvements de vols IFR en Europe. Différents scénarios sont envisagés des plus optimistes ou plus pessimistes. Le graphique 1.8 montre les évolutions possibles suivant les scénarios à l'horizon 2050. Quel que soit le scénario envisagé, les prévisions montrent une croissance du trafic européen : de 10 à 170% de mouvements supplémentaires. Même avec la croissance la plus pessimiste, cette augmentation du trafic risque de saturer de manière rédhibitoire le système actuel et augmentera immanquablement les retards.

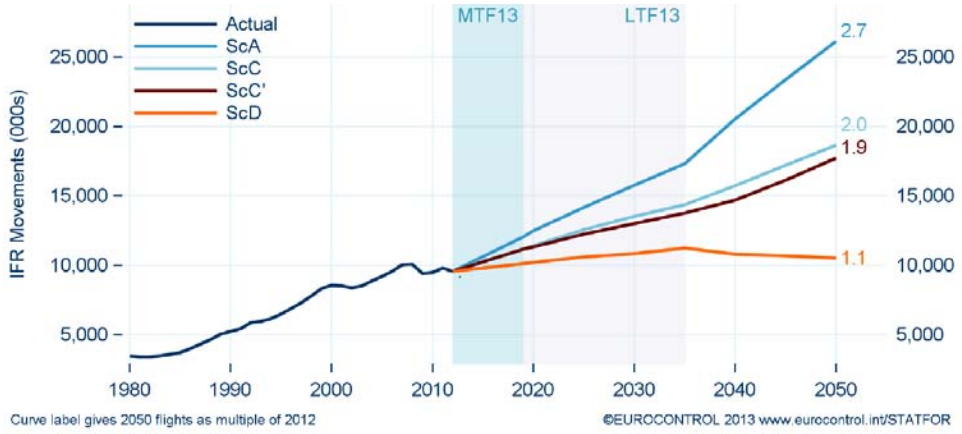



FIGURE 1.8 – *Prévisions du nombre de mouvements de vols IFR en Europe en 2050 suivant différents scénarios.* © Eurocontrol [Eurocontrol 2013a]

**Impact écologique** Aujourd'hui, la nécessité de diminuer notre impact écologique pour la planète est un enjeu majeur pour la société. Le domaine de l'aviation n'en est pas exclu. Dès 2008, la Commission Européenne et l'industrie aéronautique européenne ont lancé le programme Clean Sky, visant à l'émergence de nouvelles technologies permettant une diminution de l'empreinte environnementale de l'aviation ; preuve de l'importance donnée à ce problème. L'optimisation des routes et la régulation de la congestion en route sont une solution envisagée pour permettre une réduction de la consommation en carburant et des émissions de gaz à effet de serre. Les compagnies aériennes sont aussi particulièrement attentives aux améliorations possibles en terme de réduction de la consommation en carburant du fait de la hausse du prix de carburant.

## 2.2 Le projet SESAR, un changement majeur dans la gestion du trafic aérien

Depuis de nombreuses années, le système de gestion du trafic aérien en Europe n'a pas connu d'évolutions majeures. Pourtant, l'espace aérien européen est l'un des plus fréquentés au monde avec plus de 33 000 vols certains jours et une densité au voisinage des aéroports très importante. Malgré cette fréquentation, l'Europe ne dispose pas d'un ciel unique c'est-à-dire, celui dans lequel la navigation aérienne serait gérée au niveau européen. Ce manque d'uniformisation et de communication des informations entre les opérateurs de chaque pays rend le contrôle encore plus difficile. À partir de ce constat, la commission européenne a initié le ciel unique européen afin de surmonter cette fragmentation et la limitation de la capacité de l'espace aérien, en structurant l'espace et les services de navigation à un niveau européen. Pour cela, le **programme Single European Sky ATM Research (SESAR)** a été lancé en 2004 après quelques années de préparation, et il a été révisé en 2009 afin d'uniformiser la gestion du trafic aérien en Europe et de moderniser les systèmes actuels.

Un programme similaire aux États-Unis pour réformer la gestion du trafic a aussi été initié, sous le nom de Next-Gen. Un accord préliminaire sur l'interopérabilité entre les deux futurs systèmes de gestion du trafic a été conclu entre les autorités européennes et américaines.

### *2.2.1 Objectifs globaux*

L'amélioration de la gestion du trafic aérien doit répondre aux quatre objectifs majeurs du programme SESAR qui sont :

- restructurer l'espace aérien afin d'augmenter la **capacité** et d'améliorer l'efficacité globale du système de gestion du trafic aérien, avec pour objectif une augmentation de la capacité de 27% ;
- accroître le niveau de **sécurité** avec une diminution de 40 % du risque d'accident ;
- diminuer l'impact sur l'**environnement** de l'activité aérienne avec pour objectif une réduction de 2,8% par vol ;
- développer l'efficacité **économique** du système en réduisant le coût de chaque vol de 6%.

### *2.2.2 Les nouveaux concepts opérationnels*

Pour répondre à ses objectifs ambitieux, de nouveaux concepts sont étudiés et entrepris à plus ou moins long terme suivant la difficulté de mise en place. À plus court terme, une meilleure coordination et un partage d'informations sont mis en œuvre entre tous les acteurs en ATM (opérateurs aériens, aéroports, prestataires de service de navigation aérienne) pour gérer le trafic européen de manière centralisée. Cette évolution a pour but

d'intégrer les vols dans leurs différentes phases, du départ à l'arrivée, ce qui réduira les temps d'attente au sol ou en vol et ainsi facilitera le contrôle et l'efficacité du trafic.

De nouveaux concepts plus innovants, demandant une réforme plus profonde du système, sont envisagés à plus long terme. Parmi ces concepts, deux d'entre eux nous intéressent particulièrement. Il s'agit du concept de **trajectoire 4D** et de **free-route**. Nous verrons par la suite que ces deux concepts ouvrent de nouveaux problèmes d'optimisation pour améliorer l'efficacité et le coût du trafic.

**Une gestion centralisée du trafic européen** Un des premiers concepts mis en place concerne l'amélioration du découpage de l'espace européen en blocs d'espace aérien fonctionnel, en anglais, Functional Airspace Block (FAB). Cette restructuration de l'espace aérien en FAB a pour objectif d'avoir une gestion de l'espace aérien plus intégrée. En particulier, la définition des routes et la fourniture des services de la navigation aérienne ne seraient plus contraintes par les frontières nationales. Ceci a pour but d'améliorer les capacités et l'efficacité tout en maintenant un fort niveau de sécurité et en réduisant les coûts.

Un FAB est défini en fonction des besoins opérationnels indépendamment des frontières nationales, de façon à faciliter la coopération entre les acteurs de la navigation aérienne : les ANSP.

Les 67 blocs d'espace aérien aujourd'hui en Europe, tous basés sur les frontières nationales, sont en cours de réorganisation en seulement neuf FABs présentés sur la figure 1.9




FIGURE 1.9 – *Le découpage de l'espace européen en 9 FABs.* © Eurocontrol

***Un exemple de FAB mis en place, le FABEC*** Avec un espace aérien accueillant 55% de tout le trafic aérien européen, le projet FAB Europe Central (FABEC) lancé par l'Allemagne, la Belgique, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas et la Suisse, est de loin le plus important de ces projets. La coopération entre les acteurs de la navigation aérienne de chaque pays a pour objectif d'améliorer la performance de la navigation aérienne au cœur de l'Europe.

**Trajectoire 4D** Comme présentée dans la section 1.3.2, la planification d'une trajectoire se limite à une planification spatiale en 3 dimensions (une suite de balises définies par des coordonnées géographiques latitude et longitude et un niveau de vol) avec uniquement l'heure de départ et le temps estimé de vol. Le temps de passage en ces points n'est pas explicite. Et si pour diverses raisons, le pilote doit dévier de sa trajectoire prévue, les horaires du vol seront modifiés. Les informations sur la trajectoire ne sont pas communiquées à tous les acteurs, ce qui rend l'anticipation et la planification difficile. Les contrôleurs n'ont qu'une vision à très court terme de l'état du trafic, les informations des vols qu'ils reçoivent dans leur secteur n'arrivent que 20 min avant. Il est difficile pour eux d'anticiper l'évolution du trafic et d'optimiser la régulation de celui-ci.

Pour répondre à ce problème, le concept de trajectoire 4D a été introduit. Le temps est ajouté comme nouvelle dimension pour décrire une trajectoire. Une trajectoire est alors décrite par une position spatiale en trois dimensions et une position temporelle. Cette nouvelle **notion temporelle** doit permettre d'**accroître la prévisibilité globale du trafic** et ainsi d'améliorer la gestion du trafic aérien, ce qui devrait profiter aux compagnies aériennes.

Cependant, le passage à une gestion à partir de trajectoires 4D nécessite une modification des systèmes actuels pour permettre un partage systématique des trajectoires des avions entre les différents acteurs participants à la gestion du trafic. Ce partage d'information est nécessaire afin que tout le monde ait la même vision du trafic et mette à jour les nouvelles informations concernant les trajectoires.

Ce partage plus poussé d'informations entre les systèmes sol (« contrôle aérien ») et bord, doit permettre aussi de développer de nouveaux concepts opérationnels afin d'**optimiser l'efficacité du trafic**, c'est-à-dire avoir un trafic comportant le plus de trajectoires optimales en terme de temps de vol, de consommation ou tout autre critère, tout en assurant la sécurité et le respect de la planification. Pour cela, SESAR introduit la **notion de Business Trajectory**, définie comme la trajectoire souhaitée par la compagnie aérienne. Elle est optimisée en fonction de critères propres à chaque compagnie aérienne qui peut être la durée pour le vol, la consommation ou tout autre caractéristique du vol.

Une autre trajectoire est introduite, la **Reference Business Trajectory**. Cette trajectoire est définie à partir de la Business Trajectory après négociation entre la compagnie aérienne et les acteurs de la gestion du trafic (Aéroports et Network Manager). Ces deux parties se mettent d'accord pour satisfaire au mieux le souhait de la compagnie aérienne tout en assurant la sécurité. À la fin de la négociation, la Reference Business Trajectory est la trajectoire que la compagnie accepte de voler et les acteurs de la gestion du trafic s'engagent à faciliter le déroulement sans modifications (sous réserve de la norme de séparation).

La plupart des temps indiqués dans la RBT sont des estimations, certains peuvent avoir des moments cibles pour faciliter la planification et certains d'entre eux peuvent devenir des contraintes pour aider à la gestion de la file d'attente, le cas échéant, par exemple, à l'horizon de l'atterrissage à un aéroport.

Cette nouvelle gestion temporelle et spatiale doit permettre de **faciliter le respect de la planification** et d'anticiper plus en amont les trajectoires pour ainsi permettre une **planification plus optimale** et aussi un meilleur ajustement à la dynamique du trafic.

Pour permettre la mise en place de ce concept de trajectoire 4D, il est nécessaire de mettre en place de nouvelles technologies à bord et au sol, par exemple un Flight Management System (FMS) capable de suivre une trajectoire 4D. Le FMS est un système embarqué de gestion de vol, qui intègre des informations sur la performance de l'avion ainsi que sur sa position, provenant de capteurs de navigation, du plan de vol stocké et des saisies manuelles. Son but est d'assister les pilotes, en fournissant des instructions de pilotage, ou de permettre un guidage automatique de l'avion sur sa trajectoire lorsqu'il est couplé avec un pilote automatique. Il assure ainsi un niveau de sécurité, de confort des passagers et de régularité des vols satisfaisant. Afin de guider l'aéronef le long de son plan de vol, le FMS utilise différents capteurs pour déterminer la position de l'avion et la précision de cette position.

Plusieurs projets ont déjà été menés pour tester et évaluer l'utilisation de ces nouvelles technologies pour permettre la gestion d'un vol 4D, par exemple avec le projet Initial 4D trajectory.

***Une première étape, le projet Initial 4D trajectory*** Ce projet [Eurocontrol 2014] a pour but de développer la technologie Initial-4D (I-4D) qui permet de planifier l'itinéraire d'un avion en tenant compte des contraintes de temps, pour prévoir et programmer plus précisément l'heure d'arrivée du vol. Ce projet a permis de tester l'échange automatisé de données (appelé datalink) de la trajectoire 4D entre le FMS de l'avion et les systèmes sol. C'est une première étape pour la réalisation de la future gestion à partir de trajectoires 4D.

Cette technologie a été testée avec succès pour la première fois le 10 février 2012 ; ce premier vol s'est déroulé à bord d'un A320 entre Toulouse et Stockholm. L'avion a volé de Toulouse à Copenhague, puis vers Stockholm, avec un retour à Toulouse. Un deuxième vol a été réalisé le 19 mars 2014 pour le même vol. Ces vols font partie d'un large programme de validation technique et opérationnel pour conduire au déploiement de ce système.

L'objectif de l'I-4D est de mieux anticiper le déroulement des vols grâce à la notion temporelle et ainsi permettre une meilleure régulation des vols à l'arrivée aux aéroports. Connaître précisément l'heure d'arrivée des vols permettra aux contrôleurs d'anticiper l'arrivée des vols et de disposer plus facilement les avions les uns derrière les autres pour l'atterrissage en évitant de les faire attendre.

**Free-route** Des études récentes [Eurocontrol 2011] ont démontré qu'en Europe, les routes aériennes ne sont pas conçues de manière optimale. En 2009, l'itinéraire d'un vol était en moyenne de 47,6 km (ou 5,4%) plus long par rapport à sa trajectoire directe




FIGURE 1.10 – *L'avion A320 ayant effectué le premier vol avec la technologie I-4D.* © Eurocontrol

c'est-à-dire la distance la plus courte entre le départ et la destination. Ces déviations par rapport à la trajectoire directe génèrent des temps de vol supérieurs, une consommation plus élevée de carburant et une augmentation des émissions de gaz.

À partir de ce constat, le **concept de free-route** a été développé. Les avions ne seraient plus astreints à suivre le réseau de routes aériennes et pourraient choisir leur propre trajectoire optimisée suivant un critère propre à chacun, par exemple le temps de vol. Avec la gestion actuelle du trafic, ce concept n'est pas directement opérationnel, car le contrôle du trafic serait trop complexe pour assurer la sécurité. Le réseau de routes aériennes structure le trafic ce qui permet une meilleure visualisation pour le contrôleur. Les conflits potentiels entre les vols apparaissant le plus souvent à l'intersection des routes, le contrôleur anticipe plus rapidement ces conflits et peut donner rapidement des ordres aux pilotes pour les éviter.

L'apparition des trajectoires 4D devrait faciliter le contrôle dans les espaces autorisant le free-route. La connaissance précise du déroulement des trajectoires permettra une plus grande prévision du trafic, facilitant ainsi la détection des conflits potentiels. L'objectif final est de pouvoir assurer la sécurité des vols dans des espaces où le free-route est autorisée.

Une première étape dans la mise en place du concept free-route est actuellement la création dans l'espace aérien de zones particulières appelées **free-route airspace**. Ces zones sont définies dans [Eurocontrol 2011] comme une zone spécifique de l'espace aérien dans laquelle les opérateurs de la navigation aérienne peuvent planifier un itinéraire librement entre un point d'entrée et un point de sortie fixés, avec la possibilité de dévier via des points de navigation intermédiaires, sans référence au réseau de routes aériennes utilisé aujourd'hui. Au sein de cet espace aérien, les vols restent sujets au contrôle de la circulation aérienne et à n'importe quelle restriction de celui-ci.

Pour l'instant, ces zones n'autorisent pas encore les compagnies aériennes à choisir

leur propre trajectoire, mais les autorisent à suivre la route directe. C'est une première étape du concept Free Route. Les bénéfices attendus de la mise en place des free-route Airspace sont :

- ✈ une réduction de la consommation de carburant ;
- ✈ une réduction des émissions en $CO_2$ ;
- ✈ une réduction du temps de vol ;
- ✈ une amélioration de la planification.

En 2014, plusieurs free-route airspace devraient être créés, représentant 25% de l'espace aérien européen. D'après [Eurocontrol 2012], la mise en place de ces projets représenterait une diminution des distances parcourues d'environ 25 000 NM par jour. Sur un an, cela représente une diminution des distances de 7,5 millions de NM ce qui représente l'équivalent d'une économie de 45 000 tonnes de carburant ou une réduction des émissions polluantes de 150 000 tonnes, soit une économie de 37 millions d'euros. Un exemple de free-route airspace déjà mis en place est la Free Route Airspace Maastricht (FRAM), qui se situe au-dessus de Maastricht.

***Un exemple : Free-Route Airspace Maastricht - FRAM*** Depuis mars 2011, dans la zone FRAM, 142 nouvelles routes directes sont disponibles (cf figure 1.11) [Eurocontrol 2011]. Pour garantir la sécurité, ces nouvelles routes peuvent être utilisées uniquement pendant les heures les moins chargées de la nuit. Cette autorisation devrait être étendue pendant le week-end. Le but est d'étendre la mise en place de ces routes directes à tout moment de la journée.



FIGURE 1.11 – *Les 142 nouvelles routes directes disponibles dans la zone FRAM* © Eurocontrol

Un exemple du bénéfice obtenu par l'introduction des routes directes est présenté sur la figure 1.12. La route présentée part de Stansted pour aller Rygge. La route normale en suivant le réseau de routes aériennes mesure 268 NM alors qu'en suivant la route

directe, la distance est de 246 NM. Le gain en distance est donc de 22 NM (environ 41 km) ce qui induit aussi une diminution du temps de vol, de la consommation et des émissions polluantes (le tout sans tenir compte d'une différence de vent le long de ces deux trajectoires qui peut diminuer ou augmenter cet écart, voir la section suivante).

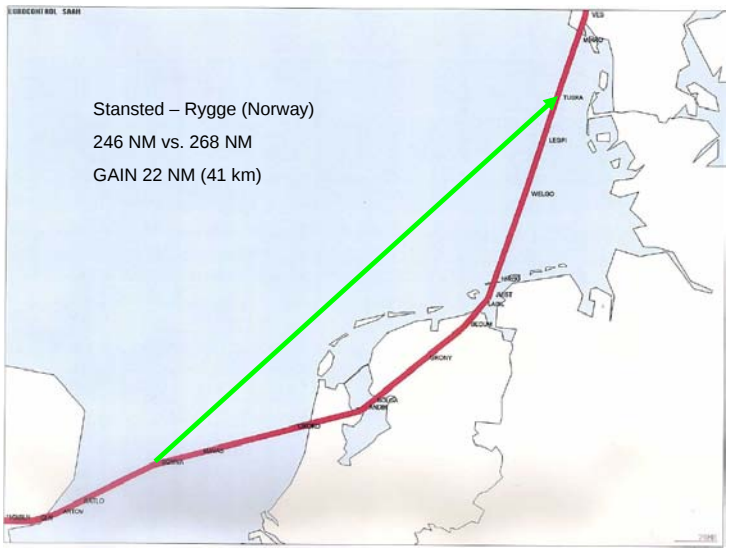



FIGURE 1.12 – *Un exemple du bénéfice obtenu par la route directe (en vert) comparée à la route traditionnelle (en rouge).*© Eurocontrol

La partie suivante présente la météorologie en aéronautique. La connaissance des conditions climatiques est indispensable pour le déroulement optimal d'un vol. Certains événements météorologiques peuvent compromettre la sécurité d'un vol.

# 3 La Météorologie aéronautique

Cette section présente les conditions climatiques ayant un impact sur le déroulement optimal d'un vol.

## 3.1 Pourquoi s'intéresser à la météorologie en aéronautique ?

Le milieu aéronautique est très sensible aux conditions atmosphériques. Pour la sécurité et l'efficacité des vols, la connaissance des conditions météorologiques est indispensable. D'après l'OACI : "*l'assistance météorologique à l'aéronautique a pour objet de contribuer à la sécurité, la régularité et l'efficacité de la navigation aérienne*".

La connaissance de la météorologie est indispensable pour la préparation d'un vol. Avant d'entreprendre celui-ci, le pilote a besoin de connaître un ensemble de paramètres météorologiques. Ceux-ci sont utiles pour le calcul de la consommation, la durée du vol, la quantité de carburant, le choix de la route aérienne.

Lors du déroulement du vol, il est aussi essentiel pour le pilote de connaître les conditions météorologiques autour de lui et des capacités de son avion à faire face à ces phénomènes atmosphériques. Ces connaissances permettent au pilote d'assurer la sécurité du vol en rectifiant les paramètres du vol en fonction des conditions météorologiques.

La connaissance des conditions météorologiques a déjà un impact majeur en aéronautique, néanmoins elles sont utilisées essentiellement pour assurer la sécurité. La planification des trajectoires en profitant du vent permettrait une économie de carburant et ainsi une réduction de l'impact environnemental. La prise en compte des phénomènes météorologiques lors de la planification des flux aériens pourrait permettre une meilleure gestion des flux par le contrôle aérien et ainsi améliorer l'efficacité et la sécurité.

Les principaux événements météorologiques à prendre en compte en aéronautique sont décrits dans la section suivante.

## 3.2 Les événements météorologiques à prendre en compte

D'après [Besse 2002], les événements météorologiques sont différenciés en deux catégories :

- **Les paramètres atmosphériques** qui sont directement mesurables par un instrument approprié, par exemple le vent, la température ;
- **Les phénomènes atmosphériques** qui sont des événements observables, pas forcément "mesurables" qui font plutôt l'objet d'une description. La turbulence, les cumulonimbus, les orages... sont considérés comme des phénomènes météorologiques.

La prise en compte des paramètres atmosphériques intervient essentiellement pour l'optimisation des trajectoires tandis que la prise en compte d'un phénomène météorologique concourt surtout à la sécurité du vol et doit bien sûr être prise en compte dans l'optimisation de la trajectoire.

En météorologie, on parle d'événements météorologiques significatifs, non pour mentionner sa dangerosité, mais pour dire qu'un tel paramètre ou phénomène ne peut être occulté en exploitation aéronautique et qu'il faut composer avec lui. Les événements significatifs peuvent devenir dangereux. C'est le travail des experts en météorologie et en aéronautique d'évaluer le potentiel danger. L'impact des événements météorologiques dépend de plusieurs facteurs, incluant le type d'avion, les qualifications et aptitudes du pilote, l'équipement de l'avion et du terrain, l'environnement géographique de l'aérodrome...

**Les paramètres atmosphériques.** Les deux paramètres les plus significatifs pour la phase de croisière sont le vent et la température. Leur connaissance est indispensable lors de la préparation du vol et pendant son déroulement. Avant le vol, les prévisions permettent de choisir la route optimale, d'estimer le temps de parcours et la quantité de carburant nécessaire pour le vol. Pendant le vol, les mesures de vent et de température

permettent de suivre la route définie et d'ajuster la vitesse. Ces deux paramètres sont décrits plus précisément en Annexe B.

**Les phénomènes atmosphériques.** Pour la phase de croisière, plusieurs phénomènes atmosphériques sont considérés comme significatifs, comme les jets, les cumulonimbus, le givre, les cendres volcaniques, les orages, les turbulences, la grêle, le cisaillement du vent. Pour les phases de décollage et d'atterrissage, d'autres phénomènes peuvent être pris en compte comme la visibilité, la base des nuages ... Ces différents phénomènes sont expliqués en Annexe B.

La prévision ou l'observation de ces phénomènes est relayée aux pilotes à l'aide des messages SIGnificant METeorological Information (SIGMET) afin de signaler un danger potentiel pouvant affecter la sécurité.

Tous ces événements météorologiques ont un impact dans l'optimisation des trajectoires, mais de quelles données dispose-t-on pour effectuer nos calculs ?

## 3.3 Les données disponibles

Pour améliorer le trafic aérien, la connaissance des paramètres et phénomènes météorologiques est indispensable. Quelles sont les prévisions disponibles pour ces différents événements météorologiques ? Météo France fournit deux types de carte.

La première concerne la prévision des paramètres atmosphériques, à savoir les prévisions de vent et de température pour différents niveaux de vol. Ces cartes sont appelées carte WINTEM pour cartes de prévision de vent (WINd) et températures (TEMperature). Sur ces cartes, le vent est représenté par la direction d'où il vient par rapport au Nord géographique (direction et sens) et sa vitesse (intensité).

La deuxième ne concerne que les phénomènes intéressant l'aéronautique et les masses nuageuses, par exemple les zones de turbulence, les jets .... Ces cartes sont intitulées carte TEMSI pour carte du TEMps SIgnificatif. Les prévisions sont données à heures fixes.

# 4 Bilan et problématique de la thèse

Dans le contexte de l'amélioration de la circulation aérienne, la structure et le fonctionnement du trafic aérien doivent être pris en compte tout en ajoutant les nouveaux concepts pour améliorer la fluidité et les performances telles que définies dans SESAR. Cela passe par la définition (calcul) de trajectoires "optimales" que ce soit pour un avion isolé ou un ensemble d'avions.

Dans le cadre de ce projet de recherche, seules les évolutions envisagées sur la phase en-route seront étudiées. Les questions sur les perspectives d'évolution du système de gestion du trafic aérien provenant du milieu opérationnel peuvent être formulées de la façon suivante :

- Comment faire face à l'augmentation prévue du trafic pour augmenter la capacité tout en garantissant la sécurité ?
- Une meilleure prévisibilité des vols permettrait-elle de réduire les retards ? Si oui, comment l'améliorer ?
- Comment améliorer l'optimalité du trafic pour réduire les émissions polluantes et la consommation en carburant ?

Pour répondre à ces axes d'interrogations, les deux concepts étudiés sont la trajectoire 4D (définie au Chapitre 1 section 2.2.2) et le free-route (défini au Chapitre 1 section 2.2.2). La trajectoire 4D a pour but d'apporter une meilleure prévisibilité des vols et permettrait ainsi de faciliter le contrôle aérien et d'assurer la sécurité. Le free-route autoriserait les vols à suivre leur propre trajectoire définie suivant leur propre critère. Cette possibilité nécessite des nouvelles recherches sur la définition des trajectoires optimales. Le problème dans la mise en place du free-route réside dans la façon d'assurer la sécurité des vols. Au vu de la quantité de trafic au-dessus de l'Europe, environ 32 000 vols par jour, il est aujourd'hui impossible d'autoriser le free-route avec les moyens de contrôle actuels.

La mise en place simultanée de ces deux nouveaux concepts permet d'envisager à plus long terme le déploiement du free-route qui modifierait entièrement la gestion actuelle du trafic aérien. En gérant des trajectoires 4D, il sera alors plus facile pour le contrôleur de prévoir et visualiser le trafic futur et ainsi anticiper en amont les conflits potentiels. De nouveaux outils sont aussi en étude pour diminuer le nombre de conflits, aider le contrôleur à les détecter et à les résoudre.

Pour cette thèse, nous nous plaçons dans la situation où le free-route est mis en place. À partir de là, les questions d'optimisation des trajectoires peuvent (et doivent) être étudiées. Pour l'instant, la route directe est souvent considérée comme la route optimale. Cependant, celle-ci est bien minimale en terme de distance, mais pas forcément en terme de consommation, de temps de vol, ou encore d'émissions polluantes... En prenant en compte le vent, pour un régime moteur équivalent, la trajectoire minimale en temps n'est pas forcément la trajectoire la plus courte. L'augmentation de la distance peut être compensée par une vitesse par rapport au sol plus élevée grâce à des vents favorables.

Une première étape de cette thèse est de mettre en place une méthode pour planifier les trajectoires optimales en terme de temps de vol. Pour un régime moteur constant, la consommation en carburant dépendant principalement du temps de vol, la minimisation de la durée permet de diminuer la consommation et donc aussi, les émissions polluantes.

La deuxième étape de cette thèse concerne la structure du trafic. Les trajectoires planifiées doivent aussi permettre un bon écoulement du trafic, sans zone très chargée où les risques de conflits sont plus importants. Le terme de congestion sera utilisé pour définir ces zones où le contrôle du trafic est difficile. Il est difficile de définir et de mesurer ces zones de congestion. Nous verrons, d'ailleurs, que dans cette étude, la mesure prise ne représente pas le mieux la réalité, mais elle est actuellement utilisée pour l'espace aérien européen.

**Pour résumer, l'objectif de cette recherche est de développer des méthodes capables de planifier des trajectoires optimales en tenant compte des conditions météorologiques tout en gardant un trafic fluide et efficace qui puisse être géré en assurant la sécurité.** Nous nous plaçons donc dans le cadre de la planification pré-tactique présentée au Chapitre 1, Section 1.3.3. Cette phase comprend les six jours avant le vol. Le but est d'organiser la journée de trafic en minimisant les coûts et les retards.

La période de cette phase de planification permet d'avoir des prévisions météorologiques assez fiables. Dans le cadre de notre étude, nous considérerons que les données de prévisions météorologiques sont disponibles et exactes. Elles sont composées des données de vent et de la description des zones de mauvaises conditions météorologiques. Nous chercherons donc à calculer les trajectoires optimales en tenant compte du vent pour minimiser le temps de parcours et la consommation en carburant. L'évitement des mauvaises conditions météorologiques interviendra pour assurer la sécurité du vol.

Les solutions obtenues tiennent compte de l'état du trafic qui doit rester gérable. Nous ne nous intéresserons pas à planifier des trajectoires sans conflits, mais à réduire les zones où le risque de conflit est important, c'est-à-dire lorsque le trafic est congestionné, très dense et non structuré. Ce choix a été fait par l'impossibilité de garantir le suivi exact de la planification faite plusieurs jours en avance, même avec une planification de trajectoires 4D. La planification a besoin d'être réajustée suite aux aléas et incertitudes rencontrées. La planification effectuée précédemment devient alors obsolète. Est-il alors intéressant de planifier de manière optimale un évitement de conflit plusieurs jours en avance qui n'aura peut-être plus lieu d'être et qui remet en cause l'optimalité de la solution ? Une des options serait de s'intéresser à une optimisation robuste qui serait moins sujette aux aléas et incertitudes. Pour cela, on parlera de probabilité d'évitement des conflits.

Ici, nous nous sommes concentrés sur l'optimisation du trafic d'un point de vue plus macroscopique. Nous supposerons qu'en réduisant les zones fortement encombrées lors de l'optimisation (celle-ci présentant une plus forte probabilité de conflits), le risque que la modification d'une trajectoire altère fortement l'écoulement du trafic est plus faible. La solution obtenue est ainsi moins sujette aux incertitudes. Une modification d'une trajectoire dans une zone moins dense entraîne moins de conséquences sur l'état global du trafic puisque cette trajectoire interfère avec moins de trajectoires.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, cette étude se concentre sur la phase En-Route des vols et plus particulièrement sur la phase de croisière entre le TOC et le TOD (cf Chapitre 1 section 1.1 pour un rappel des différentes phases de vol). Durant cette phase, les avions volent à des niveaux de vol constants appelés niveaux de vol de croisière. Ceux-ci sont attribués suivant les règles de la navigation aérienne (cf Chapitre 1 section 1.2.2 et les paramètres de vol de l'avion (le type d'avion, la masse de l'avion, la vitesse ...) de manière à garantir la sécurité et à optimiser la consommation de l'avion. Pour chaque type d'avion, les constructeurs évaluent la vitesse optimale de l'avion pour chaque niveau de vol et la consommation correspondante. Dans la suite de ces travaux, nous nous baserons

sur ces données. Nous supposerons que l'avion vole à sa vitesse optimale durant toute sa phase de croisière et à un niveau de vol donné. Pour les vols moyen et long courrier dont la phase de croisière est assez longue, les niveaux de vol sont modifiés au cours du vol ; on parle de vol en palier. Nous ne nous intéresserons pas ici à ces changements de niveau de vol. En résumé, en choisissant un niveau de vol, la planification de la trajectoire est une planification plane en deux dimensions en fixant la vitesse de l'avion. La seule variable du problème est la direction que l'avion va suivre. Le fait de travailler à niveau de vol donné et constant est une limitation importante qui devra être levée plus tard. Nous donnerons, d'ailleurs, des axes de modifications pour la prise en compte du changement de niveau de vol. Nous travaillons, donc, dans cette thèse, non pas avec des trajectoires 4D (3D + temps) mais avec des trajectoires 3D (2D + temps).

Le problème à résoudre est complexe de par le respect de contraintes spécifiques à l'aéronautique et du nombre important de vols à traiter (dans la phase pré-tactique, le traitement s'effectue sur un sous ensemble des 32 000 vols journalier en Europe). Un exemple des contraintes aéronautiques essentielles concerne la vitesse de l'avion. Pour voler, l'avion doit rester dans un intervalle de vitesse spécifique.

Pour y répondre, nous chercherons une méthode mathématique permettant de traiter un nombre de variables important et permettant de satisfaire les contraintes. L'existence et la preuve de l'optimalité d'une solution sont aussi des points importants. Par contre, le temps de calcul n'est pas un élément essentiel puisque nous ne travaillons pas en temps réel. Mais celui-ci doit rester acceptable.

Les chapitres suivants de ce manuscrit sont consacrés à la présentation des résultats obtenus pour répondre au problème de la planification du trafic aérien. Le chapitre 2 présente différentes méthodes pour planifier des trajectoires avec les avantages et inconvénients de chacune d'elles. À partir de cet état de l'art, nous nous sommes intéressés particulièrement aux méthodes de propagation d'onde que nous appliquons au contexte aérien dans le chapitre 3. Le chapitre 4 présente les résultats obtenus pour la planification des trajectoires en tenant compte des conditions météorologiques. Les chapitres 5 et 6 concernent l'optimisation du trafic.

# Chapitre 2

# Différentes méthodes de planification de trajectoires

*Ce chapitre introduit l'état de l'art des principaux travaux effectués dans le cadre de la planification de trajectoires.*
*La première partie s'intéresse uniquement aux méthodes déjà développées pour la planification d'une seule trajectoire.*
*La planification globale, donc en tenant compte des interactions entre les trajectoires, est présentée dans la seconde partie.*

Les méthodes présentées dans la partie suivante concernent uniquement la planification d'une trajectoire.

# 1 Planification d'une trajectoire

Le problème de planification de trajectoire a été très étudié au début de la robotique dans les années 1980. Plusieurs approches ont été envisagées et expérimentées, celles-ci ont été bien résumées dans plusieurs ouvrages dont [Bertsekas 1995], [LaValle 2006], [Soulignac 2009], [Sislak 2013]. Ces problèmes peuvent être classés en trois sous-catégories suivant leur ordre de complexité.

La première catégorie à avoir été étudiée est la **planification de chemin**. Celui-ci consiste à trouver un chemin continu et fini, entièrement contenu dans un espace et reliant un point A à un point B. Cet espace peut contenir des obstacles statiques connus, le chemin doit alors contourner ces obstacles. Il n'y a pas de notion temporelle.

Une deuxième catégorie, plus complexe, traite de la **planification de trajectoire**. Le but est le même que pour la planification de chemin excepté que maintenant la notion temporelle est ajoutée. À chaque point du chemin est associé un temps.

Le dernier problème étudié est le cas de la **planification d'une trajectoire en présence de courants**. C'est ce dernier cas qui nous intéresse particulièrement pour la planification d'une trajectoire aérienne. Le but étant le même que précédemment, c'est-à-dire de trouver un chemin entre un point A et B tout en tenant compte des obstacles statiques ou dynamiques et d'un champ de force (rôle que jouera pour nous le vent).

L'adaptation des algorithmes développés pour les problèmes précédents (planification de chemin et de trajectoire) n'est pas évidente pour prendre en compte les courants. C'est pourquoi seulement une petite partie des algorithmes utilisés a été étendue à la présence de courant. Nous verrons brièvement les techniques les plus connues et utilisées pour la planification de trajectoire et leur extension éventuelle à la présence de courant. Nous nous intéressons ici uniquement aux méthodes de planification spatiale de la trajectoire et non au contrôle de la vitesse le long de celle-ci. Ce choix a été fait par rapport au contexte aéronautique dans lequel nous travaillons ; les avions volant de préférence à vitesse constante pendant leur phase de croisière (cf Chapitre 1).

En raison du nombre important de méthodes traitant du problème de planification d'une trajectoire, nous avons décidé de les classer ici suivant la façon d'aborder la résolution du problème. Nous ne présenterons pas toutes les méthodes disponibles, mais le principe général des plus communes.

La première approche consiste à **représenter la trajectoire recherchée sur une base de fonctions** afin de diminuer le nombre de variables décrivant celle-ci et donc la dimension du problème. Cette représentation de la solution permet ensuite de travailler uniquement à partir d'un nombre restreint de variables. Ces méthodes fixent alors la structure de la trajectoire recherchée avant même la recherche de celle-ci. Ces méthodes sont très efficaces, car elles permettent de diminuer fortement le nombre de variables.

La deuxième concerne les méthodes qui **discrétisent l'espace de recherche** et recherchent ensuite une solution sur le réseau obtenu. Ces méthodes construisent au fur et à mesure la trajectoire en parcourant le réseau.

La troisième approche est la méthode des **champs de potentiels**. Elle consiste à calculer sur tout l'espace un champ de potentiel c'est-à-dire une carte de valeurs scalaires en fonction de l'environnement. La trajectoire est ensuite planifiée à partir de ce champ. Ces méthodes fournissent en général des trajectoires admissibles, mais ne cherchent pas à optimiser la trajectoire.

La dernière consiste à calculer la **commande optimale** à tout instant pour minimiser une fonction coût. La trajectoire est alors définie à partir de la commande optimale définie en tout temps. Toutes ces méthodes de contrôle optimal sont des méthodes d'optimisation.

Pour analyser et classer ces différentes méthodes, nous nous sommes intéressés aux critères suivants :

- **Déterministe / Non déterministe.** Les méthodes déterministes permettent de retrouver le même chemin à chaque exécution, sous réserve d'avoir des conditions initiales équivalentes. Les méthodes déterministes permettent de garantir de trouver une solution, ou d'indiquer s'il n'y a pas de solution. Les méthodes non déterministes prennent en compte un paramètre aléatoire, en conséquence, même avec des conditions initiales similaires, la solution calculée à chaque exécution n'est pas nécessairement identique. Par contre, elles sont souvent adaptées à des problèmes de grandes dimensions.
- **Discrète / Continue.** Les méthodes discrètes cherchent une solution dans un réseau, elles ne parcourent pas tout l'espace, contrairement aux méthodes continues qui travaillent sur l'espace continu. Une méthode discrète ne trouvera peut-être pas de solution dans son espace discrétisé alors qu'il en existe peut-être une dans le domaine complet.
- **Optimale / Non optimale.** Toutes les méthodes de planification de trajectoire ne cherchent pas forcément à obtenir une solution optimale par rapport à une fonction objectif définie pour le problème rencontré. Certaines cherchent uniquement une trajectoire admissible. Dans certains cas, ce problème est déjà très complexe. Dans les méthodes de planification de trajectoire optimale, nous pouvons différencier les méthodes dont la solution est optimale et celles dont la solution est sous-optimale. Une solution est dite optimale si la solution obtenue est de coût minimal dans son espace de travail. Pour les méthodes discrètes, celles-ci peuvent être optimales puisqu'elles trouvent une solution optimale sur leur réseau, mais cette solution n'est pas forcément la meilleure sur tout le domaine. Les solutions sous-optimales sont les solutions où la méthode cherche à optimiser la fonction coût, mais sans aucune garantie d'obtenir l'optimum global. La solution obtenue est souvent un optimum local.
- **Extension anisotrope.** Le terme anisotrope est utilisé lorsque les caractéristiques du domaine ne dépendent pas uniquement de la position, mais aussi de la direction.

La prise en compte de courants comme le vent rend l'espace de travail anisotrope.

## 1.1 Représentation de la trajectoire sur une base de fonctions

Cette première approche de résolution se base sur le principe général suivant : décomposer une trajectoire (composée d'une infinité de points) sur une base de fonctions et travailler ensuite à partir de cette représentation pour l'optimisation. L'objectif est de diminuer le nombre de variables afin de réduire la dimension du problème.

Le choix de la représentation et le nombre de variables choisies sont des paramètres qui ont un fort impact sur la qualité de la solution obtenue.Le nombre de variables est alors fixé suivant le problème par le choix de la représentation. Il faut trouver un compromis entre la dimension du problème qui doit rester la plus faible possible pour pouvoir résoudre le problème de manière efficace et le nombre de variables choisies qui permet d'approcher au plus près la trajectoire recherchée. En connaissant la forme de la trajectoire recherchée, il est plus facile de choisir un mode de représentation adapté qui permet d'approcher au mieux la trajectoire avec le moins de variables.

La phase d'optimisation se déroule ensuite sur les variables de la représentation de la trajectoire. On associe une fonction coût à la solution suivant le problème. Dans le cas de la recherche d'une trajectoire optimale en temps, le coût correspond au temps de parcours de la trajectoire. On se ramène alors à un problème d'optimisation classique avec un nombre fini de variables. Le choix de l'algorithme d'optimisation utilisé va être fonction du nombre de variables, du type (sont-elles continues ou discrètes), du nombre de contraintes. Tous ces paramètres dépendent du choix de la représentation de la trajectoire.

La résolution du problème d'optimisation nous donne alors la solution optimale, mais dans l'espace vectoriel (espace de représentation de la trajectoire) choisi où l'on cherche la solution. Ainsi, le choix d'une "bonne" base de l'espace vectoriel est primordial et influe directement sur la qualité de la solution. Si la base de représentation de la trajectoire est mal choisie, aucun algorithme d'optimisation aussi bon soit-il nous donnera une solution de qualité.

Nous verrons ici les représentations les plus utilisées pour approcher une trajectoire et les méthodes d'optimisation associées.

### *1.1.1 Exemple de décomposition*

Les décompositions peuvent être très simples, par exemple utiliser une décomposition linéaire par morceaux pour représenter la trajectoire. Le problème se réduit à alors à chercher uniquement la position des points à des temps fixés. Par exemple, dans les travaux [Gao 2005] et [Chaimatanan 2013], la trajectoire est construite à partir d'un nombre fixé de points, ces points étant reliés entre eux par des lignes droites.

Les limites de cette approche apparaîssent lorsque l'on souhaite obtenir une trajectoire lisse ($C^2$). Il existe alors d'autres approches mieux adaptées pour ce type de trajectoire. La plus utilisée est la méthode des B-splines qui permet de définir une courbe à l'aide

d'un nombre très limité de variables. Une courbe B-spline peut s'écrire de la manière suivante :

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sigma_x(s) = \sum_{k=0}^{n+1} X_k B_k(s) \\ \sigma_y(s) = \sum_{k=0}^{n+1} Y_k B_k(s) \end{cases} \qquad \text{avec } s \in [1, n]$$

où $s$ est le paramètre de la courbe B-spline, $B_k$ une fonction de la base des fonctions B-spline, $(X_k, Y_k)_{k=0,\dots,n+1}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ appelé points de contrôle.

La courbe est entièrement déterminée à partir des points de contrôles et des fonctions de base B-spline. Pour les splines cubiques, la restriction de $B_k$ à différents intervalles est un polynôme de degré 3, l'ensemble constituant une fonction $\mathcal{C}^2$. Par exemple, la fonction de base $B_0$, appelée spline cubique naturelle d'interpolation, est illustrée sur la figure 2.1. À partir de ces fonctions de base, la courbe représentée sur la figure 2.2 est uniquement définie par la position des quatre points de contrôle. La représentation à l'aide de B-spline permet donc de décrire une trajectoire en déterminant uniquement la position des points de contrôle. De plus comme l'espace vectoriel des splines est dense dans $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, ... (selon le degré de la spline), on peut ainsi approcher n'importe quelle trajectoire.

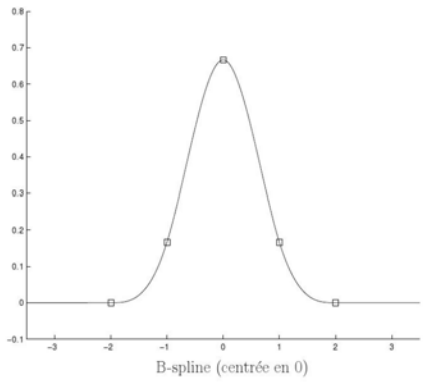



FIGURE 2.1 – *Fonction de base $B_0$*

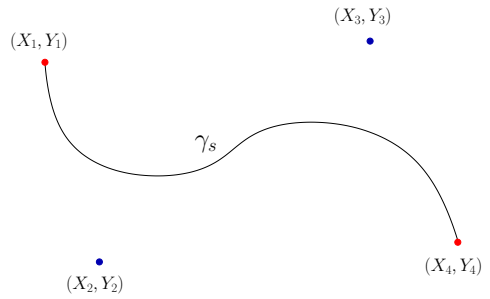



FIGURE 2.2 – *Exemple d'une courbe B-spline $\gamma$ paramétrée par $s$ définie par 4 points de contrôle*

Dans [Peyronne 2012], la trajectoire est définie uniquement à partir de trois points de contrôle (cf figure 2.3). La trajectoire est obtenue en optimisant la position du point de contrôle intermédiaire. Le nombre de points de contrôle choisis est à définir suivant le problème et la forme de la trajectoire souhaitée. On peut remarquer que l'augmentation du nombre de points de contrôle permet une meilleure approximation de la trajectoire recherchée. Cependant cela augmente aussi le nombre de variables et donc la dimension du problème.

Une autre décomposition de trajectoire est utilisée dans [Godbole 2000] sur une base d'ondelette. Mais celle-ci est plutôt utilisée pour de la replanification de trajectoire en raffinant l'espace de décomposition.

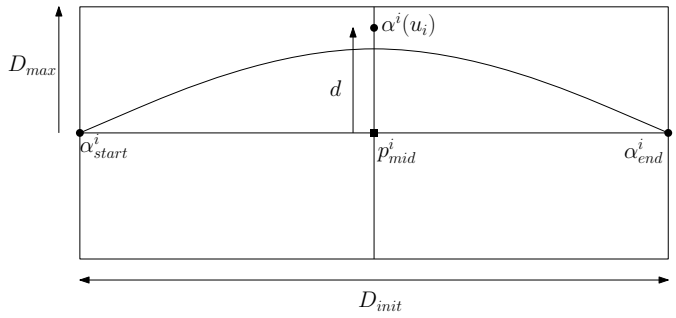



FIGURE 2.3 – *Modélisation d'une trajectoire à partir de trois points de contrôle* $\alpha^i(u_i)$[Peyronne 2012]

### 1.1.2 Méthodes d'optimisation

Maintenant que la trajectoire est définie à partir d'un nombre fini de variables, il faut trouver un algorithme d'optimisation pour définir la valeur optimale de ces variables. Pour les problèmes de planification de trajectoire par optimisation, les algorithmes métaheuristiques sont souvent utilisés, car ils permettent de rechercher l'optimum global pour des problèmes de grandes dimensions tout en intégrant facilement les contraintes et d'être adaptables à différents problèmes.

**Les métaheuristiques** Les métaheuristiques sont des algorithmes de recherche, leurs principales caractéristiques sont d'être stochastiques (basées sur un processus aléatoire) et génériques (c'est-à-dire conçues pour pouvoir être appliquées sur une large gamme de problèmes différents, sans nécessiter de changements profonds). Ils sont très adaptés pour des problèmes difficiles de grandes dimensions appelés NP-Hard.

***Les algorithmes génétiques*** Les algorithmes génétiques s'inspirent de la théorie de Darwin sur l'évolution des espèces selon laquelle les gènes conservés au sein d'une population donnée sont ceux qui sont les mieux adaptés à leur environnement. Ce principe est appelé la sélection naturelle.

Leur but est d'obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation, lorsqu'il n'existe pas de méthode exacte. Pour déterminer une approximation d'une solution optimale, les algorithmes génétiques utilisent la notion de sélection naturelle et l'appliquent à une population de solutions potentielles au problème donné. Les opérateurs de croisement et de mutation permettent de faire évoluer cette population au cours des générations (voir [Davis 1991] pour plus d'informations sur les algorithmes génétiques).

Dans le contexte de la planification de trajectoire, un gène représente le plus souvent un point $(x_i, y_i)$ de l'espace géographique et un individu un chemin reliant un nombre variable de gènes par des segments de droite. Un individu est noté : $I = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$.

Le problème est de savoir comment attribuer une note à chaque individu selon la qualité des solutions. Plusieurs travaux ont déjà été effectués pour générer des trajectoires

optimales sans collision. La qualité d'un individu doit tenir compte de la distance au but et de l'évitement des obstacles. Les plus adaptés seront ceux dont la longueur au but est minimale tout en évitant les obstacles. [Gao 2005] ont proposé de noter l'adaptation de chaque individu $a(I)$ de la façon suivante :

$$a(I) = \frac{1}{\alpha l_{\text{totale}} + \beta d_{\text{but}} + \gamma n_{\text{inter}}} \tag{2.1}$$

avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des coefficients de pondération, $l_{\text{totale}}$ la longueur totale du chemin, $d_{\text{but}}$ la distance Euclidienne au but et $n_{\text{inter}}$ le nombre de segments entrant en collision avec des obstacles.

Les algorithmes génétiques sont très appréciés pour leur flexibilité. En effet, ils ne tiennent compte de l'environnement que par le concept d'adaptation. L'adaptation d'un individu est liée à la qualité de la solution obtenue. Il suffit de modifier la façon de calculer l'adaptation d'un individu pour prendre en compte différentes contraintes.

Plusieurs travaux ont utilisé les algorithmes génétiques pour planifier des trajectoires. On peut citer les travaux [Sugihara 1997] qui permettent de générer des trajectoires en trois dimensions pour des robots sous-marins en évitant des obstacles. Les obstacles peuvent être impénétrables ou potentiellement traversables avec une augmentation du coût de la solution. La trajectoire est modélisée simplement par une succession de points dont le nombre est déterminé en amont.

Dans [Nikolos 2003], les algorithmes génétiques utilisent une modélisation de la trajectoire différente. La trajectoire est représentée à l'aide des B-splines. L'algorithme est alors utilisé pour placer de manière optimale les points de contrôle permettant de définir la trajectoire. Cette approche est aussi utilisée dans [Peyronne 2012].

L'extension de ces algorithmes pour prendre en compte des courants (ici le vent) est assez facile avec les algorithmes génétiques comme le montrent les travaux suivants [Rubio 2003]. La prise en compte du vent se fait directement dans l'évaluation de la solution. Ici, la trajectoire est modélisée par une succession de segments.

En règle générale, les algorithmes génétiques sont utilisés dans les problèmes aux caractéristiques suivantes :

- ✓ les problèmes difficiles (NP-Hard) ;
- ✓ le temps de calcul de la qualité d'un individu (adaptation) est relativement court puisque celle-ci sera évaluée de nombreuses fois ;
- ✓ un nombre de solutions important ; plus l'espace de travail est grand, plus les algorithmes génétiques sont intéressants. En effet, pour des problèmes dont la taille est faible, il est plus intéressant d'utiliser des algorithmes qui parcourent de façon exhaustive l'espace de travail afin d'obtenir la solution optimale ;
- ✓ lorsque l'on souhaite une bonne solution au problème en une durée déterminée plutôt que la solution optimale en un temps indéfinie et relativement long.

