HAL
open science

Statistiques spectrales d'opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels

Christopher Shirley

To cite this version:

Christopher Shirley. Statistiques spectrales d'opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels. Algèbres d'opérateurs [math.OA]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066434 . tel-01127501

HAL Id: tel-01127501

https://theses.hal.science/tel-01127501

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Christopher Shirley

Statistiques spectrales d'opérateurs de Schrödinger aléatoires unidimensionnels

---

dirigée par Frédéric Klopp

Soutenue le 27 Octobre 2014 devant le jury composé de :

M. François Germinet	Université de Cergy-Pontoise	Président
M. Alexandre Fedotov	Université d'État de St Pétersbourg	Examinateur
M. Ivan Veselic	Technische Univ. Chemnitz	Rapporteur
M. Frédéric Klopp	Université Pierre et Marie Curie	Directeur de thèse
M. Nicolas Lerner	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur

Institut de Mathématiques de Jussieu -
Paris Rive Gauche
4 place Jussieu
Case 247
75252 Paris Cedex 5

UPMC
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boite courrier 290

À ma famille et mes amis,

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à toi, Frédéric, qui m'a guidé, conseillé et aidé toutes ces années. J'ai grandement apprécié les discussions de recherche que nous avons eues, même si elles n'étaient pas toujours évidentes à comprendre. Tu as su être disponible pour guider mes travaux et m'aider quand je peinais à avancer. De plus, tu as pris le temps de lire et relire mes articles, et me donner de nombreux conseils pour les rendre beaucoup plus lisibles. Tu m'a également fait découvrir un pan des mathématiques véritablement passionnant et m'a permis de faire des recherches alliant différents domaines. Pouvoir manipuler des objets mathématiques complexes et compréhensibles physiquement aura été particulièrement stimulant.

Je souhaite remercier Ivan Veselic et Günter Stolz d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie pour les remarques faites sur le contenu et les encouragements.

Je remercie Nicolas Lerner, François Germinet, Alexander Fedotov et de nouveau Ivan Veselic d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie encore Ivan Veselic et François Germinet pour leurs articles qui ont fortement influencés mes recherches.

Je remercie les professeurs de l'École Normale Supérieure de Cachan, qui m'ont encadré et soutenu pendant mes études. Je remercie Frédéric Pascal, alors directeur des études, qui a tenu compte de mes préférences en mathématiques pour me mettre en contact avec Frédéric. Je remercie Alain Trouvé et Gérald Peyroche pour m'avoir aidé à obtenir mon détachement nécessaire à la poursuite de mes recherches.

Je remercie également mes amis de l'ENS Cachan, Pierre, Jules, Jean, Antoine, Christophe, Sarah, Xan, Florian, Florent et plus généralement tous ceux que j'ai croisé là-bas, où j'ai passé de belles années. Je remercie Francisco et Nikolaj : avoir pu discuter plus spécifiquement de nos thèmes de recherche a été un plaisir. Je remercie également Phong, qui a commencé en même temps que moi et dont les travaux ont inspiré une partie des miens. Je remercie enfin mes camarades de bureau Christophe (tu es donc doublement remercié), Gabriel, Samuel, Thomas et Thomas, pour l'ambiance au bureau ; j'ai pris plaisir à discuter à la fois de mathématiques plus générales car vos sujets de recherches sont très différents des miens et de sujets plus divers.

Je remercie aussi le C.O.Cachan pour m'avoir permis de reprendre le tennis de table car il est bon de se vider l'esprit de temps à autre. Je remercie notamment mon entraineur Maxime et mon ancien entraineur Etienne, pour continuer à tenter de me faire faire le pas de légèreté pendant les échanges. Je remercie également mes coéquipiers de longue date, Stéphane et son fils Théo, Michel, Hervé, Florent (tu es donc toi aussi doublement remercié) et plus généralement les membres du club pour la très bonne ambiance qui y règne. Les matchs du vendredi soir et les apéros des équipes 4,5 et 6 qui suivent sont toujours de grands moments.

Je remercie Nobuo Uematsu, Paul Romero et Rob King, Jeremy Soule ainsi que Yuka Tsujiyoko dont les œuvres musicales m'ont accompagné pendant mes moments de recherches et d'écritures.

Je remercie mes parents, mes grand-parents, ma sœur et plus généralement ma famille et ma belle-famille pour leur soutien et leur affection. Je remercie notamment mon oncle Alain, qui aura éveillé ma curiosité mathématique et pris le temps de répondre aux questions compliquées que se posait le jeune collégien que j'étais.

Je remercie enfin ma compagne Amandine, qui m'accompagne depuis le lycée et m'aura apporté le bonheur et la joie qui m'aura permis d'aller jusque là. Je m'excuse de t'avoir imposé les discussions mathématiques dans les soirées avec les amis mais je crains malheureusement que cela continue.

À vous tous, je dit merci !

Résumé

Résumé

Dans cette thèse, nous allons prouver des estimations de décorrelation des valeurs propres pour plusieurs modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires en dimension un, dans le régime localisé, tant que nous avons des estimations de Wegner. Ceci permet l'étude des statistiques spectrales.

Nous commencerons donc par présenter les hypothèses sur lesquelles nous nous appuyons et les différents modèles considérés.

Nous étudierons ensuite les estimations de Minami, qui peuvent être vues comme des estimations de décorrélation des valeurs propres proches. Nous montrerons qu'en dimension un, elles sont conséquences des estimations de Wegner et de l'hypothèse de localisation. Les estimations prouvées ici ont un domaine de validité plus restreint que les estimations de Minami classiques, mais sont suffisantes pour notre étude.

Nous étudierons ensuite les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées pour les différents modèles présentés. Nous montrerons qu'elles sont conséquences des estimations de Minami, des estimations de Wegner et de l'hypothèse de localisation. Les preuves données seront différentes selon les modèles étudiés.

Enfin, nous montrerons que ces résultats permettent d'étudier les statistiques spectrales, dans le régime localisé. Par exemple, les estimations de décorrélation permettent de montrer que les statistiques locales des niveaux d'énergies, prises à deux énergies différentes, convergent faiblement vers deux processus de Poisson indépendants sur $\mathbb{R}$ d'intensité la mesure de Lebesgue.

Mots-clefs

Opérateurs de Schrödinger aléatoires, Estimations de Minami, Estimations de décorrélation, Statistiques spectrales

---

Spectral statistics for one-dimensional random Schrödinger operators

Abstract

In this thesis, we will prove decorrelation estimates of eigenvalues for several models of random Schrödinger operators in dimension one, in the localized regime, provided we have Wegner estimates. This will allow us to study spectral statistics.

We will begin with the presentation of the hypotheses needed in our proofs and the models under consideration.

We will continue with the study of the Minami estimates, which can be seen as decorrelation estimates of close eigenvalues. We will show that, in dimension one and in the localized regime, they are the consequences of the Wegner estimates. The results proven here have a area of validity smaller than the usual Minami estimates, but it will suffice for our study.

Next, we will study the decorrelation estimates of distant eigenvalues for the models under consideration. We will show that they are consequences of the Minami estimates and the Wegner estimates, in the localized regime. The proofs will be different from one model to another.

Eventually, we will show that these results allow us to study spectral statistics in the localized regime. For instance, the decorrelation estimates will be used to prove that the local energy level statistics, taken at two distincts energy levels, converge weakly to two independent Poisson processes on $\mathbb{R}$ with intensity the Lebesgue measure.

Keywords

Random Schrödinger operators, Minami estimates, Decorrelation estimates, Spectral statistics

Table des matières

Introduction **11**
0.1 Contexte . . . 11
0.2 Restrictions des opérateurs à des cubes et statistiques spectrales . . . 13
0.3 Hypothèses utilisées dans l'étude des statistiques spectrales . . . 14
0.4 Indépendance asymptotique des statistiques locales des niveaux, prises à différentes énergies . . . 17
0.5 Principaux résultats et plan du manuscrit . . . 21
0.6 Problèmes non résolus . . . 21

Notations **23**

1 Modèles et hypothèses **25**
1.1 Opérateurs aléatoires . . . 25
1.2 Différents modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires . . . 28
1.3 Hypothèses . . . 33

2 Estimations de Minami **39**
2.1 Estimations d'effet tunnel inverse dans le cas continu . . . 42
2.2 Estimations d'effet tunnel inverse dans le cas discret . . . 51
2.3 Preuve des estimations de Minami . . . 55

3 Estimations de décorrélation pour des valeurs propres éloignées **61**
3.1 Estimations de décorrélation générales . . . 62
3.2 Estimations de décorrélation pour le modèle des sauts . . . 71
3.3 Estimations de décorrélation pour les modèles discrets de type alliage . . . 76
3.4 Estimations de décorrélation pour les modèles continus . . . 81
3.5 Estimations de décorrélation pour les modèles de type multimère . . . 95
3.6 Décomposition de $P\Delta_b Q + Q\Delta_b P$ . . . 101
3.7 Gradients et matrices Hessiennes des valeurs propres . . . 102

4 Statistiques spectrales **105**
4.1 Théorème de décomposition . . . 106
4.2 La distribution locale des valeurs propres . . . 108
4.3 Statistiques spectrales . . . 110

A Propriétés des solutions d'équations de Sturm-Liouville **121**
A.1 Variables de Prüfer . . . 121
A.2 Estimations d'effet tunnel inverse . . . 122
A.3 Solutions jamais oscillantes . . . 124

B Propriétés des solutions d'équations aux différences finies d'ordre deux 127
B.1 Estimations d'effet tunnel inverse 127
B.2 Solutions jamais oscillantes 129

C Preuve du Théorème 4.4 131

D Fonctions analytiques de plusieurs variables réelles 135

Bibliographie 137

Introduction

0.1 Contexte

Le sujet principal de cette thèse est l'étude mathématique du transport électronique dans les milieux désordonnés. Commençons par resituer le contexte. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^d$. En mécanique quantique, une particule plongée dans un champ électrostatique est décrite par un état, c'est-à-dire une fonction φ_0 de carré intégrable à valeur complexe de norme égale à un. En particulier, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, le nombre $\left(\int_A |\varphi_0|^2(x)dx\right)^{1/2}$ correspond à la probabilité que la particule se trouve dans A. L'évolution de cet état dans le temps est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) = iH\varphi(t,x) \\ \varphi(0,.) = \varphi_0(.) \end{cases}. \tag{0.1.1}$$

avec $H = -\Delta + V$ où V est le potentiel électrostatique et Δ est l'opérateur laplacien. L'unique solution de l'équation (0.1.1) est la fonction $\varphi(t,x) = e^{itH}\varphi_0$ où l'opérateur e^{itH} est défini par le calcul fonctionnel. Nous cherchons à décrire le comportement de cette solution. Par exemple, si φ_0 est à support compact, $\varphi(t,.)$ concentre-t-elle l'essentiel de sa masse dans un cube donné à tout temps ou, au contraire, l'essentiel de sa masse se déplace-t-elle vers l'infini ? Nous parlerons alors d'état localisé ou d'état diffus. Pour comprendre ce phénomène il est nécessaire de comprendre les caractéristiques spectrales du Hamiltonien H. En effet, si par exemple φ_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre E, alors $\varphi(t,.) = e^{itE}\varphi_0$ de sorte que la masse mise dans tout borélien reste constante. Si le vecteur propre décroit exponentiellement et que donc l'essentiel de sa masse est mise dans un grand cube, cette propriété reste vrai à tout temps. Pour être plus précis, cette différence de comportement est décrite par le fait que l'état initial soit associé au spectre purement ponctuel ou associé au spectre continu. Nous verrons dans le premier chapitre qu'il existe une notion plus forte de localisation, appelée localisation dynamique, qui nous dit en particulier que, vu comme fonction du temps, la position moyenne de la particule reste bornée dans l'espace.

Un exemple typique de ce phénomène est le cas des cristaux, c'est à dire quand le potentiel est $\mathbb{Z}^d$-périodique. En effet, le potentiel V peut être défini par l'équation

$$V(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} q(x-n)$$

où q est le potentiel généré par un atome, les atomes étant supposés être situés aux points de $\mathbb{Z}^d$, et suffisamment lourds par rapport à la particule pour rester fixes. Dans ce cas, le spectre de l'opérateur est constitué de bandes de spectre absolument continu ([RS78]). Un électron se propage donc dans le cristal. Évidemment, ce modèle est idéalisé et il est nécessaire d'envisager d'autres modèles, plus fidèles à la réalité.

C'est dans ce cadre que sont définis les opérateurs de Schrödinger aléatoires. L'idée est, par exemple, de savoir pour l'essentiel des potentiels possibles d'un type donné, si certaines parties (éventuellement la totalité) du spectre amènent à de la diffusion ou à de la localisation (éventuellement dynamique). Pour cela nous faisons intervenir des variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dans le potentiel et nous cherchons à prouver, dans l'idéal, des résultats avec probabilité égale à un. Donnons un exemple unidimensionnel. Choisissons la fonction q continue à support dans $[-1/2, 1/2]$ et strictement positive sur $]-1/2, 1/2[$. L'environnement que nous modélisons est constitué d'un alliage de deux atomes possibles, de charges a et b, situés aux sommets du réseau $\mathbb{Z}$. Il est prouvé ([DSS02]) que presque tous les alliages de ce type ont du spectre uniquement purement ponctuel, propriété dite de localisation spectrale. Pour expliquer cette phrase, introduisons des variables aléatoires de Bernoulli $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de même paramètre $1/2$ et à valeur dans $\{a, b\}$. Définissons alors le potentiel aléatoire $V_\omega(.) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} X_n(\omega)q(. - n)$, où ω désigne l'aléa, et définissons $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ l'opérateur de Schrödinger aléatoire correspondant. La probabilité que l'opérateur H_ω vérifie la propriété de localisation spectrale est égale à un. Il est clair sur cet exemple que nous ne pouvons avoir au mieux qu'un résultat du type "avec probabilité égale à un" car l'évènement $\mathcal{E} := \{\forall i \in \mathbb{Z}^d, X_i = a\}$ n'est pas vide et l'opérateur correspondant vérifie la propriété de diffusion. En revanche, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = 0$!

Il existe une grande variété de modèles d'opérateurs aléatoires, permettant de restreindre l'étude à certaines classes d'opérateurs. Le premier modèle fut imaginé par le physicien P. W. Anderson dans l'article [And58] et est appelé de nos jour modèle d'Anderson discret. En effet, pour simplifier le problème, Anderson a commencé par étudier des analogues discrets des opérateurs de Schrödinger présentés précédemment. L'opérateur étudié est l'opérateur $H_\omega : u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \mapsto H_\omega u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d,\ [H_\omega u](n) = [\Delta u](n) + \omega_n u(n) \tag{0.1.2}$$

où les ω_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et Δ est le laplacien discret défini par

$$[\Delta u](n) = \sum_{|m-n|=1} u(m). \tag{0.1.3}$$

Pour cet opérateur aléatoire, Anderson a suggéré qu'il y avait absence de diffusion. Mathématiquement, avec probabilité égale à un, le spectre continu est vide et les vecteurs propres associés à ses valeurs propres sont exponentiellement décroissants. Ce phénomène est appelé dans la littérature localisation d'Anderson ou localisation exponentielle. Il est à noter qu'il s'agit d'une forme faible de localisation car elle n'est, à priori, pas suffisante pour prouver la localisation dynamique (nous rappelons que cela correspond à une absence de transport électronique). Nous donnons plus de détails sur les différentes formes de localisation dans le premier chapitre. Depuis l'article [And58], de nombreux modèles, continus ou discrets, ont été étudiés et pour beaucoup d'entre eux, la localisation dynamique est prouvée presque sûrement dans une certaine zone du spectre.

Notons que nous étudierons dans cette thèse la propagation d'un électron dans des milieux désordonnés, éventuellement bornés dans l'espace, et que cette étude est loin d'être suffisante pour modéliser la réalité, où, en général, le nombre d'électron est proportionnel à la taille du milieu. L'étude de la propagation de plusieurs électrons dans un milieu désordonné est mathématiquement beaucoup plus complexe que la situation présente, notamment à cause de l'interaction qui existe entre ces particules. Il y a néanmoins des travaux récents sur le sujet. Par exemple, pour un nombre de particules fixe, les estimations de Wegner sont étudiées dans [BdMCSS10] et la localisation est étudiée dans [AW09,

CS09, CBdMS11]. L'étude de la propagation dans un milieu désordonné, d'un nombre de particules qui croit avec la taille du milieu, n'en est qu'à ses débuts (voir par exemple [Ven13]). Dans le cas mathématique où les particules n'interagissent pas entre elles, l'étude peut se déduire de celle d'une particule. Les propriétés que nous allons étudier dans cette thèse pourront à l'avenir être étudiées dans ces cadres, mais elles ne sont certainement pas encore suffisamment comprises dans l'étude d'une simple particule.

0.2 Restrictions des opérateurs à des cubes et statistiques spectrales

Dans le manuscrit, nous étudierons des modèles d'opérateurs de Schrödinger H_ω mesurables et ergodiques (nous donnons le sens de ces propriétés dans le premier chapitre). Ces propriétés nous assurent l'existence d'un ensemble Σ tel que, avec probabilité un,

$$sp(H_\omega) = \Sigma.$$

Nous appelons donc Σ le spectre presque sur de H_ω. Dans cette thèse nous allons étudier les restrictions de ces opérateurs aléatoires à des cubes. En d'autres termes, si $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ ($\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ dans le cas discret) est un cube, nous définissons l'opérateur $H_\omega(\Lambda)$, comme étant la restriction de H_ω à $L^2(\Lambda)$ avec conditions aux bords de Dirichlet. En outre, pour tout $L \in \mathbb{N}$, nous définissons $\Lambda_L = [-L, L]^d$ ($[-L, L] \cap \mathbb{Z}^d$ dans le cas discret), et nous étudierons les opérateurs $H_\omega(\Lambda_L)$ pour des valeurs de L tendant vers l'infini. L'étude de ces opérateurs est physiquement pertinente car les matériaux que modélisent ces opérateurs sont bornés dans l'espace mais sont néanmoins constitués d'un très grand nombre d'atomes. Par ailleurs, ces restrictions jouent un rôle majeur dans l'étude des opérateurs définis sur l'espace en entier, par exemple dans les preuves de la localisation.

Dans le cas continu, l'opérateur $H_\omega(\Lambda_L)$ est borné inférieurement et est à résolvante compacte. Dans le cas discret, $H_\omega(\Lambda_L)$ peut être identifié à une matrice symétrique de $M_{2L+1}(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, les opérateurs n'ont que des valeurs propres de multiplicité finie, constituant un ensemble sans point d'accumulation, et nous les ordonnons $E_1(\omega) \leq E_2(\omega) \leq ...$, écrivant autant de fois une valeur propre que sa multiplicité. Nous pouvons donc définir pour tout $E \in \mathbb{R}$ le nombre

$$N_\omega(E, \Lambda) = \frac{\sharp\{j \in \mathbb{N}, E_j(\omega) \leq E\}}{|\Lambda|}. \tag{0.2.1}$$

Si $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ est un opérateur (continu ou discret) $\mathbb{Z}^d$-ergodique, nous obtenons alors la proposition suivante (voir [CL90])

Proposition 0.1. *Il existe une fonction $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un ensemble Ω_0 de probabilité un, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et presque tout $E \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{L\to\infty} N_\omega(E, \Lambda) = N(E)$$

La fonction N ainsi obtenue est appelée densité d'état intégrée (abrégée DEI) et est croissante et continue à gauche. La DEI est donc la fonction de distribution d'une mesure de Borel ν, qu'on appelle densité d'état. Le support de ν est alors égal à Σ (voir [CL90]). Ceci est un premier résultat sur le comportement des valeurs propres $(E_j)_j$ quand nous faisons tendre le cube vers Z^d.

D'autres résultats sur le comportement des valeurs propres sont étudiés, notamment l'étude des statistiques spectrales. Donnons un exemple. Pour bien des modèles, nous

pouvons prouver que la densité d'état est lipschitzienne (voir la section suivante), de sorte que la densité d'état ν a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue presque partout égale à la dérivée de N (définie presque partout également). Prenons donc un opérateur $H_\omega = -\Delta + V_\omega$, $\mathbb{Z}^d$-ergodique, défini sur $L^2(\mathbb{R})$ ou $\ell^2(\mathbb{Z})$ et dont la DEI est lipschitzienne. Définissons alors les *statistiques locales des valeurs propres dépliées* en E_0 comme étant le processus ponctuel suivant :

$$\Xi(\xi; E_0, \omega, \Lambda) = \sum_{j\geq 1} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi) \tag{0.2.2}$$

où

$$\xi_j(E_0, \omega, \Lambda) = |\Lambda|(N(E_j(\omega, \Lambda) - N(E_0)). \tag{0.2.3}$$

Les nombres $|\Lambda|N(E_j(\omega, \Lambda))$ sont appelés valeurs propres dépliées. Nous étudions ces statistiques car, par définition de la DEI, le nombre de valeur propres de $H_\omega(\Lambda_L)$ dans J est équivalent à $N(J)|\Lambda|$ (voir également [Min11]). Les statistiques locales des valeurs propres dépliées sont décrites par le théorème suivant qui correspond au [GK10a, Theorem 1.9] avec une hypothèse plus forte,

Théorème 0.2. *Prenons $E_0 \in \mathcal{I}$ tel que $N(.)$ est dérivable en E_0 et $\nu(E_0) > 0$. Alors, quand $L \to \infty$, le processus ponctuel $\Xi(\xi; E_0, \omega, \Lambda_L)$ converge faiblement vers un processus de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue. En d'autres termes, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour toute ensemble d'intervalles compacts et disjoints $(I_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$*

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \begin{array}{c} \sharp\{j; \xi_j(\omega, \Lambda_L) \in I_1\} = k_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sharp\{j; \xi_j(\omega, \Lambda_L) \in I_p\} = k_p \end{array}\right\}\right) = \frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} e^{-|I_1|} \dots \frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} e^{|I_1|} \tag{0.2.4}$$

Nous savons qu'il existe un spectre presque sur, Σ. Or le nombre de valeurs propres considérées dans le processus est égal à la taille du cube Λ. Ces valeurs propres vont avoir donc tendance à remplir l'espace contenu dans Σ. Le théorème décrit la façon dont les valeurs propres remplissent le spectre presque sur en fonction de l'aléa. Un premier résultat de ce genre a été prouvé par Molchanov dans [Mol81] pour un modèle particulier d'opérateur de Schrödinger aléatoire sur la droite réelle, puis généralisé par Minami dans [Min96] pour les modèles d'Anderson discrets, pour toutes les dimensions (voir aussi [Wan01, KN07, Nak07, CGK10]). Germinet et Klopp ont donné dans [GK10a] (voir aussi [Klo13]) une méthode pour prouver différents résultats sur les statistiques spectrales des opérateurs de Schrödinger aléatoires. Suivant ce travail, il suffit de vérifier que l'opérateur de Schrödinger étudié vérifie certaines hypothèses que nous donnerons dans la section suivante. Par ailleurs, il est possible d'affaiblir l'hypothèse de dérivabilité faite dans le Théorème 0.2 et de la remplacer par une hypothèse d'annulation pas trop rapide de la différence $|N(E + h) - N(E)|$ quand h s'approche de zéro. En outre, il est également étudié pour la première fois les statistiques des espacements de niveaux, c'est-à-dire des variables aléatoires $\xi_{j+1} - \xi_j$.

0.3 Hypothèses utilisées dans l'étude des statistiques spectrales

Pour obtenir des résultats similaires au Théorème 0.2, Germinet et Klopp utilisent quatre hypothèses que nous allons présenter. Les trois premières seront expliquées avec plus de détails dans le premier chapitre car ce seront les hypothèses de base de notre étude.

Propriété d'indépendance à une distance

Il s'agit de l'hypothèse suivante.

(IAD) : Il existe $S \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(\Lambda_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ ensemble de cubes tel que pour tout $k \neq k'$ $\mathrm{dist}(\Lambda_k, \Lambda'_k) \geq S$, les opérateurs $(H_\omega(\Lambda_k))_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont indépendants.

Il s'agit d'une hypothèse couramment utilisée et vérifiée pour beaucoup d'opérateurs. Celle-ci peut être affaiblie en un simple contrôle de la corrélation entre les opérateurs restreints à des cubes éloignés mais cela complique en général l'écriture des preuves.

Hypothèse de localisation

Il s'agit de l'hypothèse suivante :

(Loc) : Pour tout $\xi \in (0,1)$, nous avons

$$\sup_{L>0} \sup_{\substack{\mathrm{supp}\, f\subset\mathcal{K} \\ |f|\leq 1}} \mathbb{E}\left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} e^{|\gamma|^\xi} \|\mathbf{1}_{\Lambda(0)} f(H_\omega(\Lambda_L))\mathbf{1}_{\Lambda(\gamma)}\|_2\right) < \infty, \tag{0.3.1}$$

où $\Lambda(x)$ représente l'intervalle $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$ dans le cas continu et représente le singleton $\{x\}$ dans le cas discret.

L'hypothèse de localisation est prouvée pour beaucoup de modèles, continus ou discrets (voir par exemple [Kle08] et les références données dans le premier chapitre du présent manuscrit). Elle nous servira essentiellement à réduire l'étude des caractéristiques spectrales des opérateurs $H_\omega(\Lambda_L)$ à l'étude d'une famille d'opérateur de type $H_\omega(\Lambda_l)$ où $l = (\log L)^\eta$ avec $\eta > 1$. Notons que nous n'utiliserons pas d'estimations sur l'opérateur défini sur l'espace en entier.

Estimations de Wegner

Il s'agit de l'hypothèse

(W) : Fixons $\mathcal{I}$ un intervalle compact. Il existe $C > 0$ tels que pour tout intervalle $J \subset \mathcal{I}$, et tout cube Λ

$$\mathbb{E}\big[tr\left(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))\right)\big] \leq C|J||\Lambda|.$$

Notons que cette hypothèse est prouvée pour beaucoup de modèles, aussi bien discrets que continus (voir par exemple [Ves08] et les références données dans le premier chapitre du présent manuscrit). Cette hypothèse nous dit que les valeurs propres de l'opérateur $H_\omega(\Lambda)$ se déplacent en fonction de l'aléa. Nous pouvons minorer l'espérance dans (W) par la probabilité d'avoir une valeurs propre dans J

Estimations de Minami

Il s'agit de l'hypothèse suivante.

(M) : Fixons $\mathcal{I}$ un intervalle compact. Il existe $\rho > 0$ et $C > 0$ tel que, pour tout intervalle $J \subset \mathcal{I}$, et tout cube Λ,

$$\mathbb{E}\big[tr\left(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))\right).\left(tr\left(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))\right) - 1\right)\big] \leq C\left(|J||\Lambda|\right)^{1+\rho}.$$

Cette hypothèse est de même nature que les estimations de Wegner. Nous pouvons minorer l'espérance dans (M) par la probabilité d'avoir deux valeurs propres dans J. L'hypothèse (M) nous dit approximativement que les valeurs propres proches se comportent comme des variables aléatoires indépendantes. Notons que dans le cas optimal où nous avons $\rho = 1$, le majorant est le carré du majorant dans les estimations de Wegner.

Les estimations de Minami sont prouvées pour beaucoup moins de modèles. Dans l'étude des statistiques spectrales ([Min96]), Minami a utilisé et prouvé ce résultat, pour les modèles d'Anderson discrets, pour toutes les dimensions. Une preuve plus simple et des généralisations pour ces mêmes modèles se trouvent dans [CGK09]. La preuve dans cet article permet également de prendre de considérer d'autre hamiltonien libre (c'est-à-dire sans le potentiel) plus généraux que le laplacien discret (voir également [BHS07, GV07]). Par ailleurs, il a été prouvé dans [Klo14], pour les modèles définis sur la droite réelle, que les estimations de Minami sont des conséquences des estimations de Wegner et l'hypothèse de localisation. Les estimations de Minami obtenues sont plus faibles que celles présentées ci-dessus mais sont suffisantes pour l'étude des statistiques spectrales. Par exemple, ces estimations sont valables uniquement sur des tailles d'intervalles en énergie dépendant de la taille du volume du cube. Le mécanisme derrière la preuve des estimations de Minami faite dans [Klo14] est l'effet tunnel, ou plutôt, des estimations d'effet tunnel inverse. Enfin, très récemment ([TV14]), les estimations de Minami, telles qu'énoncées dans (M), ont été prouvées pour les modèles discrets de type alliage, pour toutes les dimensions, tant que la transformée de Fourier du potentiel de simple-site n'est jamais nulle. Le potentiel peut, quant à lui, changer de signe. La preuve suit celle donnée dans [Min96] et consiste à faire une transformation sur l'espace de probabilité, technique déjà utilisée pour prouver les estimations de Wegner ([Ves10a]).

L'effet tunnel utilisé dans [Klo14]. nous permettra de montrer que, si $H_\omega(\Lambda_L)$ a deux valeurs propres proches dans un intervalle I assez petit, nous pouvons trouver deux cubes Λ_1 et Λ_2, inclus dans Λ_L, distants l'un de l'autre, de sorte que les deux opérateurs $H_\omega(\Lambda_i)$, indépendants l'un de l'autre, ont chacun une valeur propre dans I. Une fois ce dernier résultat prouvé, il "suffit" alors de se restreindre à des cubes de taille logarithmique grâce à l'hypothèse de localisation et d'appliquer les estimations de Wegner aux deux opérateurs.

Généralisation des résultats

Dans cette thèse nous nous posons quelques questions sur les statistiques spectrales des opérateurs de Schrödinger aléatoires, par exemple décrites par le Théorème 0.2, et les hypothèses pour y parvenir.

1. Est-il possible de prouver des résultats similaires au Théorème 0.2 avec des estimations de Wegner non linéaires en $|\Lambda|$?
2. Les estimations d'effet tunnel inverse et les estimations de Minami prouvées dans [Klo14] peuvent-elles être généralisées à d'autres modèles d'opérateur, notamment discrets ?

Commentons la première question. Il est fait mention dans [GK10a] que les raisonnements tenus pour prouver les résultats sur les statistiques spectrales restent valables si les estimations de Wegner ne sont plus linéaires en le volume du cube. Des estimations de ce type ont été prouvées pour certains modèles, par exemple des modèles discrets de type alliage avec potentiel de simple site qui changent de signe ([Ves10a]), ou pour des modèles plus généraux ([Klo95]). En fait, si les estimations ne sont que polynomiales en fonction du volume de cube et que les estimations de Minami restent valables (éventuellement sous une forme plus faible, comme dans [Klo14]) sous une forme amoindri, les preuves restent valables, à quelques changements près, si nous rajoutons une hypothèse de régularité sur la densité d'état intégrée. En effet, les auteurs utilisent le caractère lipschitzien de la DEI. Or, si les estimations de Wegner ne sont plus linéaires en fonction du volume du cube, nous ne déduisons aucune information sur la régularité de la DEI. En revanche, nous montrerons que l'étude des statistiques des niveaux d'énergies reste

valable si la DEI est log-höldérienne avec exposant suffisamment grand, ou höldérienne. En dimension un, il est possible d'obtenir la régularité höldérienne par d'autres moyens (voir [BL85] et l'exemple donné en annexe), notamment par l'étude des matrices de transfert. En revanche, en dimension supérieure, ces méthodes ne se généralisent pas. Il reste donc important d'optimiser les exposants dans les estimations de Wegner en dimension quelconque.

Commentons maintenant la seconde question. La preuve des estimations d'effet tunnel inverse était donnée dans [Klo14] pour l'opérateur différentiel

$$Hu := -u'' + qu$$

où q est bornée. Nous modifions légèrement la preuve pour traiter le cas d'opérateurs différentiels plus généraux. Ainsi, les estimations d'effet tunnel inverse seront prouvées pour les opérateurs de Sturm-Liouville du type

$$Hu := -(pu)' + qu,$$

où q est bornée, p est continue par morceaux, ne change pas de signe trop souvent et $|p|$ est minorée par une constante strictement positive et majorée. La fonction p peut changer de signe, mais ne peut pas s'approcher de zéro. En revanche, pour pouvoir appliquer ce résultat et prouver les estimations de Minami, nous supposerons en plus que p ne change pas signe, que p est absolument continue par morceaux et que sa dérivée est bornée.

Nous montrerons que le fait que les estimations de Minami sont des conséquences des estimations de Wegner, dans le régime localisé, est également valable pour des modèles discrets assez généraux, toujours en dimension un, en prouvant les estimations d'effet tunnel. Ces résultats seront appliqués aux différents modèles considérés dans le manuscrit. C'est le cas par exemple des modèles discrets de type alliage unidimensionnel, avec potentiel de simple-site exponentiellement décroissant. Nous ne nécessitons donc pas d'hypothèse sur la transformée de Fourier du potentiel de simple-site. En revanche, les estimations ne sont valables qu'en dimension un et sont plus faibles que celles données dans (M) et donc dans [TV14] mais sont suffisantes dans l'étude des statistiques spectrales. La preuve permet également de considérer des hamiltoniens libres plus généraux que le simple laplacien discret, nous considérerons des opérateurs de Jacobi. La preuve que nous faisons suit celle donnée dans [Klo14], grâce aux estimations d'effet tunnel inverse. Le principal avantage dans le cas discret est que le réseau auquel nous devons restreindre l'appartenance des cubes Λ_1 et Λ_2, qui doit être construit dans le cas continu, nous est ici donné par le modèle. En revanche, certaines preuves de résultats sur les équations aux différences finies nécessitent plus de calculs que les preuves des résultats analogues sur les équations différentielles. Par ailleurs, le fait que, pour les modèles continus, les vecteurs propres ne peuvent rester proche de zéro que sur des petits intervalles, ne trouve pas vraiment d'équivalent pour les modèles discrets. En revanche, nous exploiterons le fait que la seule suite récurrente d'ordre deux qui s'annule deux fois consécutivement est la suite nulle.

0.4 Indépendance asymptotique des statistiques locales des niveaux, prises à différentes énergies

Une fois les statistiques de niveaux d'énergies étudiées, par exemple par l'intermédiaire du théorème 0.2, il est légitime de se poser la question suivante. Comment se comportent les processus ponctuels $\Xi(\xi; E_1, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(\xi; E_2, \omega, \Lambda)$ avec $E_1 \neq E_2$, l'un par rapport à l'autre, dans la limite $|\Lambda \to \infty|$. Il a été prouvé dans [Klo11] que, pour le modèle d'Anderson

discret en dimension $d > 1$, l'indépendance asymptotique des processus est vérifiée dès que les énergies $|E_1 - E_2| > 4d$. Par ailleurs, pour le modèle d'Anderson discret en dimension un, l'indépendance asymptotique est vérifiée pour toute paire d'énergies distinctes. Pour être plus précis, pour le modèle d'Anderson en dimension un, nous extrayons de [Klo11] le théorème suivant.

Théorème 0.3. *Prenons $(E_1, E_2) \in \mathcal{I}^2$ tels que $E_1 \neq E_2$ et tels que $N(.)$ est dérivable en E_0 et en E_0' avec $\nu(E_1) > 0$ et $\nu(E_2) > 0$.*
Dans la limite $|\Lambda| \to \infty$ les processus ponctuels $\Xi(E_1, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(E_2, \omega, \Lambda)$, convergent faiblement respectivement vers deux processus de Poisson sur $\mathbb{R}$, indépendants et d'intensité la mesure de Lebesgue. En d'autres termes, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ des intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} \sharp\{j; \xi_j(E_1, \omega, \Lambda) \in U_+\} = k_+ \\ \sharp\{j; \xi_j(E_2, \omega, \Lambda) \in U_-\} = k_- \end{pmatrix} \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}}{\to} \left(\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} e^{-|U_+|}\right)\left(\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!} e^{-|U_-|}\right).$$

Ce type de résultat avait déjà été étudié pour certaines matrices aléatoires ([Meh04]), mais était pour la première fois prouvé pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires dans [Klo11]. Il a ensuite été prouvé dans [Tri14] (voir également [Mia11]) que, toujours en dimension un, ce résultat était valable pour un modèle de type liaison forte aléatoire. Pour ce dernier modèle, le désordre diagonal est corrélé au désordre hors-diagonal. En outre, l'article [Tri14] montre que le cheminement de la preuve de [Klo11] était suffisant pour prouver l'indépendance asymptotique d'un nombre fini de processus ponctuels $(\Xi(\xi; E_j, \omega, \Lambda))_{j \in [\![1,k]\!]}$.

Pour être plus précis, pour prouver le Théorème 0.3, Klopp prouve d'abord les estimations de décorrélation des énergies éloignées que nous allons présenter. Ainsi, en dimension un, nous avons le lemme suivant, qui correspond au [Klo11, Lemma 1.1].

Lemme 0.4. *Il existe $\gamma > 0$ tel que, pour $\beta \in (1/2, 1)$, $\alpha \in (0, \gamma)$, $(E, E') \in \mathbb{R}^2$ et $c > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour $L \geq 3$ et $cL^\alpha \leq l \leq \frac{1}{c}L^\alpha$, nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} sp(H_\omega(\Lambda_L)) \cap \left(E - L^{-1}, E + L^{-1}\right) \neq \emptyset, \\ sp(H_\omega(\Lambda_L)) \cap \left(E' - L^{-1}, E' + L^{-1}\right) \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) \leq C \frac{l^2}{L^{1+\gamma}} e^{(\log L)^\beta} \tag{0.4.1}$$

Ce résultat n'est pas exactement celui énoncé dans [Klo11]. En effet, celui-ci est énoncé originellement avec $\gamma = 1$. Ceci est du à une légère erreur dans la preuve d'origine, qui se corrige facilement mais modifie le résultat. Le résultat ci-dessus est donc celui qui devrait figurer dans [Klo11] mais aussi dans [Tri14]. Le résultat est prouvé avec $\gamma = 1/3$, mais il est possible d'améliorer l'exposant sans pour autant parvenir à $\gamma = 1$, pour l'instant. Le lemme ci-dessus est un résultat complémentaire aux estimations de Minami. En effet, ces dernières peuvent être vues comme estimations de décorrélation des énergies proches. Associé aux hypothèses de la section précédente, ce résultat suffit à obtenir le Théorème 0.3. Ainsi, les preuves du Théorème 0.3 pour d'autres modèles, y compris multi-dimensionnels, peuvent se ramener à la preuve des estimations de décorrélation des énergies éloignées. C'est le cas des modèles considérés dans ce manuscrit.

Généralisation des résultats

Dans cette thèse, nous nous poserons la question suivante.

- Les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées sont-elles valables pour d'autres modèles que ceux étudiés dans [Klo11, Tri14] ?

Nous montrons que ces estimations sont également valables pour d'autres modèles, toujours en dimension un. Ainsi, nous prouvons ce résultat pour certains modèles discrets de type alliage, pour le modèle des sauts, pour des modèles de type multimère, pour certains modèles d'Anderson continus et enfin, pour les graphes quantiques unidimensionnels avec constantes de couplage aléatoires. Ici également, pour les modèles discrets de type alliage ou de type multimère, le hamiltonien libre sera un opérateur de Jacobi. Nous reviendrons sur ces différents modèles dans le premier chapitre, en plus amples détails.

Expliquons maintenant les difficultés surmontées pour parvenir à ces résultats. Il est montré dans [Klo11] que ces estimations de décorrélation sont, dans le régime localisé, conséquences des estimations de Minami. La preuve de ces estimations de décorrélation passe par l'étude des gradients des valeurs propres de $H_\omega(\Lambda_L)$, vues comme fonctions des variables aléatoires. Les gradients de ces valeurs propres sont différents selon les modèles et nous apportons donc des preuves différentes selon les modèles. Le résultat technique de la preuve consiste à montrer que les gradients de deux valeurs propres simples ne peuvent presque jamais être presque colinéaires. Ce résultat est difficile à obtenir (nous ne savons toujours pas le prouver pour le modèle d'Anderson discret en dimension $d > 1$, pour des valeurs propres pas assez éloignées). Illustrons rapidement cette difficulté sur un exemple, en comparant les traductions de l'hypothèse de colinéarité pour le modèle d'Anderson discret et un analogue continu.

Considérons d'abord le modèle d'Anderson discret en dimension un, c'est-à-dire l'opérateur $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z},\ [H_\omega u]\,(n) = [\Delta u](n) + \omega_n u(n). \tag{0.4.2}$$

Un calcul simple montre que, si u_ω est vecteur propre normalisé pour la valeur propre simple $E(\omega)$ de $H_\omega(\Lambda_L)$, alors

$$\partial_{\omega_n} E(\omega) = (u_\omega(n))^2.$$

La condition de colinéarité entre les gradients de $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$, valeurs propres associées à u et v normalisés, s'écrit alors

$$\forall n \in \Lambda_L \cap \mathbb{Z},\ u^2(n) = v^2(n),$$

que l'on traduit aisément par $u(n) = \pm v(n)$ pour tout $n \in \Lambda_L$ (il reste tout de même encore à exploiter ce fait dans les équations, ce que nous ne savons pas faire en dimension au moins égale à deux).
Maintenant, considérons l'opérateur $H_\omega : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall \phi \in H^2(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R},\ H_\omega(\phi)(x) = -\phi''(x) + \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x-n)\right]\phi(x), \tag{0.4.3}$$

où les $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires i.i.d. Il s'agit du modèle d'Anderson continu avec potentiel de simple site égal à la fonction caractéristique de $[-1/2, 1/2]$, quand les atomes sont disposés aux points du réseau $\mathbb{Z}$. Un calcul simple montre que, si ϕ_ω est une fonction propre normalisée pour la valeur propre simple $E(\omega)$ de $H_\omega(\Lambda_L)$, alors

$$\partial_{\omega_n} E(\omega) = \int_{[n-1/2,n+1/2]\cap\Lambda_L} (\phi_\omega(x))^2 dx.$$

La condition de colinéarité entre les gradients de $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$, associés aux fonctions propres ϕ et ψ normalisées, s'écrit alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \cap \Lambda_L, \int_{[n-1/2,n+1/2]\cap\Lambda_L} (\phi_\omega^2(x) - \psi_\omega^2(x))dx = 0$$

qu'il n'est pas aisé de traduire. Nous montrerons dans le troisième chapitre, qu'en écrivant ces équations dans des bases bien choisies de solutions des équations différentielles vérifiées par les fonctions propres, sur $[n-1/2, n+1/2]$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et en exploitant les raccords de classe $\mathcal{C}^1$ aux bords des intervalles, nous obtenons des conditions plus simple à exploiter sur les fonctions propres. Le choix des bases que nous ferons permettra d'avoir une certaine symétrie dans les équations, permettant ainsi de simplifier le problème. Par ailleurs, l'hypothèse de recouvrement nous permettra de montrer que, pour des valeurs très grandes des variables aléatoires, les solutions des équations de Sturm-Liouville correspondantes n'oscillent jamais, simplifiant ainsi la comparaison entre solutions.

Par ailleurs, les preuves de [Klo11], de [Tri14] ainsi que certaines preuves données dans ce manuscrit reposent en partie sur la monotonie des modèles en fonction des variables aléatoires. Ceci complique donc l'étude du modèle des sauts que nous présentons maintenant. Il s'agit de l'opérateur $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ défini par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ [H_\omega u](n) = \omega_{n+1} u(n+1) + \omega_n u(n-1),$$

les variables aléatoires restant uniformément éloignées de zéro. Ainsi, si u_ω est un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre simple $E(\omega)$ de $H_\omega(\Lambda_L)$, nous calculons

$$\partial_{\omega_n} E(\omega) = 2u_\omega(n+1)u_\omega(n),$$

qui peut donc changer de signe. La solution que nous donnons à ce problème consiste à se rendre compte que, si nous regardons les valeurs propres comme fonctions de deux variables aléatoires consécutives, nous obtenons une croissance radiale. La preuve des estimations de décorrélation se base donc sur des changements de base en coordonnées polaires des paires de variables aléatoires consécutives. Remarquons par ailleurs que cette recherche d'une propriété de monotonie n'est pas suffisante en soi, nous devons avoir deux propriétés de monotonie en fonction de variables indépendantes. Ainsi, quand la monotonie fait intervenir toute les variables aléatoires, comme cela peut être le cas avec les modèles de type alliage avec potentiel de simple-site changeant de signe ([Ves10a]), la preuve par changement de variables que nous donnons ne permet pas de conclure.

Notons enfin que la démarche donnée dans [Klo11], et que nous reprenons ici, semble pouvoir se généraliser au cas où les $V_\omega(n)$ ne sont pas i.i.d mais que l'on a une certaine régularité (au moins l'existence d'une densité) de la loi conditionnelle de toute paire de variables aléatoires par rapport aux autres. Pour les modèles de type multimère et les modèles discrets de type alliage, cette propriété de régularité ne peut pas être vraie. Nous résolvons cette difficulté pour les modèles de type multimère de la même manière que pour les modèles continus considérés. Nous ferons également de même pour le modèle de type alliage discret avec potentiel à support compact. Nous donnons également une autre preuve pour les potentiels de simple-site décroissant exponentiellement, tant que leurs transformées de Fourier ne s'annulent pas. Ces derniers modèles peuvent être vus comme des petites perturbations du modèle d'Anderson discret. Ainsi, nous exploiterons le fait que le nombre de variables aléatoires intervenant dans la définition de $H_\omega(\Lambda_L)$ est plus grand $|\Lambda_L|$. Ainsi, nous montrerons que la condition de colinéarité se traduit globalement de la même manière que pour le modèle d'Anderson discret, et que nous obtenons des informations sur les variables aléatoires $(V_\omega(n))_{n\in J}$ (qui étaient indépendantes dans le cas du modèle d'Anderson discret) où J est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ bien choisi, de sorte que la loi jointe de ces variables aléatoires soit régulière et ait un bon comportement quand L grandit.

0.5 Principaux résultats et plan du manuscrit

Dans le premier chapitre, nous donnerons quelques définitions et propriétés générales sur les opérateurs de Schrödigner aléatoires, notamment sur la mesurabilité et l'ergodicité d'un opérateur aléatoire, ainsi que l'existence de la densité d'état intégrée. Nous présenterons également les différents modèles considérés dans ce manuscrit. Nous terminerons ce chapitre par une étude plus détaillée des hypothèses sur lesquels nous basons notre étude : l'hypothèse de localisation et les estimations de Wegner.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons aux estimations de Minami. Ainsi, nous montrerons que dans le régime localisé, les estimations de Minami sont des conséquences des estimations de Wegner. Nous prouverons, entre autres, le théorème suivant, valable dans le cas continu comme dans le cas discret.

Théorème 0.5. *Fixons J un compact où sont vérifiées (W) et (Loc). Pour tous $s' \in (0, s)$, $p > 0$ et $\eta > 1$, il existe $L_{\eta,s'} > 0$ et $C := C_{\eta,s'}$ tels que pour $E \in J$, $L \geq L_{\eta,s'}$ et $\epsilon \in (0, L^{-1/s'})$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C(\epsilon^{2s'} L^2 + L^{-p}) \tag{0.5.1}$$

La preuve se basera sur les estimations d'effet tunnel inverse décrites précédemment, que nous prouverons donc séparément pour les modèles discrets et les modèles continus.

Dans le troisième chapitre nous prouverons les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées, pour les différents modèles présentés dans le premier chapitre. Les théorèmes prouvés dans ce chapitre suivront tous, à quelques variations près, le modèle suivant.

Lemme 0.6. *Soit σ un ensemble où nous avons (Loc) et (M). Il existe $\gamma > 0$ tel que, pour $\beta \in (1/2, 1)$, $\alpha \in (0, \gamma)$, $(E, E') \in \sigma^2$ et $c > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour $L \geq 3$ et $cL^\alpha \leq l \leq \frac{1}{c}L^\alpha$, nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\begin{array}{l} sp(H_\omega(\Lambda_l)) \cap \left(E - L^{-1}, E + L^{-1}\right) \neq \emptyset, \\ sp(H_\omega(\Lambda_l)) \cap \left(E' - L^{-1}, E' + L^{-1}\right) \neq \emptyset \end{array}\right\}\right) \leq C \frac{l^2}{L^{1+\gamma}} e^{(\log L)^\beta}. \tag{0.5.2}$$

Dans le dernier chapitre, nous étudierons les statistiques spectrales. Nous prouverons notamment des résultats sur les statistiques des niveaux d'énergie ainsi que sur l'indépendance asymptotique des statistiques de niveaux d'énergie prises à différentes énergies, en utilisant des estimations de Wegner polynomiale en volume, sous une hypothèse de régularité de la DEI.

En annexe, nous prouverons des résultats que nous utiliserons dans ces chapitres, notamment des propriétés des variables de Prüfer associées à des équations de Sturm-Liouville ou à des équations aux différences finies d'ordre deux. Nous donnerons également un exemple d'opérateur aléatoire où sont prouvées des estimations de Wegner polynomiales en volume et ayant une densité d'état intégrée höldérienne.

0.6 Problèmes non résolus

Nous présentons dans cette dernière section les problèmes encore ouverts, classés par ce que nous jugeons être l'ordre croissant de difficulté, et d'éventuelles pistes pour leurs résolutions.

1. Pour prouver les estimations de décorrélation pour le modèle d'Anderson continu, nous utilisons une condition de recouvrement du potentiel de simple-site. Ceci permet de simplifier le problème mais il serait bon de savoir prouver les estimations sans cette restriction. Comme le problème passe par le choix de bonnes bases de l'espace des solutions des équations différentielles, dépendant d'un paramètre multiplicatif devant le potentiel, données par les problèmes aux valeurs propres pour deux énergies distinctes, nous pensons que les bases de solutions données par la théorie de Floquet seraient de bons choix. Il suffirait alors de montrer que, tant que le potentiel est positif et strictement positif sur un ensemble de mesure non nulle, les traces des matrices fondamentales ne peuvent pas être constamment égales ou opposées, comme fonctions du paramètre devant le potentiel.
2. Dans ce manuscrit nous prouvons les estimations de décorrélation pour différents modèles et les preuves dépendent des modèles. Nous pensons qu'il est possible, en utilisant un raisonnement similaire à celui pour les modèles de type multimère, de prouver ces estimations pour les modèles discrets sous les seules hypothèses de localisation, d'estimations de Wegner, d'indépendance à une distance (ou éventuellement contrôle des corrélations entre des opérateurs définis sur des cubes éloignés) et de monotonie des opérateurs.
3. Nous avons vu qu'il était possible de s'affranchir de la monotonie des modèles, même si en un sens, nous nous ramenions à ce cas. Ceci semble compliqué pour les modèles de type alliage avec potentiel de simple-site qui change de signe. Il faudrait donc trouver un autre argument afin de s'affranchir de la monotonie.
4. Nous ne savons toujours pas prouver les estimations de décorrélation pour toute paire d'énergies pour le modèle d'Anderson discret en dimension $d > 1$. Nous voyons deux pistes pour résoudre ce problème.

   La première consiste à utiliser une démonstration similaire à celle faite pour les modèles de type multimère, mais il semble nécessaire de devoir améliorer le contrôle que nous avons sur le nombre de site où un vecteur propre est suffisamment grand. En effet, pour l'instant le seul résultat que nous ayons est le résultat déterministe qui dit que si u est un vecteur propre de $H(\Lambda_L)$ alors u ne s'annule pas sur un nombre proportionnel à L de sites, et il existe un opérateur de ce type où c'est exactement le cas. Ceci semble insuffisant. Il suffirait alors de prouver un résultat probabiliste du type : pour $\beta \in (1/2, 1)$, la probabilité que u soit plus grand que e^{-L^β} sur plus de $L^{2\beta}$ sites est au moins égale à $1 - L^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

   La deuxième consiste à prouver les estimations de décorrélation à partir d'une hypothèse plus faible que celle prouvée dans ce manuscrit, sur la non-colinéarité des gradients. Nous pourrions, par exemple, étudier les dérivées des valeurs propres simples par rapport à des blocs de variables aléatoires de côté L^α, plutôt que par rapport à chacune de ces variables aléatoires.
5. Nous terminons enfin par le problème qui nous parait le plus difficile, à savoir prouver qu'en dimension $d > 1$, dans le régime localisé, les estimations de Minami sont également conséquences des estimations de Wegner. Ceci est un problème majeur car nous ne savons pas prouver les estimations de Minami en dimension quelconque pour des opérateurs continus. Ceci empêche en particulier l'étude des statistiques spectrales pour d'autres modèles et de prouver les estimations de décorrélation des énergies éloignées.

Notations

Dans ce document nous utiliserons les notations suivantes

1. Les symboles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ représentent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des réels et des complexes.
2. Si n et m sont deux entiers relatifs, nous noterons $[\![n, m]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre n et m.
3. Si I est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, nous noterons $|I|$ sa mesure. De même, si I est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, nous noterons $|I|$ son cardinal
4. Si I est un sous ensemble de Z, nous noterons $\ell^2(I)$, l'espace de Hilbert des suites de carré sommable, définies sur I, muni de la norme usuelle. De la même manière si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $L^2(I)$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable, muni de la norme usuelle.
5. Soit Λ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Nous noterons $H^p(\Lambda)$ l'espace de Sobolev

$$H^p(\Lambda) := \{f \in L^2(\Lambda), f^{(m)} \in L^2(\Lambda), m \in [\![1, p]\!]\}$$

des fonctions $L^2(\Lambda)$ dont les dérivées successives jusqu'à p, au sens des distributions, sont dans $L^2(\Lambda)$. Nous noterons également $H_0^1(\Lambda)$ l'espace

$$H_0^1(\Lambda) := H^1(\Lambda) \cap \{f \in L^2(\Lambda), f(0) = f(1) = 0\}.$$

Chapitre 1

Modèles et hypothèses

Dans ce chapitre nous présentons les différents modèles qui seront considérés par la suite, ainsi que les différentes hypothèses dont nous aurons besoin. Nous rappelons que les différents modèles sont **unidimensionnels** et sont donc définis sur $L^2(\mathbb{R})$ ou sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Cette hypothèse nous permet d'utiliser des techniques telles que la théorie d'oscillation de Sturm ou l'étude des suites récurrentes d'ordre 2. Nous étudierons une grande variété d'opérateurs discrets, en revanche nous étudierons une classe plus restreinte d'opérateurs définis sur la droite réelle. Nous étudierons également les graphes quantiques unidimensionnels et le rapport qu'entretiennent ceux-ci avec les opérateurs discrets.

1.1 Opérateurs aléatoires

Dans cette section, nous donnons la définition d'un opérateur aléatoire mesurable, éventuellement ergodique, ainsi que quelques propriétés vérifiées par cet opérateur. Donnons nous un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Ce qu'est réellement Ω a peu d'importance, mais dépend du modèle. Pour beaucoup de modèles, nous pouvons par exemple prendre Ω égal à $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et définir $\mathcal{F}$ comme la tribu engendrée par les cylindres de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

1.1.1 Mesurabilité et ergodicité

Nous rappelons les définitions suivantes de mesurabilité et d'ergodicité, nous référons à [CL90, Chapitre IV et V] et [Kir08] pour plus de détails et des définitions plus générales.

Définition 1.1. Un opérateur auto-adjoint borné sur un espace de Hilbert H_ω est dit mesurable si pour tout u, v dans H, la fonction $\langle H_\omega u, v\rangle$ est mesurable. Un opérateur auto-adjoint non borné est dit mesurable si pour toute fonction mesurable bornée f, l'opérateur $f(H_\omega)$ est mesurable.

Remarque 1.2. Pour beaucoup de résultats, il est utile qu'il existe un cœur commun à presque toutes les réalisations de l'opérateur aléatoire, c'est-à dire un ensemble $\mathcal{D}_0$ tel que, presque sûrement,

1. $\mathcal{D}_0$ est dense dans $\mathcal{D}(H_\omega)$,
2. $\forall \phi \in \mathcal{D}(H_\omega)$, $\exists (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}_0^{\mathbb{N}}$, $H_\omega(\phi) = \lim\limits_{n\to\infty} H_\omega \phi_n$.

L'hypothèse de cœur commun sera vérifiée par les opérateurs non bornés considérés. Pour les opérateurs bornés, le cœur peut évidemment être pris égal à $\mathcal{H}$.

Tous les modèles étudiés par la suite seront mesurables. Les définitions suivantes concernent la propriété d'ergodicité. Nous donnons ici une version indexée par $\mathbb{Z}$ des définitions, il existe bien évidemment une version indexée par $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas nécessaire dans l'application que nous en aurons.

Définition 1.3. Donnons nous une famille $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de transformations préservant la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}\left(T_i^{-1}A\right) = \mathbb{P}(A).$$

Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est dit invariant (par rapport à $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$) si $T_i^{-1}A = A$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Nous dirons que la famille $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est ergodique si tout invariant est de probabilité nulle ou égale à un.

Un processus stochastique (discret) est la donnée d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.4. Un processus stochastique est dit ergodique si il existe une famille ergodique $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de transformations préservant la mesure telle que

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_i\left(T_j(\omega)\right) = X_i(\omega).$$

Un exemple simple de processus ergodique est la donnée d'une suite de variables aléatoires i.i.d $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ réalisée par $X_i(\omega) = \omega_i$. La mesure $\mathcal{P}$ est alors le produit infini de la même mesure $\mathbb{P}_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}\left(X_0 \in A\right)$. Il suffit donc de prendre pour famille ergodique de transformations $(T_i)_i$ sur $\Omega\,(:= \mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$, la famille des translations sur les coordonnées : $(T_i(\omega))_j = \omega_{i-j}$ où x_j désigne la j-ème coordonnée de $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Nous référons à [Kir08, Section 4] pour la preuve de ce résultat. Nous rappelons deux résultats d'importance dans l'étude des processus ergodiques.

Proposition 1.5. *Soit $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille ergodique de transformations préservant la mesure. Si une variable aléatoire X est invariante par rapport à la famille $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ (c'est-à-dire si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $X \circ T_i = X$) alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.*

Le second résultat est le théorème ergodique de Birkhoff.

Théorème 1.6. *Si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un processus ergodique et si $\mathbb{E}\left(|X_0|\right) < \infty$ alors, avec probabilité égale à un,*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^{L} X_i \to \mathbb{E}\left(X_0\right)$$

Ce théorème généralise donc la loi forte des grands nombres aux processus ergodiques. Nous définissons enfin l'ergodicité d'un opérateur aléatoire.

Définition 1.7. Soit $H_\omega : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un opérateur aléatoire auto-adjoint de domaine $\mathcal{D}(H_\omega)$. Supposons qu'il existe un cœur commun à presque toutes les réalisations de l'opérateur aléatoire. H_ω est dit ergodique si il existe une famille ergodique $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de transformations préservant la mesure et une famille $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$ telles que

$$H_{T_i(\omega)} = U_i^\star H_\omega U_i.$$

Nous pouvons remplacer cette définition par l'hypothèse $f(H_\omega)$ est ergodique pour toute fonction f mesurable bornée. Un exemple d'opérateur ergodique est le suivant. Sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ définissons M_{V_ω} l'opérateur de multiplication par V_ω où $V_\omega(n) = \omega_n$. Les $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant i.i.d, M_{V_ω} est ergodique (pour $(T_i)_i$ comme dans l'exemple au dessus, et U_i l'opérateur de translation par i sur $\ell^2(\mathbb{Z})$). Dans la suite du manuscrit, V_ω pourra désigner la fonction V_ω ou l'opérateur de multiplication M_{V_ω}, le contexte permettra aisément d'identifier l'objet en question.

1.1.2 Spectre presque sûr et densité d'état intégrée

Dans cette sous-section nous rappelons deux résultats fondamentaux sur les opérateurs ergodiques. Nous commençons par l'existence de spectres presque sûr.

Proposition 1.8. *[Pas80, KS81, KM82] Si H_ω est un opérateur aléatoire auto-adjoint et ergodique, il existe alors un sous-ensemble fermé Σ de $\mathbb{R}$ tel que, presque sûrement,*

$$sp\left(H_\omega\right) = \Sigma.$$

On l'appelle donc spectre presque sûr. De plus, il existe des ensembles Σ_{ac}, Σ_{sc}, Σ_{pp}, Σ_{disc} et Σ_{ess} tels que

$$\forall x \in \{ac, sc, pp, disc, ess\}, \Sigma_x = sp_x\left(H_\omega\right)$$

où les $sp_x(H)$ sont les spectres respectivement absolument continu, singulier continu, purement ponctuel, discret et essentiel.

