



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-modèle incertaine du trafic routier et suivi robuste de profils optimaux aux entrées des voies périurbaines

Antoine Lemarchand

► **To cite this version:**

Antoine Lemarchand. Modélisation multi-modèle incertaine du trafic routier et suivi robuste de profils optimaux aux entrées des voies périurbaines. Autre. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT117 . tel-01128252

**HAL Id: tel-01128252**

**<https://theses.hal.science/tel-01128252>**

Submitted on 9 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique et Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Antoine LEMARCHAND**

Thèse dirigée par **Damien KOENIG** et **John Jairo MARTINEZ-MOLINA**

préparée au sein du centre de recherche **GIPSA-Lab**, département **automatique**, du laboratoire  
et de l'école doctorale **Électronique, Électrotechnique, Automatique et Traitement du Signal**

## **Modélisation multi-modèle incertaine du trafic routier et suivi robuste de profils optimaux aux entrées des voies périurbaines**

Thèse soutenue publiquement le **octobre 2011**,  
devant le jury composé de :

**Carlos CANUDAS DE WIT**, Président

Directeur de Recherche CNRS, GIPSA-Lab (Grenoble, France)

**José RAGOT**, Rapporteur

Professeur des Universités, INPL (Nancy, France)

**Saïd MAMMAR**, Rapporteur

Professeur des Universités, IBISC (Evry, France)

**Habib HAJ-SALEM**, Examineur

Directeur de recherche, IFSTAR/GRETTA (Noisy le grand, France)

**Damien KOENIG**, Directeur de thèse

Maitre de Conférence, GIPSA-lab (Grenoble, France)

**John Jairo MARTINEZ-MOLINA**, Co-Directeur de thèse

Maitre de Conférence, GIPSA-Lab (Grenoble, France)





# Résumé

Ce document synthétise mes travaux de thèse de doctorat en Automatique Productique à Grenoble INP (Institut National Polytechnique), thèse préparée au sein du département automatique du laboratoire GIPSA-lab (Grenoble Image Parole Signal et Automatique). Ce travail s'inscrit dans le cadre du contrôle local et de la supervision des systèmes de trafic routier. Les principales contributions portent sur la modélisation, la supervision et la commande locale des systèmes de trafic routier.

La contribution apportée à la modélisation du trafic est l'ajout d'un modèle d'incertitude sur le modèle CTM (Cell Transmission Model [Daganzo, 1994]). Ce nouveau modèle permet de prendre en compte les incertitudes sur différents paramètres du modèle pour in-fine proposer de nouvelles stratégies de commandes commutées robustes.

Outre cette approche de modélisation, nous proposons un niveau de supervision permettant d'une part d'estimer en temps réel le mode de fonctionnement et d'autre part de détecter, localiser et estimer certaines fautes sur le système. L'estimation dynamique de mode de fonctionnement nous permet de connaître l'état de congestion (ou de non-congestion) de l'aménagement routier considéré. Nous sommes en mesure de détecter des fautes telles que des chutes de vitesse ou des chutes de capacité survenant sur la route.

Enfin, nous proposons deux lois de commandes locales basées sur la théorie des systèmes à commutations. Ainsi, le schéma de contrôle s'adaptera dynamiquement aux changements de propriétés du système. Ces lois de commande ont pour objet de s'insérer dans un schéma de régulation hiérarchique.

## Mots clefs

Modélisation du trafic, Systèmes linéaire à commutation, Détection, localisation et estimation de fautes, Contrôle local du trafic, Synthèse  $H_\infty$ , LMI

---

# Abstract

This document synthesizes my Phd thesis work in Automatic Control in Grenoble-INP. This thesis has been prepared in the automatic control department of the laboratory GIPSA-lab. This work is situated in the area of traffic systems control and supervision. Our contributions are about modeling, supervision and local traffic control.

The CTM traffic model has been extended with a model of uncertainties. This news model allows us to take into account the uncertain parameters of the model, to propose new robust switched control law.

In addition to this modeling approach, we propose some developments on supervision of traffic systems. On one hand, we can estimate the operating mode of the system in real time and on the other hand to estimate some faults on the system. The dynamical estimation of the operating mode allows us to know the state of congestion (or non congestion) of the road. We are able to estimate faults such as speed fall and capacities drop that may appear.

Finally, we propose two control laws based on switching systems control. The developed controllers adapt their geometry to the properties of the system. The purpose of these controllers is to be inserted in a hierarchic control scheme.

## Key words

Traffic modeling, Switched linear systems, Fault detection, localisation and estimation, Local traffic control,  $H_\infty$  synthesis, LMI

---

# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Carlos Canudas de Wit (Directeur de recherche CNRS, Gipsa-lab) d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Messieurs José Ragot (Professeur des universités, INPL) et Said Mammam (Professeur des universités, Université d'Evry) d'avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que Monsieur Habib Haj-Salem (Directeur de recherche CNRS, IFSATR/GRETTA) pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Damien Koenig (Maître de Conférence, HDR à Grenoble INP) d'avoir encadré mon travail de thèse pendant ces trois ans. Ces remarques et conseils pertinents m'ont permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions.

Je remercie Monsieur John Jairo Martinez-Molina (Maître de Conférence, à Grenoble INP) d'avoir co-diriger ma thèse. Il a su me faire avancer dans les moments difficiles.

Je remercie tous les permanents du GIPSA-Lab pour leur accompagnement. En particulier Messieurs Olivier Sename (Professeur à Grenoble INP) et Luc Dugard (Directeur de Recherche CNRS au GIPSA-Lab) notamment pour les bons moments passés en conférence.

Je remercie tous les personnels administratifs du GIPSA-Lab qui ont permis que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions, en particulier Marie-Thérèse, Patricia, Virginie, Marielle, Marie-Rose.

Je remercie Corentin, Charles et Sébastien qui m'ont accueilli dans leur bureau lors de mon arrivée au GIPSA-Lab. Ils ont su me motiver et me conseiller sur mon travail de thèse même après leur départ du laboratoire.

Je remercie tous mes collègues du GIPSA-Lab. Mes collègues de bureau : Irfan, Lam, Haiyang. Mes collègues du département Auto : Lizeth, Joumana, Marouane,

---

Amine, Simona, Oumaima, Pham, Valentina, Andra, Luc, Sylvain, Federico, Van, Hieu, Valentina. Ainsi que les collègues des autres départements.

Je remercie toutes les personnes qui se sont engagé auprès de l'association GipsADoc (anciennement GAG), notamment l'ancienne équipe : Sylvain, Florent, Cléo, Antoine, François et Anne. L'équipe qui m'a accompagné dans cette mission : Emilie, Chloé, Olha, Gabriel Rodrigues de Campos, Vincent. Et les nouveaux membres de l'association : Simona, Yo, Rojelio, Jérémie.

Je remercie toutes les personnes qui ont été de passage au GIPSA-Lab, Rocio, Paulina, Jorge, Clément, Adrian, Vincente, Juan Francisco, David, Claudiu.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
1.1	Les congestions : Un problème majeur . . . . .	17
1.2	Solutions parallèles mises en oeuvre . . . . .	18
1.3	Architecture hiérarchique de contrôle . . . . .	20
1.3.1	Niveau Supervision . . . . .	21
1.3.2	Niveau optimisation . . . . .	22
1.3.3	Niveau local . . . . .	23
1.4	Résumé des contributions . . . . .	24
1.5	Organisation du mémoire . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Modélisation du trafic routier</b>	<b>27</b>
2.1	Modèle de Transmission Cellulaire (CTM) . . . . .	29
2.1.1	Equations de conservation . . . . .	30
2.1.2	Calcul des flux : Jonctions . . . . .	32
2.2	Modèle d'incertitudes . . . . .	38
2.2.1	Identification du diagramme fondamental . . . . .	38
2.2.2	Incertitudes paramétriques . . . . .	38
2.3	Forme de représentation d'état générique . . . . .	40
2.4	Validation du modèle . . . . .	45
2.4.1	Cas d'étude . . . . .	45
2.4.2	Identification des paramètres . . . . .	47

