



**HAL**  
open science

# Synthèse de tolérance pour la conception des systèmes mécatroniques : Approche par bond graph inverse

van Hoa Nguyen

## ► To cite this version:

van Hoa Nguyen. Synthèse de tolérance pour la conception des systèmes mécatroniques : Approche par bond graph inverse. Automatique / Robotique. INSA de Lyon, 2014. Français. NNT : 2014ISAL0081 . tel-01127644

**HAL Id: tel-01127644**

**<https://theses.hal.science/tel-01127644>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de l'Université de Lyon

délivrée par  
L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir  
LE GRADE DE DOCTEUR soutenue publiquement le 05/09/2014

par  
M. Van Hoa NGUYEN

préparée au  
Laboratoire AMPÈRE - Département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes

---

## SYNTHÈSE DE TOLÉRANCE POUR LA CONCEPTION DES SYSTÈMES MÉCATRONIQUES : APPROCHE PAR BOND GRAPH INVERSE

---

École Doctorale Électronique, Électrotechnique, Automatique

### Composition du jury :

<b>Rapporteurs :</b>	Jean-Charles MARÉ Rochdi MERZOUKI	Professeur, INSA de Toulouse Professeur, Polytech'Lille
<b>Examineurs :</b>	Xavier ROBOAM Marcin DETYNIECKI	Directeur de Recherche CNRS, Laplace Chargé de Recherche CNRS, LIP6
<b>Directeurs :</b>	Wilfrid MARQUIS-FAVRE Damien EBERARD	Professeur, INSA de Lyon Maître de conférences, INSA de Lyon

# Remerciements

*« Pour chaque personne passant votre vie, il y a toujours une raison. »*

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein de Laboratoire AMPÈRE de l'INSA de Lyon. À ce titre, je tiens à remercier tous les membres du laboratoire et plus particulièrement ceux de site Saint-Exupéry, pour leur accueil et pour leur sympathie. Je remercie particulièrement Minh Tu, Sylvie et Jean-Pierre pour leur gentillesse et pour avoir toujours eu un mot amical à mon égard. Merci notamment à Éric et à Mickaël pour leur soutien et pour des nombreuses discussions sur bond graph, sur mathématique... Merci aussi à tous les doctorants que j'ai pu croiser et avec qui j'ai pu partager mes années de thèse : à Omar - mon co-bureau très aimable mais parfois aussi très bruyant, à Khoa Duc - un petit frère sympathique. Merci à Salam MOUBARAK, mon « ex-co-bureau », qui, lors de sa soutenance, m'a passé du courage avec une phrase simple : « Maintenant, c'est à ton tour ». Je n'oublie pas de remercier Salam HAJJAR (oui, une autre Salam !), pour être toujours souriante et pour être un bon exemple d'un optimiste. Je souhaite la paix pour la Syrie et bonne continuation pour toi. Merci à Alan, avec qui j'ai bien aimé chatter de problèmes scientifiques, ou parfois de n'importe quoi. Merci à Saïd, à Sérine d'avoir été toujours souriants. Merci à Maguy pour être toujours gentille et disponible.. Merci à tous d'avoir construit un environnement de travail agréable.

J'exprime toute ma reconnaissance à M. Rochdi MERZOUKI et à M. Jean-Charles MARÉ qui ont consacré leur temps pour rapporter mon mémoire et l'ont amélioré par leurs remarques. Je remercie vivement à M. Xavier ROBOAM et M. Marcin DETYNIECKI d'avoir accepté d'examiner mes travaux. Votre participation et votre attention me fait un grand honneur. Je profite également de cette occasion pour remercier M. Laurent KRÄHENBÜHL et M. Julien HUILLERY d'avoir eu de l'intérêt envers mes travaux de recherche, d'avoir participé à notre réunion hebdomadaire et d'avoir donné des idées pour faire progresser mes travaux de thèse. Même s'il y a quelques remarques n'ont pas été prises en compte, vue la contrainte de temps, j'ai beaucoup apprécié vos contributions et j'ai donné mon meilleur pour les intégrer dans mon manuscrit et dans ma recherche.

Les remerciements qui suivent s'adressent à ceux qui m'ont suivi pendant ma thèse, qui m'ont montré, par eux-mêmes, des bons exemples d'un chercheur correct. Merci à mon directeur de thèse M. Wilfrid MARQUIS-FAVRE. J'ai beaucoup appris de son attitude professionnelle, de son enthousiasme envers la recherche et de sa vision du monde. Je lui remercie de son esprit ouvert, de sa patience envers mes travaux (et mon manuscrit !) et de sa confiance à travers des moments de doutes. Surtout, je lui ai beaucoup apprécié comme une personne gentille et respectueuse. Enfin, j'ai bien aimé ses petits leçons de français. Grâce à lui, je ne fais plus de mêmes erreurs, j'ai progressé, avancé et passé à autres choses.

Ces années de thèse auraient été sans doute bien plus difficiles et pénibles si je n'avais pas une personne gentille et sympathique comme co-directeur de thèse. Je remercie à Damien EBERARD pour avoir été très énergétique et pour avoir eu plein de bonne humeur. Bien que sa connaissance mathématique et sa créativité sont forcément appréciées du côté professionnel, je lui préfère de

côté personnel, où je lui considère comme un grand frère à qui je partage la passion de la guitare, du voyage et de la sommelière, à qui je peux demander des questions un peu bêtes parfois. Je voudrais lui dire merci de ses conseils, ses suggestions de voyage, de choix d'un bon vin et de tout.

D'un point de vue plus personnel, je voudrais remercier M. Khoi, mon enseignant de Maths au collège, qui m'a donné l'inspiration pour étudier et pour bosser, qui m'a orienté vers l'étude supérieure et qui m'a toujours poussé pour avancer.

Dans cette occasion, je voudrais remercier mes amis français et vietnamiens pour leur soutien constant durant ces années d'études et pour leur amitié. Merci à Vivien et Jérôme de m'avoir beaucoup aidé dans mes premiers jours en France et de passer un long trajet juste pour boire un café ou une bière avec moi. J'ai bien apprécié ces petits gestes. Merci à Jacques de m'introduire à la culture française et de ses suggestions de voyage. Je remercie à Hong Viet, à Quyen et à Anh Tu pour leur conseils, leur expériences et leur encouragements. Un grand merci à mes amis de « 4, rue de Violet » d'avoir partagé avec moi des jours fous de jeunesse. Je n'oublie pas de remercier Uyen et Tam pour leur soutien lors de moments difficiles.

Enfin, merci à ceux qui me sont les plus chers. À mes parents pour leur amour, pour leur soutien et pour leur encouragement depuis toujours. À mes frères pour les mémoires d'enfant et pour prendre soin de mes parents quand j'étais si loin. Merci à ma jolie Ly pour rester à mon côté au moment où j'avais besoin de toi et pour être simplement toi.

À vous tous, merci... du fond du cœur...

*À ma mère  
à mon père  
à mes frères*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tolérance dans le problème de conception d'un système mécatronique</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	8
2.2	Introduction à la mécatronique . . . . .	8
2.2.1	Les systèmes mécatroniques . . . . .	8
2.2.2	Conception des systèmes mécatroniques . . . . .	11
2.2.3	Problème de synthèse paramétrique . . . . .	12
2.3	Tolérance dans la conception d'un système mécatronique . . . . .	13
2.3.1	Tolérance dans un système mécatronique . . . . .	13
2.3.2	Problème de synthèse de tolérance paramétrique . . . . .	14
2.4	Outils pour la prise en compte de la tolérance en conception . . . . .	14
2.4.1	Le coefficient de sécurité . . . . .	14
2.4.2	La conception non-déterministe . . . . .	15
2.4.3	Les méthodes dans le domaine mécanique . . . . .	16
2.5	Conclusion . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Incertitudes et inversion bond graph</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	20
3.2	Les incertitudes dans un système mécatronique . . . . .	20
3.2.1	Classification de l'incertitude par sa source . . . . .	21
3.2.2	Classification de l'incertitude par sa nature . . . . .	22
3.3	Modèle de représentation des incertitudes . . . . .	22
3.3.1	Modélisation de l'incertitude aléatoire . . . . .	24
3.3.2	Modélisation de l'incertitude épistémique . . . . .	25
3.3.3	Modèle de l'incertitude bornée (Bounded uncertainty design) . . . . .	26
3.4	Mesure de l'impact de l'incertitude . . . . .	27
3.4.1	Analyse d'incertitude . . . . .	27
3.4.2	Analyse de sensibilité . . . . .	29
3.5	La méthodologie d'inversion . . . . .	30
3.5.1	Le langage bond graph . . . . .	30
3.5.2	Outils de l'analyse structurelle . . . . .	31
3.5.3	Inversion d'un modèle bond graph . . . . .	33
3.5.4	Dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques . . . . .	34
3.5.5	L'approche inverse pour la synthèse de tolérance . . . . .	35
3.6	Prise en compte de l'incertitude dans l'approche bond graph . . . . .	35
3.6.1	Bond graph de sensibilité . . . . .	36
3.6.2	Bond graph incrémental . . . . .	37
3.6.3	Bond graph incertain . . . . .	38
3.6.4	Bond graph probabiliste . . . . .	39
3.6.5	Invariance par composition dans le modèle bond graph probabiliste . . . . .	43

3.7	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Bond graph flou et son exploitation</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.1.1	Nécessité d'un traitement de l'incertitude épistémique . . . . .	46
4.1.2	Propagation de l'incertitude dans plusieurs types de problème de conception . . . . .	47
4.2	Logique floue - Bond graph flou . . . . .	48
4.2.1	Logique floue - Outils . . . . .	48
4.2.2	Bond graph flou . . . . .	53
4.3	Propagation de l'incertitude épistémique . . . . .	54
4.3.1	Approche globale . . . . .	55
4.3.2	Approche locale . . . . .	57
4.3.3	Invariance par composition dans le modèle bond graph flou . . . . .	66
4.4	Exemple : Bond graph flou d'une chaîne d'actionnement . . . . .	66
4.4.1	Cas mono-incertitude . . . . .	68
4.4.2	Cas multi-incertitudes - Approche globale . . . . .	73
4.5	Conclusion . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Méthodologie de synthèse de tolérance d'un système mécatronique</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	78
5.2	Formulation du problème . . . . .	79
5.3	Méthodologie de synthèse de tolérance par inversion du modèle bond graph . . . . .	80
5.3.1	Modélisation du système mécatronique par le langage bond graph . . . . .	83
5.3.2	Construction des modèles bond graph probabiliste et flou . . . . .	83
5.3.3	Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle . . . . .	84
5.3.4	Construction du modèle inverse . . . . .	84
5.3.5	Propagation de l'incertitude . . . . .	85
5.3.6	Synthèse de tolérance - Exploitation des FDP et des FA . . . . .	87
5.4	Bien fondé de la méthodologie . . . . .	87
5.4.1	Boucle de propagation . . . . .	87
5.4.2	Relaxation d'hypothèse . . . . .	89
5.5	Exemple : synthèse de tolérance sur une suspension de véhicule automobile. . . . .	90
5.5.1	Étape 1 : Modélisation . . . . .	93
5.5.2	Étape 2 : Adéquation . . . . .	95
5.5.3	Étape 3 : Inversion . . . . .	97
5.5.4	Étape 4 : Propagation . . . . .	98
5.5.5	Étape 5 : Synthèse de tolérance . . . . .	103
5.5.6	Validation de la méthodologie sur l'exemple . . . . .	104
5.6	Conclusion . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Le langage bond graph</b>	<b>135</b>
A.1	Introduction au langage . . . . .	135
A.1.1	Concepts et variables utilisées . . . . .	135
A.1.2	Éléments bond graph . . . . .	136
A.2	Construction d'un modèle bond graph . . . . .	138
A.3	Schéma de calcul associé à un modèle bond graph . . . . .	141
A.3.1	Causalité . . . . .	141
A.3.2	Bicausalité . . . . .	143
A.4	Notions d'ordre dans un modèle bond graph . . . . .	148
A.5	Critères d'inversibilité d'un modèle bond graph . . . . .	149
A.6	Ordre d'essentialité d'une sortie . . . . .	151
A.6.1	Approche bond graph causale . . . . .	151

A.6.2	Approche bond graph bicausale . . . . .	152
<b>B</b>	<b>Théorie de probabilité</b>	<b>153</b>
B.1	Probabilité . . . . .	153
B.1.1	Espace probabilisé . . . . .	153
B.1.2	Indépendance . . . . .	154
B.1.3	Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle . . . . .	154
B.2	Fonction de densité de probabilité pour la description de l'incertitude . . . . .	155
B.3	Propagation de la densité de probabilité . . . . .	156
<b>C</b>	<b>La logique floue</b>	<b>159</b>
C.1	Définitions . . . . .	159
C.2	Nombre flou . . . . .	160
C.2.1	Sous-ensemble flou convexe . . . . .	160
C.2.2	Nombre flou . . . . .	161
C.3	Produit Cartésien, principe d'extension . . . . .	161
C.3.1	Produit cartésien . . . . .	161
C.3.2	Projection d'un sous-ensemble flou - L'extension cylindrique . . . . .	162
C.3.3	Principe d'extension . . . . .	163
<b>D</b>	<b>Inversion du modèle véhicule</b>	<b>165</b>



# Chapitre 1

## Introduction générale

### Contexte

Ces trente dernières années, nous avons pu percevoir l'impact des développements des applications de l'ingénierie dans le monde industriel ainsi que dans la vie quotidienne. Les nouveaux systèmes complexes apportent des réponses aux exigences accrues du marché en termes de performances, de confort, de sécurité, de consommation d'énergie, de réduction de pollution et d'innovation. Ces systèmes, dit « systèmes mécatroniques » visent à concilier toutes ces contraintes de conception et de combiner des technologies concourantes par leur intégration en synergie. Leur apparition a demandé un changement de méthodes dans le processus de conception.

Auparavant, la conception d'un tel système complexe adoptait une démarche d'*ingénierie séquentielle*. Cette démarche décompose le système en plusieurs sous-systèmes (selon leur discipline) et étudie ces sous-systèmes en utilisant, de manière séparée, différentes méthodologies issues des différents domaines de la physique. La mécatronique, pourtant, exige de concevoir le système étudié de manière transverse, considérant l'interaction entre différentes technologies et en gardant une vue d'ensemble sur le produit. L'approche classique de l'ingénierie séquentielle n'est plus adéquate. Dans ce contexte, les concepts d'*ingénierie concourante* et de *cycle de conception en V* sont apparus. L'ingénierie concourante vise à améliorer l'interaction entre les différents partenaires d'un projet. Elle permet de prendre en compte les différentes phases du cycle de vie du système dès la conception et de mener en parallèle les différentes études afin de limiter les risques de conflit lors de l'interfaçage des différentes technologies et donc de réduire les phases de re-conception. Le cycle de conception en V permet de décomposer le travail de conception en deux phases : descendante (spécification des besoins et développement) et ascendante (intégration et validation). Ces deux phases sont reliées à la base du cycle par la réalisation de prototypes physiques. Ce cycle de conception nécessite d'être parcouru plusieurs fois totalement ou partiellement jusqu'à trouver une solution optimale. Cette démarche peut être alors coûteuse en temps d'étude, dépendant du nombre d'itérations et de la durée de chacune d'entre elles. Le prototype physique est donc remplacé par un *prototype virtuel* modélisant et simulant le comportement du système à chaque itération.

Face à l'internationalisation des marchés et à la conjoncture économique actuelle, l'industrie doit être la plus compétitive possible. A côté des contraintes de qualité, il existe donc également celles de marché et d'économie. La fabrication à très haute précision peut introduire des produits de qualité excellente mais implique dans le même temps des coûts plus importants qui, éventuellement, dépassent les contraintes économiques et dégradent la compétitivité du produit sur le marché. Pour faire face à ce conflit, les contraintes de qualité peuvent être intentionnellement relâchées afin d'atteindre les cibles économiques et par conséquent, améliorer la compétitivité sur le marché. La spécification de tolérance est alors un élément clé pour résoudre ce conflit. L'objectif de conception n'est plus uniquement de dimensionner des valeurs nominales, mais de déterminer également des tolérances sur ces valeurs nominales. Des tolérances bien spécifiées per-

mettent d'atteindre un compromis entre la performance du système et les coûts de fabrication. Le problème de *synthèse de tolérance* devient alors une partie très importante dans le processus de conception d'un système mécatronique.

En outre, dans la conception d'un système mécatronique, il existe toujours des incertitudes. Malgré les avancées technologiques, elles peuvent dégrader considérablement les performances des systèmes par rapport aux performances prévues théoriquement. Ces facteurs incertains viennent des perturbations externes ou des incertitudes sur le modèle dynamique et sont classés en trois catégories : aléatoire, épistémique et erreur. Leur existence nécessite leur prise en compte dans la conception d'un système, en particulier, dans la synthèse de tolérance. Pour cela, l'ingénieur de conception doit connaître les méthodes pour modéliser et propager les incertitudes.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte de conception des systèmes mécatroniques et porte, plus particulièrement, sur la synthèse de tolérance paramétrique de chaîne d'actionnement. Nous nous intéressons également à la prise en compte des facteurs incertains dans le processus de synthèse de tolérance.

## Motivations

Dans le contexte du cycle en V, la conception d'un système mécatronique ou d'une chaîne d'actionnement est réalisée à différents niveaux :

- niveau système : le choix de l'architecture du système est fait conformément au cahier des charges,
- niveau sous-système : les sous-systèmes sont sélectionnés pour satisfaire le cahier des charges,
- niveau composant : à partir des spécifications données, les paramètres du système sont déterminés.

Lorsque l'architecture du système a été définie, le dimensionnement consiste à choisir les différents composants des chaînes d'actionnement suivant les spécifications imposées par le cahier des charges. Les approches existant dans la littérature pour aborder ce problème peuvent être classées en deux catégories : les approches par modèle direct et les approches par modèle inverse.

L'approche par modèle direct est essentiellement une méthode essai - erreur - correction. Dans cette approche, un composant est sélectionné sur des critères généralement simples du type statiques ou stationnaires dans un catalogue de composants disponibles. Un modèle du système équipé du composant sélectionné est mis en place et sa simulation est ensuite entreprise (essai) afin de calculer les performances en sortie et les comparer avec les performances spécifiées dans le cahier des charges (erreur). Si les spécifications ne sont pas satisfaites, il faut recommencer la procédure (correction). Cette approche possède deux inconvénients : le nombre d'itérations est variant, difficilement prévisible et peut être grand suivant la complexité du problème de conception. De plus, la solution obtenue n'est pas garantie d'être idéale (surdimensionnement).

Moins classique, l'approche par modèle inverse correspond pourtant plus à la manière naturelle de poser un problème de dimensionnement. Généralement, dans un problème de dimensionnement, les spécifications sur les sorties du modèle retenu sont données et il faut chercher les entrées de commande et les paramètres du modèle. L'approche inverse consiste alors à construire un modèle inverse dont les entrées sont les spécifications et les grandeurs recherchées sont les entrées de commande et les paramètres. Ce modèle inverse ne correspond pas à la causalité physique du système mais est néanmoins mathématiquement envisageable. Il permet en effet de calculer l'évolution des entrées du modèle à partir de l'évolution de ses sorties. L'approche inverse possède deux avantages par rapport à l'approche directe : le nombre d'itérations dans le processus de conception est diminué et les spécifications sont prises en compte d'emblée dans ce processus et à tout instant de leur évolution. Cela permet de procéder à un dimensionnement sur des critères dynamiques.

L'approche inverse a été exploitée depuis la fin des années 60 en conception industrielle [Coe69, PJ86, VKP87, Deq98]. Cependant, elle n'est systématiquement généralisée et formalisée qu'à la fin des années 90. Le laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI)<sup>1</sup> a proposé une méthodologie de dimensionnement par modèle bond graph inverse [SAR91, NST96, FN97]. Elle est basée sur l'inversion des modèles bond graph en exploitant la bicausalité [Gaw95]. Possédant les avantages d'une approche inverse, la méthodologie permet en plus de spécifier la conception d'un nouvel actionneur si aucun des existants ne répond aux exigences.

Une partie importante de la méthodologie repose sur une analyse structurelle du modèle. Cette analyse permet de vérifier des conditions nécessaires d'inversibilité du modèle ainsi que l'adéquation entre le modèle et les spécifications avant d'entreprendre l'inversion. L'analyse structurelle aide également à une nouvelle rédaction du cahier des charges dans le cas où le problème n'est pas correctement posé pour une inversion. Cela fournit de la flexibilité et une réduction de temps d'étude par rapport à l'approche directe.

En procédant à des inversions successives, nous pouvons remonter les spécifications et dimensionner progressivement chaque étage d'une chaîne d'actionnement. La méthodologie peut être utilisée pour la synthèse de la commande en boucle ouverte ainsi que le dimensionnement paramétrique.

La synthèse de tolérance d'un paramètre dans un système mécatronique peut être vue comme une généralisation du problème de dimensionnement paramétrique. Nous envisageons donc la possibilité d'utiliser l'approche par modèle inverse pour le problème de synthèse de tolérance. Cette idée vise à apporter un gain de temps considérable dans le travail de synthèse de tolérance, comparé à la plupart des approches directes actuelles basées notamment sur les techniques de simulation telle que la méthode de Monte-Carlo.

Le formalisme bond graph dispose d'outils pour la modélisation de l'incertitude : le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental et le bond graph incertain. Pourtant, ces outils donnent une information limitée sur la nature ainsi que les propriétés de l'incertitude. Ils ne sont alors pas adaptés à la synthèse de tolérance lorsque que l'on a besoin de plus d'information sur la distribution d'un paramètre. La prise en compte, dans la méthodologie de dimensionnement par bond graph inverse, de l'incertitude, notamment de l'*incertitude aléatoire*, est faite par la théorie des probabilités [Fek11]. Cependant, dans un système mécatronique, l'*incertitude aléatoire* et l'*incertitude épistémique*<sup>2</sup> co-existent. La considération d'un seul type d'incertitude n'est alors pas suffisant. Il est nécessaire de prendre en compte l'incertitude épistémique dans la méthodologie et, par conséquent, une approche complète systématisée considérant les deux types d'incertitude.

Dans ce contexte, ce mémoire est une contribution à la problématique de synthèse de tolérance pour la conception des systèmes mécatroniques visant les objectifs énoncés ci-dessous.

## Objectifs

Les objectifs de cette thèse sont :

- une contribution à la modélisation des incertitudes épistémiques dans le formalisme bond graph,
- la prise en compte de ces incertitudes dans la méthodologie de dimensionnement par bond graph inverse,
- formalisation d'une méthodologie générale de synthèse de tolérance par bond graph inverse, tenant compte des deux types d'incertitude (aléatoire et épistémique),
- application de la méthodologie à un exemple du domaine de l'automobile.

1. devenu aujourd'hui le laboratoire Ampère.

2. voir définitions dans 3.2.2, page 22

## Organisation du mémoire

Pour répondre aux objectifs de cette thèse, ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre établit le contexte général de nos travaux de recherche. Tout d'abord, nous présentons une brève introduction à la mécatronique et l'architecture générique d'un système mécatronique du point de vue énergétique. Ensuite, la conception de ces systèmes est abordée. Les concepts d'ingénierie concourante, de cycle de conception en V sont également introduits. Parmi plusieurs problèmes de conception d'un système mécatronique, nous nous focalisons sur celui de la synthèse de tolérance d'un composant. Après l'introduction de la tolérance dans la conception d'un système mécatronique, nous rappelons les méthodes existantes pour traiter le problème de synthèse de tolérance.

Afin d'aborder la prise en compte de l'incertitude dans la méthodologie de dimensionnement par bond graph inverse, le deuxième chapitre propose un état de l'art sur les incertitudes dans un système mécatronique. Les incertitudes sont classées soit par leur source, soit par leur nature (aléatoire, épistémique). Ensuite, différents outils de modélisation et d'étude des systèmes incertains sont présentés. Ces outils servent à quantifier l'impact des incertitudes sur le comportement du système. Cette présentation fournit une vue très générale sur les avantages et les inconvénients de ces outils, ainsi que leurs domaines d'application. Elle donne des pistes pour choisir un outil de modélisation de l'incertitude.

Comme nous allons exploiter l'inversion de modèles par bond graph pour résoudre le problème de synthèse de tolérance, la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses sera étudiée dans la suite du deuxième chapitre. Une brève introduction de ses différentes étapes et différents aspects sont présentés. A la fin de ce chapitre, les travaux sur la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph sont également discutés. Ces travaux portent notamment sur les aspects modélisation et analyse des incertitudes paramétriques dans le formalisme bond graph.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de notre contribution à la prise en compte de l'incertitude épistémique dans le formalisme bond graph. Inspiré par le bond graph probabiliste [Fek11], nous proposons le *bond graph flou*. Nous commençons ce chapitre par un rappel de certaines notions de base de la logique floue telles que celles de la fonction d'appartenance et des  $\alpha$ -coupes. Ensuite, nous établissons la base du bond graph flou en associant un ensemble flou à chaque variable de puissance. Nous présentons deux approches de propagation des ensembles flous dans un modèle bond graph flou : l'approche globale et l'approche locale, puis les règles d'exploitation d'un modèle bond graph flou sont introduites. L'exploitation du bond graph flou est illustrée par un exemple simple d'un moteur à courant continu. Nous considérons le cas mono-incertitude et le cas multi-incertitudes.

Le dernier chapitre est consacré au problème de synthèse de tolérance tenant compte des incertitudes admissibles sur les spécifications en sortie. En exploitant la méthodologie par bond graph inverse et les deux formalismes de bond graph probabiliste et de bond graph flou, nous proposons une méthodologie générale pour la synthèse de tolérance. L'objectif est d'obtenir la tolérance de paramètres de conception pour satisfaire aux exigences spécifiées dans le cahier des charges. La méthodologie proposée se compose de cinq étapes. Après la modélisation du système, objet de la conception, par modèle bond graph, les incertitudes sont quantifiées soit par des fonctions de densité de probabilité, soit par des ensembles flous. Elles sont propagées à travers le modèle inverse (globalement ou localement) afin d'atteindre les paramètres de conception. Les tolérances paramétriques sont alors synthétisées à partir des résultats de propagation.

La conclusion présente une synthèse des contributions de ce mémoire ainsi que plusieurs perspectives de recherche pour compléter et élargir ces travaux.

Enfin, le mémoire est complété par plusieurs annexes qui donnent des informations complémentaires aux chapitres. L'annexe A présente des notions de base sur le langage bond graph comme une entrée en matière de cet outil. Les annexes B et C, quant à elles, donnent des rappels sur la théorie des probabilités et la logique floue, bases des deux grandes approches pour la ma-

nipulation des incertitudes dans ces travaux de recherche. Enfin, l'annexe D détaille les calculs de l'exemple du chapitre 5.



## Chapitre 2

# Tolérance dans le problème de conception d'un système mécatronique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2.2</b>	<b>Introduction à la mécatronique</b>	<b>8</b>
2.2.1	Les systèmes mécatroniques	8
2.2.2	Conception des systèmes mécatroniques	11
2.2.3	Problème de synthèse paramétrique	12
<b>2.3</b>	<b>Tolérance dans la conception d'un système mécatronique</b>	<b>13</b>
2.3.1	Tolérance dans un système mécatronique	13
2.3.2	Problème de synthèse de tolérance paramétrique	14
<b>2.4</b>	<b>Outils pour la prise en compte de la tolérance en conception</b>	<b>14</b>
2.4.1	Le coefficient de sécurité	14
2.4.2	La conception non-déterministe	15
2.4.3	Les méthodes dans le domaine mécanique	16
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

---

## 2.1 Introduction

Durant ces trente dernières années, la mécatronique et ses applications ont fondamentalement changé le monde. Ces systèmes pluridisciplinaires nécessitent une approche de la conception qui tient compte de différents métiers. Par ailleurs, le cahier des charges dans la conception de systèmes est de plus en plus complexe : les coûts et les temps de développement doivent être réduits au maximum alors que les performances demandées sont plus grandes (nouvelles normes en termes de sécurité, nouvelles contraintes environnementales, etc). Par conséquent, le problème de conception des systèmes mécatroniques demande de plus en plus d'effort.

Dans le problème de conception des systèmes mécatroniques, le dimensionnement vise à déterminer les valeurs des paramètres de sélection des composants du système. Le problème de dimensionnement est classiquement déterministe.

Outre les contraintes de qualité, celles du marché et économique ont également une grande importance dans la conception industrielle. La fabrication très précise peut introduire une qualité excellente du produit mais implique aussi un coût élevé qui éventuellement dépasse les contraintes économiques. Pour cette raison, les contraintes de qualité peuvent intentionnellement être relâchées afin d'atteindre les objectifs économiques pour plus de compétitivité sur le marché. La spécification de tolérance est alors un élément clé pour répondre à ce problème. Une tolérance bien spécifiée garantira la performance du système et également un coût de fabrication réduit. Pour cela, l'ingénieur en charge du produit doit consulter l'avis du fabricant et faire une étude de marché lors de la conception.

D'autre part, dans un système mécatronique, il existe toujours des incertitudes. Les incertitudes sur les spécifications, les mesures et la modélisation sont inévitables et engendrent une différence entre la performance du système réel observé et la performance du modèle mathématique associé.

Il est donc nécessaire de prendre en compte les incertitudes dans la conception du système, en particulier pour la synthèse de tolérance, et d'avoir des méthodes efficaces de modélisation et de propagation de ces incertitudes. L'objectif est alors de concevoir non plus une valeur déterministe, mais une tolérance [ASM09] sur le paramètre. Cette tolérance doit permettre de vérifier les spécifications techniques, de minimiser les effets négatifs des incertitudes et de garantir un certain coût de fabrication. Cet aspect est largement développé dans la littérature, pourtant, il manque à notre connaissance une méthodologie systématique.

Ce chapitre est consacré à l'établissement du cadre général de nos travaux. Nous proposons tout d'abord une courte introduction aux systèmes mécatroniques. Ensuite, la conception de ces systèmes est abordée. Parmi plusieurs problèmes de conception d'un système mécatronique, nous nous focalisons sur celui de la synthèse de tolérance d'un composant.

Après l'introduction de la tolérance dans la conception d'un système mécatronique, nous rappelons les méthodes existantes pour traiter le problème de synthèse de tolérance.

Ainsi, ce chapitre nous permet de positionner nos travaux dans les différentes étapes de la conception d'un système mécatronique.

## 2.2 Introduction à la mécatronique

Dans ce paragraphe, nous proposons une introduction à la mécatronique. Avant d'aborder sa conception, nous présentons l'architecture générique et énergétique d'un système mécatronique. Ensuite, les notions *d'ingénierie concourante*, de *cycle de conception en V* sont introduites.

### 2.2.1 Les systèmes mécatroniques

Le terme MECHATRONICS (ou MÉCATRONIQUE en français) a été inventé en 1969 par l'ingénieur japonais MORI de la société YASUKAWA ELECTRIC en concaténant les mots MECHANICS et ELECTRONICS [Mor69], pour caractériser un système intégrant une partie mécanique et une partie

électronique. Depuis, la définition de la mécatronique a évolué avec la complexification des systèmes [Ise05, Ise08]. Il existe plusieurs définitions d'un système mécatronique dans la littérature. Parmi elles, nous pouvons citer les définitions de quelques organisations importantes :

- La définition du journal international MECHATRONICS : « Mechatronics in its fundamental form can be regarded as the fusion of mechanical and electrical disciplines in modern engineering process. » [DH91]
- La définition du journal international IEEE TRANSACTIONS ON MECHATRONICS : « Mechatronics is the synergetic combination of mechanical engineering with electronics and intelligent computer control in the design and manufacturing of industrial products and processes ». [KO96]
- La définition du IFAC TECHNICAL COMMITTEE ON MECHATRONIC SYSTEMS : « Mechatronics, from a control engineer's perspective, is a synergistic approach to utilize advanced control, sensing and actuation methodologies in a variety of applications across many fields such as robotics and automation, motion control, automotive systems, biomedical systems, micro and nanoscale systems and information storage systems. » [IC13]

En général, la mécatronique est définie comme l'intégration multidisciplinaire de systèmes mécaniques et électromécaniques avec des systèmes électroniques et issus de la technologie de l'information (figure 2.1<sup>1</sup>).

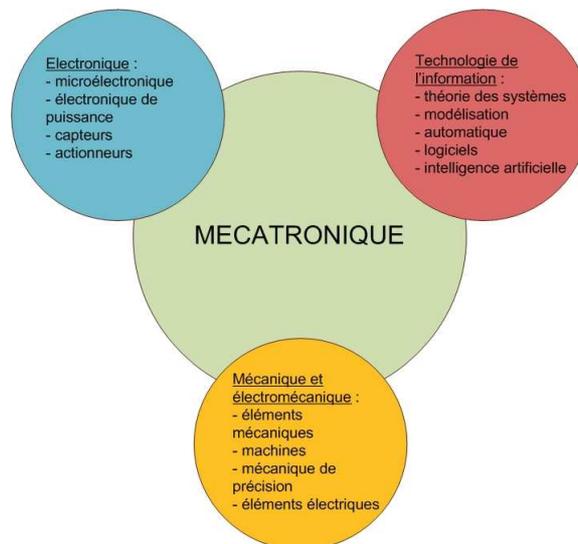


FIGURE 2.1 – La mécatronique : synergie de différentes disciplines [Jar10].

En France, le terme « mécatronique » est apparu officiellement en 2005<sup>2</sup>. L'Association Française de Normalisation (AFNOR) a proposé en 2008 une définition de la mécatronique pour la communauté scientifique et industrielle [AFN08] : « **Une démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'information dans la conception et la fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité** ».

Touchant de nombreuses applications dans des domaines variés, les systèmes mécatroniques se retrouvent dans notre vie quotidienne ainsi que dans le milieu industriel : produits grand public (caméscope, lecteur CD, jouet,...), médecine (robot de chirurgie mini-invasive, prothèse,...), recherche spatiale (robot explorateur, satellite,...), outils de production (machine outil à commande numérique, chaîne automatisée d'assemblage,...) ou encore transport (avion, véhicule routier,...).

Un système mécatronique peut être vu comme une chaîne de transmission de puissance supervisée à l'aide d'algorithmes de commande, eux-mêmes éventuellement paramétrés par l'inter-

1. Figure extraite de [Jar10] sous l'autorisation de l'auteur.

2. Dans Le Petit Larousse.

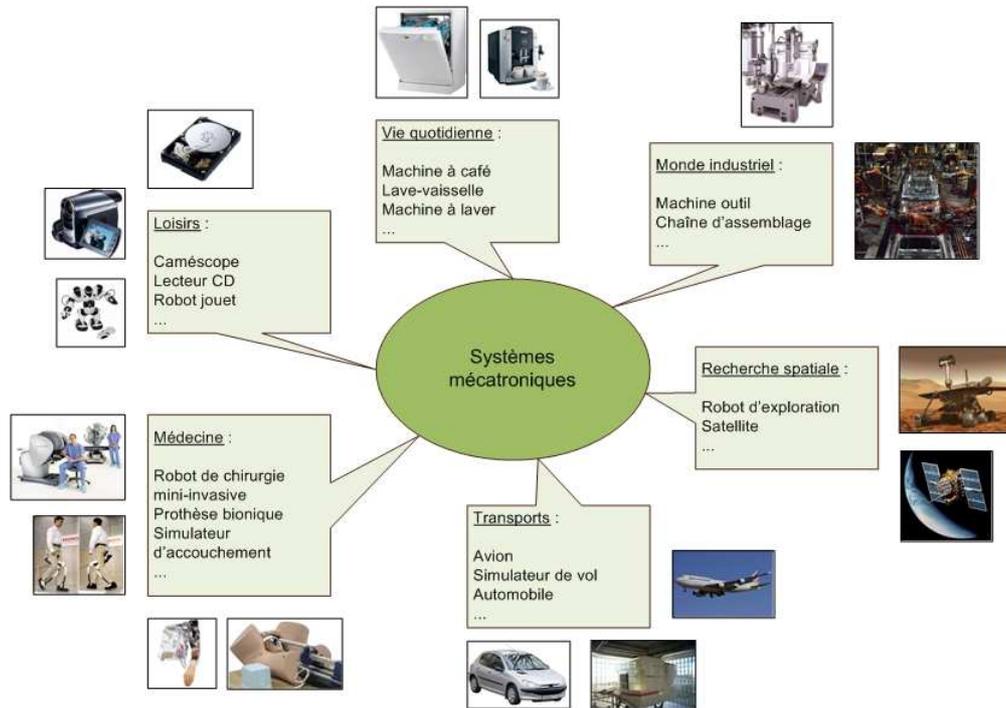


FIGURE 2.2 – Exemples de systèmes mécatroniques [Jar10].

médiaire d'une interface homme-machine (Fig. 2.3). D'un point de vue énergétique, les chaînes de transmission de puissance sont l'association de plusieurs fonctions telles que : l'alimentation énergétique, les modulateurs de puissance, la conversion et la transmission de l'énergie... [Laf04] (Fig. 2.3).

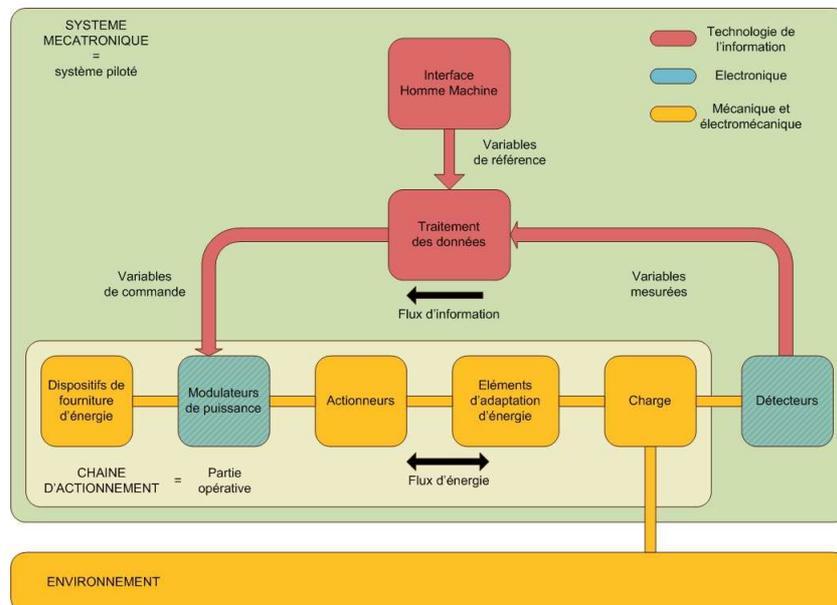


FIGURE 2.3 – Architecture générique d'un système mécatronique d'un point de vue énergétique [Jar10].

**Remarque 1.** L'architecture de la figure 2.3 est une architecture simple. Il existe d'autres configurations (par exemple l'association de plusieurs chaînes d'actionnement) [Laf04].

### 2.2.2 Conception des systèmes mécatroniques

Auparavant, l'approche globale de la conception pour des systèmes complexes utilisant différentes technologies issues de différents domaines de la physique consistait à décomposer le système en plusieurs sous-systèmes<sup>3</sup>. Ce découplage par discipline scientifique pose une question sur l'association des sous-systèmes conçus : « à partir des propriétés des différentes parties, il n'est pas trivial de déduire le comportement de l'ensemble » [Leb03]. Une combinaison de différentes technologies est optimale si et seulement si une réelle communication entre les différents spécialistes est mise en place et l'interconnexion des différentes disciplines est prise en compte dès le processus de conception. Ceci nécessite donc un changement de méthode de conception ce qui a motivé la création de l'*ingénierie concourante*<sup>4</sup>, une nouvelle démarche qui est principalement basée sur la communication des différents partenaires du projet et la mise en œuvre d'outils et plates-formes communs de développement. Cette approche est appliquée avec succès dans de nombreuses industries. Une description plus détaillée peut être trouvée dans [Jag93, AFN94, DF98].

Aujourd'hui, les spécialistes de la conception de systèmes mécatroniques s'accordent à représenter leur démarche sous la forme d'un cycle en V. Issue du génie logiciel, cette démarche a effectivement été adaptée par et pour la communauté mécatronicienne. Le cycle en V est consti-

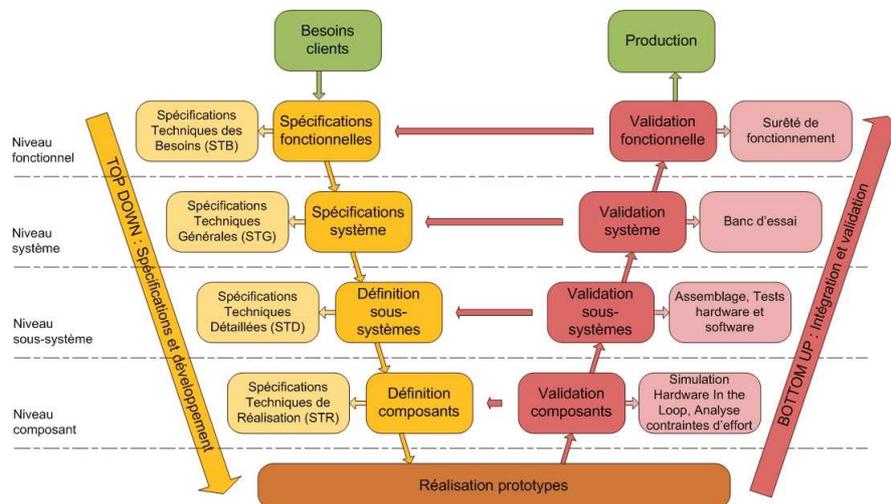


FIGURE 2.4 – Le cycle de conception en V [Jar10].

tué de deux branches principales : la phase descendante (*top down*) correspond aux différentes phases de spécifications et de conception tandis que la phase ascendante (*bottom up*) représente les étapes de validation et d'intégration des différentes technologies. Le projet est donc décomposé en plusieurs sous-projets de différents niveaux (figure 2.4). Il permet de mener en parallèle les deux phases principales existant dans le cycle de conception : la phase de conception de la chaîne d'actionnement du système et la phase de détermination et d'implémentation des lois de commande [DT99].

Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons à la conception de la chaîne de transmission de puissance d'un système mécatronique aux niveaux système, sous-système et composant. La conception d'une chaîne de transmission de puissance revêt plusieurs aspects [Fek11] : la synthèse d'architecture (niveau système) [Lic07], la sélection de sous-systèmes ou de composants sur étagère (niveau sous-système) [FN97, Ull03], la synthèse paramétrique (niveau composant) [Ngw98, Laf04].

3. Ce point de vue traditionnel a ainsi abouti à ce que nous pouvons appeler l'*ingénierie séquentielle* [Jar10].

4. Parfois dénommée ingénierie simultanée [Ise96].

### 2.2.3 Problème de synthèse paramétrique

Une fois l'architecture du système définie, la synthèse paramétrique consiste à déterminer les paramètres des différents composants de la chaîne de transmission de puissance respectant les spécifications imposées par le cahier des charges. Contrairement au problème d'identification paramétrique où on détermine des paramètres inconnus d'une structure choisie a priori, en exploitant des résultats de mesures ou de simulations obtenus pour des entrées données [WP94], un problème de synthèse paramétrique vise la détermination des paramètres inconnus d'une structure donnée à partir de la connaissance des spécifications sur les sorties et des commandes [Ngw98]. Ces données exigent la compatibilité des commandes et des spécifications avec la structure du modèle.

Deux approches peuvent être envisagées pour aborder ce problème de synthèse paramétrique : l'approche par modèle direct et l'approche par modèle inverse

#### Approche par modèle direct : méthode essai-erreur-correction

Cette approche consiste à :

1. Sélectionner un actionneur dans un catalogue d'actionneurs disponibles sur des critères simples (*cf.* par exemple [New50, Coe69].)
2. Modéliser l'actionneur sélectionné.
3. Spécifier l'entrée du modèle (actionneur+charge).
4. Lancer une simulation afin de calculer la performance en sortie.
5. Comparer la performance obtenue avec la performance spécifiée dans le cahier des charges.
6. Itérer la procédure si la performance obtenue ne satisfait pas les critères fixés dans le cahier des charges.

Le modèle utilisé dans cette approche, le modèle direct, est un modèle qui respecte le principe de la causalité physique entre les entrées et les sorties du système physique.

Cette approche est basée sur des critères généralement stationnaires : les grandeurs maximales à ne pas dépasser. Par conséquent, elle n'exploite pas la totalité des spécifications et peut rendre la sélection non pertinente en pratique. Elle aboutit très rarement à une solution acceptable dès la première simulation, ce qui fait qu'elle est coûteuse en temps.

En fait, les méthodes directes ne donnent aucune assurance de converger vers une solution et même en cas de convergence, rien ne garantit que la solution obtenue soit optimale. Pour pallier ces inconvénients, une approche possible est l'approche par modèle inverse.

#### Approche par modèle inverse

Contrairement au problème direct, où on donne les causes et le modèle décrivant l'évolution du système résultant de ces causes pour obtenir les effets observables expérimentalement, certaines problématiques en ingénierie favorisent le problème inverse pour déterminer les causes à partir des observations expérimentales de leurs effets. Dans cette approche, les modèles ne respectent plus le principe de causalité physique et une inversion entrée/sortie du modèle est nécessaire. Cette opération n'est possible que si le modèle est inversible. La résolution mathématique de ce problème peut être difficile car il peut être mal posé ou la solution non unique.

En automatique, le problème d'inversion d'un modèle a fait son apparition en 1963 [ZD63, Wei64]. Le premier algorithme d'inversion des systèmes discrets et des systèmes linéaires mono-variables à temps invariant a été introduit en 1965 [Bro65, BM65]. Cet algorithme a été ensuite étendu pour le cas multivariables [YD66, Dor69, PSSM70]. Depuis, l'inversion des modèles physiques a fait l'objet de nombreux travaux : sur les modèles linéaires [SM69, Por69, Wil74, RW77], les modèles non linéaires [Hir79, Sin81, Nij82, Nij86, Fli86] et les modèles singuliers [TV88].

Dans un problème de synthèse d'architecture et/ou de sélection de sous-systèmes, les données du problème de conception sont les spécifications sur les sorties et les valeurs des différents paramètres. Ainsi, il paraît plus naturel de poser ce problème comme un problème inverse. Il y a classiquement trois méthodes de dimensionnement utilisant l'inversion : la méthode générale communément adoptée en robotique pour dimensionner les actionneurs de robots manipulateurs (évoquée dans [Jar10]), celle de POTKONJAK et VUKOBRATOVIĆ [PJ86, VKP87], et celle de DEQUIDT [Deq98, Deq00].

Dans un problème de synthèse paramétrique d'un composant d'une chaîne de transmission de puissance, les variables de puissance de ce composant, obtenues par inversion, sont tracées dans un plan (effort, flux). La synthèse paramétrique se fait en exploitant les relations entre ces variables [Fek11].

En conception, l'étape ultime avant la fabrication est la synthèse de tolérance. Comme il a été évoqué dans l'introduction de ce chapitre, une fabrication très précise d'un composant peut introduire un coût de réalisation élevé, et éventuellement dégrader la compétitivité du produit sur le marché. Ceci motive donc la définition de tolérances dans le processus de conception.

## 2.3 Tolérance dans la conception d'un système mécatronique

Dans cette partie, la définition d'une tolérance ainsi que le contexte général du problème de synthèse de tolérance dans la conception d'un système mécatronique sont présentés. Ensuite, les solutions classiques de ce problème sont introduites.

### 2.3.1 Tolérance dans un système mécatronique

Nous présentons ici la définition de tolérance extraite de la norme ISO 14253-1 :1998 [ISO98] :

**DÉFINITION 1. Tolérance** : différence entre les limites supérieure et inférieure de tolérance.

Chaque domaine physique peut voir la définition légèrement changer. Nous pouvons citer ainsi la définition de la tolérance dimensionnelle utilisée dans le domaine mécanique.

**DÉFINITION 2.** La tolérance dimensionnelle exprime la différence acceptable et cohérente entre la plus petite et la plus grande dimension d'un objet. [CR11].

Du point de vue général, cette définition peut être étendue aux autres domaines physiques. Une tolérance porte non seulement sur les dimensions, mais également sur une propriété, une grandeur, un paramètre... en fonction de l'objectif et du domaine d'application.

La spécification des tolérances pour les composants fabriqués devient reconnue par l'industrie comme un élément clé dans leur activité de conception. Une tolérance bien spécifiée peut générer des économies de coût significatives en gardant une performance acceptable du système. La conception technique et la fabrication sont toutes deux impactées par les tolérances spécifiées. Tandis que l'ingénieur de conception doit spécifier une tolérance qui garantit la performance du système, le fabricant sait qu'une tolérance serrée augmente fortement le coût de production. Les tolérances ont aussi une grande influence sur le choix des procédés de production, et déterminent la qualité et la durée de vie du produit final.

Tenir compte des incertitudes dans le processus de conception du système et déterminer les tolérances peuvent réduire les effets négatifs des incertitudes, tout en conservant les performances du système. Le système est par conséquent rendu robuste et moins cher.

La synthèse de tolérance est alors un lien important entre l'ingénierie de conception et la fabrication. Elle doit être un outil pour répondre à des exigences concurrentes et fournir un compromis entre la performance et le coût de fabrication.

### 2.3.2 Problème de synthèse de tolérance paramétrique

Il est à noter que le problème de synthèse paramétrique par la méthodologie de dimensionnement est déterministe [Ngw98, Laf04]. Les spécifications considérées dans ces travaux sont des trajectoires temporelles nominales, et par conséquent, des contraintes fortes qui ne tiennent pas compte des incertitudes admissibles sur les trajectoires en sorties. Il est donc judicieux de définir un domaine de fonctionnement admissible pour chaque sortie qui permette de déterminer les tolérances paramétriques. Dans ce contexte, l'analyse par intervalles a été utilisée pour traiter le problème dans [Hoc02, Ly04, Fek11].

Il est nécessaire d'étudier, lors de la conception d'un système, les effets inévitables des incertitudes sur les trajectoires en sorties. Ces études peuvent servir, par exemple, pour la détermination de commandes robustes qui permettent de réduire, en boucle fermée, la sensibilité du comportement du système à l'incertitude paramétrique [AB03a] ou de limiter l'impact négatif des incertitudes en boucle ouverte en définissant une zone de fonctionnement admissible. Dans le problème de conception présenté dans ce mémoire, la question posée est : **quelle tolérance peut-on appliquer aux paramètres de conception du système pour satisfaire les spécifications du cahier des charges ?** La réponse peut être dans la prise en compte de l'incertitude dans la procédure de conception. En particulier, dans le contexte de notre recherche, nous visons à **prendre en compte une variabilité admissible sur les sorties spécifiées, pour la synthèse de tolérance paramétrique.**

Nous présentons dans la suite, des méthodes pour synthétiser des tolérances dans un système mécatronique. Ces méthodes sont utilisées dans plusieurs domaines d'application : génie mécanique, génie civil, automatique ...

## 2.4 Outils pour la prise en compte de la tolérance en conception

Traditionnellement, les concepteurs utilisent la notion de *coefficient de sécurité* pour tenir compte de la variabilité d'un paramètre dans la conception d'un système. Cette notion classique présente plusieurs inconvénients et a vu l'introduction de celle de *probabilité de défaillance* ou celle des *coefficients de sécurité partiels*. La probabilité de défaillance peut être considérée comme un outil préliminaire pour la prise en compte de l'incertitude dans la conception.

Afin de surmonter les insuffisances des procédures de conception déterministe, la conception non-déterministe permet d'observer les mesures de fiabilité et de robustesse au cours du processus de conception. Les deux grandes classes de problèmes de conception non-déterministe sont des problèmes de conception robuste et des problèmes de conception basée sur la fiabilité [Huy01]. Le problème de synthèse de tolérance peut être classé comme un problème de conception robuste. Cependant, il nécessite également la considération de la fiabilité.

Parmi les domaines physiques existant dans un système mécatronique, le monde mécanique dispose des méthodes spécifiques de synthèse de tolérance. En effet, dans un système mécanique, il faut considérer les critères d'assemblage des pièces. La tolérance spécifiée doit alors satisfaire non seulement les critères fonctionnels mais aussi les critères d'assemblage.

### 2.4.1 Le coefficient de sécurité

Les procédures traditionnelles de conception utilisent le coefficient de sécurité pour tenir compte des incertitudes. Cependant, elles présentent plusieurs inconvénients. Tout d'abord, ces procédures peuvent être difficiles à appliquer aux systèmes mécatroniques qui ont des configurations multidisciplinaires et non conventionnelles. Ensuite, les mesures de fiabilité et de robustesse ne sont pas fournies dans le processus de conception. Par conséquent, il n'est pas possible de déterminer l'importance relative des différentes options de conception sur la fiabilité et la robustesse du système. Enfin, l'approche par coefficient de sécurité est inconsistante. Il tient compte

de conditions d'échec en utilisant une moyenne ou un état de « pire des cas ». En réalité, une condition pire des cas est difficilement identifiable.

Avec l'apparition de la conception non-déterministe et la probabilité de défaillance (*cf.* paragraphe 2.4.2), les *coefficients de sécurité partiels* ont été introduits. Ces coefficients de sécurité partiels sont posés sur plusieurs valeurs critiques de la distribution du paramètre incertain (au lieu d'un seul coefficient sur la valeur nominale). Ils garantissent alors la fiabilité du système. En pratique, les coefficients de sécurité partiels ne sont pas calculés mais prédéfinis dans les codes.

### 2.4.2 La conception non-déterministe

La formulation non-déterministe est celle dans laquelle certains éléments essentiels du problème de conception (variabilité de fabrication, données expérimentales, de mesure, solutions informatiques, erreurs de discrétisation, ...) sont considérés comme incertains [ZHW<sup>+</sup>02]. Ces aspects incertains peuvent être exprimés de plusieurs façons comme par exemple par l'arithmétique par intervalles ou par des fonctions de densité de probabilité.

Les deux grandes classes de problèmes de conception non-déterministe sont des problèmes de conception robuste et des problèmes de conception basée sur la fiabilité [Huy01]. Un problème de conception robuste est celui dans lequel un système reste insensible aux petites variations dans les quantités incertaines de la conception. Un problème de conception basée sur la fiabilité est celui dans lequel la conception a une probabilité de défaillance inférieure à une valeur spécifiée.

La même formulation mathématique peut être utilisée pour décrire à la fois la conception robuste et la conception basée sur la fiabilité. Cependant, leurs domaines d'application sont assez différents.

Concernant la conception basée sur la fiabilité et afin de pallier les inconvénients des coefficients de sécurité dans la procédure traditionnelle de conception, une description plus analytique a été établie dans les années 50 [Fre56, Bol69]. Dans cette description, tous les paramètres d'un modèle d'ingénierie sont des variables aléatoires. Il n'existe pas de sûreté absolue, et la défaillance est caractérisée par une probabilité.

Plus précisément, soit le vecteur  $\mathbf{R}$  composé de toutes les variables aléatoires décrivant les propriétés d'un modèle,  $\mathbf{S}$  le vecteur des charges (pouvant être considérées comme les spécifications) et  $g(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  la fonction d'état limite (c'est-à-dire  $g(\mathbf{R}, \mathbf{S}) < 0$  signifie un mauvais système,  $g(\mathbf{R}, \mathbf{S}) > 0$ , un bon système). Alors  $p_d = P(g(\mathbf{R}, \mathbf{S}) < 0)$  est la **probabilité de défaillance**,  $F = 1 - p_d$  est la **fiabilité du système**. Pour déterminer la probabilité  $p_d$ , les types et les paramètres des distributions de probabilité de  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  sont nécessaires. Cela multiplie le nombre de valeurs devant être fournies par l'ingénieur qui conçoit : chaque paramètre est livré avec un type de distribution.

En fait, les codes actuels emploient des valeurs critiques  $R_k$  et  $S_k$  (certains quantiles de  $R$  et  $S$ ) et des *coefficients de sécurité partiels*  $\gamma_R$  et  $\gamma_S$ , avec lesquels le concepteur doit vérifier une relation du type :

$$\frac{R_k}{\gamma_R} \geq \gamma_S S_k$$

Depuis les années 1980, les codes européens utilisent les probabilités [fS02, Obe11]. Cependant, l'emploi de la probabilité de défaillance est fortement critiqué pour sa dépendance importante aux hypothèses de modélisation. Un exemple, donné dans [OF02, OF05b, OF08], montre que la probabilité de défaillance peut varier de plusieurs ordres de grandeur lorsque des modèles statistiques différents (mais tous acceptables) des données d'entrée sont utilisés. Une autre évaluation critique de la dépendance de  $p_d$  sur le choix des distributions de probabilité peut être trouvée dans [Eli99, OF05b, OF05a].

La probabilité de défaillance peut être considérée comme un outil préliminaire pour la prise en compte de l'incertitude dans la conception. Les procédures de conception tenant compte de l'incertitude aident à surmonter les insuffisances des procédures de conception traditionnelles. En particulier, les mesures de fiabilité et de robustesse sont dans ce cas disponibles au cours du

processus de conception. Cette information permet au concepteur de produire un niveau constant de fiabilité et de performance dans les systèmes sans sur-dimensionnement de certaines parties (sous-systèmes, composants).

Les méthodes mathématiques pour les procédures de conception robuste sont bien moins développées que celles de la fiabilité. Dans l'industrie, les procédures de conception sont souvent déterministes. Un travail considérable a été effectué pour *la commande robuste*, mais ce travail s'est limité à l'utilisation de normes bornées des variables incertaines. Bien que les principes de conception robuste de TAGUCHI [Tag87, TC90] soient utilisés dans l'industrie, ce ne sont pas nécessairement les méthodes les plus adaptées pour un grand nombre de problèmes de conception robuste. Les méthodes de conception basée sur la fiabilité ont été quant à elles utilisées au sein du génie civil [Sun95] et dans la conception de moteurs d'avion [Cru01].

Le problème de synthèse de tolérance peut être classé comme un problème de conception robuste. Cependant, il nécessite également la considération de la fiabilité.

L'utilisation de méthodes de conception basées sur l'incertitude exige que les diverses incertitudes liées au problème de conception soient caractérisées et gérées, et que les méthodes d'analyse et d'optimisation intègrent cette caractérisation des quantités incertaines. Dans la suite, nous nous concentrons sur la caractérisation et la gestion des incertitudes, puis, sur l'utilisation des incertitudes dans la conception.

La caractérisation et la gestion des incertitudes sont nécessaires au niveau des composants ainsi qu'au niveau du système intégré. Il s'agit notamment des incertitudes numériques et expérimentales produites par les méthodes d'analyse du domaine d'application lui-même, et par la relation entre les incertitudes affectant l'entrée et les incertitudes affectant la sortie.

### 2.4.3 Les méthodes dans le domaine mécanique

Dans cette partie, plusieurs outils de traitement de la tolérance dans le domaine mécanique sont décrits. Certaines limites des modèles pour l'analyse de la tolérance sont mises en évidence.

La spécification géométrique d'une tolérance dans le domaine mécanique est un cas particulier du problème de synthèse de tolérance en général. La tolérance spécifiée doit satisfaire non seulement les critères fonctionnels mais aussi les critères d'assemblage. Le domaine mécanique dispose donc de méthodes spécialisées pour la synthèse de tolérance. Ces méthodes ne sont généralement pas valables pour d'autres domaines d'application mais elles donnent des idées utiles pour la synthèse de tolérance dans un système mécatronique.

Dans le domaine mécanique, les problèmes de synthèse de tolérance sont généralement associés à *l'analyse de tolérance* et *l'allocation de tolérance* (ou *synthèse de tolérance* dans certaines références). Dans l'analyse de tolérance, les tolérances des composants sont toutes connues ou spécifiées et la tolérance de l'assemblage est calculée. Dans l'allocation de tolérance, la tolérance d'assemblage est connue à partir du cahier des charges, et les tolérances des composants ne sont pas connues. La tolérance de l'assemblage doit être alors distribuée ou répartie entre les composants d'une manière rationnelle.

Nous présentons maintenant les deux problèmes ainsi que leurs résolutions classiques. Notons que notre problème traite la synthèse de tolérance dans la conception d'un système mécatronique avec des incertitudes admissibles spécifiées dans le cahier des charges. Il est donc plus proche du problème de l'allocation de tolérance.

#### L'analyse de tolérance

Dans l'analyse de tolérance, les tolérances des composants sont toutes connues ou spécifiées (à partir de tables par exemple) et la tolérance de l'assemblage est calculée. L'objectif est de prédire la tolérance cumulée dans les composants assemblés. L'analyse de la tolérance dans la conception utilise un modèle analytique de l'accumulation des tolérances dans un assemblage de pièces mécaniques. Les deux approches les plus couramment utilisées (pire des cas et statistique)

dans la conception sont brièvement définies ci-après. Un traitement plus complet peut être trouvé dans [For67].

Dans une analyse **pire des cas**, la tolérance de l'assemblage ( $T_{ASM}$ ) est déterminée en faisant la somme des tolérances des composants ( $T_i$ ) de manière linéaire. Chaque dimension du composant est supposée être à son maximum ou minimum. Le résultat sur l'assemblage est donc envisagé au pire des cas.

Dans l'**approche statistique** de l'analyse de tolérance, la faible probabilité de la combinaison des pires cas est prise en compte statistiquement, en supposant que les composants suivent une distribution de loi normale ou gaussienne. Les tolérances sont alors généralement prises à six écarts-types ( $6\sigma$ ) [CG88].

### L'allocation de tolérance

L'allocation rationnelle des tolérances des composants nécessite la mise en place d'une règle sur laquelle l'allocation est fondée. Nous présentons ici deux règles classiques : l'allocation par l'échelle proportionnelle et l'allocation par le facteur de précision constant.

Dans l'approche de l'**allocation par l'échelle proportionnelle**, le concepteur commence par affecter les tolérances des composants « raisonnables » en fonction du système ou du cahier des charges. Il récapitule ensuite les tolérances des composants pour voir s'ils répondent à la tolérance spécifiée de l'assemblage. Sinon, il multiplie les tolérances des composants par un facteur constant. De cette manière, les amplitudes relatives des tolérances des composants sont conservées.

Dans l'approche de l'**allocation par le facteur de précision constant**, les tolérances peuvent être réparties en fonction des tailles des pièces. Les pièces usinées ont des tolérances égales si elles ont la même taille. Quand la dimension augmente, les tolérances augmentent proportionnellement avec la racine cubique de la taille [For67].

$$T_i = P(D_i^{1/3}) \quad (2.1)$$

où  $D_i$  est la taille de base et  $P$  est le facteur de précision. Le facteur de précision est calculé soit par l'approche pire des cas, soit par l'approche statistique.

La méthode du facteur de précision est similaire à la méthode de l'allocation par l'échelle proportionnelle, sauf qu'il n'y a aucune attribution initiale requise par le concepteur. Au lieu de cela, les tolérances sont initialement attribuées en fonction de la dimension nominale de chaque composant, puis, mises à l'échelle pour atteindre la tolérance d'assemblage spécifiée.

### Synthèse de tolérance par optimisation

Dans le domaine mécanique, hormis les deux approches mentionnées ci-dessus, il existe des méthodes pour résoudre le problème de synthèse de tolérance basées sur l'optimisation (allocation optimale de tolérance) [Che01].

Cette approche illustre le conflit traditionnel entre la conception et la fabrication [LW90]. La synthèse de tolérance vise alors à s'assurer que la fonctionnalité et la qualité de la conception sont satisfaites [Jea99].

La synthèse de tolérance par les techniques d'optimisation nécessite la modélisation mathématique de la relation coût-tolérance. L'algorithme d'optimisation dépend des composantes des forces appliquées au système et cherche systématiquement la combinaison des tolérances qui minimise le coût. Dans les environnements de production réels, la relation coût - tolérance existe. Cependant, il est assez difficile d'obtenir les paramètres de ces relations.

Par conséquent, la synthèse de tolérance est formulée comme un problème d'optimisation traitant le coût de fabrication en tant que fonction objectif. La tolérance de fabrication peut être utilisée pour atteindre un équilibre économique entre le coût de production et la perte de la qualité du produit [CM95, LW98, Jea99].

### Limitations des méthodes dans le domaine mécanique

Les facteurs suivants semblent limiter sérieusement l'application des méthodes de synthèse de tolérance (dans le domaine mécanique) pour la conception d'un système mécatronique :

- ces méthodes tiennent compte de la tolérance d'assemblage des pièces mécaniques et ne sont pas valides pour les systèmes dans d'autres domaines ou de plusieurs domaines physiques,
- dans les premières étapes de conception, peu d'information est disponible sur le type de distribution des tolérances,
- la complexité de calcul augmente très rapidement avec la précision, causant de grandes difficultés lors du travail avec des systèmes multi-dimensionnels.

## 2.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté une courte introduction à la mécatronique et l'architecture générique d'un système mécatronique. Considérant leur complexité, nous avons vu qu'elle nécessitait de prendre en compte l'aspect pluridisciplinaire dans la conception de ces systèmes mécatroniques.

Parmi les problèmes de conception d'un système mécatronique, nous nous sommes intéressés en particulier à celui de la synthèse de tolérance. Malgré les avancées technologiques, à cause des facteurs incertains, le comportement d'un système mécatronique peut s'écarter du comportement nominal désiré théoriquement. La synthèse de tolérance permet alors de tenir compte des facteurs incertains dans la conception d'un système mécatronique, et de diminuer leurs effets négatifs sur la performance du système. Du point de vue du fabricant, une tolérance bien spécifiée garantit un coût de fabrication optimal.

Après l'introduction du problème de synthèse de tolérance dans la conception d'un système mécatronique, les méthodes habituellement utilisées pour traiter ce genre de problème ainsi que leurs limites ont été introduites.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les différents facteurs incertains dans un système mécatronique. Plusieurs outils de modélisation et d'étude pour la caractérisation des systèmes incertains et pour la mesure de l'impact de ces incertitudes sur le comportement du système sont introduits.

Ce premier chapitre a évoqué, entre autres, l'exploitation de modèles directs pour la synthèse paramétrique. Afin de considérer le cahier des charges dans sa globalité, le chapitre suivant s'attache quant à lui à préciser une approche du dimensionnement basée cette fois-ci sur l'inversion. La méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses proposée initialement par AMARA et SCAVARDA [Ama91] est alors étudiée.

Dans le contexte de notre recherche, nous utilisons en effet la méthodologie de dimensionnement par inversion d'un modèle bond graph pour la synthèse de tolérance dans une approche de conception non-déterministe. Les différentes étapes de cette méthodologie et ses différents aspects sont donc développés dans le chapitre 3. Les travaux récents sur la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph sont également discutés.

# Chapitre 3

## Incertitudes et inversion bond graph

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>3.2</b>	<b>Les incertitudes dans un système mécatronique</b>	<b>20</b>
3.2.1	Classification de l'incertitude par sa source	21
3.2.2	Classification de l'incertitude par sa nature	22
<b>3.3</b>	<b>Modèle de représentation des incertitudes</b>	<b>22</b>
3.3.1	Modélisation de l'incertitude aléatoire	24
3.3.2	Modélisation de l'incertitude épistémique	25
3.3.3	Modèle de l'incertitude bornée (Bounded uncertainty design)	26
<b>3.4</b>	<b>Mesure de l'impact de l'incertitude</b>	<b>27</b>
3.4.1	Analyse d'incertitude	27
3.4.2	Analyse de sensibilité	29
<b>3.5</b>	<b>La méthodologie d'inversion</b>	<b>30</b>
3.5.1	Le langage bond graph	30
3.5.2	Outils de l'analyse structurelle	31
3.5.3	Inversion d'un modèle bond graph	33
3.5.4	Dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques	34
3.5.5	L'approche inverse pour la synthèse de tolérance	35
<b>3.6</b>	<b>Prise en compte de l'incertitude dans l'approche bond graph</b>	<b>35</b>
3.6.1	Bond graph de sensibilité	36
3.6.2	Bond graph incrémental	37
3.6.3	Bond graph incertain	38
3.6.4	Bond graph probabiliste	39
3.6.5	Invariance par composition dans le modèle bond graph probabiliste	43
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la mécatronique et ses différents domaines d'application. L'architecture d'un système mécatronique a ensuite été introduite. Malgré les avancées technologiques, le comportement d'un système mécatronique est différent du comportement nominal désiré à cause des facteurs incertains. La conception d'un système mécatronique présentant des incertitudes, en particulier, la synthèse de tolérance, nécessite alors leur prise en compte. Une tolérance bien spécifiée peut minimiser l'effet négatif de l'incertitude sur le comportement du système, ainsi que le coût de fabrication.

Dans ce chapitre, nous présentons la prise en compte de l'incertitude dans la conception d'un système mécatronique. Tout d'abord, une brève introduction aux différents facteurs d'incertitudes affectant ces systèmes est effectuée. Les incertitudes sont classées soit par leur source, soit par leur nature. Ensuite, différents outils de modélisation et d'étude des systèmes incertains sont présentés. Ces outils servent à quantifier l'impact des incertitudes sur le comportement du système. Ils sont fortement utilisés dans plusieurs domaines de l'ingénierie (génie mécanique, génie civil, automatique...).