Nous construisons maintenant la densité d'état intégrée qui représente le nombre de niveau d'énergie par unité de volume d'un opérateur de Schrödinger aléatoire. Pour cela, nous commençons par étudier la restriction de ces opérateurs à des intervalles finis avec conditions aux bords de Dirichlet. Nous aurions pu choisir également des conditions aux bords périodiques, l'étude n'en est que peu changé. Prenons donc $L \in \mathbb{R}$ et définissons le cube $\Lambda_L :=]-L, L[$ pour les modèles continus et le cube $\Lambda_L := [-L, L] \cap \mathbb{Z}$ pour les modèles discrets. Nous utiliserons la même notation, le contexte permettant aisément de savoir à quelle définition Λ_L fait référence. Nous parlerons de cube pour parler de Λ_L et non d'intervalle en référence à l'appellation standard dans le cas multidimensionnel. En outre, cela permettra de plus facilement distinguer les cubes Λ_L des intervalles d'énergies (souvent notés I ou J) considérés par la suite. Ainsi, si H_ω est défini sur $L^2(\mathbb{R})$ (respectivement $\ell^2(\mathbb{Z})$) nous définissons l'opérateur $H_\omega\left(\Lambda_L\right)$ défini sur $L^2\left(\Lambda_L\right)$ (respectivement sur $\ell^2\left(\Lambda_L\right)$) par

$$\forall \phi \in H_0^1\left(\Lambda_L\right) \cap H^2\left(\Lambda_L\right), H_\omega\left(\Lambda_L\right)\phi = H_\omega \phi \tag{1.1.1}$$

respectivement, $H_\omega\left(\Lambda_L\right)$ est identifié à $\mathbf{1}_{|\Lambda_L} H_\omega \mathbf{1}_{|\Lambda_L}$ via la bijection canonique entre les suites à support dans Λ_L et $\ell^2\left(\Lambda_L\right)$. Nous utiliserons également la notation $H_\omega(\Lambda)$ pour la restriction de H_ω à un cube Λ quelconque avec condition de Dirichlet.

Dans le cas continu, les opérateurs $H_\omega(\Lambda_L)$ étudiés sont bornés inférieurement et sont à résolvante compacte. Dans le cas discret, $H_\omega(\Lambda_L)$ peut être identifié à une matrice symétrique de $M_{2L+1}(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, les opérateurs n'ont que des valeurs propres de multiplicité finie, sans points d'accumulations, et nous les ordonnons $E_1(\omega) \leq E_2(\omega) \leq ...$, répétant les valeurs propres selon leur multiplicité (notons que dans notre cas, c'est-à-dire en dimension un avec conditions aux bords de Dirichlet, cette multiplicité est égale à 1). Nous pouvons donc définir pour tout $E \in \mathbb{R}$ le nombre

$$N_\omega(E, \Lambda) = \frac{\sharp\{j \in \mathbb{N}, E_j(\omega) < E\}}{|\Lambda|}. \tag{1.1.2}$$

Nous avons alors la proposition suivante, valable pour les opérateurs (continus ou discrets) $\mathbb{Z}$-ergodiques, $H_\omega = -\Delta + V_{\text{per}} + V_\omega$, où V_{per} est un potentiel périodique.

Proposition 1.9. *Il existe une fonction croissante $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un ensemble Ω_0 de probabilité un tels que, pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout point de continuité E de N, nous avons*

$$\lim_{L \to \infty} N_\omega(E, \Lambda_L) = N(E)$$

Nous avons alors

$$N(E) = \mathbb{E}\left(tr\left[\chi_0 \mathbf{1}_{]-\infty,E[?}(H_\omega)\right]\right)$$

où, dans le cas discret, χ_0 *est la suite égale à un en* 0 *et nulle ailleurs, et dans le cas continu,* $\chi_0 = \mathbf{1}_{]0,1[}$.

La fonction $N(E)$ est appelée densité d'état intégrée (voir [Ves08] pour de plus amples détails), et sera notée DEI dans le reste du manuscrit. Il est clair que la fonction N est croissante, continue à gauche, que nous avons $\lim_{E\to-\infty} N(E) = 0$ et, dans le cas discret, $\lim_{E\to\infty} N(E) = 1$. Elle est donc fonction de répartition d'une mesure borélienne, notée ν et appelée densité d'état. Il est notable que la densité d'état obtenue en prenant des conditions périodiques aux bords du cube est égale à celle construite ci-dessus. Le support de la mesure ν est égal au spectre presque sûr. Par ailleurs, la DEI a un nombre au plus dénombrable de point de discontinuité, mais dans le cas discret la DEI est même continue, la densité d'état n'ayant pas d'atome. Il a été prouvé récemment ([BK13]) que la DEI est log-höldérienne dans le cas continu, en dimension inférieure ou égale à trois. La densité d'état intégrée joue un rôle majeur dans l'étude des opérateurs de Schrödinger aléatoires, notamment dans l'étude de la localisation. En ce qui nous concerne, elle sera à la base des résultats sur les statistiques spectrales.

1.2 Différents modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires

Dans cette section, nous présentons les modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires traités par la suite. Les résultats sur les estimations de Minami seront prouvés pour des opérateurs avec plus de généralité, mais les preuves des estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées, donnés dans le troisième chapitre, diffèrent selon le modèle considéré. Nous étudierons des opérateurs agissants sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ mais également sur $L^2(\mathbb{R})$. Dans tout le manuscrit, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ désignera une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées. Nous supposerons qu'elles admettent une même densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, et que celle-ci est bornée à support compact. Ces hypothèses sont pratiques, mais ne sont en général pas toutes nécessaires. Elle permettent néanmoins de simplifier les conclusions des preuves et d'avoir des estimations plus faciles à effectuer. Les modèles suivants ont également un sens quand les variables aléatoires $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ont des distributions singulières, par exemple, quand elles sont des variables aléatoires de Bernoulli. En revanche, les preuves que nous feront ne seront plus valables pour ces modèles. Par exemple, nous utiliserons une certaine forme d'estimations de Wegner et celles-ci ne peuvent pas être vrai pour des variables aléatoires de Bernoulli ; il reste néanmoins possible de prouver une forme faible de celles-ci. Nous présentons les opérateurs définis sur la droite réelle puis ceux définis sur le réseau, ces premiers étant en moins grande variété que leurs homologues discrets. Enfin, nous présenterons les graphes quantiques unidimensionnels ainsi que le rapport qu'ils entretiennent avec les modèles discrets.

1.2.1 Modèles continus

Prenons $q \in L^\infty$ une fonction bornée, à support compact et définissons la fonction V_ω par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ V_\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n q(x-n). \tag{1.2.1}$$

La fonction V_ω est presque sûrement bornée par une constante uniforme. Nous pouvons alors définir presque sûrement l'opérateur H_ω sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \phi \in H^2(\mathbb{R}),\ H_\omega \phi = -\Delta\phi + V_\omega \phi. \tag{1.2.2}$$

Nous définissons ainsi un opérateur aléatoire mesurable et $\mathbb{Z}$-ergodique. Presque sûrement, l'opérateur H_ω est auto-adjoint sur le domaine $H^2(\mathbb{R})$ et essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Ce modèle est appelé modèle d'Anderson continu ou encore modèle de type alliage. En effet, la forme du potentiel modélise le fait que les différents atomes, supposés être aux points du réseau $\mathbb{Z}$, sont différents les uns des autres, les variables aléatoires modélisant alors les différentes charges possibles. Pour que la modélisation soit plus fidèle à la réalité, il faudrait considérer des variables aléatoires à loi discrète, mais comme dit précédemment, il faudra présenter d'autres preuves. Par ailleurs, l'hypothèse de compacité du support de q est également pratique, elle permet de s'affranchir des interactions à longue portée, mais pourrait être relâchée en une décroissance exponentielle (ce qui sera fait pour le modèle discret), par exemple. Ces opérateurs sont certainement les modèles continus les plus étudiés, et de nombreux résultats ont été prouvés pour ces modèles. L'étude de ces modèles est plus simple quand le potentiel de simple site q est de signe fixe ([His08]), mais certains résultats sont prouvés quand le potentiel q change de signe ([Klo95, HK02, Ves02, Klo02, KV06, KN09]). Les estimations de Minami prouvées dans [Klo11], et que nous reprenons ici, avec une légère généralisation, rentrent également dans ce cadre. En revanche, pour prouver les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées nous supposerons que le potentiel q est de signe fixe. De plus, nous utiliserons l'hypothèse suivante, appelée hypothèse de recouvrement :

$$\text{il existe } \eta > 0 \text{ tel que } q \geq \eta \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}\,. \tag{1.2.3}$$

1.2.2 Modèles discrets

Nous présentons maintenant les différents modèles discrets étudiés dans la suite du manuscrit. Dans le cas continu, le hamiltonien libre considéré était le laplacien. Dans le cas discret, nous prendrons pour hamiltonien libre un opérateurs de Jacobi, que nous définissons maintenant.

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes de la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous supposerons qu'il existe $m > 0$ tel que, presque sûrement,

$$\frac{1}{m} > \sup_{n\in\mathbb{Z}} |b_n| \geq \inf_{n\in\mathbb{Z}} |b_n| > m > 0. \tag{1.2.4}$$

Nous définissons alors $\Delta_b : u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \Delta_b u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, [\Delta_b u](n) = b_{n+1} u(n+1) + b_n u(n-1). \tag{1.2.5}$$

L'opérateur Δ_b est auto-adjoint. Il est possible d'ajouter un potentiel périodique à cet opérateur, en revanche cela complique l'étude des estimations de décorrélation pour un des modèles considérés. Nous gardons donc comme hamiltonien cet opérateur, sans potentiel périodique. Nous présentons maintenant les différents modèles discrets étudiés par la suite. Nous présentons d'abord les modèles de type alliage, puis les modèles de type multimère et enfin le modèle des sauts.

Modèles de type alliage

Les potentiels discrets de type alliage sont les équivalents discrets des potentiels continus présentés dans la sous-section précédente. Fixons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant l'hypothèse suivante :

$$\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |a_n| \leq ce^{-cn} \tag{1.2.6}$$

et définissons le potentiel aléatoire sur $\mathbb{Z}$:

$$V_\omega(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \omega_m a_{m-n}. \tag{1.2.7}$$

Le potentiel est presque sûrement borné par une borne uniforme. Nous pouvons donc définir, presque sûrement, l'opérateur auto-adjoint $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ H_\omega \phi = -\Delta_b \phi + V_\omega \phi. \tag{1.2.8}$$

Quand la suite (b_n) est ergodique ou déterministe et périodique, l'opérateur H_ω est mesurable et ergodique. Comme expliqué dans la sous-section précédente, nous envisageons ici des potentiels à décroissance exponentielle. Cette hypothèse était celle utilisée dans [Ves10a], pour prouver les estimations de Wegner. Cette hypothèse permet notamment de considérer cet opérateur comme une petite perturbation de l'opérateur avec potentiel tronqué suffisamment loin d'un maximum, technique qui sera reprise dans ce manuscrit. Nous ne savons pas encore traiter le cas des potentiels qui ne vérifient pas cette hypothèse et à notre connaissance, aucune des hypothèses sur lesquelles nous nous appuyons n'est prouvée dans ce cas là. En revanche, il est possible de rajouter un potentiel périodique au hamiltonien libre, cela ne change que très peu la preuve. Ce modèle a été également beaucoup étudié, et les recherches sur ce modèle sont plus avancées que sur le modèle de type alliage continu présenté dans la sous-section précédente, là également sans hypothèse de signe fixe sur le potentiel de simple site (voir [ETV10, TV10, ETV11, Ves10a, Ves10b, Krü12, TV14]). En effet, certains résultats sont prouvés sans hypothèse de signe fixe sur le potentiel de simple-site uniquement dans le cas discret. C'est par exemple le cas pour les estimations de Wegner valables sur $\mathbb{R}$, nous y reviendrons dans la section suivante. En ce qui nous concerne, notre preuve des estimations de Minami englobe le cas où le potentiel de simple-site n'est pas de signe fixe. Nous prouverons les estimations de Minami sous l'hypothèse supplémentaire de décroissance suivante

$$\textbf{(Décroissance) :}\ \forall \lambda > 0,\ \exists K > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}, |d(n)| \leq Ke^{-\lambda|n|}. \tag{1.2.9}$$

Nous prouverons les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées pour des potentiels de simple-site $(a_n)_n$ de signe fixe et dont les transformées de Fourier ne s'annulent pas, uniquement sous l'hypothèse (1.2.6) tant que nous avons des estimations de Minami. Ces deux dernières hypothèses sont en particulier prouvées pour les potentiels de simple site à support compact. Par ailleurs, la preuve des estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées pour les modèles continus est également valable, aux modifications dues à la structure discrète près, pour les opérateurs $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ où V_ω est un potentiel de type alliage dont le potentiel de simple-site est de signe fixe et à support fini. Ainsi, les estimations de décorrélation sont prouvées pour les modèles discrets de type alliage avec potentiel de simple-site à support fini sans hypothèse sur la transformée de Fourier de celui-ci.

Modèles de type multimère

Nous présentons ici des modèles qui sont des généralisations des modèles de type multimère. Un opérateur aléatoire de type multimère modélise un solide constitué de chaines d'atomes de même taille, chacune de ces chaines étant constitué d'un même atome. Notons que le cas particulier du modèle des dimères, considéré ici, n'est pas tout à fait le même que celui traité dans [DWP90] et dans [DBG00]. En effet, ces derniers articles considèrent des variables aléatoire de Bernoulli, modélisant donc des alliages de deux dimères différents. Nous ne savons pas traiter ce cas. En revanche, dans ce manuscrit, les variables aléatoires sont à densité, modélisant donc des alliages d'une possible infinité de dimères différents. Fixons donc $k \in \mathbb{N}^*$ et définissons la suite u_ω par

$$\forall m \in [\![kn, k(n+1)-1]\!], u_\omega(m) = \omega_n.$$

La suite u_ω prend k fois consécutivement la même valeur ω_n. Fixons maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite k-périodique. Définissons alors le potentiel aléatoire sur $\mathbb{Z}$

$$V_\omega(m) = a_m u_\omega(m). \tag{1.2.10}$$

Quand la suite a est constante, nous modélisons bien un modèle constitué de multimères, mais il n'y a pas de grande difficulté supplémentaire à considérer le cas où a est uniquement périodique. Le potentiel est presque sûrement borné par une borne uniforme. Nous pouvons donc définir, presque sûrement, l'opérateur auto-adjoint $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ H_\omega \phi = -\Delta_b \phi + V_\omega \phi. \tag{1.2.11}$$

Quand la suite (b_n) est ergodique ou déterministe et périodique, l'opérateur H_ω est mesurable et ergodique. L'étude des estimations de décorrélation pour ce modèle se complique si nous ajoutons un potentiel extérieur périodique au hamiltonien libre, mais semble toutefois possible en considérant une période multiple à la fois de la période dans la suite a et de la période du potentiel extérieur. Pour ne pas compliquer la preuve, déjà technique, nous travaillerons sans potentiel extérieur. L'ensemble des modèles pour lesquels nous prouvons les estimations de Minami que nous prouvons englobe ce cas. En revanche, comme pour le modèle de type alliage, nous supposerons que la suite $(a_n)_n$ est de signe fixe pour prouver les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées.

Modèle des sauts

Pour ce modèle, nous supposerons que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est constitué de variables aléatoires identiquement distribuées avec densité compacte et bornée. L'opérateur H_ω est alors défini comme étant égal à Δ_b. Il n'y a pas de potentiel, mais uniquement du désordre hors-diagonal (en référence à l'écriture matriciel de l'opérateur). Nous référerons à [KN03] pour l'étude mathématique de ce modèle et de son analogue multidimensionnel. L'opérateur ainsi défini vérifie la propriété suivante

Proposition 1.10. *La fonction $U : \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \psi$ définie par $\psi(n) = (-1)^n \phi(n)$ est un isomorphisme de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même et vérifie $H_\omega U = -U H_\omega$. En particulier, le spectre de H_ω est symétrique par rapport à l'origine. Ces propriétés restent vraies pour $H_\omega(\Lambda_L)$.*

Les estimations de décorrélation des valeurs propres proches ou éloignées seront prouvées sous ces hypothèses.

1.2.3 Graphes quantiques unidimensionels avec constantes de couplage aléatoires

Nous présentons ici les graphes quantiques unidimensionnels avec constantes de couplage aléatoires et le rapport qu'entretiennent ceux-ci avec les modèles discrets. Nous ne présentons que le modèle unidimensionnel, car nos résultats sur les modèles discret sont prouvés uniquement sous cette hypothèse. En revanche, il est fort probable qu'en suivant une démarche similaire à celle qui suit, les résultats sur les graphes quantiques en dimension supérieure se déduiront de ceux prouvés pour les modèles discrets en dimension supérieure. Même si ceux-ci sont définis sur des espaces de fonctions et non de suites, leur étude peut se ramener à l'étude de familles d'opérateurs discrets dépendant d'un paramètre, avec potentiels aléatoires. Pour ces modèles, si toutes les variables aléatoires sont fixés à l'exception d'une seule, la perturbation est de rang 1. Nous utiliserons alors les résultats de [KP08]. Nous nous référons à [AGHKH05] pour la construction de ces opérateurs. Nous définissons H_ω sur l'espace des fonctions

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^2([n,n+1])$$

avec conditions de raccords :

$$\begin{aligned} &\forall i \in \mathbb{Z}, f_i(1) = f_{i+1}(0) \\ &\forall i \in \mathbb{Z}, f'_{i+1}(0) - f'_i(1) = \omega_i f_i(1) \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

par

$$H_\omega = -\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} \text{ sur } \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[\,.$$

D'après les résultats de [AGHKH05], l'opérateur H_ω est presque sûrement auto-adjoint. Ici, l'opérateur est "le même" mais l'espace sur lequel il est défini change en fonction de l'aléa. Nous appliquons maintenant la réduction à une famille d'opérateurs discrets avec potentiels aléatoires, utilisée dans [KP08].

Définissons l'opérateur $H^0 = -\Delta$ sur l'espace $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^2([n,n+1])$ avec conditions de Dirichlet à chaque point de $\mathbb{Z}$. Cet opérateur est déterministe et peut être décomposé en la somme directe des Laplaciens sur chaque intervalle $(n,n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, avec conditions aux bords de Dirichlet. Il est alors aisé de calculer le spectre de H^0. En effet, chacun des opérateurs composant la somme directe a le même spectre que les autres. Donc H^0 a la même spectre que l'un d'eux, à savoir $\pi^2\mathbb{N}^*$. Pour $E \notin \pi^2\mathbb{N}^*$ définissons $M(E) = \dfrac{\sqrt{E}}{\sin(\sqrt{E})}(-\Delta + \cos(\sqrt{E})I_d)$ et $A_\omega := diag(\omega_n)$. La réduction présentée précédemment est la proposition suivante.

Proposition 1.11. *Fixons $E \notin \pi^2\mathbb{N}^*$. Alors nous avons :*

$$E \in sp(H_\omega) \Leftrightarrow 0 \in sp(M(E) - A_\omega) \Leftrightarrow 0 \in sp(-\Delta + V_\omega(E)),$$

où $V_\omega(E)(n) = cos(\sqrt{E}) - \dfrac{\sin(\sqrt{E})}{\sqrt{E}}\omega_n$.

Comme les $(\omega_n)_n$ sont bornés, nous avons $\| V_\omega(E) - V_\omega(E') \|_\infty \leq C|E - E'|$. Ainsi, l'étude du spectre de H_ω peut être ramenée à l'étude du spectre de $-\Delta + V_\omega(E)$ d'après la propriété suivante.

Proposition 1.12. *Si* $I := [E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon] \cap \pi^2\mathbb{N}^* = \emptyset$, *alors*

$$tr\left(\mathbf{1}_I(H_\omega)\right) \leq tr\left(\mathbf{1}_{[-\epsilon,+\epsilon]}(-\Delta + V_\omega(E_0))\right).$$

Notons que cette réduction et ces propriétés sont également valables pour les restrictions de H_ω à des cubes avec conditions aux bords de Dirichlet et des familles d'opérateurs restreints à ces mêmes cubes.

1.3 Hypothèses

Nous allons utiliser principalement deux résultats, prouvés pour les opérateurs aléatoires de la section précédentes : les estimations de Wegner et l'hypothèse de localisation. Nous supposerons que ces résultats sont vérifiés pour l'opérateur aléatoire général étudié dans le deuxième chapitre, dédié aux estimations de Minami. Dans ce deuxième chapitre, nous supposerons aussi que l'opérateur vérifie l'hypothèse d'indépendance à une distance. Nous verrons que cette hypothèse n'est pas nécessaire dans tous les cas, mais qu'elle permet de simplifier les preuves. Nous détaillons dans cette section ces hypothèses et notamment ce qui est prouvé pour les modèles présentés dans la section précédente. Les estimations de Wegner et l'hypothèse de localisation sont également prouvées pour d'autres modèles que ceux présentés dans la section précédente (voir par exemple [GHK07, GK10b, KLNS12a, KLNS12b, RV12, Kle12, Roj13, EK13, GMR14]).

Nous commençons par détailler l'hypothèse d'indépendance à une distance, les estimations de Wegner, puis l'hypothèse de localisation, les estimations de Wegner servant éventuellement d'outils pour prouver la localisation.

1.3.1 Indépendance à une distance

Il s'agit de l'hypothèse suivante.

(IAD) : Il existe $S \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(\Lambda_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ ensemble d'intervalles (discret ou continu) tel que pour tout $k \neq k'$, $\mathrm{dist}(\Lambda_k, \Lambda'_k) \geq S$, les opérateurs $(H_\omega(\Lambda_k))_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont indépendants.

Cette hypothèse est utilisée dans l'analyse multi-échelle faite dans [GK01] et est clairement vérifiée pour le modèle continu considéré ainsi que le modèle des sauts et les modèles de type multimère. C'est également le cas du modèle discret de type alliage si le potentiel de simple-site est à support fini. Nous verrons qu'il également possible d'étudier le cas où le potentiel de simple-site est à support infini, si nous ajoutons l'hypothèse de décroissance exponentielle. Elle nous permettra de ramener l'étude des opérateurs à l'étude d'opérateurs dont les potentiels seront tronqués, et donc vérifiant l'hypothèse (IAD), affaiblie car la distance S dépendra de la longueur du cube Λ_L sur lequel est défini $H_\omega(\Lambda_L)$, de sorte que l'erreur faite soit contrôlable. L'hypothèse (IAD) sera utilisée conjointement à (Loc) dans les chapitres suivants. En effet, ces hypothèses permettront de décomposer un opérateur, à une erreur contrôlable près, en plusieurs versions de cet opérateur restreint à des cubes suffisamment éloignés, de sorte que ces versions soient stochastiquement indépendantes. Ce phénomène est à la base des preuves des estimations de Minami et de décorrélation des valeurs propres éloignées que nous ferons. Il jouera également un rôle très important dans l'étude des statistiques spectrales.

1.3.2 Estimations de Wegner

Fixons $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert relativement compact. Les estimations de Wegner sont l'hypothèse suivante :

(W) : Il existe $s \in (0,1]$, $m \in [1,\infty)$ et $C > 0$ tels que, pour tout $J \subset \mathcal{I}$ et tout $L > 0$ suffisamment large, nous avons

$$\mathbb{P}(sp\,(H_\omega(\Lambda_L) \cap I)\,) \leq \mathbb{E}(tr\,(\mathbf{1}_I(H_\omega(\Lambda_L)))\,) \leq C|I|^s|\Lambda_L|^m.$$

La première inégalité est simplement une application de l'inégalité de Markov et est donc toujours valable. Une des conséquences de ces estimations est que tout réel est valeur propre de $H_\omega(\Lambda)$ avec une probabilité nulle. Ces estimations ont également un sens dans l'étude plus générales des matrices aléatoires. L'hypothèse est optimale quand $s = m = 1$. Quand $m = 1$ nous en déduisons que la DEI est Lipschitzienne et a donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous comprenons donc l'importance de telles estimations dans le cas continu, la DEI n'étant à priori même pas continue en dimension supérieure ou égale à quatre (c'est en revanche le cas pour les autres dimensions, [BK13]). Nous imposons ici uniquement que la constante C soit localement uniforme. Dans bien des cas l'hypothèse est valable sur $\mathbb{R}$ avec constante uniforme. Cette hypothèse a été prouvée pour la première fois par Wegner en 1981 ([Weg81]) puis généralisée à beaucoup de modèle, aussi bien discrets que continus. Nous référons à [Ves08] pour plus d'information à ce sujet. Pour les modèles ayant une propriété de monotonie en fonction des variables aléatoires, ces estimations, souvent optimales, sont connus depuis un certain temps. Pour les modèles non monotones, il a fallu trouver d'autres méthodes, n'amenant pas toujours à des exposants optimaux.

Comme annoncé précédemment, ces estimations ne peuvent pas être valables pour les modèles précédents lorsque les variables aléatoires sont des variables de Bernoulli. L'explication est la suivante. Supposons par exemple que les variables sont des variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. La probabilité de tout événement est alors soit nulle, soit minoré par 2^{-L}. Ainsi, à L fixé, les estimations de Wegner ne sont pas vérifiées dès que I est trop petit. Il reste théoriquement possible de prouver ces estimations si, à L fixé, nous nous restreignons à des intervalles de tailles supérieures à 2^{-L}. Des résultats allant en ce sens ont été prouvés en dimension un ([CKM87] pour le cas discret et [DSS02] pour le cas continu). Un résultat analogue en dimension supérieure est également possible, est prouvé dans le cas continu ([BK05]), mais n'a toujours pas été prouvé dans le cas discret. Ceci est du à l'existence du principe de prolongement unique dans le cas continu mais pas dans le cas discret. Il s'agit d'un des rares cas de résultats prouvés uniquement dans le cas continu, où généralement les études sont plus compliquées que dans le cas discret. Nous allons maintenant commenter cette hypothèse selon les modèles, celle-ci pouvant prendre différentes formes.

Modèles continus

Pour les modèles définis en (1.2.2), pourvu que le potentiel soit minoré par une constante strictement positive sur un intervalle ouvert non vide, les estimations de Wegner sont valables sur $\mathbb{R}$ avec constante localement uniforme et $m = s = 1$ ([CHK07]). Le modèle est monotone en fonction des variables aléatoires, et ce fait peut être utilisé dans la preuve de ces estimations. La constante C peut être prise égale à $\max|\rho|$ où ρ est la densité commune des $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Modèle discret de type alliage

Nous nous référons à [Ves10a] pour ce paragraphe. Quand le potentiel de simple-site n'est pas de signe fixe, il n'y a pas monotonie en fonction des variables aléatoires. Pour ces modèles, les estimations de Wegner peuvent être optimales ou non, selon les hypothèses sur le potentiel de simple-site $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Nous les énonçons maintenant et rappelons que le potentiel de simple-site n'est pas nécessairement à support fini. Dans tout les cas, nous

aurons ici $s = 1$ et l'inégalité sera valable sur $\mathbb{R}$ avec constante C uniforme. La différence se fera sur l'exposant m. Nous supposerons que la densité ρ est à variation bornée en plus d'être à support compact et bornée. Cette dernière condition permet d'avoir une estimation de type intégration par partie sur la densité.

1. Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne non nulle alors nous pouvons prendre $m = 2$ (car nos modèles sont unidimensionnels). Si de plus son support est fini, nous pouvons prendre $m = 1$ et les inégalités sont optimales.
2. Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne nulle et à support inclus dans $[\![-n, n]\!]$ pour un certain n, nous pouvons prendre $m = n$.
3. Si la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne nulle et à décroissance exponentielle, il existe un exposent m dépendant uniquement de la suite u.

Modèle des sauts

Pour le modèle des sauts, les estimations de Wegner ne sont pas prouvées sur $\mathbb{R}$ en entier, mais sont prouvées, avec constante uniforme, sur tout intervalle éloigné de zéro. Ceci est du à la singularité en zéro du modèle. En effet, supposons par exemple que $\Lambda := [\![0, N]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}$ et prenons la suite u définie par $u(-1) = 0, u(0) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(n+1) = -\frac{b_n}{b_{n+1}} u(n-1).$$

Rappelons que, presque sûrement, la suite $(b_n)_n$ ne s'annule jamais et que $u(1) = 0$. Il est clair que 0 est valeur propre de $H_\omega(\Lambda)$ si et seulement si $u(N) = 0$. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons $u(2p + 1) = 0$. Ainsi, si N est impair, 0 est valeur propre de $H_\omega(\Lambda)$ avec probabilité égale à 1. En revanche, la preuve pour des intervalles d'énergie éloignés de l'origine conduit à des inégalités de Wegner avec constante localement uniforme et exposants optimaux.

Modèle de type multimère

Pour ces modèles, nous utilisons les résultats de [Klo95], qui prouvent les estimations de Wegner avec constantes $s \in (0, 1]$ et $m \in [1, \infty)$ avec régularité sur la densité des variables aléatoires très faible. Si la régularité est un peu plus forte, [HK02] donne des estimations de Wegner optimales. Ces articles étudient principalement les modèles continus mais les preuves sont exactement les mêmes pour les modèles discrets aux changements dus au modèle près. En revanche, ces résultats ne sont valables que sur un certain intervalle ayant comme borne inférieure la borne inférieure du spectre presque sûr. Si la suite périodique $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est positive non nulle, nous avons de nouveau un phénomène de monotonie et le [Ves10a, Lemme 7] entraine immédiatement les estimations de Wegner avec exposants optimaux, valables sur $\mathbb{R}$ avec constante uniforme.

Graphe quantique unidimensionnel

Pour ce modèle, les estimations de Wegner ne peuvent pas être valables sur $\mathbb{R}$. Ceci est du au fait que l'ensemble $sp(H^0) = \pi^2\mathbb{N}^*$ est presque sûrement dans le spectre de $H_\omega(\Lambda_L)$ pour tout L. En revanche, il est clair, à partir de la Proposition 1.12, que l'opérateur H_ω vérifie les estimations de Wegner, avec constante uniforme et exposants optimaux, sur tout intervalle strictement inclus dans le complémentaire de $\pi^2\mathbb{N}^*$.

1.3.3 Hypothèse de localisation

Nous détaillons ici l'hypothèse de localisation, valable sur un intervalle $\mathcal{K}$, essentielle dans l'étude que nous ferons des opérateurs aléatoires. Il existe plusieurs notions de localisation, comme la localisation exponentielle ou la localisation dynamique, il existe même plusieurs notions de localisation dynamique.

Nous disons que nous avons localisation exponentielle dans $\mathcal{K}$ si, avec probabilité un, le spectre continu (union des spectre absolument continu et singulièrement continu) de H_ω intersecté avec $\mathcal{K}$ est vide et que les fonctions propres associées à des énergies dans $\mathcal{K}$ sont exponentiellement décroissantes. Ceci n'empêche pas le transport électronique. En effet, il peut exister des état initiaux, uniquement limite de combinaisons linéaires de vecteurs propres, qui se propagent, si la décroissance exponentielle n'est pas uniforme([dRJLS96]).

Ceci amène alors à la localisation dynamique qu'est la définition suivante. Nous disons que nous avons localisation dynamique dans $\mathcal{K}$ si, avec probabilité un, pour tout compact $K \in \mathcal{K}$, tout $r \geq 0$ et toute fonction (ou suite dans le cas discret) ϕ à support compact

$$\sup_{t>0} \mathbb{E}\left(\|\langle x\rangle^r \mathbf{1}_{\mathcal{K}}(H) e^{itH_\omega}\phi\|\right) < \infty,$$

où $\langle x\rangle = \sqrt{1+x^2}$. Notons que la localisation dynamique entraîne la localisation exponentielle via le théorème de RAGE ([CFKS87]). L'hypothèse nous assure en particulier que la position moyenne de la particule reste bornée dans l'espace.

Il existe principalement deux manières de prouver la localisation, l'analyse multi-échelle et la méthode des moments fractionnaires. Il existe une troisième manière en étudiant les matrices de transfert mais celle-ci n'est valable qu'en dimension un (voir [CL90]) et ne nous sera donc pas utile si nous voulons généraliser nos résultats en dimension quelconque. La méthode des moments fractionnaires ([AM93],[ASFH01],[AEN$^+$06]), quand elle peut être effectuée, entraine des résultats plus forts que ceux donnés par l'analyse multi-échelle. En revanche, en l'état, l'analyse multi-échelle peut-être appliquée à plus de modèles et c'est donc cette voie que nous présentons ici. Par ailleurs, le résultat plus faible donné par l'analyse multi-échelle est néanmoins suffisant pour notre étude. L'analyse multi-échelle a d'abord été introduite par [FS83], et amenait à la localisation exponentielle. Elle a ensuite été améliorée au fil des années ([FMSS85],[vDK89]), amenant à la localisation dynamique ([GDB98],[DS01]). Enfin, dans [GK01], les auteurs obtiennent des versions de la localisation dynamique plus fortes que celle précédemment donné (voir également [GK04, GK06]). Entre autres, il est prouvé que la norme de Hilbert-Schmidt du noyau de l'opérateur décroit de manière sous-exponentielle. Nous supposerons dans ce manuscrit que $\mathcal{K}$ est un intervalle où nous avons des estimations de Wegner et où nous pouvons faire l'analyse multi-échelle de [GK01]. Nous en déduisons en particulier l'hypothèse de localisation suivante.

(Loc) : Pour tout $\xi \in (0,1)$, nous avons

$$\sup_{L>0} \sup_{\substack{\operatorname{supp} f \subset \mathcal{K} \\ |f|\leq 1}} \mathbb{E}\left(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} e^{|\gamma|^\xi} \|\mathbf{1}_{\Lambda(0)} f(H_\omega(\Lambda_L))\mathbf{1}_{\Lambda(\gamma)}\|_2\right) < \infty, \tag{1.3.1}$$

où $\Lambda(x)$ représente l'intervalle $\left[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right]$ dans le cas continu et représente le singleton $\{x\}$ dans le cas discret. Remarquons que nous n'utiliserons donc pas d'estimation sur l'opérateur défini sur tout l'espace. Il est prouvé dans [GK10a] que (*Loc*) est équivalent à la conclusion de l'analyse multi-échelle faites dans [GK01].

Cette analyse (voir par exemple [Kir08, Sto01, His08]) est valable pour les modèles présentés précédemment mais nécessite deux ingrédients, les estimations de Wegner ainsi qu'une estimation initiale sur la fonction de Green $(H_\omega(\Lambda_{L_0})-E)^{-1}$ pour L_0 suffisamment grand, qu'il faut d'abord prouver. Cette estimation initiale est souvent prouvée dans des régimes extrémaux, comme dans le bas du spectre presque sûr ou à grand désordre, c'est-à -dire quand $\|\rho\|_\infty$ est petit, où ρ est la densité des variables aléatoires. Cette estimation en bas du spectre passe par l'étude de la DEI à ce même endroit, notamment par le fait qu'elle est suffisamment faible. Ce résultat est appelé asymptotiques de Lifshitz. Le lien entre la norme de $(H-E)^{-1}$ et la distance entre E et le spectre de l'opérateur permet souvent d'obtenir cette estimation initiale à grand désordre à partir des estimations de Wegner. En revanche, l'analyse de la DEI en bas du spectre presque se complique quand les modèles n'ont pas de caractère monotone en fonction des variables aléatoires. Ainsi, pour les modèles discrets de type alliage, avec potentiel de simple site changeant de signe mais à support compact, cette estimation est valable à grand désordre. Pour le modèles des sauts, (Loc) n'est prouvée qu'au bord du spectre presque-sur ([KN03]). De la même manière, en utilisant la preuve de (Loc) faite dans [Klo95] pour les modèles continus, l'hypothèse est également vérifiée pour les modèles de type multimère, en bas du spectre presque sûr. Enfin, pour les modèles continus considérés, quand le potentiel est positif, l'hypothèse (Loc) est valide sur tout compact $\mathcal{K}$ inclus dans $\mathbb{R}$, ceci est prouvé dans [Klo14], généralisant la preuve de [DS11].

Quand l'hypothèse (*Loc*) est vérifiée sur l'intervalle $\mathcal{I}$ où sont vérifiées les estimations de Wegner (ce qui est le cas quand nous faisons l'analyse de [GK01]) nous obtenons les deux lemmes suivants, que nous utiliserons intensivement dans nos preuves.

Lemme 1.13. ***(Loc)(I)*** *: Pour tout $p>0$ et tout $\xi\in(0,1)$, pour L suffisamment grand, il existe un ensemble de configuration $\mathcal{U}_{\Lambda_l}$ de probabilité au moins égale à $1-L^{-p}$ tel que si $\phi_n(\omega,L)$ est une fonction propre normalisée de $H_\omega(\Lambda_L)$ associée à la valeur propre $E_n(\omega,L)\in\mathcal{I}$ et si $x_0(\omega)\in\{-L,\dots,L\}$ maximise $|\phi_n(\omega,L)|$ (x_0 est alors appelé centre de localisation) alors*

$$|\phi_n(\omega,L)(x)|\le L^{p+d}e^{-|x-x_0|^\xi}. \tag{1.3.2}$$

Lemme 1.14. ***(Loc)(II)*** *: Pour tout $\xi\in(0,1)$ et tout $\nu\in(0,\xi)$, pour L suffisamment grand, il existe un ensemble de configuration $\mathcal{V}_{\Lambda_l}$ de probabilité au moins égale à $1-e^{-L^\nu}$ tel que si $\phi_n(\omega,L)$ est une fonction propre normalisée de $H_\omega(\Lambda_L)$ associée à la valeur propre $E_n(\omega,L)$ et si $x_0(\omega)\in\{-L,\dots,L\}$ maximise $|\phi_n(\omega,L)|$ (x_0 est alors appelé centre de localisation) alors*

$$|\phi_n(\omega,L)(x)|\le e^{2L^\nu}e^{-|x-x_0|^\xi}. \tag{1.3.3}$$

Nous nous référerons à ceux-ci en utilisant (Loc)(I) et (Loc)(II). Les preuves de ces lemmes sont données dans [GK10a, Section 6]. Ces lemmes nous permettront, en particulier, de ramener l'étude des opérateurs $H_\omega(\Lambda_L)$ à l'étude des opérateurs $H_\omega(\Lambda_l)$ où $l\asymp L^\alpha$ avec $\alpha\in(0,1)$ ou $l\asymp(\log L)^\eta$ avec $\eta>1$.

Chapitre 2

Estimations de Minami

Dans ce chapitre nous allons énoncer et prouver les estimations de Minami pour des modèles continus et des modèles discrets, en dimension un. Il semble difficile de généraliser la preuve en dimension supérieure. Les estimations de Minami sont les premiers outils dont nous auront besoin en vue d'obtenir des résultats sur les statistiques spectrales. Elles servent aussi d'outils pour prouver les estimations de décorrelation des valeurs propres éloignées. En un sens, elles montrent que les valeurs propres proches de $H_\omega(\Lambda_L)$ se comportent comme des variables aléatoires décorrélées. Dans tout le chapitre nous ne supposerons que peu de choses sur les opérateurs de Schrödinger aléatoires, définis sur $L^2(\mathbb{R})$ ou $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Nous prouvons les estimations de Minami pour les opérateurs continus H_ω du type

$$H_\omega u = -(p_\omega u')' + q_\omega u \tag{2.0.1}$$

La fonction p_ω est absolument continue par morceaux, de signe fixe (par exemple positif), bornée et éloignée de zéro uniformément en ω (il existe $P > 0$ tel que, presque sûrement, $P \geq \sup p_\omega$ et $\inf p_\omega \geq \frac{1}{P}$) et à dérivée bornée uniformément en ω. La fonction q_ω est bornée uniformément en ω. Si p_ω est négatif, on se ramène au cas positif en changeant (p, q) en $(-p, -q)$. La première partie de la preuve, traitant des estimations d'effet tunnel inverse, fonctionne sans hypothèse de signe sur p tant que p reste éloigné de zéro et que p ne change pas de signe trop souvent. En revanche, les estimations de Minami ne sont prouvées qu'avec cette hypothèse de signe fixe. En effet, nous aurons besoin d'une estimation (en l'occurrence une croissance linéaire) sur le nombre de valeur propre que met $H_\omega(\Lambda_l)$ dans un intervalle de taille fixe, quand la taille du cube Λ_l croit. La positivité de la fonction p et le fait d'être éloignée de zéro permet d'obtenir cette estimation à partir de celle classique sur le laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet.

Nous prouvons les estimations de Minami pour les opérateurs discrets du type

$$H_\omega = -\Delta_{b_\omega} + V_\omega \tag{2.0.2}$$

où Δ_{b_ω} est l'opérateur de Jacobi associé à la suite aléatoire b_ω. Nous supposerons là aussi que la suite est éloignée de zéro uniformément en ω mais nous n'avons pas besoin d'hypothèse de signe sur celle-ci. En effet, dans le cas discret, le contrôle du nombre de valeur propre de $H_\omega(\Lambda_l)$ dans un intervalle est évident.

Ainsi, pour ces opérateurs, nous supposerons (IAD) et supposerons que les hypothèses (W) et (Loc) sont vérifiées sur un intervalle compact J. Nous prouvons le

Théorème 2.1. *Supposons (IAD) et supposons que (W) et (Loc) sont vérifiées dans un intervalle compact J. Pour tous $s' \in (0, s)$, $p > 0$, il existe $L_{p,s'} > 0$ et $C = C_{s',p} > 0$ tels*

que pour $E \in J$, $L \geq L_{p,s'}$ et $\epsilon \in (0, L^{-1/s'})$, nous avons

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C(\epsilon^{2s}L^2 + L^{-p}) \tag{2.0.3}$$

Ce théorème n'est pas aussi fort que les estimations de Minami prouvées dans [CGK09] pour le modèle d'Anderson discret en dimension quelconque. Tout d'abord, dans [CGK09], les estimations sont prouvées avec les exposants $s = \rho = 1$. Par ailleurs, nos estimations ne sont valables que pour des intervalles d'énergie variant avec la taille de l'intervalle Λ_L. La preuve du Théorème 2.1 n'est valable qu'en dimension un, et a tout d'abord été écrite pour les modèles continus dans [Klo14], puis écrite pour les modèles discrets dans [Shi13]. Nous déduisons du Théorème 2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Supposons (IAD) et supposons que (W) et (Loc) sont vérifiées dans un intervalle compact J. Pour tous $s' \in (0, s)$ (s est défini dans (W)), $M > 1$, $\rho \in (0, 1)$, il existe $L_{s',M,\rho} > 0$ et $C = C_{s',M,\rho} > 0$ tels que, pour tout $E \in J$, $L \geq L_{s',M,\rho}$ et tout $\epsilon \in [L^{-1/s'}/M, ML^{-1/s'}]$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(\mathrm{tr}[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C(\epsilon^s L)^{1+\rho}.$$

Remarquons que le membre à droite de l'inégalité est exactement celui utilisé dans [GK10a]. En revanche, cette inégalité n'est valable que pour des intervalle de taille polynomialement petite par rapport à la taille des cubes. Le Théorème 2.2 est suffisant pour obtenir les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées mais également pour obtenir les statistiques spectrales. Ainsi, en toute dimension, le Corollaire 2.2 ainsi que les hypothèses (W) linéaires en volume, (Loc) et (IAD) suffisent à prouver le Théorème 4.7, dans lequel nous prouvons en particulier que les statistiques locales des niveaux d'énergie dépliées convergent vers un processus de Poisson de mesure intensité égale à la mesure de Lebesgue. Ceci n'est pas écrit dans [GK10a] mais il y a très peu de modifications à apporter à la preuve donnée dans [GK10a] avec (M) au lieu du corollaire 2.2. En revanche, si (W) est polynomial en volume au lieu d'être linéaire, la preuve donnée dans [GK10a] doit être modifiée, comme nous le ferons dans la quatrième chapitre. En particulier, nous faisons une hypothèse de régularité sur la DEI, qui ne se déduit pas des estimations de Wegner non linéaire. La seule preuve que nous connaissons d'une telle régularité sans utiliser (W) est uni-dimensionnel (voir Annexe C). En revanche, si une telle régularité venait à être prouvée en dimension quelconque, alors la preuve du Chapitre 4 fonctionnerait également, les calculs étant légèrement différent.

Nous prouverons également le théorème suivant, utile si nous avons besoin de considérer des cubes de taille $(\log L)^\eta$ avec $\eta > 1$ et des intervalles d'énergie de taille $L^{-\kappa}$ avec $\kappa > s^{-1}$.

Corollaire 2.3. *Supposons (IAD) et supposons que (W) et (Loc) sont vérifiées dans un intervalle compact J. Pour tous $s' \in (0, s)$, $M > 1$, $\xi' \in (0, 1)$, $\alpha \in (\xi', 1)$, $\nu \in (\xi', \alpha)$, $\beta > 1+4s+\rho$, il existe $L_{s',M,\alpha,\beta,\xi',\nu} > 0$ et $C = C_{s',M,\alpha,\beta,\xi',\nu} > 0$ tels que, pour $E \in J, L \geq L_{\alpha,\beta,\xi',\nu}$ et $\epsilon \in [L^{-1/s'}/M, ML^{-1/s'}]$, nous avons, pour $l = (\log L)^{1/\xi'}$ et $l' = l^\alpha$*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_l))] \geq k) \leq C\big(\epsilon^s l\, l'^\beta\big)^2,$$

Remarque 2.4. Pour prouver le Théorème 2.1 et donc le Corollaire 2.3 nous utiliserons les Théorèmes 2.6 et 2.15 , énoncés et prouvés dans les parties suivantes. Il sera alors possible d'appliquer directement ces théorèmes, sans l'hypothèse (Loc) et d'obtenir l'inégalité :

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-L^{-\kappa},E+L^{-\kappa}]}(H_\omega(\Lambda_l))] \geq k) \leq (L^{-s\kappa}\, l^{4s+1+\rho})^2 \tag{2.0.4}$$

L'inégalité prouvée dans le Corollaire 2.3 est meilleure car nous avons $\alpha \in (\xi', 1)$, mais l'équation (2.0.4) pourrait suffire dans certains cas.

Enfin, nous prouverons le théorème suivant, qui peut être utile si nous souhaitons garder la dépendance quadratique en la taille du cube, mais ceci ne peut se faire qu'au prix d'une erreur logarithmique.

Théorème 2.5. *Supposons (IAD) et supposons que (W) et (Loc) sont vérifiées dans un intervalle compact J. Pour tous $s' \in (0, s)$, $M > 1$, $\eta > 1$, $\beta > 1 + 4s + \rho$, il existe $L_{s',M,\eta,\beta} > 0$ et $C = C_{s',M,\eta,\beta} > 0$ tels que, pour $E \in J$, $L \geq L_{s',M,\eta,\beta}$ et $\epsilon \in [L^{-1/s'}/M, ML^{-1/s'}]$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C(\epsilon^s L)^2 (\log L)^{2\eta\beta}.$$

Nous allons diviser la preuve du Théorème 2.1 en trois parties. Tout d'abord nous allons montrer un résultat intermédiaire, appelé dans [Klo14] "estimations d'effet tunnel inverse". Les résultats se présentent de manière similaire dans le cas continu et dans le cas discret mais nécessitent des preuves légèrement différentes. Nous les prouvons donc séparément, selon les cas, dans les deux premières sections.

L'effet tunnel se caractérise de la manière suivante (voir également [HS84],[CDS83]). Supposons, par exemple, que le potentiel est constitué de deux puits (voir [Har80]), l'un à côté de l'autre et considérons les deux opérateurs de Schrödinger dont les potentiels n'ont qu'un seul de ces deux puits. Si chacun de ces opérateurs possède une valeur propre, avec un vecteur propre normalisé petit à l'endroit où se fait le raccord, alors l'opérateur dont le potentiel est constitué des deux puits possède deux valeurs propres proches. Par ailleurs, les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont proches des superpositions (somme et différence) des vecteurs propres avec un seul puits. Ainsi, pour deux vecteurs propres normalisés, associés à deux valeurs propres proches d'un même opérateur, nous avons deux alternatives. Dans la première alternative, les vecteurs propres ont un lieu commun où mettre de la masse, quel cas ces vecteurs propres sont construits par l'effet tunnel expliqué précédemment. Il est donc possible de reconstruire les vecteurs propres, associés à deux opérateurs définis sur deux cubes distants l'un de l'autre, à l'origine de cet effet tunnel. Dans la deuxième alternative, les vecteurs propres ont les essentiels de leurs masses éloignés l'un de l'autre. Dans ce cas, ils ne viennent pas de l'effet tunnel. En revanche, dans ce cas, il est facile de "tronquer" une combinaison linéaire de ces vecteur propres et d'obtenir des vecteurs propres associés à des valeurs propres proches d'opérateurs définis sur des cubes distants.

Nous montrerons dans la dernière section que les estimations de Wegner, l'hypothèse de localisation et ces estimations d'effet tunnel inverse entrainent le Théorème 2.2 grâce à l'hypothèse d'indépendance à une distance. En effet, une fois les estimations d'effet tunnel inverse obtenues, il "suffit" d'appliquer les estimations de Wegner à chacun des cubes obtenus. Une démarche de ce genre pose toutefois quelques difficultés. Tout d'abord, les cubes $(\Lambda_i)_i$ varient en fonction de l'aléa. Il est donc nécessaire de restreindre l'appartenance des bords du cubes (qui sont des intervalles dans notre cas) à un réseau fixe du type $\eta\mathbb{Z}$, il sera aisé de fixer le bord d'un des cubes égal à zéro et un des bords de l'autre cube égal à L, grâce aux conditions aux bords de Dirichlet. De plus, la taille η de la maille du réseau ne doit pas être trop petite, car il y a toujours $\frac{L^2}{\eta^2}$ possibilités pour les bords non fixes des cubes. Et même si la taille de la maille ne dépend pas de L, ce nombre de possibilité, associé aux estimations de Wegner, donnerait comme majoration à droite dans les estimations de Minami le nombre $C|I|^2L^4$, car il y aurait alors un nombre proportionnel

à L^2 de possibilités pour les bords des intervalles. Pour obtenir le résultat $C(|I|L)^{1+\rho}$ avec $\rho > 1$, il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de localisation pour ramener l'étude sur notre grand cube Λ_L à l'étude de $\left(\frac{L}{(\log L)^e ta}\right)^2$ cubes de taille $(\log L)^\eta$ sur lesquels nous prouvons les estimations de Minami.

2.1 Estimations d'effet tunnel inverse dans le cas continu

Soient $L \in \mathbb{R}$, $q : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée par une constante $Q > 0$ et $p : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle qu'il existe $P > 1$ vérifiant

$$\frac{1}{P} \leq \inf |p| \leq \sup |p| \leq P. \tag{2.1.1}$$

Nous supposerons en plus qu'il existe $\delta > 0$ et une subdivision $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = L$ vérifiant pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > \delta$ et $p_{|]x_i, x_+1[}$ admet un prolongement continu à $[x_i, x_+1]$. En particulier, p est de signe fixe sur $]x_i, x_+1[$. Nous utiliserons dans cette section les résultats de l'annexe A.

Considérons le problème de Sturm-Liouville aux valeurs propres sur $[0, L]$, avec conditions aux bords de Dirichlet (voir [Zet05] pour une étude plus générale de ce problème) , défini par :

$$(Hu)(x) := -(pu')'(x) + q(x)u(x) = Eu(x), \quad u(0) = 0 = u(L). \tag{2.1.2}$$

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.6. *Soit $S > 0$ et $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $L_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$, J, δ et S) tel que, pour $L \geq L_0$ et $0 < \varepsilon L^4 \leq \varepsilon_0$, pour $E \in J$, si l'opérateur H, défini dans l'équation* (2.1.2)*, a deux valeurs propres dans $[E - \varepsilon, E + \varepsilon]$, il existe alors deux sites x_+ et x_- du réseau tronqué $\varepsilon_0\mathbb{Z} \cap [0, L]$, satisfaisant $S < x_+ - x_- < 2S$, tels que, si H_-, respectivement H_+, est l'opérateur défini comme la restriction de H à $L^2(0, x_-)$ avec conditions aux bords de Dirichlet, respectivement à $L^2(x_+, L)$, alors H_- et H_+ ont tous les deux une valeur propre dans l'intervalle $[E - \varepsilon L^4/\varepsilon_0, E + \varepsilon L^4/\varepsilon_0]$.*

La preuve de ce résultat est tirée de [Klo14]. Remarquons que nous pouvons supposer que l'intervalle d'énergie considéré est l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (c'est-à-dire faire "$E = 0$"), quitte à ajouter une constante au potentiel, et que les deux valeurs propres de l'hypothèse sont 0 et une autre qu'on appellera E vérifiant alors $E \leq \varepsilon$. Les constantes qui apparaitrons dans la preuve que nous donnerons dépendrons uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$. Ainsi, dans le Théorème 2.6 les estimations dépendent de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$, $\|p\|_\infty$ et J. Nous divisons la preuve de ce résultat en deux parties. Ainsi, le Théorème 2.6 sera une conséquence de la Proposition 2.11 et de la Proposition 2.10 qui seront prouvées dans les sous-sections correspondantes. Pour prouver ces propositions, nous utiliserons les définitions et résultats suivants.

Prenons u une solution non nulle de (2.1.2). Définissons alors les variables de Prüfer (voir par exemple [Zet05, Chapitre 4]) par :

$$r_u(x) \begin{pmatrix} \sin(\theta_u(x)) \\ \cos(\theta_u(x)) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x) \\ p(x)u'(x) \end{pmatrix}, \quad r_u(x) > 0, \quad \theta_u(x) \in \mathbb{R}$$

Comme u n'est pas identiquement nulle, r_u ne s'annule jamais. Par ailleurs, nous pouvons choisir la fonction θ_u de sorte qu'elle soit continue. Enfin, comme $u(0) = 0 = u(L)$ nous

pourrons supposer que $\theta_u(0) = 0$ et $\theta_u(L) = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. L'équation (2.1.2) se réécrit en fonction des variables de Prüfer :

$$\theta_u'(x) = \frac{1}{p(x)} - \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - E\right)\sin^2(\theta_u(x)) \tag{2.1.3}$$

$$\frac{r_u'(x)}{r_u(x)} = \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - E\right)\sin(\theta_u(x))\cos(\theta_u(x)). \tag{2.1.4}$$

Prenons maintenant u et v deux fonctions propres normalisées du problème de Sturm Liouville (2.1.2) associées à deux valeurs propres consécutives, par exemple 0 et E ; comme nous l'avons écrit, quitte à ajouter une constante au potentiel q, nous pouvons nous ramener à ce cas. Nous supposerons que $0 < E \ll 1$. Le théorème d'oscillation de Sturm nous dit que, pour $x \in (0, L)$, $\theta_u(x) < \theta_v(x)$ et que $\theta_v(L) = \theta_u(L) + \pi$ (voir par exemple [Zet05, Chapitre 4]). Définissons alors

$$\delta\theta(x) = \theta_v(x) - \theta_u(x). \tag{2.1.5}$$

Ainsi, comme $u(0) = v(0) = 0$, $\delta\theta(0) = 0$. Par ailleurs, $\delta\theta(L) = \pi$ et $\delta\theta(x) \in [0, \infty)$ pour $x \in (0, L)$. La fonction $\delta\theta$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}(\delta\theta)'(x) &= \left(\frac{1}{p(x)} + q(x)\right)[\sin^2(\theta_v(x)) - \sin^2(\theta_u(x))] - E\sin^2(\theta_v(x)) \\ &= \left(\frac{1}{p(x)} + q(x)\right)\sin(\delta\theta(x))\sin(2\theta_v(x) - \delta\theta(x)) - E\sin^2(\theta_v(x)).\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Nous utiliserons deux propriétés des variables de Prüfer. La première dit que, sur un intervalle où $\sin(\delta\varphi(x))$ est proche de zéro, les fonctions r_u et r_v sont essentiellement colinéaires.

Lemme 2.7. *Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que, pour $x \in [x_-, x_+]$, nous ayons $|\sin(\delta\theta(x))| \leq \varepsilon$. Il existe alors $\lambda > 0$ tel que, pour $x \in [x_-, x_+]$, nous avons*

$$e^{-[(Q+P)\varepsilon+E]L} \leq \frac{r_v(x)}{r_u(x)}\frac{1}{\lambda} \leq e^{[(Q+P)\varepsilon+E]L}. \tag{2.1.7}$$

Démonstration. D'après les équations (2.1.4) écrites pour u et v, nous avons

$$\left[\log\left(\frac{r_v(x)}{r_u(x)}\right)\right]' = \left(\frac{1}{p(x)} + q(x)\right)\sin(\delta\theta(x))\cos(2\theta_v(x) - \delta\theta(x)) - E\sin(2\theta_v(x)) \tag{2.1.8}$$

Or, par hypothèse, pour $x \in [x_-, x_+]$ nous savons que $|\sin(\delta\theta(x))| \leq \varepsilon$. Ainsi, l'équation (2.1.8) montre que pour $x \in [x_-, x_+]$, nous avons

$$\left|\left[\log\left(\frac{r_v(x)}{r_u(x)}\right)\right]'\right| \leq (Q+P)\varepsilon + E.$$

Intégrons maintenant cette équation entre x et y tels que $(x, y) \in [x_-, x_+]^2$. Nous obtenons alors

$$e^{-[(Q+P)\varepsilon+E](y-x)}\frac{r_v(y)}{r_u(y)} \leq \frac{r_v(x)}{r_u(x)} \leq e^{[(Q+P)\varepsilon+E](y-x)}\frac{r_v(y)}{r_u(y)}. \tag{2.1.9}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 2.7. □

La deuxième propriété nous dit que, lorsque $\sin(\delta\theta(x))$ n'est pas trop petit, le Wronskien de u et v, défini par $w(u, v) := u(pv') - (pu')v$, ne varie presque pas.

Lemme 2.8. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $E < \varepsilon < 1$. Supposons que*
- *pour $x \in [x_-, x_+]$, nous avons $\sin(\delta\theta(x)) \geq \varepsilon$;*
- $\sin(\delta\theta(x_\pm)) = \varepsilon$.

Alors, pour $x \in [x_-, x_+]$, nous avons $w(v,u)(x) > 0$ et

$$\max_{x\in[x_-,x_+]} \left[1 - \frac{w(v,u)(x)}{\max\limits_{x\in[x_-,x_+]} w(v,u)(x)} \right] \leq \frac{E}{\varepsilon}(x_+ - x_-) \leq \frac{EL}{\varepsilon}.$$

Démonstration. En exploitant les équations aux valeurs propres vérifiées par les fonctions u et v (pour les valeurs propres 0 et E), il est facile de calculer la dérivée du Wronskien. Nous obtenons alors $[w(v,u)]' = Euv$. Ainsi, pour $(x,y) \in [0,L]^2$, nous obtenons

$$w(v,u)(x) = r_u(x) r_v(x) \sin(\delta\theta(x)), \tag{2.1.10}$$

$$w(v,u)(x) - w(v,u)(y) = E \int_y^x r_u(t) r_v(t) \sin(\theta_u(t)) \sin(\theta_v(t)) dt. \tag{2.1.11}$$

La positivité de $w(v,u)$ est alors immédiate d'après l'hypothèse. Par ailleurs, toujours par hypothèse, nous pouvons réécrire l'équation (2.1.11) :

$$w(v,u)(y) - w(v,u)(x) = \frac{E}{\varepsilon} \int_x^y w(v,u)(t) g(t) dt \quad \text{où} \quad \sup_{t\in[x,y]} |g(t)| \leq 1.$$

Ainsi, pour y tel que $w(v,u)(y) = \max\limits_{x\in[x_-,x_+]} w(v,u)(x)$, nous obtenons

$$0 \leq 1 - \frac{w(v,u)(x)}{\max\limits_{x\in[x_-,x_+]} w(v,u)(x)} = \frac{E}{\varepsilon} \int_x^y \frac{w(v,u)(t)}{\max\limits_{x\in[x_-,x_+]} w(v,u)(x)} g(t) dt \leq \frac{E}{\varepsilon}|y - x|$$

Ceci achève la preuve du Lemme 2.8. □

Nous donnons un autre résultat, qui montre que le produit $r_u r_v$ varie peu sur les intervalles où $\sin(\delta\theta(x))$ n'est pas très petit.

Lemme 2.9. *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $E < \varepsilon < 1$. Supposons que*
- *pour $x \in [x_-, x_+]$, nous avons $\sin(\delta\theta(x)) \geq \varepsilon$;*
- $\sin(\delta\theta(x_\pm)) = \varepsilon$.