## Table des matières

---

2.4.3	Simulations . . . . .	50
2.5	Voisinage d'une rampe d'accès . . . . .	53
2.5.1	Création et dissipation d'une congestion . . . . .	53
2.5.2	Propriétés de commandabilité et d'observabilité . . . . .	54
2.6	Résumé des contributions . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes</b>	<b>59</b>
3.1	Principe d'estimation du mode de fonctionnement . . . . .	60
3.1.1	Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$ . .	61
3.1.2	Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FD}$ . .	64
3.1.3	Estimation du mode de fonctionnement global . . . . .	66
3.2	Application à l'estimation des fautes . . . . .	67
3.2.1	Types de fautes identifiables . . . . .	67
3.2.2	Estimation des fautes . . . . .	69
3.3	Génération robuste des résidus . . . . .	70
3.3.1	Transformation du problème d'estimation en un problème $H_\infty$ standard . . . . .	70
3.3.2	Génération des résidus en mode fluide . . . . .	73
3.3.3	Génération des résidus en mode congestionné ou découplé . . . .	74
3.3.4	Analyse de sensibilité . . . . .	75
3.4	Validation . . . . .	79
3.4.1	Estimation du mode fonctionnement . . . . .	79
3.4.2	Estimation des fautes . . . . .	81
3.5	Résumé des contributions . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Contrôleur robuste PI à commutations</b>	<b>89</b>
4.1	Ajout de l'effet intégral . . . . .	91
4.2	Synthèse des contrôleurs : formulation LMI . . . . .	93

## Table des matières

---

4.2.1	Outils de transformation LMI . . . . .	93
4.2.2	Stabilisation du système . . . . .	93
4.2.3	Placement des pôles du système . . . . .	96
4.3	Résultats de synthèse . . . . .	98
4.4	Validation, simulation sur données réelles . . . . .	102
4.4.1	Scénario de test . . . . .	102
4.4.2	Profils optimaux . . . . .	104
4.4.3	Contrôleur PI à commutations . . . . .	104
4.5	Résumé des contributions . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Contrôleur PI à commutation douces</b>	<b>107</b>
5.1	Etude des incertitudes sur la loi de commutation . . . . .	109
5.1.1	Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$ . . . . .	109
5.1.2	Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FD}$ . . . . .	111
5.1.3	Etude des incertitudes sur la loi de commutation globale . . . . .	111
5.2	Loi de commutation douce . . . . .	113
5.2.1	Loi de commutation statique . . . . .	113
5.2.2	Loi de commutation dynamique . . . . .	118
5.3	Fonction de Lyapunov Quadratique par Morceaux (PWQ) . . . . .	118
5.3.1	Définition de la fonction de Lyapunov . . . . .	119
5.3.2	Construction de la fonction de Lyapunov . . . . .	120
5.4	Synthèse des régulateurs robustes locaux : Formulation LMI . . . . .	124
5.5	Validation, simulations sur données réelles . . . . .	127
5.5.1	Contrôleur PI à commutation douce . . . . .	127
5.5.2	Contrôleur PI à commutation douce avec saturation de la commande	132
5.6	Résumé des contributions . . . . .	135

## Table des matières

---

<b>6 Conclusions</b>	<b>137</b>
6.1 Bilan . . . . .	137
6.2 Perspectives . . . . .	139
 <b>Bibliographie</b>	 <b>141</b>

# Table des figures

1.1	Architecture hiérarchique de contrôle . . . . .	20
2.1	Principe de discrétisation spatial du CTM. . . . .	30
2.2	Cellule élémentaire. . . . .	31
2.3	File d'attente. . . . .	32
2.4	Jonction simple. . . . .	33
2.5	Flux pouvant être fourni par la cellule amont : $S_{\phi_{i-1}}(k)$ , et reçu par la cellule aval : $R_{\phi_i}(k)$ . . . . .	34
2.6	Diagramme fondamental. . . . .	34
2.7	Jonction convergente. . . . .	35
2.8	Jonction divergente. . . . .	36
2.9	Identification du diagramme fondamental. . . . .	39
2.10	Diagramme fondamental incertain. . . . .	40
2.11	Cas d'étude, D383 . . . . .	46
2.12	Découpage spacial du cas d'étude, D383 . . . . .	46
2.13	. . . . .	48
2.14	Paramètre incertain $v(k)$ . . . . .	48
2.15	Paramètre incertain $w(k)$ . . . . .	48
2.16	Paramètre incertain $\phi_M(k)$ , par voie de circulation . . . . .	49
2.17	Coefficient de divergence sortie 1 $\beta = 0.157$ . . . . .	49
2.18	Coefficient de divergence sortie 2 $\beta = 0.383$ . . . . .	49

## Table des figures

---

2.19	Densité dans les cellules . . . . .	50
2.20	Densité dans les cellules . . . . .	50
2.21	Comparaison mesures modèle, flux capteur C2 . . . . .	51
2.22	Comparaison mesures modèle, flux capteur B2 . . . . .	51
2.23	Comparaison mesures modèle, densité capteur B2 . . . . .	51
2.24	Comparaison mesures modèle, flux capteur A2 . . . . .	52
2.25	Comparaison mesures modèle, densité capteur A2 . . . . .	52
2.26	Comparaison mesures modèle, flux capteur A6 . . . . .	52
2.27	Comparaison mesures modèle, flux capteur A4 . . . . .	52
2.28	Voisinage d'une rampe d'accès. . . . .	53
2.29	Modes et transitions. . . . .	55
2.30	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_1$ . . . . .	55
2.31	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_2$ . . . . .	55
2.32	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_3$ . . . . .	56
2.33	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_4$ . . . . .	56
2.34	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_5$ . . . . .	56
2.35	Sens de propagation, $\alpha(k) = \alpha_6$ . . . . .	57
3.1	Mode Congestionné = Mode Fluide + Faute. . . . .	61
3.2	Mode Fluide = Mode Congestionné + Faute. . . . .	61
3.3	Faute type 1 . . . . .	68
3.4	Faute type 1 : Influence sur le diagramme fondamental . . . . .	68
3.5	Faute type 2 . . . . .	69
3.6	Faute type 2 : Influence sur le diagramme fondamental . . . . .	69
3.7	Problème d'estimation. . . . .	71
3.8	Problème d'estimation sous forme $H_\infty$ standard. . . . .	71
3.9	Fonction de sensibilité, Estimation de $d\phi_{F_4}(k)$ . . . . .	76
3.10	Fonction de sensibilité, Estimation de $d\phi_{C_4}(k)$ . . . . .	77

---

## Table des figures

---

3.11	Fonction de sensibilité, Estimation de $d\phi_{F_6}(k)$ . . . . .	77
3.12	Fonction de sensibilité, Estimation de $d\phi_{D_6}(k)$ . . . . .	78
3.13	Estimation du mode de fonctionnement : Scénario de test . . . . .	79
3.14	Estimation du mode de fonctionnement, jonction 4 . . . . .	80
3.15	Estimation du mode global de fonctionnement . . . . .	81
3.16	Estimation des fautes : Scénario de test . . . . .	82
3.17	Estimation des fautes . . . . .	83
3.18	Estimation des fautes . . . . .	84
3.19	Estimation des fautes . . . . .	85
3.20	Estimation du flux d'entrée . . . . .	86
4.1	Schéma d'implantation du contrôleur local . . . . .	90
4.2	Placement des pôles dans un disque. . . . .	97
4.3	Résultat du placement de pôles. . . . .	98
4.4	Transfert du système en boucle fermée . . . . .	100
4.5	Fonctions de sensibilité aux différentes perturbations . . . . .	101
4.6	Conditions aux limites : Flux entrant dans le tronçon principal. . . . .	102
4.7	Conditions aux limites : Flux entrant dans la rampe d'accès. . . . .	103
4.8	Réponse libre du système. . . . .	103
4.9	Profils de densité optimaux. . . . .	104
4.10	Contrôleur PI à commutation : Réponse du système. . . . .	105
4.11	Contrôleur PI à commutation : Résultats de simulation. . . . .	106
5.1	Schéma d'implantation du contrôleur PI à commutations douces . . . . .	108
5.2	Sous espaces . . . . .	110
5.3	Mode subspaces for junction $i$ . . . . .	112
5.4	Fonctions de densité de probabilité des incertitudes $\delta v$ et $\delta w$ sur un intervalle normalisé. . . . .	114