Nous avons également évoqué dans le premier chapitre l'exploitation de modèles directs et de modèles inverses pour la synthèse paramétrique. Consommatrices en temps de conception, les méthodes directes ne donnent pourtant aucune assurance de converger vers une solution et même en cas de convergence, rien ne garantit que la solution obtenue soit optimale. En revanche, l'approche inverse permet de franchir ces limitations des approches directes. Elle garantit la pertinence du résultat et réduit significativement le temps de conception. Cependant, elle nécessite de vérifier que le modèle soit inversible.

Dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons à l'approche inverse. La méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses est utilisée. Une brève introduction de ses différentes étapes et ses différents aspects, ainsi que le langage bond graph, l'outil de modélisation, sont donc présentés. En fin de chapitre, les travaux récents sur la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph sont également discutés. Ces travaux ont notamment porté sur l'aspect de l'analyse et de la modélisation des incertitudes paramétriques dans le formalisme bond graph. Le *bond graph de sensibilité* [GR00] permet d'analyser dans le domaine temporel la sensibilité du comportement du système à la variation de certains paramètres. L'analyse dans le domaine de LAPLACE se fait en utilisant le modèle *bond graph incrémental* [BG01, BDT04, BDTK06]. Le *bond graph incertain* [DT99, Kam01] permet d'établir des modèles d'état des systèmes linéaires incertains adaptés pour l'analyse de la robustesse et pour la commande robuste.

Ces trois représentations peuvent être considérées comme des modèles de l'incertitude bornée et ne contiennent qu'une information très limitée sur l'incertitude. EL FEKI a proposé dans [Fek11] une approche qui apporte plus d'information sur la caractéristique de l'incertitude traitée : le *bond graph probabiliste*. Cette approche est notamment développée pour la synthèse de tolérance et supporte le concept de bicausalité du bond graph. Étant un modèle bond graph multi-liens, le bond graph probabiliste permet de caractériser les incertitudes aléatoires par ses fonctions densité de probabilité, ses espérances et ses variances et de les associer aux éléments bond graph correspondants.

L'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu des méthodes de modélisation de l'incertitude dans un système mécatronique, ainsi que celles dans le formalisme bond graph. Il présente une première réflexion sur la prise en compte de l'incertitude dans la démarche de conception d'un système mécatronique par inversion de modèle bond graph.

### 3.2 Les incertitudes dans un système mécatronique

Les effets de l'incertitude sont une préoccupation croissante dans l'analyse et la conception des systèmes mécatroniques. Le fait que les propriétés d'un système soient incertaines implique

qu'il existe une incertitude sur la performance (par exemple : la réponse dynamique). Par ailleurs, il y a des écarts de fabrication inévitables car des composants produits en masse ne sont jamais parfaitement identiques. En outre, les propriétés d'un système changent avec le temps en raison, entre autres, de son environnement et, par conséquent, modifient sa performance.

### 3.2.1 Classification de l'incertitude par sa source

On distingue deux sources d'incertitudes dans un système mécatronique [ACA<sup>+</sup>99] : les perturbations externes et les variations du modèle.

#### Les perturbations externes

Les perturbations externes regroupent tous les signaux et les actions non contrôlés qui viennent du milieu environnant. Contrairement aux variations du modèle dynamique, ces actions externes ne modifient pas les caractéristiques internes du système (temps de réponse, dépassement, etc...) mais seulement la trajectoire de ses sorties.

#### Les variations du modèle dynamique

Deux types d'incertitudes pouvant causer des variations au niveau du modèle dynamique du système sont identifiés : les incertitudes du modèle et les incertitudes paramétriques. Rassemblant les dynamiques négligées du modèle, les incertitudes du modèle représentent les dynamiques rapides du système et l'erreur d'approximation entre le modèle dynamique et la réalité. Les incertitudes paramétriques sont dues aux erreurs d'identification ou aux variations de certains paramètres physiques du système [Fra78, Fek11]. Dans le cadre de notre travail, nous considérons notamment **les incertitudes paramétriques**. Dans la littérature, ces incertitudes sont généralement classées en deux grandes familles : les incertitudes non-structurées et les incertitudes structurées.

**Les incertitudes non structurées :** La seule information disponible sur les incertitudes non-structurées sont les bornes extrémales de l'incertitude [Saa96, Bou00]. Elles peuvent être modélisées comme additives, multiplicatives en entrée ou multiplicatives en sortie, et constituent les représentations les plus courantes des incertitudes de modélisation.

**Les incertitudes structurées :** Ces incertitudes ont des distributions structurées contenant plus d'information que les incertitudes non structurées. Elles sont généralement de natures diverses : erreurs d'identification, d'approximation ou variations/perturbations de certains paramètres physiques du système. Nous pouvons considérer trois structures classiques de l'incertitude paramétrique structurée [Fra78] :

- Incertitudes de type  $\alpha$  : les variations des paramètres autour de la valeur nominale non-nulle  $\alpha_n \neq 0$ , dues généralement aux incertitudes de fabrication : tolérance dans des cotations de pièces ou dans des valeurs de composants électroniques. Ces variations n'affectent pas l'ordre du modèle.
- Incertitudes de type  $\beta$  : les variations des conditions initiales autour de leur valeur nominale  $\beta_n$ . Les causes de ces variations sont principalement les erreurs de mesure.
- Incertitudes de type  $\gamma$  : les variations des paramètres autour d'une valeur nominale nulle ( $\gamma_n = 0$ ). Liées à une idéalisation dans le développement mathématique des modèles ou des erreurs d'identification de l'ordre du modèle, ces variations peuvent donc affecter cet ordre.

Nous nous intéressons par la suite aux incertitudes paramétriques de types  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Remarque 2. Incertitudes expérimentales :** Les techniques d'analyse de l'information probabiliste à partir des données observées se trouvent dans les méthodes d'inférence statistique avec

*l'utilisation des informations obtenues à partir des données d'échantillonnage. Les méthodes traditionnelles d'estimation incluent les estimations par point et les estimations par intervalle. Les méthodes courantes de l'estimation par point sont la méthode du maximum vraisemblance [Whe10] et la méthode des moments. L'estimation par intervalle concerne la détermination d'un intervalle contenant la valeur du paramètre et un niveau de confiance prescrit. Les procédures systématiques de caractérisation et de gestion des incertitudes dans les activités expérimentales incluent la méthode de conception expérimentale [Tag87] et les techniques statistiques de contrôle de processus [Whe10]. La première se concentre sur la caractérisation des incertitudes et la seconde relève de la gestion des incertitudes.*

### 3.2.2 Classification de l'incertitude par sa nature

OBERKAMPF [Obe98] a classé les incertitudes en trois classes distinctes. La variabilité (ou incertitude aléatoire) fait référence à « la variation inhérente au système physique ou de l'environnement considéré ». L'incertitude (incertitude épistémique) est « un défaut potentiel dans une phase d'activité ou de la modélisation qui est dû au manque de connaissance ». L'erreur est « un défaut reconnaissable dans n'importe quelle phase de l'activité de modélisation et de simulation qui n'est pas dû à un manque de connaissance ». La valeur de cette classification est que les approches pour la caractérisation et la gestion des incertitudes de ces trois classes sont très différentes. Nous n'allons pas mettre l'accent sur cette distinction et le lecteur intéressé peut consulter [Obe98] pour plus d'informations.

Négligeant les erreurs qui sont d'origine humaine, nous nous focalisons sur l'incertitude aléatoire (la variabilité, l'aléa) et l'incertitude épistémique. Le mot aléatoire vient du latin *alea*, qui signifie le roulement des dés. Ainsi, une incertitude aléatoire est présumée avoir un caractère aléatoire intrinsèque à un phénomène. Le mot épistémique vient du grec *επιστημη* (épisteme), qui signifie la connaissance. Ainsi, une incertitude épistémique est supposée causée par le manque de connaissance (ou de données).

La plupart des problèmes de l'ingénierie implique ces deux types d'incertitudes. Dans le contexte de la conception, il est commode de classer les incertitudes par leur caractère aléatoire ou épistémique.

L'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique posent des questions de sécurité, de fiabilité et de performance. Ces questions conduisent à des demandes de méthodes de modélisation spécifiques pour prendre en compte les incertitudes dans les propriétés du système. Des approches telles que celle des coefficients de sécurité peuvent être mises en place. Toutefois, le désir d'une plus grande efficacité, d'une meilleure performance, d'un temps de mise sur le marché réduit et d'une réduction des coûts, ainsi que l'utilisation croissante des prototypes virtuels ont conduit à une demande d'amélioration des méthodes de calcul.

L'incertitude aléatoire peut être subdivisée en inter-variabilité, différences entre des réalisations physiques d'un échantillon de produits nominalelement identiques (variabilité de fabrication par exemple) et intra-variabilité, qui résulte de changements dans les propriétés d'une réalisation unique à différents moments (dus par exemple au vieillissement) ou dans des conditions d'exploitation différentes (température, charge, ...)

## 3.3 Modèle de représentation des incertitudes

Comme nous avons vu dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, il existe plusieurs types d'incertitudes dans les systèmes mécatroniques. Ces différents types sont traités de différentes façons. Plusieurs outils de modélisation ont été développés dans la littérature pour la caractérisation et pour la mesure de l'impact de l'incertitude sur le comportement d'un système. Avant d'aborder le problème de synthèse de tolérance, nous présentons dans ce paragraphe ces outils, sans être pour autant exhaustifs.

Un outil de modélisation de l'incertitude doit être capable de représenter l'incertitude d'un système physique avec le plus d'information possible, pour avoir une image proche de la situation réelle. Les représentations d'incertitude doivent refléter et intégrer l'information disponible sur les données, être capables d'être propagées par calcul numérique et permettre de déterminer une sortie d'un modèle dont l'incertitude est formulée dans les mêmes termes. Un autre aspect qui doit être pris en compte est la façon dont les informations sur l'incertitude des différents paramètres sont combinées (ceci se réfère à la modélisation de la dépendance des grandeurs incertaines ainsi que la combinaison d'informations de sources différentes).

Plusieurs systèmes axiomatiques existent dans la littérature pour la modélisation de l'incertitude. Nous présentons par la suite un résumé de ces systèmes. Les lecteurs intéressés peuvent trouver plus d'information sur ces systèmes dans [OF02, Obe03, Obe05a, OR05, Obe05b, SOA10].

Trois aspects de la modélisation de l'incertitude se distinguent [Obe11] :

- *Définition et axiomatique* : comment les incertitudes sont décrites et quelles sont les règles de combinaison ?
- *Numérique* : Comment les incertitudes sont propagées par le modèle de calcul ?
- *Sémantique* : Quelle interprétation peut-on déduire des résultats pour la conception ?

Puisque nous nous intéressons aux incertitudes paramétriques (*cf.* 3.2.1), nous classons les outils de modélisation par la nature de l'incertitude à traiter : aléatoire, épistémique et erreur. Nous évoquons également l'approche par modèle standard d'interconnexion. Développée par la communauté de l'automatique, cette dernière est capable de traiter l'incertitude paramétrique et l'incertitude non-paramétrique. De plus, les incertitudes considérées peuvent porter sur des systèmes linéaires temps invariant (LTI) réels ou complexes, ou des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV).

Nous présentons tout d'abord un outil commun : **l'arithmétique par intervalles** dans le sens qu'elle peut être utilisée pour la modélisation de l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique, car elle ne contient que les informations de base sur l'incertitude. Étant l'un des outils les plus utilisés pour la caractérisation et la prise en compte des incertitudes paramétriques dans un modèle dynamique [MM79, Neu91, Jau01, WH03, MKC09], l'arithmétique par intervalles considère les incertitudes comme des enveloppes tenant compte des plages de variation, représentées par deux scalaires : une borne inférieure et une borne supérieure. Elle permet de définir les frontières du comportement du modèle dynamique, qui contient un ensemble de comportements possibles. L'arithmétique par intervalles est traditionnellement utilisée dans les applications industrielles, notamment des problèmes mécaniques comportant des variables bornées [AH83, Dim95, CW97, Did97, ML03], la localisation de robot ou de véhicule mobile [Jau01, Dro02, FPG04], la commande robuste [VM05, LH06], le diagnostic [EBK98, Adr00, FPG04], l'optimisation [WH03, RRIC04, BRB<sup>+</sup>05], l'estimation paramétrique [MNPLW96, Bra02], etc. . .

L'arithmétique par intervalles permet de trouver une enveloppe sûre des réponses des systèmes. Elle est capable de faire des calculs qui prennent en compte à la fois les erreurs physiques, expérimentales, et les erreurs dues aux calculs machine.

Pourtant, la quantité de calcul avec l'arithmétique par intervalles est grande [ZHW<sup>+</sup>02]. Il faut également être conscient du risque de surestimation de cette enveloppe quand il y a un nombre significatif de paramètres incertains ou quand il y a une dépendance entre ceux-ci [Rev01, Jau01, AD05, Han11]. Dans la littérature, il existe alors des algorithmes pour minimiser l'écart entre l'enveloppe théorique et l'enveloppe estimée dans le cas de paramètres dépendants ou encore à occurrence multiple : arithmétique généralisée par intervalles [Han75, Krä06, EO06], modèles d'intervalles de Taylor [Rob84, Loh87], arithmétique affine [CS93, FS03], la bibliothèque ALIAS [Mer00, LMM04, Cha08], etc. . . Néanmoins, la plupart des méthodes proposées ne garantissent pas la solution exacte.

Pour remédier aux inconvénients de l'arithmétique par intervalles, les chercheurs ont développé plusieurs outils alternatifs pour le traitement de l'incertitude.

Les modèles probabilistes et le raisonnement probabiliste ont tout d'abord été considérés mais

jugés des concepts trop restreints. Par ailleurs, la pratique de l'ingénierie a montré de manière assez flagrante que les estimations d'intervalle devaient être intégrées dans le cadre de l'analyse d'incertitude.

À partir des années 90, la facilité d'utilisation *des ensembles flous (fuzzy sets)* a été exploitée en ingénierie. L'un des premiers projets sont les travaux de HALDAR ET REDDY [HR92], qui ont modélisé les propriétés des matériaux des bâtiments existants par des ensembles flous. Dans les années suivantes, une vaste littérature est apparue sur les méthodes floues telles que les méthodes floues éléments finis, les modèles de décision à base de règles floues, la planification de projets avec des durées floues et les coûts, la proposition d'un concept de sécurité floue en remplacement complet de l'approche probabiliste (MÖLLER ET AL. [MBGH99]). Plus tard, la théorie d'évidence [FKG<sup>+</sup>02, OH02] et la probabilité d'intervalle [HBD98] ont également été explorées.

Dans les années 2000, l'utilité *des ensembles aléatoires (random sets)* était de plus en plus reconnue, à commencer par les travaux pionniers de BERNARDINI ET AL. [TBM00a, TBM00b] et HALL ET AL. [HRA04]. Dans un certain sens, les ensembles aléatoires ont été considérés comme un cadre de travail pour combler le fossé entre les probabilités et l'analyse par intervalles, et admettant des outils de visualisation facilement accessibles tels que les *boîtes de probabilité (P-box)* [FKG<sup>+</sup>02]). Les *prévisions inférieures et supérieures (lower and upper previsions)* ont également trouvé des applications dans la fiabilité des systèmes [UK01, UK02]. En plus de ces approches, un certain nombre d'autres outils ont été proposés dans la littérature technique : par exemple, *les clouds* [Neu04], *l'analyse des écarts d'information (info-gap-analysis)* [BH01], *l'anti-optimisation* [Eli99, EO10].

Dans la suite, nous présentons une brève introduction des méthodes classiques de modélisation de l'incertitude dans l'ingénierie, classées par type d'incertitude traitée.

### 3.3.1 Modélisation de l'incertitude aléatoire

Dans un système mécatronique, les variables aléatoires réelles représentent les incertitudes paramétriques. Elles permettent de définir la variabilité de l'état et des sorties du modèle suite aux effets des incertitudes paramétriques et des aléas des entrées. Dans un contexte industriel, on travaille souvent sur la notion de tolérance, avec élimination des pièces hors tolérance. Les paramètres incertains sont bornés et il est alors naturel d'utiliser l'arithmétique par intervalles. Pourtant, un intervalle ne contient que des informations basiques sur les incertitudes. Pour mieux caractériser un phénomène aléatoire, on utilise très souvent **la théorie des probabilités**.

Développée depuis longtemps, la théorie des probabilités a progressivement évolué et touché plusieurs domaines d'application : mécanique, théorie des jeux, biologie moléculaire, finance, etc. . . Étant originellement le fait qu'une idée est admise par tous (dans les traductions d'ARISTOTE), le mot *probabilité* a pris le sens de la vraisemblance d'une idée au cours du moyen âge puis à la renaissance. Au 17<sup>e</sup> siècle, il prend le sens actuel d'une quantification du caractère aléatoire d'une variable avec sa formulation mathématique par BLAISE PASCAL et PIERRE DE FERMAT. BOREL, LEBESGUE, LÉVY et MARKOV ont introduit la théorie moderne des probabilités au début du 20<sup>e</sup> siècle.

Étant l'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude, la théorie des probabilités permet de définir des variables aléatoires qui peuvent évoluer dans le temps. Elle ne considérait initialement que des variables discrètes et ses méthodes étaient principalement combinatoires. Les variables aléatoires continues ont fait leur apparition dans la théorie avec les concepts analytiques introduits par KOLMOGOROV [Kol60].

Il existe deux représentations probabilistes des incertitudes dans la littérature : le modèle probabiliste *a priori* et le modèle probabiliste *a posteriori* [Soi09, Fek11] :

- le modèle probabiliste *a priori*, appelé aussi modèle probabiliste mathématique, ne nécessite aucune expérience pour déterminer les probabilités sur les variables aléatoires,

- le modèle probabiliste *a posteriori*, appelé aussi modèle probabiliste statistique, permet de calculer les probabilités des variables aléatoires à partir de mesures expérimentales.

Dans nos travaux, nous cherchons à modéliser les incertitudes paramétriques dans un système mécatronique dès la phase de conception et sans mesure expérimentale. Ceci nous conduit à nous intéresser à la modélisation probabiliste *a priori*. Cette approche permet la modélisation des paramètres incertains d'un modèle continu par des variables aléatoires continues (caractérisées par leur loi de probabilité).

### 3.3.2 Modélisation de l'incertitude épistémique

Dans un système mécatronique, les incertitudes épistémiques représentent les connaissances imparfaites que nous disposons sur le système. Les raisons de cette imperfection sont de deux types. Le premier concerne l'obtention et la représentation de ces connaissances à partir du réel, généralement soumises à des erreurs, des imprécisions, des pertes d'information par rapport au système appréhendé. Le deuxième est lié à une flexibilité inhérente ou une évolution progressive du système et de son fonctionnement [BM95]. On peut classer les imperfections dans les connaissances par leur nature :

- les incertitudes concernent un doute sur la validité d'une connaissance (une propriété ou une prévision),
- les imprécisions correspondent à une difficulté dans l'énoncé de la connaissance (connaissance numérique mal connue, terme du langage naturellement vague),
- les incomplétudes sur certaines caractéristiques du système (liées à l'impossibilité d'obtenir certains renseignements, à un problème au moment de la captation de la connaissance, ou à l'existence de connaissances implicites).

Pour traiter les imperfections dans les connaissances, au XVIIIème siècle, les scientifiques ont introduit l'idée de degré de croyance, en la confondant avec celle de chance [BP63]. LAPLACE a emprunté le concept de probabilité pour apprécier la véracité des témoignages [Lap40]. Pourtant, la notion de probabilité n'est pas adaptée à la représentation d'incertitudes épistémiques. RAMSEY [Ram26] et DE FINETTI [Fin37] ont introduit l'idée de *probabilité subjective* pour traiter des connaissances incertaines. Une étape plus approfondie est l'introduction de la *théorie de l'évidence* [Dem67, Sha76], qui permet la manipulation des degrés de confiance qu'un observateur attribue à la validité de certains faits.

L'incertitude épistémique peut également être envisagée avec la théorie des intervalles [Moo66]. Pourtant, il existe des inconvénients similaires à ceux vus pour le traitement de l'incertitude aléatoire. Il est possible de gérer les imprécisions par combinaison d'intervalles si elles sont uniquement de type numérique [MSM<sup>+</sup>92].

ZADEH [Zad65] a introduit la *théorie des sous-ensembles flous* comme un moyen de représentation et de traitement de l'imprécision. Depuis, cette approche a intensivement été développée afin de répondre aux problèmes de diagnostic, d'automatiser, ou d'assister les actions humaines naturellement empreintes d'imprécisions. ZADEH a également introduit la *théorie des possibilités* afin de parvenir à un raisonnement qui a une ressemblance avec le raisonnement humain. La logique floue est un cadre englobant de la théorie des sous-ensembles flous et la théorie des possibilités.

Dans le domaine de l'intelligence artificielle, il existe des méthodes de traitement des connaissances incertaines, basées sur les représentations probabilistes des connaissances telles que la logique probabiliste, l'induction bayésienne, les réseaux de croyance [Nea90]. Les incertitudes non probabilistes peuvent être envisagées avec les coefficients de confiance, la théorie de l'évidence, mais aussi par une logique possibiliste introduite dans le cadre de la théorie des possibilités.

Parmi les outils de modélisation de l'incertitude épistémique, la logique floue nous apparaît aujourd'hui comme le seul cadre dans lequel les imprécisions et les incomplétudes puissent être également traitées. Elle autorise aussi le traitement des connaissances numériques et des connaissances exprimées symboliquement par des qualifications du langage naturel.

### 3.3.3 Modèle de l'incertitude bornée (Bounded uncertainty design)

La communauté automatique a développé ses propres outils pour la modélisation de l'incertitude dans un système mécatronique, notamment, en commande. Dans ces approches, les incertitudes du système peuvent être soit paramétriques soit non paramétriques. En outre, les incertitudes peuvent être des fonctions indépendantes du temps, réelles ou complexes, ou des fonctions dépendantes du temps linéaires ou non-linéaires [Doy82, BP96].

L'objectif principal de ces approches est d'obtenir des bornes sur les variations possibles dans les performances du système en fonction des limites sur les incertitudes paramétriques et non paramétriques. Le type d'analyse requis dans ces approches peut varier considérablement d'une application à une autre [Doy82, Mos93, BD94, CDM94, BP96, PKBP96, BFP<sup>+</sup>97, GPD99, BB99, NK99]. Concernant les systèmes linéaires, plusieurs techniques sont disponibles pour intégrer les incertitudes paramétriques et non paramétriques. Les modèles d'incertitudes à la fois structurées et non structurées peuvent être pris en compte dans ce contexte [BP96, SGC97, AA98].

Le traitement des systèmes linéaires invariants dans le temps présentant des incertitudes peut être étendu à des systèmes linéaires variant dans le temps ainsi qu'une certaine classe de systèmes non linéaires [SGC97, AA98]. Pour les systèmes non linéaires, le traitement des incertitudes bornées est *ad hoc* car il n'existe pas de méthode formelle pour traiter ces systèmes. Toutefois, dans certains cas, la théorie de stabilité de Lyapunov peut être utilisée pour établir des limites sur la performance du système non linéaire.

Dans le contexte de nos travaux, nous nous sommes intéressés uniquement à la représentation d'état des systèmes linéaires incertains. Une raison est que les travaux réalisés sur ce sujet par l'approche bond graph concernent ce type de système. Nous citons ici deux formes de modèles : *le modèle canonique* et *le modèle standard d'interconnexion* (ou à boucle de retour interne).

Dans la communauté automatique, ces approches considèrent les systèmes incertains par leur représentation d'état. Soit un système linéaire donné par sa représentation d'état :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie.

La représentation d'état des systèmes incertains [Doy82, Mor85, CLM94, LD94, HHC03] permet la séparation de la partie nominale du modèle de la partie incertaine afin de déterminer l'écart entre le comportement nominal et le comportement avec incertitudes.

**Modèle d'état canonique** Le modèle d'état canonique représente les incertitudes sous forme additive (absolue). Il présente les valeurs nominales des paramètres dans des matrices nominales et les incertitudes dans des matrices incertaines [Mor85]. Le modèle canonique s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) \\ y(t) = (C_n + \Delta C)x(t) + (D_n + \Delta D)(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Tandis que les matrices  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$  contiennent uniquement les valeurs nominales, les matrices  $\Delta A, \Delta B, \Delta C$  et  $\Delta D$  dépendent des incertitudes ainsi que des valeurs nominales.

**Modèle standard d'interconnexion** Le modèle standard d'interconnexion est un cas particulier de la transformation linéaire fractionnaire (ou fractionnelle selon certaines références). Les Transformations Linéaires Fractionnaires (LFT) permettent une représentation dans laquelle les incertitudes sont extraites du procédé. Elles sont utilisées dans de nombreux problèmes de modélisation et de commande des systèmes dynamiques. Les représentations LFT peuvent servir à représenter un système physique incertain sous la forme du système nominal bouclé sur une matrice d'incertitudes représentant les erreurs de modélisation. Le modèle standard d'intercon-

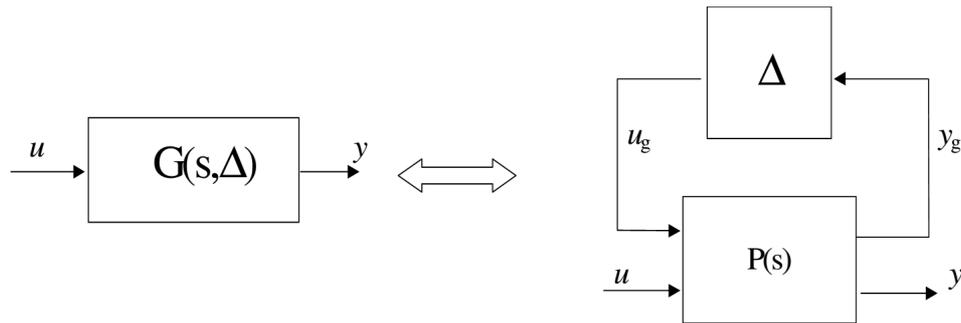


FIGURE 3.1 – Représentation linéaire fractionnaire haute des incertitude.

nexion permet de séparer les valeurs nominales des paramètres du modèle dans une matrice  $\mathbf{P}$ , et toutes les incertitudes relatives dans une matrice diagonale  $\Delta$  (figure 3.1). Des entrées  $u_g$  et sorties  $y_g$  auxiliaires sont ajoutées afin de faire apparaître les incertitudes sous la forme d'un retour interne [Doy82, Saf82, Mor85]. Cette approche permet de traiter les incertitudes structurées et non-structurées [Lav03]. Les modèles standard d'interconnexion sont utiles pour analyser les propriétés de performance et de robustesse des systèmes linéaires bouclés [PD93, BP96].

Il est à noter que le modèle initial doit être propre, stabilisable et détectable (au sens classique de l'automatique) afin d'établir son modèle standard d'interconnexion.

Les approches proposées par la communauté automatique ne donnent pas d'information sur la forme de distribution, ni d'interprétation de l'incertitude. Elles sont donc plus adaptés pour les problèmes d'optimisation robuste ou de synthèse de commande robuste, et moins pour la synthèse de tolérance où il y a besoin de plus d'information sur les incertitudes.

### 3.4 Mesure de l'impact de l'incertitude

Plusieurs outils ont été développés dans la littérature pour mesurer l'impact des imprécisions sur le comportement et la durée de vie des systèmes dynamiques. Ces outils peuvent donner des pistes pour la prise en compte de l'incertitude dans la procédure de conception.

Les outils d'étude des incertitudes peuvent être classés par la façon de modéliser, de propager ou par la finalité. Nous choisissons de les classer par la finalité du problème à traiter :

- analyse d'incertitude (ou propagation de l'incertitude) : l'objectif est de caractériser l'incertitude en sortie du modèle, l'incertitude associée aux paramètres du système étant donnée,
- analyse de sensibilité : l'objectif est de prédire l'effet de la variation de chaque paramètre incertain sur la dispersion du comportement du modèle afin, d'une part, de réduire la complexité du système en éliminant les paramètres qui n'ont pas d'effet significatif sur le comportement du système, et d'autre part, de juger l'impact de la variation d'un paramètre sur le comportement du système et sa durée de vie [CB06].

#### 3.4.1 Analyse d'incertitude

La problématique posée dans ce mémoire est la synthèse de tolérance paramétrique des systèmes mécatroniques à partir d'une variabilité admissible spécifiée en sortie. Néanmoins, l'analyse d'incertitude peut se révéler importante en ingénierie. L'objectif de l'analyse d'incertitude (ou la propagation d'incertitude) est de caractériser les incertitudes de la sortie du système, étant donné une certaine connaissance des incertitudes associées aux paramètres du système avec un ou plusieurs modèles de calcul et des données expérimentales. Plusieurs méthodes sont disponibles pour estimer les incertitudes de performance en fonction des incertitudes paramétriques. Elles varient selon que les incertitudes des paramètres sont spécifiées en termes de fonctions de densité de probabilité, de fonctions d'appartenance, ou d'intervalles.

## Analyse probabiliste

L'analyse probabiliste est l'approche la plus développée parmi les méthodes de l'analyse d'incertitude. Elle est basée sur la spécification des incertitudes comme des fonctions de densité de probabilité (FDP). L'analyse probabiliste donne les valeurs nominales des fonctions de performance et leur FDP. Le choix d'une méthode spécifique dépend de la précision sur la sortie du modèle et de la nature de l'information probabiliste attendue.

L'analyse probabiliste est effectuée de manière classique par des méthodes de type **Monte-Carlo** [Fis96, Mac02, RK07] ou échantillonnage statistique. Le principe est simple : le modèle de processus est invoqué plusieurs fois avec un ensemble de paramètres d'entrée générés en fonction de leur FDP pour produire un ensemble d'échantillons de sorties. Les propriétés statistiques des fonctions de performance sont alors déduites à partir des échantillons de sortie [Mel99]. Cette approche est également présentée comme une méthode de simulation ou une méthode d'échantillonnage. La méthode Monte-Carlo classique exige que les échantillons soient établis en respectant strictement les FDP des paramètres d'entrée. La construction précise des FDP des sorties peut demander un très grand nombre de simulations. La méthode Monte-Carlo est très efficace car :

- elle est adaptée au calcul massivement parallèle, sans aucun développement de logiciels,
- sa convergence peut être contrôlée pendant le calcul,
- la vitesse de convergence est indépendante de la dimension.

Cette vitesse de convergence de la méthode Monte-Carlo peut être améliorée en utilisant les méthodes de simulation Monte-Carlo avancées [PP96, PS97, PK99, Sch09], la technique de sous-ensemble de simulation [AB03b, AB03c], la simulation Monte-Carlo du domaine local [PS10]. Deux des alternatives les plus classiques pour la méthode de Monte-Carlo sont **l'échantillonnage important** [RZ07] et **l'échantillonnage hypercube latin** [MBC79]. La première permet des estimations précises de la queue de la FDP et est utile dans les problèmes de conception basés sur la fiabilité. La seconde fournit des échantillons qui assurent la couverture de l'ensemble des paramètres d'entrée avec beaucoup moins de simulations que la méthode de base de Monte Carlo.

Ces dernières années, un intérêt croissant a été consacré aux méthodes stochastiques spectrales. L'analyse d'incertitude probabiliste est alors effectuée grâce à la solution d'équations différentielles stochastiques [GS90, GS91, GS03]. Avec cette approche, les incertitudes peuvent être associées aux conditions initiales, aux conditions aux limites, aux propriétés de transport, et aux termes sources. WIENER [Wie38] a développé un procédé de représentation de l'aspect aléatoire de la solution avec une expansion en polynômes orthogonaux, les coefficients du développement étant des fonctions déterministes. Cette approche est appelée **chaos polynomial**. Elle est développée et appliquée dans les problèmes d'analyse de structure [Gha99, GS03], de mécanique des fluides et de structure de fluides [XK02]. La méthode de chaos polynomial fournit une représentation explicite de la sortie du modèle aléatoire en fonction des paramètres aléatoires modélisant les incertitudes en entrée [GK96, Gha99, XK02, GG08, Mat08, Nou09, MK10]. Une approximation du modèle aléatoire est requise sur la base d'approximations fonctionnelles appropriées. Il existe deux classes distinctes de techniques pour la définition et le calcul de cette approximation : les méthodes basées sur la projection de type Galerkin [GS91, GK96, DBO01, GS03, LMKNG04, LMNGK04, WZ04, BTZ05, FST05, MLM07, Mat08, Nou09, XW09, MK10], et les méthodes basées sur une simulation directe (ou les méthodes non-intrusives) [BSL06, GZ07, BS08, NTW08, ZG08, MZ09, BNT10]. Le coût de calcul de ces méthodes est supérieur à celui d'une solution déterministe pour l'équation différentielle. Il est cependant inférieur à celui de la méthode de Monte-Carlo [Soi11].

## La logique floue

La logique floue permet de créer des modèles avec des données inexactes, incomplètes, ou des connaissances peu fiables et, de plus, d'en déduire le comportement approximatif du système à partir de ces modèles. La logique floue fournit un moteur de calcul pour traiter ces modèles

[HMB93]. Elle est appliquée dans plusieurs domaines comme la commande, la fabrication, ou même la finance [BD87, LH91, Dex95, Hun95, IN98, Ise98, HQJ00, HR01, Han05]. La logique floue manipule à la fois des notions « précises » (traduction du mot anglais : « crisp ») telles que des nombres, vrai, faux, et des notions imprécises comme supérieur, petit... Le concept central de la logique floue est la fonction d'appartenance qui représente le degré d'appartenance de la variable floue au sein de l'ensemble flou. Un intérêt important de la logique floue est sa simplicité d'application et de mise en œuvre. Elle peut être utile dans des applications où des modèles physiques précis ne sont pas disponibles. De plus, elle étend la logique binaire et apparaît comme une logique graduelle qui permet de définir une interface entre le qualitatif/symbolique et le quantitatif/numérique.

L'inconvénient de la logique floue réside dans l'effet de sur-estimation quand les variables floues considérées sont dépendantes. Pour contrer cet effet et améliorer la précision des résultats, HANSS a proposé la méthode de transformation [Han02].

La logique floue est l'outil le plus classique pour l'analyse de l'incertitude épistémique. Dans la littérature, il existe aussi les méthodes bayésiennes, la logique probabiliste, la structure DEMPSTER-SHAFER,... Les lecteurs intéressés sont invités à consulter [Yag86, Wal90, SNH<sup>+</sup>04, ARPP04, FO04, Ton04, HL04, OF05a, Obe11].

### Analyse d'intervalle

L'analyse d'intervalle est naturellement basée sur l'arithmétique par intervalles. L'arithmétique par intervalles implique les règles élaborées pour effectuer des opérations mathématiques sur des intervalles. Elle est bien adaptée pour faire face aux incertitudes paramétriques dans les systèmes. Elle a été appliquée dans une variété de domaines, y compris l'analyse structurelle et l'analyse dynamique [HS81, Sny92, JW93, PV97, RB97, PV00, Jau01, HW04]. Un problème potentiel avec l'arithmétique par intervalles est le coût de calcul important. Il faut prendre en compte également l'effet enveloppant (ou effet de surestimation).

#### 3.4.2 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité a été introduite dans en 1967 [Dis67, TV68, DR68, Dor68, TV72, Fra78, FE80, Wie84]. Tandis que l'analyse d'incertitude présentée dans le paragraphe 3.4.1 est considérée comme un outil qui permet de quantifier les incertitudes, l'analyse de sensibilité est recommandée comme un outil pour assurer la qualité du modèle dynamique (Agence de protection environnementale des États-Unis, Commission Européenne [otEcC09, Age09]). L'analyse de sensibilité permet de prédire l'effet de la variation de chaque paramètre incertain sur la dispersion du comportement du modèle. Elle sert à réduire la complexité du modèle en éliminant les paramètres qui n'ont pas d'effet significatif sur le comportement du système. On peut également juger l'impact de la variation d'un paramètre sur la durée de vie du système [CB06]. Le résultat d'une analyse de sensibilité peut être représenté par une fonction de sensibilité.

**DÉFINITION 3.** La fonction de sensibilité absolue est définie par la dérivée partielle de la sortie  $y$  par rapport à un paramètre  $p$  :  $\frac{\partial y}{\partial p}$  (cas de paramètres indépendants) et la fonction de sensibilité relative est définie par  $\frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y}$ .

Les méthodes d'analyse de sensibilité d'un modèle dynamique peuvent être groupées en trois classes [SCS09] :

- méthode de criblage (Factor screening) [Jac05, SRTC06, JLD06] : cette méthode quantitative basée sur les techniques des plans d'expérience permet de déterminer les paramètres (ou groupes de paramètres) qui ont le plus grand impact sur la variabilité de la sortie du modèle. Le coût en temps de calcul des méthodes de criblage augmente linéairement avec le nombre de valeurs des paramètres,

- analyse de sensibilité globale : cette méthode quantitative utilise généralement des méthodes d'échantillonnage statistique, comme l'échantillonnage hypercube latin, afin de déterminer l'incertitude totale dans la sortie du modèle et à répartir cette incertitude parmi les différents paramètres,
- analyse de sensibilité locale [TV68, TV72] : cette méthode vise la détermination des coefficients (ou fonctions) de sensibilité. Les fonctions de sensibilité peuvent être absolues ou relatives. Elles permettent de quantifier la variation d'une variable par rapport à la variation du paramètre. Utilisant la dérivée du premier ordre des sorties du modèle par rapport aux paramètres, cette méthode est très coûteuse (et parfois inexacte) en temps de calcul. Ce calcul peut être moins important quand les fonctions de sensibilité pour le modèle sont disponibles. Cependant, il augmente linéairement avec le nombre de paramètres. Cette méthode est limitée à la proximité des valeurs aux paramètres nominaux.

L'analyse de sensibilité ne demande pas nécessairement de connaissance des propriétés probabilistes d'entrée. Si la relation entrée-sortie est explicite, on peut utiliser les dérivées partielles pour calculer les fonctions de sensibilité comme dans [Ost05, FO06]. D'autres méthodes basées sur la théorie des probabilités ou la théorie des probabilités imprécises sont également disponibles dans la littérature [Kru87, HJSS06, MPV07, ZFJ11, HWK12]. L'analyse de sensibilité en présence d'incertitude dans le modèle s'est récemment développée [JLD06, SRTC06].

L'analyse de sensibilité est utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie : la modélisation des systèmes linéaires incertains [Kam01], l'analyse de stabilité d'une commande d'un robot [Kaz89], le calcul par éléments finis [KHAK97], l'estimation de paramètre [Eyk74, GR00], l'optimisation [CF95] ainsi que dans plusieurs domaines d'application [DBW<sup>+</sup>85, Ins90, BE91, LR92, RS93].

Nous avons présenté dans ce paragraphe un état de l'art sur les incertitudes dans un système mécatronique. Classées soit par leur source, soit par leur nature (aléatoire ou épistémique<sup>1</sup>), les incertitudes et les différents outils de modélisation et d'étude ont été présentés. Cette présentation fournit une vue très générale sur les avantages et les inconvénients des méthodes, ainsi que leurs domaines d'application. Elle donne des pistes pour choisir l'outil de modélisation de l'incertitude dans un système mécatronique. Nous présentons maintenant la méthodologie d'inversion de modèle par bond graph que nous utiliserons pour la synthèse de tolérance.

### 3.5 La méthodologie d'inversion dans le problème de conception d'un système mécatronique

Nous présentons dans ce paragraphe la méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques. Les notions d'inversion d'un modèle bond graph, de modèle inverse d'ordre minimal, et les critères d'inversibilité sont également rappelés. L'annexe A présente les généralités sur le langage bond graph et les notions complémentaires sur la méthodologie de dimensionnement.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph (outil support de la méthodologie) avec différentes approches : le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental, le bond graph incertain et le bond graph probabiliste. Tandis que les trois premières approches sont des modèles de l'incertitude bornée, le bond graph probabiliste est un modèle bond graph multi-liens permettant la représentation à la fois énergétique et probabiliste du système. Elle porte plus d'information sur la distribution des incertitudes aléatoires existant dans le système par rapport aux trois autres méthodes.

#### 3.5.1 Le langage bond graph

Dans le contexte de notre recherche, nous utilisons le **bond graph** [Pay61] pour représenter un système mécatronique afin de mieux appréhender la modélisation de l'échange d'énergie et de

1. voir définitions dans 3.2.2, page 22

travailler avec différentes causalités.

Fondé par PAYNTER en 1959 et publié pour la première fois en 1961 [Pay61], le langage bond graph est un outil de modélisation pluridisciplinaire basé sur la description graphique des transferts d'énergie au sein d'un système, ce qui fait de lui un formalisme adapté pour la modélisation des systèmes mécatroniques [Gaw91, DT99, DM03, vA03]. Il est couramment utilisé dans les applications d'ingénierie [Bre08, KMR12], en particulier les systèmes physiques multidomains [Kar90a, Bre09]. Le premier livre de référence sur ce langage est paru en 1968 [Kar68] et plusieurs autres éditions ont été depuis publiées [KR75, Kar90b, KMR06, KMR12].

Dans la littérature, certains auteurs ont déjà exploité le langage bond graph pour aborder le problème de synthèse d'architecture [RK93, Mos99, SFH<sup>+</sup>03, KM07], de reconception [Lic07], de synthèse paramétrique [Ngw98], d'identification [GBS05], de réduction de modèles [LS09], de synthèse de commande [SDT93, LSRAM02, JGD02, BST03, JDA<sup>+</sup>05] et de sûreté de fonctionnement [FMBB01, LWRC02, DMOBDT06, DMOBDT07, DOBMDT08, DOBM09]. De plus, dans un problème de conception et d'analyse, cet outil facilite l'interprétation physique des résultats et donne la possibilité de traiter différents problèmes relatifs aux différents niveaux du cycle de conception en V [Jar10].

Il existe par ailleurs des travaux importants sur les concepts de causalité, de bicausalité et sur les algorithmes d'inversion de modèle [SAR91, NST96]. Le concept de causalité en bond graph permet, entre autres, d'orienter les équations d'un modèle pour le transformer en un modèle de simulation. Ce concept rejoint le principe physique de la causalité dans le sens où un phénomène *cause* produit un autre phénomène *effet*. Contrairement à la causalité physique, le concept de bicausalité, introduit par GAWTHROP [Gaw95] en 1995, ne respecte pas la causalité physique et permet d'envisager de nouveaux schémas de calcul tels que celui associé à un modèle inverse. Ainsi, avec la bicausalité, un modèle bond graph peut servir à la conception tout en gardant la même structure physique du modèle direct. L'approche par modèle inverse pour la conception réduit le nombre de simulations. En outre, l'inversibilité structurelle d'un modèle bond graph est facilement vérifiée grâce à des procédures existantes fondées sur les lignes de puissance [NST96] et les chemins causaux [JMFT09]. Les concepts de causalité et bicausalité sont présentés dans l'annexe A.

Avant de poursuivre sur le dimensionnement par modèle inverse, nous présentons maintenant les concepts clés d'analyse structurelle utilisés dans la méthodologie pour l'inversion d'un modèle bond graph.

### 3.5.2 Outils de l'analyse structurelle

Nous précisons dans cette partie un certain nombre de définitions et de concepts utiles à la mise en œuvre de l'analyse structurelle dans l'approche bond graph. Une présentation plus complète peut être trouvée dans [Rah93, FN97, Jar10, Fek11].

#### Lignes de puissance

**DÉFINITION 4.** [WYT95, NB05, Bor11] **Ligne de puissance :** Une *ligne de puissance* dans une représentation bond graph acausale est une suite alternée de liens de puissance et d'éléments multiport. Par définition, une ligne de puissance ne passe pas plus d'une fois par le même lien de puissance.

Une ligne de puissance représente un « chemin » d'acheminement de l'énergie entre deux points d'un système.

**DÉFINITION 5.** [Bor11] **Ligne de puissance entrée/sortie :** Une *ligne de puissance entrée/sortie* est une ligne de puissance entre un lien de puissance dont l'une des deux variables de puissance dépend d'une entrée du modèle et, un lien de puissance dont l'une des deux variables de puissance est en relation avec une sortie.

**DÉFINITION 6.** [Ngw01,Bor11] **Lignes de puissance disjointes** : Deux lignes de puissance sont dites *disjointes* si elles n'ont aucun lien de puissance en commun.

### Chemins causaux

Tandis que le concept de ligne de puissance s'appuie essentiellement sur l'existence de relations entre les puissances et est acausal, le concept de chemin causal est associé à l'orientation des équations du modèle et l'affectation des variables du modèle par ces équations.

**DÉFINITION 7.** [WYT95,Ngw01, Bor11] Un **chemin causal** dans une représentation bond graph causale ou bicausale est une suite ordonnée de variables mises en relation les unes aux autres conformément à l'affectation de la causalité ou bicausalité sur le bond graph, sans qu'une seule de ces variables n'apparaissent plus d'une fois dans la suite.

**DÉFINITION 8.** [Bor11] Un **chemin causal entrée/sortie** est une chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie.

**DÉFINITION 9.** [Ngw01,Bor11] Deux **chemins causaux disjoints** sont deux chemins causaux sans aucune variable commune.

**DÉFINITION 10.** [NB05,Bor11] Un chemin causal est **associé à une ligne de puissance** si pour chaque lien de puissance de la ligne, l'une des deux variables de puissance appartient au chemin causal.

La notion de chemin causal montre comment une variable influe mathématiquement sur une autre dans un modèle bond graph.

### Notions d'ordre dans un modèle bond graph

Nous présentons dans cette partie les notions de causalités intégrale et dérivée d'un élément de stockage, d'ordre d'un chemin causal et d'un ensemble de chemins causaux.

**DÉFINITION 11.** [Dau00,KMR12] Un élément de stockage de type I (resp. C) est en **causalité intégrale** si le trait causal, sur le lien de puissance auquel il est connecté, est placé près (resp. éloigné) de l'élément. Dans ce cas, la variable d'effort est une entrée (resp. sortie) pour l'élément, et la variable de flux est une sortie (resp. entrée) pour l'élément.

**DÉFINITION 12.** [Dau00,KMR12] Un élément de stockage de type I (resp. C) est en **causalité dérivée** si le trait causal, sur le lien de puissance auquel il est connecté, est placé éloigné (resp. près) de l'élément. Dans ce cas, la variable d'effort est une sortie (resp. entrée) pour l'élément, et la variable de flux est une entrée (resp. sortie) pour l'élément.

Lors de l'affectation de la causalité, un modèle bond graph est en *causalité préférentiellement intégrale (resp. dérivée)* s'il a le plus grand nombre possible d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée).

**DÉFINITION 13.** [Ber97, FN97, Bor11] **L'ordre d'un chemin causal** dans une représentation bond graph causale ou bicausale (en causalité préférentiellement intégrale) est défini comme la différence entre le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale d'une part, et celui des éléments de stockage en causalité dérivée d'autre part, rencontrés le long du chemin causal.

L'ordre d'un ensemble de chemins causaux est la somme des ordres des chemins causaux constituant l'ensemble.

Les notions de ligne de puissance, de chemin causal et d'ordre de chemin causal sont utilisées dans les critères d'inversibilité et la procédure pour trouver le modèle bond graph inverse d'ordre minimal.

### 3.5.3 Inversion d'un modèle bond graph

Avant d'aborder la méthodologie de dimensionnement basée sur des critères dynamiques et énergétiques (paragraphe 3.5.4), l'inversion d'un modèle bond graph est décrite dans ce paragraphe. Nous présentons tout d'abord la définition d'un modèle bond graph inverse.

**DÉFINITION 14.** [FN97] Le bond graph inverse d'un système est son modèle bond graph obtenu après affectation de la bicausalité et tel qu'il représente graphiquement le modèle inverse permettant d'exprimer ses entrées en fonction de ses sorties.

#### Critère structurel d'inversibilité

Nous considérons dans ce paragraphe, jusqu'à la fin de ce chapitre, les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1.** *Les systèmes sont carrés : le nombre d'entrées du modèle est égal au nombre de sorties.*

**Hypothèse 2.** *Les systèmes sont Linéaires et Invariants dans le Temps (LTI).*

Le critère structurel d'inversibilité d'un modèle bond graph repose sur les notions de lignes de puissance entrée/sortie (E/S) disjointes et les chemins causaux entrée/sortie (E/S) disjoints. Il a été défini par NGWOMPO [FN97, NB05] et est applicable à des systèmes linéaires et non linéaires :

**Critère 1.** *Soit un modèle bond graph avec  $m$  entrées vérifiant l'hypothèse 1, le modèle est structurellement inversible si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- **Condition nécessaire 1** : *il existe au moins un ensemble de  $m$  lignes de puissance (E/S) disjointes sur le modèle bond graph acausal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le modèle n'est pas inversible.*
- **Condition nécessaire 2** : *il existe au moins un ensemble de chemins causaux E/S disjoints sur le modèle bond graph causal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le modèle n'est pas inversible.*  
*Si le modèle contient plusieurs ensembles de  $m$  chemins causaux E/S disjoints, alors :*
  - *choisir un ensemble de  $m$  lignes de puissance E/S disjointes associé à un ensemble de  $m$  chemins causaux E/S disjoints,*
  - *remplacer les entrées du modèle bond graph par des double détecteurs et remplacer les sorties du modèle bond graph par des double sources,*
  - *construire le modèle bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des  $m$  lignes de puissance E/S disjointes choisies.*
- **Condition nécessaire 3** : *La structure de jonction du modèle bond graph bicausal résultant doit être résoluble. Si quel que soit l'ensemble de  $m$  lignes de puissance E/S disjointes choisi et quelles que soient les affectations causales retenues pour le modèle bond graph bicausal, une structure de jonction non résoluble apparaît, alors le modèle n'est pas inversible.*

#### Modèle bond graph inverse d'ordre minimal

L'inversion d'un modèle d'état (linéaire ou non linéaire) permet l'obtention d'un modèle inverse d'ordre plein qui possède un espace d'état de même dimension que celui du modèle direct. Néanmoins, SILVERMAN [Sil68] a démontré que la dimension de l'espace d'état du modèle inverse peut être réduite. Cette réduction permet l'obtention du modèle inverse d'ordre minimal où la dimension de l'espace d'état est minimal. Ce type de modèle permet la simplification de différentes études comme la détermination de commande découplante ou la synthèse paramétrique. NGWOMPO [FN97, NB05] a défini une procédure bond graph permettant de déterminer le modèle inverse d'ordre minimal à partir de la notion d'ordre d'un ensemble de chemins causaux.

**Procédure 1.** Soit un modèle bond graph avec  $m$  entrées, vérifiant l'hypothèse 1 et le critère d'inversibilité 1. Un modèle inverse d'ordre minimal peut être obtenu comme suit [FN97,NB05] :

1. Choisir un ensemble de  $m$  chemins causaux E/S disjoints d'ordre minimal ;
2. Déterminer l'ensemble de  $m$  lignes de puissance E/S disjointes associé à cet ensemble de chemins causaux E/S disjoints ;
3. Construire le modèle bicausal en propageant la bicausalité le long des lignes de puissance appartenant à l'ensemble déterminé à l'étape précédente.

*Remarque :* Si  $n$  est la dimension de l'espace d'état du modèle direct et  $\omega_{min}$  l'ordre minimal d'un ensemble de  $m$  chemins causaux E/S disjoints, alors  $n - \omega_{min}$  est la dimension minimale de l'espace d'état du modèle inverse [FN97].

Le modèle bond graph obtenu par la procédure 1 permet d'obtenir le système d'équations exprimant les entrées en fonction des sorties et de leurs dérivées par rapport au temps. Le modèle inverse d'ordre minimal ainsi exprimé garantit le nombre minimal de dérivations des sorties. Ce nombre est l'ordre d'essentialité des sorties.

**DÉFINITION 15.** [CDD<sup>+</sup>86, GM92] L'ordre d'essentialité d'une sortie est égal à l'ordre maximal de dérivations (par rapport au temps) de cette sortie apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal.

L'ordre d'essentialité permet de vérifier si les trajectoires spécifiées sont suffisamment dérivables par rapport au temps pour calculer des entrées physiquement réalisables. Les ordres d'essentialité sont déterminées sur le bond graph bicausal [Jar10, Fek11].

### 3.5.4 Dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques

Les premiers travaux sur le dimensionnement des systèmes mécatroniques réalisés au sein du Laboratoire Ampère par SCAVARDA et al. [SAR91, Ama91] ont utilisé l'approche par modèle inverse. Par la suite, une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques basée sur des critères dynamiques et énergétiques a été développée [NST96, FN97].

Cette méthodologie propose quatre étapes permettant de dimensionner les composants de chaînes d'actionnement :

1. **Adéquation** : vérification de l'adéquation entre la structure du modèle de conception et le cahier des charges (inversibilité du modèle et dérivabilité des spécifications sur les sorties).
2. **Spécification** : construction du modèle bond graph inverse de la charge et calcul des variables de puissance en entrée de cette charge permettant l'obtention des sorties spécifiées.
3. **Sélection** : choix d'un (des) actionneur(s) potentiel(s) dans un catalogue disponible à partir des résultats obtenus lors de l'étape précédente.
4. **Validation** : validation ou non du (des) composant(s) choisi(s) à l'étape précédente.

Dans le contexte plus général d'une cascade de plusieurs composants, les spécifications sont remontées tout le long de la structure grâce à des inversions successives. Finalement, la commande en boucle ouverte du système peut être déterminée.

Comparée aux méthodes par l'approche directe, cette méthodologie permet de réduire le nombre d'itérations en simulation, de spécifier le gabarit d'un nouvel actionneur si aucun des existants ne répond aux exigences, et d'aider à la rédaction du cahier des charges. La méthodologie a été utilisée dans un contexte académique [Mil03] et également dans le milieu industriel [Gan03, MSMF03, MMFSF03, Laf04].

La méthodologie de dimensionnement peut être utilisée dans plusieurs aspects de la conception des systèmes mécatroniques : dimensionnement/sélection de composant, détermination de la commande en boucle ouverte [FN97, Jar10, Fek11], comparaison d'architectures [Laf04], vérification de l'adéquation cahier des charges/structure physique d'un composant [Fek11] et synthèse paramétrique [Ngw98, Laf04, Fek11].

### 3.5.5 L'approche inverse pour la synthèse de tolérance

Le problème de synthèse de tolérance peut également être traité avec deux approches : directe ou inverse. Par approche directe, une tolérance est générée pour les paramètres de conception (à partir de l'opinion d'expert ou de manuels de référence), puis une analyse de sensibilité est effectuée pour vérifier les spécifications sur les sorties. Cette approche directe présente un inconvénient au niveau des itérations de calcul et de vérification.

Une autre approche est basée sur l'inversion de modèle. Dans cette approche, les incertitudes admises dans les spécifications sur la sortie sont propagées aux paramètres de conception à travers le modèle inverse (figure 3.5.5). À partir de l'incertitude obtenue sur un paramètre, nous proposons de synthétiser la tolérance correspondante.

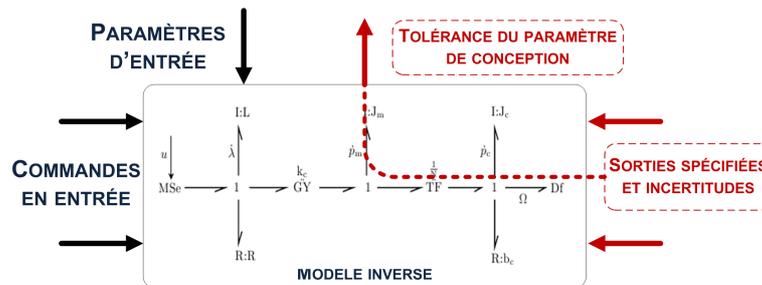


FIGURE 3.2 – L'approche inverse pour la synthèse de tolérance.

Cette approche est dans le principe plus rapide par rapport à l'approche directe mais nécessite cependant que le modèle soit inversible.

## 3.6 Prise en compte de l'incertitude dans l'approche bond graph

Le langage bond graph supporte également la représentation de l'incertitude. Dans la littérature, des approches différentes ont été établies pour la modélisation de l'incertitude paramétrique avec le bond graph : le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental, le bond graph incertain et le bond graph probabiliste. Tandis que les trois premières approches explicitent graphiquement les incertitudes sur le bond graph initial du modèle, le bond graph probabiliste est une représentation multibond graph associant les variables incertaines dans un modèle bond graph avec leur fonction de densité de probabilité, leur espérance et leur variance.

Le bond graph de sensibilité permet d'établir graphiquement les fonctions de sensibilité dans le domaine temporel et donc de prédire l'effet de la variation de chaque paramètre incertain sur le comportement du modèle. Le bond graph incrémental présente graphiquement les variations absolues au premier ordre des paramètres.

Le bond graph de sensibilité et le bond graph incrémental sont deux approches bond graph indépendamment développées avec le but de faciliter la détermination des fonctions de sensibilité.

Le bond graph de sensibilité permet le calcul des fonctions de sensibilité directement à partir du modèle bond graph. Au contraire, la détermination des fonctions de sensibilité avec le bond graph incrémental nécessite de faire du calcul matriciel *a posteriori*.

Le bond graph incertain établit graphiquement un modèle d'état adapté pour l'analyse et la commande des systèmes incertains : soit sous forme d'un modèle d'état canonique, soit sous forme d'un modèle standard d'interconnexion. Le bond graph probabiliste est une représentation à la fois énergétique et probabiliste permettant de propager des incertitudes tout le long de la structure du modèle.

Dans ce paragraphe, nous présentons le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental et le bond graph incertain. Ces trois approches utilisent le modèle de l'incertitude bornée et donc contiennent une information limitée.

Nous verrons la nécessité d'approches qui apportent plus d'information sur la caractéristique de l'incertitude : le bond graph probabiliste et le bond graph flou. Le bond graph probabiliste sera présenté en fin de ce chapitre. Le bond graph flou est proposé dans le chapitre 4 pour la représentation de l'incertitude épistémique et utilisé pour étendre la méthodologie de dimensionnement basée sur le formalisme bond graph à la synthèse de tolérance (chapitre 5).

### 3.6.1 Bond graph de sensibilité

Les premières contributions à l'analyse de sensibilité d'un modèle bond graph dans le domaine temporel introduisent la notion de pseudo bond graph [CF95,RT00]. Dans un modèle pseudo bond graph, les variables associées aux liens ne sont pas des variables de puissance mais les dérivées partielles premières par rapport aux paramètres de l'effort et du flux. Puis, ce formalisme a évolué pour donner le bond graph de sensibilité [GR00].

Cette approche tient compte des deux hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3.** *Les incertitudes considérées sont des incertitudes paramétriques (structurées).*

**Hypothèse 4.** *Les différents paramètres sont indépendants.*

Dans un modèle bond graph de sensibilité, on associe aux liens, en plus des variables de puissance, les dérivées partielles (par rapport aux paramètres) de ces variables. Cette représentation multi-liens permet la propagation de la puissance et également la propagation de la sensibilité dans un modèle bond graph. Elle est utilisée principalement pour l'optimisation, l'identification temps réel et l'estimation d'état.

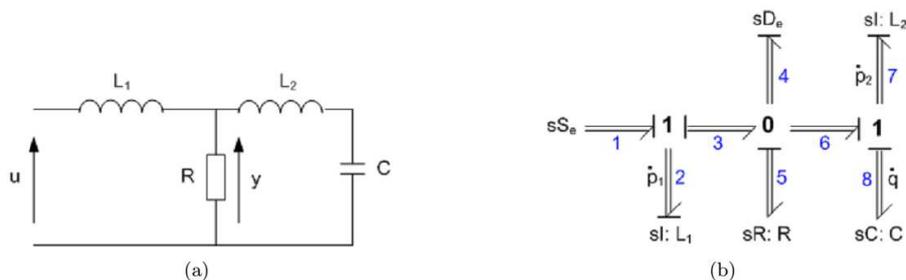


FIGURE 3.3 – (a) Circuit électrique et (b) le modèle bond graph de sensibilité associé.

À un élément bond graph est associée une relation constitutive qui implique les variables de puissance  $e(t)$  et  $f(t)$  associées à cet élément et les paramètres caractéristiques des phénomènes physiques dans le système. La relation constitutive de cet élément peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Phi(\mathbf{v}(t), \boldsymbol{\theta}) = 0$$

où  $\mathbf{v}(t) = [ e(t) \quad f(t) ]^T$  et  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur contenant les paramètres du système.

La sensibilité du vecteur  $\mathbf{v}(t)$  par rapport au  $j^{\text{e}}$  paramètre  $\theta_j$  est donnée par :

$$\mathbf{j}_{\mathbf{v}(t)} = \frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial \theta_j}$$

La relation constitutive de sensibilité de l'élément par rapport au  $j^{\text{e}}$  paramètre  $\theta_j$  s'écrit alors :

$${}^j\Phi(\mathbf{j}_{\mathbf{v}(t)}, \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}(t), \boldsymbol{\theta})^T}{\partial \mathbf{v}(t)} \mathbf{j}_{\mathbf{v}(t)} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{v}(t), \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = 0 \quad (3.3)$$

L'équation 3.3 permet la propagation de la sensibilité à travers un élément 1 port. Pour les éléments multi-ports, les règles de propagation se trouvent dans [GR00].

### 3.6.2 Bond graph incrémental

Tandis que le bond graph de sensibilité sert à déterminer les fonctions de sensibilité, le bond graph incrémental [BG01, BG02, BDT04, BDTK06] est développé pour déterminer les variations absolues au premier ordre. Cette approche tient compte de l'hypothèse 2 (systèmes LTI) en plus des hypothèses 3 et 4.

Le bond graph incrémental est indépendant de la causalité. Il ne prend pas en compte la variation de la commande en boucle ouverte. Un bond graph incrémental est construit de manière systématique à partir du bond graph du modèle original en remplaçant les éléments par leur modèle incrémental correspondant. Ce bond graph incrémental permet de modéliser les variations  $\Delta e$  et  $\Delta f$  des variables de puissance  $e$  et  $f$ .

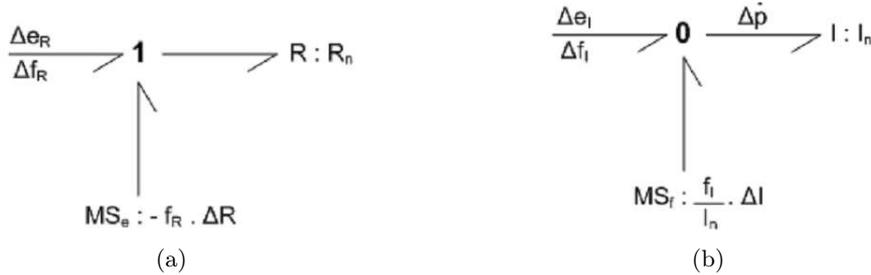


FIGURE 3.4 – Modèles bond graph incrémental (a) d'un élément R et (b) d'un élément I.

La représentation d'état des variations des variables d'énergie peut être déduite à partir de la représentation d'état du modèle bond graph nominal (modèle à variations paramétriques nulles) et les relations constitutives des éléments :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_n(\boldsymbol{\theta}) \Delta \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}) \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_n(\boldsymbol{\theta}) \Delta \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}) \Delta \boldsymbol{\theta} \end{cases} \quad (3.4)$$

où :

- $\mathbf{x}(t)$  est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ;
- $\mathbf{u}(t)$  (respectivement  $\mathbf{y}(t)$ ) est le vecteur des variables d'entrée (respectivement de sortie) associé aux éléments sources (respectivement détecteurs) ;
- les matrices  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$ ,  $\mathbf{C}_n$  et  $\mathbf{D}_n$  dépendent du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  invariant dans le temps et regroupent les différents paramètres du modèle ;
- $\Delta \mathbf{x}(t)$  est le vecteur constitué des variations des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ( $\Delta \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n(I)}$  où  $n(I)$  est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale) ;

- $\Delta \mathbf{y}(t)$  est constitué des variations des variables de sortie associées aux détecteurs ;
- $\Delta \boldsymbol{\theta}$  est le vecteur regroupant les variations des paramètres ;
- $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} (\mathbf{A}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_n \mathbf{u}(t))$  et  $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} (\mathbf{C}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_n \mathbf{u}(t))$ .

*Remarque 3.* Le modèle bond graph incrémental fournit une approximation au premier ordre.

### 3.6.3 Bond graph incertain

En automatique, la description des systèmes incertains se fait à travers une représentation d'état adaptée. Dans cette représentation d'état, la partie nominale et la partie incertaine du modèle sont généralement séparées afin de pouvoir décrire l'écart entre le comportement nominal et le comportement en présence des incertitudes [DMOBDT06, DMOBDT07, DOBM09]. Dans le paragraphe 3.3.3, deux formes de représentation d'état pour les systèmes linéaires incertains ont été introduites : le modèle canonique et le modèle standard d'interconnexion. Le bond graph incertain a été développé dans l'objectif de faciliter la détermination de ces deux modèles. Il prend en compte les hypothèses suivantes, en plus des hypothèses 1 (systèmes carrés), 4 (paramètres indépendants) et 2 (systèmes LTI) :

**Hypothèse 5.** Les incertitudes considérées sont des incertitudes paramétriques de type  $\alpha$ . Ainsi, l'ordre du modèle reste inchangé.

**Hypothèse 6.** Les incertitudes considérées sont uniquement des incertitudes sur les paramètres des éléments bond graph passifs.

#### Détermination du modèle canonique

En remplaçant les éléments bond graph par les modèles canoniques correspondant qui tiennent compte de l'incertitude additive, le modèle d'état canonique peut être directement déterminé.

Les modèles bond graph canoniques sont déterminés en respectant les règles suivantes :

- chaque élément bond graph incertain est dissocié en deux éléments de même type connectés par une structure de jonction simple (jonction 0 ou 1), l'un pour l'élément nominal et l'autre pour l'incertitude additive,
- la causalité des éléments nominaux reste inchangée,
- les éléments de stockage incertains caractérisés par les incertitudes  $\Delta I$  et  $\Delta C$  ont une causalité dérivée,
- pour les éléments TF et GY 2-ports incertains, la valeur du paramètre associé à l'élément bond graph incertain dépend de la causalité affectée,
- les éléments incertains sont causalement liés aux éléments nominaux qui leur sont associés mais n'ont aucun couplage possible avec le reste du modèle bond graph.

La procédure de KAM et DAUPHIN-TANGUY [SKDT05] basée sur les gains des chemins causaux et la règle de MASON permet de graphiquement déduire la représentation d'état canonique à partir du modèle bond graph incertain. En se basant sur les travaux dans [FN97, Jar10], EL FEKI a proposé une procédure alternative [Fek11] qui tient compte des boucles algébriques et permet la simplification de la détermination graphique de la représentation d'état canonique.

#### Détermination du modèle standard d'interconnexion

Le modèle standard d'interconnexion peut être déterminé à partir d'une représentation bond graph associée [DTK99, Kam01, SKDT05]. Le modèle initial doit être propre, stabilisable et détectable (au sens classique de l'automatique) afin d'établir son modèle standard d'interconnexion.

La modélisation d'un élément bond graph sous forme standard d'interconnexion dépend de la relation associée, et donc, de la causalité affectée. Par conséquent, il existe plusieurs modèles standards d'interconnexion pour un même élément bond graph, correspondant aux différentes

causalités. Le principe de la modélisation d'un élément bond graph est de faire apparaître explicitement les incertitudes relatives dans la relation associée à l'élément et de traduire cette relation en modèle bond graph. Cette traduction nécessite d'ajouter des sources modulées ( $MS_e$  et  $MS_f$ ) associées aux entrées auxiliaires et des détecteurs ( $D_e$  et  $D_f$ ) associés aux sorties auxiliaires.

Le modèle standard d'interconnexion d'un système linéaire incertain en boucle ouverte s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_n \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_{2n} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{2n} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22n} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{w}(t) = \Delta \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{n_i})$ ,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$  (respectivement  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ ) est le vecteur d'entrée (respectivement sortie) auxiliaire.  $\delta_i$  représente l' $i^{\text{e}}$  incertitude relative ( $|\delta_i| \leq 1$ ) et  $n_i$  est la dimension correspondante de cette incertitude.  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_{2n}$ ,  $\mathbf{C}_{2n}$  et  $\mathbf{D}_{22n}$  sont calculées de la même manière que pour un modèle bond graph nominal.

Les procédures détaillées sont disponibles dans les travaux de DAUPHIN-TANGUY et KAM [DTK99, Kam01, SKDT05]. Une procédure alternative pour construire un bond graph fournissant un modèle standard d'interconnexion d'un système a été proposée dans [Fek11].

### 3.6.4 Bond graph probabiliste

Nous avons envisagé jusqu'à maintenant le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental et le bond graph incertain. Ces trois représentations sont des modèles de l'incertitude bornée et ne contiennent qu'une information limitée sur l'incertitude dans le modèle dynamique. Nous présentons dans ce paragraphe une approche qui apporte plus d'information sur la caractéristique de l'incertitude : le bond graph probabiliste.

EL FEKI a proposé dans [Fek11] l'approche bond graph probabiliste pour la synthèse de tolérance. Dans un modèle bond graph probabiliste, les incertitudes aléatoires sont caractérisées par leur fonction densité de probabilité (FDP), leur espérance et leur variance. Ces grandeurs sont associées aux liens bond graph et l'approche bond graph probabiliste est donc une représentation multibond graph.