Les algorithmes génétiques connaissent des limites :

- ✕ l'absence de démonstration formelle pour prouver la convergence vers la solution optimale ; le plus souvent la solution obtenue est une bonne solution, mais non l'optimum.
- ✕ le choix de la valeur des paramètres comme la taille de la population ou le taux de mutation est souvent difficile à déterminer. Or le succès de l'évolution en dépend et plusieurs essais sont nécessaires pour ajuster ceux-ci. Ces divers paramètres à ajuster limite l'efficacité de l'algorithme puisqu'à chaque problème cet ajustement est nécessaire et permet d'obtenir une solution ;
- ✕ la présence d'optima locaux ; lorsqu'une population évolue, il se peut que certains individus qui à un instant occupent une place importante au sein de cette population deviennent majoritaires. À ce moment, il se peut que la population converge vers cet individu et s'écarte ainsi d'individus plus intéressants, mais trop éloignés de l'individu vers lequel on converge. Pour résoudre ce problème, il existe différentes méthodes comme l'ajout de quelques individus générés aléatoirement à chaque génération, des méthodes de sélection différentes de la méthode classique ...

***Le Recuit Simulé*** Le Recuit Simulé est un algorithme d'optimisation mise au point en 1983 [Kirkpatrick 1983], puis en 1985 [Černy 1985]. Sa popularité vient de sa capacité à éviter de rester bloqué en des minima locaux et de s'approcher de l'optimum global pour des problèmes difficiles de grandes dimensions.

Le Recuit Simulé s'inspire d'un processus utilisé en métallurgie où l'état du matériau est modifié en contrôlant la température. Le processus consiste à chauffer le matériau puis à le refroidir lentement pour atteindre un état d'équilibre minimisant l'énergie du matériau. La fonction à minimiser est analogue à l'énergie interne du matériau. À chaque étape, l'algorithme considère un état voisin $s_{new}$ de l'état actuel $s_{curr}$, et décide par rapport à une probabilité si le système se déplace vers l'état $s_{new}$ ou s'il reste dans l'état $s_{curr}$. Les probabilités sont adaptées pour amener le système à se déplacer vers des états de plus faible énergie. Typiquement, les itérations sont répétées jusqu'à que le système atteigne un état qui est suffisamment bon, ou que le nombre maximum d'itérations est atteint.

L'algorithme de Recuit Simulé est utilisé dans [Chaimatanan 2013] pour planifier des trajectoires. Celles-ci sont représentées par une succession de points à intervalle de temps régulier. le nombre de points représentant la trajectoire étant défini par l'utilisateur. L'objectif de l'algorithme est de trouver la position optimale des points.

Il existe un grand nombre d'algorithmes métaheuristiques, dont la liste ci-après n'est pas exhaustive, qui pourraient certainement être adaptés au problème de planification de trajectoires. On peut citer comme algorithmes : les essaims particuliers, les colonies de fourmis, ....

Ces algorithmes ont l'avantage d'être très facilement adaptables à un grand nombre de problèmes et d'être utilisables pour des problèmes de grandes dimensions. Cependant, ils ne permettent pas de garantir l'optimalité des solutions obtenues.

En conclusion, nous n'avons pas utilisé d'algorithmes métaheuristiques pour la planification d'une trajectoire, car en tenant compte du vent, la réduction de dimension pour représenter la trajectoire est plus délicate. Pour arriver à représenter au plus près la trajectoire, il nous faudrait un nombre important de variables. Le choix de l'espace des solutions est primordial et influe directement sur la solution obtenue. Néanmoins l'avantage de ces méthodes est la possibilité d'intégrer facilement le vent et les contraintes.

Nous verrons, par la suite, que pour planifier une trajectoire, nous avons utilisé un algorithme déterministe exact qui a été ensuite adapté en latitude, longitude.

## 1.2 Discrétisation de l'espace de recherche

Une des approches possibles pour résoudre le problème de planification d'une trajectoire est de discrétiser l'espace de recherche sous la forme d'un réseau et ensuite de rechercher une solution dans ce réseau à l'aide d'algorithmes de parcours de graphes.

### *1.2.1 Les méthodes déterministes*

Une première catégorie de méthodes consiste à discrétiser de manière fixe et connue l'espace de recherche. On parlera de méthodes déterministes puisque le réseau est fixé et la solution obtenue sera toujours identique pour des mêmes conditions initiales.

Une des difficultés d'utilisation de ces algorithmes d'échantillonnage avec grille fixe est de trouver un compromis entre la précision de la discrétisation et la vitesse de résolution. Plus la grille est fine et plus la solution est améliorée, mais le temps de calcul est alors souvent fortement augmenté. Pour des problèmes de grande dimension, il est souvent impossible de discrétiser tout l'espace. La mémoire demandée et le temps de calcul sont trop importants.

Un autre inconvénient vient de la limitation de la solution obtenue au réseau ainsi défini. Avec ces algorithmes, il est souvent possible de prouver l'optimalité de la solution, mais sur le réseau et non sur tout l'espace. Si la solution recherchée ne doit pas se limiter au réseau alors ces algorithmes ne sont pas les mieux adaptés.

Nous détaillerons ici uniquement les algorithmes de parcours de graphe les plus connus et les plus utilisés.

***Algorithme de Dijkstra*** La méthode de Dijkstra [Dijkstra 1959] est un algorithme classique de recherche de plus court chemin dans un réseau dont les coûts pour se déplacer d'un nœud à un autre sont toujours positifs. Elle a été introduite par E. W. Dijkstra en 1959.

Pour un nœud de départ fixé, l'algorithme trouve le chemin avec le plus petit coût entre ce nœud et tous les autres nœuds du domaine. L'algorithme peut aussi être utilisé pour trouver le plus court chemin entre le nœud initial et un nœud final en stoppant l'algorithme dès que le plus court chemin entre ces deux points a été calculé. La notion de plus court chemin est définie en fonction du problème et de la fonction coût utilisée. Par exemple, dans notre cas, le chemin le plus court correspond au chemin dont le temps est

minimal, le coût entre deux nœuds corresponds alors au temps nécessaire pour parcourir le chemin entre les deux nœuds.

L'algorithme original de Dijkstra est d'une complexité en $O(N^2)$ avec $N$ le nombre de nœuds du réseau ; il a été depuis amélioré en utilisant des algorithmes efficaces de tri. L'algorithme de Dijkstra, développé par [Tsitsiklis 1995], est en $O(Nlog(N))$ c'est-à-dire qu'il s'exécute en un temps polynomial.

***Algorithme A**** Aujourd'hui, l'algorithme $A^*$ est un des plus utilisés pour la recherche de chemin dans un graphe entre un nœud initial et un nœud final. Il a été introduit par Hart, Nilsson et Raphael en 1968 [Hart 1968]. Il est basé sur une évaluation heuristique à chaque nœud pour estimer le meilleur chemin qui y passe. Le parcours du graphe s'effectue en fonction de cette évaluation heuristique : on retient le noeud où l'évaluation est la plus petite. Cette technique permet de guider la recherche dans le graphe vers le nœud final et ainsi de limiter le nombre de nœuds évalués. Le parcours des nœuds s'effectue suivant l'algorithme de Branch and Bound [Land 1960]. On parcourt les nœuds suivant leur évaluation heuristique du plus faible au plus élevé.

L'algorithme $A^*$ commence la recherche sur un nœud choisi. Il applique à ce nœud un coût (habituellement 0 pour le nœud initial). L'algorithme $A^*$ estime ensuite la distance qui sépare ce nœud du but à atteindre. La somme du coût et de l'évaluation représente le coût heuristique assigné au chemin menant à ce nœud.

$$\textbf{Coût heuristique :} \qquad f(x) = g(x) + h(x) \tag{2.2}$$

avec $g(x)$ le coût du point initial au point courant $x$ et $h(x)$ l'évaluation heuristique de la distance du point $x$ au point d'arrivée.

Le choix de l'heuristique est très important et détermine l'efficacité de l'algorithme. Une fonction heuristique est dite admissible si elle ne surestime jamais le coût afin d'atteindre le but (elle le sous-estime). Le choix d'une heuristique admissible garantie de toujours trouver le chemin le plus court.

Cette méthode a été utilisée dans plusieurs études sur la planification de chemins pour des véhicules aquatiques autonomes en tenant compte des courants marins [Garau 2005]. Pour implémenter l'algorithme, ils ont utilisé la fonction heuristique suivante :

$$\textbf{Fonction heuristique} = \frac{\text{Distance entre le point courant et le point d'arrivée}}{\text{Vitesse maximale possible}} \tag{2.3}$$

La vitesse maximale possible correspond ici à la somme de la vitesse maximale du courant et de la vitesse du véhicule.

Ce choix assure que le coût heuristique est toujours plus bas que le coût réel pour atteindre le but. La solution est alors garantie d'être optimale. Cependant, cette fonction n'est pas optimale : si le coût de l'heuristique sélectionnée est largement plus faible que le coût réel (i.e trop optimiste) l'efficacité de l'algorithme au niveau des coûts de calcul est

dégradée puisqu'il va explorer plus de chemins que nécessaire. Un travail important peut être nécessaire pour trouver une heuristique efficace. Notamment, la recherche d'une heuristique consistante peut s'avérer particulièrement ardue, voire impossible pour certains problèmes.

L'algorithme D* pour Dynamique A* [Stentz 1993] a été développé pour étendre l'algorithme A* aux environnements non connus et dynamiques. L'objectif est de minimiser le nombre de nœuds explorés en cas de replanification dynamique. Il détermine de façon répétée un plus court chemin à partir de la position courante du mobile jusqu'au point d'arrivée pendant que le mobile se déplace le long du trajet. L'algorithme est capable de replanifier la trajectoire plus vite que de replanifier à partir de zéro, car il modifie les résultats de la précédente recherche de manière locale.

D'autres algorithmes ont été développés à partir de l'algorithme D* pour les environnements dynamiques, on peut citer parmi les plus connus l'algorithme D* Lite [Koenig 2005] ou encore l'algorithme Field D* [Ferguson 2007]. Toutes ces techniques ont en commun d'utiliser les informations des recherches précédentes pour accélérer la recherche courante. Toutefois, celles-ci sortent du cadre général de cette thèse (la planification prévisionnelle en amont et non en temps réel), elles ne seront donc pas détaillées ici.

Dans [Dougui 2011], une adaptation de l'algorithme A* a été développée pour planifier des trajectoires aériennes optimales en fonction de la congestion du trafic aérien. Au lieu de déterminer le graphe sur tout l'espace au début de la recherche, celui-ci est construit au fur et à mesure par analogie avec la propagation de la lumière et en utilisant un algorithme de Branch and Bound.

La construction de l'arbre est inspirée par la propagation de la lumière. Chaque branche de l'arbre est construite de façon similaire à la propagation d'un rayon lumineux. Ces rayons obéissent à la règle suivante : dans un milieu homogène et isotrope (ou dans le vide), les rayons lumineux sont des portions de droites. Les milieux traversés sont caractérisés par leur indice de réfraction. La vitesse $v$ de la lumière est différente suivant les milieux et est donnée par $v = \frac{c}{n}$, avec $c$ la vitesse de la lumière dans le vide et $n$ l'indice du milieu ($n \geqslant 1$). Ainsi, la vitesse de l'avion est calculée de façon similaire en fonction des indices des milieux traversés. Les indices sont définis en fonction de la congestion du trafic. Ces indices permettent de définir des obstacles "mous", c'est-à-dire des zones à éviter, mais non interdites et avec des degrés d'importance différents. Plus l'espace sera congestionné et plus l'indice du milieu sera grand et la vitesse faible. La trajectoire traversant cette zone ne pourra donc pas être la trajectoire optimale.

La construction de l'arbre est caractérisée par des paramètres fixés par l'utilisateur qui sont : le pas de temps $dt$ entre chaque nœud et l'angle $d\gamma$ entre les différentes directions des rayons (cf figure 2.4). La longueur de chaque branche est différente et définie en fonction de l'indice du milieu comme illustré sur la figure 2.5. Le temps de parcours d'une branche étant fixé au départ, si la vitesse dans un milieu est plus faible, la longueur de la branche sera plus courte.

Le nœud courant de l'arbre à partir duquel l'arbre est étendu est choisi par l'algorithme

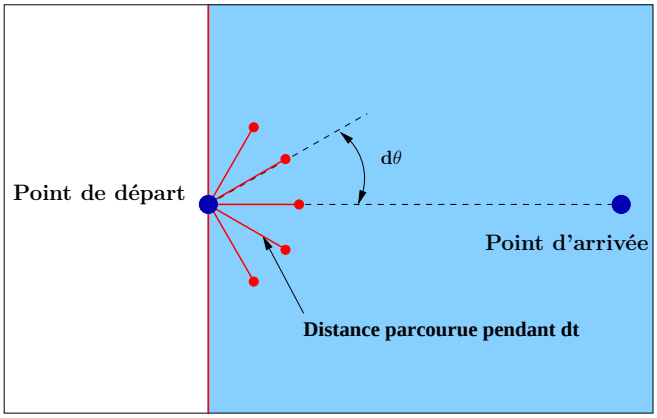



FIGURE 2.4 – *Construction des nœuds de l'arbre en fonction des paramètres fixés par l'utilisateur : le pas de temps entre chaque nœud dt et l'angle dγ entre les différentes directions des rayons*

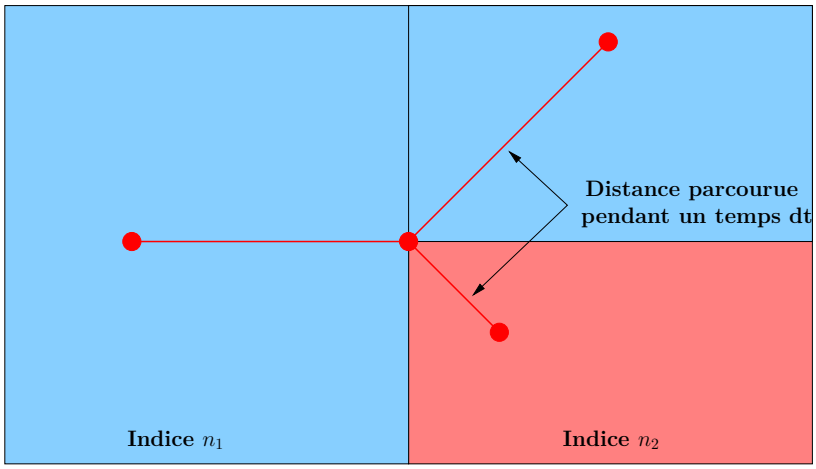



FIGURE 2.5 – *Construction des nœuds de l'arbre en fonction de la distance parcourue dans le milieu pendant un pas de temps dt. L'indice $n_2$ est plus élevé que l'indice $n_1$, la vitesse est donc plus faible.*

de Branch and Bound. Le nœud choisi est celui dont la borne inférieure est la plus faible. La borne inférieure utilisée est similaire à celle utilisée dans l'algorithme $A^*$ présenté précédemment (cf Eq. (2.2)). Elle correspond à la somme du temps requis (calculé) pour atteindre le nœud courant depuis l'origine et du temps restant (estimé) pour atteindre la destination depuis le nœud courant. Ces temps sont calculés en tenant compte de la valeur de l'indice rencontré. La fonction heuristique définissant le temps estimé dépend de deux termes “integralTime” et “maxSpeedTime”. Le premier “integralTime” est le temps nécessaire pour atteindre la destination en considérant l'indice de réfraction le long de la route directe. Le second terme, ”maxSpeedTime“ est le temps nécessaire pour atteindre la destination le long de la trajectoire avec la vitesse maximale.

En résumé, la borne inférieure correspond à une heuristique pour le calcul du temps de parcours minimal d'une trajectoire passant par ce nœud. L'heuristique utilisée ici n'est pas admissible et ne garantit pas forcément la solution optimale. L'algorithme parcourt l'arbre de recherche suivant l'évaluation heuristique du temps de parcours du plus faible au plus élevé. La trajectoire résultante sera constituée de la suite de nœuds et donc de la suite de segments qui relient ces nœuds depuis le point de départ jusqu'au point destination.

Afin de limiter le nombre de nœuds de l'arbre, les directions sont restreintes au demi-espace entre le nœud courant et le point de destination (cf figure 2.6). En effet, les opérations standardisées des avions ne permettent pas de voler en sens inverse de la destination, mis à part dans le voisinage des aéroports de départ et d'arrivée.

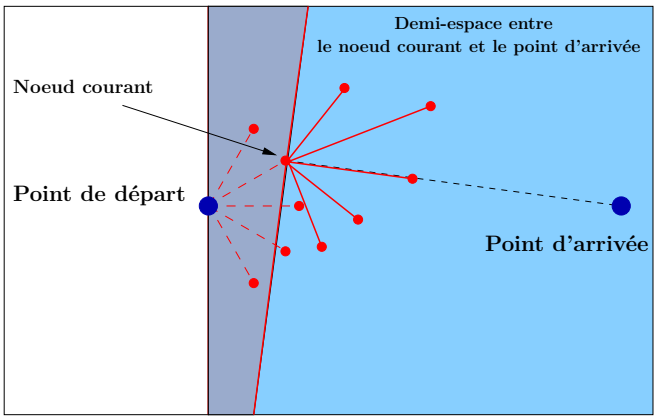



FIGURE 2.6 – *Extension de l'arbre à partir du nœud courant dans le demi-espace entre le nœud courant et le point d'arrivée.*

Un des problèmes rencontrés pour étendre cet algorithme à la présence du courant, ici le vent, est de trouver une heuristique admissible. De plus, dès lors que le vent est pris en compte, le milieu n'est plus isotrope. L'hypothèse de départ sur la propagation de la lumière n'est alors plus valide.

Nous avons vu jusqu'à maintenant des algorithmes ne faisant pas intervenir de paramètres aléatoires pour discrétiser l'espace de recherche. Pour des problèmes de grande dimension, il est quelques fois impossible de discrétiser tout l'espace pour des questions de mémoire et de temps de calcul. Pour remédier à cette difficulté, des algorithmes dits non déterministes ont été développés. Dans [LaValle 2004], les relations et différences entre des grilles déterministe et probabiliste sont étudiés.

### *1.2.2 Les méthodes non déterministes.*

Pour des problèmes de grandes dimensions, une deuxième catégorie de méthodes existe pour discrétiser l'espace : les **méthodes probabilistes**. Ces méthodes font intervenir un paramètre aléatoire dans la construction du graphe. Elles peuvent être subdivisées en

deux sous-catégories : les **méthodes d'échantillonnage** et les **méthodes de diffusion**. Les premières cherchent à créer une carte permettant de décrire l'environnement, puis de planifier différentes trajectoires sur la même carte. Les secondes effectuent une recherche aléatoire dans l'environnement, jusqu'à trouver le point d'arrivée. Pour plus d'informations sur ces méthodes probabilistes pour la construction de chemin, on pourra se référer à [Švestka 1998].

**Les méthodes d'échantillonnage :** Comme nous l'avons introduit précédemment, les méthodes d'échantillonnage échantillonnent le domaine du mobile qui doit être déplacé puis déterminent un chemin dans le réseau obtenu, celui-ci étant souvent appelé **RoadMap**. La plus utilisée des méthodes d'échantillonnage est la méthode appelée **PRM** (Probabilistic RoadMap), introduit dans [Siméon 2000].

Le principe de construction pour cette méthode se base sur deux étapes :

— une première phase d'apprentissage qui permet de discrétiser le domaine et d'obtenir une structure de graphe appelée **RoadMap**. On échantillonne aléatoirement le domaine et on essaye de connecter entre eux les différents états à l'aide d'une méthode locale. Cette dernière permet de connecter deux configurations quelconques, à condition qu'il n'y ait pas d'obstacles. La liaison la plus utilisée entre deux points tente simplement de relier les échantillons en ligne droite. Du fait de la présence d'obstacles, toutes les configurations ne pourront pas être connectées entre elles ;

— une deuxième phase de recherche qui parcourt le réseau précalculé. À partir de la **RoadMap** et d'un point initial A et d'un point final B quelconque, il est possible de connecter A et B grâce à des algorithmes de parcours de graphe.

Ce type de méthode est donc particulièrement efficace quand plusieurs recherches de chemin nécessitent d'être résolues pour le même domaine. C'est pourquoi on dit aussi que ces méthodes sont à requêtes multiples.

**Les méthodes de diffusion :** Les méthodes de diffusion se basent sur la construction d'arbres de recherche de manière incrémentale à partir d'un point initial et d'un point final. Contrairement aux méthodes d'échantillonnage, la construction des chemins se fait sans aucun cycle. Ces techniques ne cherchent donc pas à calculer toute la connexité dans le domaine, mais explorent seulement certaines de ces régions afin de résoudre le problème donné. C'est pourquoi elles sont aussi appelées méthodes à requête simple. Une des méthodes de diffusion les plus utilisées est la méthode **RRT** (Rapid Random Trees), introduite dans [LaValle 2006]. Une brève introduction à cette méthode est présentée ci-dessous.

L'échantillonnage aléatoire n'est plus utilisé ici pour discrétiser l'espace, mais directement pour construire l'arbre de recherche. Le principe général des RRT est le suivant : partant d'une configuration initiale, l'algorithme explore incrémentalement le domaine jusqu'à trouver un chemin connectant la configuration initiale à la configuration finale. Le processus de construction de l'arbre est relativement simple.

Étant donné un arbre $A$, celui-ci est construit de la manière suivante :

1. Un point q est tiré aléatoirement dans le domaine ;
2. Le nœud N appartenant à l'arbre $A$ le plus proche du point q (pour une métrique donnée) est sélectionné ;
3. Un nœud N' est placé sur la droite formée par les points N et q tel que $NN' = \epsilon$.
   — Si le chemin $NN'$ est valide, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de collision, alors le nœud N' est rajouté à l'arbre $A$ ;
   — Sinon on retourne en 1.

Une version bidirectionnelle des RRT existe également. Elle consiste à construire simultanément deux arbres : l'un partant du point initial et l'autre du point final en appliquant alternativement l'étape de construction à chacun des arbres. Quand les deux arbres sont assez proches, ceux-ci sont connectés s'il n'y a pas d'obstacles entre eux.

En résumé, grâce à une discrétisation aléatoire de l'espace, les méthodes probabilistes (méthodes d'échantillonnage et méthodes de diffusion) présentent les avantages suivants :

✓ Les méthodes sont peu sensibles aux dimensions de l'espace de recherche. Elles sont en effet très rapides puisque le domaine n'est pas exploré dans son intégralité. Elles sont particulièrement efficaces pour des espaces à grandes dimensions.

✓ Les méthodes d'échantillonnage sont particulièrement intéressantes pour des environnements statiques où l'on va effectuer plusieurs demandes différentes de chemins.

Cependant, ces méthodes présentent aussi les inconvénients suivants :

✗ Suivant la configuration de l'espace, l'exploration de celui-ci peut-être inefficace, c'est-à-dire pour des environnements très contraints, nous n'avons aucune garantie de trouver une solution même s'il en existe une. Ceci est surtout contraignant pour des espaces présentant des singularités, par exemple des couloirs étroits où il y a un risque important de ne pas trouver de solution.

✗ Ces méthodes ne permettent pas d'avoir une solution optimale, mais une bonne solution en un temps fixé.

## 1.3 Les champs de potentiel

L'idée générale de ces méthodes s'inspire de phénomènes physiques. On crée un champ de potentiel, c'est-à-dire une carte de valeurs scalaires, en fonction de l'environnement. La trajectoire est ensuite planifiée à partir de ce champ. Celui-ci peut traduire différents objectifs tels que l'évitement d'obstacles ou une direction de déplacement préférée. Pour créer ce champ de potentiel, le point d'arrivée est considéré comme un point attractif et les obstacles comme des points répulsifs, par exemple le potentiel des obstacles et des frontières peut-être mis à 1 et le potentiel du point d'arrivée à 0. On crée ainsi un champ de potentiel compris entre 0 et 1. Pour arriver à la destination, il suffit alors de suivre l'opposé du gradient du champ de potentiel pour arriver à la valeur minimale.

Les méthodes de champs de potentiels artificiels ont été développées dans [Krogh 1984] puis dans [Khatib 1986] pour la planification de chemins pour un robot mobile. Dans [Warren 1990], cette méthode a été adaptée pour planifier une trajectoire sûre en assurant l'évitement des obstacles pour des robots sous-marins. Pour plus de détails de l'utilisation des champs de potentiels pour planifier le déplacement de robots, on pourra se référer au livre suivant [Choset 2005].

Le principal inconvénient de cette méthode est l'existence, pour certaines configurations d'obstacles (relativement courantes) de minima locaux qui ne permettent pas de décider de la direction à prendre. Cette configuration arrive quand un potentiel faible est entouré de valeurs plus élevées, le gradient en ce point est nul, la descente de gradient reste alors bloquée en ce point. Pour éviter cet inconvénient, la notion de **fonction de navigation** a été introduite où le champ de potentiel est assuré de ne pas contenir de minima locaux.

**Les fonctions de navigation :** La fonction de navigation est un champ de potentiel particulier qui garantit l'absence de minima locaux. Par contre, elle est souvent difficile à calculer et n'a pas toujours une forme explicite. Il existe deux grandes classes de fonctions de navigation : les fonctions **analytiques** et les fonctions **harmoniques**.

Les fonctions **analytiques** sont construites afin de vérifier les propriétés d'une fonction de navigation dont la principale est l'absence de minima locaux. Celles-ci peuvent être retrouvées dans l'article [Rimon 1988]. Le problème de ces fonctions est qu'elles ne sont pas toujours faciles à construire. La construction de ces fonctions de navigations est décrite dans [Koditschek 1990].

Des fonctions de navigation analytiques ont été utilisées dans [Roussos 2010] pour planifier des trajectoires d'avions sans conflits. Chaque trajectoire est planifiée en considérant les autres avions comme des obstacles mobiles.

Les fonctions **harmoniques** sont des fonctions qui vérifient l'équation de Laplace c'est-à-dire :

$$\triangle F = 0 \tag{2.4}$$

avec $\triangle$ le laplacien de la fonction $F$.

Ces fonctions harmoniques ont une propriété intéressante provenant du Principe du Maximum :

*Une fonction harmonique atteint ses extrema sur ses frontières.*

Cette propriété permet de garantir l'absence d'extrema locaux dans l'espace. Les fonctions harmoniques possèdent les propriétés nécessaires pour être une fonction de navigation.

L'inconvénient de l'utilisation des fonctions harmoniques est la résolution de l'équation (2.4) qui permet d'obtenir les valeurs de la fonction de navigation et donc le champ de potentiel. La résolution est souvent numérique en utilisant les méthodes classiques de résolution d'équations aux dérivées partielles comme les différences finies ou les éléments finis. La précision de la résolution numérique entraîne des erreurs numériques ; celles-ci

engendrent alors des problèmes d'évanescence de champs. Le champ de potentiel calculé à certains endroits est ainsi erroné et inutilisable pour planifier un chemin. On peut citer l'article [Connolly 1993] pour l'utilisation de cette méthode en robotique pour planifier des trajectoires.

Une des possibilités pour remédier à ce problème est de créer une fonction harmonique analytique c'est-à-dire que la valeur de la fonction harmonique est définie à partir d'une expression en tout point de l'espace. Il n'y a plus d'erreurs possibles sur la valeur du champ. Dans [Connolly 1990], une fonction harmonique analytique a été utilisée pour planifier un chemin pour un robot en évitant des obstacles. La notion temporelle le long de la trajectoire n'y est pas abordée.

Un des problèmes rencontré lors de l'utilisation des fonctions harmoniques pour planifier une trajectoire est le contrôle de la vitesse du mobile le long de la trajectoire. La trajectoire est construite en suivant le gradient du champ, mais le module de celui-ci n'est pas constant, c'est-à-dire que la vitesse n'est donc pas constante le long de la trajectoire et elle n'est pas bornée. En aéronautique, ce contrôle de la vitesse est primordial puisque la vitesse d'un avion doit rester dans un intervalle très précis. Il est en plus souhaitable de voler à vitesse constante pour la phase de croisière. Pour étendre la méthode des fonctions harmoniques à la planification de trajectoire à vitesse constante, les **fonctions biharmoniques** ont été introduites dans [Masoud 1994].

Les fonctions **biharmoniques** vérifient :

$$\triangle^2 F = 0 \tag{2.5}$$

L'utilisation de ces fonctions permet d'obtenir un champ d'amplitude quasi-constant. Le seul problème avec ces fonctions est la perte de la garantie de satisfaire les conditions d'une fonction de navigation, contrairement aux fonctions harmoniques. Pour plus d'information sur l'utilisation des fonctions biharmoniques pour la planification de trajectoires, on peut se référer à l'article suivant [Masoud 1994].

On peut aussi retrouver un exemple de l'utilisation et la comparaison des fonctions harmoniques et biharmoniques pour la planification de trajectoires dans l'article [Masoud 1997]. Ces travaux ont ensuite été repris dans [Guys 2012] pour l'application au milieu aéronautique.

En résumé, les champs de potentiels sont très utilisés en robotique pour planifier des chemins, mais l'objectif final n'est souvent pas le même. En robotique, la planification a pour objectif de trouver un chemin réalisable, mais pas optimal. Le chemin est souvent compliqué et difficile à déterminer du au nombre important d'obstacles. Il s'agit aussi de déterminer un chemin très rapidement pour pouvoir ensuite planifier les trajectoires en temps réels. Pour notre problème, les objectifs et les contraintes ne sont pas les mêmes. Nous cherchons plutôt à optimiser les trajectoires. De plus, l'extension à des milieux anisotropes n'est pas évidente.

## 1.4 Recherche de la commande optimale

Les problèmes de contrôle optimal cherchent à déterminer la commande optimale d'un système évoluant dans le temps dans le but de minimiser un critère. L'évolution du système est régie par une équation différentielle (2.6) dépendant de la commande $a$ que l'on cherche à calculer.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ \quad a \in \mathbb{A} \text{ (condition sur la commande)} \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour modéliser un problème sous la forme d'un problème de contrôle optimal, il faut définir :

- le critère à optimiser $J(x(t), a(t))$ ;
- l'état et la commande du système qui évolue : $x(t)$ et $a(t)$ et les contraintes possibles sur ces deux variables ;
- la dynamique du système c'est-à-dire l'équation différentielle définissant comment évolue le système : $\dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t))$ ;
- les conditions initiales en $t_0$ ;
- les conditions finales ;
- le temps final $t_f$ : est-il donné ou à déterminer ?

La modélisation du problème pour l'optimisation d'une trajectoire sous la forme d'un problème de contrôle optimal a été introduite dans [Bryson 1975]. Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire l'optimisation de la trajectoire en spatiale, la modélisation est la suivante :

- le critère à optimiser $J(x(t), a(t))$ représente le temps total de la trajectoire ;
- l'état $x(t)$ correspond à la position du mobile et la commande $a(t)$ à la direction de déplacement du mobile ;
- la dynamique du système correspond à l'équation définissant la vitesse du mobile en fonction de la position et de la commande ;
- les conditions initiales sont uniquement le point de départ du mobile ;
- les conditions finales sont uniquement le point d'arrivée du mobile ;
- le temps final $t_f$ fait partie des inconnues.

À partir de cette modélisation, le problème peut s'écrire sous la forme générale d'un problème de commande optimale suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x(.),a(.)} & J(x(.), a(.)) & \\ & \dot{x}(t) = f(t, x(t), a(t)) & \text{(équation d'état)} \\ & x(.) \in \Omega & \text{(contraintes sur l'état)} \\ & a(.) \in \mathbb{A} & \text{(contraintes sur la commande)} \\ & x(t_0) = x_0 & \text{(conditions initiales)} \\ & x(t_f) \in C_f & \text{(conditions finales)} \end{cases} \tag{2.7}$$

Les inconnues sont donc la commande $a : [t_0, t_f] \mapsto a(t)$ dépendant du temps, mais aussi l'état $x$ qui évolue avec $t$ et qui est commandé par $a$. À ces deux variables est associé le critère de coût $J$. Ici, nous avons aussi le temps final $t_f$ qui fait partie des inconnues.

Le critère à optimiser $J(x(.), a(.))$ peut s'écrire sous trois formulations différentes : la formulation de Lagrange, la formulation de Mayer et la formulation de Bolza. Ces trois formulations sont mathématiquement équivalentes. Le critère est simplement exprimé de manière différente. La formulation la plus générale est la formulation de Bolza. Le critère est défini de la façon suivante pour un problème à temps terminal $t_f$ libre :

$$J(x(.), a(.), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), a(t))dt + l(t_f, x(t_f)) \tag{2.8}$$

avec $t_0$ fixé et $t_f$ inconnu, $g(t, x(t), a(t))$ le coût instantané et $l(t_f, x(t_f))$ le coût associé au point terminal.

Pour résoudre ce problème, différentes méthodes numériques existent. Elles ont été résumées dans [Betts 1998]. Les trois grandes classes de méthodes sont : les méthodes directes, les méthodes indirectes et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour des problèmes en temps continu ou la programmation dynamique pour des problèmes en temps discret.

Pour plus de détails et d'informations sur les problèmes de commande optimale, on pourra se référer au livre suivant [Hiriart-Urruty 2008].

### *1.4.1 Les méthodes directes*

Le principe de ces méthodes est de discrétiser le contrôle $a$ et/ou l'état $x$ afin de transformer le problème de commande optimale considéré en un problème de programmation non linéaire avec contraintes en dimension finie. Le problème obtenu peut alors être résolu avec les méthodes "classiques" d'optimisation pour les problèmes non linéaires avec contraintes.

Ces méthodes présentent les avantages et inconvénients suivants :

- ✓ une mise en œuvre simple sans connaissance a priori de la forme des solutions ;
- ✓ une sensibilité faible au choix de la condition initiale ;
- ✓ une facilité de prise en compte des contraintes de l'état ;
- ✓ l'existence d'un panel de méthodes développées pour la résolution d'un problème de programmation non linéaire avec contraintes ;
- ✗ une efficacité uniquement en petites dimensions ;
- ✗ un coût important en temps de calcul et en mémoire ;
- ✗ l'utilisation de méthodes itératives donc difficilement parallélisable ;
- ✗ l'existence de minima locaux.

Ces méthodes ont été utilisées pour planifier des trajectoires dans [Hargraves 1987] et [Betts 1995]. Cependant, une discrétisation spatiale et temporelle de notre problème

nous donnerait un problème de programmation non linéaire de dimensions trop importante pour être résolu avec les algorithmes actuels. C'est pourquoi nous ne détaillerons pas plus ces méthodes.

### *1.4.2 Les méthodes indirectes*

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin qui donne des conditions nécessaires d'optimalité. À partir de la définition de l'état adjoint et des conditions de minimisation de l'Hamiltonien, le principe du maximum de Pontryagin nous conduit à un système différentiel à deux équations et à une condition initiale et une condition finale ; en d'autres termes à la résolution d'un problème aux deux bouts. L'écriture du principe du maximum de Pontryagin pour des problèmes de contrôle optimal avec contraintes sur l'état est en général peu aisée et délicate. Lorsque le problème aux deux bouts est écrit, la résolution est aussi difficile puisque l'on ne connaît pas l'état initial de l'état adjoint. Pour le déterminer, les méthodes utilisées sont des méthodes de tir simple ou multiple.

En résumé, pour aider à choisir la méthode la mieux adaptée suivant les caractéristiques du problème de commande optimale, nous avons listé les avantages et inconvénients des méthodes indirectes :

- ✓ efficace en toutes dimensions ;
- ✓ calcul parallélisable ;
- ✓ très grande précision numérique ;
- ✗ connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale ;
- ✗ très sensible au choix de la condition initiale ;
- ✗ petit domaine de convergence ;
- ✗ difficulté théorique pour la prise en compte de contraintes sur l'état (liée au PMP) ;
- ✗ uniquement des conditions nécessaires pour une optimisation locale.

Les méthodes indirectes ont été appliquées pour l'optimisation de trajectoire d'avion en présence de vent. La première application a été utilisée dans [Jardin 2001] pour des champs de vent spécifique. Cependant, les champs de vent utilisés n'étaient pas représentatifs du vent réel. La vitesse de l'avion a aussi été supposée constante.

Dans [Sridhar 2010], les méthodes indirectes ont été, cette fois, utilisées pour optimiser des trajectoires réelles aux dessus des États-Unis avec un champ de vent réel. L'optimisation a été effectuée uniquement sur la phase de croisière de la trajectoire en fixant la vitesse de l'avion et le niveau de vol. Le problème revient à chercher la trajectoire optimale sur un plan en deux dimensions en jouant uniquement sur le cap de l'avion et non sur la vitesse. L'objectif était de minimiser le temps de parcours, la consommation ainsi que la création des traînées de condensation, appelées aussi en anglais contrail. Ces traînées de condensation sont créées par la condensation de la vapeur d'eau émise par les moteurs d'avion à très haute altitude. Ces trainées ont un impact sur l'augmentation de l'effet de serre, elles contribuent ainsi au réchauffement de la planète. Dans le cadre de

la réduction de l'impact environnemental pour l'aviation, le but était d'éviter les zones favorisant l'apparition de ces traînées.

Le problème a été écrit sous la forme d'un problème de commande optimal avec comme commande le cap de l'avion. Les zones de l'espace favorisant la présence des traînées de condensation ont été prises en compte comme des zones pénalisant la fonction coût. La fonction coût dépend alors du temps de parcours, de la consommation et des zones de pénalité. En jouant sur les coefficients de pénalité des zones de traînées, les résultats obtenus donnent plus ou moins d'importance à l'évitement de ces zones de traînées. Plus la pénalisation de ces zones est importante et plus l'optimum trouvé privilégient leur contournement au détriment du temps de parcours qui sera rallongé. La méthode utilisée pour résoudre le problème aux deux bouts et trouver la condition initiale est la méthode de tir standard.

Dans [Ng 2011], la méthode est étendue pour prendre en compte des coordonnées sphériques et ainsi pouvoir travailler avec des trajectoires plus longues entre le nord des États-Unis et l'Asie. Cette extension est indispensable pour obtenir des résultats réalistes puisque la terre n'est pas plate et qu'en conséquence les trajectoires les plus courtes en terme de distance sont des segments de grands cercles et non plus des lignes droites.

Dans les deux cas précédents, le niveau de vol de l'avion était fixé en amont pour toute la phase de croisière, dans [Ng 2012], la méthode est étendue pour optimiser aussi le choix du niveau de vol. L'optimisation de la trajectoire combine la méthode pour calculer la route en temps minimum en fonction du vent sur plusieurs plans horizontaux et le modèle de consommation d'un avion pour générer le profil vertical optimal de consommation. L'algorithme se divise en deux étapes :

— la première optimise le profil vertical de l'avion le long de la trajectoire pour déterminer l'altitude de croisière optimale et le temps auquel a lieu les changements de niveaux en tenant compte des contraintes sur les niveaux de vol ;
— la deuxième optimise la trajectoire horizontale en fonction du vent sur chaque niveau de vol déterminé à la première étape.

La solution obtenue est sous optimale puisque lors du choix des niveaux de vol, le vent n'est pas pris en compte. Dans certains cas, il peut être plus intéressant de rester sur un niveau de vol plus bas pour lequel le régime moteur n'est alors pas optimal et la consommation plus importante, cependant le vent peut y être plus favorable et compenser cette augmentation de la consommation.

### *1.4.3 Équation d'Hamilton-Jacobi / Programmation dynamique*

Les problèmes en contrôle optimal peuvent aussi s'écrire sous la forme d'une équation appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann. La solution de cette équation est le coût optimal pour atteindre un point de l'espace d'état pour le problème donné. Pour un problème de contrôle en temps discret (la commande optimale est alors discrète), on parlera d'équation de Bellman. La programmation dynamique est la méthode utilisée pour résoudre cette classe de problème. Pour des problèmes de contrôle optimal en temps

continu, on utilisera les équations d'Hamilton-Jacobi. La résolution du problème nécessite la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi qui est une équation aux dérivées partielles.

La résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman sur tout l'espace nous donne une condition nécessaire et suffisante pour l'optimalité de la solution. Cette condition génère le principal avantage et inconvénient de ces méthodes :

- ✓ la recherche **sur tout l'espace** permet de garantir d'obtenir l'optimum global ;
- ✗ la condition de résolution **sur tout l'espace** ne permet pas de résoudre des problèmes de grandes dimensions.

Le problème de planification de trajectoire optimale est formulé sous la forme des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman dans le livre suivant [Bertsekas 1995]. La programmation dynamique est brièvement présentée même si nous travaillons en temps continu, car le principe est similaire pour les problèmes en temps continu.

**En temps discret** La programmation dynamique a été développée par Bellman dans [Bellman 1952] pour résoudre des problèmes de chemins optimaux. Mais cette méthode s'applique pour des problèmes plus généraux de prise de décision dans le temps. Le principe de la méthode est d'associer une notion d'état pour chaque problème. À chaque état est associé une valeur optimale partant de cet état, et l'équation de programmation dynamique relie la valeur d'un état à un instant donné à celles des états auxquels on peut accéder à l'instant suivant.

Il introduit pour cela le principe d'optimalité [Bellman 1957] suivant qui est à la base de la méthode :

*Une solution optimale pour le problème contient les solutions optimales pour tous les sous-problèmes.*

Par exemple, dans le cadre de la recherche du plus court chemin, ce principe s'illustre de la manière suivante :

*Un chemin optimal est formé de sous-chemins optimaux : si* $(\mathcal{C})$ *est un chemin optimal allant de A à B et si* $C \in (\mathcal{C})$ *alors les sous-chemins de* $(\mathcal{C})$ *allant de A à C et de C à B sont optimaux.*

Attention, la réciproque est fausse si AC et CB sont deux chemins optimaux, le point C n'appartient pas forcément au chemin optimal entre A et B (voir figures 2.7 et 2.8). Dans cet exemple, le principe d'optimalité peut se formuler de la manière suivante en notant $d_{XY}$ la distance de X à Y, on obtient alors :

$$d_{AB} = \min_{C}(d_{AC} + d_{CB}) \tag{2.9}$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des points $C$ par lesquelles peut passer un chemin de $A$ à $B$.

Ce principe d'optimalité permet de résoudre le problème d'optimisation en le décomposant de manière récursive en sous-problèmes liés entre eux. De manière plus générale,

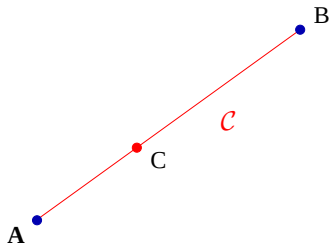



FIGURE 2.7 – $(\mathcal{C})$ *est le chemin optimal allant de A à B et* $C \in (\mathcal{C})$ *alors les chemins allant de A à C et de C à B sont optimaux.*

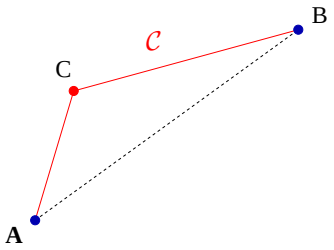



FIGURE 2.8 – *Les chemins allant de A à C et de C à B sont optimaux mais le point C n'est pas forcément sur le chemin optimal entre A et B.*

le principe d'optimalité sur un intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ s'écrit :

$$J^*(x(t_k), t_k) = \min_{x(.),a(.)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t, x(.), a(.))dt + J^*(x(t_{k+1}, t_{k+1}) \tag{2.10}$$

avec $g(x(.), a(.))$ le coût instantané et $J^*(x(t_{k+1}, t_{k+1})$ le coût optimal en $(x(t_{k+1}, t_{k+1})$.

Pour illustrer ce principe, prenons un problème assez simple pour exemple, la recherche du plus court chemin sur un graphe. Dans ce cas, la variable de temps est un peu déguisée. Les différents pas de temps vont correspondre au nombre de branches parcourues depuis le point de départ. Par exemple, au temps $t = 1$, l'ensemble des points $x(t_1)$ correspond à tous les points qui peuvent être atteints en une branche de l'arbre à partir du point de départ. Prenons un exemple très simple illustré sur la figure 2.9 pour lequel on cherche le plus court chemin entre A et B en parcourant trois branches de l'arbre. L'ensemble des points C correspond à tous les points reliés par une branche à A et l'ensemble des points D à tous les points qui peuvent être atteints en parcourant deux branches de l'arbre à partir de A.

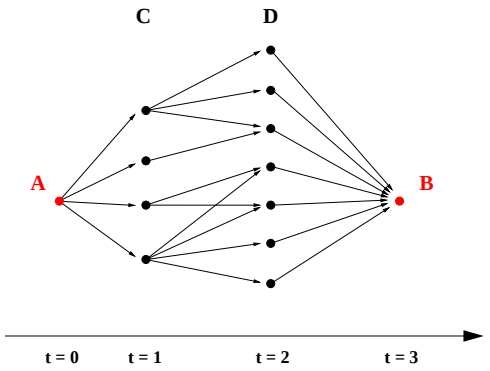



FIGURE 2.9 – *Recherche du plus court chemin entre A et B par la programmation dynamique.*

Dans le cas présent du plus court chemin, le principe d'optimalité peut s'énoncer de

la manière suivante :

$$\underbrace{J^*(x(t_k), t_k)}_{\substack{\text{Distance minimale} \\ \text{du point } x(t_k) \text{ au point B}}} = \min_{x(.),a(.)} \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t, x(.), a(.))dt}_{\substack{\text{Distance entre} \\ \text{le point } x(t_k) \text{ et } x(t_{k+1})}} + \underbrace{J^*(x(t_{k+1}, t_{k+1})}_{\substack{\text{Distance minimale} \\ \text{du point } x(t_{k+1}) \text{ au point B}}}$$

Pour notre exemple, le temps appartient à l'ensemble suivant : $t \in \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$. La résolution du problème passe par l'initialisation de la formule de récurrence obtenue par le principe d'optimalité. Pour cela, on connaît la distance de $J^*(x(t_3), t_3)$ : $J^*(x(t_3), t_3) = d_{BB} = 0$. À partir de cette valeur, la formule de récurrence (2.10) nous donne :

- Au temps $t_2$, $J^*(x(t_2), t_2)$ correspond à la distance $d_{DB}$ entre un point D et le point B.
- Au temps $t_1$, $J^*(x(t_1), t_1)$ correspond à la distance minimale entre un point C et le point B : $d_{CB}$. Par la formule (2.10) au temps $t_1$, on a : $d_{CB} = \min_D(d_{CD} + d_{DB})$.
- Au temps $t_0$, $J^*(x(t_0), t_0)$ correspond à la distance minimale entre le point A et le point B et est calculé de la façon suivante : $d_{AB} = \min_C(d_{AC} + d_{CB})$ avec $d_{CB}$ calculé à l'étape précédente.

Au final, le problème est découpé en sous problèmes de façon séquentielle, et la résolution est effectuée de manière récursive afin de produire la solution du problème global. Un exemple d'algorithme utilisant le principe de la programmation dynamique est l'algorithme de Dijkstra.

L'illustration du principe d'optimalité pour un problème discret va nous servir à comprendre le principe qui est similaire pour le domaine continu.

**En temps continu :** À partir de la formulation de Bolza du problème de commande optimale (cf Eq. (2.8)) et du principe d'optimalité décrit précédemment (cf Eq. (2.10)), le problème d'optimisation peut s'écrire sous la forme d'une équation appelée équation d'Hamilton-Jacobi. Pour les détails du passage de la formulation de Bolza à l'équation d'Hamilton-Jacobi, on pourra se référer au livre suivant [Bertsekas 1995], il sera aussi abordé plus en détail dans le chapitre 3 Section 2.2. L'équation d'Hamilton-Jacobi obtenue est la suivante :

$$\nabla_t J^*(t, x) + \min_{a \in \mathbb{A}} [g(x, a) + \nabla_x J^*(t, x).f(x, a)] = 0 \tag{2.11}$$

avec $J^*(t, x)$ le coût optimal au temps $t$ et à l'état $x$.

Dans le cas du problème de la planification d'une trajectoire optimale [Vladimirsky 2001], l'équation d'Hamilton-Jacobi (2.11) se réduit à l'équation suivante :

$$\max_{a \in \mathbb{A}} [-\nabla_x u(x).f(x, a)] = 1 \tag{2.12}$$

Pour faciliter la lisibilité et bien différencier le cas général du problème plus spécifique de la recherche de la trajectoire optimale, nous utiliserons maintenant la variable $u$ pour

le coût optimal représentant le temps minimal d'arrivée. La notation $J^*(t, x)$ est gardée pour le cas général d'un problème de commande optimale. En prenant le critère comme étant le temps d'arrivée, l'équation devient stationnaire, la solution ne dépend plus du temps. On parlera alors des équations d'Hamilton-Jacobi stationnaires.

Les méthodes Fast Marching et Ordered Upwind ont été développées pour résoudre ces équations d'Hamilton-Jacobi stationnaires dans [Sethian 2001] en se basant sur les méthodes Level Set [Sethian 1999b]. Elles permettent de suivre l'évolution d'un front d'onde ; l'évolution d'un front est ainsi ramenée à déformer une courbe ou une surface à partir d'une équation aux dérivées partielles. La résolution de l'équation (2.12) peut être vue comme la propagation d'un front d'onde où le front d'onde représente le coût minimum d'arrivée, calculé au fur et à mesure de la propagation. Le front va ainsi se déformer en fonction de l'environnement. Le front ici se déplace toujours dans le même sens. L'idée générale est alors la suivante : on fait propager une onde à partir du point d'arrivée, dès que le front d'onde a atteint le point de départ, on remonte du point de départ jusqu'au point d'arrivée pour générer la trajectoire optimale.

Pour mieux comprendre la corrélation entre la résolution de l'équation (2.12) et la propagation d'un front, on peut réécrire l'équation de la façon suivante :

$$\|\nabla u(\mathrm{X})\|\, F(\mathrm{X}, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}) = 1 \tag{2.13}$$

avec $F$ qui représente la vitesse de propagation du front d'onde.

Dans le cas particulier où la vitesse de propagation du front d'onde $F$ ne dépend pas de la direction dans laquelle elle se propage, l'équation (2.13) se ramène à l'équation Eikonale suivante :

$$\|\nabla u(\mathrm{X})\|\, F(\mathrm{X}) = 1 \tag{2.14}$$

Cette équation est obtenue pour un milieu isotrope où les caractéristiques du milieu dépendent uniquement de la position et non de la direction.