## Table des figures

---

5.5	Fonction de probabilité cumulée, fonction d'approximation ( $\beta = 8, a = -1, b = 1$ ). . . . .	115
5.6	Fonctions de probabilité : $\mu_{F_i}(\rho), \mu_{C_i}(\rho), i \in \mathfrak{J}_{FC}$ . . . . .	116
5.7	Fonctions de probabilité : $\mu_{F_i}(\rho), \mu_{D_i}(\rho), i \in \mathfrak{J}_{FD}$ . . . . .	117
5.8	Loi de commutation dynamique : jonction 4. . . . .	119
5.9	PI à commutation douce : Réponse du système. . . . .	128
5.10	PI à commutation douce : Résultats de simulations. . . . .	129
5.11	Fonctions de pondération : jonction 2 . . . . .	130
5.12	Fonctions de pondération : jonction 3 . . . . .	130
5.13	Fonctions de pondération : jonction 4 . . . . .	131
5.14	Fonctions de pondération : jonction 5 . . . . .	131
5.15	PI à commutation douce avec saturation de la commande : Réponse du système. . . . .	133
5.16	PI à commutation douce avec saturation de la commande : Résultats de simulation. . . . .	134
6.1	Diagramme fondamental approximé par une méthode de Takagi Sugeno. . . . .	139

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Les congestions : Un problème majeur

Depuis le milieu du siècle dernier, un grand nombre d'agglomérations ont construit des voies rapides permettant de contourner leur centre ville. Ces voies péri-urbaines furent mis en place pour réduire les congestions apparaissant dans les villes et pour réduire les temps de parcours. En effet, ces voies permettent aux utilisateurs souhaitant traverser une ville en un temps réduit et aux utilisateurs souhaitant se rendre dans la ville de réduire leur parcours dans l'agglomération.

Lors de ces dernières décades, le nombre de véhicules en circulation a littéralement explosé. Cela a causé une augmentation considérable des congestions dans et à la périphérie des villes. Le rapport "Urban mobility report" [Schrank & Lomax, 2007] présente une estimation du coût horaire, énergétique et monétaire des congestions. En 1982, dans l'ensemble des villes des États-Unis, les congestions ont causé la perte de 0,8 milliards d'heures, ont causé le gaspillage de 0,5 milliard de gallons d'essence et ont coûté environ 15 milliards de dollars. En 2005, ces chiffres ont atteint 4,2 milliards d'heures, 2,9 milliards de gallons d'essence et 78 milliards de dollars.

Nous voyons donc que la demande augmente inexorablement, poussant les aménagements routiers à leur limite en termes de capacité. De ce fait, leur coût financier et leur impact sur l'environnement ne cesse d'augmenter.

### 1.2 Solutions parallèles mises en oeuvre

Les autorités locales ont fait de ces problèmes de congestions une de leurs priorités. Elles mettent en place toute une série de mesures en parallèle pour pallier au problème des congestions.

- Augmentation de la capacité des aménagements, Construction d'itinéraires alternatifs
- Développement des transports partagés
- Aide à la conduite : Voiture intelligente
- Contrôle et surveillance du trafic : Route intelligente

#### **Augmentation de la capacité des aménagements, Construction d'itinéraires alternatifs**

L'augmentation de la capacité des aménagements se fait par l'agrandissement de certains axes. Des itinéraires alternatifs peuvent être proposés aux utilisateurs (par exemple le projet de rocade nord à Grenoble). Cette solution est souvent très coûteuse, et longue à mettre en place. Elle n'est pas forcément envisageable en fonction de l'occupation des territoires, par manque de place. Elle peut avoir un impact écologique non négligeable lors de la réalisation du projet et de son exploitation. Enfin, on peut voir des phénomènes d'appel d'air qui font augmenter la demande proportionnellement au gain de capacité obtenu, ou transfèrent le problème. Néanmoins dans certaines configurations elle apporte des résultats très appréciables pour les usagers et les collectivités. Sur certaines routes, les bandes d'arrêt d'urgence peuvent être momentanément ouvertes afin d'augmenter la capacité des routes.

#### **Développement des transports partagés**

Par transports partagés, nous entendons à la fois les transports en commun, co-voiturage, les "parkings relais"... Ces solutions ont pour effet d'augmenter le nombre d'usagers par véhicule. Et donc pour une demande constante en termes d'usagers, la sollicitation des infrastructures en terme de volume de véhicules se trouve réduite. La mise en place de transports en commun a un coût important, leur utilisation nécessite un changement de mentalité des utilisateurs. Ces solutions ont un impact très bénéfique sur les congestions et sur le coût environnemental de la mobilité. Leur mise en place se situe souvent à une échelle locale.

### Aide à la conduite : Voiture intelligente

Les systèmes d'aide à la conduite sont de plus en plus développés sur les véhicules récents. Vis-à-vis du problème des congestions, les stratégies d'aide au freinage, de gestion des inter-distances entre les véhicules et de stop&go sont intéressantes. En effet, ils permettent de lisser le facteur humain. Et donc, ils limitent les phénomènes de chocs et diminuent l'accidentologie et les congestions. Néanmoins, tous les véhicules n'étant pas équipés de ces options, l'impact sur les congestions est très limité.

### Contrôle et surveillance du trafic : Route intelligente

Un dernier axe d'investigation majeur est le contrôle et la surveillance du trafic communément appelé la route intelligente. Ce terme regroupe tous les dispositifs intelligents ajoutés à un aménagement existant. Il s'agit en général d'un ensemble de capteurs permettant de connaître l'état courant du trafic et d'un ensemble de dispositifs permettant d'agir sur le trafic.

Les capteurs peuvent être de différentes catégories : capteurs de densité, capteurs de flux, capteurs de vitesse, capteurs de signature magnétique, vidéosurveillance. Les dispositifs actifs permettant d'agir sur le trafic sont divers : panneaux avertisseurs à message variable, indicateurs de temps de parcours, limitations de vitesse variables, feux de circulation. Ces solutions sont en général peu coûteuses par rapport au prix des aménagements routiers. Ils peuvent être mis en place rapidement et améliorent nettement la sécurité et la fluidité des aménagements équipés. [Papageorgiou et al., 2003] présente une vue d'ensemble des différentes stratégies mises en oeuvre pour le contrôle du trafic routier.

L'amélioration de la sécurité peut se faire par l'installation d'un réseau de vidéo surveillance qui permet de détecter de localiser et d'identifier rapidement un incident ayant lieu sur la route. Elles permettent de diriger les secours et éventuelles interventions sur le terrain. De plus des panneaux à message variable permettent d'avertir les usagers des incidents sur la route sur laquelle ils circulent. Ils permettent également d'indiquer des temps de parcours aux usagers et leur permet au besoin de modifier leur itinéraire.

Enfin, différentes stratégies de contrôle sont mises en place pour optimiser l'utilisation des aménagements existants. C'est dans cette partie que notre travail se situe. Nous avons plusieurs variables permettant d'agir sur l'aménagement, celles-ci définissent les types de contrôles pouvant être mis en place. Différentes approches ont été proposées : Contrôle d'accès [Papageorgiou & Kotsialos, 2002; Papageorgiou & Kotsialos, 2000], Contrôle des limitations de vitesse [Hegyí et al., 2005], Contrôle d'accès plus contrôle du

flux sur l'axe principal [Jiang & Tang, 2009], ou alors des stratégies mixtes contrôlant à la fois l'accès et les limitations de vitesse [Lu et al., 2010; Ghods et al., 2009; Hegyi et al., 2002]. Dans notre étude nous nous intéressons au contrôle d'accès.

Le principe du contrôle d'accès est d'adapter en temps réel le flux pouvant entrer sur le tronçon principal par les rampes d'accès. Il a pour effet de fluidifier le trafic sur le tronçon principal. Néanmoins, il augmente le temps d'attente aux entrées et nécessite une zone de stockage pour les véhicules en attente.