Alors, pour tout $a > 1$,
- *soit $r_u(x_+) r_v(x_+) + r_u(x_-) r_v(x_-) \leq 2a\, L(E/\varepsilon)^2$,*
- *soit*

$$1 - \frac{1}{1+a} \leq \frac{r_u(x_-) r_v(x_-)}{r_u(x_+) r_v(x_+)} \leq 1 + \frac{1}{a}.$$

Démonstration. En tant que fonctions propres normalisées du problème (2.1.2) associées à des valeurs propres distinctes, u et v sont orthogonales dans $L^2([0,L])$. Ainsi, nous avons

$$\int_0^L r_u^2(x) \sin^2(\theta_u(x)) dx = 1 = \int_0^L r_v^2(x) \sin^2(\theta_v(x)) dx, \tag{2.1.12}$$

$$\int_0^L r_u(x) r_v(x) \sin(\theta_u(x)) \sin(\theta_v(x)) dx = 0. \tag{2.1.13}$$

Comme $w(v,u)(0) = w(v,u)(L) = 0$, l'équation (2.1.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz impliquent donc que

$$0 < \max_{x\in[0,L]} r_u(x) r_v(x) |\sin(\delta\theta(x))| \leq E. \tag{2.1.14}$$

Comme pour tout $x \in [x_-, x_+]$ nous avons $\sin(\delta\theta(x)) \geq \varepsilon$, nous obtenons donc

$$0 < \max_{x\in[x_-,x_+]} r_u(x)r_v(x) \leq E/\varepsilon. \tag{2.1.15}$$

Insérons cette équation dans l'équation (2.1.11), écrite pour $(x, y) = (x_-, x_+)$. Comme $\sin(\delta\theta(x_-)) = \sin(\delta\theta(x_+)) = \varepsilon$, nous obtenons enfin

$$|r_u(x_-)r_v(x_-) - r_u(x_+)r_v(x_+)| \leq L(E/\varepsilon)^2. \tag{2.1.16}$$

Maintenant, prenons $a > 1$ et supposons que

$$\max\{r_u(x_-)r_v(x_-), r_u(x_+)r_v(x_+)\} > a\, L(E/\varepsilon)^2,$$

par exemple $r_u(x_+)r_v(x_+) > a\, L(E/\varepsilon)^2$. Nous divisons alors l'équation (2.1.16) par $r_u(x_+)r_v(x_+)$ est obtenons la deuxième alternative. Si la supposition est fausse, la première alternative est vérifiée. Ceci termine la preuve du Lemme 2.9. □

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 2.6. La démarche de celle-ci consiste à trouver deux combinaisons linéaires indépendantes de u et v, notées w_- et w_+, et deux points x_- et x_+, tels que w_- s'annule en x_- et w_+ s'annule en x_+, et tels que w_- (respectivement w_+) met suffisamment de masse dans $[0, x_-]$ (respectivement dans $[x_+, L]$). Nous trouverons ces combinaisons linéaires dans les deux cas suivants, que nous traiterons dans l'ordre.

1. Si le produit $r_u\, r_v$ reste petit sur tout l'intervalle $[0, L]$, que nous nommerons "cas sans effet tunnel".
2. Si le produit $r_u\, r_v$ prend au moins une grande valeur sur l'intervalle $[0, L]$, que nous nommerons "cas avec effet tunnel".

Sans effet tunnel

Ce premier cas est le plus simple. Les fonctions propres étant normalisées, le fait que $r_u\, r_v$ reste petit sur l'intégralité de l'intervalle $[0, L]$ montre que ces fonctions propres ont les essentiels de leurs masses respectives éloignés l'un de l'autre. Les combinaisons linéaires recherchées seront alors faciles à exhiber car, à l'endroit où se trouve l'essentiel de la masse de u, se trouve aussi une partie suffisamment grande de la masse de $u + \lambda v$. Ainsi, nous prouvons la

Proposition 2.10. *Soit $S > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$ et L suffisamment grand (dépendant uniquement de η, S, $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$), si u et v sont des fonction propres de H associées aux valeurs propres 0 et E avec $EL \leq \eta^{1/4}$ et si*

$$\forall x \in [0, L], \quad r_u(x) \cdot r_v(x) \leq \frac{\eta}{L}, \tag{2.1.17}$$

alors, il existe deux points x_+ et x_- du réseau $\eta\mathbb{Z}$ tels que

$$|\log \eta|/C < x_- < x_+ < L - |\log \eta|/C \quad \text{et} \quad S < x_+ - x_- < 2S, \tag{2.1.18}$$

et tels que, si H_-, respectivement H_+, est l'opérateur défini comme la restriction de H à $L^2(0, x_-)$, respectivement à $L^2(x_+, L)$, avec conditions aux bords de Dirichlet, alors H_- et H_+ ont tous les deux une valeur propre dans l'intervalle $[-EL\eta^{-1/4}, EL\eta^{-1/4}]$.

Démonstration. Comme les fonctions propres u et v sont normalisées, d'après (2.1.12), il existe x_u et x_v tels que $r_u(x_u) \geq L^{-1/2}$ et $r_v(x_v) \geq L^{-1/2}$. Ainsi, d'après l'équation (2.1.17), nous avons $r_u(x_v) \leq \eta L^{-1/2}$ et $r_v(x_u) \leq \eta L^{-1/2}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_u < x_v$. D'après l'équation (2.1.4), satisfaite par r_u, nous avons $|\log \eta|/C \leq x_v - x_u$ (C dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$). Ainsi, comme la fonction $x \mapsto (r_u/r_v)(x)$ est continue, il existe $x_u < x_0 < x_v$ tel que $r_u(x_0) = r_v(x_0)$. Définissons alors $x_\pm$ comme les points du réseau $\eta\mathbb{Z}$ les plus proches de $x_0 \pm S/2$. Il existe alors $C > 0$ (dépendant uniquement de S, $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) tel que

$$\frac{1}{C} \leq (r_u/r_v)(x_\pm) \leq C \quad \text{et} \quad |\log \eta|/C \leq \inf(x_v - x_+, x_- - x_u). \tag{2.1.19}$$

Traitons alors le cas de l'opérateur H_- sur l'intervalle $[0, x_-]$. Le cas de l'opérateur H_+ sur $[x_+, L]$ se traite manière similaire. Supposons que $|\sin(\theta_v(x_-))| \geq \sqrt[4]{\eta}$ et définissons $\lambda = \frac{u(x_-)}{v(x_-)}$ et $w_- = u - \lambda v$. Par construction, w s'annule en 0 et en x_-. Par ailleurs, nous calculons

$$\|H_- w_-\|_{L^2([0,x_-])} \leq E\lambda \leq \frac{E}{\sqrt[4]{\eta}}.$$

Maintenant, nous savons que $r_u(x_u) \geq L^{-1/2}$. Ainsi, d'après l'équation (A.2.1) du Lemme A.1, pour η suffisamment petit nous avons

$$\begin{aligned}\|w\|^2_{L^2([0,x_-])} &= \int_0^{x_-} (u(x) - \lambda v(x))^2 dx \\ &\geq \int_0^{x_-} u^2(x)dx - 2\lambda \int_0^{x_-} r_u(x) r_v(x) dx \geq L^{-1}/C - \eta^{3/4} L^{-1} \geq \frac{1}{2CL}.\end{aligned}$$

L'opérateur H_- étant auto-adjoint, la preuve de la Proposition 2.10 est finie dans le cas où $|\sin(\varphi_v(x_-))| \geq \sqrt[4]{\eta}$.
Supposons maintenant que $|\sin(\varphi_v(x_-))| \leq \sqrt[4]{\eta}$. Alors, pour η suffisamment petit, le point (2) du Lemme A.3 appliqué à θ_v nous dit que, pour un certain $x_0 \in \eta\mathbb{Z}$ tel que $x_- - 2\sqrt[8]{\eta} \leq x_0 \leq x_- - \sqrt[8]{\eta}$, nous avons $|\sin(\theta_v(x_0))| \geq \sqrt[4]{\eta}$. Nous pouvons maintenant refaire les calculs précédents avec x_0 au lieu de x_-.
Pour H_+ sur $[x_+, L]$, il suffit de prendre $w_+ = v - \lambda^{-1} u$ où λ est choisi comme précédemment et d'étudier $\|(H_+ - E)w_+\|_{L^2([x_+,L])}$.
Ceci conclut la preuve de la Proposition 2.10. □

Avec effet tunnel

Le but de cette partie est de prouver un résultat similaire à la Proposition 2.10, mais quand il y a effet tunnel. Ainsi, nous prouvons dans cette partie la

Proposition 2.11. *Soit $S > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$ et L suffisamment grand (dépendant uniquement de η, S, $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$), si u et v sont des fonction propres de H associées aux valeurs propres 0 et E avec $EL \leq \eta^4$ et si*

$$\exists\, x_0 \in [0, L], \quad r_u(x_0) \cdot r_v(x_0) \geq \frac{\eta}{L}, \tag{2.1.20}$$

alors, il existe deux points x_+ et x_- du réseau $\eta\mathbb{Z}$ tels que

$$|\log(EL^2)|/C < x_- < x_+ < L - |\log(EL^2)|/C \quad \text{et} \quad S < x_+ - x_- < 2S, \tag{2.1.21}$$

et tels que, si H_-, respectivement H_+, est l'opérateur défini comme la restriction de H à $L^2(0, x_-)$ avec conditions aux bords de Dirichlet , respectivement à $L^2(x_+, L)$, alors H_- et H_+ ont tous les deux une valeur propre dans l'intervalle $[-EL^4\eta^{-4}, EL^4\eta^{-4}]$.

Esquissons rapidement le cheminement de la preuve. Ainsi, en supposant que u et v mettent de la masse à un même endroit, nous montrerons qu'il existe deux sites, où u et v mettent de la masse, et tels que les angles ϕ_u et ϕ_v sont proches sur un des sites et presque décalés de π sur l'autre site (ce qui est conforme à la description de deux vecteurs propres construits par superposition via l'effet tunnel). A partir de là, nous exhiberons un site où les vecteurs (u, u') et (v, v') sont orthogonaux, et mettent tous les deux de la masse. Les points x_- et x_+ seront alors choisis proches de ce site, de manière à vérifier la conclusion.

Démonstration. D'après les équations (A.2.2) appliquées à u et v, l'équation (2.1.20) donne l'existence d'une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) telle que

$$\forall x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap [0, L] \quad r_u(x)\, r_v(x) \geq \frac{\eta}{CL}, \tag{2.1.22}$$

D'après les équations (2.1.20) et (2.1.14), nous avons

$$\forall x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap [0, L], \quad |\sin(\delta\theta(x))| \lesssim EL/\eta. \tag{2.1.23}$$

Nous pouvons supposer, par exemple, que

$$\forall x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \cap [0, L], \quad \delta\theta(x) \in 2\pi\mathbb{Z} + [-CEL/\eta, +CEL/\eta] \tag{2.1.24}$$

le cas où $\delta\theta(x) \in \pi(2\mathbb{Z} + 1) + [-CEL/\eta, +CEL/\eta]$ se traitant de la même manière.
Comme les fonctions u et v sont de normes égales à un et orthogonales, nous prouvons le

Lemme 2.12. *Il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$) et $x_2 \in [0, L]$ tel que, pour $x \in [x_2 - 1, x_2 + 1] \cap [0, L]$, nous avons*

$$r_u(x)\, r_v(x) \geq \frac{\eta}{CL^3} \quad \textit{et} \quad \delta\theta(x) \in \pi(2\mathbb{Z} + 1) + [-CEL^3/\eta, +CEL^3/\eta]. \tag{2.1.25}$$

Remarque 2.13. Si $\delta\theta(x) \in \pi(2\mathbb{Z} + 1) + [-CEL/\eta, +CEL/\eta]$ sur $[x_0 - 1, x_0 + 1] \cap [0, L]$, dans l'équation (2.1.24), l'assertion $\delta\theta(x) \in \pi(2\mathbb{Z} + 1) + [-CEL^3/\eta, +CEL^3/\eta]$ est remplacée par $\delta\theta(x) \in 2\pi\mathbb{Z} + +[-CEL^3/\eta, +CEL^3/\eta]$.

Démonstration. D'après les équations (2.1.22) et (2.1.24), nous avons

$$\begin{aligned}\Bigg| \int_{[x_0-1,x_0+1]\cap[0,L]} & r_u(x) r_v(x) \sin^2(\theta_u(x)) dx \\ & + \int_{[0,L]\setminus[x_0-1,x_0+1]} r_u(x) r_v(x) \sin(\theta_u(x)) \sin(\theta_v(x)) dx \Bigg| \lesssim \frac{EL}{\eta}.\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Ainsi, d'après les équations (A.2.3) et (2.1.22), comme $EL^4 \leq \eta_0$, il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$), tel que

$$\begin{aligned}\int_{[0,L]\setminus[x_0-1,x_0+1]} r_u(x) r_v(x) \sin(\theta_u(x)) \sin(\theta_v(x)) dx & \leq -\frac{\eta}{CL}\left(1 - \frac{C\eta^2}{L^2}\right) \\ & \leq -\frac{\eta}{2CL}\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

pour L suffisamment grand.
Or, nous calculons

$$\left| \int_{\substack{x \in [0,L]\setminus[x_0-1,x_0+1] \\ r_u(x) r_v(x) \leq \eta/L^3}} r_u(x) r_v(x) \sin(\theta_u(x)) \sin(\theta_v(x)) dx \right| \leq \frac{\eta}{L^2}. \tag{2.1.28}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\substack{x\in[0,L]\setminus[x_0-1,x_0+1]\\ r_u(x)r_v(x)>\eta/L^3}} r_u(x)r_v(x)\sin(\varphi_u(x))\sin(\varphi_v(x))dx &\leq -\frac{\eta}{2CL}\left(1-\frac{C}{L}\right)\\ &\leq -\frac{\eta}{3CL}.\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

D'après l'équation (2.1.14), quand $x \in [0, L]$ est tel que $r_u(x)r_v(x) > \eta/L^3$, alors $|\sin(\delta\theta(x))| \leq EL^3/\eta$. Ainsi, comme $EL^4 \leq \eta$, en utilisant la formule

$$\sin(\phi_v) = \sin(\phi_u + \delta\phi) = \sin(\phi_u)\cos(\delta\phi) + cos(\phi_u)\sin(\delta\phi)$$

et l'équation (2.1.29), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}\int_{\substack{x\in[0,L]\setminus[x_0-1,x_0+1]\\ r_u(x)r_v(x)>\eta/L^3\\ \sin(\delta\theta(x))\leq EL^2/\eta}} r_u(x)r_v(x)\sin^2(\varphi_u(x))\cos(\delta\theta(x))dx &\leq -\frac{\eta}{3L}\left(1-\frac{C\eta^2}{L^3}\right)\\ &\leq -\frac{\eta}{4L}.\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

L'équation (A.2.2) permet maintenant de conclure. Ceci prouve le Lemme 2.12. □

D'après les équations (2.1.24) et (2.1.25), nous avons $[x_0-1, x_0+1] \cap [x_2-1, x_2+1] = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_0 + 1 < x_2 - 1$. D'après les équations (2.1.24) et (2.1.27), comme la fonction $x \mapsto \delta\theta(x) \in [0, \infty)$ est continue, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + 1 < x_1 < x_2 - 1$ et tel que $|\sin(\delta\theta(x_1))| = 1$. Pour fixer les idées, nous supposerons que $\sin(\delta\theta(x_1)) = 1$.

Définissons maintenant $\varepsilon = \eta/(CL^3)$. Les équations (2.1.23) et (2.1.25) montrent qu'il existe deux intervalles $[x_0^-, x_0^+]$ et $[x_2^-, x_2^+]$ tels que,

1. $[x_0-1, x_0+1] \cap [0, L] \subset [x_0^-, x_0^+] \subset [0, L]$;
2. $[x_2-1, x_2+1] \cap [0, L] \subset [x_2^-, x_2^+] \subset [0, L]$;
3. pour tout $x \in [x_0^-, x_0^+] \cup [x_2^-, x_2^+]$, nous avons $|\sin(\delta\theta(x))| \leq \varepsilon$;
4. $|\sin(\delta\theta(x_0^\pm))| = |\sin(\delta\theta(x_2^\pm))| = \varepsilon$.

Comme $x_0 + 1 < x_2 - 1$, nous avons $0 < x_0^- < x_0^+ < x_2^- < x_2^+ < L$. En outre, nous avons également $[x_0, x_0+1] \cup [x_2-1, x_2] \subset [0, L]$. De plus, il existe un intervalle $[x_1^-, x_1^+]$ tel que

- $x_1 \in [x_1^-, x_1^+] \subset [x_0^+, x_2^-] \subset [0, L]$,
- pour tout $x \in [x_1^-, x_1^+]$, nous avons $\sin(\delta\theta(x)) \geq \varepsilon$ et $\sin(\delta\theta(x_1^\pm)) = \varepsilon$.

Comme $\sin(\delta\theta(x_1)) = 1$, nous déduisons du Lemme A.2 l'existence d'une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de S et $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$), telle que

$$\min_{x\in[x_1-2S,x_1+2S]} \sin(\delta\theta(x)) \geq \frac{1}{C}. \tag{2.1.31}$$

Comme $\varepsilon < 1/C$, pour L suffisamment grand, nous obtenons $[x_1-2S, x_1+2S] \in [x_1^-, x_1^+]$. Le Lemme A.2 nous dit maintenant que

$$C^{-1}|\log(EL^2)| \leq x_0^+ - x_0^- \quad \text{et} \quad C^{-1}|\log(EL^3)| \leq x_2^+ - x_2^-. \tag{2.1.32}$$

Appliquons maintenant le Lemme 2.7 à $[x_0^-, x_0^+]$ et à $[x_2^-, x_2^+]$. Pour L suffisamment grand, l'équation (2.1.7) nous donne alors l'existence de $\lambda_0 > 0$ et de $\lambda_2 > 0$ tels que, pour $i \in \{0, 2\}$, nous avons

$$\frac{\lambda_i}{1+C\eta_0/L} \leq \min_{x\in[x_i^-,x_i^+]}\left(\frac{r_u(x)}{r_v(x)}\right) \leq \max_{x\in[x_i^-,x_i^+]}\left(\frac{r_u(x)}{r_v(x)}\right) \leq [1+C\eta_0/L]\,\lambda_i. \tag{2.1.33}$$

Nous savons que les fonctions r_u et r_v sont bornées uniformément par une constante (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$). Ainsi, les équations (2.1.32), (2.1.25) et (2.1.22) nous montrent que

$$\frac{\eta}{CL^3} \leq \lambda_0, \lambda_2 \leq \frac{CL^3}{\eta}.$$

D'après le Lemme 2.8 appliqué à $[x_1^-, x_1^+]$, nous avons

$$w(u,v)(x) = M\left(1 + O\left(\frac{EL}{\varepsilon}\right)\right) \quad \text{où} \quad M := \max_{x\in[x_1^-,x_1^+]} w(u,v)(x). \tag{2.1.34}$$

Nous prouvons maintenant le

Lemme 2.14. *Il existe $\eta_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$, il existe $(k_-, k_+) \in \mathbb{N}^2$ tel que*

1. *$\frac{2S}{3} < x_1 - k_-\eta < \frac{3S}{4}$ and $\frac{2S}{3} < k_+\eta - x_1 < \frac{3S}{4}$;*
2. *il existe $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ tel que, pour $\bullet \in \{+,-\}$, nous avons*
   - *soit $u(k_\bullet\eta) = \lambda_\bullet v(k_\bullet\eta)$ et*
     - *$|\lambda_- - \lambda_0| \geq \eta_0\eta$,*
     - *$|\lambda_+ + \lambda_2| \geq \eta_0\eta$.*
   - *soit $v(k_\bullet\eta) = \lambda_\bullet u(k_\bullet\eta)$ et*
     - *$|\lambda_- - 1/\lambda_0| \geq \eta_0\eta$,*
     - *$|\lambda_+ + 1/\lambda_2| \geq \eta_0\eta$.*

Démonstration. Nous détaillons la preuve uniquement pour k_-, celle pour k_+ étant la même, à quelques modifications près. Le Lemme A.3 nous assure l'existence de $\eta_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$) tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$, les fonctions $|\sin(\theta_u(.))|$ et $|\sin(\theta_v(.))|$ ne peuvent rester inférieures à η que sur des intervalles de longueurs inférieures à η/η_0. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que, pour $\eta \in (0, \eta_0)$, il existe un entier k tel que

$$\frac{2S}{3} < x_1 - k\eta < \frac{3S}{4} \quad \text{et, } \forall x \in [(k-1)\eta, (k+1)\eta], \begin{cases} |\sin(\theta_u(x))| \geq \eta \\ |\sin(\theta_v(x))| \geq \eta \end{cases}. \tag{2.1.35}$$

Notons que pour tout $x \in [(k-1)\eta, (k+1)\eta]$ nous avons alors $u(x)v(x) \neq 0$ et que, d'après les équations (2.1.32) et (2.1.35), pour L suffisamment grand, nous avons $k\eta \in [x_1 - 2S, x_1 + 2S] \subset [x_1^-, x_1^+]$.
Quitte à échanger les rôles de u et v et à échanger λ_0 et $1/\lambda_0$ nous pouvons supposer que $r_u(k\eta) \geq r_v(k\eta)$. Ceci nous donne en particulier l'existence d'une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et $\|p\|_\infty$), telle que

$$\forall x \in [(k-1)\eta, (k+1)\eta],\ r_u(x) \geq r_v(x)e^{-C\eta}. \tag{2.1.36}$$

Si le premier point de l'assertion (2) du Lemme 2.14 est vérifié pour k, il suffit de prendre $k_- = k$. Supposons maintenant que ce premier point n'est pas vérifié. Par définition, nous supposons donc que

$$\exists\, \lambda \in [\lambda_0 - \eta_0\eta, \lambda_0 + \eta_0\eta]\,,\ u(k\eta) = \lambda v(k\eta). \tag{2.1.37}$$

Remarquons que le Wronskien $w(u,v)$ vérifie l'équation $w(u,v)/p = v^2 \cdot (u/v)'$. Comme p est continue par morceaux, quitte à réduire η_0, nous pouvons supposer que p est de

signe fixe sur $[k\eta, k\eta - \eta]$ ou de signe fixe sur $[k\eta, k\eta + \eta]$. Sans perte de généralité, nous supposons que p est positif sur $[k\eta, k\eta + \eta]$ et nous calculons donc (rappelons que w est positif sur $[x_1^-, x_1^+]$)

$$\begin{aligned}\frac{u(k\eta+\eta)}{v(k\eta+\eta)} &= \frac{u(k\eta)}{v(k\eta)} + \eta \int_0^1 \frac{w(u,v)(k\eta+\eta t)}{p(k\eta+\eta t)v^2(k\eta+\eta t)} dt \\ &= \lambda + \eta \int_0^1 \frac{w(u,v)(k\eta+\eta t)}{p(k\eta+\eta t)v^2(k\eta+\eta t)} dt.\end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{w(u,v)(k\eta+\eta t)}{p(k\eta+\eta t)v^2(k\eta+\eta t)} dt &\geq \frac{1}{\|p\|_\infty C r_v^2(k\eta)} \int_0^1 w(u,v)(k\eta+\eta t) dt \geq \frac{M}{\|p\|_\infty C r_v^2(k\eta)} \\ &\geq \frac{M}{\|p\|_\infty C r_v(k\eta) r_u(k\eta)} \geq \frac{1}{\|p\|_\infty C} \frac{M}{w(u,v)(k\eta)} \\ &\geq \frac{1}{C\|p\|_\infty} \geq 2\eta_0,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé successivement
- Le Lemme A.1,
- l'équation (2.1.34) sur le wronskien $w(u,v)$,
- notre hypothèse $r_u(k\eta) \leq r_v(k\eta)$,
- l'équation (2.1.31),
- éventuellement une réduction de la valeur η_0,

Nous obtenons ainsi

$$u(k\eta+\eta) = (\lambda + \delta\lambda) v(k\eta+\eta) \quad \text{avec} \quad \lambda + \delta\lambda - \lambda_0 \geq \delta\lambda - |\lambda - \lambda_0| \geq \eta\eta_0.$$

Il suffit maintenant de choisir $k_- = k + 1$. Ceci termine la preuve du Lemme 2.14. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la Proposition 2.10. Nous donnons les détails pour l'opérateur H_-, la preuve pour H_+ restant la même, si ce n'est le fait de remplacer L par L^3. Cette différence est due au résultat du Lemme 2.12.

La preuve de la Proposition 2.10 se base sur les résultats du Lemme 2.14, ce dernier proposant deux alternatives. Commençons par supposer que le Lemme 2.14 nous dit que la fonction $u - \lambda_- v$ s'annule en $x_- = k_-\eta$. La fonction $w_- := u - \lambda_- v$ s'annule aux bords de l'intervalle $[0, x_-]$. Par ailleurs, nous calculons :

$$\|(H_- - E)w_-\|_{L^2([0,x_-])} = E\|u\|_{L^2([0,x_-])} \leq E.$$

Nous savons, par construction de $[x_0^-, x_0^+]$, que $\delta\theta \in 2\pi\mathbb{Z} + [-E\eta/L, E\eta/L]$ sur $[x_0^-, x_0^+]$. Ainsi, d'après le Lemme 2.7, comme $|\lambda_- - \lambda_0| \geq \eta_0\eta$, l'équation (2.1.33) nous montre que, pour tout $x \in [x_0^-, x_0^+]$, nous avons

$$\begin{aligned}w_-(x) &= r_u(x)\sin(\theta_u(x)) - \lambda_- r_v(x)\sin(\theta_v(x)) \\ &= [r_u(x) - \lambda_- r_v(x)]\sin(\theta_v(x)) + O(EL/\eta) \\ &= [\lambda_0 - \lambda_-]v(x) + O(|v(x)|\eta_0/L) + O(\eta^3/L^3).\end{aligned}$$

Nous calculons maintenant

$$\begin{aligned}\|u - \lambda_- v\|_{L^2([0,x_-])} &\geq \eta_0(\eta - 1/L)\|v\|_{L^2([x_0-1,x_0+1])} - C'\eta^3/L^3 \geq C\eta_0\eta r_v(x_0) - C'\eta^3/L^3 \\ &\geq C\eta_0\eta^2 L^{-1} - C'\eta^3 L^{-3} \geq C\eta_0\eta^2 L^{-1}/2\end{aligned}$$

quitte à réduire encore η_0, pour L assez grand. Nous avons donc montré que H_- a une valeur propre à une distance au plus égale à $2EL/(C\eta_0\eta^2)$ de E.

La deuxième alternative du Lemme 2.14 nous dit que la fonction $v - \lambda_- u$ s'annule en $x_- = k_-\eta$. Dans ce cas, la preuve est la même, en calculant $\|H_-(v - \lambda_- u)\|_{L^2([0,x_-])}$. Ceci conclut la preuve de la Proposition 2.11. □

Preuve du Théorème 2.6

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du Théorème 2.6. Prenons η_0 suffisamment petit de sorte que la Propositions 2.11 et la Proposition 2.10 soient toutes les deux vérifiées. Les deux alternatives se complètent pour prouver le Théorème 2.6.

2.2 Estimations d'effet tunnel inverse dans le cas discret

Dans cette section nous étudierons l'équation

$$\begin{aligned} Hu := b_{n+1}u(n+1) + b_n u(n-1) + a_n u(n) = Eu(n) \\ u(0) = 0, u(L+1) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Rappelons que la suite b_n vérifie l'hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{M} \leq |b_n| \leq M. \tag{2.2.2}$$

Comme dans la section précédente, les estimations d'effet tunnel inverse sont données par le théorème

Théorème 2.15. *Soit $S > 0$. Il existe ϵ_0 tel que pour tout $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{L^4}$, si $tr\Big(\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H)\Big) \geq 2$, alors il existe x_- et x_+ dans $[\![1, L]\!]$ tel que $x_+ - x_- \geq S$ et tel que*

$$tr\left(\mathbf{1}_{\left[E-\epsilon\frac{L^4}{\epsilon_0},E+\epsilon\frac{L^4}{\epsilon_0}\right]}(H(\Lambda_{[\![1,x_-]\!]})\right) \geq 1 \text{ et } tr\left(\mathbf{1}_{\left[E-\epsilon\frac{L^4}{\epsilon_0},E+\epsilon\frac{L^4}{\epsilon_0}\right]}(H(\Lambda_{[\![x_+,L]\!]})\right) \geq 1.$$

Nous reprenons ici la preuve donnée dans [Shi13], dont le cheminement suit celui de la preuve donnée dans la section précédente. Prenons $E \in sp(H)$ et u un vecteur propre normalisé. Pour tout $n \in [\![1, L]\!]$ définissons $U(n) := \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}$ et les variables de Prüfer r_u and ϕ_u par :

$$U(n) = r_u(n) \begin{pmatrix} \sin(\phi_u(n)) \\ \cos(\phi_u(n)) \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Dans cette partie également nous utiliserons des résultats sur les variables de Prüfer, ils sont pour l'essentiel prouvés dans l'Annexe B. Nous suivons la preuve de la section précédente et divisons la preuve en deux parties. Nous traiterons en premier le cas sans effet tunnel, qui est plus facile.

2.2.1 Sans effet tunnel

Comme annoncé, nous prouvons d'abord le :

Proposition 2.16. *Soit $S > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in (0, \eta_0)$ et tout $E < \frac{\eta^4}{L^4}$, si $tr\left(\mathbf{1}_{[-E,E]}(sp(H(\Lambda_L))\right) \geq 2$ et si pour tout $n \in \Lambda_L$, $r_u(n)r_v(n) \leq \frac{\eta}{L}$ où u et v sont des vecteurs propres normalisés associés à deux énergies consécutives, il existe x_- et x_+ dans Λ_L tels que $x_+ - x_- \geq S$ et tels que*

$$tr\left(\mathbf{1}_{[-EL^4/\eta^4, EL^4/\eta^4]}(H([\![1, x_-]\!]))\right) \geq 1,$$
$$tr\left(\mathbf{1}_{[-EL^4/\eta^4, EL^4/\eta^4]}(H([\![x_+, L]\!]))\right) \geq 1.$$

Démonstration. Comme u et v sont normalisés, il existe x_u et x_v tels que $r_u(x_u) \geq \frac{1}{\sqrt{L}}$ et $r_v(x_v) \geq \frac{1}{\sqrt{L}}$. Ainsi, $r_v(x_u) \leq \frac{\eta}{\sqrt{L}}$ et $r_u(x_v) \leq \frac{\eta}{\sqrt{L}}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_u < x_v$. Soit f la suite $f = \frac{r_u}{r_v}$. Alors $f(x_u) \geq \frac{1}{\eta}$ et $f(x_v) \leq \eta$. D'après le Lemme B.1 il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|a\|_\infty$) tel que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq C.$$

De ce fait, pour $\eta \leq \frac{1}{C^{S+2}} < \frac{1}{C^2}$ nous savons qu'il existe $n \in [\![x_u, x_v]\!]$ tel que $\frac{1}{\sqrt{C}} < f(n) < \sqrt{C}$, de sorte que $\min\{n - x_u, x_v - n\} \geq \left\lfloor \frac{S}{2} \right\rfloor + 2$, où $\lfloor . \rfloor$ dénote la partie entière. Prenons alors $x_- = n - \left(\left\lfloor \frac{S}{2} \right\rfloor + 2\right)$ et $x_- = n + \left(\left\lfloor \frac{S}{2} \right\rfloor + 2\right)$. Nous vérifions bien que $x_+ - x_- \geq S + 2$ et que

$$\{f(x_-), f(x_+)\} \subset \left[\frac{1}{C^{\frac{S}{2}+2}}, C^{\frac{S}{2}+2}\right].$$

D'après le Lemme B.2 nous pouvons supposer que $|\sin(\phi_v(x_-))| \geq \eta^{1/4}$, sinon nous changeons x_- en $x_- - 1$. Soit $\lambda = \frac{u(x_-)}{v(x_-)}$ et $w = u - \lambda v$. Nous vérifions $\lambda \leq \frac{K}{\eta^{1/4}}$, $w(0) = w(x_-) = 0$ et $\|\left(H_\omega([\![1, x_-]\!]) - E\right) w\|_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} \leq E$. Par ailleurs, nous calculons

$$\|w\|^2_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} \geq \|u\|^2_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} - 2\lambda\frac{\eta}{L} \geq r_u(x_u)^2 - K\frac{\eta^{3/4}}{L} \geq \frac{1}{2L},$$

pour η suffisamment petit. Ainsi, $H([\![0, x_-]\!]) - E$ a une valeur propre dans $E\sqrt{2L}(-1, 1)$, ce qui termine la preuve pour x_-. La preuve pour x_+ est similaire : il suffit d'estimer $\|H_\omega([\![x_+, L]\!])w\|$ au lieu de $\|\left(H_\omega([\![1, x_-]\!]) - E\right) w\|$. Ceci termine la preuve de la Proposition 2.16. □

2.2.2 Avec effet tunnel

Nous prouvons maintenant un lemme qui sera utilisé dans la seconde partie de la preuve du Théorème 2.15. Il s'agit de l'analogue discret de l'équation (2.1.14).

Lemme 2.17. *Pour tout $n \in \{0, \ldots, L\}$,*

$$|r_u(n)r_v(n)\sin(\delta\phi(n))| \leq ME, \tag{2.2.4}$$

où M est défini dans l'équation (2.2.2).

Démonstration. Soit $W(n) = b(n)\big[u(n)v(n-1) - u(n-1)v(n)\big]$ le "wronskien" de u and v. Nous calculons,

$$\begin{aligned} W(n+1) =& b(n)r_u(n)r_v(n)\sin(\delta\phi(n)) \\ =& b(n+1)\big[u(n+1)v(n) - u(n)v(n+1)\big] \\ =& v(n)\big(-\omega_n u(n) - b(n)u(n-1)\big) \\ & - u(n)\big(-\omega_n v(n) + Ev(n) - b(n)v(n-1)\big) \\ =& W(n) - Ev(n)u(n) \end{aligned}$$

Par définition, nous savons que $W(1) = 0$ et que u et v ont leurs normes égales à un, donc pour tout $n \in [\![0, L]\!]$

$$|W(n)| = E\left|\sum_{i=0}^{n} u(n)v(n)\right| \leq E\sqrt{\sum_{i=0}^{n} u^2(n)}\sqrt{\sum_{i=0}^{n} v^2(n)} \leq E.$$

Comme $|b_n| \geq \dfrac{1}{M}$, la preuve du Lemme 2.17 est complète. □

La deuxième partie de la preuve du Théorème 2.15 est le résultat suivant :

Proposition 2.18. *Soit $S > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in (0, \eta_0)$ et tout $E < \dfrac{\eta^4}{L^4}$, si $tr\left(\mathbf{1}_{[-E,E]}(H)\right) \geq 2$ et si il existe $x_0 \in [\![0, L]\!]$ tel que $r_u(x_0)r_v(x_0) \geq \dfrac{\eta}{L}$ où u et v sont des vecteurs propres normalisés associé à deux énergies consécutives, il existe x_- et x_+ dans Λ_L tels que $x_+ - x_- \geq S$ et tels que*

$$\begin{aligned} tr\left(\mathbf{1}_{[-EL^4/\eta^4, EL^4/\eta^4]}(H([\![1, x_-]\!]))\right) \geq 1, \\ tr\left(\mathbf{1}_{[-EL^4/\eta^4, EL^4/\eta^4]}(H([\![x_+, L]\!]))\right) \geq 1. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après les Lemme B.1 et B.2 nous pouvons supposer que $|\sin(\phi_u(x_0))| \geq \dfrac{1}{C}$. Du Lemme 2.17 nous déduisons que $|\sin(\delta\phi(x_0))| \leq \dfrac{EL}{\eta}$. Maintenant traitons le cas où $\delta\phi(x_0) \in \left[0, \dfrac{EL}{2\eta}\right]$, le cas $\delta\phi(x_0) \in \left[\pi - \dfrac{EL}{2\eta}, \pi\right]$ se traitant de la même manière. Pour prouver la Proposition 2.18 nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.19. *Il existe $x_2 \in \{1, \ldots, L\}$ tel que $\delta\phi(x_2) \in \left[\pi - \dfrac{EL^3}{2\eta}, \pi\right]$.*

Démonstration. Comme les vecteurs u et v sont orthogonaux, nous avons

$$\sum_n r_u(n)r_v(n)\sin(\phi_u(n))\sin(\phi_v(n)) = 0.$$

Comme $|\sin(\phi_u(x_0)) - \sin(\phi_v(x_0))| \leq \delta\phi(x_0)$, nous obtenons donc

$$\left| r_u(x_0)r_v(x_0)\sin^2(\phi_u(x_0)) + \sum_{n \neq x_0} r_u(n)r_v(n)\sin(\phi_u(n))\sin(\phi_v(n)) \right| \leq C\frac{EL}{\eta}.$$

Ainsi comme $EL^4 \leq \eta^4$, pour L suffisamment grand nous obtenons

$$\sum_{n \neq x_0} r_u(n)r_v(n)\sin(\phi_u(n))\sin(\phi_v(n)) \leq -\frac{\eta}{CL}\left(1 - \frac{C\eta^2}{L^2}\right) \leq -\frac{\eta}{2CL}.$$

Maintenant, nous avons

$$\left|\sum_{n\neq x_0, r_u(n)r_v(n)\leq \eta/L^3} r_u(n)r_v(n)\sin(\phi_u(n))\sin(\phi_v(n))\right| \leq C\frac{\eta}{L^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq x_0, r_u(n)r_v(n)\geq \eta/L^3} r_u(n)r_v(n)\sin(\phi_u(n))\sin(\phi_v(n)) &\leq -\frac{\eta}{2CL}\left(1-\frac{1}{L}\right)\\ &\leq -\frac{\eta}{3CL}.\end{aligned}$$

Par ailleurs $\sin(\phi_v) = \sin(\phi_u + \delta\phi) = \sin(\phi_u)\cos(\delta\phi) + cos(\phi_u)\sin(\delta\phi)$ donc comme $|r_u r_v \sin(\delta\phi)| \leq ME \leq \dfrac{M\eta^4}{L^4}$, pour L suffisamment grand nous avons

$$\sum_{n\neq x_1, r_u(n)r_v(n)\geq \eta/L^3} r_u(n)r_v(n)\sin^2(\phi_u(n))\cos(\delta\phi_v(n)) \leq -\frac{\eta}{4CL}. \tag{2.2.5}$$

Ainsi, il existe $x_2 \neq x_0$ tel que $r_u(x_2)r_v(x_2) \geq \dfrac{\eta}{L^3}$ et $\cos(\delta\phi(x_2)) < 0$. Donc $|\sin(\delta\phi(x_2))| \leq ME\dfrac{L^3}{\eta}$ et $\delta\phi(x_2) \in \left[\pi - M\dfrac{EL^3}{\eta}, \pi\right]$. Ceci termine la preuve du Lemme 2.19. □

Reprenons la preuve de la Proposition 2.18. Il existe donc x_0 et x_2 tels que $\delta\phi(x_0) \in \left[0, \dfrac{EL}{\eta}\right]$ et $\delta\phi(x_2) \in \left[\pi - \dfrac{EL^3}{\eta}, \pi\right]$. Ainsi, d'après le Lemme B.4 et le Lemme B.3, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour L suffisamment grand, il existe $x_1 \in \{1, \ldots, L\}$ satisfaisant $\delta\phi(x_1) \in [\epsilon_0, \pi - \epsilon_0]$. Aussi, si nous choisissons $x_- = x_1 - \left\lfloor \dfrac{S}{2} \right\rfloor - 1$ et $x_+ = x_1 + \left\lfloor \dfrac{S}{2} \right\rfloor + 1$, alors il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de S) tel que

$$\forall n \in [\![x_-, \ldots, x_+]\!], \delta\phi(n) \in \left[\frac{\epsilon_0}{C}, \pi - \frac{\epsilon_0}{C}\right]. \tag{2.2.6}$$

Nous allons maintenant montrer que $H_\omega^- := H_\omega(\{0, \ldots, x_-\})$ a une valeur propre dans l'intervalle $[-EL^4/\eta^4, EL^4/\eta^4]$. L'opérateur H_ω^+ correspondant se traite de la même manière.

Tout d'abord, supposons qu'il existe $n \in \{x_-, x_-+1\}$ tel que $u(n) = 0$ ou $v(n) = 0$. Par exemple, supposons que $u(x_-) = 0$. Comme $x_0 < x_-$ et comme $u^2(x_0) + u^2(x_0 - 1) \neq 0$, u est un vecteur propre de H_ω^-. Si $v(x_-) = 0$, alors v est vecteur propre de H_ω^-.

Maintenant supposons qu'aucun des éléments $\{u(x_-), u(x_-+1), v(x_-), v(x_-+1)\}$ n'est égal à zéro. Nous pouvons sans perte de généralité supposer que $r_u(x_-) > r_v(x_-)$, quitte à permuter u et v. Nous calculons alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(x_-+1)}{v(x_-+1)} - \frac{u(x_-)}{v(x_-)}\right| &= \frac{|W(x_-+1)|}{|a(x_-+1)v(x_-+1)v(x_-)|}\\ &\geq \frac{|W(x_-+1)|}{|a(x_-+1)|r_v(x_-+1)r_v(x_-)}\\ &\geq \frac{|W(x_-+1)|}{|a(x_-+1)|r_v(x_-+1)r_u(x_-)}\\ &\geq \frac{|W(x_-+1)|}{|a(x_-+1)|Cr_v(x_-+1)r_u(x_-+1)}\\ &\geq \frac{|\sin(\delta\phi(x_-+1))|}{C} \geq \frac{1}{K} \geq 2\eta_0\end{aligned}$$

pour η_0 suffisamment petit. Nous pouvons donc supposer que $\left|\frac{u(x_-)}{v(x_-)} - \frac{r_u(x_0)}{r_v(x_0)}\right| \geq \eta_0$, quitte à remplacer x_- par $x_- + 1$.
Soit $\lambda_- = \frac{u(x_-)}{v(x_-)}$ et $w = u - \lambda_- v$, alors $w(0) = w(x_-) = 0$ et

$$\|(H_\omega^- - E)(w)\|_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} = \|Ew\|_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} \leq E \tag{2.2.7}$$

Par ailleurs, nous savons que $r_v(x_0) > \frac{\eta}{L}$ donc nous pouvons supposer que $v(x_0)^2 \geq \frac{\eta^2}{2L^2}$. Encore une fois, si ce n'est pas le cas, nous remplaçons x_0 par $x_0 - 1$. Nous calculons

$$\begin{aligned} w(x_0) &= r_u(x_0)\sin(\phi_u(x_0)) - \lambda_- r_v(x_0)\sin(\phi_v(x_0)) \\ &= [r_u(x_0) - \lambda_- r_v(x_0)]\sin(\phi_v(x_0)) + r_u(x_0)[\sin(\phi_u(x_0)) - \sin(\phi_v(x_0))] \\ &= \left[\frac{r_u(x_0)}{r_v(x_0)} - \lambda_-\right] v(x_0) + r_u(x_0)[\sin(\phi_u(x_0)) - \sin(\phi_v(x_0))] \end{aligned}$$

Or, comme u est de norme égale à un, nous avons

1. $r_u(x_0) \leq \sqrt{2}$
2. $|\sin(\phi_u(x_0)) - \sin(\phi_v(x_0))| \leq \delta\phi(x_0) \leq \frac{EL}{C\eta} \leq \frac{\eta^3}{L^3}$

donc $\|w\|_{\ell^2([\![1,x_-]\!])} \geq |w(x_0)| \geq \frac{\eta_0\eta}{\sqrt{2}L} - \frac{\eta^3}{L^3} \geq \frac{\eta_0\eta}{2L}$ pour $\frac{\eta}{L^2}$ suffisamment petit. Ainsi, comme H_ω^- est auto-adjoint, celui-ci a bien une valeur propre à une distance de E au plus égale à $\frac{EL}{\eta_0\eta}$. Ceci termine la preuve de la Proposition 2.18. □

Comme dans la section précédente, le Théorème 2.15 est maintenant une conséquence des Propositions 2.16 et 2.18, en prenant ϵ_0 suffisamment petit.

2.3 Preuve des estimations de Minami

Nous suivons dans cette section la preuve donnée dans [Klo14, Section 3], qui consiste à utiliser le Théorème 2.15 pour montrer les estimations de Minami. Plus précisément, nous allons prouver les théorèmes suivants, le Théorème 2.2 en découlant immédiatement.

Théorème 2.20. *Soit J un compact de $\mathcal{I}$ la région de localisation. Alors, pour tout $p > 0$, $\eta > 1, \beta > max(1 + 4s, \rho)$ et $m' > m$ (m et s sont définis dans (W)), il existe $L_{\eta,\beta,\rho',\rho} > 0$ et $C = C_{\eta,\beta,\rho'} > 0$ tel que, pour tout $E \in J$, $L \geq L_{\eta,\beta,\rho',\rho}$ et $\epsilon \in (0,1)$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C\Big[(\epsilon^s L l^\beta + e^{-sl/8})^2 e^{C\epsilon^s L l^{m'}} + L^{-p}\Big],$$

où $l := (\log L)^\eta$.

Théorème 2.21. *Soit J un compact de $\mathcal{I}$ la région de localisation. Alors, pour tout $\alpha \in (0,1)$, $\nu \in (0,\alpha)$, $\beta > 1 + 4s + \rho$ et $m' > m$ (m et s sont définis dans (W)), il existe $L_{\alpha,\beta,\rho',\rho} > 0$ et $C = C_{\alpha,\beta,\rho'} > 0$ tel que, pour tout $E \in J$, $L \geq L_{\alpha,\beta,\rho',\rho}$ et $\epsilon \in (0,1)$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C\Big[(\epsilon^s L l^\beta + e^{-sl/8})^2 e^{C\epsilon^s L l^{m'}} + e^{-L^\nu}\Big],$$

où $l := L^\alpha$.

Les Théorèmes 2.1, 2.5 et 2.3 sont des conséquences des Théorèmes 2.20 et 2.21. Par exemple, le Théorème 2.3 est une conséquence du Théorème 2.21, en prenant $\nu \in (\xi', \alpha)$. En effet, ce choix implique que $\epsilon \gtrsim L^{-k} \geq e^{-l^\nu}$ et que $\epsilon \geq e^{-l^\alpha}$.

Le reste de la section sera dédié à la preuve du Théorème 2.20, nous expliquerons très rapidement les outils à utiliser pour prouver le Théorème 2.21. Nous faisons cette preuve dans le cas continu, la preuve pour le cas discret étant la même, aux modifications évidentes dus au modèle près. Nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 2.22. *Soient J un intervalle compact et $E \in J$. Il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de J, $\inf p$ et $\|q\|_\infty$ dans le cas continu, $C = 3$ convient dans le cas discret), tel que, pour tout $\epsilon \in (0,1)$, nous avons*

$$tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \leq CL. \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Le résultat est évident dans le cas discret car la matrice $H_\omega(\Lambda_L)$ est de taille $2L+1$. Montrons le maintenant dans le cas continu.

Comme $H_\omega(\Lambda_L)u = -(p_\omega u')' + q_\omega u$ et que q_ω est bornée, il suffit de vérifier l'estimation pour l'opérateur $H^0_\omega(\Lambda_L)u = -(p_\omega u')'$. Or, comme $p_\omega \geq \inf p > 0$, nous avons, au sens des formes quadratiques, l'inégalité

$$H^0_\omega(\Lambda_L) \geq -\inf p \cdot \Delta_{|\Lambda_L}.$$

L'équation (2.3.1) est clairement vérifiée pour $-\Delta_{|\Lambda_L}$, c'est donc également le cas de $H^0_\omega(\Lambda_L)$ et donc de $H_\omega(\Lambda_L)$. □

Nous prouvons maintenant le Théorème 2.20. Tout d'abord, l'hypothèse de localisation implique que les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ sont proches des valeurs propres de ce même opérateur, restreint à des intervalles de plus petite taille. Nous rappelons que $\mathcal{U}_{\Lambda_L}$ est l'ensemble des ω tel que la conclusion de (Loc)(I) est satisfaite.

Lemme 2.23. *Pour tout $0 < p < 0$ et $\xi' < \xi < 1$, il existe $L_{p,\xi,\xi'} > 0$ tel que pour $l = (\log L)^{\frac{1}{\xi'}}$, $L \geq L_{p,\xi,\xi'}$, $\omega \in \mathcal{U}_{\Lambda_L}$ et $\gamma \in \Lambda_L$, si $H_\omega(\Lambda_L)$ possède k valeur propre dans $[E-\epsilon, E+\epsilon]$ avec centres de localisation dans $\Lambda_{\frac{4l}{3}}(\gamma)$, alors $H_\omega(\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma))$ possède k valeurs propres dans $[E-\epsilon-e^{-l^\xi/8}, E+\epsilon+e^{-l^\xi/8}]$.*

Démonstration. Commençons par prendre ϕ un vecteur propre associé à une valeur propre F dans $[E-\epsilon, E+\epsilon]$ et supposons que son centre de localisation soit dans $\Lambda_{\frac{4l}{3}}(\gamma)$. Choisissons χ une fonction infiniment dérivable, à dérivées première et seconde bornées par un, et vérifiant l'inégalité

$$\mathbf{1}_{\Lambda_{\frac{10l}{9}}(\gamma)} \leq \chi \leq \mathbf{1}_{\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma)}.$$

D'après la définition du centre de localisation, nous avons

$$\begin{aligned} H_\omega\left(\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma)\right)\chi\phi - E\chi\phi &= (p(\chi\phi)')' - E\chi\phi = (p\chi'\phi + p\chi\phi')' - E\chi\phi \\ &= \chi''(p\phi) + \chi'(p\phi)' + \chi'(p\phi') + \chi(p\phi')' - E\chi\phi \\ &= \chi''(p\phi) + \chi'[p\phi' + (p\phi)'] \end{aligned}$$

Or, χ' et donc χ'' ont leurs supports dans $\Gamma(\gamma) := \Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma) - \Lambda_{\frac{10l}{9}}(\gamma)$. Ainsi, d'après la première inégalité du Lemme A.1, comme p et p' sont bornées, nous avons pour L suffisamment grand,

$$\left\|H_\omega\left(\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma)\right)\chi\phi - E\chi\phi\right\| \leq C|\phi|_{L^2(\Gamma(\gamma))} \leq Ce^{2l^{\xi''}}e^{-(l/6)^\xi} \leq e^{-l^\xi/8} \tag{2.3.2}$$

Par ailleurs, si $(\phi_j)_{j\in[\![1,k]\!]}$ désignent les k valeurs propres de $H_\omega(\Lambda_L)$ de l'énoncé, il est aisé d'estimer la matrice de Gram

$$\begin{aligned}\left[\langle\chi\phi_j,\chi\phi_{j'}\rangle\right]_{(j,j')\in[\![1,k]\!]^2} &= \left[\langle\phi_j,\phi_{j'}\rangle\right]_{(j,j')\in[\![1,k]\!]^2} + O\left(k^2e^{-l^\xi/8}\right)\\ &= Id_k + O\left(L^2e^{-l^\xi/8}\right)\end{aligned}$$

car $k\le CL$ d'après le Lemme 2.22. Ceci termine la preuve du Lemme 2.23. □

Définissons alors les ensembles Ω^b et $\Omega^g := \mathcal{U}_{\Lambda_L}\ \Omega^b$ par

$$\Omega^b := \left\{\omega\in\mathcal{U}_{\Lambda_L};\ \begin{array}{c}\text{il existe deux centres de localisation de vecteurs propres}\\ \text{associés à des valeurs propres dans } [E-\epsilon,E+\epsilon]\\ \text{qui sont à distance au plus égale à } 4l \text{ l'un de l'autre}\end{array}\right\}.$$

Quand $\omega\in\Omega^g$, le Lemme 2.23 donne l'existence d'opérateurs $(H_\omega(\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma)))_\gamma$, définis sur des cubes plus petits, indépendants les uns des autres , dont les valeurs propres sont exponentiellement proches des valeurs propres de l'opérateur défini sur le grand cube. Aussi, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 2.24. *Soient $0<p$ et $0<\xi'<\xi<1$. Il existe $L_{p,\xi,\xi'}>0$ tel que, pour $l=(\log L)^{\frac{1}{\xi'}}$, $L\ge L_{p,\xi,\xi'}$ et $k\ge 2$, nous avons*

$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega^b; tr[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge k\}\big)\le\frac{L}{l}\mathbb{P}_{2,9l,l}(\epsilon)+e^{-sl^\xi/9}$$

et pour $k\le[L/(4l)]+1$,

$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega^g; tr[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge k\}\big)\le\binom{[L/m]}{k}\left(\mathbb{P}_{1,3l/2,4l/3}(\epsilon)+e^{-sl^\xi/8}\right)^k \tag{2.3.3}$$

où nous avons défini

$$\mathbb{P}_{k,l,l'}(\epsilon)=\sup_{\gamma\in l'\mathbb{Z}\cap[O,L]}\mathbb{P}\big(tr[\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_l(\gamma)))]\ge k\big).$$

Démonstration. Prenons k un entier au moins égal à deux. Nous commençons par analyser $\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega^b_{\xi',\xi''};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\varepsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge k\right\}\right)$. Comme,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega^b_{\xi',\xi''};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge k\right\}\right)\\ &\qquad\le\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega^b_{\xi',\xi''};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge 2\right\}\right).\end{aligned}$$

il suffit d'étudier le cas $k=2$.
Par définition de Ω^b et d'après le Lemme 2.23, nous avons

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega^b;\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))]\ge 2\right\}\right)\\ &\le\mathbb{P}\left(\left\{\exists\gamma\in l\mathbb{Z}\cap[0,L];\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon-e^{-\ell^\xi/8},E+\varepsilon+e^{-l^\xi/8}]}(H_\omega(\Lambda_{9l}(\gamma)))]\ge 2\right\}\right)\\ &\le\sum_{\gamma\in l\mathbb{Z}\cap[0,L]}\mathbb{P}\left(\left\{\mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon-e^{-l^\xi/8},E+\epsilon+e^{-l^\xi/8}]}(H_\omega(\Lambda_{9l}(\gamma)))]\ge 2\right\}\right)\\ &\le\frac{L}{l}\mathbb{P}_{2,9l,l}\left(\epsilon+e^{-l^\xi/8}\right)\le\frac{L}{l}\mathbb{P}_{2,9l,l}\left(\epsilon\right)+e^{-sl^\xi/9},\end{aligned}$$

pour L suffisamment grand, car $l = (\log L)^{1/\xi'}$ et $\xi > \xi'$. La dernière inégalité est prouvée en utilisant les estimations de Wegner (W). Ceci prouve la première inégalité du lemme.

Passons maintenant à l'analyse de $\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega^g_{\xi',\xi''};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\varepsilon,E+\varepsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k\right\}\right)$. Pour cela, nous prenons un recouvrement du cube Λ_L par des cubes $(\Lambda_{4\ell/3}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$. Plus précisément, $\Lambda_L = \cup_{\gamma\in\Gamma}\Lambda_{4l/3}(\gamma)$ de sorte que $[3L/(4l)] \leq \#\Gamma \leq [L/l]$. Supposons maintenant que $\omega \in \Omega^g$ vérifie $\mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\varepsilon,E+\varepsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k$. Les centres de localisation de n'importe quelle paire de vecteurs propres sont éloignés d'au moins $4l$. Ainsi, d'après le Lemme 2.23, il existe k points $(\gamma_j)_{1\leq j\leq k}$ dans Γ tels que

- pour tout $1 \leq j \leq k$, $H_\omega(\Lambda_{3\ell/2}(\gamma_j))$ possède une valeur propre et une seule dans $\left[E - \epsilon - e^{-\ell^\xi/8}, E + \epsilon + e^{-\ell^\xi/8}\right]$;
- pour tout $1 \leq j < j' \leq k$, $\mathrm{dist}(\Lambda_{3\ell/2}(\gamma_j), \Lambda_{3\ell/2}(\gamma_{j'})) > l/2$.

Ainsi, d'après (IAD), pour l suffisamment grand, les opérateurs $(H_\omega(\Lambda_{3\ell/2}(\gamma_j)))_{1\leq j\leq k}$ sont indépendants. Nous obtenons donc l'estimation suivante :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega^g_{\xi',\xi''};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k\right\}\right) \leq \binom{\#\Gamma}{k}\left(\mathbb{P}_{1,3\ell/2,4\ell/3}(\epsilon) + e^{-sl^\xi/8}\right)^k,$$

en utilisant de nouveau (W) dans la dernière inégalité. Comme $[3L/(4l)] \leq \#\Gamma \leq [L/\ell]$ et comme $k \leq [L/(4l)]$, nous avons terminé la preuve de la deuxième inégalité et donc celle du Lemme 2.24. □

Ce résultat implique le lemme suivant

Lemme 2.25. *Soit J un compact de $\mathcal{I}$, la région de localisation. Alors, pour tout $p > 0$, $\xi \in (0,1)$ et $\xi' \in (0,\xi)$, il existe $C = C_{\xi,\xi'} > 0$ et $L_{\xi,\xi'} > 0$ tels que, pour $E \in J, L \geq L_{\xi,\xi'}$ et $\epsilon \in (0,1)$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2}\mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq L^{-p} + \frac{L^2}{l}\mathbb{P}_{2,9l,l}(\epsilon) + \left(\frac{L}{l}\right)^2\left(\mathbb{P}_{1,3l/2,4l/3}(\epsilon) + e^{-sl^\xi/8}\right)^2 e^{L\mathbb{P}_{1,3l/2,4l/3}(\epsilon)/l} \quad (2.3.4)$$

où $l = (\log L)^{1/\xi'}$.

Démonstration. D'après le Lemme 2.22, notamment l'équation (2.3.1), si $\mathcal{U}^q_{\Lambda_L}$ est l'ensemble des configurations donné par (Loc)(I) avec $q := p + 1$, nous obtenons pour L suffisamment grand,

$$\sum_{k\geq 2}\mathbb{P}\left(\left\{\omega \notin \mathcal{U}^q_{\Lambda_L};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\varepsilon,E+\varepsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k\right\}\right) \leq CLL^{-q} \leq L^{-p}. \quad (2.3.5)$$

Analysons maintenant $\mathbb{P}(\left\{\omega \in \mathcal{U}^q_{\Lambda_L};\ \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k\right\})$. Sommons les équations

données par le Lemme 2.24 pour $k \geq 2$. Nous obtenons alors, pour un certain $C > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\sum_{k\geq 2}\mathbb{P}\left(\omega \in \mathcal{U}^q_{\Lambda_L}; \mathrm{tr}[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k\right) \\
&\leq \left(\frac{L}{l}\right)^2 \left(\mathbb{P}_{1,3l/2,4l/3}(\epsilon) + e^{-sl^\xi/8}\right)^2 \left(1 + \mathbb{P}_{1,3\ell/2,4\ell/3}(\epsilon) + e^{-sl^\xi/8}\right)^{L/\ell} \\
&\qquad\qquad + e^{-s\ell^\xi/9} + \frac{L^2}{\ell}\mathbb{P}_{2,9\ell,\ell}(\epsilon) \\
&\leq C\left(\left(\frac{L}{\ell}\right)^2 \left(\mathbb{P}_{1,3\ell/2,4\ell/3}(\epsilon) + e^{-sl^\xi/8}\right)^2 e^{L\,\mathbb{P}_{1,3\ell/2,4\ell/3}(\epsilon)/\ell}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + e^{-s\ell^\xi/9} + \frac{L^2}{\ell}\mathbb{P}_{2,9\ell,\ell}(\epsilon)\right).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'inégalité suivante : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $m \leq n$ des entiers naturels,

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \leq \binom{n}{m}x^m(x+y)^{n-m}. \tag{2.3.6}$$

□

Nous appliquons maintenant le Théorème 2.6 pour évaluer le terme $\mathbb{P}_{2,9l,l}(\epsilon)$ et les estimations de Wegner pour évaluer le terme $\mathbb{P}_{1,3l/2,4l/3}(\epsilon)$. Le Théorème 2.20 est alors une conséquence du Théorème 2.25. Quant au Théorème 2.21, il est conséquence du même raisonnement qu'au dessus et du lemme suivant, qui se prouve comme le Lemme 2.23, en utilisant (Loc)(II) au lieu de (Loc)(I) :

Lemme 2.26. *Soit J un compact de $\mathcal{I}$, la région de localisation. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, $\xi \in (0,1)$ et $\nu \in (0, \alpha\xi)$, il existe $L_{\nu,\xi,\alpha} > 0$ tel que pour $l = L^\alpha$, $L \geq L_{\alpha,\xi,\xi'}$, $\omega \in \mathcal{V}_{\Lambda_L}$ et $\gamma \in \Lambda_L$, si $H_\omega(\Lambda_L)$ possède k valeurs propres dans $[E-\epsilon, E+\epsilon] \subset J$ avec centres de localisation dans $\Lambda_{\frac{4l}{3}}(\gamma)$, alors $H_\omega(\Lambda_{\frac{3l}{2}}(\gamma))$ possède k valeurs propres dans $[E-\epsilon-e^{-l^\xi/8}, E+\epsilon+e^{-l^\xi/8}]$.*

Chapitre 3

Estimations de décorrélation pour des valeurs propres éloignées

Dans ce chapitre, nous allons établir les estimations de décorrélation pour des valeurs propres éloignées d'opérateurs de Schrödinger aléatoires. Rappelons que le chapitre précédent, dédié aux estimations de Minami, traitait le cas de valeurs propres proches. La preuve consiste à montrer que pour tout couple de valeurs propres, il existe un couple de variables aléatoires tel que, conditionné aux autres variables aléatoires, le couple de valeurs propres est l'image d'un difféomorphisme local (dont le Jacobien est contrôlé) du couple de variables aléatoires. Dans cette optique, nous étudierons les gradients de ces valeurs propres et nous serons amené à étudier la condition de colinéarité de ces gradients. En particulier, nous montrerons que la probabilité que deux gradients soit presque colinéaires est faible. Ainsi, avec grande probabilité, les paires de valeurs propres se déplaceront en fonction de deux variables aléatoires indépendantes. Les estimations de Minami permettront d'estimer la taille de cylindre, dans l'espace des variables, sur lesquels ces valeurs propres s'éloignent des valeurs prises aux points proches du centre du cylindre. Les gradients des valeurs propres dépendent évidemment du modèle considéré ; la preuve sera donc faite séparément pour chacun des modèles présentés dans le premier chapitre.