Les notions probabilistes utilisées dans l'approche bond graph probabiliste sont données dans l'annexe B.

**DÉFINITION 16.** Un bond graph probabiliste est un bond graph pour lequel à chaque variable de puissance et d'énergie et à chaque paramètre incertain sont associées leur fonction de densité de probabilité, leur espérance et leur variance.

Un modèle bond graph probabiliste est une description à la fois énergétique et probabiliste qui permet de propager les incertitudes tout le long de la structure du modèle. Ce formalisme est disponible pour les schémas de calcul causaux et bi-causaux. Dans le contexte de synthèse de tolérance par l'approche inverse, un schéma de calcul bicausal est utilisé sur ce modèle bond graph.

### Propagation globale de l'incertitude dans un modèle bond graph probabiliste

La propagation de l'incertitude aléatoire dans un modèle bond graph probabiliste peut être effectuée par une approche globale ou par une approche locale. Dans l'approche globale, l'information est globalisée en calculant la FDP conjointe à toutes les variables aléatoires, puis, la FDP marginale associée à une variable aléatoire en particulier en est déduite.

Nous présentons ici **la propagation globale** pour un modèle direct. Pour un modèle inverse, l'approche est similaire et peut être trouvée dans [Fek11].

La FDP conjointe  $\phi_{\mathbf{y}_j, \Theta}$  impliquant une sortie  $y_j$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_{y_j, \Theta}(y_j, \boldsymbol{\theta}, t) &= \phi_{y_j | \Theta = \boldsymbol{\theta}}(y_j, t | \boldsymbol{\theta}) \phi_{\Theta}(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \delta(y_j - H_j(\boldsymbol{\theta}, t)) \phi_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

où  $H_j(\boldsymbol{\theta}, t)$  est la solution unique du système dynamique pour la sortie  $y_j$  tenant compte des conditions initiales.

Ensuite, cette FDP conjointe est intégrée sur le domaine de distribution  $\Omega_{\Theta}$  de l'aléa  $\Theta$  pour déterminer la FDP marginale  $\phi_{y_j}$  associée à la sortie  $y_j$  :

$$\phi_{y_j}(y_j, t) = \int \cdots \int_{\Omega_{\Theta}} \phi_{y_j, \Theta}(y, \boldsymbol{\theta}, t) d\Omega_{\Theta}$$

### Propagations élémentaire et locale de l'incertitude dans un modèle bond graph probabiliste

**La propagation élémentaire**<sup>2</sup> est une propagation élément bond graph par élément bond graph. **La propagation locale** est une propagation sous-modèle par sous-modèle à travers le modèle bond graph.

Une fonction de densité de probabilité et deux grandeurs caractéristiques (espérance et variance) sont associées à chaque variable de puissance et d'énergie et aux paramètres incertains. En tenant compte des affectations causales ou bicausales, les schémas de calcul associés aux différents éléments de jonction, de transduction et aux éléments passifs sont établis. Ces schémas de calcul permettent de déduire les FDP associées aux variables de puissance sortantes d'un élément bond graph à partir des FDP marginales ou conjointes des variables de puissance entrantes (propagation élémentaire). De la même façon, les grandeurs caractéristiques (espérance et variance) sont propagées à travers les éléments bond graph. Sur la base de cette propagation élémentaire, la propagation locale peut être effectuée de sous-modèles en sous-modèles.

Nous présentons ici des schémas de calcul bicausaux pour la propagation élémentaire des FDP (table 3.1, 3.2 et 3.3). Ceux pour la propagation élémentaire de l'espérance et de la variance nécessitent la propagation des FDP également et peuvent être trouvés dans [Fek11].

---

2. La propagation élémentaire définie ici correspond à la propagation locale définie dans [Fek11]. Nous redéfinissons ici la notion de propagation locale comme une propagation sur un sous-modèle, c'est-à-dire une propagation intermédiaire entre la propagation élémentaire et globale. Cette distinction est reprise pour l'exploitation du bond graph flou (paragraphe 4.3).

TABLE 3.1 – Propagation des FDP à travers les jonctions [Fek11].

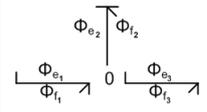
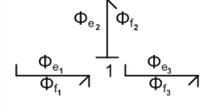
Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
Jonction 0 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \phi_{e_1}(e_1, t) = \phi_{e_3}(e_3, t) \\ \phi_{e_2}(e_2, t) = \phi_{e_3}(e_3, t) \\ \phi_{f_1}(f_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{f_1, f_2, f_3}(f_1, f_2, f_3, t) df_2 df_3 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f_1 - (f_2 + f_3)) \phi_{f_2, f_3}(f_2, f_3, t) df_2 df_3 \end{cases}$
Jonction 1 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \phi_{f_1}(f_1, t) = \phi_{f_3}(f_3, t) \\ \phi_{f_2}(f_2, t) = \phi_{f_3}(f_3, t) \\ \phi_{e_1}(e_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{e_1, e_2, e_3}(e_1, e_2, e_3, t) de_2 de_3 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_1 - (e_2 + e_3)) \phi_{e_2, e_3}(e_2, e_3, t) de_2 de_3 \end{cases}$

TABLE 3.2 – Propagation des FDP à travers les éléments de transduction [Fek11].

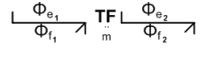
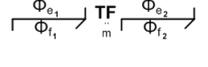
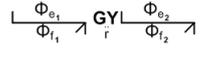
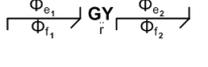
Élément bond graph	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
$TF$		$\begin{cases} \phi_{e_1}(e_1, t) = \frac{1}{ m } \phi_{e_2}\left(\frac{e_1}{m}, t\right) \\ \phi_{f_1}(f_1, t) =  m  \phi_{f_2}(mf_1, t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{e_2}(e_2, t) =  m  \phi_{e_1}(me_2, t) \\ \phi_{f_2}(f_2, t) = \frac{1}{ m } \phi_{f_1}\left(\frac{f_2}{m}, t\right) \end{cases}$
$GY$		$\begin{cases} \phi_{e_1}(e_1, t) = \frac{1}{ r } \phi_{f_2}\left(\frac{e_1}{r}, t\right) \\ \phi_{f_1}(f_1, t) =  r  \phi_{e_2}(rf_1, t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{f_2}(f_2, t) =  r  \phi_{e_1}(rf_2, t) \\ \phi_{e_2}(e_2, t) = \frac{1}{ r } \phi_{f_1}\left(\frac{e_2}{r}, t\right) \end{cases}$

TABLE 3.3 – Propagation des FDP à travers les éléments passifs [Fek11].

Élément BG	Causalité possible	Schémas de calcul associés	Schémas de calcul (cas linéaire)
$R$	$\begin{array}{c} \Phi_e \\   \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow R : \Gamma_R(\cdot)$	$\phi_e(e, t) = \frac{\phi_f(\Gamma_R^{-1}(e), t)}{ \Gamma_R'(\Gamma_R^{-1}(e)) }$	$\phi_e(e, t) = \frac{1}{ R } \phi_f\left(\frac{e}{R}, t\right)$
	$\begin{array}{c} \Phi_e \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow R : \Gamma_R(\cdot)$	$\phi_f(f, t) = \frac{\phi_e(\Gamma_R(f), t)}{ (\Gamma_R^{-1})'(\Gamma_R(f)) }$	$\phi_f(f, t) =  R  \phi_e(Rf, t)$
$I$	$\begin{array}{c} \Phi_e \\   \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow I : \Gamma_I(\cdot)$	$\phi_e(e, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{e,f}(e, f, t) df$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e - H_I(f)) \phi_f(f, t) df$ où $e = H_I(f)$	$\phi_e(e, t) = \frac{1}{ I } \phi_f\left(\frac{e}{I}, t\right)$
	$\begin{array}{c} \Phi_e \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow I : \Gamma_I(\cdot)$	$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{p,e}(p, e, t)}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial \phi_{p,e}(p, e, t)}{\partial p} = 0 \\ \phi_p(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{p,e}(p, e, t) de \\ \phi_f(f, t) = \frac{\phi_p(\Gamma_I(f), t)}{ (\Gamma_I^{-1})'(\Gamma_I(f)) } \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{p,e}(p, e, t)}{\partial t} + \dot{p} \frac{\partial \phi_{p,e}(p, e, t)}{\partial p} = 0 \\ \phi_p(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{p,e}(p, e, t) de \\ \phi_f(f, t) =  I  \phi_p(I f, t) \end{cases}$
$C$	$\begin{array}{c} \Phi_e \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow C : \Gamma_C(\cdot)$	$\phi_f(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{e,f}(e, f, t) de$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - H_C(e)) \phi_e(e, t) de$ où $f = H_C(e)$	$\phi_f(f, t) = \frac{1}{ C } \phi_e\left(\frac{f}{C}, t\right)$
	$\begin{array}{c} \Phi_e \\   \\ \hline \Phi_f \end{array} \nearrow C : \Gamma_C(\cdot)$	$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{q,f}(q, f, t)}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \phi_{q,f}(q, f, t)}{\partial q} = 0 \\ \phi_q(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{q,f}(q, f, t) df \\ \phi_e(e, t) = \frac{\phi_q(\Gamma_C(e), t)}{ (\Gamma_C^{-1})'(\Gamma_C(e)) } \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{q,f}(q, f, t)}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \phi_{q,f}(q, f, t)}{\partial q} = 0 \\ \phi_q(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{q,f}(q, f, t) df \\ \phi_e(e, t) =  C  \phi_q(Ce, t) \end{cases}$

où  $(\cdot)^{-1}$  représente la fonction inverse et  $(\cdot)'$ , la dérivée de la fonction.

**Remarque 4.** Sur le modèle bond graph probabiliste, les FDP (ainsi que les grandeurs caractéristiques) associées à un lien de puissance ne représentent pas des puissances. Le fait d'associer une FDP à un lien de puissance doit être interprété comme une notation conventionnelle.

### 3.6.5 Invariance par composition dans le modèle bond graph probabiliste

Dans le paragraphe précédent, nous avons proposé une alternative pour la propagation des FDP dans un modèle : l'approche locale et l'approche globale. Il est donc légitime d'étudier sous quelles hypothèses ces approches conduisent à des résultats identiques.

Une représentation bond graph causale ou bicausale traduit les relations entre les variables de puissance et d'énergie au sein du système physique par un graphe orienté. La propagation de FDP peut donc être vue comme une composition d'applications dans ce graphe. Nous montrons que les approches sont consistantes en ce sens que le résultat de propagation est indépendant de l'approche choisie. Aussi, la consistance des approches est caractérisée par l'**invariance par composition**.

L'invariance par composition est une propriété essentielle dans l'étude de la propagation d'incertitudes. En effet, on peut envisager que deux études portant sur un même système donnent lieu à une décomposition en deux partitions distinctes et non disjointes. Il apparaît alors nécessaire que pour des entrées identiques, les résultats obtenus soient identiques pour les variables intermédiaires communes aux deux partitions.

Dans le modèle bond graph probabiliste, cette propriété est une conséquence directe de la différentiation d'une application composée.

On considère un système décrit par les relations  $X \xrightarrow{\varphi_1} Y \xrightarrow{\varphi_2} Z$  où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les ensembles associés aux vecteurs de variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement. On se donne les densités  $\phi_{X_1}, \dots, \phi_{X_r}$  et on étudie la propagation de ces incertitudes sur  $Z$  soit par l'intermédiaire de  $Y$  soit directement par l'application composée  $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ .

On introduit la notation  $\varphi[\phi]$  pour désigner l'image de la densité  $\phi$  par l'application  $\varphi$ , soit

$$\varphi[\phi] = \frac{\phi \circ \varphi^{-1}}{|J\varphi(\varphi^{-1})|} \quad (3.6)$$

On se place dans le cas où les applications  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des **difféomorphismes** et on suppose que variables aléatoires sont **indépendantes**. Il s'agit alors de montrer que  $\varphi_2[\varphi_1[\phi_X]] = \varphi_2 \circ \varphi_1[\phi_X]$  pour avoir l'invariance par composition.

On rappelle que  $\phi_Y = \varphi_1[\phi_X]$  donne pour tout  $y = \varphi_2^{-1}(z)$

$$\phi_Y(\varphi_2^{-1}(z)) = \frac{\phi_X(\varphi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(z)))}{|J\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(z)))|} = \frac{\phi_X(\varphi_3^{-1}(z))}{|J\varphi_1(\varphi_3^{-1}(z))|}, \quad (3.7)$$

d'où le résultat suivant

$$\begin{aligned} \varphi_2[\varphi_1[\phi_X]](z) &= \varphi_2[\phi_Y](z) \\ &= \frac{\phi_Y(\varphi_2^{-1}(z))}{|J\varphi_2(\varphi_2^{-1}(z))|} \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{|J\varphi_2(\varphi_2^{-1}(z))|} \times \frac{\phi_X(\varphi_3^{-1}(z))}{|J\varphi_1(\varphi_3^{-1}(z))|} \\ &= \frac{\phi_X(\varphi_3^{-1}(z))}{|J\varphi_3(\varphi_3^{-1}(z))|} = \varphi_3[\phi_X](z) \\ &= \varphi_2 \circ \varphi_1[\phi_X](z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

ce qui montre l'invariance par composition.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les différents facteurs incertains affectant les systèmes mécatroniques ont été rappelés, ainsi que les différents outils de modélisation et d'étude des systèmes incertains. Dans le contexte de la synthèse de tolérance par inversion du modèle bond graph, nous avons également abordé la méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques. Enfin, nous avons présenté la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph (outil support de la méthodologie) avec les approches bond graph de sensibilité, bond graph incrémental, bond graph incertain et bond graph probabiliste. Tandis que les trois premières approches font appel à des modèles de l'incertitude bornée, le bond graph probabiliste est un modèle bond graph multi-liens permettant la représentation à la fois énergétique et probabiliste du système. Elle porte plus d'information sur la distribution des incertitudes aléatoires existant dans le système par rapport aux trois autres méthodes.

Ce chapitre a préparé la prise en compte de l'incertitude dans la démarche de conception d'un système mécatronique par inversion de modèle bond graph. En effet, la modélisation bond graph des incertitudes a pour objectif de s'inscrire dans la démarche de synthèse de tolérance par inversion de modèle bond graph. Les spécifications des incertitudes sur les sorties doivent permettre de remonter, grâce au modèle inverse, aux tolérances admissibles sur les paramètres de conception.

Le bond graph probabiliste, bien que transportant des informations relativement complètes, est une approche pour le traitement de l'incertitude aléatoire. Il existe des difficultés pour la représentation de l'incertitude épistémique ainsi que pour l'interprétation du résultat. Cependant, dans la conception d'un système mécatronique, l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique co-existent. Une autre méthode plus appropriée pour la représentation de l'incertitude épistémique avec le formalisme bond graph est alors nécessaire, et ce, dans l'objectif d'utiliser cette représentation dans la méthodologie de dimensionnement, notamment pour la synthèse de tolérance.

Le chapitre suivant présente nos contributions pour pallier ce problème : le traitement de l'incertitude épistémique par l'approche bond graph et la logique floue, un aspect peu développé dans la littérature, pourtant très souvent rencontré dans la conception d'un système mécatronique.

# Chapitre 4

## Bond graph flou et son exploitation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>
4.1.1	Nécessité d'un traitement de l'incertitude épistémique	46
4.1.2	Propagation de l'incertitude dans plusieurs types de problème de conception	47
<b>4.2</b>	<b>Logique floue - Bond graph flou</b>	<b>48</b>
4.2.1	Logique floue - Outils	48
4.2.2	Bond graph flou	53
<b>4.3</b>	<b>Propagation de l'incertitude épistémique</b>	<b>54</b>
4.3.1	Approche globale	55
4.3.2	Approche locale	57
4.3.3	Invariance par composition dans le modèle bond graph flou	66
<b>4.4</b>	<b>Exemple : Bond graph flou d'une chaîne d'actionnement</b>	<b>66</b>
4.4.1	Cas mono-incertitude	68
4.4.2	Cas multi-incertitudes - Approche globale	73
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>

---

## 4.1 Introduction

Les chapitres 2 et 3 nous ont permis d'aborder la conception des systèmes mécatroniques de manière très générale puis de nous focaliser sur les approches existantes pour la synthèse de tolérance dans leurs chaînes d'actionnement. Basée sur l'utilisation de modèles bond graph inverses, la méthodologie proposée par le laboratoire AMPÈRE a alors été présentée.

Nous avons également présenté les différents types d'incertitude dans la conception d'un système mécatronique, ainsi que les outils de traitement des incertitudes, notamment ceux utilisant le bond graph. Nous soulignons le fait que dans la conception d'un système mécatronique, l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique coexistent. Il est donc nécessaire, dans le contexte de la méthodologie, de pouvoir utiliser le formalisme bond graph pour le traitement de l'incertitude épistémique.

La suite de ce mémoire présente nos contributions au traitement de l'incertitude épistémique par l'approche bond graph. Nous proposons tout d'abord le formalisme bond graph flou, et ensuite, l'appliquons dans le contexte de la synthèse de tolérance.

### 4.1.1 Nécessité d'un traitement de l'incertitude épistémique

Le comportement d'un système réel est toujours différent du comportement prévu en simulation. Les raisons sont les incertitudes dans les valeurs réelles des paramètres des composants et l'incomplétude de la connaissance sur le modèle lors de la conception. Il peut y avoir plusieurs causes à l'incertitude : la variabilité d'un phénomène empêchant de prévoir le résultat de la prochaine expérience, le manque d'information, la présence d'informations contradictoires. . . L'incertitude est généralement classée en deux grandes catégories : l'incertitude aléatoire associée à la variabilité d'une grandeur et l'incertitude épistémique associée à l'ignorance sur une grandeur (*cf.* paragraphe 3.2.2). La plupart des problèmes de l'ingénierie implique les deux types d'incertitudes. Traditionnellement, toutes ces incertitudes sont traitées par la théorie des probabilités. Certains chercheurs ont suggéré qu'une distinction claire entre les deux types soit faite. Toutefois, il est souvent difficile de déterminer si une incertitude doit être mise dans la catégorie aléatoire ou la catégorie épistémique. Suivant le contexte et l'application, un concepteur peut établir cette catégorisation.

La distinction entre l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique a été évoquée dans le paragraphe 3.2.2. Par nature, l'incertitude aléatoire est liée à la variabilité et la dispersion des paramètres géométriques, des propriétés matérielles. . . et l'incertitude épistémique est liée à l'imprécision et au manque de connaissance dans les paramètres et les conditions initiales ou aux limites et aux défauts de modélisation. L'incertitude épistémique est parfois appelée incertitude subjective ou incertitude réductible, ce qui signifie qu'elle ne pourrait être réduite que par une meilleure compréhension du système, ou des données plus pertinentes. Nous reviendrons sur la distinction entre l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique dans un modèle mécatronique dans le paragraphe 5.3.2 afin de bien choisir les outils pour modéliser une incertitude particulière.

Nous avons présenté dans le chapitre 2 le bond graph de sensibilité, le bond graph incrémental et le bond graph incertain. Ces trois représentations ne contiennent qu'une information limitée sur l'incertitude dans le modèle dynamique. Nous avons donc besoin d'approches qui apportent plus d'information sur la caractéristique de l'incertitude.

Le bond graph probabiliste a été proposé par EL FEKI dans [Fek11] comme un formalisme pour traiter l'incertitude aléatoire dans un modèle bond graph.

Comme l'incertitude épistémique et l'incertitude aléatoire coexistent dans un système mécatronique, l'approche bond graph probabiliste toute seule est insuffisante pour un traitement complet de l'incertitude. Afin de faire face au problème de traitement de l'incertitude épistémique dans un modèle mécatronique et d'exploiter le formalisme bond graph pour la synthèse de tolérance en présence de cette incertitude, nous proposons de combiner le bond graph et la logique floue.

Inspiré du bond graph probabiliste, nous développons donc dans ce chapitre le bond graph flou comme un formalisme bond graph utilisant la logique floue pour le traitement de l'incertitude épistémique.

#### 4.1.2 Propagation de l'incertitude dans plusieurs types de problème de conception

Dans le paragraphe 2.4.3, nous avons envisagé deux grandes classes de problèmes dans le domaine mécanique : soit les tolérances des composants sont données et on cherche la tolérance de l'assemblage, soit la tolérance de l'assemblage est spécifiée, et elle est distribuée sur les composants. De manière générale, un problème de conception consiste en la détermination des éléments inconnus à partir des éléments connus, indépendamment du domaine physique considéré. Suivant l'enjeu de conception et les éléments à déterminer, nous avons donc différents types de problèmes.

Nous pouvons considérer trois grands types de problèmes nécessitant la propagation de l'incertitude épistémique. Nous présentons ces types de problèmes du point de vue de l'automatique, en termes des entrées, des paramètres et des sorties d'un système. Si deux de ces trois éléments sont donnés, nous pouvons trouver le dernier par un processus d'analyse ou de dimensionnement. Dans le contexte de la conception des systèmes mécatroniques incertains, nous définissons les **entrées de conception** (éléments connus) et les **sorties de conception** (éléments à déterminer) :

- **Analyse d'incertitudes** : nous cherchons à déterminer les incertitudes sur les sorties du modèle à partir des incertitudes sur les entrées/paramètres. L'analyse d'incertitudes donne l'information sur l'impact de l'incertitude sur la performance du système ainsi que la sensibilité de la sortie. Ce problème exploite la structure d'un modèle direct entrée/sortie. Les entrées de conception sont alors les commandes en entrée et les paramètres du système. Les sorties de conception sont les sorties du système.
  - **Synthèse de commande en boucle ouverte ou reconstruction d'entrée** : les incertitudes sur les entrées de commande du modèle sont déterminées à partir des incertitudes sur les sorties et les paramètres. Les incertitudes obtenues sur les entrées de commande peuvent servir à la configuration de la commande afin de satisfaire les spécifications de sortie. Ce problème exploite la structure d'un modèle inverse sortie/entrée. Les entrées de conception sont alors les sorties et les paramètres du système. Les sorties de conception sont les entrées de commande du système.
  - **Synthèse de tolérance** : les incertitudes sur les paramètres du modèle sont déterminées à partir des incertitudes sur les spécifications sur les entrées et les sorties. Les incertitudes obtenues sur les paramètres peuvent servir à la synthèse de tolérance de ces paramètres. Ce problème exploite la structure d'un modèle inverse sortie/paramètre. Les entrées de conception sont alors les sorties et les entrées de commande du système. Les sorties de conception sont les paramètres en question.
- Les trois problèmes présentés ci-dessus peuvent avoir une formulation commune :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\theta}, t) = F(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, t), \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}, t), \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\theta}, t), \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t), \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}, t) = G(\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, t), \dot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\theta}, t), \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}(\boldsymbol{\theta}, t), \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t), \boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées de conception,  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des sorties de conception et  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  est le vecteur des paramètres soumis aux incertitudes épistémiques (les incertitudes paramétriques et les variables incertaines intervenant dans les entrées  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, t)$ ).

Les conditions initiales sont données par :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.2)$$

Dans le cas où les conditions initiales sont également soumises à des incertitudes épistémiques, elles composent alors, au même titre que les paramètres incertains, le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ .

Dans les trois problèmes évoqués précédemment, les incertitudes en entrées de conception sont données et nous cherchons à déterminer les incertitudes sur les sorties de conception. Le problème revient donc à la propagation d'incertitudes entre  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{y}$ . En effet, la propagation de l'incertitude fournit une solution aux trois problèmes mentionnés ci-dessus. En modélisant le système incertain par un bond graph flou, nous présentons dans la suite de ce chapitre deux approches de propagation : globale et locale. Ensuite, nous introduisons les règles d'exploitation des éléments bond graph flou (propagation élémentaire), utilisées pour la propagation locale.

En fait, l'approche globale fournit un outil de propagation où les incertitudes des éléments bond graph intermédiaires sont cachées. L'approche locale fournit des informations sur les incertitudes de sous-modèles au prix d'un calcul plus important. Nous illustrerons les deux approches dans l'exemple d'un moteur à courant continu.

Dans la suite de ce chapitre, l'incertitude fera référence à l'incertitude épistémique.

## 4.2 Logique floue - Bond graph flou

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions de base de la logique floue utilisées pour le bond graph flou. Un rappel théorique sur la logique floue est donné dans l'annexe C.

### 4.2.1 Logique floue - Outils

L'incertitude épistémique contient les incertitudes concernant un doute sur la validité d'une connaissance, les imprécisions et les incomplétudes sur certaines caractéristiques. L'incertitude épistémique apparaît souvent avec l'imprécision dans les explications linguistiques : par exemple, «  $x$  est environ égal à 31 ». Dans sa forme la plus simple, l'incertitude épistémique est quantifiée avec l'arithmétique par intervalles [HJO04, HJOS10]. Cependant, l'arithmétique par intervalles est coûteuse en temps de calcul et son résultat de propagation de l'incertitude est souvent une surestimation. Parmi les représentations alternatives de l'incertitude épistémique, on peut noter la probabilité imprécise, théorie de DEMPSTER-SHAFFER [Sha76, OH02]. Nous nous intéressons ici à la logique floue, un outil très utilisé pour le traitement de l'incertitude épistémique.

La logique floue a été créée en 1965 par le professeur LOTFI A. ZADEH [Zad65]. Elle est un outil pour traiter les incertitudes épistémiques représentant les connaissances imparfaites.

Dans [BM95], deux définitions de la logique floue sont données :

- la première correspond à tous les développements concernant la théorie des sous-ensembles flous,
- la seconde la présente comme une extension de la logique classique, avec l'objectif de raisonner sur des connaissances imparfaites.

La logique floue est indiquée lorsque la connaissance sur le système contient des imperfections et où une modélisation rigoureuse est difficile et complexe. Elle permet le passage des descriptions du système exprimées linguistiquement par un expert ou un observateur à une représentation standardisée. La logique floue offre une grande flexibilité dans la précision de la représentation et dans l'adaptation aux conditions d'utilisation du système étudié.

Un autre argument en faveur de l'utilisation de la logique floue comme outil de représentation de l'incertitude épistémique est le fait qu'elle est le seul cadre dans lequel on puisse traiter des imprécisions, des incertitudes et également des incomplétudes [BM95]. De plus, la logique floue autorise le traitement simultané des connaissances numériques et des connaissances exprimées symboliquement par des qualificatifs du langage naturel.

La logique floue est basée sur le concept de **sous-ensemble flou (SEF)**. Le sous-ensemble flou a pour but de répondre au besoin de représenter des connaissances imprécises. Contrairement à la théorie des ensembles classiques, où il n'y a que deux situations acceptables pour un élément : appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble, la logique floue sort de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire autoriser un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous-ensemble. En cela, elle permet d'éviter les passages brusques d'une classe à une autre et d'autoriser des éléments à appartenir partiellement à chacune des classes.

On considère un ensemble de référence  $X$ . Un sous-ensemble classique  $\mathcal{A}$  de  $X$  est défini par une fonction caractéristique  $\chi_{\mathcal{A}}$  qui prend la valeur 0 pour les éléments de  $X$  n'appartenant pas à  $\mathcal{A}$  et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à  $\mathcal{A}$  [BM95] :

$$\chi_{\mathcal{A}} : X \rightarrow \{0, 1\}$$

#### DÉFINITION 17. Sous-ensemble flou

Un *sous-ensemble flou*  $A$  de  $X$  est défini par une **fonction d'appartenance** qui associe à chaque élément  $x$  de  $X$ , le degré  $\mu_A(x)$  (ou  $f_A(x)$  dans certaines références) compris entre 0 et 1, avec lequel  $x$  appartient à  $A$  [BM95] :

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

Un sous-ensemble classique est donc un cas particulier de sous-ensemble flou où  $\mu_A$  ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1.

Un sous ensemble flou  $A$  est classiquement représenté en utilisant la notation suivante. Elle indique pour tout élément  $x$  de  $X$  son degré  $\mu_A(x)$  d'appartenance à  $A$  [BM95] :

$$A = \sum_{x \in X} \mu_A(x)/x, \text{ si } X \text{ est dénombrable,}$$

$$A = \int_X \mu_A(x)/x, \text{ si } X \text{ est non dénombrable.}$$

La notation est symbolique. Elle n'a pas le sens du calcul.

La définition d'un sous-ensemble flou correspondant à une propriété donnée dépend du contexte de son utilisation. Par exemple, la représentation de « faible » dans le cas de l'évaluation de la puissance du moteur d'un avion n'est pas la même que la représentation de « faible » dans le cas de l'évaluation de la puissance d'un micro-robot.

La définition d'un sous-ensemble flou dépend également de l'ensemble des caractérisations autorisées pour une même grandeur observée. Par exemple dans une caractérisation de puissance, la représentation de « faible » et « fort », dans le cas où seules les propriétés « faible » et « fort » sont autorisées, est différente de la représentation de « faible » et « fort » dans le cas où les propriétés « faible », « moyennement puissant » et « fort » sont autorisées.

### DÉFINITION 18. Définitions générales :

- Le **support** de  $A$ , noté  $supp(A)$ , est la partie de  $X$  sur laquelle la fonction d'appartenance de  $A$  n'est pas nulle :  $supp(A) = \{x \in X / \mu_A(x) \neq 0\}$ .
- La **hauteur** de  $A$ , notée  $h(A)$ , est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance :  $h(A) = \sup_{x \in X} (\mu_A(x))$ . Si  $h(A) = 1$ , on a un sous-ensemble flou **normalisé**.
- Pour un seuil donné  $\alpha$  de  $[0,1]$ , on définit la  **$\alpha$ -coupe** du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  comme le sous-ensemble  $A_\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\}$  de  $X$ . Sa fonction caractéristique  $\chi_{A_\alpha}$  est telle que :  $\chi_{A_\alpha}(x) = 1$  pour  $x$  tel que  $\mu_A(x) \geq \alpha$ .

Les  $\alpha$ -coupes de  $A$  sont des parties non floues de  $X$  emboîtées par rapport à la valeur du niveau  $\alpha$  : si  $\alpha' \geq \alpha$ , alors  $A_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$ . Pour le niveau  $\alpha = 1$ , on obtient la plus petite  $\alpha$ -coupe, qui est le **noyau** de  $A$ . La plus grande  $\alpha$ -coupe est l'ensemble de référence  $X$ , pour le niveau  $\alpha = 0$ .

Si la hauteur  $h(A)$  d'un sous-ensemble flou  $A$  est inférieure à 1, les  $\alpha$ -coupes avec  $\alpha \in [h(A), 1]$  sont des ensembles vides.

Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  peut être représenté à partir de ses  $\alpha$ -coupes grâce au **théorème de décomposition**.

**Théorème 1. Théorème de décomposition** Tout sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble de référence  $X$  est défini à partir de ses  $\alpha$ -coupes par :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)$$

où sup indique le supremum (la borne supérieure des valeurs possibles) et  $\chi_{A_\alpha}$  est la fonction caractéristique de  $A_\alpha$ .

**DÉFINITION 19.** Un sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels est convexe si, pour tout couple d'éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , et pour tout nombre  $\lambda$  de  $[0,1]$ , la fonction d'appartenance de  $A$  vérifie [BM95] :

$$\mu_A(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b))$$

Il est à noter qu'on ne considère la propriété convexe que sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux SEF convexes de  $\mathbb{R}$ , leur intersection est convexe.

### DÉFINITION 20. Quantité floue, intervalle flou et nombre flou

- **Une quantité floue**  $Q$  est un sous-ensemble flou normalisé de  $\mathbb{R}$ . Une valeur modale de  $Q$  est un élément  $x_1$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $\mu_Q(x_1) = 1$  (fig. 4.1).
- **Un intervalle flou**  $I$  est une quantité floue convexe (fig. 4.1). Il correspond à un intervalle de l'ensemble des réels dont les limites sont imprécises (ou mal déterminées).
- **Un nombre flou**  $N$  est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support borné, admettant une unique valeur modale  $x_1$  (fig. 4.1). Il correspond à une valeur réelle  $x_1$  connue imprécisément.

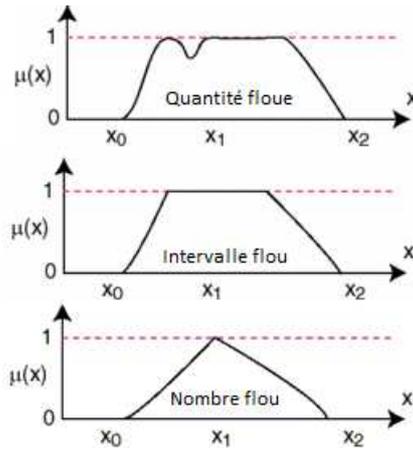


FIGURE 4.1 – Quantité floue, intervalle flou et nombre flou.

Dans la modélisation de l'incertitude sur les grandeurs physiques d'un système mécatronique, on considère de manière classique des nombres flous.

Nous présentons par la suite les définitions de T-norme et T-conorme (ou S-norme). Elles sont introduites par SCHWEIZER et SKLAR [SS63]. Dans la logique floue, elles sont utilisées pour caractériser l'intersection et l'union des sous-ensembles flous.

#### DÉFINITION 21. T-norme et T-conorme

- Une application

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

est une **norme triangulaire** (T-norme) si et seulement si elle est symétrique, associative, monotone et  $T(a, 1) = a \quad \forall a \in [0, 1]$ .

- Une application

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

est une **conorme triangulaire** (T-conorme ou S-norme) si et seulement si elle est symétrique, associative, monotone et  $S(a, 0) = a \quad \forall a \in [0, 1]$

- Les T-norme et T-conorme sont utilisées pour la définition de **l'intersection et l'union** des sous-ensembles flous. Soient une T-norme  $T$  et une T-conorme  $S$ , la T-intersection et la S-union des sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  sont les applications définies comme suit :

$$\begin{aligned} (A \cap B) : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto (A \cap B)(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ (A \cup B) : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto (A \cup B)(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Remarque 5.** Si  $T$  est une T-norme, donc  $S(a, b) := 1 - T(1 - a, 1 - b)$  est une T-conorme associée à  $T$ .

Chaque T-norme ou T-conorme est utilisée dans différents scénarios afin de modéliser et imposer une certaine contrainte sur l'intersection et l'union des sous-ensembles flous. Nous présentons quelques paires de T-normes et T-conormes couramment utilisées :

- min-max :  $T_{min}(a, b) = \min\{a, b\}$      $S_{max}(a, b) = \max\{a, b\}$
- Lukasiewicz :  $T_L(a, b) = \max\{a + b - 1, 0\}$      $S_L(a, b) = \min\{a + b, 1\}$
- Probabiliste :  $T_P(a, b) = ab$      $S_P(a, b) = a + b - ab$

Dans le cadre de notre travail, nous utilisons dans la suite de ce mémoire la **T-norme min** et la **T-conorme sup**.

Dans la modélisation et la propagation de plusieurs incertitudes épistémiques dans un système mécatronique, nous avons besoin de regrouper différents sous-ensembles flous dans leur produit cartésien ou de déduire la fonction d'appartenance d'un élément à partir d'un sous-ensemble flou commun. Nous présentons par la suite les définitions nécessaires pour ces opérations.

### DÉFINITION 22. Produit Cartésien, Projection et Extension cylindrique

- Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  respectivement définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . On définit le **produit cartésien**  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ , comme un sous-ensemble flou de  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  de fonction d'appartenance définie pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $X$  par

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_r}(x_r)\} = \min_i \mu_{A_i}(x_i) \quad (4.4)$$

- La **projection**  $\Pi_Y$  d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  sur  $Y = X_a \times X_b \times \dots \times X_k$  avec  $a, b, \dots, k \in \{1, 2, \dots, r\}$  est définie comme un sous-ensemble flou  $\Pi_Y A$  de  $Y$  dont la fonction d'appartenance est définie pour tout  $\alpha = (\alpha_a, \alpha_b, \dots, \alpha_k)$  de  $Y$  par :

$$\mu_{\Pi_Y A}(\alpha) = \sup_{\{(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{r-k}}) / i \notin \{a, \dots, k\}\}} \mu_A(\bar{x}_{i_1}, \alpha_a, \dots, \bar{x}_{i_{r-k}}, \alpha_k) \quad (4.5)$$

où les  $\bar{x}_i$  et les  $\alpha_j$  sont ordonnés.

- Soit  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$  un sous-ensemble flou défini sur  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ . L'**extension cylindrique** sur  $X$  d'un sous-ensemble flou  $A_i, i \in \{1, \dots, r\}$  est un sous-ensemble flou noté  $\widehat{A}_i$  (ou parfois  $C_X(A_i)$  dans la littérature) de  $X$  dont la fonction d'appartenance est donnée pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $X$  par

$$\mu_{\widehat{A}_i}(x) = \mu_{A_i}(x_i) \quad (4.6)$$

Le produit cartésien et la projection des sous-ensembles flous peuvent causer une « perte d'information » en ce sens que les sous-ensembles flous obtenus par la projection d'un produit cartésien ne sont pas nécessairement les sous-ensembles flous initiaux. De plus, nous pouvons avoir une différence entre le produit cartésien des projections et le sous-ensemble flou initial. Sous certaines hypothèses, cependant, on peut montrer que ces opérations commutent. En d'autres termes, on a les égalités suivantes :

$$\mu_{\Pi_{X_j} A_1 \times \dots \times A_r} = \mu_{A_j} \quad \text{et} \quad \mu_{\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A} = \mu_{A_1 \times \dots \times A_r}$$

Ces égalités font l'objet de nos deux propositions suivantes.

**Proposition 1.** Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , dont les fonctions d'appartenance  $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \dots, \mu_{A_r}$  sont *normalisées*. Alors, la projection du produit cartésien  $A = A_1 \times \dots \times A_r$  relativement à  $X_j$  est  $A_j$ . En d'autres termes, on a

$$\mu_{\Pi_{X_j} A} = \mu_{A_j} \quad (4.7)$$

**Démonstration :** pour tout  $\alpha_j$  de  $X_j$ , on a par définition

$$\begin{aligned}
\mu_{\Pi_{X_j} A}(\alpha_j) &= \sup_{\bar{x}} \mu_A(\bar{x}_1, \dots, \alpha_j, \dots, \bar{x}_r) \\
&= \sup_{\bar{x}} \min \{ \mu_{A_1}(\bar{x}_1), \dots, \mu_{A_j}(\alpha_j), \dots, \mu_{A_r}(\bar{x}_r) \} \\
&= \min \left\{ \sup_{\bar{x}_1} \mu_{A_1}(\bar{x}_1), \dots, \mu_{A_j}(\alpha_j), \dots, \sup_{\bar{x}_r} \mu_{A_r}(\bar{x}_r) \right\} \\
&= \mu_{A_j}(\alpha_j)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

car  $\sup_{x_i} \mu_{A_i}(x_i) = 1$  pour tout  $i \neq j$  par hypothèse et où  $\bar{x}$  désigne un élément de  $A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_r$ .

Fin de démonstration

De plus, le produit cartésien des projections et le sous-ensemble flou initial ne sont pas toujours identiques. Retrouver exactement  $A = A_1 \times \dots \times A_r$  à partir des projections  $\Pi_{X_1} A, \dots, \Pi_{X_r} A$  correspond à un problème de type « lossless join » dans la logique floue dont la condition générale est proposée dans [RM88]. Nous adaptons cette condition pour les projections.

**Proposition 2.** Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . On suppose que pour tout  $x$  de  $X = X_1 \times \dots \times X_r$ , il existe au moins un indice  $i_0$  tel que

$$\mu_{\widehat{\Pi_{X_{i_0}} A}}(x) = \mu_A(x), \tag{4.9}$$

où  $\widehat{\Pi_{X_{i_0}} A}$  est l'extension cylindrique de  $\Pi_{X_{i_0}} A$  sur  $X$ . Alors, le produit cartésien des projections  $\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A$  est précisément le produit  $A = A_1 \times \dots \times A_r$ , soit, pour tout  $x$  de  $X$ ,

$$\mu_{\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A}(x) = \mu_A(x) \tag{4.10}$$

**Démonstration :** Notons tout d'abord que, pour tout  $x$  dans  $X$ ,  $\mu_{\widehat{\Pi_{X_{i_0}} A}}(x) \stackrel{(4.6)}{=} \mu_{\Pi_{X_{i_0}} A}(x_i) \stackrel{(4.5)}{=} \sup_{\bar{\alpha}} \mu_A(\bar{\alpha}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{\alpha}_r) \geq \mu_A(x)$  et que par conséquent, sous l'hypothèse de la proposition, nous avons

$$\min_i \mu_{\widehat{\Pi_{X_i} A}}(x) \stackrel{(4.9)}{=} \mu_A(x). \tag{4.11}$$

Il vient alors

$$\mu_{\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A}(x) \stackrel{(4.4)}{=} \min_i \mu_{\Pi_{X_i} A}(x_i) = \min_i \mu_{\widehat{\Pi_{X_i} A}}(x) = \mu_A(x) \tag{4.12}$$

Fin de démonstration

Ces deux conditions sont des propriétés très importantes pour l'exploitation du bond graph flou (défini par la suite) dans la méthodologie de synthèse de tolérance. Nous reviendrons sur ces conditions dans le chapitre 5.

### 4.2.2 Bond graph flou

En associant à chaque variable de puissance et d'énergie et à chaque paramètre incertain d'un modèle bond graph une fonction d'appartenance correspondant à une propriété définie, nous sommes capables de propager des incertitudes épistémiques tout le long de la structure du modèle de conception, et d'offrir une description qui prend en compte à la fois l'évolution énergétique et celle de l'incertitude épistémique.



FIGURE 4.2 – (a) Lien de puissance et (b) lien de bond graph flou associé.

**DÉFINITION 23.** Un bond graph flou est un bond graph pour lequel à chaque variable de puissance et d'énergie et à chaque paramètre incertain est associée sa fonction d'appartenance (fig. 4.2).

Il est à noter qu'une fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou représente une propriété définie. La description des spécifications sur un système fait généralement intervenir plusieurs critères, caractéristiques ou variables. Si des incertitudes épistémiques existent sur plusieurs propriétés, elles sont modélisées par la fonction d'appartenance du **produit cartésien** de leur sous-ensemble flou respectif.

Sur le modèle bond graph flou, le produit des fonctions d'appartenance associées à un lien de puissance ne représente pas une puissance. Le fait d'associer une fonction d'appartenance à un lien de puissance doit être interprété comme une notation conventionnelle.

Parfois, les grandeurs sujettes aux incertitudes ne sont pas toujours directement exploitables par le bond graph flou car elles ne représentent pas une variable de puissance (par exemple, dans la spécification temporelle d'une sortie d'un système mécatronique, une constante de temps peut être soumise à une description imprécise). Nous sommes dans ce cas amenés à utiliser le principe d'extension pour ramener l'incertitude sur une variable de puissance.

Le bond graph flou est donc un outil de modélisation des systèmes mécatroniques qui fournit l'information sur l'état énergétique du modèle en tenant compte de l'incertitude épistémique. Afin d'utiliser le bond graph flou dans des problèmes pratiques comme ceux mentionnés au début du chapitre, il est nécessaire de mettre en place des outils pour la propagation de l'incertitude dans un modèle bond graph flou.

Nous nous intéressons maintenant à la propagation de l'incertitude épistémique au sein d'un modèle bond graph flou avec les deux approches : globale et locale.

### 4.3 Propagation de l'incertitude épistémique

Dans le modèle bond graph flou, nous reprenons les approches élémentaire, locale et globale (*cf.* paragraphe 3.6.4) pour la propagation des incertitudes épistémiques.

La **propagation élémentaire** est définie au niveau de chaque élément bond graph.

Dans l'approche de **propagation globale** dans un modèle bond graph flou, les fonctions d'appartenance (représentant les incertitudes) sont directement obtenues à partir d'une relation globale entrée/sortie sur le modèle.

Dans l'approche de **propagation locale**, les fonctions d'appartenance sont propagées de sous-modèles en sous-modèles de manière à extraire l'information sur les variables de puissance

intermédiaires (les entrées et sorties des sous-modèles par exemple).

Nous présentons maintenant le calcul des fonctions d'appartenance par les différentes approches de propagation.

#### 4.3.1 Approche globale

Dans l'approche globale, la détermination de la fonction d'appartenance liée à une variable d'un modèle, à partir d'une fonction d'appartenance donnée liée à une autre variable du modèle, est effectuée en utilisant le **principe d'extension de ZADEH** [BM95] appliqué à la relation entre ces deux variables.

**DÉFINITION 24.** Étant donné un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  et une application  $\phi$  de  $X$  vers  $Y$ , le **principe d'extension** permet de définir un sous-ensemble flou  $B$  de  $Y$  associé à  $A$  par l'intermédiaire de  $\phi$  tel que  $\forall y \in Y$  :

$$\begin{cases} \mu_B(y) = \sup_{\{x \in X / y = \phi(x)\}} \mu_A(x) & \text{si } \phi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ \mu_B(y) = 0 & \text{si } \phi^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad (4.13)$$

Si  $\phi$  est bijective, la détermination de la fonction d'appartenance de  $B$  est juste un transfert de la fonction d'appartenance de  $A$  vers l'ensemble de référence  $Y$  :  $\forall y \in Y, \mu_B(y) = \mu_A(\phi^{-1}(y))$ .

**Remarque 6.** Il est à noter que dans la propagation globale de l'incertitude, la formulation et la résolution des problèmes direct et inverse sont indépendantes du formalisme bond graph. Le modèle bond graph ici ne sert que pour l'établissement du modèle dynamique (ou les relations sur lesquelles on propage les incertitudes).

**Remarque 7.** La notion "globale" ici est différente de celle dans un modèle bond graph probabiliste. La propagation globale d'un modèle bond graph probabiliste est effectuée grâce à la détermination de la FDP marginale de la variable en question à partir de la FDP conjointe de toutes les variables incertaines du modèle (cf. paragraphe 3.6.4).

Si le résultat porte sur un vecteur de variables incertaines, on peut également déterminer la fonction d'appartenance associée à une de ces variables en effectuant une projection sur l'ensemble correspondant.

Nous présentons maintenant de manière détaillée le principe d'extension appliqué à un modèle bond graph flou.

Nous considérons le modèle dynamique représenté par les équations 4.1 et 4.2. Dans le problème posé, nous cherchons à déterminer la fonction d'appartenance associée aux sorties de conception  $\mathbf{y}$  du modèle dynamique (direct ou inverse) en tenant compte des incertitudes sur les entrées de conception. Les entrées de conception  $\mathbf{u}$  du modèle sont spécifiées par des trajectoires temporelles qui sont sujettes à des incertitudes épistémiques. Également, les paramètres internes et les conditions initiales incertaines peuvent exister dans le modèle. Les fonctions d'appartenance associées à ces variables incertaines sont soit données par le cahier des charges, soit établies à partir des données expérimentales ou de l'expérience des experts. Ces variables incertaines sont supposées indépendantes, modélisées par les fonctions d'appartenance :  $\mu_{\Theta_1}, \mu_{\Theta_2}, \dots, \mu_{\Theta_{n_\theta}}$ .

Le produit cartésien  $\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_{n_\theta}$  des sous-ensembles flous  $\Theta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n_\theta\}$ , est caractérisé par la fonction d'appartenance :

$$\mu_\Theta(\boldsymbol{\theta}, t) = \min \left\{ \mu_{\Theta_1}(\theta_1, t), \mu_{\Theta_2}(\theta_2, t), \dots, \mu_{\Theta_{n_\theta}}(\theta_{n_\theta}, t) \right\} \quad (4.14)$$

En tenant compte des conditions initiales 4.2, le vecteur de sortie  $\mathbf{y} \in Y = Y_1 \times \dots \times Y_m \subset \mathbb{R}^m$ , dépendant de  $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^{n_\theta}$  (solution du système d'équations 4.1), est unique et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (4.15)$$

Séparément, chaque sortie  $y_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , peut être définie par :

$$y_j = H_j(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (4.16)$$

La fonction d'appartenance associée au vecteur de sortie  $\mathbf{y}$  est calculée en appliquant le principe d'extension de ZADEH à l'équation 4.15.

$$\mu_B(\mathbf{y}, t) = \sup_{\{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta / \mathbf{y} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, t)\}} \mu_\Theta(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (4.17)$$

où  $B$  est le sous-ensemble flou associé à  $\mathbf{y}$ .

Si nous nous intéressons à une seule sortie  $y_j \in Y_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , du modèle, la fonction d'appartenance associée peut être calculée en appliquant le principe d'extension de ZADEH à l'équation 4.16 :

$$\mu_{B_j}(y_j, t) = \sup_{\{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta / y_j = H_j(\boldsymbol{\theta}, t)\}} \mu_\Theta(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (4.18)$$

où  $B_j$  est le sous-ensemble flou associé à  $y_j$ .

On peut également déterminer la fonction d'appartenance associée à  $y_j$  en effectuant une projection de  $B$  sur  $Y_j$ . Cette fonction d'appartenance peut donc être déterminée à partir de  $\mu_B$  :

$$\mu_{\Pi_{Y_j} B}(y_j, t) = \sup_{\{i \in \{1, \dots, m\}, i \neq j\}} \mu_B(\dots, y_i, \dots, y_j, \dots, t) \quad (4.19)$$

En comparant les équations 4.17, 4.18 et 4.19, nous vérifions l'équivalence entre les deux méthodes pour chercher la fonction d'appartenance d'une sortie.

$$\begin{aligned} \mu_{\Pi_{Y_j} B}(y_j, t) &= \sup_{\{i \in \{1, \dots, m\}, i \neq j\}} \mu_B(\dots, y_i, \dots, y_j, \dots, t) \\ &= \sup_{\{i \in \{1, \dots, m\}, i \neq j\}} \left[ \sup_{\{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta / \mathbf{y} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, t)\}} \mu_\Theta(\boldsymbol{\theta}, t) \right] \\ &= \sup_{\{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_\theta / y_j = H_j(\boldsymbol{\theta}, t)\}} \mu_\Theta(\boldsymbol{\theta}, t) \\ &= \mu_{B_j}(y_j, t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

En changeant les entrées de conception et les sorties de conception, nous pouvons adapter cette approche de propagation globale afin de résoudre les différents types de problèmes présentés au paragraphe 4.1.2. Ces formules permettent de propager les fonctions d'appartenance des entrées de conception aux sorties de conception. Ces fonctions d'appartenance permettent à leur tour d'extraire des informations significatives sur les variables incertaines (sorties, entrées ou paramètres, selon le problème) comme :

- le niveau de satisfaction des valeurs de la variable incertaine (sortie, entrée ou paramètre) en exploitant les  $\alpha$ -coupes (cet aspect sera présenté dans le paragraphe 5.3.6),
- les valeurs d'un paramètre satisfaisant la propriété associée (données par le support de la fonction d'appartenance),

- les valeurs nominales des grandeurs incertaines.

**Remarque 8.** *Dans un bond graph probabiliste, les valeurs de plus forte probabilité des paramètres/entrées/sorties (selon le problème) déduites de la propagation ne sont pas nécessairement les valeurs déterministes des grandeurs correspondantes. Dans un bond graph flou, si le problème est bien posé, les valeurs déterministes (cas idéal nominal) auront le plus grand niveau de satisfaction par rapport à la propriété considérée par les fonctions d'appartenance.*

L'approche globale permet un traitement simple de l'incertitude dans un modèle bond graph flou. Cependant, les incertitudes sur les sous-modèles intermédiaires sont masquées dans la procédure de propagation. Pour extraire une telle information, le bond graph flou permet également une propagation locale de l'incertitude.

### 4.3.2 Approche locale

Dans l'approche globale, les problèmes direct et inverse peuvent être résolus indépendamment du formalisme bond graph. Le bond graph ne sert que pour la détermination du modèle dynamique (modèle dynamique inverse d'ordre minimal dans le cas du problème inverse). Ce modèle dynamique est alors utilisé pour déterminer les relations entrée/sortie connectant les entrées de conception aux sorties de conception. Ensuite, les incertitudes sont propagées aux sorties de conception en appliquant le principe d'extension à ces relations. Les incertitudes sur les éléments bond graph ne sont donc pas explicitées.

Dans l'approche globale, les relations entrée/sortie ne sont pas nécessairement simples à déterminer formellement. Le bond graph flou permet alors de propager localement les incertitudes. Dans ce cas, les fonctions d'appartenance associées aux entrées de conception incertaines sont transférées de sous-modèles en sous-modèles dans la représentation bond graph (ou bond graph inverse d'ordre minimal dans le problème inverse) jusqu'aux sorties de conception. Cette approche de la propagation de l'incertitude est locale. Son intérêt est d'associer un sous-ensemble flou (et donc une fonction d'appartenance) à chaque variable de puissance aux entrées et sorties des sous-modèles et par conséquent, de mesurer les différentes incertitudes sur chacun d'eux.

L'approche locale définie ici pose l'hypothèse suivante pour chaque sous-modèle :

**Hypothèse 7.** *Les entrées d'un sous-modèle sont indépendantes des sorties de ce même sous-modèle.*

Cette hypothèse suppose d'exprimer explicitement les sorties d'un sous-modèle en fonction de ses entrées sans dépendance de ces entrées à ces sorties (par l'intermédiaire d'autres sous-modèles). Autrement dit, les sous-modèles sont supposés découplés. La décomposition en sous-modèles vérifiant cette hypothèse, rarement possible pour un modèle de connaissances direct (en particulier, représenté par un bond graph causal), l'est beaucoup plus dans le contexte de modèle inverse (notamment représenté par un bond graph bicausal).

Dans le cas de la propagation d'un vecteur de fonctions d'appartenance, on propage le produit cartésien des sous-ensembles flous associés. Le résultat de la propagation peut être ensuite projeté pour trouver l'incertitude d'une variable particulière.

L'approche locale peut finalement être considérée comme une approche intermédiaire entre l'approche globale et l'approche élémentaire.

Dans la suite, en tenant compte des affectations bicausales, nous présentons les règles d'exploitation des éléments bond graph dans un modèle bond graph flou. Ces règles sont présentées dans le contexte de la bicausalité qui est le cadre d'exploitation du bond graph inverse de nos

travaux. Il n'est pas difficile d'en déduire les règles dans le cas où seule la causalité est affectée (contexte de modèle direct).

Nous dénotons dans les tableaux qui suivent  $\mu_X$  la fonction d'appartenance associée à la grandeur (variable ou paramètre)  $x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}$ .

### Propagation élémentaire des fonctions d'appartenance à travers les éléments jonctions

Le tableau 4.1 présente les différents schémas de calcul formels des fonctions d'appartenance associés aux éléments jonctions 0 et 1. Ces schémas de calcul représentent une exploitation bicausale du modèle bond graph flou.

TABLE 4.1 – Schémas de calcul associés aux éléments jonctions.

Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
Jonction 0 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \mu_{E_1}(e_1, t) = \mu_{E_3}(e_1, t) \\ \mu_{E_2}(e_2, t) = \mu_{E_3}(e_2, t) \\ \mu_{F_1}(f_1, t) = \sup_{\{(f_2, f_3) \in \Omega_{f_2} \times \Omega_{f_3} / f_1 = f_2 + f_3\}} \min \{ \mu_{F_2}(f_2, t), \mu_{F_3}(f_3, t) \} \end{cases}$
Jonction 1 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \mu_{F_1}(f_1, t) = \mu_{F_3}(f_1, t) \\ \mu_{F_2}(f_2, t) = \mu_{F_3}(f_2, t) \\ \mu_{E_1}(e_1, t) = \sup_{\{(e_2, e_3) \in \Omega_{e_2} \times \Omega_{e_3} / e_1 = e_2 + e_3\}} \min \{ \mu_{E_2}(e_2, t), \mu_{E_3}(e_3, t) \} \end{cases}$

### Propagation élémentaire des fonctions d'appartenance à travers les éléments de transduction d'énergie

Le tableau 4.2 présente les différentes fonctions d'appartenance associées aux éléments de transduction d'énergie (TF et GY) et les règles de propagation formelles de ces fonctions d'appartenance. Ces schémas de calcul représentent une exploitation bicausale du modèle bond graph flou et sont issus de l'application du principe d'extension de ZADEH aux lois caractéristiques orientées suivant l'affectation bicausale des éléments.

Le tableau 4.2 présente le cas de paramètres déterministes caractérisant les éléments TF et GY. La propagation élémentaire tenant compte des incertitudes paramétriques peut être effectuée en suivant les règles de calcul présentées dans le tableau 4.3.

Nous prenons donc en compte les incertitudes paramétriques dans la propagation des incertitudes à travers le bond graph flou. Dans la conception d'un système mécatronique, il existe des problèmes où les incertitudes sur les paramètres deviennent les objets à déterminer, comme en synthèse de tolérance. Nous envisageons alors la détermination des incertitudes paramétriques

TABLE 4.2 – Schémas de calcul associés aux éléments de transduction.

Élément bond graph	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
$TF$	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \nearrow \text{TF} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \nearrow$	$\begin{cases} \mu_{E_1}(e_1, t) = \mu_{E_2}(\frac{e_1}{m}, t) \\ \mu_{F_1}(f_1, t) = \mu_{F_2}(mf_1, t) \end{cases}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \searrow \text{TF} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \searrow$	$\begin{cases} \mu_{E_2}(e_2, t) = \mu_{E_1}(me_2, t) \\ \mu_{F_2}(f_2, t) = \mu_{F_1}(\frac{f_2}{m}, t) \end{cases}$
$GY$	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \nearrow \text{GY} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \nearrow$	$\begin{cases} \mu_{E_1}(e_1, t) = \mu_{F_2}(\frac{e_1}{r}, t) \\ \mu_{F_1}(f_1, t) = \mu_{E_2}(rf_1, t) \end{cases}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \searrow \text{GY} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \searrow$	$\begin{cases} \mu_{E_2}(e_2, t) = \mu_{F_1}(\frac{e_2}{r}, t) \\ \mu_{F_2}(f_2, t) = \mu_{E_1}(rf_2, t) \end{cases}$

TABLE 4.3 – Schémas de calcul associés aux éléments de transduction avec incertitude sur le module.

Élément bond graph	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
$TF$	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \nearrow \text{TF} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \nearrow$	$\begin{cases} \mu_{E_1}(e_1, t) = \sup_{\{(e_2, m) \in \Omega_{e_2} \times \Omega_m / e_1 = me_2\}} \min \{ \mu_{E_2}(e_2, t), \mu_M(m) \} \\ \mu_{F_1}(f_1, t) = \sup_{\{(f_2, m) \in \Omega_{f_2} \times \Omega_m / f_1 = \frac{f_2}{m}\}} \min \{ \mu_{F_2}(f_2, t), \mu_M(m) \} \end{cases}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \searrow \text{TF} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \searrow$	$\begin{cases} \mu_{E_2}(e_2, t) = \sup_{\{(e_1, m) \in \Omega_{e_1} \times \Omega_m / e_2 = \frac{e_1}{m}\}} \min \{ \mu_{E_1}(e_1, t), \mu_M(m) \} \\ \mu_{F_2}(f_2, t) = \sup_{\{(f_1, m) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_m / f_2 = mf_1\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_M(m) \} \end{cases}$
$GY$	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \nearrow \text{GY} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \nearrow$	$\begin{cases} \mu_{E_1}(e_1, t) = \sup_{\{(f_2, r) \in \Omega_{f_2} \times \Omega_r / e_1 = rf_2\}} \min \{ \mu_{F_2}(f_2, t), \mu_R(r) \} \\ \mu_{F_1}(f_1, t) = \sup_{\{(e_2, r) \in \Omega_{e_2} \times \Omega_r / f_1 = \frac{e_2}{r}\}} \min \{ \mu_{E_2}(e_2, t), \mu_R(r) \} \end{cases}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \mu_{F_1} \end{array} \searrow \text{GY} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \mu_{F_2} \end{array} \searrow$	$\begin{cases} \mu_{E_2}(e_2, t) = \sup_{\{(f_1, r) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_r / e_2 = rf_1\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_R(r) \} \\ \mu_{F_2}(f_2, t) = \sup_{\{(e_1, r) \in \Omega_{e_1} \times \Omega_r / f_2 = \frac{e_1}{r}\}} \min \{ \mu_{E_1}(e_1, t), \mu_R(r) \} \end{cases}$

associées aux éléments bond graph, à partir des fonctions d'appartenance associées aux variables de puissance entrantes. Pour les éléments de transduction d'énergie, ce sont les modules des transformateurs  $m$  et des gyrateurs  $r$ .

Il est à noter que pour déterminer ces incertitudes paramétriques, les éléments de transduction d'énergie doivent être en bicausalité débouchante et non en bicausalité traversante comme dans les cas précédents.

Le tableau 4.4 présente le calcul formel de la fonction d'appartenance associée à un élément de transduction en bicausalité débouchante.

### Propagation élémentaire des fonctions d'appartenance pour les éléments passifs

Le tableau 4.5 présente les différentes fonctions d'appartenance intervenant dans les éléments passifs (de dissipation et de stockage d'énergie) ainsi que les règles de propagation de ces fonctions d'appartenance.

De la même façon que pour les éléments de transduction d'énergie, il faut également considérer le cas où les paramètres caractéristiques des éléments sont soumis à des incertitudes paramétriques. Elles sont associées aux paramètres  $R$ ,  $I$  et  $C$  dans le cas linéaire. Ces incertitudes sont spécifiées par des fonctions d'appartenance  $\mu_R$ ,  $\mu_I$  et  $\mu_C$  soit à partir du cahier des charges, soit à partir de l'opinion des experts. Dans le cas général non linéaire, nous regroupons les paramètres intervenant dans les lois caractéristiques des éléments passifs dans les vecteurs  $\theta_R$ ,  $\theta_I$ , et  $\theta_C$  en leur associant les fonctions d'appartenance  $\mu_{\theta_R}$ ,  $\mu_{\theta_I}$ , et  $\mu_{\theta_C}$  respectivement. Concernant les éléments de stockage et d'éventuelles incertitudes sur les conditions initiales associées ( $p_0 \in \Omega_{p_0} \subset \mathbb{R}$  sur le moment généralisé pour un élément I et  $q_0 \in \Omega_{q_0} \subset \mathbb{R}$  sur le déplacement généralisé pour un élément C), celles-ci sont prises en compte par la fonction d'appartenance  $\mu_{P_0}$  (resp.  $\mu_{Q_0}$ ) associée à  $p_0$  (resp.  $q_0$ ).

La propagation élémentaire tenant compte des incertitudes paramétriques peut être effectuée en suivant les règles de calcul formelles présentées dans le tableau 4.6.

TABLE 4.4 – Détermination des fonctions d'appartenance pour les éléments TF et GY en bicausalité débouchante.

Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
TF	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{TF}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_M(m, t) = \sup_{\{(f_1, f_2) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_{f_2} / m = \frac{f_2}{f_1}\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_{F_2}(f_2, t) \}$ $\mu_{E_1}(e_1, t) = \sup_{\{(m, e_2) \in \Omega_m \times \Omega_{e_2} / e_1 = m e_2\}} \min \{ \mu_M(m, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{TF}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_M(m, t) = \sup_{\{(e_1, e_2) \in \Omega_{e_1} \times \Omega_{e_2} / m = \frac{e_1}{e_2}\}} \min \{ \mu_{E_1}(e_1, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$ $\mu_{F_2}(f_2, t) = \sup_{\{(m, f_1) \in \Omega_m \times \Omega_{f_1} / f_2 = m f_1\}} \min \{ \mu_M(m, t), \mu_{F_1}(f_1, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{TF}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_M(m, t) = \sup_{\{(e_1, e_2) \in \Omega_{e_1} \times \Omega_{e_2} / m = \frac{e_1}{e_2}\}} \min \{ \mu_{E_1}(e_1, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$ $\mu_{F_1}(f_1, t) = \sup_{\{(m, f_2) \in \Omega_m \times \Omega_{f_2} / f_1 = \frac{f_2}{m}\}} \min \{ \mu_M(m, t), \mu_{F_2}(f_2, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{TF}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_M(m, t) = \sup_{\{(f_1, f_2) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_{f_2} / m = \frac{f_2}{f_1}\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_{F_2}(f_2, t) \}$ $\mu_{E_2}(e_2, t) = \sup_{\{(m, e_1) \in \Omega_m \times \Omega_{e_1} / e_2 = \frac{e_1}{m}\}} \min \{ \mu_M(m, t), \mu_{E_1}(e_1, t) \}$
GY	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{GY}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_R(r, t) = \sup_{\{(f_1, e_2) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_{e_2} / r = \frac{e_2}{f_1}\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$ $\mu_{E_1}(e_1, t) = \sup_{\{(r, f_2) \in \Omega_r \times \Omega_{f_2} / e_1 = r f_2\}} \min \{ \mu_R(r, t), \mu_{F_2}(f_2, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{GY}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_R(r, t) = \sup_{\{(f_1, e_2) \in \Omega_{f_1} \times \Omega_{e_2} / r = \frac{e_2}{f_1}\}} \min \{ \mu_{F_1}(f_1, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$ $\mu_{F_2}(f_2, t) = \sup_{\{(r, e_1) \in \Omega_r \times \Omega_{e_1} / f_2 = \frac{e_1}{r}\}} \min \{ \mu_R(r, t), \mu_{E_1}(e_1, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{GY}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_R(r, t) = \sup_{\{(f_2, e_1) \in \Omega_{f_2} \times \Omega_{e_1} / r = \frac{e_1}{f_2}\}} \min \{ \mu_{F_2}(f_2, t), \mu_{E_1}(e_1, t) \}$ $\mu_{F_1}(f_1, t) = \sup_{\{(r, e_2) \in \Omega_r \times \Omega_{e_2} / f_1 = \frac{e_2}{r}\}} \min \{ \mu_R(r, t), \mu_{E_2}(e_2, t) \}$
	$\begin{array}{c} \mu_{E_1} \\ \hline \mu_{F_1} \end{array} \xrightarrow{\text{GY}} \begin{array}{c} \mu_{E_2} \\ \hline \mu_{F_2} \end{array}$	$\mu_R(r, t) = \sup_{\{(f_2, e_1) \in \Omega_{f_2} \times \Omega_{e_1} / r = \frac{e_1}{f_2}\}} \min \{ \mu_{F_2}(f_2, t), \mu_{E_1}(e_1, t) \}$ $\mu_{E_2}(e_2, t) = \sup_{\{(r, f_1) \in \Omega_r \times \Omega_{f_1} / e_2 = r f_1\}} \min \{ \mu_R(r, t), \mu_{F_1}(f_1, t) \}$

TABLE 4.5 – Schémas de calcul associés aux éléments passifs.

Élément	Causalité	Linéarité	Schémas de calcul associées
$R$	Résistance $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow R: \Gamma_R(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{f \in \Omega_f / e = \Gamma_R(f)\}} \mu_F(f, t)$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \mu_F\left(\frac{e}{R}, t\right)$
	Conductance $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow R: \Gamma_R(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{e \in \Omega_e / f = \Gamma_R^{-1}(e)\}} \mu_E(e, t)$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \mu_E(Rf, t)$
$I$	Intégrale $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow I: \Gamma_I(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\left\{e \in \Omega_e / f = \Gamma_I^{-1}\left(\int_{t_0}^t e d\tau + p_0\right)\right\}} \mu_E(e, t)$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\left\{e \in \Omega_e / f = \frac{1}{I} \int_{t_0}^t e d\tau + \frac{1}{I} p_0\right\}} \mu_E(e, t)$
	Dérivée $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow I: \Gamma_I(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{f \in \Omega_f / e = \dot{\Gamma}_I(f)\}} \mu_F(f, t)$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{f \in \Omega_f / e = I\dot{f}\}} \mu_F(f, t)$
$C$	Intégrale $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow C: \Gamma_C(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\left\{f \in \Omega_f / e = \Gamma_C^{-1}\left(\int_{t_0}^t f d\tau + q_0\right)\right\}} \mu_F(f, t)$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\left\{f \in \Omega_f / e = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t f d\tau + \frac{1}{C} q_0\right\}} \mu_F(f, t)$
	Dérivée $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow C: \Gamma_C(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{e \in \Omega_e / f = \dot{\Gamma}_C(e)\}} \mu_E(e, t)$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{e \in \Omega_e / f = C\dot{e}\}} \mu_E(e, t)$

TABLE 4.6 – Schémas de calcul associés aux éléments passifs avec incertitude dans les lois caractéristiques.