### 1.3 Architecture hiérarchique de contrôle

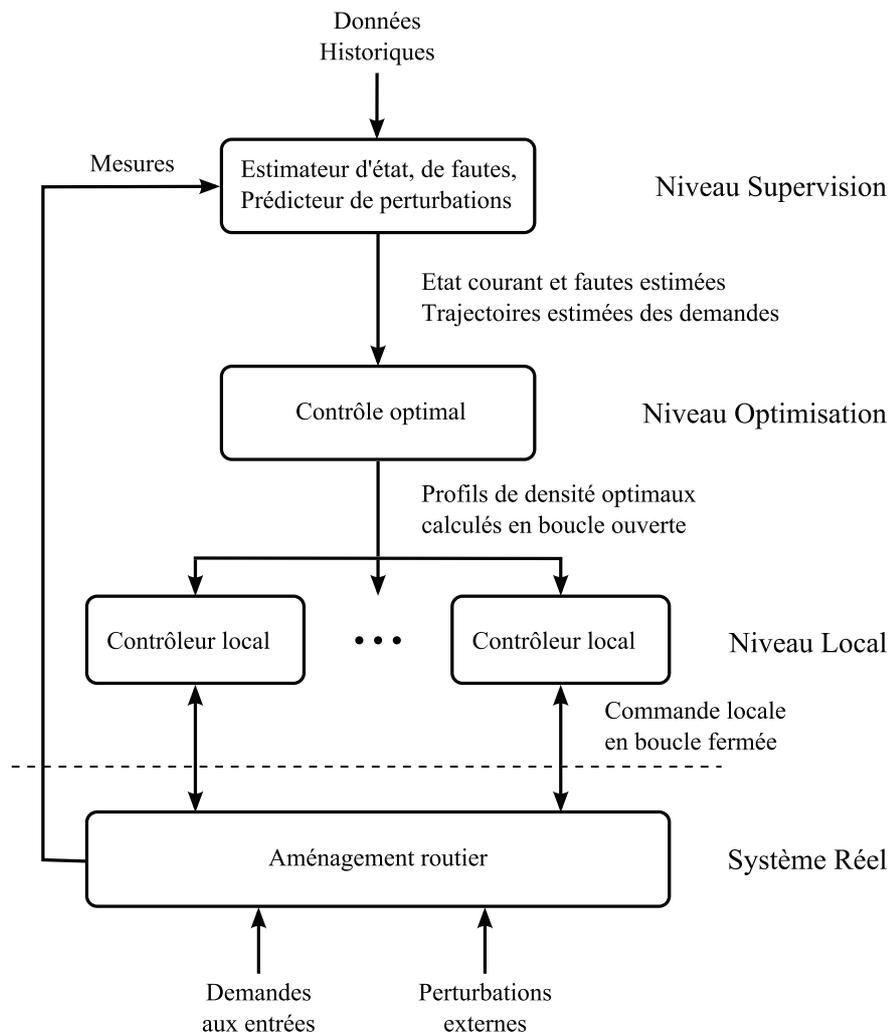


FIG. 1.1 – Architecture hiérarchique de contrôle

## Chapitre 1. Introduction

---

Une architecture hiérarchique de contrôle est proposée dans [Papamichail et al., 2010; Kotsialos & Papageorgiou, 2005]. Cette architecture est représentée sur la Figure 1.1. Cette architecture se découpe en 3 niveaux.

- Le niveau supervision prend en entrée les mesures des capteurs installés sur la route et la connaissance historique des conditions de trafic, en sortie de ce niveau, nous pouvons avoir différents types d'informations : les profils actuels de concentration, l'estimation et la localisation de fautes (incidents), l'estimation de profils de demande aux entrées du système.
- le niveau optimisation prend en entrée les informations fournies par le niveau supervision. Il se base sur la connaissance du modèle pour calculer des profils de densité optimaux à appliquer sur l'aménagement. Ces profils de concentration optimaux sont calculés en boucle ouverte selon un critère prédéfini, ils sont calculés pour un aménagement complet.
- le niveau local applique une stratégie robuste de contrôle d'accès au voisinage des rampes d'accès permettant d'assurer le suivi local des profils de densité optimaux calculés par le niveau supérieur.

### 1.3.1 Niveau Supervision

Le niveau supervision nous permet d'obtenir différentes informations à partir de la connaissance du modèle, des mesures et de l'historique des données de trafic.

L'estimation des demandes aux entrées peut être effectuée à partir de la connaissance historique du trafic. En effet, les profils de demandes au fil des jours se ressemblent et vont dépendre du jour de la semaine, de la saison... L'obtention de ces profils nécessite des études statistiques sur un grand nombre de données.

La mise en place d'observateurs classiques n'est pas possible pour les systèmes de trafic routier. En effet, les caractéristiques du système changent en fonction de l'état de congestion. Ces changements font varier les propriétés de commandabilité et d'observabilité [Muñoz et al., 2003], ce point sera développé en section 2.5.2. La voie la plus explorée est la mise en place de filtres de Kalman étendus afin d'estimer les variables caractéristiques du trafic (densité, flux, vitesse). Dans [Sun et al., 2003] [Sun et al., 2004], les auteurs proposent un filtre de kalman étendu basé sur un modèle de trafic du premier ordre.

Dans [Wang et al., 2005] les auteurs utilisent un modèle non-linéaire du trafic. Le

filtre de kalman étendu permet d'estimer en ligne les paramètres caractéristiques du système [Wang et al., 2005]. Ces approches ont été validées en simulation sur différents scénarios dans [Wang, Coppola, Tzimitsi & Messmer, 2008; Wang et al., 2006a; Wang et al., 2006b; Wang et al., 2011]. Les méthodes basées sur les filtres de Kalman montrent de bonnes performances temps réel. Les auteurs proposent de bonnes perspectives dans la détection d'incidents.

### 1.3.2 Niveau optimisation

Le niveau optimisation a pour objet de déterminer sur un horizon donné les profils de densité optimaux à appliquer sur l'aménagement. Ces profils sont obtenus selon un algorithme d'optimisation non-linéaire haut niveau. Les conditions aux limites et les conditions initiales de l'algorithme sont données par le niveau supervision. Ces profils sont recalculés de façon régulière.

Comme pour tout algorithme d'optimisation, un critère est défini. Les critères classiquement utilisés dans la gestion des flux routiers sont : le TTD (Total Travel Distance, km), il représente la distance cumulée parcourue par l'ensemble des véhicules empruntant l'aménagement ; le TTT (Total Travel Time), il représente le temps cumulé passé sur le tronçon principal ; et le TWT (Total Waiting Time), il représente le temps d'attente cumulé aux rampes d'accès. Les critères d'optimisation utilisés sont en général une combinaison de ces critères. Le TTD doit être maximisé alors que le TTT et le TWT doivent être minimisés. Il faut noter que pour des profils de demande particuliers, le TTD sera constant. D'autres critères, notamment de pollution peuvent être ajoutés à ce critère.

Le problème d'optimisation du trafic routier est un problème d'optimisation non-linéaire [Blinkin, 1976], les auteurs [Kotsialos & Papageorgiou, 2004a; Kotsialos & Papageorgiou, 2004b] proposent des algorithmes d'optimisation non-linéaires utilisant la méthode du gradient. Ces algorithmes sont basés sur un modèle de trafic routier du deuxième ordre. Cette méthode est appliquée au contrôle d'accès du périphérique d'Amsterdam. Les mêmes auteurs proposent une application à la régulation du trafic sur le boulevard périphérique de Paris [Papageorgiou et al., 1990b; Papageorgiou et al., 1990a]. Les mêmes auteurs proposent une extension de cet algorithme permettant de prendre en compte des limitations de vitesse variables et des modifications d'itinéraires.

Dans les articles [Alvarez et al., 1998], [Gomes & Horowitz, 2006; Gomes et al., 2004] et [Gomes & Horowitz, 2004], les auteurs proposent des problèmes d'optimisation bilinéaires puis linéaires équivalents aux problèmes d'optimisation non-linéaire du trafic routier. Pour cela, les auteurs procèdent à la relaxation des contraintes du problème d'optimisation. Notamment des contraintes liées à la caractéristique flux/densité et à

la prise en compte des chutes de capacité lié à la convergence du flux d'entrée et du flux principal [Chung et al., 2007; Treiber et al., 2006]. Ces algorithmes sont basés sur une version modifiée du modèle CTM [Daganzo, 1995*b*],[Daganzo, 1995*a*], un modèle de trafic du premier ordre.

Dans [Jacquet, 2008], l'auteur étend la relaxation des contraintes à des caractéristiques flux/densité plus générale et utilise une formulation du phénomène de chute de capacité proposée dans [Haut et al., 2006].

Ces différents algorithmes s'insèrent facilement dans une architecture hiérarchique de contrôle. Cependant ils peuvent être implantés de manière autonome en utilisant le principe d'horizons glissants. Ce type d'implantation est largement étudié dans les articles cités dans cette sous-section.