Une analogie avec la propagation de lumière peut être faite à partir de l'équation Eikonale. En optique géométrique, cette équation est l'équation fondamentale qui régit le trajet de la lumière dans un milieu. Elle permet de déterminer les trajectoires des rayons lumineux. La résolution de l'équation Eikonale est aussi appliquée pour divers problèmes dans [Sethian 1999a] surtout dans le domaine de l'imagerie, par exemple, pour de la reconstruction 3D à partir des ombres d'une image 2D.

La méthode développée pour la résolution de l'équation Eikonale est la méthode appelée Fast Marching. Elle a été introduite dans [Tsitsiklis 1995] et dans [Sethian 1996]. L'évolution du front s'effectue dans un milieu isotrope. La méthode calcule au fur et à mesure l'évolution du front en résolvant l'équation Eikonale. Le principe du déroulement de la méthode s'inspire de la théorie de la propagation d'onde dans un milieu, qui est aussi utilisé pour expliquer la propagation de la lumière en optique. L'arrivée de l'onde en un point y crée une nouvelle onde qui se propage de manière sphérique. L'accumulation de ces ondes forme alors un nouveau front d'onde, qui se propage à son tour dans le milieu (figure 2.10). Le principe introduit par Huygens-Fresnel s'énonce ainsi : Tout point sur

un front d'onde peut être considéré comme une source isotrope d'une nouvelle onde, dont la phase est égale à celle de l'onde originale et qui se propage vers l'avant à la même vitesse que cette onde. Le nouveau front d'onde formé est l'enveloppe de toutes ces ondes (il est tangent à ces ondes). Dans l'algorithme, la vitesse de propagation de chaque onde va être fonction de l'environnement qu'elle traverse. Si celui-ci pénalise la fonction coût, la vitesse sera plus faible et inversement si l'environnement est favorable, la vitesse sera plus élevée. La résolution de l'équation Eikonale s'effectue ainsi de manière séquentielle à mesure que le front se propage.

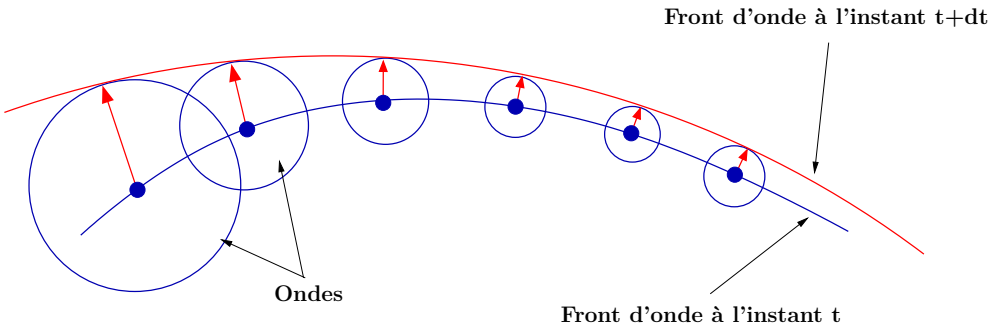



FIGURE 2.10 – *Évolution d'un front d'onde à l'instant t+dt à partir du front d'onde à l'instant t. La vitesse de chaque onde dépend uniquement de la position*

L'algorithme Fast Marching a été appliqué pour la planification de trajectoires optimales pour des véhicules sous-marins autonomes dans [Pêtrès 2007]. Un algorithme appelé FM* a été développé pour accélérer la résolution en utilisant une heuristique similaire à l'algorithme A* pour estimer le temps d'arrivée. L'algorithme a aussi été adapté pour prendre en compte les courants. L'influence des courants est prise en compte dans la fonction coût mais le milieu est toujours considéré comme isotrope ; l'évolution du front dépendant toujours uniquement de la position et non de la direction. Cette approximation est valable uniquement pour traiter des problèmes à faible anisotropie c'est-à-dire avec des courants très constants.

Une autre méthode, la méthode Fast Sweeping a été développée dans [Tsai 2004] pour résoudre l'équation Eikonale, celle-ci s'inspirant aussi de la propagation d'un front. L'article [Gremaud 2006] a permis de comparer les deux méthodes. Les résultats ont permis de montrer que la méthode Fast Sweeping était plus efficace pour des problèmes où les caractéristiques sont le plus souvent des lignes droites. Les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles étant les courbes le long desquelles l'équation se réduit à une équation différentielle ordinaire, la résolution de l'équation différentielle ordinaire le long de la caractéristique permet d'obtenir la solution. Ce qui implique que la méthode est plus efficace lorsque les trajectoires optimales sont souvent des lignes droites. D'un autre côté, la méthode Fast Marching est plus efficace sur des problèmes où les caractéristiques changent fréquemment de directions et pour des domaines avec des géométries

compliquées. Les trajectoires optimales ne sont alors pas souvent des lignes droites.

Des recherches sont menées dans [Chacon 2012] pour tirer avantages de deux méthodes et être plus performant dans les deux cas.

La résolution de l'équation Eikonale étant adaptée à des milieux isotropes, ce qui n'est pas notre cas, nous nous sommes plutôt intéressés à l'algorithme Ordered Upwind qui a été développé dans [Vladimirsky 2001] pour résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi stationnaire (2.12).

Le principe est le même que pour l'algorithme Fast Marching excepté dans la manière de calculer l'évolution du front. Dans ce cas, la vitesse de propagation des ondes dépend de la position et de la direction de propagation (cf figure 2.11). La résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi s'effectue aussi de manière séquentielle, mais nécessite la plupart du temps de résoudre une minimisation locale à chaque étape de la propagation ou de trouver les racines d'une équation non linéaire. L'algorithme Ordered Upwind est alors de complexité plus élevée que l'algorithme Fast Marching.

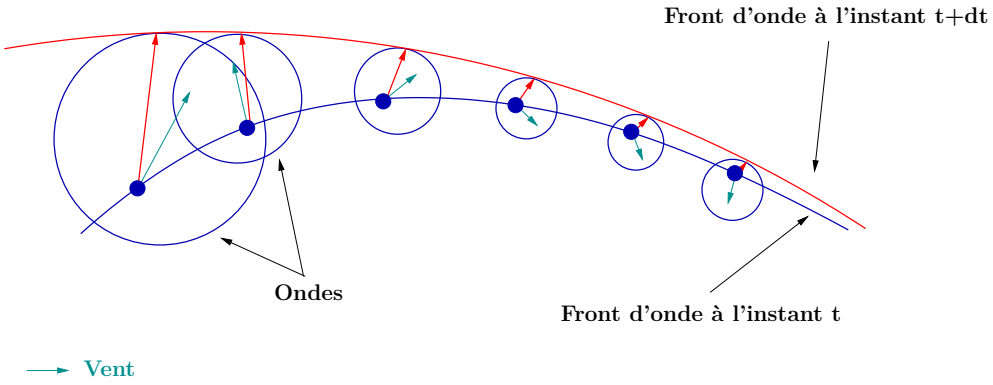



FIGURE 2.11 – *Évolution d'un front d'onde à l'instant t+dt à partir du front d'onde à l'instant t. La vitesse de chaque onde dépend de la position et de la direction dans laquelle elle se propage.*

L'algorithme Ordered Upwind avec l'utilisation de la méthode Semi-Lagrangian a été utilisé dans [Alton 2010] pour la planification de trajectoire pour des robots en présence de vent. L'inconvénient de la méthode est la nécessité d'effectuer une minimisation locale en chaque point de la grille lors de la résolution. Cette étape augmente le temps de calcul.

Cette méthode associée à la discrétisation Semi-Lagrangian a aussi été utilisée dans [Elston 2012] pour planifier la trajectoire d'un avion dans le cas particulier de fort vent.

## 1.5 Bilan

Le tableau 2.1 résume les principales caractéristiques des méthodes présentées dans ce chapitre pour le problème de la planification de trajectoire.

La comparaison des différents critères nous a permis de nous orienter vers les méthodes de propagation de front d'onde pour la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Le premier point auquel nous nous sommes intéressés est l'optimalité de la solution. Notre principal objectif étant de limiter l'impact environnemental du trafic aérien en réduisant la consommation, nous nous sommes donc concentrés sur les méthodes permettant d'obtenir une solution optimale.

Le deuxième point concerne l'espace de recherche de la solution. Comme nous nous plaçons, dans le cadre de ces travaux, dans un contexte de free-route, les méthodes discrètes sur des réseaux sont moins adaptées. Nous nous sommes plutôt orientés vers des méthodes continues permettant de travailler sur l'espace entier.

Un dernier point qui nous a semblé intéressant est la garantie d'obtenir la même planification pour des situations identiques et que celle-ci soit optimale. Nous nous sommes alors orientés vers les méthodes déterministes dont certaines permettent de garantir l'optimum global.

| **Méthode** | | **Déterministe/ Non déterministe** | **Discrète/Continue** | **Optimale** | **Extension anisotrope** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Représentation de la trajectoire (Points de contrôle)** | Métaheuristique | Non déterministe | Discrète | Non | Oui |
| **Discrétisation de l'espace** | Parcours de graphe (Dijkstra, $A^*$) | Déterministe | Discrète | Oui | Oui |
| | Probabiliste | Non déterministe | Discrète | Non | Oui |
| **Champs de potentiel** | | Déterministe | Continue | Non | ? |
| **Commande optimale** | Direct | Déterministe | Discrète | Oui | ? |
| | Indirect | Déterministe | Continue | Oui | Oui |
| | HJE (équation d'Hamilton Jacobi) | Déterministe | Continue | Oui | Oui |

TABLE 2.1 – *Comparaison des principales méthodes de planification de trajectoire*

Le trafic aérien ne se résumant pas une seule trajectoire, la partie suivante présente les principales méthodes pour planifier un ensemble de trajectoires interférant entre elles.

# 2 Planification de plusieurs trajectoires

Planifier plusieurs trajectoires interagissant entre elles est un problème complexe puisque les décisions prises pour une trajectoire entraînent des répercussions pour les autres trajectoires. La planification d'une trajectoire ne peut donc pas être faite indépendamment des autres.

Dans ce contexte, deux approches différentes sont utilisées. Il s'agit de l'approche centralisée et de l'approche décentralisée :

— Pour l'**approche centralisée**, une entité définit le trajet de chaque avion. Cette approche est utilisée le plus souvent pour rechercher une solution optimale qui satisfait les objectifs de chaque avion, mais aussi un objectif global. Les inconvénients de cette approche sont souvent le temps de calcul et la complexité des algorithmes.
— Pour l'**approche décentralisée**, chaque avion connaît la position de tous les avions à des instants donnés et définit lui-même son trajet. Il n'y a pas un objectif commun défini.

## 2.1 Approche séquentielle

Cette méthode est l'approche la plus simple. Elle consiste à planifier une trajectoire sans tenir compte des autres trajectoires puis à planifier une deuxième trajectoire en évitant la première ; la troisième trajectoire doit ensuite éviter les deux premières et ainsi de suite ... La méthode permet donc d'avoir une solution admissible, mais celle-ci n'est pas équitable entre les avions. Dans la phase tactique, ce n'est pas important (c'est l'approche utilisée tous les jours par les contrôleurs). Par contre, c'est un problème plus délicat en phase pré-tactique. Le premier à planifier sa trajectoire est évidemment avantagé par rapport au dernier. Les trajectoires calculées peuvent ainsi être optimales par rapport aux contraintes données (trajectoires des avions précédemment calculées à éviter) mais le système global n'est pas optimal.

Une utilisation de cette approche a été utilisée dans [Dougui 2011] pour la résolution de conflits entre les avions. L'algorithme mis en place pour planifier les trajectoires en évitant les autres avions est l'algorithme par analogie avec la propagation de la lumière présenté dans la section 1.2.1. Les avions à éviter sont vus comme des obstacles, la méthode permet alors de calculer la trajectoire optimale. Les trajectoires sont bien calculées une par une de manière optimale, mais le trafic global n'est pas optimal. La qualité de la solution obtenue dépend de l'ordre de séquencement des avions.

Cette approche est très réaliste pour la résolution de conflits puisqu'aujourd'hui c'est la méthode utilisée par les contrôleurs aériens. Cependant pour de la planification pré-




FIGURE 2.12 – *La première trajectoire est planifiée sans prendre en compte les autres trajectoires.*

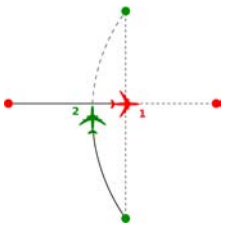



FIGURE 2.13 – *La deuxième trajectoire est planifiée en évitant la première trajectoire.*

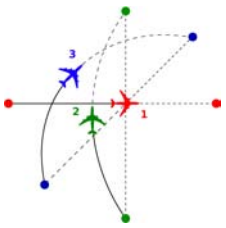



FIGURE 2.14 – *La troisième trajectoire est planifiée en évitant la première et la deuxième trajectoire.*

tactique, cette méthode n'est pas adaptée du fait de l'influence de l'ordre de séquencement sur la qualité de la solution. Les trajectoires sont plus longues et il faut produire une solution équitable.

## 2.2 Méthodes itératives

Cette approche est une approche centralisée qui recherche une solution optimale globale en modifiant itérativement la solution jusqu'à obtenir une solution acceptable. Elle consiste tout d'abord à définir un critère global pour évaluer la solution, c'est-à-dire pouvoir évaluer la planification de l'ensemble des trajectoires. L'objectif ensuite est de minimiser ce critère afin d'améliorer la solution. Cette optimisation est effectuée à l'aide des métaheuristiques classiques comme les algorithmes génétiques, le recuit simulé .... Le principe est de modifier la solution précédemment obtenue (c'est-à-dire les trajectoires) et d'évaluer la nouvelle solution en cherchant la solution de coût minimum. Les critères d'évaluation de la solution peuvent être multiples comme par exemple l'allongement de la trajectoire par rapport à la route directe, le nombre de conflits, la congestion rencontrée... tout dépend du problème que l'on souhaite résoudre.

Dans [Peyronne 2012], l'objectif est de résoudre les conflits de manière optimale entre différentes trajectoires. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, les trajectoires sont représentées à l'aide de B-spline. La modification d'une trajectoire s'effectue en déplaçant un point de contrôle. Son objectif est de planifier les trajectoires sans conflit tout en minimisant la moyenne des distances parcourues par les avions. Il utilise pour cela un algorithme génétique où un chromosome représente un ensemble de trajectoires. Chaque chromosome est composé de gènes dont le nombre correspond au nombre de trajectoires à planifier. Chaque gène correspond quant à lui au placement du point de contrôle de chaque trajectoire. L'évitement des conflits est pris en compte dans la fonction objectif.

Dans [Chaimatanan 2013], les trajectoires sans conflits sont planifiées à l'aide d'un algorithme de recuit simulé. L'opérateur de voisinage consiste à tirer aléatoirement une trajectoire parmi l'ensemble des trajectoires puis à la replanifier. La modification de la trajectoire peut être une modification de la route et/ou un nouvel horaire de départ.

On peut aussi citer les travaux [Gianazza 2004] où un algorithme évolutionnaire est associé à un algorithme A* pour séparer des flux de trafic aérien en 3D.

Ces méthodes correspondent à une stratégie d'optimisation globale, cherchant à minimiser un coût associé à l'ensemble des trajectoires.

## 2.3 Commande prédictive

La philosophie de la commande prédictive ou Model Predictive Control (MPC) se résume à utiliser le modèle pour prédire le comportement du système et choisir la meilleure décision minimisant un certain coût tout en respectant les contraintes.

Le principe de la commande prédictive est le suivant : on résout de manière répétée à chaque pas de temps (spécifié par l'utilisateur) un problème de commande optimale où l'on cherche comment aller de l'état actuel vers un état cible de manière optimale en satisfaisant les contraintes. Les commandes futures sont calculées pour plusieurs pas de temps, mais seulement la première commande est appliquée au système. À partir du nouvel état obtenu du système, on réévalue la séquence de commandes optimales et ainsi de suite pour chaque pas de temps jusqu'à atteindre l'état final.

Cette approche est utilisée dans [Pannequin 2007] pour de la planification de trajectoires aériennes sans conflits en évitant des mauvaises conditions météorologiques. Cette méthode a été couplée avec la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi présentée dans la section 1.4.3 pour le calcul d'une trajectoire optimale dans un milieu anisotrope. Les hypothèses sont les suivantes : la trajectoire est plane, la vitesse de chaque avion est constante et l'unique degré de liberté pour l'optimisation est le cap de l'avion.

Pour planifier les trajectoires, la méthode se déroule en deux phases. La première consiste à résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi pour chaque avion. On obtient alors en tout point de l'espace, le temps minimum pour atteindre la destination pour chaque avion. La deuxième phase consiste à résoudre le problème d'optimisation de commande optimale suivant : chercher les commandes optimales de chaque avion, c'est-à-dire les caps optimaux au cours du vol pour minimiser la somme sur tous les avions des valeurs coût calculées pour chaque avion par la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, tout en satisfaisant les contraintes liées à la dynamique de chaque avion et au respect de la norme de séparation entre chaque avion. Ces valeurs coût représentant le temps minimum d'atteinte de chaque destination, l'objectif global est de minimiser l'ensemble des temps de vol.

Ce problème d'optimisation est résolu à l'aide du principe de la commande prédictive. Le problème est discrétisé en temps. Il peut s'écrire alors comme un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes (cf Section 1.4.1). On cherche pour chaque pas de temps le cap optimal de chaque avion. Le problème est alors résolu de manière itérative, la commande optimale est calculée pour un pas de temps et permet d'atteindre l'état suivant. À partir de ce nouvel état du système, le problème est résolu de nouveau pour chercher la commande suivante. Ce processus se termine lorsque chaque avion a atteint sa destination.

Cette méthode est intéressante pour planifier un nombre peu important de trajectoires. Elle atteint cependant ses limites pour des problèmes de plus grandes dimensions. En effet, pour un nombre important d'avions, le nombre de contraintes dans le problème d'optimisation non linéaire à résoudre est trop important pour être résolu par les solveurs existant aujourd'hui. Cette méthode semble mieux adaptée pour la planification de trajectoires à court terme, étant donné que l'optimisation est à effectuer à chaque pas de temps. Le nombre de pas de temps nécessaire pour discrétiser les trajectoires sera moins important que pour des trajectoires plus longues.

De plus, dans le cadre de notre étude de la planification des trajectoires en phase pré-tactique, nous nous intéressons plutôt à la minimisation de la congestion et non à la déconfliction des trajectoires, les incertitudes étant trop importantes pour garantir le respect des normes de séparation entre les avions.

## 2.4 Mouvements coordonnées

On parlera de mouvements coordonnées pour les méthodes où les décisions sont prises au même moment pour chaque trajectoire. Il n'y pas de notion d'ordre.

Pour pouvoir planifier de manière centralisée plusieurs trajectoires, l'espace d'état doit être commun à tous les avions. Cet espace doit se composer de tous les états possibles du système. On parle alors d'espace de configuration.

L'espace de configuration d'un système physique est l'ensemble des positions possibles que ce système peut atteindre. Par exemple :

- pour le cas d'un mobile se déplaçant dans un plan : l'espace de configuration est le plan $\mathbb{R}^2$.
- pour le cas de deux mobiles se déplaçant dans un plan : l'espace de configuration est l'ensemble des couples de positions que peuvent prendre les mobiles, en tenant compte du fait que les deux mobiles ne peuvent pas se trouver au même endroit. Cet espace est défini comme $\mathbb{R}^4 - \Delta$ avec $\Delta = \{(x_i, y_i) = (x_j, y_j)\}, \quad \forall i, j$ c'est-à-dire les coordonnées $(x, y)$ des deux mobiles sans les positions de collisions. On peut identifier cet espace à $\mathbb{C}^2$ auquel on retire la diagonale, i.e. l'ensemble des couples $(z, z)$. L'espace de configuration correspond à l'ensemble des couples de complexes distincts.
- pour le cas de $n$ mobiles se déplaçant dans un plan : l'espace de configuration est l'ensemble des n-uplets de complexes deux à deux distincts :
  $\{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j\}$.

Dans [Alton 2010], l'algorithme Ordered Upwind (présenté dans la section 1.4.3) est utilisé en espace de configuration pour planifier les trajectoires optimales de deux mobiles (ici des robots) sans collision. La solution est recherchée dans un espace $\mathbb{R}^4$ privé de l'ensemble des positions communes des deux mobiles. Le travail en espace de configuration permet de supprimer la partie temporelle. L'espace de configuration est construit de telle sorte que deux mobiles ne peuvent pas partager le même domaine spatial au même instant puisque cet état n'appartient pas l'espace d'état où l'on cherche à planifier les trajectoires.

Le problème en espace de configuration est l'augmentation de la dimension du problème en fonction du nombre de mobiles. Les coûts de calculs sont proportionnels à la puissance du nombre de mobiles et deviennent prohibitifs même pour de petites instances du problème. Avec les performances actuelles des calculateurs, il est très difficile de planifier plus de deux trajectoires coordonnées.

Une autre approche décentralisée a été utilisée dans [Roussos 2010] pour planifier de manière coordonnée les trajectoires de plusieurs avions. Chaque avion planifie sa propre trajectoire à l'aide des fonctions de navigation en connaissant la position de tous les autres avions à un instant donné. On parle de mouvements coordonnés puisque chaque avion prend une décision au même moment.

La fonction de navigation de chaque avion est calculée de manière analytique (cf Section 1.3 pour plus de détails sur les fonctions de navigation). Les auteurs prouvent que le système converge vers une solution, c'est-à-dire ici que chaque avion atteint sa destination en évitant les autres avions. La convergence est satisfaite grâce aux propriétés de leur fonction de Lyapunov qui leur permet de prouver que le seul équilibre stable du système est le point de destination de celui-ci. Pour éviter les variations importantes de vitesse et satisfaire les contraintes aéronautiques, la trajectoire est contrôlée à l'aide de loi de contrôle. Il n'y a cependant pas de notion d'optimalité dans la planification obtenue. Chaque avion connaît la position des autres avions, mais ne connaît pas leurs intentions. Cette approche ne permet pas de définir une fonction objectif commune à tous les avions où chaque avion prend une décision en minimisant cette fonction, puisque cette fonction objectif dépend aussi de la décision des autres avions. La fonction objectif ne peut pas être indépendante des décisions prises par les avions.

## 2.5 Multi-agents

Les systèmes multi-agents sont des systèmes composés de plusieurs agents qui interagissent entre eux dans un environnement donné. Les agents ont la possibilité de communiquer entre eux et de développer des comportements coopératifs. Le comportement coopératif entre les agents permet de détecter et de résoudre des problèmes de manière locale. Une solution globale émerge de l'adaptation des agents jusqu'à ce qu'une solution acceptable soit trouvée. Cette théorie a été utilisée dans une large variété de problèmes complexes telle que la planification dynamique de tâches.

Les système multi-agents ont été appliqués en ATM, dans [Sislak 2013], pour étudier la planification et le contrôle du trafic aérien de manière décentralisé dans le but de mieux utiliser l'espace aérien disponible, d'améliorer la résolution de conflit et la replanification des trajectoires. Pour cela, chaque avion est capable de planifier sa propre trajectoire, mais aussi de détecter et de résoudre les conflits avec les autres avions. Chaque avion est contrôlé par un agent et les agents sont capables de communiquer entre eux. La résolution est effectuée en temps réel. Les agents peuvent utiliser tous les degrés de liberté possibles en respectant la dynamique de vol : cap, altitude et vitesse de croisière peuvent être

modifiés. Le problème pour l'utilisation dans nos travaux vient du fait qu'il est impossible de garantir l'émergence d'une solution optimale.

Dans [Agogino 2012], un système multi-agent est aussi utilisé pour réduire la congestion. Néanmoins, contrairement au premier système multi-agents, un agent ne contrôle pas un avion. Un agent est associé à une position fixe dans le but de réduire la congestion aux alentours de cette position. Chaque agent contrôle les avions autour de lui avec une des ces trois actions : séparer de manière spatiale les avions, retarder les avions au sol, ou les détourner. Pour choisir la meilleure solution, les agents utilisent une méthode d'apprentissage.

Notre but n'est pas de planifier en temps réel les trajectoires, mais de les planifier en amont en recherchant les trajectoires optimales. Nous n'avons donc pas appliqué ces méthodes. Le principal critère de rejet est la question de l'optimalité de la solution. Il n'y a aucune garantie sur l'émergence d'une solution optimale et sur l'optimalité de celle-ci.

## 2.6 Bilan

Notre objectif est ici de planifier l'ensemble des trajectoires dans le but de diminuer le temps de parcours de chaque trajectoire tout en minimisant les zones congestionnées permettant un bon écoulement du trafic.

Le nombre de trajectoires à traiter étant important, la méthode utilisée doit alors être utilisable pour un problème de grande dimension. De ce fait, les méthodes de commande prédictive ou l'utilisation des espaces de configurations ont été écartées.

Les méthodes séquentielles sont utilisables pour un nombre important d'avions, mais engendrent aussi le problème de l'équité des solutions entre les avions. Le premier à planifier la trajectoire est favorisé par rapport au dernier qui doit éviter tous les autres avions. De plus, la solution obtenue n'est pas optimale si l'objectif est de diminuer le temps de parcours de chaque trajectoire tout en minimisant les zones congestionnées. Ces méthodes semblent plus adaptées pour des problèmes de déconfliction où l'objectif premier est l'évitement du conflit puis ensuite l'optimisation de la distance, ou la consommation.

Les méthodes multi-agents ont été développées pour des problèmes complexes dynamiques où la solution est adaptée au cours du temps. Ces méthodes sont adaptées pour des problèmes en temps réel. L'inconvénient pour notre problème est l'absence de preuve de convergence vers un objectif global. La fonction objectif globale n'est jamais explicite, mais émerge de la satisfaction des objectifs de chaque agent.

En conclusion, nous nous sommes orientés vers les algorithmes dits métaheuristiques et plus spécifiquement vers le recuit simulé. Ces algorithmes sont très bien adaptés pour des problèmes de grandes dimensions et permettent de tendre vers la solution globale. Le principe de notre méthode est de calculer les trajectoires de chaque avion indépendamment avec la méthode développée pour optimiser une trajectoire et ensuite de modifier localement ces trajectoires pour minimiser la congestion.

# Chapitre 3

# Optimisation d'une trajectoire aérienne

*Nous proposons, dans ce chapitre, une méthode pour optimiser une trajectoire en tenant compte des conditions météorologiques. La première partie consiste à présenter la modélisation du problème, puis la mise en équation sous la forme d'un problème d'optimisation. La deuxième partie présente l'algorithme utilisé, à savoir l'algorithme Ordered Upwind, et son adaptation à l'optimisation de la trajectoire d'un avion, en tenant compte du vent et à niveau de vol constant. Pour cela, une extension en coordonnées sphériques de l'algorithme est proposée.*

La partie suivante présente la modélisation utilisée pour formuler le problème de planification d'une trajectoire.

# 1 Modélisation du problème de planification d'une trajectoire

Dans un premier temps, nous décrivons le contexte de travail et les hypothèses faites pour problème de planification d'une trajectoire.

## 1.1 Contexte opérationnel et hypothèses de travail

Comme introduit dans le chapitre 1, section 1.1, le déroulement d'un vol se découpe en différentes phases. Nous nous intéressons dans cette étude uniquement à la phase de croisière entre le TOC et le TOD. Durant cette phase, les avions volent à différents niveaux de vol qui sont attribués suivant les règles de la navigation aérienne (cf Chapitre 1 section 1.2.2) et les paramètres de vol de l'avion (le type d'avion, la masse de l'avion, la vitesse ...), de manière à garantir la sécurité et à optimiser la consommation de l'avion. Pour chaque type d'avion, les constructeurs évaluent la vitesse optimale de l'avion à chaque niveau de vol et l'estimation de la consommation correspondante (cf Table 3.1).

| Niveau de Vol | Croisière | | | |
|---|---|---|---|---|
| | TAS | Carburant (kg/min) | | |
| | (kts) | mini | nominal | maxi |
| 330 | 471 | 96,4 | 108,1 | 125,1 |
| 350 | 467 | 90,9 | 103,7 | 114,4 |
| 370 | 465 | 86,3 | 100,4 | 103,9 |
| 390 | 465 | 82,6 | 93,6 | 93,6 |
| 410 | 465 | 79,7 | 83,3 | 83,3 |

TABLE 3.1 – *Extrait des données fournies par Eurocontrol dans la base de données BADA pour un Airbus A340. Au niveau 410, un A340 a une vitesse optimale de 465 kts (861 km/h) et une consommation estimée de 83,3 kg/min.*

### *1.1.1 Atmosphère de référence*

Aujourd'hui, tous les calculs pour le choix optimal des paramètres de vol de l'avion, dont les niveaux de vol, sont effectués dans des conditions atmosphériques de référence. Celles-ci sont spécifiées par l'OACI. Cette atmosphère de référence est appelée International Standard Atmosphere (ISA). Il a été choisi de façon à représenter les distributions

moyennes de pression, de température et de densité suivant l'altitude. Il est défini sous forme d'air idéal supposé dépourvu de vapeur d'eau et de poussières obéissant à la loi des gaz parfaits. Ces caractéristiques sont les suivantes :

- l'air est un gaz parfait sec ;
- les paramètres physiques au niveau de la mer :
  - la pression atmosphérique est de 1013,25 hPa ;
  - la température est de 15 ° C (soit 288,15 K) ;
- la température varie en fonction de l'altitude de la manière suivante :
  - au niveau de la troposphère c'est-à-dire de 0 à 11 km (FL360), la température décroît linéairement de 6,5 ° C par km. C'est dans cette zone que s'effectue la majorité des vols et que se produisent la plupart des phénomènes météorologiques.
  - à la tropopause et à la basse stratosphère, entre 11 et 20 km d'altitude, la température est constante et vaut -56,5 ° C ;

Dans la suite de ces travaux, nous travaillerons à partir de cette atmosphère de référence. Elle est utilisée dans la plupart des travaux en aéronautique.

### *1.1.2 Niveaux de vol*

Dans ces travaux, nous considérons que durant la phase de croisière, l'avion évolue sur un niveau de vol constant en supposant que celui-ci est optimal. En réalité, pour des vols long courrier, l'avion évolue en paliers durant la phase de croisière (les niveaux de vol étant modifiés au cours du vol pour minimiser la consommation). Cependant, on pourrait voir un vol long courrier comme une succession de vols en croisière sur différents niveaux de vol. C'est pourquoi nous nous fixons à un niveau de vol pour une trajectoire. L'optimisation de la trajectoire revient alors à planifier une route sur un espace à deux dimensions et non trois dimensions. Dans ce cadre-là, nous ne prendrons donc pas en compte la composante verticale du vent, mais uniquement les composantes horizontales par rapport à la Terre.

Dans ces travaux, nous supposerons que l'altitude est constante à un niveau de vol fixé en se plaçant dans les conditions atmosphériques standard.

### *1.1.3 Vitesse de l'avion*

Pour des raisons aérodynamiques, la vitesse des avions en phase de croisière est le plus souvent exprimée en Mach, entre 0,65 et 0,85. Le nombre de Mach est un nombre sans unité utilisé en aéronautique. C'est le rapport de la vitesse de l'avion (en anglais, True Air Speed (TAS)), $V_{TAS}$, à la célérité du son, $c$, à l'altitude de vol considérée :

$$M = \frac{V_{TAS}}{c}. \tag{3.1}$$

Les vitesses en aéronautique qui nous serviront par la suite (cf Figure 3.1) sont :

- La vitesse vraie ou **vitesse propre**, $V_{TAS}$, qui représente la vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air dans laquelle il se déplace.

- La **vitesse sol** (en anglais, Ground Speed (GS)), $V_{GS}$ qui représente la vitesse de l'avion par rapport au sol. C'est donc la TAS corrigée de l'effet du vent.

Pour l'optimisation des trajectoires, on va donc chercher à obtenir les vitesses sol les plus élevées pour une même vitesse propre.

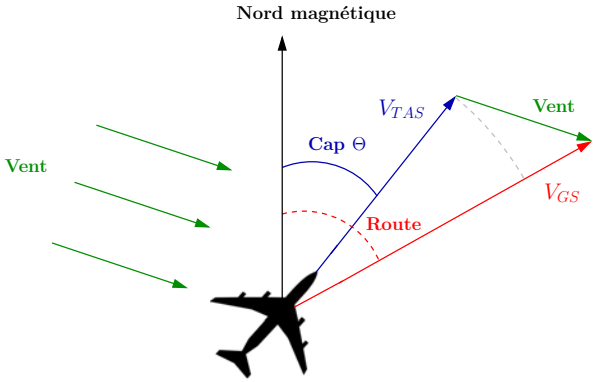



FIGURE 3.1 – *Le triangle des vitesses. La vitesse par rapport au sol ($V_{GS}$) dépend de la vitesse propre ($V_{TAS}$) et du vent. Le cap Θ est l'angle de direction de l'avion par rapport au nord magnétique. La route est la trajectoire réelle en tenant compte de la dérive de l'avion liée au vent.*

Pour ces travaux, on suppose que la phase de croisière est effectuée à Mach constant. C'est le choix fait par la plupart des compagnies aériennes pour limiter les coûts. Dans les conditions atmosphériques standard et avec les hypothèses faites précédemment, cette hypothèse est équivalente à avoir la vitesse propre $V_{TAS}$ constante.

En effet, dans les conditions ISA, la vitesse du son dans l'air est donné par :

$$c_{air} = \sqrt{\gamma RT} \tag{3.2}$$

avec $T$, la température en K, $\gamma$, le coefficient adiabatique ($\gamma_{air} = 1.4$) et $R$, la constante spécifique du gaz parfait ($R = 287 J.kg^{-1}.K^{-1}$)

La vitesse du son dépend donc de la température $T$. De plus, dans les conditions standard, la température dépend uniquement de l'altitude. La vitesse du son peut alors être calculée uniquement en fonction de l'altitude.

Avec les hypothèses précédentes (niveau de vol constant), le vol se déroule à altitude et pression constantes, la vitesse du son est alors constante. La vitesse $V_{TAS}$ dépendant de la vitesse du son et du Mach, ces deux valeurs étant constantes, la vitesse $V_{TAS}$ l'est aussi.

En réalité, les vols ne sont pas effectués à Mach constant, puisque pour arriver à temps, le pilote augmente la vitesse par rapport à l'air si le vent est défavorable et la diminue s'il est favorable. Néanmoins, notre hypothèse de vitesse constante est pertinente car la trajectoire que l'on cherche à planifier donnera un chemin tenant compte des vents pour éviter de modifier la vitesse et ainsi de diminuer la consommation.

### 1.1.4 Consommation de l'avion

Durant la phase de croisière, il est possible d'agir sur deux paramètres au niveau de la conduite de l'avion pour minimiser les coûts liés au vol. Ces deux paramètres sont :

— la consommation en carburant ;
— le temps de vol.

Ces deux paramètres sont liés et dépendent de la vitesse de l'avion.

Pour le calcul de la consommation d'un vol, on peut se baser sur le modèle utilisé par Eurocontrol [Eurocontrol 2013c]. La consommation horaire $C_h$ est la consommation par unité de temps exprimée en général en kg/min. Elle est définie en fonction de la consommation spécifique $C_{sp}$ et de la poussée moteur $F_u$ par la formule suivante :

$$C_h = C_{sp}.F_u \tag{3.3}$$

avec $C_{sp}$ la consommation spécifique exprimée en [kg/(min.kN)] et $F_u$ la poussée moteur exprimée en Newtons. La consommation spécifique $C_{sp}$ est fonction de la vitesse $V_{TAS}$ de l'avion et du type de moteur.

Dans notre cas où la vitesse $V_{TAS}$ est constante, la consommation horaire $C_h$ peut être estimée en fonction du niveau de vol, de la vitesse et du type avion (valeur indiquée dans les bases de données d'Eurocontrol, cf Table 3.1). La consommation horaire $C_h$ est donc prise constante le long de la trajectoire, la consommation du vol dépend alors uniquement du temps de vol. Il suffit donc de jouer sur le temps de vol pour minimiser les coûts. Ces estimations négligent la surconsommation induite par les manoeuvres (virages) pour suivre une trajectoire.

Pour avoir une estimation plus précise de la consommation, le modèle utilisé doit prendre en compte la masse et le roulis de l'avion. Le vol est effectué à niveau de vol constant, la poussée $F_u$ est alors égale à la traînée $D$ : $F_u = D$. La poussée peut être déterminée à partir du coefficient de traînée par la formule suivante :

$$D = \frac{C_D.\rho.V_{TAS}^2.S}{2} \tag{3.4}$$

avec $\rho$ la densité de l'air $[kg/m^3]$, $S$ la surface de référence de l'aile $[m^2]$ et $V_{TAS}$ la vitesse de l'avion $[m/s]$

En condition normale de croisière pour le modèle utilisé, le coefficient de traînée $C_D$ dépend du coefficient de portance $C_L$. En supposant que l'angle d'incidence est nul, le coefficient de portance $C_L$ s'exprime de la façon suivante :

$$C_L = \frac{2.m.g}{\rho.V_{TAS}^2.S.\cos(\phi)} \tag{3.5}$$

avec $m$ la masse de l'avion $[kg]$, $g$ l'accélération de la pesanteur $[m/s^2]$, $\rho$ la densité de l'air $[kg/m^3]$, $V_{TAS}$ la vitesse de l'avion $[m/s]$, $S$ la surface de référence de l'aile $[m^2]$ et $\phi$ l'angle de roulis.

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons, ici, que la consommation dépend du temps de parcours de la trajectoire.

### 1.1.5 Hypothèses de travail

Notre problème se résume à rechercher la trajectoire optimale entre deux points : le point de départ TOC et le point de destination TOD sous les hypothèses suivantes :

- le vol se déroule sous les conditions atmosphériques standard ;
- le niveau de vol est constant : la recherche de la trajectoire s'effectue donc sur un espace à deux dimensions ;
- la vitesse propre de l'avion $V_{TAS}$ est constante ;
- la composante verticale du vent est négligée, les composantes horizontales par rapport à la Terre sont supposées connues.

## 1.2 Modèle de l'avion

À partir des hypothèses faites, le modèle de l'avion est résumé par un point. Le déplacement de ce point au cours du temps est défini à partir de la vitesse de l'avion par rapport au sol, $V_{GS}$. Cette vitesse dépend de la vitesse propre de l'avion $V_{TAS}$, du cap suivi $\Theta$ et du vent $W$ rencontré.

L'équation de déplacement par rapport au sol de l'avion peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V_a \sin(\Theta(t)) + W_x(x(t), y(t), t) \\ \dot{y}(t) = V_a \cos(\Theta(t)) + W_y(x(t), y(t), t) \end{cases} \tag{3.6}$$

avec $(x, y)$ la position de l'avion dans un repère cartésien, $\Theta$ le cap de l'avion, $V_a$ la vitesse propre de l'avion, $W_x(x(t), y(t), t)$ la composante $x$ du vent , $W_y(x(t), y(t), t)$ la composante $y$ du vent. Pour des raisons de simplification d'écriture, nous utiliserons à présent la notation $V_a$ pour la vitesse propre de l'avion.

Il faut bien se rendre compte que le vent induit un changement de vitesse, mais aussi une dérive de l'avion par rapport au cap qu'il suit comme le montre la figure 3.1. Le cap donné est l'angle de la trajectoire par rapport au nord magnétique, mais sa route réelle est différente due à la dérive liée au vent.

Pour simplifier le problème, ce modèle ne prend pas en compte la diminution de la masse de l'avion à mesure que le carburant est consommé. Cette hypothèse nous permet de conserver la même vitesse propre de l'avion $V_a$ durant tout le vol. En réalité, la diminution de la masse de l'avion va modifier sa vitesse optimale. Pour prendre en compte ce paramètre, la vitesse propre de l'avion $V_a$ devrait dépendre de la masse de l'avion au cours du temps.

Maintenant que le problème de planification d'une trajectoire est modélisé, nous allons le formuler sous la forme d'un problème d'optimisation pour ensuite trouver une méthode adéquate pour le résoudre.

# 2 Mise en équation sous la forme d'un problème d'optimisation

## 2.1 Problème de commande optimale

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 section 1.4, le problème de planification d'une trajectoire peut s'écrire sous la forme d'un problème de commande optimale. Le système à contrôler au cours du temps est ici la position de l'avion.

**Critère à optimiser :** L'objectif de nos recherches est de minimiser les coûts liés à la phase de croisière. Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.1.4, les coûts dépendent principalement de deux paramètres corrélés : la consommation et le temps de vol. En gardant la vitesse de l'avion $V_{TAS}$ constante, la consommation dépend principalement du temps de vol. En négligeant la surconsommation induite par les changements de direction, la minimisation du temps de vol permet de minimiser la consommation. Notre critère à optimiser est ici le temps de vol total de la trajectoire.

**État et contrôle du système :** L'état du système à un instant $t$ correspond à la position de l'avion à cet instant dans un espace à deux dimensions. La variable de contrôle est le cap magnétique de l'avion.

**Dynamique du système :** La position au cours du temps de l'avion est régie par l'équation de déplacement (3.6).

**Conditions initiales et finales :** La condition initiale correspond à l'état initial du système c'est-à-dire ici à la position de départ de l'avion. Cette position de départ est le point TOC qui définit le début de la phase de croisière. La condition finale est l'état final du système c'est-à-dire le point de destination de la trajectoire. Ici, il correspond à la fin de la phase de croisière c'est-à-dire le point TOD. Le temps à l'état final est inconnu, le problème est donc un problème à temps final libre.

Le problème de commande optimale peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x,y) = \min\limits_{\Theta} & \int_{t_0}^{t_f} 1dt \quad = \quad \min\limits_{\Theta} \quad (t_f - t_0) \\ \text{s.t.} & \dot{x}(t) = V_a \sin(\Theta(t)) + W_x(x(t), y(t), t) \\ & \dot{y}(t) = V_a \cos(\Theta(t)) + W_y(x(t), y(t), t) \\ & (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \\ & (x(t_f), y(t_f)) = (x_f, y_f) \end{cases} \tag{3.7}$$

Le critère à optimiser en commande optimale est formulé par l'intégrale d'un coût instantané $g(x(t), a(t))$. Ici, ce coût instantané est constant et égal à 1.

Pour la suite des calculs, la variable de contrôle sera définie par $\mathbf{a}(t) = (\sin(\Theta(t)), \cos(\Theta(t)))$, un vecteur unitaire dans la direction du cap de l'avion. Le vent sera aussi supposé constant au cours du temps mais sera variable dans l'espace ($W_x(x(t), y(t), t) = W_x(x(t), y(t)$ et $W_y(x(t), y(t), t) = W_y(x(t), y(t))$. Dans ce cas, le problème peut se réécrire :

$$\begin{cases} u(\mathrm{X}) = \min\limits_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} & (t_f - t_0) \\ \text{s.t.} & \dot{\mathrm{X}} = f(\mathrm{X}(t), \mathbf{a}(t)) \\ & \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \text{ et } \mathrm{X}(t_f) = \mathrm{X}_f, \end{cases} \tag{3.8}$$

où X est la position de l'avion, et $f(\mathrm{X}(t), \mathbf{a}(t))$ est la vitesse de l'avion par rapport au sol $V_{GS}$ à l'instant $t$. Dans l'équation (3.8), $u(\mathrm{X})$ représente la durée minimum nécessaire pour arriver en $\mathrm{X}_f$ en partant du point X.

## 2.2 Équation d'Hamilton-Jacobi

Le problème de commande optimale (3.8) que l'on souhaite résoudre peut s'écrire sous la forme d'une équation aux dérivées partielles appelée équation d'Hamilton-Jacobi. La solution du problème de commande optimale est ainsi obtenue par la résolution de cette équation. L'avantage de cette approche réside dans l'obtention d'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité lorsque l'équation est résolue sur tout l'espace.

Comme présenté dans le Chapitre 2, l'obtention de l'équation d'Hamilton-Jacobi est basée sur le principe d'optimalité de Bellman qui s'énonce de la manière suivante :
*Une solution optimale pour le problème contient les solutions optimales pour tous les sous-problèmes.*

Ce principe d'optimalité permet de résoudre le problème d'optimisation en le décomposant de manière récursive en sous-problèmes liés entre eux. De manière plus générale, le principe d'optimalité sur un intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ s'écrit :

$$J^*(x(t_k), t_k) = \min_{x(.),a(.)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(x(.), a(.))dt + J^*(x(t_{k+1}), t_{k+1}) \tag{3.9}$$

avec $g(x(.), a(.))$ le coût instantané.

Une illustration de ce principe pour un exemple simple a été faite dans le Chapitre 2 Section 1.4.3.

L'équation d'Hamilton-Jacobi s'obtient en partant de la formulation de Bolza du problème de commande optimale (cf Eq. (2.8)) et en utilisant le principe d'optimalité décrit précédemment (cf Eq. (3.9)). Les principales étapes du passage à l'équation d'Hamilton-Jacobi sont décrites en Annexe C. Pour plus de détails, on pourra se référer au livre suivant [Bertsekas 1995]. L'équation d'Hamilton-Jacobi ainsi obtenue est la suivante :

$$\nabla_t J^*(t, x) + \min_{a\in\mathbb{A}} [g(x, a) + \nabla_x J^*(t, x).f(x, a)] = 0 \tag{3.10}$$

avec $J^*(t, x)$ le coût optimal au temps $t$ et à l'état $x$.

Dans le cas du problème de la planification d'une trajectoire optimale [Vladimirsky 2001], pour une vitesse de mobile ne dépendant pas du temps (c'est pourquoi dans notre cas, le vent est supposé constant au cours du temps), le coût optimal $J^*$ correspond à la durée minimale pour arriver à destination ; il ne dépend donc pas du temps et reste constant. L'équation d'Hamilton-Jacobi est ainsi stationnaire et peut-être simplifiée. On utilisera à présent la notation $u$ pour le coût optimal représentant la durée minimale d'arrivée. De plus, pour obtenir le temps minimum d'arrivée, le coût instantané $g(x, a)$ utilisé dans la formulation du problème est égal à 1. Ainsi, dans le cas de la planification d'une trajectoire optimale, l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.10) peut se réduire à l'équation suivante :

$$\max_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} \{-\nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X}, \mathbf{a})\} = 1 \tag{3.11}$$

On rappelle que $f$ correspond à la vitesse de déplacement, ici, la vitesse de l'avion par rapport au sol. Le détail des calculs peut être trouvé en Annexe C.

Dans le cas général, les équations d'Hamilton-Jacobi n'ont pas de solutions classiques c'est-à-dire que la solution n'est pas différentiable partout. On parle alors de solutions faibles. Une solution faible pour une équation différentielle ordinaire ou partielle est une fonction pour laquelle les dérivées ne sont pas toutes définies, mais qui néanmoins satisfait l'équation dans un certain sens précisément défini. Il existe de nombreuses définitions différentes de la solution faible, suivant les différentes classes d'équations. Pour le cas des équations d'Hamilton-Jacobi du premier ordre, la notion de solution de viscosité a été introduite en 1981 par M.G. Crandall et P.L. Lions[Crandall 1983] (voir aussi M.G. Crandall, L.C. Evans et P.L. Lions [Crandall 1984]).

La partie suivante présente la méthode choisie pour résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi.

# 3 Algorithme Ordered Upwind

L'algorithme Ordered Upwind a été introduit dans [Sethian 2001] et [Sethian 2003] pour résoudre l'équation (3.11). Nous présenterons tout d'abord le principe général, puis nous aborderons plus en détail les différentes étapes de l'algorithme.

## 3.1 Principe général

La méthode Ordered Upwind est basée sur le même principe que les méthodes précédemment développées appelées Level Set [Sethian 1999b] et plus particulièrement la méthode Fast Marching. Ces méthodes permettent de suivre l'évolution d'un front d'onde qui consiste à déformer une courbe ou une surface à partir d'une équation aux dérivées partielles. La résolution de l'équation (3.11) peut être vue comme la propagation d'un front d'onde qui représente le coût minimum d'arrivée calculé au fur et à mesure de la propagation. Le front va ainsi se déformer en fonction de l'environnement. Le front ici se

déplace toujours dans le même sens. L'idée générale est alors la suivante : on fait propager une onde à partir du point d'arrivée, dès que le front d'onde a atteint le point de départ, on remonte du point de départ jusqu'au point d'arrivée pour générer la trajectoire optimale. Le front est donc une courbe d'iso-temps minimal pour parvenir au but.

Pour mieux comprendre la corrélation entre la résolution de l'équation (3.11) et la propagation d'un front, on peut réécrire l'équation (3.11) de la façon suivante :

$$\|\nabla u(\mathrm{X})\| \, F\left(\mathrm{X}, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}\right) = 1 \tag{3.12}$$

avec $F$ qui représente la vitesse de propagation du front d'onde et définie par :

$$F\left(\mathrm{X}, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}\right) = \max_{\mathbf{a}} \left\{ -\frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|} . f(\mathrm{X}, \mathbf{a}) \right\} \tag{3.13}$$

Pour calculer la fonction de coût $u$ sur tout l'espace, on discrétise notre espace et on évalue la fonction $u$ uniquement aux nœuds du maillage. Les valeurs de $u$ aux nœuds sont calculées au fur et à mesure de la propagation du front. Pour satisfaire le principe d'optimalité de Bellman, le calcul des valeurs aux nœuds s'effectue dans l'ordre croissant à partir des valeurs précédemment calculées. On parle alors de principe de causalité pour lequel la valeur est calculée dans l'ordre croissant à partir des valeurs précédentes. Ce principe permet d'éviter les itérations et de calculer les valeurs de $u$ en un seul passage.

Dans notre problème, les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi (3.11) sont en fait les trajectoires optimales du problème de commande optimale. Nous savons donc que la fonction coût $u$ est strictement croissante le long des caractéristiques. La valeur $u$ est ainsi calculée graduellement à partir des valeurs précédentes le long d'une caractéristique. Ce principe rend l'algorithme très efficace en permettant le calcul de $u$ en une seule passe. Dans le cas général, la direction des caractéristiques n'est pas connue en avance. La force de l'algorithme vient de sa capacité à calculer la direction de la caractéristique en même temps que la solution $u$ est construite.

Pour satisfaire la **propriété de causalité**, la méthode pour le calcul de $u$ est basée sur l'observation que les schémas de discrétisation décentrés à droite possèdent cette propriété. On utilise alors deux nœuds précédemment calculés $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ pour le calcul de $u$ au nœud X. La caractéristique passant par X doit alors se situer à l'intérieur du triangle défini par les nœuds X, $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ pour obtenir la propriété de causalité suivante : *Si* $u(X)$ *est calculée sous l'hypothèse que la caractéristique passant par* $X$ *passe à l'intérieur du triangle* $XX_jX_k$*, alors* $u(X) \geqslant \max(u(X_j), u(X_k))$.