Élément	Causalité	Linéarité	Schémas de calcul associées
$R$	Résistance $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow R: \Gamma_R(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, \theta_R) \in \Omega_f \times \Omega_{\theta_R} / e = \Gamma_R(f, \theta_R)\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_{\Theta_R}(\theta_R)\}$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, R) \in \Omega_f \times \Omega_R / e = Rf\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_R(R)\}$
	Conductance $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow R: \Gamma_R(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, \theta_R) \in \Omega_e \times \Omega_{\theta_R} / f = \Gamma_R^{-1}(e, \theta_R)\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_{\Theta_R}(\theta_R)\}$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, R) \in \Omega_e \times \Omega_R / f = \frac{e}{R}\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_R(R)\}$
$I$	Intégrale $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow I: \Gamma_I(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, \theta_I, p_0) \in \Omega_e \times \Omega_{\theta_I} \times \Omega_{p_0} / f = \Gamma_I^{-1}(\int_{t_0}^t e d\tau + p_0, \theta_I)\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_{\Theta_I}(\theta_I), \mu_{P_0}(p_0)\}$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, I, p_0) \in \Omega_e \times \Omega_I \times \Omega_{p_0} / f = \frac{1}{I} \int_{t_0}^t e d\tau + \frac{1}{I} p_0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_I(I), \mu_{P_0}(p_0)\}$
	Dérivée $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow I: \Gamma_I(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, \theta_I) \in \Omega_f \times \Omega_{\theta_I} / e = \dot{\Gamma}_I(f, \theta_I)\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_{\Theta_I}(\theta_I)\}$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, I) \in \Omega_f \times \Omega_I / e = I \dot{f}\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_I(I)\}$
$C$	Intégrale $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \rightarrow C: \Gamma_C(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, \theta_C, q_0) \in \Omega_f \times \Omega_{\theta_C} \times \Omega_{q_0} / e = \Gamma_C^{-1}(\int_{t_0}^t f d\tau + q_0, \theta_C)\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_{\Theta_C}(\theta_C), \mu_{Q_0}(q_0)\}$
		Linéaire	$\mu_E(e, t) = \sup_{\{(f, C, q_0) \in \Omega_f \times \Omega_C \times \Omega_{q_0} / e = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t f d\tau + \frac{1}{C} q_0\}} \min \{\mu_F(f, t), \mu_C(C), \mu_{Q_0}(q_0)\}$
	Dérivée $\begin{array}{c} \mu_E \\ \hline \mu_F \end{array} \nearrow C: \Gamma_C(\cdot)$	Non linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, \theta_C) \in \Omega_e \times \Omega_{\theta_C} / f = \dot{\Gamma}_C(e, \theta_C)\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_{\Theta_C}(\theta_C)\}$
		Linéaire	$\mu_F(f, t) = \sup_{\{(e, C) \in \Omega_e \times \Omega_C / f = C \dot{e}\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_C(C)\}$

Enfin, le tableau 4.7 correspond à une bicausalité débouchante pour la détermination de l'incertitude paramétrique dans les éléments passifs. Dans le cas général non linéaire, l'incertitude sur un des paramètres notés  $R$ ,  $I$  ou  $C$  est déterminée en supposant connues les incertitudes sur les autres paramètres regroupés dans les vecteurs  $\theta_R$ ,  $\theta_I$  et  $\theta_C$  caractérisant les lois respectivement des éléments  $R$ ,  $I$  et  $C$ . Dans le cas de la détermination des incertitudes sur les conditions initiales  $p_0$  et  $q_0$  des éléments de stockage d'énergie, les schémas de calcul sont également présentés.

**Remarque 9.** *Les schémas de calcul présentés pour les éléments passifs ne concernent que des éléments 1-port. Cependant, il n'est pas difficile de généraliser aux éléments multiport en utilisant le produit cartésien des sous-ensembles flous associés aux variables de puissance entrantes.*

TABLE 4.7 – Détermination des fonctions d'appartenance pour les éléments passifs en causalité débouchante.

Élément	Bicausalité possible	Linéarité	Schémas de calcul associés
$R$	$\begin{array}{c} \mu_E \\ \mu_F \end{array} \rightarrow R: \Gamma_R(\cdot)$	Non Linéaire	$\mu_R(R, t) = \sup_{\{(e, f, \theta_R) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{\theta_R} / e - \Gamma_R(f, R, \theta_R) = 0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{\theta_R}(\theta_R)\}$
		Linéaire	$\mu_R(R, t) = \sup_{\{(e, f) \in \Omega_e \times \Omega_f / R = \frac{e}{f}\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t)\}$
$I$	$\begin{array}{c} \mu_E \\ \mu_F \end{array} \rightarrow I: \Gamma_I(\cdot)$	Non Linéaire	$\mu_I(I, t) = \sup_{\{(e, f, \theta_I, p_0) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{\theta_I} \times \Omega_{p_0} / f - \Gamma_I^{-1}(\int_{t_0}^t e d\tau + p_0, I, \theta_I) = 0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{\theta_I}(\theta_I), \mu_{P_0}(p_0)\}$ ou $\mu_{P_0}(p_0, t) = \sup_{\{(e, f, \theta_I) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{\theta_I} / f - \Gamma_I^{-1}(\int_{t_0}^t e d\tau + p_0, \theta_I) = 0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{\theta_I}(\theta_I)\}$
		Linéaire	$\mu_I(I, t) = \sup_{\{(e, f, p_0) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{p_0} / I = \frac{\int_{t_0}^t e d\tau + p_0}{f}\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{P_0}(p_0)\}$ ou $\mu_{P_0}(p_0, t) = \sup_{\{(e, f, I) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_I / p_0 = I f - \int_{t_0}^t e d\tau\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_I(I)\}$
$C$	$\begin{array}{c} \mu_E \\ \mu_F \end{array} \rightarrow C: \Gamma_C(\cdot)$	Non Linéaire	$\mu_C(C, t) = \sup_{\{(e, f, \theta_C, q_0) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{\theta_C} \times \Omega_{q_0} / e - \Gamma_C^{-1}(\int_{t_0}^t f d\tau + q_0, C, \theta_C) = 0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{\theta_C}(\theta_C), \mu_{Q_0}(q_0)\}$ ou $\mu_{Q_0}(q_0, t) = \sup_{\{(e, f, \theta_C) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{\theta_C} / e - \Gamma_C^{-1}(\int_{t_0}^t f d\tau + q_0, \theta_C) = 0\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{\theta_C}(\theta_C)\}$
		Linéaire	$\mu_C(C, t) = \sup_{\{(e, f, q_0) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_{q_0} / C = \frac{\int_{t_0}^t f d\tau + q_0}{e}\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_{Q_0}(q_0)\}$ ou $\mu_{Q_0}(q_0, t) = \sup_{\{(e, f, C) \in \Omega_e \times \Omega_f \times \Omega_C / q_0 = C e - \int_{t_0}^t f d\tau\}} \min \{\mu_E(e, t), \mu_F(f, t), \mu_C(C)\}$

### 4.3.3 Invariance par composition dans le modèle bond graph flou

Tout comme dans le contexte du bond graph probabiliste, nous montrons l'invariance par composition de la propagation d'incertitudes au sein d'un modèle bond graph flou.

On peut formuler ce problème de la façon suivante. On considère trois ensembles  $X = X_1 \times \dots \times X_r$ ,  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_q$  et  $Z = Z_1 \times \dots \times Z_p$  dont les éléments sont respectivement notés  $x, y$  et  $z$ , et sur lesquels le système considéré est décrit par les applications  $X \xrightarrow{\varphi_1} Y \xrightarrow{\varphi_2} Z$ . On notera  $A, B, C$  les sous-ensembles flous de  $X, Y, Z$ .

Étant donnés des sous-ensembles flous  $A_1, \dots, A_r$  sur  $X_1, \dots, X_r$ , on étudie la propagation de ces sous-ensembles sur  $Z$  soit par l'intermédiaire de  $Y$  en appliquant successivement le principe d'extension à  $\varphi_1$  puis  $\varphi_2$  (approche locale), soit directement en appliquant le principe d'extension à  $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$  (approche globale). On introduit la notation  $\varphi[F]$  pour désigner l'image par  $\varphi$  du sous-ensemble flou  $F$  suivant le principe d'extension. On a le résultat suivant.

**Proposition.** Les opérations d'extension et de composition commutent.

En d'autres termes, pour un sous-ensemble flou  $A$  associé à  $X$  dont l'image par propagation est le sous-ensemble flou  $C$  associé à  $Z$ , la proposition précédente se traduit par l'égalité

$$C = \varphi_2 [\varphi_1[A]] = \varphi_2 \circ \varphi_1[A]. \quad (4.21)$$

**Démonstration :** Notons  $B = \varphi_1[A]$  de fonction d'appartenance  $\mu_B$  définie par

$$\mu_B(y) = \sup_{\{x/y=\varphi_1(x)\}} \mu_A(x), \quad (4.22)$$

il vient

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi_2[\varphi_1[A]]}(z) &= \mu_{\varphi_2[B]}(z) \\ &= \sup_{\{y/z=\varphi_2(y)\}} \mu_B(y) \\ &\stackrel{(4.22)}{=} \sup_{\{y/z=\varphi_2(y)\}} \left( \sup_{\{x/y=\varphi_1(x)\}} \mu_A(x) \right) \\ &= \sup_{\{y/z=\varphi_2(y)\} \cap \{x/y=\varphi_1(x)\}} \mu_A(x) \\ &= \sup_{\{x/z=\varphi_2(\varphi_1(x))\}} \mu_A(x) \\ &= \mu_{\varphi_2 \circ \varphi_1[A]}(z). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Fin de la démonstration.

La propagation globale offre alors un calcul généralement plus simple, pourtant, aucune information n'est obtenue sur l'impact des incertitudes sur les éléments intermédiaires. La propagation locale, malgré un calcul plus important, offre une information plus détaillée sur l'état énergétique et l'impact des incertitudes sur les sous-modèles.

## 4.4 Exemple : Bond graph flou d'une chaîne d'actionnement

Afin d'illustrer les règles d'exploitation d'un modèle bond graph flou introduites dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2, nous considérons dans ce paragraphe un exemple de modélisation d'un système électromécanique constitué d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu (figure 4.3).

*Hypothèses de modélisation* : La partie électrique comporte une source de tension  $u$ , une résistance interne  $R$  et une inductance  $L$ . Le couplage électromécanique (idéal) est caractérisé par une constante de couple  $k_c$ . La partie mécanique prend en compte les moments d'inertie de l'arbre moteur  $J_m$  et de la charge  $J_c$ , un rapport de transmission  $\frac{1}{N}$  et un frottement visqueux de coefficient  $b_c$  sur l'arbre de la charge.

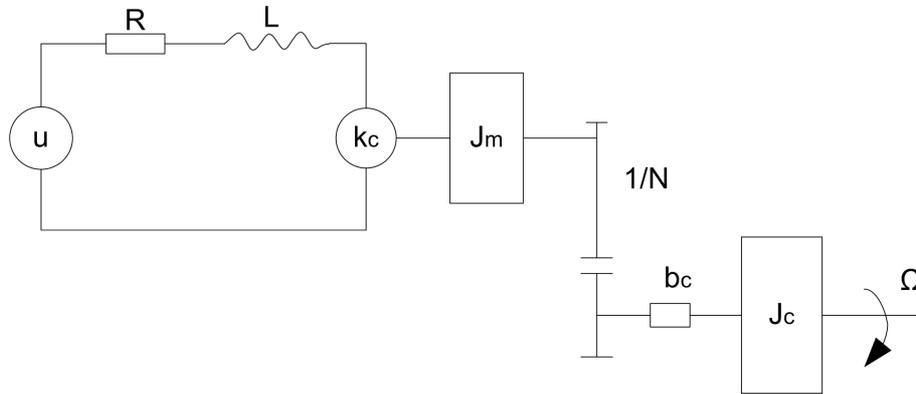


FIGURE 4.3 – Schéma d'un moteur à courant continu actionnant une charge.

**Données du modèle :**

$L$	Inductance du moteur	0.001 [H]
$k_c$	Couplage électromécanique	0.031 [N.m/A]
$J_m$	Inertie de l'arbre moteur	$1.8 \times 10^{-6}$ [kg.m <sup>2</sup> ]
$1/N$	Rapport de transmission	1/20
$J_c$	Inertie de la charge	$2 \times 10^{-4}$ [kg.m <sup>2</sup> ]
$b_c$	Coefficient de frottement visqueux	0.0001 [N.m/rad.s <sup>-1</sup> ]
$u$	Tension $u$	20 [V]

La tension  $u$  représente l'entrée du système et la vitesse de rotation de l'arbre de charge  $\Omega$  représente la sortie du système.

Le modèle est représenté par le bond graph acausal de la figure 4.4.

Dans le problème de conception par inversion, on souhaite que la vitesse angulaire de sortie  $\Omega$  suive une réponse indicielle à un deuxième ordre avec un gain statique  $K = 32 \text{ rad/s}$ , un facteur d'amortissement  $\xi = 24$  et une pulsation propre non amortie  $\omega_n = 650 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La vitesse angulaire stationnaire de sortie peut varier dans l'intervalle  $\delta K = \pm 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . Pour les deux autres paramètres, on spécifie  $\delta \xi = \pm 3$  et  $\delta \omega_n = \pm 30 \text{ rad.s}^{-1}$ . Ces variations déterminent une enveloppe dans laquelle la trajectoire de sortie doit rester. Dans ces conditions ( $\xi > 1$ ), la forme de la spécification est :

$$\Omega_s = K \left[ 1 - \frac{1}{a_2 - a_1} (a_2 e_1 - a_1 e_2) \right] \quad (4.24)$$

où :  $a_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$ ,  $a_2 = -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}$ ,  $e_1 = e^{a_1 \omega_n t}$ ,  $e_2 = e^{a_2 \omega_n t}$ .

Nous supposons que la source de tension  $u$  est constante au cours du temps.

Notre objectif est de quantifier l'incertitude sur la résistance  $R$ , en tenant compte des spécifications sur la trajectoire de sortie et de son incertitude. Dans un premier temps, nous consi-

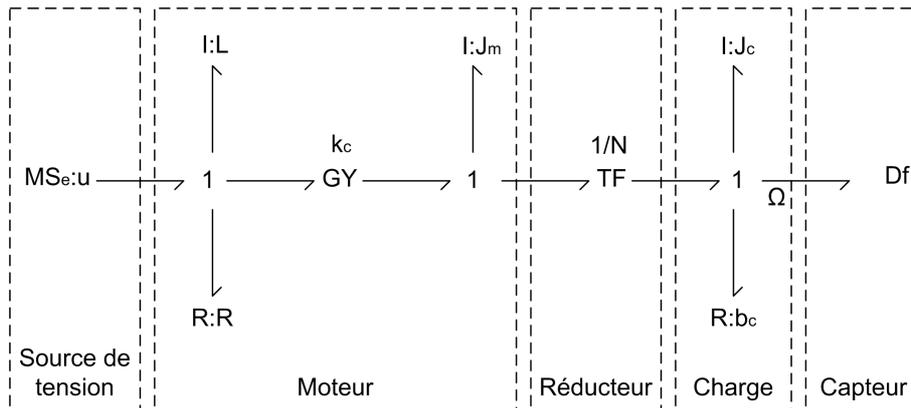


FIGURE 4.4 – Modèle bond graph acausal d'un moteur à courant continu actionnant une charge.

dérons le cas mono-incertitude où seule l'incertitude sur  $K$  est considérée. Ensuite, le cas multi-incertitudes sur  $K$ ,  $\xi$ ,  $\omega_n$  sera examiné.

Pour le cas mono-incertitude sur  $K$ , nous appliquons les deux approches de propagation globale et locale afin de pouvoir les comparer. Pour le cas multi-incertitudes, seule la propagation globale sera considérée.

Nous cherchons donc le modèle inverse entre la sortie  $\Omega$  et le paramètre  $R$ . L'analyse structurale du modèle bond graph permet de facilement montrer que le critère structurel d'inversibilité (*cf.* paragraphe 3.5.3) est vérifié et que la spécification sur la trajectoire de la sortie (réponse indicelle à un deuxième ordre) est en adéquation avec la structure du modèle. Ce résultat est bien entendu trivial étant donné le modèle et la spécification choisis ici.

Le bond graph bicausal correspondant est donné figure 4.5. L'inspection des chemins causaux entrée/sortie sur ce bond graph bicausal entre la sortie  $\Omega$  et la variable d'effort du double détecteur indique que l'ordre d'essentialité  $n_{\Omega e} = 2$  (*cf.* annexe A). Cet ordre représente le nombre maximal de dérivations par rapport au temps de cette sortie nécessaires pour exprimer le modèle inverse d'ordre minimal.

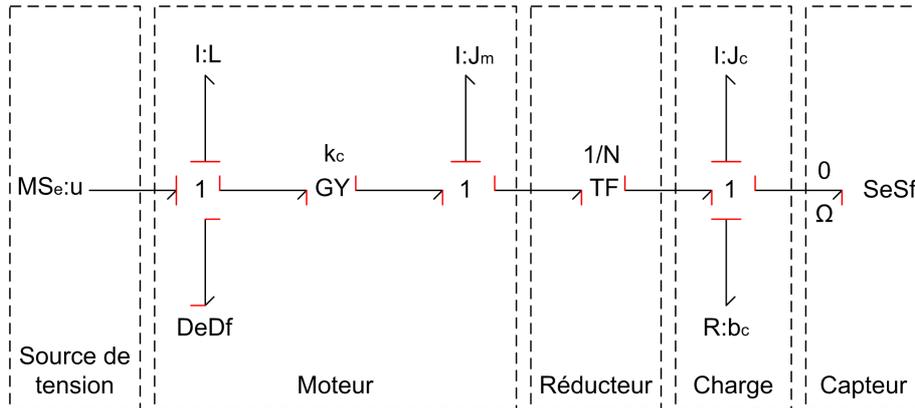
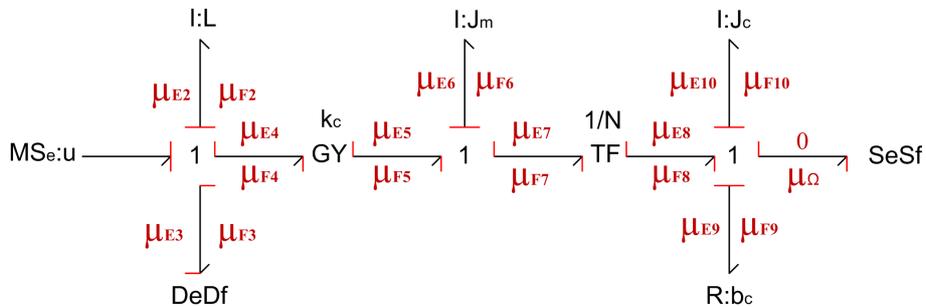
#### 4.4.1 Cas mono-incertitude

Le gain statique incertain spécifié  $K = 32 \pm 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  est caractérisé par un nombre flu triangulaire symétrique  $\mu_K(K) = \mathcal{T}(32, 1)$ .  $\xi$  et  $\omega_n$  sont pour l'instant supposés déterministes.

Ce nombre flu peut être interprété de la manière suivante. La propriété «  $K = 32$  » est parfaitement satisfaite à 32 et le niveau de satisfaction diminue graduellement sur l'intervalle [31, 33]. En dehors de cet intervalle,  $K$  n'est plus considéré comme satisfaisant la propriété.

Nous construisons un modèle bond graph flu associé à ce problème inverse sortie/paramètre (figure 4.6). L'entrée de commande (effort)  $u$  est constante et déterministe. L'effort associé au détecteur de flux est nul. Pour simplifier, ces deux efforts sont notés par leur valeur déterministe dans le modèle bond graph flu (figure 4.6).

La fonction d'appartenance  $\mu_K$  n'est pas directement exploitable par le modèle bond graph

FIGURE 4.5 – Modèle bond graph inverse sortie  $\Omega$ /paramètre  $R$ .FIGURE 4.6 – Modèle bond graph flou pour le problème inverse  $\Omega/R$ .

flou et doit être ramenée sur la sortie. L'ordre d'essentialité de la sortie étant égale à 2, ses deux premières dérivées par rapport au temps sont donc nécessaires et sont obtenues à partir de l'équation 4.24 :

$$\dot{\Omega}_s = \frac{\omega_n K}{a_1 - a_2} (e_1 - e_2) \quad (4.25)$$

$$\ddot{\Omega}_s = \frac{\omega_n^2 K}{a_1 - a_2} (a_1 e_1 - a_2 e_2) \quad (4.26)$$

### Approche globale

Nous utilisons tout d'abord l'approche globale. Nous déterminons le modèle inverse global et effectuons la propagation sur ce modèle. L'exploitation du modèle bond graph bicausal de la figure 4.6 permet de trouver le modèle inverse d'ordre minimal :

$$\begin{aligned}
R &= \frac{u - \frac{L}{k_c} \left[ \left( J_m N + \frac{J_c}{N} \right) \ddot{\Omega}_s + \frac{b_c}{N} \dot{\Omega}_s \right] - k_c N \Omega_s}{\frac{1}{k_c} \left[ \left( J_m N + \frac{J_c}{N} \right) \dot{\Omega}_s + \frac{b_c}{N} \Omega_s \right]} \\
&= \frac{u - \frac{L \omega_n K}{k_c (a_1 - a_2)} \left[ \left( J_m N + \frac{J_c}{N} \right) \omega_n (a_1 e_1 - a_2 e_2) + \frac{b_c}{N} (e_1 - e_2) \right] - k_c N K \left[ 1 - \frac{1}{a_2 - a_1} (a_2 e_1 - a_1 e_2) \right]}{\frac{K}{k_c} \left[ \left( J_m N + \frac{J_c}{N} \right) \frac{\omega_n}{a_1 - a_2} (e_1 - e_2) + \frac{b_c}{N} \left[ 1 - \frac{1}{a_2 - a_1} (a_2 e_1 - a_1 e_2) \right] \right]} \\
&= R_g(K, t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Les incertitudes du gain  $K$  sont propagées au paramètre  $R$  en appliquant le principe d'extension à la relation 4.27. Nous obtenons alors la fonction d'appartenance associée à  $R$  :

$$\mu_{R_g}(R, t) = \sup_{\{K \in [31, 33] / R = R_g(K, t)\}} \mu_K(K) \tag{4.28}$$

Cette fonction d'appartenance, variant au cours du temps, est tracée sur la figure 4.7.

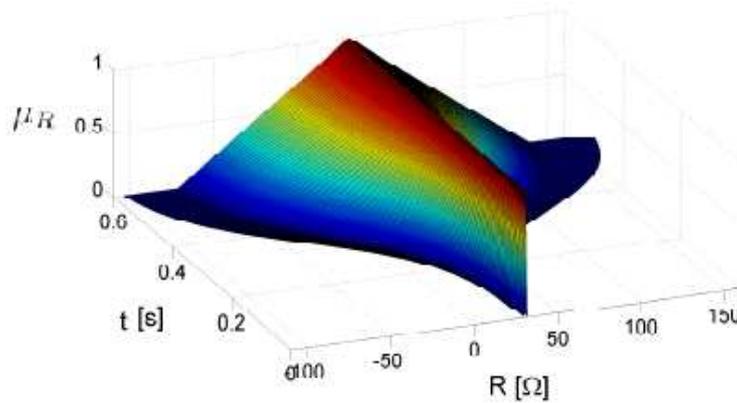
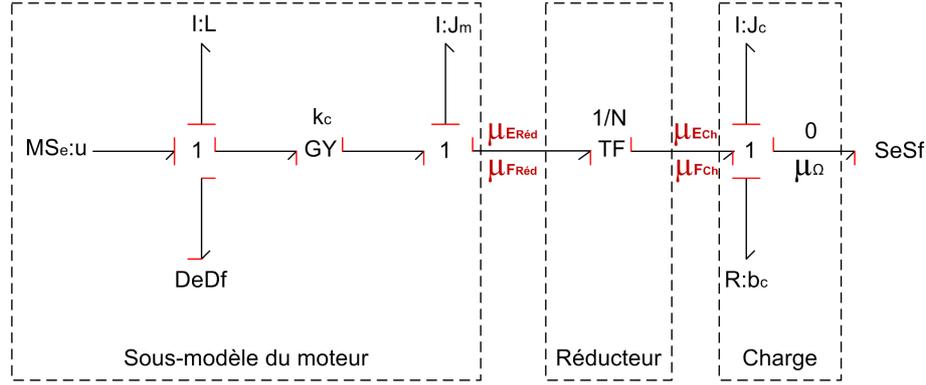


FIGURE 4.7 – Fonction d'appartenance associée à  $R$  - Cas mono-incertitude avec l'approche globale.

### Approche locale

Dans l'approche locale, nous décomposons le moteur à courant continu en trois sous-modèles vérifiant l'hypothèse 7 (*cf.* paragraphe 4.3.2) : le moteur incluant la source de tension, le réducteur et la charge (*cf.* figure 4.8).

Pour le sous-modèle de la charge, les relations entrée/sortie (*cf.* figure 4.5) et les relations entre les fonctions d'appartenance associées à l'entrée et aux sorties de ce sous-modèle sont données par :

FIGURE 4.8 – L'approche locale pour le problème inverse  $\Omega/R$ .

$$\begin{cases} e_{Ch} = K \left[ \frac{J_c \omega_n}{a_1 - a_2} (e_1 - e_2) + b_c \left[ 1 - \frac{1}{a_1 - a_2} (a_2 e_1 - a_1 e_2) \right] \right] = K e_{11}(t) \\ f_{Ch} = K \left[ 1 - \frac{1}{a_1 - a_2} (a_2 e_1 - a_1 e_2) \right] = K f_{11}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{E_{Ch} \times F_{Ch}}(e_{Ch}, f_{Ch}, t) = \sup_{\{K/e_{Ch}=K e_{11}(t), f_{Ch}=K f_{11}(t)\}} \mu_K(K) \\ \mu_{E_{Ch}}(e_{Ch}, t) = \sup_{\{(e_{Ch}, f_{Ch})/f_{Ch} \in F_{Ch}\}} \mu_{E_{Ch} \times F_{Ch}}(e_{Ch}, f_{Ch}, t) \\ \mu_{F_{Ch}}(f_{Ch}, t) = \sup_{\{(e_{Ch}, f_{Ch})/e_{Ch} \in E_{Ch}\}} \mu_{E_{Ch} \times F_{Ch}}(e_{Ch}, f_{Ch}, t) \end{cases} \quad (4.29)$$

Pour le sous-modèle du réducteur, les relations entrée/sortie et entre les fonctions d'appartenance sont :

$$\begin{cases} e_{Red} = \frac{1}{N} e_{Ch} \\ f_{Red} = N f_{Ch} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{E_{Red} \times F_{Red}}((e_{Red}, f_{Red}), t) = \sup_{\{(e_{Ch}, f_{Ch})/e_{Red} = \frac{1}{N} e_{Ch}, f_{Red} = N f_{Ch}\}} \mu_{E_{Ch} \times F_{Ch}}(e_{Ch}, f_{Ch}, t) \\ \mu_{E_{Red}}(e_{Red}, t) = \sup_{\{(e_{Red}, f_{Red})/f_{Red} \in F_{Red}\}} \mu_{E_{Red} \times F_{Red}}(e_{Red}, f_{Red}, t) \\ \mu_{F_{Red}}(f_{Red}, t) = \sup_{\{(e_{Red}, f_{Red})/e_{Red} \in E_{Red}\}} \mu_{E_{Red} \times F_{Red}}(e_{Red}, f_{Red}, t) \end{cases} \quad (4.30)$$

Enfin, pour le sous-modèle du moteur, nous avons :

$$R = \frac{u - \frac{L}{k_c} (J_m \ddot{f}_{Red} + e_{Red}) - k_c f_{Red}}{\frac{1}{k_c} [J_m \ddot{f}_{Red} + e_{Red}]} = R_\ell(e_{Red}, f_{Red})$$

$$\mu_{R_\ell}(R, t) = \sup_{\{(e_{Red}, f_{Red}) \in \Omega_{e_{Red}} \times \Omega_{f_{Red}} / R = R_\ell(e_{Red}, f_{Red})\}} \min \{ \mu_{E_{Red}}(e_{Red}, t), \mu_{F_{Red}}(f_{Red}, t) \}$$
(4.31)

Les tracés des différentes fonctions d'appartenance obtenues ci-dessus pour les différents sous-modèles sont donnés sur les figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13 respectivement pour les entrées de la charge, du réducteur et pour  $R$ .

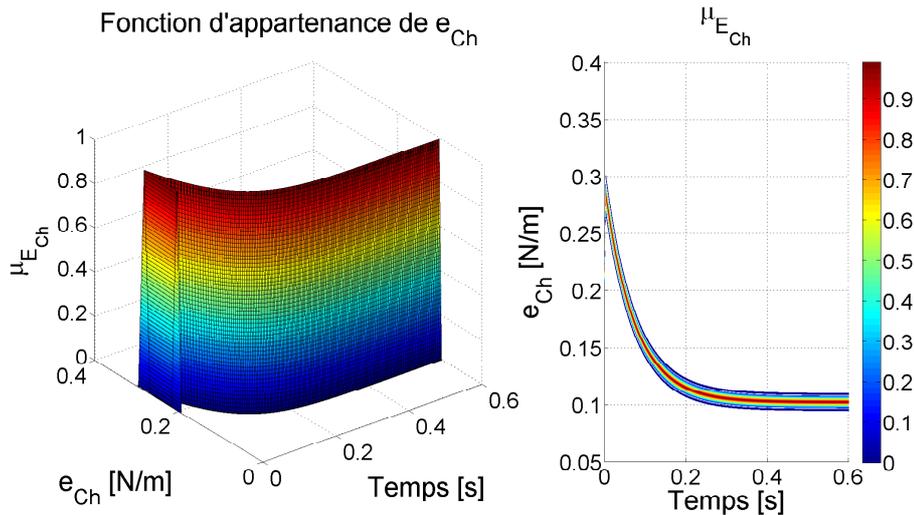


FIGURE 4.9 – Fonction d'appartenance associée à l'effort d'entrée du sous-modèle charge - Cas mono-incertitude avec l'approche locale.

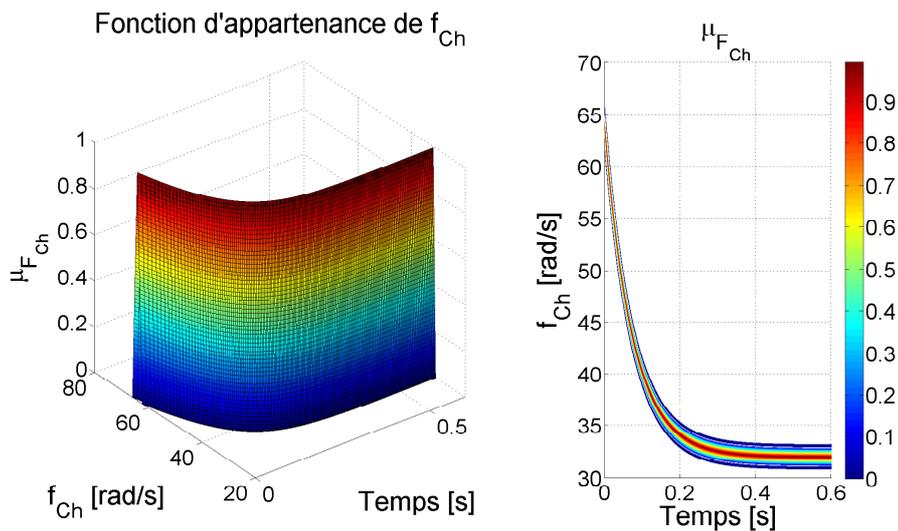


FIGURE 4.10 – Fonction d'appartenance associée au flux d'entrée du sous-modèle charge - Cas mono-incertitude avec l'approche locale.

Nous constatons que  $\mu_{R_\ell} = \mu_{R_g}$ . Ce résultat n'est pas difficile à montrer à partir des équations 4.29, 4.30 et 4.31.

Les fonctions d'appartenance obtenues sont des fonctions du temps. Ceci ne doit pas être interprété comme la valeur de  $R$  variant au cours du temps, mais comme le niveau de satisfaction d'une valeur de  $R \in \Omega_R$  ayant la propriété « pour que la trajectoire de sortie soit une réponse indicielle à un deuxième ordre dont le gain statique soit  $K = 32 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  » qui varie au cours de l'évolution du système.

Cet exemple nous permet également de comparer les deux approches de propagation. Malgré les résultats identiques sur  $R$ , l'approche locale fournit plus d'informations le long du modèle que l'approche globale.

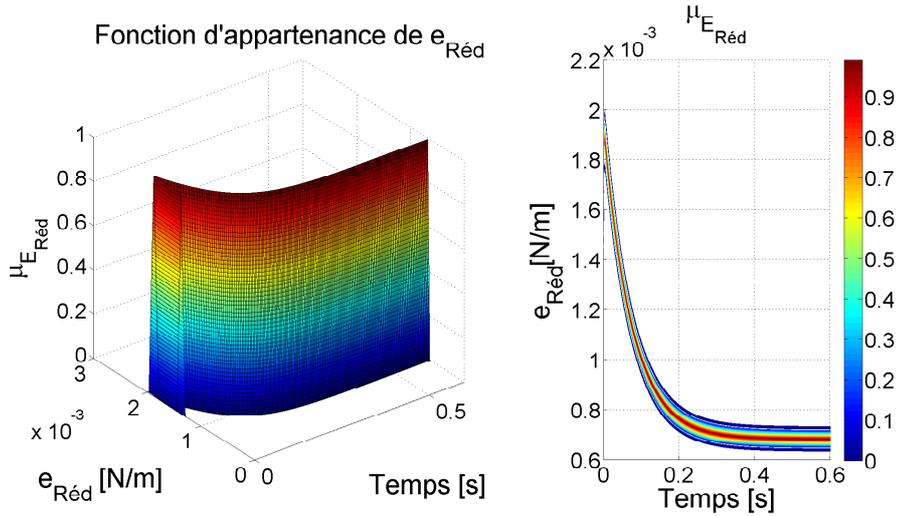


FIGURE 4.11 – Fonction d'appartenance associée à l'effort d'entrée du sous-modèle réducteur - Cas mono-incertitude avec l'approche locale.

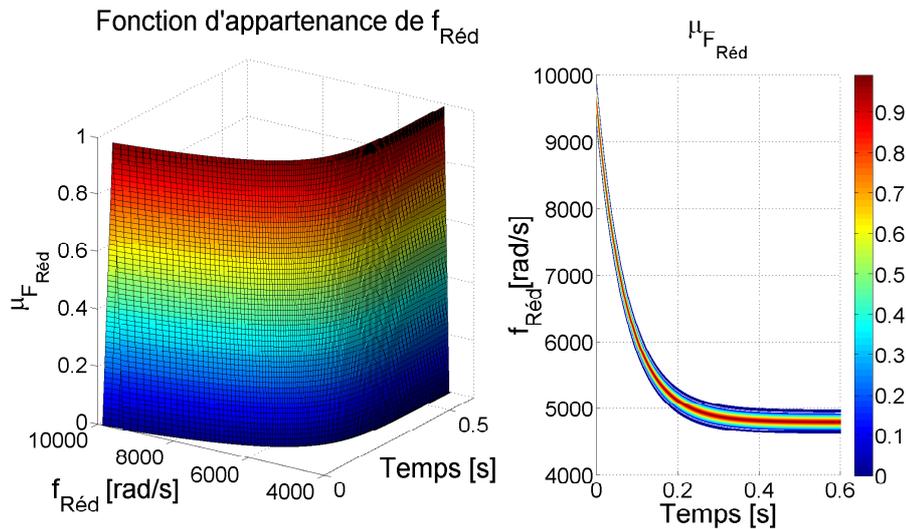


FIGURE 4.12 – Fonction d'appartenance associée au flux d'entrée du sous-modèle réducteur - Cas mono-incertitude avec l'approche locale.

#### 4.4.2 Cas multi-incertitudes - Approche globale

Dans ce paragraphe, nous considérons les incertitudes à la fois sur  $K$ ,  $\xi$  et  $\omega_n$ . Les spécifications sur les incertitudes sont traduites en nombres flous symétriques donnés par :

$$\mu_K(K) = \mathcal{T}(32, 1), \quad \mu_{\Xi}(\xi) = \mathcal{T}(24, 3), \quad \mu_{\Omega_n}(\omega_n) = \mathcal{T}(650, 30) \quad (4.32)$$

Dans le cas multi-incertitudes, la fonction issue de l'équation 4.27 donnant  $R$  doit être vue comme une fonction non seulement de  $K$  mais également de  $\xi$  et  $\omega_n$  :  $R = R_g(K, \xi, \omega_n, t)$ . La fonction d'appartenance associée à  $R$  est dans ce cas donnée par :

$$\mu_{R_g}(R, t) = \sup_{\{(K, \xi, \omega_n) \in \Omega_K \times \Omega_{\xi} \times \Omega_{\omega_n} / R = R_g(K, \xi, \omega_n, t)\}} \min \{ \mu_K(K), \mu_{\Xi}(\xi), \mu_{\Omega_n}(\omega_n) \} \quad (4.33)$$

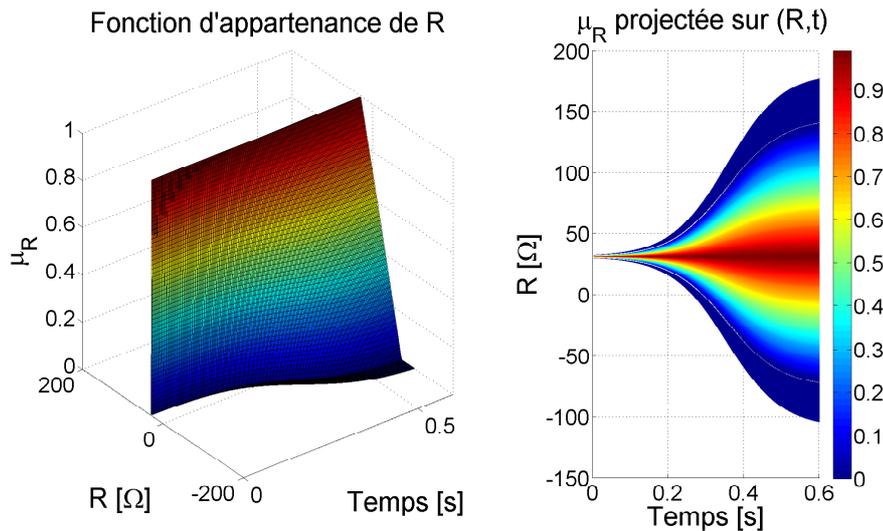


FIGURE 4.13 – Fonction d'appartenance associée à  $R$  - Cas mono-incertitude avec l'approche locale.

La fonction d'appartenance associée à  $R$  et variant au cours du temps est tracée sur la figure 4.14

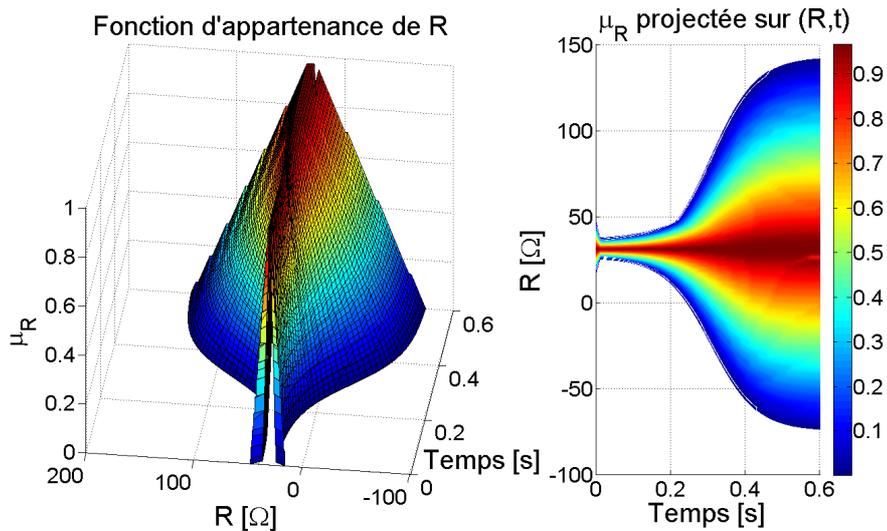


FIGURE 4.14 – Fonction d'appartenance associée à  $R$  - Cas multi-incertitudes avec une approche globale.

**Remarque 10.** La formule de  $R$  prend une forme indéterminée à  $t_0 = 0[s]$ . Nous avons donc commencé la simulation à  $t_0 = 0.01[s]$ . En utilisant les équivalences de  $\Omega_s$ ,  $\dot{\Omega}_s$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , nous pouvons cependant trouver  $R(0) = \lim_{t \rightarrow 0} R$ . Dans ce cas,  $R(0)$  prend exactement la valeur nominale dans l'intervalle donnée.

**Remarque 11.** Lors de la simulation, pour chaque instant  $t$ , nous avons divisé le support de la fonction d'appartenance trouvée en 100 intervalles et avons calculé  $\mu_R$  correspondant à ces « morceaux ». Cette division a pour but de réduire le temps nécessaire pour tracer  $\mu_R$  et de mieux visualiser  $\mu_R$ . Elle correspond à une précision de 0.5%, beaucoup plus fine que la précision

*habituellement utilisée (10% et 5%). Cette astuce de simulation n'a pas changé l'exactitude du résultat.*

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif de proposer un outil pour traiter les incertitudes épistémiques par l'approche bond graph. En utilisant la logique floue pour la quantification et la propagation de l'incertitude, le bond graph flou est une description bond graph de l'évolution des incertitudes épistémiques dans le modèle. Cette approche facilite l'interprétation et la localisation physique de ces incertitudes.

Les contributions de ce chapitre ont notamment permis :

- d'établir un formalisme bond graph flou offrant une description à la fois sur l'état énergétique et sur l'évolution de l'incertitude,
- de propager l'incertitude épistémique tout le long du modèle bond graph, soit par une approche globale, soit par une approche locale,

Dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement par modèle bond graph inverse et du problème de synthèse de tolérance, le bond graph flou proposé peut s'avérer être un outil efficace qui permet, entre autres :

- de remonter les incertitudes spécifiées sur la sortie aux paramètres de conception, afin d'observer leur effet, ainsi que la capacité du paramètre à « absorber » ces incertitudes,
- de synthétiser la tolérance sur un paramètre quand on dispose des incertitudes sur les variables de puissance de l'élément associé (*cf.* chapitre 5),
- de quantifier la satisfaction d'une valeur d'une propriété par niveau (en utilisant les  $\alpha$ -coupes). Cela donne un degré de flexibilité au concepteur lors de la synthèse de tolérance ou la rédaction du cahier des charges.

Enfin, si ce chapitre a été consacré à la formulation du bond graph flou, ce dernier reste cependant une approche pour un type d'incertitude spécifique (épistémique). En réalité, il existe également l'incertitude aléatoire. Le bond graph probabiliste et le bond graph flou pris séparément sont insuffisants pour une description bond graph tenant compte de l'incertitude générale. En effet, s'il est possible parfois d'« adapter » la FDP pour représenter l'incertitude épistémique ou la fonction d'appartenance pour représenter l'incertitude aléatoire, dans bien des cas, l'adaptation rend difficile l'interprétation et l'exploitation des résultats.

Dans le contexte de la synthèse de tolérance par l'approche bond graph inverse, il est donc intéressant d'avoir une méthodologie commune pour traiter les incertitudes dans le cahier des charges lorsqu'elles ne peuvent pas être classées complètement comme aléatoires ou épistémiques. En tenant compte de l'analogie entre les deux approches, le chapitre suivant est consacré à la mise en place d'une telle méthodologie.



# Chapitre 5

## Méthodologie de synthèse de tolérance d'un système mécatronique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>78</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>79</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthodologie de synthèse de tolérance par inversion du modèle bond graph</b>	<b>80</b>
5.3.1	Modélisation du système mécatronique par le langage bond graph	83
5.3.2	Construction des modèles bond graph probabiliste et flou	83
5.3.3	Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle	84
5.3.4	Construction du modèle inverse	84
5.3.5	Propagation de l'incertitude	85
5.3.6	Synthèse de tolérance - Exploitation des FDP et des FA	87
<b>5.4</b>	<b>Bien fondé de la méthodologie</b>	<b>87</b>
5.4.1	Boucle de propagation	87
5.4.2	Relaxation d'hypothèse	89
<b>5.5</b>	<b>Exemple : synthèse de tolérance sur une suspension de véhicule automobile.</b>	<b>90</b>
5.5.1	Étape 1 : Modélisation	93
5.5.2	Étape 2 : Adéquation	95
5.5.3	Étape 3 : Inversion	97
5.5.4	Étape 4 : Propagation	98
5.5.5	Étape 5 : Synthèse de tolérance	103
5.5.6	Validation de la méthodologie sur l'exemple	104
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>

---

## 5.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à la mise en œuvre du formalisme bond graph flou pour le traitement de l'incertitude épistémique et nous a notamment permis de montrer comment elle pouvait être propagée dans un modèle bond graph. Le bond graph flou se révèle ainsi un outil intéressant pour la synthèse de tolérance par l'approche bond graph inverse. Cependant, comme nous l'avons déjà souligné, l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique co-existent dans un modèle mécatronique. Le bond graph flou ou le bond graph probabiliste seul est insuffisant pour un traitement complet de l'incertitude. Il est donc intéressant de pouvoir construire une méthodologie commune, qui tient compte des deux types d'incertitude et fournit un outil de traitement approprié.

Les structures d'un modèle bond graph probabiliste et d'un modèle bond graph flou sont celle du modèle bond graph nominal. Il y a une analogie claire entre les deux approches et il est donc utile et intéressant de les combiner. Ce chapitre est consacré à cette combinaison. Il présente notamment nos contributions quant à l'extension de la méthodologie de dimensionnement par inversion du bond graph : la méthodologie de synthèse de tolérance tenant compte des deux types d'incertitude, épistémique et aléatoire.

Le problème de dimensionnement prend une place importante dans la conception de systèmes mécatroniques. Dans le problème de dimensionnement, les solutions techniques possibles sont déterminées afin de satisfaire un ensemble d'exigences. Une partie de ce processus concerne la définition des tolérances paramétriques.

Un certain nombre de méthodes de dimensionnement a été proposé dans la littérature. Elles sont classées en deux catégories : les méthodes directes (essai - erreur - correction) et les méthodes inverses (entrées déduites des sorties désirées). Les méthodes directes sont très classiques et appliquées à grande échelle dans l'industrie. Toutefois, elles sont coûteuses en temps de calcul. Les méthodes inverses fournissent aux concepteurs une solution avec moins de calcul pour le dimensionnement. Cependant, elles peuvent être difficiles à appliquer car la condition d'inversibilité du modèle est nécessaire.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de **synthèse de tolérance tenant compte des incertitudes admissibles sur les spécifications en sortie** (Fig. 5.1). L'objectif est d'obtenir la tolérance des paramètres de conception pour satisfaire aux exigences. Nous adoptons le langage bond graph (pour la modélisation des systèmes, l'analyse structurelle et la génération du modèle inverse), les outils de probabilité (pour la représentation et la propagation des incertitudes aléatoires) ainsi que les outils de logique floue (pour la représentation et la propagation des incertitudes épistémiques).

Sur la base de la modélisation bond graph, nous avons traité dans le chapitre 4 la modélisation des systèmes mécatroniques soumis aux **incertitudes épistémiques** grâce à la logique floue.

L'incertitude aléatoire dans un système mécatronique se réfère à la variation arbitraire associée au système physique ou à l'environnement. Traditionnellement, l'incertitude aléatoire est spécifiée en termes de fonctions de densité de probabilité (FDP). En se basant sur le principe de la conservation de la probabilité, LI et CHEN ont proposé une formulation stochastique du système physique [LC08] [LC09]. EL FEKI a adopté cette formulation pour le modèle inverse et pour propager les FDP [Fek11]. Pour une exploitation systématique graphique d'un modèle avec la présence d'incertitudes aléatoires, EL FEKI définit dans [Fek11] le **bond graph probabiliste**. L'idée est d'attacher à chaque variable de puissance et d'énergie, et chaque paramètre une fonction de densité de probabilité (FDP), son espérance et sa variance. Le modèle bond graph probabiliste permet de propager les incertitudes aléatoires dans toute la structure du modèle de conception.

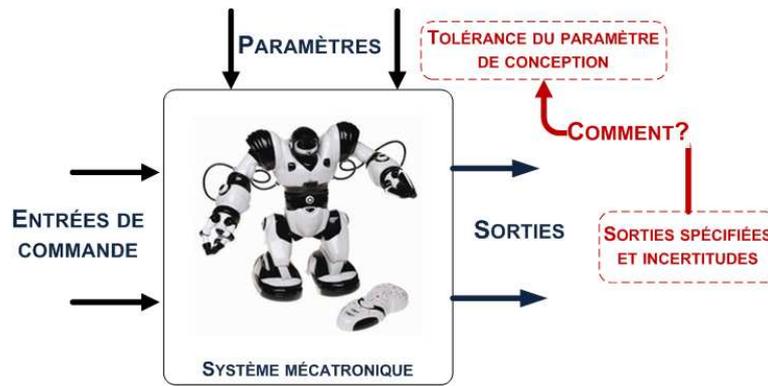


FIGURE 5.1 – Problème de synthèse de tolérance dans un système mécatronique.

Les incertitudes épistémiques représentent le caractère incomplet des connaissances sur une propriété ou une valeur, en raison de données insuffisamment précises.

Inspirés par l’approche probabiliste, nous ajoutons à toutes les variables de puissance et d’énergie et les paramètres incertains dans le modèle bond graph, les fonctions d’appartenance (FA) correspondantes, afin de créer un **bond graph flou** (*cf.* chapitre 4). Sur ce bond graph flou, nous effectuons la propagation des incertitudes épistémiques par l’intermédiaire de ces FA.

Une méthodologie générale de dimensionnement est présentée dans ce chapitre. Les incertitudes sont caractérisées soit par des FDP, soit par des FA. Elles sont ensuite propagées à travers le modèle inverse (globalement ou localement) afin d’atteindre les paramètres dont on cherche à déterminer les tolérances. Ces tolérances paramétriques sont finalement synthétisées à partir des résultats de propagation.

## 5.2 Formulation du problème

L’objectif de la méthodologie présentée au paragraphe 5.3 est de déterminer les tolérances des paramètres de conception compte tenu des incertitudes admissibles exprimées dans les spécifications sur la sortie.

**Hypothèse 8.** *Nous supposons que la structure du système considéré est fixée et que les incertitudes données dans les spécifications sont indépendantes.*

Soit le modèle d’état direct d’un système mécatronique :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_c, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_c, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d’état,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $\boldsymbol{\theta}_c \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des paramètres de conception, et  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des conditions initiales sur l’état.

Ce modèle d’état peut être obtenu à partir de la représentation bond graph causal du système. Dans ce cas, les variables d’état sont les variables d’énergie des éléments de stockage en causalité intégrale.

Les paramètres de conception  $\theta_c$  font l'objet de la synthèse de tolérance. L'approche par modèle inverse permet d'exprimer ces paramètres en fonction des entrées et des sorties du système. En supposant le modèle 5.1 inversible, le modèle d'état inverse sorties/paramètres de conception s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{inv} = F_{inv}(\mathbf{x}_{inv}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}, t) \\ \mathbf{x}_{inv}(t_0) = \mathbf{x}_{inv0} \\ \theta_c = G_{inv}(\mathbf{x}_{inv}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}, t) \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{x}_{inv} \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$  est le vecteur d'état du modèle inverse.

Nous supposons que les dérivées des entrées n'apparaissent pas dans ce modèle. Il peut être obtenu à partir de la représentation bond graph bicausal du système.

La solution du modèle 5.2 peut s'écrire :

$$\theta_c = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\alpha)}, t) \quad (5.3)$$

La méthodologie présentée dans le paragraphe suivant permet de « remonter » les incertitudes spécifiées sur les sorties, vers les paramètres de conception. Comme les incertitudes peuvent être de type aléatoire ou épistémique, nous définissons des fonctions de densité de probabilité et des fonctions d'appartenance pour les caractériser. Ainsi :

- $\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, t)$  et  $\mu_B(\mathbf{y}, t)$  représentent respectivement la fonction de densité de probabilité conjointe et la fonction d'appartenance spécifiées sur les sorties,
- $\phi_{\theta_c}(\theta_c, t)$  et  $\mu_{\Theta_c}(\theta_c, t)$  représentent respectivement la fonction de densité de probabilité conjointe et la fonction d'appartenance calculées sur les paramètres de conception.

Cette « remontée » fait appel au principe d'extension pour les fonctions d'appartenance (*cf.* paragraphe 4.3.1) et à l'opération de propagation pour les fonctions de densité de probabilité (*cf.* paragraphe 3.6.4) appliqués à la relation 5.3.

A partir des incertitudes ainsi remontées sur les paramètres de conception, la méthodologie présentée dans le paragraphe suivant propose une synthèse de tolérances sur ces paramètres.

### 5.3 Méthodologie de synthèse de tolérance par inversion du modèle bond graph

Dans cette section, nous introduisons une méthodologie de synthèse de tolérance par inversion de modèle bond graph. Tout d'abord, nous présentons la démarche générale de la méthodologie avant de rentrer dans les détails de chaque étape. La méthodologie permet la synthèse de tolérance par approche inverse, tenant compte de l'existence d'incertitudes aléatoires et d'incertitudes épistémiques dans les spécifications du cahier des charges.

Les différentes étapes de la méthodologie sont :

1. **Modélisation** : Construire le bond graph du système et modéliser les incertitudes incluses dans les spécifications sur les sorties par des fonctions de densité de probabilité (FDP) si les incertitudes sont aléatoires, ou par des fonctions d'appartenance (FA) si elles sont épistémiques.

Dans cette étape, les entrées/sorties de conception sont définis. Nous insistons sur la distinction entre les entrées/sorties de conception et les entrées/sorties fonctionnelles du système. Les entrées (resp. sorties) de conception sont les entrées (resp. sorties) de donnée, qui font

l'objet de la synthèse de tolérance (resp. l'objet d'une incertitude).

À partir des FDP et des FA modélisées, le bond graph probabiliste et le bond graph flou associés au modèle du système sont construits.

2. **Adéquation** : Cette étape consiste en la vérification de l'inversibilité structurelle bond graph et l'adéquation entre la structure du modèle et les spécifications (si la sortie spécifiée est réalisable avec la structure du modèle). Les critères structurels d'inversibilité se trouvent dans [NST96, JMFT09]. La vérification de l'adéquation est basée sur l'analyse structurelle du modèle bond graph. Elle fait partie de la méthodologie de conception par inversion de modèle développée au sein du laboratoire Ampère.
3. **Inversion du modèle** : Lorsque le modèle est structurellement inversible et en adéquation avec les spécifications, l'étape suivante est la construction du modèle bond graph inverse. La procédure d'inversion d'un modèle bond graph est présentée dans [Jar10, Fek11].
4. **Propagation de l'incertitude** : En utilisant soit une approche globale soit une approche locale (selon le besoin d'observation dans le modèle), la propagation des FDP est effectuée en exploitant le bond graph probabiliste associé [Fek11]. La propagation des FA est effectuée en utilisant le principe d'extension sur le bond graph flou. Les FDP et les FA correspondantes aux paramètres de conception sont alors déterminées.
5. **Adaptation** : À partir des FDP et des FA trouvées, une étape d'adaptation des résultats aux contraintes physiques et aux conditions de fabrication est effectuée pour finalement déterminer les tolérances sur les paramètres de conception.

Les cinq étapes présentées ci-dessus peuvent être regroupées en 3 grandes phases (figure 5.2). Après la position du problème de conception, la phase préliminaire (modélisation et adéquation) est dédiée à la construction et la vérification de la validité du modèle bond graph probabiliste et du modèle bond graph flou sur lesquels les propagations sont effectuées. La deuxième phase (propagation de l'incertitude) est la phase principale de la méthodologie, qui consiste en l'inversion du modèle bond graph et la propagation des FDP et des FA jusqu'aux paramètres de conception. La dernière phase (synthèse de tolérance) est consacrée à l'exploitation des FDP et des FA trouvées afin de synthétiser les tolérances des paramètres de conception.

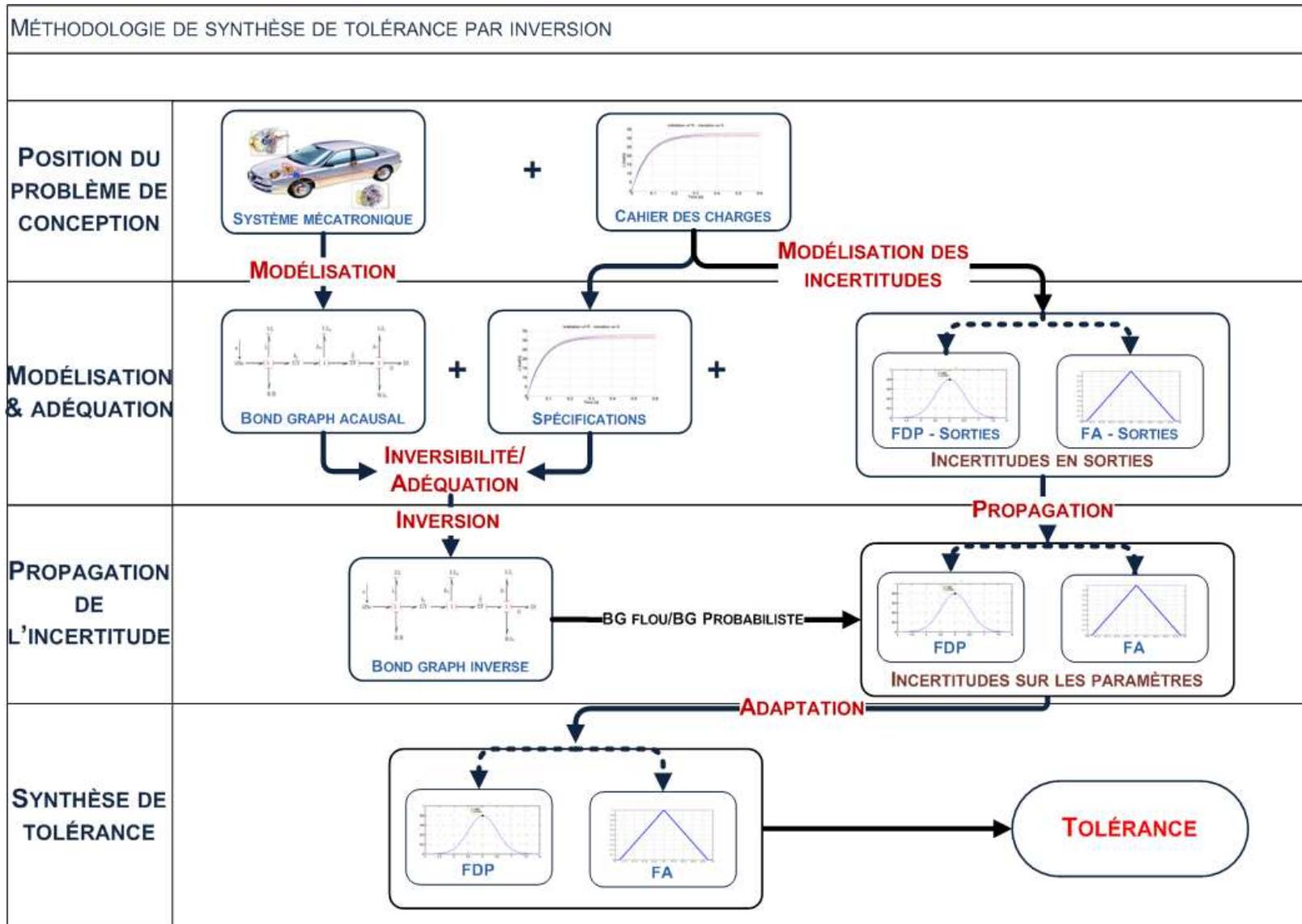


FIGURE 5.2 – Méthodologie de synthèse de tolérance.

Nous présentons maintenant les détails des différentes étapes de la méthodologie dans l'ordre de leur application. Concernant l'étape de modélisation, nous la décomposons en deux parties : la modélisation du système physique et la construction des modèles bond graph probabiliste et flou.

### 5.3.1 Modélisation du système mécatronique par le langage bond graph

Le modèle bond graph est construit sur la base des phénomènes physiques du système mécatronique déterministe. Comme nous nous concentrons sur le problème de la synthèse de la tolérance, la structure du modèle est supposée connue et fixée (il n'y a pas de boîte noire, de commutation, ni de discontinuité). Les paramètres du système sont ensuite classés en deux ensembles : l'ensemble des paramètres connus et l'ensemble des paramètres de conception (ceux faisant l'objet de la synthèse de tolérance).

En général, la modélisation d'un système mécatronique en langage bond graph se déroule en deux grandes étapes :

- **Construction du modèle bond graph à mots** (*word bond graph*) : le système est décomposé en composants, puis chaque composant en sous-composants et ainsi de suite jusqu'à des « composants élémentaires ». Puis, l'interconnexion de ces différents composants élémentaires est établie reflétant l'architecture physique du système.
- **Détermination du modèle bond graph** : Le modèle bond graph de chaque « composant élémentaire » est précisé en identifiant les phénomènes énergétiques et en représentant leur interconnexion.

Au cours de ces deux grandes étapes, des procédures de construction pour des modèles relativement simples, ou plus complexes comme pour les systèmes mécaniques multi-corps peuvent être utilisées [Kar90a, Fav97]. La procédure détaillée de construction d'un modèle bond graph est donnée dans l'annexe A.

### 5.3.2 Construction des modèles bond graph probabiliste et flou

Le modèle bond graph acausal nous permet de modéliser le système déterministe mais il fixe également la structure générale des modèles bond graph probabiliste et flou auxquels sont associées respectivement les FDP et les FA. Les incertitudes identifiées dans le cahier des charges sont ensuite modélisées. Il s'agit ici d'un ensemble d'incertitudes aléatoires et épistémiques. Notre premier objectif est de séparer ces deux types d'incertitude dans le cahier des charges.

Les sources et la caractérisation des incertitudes dans la modélisation en ingénierie ont été discutées dans le chapitre 3.

Sur le problème particulier de la synthèse de tolérance, les incertitudes dans les spécifications du cahier des charges sont classées en deux types : les incertitudes sur les spécifications techniques et celles sur les spécifications de production. Les incertitudes sur les spécifications techniques sont normalement données à partir de la demande client ou de l'expérience de l'expert, et donc rarement linguistiquement certaines. Elles contiennent l'ignorance relative de l'information. Par exemple, « la vitesse doit approcher 32 rad/s » peut signifier que l'on peut quand même techniquement accepter une vitesse dans l'intervalle de 31.5 à 32.5 rad/s. Elles peuvent donc être considérées comme épistémiques et traitées avec la logique floue. Plus précisément, les FA correspondant aux spécifications techniques données sont construites. Ces FA reflètent le niveau de satisfaction d'un écart de valeur par rapport à la valeur nominale. Ce niveau de satisfaction est défini à partir des demandes dans le cahier des charges ou des opinions d'expert.

Le deuxième type d'incertitude porte sur la dispersion de la production. Il est, dans la plupart des cas, donné statistiquement. Par exemple, il peut être souhaité que 97 % des produits réalisés satisfassent les spécifications techniques et qu'ils aient une distribution donnée autour d'une réalisation nominale. À partir des spécifications sur cette dispersion, une distribution sur la sortie peut être attribuée sous forme d'une FDP.

**Remarque 12.** *Cette attribution des valeurs de FDP ou de FA est subjective, et donc, peut probablement rajouter de l'incertitude. Cependant, dans le cadre de nos travaux, nous supposons que cette procédure est idéale.*

### 5.3.3 Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle

Cette étape consiste en deux tests : le test de l'inversibilité structurelle puis, le test d'adéquation.

Le test de l'inversibilité structurelle du modèle est tout d'abord effectué. L'analyse structurelle des lignes de puissance et des chemins causaux [Jar10, Fek11] doit être faite pour réaliser ce test.

Si le modèle est structurellement inversible, l'adéquation entre la structure du modèle et les spécifications est ensuite étudiée. Il est en effet essentiel de vérifier que les spécifications sont réalisables par la structure du modèle mis en place à l'étape précédente. Dans le cas d'un système linéaire, la procédure de vérification de l'adéquation basée sur l'ordre d'essentialité est donnée dans [Jar10, Fek11]. Cette étape permet d'éviter de poursuivre inutilement l'étude si la structure du modèle n'est pas adéquate aux spécifications exigées. Elle donne également des pistes pour redéfinir un ensemble approprié d'exigences dans ce cas.

**Critère 2.** *Les spécifications sur les sorties  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$  du système sont considérées en adéquation avec la structure du modèle si chaque sortie spécifiée  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , est au moins  $n_{iec}$  fois dérivable par rapport au temps où  $n_{iec}$  est l'ordre d'essentialité de la sortie  $y_i$  respectivement aux paramètres de conception  $\theta_c$ .*

Par définition, l'ordre d'essentialité  $n_{iec}$  d'une sortie  $y_i$  correspond au nombre de dérivations nécessaire maximal de celle-ci apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal. Par conséquent, si la spécification sur cette sortie n'est pas au moins  $n_{iec}$  fois dérivable par rapport au temps, certaines grandeurs dans le modèle ne seront pas physiquement réalisables.

Il est à noter que le critère 2, condition nécessaire, n'est pas toujours une condition suffisante. Par ailleurs, le concept d'ordre d'essentialité sur une sortie d'un modèle est défini respectivement aux entrées de commande. Dans le contexte de nos travaux visant la synthèse de tolérance par inversion de modèle sorties/paramètres de conception, les entrées à considérer sont les variables de puissance imposées au modèle du système par les éléments bond graph portant les paramètres de conception dans le bond graph causal. Ces ordres d'essentialité sont alors déterminés sur le bond graph bicausal [Jar10, Fek11].

Si les critères d'inversibilité et celui de l'adéquation entre les spécifications et la structure du modèle sont vérifiés, l'inversion du modèle peut être effectuée. Sinon, il faut remettre en question le cahier des charges ou le modèle de conception [Fek11].

### 5.3.4 Construction du modèle inverse

La méthodologie utilise l'approche inverse pour la synthèse de tolérance. Les incertitudes spécifiées sur les sorties sont propagées aux paramètres de conception à travers le modèle inverse

afin de synthétiser les tolérances sur ces paramètres. Nous considérons dans cette partie l'inversion d'un modèle bond graph et la procédure pour obtenir le modèle inverse d'ordre minimal.

Dans un modèle inverse, les sorties du modèle direct sont les entrées du modèle inverse et les entrées ou les paramètres de conception (suivant le problème de conception) sont les sorties du modèle inverse.

Le modèle bond graph inverse prend la même structure que celle du modèle direct. Les éléments portant les paramètres de conception sont remplacés par des double détecteurs et les détecteurs sont remplacés par des double sources. Ensuite, l'écriture de modèle inverse repose sur la propagation de la bicausalité des double sources  $SeSf$  vers les double détecteurs  $DeDf$  puis l'affectation de la causalité sur les autres éléments du modèle.

Le modèle inverse d'ordre minimal peut alors être déterminé à partir du bond graph bicausal avec la procédure décrite dans [Fek11] et détaillée dans l'annexe A.

### 5.3.5 Propagation de l'incertitude

Sur le modèle bond graph inverse d'ordre minimal obtenu, les incertitudes dans les spécifications sur les sorties sont propagées jusqu'aux paramètres de conception, soit par une approche globale, soit locale. La première considère le modèle inverse comme une relation explicite entre les sorties et les paramètres de conception déduite du modèle bond graph inverse (équation 5.3). La seconde approche, approche locale, exploite le modèle bond graph inverse sous-modèle par sous-modèle. Cette opération de propagation de l'incertitude se fait sur les modèles bond graph probabiliste et flou associés.

#### Propagation de l'incertitude aléatoire

On propage les fonctions de densité de probabilité en utilisant les deux théorèmes suivants :

**Théorème 2.** [Sap06]

Soit  $\Theta_1$  une variable aléatoire ayant  $\phi_{\Theta_1}(\theta_1)$  comme fonction de densité de probabilité marginale et soit  $\Theta_2$  une autre variable aléatoire telle que  $\theta_2 = g(\theta_1)$ , alors la fonction de densité de probabilité associée  $\phi_{\Theta_2}(\theta_2)$  peut être calculée comme suit si la fonction  $g$  est un difféomorphisme (bijective et bi-différentiable) :

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \left| \frac{d\theta_1}{d\theta_2} \right| \phi_{\Theta_1}(\theta_1) = \frac{\phi_{\Theta_1}(g^{-1}(\theta_2))}{|g'(g^{-1}(\theta_2))|} \quad (5.4)$$

où  $g^{-1}$  est la fonction inverse de  $g$  et  $g'$  est sa dérivée par rapport à  $\theta_1$ .

Le théorème est étendu pour le cas d'une fonction  $g$  qui n'est pas bijective. Lorsque  $g$  n'est pas un difféomorphisme global, la FDP de  $\Theta_2$  peut être déduite en définissant la fonction  $g$  sur  $k$  domaines continus, où  $g$  est localement un difféomorphisme. Ensuite, nous pouvons localement appliquer le théorème ci-dessus et prendre la somme de toutes les images réciproques de  $\theta_1$  :

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \sum_{i=1}^k \frac{\phi_{\Theta_1}(g_i^{-1}(\theta_2))}{|g'(g_i^{-1}(\theta_2))|} \quad (5.5)$$

En réalité, il est très fréquent que l'on ait besoin de propager non pas une variable unique, mais un vecteur de plusieurs variables aléatoires. Dans ce cas, les incertitudes aléatoires sont représentées par la FDP conjointe de ce vecteur et la propagation est effectuée sur cette FDP conjointe. La dérivée de  $g$  est remplacée par le déterminant de la jacobienne de  $\mathbf{g}$ , un vecteur de fonctions.