### 1.3.3 Niveau local

Le niveau local permet d'assurer le suivi des profils de densité calculés par le niveau optimisation au voisinage de chaque rampe d'accès. En effet, les consignes de densité calculés le sont en boucle ouverte avec un modèle nominal et ne correspondent donc pas exactement au comportement du système réel. Les contrôleurs locaux ont donc pour objectif d'assurer le suivi de consigne ainsi que la robustesse aux incertitudes et le rejet des différentes perturbations. Un état de l'art détaillé est présenté dans [Papageorgiou & Kotsialos, 2002; Papageorgiou & Kotsialos, 2000].

Dans un premier temps, nous distinguons différents types de commandes. [Hegyi et al., 2005] considère les limitations de vitesse comme variable de commande. Dans [Lu et al., 2010; Ghods et al., 2009; Hegyi et al., 2002], les limitations de vitesses ainsi que le flux d'entrée par les rampes d'accès sont prises comme variables de commande. [Jiang & Tang, 2009] propose de commander à la fois le flux entrant par les rampes d'accès et le flux du tronçon principal.

Nous nous intéressons au contrôle seul du flux dans la rampe d'accès. L'un des régulateurs locaux les plus étudié est ALINEA. discuté dans [Haj-Salem et al., 2001; Papageorgiou et al., 1997; Papageorgiou et al., 1991] et [Papageorgiou et al., 2008]. Les auteurs proposent deux schémas d'implantation : Un schéma aval, qui utilise la mesure de densité en aval de la rampe d'accès, et un schéma amont, qui utilise la mesure de densité en amont de la rampe d'accès.

Dans [Sun & Horowitz, 2006; Sun & Horowitz, 2005; Gomes & Horowitz, 2003], les auteurs proposent un schéma de régulation à commutation qui s'adapte à l'état

de congestion du voisinage de la rampe d'accès considéré. Ainsi, le schéma de régulation sera similaire à un schéma ALINEA aval si la circulation est fluide ou à un schéma ALINEA amont si la route est congestionnée. Ce contrôleur à commutation est associé à un régulateur assurant le non-dépassement de la capacité de la file d'attente.

Récemment, des lois de régulations basées sur la logique floue ont été proposées [Xu et al., 2010; Bai et al., 2009; Ghods et al., 2009; Vukanovic & Ernhofner, 2006].

Les lois de régulation locale calculées s'insèrent facilement dans un schéma de régulation hiérarchiques. Cependant, ces contrôleurs peuvent être implantés de manières autonomes avec des consignes fixes.

### 1.4 Résumé des contributions

Dans un premier temps, nous apportons des contributions à la modélisation des systèmes de trafic routier. Nous proposons un modèle de trafic prenant en compte les incertitudes paramétriques du système. Ce modèle est donné sous une forme générique de représentation d'état. Cette représentation des incertitudes paramétriques permet de développer des lois de commandes robustes.

Dans un second temps, nous proposons une nouvelle méthode d'estimation dynamique du mode de fonctionnement et d'estimation des fautes pour la supervision du trafic routier. Cette méthode permet de connaître l'état de congestion de la route et de détecter, localiser et estimer certains incidents.

Enfin, nous proposons des lois de commandes locales robustes aux perturbations et aux incertitudes paramétriques. Ces régulateurs permettent d'assurer localement le suivi de profils de densités calculés par un niveau supérieur. La commande est effectuée par un contrôle d'accès. Nous proposons deux contrôleurs PI (Proportionnel Intégrale) à commutations s'adaptant à l'état de congestion de la route au voisinage des rampes d'accès.

#### Liste des publications scientifiques

- Antoine Lemarchand, John J. Martinez, Damien Koenig, "Hierarchical Coordinated Freeway On-Ramp Metering Using Switching System Theory", 4<sup>th</sup> IFAC Symposium on Structured System, Septembre 2010, Ancona, Italie.
- Antoine Lemarchand, Damien Koenig, John J. Martinez "Robust Design of a Switched PI Controller for an Uncertain Traffic Model", 49<sup>th</sup> IEEE Conference on

## Chapitre 1. Introduction

---

Decision and Control, Décembre 2010, Atlanta, Georgie, USA.

- Antoine Lemarchand, Damien Koenig, John J. Martinez "Smooth Switching H1 PI Controller for Local Traffic On-ramp Metering, an LMI Approach", 18<sup>th</sup> IFAC World Congress, August-september 2011, Milan, Italie.

## 1.5 Organisation du mémoire

**Chapitre 2** : Nous présentons brièvement les différents modèles de trafic. Nous justifions le choix d'un modèle de transmission cellulaire. Ce modèle est étendu avec un modèle d'incertitude et mis sous une forme générique de représentation d'état.

**Chapitre 3** : Nous détaillons la méthode d'estimation dynamique du mode de fonctionnement et de détection, localisation et estimation des fautes.

**Chapitre 4** : Nous présentons la synthèse d'un contrôleur robuste PI à commutations dont la structure s'adapte à l'état de congestion de la route.

**Chapitre 5** : Nous présentons la synthèse d'un contrôleur robuste à commutation douce. Cette nouvelle loi de commutation permet de pallier aux problèmes de commutations présentes dans l'approche classique.

**Chapitre 6** : Nous présentons les conclusions générales et perspectives de ce travail.



## Chapitre 2

# Modélisation du trafic routier

Dans ce chapitre, nous présentons les différents types de modélisation du trafic routier. Au vu de la problématique proposée, nous exposons les avantages et inconvénients des modélisations proposées dans la littérature. Cela nous permet de justifier le choix du modèle utilisé.

Dans un premier temps, les modèles de trafic routier peuvent être caractérisés par leur niveau de résolution. Nous distinguons ici deux niveaux de résolution : les modèles macroscopiques et les modèles microscopiques.

La principale caractéristique d'un modèle macroscopique est de considérer le flux de véhicules comme un flux continu. Les modèles ainsi obtenus seront similaires à des modèles de dynamique des fluides [Daganzo, 1994]. Les modèles microscopiques étudient chaque véhicule individuellement et s'intéressent à la caractérisation de leur comportement vis-à-vis des autres véhicules et de leur environnement. Les modèles macroscopiques sont généralement utilisés pour la génération de lois de commande, alors que les modèles microscopiques sont en général utilisés pour la simulation [Gomes et al., 2004]. Les modèles microscopiques sont par exemple utilisés pour valider les approches développées sur des modèles macroscopiques. Au vu de notre problématique, nous choisissons d'utiliser un modèle macroscopique de trafic.

Les modèles macroscopiques représentent l'évolution de la densité de véhicules (nombre de véhicules par unité de longueur, classiquement veh/km) dans l'espace et dans le temps. Cette évolution dans l'espace et dans le temps est régie par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces modèles peuvent être classés selon leur ordre de complexité. Nous distinguerons ici les modèles du premier ordre et les modèles d'ordre supérieur. Une comparaison de ces deux types de modèle est donnée dans [Papageorgiou, 1998] et [Daganzo, 1998]. Les modèles du premier ordre comme le modèle LWR [Lighthill

## Chapitre 2. Modélisation du trafic routier

---

& Whitham, 1955], [Richard, 1956] ou CTM [Daganzo, 1995*b*],[Daganzo, 1995*a*] ont tout d’abord l’avantage de leur simplicité. Ils reproduisent bien les phénomènes de propagation des congestions. Cependant, ils ne tiennent pas compte de l’accélération des véhicules. Les modèles d’ordre supérieur [Payne, 1971] pallient à ce problème en ajoutant des variables d’état, ils sont capables de reproduire les phénomènes d’accélération et de ralentissement des véhicules. Cependant, ils peuvent prédire des vitesses négatives et donc des véhicules roulant dans le sens inverse de la circulation. De plus, le nombre de paramètres à identifier est plus important que pour les modèles du premier ordre.

Pour leur simplicité d’identification et d’implémentation et du fait qu’ils reproduisent bien les phénomènes de propagation des congestions, nous choisissons d’utiliser un modèle du premier ordre.

### Plan du chapitre

Ce chapitre est divisé de la manière suivante. Dans la section 2.1, nous présentons le modèle de transmission cellulaire. Nous présentons et justifions nos choix pour modéliser les éléments constitutifs du CTM. Dans la section 2.2 nous proposons une modélisation des incertitudes permettant de refléter le caractère incertain du diagramme fondamental. Dans la section 2.3, nous montrons que tout aménagement routier peut s’écrire sous une forme générique de représentation d’état incertaine à commutation. Dans la section 2.4, nous validons la modélisation proposée par des simulations utilisant des données de terrain. Dans la section 2.5 nous présentons les phénomènes de création et de dissipation des congestions au voisinage d’une rampe d’accès. Nous étudions les propriétés de commandabilité et d’observabilité en présence ou non d’une congestion. Enfin, dans la section 2.6, nous présentons nos principales contributions à la modélisation incertaine du trafic routier.