Nous découpons ce chapitre en six sections. Nous montrerons d'abord des estimations de décorrélation générales dont les estimations pour chaque modèle découleront, à l'exception du modèle des sauts, qui nécessite une adaptation. En particulier, les estimations de décorrélation pour les graphes quantiques unidimensionnels seront des applications directes des résultats de cette première partie. Dans la seconde section, nous établirons les estimations de décorrélation pour le modèles des sauts. Les trois sections suivantes seront respectivement dédiées aux preuves des estimations de décorrélation pour les modèles discrets de type alliage avec potentiel de simple-site exponentiellement décroissant, les modèles continus et les modèles de type multimère. La preuve de ces estimations pour les modèles discrets de type alliage avec potentiel de simple à support compact ne sera pas donnée car elle est la même que celle donnée pour les modèles continus, aux détails près dus à la structure discrète et en utilisant les résultats de l'Annexe B au lieu des résultats de l'Annexe A. Enfin, dans une dernière section, nous faisons un calcul des dérivées premières et secondes des valeurs propres, valable pour tous les modèles considérés et utilisé dans chacune des preuves. Les preuves de ces résultats sont extraites de [Klo11, Shi13, Shi14].

3.1 Estimations de décorrélation générales

Dans cette section, nous allons établir des estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées dont découleront les estimations de décorrélation pour les opérateurs de Schrödinger discrets, à l'exception du modèle des sauts, mais également pour les graphes quantiques unidimensionnels. Nous construisons donc un cadre général, qui englobe ces différents cas. Notons toutefois que ce cheminement de la preuve sera aussi largement utilisé pour les modèles continus. Tous ces modèles peuvent être vus comme des fonctions des variables aléatoires $(\omega_n)_n$ ou des variables aléatoires $(b_n)_n$ pour le modèle des sauts. L'étude que nous faisons se base sur la dépendance des modèles en ces variables aléatoires. Nous utiliserons les définitions et notations suivantes, permettant de couvrir plusieurs cas.

Prenons deux fonctions $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $E \in \mathbb{R}$, notons $\lambda_E = \lambda(E)$ et $\mu_E = \mu(E)$, puis définissons $\sigma := \{E \in \mathbb{R}, \lambda_E \neq 0\}$. Pour tout $E \neq E'$, définissons $d := \lambda_E + \lambda_{E'}$, $e := \lambda_E - \lambda_{E'}$ et $c := \mu_E - \mu_{E'}$. Enfin, pour $E \in \sigma$, définissons le potentiel dépendant de l'énergie $V_\omega(E) := \dfrac{1}{\lambda_E}(V_\omega - \mu_E)$. Le potentiel V_ω peut être de type alliage ou prendre des valeurs indépendantes identiquement distribuées. Dans les estimations de Wegner (W) nous supposerons que nous avons $s = 1$, pour simplifier la démonstration. Les résultats de cette section nécessiteront l'hypothèse suivante : $(E, E') \in \sigma^2$ doivent vérifier qu'au moins deux nombres parmi d, e et c sont non nuls. Remarquons que si $\lambda_E = 1$ et $\mu_E = E$ nous avons $\sigma = \mathbb{R}$ et $V_\omega(E) = V_\omega - E$. Dans ce cas, nous avons toujours $d = 2, e = 0$ et $c \neq 0$.

Dans la preuve, la suite $b(n) := (b_\omega(n))$ est supposée déterministe de sorte que l'opérateur Δ_b l'est également. Le résultat quand la suite $(b_\omega(n))_n$ est indépendante de la suite $(\omega_n)_n$ en découle immédiatement. Le cheminement de la preuve des estimations de décorrélation est tiré de [Klo11]. Nous utiliserons les estimations de Minami prouvées dans le chapitre précédent, notamment le Théorème 2.5. Dans le cas où les variables aléatoires $(V_\omega(n))_n$ sont indépendantes (c'est le cas du modèle d'Anderson étudié dans [Klo11]) nous pouvons à la place utiliser les estimations de Minami suivantes ([CGK09]) qui sont plus précises que celles prouvées dans le chapitre précédant.

Théorème 3.1 (M). *Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Pour tout $E \in \sigma$, il existe $C > 0$ tel que pour tous $I \subset J \subset K$, nous avons*

$$\mathbb{E}\big(tr\,\mathbf{1}_I(-\Delta_b + V_\omega(E))_{\Lambda_l}(tr\,\mathbf{1}_J(-\Delta_b + V_\omega(E))_{\Lambda_L} - 1)\big) \leq C|I||J||\Lambda|^2. \tag{3.1.1}$$

La constante $C := C_E$ dépend de λ_E et μ_E et est uniforme sur tout intervalle compact tel que $|\lambda_E|$ est éloigné de zéro et μ_E est borné.

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.2 (D). *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et tout $(E, E') \in \sigma^2$ tels que au moins deux nombres parmi d, e et c sont non nuls, pour tout $k > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour L suffisamment grand et tout l vérifiant $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[-L^{-1},+L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E))|_{\Lambda_l} \neq 0, \\ tr\,\mathbf{1}_{[-L^{-1},+L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E'))|_{\Lambda_l} \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right)e^{(\log L)^\beta}.$$

En particulier, le Théorème 3.2 prouve les estimations de décorrélation pour le modèle de type alliage. Il suffit de choisir $\lambda_E = 1$ et $\mu_E = E$ de sorte que $-\Delta_b + V_\omega(E) = -\Delta_b + V_\omega - E$. Nous supposerons à un moment dans cette preuve que les variables aléatoires sont i.i.d, il s'agit juste de montrer que dans ce cas, la preuve se conclut rapidement. Tous les autres résultats seront, soit valables dans tous les cas, soit prouvés dans une partie

dédiée. Ainsi, dans la présente partie, le Théorème 3.2 ne sera prouvé entièrement que pour des variables i.i.d. Nous montrerons, par exemple, dans la troisième section, comment modifier la preuve pour obtenir les estimations pour le modèle de type alliage.

D'après les estimations de Minami données dans le Corollaire 2.5 (ou bien (M) ci dessus dans la cas de variables i.i.d), comme $(\log L)^C < e^{(\log L)^\beta}$, le Théorème 3.2 est une conséquence immédiate du théorème suivant, qu'il reste à prouver.

Théorème 3.3. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour tout $\alpha \in (0,1)$ et tout $(E, E') \in \sigma^2$ tels que au moins deux nombres parmi d, e et c sont non nuls, pour tout $k > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour L suffisamment grand et tout l vérifiant $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}_0 := \mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[-L^{-1},+L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E))|_{\Lambda_l} = 1, \\ tr\,\mathbf{1}_{[-L^{-1},+L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E'))|_{\Lambda_l} = 1 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right) e^{(\log L)^\beta}.$$

Maintenant, nous allons utiliser (Loc)(I) et montrer que le Théorème 3.3 se déduit du

Théorème 3.4. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour tout $\alpha \in (0,1)$ et tout $(E, E') \in \sigma^2$ tels que au moins deux nombres parmi d, e et c sont non nuls, pour tout $k > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $\xi' \in (0, \xi)$ (ξ est défini dans (Loc)(I)), L suffisamment grand et $\tilde{l} = (\log L)^{1/\xi'}$, nous avons*

$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[-2L^{-1},+2L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E))|_{\Lambda_{\tilde{l}}} = 1, \\ tr\,\mathbf{1}_{[-2L^{-1},+2L^{-1}]}(-\Delta_b + V_\omega(E'))|_{\Lambda_{\tilde{l}}} = 1 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{\tilde{l}^2}{L^{4/3}}\right) e^{\tilde{l}^{\beta'}}.$$

Preuve du Théorème 3.3 en utilisant le Théorème 3.4.
Définissons $H_\omega^E(\Lambda_l) := (\Delta_b + V_\omega(E))_{\Lambda_l}$, $H_\omega^{E'}(\Lambda_l) := (\Delta_b + V_\omega(E'))_{\Lambda_l}$ et $\tilde{J}_L = [-2L^{-1}, 2L^{-1}]$. Supposons que les deux opérateurs ont une valeur propre dans $[-L^{-1}, L^{-1}]$. Pour ω dans $\mathcal{U}_{\Lambda_L}$ (cf (Loc)(I)), nous associons à chaque valeur propre un centre de localisation. D'après le Lemme 2.23 avec $p = 2$, selon que ces centres de localisation sont éloignés d'au moins ou d'au plus $3\tilde{l}$, soit il existe $\gamma \neq \gamma'$ tel que $\mathrm{dist}(\gamma + \Lambda_{\tilde{l}}; \gamma' + \Lambda_{\tilde{l}}) \geq \tilde{l}$ avec

1. $H_\omega^E(\gamma + \Lambda_{\tilde{l}})$ a exactement une valeur propre dans $\tilde{J}_L$,
2. $H_\omega^{E'}(\gamma' + \Lambda_{\tilde{l}})$ a exactement une valeur propre dans $\tilde{J}_L$,

soit il existe γ_0 tel que $H_\omega^E(\gamma_0 + \Lambda_{5\tilde{l}})$ et $H_\omega^{E'}(\gamma_0 + \Lambda_{5\tilde{l}})$ ont exactement une valeur propre dans $\tilde{J}_l$. La preuve de ce fait est analogue à celle donnée dans le Lemme 2.23. D'après (IAD) et (W), nous calculons alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0 \leq L^{-2} + C(l/\tilde{l})\mathbb{P}\left(\begin{Bmatrix} \sigma(H_\omega^E(\Lambda_{5\tilde{l}}(\gamma_0) \cap \tilde{J}_L \neq \emptyset \\ \sigma(H_\omega^{E'}(\Lambda_{5\tilde{l}}(\gamma_0) \cap \tilde{J}_L \neq \emptyset \end{Bmatrix}\right) \\ + C(l/\tilde{l})^2\mathbb{P}(\sigma(H_\omega^E(\Lambda_{\tilde{l}}(\gamma) \cap \tilde{J}_L \neq \emptyset)\mathbb{P}(\sigma(H_\omega^{E'}(\Lambda_{\tilde{l}}(\gamma') \cap \tilde{J}_L \neq \emptyset) \\ \leq L^{-2} + C(l/\tilde{l})^2(\tilde{l}^\rho/L)^2 + C(l/\tilde{l})\mathbb{P}_1 \leq c(l/L)^2\tilde{l}^{2(\rho-1)} + C(l/\tilde{l})\mathbb{P}_1.\end{aligned}$$

Maintenant, prenons ξ et ξ' suffisamment proche de 1 et nous obtenons le Théorème 3.3 avec $\beta = \dfrac{\beta'}{\xi} \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. □

Le reste de la section est dédié à la preuve du Théorème 3.4. Fixons donc (E, E') vérifiant les hypothèses du Théorème 3.4. Nous écrirons à présent $H_\omega(\Lambda_l, E) := (-\Delta_b + V_\omega(E))|_{\Lambda_{\tilde{l}}}$ et $J_L = [-L^{-1}, L^{-1}]$. Pour $\epsilon \in (2L^{-1}, 1)$, pour un certain $\kappa > 2$, d'après le

Théorème 2.21 quand un des deux opérateurs $H_\omega(\Lambda_l, E)$ et $H_\omega(\Lambda_l, E')$ a deux valeurs propres dans $[-\epsilon, +\epsilon]$, nous avons

$$\mathbb{P}_1 \leq C\epsilon^2 l^\kappa + \mathbb{P}_\epsilon \leq C\epsilon^2 l^2 e^{l^\beta} + \mathbb{P}_\epsilon \tag{3.1.2}$$

où nous avons défini

$$\mathbb{P}_\epsilon = \mathbb{P}(\Omega_0(\epsilon)) \tag{3.1.3}$$

et

$$\Omega_0(\epsilon) = \left\{ \omega; \begin{array}{c} \sigma(H_\omega(\Lambda_l, E)) \cap J_L = \{E(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l, E)) \cap (-\epsilon, +\epsilon) = \{E(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l, E')) \cap J_L = \{E'(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l, E')) \cap (-\epsilon, +\epsilon) = \{E'(\omega)\} \end{array} \right\}.$$

Pour analyser $\mathbb{P}_\epsilon$ nous utiliserons les propriétés et définitions suivantes. D'après les estimations de Minami (ou les simples conditions aux bords de Dirichlet comme nous travaillons en dimension un) les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda_L)$ sont presque surement simples. Nous nous restreignons donc aux valeurs de ω vérifiant cette propriété. Or, quand la valeur propre est simple, nous savons, d'après la théorie des perturbations, que celle-ci est localement analytique réelle. Ceci permet la définition suivante. Pour tout $(\gamma, \gamma') \in \Lambda_L^2$, soit $J_{\gamma,\gamma'}(E(\omega), E'(\omega))$ le Jacobien de l'application $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \mapsto (E(\omega), E'(\omega))$:

$$J_{\gamma,\gamma'}(E(\omega), E'(\omega)) = \left| \begin{pmatrix} \partial_{\omega_\gamma} E(\omega) & \partial_{\omega_{\gamma'}} E(\omega) \\ \partial_{\omega_\gamma} E'(\omega) & \partial_{\omega_{\gamma'}} E'(\omega) \end{pmatrix} \right| \tag{3.1.4}$$

et définissons

$$\Omega_{0,\beta}^{\gamma,\gamma'}(\epsilon) = \Omega_0(\epsilon) \cap \{\omega; |J_{\gamma,\gamma'}(E(\omega), E'(\omega))| \geq \lambda\}.$$

Quand un de ces jacobiens est suffisamment grand, les valeurs propres bougent quand nous faisons varier les deux variables aléatoires indépendantes $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'})$. Ainsi, la probabilité que le couple de valeur propre reste dans un petit carré est faible. Nous divisons donc la preuve en deux parties, selon la taille des jacobiens. Le lemme suivant montre que si tous les jacobiens sont petits, les gradients des valeurs propres doivent être presque colinéaires. Ce lemme devra être généralisé dans la partie traitant des estimations de décorrélation pour le modèle des sauts, mais est suffisant dans le cas présent.

Lemme 3.5. *Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}$ tel que $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$. Alors*

$$\max_{j \neq k} \left| \begin{pmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{pmatrix} \right|^2 \geq \frac{1}{4n^5} \|u - v\|_1^2.$$

Démonstration. Soient $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^{2n}$ tels que $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$. Le problème étant symétrique en u et v, quitte à les échanger, nous pouvons supposer que $\|v\|_2 \geq \|u\|_2$. Écrivons alors $u = \alpha v + v^\perp$ où $\langle v, v^\perp \rangle = 0$. Les coefficients de u et v sont tous positifs, donc l'assertion $v^\perp = 0$ est équivalente à l'assertion $u = v$. Supposons que $u \neq v$, ce qui est équivalent à supposer que $v^\perp \neq 0$. Nous calculons alors

$$\|u\|_2^2 = \alpha^2 \|v\|_2^2 + \|v^\perp\|_2^2 \text{ et } \|u - v\|_2^2 = (\alpha - 1)^2 \|v\|_2^2 + \|v^\perp\|_2^2. \tag{3.1.5}$$

Comme tous les coefficients de u et de v sont positifs, le nombre $\alpha = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|_2^2} \right\rangle$ est strictement positif. La première équation dans (3.1.5) et l'hypothèse $\|v\|_2 \geq \|u\|_2$ nous disent maintenant que $\alpha \in (0, 1)$. Ainsi, comme $u = \alpha v + v^\perp$ et $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$, nous obtenons

$$0 < 1 - \alpha \leq \|u - \alpha v\|_1 = \|v^\perp\|_1.$$

Ainsi, d'après la deuxième équation dans (3.1.5) et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|u-v\|_1 \leq \|u-v\|_2 \leq \|v\|_2\|v^\perp\|_1 + \|v^\perp\|_2 \leq 2\sqrt{n}\|v^\perp\|_2. \tag{3.1.6}$$

Maintenant, pour tout couple (j,k), nous avons

$$\begin{vmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_j^\perp & v_k^\perp \\ v_j & v_k \end{vmatrix}.$$

Nous calculons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\begin{vmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix}^2 &= \sum_{j,k}\left((v_jv_k^\perp)^2 + (v_kv_j^\perp)^2 - 2v_jv_k^\perp v_kv_j^\perp\right) \\
&= 2\left(\sum_j v_j^2\right)\left(\sum_k (v_k^\perp)^2\right) - 2\left(\sum_j v_jv_j^\perp\right)\left(\sum_k v_kv_k^\perp\right) \\
&= 2\|v\|_2^2\|v^\perp\|_2^2 \geq \frac{1}{2n^3}\|u-v\|_1^2.
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\max_{j\neq k}\begin{vmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix}^2 \geq \frac{1}{4n^5}\|u-v\|_1^2$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.5.

□

Ainsi, soit l'un des jacobiens n'est pas petit, soit les gradients de E et E' sont presque colinéaires. Nous allons montrer que la probabilité que le deuxième cas arrive est faible, mais tout d'abord nous montrons qu'un vecteur propre normalisé a un grand nombre de sites où ses composantes ne sont pas petites.

Lemme 3.6. *Il existe $c>0$ tel que, si u est un vecteur propre normalisé de $(-\Delta_a + V_\omega(E))|_{\Lambda_l}$, il existe $n_0 \in \Lambda_l$ tel que pour tout $m \in I := [n_0 - cl^\beta, n_0 + cl^\beta] \cap \mathbb{Z}$ soit $|u(m)| \geq e^{-l^\beta}$ soit $|u(m+1)| \geq e^{-l^\beta}$.*

Démonstration. Le potentiel V_ω est presque surement borné. Ainsi, le Lemme 3.6 est une conséquence immédiate de la croissance exponentielle donnée par le Lemme B.1, en choisissant n_0 de sorte que $|u(n_0)|^2 \geq \frac{1}{l}$. □

Notons que n_0 est aléatoire, et les points dans I vérifiant $|u(\cdot)| \geq e^{-l^\beta}$ sont également aléatoires, mais que le nombre de choix possibles est inférieure à 2^l (cardinal de l'ensemble des sous-parties de $[\![1,l]\!]$). La condition de non colinéarité énoncée précédemment est le résultat suivant.

Lemme 3.7. *Soient $E, E' \in \sigma^2$ tels que au moins deux nombres parmi d, e et c sont non nuls et $\beta > 1/2$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité que $(-\Delta_b + V_\omega(E))_{\Lambda_l}$ et $(-\Delta_b + V_\omega(E'))_{\Lambda_l}$ aient chacun au moins une valeur propre, notées $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$, dans $[-e^{-l^\beta}, e^{-l^\beta}]$ et qu'en plus*

$$\left\|\frac{\nabla_\omega(E_j(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_j(\omega))\|_1} \pm \frac{\nabla_\omega(E_k(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_k(\omega))\|_1}\right\|_1 \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.1.7}$$

Il existe $c>0$ tel que

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}} \tag{3.1.8}$$

Démonstration. La preuve suit celle du [Klo11, Lemme 2.4], en tenant compte de la dépendance en énergie du potentiel. Rappelons que nous ne faisons la preuve que dans le cas où $V_\omega(n) = \omega_n$, les modifications pour les potentiels de type alliage étant faites dans la troisième partie. Soit ϕ_j un vecteur propre normalisé associé à E_j. D'après la Proposition 3.44, nous avons

$$\begin{aligned}\partial_{\omega_n} E_j(\omega) &= \langle (\partial_{\omega_n} H_\omega)\, \phi_j, \phi_j \rangle \\ &= \langle \lambda_E \phi_j(n) e_n, \phi_j \rangle = \lambda_E \phi_j^2(n)\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\nabla_\omega(E_j(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_j(\omega))\|_1}(n) = \dfrac{\lambda_E}{|\lambda_E|}\phi_j(n)^2 = \pm\phi_j(n)^2$. Nous déduisons alors l'existence de $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ et $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = [\![1, l]\!]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathcal{P}, |\phi_j(n) - \phi_k(n)| &\leq e^{-l^\beta/2}\ , \\ \forall n \in \mathcal{Q}, |\phi_j(n) + \phi_k(n)| &\leq e^{-l^\beta/2}\ .\end{aligned}$$

Soit P (respectivement Q) le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{P})$ (respectivement sur $\ell^2(\mathcal{Q})$) dans $\ell^2([\![1, l]\!])$. Ainsi, les équations aux valeurs propres se réécrivent

$$\begin{aligned}(\lambda_E \Delta_b + \mu_E + V_\omega)(Pu + Qu) &= h_E\ , \\ (\lambda_{E'} \Delta_b + \mu_{E'} + V_\omega)(Pu - Qu) &= h_{E'}\ .\end{aligned}$$

où $|h_E| + |h_{E'}| \leq Ce^{-l^\beta}$ et nous écrivons u au lieu de ϕ_j. Nous multiplions alors les équations par P et Q, les sommons et les soustrayons pour obtenir

$$\begin{aligned}&(\lambda_E + \lambda_{E'})\Delta_b Pu + (\lambda_E - \lambda_{E'})\Delta_b Qu \\ &\qquad + (\mu_E + \mu'_E)Pu + (\mu_E - \mu'_E)Qu + 2V_\omega Pu = h_E + h_{E'}\ , \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

puis

$$\begin{aligned}&(\lambda_E - \lambda_{E'})\Delta_b Pu + (\lambda_E + \lambda_{E'})\Delta_b Qu + \\ &\qquad (\mu_E - \mu'_E)Pu + (\mu_E + \mu'_E)Qu + 2V_\omega Qu = h_E - h_{E'}\ . \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Comme $PV_\omega Q = QV_\omega P = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}&(\lambda_E + \lambda_{E'})(Q\Delta_b P + P\Delta_b Q)u \\ &\qquad + (\lambda_E - \lambda_{E'})(Q\Delta_b Q + P\Delta_b P)u + (\mu_E - \mu'_E)u = h_{E,E'}\ . \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Nous rappelons que si l'un des trois réels $e := (\lambda_E - \lambda_{E'})$, $c := \mu_E - \mu'_E$, $d := (\lambda_E + \lambda_{E'})$ est nul, les deux autres ne le sont pas. Nous utiliserons le lemme suivant, dont la preuve sera donnée dans l'avant-dernière section du chapitre.

Lemme 3.8. *Il existe $(\mathcal{C}_k)_k$ des sous-intervalles disjoints de $[\![1, N]\!]$, tels que, si C_k désigne le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{C}_k)$, alors nous avons*

$$P\Delta_b^N Q + Q\Delta_b^N P = \sum_k C_k \Delta_b^N C_k. \tag{3.1.12}$$

Comme nous avons également

$$P\Delta_b P + Q\Delta_b Q + P\Delta_b Q + Q\Delta_b P = \Delta_b,$$

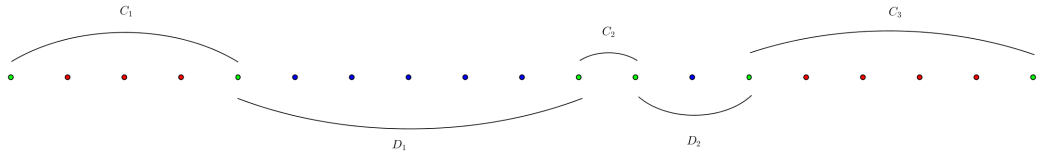

Figure 3.1 – Exemple de décomposition $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$

si $\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_k$, alors $P\Delta_a P + Q\Delta_a Q = \sum_k D_k \Delta_b D_k$ où $\mathcal{D} = \cup_k \mathcal{D}_k = [\![1, \dots, l]\!] - \cup_k \mathring{\mathcal{C}}_k$ et où D_k est le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{D}_k)$. Ainsi $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont des rôles symétriques dans l'équation. Nous illustrons cette construction sur la Figure 3.1. L'équation (3.1.11) est équivalente à l'équation suivante :

$$(e\Delta_b + 2\lambda'_E \sum_k C_k \Delta_a C_k + c)u = h. \tag{3.1.13}$$

Si $n \notin \mathcal{C}$, alors

$$e\Big(b(n+1)u(n+1) + b(n)u(n-1)\Big) + cu(n) = h(n), \tag{3.1.14}$$

donc si $e = 0$, alors $c \neq 0$ et $|u(n)| \lesssim e^{-l^\beta}$. Supposons que $e = 0$. Nous déduisons alors du Lemme 3.6 que $\mathcal{C}^c$ ne peut pas avoir deux points consécutifs dans I (celui-ci est défini dans le Lemme 3.6) et de même pour $\mathcal{D}^c$ si $d = 0$. Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer

$$d \neq 0 \text{ et } \sharp(\mathcal{C} \cap I) \geq \sharp I/2\,.$$

Si $n \in \mathring{C}_l$, alors

$$d\Big(b(n+1)u(n+1) + b(n)u(n-1)\Big) + cu(n) = h(n). \tag{3.1.15}$$

Si $C_l = \{n_-, \dots, n_+\}$, alors

$$eb(n_+ + 1)u(n_+ + 1) + db(n_+)u(n_+ - 1) + cu(n) = h(n), \tag{3.1.16}$$
$$db(n_- + 1)u(n_- + 1) + eb(n_-)u(n_- - 1) + cu(n) = h(n). \tag{3.1.17}$$

Maintenant, nous montrons que cela impose des restrictions sur les variables aléatoires $(\omega_n)_n$. En effet, nous savons que l'équation vérifiée par u est

$$\lambda_E\Big(b(n+1)u(n+1) + b(n)u(n-1)\Big) + (\mu_E + \omega_n)u(n) = h_E(n). \tag{3.1.18}$$

Nous combinons alors cette équation avec (3.1.15) et obtenons

$$\forall n \in \mathring{\mathcal{C}}_k,\ \left|\mu_E + \omega_n - \lambda_E \frac{c}{d}\right| |u(n)| \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.1.19}$$

Donc si $|u(n)| \geq e^{-l^\beta/2}$ nous obtenons

$$\left|\mu_E + \omega_n + \lambda_E \frac{c}{d}\right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.1.20}$$

Supposons que $\mathcal{C}_k \subset I$. Si $|\mathcal{C}_k| = n_k$ il existe alors au moins $\left\lfloor \frac{n_k}{2} - 1 \right\rfloor$ sites dans $\mathring{\mathcal{C}}_k$ où les composantes de u ne sont pas petites. Il nous reste donc à étudier les cas $n_k = 2$ et $n_k = 3$. Supposons que $b \neq 0$. Nous combinons (3.1.16) et (3.1.18) pour obtenir

$$\left|\lambda_E \left(1 - \frac{d}{e}\right) b(n_+)u(n_+ - 1) + \left(\mu_E + \omega_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{e}\right) u(n_+)\right| \leq Ce^{-l^\beta}, \tag{3.1.21}$$

$$\left|\lambda_E \left(1 - \frac{d}{e}\right) b(n_- + 1)u(n_- + 1) + \left(\mu_E + \omega_{n_-} - \lambda_E \frac{c}{e}\right) u(n_-)\right| \leq Ce^{-l^\beta}. \tag{3.1.22}$$

Quand $n_k = 2$, nous avons

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu_E + \omega_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{e} & \lambda_E \left(1 - \frac{d}{e}\right) b(n_+) \\ \lambda_E \left(1 - \frac{d}{b}\right) b(n_+) & \mu_E + \omega_{n_-} - \lambda_E \frac{c}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n_+) \\ u(n_-) \end{pmatrix} \right\| \leq Ce^{-l^\beta}.$$

Comme $\left\| \begin{pmatrix} u(n_-) \\ u(n_+) \end{pmatrix} \right\| \geq Ce^{-l^\beta/2}$, nous avons

$$\left| \left(\mu_E + \omega_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{e}\right) \left(\mu_E + \omega_{n_-} - \lambda_E \frac{c}{b}\right) - \lambda_E^2 \left(1 - \frac{d}{b}\right)^2 a(n_+)^2 \right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.1.23}$$

Si $n_k = 3$, nous avons $\mathcal{C}_k := \{n_-, n, n_+\}$ et

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu_E + \omega_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{b} & \lambda_E \left(1 - \frac{d}{e}\right) b(n_+) & 0 \\ 0 & \mu_E + \omega_n - \lambda_E \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & \lambda_E \left(1 - \frac{a}{b}\right) b(n) & \mu_E + \omega_{n_-} - \lambda_E \frac{c}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n_+) \\ u(n) \\ u(n_-) \end{pmatrix} \right\| \leq Ce^{-l^\beta}.$$

Si $|u(n)| \geq e^{-l^\beta/2}$, alors

$$\left|\mu_E + \omega_n - \lambda_E \frac{c}{d}\right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.1.24}$$

Si $|u(n)| \leq e^{-l^\beta/2}$ alors $|u(n_+)| \geq e^{-l^\beta/2}$ et

$$|\mu_E + \omega_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{e}| \leq Ce^{-l^\beta/2}. \tag{3.1.25}$$

Maintenant, supposons que $e = 0$. Si il y a un espace entre $\mathcal{C}_k$ et les deux intervalles $\{\mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{C}_{k-1}\}$, nous savons que $|u(n_+ + 1)| \leq e^{-l^\beta}$ et $|u(n_- - 1)| \leq Ce^{-l^\beta}$. Donc les conditions quand $n_k \in \{2, 3\}$ sont

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu_E + \omega_{n_+} & \lambda_E b(n_+) \\ \lambda_E b(n_+) & \mu_E + \omega_{n_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n_+) \\ u(n_-) \end{pmatrix} \right\| \leq e^{-l^\beta} \text{ si } n_k = 2$$

et

$$\left\| \begin{pmatrix} \mu_E + \omega_{n_+} & \lambda_E b(n_+) & 0 \\ 0 & \mu_E + \omega_n - \lambda_E \frac{c}{a} & 0 \\ 0 & \lambda_E b(n) & \mu_E + \omega_{n_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n_+) \\ u(n) \\ u(n_-) \end{pmatrix} \right\| \leq Ce^{-l^\beta} \text{ si } n_k = 3.$$

Dans les deux cas nous obtenons une condition sur les $(\omega_n)_n$ similaire à (3.1.20) et (3.1.23).

Si C_k est adjacent à C_{k+1}, il existe un intervalle $\mathcal{D}_{k_0}$ dans $\mathcal{D}$ de longueur deux (celui qui fait la jonction entre $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$) et nous avons de nouveau une condition sur les $(\omega_n)_n$ similaire à (3.1.23), mais où d et e sont échangés (rappelons que nous avons supposé $d \neq 0$). Pour résumer, si $C_l \subset I$, quand $n_k \geq 4$ nous avons au moins $\lfloor (n_k - 2)/2 \rfloor$ conditions du type (3.1.20) et si $n_k = 2$ ou $n_k = 3$ nous avons une condition du type (3.1.23) ou du type (3.1.24), éventuellement partagé avec un de ses voisins.

Il y au plus deux intervalles du type $\mathcal{C}_l$ qui ne sont pas entièrement inclus dans I, et pour ces deux intervalles il y au moins $\lfloor (\sharp(\mathcal{C}_l \cap I) - 1)/2 \rfloor$ sites où les composantes de u ne sont pas petites. Donc si $\sharp(\mathcal{C}_l \cap I) \in \{1, 2\}$ il n'y a pas forcément de point n où $|u(n)| \geq e^{-\beta/2}$. Soit $\tilde{n}_k = \sharp(\mathcal{C}_k \cap I)$. Nous avons supposé que $\sum_k \tilde{n}_k \geq cl^\beta/2 = \sharp I/2$. Ainsi, le nombre de conditions obtenues sur les $(\omega_n)_n$ est au moins égal à

$$\begin{aligned}
\sum_{k, \tilde{n}_k \geq 3, \tilde{n_k} < n_k} \lfloor (\tilde{n_k} - 1)/2 \rfloor + \sum_{k, \tilde{n}_k \geq 4, \tilde{n}_k = n_k} \lfloor (n_k - 2)/2 \rfloor + \frac{1}{2} \sum_{k, n_k \in \{2,3\}, \tilde{n_k} = n_k} 1 \\
\geq \sum_{k, \tilde{n}_k \geq 3, \tilde{n_k} < n_k} \tilde{n}_k/5 + \sum_{k, \tilde{n}_k \geq 3, \tilde{n_k} < n_k} \tilde{n}_k/3 \\
+ \sum_{k, \tilde{n}_k \geq 4, \tilde{n}_k = n_k} n_k/5 + \frac{1}{2} \sum_{k, n_k \in \{2,3\}, \tilde{n_k} = n_k} n_k/5 - 2 \\
\geq cl^\beta/10 - 2 \geq c' l^\beta/10
\end{aligned}$$

Il y a au plus 2^l choix pour $\mathcal{P}$, l choix pour n_0, 2^l choix pour les points où u satisfait $|u(n)| \geq e^{-\beta/2}$. Pour chacun de ces choix, nous obtenons une probabilité au plus égale à $e^{-cl^{2\beta}}$, car les variables aléatoires sont indépendantes. Ainsi, comme $\beta > 1/2$, pour un c plus petit et L suffisamment grand

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}} \leq L^{-2}. \tag{3.1.26}$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.7 dans le cas où $V_\omega(n) = \omega_n$. □

Reprenons la preuve du Théorème 3.4. Soit $\lambda = e^{-l^\beta} \lambda_E \lambda_{E'}$. D'après le Lemme 3.7, la probabilité que l'un des jacobiens est grand est au moins égale à $1 - e^{-cl^{2\beta}}$. Il reste donc à évaluer $\mathbb{P}(\Omega_{0,\beta}^{\gamma,\gamma'}(\epsilon))$. Pour cela nous étudions les variations du jacobien, en utilisant les matrices hessiennes. Ceci nous permettra d'évaluer la taille des carrés en $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'})$ sur lesquelles la matrice jacobienne reste globalement fixe. Les matrices hessiennes sont différentes selon le modèle considéré, nous prouverons donc ce résultat dans la dernière partie de ce chapitre.

Soit $\alpha \in (1/2, 1)$. D'après la Proposition 3.46 et le Théorème 2.5, quand $H_\omega(\Lambda_l)$ a deux valeurs propres dans $[E - L^{-\alpha}, E + L^{-\alpha}]$, pour L suffisamment grand, avec probabilité au moins égale à $1 - L^{-2\alpha}\lambda$, nous avons

$$\|Hess_\omega(E(\omega))\|_{\ell^\infty \to \ell^1} + \|Hess_\omega(E'(\omega))\|_{\ell^\infty \to \ell^1} \leq CL^\alpha. \tag{3.1.27}$$

Dans le lemme suivant nous écrirons $\omega = (\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}, \omega_{\gamma,\gamma'})$.

Lemme 3.9. *Soit $\epsilon = L^{-\alpha}$. Pour tout $\omega_{\gamma,\gamma'}$, si il existe $(\omega_\gamma^0, \omega_{\gamma'}^0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\omega_\gamma^0, \omega_{\gamma'}^0, \omega_{\gamma,\gamma'}) \in \Omega_{0,\beta}^{\gamma,\gamma'}(\epsilon)$, alors pour $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - (\omega_\gamma^0, \omega_{\gamma'}^0)|_\infty \leq \lambda^2 \epsilon$ nous avons*

$$(E_j(\omega), E_k(\omega)) \in J_L \times J'_L \Longrightarrow |(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - (\omega_\gamma^0, \omega_{\gamma'}^0)|_\infty \leq L^{-1}\lambda^{-1}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{S}_\beta$ le carré $\mathcal{S}_\beta = \{|(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - (\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})|_\infty \leq \lambda^2\epsilon\}$. Choisissons $\omega_{\gamma,\gamma'}$ tel qu'il existe $(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels nous avons $(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}, \omega_{\gamma,\gamma'}) \in \Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\epsilon)$. Dans le reste de la preuve $\omega_{\gamma,\gamma'}$ sera fixé, aussi, nous omettrons la dépendance en ces variables. Nous écrirons donc $f(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'})$ au lieu de $f(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}, \omega_{\gamma,\gamma'})$.

Considérons l'application $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \to \varphi(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) := (E(\omega), E'(\omega))$. Nous allons montrer que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{S}_\beta$ dans son image. D'après les définitions de $\Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\epsilon)$ et de $\Omega_0(\epsilon)$, nous savons que

$$\begin{aligned}
&\sigma(H_{(\omega^0_\gamma,\omega^0_{\gamma'})}(\Lambda_l)) \cap (E - C\epsilon, E + C\epsilon) = \{E(\omega)\} \subset (E - CL^{-1}, E + CL^{-1}),\\
&\sigma(H_{(\omega^0_\gamma,\omega^0_{\gamma'})}(\Lambda_l)) \cap [(E - C\epsilon, E - C\epsilon/2) \cup (E + C\epsilon/2, E + C\epsilon)] = \emptyset,\\
&\sigma(H_{(\omega^0_\gamma,\omega^0_{\gamma'})}(\Lambda_l)) \cap (E' - C\epsilon, E' + C\epsilon) = \{E'(\omega)\} \subset (E' - CL^{-1}, E' + CL^{-1}),\\
&\sigma(H_{(\omega^0_\gamma,\omega^0_{\gamma'})}(\Lambda_l)) \cap [(E' - C\epsilon, E' - C\epsilon/2) \cup (E' + C\epsilon/2, E' + C\epsilon)] = \emptyset.
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Or les gradients des valeurs propres sont bornés (le calcul général des gradients sera donné dans la dernière partie), donc pour $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathcal{S}_\beta$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap (E - C\epsilon/2, E + C\epsilon/2) = \{E(\omega)\} \subset (E - C\epsilon/4, E + C\epsilon/4),\\
&\sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap [(E - C\epsilon/2, E - C\epsilon/4) \cup (E + C\epsilon/4, E + C\epsilon/2)] = \emptyset,\\
&\sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap (E' - C\epsilon/2, E' + C\epsilon/2) = \{E(\omega)\} \subset (E' - C\epsilon/4, E' + C\epsilon/4),\\
&\sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap [(E' - C\epsilon/2, E' - C\epsilon/4) \cup (E' + C\epsilon/4, E' + C\epsilon/2)] = \emptyset.
\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse et l'équation (3.1.27), pour $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathcal{S}_\beta$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\varphi(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - \nabla\varphi(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})\|\\
&\leq (\|\mathrm{Hess}_\omega(E(\omega))\|_{\ell^\infty\to\ell^1} + \|\mathrm{Hess}_\omega(E'(\omega))\|_{\ell^\infty\to\ell^1})\,\epsilon\lambda^2 \leq C\lambda^2.
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Montrons maintenant que φ est injective sur le carré $\mathcal{S}_\beta$. D'après (3.1.29), nous calculons

$$\left|\varphi(\omega'_\gamma, \omega'_{\gamma'}) - \varphi(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - \nabla\varphi(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}) \cdot \begin{pmatrix} \omega'_\gamma - \omega_\gamma \\ \omega'_{\gamma'} - \omega_{\gamma'} \end{pmatrix}\right| \leq \lambda^2 \left\|\begin{pmatrix} \omega'_\gamma - \omega_\gamma \\ \omega'_{\gamma'} - \omega_{\gamma'} \end{pmatrix}\right\|$$

Comme $(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}, \omega_{\gamma,\gamma'}) \in \Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\varepsilon)$, nous avons

$$\left|\mathrm{Jac}\,\varphi(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})\right| \geq \lambda.$$

Ainsi, pour L suffisamment grand, nous avons

$$\left|\varphi(\omega'_\gamma, \omega'_{\gamma'}) - \varphi(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'})\right| \geq \frac{1}{2}\lambda \left\|\begin{pmatrix} \omega'_\gamma - \omega_\gamma \\ \omega'_{\gamma'} - \omega_{\gamma'} \end{pmatrix}\right\|$$

donc φ est bien injective. L'inégalité (3.1.29) montre également que

$$|\mathrm{Jac}\,\varphi(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - \mathrm{Jac}\,\varphi(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})| \leq C\lambda^2$$

Aussi, pour L suffisamment grand, nous avons

$$\forall(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathcal{S}_\beta, \quad |J_{\gamma,\gamma'}(E(\omega), E'(\omega))| \geq \frac{1}{2}\lambda. \tag{3.1.30}$$

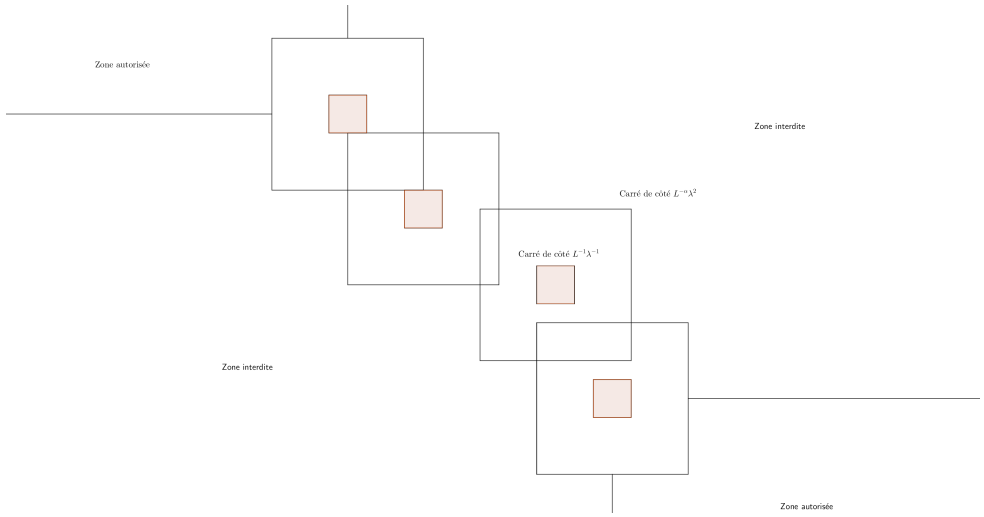

Figure 3.2 – Exemple de disposition des carrés

Le théorème d'inversion global nous dit donc que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{S}_\beta$ dans son image. D'après l'équation (3.1.30), l'inverse de la matrice jacobienne est borné par Cl^β pour un certain $C > 0$ indépendant de L. Donc, pour $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'})$ tel que $|(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - (\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})|_\infty \leq \lambda^2\epsilon$, si $(E(\omega), E'(\omega)) \in \tilde{J}_L \times \tilde{J}'_L$ alors

$$|(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) - (\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})|_\infty = |\varphi^{-1}(E(\omega), E'(\omega)) - \varphi^{-1}(E, E')|_\infty \leq CL^{-1}\lambda^{-1}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 3.9. □

Terminons maintenant la preuve du Théorème 3.4, en finissant l'estimation de $\mathbb{P}_\epsilon$ défini dans (3.1.3). Comme dans le Lemme 3.9, prenons $(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'})$ tel que $(\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}, \omega_{\gamma,\gamma'}) \in \Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\epsilon)$ et définissons $\mathcal{A} := (\omega^0_\gamma, \omega^0_{\gamma'}) + \{(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_-, |\omega_\gamma| \geq \lambda^2\epsilon \text{ ou } |\omega_{\gamma'}| \geq \lambda^2\epsilon\}$. Pour les modèles considérés, nous savons que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\omega_i \to E_j(\omega)$ et $\omega_i \to E_k(\omega)$ sont croissantes. Ainsi, si $(\omega_\gamma, \omega_{\gamma'}) \in \mathcal{A}$ alors $(E_j(\omega), E_k(\omega)) \notin J_L \times J'_L$. Nous déduisons de cela que tous les carrés de côté $\lambda^2\epsilon$ qui contiennent un point dans $\Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\epsilon)$ sont placés le long d'une ligne brisée décroissante qui part du coin supérieur gauche et qui arrive au coin inférieur droit. Nous l'illustrons sur la figure 3.2.

Comme les variables aléatoires sont presque sûrement uniformément bornées par $C > 0$, il y a au plus $CL^\alpha\lambda^{-2}$ carrés de ce type. Maintenant, comme les $(\omega_n)_n$ sont i.i.d, le Lemme 3.9 appliqué à chacun de ces cubes montre que

$$\mathbb{P}(\Omega^{\gamma,\gamma'}_{0,\beta}(\epsilon)) \leq CL^{\alpha-2}\lambda^{-4} \tag{3.1.31}$$

et donc, en sommant ces équations pour $(\gamma, \gamma') \in \Lambda^2_l$,

$$\mathbb{P}_\epsilon \leq CL^{\alpha-2}\lambda^{-3} \tag{3.1.32}$$

où nous rappelons que $\lambda = e^{-l^\beta}\lambda_E\lambda_{E'}$. Ainsi, nous optimisons en α dans (3.1.2) pour aboutir à $\alpha = 2/3$. Ceci termine la démonstration du Théorème 3.4.

3.2 Estimations de décorrélation pour le modèle des sauts

Rappelons que le modèle des sauts $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est défini par

$$H_\omega u = -\Delta_b u, \tag{3.2.1}$$

où les variables $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont aléatoires, i.i.d, avec une densité ρ bornée à support compact. Le but de cette partie est de montrer le

Théorème 3.10. *Pour tout $|E| > |E'| \neq 0$, il existe $C > 0$, tel que pour $\xi' \in (0, \xi)$, pour L suffisamment grand et $l = (\log L)^{1/\xi'}$ nous avons*

$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[E-L^{-1},E+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0, \\ tr\,\mathbf{1}_{[E'-L^{-1},E'+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right)e^{l^\beta}.$$

Au vu de la symétrie du spectre de $H_\omega(\Lambda_l)$ par rapport à l'origine (voir le Chapitre 1), nous ne prouverons les estimations de décorrélation qu'à des énergies E et E' vérifiant $|E| \neq |E'|$. Comme dans la partie précédente, en utilisant les estimations de Minami prouvées dans le deuxième chapitre et l'hypothèse de localisation, le Théorème 3.10 est une conséquence du théorème suivant, dont la preuve sera donnée par la suite.

Théorème 3.11. *Pour tout $|E| > |E'| > 0$, il existe $C > 0$, tel que pour $\xi' \in (0, \xi)$, pour L suffisamment grand et $l = (\log L)^{1/\xi'}$ nous avons*

$$\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[E-L^{-1},E+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) = 1, \\ tr\,\mathbf{1}_{[E'-L^{-1},E'+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) = 1 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right)e^{l^\beta}.$$

Le reste de la section sera dédié à la preuve du Théorème 3.11. Fixons donc $|E| > |E'| > 0$ et $l := (\log L)^{1/\xi'}$. Définissons $J_L := [E - L^{-1}, E + L^{-1}]$, $J'_L := [E' - L^{-1}, E' + L^{-1}]$ et $\epsilon := L^{-\alpha}$ avec $\alpha \in (1/2, 1)$. D'après le Théorème 2.1, l'évènement

$$\Omega_0(\epsilon) = \left\{ \omega; \begin{matrix} \sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap J_L = \{E(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap (E-\epsilon, E+\epsilon) = \{E(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap J'_L = \{E'(\omega)\} \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \cap (E'-\epsilon, E'+\epsilon) = \{E'(\omega)\} \end{matrix} \right\}$$

satisfait

$$\mathbb{P}_1 \leq \mathbb{P}\left(\Omega_0(\epsilon)\right) + L^{-2\alpha}(\log L)^C, \tag{3.2.2}$$

pour un certain $C > 2$. Comme dans la section précédente il reste à évaluer $\mathbb{P}\left(\Omega_0(\epsilon)\right)$. Nous étudions donc les gradients de valeurs propres. Soient $E_j(b_\omega)$, $E_k(b_\omega)$ deux valeurs propres simples et positives de $H_\omega(\Lambda_l)$ et ϕ, ψ des vecteurs propres normalisés qui leur sont associés. D'après la Proposition 3.44, nous avons

$$\partial_{b_\omega(k)} E_j = \langle \partial b_\omega(k) H_\omega(\Lambda_l)\phi, \phi\rangle = 2\phi(k)\phi(k-1). \tag{3.2.3}$$

La principale différence avec les modèles considérés dans la section précédente est que les dérivées des valeurs propres peuvent ici changer de signe, alors que le fait de garder un signe fixe était essentiel dans l'application du Lemme 3.9. Nous allons voir que nous pouvons retrouver cette positivité ailleurs. Multiplions par $\phi(k)$ l'équation satisfaite par le vecteur propre, au point k. Nous obtenons alors

$$b_\omega(k+1)\partial_{b_\omega(k+1)} E_j + b_\omega(k)\partial_{b_\omega(k)} E_j = E_j\phi^2(k). \tag{3.2.4}$$

L'équation (3.2.4) montre que si nous prenons les coordonnées polaires du couple de variable $(b_\omega(k), b_\omega(k+1))$, les valeurs propres croissent radialement. Comme dans l'application du Lemme 3.9, nous aurons besoin de deux propriétés de croissance en fonction de variables indépendantes. Ainsi, nous allons montrer que la probabilité que tous les

déterminants $J_{i,j} := \begin{vmatrix} \phi^2(i) & \psi^2(i) \\ \phi^2(j) & \psi^2(j) \end{vmatrix}$ avec $|i-j| \geq 2$ (au lieu de $i \neq j$, comme dans le Lemme 3.5) sont petits est exponentiellement faible. Dans cette optique, nous prouvons les deux lemmes suivants qui sont des généralisations du Lemme 3.5.

Lemme 3.12. *Soient $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$. Fixons $j_0 \in \{1, \dots n\}$ tel que $\max_j |u(j)| = |u(j_0)| \geq \frac{1}{n}$. Définissons $\mathcal{J} := \{j_0 - 1, j_0, j_0 + 1\}$, $\mathcal{K} := \{1, \dots n\} - \mathcal{J}$ et $\lambda := \frac{v(j_0)}{u(j_0)}$. Supposons qu'il existe $C > 1$ tel que $\{\|u_{|\mathcal{K}}\|_1, \|v_{|\mathcal{K}}\|_1\} \in \left(\frac{1}{C}, 1\right)$ et supposons qu'il existe $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2n^2 C}\right)$ tel que*

$$\max_{k \in \mathcal{K}} \left| \begin{pmatrix} u_{j_0} & u_k \\ v_{j_0} & v_k \end{pmatrix} \right| \leq \epsilon. \tag{3.2.5}$$

Alors $\lambda \in \left[\frac{1}{2C}, 2C\right]$ et $\|v_{|\mathcal{K}} - \lambda u_{|\mathcal{K}}\|_1 \leq n^2 \epsilon$.

Démonstration. Soit $\lambda := \frac{v(j_0)}{u(j_0)} > 0$. Pour $k \in \mathcal{K}$ définissons $\delta_k := v_k - \lambda u_k$. L'équation (3.2.5) et la définition de j_0 montrent que $|\delta_k| \leq n\epsilon$. Ainsi,

$$\|v_{|\mathcal{K}} - \lambda u_{|\mathcal{K}}\|_1 \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} |\delta_k| \leq n^2 \epsilon.$$

Par ailleurs, l'hypothèse de positivité nous dit que $\sum_{k \in \mathcal{K}} \delta_k = \|v_{|\mathcal{K}}\|_1 - \lambda \|u_{|\mathcal{K}}\|_1$. Ainsi, $\lambda = \frac{\|v_{|\mathcal{K}}\|_1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \delta_k}{\|u_{|\mathcal{K}}\|_1}$ et nous obtenons

$$\lambda \leq \frac{1 + n^2 \epsilon}{1/C} \leq 2C \text{ et } \lambda \geq \frac{1}{C} - n^2 \epsilon \geq \frac{1}{2C}.$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.12. □

Lemme 3.13. *Il existe $C > 1$ tel que pour $E_j(\omega)$ valeur propre de $H_\omega(\Lambda_l)$ et ϕ un vecteur propre normalisé qui lui est associé, si nous définissons $u \in \mathbb{R}^l$ par $u(i) = \phi^2(i)$ et si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{J}$ sont définis comme dans le Lemme 3.12, nous avons $\|u_{|\mathcal{K}}\|_1 \in \left(\frac{1}{C}, 1\right)$.*

Démonstration. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|b_\omega(n)| \in \left[\frac{1}{M}, M\right]$, la croissance au plus exponentielle donnée par le Lemme B.1 nous dit qu'il existe $C > 1$ (dépendant uniquement de M) tel que, pour l suffisamment grand, on a $S_1 := \sum_{k \in \mathcal{K}} u(k) \geq \frac{u(j_0)}{C}$. Par définition, $\sum_{k \in \{1, \dots, l\}} u(k) = 1$. Ainsi, soit $S_1 \geq \frac{1}{2}$ soit $u(j_0 - 1) + u(j_0) + u(j_0 + 1) \geq \frac{1}{2}$. Dans ce dernier cas, comme $u(j_0) = \max_j u(j)$, nous avons $u(j_0) \geq \frac{1}{6}$ et donc $S_1 \geq \frac{1}{6C}$. Ceci termine la preuve du Lemmr 3.13. □

Reprenons les notations j_0, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ du Lemme 3.12. Nous prouvons le

Lemme 3.14. *Soit $E, E' \in \mathbb{R}^*$ avec $|E| \neq |E'|$ et $\beta > 1/2$. Notons $\mathbb{P}$ la probabilité qu'il existe $E_n(\omega)$ et $E_m(\omega)$, des valeurs propres simples de $H_\omega(\Lambda_l)$, l'une dans $[E - e^{-l^\beta}, E + e^{-l^\beta}]$ l'autre dans $[E' - e^{-l^\beta}, E' + e^{-l^\beta}]$, telles que si ϕ, ψ sont des vecteurs propres normalisés associés à E_n et E_m nous avons*

$$\left\| \lambda \phi^2|_{\mathcal{K}} - \psi^2|_{\mathcal{K}} \right\| \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.2.6}$$

Alors il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}}. \tag{3.2.7}$$

Démonstration. La preuve de ce résultat suit celle du Lemme 3.7. Il existe $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ vérifiant $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ et $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathcal{P}, |\sqrt{\lambda}\phi_j(n) - \phi_k(n)| \leq e^{-l^\beta/2} \ ,$$
$$\forall n \in \mathcal{Q}, |\sqrt{\lambda}\phi_j(n) + \phi_k(n)| \leq e^{-l^\beta/2} \ .$$

Soit P (respectivement Q and J) le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{P})$ (respectivement sur $\ell^2(\mathcal{Q})$ et sur $\ell^2(\mathcal{J})$). Définissons alors $\tilde{P} := P + J$. Les équations aux valeurs propres se réécrivent alors

$$(\Delta_b - E)(\tilde{P}\phi + Q\phi) = h_E \ ,$$
$$(\Delta_b - E')(\tilde{P}\phi - Q\phi) + H_\omega(E')\left(\frac{J\psi}{\sqrt{\lambda}} - J\phi\right) = \frac{h_{E'}}{\sqrt{\lambda}} \ .$$

où $|h_E| + \dfrac{|h_{E'}|}{\sqrt{\lambda}} \leq Ce^{-l^\beta/2}$. Nous combinons alors ces équations comme dans la preuve du Lemme 3.7, et obtenons l'existence de deux ensembles d'intervalles $(C_k)_k$ et $(D_k)_k$ tels que si nous définissons $\mathcal{C} := \cup_k \mathcal{C}_k$ et $\mathcal{D} := \cup_k \mathcal{D}_k$, alors $\mathcal{D} = \{1, \ldots, l\} - \overset{\circ}{C}$ et

$$\left[\sum_k C_k \Delta_b C_k + (E' - E)\right]\phi = h_1 - H_\omega(E')\left(\frac{J\psi}{\sqrt{\lambda}} - J\phi\right), \tag{3.2.8}$$

$$\left[\sum_k D_k \Delta_b D_k + (E' + E)\right]\phi = h_2 + H_\omega(E')\left(\frac{J\psi}{\sqrt{\lambda}} - J\phi\right). \tag{3.2.9}$$

Le Lemme 3.6 reste valide pour le modèle des sauts. Définissons alors I comme dans le Lemme 3.6 et définissons $\tilde{\mathcal{J}} := \mathcal{J} \cup \{j_0 - 2, j_0 + 2\}$, $\tilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} - \{j_0 - 2, j_0 + 2\}$ et $\tilde{I} = \tilde{\mathcal{K}} \cap I$. Le vecteur $H_\omega(E')\left(\dfrac{J\psi}{\sqrt{\lambda}} - J\phi\right)$ a son support inclus dans $\tilde{\mathcal{J}}$. Il existe au plus quatre intervalles C_k non inclus $\tilde{I}$.

Fixons maintenant $n \in \tilde{I}$. Si $n \notin \mathcal{C}$, l'équation (3.2.8) montre que $|\phi(n)| \leq \dfrac{e^{-l^\beta/2}}{|E - E'|}$. Ainsi, d'après le Lemme 3.6, pour L suffisamment grand, $\mathcal{C}^c$ ne peut pas avoir deux points consécutifs dans $\tilde{I}$. Comme $\mathcal{C}^c = \overset{\circ}{\mathcal{D}}$, si $\mathcal{D}_k$ est inclus dans $\tilde{I}$, nous avons $|\mathcal{D}_k| \in \{2, 3\}$.

Supposons que $|\mathcal{D}_k| = 3$, $\mathcal{D}_k := \{n_-, n, n_+\}$. L'équation (3.2.9) au point n_+ donne

$$\left|\phi(n_+) - \frac{a_\omega(n_+)}{E + E'}\phi(n)\right| \leq \frac{e^{-l^\beta/2}}{E + E'}. \tag{3.2.10}$$

Comme $E + E' \neq 0$ et $|\phi(n)| < |E - E'|^{-1}e^{-l^\beta/2}$ car $n \in \mathcal{C}^c$, pour L suffisamment grand, nous obtenons $|\phi(n_+)| < Ce^{-l^\beta/2}$, ce qui entre en contradiction avec la définition de I. Donc $|\mathcal{D}_k| = 2$.

Écrivons maintenant $\mathcal{D}_k := \{n_-, n_+\}$. Les équations (3.2.9) aux points n_+ et n_- entrainent l'équation suivante

$$\left\| \begin{pmatrix} E+E' & -a_\omega(n_+) \\ -b_\omega(n_+) & E+E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(n_-) \\ \phi(n_+) \end{pmatrix} \right\| \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.2.11}$$

Comme $\mathcal{D}_k \subset I$, on a $\left\| \begin{pmatrix} \phi(n_-) \\ \phi(n_+) \end{pmatrix} \right\| \geq e^{-l^\beta/2}$. Nous obtenons donc la condition suivante sur ω_{n_+} :

$$\left| b_\omega(n_+)^2 - (E+E')^2 \right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.2.12}$$

Un raisonnement similaire montre que si $\mathcal{C}_k$ est inclus dans $\tilde{I}$, $|\mathcal{C}_k| = 2$ et si $\mathcal{C}_k := \{m_-, m_+\}$ nous obtenons la condition suivante sur ω_{m_+} :

$$\left| a_\omega(m_+)^2 - (E-E')^2 \right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.2.13}$$

Maintenant supposons que $\mathcal{C}_k$ (respectivement $\mathcal{D}_k$) est l'un des quatre intervalles partiellement inclus dans $\tilde{I}$. Une équation similaire à (3.2.10), mais prise au bord inclus dans in $\tilde{I}$, montre que $|\mathcal{C}_k \cap \tilde{I}| = 1$ (respectivement $|\mathcal{D}_k \cap \tilde{I}| = 1$). Maintenant, comme un point m_+ d'un intervalle $\mathcal{C}_k$ inclus dans $\tilde{I}$ est égal à un point n_- d'un intervalle $\mathcal{D}_{k'}$, nous obtenons $|\tilde{I} - 4|$ conditions sur $(b_\omega(n))_n$ du type (3.2.12) ou du type (3.2.13). Il existe maintenant l choix de j_0, 2^l choix de partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Comme $|\tilde{I}| \geq cl^\beta$, ceci achève la démonstration du Lemme 3.14. □

Ainsi, d'après le Lemme 3.12, quand les vecteurs ϕ^2 et ψ^2 sont presque colinéaires, il existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ avec $|j - j_0(\omega)| \geq 2$ tel que

$$\begin{vmatrix} \phi^2(j_0) & \psi^2(j_0) \\ \phi^2(j) & \psi^2(j) \end{vmatrix} \geq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.2.14}$$

Il y a au plus l^2 choix pour (j_0, j).