**Théorème 3.** [Sap06]

Soit deux vecteurs de  $n$  variables aléatoires  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$  de fonction de densité de probabilité conjointe  $\phi_\Theta(\theta)$  et  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$  de fonction de densité de probabilité conjointe  $\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{p})$  tels que  $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\theta)$  avec le vecteur de fonctions  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  et  $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{h}$  est continûment différentiable alors la FDP conjointe  $\phi_{\mathbf{P}}$  de  $\mathbf{P}$  s'écrit :

$$\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) = |J_g|^{-1} \phi_\Theta(\theta) = |J_g|^{-1} \phi_\Theta(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{p}))$$

où  $|J_g| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$  est le déterminant de la jacobienne de  $\mathbf{g}$  par rapport à  $\theta$ .

Les théorèmes ci-dessus impliquent que les vecteurs de variables aléatoires  $\Theta$  et  $\mathbf{P}$  aient la même dimension. Ces théorèmes ne permettent pas d'obtenir la FDP conjointe associée à  $\mathbf{P}$  lorsque le nombre de variables aléatoires de ce vecteur est inférieur au nombre de variables aléatoires du vecteur  $\Theta$ . C'est toutefois un scénario fréquent. Des variables fictives peuvent alors être ajoutées afin d'obtenir la même dimension pour les deux vecteurs aléatoires. Ces variables fictives peuvent être choisies, par exemple, parmi les variables de  $\Theta$  :

$$\begin{cases} p_1 & = g_1(\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \\ \vdots & \\ p_{n_p} & = g_{n_p}(\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \\ p_{n_p+1} & = \theta_{n_p+1} \\ \vdots & \\ p_{n_\theta} & = \theta_{n_\theta} \end{cases} \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un vecteur, la FDP obtenue est donc une FDP conjointe. Afin de déterminer la FDP marginale d'une variable, la FDP conjointe doit être intégrée sur tous les domaines de définition des autres variables (y compris les variables « fictives » si elles ont été ajoutées pour équilibrer la dimension des vecteurs).

Cette méthode de propagation de l'incertitude aléatoire permet d'exploiter facilement le bond graph probabiliste en simulation. De plus, elle fournit une analogie avec la propagation de l'incertitude épistémique et le principe d'extension qui peut être également considéré comme une formule de changement de variable dans la logique floue.

**Propagation de l'incertitude épistémique**

La propagation des FA s'effectue en utilisant le modèle bond graph flou associé dont les règles d'exploitation ont été détaillées dans le chapitre 4. Cette propagation est basée sur le principe d'extension (*cf.* définition 24 page 55). On rappelle que ce principe produise l'effet de sur-estimation lorsque les paramètres sont dépendants.

Dans le cas où les variables incertaines considérées ne sont pas indépendantes, pour améliorer la précision du résultat, HANSS a proposé la **méthode de transformation** [Han02]. La méthode de transformation est, en effet, une application du principe d'extension et des opérations floues sur les entrées floues transformées. Les lecteurs intéressés peuvent trouver plus de détails, ainsi que les algorithmes de transformation dans [Han02, Han05].

La méthode de transformation améliore la précision de la propagation des FA, mais augmente considérablement le temps de calcul. L'utilisation de la méthode de transformation doit être mûrement considérée afin d'établir un compromis entre le temps de calcul et la précision de la propagation.

### 5.3.6 Synthèse de tolérance - Exploitation des FDP et des FA

Dans cette étape, les résultats obtenus à l'étape de propagation des incertitudes sont exploités afin de synthétiser les tolérances sur les paramètres de conception.

Le support d'une FA d'un paramètre de conception contient toutes les valeurs qui satisfont à l'ensemble des comportements des sorties floues. Elle est la base de connaissance pour la synthèse de tolérance. Ainsi, en fonction des niveaux de satisfaction spécifiés, une  $\alpha$ -coupe (cf. définition 18 page 50) donne la tolérance correspondante du paramètre. Par exemple, un composant satisfait 70 % de la performance idéale s'il reste dans la 0.7-coupe de la FA correspondante. La connaissance des FA donne ainsi la possibilité au concepteur du système de déterminer les tolérances depuis des  $\alpha$ -coupes.

La FDP obtenue pour un paramètre de conception fournit des informations sur une loi de distribution visée pour une éventuelle fabrication en série. Différent de l'analyse par intervalle, où seulement la « solution du pire » est obtenue, la FDP permet obtenir plus d'informations sur l'intervalle de distribution du paramètre. Cette FDP n'est cependant pas nécessairement sous la forme « prête pour la spécification de la production ». Par exemple, elle n'est pas sous une forme gaussienne souvent impliquée dans la plupart des processus de fabrication, ou elle peut violer certaines contraintes physiques. Une étape d'adaptation est donc nécessaire. L'adaptation est dépendante de la situation ainsi que des contraintes du fabricant. Dans le scénario classique où le fabricant demande une distribution sous forme gaussienne (cohérente avec les machines de fabrication actuelles), une idée simple est de recommander une telle distribution centrée sur la valeur modale de la FDP obtenue par propagation. Sa variance sera la même que celle de la FDP obtenue. Ce choix présente plusieurs avantages. Les informations nécessaires pour l'adaptation sont faciles à extraire de la FDP obtenue. Au niveau de la fabrication, elle présente une distribution focalisée sur la partie la « plus probable » des spécifications. De plus, elle peut facilement être ré-adaptée en réduisant l'écart-type.

En considérant le niveau de satisfaction demandé et la distribution, une tolérance et une distribution de fabrication pour les paramètres de conception peuvent être établies.

Le fait d'obtenir les FA et les FDP des paramètres de conception fournit beaucoup plus d'informations qu'une approche par l'arithmétique par intervalle. Cela donne au concepteur un certain degré de flexibilité afin de trouver un compromis entre la satisfaction des spécifications et le coût de fabrication.

Nous avons donc proposé dans cette partie une méthodologie de synthèse de tolérance basée sur l'inversion du modèle et la propagation de l'incertitude. Nous envisageons maintenant les conditions d'application de la méthodologie et démontrons le bien-fondé, de manière générale, des résultats obtenus par rapport aux spécifications.

## 5.4 Bien fondé de la méthodologie

### 5.4.1 Boucle de propagation

Notre méthodologie s'inscrit dans une **boucle de propagation d'incertitudes** présentée figure 5.3 dont le principe est le suivant : à partir des grandeurs incertaines spécifiées sur les sorties  $y_I$ , on obtient les incertitudes sur les entrées de conception  $u_I = \psi^{-1}(y_I)$  par propagation dans le modèle **inverse**. La question qui se pose alors est : si en réinjectant ces grandeurs incertaines obtenues en posant  $u_D = u_I$  dans le modèle **direct**, retrouve-t-on exactement les

incertitudes spécifiées en sortie sur  $y_D = \psi(u_D) = y_I$  ?

Autrement dit, l'invariance du cycle de propagation par les transformations successives des grandeurs incertaines permet-elle de garantir une synthèse de tolérance des entrées de conception conduisant à un comportement en sortie inscrit dans l'enveloppe des spécifications ?

On considère le système dynamique décrit par l'application  $\psi : U \rightarrow Y$  qui définit la relation  $u \mapsto y = \psi(u)$  entre le vecteur des entrées de conception  $u$  et celui des sorties de conception  $y$ . Les spécifications sur les sorties sont données par le  $n$ -uplet  $\{f_{Y_{Ii}}\}_i$ , où dans notre étude,  $f$  désigne une densité de probabilité ou une fonction d'appartenance. Nous ne considérerons que des incertitudes de même nature, les  $f_i$  seront donc toutes soit des fonctions d'appartenance soit des densités de probabilité. Les spécifications sont supposées **indépendantes**, quelle que soit leur nature.

On note  $\otimes_i$  le produit tensoriel dont l'image est le produit cartésien des ensembles flous associés aux  $\{f_i\}_i$  ou la loi conjointe associée aux densités marginales  $\{f_i\}_i$ . On note  $\pi_X$  la projection dans la direction  $X$ , qui, selon le cas, désignera la composante selon  $X$  d'un sous-ensemble flou ou la composante marginale selon  $X$  d'une densité conjointe.  $\text{id}$  désigne l'application identité.

Dans l'étude de la boucle de propagation d'incertitudes (figure 5.3), il s'agit de montrer que, sous certaines hypothèses, l'image  $\{f_{Y_{Di}}\}_i$  du  $n$ -uplet  $\{f_{Y_{Ii}}\}_i$  par les transformations successives au travers du modèle inverse puis du modèle direct est lui-même, soit  $f_{Y_{Di}} = f_{Y_{Ii}}$  pour tout  $i$ .

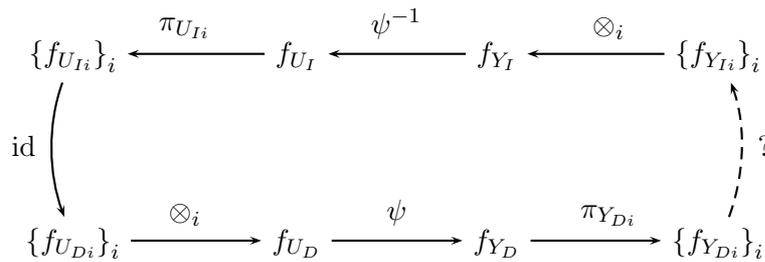


FIGURE 5.3 – Boucle de propagation.

Notons tout d'abord que si l'on suppose l'égalité  $f_{U_D} = f_{U_I}$ , on a trivialement  $f_{Y_D} = f_{Y_I}$  d'après l'invariance par composition de la propagation, soit

$$f_{Y_D} = \psi[f_{U_D}] = \psi[\psi^{-1}[f_{Y_I}]] = \psi \circ \psi^{-1}[f_{Y_I}] = f_{Y_I}. \quad (5.7)$$

Ainsi, l'étude de la boucle de propagation se réduit à montrer que  $\otimes_i \circ \pi_i = \text{id}_U$  d'une part, et  $\pi_i \circ \otimes_i = \text{id}_Y$  d'autre part. Nous avons vu auparavant les hypothèses sous lesquelles ces conditions étaient satisfaites. Nous avons donc le résultat suivant.

**Proposition.** On se donne le système défini sur des ouverts  $U$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  par le difféomorphisme  $\psi : u \mapsto y$ . Les spécifications sur les sorties de conception  $y$  introduisent des incertitudes sous la forme, soit d'ensembles flous soit de variables aléatoires réelles, et pour lesquelles on fait les hypothèses suivantes :

- (i) les variables aléatoires réelles sont **absolument continues**,
- (ii) les fonctions d'appartenance sont **normalisées** et l'extension cylindrique est une **jointure sans perte** (*lossless join*),
- (iii) les spécifications sont **indépendantes**, quelle que soit leur nature.

Alors, la propagation des spécifications  $f_{Y_{Ii}}$  dans la boucle présentée figure 5.3 conduit à l'égalité  $f_{Y_{Di}} = f_{Y_{Ii}}$  pour tout  $i$ .

**Démonstration :** On distingue l'approche probabiliste de l'approche floue.

L'hypothèse (i) se traduit par l'existence d'une **densité de probabilité** pour chaque variable aléatoire. Nous savons alors que, à partir d'une loi conjointe, il est possible d'obtenir les densités marginales et conditionnelles de manière unique. Cela signifie que nous avons l'égalité  $\otimes_i \circ \pi_i = \text{id}_U$ . Il suffit ensuite de noter que le changement de coordonnées défini par le difféomorphisme  $\psi$  permet de calculer la densité conjointe en sortie du modèle inverse pour avoir l'égalité

$$f_{U_I} = \psi[f_{Y_I}] = \frac{f_{Y_I}(\psi)}{|J\psi^{-1}(\psi)|} \stackrel{\otimes_i \circ \pi_i = \text{id}_U}{=} f_{U_D}. \quad (5.8)$$

On utilise enfin (5.7) et (iii) pour conclure.

Dans l'approche floue, l'hypothèse (ii) permet d'avoir, pour un produit cartésien de sous-ensembles flous  $A = A_1 \times \dots \times A_r$  les relations suivantes (cf propositions 1&2, paragraphe 4.2.1, page 48) :

$$\pi_i(A) = A_i \quad \text{et} \quad \pi_1(A) \times \dots \times \pi_r(A) = A \quad (5.9)$$

La deuxième égalité est précisément  $\otimes_i \circ \pi_i = \text{id}_U$  conduisant à  $f_{U_I} = f_{U_D}$ . On conclut enfin à l'aide de la première égalité et (iii).

Fin de la démonstration.

## 5.4.2 Relaxation d'hypothèse

Dans ce paragraphe, nous étudions l'impact de la relaxation des conditions données dans l'hypothèse (ii) de la proposition précédente. Il ne nous semble pas d'un grand intérêt d'étendre cette étude aux hypothèses (i) et (iii) puisque la première est une condition **nécessaire** à l'existence de loi de densité de probabilité et la seconde reviendrait à redéfinir l'ensemble des entrées-sorties de conception.

Supposons dans un premier temps que les fonctions d'appartenance **ne sont pas normalisées** et que l'extension cylindrique est une jointure sans perte. L'absence de normalisation des fonctions d'appartenance nous dit que  $\pi_i(A)$  n'est plus nécessairement le  $i$ -ème facteur  $A_i$  et se traduit par

$$\pi_i(f_A) \leq f_{A_i}. \quad (5.10)$$

Puisque l'extension cylindrique est une jointure sans perte  $\otimes_i \circ \pi_i = \text{id}_U$  et on a

$$\begin{aligned} f_{Y_D} &= \psi [\otimes_i \circ \pi_i (f_{U_I})] \\ &= \psi [\psi^{-1} [f_{Y_I}]] = \psi \circ \psi^{-1} [f_{Y_I}] \\ &= f_{Y_I}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

On remarque alors que, bien que l'on retrouve la même fonction d'appartenance conjointe, il n'y a plus de garantie sur l'égalité par composante puisque par (5.10) on a

$$f_{Y_{D_i}} = \pi_{Y_i}(f_{Y_D}) \stackrel{(5.11)}{=} \pi_{Y_i}(f_{Y_I}) \stackrel{(5.10)}{\leq} f_{Y_{I_i}}. \quad (5.12)$$

On tire ainsi le résultat suivant.

**Proposition.** Considérons un système décrit par le difféomorphisme  $\psi : u \mapsto y$  et des spécifications données par des sous-ensembles flous (non nécessairement normalisés). On suppose que l'extension cylindrique est une jointure sans perte. Alors, la boucle de propagation conduit à un

**sur-tolérancement** des entrées de conception.

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de (5.12).

Fin de la démonstration

Dans un second temps, on suppose que les fonctions d'appartenance sont normalisées et que l'extension cylindrique **n'est pas une jointure sans perte**. En d'autres termes,  $\otimes_i$  et  $\pi_i$  ne sont plus réciproques et on en déduit

$$f_{\pi_1(A) \times \dots \times \pi_r(A)} \geq f_A. \quad (5.13)$$

Par propagation, on trouve

$$\begin{aligned} f_{U_D} &= \otimes_i \circ \pi_i (f_{U_I}) \\ &\stackrel{(5.13)}{\geq} f_{U_I}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

et par conséquent

$$f_{Y_{D_i}} = \pi_{Y_i}(\psi[f_{U_D}]) \stackrel{(5.14)}{\geq} \pi_{Y_i}(\psi[f_{U_I}]) = f_{Y_{I_i}}. \quad (5.15)$$

On résume cette constatation par le résultat suivant.

**Proposition.** Considérons un système décrit par le difféomorphisme  $\psi : u \mapsto y$  et des spécifications données par des sous-ensembles flous. On suppose que les fonctions d'appartenance sont normalisées. Alors, la boucle de propagation conduit à un **sous-tolérancement** des entrées de conception.

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de (5.15).

Fin de la démonstration

## 5.5 Exemple : synthèse de tolérance sur une suspension de véhicule automobile.

Afin d'illustrer notre méthodologie, nous considérons l'exemple d'un véhicule en situation de freinage en ligne droite (figure 5.4).

### Description du système :

Le modèle considéré est un modèle de véhicule dans un plan médian vertical. Il est constitué d'une masse suspendue (châssis) et des masses non-suspendues (essieux avant et arrière) (figure 5.4). Les mobilités du véhicule sont le déplacement longitudinal, le pompage et le tangage. Chaque essieu est composé d'une roue équivalente et d'une suspension supposée active et agissant suivant un axe vertical uniquement. Le tangage du véhicule est supposé suffisamment petit pour considérer constantes les distances entre le centre de masse du châssis et les axes des suspensions. La route est plane et horizontale. Le véhicule commence la situation de freinage avec une vitesse initiale  $V_0$  donnée et une distribution constante de la décélération sur les roues avant et arrière est appliquée. Le véhicule est soumis à une décélération de  $0.8g$  et une répartition avant/arrière de  $100/38$  (exprimée en pourcentage de la décélération).

Chaque suspension est constituée de deux vérins hydrauliques, d'un ressort de suspension réalisé par un accumulateur hydropneumatique (sphères des suspensions), d'un amortisseur réalisé par une restriction hydraulique située entre les vérins et la sphère (figure 5.5).

Dans un contexte de confort, l'objectif de conception est ici la synthèse de tolérance de certains paramètres des suspensions pour répondre aux spécifications du cahier des charges. Les sorties spécifiées sont le pompage  $z$  et le tangage  $\varphi$  du véhicule. Les paramètres dont on cherche à déterminer les tolérances sont les diamètres des pistons  $d_{av}$  et  $d_{ar}$ . De plus, nous nous intéressons également aux variables efforts de suspension et vitesses de leur débattement.

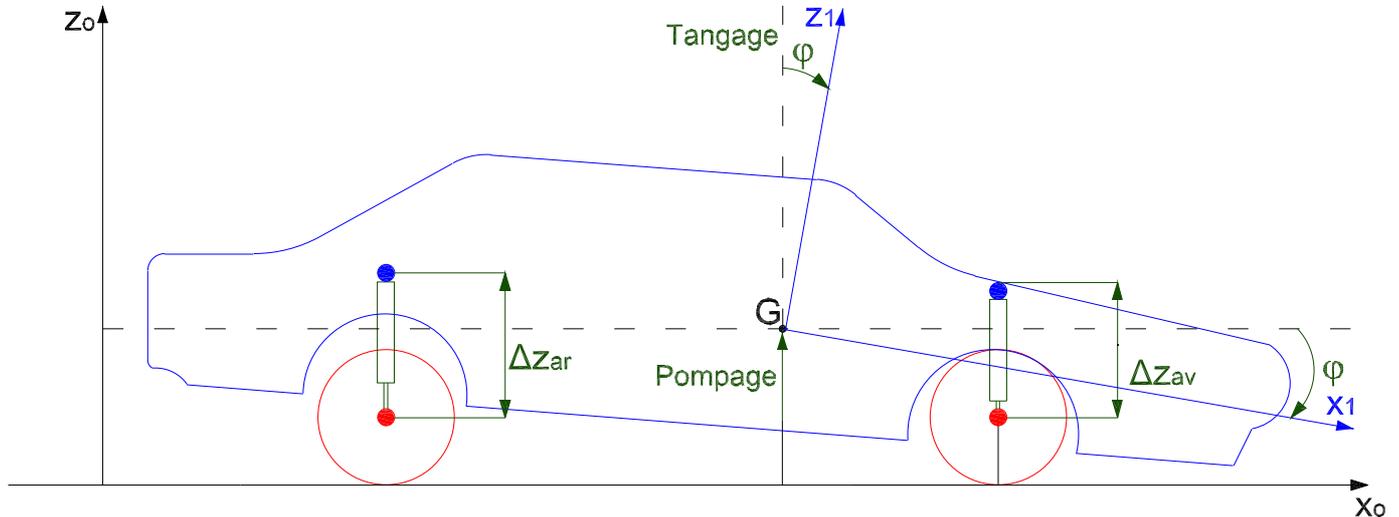


FIGURE 5.4 – Schéma du modèle de véhicule étudié.

**Paramètres du véhicule**

$M_c$	Masse suspendue (châssis)	1700	[kg]
$I_c$	Moment d'inertie de la masse suspendue	450	[kg.m <sup>2</sup> ]
$L_{av}$	Distance centre de masse/essieu avant	1	[m]
$L_{ar}$	Distance centre de masse/essieu arrière	1.7	[m]
$M_r$	Masse non-suspendue (roue)	33.7	[kg]
$k_{pav}$	Raideur verticale du pneumatique avant	44400	[N.m <sup>-1</sup> ]
$k_{par}$	Raideur verticale du pneumatique arrière	50000	[N.m <sup>-1</sup> ]
$b_{pav}$	Coefficient de frottement visqueux vertical du pneumatique avant	1348	[N/(m.s <sup>-1</sup> )]
$b_{par}$	Coefficient de frottement visqueux vertical du pneumatique arrière	1280	[N/(m.s <sup>-1</sup> )]
$V_{x0}$	Vitesse initiale du véhicule	36	[m.s <sup>-1</sup> ]
$z_0$	Pompage initial du véhicule	0.55	[m]
$\Delta z_{pav0}$	déplacement vertical initial de essieu avant	-0.24	[m]
$\Delta z_{par0}$	déplacement vertical initial de essieu arrière	-0.13	[m]

**Paramètres des suspensions**

$k_{sav}$	Raideur hydraulique équivalente de la suspension avant	$2.27 \times 10^{10}$	[Pa.m <sup>-3</sup> ]
$k_{sar}$	Raideur hydraulique équivalente de la suspension arrière	$3.36 \times 10^{10}$	[Pa.m <sup>-3</sup> ]
$b_{sav}$	Résistance hydraulique équivalente de la suspension avant	$5 \times 10^9$	[Pa/(m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )]
$b_{sar}$	Résistance hydraulique équivalente de la suspension arrière	$4.3 \times 10^9$	[Pa/(m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> )]
$V_{sav0}$	Volume hydraulique initial - suspension avant	$1.549 \times 10^{-3}$	[m <sup>3</sup> ]
$V_{sar0}$	Volume hydraulique initial - suspension arrière	$0.516 \times 10^{-3}$	[m <sup>3</sup> ]

Les débits volumiques  $Q_{ar}$  et  $Q_{av}$  sont les entrées du modèle et les vitesses de pompage et de tangage du véhicule ( $\dot{z}$ ,  $\dot{\varphi}$ ) sont les sorties du modèle. ( $F_{av}$ ,  $F_{ar}$ ) sont les efforts de suspension.

Le pompage  $z$  et le tangage  $\varphi$  sont contraints de suivre les réponses indicielles à des systèmes du deuxième ordre (figure 5.7).

Le véhicule est spécifié « confortable » si la variation de pompage en situation de freinage

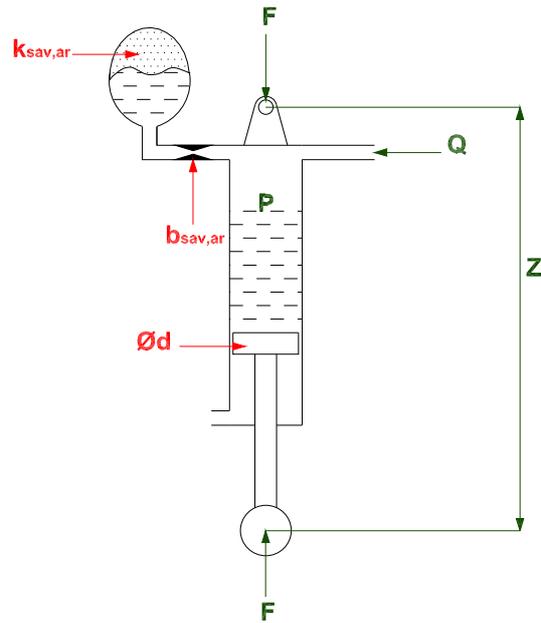


FIGURE 5.5 – Schéma d'une suspension active hydraulique.

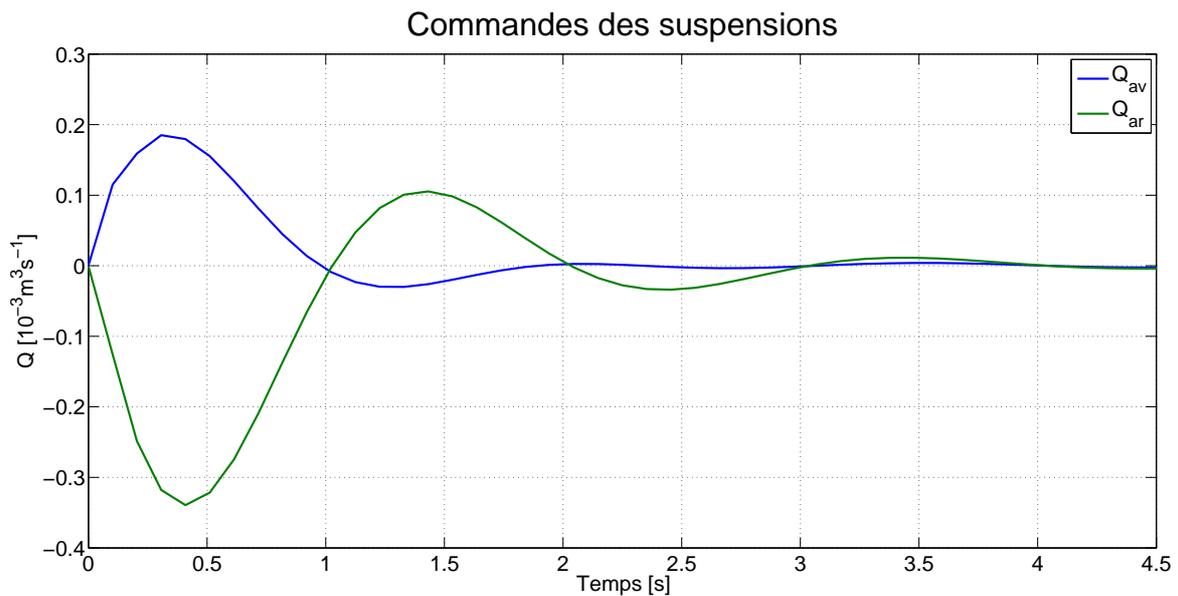


FIGURE 5.6 – Les débits volumiques spécifiés sur les deux suspensions.

ne dépasse pas 15% de la valeur instantanée spécifiée par sa trajectoire nominale. Le niveau de confort se réduit graduellement avec l'écart à la valeur nominale. Une spécification similaire est posée sur le tangage. Ces variations constituent des enveloppes autour des trajectoires nominales (figure 5.7).

Afin d'assurer la qualité de construction, il est souhaité que la grande majorité des véhicules produits ait leur pompage et leur tangage dans l'intervalle de 12% de la valeur nominale.

L'objectif maintenant est de déterminer les tolérances, issues des distributions sous forme

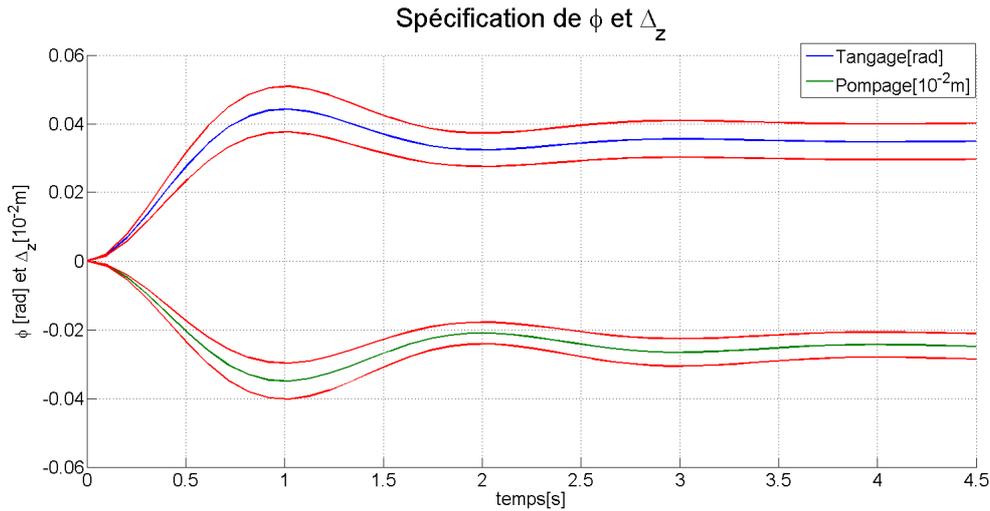


FIGURE 5.7 – Variations admissibles spécifiées autour des trajectoires nominales.

de FDP et de FA, sur les diamètres des pistons  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  des suspensions avant et arrière qui garantissent ces spécifications de confort.

Nous appliquons donc notre méthodologie en adoptant ici l'approche locale afin d'extraire également l'information sur les efforts et les vitesses de débattement des suspensions.

### 5.5.1 Étape 1 : Modélisation

Nous modélisons tout d'abord le système par un bond graph acausal. Ensuite, nous lui associons les incertitudes afin de construire les bond graphs probabiliste et flou.

#### Construction du modèle bond graph

La représentation bond graph acausale de ce modèle est donnée sur la figure 5.8.

Sur ce bond graph,  $\Delta \dot{z}_{av}$  et  $\Delta \dot{z}_{ar}$  représentent les vitesses de débattement des suspensions respectivement avant et arrière, et  $F_{av}$  et  $F_{ar}$ , les efforts de suspension. Les débits volumiques  $Q_{av}$  et  $Q_{ar}$  sont les entrées de commande, et les vitesses de pompage et de tangage du véhicule  $\dot{z}$  et  $\dot{\phi}$  sont les sorties spécifiées. Les diamètres des pistons  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  (éléments TF sur les représentations bond graph des suspensions avant et arrière) sont les paramètres faisant l'objet de la synthèse de tolérance.

#### Modélisation de l'incertitude

Le modèle bond graph acausal nous donne la structure du modèle bond graph probabiliste et du modèle bond graph flou. Il faut maintenant quantifier les incertitudes et les associer à ce modèle.

Le pompage  $z_s(t)$  et le tangage  $\phi_s(t)$  spécifiés, réponses indicielles à des systèmes du deuxième ordre en régime oscillatoire amorti, s'expriment :

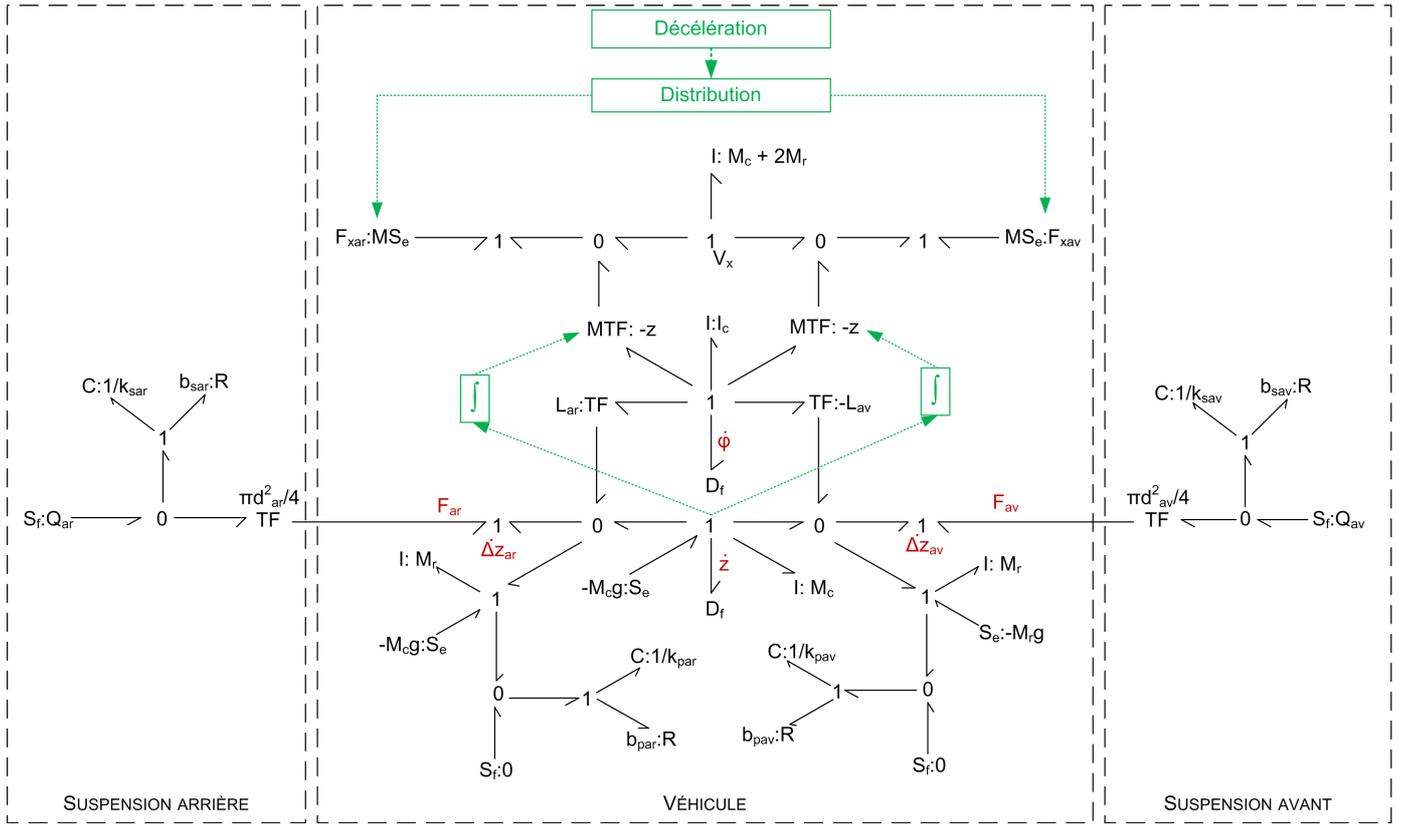


FIGURE 5.8 – Représentation bond graph acausale du modèle bicycle longitudinal du véhicule.

$$\begin{cases} z_s(t) = K_z \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \sin(\omega_{pz}t + \psi_z) \cdot e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \right) \\ \varphi_s(t) = K_\varphi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} \sin(\omega_{p\varphi}t + \psi_\varphi) \cdot e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi}t} \right) \end{cases} \quad (5.16)$$

où :

$$\begin{cases} \omega_{pz} = \omega_{nz} \sqrt{1 - \xi_z^2} \\ \omega_{p\varphi} = \omega_{n\varphi} \sqrt{1 - \xi_\varphi^2} \\ \cos(\psi_z) = \xi_z \\ \sin(\psi_z) = \sqrt{1 - \xi_z^2} \\ \cos(\psi_\varphi) = \xi_\varphi \\ \sin(\psi_\varphi) = \sqrt{1 - \xi_\varphi^2} \end{cases}$$

avec les gains statiques  $K_z = -2.5 \cdot 10^{-2} [m]$  et  $K_\varphi = 2^\circ [0.0349 \text{ rad}]$ , les facteurs d'amortissement  $\xi_z = 0.279$  et  $\xi_\varphi = 0.3864$ , et les pulsations propres non amorties  $\omega_{nz} = 1.0905 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_{n\varphi} = 1.13537 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Nous constatons que les incertitudes dans les spécifications sont données sur  $K_z$  et  $K_\varphi$  :

« Le véhicule est spécifié « confortable » si la variation de pompage en situation de freinage ne dépasse pas 15% de la valeur nominale. Le niveau de confort se réduit graduellement avec l'écart à la valeur nominale. Une spécification similaire est posée sur le tangage. »

L'incertitude est graduelle et porte sur une propriété subjective. Il est judicieux de la modéliser avec la logique floue. Nous spécifions donc deux nombres flous triangle symétriques dans l'intervalle de 15% de  $K_z$  et de  $K_\varphi$ .

$$\mu_{K_z} = \mathcal{T}(K_z, 0.15K_z), \quad \mu_{K_\varphi} = \mathcal{T}(K_\varphi, 0.15K_\varphi).$$

En associant ces fonctions d'appartenance à  $z_s$  et  $\varphi_s$ , nous avons les entrées du modèle bond graph flou.

Par ailleurs, « *il est souhaité que la grande majorité des véhicules produits ait leur pompage et leur tangage dans l'intervalle de 12% de la valeur nominale.* »

Les incertitudes ici portent sur un critère quantitatif. Ce sont donc des incertitudes aléatoires. Nous établissons alors un modèle bond graph probabiliste.

Nous quantifions les deux incertitudes sur  $K_z$  et  $K_\varphi$  par deux lois gaussiennes :

$$\phi_{K_z} = \mathcal{N}(K_z, 0.04K_z), \quad \phi_{K_\varphi} = \mathcal{N}(K_\varphi, 0.04K_\varphi).$$

Ces lois gaussiennes permettent de garantir que 99.73% des suspensions conçues répondront aux intervalles spécifiés de 12% des valeurs nominales pour les paramètres  $K_z$  et  $K_\varphi$ . La spécification de « grande majorité » sera alors vérifiée.

Ces incertitudes ne sont pas directement exploitables par le modèle bond graph. Elles affectent le modèle à travers  $z_s$  et  $\varphi_s$ .

### 5.5.2 Étape 2 : Adéquation

Nous considérons tout d'abord l'inversibilité et l'adéquation du modèle du véhicule.

L'analyse structurelle acausale de modèle bond graph de la figure 5.8 répertorie 8 lignes de puissance E/S entre les éléments TF portant les entrées de conception  $d_{av}, d_{ar}$  et les éléments Df portant les sorties, vitesses de pompage et de tangage du véhicule ( $\dot{z}, \dot{\varphi}$ ). Parmi toutes les combinaisons de ces lignes de puissance, il existe deux ensembles de lignes disjointes. La première condition du critère d'inversibilité 1 (page 33) est alors vérifiée.

La causalité préférentielle intégrale est ensuite affectée et permet d'obtenir le bond graph causal (figure 5.9).

L'analyse structurelle causale de cette représentation fournit 4 chemins causaux E/S chacun de longueur 2, et deux ensembles de chemins causaux E/S disjointes chacun de longueur 4 (longueur minimale). La seconde condition du critère d'inversibilité 1 (page 33) est alors vérifiée.

Enfin, la représentation bond graph bicausale est donnée sur la figure 5.10. Elle est obtenue à partir d'un des deux ensembles de chemins causaux E/S disjointes de longueur minimale égale à 4 d'une part, et de l'ensemble des lignes de puissance E/S disjointes associé d'autre part.

En vérifiant que la structure de jonction soit résoluble sur cet exemple (pas de boucle algébrique non résoluble), la dernière condition du critère d'inversibilité 1 (page 33) est alors vérifiée.

Nous constatons également que les chemins causaux E/S sur le bond graph bicausal sont d'ordre 2. Les sorties du modèle ont donc leur ordre d'essentialité respectivement égal à 2, ce qui

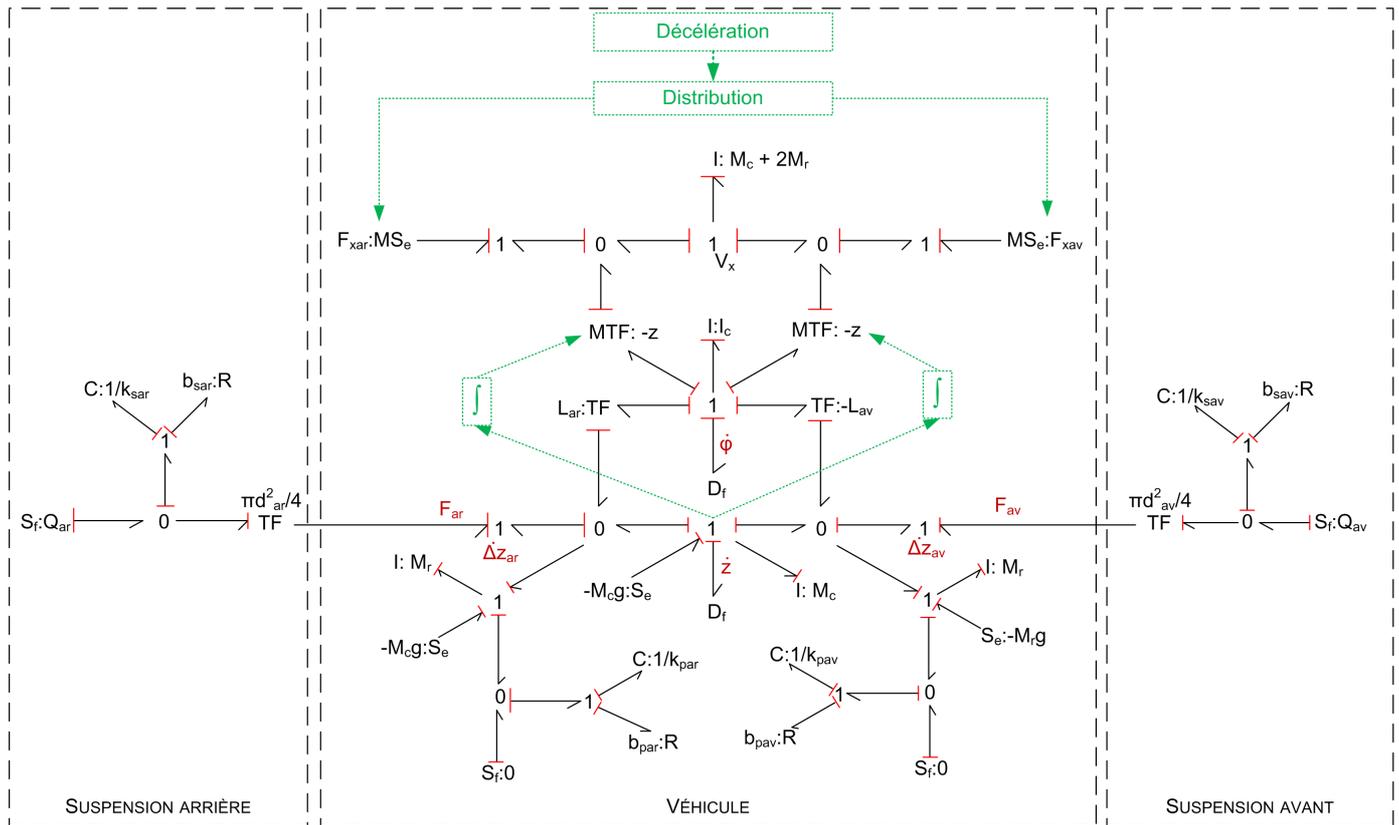


FIGURE 5.9 – Représentation bond graph causale du modèle du véhicule.

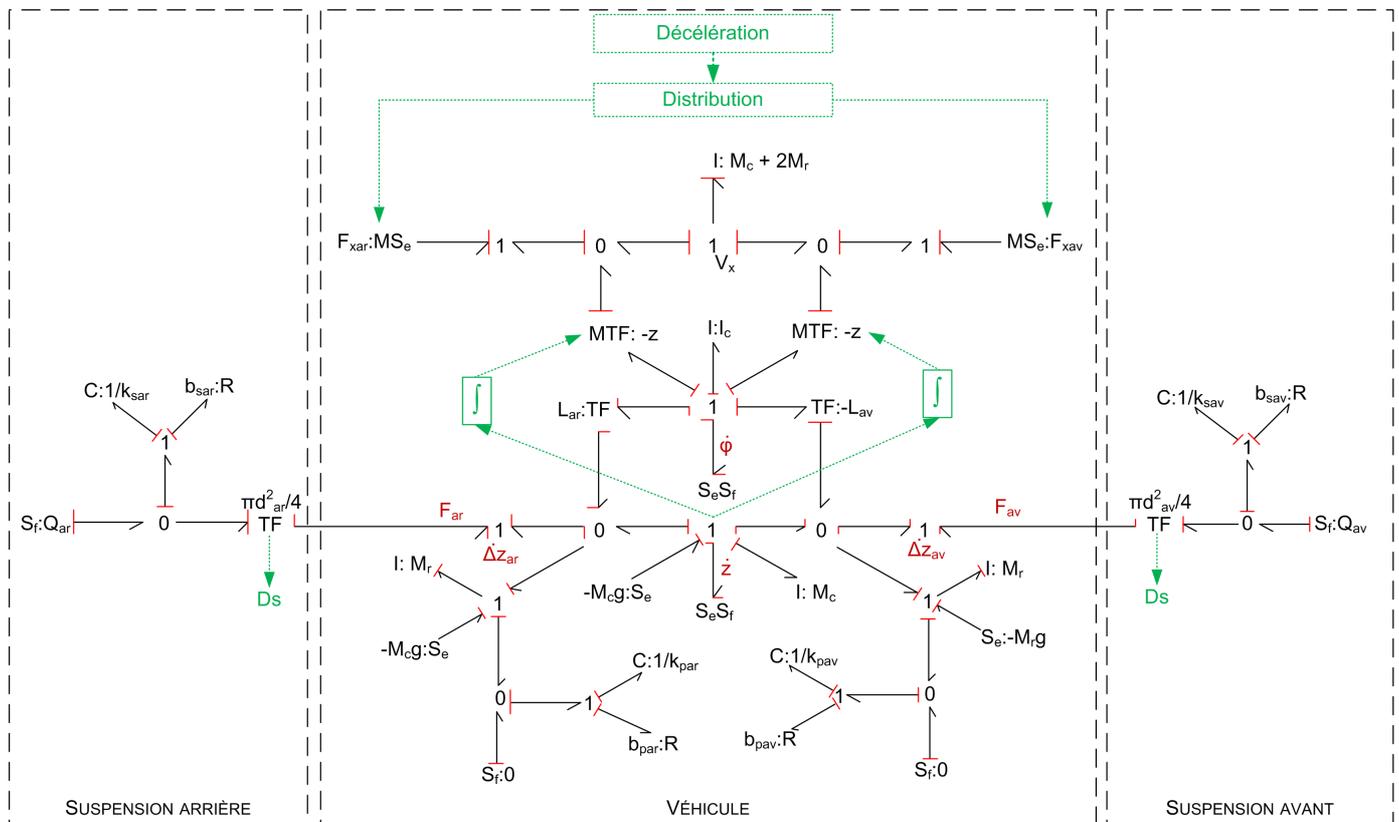


FIGURE 5.10 – Représentation bond graph bicausale du modèle du véhicule.

est en accord avec les spécifications données. Nous vérifions alors l'adéquation E/S avec structure du modèle.

En conclusion de cette phase, le modèle de conception du véhicule est validé par rapport aux couples d'entrées  $(d_{av}, d_{ar})$  et de sorties  $(\dot{z}, \dot{\varphi})$ .

### 5.5.3 Étape 3 : Inversion

Nous adoptons ici l'approche locale pour la propagation afin d'obtenir les informations sur les efforts des suspensions et les vitesses de leur débattement. Nous remontons tout d'abord de  $\dot{z}, \dot{\varphi}$  aux entrées de suspension et ensuite, aux éléments de transduction d'énergie  $TF$ .

Nous cherchons le modèle inverse entre  $\dot{z}, \dot{\varphi}$  et les variables de puissance entre les suspensions et le véhicule. En exploitant le modèle bond graph bicausal de la figure 5.10 et de l'équation 5.16, nous obtenons le modèle inverse d'ordre minimal du véhicule. Le calcul détaillé pour ce modèle inverse est donné dans l'annexe D.

Les équations 5.17 expriment les efforts et les vitesses de débattement des suspensions en fonction de  $K_z$  et  $K_\varphi$ .

$$\begin{cases} F_{avs} = H_{F_{av}}(K_z, K_\varphi, t) \\ F_{ars} = H_{F_{ar}}(K_z, K_\varphi, t) \\ \Delta \dot{z}_{avs} = H_{\Delta \dot{z}_{av}}(K_z, K_\varphi, t) \\ \Delta \dot{z}_{ars} = H_{\Delta \dot{z}_{ar}}(K_z, K_\varphi, t) \end{cases} \quad (5.17)$$

Nous cherchons également le modèle inverse de la suspension. En exploitant le modèle bond graph bicausal dans la figure 5.10, nous obtenons :

$$\begin{cases} m_{av} = \frac{(k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av}) + \sqrt{\Delta_{sav}}}{2F_{av}} \\ m_{ar} = \frac{(k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar}) - \sqrt{\Delta_{sar}}}{2F_{ar}} \end{cases} \quad (5.18)$$

où

$$\begin{cases} \Delta_{sav} = \left( k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av} \right)^2 - 4 \left( k_{sav} \int_0^t \Delta \dot{z}_{av} d\tau + b_{sav} \Delta \dot{z}_{av} \right) F_{av} \\ \Delta_{sar} = \left( k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar} \right)^2 - 4 \left( k_{sar} \int_0^t \Delta \dot{z}_{ar} d\tau + b_{sar} \Delta \dot{z}_{ar} \right) F_{ar} \end{cases} \quad (5.19)$$

$V_{sav0}$  et  $V_{sar0}$  sont les conditions initiales des déplacements généralisés des éléments  $C$ .

Pour simplifier l'écriture, nous mettons l'équation 5.18 sous la forme :

$$\begin{cases} m_{avs} = H_{m_{av}}(F_{avs}, \Delta \dot{z}_{avs}, t) \\ m_{ars} = H_{m_{ar}}(F_{ars}, \Delta \dot{z}_{ars}, t) \end{cases} \quad (5.20)$$

Les deux systèmes d'équations 5.17 et 5.20 définissent le modèle inverse du système permettant la remontée de  $K_z$  et  $K_\varphi$  aux éléments de transduction d'énergie  $TF$  dans les modèles de suspension.

### 5.5.4 Étape 4 : Propagation

Nous utilisons ici l'approche locale. Nous propageons tout d'abord les incertitudes sur  $K_z$  et  $K_\varphi$  à  $F_{av}, F_{ar}, \Delta\dot{z}_{av}, \Delta\dot{z}_{ar}$ , puis, de  $F_{av}, F_{ar}, \Delta\dot{z}_{av}, \Delta\dot{z}_{ar}$  à  $m_{av}, m_{ar}$ .

#### Propagation des fonctions d'appartenance

Les fonctions d'appartenance des couples  $(F_{av}, \dot{\Delta}_{av})$  et  $(F_{ar}, \dot{\Delta}_{ar})$  sont déduites en appliquant le principe d'extension sur l'équation 5.17.

$$\begin{cases} \mu_{F_{av} \times \dot{\Delta}_{av}}(F_{av}, \dot{\Delta}_{av}, t) = \sup_{\{(K_z, K_\varphi)/F_{av}=H_{F_{av}}(K_z, K_\varphi, t), \Delta\dot{z}_{av}=H_{\Delta\dot{z}_{av}}(K_z, K_\varphi, t)\}} \mu_{K_z \times K_\varphi}(K_z, K_\varphi, t) \\ \mu_{F_{ar} \times \dot{\Delta}_{ar}}(F_{ar}, \dot{\Delta}_{ar}, t) = \sup_{\{(K_z, K_\varphi)/F_{ar}=H_{F_{ar}}(K_z, K_\varphi, t), \Delta\dot{z}_{ar}=H_{\Delta\dot{z}_{ar}}(K_z, K_\varphi, t)\}} \mu_{K_z \times K_\varphi}(K_z, K_\varphi, t) \end{cases} \quad (5.21)$$

Les fonctions d'appartenance des couples (effort, flux) au niveau des suspensions sont données figures 5.11 et 5.12.

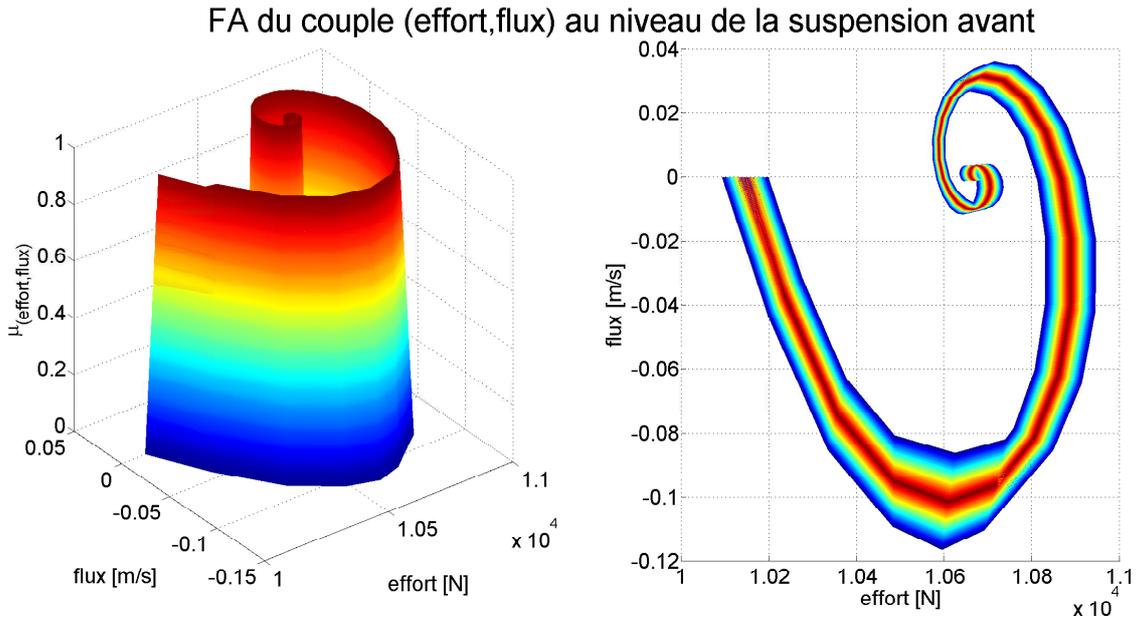
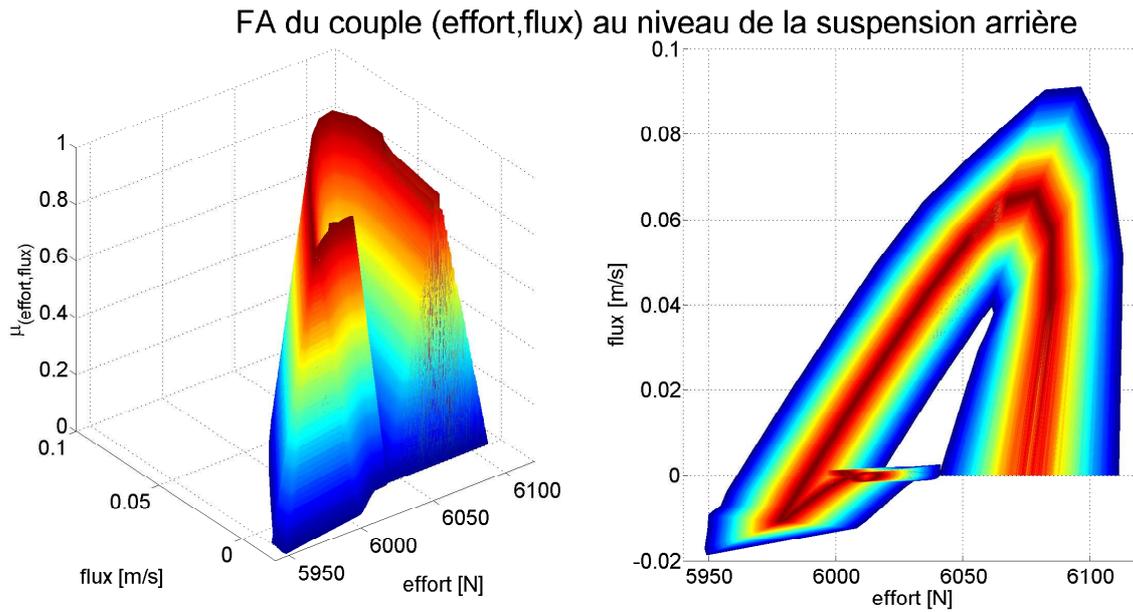


FIGURE 5.11 – Fonction d'appartenance de  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av})$ .

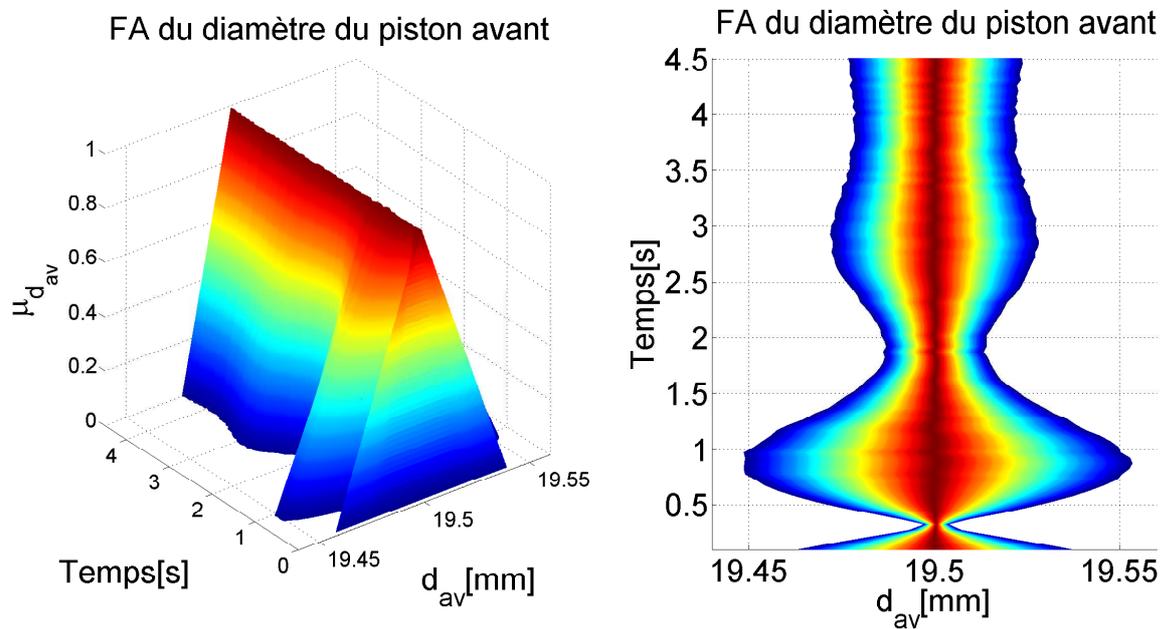
Nous propageons ensuite les fonctions d'appartenance de  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av})$  et  $(F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar})$  à  $m_{av}, m_{ar}$  en utilisant le modèle inverse 5.20.

$$\begin{cases} \mu_{m_{av}}(m_{av}, t) = \sup_{\{(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av}) \in \mathbf{F}_{av} \times \mathbf{\Delta\dot{z}_{av}}, m_{av}=H_{m_{av}}(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av}, t)\}} \mu_{F_{av} \times \dot{\Delta}_{av}}(F_{av}, \dot{\Delta}_{av}, t) \\ \mu_{m_{ar}}(m_{ar}, t) = \sup_{\{(F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}) \in \mathbf{F}_{ar} \times \mathbf{\Delta\dot{z}_{ar}}, m_{ar}=H_{m_{ar}}(F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}, t)\}} \mu_{F_{ar} \times \dot{\Delta}_{ar}}(F_{ar}, \dot{\Delta}_{ar}, t) \end{cases} \quad (5.22)$$

Le diamètre du piston ne peut être que positif. Les fonctions d'appartenance de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  sont directement déduites à partir de  $\mu_{m_{av}}$  et  $\mu_{m_{ar}}$ .

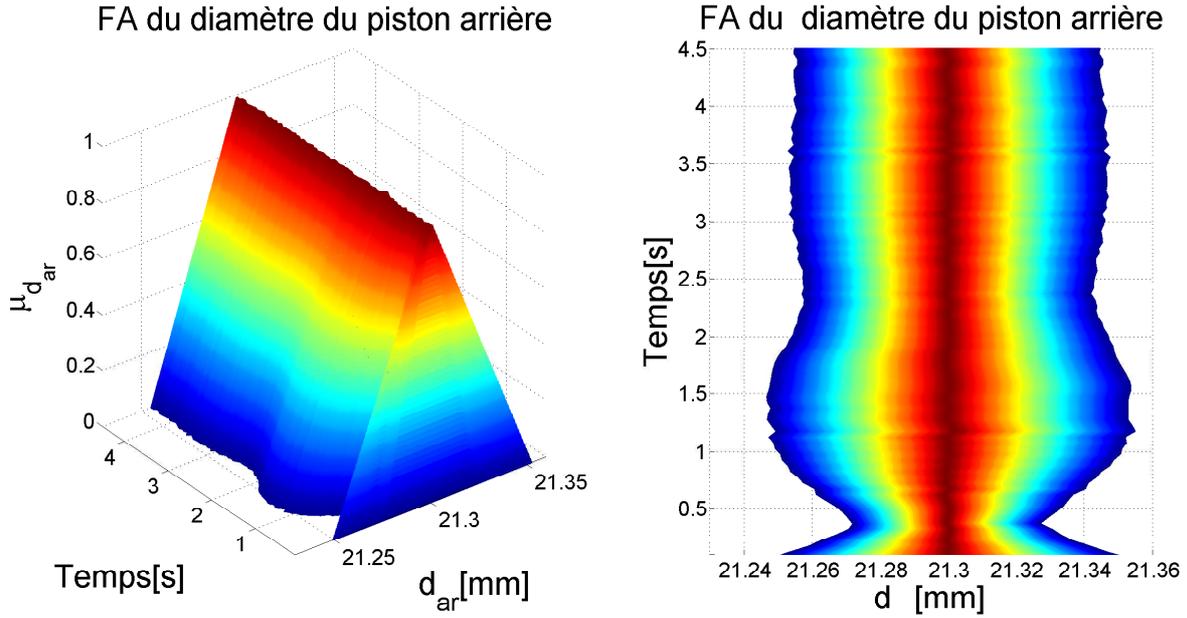
FIGURE 5.12 – Fonction d'appartenance de  $(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar})$ .

$$\begin{cases} \mu_{d_{av}}(d_{av}, t) = \mu_{m_{av}}\left(\frac{\pi d_{av}^2}{4}, t\right) \\ \mu_{d_{ar}}(d_{ar}, t) = \mu_{m_{ar}}\left(\frac{\pi d_{ar}^2}{4}, t\right) \end{cases} \quad (5.23)$$

FIGURE 5.13 – Fonction d'appartenance de  $d_{av}$ .

### Propagation des FDP

Nous propageons les FDP de  $K_z, K_\varphi$  à  $F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}$ , et puis à  $F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}$ . Nous calculons tout d'abord la FDP conjointe de  $K_z$  et  $K_\varphi$ .

FIGURE 5.14 – Fonction d'appartenance de  $d_{ar}$ .

$$\phi_{\mathbf{K}_z, \mathbf{K}_\varphi}(K_z, K_\varphi) = \phi_{\mathbf{K}_z}(K_z) \phi_{\mathbf{K}_\varphi}(K_\varphi) \quad (5.24)$$

La FDP conjointe de  $(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av})$  est ensuite calculée.

$$\phi_{\mathbf{F}_{av}, \Delta \dot{z}_{av}}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t) = \frac{\phi_{(\mathbf{K}_z, \mathbf{K}_\varphi)}(H_{av}^{-1}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t))}{|J_{H_{av}}(H_{av}^{-1}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t))|} \quad (5.25)$$

où :

$$H_{av} = \begin{bmatrix} H_{F_{av}} \\ H_{\Delta \dot{z}_{av}} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

La FDP de  $(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av})$  est donnée sur la figure 5.15.

La valeur de la FDP quand  $t$  tend vers 0 est beaucoup plus grande que pour le reste de la FDP. Cela rend une partie de la surface « illisible ». Pour mieux observer le reste de la FDP, nous commençons le tracé un peu plus tard en temps (à 0.4s) sur la figure 5.16.

À partir de l'équation 5.25, nous pouvons également déduire les FDP de  $F_{av}$  et  $\Delta \dot{z}_{av}$ .

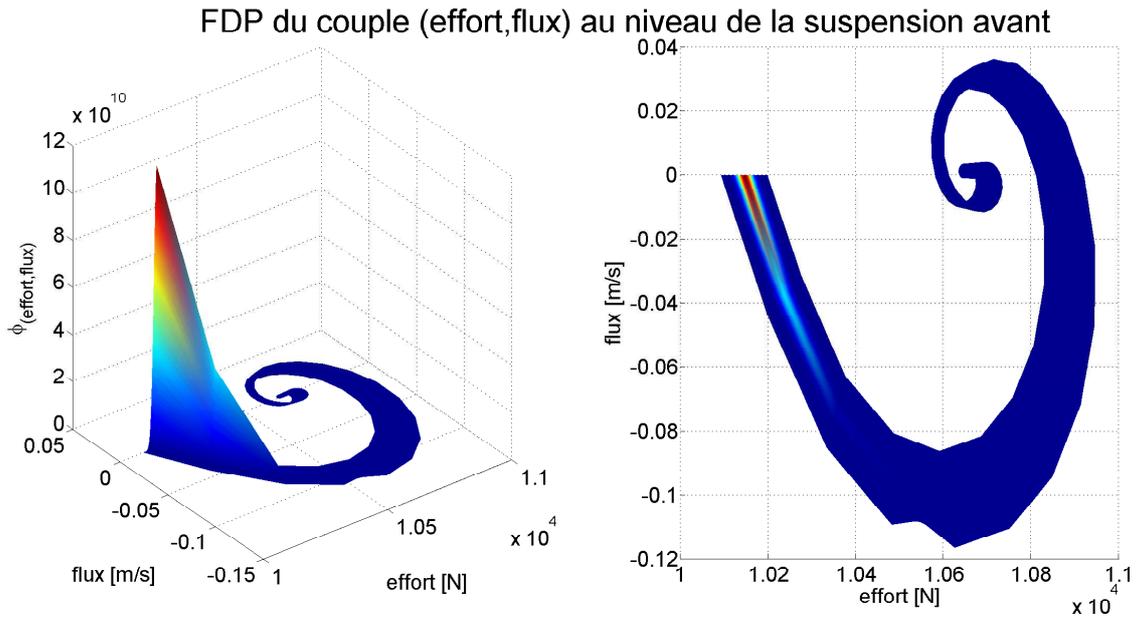
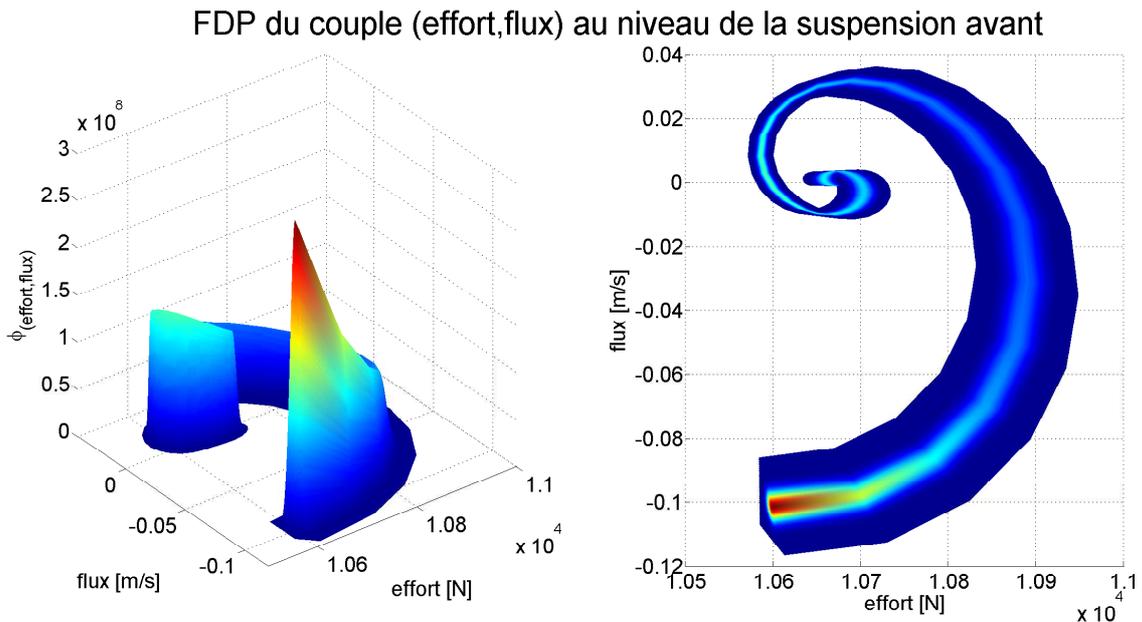
$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{F}_{av}}(F_{av}, t) = \int_{\Omega_{\Delta \dot{z}_{av}}} \phi_{\mathbf{F}_{av}, \Delta \dot{z}_{av}}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t) d\Delta \dot{z}_{av} \\ \phi_{\Delta \dot{z}_{av}}(\Delta \dot{z}_{av}, t) = \int_{\Omega_{F_{av}}} \phi_{\mathbf{F}_{av}, \Delta \dot{z}_{av}}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t) dF_{av} \end{cases} \quad (5.27)$$

De la même manière, la FDP conjointe de  $F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}$  est également calculée.

$$\phi_{(\mathbf{F}_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar})}(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t) = \frac{\phi_{(\mathbf{K}_z, \mathbf{K}_\varphi)}(H_{ar}^{-1}(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t))}{|J_{H_{ar}}(H_{ar}^{-1}(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t))|} \quad (5.28)$$

où :

$$H_{ar} = \begin{bmatrix} H_{F_{ar}} \\ H_{\Delta \dot{z}_{ar}} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

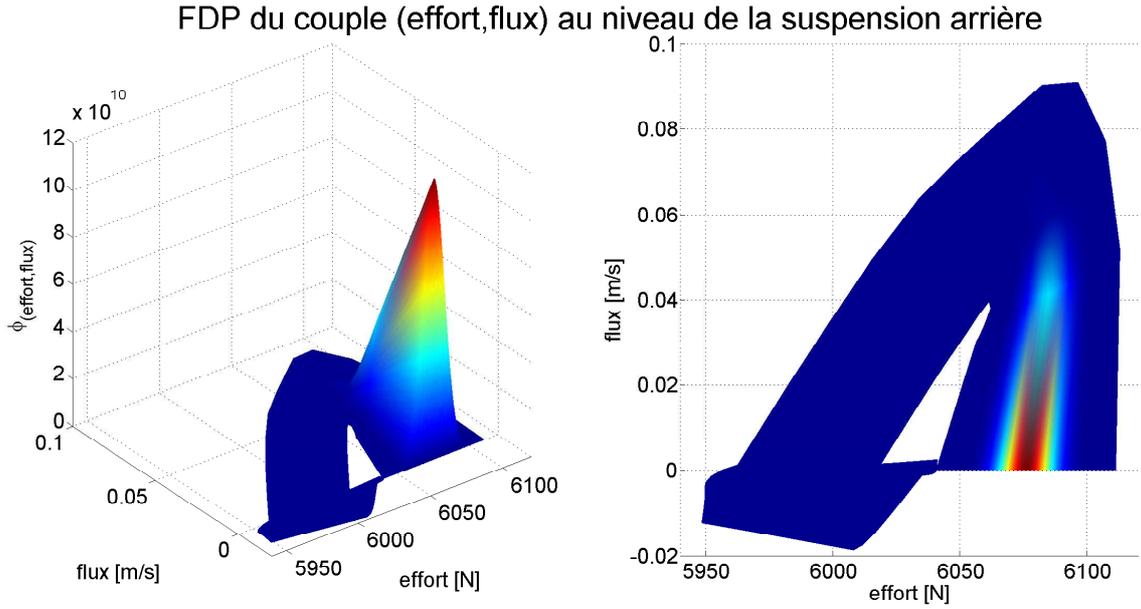
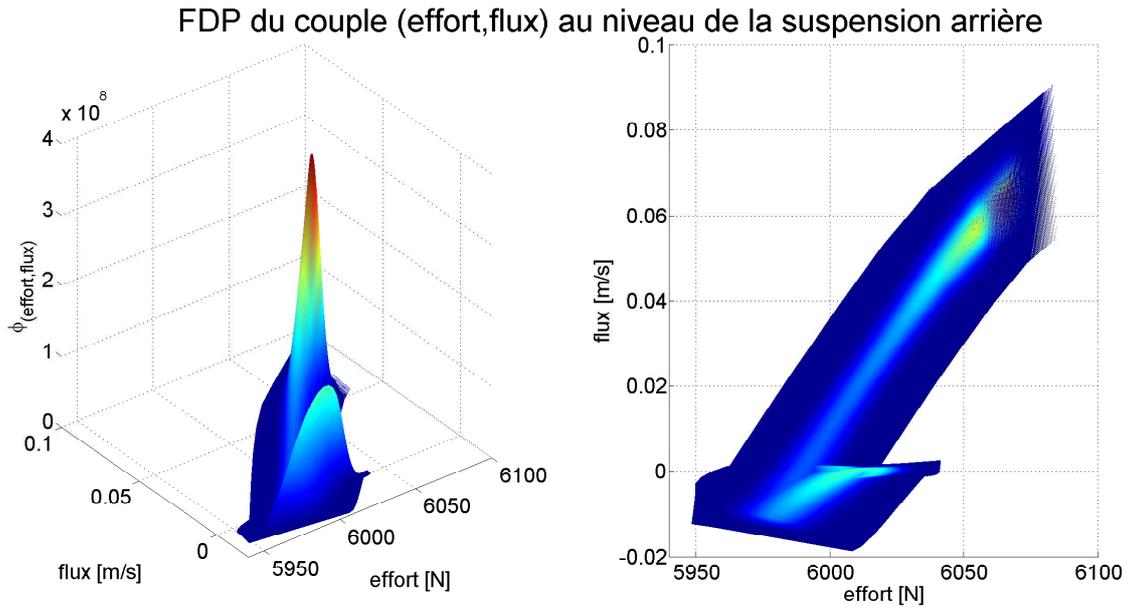
FIGURE 5.15 – FDP de  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av})$ .FIGURE 5.16 – FDP de  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{ar})$ .