Contrairement à la propagation dans un domaine isotrope, où les propriétés dépendent uniquement de la position, la caractéristique ne coïncide pas avec la normale au front. C'est ici notre cas avec le vent. Dans les domaines anisotropes, la direction de la caractéristique et du gradient de $u$ sont différentes. Le triangle peut contenir la caractéristique

passant par X même si le gradient ne pointe pas à l'intérieur de celui-ci. Pour maintenir le principe de causalité, $u(\mathrm{X})$ doit être calculé à partir du triangle contenant la caractéristique.

Ce principe est la base du fonctionnement de l'algorithme et permet, dans [Sethian 2003], de prouver que l'algorithme converge vers la solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.11) (solution faible de l'équation différentielle).

## 3.2 Algorithme

Pour calculer la fonction coût, $u$, on discrétise l'espace sous la forme d'un maillage triangulaire non régulier en deux dimensions. Prenons $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ un élément triangulaire du maillage, la valeur de $u(\mathrm{X})$ est calculée à partir des valeurs $u(\mathrm{X}_j)$ et $u(\mathrm{X}_k)$ si la caractéristique passant par le point X se situe à l'intérieur du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$. Pour garantir le principe de causalité c'est-à-dire pour calculer la valeur des nœuds dans l'ordre croissant, on définit trois ensembles pour les points du maillage. Prenons $h$ la distance maximum entre deux nœuds adjacents du maillage (c'est-à-dire si les nœuds $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ sont adjacents, alors $\|\mathrm{X}_j - \mathrm{X}_k\| \leqslant h$). Tous les nœuds du maillage appartiennent à une des classes suivantes (cf Fig.3.2) :

- *Accepted* : c'est l'ensemble des nœuds où la valeur de la fonction coût $u$ a été calculée. Les valeurs sont figées et ne peuvent plus être modifiées.
- *Considered* : c'est l'ensemble des nœuds où une estimation $v$ de la fonction coût $u$ a été calculée. Cette valeur peut être modifiée.
- *Far* : c'est l'ensemble des nœuds où une estimation $v$ de la fonction coût $u$ n'a pas encore été calculée.

Deux autres ensembles sont aussi définis :

- *AcceptedFront* : c'est un sous-ensemble des nœuds *Accepted* qui sont adjacents à au moins un noeud n'appartenant pas à l'ensemble *Accepted* (c'est-à-dire appartenant à l'ensemble *Considered* ou l'ensemble *Far*).
- *AF* : c'est un ensemble constitué des segments $[\mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k]$, tel que $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ sont des nœuds adjacents appartenant à l'ensemble *AcceptedFront*, et $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ sont adjacents à un nœud *Considered* X.

Pour chaque nœud *Considered* X, on définit un nouvel ensemble appelé *NearFront*. C'est un sous-ensemble de *AF* dont les nœuds sont proches du nœud X appartenant à l'ensemble Considered. L'espace est défini de la façon suivante :

$$NF(\mathrm{X}) = \left\{ (\mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k) \in AF \mid \exists \tilde{\mathrm{X}} \in (\mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k) \ s.t. \ \left\| \tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X} \right\| \leqslant h \frac{f_2}{f_1} \right\}$$

où $f_1$ et $f_2$ sont respectivement la vitesse minimum et la vitesse maximum de l'avion (rappelons que $h$ est la distance maximum entre deux noeuds adjacents du maillage).

Maintenant que l'on a défini les différents ensembles pour l'appartenance des nœuds du maillage, l'algorithme Ordered Upwind peut être présenté. Ces différents ensembles

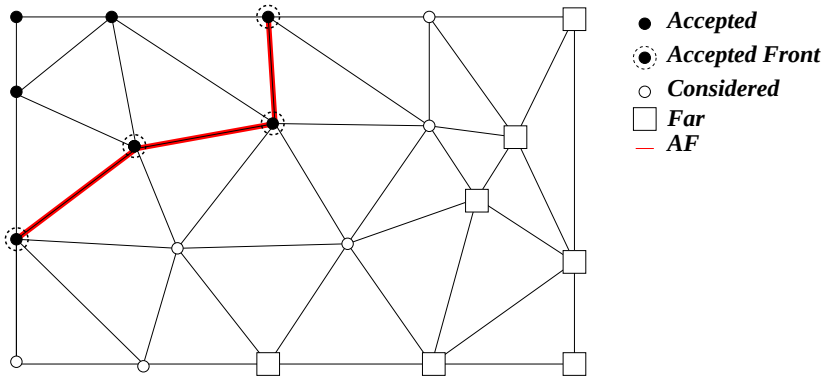



FIGURE 3.2 – *Tous les nœuds du maillage sont assignés à un des trois ensembles : Accepted, Considered, et Far. L'ensemble Accepted Front est un sous-ensemble de l'ensemble Accepted. L'ensemble AF décrit le front.*

permettent de calculer dans l'ordre croissant les valeurs de la fonction coût $u$ afin de respecter le principe de causalité.

---

**L'algorithme Ordered Upwind**

1. Initialisation de tous les nœuds dans l'ensemble *Far* ($u = +\infty$) ;
2. Transfert du nœud de départ de l'onde $\mathrm{X}_0$ dans l'ensemble *Accepted* ($u(\mathrm{X}_0) = 0$) ;
3. Transfert de tous les nœuds X adjacents au point de départ dans l'ensemble *Considered* et évaluation de la valeur d'essai $v(\mathrm{X})$ d'après :

$$v(\mathrm{X}) := \min_{\mathrm{X}_i \in NF(\mathrm{X})} v_{\mathbf{x_i}}(\mathrm{X}) \tag{3.14}$$

4. Recherche du nœud $\bar{\mathrm{X}}$ avec la plus petite valeur $v$ parmi tous les nœuds *Considered* à l'aide d'un algorithme de tri ;
5. Transfert du nœud $\bar{\mathrm{X}}$ dans l'ensemble *Accepted* ($u(\bar{\mathrm{X}}) = v(\bar{\mathrm{X}})$) et mise à jour de l'ensemble *AcceptedFront* ;
6. Transfert des nœuds *Far* X adjacents au nœud $\bar{\mathrm{X}}$ dans l'ensemble *Considered* et évaluation de leur valeur d'essai à partir de :

$$v(\mathrm{X}) := \min_{\mathrm{X}_j \mathrm{X}_k \in NF(\mathrm{X})} v_{\mathbf{x}_j \mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) \tag{3.15}$$

7. Réévaluation de la valeur d'essai pour tous les points *Considered* X tels $\bar{\mathrm{X}}\mathrm{X}_i \in NF(\mathrm{X})$ par :

$$v(\mathrm{X}) = \min \left\{ v(\mathrm{X}), \min_{\bar{\mathrm{X}}\mathrm{X}_i \in NF(\mathrm{X})} v_{\bar{\mathbf{x}},\mathbf{x_i}}(\mathrm{X}) \right\} \tag{3.16}$$

8. Tant que l'ensemble *Considered* n'est pas vide, retour à l'étape 4.

Par exemple, si on part de l'état de l'algorithme sur la figure 3.2, les étapes sont les suivantes. En partant de l'étape 4, on recherche parmi les noeuds Considered la plus petite valeur. Celui-ci correspond au noeud $\bar{X}$ noté sur la figure 3.3. Ce noeud est alors transféré dans l'ensemble Accepted et l'ensemble AcceptedFront est mis à jour. On calcule ou on réévalue ensuite la valeur aux noeuds voisins de $\bar{X}$. Enfin, si l'ensemble Considered n'est pas vide, on revient à l'étape 4.

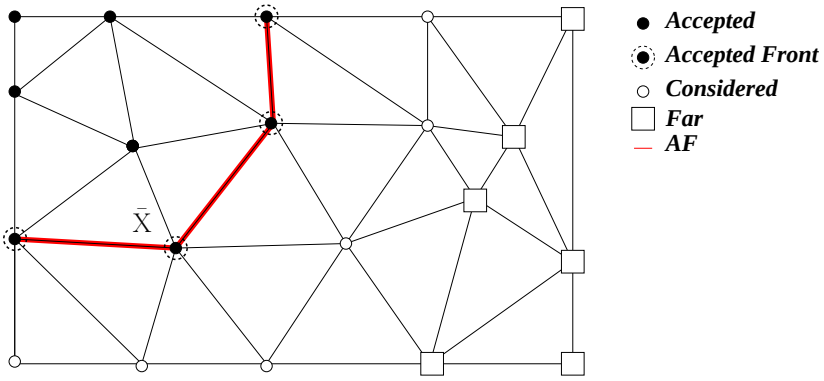



FIGURE 3.3 – *Exemple de l'état suivant, par rapport à la figure 3.2, en appliquant l'algorithme Ordered Upwind.*

L'étape 6 de l'algorithme est l'étape la plus délicate, elle consiste à calculer la valeur d'essai $v(X)$ par la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi à partir de la valeur $u$ aux nœuds $X_j$ et $X_k$. On considère alors qu'à l'intérieur du triangle, le vent est constant ainsi le contrôle de l'avion $a$ est constant. Cette propriété est basée sur le fait que la trajectoire optimale est la ligne droite dans un champ de vent constant. Elle est prouvée dans le chapitre 4 section 1.

Pour estimer cette valeur d'essai $v$ au nœud X, deux méthodes ont été développées. La première est nommée discrétisation semi-Lagrangienne et la seconde discrétisation Eulérienne.

### *3.2.1 Discrétisation semi-Lagrangienne*

Cette discrétisation est basée sur l'application directe du principe d'optimalité de Bellman et non sur la discrétisation de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Le principe s'apparente à la programmation dynamique dans le cas discret : la valeur d'essai $v(X)$ est calculée à partir de la somme du temps minimum calculé pour un point appartenant au segment $[X_j\ X_k]$ et du temps nécessaire pour parcourir le segment entre le nœud $v(X)$ et le point appartenant au segment $[X_j\ X_k]$.

Plus formellement, on définit le point $\tilde{X}$ appartenant au segment $[X_j\ X_k]$ par (cf Fig. 3.4) :

$$\tilde{X} \ = \ \xi X_j \ + \ (1-\xi)X_k \text{ avec } \xi \in [0,1]$$

La valeur $u$ au point $\tilde{\mathrm{X}}$ peut être approchée à partir des valeurs $u(\mathrm{X}_j)$ et $u(\mathrm{X}_k)$ par la relation suivante :

$$u(\tilde{\mathrm{X}}) = \xi u(\mathrm{X}_j) + (1-\xi)u(\mathrm{X}_k)$$

On calcule ensuite le temps nécessaire pour atteindre le point $\tilde{\mathrm{X}}$ à partir du nœud X. La vitesse $f$ est définie par la vitesse de l'avion par rapport au sol dans la direction du point $\tilde{\mathrm{X}}$ donnée par le vecteur unitaire $\mathbf{a}_\xi$ :

$$\mathbf{a}_\xi = \frac{\tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}}{\left\|\tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}\right\|} \tag{3.17}$$

Ainsi, le temps nécessaire pour atteindre le point $\tilde{\mathrm{X}}$ à partir du nœud X est donné par :

$$t_{\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\left\|\tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}\right\|}{f(\mathrm{X}, \mathbf{a}_\xi)} \tag{3.18}$$

Au final, par le principe d'optimalité, l'approximation de $v_{\mathbf{x_j x_k}}(\mathrm{X})$ pour le nœud X à partir du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ est donnée par :

$$v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) = \min_{\xi\in[0,1]} \left\{ \frac{\left\|\tilde{\mathrm{X}} - \mathrm{X}\right\|}{f(\mathrm{X}, \mathbf{a}_\xi)} + u(\tilde{\mathrm{X}}) \right\} \tag{3.19}$$

Le calcul de l'approximation de $v_{\mathbf{x_j x_k}}(\mathrm{X})$ implique la recherche du $\xi$ optimale. À chaque itération et pour chaque nœud, la résolution d'une minimisation locale est alors nécessaire.

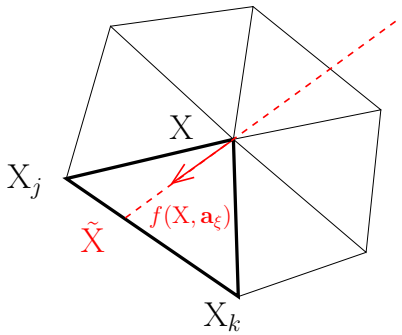



FIGURE 3.4 – *Maillage triangulaire : chaque trajectoire est approchée par une ligne droite $X\tilde{X}$ dans le triangle $(X, X_j, X_k)$.*

### *3.2.2 Discrétisation Eulérienne*

Pour calculer la valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})$, l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.12) est discrétisée en utilisant un schéma de différence finie décentré sur le triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ avec $\mathrm{X}_j$ et $\mathrm{X}_k$ deux nœuds adjacents. Le gradient $\nabla u(\mathrm{X})$ est approché à partir de l'approximation

des dérivées directionnelles dans les directions définies par les vecteurs $P_j$ et $P_k$ (illustré sur la figure 3.5). Les deux vecteurs $P_j$ et $P_k$ doivent être linéairement indépendants et sont définis par :

$$P_j = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{X}_j}{\|\mathrm{X} - \mathrm{X}_j\|} \qquad \text{et} \qquad P_k = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{X}_k}{\|\mathrm{X} - \mathrm{X}_k\|} \tag{3.20}$$

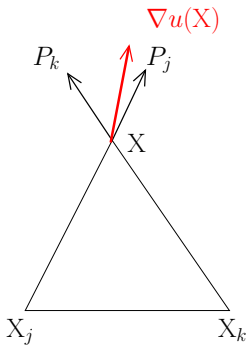



FIGURE 3.5 – *Le gradient $\nabla u(X)$ est approché à partir de l'approximation des dérivées directionnelles dans les directions définies par les vecteurs $P_j$ et $P_k$.*

La matrice carrée $P$ de dimension 2 est définie à partir des vecteurs $P_j$ et $P_k$ sur ses lignes et est inversible.

$$P = \begin{bmatrix} P_j \\ P_k \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

On pose $w(\mathrm{X})$ le vecteur constitué des dérivées directionnelles de $u$ dans les directions $P_j$ et $P_k$ au point X. Le gradient $\nabla u(\mathrm{X})$ peut ainsi être approché à partir des dérivées directionnelles par la formule suivante :

$$\nabla u(\mathrm{X}) = P^{-1} w(\mathrm{X}) \qquad \text{avec} \qquad w(\mathrm{X}) = \begin{bmatrix} \frac{u-u_j}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_j\|} \\ \frac{u-u_k}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_k\|} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Les dérivées directionnelles $w(\mathrm{X})$ sont approchées à partir d'une discrétisation au premier ordre par :

$$w(\mathrm{X}) \approx v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\alpha + \beta \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_j\|} \\ \frac{1}{\|\mathrm{x}-\mathrm{X}_k\|} \end{bmatrix} \text{ et } \beta = \begin{bmatrix} \frac{-u(\mathrm{X}_j)}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_j\|} \\ \frac{-u(\mathrm{X}_k)}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_k\|} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

L'équation discrétisée est alors :

$$\left\| P^{-1} w(\mathrm{X}) \right\| F(\mathrm{X}, \frac{P^{-1} w(\mathrm{X})}{\|P^{-1} w(\mathrm{X})\|}) = 1 \tag{3.24}$$

La valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})$ est alors obtenue en résolvant l'équation (3.24). Dans la plupart des cas, cette équation est une équation non-linéaire, le calcul des racines nécessite l'utilisation

d'un algorithme itératif. Nous verrons par la suite (section 4.1), que pour la modélisation que nous avons choisie, cette équation est plus simple à résoudre puisque celle-ci est une équation quadratique.

Comme expliqué dans la section 3.1, l'algorithme utilise la propriété que la fonction de coût $u$ est strictement croissante le long des caractéristiques. Cette propriété permet de calculer au fur et mesure la valeur de la fonction coût $u(\mathrm{X})$ en fonction de la valeur précédente le long de la caractéristique. Pour s'assurer que la valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ calculée à partir de l'équation discrétisée (3.24) est bien une bonne approximation de la fonction de coût $u$ au point X ; la caractéristique pour le nœud X doit être dirigée à l'intérieur du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$. Sinon, la valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ pour le point X n'est pas correcte et elle doit être calculée à partir d'un autre triangle. La figure (3.6) illustre ses deux cas.

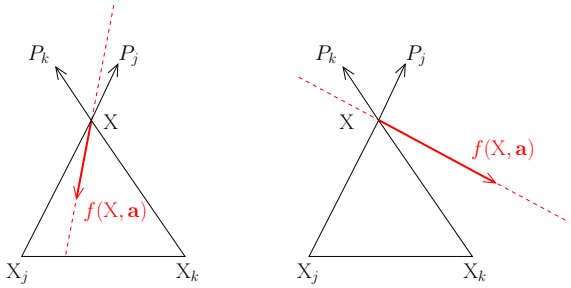



FIGURE 3.6 – *Exemple d'un cas où le nœud X peut être évalué à partir des noeuds $X_j$ et $X_k$ (cas de gauche) et d'un cas où il doit être évalué à partir d'un autre triangle (cas de droite). La direction de la caractéristique $f(X, \mathbf{a})$ ne pointe pas à l'intérieur du triangle, le principe de causalité ne peut pas alors être vérifié.*

Pour vérifier que la caractéristique pour le nœud X est dirigée à l'intérieur du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$, nous devons calculer une approximation de la direction de la caractéristique qui dépend du problème que l'on traite.

### 3.2.3 Complexité de l'algorithme

Une analyse de la complexité de l'algorithme Ordered Upwind a été effectuée dans [Vladimirsky 2001] et [Sethian 2003]. Il en résulte que l'algorithme a une complexité en $O(N \log N)$ avec $N$ le nombre de points de discrétisation. Toutefois, il faut noter que le coefficient de la complexité est en $\frac{f_2}{f_1}$ avec $f_1$, $f_2$ respectivement la vitesse minimum et la vitesse maximum de l'avion. L'anisotropie de l'espace a donc une influence sur la rapidité de la méthode. Plus l'anisotropie sera faible et plus l'algorithme sera rapide. Pour notre cas, la vitesse air de l'avion étant beaucoup plus grande que la vitesse du vent. Le coefficient $\frac{f_2}{f_1}$ reste assez faible, au maximum de l'ordre de deux.

Cette complexité de l'algorithme s'explique par :

- l'évaluation des $N$ nœuds de la grille compte pour le facteur $N$ ;
- la liste Considered doit être maintenue dans l'ordre croissant. Cette étape explique le facteur en $O(\log N)$.

- le coefficient $\frac{f_2}{f_1}$ s'interprète par le fait qu'à chaque fois qu'un point est mis dans la liste Accepted, il y a au plus $\frac{f_2}{f_1}$ points de la liste Considered à réévaluer ;

Maintenant que l'algorithme général est présenté, nous allons voir comment il peut être utilisé pour l'optimisation d'une trajectoire d'avion.

# 4 Application à l'optimisation d'une trajectoire d'avion

Pour l'application de l'algorithme Ordered Upwind à l'optimisation d'une trajectoire d'avion, nous avons choisi d'utiliser la discrétisation Eulérienne (présentée dans la section 3.2.2) puisque celle-ci nous permet de résoudre seulement une équation quadratique lors du calcul de la fonction coût au cours de l'algorithme. Cette étape est présentée dans la section suivante.

## 4.1 Discrétisation Eulérienne : formulation quadratique du problème

Dans ces travaux, la vitesse de l'avion par rapport au sol est modélisée par $f(\mathrm{X}, \mathbf{a}) = V_a\mathbf{a} + W$. À partir de cette modélisation et de la définition de la vitesse du front $F(\mathrm{X}, \mathbf{n}) = \max_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} \{-\mathbf{n}.f(\mathrm{X}, \mathbf{a})\}$ (cf Eq. (3.13)), on peut simplifier l'écriture de la vitesse du front. On obtient alors l'écriture suivante (les détails de la simplification peuvent être trouvés en Annexe D) :

$$F(\mathrm{X}, \mathbf{n}) = V_a - \langle\, \mathbf{n}, W \,\rangle \tag{3.25}$$

À partir de (3.25), l'équation (3.24) est utilisée pour calculer la valeur d'essai $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})$ à partir du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$. Elle est réécrite de la manière suivante :

$$\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\|^2 V_a^2 = \left(1 + \langle P^{-1}w(\mathrm{X}), W\rangle\right)^2 \tag{3.26}$$

Le vecteur $P^{-1}w(\mathrm{X})$ correspond à l'approximation du gradient $\nabla u$ au nœud X en fonction des dérivées directionnelles de $u$ dans les directions définies par les côtés du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$.

L'équation (3.26) peut se réécrire plus simplement sous la forme de l'équation quadratique suivante (on pourra se référer à l'annexe E pour les détails des calculs) :

$$Av^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + Bv_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + C = 0 \tag{3.27}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\alpha\rangle - \langle P^{-1}\alpha, W\rangle^2 \\
B &= 2V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\beta\rangle - 2\langle P^{-1}\alpha, W\rangle\left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right) \\
C &= V_a^2\langle P^{-1}\beta, P^{-1}\beta\rangle - \left[\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right]^2
\end{aligned}$$

La valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ est alors calculée en résolvant l'équation quadratique (3.27). Pour s'assurer que la valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ est une approximation correcte de la valeur coût $u$ au nœud X, il faut vérifier que la direction de la caractéristique pour le nœud X pointe à l'intérieur du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$. Pour cela, on calcule une approximation de la direction de la caractéristique au nœud X. Dans notre cas, la caractéristique correspond à la trajectoire de l'avion. D'où, au nœud X, la direction de la caractéristique est égale au vecteur vitesse de l'avion :

$$f(\mathrm{X}, \mathbf{a}) = -V_a \, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|} \; + \; W(\mathrm{X}) \tag{3.28}$$

Il faut donc aussi calculer une approximation du gradient de $u$. Il peut être approché par :

$$\nabla u(\mathrm{X}) \approx P^{-1} \left( \alpha v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + \beta \right) \tag{3.29}$$

À partir de cette estimation de la caractéristique au nœud X, on est capable de vérifier si la direction est dirigée ou non à l'intérieur du triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$. Pour cela, on effectue un changement de base pour travailler dans une nouvelle base définie par les vecteurs $P_j$ et $P_k$. Dans cette base, la direction de la caractéristique est égale à : $(P^T)^{-1} f(\mathrm{X}, \mathbf{a})$ c'est-à-dire $(P^T)^{-1} \left( -V_a \, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|} \; + \; W(\mathrm{X}) \right)$. Cette propriété est vérifiée à condition que toutes les composantes du vecteur donnant la direction de la caractéristique dans la base $(P_j, P_k)$ soient négatives. Cette condition permet de satisfaire le principe de causalité et donc le principe d'optimalité.

Par contre, cette condition est basée sur l'estimation de la direction de la caractéristique et non sur la direction exacte. Cette approximation peut amener des erreurs lors de la vérification de cette condition. En effet, un des éléments du vecteur donnant la direction peut être proche de zéro et du fait des erreurs d'approximation, cet élément peut être positif. La propriété de causalité ne sera alors pas satisfaite, même si la direction exacte de la caractéristique satisfait le critère. Ce problème apparaît seulement quand la direction est dans la même direction qu'un des vecteurs de base $P_j$ ou $P_k$, c'est-à-dire lorsque $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ peut être calculé soit à partir de la valeur $u$ au nœud $\mathrm{X}_j$ ou soit à partir de la valeur $u$ au nœud $\mathrm{X}_k$. Dans ce cas, la valeur d'essai est calculée en prenant le minimum entre le temps calculé en passant par le nœud $\mathrm{X}_j$ ou en passant par le nœud $\mathrm{X}_k$.

Au final, la valeur $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ est calculée de la manière suivante :

- si $P_j$ et $P_k$ sont linéairement indépendant et que le critère de causalité est satisfait, $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ est la solution de l'équation quadratique (3.27)
- sinon : $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k} = \min(v_{\mathbf{x}_j}(\mathrm{X}), v_{\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}))$ avec $v_{\mathbf{x}_i}(\mathrm{X}) = \frac{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_i\|}{f(\mathrm{X}, \frac{\mathrm{X}-\mathrm{X}_i}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_i\|})} + u(\mathrm{X}_i)$

Nous avons choisi de travailler avec la discrétisation Eulérienne puisque l'étape du calcul de la valeur d'essai $v$ revient à résoudre une équation quadratique. Contrairement à la discrétisation semi-Lagrangienne, cette étape ne nécessite pas l'utilisation d'algorithmes itératifs. Cependant, dans la plupart des cas, l'écriture de la vitesse du front n'est pas aussi simple et l'équation discrétisée par la méthode eulérienne ne sera pas nécessairement

quadratique et nécessitera donc d'utiliser des algorithmes itératifs permettant de résoudre cette équation non linéaire.

L'algorithme Ordered Upwind nous a permis de calculer la durée minimale pour atteindre l'arrivée à partir de n'importe quel point de l'espace. Maintenant, à partir de ces informations, nous allons construire la trajectoire du point de départ à l'arrivée.

## 4.2 Calcul de la trajectoire

La trajectoire optimale est construite en partant du point de départ jusqu'au point d'arrivée en suivant la courbe caractéristique au point de départ. La courbe caractéristique correspond à la trajectoire et est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{X}}{dt} = -V_a \dfrac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|} + W(\mathrm{X}) \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \ , \qquad \text{avec } \mathrm{X}_0 \text{ le point de départ de la trajectoire} \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation, on utilise une résolution classique avec la méthode d'Euler explicite dont le schéma est le suivant :

$$\mathrm{X}_{t+1} = \mathrm{X}_t + \mathrm{dt}\left(-V_a \frac{\nabla u(\mathrm{X}_t)}{\|\nabla u(\mathrm{X}_t)\|} + W(\mathrm{X}_t)\right)$$

On fixe un pas de temps dt et la condition initiale correspond au point de départ $\mathrm{X}_0$ de la trajectoire.

Comme évoquée dans la description du problème, la trajectoire que l'on souhaite calculer doit éviter des obstacles pouvant représenter des conditions météorologiques difficiles.

## 4.3 Prise en compte d'obstacles

Pour prendre en compte des obstacles lors de la planification d'une trajectoire, le principe est assez simple. La vitesse de propagation du front est modifiée en fonction des obstacles rencontrés. Elle est ralentie dans les zones à éviter. Par conséquent, la valeur de coût $u$ calculée est plus élevée, pénalisant ou interdisant le passage par ces zones.

Pour modifier la vitesse du front, une carte de valeurs $\xi$ est créée en fonction de l'environnement. Les valeurs de $\xi$ sont choisies entre 0 et une valeur maximale $\xi_{\max}$. La valeur 0 signifie qu'il n'y a pas d'obstacles et $\xi_{\max}$ représente les obstacles infranchissables. Les valeurs intermédiaires sont attribuées aux zones à éviter de préférence, mais non strictement. Plus la valeur $\xi$ sera proche de $\xi_{\max}$ et plus la valeur de coût $u$ sera élevée, pénalisant un peu plus le passage par cette zone.

La valeur $\xi$ est alors utilisée pour modifier la vitesse de propagation du front d'onde dans l'équation (3.12) à résoudre. L'équation à résoudre est alors la suivante :

$$\|\nabla u(\mathrm{X})\| \underbrace{(1-\xi(\mathrm{X}))F(\mathrm{X},\mathbf{n})}_{\substack{\text{vitesse du front d'onde} \\ \text{en fonction des obstacles}}} = 1 \tag{3.30}$$

avec $(1-\xi(\mathrm{X}))F(\mathrm{X},\mathbf{n})$ la vitesse du front d'onde modifiée en fonction des obstacles. La valeur maximale $\xi_{max}$ doit être inférieure à 1 pour garder la vitesse du front strictement positive.

Le calcul de la valeur du coût $u$ s'effectue de la même manière que précédemment (cf Section 4.1), l'équation quadratique à résoudre dépend maintenant aussi du paramètre $\xi$. En reprenant les étapes effectuées dans la section 4.1, on obtient :

$$Av^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + Bv_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + C = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= (1-\xi)^2\ V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\alpha\rangle - (1-\xi)^2\ \langle P^{-1}\alpha, W\rangle^2 \\
B &= 2\ (1-\xi)^2\ V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\beta\rangle - 2\ (1-\xi)\ \langle P^{-1}\alpha, W\rangle \Big((1-\xi)\ \langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\Big) \\
C &= (1-\xi)^2\ V_a^2\langle P^{-1}\beta, P^{-1}\beta\rangle - \Big[(1-\xi)\ \langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\Big]^2
\end{aligned}$$

Comme l'optimisation d'une trajectoire aérienne par rapport au vent est plus intéressante pour des longs parcours, nous devons prendre en compte la forme de la Terre qui n'est pas un plan pour les calculer. C'est pourquoi nous allons dès lors travailler en coordonnées sphériques.

## 4.4 Transformation en coordonnées sphériques

L'algorithme Ordered Upwind présenté dans la section 3 a été développé pour résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.12) en coordonnées cartésiennes. Il repose donc sur l'hypothèse que les géodésiques sont des lignes droites. Rappelons que les géodésiques sont les plus courts chemins en termes de distance entre deux points dans un espace donné. Afin de travailler avec des vols moyen/long courrier pour lesquels la prise en compte du vent offre le plus d'avantages, nous devons tenir compte de la forme de la Terre. La Terre est ici approchée par une sphère, les géodésiques sont alors des segments de grands cercles et non des lignes droites. L'espace de travail n'est plus un plan cartésien, mais la surface d'une sphère. Un point de l'espace est alors représenté par ses coordonnées sphériques c'est-à-dire la longitude $\theta$ et la latitude $\phi$. L'équation d'Hamilton-Jacobi (3.11) a été formulée pour un espace muni d'un repère cartésien, le calcul des distances est alors différent sur la sphère. Nous allons alors adapter certains calculs dans l'algorithme précédent pour travailler avec des coordonnées sphériques.

### *4.4.1 Principe*

L'idée est de représenter l'image de la Terre, assimilée ici à une sphère, sur un plan muni d'un repère cartésien,afin de pouvoir travailler avec l'algorithme précédemment présenté. L'utilisation d'une projection est alors nécessaire. Plus formellement, la projection cartographique $\Psi$ utilisée transforme un point de la sphère défini en coordonnées sphériques $(\theta, \phi)$ en un point du plan $(x, y)$ par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : [-180; 180] \times [-90; 90] &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (\theta, \phi) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

avec $\theta$ la longitude et $\phi$ la latitude.

Il existe un grand nombre de projections. Elles présentent toutes des défauts et des avantages. Il faut donc choisir la meilleure en fonction de l'application. Elles engendrent cependant toutes des déformations et aucune représentation ne peut conserver les distances sur tout le domaine. Les projections peuvent être classées suivant leurs propriétés :

- les projections équivalentes permettent de conserver localement les aires ;
- les projections conformes permettent de conserver localement les angles ;
- les autres projections sont appelées projection aphylactique.

Par contre, une projection ne peut pas être à la fois conforme et équivalente et dans tous les cas, les distances ne peuvent jamais être conservées. Ce dernier point explique pourquoi la seule projection des points de la sphère sur le plan ne suffit pas et la modification de certains calculs à l'intérieur de l'algorithme est nécessaire.

L'algorithme Ordered Upwind est basé sur la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour calculer le temps minimum d'arrivée. Pour vérifier l'équation sur la carte, la projection doit préserver la relation entre les vecteurs. Pour obtenir la condition nécessaire pour satisfaire cette propriété, commençons d'abord par calculer la projection d'un vecteur $\vec{v}$ défini sur la sphère en coordonnées sphériques en un vecteur $\vec{w}$ sur le plan en coordonnées cartésiennes par une application $\Psi$. Pour cela, on se donne $\gamma$ un chemin sur la sphère et X un point sur ce chemin. Le chemin $\gamma$ est défini de la manière suivante :

$$\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \text{ et } \gamma(0) = x$$

Le vecteur vitesse en coordonnées sphériques $\vec{v}$ au point X est défini par $\gamma'(0)$. Par l'application $\Psi$, le vecteur vitesse $\vec{w}$ sur le plan de projection est égal à :

$$\vec{w} = (\Psi \circ \gamma)'(0) = \underbrace{\Psi'(\gamma(0))}_{J_\Psi(x)} . \gamma'(0) = J_\Psi(x).\vec{v} \tag{3.31}$$

avec $J_\Psi$ la matrice jacobienne de l'application $\Psi$. La figure 3.7 illustre la projection du vecteur $\vec{v}$ en un vecteur $\vec{w}$ sur le plan.

On peut maintenant calculer le produit scalaire de deux vecteurs projetés $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ en fonction des vecteurs sur la sphère $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On obtient alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} \langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle &= \langle J_\Psi(\theta, \phi)\, \vec{v_1}, J_\Psi(\theta, \phi)\, \vec{v_2} \rangle \\ &= \langle J_\Psi^T(\theta, \phi)\, J_\Psi(\theta, \phi)\, \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle \end{aligned}$$

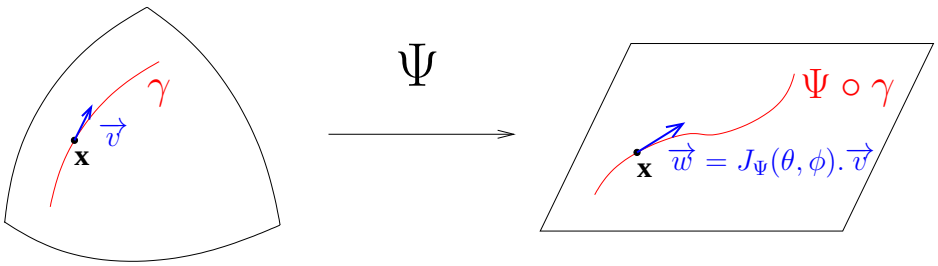



FIGURE 3.7 – *Projection du vecteur $\vec{v}$ définie sur la sphère en coordonnées sphériques en un vecteur $\vec{w}$ sur le plan en coordonnées cartésiennes par l'application $\Psi$.*

Pour préserver le produit scalaire à une constante positive multiplicative près, la matrice $J_\Psi^T(\theta,\phi)J_\Psi(\theta,\phi)$ doit être un multiple positif de la matrice identité. Ce qui est équivalent à ce que la matrice $J_\Psi(\theta,\phi)$ soit un multiple positif de la matrice de rotation. Pour garantir cette condition nécessaire, la projection doit être conforme.

On peut remarquer que, sous ces conditions, la distorsion des distances induite par la projection est isotrope, elle dépend uniquement de la position. Elle peut alors être localement corrigée par un facteur multiplicatif. Calculons la norme du vecteur projeté $\vec{w}$ :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\|^2 &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle J_\Psi(\theta,\phi)\ \vec{v}, J_\Psi(\theta,\phi)\ \vec{v} \rangle \\ &= \langle J_\Psi^T(\theta,\phi)\ J_\Psi(\theta,\phi)\ \vec{v}, \vec{v} \rangle\end{aligned}$$

On remarque que, si la projection est conforme, la matrice $J_\Psi^T(\theta,\phi)\ J_\Psi(\theta,\phi)$ au point X de coordonnées $(\theta,\phi)$ est constante. On peut alors écrire la relation suivante au point X :

$$\begin{aligned}\|\vec{w}\|^2 &= m^2\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= m^2\ \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Le paramètre $m$ est appelé le module linéaire. Il permet de mesurer l'altération des distances due à la représentation plane de la sphère en un point donné. Le calcul de $m$ pour la projection permet ainsi de passer de la distance sur la projection à la distance réelle par la relation suivante au voisinage du point X :

$$m = \frac{\text{Distance sur le plan de projection}}{\text{Distance sur la sphère}} \tag{3.32}$$

Au final, le passage en coordonnées sphériques passe par l'adaptation des calculs dans l'algorithme Ordered Upwind à la sphère. On modifie pour cela les normes utilisées dans l'algorithme par la relation 3.32. Les étapes de l'algorithme Ordered Upwind sont inchangées. On procède donc de la manière suivante : la sphère est localement projetée sur un plan et l'algorithme Ordered Upwind est ensuite utilisé sur ce plan en corrigeant les déformations des distances au voisinage de chaque point. La trajectoire optimale est

ensuite calculée sur ce plan et projetée sur la sphère par la projection inverse. Les étapes sont détaillées dans la section 4.4.4.

### *4.4.2 Projection conique de Lambert*

Deux projections sont communément utilisées en aéronautique : la projection stéréographique et la projection conforme conique de Lambert. Toutes les deux sont des projections conformes et préservent donc les angles. Le produit scalaire est conservé à une constante positive multiplicative près pour ces deux projections. La projection stéréographique a l'avantage de représenter les géodésiques par des lignes droites à partir du point de référence de la projection. Cependant, les déformations associées sont importantes lorsque l'on s'écarte du point de référence. Comme l'application de ces travaux concerne des vols européens, nous avons choisi de travailler avec la projection de Lambert puisque par construction, cette projection est adaptée pour des espaces étendus en longitude.

L'idée de la construction de la projection est de placer un cône tangent à la sphère au niveau de la latitude de référence $\phi_0$ choisie et de projeter les points sur ce cône. Le cône est ensuite déroulé pour donner un plan en conservant les longueurs des arcs de cercle pour le parallèle de référence (cf figure 3.8). Une projection est donc définie par :

- un type de transformation géométrique, ici une transformation conique ;
- des paramètres concernant la projection. Ces paramètres ne sont pas les mêmes selon le type de projection. Ici, on fixe un point de référence $X_0$ de coordonnées $(\theta_0, \phi_0)$ sur le parallèle de référence.

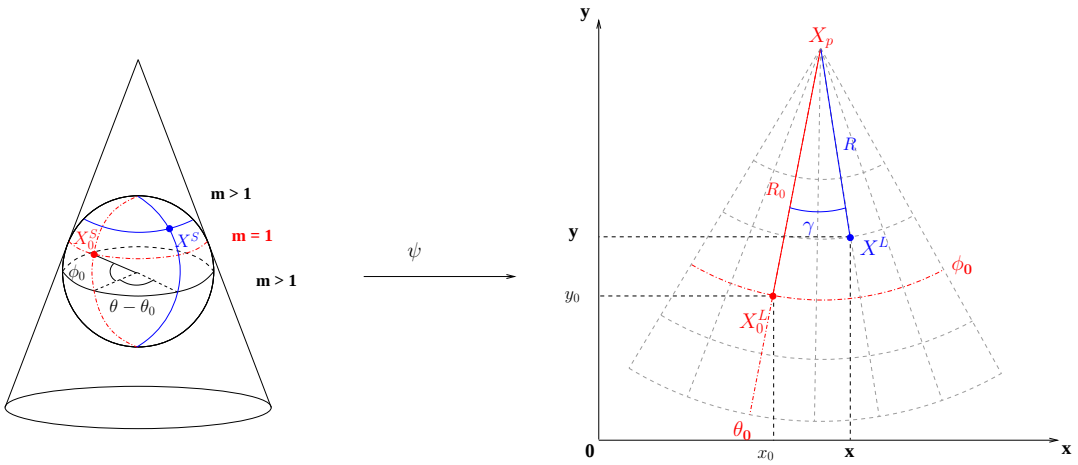



FIGURE 3.8 – *Projection conforme conique de Lambert.*

Nous présentons ici les étapes pour projeter un point de la sphère de coordonnées $(\phi, \theta)$ sur le plan en coordonnées cartésiennes $(x, y)$ par la projection conique conforme de Lambert. La première étape consiste à projeter les points sur le plan en coordonnées polaires $(R, \gamma)$ puis dans un deuxième temps à convertir les coordonnées polaires en

coordonnées cartésiennes $(x, y)$. L'opérateur de projection $\Psi$ est ainsi défini par :

$$\Psi = \Psi_1 \circ \Psi_2 : (\theta, \phi) \to (x, y) \text{ avec } \begin{array}{ll} \Psi_1 : & (\theta, \phi) \to (R, \gamma) \\ \Psi_2 : & (R, \gamma) \to (x, y) \end{array}$$

L'application $\Psi_1$ est utilisée pour projeter un point de la sphère sur le plan en coordonnées polaires. Elle est définie par :

$$\Psi_1 : (\theta, \phi) \to (R, \gamma) \qquad \text{avec } \begin{cases} R = Ce^{-nL(\phi)} \\ \gamma = n(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} C = \dfrac{r}{\tan(\phi_0)} e^{nL(\phi_0)} \\ r = \text{rayon de la sphère} \\ n = \sin(\phi_0) \\ L(\phi) = \ln(\tan(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\phi}{2})) \end{cases}$$

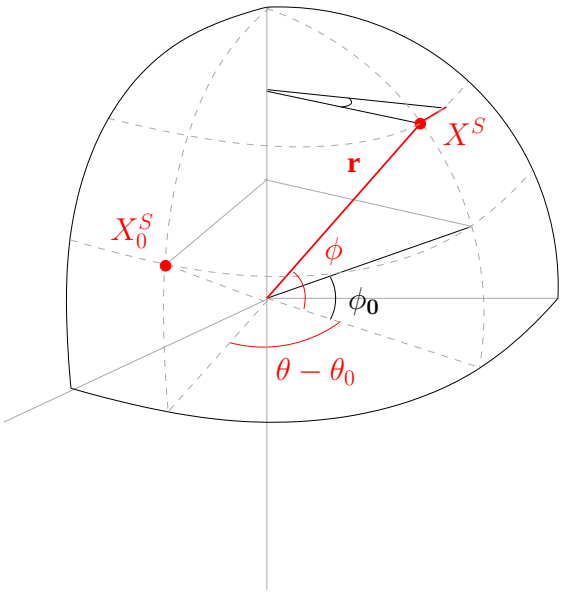



FIGURE 3.9 – *Les différentes variables utilisées pour la projection de Lambert.*

La deuxième étape consiste à transformer les coordonnées polaires $(R, \gamma)$ en coordonnées cartésiennes $(x, y)$. Prenons $(x_p, y_p)$ les coordonnées du pôle Nord. Les coordonnées cartésiennes sont définies par :

$$\begin{cases} x = x_p + R\sin(\gamma) \\ y = y_p - R\cos(\gamma) \end{cases}$$

Par construction, l'image du parallèle standard est un cercle de rayon $R_0$ et pour ce parallèle la longueur des arcs sur le plan est préservée. Par cette propriété, $R_0$ est égale à : $\frac{r}{\tan(\phi_0)}$. Pour le point de référence de la projection $(\theta_0, \phi_0)$, son image sur le plan est définie par $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{cases} x_0 = x_p \\ y_0 = y_p - R_0 \end{cases}$$

L'application $\Psi_2$ permet de transformer les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes par :

$$\Psi_2 : (R, \gamma) \to (x, y) \qquad \text{avec} \begin{cases} x = x_0 + R\sin(\gamma) \\ y = y_0 + R_0 - R\cos(\gamma) \end{cases}$$

### *4.4.3 Le module linéaire*

Comme nous l'avons présenté dans la section 4.4.1, le calcul du module linéaire lié à la projection permet de mesurer l'altération des distances et ainsi de passer de la distance sur la projection à la distance réelle. Pour la projection de Lambert, le module linéaire est déterminé par :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{Distance sur le plan de projection}}{\text{Distance sur la sphère}} \\ &= \frac{nR}{r\cos(\theta)} \end{aligned}$$

Le module linéaire est le point clé dans l'adaptation de l'algorithme Ordered Upwind puisque nous allons l'utiliser pour calculer la fonction de coût $u$. Comme nous l'avons vu dans la section 3.2, le temps minimal à chaque nœud est déterminé en utilisant deux nœuds voisins. On utilise alors la distance entre les points ainsi que la vitesse de propagation du front pour estimer la valeur de $u$. En conséquence, si la distance entre les points projetés n'est pas égale à la distance réelle sur la sphère, le temps calculé sur la carte ne sera pas correct. La distance entre les points projetés doit être corrigée en utilisant le module linéaire. Cependant, cette correction n'est valide qu'au voisinage du point où est évalué le module linéaire. En effet, le calcul du module linéaire dépend de la position.

Comme nous considérons deux voisins $X_j$ et $X_k$ pour calculer le temps au nœud X, la distance entre ces trois points n'est pas très grande. On peut alors supposer que pour le triangle décrit par les nœuds X, $X_j$ et $X_k$, la géodésique peut être approchée par une ligne droite. Avec cette hypothèse raisonnable, la distance entre X, $X_j$ et $X_k$ peut être corrigée grâce au module linéaire calculé au nœud X.

La figure 3.10 montre l'altération de la distance entre deux points sur le plan de projection.

La vitesse de propagation dépend de la vitesse de l'avion, la vitesse du vent et de la direction normale au front $\nabla u$ ; tous ces paramètres doivent être définis dans le même système de coordonnées. La normale au front est calculée au cours de l'algorithme ; ce

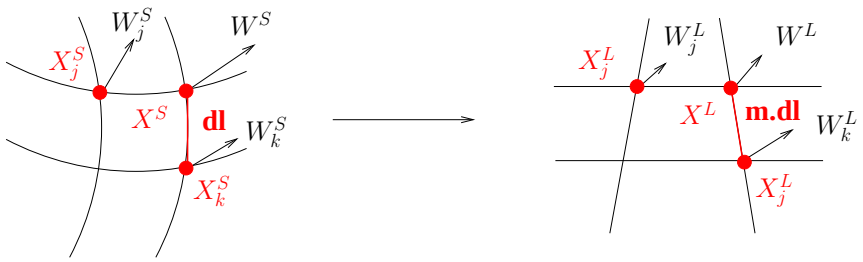



FIGURE 3.10 – *Déformation des distances due à la projection pour des points voisins.*

vecteur est donc défini en coordonnées cartésiennes et prend déjà en compte les déformations. Ainsi, au lieu de corriger la distance projetée, on travaille avec la vitesse de propagation $F$ projetée sur le plan corrigé à l'aide du module linéaire. Comme la normale au front est déjà calculée sur le plan, la seule correction est faite sur la vitesse de l'avion et le vecteur de vent est projeté sur le plan. La vitesse de l'avion est ensuite multipliée par le module linéaire. Au final, la vitesse de propagation sur le plan est égale à :

$$F(\mathrm{X}, \mathbf{n}) \;=\; m\; V_a \;-\; \langle\, \mathbf{n}, \vec{W}^L \,\rangle$$

avec $\vec{W}^L$ le vecteur de vent projeté sur le plan et $m$ le module linéaire au nœud X.

### *4.4.4 Algorithme*

**Adaptation de l'algorithme en coordonnées sphériques :** Les étapes pour utiliser l'algorithme Ordered Upwind sur la sphère sont les suivantes :

1. Discrétisation de l'espace de travail et projection des points de la grille définies en coordonnées sphériques sur le plan par la projection de Lambert ;
2. Transformation des données de vents sur le plan ;
3. Application de l'algorithme Ordered Upwind sur le plan de projection en corrigeant les déformations à l'aide du module linéaire. On suppose que sur la triangulation, la ligne droite est équivalente à la géodésie. Pour des petites distances, cette approximation est très réaliste.
4. Calcul de la trajectoire sur le plan. Cette étape est détaillée ci-dessous.
5. Transformation des points de la trajectoire (coordonnées cartésiennes) en coordonnées sphériques par la projection inverse de Lambert.

**Calcul de la trajectoire :** Comme présentée dans la section 4.2, la trajectoire optimale est calculée en suivant la caractéristique à partir du point de départ jusqu'au point final. La trajectoire est ainsi obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = -\, m(\mathrm{X})\; V_a\; \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|} \;+\; \vec{W}_P(\mathrm{X})$$

Pour calculer le gradient $\nabla u(\mathrm{X})$ en coordonnées cartésiennes, on approche le gradient $\nabla u(\theta, \phi)$ en coordonnées sphériques à l'aide de la méthode des différences finies sur une grille régulière. Le gradient $\nabla u(\theta, \phi)$ peut ensuite s'écrire en fonction du gradient $\nabla u(x, y)$ et de l'opérateur de projection $\Psi$ comme nous le montre l'équation (3.33) :

$$\begin{aligned} \langle \nabla u(x,y), \vec{w} \rangle &= \langle \nabla u(x,y), J_\Psi(\theta,\phi)\, \vec{v} \rangle \\ &= \langle \underbrace{J_\Psi^T(\theta,\phi)\, \nabla u(x,y)}_{\nabla u(\theta,\phi)}, \vec{v} \rangle \\ &= \langle \nabla u(\theta,\phi), \vec{v} \rangle \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ainsi, le gradient $\nabla u(\mathrm{X})$ utilisé pour construire la trajectoire optimale est obtenu à partir du gradient $\nabla u(\theta, \phi)$ par la relation suivante :

$$\nabla u(\mathrm{X}) = (J_\Psi^T(\theta,\phi))^{-1}\, \nabla u(\theta,\phi) \tag{3.34}$$

# 5 Bilan

Ce chapitre a présenté la modélisation du problème d'optimisation d'une trajectoire, en tenant compte du vent et d'obstacles, sous la forme d'un problème de commande optimale. La méthode de résolution choisie, l'algorithme Ordered Upwind, a ensuite été présentée en l'adaptant à notre problème. Le passage de coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques a été effectué à l'aide d'une projection conique de Lambert, avec une modification des normes pour compenser les erreurs de projection sur les distances.

Cette méthode est utilisée dans le chapitre suivant pour planifier différentes trajectoires et valider l'algorithme.

Chapitre

4

# Résultats pour l'optimisation d'une trajectoire

*Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus par l'algorithme développé dans le chapitre précédent. Un premier cas test permet de valider l'algorithme en comparant les résultats obtenus aux solutions connues. Un deuxième cas permet la prise en compte d'obstacles et d'étudier leurs influences sur la trajectoire optimale. Un dernier cas s'intéresse aux trajectoires au-dessus de l'Europe.*

La partie suivante présente un problème simple, dont la solution théorique est connue, nous permettant ainsi de vérifier la validité de la méthode développée.