### Sommaire

---

	Plan du chapitre . . . . .	28
<b>2.1</b>	<b>Modèle de Transmission Cellulaire (CTM) . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1.1	Equations de conservation . . . . .	30
	Cellule élémentaire . . . . .	30
	File d’attente . . . . .	32
2.1.2	Calcul des flux : Jonctions . . . . .	32
	Jonction simple . . . . .	33
	Jonction convergente . . . . .	35
	Jonction divergente . . . . .	36
<b>2.2</b>	<b>Modèle d’incertitudes . . . . .</b>	<b>38</b>

---

2.2.1	Identification du diagramme fondamental . . . . .	38
2.2.2	Incertitudes paramétriques . . . . .	38
<b>2.3</b>	<b>Forme de représentation d'état générique . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Validation du modèle . . . . .</b>	<b>45</b>
2.4.1	Cas d'étude . . . . .	45
2.4.2	Identification des paramètres . . . . .	47
	Paramètres du diagramme fondamental . . . . .	47
	Incertitudes sur les paramètres nominaux . . . . .	47
	Coefficients de divergence et de convergence . . . . .	48
2.4.3	Simulations . . . . .	50
<b>2.5</b>	<b>Voisinage d'une rampe d'accès . . . . .</b>	<b>53</b>
2.5.1	Création et dissipation d'une congestion . . . . .	53
2.5.2	Propriétés de commandabilité et d'observabilité . . . . .	54
<b>2.6</b>	<b>Résumé des contributions . . . . .</b>	<b>57</b>

---

## 2.1 Modèle de Transmission Cellulaire (CTM)

Les modèles du premier ordre sont basés sur le modèle de Lighthill-Whitham-Richard (LWR) décrit dans [Lighthill & Whitham, 1955], [Richard, 1956].

La concentration de véhicule,  $\rho(x, t)$ , est une fonction de l'espace  $x$  et du temps  $t$ . Le modèle LWR est composé d'une EDP représentant la conservation des véhicules

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.1)$$

et la caractéristique flux/densité

$$\phi(x, t) = f(\rho(x, t)) \quad (2.1.2)$$

lesquelles nous donnent l'équation dynamique suivante :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + f'(\rho(x, t)) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.3)$$

La relation flux/densité  $\phi(x, t) = f(\rho(x, t))$  est appelée : diagramme fondamental. Le choix de ce diagramme est un point essentiel. Il peut être identifié empiriquement et approximé par des fonctions paraboliques comme proposé dans [Greenshields, 1935] ou par des fonctions affines par morceaux [Daganzo & Geroliminis, 2008]. Le modèle CTM

développé dans [Daganzo, 1995b] et [Daganzo, 1995a] est une version discrétisée en temps et en espace du modèle LWR. L'idée proposée par Daganzo est de décomposer le tronçon d'autoroute à modéliser en petit segments appelés cellules élémentaires. Ce principe

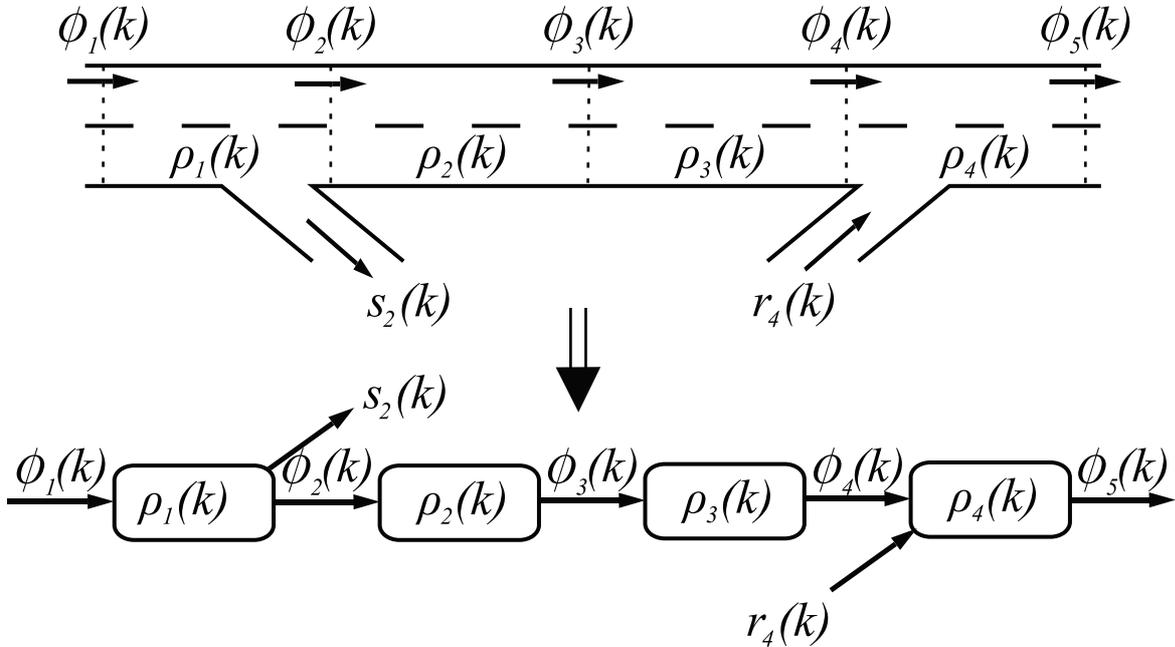


FIG. 2.1 – Principe de discrétisation spatial du CTM.

est représenté sur le Figure 2.1. Dans chaque cellule, la densité de véhicules  $\rho(k)$  est considérée homogène. Ces cellules sont reliées par des jonctions qui peuvent être : simples, convergentes ou divergentes. Les trois types de jonctions sont représentées sur la Figure 2.1 . La jonction numéro 2 (associée aux flux  $\phi_2(k)$  et  $\phi_{out_2}(k)$ ) est appelée jonction divergente car elle contient une rampe de sortie. La jonction numéro 3 (associée au flux  $\phi_3(k)$ ) est appelée jonction simple car il n'y a ni rampe de sortie ni rampe d'accès. La jonction numéro 4 (associée aux flux  $\phi_4(k)$  et  $\phi_{in_4}(k)$ ) est appelée jonction convergente car il y a une rampe d'accès. Dans la suite de cette section, nous décrivons et étudions les différents éléments constitutifs du CTM, c'est à dire la cellule élémentaire et les trois types de jonction.

## 2.1.1 Equations de conservation

### Cellule élémentaire

Le premier élément du CTM que nous décrivons est la cellule élémentaire. Une représentation schématique de la cellule et des différentes grandeurs associées est donnée sur

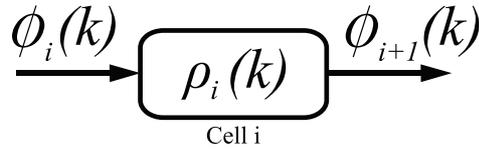


FIG. 2.2 – Cellule élémentaire.

la Figure 2.2. La densité de véhicules,  $\rho(k)$ , dans une cellule est considérée homogène. La cellule est caractérisée par l'équation de conservation suivante :

$$\rho_i(k+1) = \rho_i(k) + \frac{T_e}{l_i}(\phi_i(k) - \phi_{i+1}(k)) \quad (2.1.4)$$

ou  $\rho_i(k)$  et  $\rho_i(k+1)$  sont respectivement les densités de véhicules (exprimées en véhicules par kilomètre : veh/km) dans la cellule numéro  $i$  à l'instant  $kT_e$  et  $(k+1)T_e$ .  $\phi_i(k)$  et  $\phi_{i+1}(k)$  sont respectivement les flux totaux de véhicules entrants et sortants de la cellule pendant le  $k^{me}$  intervalle de temps (c'est à dire pour  $kT_e \leq t < (k+1)T_e$ ) (exprimés en véhicule par heure : veh/h). Ces flux prennent en compte les flux entrant et sortant par les rampes d'accès et de sortie.  $k$  est l'indice de temps,  $T_e$  l'intervalle de temps discret (exprimé en heure : h), et  $l_i$  la longueur de la cellule (exprimé en kilomètre : km). Cette équation de conservation est une version discrétisée en temps et en espace de l'équation (2.1.1) du modèle LWR.