La FDP de  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av})$  est donnée sur les figures 5.17 et 5.18 (à partir de 0.4s).

À partir de l'équation 5.28, nous pouvons également déduire les FDP de  $F_{ar}$  et  $\Delta\dot{z}_{ar}$ .

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{F}_{ar}}(F_{ar}, t) = \int_{\Omega\Delta\dot{z}_{ar}} \phi_{(\mathbf{F}_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar})}(F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}, t) d\Delta\dot{z}_{ar} \\ \phi_{\Delta\dot{z}_{ar}}(\Delta\dot{z}_{ar}, t) = \int_{\Omega F_{ar}} \phi_{(\mathbf{F}_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar})}(F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}, t) dF_{ar} \end{cases} \quad (5.30)$$

En utilisant l'équation 5.20, nous propageons ces FDP à  $m_{av}$  et  $m_{ar}$ . Pour cela, nous ajoutons deux variables fictives  $\Delta\dot{z}_{av}$  et  $\Delta\dot{z}_{ar}$  pour équilibrer les dimensions des vecteurs  $[m_{av}, \Delta\dot{z}_{av}]^T$  et  $[F_{av}, \Delta\dot{z}_{av}]^T$ , et  $[m_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}]^T$  et  $[F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar}]^T$ .

FIGURE 5.17 – FDP de  $(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar})$ .FIGURE 5.18 – FDP de  $(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar})$ .

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}_{av}, \Delta \dot{\mathbf{z}}_{av}}(m_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t) = \frac{\phi_{\mathbf{F}_{av}, \Delta \dot{\mathbf{z}}_{av}}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t)}{|J_{H_{m_{av}}}(F_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t)|} \\ \phi_{\mathbf{m}_{ar}, \Delta \dot{\mathbf{z}}_{ar}}(m_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t) = \frac{\phi_{\mathbf{F}_{ar}, \Delta \dot{\mathbf{z}}_{ar}}(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t)}{|J_{H_{m_{ar}}}(F_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t)|} \end{cases} \quad (5.31)$$

Les FDP de  $m_{av}$  et  $m_{ar}$  sont ensuite déduites :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}_{av}}(m_{av}, t) = \int_{\Omega \Delta \dot{z}_{av}} \phi_{\mathbf{m}_{av}, \Delta \dot{z}_{ar}}(m_{av}, \Delta \dot{z}_{av}, t) d\Delta \dot{z}_{av} \\ \phi_{\mathbf{m}_{ar}}(m_{ar}, t) = \int_{\Omega \Delta \dot{z}_{ar}} \phi_{\mathbf{m}_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}}(m_{ar}, \Delta \dot{z}_{ar}, t) d\Delta \dot{z}_{ar} \end{cases} \quad (5.32)$$

Les FDP de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  sont directement déduites de  $\phi_{\mathbf{m}_{av}}$  et  $\phi_{\mathbf{m}_{ar}}$  :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{d}_{av}}(d_{av}, t) = \frac{\phi_{\mathbf{m}_{av}}(\frac{\pi d_{av}^2}{4}, t)}{\pi d_{av}} \\ \phi_{\mathbf{d}_{ar}}(d_{ar}, t) = \frac{\phi_{\mathbf{m}_{ar}}(\frac{\pi d_{ar}^2}{4}, t)}{\frac{\pi d_{ar}}{2}} \end{cases} \quad (5.33)$$

Ces FDP sont données sur les figures 5.19 et 5.20.

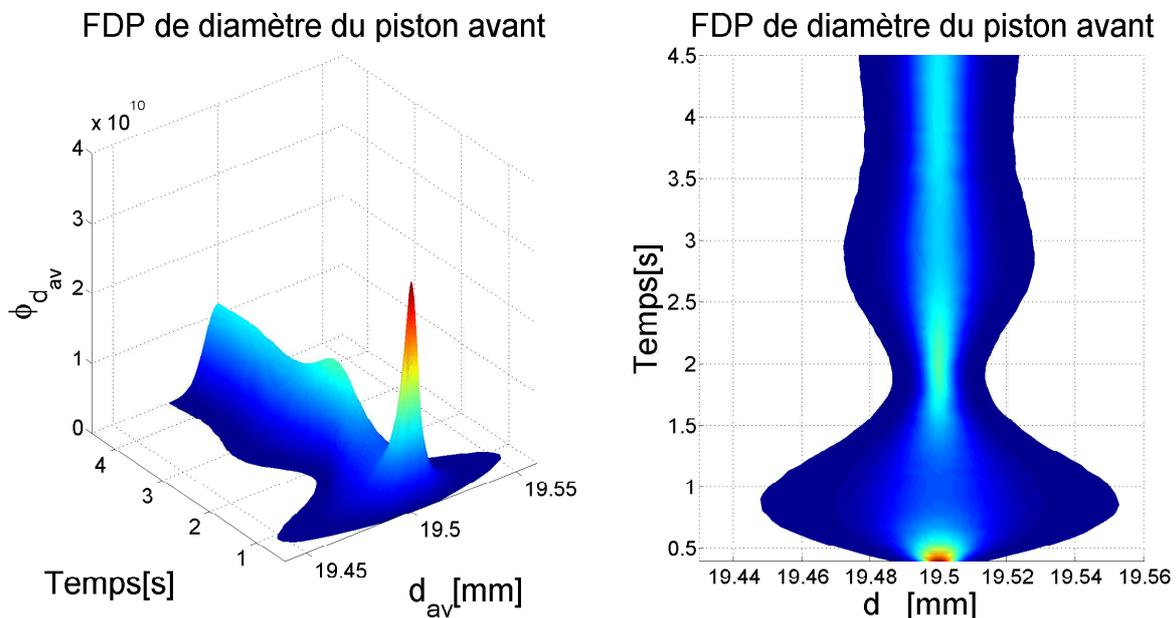


FIGURE 5.19 – FDP de  $d_{av}$ .

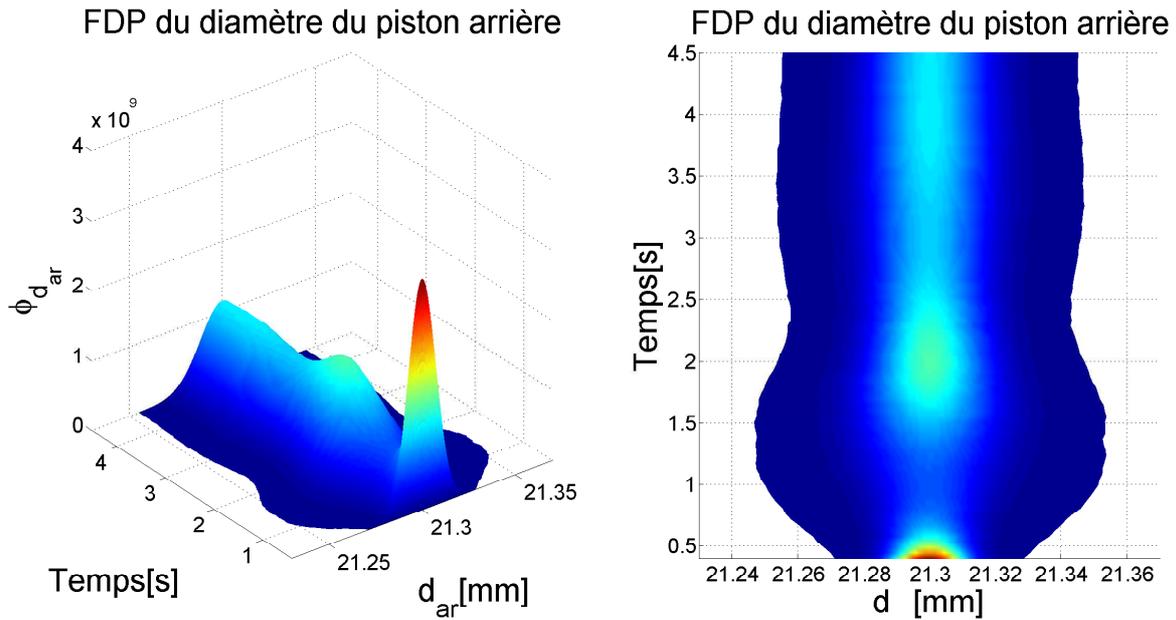
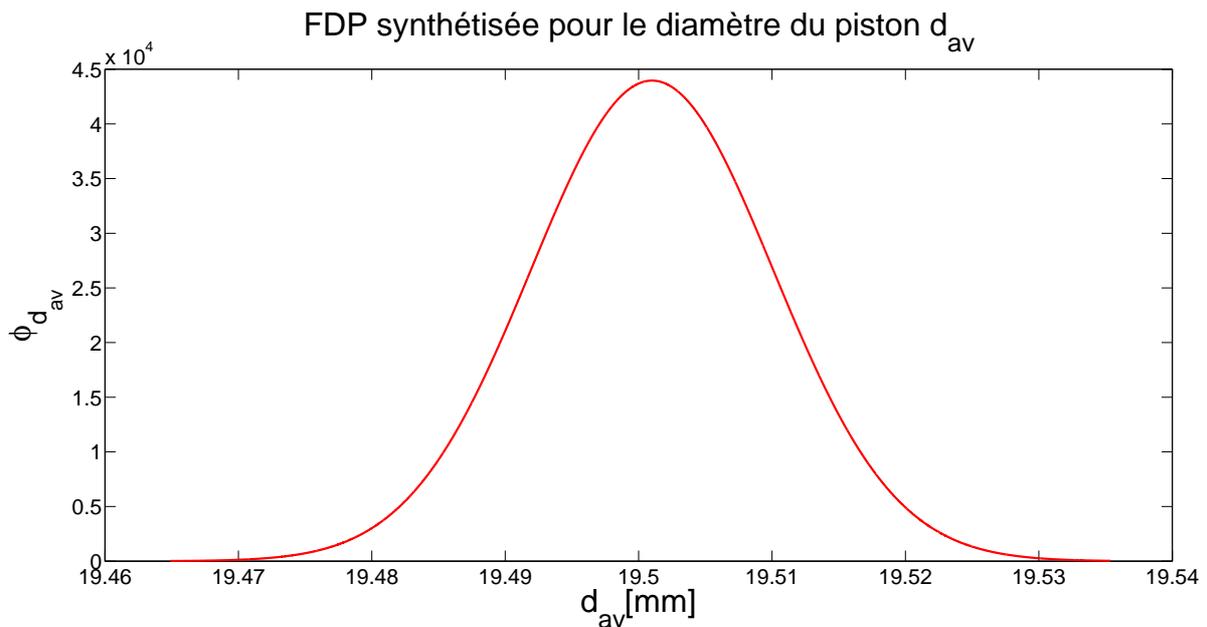
### 5.5.5 Étape 5 : Synthèse de tolérance

Nous exploitons les résultats obtenus avec les propagations pour synthétiser les tolérances de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$ . Nous commençons avec les fonctions d'appartenance. En projetant ces fonctions d'appartenance sur les plans  $(d_{av}, t)$  et  $(d_{ar}, t)$ , nous obtenons leur support.

Afin de synthétiser les tolérances de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$ , nous prenons un intervalle commun (instant  $t = 0.4s$ ) des supports de  $\mu_{d_{av}}$  et  $\mu_{d_{ar}}$  (figures 5.13 et 5.14).

La tolérance synthétisée de  $d_{av}$  est donc :  $[19.47, 19.53][mm]$ . La tolérance synthétisée de  $d_{ar}$  est :  $[21.27, 21.38][mm]$ .

Nous prenons les FDP de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  obtenues au même instant  $t = 0.4s$  (correspondant avec les FA qu'on a choisies). Nous extrayons les espérances et les variances de ces FDP. Les distributions de  $d_{av}$  et  $d_{ar}$  sont alors synthétisées comme des lois gaussiennes prenant des mêmes espérances et variances. Ces distributions sont données sur les figures 5.21 et 5.22.

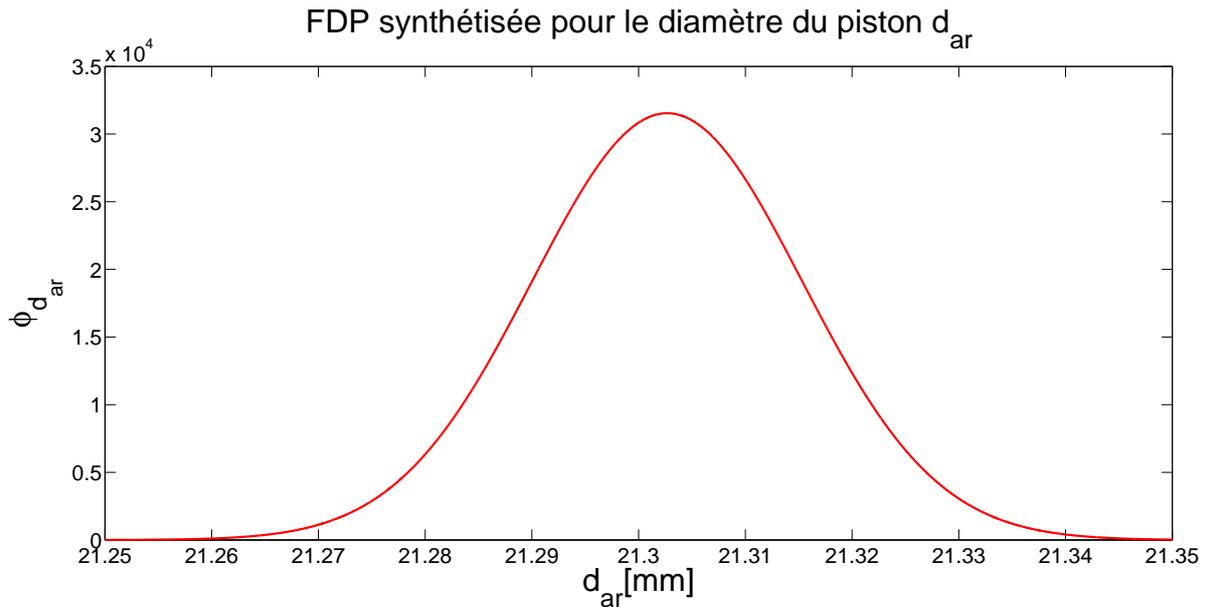
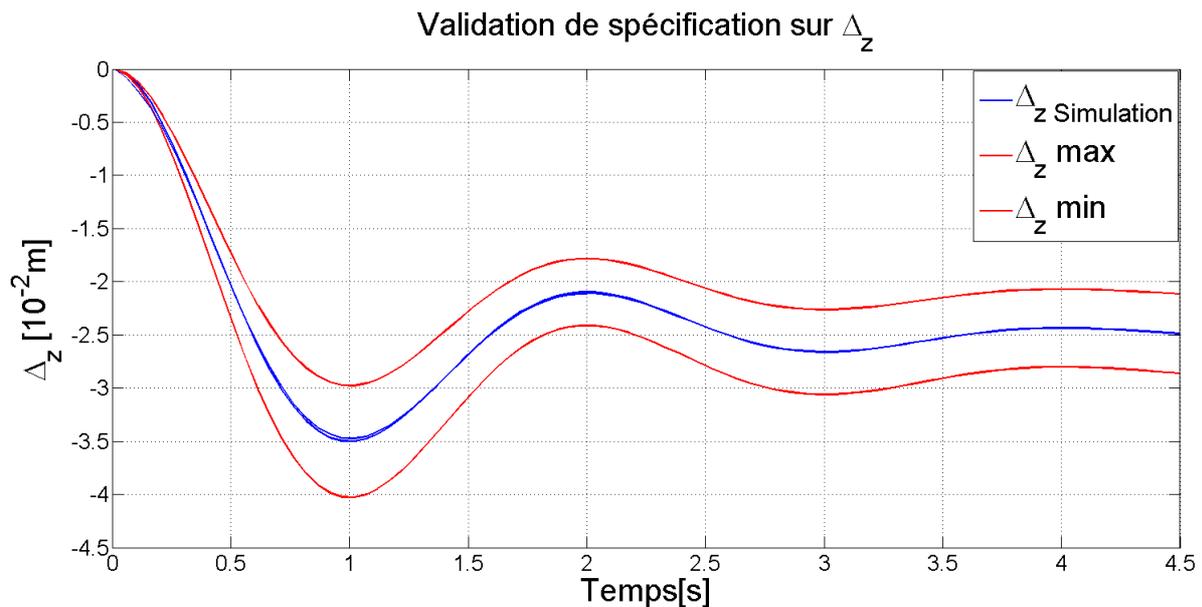
FIGURE 5.20 – FDP de  $d_{ar}$ .FIGURE 5.21 – FDP synthétisée pour  $d_{av}$ .

### 5.5.6 Validation de la méthodologie sur l'exemple

Conformément aux tolérances synthétisées et les FDP, nous générons des valeurs échantillonnées des paramètres de conception  $d_{av}$  et  $d_{ar}$ . Nous réinjectons ensuite cet ensemble de valeurs dans le modèle direct. Les simulations permettent de comparer les résultats en sortie avec les spécifications requises.

Les trajectoires de  $\Delta_z$  et  $\varphi$  sont alors données sur les figures 5.23 et 5.24.

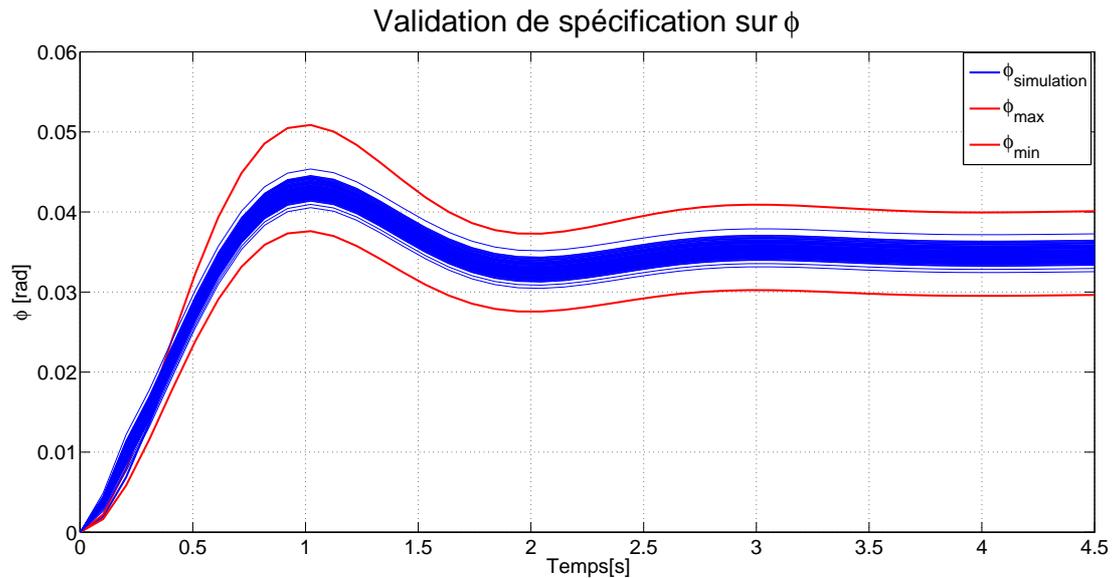
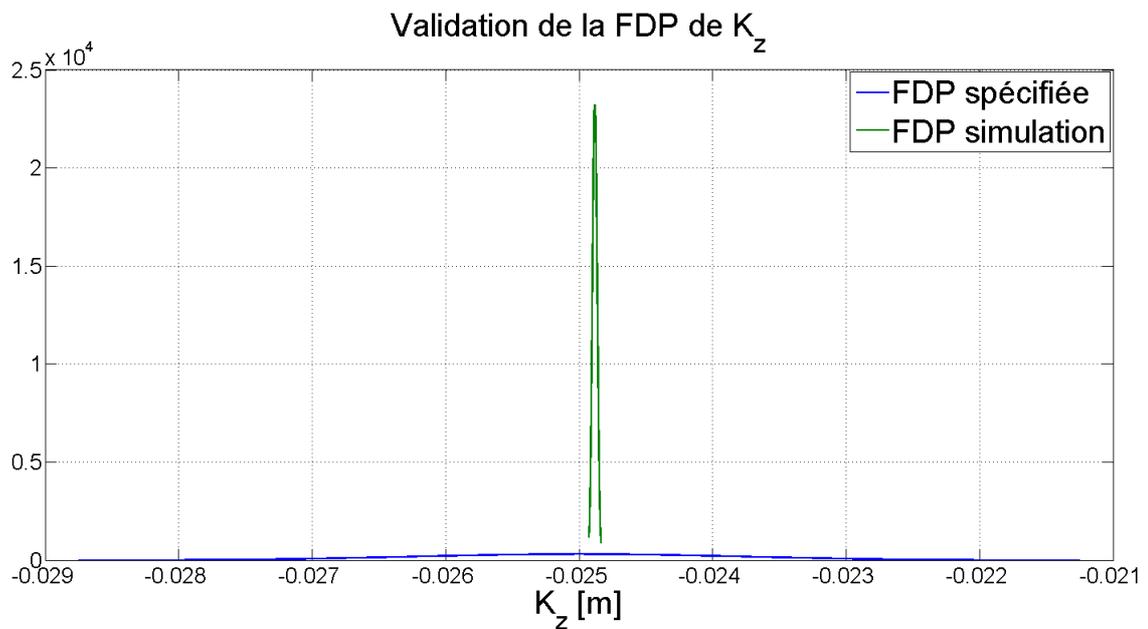
Les trajectoires obtenues sortent de l'enveloppe pendant une petite période au début de la simulation parce que nous n'avons pas considéré de variation sur les coefficients d'amortissement et les pulsations propres non amorties. Elles reviennent ensuite dans l'enveloppe et y restent en

FIGURE 5.22 – FDP synthétisée pour  $d_{ar}$ .FIGURE 5.23 – Validation de spécification sur  $\Delta_z$ .

régime permanent. Les spécifications de  $K_z$  et  $K_\varphi$  sont alors vérifiées.

Les FDP des  $K_z$  et  $K_\varphi$  sont alors déterminées à partir de la dispersion des échantillons des résultats de simulation obtenus sur le modèle direct. Comme les trajectoires simulées atteignent la trajectoire nominale en régime permanent, la FDP des échantillons simulée est beaucoup plus concentrées sur la valeur nominale (figures 5.25 et 5.26).

Nous pouvons alors valider les tolérances synthétisées pour  $d_{ar}$  et  $d_{av}$ .

FIGURE 5.24 – Validation de spécification sur  $\varphi$ .FIGURE 5.25 – Validation de la FDP de  $\Delta_z$ .

## 5.6 Conclusion

Afin d'étendre la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses à des problèmes de synthèse de tolérance en présence d'incertitudes, nous avons proposé dans ce chapitre une méthodologie prenant en compte les deux grandes classes d'incertitudes dans un système mécatronique : l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique.

La méthodologie se compose de 5 étapes :

1. **Modélisation** : Construire le bond graph acausal du système et modéliser les incertitudes dans le cahier des charges en FDP et en sous-ensembles flous afin d'établir les modèles bond graph probabiliste et flou.

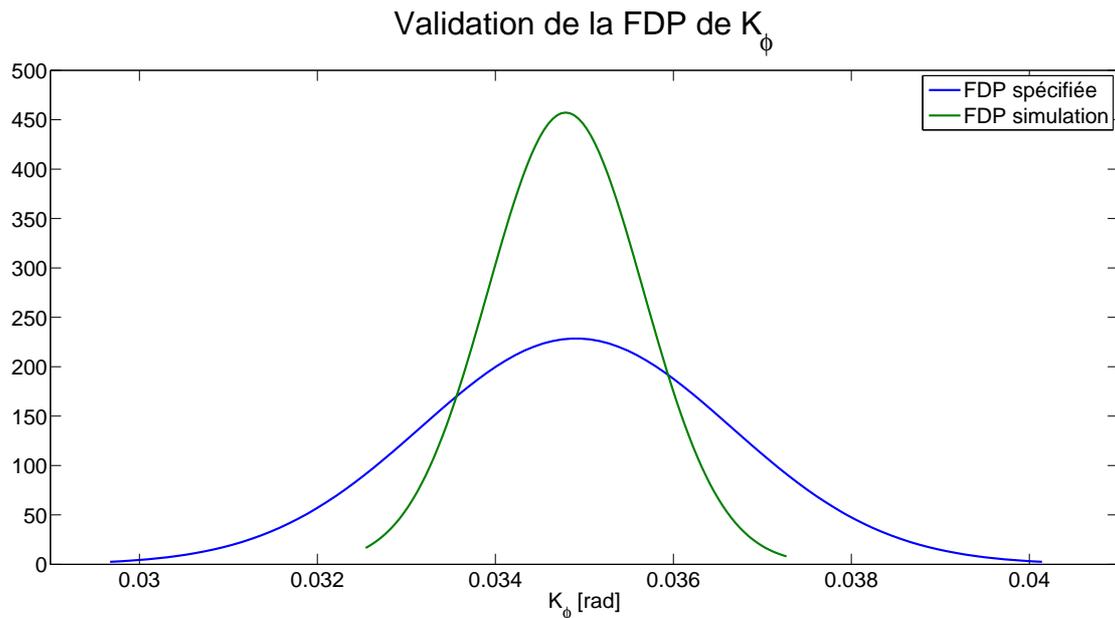


FIGURE 5.26 – Validation de la FDP de  $\varphi$ .

2. **Adéquation** : Effectuer les tests de l'inversibilité du modèle bond graph et de l'adéquation des spécifications basées sur l'analyse structurelle du modèle bond graph.
3. **Inversion du modèle** : Cette étape consiste en l'inversion du modèle bond graph.
4. **Propagation des incertitudes** : Les incertitudes sont propagées à partir de la sortie aux paramètres de conception en utilisant soit une approche globale (propagation à travers une seule application du modèle inverse) soit une approche locale (propagation étape par étape de sous-modèles inverses en sous-modèles inverses).
5. **Adaptation** : A partir des distributions trouvées, une adaptation aux contraintes physiques et aux conditions de fabrication est effectuée, afin de définir les tolérances finales, sur la base desquelles le composant sera fabriqué.

Grâce à la construction des modèles bond graph probabiliste et flou, la méthodologie permet de propager les incertitudes aux paramètres de conception. Du point de vue de la conception d'un système mécatronique, les avantages d'une telle méthodologie résident dans le fait qu'elle systématise l'obtention des tolérances des paramètres de conception en tenant compte des incertitudes dans les spécifications et qu'elle facilite l'interprétation physique de l'impact des incertitudes dans le cahier des charges. De plus, la méthodologie permet d'avoir une représentation tenant compte à la fois de l'évaluation des incertitudes ainsi que de la dynamique énergétique du système. Tandis que la propagation globale simplifie la procédure au niveau du calcul, la propagation locale permet d'associer la description des incertitudes (FDP/FA) à chaque variable de puissance et d'énergie du modèle et par conséquent, de mesurer l'effet des différentes incertitudes prises en compte sur chaque élément physique et énergétique du système.

Les contributions de ce chapitre sont :

- l'extension de la méthodologie de dimensionnement par l'inversion du modèle bond graph à une méthodologie de synthèse de tolérance par l'approche bond graph, en tenant compte des incertitudes spécifiées dans le cahier des charges,
- la combinaison du bond graph probabiliste et du bond graph flou pour un traitement de l'incertitude dans le contexte de la synthèse de tolérance,

Cependant, il est important de souligner que ce chapitre ne constitue en soi qu'une première étape vers une méthodologie complète de synthèse de tolérance. Les travaux présentés consi-

dèrent notamment les incertitudes épistémiques et aléatoires indépendantes. Ils méritent d'être plus largement développés concernant notamment le traitement des incertitudes complexes (l'incertitude étant une combinaison aléatoire et épistémique, ou l'incertitude d'ordre 2, présentant des variables incertaines caractérisant sa FDP, ou sa FA).

# Conclusion générale

Principalement bibliographiques, les deux premiers chapitres ont permis de décrire le contexte dans lequel s'inscrit cette thèse.

En l'occurrence, un premier chapitre (chapitre 2) a fourni une brève introduction à la mécatronique et l'architecture générique d'un système mécatronique du point de vue énergétique. La conception de ces systèmes a été ensuite introduite, ainsi que les difficultés de cette conception notamment liées à leur caractère pluridisciplinaire. Les concepts d'ingénierie concurrente, de cycle de conception en V ont été abordés comme moyens pour réduire les coûts et les temps d'études au cours du processus de conception.

Le chapitre s'est ensuite orienté vers un problème particulier de la démarche de conception et objet des travaux de ce mémoire : celui de la synthèse de tolérance paramétrique. La définition d'une tolérance et les méthodes existantes pour traiter le problème de synthèse de tolérance ont alors été présentées. Les coefficients de sécurité sont les approches classiques utilisées. Pourtant, ils peuvent être difficiles à appliquer aux systèmes mécatroniques qui ont des configurations multidisciplinaires et non conventionnelles. De plus, les mesures de fiabilité et de robustesse ne sont pas fournies dans le processus de conception. Pour pallier les inconvénients des coefficients de sécurité, la conception non-déterministe a ensuite été présentée avec la probabilité de défaillance comme outil préliminaire. Puis, nous nous sommes intéressés à deux grandes classes de problèmes de conception non-déterministe : la conception robuste et la conception basée sur la fiabilité. Le problème de synthèse de tolérance peut être classé comme un problème de conception robuste, cependant, il nécessite également la considération de la fiabilité. En fin de chapitre, nous avons considéré les méthodes de traitement de la tolérance dans le domaine mécanique. Pour ce cas particulier du problème de synthèse de tolérance, il faut considérer à la fois les critères fonctionnels et les critères d'assemblage (qui n'existent pas dans d'autres domaines). Nous avons alors présenté l'analyse de tolérance, l'allocation de tolérance et la synthèse de tolérance par optimisation.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph dans le but de les intégrer dans une méthodologie de dimensionnement. Tout d'abord, le chapitre propose un bref état de l'art sur les incertitudes dans un système mécatronique. Les incertitudes sont classées soit par leur source, soit par leur nature (aléatoire ou épistémique). Ensuite, différents outils de modélisation et d'étude des systèmes incertains sont présentés. Cette présentation fournit un vue très générale sur les avantages et les inconvénients des méthodes, ainsi que leurs domaines d'application (traitement de l'incertitude aléatoire, de l'incertitude épistémique, ...). Elle donne des pistes pour choisir l'outil de modélisation de l'incertitude dans un système mécatronique.

Dans le contexte de la synthèse de tolérance par inversion de modèle bond graph, nous avons également présenté une méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques. Les notions d'inversion d'un modèle bond graph, de modèle inverse d'ordre minimal et de critères structurels d'inversibilité ont été rappelées. Enfin, nous nous sommes focalisés sur la prise en compte des incertitudes dans un modèle bond graph (outil support de la méthodologie) avec les approches bond graph de sensibilité, bond graph incrémental et bond graph incertain. Tandis que ces approches exploitent des modèles de l'incertitude bornée, le bond graph probabiliste quant à lui est un modèle bond graph multi-liens permettant la représentation à la fois énergétique et probabiliste du système. Il porte plus d'informations que les trois autres

approches sur la distribution des incertitudes aléatoires existant dans le système.

Ces premiers chapitres ont préparé la prise en compte de l'incertitude dans la démarche de synthèse de tolérance de système mécatronique par inversion de modèle bond graph. La suite du mémoire s'est attachée à développer une approche pour traiter l'incertitude épistémique dans un modèle bond graph (aspect non encore considéré dans la littérature à notre connaissance) et à généraliser une méthodologie de dimensionnement par inversion bond graph conformément aux objectifs énoncés : la synthèse de tolérance dans un système mécatronique prenant en compte les deux types d'incertitudes, aléatoire et épistémique.

## Contributions

Nos contributions se sont portées sur la modélisation de l'incertitude épistémique dans la représentation bond graph et sur une méthodologie pour la synthèse de tolérance par approche bond graph, prenant en compte l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique.

Le chapitre 4 a été consacré à la formalisation du bond graph flou, notre contribution à la prise en compte de l'incertitude épistémique dans le formalisme bond graph. Après un rappel de certaines notions de base de la logique floue, nous avons établi le bond graph flou comme une représentation bond graph de même structure que celle du bond graph du modèle physique et associant un sous-ensemble flou à chaque variable de puissance et d'énergie. Nous avons proposé deux approches de propagation des sous-ensembles flous dans un modèle bond graph flou : globale et locale. Les règles formelles de propagation au niveau de chaque élément d'un bond graph flou ont également été introduites. Les deux approches permettent d'avoir un degré de flexibilité dans l'exploitation du modèle bond graph flou. En fonction de la finalité et des exigences du problème (analyse d'incertitude, observation sur des paramètres intermédiaires), nous pouvons choisir une approche appropriée de propagation des sous-ensembles flous. L'exploitation du bond graph flou a finalement été illustrée sur un exemple simple d'un moteur à courant continu. Nous avons considéré deux cas dans cet exemple, le cas mono-incertitude et le cas multi-incertitudes.

Dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, le bond graph flou proposé nous apparaît être un outil efficace pour :

- remonter les incertitudes dans les spécifications sur les sorties aux paramètres de conception, afin d'observer leur effet ainsi que la capacité des paramètres à absorber ces incertitudes,
- trouver le sous-ensemble flou associé à un paramètre quand on dispose des incertitudes sur les variables de puissance de l'élément associé,
- quantifier la satisfaction d'une valeur associée à une propriété par niveau (en utilisant les  $\alpha$ -coupes).

Le bond graph flou reste cependant une approche pour un type d'incertitude spécifique (épistémique). Le bond graph probabiliste et le bond graph flou indépendamment sont insuffisants pour une description bond graph tenant compte de l'incertitude générale. Ce constat a été la motivation pour établir une méthodologie commune pour les deux types d'incertitudes dans le chapitre 5.

En tenant compte des structures identiques du bond graph probabiliste et du bond graph flou, nous avons traité, dans ce dernier chapitre, le problème de la synthèse de tolérance à partir des incertitudes admissibles sur les spécifications des sorties. La méthodologie proposée se compose de 5 étapes :

- **Modélisation** : Construction des bond graphs probabiliste et flou du modèle tenant compte des incertitudes dans les spécifications.
- **Adéquation** : Vérification de l'inversibilité du modèle bond graph et de l'adéquation entre la structure du modèle et les spécifications.
- **Inversion du modèle** : Affectation de la bicausalité afin de trouver le modèle bond graph inverse d'ordre minimal.

- **Propagation de l’incertitude** : Les fonctions de densité de probabilité et les fonctions d’appartenance sont propagées aux paramètres de conception, soit par une approche globale, soit par une approche locale.
- **Adaptation** : Prise en compte des contraintes physiques et des conditions de fabrication afin de déterminer les tolérances finales, sur la base desquelles le composant sera fabriqué.

La méthodologie montre clairement l’avantage à utiliser le langage bond graph. La propagation des fonctions de densité de probabilité et des fonctions d’appartenance repose sur l’analyse causale pour orienter cette propagation.

Les contributions de ce chapitre sont :

- l’extension de la méthodologie de dimensionnement par inversion de modèle bond graph à une méthodologie de synthèse de tolérance tenant compte des incertitudes sur les sorties dans le cahier des charges,
- la combinaison des bond graphs probabiliste et flou pour un traitement complet de l’incertitude dans le contexte de la synthèse de tolérance.

## Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire contribuent au développement de la méthodologie de synthèse de tolérance des systèmes mécatroniques par modèles bond graph inverses. Néanmoins, certaines questions restent à approfondir.

### Prise en compte des incertitudes complexes

Au niveau de la modélisation et la quantification de l’incertitude, nous avons jusqu’à maintenant supposé que nous disposions de suffisamment d’information dans le cahier des charges pour quantifier l’incertitude. Cette hypothèse, souvent vérifiée dans la réalité, permet de bien définir l’incertitude considérée par une fonction de densité de probabilité ou une fonction d’appartenance. Pourtant, il existe des scénarios où il est impossible de donner une telle fonction de façon précise pour représenter l’incertitude. Le traitement de ce type d’incertitude dite « complexe » reste un aspect peu développé dans la littérature pourtant envisageable dans la réalité. Dans ce cas, les informations utilisées pour établir la fonction de densité de probabilité ou la fonction d’appartenance sont souvent, à leur tour, sujettes à une imprécision ou une approximation. Le fait que ces fonctions soient caractérisées par des paramètres incertains rend difficile leur propagation avec les outils de la méthodologie. Nous pouvons envisager trois types d’incertitude complexe et les méthodes appropriées pour leur propagation.

1. **Incertain aléatoire dont les paramètres caractéristiques de la FDP sont imprécis** : Par exemple, nous connaissons la forme de la FDP (Gaussienne,  $\beta$ , ...) pourtant, les paramètres gouvernant cette distribution ne sont pas connus de manière certaine. Intuitivement, nous pouvons par exemple modéliser cette incertitude par une FDP avec des paramètres caractéristiques représentés par des sous-ensembles flous. Dans ce cas, une technique étendue de celle de *probabilité de deuxième ordre* peut être envisagée [LPTLRL09]. La propagation se fait alors avec une boucle extérieure et une boucle intérieure. Dans la boucle extérieure, des sous-ensembles flous sont spécifiés sur des paramètres tels que les moyennes ou les écarts-types des variables incertaines (dans la technique classique de probabilité de deuxième ordre, l’incertitude épistémique est quantifiée par un intervalle). Dans cette boucle extérieure, l’itération s’effectue sur les valeurs des supports des ensembles-flous qui sont fournies, accompagnées des valeurs des fonctions d’appartenance associées, à la boucle intérieure. Dans la boucle intérieure, avec les valeurs fournies par la boucle extérieure, l’échantillonnage s’effectue sur les variables aléatoires de manière habituelle. Cette méthode de propagation facilite la séparation et l’identification de l’incertitude aléatoire

et l'incertitude épistémique. Cependant, elle est très coûteuse en temps de calcul car il y a deux boucles d'itération imbriquées l'une dans l'autre.

Une approche alternative pour ce type d'incertitude est la *méthode non-paramétrique* développée dans [SM11]. Dans cette méthode, la FDP est choisie en utilisant la méthode de maximum-vraisemblance (maximum likelihood) sans aucune hypothèse sur le type de paramètre caractéristique de la distribution. Cette FDP est ensuite utilisée pour la propagation.

Cette méthode est fondamentalement différente de celle de probabilité de deuxième ordre. Tandis que la probabilité de deuxième ordre vise la propagation de l'incertitude, la méthode non-paramétrique simplifie tout d'abord l'incertitude en trouvant une FDP alternative, et ensuite la propage. Par conséquent, la méthode de probabilité de deuxième ordre fournit une information très riche sur la distribution de l'incertitude, pour un temps de calcul allongé. La méthode non-paramétrique est plus facile à appliquer mais introduit néanmoins une perte d'information.

2. **Incertaince aléatoire dont les paramètres caractéristiques de la FDP sont également aléatoires** : Ce type d'incertitude est classiquement quantifié par une famille de FDP et propagé par l'approche de *double-boucle Monte-Carlo*. C'est une approche numériquement intensive qui donne une famille de distributions estimées sur les résultats.

Une approche alternative porte sur la *construction d'une FDP inconditionnelle* [SM13] qui inclut à la fois l'incertitude sur une variable et l'incertitude sur le paramètre de distribution.

$$\phi_{\mathbf{X}}(x) = \int_D \phi_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{P} = \mathbf{p}) \cdot \phi_{\mathbf{P}}(p) dp \quad (5.34)$$

avec  $D$  le domaine d'intégration où la FDP de la variable aléatoire  $P$  est non nulle.

Il est à noter que cette méthode donne un résultat numérique. De plus, le résultat final perd de l'information sur la distribution du paramètre  $p$ .

3. **Incertaince épistémique dont la fonction d'appartenance est imprécise** : Ce type d'incertitude peut être envisagé en utilisant les *nombres flous de type 2* (ou *nombres flous de deuxième ordre*). En effet, le nombre flou de type 2 est une généralisation du nombre flou (ou nombre flou de type 1). La fonction d'appartenance d'un nombre flou est supposée certaine. Cela ne reflète pas le fait que la fonction d'appartenance est également construite à partir des opinions d'expert ou des demandes de clients, et peut alors contenir à leur tour des incertitudes épistémiques. S'il n'existe aucune incertitude dans la construction de la fonction d'appartenance, un nombre flou de type 2 se réduit à un nombre flou de type 1.

Il est possible d'utiliser l'arithmétique de la logique floue de type 1 pour caractériser et propager les nombres flous de type 2. En pratique, l'arithmétique par intervalles est utilisée pour les nombres flous de type 2 car les calculs sont beaucoup plus simples.

La considération des « incertitudes complexes » est compliquée et coûteuse en temps de calcul. Cependant, elle fournit une connaissance plus complète et générale sur le comportement du système, ainsi que la capacité de traiter des spécifications plus complexes dans le processus de conception.

## Prise en compte de l'incertitude dans l'analyse structurelle

La méthodologie de dimensionnement par inversion de modèle bond graph dispose en elle d'un outil très efficace pour la vérification de l'inversibilité et de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception : l'analyse structurelle. Cette analyse est reprise dans l'étape 2 de notre méthodologie de synthèse de tolérance. Elle reste pourtant déterministe. Les tests de l'inversibilité et de l'adéquation sont effectués sur le modèle nominal. Il

est intéressant d'élargir ces critères en prenant en compte des incertitudes. Les nouveaux critères devraient permettre la vérification de l'inversibilité et de l'adéquation du cahier des charges (soumis aux incertitudes) à la structure du modèle, sans passer par les tests déterministes.

### Vers un processus aléatoire

Un inconvénient de la méthodologie par l'approche inverse est lié au fait qu'il faut spécifier le comportement temporel désiré sur la sortie. Le concepteur doit alors disposer de beaucoup d'informations sur le système afin de spécifier un gabarit et une fonction du temps pour la trajectoire en sortie. Ceci représente une contrainte forte pour la rédaction du cahier des charges.

Cette contrainte peut être relâchée par construction d'un processus aléatoire d'accroissement respectant un certain gabarit. De cette manière, la trajectoire en sortie peut librement évoluer dans ce gabarit, sans contrainte d'évolution stricte.

Dans la méthodologie, lors de l'inversion du modèle, les dérivées de la sortie spécifiée apparaissent également. Pour la remontée de l'incertitude dans le modèle inverse, les FDP correspondantes de ces dérivées sont nécessaires. Cependant, il est relativement difficile de les prendre en compte dans la formulation actuelle du problème. En spécifiant la trajectoire en sortie comme un processus aléatoire restant dans un gabarit, il est possible de construire le processus de ses dérivées. Avec ces relations, les FDP peuvent être ensuite synthétisées sur les dérivées de la sortie à partir de sa FDP sans aucune hypothèse supplémentaire. Cette piste de recherche reste très intéressante à approfondir.

### Implémentation logicielle

L'implémentation logicielle de la méthodologie semble nécessaire afin d'automatiser ses différentes étapes et d'assurer un gain de temps important dans la démarche de synthèse de tolérance, et plus généralement, de conception. Cette implémentation doit faire appel à :

- l'analyse structurelle (analyse des lignes de puissance, des chemins causaux, des ordres de ces chemins,...)
- un solveur formel pour le niveau d'analyse fonctionnelle et pour établir le modèle inverse,
- un solveur numérique pour le niveau d'analyse numérique et pour la synthèse de tolérance,
- une méthode de discrétisation et une méthode d'intégration numérique pour le calcul des fonction de densité de probabilité et des nombres flous.



# Bibliographie

- [AA98] P. Apkarian and R.J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6 :21–32, 1998.
- [AB03a] D. Arzelier and J. Bernussou. Optimisation et théorie de la commande robuste. *Journal sur l'Enseignement des Sciences et Technologies de l'Information et des Systèmes, J3EA*, June 2003.
- [AB03b] S. K. Au and J. L. Beck. Subset simulation and its application to seismic risk based on dynamic analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 129 :901–917, August 2003.
- [AB03c] S.K. Au and J.L. Beck. Important sampling in high dimensions. *Structural Safety*, 25 :139–163, April 2003.
- [ACA<sup>+</sup>99] Daniel Alazard, Christelle Cumer, Pierre Apkarian, Michel Gauvrit, and Gilles Ferreres. *Robustesse et commande optimale*. Cepadues-Editions, 1999.
- [AD05] Moustapha Alhaj-Dibo. *Validation de données et diagnostic des systèmes incertains à l'aide de l'analyse par intervalles*. PhD thesis, IAEM Lorraine, 2005.
- [Adr00] Olivier Adrot. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*. PhD thesis, ANRT, Grenoble, France, 2000.
- [AFN94] AFNOR. *Management des systèmes- ingénierie intégrée - concepts généraux et introduction aux méthodes d'application*. Norme NF X50-415. Normes, lois et Rapports de l'État, December 1994.
- [AFN08] AFNOR. *Mécatronique - vocabulaire*, volume Norme NF E01-010. Normes - lois et rapports de l'État, November 2008.
- [Age09] EPA United States Environmental Protection Agency. *Guidance on the Development, Evaluation, and Application of Environmental Models*, volume EPA/100/K-09/003. Office of the science Advisor - Council for Regulatory Environmental Modeling, March 2009.
- [AH83] G. Alefeld and Jürgen Herzberger. *Introduction to interval computations*. Academic Press, November 1983.
- [Ama91] Maher Amara. *Contribution à l'étude des aspects énergétiques en robotique mobile*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, June 1991.
- [ARPP04] Harish Agarwal, John E. Renaud, Evan L. Preston, and Dhanesh Padmanabhan. Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :281–294, July 2004.
- [ASM09] ASME. *Dimensioning and Tolerancing - Engineering Drawing and Related Documentation Practices*. The American Society of Mechanical Engineers, y14.5 - 2009 edition, 2009.
- [BB99] P. Bendotti and C.L. Beck. On the role of LFT model reduction methods in robust controller synthesis for a pressurized water reactor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7 :248–257, 1999.

- [BD87] George E. P. Box and Norman Richard Draper. *Empirical model-building and response surfaces*. Wiley, January 1987.
- [BD94] G.J. Balas and J.C. Doyle. Robustness and performance trade-offs in control design for flexible structures. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2 :352–361, 1994.
- [BDT04] W. Borutzky and G. Dauphin-Tanguy. Incremental bond graph approach to the derivation of state equations for robustness study. *Simulation modelling practice and theory*, 12 :41–60, 2004.
- [BDTK06] W. Borutzky, G. Dauphin-Tanguy, and C. Kam. Relations between two bond graph approaches to sensitivity analysis and study of robustness. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12 :141–157, 2006.
- [BE91] Oktay Baysal and Mohamed E. Eleshaky. Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible euler equations. *Journal of Fluids Engineering*, 113 :681–688, 1991.
- [Ber97] Bertrand, J.M., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. On the finite and infinite structures of bond-graph models. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 2472–2477, Orlando, Florida, USA, October 1997.
- [BFP<sup>+</sup>97] G.J. Balas, I. Fialho, A. Packard, J. Renfrow, and C. Mullaney. On the design of LPV controllers for the f-14 aircraft lateral-directional axis during powered approach. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volume 1, pages 123–127, 1997.
- [BG01] Wolfgang Borutzky and J Granda. Determining sensitivities from an incremental true bond graph. In *International conference on Bond Graph, Modeling and simulation*, volume 33, pages 3–8, 2001.
- [BG02] W. Borutzky and J. Granda. Bond graph based frequency domain sensitivity analysis of multidisciplinary systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 216 :85–99, 2002.
- [BH01] Yakov Ben-Haim. *Information-gap decision theory : decisions under severe uncertainty*. Academic Press, San Diego, Calif., 2001.
- [BM65] R.W Brockett and M.D Mesarović. The reproducibility of multivariable systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11 :548–563, January 1965.
- [BM95] Bernadette Bouchon-Meunier. *La logique floue et ses applications*. Addison-Wesley France, October 1995.
- [BNT10] Ivo Babuška, Fabio Nobile, and Raúl Tempone. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Review*, 52 :317–355, January 2010.
- [Bol69] Vladimir Vasil’evich Bolotin. *Statistical Methods in Structural Mechanics*. Holden-Day, 1969.
- [Bor11] Wolfgang Borutzky. *Bond Graph Modelling of Engineering Systems*. Springer, Berlin, 2011.
- [Bou00] Reda Boukezzoula. *Commande floue d’une classe de systemes non lineaires : Application au probleme de suivi de trajectoire*. PhD thesis, Universite de Savoie, France, March 2000.
- [BP63] Mr Bayes and Mr Price. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, f. r. s. communicated by mr. price, in a letter to john canton, a. m. f. r. s. *Philosophical Transactions*, 53 :370–418, January 1763.

- [BP96] G.J Balas and A. Packard. *The structured singular value ( $\mu$ ) framework*. CRC Press, Sec 2.3.6, CRC controls handbook edition, 1996.
- [Bra02] Isabelle Braems. *Méthodes ensemblistes garanties pour l'estimation de grandeurs physiques*. PhD thesis, Université de Paris XI, 2002.
- [BRB<sup>+</sup>05] I. Braems, N. Ramdani, A. Boudenne, M. Kieffer, L. Jaulin, L. Ibos, E. Walter, and Y. Candau. New set-membership techniques for parameter estimation in presence of model uncertainty. In *Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, volume 11, page 15th, 2005.
- [Bre08] P. C. Breedveld. Modeling and simulation of dynamic systems using bond graphs. In *In Control Systems, Robotics and Automation, from Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Developed under the Auspices of the UNESCO. EOLSS Publishers*, volume 18, page 1–36, 2008.
- [Bre09] Peter Breedveld. Port-based modelling of multidomain physical systems in terms of bond graphs. *Simulation Techniques for Applied Dynamics*, 507 :141–190, 2009.
- [Bro65] R.W. Brockett. Poles, zeros, and feedback : State space interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(2) :129–135, April 1965.
- [BS08] Géraud Blatman and Bruno Sudret. Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336 :518–523, June 2008.
- [BSL06] Marc Berveiller, Bruno Sudret, and Maurice Lemaire. Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15 :81–92, 2006.
- [BST03] Eric Bideaux, M Smaoui, and Daniel Thomasset. Design of a compliant positioning control using an inverse method. In *In Proceedings of the International Power Transmission and Motion Control Workshop*, pages 147–162, September 2003.
- [BTZ05] Ivo Babuška, Raúl Tempone, and Georgios E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :1251–1294, April 2005.
- [CB06] Pascal Codron and Sandrine Le Ballois. *Automatique : Systèmes linéaires et continus, Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2e édition edition, January 2006.
- [CDD<sup>+</sup>86] C. Commault, J. Descusse, J. M. Dion, J. F. Lafay, and M. Malabre. New decoupling invariants : the essential orders. *International Journal of Control*, 44(3) :689–700, 1986.
- [CDM94] Yi Cheng and B. L R De Moor. Robustness analysis and control system design for a hydraulic servo system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2 :183–197, 1994.
- [CF95] J.M Cabanellas and J Felez. A formulation of the sensitivity analysis for dynamic systems optimization based on pseudo bond graphs. *1995 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM). Proceedings of the 1995 Western MultiConference*, pages 135–44, 1995.
- [CG88] Kenneth W. Chase and William H. Greenwood. Design issues in mechanical tolerance analysis. *Manufacturing Review*, 1(1) :50–59, 1988.
- [Cha08] Santanu Chakraborty. Some applications of dirac's delta function in statistics for more than one random variable. *Applications and applied mathematics*, 3 :2008, 2008.

- [Che01] Mu-Chen Chen. Tolerance synthesis by neural learning and nonlinear programming. *International Journal of Production Economics*, 70 :55–65, March 2001.
- [CLM94] R. Castro-Linares and C.H. Moog. Structure invariance for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :2154–2158, 1994.
- [CM95] Bor-Wen Cheng and Saeed Maghsoodloo. Optimization of mechanical assembly tolerances by incorporating Taguchi's quality loss function. *Journal of Manufacturing Systems*, 14 :264–276, 1995.
- [Coe69] J Coeuillet. Choix des moteurs de servomécanismes. *Automatisme*, Tome 14 :56–67, February 1969.
- [CR11] Yves Couasnet and Didier Ridoret. *Tolérances dimensionnelles dans la construction dimensions, aplomb, niveau, implantation...* Le Moniteur, Paris, 2011.
- [Cru01] Thomas A. Cruse. Non-deterministic, non-traditional methods (NDNTM), 2001.
- [CS93] João Luiz Dihl Comba and Jorge Stolfi. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. In *Anais do VI simposio Brasileiro de Computacao Grafica e Processamento de imagens (SIBGRAPI93)*, Recife, Brazil, 1993.
- [CW97] R. Chen and A. C. Ward. Generalizing interval matrix operations for design. *Journal of Mechanical Design*, 119 :65–72, March 1997.
- [Dau00] Dauphin-Tanguy, G. *Les bond graphs. Traité IC2 Information - Commande - Communication*. Hermès Sciences, Paris, 2000.
- [DBO01] Manas K. Deb, Ivo M. Babuška, and J.Tinsley Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6359–6372, September 2001.
- [DBW<sup>+</sup>85] Peter Doubilet, Colin B. Begg, Milton C. Weinstein, Peter Braun, and Barbara J. McNeil. Probabilistic sensitivity analysis using monte carlo simulation. a practical approach. *Medical decision making : an international journal of the Society for Medical Decision Making*, 5(2) :157, 1985.
- [Dem67] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(2) :325–339, April 1967. Mathematical Reviews number (MathSciNet) : MR207001 ; Zentralblatt MATH identifier : 0168.17501.
- [Deq98] Antoine Dequidt. *Contribution à une approche interdisciplinaire de la conception des systèmes mécaniques commandés - Application aux axes de machines*. PhD thesis, Université de Valenciennes, Valenciennes, FRANCE, 1998.
- [Deq00] Antoine Dequidt. Mechanical pre-design of high performance motion servomechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 35 :1047–1063, August 2000.
- [Dex95] A.L. Dexter. Fuzzy model based fault diagnosis. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 142 :545–550, 1995.
- [DF98] Christophe Decreuse and Daniel Feschotte. *Ingénierie Simultanée*. Ed. Techniques Ingénieur, 1998.
- [DH91] R.W. Daniel and J.R. Hewit. Editorial. *Mechatronics*, 1 :i–ii, 1991.
- [Did97] Olivier Didrit. *Analyse par intervalles pour l'automatique ; Résolution globale et garantie de problèmes non linéaires en robotique et en commande robuste*. PhD thesis, Université de Paris 11, Orsay, France, 1997.
- [Dim95] A.D. Dimarogonas. Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 183 :739–749, June 1995.
- [Dis67] Joseph Distefano. *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*. McGraw-Hill Book Company, 1967.

- [DM03] V. Damić and J. Montgomery. *Mechatronics by bond graphs : an object-oriented approach to modelling and simulation*. Springer Verlag, 2003.
- [DMOBDT06] Mohand Arab Djeziri, Rochdi Merzouki, Belkacem Ould-Bouamama, and Geneviève Dauphin-Tanguy. Fault detection of backlash phenomenon in mechatronic system with parameter uncertainties using bond graph approach. In *Proceeding of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Luoyang, China, 2006.
- [DMOBDT07] Mohand Arab Djeziri, Rochdi Merzouki, Belkacem Ould-Bouamama, and Geneviève Dauphin-Tanguy. Bond graph model based for robust fault diagnosis. In *Proceeding of the 2007 American control conference*, New York, USA, 2007.
- [DOBM09] Mohand Arab Djeziri, Belkacem Ould-Bouamama, and Rochdi Merzouki. Modeling and robust fdi of steam generator using bond graph approach. *Journal of Process control*, 19 :149–162, 2009.
- [DOBMDT08] Mohand Arab Djeziri, Belkacem Ould-Bouamama, Rochdi Merzouki, and Geneviève Dauphin-Tanguy. Bond graph model based monitorability analysis. In *Proceeding 7th France-Japan Congres on mechatronics*, France, 2008.
- [Dor68] P Dorato. Noise intensity sensitivity in optimal stochastic systems. In *2nd IFAC, System sensitivity and adaptivity*, Dubrovnik, Yugoslavie, 1968.
- [Dor69] P. Dorato. On the inverse of linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 5(1) :43–48, January 1969.
- [Doy82] John Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 129(6) :242–250, 1982.
- [DR68] S.W Director and R.A Roher. On the efficient computation of the first-order network sensitivities for frequency domain studies of lumped, linear, time-invariant networks. In *2nd IFAC, system sensitivity and adaptivity*, Dubrovnik, Yugoslavie, 1968.
- [Dro02] Cyril Drocourt. *Localisation et modélisation de l'environnement d'un robot mobile par coopération de deux capteurs omnidirectionnels*. PhD thesis, ANRT, Grenoble, France, 2002.
- [DT99] Geneviève Dauphin-Tanguy. *Les Bond Graphs et Leur Application en Mecatronicque*, volume 7222. Ed. Techniques Ingénieur, October 1999.
- [DT00] Geneviève Dauphin-Tanguy. *Les Bond Graphs*. Hermes Science Publication, 2000.
- [DTK99] G Dauphin-Tanguy and Sié Casimir Kam. How to model parameter uncertainties in a bond graph framework. In *European simulation symp*, pages 121–125, 1999.
- [EBK98] L. EL Bahir and M. Kinnaert. Fault detection and isolation for a three tank system based on a bilinear model of the supervised process. In *Control '98. UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455)*, pages 1486–1491 vol.2, 1998.
- [EFMFK12] Mariem El Feki, Wilfrid Marquis-Favre, and Laurent Krähenbühl. Determination of essential orders from a bond graph model. *ASME journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 134 :061006(9p.), September 2012.
- [Eli99] Isaac Elishakoff. *Whys and Hows in Uncertainty Modelling : Probability, Fuzziness and Anti-Optimization*. Springer, 1999.
- [EO06] Hassan El-Owny. Hansen's generalized interval arithmetic realized in c-XSC. *Preprint*, 2, 2006.
- [EO10] Isaac Elishakoff and Makoto Ohsaki. *Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty*. Imperial College Press ; Distributed by World Scientific, London ; Hackensack, NJ, 2010.

- [Eyk74] Pieter Eykhoff. *System identification : parameter and state estimation*. Wiley-Interscience, May 1974.
- [Fav97] Wilfrid Favre. *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1997.
- [FE80] P. M. Frank and M. Eslami. Introduction to system sensitivity theory. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10(6) :337–338, 1980.
- [Fek11] Mariem El Feki. *Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, July 2011.
- [Fin37] Bruno de Finetti. La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'institut Henri Poincaré*, 7(1) :1–68, 1937.
- [Fis96] George Fishman. *Monte Carlo : Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer, corrected edition, April 1996.
- [FKG<sup>+</sup>02] Scott Ferson, Vladik Kreinovich, Lev Ginzburg, Davis S. Myers, and Kari Sentz. Constructing probability boxes and dempster-shafer structures. Technical report, Sandia National Laboratories, 2002.
- [Fli86] Michel Fliess. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Syst. Control Lett.*, 8(2) :147–151, December 1986.
- [FMBB01] Philippus J. Feenstra, Pieter J. Mosterman, Gautam Biswas, and Peter C. Breedveld. Bond graph modeling procedures for fault detection and isolation of complex flow processes. In *ICBGM'01, Simulation Series*, volume 33, 2001.
- [FN97] R. Fotsu-Ngwompo. *Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergétiques. Approche par bond graph*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, Villeurbanne, France, 1997.
- [FO04] Th. Fetz and M. Oberguggenberger. Propagation of uncertainty through multivariate functions in the framework of sets of probability measures. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :73–87, July 2004.
- [FO06] Wolfgang Fellin and Alexander Ostermann. Parameter sensitivity in finite element analysis with constitutive models of the rate type. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30 :91–112, 2006.
- [For67] Earlwood T. Fortini. *Dimensioning for interchangeable manufacture*. Industrial Press, 1967.
- [FPG04] Ioana Fagarasan, Stéphane Ploix, and Sylviane Gentil. Causal fault detection and isolation based in a set membership approach. *Automatica*, 40, 2004.
- [Fra78] P Frank. *Introduction to system sensitivity theory*. Academic press, New York, 1978.
- [Fre56] A. M. Freudenthal. Safety and the probability of structural failure. *American Society of Civil Engineers Transactions*, 121(2843), 1956.
- [fS02] European Committee for Standardization. *EN 1990 :2002. Eurocode - Basis of structural design*. British Standards Institution, April 2002.
- [FS03] Luiz Henrique De Figueiredo and Jorge Stolfi. Affine arithmetic : Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37, 2003.
- [FST05] Philipp Frauenfelder, Christoph Schwab, and Radu Alexandru Todor. Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :205–228, February 2005.
- [Gan03] Grace Gandanegara. *Méthodologie de conception systémique en génie électrique à l'aide de l'outil bond graph : application à une chaîne de traction ferroviaire*. PhD thesis, INP Toulouse, November 2003.

- [Gaw91] P.J. Gawthrop. Bond graphs : A representation for mechatronic systems. *Mechatronics*, 1 :127–156, 1991.
- [Gaw95] P Gawthrop. Bicausal bond graphs. In *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'95)*, volume 27, pages 83–88, Las Vegas, U.S.A., January 1995.
- [GBS05] Rosario De Giorgi, Eric Bideaux, and Sylvie Sesmat. Using inverse models for determining orifices mass flow rate characteristics. In *The Sixth Japan Symposium on Fluid Power, JSFP'05*, November 2005.
- [GG08] Debraj Ghosh and Roger Ghanem. Stochastic convergence acceleration through basis enrichment of polynomial chaos expansions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73 :162–184, 2008.
- [Gha99] Roger Ghanem. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 168 :pp., 1999.
- [GK96] Roger G. Ghanem and Robert M. Kruger. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129 :289–303, January 1996.
- [GM92] A. Glumineau and C. H. Moog. Nonlinear morgan's problem : case of (p+1) inputs and p outputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1067–1072, 1992.
- [GPD99] E. Gagnon, A. Pomerleau, and A. Desbiens. Mu-synthesis of robust decentralised PI controllers. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 146 :289–294, 1999.
- [GR00] Peter J. Gawthrop and Eric Ronco. Estimation and control of mechatronic systems using sensitivity bond graphs. *Control Engineering Practice*, 8 :1237–1248, November 2000.
- [GS90] Roger Ghanem and P. D. Spanos. Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57 :197–202, March 1990.
- [GS91] Roger G. Ghanem and Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer New York, January 1991.
- [GS03] Roger G. Ghanem and Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Courier Dover Publications, 2003.
- [GZ07] Baskar Ganapathysubramanian and Nicholas Zabarar. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems. *Journal of Computational Physics*, 225 :652–685, July 2007.
- [Han75] E. R. Hansen. A generalized interval arithmetic. In Karl Nickel, editor, *Interval Mathematics*, number 29 in Lecture Notes in Computer Science, pages 7–18. Springer Berlin Heidelberg, January 1975.
- [Han02] Michael Hanss. The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, 130 :277–289, September 2002.
- [Han05] Michael Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic : An Introduction with Engineering Applications*. Springer, June 2005.
- [Han11] Michael Hanss. Comprehensive modeling of uncertain systems based on fuzzy set theory, May 2011.
- [HBD98] James W. Hall, David I. Blockley, and John P. Davis. Uncertain inference using interval probability theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 19 :247–264, October 1998.