# 1 Validation de l'algorithme : Problème de navigation de Zermelo

## 1.1 Présentation du problème

Le problème de navigation de Zermelo est un problème traité pour la première fois par Ernst Zermelo en 1931. Ce problème s'énonce de manière très simple, il s'agit de planifier une trajectoire en présence de courants dans le but de minimiser le temps de parcours pour aller d'un point A à un point B. Cependant, sa résolution n'est pas aussi facile. Nous verrons, dans la suite, que pour des cas particuliers de vent, il est possible d'obtenir une solution analytique. Ces différents cas vont nous permettre de comparer les solutions obtenues par l'algorithme développé avec la solution analytique, et ainsi de valider l'algorithme. Commençons tout d'abord par énoncer le problème :

*Un bateau doit se déplacer à travers une région présentant de forts courants marins. La vitesse du courant est supposée connue, elle est fonction de la position du bateau repérée par ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$. Les composantes de la vitesse du courant sont notées :*

$$u = u(x, y) \qquad \text{et} \qquad v = v(x, y)$$

*où $x, y$ sont les coordonnées et $u, v$ les composantes du courant dans la direction $x$ et $y$ respectivement. La norme de la vitesse relative du bateau par rapport à l'eau est constante et donnée par $V$.*

*Le problème est de diriger le bateau de telle façon à minimiser le temps de parcours nécessaire pour aller d'un point A à un point B. Les équations du mouvement du bateau sont données par :*

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos(\theta) + u(x, y) \\ \dot{y} = V\sin(\theta) + v(x, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

*où $\theta$ est l'angle entre le vecteur vitesse du bateau et l'axe horizontal.*

Les équations du mouvement utilisées dans ce problème sont similaires à celles que nous utilisons. Les deux problèmes sont donc identiques sans tenir compte des obstacles. La résolution du problème pour des cas particuliers nous permet ainsi d'avoir une solution de comparaison pour notre algorithme.

## 1.2 Résolution du problème

Pour des schémas très particuliers de vent, le problème de Zermelo présenté ci-dessus admet une solution analytique. La solution est obtenue en utilisant le principe du maximum de Pontryagin. Les deux cas particuliers de courant étudiés de manière analytique sont :

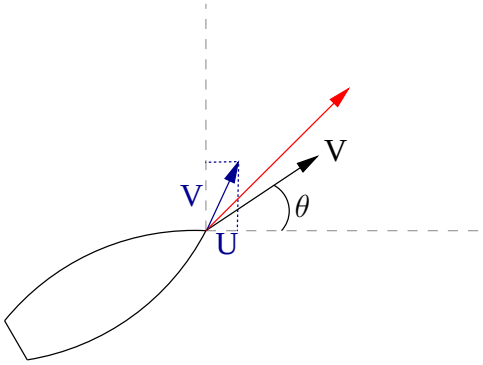



FIGURE 4.1 – *Illustration du problème de Zermelo.*

- le cas d'un courant constant : $u(x, y) = W_u$ et $v(x, y) = W_v$
- le cas d'un courant de la forme $u(x, y) = -Wy$ et $v(x, y) = 0$ avec $W$ la norme du vecteur de la vitesse du courant et $W <= V$

La résolution de ces deux problèmes est effectuée dans l'annexe F. La démarche utilisée est celle classiquement utilisée pour un problème de commande optimale en exploitant le principe du maximum de Pontryagin.

La figure 4.2 illustre la solution obtenue par la résolution du problème dans le cas où le courant est de la forme $u(x, y) = -Wy$ et $v(x, y) = 0$. Le point de départ est le point A et le but est de relier le point B en un minimum de temps. La trajectoire s'écarte de la ligne droite pour profiter des courants favorables plus forts.

## 1.3 Comparaison des résultats

Cette section a pour but de comparer les résultats obtenus avec l'algorithme Ordered Upwind (présenté dans le chapitre 3 section 4.1) avec la solution analytique obtenue par la résolution du problème de Zermelo pour les deux cas particuliers de vent décrits ci-dessus. Les solutions obtenues avec l'algorithme Ordered Upwind ont été effectuées avec différents pas de discrétisation entre les nœuds du maillage.

Nous avons aussi effectué ces calculs pour deux valeurs de vent $W$ différentes. La première $W = \frac{V_a}{4}$ permet d'étudier le comportement de l'algorithme pour un vent maximal correspondant au quart de la vitesse de l'avion. Ce cas correspond au rapport moyen, entre la vitesse du vent $W$ et la vitesse d'un avion $V_a$, rencontré en réalité. Nous nous sommes ensuite intéressés au cas où le courant maximal est plus élevé et où sa prise en compte a plus d'importance. Nous avons pris la valeur suivante $W = \frac{V_a}{1{,}5}$.

Les trajectoires obtenues pour des pas de discrétisation différents et les trajectoires optimales sont illustrées sur la figure 4.3 pour le cas où $W = \frac{V_a}{4}$ et sur la figure 4.4 pour

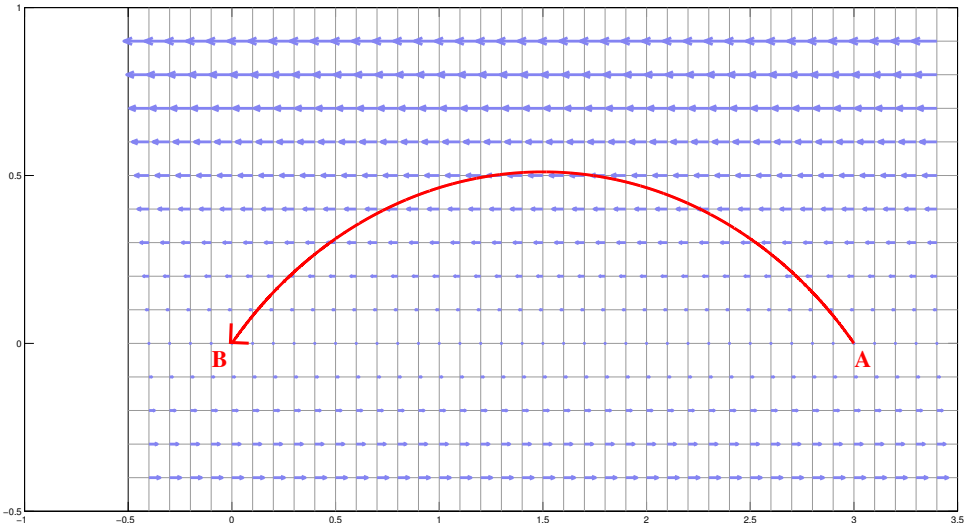



FIGURE 4.2 – *Trajectoire optimale pour le problème de Zermelo dans le cas où le vent est de la forme* $u(x, y) = -Wy$ *et* $v(x, y) = 0$

le cas où $W = \frac{V_a}{1,5}$. Les trajectoires bleues sont celles calculées avec l'algorithme Ordered Upwind pour des pas de discrétisation différents. La trajectoire rouge correspond à la trajectoire optimale.

On peut constater que les trajectoires obtenues sont très proches de la trajectoire optimale. Le deuxième point à constater est la différence au niveau de la trajectoire pour les deux cas différents de vent. Plus le vent est fort et plus la trajectoire dévie de la ligne droite pour profiter du vent favorable plus fort. La différence de vitesse plus importante avec un vent plus fort induit une déviation plus importante et l'allongement de la trajectoire est compensé par le gain en vitesse sol.

Les deux figures nous permettent aussi de constater que pour les pas de discrétisation les plus faibles, les trajectoires sont quasiment confondues. Pour analyser plus quantitativement les différences entre les trajectoires, nous avons étudié les erreurs suivantes pour le temps de vol total et la position au cours du temps :

$$\text{Erreur}_{\text{Temps}} = \frac{|\text{Temps calculé - Temps optimal}|}{\text{Temps optimal}} * 100 \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \text{Erreur}_{\text{Distance}} &= \frac{\sum_t \|\text{X}(t) - \text{X}_{opt}(t)\|}{\text{nb}_{\text{points}} \times \text{longueur}_{\text{traj}}} \\ &= \frac{\sum_t \sqrt{(x(t) - x_{opt}(t))^2 + (y(t) - y_{opt}(t))^2}}{\text{nb}_{\text{points}} \times \text{longueur}_{\text{traj}}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

avec $\text{X}(t)$ la position de l'avion au temps $t$ pour la trajectoire calculée, $\text{X}_{opt}(t)$ la position

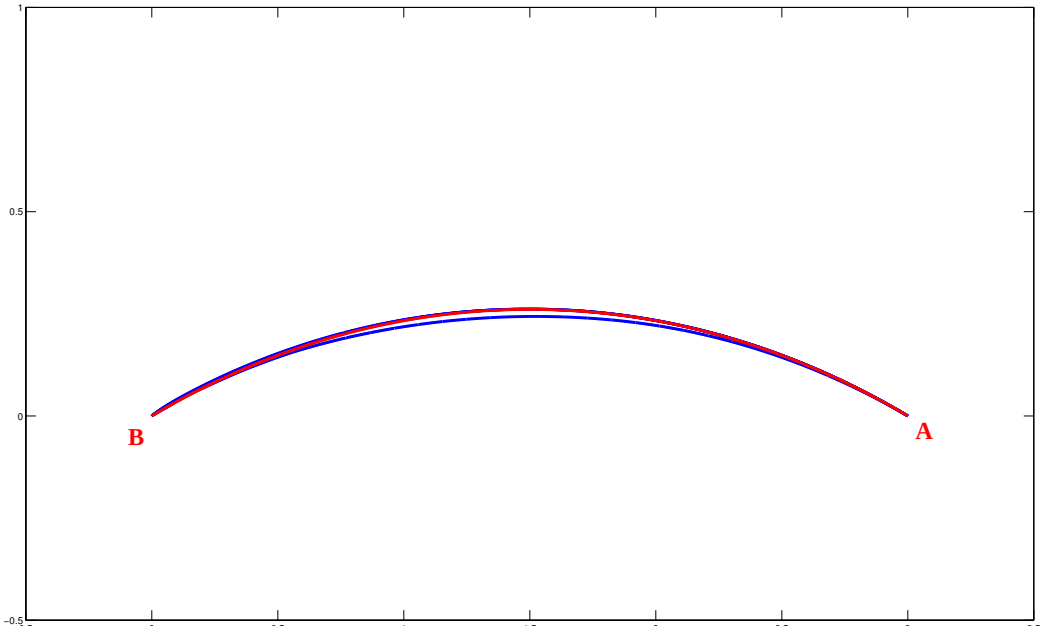



FIGURE 4.3 – *Comparaison entre la trajectoire calculée et la trajectoire optimale pour* $W = \frac{V_a}{4}$. *Les trajectoires bleues sont les trajectoires calculées avec l'algorithme Ordered Upwind pour des pas de discrétisation différents. La trajectoire rouge correspond à la trajectoire optimale.*

pour la trajectoire optimale, $\text{nb}_{\text{point}}$ le nombre de points de la trajectoire et $\text{longueur}_{\text{traj}}$ la longueur de la trajectoire optimale.

Les résultats sont répertoriés dans le tableau 4.1. On constate que plus le pas de discrétisation est petit et plus l'erreur diminue dans les deux cas de vent différents. Ces erreurs ont été tracées sur les figures 4.6 et 4.5 avec une échelle en logarithme. On peut ainsi étudier l'erreur expérimentalement en fonction du pas de discrétisation, on constate que celle-ci est quasiment linéaire en fonction du pas de discrétisation dans les deux cas. Les premiers points sortant de la droite étant ceux correspondant aux discrétisations les plus grossières, on s'intéresse plus particulièrement aux pas de discrétisation les plus fins. À partir du coefficient directeur des droites, on peut lire que la vitesse de convergence est linéaire en $O(h)$, avec $h$ le pas de discrétisation. Lorsque $h$ tend vers 0, la solution tend donc vers la solution optimale.

Au niveau du temps de calcul, on s'aperçoit que celui-ci augmente en fonction du pas de discrétisation. Ceci s'explique par la complexité de l'algorithme Ordered Upwind en $O(N \log(N))$ avec $N$ le nombre de nœuds de la grille (présenté Chapitre 3 Section 3.2.3).

En conclusion, on peut constater que les solutions obtenues par l'algorithme développé tendent bien vers la solution analytique. Ceci nous permet donc de vérifier la pertinence des résultats obtenus avec notre méthode.

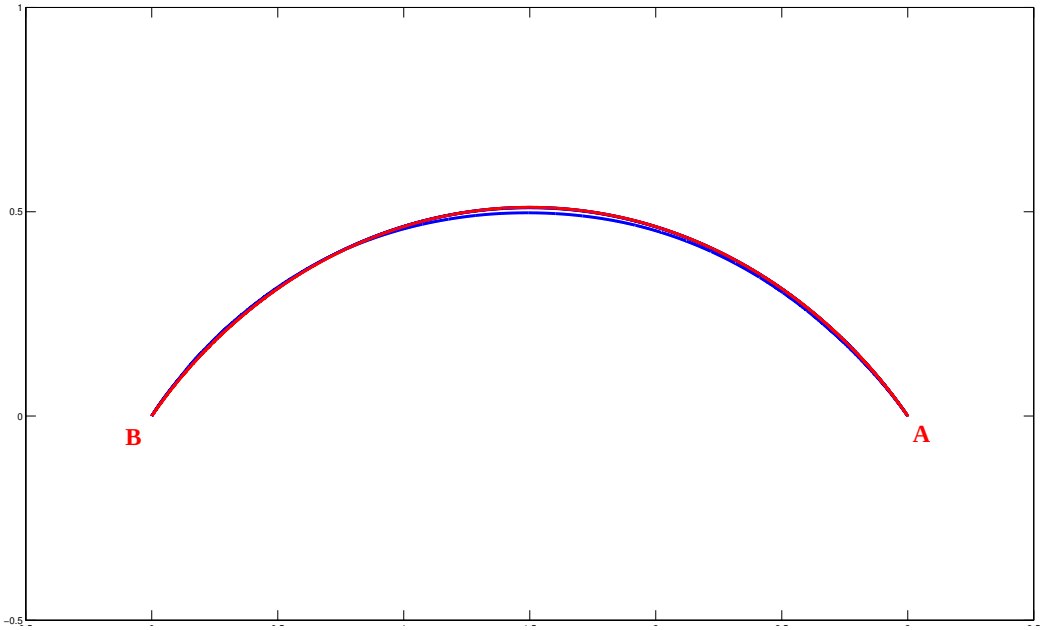



FIGURE 4.4 – *Comparaison entre la trajectoire calculée et la trajectoire optimale pour* $W = \frac{V_a}{1{,}5}$

| Vent Max | Taille grille | Temps exécution (ms) | temps de vol optimal (ms) | temps de vol calculé (ms) | $\text{Erreur}_{\text{temps}}$ (%) | $\text{Erreur}_{\text{Distance}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{V_a}{4}$ | 41x16 | 188 | 2,93540 | 2,93568 | 0,00965 | 0,00299 |
| | 311x106 | 4828 | | 2,93557 | 0,00581 | $5{,}97572\ 10^{-4}$ |
| | 611x206 | 60863 | | 2,93550 | 0,00365 | $4{,}53816\ 10^{-4}$ |
| | 1211x406 | 907034 | | 2,93546 | 0,00210 | $3{,}06549\ 10^{-4}$ |
| $\frac{V_a}{1{,}5}$ | 41x16 | 220 | 2,67800 | 2,67831 | 0,01152 | 0,00220 |
| | 311x106 | 7411 | | 2,67804 | 0,00153 | $2{,}42063\ 10^{-4}$ |
| | 611x206 | 78421 | | 2,67803 | 0,00117 | $1{,}535609\ 10^{-4}$ |
| | 1211x406 | 1154043 | | 2,67802 | $7{,}8504\ 10^{-4}$ | $1{,}043719\ 10^{-4}$ |

TABLE 4.1 – *Comparaison des résultats entre la trajectoire optimale et les trajectoires calculées pour différents pas de discrétisation et pour les deux cas différents de vent.*

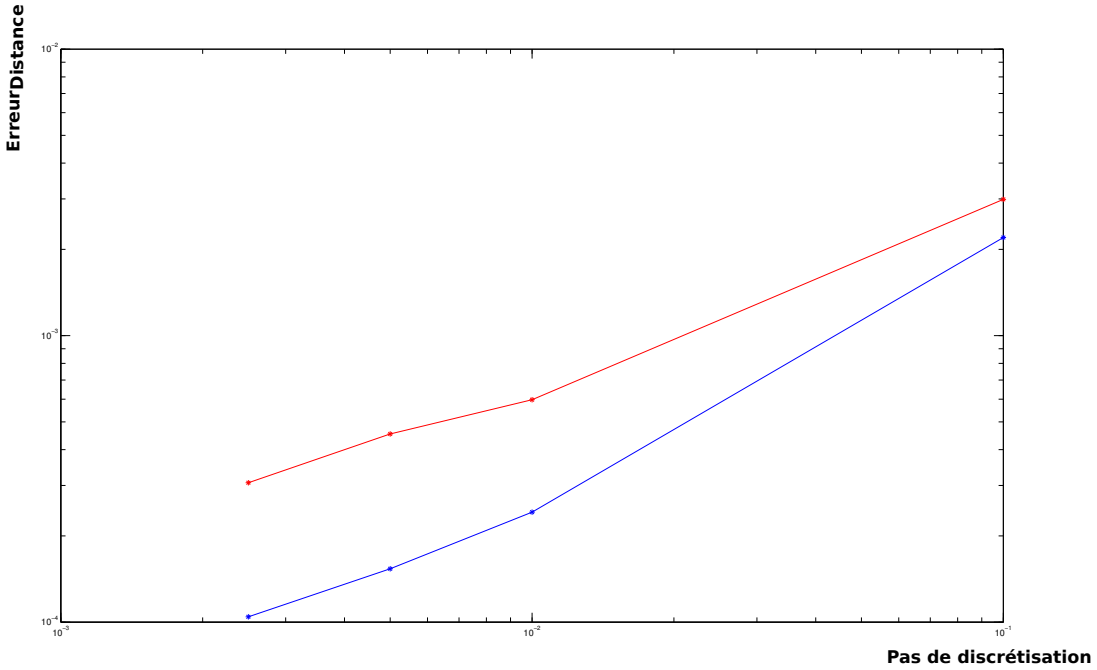



FIGURE 4.5 – *Évolution de l'erreur moyenne sur la position de chaque point de la trajectoire en fonction du pas de discrétisation (échelle en log log)*

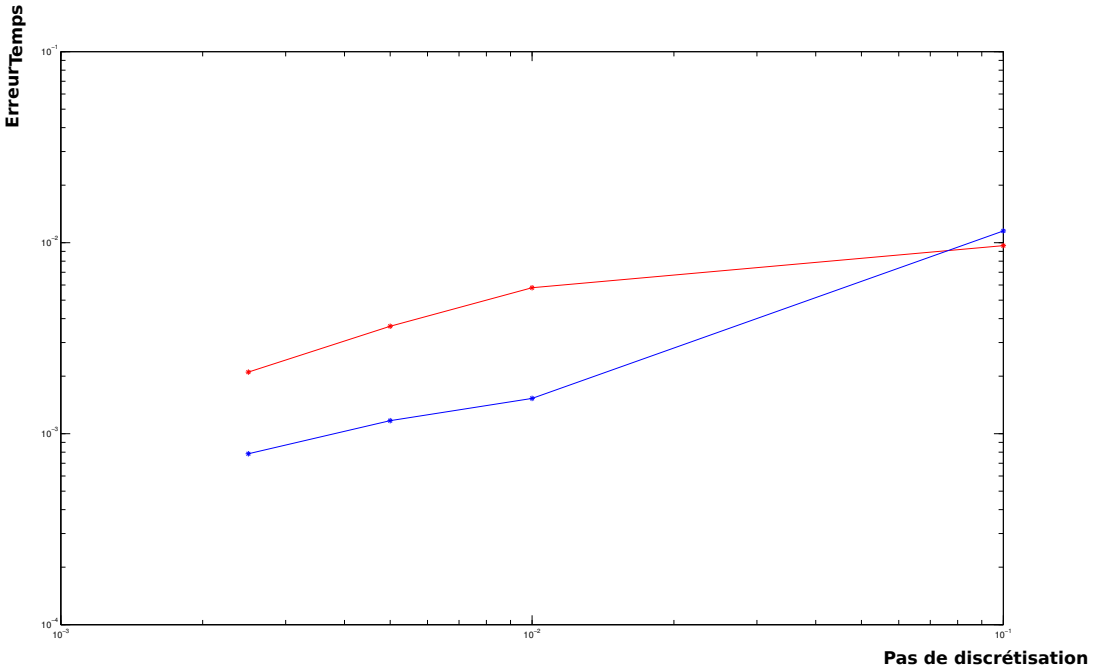



FIGURE 4.6 – *Évolution du pourcentage de l'erreur relative sur le temps de parcours de la trajectoire en fonction du pas de discrétisation (échelle en log log)*

# 2 Optimisation d'une trajectoire en prenant en compte des obstacles fixes

Nous nous intéressons maintenant aux résultats obtenus en prenant en compte des obstacles. D'un point de vue des opérations aériennes, ces obstacles peuvent modéliser des conditions météorologiques défavorables comme des zones de turbulences ou encore des orages. Ces différentes conditions climatiques ont été introduites dans le Chapitre 1 Section 3.

Le problème consiste ici à calculer la trajectoire optimale entre le point de départ et le point d'arrivée en tenant compte d'obstacles fixes. La figure Fig. 4.7 montre la trajectoire optimale calculée sans vent (trajectoire n° 1) et avec le vent (trajectoire n° 2). Le vent est nul au centre puis est dirigé de d'ouest en est en augmentant sa valeur progressivement vers le Nord et inversement, il est dirigé de d'est en ouest en augmentant progressivement sa valeur vers le Sud. Il est matérialisé par les flèches bleues. Les obstacles sont décrits par les lignes de niveau colorées, l'échelle de couleur exprime l'importance des obstacles : la couleur rouge représente des obstacles infranchissables et la couleur bleue l'absence d'obstacle.

Ces deux trajectoires ont été calculées par l'algorithme Ordered Upwind (présenté dans le Chapitre 3 Section 4.3) en prenant en compte les obstacles. On peut constater que le comportement des trajectoires est différent face aux obstacles si le calcul tient compte du vent ou non. On s'aperçoit que la trajectoire calculée en tenant compte des informations de vent prend directement la direction nord pour profiter des courants favorables alors que la trajectoire calculée sans prendre en compte le vent se limite à éviter les zones d'obstacles.

En conséquence, il est intéressant de prendre en compte les informations de vent pour la planification d'une trajectoire. La trajectoire optimale en tenant compte du vent peut être assez éloignée de la trajectoire calculée sans cette information de vent.

# 3 Optimisation des trajectoires au-dessus de l'Europe

Nous nous intéressons ici à la planification de trajectoires réelles au-dessus de l'Europe. Une analyse des résultats obtenus sera ensuite effectuée.

## 3.1 Analyse des données

### *3.1.1 Trafic*

Les données utilisées sont issues d'une simulation d'une journée de trafic, le $1^{er}$ juillet 2011, au-dessus de l'Europe. L'échantillon du trafic contient 28278 vols avec différents

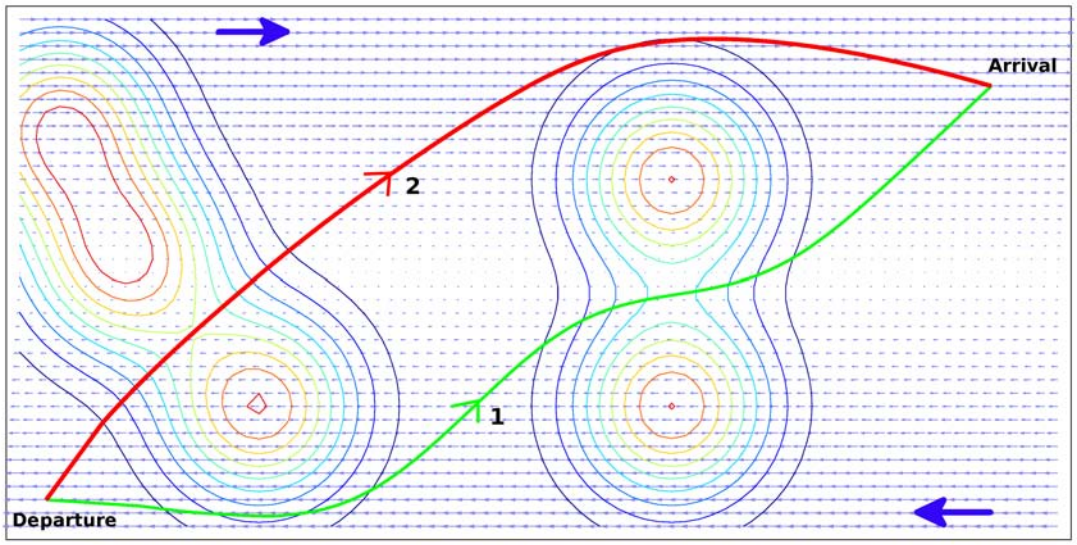



FIGURE 4.7 – *Trajectoires optimales avec des obstacles : 1. Sans vent (verte), 2. Avec vent (rouge)*

types d'avions. La vitesse $V_{TAS}$ est constante et comprise entre 390 kt et 540 kt en fonction de chaque vol. Nous avons sélectionné les points correspondant aux TOC et TOD comme point initial et final de la trajectoire. L'optimisation est effectuée uniquement sur la phase de croisière. Nous supposerons que le niveau de vol reste constant sur toute cette phase. En réalité, les avions changent de niveau de vol après avoir brûlé assez de fuel pour pouvoir monter et ainsi consommer moins de carburant. Pour prendre en compte le changement de niveau de vol, l'algorithme pourrait être utilisé successivement pour les différents niveaux de vol utilisés le long de la trajectoire. Cependant, cette technique ne permet pas d'obtenir la trajectoire optimale globale, mais uniquement les segments de trajectoires optimales à chaque niveau de vol. Pour obtenir la trajectoire optimale globale, l'optimisation des segments de trajectoires à chaque niveau de vol ne doit pas être indépendante. Néanmoins, cette méthode peut-être une première étape pour prendre en compte le changement de niveau de vol. Une autre approche consiste à prendre le profil vertical optimal sans vent et à alimenter l'algorithme Oredered Upwind avec ce vent 3D sans contrôler l'altitude (action sur le cap de l'avion).

Toutes les données concernant le trafic ont été répertoriées dans le tableau 4.2.

### 3.1.2 Vent

**Format des données :** Les prévisions de vent sont généralement fournies dans un format de données spécifique appelé GRIB. Les données sont fournies en coordonnées latitude/longitude pour différents niveaux de vol. Le vent est décrit par deux composantes, une composante pour le déplacement parallèle à un cercle de latitude (le vent zonal, noté $u$) et une composante parallèle à un méridien (le vent méridien, noté $v$). Les mouvements

| | Nombre d'avions | Vitesse moyenne (kt) | Vitesse max (kt) | Vitesse min (kt) | Distance moyenne (km) | Temps moyen (min) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Trafic global | 28278 | 450 | 540 | 390 | 1100 | 78 |
| > 800km | 10911 | 460 | 540 | 390 | 1700 | 120 |

TABLE 4.2 – *Analyse des données de trafic pour le trafic global et pour les trajectoires dont la distance est supérieure à* 800 *km.*

zonaux sont comptés positivement ($u > 0$) s'ils sont d'ouest en est. Les mouvements méridiens sont comptés positivement ($v > 0$) s'ils sont dirigés du sud vers le nord. Le vent est fourni en $m/s$.

Pour notre cas, nous avons pris les prévisions de vent pour un niveau de vol : FL 300. Le fichier GRIB utilisé a une résolution de 0,5 degré et couvre la zone de 30N à 80N en longitude et de 30W à 45E en latitude.

**Analyse des données de vent :** Les données utilisées correspondent à plusieurs journées entre septembre et octobre 2013 et en janvier 2014. Ces divers cas nous permettent d'avoir des situations différentes et d'observer ainsi l'influence sur les résultats obtenus. Nous nous sommes particulièrement intéressés à trois journées : le 30 septembre, le 2 octobre et le 4 septembre 2013. Ces trois jours, bien que proches, présentent des conditions de vent bien différentes. Le tableau 4.3 répertorie les caractéristiques de vent pour ces trois journées.

| | Moyenne (kt) | Min (kt) | Max (kt) |
|---|---|---|---|
| 2013/09/30 | 40 | 0,25 | 130 |
| 2013/10/02 | 48 | 0,58 | 114 |
| 2013/10/04 | 42 | 0,6 | 115 |

TABLE 4.3 – Données de vent

**Lecture des cartes de vent :** Les cartes de vent utilisées ci-après utilisent la symbolique des cartes météorologiques. La signification des symboles est illustrée sur la figure 4.8, elle permet de déterminer la direction et l'intensité du vent.

## 3.2 Résultats

Les calculs ont été exécutés sur un système Unix-64, sur un CPU Intel Core i5-2520M avec 2,5GHz et 8Go de RAM. Le temps moyen de calcul d'une trajectoire est de 300 ms.

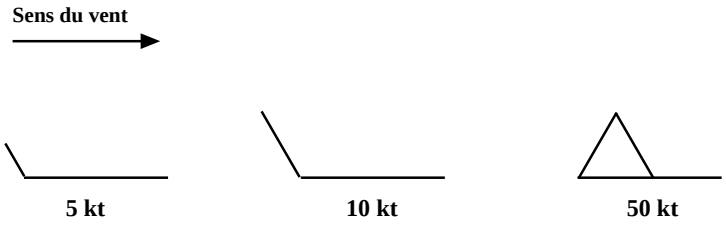



FIGURE 4.8 – *Légende du vent : la hampe indique la direction d'où vient le vent. Les barbules indiquent la vitesse en nœud.*

L'analyse des résultats a été effectuée en comparant la trajectoire obtenue avec la route directe. Cette comparaison n'est certainement pas parfaite puisqu'avec le trafic actuel, les avions ne peuvent pas suivre les routes directes. Les trajectoires doivent suivre le réseau de routes aériennes afin de faciliter le contrôle et la régulation du trafic. Cependant, le concept de free-route est actuellement à l'étude avec la possibilité de suivre les routes directes. Nous comparons donc nos trajectoires calculées avec les routes directes afin de souligner l'intérêt de prendre en compte les conditions de vent dans le calcul des trajectoires optimales qui ne sont pas nécessairement les routes directes.

Il aurait aussi été intéressant de comparer le temps réel du vol entre le TOC et TOD avec la structure actuelle du trafic aérien afin de comparer le gain envisageable obtenu grâce au free-route. Malheureusement, nous n'avons pas eu accès à ces données puisque nous avons travaillé à partir d'un fichier de simulation du trafic actuel et non à partir des données radars.

### *3.2.1 Analyse sur une trajectoire*

Nous nous intéressons ici à un vol en particulier, le vol JWD020, le 30 septembre 2013. L'avion vole à une vitesse de 511 kt et à un niveau de vol FL300. Les caractéristiques du vol sont indiquées dans le tableau 4.4. Le vol est représenté sur la figure Fig. 4.9 avec en bleu (avion 1), la route directe et en rouge (avion 2), la trajectoire optimale calculée.

| Trajectoire | Niveau de vol | Vitesse (kt) | Distance (km) | Temps de vol (min) | Gain (min) |
|---|---|---|---|---|---|
| Directe | 300 | 511 | 5346 | 315 | **6** |
| Optimale | | | 5403 | 309 | |

TABLE 4.4 – *Comparaison entre la trajectoire directe et la trajectoire optimale pour le vol JWD020 le 30/09/2013.*

On peut constater, sur le tableau 4.4, la différence en terme de temps de vol entre la trajectoire optimale et la route directe. La trajectoire calculée permet de réduire le temps de vol de 6 min, pourtant la distance parcourue est plus longue que la route directe. Cette différence s'explique par le gain en vitesse dû au vent. Comme nous le montre la carte de

vent (Fig. 4.10), le vent est plus fort au sud de la route directe. La trajectoire optimale est donc déviée de la route directe pour tirer avantage du vent arrière plus fort comme le montre la figure 4.9.

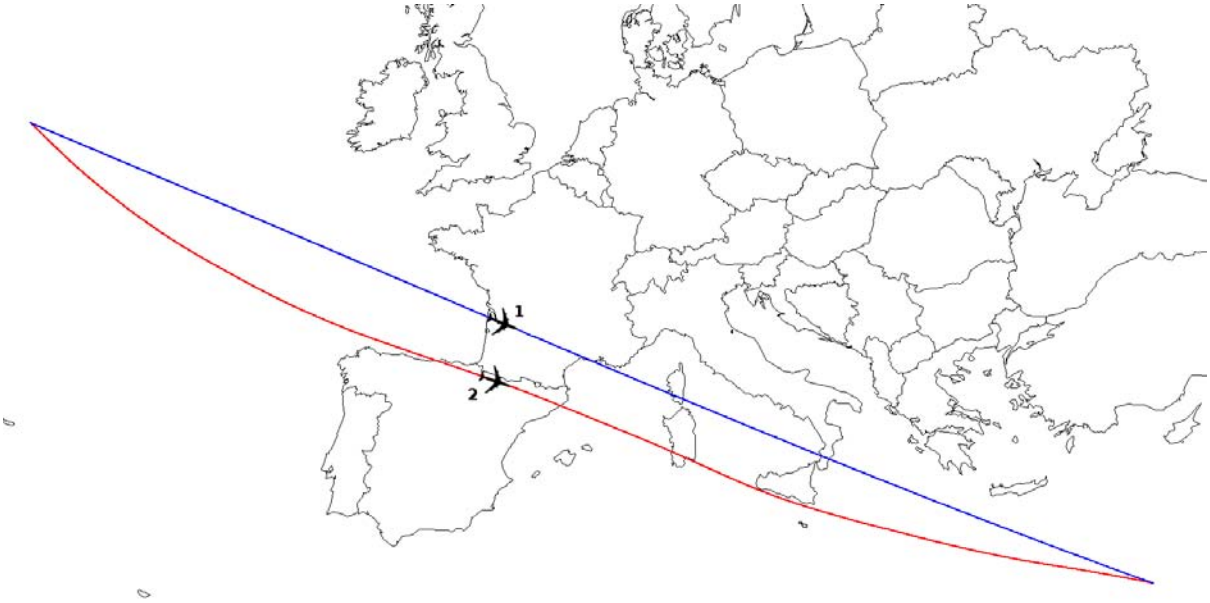



FIGURE 4.9 – *Vol JWD020 : 1. route directe (bleu), 2. trajectoire optimale en fonction du vent (rouge)*

### *3.2.2 Analyse sur le trafic européen*

Pour chaque journée, le trafic est identique, seules les conditions de vent diffèrent. Pour chaque journée, nous nous sommes intéressés en premier lieu à tout le trafic, puis uniquement aux trajectoires les plus longues (la distance est supérieure ou égale à 800 km).

Les résultats obtenus sont présentés sur le graphique 4.11. Le graphique illustre la moyenne des bénéfices obtenus sur le temps de vol pour les trajectoires optimales en fonction du vent en comparaison aux routes directes. Les histogrammes bleus représentent les bénéfices pour le trafic global et les rouges correspondent aux bénéfices obtenus uniquement pour les trajectoires les plus longues ($\geqslant$ 800 km). Le vent moyen pour chaque journée est noté en vert.

Remarquons que dans chaque cas, les trajectoires les plus longues sont les plus bénéfiques. On peut également constater que, selon le jour, la moyenne du temps de vol gagné est différente. La différence au niveau du vent moyen ne suffit pas à expliquer la variation des bénéfices obtenus. Cet écart s'explique par la structure différente des courants de vent suivant les jours. Dans les cas où le bénéfice est le plus élevé, les courants de vents

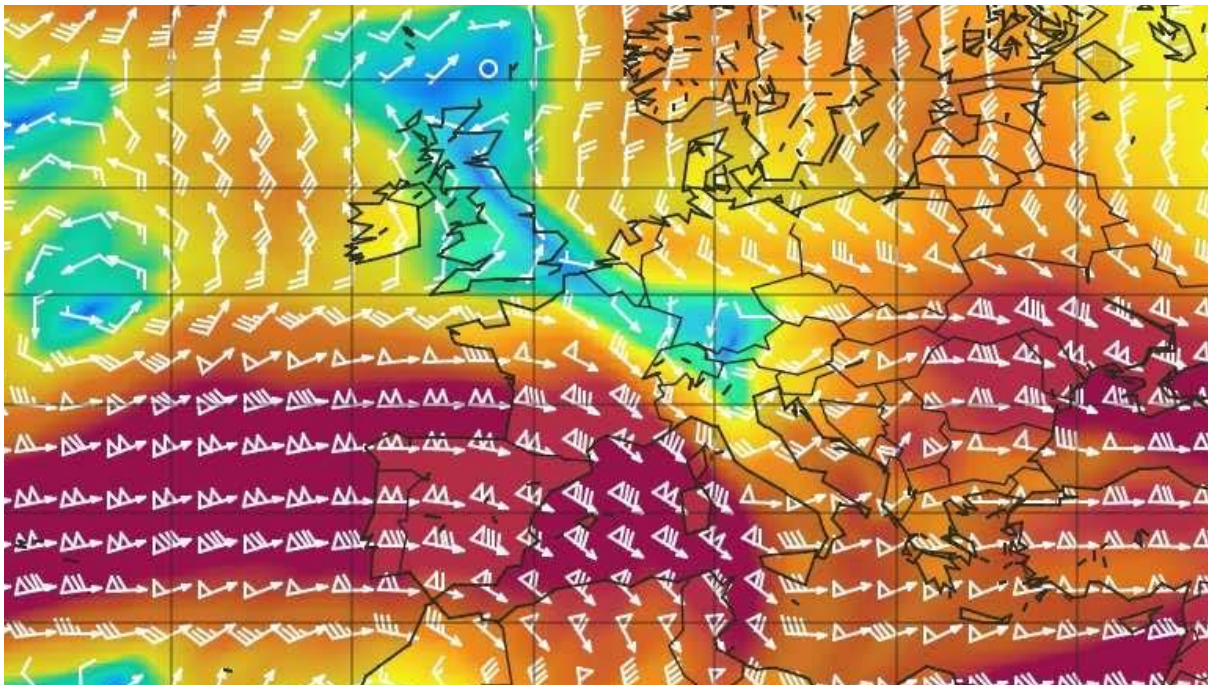


FIGURE 4.10 – *Carte de vent du 30 septembre 2013*

forts sont situés proches des flux de trafic. L'allongement en distance est compensé par le gain en vitesse. La structure des courants de vent ainsi que la structure des flux aériens influent ainsi sur les bénéfices en temps.

Les gains possibles en terme de temps de vol varient entre quelques secondes à plusieurs minutes. Estimer les gains possibles, pour une journée ordinaire, est difficile puisque les conditions de vent sont très différentes d'un jour à l'autre. Une possibilité serait de calculer les bénéfices pour un nombre important de cas différents pour un même trafic et d'en évaluer des statistiques.

Nous avons, ensuite, analysé plus spécifiquement trois journées avec des conditions différentes dans le tableau 4.5. Ce tableau présente les gains moyens obtenus avec les trajectoires calculées. Les colonnes Q1, Q2 et Q3 représentent respectivement le premier, le deuxième et le troisième quartile des gains de temps obtenus. Le premier quartile (Q1) sépare les 25 % inférieurs des données. Le deuxième quartile (Q2) est la médiane des données. Le troisième quartile (Q3) sépare les 25 % supérieurs des données.

Le tableau 4.5 montre que pour la moitié des vols, le gain entre la route directe et la trajectoire calculée est négligeable, de l'ordre de quelques secondes (entre 1 et 4 secondes suivant les cas). Dans les cas où le gain est nul, l'algorithme trouve en fait la route directe. Dans la plupart de ces cas, le vent dans le voisinage de la trajectoire ne varie pas beaucoup, la différence de vitesse est négligeable et ne compense donc pas l'allongement de la trajectoire.

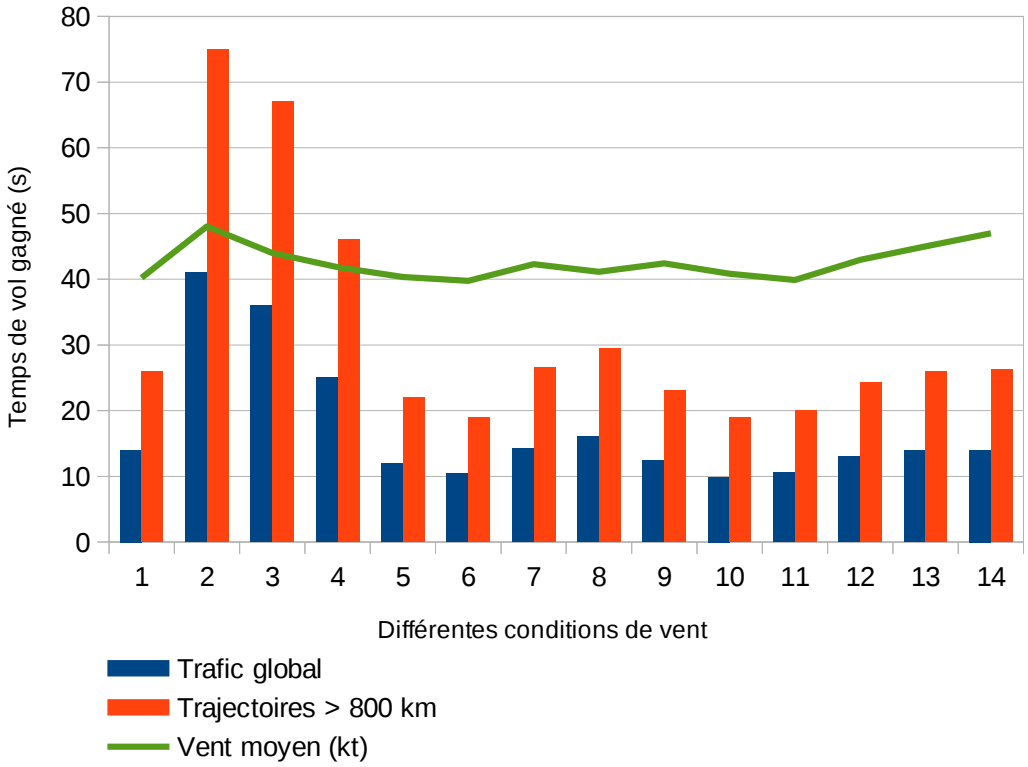



FIGURE 4.11 – Moyenne des temps de vol gagnés avec les trajectoires optimales en comparaison aux routes directes

Cependant, si on s'intéresse uniquement aux trajectoires les plus longues, on peut remarquer que, dans les trois cas, environ les trois quarts des vols obtiennent un gain de temps de l'ordre de quelques secondes à plusieurs minutes. Cette constatation s'explique puisque plus le temps de vol est long et plus le gain en vitesse obtenu grâce au vent, même minime, prend de l'importance. Par exemple, pour le cas du 2 octobre 2013, la médiane est égale à 21 secondes, c'est-à-dire que la moitié des trajectoires sont plus courtes que les trajectoires directes ; la différence de temps est supérieure à 21 secondes. De plus, un quart des vols obtiennent un gain de temps de plus de 79 secondes. Le gain maximal obtenu atteint 1588 secondes soit environ 25 minutes. On voit donc ici l'intérêt de suivre les trajectoires optimisées au lieu des routes directes surtout pour les trajectoires les plus longues.

# 4 Bilan

L'ensemble de ces résultats nous permet de valider la méthode ainsi que l'intérêt du free-route. Les premiers résultats ont servi à vérifier la validité de la méthode proposée pour optimiser une trajectoire. À la suite de ces résultats, la méthode a été utilisée pour

| | | Moyenne (s) | Min (s) | Max (s) | Q1 (s) | Q2 (s) | Q3 (s) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2013/09/30 | Trafic global | 14 | 0 | 1028 | 0 | 2 | 12 |
| | > 800km | 25,3 | 0 | 1028 | 3 | 10 | 24 |
| 2013/10/02 | Trafic global | 41 | 0 | 1588 | 0 | 4 | 26 |
| | > 800km | **75** | 0 | **1588** | 7 | **21** | **79** |
| 2013/10/04 | Trafic global | 25 | 0 | 780 | 0 | 1 | 15 |
| | > 800km | 46 | 0 | 780 | 3 | 12 | 49 |

TABLE 4.5 – Moyenne du temps de vol gagné grâce à la trajectoire calculée, comparée à la route directe

des trajectoires européennes. Les gains obtenus grâce à l'optimisation des trajectoires avec le vent permettent de valider l'intérêt du free-route. Néanmoins, il faut s'assurer que les trajectoires obtenues n'induisent pas plus de congestion ; celle-ci engendrant statistiquement des manœuvres d'évitement, réduisant ainsi le gain du free-route. Cette question est étudiée dans le chapitre suivant.

Néanmoins, une perspective d'amélioration est d'étendre la méthode proposée à la planification de trajectoires en 3D. Des idées sont proposées en conclusion de cette thèse.

Chapitre

5

# Optimisation du trafic aérien en réduisant la congestion

*Ce chapitre présente le modèle développé pour résoudre le problème d'optimisation des trajectoires en réduisant la congestion du trafic aérien.*
*La première partie présente le modèle introduit pour modéliser la congestion.*
*La deuxième partie met en forme le problème de la réduction de la congestion sous la forme d'un problème d'optimisation.*
*La troisième partie présente l'algorithme hybride développé pour réduire la congestion tout en optimisant les trajectoires.*

La première partie présente la modélisation choisie pour mesurer la congestion du trafic aérien.

# 1 Modélisation du problème de réduction de la congestion

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu comment optimiser une trajectoire en tenant compte du vent. Cette optimisation peut-être faite sur l'ensemble des trajectoires constituant le trafic, cependant, les trajectoires obtenues ne sont pas structurées et ont tendance à suivre les mêmes courants et ainsi créer des zones fortement encombrées. Le trafic devient alors difficile à contrôler. Pour pallier ce problème, nous nous sommes intéressés à diminuer ces zones congestionnées tout en tenant compte du vent. Le risque de conflit est dès lors moins important et moins sujet aux incertitudes.

Le problème de la planification de trajectoires optimales avec la prise en compte simultanée de la réduction de la congestion devient alors un problème optimisation multi-objectifs [Ehrgott 2005] ; le but étant de réduire la congestion en déviant un peu les trajectoires sans pour autant augmenter significativement le temps de parcours et donc la consommation. Pour ces problèmes d'optimisation multi-objectifs, la méthode courante consiste à calculer le front de Pareto qui permet de déterminer la solution qui représente le meilleur compromis entre les deux critères à optimiser. Nous avons, cependant, dû utiliser une approche différente, car la minimisation de la consommation est liée à une seule trajectoire alors que la congestion implique l'interaction de tout le trafic. La méthode proposée repose sur l'élaboration d'un algorithme hybride. L'optimisation d'une seule trajectoire est effectuée à l'aide de l'algorithme Ordered Upwind adapté pour l'optimisation en fonction du vent, présenté au Chapitre 3. La réduction de la congestion est quant à elle effectuée via un algorithme de Recuit Simulé dont la génération des états voisins est effectuée à l'aide d'homotopie impliquant la trajectoire optimale obtenue précédemment et d'une nouvelle trajectoire évitant les zones congestionnées. Le lien entre les deux étapes est effectué par le calcul de la trajectoire évitant ces zones en ajoutant un terme de pénalité lié à la congestion dans l'algorithme Ordered Upwind. Le calcul de la nouvelle trajectoire tient alors compte du vent et des zones de congestion. D'un point de vue opérationnel, cette pénalité a du sens puisque les zones de fortes congestions sont sujettes à induire plus de manœuvres d'évitement de conflit et donc un allongement des trajectoires. Cette méthode hybride permet ainsi de coupler un algorithme déterministe pour l'optimisation d'une trajectoire et d'obtenir la trajectoire optimale avec un algorithme stochastique qui permet de travailler avec des problèmes de grandes dimensions.

## 1.1 Modélisation du trafic

Pour notre problème, le trafic aérien est modélisé de la façon suivante : on considère $N$ vols dont on veut planifier la trajectoire en minimisant à la fois la consommation et la

congestion dans une fenêtre de temps donnée. Comme pour le problème de l'optimisation d'une seule trajectoire (cf Chapitre 3 Section 1), chaque vol est défini par :

- un point de départ et un point d'arrivée correspondant aux TOC et TOD ;
- un niveau de vol (supposé constant le long de la trajectoire) ;
- une vitesse propre $V_{TAS}$ (supposée constante le long de la trajectoire).

Le modèle cinématique de l'avion est identique à celui du Chapitre 3 Section 1. La variable de contrôle de la trajectoire est donc uniquement le cap de chaque avion.

## 1.2 Définition de la congestion

La première étape à effectuer pour résoudre notre problème d'optimisation est de choisir une métrique pour définir la congestion afin de pouvoir évaluer et comparer les solutions obtenues. La congestion est ici utilisée comme une mesure de la complexité du trafic. On considère que plus la congestion sera faible et plus le trafic sera facile à contrôler. On comprend bien que plus le nombre d'avions est important dans une zone et plus il est difficile de les contrôler. On définit alors qu'une zone est congestionnée lorsque plusieurs avions sont en interaction, c'est-à-dire lorsqu'ils sont proches les uns des autres. Plus le nombre d'avions dans un voisinage donné sera important et plus cette zone sera considérée comme congestionnée. Cependant, cette métrique a un inconvénient, elle ne prend pas en compte la direction de déplacement des avions. Pour un même nombre d'avions dans une zone fixée, que le trafic soit bien structuré ou pas du tout, la mesure de la congestion sera identique même si le contrôle de la zone est beaucoup plus facile pour un trafic structuré. Il existe des métriques différentes pour différencier ces cas, par exemple, les indices de complexité définis par Delahaye et Puechmorel [Delahaye 2010]. Leur métrique est basée à la fois sur la position et le vecteur vitesse des avions au cours du temps. L'idée est de modéliser, à partir de ces données, l'ensemble des trajectoires par un système dynamique. La complexité du trafic est ensuite déterminée par les exposants de Lyaponov permettant de quantifier la stabilité ou l'instabilité du système dynamique. Ces exposants permettent ainsi d'identifier n'importe quel type d'organisation des trajectoires. Cependant, le calcul de ces indicateurs est souvent complexe et demande plus de temps de calcul. C'est pourquoi nous sommes restés, dans le cadre de cette première approche, sur un indicateur facile à calculer.

On a donc choisi ici d'évaluer la congestion du trafic par une métrique de congestion simple. Cette métrique est reliée de près à la densité d'avions présents dans un voisinage donnée en un temps précis. Supposons que la portion de l'espace aérien traité a la forme d'un parallélépipède $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^{3}[a_i, b_i]$. Chaque coordonnée de l'espace est divisée en $N_i, i = 1 \dots 3$ parties ($i$ représentant chaque coordonnée). L'espace $\mathcal{A}$ peut ainsi être discrétisé en une grille régulièrement espacée où chaque pavé $I$ est défini par :

$$I := I_1 \times I_2 \times I_3$$

avec :

$$I_i := [a_i + (k-1)\delta_i, a_i + k\delta_i[$$

et $i = 1 \dots 3$ représentant chaque coordonnée, $k = 1 \dots N_i$, et l'intervalle $\delta_i$ égale à $(b_i - a_i)/N_i$.