Maintenant, supposons que (j_0, j) satisfont (3.2.14) et fixons $(b_\omega(n))_{n \notin \{j, j+1, j_0, j_0+1\}}$. A partir de maintenant, nous omettrons la dépendance de E_n and E_m en $(b_\omega(n))_{n \notin \{j, j+1, j_0, j_0+1\}}$ et écrirons donc

$$E_p(\omega) = E_p\left(b_\omega(j), b_\omega(j+1), b_\omega(j_0), b_\omega(j_0+1)\right)$$

pour $p \in \{n, m\}$. Pour tout $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \in \left(\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)\right)^2$ définissons

$$F_n\left(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2\right) := E_n\left(r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1, r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2\right). \tag{3.2.15}$$

Comme $M \geq |b_\omega(n)| \geq \dfrac{1}{M}$, nous nous restreignons à l'étude de $(r_1, r_2) \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}M}, \sqrt{2}M\right]^2$. Nous calculons,

$$\begin{aligned} \partial_{r_1} F_n := \cos\theta_1 \partial_{b_\omega(j)} E_n\left(r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1, r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2\right) \\ + \sin\theta_1 \partial_{b_\omega(j+1)} E_n\left(r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1, r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$r_1 \partial_{r_1} F_n = 2E_n \phi^2(j) \text{ and } r_2 \partial_{r_2} F_n = 2E_n \phi^2(j_0). \tag{3.2.16}$$

Par ailleurs,

$$\max_{(p,q)\in\{1,2\}^2} |\partial r_p \partial r_q F_n| \leq 4 \max_{k,k'} \left|\partial_{b_\omega(k)} \partial_{b_\omega(k')} E_n(\omega)\right| \leq 4 \|Hess_{b_\omega} E_n(\omega)\|. \tag{3.2.17}$$

Fixons maintenant (θ_1, θ_2). Soit $J(r_1, r_2)$ le jacobien de l'application $(r_1, r_2) \to (F_n(r_1, r_2), F_m(r_1, r_2))$:

$$J_{j,j_0}(r_1, r_2) = \left| \begin{pmatrix} \partial_{r_1} F_n & \partial_{r_2} F_n \\ \partial_{r_1} F_m & \partial_{r_2} F_m \end{pmatrix} \right|. \tag{3.2.18}$$

Soit $\lambda := E'Ee^{-l^\beta/2}$ et soit

$$\Omega_{0,\beta}^{j,j_0}(\epsilon) = \Omega_0(\epsilon) \cap \{a_\omega; |J_{j,j_0}(r_1, r_2)| \geq \lambda\}.$$

D'après le Lemme 3.14, nous avons

$$\mathbb{P}(\Omega_0(\epsilon)) \leq e^{-l^{2\beta}} + l \sum_j \mathbb{P}\left(\Omega_{0,\beta}^{j,j_0}(\epsilon)\right). \tag{3.2.19}$$

Il reste donc à évaluer $\mathbb{P}\left(\Omega_{0,\beta}^{j,j_0}(\epsilon)\right)$. D'après la Proposition 3.46, quand $(r_1, r_2) \in \Omega_{0,\beta}^{j,j_0}(\epsilon)$, $\|Hess_r F_n\| + \|Hess_r F_m\| \leq \dfrac{C}{\epsilon}$. Nous obtenons donc le lemme suivant qui correspond au Lemme 3.9 et est prouvé de la même manière.

Lemme 3.15. *Soit $\epsilon = L^{-\alpha}$. Pour tout $(b_\omega(n))_{n\notin\{j,j+1,j_0,j_0+1\}}$, pour tout (θ_1, θ_2), si il existe $(r_1^0, r_2^0) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $b_\omega \in \Omega_{0,\beta}^{\gamma,\gamma'}(\epsilon)$ alors pour $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $|(r_1, r_2) - (r_1^0, r_2^0)|_\infty \leq \lambda^2\epsilon$ nous avons $(F_n(b_\omega), F_m(b_\omega)) \in J_L \times J'_L \iff |(r_1, r_2) - (r_1^0, r_2^0)|_\infty \leq L^{-1}\lambda^{-1}$.*

Ainsi, en revenant aux variables aléatoires et en utilisant l'indépendance de celles-ci, nous obtenons l'équation suivante, qui se prouve de la même manière que l'équation (3.1.31).

$$\mathbb{P}(\Omega_{0,\beta}^{\gamma,\gamma'}(\epsilon)) \leq CL^{\alpha-2}\lambda^{-4}. \tag{3.2.20}$$

L'optimisation en α donne $\alpha = \dfrac{2}{3}$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.11 et donc celle du Théorème 3.10.

3.3 Estimations de décorrélation pour les modèles discrets de type alliage

Dans la première section nous avons prouvé les estimations de décorrélation sous l'hypothèse que le potentiel aléatoire prenait des valeurs i.i.d. Dans cette section nous allons prouver les estimations de décorrélation pour les modèles discrets de type alliage, de sorte que les valeurs prises par le potentiel sont corrélés. Nous rappelons ici le modèle. Soit $L \in \mathbb{N}$ et soient $(\omega_n)_n$ des variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées selon une densité bornée à support compact ρ. Soit $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une suite réelle non nulle et soit $H_\omega(\Lambda_L) = \Delta_b + V_\omega$ sur $\ell^2(\{1, \ldots, L\})$ avec conditions aux bords de Dirichlet et où

$$V_\omega(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\omega_{n+m}$$

La suite b sera supposée éloignée de zéro et déterministe (elle peut être également choisie aléatoire, indépendante de la suite ω). Nous supposerons qu'il existe $K > 0$ et $\lambda > 0$ tel que $|a(n)| \leq Ke^{-\lambda|n|}$. Quitte à faire une translation sur les indices des variables aléatoires, nous pouvons supposer que $|a(0)|$ est le maximum le plus à droite dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &|a(0)| = \max\{|a(n)|, n \in \mathbb{Z}\}, \\ &\forall n \geq 1, |a(n)| < |a(0)|. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Le but de cette section est de prouver les estimations de décorrélation pour ce modèle. La première difficulté est le fait que l'opérateur ne vérifie pas nécessairement l'hypothèse (IAD), condition utilisée pour prouver les estimations de Minami dans le deuxième chapitre. Pour remédier à cela, nous allons tronquer la suite $(a_n)_n$ suffisamment loin de l'origine afin d'approcher l'opérateur H_ω par un opérateur vérifiant l'hypothèse (IAD), mais où la distance dans (IAD) dépendra de la longueur du cube. Posons $S := R \log L$ et définissons les variables aléatoires

$$z_m := \tilde{V}_\omega(m) := \sum_{|n| \leq S} a(n)\omega_{n+m} \tag{3.3.2}$$

et l'opérateur aléatoire $\tilde{H}_\omega := \Delta + \tilde{V}_\omega$. Soit $\kappa > 1$. Il existe $\lambda_{R,K,\kappa}$ tel que, pour $\lambda > \lambda_{R,K,\kappa}$, nous avons pour L suffisamment grand,

$$\|\tilde{H}_\omega - H_\omega\| = \|\tilde{V}_\omega - V_\omega\|_\infty \leq Ke^{-\lambda S} \lesssim L^{-\kappa}. \tag{3.3.3}$$

Ainsi, nous obtenons la relation suivante, valable pour $\lambda > \lambda_{R,K,\kappa}$ et L suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(1_{[E-L^{-\kappa},E+L^{-\kappa}]}(H_\omega(\Lambda_L))) &\leq \mathbf{tr}(1_{[E-2L^{-\kappa},E+2L^{-\kappa}]}(\tilde{H}_\omega(\Lambda_L))) \\ &\leq \mathbf{tr}(1_{[E-3L^{-\kappa},E+3L^{-\kappa}]}(H_\omega(\Lambda_L))). \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Ainsi, pour une troncature $S = R \log L$ donnée et une taille d'erreur $L^{-\kappa}$, si le taux de décroissance λ est assez grand, nous approchons l'opérateur H_ω par $\tilde{H}_\omega$ et l'erreur obtenue est inférieure à $L^{-\kappa}$. Nous savons que si $(\Lambda_j)_j$ est un ensemble d'intervalles distants les uns des autres d'au moins $2S$, alors les opérateurs $(\tilde{H}_\omega(\Lambda_j))_j$ sont indépendants. Nous avons vu dans le premier chapitre que, dans [Ves10a], les estimations de Wegner étaient prouvées pour l'opérateur H_ω sous l'hypothèse que les $(\omega_n)_n$ avaient une densité à variations bornées. Nous rappelons le résultat.

Théorème 3.16 ([Ves10a]). *Il existe $D \in \mathbb{N}, D \neq 0$, dépendant uniquement des $(a(n))_n$ tel que pour tout $\beta > D/\lambda$ il existe $K > 0$ tel que pour tout $L \in \mathbb{N}, E \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$*

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{tr}(1_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L)))\right] \leq C\epsilon L(L + \beta \log L + K)^{D+1}. \tag{3.3.5}$$

Ce théorème entraine en particulier les estimations de Wegner suivantes, valables pour L suffisamment grand.

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{tr}(1_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega)(\Lambda_L)))\right] \leq C\epsilon L^{D+2}. \tag{3.3.6}$$

Nous appliquons maintenant les résultats du deuxième chapitre à $\tilde{H}_\omega$ et obtenons le théorème suivant.

Théorème 3.17. *Soit J un intervalle compact tel que (W) et (Loc) sont vérifiées. Pour tout $\rho \in (0,1)$, $\kappa > 1$, il existe $C := C_{\rho,\kappa}$ et $\lambda_{\rho,\kappa} > 0$ tel que, pour tout taux de décroissance $\lambda > \lambda_{\rho,\kappa}$, L assez grand, $E \in J$, et $\epsilon = L^{-\kappa}$, les estimations suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\boldsymbol{tr}\left(\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))\right) \geq 2\right) &\leq \mathbb{P}\left(\boldsymbol{tr}\left(\boldsymbol{1}_{[E-2\epsilon,E+2\epsilon]}(\tilde{H}_\omega(\Lambda_L))\right) \geq 2\right) \\ &\leq C(\epsilon L)^{1+\rho}.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Démonstration. Fixons $\eta > 0$. D'après la preuve du Théorème 2.15 dans le deuxième chapitre que la constante ϵ_0, dépendant de S, est de taille au plus C^S pour un certain $C > 1$ (voir Annexe B). Prenons alors $R > 0$ de sorte que $C^S \leq L^\eta$, puis $\lambda_{R,\eta}$ de sorte que pour $\lambda > \lambda_{R,\eta}$ et L assez grand, nous avons (3.3.4). Il reste alors à conclure la preuve en utilisant (W) et (Loc) comme dans le deuxième chapitre. □

Ce théorème n'est pas aussi fort que ceux du deuxième chapitre car nous nécessitons un taux de décroissance qui dépend des paramètres du problèmes. En revanche, si le potentiel de simple-site vérifie l'hypothèse suivante

$$\textbf{(Décroissance)} : \forall \lambda > 0,\ \exists K > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}, |d(n)| \leq Ke^{-\lambda|n|}, \tag{3.3.8}$$

nous obtenons alors les estimations de Minami suivantes.

Théorème 3.18 (M)**.** *Soit J un intervalle compact tel que (W) et (Loc) sont vérifiées. Pour tout $\rho \in (0,1)$, $\kappa > 1$, il existe $C := C_{\rho,\kappa} > 0$ tel que, pour L assez grand, $E \in J$ et $\epsilon = L^{-\kappa}$, les estimations suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\boldsymbol{tr}\left(\boldsymbol{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))\right) \geq 2\right) &\leq \mathbb{P}\left(\boldsymbol{tr}\left(\boldsymbol{1}_{[E-2\epsilon,E+2\epsilon]}(\tilde{H}_\omega(\Lambda_L))\right) \geq 2\right) \\ &\leq C(\epsilon L)^{1+\rho}.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Ces estimations sont prouvées sous les seules hypothèses de décroissance exponentielle (Décroissance) sur le potentiel de simple-site, de localisation et des estimations de Wegner. Le potentiel de simple-site peut par exemple changer de signe. En revanche, nous utiliserons les hypothèses supplémentaires suivantes sur le potentiel pour prouver les estimations de décorrélation.

$$\textbf{(H1)} : (a(n))_n \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \text{ ou } (a(n))_n \subset \mathbb{R}_-^{\mathbb{Z}}.$$

$$\textbf{(H2)} : \text{pour tout } \theta \in [0, 2\pi), \textstyle\sum_n a(n)e^{in\theta} \neq 0.$$

Nous supposerons en outre que le potentiel de simple-site est exponentiellement décroissant et que nous avons des estimations de Minami. Nous avons uniquement prouvé les estimations de Minami sous l'hypothèse supplémentaire (Décroissance) mais la preuve qui suit ne nécessite pas cette hypothèse tant que nous avons des estimations de Minami. Nous supposons donc que $|a(n)| \leq Ke^{-\lambda|n|}$. Sous ces hypothèses nous prouverons donc le

Théorème 3.19. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour $\alpha \in (0,1)$ et $E \neq E'$, pour tout $k > 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour L suffisamment grand et $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\boldsymbol{1}_{[E-L^{-1},E+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0, \\ tr\,\boldsymbol{1}_{[E'-L^{-1},E'+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right)e^{(\log L)^\beta}.$$

L'hypothèse (H1) montre que les valeurs propres sont des fonctions monotones des variables aléatoires. Nous supposerons à partir de maintenant que (H1) est vérifiée et nous supposerons, sans perte de généralité que $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$. Les hypothèses (H2) et (H2')

seront quant à elles utilisées pour montrer que si les gradients de deux valeurs propres sont presque colinéaires, nous avons les mêmes conditions sur les vecteurs propres que dans la preuve du Théorème 3.7. Nous obtiendrons donc les mêmes conditions qu'à la fin de la preuve du Théorème 3.7 mais sur les $(z_n)_n$ (voir (3.3.2)) et non sur les $(\omega_n)_n$. Nous commençons donc par prouver une propriété des variables aléatoires $(z_n)_n$. Nous aurons besoin du lemme suivant, dans lequel nous utilisons (3.3.1).

Lemme 3.20. *Soit $\gamma := a(0)^2 - a(-1)a(1) > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $|n| \geq N$ alors $a(n) \leq a(0)e^{-\lambda|n|/2}$ et $\dfrac{e^{-\lambda N/2}}{1-e^{-\lambda N/2}} < \dfrac{1}{8\gamma d(0)^2}$.*

Démonstration. Le résultat est immédiat à partir de la décroissance exponentielle de $(a(n))_n$. □

Nous rappelons le théorème de Gershgorin [Bel65], que nous utiliserons dans la proposition suivante :

Théorème 3.21. *Soit $M = [m_{i,j}]_{(i,j)} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire vérifiant*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |m_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |m_{i,j}| =: R_i.$$

Alors $sp(M) \subset \bigcup_i D(m_{i,i}, R_i)$.

Proposition 3.22. *Il existe $C > 0$ (indépendant de L) tel que, pour tout J sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$ tel que pour $(i,j) \in J^2$ avec $i \neq j$ nous avons $|i-j| \geq N$, où N est défini dans le Lemme 3.20, le vecteur $(z_j)_{j \in J \cup J+1}$ a une densité bornée par $(C\|\rho\|_\infty)^{2\sharp J}$.*

Démonstration. Définissons la suite $t := a\mathbf{1}_{\{-S,\dots,S\}}$. Nous avons alors $z_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t(n)\omega_{n+i}$. Maintenant, considérons l'application

$$(\omega_i)_{i \in J \cup J+1} \to (z_i)_{i \in J \cup J+1}.$$

Le jacobien de cet application est le déterminant de la matrice $A = [a_{ij}]_{(i,j) \in (J \cup J+1)^2}$ où $a_{ij} = t(i-j)$. Comme le suggère la définition de la matrice A, celle-ci peut être réécrite par blocs de taille deux, et les blocs diagonaux sont tous égaux à la matrice $T := \begin{pmatrix} t(0) & t(1) \\ t(-1) & t(0) \end{pmatrix}$. Écrivons alors $A = D + R$ cette décomposition par blocs, où D est diagonal par blocs de taille deux, ces blocs étant égaux à T, et R n'est constitué que de termes $t(x)$ où $|x| \geq N$. Nous avons alors $A = D(I + D^{-1}R)$. Le coefficient le plus grand de T est égal à $a(0)$ de sorte que le plus grand coefficient de son inverse est égal à $\dfrac{a(0)}{\gamma}$ où γ est défini dans le Lemme 3.20.

Rappelons que la suite $(a_n)_n$ est supposée positive et que donc les coefficients de A le sont également. Nous remarquons alors que pour $i \in J$, d'après le Lemme 3.20, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J, j \notin \{i,i+1\}} a_{ij} &\leq t(0) \sum_{j \in J, j \notin \{i,i+1\}} e^{-\lambda'|i-j|} \\
&\leq 2a(0) \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\sharp J}{2} \rfloor + 1} e^{-k\lambda' N} \\
&\leq 2a(0)e^{-\lambda' N} \frac{1 - e^{-(\lfloor \frac{\sharp J}{2} \rfloor + 1)\lambda' N}}{1 - e^{-\lambda' N}} \\
&\leq 2a(0) \frac{e^{-\lambda' N}}{1 - e^{-\lambda' N}} \leq \frac{\gamma}{4a(0)}
\end{aligned}$$

par hypothèse. D'après le Théorème 3.21, si μ est une valeur propre de $I + D^{-1}R$, alors $\mu \geq \frac{1}{2}$. Le déterminant de A est donc au moins égal à $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\sharp J}$. Maintenant, nous savons que les $(\omega_n)_n$ sont des variables aléatoires indépendantes avec une densité commune bornée et à support compact ρ. Ceci achève la preuve du Lemme 3.22. □

Remarque 3.23. Il est facile de modifier la preuve et d'obtenir le lemme suivant

Pour prouver les estimations de décorrélation, nous suivons la preuve donnée dans la première section. Soit $\tilde{E}_j(\omega)$ une valeur propre simple de $\tilde{H}_\omega(\Lambda_l)$ et u un vecteur propre normalisé. Comme dans le lemme précédent, prenons la suite $t := a\mathbf{1}_{[\![-S,S]\!]}$. Comme $z_n = \sum_i t(i)\omega_{i+n}$, d'après (H1) et la Proposition 3.44, nous obtenons :

$$\partial_{\omega_m}\tilde{E}_j = \sum_i t(i)u^2(m-i) = \sum_{i=1}^{l} t(m-i)u^2(i) \geq 0. \tag{3.3.10}$$

où nous posons $u(m) = 0$ pour $m \notin [\![1,l]\!]$. Ainsi, pour l assez grand, en notant $A_l := \sum_i t(i)$, nous avons $A_l = \|\nabla_\omega E_j\| \in [\|a\|_1/2,\ \|a\|_1]$. Nous prouvons le lemme suivant, où u et v sont des vecteurs propres normalisés associés à $\tilde{E}_j \neq \tilde{E}_k$ valeurs propres de $\tilde{H}_\omega(\Lambda_L)$. Notons que nous avons $\|\nabla_\omega \tilde{E}_j\| = \|\nabla_\omega \tilde{E}_k\| = A_l$.

Lemme 3.24. *Supposons que*

$$\left\|\nabla_\omega \tilde{E}_j - \nabla_\omega \tilde{E}_k\right\|_1 \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.3.11}$$

Alors,

$$\forall i \in \{1,\dots,L\},\ |u^2(i) - v^2(i)| \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.3.12}$$

Démonstration. Pour $i \in [\![1,l]\!]$ définissons $X(i) := u^2(i) - v^2(i)$ et définissons $B := [b_{ij}]_{(i,j)\in[\![1-S,l+S]\!]\times[\![1,l]\!]}$ par $b_{ij} = t(i-j)$ où $t := a\mathbf{1}_{[\![-S,S]\!]}$. Alors, (3.3.11) est équivalent à $\|BX\| \leq e^{-l^\beta}$. Prenons $n_0 := \max\{n \in \mathbb{N}, b_n b_{-n} \neq 0\}$. Alors $n_0 \leq S$ et, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $b(n_0) \neq 0$. Comme la suite $(a(n))_n$ est exponentiellement décroissante, pour L suffisamment grand, la suite $(t(n))_n$ satisfait également (H2). Définissons alors $\tilde{B} := [b_{ij}]_{(i,j)\in[\![1-S,l+S]\!]^2}$, où nous rappelons que $b_{ij} = t(i-j)$. La matrice B est une sous matrice de $\tilde{B}$ et $\tilde{B}$ est une matrice circulante. Définissons alors $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{l+2S}$ par $\tilde{X}(i) = X(i)$ si $i \in \{1,\dots,l\}$ et zéro ailleurs. Ainsi, (3.3.11) est prouvée si nous prouvons $\|\tilde{B}\tilde{X}\| \leq e^{-l^\beta}$. D'après (H2) et [Ves10b, Proposition 5], il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $(a(n))_n$) tel que $\|\tilde{B}^{-1}\| \leq C$. Ceci termine la preuve du Lemme 3.24. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver lemme suivant, dans lequel nous rappelons que $t := a\mathbf{1}_{[\![-S,S]\!]}$.

Lemme 3.25. *Soit $E, E' \in \mathbb{R}^2$ et $\beta > 1/2$. Soit $\mathbb{P}$ la probabilité qu'il existe $\tilde{E}_j(\omega)$ et $\tilde{E}_k(\omega)$, valeurs propres simples de $(-\Delta_t + V_\omega)_{\Lambda_l}$ et $(-\Delta_t + V_\omega)_{\Lambda_l}$ dans $[E - e^{-l^\beta}, E + e^{-l^\beta}]$ et $[E - e^{-l^\beta}, E + e^{-l^\beta}]$ tels que*

$$\left\|\frac{\nabla_\omega(\tilde{E}_j(\omega))}{\|\nabla_\omega(\tilde{E}_j(\omega))\|_1} \pm \frac{\nabla_\omega(\tilde{E}_k(\omega))}{\|\nabla_\omega(\tilde{E}_k(\omega))\|_1}\right\|_1 \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.3.13}$$

Alors il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}} \tag{3.3.14}$$

Démonstration. La preuve est la même que celle du Lemme 3.7 sauf que nous obtenons les conditions (3.1.20), (3.1.23) et (3.1.24) sur les variables $(z_n)_n$ au lieu des variables $(\omega_n)_n$. Plus précisément nous obtenons cl^β conditions d'un des deux types suivants :

$$\left|\left(\mu_E + z_{n_+} - \lambda_E \frac{c}{b}\right)\left(\mu_E + z_{n_-} - \lambda_E \frac{c}{b}\right) - \lambda_E^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2\right| \leq e^{-l^\beta/2} \tag{3.3.15}$$

avec $n_+ - n_- = 1$

$$\text{ou} \quad \left|\mu_E + z_n - \lambda_E \frac{c}{a}\right| \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.3.16}$$

Afin d'appliquer le Lemme 3.22, nous remplaçons cette condition par la condition plus faible

$$\left|\mu_E + z_n - \lambda_E \frac{c}{a}\right| |z_{n+1}| \leq Ce^{-l^\beta/2} \tag{3.3.17}$$

car les variables aléatoires $|z_n|$ sont uniformément bornées.

Prenons alors $c'l^\beta$ conditions parmi elles de manière à ce que les indices des variables aléatoires forment un ensemble $J \cup J+1$ satisfaisant les hypothèses du Lemme 3.22. Alors, pour L suffisamment grand, comme les variables aléatoires $(z_n)_{n \in J \cup J+1}$ ont une densité bornée par $(C\rho)^{2\sharp J}$ avec $2\sharp J \asymp c'l^\beta$ et $\beta \in (0,1)$, la probabilité que ces conditions soient simultanément vérifiées est plus petite que

$$2^l C^l \|\rho\|_\infty^l e^{-cl^{2\beta}} \leq e^{-c'l^{2^\beta}} \leq L^{-2}. \tag{3.3.18}$$

Ainsi ,

$$\mathbb{P} \leq L^{-2}. \tag{3.3.19}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 3.25 □

Maintenant, la croissance des valeurs propres donnée par l'équation (3.3.10) nous permet de nouveau d'appliquer le Lemme 3.9, qui reste valide, et ainsi obtenir l'équation(3.1.31) puis le Théorème 3.2 pour $\tilde{H}_\omega(\Lambda_L)$. Autrement dit nous avons prouvé le

Théorème 3.26. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour $\alpha \in (0,1)$ et $E \neq E'$, pour tout $k > 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour L suffisamment grand et $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[E-L^{-1},E+L^{-1}]}(\tilde{H}_\omega(\Lambda_l)) \neq 0, \\ tr\,\mathbf{1}_{[E'-L^{-1},E'+L^{-1}]}(\tilde{H}_\omega(\Lambda_l)) \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right) e^{(\log L)^\beta}$$

Maintenant, l'équation (3.3.4) nous permet enfin d'obtenir le Théorème 3.19.

Il ne parait pas évident de s'affranchir de l'hypothèse (H1). En effet, dans l'application du Lemme 3.9, nous avons utilisé la monotonie des valeurs propres en fonction des variables aléatoires. Ceci empêche qu'une paire de valeurs propres tourne autour d'un point de $\mathbb{R}^2$ quand nous faisons croitre une des variables aléatoires. Il existe peut-être d'autres hypothèses empêchant ce comportement.

3.4 Estimations de décorrélation pour les modèles continus

Dans cette section nous prouvons les estimations de décorrélation pour les modèles continus. La preuve est également la même pour les modèles discrets de type alliage $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ avec potentiel de simple-site positif et à support compact, aux détails dus à la structure discrète près, en utilisant les résultats de l'Annexe B.

Nous prenons donc $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et q une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{\eta}\mathbf{1}_{[-N,N]} \geq q \geq \eta \mathbf{1}_{[0,1]} \tag{3.4.1}$$

L'opérateur aléatoire étudié dans cette section est l'opérateur $H_\omega : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où

$$V_\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n\, q(x-n) = \sum_{n\in[x-N,x+N]\cap\mathbb{Z}} \omega_n\, q(x-n) \tag{3.4.2}$$

Le but de cette section est alors de montrer le

Théorème 3.27. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour $\alpha \in (0,1)$ et $F \neq G$, pour tout $k > 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour L suffisamment grand et $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[F-L^{-1},F+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0, \\ tr\,\mathbf{1}_{[G-L^{-1},G+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right) e^{(\log L)^\beta}.$$

La preuve suit exactement celle des estimations de décorrélation générales, donnée dans la première section de ce chapitre, à l'exception du Lemme 3.7 dont la preuve est différente, car le gradient ne s'exprime pas de la même manière. Notons enfin que la preuve fonctionne également, si la fonction q a des zéros isolés dans $[0,1]$, en utilisant la Remarque A.6. Nous utiliserons dans nos preuves des propriétés des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles ; celles-ci sont énoncées et prouvés dans l'annexe D.

Nous dédions donc le reste de la section à la preuve du

Lemme 3.28. *Soient $F, G \in \mathbb{R}^2$ avec $F \neq G$ et $\beta > 1/2$. Notons $\mathbb{P}$ la probabilité que $H_\omega(\Lambda_l)$ a deux valeurs propres, notées $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$, l'une dans l'intervalle $[F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}]$ l'autre dans l'intervalle $[G - e^{-l^\beta}, G + e^{-l^\beta}]$ et qu'en plus*

$$\left\| \frac{\nabla_\omega(E_j(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_j(\omega))\|_1} \pm \frac{\nabla_\omega(E_k(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_k(\omega))\|_1} \right\|_1 \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.4.3}$$

Il existe alors $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}} \tag{3.4.4}$$

Nous divisons la preuve en deux parties mais introduisons d'abord quelques définitions. Sur $L^2(-N,N)$ définissons la forme bilinéaire symétrique positive :

$$\langle f, g\rangle_q = \int_{-N}^{N} f(t)g(t)q(t)dt. \tag{3.4.5}$$

Nous noterons $\|.\|_q$ la semi-norme correspondante. Nous dirons que deux fonctions f et g sont q-orthogonales si $\langle f, g\rangle_q = 0$. La notion de 1-orthogonalité est l'orthogonalité usuel sur $L^2(-l,l)$.

Fixons $(F,G) \in \mathbb{R}$ et prenons u et v des fonctions propres 1-normalisées de $H_\omega(\Lambda_l)$ associées aux valeurs propres $E_j(\omega) \in [F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}]$ et $E_k(\omega) \in [G - e^{-l^\beta}, G + e{-l^\beta}]$. Ces valeurs propres sont presque sûrement simples et nous calculons, d'après la Proposition 3.44,

$$\partial_{\omega_n} E_j(\omega) = \langle (\partial_{\omega_n} H_\omega)\, u, u\rangle_1 = \|u_{|(n-N,n+N)}\|_q^2 \geq 0, \tag{3.4.6}$$

où $u(x) = 0$ si $x \notin \Lambda_l$. Ainsi, comme u est 1-normalisée, d'après (3.4.1), nous avons

$$\eta \leq \|\nabla_\omega E_j(\omega)\|_1 \in \leq 2N\eta^{-1}.$$

Dans le reste de cette section, M sera fixé de sorte que les variables aléatoires $(\omega_i)_i$ sont presque sûrement bornées par M.

Pour $\bullet \in \{F, G\}$, définissons l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}^n_\bullet) \,:\, \forall x \in (-N, N), y''(x) + V_\omega(n + x)y(x) = \bullet y(x) \tag{3.4.7}$$

Comme la forme définie par (3.4.5) est un produit scalaire sur l'espace des solutions de $(\mathcal{E}^n_\bullet)$, nous pouvons prendre $(e^n_{1,\bullet}, e^n_{2,\bullet})$ une base q-orthonormale de solutions de $(\mathcal{E}^n_\bullet)$. Nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 3.29. *Soit $\bullet \in \{F, G\}$. Nous pouvons choisir $e^n_{1,\bullet}$ et $e^n_{2,\bullet}$ de manière à ce qu'elles soient analytiques réelles en les $(\omega_j)_{j\in[\![n-2N,n+2N]\!]}$.*

Démonstration. Nous omettrons la dépendance en n et $\bullet$ et écrirons uniquement ω au lieu de $(\omega_j)_{j\in[\![n-N,n+N]\!]}$. Prenons Ψ et Φ les solutions de $(\mathcal{E}^n_j)$ satisfaisant $\Psi'(0) = \Phi(0) = 0$ et $\Psi(0) = \Phi'(0) = 1$. Nous savons que Ψ et Φ sont des séries entières de ω et que $\|\Psi\|_q \cdot \|\Phi\|_q \neq 0$. Ainsi, $e_1 := \dfrac{\Psi}{\|\Psi\|_q}$ est analytique et est solution de $(\mathcal{E}^n_j)$. Maintenant, définissons $\tilde{\Phi} := \Phi - \langle \Phi, e_1\rangle e_1$. Ainsi, $\tilde{\Phi}$ est une fonction analytique non nulle et orthogonale à e_1, également solution de $(\mathcal{E}^n_j)$. Il suffit alors de prendre e_1 and $e_2 := \dfrac{\Phi}{\|\Phi\|_q}$ pour conclure la preuve de la Proposition 3.29. □

Maintenant, comme u est solution de l'équation différentielle

$$y'' + V_\omega(n + x)y(x) = Fy(x) + (E_j(\omega) - F)y(x) \tag{3.4.8}$$

avec $|E_j(\omega) - F| \leq e^{-l^\beta}$ et v est solution de l'équation différentielle avec k au lieu de j et G au lieu de F, il existe deux uniques couples $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$ et $(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $x \in (n - N, n + N)$, nous avons

$$\begin{cases} u(x) := A_n e^n_{1,F}(x - n) + B_n e^n_{2,F}(x - n) + \epsilon^n_u(x - n) \\ v(x) = \tilde{A}_n e^n_{1,G}(x - n) + \tilde{B}_n e^n_{2,G}(x - n) + \epsilon^n_v(x - n) \end{cases}. \tag{3.4.9}$$

et tels que pour $\bullet \in \{u, v\}$ nous avons $\epsilon^n_\bullet(0) = (\epsilon^n_\bullet)'(0) = 0$. Nous avons alors

$$\|\epsilon^n_u\|_\infty + \|\epsilon^n_v\|_\infty + \|(\epsilon^n_u)'\|_\infty + \|(\epsilon^n_v)'\|_\infty \leq Ce^{-l^\beta}$$

pour un certain $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, M et N). Ainsi, $\|u_{|(n-N,n+N)}\|^2_q = A^2_n + B^2_n + \varepsilon^u_n$ et $\|v_{|(n-N,n+N)}\|^2_q = \tilde{A}^2_n + \tilde{B}^2_n + \varepsilon^v_n$ avec $|\varepsilon^u_n| + |\varepsilon^v_n| \leq Ce^{-l^\beta}$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \mathcal{N} := \|\nabla E_j\|_1 = \displaystyle\sum_{n=-l}^{l} (A^2_n + B^2_n) + \xi_u \\ \tilde{\mathcal{N}} := \|\nabla E_k\|_1 = \displaystyle\sum_{n=-l}^{l} (\tilde{A}^2_n + \tilde{B}^2_n) + \xi_v \end{cases} \tag{3.4.10}$$

avec $|\xi_u| + |\xi_v| \leq Ce^{-l^\beta/2}$. Maintenant, définissons : $\begin{cases} C_n := \dfrac{A_n}{\sqrt{\mathcal{N}}} \quad , \quad \tilde{C}_n := \dfrac{\tilde{A}_n}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}}} \\ D_n := \dfrac{B_n}{\sqrt{\mathcal{N}}} \quad , \quad \tilde{D}_n := \dfrac{\tilde{B}_n}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}}} \end{cases}$. Ainsi,

$$\sum_{n=-l}^{l} C_n^2 + D_n^2 = \sum_{n=-l}^{l} \tilde{C}_n^2 + \tilde{D}_n^2 + O(e^{-l^\beta/2}) = 1 + O(e^{-l^\beta/2}). \tag{3.4.11}$$

Enfin, définissons $U(n) = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$ et $V(n) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{pmatrix}$, prenons $(r_u, \theta_u) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ tel que $U(n) = r_u \begin{pmatrix} \sin\theta_u \\ \cos\theta_u \end{pmatrix}$ et définissons $t_u := \operatorname{sgn}(\tan\theta_u) \inf(|\tan\theta_u|, |\cot\theta_u|)$ et de même pour t_v. La fonction t_u est égale à $\tan\theta_u$ ou $\cot\theta_u$ selon que $|\tan\theta_u| \leq 1$ ou $|\tan\theta_u| \geq 1$. Avec ces notations, l'équation (3.4.3) se réécrit

$$\|r_u - r_v\|_1 \leq Ce^{-l^\beta/2}. \tag{3.4.12}$$

La première partie de la preuve du Lemme 3.28 consiste en le

Lemme 3.30. *Il existe neuf fonctions analytiques réelles $(f_i)_{i\in[\![0,8]\!]}$ (dépendant uniquement de q et N) définies sur $\mathbb{R}^{16N+1}$, l'une d'entre elle au moins n'étant pas constamment nulle, telles que, si u (respectivement v) est une fonction propre 1-normalisée de H_ω associée à $E_j(\omega) \in \left[F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}\right]$ (respectivement associée à $E_k(\omega) \in [G - e^{-l^\beta}, G + e^{-l^\beta}]$), si pour un certain $n_0 \in \mathbb{Z} \cap (-l + 8N, l - 8N)$ nous avons $r_u(n_0) \geq e^{-l^\beta/4}$ et*

$$\forall m \in [\![n_0 - 7N, n_0 + 7N]\!], |r_u(m) - r_v(m)| \leq e^{-l^\beta/2}$$

et si nous définissons les polynômes de degré 8

$$\mathcal{R}_{\hat{\omega}}(X) := \sum_{i=0}^{8} f_i(\hat{\omega}) X^i \text{ and } \mathcal{Q}_{\hat{\omega}}(X) := \sum_{i=0}^{8} f_{8-i}(\hat{\omega}) X^i$$

où nous avons posé $\hat{\omega} := (\omega_{n_0-8N}, \ldots, \omega_{n_0+8N})$, nous avons alors :

$$\text{si } \exists g \in \{\tan, \cot\}, \begin{cases} t_v(n_0) = g(\theta_v(n_0)) \\ t_u(n_0) = g(\theta_u(n_0)) \end{cases}, \text{ alors } |\mathcal{R}_{\hat{\omega}}(t_v(n_0))| \leq e^{-l^\beta/4},$$
$$\text{sinon, nous avons } |\mathcal{Q}_{\hat{\omega}}(t_v(n_0))| \leq e^{-l^\beta/4}.$$

Démonstration. Nous prouverons ce résultat sous les hypothèses $t_u(n_0) = \tan\theta_u(n_0)$ et $t_v(n_0) = \tan\theta_v(n_0)$, c'est-à-dire quand

$$\max(|\tan\theta_u(n_0)|, |\tan\theta_v(n_0)|) \leq 1. \tag{3.4.13}$$

Les modifications à faire dans les autres cas sont mineures. Comme les variables aléatoires sont i.i.d, il suffit de prouver le résultats pour $n_0 = 0$, ce qui sera supposé dans le reste de la preuve. Nous considérerons donc l'équation différentielle

$$\forall x \in (-7N, 7N), y''(x) + V_\omega(x)y(x) = Fy(x), \tag{3.4.14}$$

qui ne dépend que de $(\omega_{-8N}, \ldots, \omega_{8N})$. Supposons que $|r_u(m) - r_v(m)| \leq e^{-l^\beta/2}$ pour $m \in [\![-7N, 7N]\!]$ et supposons que $r_u(0) \geq e^{-l^\beta/4}$. Nous montrons que $t_v(0)$ est presque une racine d'un polynôme dépendant uniquement de $(\omega_{-8N}, \ldots, \omega_{8N})$.

Dans les lignes suivantes ε dénotera un vecteur tel que $\|\varepsilon\| \leq Ce^{-l^\beta/2}$, sa valeur changeant d'une ligne à l'autre. Comme u et v ont des dérivées premières continues, nous avons

$$M^F U(2N) = N^F U(0) + \varepsilon \tag{3.4.15}$$

où $M^F := \begin{pmatrix} e^0_{1,F}(-N) & e^0_{2,F}(-N) \\ (e^0_{1,F})'(-N) & (e^0_{2,F})'(-N) \end{pmatrix}$ et $N^F := \begin{pmatrix} e^0_{1,F}(N) & e^0_{2,F}(N) \\ (e^0_{1,F})'(N) & (e^0_{2,F})'(N) \end{pmatrix}$. Ainsi, si nous posons $T^+_F := (M^F)^{-1}N^F$, nous avons

$$U(2N) = T^+_F\, U(0) + \varepsilon \text{ et } V(2N) = T^+_F\, V(0) + \varepsilon. \tag{3.4.16}$$

En effet, la matrice $(M_F)^{-1}$ dépend uniquement de $(\omega_{-N}, \ldots, \omega_N) \in [-M, M]^{2N+1}$ et est donc bornée uniformément par une constante $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, M et N).

Comme $t_u(0) = \tan\theta_u(0)$, nous calculons

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_u(2N)}{r_u(0)}\right)^2 &= \left\| T^+_F \begin{pmatrix} \sin\theta_u(n) \\ \cos\theta_u(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \epsilon \\ &= \frac{1}{1+t_u(n)^2} \left\| T^+_F \begin{pmatrix} t_u(n) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 + \epsilon,\end{aligned}$$

pour un certain $|\epsilon| \leq Ce^{-l^\beta/4}$. Dans le cas $t_u(0) = \cot\theta_u(0)$, nous calculons

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_u(2N)}{r_u(0)}\right)^2 &= \left\| T^+_F \begin{pmatrix} \sin\theta_u(n) \\ \cos\theta_u(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \epsilon \\ &= \frac{1}{1+t_u(n)^2} \left\| T^+_F \begin{pmatrix} 1 \\ t_u(n) \end{pmatrix} \right\|^2 + \epsilon.\end{aligned}$$

La fonction propre v vérifie la même équation, avec G au lieu de F. Ainsi, l'équation

$$\left| \left(\frac{r_u(2N)}{r_u(0)}\right)^2 - \left(\frac{r_v(2N)}{r_v(0)}\right)^2 \right| \leq Ce^{-l^\beta/4}$$

peut être réécrite

$$\left| \frac{1}{1+t_u(0)^2} \left\| T^+_F \begin{pmatrix} t_u(n) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 - \frac{1}{1+t_v(0)^2} \left\| T^+_G \begin{pmatrix} t_v(n) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \right| \leq Ce^{-l^\beta/4}. \tag{3.4.17}$$

Ainsi, il existe ϵ_1 avec $|\epsilon_1| \leq Ce^{l^\beta/4}$ tel que

$$\frac{1}{1+t_u(0)^2} \left\| T^+_F \begin{pmatrix} t_u(n) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{1+t_v(0)^2} \left\| T^+_G \begin{pmatrix} t_v(n) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 + \epsilon_1. \tag{3.4.18}$$

Maintenant, considérons l'équation $U(-2N) = T^-_F U(n) + \varepsilon$ pour la matrice T^-_F construite de la même manière que T^+_F. Des calculs similaires à ceux amenant à (3.4.18) nous donnent l'existence d'un η_1 avec $|\eta_1| \leq Ce^{l^\beta/4}$ tel que

$$\frac{1}{1+t_u(0)^2} \left\| T^-_F \begin{pmatrix} t_u(0) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{1+t_v(0)^2} \left\| T^-_G \begin{pmatrix} t_v(0) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 + \eta_1. \tag{3.4.19}$$

Définissons alors les polynômes de degré 2

$$P_G(t) := \left\| T_G^+ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad \text{and} \quad Q_G^n := \left\| T_G^- \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

D'après (3.4.13), les équations (3.4.18) et (3.4.19) peuvent être réécrites

$$\begin{aligned} R_1(t_u(0), t_v(0)) := t_u^2(0) &\left[(1 + t_v^2(0)) \left\| T_F^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 - P_G(t_v(0)) \right] \\ &+ 2t_u(0) \left\langle T_F^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T_F^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle (1 + t_v^2(0)) \\ &+ \left[(1 + t_v^2(0)) \left\| T_F^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 - P_G(t_v(0)) \right] = \epsilon_2 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

et

$$\begin{aligned} R_2(t_u(0), t_v(0)) := t_u^2(n) &\left[(1 + t_v^2(0)) \left\| T_F^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 - P_G(t_v(0)) \right] \\ &+ 2t_u(0) \left\langle T_F^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T_F^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle (1 + t_v^2(0)) \\ &+ \left[(1 + t_v^2(0)) \left\| T_F^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 - P_G(t_v(0)) \right] = \eta_2. \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Ainsi, $t_u(0)$ est racine des deux polynômes $t \to R_1(t, t_v(0)) - \epsilon_2$ et $t \to R_2(t, t_v(0)) - \eta_2$. Le résultant de ces deux polynômes doit donc être nul. Tous les coefficients de R_1 et R_2 sont uniformément bornés par rapport à $(\omega_m)_{m \in [\![-N,N]\!]}$. Ainsi, le résultant $\mathcal{R}(t_v(0))$ de $R_1(\,\cdot\,, t_v(0))$ et $R_2(\,\cdot\,, t_v(0))$ est inférieur à $e^{-l^\beta/4}$.

Si nous avons $t_u(0) = \tan\theta_u(0)$ mais $t_v(0) = \cot\theta_v(0)$ au lieu de $t_v(0) = \tan\theta_v(0)$, le résultant $\mathcal{Q}(t)$ obtenu est égal à $t^8\mathcal{R}(1/t)$. Si nous avons $t_u(0) = \cot\theta_u(0)$ et $t_u(0) = \cot\theta_u(0)$ au lieu de $t_u(0) = \tan\theta_u(0)$ et $t_v(0) = \tan\theta_v(0)$, le résultant obtenu est également $\mathcal{R}$.

Maintenant, nous pouvons étudier les paires de fractions $\dfrac{r_u(2iN)}{r_u(0)}$ et $\dfrac{r_u(-2iN)}{r_u(0)}$ pour $i \in \mathbb{N}$ (la construction précédante est alors le cas $n = 1$) et nous construisons $\mathcal{R}_i$ de la même manière que $\mathcal{R}$ mais où les opérateurs $T_j^\pm$ sont remplacés par $(T_{j,i}^\pm)$, en utilisant la continuité des dérivées premières de u et v aux points $\{(2i+1)N, i \in \mathbb{Z}\}$. Les coefficients des résultants ainsi obtenus $(\mathcal{R}_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ sont des fonctions analytiques des $(\omega_{-8N}, \omega_{-8N+1}, \cdots, \omega_{8N})$. Nous allons maintenant prouver que, par rapport aux variables $(\omega_{-8N}, \omega_{-8N+1}, \cdots, \omega_{8N})$, l'un de ces résultants n'est pas constamment le polynôme nul. Nous le ferons sous l'hypothèse supplémentaire $\omega_{-8N} = \omega_{-8N+1} = \cdots = \omega_{8N}$. Sous cette hypothèse nous avons

$$\forall x \in (-7N, 7N),\ V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega_n q(x-n) = \omega_0 \sum_{n \in (x-N, X+N) \cap \mathbb{Z}} q(x-n).$$

Nous nous ramenons donc à l'étude des équations différentielles

$$\forall x \in (-7N, 7N), y''(x) = (\omega_0 \tilde{q}(x) - \bullet)\, y(x) \tag{3.4.22}$$

où $\tilde{q}(x+1) = \tilde{q}(x)$, $\tilde{q} > 0$ sur $(-1/2, 1/2)$ et $\bullet \in \{F, G\}$. Ces équations montrent que dans ce cas, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $\bullet \in \{F, G\}$, nous avons les relations (voir (3.4.16))

$$T^{\pm}_{\bullet,i} = (T^{\pm}_{\bullet})^i \text{ et } T^{-}_{\bullet} = (T^{+}_{\bullet})^{-1}.$$

Nous prouvons maintenant le

Lemme 3.31. *Il existe $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que, pour ω_0 vérifiant $\omega_0\eta > F > G$ (η est défini dans* (3.4.1)*), $\mathcal{R}_{i_0}$ n'est pas le polynôme nul.*

Démonstration. Prenons ω_0 tel que $\omega_0\eta > F > G$. Le fait que $\mathcal{R}_{i_0}$ est le polynôme nul est équivalent au fait que, pour tout $t' \in \mathbb{R}$, les polynômes $R_1(\,\cdot\,, t')$ et $R_2(\,\cdot\,, t')$ ont une racine commune. Ceci est également équivalent au fait que pour toute solution non nulle w de (3.4.22) pour $\bullet = G$, il existe une fonction $z := z(v) \neq 0$ de (3.4.22) pour $\bullet = F$ telle que

$$\left|\left(\frac{r_z(2N)}{r_z(0)}\right)^2 - \left(\frac{r_w(2N)}{r_w(0)}\right)^2\right| + \left|\left(\frac{r_z(-2N)}{r_z(0)}\right)^2 - \left(\frac{r_w(-2N)}{r_w(0)}\right)^2\right| = 0.$$

Maintenant, nous remarquons que r_z et r_w ne changent pas si nous changeons les bases q-orthonormales $(e^n_{1,x}, e^n_{2,x})$ pour $x \in \{F, G\}$ par d'autres bases q-orthonormales de l'espace des solutions de $(\mathcal{E}^n_x)$. Ainsi, si pour $x \in \{F, G\}$, $(f^n_{1,x}, f^n_{2,x})$ sont d'autres bases q-orthonormales de l'espace des solutions de $(\mathcal{E}^n_x)$ et si $(\mathcal{P}_i)_i$ sont les résultants construits de la même manière que $(\mathcal{R}_i)_i$ mais dans les bases $(f^n_{1,x}, f^n_{2,x})_x$, le fait que le résultant $\mathcal{R}_i$ n'est pas le polynôme nul est équivalent au fait que $\mathcal{P}_i$ n'est pas le polynôme nul.

Prenons maintenant des bases q-orthonormales $(f_{1,F}, f_{2,F})$ et $(f_{1,G}, f_{2,G})$ telles que, pour $x \in \{F, G\}$ et $\tilde{q}_s(t) := \tilde{q}(t) + \tilde{q}(1-t)$, nous avons

$$\int_{-N}^{N} f'_{1,x}(t) f'_{2,x}(-t) - f_{1,x}(t) f_{2,x}(-t)(\omega_0 \tilde{q}_s(t) - E_x) = 0. \tag{3.4.23}$$

Nous prenons alors les variables $(r_u, \hat{\theta}_u)$, $(r_v, \hat{\theta}_v)$, les opérateurs $\hat{T}^{\pm}_F$, $\hat{T}^{\pm}_G$ et les résultants $(\hat{\mathcal{R}}_i)_i$ dans les bases $(f_{1,F}, f_{2,F})$ et $(f_{1,G}, f_{2,G})$. D'après (3.4.20) et (3.4.18) (avec $\hat{T}^{\pm}_x$ au lieu de $T^{\pm}_x$), le résultant $\hat{\mathcal{R}}_1$ est un polynôme de degré au plus égal à 8 et le coefficient du monôme de degré 8 est égal au déterminant de la matrice

$$A_1 := \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \Delta_3 & 0 \\ \Pi_+ & \Delta_1 & \Pi_- & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Pi_+ & \Delta_3 & \Pi_- \\ 0 & \Delta_2 & 0 & \Delta_4 \end{pmatrix} \tag{3.4.24}$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} \Delta_1 := \|\hat{T}^+_F(1,0)\|^2 - \|\hat{T}^+_G(1,0)\|^2, \\ \Pi_+ := \left\langle \hat{T}^+_F(1,0), \hat{T}^+_F(0,1) \right\rangle, \\ \Delta_2 := \|\hat{T}^+_F(0,1)\|^2 - \|\hat{T}^+_G(1,0)\|^2, \\ \Delta_3 := \|\hat{T}^-_F(1,0)\|^2 - \|\hat{T}^-_G(1,0)\|^2 \\ \Pi_- := \left\langle \hat{T}^-_F(1,0), \hat{T}^-_F(0,1) \right\rangle, \\ \Delta_4 := \|\hat{T}^-_F(0,1)\|^2 - \|\hat{T}^-_G(1,0)\|^2. \end{cases}$$

De la même manière, posons A_i la matrice dont les coefficients $(\Delta_{m,i})_{m \in [\![1,4]\!]}$ et $\Pi_{\pm,i}$ sont les mêmes que ceux de A_1 mais avec $(\hat{T}^{\pm}_x)^i$ au lieu de $\hat{T}^{\pm}_x$. Le coefficient du monôme de degré 8 de $\hat{\mathcal{R}}_i$ est alors le déterminant de la matrice A_i. Nous montrons maintenant que, d'après (3.4.23), les coefficients des matrices $(A_i)_i$ satisfont une relation de symétrie.

Lemme 3.32. *Prenons $x \in \{F, G\}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, écrivons $\begin{pmatrix} a_x^i & b_x^i \\ c_x^i & d_x^i \end{pmatrix} := (\hat{T}_x^+)^i$. Nous avons alors $(\hat{T}_x^-)^i = (\hat{T}_x^+)^{-i} = \begin{pmatrix} a_x^i & -b_x^i \\ -c_x^i & d_x^i \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Delta_{1,i} = \Delta_{3,i}$, $\Delta_{2,i} = \Delta_{4,i}$ et $\Pi_{+,i} = -\Pi_{-,i}$.*

Démonstration. Commençons par le cas $i = 1$. Nous calculons alors

$$\begin{cases} a_x^1 = f'_{2,x}(-N)f_{1,x}(N) - f_{2,x}(-N)f'_{1,x}(N) \\ b_x^1 = f'_{2,x}(-N)f_{2,x}(N) - f_{2,x}(-N)f'_{2,x}(N) \\ c_x^1 = f'_{1,x}(N)f_{1,x}(-N) - f_{1,x}(1)f'_{1,x}(-N) \\ d_x^1 = f'_{2,x}(N)f_{1,x}(-N) - f_{2,x}(1)f'_{1,x}(-N) \end{cases}. \tag{3.4.25}$$

La matrice $\hat{T}_x^- = (\hat{T}_x^+)^{-1}$ a les mêmes coefficients mais où les arguments N et $-N$ sont échangés. Il reste donc à prouver

$$f'_{2,x}(-N)f_{1,x}(N) - f_{2,x}(N)f'_{1,x}(N) = f'_{2,x}(N)f_{1,x}(-N) - f_{2,x}(N)f'_{1,x}(-N).$$

Pour cela, posons $W(t) = \begin{vmatrix} f_{1,x}(t) & f_{2,x}(-t) \\ f'_{1,x}(t) & f'_{2,x}(-t) \end{vmatrix}$. Nous calculons alors

$$W'(t) = 2f'_{1,x}(t)f'_{2,x}(-t) - f_{1,x}(t)f_{2,x}(-t)(\tilde{q}(t) + \tilde{q}(-t) - 2x).$$

Le cas $i = 1$ est donc une conséquence de (3.4.23). Nous terminons la preuve du Lemme 3.32 par récurrence. □

Reprenons la preuve du Lemme 3.31. D'après le Lemme 3.32, pour $i \in [\![1, 3]\!]$, nous obtenons

$$\det A_i = 4\Pi_{+,i}^2 \Delta_{1,i}\Delta_{2,i}. \tag{3.4.26}$$

Nous utiliserons les Lemmes A.4 et A.5. Les solutions de (3.4.22) sont étendues à $\mathbb{R}$ de manière à satisfaire (A.3.1). Pour $(x, y) \in \{F, G\} \times \{1, 2\}$, notons $\mathcal{F}_{y,x}$ l'extension de $f_{y,x}$ à $\mathbb{R}$, solution de (A.3.1). Les composantes du vecteur $(\hat{T}_x^+)^i(1, 0)$ sont les coordonnées dans la base $(f_{1,x}, f_{2,x})$ de la restriction de $\mathcal{F}_{1,x}$ à $[(2i-1)N, (2i+1)N]$. Le Lemme A.4 nous dit que $\mathcal{F}_{1,x}$ et $\mathcal{F}_{2,x}$ ont au plus un zéro. Comme elles sont q-orthogonales sur $(-N, N)$, nous pouvons supposer que $\mathcal{F}_{2,x}$ s'annule dans $(-N, N)$ et que $\mathcal{F}_{2,x}$ est strictement positive sur (N, ∞) et strictement négative sur $(-\infty, -N)$.

Maintenant, si $\Pi_+ = 0$ $(= -\Pi_-)$, alors $F_{1,x}$ doit avoir un zéro dans $(N, 3N)$ et un autre dans $(-3N, 0)$. Ceci entre en contradiction avec le Lemme A.4. Ainsi, $\Pi_+ \neq 0$. Supposons maintenant que $\mathcal{F}_{1,x}$ s'annule en un point, par exemple dans $[(2m-1)N, (2m+1)N]$. Alors, quitte à changer $\mathcal{F}_{1,x}$ en $-\mathcal{F}_{1,x}$, $\mathcal{F}_{1,x}$ est strictement positive sur $((2m+1)N, \infty)$ et strictement négative sur $(-\infty, (2m-1)N)$. D'après le Lemme 3.32, ceci contredit le fait que

$$\left\langle (\hat{T}_F^+)^m(1, 0), (\hat{T}_F^+)^m(0, 1) \right\rangle = -\left\langle (T_F^-)^m(1, 0), (T_F^-)^m(0, 1) \right\rangle.$$

Ainsi, $\mathcal{F}_{1,x}$ ne s'annule pas et nous pouvons supposer que $\mathcal{F}_{1,x}$ est strictement positive.

Maintenant, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissons $P_i(f)$ comme la restriction de f à $[(2i-1)N, (2i+1)N]$. Alors, comme $\|\hat{T}_{x,i}^{\pm}(1, 0)\| = \|P_{\pm i}(\mathcal{F}_{1,x})\|_q$ (une équation similaire est vérifiée pour $(0, 1)$ au lieu de $(1, 0)$), pour $i \in \{1, 2, 3\}$ nous avons

$$\begin{cases} \Delta_{1,i} = 0 \iff \langle P_i(\mathcal{F}_{1,F} + \mathcal{F}_{1,G}), P_i(\mathcal{F}_{1,F} - \mathcal{F}_{1,G}) \rangle_q = 0 \\ \Delta_{2,i} = 0 \iff \langle P_i(\mathcal{F}_{2,F} + \mathcal{F}_{1,G}), P_i(\mathcal{F}_{2,F} - \mathcal{F}_{1,G}) \rangle_q = 0 \end{cases}. \tag{3.4.27}$$

Pour $(x,y) \in \{1,2\}^2$, nous savons d'après le Lemme A.5 que la fonction $\mathcal{F}_{y,F} - \mathcal{F}_{x,G}$ change de signe au plus trois fois. Nous savons que $\mathcal{F}_{x,F} + \mathcal{F}_{y,G}$ est positive sur $[N,+\infty)$ et négative sur $(-\infty,-N]$. Supposons que pour $i \in \{1,2,3\}$, soit

$$\langle P_i(\mathcal{F}_{1,F} + \mathcal{F}_{1,G}), P_i(\mathcal{F}_{1,F} - \mathcal{F}_{1,G})\rangle_q = 0$$

soit

$$\langle P_i(\mathcal{F}_{2,F} + \mathcal{F}_{1,G}), P_i(\mathcal{F}_{2,F} - \mathcal{F}_{1,G})\rangle_q = 0.$$

Alors, l'une des deux fonctions $\mathcal{F}_{1,F} - \mathcal{F}_{1,G}$ et $\mathcal{F}_{2,F} - \mathcal{F}_{1,G}$ doit s'annuler deux fois dans $(N,7N)$. Par ailleurs, pour $x \in \{F,G\}$, $\|\hat{T}^+_{x,i}X\| = \|\hat{T}^-_{x,i}X\|$. Ainsi, cette même fonction doit également s'annuler deux fois dans $(-7N,-N)$. Ceci entre en contradiction avec le Lemme A.5. Ceci termine la preuve du Lemme 3.31. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du Lemme 3.30. Il existe $(\omega_{-8N},\dots,\omega_{8N})$ tel que l'un des coefficients de $\mathcal{R}_{i_0}$ n'est pas nul. Écrivons alors

$$\mathcal{R}_{i_0}(X) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\omega_{-8N},\dots,\omega_{8N})X^i\,,$$

où les $(f_i)_i$ sont analytiques réelles. L'une des fonctions $(f_i)_i$ n'est donc pas constamment nulle. Par ailleurs, par construction, $|\mathcal{R}_{i_0}(t_v(0))| \le e^{-l^\beta/4}$. Ceci termine la preuve du Lemme 3.30. □

Nous continuons maintenant la preuve du Lemme 3.7. Prenons u (respectivement v) une fonction propre 1-normalisée de H_ω associée à $E_j(\omega) \in \left[F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}\right]$ (respectivement associée à $E_k(\omega) \in [G - e^{-l^\beta}, G + e^{-l^\beta}]$) et supposons que $\|r_u - r_v\|_1 \le e^{-l^\beta/2}$.