Une cellule est caractérisée par les paramètres suivants :

- $v_i$  la vitesse fluide (km/h)
- $w_i$  la vitesse de propagation amont des congestions (km/h)
- $\phi_{M_i}$  le flux maximal (veh/h)
- $\rho_{J_i}$  la densité maximale (veh/km)
- $l_i$  la longueur de la cellule (km)

La vitesse fluide  $v_i$  est la vitesse à laquelle les véhicules roulent lorsque la densité de véhicules est faible. Cette vitesse dépend notamment de la limitation de vitesse sur le tronçon considéré. La vitesse de propagation amont de congestion  $w_i$  est la vitesse à laquelle peut se propager vers l'amont les congestions dans les zones du tronçon d'auto-route à très forte densité.

Afin de conserver la consistance de la discrétisation, nous devons choisir  $T_e$  et  $l_i$  de manière à respecter la condition suivante :

$$T_e < \frac{l_i}{v_i} \quad (2.1.5)$$

Ainsi, une voiture à sa vitesse maximale (c'est à dire la vitesse fluide  $v_i$ ) ne peut pas parcourir pendant un intervalle de temps,  $T_e$ , un trajet supérieur à la longueur,  $l_i$ , de la cellule.

### File d'attente

Les files d'attente présentes en amont des rampes d'accès sont similaires aux cellules élémentaires. Une représentation schématique de la cellule et des différentes grandeurs associées est donnée sur la Figure 2.3.

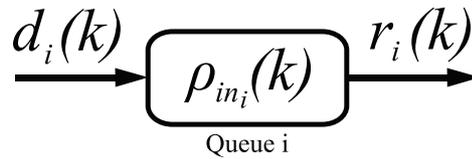


FIG. 2.3 – File d'attente.

La file d'attente est caractérisée par l'équation de conservation suivante :

$$\rho_{in_i}(k+1) = \rho_{in_i}(k) + \frac{T}{l_{in_i}}(d_i(k) - r_i(k)), \quad (2.1.6)$$

Nous considérons que tous les véhicules présents dans la file d'attente à l'instant  $k$  peuvent entrer sur le tronçon principal. Nous considérons donc que le temps de parcours dans la file d'attente est nul. Nous définissons  $\rho_{J_{in}}$  la capacité de stockage de la file d'attente ou la densité maximale de véhicules dans la file d'attente.

### 2.1.2 Calcul des flux : Jonctions

Dans cette sous-section, nous présentons les règles de calcul du flux dans les différentes jonctions. Les jonctions correspondent à l'interface entre les cellules élémentaires décrites dans la sous-section précédente.

Ces règles de calcul du flux sont une version simplifiée de la caractéristique flux/densité (équation (2.1.2)) du modèle LWR. Nous traitons le cas des jonctions simples, convergentes et divergentes.

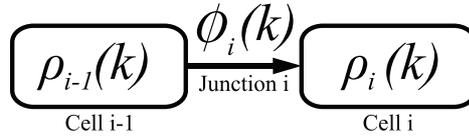


FIG. 2.4 – Jonction simple.

### Jonction simple

La jonction simple fait la connexion entre deux cellules simples, c'est à dire sans rampe de sortie sur la cellule amont, ni rampe d'accès sur la cellule aval. Une représentation schématique de la jonction simple et des différentes grandeurs associées est donnée sur la Figure 2.4, la cellule amont est indicée  $i - 1$  et la cellule aval  $i$ . Une étude détaillée des sections homogènes d'autoroute est faite dans [Daganzo, 2002a].

Afin de calculer le flux,  $\phi_i(k)$  dans une jonction, nous introduisons deux grandeurs.  $S_{\phi_{i-1}}(k)$  représente le flux que la cellule amont peut fournir à la jonction et  $R_{\phi_i}(k)$  représente le flux que la cellule aval peut recevoir de la jonction. Elles sont définies de la manière suivante :

$$S_{\phi_{i-1}}(k) = \min(v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k), \phi_{M_{i-1}}), \quad (2.1.7)$$

$$R_{\phi_i}(k) = \min(w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)), \phi_{M_i}). \quad (2.1.8)$$

où les paramètres  $v_{i-1}$ ,  $\phi_{M_{i-1}}$ ,  $w_i$ ,  $\rho_{J_i}$  et  $\phi_{M_i}$  sont les paramètres des cellules amont et aval définis dans la sous-section 2.1.1. Les grandeurs  $S_{\phi_{i-1}}(k)$  et  $R_{\phi_i}(k)$  sont représentées sur la Figure 2.5.

Le flux dans la jonction  $i$  à l'instant  $k$  est le minimum des deux grandeurs définies par les équations (2.1.7) et (2.1.8).

$$\phi_i(k) = \min(S_{\phi_{i-1}}(k), R_{\phi_i}(k)). \quad (2.1.9)$$

L'équation (2.1.9) est représentée graphiquement sur la Figure 2.6. Cette représentation graphique est appelée le diagramme fondamental. C'est une approximation affine par morceau du diagramme fondamental parabolique proposé dans [Greenshields, 1935]. Il représente un cas particulier des approximations proposées dans [Daganzo & Geroliminis, 2008]. Ce type de diagramme apparaît dans de nombreux problèmes de gestion du trafic [Geroliminis & Daganzo, 2008].

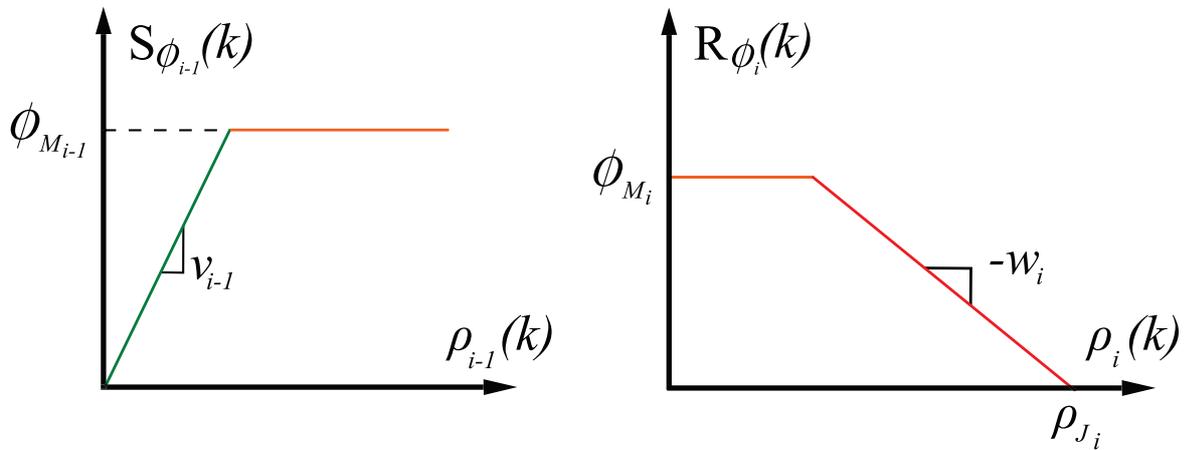


FIG. 2.5 – Flux pouvant être fourni par la cellule amont :  $S_{\phi_{i-1}}(k)$ , et reçu par la cellule aval :  $R_{\phi_i}(k)$ .