En supposant que les positions des avions à un temps donné peuvent être représentées comme des processus de Poisson d'intensité $\lambda$, la probabilité d'avoir $n_I$ avions dans le pavé $I$ est donnée par :

$$\frac{\Lambda^{n_I}}{n_I!} e^{-\Lambda}, \Lambda = \int_I \lambda(x) dx.$$

Il est connu que pour une distribution de Poisson, le nombre attendu d'avions dans un pavé $I$ est donné par $\Lambda$. L'intensité $\lambda$ peut alors être estimée à partir de cette valeur en laissant tendre la taille du pavé vers zéro. En pratique, on se donne $x_i, i = 1 \dots N$ la position de chaque avion et on utilise un estimateur du noyau $K$ de la forme :

$$\widehat{\lambda}(x) = C^{-1}(x) \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

avec $C$ la fonction de normalisation calculée de façon à avoir un estimateur asymptotiquement sans biais [Diggle 1985] :

$$C(x) = \int_{\mathcal{A}} K\left(\frac{x - u}{h}\right) du.$$

La bande passante $h > 0$ peut être estimée en utilisant des méthodes standard ou choisies à la main, cette dernière option a été implémentée dans ces travaux. Elle est basée sur la distance d'interaction entre deux avions.

Dans ces travaux, un noyau gaussien a été choisi. Et dans le but d'accélérer le temps de calcul, l'évaluation de la densité d'avions est effectuée uniquement aux nœuds de la grille définie ci-dessus. On peut assimiler la fonction gaussienne à la contribution de chaque avion dans le calcul de la densité. Pour calculer cette densité en un point $x$, on ne prendra en compte uniquement les positions des avions à une distance inférieure à une distance $d$ fixée. Cette distance est choisie par l'utilisateur en fonction du problème, ici elle correspond à la distance pour laquelle on considère que deux avions sont en interaction.

L'évaluation de la densité $\lambda$ s'effectue de la manière suivante : à un temps fixé $t$, on considère les positions $x_i, i = 1 \dots N$ des avions. La densité $\lambda$ est ensuite évaluée en utilisant l'algorithme suivant :

Par la suite, pour pouvoir ne pas prendre en compte la trace d'un avion dans la mesure de la congestion, la densité d'avions est légèrement modifiée et est calculée par la formule suivante :

$$\lambda_j \leftarrow \lambda_j + g_t^i$$

avec : $g_t^i = 0,5 \left(1 + e^{\frac{-(x_i - y_j)^2}{h^2}}\right)$.

Cette fonction $g_t^i$ est égale à 1 si la position où on évalue la congestion correspond à la position de l'avion $i$. Elle décroit vers $0,5$ quand la distance entre le point où on évalue

**Algorithm 1:** Évaluation de la densité d'avions aux nœuds de la grille

**Data**: Positions $x_i, i = 1 \dots N$, distance $d > 0$
**Result**: Densité $\lambda_j$ aux nœuds $y_j, j = 1 \dots N_1 \times N_2 \times N_3$
Posons $\lambda_j = 0, j = 1 \dots N_1 \times N_2 \times N_3$ ;
**for** *i=1... N* **do**
  **forall the** *$y_j$ (nœuds de la grille)* **do**
    **if** $\|x_i - y_j\| < d$ **then**
      $\lambda_j \leftarrow \lambda_j + e^{\frac{-(x_i - y_j)^2}{h^2}}$ ;
    **end**
  **end**
**end**

la congestion et la position de l'avion augmente. Lorsque cette distance est supérieure à $d$ alors l'avion n'est pas pris en compte, la fonction est nulle.

La bande passante $h$ est ici définie par : $h = d.k$ avec $k$ un coefficient entre 0 et 1. Le paramètre $k$ permet de contrôler la pente de la fonction gaussienne comme le montre la figure 5.1. Plus $k$ est petit, plus la courbe décroit rapidement. Par conséquent, lorsque la distance entre le point d'évaluation de la densité et la position de l'avion augmente, la densité décroît plus rapidement pour un coefficient $k$ faible. Ce coefficient permet de paramétrer la contribution d'un avion en fonction de la distance à la position où est évaluée la densité. Cette fenêtre permet d'effectuer un lissage de la densité d'avion afin d'augmenter la robustesse de la métrique.

Avec cette densité $\lambda$, il est possible de déterminer les aires où au moins deux avions sont proches l'un de l'autre. Les valeurs des fonctions $g_t^i$ sont comprises entre $0,5$ et 1, ce qui implique que lorsque plusieurs avions sont proches les uns des autres i.e. à une distance inférieure à $2d$ entre les positions prévues de chaque avion, la valeur de la fonction $g_t$ est supérieur à 1. L'addition des contributions de chaque avion permet ainsi d'identifier les zones où plusieurs avions sont présents dans un même voisinage en même temps. Si la densité est plus grande que 1, alors au moins deux avions sont proches l'un de l'autre, sinon, il y seulement un ou pas d'avion. Ces zones définissent les zones de congestion. Pour les déterminer, il suffit donc de ne garder uniquement les valeurs supérieures à 1.

Cette densité sera utilisée dans la suite comme un facteur de pénalité à la vitesse le long de la trajectoire de manière à avoir un effet équivalent à un ralentissement de l'avion dans les zones comportement une forte congestion.

Un exemple simple pour illustrer notre métrique de congestion est représenté sur la figure 5.2 pour laquelle deux trajectoires se croisent. On souhaite évaluer la congestion c'est-à-dire déterminer les zones où les deux avions sont proches l'un de l'autre à une distance inférieure à $2d$. Pour calculer la densité, on discrétise la durée totale de la simulation en pas de temps. À chaque pas de temps, on évalue la densité à partir de l'algorithme 1 en chaque point de la grille.

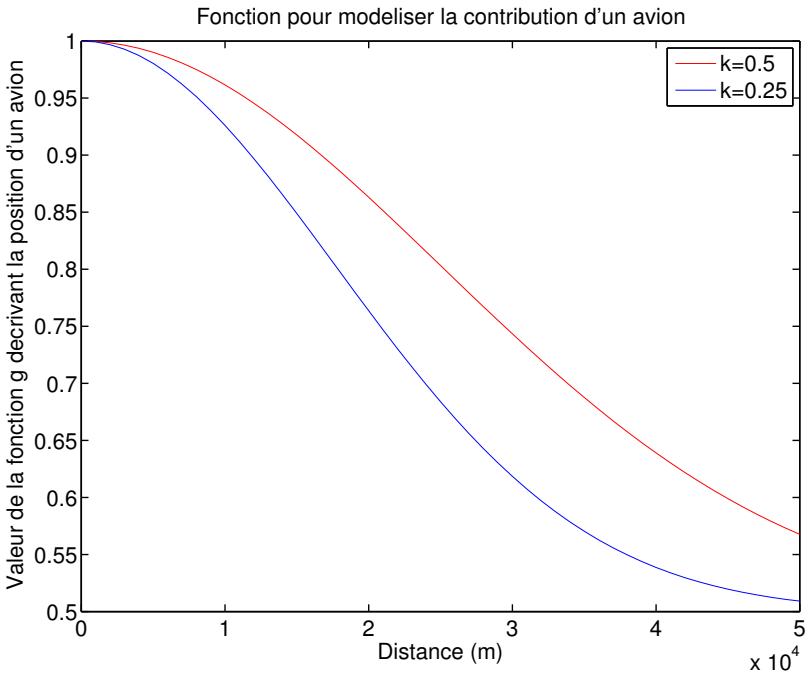



FIGURE 5.1 – *Valeur de la fonction $g_t^i$ en fonction de la distance entre les points $X_t^i$ et $X$ pour $d = 50$ km. Plus $k$ est petit, plus la courbe décroit rapidement.*

La figure 5.2 illustre les valeurs de la densité calculées à $t$ fixé sur l'espace de travail, ces valeurs sont représentées par les iso-contours. Les valeurs sont comprises entre 0 (couleur bleue) et 2 (couleur rouge).

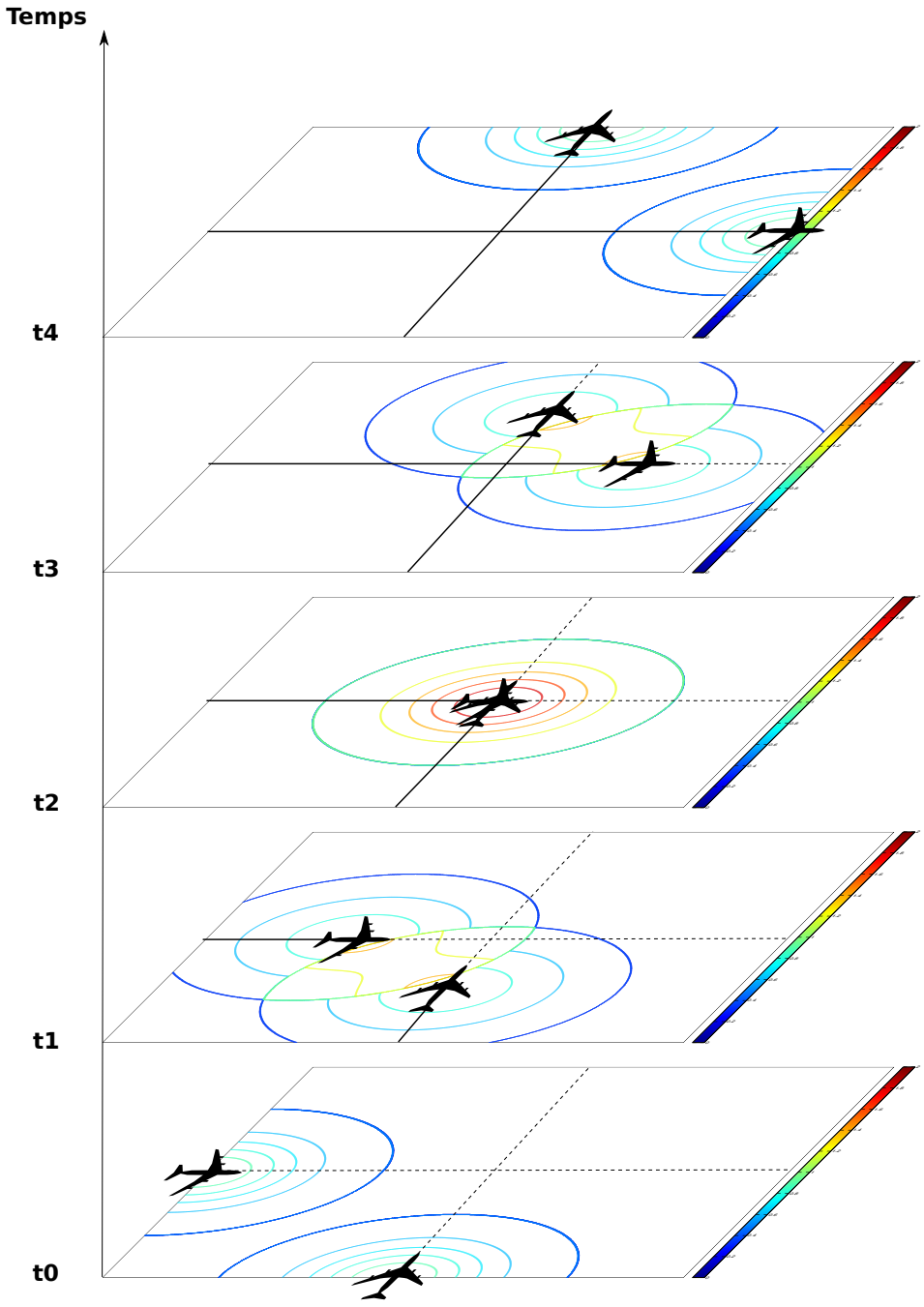



FIGURE 5.2 – *Évaluation de la congestion pour deux avions. À chaque pas de temps, la position des avions est définie par la fonction $g_t$. On additionne en chaque temps, la position de chaque avion définie par la fonction $g_t^i$. Les zones de congestion sont alors les zones où les valeurs de la densité $\lambda$ sont supérieures à 1. Ici, tous les contours de couleurs vert à rouge.*

# 2 Formulation de la réduction de la congestion sous la forme d'un problème d'optimisation

Cette partie a pour but de formuler le problème de réduction de la congestion du trafic aérien sous la forme d'un problème d'optimisation.

## 2.1 Objectifs de l'optimisation

L'objectif est ici de modifier les trajectoires dans le but de minimiser la congestion tout en tenant compte des conditions de vent.

## 2.2 Données du problème

Les données du problème sont :

- L'ensemble des $N$ trajectoires initiales qui sont les trajectoires optimales en fonction du vent $\gamma_1$, ..., $\gamma_N$, établies sans tenir compte de la présence éventuelle d'autres avions ;
- L'intervalle de temps de la simulation, $[t_0; t_f]$, respectivement l'heure de début et l'heure de fin de la simulation pendant lequel on souhaite planifier le trafic.

## 2.3 Variables de décision

Un point de l'espace d'état correspond ici à l'ensemble des N trajectoires (voir Fig. 5.3). Ces trajectoires seront modifiées pendant le processus d'optimisation pour diminuer la congestion. À chaque état correspond une valeur de la fonction objectif. On note $\vec{\gamma}$ le vecteur dont la $i^{\text{ième}}$ composante correspond à la trajectoire $\gamma_i$. La variable de décision pour notre problème est donc l'ensemble des trajectoires représenté par le vecteur $\vec{\gamma}$.

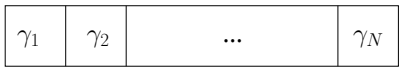



FIGURE 5.3 – *Un état du problème d'optimisation. $N$ vols composent le trafic et sont associés à $N$ trajectoires $\gamma_1$, .., $\gamma_N$.*

Les trajectoires sont modifiées par homotopie entre les trajectoires optimales en fonction du vent (sans prendre en compte les autres trajectoires) et des nouvelles trajectoires évitant les zones congestionnées. La combinaison linéaire de ces trajectoires est contrôlée par le paramètre $\alpha$ dans la formule suivante :

$$\gamma(t) \;=\; (1 \;-\; \alpha)\; \gamma_{optim}(t) \;+\; \alpha\; \gamma_{cong}(t) \tag{5.1}$$

avec $\alpha$ appartenant à un intervalle pré-défini. Nous verrons, dans la suite, que des tests empiriques nous ont permis de choisir l'intervalle $[-0,5; 1,5]$. Le calcul de la trajectoire $\gamma$ est illustré sur la figure 5.4.

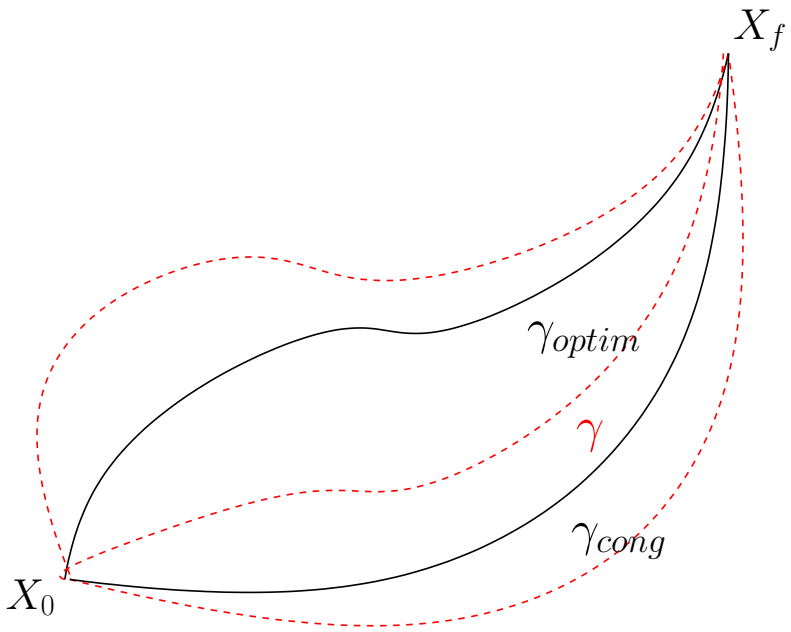



FIGURE 5.4 – *Calcul de la trajectoire $\gamma$ par la combinaison linéaire des trajectoires $\gamma_{cong}$ et $\gamma_{optim}$, contrôlée par le paramètre $\alpha$ compris dans l'intervalle* $[-0.5; 1.5]$.

La trajectoire $\gamma_{cong}$ est calculée via l'algorithme Ordered Upwind durant la phase d'optimisation en pénalisant les zones de forte congestion. Ces trajectoires sont calculées au cours de l'optimisation, car le calcul est effectué en tenant compte des trajectoires courantes $\vec{\gamma}$. Le paramètre $\alpha$ est aussi contrôlé au cours de l'optimisation. Le calcul de la trajectoire $\gamma_{cong}$ via l'algorithme Ordered Upwind permet de prendre en compte à la fois la congestion et le vent.

On notera que le trajectoire modifiée n'est pas directement $\gamma_{cong}$. Ce choix de prendre une homotopie entre la trajectoire optimale en fonction du vent (indépendamment des autres trajectoires), $\gamma_{optim}$, et la trajectoire évitant les zones congestionnées, $\gamma_{cong}$, a été fait dans le but d'augmenter l'espace de recherche pour utiliser l'algorithme de recuit simulé que nous aborderons dans la partie suivante. Le choix de l'intervalle $[-0,5; 1,5]$ nous permet de rester au voisinage de $\gamma_{cong}$ et $\gamma_{optim}$.

**Calcul de la trajectoire $\gamma_{cong}$ :** Comme introduit précédemment, la trajectoire $\gamma_{cong}$ est calculée en pénalisant les zones de forte congestion. Cette pénalité ralentit la vitesse de propagation du front $F$ dans ces zones. Dans ce cas, le critère $u$, représentant le temps minimum d'atteinte du point d'arrivée dans l'algorithme Ordered Upwind, augmente, pénalisant le passage à travers ces zones. Les zones de congestion sont alors évitées et la congestion diminuée. D'un point de vue opérationnel, ce procédé a du sens puisque les zones de forte congestion sont sujettes à induire un plus grand nombre de conflits potentiels et donc des manœuvres de résolution qui détournent et ralentissent ainsi les avions.

Pour ralentir le front en fonction de la congestion, on introduit un coefficient de pénalité $\xi$ relié à la densité d'avions. Ce coefficient est calculé à partir des cartes de densité (introduite dans la section 1.2). Ces cartes sont calculées à chaque pas de temps et permettent d'indiquer les zones où plusieurs avions sont en interactions. Pour la trajectoire à recalculer, on crée une carte de pénalité représentant les zones de congestion rencontrées par cette trajectoire. Les valeurs de $\xi$ sont calculées aux nœuds de la grille à partir de la densité.

Ce coefficient $\xi$ est ensuite utilisé pour ralentir la vitesse du front $F(\mathrm{X}, \mathbf{n})$ de la manière suivante :

$$(1 - \xi)F(\mathrm{X}, \mathbf{n})$$

Le principe est identique à celui présenté dans le Chapitre 3 Section 4.3 pour prendre en compte des obstacles. Le coefficient $\xi$ permet de modifier la vitesse du front en fonction de l'environnement. Plus la zone est congestionnée et plus la vitesse est ralentie.

Les valeurs de $\xi$ sont, ici, normées entre 0 et une valeur maximale $\xi_{max}$. La valeur maximale $\xi_{max}$ doit être inférieure à 1 pour garder la vitesse du front strictement positive. Plus la valeur maximale $\xi_{max}$ est proche de 1, plus la vitesse du font est ralentie et la trajectoire déviée.

La valeur maximale $\xi_{max}$ est un paramètre choisi par l'utilisateur en fonction du critère d'optimisation. Il a un impact direct sur la solution obtenue. Le problème d'optimisation a deux objectifs qui sont parfois contradictoires : l'un cherche à minimiser les temps de vol et l'autre à minimiser les zones de congestion ce qui engendre un allongement de celle-ci. La valeur $\xi_{max}$ détermine le compromis entre minimiser la congestion et garder la trajectoire proche de la trajectoire de référence (celle optimisée uniquement par rapport au vent). Choisir $\xi_{max}$ proche de 1 va donner plus d'importance à la minimisation de la congestion, les trajectoires seront en conséquence plus déviées.

Pour illustrer le fonctionnement de l'algorithme, on reprend le cas simple de deux avions volant à la même vitesse et se croisant au centre de l'espace considéré. On souhaite calculer la trajectoire $\gamma_{cong}$ de l'avion rouge. Pour cela, on crée la carte de pénalité à partir des cartes de densité à chaque temps. Puis on calcule la trajectoire par l'algorithme Ordered Upwind en prenant en compte cette carte de pénalité. Cette approche est illustrée Fig. 5.5.

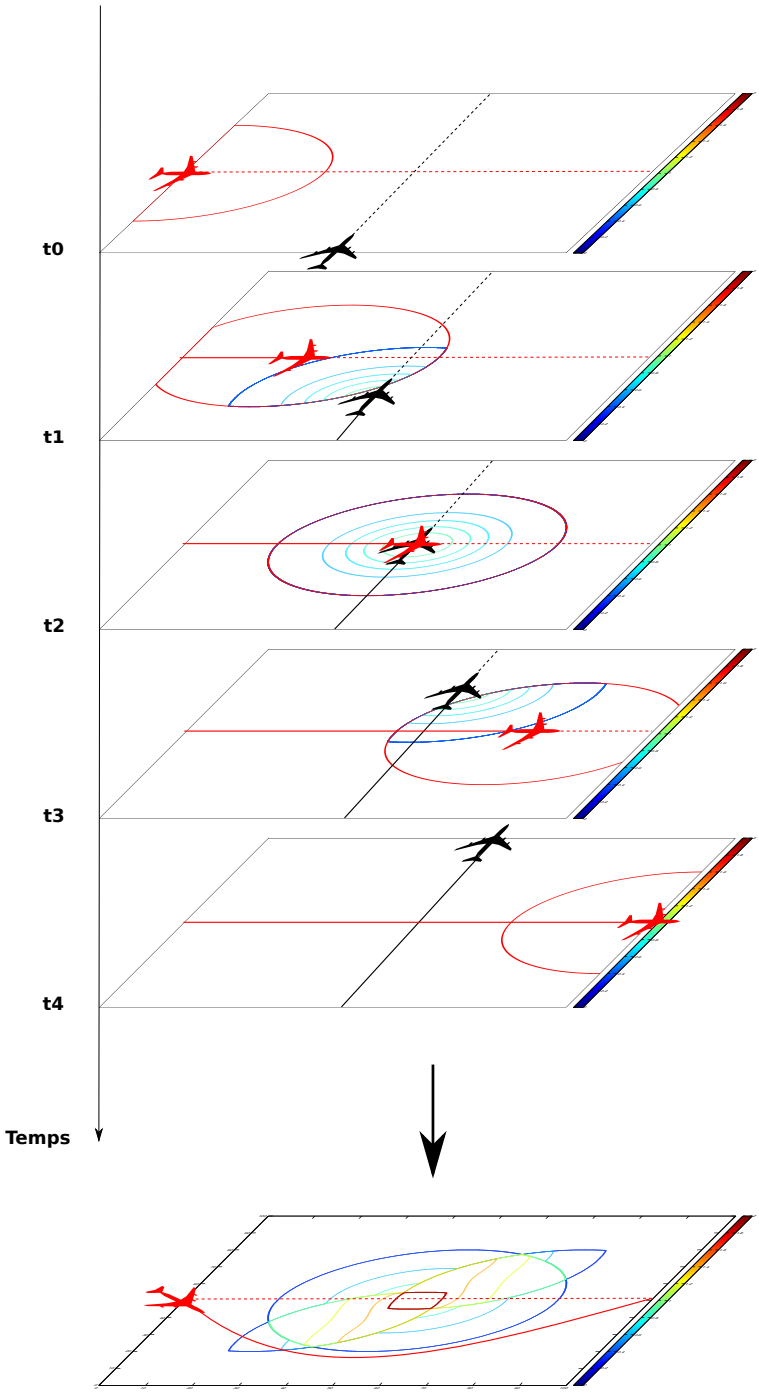



FIGURE 5.5 – *Calcul de la carte de pénalité pour l'avion rouge, à partir des cartes de densité à chaque pas de temps (les iso-contours correspondent aux valeurs de la densité). Et, calcul de la trajectoire $\gamma_{cong}$ (en rouge) en tenant compte de cette carte de pénalité.*

### 2.4 Fonction objectif

Notre objectif ici est de diminuer la congestion en replanifiant les trajectoires composant le trafic. Pour cela, on définit une fonction objectif $F_{obj}$ à minimiser. Elle correspond ici à la congestion globale du trafic qui est déterminée comme la somme de la densité moyenne au cours de la simulation. Elle est définie de la manière suivante (on remarquera que si l'on considère la congestion comme définie de façon continue, il s'agit en fait de la discrétisation de l'intégrale de la congestion) :

$$F_{obj}(\vec{\gamma}) := \sum_{j=1\ldots N_1\times N_2\times N_3} \left( \frac{\sum_{t=t_0}^{t_f} \tilde{\lambda}_j^t(\vec{\gamma})}{n_t} \right) \tag{5.2}$$

où $t_0$ et $t_f$ sont le temps de début et de fin de la simulation, $n_t$ le nombre de pas de temps choisis (déterminé par l'utilisateur), $N_1 \times N_2 \times N_3$ le nombre de nœuds de la grille, et $\tilde{\lambda}_j^t$ est la densité d'avions au temps $t$ définie par :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_j^t(\vec{\gamma}) = 1 - \lambda_j^t(\vec{\gamma}) & \text{si } \lambda_j^t(\vec{\gamma}) \geqslant 1 \\ \qquad\quad = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\lambda_j^t$ la densité au temps $t$ définie dans la Section 1.2.

La fonction densité $\tilde{\lambda}_j^t$ est utilisée pour tenir compte uniquement de la densité lorsqu'au moins deux avions sont proches l'un de l'autre. La trace d'un avion seul n'est pas prise en compte dans le calcul de la fonction objectif.

## 3 Résolution du problème d'optimisation via un algorithme de Recuit Simulé

Plusieurs raisons nous ont amenés à nous orienter vers un algorithme de Recuit Simulé. La première concerne le nombre important de trajectoires à planifier (des cas classiques impliquent $N = 500$ avions pour un niveau de vol donné). Le deuxième est qu'étant face à un problème d'optimisation globale difficile, la fonction objectif est évaluée au détriment d'une évaluation coûteuse en temps de calcul. Nous n'avons pas de forme explicite de la fonction objectif $F_{obj}$ en fonction des variables d'optimisation $\vec{\gamma}$, et aucune dérivée ne peut être évaluée. À partir de ce bilan, nous avons choisi d'utiliser un algorithme de Recuit Simulé pour résoudre le problème de réduction de la congestion.

Le Recuit Simulé permet une utilisation de la mémoire moins importante que les algorithmes méta-heuristiques à base de population comme les algorithmes génétiques. Le nombre de données étant ici important, ces algorithmes nécessiteraient beaucoup de mémoire.

## 3.1 Principe de l'algorithme de Recuit Simulé

La méthode du recuit simulé est un algorithme d'optimisation mis au point en 1983 [Kirkpatrick 1983], puis en 1985 [Černy 1985], qui généralise la méthode Monte-Carlo. Sa popularité vient de sa capacité à éviter de rester bloqué dans des minimas locaux et de s'approcher de l'optimum global pour des problèmes difficiles de grandes dimensions.

La méthode du recuit simulé est basée sur un processus très utilisé en métallurgie pour obtenir un alliage sans défauts, ce processus est appelé «le recuit». On commence par chauffer le métal jusqu'à une certaine température où il devient liquide (les atomes peuvent donc circuler librement). Après avoir atteint ce stade, on abaisse la température très lentement de sorte à obtenir un solide. Si cette baisse de température est brusque, on obtient alors un verre ; si au contraire cette baisse de température est très lente (laissant aux atomes le temps d'atteindre l'équilibre statistique), nous obtiendrons des structures de plus en plus régulières, jusqu'à atteindre un état d'énergie minimale correspondant à la structure parfaite d'un cristal, on dit alors que le système est «gelé». Dans le cas où cet abaissement de température ne se ferait pas assez lentement, il pourrait apparaître des défauts. Il faudrait alors les corriger en réchauffant de nouveau légèrement la matière de façon à permettre aux atomes de retrouver la liberté de mouvement, leur facilitant ainsi un éventuel réarrangement conduisant à une structure plus stable.

L'idée principale du recuit simulé est de reproduire ce comportement de la matière utilisée dans la métallurgie dans le processus d'optimisation pour atteindre la solution optimale. L'énergie interne du matériau représente alors la fonction objectif du problème. Ainsi, atteindre l'état d'équilibre thermodynamique correspond à atteindre la solution optimale du problème. Pour obtenir cet état d'équilibre, on introduit un paramètre fictif de contrôle $T$ qui joue le rôle de la température. Le principe consiste alors à générer successivement des configurations à partir d'une solution initiale $s_0$ et d'une température initiale $T_0$. La température est ensuite diminuée tout au long du processus jusqu'à atteindre une température finale ou un état d'équilibre qui correspond à l'optimum global.

Pour générer la suite des configurations, l'algorithme du recuit simulé utilise l'algorithme de Metropolis [Metropolis 1953]. À chaque étape, l'algorithme considère un état voisin $s_{new}$ de l'état actuel $s_{curr}$ par un déplacement infinitésimal aléatoire, et décide en utilisant le critère de Boltzmann si le système se déplace vers l'état $s_{new}$ ou s'il reste dans l'état $s_{curr}$. Si cette modification fait diminuer la fonction objectif (ou énergie du système), elle est directement acceptée ; sinon, elle n'est acceptée qu'avec une probabilité égale à $e^{\frac{\Delta E}{T}}$ avec $\Delta E$ la différence d'énergie occasionnée par la perturbation et $T$ la température du système.

Il a été montré que l'utilisation de ce critère permet d'amener le système à se déplacer vers des états de plus faible énergie et d'évoluer vers un état d'équilibre. Typiquement, les itérations sont répétées jusqu'à que le système atteignent un état qui est suffisamment bon, ou que le nombre maximum d'itérations est atteint.

L'algorithme du recuit simulé consiste ainsi à appliquer itérativement l'algorithme de

Metropolis en diminuant la température, pour engendrer une séquence de configurations qui tendent vers l'équilibre thermodynamique. Les principales étapes sont les suivantes :

1. Choisir une température de départ $T = T_0$ et une solution initiale $S = S_0$ ;
2. Générer une solution aléatoire dans le voisinage de la solution actuelle ;
3. Comparer les deux solutions selon la loi de Boltzmann ;
4. Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à ce que l'équilibre statistique soit atteint ;
5. Décroître la température et répéter jusqu'à ce que le système soit gelé.

Dans un premier temps, la température $T$ est généralement choisie très grande, ainsi beaucoup de solutions (même celles dégradant la valeur de fonction objectif) sont acceptées. L'algorithme équivaut alors à une visite aléatoire de l'espace des solutions. Mais à mesure que la température baisse, la plupart des solutions augmentant l'énergie sont refusées, et l'algorithme se ramène à une amélioration itérative classique. À température intermédiaire, l'algorithme autorise de temps en temps des transformations qui dégradent la fonction objectif. Il laisse ainsi une chance au système de s'extraire d'un minima local.

## 3.2 Adaptation du Recuit Simulé pour la réduction de la congestion

Pour notre problème, l'algorithme de recuit simulé consiste à modifier successivement une trajectoire dans le but de diminuer la congestion et de converger vers une solution à congestion minimale. Ici, l'espace d'état correspond à l'ensemble des trajectoires des $N$ vols. L'état initial choisi correspond à l'ensemble des trajectoires optimales de référence par rapport au vent. Une étape du recuit simulé consiste à générer une solution voisine en modifiant une seule trajectoire (la trajectoire en question est modifiée comme indiqué plus haut section 2.3 avec l'équation (5.1)). On obtient ainsi un nouvel état global $s_{new}$. Cette étape est décrite dans le paragraphe suivant. On évalue la fonction objectif $F_{obj}$ du nouvel état $s_{new}$ c'est-à-dire la congestion globale du trafic avec cette nouvelle trajectoire. Puis, à partir du critère de Boltzmann, soit le système se déplace vers l'état $s_{new}$, soit il reste dans l'état courant $s_{curr}$ c'est-à-dire que soit on garde la nouvelle trajectoire, soit on garde la trajectoire précédente.

## 3.3 Choix des paramètres

La performance du recuit simulé est étroitement liée au choix des paramètres dans le processus du recuit, à savoir : le choix de voisinage, la température initiale, le schéma de refroidissement, l'état d'équilibre, le critère d'arrêt. Le choix de ceux-ci dépend fortement du problème considéré. Dans notre cas, nous les avons définis de la manière suivante :

### *3.3.1 Fonction de voisinage*

Une solution voisine est générée à partir de la fonction de voisinage qui modifie localement la solution courante. Cette fonction doit permettre d'atteindre tous les états de

l'espace de recherche (ou presque tous). Ceci assure une bonne exploration des solutions. On peut noter que cette fonction permet occasionnellement de détériorer la valeur de la fonction objectif afin de ne pas rester bloqué sur des minimas locaux.

Pour notre problème, la génération d'une solution voisine est effectuée en modifiant une seule trajectoire $\gamma_i$. Cette trajectoire est tirée aléatoirement. Cependant, on introduit un biais dans le choix de la trajectoire pour accélérer la convergence de l'algorithme. On augmente la probabilité de tirer un vol particulier quand celui-ci rencontre une forte congestion. Pour cela, on prend la liste de tous avions et on calcule la somme de la congestion rencontrée le long de la trajectoire pour chaque avion, que l'on appellera congestion individuelle. On parcourt ensuite la liste des avions en additionnant au fur et à mesure leur congestion individuelle. Les valeurs de ces sommes successives sont ensuite ramenées entre 0 et 1. Le choix d'une trajectoire est ensuite effectué en tirant aléatoirement un nombre entre 0 et 1 et la valeur tirée permet de déterminer la trajectoire. Plus la trajectoire rencontre de congestion et plus l'intervalle entre 0 et 1 de cet avion est important, il a alors plus de chance d'être sélectionné. Ce choix de la trajectoire est illustrée sur la figure 5.6.

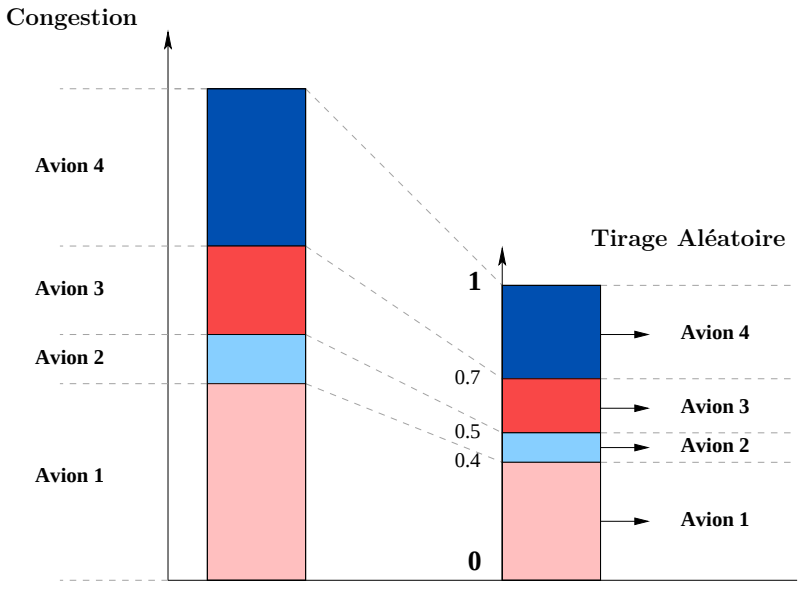



FIGURE 5.6 – *Introduction d'un biais dans le choix de la trajectoire à modifier : plus celle-ci rencontre de la congestion, et plus elle a de chance d'être choisie. Pour cela, on calcule la congestion rencontrée le long de la trajectoire pour chaque avion, appelée congestion individuelle. On ajoute ensuite successivement la congestion individuelle en parcourant la liste des avions, comme le montre la colonne de gauche. La valeur de ces sommes est ramenée entre* 0 *et* 1 *(colonne de droite). Puis, on tire un nombre entre* 0 *et* 1*, suivant la valeur obtenue, on détermine la trajectoire. Par exemple, si le nombre tiré est égale à* $0,8$*, la trajectoire de l'avion* 4 *sera modifiée. Plus l'avion rencontre de congestion et plus son intervalle de tirage est grand ce qui augmente sa probabilité d'être tiré.*

Lorsque la trajectoire à modifier est choisie, on calcule la nouvelle trajectoire $\gamma$ par la méthode présentée dans la Section 2.3. On rappelle que cette trajectoire $\gamma$ est obtenue par une combinaison linéaire de $\gamma_{optim}$ et $\gamma_{cong}$ qui est contrôlée par le paramètre $\alpha$ dans la formule suivante :

$$\gamma(t) \;=\; (1 \;-\; \alpha)\; \gamma_{optim}(t) \;+\; \alpha\; \gamma_{cong}(t)$$

Le paramètre $\alpha$ est choisi aléatoirement dans l'intervalle $[-0,5; 1,5]$. On peut noter que les valeurs prises peuvent être négatives ou supérieur à 1, ceci dans le but d'être capable de détériorer occasionnellement la valeur de la fonction objectif et par conséquent, d'éviter de rester bloquer dans un minimum local. Ce paramètre aléatoire permet au système d'être capable d'atteindre presque tous les points de l'espace de recherche.

L'algorithme 2 résume les étapes pour générer une solution voisine.

**Algorithm 2:** Fonction de voisinage

**Require:** $\vec{\gamma}$, i, $\xi_{max}$

1: Modélisation des zones congestionnées rencontrées par le $i^{ème}$ avion par le calcul des valeurs de la variable $\xi$, définie entre 0 et $\xi_{max}$ ;
2: Calcul de $\gamma_{cong}$ par l'algorithme Ordered Upwind en ralentissant la vitesse du front d'onde dans les zones congestionnées ;
3: Génération du nombre aléatoire $\alpha$ dans $[-0,5; 1,5]$
4: Calcul de la trajectoire $\gamma_i$ par une combinaison linéaire de $\gamma_{optim}$ et $\gamma_{cong}$

### *3.3.2 Température initiale*

La température initiale détermine le taux d'acceptation au début du processus. Si la température est élevée alors le système va accepter presque toutes les solutions voisines proposées. À l'inverse, si la température est basse, beaucoup de solutions voisines seront évaluées sans être acceptées, le système risque de converger vers un minimum local.

Théoriquement, la température initiale, notée $T_0$, doit être assez élevée pour que le taux d'acceptation soit proche de 1 et ainsi permettre d'explorer l'espace de recherche et éviter de converger vers un minimum local. On positionne la température initiale de façon à accepter environ 80 % des transitions.

Une des pratiques classiques pour le choix de $T_0$ est donnée dans [Dréo 2006]. Elle consiste à générer 100 solutions voisines aléatoirement et d'évaluer ensuite la moyenne de la variation de la fonction objectif, $\Delta F_{obj}$. La température initiale, $T_0$ est alors déduite par la relation suivante :

$$\tau_0 = e^{\frac{\Delta F_{obj}}{T_0}} \tag{5.3}$$

avec $\tau_0$ le taux initial d'acceptation des solutions dégradant la fonction objectif. La valeur de $\tau_0$ est choisie empiriquement par l'utilisateur. Elle est généralement choisie assez élevée (par exemple $\tau_0 = 0,8$) pour permettre une exploration de l'espace d'état.

### 3.3.3 Schéma de refroidissement

Dans l'algorithme de recuit simulé, le schéma de refroidissement joue un rôle majeur pour conduire le système vers la configuration optimale. Si la température est abaissée brutalement, le système se stabilise au niveau d'un minimum local. D'un autre côté, en abaissant la température très lentement, le système tend vers l'état optimal, mais le temps de calcul est fortement augmenté. La difficulté dans l'implémentation du Recuit Simulé est de choisir la loi de contrôle de température pour obtenir l'état optimal en un minimum de temps.

Différents schémas de refroidissement de la température, T, existent. Les plus utilisés sont :

- Décroissance géométrique : $T_i = \beta\ T_{i-1}$, où $0 \leqslant \beta \leqslant 1$
- Décroissance logarithmique : $T_i = \frac{T_0}{\log(i)}$

Nous avons choisi ici d'utiliser un schéma de décroissance géométrique avec $\beta$ ajusté expérimentalement. La décroissance géométrique permet d'avoir de bons résultats sans augmenter le temps de calcul comme pour la décroissance logarithmique.

### 3.3.4 État d'équilibre

Dans le but d'atteindre un équilibre, un nombre suffisant d'itérations, noté $N_i$ doit être effectué à chaque palier de température. La valeur de $N_i$ peut être déterminée de la manière suivante :

- Méthode statique : $N_i$ est constante dans le but de s'assurer que le système atteint un état d'équilibre à chaque palier de température.
- Méthode adaptative : Dans ce cas, le nombre d'itérations, $N_i$, est ajusté à la configuration courante du système. Le nombre d'itérations dépend de la qualité des solutions trouvées durant le processus itératif.

Par simplicité, nous nous sommes limités pour notre problème à un nombre d'itérations fixe pour chaque palier de température. La valeur $N_i$ sera choisie expérimentalement.

### 3.3.5 Critère d'arrêt

En théorie, l'algorithme s'arrête lorsque la température atteint 0. Cependant, comme la loi de décroissance de la température tend vers 0, ce critère d'arrêt est inutilisable en pratique.

Dans notre cas, le critère choisi est fonction de la température finale fixée. L'algorithme s'arrête lorsque $T_f$ est atteinte. D'autres critères sont aussi utilisables en fonction du nombre de transitions, de l'évolution du critère ou encore du taux d'acceptation des solutions. La température finale doit être assez faible pour que la solution obtenue se soit stabilisée sur un compromis entre le taux de congestion et la durée des vols.

## 3.4 Discussions et commentaires

Dans la méthode proposée, plusieurs paramètres peuvent être discutés. Le premier concerne le choix de la fonction objectif, nous avons décidé ici de minimiser la congestion globale, mais il pourrait aussi être intéressant de minimiser le taux de congestion maximale. Il serait alors intéressant de comparer les solutions obtenues et de regarder s'il y a des différences. Nous avons pu constater qu'en minimisant la congestion globale, les pics de congestion étaient réduits.

Un deuxième paramètre important à choisir est la valeur de $\xi_{max}$ pour la modélisation des zones de congestion. Son choix influe sur la solution obtenue. Plus la valeur est élevée et plus le front est ralenti, par conséquent, la trajectoire $\gamma_{cong}$ est fortement déviée pour éviter les zones de congestion. Et inversement, si la valeur est faible, la trajectoire $\gamma_{cong}$ sera proche de la trajectoire $\gamma_{optim}$ mais avec une zone qui restera congestionnée. Il faut donc bien définir sa valeur en fonction du taux de congestion que l'on définit d'acceptable pour ne pas diminuer excessivement la congestion au détriment de la durée des vols.

Au final, les deux paramètres jouant un rôle majeur sur les solutions obtenues sont la fonction objectif choisi et le choix de la valeur du coefficient $\xi_{max}$. Les paramètres du recuit simulé comme la température, le schéma de refroidissement, le critère d'arrêt vont surtout avoir une influence sur la rapidité et la convergence de l'algorithme vers la solution.

## 3.5 Bilan

La méthode hybride développée peut-être résumée par le schéma du recuit simulé illustré sur la figure 5.7. La configuration initiale est obtenue par l'utilisation de l'algorithme Ordered Upwind. Cette méthode déterministe permet d'obtenir les trajectoires optimales en fonction du vent. À partir de cette configuration, on évalue la fonction objectif. On génère ensuite la suite des solutions par la fonction de voisinage à l'aide de l'algorithme déterministe et d'un paramètre aléatoire qui permet l'exploration de l'espace de recherche. Lorsque la température finale est atteinte, le système a convergé vers une solution.

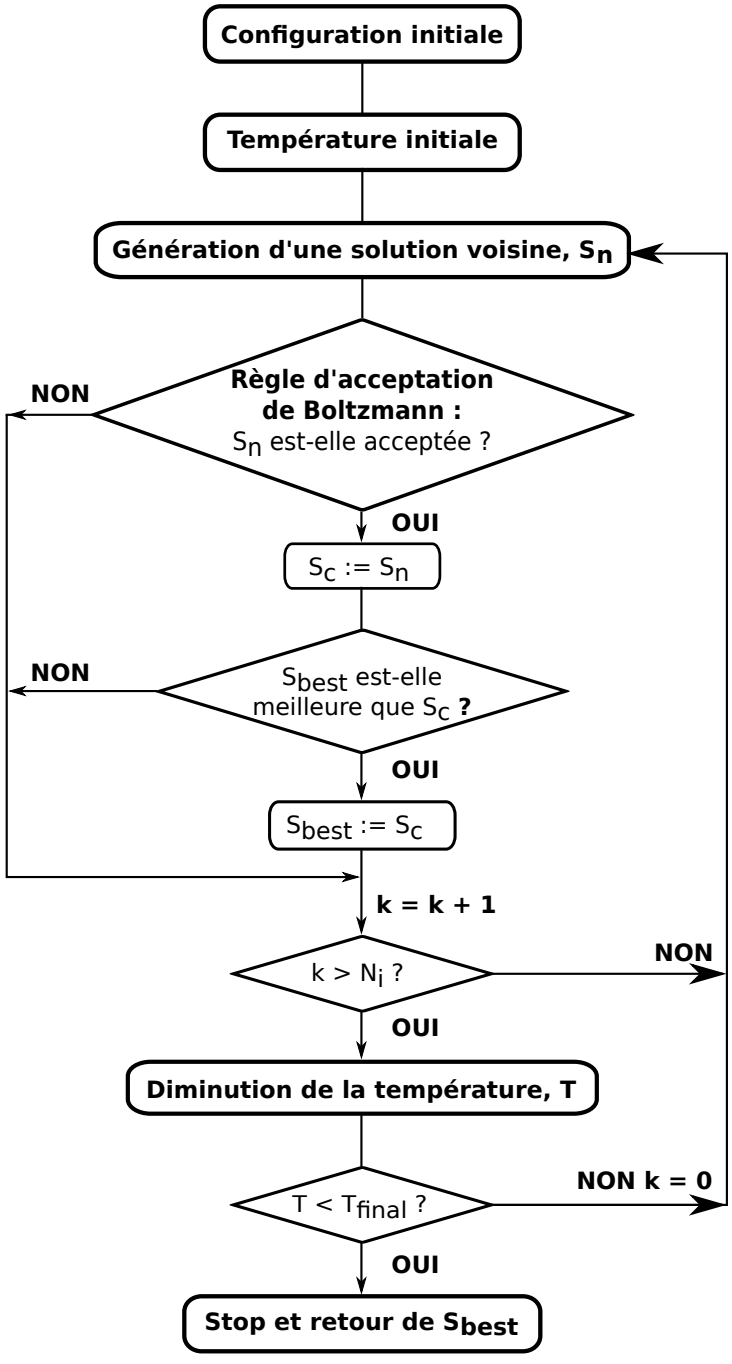



FIGURE 5.7 – *Schéma du recuit simulé.*

Chapitre

6

# Résultats de l'optimisation des trajectoires en réduisant la congestion

*Ce chapitre présente les résultats obtenus pour la minimisation de la congestion. Le cas étudié correspond au trafic au-dessus de l'Europe. Il est constitué des trajectoires optimales en fonction du vent calculées précédemment.*

# 1 Présentation du cas d'étude

Le trafic étudié ici est le même que celui pris au Chapitre 4 Section 3. Le trafic est issu d'une simulation d'une journée de trafic, le $1^{er}$ juillet 2011, au-dessus de l'Europe. Les trajectoires utilisées initialement pour évaluer la congestion sont les trajectoires optimisées uniquement en fonction du vent calculées dans le Chapitre 4 Section 3. On sélectionne une période du trafic de deux heures : entre 8h et 10h du matin. Puis, on choisit un niveau de vol : FL360. L'extrait de la simulation compte alors 501 vols. Les positions le long des trajectoires sont données toutes les 10 secondes. Les caractéristiques de l'extrait du trafic sont notées dans le tableau 6.1. Un extrait du trafic à 9h est illustré sur la figure 6.1.

| | Nombre d'avions | Vitesse moyenne (kt) | Vitesse max (kt) | Vitesse min (kt) | Distance moyenne (km) | Temps moyen (min) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Trafic entre 8h et 10h | 501 | 430 | 511 | 390 | 700 | 54 |

TABLE 6.1 – *Analyse des données de l'extrait du trafic entre 8h et 10h.*

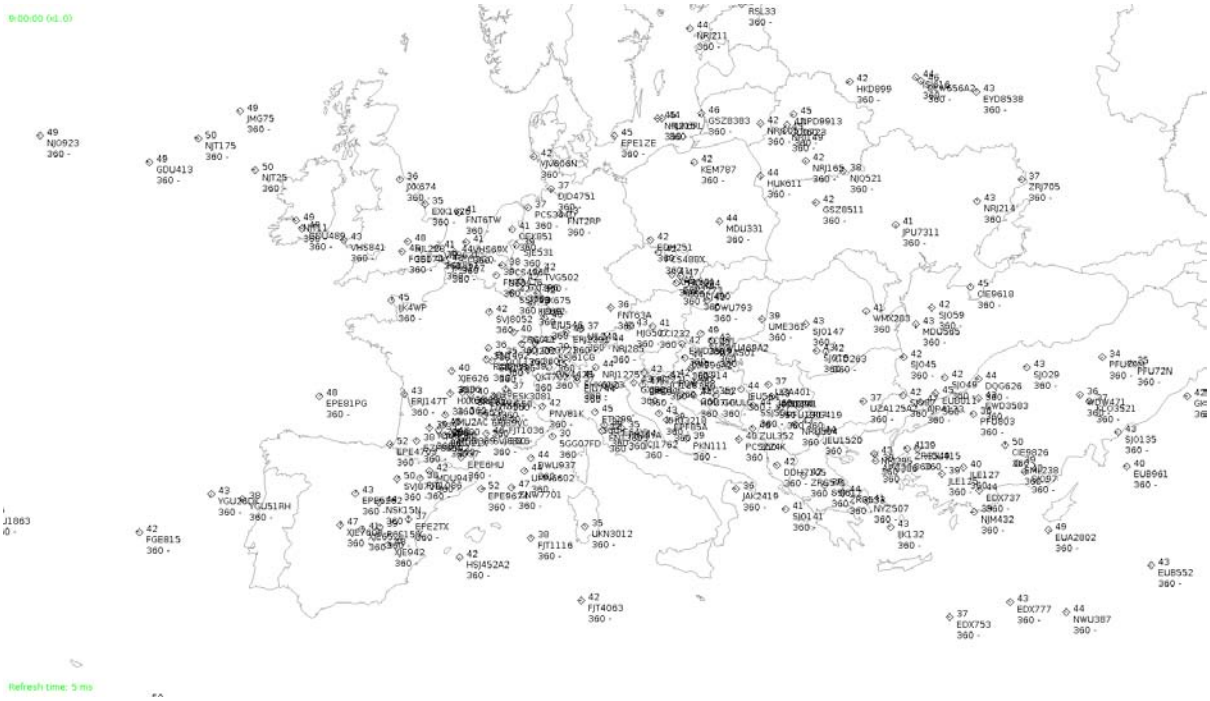


FIGURE 6.1 – *Extrait du trafic européen à 9h au niveau de vol 360.*

Les cartes de vent utilisées sont les mêmes que celles présentées dans le Chapitre 4 Section 3. Les prévisions sont données pour le niveau de vol FL360 pour une grille de

résolution de $0,5$ degrés couvrant la zone de 30N à 80N en longitude et de 30W à 45E en latitude.