Soit $\mathcal{R}_{\hat{\omega}}(X) := \sum_{i=0}^{8} f_i(\omega_{-8N},\cdots,\omega_{8N})\,X^i$ le polynôme donné par le Lemme 3.31 et $i_1 \in [\![0,8]\!]$ le plus grand indice tel que f_i n'est pas constamment nul. D'après la Proposition D.2 et le fait que les variables aléatoires sont presque sûrement bornées par M, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.33. *Soit $\hat{x} := (x_{-8N},\dots,x_{8N})$ et*

$$\mathcal{A} := \left\{\hat{x} \in [-M,M]^{16N+1}, |f_{i_1}(\hat{x})| \le e^{-l^\beta/8}\right\}.$$

Il existe $c \in (0,1)$ (dépendant uniquement de M, $\|q\|_\infty$, et N) tel que, pour l suffisamment grand, nous avons

$$\mathbb{P}\left((\omega_{-8N},\cdots,\omega_{8N}) \in \mathcal{A}\right) \le e^{-cl^\beta}.$$

Sur $\mathcal{A}^c$, posons $(Z_i(\hat{x}))_{i\in[\![1,i_1]\!]} \in \mathbb{C}^{i_1}$ les racines de $\mathcal{R}_{\hat{x}}$, répétées selon leurs multiplicités, et $Z_i = \infty$ pour $i \in [\![i_1,8]\!]$. Les racines de $\mathcal{Q}_x$, défini dans dans le Lemme 3.31, sont alors les inverses des racines $(Z_i)_i$ non nulles, avec la convention $\infty^{-1} = 0$. Nous prouvons maintenant la

Proposition 3.34. *Fixons $\hat{x} \in \mathcal{A}^c$ et supposons que $|\mathcal{R}_{\hat{x}}(t)| \le e^{-l^\beta/4}$ pour un certain $t \in [-1,1]$. Il existe alors $i \in [\![1,i_1]\!]$ tel que*

$$|t - Z_i(\hat{x})| \le e^{-l^\beta/64}.$$

Démonstration. Fixons $\hat{x} \in \mathcal{A}^c$ et écrivons

$$|\mathcal{R}(t)| = |f_{i_1}(\hat{x})| \prod_{i=1}^{i_1} |t - Z_i(\hat{x})| \leq e^{-l^\beta/4}.$$

Comme $|f_i(\hat{x})| \geq e^{-l^\beta/8}$ et $i_1 \leq 8$, un des termes du produit doit satisfaire

$$|t - Z_i(\hat{x})| \leq e^{-l^\beta/64}.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.34 □

Notons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ nous avons $|t - \Re(z)| \leq |t - z|$. Maintenant, supposons par exemple que $r_v(0)$, $r_v(-8N-1)$ et $r_v(8N+1)$ sont tous supérieur ou égal à $e^{-l^\beta/4}$ et supposons que $\Omega_- := (\omega_{-16N-1}, \cdots, \omega_{-1}) \in \mathcal{A}^c$ et $\Omega_+ := (\omega_1, \cdots, \omega_{16N+1}) \in \mathcal{A}^c$. Le Lemme 3.30 nous dit que

$$\left|\bullet_{\Omega_-}(t_v(-8N-1))\right| + \left|\Diamond_{\Omega_+}(t_v(8N+1))\right| \leq e^{-l^\beta/4}$$

pour certains $(\bullet, \Diamond) \in \{\mathcal{R}, \mathcal{Q}\}^2$, selon que $t_\square = \tan(\theta_\square)$ ou $t_\square = \cot(\theta_\square)$ pour $\square \in \{u, v\}$. Comme Ω_- et Ω_+ appartiennent à $\mathcal{A}^c$, il existe $(i_-, i_+) \in [\![1, 8]\!]^2$ tel que

$$\left|t_v(-8N-1) - \Re\left(Z^*_{i_-}(\Omega_-)\right)\right| + \left|t_v(8N+1) - \Re\left(Z^\sharp_{i_+}(\Omega_+)\right)\right| \leq e^{-l^\beta/64},$$

pour certains $(*, \sharp) \in \{1, -1\}^2$, selon que $t_\square = \tan(\theta_\square)$ ou $t_\square = \cot(\theta_\square)$ pour $\square \in \{u, v\}$. Dans le reste de la preuve, nous utiliserons la même notation θ pour la classe de θ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Nous munissons $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ de la distance usuelle, que nous noterons d, obtenue à partir de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

En définissant $\Theta_{i,1}(\Omega_\pm) := \arctan\left(\Re\left[Z_i(\Omega_\pm)\right]\right)$, et $\Theta_{i,-1}(\Omega_\pm) := \cot^{-1}\left(\Re\left[Z_i^{-1}(\Omega_\pm)\right]\right)$, nous obtenons

$$d(\theta_v(-8N-1), \Theta_{i_-,\star}(\Omega_-)) + d(\theta_v(8N+1), \Theta_{i_+,\sharp}(\Omega_+)) \leq Ce^{-l^\beta/64}. \tag{3.4.28}$$

Maintenant, comme $\theta_v(-8N-1)$ représente la direction d'une solution de $(\mathcal{E}_G^{-8N-1})$ proche de v, nous déduirons de (3.4.28) que la direction du vecteur $(v(-8N-1), v'(-8N-1))$ est presque fixe. Dans ce contexte, nous prenons les variables de Prüfer $(R_v(.), \psi_v(.)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = R_u(t) \begin{pmatrix} \sin(\psi_v(t)) \\ \cos(\psi_v(t)) \end{pmatrix}$$

et définissons les matrices $\mathcal{A}_n := \begin{pmatrix} e^n_{1,G}(0) & e^n_{2,G}(0) \\ (e^n_{1,G})'(0) & (e^n_{2,G})'(0) \end{pmatrix}$. Nous utiliserons également l'homéomorphisme bi-lipschitzien $\Upsilon : \theta \in \mathbb{T} \to S^1/\{1, -1\}$ (S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$), défini à partir de la fonction $\theta \mapsto (\sin\theta, \cos\theta)$, où nous avons munis le quotient $S^1/\{1, -1\}$ de la distance obtenue à partir de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Nous prouvons maintenant le

Proposition 3.35. *Supposons que $r_v(n) \geq e^{-l^\beta/2}$ et supposons qu'il existe $\Theta \in \mathbb{T}$ tel que $d(\theta_v(n); \Theta) \leq e^{-l^\beta/64}$. Il existe alors $C > 1$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, N et M) tel que $R_u(n) \geq \dfrac{1}{C} r_v(n)$ et il existe $\Psi \in \mathbb{T}$ (dépendant uniquement de Θ) tel que $d(\psi_v(n); \Psi) \leq Ce^{-l^\beta/32}$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $n = 0$. Par définition (voir (3.4.9)), nous avons pour $x \in (-N, N)$

$$v(x) = \tilde{A}_0\, e^0_{1,G}(x) + \tilde{B}_0\, e^0_{2,G}(x) + \epsilon^0_v(x)$$

avec $\epsilon^0_v(0) = (\epsilon^0_v)'(0) = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = r_v(0)\tilde{\mathcal{N}}\mathcal{A}_0 \begin{pmatrix} \sin(\theta_v(0)) \\ \cos(\theta_v(0)) \end{pmatrix}$$

Nous savons que la matrice $\mathcal{A}_0$ dépend uniquement de $(\omega_{-N}, \cdots, \omega_N)$ et que $\det(\mathcal{A}_0) \neq 0$. Il existe donc $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, N and M), tel que

$$\forall (\omega_{-N}, \cdots, \omega_N) \in [-M, M]^{2N+1},\ |\det(\mathcal{A}_0)| \geq \frac{1}{C}.$$

Ainsi, en posant $X := \begin{pmatrix} \sin(\theta_v(0)) \\ \cos(\theta_v(0)) \end{pmatrix}$, nous avons $\frac{1}{C} \leq \|\mathcal{A}_0 X\| \leq C$. Comme $r_v(0) \geq e^{-l^\beta/2}$, pour l assez grand, nous obtenons $R_v(0) \geq \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{C} r_v(0)$.

Maintenant, nous savons que

$$\begin{pmatrix} \sin(\psi_v(0)) \\ \cos(\psi_v(0)) \end{pmatrix} = \frac{r_v(0)}{R_v(0)} \mathcal{A}_0 X.$$

Ainsi, en posant $Y := \frac{r_v(0)\tilde{\mathcal{N}}}{R_v(0)} \mathcal{A}_0 X$, nous avons $\|Y\| = 1$ et

$$\psi_v(0) = \Upsilon^{-1}(Y) = \Upsilon^{-1}\left(\frac{A_0 X}{\|A_0 X\|}\right). \tag{3.4.29}$$

Par définition, $X \in S^1$ est un représentant de $\Upsilon(\theta_v(0))$ et nous pouvons choisir un représentant $\tilde{X} \in S^1$ de $\Upsilon(\Theta)$ satisfaisant $\|X - \tilde{X}\| \leq e^{-l^\beta/64}$. Nous avons alors $\|\mathcal{A}_0(X - \tilde{X})\| \leq Ce^{-l^\beta/64}$ puis $\left\| \frac{\mathcal{A}_0 X}{\|\mathcal{A}_0 X\|} - \frac{\mathcal{A}_0 \tilde{X}}{\|\mathcal{A}_0 \tilde{X}\|} \right\| \leq Ce^{-l^\beta/64}$. Nous définissons alors $\Psi := \Upsilon^{-1}\left(\frac{\mathcal{A}_0 \tilde{X}}{\|A_0 \tilde{X}\|}\right)$ et obtenons

$$d(\psi_v(0), \Psi) \leq Ce^{-l^\beta/64}.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.35. □

D'après la Proposition 3.35 et l'équation (3.4.28), il existe $\Psi_{i_-,\star}(\Omega_-)$ et $\Psi_{i_+,\sharp}(\Omega_+)$ tels que

$$d(\psi_v(-8N-1), \Psi_{i_-,\star}(\Omega_-)) + d(\psi_v(8N+1), \Psi_{i_+,\sharp}(\Omega_+)) \leq Ce^{-l^\beta/64}. \tag{3.4.30}$$

Nous utiliserons la

Proposition 3.36. *Soit W une fonction bornée sur un intervalle $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$. Soient (h_1, h_2) les solutions de l'équation différentielle*

$$\forall x \in (x_1, x_2),\ -y''(x) + W(x)y(x) = 0\,, \tag{3.4.31}$$

satisfaisant $h_1(x_1) = h_2'(x_1) = 1$ *et* $h_1'(x_1) = h_2(x_1) = 0$. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *définissons* $y_\theta := \sin(\theta)h_1 + \cos(\theta)h_2$. *L'opérateur*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{x_1,x_2,W} \ : \ & \mathbb{T} \to \mathbb{T} \\ & \Theta \mapsto \Upsilon^{-1}\left[\frac{1}{[y_\Theta(x_2)]^2 + [y_\Theta'(x_2)]^2}\begin{pmatrix} y_\Theta(x_2) \\ y_\Theta'(x_2)\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

est alors bien défini et lipschitzien avec constante de Lipschitz dépendant uniquement de $\|W\|_\infty$ *et* $|x_1 - x_2|$. *De plus, il existe* $C > 0$ *(dépendant uniquement de* $\|W\|_\infty$ *et* $|x_1 - x_2|$*) tel que, pour tout* $0 < \epsilon < 1$ *et* $\tilde{W}$ *vérifiant* $\|\tilde{W} - W\|_\infty \leq \epsilon$, *nous avons*

$$\sup_{\Theta \in \mathbb{T}} d\big(\mathcal{T}_{x_1,x_2,W}(\Theta), \mathcal{T}_{x_1,x_2,\tilde{W}}(\Theta)\big) \leq C\epsilon.$$

Remarque 3.37. Nous repoussons la preuve de la Proposition 3.36 à la fin de la section et terminons la preuve du Lemme 3.28, mais en premier lieu, nous faisons une remarque. La classe $\mathcal{T}_{x_1,x_2,W}(\Theta)$ est la direction du vecteur $(y(x_2), y'(x_2))$ où y peut être toute solution non nulle de l'équation différentielle

$$\forall x \in (x_1, x_2),\ -y''(x) + W(x)y(x) = 0\,,$$

telle que la direction de $(y(x_1), y'(x_1))$ est égale à la classe Θ.

Maintenant, comme le potentiel V_ω dépend uniquement de $(\omega_{-9N-1}, \cdots, \omega_{-1})$ (qui sont fixes car Ω_- est fixe) sur l'intervalle $(-8N-1, -N)$, en prenant $\Phi_{i_-,\star}(\Omega_-) := \mathcal{T}_{-8N-1,-N,V_\omega - G}\left(\Psi_{i_-,\star}(\Omega_-)\right)$, nous avons

$$d\big(\psi_v(-N), \Phi_{i_-,\star}(\Omega_-)\big) \leq Ce^{-l^\beta/64}. \tag{3.4.32}$$

De la même manière, il existe $\Phi_{i_+,\sharp}(\Omega_+)$ tel que

$$d\big(\psi_v(N), \Phi_{i_+,\sharp}(\Omega_+)\big) \leq Ce^{-l^\beta/64}. \tag{3.4.33}$$

Par définition, nous avons $\psi_v(N) = \mathcal{T}_{-N,N,V_\omega - E_k(\omega)}\left(\psi_v(-N)\right)$. Ainsi, comme $|G - E_k(\omega)| \leq e^{-l^\beta}$, nous déduisons de la Proposition 3.36 que

$$d\big(\psi_v(N), \mathcal{T}_{-N,N,V_\omega - G}\left(\psi_v(-N)\right)\big) \leq Ce^{-l^\beta/64}$$

et finalement

$$d\big(\Phi_{i_+,\sharp}(\Omega_+), \mathcal{T}_{-N,N,V_\omega - G}\left(\Phi_{i_-,\star}(\Omega_-)\right)\big) \leq Ce^{-l^\beta/64}. \tag{3.4.34}$$

Maintenant, comme Ω_- et Ω_+ sont fixes, nous pouvons réécrire le potentiel aléatoire V_ω sur $(-N, N)$:

$$\forall x \in (-N, N),\ V_\omega(x) := V(x) + \omega_0 q(x)$$

où V est une fonction déterministe. Ainsi, l'équation (3.4.34) dit approximativement que l'image par la fonction aléatoire $\mathcal{T}_{\omega_0} := \mathcal{T}_{-N,N,W+\omega_0 q}$ de la direction fixe $\Phi_{i_-,\star}(\Omega_-)$ est presque fixe. Ceci est une condition sur les $32N + 3$ variables aléatoires consécutives $(\Omega_-, \omega_0, \Omega_+)$ et le lemme suivant montre que cette condition arrive avec probabilité exponentiellement faible.

Lemme 3.38. *Il existe* $\epsilon_0 > 0$ *et* $m > 1$ *tels que, pour tous* $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $(\Theta_1, \Theta_2) \in \mathbb{T}^2$ *et* $(\Omega_-, \Omega_+) \in [-M, M]^{32+2}$, *si* $\hat{\mathbb{P}}_{\epsilon,\Theta_1,\Theta_2,\Omega_-,\Omega_+}$ *dénote la probabilité que* $d(\mathcal{T}_{\omega_0}(\Theta_1), \Theta_2) \leq \epsilon$, *nous avons*

$$\hat{\mathbb{P}}_{\epsilon,\Theta_1,\Theta_2,\Omega_-,\Omega_+} \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/m}.$$

Nous repoussons la preuve de ce lemme à la fin de la section et terminons la preuve du Lemme 3.7. Comme u est normalisée et comme r_u est au plus exponentiellement croissante, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall n \in [\![n_0 - l^\beta, n_0 + l^\beta]\!] \cap \Lambda_l,\ r_u(n) \geq e^{-l^\beta/4}. \tag{3.4.35}$$

Notons que n_0 est aléatoire et qu'il existe au plus l choix pour n_0. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\forall n \in (-l,l) \cap \mathbb{Z}, |r_u(n) - r_v(n)| \leq e^{-l^\beta}\right) \\
&\qquad \leq l \cdot \sup_{n_0 \in (-l,l)\cap\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(\forall n \in (n_0 - l^\beta, n_0 + l^\beta) \cap \mathbb{Z}, \begin{array}{c} |r_u(n) - r_v(n)| \leq e^{-l^\beta/2} \\ \text{et } r_u(n) \geq e^{-l^\beta/42} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Prenons maintenant $n_0 \in (-l,l) \cap \mathbb{Z}$. Pour simplifier les notations, supposons que $n_0 = 0$. Définissons $K := \left\lfloor l^\beta/(32N+3) \right\rfloor$ puis

$$I := \bigsqcup_{j=-K}^{K} [\![(2j-1)(16N+1), (2j+1)(16N+1)]\!] =: \bigsqcup_{j=-K}^{K} J_j \subset (-l^\beta, l^\beta).$$

Ainsi, si $m_j := 2j(16N+1)$ nous avons $J_j = [\![m_j - 16N - 1, m_j + 16N + 1]\!]$. Définissons alors l'évènement $\mathcal{B}_j := \left\{\omega;\ \forall n \in J_j,\ \begin{array}{c} |r_u(n) - r_v(n)| \leq e^{-l^\beta/2} \\ \text{et } r_u(n) \geq e^{-l^\beta/4} \end{array}\right\}$ et définissons

$$\begin{aligned}
\Omega_j^- &:= \left(\omega_{m_j - 16N - 1}, \cdots, \omega_{m_j - 1}\right), \\
\Omega_j^+ &:= \left(\omega_{m_j + 1}, \cdots, \omega_{m_j + 16N + 1}\right).
\end{aligned}$$

Le Lemme 3.31 nous donne alors l'inclusion

$$\mathcal{B}_j \subset \left\{\omega; \exists(\bullet, \Diamond) \in \{\mathcal{R}, \mathcal{Q}\}^2,\ \begin{array}{c} \left|\bullet_{\Omega_j^-}\left[t_v(m_j - 8N - 1)\right]\right| \leq e^{-l^\beta/4} \\ \left|\Diamond_{\Omega_j^+}\left[t_v(m_j + 8N + 1)\right]\right| \leq e^{-l^\beta/4} \end{array}\right\}.$$

Maintenant, d'après les équations (3.33) et (3.4.28), nous obtenons que $\mathcal{B}_j$ est inclu dans

$$\left\{\omega;\ \begin{array}{c} \Omega_j^- \in \mathcal{A} \text{ ou } \Big[\Omega_j^- \in \mathcal{A}^c \text{ et} \\ \exists(i,*) \in [\![1,8]\!] \times \{-1,1\}, d(\theta_v(m_j - 8N - 1), \Theta_{i,\star}(\Omega_j^-)) \leq Ce^{-l^\beta/64}\ \Big], \\ \Omega_j^+ \in \mathcal{A} \text{ ou } \Big[\Omega_j^+ \in \mathcal{A}^c \text{ et} \\ \exists(i',\sharp) \in [\![1,8]\!] \times \{-1,1\}, d(\theta_v(m_j + 8N + 1), \Theta_{i,\sharp}(\Omega_j^+)) \leq e^{-l^\beta/64}\ \Big] \end{array}\right\}.$$

Finalement, en utilisant les notations de (3.4.34), nous avons $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{C}_j$ où

$$\mathcal{C}_j := \left\{\omega;\ \begin{array}{c} \Omega_j^- \in \mathcal{A} \text{ ou } \Omega_j^+ \in \mathcal{A} \text{ ou } \Big[(\Omega_j^-, \Omega_j^+) \in (\mathcal{A}^c)^2 \text{ et } \exists(i,i') \in [\![1,8]\!]^2, \\ \exists(*,\sharp) \in \{-1,1\}^2,\ d(\mathcal{T}_{\omega_{m_j}}(\Phi_{i,\star}(\Omega_j^-)), \Phi_{i,\sharp}(\Omega_j^+)) \leq Ce^{-l^\beta/64} \end{array}\right\}.$$

Pour résumer, nous avons prouvé que

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in [\![-16N+1, 16N+1]\!], \left|\frac{r_u(n)}{r_u(0)} - \frac{r_v(n)}{r_v(0)}\right| \leq e^{-l^\beta/4}\right)$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=-K}^{K} \mathcal{B}_j\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=-K}^{K} \mathcal{C}_j\right) \leq \prod_{j=-K}^{K} \mathbb{P}\left(C_j\right), \quad (3.4.36)$$

car les évènements $(\mathcal{C}_j)_j$ sont indépendants. Maintenant, d'après la Proposition 3.33 et le Lemme 3.38, il existe $\tilde{c} \in (0,1)$ et $C > 1$ tels que, pour tout j, nous avons

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_j) \leq Ce^{-\tilde{c}l^\beta}. \quad (3.4.37)$$

Ainsi, comme $K \asymp l^\beta$, nous avons pour l assez grand

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in [\![-16N-2, 16N+2]\!], \left|\frac{r_u(n)}{r_u(0)} - \frac{r_v(n)}{r_v(0)}\right| \leq e^{-l^\beta/2}\right)$$
$$\leq \left(Ce^{-\tilde{c}l^\beta}\right)^{2K+1} \leq e^{-\hat{c}l^{2\beta}}, \quad (3.4.38)$$

pour un certain $0 < \hat{c} < \tilde{c}$. Il reste donc à prouver la Proposition 3.36 et le Lemme 3.38 pour terminer la preuve du Lemme 3.28.

Preuve de la Proposition 3.36. Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ et prenons y_θ comme dans l'énoncé. Nous avons alors

$$Y_\theta := \begin{pmatrix} y_\theta(x_2) \\ y'_\theta(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x_2) & h_2(x_2) \\ h'_1(x_2) & h'_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\det \mathcal{H} = 1$. Comme h_1 et h_2 sont solutions de (3.4.31), il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|W\|$ et $|x_2 - x_1|$) tel que $\max\{\|H\|, \|H^{-1}\|\} \leq C$. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ nous avons $\|Y_\theta\| \geq \dfrac{1}{C}$, d'où $\Xi_\theta := \dfrac{Y_\theta}{\|Y_\theta\|} \in S^1$. De plus, $y_\theta = -y_{\theta+\pi}$ donc $\Xi_\theta = -\Xi_{\theta+\pi}$ et $\mathcal{T}_{x_1,x_2,W}$ est bien défini.

Maintenant, la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto Y_\theta \in \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne et $C \geq \|Y_\theta\| \geq \dfrac{1}{C}$ pour tout θ. La fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \Xi_\theta \in S^1$ est donc lipschitzienne. Ainsi, le fait que $\mathcal{T}_{x_1,x_2,W}$ est lipschitzien vient du fait que Υ^{-1} l'est également.

Enfin, prenons $\tilde{W}$ tel que $\|\tilde{W} - W\|_\infty \leq \epsilon < 1$ et fixons $\theta \in \mathbb{R}$. Nous utiliserons les mêmes notations que précédemment pour $\tilde{W}$, mais avec le symbole $\tilde{\cdot}$. Par exemple, (h_1, h_2) sont les solutions fondamentales de (3.4.31) pour W, $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ sont les solutions fondamentales pour $\tilde{W}$ et nous avons

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1(x_2) & h_2(x_2) \\ h'_1(x_2) & h'_2(x_2) \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(x_2) & \tilde{h}_2(x_2) \\ \tilde{h}'_1(x_2) & \tilde{h}'_2(x_2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous savons que $\|\mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}\| \leq C\epsilon$ pour un certain C dépendant uniquement de $\|W\|$ et $|x_2 - x_1|$. Il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\|Y_\theta - \tilde{Y}_\theta\| \leq C\epsilon \text{ et } \frac{1}{C} \leq \min\{\|Y_\theta\|, \|\tilde{Y}_\theta\|\} \leq \max\{\|Y_\theta\|, \|\tilde{Y}_\theta\|\} \leq C$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, nous obtenons $\|\Xi_\theta - \tilde{\Xi}_\theta\| \leq C\epsilon$. Nous concluons en utilisant le fait que Υ^{-1} est lipschitzien. Ceci termine la preuve de la Proposition 3.36. □

Preuve du Lemme 3.38. Pour tout $(\Theta_1, \Omega_-, \Omega_+)$, prenons y_{θ_1} comme dans la Proposition 3.36 (avec $x_1 = -N$ et $x_2 = N$ et $W = V + \omega_0 q$), où θ_1 est un représentant de Θ_1. Notons alors $\mathcal{D}_{\Theta_1,\Omega_-,\Omega_+}(\omega_0)$ la classe dans $S^1/\{-1,1\}$ du point

$$D_{\theta_1,\Omega_-,\Omega_+}(\omega_0) := \frac{1}{\|(y_{\theta_1}(N), y'_{\theta_1}(N))\|} \begin{pmatrix} y_{\theta_1}(N) \\ y'_{\theta_1}(N)) \end{pmatrix},$$

représentant la direction du vecteur non nul $(y_{\theta_1}(N), y'_{\theta_1}(N))$ et notons $\mathcal{D}_{\Theta_2} := \Upsilon(\Theta_2)$, la classe du point $D_{\theta_2} = (\sin\theta_2, \cos\theta_2)$ où θ_2 est un représentant de Θ_2. Nous avons alors

$$\hat{\mathbb{P}}_{\epsilon,\Theta_1,\Theta_2,\Omega_-,\Omega_+} \leq \mathbb{P}\left(\|D_{\theta_1,\Omega_-,\Omega_+}(\omega_0) - D_{\theta_2}\| \leq \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\|D_{\theta_1,\Omega_-,\Omega_+}(\omega_0) + D_{\theta_2}\| \leq \epsilon\right).$$

Commençons par montrer que le vecteur non nul $(y_{\theta_1}(N), y'_{\theta_1}(N))$, analytique en $(\theta_1, \Omega_-, \Omega_+, \omega_0)$, et 2π-périodique en θ_1 n'est localement pas de direction constante selon la dernière coordonnée. Comme $q \geq 0$ et q est minorée par une constante strictement positive sur un intervalle de longueur strictement positive, ceci est prouvé par la théorie de Sturm-Liouville (voir [Zet05, Section 4.5]). En effet, il existe des variables de Prüfer $(R(t), \phi(t))$ telles que $\begin{pmatrix} y_{\theta_1}(t) \\ y'_{\theta_1}(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix}$, telles que $\phi(-N) = \theta_1$ et telles que $\phi(N)$ est une fonction strictement croissante de ω_0.

Maintenant, les applications

$$(\phi_1, \phi_2, \Gamma_-, \Gamma_+, \omega_0) \mapsto \left\|D_{\phi_1,\Gamma_-,\Gamma_+}(\omega_0) - D_{\phi_2}\right\|_2^2,$$

et

$$(\phi_1, \phi_2, \Gamma_-, \Gamma_+, \omega_0) \mapsto \left\|D_{\phi_1,\Gamma_-,\Gamma_+}(\omega_0) + D_{\phi_2}\right\|_2^2,$$

sont analytiques, 2π-périodiques en ϕ_1 et ϕ_2, et ne sont pas constamment nulles. De plus, pour tout $(\phi_1, \phi_2, \Gamma_-, \Gamma_+, \omega_0)$, ces applications ne sont localement pas constamment nulles dans la direction de la dernière coordonnée. La Proposition D.3 nous donne alors l'existence de $C > 1$ et $m > 1$, tels que

$$\hat{\mathbb{P}}_{\epsilon,\Theta_1,\Theta_2,\Omega_-,\Omega_+} \leq \frac{1}{C}\epsilon^{1/m}. \tag{3.4.39}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 3.38 □

3.5 Estimations de décorrélation pour les modèles de type multimère

Rappelons le modèle considéré dans cette section. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et définissons sur $\mathbb{Z}$ la suite

$$\forall m \in [\![kn, k(n+1) - 1]\!], u_\omega(m) = \omega_n.$$

La suite u_ω prend k fois consécutivement la même valeur ω_n. Fixons maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite k-périodique de nombres réels strictement positifs . Définissons alors le potentiel aléatoire sur $\mathbb{Z}$

$$V_\omega(m) = a_m u_\omega(m). \tag{3.5.1}$$

Le potentiel est presque surement borné par une borne uniforme. Nous considérons donc l'opérateur auto-adjoint $H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, défini presque surement par

$$\forall \phi \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ H_\omega \phi = -\Delta_b \phi + V_\omega \phi. \tag{3.5.2}$$

Dans cette section, nous prouvons les estimations de décorrélation pour les modèles de type multimère. Nous prouvons donc

Théorème 3.39. *Soit $\beta \in (1/2, 1)$. Pour $\alpha \in (0,1)$ et $F \neq G$, pour tout $k > 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour L suffisamment grand et $kL^\alpha \leq l \leq L^\alpha/k$, nous avons*

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} tr\,\mathbf{1}_{[F-L^{-1},F+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0, \\ tr\,\mathbf{1}_{[G-L^{-1},G+L^{-1}]}(H_\omega(\Lambda_l)) \neq 0 \end{pmatrix} \leq C\left(\frac{l^2}{L^{4/3}}\right)e^{(\log L)^\beta}.$$

Cette preuve suit celle donnée dans la première section, seule la preuve du Lemme 3.7 change. Ainsi, nous prouvons dans cette section le

Lemme 3.40. *Soient $F, G \in \mathbb{R}^2$ avec $F \neq G$ et $\beta > 1/2$. Notons $\mathbb{P}$ la probabilité que $H_\omega(\Lambda_l)$ a deux valeurs propres, notées $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$, l'une dans l'intervalle $[F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}]$ l'autre dans l'intervalle $[G - e^{-l^\beta}, G + e^{-l^\beta}]$ et qu'en plus*

$$\left\| \frac{\nabla_\omega(E_j(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_j(\omega))\|_1} \pm \frac{\nabla_\omega(E_k(\omega))}{\|\nabla_\omega(E_k(\omega))\|_1} \right\|_1 \leq e^{-l^\beta}. \tag{3.5.3}$$

Il existe alors $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \leq e^{-cl^{2\beta}} \tag{3.5.4}$$

Dans le cas où $\Delta_b = \Delta$ il est possible de reprendre la preuve faite dans la Section 3.4, aux modifications dues au modèles près, en utilisant les résultats de l'annexe B. La preuve dans le cas général suit tout de même celle donnée pour le modèle continu dans la section précédente. Nous ne prouvons ici que les parties qui nécessitent des modifications.

Nous commençons ici également par des notations, équivalentes discrètes de celles données dans la section précédente. Sur $\ell^2([\![0, N-1]\!])$ nous définissons le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_a = \sum_{m=0}^{N-1} a_m f(m) g(m) \tag{3.5.5}$$

Nous noterons $\|.\|_a$ la norme correspondante. Nous dirons que deux vecteurs f et g sont a-orthogonaux si $\langle f, g\rangle_a = 0$. La notion de 1-orthogonalité est la notion d'orthogonalité usuelle sur $\ell^2([\![1, l-1]\!])$. Dans cette section également, $M > 0$ sera fixé de sorte à ce que les variables aléatoires $(\omega_i)_i$ soient presque sûrement bornées par M.

Soit u et v deux vecteurs propres 1-normalisés de $H_\omega(\Lambda_l)$ associés aux valeurs propres $E_j(\omega)$ et $E_k(\omega)$. Ces valeurs propres sont, presque surement, simples et nous calculons, d'après la Proposition 3.44 :

$$\partial_{\omega_n} E_j(\omega_n) = \langle (\partial_{\omega_n} H_\omega)\, u, u\rangle_1 = \sum_{m=0}^{N-1} a_n u^2(m + Nn). \tag{3.5.6}$$

L'équation (3.5.6) se réécrit donc :

$$\partial_n E_j(\omega) = \|u_{|[\![Nn, Nn+k-1]\!]}\|_a^2. \tag{3.5.7}$$

La suite $(a_n)_n$ est périodique et ses termes sont tous strictement positifs. Il existe donc $C > 0$, dépendant uniquement de la suite $(a_n)_n$N, tel que

$$\|\nabla_\omega E_j(\omega)\| \in \left[\frac{1}{C}, C\right].$$

Sur $\mathbb{R}^N$ nous définissons le plan $\mathcal{P}_F^n$ défini par $\forall m \in [\![1, N-2]\!]$,

$$b_{m+1} y(m+1) + b_m y(m-1) + (a_m \omega_n - F) y(m) = 0. \tag{3.5.8}$$

La suite u vérifie pour tout $m \in [\![Nn, Nn+N-1]\!]$ l'équation suivante :

$$b_{m+1}u(m+1) + b_m u(m-1) + (a_n\omega_n - F)y(m) = (E_j(\omega) - F)y(m) \tag{3.5.9}$$

avec $|E_j(\omega) - F| \leq e^{-l^\beta}$ et v vérifie la même équation avec (E_k, G) au lieu de (E_j, F). Ainsi, il existe deux couples uniques $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$ et $(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $m \in [\![Nn, Nn+N-1]\!]$, nous avons

$$\begin{cases} u(m) := A_n e^n_{1,F}(m-Nn) + B_n e^n_{2,F}(m-Nn) + \epsilon^n_u(m-Nn) \\ v(m) = \tilde{A}_n e^n_{1,G}(m-Nn) + \tilde{B}_n e^n_{2,G}(m-Nn) + \epsilon^n_v(m-Nn) \end{cases}, \tag{3.5.10}$$

avec $\epsilon^n_\bullet(0) = \epsilon^n_\bullet(1) = 0$. Notons que $\|\epsilon^n_u\|_\infty + \|\epsilon^n_v\|_\infty \leq Ce^{-l^\beta}$ pour un certain C dépendant uniquement de $\|a\|_\infty$, M et N. Nous avons donc $\|u_{|[\![Nn,Nn+N-1]\!]}\|^2_a = A^2_n + B^2_n + \varepsilon^n_u$ et $\|v_{|[\![kn,kn+k-1]\!]}\|^2_a = \tilde{A}^2_n + \tilde{B}^2_n + \varepsilon^n_v$ avec $|\varepsilon^n_u| + |\varepsilon^n_v| \leq Ce^{-l^\beta}$. Ainsi,

$$\begin{cases} \mathcal{N} := \|\nabla E_j\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{l}(A^2_n + B^2_n) + \xi_u \\ \tilde{\mathcal{N}} := \|\nabla E_k\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{l}(\tilde{A}^2_n + \tilde{B}^2_n) + \xi_v \end{cases}. \tag{3.5.11}$$

Définissons maintenant : $\begin{cases} C_n := \dfrac{A_n}{\sqrt{\mathcal{N}}} \quad , \quad \tilde{C}_n := \dfrac{\tilde{A}_n}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}}} \\ D_n := \dfrac{B_n}{\sqrt{\mathcal{N}}} \quad , \quad \tilde{D}_n := \dfrac{\tilde{B}_n}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}}} \end{cases}$. Nous avons alors

$$\sum_{n=1}^{l} C^2_n + D^2_n = \sum_{n=1}^{l} \tilde{C}^2_n + \tilde{D}^2_n + O(e^{-l^\beta/2}) = 1 + O(e^{-l^\beta/2}). \tag{3.5.12}$$

Posons $U(n) = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$ et $V(n) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{pmatrix}$, définissons les suites $(r_u(n), \theta_u(n)) \in \mathbb{R}^*_+ \times [0, 2\pi)$ telles que $U(n) = r_u(n)\begin{pmatrix} \sin\theta_u(n) \\ \cos\theta_u(n) \end{pmatrix}$ puis définissons comme dans la section précédente $t_u := \operatorname{sgn}(\tan\theta_u)\inf\left(|\tan\theta_u|, \dfrac{1}{|\tan\theta_u|}\right)$ et de même pour t_v. Avec ces notations, l'équation (3.5.3) se réécrit

$$\|r_u - r_v\|_1 \leq e^{-l^\beta/2}. \tag{3.5.13}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [\![0, N-1]\!]$ prenons

$$P_{n,F,m} := \frac{1}{b_{Nn+m+1}}\begin{pmatrix} F - a_m\omega_n & -b_{Nn+m} \\ b_{Nn+m+1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.14}$$

la matrice de transfert à un pas pour (3.5.2) allant de $\{Nn+m, Nn+m-1\}$ à $\{Nn+m+1, Nn+m\}$.

Comme dans la Section 3.4, dans les lignes suivantes, ε dénotera un vecteur vérifiant $\|\varepsilon\| \leq Ce^{-l^\beta/2}$, sa valeur changeant d'une ligne à l'autre. Pour tout $n \in [\![1, \ldots, l]\!]$, nous avons

$$M^F_{n+1}U(n+1) = A^F_n N^F_n U(n) + \varepsilon$$

où $M_n^F := \begin{pmatrix} e_{1,F}^n(1) & e_{2,F}^n(1) \\ e_{1,F}^n(0) & e_{2,F}^n(0) \end{pmatrix}$, $N_n^j := \begin{pmatrix} e_{1,F}^n(N-1) & e_{2,F}^n(N-1) \\ e_{1,F}^n(N-2) & e_{2,F}^n(N-2) \end{pmatrix}$ et
$A_n^F := P_{n+1,F,0} P_{n,F,N-1}$.
Ainsi, si nous définissons $T_{n,F}^+ := (M_{n+1}^F)^{-1} A_n^F N_n^F$, nous avons

$$U(n+1) = T_{n,F}^+ U(n) + \varepsilon \text{ et } V(n+1) = T_{n,G}^+ V(n) + \varepsilon.$$

Maintenant, comme dans la Section 3.4, nous prouvons le

Lemme 3.41. *Il existe neuf fonctions analytiques réelles $(f_i)_{i\in[\![0,8]\!]}$ (dépendant uniquement de q et N) définies sur $\mathbb{R}^3$, l'une d'entre elle n'étant pas constamment nulle, telles que, si u (respectivement v) est un vecteur propre 1-normalisé de H_ω associé à $E_j(\omega) \in \left[F - e^{-l^\beta}, F + e^{-l^\beta}\right]$ (respectivement associé à $E_k(\omega) \in [G - e^{-l^\beta}, G + e^{-l^\beta}]$), si pour un certain $n_0 \in \mathbb{Z} \cap (-l + 8N, l - 8N)$ nous avons $r_u(n_0) \geq e^{-l^\beta/4}$ et*

$$\forall m \in \{n_0 - 1, n_0, n_0 + 1\}, |r_u(m) - r_v(m)| \leq e^{-l^\beta/2}$$

et si nous définissons les polynômes

$$\mathcal{R}_\omega(X) := \sum_{i=0}^{8} f_i\left(\omega_{n_0-1}, \omega_{n_0}, \omega_{n_0+1}\right) X^i$$
$$\mathcal{Q}_\omega(X) := \sum_{i=0}^{8} f_{8-i}\left(\omega_{n_0-1}, \omega_{n_0}, \omega_{n_0+1}\right) X^i$$

de degré au plus égal à 8, alors nous avons

$$\text{si } \exists g \in \{\tan, \cot\}, \begin{cases} t_v(n_0) = g(\theta_v(n_0)) \\ t_u(n_0) = g(\theta_u(n_0)) \end{cases}, \text{ alors } \left|\mathcal{R}_\omega\left(t_v\left(n_0\right)\right)\right| \leq e^{-l^\beta/4},$$
$$\text{sinon, nous avons alors } \left|\mathcal{Q}_\omega\left(t_v\left(n_0\right)\right)\right| \leq e^{-l^\beta/4}.$$

Démonstration. La preuve suit celle du Lemme 3.30 et nous utiliserons ses notations. Comme dans la preuve du Lemme 3.30, il suffit de montrer qu'il existe $(\omega_{n-1}, \omega_n, \omega_{n+1})$ tel que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \Delta_3 & 0 \\ \Pi_+ & \Delta_1 & \Pi_- & \Delta_3 \\ \Delta_2 & \Pi_+ & \Delta_4 & \Pi_- \\ 0 & \Delta_2 & 0 & \Delta_4 \end{pmatrix} \tag{3.5.15}$$

où nous avons défini

$$\begin{cases} \Delta_1 := \|T_{n,F}^+(1,0)\|_a^2 - \|T_{n,G}^+(1,0)\|_a^2, \\ \Pi_+ := \left\langle T_{n,F}^+(1,0), T_{n,F}^+(0,1)\right\rangle_a, \\ \Delta_2 := \|T_{n,F}^+(0,1)\|_a^2 - \|T_{n,G}^+(1,0)\|_q^2, \\ \Delta_3 := \|T_{n,F}^-(1,0)\|_a^2 - \|T_{n,G}^-(1,0)\|_q^2 \\ \Pi_- := \left\langle T_{n,F}^-(1,0), T_{n,F}^-(0,1)\right\rangle_a, \\ \Delta_4 := \|T_{n,F}^-(0,1)\|_a^2 - \|T_{n,G}^-(1,0)\|_q^2. \end{cases}$$

est de déterminant non nul. Ceci sera prouvé sous l'hypothèse supplémentaire

$$\omega_{n+1} = \omega_n = \omega_{n-1}, \tag{3.5.16}$$

que nous supposons donc vérifiée. Nous calculons un équivalent du déterminant quand ω_n tend vers l'infini.

Si $N \geq 3$, nous avons $\begin{pmatrix} e^n_{1,F}(N-1) & e^n_{2,F}(N-1) \\ e^n_{1,F}(N-2) & e^n_{2,F}(N-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{N-1}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + o(1)$ et $\begin{pmatrix} e^n_{1,F}(1) & e^n_{2,F}(1) \\ e^n_{1,F}(0) & e^n_{2,F}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_0}} \end{pmatrix} + o(1)$. Si $N = 2$, nous avons

$$\begin{pmatrix} e^n_{1,F}(N-1) & e^n_{2,F}(N-1) \\ e^n_{1,F}(N-2) & e^n_{2,F}(N-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^n_{1,F}(1) & e^n_{2,F}(1) \\ e^n_{1,F}(0) & e^n_{2,F}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_0}} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\|T^+_{n,F}(1,0)\|_a$ est la a-norme du vecteur $y(\cdot)$ vérifiant (3.5.8) et tel que

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y(0) \end{pmatrix} = A^F_n \begin{pmatrix} e^n_{1,F}(N-1) \\ e^n_{1,F}(N-2) \end{pmatrix}.$$

Dans les lignes suivantes, nous gardons la différence $(\omega_{n+1}, \omega_n, \omega_{n-1})$ dans les notations, bien que ces variables soient égales, pour une meilleur compréhension de chacun des termes. Quand $\omega_n \to \infty$, nous avons

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{b_{N(n+1)+1} b_{N(n+1)}} \begin{pmatrix} \dfrac{(F - a_{N-1}\omega_n)(F - a_0\omega_{n+1})}{\sqrt{a_{N-1}}} \\ \dfrac{b_{N(n+1)+1}(F - a_{N-1}\omega_n)}{\sqrt{a_{N-1}}} \end{pmatrix} + o(\omega_n).$$

Ainsi, pour tout $m \in [\![1, N-2]\!]$, nous avons

$$\begin{pmatrix} y(m+1) \\ y(m) \end{pmatrix} = \left(\sqrt{a_{N-1}} \prod_{i=0}^{m+1} b_{N(n+1)+i} \right)^{-1} Y + o(\omega_n^m)$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} (F - a_{N-1}\omega_n) \prod_{i=0}^{m} (F - a_i\omega_{n+1}) \\ \\ b_{N(n+1)+m+1}(F - a_{N-1}\omega_n) \prod_{i=0}^{m-1} (F - a_i\omega_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{cases} \left\| T^+_{n,F}(1,0) \right\|_a^2 = o(\omega_n^{2N-3}) \\ \quad + (F - a_{N-1}\omega_n)^2 \prod_{i=0}^{N-3} (F - a_i\omega_{n+1})^2 \dfrac{(F - a_{N-2}\omega_{n+1})^2 + b^2_{N(n+2)-1}}{\mathcal{B}_+^2} \\ \left\| T^-_{n,F}(0,1) \right\|_a^2 = o(\omega_n^{2N-3}) \\ \quad + (F - a_0\omega_n)^2 \prod_{i=2}^{N-1} (F - a_i\omega_{n-1})^2 \dfrac{(F - a_1\omega_{n+1})^2 + b^2_{N(n-1)}}{\mathcal{B}_-^2} \end{cases}$$

où $\mathcal{B}_+ := \prod_{i=0}^{N-1} b_{N(n+1)+i}$ et $\mathcal{B}_- := \prod_{i=0}^{N-1} b_{N(n-1)+i}$. De la même manière, nous obtenons $\left\| T^-_{n,F}(1,0) \right\|_a^2 = o(\omega_n^{2N-1})$.

Maintenant, définissons $\mathcal{A} := \prod_{i=0}^{N-1} a_i > 0$ et $\mathcal{A}_0 := \sum_{i=0}^{N-1} \prod_{m\neq i} a_m > 0$. Quand $\omega_n \to \infty$, nous calculons

$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{1}{\mathcal{B}_+^2}\mathcal{A}\mathcal{A}_0(F-G)\omega_n^{2N-1} + o(\omega_n^{2N-1}) \\ \Pi_+ = O\left(\omega_n^{2N-1}\right) \\ \Delta_2 = O\left(\omega_n^{2N}\right) \\ \Delta_3 = o\left(\omega_n^{2N-1}\right) \\ \Pi_- = O\left(\omega_n^{2N-1}\right) \\ \Delta_4 = \left(\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}_-}\right)^2 \omega_n^{2N} + o(\omega_n^{2N-1}) \end{cases} . \tag{3.5.17}$$

Maintenant, un calcul simple montre que

$$\det A = (\Pi_+\Delta_3 - \Pi_-\Delta_1)(\Pi_+\Delta_4 - \Pi_-\Delta_2) + (\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3)^2 . \tag{3.5.18}$$

Quand $\omega_n \to \infty$, nous obtenons donc

$$\det A \sim (\Delta_1\Delta_4)^2 \sim (F-G)^2\mathcal{A}_0^2\mathcal{A}^3\left(\frac{1}{\mathcal{B}_+\mathcal{B}_-}\right)^4 \omega_n^{8N-2}.$$

Le déterminant de A n'est donc pas constamment nul. Nous terminons la preuve du Lemme 3.41 de la même manière que dans la preuve du Lemme 3.30, en utilisant la Proposition D.2. □

Nous continuons maintenant la preuve du Lemme 3.40. Soit $T_{n,G}^0 := \prod_{m=0}^{N-1} P_{n,G,m}$ la matrice de transfert à N pas pour l'équation (3.5.2), allant de $\{Nn-1, Nn\}$ à $\{Nn+N-1, Nn+N\}$. La matrice $T_{n,G}^0$ est le produit de toute les matrices $P_{n,J,m}$ dépendant de ω_n. Comme dans la Section 3.4, définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n,G}^0 : \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ \theta &\to \Upsilon^{-1}\left[\frac{T_{n,G}^0\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}}{\left\|T_{n,G}^0\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\right\|}\right] \end{aligned}$$

où nous rappelons que $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ est muni de la distance d et l'homéomorphisme $\Upsilon : \mathbb{T} \to S^1/-1,1$ est bi-lipschitzien. La classe $\mathcal{T}_{n,G}^0(\Theta)$ est la direction du vecteur $T_{n,G}^0 X$ où $X \in \mathbb{R}^2$ peut être tout vecteur de direction Θ. Nous prouvons maintenant le

Lemme 3.42. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $m > 1$ tels que, pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et tout $(\Theta_1, \Theta_2) \in \mathbb{T}^2$, si nous notons $\hat{\mathbb{P}}_\epsilon$ la probabilité que $d(\mathcal{T}_{n,G}^0(\Theta_1), \Theta_2) \leq \epsilon$, alors nous avons*

$$\hat{\mathbb{P}}_\epsilon \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/m}.$$

Démonstration. D'après la Proposition D.3, comme dans la preuve du Lemme 3.38, il suffit de montrer que, pour tout θ_1, le vecteur non nul $Z := T_{n,G}^0\begin{pmatrix}\sin(\theta_1)\\ \cos(\theta_1)\end{pmatrix}$, analytique en ω_n, n'est pas de direction constante.

D'après (3.5.14) nous savons que

$$T^0_{n,G} = \begin{pmatrix} P_1(\omega_n) & P_2(\omega_n) \\ P_3(\omega_n) & P_4(\omega_n) \end{pmatrix}$$

où les $(P_i)_i$ sont des polynômes en ω_n. Quand $\omega_n \to \infty$, nous calculons

$$\begin{cases} P_1(\omega_n) \sim \omega_n^N \displaystyle\prod_{m=0}^{N-1} \frac{(-a_m)}{b_{nN+m+1}} \\ P_3(\omega_n) = O(\omega_n^{N-1}) \end{cases} \tag{3.5.19}$$

D'après (3.5.14), nous avons $P_{n,G,1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_{Nn+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nous calculons alors, de manière similaire à (3.5.19), dans la limite $\omega_n \to \infty$,

$$\begin{cases} P_2(\omega_n) \sim -\omega_n^{N-1} b_{Nn+1} \displaystyle\prod_{m=1}^{N-1} \frac{(-a_m)}{b_{nN+m+1}} \\ P_4(\omega_n) = O(\omega_n^{N-2}) \end{cases} \tag{3.5.20}$$

Par ailleurs, comme $\det P_{n,G,m} = -\dfrac{b_{nN+m}}{b_{nN+m+1}}$, il existe $K_n \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout ω_n, nous avons $\det T^0_{n,G} = K_n$. Nous obtenons donc l'équation

$$P_1 \cdot P_4 - P_2 \cdot P_3 = K_n.$$

où $\deg(P_1) = N = \deg(P_2) + 1 \geq 2$, $\deg(P_3) \leq N-1$ et $\deg(P_4) \leq N-2$. Ceci montre en particulier que $\deg(P_3) > \deg(P_4)$ et donc P_3 n'est pas le polynôme nul. Ainsi, P_4 ne peut pas non plus être le polynôme nul, car nous aurions alors $P_2 \cdot P_3 = K_n$.

Prenons maintenant $\theta_1 \in \mathbb{T}$. Par définition, nous avons

$$Z = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1)P_1(\omega) + \cos(\theta_1)P_2(\omega_n) \\ \sin(\theta_1)P_3(\omega) + \cos(\theta_1)P_4(\omega_n) \end{pmatrix}.$$

D'après l'équation (3.5.19) quand $\theta_1 \neq \pi\mathbb{Z}$ et l'équation (3.5.20) quand $\theta = \pi\mathbb{Z}$, la direction de Z se rapproche de l'axe dirigé par $(1,0)$. Il suffit alors de montrer que Z n'est pas constamment colinéaire à $(1,0)$ pour conclure. Comme $\deg(P_3) > \deg(P_4) \leq 0$, la deuxième composante du vecteur Z ne peut être constamment nulle pour aucune valeur de θ. Ceci termine la preuve du Lemme 3.42. □

Maintenant, le Lemme 3.40 est prouvé de la même manière que le Lemme 3.28, en utilisant le Lemmes 3.41 et 3.42 au lieu des Lemmes 3.30 et 3.38.

3.6 Décomposition de $P\Delta_b Q + Q\Delta_b P$

Le but de cette section est de prouver un résultat utilisé dans la première section. Soit $N \geq 3$ un entier et $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux sous ensembles de $[\![1, N]\!]$ formant une partition de ce dernier. On note P (respectivement Q) le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{P})$ (respectivement sur $\ell^2(\mathcal{Q})$). Dans le lemme suivant uniquement, pour simplifier les notations, Δ_b^N représente la restriction de l'opérateur Δ_b au cube $[\![1, N]\!]$ avec conditions aux bords de Dirichlet. Nous prouvons alors le

Lemme 3.43. *Il existe $(\mathcal{C}_k)_k$ des sous-intervalles disjoints de $[\![1,N]\!]$, tels que, si C_k désigne le projecteur orthogonal sur $\ell^2(\mathcal{C}_k)$, alors nous avons*

$$P\Delta_b^N Q + Q\Delta_b^N P = \sum_k C_k \Delta_b^N C_k. \tag{3.6.1}$$

Démonstration. Pour prouver ce lemme, il suffit de trouver ces intervalles de sorte que les opérateurs sont égaux sur la base $(\delta_n)_n$ où δ_n est le vecteur valant 1 au point n et zéro ailleurs. Nous construisons les intervalles $(\mathcal{C}_k)_k$ point par point selon les alternatives disjointes suivantes. Fixons $n \in [\![1,N]\!]$ et supposons que $n \in \mathcal{Q}$. Comme nous avons

$$\left[P\Delta_b^N Q + Q\Delta_b^N P\right]\delta_n = \left[P\Delta_b^N\right]\delta_n = P\left(a_{n+1}\delta_{n+1} + a_n\delta_{n-1}\right),$$

nous construisons les intervalles selon les alternatives suivantes, incluant le cas particulier où n est l'un des bords de $[\![1,N]\!]$:

- Si $\{n-1, n+1\} \subset \mathcal{Q} \cup \{0, N+1\}$, alors n n'appartient à aucun des $(\mathcal{C}_k)_k$
- Si $\{n-1, n+1\} \subset \mathcal{P}$, alors n est à l'intérieur d'un intervalle $\mathcal{C}_k$ (c'est-à-dire que $n+1$ et $n-1$ seront également dans $\mathcal{C}_k$)
- Si $n-1 \in \mathcal{Q} \cup \{0\}$ et $n+1 \in \mathcal{P}$, alors n est l'extrémité gauche d'un intervalle $\mathcal{C}_k$.
- Si $n-1 \in \mathcal{P}$ et $n+1 \in \mathcal{Q} \cup \{N+1\}$, alors n est l'extrémité droite d'un intervalle $\mathcal{C}_k$.

Si $n \in \mathcal{P}$ nous prenons les mêmes alternatives mais où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont échangés. Il est aisé de vérifier l'égalité des opérateurs sur chacun des vecteurs de base. □

3.7 Gradients et matrices Hessiennes des valeurs propres

Dans cet partie, nous calculons les dérivées premières et secondes des valeurs propres d'opérateurs $H_\omega(\Lambda_L)$, quand elles sont simples, en fonction des variables aléatoires. Nous référons à [RS78], et notamment à la théorie de la perturbation pour la régularité des valeurs propres quand elles sont simples. Nous donnerons également une estimation d'une norme de la matrice Hessienne. Nous commençons par donner un cadre général, englobant tous les modèles considérés, afin de donner une seule preuve.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ des opérateurs définis sur $L^2(0,N)$ ou $\ell^2([\![1,N]\!])$, bornés et autoadjoints . Nous supposerons qu'il existe $C > 0$ (indépendant de N) tel que

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1,N]\!]} \in \mathbb{R}^N, \left\|\sum_{i=1}^N x_i A_i\right\|_2 \leq C\|X\|_\infty, \tag{3.7.1}$$

où $\|A\|_2$ désigne la norme d'opérateur subordonnée à la norme hilbertienne et $\|X\|$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^N$ du vecteur $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]} \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $x := (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, définissons l'opérateur

$$H_L(x) = H_L^0 + \sum_{i=1}^N x_i A_i, \tag{3.7.2}$$

où H_L^0 désigne, dans le cas continu, le laplacien sur $L^2(0,N)$ avec conditions aux bords de Dirichlet et, dans le cas discret un opérateur de Jacobi sur $\ell^2([\![1,N]\!])$ avec condition aux bords nulles. Notons $(E_i(x))_{i\in[\![1,N]\!]}$ ses valeurs propres, ordonnées de manière croissante, écrites autant de fois que leurs multiplicités. Tous les opérateurs aléatoires H_ω considérés dans ce chapitre sont construits de cette manière et vérifient l'hypothèse (3.7.1). Pour le modèle des sauts, les matrices A_j sont définis par $A_j(n,m) = 1$ si $m = n+1 = j+1$ et zéro ailleurs. Pour les autres modèles (dans le cas discret les matrices A_i sont diagonales,

dans le cas continu les opérateurs A_i sont des opérateurs de multiplication) nous avons $\sum_{i=1}^{N} x_i A_i = V_x$ où V_x est le potentiel quand les configurations $(\omega_i)_i$ sont égales aux $(x_i)_i$. L'hypothèse (3.7.1) est donc simplement vérifiée car les potentiels V_ω considérés sont uniformément bornés.

Proposition 3.44. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $n \in [\![1, N]\!]$ tels que $E_n(x_0)$ est simple. La fonction $x \mapsto E_n(x)$ est localement analytique de plusieurs variables en x_0 et nous calculons*

$$\partial_i E_n(x) = \langle A_i \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle \tag{3.7.3}$$

où ϕ_n est un vecteur propre normalisé associé à E_n et localement analytique en x_0.

Démonstration. Nous omettons dans cette preuve les indices n et N et ne gardons que la dépendance en x. Par définition, nous avons

$$H(x)\phi(x) = E(x)\phi(x) \tag{3.7.4}$$

Nous calculons alors

$$\langle H(x)\phi(x), \partial_i \phi(x) \rangle = E(x) \langle \phi(x), \partial_i \phi(x) \rangle = 0$$

car ϕ est de norme égale à un. Dérivons maintenant l'équation (3.7.4) par rapport à x_i. Nous obtenons alors

$$[\partial_i H(x)]\, \phi(x) + H(x)\partial_i \phi(x) = \partial_i E(x)\phi(x) + E(x)\partial_i \phi(x). \tag{3.7.5}$$

Nous prenons maintenant le produit scalaire de cet équation par $\phi(x)$, exploitons le fait que $H(x)$ est auto-adjoint et que $\phi(x)$ est de norme un pour obtenir :

$$\partial_i E(x) = \langle [\partial_i H(x)]\, \phi(x), \phi(x) \rangle. \tag{3.7.6}$$

Nous terminons la preuve de la Proposition 3.44 en constatant que, par définition, $\partial_i H = A_i$. □

Nous calculons maintenant la matrice Hessienne de $E_n(x)$ au voisinage de x_0 où cette valeur propre est simple.

Proposition 3.45. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $i \in [\![1, N]\!]$ tels que $E_{n,L}(x_0)$ est simple. La fonction $x \mapsto E_n(x)$ est localement analytique de plusieurs variables en x_0 et nous calculons*

$$\partial_{ij} E_n(x) = -2 \langle \psi_{n,i}(x), [H(x) - E_n(x)]^{-1}\, \psi_{n,j}(x) \rangle \tag{3.7.7}$$

avec $\psi_{n,k}(x) := \Pi(x) A_j \phi_n(x)$ où ϕ_n est un vecteur propre normalisé, associé à $E_n(x)$, localement analytique en x_0 et $\Pi(x)$ est le projecteur orthogonal sur $\phi_n(x)^\perp$.

Démonstration. Dans cette preuve également, nous omettrons la dépendance en n et N. D'après la Proposition 3.44, nous avons

$$\partial_i E(x) = \langle A_i \phi(x), \phi(x) \rangle$$

Ainsi, en utilisant le fait que A_i est auto-adjoint, nous obtenons

$$\partial_{ij} E(x) = 2 \langle A_i \phi(x), (\partial_j \phi)(x) \rangle$$

Par ailleurs, l'équation 3.7.5 nous montre que

$$[H(x) - E(x)]\,\partial_j\phi(x) = [\partial_j E(x) - A_j]\,\phi(x).$$

Or, comme $E(x)$ est simple, $H(x) - E(x)$ est un isomorphisme de $\phi(x)^\perp$. Ainsi, comme $\partial_j\phi(x) \in \phi(x)^\perp$, c'est aussi le cas de $\psi_j(x) := [A_j - \partial_j E(x)]\,\phi(x)$ et

$$\partial_j\phi(x) = -\,[H(x) - E(x)]^{-1}\,\psi_j(x). \tag{3.7.8}$$

Nous calculons maintenant :

$$\psi_j(x) = [A_j - \partial_j E(x)]\,\phi(x) = A_j\phi(x) - \langle A_j\phi(x), \phi(x)\rangle\phi = \Pi(x)A_j\phi(x)$$

où $\Pi(x)$ est le projecteur orthogonal sur $\phi(x)^\perp$. Par ailleurs, par orthogonalité, nous savons que

$$\langle A_i\phi(x), \partial_j\phi(x)\rangle = \langle [A_i - \partial_i E(x)]\,\phi(x), \partial_j\phi(x)\rangle = \langle \psi_i(x), \partial_j\phi(x)\rangle.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.45. □

Proposition 3.46. *Soit $Hess(x)$ la matrice Hessienne de $E_n(\cdot)$, définie dans un voisinage de x_0 tel que $E_n(x_0)$ est simple. Il existe $C > 0$ (indépendant de N) tel que*

$$\|Hess(x)\|_{\ell^\infty\to\ell^1} \leq \frac{C}{dist\,\{E_n(x), sp(H(x)) - E_n(x)\}} \tag{3.7.9}$$

Démonstration. Soit $Y \in \mathbb{R}^N$ un vecteur tel que $\|Y\|_\infty = 1$ et tel que $\|Hess(x)\|_{\ell^\infty\to\ell^1} = \|Hess(x)Y\|_1$. Nous savons qu'il existe $Z \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|Z\|_\infty = 1$ et tel que $\|Hess(x)Y\|_1 = \langle Z, Hess(x)Y\rangle$.

Notons $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ et $Z = (Z_1, \ldots, Z_N)$. Prenons maintenant $i \in [\![1, N]\!]$, nous calculons alors le i-ème coefficient du vecteur $Hess(x)Y$:

$$(Hess(x)Y)_i = \sum_{j=1}^N \partial_{ij}E(x)Y_j = -2\langle \psi_i(x), [H(x) - E(x)]^{-1}\,\Psi^Y(x)$$

où $\Psi^Y(x) := \sum_{j=1}^N Y_j\psi_j(x)$. Nous obtenons donc

$$\langle Z, Hess(x)Y\rangle = -2\langle \Psi^Z(x), [H(x) - E(x)]^{-1}\,\Psi^Y(x) \leq \frac{\|\Psi^Z\|_2\|\Psi^Y\|_2}{\mathrm{dist}\,\{E_n(x), sp(H(x)) - E_n(x)\}}. \tag{3.7.10}$$

Il reste donc à évaluer la norme $\|\Psi^Y\|_2$ (et donc celle de Ψ^Z). Nous savons que

$$\Psi^Y(x) = \Pi(x)\left[\sum_{j=1}^N y_jA_j\right]\phi(x).$$

Notons $B^Y := \sum_{j=1}^N y_jA_j$. Ainsi, comme $\phi(x)$ est normalisé, d'après l'hypothèse (3.7.1),

$$\|\Psi^Y\|_2 \leq \|B^Y\phi(x)\|_2 \leq \|B^Y\|_2 \leq C.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.46. □

Chapitre 4

Statistiques spectrales

Dans ce chapitrons nous énonçons des résultats sur les statistiques spectrales des opérateurs de Schrödinger aléatoires. Les preuves utilisent les résultats des chapitres précédents et suit la stratégie mise en place dans [GK10a]. Ceux-ci sont valables pour tous les modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires pourvu qu'il satisfassent les hypothèses que nous rappelons maintenant.