- [HHC03] Wassim M. Haddad, Tomohisa Hayakawa, and VijaySekhar Chellaboina. Robust adaptive control for nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 39 :551–556, March 2003.
- [Hir79] R.M. Hirschorn. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6) :855–865, December 1979.
- [HJO04] J.C. Helton, J.D. Johnson, and W.L. Oberkampf. An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model predictions. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :39–71, July 2004.
- [HJOS10] J. C. Helton, J. D. Johnson, W. L. Oberkampf, and C. J. Sallaberry. Representation of analysis results involving aleatory and epistemic uncertainty. *International Journal of General Systems*, 39 :605–646, 2010.
- [HJSS06] J.C. Helton, J.D. Johnson, C.J. Sallaberry, and C.B. Storlie. Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 91 :1175–1209, October 2006.
- [HL04] Jim W. Hall and Jonathan Lawry. Generation, combination and extension of random set approximations to coherent lower and upper probabilities. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :89–101, July 2004.
- [HMB93] C. J. Harris, C. G. Moore, and M. Brown. *Intelligent Control : Aspects of Fuzzy Logic and Neural Nets*. World Scientific Pub Co Inc, August 1993.
- [Hoc02] A. Hocine. Robustesse paramétrique sur les systèmes mécatroniques, dimensionnement de l'actionneur par le calcul des intervalles et bond graph. Master de recherche, INSA de Lyon, Lyon, July 2002.
- [HQJ00] C. Ham, Z. Qu, and R. Johnson. Robust fuzzy control for robot manipulators. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 147 :212–216, 2000.
- [HR92] Achintya Haldar and Rajasekhar K. Reddy. A random-fuzzy analysis of existing structures. *Fuzzy Sets Syst.*, 48 :201–210, June 1992.
- [HR01] M. Holmes and A. Ray. Fuzzy damage-mitigating control of a fossil power plant. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9 :140–147, January 2001.
- [HRA04] Jim W. Hall, Eva Rubio, and Malcolm G. Anderson. Random sets of probability measures in slope hydrology and stability analysis. In *Fuzzy sets, imprecise probability, and stochastics in engineering. Workshop*, volume 84, pages 710–720. Wiley-VCH, 2004.
- [HS81] Eldon Hansen and Saumyendra Sengupta. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis. *BIT Numerical Mathematics*, 21(2) :203–211, 1981.
- [Hun95] J.Y. Hung. Magnetic bearing control using fuzzy logic. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 31 :1492–1497, 1995.
- [Huy01] Luc Huyse. Solving problems of optimization under uncertainty as statistical. Technical report, NASA, Langley Research Center, Hampton, VA, 2001.
- [HW04] Eldon R. Hansen and G. William Walster. *Global optimization using interval analysis*. CRC Press, 2nd revised edition edition, 2004.
- [HWK12] Thomas Henkel, Heike Wilson, and Wilfried Krug. Global sensitivity analysis of nonlinear mathematical models ; an implementation of two complementing variance-based algorithms. In *Simulation Conference (WSC), Proceedings of the 2012 Winter*, pages 1–12, 2012.
- [IC13] TC 4.2 IFAC Committee. *Mechatronic systems*, 2013.
- [IN98] K. Inoue and M. Nakaoka. Autotuning gain parameter implementation with fuzzy learning control scheme for DC brushless servo system. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 145 :419, 1998.

- [Ins90] David Ríos Insua. *Sensitivity analysis in multi-objective decision making*. Springer-Verlag New York, 1990.
- [Ise96] Rolf Isermann. Modeling and design methodology for mechatronic systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1 :16–28, 1996.
- [Ise98] Rolf Isermann. On fuzzy logic applications for automatic control, supervision, and fault diagnosis. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A : Systems and Humans*, 28 :221–235, 1998.
- [Ise05] Rolf Isermann. *Mechatronic Systems : Fundamentals*. Springer, September 2005.
- [Ise08] Rolf Isermann. Mechatronic systems—Innovative products with embedded control. *Control Engineering Practice*, 16 :14–29, January 2008.
- [ISO98] 14253-1 :1998 ISO. Spécification géométrique des produits (GPS) – vérification par la mesure des pièces et des équipements de mesure – partie 1 : Règles de décision pour prouver la conformité ou la non-conformité à la spécification, 1998.
- [Jac05] Julien Jacques. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, December 2005.
- [Jag93] Patrick Jagou. *Concurrent engineering : la maîtrise des coûts, des délais et de la qualité*. Hermès Science Publications, 1993.
- [Jar10] Audrey Jardin. *Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, January 2010.
- [Jau01] Luc Jaulin. *Applied interval analysis : with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics*. Springer Verlag, 2001.
- [JDA<sup>+</sup>05] S. Junco, A. Donaire, A. Achir, C. Sueur, and G. Dauphin-Tanguy. Non-linear control of a series direct current motor via flatness and decomposition in the bond graph domain. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 219 :215–229, May 2005.
- [Jea99] Angus Jeang. Optimal tolerance design by response surface methodology. *International Journal of Production Research*, 37 :3275–3288, 1999.
- [JGD02] S. Junco, G. Garnero, and A. Donaire. Suivi de trajectoire de vitesse du moteur série à courant continu : une approche bond graph. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 400–405, Nantes, France, July 2002.
- [JLD06] Julien Jacques, Christian Lavergne, and Nicolas Devictor. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliability Engineering & System Safety*, 91 :1126–1134, October 2006.
- [JMFT09] Audrey Jardin, Wilfrid Marquis-Favre, and Daniel Thomasset. Bond graph sizing of mechatronic systems : Coupling of inverse modelling with dynamic optimization. In F. Breitenacker I. Troch, editor, *Proceedings MATHMOD 09 Vienna - Full Papers CD Volume*, pages 1929–1938, Vienne, Autriche, February 2009. ISBN 978-3-901608-35-3.
- [JW93] Luc Jaulin and Eric Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29 :1053–1064, 1993.
- [Kam01] Sié Casimir Kam. *Les bond graphs pour la modélisation des systèmes linéaires incertains*. PhD thesis, Université Lille1 - Sciences et Technologies, 2001.
- [Kar68] Dean Karnopp. *Analysis and simulation of multiport systems : The bond graph approach to physical system dynamics*. M.I.T. Press, 1968.

- [Kar90a] Dean Karnopp. Bond graph models for electrochemical energy storage : electrical, chemical and thermal effects. *Journal of the Franklin Institute*, 327 :983–992, 1990.
- [Kar90b] Dean Karnopp. *System Dynamics : A Unified Approach 2nd Edition*. Wiley, 2nd edition, 1990.
- [Kaz89] H. Kazerooni. Compliance control and stability analysis of cooperating robot manipulators. *Robotica*, 7 :191–198, 1989.
- [KHAK97] Michał Kleiber, Tran Duong Hien, H. Antúnez, and Piotr Kowalczyk. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics : Theory and finite element computations*. John Wiley, 1997.
- [KM07] S.A. Kayani and M.A. Malik. Automated design of mechatronic systems using bond-graph modeling and simulation and genetic programming. In *International Bhurban Conference on Applied Sciences Technology, 2007. IBCAST 2007*, pages 104–110, January 2007.
- [KMR06] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis, and Ronald C. Rosenberg. *System Dynamics : Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. Wiley, 4 edition, January 2006.
- [KMR12] Dean Karnopp, Donald Margolis, and Ronald Rosenberg. *System Dynamics. Modeling and Simulation of Mechatronic systems*. John Wiley & sons, Inc, Hoboken, New Jersey, 4th edition, 2012.
- [KO96] Nobuhiro Kyura and H. Oho. Mechatronics-an industrial perspective. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1 :10–15, March 1996.
- [Kol60] A. N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Pub Co, 2 edition, June 1960.
- [KR75] Dean Karnopp and Ronald C. Rosenberg. *System Dynamics : A Unified Approach*. John Wiley & Sons Inc, January 1975.
- [Krä06] Walter Krämer. Generalized intervals and the dependency problem. *PAMM*, 6 :683–684, 2006.
- [Kru87] William Kruskal. Relative importance by averaging over orderings. *The American Statistician*, 41(1) :6, February 1987.
- [Laf04] J. Laffite. *Aide à la conception et au dimensionnement énergétique et dynamique des systèmes mécatroniques par approche inverse : application aux chaînes de transmission automobile*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 2004.
- [Lap40] Pierre Simon Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris Bachelier, 1840.
- [Lav03] Loïc Lavigne. *Outils d'analyse et de synthèse des lois de commande robuste des systèmes dynamiques plats*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, June 2003.
- [LC08] Jie Li and Jianbing Chen. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation. *Structural Safety*, 30 :65–77, January 2008.
- [LC09] Jie Li and Jianbing Chen. *Stochastic dynamics of structures*. Wiley, May 2009.
- [LD94] Wei-min Lu and John C. Doyle. A state space approach to robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems. Technical report, Control and Dynamical Systems - California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, May 1994.

- [Leb03] Michel Lebrun. *Simulation et CAO en automatique et mécatronique*. Ed. Techniques Ingénieur, 2003.
- [LH91] C.-M. Lim and T. Hiyama. Application of fuzzy logic control to a manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7 :688–691, 1991.
- [LH06] M. Lhommeau and L. Hardouin. Interval analysis in dioid : Application to robust open-loop control for timed event graphs. In *44th IEEE European Control Conference on Decision and Control CDC-ECC'05*, pages 7744 – 7749, 2006.
- [Lic07] Anca-Maria Lichiardopol. *L'approche bond graph pour la découverte technologique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille - Université "Politehnica" de Bucarest, October 2007.
- [LMKNG04] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm, and R.G. Ghanem. Uncertainty propagation using Wiener–Haar expansions. *Journal of Computational Physics*, 197 :28–57, June 2004.
- [LMM04] Eric Lee, Constantinos Mavroidis, and Jean Pierre Merlet. Five precision point synthesis of spatial RRR manipulators using interval analysis. *Journal of Mechanical Design*, 126 :842, 2004.
- [LMNGK04] O.P. Le Maître, H.N. Najm, R.G. Ghanem, and O.M. Knio. Multi-resolution analysis of wiener-type uncertainty propagation schemes. *Journal of Computational Physics*, 197 :502–531, July 2004.
- [Loh87] Rudolf J Lohner. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. In *Computer Arithmetic : Scientific Computation and Programming Languages*, Teubner, Stuttgart, 1987. E. W. Kaucher, U. W. Kulisch, C. Ullrich.
- [LPTLR09] Swiler Laura P, .Paez Thomas L, and Mayes Randall L. Epistemic uncertainty quantification tutorial. Technical report, Sandia National Laboratories, New Mexico., PO Box 5800, Albuquerque, NM 87185-1318, USA, 2009.
- [LR92] Ross Levine and David Renelt. A sensitivity analysis of cross-country growth regressions. *The American economic review*, page 942–963, 1992.
- [LS09] L.S Louca and J.L Stein. Energy-based model reduction of linear system. In *In Proceedings of the 6th Vienna International Conference on Mathematical Modeling*, pages 629–639, February 2009.
- [LSRAM02] Xuefang Lin-Shi, Jean-Marie Rétif, Bruno Allard, and Hervé Morel. Non-linear control design for a boost converter using bond graphs. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 216 :1–11, 2002.
- [LW90] W.J Lee and T.C Woo. Tolerances : Their analysis and synthesis. *ASME Transactions, journal of Engineering in Industry*, pages 112–121, 1990.
- [LW98] Yu-Cheng Lee and Dr Chiu-Chi Wei. Process capability-based tolerance design to minimise manufacturing loss. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 14 :33–37, January 1998.
- [LWRC02] C.H. Lo, Y.K. Wong, A.B. Rad, and K.M. Chow. Fusion of qualitative bond graph and genetic algorithms : A fault diagnosis application. *ISA Transactions*, 41 :445–456, October 2002.
- [Ly04] M.G Ly. Dimensionnement tolérant d'un système mécatronique par approche par intervalle. Master de recherche, INSA de Lyon, July 2004.
- [Mac02] P. K. MacKeown. *Stochastic Simulations in Physics*. Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1 edition, June 2002.

- [Mat08] H.g. Matthies. Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 88 :849–873, 2008.
- [MBC79] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) :239, May 1979.
- [MBGH99] B. Moller, M. Beer, W. Graf, and A. Hoffmann. Possibility theory based safety assessment. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 14 :81–91, 1999.
- [Mel99] Robert E. Melchers. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. Wiley, 2 edition, April 1999.
- [Mer00] Jean Pierre Merlet. Alias : an interval analysis based library for solving and analyzing system of equations. Technical report, SEA, Toulouse, France, June 2000.
- [Mil03] F Miled. *Contribution à une méthodologie de conception des systèmes dynamiques actifs*. PhD thesis, Université de Franche-Comté et Université de Technologie de Belfort-Monbéliard, France, 2003.
- [MK10] O. P. le Maître and Omar M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification : With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, 1 edition, April 2010.
- [MKC09] Ramon E. Moore, R. Baker Kearfott, and Michael J. Cloud. *Introduction to interval analysis*. Siam, 2009.
- [ML03] Ramon Moore and Weldon Lodwick. Interval analysis and fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 135 :5–9, 2003.
- [MLM07] Lionel Mathelin and Olivier Le Maître. Dual-based a posteriori error estimate for stochastic finite element methods. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 2 :83–115, September 2007.
- [MM79] Ramon E. Moore and R. E. Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM, 1979.
- [MMFSF03] Olivier Mechin, Wilfrid Marquis-Favre, Serge Scavarda, and Pierre Ferbach. A dynamic sizing of an electronic power steering system. In *ICBGM'03 International Conference on Bond Graph Modeling*, pages 137–147, Orlando, 2003.
- [MNPLW96] M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, and É Walter, editors. *Bounding Approaches to System Identification*. Springer, 1996 edition, May 1996.
- [Moo66] Ramon E. Moore. *Interval analysis*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [Mor69] T. Mori. Mecha-tronics. Technical report, Yaskawa internal trademark application, 1969.
- [Mor85] B.G. Morton. New applications of mu to real-parameter variation problems. In *1985 24th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 24, pages 233–238, 1985.
- [Mos93] A. N. Moser. Designing controllers for flexible structures with h-infinity/ mu -synthesis. *IEEE Control Systems*, 13 :79–89, 1993.
- [Mos99] David Mosiek. *Procédure graphiques pour l'analyse structurelle de systèmes physiques modélisés par bond graph = Graphical procedures for the structural analysis of physical systems modelled by bond graph*. PhD thesis, Université de Lille 1, Villeneuve-d'Ascq, FRANCE, 1999.

- [MPV07] Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, and G. Geoffrey Vining. *Introduction to Linear Regression Analysis, 4th edition Student Solutions Manual*. Wiley-Interscience, 4 edition, February 2007.
- [MSM<sup>+</sup>92] Charles G. Morgan, Philippe Smets, Abe Mamdani, Didier Dubois, and Henri Prade. Non-standard logics for automated reasoning. *The Journal of Symbolic Logic*, 57 :277, March 1992.
- [MSMF03] Olivier Mechin, Serge Scavarda, and Wilfrid Marquis-Favre. *Conception des systèmes de la liaison au sol : contribution à la définition du cahier des charges*. PhD thesis, INSA de Lyon, France, 2003.
- [MZ09] Xiang Ma and Nicholas Zabaras. An efficient bayesian inference approach to inverse problems based on an adaptive sparse grid collocation method. *Inverse Problems*, 25 :035013, March 2009.
- [NB05] R. F Ngwompo and E. Bideaux. On the role of power lines and causal paths in bond graph based model inversion. In *Proceedings of the Int. Conf. on Bond Graph Modeling and Simulation*, San Diego USA., 2005.
- [Nea90] Richard E. Neapolitan. *Probabilistic Reasoning in Expert Systems : Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, 1 edition, March 1990.
- [Neu91] Arnold Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, 1st edition, January 1991.
- [Neu04] Arnold Neumaier. Clouds, fuzzy sets, and probability intervals. *Reliable Computing*, 10 :249–272, August 2004.
- [New50] Jr Newton. What size motor for proper operation of servomechanism ? *Machine Design*, pages 125–130, 1950.
- [Ngw98] R. Fotsu Ngwompo. Développement d’une méthodologie de dimensionnement des éléments d’un système : application au cas d’une suspension hydropneumatique. Technical report, Laboratoire d’Automatique Industrielle - INSA de Lyon, France, 1998.
- [Ngw01] Ngwompo, R.F., Scavarda, S., Thomasset, D. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation, part 1 : theory. *Proceedings of ImechE, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 215 :95–103, 2001.
- [Nij82] Henk Nijmeijer. Invertibility of affine nonlinear control systems : a geometric approach. *Systems & Control Letters*, 2(3) :163–168, October 1982.
- [Nij86] Henk Nijmeijer. Right-invertibility for a class of nonlinear control systems : A geometric approach. *Systems & Control Letters*, 7(2) :125–132, April 1986.
- [NK99] H. Nishimura and A. Kojima. Seismic isolation control for a building-like structure. *IEEE Control Systems*, 19 :38–44, 1999.
- [Nou09] Anthony Nouy. Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16 :251–285, May 2009.
- [NST96] R. Fotsu Ngwompo, S. Scavarda, and D. Thomasset. Inversion of linear time-invariant SISO systems modelled by bond graph. *Journal of the Franklin Institute*, 333 :157–174, March 1996.
- [NTW08] F. Nobile, R. Tempone, and C. G. Webster. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46 :2309–2345, January 2008.

- [Obe98] W. L. Oberkampf. Bibliography for verification and validation in computational simulations. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs., Livermore, CA (US), 1998.
- [Obe03] Michael Oberguggenberger. Fuzzy data in geotechnical models. In Professor Dr Dimitrios Kolymbas, editor, *Advanced Mathematical and Computational Geomechanics*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, pages 301–315. Springer Berlin Heidelberg, January 2003.
- [Obe05a] Michael Oberguggenberger. The mathematics of uncertainty : models, methods and interpretations. In a o Univ-Prof Dipl-Ing Dr Wolfgang Fellin, em Univ-Prof Dipl-Ing Heimo Lessmann, a o Univ-Prof Dr Michael Oberguggenberger, and Dipl-Ing Robert Vieider, editors, *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, pages 51–72. Springer Berlin Heidelberg, January 2005.
- [Obe05b] Michael Oberguggenberger. Queueing models with fuzzy data in construction management. In a o Univ-Prof Dipl-Ing Dr Wolfgang Fellin, em Univ-Prof Dipl-Ing Heimo Lessmann, a o Univ-Prof Dr Michael Oberguggenberger, and Dipl-Ing Robert Vieider, editors, *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, pages 197–210. Springer Berlin Heidelberg, January 2005.
- [Obe11] Michael Oberguggenberger. Combined methods, May 2011.
- [OF02] Michael Oberguggenberger and Wolfgang Fellin. From probability to fuzzy sets : The struggle for meaning in geotechnical risk assessment. In *Probabilistics in Geotechnics : Technical and Economic Risk Estimation*, Verlag GlukaufGmbH, Essen, 2002.
- [OF05a] Michael Oberguggenberger and Wolfgang Fellin. Assessing the sensitivity of failure probabilities : a random set approach. In *ICOSSAR*, Rome, 2005. MillPress.
- [OF05b] Michael Oberguggenberger and Wolfgang Fellin. The fuzziness and sensitivity of failure probabilities. In Wolfgang Fellin, Heimo Lessmann, Michael Oberguggenberger, and Robert Vieider, editors, *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, pages 33–49. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005.
- [OF08] Michael Oberguggenberger and Wolfgang Fellin. Reliability bounds through random sets : Non-parametric methods and geotechnical applications. *Computers & Structures*, 86 :1093–1101, May 2008.
- [OH02] W. L. Oberkampf and J. C. Helton. Investigation of evidence theory for engineering applications. In *4th Non-Deterministic Approaches Forum, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Denver, Colorado, 2002.
- [OR05] Michael Oberguggenberger and Francesco Russo. Fuzzy, probabilistic and stochastic modelling of an elastically bedded beam. In a o Univ-Prof Dipl-Ing Dr Wolfgang Fellin, em Univ-Prof Dipl-Ing Heimo Lessmann, a o Univ-Prof Dr Michael Oberguggenberger, and Dipl-Ing Robert Vieider, editors, *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, pages 183–196. Springer Berlin Heidelberg, January 2005.
- [Ost05] Alexander Ostermann. Sensitivity analysis. In a o Univ-Prof Dipl-Ing Dr Wolfgang Fellin, em Univ-Prof Dipl-Ing Heimo Lessmann, a o Univ-Prof Dr Michael Oberguggenberger, and Dipl-Ing Robert Vieider, editors, *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, pages 101–114. Springer Berlin Heidelberg, January 2005.
- [otEcC09] Council of the European communities (CEC). *Impact Assessment Guidelines*, volume SEC(2009)92. European Commission Guidelines, Brussels, Belgium, January 2009.

- [Pay61] Henry Paynter. *Analysis and Design of Engineering Systems*. The M.I.T Press, Cambridge, USA, ISBN.0262160048 edition, 1961.
- [PD93] A. Packard and J. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29 :71–109, January 1993.
- [PJ86] V. Potkonjak and N. Jakšić. Contribution to a computer-aided choice of D.C. motors for manipulation robots. *Robotica*, 4(01) :37–41, 1986.
- [PK99] M. Papadrakakis and A. Kotsopoulos. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168 :305–320, January 1999.
- [PKBP96] S. Pannu, H. Kazerooni, G. Becker, and A. Packard.  $\mu$ -synthesis control for a walking robot. *IEEE Control Systems*, 16 :20–25, 1996.
- [Por69] William A. Porter. Decoupling of and inverses for time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(4) :378–380, August 1969.
- [PP96] Manolis Papadrakakis and Vissarion Papadopoulos. Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134 :325–340, August 1996.
- [PS97] H.J. Pradlwarter and G.I. Schuëller. On advanced monte carlo simulation procedures in stochastic structural dynamics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32 :735–744, July 1997.
- [PS10] H.J. Pradlwarter and G.I. Schuëller. Local domain monte carlo simulation. *Structural Safety*, 32 :275–280, September 2010.
- [PSSM70] S. Panda, L. Silverman, M. Sain, and J. Massey. Comments on "Inversion of multivariable linear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(4) :489–491, August 1970.
- [PV97] Aurelio Piazzì and Antonio Visioli. An interval algorithm for minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 2, page 1924–1927, 1997.
- [PV00] Aurelio Piazzì and Antonio Visioli. Global minimum-jerk trajectory planning of robot manipulators. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 47 :140–149, 2000.
- [Rah93] Ahmed Rahmani. *Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche Bond Graph - Bond graph approach for structural study of linear systems*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille, 1993.
- [Ram26] Frank P. Ramsey. Truth and probability. In *The foundations of mathematics and other logical essays*, pages 156–198. McMaster University Archive for the History of Economic Thought, 1926.
- [RB97] Singiresu S. Rao and L. Berke. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis. *AIAA journal*, 35 :727–735, 1997.
- [Res90] W. Respondek. *Nonlinear controllability and optimal control - chapter Right and left invertibility of non linear control systems*. Marcel Dekker Inc, 1990.
- [Rev01] Nathalie Revol. Introduction à l'arithmétique par intervalles. Research report, INRIA, 2001.
- [RK93] R. C. Redfield and S. Krishnan. Dynamic system synthesis with a bond graph approach. i : Synthesis of one-port impedances. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 115 :357–363, 1993.
- [RK07] Reuven Y. Rubinstein and Dirk P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley-Interscience, 2 edition, December 2007.

- [RM88] K. V. S. V. N. Raju and Arun K. Majumdar. Fuzzy functional dependencies and lossless join decomposition of fuzzy relational database systems. *ACM Trans. Database Syst.*, 13(2) :129–166, June 1988.
- [Rob84] Stewart A. Robertson. *Polytopes and symmetry*. Cambridge University Press, 1984.
- [RRIC04] T. Raïssi, N. Ramdani, L. Ibos, and Y. Candau. Analyse de propriétés diélectriques dans un contexte à erreurs bornée. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'04*, Douz, Tunisie, November 2004.
- [RS93] Reuven Y. Rubinstein and Alexander Shapiro. *Discrete event systems : Sensitivity analysis and stochastic optimization by the score function method*. Wiley New York, 1993.
- [RT00] P.H. Roe and J. Collolny Thomas. A new bond graph approach to sensitivity analysis. In *MATHMOD : Conference on mathematical modelling*, pages 743–746, 2000.
- [RW77] H. H. Rosenbrock and A. J. J. Van Der Weiden. Inverse systems. *International Journal of Control*, 25(3) :389–392, 1977.
- [RZ07] Jean-Francois Richard and Wei Zhang. Efficient high-dimensional importance sampling. *Journal of Econometrics*, 141 :1385–1411, December 2007.
- [Saa96] H Saari. *Commande répétitive de procédés échantillonnés à déphasage non minimal*. PhD thesis, Université de Savoie, France, June 1996.
- [Saf82] M.G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 129(6) :251–256, 1982.
- [Sap06] Gilbert Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions TECHNIP, 2006.
- [SAR91] Serge Scavarda, M. Amara, and E. Richard. Determination of the output power in terms of output variables using bond graph. In *IMACS-IFAC Symposium MCTS 91 Modelling and Control of Technological systems*, pages 1–5, Lille France, 1991.
- [Sch09] G Schueller. Efficient monte carlo simulation procedures in structural uncertainty and reliability analysis - recent advances. *Structural Engineering and Mechanics*, 32 :1–20, 2009.
- [SCS09] Andrea Saltelli, Karen Chan, and Marian Scott. *Sensitivity Analysis*. Wiley, 1 edition, March 2009.
- [SDT93] C. Sueur and Genevieve Dauphin Tanguy. Bond graph determination of controllability subspaces for poles assignment. In *In Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 14–19, Le Touquet, France, 1993.
- [SFH<sup>+</sup>03] Kisung Seo, Zhun Fan, Jianjun Hu, Erik D. Goodman, and Ronald C. Rosenberg. Toward a unified and automated design methodology for multi-domain dynamic systems using bond graphs and genetic programming. *Mechatronics*, 13 :851–885, October 2003.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :896–911, 1997.
- [Sha76] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press Princeton, 1976.
- [Sil68] L Silverman. Properties and application of inverse systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 13(4) :436–437, August 1968.

- [Sin81] S. Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :595–598, April 1981.
- [SKDT05] Casimir Sié Kam and Geneviève Dauphin-Tanguy. Bond graph models of structured parameter uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 342 :379–399, July 2005.
- [SM69] M.K. Sain and J.L. Massey. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(2) :141–149, April 1969.
- [SM11] Shankar Sankararaman and Sankaran Mahadevan. Likelihood-based representation of epistemic uncertainty due to sparse point data and/or interval data. *Reliability Engineering & System Safety*, 96 :814–824, July 2011.
- [SM13] S. Sankararaman and S. Mahadevan. Separating the contributions of variability and parameter uncertainty in probability distributions. *Reliability Engineering & System Safety*, 112 :187–199, April 2013.
- [SNH<sup>+</sup>04] Prabhu Soundappan, Efstratios Nikolaidis, Raphael T. Haftka, Ramana Grandhi, and Robert Canfield. Comparison of evidence theory and bayesian theory for uncertainty modeling. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :295–311, July 2004.
- [Sny92] John M. Snyder. Interval analysis for computer graphics. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 26 :121–130, 1992.
- [SOA10] B. Schmelzer, M. Oberguggenberger, and C. Adam. Efficiency of tuned mass dampers with uncertain parameters on the performance of structures under stochastic excitation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 224 :297–308, December 2010.
- [Soi09] C. Soize. Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes. In *Actes du 9ème Colloque National en Calcul des Structures CSMA*, 2009.
- [Soi11] Christian Soize. Stochastic models of uncertainties, May 2011.
- [SRTC06] Andrea Saltelli, Marco Ratto, Stefano Tarantola, and Francesca Campolongo. Sensitivity analysis practices : Strategies for model-based inference. *Reliability Engineering & System Safety*, 91 :1109–1125, October 2006.
- [SS63] B Schweizer and A Sklar. Associative functions and abstract semigroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 10 :69–81, 1963.
- [Sun95] C. R. Sundararajan. *Probabilistic Structural Mechanics Handbook : Theory and Industrial Applications*. Springer, 1995 edition, January 1995.
- [Tag87] Genichi Taguchi. *System of experimental design : engineering methods to optimize quality and minimize costs*. UNIPUB/Kraus International Publications, 1987.
- [TBM00a] F. Tonon, A. Bernardini, and A. Mammino. Reliability analysis of rock mass response by means of random set theory. *Reliability Engineering & System Safety*, 70 :263–282, December 2000.
- [TBM00b] Tonon F., Bernardini A., and Mammino A. Determination of parameters range in rock engineering by means of random set theory. *Reliability Engineering and System Safety*, 70 :241–261, 2000.
- [TC90] Genichi Taguchi and Don Clausing. Robust quality. *Harvard Business Review*, pages 65–75, Jan - Feb 1990.
- [Ton04] Fulvio Tonon. Using random set theory to propagate epistemic uncertainty through a mechanical system. *Reliability Engineering & System Safety*, 85 :169–181, July 2004.

- [TV68] R Tomovic and M Vukobratovic. Contribution to the sensitivity of large systems. In *2nd IFAC, System sensitivity and adaptivity*, Dubrovnik, Yugoslavia, 1968.
- [TV72] Rajko Tomović and Miomir Vukobratović. *General sensitivity theory*. American Elsevier Pub. Co., 1972.
- [TV88] S. Tan and J. Vandewalle. Inversion of singular systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5) :583–587, May 1988.
- [UK01] Lev V. Utkin and Igor O. Kozine. Computing the reliability of complex systems. In *2nd International symposium on imprecise probabilities and their applications*, pages 324–331. Shaker Publishing, Maastricht, 2001.
- [UK02] Lev V. Utkin and Igor O. Kozine. Stress-strength reliability models under incomplete information. *International Journal of General Systems*, 31 :549–568, 2002.
- [Ull03] David G. Ullman. *The Mechanical Design Process*. McGraw-Hill, 2003.
- [vA03] Job van Amerongen. Mechatronic design. *Mechatronics*, 13 :1045–1066, December 2003.
- [vD94] Johannes van Dijk. *On the role of bond graph causality in modelling mechatronic systems*. PhD thesis, Twente university, 1994.
- [VKP87] M Vukobratović, D Katić, and V Potkonjak. Computer-assisted choice of electrohydraulic servosystems for manipulation robots using complete mathematical models. *Mechanism and Machine Theory*, 22(5) :431–439, 1987.
- [VM05] Rodolfo Villamizar Mejia. Robust control of systems subjected to uncertain disturbances and actuator dynamics. Master thesis, Universitat de Girona, 2005.
- [Wal90] Peter Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall/CRC, 1st edition, December 1990.
- [WDA09] Marquis-Favre Wilfrid, Thomasset Daniel, and Jardin Audrey. Document support pour la spécification et le développement du module d’analyse structurelle du projet SIMPA2, November 2009.
- [Wei64] L. Weiss. On a question related to the control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(2) :176–177, April 1964.
- [WH03] G. William Walster and Eldon R. Hansen. *Global Optimization Using Interval Analysis*. CRC Press Inc, 2nd revised edition edition, December 2003.
- [Whe10] Donald J. Wheeler. *Understanding Statistical Process Control*. SPC PRESS (Statistical Process Control), 3rd edition, June 2010.
- [Wie38] Norbert Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897, October 1938.
- [Wie84] A. P. Wierzbicki. *Models and sensitivity of control systems*. Butterworth-Heinemann Limited, 1984.
- [Wil74] A.S. Willsky. On the invertibility of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :272–274, June 1974.
- [WP94] Eric Walter and Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Dunod, March 1994.
- [WYT95] S.T. Wu and K. Youcef-Toumi. On relative degrees and zero dynamics from physical system modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 117 :205–217, 1995.
- [WZ04] Jingbo Wang and Nicholas Zabaras. A bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47 :3927–3941, August 2004.

- [XK02] Dongbin Xiu and George Em Karniadakis. The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24 :619–644, February 2002.
- [XW09] George Em Karniadakis Xiaoliang Wan. Error control in multi-element generalized polynomial chaos method for elliptic problems with random coefficients. *Communications in Computational physics*, 5 :793–820, 2009.
- [Yag86] Ronald R. Yager. Arithmetic and other operations on dempster-shafer structures. *International Journal of Man-Machine Studies*, 25(4) :357–366, October 1986.
- [YD66] R.C Young and Peter Dorator. On the inverse of linear dynamical systems. Technical report, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, NY, USA, March 1966.
- [Zad65] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3) :338–353, June 1965.
- [ZD63] Lotfi Asker Zadeh and Charles A. Desoer. *Linear system theory : the state space approach*. McGraw-Hill, 1963.
- [ZFJ11] Bahram Zargar, Atef Fahim, and Amor Jnifene. Development, validation, and parameter sensitivity analyses of a nonlinear mathematical model of air springs. *Journal of Vibration and Control*, 18, November 2011.
- [ZG08] N. Zabararas and B. Ganapathysubramanian. A scalable framework for the solution of stochastic inverse problems using a sparse grid collocation approach. *J. Comput. Phys.*, 227 :4697–4735, April 2008.
- [ZHW<sup>+</sup>02] Thomas A. Zang, Michael J. Hemsch, Hilburger Mark W., Sean P. Kenny, James M. Luckring, Peiman Maghami, Sharon L. Padula, and W. Jefferson Strout. Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 2002.



# Annexe A

## Le langage bond graph

Dans cette annexe, nous présentons les bases du langage bond graph : les éléments, la procédure de construction d'un modèle ainsi que la causalité. Une introduction complète peut être trouvée dans les livres de référence dans ce domaine [KMR12, DT00]

### A.1 Introduction au langage

Basé sur la description graphique des transferts d'énergie impliqués au sein d'un système, le langage bond graph est un outil de modélisation d'un système du point de vue énergétique, présentant les *variables de puissance* et les *variables d'énergie*. Il fournit une représentation unifiée, qui permet la modélisation des systèmes complexes multi-domaines.

Le langage bond graph a été inventé en 1959 puis publié pour la première fois en 1961 par PAYNTER [Pay61].

#### A.1.1 Concepts et variables utilisées

##### Apport, stockage et dissipation d'énergie

Le Langage bond graph est une représentation unifiée pour tous les domaines physiques. Il permet de caractériser le comportement d'un système dynamique par sa description énergétique. Le langage considère trois types de phénomènes énergétiques dans un système : l'énergie transmise au système (source d'énergie), celle répartie à travers le système (stockage d'énergie) puis celle restituée à son environnement (dissipation d'énergie). Des exemples de phénomènes énergétiques des différents domaines physiques sont donnés dans le tableau A.1.

Domaine physique	Source d'énergie	Stockage d'énergie	Dissipation d'énergie
Mécanique	Vérin Moteur	Masse en mouvement, ressort Inertie en rotation, barre de torsion	Frottement, amortisseur
Hydraulique	Pompe, Compresseur	Accumulateur, chambre de vérin	Orifice, restriction
Thermo-dynamique	Pompe à chaleur	Capacité thermique	Conduction

TABLE A.1 – Exemples de composants source, stockage et dissipation d'énergie dans trois domaines physiques.

L'interconnexion des différents phénomènes énergétiques se fait par des *liens de puissance* et des éléments de *structure de jonction*.

## Les variables de puissance

Les variables de puissance sont des variables qui caractérisent la puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  pour l'échange d'énergie entre deux sous-systèmes indépendamment du domaine physique considéré : les *variables d'effort* et celles de *flux*.

## Les variables d'énergie

Les variables d'énergie sont des variables qui caractérisent l'état énergétique d'un système. Elles constituent le vecteur d'état du modèle bond graph. Indépendamment du domaine physique considéré, elles sont appelées *moment généralisé* (variable  $p(t)$ ) et *déplacement généralisé* (variable  $q(t)$ ).

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

ou :

$$\dot{p}(t) = e(t)$$

$$\dot{q}(t) = f(t)$$

Quelques exemples sur la nature physique de ces différentes variables et ce, dans différents domaines, sont donnés dans le tableau A.2.

## Représentation des flux d'énergie

Le lien de puissance est un concept bond graph pour représenter l'interaction physique et le flux d'énergie entre deux sous-systèmes  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  (Fig. A.1).

$$\Sigma_A \begin{array}{c} e(t) \\ \nearrow \\ f(t) \end{array} \Sigma_B$$

FIGURE A.1 – Lien de puissance entre les sous-systèmes  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$ .

Le lien de puissance porte les variables d'effort  $e(t)$  et de flux  $f(t)$  de l'échange d'énergie entre  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$ . La puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  est alors écrite :

$$\mathcal{P}(t) = e(t)f(t)$$

Les positions de la demi-flèche et des variables  $e(t)$  et  $f(t)$  respectent les conventions suivantes :

- la direction de la demi-flèche du lien de puissance est celle du flux positif d'énergie,
- la variable de flux  $f(t)$  est généralement placée du côté de la demi-flèche (et donc la variable d'effort  $e(t)$  placée de l'autre côté).

### A.1.2 Éléments bond graph

Les éléments bond graph sont catégorisés en deux classes : ceux caractérisant les phénomènes énergétiques (phénomènes d'apport, de stockage et de dissipation d'énergie) et ceux caractérisant l'interconnexion des phénomènes.

Domaine physique	Variables de puissance		Variables d'énergie	
	Effort $e$	Flux $f$	Moment généralisé $p$	Déplacement généralisé $q$
Mécanique de translation	Force ( $N$ )	Vitesse ( $m/s$ )	Quantité de mouvement ( $kg.m/s$ )	Déplacement ( $m$ )
Mécanique de rotation	Couple ( $N.m$ )	Vitesse angulaire ( $rad/s$ )	Moment cinétique ( $kg.m^2.rad/s$ )	Angle ( $rad$ )
Electrique	Tension ( $V$ )	Courant ( $A$ )	Flux magnétique total ( $Wb$ )	Charge ( $C$ )
Hydraulique	Pression ( $Pa$ )	Débit volumique ( $m^3/s$ )	Moment de pression ( $Pa.s$ )	Volume ( $m^3$ )
Magnétique	Force magnéto-motrice ( $A$ )	Dérivée du flux magnétique ( $Wb/s$ )		Flux magnétique ( $Wb$ )
Chimie	Potentiel chimique ( $J/mole$ )	Débit molaire ( $mole/s$ )		Mole ( $mole$ )
Thermo-dynamique	Température ( $K$ )	Débit d'entropie ( $W/K$ )		Entropie ( $J/K$ )

TABLE A.2 – Exemples de variables de puissance et d'énergie (et leur unité SI) associées à différents domaines de la physique [Jar10]

### Éléments caractérisant les phénomènes énergétiques

Cette catégorie est constituée des éléments passifs  $R, I, C$  et des sources d'énergie (ou des éléments actifs)  $S_e$  et  $S_f$ .

Les éléments passifs correspondent à des phénomènes physiques qui stockent l'énergie ( $I, C$ ) ou la dissipent ( $R$ ). Les sources d'énergie (éléments actifs) sont capables d'imposer une variable d'effort ( $S_e$ ) ou une variable de flux ( $S_f$ ) au système.

Par convention, les liens de puissance connectés à des éléments passifs sont donc représentés comme entrants et ceux connectés à des éléments actifs comme sortants (Tab. A.3).

### Éléments liés à l'interconnexion des phénomènes

Les *éléments de jonction* (0 et 1) et les *éléments de transduction*  $TF$  et  $GY$  permettent de décrire les interconnexions entre des phénomènes énergétiques.

Différemment des éléments liés aux phénomènes énergétiques, ceux liés à l'interconnexion peuvent être connectés à plusieurs liens de puissance. Ce sont donc des éléments *multiports*.

Les *éléments de jonction* permettent l'interconnexion des phénomènes énergétiques selon qu'ils partagent une même variable d'effort (jonction 0) ou une même variable de flux (jonction 1) tandis que les *éléments de transduction* permettent l'interconnexion des phénomènes énergétiques appartenant bien souvent à des domaines physiques différents (Tab. A.4).

	Élément bond graph	Représentation graphique, loi caractéristique et énergie	Exemple physique
Éléments passifs	$C$ stockage d'énergie	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow C$ $q(t) - \Gamma_C(e(t)) = 0$ $\mathcal{E}(q_t) = \mathcal{E}(q_0) + \int_{q_0}^{q_t} e(\hat{q}) d\hat{q}$	Ressort, accumulateur, capacité électrique,...
	$I$ stockage d'énergie	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow I$ $p(t) - \Gamma_I(f(t)) = 0$ $\mathcal{E}(p_t) = \mathcal{E}(p_0) + \int_{p_0}^{p_t} f(\hat{p}) d\hat{p}$	Masse, inertie, inductance électrique,...
	$R$ dissipation d'énergie	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow R$ $e(t) - \Gamma_R(f(t)) = 0$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau)f(\tau) d\tau$	Frottements secs, visqueux, dissipation par effet Joule,...
Éléments actifs	$Se$ source d'énergie imposant l'effort	$E(t) : Se \frac{e(t)}{f(t)} \nearrow$ $e(t) = E(t)$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau)f(\tau) d\tau$	Source de pression, source de tension,
	$Sf$ source d'énergie imposant le flux	$F(t) : Sf \frac{e(t)}{f(t)} \nearrow$ $f(t) = F(t)$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau)f(\tau) d\tau$	Source de courant, ...

TABLE A.3 – Éléments bond graph caractérisant les phénomènes énergétiques.

### Les éléments de détection

En dehors des éléments mentionnés ci-dessus, le langage bond graph dispose également de détecteur d'effort (élément bond graph  $De$ ) et de flux (élément bond graph  $Df$ ) (Tab. A.5). Ces deux éléments sont des éléments passifs utiles pour représenter la mesure ou le suivi d'une variable. Ils peuvent représenter des capteurs idéaux et n'ont pas d'effet sur le comportement dynamique du modèle. La puissance associée à un détecteur est nulle.

## A.2 Construction d'un modèle bond graph

En général, la modélisation d'un système mécatronique en langage bond graph se déroule en trois grandes étapes :

- **Construction du modèle bond graph à mots** (*word bond graph*) (figure A.2) : le système est décomposé en composants, puis chaque composant en sous-composants, *etc* jusqu'à des « composants élémentaires ». Puis, une interconnexion de ces différents com-

	Élément bond graph	Représentation graphique et lois caractéristiques	Exemple physique
Éléments de jonction	jonction 0 conservation de la puissance à effort commun	$\begin{array}{ccc} e_2(t) & \downarrow & f_2(t) \\ \frac{e_1(t)}{f_1(t)} & \nearrow 0 & \searrow \frac{e_3(t)}{f_3(t)} \end{array}$ $\begin{cases} e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \end{cases}$	Contrainte cinématique, loi des nœuds, ...
	jonction 1 conservation de la puissance à flux commun	$\begin{array}{ccc} e_2(t) & \downarrow & f_2(t) \\ \frac{e_1(t)}{f_1(t)} & \nearrow 1 & \searrow \frac{e_3(t)}{f_3(t)} \end{array}$ $\begin{cases} e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \\ f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \end{cases}$	Équations de NEWTON-EULER, loi des mailles, ...
Éléments de transduction	<i>TF</i> transformateur, transduction instantanée et sans dissipation d'énergie	$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow \overset{m}{TF} \searrow \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$ $\begin{cases} e_1(t) - m e_2(t) = 0 \\ m f_1(t) - f_2(t) = 0 \end{cases}$ où $m$ est le module du transformateur	Bras de levier, réducteur mécanique, transformateur électrique, ...
	<i>GY</i> gyrateur, transduction instantanée et sans dissipation d'énergie	$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \nearrow \overset{r}{GY} \searrow \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$ $\begin{cases} e_1(t) - r f_2(t) = 0 \\ r f_1(t) - e_2(t) = 0 \end{cases}$ où $r$ est le module du gyrateur	Gyroscope à vitesse constante, conversion électromécanique d'un moteur à courant continu, ...

TABLE A.4 – Éléments bond graph liés à l'interconnexion des phénomènes.

posants élémentaires est établie, à l'image de l'architecture physique du système.

- **Détermination de la structure du modèle bond graph** : Le modèle bond graph de chaque « composant élémentaire » est précisé en identifiant les phénomènes énergétiques et en représentant leur interconnexion. La structure du modèle bond graph est ainsi fixée (figure A.3) .
- **Association à chaque phénomène énergétique** (éléments bond graph  $R$ ,  $I$  et  $C$ ) d'une loi caractéristique particulière (linéaire ou non).

	Élément bond graph	Représentation graphique et loi caractéristique	Exemple physique
Éléments de détection	$De$ détecteur d'effort imposant un flux nul	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow De$ $f(t) = 0$	Voltmètre, dynamomètre,...
	$Df$ détecteur de flux imposant un effort nul	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow Df$ $e(t) = 0$	Ampèremètre, capteur de débit, ...

TABLE A.5 – Éléments bond graph de détection de variable de puissance.

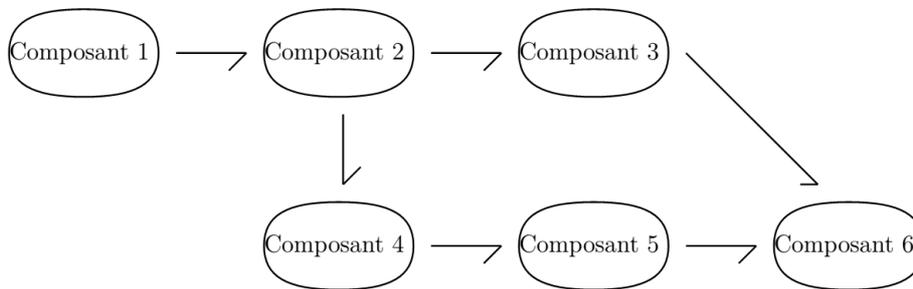


FIGURE A.2 – Exemple de modèle bond graph à mots.

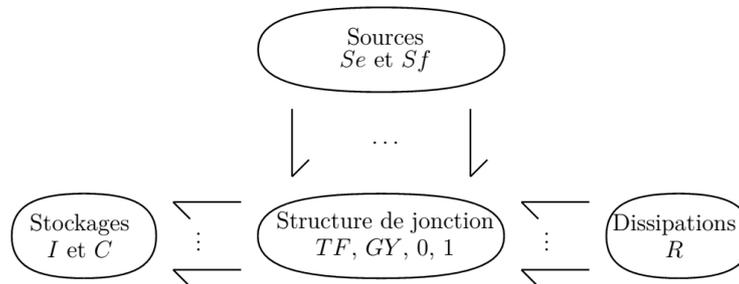


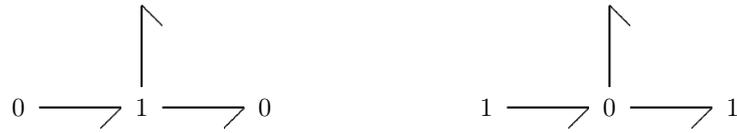
FIGURE A.3 – Structure générique d'un modèle bond graph.

À partir de ces trois grandes étapes, des procédures de construction pour les modèles relativement simples, ou plus complexes comme pour les systèmes mécaniques multi-corps peuvent être appliquées [KMR12, Fav97].

**Procédure 2.** *Construction d'un modèle bond graph (cas de modèles 0D issus de l'électrique, l'hydraulique, la mécanique de translation et la mécanique de rotation)*

1. Identifier les différents domaines de la physique présents dans le système.
2. Choisir une référence de potentiel, de pression, de vitesse de translation et de rotation.
3. À chaque nœud distinct de potentiel, de pression, attacher une jonction 0 et, à chaque vitesse de translation et de rotation, attacher une jonction 1. Nommer les variables liées à ces potentiels et ces vitesses.
4. Insérer une jonction 1 entre les jonctions 0 et inversement pour les domaines de la mécanique.

5. Placer les liens de puissance faisant alors apparaître les différences de potentiels, de pressions, de vitesses de translation et de rotation.



(a)

(b)

6. Placer les éléments de transduction appropriés entre les domaines d'énergie du système.
7. Connecter les éléments  $IC$  et  $R$  aux liens libres correspondant aux phénomènes modélisés et en indiquant leur paramètre (ou leur loi caractéristique).
8. Éliminer les liens de puissance nulle, c'est-à-dire où l'une des deux variables de puissance est nulle et simplifier les structures graphiques selon les règles du tableau ci-dessous.

Règle	Modèle bond graph	Modèle bond graph simplifié
<b>R1</b>		
<b>R2</b>		
<b>R3</b>		
<b>R4</b>		

### A.3 Schéma de calcul associé à un modèle bond graph

Les modèles bond graph considérés jusqu'à maintenant sont des modèles acausaux : ils ne reflètent que la structure physique du système. Le formalisme bond graph dispose également du concept de causalité et de bi-causalité qui permet l'orientation des équations.

L'orientation des équations est l'arrangement des équations caractéristiques sous forme d'une séquence d'affectations qui permet de partir de la donnée des grandeurs connues pour arriver à déterminer les grandeurs inconnues.

Le modèle bond graph causal (ou bicausal) fournit alors un schéma de calcul orienté.

Dans cette section, nous empruntons le symbole «  $:=$  » du langage de programmation PASCAL pour décrire les équations du modèle dans le sens où le membre de gauche est déterminé par l'évaluation du membre de droite.

#### A.3.1 Causalité

##### Principe général

Le bond graph causal respecte le principe de cause à effet. Dans un tel modèle, un élément ne peut que soit imposer l'effort et recevoir le flux, soit imposer le flux et recevoir l'effort.

Considérons deux sous-systèmes  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  connectés par un lien de puissance (Fig. A.1). Ces deux sous-systèmes ont également les mêmes efforts et flux à leur port :

$$\begin{cases} e_A - e_B = 0 \\ f_A - f_B = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $e_A$  et  $f_A$  (resp.  $e_B$  et  $f_B$ ) sont l'effort et le flux au port du sous-système  $\Sigma_A$  (resp.  $\Sigma_B$ ).

Conformément au principe physique de causalité, seules deux situations peuvent alors avoir lieu :

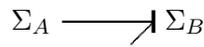
- soit le sous-système  $\Sigma_A$  impose l'effort à  $\Sigma_B$  qui réagit à son tour en imposant le flux à  $\Sigma_A$  :

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_A := f_B \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

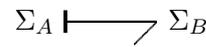
- soit le sous-système  $\Sigma_A$  impose le flux à  $\Sigma_B$  qui réagit à son tour en imposant l'effort à  $\Sigma_A$  :

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_B := f_A \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Dans le langage bond graph, l'orientation du schéma de calcul est représentée par un *trait causal* sur le lien de puissance, près de l'élément pour lequel l'effort est imposé. (Fig. A.4).



(a) Correspondant au schéma de calcul (A.2)



(b) Correspondant au schéma de calcul (A.3)

FIGURE A.4 – Représentation bond graph de la causalité.

### Contraintes de causalité des éléments bond graph

- Par définition, les éléments bond graph  $Se$ ,  $Sf$ ,  $De$  et  $Df$  sont à causalité imposée.
- Les tableaux A.6 et A.7 présentent les différents schémas de calcul possibles pour des éléments bond graph.
- Certaines causalités sont parfois impossibles pour certains éléments bond graph lorsque leurs lois caractéristiques sont mathématiquement non inversibles.
- Deux règles strictes pour des éléments jonction :
  - un et un seul trait causal doit être placé près d'une jonction 0,
  - un et un seul trait causal doit être placé éloigné d'une jonction 1.
- L'affectation de la causalité est la procédure pour organiser les équations localement sur les éléments et d'obtenir un modèle global de simulation. Graphiquement, cette procédure permet d'attribuer un trait causal à chaque lien de puissance dans le modèle. Il existe dans la littérature des procédures de propagation de la causalité. Selon l'objectif (obtenir le modèle d'état du système, anticiper l'apparition de conflits, ou générer les équations de Lagrange du système), nous pouvons utiliser la procédure SCAP [KMR12], MSCAP [vD94] ou LCAP [KMR12]. Nous présentons ici la procédure SCAP.

#### Procédure 3. Affectation de la causalité préférentielle intégrale (procédure SCAP)

1. Pour chaque élément à causalité imposée (sources et éléments non inversibles), affecter la causalité obligatoire et la propager à travers le modèle bond graph en utilisant les contraintes de causalité des éléments de jonction 0 et 1 et des éléments  $TF$  et  $GY$ .
2. Pour chaque élément de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentiellement intégrale si possible et la propager de la même façon qu'à l'étape 1.
3. S'il reste des éléments  $R$  non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire à un de ces éléments et la propager comme précédemment.

Éléments bond graph et causalités possibles	Schémas de calcul associés	Commentaires
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow C$	$e(t) := \Gamma_C^{-1}(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + q(t_0))$	Causalité intégrale
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow C$	$f(t) := \frac{d}{dt}(\Gamma_C(e(t)))$	Causalité dérivée
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow I$	$f(t) := \Gamma_I^{-1}(\int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + p(t_0))$	Causalité intégrale
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow I$	$e(t) := \frac{d}{dt}(\Gamma_I(f(t)))$	Causalité dérivée
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow R$	$e(t) := \Gamma_R(f(t))$	Causalité résistance
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow R$	$f(t) := \Gamma_R^{-1}(e(t))$	Causalité conductance

TABLE A.6 – Causalités possibles pour les différents éléments bond graph.

4. Répéter l'étape 3 jusqu'à ce que tous les éléments  $R$  soient causalement déterminés.
5. Si le modèle bond graph n'est pas entièrement causal, affecter une causalité arbitraire à un lien sans trait causal et la propager comme précédemment.
6. Répéter l'étape 5 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit entièrement déterminé causalement.

### A.3.2 Bicausalité

#### Principe général

Tandis que la causalité bond graph permet d'envisager les schémas de calcul physiquement réalisables, le concept de bicausalité bond graph permet de construire des schémas de calcul physiquement irréalisables (au sens qu'ils ne respectent pas le principe physique de cause à effet) pourtant mathématiquement réalisables, en dissociant l'affectation des variables d'effort de celle des variables de flux (Fig. A.5). Le trait causal classique est alors scindé en deux demi-trait causaux. À partir du schéma acausal A.1, on peut déduire donc deux autres schémas de calcul :

- un premier schéma où le sous-système  $\Sigma_A$  détermine à la fois l'effort et le flux pour  $\Sigma_B$  :

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_B := f_A \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

- et un deuxième schéma où, cette fois-ci, le sous-système  $\Sigma_B$  détermine à la fois l'effort et le flux pour  $\Sigma_A$  :

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_A := f_B \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Liés au concept de bicausalité, les double sources et double détecteurs ont également été introduits (Tab. A.8).

Éléments bond graph et causalités possibles	Schémas de calcul associés	Commentaires
$E : \text{Se} \begin{array}{c} \xrightarrow{e(t)} \\ \xrightarrow{f(t)} \end{array}$	$e(t) := E$	Causalité unique et imposée
$F : \text{Sf} \begin{array}{c} \xrightarrow{e(t)} \\ \xrightarrow{f(t)} \end{array}$	$f(t) := F$	Causalité unique et imposée
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e(t)} \\ \xrightarrow{f(t)} \end{array} \text{De}$	$f(t) := 0$	Causalité unique et imposée
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e(t)} \\ \xrightarrow{f(t)} \end{array} \text{Df}$	$e(t) := 0$	Causalité unique et imposée
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{m}{TF} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_2(t)} \end{array}$	$\begin{cases} e_1(t) := m e_2(t) \\ f_2(t) := m f_1(t) \end{cases}$	Deux causalités uniquement
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{m}{TF} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_2(t)} \end{array}$	$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{r}{GY} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_2(t)} \end{array}$	$\begin{cases} e_1(t) := r f_2(t) \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	Deux causalités uniquement
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_1(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{r}{GY} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_2(t)} \end{array}$	$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{0}{\text{J}} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_3(t)} \\ \xrightarrow{f_3(t)} \end{array}$	$\begin{cases} e_2(t) := e_1(t) \\ e_3(t) := e_1(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$	un seul et unique effort est imposé sur la jonction 0
$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_2(t)} \\ \xrightarrow{f_1(t)} \end{array} \overset{1}{\text{J}} \begin{array}{c} \xrightarrow{e_3(t)} \\ \xrightarrow{f_3(t)} \end{array}$	$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_1(t) \\ f_3(t) := f_1(t) \end{cases}$	un seul et unique flux est imposé sur la jonction 1

TABLE A.7 – Causalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite).



(a) Correspondant au schéma de calcul (A.4)



(b) Correspondant au schéma de calcul (A.5)

FIGURE A.5 – Représentation bond graph de la bicausalité.

Élément bond graph	Représentation graphique et loi caractéristique	Exemple physique
$SeSf$ double sources imposant l'effort et le flux	$E, F : SeSf \frac{e(t)}{f(t)} \nearrow$ $\begin{cases} e(t) = E \\ f(t) = F \end{cases}$	Pas d'interprétation physique possible
$DeDf$ double détecteurs d'effort et de flux	$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow DeDf$	Pas d'interprétation physique possible

TABLE A.8 – Éléments bond graph pour la propagation de la bicausalité.

### Bicausalité des différents éléments bond graph

Les différents schémas bicauxaux possibles pour les éléments bond graph vus jusqu'à présent ainsi que leurs éventuelles utilisations sont présentés dans les tableaux A.9, A.10 et A.11.

Éléments bond graph et bicausalités possibles	Schémas de calcul associés	Utilisations éventuelles
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow C$	$e(t), f(t) \rightarrow \Gamma_C() ?$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow I$	$e(t), f(t) \rightarrow \Gamma_I() ?$	
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow R$	$e(t), f(t) \rightarrow \Gamma_R() ?$	
$E, F : SeSf \frac{e(t)}{f(t)} \nearrow$	$\begin{cases} e(t) := E \\ f(t) := F \end{cases}$	Départ d'affectation bicausale
$\frac{e(t)}{f(t)} \nearrow DeDf$	$e(t) ?, f(t) ?$	Arrivée d'affectation bicausale

TABLE A.9 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph.

Dans le cas d'un modèle bond graph bicausal, l'affectation de la bicausalité repose, d'une part, sur la propagation de la bicausalité des éléments double sources  $SeSf$  vers les éléments double détecteurs  $DeDf$  et, d'autre part, sur une affectation causale (au sens classique) des autres éléments du modèle.

Des procédures existent pour affecter la bicausalité à un modèle bond graph. Nous présentons ici la procédure SCAP<sup>1</sup> [FN97, NB05]. Elle permet de propager la bicausalité de manière à construire le modèle inverse d'un système carré ( $m$  entrées et  $m$  sorties). Notons que d'autres

1. Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion

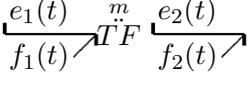
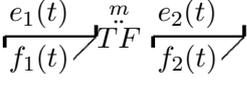
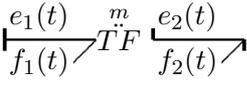
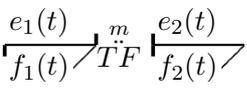
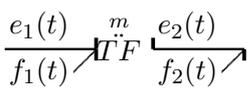
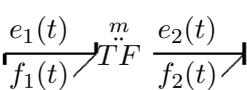
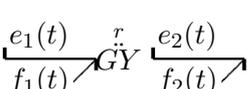
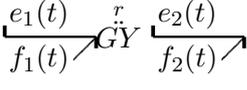
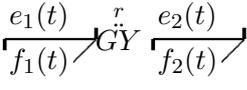
Éléments bond graph et bicausalités possibles	Schémas de calcul associés	Utilisations éventuelles
	$\begin{cases} e_1(t) := me_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m}f_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
	$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m}e_1(t) \\ f_2(t) := mf_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := me_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
	$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_2(t) := mf_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{m}f_2(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_2(t) := \frac{1}{m}e_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_2(t) := \frac{1}{m}e_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} e_1(t) := rf_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r}e_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
	$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r}e_1(t) \\ e_2(t) := rf_1(t) \end{cases}$	

TABLE A.10 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite).

procédures existent pour la propagation de la bicausalité d'un modèle bond graph : MSCAPI<sup>2</sup>.

#### Procédure 4. Procédure SCAPI pour l'affectation de la bicausalité. [FN97]

1. Dans le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, choisir un ensemble de lignes de puissance E/S disjointes associées à des chemins causaux E/S disjoints. S'il n'existe pas de tel ensemble alors le modèle n'est pas inversible et la procédure s'arrête.
2. Dans le modèle bond graph acausal, remplacer les sources (respectivement les détecteurs) associées aux entrées (respectivement aux sorties) par des double détecteurs  $DeDf$  (respectivement des doubles source  $SeSf$ ).

2. Modified Sequential Causality Assignment for Inversion [FN97].

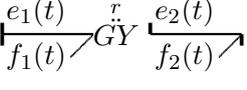
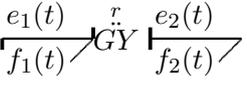
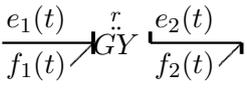
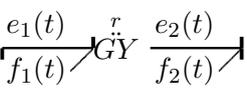
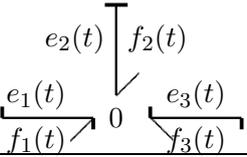
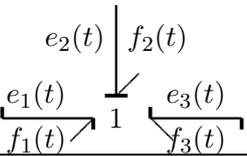
Éléments bond graph et bicausalités possibles	Schémas de calcul associés	Utilisations éventuelles
	$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := r f_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
	$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	
	$\begin{cases} e_2(t) := e_3(t) \\ e_1(t) := e_3(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
	$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_3(t) \\ f_1(t) := f_3(t) \end{cases}$	

TABLE A.11 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite).

3. Pour chaque élément dont la causalité est imposée (source, élément non inversible), affecter cette causalité obligatoire et propager cette causalité à travers la structure de jonction en respectant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments  $TF$  et  $GY$ .
4. Le long de chaque ligne de puissance choisie à l'étape 1, propager la bicausalité de la double source vers le double détecteur. Puis, propager la causalité à travers le modèle bond graph en utilisant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments  $TF$  et  $GY$ . Si des conflits causaux ou des boucles causales non résolubles apparaissent, recommencer les étapes précédentes avec un autre ensemble de lignes de puissance E/S disjointes. Si aucun de ces ensembles ne résout les conflits causaux, alors le système n'est pas inversible et la procédure s'arrête.
5. Pour les éléments de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentiellement intégrale si possible et la propager à travers le modèle bond graph comme à l'étape précédente.
6. S'il reste des éléments  $R$  non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire sur un de ces éléments et la propager comme précédemment.
7. Répéter l'étape 6 jusqu'à ce que chaque élément  $R$  soit déterminé causalement.
8. Si le modèle bond graph n'est pas complètement déterminé causalement, affecter une causalité arbitraire sur un lien bond graph sans trait causal et la propager comme précédemment.

9. Répéter l'étape 8 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit complètement déterminé causalement.

## A.4 Notions d'ordre dans un modèle bond graph

Nous présentons dans cette partie les notions de causalités intégrale et dérivée d'un élément de stockage, d'ordre d'un chemin causal et d'un ensemble de chemins causaux.

**DÉFINITION 25.** [Dau00,KMR12] Un élément de stockage de type I (resp. C) est en **causalité intégrale** si le trait causal, sur le lien de puissance auquel il est connecté, est placé près (resp. éloigné) de l'élément. Dans ce cas, la variable d'effort est une entrée (resp. sortie) pour l'élément, et la variable de flux est une sortie (resp. entrée) pour l'élément.

**DÉFINITION 26.** [Dau00,KMR12] Un élément de stockage de type I (resp. C) est en **causalité dérivée** si le trait causal, sur le lien de puissance auquel il est connecté, est placé éloigné (resp. près) de l'élément. Dans ce cas, la variable d'effort est une sortie (resp. entrée) pour l'élément, et la variable de flux est une entrée (resp. sortie) pour l'élément.

Lors de l'affectation de la causalité, un modèle bond graph est en *causalité préférentiellement intégrale (resp. dérivée)* s'il a le plus grand nombre possible d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée).

### Lignes de puissance

**DÉFINITION 27.** [WYT95,NB05,Bor11] **Ligne de puissance :** Une *ligne de puissance* dans une représentation bond graph acausale est une suite alternée de liens de puissance et d'éléments multiport. Par définition, une ligne de puissance ne passe pas plus d'une fois par le même lien de puissance.

Une ligne de puissance représente un « chemin » d'acheminement de l'énergie entre deux points d'un système.

**DÉFINITION 28.** [Bor11] **Ligne de puissance entrée/sortie :** Une *ligne de puissance entrée/sortie* est une ligne de puissance entre un lien de puissance dont l'une des deux variables de puissance dépend d'une entrée du modèle et, un lien de puissance dont l'une des deux variables de puissance est en relation avec une sortie.

**DÉFINITION 29.** [Ngw01,Bor11] **Lignes de puissance disjointes :** Deux lignes de puissance sont dites *disjointes* si elles n'ont aucun lien de puissance en commun.

### Chemins causaux

Tandis que le concept de ligne de puissance s'appuie essentiellement sur l'existence de relations entre les puissances et est acausal, le concept de chemin causal est associé à l'orientation des équations du modèle et l'affectation des variables du modèle par ces équations.

**DÉFINITION 30.** [WYT95,Ngw01,Bor11] Un **chemin causal** dans une représentation bond graph causale ou bicausale est une suite ordonnée de variables mises en relation les unes aux autres conformément à l'affectation de la causalité ou bicausalité sur le bond graph, sans qu'une seule de ces variables n'apparaissent plus d'une fois dans la suite.

**DÉFINITION 31.** [Bor11] Un **chemin causal entrée/sortie** est une chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie.

**DÉFINITION 32.** [Rah93] Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, deux chemins causaux sont dits BG-différents s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun.

**DÉFINITION 33.** [Ngw01,Bor11] Deux **chemins causaux disjoints** sont deux chemins causaux sans aucune variable commune.

**DÉFINITION 34.** [NB05,Bor11] Un chemin causal est **associé à une ligne de puissance** si pour chaque lien de puissance de la ligne, l'une des deux variables de puissance appartient au chemin causal.

La notion de chemin causal montre comment une variable influe mathématiquement sur une autre dans un modèle bond graph.

**DÉFINITION 35.** [Ber97, FN97, Bor11] **L'ordre d'un chemin causal** dans une représentation bond graph causale ou bicausale (en causalité préférentiellement intégrale) est défini comme la différence entre le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale d'une part, et celui des éléments de stockage en causalité dérivée d'autre part, rencontrés le long du chemin causal.

L'ordre d'un ensemble de chemins causaux est la somme des ordres des chemins causaux constituant l'ensemble.

**DÉFINITION 36.** [FN97] **L'ordre BG d'un modèle bond graph** est égale au nombre  $n_{I(I)}$  d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale. Ce nombre correspond à la dimension du vecteur d'état et donc au nombre de conditions initiales qu'il est nécessaire de fixer pour lancer une simulation. Il est égal au nombre de variables d'état qui sont statiquement indépendantes.

**DÉFINITION 37.** [FN97] **L'ordre BG d'un système d'équations représenté par un modèle bond graph** est donné par  $n_{I(I)} - n_{I(D)}$  où  $n_{I(I)}$  (resp.  $n_{I(D)}$ ) représente le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale (resp. dérivée). Cette ordre correspond au nombre de variables d'état dynamiquement indépendantes.

**DÉFINITION 38.** [Rah93] Sur un modèle bond graph causal, la **longueur BG**  $l_k(v_i, v_j)$  **d'un chemin causal**  $\textcircled{K}$  entre une variable  $v_i$  et une autre variable  $v_j$  est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce chemin.

**DÉFINITION 39.** [Rah93] Sur un modèle bond graph causal, **l'ordre BG**  $\omega_k(v_i, v_j)$  **d'un chemin causal**  $\textcircled{K}$  entre une variable  $v_i$  et une autre variable  $v_j$  est défini de sorte que :

$$\omega_k(v_i, v_j) := n_I - n_D \quad (\text{A.6})$$

où  $n_I$  (resp.  $n_D$ ) est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée) rencontrés le long de ce chemin.

**DÉFINITION 40.** Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, l'ordre relatif BG  $n'_{BG,i}$  de la sortie  $y_i$  est égal à  $\omega_{\min BG,i}$ , l'ordre BG minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre la sortie  $y_i$  et n'importe quelle entrée.

**DÉFINITION 41.** [CDD<sup>+</sup>86, WDA09] **L'ordre d'essentialité** d'une sortie est le nombre maximal de dérivations nécessaires d'une sortie pour exprimer les entrées dans un modèle inverse.

## A.5 Critères d'inversibilité d'un modèle bond graph

**DÉFINITION 42.** [FN97] Le bond graph inverse d'un système est son modèle bond graph obtenu après affectation de la bicausalité et tel qu'il représente graphiquement le modèle inverse permettant d'exprimer ses entrées en fonction de ses sorties.

Nous considérons dans cette section, les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 9.** *Les systèmes sont carrés : le nombre d'entrées du modèle est égal au nombre de sorties.*

### APPROCHE ALGÈBRE

Pour les systèmes linéaires, la littérature fournit plusieurs critères *directs* d'inversibilité qui permettent de tester directement, à partir de la représentation d'état ou de la matrice de transfert ou encore à partir de la matrice système, l'inversibilité du modèle sans la détermination du modèle inverse [SM69, BM65, Res90]. Pour les systèmes non linéaires, les conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité se déduisent au cours de la construction du modèle inverse : les critères indirects. Ainsi, on définit une deuxième hypothèse.

**Hypothèse 10.** *Les systèmes sont linéaires et invariants dans le temps (LTI).*

Parmi les critères d'inversibilité, le plus couramment utilisé est le suivant :

**Critère 3.** *Soit  $\Sigma$  un système carré, linéaire et invariant dans le temps, défini par le quadruplet de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . On note  $\mathbf{T}$  sa matrice de transfert donnée par  $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ . La matrice système associée  $\mathbf{P}$  est donnée par  $\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ . Le système  $\Sigma$  est inversible si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- (1)  $\det \mathbf{T}(s) \neq 0$ ,
- (2)  $\det \mathbf{P}(s) \neq 0$ .