Le choix du pas de temps d'échantillonnage des trajectoires pour évaluer la congestion doit être judicieux : en effet, un pas de temps trop petit génère un volume de données trop important et avec une précision trop élevée par rapport à l'utilisation que l'on souhaite en faire et donc un temps de calcul plus important. À l'inverse, un pas de temps trop grand risque de mener à une détection incomplète des zones de congestion.

La figure 6.2 montre le cas le plus défavorable où le risque de manquer la zone de congestion est le plus grand. Ce cas présente le temps le plus court d'interaction entre deux avions. À partir de ce cas, nous pouvons estimer le temps maximum d'échantillonnage pour le calcul de la congestion. La distance entre les positions de l'avion aux deux temps d'échantillonnage ne doit pas dépasser 50 NM pour ne pas manquer une zone d'interaction. Cette distance dépend de la valeur $d$ prise pour la modélisation de la congestion (cf Chapitre 5 Section 1.2). Ici, comme indiqué dans le tableau 6.2, la valeur $d$ choisie est de 25 NM. Elle a été choisie expérimentalement. Pour le calcul du temps d'échantillonnage maximum, on prend la vitesse maximale de tous les avions $V_{max}$ et on calcule le temps nécessaire pour parcourir la distance de 50 NM. Dans notre cas, la vitesse maximale est de 540 kt (soit environ 278 m/s), ce qui donne : $t = 333$ s. Pour une plus grande précision sans pour autant avoir des temps de calcul prohibitifs, nous avons choisi un pas de temps plus faible : $\Delta t = 60$ s.

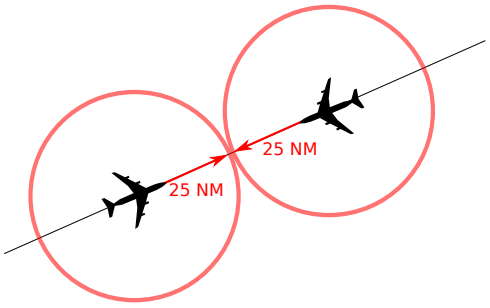



FIGURE 6.2 – *Cas le plus défavorable où le risque de manquer la zone de congestion est le plus grand.*

Les paramètres utilisés pour modéliser les zones de congestion sont répertoriés dans le tableau 6.2. Avec ces valeurs, la carte de la congestion du trafic avant minimisation est représentée sur la figure 6.3. Les zones rouges représentent les zones de forte congestion. On rappelle que ce trafic est composé des trajectoires optimales calculées uniquement en fonction du vent grâce à l'algorithme Ordered Upwind. L'objectif est maintenant de minimiser cette congestion à l'aide de l'algorithme hybride développé dans le chapitre précédent (Chapitre 5).

| Paramètre | Notation | Valeur |
|---|---|---|
| Temps d'échantillonnage | $\Delta t$ | 60 secondes |
| Coefficient | k | 0,25 |
| Distance | d | 25 NM |

TABLE 6.2 – *Valeur des paramètres pour la modélisation des zones congestionnées*

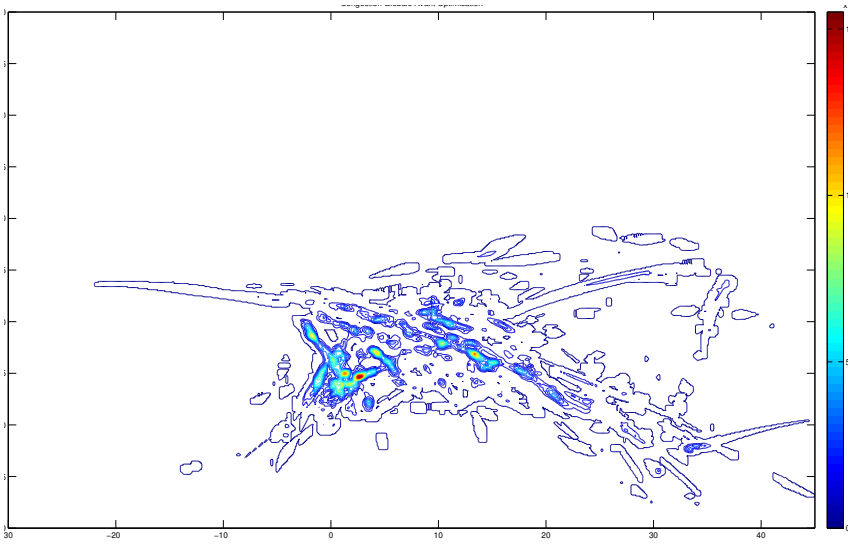



FIGURE 6.3 – *Congestion du trafic calculée avec les trajectoires optimales en fonction du vent*

## 2 Choix des paramètres pour la résolution

La difficulté de l'algorithme développé est le paramétrage du recuit simulé. Le choix de ces paramètres a une grande influence sur la qualité des résultats obtenus et dépend du problème traité. La difficulté ici est l'absence de cas test simple permettant de régler les variables du recuit simulé. Les paramètres ont donc été réglés expérimentalement à l'aide des conseils donnés dans la littérature [Dréo 2006] pour le choix des paramètres.

La température initiale $T_{init}$ pour le recuit simulé est calculée par l'algorithme proposé dans [Dréo 2006]. Elle consiste à générer 100 solutions voisines aléatoirement et d'évaluer ensuite la moyenne de la variation de la fonction objectif, $\Delta F_{obj}$. La température, $T_0$, est alors déduite par la relation suivante :

$$\tau_0 = e^{\frac{\Delta F_{obj}}{T_0}} \tag{6.1}$$

avec $\tau_0$ le taux initial d'acceptation des solutions dégradant la fonction objectif. Le choix de $\tau_0$ dépend de la qualité de l'état initial. La valeur de $\tau_0$ est choisie ici expérimentalement, $\tau_0 = 0,8$, pour permettre une exploration de l'espace d'état.

La température est diminuée en suivant la loi géométrique : $T_{k+1} = 0,95\ T_k$. La température finale est fixée à $T_{final} = \frac{T_{init}}{500}$ menant à 122 paliers de température.

Toutes les valeurs des paramètres du recuit simulé sont résumées dans le tableau 6.3.

| Paramètres | Notation | Valeur |
|---|---|---|
| Nombre d'itérations à chaque palier de température | $N_I$ | 500 |
| Taux d'acceptation initial de solution dégradant la fonction objectif | $\tau_0$ | $0,8$ |
| Coefficient de réduction de la température | $\beta$ | $0,95$ |
| Température finale | $T_f$ | $(1/500).T_0$ |
| Paramètre pour le calcul de l'état voisin | $\alpha$ | $[-0,5; 1,5]$ |

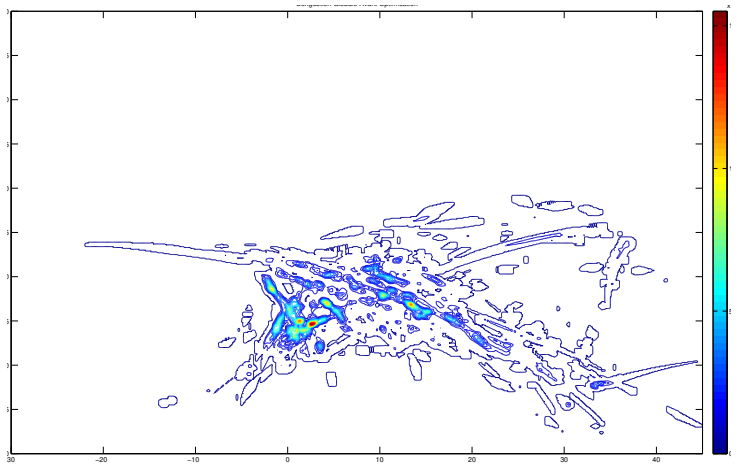
TABLE 6.3 – *Choix expérimental des valeurs pour les paramètres du recuit simulé.*

## 3 Résultats de la minimisation de la congestion

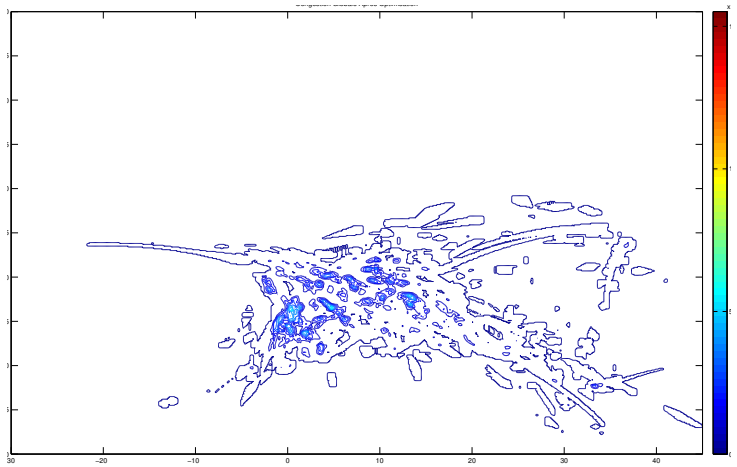
Nous avons testé l'algorithme hybride proposé pour trois journées avec des conditions de vent différentes. Comme indiqué dans le Chapitre 5 Section 2.3, le paramètre $\xi_{max}$, utilisé dans l'algorithme, doit être fixé par l'utilisateur. Ce paramètre a un impact direct sur la solution obtenue. C'est pourquoi, nous avons fixé différentes valeurs de $\xi_{max}$ afin de voir son influence sur la congestion et les trajectoires.

Au niveau des paramètres lors de la simulation, le nombre d'itérations total est de 61623. Le temps de calcul a été similaire pour la totalité des cas, il est de l'ordre de 521 minutes (soit environ 8h41min).

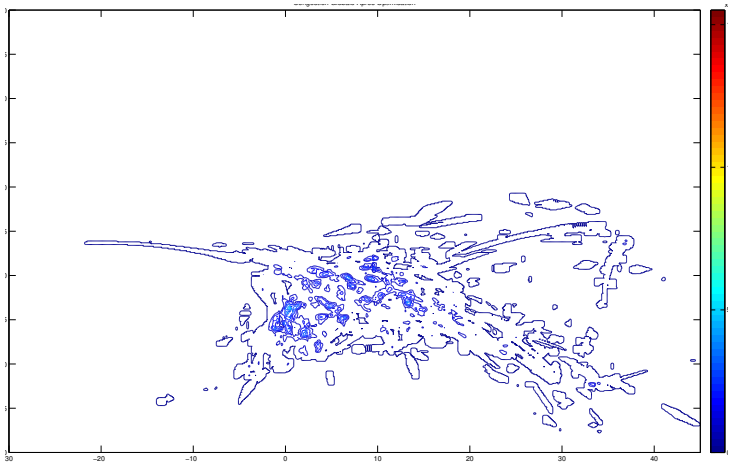
La figure 6.4 illustre la carte de congestion initiale et finale après optimisation. Ces résultats ont été obtenus pour la journée du 30/09/2013. La figure 6.4(a) présente la congestion pour les trajectoires initiales, c'est-à-dire celles optimisées uniquement en fonction du vent. Les autres figures 6.4(b), 6.4(c), 6.5(a), 6.5(b) et 6.5(c) représentent la congestion finale obtenue pour différentes valeurs de $\xi_{max}$ respectivement $0,05$, $0,1$, $0,3$, $0,5$ et $0,7$. On constate que la carte initiale présente de forts pics de congestion représentés en rouge. Après optimisation, ces pics sont réduits : plus la valeur de $\xi_{max}$ est élevée et plus la congestion est diminuée. La congestion s'étale sur l'espace disponible. Il en résulte des situations de trafic moins dangereuses où la gestion des conflits est facilitée par un nombre d'avions moins important dans leur voisinage.



(a) *Congestion avant optimisation*

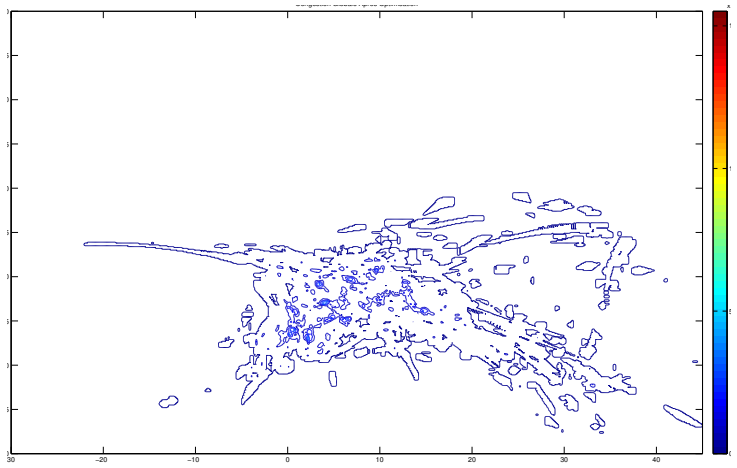


(b) *Congestion après optimisation avec* $\xi_{max} = 0,05$

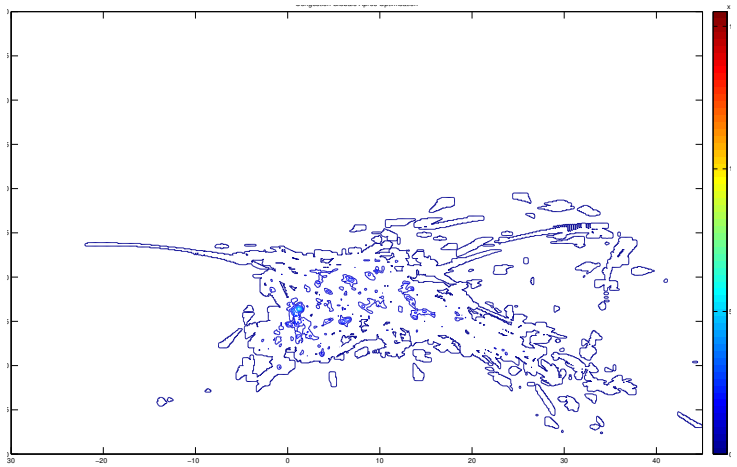


(c) *Congestion après optimisation avec* $\xi_{max} = 0,1$

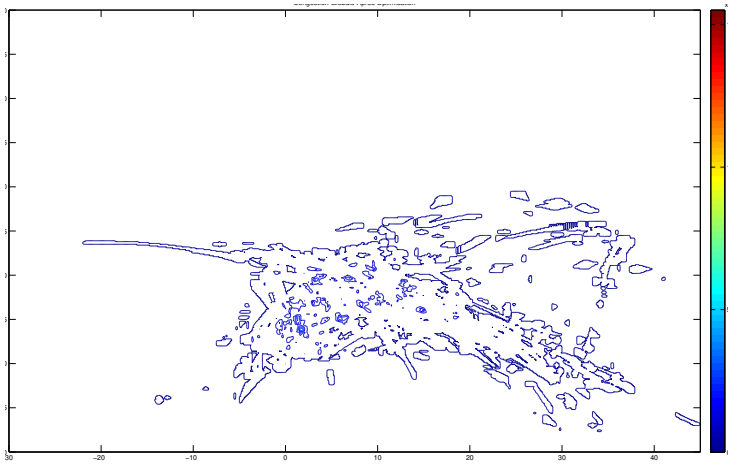
FIGURE 6.4 – *Évolution de la congestion avant et après optimisation pour la journée du 30/09/2013*



(a) *Congestion après optimisation avec* $\xi_{max} = 0,3$



(b) *Congestion après optimisation avec* $\xi_{max} = 0,5$



(c) *Congestion après optimisation avec* $\xi_{max} = 0,7$

FIGURE 6.5 – *Évolution de la congestion avant et après optimisation pour la journée du 30/09/2013*

Le tableau 6.4 présente des résultats plus quantitatifs. Il compare la réduction de la congestion ainsi que l'allongement de la distance et du temps en fonction de la valeur $\xi_{max}$ choisie par rapport aux trajectoires initiales avant optimisation de la congestion. Ces résultats ont été rapportés pour les trois cas de vent. En première observation, on s'aperçoit que, comme prévu, plus la congestion est réduite et plus le temps de vol est augmenté. Un deuxième point concerne le paramètre $\xi_{max}$, il détermine le compromis entre réduire la congestion et rester au plus proche de la trajectoire optimale initialement calculée en fonction du vent. Par exemple, pour la journée du 30/09/2013, avec $\xi_{max} = 0,7$, la congestion est réduite de 75 % et le temps de vol est augmenté en moyenne de $1,7$ %. On peut constater que l'allongement en distance n'est pas proportionnel à l'augmentation du temps puisque l'augmentation en distance peut-être compensée par un vent favorable.

Pour finir, on remarque que cette approche permet de générer le trafic avec une congestion réduite sans augmenter de manière significative le temps de vol. Le compromis entre réduire la congestion globale et rester au plus près des trajectoires initiales est déterminé par l'utilisateur à travers le paramètre $\xi_{max}$.

| Conditions de vent | $\xi_{max}$ | 0,05 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **30/09/2013** | Congestion (%) | **-44** | **-55** | **-69** | **-72** | **-75** |
| | Temps (%) | 0,25 | 0,41 | 1,23 | 1,4 | 1,7 |
| | Distance (%) | 0,31 | 0,47 | 1,28 | 1,46 | 1,7 |
| 02/10/2013 | Congestion (%) | -37 | -44 | -60 | -64 | -66 |
| | Temps (%) | 0,23 | 0,35 | 0,9 | 1,25 | 1,61 |
| | Distance (%) | 0,35 | 0,47 | 1 | 1,38 | 1,8 |
| 04/10/2013 | Congestion (%) | -45 | -53 | -64 | -71 | -74 |
| | Temps (%) | 0,29 | 0,47 | 0,96 | 1,43 | 1,77 |
| | Distance (%) | 0,34 | 0,54 | 1,05 | 1,5 | 1,82 |

TABLE 6.4 – *Minimisation de la congestion et allongement de la distance et du temps en fonction de $\xi_{max}$, pour les trois cas, comparés aux trajectoires optimales sans décongestion*

## 4 Expérimentation sur le comportement de la congestion suite à des retards au décollage

Nous avons vu dans la partie précédente que l'algorithme proposé permet de réduire la congestion sans pour autant augmenter la durée de vol. Nous allons étudié ici, le comportement de la congestion suite à des retards au décollage. Le but est de regarder si la réduction de la congestion se maintient après que l'heure de départ de certains vols ait

été retardés suite à des imprévus. Comme nous avons pris, ici, un vent constant dans le temps, la durée de vol n'est pas modifiée suite aux changements d'horaire de décollage.

Nous avons pris la planification calculée pour la journée du 30/09/2013 et nous avons étudié deux cas : le premier cas introduit un retard aléatoire à l'heure de départ pour chaque avion, et le deuxième cas introduit un retard seulement sur un certain pourcentage de vols.

Étudions le comportement de la congestion dans le premier cas. Nous avons introduit un retard aléatoire au décollage pour chaque avion. Ce retard suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ centrée en 0, nous avons ensuite fait varier l'écart-type, $\sigma$, pour étudier son impact sur la congestion. La congestion obtenu est comparée avec le cas initial où aucune minimisation de la congestion a été effectuée. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.5.

| $\xi_{max}$ | 0,05 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cas nominal (sans retard) | **-44** | **-55** | **-69** | **-72** | **-75** |
| $\sigma = 60$ | -43,7 | -54 | -66 | -71 | -73 |
| $\sigma = 300$ | -35 | -48 | -53 | -58 | -60 |

TABLE 6.5 – *Étude du comportement de la minimisation de la congestion (%) suite à des retards au décollage*

On peut constater, dans le tableau 6.5, que la congestion est toujours réduite par rapport au cas initial. Cependant, avec l'ajout de retards au décollage, la congestion est plus importante par rapport au cas sans retard. Ce constat est cohérent puisque les trajectoires été calculées dans le but de minimiser la congestion mais sans prendre en compte des retards éventuels.

Le cas des retards suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = 60$ signifie qu'environ 68 % des vols ont un retard entre 0 et 60 secondes, et que les vols restants ont un retard supérieur à 60 secondes. Pour $\sigma = 300$, environ 68 % des vols ont un retard entre 0 et 300 secondes soit 5 minutes, et que les vols restants ont un retard supérieur à 5 minutes. On constate que pour le cas où $\sigma = 300$, c'est-à-dire où les retards sont plus important, la réduction de la congestion est plus faible. La planification est plus fortement perturbée et s'écarte plus de la solution optimale calculée sans retard. Cependant, même avec cette perturbation, la congestion est sensiblement réduite. par exemple, pour $\xi = 0,5$, dans le cas où $\sigma = 300$, la congestion est réduite de 58 %. Pour le cas sans retard, cette réduction est de 72 % et pour un retard avec $\sigma = 60$ de 71 %.

Le retard ajouté à l'heure de décollage est choisi aléatoirement suivant une loi normale. Pour observer si la réduction de la congestion est maintenue pour différents cas de retard, nous avons modifié les retards pour une même planification. Nous avons effectué 100 simulations pour le cas $\xi = 0,5$, avec les retards suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = 60$. Nous avons obtenu en moyenne une réduction de 70 % avec un écart-type de $0,5699$ %. L'écart entre les solutions obtenus suivant les différents retards est faible.

On peut en conclure que la planification a l'air d'être robuste aux aléas sur l'heure de décollage.

Dans le deuxième cas, un retard est introduit uniquement sur une partie des vols composant le trafic mais ce retard peut être plus important que dans le premier cas. Les vols retardés sont tirés aléatoirement ainsi que le retard associé. Ici, le retard est choisi en suivant une loi uniforme entre 0 et un retard maximal. Nous avons pris deux valeurs différentes pour le retard maximal que peut rencontrer un vol : un premier cas avec un retard maximal de 600 secondes (soit 10 minutes) et un retard maximal de 900 secondes (soit 15 minutes). Le cas présenté dans le tableau 6.6 montre la réduction de la congestion pour 20 % de vols retardés.

| $\xi_{max}$ | 0,05 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cas nominal (sans retard) | **-44** | **-55** | **-69** | **-72** | **-75** |
| retard max= 600 s | -42 | -53 | -56 | -61 | -63 |
| retard max = 900 s | -28 | -42 | -54 | -61 | -60 |

TABLE 6.6 – *Étude du comportement de la minimisation de la congestion (%) suite à des retards au décollage*

Le tableau 6.6 nous montre, comme dans le premier cas, que la congestion est toujours réduite même si certains vols ont subi une modification de l'heure de décollage. On peut constater que, dans la majorité des cas, plus le retard est important et moins la congestion est réduite. Cependant, dans certains cas, comme par exemple dans le cas où $\xi = 0,5$, la congestion peut être sensiblement la même, même avec des retards plus importants. La modification importante de certains vols peut permettre de réduire certains pics de congestion et donc de réduire la congestion moyenne.

# 5 Bilan

La méthode développée permet de prendre en compte le vent dans la réduction de la congestion. La combinaison de la capacité du recuit simulé à atteindre l'optimum global avec l'algorithme Ordered Upwind a l'avantage d'accélérer la convergence.

Une des perspectives pour améliorer l'algorithme se situe dans le paramétrage de l'algorithme du recuit simulé. Une étude plus poussée pourrait mener à une meilleure sélection des valeurs et ainsi de meilleurs résultats. Un deuxième point d'amélioration concerne le temps de calcul. Celui-ci pourrait être diminué en optimisant le code de calcul. Un exemple serait de paralléliser l'évaluation de la congestion.

Le concept de free-route n'étant pas encore opérationnel, il a été difficile de confronter nos solutions avec des cas comparables. Nous n'avons pas trouvé de travaux traitant de problèmes similaires à savoir le problème de la minimisation de la congestion en tenant compte des conditions de vent dans le cadre du free-route.

De même, il n'y a pas une mesure unanime pour modéliser la congestion. Il est alors difficile de comparer les solutions, celles-ci dépendant fortement du critère de congestion. Le choix de la mesure de la congestion n'est pas le seul paramètre influant sur les solutions, le choix du critère d'optimisation est aussi important. Étant donné que l'on souhaite optimiser des trajectoires en réduisant la congestion pour pouvoir garantir la sécurité des vols, on peut se demander si notre critère d'optimisation à savoir la somme de la congestion est le plus adapté. Un critère correspondant au maximum de la carte de congestion pourrait être envisagé. La minimisation de ce critère permettrait de diminuer les pics de congestion, lieu où l'apparition de conflits est le plus probable. Le choix de minimiser la somme ou le maximum de la congestion doit influer sur les solutions obtenues. Des études en lien avec l'opérationnel, pour définir ce qu'est une bonne solution, pourraient être envisagées pour mieux définir la modélisation et le critère à optimiser.

Une autre idée pour le choix de la fonction objectif serait de définir un critère mixte entre la congestion et la somme des durées totales de tous les vols par exemple par :

$$F_{obj}(\vec{\gamma}) \ := \ F_{conj}(\vec{\gamma}) \ + \ \rho \sum_{j=\gamma_1 ... \gamma_N} d_j$$

avec $F_{conj}(\vec{\gamma})$ la fonction objectif définie dans le chapitre 5 par l'équation (5.2), qui représente la congestion globale, $\gamma_1 ... \gamma_N$ l'ensemble des trajectoires, $d_j$ la durée du vol pour la trajectoire $j$ et $\rho$ un paramètre à définir pour pénaliser plus ou moins la durée totale de tous les vols dans la fonction objectif.

Avec cette fonction objectif, les trajectoires sont toujours optimisées en temps en fonction du vent et de la congestion au cours de l'algorithme, mais la durée totale des vols intervient aussi clairement dans le critère d'optimisation. Il pourrait être intéressant de comparer les solutions obtenues avec ce critère et les résultats de cette thèse. Une étude de l'influence du paramètre $\rho$ sur les solutions obtenues pourrait aussi être envisagée.

Une première étude a été effectuée pour observer le comportement de la congestion suite à des retards éventuels au décollage. La congestion a été réévaluée avec l'ajout de retards. On a ainsi pu constater que l'ajout de retards influençait faiblement la congestion. Celle-ci étant un peu plus élevée mais toujours en-dessous du cas sans optimisation. On peut ainsi supposer que les trajectoires calculées sont assez robustes aux aléas au niveau de la congestion. Une étude plus approfondie de la robustesse de la solution pourra être étudiée pour confirmer notre supposition. Cette robustesse des trajectoires est très intéressante au niveau opérationnel puisque les incertitudes sur l'heure de décollage peuvent être nombreuses. La planification effectuée doit donc être robuste à ces aléas.

En conclusion, les résultats obtenus dépendent fortement de la modélisation du problème, le choix de la mesure de congestion, de la fonction objectif. Cette thèse a été une première étape pour proposer une méthode permettant d'optimiser les trajectoires en réduisant la congestion. Des études complémentaires en lien avec l'opérationnel sont nécessaires pour affiner le choix de la modélisation et des critères d'optimisation.

# Conclusion et perspectives

Nous avons proposé dans ce mémoire une modélisation et une méthodologie pour gérer le trafic aérien dans un contexte de “free-route” en exploitant les données météorologiques. La présentation de la méthode hybride développée s'est découpée en deux étapes : une première partie a présenté l'algorithme Ordered Upwind utilisé pour générer une trajectoire optimale en tenant compte des conditions météorologiques. Cet algorithme est par la suite utilisé dans la méthode hybride en le combinant à un algorithme de recuit simulé. La deuxième partie a présenté l'association de la méthode Ordered Upwind à un algorithme de recuit simulé ainsi que le paramétrage de celui-ci.

## Contributions

Dans cette thèse, les principales contributions apportées pour la planification du trafic aérien sont les suivantes :

**Modélisation mathématique du problème d'optimisation du trafic aérien** Une première contribution a consisté à modéliser le problème de l'optimisation du trafic aérien sous la forme d'un problème mathématique. Une première modélisation a été effectuée pour la planification d'une trajectoire et le problème a été mis sous la forme d'un problème de contrôle optimal. La deuxième modélisation concerne le trafic global. Nous avons introduit un modèle mathématique pour modifier les trajectoires afin de minimiser la congestion.

**Adaptation de l'algorithme Ordered Upwind** Nous avons montré qu'une des étapes de l'algorithme consiste à résoudre une équation quadratique avec la modélisation proposée pour la planification d'une trajectoire au lieu d'utiliser des algorithmes itératifs soit pour le calcul des racines d'une équation non-linéaire soit pour une minimisation locale. Ceci a permis d'accélérer le temps de calcul de la trajectoire.

Une autre modification a été apportée pour travailler avec des coordonnées latitude/longitude et pouvoir prendre en compte des longues trajectoires. Les coordonnées latitude/longitude sont transformées sur un plan cartésien par une projection de Lambert afin de pouvoir utiliser l'algorithme Ordered Upwind. La contribution apportée est la correction des déformations dues à la projection au cours de l'algorithme. Ces corrections sont apportées au niveau des distances par le calcul du module linéaire.

**Modélisation de la congestion** Nous avons proposé une métrique robuste de congestion basée sur la densité d'avions. Cette métrique est simple, mais a permis de la calculer rapidement pour des exemples de grandes dimensions.

**Développement d'un algorithme hybride pour la minimisation de la congestion** Pour résoudre le problème de minimisation de la congestion, nous avons développé un algorithme hybride combinant un algorithme déterministe, l'algorithme Ordered Upwind, pour planifier une trajectoire optimale, avec une métaheuristique, l'algorithme de recuit simulé, pour pouvoir traiter l'interaction entre toutes les trajectoires. Cet algorithme a été implémenté et testé sur du trafic européen.

# Perspectives

Pour prolonger les travaux, voici quelques pistes de travail :

**Étendre la planification d'une trajectoire en 3D** Un des points essentiels pour améliorer la méthode de planification est de pouvoir travailler avec des trajectoires en 3D, c'est-à-dire de prendre en compte le changement d'altitude. L'extension de l'algorithme Ordered Upwind à trois dimensions serait trop coûteuse en temps de calcul. Une idée envisagée est de calculer, dans un premier temps, le profil vertical optimal de l'avion (sans prendre en compte le vent) puis d'optimiser le cap de l'avion en suivant ce profil.

**Améliorer le choix des paramètres du recuit simulé** Les paramètres du recuit simulé ont été ici choisis expérimentalement à l'aide des recommandations trouvées dans la littérature. Une étude plus poussée du choix des paramètres sur un plus grand nombre de tests pourrait amener à de meilleurs résultats. Un choix optimal des paramètres permet une convergence plus rapide vers l'optimum global en évitant de converger vers un optimum local.

**Améliorer la mesure de la congestion** La métrique de congestion proposée, calculée à partir de la densité d'avions, ne prend pas en compte le cap de l'avion. Par exemple, pour deux avions assez proches, convergeant vers un même point, la congestion a le même poids que le cas opposé où les deux avions partent dans des directions opposées. Avec une métrique prenant en compte les directions des avions, la mesure serait différente. Une métrique envisagée est la mesure de la complexité du trafic proposée dans [Delahaye 2010].

**Améliorer la comparaison des résultats, chercher une solution de référence** Le concept de free-route n'étant pas encore opérationnel, il est très difficile de trouver un cas de référence pour comparer nos solutions et évaluer l'efficacité de la méthode. De plus, à notre connaissance, aucun travail n'aborde le problème de la minimisation de

la congestion en tenant compte des conditions de vent dans le cadre du free-route, nous n'avons pas pu comparer notre méthode à d'autres méthodes existantes. Une comparaison envisageable est de comparer la congestion du trafic actuel après régulation du trafic par Eurocontrol (pour l'Europe) et la congestion du trafic calculé par notre méthode. Malheureusement, nous n'avons pas eu accès aux données après régulation. Les données mises à disposition sont les plans de vol déposés ou les données radar c'est-à-dire le trafic réellement effectué après résolution des conflits par les contrôleurs. Ces deux jeux de données ne sont pas comparables avec nos résultats.

**Améliorer la modélisation** Un premier point pourrait être d'améliorer notre critère d'optimisation en prenant par exemple le cost index, qui correspond au rapport entre le temps de vol et la consommation. Pour cela, il faudrait estimer la consommation en tenant compte de l'angle de roulis et de l'évolution de la masse au cours du vol.

Un deuxième point serait de prendre en compte plus de paramètres dans l'optimisation pour rendre notre modèle plus proche de la réalité, par exemple, la possibilité de changer de niveau de vol. Cependant, la notion de niveau de vol n'est pas abordée de manière précise dans les nouveaux concepts. L'optimisation est alors différente entre une trajectoire avec une montée en palier ou avec une montée continue. Le calcul de la consommation est aussi à modifier puisque la dynamique de vol est différente en phase de montée, de descente ou en palier.

**Améliorer le temps de calcul** Le temps de calcul pour la minimisation de la congestion n'était pas une contrainte dans notre cas, cependant, on pourrait chercher à améliorer celui-ci. Par exemple, une première approche serait de paralléliser le calcul de la congestion.

**Envisager d'autres méthodes d'optimisation que le recuit simulé** Les raisons de notre choix sont explicitées, mais il est possible voir probable que d'autres méthodes se révèlent intéressantes, peut-être plus performantes, et méritent en tout cas d'être examinées, voire développées et testées.

À noter que les prolongements proposés semblent essentiels pour appliquer nos travaux dans une optique de la mise en oeuvre des nouveaux concepts (trajectoire 4D et free-route) du projet SESAR.

# Annexe

# A

# Le trafic aérien en détail

L'objectif de cette annexe est d'expliquer les bases sur lesquelles repose le système ATM européen actuel, ainsi que son organisation.

## 1 Les règles de navigation

**La circulation aérienne générale et militaire :** La circulation aérienne comprend la circulation aérienne générale c'est-à-dire tous les avions civils qu'ils soient commerciaux ou privés et la circulation aérienne militaire. Les avions militaires sont soumis à des règles particulières. Ce sont à eux de s'autogérer pour se séparer des avions civils. Néanmoins, il existe une coordination avec les avions civils. Ils peuvent toutefois décider de voler en circulation aérienne générale. Ils sont alors soumis aux mêmes règles que les avions civils.

**Deux modes de vol différents :** Les avions peuvent évoluer sous deux régimes différents : le vol à vue, Visual Flight Rules (VFR) ou le vol aux instruments, IFR. En fonction de ces deux modes, les règles sont différentes :

- les **règles de vol à vue**, **VFR**, sont applicables lorsque les conditions météorologiques sont bonnes avec une visibilité suffisante. Ces conditions sont qualifiées Visual Meteorological Conditions (VMC) et sont définies en fonction de la visibilité horizontale et de la distance par rapport aux nuages.
- les **règles de vol aux instruments**, **IFR**, sont obligatoires dès lors que les conditions météorologiques sont Instrumental Meteorological Conditions (IMC) c'est-à-dire qu'elles ne sont plus VMC. Elles ne permettent plus de voler à vue. Ce mode est utilisé pour les vols commerciaux en Europe.

Nous nous intéresserons ici particulièrement à la **gestion des vols IFR** puisque ce mode est utilisé pour les vols commerciaux en Europe, les vols qui nous intéressent pour la planification.

**Deux types d'espace aérien différents :** L'espace aérien est divisé en deux types d'espace :

- les **zones aériennes contrôlées**, au sein desquelles un service de contrôle assure la sécurité.
- les **zones aériennes non contrôlées**, pour lesquelles seuls des services d'information et d'alerte sont fournis.

L'OACI a divisé ensuite ces espaces en différentes classes, 7 au total, en fonction du service de contrôle rendu. Les règles de vol peuvent donc être différentes suivant les classes d'espace. Par exemple, il n'est pas autorisé de voler en VFR dans la classe de type A. Pour plus d'informations sur les règles de l'air, voir [OACI ].

## 2 L'attribution des niveaux de vol

Pour faciliter la séparation des avions, des niveaux de vol leur sont alloués en fonction de leur régime de vol et de leur destination. Les niveaux de vol VFR ou IFR sont séparés de la manière suivante :

- Les vols VFR utilisent les niveaux de vol se terminant par un 5 : par exemple FL45, FL55.
- Les vols IFR utilisent les niveaux de vol se terminant par un 0 : par exemple FL50, FL60.

Les vols IFR sont ensuite séparés au sein de leurs niveaux de vols en fonction de leur destination. Le but est d'assigner certains niveaux de vol aux avions se dirigeant vers une même direction et d'en assigner des différents à ceux qui arrivent en sens inverse afin de limiter les risques de collisions. Quant à la direction du vol, elle est définie par l'angle de la trajectoire par rapport au Nord magnétique. Cette règle de choix est appelée la règle semi-circulaire, elle est illustrée sur la figure A.1.

## 3 La sectorisation de l'espace aérien :

Un découpage horizontal de l'espace est effectué pour faciliter le contrôle de l'ensemble des avions. La nature des types de déplacements étant différente en espace inférieur ou supérieur, principalement des vols en phase d'approche pour l'espace inférieur et en phase en-route pour l'espace supérieur ; le découpage horizontal est différent pour mieux s'adapter aux différentes évolutions des vols.

L'espace aérien inférieur est découpé en régions d'information de vol ou en anglais Flight Information Region (FIR). Une FIR est un volume de dimensions fixées à l'intérieur l'espace aérien inférieur. Elle peut contenir des espaces aériens contrôlés ou non contrôlés. Les portions contrôlées sont appelées régions de contrôle ou zones de contrôle. Dans les zones non contrôlées, un service d'information de vol et un service d'alerte sont tout de même rendus par les organismes de la circulation aérienne. La France compte 5 FIR :

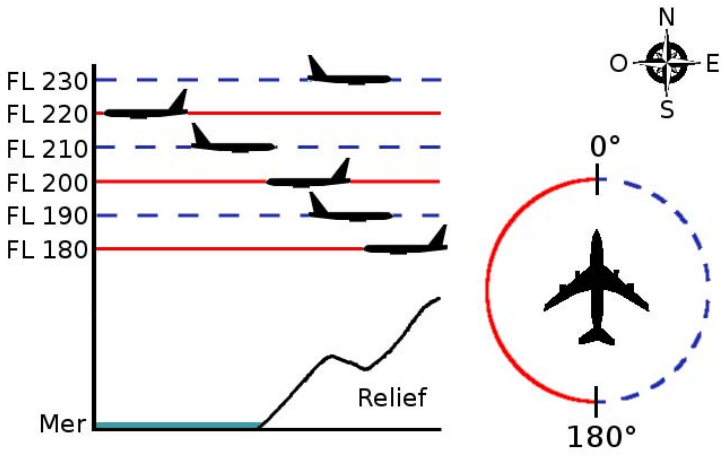



FIGURE A.1 – *Règle semi-circulaire pour le choix des niveaux de vol. Les vols dont le cap magnétique est entre 0 ° et 180 °peuvent utiliser les niveaux de vol FL190, FL 210 et FL230 (FL divisé par 10 impair) ; alors que les autres vols se dirigeant dans les directions opposées peuvent utiliser les niveaux de vol FL180, FL200 et FL220 (FL divisé par 10 pair).*

Bordeaux, Brest, Marseille, Paris et Reims. Nous ne rentrerons pas plus en détail sur le découpage de l'espace aérien inférieur puisque celui-ci ne concerne pas la phase de vol qui nous intéresse.

En espace aérien supérieur, les régions d'information de vol sont appelées Upper Information Region (UIR). La France compte une seule UIR. Jusqu'au niveau FL660, cette zone est un espace contrôlé. Au vu du volume de trafic important, il n'est pas envisageable pour un opérateur humain de contrôler l'ensemble des avions évoluant dans cet espace. Celui-ci est donc divisé en secteurs élémentaires définissant un volume d'espace délimité par un contour géographique, un niveau de vol plancher et un niveau de vol plafond. Ces différents secteurs sont gérés par des centres de contrôle appelés Centre en-Route de la Navigation Aérienne (CRNA). Il en existe 5 en France. Leur mission est de définir des secteurs de contrôle composés par le regroupement des secteurs élémentaires afin de répartir la charge de travail sur plusieurs postes. Cette répartition nécessite la coordination entre les différents secteurs de contrôle. Chaque secteur est chargé de contrôler la portion d'espace qui lui est affectée. Ce regroupement est défini à partir de la capacité maximale associée à chaque secteur.

# Annexe

# B

# La météorologie aéronautique en détail

Cette annexe a pour objectif de présenter les différents événements météorologiques à prendre en compte lors de la planification et le déroulement d'un vol.

**Les paramètres atmosphériques.** Les deux paramètres les plus significatifs pour la phase de croisière sont le vent et la température. Leur connaissance est indispensable lors de la préparation du vol et pendant son déroulement. Avant le vol, les prévisions permettent de choisir la route optimale, d'estimer le temps de parcours et la quantité de carburant nécessaire pour le vol. Pendant le vol, les mesures de vent et de température permettent de suivre la route définie et d'ajuster la vitesse.

- **Le vent**. Il est défini comme le déplacement d'une masse d'air. En se plaçant sur la terre, si un avion se déplace dans une masse d'air en mouvement, sa vitesse par rapport au sol dépend à la fois de sa vitesse propre et de la vitesse de déplacement de la masse d'air. Ainsi comme l'illustre la figureB.1, si la masse d'air se déplace en sens opposé au déplacement de l'avion, la vitesse par rapport au sol de l'avion sera plus faible que si la masse d'air se déplace dans le même sens que l'avion. Ainsi pour avoir une trajectoire optimale, il est plus intéressant de suivre des vents favorables c'est-à-dire dans la même direction de déplacement. Pour une même vitesse propre donc sans consommer plus, la vitesse par rapport au sol de l'avion sera plus élevée.
- **La température.** Comme la vitesse d'un avion en croisière est donnée en fonction du Mach et qu'à Mach fixé, la vitesse propre de l'avion c'est-à-dire la vitesse par rapport à la masse d'air dépend de la température. Celle-ci joue donc un rôle important pour le calcul de la vitesse optimale de l'avion.

**Les phénomènes atmosphériques.** Pour la phase de croisière, plusieurs phénomènes atmosphériques sont considérés comme significatifs, comme les jets, les cumulonimbus, le givre, les cendres volcaniques, les orages, les turbulences, la grêle, le cisaillement du vent.

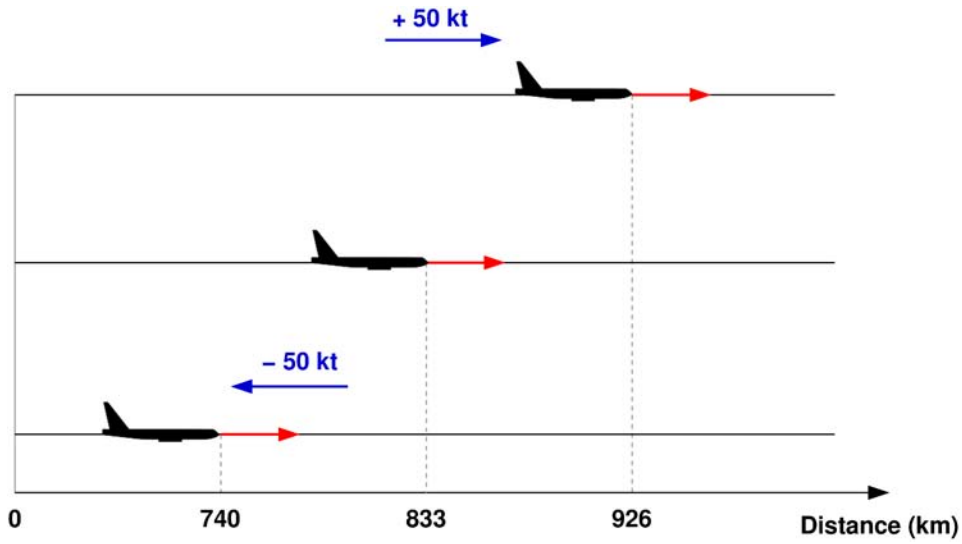



FIGURE B.1 – *Influence du vent sur la distance parcourue en une heure de vol par un avion dont la vitesse propre est de 450 kt.*

Pour les phases de décollage et d'atterrissage, d'autres phénomènes peuvent être pris en compte comme la visibilité, la base des nuages ...

La prévision ou l'observation de ces phénomènes est relayée aux pilotes à l'aide des messages SIGMET afin de signaler un danger potentiel pouvant affecter la sécurité.

- **Le cumulonimbus.** Ce n'est pas un nuage banal. Il peut-être à lui seul associé à la quasi-totalité des dangers météorologiques que peut rencontrer un pilote.
  C'est un nuage dense et puissant au développement vertical considérable. Il est facilement reconnaissable à sa forme d'enclume sur la partie supérieure. Il est à l'origine des orages et les précipitations associées peuvent être des averses de pluie, neige, neige roulée, grêle ou grésil.
  Pour un avion, il est nécessaire d'éviter ou de contourner largement un cumulonimbus.

- **Les orages.** C'est un phénomène atmosphérique caractérisé par des séries d'éclairs et de coups de tonnerre, toujours lié à la présence de cumulonimbus, et très souvent accompagné de phénomènes violents : rafales de vent, fortes précipitations sous forme d'averses.
  Les dégâts les plus fréquents liés à la foudre sont localisés au niveau de l'instrumentation de bord et des antennes, avec la perte d'usage d'un instrument, des brouillages temporaires, des problèmes logiciels ou la destruction physique d'un capteur.
  Il est conseillé d'éviter les zones orageuses et ainsi le foudroiement de l'avion.

- **La grêle.** C'est un phénomène relativement rare, mais spectaculaire et dangereux en aéronautique. Il est possible de rencontrer de la grêle à toute altitude dans un cumulonimbus, mais aussi au-dessus, au-dessous et autour. Les grêlons peuvent

parfois être éjectés par le sommet du nuage ou par les côtés.
Les dégâts observés sur un aéronef peuvent être multiples et dans certains cas altérer gravement la sécurité du vol par exemple : l'arrêt des moteurs, le bris des vitres du cockpit, la perte des moyens de communication....

- **La turbulence et le cisaillement.** C'est un phénomène fréquemment observé à bord d'un avion. Pour les vols commerciaux, le passage à travers une zone de turbulence se traduit, pour les passagers, par l'obligation de rester assis et de boucler sa ceinture de sécurité pour éviter toutes blessures.
  La turbulence désigne des variations de la direction et/ou de la vitesse du vent, engendrant des accélérations verticales ou horizontales pouvant modifier les paramètres de vol non compensés par le pilotage.
  Les accidents majeurs liés à la turbulence sont exceptionnels, néanmoins, il ne faut pas négliger le confort des équipages et passagers en évitant le mieux possible ces zones de turbulence.
  Le cisaillement est lui associé à une brusque variation de la direction ou de la vitesse du vent. Il s'accompagne souvent de turbulence forte et très locale. La conséquence est une modification brutale de la trajectoire de l'avion.

- **Le givrage.** Le risque de givrage peut concerner tout avion à des degrés divers, quels que soient sa taille, son type, son mode de propulsion. Les conditions givrantes existent en toutes saisons à des latitudes et des niveaux de vol variés et dépendent de nombreux facteurs dont certains liés directement à l'avion comme la vitesse de l'avion et les caractéristiques aéronautiques. C'est pourquoi il est très difficile de prévoir les zones où il y a un risque de givrage pour l'avion.
  Les conséquences sur la structure de l'avion peuvent être une augmentation de la masse, un centrage différent et une détérioration de l'aérodynamisme. Mais contrairement à une idée répandue, ce n'est pas l'augmentation de la masse qui présente le danger le plus important, mais la modification du profil aérodynamique. Un avion de masse élevée est peu sensible à cette variation de masse, par contre, la modification de l'aérodynamisme implique une modification du profil de l'avion avec pour conséquences plus de traînées, moins de portance, une diminution des performances et une augmentation de la vitesse de décrochage. Ceci peut conduire à la perte de contrôle de l'avion.
  D'autres conséquences, dont le givrage des sondes et antennes, peuvent aussi avoir un impact sur la sécurité du vol. Un exemple récent est l'accident du Vol d'Air France Rio-Paris. Les sondes Pitot de l'avion ont été endommagées par le gel induisant un calcul erroné de la vitesse de l'avion donnée aux pilotes.

- **Les cendres volcaniques.** Des éruptions volcaniques importantes se produisent fréquemment dans certaines parties du globe. Elles provoquent souvent l'émission de nuages de cendres qui se développent parfois jusqu'à la stratosphère [1] et sont

1. La stratosphère se situe au-dessus de la tropopause entre 8,5 et 20 kilomètres d'altitude. Les avions commerciaux volent typiquement à des niveaux proches de la stratosphère.

entraînés au gré des vents. Les particules les plus fines peuvent rester en suspension dans l'atmosphère durant plusieurs jours.
La cendre est très abrasive ; la fusion et la recristallisation de ces particules dans la partie chaude des moteurs en fonctionnement peuvent provoquer des dégâts allant de l'usure accélérée au calage des moteurs en vol.
Suite à l'éruption de l'Eyjafjallajökull en avril et mai 2010, la cendre volcanique a été produite pendant une longue période en quantité importante et a été dirigée par les vents dominants. Ce phénomène a fortement perturbé le trafic européen à la suite de la consigne de l'OACI d'éviter les zones avec un risque de présence de cendres.