Les opérateurs considérés dans ce chapitre sont soit le modèle des sauts, soit des opérateurs $N\mathbb{Z}$-ergodiques, discrets ou continus, du type $H_\omega(\Lambda) = H_0 + V_\omega$, où H_0 est un opérateur de Jacobi symétrique avec coefficients périodiques, vérifiant (IAD) et, pour un même intervalle $\mathcal{I}$, (Loc) et les estimations de Wegner suivantes.

(W) : Il existe $C > 0$, $m \geq 1$, tel que pour $J \subset \mathcal{I}$ et $\Lambda \subset \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\Big[tr\left(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))\right) \geq 1\Big] \leq C|J||\Lambda|^m. \tag{4.0.1}$$

Nous avons alors les estimations de Minami suivantes, découlant immédiatement du Théorème 2.1.

Théorème 4.1 (M)**.** *Prenons un intervalle compact J de $\mathcal{I}$. Pour tous $\kappa > 1$, $p > 0$ et $\rho \in (0,1)$, il existe $L_{\kappa,p,\rho} > 0$ tel que pour $E \in J$, $L \geq L_{\kappa,p,\rho}$ et $\epsilon \in (0, L^{-\kappa})$, nous avons*

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(tr[\mathbf{1}_{[E-\epsilon,E+\epsilon]}(H_\omega(\Lambda_L))] \geq k) \leq C\left[(\epsilon L)^{1+\rho} + L^{-p}\right] \tag{4.0.2}$$

Comme expliqué dans le second chapitre, ces estimations de Minami sont plus faibles que celle utilisées dans [GK10a] mais seront suffisantes, comme les preuves le montreront. Remarquons que pour $\epsilon = L^{-\kappa}$ avec $\kappa > 1$, le terme à droite dans (4.0.2) peut être majoré par $C(\epsilon L)^{1+\rho}$ en prenant p assez grand et si pour tout $p > 0$ $\epsilon = O(L^{-p})$, alors le terme à droite est aussi $O(L^{-p})$ pour tout $p > 0$.

Les estimations de Wegner (W) nous permettront donc d'utiliser les caractérisations (Loc)(I) et (Loc)(II). Les estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées, prouvées dans le troisième chapitre, ne sont pas nécessaires à l'essentiel des résultats prouvés dans [GK10a]. Elles ne seront utilisées que dans la preuve du Théorème 4.9.

La différence entre l'hypothèse (W) dans ce document et l'hypothèse (W) dans l'article [GK10a] est l'exposant m dans (W). Les résultats prouvés dans [GK10a] l'ont été avec des estimations de Wegner linéaires en volume, c'est-à-dire quand $m = 1$. L'étude des statistiques spectrales dans le régime localisé se base sur le lemme suivant, qui correspond au [GK10a, Lemme 3.1], a une preuve analogue au Lemme 2.23 et est utilisé pour décrire les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ en termes des valeurs propres de H_ω restreint à des cubes plus

petits. Nous utilisons (Loc)(I) si ces cubes sont polynomialement grands en $|\Lambda|$ et (Loc)(II) si ils sont logarithmiquement grands en $|\Lambda|$, de sorte que la probabilité du complémentaire de l'ensemble des configurations donné dans l'hypothèse est polynomialement petite en $|\Lambda|$.

Lemme 4.2. *Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Soient ℓ' et ℓ tels que $(RLog|\Lambda_L|)^{1/\xi} \leq \ell' \ll \ell \ll L$ pour R suffisamment grand, et, pour un certain $\gamma \in \Lambda_L$, considérons le cube $\Lambda_\ell(\gamma)$ tel que $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma) \subset \Lambda_L$. Soit $\mathcal{W}_{\Lambda_L}$ l'ensemble $\mathcal{U}_{\Lambda_L}$ ou $\mathcal{V}_{\Lambda_L}$, selon que nous avons (Loc)(I) ou (Loc)(II). Pour L suffisamment grand nous avons*

1. *Pour tout $\omega \in \mathcal{W}_{\Lambda_L}$, si $E(\omega)$ est une valeur propre de $H_\omega(\Lambda_L)$ avec centre de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma)$, alors $H_\omega(\Lambda_L \cap \Lambda_\ell(\gamma))$ a une valeur propre dans $[E(\omega) - e^{-(\ell')^\xi/2}, E(\omega) + e^{-(\ell')^\xi/2}]$; de plus, si $\omega \in \mathcal{W}_{\Lambda_\ell(\gamma)}$, la fonction propre correspondante est localisée au sens de* (1.2.6).
2. *Supposons de plus que $\Lambda_\ell(\gamma) \subset \Lambda_L$. Alors, réciproquement, pour tout $\omega \in \mathcal{W}_{\Lambda_\ell(\gamma)}$, si $E'(\omega)$ est une valeur propre de $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma))$ avec centre de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma)$, alors $H_\omega(\Lambda_L)$ a une valeur propre dans $[E'(\omega) - e^{-(\ell')^\xi/2}, E'(\omega) + e^{-(\ell')^\xi/2}]$; de plus, si $\omega \in \mathcal{W}_{\Lambda_L}$, la fonction propre correspondante est localisée au sens de* (1.2.6).

Prenons maintenant $\tilde{\rho} \in \left[0, \dfrac{\rho}{1+\rho}\right[$ où ρ est défini dans (M) et prenons $E_0 \in I$ tel que

$$\forall a > b, \exists C > 0, \exists \epsilon_0, \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0, \ |N(E_0 + a\epsilon) - N(E_0 - b\epsilon)| \geq C\epsilon^{1+\tilde{\rho}}. \tag{4.0.3}$$

Définissons également

$$\alpha_{\rho,\rho'} := (1+\tilde{\rho})\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}\right) < 1. \tag{4.0.4}$$

Nous utiliserons le théorème de décomposition suivant. Ce théorème nous permet de contrôler toutes les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ dans des intervalles d'énergie de taille $\frac{1}{|\Lambda|^\alpha}$, pour $\alpha \in (\alpha_{\rho,\rho'}, 1)$.

4.1 Théorème de décomposition

Le théorème suivant correspond au [GK10a, Theorem 1.1]. Celui-ci traduit mathématiquement ce que nous disions en introduction : la localisation permet de réduire l'étude du spectre de l'opérateur $H_\omega(\Lambda_L)$ à l'étude des spectres d'opérateurs $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma))$ avec $\ell \ll L$, où les cubes $\Lambda_\ell(\gamma)$ sont suffisamment éloignés, de sorte que ces opérateurs sont des copies indépendantes d'un même opérateur $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_0))$.

Théorème 4.3. *Supposons que E_0 vérifie* (4.0.3) *et prenons $\alpha \in (\alpha_{\rho,\rho'}, 1)$ Soit I_Λ un intervalle centré en E_0 tel que $N(I_\Lambda) \asymp |\Lambda_L|^{-\alpha}$. Il existe $\beta > 0$ et $\beta' \in (0, \beta)$ petit tels que $1 + \beta\rho < \alpha\dfrac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}$ et, pour $\ell \asymp L^\beta$ et $\ell' \asymp L^{\beta'}$, il existe une décomposition $\Lambda = \Lambda_L$ en cubes disjoints de la forme $\Lambda_\ell(\gamma_j) := \gamma_j + [0, l]$ satisfaisant :*

1. $\cup_j \Lambda_\ell(\gamma_j) \subset \Lambda$,
2. *si $j \neq k$, dist$(\Lambda_\ell(\gamma_j), \Lambda_\ell(\gamma_k)) \geq \ell'$*
3. *dist$(\Lambda_\ell(\gamma_j), \partial\Lambda) \geq \ell'$*
4. $|\Lambda \setminus \cup_j \Lambda_\ell(\gamma_j)| \lesssim |\Lambda|\ell'/\ell$,

et telle que, pour L suffisamment grand, il existe un ensemble de configurations $\mathcal{Z}_\Lambda$ tel que

1. $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_\Lambda) \geq 1 - |\Lambda|^{-(\alpha - \alpha_{\rho,\tilde{\rho}})}$

2. *pour $\omega \in \mathcal{Z}_\Lambda$, chaque centre de localisation associé à $H_\omega(\Lambda)$ appartient à un cube $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ et chaque cube $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ satisfait*
   (a) *le Hamiltonien $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))$ a au plus une valeur propre dans I_Λ, par exemple $E_j(\omega, \Lambda(\gamma_j))$;*
   (b) *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient au plus un centre de localisation, qu'on appelle $x_{k_j}(\omega, \Lambda)$, d'une valeur propre de $H_\omega(\Lambda)$ dans I_Λ, qu'on appele $E_{k_j}(\omega, \Lambda)$;*
   (c) *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient un centre de localisation $x_{k_j}(\omega, \Lambda)$ si et seulement si $\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j)) \cap I_\Lambda \neq \emptyset$; quel cas nous avons*

$$|E_{k_j}(\omega, \Lambda) - E_j(\omega, \Lambda_\ell(\gamma_j))| \leq e^{-(\ell')^\xi} \text{ et } dist(x_{k_j}(\omega, \Lambda), \Lambda \backslash \Lambda_\ell(\gamma_j)) \geq \ell'. \quad (4.1.1)$$

En particulier si $\omega \in \mathcal{Z}_\Lambda$, toutes les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ sont décrites par (4.1.1).

Démonstration. Nous suivons la preuve du [GK10a, Theorem 1.1], en prenant en compte les estimations de Wegner avec un exposant sur le volume et les estimations de Minami plus faibles. Prenons $\beta' = 0+$ et $\beta > \beta'$ que l'on choisira ultérieurement, définissons $\ell' = L^{\beta'}$ et ℓ de sorte que $(\ell + \ell')k + \ell' = L$, où $k = \lfloor L^{1-\beta} \rfloor$. Prenons maintenant des cubes de taille ℓ dans Λ_L satisfaisant les conditions du Theorem 4.3. Nous utiliserons (Loc)(I) dans cette preuve. La probabilité qu'un des cubes $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ ne satisfait pas (Loc)(I) est plus petite que $|\Lambda_L|^{1-\beta-p\beta}$. La probabilité que Λ_L ne satisfait pas (Loc)(I) est au plus égale à $|\Lambda_L|^{-p}$. Ainsi, pour p suffisamment grand, à l'exception d'un ensemble de configurations de probabilité négligeable devant $|\Lambda_L|^{-(\alpha-\alpha_{\rho,\tilde{\rho}})}$, tous ces cubes satisfont (Loc)(I), ce qui sera supposé par la suite.

Soit $S_{\ell,L}$ l'ensemble des cubes $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma_j) \subset \Lambda_L$ contenant deux centres de localisation $H_\omega(\Lambda_L)$. L'ensemble $S_{\ell,L}$ est de cardinal au plus égal à $|\Lambda_L|^{1-\beta}$. Par ailleurs, le Lemme 4.2 nous dit que si $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma_j)$ est un cube de $S_{\ell,L}$ alors l'opérateur $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))$ possède deux valeurs propres à une distance au plus égale à $e^{-(l')^\xi}$ de celles de $H_\omega(\Lambda)$ associées aux centres de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma_j)$. D'après l'équation 4.0.3, nous avons $|I_\Lambda| \leq N(I_\Lambda)^{\frac{1}{1+\tilde{\rho}}} \asymp |\Lambda|^{-\frac{\alpha}{1+\tilde{\rho}}}$. Il suit donc du Théorème 4.1 (en prenant p assez grand) l'estimation

$$\mathbb{P}(\sharp \mathcal{S}_{\ell,L} \geq 1) \lesssim |\Lambda|^{1-\beta}(|\Lambda|^\beta |\Lambda|^{-\frac{\alpha}{1+\tilde{\rho}}})^{1+\rho} \lesssim |\Lambda|^{1+\beta\rho-\alpha\frac{\gamma^{-1}}{1+\tilde{\rho}}} \quad (4.1.2)$$

où $\gamma := \dfrac{1}{1+\rho} \in (0,1)$.

Définissons $\Upsilon = \Lambda_L \backslash \cup_j \Lambda_{\ell-\ell'}(\gamma_j)$ et considérons une partition $\Upsilon = \cup_{k=1}^M \Lambda_{\ell'}(x_k)$ en cube de taille ℓ', avec $M \asymp L\ell^{-1}$. Nous pouvons élargir chaque cube de $\frac{1}{10}\ell'$ à l'exception des côtés qui coïncident avec la frontière de Λ_L, de sorte que si un centre de localisation se trouve dans Υ nous pouvons appliquer le Lemma 4.2. Ainsi, d'après (W) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(H_\omega(\Lambda_L) \text{ a un centre de localisation dans } \Upsilon) \\
&\lesssim \sum_k^M \mathbb{P}(H_\omega(\Lambda_L) \text{ a un centre de localisation dans } \Lambda_{\ell'}(x_k)) \\
&\lesssim M|\Lambda_{\frac{11}{10}\ell'}|^m |I_\Lambda| \lesssim L\ell'^m \ell^{-1} N(I_\Lambda)^{\frac{1}{1+\tilde{\rho}}} \lesssim |\Lambda_L|^{1-\beta+m\beta'-\frac{\alpha}{1+\tilde{\rho}}}.
\end{aligned}$$

Prenons maintenant

$$\alpha > (1+\tilde{\rho}) \max\left((1+\beta\rho)\gamma, 1-\beta+m\beta'\right). \quad (4.1.3)$$

Si nous optimisons en β nous obtenons :

$$\beta = \frac{1-\gamma+\beta' m}{\rho\gamma+1} \quad \text{et} \quad \alpha > (1+\tilde{\rho})\left(1 - \frac{1-\gamma-\rho\gamma m\beta'}{\rho\gamma+1}\right) \tag{4.1.4}$$

Ainsi, choisir $\alpha_{\rho,\tilde{\rho}} := (1+\tilde{\rho})\left(1-\frac{1-\gamma}{\rho\gamma+1}\right) = (1+\tilde{\rho})\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}\right) < 1$ donne le résultat voulu. Ceci achève la preuve du Théorème 4.3. □

4.2 La distribution locale des valeurs propres

Comme dans [GK10a, Section 2], nous calculons la distribution des valeurs propres dépliées, c'est-à-dire les nombres $\Big(|\Lambda_L| N(E_j(\omega))\Big)_j$. L'inégalité (W) n'est pas nécessairement linéaire en la longueur du cube. Cela n'implique donc pas que la DEI est Lipschitzienne, contrairement au cas linéaire, ni même höldérienne. Nous faisons donc une hypothèse de régularité sur la DEI. Définissons $R_\eta(\ell) := \sup_{|I|\leq e^{-\ell^\eta}} N(I)$. Comme nous sommes en dimension un, nous pouvons prouver l'hypothèse de régularité suivante en utilisant les techniques introduites dans [BL85] :

$$\textbf{(R)} : \forall \eta \in (0,1), \lim_{L\to\infty} LR_\eta(\ell') = 0, \tag{4.2.1}$$

où ℓ' est défini dans Théorème 4.3. Ainsi, comme $\ell' = L^{\beta'}$, (R) est vérifiée pourvu que la DEI est Log-höldérienne avec un exposant suffisamment grand ou höldérienne. L'hypothèse (R) signifie que la DEI d'un intervalle de taille exponentiellement petite doit être négligeable devant les quantités polynomialement petites.

Nous prouvons dans l'annexe C que (R) est vérifiée pour le modèle suivant :

Théorème 4.4. *Soient $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires i.i.d avec densité dont le support est égal à $[0,1]$. Définissons sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'opérateur aléatoire $H_\omega := -\Delta + V_\omega$ où $V_\omega(2i) = -V_\omega(2i+1) = \omega_i$. La DEI est bien définie et est höldérienne sur $[-3,3]$.*

Pour ce modèle, si la densité est suffisamment régulière, les estimations de Wegner sont prouvées dans le bas du spectre presque sur, ces estimations étant polynomiales en volume ([Klo95]).

Pour calculer la distribution des valeurs propres dépliées nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4.5. *Supposons que (W) et (Loc) soient vérifiées dans un compact $\mathcal{I}$. Pour tous $\nu \in (0,1)$ et $R(\log L)^{1/\xi} \ll \ell' \ll \ell \ll L$, définissons $N(J,\ell,\ell')$ comme étant le nombre de valeurs propres de $H_\omega(\Lambda_\ell)$ dans J avec centre de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}$. Il existe alors $C > 0$ et $1 > \xi'' > \nu$ tels que, pour $J \subset \mathcal{I}$ un intervalle satisfaisant $|J| \geq e^{-(\ell')^\nu}$, nous avons*

$$\big|\mathbb{E}(N(J,\ell,\ell')) - N(J)|\Lambda_l|\big| \leq C|J|(\ell')^m + CR_{\xi''}(\ell')\ell. \tag{4.2.2}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{U}_{\Lambda_\ell}$ l'ensemble des configurations donné par (Loc)(I) pour certains $p \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in (\nu,1)$, de sorte que $\mathbb{P}\left(\mathcal{U}^c_{\Lambda_\ell}\right) \leq L^{-p}$. D'après le Lemme 4.2 puis (W), nous avons

$$\Big|\mathbb{E}\Big(N(J,\ell,\ell') - \mathrm{tr}[1_J(H_\omega(\Lambda_\ell))]\Big)\Big| \leq \mathbb{P}\left(\mathcal{Y}^c_{\ell,\ell'}\right) \lesssim |J|(\ell')^m. \tag{4.2.3}$$

Prenons une fonction infiniment dérivable χ_r telle que $0 \leq \chi_r \leq 1$, $\chi_r = 1$ sur J et $\chi_r = 0$ en dehors de $J + [-r,r]$ avec $r := e^{-(\ell')^{\xi''}}$ et ξ'' que nous choisirons ultérieurement.

Définissons alors $\mathcal{Y}_{\ell,\ell'}$ le sous-ensemble de $\mathcal{U}_{\Lambda_\ell}$ où $H_\omega(\Lambda_\ell)$ a tous ses centres de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}$. Maintenant, définissons $K := (J + [-r, r]) \setminus J$. Nous avons alors $|K| = 2r$ et

$$0 \leq r(x) - 1_J(x) \leq 1_K(x).$$

Ainsi, en utilisant (W), nous obtenons

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}[1_J(H_\omega(\Lambda_\ell)) - \chi_r(H_\omega(\Lambda_\ell))]\Big]\Big| \lesssim r|\Lambda_\ell|^m. \tag{4.2.4}$$

Par ailleurs, H_ω étant $N\mathbb{Z}$-ergodique, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}\left[\delta_0 1_J(H_\omega)\right]\right) = N \cdot N(J)$$

où nous avons défini $\delta_0 := \mathbf{1}_{]0,N[}$ dans le cas continu (dans le cas discret nous prenons $\delta_0 := \mathbf{1}_{\{0,\dots,N-1\}}$). Ainsi, par covariance de H_ω, pour tout $\ell \in N\mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}[1_{\Lambda_\ell} 1_J(H_\omega)]\Big] = |\Lambda_\ell|\,|N(J)|.$$

Ainsi, pour $\ell > 1$ nous avons

$$\mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}[1_{\Lambda_\ell} 1_J(H_\omega)]\Big] = |\Lambda_\ell|\,|N(J)| + O\left(N(J)\right).$$

De la même manière, par définition de K et de $R_{\xi''}(\ell')$ nous obtenons

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\mathrm{tr}[1_{\Lambda_\ell} 1_J(H_\omega) - 1_{\Lambda_\ell}\chi_r(H_\omega)]\Big]\Big| \leq R_{\xi''}(\ell')|\Lambda_\ell| + Cr + CR_{\xi''}(\ell'). \tag{4.2.5}$$

Étudions maintenant $1_{\Lambda_\ell}(H_\omega(\Lambda_\ell) - z)^{-1}1_{\Lambda_\ell} - 1_{\Lambda_\ell}(H_\omega - z)^{-1}1_{\Lambda_\ell}$. Quand $\omega \in \mathcal{Y}_{\ell,\ell'}$, tous les centres de localisation de $H_\omega(\Lambda_\ell)$ sont dans $\Lambda_{\ell-\ell'}$ et nous avons, en utilisant la décroissance exponentielle des résolvantes et les calculs faits dans [GK13, (8.10)] (dans le cas discret les calculs sont similaires)

$$\Big|\mathrm{tr}\left[1_{\Lambda_\ell}\left(H_\omega - z\right)^{-1} 1_{\Lambda_\ell} - 1_{\Lambda_\ell}\left(H_\omega(\Lambda_\ell) - z\right)^{-1} 1_{\Lambda_\ell}\right]\Big| \leq |\Lambda_\ell| \frac{e^{-(\ell')^\xi}}{|\mathrm{Im} z|^2}. \tag{4.2.6}$$

Maintenant, d'après la formule de Helffer-Sjöstrand (voir par exemple[HS00, Appendix B]), représentant $\chi_r(H_\omega(\Lambda_\ell))$ et $\chi_r(H_\omega)$ en utilisant leurs résolvantes, il existe $C > 0$ tel que

$$\Big|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\mathcal{Y}_{\ell,\ell'}}\mathrm{tr}[\chi_r(H_\omega(\Lambda_\ell)) - 1_{\Lambda_\ell}\chi_r(H_\omega)]]\Big| \leq |\Lambda_\ell| r^{-C} e^{-(\ell')^\xi} \lesssim |\Lambda_\ell| e^{-(l')^\xi} \tag{4.2.7}$$

si nous choisissons $\xi'' \in (\nu, \xi)$. Nous combinons maintenant les équations 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.7 et remarquons que les deux termes d'erreur les plus grands sont $R_{\xi''}(\ell')|\Lambda_\ell|$ et $|J|(\ell')^m$. Ceci termine la preuve du Lemme 4.5. □

Sur $\mathcal{U}_{\Lambda_\ell}$, définissons la variable aléatoire de Bernoulli $X = X(J, \ell, \ell')$ telle que $X = 1$ si et seulement si $H_\omega(\Lambda_\ell)$ a une seule valeur propre dans J avec centre de localisation dans $\Lambda_{\ell-\ell'}$. Quand $X = 1$, notons E_j cette valeur propre. Comme dans [GK10a, Lemma 2.1], le Théorème 4.1 permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.6. *Supposons que (W) et (Loc) soient vérifiées dans un compact $\mathcal{I}$. Pour tous $\nu \in (0, 1)$, $p > 0$ et $R(\log L)^{1/\xi} \ll \ell' \ll \ell \ll L$ avec R suffisamment grand, pour tout intervalle $J \subset \mathcal{I}$ tel que $|J| \geq e^{-(\ell')^\nu}$, nous avons*

$$|\mathbb{P}(X = 1) - N(J)\ell| \lesssim (|J|\ell)^{1+\rho} + L^{-p} + |J|(\ell')^m + R_\eta(\ell')\ell \tag{4.2.8}$$

Démonstration. D'après le Lemme 4.5, pour prouver ce théorème, il suffit de prouver l'inégalité

$$\left|\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{E}(N(J,\ell,\ell'))\right| \lesssim (|J|l)^{1+\rho}+L^{-p}.$$

Pour cela, il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(N(J,\ell,\ell')=1)$. Ainsi, nous calculons

$$\mathbb{E}(N(J,\ell,\ell'))-\mathbb{P}(X=1)=\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(N(J,\ell,\ell')\geq k) \tag{4.2.9}$$

Nous appliquons maintenant le Théorème 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème 4.6. □

Nous utiliserons ces résultats sous les hypothèses $N(J)\asymp|\Lambda_L|^{-\alpha}$, $|J|\leq N(J)^{1/1+\tilde{\rho}}$ et **(R)**, avec $\ell=L^{\beta}$ et $\ell'=L^{\beta'}$ donnés par le Théorème 4.3. Dans ce cas, les termes à droite dans l'équation (4.2.8) sont des termes d'erreur et les plus grands termes d'erreur sont les termes $(|J|\ell)^{1+\rho}$ et $|J|(\ell')^m$. En effet, nous avons alors

$$\left(N(J)^{\frac{1}{1+\tilde{\rho}}}\ell\right)^{1+\rho}\ll N(J)\ell \Leftrightarrow N(J)^{\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}}\ell^{\rho}\ll N(J)\Leftrightarrow \alpha\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}-\beta\rho>\alpha$$
$$N(J)^{\frac{1}{1+\tilde{\rho}}}(\ell')^m\ll N(J)\ell\Leftrightarrow\frac{\alpha}{1+\tilde{\rho}}-m\beta'>\alpha-\beta\Leftrightarrow\alpha>(1+\tilde{\rho})(\alpha+m\beta'-\beta)$$

Ces deux dernières conditions sont vérifiées d'après l'équation (4.1.3) et le fait que $\alpha\in(0,1)$.

4.3 Statistiques spectrales

Dans cette section nous énonçons quelques résultats sur les statistiques spectrales d'opérateurs de Schrödinger aléatoires. Nous donnons ici deux résultats typiques : l'étude des statistiques locales des niveaux d'énergies, qui utilise (W),(M) et (Loc), et l'indépendance asymptotique des statistiques locales de niveaux à différentes énergies, qui utilise en plus les estimations de décorrélation prouvées dans le troisième chapitre. Les preuves reposent pour l'essentiel sur les Théorèmes 4.3 et 4.5 ainsi que (W) et (M), c'est pourquoi nous supposons que la DEI vérifie l'hypothèse **(R)**.

Les résultats et leurs preuves sont tirés de [GK10a] ; nous y apportons néanmoins quelques modifications pour tenir compte des estimations de Wegner et de Minami que nous utilisons. Nous noterons dans la suite de cette section

$$E_1(\omega,\Lambda)\leq\ldots E_j(\omega,\Lambda)\ldots$$

les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$, répétées autant de fois que leurs multiplicités.

Statistiques locales des niveaux d'énergies dépliés

Par définition de $\alpha_{\rho,\tilde{\rho}}\in(0,1)$, nous avons

$$\alpha_{\rho,\tilde{\rho}}\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}-1-\frac{d\rho^2}{2\rho+1}=0.$$

Il existe donc $\tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}}>\alpha_{\rho,\tilde{\rho}}$ tel que, pour tout $\alpha\in(\tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}},1)$, nous avons

$$\alpha\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}-1-\frac{d\rho^2}{2\rho+1}>1-\alpha. \tag{4.3.1}$$

Les *statistiques locales des niveaux d'énergie dépliées* proches de E_0 sont le processus ponctuel défini par

$$\Xi(\xi; E_0, \omega, \Lambda) = \sum_{j\geq 1} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi) \tag{4.3.2}$$

où

$$\xi_j(E_0, \omega, \Lambda) = |\Lambda|(N(E_j(\omega, \Lambda) - N(E_0)) \tag{4.3.3}$$

Ces statistiques sont décrites par le théorème suivant qui correspond au [GK10a, Theorem 1.10].

Théorème 4.7. *Prenons* $\tilde{\rho} \in \left[0, \dfrac{\rho}{1+\rho}\right[$ *où* ρ *est défini dans (M). Prenons* $E_0 \in I$ *tel que*

$$\forall \delta \in (0,1), \exists C(\delta) > 0, \exists \epsilon_0, \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0, \forall a \in [-1,1],$$
$$|N(E_0 + (a+\delta)\epsilon) - N(E_0 + a\epsilon)| \geq C(\delta)\epsilon^{1+\tilde{\rho}}. \tag{4.3.4}$$

Soit $\alpha \in (\tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}}, 1)$. *Il existe alors* $\delta > 0$ *tel que, pour toute suite d'intervalles* $I_1 = I_1^\Lambda, \ldots, I_p = I_p^\Lambda$ *dans* $|\Lambda|^{1-\alpha}.[-1,1]$, *où* p *peut dépendre de* Λ, *satisfaisant*

$$\inf_{j\neq k} dist(I_j, I_k) \geq e^{-|\Lambda|^\delta}, \tag{4.3.5}$$

nous avons, pour toute suite d'entiers naturels $k_1 = k_1^\Lambda, \ldots, k_1 = k_p^\Lambda$

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \left| \mathbb{P}\left(\left\{ \omega;\ \begin{array}{c} \sharp\{j; \xi_j(\omega,\Lambda) \in I_1\} = k_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sharp\{j; \xi_j(\omega,\Lambda) \in I_p\} = k_p \end{array} \right\} \right) - \frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} \right| = 0 \tag{4.3.6}$$

En particulier, $\Xi(\xi; E_0, \omega, \Lambda)$ *converge faiblement vers un processus de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. Rappelons que $\Lambda = \Lambda_L$. Nous allons diviser la preuve en deux parties. Tout d'abord, nous montrerons le théorème dans les cas dégénérés, c'est-à-dire quand la taille d'un intervalle tend vers zéro, ou quand le nombre d'intervalles, la somme des tailles des intervalles ou la somme de $(k_i)_i$, tend vers l'infini. Dans ces trois cas, nous montrerons que les deux termes dans l'équation 4.3.6 tendent séparément vers zéro. Nous prouverons ensuite le théorème dans le cas restant. D'après les hypothèses du Théorème 4.7, nous pouvons appliquer le Théorème 4.3 à l'intervalle $I_\Lambda = N^{-1}(N(E_0) + |\Lambda|^{-\alpha}[-1,1])$, avec β et β' reliés par l'équation (4.1.4), de sorte que les exposants donnés par les estimations de Wegner et de Minami dans la preuve du Théorème 4.3 sont égaux. Soit $\mathcal{Z}_\Lambda$ l'ensemble des configurations donné par le Théorème 4.3 pour cet intervalle et définissons $\tilde{N}$ comme étant le nombre de cubes construits par ce théorème. Nous noterons $(\Lambda_\ell(\gamma_j))_{1\leq j\leq \tilde{N}}$ ces cubes. Ainsi, nous avons $\tilde{N} = |\Lambda|^{1-\beta}(1 - O(|\Lambda|^{-(1-\beta)/d}))$.
Considérons l'évènement

$$\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} := \bigcap_{l=1}^{p} \{\omega;\ \#\{j;\ \xi_j(\omega,\Lambda) \in I_l\} = k_l\}.$$

Prenons $\delta < p := \beta'\xi$ où β' nous est donné par le Théorème 4.3 et δ par l'équation (4.3.5). Comme la probabilité de $\mathcal{Z}_\Lambda$ tend vers 1 quand $|\Lambda|$ tend vers l'infini, pour prouver le Théorème 4.7, il suffit de prouver la convergence suivante

$$\mathbb{P}\left(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda\right) - e^{-|I_1|}\frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-|I_p|}\frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} \to_{|\Lambda|\to+\infty} 0. \tag{4.3.7}$$

Rappelons que N est continue et croissante. Ainsi, l'image réciproque d'un intervalle est un intervalle. Pour tout cube Λ et tout intervalle I, définissons les variables aléatoires de Bernoulli $X_{\Lambda_\ell,I}$ par l'équation

$$X_{\Lambda_\ell,I} = \mathbf{1}_{H_\omega(\Lambda_\ell) \text{ a une valeur propre dans } N^{-1}[N(E_0)+|\Lambda|^{-1}I] \text{ avec centre de localisation dans } \Lambda_{\ell-\ell'}}.$$

Nous rappelons que les longueurs ℓ et ℓ' sont prises comme dans le Theorem 4.3, c'est-à-dire $\ell \asymp L^\beta$ et $\ell' \asymp L^{\beta'}$. Nous pouvons réécrire ces variables aléatoires en fonction de celles définies dans la section 4.2. Ainsi, $X_{\Lambda_\ell,I} = X(\Lambda_\ell, N^{-1}[N(E_0)+|\Lambda|^{-1}I], \ell')$.
Commençons par éliminer un des cas dégénérés : quand la longueur d'un des intervalles $(I_j)_j$ tend vers zéro. Supposons donc que, pour un certain ε petit, $|I_1| \leq \varepsilon$. Supposons d'abord que $k_1 \neq 0$. Nous savons que pour L assez grand, l'intervalle $N(E_0) + |\Lambda|^{-1}\left(I_1 + e^{-L^\eta}[-1,1]\right)$ est de taille inférieure à $2\dfrac{\epsilon}{|\Lambda|}$. Ainsi, nous avons

$$\left|N^{-1}\left[N(E_0) + |\Lambda|^{-1}\left(I_1 + e^{-L^\eta}[-1,1]\right)\right]\right| \lesssim \left(\frac{\epsilon}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{1+\tilde\rho}}. \tag{4.3.8}$$

D'après la décomposition donnée par le Théorème 4.3, pour un certain $\eta > 0$, pour L suffisamment grand, en utilisant le Lemme 4.6 avec p assez grand et l'hypothèse **(R)**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda\right) &\leq \mathbb{P}\left(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1} \cap \mathcal{Z}_\Lambda\right) \lesssim \tilde N\, \mathbb{P}\left(X_{\Lambda_\ell(\gamma),I_1+e^{-L^\eta}[-1,1]} = 1\right) \\
&\lesssim \tilde N \cdot N\left(N^{-1}\left[N(E_0) + |\Lambda|^{-1}\left(I_1 + e^{-L^\eta}[-1,1]\right)\right]\right)|\Lambda_\ell| \\
&\qquad + \tilde N\left(|\Lambda_\ell|\left(\frac{\epsilon}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{1+\tilde\rho}}\right)^{1+\rho} + \tilde N\left(\frac{\epsilon}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{1+\tilde\rho}}(\ell')^m \\
&\lesssim \varepsilon + |\Lambda|^{1-\beta}|\Lambda|^{\beta(1+\rho)}\left(\frac{\epsilon}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1+\rho}{1+\tilde\rho}} + |\Lambda|^{1-\beta}\left(\frac{\epsilon}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{1+\tilde\rho}}|\Lambda|^{m\beta'} \\
&\lesssim \varepsilon + \varepsilon^{\frac{1+\rho}{1+\tilde\rho}}|\Lambda|^{1+\beta\rho-\frac{1+\rho}{1+\tilde\rho}} + \varepsilon^{\frac{1}{1+\tilde\rho}}|\Lambda|^{1-\beta+m\beta'-\frac{1}{1+\tilde\rho}} \\
&\lesssim \varepsilon.
\end{aligned}$$

d'après (4.1.3), la troisième inégalité étant en utilisant l'hypothèse (4.0.3).
Par ailleurs, quand $k_1 \neq 0$, nous avons $e^{-|I_1|}\frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} \lesssim \varepsilon$. De plus, nous avons toujours $e^{-|I|}\frac{|I|^k}{k!} \leq 1$. Ainsi, $e^{-|I_1|}\dfrac{|I_1|^{k_1}}{k_1!}\cdots e^{-|I_p|}\dfrac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} \lesssim \varepsilon$. Si $k_1 = 0$, les calculs précédents montrent que

$$0 \leq \mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) - \mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,0;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \lesssim \varepsilon$$

et

$$0 \leq e^{-|I_2|}\frac{|I_1|^{k_2}}{k_2!}\cdots e^{-|I_p|}\frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} - e^{-|I_1|}e^{-|I_2|}\frac{|I_1|^{k_2}}{k_2!}\cdots e^{-|I_p|}\frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} \lesssim 1 - e^{-|I_1|} \lesssim \varepsilon.$$

Il reste ensuite à estimer la différence $\mathbb{P}\left(\Omega^\Lambda_{I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p}\right) - e^{-|I_2|}\dfrac{|I_2|^{k_2}}{k_2!}\cdots e^{-|I_p|}\dfrac{|I_p|^{k_p}}{k_p!}$.
Ainsi, nous nous ramenons au cas où les intervalles $(I_j)_j$ sont tous de longueur au moins égale à ε, ce qui sera supposé dans la suite de la preuve. Définissons maintenant $I_j^+ = I_j \cup [-e^{-L^\eta}, e^{-L^\eta}]$ et $I_j^- = I_j \cap ({}^cI_j + [-e^{-L^\eta}, e^{-L^\eta}])$. Par définition, nous avons $I_j^- \subset I_j \subset I_j^+$.

De plus, d'après (4.3.5), pour L suffisamment grand, nous avons $I_j^+ \cap I_k^+ = I_j^- \cap I_k^- = \emptyset$ pour $j < k$ et nous avons $|I_j^+| = |I_j|(1+O(e^{-L^\eta}))$ et $|I_j^-| = |I_j|(1+O(e^{-L^\eta}))$. Par ailleurs, pour L assez grand, pour $j \in [\![1,p]\!]$, nous avons $|I_j^+| \geq |I_j^-| \geq \varepsilon/2$.
D'après l'équation (4.1.1) donnée dans le Théorème 4.3, nous savons que

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{l=1}^{p} \Big\{\omega;\ \#\{j;\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-} = 1\} = k_l\Big\} \bigcap \mathcal{Z}_\Lambda \subset \Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda, \\
&\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda \subset \bigcap_{l=1}^{p} \Big\{\omega;\ \#\{j;\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1\} = k_l\Big\} \bigcap \mathcal{Z}_\Lambda.
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Commençons par majorer $\mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda)$ et par montrer que nous pouvons supposer que p est fini (dépendant de ε). Par définition de $\mathcal{Z}_\Lambda$ (voir le Théorème 4.3), nous savons que si $l \neq l'$ alors $\mathbb{P}(\{X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1, X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_{l'}^+} = 1\} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) = 0$. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{p} \Big\{\omega;\ \#\{j;\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1\} = k_l\Big\} \cap \mathcal{Z}_\Lambda\right) \\
&\leq \sum_{\substack{K_l \subset \{1,\cdots,\tilde{N}\} \\ \#K_l = k_l,\ 1\leq l\leq p \\ K_l \cap K_{l'} = \emptyset \text{ si } l\neq l'}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{p} \left\{\omega;\ \begin{matrix} \forall j \in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1, \\ \forall j \notin K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 0 \end{matrix}\right\} \cap \mathcal{Z}_\Lambda\right)
\end{aligned}$$

Comme pour $l \neq l'$ nous avons $K_l \cap K_{l'} = \emptyset$, les vecteurs aléatoires $((X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+})_{j\in K_l})_{1\leq l\leq p}$ sont indépendants. En effet, les cubes $(\Lambda_\ell(\gamma_j))_j$ sont à une distance au moins égale à R les uns des autres (voir (IAD)), les évènements $\left(\Big\{\omega;\ \#\{j;\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-} = 1\} = k_l\Big\}\right)_{1\leq l\leq p}$ sont donc indépendants. Nous obtenons donc les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \leq &\sum_{\substack{K_l \subset [\![1,\tilde{N}]\!] \\ \#K_l = k_l,\ 1\leq l\leq p \\ K_l \cap K_{l'} = \emptyset \text{ si } l\neq l'}} \prod_{l=1}^{p} \mathbb{P}\left(\Big\{\omega;\ \forall j \in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1\Big\}\right) \\
&\times \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \forall j \notin \bigcup_{l=1}^{p} K_l,\ \sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 0\right\}\right) \\
\leq &\sum_{\substack{K_l \subset [\![1,\tilde{N}]\!] \\ \#K_l = k_l,\ 1\leq l\leq p}} \prod_{l=1}^{p} \mathbb{P}\left(\Big\{\omega;\ \forall j \in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 1\Big\}\right) \\
&\times \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \forall j \notin \bigcup_{l=1}^{p} K_l,\ \sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} = 0\right\}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \leq &\binom{\tilde{N}}{k_1+\cdots+k_p} \prod_{l=1}^{p} \left(p_l^+\right)^{k_l} \\
&\times \mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^+} = 0\right\}\right)^{\tilde{N}-(k_1+\cdots+k_p)}
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

où nous avons défini $p_l^\pm = \mathbb{P}(X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^\pm} = 1)$ for $1 \leq l \leq p$.
Estimons maintenant le dernier terme dans l'équation (4.3.10). Nous utiliserons le

Lemme 4.8. *Définissons*

$$\delta := \alpha \frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}} - 1 - \beta\rho \tag{4.3.11}$$

Pour le choix des $(I_l^+)_{1\le l\le p}$ fait ci-dessus, sous les hypothèses du Théorème 4.7, pour ce choix de ℓ et ℓ', pour L suffisamment grand, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^+} = 0\right) = 1 - \frac{1 - O\left(|\Lambda|^{-\delta}\right)}{\tilde{N}} \sum_{l=1}^{p} |I_l|.$$

Démonstration. En utilisant les estimations de Minami (M) de la même manière que dans la preuve du Lemme 4.6, nous savons que

$$\mathbb{E}\left[N\left(\bigcup_{j=1}^{p} N^{-1}(N(E_0)+|\Lambda|^{-1}I_l^+), \ell, \ell'\right)\right] - \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} \ge 1\right). \le C|\Lambda_\ell|^{1+\rho}|I_\Lambda|^{1+\rho} + L^{-p}$$

Ainsi, d'après le Lemme 4.5 et l'hypothèse (4.0.3), comme les termes donnés par les estimations de Minami et de Wegner sont de même taille (car β et β' sont reliés par (4.1.4)), nous obtenons pour p assez grand

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{p} X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+} \ge 1\right) &= N\left(\bigcup_{j=1}^{p} N^{-1}(N(E_0)+|\Lambda|^{-1}I_l^+)\right) + O\left(|\Lambda_\ell|^{1+\rho}|N(I_\Lambda)|^{\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}}\right)\\ &= |\Lambda|^{\beta-1}\sum_{j=1}^{p}|I_l^+| + O\left(|\Lambda|^{\beta(1+\rho)-\alpha\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}}\right),\end{aligned}$$

où nous rappelons que $I_\Lambda = N^{-1}(N(E_0)+|\Lambda|^{-\alpha}[-1,1])$. Nous avons supposé que $|I_l^+| \ge \varepsilon/2$ et que $1+\beta\rho < \alpha\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}$ (donc $\beta - 1 > \beta(1+\rho) - \alpha\frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}}$). De plus, nous avons également $\beta - 1 > \beta' m - \frac{\alpha}{1+\tilde{\rho}}$ d'après l'équation (4.1.3) (rappelons que $\alpha > \tilde{\alpha}_{\rho,\rho'} > \alpha_{\rho,\rho'}$). Ceci et la définition de I_l^+ par rapport à I_l font du terme $|\Lambda|^{\beta-1}\sum_{j=1}^{p}|I_l|$ le terme principal. Ceci achève la preuve du Lemme 4.8. □

Reprenons l'estimation du dernier terme de l'équation (4.3.10). D'après le Lemme 4.5, l'hypothèse (4.3.4) et la définition de $(I_l^\pm)_l$, nous avons

$$p_l^\pm = |I_l||\Lambda|^{\beta-1}(1+O(|\Lambda|^{-\delta})) = |I_l|\tilde{N}^{-1}(1+O(|\Lambda|^{-\delta})). \tag{4.3.12}$$

Définissons alors $k = k_1 + \cdots + k_p$ et $I^+ = |I_1^+| + \cdots + |I_p^+|$. D'après le Théorème 4.3, pour $\omega \in \mathcal{Z}_\Lambda$, nous avons $k \lesssim N(I_\Lambda)|\Lambda| \lesssim |\Lambda|^{1-\alpha}$. Par ailleurs, les hypothèses du Théorème 4.7 nous disent que $I^+ \le 2|\Lambda|^{1-\alpha}$. Ainsi, pour L assez grand, nous avons

$$k + I^+ = o(|\Lambda|^{1-\beta}) = o(\tilde{N}). \tag{4.3.13}$$

D'après les équations (4.3.10) et (4.3.12) ainsi que le Lemme 4.8, en réduisant éventuellement la valeur de β, nous obtenons donc la majoration suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) &\le \binom{\tilde{N}}{k}\left(\frac{I^+}{\tilde{N}}\right)^k\left(1 - \frac{1-O\left(|\Lambda|^{-\delta}\right)}{\tilde{N}}I^+\right)^{\tilde{N}-k}\\ &\le \frac{(I^+)^k}{k!}e^{-I^+}e^{O(|\Lambda|^{-\delta}I^+)} \lesssim \frac{(I^+)^k}{k!}e^{-I^+}\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

où nous avons utilisé l'équation (4.3.13) pour l'estimation

$$|\Lambda|^{-\delta} I^+ \leq |\Lambda|^{-\delta+1-\alpha} = o(1). \tag{4.3.15}$$

En effet, d'après la définition de δ donnée dans l'équation (4.3.11) et le fait que $\tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}} < \alpha$ (voir (4.3.1)), nous avons

$$\begin{aligned} -\delta + 1 - \alpha &= -\alpha \frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}} + 1 + \beta\rho + 1 - \tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}} \\ &< \left[-\alpha \frac{1+\rho}{1+\tilde{\rho}} + 1 + \frac{d\rho^2}{2\rho+1} + 1 - \alpha \right] + \left[\beta\rho - \frac{d\rho^2}{2\rho+1} \right]. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Le premier terme dans la dernière inégalité est strictement négatif d'après (4.3.1). Maintenant, comme β et β' sont reliés par (4.1.4) et $\alpha > \tilde{\alpha}_{\rho,\tilde{\rho}} > \alpha_{\rho,\tilde{\rho}}$, nous pouvons prendre β' suffisamment proche de 0 et donc β suffisamment proche de $\dfrac{d\rho}{2\rho+1}$ de sorte que le deuxième terme dans la dernière inégalité soit plus petit que l'opposé du premier terme. Nous avons donc $-\delta + 1 - \alpha < 0$, ce qui prouve l'équation (4.3.15) et donc l'équation (4.3.14).
L'inégalité (4.3.14) nous dit en particulier que si $k + I^+ \to +\infty$ (dans la limite $L \to +\infty$) alors $\mathbb{P}(\Omega^{\Lambda}_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \to 0$. Or, nous avons supposé que, pour $1 \leq l \leq p$, nous avons $|I_l^+| \geq \varepsilon/2$. Ainsi, si $p \to \infty$ quand $L \to \infty$, c'est également le cas de $I^+ \to \infty$. Ainsi, si $k + I^+ + p \to +\infty$ quand $L \to +\infty$, nous avons

$$\mathbb{P}(\Omega^{\Lambda}_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \to 0.$$

Par ailleurs, c'est également le cas du produit

$$\frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} e^{-|I_1|} \cdots \frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} e^{-|I_p|},$$

toujours dans l'hypothèse où $|I_l^+| \asymp |I_l| \geq \varepsilon/2$. Nous avons donc prouvé le théorème sous l'hypothèse $k + I^+ + p \to +\infty$ quand $L \to +\infty$.

Il reste donc à traiter le cas où k, I^+ et p restent bornés, ce qui sera supposé dans le reste de la preuve. D'après l'équation (4.3.9), en utilisant les mêmes calculs que précédemment, nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{K_l \subset [\![1,\tilde{N}]\!] \\ \#K_l = k_l,\ 1 \leq l \leq p \\ K_l \cap K_{l'} = \emptyset \text{ si } l \neq l'}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{p} \left\{ \omega;\ \begin{array}{c} \forall j \in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j), I_l^-} = 1, \\ \forall j \notin \bigcup_{l' \neq l} K_{l'},\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j), I_l^-} = 0 \end{array} \right\} \cap \mathcal{Z}_\Lambda \right) \\ &\qquad \leq \mathbb{P}(\Omega^{\Lambda}_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \\ &\qquad \leq \sum_{\substack{K_l \subset [\![1,\tilde{N}]\!] \\ \#K_l = k_l,\ 1 \leq l \leq p \\ K_l \cap K_{l'} = \emptyset \text{ si } l \neq l'}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{p} \left\{ \omega;\ \begin{array}{c} \forall j \in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j), I_l^+} = 1, \\ \forall j \notin \bigcup_{l' \neq l} K_{l'},\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j), I_l^+} = 0 \end{array} \right\} \cap \mathcal{Z}_\Lambda \right). \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_\Lambda)$ tend vers un et p est borné. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{K_l\subset[\![1,\tilde{N}]\!]\\ \#K_l=k_l,\ 1\le l\le p\\ K_l\cap K_{l'}=\emptyset \text{ si } l\neq l'}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^p \left\{\omega;\ \begin{array}{r}\forall j\in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=1,\\ \forall j\notin K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=0\end{array}\right\}\right)+o(1)\\
&\qquad\le \mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p}\cap\mathcal{Z}_\Lambda)\\
&\qquad\le \sum_{\substack{K_l\subset[\![1,\tilde{N}]\!]\\ \#K_l=k_l,\ 1\le l\le p\\ K_l\cap K_{l'}=\emptyset \text{ si } l\neq l'}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^p \left\{\omega;\ \begin{array}{r}\forall j\in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=1,\\ \forall j\notin K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=0\end{array}\right\}\right)+o(1).
\end{aligned}$$

Prenons maintenant, pour $1\le l\le p$, des ensembles $K_l\subset[\![1,\tilde{N}]\!]$ tels que $(\#K_l)_{1\le l\le p}=(k_l)_{1\le l\le p}$ et $K_l\cap K_{l'}=\emptyset$ quand $l\neq l'$. Nous calculons alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^p \left\{\omega;\ \begin{array}{r}\forall j\in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=1,\\ \forall j\notin \bigcup_{l'\neq l}K_{l'},\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=0\end{array}\right\}\right)\\
&\qquad\le \prod_{j\notin\cup_{l=1}^p K_l}\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^p X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=0\right)\prod_{l=1}^p\prod_{j\in K_l}\mathbb{P}\left(X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^+}=1\right)\\
&\qquad\le \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^p X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^+}=0\right)^{\tilde{N}-(k_1+\cdots+k_p)}\prod_{l=1}^p\mathbb{P}(X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^+}=1)^{k_l}\\
&\qquad\le \left(1-\sum_{l=1}^p p_l^+\right)^{\tilde{N}-(k_1+\cdots+k_p)}\prod_{l=1}^p\left((p_l^+\right)^{k_l}(1+o(1))\\
&\qquad\le \left(\prod_{l=1}^p e^{-|I_l^+|}|I_l^+|^{k_l}\right)(\tilde{N})^{k_1+\cdots+k_p}(1+o(1))
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^p \left\{\omega;\ \begin{array}{r}\forall j\in K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=1,\\ \forall j\notin K_l,\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=0\end{array}\right\}\right)&\ge \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^p X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^-}=0\right)^{\tilde{N}-(k_1+\cdots+k_p)}\\
&\quad\times\prod_{j\in\bigcup_l K_l}\left(\sum_{l=1}^p \mathbf{1}_{j\in K_l}\ \mathbb{P}\left(\begin{array}{r}X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=1,\\ \sum_{l'\neq l}X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_{l'}^-}=0\end{array}\right)\right)\\
&\ge \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^p X_{\Lambda_\ell(\gamma_1),I_l^-}=0\right)^{\tilde{N}-(k_1+\cdots+k_p)}\\
&\quad\times\prod_{j\in\bigcup_l K_l}\left(\sum_{l=1}^p \mathbf{1}_{j\in K_l}\ \left[\mathbb{P}\left(X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=1\right)-\mathbb{P}\left(\begin{array}{r}X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-}=1,\\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_{l'}^-}=1\end{array}\right)\right]\right)\\
&\ge \left(\prod_{l=1}^p e^{-|I_l^+|}|I_l^-|^{k_l}\right)(\tilde{N})^{k_1+\cdots+k_p}(1+o(1))
\end{aligned}$$

car $k(= k_1 + \cdot + k_p)$ est borné, ainsi que

$$\mathbb{P}\left(X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-} = 1\right) - \mathbb{P}\begin{pmatrix} X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_l^-} = 1, \\ X_{\Lambda_\ell(\gamma_j),I_{l'}^-} = 1 \end{pmatrix} = p_l^- \left(1 + O\left(|\Lambda|^{-\delta}\right)\right).$$

Par ailleurs, toujours car k est borné, quand $N \to +\infty$, nous avons

$$\sum_{\substack{K_l \subset [\![1,\tilde{N}]\!] \\ \#K_l = k_l,\ 1 \le l \le p \\ K_l \cap K_{l'} = \emptyset \text{ si } l \neq l'}} 1 = \prod_{l=1}^{p} \binom{\tilde{N}}{k_l}(1 + o(1))$$

Ainsi, pour L suffisamment grand, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{-|I_1^-|}\frac{|I_1^-|^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-|I_p^-|}\frac{|I_p^-|^{k_p}}{k_p!}(1 + o(1)) &\le \mathbb{P}(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p} \cap \mathcal{Z}_\Lambda) \\ &\le e^{-|I_1^+|}\frac{|I_1^+|^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-|I_p^+|}\frac{|I_p^+|^{k_p}}{k_p!}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

Maintenant, comme $|I_l^\pm| = |I_l| + O\left(e^{-L^\eta}\right)$, nous obtenons enfin

$$\lim_{|\Lambda| \to +\infty} \left| \mathbb{P}\left(\Omega^\Lambda_{I_1,k_1;I_2,k_2;\cdots;I_p,k_p}\right) - e^{-|I_1|}\frac{|I_1|^{k_1}}{k_1!} \cdots e^{-|I_p|}\frac{|I_p|^{k_p}}{k_p!} \right| = 0.$$

Ceci termine la preuve du Théorème 4.7. □

Maintenant, le Théorème 0.2 est une conséquence du Théorème 4.7. En effet, la condition (4.3.4) est en particulier satisfaite à tout point E_0 où N est dérivable et de dérivée strictement positive.

Indépendance asymptotique des processus locaux

Dans cette section, nous montrons comment des processus ponctuels associés à différentes énergies se comportent entre eux, en utilisant les estimations de décorrélation. Le résultat suivant correspond au [GK10a, Theorem 1.11].

Théorème 4.9. *Supposons que (IAD), (W), (M), (Loc) et (D) soient vérifiées. Prenons $E_0 \in \mathcal{I}$ et $E_0' \in \mathcal{I}$ tels que $E_0 \neq E_0'$ et supposons que l'hypothèse (4.0.3) est satisfaite en E_0 et en E_0'.*
Quand $|\Lambda| \to \infty$ les processus ponctuels $\Xi(E_0, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(E_0', \omega, \Lambda)$, convergent faiblement vers deux processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ indépendants avec intensité la mesure de Lebesgue. En d'autre termes, pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ deux intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} \sharp\{j; \xi_j(E_0, \omega, \Lambda) \in U_+\} = k_+ \\ \sharp\{j; \xi_j(E_0', \omega, \Lambda) \in U_-\} = k_- \end{pmatrix} \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}}{\to} \left(\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!}e^{-|U_+|}\right)\left(\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}e^{-|U_-|}\right)$$

Démonstration. Dans cette preuve également nous utiliserons le Theoreme 4.3. Ainsi, nous décomposons Λ en cubes $\Lambda = \cup_{\gamma \in \Gamma_\Lambda} \Lambda_\ell(\gamma)$; où la taille ℓ est donné dans le Théorème 4.3

et $N := \#\Gamma_\Lambda \sim |\Lambda|\ell^{-d}$. Remarquons que la décomposition est la même pour les énergies E et E'. Pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, définissons les variables aléatoires

$$X_\gamma(E,I) = \begin{cases} 1 \text{ si } H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma)) \text{ a une valeur propre dans } N^{-1}[N(E_0) + |\Lambda|^{-1} I], \\ 0 \text{ si ce n'est pas le cas.} \end{cases} \tag{4.3.17}$$

Pour prouver le Théorème 4.9, il suffit de prouver que, pour $(k,k') \in \mathbb{N}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ et $I' \subset \mathbb{R}$ deux intervalles compact, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E,I)\right)^k \left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E',I')\right)^{k'}\right] \\ = \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E,I)\right)^k\right] \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E',I')\right)^{k'}\right]. \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Il suffira alors d'appliquer le Théorème 4.7. Ainsi, nous développons les sommes et en utilisant l'indépendance des opérateurs restreint aux cubes, nous obtenons (pour simplifier l'écriture, le symbole $\sum\limits_{\gamma_i}$ signifie $\sum\limits_{\gamma_i \in \Lambda_l}$)

$$\begin{aligned} S_N(k,k') =& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E,I)\right)^k \left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E',I')\right)^{k'}\right] \\ =& \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_k} \sum_{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'}} \mathbb{E}\left[X_{\gamma_1}(E,I)\cdots X_{\gamma_k}(E,I)\cdot X_{\gamma'_1}(E',I')\cdots X_{\gamma'_{k'}}(E',I')\right] \\ =& G_N(k,k') + R_N(k,k') \end{aligned}$$

où

$$G_N(k,k') = \sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}\cap\{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'}\}=\emptyset} \mathbb{E}\left[X_{\gamma_1}(E,I)\cdots X_{\gamma_k}(E,I)\cdot X_{\gamma'_1}(E',I')\cdots X_{\gamma'_{k'}}(E',I')\right]$$

et où

$$\begin{aligned} R_N(k,k') &= \sum_\gamma \sum_{\substack{\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1} \\ \gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'-1}}} \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\cdot\prod_{j=1}^{k-1} X_{\gamma_j}(E,I)\cdot\prod_{j'=1}^{k'-1} X_{\gamma'_{j'}}(E',I')\right] \\ &= \sum_\gamma \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{l'=1}^{k'-1} \binom{k-1}{l}\binom{k'-1}{l'} \\ &\qquad \sum_{\substack{\gamma\notin\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}\} \\ \gamma\notin\{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'-1}\}}} \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\cdot\prod_{j=1}^{l} X_{\gamma_j}(E,I)\cdot\prod_{j'=1}^{l'} X_{\gamma'_{j'}}(E',I')\right] \\ &= \sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\right] \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{l'=1}^{k'-1} \binom{l}{k-1}\binom{l'}{k'-1} \\ &\qquad \sum_{\substack{\gamma\notin\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}\} \\ \gamma\notin\{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'-1}\}}} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{l} X_{\gamma_j}(E,I)\cdot\prod_{j'=1}^{l'} X_{\gamma'_{j'}}(E',I')\right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$R_N(k,k') = \sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\right] \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{l'=1}^{k'-1} \binom{k-1}{l}\binom{k'-1}{l'} S_{N-1}(l,l'). \tag{4.3.19}$$

Par ailleurs, nous calculons

$$\begin{aligned} S_N(k)S_N(k') &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E,I)\right)^k\right] \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma_\Lambda} X_\gamma(E',I')\right)^{k'}\right] \\ &= \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_k} \mathbb{E}\left[X_{\gamma_1}(E,I)\cdots X_{\gamma_k}(E,I)\right] \sum_{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'}} \mathbb{E}\left[X_{\gamma'_1}(E',I')\cdots X_{\gamma'_{k'}}(E',I')\right] \\ &= G_N(k,k') + Q_N(k,k') \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_N(k,k') &= \sum_\gamma \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_{k-1}} \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_{\gamma_1}(E,I)\cdots X_{\gamma_{k-1}}(E,I)\right] \\ &\qquad \cdot \sum_{\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{k'-1}} \mathbb{E}\left[X_\gamma(E',I')X_{\gamma'_1}(E',I')\cdots X_{\gamma'_{k'-1}}(E',I')\right] \\ &= \sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)\right]\mathbb{E}\left[X_\gamma(E',I')\right]\left[\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k-1}{l} S_{N-1}(l)\right]^2. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Nous remarquons que nous avons obtenu deux fois le terme $G_N(k,k')$ et que donc

$$S_N(k,k') - S_N(k)S_N(k') = R_N(k,k') - Q_N(k,k'). \tag{4.3.21}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous dit maintenant que

$$S_N(k,k') \le \sqrt{S_N(2k)S_N(2k')}.$$

Par ailleurs, comme le Lemme 4.5 nous dit que $\mathbb{P}(X_\gamma = 1) \le C/N$, nous calculons

$$S_N(k) \le \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\left(\frac{C}{N}\right)^j j^k \le C_k \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}\left(\frac{Ck}{N}\right)^j \le C_k\, e^{N\log(1+Ck/N)} \le C_k\, e^{Ck} < +\infty$$

où, pour $k \ge 2$, nous avons défini $C_k = e^{k(\log k - 1 - \log\log k)}$.
Ainsi, pour tout k et k', nous avons

$$\sup_{N\ge 1} |S_N(k)| + |S_N(k,k')| < +\infty,$$

Ainsi, les équations (4.3.19), (4.3.20) et (4.3.21) nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} &|S_N(k,k') - S_N(k)S_N(k')| \\ &\qquad \le C_{k,k'} \max\left(\sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)\right]\mathbb{E}\left[X_\gamma(E',I')\right], \sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\right]\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour prouver (4.3.18) il suffit de montrer que

$$\sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)\right]\mathbb{E}\left[X_\gamma(E',I')\right] \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \sum_\gamma \mathbb{E}\left[X_\gamma(E,I)X_\gamma(E',I')\right] \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0.$$

Par construction les opérateurs $(H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma)))_\gamma$ sont i.i.d., cela revient donc à prouver que

$$\frac{L}{\ell}.\mathbb{E}\left[X_0(E,I)\right]\mathbb{E}\left[X_0(E',I')\right] \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \frac{L}{\ell}.\mathbb{E}\left[X_0(E,I)X_0(E',I')\right] \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0. \tag{4.3.22}$$

Le premier point est maintenant une conséquence des estimations de Wegner, car $\ell/L \to 0$, et le second des estimations de décorrélation des valeurs propres éloignées car $\ell/L^\gamma \to 0$ (γ est l'exposant donné dans le théorème 3.2) en réduisant éventuellement β. Ceci termine la preuve du Théorème 4.9. □

Statistiques locales des espacement de niveaux d'énergie

D'autres résultats sur les statistiques spectrales s'obtiennent sous les mêmes hypothèses. Nous rappelons sans preuve, à titre d'exemple, une implication du [Klo13, Theorem 1.5] et des résultats de [Min07], qui donne un résultat plus général que le [GK10a, Theorem 1.4] sur les espacements de niveaux d'énergie. Prenons $I_\Lambda = [a_\Lambda, b_\Lambda]$ tel que $|a_\Lambda| + |b_\Lambda| \to 0$. Définissons $\delta N_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|(N(E_{j+1}(\omega,\Lambda)) - N(E_j(\omega,\Lambda))) \geq 0$, $N(I_\Lambda,\Lambda,\omega) := \sharp\{j, E_j(\omega,\Lambda) \in I_\Lambda\}$ et définissons la distribution empirique de ces espacements comme le nombre aléatoire défini pour tout $x \geq 0$:

$$DSL(x; E_0 + I_\Lambda, \omega, \Lambda) = \frac{\sharp\{j; E_j(\omega,\Lambda) \in E_0 + I_\Lambda, \delta N_j(\omega,\Lambda) \geq x\}}{N(I_\Lambda,\Lambda,\omega)} \tag{4.3.23}$$

En utilisant un théorème de décomposition (à savoir le [GK10a, Theorem 1.2]) similaire au théorème 4.3 mais qui contrôle la plupart des valeurs propres dans des intervalles de taille logarithmique, nous avons le

Théorème 4.10. *Supposons que (IAD),(W), (M), (Loc) sont vérifiées et que la DEI est höldérienne. Fixons $E_0 \in \mathcal{I}$. Soit $(I_\Lambda)_\Lambda$ une suite décroissante d'intervalle telle que*

$$\sup_{E\in I_\Lambda} |E| \underset{\Lambda\to\mathbb{Z}}{\to} 0. \tag{4.3.24}$$

Supposons que

$$\text{si } l' = o(L) \text{ alors } \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{N(E_0 + I_{\Lambda_{L+l'}})}{N(E_0 + I_{\Lambda_L})} = 1. \tag{4.3.25}$$

Il existe alors $\tau = \tau(\rho)$ tel que, si pour Λ assez grand, nous avons

$$N(E_0 + I_\Lambda)|I_\Lambda|^{-1-\tilde\rho} \geq 1 \text{ et } |\Lambda|^\delta.N(E_0 + I_\Lambda) \underset{\Lambda\to\mathbb{Z}}{\to} +\infty \tag{4.3.26}$$

pour un certain $\delta > 0$ et un certain $\tilde\rho > 0$, tel que $\dfrac{\delta\tilde\rho}{1+\tilde\rho} < \tau$. Alors, avec probabilité égale à un, quand $\Lambda \to \infty$, $DLS(x; E_0 + I_\Lambda, \omega, \Lambda)$ converge uniformément vers la distribution $x \to e^{-x}$, autrement dit, avec probabilité égale à un,

$$\sup_{x\geq 0} |DLS(x; E_0 + I_\Lambda, \omega, \Lambda) - e^{-x}| \underset{\Lambda\to\mathbb{Z}}{\to} 0. \tag{4.3.27}$$

Dans [GK10a] nous trouvons d'autres résultats, liés par exemple aux statistiques des centres de localisation ou à l'étude des statistiques jointes des niveaux d'énergie et des centres de localisation. Par ailleurs, dans le régime localisé, l'opérateur H_ω (défini sur l'espace entier) a uniquement du spectre purement ponctuel. Il est donc légitime et possible (voir par exemple [GK10a, Klo13]), d'étudier les statistiques des valeurs propres de l'opérateur H_ω.