### APPROCHE BOND GRAPH

Défini par RAHMANI dans sa thèse [Rah93], le premier critère bond graph direct d'inversibilité repose sur les notions des chemins causaux E/S différents :

**Critère 4.** *Soit un modèle bond graph avec  $m$  entrées et vérifiant les deux hypothèses ci-dessus.*

- *Si le modèle bond graph ne contient pas  $m$  chemins causaux E/S différents, alors le système est non inversible.*
- *Si le modèle bond graph contient un seul choix possible de  $m$  chemins causaux E/S différents, alors le système est inversible.*
- *Si le modèle bond graph contient plusieurs choix possibles de  $m$  chemins causaux E/S différents, alors il faut calculer le déterminant de la matrice système pour conclure sur l'inversibilité du système.*

Un autre critère d'inversibilité qui repose sur les notions des lignes de puissances E/S disjointes et des chemins causaux E/S disjoints a été défini par NGWOMPO [FN97, NB05]. Ce critère est applicable à des systèmes linéaires et non linéaires :

**Critère 5.** *Soit un modèle bond graph qui vérifie les hypothèses 9 et 10, le modèle est inversible si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- **Condition nécessaire 1** : *il existe au moins un ensemble de  $m$  lignes de puissance (E/S) disjointes sur le modèle bond graph acausal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le système n'est pas inversible.*
- **Condition nécessaire 2** : *il existe au moins un ensemble de chemins causaux E/S disjoints sur le modèle bond graph causal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le système n'est pas inversible.*

*Si le modèle possède plusieurs ensembles de  $m$  chemins causaux E/S disjoints, alors :*

- *Choisir un ensemble de  $m$  lignes de puissance E/S disjointes associé à un ensemble de  $m$  chemins causaux E/S disjoints,*
- *Remplacer les éléments portant les entrées (resp. sorties) du modèle bond graph par des double détecteurs (resp. double sources),*

- Construire le modèle bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des  $m$  lignes de puissance  $E/S$  disjointes choisies.
- **Condition nécessaire 3** : La structure de jonction du modèle bond graph bicausal résultant doit être résoluble. Si quel que soit l'ensemble de  $m$  lignes de puissance  $E/S$  disjointes choisi et quelles que soient les affectations causales retenues pour le modèle bond graph bicausal, une structure de jonction non résoluble apparaît alors le système n'est pas inversible.

## A.6 Ordre d'essentialité d'une sortie

Dans le contexte du dimensionnement des systèmes mécatroniques, la détermination de ce type d'ordre nous permet de vérifier ainsi que le cahier des charges est correctement rédigé et que les trajectoires spécifiées sont suffisamment dérivables par rapport au temps pour calculer des entrées physiquement réalisables.

Dans la littérature, il existe un certain nombre de procédures pour déterminer l'ordre d'essentialité d'une sortie. Nous considérons tout d'abord l'approche algébrique : l'ordre d'essentialité est déterminé à partir du modèle d'état.

**Théorème 4 (Modèle d'état  $\rightarrow$  ordre d'essentialité [CDD<sup>+</sup>86]).** Pour un système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  inversible à droite et présentant  $p$  sorties, l'ordre d'essentialité  $n_{ie}$  de la sortie  $y_i$  peut être calculé de sorte que :

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^p n_j - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{n}_{ij}$$

où :

- $n_j$  est l'ordre du  $j^{\text{ième}}$  zéro à l'infini du système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  ;
- $\bar{n}_{ij}$  est l'ordre du  $j^{\text{ième}}$  zéro à l'infini du système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}}_i)$  lorsque :

$$\bar{\mathbf{C}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T & \dots & \mathbf{c}_{i-1}^T & \mathbf{c}_{i+1}^T & \dots & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix}^T$$

et  $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\mathbf{c}_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $\mathbf{C}$ .

**Remarque 13.** L'hypothèse d'inversibilité à droite est nécessaire pour justifier le calcul des ordres d'essentialité pour chacune des  $p$  sorties. De plus, même si le théorème n'a pas été énoncé dans ce cadre, il reste valable pour un système où  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$  (les  $n_j$  sont alors calculés à partir du système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  et les  $\bar{n}_{ij}$  à partir des sous-systèmes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}}_i, \bar{\mathbf{D}}_i)$  où  $\bar{\mathbf{D}}_i$  est la matrice obtenue en supprimant la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $\mathbf{D}$ ).

Les ordres d'essentialité peuvent également être déterminés directement à partir de l'analyse d'un modèle bond graph en adoptant une approche soit causale soit bicausale.

### A.6.1 Approche bond graph causale

JARDIN a proposé dans sa thèse la procédure suivante pour déterminer l'ordre d'essentialité d'une sortie, en exploitant le modèle bond graph causal.

**Théorème 5 (Modèle bond graph  $\rightarrow$  ordre d'essentialité [Jar10]).** .

Soit un modèle bond graph carré, linéaires et invariants dans le temps et supposé inversible.

L'ordre d'essentialité  $n_{BG,ie}$  de la sortie  $y_i$  peut être calculé de sorte que :

$$n_{BG,ie} = L_p - L_{p-1}^{(i)}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :

- $L_p$  est la longueur BG minimale qu'un ensemble de  $p$  chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial ;
- $L_{p-1}^{(i)}$  est la longueur BG minimale qu'un ensemble de  $p - 1$  chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son  $i^{\text{ième}}$  détecteur.

### A.6.2 Approche bond graph bicausale

L'ordre d'essentialité peut être déterminé d'une manière plus simple en exploitant directement le modèle bond graph bicausal correspondant. Un théorème permettant cette détermination a été établi par EL FEKI *et al.* :

#### **Théorème 6. Modèle bond graph bicausal $\rightarrow$ ordre d'essentialité [EFMFK12]**

Soit un modèle bond graph carré, linéaire et invariant dans le temps et supposé inversible.

L'ordre d'essentialité  $n_{BG,ie}$  de la sortie  $y_i$  peut être calculé de sorte que :

$$n_{BG,ie} = - \min_{j \in \llbracket 1, \dots, m \rrbracket} \{ \omega_{ji} \}$$

où  $\omega_{ji}$  est l'ordre BG minimal que peut avoir un chemin causal entre la double source associée à  $y_i$  et le double détecteur associée à  $u_j$  sur le modèle bond graph bicausal correspondant affecté d'une causalité préférentiellement intégrale.

# Annexe B

## Théorie de probabilité

Cette annexe a pour objectif de présenter un certain nombre de définitions et de concepts de base de l'approche probabiliste. Pour cela, nous allons citer notamment les définitions dans [Sap06].

### B.1 Probabilité

Nous allons introduire dans cette section la probabilité sur un espace fini, puis élargir cette définition pour les variables aléatoires réelles. Les notions de la densité et de l'indépendance seront également abordées.

#### B.1.1 Espace probabilisé

La théorie de probabilité est basée sur la notion « aléatoire ». Une expérience dite aléatoire est celle dont le résultat est imprévisible. Elle donne lieu à des résultats différents quand elle est répétée dans des conditions identiques. Notons  $\omega$  le résultat de cette expérience et  $\Omega$  l'ensemble de tous les résultats possibles.

L'ensemble  $\Omega$  est désigné par **l'ensemble fondamental** ou encore **l'univers**. Un événement  $A$  est un sous-ensemble de  $\Omega$  tel qu'à l'issue de l'expérience aléatoire, il est possible de déterminer si l'événement  $A$  s'est produit ou non. L'événement élémentaire est une partie de  $\Omega$  réduite à un seul élément.

Dans un ensemble  $\Omega$  non dénombrable<sup>1</sup>, pour pouvoir construire une probabilité, il est nécessaire de restreindre les événements que l'on considère à une sous-classe  $\mathcal{C}(\Omega)$  appelée *tribu*.

**DÉFINITION 43.** Une **tribu**  $\mathcal{A}$  sur  $\Omega$  est une classe de parties de  $\Omega$  qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable d'éléments de  $\mathcal{A}$  alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  et  $\bigcap_{i \in I} A_i$  sont dans  $\mathcal{A}$

$\{\emptyset, \Omega\}$  est la plus petite tribu sur  $\Omega$  (*tribu grossière*) et  $\mathcal{P}(\Omega)$  est la plus grosse tribu sur  $\Omega$  (*tribu discrète*). Si  $A \subset \Omega$ ,  $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  est une tribu sur  $\Omega$ .

L'ensemble des événements constitue une classe  $\mathcal{C}$  de parties de  $\Omega$ .

---

1. Un ensemble est dénombrable s'il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur cet ensemble.

**DÉFINITION 44.** On appelle **espace probabilisable** le couple  $(\Omega; \mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  constitue une tribu de parties de  $\Omega$ .

**DÉFINITION 45.** On appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{C})$  une application  $P : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie

- $P(\Omega) = 1$
- Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable d'éléments de  $\mathcal{C}$  deux à deux disjoints  $\forall i \neq j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset$  alors

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \quad (\text{B.1})$$

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  s'appelle un espace probabilisé.

Supposons que l'on s'intéresse à la réalisation d'un événement  $A$ , en sachant qu'un événement  $B$  est réalisé. Cette réalisation est caractérisée par la probabilité conditionnelle de  $P(A/B)$ .

**DÉFINITION 46.** Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$**  (ou encore de  $A$  si  $B$ ) le rapport noté  $P(A/B)$  :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{B.2})$$

### B.1.2 Indépendance

**DÉFINITION 47. Indépendance de deux événements**  $A$  est indépendant de  $B$  si  $P(A/B) = P(A)$ .

$A$  indépendant de  $B \Leftrightarrow B$  indépendant de  $A$ .

**DÉFINITION 48. Indépendance mutuelle** Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements ; ils sont dits mutuellement indépendants si pour toute partie  $I$  de l'ensemble des indices allant de 1 à  $n$  on a :

$$P\left[\bigcap_I A_i\right] = \prod_I P(A_i) \quad (\text{B.3})$$

Cette condition est beaucoup plus forte que l'indépendance deux à deux, qui ne lui est pas équivalente mais en est une simple conséquence.

### B.1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Dans plusieurs cas, on peut associer à chaque événement  $\omega \in \Omega$  un nombre  $\theta \in \mathbb{R}$ . Si on peut spécifier une règle associant les événements  $\omega$  et les nombres  $\theta$ , on peut définir une variable aléatoire réelle.

Si  $X$  est une application d'un ensemble probabilisé  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  dans un ensemble  $E$ , il faut donc que  $E$  soit probabilisable, c'est-à-dire muni d'une tribu  $\mathcal{T}$  et que l'image réciproque de tout élément de  $\mathcal{T}$  soit un événement. Une variable aléatoire  $X$  est donc une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  dans  $(E, \mathcal{T})$ . Lorsque  $E = \mathbb{R}$ , la tribu engendrée par les intervalles de  $\mathbb{R}$  peut être utilisée. Cette tribu est appelée tribu borélienne et est notée  $\mathcal{B}$ .

**DÉFINITION 49.** Une variable aléatoire réelle  $\Theta$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  dans  $\mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

On appelle loi de probabilité de  $\Theta$  la mesure image de  $P$  par  $\Theta$  et on la note  $P_\Theta$

**DÉFINITION 50.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $\Theta$  est l'application  $F$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$  définie par :

$$F(\theta) = P(\Theta < \theta) \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Fonction de densité de probabilité pour la description de l'incertitude

Une variable aléatoire continue peut être caractérisée par sa fonction de densité de probabilité. Cette fonction associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné.

### DÉFINITION 51. Fonction de densité de probabilité

Soit  $\Theta$  une variable aléatoire continue, une loi de probabilité ou une fonction de densité de probabilité (FDP) associée est une fonction notée  $\phi_{\Theta}$  telle que :

- $\phi_{\Theta}(\theta) \geq 0$  ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\Theta}(\theta) d\theta = 1$  c'est-à-dire l'aire totale sous la courbe est égale à 1.

La probabilité que prenne des valeurs comprises entre  $a$  et  $b$  ( $a; b \in \mathbb{R}$ ) est donnée par :  $P(a \leq \Theta \leq b) = \int_a^b \phi_{\Theta}(\theta) d\theta$  ce qui correspond à l'aire sous la courbe entre  $a$  et  $b$ .

La fonction de densité de probabilité représente la dérivée par rapport à la variable aléatoire de la fonction de répartition.

$$\Phi_{\Theta}(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \phi_{\Theta}(\tau) d\tau \quad (\text{B.5})$$

### Relations entre des variables aléatoires

Nous considérons dans cette section la loi jointe de deux variables aléatoires. Ensuite, nous introduisons quelques fonctions utiles pour étudier la relation entre des variables aléatoires.

Les définitions portant sur la loi jointe entre deux variables aléatoires  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  impliquent que ces dernières soient définies sur le même espace fondamental  $\Omega$ . Si  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont définies respectivement sur les espaces fondamentaux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors il faut envisager un espace qui englobe  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (*espace-produit*).

La loi jointe des deux variables aléatoires ou loi de probabilité du couple  $(\Theta_1, \Theta_2)$  est définie par :

- Dans le cas discret :

$$\theta_1, \theta_2 \rightarrow p_{\theta_1\theta_2} = P(\Theta_1 = \theta_1 \quad \text{et} \quad \Theta_2 = \theta_2) \quad (\text{B.6})$$

- Dans le cas continu :

$$\theta_1, \theta_2 \rightarrow p_{\theta_1\theta_2} = P(\Theta_{1a} < \Theta_1 < \theta_{1b} \quad \text{et} \quad P(\Theta_{2c} < \Theta_2 < \theta_{2d}) \quad (\text{B.7})$$

Ceci peut être généralisé à un nombre quelconque de variables aléatoires.

Nous présentons par la suite la définition de fonctions de densité de probabilité conjointe, marginale et conditionnelle.

### DÉFINITION 52. Fonction de densité de probabilité conjointe

Soit un ensemble de variables aléatoires  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$ , la fonction de densité de probabilité conjointe  $\phi_{\Theta_1, \dots, \Theta_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  décrit la probabilité d'événements définis en terme de  $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ . Dans le cas de deux variables aléatoires, on parle de distribution bivariable. Pour  $n$  variables aléatoires, il s'agit d'une distribution multivariable.

### DÉFINITION 53. Fonction de densité de probabilité marginale

Les fonctions de densité de probabilité marginales sont les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$  prises séparément. La fonction de densité de probabilité marginale associée à  $\Theta_i$  est notée  $\phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ .

À partir de la FDP conjointe, la FDP marginale de chaque variable aléatoire peut être déduite. Par contre, la FDP conjointe ne peut être obtenue à partir des FDP marginales sauf dans le cas où les variables sont indépendantes.

**Théorème 7.** La fonction de densité de probabilité marginale de la variable aléatoire  $\Theta_i$  peut être calculée à partir de la FDP conjointe  $\phi_{\Theta_1, \dots, \Theta_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  comme suit :

$$\phi_{\Theta_i}(\theta_i) = \int_{\Omega_{\Theta_1}} \cdots \int_{\Omega_{\Theta_{i-1}}} \int_{\Omega_{\Theta_{i+1}}} \cdots \int_{\Omega_{\Theta_n}} \phi_{\Theta_1, \dots, \Theta_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_{i-1} d\theta_{i+1} \dots d\theta_n \quad (\text{B.8})$$

**DÉFINITION 54. Fonction de densité de probabilité conditionnelle**

Pour un couple de variables aléatoires  $(\Theta_1, \Theta_2)$ , la fonction de densité de probabilité conditionnelle  $\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2)$  (resp.  $\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)$ ) est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $\Theta_1$  (resp.  $\Theta_2$ ) conditionnée par la réalisation de l'événement  $\Theta_2 = \theta_2$  (resp.  $\Theta_1 = \theta_1$ ). Pour un ensemble de variables aléatoires  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$ , la fonction de densité de probabilité conditionnelle  $\phi_{\Theta_i|\Theta_1=\theta_1, \dots, \Theta_{i-1}=\theta_{i-1}, \Theta_{i+1}=\theta_{i+1}, \dots, \Theta_n=\theta_n}(\theta_i|\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$  est la fonction de densité de probabilité de  $\Theta_i$  conditionnée par la réalisation des événements  $\Theta_1 = \theta_1, \dots, \Theta_{i-1} = \theta_{i-1}, \Theta_{i+1} = \theta_{i+1}, \dots, \Theta_n = \theta_n$ .

Les fonctions de densité de probabilité marginale, conjointe et conditionnelle peuvent être déduites les unes à partir des autres et ce, grâce au théorème 8.

**Théorème 8.** Soit deux variables aléatoires  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ , la FDP conjointe associée  $\phi_{\Theta_1, \Theta_2}$  peut s'écrire en fonction des FDP conditionnelles ( $\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}$  et  $\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}$ ) et des FDP marginales ( $\phi_{\Theta_1}$  et  $\phi_{\Theta_2}$ ) :

$$\phi_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2)\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)\phi_{\Theta_1}(\theta_1) \quad (\text{B.9})$$

Pour des variables aléatoires multiples  $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$ , la relation entre les FDP conjointe, conditionnelle et marginale est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi_{\Theta_1, \dots, \Theta_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \phi_{\Theta_n|\Theta_1=\theta_1, \dots, \Theta_{n-1}=\theta_{n-1}}(\theta_n|\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\phi_{\Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \\ &= \phi_{\Theta_n|\Theta_1=\theta_1, \dots, \Theta_{n-1}=\theta_{n-1}}(\theta_n|\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \\ &\quad \cdot \phi_{\Theta_{n-1}|\Theta_1=\theta_1, \dots, \Theta_{n-2}=\theta_{n-2}}(\theta_{n-1}|\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \\ &\quad \cdot \dots \\ &\quad \cdot \phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1) \\ &\quad \cdot \phi_{\Theta_1}(\theta_1) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

### B.3 Propagation de la densité de probabilité

La propagation de densité de probabilité permet de caractériser l'incertitude aléatoire d'intérêt liée par l'intermédiaire d'une fonction continue à une autre incertitude aléatoire dont la FDP est donnée.

La propagation se fait en utilisant les deux théorèmes suivantes :

**Théorème 9.** Soit  $\Theta_1$  une variable aléatoire ayant  $\phi_{\Theta_1}(\theta_1)$  comme fonction de densité de probabilité marginale et soit  $\Theta_2$  une autre variable aléatoire telle que  $\Theta_2 = g(\Theta_1)$ , alors la fonction de densité de probabilité associée  $\phi_{\Theta_2}(\theta_2)$  peut être calculée comme suit si la fonction  $g$  est un difféomorphisme (bijective et bi-différentiable) : [Sap06]

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \left| \frac{d\theta_1}{d\theta_2} \right| \phi_{\Theta_1}(\theta_1) = \frac{\phi_{\Theta_1}(\theta_1)}{|g'(g^{-1}(\theta_1))|} = \frac{\phi_{\Theta_1}(g^{-1}(\theta_2))}{|g'(g^{-1}(\theta_2))|} \quad (\text{B.11})$$

où  $g^{-1}$  est la fonction inverse de  $g$  et  $g'$  est sa dérivée par rapport à  $\Theta_1$ .

Le théorème est étendu pour le cas d'une fonction  $g$  qui n'est pas bijective. Lorsque  $g$  n'est pas un difféomorphisme global (un scénario classique), la FDP de  $\Theta_2$  peut être déduite en définissant

la fonction  $g$  sur  $k$  domaines continus, où  $g$  est localement un difféomorphisme. Ensuite, nous pouvons localement appliquer le théorème ci-dessus et prendre la somme de toutes les images réciproques de  $\theta_1$  :

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \sum_{i=1}^k \frac{\phi_{\Theta_1}(g_i^{-1}(\theta_2))}{|g'(g_i^{-1}(\theta_2))|} \quad (\text{B.12})$$

En réalité, il est très fréquent que l'on ait besoin de propager un vecteur de plusieurs variables aléatoires. Dans ce cas, les variables aléatoires sont représentées par les FDP conjointes de ces vecteurs et la propagation est effectuée sur ces FDP. La dérivée de  $g$  est remplacée par le déterminant de la jacobienne.

Dans le cas général, la propagation se fait en passant par la fonction de répartition.

Dans le cas d'une fonction inversible, la propagation se fait directement avec les FDP.

**Théorème 10.** Soit deux vecteurs de  $n$  variables aléatoires  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$  de fonction de densité de probabilité conjointe  $\phi_{\Theta}(\theta)$  et  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$  de fonction de densité de probabilité conjointe  $\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{p})$  tels que  $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\theta)$  avec le vecteur de fonctions  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  et  $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$ .

Si  $\mathbf{h}$  est continûment différentiable alors la FDP conjointe  $\phi_{\mathbf{P}}$  de  $\mathbf{P}$  s'écrit :

$$\phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) = |J_g|^{-1} \phi_{\Theta}(\theta) = |J_g|^{-1} \phi_{\Theta}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{p}))$$

où  $|J_g| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$  est le déterminant de la jacobienne de  $\mathbf{g}$  par rapport à  $\theta$ .

Les théorèmes ci-dessus impliquent que les vecteurs de variables aléatoires  $\Theta$  et  $\mathbf{P}$  aient la même dimension. Ces théorèmes ne permettent pas d'obtenir la FDP conjointe associée à  $\mathbf{P}$  lorsque le nombre de variables aléatoires de ce vecteur est inférieur au nombre de variables aléatoires du vecteur  $\Theta$ . C'est toutefois un scénario fréquent. Des variables fictives peuvent alors être ajoutées afin d'obtenir la même dimension pour les deux vecteurs aléatoires. Ces variables fictives peuvent être choisies, par exemple, parmi les variables de  $\Theta$  :

$$\begin{cases} p_1 & = g_1(\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \\ \vdots & \\ p_{n_p} & = g_{n_p}(\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \\ p_{n_p+1} & = \theta_{n_p+1} \\ \vdots & \\ p_{n_\theta} & = \theta_{n_\theta} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Dans le cas d'un vecteur, la FDP obtenue est donc une FDP conjointe. Afin de déterminer la FDP marginale d'une variable, la FDP conjointe doit être intégrée sur tous les domaines de définition des autres variables (y compris les variables « fictives » si elles ont été ajoutées pour équilibrer la dimension des vecteurs).



# Annexe C

## La logique floue

### C.1 Définitions

Afin de répondre au besoin de représenter des connaissances imprécises, le concept de **sous ensemble flou** (SEF) a été introduit. Il permet d'éviter les passages brusques d'une classe à une autre et d'autoriser des éléments à appartenir partiellement à chacune des classes.

On considère un ensemble de référence  $X$ . Un sous-ensemble classique  $A$  de  $X$  est défini par une fonction caractéristique  $\chi(A)$  qui prend la valeur 0 pour les éléments de  $X$  n'appartenant pas à  $A$  et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à  $A$  : [BM95]

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

**DÉFINITION 55.** Un *sous-ensemble flou*  $A$  de  $X$  est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément  $x$  de  $X$ , le degré  $f_A(x)$ , compris entre 0 et 1, avec lequel  $x$  appartient à  $A$  : [BM95]

$$f_A : X \rightarrow [0, 1]$$

Un sous-ensemble classique est donc un cas particulier de sous-ensemble flou où  $f_A$  ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1.

On note  $F(X)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles flous de  $X$ .

Un sous ensemble flou  $A$  est classiquement représenté en utilisant la notation suivante. Elle indique pour tout élément  $x$  de  $X$  son degré  $f_A(x)$  d'appartenance à  $A$  :

$$A = \sum_{x \in X} f_A(x)/x, \text{ si } X \text{ est dénombrable,}$$
$$A = \int_X f_A(x)/x, \text{ si } X \text{ est non dénombrable. [BM95]}$$

La notation est symbolique. Elle n'a pas le sens du calcul. Nous présentons maintenant quelques caractéristiques d'un SEF  $A$  et les opérations sur les SEF :

- Le support de  $A$  :  $\text{supp}(A) = \{x \in X / f_A(x) \neq 0\}$
- La hauteur de  $A$  :  $h(A) = \sup_{x \in X} (f_A(x))$ , si  $h(A)=1$ , on a un SEF normalisé.
- Le noyau de  $A$  :  $\text{noy}(A) = \{x \in X / f_A(x) = 1\}$
- La cardinalité :  $|A| = \sum_{x \in X} f_A(x)$

#### Les opérations sur les SEF :

- Égalité :  $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$
- Inclusion :  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$
- Intersection :  $A \cap B = C \Leftrightarrow \forall x \in X, f_C(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Union :  $A \cup B = C \Leftrightarrow \forall x \in X, f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Complément :  $A^C$  est défini comme le SEF de  $X$  de fonction d'appartenance :  $\forall x \in X, f_{A^C}(x) = 1 - f_A(x)$

#### Les propriétés des SEF :

- Associativité de  $\cap$  et de  $\cup$
- Commutativité de  $\cap$  et de  $\cup$
- $A \cap X = A; A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup X = X; A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B \supseteq A \supseteq A \cap B$
- $A \cap (B' \cup B'') = (A \cap B') \cup (A \cap B'')$
- $A \cup (B' \cap B'') = (A \cup B') \cap (A \cup B'')$
- $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$
- $A^C \cap A \neq \emptyset; A^C \cup A \neq X$
- $(A \cap B)^C \neq A^C \cup B^C; (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A^C)^C = A$
- $\emptyset^C = X; X^C = \emptyset$
- $(\text{supp}(A^C))^C = \text{noy}(A); (\text{noy}(A^C))^C = \text{supp}(A)$

Définition des  $\alpha$ -coupes associées à un sous-ensemble flou :

**DÉFINITION 56.** Pour un seuil donné  $\alpha$  de  $[0,1]$ , on définit la  $\alpha$ -coupe du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  comme le sous-ensemble  $A_\alpha = \{x \in X / f_A(x) \geq \alpha\}$  de  $X$ , dont la fonction caractéristique  $\chi_{A_\alpha}$  est telle que :  $\chi_{A_\alpha} = 1$  si et seulement si  $f_A(x) \geq \alpha$ .

Les  $\alpha$ -coupes sont donc les parties non floues de  $X$ . Les  $\alpha$ -coupes des SEF vérifient :

- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- si  $A \supseteq B$  alors  $A_\alpha \supseteq B_\alpha$

Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  peut être représenté à partir de ses  $\alpha$ -coupes grâce au théorème de décomposition.

**Théorème 11.** Tout sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble de référence  $X$  est défini à partir de ses  $\alpha$ -coupes par :

$$\forall x \in X, f_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)$$

où sup indique le supremum (la borne supérieure des valeurs possibles) et  $\chi_{A_\alpha}$  est la fonction caractéristique de  $A_\alpha$ .

## C.2 Nombre flou

Dans cette section, nous présentons le concept de nombre flou, qui représente des propriétés de variables prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Ils correspondent à l'idée de voisinage d'une valeur précise.

### C.2.1 Sous-ensemble flou convexe

**DÉFINITION 57.** Un sous-ensemble flou  $A$  de l'ensemble  $X$  des nombres réels est convexe si, pour tout couple d'éléments  $a$  et  $b$  de  $X$ , et pour tout nombre  $\lambda$  de  $[0,1]$ , la fonction d'appartenance de  $A$  vérifie [BM95] :

$$f_A(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min(f_A(a), f_A(b))$$

Il est à noter qu'on ne considère la propriété convexe que sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

Un sous-ensemble flou  $A$  de  $\mathbb{R}$  est convexe si toutes ses  $\alpha$ -coupes  $A_\alpha$  sont convexes :  $\forall (a, b) \in A_\alpha^2, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda a + (1 - \lambda)b \in A_\alpha$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux SEF convexes de  $\mathbb{R}$ , leur intersection est convexe.

On utilisera la propriété de convexité dans la définition d'un intervalle flou dans le paragraphe suivant.

### C.2.2 Nombre flou

**DÉFINITION 58.** Une **quantité floue** est un sous-ensemble flou normalisé  $Q$  de  $R$ . Une valeur modale de  $Q$  est un élément  $m$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $f_Q(m) = 1$ .

**DÉFINITION 59.** Un **intervalle flou**  $I$  est une quantité floue convexe.

Un intervalle flou correspond à un intervalle de l'ensemble des réels dont les limites sont imprécises (ou mal déterminées).

**DÉFINITION 60.** Un **nombre flou**  $M$  est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support borné, admettant une unique valeur modale  $m$ .

Un nombre flou correspond à une valeur réelle  $m$  connue imprécisément.

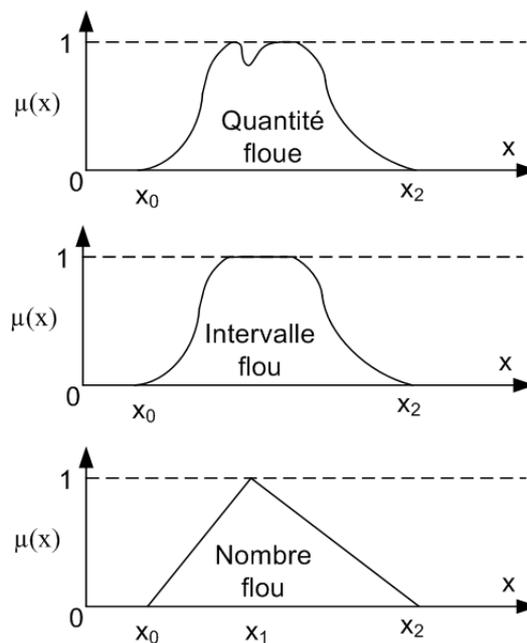


FIGURE C.1 – Quantité floue, intervalle flou et nombre flou.

## C.3 Produit Cartésien, principe d'extension

Le concept de sous-ensemble flou est, en effet, une extension de celui de sous ensemble classique. Par conséquent, les concepts mathématiques classiques sur des sous-ensembles/éléments précis peuvent être étendus/adaptés pour des sous-ensemble flous : la convergence floue, les intégrales floues, les graphes flous... Nous présentons ici le produit cartésien, le principe d'extension et les relations flous basiques.

### C.3.1 Produit cartésien

La description de tout système fait généralement intervenir plusieurs univers de référence. Par exemple, la connaissance d'un moteur à courant continu est basée sur la connaissance des paramètres  $R, L, \dots$ . Pour considérer un tel système avec plusieurs ensembles de référence, on construit un univers global dont les diverses composantes sont les ensembles de référence initiaux.

**Hypothèse 11.** Les ensembles de référence n'ont pas d'effet les uns sur les autres (les observations faites sur chacun d'entre eux sont indépendantes les unes des autres). On dit alors que les sous-ensembles flous définis sur ces ensembles de référence sont **non-interactifs**. [BM95] [Zad65]

**DÉFINITION 61.** Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  respectivement définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . On définit le **produit cartésien**  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ , comme un sous-ensemble flou de  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  de fonction d'appartenance définie pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $X$  par

$$\mu_A(x) = \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_r}(x_r) \} = \min_i \mu_{A_i}(x_i) \quad (\text{C.1})$$

### C.3.2 Projection d'un sous-ensemble flou - L'extension cylindrique

Soit un sous-ensemble flou  $A$  défini sur un univers  $X_1 \times X_2$ , produit cartésien de deux ensemble de référence  $X_1$  et  $X_2$ . Afin de retrouver des informations sur un composant ( $X_1$  ou  $X_2$ ), on effectue la projection sur cet composant.

**DÉFINITION 62.** La **projection**  $\Pi_Y$  d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  sur  $Y = X_a \times X_b \times \dots \times X_k$  avec  $a, b, \dots, k \in \{1, 2, \dots, r\}$  est définie comme un sous-ensemble flou  $\Pi_Y A$  de  $Y$  dont la fonction d'appartenance est définie pour tout  $\alpha = (\alpha_a, \alpha_b, \dots, \alpha_k)$  de  $Y$  par :

$$\mu_{\Pi_Y A}(\alpha) = \sup_{\{(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{r-k}}) / i \notin \{a, \dots, k\}\}} \mu_A(\bar{x}_{i_1}, \alpha_a, \dots, \bar{x}_{i_{r-k}}, \alpha_k) \quad (\text{C.2})$$

où les  $\bar{x}_i$  et les  $\alpha_j$  sont ordonnés.

**DÉFINITION 63.** Soit  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$  un sous-ensemble flou défini sur  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ . **L'extension cylindrique** sur  $X$  d'un sous-ensemble flou  $A_i, i \in \{1, \dots, r\}$  est un sous-ensemble flou noté  $\widehat{A}_i$  (ou parfois  $C_X(A_i)$  dans la littérature) de  $X$  dont la fonction d'appartenance est donnée pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $X$  par

$$\mu_{\widehat{A}_i}(x) = \mu_{A_i}(x_i) \quad (\text{C.3})$$

Le produit cartésien et la projection des sous-ensembles flous peuvent causer une « perte d'information » en ce sens que les sous-ensembles flous obtenus par la projection d'un produit cartésien ne sont pas nécessairement les sous-ensembles flous initiaux. De plus, nous pouvons avoir une différence entre le produit cartésien des projections et le sous-ensemble flou initial. Sous certaines hypothèses, cependant, on peut montrer que ces opérations commutent. En d'autres termes, on a les égalités suivantes :

$$\mu_{\Pi_{X_j} A_1 \times \dots \times A_r} = \mu_{A_j} \quad \text{et} \quad \mu_{\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A} = \mu_{A_1 \times \dots \times A_r}$$

Ces égalités font l'objet des deux propositions suivantes.

**Proposition 3.** Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , dont les fonctions d'appartenance  $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \dots, \mu_{A_r}$  sont *normalisées*. Alors, la projection du produit cartésien  $A = A_1 \times \dots \times A_r$  relativement à  $X_j$  est  $A_j$ . En d'autres termes, on a

$$\mu_{\Pi_{X_j} A} = \mu_{A_j} \quad (\text{C.4})$$

De plus, le produit cartésien des projections et le sous-ensemble flou initial ne sont pas toujours identiques. Retrouver exactement  $A = A_1 \times \dots \times A_r$  à partir des projections  $\Pi_{X_1} A, \dots, \Pi_{X_r} A$  correspond à un problème de type « lossless join » dans la logique floue dont la condition générale est proposée dans [RM88]. Nous utilisons cette condition ici pour les projections.

**Proposition 4.** Soient des sous ensembles flous  $A_1, A_2, \dots, A_r$  définis sur  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . On suppose que pour tout  $x$  de  $X = X_1 \times \dots \times X_r$ , il existe au moins un indice  $i_0$  tel que

$$\mu_{\widehat{\Pi_{X_{i_0}} A}}(x) = \mu_A(x), \quad (\text{C.5})$$

où  $\widehat{\Pi_{X_{i_0}} A}$  est l'extension cylindrique de  $\Pi_{X_{i_0}} A$  sur  $X$ . Alors, le produit cartésien des projections  $\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A$  est précisément le produit  $A = A_1 \times \dots \times A_r$ , soit, pour tout  $x$  de  $X$ ,

$$\mu_{\Pi_{X_1} A \times \dots \times \Pi_{X_r} A}(x) = \mu_A(x) \quad (\text{C.6})$$

Les démonstrations de ces deux propositions ont été données dans le chapitre 4.

### C.3.3 Principe d'extension

On suppose qu'on dispose d'une application  $\phi$  d'un ensemble de référence  $X$  vers un second ensemble de référence  $Y$ . Soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ , on cherche le sous-ensemble flou  $B$ , l'image de  $A$  par  $\phi$  en utilisant le principe d'extension de ZADEH [BM95].

**DÉFINITION 64.** Étant donné un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  et une application  $\phi$  de  $X$  vers  $Y$ , le **principe d'extension** permet de définir un sous-ensemble flou  $B$  de  $Y$  associé à  $A$  par l'intermédiaire de  $\phi$  tel que  $\forall y \in Y$  :

$$\begin{cases} \mu_B(y) = \sup_{\{x \in X / y = \phi(x)\}} \mu_A(x) \text{ si } \phi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ \mu_B(y) = 0 \text{ si } \phi^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Si  $\phi$  est bijective, la détermination de la fonction d'appartenance de  $B$  est juste un transfert de la fonction d'appartenance de  $A$  vers l'ensemble de référence  $Y$  :

$$\forall y \in Y, f_B(y) = f_A(\phi^{-1}(y))$$

Dans le cas particulier où  $X$  est le produit cartésien de plusieurs ensembles de référence  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , on peut combiner le principe d'extension et la définition du produit cartésien, pour trouver le SEF  $B$  correspondant dans  $Y$  défini par la fonction d'appartenance suivante [BM95] :

$$\forall y \in Y$$

$$\begin{cases} \mu_B(y) = \sup_{\{x=(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X / y = \phi(x)\}} \min(f_{A_1}(x_1), f_{A_2}(x_2), \dots, f_{A_r}(x_r)) \text{ si } \phi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ \mu_B(y) = 0 \text{ si } \phi^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Le principe d'extension peut être appliqué pour définir une règle compositionnelle, qui sert, de manière analogue à l'approche probabiliste, à la recherche d'une loi « marginale » à partir d'une loi de probabilité « conjointe ».

**Théorème 12.** Étant donné trois ensembles de référence  $X_1, X_2, X_3$  à tout couple de sous-ensembles flous  $A$  de  $X_1 \times X_2$  et  $B$  de  $X_2 \times X_3$ , on fait correspondre un sous-ensemble flou  $C$  de  $X_1 \times X_3$ , de fonction d'appartenance définie par :

$$\forall x_1 \in X_1, \forall x_3 \in X_3, f_C(x_1, x_3) = \sup_{\{x_2 \in X_2\}} \min(f_A(x_1, x_2), f_B(x_2, x_3)) \quad (\text{C.9})$$

Dans le cas particulier, quand on considère  $X_3$  comme un ensemble « unitaire » ( $\forall x_3 \in X_3, f_{X_3}(x_3) = 1$ ), on obtient :

$$\forall x_1 \in X_1, f_C(x_1) = \sup_{\{x_2 \in X_2\}} \min(f_A(x_1, x_2), f_B(x_2))$$



## Annexe D

# Inversion du modèle véhicule

Nous considérons, dans cette annexe, l'inversion du modèle de véhicule en situation de freinage en ligne droite (figure D.1).

Comme nous adoptons ici l'approche locale de la propagation, nous construisons tout d'abord le modèle inverse du véhicule entre  $(\dot{z}, \dot{\varphi})$  et  $(F_{av}, F_{ar})$  et ensuite les modèles inverses des suspensions entre  $F_{av}$  et  $m_{av}$  et entre  $F_{ar}$  et  $m_{ar}$ .

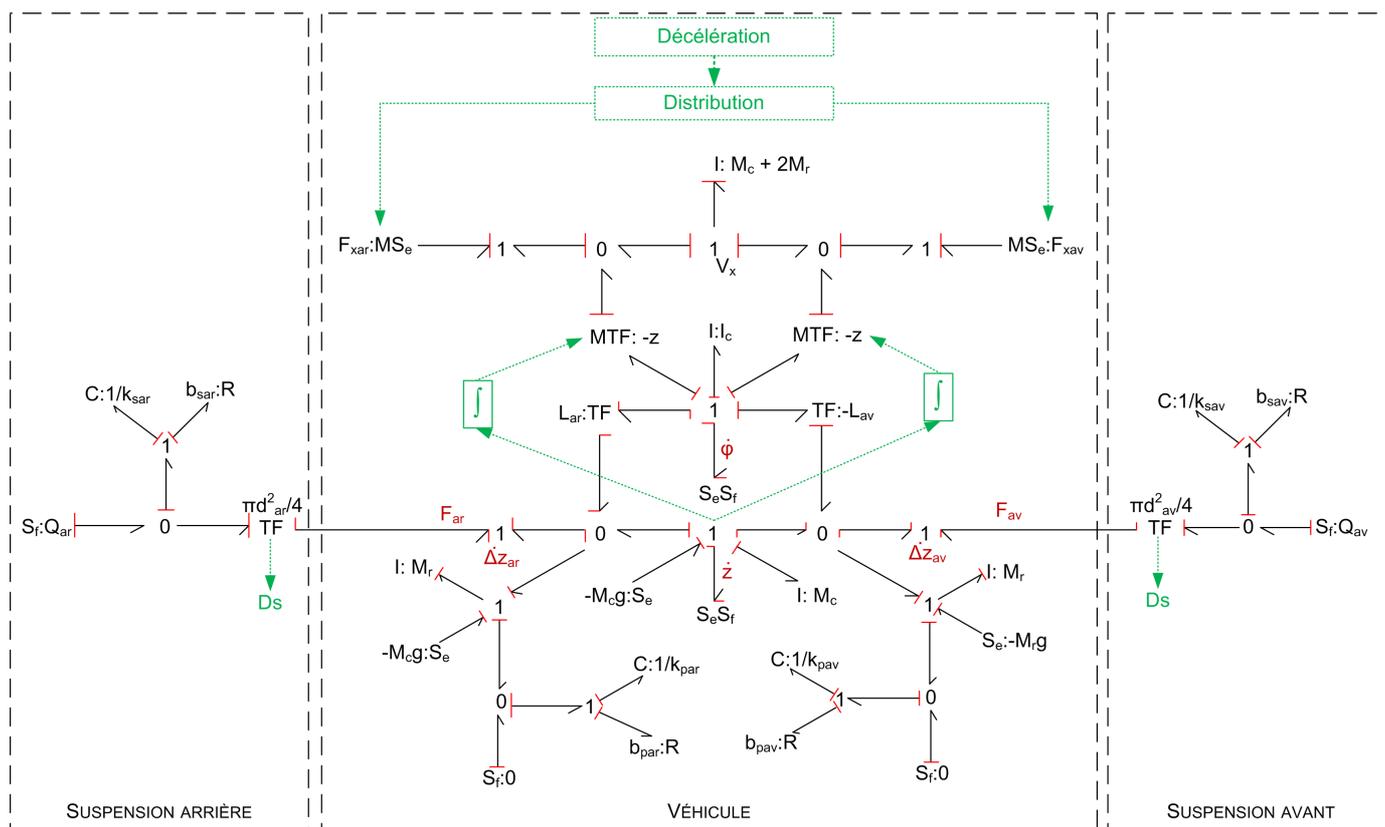


FIGURE D.1 – Représentation bond graph bicausale du modèle du véhicule.

En exploitant le modèle bond graph bicausal de la figure D.1, nous cherchons le modèle inverse d'ordre minimal du véhicule permettant de déterminer les variables  $(F_{av}, \Delta\dot{z}_{av}, F_{ar}, \Delta\dot{z}_{ar})$  en fonction de  $(z, \varphi)$ .

Les efforts  $F_{av}$  et  $F_{ar}$  s'expriment :

$$\begin{aligned}
F_{av} &= \left[ M_c \cdot g + M_c \cdot \ddot{z} - \frac{I_c \cdot \ddot{\varphi} + (F_{xav} + F_{xar})z}{L_{ar}} \right] \cdot \frac{L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} \\
&= -\frac{(F_{xav} + F_{xar})}{L_{ar} + L_{av}} \cdot z + M_c \left( \frac{L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} \right) \cdot \ddot{z} - \left( \frac{I_c}{L_{ar} + L_{av}} \right) \cdot \ddot{\varphi} + \frac{M_c \cdot g \cdot L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} \\
&= -\alpha_{av} \cdot z - \beta_{av} \cdot \ddot{z} - \gamma_{av} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{M_c \cdot g \cdot L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} \\
F_{ar} &= \left[ \frac{M_c L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} \cdot g + \frac{M_c L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} \cdot \ddot{z} + \frac{I_c \cdot \ddot{\varphi} + (F_{xav} + F_{xar})z}{L_{ar}} \right] \cdot \frac{L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} + M_c \cdot g + M_c \cdot \ddot{z} \\
&= \frac{(F_{xav} + F_{xar})}{L_{ar} + L_{av}} \cdot z + M_c \left( \frac{L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} \right) \cdot \ddot{z} + \left( \frac{I_c}{L_{ar} + L_{av}} \right) \cdot \ddot{\varphi} + \frac{M_c \cdot g \cdot L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} \\
&= -\alpha_{ar} \cdot z - \beta_{ar} \cdot \ddot{z} - \gamma_{ar} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{M_c \cdot g \cdot L_{av}}{L_{ar} + L_{av}}
\end{aligned} \tag{D.1}$$

où :

$$\begin{aligned}
\alpha_{av} &= \frac{(F_{xav} + F_{xar})}{L_{ar} + L_{av}} \\
\beta_{av} &= -M_c \left( \frac{L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} \right) \\
\gamma_{av} &= \left( \frac{I_c}{L_{ar} + L_{av}} \right) \\
\alpha_{ar} &= -\frac{(F_{xav} + F_{xar})}{L_{ar} + L_{av}} \\
\beta_{ar} &= -M_c \left( \frac{L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} \right) \\
\gamma_{ar} &= -\left( \frac{I_c}{L_{ar} + L_{av}} \right)
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Le calcul de  $\dot{\Delta}z_{av}$  et  $\dot{\Delta}z_{ar}$  nécessite de prendre en compte les flux imposés par les dynamiques résiduelles des roues avant et arrière. Nous considérons ici la roue avant (figure D.2). Le calcul pour la roue arrière est similaire.

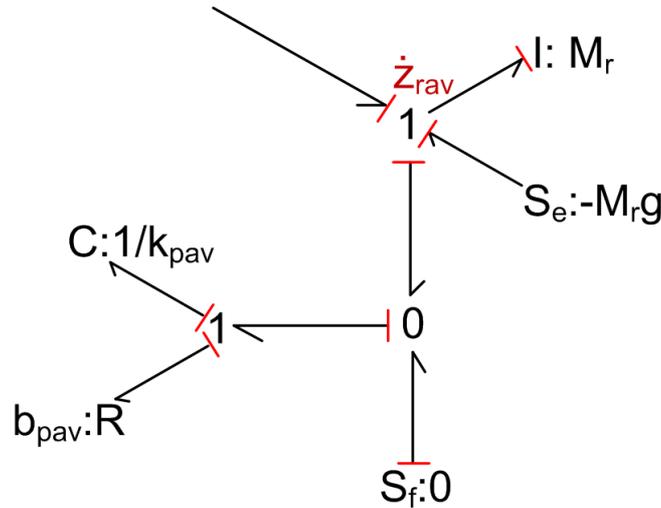


FIGURE D.2 – Représentation bond graph bicausale de la roue avant.

Le flux au niveau de la suspension avant s'exprime :

$$\dot{\Delta}z_{av} = \dot{z} - L_{av}\dot{\varphi} - \dot{z}_{rav} \tag{D.3}$$

Nous appelons le débattement de la roue  $z_{rav}$ . En exploitant le sous-modèle bond graph dans la figure D.2, nous avons donc :

$$M_r \ddot{z}_{rav} + b_{pav} \cdot \dot{z}_{rav} + k_{pav} \cdot z_{rav} = \alpha_{av} \cdot z + \beta_{av} \cdot \ddot{z} + \gamma_{av} \cdot \ddot{\varphi} + \left( -\frac{M_c \cdot g \cdot L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} - M_r \cdot g \right) \tag{D.4}$$

L'équation D.4 caractérise la dynamique résiduelle de la roue avant.

Nous pouvons également déduire l'équation caractérisant la dynamique résiduelle de la roue arrière d'une manière similaire.

$$M_r z_{rar}'' + b_{par} z_{rar}' + k_{par} z_{rar} = \alpha_{ar} z + \beta_{ar} \ddot{z} + \gamma_{ar} \ddot{\varphi} + \left( -\frac{M_c \cdot g \cdot L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} - M_r \cdot g \right) \quad (D.5)$$

En dénotant  $\delta_{av} = \left( -\frac{M_c \cdot g \cdot L_{ar}}{L_{ar} + L_{av}} - M_r \cdot g \right)$  et  $\delta_{ar} = \left( -\frac{M_c \cdot g \cdot L_{av}}{L_{ar} + L_{av}} - M_r \cdot g \right)$ , nous avons donc un système d'équations différentielles caractérisant les dynamiques résiduelles des roues avant et arrière :

$$\begin{cases} M_r z_{rav}'' + b_{pav} z_{rav}' + k_{pav} z_{rav} = \alpha_{av} z + \beta_{av} \ddot{z} + \gamma_{av} \ddot{\varphi} + \delta_{av} \\ M_r z_{rar}'' + b_{par} z_{rar}' + k_{par} z_{rar} = \alpha_{ar} z + \beta_{ar} \ddot{z} + \gamma_{ar} \ddot{\varphi} + \delta_{ar} \end{cases} \quad (D.6)$$

Il nous faut trouver  $z_{rar}$  et  $z_{rav}$  à partir de l'équation D.6. Dans la suite, nous résolvons pour  $z_{rav}$ . La résolution pour  $z_{rar}$  est similaire.

En exploitant les spécifications données sur  $z$  et  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \frac{-K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} [\omega_{pz} \cos(\omega_{pz}t + \phi_z) - \xi_z \omega_{nz} \sin(\omega_{pz}t + \phi_z)] \cdot e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-K_\varphi}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} [\omega_{p\varphi} \cos(\omega_{p\varphi}t + \phi_\varphi) - \xi_\varphi \omega_{n\varphi} \sin(\omega_{p\varphi}t + \phi_\varphi)] \cdot e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi}t} \\ \ddot{z}(t) = \frac{-K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} [((\xi_z \cdot \omega_{nz})^2 - \omega_{pz}^2) \sin(\omega_{pz}t + \phi_z) - 2 \cdot \xi_z \omega_{nz} \omega_{pz} \cos(\omega_{pz}t + \phi_z)] e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \\ \ddot{\varphi}(t) = \frac{-K_\varphi}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} [((\xi_\varphi \cdot \omega_{n\varphi})^2 - \omega_{p\varphi}^2) \sin(\omega_{p\varphi}t + \phi_\varphi) - 2 \cdot \xi_\varphi \omega_{n\varphi} \omega_{p\varphi} \cos(\omega_{p\varphi}t + \phi_\varphi)] e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi}t} \end{cases} \quad (D.7)$$

Le premier membre de D.6 s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \alpha_{av} z + \beta_{av} \ddot{z} + \gamma_{av} \ddot{\varphi} + \delta_{av} &= (\alpha_{av} K_z + \delta_{av}) - \frac{K_z (\alpha_{av} + \beta_{av} \xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \beta_{av} \omega_{pz}^2) e^{-\xi_z \omega_{nz}t}}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \sin(\omega_{pz}t + \Psi_z) \\ &\quad + \frac{2\beta_{av} \xi_z \omega_{nz} \omega_{pz} K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \cos(\omega_{pz}t + \Psi_z) \\ &\quad - \frac{\gamma_{av} K_\varphi e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi}t}}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} [(\xi_\varphi^2 \omega_{n\varphi}^2 - \omega_{p\varphi}^2) \sin(\omega_{p\varphi}t + \Phi_\varphi) - 2\xi_\varphi \omega_{n\varphi} \omega_{p\varphi} \cos(\omega_{p\varphi}t + \Psi_\varphi)] \\ &= f_{av}(t) \end{aligned} \quad (D.8)$$

Nous considérons donc l'équation différentielle :

$$M_r z_{rav}'' + b_{pav} z_{rav}' + k_{pav} z_{rav} = f_{av}(t) \quad (D.9)$$

L'équation différentielle homogène associée est donc :

$$M_r z_{rav}'' + b_{pav} z_{rav}' + k_{pav} z_{rav} = 0 \quad (D.10)$$

L'équation caractéristique est :  $M_r k^2 + b_{pav} k + k_{pav} = 0$ .

$$\Delta_{av} = b_{pav}^2 - 4k_{pav} M_r < 0 \quad (D.11)$$

Donc :

$$k_{1,2} = \frac{-b_{pav} \pm i \sqrt{4k_{pav} M_r - b_{pav}^2}}{2M_r} \quad (D.12)$$

La solution de l'équation homogène est :

$$\bar{w} = e^{\frac{-b_{pav}t}{2M_r}} \left[ C_{1av} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2M_r}t\right) + C_{2av} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2M_r}t\right) \right] \quad (D.13)$$

La solution de l'équation D.9 a la forme suivante :

$$z_{rav} = \bar{z}_r + z_{r1} + z_{r2} + z_{r3} \quad (D.14)$$

où  $z_{r1}$ ,  $z_{r2}$  et  $z_{r3}$  sont les des solutions particulières correspondant aux différents termes de  $f_{av}(t)$ .

**Calcul de  $z_{r1}$  :**

$z_{r1}$  correspond au terme  $\alpha_{av}K_z + \delta_{av}$  et est donc une constante :

$$z_{r1} = \frac{\alpha_{av}K_z + \delta_{av}}{k_{pav}} \quad (D.15)$$

**Calcul de  $z_{r2}$**

$z_{r2}$  correspond aux termes  $\sin(\omega_{pz}t + \Phi_z)$  et  $\cos(\omega_{pz}t + \Phi_z)$  dans  $f_{av}(t)$ .

$$z_{r2} = e^{-\xi_z \omega_{nz}t} [A_{2av} \cos(\omega_{pz}t + \Phi_z) + B_{2av} \sin(\omega_{pz}t + \Phi_z)] \quad (D.16)$$

En ne retenant que les termes correspondant de l'équation D.9 :

$$\begin{aligned} & e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \cos(\omega_{pz}t + \Phi_z) [k_{pav}A_{2av} + b_{pav}(-\xi_z \omega_{nz}A_{2av} + B_{2av}\omega_{pz}) + M_r [A_{2av}(\xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \omega_{pz}^2) - 2B_{2av}\omega_{pz}\xi_z \omega_{nz}]] \\ & + e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \sin(\omega_{pz}t + \Phi_z) [k_{pav}B_{2av} - b_{pav}(\xi_z \omega_{nz}B_{2av} + A_{2av}\omega_{pz}) + M_r [B_{2av}(\xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \omega_{pz}^2) + 2A_{2av}\omega_{pz}\xi_z \omega_{nz}]] \\ & = -\frac{K_z(\alpha_{av} + \beta_{av}\xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \beta_{av}\omega_{pz}^2)e^{-\xi_z \omega_{nz}t}}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \sin(\omega_{pz}t + \Phi_z) + \frac{2\beta_{av}\xi_z \omega_{nz}K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} e^{-\xi_z \omega_{nz}t} \cos(\omega_{pz}t + \Phi_z) \end{aligned} \quad (D.17)$$

Une solution est donc :

$$\begin{aligned} A_{2av} &= \frac{a_{zav}c_{1av} - b_{zav}d_{1av}}{a_{zav}^2 + b_{zav}^2} \\ B_{2av} &= \frac{a_{zav}d_{1av} + b_{zav}c_{1av}}{a_{zav}^2 + b_{zav}^2} \end{aligned} \quad (D.18)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{zav} &= k_{pav} - \xi_z \omega_{nz} b_{pav} + M_r \cdot \xi_z^2 \omega_{nz}^2 - M_r \omega_{pz}^2 \\ b_{zav} &= b_{pav} \omega_{pz} - 2 \cdot M_r \omega_{pz} \xi_z \omega_{nz} \\ c_{1av} &= \frac{2\beta_{av}\xi_z \omega_{nz} \omega_{pz} K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \\ d_{1av} &= -\frac{K_z(\alpha_{av} + \beta_{av}\xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \beta_{av}\omega_{pz}^2)}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \end{aligned} \quad (D.19)$$

**Calcul de  $z_{r3}$**

$z_{r3}$  correspond aux termes de  $\sin(\omega_{p\varphi}t + \Phi_\varphi)$  et  $\cos(\omega_{p\varphi}t + \Phi_\varphi)$  dans  $f_{av}(t)$ . De manière similaire, nous obtenons l'expression de  $z_{r3}$ .

$$z_{r3} = e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi}t} [A_{3av} \cos(\omega_{p\varphi}t + \Phi_\varphi) + B_{3av} \sin(\omega_{p\varphi}t + \Phi_\varphi)] \quad (D.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{3av} &= \frac{a_{\varphi av} c_{2av} - b_{\varphi av} d_{2av}}{a_{\varphi av}^2 + b_{\varphi av}^2} \\ B_{3av} &= \frac{b_{\varphi av} c_{2av} + a_{\varphi av} d_{2av}}{a_{\varphi av}^2 + b_{\varphi av}^2} \end{aligned} \quad (D.21)$$

où :

$$\begin{aligned} a_{\varphi av} &= k_{pav} - \xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} b_{pav} + M_r \cdot \xi_{\varphi}^2 \omega_{n\varphi}^2 - M_r \omega_{p\varphi}^2 \\ b_{\varphi av} &= b_{pav} \omega_{p\varphi} - 2 \cdot M_r \omega_{p\varphi} \xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} \\ c_{2av} &= \frac{2\gamma_{av} K_{\varphi} \xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} \omega_{p\varphi}}{\sqrt{1-\xi_{\varphi}^2}} \\ d_{2av} &= \frac{-K_{\varphi} \gamma_{av}}{\sqrt{1-\xi_{\varphi}^2}} (\xi_{\varphi}^2 \omega_{n\varphi}^2 - \omega_{p\varphi}^2) \end{aligned} \quad (D.22)$$

À partir de  $\bar{z}_r$ ,  $z_{r1}$ ,  $z_{r2}$  et  $z_{r3}$  obtenus, nous avons la solution de l'équation D.9 :

$$\begin{aligned} z_{rav} &= e^{-\frac{b_{pav}}{2 \cdot M_r} t} \left( C_{1av} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2 \cdot M_r} t\right) + C_{2av} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2 \cdot M_r} t\right) \right) + \frac{\alpha_{av} \cdot K_z + \delta_{av}}{k_{pav}} \\ &+ e^{-\xi_z \omega_{nz} t} (A_{2av} \cdot \cos(\omega_{pz} t + \phi_z) + B_{2av} \sin(\omega_{pz} t + \phi_z)) \\ &+ e^{-\xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} t} (A_{3av} \cdot \cos(\omega_{p\varphi} t + \phi_{\varphi}) + B_{3av} \sin(\omega_{p\varphi} t + \phi_{\varphi})) \end{aligned} \quad (D.23)$$

$C_{1ar}$ ,  $C_{2ar}$  se déterminent en utilisant les conditions initiales sur l'écrasement  $Q_{ar0}$  et la vitesse d'écrasement prise nulle du pneumatique arrière :

$$\begin{aligned} C_{1ar} &= Q_{ar0} - \frac{\alpha_{ar} K_z + \delta_{ar}}{k_{par}} - A_{2ar} \cos \phi_z - B_{2ar} \sin \phi_z - A_{3ar} \cos \phi_{\varphi} - B_{3ar} \sin \phi_{\varphi} \\ C_{2ar} &= \frac{2 \cdot M_r}{\sqrt{-\Delta_{ar}}} \left[ \frac{b_{par}}{2 \cdot M_r} C_{1ar} - \cos \phi_z (B_{2ar} \omega_{pz} - A_{2ar} \xi_z \omega_{nz}) + \sin \phi_z (B_{2ar} \xi_z \omega_{nz} + A_{2ar} \omega_{pz}) \right. \\ &\quad \left. - \cos \phi_{\varphi} (B_{3ar} \omega_{p\varphi} - A_{3ar} \xi_{\varphi} \omega_{n\varphi}) + \sin \phi_{\varphi} (B_{3ar} \xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} + A_{3ar} \omega_{p\varphi}) \right] \end{aligned} \quad (D.24)$$

Le calcul est similaire pour la roue arrière. Nous obtenons  $z_{rar}$  :

$$\begin{aligned} z_{rar} &= e^{-\frac{b_{par}}{2 \cdot M_r} t} \left( C_{1ar} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2 \cdot M_r} t\right) + C_{2ar} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2 \cdot M_r} t\right) \right) + \frac{\alpha_{ar} \cdot K_z + \delta_{ar}}{k_{par}} \\ &+ e^{-\xi_z \omega_{nz} t} (A_{2ar} \cdot \cos(\omega_{pz} t + \phi_z) + B_{2ar} \sin(\omega_{pz} t + \phi_z)) \\ &+ e^{-\xi_{\varphi} \omega_{n\varphi} t} (A_{3ar} \cdot \cos(\omega_{p\varphi} t + \phi_{\varphi}) + B_{3ar} \sin(\omega_{p\varphi} t + \phi_{\varphi})) \end{aligned} \quad (D.25)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\Delta_{ar} &= b_{par}^2 - 4.k_{par}.M_r \\
A_{2ar} &= \frac{a_{zar}c_{1ar} - b_{zar}d_{1ar}}{a_{zar}^2 + b_{zar}^2} \\
B_{2ar} &= \frac{a_{zar}d_{1ar} + b_{zar}c_{1ar}}{a_{zar}^2 + b_{zar}^2} \\
A_{3ar} &= \frac{a_{\varphi ar}c_{2ar} - b_{\varphi ar}d_{2ar}}{a_{\varphi ar}^2 + b_{\varphi ar}^2} \\
B_{3ar} &= \frac{b_{\varphi ar}c_{2ar} + a_{\varphi ar}d_{2ar}}{a_{\varphi ar}^2 + b_{\varphi ar}^2} \\
a_{zar} &= k_{par} - \xi_z \omega_{nz} b_{par} + M_r \cdot \xi_z^2 \omega_{nz}^2 - M_r \omega_{pz}^2 \\
b_{zar} &= b_{par} \omega_{pz} - 2.M_r \omega_{pz} \xi_z \omega_{nz} \\
a_{\varphi ar} &= k_{par} - \xi_\varphi \omega_{n\varphi} b_{par} + M_r \cdot \xi_\varphi^2 \omega_{n\varphi}^2 - M_r \omega_{p\varphi}^2 \\
b_{\varphi ar} &= b_{par} \omega_{p\varphi} - 2.M_r \omega_{p\varphi} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} \\
c_{1ar} &= \frac{2\beta_{ar} \xi_z \omega_{nz} \omega_{pz} K_z}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \\
d_{1ar} &= -\frac{K_z (\alpha_{ar} + \beta_{ar} \xi_z^2 \omega_{nz}^2 - \beta_{ar} \omega_{pz}^2)}{\sqrt{1-\xi_z^2}} \\
c_{2ar} &= \frac{2\gamma_{ar} K_\varphi \xi_\varphi \omega_{n\varphi} \omega_{p\varphi}}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} \\
d_{2ar} &= \frac{-K_\varphi \gamma_{ar}}{\sqrt{1-\xi_\varphi^2}} (\xi_\varphi^2 \omega_{n\varphi}^2 - \omega_{p\varphi}^2) \\
C_{1ar} &= Q_{av0} - \frac{\alpha_{ar} K_z + \delta_{ar}}{k_{par}} - A_{2ar} \cos \phi_z - B_{2ar} \sin \phi_z - A_{3ar} \cos \phi_\varphi - B_{3ar} \sin \phi_\varphi \\
C_{2ar} &= \frac{2.M_r}{\sqrt{-\Delta_{ar}}} \left[ \frac{b_{par}}{2.M_r} C_{1ar} - \cos \phi_z (B_{2ar} \omega_{pz} - A_{2ar} \xi_z \omega_{nz}) + \sin \phi_z (B_{2ar} \xi_z \omega_{nz} + A_{2ar} \omega_{pz}) \right. \\
&\quad \left. - \cos \phi_\varphi (B_{3ar} \omega_{p\varphi} - A_{3ar} \xi_\varphi \omega_{n\varphi}) + \sin \phi_\varphi (B_{3ar} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} + A_{3ar} \omega_{p\varphi}) \right]
\end{aligned} \tag{D.26}$$

On déduit  $z_{rav}, z_{rar}$  à partir des équations D.23 et D.25.

$$\begin{aligned}
z_{rav} &= e^{\frac{-b_{pav}}{2.M_r} t} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2.M_r} t \right) \left( \frac{-b_{pav}}{2.M_r} C_{1av} + C_{2av} \frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2.M_r} \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2.M_r} t \right) \left( \frac{-b_{pav}}{2.M_r} C_{2av} - C_{1av} \frac{\sqrt{-\Delta_{av}}}{2.M_r} \right) \right] \\
&\quad + e^{-\xi_z \omega_{nz} t} \left[ (-A_{2av} \xi_z \omega_{nz} + B_{2av} \omega_{pz}) \cos(\omega_{pz} t + \phi_z) - (B_{2av} \xi_z \omega_{nz} + A_{2av} \omega_{pz}) \sin(\omega_{pz} t + \phi_z) \right] \\
&\quad + e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi} t} \left[ (-A_{3av} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} + B_{3av} \omega_{p\varphi}) \cos(\omega_{p\varphi} t + \phi_\varphi) - (B_{3av} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} + A_{3av} \omega_{p\varphi}) \sin(\omega_{p\varphi} t + \phi_\varphi) \right] \\
z_{rar} &= e^{\frac{-b_{par}}{2.M_r} t} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2.M_r} t \right) \left( \frac{-b_{par}}{2.M_r} C_{1ar} + C_{2ar} \frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2.M_r} \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2.M_r} t \right) \left( \frac{-b_{par}}{2.M_r} C_{2ar} - C_{1ar} \frac{\sqrt{-\Delta_{ar}}}{2.M_r} \right) \right] \\
&\quad + e^{-\xi_z \omega_{nz} t} \left[ (-A_{2ar} \xi_z \omega_{nz} + B_{2ar} \omega_{pz}) \cos(\omega_{pz} t + \phi_z) - (B_{2ar} \xi_z \omega_{nz} + A_{2ar} \omega_{pz}) \sin(\omega_{pz} t + \phi_z) \right] \\
&\quad + e^{-\xi_\varphi \omega_{n\varphi} t} \left[ (-A_{3ar} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} + B_{3ar} \omega_{p\varphi}) \cos(\omega_{p\varphi} t + \phi_\varphi) - (B_{3ar} \xi_\varphi \omega_{n\varphi} + A_{3ar} \omega_{p\varphi}) \sin(\omega_{p\varphi} t + \phi_\varphi) \right]
\end{aligned} \tag{D.27}$$

Le modèle inverse des flux dans le véhicule peut donc être mené à la forme :

$$\begin{cases} \Delta \dot{z}_{av} = \dot{z} - L_{av} \dot{\varphi} - z_{rav} \\ \Delta \dot{z}_{ar} = \dot{z} + L_{ar} \dot{\varphi} - z_{rar} \end{cases} \tag{D.28}$$

Les équations D.1, D.27 et D.28 décrivent le modèle inverse du véhicule.

Nous cherchons également le modèle inverse des suspensions. Nous considérons la suspension avant. Le calcul pour la suspension arrière est similaire. En exploitant le modèle bond graph bicausal de la figure D.1, nous obtenons une relation implicite en  $m_{av}$  :

$$m_{av} = \frac{k_{sav} \left( \int_0^t \frac{-\Delta \dot{z}_{av}}{m_{av}} d\tau + \int_0^t Q_{av} d\tau + V_{sav0} \right) - \frac{b_{sav} \Delta \dot{z}_{av}}{m_{av}} + b_{sav} Q_{av}}{F_{av}} \tag{D.29}$$

où  $V_{sav0}$  et  $V_{sar0}$  sont les conditions initiales des déplacements généralisés des éléments  $C$ .

Cette relation s'exprime sous forme un polynôme de second degré à coefficients fonctions du temps :

$$F_{av}m_{av}^2 - \left( k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av} \right) m_{av} + \left( k_{sav} \int_0^t \Delta \dot{z}_{av} d\tau + b_{sav} \Delta \dot{z}_{av} \right) = 0 \quad (D.30)$$

$$\Delta_{sav} = \left( k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av} \right)^2 - 4 \left( k_{sav} \int_0^t \Delta \dot{z}_{av} d\tau + b_{sav} \Delta \dot{z}_{av} \right) F_{av} > 0 \quad (D.31)$$

Cette équation a donc deux solutions :

$$\begin{cases} m_{av1} = \frac{(k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av}) + \sqrt{\Delta_{sav}}}{2F_{av}} \\ m_{av2} = \frac{(k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av}) - \sqrt{\Delta_{sav}}}{2F_{av}} \end{cases} \quad (D.32)$$

Le coefficient de transmission d'énergie doit être positive tout le temps.  $m_{av1}$  est la seule solution qui satisfait cette condition.

Le calcul pour la suspension arrière est similaire. Nous trouvons pourtant deux solutions positives en temps.

$$\begin{cases} m_{ar1} = \frac{(k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar}) + \sqrt{\Delta_{sar}}}{2F_{ar}} \\ m_{ar2} = \frac{(k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar}) - \sqrt{\Delta_{sar}}}{2F_{ar}} \end{cases} \quad (D.33)$$

$m_{ar1}$  est pourtant trop grande pour une suspension de véhicule (il donne un diamètre du piston d'environ 30m). Nous ne pouvons qu'accepter la solution  $m_{ar2}$ .

Nous avons donc :

$$\begin{cases} m_{av} = \frac{(k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av}) + \sqrt{\Delta_{sav}}}{2F_{av}} \\ m_{ar} = \frac{(k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar}) - \sqrt{\Delta_{sar}}}{2F_{ar}} \end{cases} \quad (D.34)$$

où

$$\begin{cases} \Delta_{sav} = \left( k_{sav} \int_0^t Q_{av} d\tau + k_{sav} V_{sav0} + b_{sav} Q_{av} \right)^2 - 4 \left( k_{sav} \int_0^t \Delta \dot{z}_{av} d\tau + b_{sav} \Delta \dot{z}_{av} \right) F_{av} \\ \Delta_{sar} = \left( k_{sar} \int_0^t Q_{ar} d\tau + k_{sar} V_{sar0} + b_{sar} Q_{ar} \right)^2 - 4 \left( k_{sar} \int_0^t \Delta \dot{z}_{ar} d\tau + b_{sar} \Delta \dot{z}_{ar} \right) F_{ar} \end{cases} \quad (D.35)$$

L'équation D.34 décrit les modèles inverses des suspensions.