- **Le jet.** C'est une structure de vent fort caractéristique. Sa forme est un tube aplati, quasi horizontal, voisin de la tropopause, avec une ligne de vitesse de vent maximale. L'axe du courant du jet est défini pour des vents supérieur à 80 kt (150 km/h), mais ils peuvent dépasser 250 nœuds (450 km/h pour les jets d'altitude). Le jet est caractérisé par des cisaillements verticaux et horizontaux du vent.
Le jet est un phénomène très intéressant en aéronautique. Par exemple, comment explique-t-on qu'un avion faisant la liaison Paris-Toronto mette 8 heures à l'aller et 7 heures au retour ? Le phénomène s'explique par la présence quasi permanente d'un jet situé au-dessus de l'océan Atlantique en direction de l'Europe. Ainsi, lors de vols transatlantiques vers l'Amérique du Nord l'avion va dans le sens contraire du vent. Pour éviter ces forts courants, les pilotes choisissent souvent une route passant près du Pôle Nord où les vents sont moins défavorables. Au retour en revanche, l'avion vole dans le sens du vent. Sa vitesse par rapport au sol est donc plus élevée et il met facilement une heure de moins qu'à l'aller.

# Annexe

C

# Passage de la formulation de Bolza à l'équation d'Hamilton-Jacobi

L'objectif de cette annexe est de montrer comment passer de la formulation standard d'un problème de commande optimale sous la forme de Bolza à la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. On pourra se référer au livre [Bertsekas 1995]. On rappelle que la formulation de Bolza est la suivante :

$$J(x(.), a(.)) = \int_0^T g(t, x(t), a(t))dt + l(T, x(T)) \tag{C.1}$$

On souhaite réécrire le problème sous la forme de l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante :

$$\min_a \{g(x, a) + \nabla_t J^*(x, t) + \nabla_x J^*(x, t).f(x, a)\} = 0 \tag{C.2}$$

Pour cela, on va utiliser le principe d'optimalité de Bellman défini pour un cas discret. On discrétise alors l'horizon de temps $[0, T]$ en N périodes avec $\delta t = \frac{T}{N}$. On note $t_k = k\ \delta t$, $x_k = x(k\ \delta t) =$ et $a_k = a(k\ \delta t)$ pour $k = 0, 1, ..., N$. L'état du système au cours du temps est défini par l'équation suivante :

$$x_{k+1} = x_k + f(x_k, a_k)\ \delta t$$

Pour différencier, la solution du problème continu du problème discret, on note $J^*(x, t)$ le coût optimal pour le problème continu et $\tilde{J}(x, t)$ le coût optimal pour le problème discret.

On applique donc le principe d'optimalité sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ avec $\tilde{J}(x, T) = l(T, x(T))$ :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(x_k, t_k) &= \min_a \left\{ \int_k^{k+1} g(t, x, a)dt + \tilde{J}(x_{k+1}, t_{k+1}) \right\} \\ &= \min_a \left\{ g(t_k, x_k, a)\ \delta t + \tilde{J}(x_{k+1}, t_{k+1}) \right\} \end{aligned} \tag{C.3}$$

En supposant que $J(x,t)$ est différentiable, on peut calculer autour du point $(x,t_k)$ la série de Taylor au premier ordre :

$$\begin{aligned} J(x_{k+1},t_{k+1}) &= J(x_k + f(x,a)\ \delta t, (k+1)\ \delta t) \\ &= J(x_k,k\delta t) + \nabla_t J(x_k,k\delta t)\ \delta t + \nabla_x J(x_k,k\delta t).f(x,a)\ \delta t + o(\delta t) \end{aligned}$$

On remplace $\tilde{J}(x_{k+1},t_{k+1})$ dans (C.3), on obtient alors :

$$\tilde{J}(x_k,t_k) = \min_a \Big\{ g(x_k,a)\ \delta t + \tilde{J}(x_k,t_k) + \nabla_t \tilde{J}(x_k,t_k)\ \delta t + \nabla_x \tilde{J}(x_k,t_k).f(x,a)\delta t + o(\delta t) \Big\} \tag{C.4}$$

En annulant $\tilde{J}(x_k,t_k)$ dans (C.4), on a ainsi :

$$0 = \min_a \Big\{ g(x_k,a)\delta t + \nabla_t \tilde{J}(x_k,t_k).\delta t + \nabla_x \tilde{J}(x_k,t_k).f(x,a)\delta t + o(\delta t) \Big\}$$

En divisant par $\delta t$ et en prenant la limite de $\delta t$ vers 0, on obtient :

$$\min_a \Big\{ g(x_k,a) + \nabla_t \tilde{J}(x_k,t_k) + \nabla \tilde{J}(x_k,t_k).f(x,a) \Big\} = 0$$

On suppose alors que :

$$\lim_{k\to\infty\ \delta t\to 0} \tilde{J}(x,k\delta t) = J^*(x,t) \text{ pour tout } x,\ t$$

On peut alors écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi pour le problème continu :

$$\min_a \{ g(x,a) + \nabla_t J^*(x,t) + \nabla_x J^*(x,t).f(x,a) \} = 0$$

**Application au problème de planification d'une trajectoire :** Dans le cas de la planification d'une trajectoire en temps minimal, le problème s'énonce de la façon suivante (cf section 2.1) :

$$\begin{cases} u(\mathrm{X}) = \min\limits_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} & (t_f - t_0) \\ \qquad \text{s.t.} & \dot{\mathrm{X}} = f(\mathrm{X}(t),\mathbf{a}(t)) \\ & \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \text{ et } \mathrm{X}(t_f) = \mathrm{X}_f, \end{cases} \tag{C.5}$$

où X est la position de l'avion, $f(\mathrm{X}(t),\mathbf{a}(t))$ est la vitesse de l'avion par rapport au sol, $V_{GS}$, à l'instant $t$, et $u(\mathrm{X})$ représente le temps minimum d'arrivée en partant du point X.

Par analogie avec la formulation de Bolza (C.1), on a :

$$\begin{aligned} l(\mathrm{X}(t_f)) &= 0 \\ g(\mathrm{X}(t),\mathbf{a}(t)) &= 1 \end{aligned}$$

La fonction de coût optimal $u$ correspond ici au temps minimum d'arrivée, il ne varie donc pas en fonction du temps et reste constant. L'équation d'Hamilton-Jacobi est alors

stationnaire. L'équation s'écrit ainsi dans notre cas par :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{a}} \{\ 1\ +\ \nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 1\ +\ \min_{\mathbf{a}} \{\nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 1\ -\ \max_{\mathbf{a}} \{-\nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \max_{\mathbf{a}} \{-\ \nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} = 1 \end{aligned} \tag{C.6}$$

L'équation (C.6) peut se réécrire différemment pour faire le lien entre la résolution de l'équation (C.6) et la propagation d'un front d'onde. On peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{a}} \{-\nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \max_{\mathbf{a}} \left\{-\frac{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}\nabla u(\mathrm{X}).f(\mathrm{X},\mathbf{a})\right\} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \|\nabla u(\mathrm{X})\| \underbrace{\max_{\mathbf{a}} \left\{-\frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}.f(\mathrm{X},\mathbf{a})\right\}}_{F(\mathrm{X},\frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|})} = 1 \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\|\nabla u(\mathrm{X})\|\, F\left(\mathrm{X}, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}\right) = 1$$

avec $F$ qui représente la vitesse de propagation du front d'onde qui est égale à :

$$F\left(\mathrm{X}, \frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}\right) = \max_{\mathbf{a}} \left\{-\frac{\nabla u(\mathrm{X})}{\|\nabla u(\mathrm{X})\|}.f(\mathrm{X},\mathbf{a})\right\}$$

# Annexe

# D

# Calcul de la vitesse du front

On cherche ici à expliciter la vitesse de propagation du front $F$ dans la direction normale $\mathbf{n}$ afin de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.12) suivante :

$$\|\nabla u(x)\| \, F(\mathrm{X}, \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}) = 1$$

Cette équation décrit la propagation du front dans la direction normale avec $\mathbf{n} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$.

La vitesse du front dépend de la vitesse de l'avion dans une direction $\mathbf{a}$ par la relation suivante :

$$F(\mathrm{X}, \mathbf{n}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}} \{-\mathbf{n}.f(\mathrm{X}, \mathbf{a})\}$$

En repartant de la définition de la vitesse par rapport au sol d'un avion, on a :

$$\overrightarrow{V}_{GS} = \begin{pmatrix} V_a \ \sin(\theta) + W_x \\ V_a \ \cos(\theta) + W_y \end{pmatrix}$$

avec $V_a$ la vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air qui est supposée constante, $(W_x, W_y)$ les composantes du vent dans la direction $x$ et $y$ et $\theta$ le cap de l'avion.
Pour simplifier l'écriture, on pose $\mathbf{a} = (\sin(\theta), \cos(\theta))$, la vitesse de l'avion s'écrit :

$$\overrightarrow{V}_{GS} = f(\mathrm{X}, \mathbf{a}) = V_a \, \mathbf{a} + \vec{W}$$

À partir de là, on pose $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix}$ on a donc :

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} \{-\mathbf{n}.f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} \\
= \quad & \max_{\theta} \left\{ - \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}V_a\ \sin\theta + W_x \\ V_a\ \cos\theta + W_y\end{pmatrix} \right\} \\
= \quad & \max_{\theta} \{-V_a\ \cos\psi\ \sin\theta - \cos\psi\ W_x - V_a\ \sin\psi\ \cos\theta - \sin\psi\ W_y\} \\
= \quad & \max_{\theta} \{-V_a\ (\cos\psi\ \sin\theta + \sin\psi\ \cos\theta)\} - \cos\psi\ W_x - \sin\psi\ W_y \\
= \quad & V_a\ \max_{\theta} \left\{ - \begin{pmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}W_x \\ W_y\end{pmatrix} \\
= \quad & V_a\ \max_{a} \{-\mathbf{a}.\mathbf{n}\} - \mathbf{n}.\vec{W} \\
= \quad & V_a\ ||\mathbf{n}||^2 - \mathbf{n}.\vec{W} \\
= \quad & V_a - \mathbf{n}.\vec{W}
\end{aligned}$$

En conclusion, la valeur de la vitesse de propagation du front dans la direction normale au front $F(\mathrm{X},\mathbf{n})$ est illustrée sur la figure D.1 et peut s'écrire plus simplement par :

$$\begin{aligned}
F(\mathrm{X},\mathbf{n}) \quad &= \quad \max_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}} \{-\mathbf{n}.f(\mathrm{X},\mathbf{a})\} \\
&= \quad V_a - \mathbf{n}.\vec{W}
\end{aligned}$$

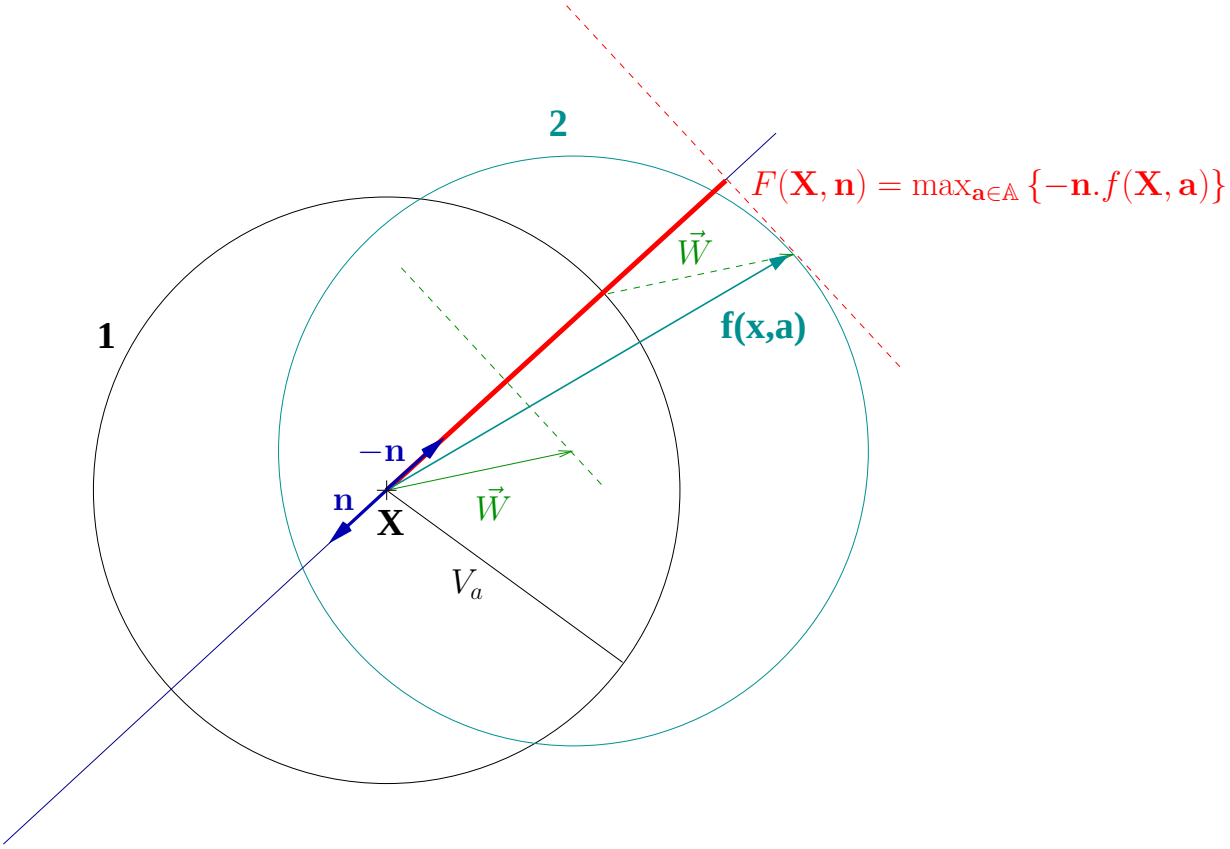



FIGURE D.1 – *Calcul de la vitesse du front* $F(X,\mathbf{n}) = \max_{\mathbf{a}\in\mathbb{A}}\{-\mathbf{n}.f(X,\mathbf{a})\} = V_a - \mathbf{n}.\vec{W}$

# Annexe

# E

# Discrétisation Eulérienne : équation quadratique

Cette annexe a pour but de détailler les étapes du calcul de la valeur d'essai $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})$ effectuées dans cette thèse. On rappelle que pour ce calcul l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.12) est discrétisée en utilisant un schéma de différence finie décentré sur le triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ (cf section 3.2.2). L'équation discrétisée pour le triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ est alors :

$$\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\| F\left(\mathrm{X}, \frac{P^{-1}w(\mathrm{X})}{\|P^{-1}w(\mathrm{X})\|}\right) = 1 \tag{E.1}$$

Le but ici est de montrer que dans notre cas, la résolution de cette équation se ramène à la résolution d'une équation quadratique.

À partir de la forme explicite de la vitesse du front $F(\mathrm{X}, \mathbf{n}) = V_a - \langle \mathbf{n}, W\rangle$ (calculée dans la section 4.1), l'équation (E.1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\| \left(V_a - \langle \frac{P^{-1}w(\mathrm{X})}{\|P^{-1}w(\mathrm{X})\|}, W\rangle\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad &\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\| V_a - \langle P^{-1}w(\mathrm{X}), W\rangle = 1 \\
\Leftrightarrow \quad &\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\| V_a = 1 + \langle P^{-1}w(\mathrm{X}), W\rangle
\end{aligned}$$

En prenant le carré de cette équation, on obtient :

$$\left\|P^{-1}w(\mathrm{X})\right\|^2 V_a^2 = \left(1 + \langle P^{-1}w(\mathrm{X}), W\rangle\right)^2 \tag{E.2}$$

On rappelle que les dérivées directionnelles $w(\mathrm{X})$ sont approchées à partir d'une discrétisation au premier ordre par :

$$w(\mathrm{X}) \approx \alpha\, v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + \beta \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_j\|} \\ \frac{1}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_k\|} \end{bmatrix} \text{ et } \quad \beta = \begin{bmatrix} \frac{-u(\mathrm{X}_j)}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_j\|} \\ \frac{-u(\mathrm{X}_k)}{\|\mathrm{X}-\mathrm{X}_k\|} \end{bmatrix}$$

L'équation (E.2) est alors égale à :

$$\underbrace{\langle P^{-1}\left(\alpha v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})+\beta\right), P^{-1}\left(\alpha v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})+\beta\right)\rangle}_{(1)} V_a^2 = \underbrace{\left(1+\langle P^{-1}\left(\alpha v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})+\beta\right), W\rangle\right)^2}_{(2)}$$

En développant le terme (1), on obtient le terme suivant :

$$(1) = v^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\alpha\rangle + 2v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\beta\rangle + \langle P^{-1}\beta, P^{-1}\beta\rangle$$

De même pour le terme (2), on obtient :

$$(2) = v^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\left(\langle P^{-1}\alpha, W\rangle\right)^2 + 2v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\langle P^{-1}\alpha, W\rangle\left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right) + \left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right)^2$$

En réinjectant ces deux termes dans l'équation et en factorisant par rapport à la valeur d'essai $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}$ que l'on souhaite calculer, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & v^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\left(V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\alpha\rangle - \langle P^{-1}\alpha, W\rangle^2\right) \\ + \; & v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})\left(2V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\beta\rangle - 2\langle P^{-1}\alpha, W\rangle\left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right)\right) \\ + \; & V_a^2\langle P^{-1}\beta, P^{-1}\beta\rangle - \left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Cette équation est bien une équation quadratique de la forme :

$$Av^2_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + Bv_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X}) + C = 0 \tag{E.4}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\alpha\rangle - \langle P^{-1}\alpha, W\rangle^2 \\ B &= 2V_a^2\langle P^{-1}\alpha, P^{-1}\beta\rangle - 2\langle P^{-1}\alpha, W\rangle\left(\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right) \\ C &= V_a^2\langle P^{-1}\beta, P^{-1}\beta\rangle - \left[\langle P^{-1}\beta, W\rangle + 1\right]^2 \end{aligned}$$

Le calcul de la valeur d'essai $v_{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k}(\mathrm{X})$ pour le triangle $(\mathrm{X}, \mathrm{X}_j, \mathrm{X}_k)$ s'effectue simplement en résolvant l'équation quadratique (E.4).

# Annexe

# F

# Résolution du problème de navigation de Zermelo

**Description du problème :** Un bateau doit se déplacer à travers une région présentant de forts courants marins. La vitesse du courant est supposée connue, elle est fonction de la position du bateau repérée par ses coordonnées rectangulaires (x,y). Les composantes de la vitesse du courant sont notées :

$$u = u(x, y) \qquad \text{et} \qquad v = v(x, y)$$

où $x, y$ sont les coordonnées et $u, v$ les composantes du courant dans la direction x et y respectivement. La norme de la vitesse relative du bateau par rapport à l'eau est constante et donnée par $V$. Le problème de navigation de Zermelo (1931) est de diriger le bateau de telle façon à minimiser le temps de parcours nécessaire pour aller d'un point A à un point B. Les équations du mouvement du bateau sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos(\theta) + u(x, y) \\ \dot{y} = V\sin(\theta) + v(x, y) \end{cases} \tag{F.1}$$

où $\theta$ est l'angle entre le vecteur vitesse du bateau et l'axe horizontal.

**Mise en forme du problème :**

$$\begin{cases} \min\limits_{\theta} t_f \left(= \int_0^{t_f} dt\right) \\ \text{sous } \dot{x} = V\cos(\theta) + u(x, y) \\ \qquad \dot{y} = V\sin(\theta) + v(x, y) \\ \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = A \\ \qquad (x(tf), y(tf)) = (0, 0) = B \end{cases} \tag{F.2}$$

La variable de contrôle est $\theta$.

**Écriture de l'Hamiltonien du problème :**

$$H(t, x(t), y(t), \theta(t), p_1(t), p_2(t)) = p_1(t)(V\cos(\theta) + u(x,y)) + p_2(t)(V\sin(\theta) + v(x,y)) \tag{F.3}$$

**Recherche de la commande H-minimisante :**

$$\frac{\partial H}{\partial \theta}(x(t), y(t), \theta, p_1(t), p_2(t)) = -p_1(t).V\sin(\theta) + p_2(t).V\cos(\theta) \tag{F.4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial \theta}(x(t), y(t), \theta, p_1(t), p_2(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -p_1(t).V\sin(\theta) + p_2(t).V\cos(\theta) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sin(\theta}{\cos(\theta)} = \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \\ \Leftrightarrow \quad & \tan(\theta) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \end{aligned} \tag{F.5}$$

**Écriture du système adjoint : par le PMP**

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial x} \\ -\frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1(t)\frac{\partial u}{\partial x} - p_2(t)\frac{\partial v}{\partial x} \\ -p_1(t)\frac{\partial u}{\partial y} - p_2(t)\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{F.6}$$

**Condition de transversalité : (temps terminal inconnu)** Le système est autonome et le temps final est libre donc à tout instant t, on a :

$$p_1(V\cos(\theta) + u(x,y)) + p_2(V\sin\theta + v(x,y)) + 1 = 0 \tag{F.7}$$

Or $p_2 = p_1\tan\theta$ d'où :

$$\begin{aligned} & p_1\left(V\cos\theta + u(x,y) + V\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + v(x,y)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = -1 \\ \Rightarrow & p_1\left(V + u(x,y)\cos\theta + v(x,y)\sin\theta\right) = -\cos\theta \end{aligned} \tag{F.8}$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-\cos\theta}{V + u\cos\theta + v\sin\theta} \\ \text{et} \quad p_2 &= \frac{-\sin\theta}{V + u\cos\theta + v\sin\theta} \end{aligned} \tag{F.9}$$

On obtient, alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos(\theta) + u(x,y) \\ \dot{y} = V\sin(\theta) + v(x,y) \\ \dot{p_1} = -p_1\dfrac{\partial u}{\partial x} - p_2\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dot{p_2} = -p_1\dfrac{\partial u}{\partial y} - p_2\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{F.10}$$

et

$$\tan\theta = \frac{p_2}{p_1} \tag{F.11}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}(1+\tan^2\theta) = \frac{\dot{p_2}}{p_1} - \frac{p_2\dot{p_1}}{p_1^2} \\ \Rightarrow \quad & \dot{\theta}\frac{1}{\cos^2\theta} = -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{p_2}{p_1}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{p_2}{p_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p_2}{p_1}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \Rightarrow \quad & \dot{\theta} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial x}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{F.12}$$

**Que conclure si le courant a des composantes de vitesses constantes ?** Si les composantes de vitesses sont constantes alors les dérivées partielles de $u$ et $v$ par rapport à $x$ et $y$ sont nulles. Le système adjoint s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{F.13}$$

$p_1$ et $p_2$ sont alors des constantes, ce qui nous donne alors comme contrôle optimal :

$$\theta(t) = \arctan(\frac{p_2(t)}{p_1(t)}) = \textit{constante} \tag{F.14}$$

La trajectoire optimale aura donc un angle constant, c'est-à-dire une trajectoire rectiligne (ligne droite entre le point de départ et d'arrivée).

On suppose maintenant que $u(x,y) = -Wy$ et $v(x,y) = 0$.

**Hamiltonien :**

$$H(t,x(t),y(t),\theta(t),p_1(t),p_2(t)) = p_1(t)(V\cos(\theta) - y(t)W) + p_2(t)(V\sin(\theta)) \tag{F.15}$$

Commande H-minimisante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial\theta}(x(t),y(t),\theta,p_1(t),p_2(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \theta(t) = \arctan(\frac{p_2(t)}{p_1(t)}) \end{aligned} \tag{F.16}$$

**État adjoint :**

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Wp_1(t) \end{pmatrix} \tag{F.17}$$

Donc $p_1(t) = constante = c_1$ et $\dot{p_2}(t) = Wp_1(t) = Wc_1$, d'où $p_2(t) = Wc_1t + c_2$.

On a comme précédemment, par la condition de transversalité :

$$p_1(t) = \frac{-\cos\theta(t)}{V_a - y(t)W\cos\theta(t)} = \text{constante} \tag{F.18}$$

D'où : $p_1(t) = p_1(t_f) = \frac{-\cos\theta(t_f)}{V_a}$ puisque $y(t_f) = 0$ et $p_2(t) = p_1Wt + p_2(0)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} p_1(t) = -\frac{\cos\theta_f}{V} \qquad &\text{c'est-à-dire} \qquad \frac{-\cos\theta(t)}{V_a - y(t)W\cos\theta(t)} = -\frac{\cos\theta_f}{V} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\cos\theta(t_f)}{y(t)\frac{W}{V_a}\cos\theta(t_f) + 1} \end{aligned} \tag{F.19}$$

Regardons maintenant l'EDO satisfaite par $\theta$ :

$$\dot{\theta}(t) = W\cos^2\theta(t)$$

On choisit $\theta$ comme variable indépendante au lieu de t. On a donc :

$$dt = \frac{d\theta}{W\cos^2\theta}$$

Ce qui nous donne :

$$t_f - t_0 = \frac{1}{W}(\tan\theta_f - \tan\theta_0)$$

Comme $t_0 = 0$, on a : $t_f = \frac{1}{W}(\tan\theta_f - \tan\theta_0)$.

À l'aide des équations du mouvement, on obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos(\theta) - Wy \\ \dot{y} = V\sin(\theta) \end{cases} \tag{F.20}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{V\cos(\theta) - Wy}{W\cos^2\theta} = \left(\dfrac{V}{W}\right)\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{y}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{V\sin\theta}{W\cos^2\theta} = \left(\dfrac{V}{W}\right)\sin\theta\dfrac{1}{\cos^2\theta} \end{cases} \tag{F.21}$$

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{V_a}{W}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\cos^3\theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta\cos\theta_f}\right) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \left(\dfrac{V}{W}\right)\sin\theta\dfrac{1}{\cos^2\theta} \end{cases} \tag{F.22}$$

Donc, en intégrant entre $\theta$ et $\theta_f$, on a :

$$\begin{aligned} y(\theta) &= \int_{\theta_f}^{\theta} \frac{dy}{d\theta} d\theta = -\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{dy}{d\theta} d\theta \\ &= \frac{V}{W}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right) \end{aligned} \tag{F.23}$$

et

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \int_{\theta_f}^{\theta} \frac{dx}{d\theta} d\theta = -\int_{\theta}^{\theta_f} \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= -\int_{\theta}^{\theta_f} \left(\frac{V_a}{W}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta\cos\theta_f}\right) d\theta \end{aligned} \tag{F.24}$$

Calculons d'abord $\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta$ : Posons :

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta \\ dx &= \cos\theta d\theta \\ \frac{d\theta}{\cos\theta} &= \frac{dx}{\cos^2\theta} = \frac{1}{1-\sin^2\theta} = \frac{dx}{1-x^2} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta &= \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) \\ &= \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta &= \ln\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} \\ &= \ln\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right| \end{aligned} \tag{F.25}$$

Calculons maintenant $\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta$ :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta &= \int \underbrace{\frac{1}{\cos\theta}}_{u} \underbrace{\frac{1}{\cos^2\theta}}_{v'} d\theta \\
&\text{Avec une intégration par partie, on a : } \int uv' = [uv] - \int u'v \\
&\text{avec } u = \frac{1}{\cos\theta} \text{ et } u' = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} \text{ et } v' = \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ et } v = \tan\theta \qquad \text{(F.26)} \\
\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta &= \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta - \int \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\tan\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta - \int \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) d\theta \text{ car } \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \\
&= \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta - \int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta + \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
2\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta &= \frac{1}{\cos\theta}\tan\theta + \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta \\
\int \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta &= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta \qquad \text{(F.27)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right|
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= -\left(\frac{V_a}{W}\right)\left(\int_\theta^{\theta_f} \frac{1}{\cos\theta} d\theta - \int_\theta^{\theta_f} \frac{1}{\cos^3\theta} d\theta + \int_\theta^{\theta_f} \frac{1}{\cos^2\theta\cos\theta_f} d\theta\right) \\
&= -\left(\frac{V_a}{W}\right)\left(\left[\ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right|\right]_\theta^{\theta_f} - \left[\frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right|\right]_\theta^{\theta_f} + \frac{1}{\cos\theta_f}\left[\tan\theta\right]_\theta^{\theta_f}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{V_a}{W}\right)\left(\frac{-1}{\cos\theta_f}(\tan\theta_f - \tan\theta) + \tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta_f} - \frac{1}{\cos\theta}\right) - \ln\frac{\tan\theta_f + \frac{1}{\cos\theta_f}}{\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}}\right)
\end{aligned}$$

En résumé, la trajectoire optimale solution du problème de Zermelo est la suivante :

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{V_a}{W}\right)\left(\frac{-1}{\cos\theta_f}(\tan\theta_f - \tan\theta) + \tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta_f} - \frac{1}{\cos\theta}\right) - \ln\frac{\tan\theta_f + \frac{1}{\cos\theta_f}}{\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}}\right) \\
y(\theta) &= \frac{V}{W}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta_f}\right)
\end{aligned}$$

Comme on connaît $x(\theta_0)$ et $y(\theta_0)$, on peut calculer $\theta_0$ et avoir l'équation de la trajectoire.

# Bibliographie


[Agogino 2012] A. Agogino & K. Tumer. *A multiagent approach to managing air traffic flow*. Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, vol. 24, no. 1, pages 1–25, 2012. *Cité page 75*

[Alton 2010] K. Alton. *Dijkstra-like Ordered Upwind Methods for Solving Static Hamilton-Jacobi Equations*. PhD thesis, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2010. *Cité pages 67 et 73*

[Bellman 1952] R. Bellman. *On the theory of dynamic programming*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 38, no. 8, page 716, 1952. *Cité page 62*

[Bellman 1957] R. Bellman. Dynamic programming. Princeton University Press, 1957. *Cité page 62*

[Bertsekas 1995] D. Bertsekas. Dynamic Programming and Optimal Control, volume 1. Athena Scientific Belmont, 1995. *Cité pages 42, 62, 64, 84, et 165*

[Besse 2002] J. Besse, H. Hallot & D. Labyt. Météorologie aéronautique. ENAC-MétéoFrance, 2002. *Cité page 35*

[Betts 1995] J. T. Betts & E. J. Cramer. *Application of direct transcription to commercial aircraft trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 18, no. 1, pages 151–159, 1995. *Cité page 59*

[Betts 1998] J.T. Betts. *Survey of numerical methods for trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 21, no. 2, pages 193–207, 1998. *Cité page 59*

[Bryson 1975] A. E. Bryson & Y-C. Ho. Applied Optimal Control : Optimization, Estimation, and Control. Taylor & Francis, 1975. *Cité page 58*

[Černy 1985] V. Černy. *Thermodynamical approach to the traveling salesman problem : An efficient simulation algorithm*. Journal of optimization theory and applications, vol. 45, no. 1, pages 41–51, 1985. *Cité pages 48 et 133*

[Chacon 2012] A. Chacon & A. Vladimirsky. *Fast two-scale methods for eikonal equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 34, no. 2, pages A547–A578, 2012. *Cité page 67*

[Chaimatanan 2013] S. Chaimatanan, D. Delahaye & M. Mongeau. *Strategic Deconfliction of Aircraft Trajectories*. In ISIATM 2013, 2nd International Conference on Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management, 2013. *Cité pages 44, 48, et 71*

[Choset 2005] H. M. Choset. Principles of Robot Motion : Theory, Algorithms, and Implementation. MIT press, 2005. *Cité page 56*

[Connolly 1990] C. I. Connolly, J. B. Burns & R. Weiss. *Path planning using Laplace's equation*. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2102–2106 vol.3, May 1990. *Cité page 57*

[Connolly 1993] C. I. Connolly & R. A. Grupen. *The applications of harmonic functions to robotics*. Journal of Robotic Systems, vol. 10, no. 7, pages 931–946, 1993. *Cité page 57*

[Crandall 1983] M. G. Crandall & P-L. Lions. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 277, no. 1, pages 1–42, 1983. *Cité page 85*

[Crandall 1984] M. G. Crandall, L. C. Evans & P-L. Lions. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 282, no. 2, pages 487–502, 1984. *Cité page 85*

[Davis 1991] Lawrence Davis*et al.* Handbook of genetic algorithms, volume 115. Van Nostrand Reinhold New York, 1991. *Cité page 46*

[Delahaye 2010] D. Delahaye & S. Puechmorel. *Air Traffic Complexity based on Dynamical Systems*. In 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pages 2069–2074, Dec 2010. *Cité pages 25, 123, et 154*

[Diggle 1985] P.J. Diggle. *A kernel Method for Smoothing Point Process Data*. Applied Statistics, vol. 34, pages 138–147, 1985. *Cité page 124*

[Dijkstra 1959] E.W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with Graphs*. Numerische Mathematlk l, pages 269–271, 1959. *Cité page 49*

[Dougui 2011] N. Dougui. *Planification de trajectoires avion : approche par analogie lumineuse*. PhD thesis, Université de Toulouse, Institut de Mathématiques de Toulouse, 2011. *Cité pages 51 et 70*

[Dréo 2006] J. Dréo, A. Petrowski, P. Siarry & E. Taillard. Metaheuristics for Hard Optimization : Methods and Case Studies. Springer, 2006. *Cité pages 136 et 144*

[Ehrgott 2005] M. Ehrgott. Multicriteria optimization, volume 2. Springer, 2005. *Cité page 122*

[Elston 2012] J.S. Elston. *Semi-Autonomous Small Unmanned Aircraft Systems for Sampling Tornadic Supercell Thunderstorms*. PhD thesis, University of Colorado, 2012. *Cité page 67*

[Eurocontrol 2011] Eurocontrol. *As the crow flies Free Route Airspace Maastricht.* Rapport technique, Eurocontrol, 2011. *Cité pages 31, 32, et 33*

[Eurocontrol 2012] Eurocontrol. *Free Route Developments in Europe.* Rapport technique, Eurocontrol, February 2012. *Cité page 33*

[Eurocontrol 2013a] Eurocontrol. *Challenges of Growth 2013 Task 7 : European Air Traffic in 2050.* Rapport technique, Eurocontrol, June 2013. *Cité page 27*

[Eurocontrol 2013b] Eurocontrol. *CODA Digest - Delays to Air Transport in Europe.* Rapport technique, Eurocontrol, 2013. *Cité pages 25 et 26*

[Eurocontrol 2013c] Eurocontrol. *User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA) Revision 3.11.* Rapport technique, Eurocontrol, May 2013. *Cité page 81*

[Eurocontrol 2014] Eurocontrol. *Sesar Demonstration Initial 4D trajectory.* Rapport technique, Eurocontrol, 2014. *Cité page 31*

[Ferguson 2007] D. Ferguson & A. Stentz. *Field D* : An interpolation-based path planner and replanner.* In Robotics Research, pages 239–253. Springer, 2007. *Cité page 51*

[Gao 2005] X. G. Gao, X. W. Fu & D. Q. Chen. *A genetic-algorithm-based approach to UAV path planning problem.* In Proceedings of the 5th WSEAS international conference on Simulation, modelling and optimization, pages 523–527, 2005. *Cité pages 44 et 47*

[Garau 2005] B. Garau, A. Alvarez & G. Oliver. *Path Planning of Autonomous Underwater Vehicles in Current Fields with Complex Spatial Variability : an A* Approach.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 194 – 198, 2005. *Cité page 50*

[Gianazza 2004] D. Gianazza. *Algorithme évolutionnaire et A* pour la séparation en 3D des flux de trafic aérien.* Journal Européen des systèmes automatisés, vol. 38, no. 9/10, page 1065, 2004. *Cité page 72*

[Godbole 2000] D. Godbole, T. Samad & V. Gopal. *Active multi-model control for dynamic maneuver optimization of unmanned air vehicles.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), volume 2, pages 1257–1262. IEEE, 2000. *Cité page 45*

[Gremaud 2006] P. A. Gremaud & C. M. Kuster. *Computational study of fast methods for the eikonal equation.* SIAM journal on scientific computing, vol. 27, no. 6, pages 1803–1816, 2006. *Cité page 66*

[Guys 2012] Laureline Guys, Stéphane Puechmorel & Laurent Lapasset. *Automatic Conflict Solving using Biharmonic Navigation Functions.* Procedia - Social and Behavioral Sciences, vol. 54, no. 0, pages 1378 – 1387, 2012. Proceedings of {EWGT2012} - 15th Meeting of

the {EURO} Working Group on Transportation, September 2012, Paris. *Cité page 57*

[Hargraves 1987] C. R. Hargraves & S. W. Paris. *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 10, no. 4, pages 338–342, 1987. *Cité page 59*

[Hart 1968] P.E. Hart, N.J. Nilsson & B. Raphael. *A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths.* IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, vol. 4, no. 2, pages 100–107, July 1968. *Cité page 50*

[Hiriart-Urruty 2008] J-B. Hiriart-Urruty. Les mathématiques du mieux faire, vol. 2 : La commande optimale pour les débutants, volume 176. Collection Opuscules, 2008. *Cité page 59*

[Jardin 2001] M. Jardin & A. Bryson. *Neighboring Optimal Aircraft Guidance in Winds.* Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 24, no. 4, pages 710–715, 2001. *Cité page 60*

[Khatib 1986] O. Khatib. *Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots.* The international journal of robotics research, vol. 5, no. 1, pages 90–98, 1986. *Cité page 56*

[Kirkpatrick 1983] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt & M. P. Vecchi. *Optimization by Simulated Annealing.* Science, vol. 220, no. 4598, pages 671–680, 1983. *Cité pages 48 et 133*

[Koditschek 1990] D.E. Koditschek & E. Rimon. *Robot navigation functions on manifolds with boundary.* Advances in Applied Mathematics, vol. 11, no. 4, pages 412–442, 1990. *Cité page 56*

[Koenig 2005] S. Koenig & M. Likhachev. *Fast replanning for navigation in unknown terrain.* IEEE Transactions on Robotics, vol. 21, no. 3, pages 354–363, 2005. *Cité page 51*

[Krogh 1984] B. H. Krogh. A generalized potential field approach to obstacle avoidance control. RI/SME, 1984. *Cité page 56*

[Land 1960] A. H. Land & A. G. Doig. *An automatic method of solving discrete programming problems.* Econometrica, vol. 28, no. 3, pages 497–520, 1960. *Cité page 50*

[LaValle 2004] S. M. LaValle, M. S. Branicky & S. R. Lindemann. *On the relationship between classical grid search and probabilistic roadmaps.* The International Journal of Robotics Research, vol. 23, no. 7-8, pages 673–692, 2004. *Cité page 53*

[LaValle 2006] S. M. LaValle. Planning algorithms. Cambridge University Press, 2006. *Cité pages 42 et 54*

[Masoud 1994] A.A. Masoud, S.A. Masoud & M.M. Bayoumi. *Robot navigation using a pressure generated mechanical stress field : the biharmonic potential approach.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 124–129 vol.1, May 1994. *Cité page 57*

[Masoud 1997] A.A. Masoud & S.A. Masoud. *Evolutionary action maps for navigating a robot in an unknown, multidimensional, stationary environment.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 3, pages 2090–2096 vol.3, Apr 1997. *Cité page 57*

[Metropolis 1953] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller & E. Teller. *Equation of state calculations by fast computing machines.* The journal of chemical physics, vol. 21, no. 6, pages 1087–1092, 1953. *Cité page 133*

[Ng 2011] H. Ng, B. Sridhar, S. Grabbe & N. Chen. *Cross-Polar Aircraft Trajectory Optimization and the Potential Climate Impact.* In IEEE Digital Avionics Systems Conference (DASC), 2011. *Cité page 61*

[Ng 2012] H. Ng, B. Sridhar & S. Grabbe. *A Practical Approach for Optimizing Aircraft Trajectories in Winds.* In IEEE Digital Avionics Systems Conference (DASC), volume 31, 2012. *Cité page 61*

[Nikolos 2003] I. K. Nikolos, K. P. Valavanis, N. C. Tsourveloudis & A. N. Kostaras. *Evolutionary algorithm based offline/online path planner for UAV navigation.* IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 33, no. 6, pages 898–912, 2003. *Cité page 47*

[OACI ] OACI. *Annexe 2 : Règles de l'air.* Rapport technique, OACI. *Cité page 158*

[Pannequin 2007] J.J. Pannequin, A.M. Bayen, I.M. Mitchell, H. Chung & S. Sastry. *Multiple aircraft deconflicted path planning with weather avoidance constraints.* In Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2007. *Cité page 72*

[Pêtrès 2007] C. Pêtrès. *Trajectory Planning for Autonomous Underwater Vehicles.* PhD thesis, Heriot-Watt University, 2007. *Cité page 66*

[Peyronne 2012] C. Peyronne. *Modélisation mathématique et résolution automatique de conflits par algorithmes génétiques et par optimisation locale continue.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2012. *Cité pages 45, 46, 47, et 71*

[Rimon 1988] E. Rimon & D.E. Koditschek. *Exact robot navigation using cost functions : The case of distinct spherical boundaries in $E^n$.* In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1791–1796, 1988. *Cité page 56*

[Roussos 2010] G. Roussos, D.V. Dimarogonas & K.J. Kyriakopoulos. *3D navigation and collision avoidance for nonholonomic aircraft-like vehicles.*

International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 24, no. 10, pages 900–920, 2010. *Cité pages 56 et 74*

[Rubio 2003] J.C. Rubio & S. Kragelund. *The trans-pacific crossing : long range adaptive path planning for UAVs through variable wind fields.* In Digital Avionics Systems Conference (DASC), volume 2, pages 8–B, 2003. *Cité page 47*

[Sethian 1996] J.A. Sethian. *A fast marching level set method for monotonically advancing fronts.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 93, no. 4, page 1591, 1996. *Cité page 65*

[Sethian 1999a] J.A. Sethian. *Fast Marching Methods.* SIAM review, vol. 41, no. 2, pages 199–235, 1999. *Cité page 65*

[Sethian 1999b] J.A. Sethian. Level Set Methods and Fast Marching Methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science. Cambridge University Press, 1999. *Cité pages 65 et 85*

[Sethian 2001] J.A. Sethian & A. Vladimirsky. *Ordered Upwind Methods for Static Hamilton-Jacobi Equations.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 98, no. 20, pages 11069–11074, 2001. *Cité pages 65 et 85*

[Sethian 2003] J.A. Sethian & A. Vladimirsky. *Ordered Upwind Methods for Static Hamilton-Jacobi Equations : Theory and Algorithms.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 41, pages 325–363, 2003. *Cité pages 85, 87, et 92*

[Siméon 2000] T. Siméon, J.P. Laumond & C. Nissoux. *Visibility-based probabilistic roadmaps for motion planning.* Advanced Robotics, vol. 14, no. 6, pages 477–493, 2000. *Cité page 54*

[Sislak 2013] D. Sislak. *Agent-Based Approach to Air-Traffic Modeling, Simulation and Collision Avoidance.* PhD thesis, Czech Technical University, 2013. *Cité pages 42 et 74*

[Soulignac 2009] M. Soulignac. *Planification de trajectoire en présence de courants : application aux missions de drones.* PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2009. *Cité page 42*

[Sridhar 2010] B. Sridhar, H.K. Ng & N. Chen. *Aircraft Trajectory Optimization and Contrails Avoidance in the Presence of Winds.* In AIAA Aviation Technology, Integration, and Operation Conference, 2010. *Cité page 60*

[Stentz 1993] A. Stentz. *Optimal and Efficient Path Planning for Unknown and Dynamic Environments.* International Journal of Robotics and Automation, vol. 10, pages 89–100, 1993. *Cité page 51*

[Sugihara 1997] K. Sugihara & J. Yuh. *GA-based motion planning for underwater robotic vehicles.* In International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology, pages 406–415. Citeseer, 1997. *Cité page 47*

[Švestka 1998] P Švestka & MH Overmars. *Probabilistic path planning.* In Robot motion planning and control, pages 255–304. Springer, 1998. *Cité page 54*

[Tsai 2004] Y.H.R. Tsai, L.T. Cheng, S. Osher & H.K. Zhao. *Fast sweeping algorithms for a class of Hamilton-Jacobi equations.* SIAM journal on numerical analysis, vol. 41, no. 2, pages 673–694, 2004. *Cité page 66*

[Tsitsiklis 1995] J.N. Tsitsiklis. *Efficient Algorithms for Globally Optimal Trajectories.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 9, pages 1528–1538, september 1995. *Cité pages 50 et 65*

[Vladimirsky 2001] A. Vladimirsky. *Fast Methods for Static Hamilton-Jacobi Partial Differential Equations.* PhD thesis, University of California, Berkeley, 2001. *Cité pages 64, 67, 85, et 92*

[Warren 1990] C.W. Warren. *A technique for autonomous underwater vehicle route planning.* IEEE Journal of Oceanic Engineering, vol. 15, no. 3, pages 199–204, 1990. *Cité page 56*

# Communications et publications

## Revues scientifiques internationales

Girardet B, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Airspace congestion reduction with wind efficiency optimization*. En cours de soumission dans le journal IEEE Transactions on intelligent transportations systems, modifications majeures en juillet 2014.

## Conférences internationales avec actes

Girardet B, Brenier Y, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Generating optimal aircraft trajectories with respect to weather conditions*. In 2nd International Conference on Interdisciplinary Science for Innovative Air Traffic Management (ISIATM), Toulouse, Juillet 2013.

Girardet B, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Wind-optimal path planning : Application to aircraft trajectories*. In 13th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, December 10-12, 2014 (Accepté).

## Congrès sur résumé et journées professionnelles

Girardet B, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Génération d'une trajectoire optimale pour un avion en tenant compte du vent et de la congestion de l'espace aérien*. In 13e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF), Angers, Avril 2012.

Girardet B, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Optimisation d'une trajectoire aérienne suivant les conditions météorologiques*, Journée R&D Aéronautique Météo France, Toulouse, Octobre 2012.

Girardet B, Lapasset L. *Generating optimal aircraft trajectories with respect to weather conditions*, Poster Sesar Innovation Days, Braunschweig (Allemagne), Novembre 2012.

Girardet B. *Optimisation de trajectoires aériennes en tenant compte des conditions météorologiques*, Journée de la recherche ENAC, Toulouse, Février 2013.

Girardet B. *Optimisation de trajectoires aériennes en tenant compte des conditions météorologiques*, Journée de l'école doctorale Aéronautique Astronautique, Toulouse, Mars 2013.

Girardet B, Delahaye D, Rabut C, Lapasset L. *Optimisation du trafic aérien en tenant compte des conditions météorologiques*. In 15e congrès annuel de la Société française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF), Bordeaux, Février 2014.

# Liste des acronymes

**ANSP** Air Navigation Service Providers . . . . . 21

**ATM** Air Traffic Management . . . . . 16

**CRNA** Centre en-Route de la Navigation Aérienne . . . . . 159

**FAB** Functional Airspace Block . . . . . 29

**FABEC** FAB Europe Central . . . . . 29

**FIR** Flight Information Region . . . . . 158

**FL** Flight Level . . . . . 17

**FMS** Flight Management System . . . . . 31

**FRAM** Free Route Airspace Maastricht . . . . . 33

**GS** Ground Speed . . . . . 80

**I-4D** Initial-4D . . . . . 31

**ICAO** International Civil Aviation Organization . . . . . 17

**IFR** Instrumental Flight Rules . . . . . 17

**IMC** Instrumental Meteorological Conditions . . . . . 157

**ISA** International Standard Atmosphere . . . . . 78

**MPC** Model Predictive Control . . . . . 72

**NM** Milles Nautiques . . . . . 22

**NMOC** Network Manager Operations Center . . . . . 21

**OACI** Organisation de l'Aviation Civile Internationale . . . . . 17

**SESAR** Single European Sky ATM Research . . . . . 28

**SIGMET** SIGnificant METeorological Information . . . . . 36

**TCAS** Traffic alert and Collision Avoidance System . . . . . 25

**TOC** Top Of Climb . . . . . 16

**TOD** Top Of Descent . . . . . 16

**TAS** True Air Speed . . . . . 79

**UIR** Upper Information Region . . . . . 159

**VFR** Visual Flight Rules . . . . . 157

**VMC** Visual Meteorological Conditions . . . . . 157

# Résumé

Dans le contexte du futur système de gestion du trafic aérien, un des objectifs consiste à réduire l'impact environnemental du trafic aérien. Pour respecter ce but, le concept de "free-route", introduit dans les années 1990, semble bien adapté aujourd'hui. Les avions ne seraient plus contraints à voler le long de routes aériennes, mais pourraient suivre des trajectoires optimales en terme de consommation. L'objectif de cette thèse est d'introduire une nouvelle méthode de planification du trafic à l'horizon pré-tactique avec des objectifs quelques fois contradictoires, c'est-à-dire avec pour but de minimiser la consommation ou de façon équivalente la durée de trajet en tenant compte des conditions météorologiques et de minimiser l'encombrement de l'espace aérien.

La méthode a été mise au point en deux étapes. La première étape a été consacrée au calcul d'une seule trajectoire optimale en terme de temps de vol en tenant compte du vent et de contraintes celles des zones interdites de survol. Cette optimisation est basée sur une adaptation de l'algorithme Ordered Upwind. La deuxième étape introduit un algorithme hybride développé, basé sur un algorithme de recuit simulé et sur l'algorithme déterministe développé dans la première étape, afin de minimiser un compromis entre la congestion et la consommation. L'algorithme combine ainsi la capacité d'atteindre la solution optimale globale via une recherche locale qui permet d'accélérer la convergence.

Des simulations numériques avec des prévisions de vent sur du trafic européen donnent des résultats encourageants qui démontrent que la méthode globale est à la fois viable et bénéfique en terme du temps de vol total comme de la congestion globale donc de la diminution des conflits.

***Mots-clés*** *: Gestion du trafic aérien, Réduction de la congestion, Météorologie, Algorithme Ordered Upwind, Recuit Simulé, Planification de trajectoires*

# Abstract

In the context of the future Air Traffic Management system (ATM), one objective is to reduce the environmental impact of air traffic. With respect to this criterion, the "free-route" concept, introduced in the mid 1990's, is well suited to improve over nowadays airspace-based ATM. Aircraft will no longer be restricted to fly along airways and may fly along fuel-optimal routes. The objective of this thesis is to introduce a novel pre-tactical trajectory planning methodology which aims at minimizing airspace congestion while taking into account weather conditions so as to minimize also fuel consumption.

The development of the method was divided in two steps. The first step is dedicated to compute a time-optimal route for one aircraft taking into account wind conditions. This optimization is based on an adaptation of the Ordered Upwind Method on the sphere. The second step introduces a hybrid algorithm, based on simulated annealing and on the deterministic algorithm developed in the first step, in order to minimize congestion. Thus the algorithm combines the ability to reach a globally-optimal solution with a local-search procedure that speeds up the convergence.

Numerical simulations with real wind data on the European air traffic yield encouraging results that demonstrate that the overall methodology is both viable computationally and beneficial in terms of total flight.

***Keywords*** *: Air Traffic Management, Congestion Reduction, Meteorology, Optimization, Ordered Upwind Method, Simulated Annealing, Trajectory Planning*