Annexe A

Propriétés des solutions d'équations de Sturm-Liouville

A.1 Variables de Prüfer

Dans cette section, nous présentons les variables de Prüfer (voir par exemple[Zet05, Chapter 4]), essentielles dans la compréhension des équations de Sturm-Liouville et dans la preuve des estimations de Minami.

Fixons $l \in \mathbb{R}^+$, $p : [0, l] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $q : [0, l] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telles qu'il existe $M > 0$ vérifiant

$$\begin{cases} \sup ess\, |q| \leq M \\ \dfrac{1}{M} \leq \inf |p| \leq \sup |p| \leq M \end{cases}. \tag{A.1.1}$$

Comme p est continue par morceaux, il existe $\nu \in (0, 1/2)$ et une subdivision $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = l$ avec $x_{i+1} - x_i \geq \nu$, tels que p est continue et de signe fixe sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Dans cette annexe, nous étudierons le problème aux valeurs propres associé à l'équation de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} (Hu) := -(pu')' + qu = Eu, \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}. \tag{A.1.2}$$

Les constantes dans les résultats que nous énoncerons dépendront uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$, de $\|p^{-1}\|_\infty$ et de η. Remarquons que, quitte à multiplier $q - E$ par une constante, nous pouvons supposer que

$$\sup |p| \leq 1. \tag{A.1.3}$$

Nous le ferons dans les preuves des résultats que nous énoncerons. Ainsi, les constantes dans nos preuves dépendront uniquement de $\|q\|_\infty$ et de $\|p^{-1}\|_\infty$ et η. Nous pouvons associer à toute solution non nulle u de (A.1.2) des fonctions continues $(r_u, \phi_u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, appelées variables de Prüfer, telles que,

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ p(x)u'(x) \end{pmatrix} = r_u(x) \begin{pmatrix} \sin(\phi_u(x)) \\ \cos(\phi_u(x)) \end{pmatrix}. \tag{A.1.4}$$

L'équation (A.1.2) peut alors être réécrite en fonction des variables de Prüfer et nous obtenons alors le système

$$\phi_u'(x) = \frac{1}{p(x)} - \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - E\right)\sin^2(\phi_u(x)) \tag{A.1.5}$$

$$\frac{r_u'(x)}{r_u(x)} = \left(\frac{1}{p(x)} + q(x) - E\right)\sin(\phi_u(x))\cos(\phi_u(x)) \tag{A.1.6}$$

Maintenant, si u est solution de (A.1.2) pour $E = 0$ et v est solution de (A.1.2) pour $E \neq 0$, nous pouvons définir $\delta\phi = \phi_v - \phi_u$. Cette fonction vérifie alors l'équation différentielle

$$\begin{aligned}(\delta\phi)'(x) &= \left(\frac{1}{p(x)} + q(x)\right)\left(\sin^2(\phi_u(x)) - \sin^2(\phi_v(x))\right) + E^2\sin^2(\phi_v(x)) \\ &= \left(\frac{1}{p(x)} + q(x)\right)\left[\sin(\phi_u(x) + \phi_v(x))\sin(\phi_u(x) - \phi_v(x))\right] + E^2\sin^2(\phi_v(x))\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

A.2 Estimations d'effet tunnel inverse

Dans cette partie, nous prouvons des résultats qui ont été utilisés dans le deuxième chapitre, dédié aux estimations de Minami. Ces résultats sont tirés de [Klo11, Appendix] et les preuves de [HSS10, Appendix] et [Klo11, Appendix], à quelques changements près, dus à l'équation considérée ici.

Dans le lemme suivant nous noterons $I(x) := [x - 1/2, x + 1/2] \cap [0, l]$.

Lemme A.1. *Il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$, $\|\rho^{-1}\|_\infty$ et ν) tel que, si u est solution de l'équation $Hu = 0$ alors $\forall x \in [0, l]$*

$$\frac{1}{C}\int_{I(x)} u^2(y)dy \leq r_u^2(x) \leq C\int_{I(x)} u^2(y)dy, \tag{A.2.1}$$

$$\min_{I(x)} r_u \leq \max_{I(x)} r_u \leq C\min_{I(x)} r_u, \tag{A.2.2}$$

$$\|\sin(\phi_u(.))\|_{L^2(I(x))} \geq \frac{1}{C}. \tag{A.2.3}$$

Démonstration. Nous supposons dans la preuve que (A.1.3) est vérifiée et nous rappelons que p est de signe fixe sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ de taille au moins égale à η avec $\eta \in (0, 1/2)$.

D'après (A.1.6), il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$ et $\|p^{-1}\|_\infty$) tel que $r_u' \leq Cr_u$. La deuxième inégalité (A.2.2) est donc une application immédiate du lemme de Gronwall.

Nous prouvons maintenant la première inégalité (A.2.1). Celle-ci est homogène de degré 2, il suffit donc de prouver le résultat sous l'hypothèse $r_u(x) = 1$. D'après l'inégalité (A.2.2), il existe $C > 0$ tel que $\min_{I(x)} r_u^2 \geq \frac{1}{C^2}$. Supposons que $\max_{I(x)} u^2 < \frac{\nu^2}{4C^2}$. Nous avons alors $\min_{I(x)} (pu')^2 > \frac{3}{4C^2}$. Comme pu' est continue, elle garde donc un signe constant sur $I(x)$. De plus, $(u')^2 \geq (pu')^2$ d'après (A.1.3), et si p est de signe constant sur $(y, z) \subset I(x)$, alors u' garde un signe constant sur (y, z) et nous calculons

$$|u(z) - u(y)| = \left|\int_y^z u'(t)dt\right| \geq \frac{\sqrt{3}|z - y|}{2C}. \tag{A.2.4}$$

Maintenant, comme $|I(x)| = 1$, il existe i tel que $]x_i, x_{i+1}[\cap I(x)$ est un intervalle de taille supérieur à $\nu \in (0, 1/2)$. Nous pouvons donc choisir l'intervalle (y, z) de longueur égale à η, et sur lequel p est de signe fixe. Nous obtenons alors $\dfrac{\nu}{C} \geq |u(z) - u(y)| \geq \dfrac{\sqrt{3}\nu}{2C}$, ce qui est absurde. Il existe donc $x_0 \in I(x)$ tel que $u^2(x_0) \geq \dfrac{\nu^2}{4C^2}$. Maintenant, toujours d'après la seconde inégalité, nous avons

$$\max_{I(x)} (u')^2 \leq \|p^{-1}\|_\infty^2 \max_{I(x)} (pu')^2 \leq \|p^{-1}\|_\infty^2 \max_{I(x)} r_u^2 \leq \|p^{-1}\|_\infty^2 C^2.$$

Ainsi, pour $z \in I(x)$,

$$|u(z) - u(x_0)| \leq \|p^{-1}\|_\infty C|z - x_0|. \tag{A.2.5}$$

Posons $\delta = \dfrac{u(x_0)}{2C\|p^{-1}\|_\infty}$. Alors, pour $z \in I(x) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, nous avons $|u(z)| \geq \dfrac{|u(x_0)|}{2}$. Ainsi,

$$\int_{I(x)} u^2(y)dy \geq \delta \frac{|u(x_0)|^2}{2}. \tag{A.2.6}$$

Ceci prouve la première inégalité, en prenant un nouveau $C > 0$ suffisamment grand.

Pour la dernière inégalité (A.2.3), nous savons que

$$\begin{aligned} \| \sin(\phi_u(.)) \|_{L^2(I(x))} = \int_{I(x)} \frac{u^2(y)}{r_u^2(y)} dy &\geq \frac{1}{\max_{I(x)} r_u^2} \int_{I(x)} u^2(y)dy. \\ &\geq \frac{r_u^2(x)}{C \max_{I(x)} r_u^2} \geq \frac{1}{C^2}. \end{aligned}$$

d'après la première puis la seconde assertion. □

Soit u une solution non nulle de $Hu = 0$ et v une solution non nulle de $Hv = Ev$. On leur associe des variables de Prüfer (r_u, ϕ_u) et (r_v, ϕ_v) comme dans le lemme précédant. Définissons $\delta\phi = \phi_v - \phi_u$.

Lemme A.2. *Il existe $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$ et $\|p^{-1}\|_\infty$) tel que pour tout $x_0 \in [0, \ell]$, nous avons*

$$\forall x \in [0, \ell],\ |\sin(\delta\phi(x))| \leq [|\sin(\delta\phi(x_0))| + E\ell]e^{C|x-x_0|}.$$

Démonstration. Soit s la fonction $s(x) = |\sin(\delta\phi(s))|$. Nous déduisons de (A.1.7) qu'il existe $C > 0$ tel que s vérifie l'équation intégrale

$$s(x) \leq s(x_0) + E\ell + C \int_{x_0}^{x} s(t)dt.$$

Nous concluons la preuve en utilisant le lemme de Grönwall. □

Lemme A.3. *Il existe $\eta_0 > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$ et $\|p^{-1}\|_\infty$) tel que, pour tout $\eta \in (0, \eta_0)$, nous avons*

1. *si $y < y'$ sont choisis de sorte que $\max_{x\in[y,y']} |\sin \phi_u(x)| \leq \eta$, alors $|y - y'| \leq \eta/\eta_0$;*
2. *si $|\sin(\phi_u(y))| \leq \eta$ pour un certain y, alors pour x vérifiant $4\eta \leq |x - y| \leq \sqrt{\eta}$, nous avons*

$$|\sin(\phi_u(y))| \geq |x - y|/2.$$

3. si $y < y'$ sont choisis tels que

$$|\sin\phi_u(y)| = |\sin\phi_u(y')| = \eta \text{ et } \min_{x\in[y,y']} |\sin\phi_u(x)| \geq \eta$$

alors $|y - y'| \geq (\eta_0 - \eta)\eta_0$.

Démonstration. Tout d'abord, l'équation (A.1.5) nous donne l'existence de $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$, $\|p^{-1}\|_\infty$ et η), tel que $|\phi_u'(x)| \leq C$ et tel que, si $|\sin(\phi_u(x))| \leq \eta$ alors $1 - C\eta^2 \leq |\cos\phi_u(x)|\phi_u'(x)$. Choisissons alors $\eta_0 \in (0,1)$ tel que $1 - C\eta_0^2 \geq 1/2$.

Commençons par prouver le premier point. Choisissons $y < y'$ tels que $\max_{x\in[y,y']} |\sin\phi_u(x)| \leq \eta$. Comme $\eta < \eta_0 < 1$, $\cos\phi_u(x)$ garde un signe constant sur $[y, y']$. De ce fait, nous obtenons

$$2\eta \geq |\sin\phi_u(y') - \sin\phi_u(y)| = \int_y^{y'} |\cos\phi_u(x)|\phi_u'(x)dx \geq |y - y'|/2.$$

Il suffit alors de prendre η_0 suffisamment petit pour prouver (1).

Passons maintenant à la preuve de (2). Nous avons vu que, pour un certain $C > 0$ (dépendant uniquement de $\|q\|_\infty$, $\|p\|_\infty$ et $\|p^{-1}\|_\infty$), nous avons $|\phi_u'(x)| \leq C$. Ainsi, il existe $\eta_0 > 0$ tel, que pour tout $\eta \in (0, \eta_0]$, si nous avons $|\sin(\phi_u(y))| \leq \eta$, alors pour $|x - y| \leq \eta_0$ nous avons $|\sin(\phi_u(x))| \leq \eta_0$. Aussi, pour η_0 suffisamment petit, la fonction $x \to |\cos(\phi_u(x))|$ reste au moins égal à 9/10 sur $[y - \eta_0, y + \eta_0]$ et $|\phi_u'(x)| \geq \dfrac{9}{10}$ sur $[y - \eta_0, y + \eta_0]$. Nous obtenons ainsi

$$\forall [y - \eta_0, y + \eta_0],\ \frac{d}{dx}[\sin(\phi_u(x))] \geq 3/4.$$

Le point (2) est alors une conséquence de la formule de Taylor.

Terminons maintenant avec le preuve du point (3). Comme $|\phi_u'(x)| \leq C$, pour tout $z \in (y, y + (\eta_0 - \eta)/C)$, nous avons $|\sin(\phi_u(z))| \leq \eta_0$. Ainsi, la fonction $x \to \cos\varphi_u(x)$ ne change pas de signe sur $[y, \min(y', y+(\eta_0-\eta)/C)]$. De plus, comme $\min_{x\in[y,y']} |\sin(\phi_u(x))| \leq \eta$, la fonction $x \to \sin\varphi_u(x)$ garde le même signe que $x \to \cos\phi_u(x)$. Aussi, pour tout $z \in (y, y + (\eta_0 - \eta)/C)$, nous savons que

$$\begin{aligned} |\sin\phi_u(z)| &= |\sin\phi_u(y)| + \int_y^z |\cos\phi_u(x)|\phi_u'(x)dx \\ &\geq \eta + \sqrt{1 - (\eta')^2}(z - y)/2 > \eta. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi $y' > y+(\eta_0-\eta)/C$. Nous pouvons maintenant prendre η_0 suffisamment petit de sorte que le point (3) soit prouvé. □

A.3 Solutions jamais oscillantes

Dans cette section, nous prouvons des résultats sur les équations de Sturm-Liouville et leurs solutions jamais oscillantes. Ces résultats servent à prouver les estimations de décorrélation pour les modèles continus. Nous commençons par resituer le problème.

Soit q une fonction définie sur $[0, 1)$ continue et positive. Définissons alors $\tilde{q}$ son extension 1-périodique par

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1),\ \tilde{q}(x) = q(x) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{q}(x+1) = \tilde{q}(x) \end{cases}$$

et prenons deux réels $E_2 < E_1$. Supposons que $m := \inf q > 0$. Définissons l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_\lambda^j) : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = (\lambda \tilde{q}(x) - E_j)\, y(x). \tag{A.3.1}$$

Nous allons prouver que pour λ assez grand, les solutions de (A.3.1) n'oscillent jamais et pourrons de ce fait être comparées les unes aux autres assez facilement. Tout d'abord nous prouvons le

Lemme A.4. *Soit λ tel que $\lambda m > E_j$. Alors, toute solution non-nulle de $(\mathcal{E}_\lambda^j)$ s'annule au plus une fois.*

Démonstration. Soit u une solution non nulle de $(\mathcal{E}_\lambda^j)$ s'annulant au point x_0. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u'(x_0) > 0$. Ainsi, pour tout $x > x_0$, $u(x) > 0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait x_1 tel que $u''(x_1) < 0$ et $u(x_1) > 0$, ce qui entrerait en contradiction avec le fait que $\lambda m > E_j$. De la même manière, nous prouvons que pour tout $x < x_0$, $u(x) < 0$. □

Ainsi, une solution possède un signe fixe au voisinage de $\pm\infty$. Nous pouvons maintenant comparer des solutions associées à des énergies différentes.

Lemme A.5. *Soit λ tel que $\lambda m > E_1 > E_2$. Soit u (respectivement v) une solution non nulle de $(\mathcal{E}_\lambda^1)$, positive au voisinage de ∞ (respectivement $(\mathcal{E}_\lambda^2)$, positive au voisinage de ∞). Alors la fonction $v - u$ change de signe au plus trois fois.*

Démonstration. Définissons la fonction $w := v - u$. La fonction w satisfait l'équation différentielle suivante :

$$w'' = (\lambda q - E_1)w + (E_1 - E_2)v. \tag{A.3.2}$$

Maintenant, supposons qu'il existe x_+ tel que $v(x_+) \geq 0$, $w(x_+) = 0$ et tel que w est négative à gauche de x_+ et positive à droite de x_+. La fonction v est alors positive sur $]x_+, \infty[$ et, pour tout $x > x_+$, $w(x) > 0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $x_1 > x_+$ tel que $v(x_1) > 0$, $w(x_1) > 0$ et $w''(x_1) \leq 0$, ce qui entrerait en contradiction avec (A.3.2).

De la même manière nous prouvons que s'il existe x_- tel que $v(x_-) \leq 0$, $w(x_-) = 0$ et tel que w est négative à gauche de x_- et positive à droite de x_- alors pour tout $x < x_-$, $w(x) < 0$ et $v(x) < 0$. Maintenant, comme w change de signe sur (x_-, x_+) il existe un unique $x_c \in (x_-, x_+)$ tel que w change de signe en x_c. □

Remarque A.6. Il est possible de prouver les résultats de cette section pour un potentiel q ayant des zéros isolés. En effet, sur un intervalle qui contient un unique zéro de q, toute solution de (A.3.1) oscille avec une pulsation proche de E. Mais dans la limite λ tend vers l'infini, la longueur d'un tel intervalle tend vers zéro. Ainsi, pour λ assez grand, la fonction reste strictement croissante et il est possible de prouver les Lemmes A.4 et A.5 de la même manière que ci-dessus.

Annexe B

Propriétés des solutions d'équations aux différences finies d'ordre deux

B.1 Estimations d'effet tunnel inverse

Dans cette partie, nous prouvons des résultats qui ont été utilisé dans le chapitre dédiée aux estimations de Minami, dans le cas discret. Ce sont des équivalents discrets des résultats de l'annexe A, dédiée aux solutions d'équations de Sturm-Liouville.

Nous rappelons certaines notations. La suite non nulle $(u(n))_{n\in[\![1,l-1]\!]}$ vérifie l'équation aux différences finies suivante

$$\begin{cases} Hu := b_{n+1}u(n+1) + b_n u(n-1) + a_n u(n) = 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \tag{B.1.1}$$

avec conditions au bord égale à zéro. Nous rappelons qu'il existe $M > 1$ tel

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M} \leq \inf_n |b_n| \leq \sup |b_n| < M \\ \sup_n |a_n| \leq M \end{cases}.$$

Il existe alors des suites $(r_u(\cdot), \theta_u(\cdot)) \in (0,\infty) \times [0, 2\pi)$, appelées variables de Prüfer, telles que

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = r_u(n) \begin{pmatrix} \sin(\theta_u(n)) \\ \cos(\theta_u(n)) \end{pmatrix}. \tag{B.1.2}$$

Nous pouvons maintenant annoncer et prouver les différents résultats. Le lemme suivant montre que la suite $r_u(.)$ croit au plus exponentiellement.

Lemme B.1. *Pour tout $n \in [\![1, l-2]\!]$,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+2M^4}}\, r_u(n+1) \leq r_u(n) \leq \sqrt{1+2M^4}\, r_u(n+1). \tag{B.1.3}$$

Démonstration. Le lemme découle immédiatement de l'inégalité

$$|u(n+1)| \leq M^2(|u(n)| + |u(n-1)|).$$

□

Le lemme suivant montre que la quantité $\sin(\phi_u(\cdot))$ ne peut pas prendre consécutivement deux petites valeurs.

Lemme B.2. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in [\![0, L]\!]$ et tout $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, si $|\sin(\phi_u(n))| \leq \epsilon$ alors $|\sin(\phi_u(n+1))| \geq \epsilon_0$.*

Démonstration. Soit $C > M$ et ϵ_0 tels que $\frac{1}{M^2}\sqrt{1-\epsilon_0^2} - CM\epsilon_0 > \frac{1}{2}$.
Fixons $n \in \{0, \dots, L\}$ tel que $|\sin(\phi_u(n))| \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Comme $b_{n+1}u(n+1) = a_n u(n) - b_n u(n-1)$ nous avons $\frac{u(n+1)}{r_u(n)} = \frac{1}{a_{n+1}}\left[\omega_n \sin(\phi_u(n)) - a_n \cos(\phi_u(n))\right]$. Ainsi, nous avons

$$\frac{|u(n+1)|}{r_u(n)} \geq \frac{1}{M^2}|\cos(\phi_u(n))| - CM\epsilon_0 \geq \frac{1}{M^2}\sqrt{1-\epsilon_0^2} - CM\epsilon_0 > \frac{1}{2}. \tag{B.1.4}$$

Maintenant, comme $\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)} \geq \frac{1}{C}$ nous obtenons $|\sin(\phi_u(n+1))| \geq \frac{1}{2C}$. Ceci termine la preuve du Lemme B.2. □

Prenons maintenant, u une solution non nulle de $Hu = 0$ et v une solution non nulle de $Hv = Ev$, avec conditions aux bords nulles. Nous leurs associons les variables de Prüfer (r_u, ϕ_u) et (r_v, ϕ_v) comme précédemment et définissons $\delta\phi = \phi_v - \phi_u$.

Lemme B.3. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \in [\![0, L]\!]$ et tout $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, si $E < \epsilon$ et $\delta\phi(n) \in [0, \epsilon]$ alors $\delta\phi(n+1) \in \left[0, \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right] \bigcup \left[2\pi - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, 2\pi\right)$.*

Démonstration. Supposons que $\delta\phi(n) \in [0, \epsilon]$, alors nous avons $|\sin(\phi_u(n)) - \sin(\phi_v(n))| \leq \epsilon$ et $|\cos(\phi_u(n)) - \cos(\phi_v(n))| \leq \epsilon$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{u(n+1)}{r_u(n)} &= \frac{\omega_n}{a_{n+1}}\sin(\phi_u(n)) - \frac{a_n}{a_{n+1}}\cos(\phi_u(n)) \\ &= \frac{\omega_n}{a_{n+1}}\sin(\phi_v(n)) - \frac{a_n}{a_{n+1}}\cos(\phi_v(n)) + K_\epsilon = \frac{v(n+1)}{r_v(n)} + K'_\epsilon\end{aligned}$$

où K_ϵ vérifie

$$\begin{aligned}|K_\epsilon| &= \frac{\left|\omega_n \sin(\phi_v(n)) - \omega_n \sin(\phi_u(n)) + a_n \cos(\phi_u(n)) - a_n \cos(\phi_v(n))\right|}{|a_{n+1}|} \\ &\leq M(C+M)\epsilon \leq C\epsilon.\end{aligned}$$

Comme $K'_\epsilon = K_\epsilon + E\sin(\phi_v(n))$, nous avons également $|K'_\epsilon| \leq (C+1)\epsilon$.
Ainsi,

$$\left(\frac{u(n+1)}{r_u(n)}\right)^2 = \left(\frac{v(n+1)}{r_v(n)}\right)^2 + C_\epsilon$$

où C_ϵ vérifie $|C_\epsilon| \leq (C+2)\epsilon$. Par ailleurs,

$$\left(\frac{u(n)}{r_u(n)}\right)^2 = \sin(\phi_u(n))^2 = \left(\frac{v(n)}{r_v(n)}\right)^2 + M_\epsilon$$

où $|M_\epsilon| \leq 2\epsilon$. Nous calculons donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_u(n+1)}{r_u(n)}\right)^2 &= \left(\frac{u(n+1)}{r_u(n)}\right)^2 + \left(\frac{u(n)}{r_u(n)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{v(n+1)}{r_v(n)}\right)^2 + \left(\frac{v(n)}{r_u(n)}\right)^2 + C'_\epsilon + M_\epsilon \\ &= \left(\frac{r_v(n+1)}{r_v(n)}\right)^2 + M'_\epsilon.\end{aligned}$$

Maintenant, nous savons que $\frac{1}{C} \leq \frac{r_v(n+1)}{r_v(n)} \leq C$ et de même pour r_u. Ainsi, pour un certain $\tilde{C}$ nous obtenons

$$\left|1 - \left(\frac{r_v(n+1)}{r_v(n)}\right)\left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right)\right| \leq \left|1 - \left(\frac{r_v(n+1)}{r_v(n)}\right)^2\left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right)^2\right| \leq \tilde{C}\epsilon.$$

Nous déduisons maintenant de l'égalité

$$\frac{u(n+1)}{r_u(n+1)} = \frac{v(n+1)}{r_v(n+1)}\left(\frac{r_v(n+1)}{r_v(n)}\right)\left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right) + \left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right)K'_\epsilon \tag{B.1.5}$$

les inégalités suivante :

$$\begin{aligned}\Big|\sin(\phi_u(n+1)) - \sin(\phi_v(n+1))\Big| \leq \left|1 - \left(\frac{r_v(n+1)}{r_v(n)}\right)\left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right)\right| \\ + \left(\frac{r_u(n)}{r_u(n+1)}\right)|K'_\epsilon|\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

et pour un certain $N > 0$

$$\Big|\sin(\phi_u(n+1)) - \sin(\phi_v(n+1))\Big| \leq N\epsilon. \tag{B.1.7}$$

Par ailleurs, $r_u(n+1)\cos(\phi_u(n+1)) = r_u(n)\sin(\phi_u(n))$ donc par une preuve analogue nous montrons que

$$\Big|\cos(\phi_u(n+1)) - \cos(\phi_v(n+1))\Big| \leq N\epsilon. \tag{B.1.8}$$

Prenons maintenant $\epsilon_0 \leq \frac{\pi}{4N}$, alors $\delta\phi(n+1) \in [0, 2N\epsilon] \bigcup [2\pi - 2N\epsilon, 2\pi)$. □

De la même manière, nous prouvons le

Lemme B.4. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $n \in \{0, \ldots, L\}$ et tout $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, si $E < \epsilon$ et si $\delta\phi(n) \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$, alors $\delta\phi(n+1) \in \left[\pi - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \pi + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right]$.*

B.2 Solutions jamais oscillantes

Dans cette section, nous présentons des équivalents discret des résultat de l'annexe A. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $E_2 > E_1$. Soit $(a_n)_{n\in[\![1,k]\!]} \in \mathbb{R}^k$ et $(\tilde{a}_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ son extension par k-périodicité. Nous supposons qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\inf(a_n)_{n\in[\![1,k]\!]} > m. \tag{B.2.1}$$

Nous définissons alors l'équation aux différences finies :

$$(\mathcal{E}^j_\lambda) : \forall n \in \mathbb{Z}, u(n+1) + u(n-1) = (E_j - \lambda\tilde{a}_n)\, u(n). \tag{B.2.2}$$

Lemme B.5. *Soit λ tel que $m(E_j - \lambda m) > 2$. Alors, tout solution non nulle de $(\mathcal{E}^j_\lambda)$ change de signe au plus une fois.*

Démonstration. Soit u une solution non nulle de $(\mathcal{E}_\lambda^j)$ changeant de signe en (n_0, n_0+1). Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $u(n_0+1) > u(n_0)$. Alors, pour tout $n \geq n_0+1$, $u(n) > 0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait n_1 tel que $u(n_1) > 0$ et $u(n_1+1) + u(n_1-1) < 2u(n_1)$. Ainsi, nous aurions

$$u(n_1+1) + u(n_1-1) < 2u(n_1),$$

ce qui entrerait en contradiction avec le fait que $E_j - \lambda m > 2$. De la même manière, nous prouvons que pour $n \leq n_0$, $u(n_0) < 0$. □

Lemme B.6. *Soit λ tel que $E_2 - \lambda m > E_1 - \lambda m > 2$. Soit u (respectivement v) une solution non nulle de $(\mathcal{E}_\lambda^1)$, positive au voisinage de ∞ (respectivement de $(\mathcal{E}_\lambda^2)$, positive au voisinage de ∞). Alors $v-u$ change de signe au plus trois fois.*

Démonstration. En effet, si $w := v - u$, alors w satisfait l'équation

$$w(n+1) + w(n-1) = (E_1 - \lambda a_n)w(n) + (E_2 - E_1)v. \tag{B.2.3}$$

Maintenant, supposons qu'il existe n_+ tel que $v(n_+) \geq 0$, $w(n_+) \leq 0$ et $w(n_+ + 1) \geq 0$. Alors, pour $n \geq n_+ + 1$, $w(n) > 0$ et $v(n) > 0$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $n_1 \geq n_+ + 1$ tel que $v(n_1) > 0$, $w(n_1) > 0$ et $w(n_1-1) + w(n_1+1) < 2w(n_1)$, ce qui entrerait en contradiction avec (B.2.3).

De la même manière, nous prouvons que s'il existe n_- tel que $v(n_-) \leq 0$, $w(n_- - 1) \leq 0$ et $w(n_-) \geq 0$ alors pour $n \leq n_- - 1$, $w(n) < 0$ et $v(n) < 0$. Maintenant, comme w est positif puis négatif sur (n_-, n_+) il existe un unique $n_c \in [\![n_-, n_+]\!]$ tel que w change de signe au point x_c. □

Annexe C

Preuve du Théorème 4.4

Soit $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des variables aléatoires i.i.d avec une densité à support compact, satisfaisant l'hypothèse suivante :

$$\exists \rho_0 > 0, \exists \epsilon_0 > 0, \forall \epsilon \in [0,\epsilon], \int_{\mathbb{R}} \sup_{u\in[-1,1]} |g(t+\epsilon u) - g(t)| dt \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{\rho_0}. \tag{C.0.1}$$

Prenons $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des suites réelles, l'une d'entre elle au moins n'étant pas constamment nulle, et définissons

$$V_\omega(n) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega_i u_i(n-i) \tag{C.0.2}$$

de sorte que l'opérateur est ergodique et définissons l'opérateur aléatoire $H_\omega := H_0 + V_\omega$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ où H_0 est une perturbation du laplacien, auto-adjointe et semi-bornée inférieurement. D'après [Klo95], nous avons des estimations de Wegner au bord inférieur du spectre presque sur. En effet, prenons $E_{\inf}$ la borne inférieure du spectre presque sur. Nous avons alors

Théorème C.1. *Il existe $E_0 > E_{\inf}$, $C > 0$, $q_0 > 0$ tel que, pour tout $l \geq 2$, tout $\epsilon > 0$ et tout $E \in [E_{\inf}, E_0]$,*

$$\mathbb{P}\left(d(E, \sigma(H_\omega(\Lambda_l))) < \epsilon\right) \leq C\epsilon^{\rho_0} l^{q_0}. \tag{C.0.3}$$

Choisissons maintenant $u_{2i+1} := 0$ et u_{2i} définie par $u_{2i}(0) = 1$, $u_{2i}(-1) = -1$ et zéro ailleurs. Nous avons alors $V_\omega(2i) = -V_\omega(2i+1) = \omega_{2i}$. Supposons que ω_1 a son support égal à $[0,1]$. Alors, nous savons que presque surement, $\sigma(H_\omega(\Lambda_l)) \subset [-3,3]$.

Maintenant, pour $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ définissons $\Phi(n) = \begin{pmatrix} \phi(n) \\ \phi(n-1) \end{pmatrix}$. Si ϕ est un vecteur propre associé à la valeur propre E, alors la matrice de transfert à un pas allant de n à $n+1$ est égale à $\begin{pmatrix} V_\omega(n) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice de transfert à deux pas allant de $2n$ à $2n+2$ est égale à

$$-T_n := \begin{pmatrix} -(\omega_n - E)(\omega_n + E) - 1 & -(\omega_n - E) \\ -(\omega_n + E) & -1 \end{pmatrix} \tag{C.0.4}$$

$$= -\begin{pmatrix} (\omega_n - E)(\omega_n + E) + 1 & (\omega_n - E) \\ (\omega_n + E) & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.0.5}$$

Dans la suite nous étudions les matrices $(T_n)_n$ au lieu des matrices de transfert à deux pas, mais ce que nous prouvons pour les $(T_n)_n$ est également valable pour $(-T_n)_n$. Les matrices $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont i.i.d et, en suivant les techniques de [BL85], nous prouvons que G, le

sous-groupe fermé de $SL_2(\mathbb{R})$ engendré par le support de ces matrices, n'est pas compact et que l'orbite de chaque direction dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, la droite projective, contient au moins trois éléments.

Prenons $E \in [-3, 0]$, le cas $E \in [0, 3]$ se traitant de la même manière. Comme les $(\omega_n)_n$ ont leur support égal à $[0, 1]$, la matrice suivante appartient à G (en prenant $\omega_1 = 0$) :

$$A := \begin{pmatrix} 1 - E^2 & -E \\ E & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.0.6}$$

Nous avons $\mathrm{tr}(A) = 2 - E^2$, de sorte que si $E \in [-3, -2)$, $\mathrm{tr}(A) < -2$ et A est une matrice hyperbolique. G n'est donc pas borné et donc non compact.

Prenons maintenant $\tilde{x}$ la classe de x dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ et supposons que $E \in [-3, -2)$, le cas $E \in (2, 3]$ se traitant de la même manière. La matrice A a une valeur propre dans $(1, +\infty)$ associée au vecteur propre e_1 et une autre dans $(0, 1]$ associée à e_2. Ainsi, l'orbite d'une direction autre que e_1 et e_2 a une infinité d'éléments. Mais comme ω_n prend toutes les valeurs de $(0, 1)$, pour $\delta \in (0, -2 - E) \subset (0, 1)$ et $\omega_n = \delta$, G contient une autre matrice hyperbolique C avec $\mathrm{tr}(C) = 2 - E^2 + \delta < 2 - (-2 - \delta)^2 + \delta = -2 - \delta - \delta^2 < -2$ mais ayant d'autre vecteur propres et valeurs propres. Les orbites de e_1 et e_2 contiennent donc aussi une infinité d'éléments.

Maintenant, prenons $E \in (-2, -1)$. En prenant $\omega_1 = 1$, la matrice suivante appartient à G :

$$B := \begin{pmatrix} 2 - E^2 & 1 - E \\ 1 + E & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.0.7}$$

Ainsi,

$$\mathrm{tr}(B) = 3 - E^2 \tag{C.0.8}$$

et donc A et B sont des matrices elliptiques. Nous calculons maintenant

$$\mathrm{tr}(A^2) = (1 - E^2)^2 - 2E^2 + 1 = E^4 - 4E^2 + 2 \in (-2, 2). \tag{C.0.9}$$

Ainsi, A et A^2 sont des matrices elliptiques. Or, nous savons qu'une matrice elliptique n'a pas de direction fixe dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. L'orbite d'une direction $\tilde{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ contient donc l'ensemble $\{\tilde{x}, A\tilde{x}, A^2\tilde{x}\}$ qui a donc trois éléments. Par ailleurs, un calcul montre que

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -2 \cdot E & -E^2 + E \\ E^2 + E & 2 \cdot E \end{pmatrix}. \tag{C.0.10}$$

Ainsi, les matrices A et B ne commutent pas. Leur commutateur $A^{-1}B^{-1}AB$ est donc une matrice hyperbolique qui appartient à G et donc G n'est pas compact.

Maintenant, supposons que $E = -2$. Alors, A est une matrice parabolique et G n'est donc pas compact. Nous calculons $\mathrm{tr}(B) = -1$ et $\mathrm{tr}(B^2) = (2-E^2)^2+2(1-E)(1+E)+1 = E^4 - 6E^2 + 9 = 1$. Ainsi, B et B^2 sont des matrices elliptiques et l'orbite d'une direction $\tilde{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ a donc au moins trois éléments.

Supposons maintenant que $E \in [-1, 0)$ et prenons $\delta \in (0, -E)$. Alors, A et A^2 sont de nouveau des matrices elliptiques, de sorte que l'orbite d'une direction $\tilde{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ a au moins trois éléments. Comme ω_1 prend toutes les valeurs de $[0, 1]$, la matrice

$$C_\delta := \begin{pmatrix} 1 + \delta^2 - E^2 & 1 - E + \delta \\ 1 + E + \delta & 1 \end{pmatrix} \tag{C.0.11}$$

appartient à G. Nous calculons alors $\mathrm{tr}(C) = 2+\delta^2-E^2 \in (-2, 2)$, ainsi C est une matrice elliptique qui ne commute pas avec A. Le groupe G n'est donc pas compact.

Enfin, supposons que $E = 0$. La matrice B est une matrice hyperbolique et donc le groupe G n'est pas compact. Maintenant, la matrice C_δ pour un certain $\delta \in (0,1)$ est également hyperbolique, mais avec des valeurs propres et des vecteur propres différents. Ainsi, l'orbite d'une direction $\tilde{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ a au moins trois éléments.

Ceci termine la preuve de la proposition

Proposition C.2. *Si le support de ω_1 est l'intervalle $[0,1]$ et si $E \in [-3,-3]$, le groupe G n'est pas compact et l'orbite de toute direction a au moins trois éléments.*

Nous appliquons maintenant le théorème de Furstenberg et comme dans les [BL85, Sections B-II-4 et B-II-6], en utilisant la régularité de l'exposant de Lyapounov, nous obtenons le fait que la DEI est höldérienne sur $[-3,3]$. En combinant ceci avec le Théorème C.1, nous avons les estimations de Wegner et la régularité höldérienne de la DEI au bord inférieur du spectre presque sur et ceci termine la preuve du Théorème 4.4.

Annexe D

Fonctions analytiques de plusieurs variables réelles

Dans cette partie, nous prouvons deux propriétés des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles, utilisées dans les preuves des estimations de décorrélation pour les modèles continus et les modèles de type multimère. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, nous noterons $x = (\hat{x}, x_n)$. Nous utiliserons le théorème de préparation de Weierstrass (voir par exemple [Łoj65]), que nous rappelons maintenant.

Théorème D.1. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique s'annulant à l'origine telle que la fonction analytique $x_n \mapsto f(0, \cdots, 0, x_n)$ ait un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ en 0. Il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine, un polynôme de Weierstrass $P(\hat{x}, x_n) = a_0(\hat{x}) + a_1(\hat{x})x_n + \cdots + a_{m-1}(\hat{x})x_n^{m-1} + x_n^m$, défini sur $\mathcal{U}$, avec $a_i(0) = 0$ pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, et une fonction analytique $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ avec $g(0) \neq 0$, tels que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, nous avons $f(x) = P(x)g(x)$.*

Nous prouvons maintenant la

Proposition D.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique non nulle. Fixons G un compact de Ω. Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, nous avons $|\{x \in G, |f(x)| < \epsilon\}| \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/m}$.*

Démonstration. Par compacité de G, il suffit de prouver qu'il existe un voisinage de chaque point sur lequel le résultat est vrai. Prenons donc un point $x \in G$. Si $f(x) \neq 0$, le résultat est clair ; supposons maintenant que $f(x) = 0$. Sans perte de généralité, supposons que $x = 0$. Comme f n'est pas constamment nulle, quitte à opérer une rotation sur les coordonnées, nous pouvons supposer que $h_n \mapsto f(0, \ldots, 0, h_n)$ n'est pas constamment nulle au voisinage de zéro, et a donc un zéro d'ordre m en 0 pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine, un polynôme de Weierstrass P comme dans le Théorème D.1 et une application g analytique ne s'annulant pas en zéro tels que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, nous avons $f(x) = P(x)g(x)$. Prenons maintenant $\mathcal{V} :=]-\delta, \delta[^n$ inclus dans $\mathcal{U}$ tel que $\inf_{x \in \mathcal{V}} g(x) =: \frac{1}{C} > 0$. Ainsi, si $x \in \mathcal{V}$ vérifie $|f(x)| \leq \epsilon$, alors $|P(x)| \leq C\epsilon$. Il reste donc à vérifier le résultat pour le polynôme de Weierstrass P.

Prenons alors $\epsilon > 0$ et $\hat{x} \in]-\delta, \delta[^{n-1}$ puis supposons que $|P(\hat{x}, x_n)| \leq \epsilon$. Comme le polynôme $X_n \mapsto P(\hat{x}, X_n)$ est unitaire, notons $(z_i(\hat{x}))_{i \in [\![1,m]\!]}$ ses racines complexes, écrites autant de fois que leur multiplicité. Comme $|P(x)| \leq \epsilon$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que

$|x_n - z_i(\hat{x})| \leq \epsilon^{\frac{1}{m}}$. Comme $x_n \in \mathbb{R}$ nous avons alors $|x_n - \Re(z_i(\hat{x}))| \leq \epsilon^{\frac{1}{m}}$ et donc

$$x_n \in \mathcal{A}_\epsilon(\hat{x}) := \bigcup_{i \in [\![1,m[\![} \left]\Re(z_i(\hat{x})) - \epsilon^{\frac{1}{m}}, \Re(z_i(\hat{x})) + \epsilon^{\frac{1}{m}}\right[$$

et $\mathcal{A}_\epsilon(\hat{x})$ est de mesure inférieure à $2m\epsilon^{\frac{1}{m}}$. Ainsi, nous avons

$$|\{x \in \mathcal{V}, |P(x)| < \epsilon\}| \leq \int_{\hat{x} \in]-\delta,\delta[^{n-1}} \left(\int_{\mathcal{A}_\epsilon(\hat{x})} dx_n \right) d\hat{x} \leq (2\delta)^{n-1} 2m\epsilon^{\frac{1}{m}}.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition D.2. □

Nous prouvons maintenant une autre proposition, liée à la Proposition D.2.

Proposition D.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique telle que, pour tout $(\hat{x}, x_n) \in \Omega$, la fonction $h_n \mapsto f(\hat{x}, x_n + h_n)$ n'est pas constamment nulle au voisinage de zéro et fixons $G := [-M, M]^n$ un compact inclus dans Ω. Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tous $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $\hat{x} \in [-M, M]^{n-1}$, nous avons $|\{x_n \in [-M, M], |f(\hat{x}, x_n)| < \epsilon\}| \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/m}$.*

Démonstration. Par compacité de G, il suffit de montrer que, pour tout $(\hat{x}, x_n) \in [-M, M]^n$, il existe $\delta > 0$, $\epsilon_0 > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $\hat{y} \in \hat{x} +]-\delta, \delta[^{n-1}$, nous avons

$$|\{h_n \in [-\delta, \delta], |f(\hat{y}, x_n + h_n)| < \epsilon\}| \leq \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/m}.$$

Comme, par hypothèse, la fonction $h_n \mapsto f(\hat{y}, x_n + h_n)$ n'est pas constamment nulle dans un voisinage de zéro, nous pouvons appliquer le Théorème D.1 selon la n-ième coordonnée et conclure comme dans la preuve de la Proposition D.2. □

Bibliographie

[AEN+06] Michael Aizenman, Alexander Elgart, Serguei Naboko, Jeffrey H. Schenker et Gunter Stolz : Moment analysis for localization in random Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 163(2):343–413, 2006.

[AGHKH05] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn et H. Holden : *Solvable models in quantum mechanics.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second édition, 2005. With an appendix by Pavel Exner.

[AM93] Michael Aizenman et Stanislav Molchanov : Localization at large disorder and at extreme energies : an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.*, 157(2):245–278, 1993.

[And58] P. W. Anderson : Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492–1505, Mar 1958.

[ASFH01] Michael Aizenman, Jeffrey H. Schenker, Roland M. Friedrich et Dirk Hundertmark : Finite-volume fractional-moment criteria for Anderson localization. *Comm. Math. Phys.*, 224(1):219–253, 2001. Dedicated to Joel L. Lebowitz.

[AW09] Michael Aizenman et Simone Warzel : Localization bounds for multiparticle systems. *Comm. Math. Phys.*, 290(3):903–934, 2009.

[BdMCSS10] A. Boutet de Monvel, V. Chulaevsky, P. Stollmann et Y. Suhov : Wegner-type bounds for a multi-particle continuous Anderson model with an alloy-type external potential. *J. Stat. Phys.*, 138(4-5):553–566, 2010.

[Bel65] Howard E. Bell : Gershgorin's theorem and the zeros of polynomials. *Amer. Math. Monthly*, 72:292–295, 1965.

[BHS07] Jean V. Bellissard, Peter D. Hislop et Günter Stolz : Correlation estimates in the Anderson model. *J. Stat. Phys.*, 129(4):649–662, 2007.

[BK05] Jean Bourgain et Carlos E. Kenig : On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. *Invent. Math.*, 161(2):389–426, 2005.

[BK13] Jean Bourgain et Abel Klein : Bounds on the density of states for Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 194(1):41–72, 2013.

[BL85] Philippe Bougerol et Jean Lacroix : *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, volume 8 de *Progress in Probability and Statistics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[CBdMS11] Victor Chulaevsky, Anne Boutet de Monvel et Yuri Suhov : Dynamical localization for a multi-particle model with an alloy-type external random potential. *Nonlinearity*, 24(5):1451–1472, 2011.

[CDS83] J.-M. Combes, P. Duclos et R. Seiler : Convergent expansions for tunneling. *Comm. Math. Phys.*, 92(2):229–245, 1983.

[CFKS87] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON : *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study édition, 1987.

[CGK09] Jean-Michel COMBES, François GERMINET et Abel KLEIN : Generalized eigenvalue-counting estimates for the anderson model. *Journal of Statistical Physics*, 135:201–216, 2009. 10.1007/s10955-009-9731-3.

[CGK10] Jean-Michel COMBES, François GERMINET et Abel KLEIN : Poisson statistics for eigenvalues of continuum random Schrödinger operators. *Anal. PDE*, 3(1):49–80, 2010.

[CHK07] Jean-Michel COMBES, Peter D. HISLOP et Frédéric KLOPP : An optimal Wegner estimate and its application to the global continuity of the integrated density of states for random Schrödinger operators. *Duke Math. J.*, 140(3): 469–498, 2007.

[CKM87] René CARMONA, Abel KLEIN et Fabio MARTINELLI : Anderson localization for Bernoulli and other singular potentials. *Comm. Math. Phys.*, 108(1):41–66, 1987.

[CL90] René CARMONA et Jean LACROIX : *Spectral theory of random Schrödinger operators.* Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

[CS09] Victor CHULAEVSKY et Yuri SUHOV : Multi-particle Anderson localisation : induction on the number of particles. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 12(2):117–139, 2009.

[DBG00] Stephan DE BIÈVRE et François GERMINET : Dynamical localization for the random dimer Schrödinger operator. *J. Statist. Phys.*, 98(5-6):1135–1148, 2000.

[dRJLS96] R. del RIO, S. JITOMIRSKAYA, Y. LAST et B. SIMON : Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *J. Anal. Math.*, 69:153–200, 1996.

[DS01] D. DAMANIK et P. STOLLMANN : Multi-scale analysis implies strong dynamical localization. *Geom. Funct. Anal.*, 11(1):11–29, 2001.

[DS11] David DAMANIK et Günter STOLZ : A continuum version of the Kunz-Souillard approach to localization in one dimension. *J. Reine Angew. Math.*, 660:99–130, 2011.

[DSS02] David DAMANIK, Robert SIMS et Günter STOLZ : Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli-Anderson models. *Duke Math. J.*, 114(1): 59–100, 2002.

[DWP90] David H. DUNLAP, H-L. WU et Philip W. PHILLIPS : Absence of localization in a random-dimer model. *Phys. Rev. Lett.*, 65:88–91, Jul 1990.

[EK13] A. ELGART et A. KLEIN : Ground state energy of trimmed discrete Schr\"odinger operators and localization for trimmed Anderson models. *ArXiv e-prints*, janvier 2013.

[ETV10] A. ELGART, M. TAUTENHAHN et I. VESELIĆ : Localization via fractional moments for models on $\mathbb{Z}$ with single-site potentials of finite support. *J. Phys. A*, 43(47):474021, 24, 2010.

[ETV11] Alexander ELGART, Martin TAUTENHAHN et Ivan VESELIĆ : Anderson localization for a class of models with a sign-indefinite single-site potential via fractional moment method. *Ann. Henri Poincaré*, 12(8):1571–1599, 2011.

[FMSS85] J. Fröhlich, F. Martinelli, E. Scoppola et T. Spencer : Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 101(1):21–46, 1985.

[FS83] Jürg Fröhlich et Thomas Spencer : Absence of diffusion in the anderson tight binding model for large disorder or low energy. *Communications in Mathematical Physics*, 88(2):151–184, 1983.

[GDB98] F. Germinet et S. De Bièvre : Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 194(2):323–341, 1998.

[GHK07] F. Ghribi, P. D. Hislop et F. Klopp : Localization for Schrödinger operators with random vector potentials. *In Adventures in mathematical physics*, volume 447 de *Contemp. Math.*, pages 123–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[GK01] François Germinet et Abel Klein : Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. *Comm. Math. Phys.*, 222(2):415–448, 2001.

[GK04] François Germinet et Abel Klein : A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition. *Duke Math. J.*, 124(2):309–350, 2004.

[GK06] Francois Germinet et Abel Klein : New characterizations of the region of complete localization for random Schrödinger operators. *J. Stat. Phys.*, 122(1):73–94, 2006.

[GK10a] F. Germinet et F. Klopp : Spectral statistics for random Schrödinger operators in the localized regime. *ArXiv e-prints*, novembre 2010.

[GK10b] Fatma Ghribi et Frédéric Klopp : Localization for the random displacement model at weak disorder. *Ann. Henri Poincaré*, 11(1-2):127–149, 2010.

[GK13] François Germinet et Abel Klein : A comprehensive proof of localization for continuous Anderson models with singular random potentials. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(1):53–143, 2013.

[GMR14] F. Germinet, P. Müller et C. Rojas-Molina : Ergodicity and dynamical localization for Delone–Anderson operators. *ArXiv e-prints*, mai 2014.

[GV07] Gian Michele Graf et Alessio Vaghi : A remark on the estimate of a determinant by Minami. *Lett. Math. Phys.*, 79(1):17–22, 2007.

[Har80] Evans M. Harrell : Double wells. *Comm. Math. Phys.*, 75(3):239–261, 1980.

[His08] Peter D. Hislop : Lectures on random Schrödinger operators. *In Fourth Summer School in Analysis and Mathematical Physics*, volume 476 de *Contemp. Math.*, pages 41–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[HK02] Peter D. Hislop et Frédéric Klopp : The integrated density of states for some random operators with nonsign definite potentials. *J. Funct. Anal.*, 195(1):12–47, 2002.

[HS84] B. Helffer et J. Sjöstrand : Multiple wells in the semiclassical limit. I. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(4):337–408, 1984.

[HS00] W. Hunziker et I. M. Sigal : Time-dependent scattering theory of N-body quantum systems. *Rev. Math. Phys.*, 12(8):1033–1084, 2000.

[HSS10] Eman Hamza, Robert Sims et Günter Stolz : A note on fractional moments for the one-dimensional continuum Anderson model. *J. Math. Anal. Appl.*, 365(2):435–446, 2010.

[Kir08] Werner KIRSCH : An invitation to random Schrödinger operators. *In Random Schrödinger operators*, volume 25 de *Panor. Synthèses*, pages 1–119. Soc. Math. France, Paris, 2008. With an appendix by Frédéric Klopp.

[Kle08] Abel KLEIN : Multiscale analysis and localization of random operators. *In Random Schrödinger operators*, volume 25 de *Panor. Synthèses*, pages 121–159. Soc. Math. France, Paris, 2008.

[Kle12] Abel KLEIN : Unique continuation principle for spectral projections of Schr\" odinger operators and optimal Wegner estimates for non-ergodic random Schr\" odinger operators. *ArXiv e-prints*, septembre 2012.

[KLNS12a] Frédéric KLOPP, Michael LOSS, Shu NAKAMURA et Günter STOLZ : Localization for the random displacement model. *Duke Math. J.*, 161(4):587–621, 2012.

[KLNS12b] Frédéric KLOPP, Michael LOSS, Shu NAKAMURA et Günter STOLZ : Understanding the random displacement model : from ground state properties to localization. *In Spectral analysis of quantum Hamiltonians*, volume 224 de *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 183–219. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

[Klo95] Frédéric KLOPP : Localization for some continuous random Schrödinger operators. *Comm. Math. Phys.*, 167(3):553–569, 1995.

[Klo02] Frédéric KLOPP : Weak disorder localization and Lifshitz tails : continuous Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 3(4):711–737, 2002.

[Klo11] Frédéric KLOPP : Decorrelation estimates for the eigenlevels of the discrete Anderson model in the localized regime. *Comm. Math. Phys.*, 303(1):233–260, 2011.

[Klo13] Frédéric KLOPP : Asymptotic ergodicity of the eigenvalues of random operators in the localized phase. *Probab. Theory Related Fields*, 155(3-4):867–909, 2013.

[Klo14] Frédéric KLOPP : Inverse tunneling estimates and applications to the study of spectral statistics of random operators on the real line. *J. Reine Angew. Math.*, 690:79–113, 2014.

[KM82] Werner KIRSCH et Fabio MARTINELLI : On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. *Comm. Math. Phys.*, 85(3):329–350, 1982.

[KN03] Frédéric KLOPP et Shu NAKAMURA : A note on Anderson localization for the random hopping model. *J. Math. Phys.*, 44(11):4975–4980, 2003.

[KN07] Rowan KILLIP et Fumihiko NAKANO : Eigenfunction statistics in the localized Anderson model. *Ann. Henri Poincaré*, 8(1):27–36, 2007.

[KN09] Frédéric KLOPP et Shu NAKAMURA : Spectral extrema and Lifshitz tails for non-monotonous alloy type models. *Comm. Math. Phys.*, 287(3):1133–1143, 2009.

[KP08] Frédéric KLOPP et Konstantin PANKRASHKIN : Localization on quantum graphs with random vertex couplings. *J. Stat. Phys.*, 131(4):651–673, 2008.

[Krü12] Helge KRÜGER : Localization for random operators with non-monotone potentials with exponentially decaying correlations. *Ann. Henri Poincaré*, 13(3):543–598, 2012.

[KS81] Hervé KUNZ et Bernard SOUILLARD : Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires. *Comm. Math. Phys.*, 78(2):201–246, 1980/81.

[KV06] Vadim KOSTRYKIN et Ivan VESELIĆ : On the Lipschitz continuity of the integrated density of states for sign-indefinite potentials. *Math. Z.*, 252(2): 367–392, 2006.

[Łoj65] S. ŁOJASIEWICZ : *Ensembles semi-analytiques.* Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1965.

[Meh04] Madan Lal MEHTA : *Random matrices*, volume 142 de *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam).* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third édition, 2004.

[Mia11] Dong MIAO : Eigenvalue statistics for lattice Hamiltonian with off-diagonal disorder. *J. Stat. Phys.*, 143(3):509–522, 2011.

[Min96] Nariyuki MINAMI : Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 177(3):709–725, 1996.

[Min07] Nariyuki MINAMI : Theory of point processes and some basic notions in energy level statistics. *In Probability and mathematical physics*, volume 42 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 353–398. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Min11] Nariyuki MINAMI : Energy level statistics : a formulation and some examples. *In Spectra of random operators and related topics*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B27, pages 79–97. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011.

[Mol81] S. A. MOLČANOV : The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. *Comm. Math. Phys.*, 78(3):429–446, 1980/81.

[Nak07] Fumihiko NAKANO : Distribution of localization centers in some discrete random systems. *Rev. Math. Phys.*, 19(9):941–965, 2007.

[Pas80] L. A. PASTUR : Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. *Comm. Math. Phys.*, 75(2):179–196, 1980.

[Roj13] C. ROJAS-MOLINA : The Anderson model with missing sites. *ArXiv e-prints*, février 2013.

[RS78] Michael REED et Barry SIMON : *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[RV12] C. ROJAS-MOLINA et I. VESELIC : Scale-free unique continuation estimates and applications to random Schr\"odinger operators. *ArXiv e-prints*, octobre 2012.

[Shi13] C. SHIRLEY : Decorrelation estimates for random discrete Schrödinger operators in dimension one and applications to spectral statistics. *ArXiv e-prints*, novembre 2013.

[Shi14] C. SHIRLEY : Decorrelation estimates for some continuous and discrete random schrödinger operators in dimension one and applications to spectral statistics. *ArXiv e-prints*, septembre 2014.

[Sto01] Peter STOLLMANN : *Caught by disorder*, volume 20 de *Progress in Mathematical Physics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. Bound states in random media.

[Tri14] Tuan Phong TRINH : Decorrelation estimates for a 1D tight binding model in the localized regime. *Ann. Henri Poincaré*, 15(3):469–499, 2014.

[TV10] Martin TAUTENHAHN et Ivan VESELIĆ : Spectral properties of discrete alloy-type models. *In XVIth International Congress on Mathematical Physics*, pages 551–555. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.

[TV14] Martin TAUTENHAHN et Ivan VESELIĆ : Minami's estimate : beyond rank one perturbation and monotonicity. *Ann. Henri Poincaré*, 15(4):737–754, 2014.

[vDK89] Henrique von DREIFUS et Abel KLEIN : A new proof of localization in the Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 124(2):285–299, 1989.

[Ven13] Nikolaj A. VENIAMINOV : The existence of the thermodynamic limit for the system of interacting quantum particles in random media. *Ann. Henri Poincaré*, 14(1):63–94, 2013.

[Ves02] Ivan VESELIĆ : Wegner estimate and the density of states of some indefinite alloy-type Schrödinger operators. *Lett. Math. Phys.*, 59(3):199–214, 2002.

[Ves08] Ivan VESELIĆ : *Existence and regularity properties of the integrated density of states of random Schrödinger operators*, volume 1917 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Ves10a] Ivan VESELIĆ : Wegner estimate for discrete alloy-type models. *Ann. Henri Poincaré*, 11(5):991–1005, 2010.

[Ves10b] Ivan VESELIĆ : Wegner estimates for sign-changing single site potentials. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 13(4):299–313, 2010.

[Wan01] Wei-Min WANG : Localization and universality of Poisson statistics for the multidimensional Anderson model at weak disorder. *Invent. Math.*, 146(2): 365–398, 2001.

[Weg81] Franz WEGNER : Bounds on the density of states in disordered systems. *Z. Phys. B*, 44(1-2):9–15, 1981.

[Zet05] Anton ZETTL : *Sturm-Liouville theory*, volume 121 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.