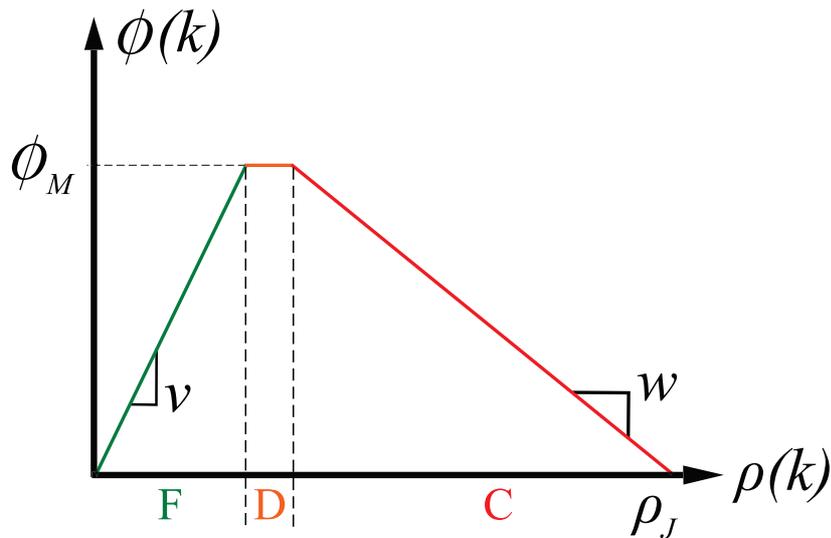


FIG. 2.6 – Diagramme fondamental.

Nous identifions sur ce diagramme les trois modes de fonctionnement des jonctions :

**Le mode fluide (F)** pour lequel le flux dans la jonction est proportionnel à la densité dans la cellule amont

$$\phi_i(k) = v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (2.1.10)$$

**Le mode découplé (D)** pour lequel le flux dans la jonction est égal au flux maximal

$$\phi_i(k) = \min(\phi_{M_{i-1}}, \phi_{M_i}). \quad (2.1.11)$$

**Le mode congestionné (C)** pour lequel le flux dans la jonction est proportionnel à la densité restante dans la cellule aval

$$\phi_i(k) = w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)). \quad (2.1.12)$$

Les modes possibles pour une jonction vont dépendre de la géométrie de la route. En effet, si les deux cellules adjacentes à la jonction ont des paramètres identiques nous ne serons jamais dans le mode découplé. Le mode découplé pourra apparaître si la géométrie de la route change, par exemple s'il y a un changement du nombre de voies, où une rampe d'accès sur la cellule aval.

### Jonction convergente

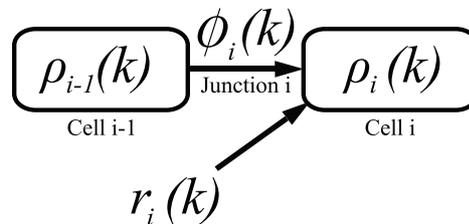


FIG. 2.7 – Jonction convergente.

La jonction convergente fait la connexion entre une cellule amont et une cellule aval comportant une rampe d'accès. Une représentation schématique de la jonction convergente et des différentes grandeurs associées est donnée sur la Figure 2.7.  $r_i$  est le flux entrant dans la cellule aval par la rampe d'accès. Une étude détaillée des différents phénomènes apparaissant aux jonctions convergentes est présentée dans [Daganzo, 2002b].

Un des phénomènes les plus importants à prendre en compte au niveau des rampes d'accès est la chute de capacité. Ce phénomène est étudié en détail dans [Treiber et al., 2006] et [Chung et al., 2007]. Lorsqu'une congestion se crée au voisinage d'une rampe d'accès, on observe une réduction de la capacité totale de la jonction c'est à dire

## Chapitre 2. Modélisation du trafic routier

---

une réduction du flux total pouvant traverser la jonction. Cette chute de capacité est reliée au flux dans la rampe d'accès, la chute de capacité est d'autant plus grande que le flux d'entrée est important. Pour modéliser ce phénomène, [Gomes & Horowitz, 2006] propose d'ajouter le paramètre  $\gamma_i$  appelé coefficient de convergence qui nous permet de pénaliser le flux entrant par la rampe d'accès en mode congestionné.

Dans le cas d'une jonction convergente, les grandeurs  $S_{\phi_{i-1}}(k)$  et  $R_{\phi_i}(k)$  sont définies de la manière suivante :

$$S_{\phi_{i-1}}(k) = \min(v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k), \phi_{M_{i-1}}), \quad (2.1.13)$$

$$R_{\phi_i}(k) = \min(w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k), \phi_{M_i}). \quad (2.1.14)$$

Comme précédemment, le flux dans la jonction  $i$  à l'instant  $k$  est défini par l'équation (2.1.9). Nous identifions trois modes de fonctionnement de la jonction :

- Le mode fluide (F) :  $\phi_i(k) = v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k)$ .
- Le mode découplé (D) :  $\phi_i(k) = \min(\phi_{M_{i-1}}, \phi_{M_i})$
- Le mode congestionné (C) :  $\phi_i(k) = w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k)$

### Jonction divergente

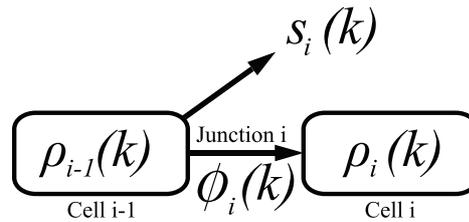


FIG. 2.8 – Jonction divergente.

La jonction divergente fait la connexion entre une cellule aval et une cellule amont comportant une rampe de sortie. Une représentation schématique de la jonction divergente et des différentes grandeurs associées est donnée sur la Figure 2.8.  $s_i$  est le flux sortant de la cellule amont par la rampe de sortie. Une étude des phénomènes de congestions pouvant apparaître aux rampes de sortie est donnée dans [Munoz & Daganzo, 2002]. Cette étude a été menée pour une configuration particulière de sortie couplée à un changement de géométrie de la route. Dans notre étude, nous considérons que la rampe de sortie peut accueillir la totalité du flux qui lui est destiné, c'est à dire

## Chapitre 2. Modélisation du trafic routier

---

qu'aucune congestion ne se propage du réseau extérieur vers le tronçon considéré via les rampes de sorties.

Il existe deux manières principales de traiter les rampes de sortie. La première solution est de considérer des matrices origines-destinations qui supposent une bonne connaissance du trajet des utilisateurs. De plus, il est montré dans [Erera et al., 1999] que la mise en oeuvre de cette solution pour le contrôle est difficile car elle nécessite la gestion de files d'attentes. La deuxième solution est de considérer un ratio de divergence  $\beta_i$ . Ce ratio représente la part du flux total sortant de la cellule amont et empruntant la rampe de sortie. Il est défini de la manière suivante :

$$s_i(k) = \beta_i(s_i(k) + \phi_i(k)). \quad (2.1.15)$$

Dans le cas d'une jonction divergente, les grandeurs  $S_{\phi_{i-1}}(k)$  et  $R_{\phi_i}(k)$  sont définies de la manière suivante :

$$S_{\phi_{i-1}}(k) = \min\left(\frac{1}{1-\beta_i}v_{i-1}\cdot\rho_{i-1}(k), \phi_{M_{i-1}}\right), \quad (2.1.16)$$

$$R_{\phi_i}(k) = \min(w_i\cdot(\rho_{J_i} - \rho_i(k)), \phi_{M_i}). \quad (2.1.17)$$

Comme précédemment, le flux dans la jonction  $i$  à l'instant  $k$  est défini par l'équation (2.1.9). Nous identifions trois modes de fonctionnement de la jonction :

- Le mode fluide (F) :  $\phi_i(k) = \frac{1}{1-\beta_i}v_{i-1}\cdot\rho_{i-1}(k)$ ,
- Le mode découplé (D) :  $\phi_i(k) = \min(\phi_{M_{i-1}}, \phi_{M_i})$ ,
- Le mode congestionné (C) :  $\phi_i(k) = w_i\cdot(\rho_{J_i} - \rho_i(k))$ .

Par la suite, nous associons le flux maximal à chaque jonction de la manière suivante  $\phi_{M_i} = \min(\phi_{M_{i-1}}, \phi_{M_i})$ .

Nous définissons la densité critique dans une cellule :

$$\rho_{c_i} = \frac{\phi_{M_{i+1}}}{v_i}. \quad (2.1.18)$$

Une des hypothèses définies dans [Daganzo, 1995b], est qu'il ne peut pas y avoir à la fois une rampe d'accès et une rampe de sortie sur la même jonction. Nous avons présenté les différents éléments constitutifs du CTM. A l'aide de ces différents éléments, nous sommes

en mesure de modéliser un tronçon autoroutier complet constitué de plusieurs cellules, rampes d'accès et rampes de sorties.

## 2.2 Modèle d'incertitudes

Nous présentons l'identification des paramètres du diagramme fondamental du CTM. Nous montrons que ce diagramme comporte des incertitudes et nous proposons un modèle d'incertitudes.

### 2.2.1 Identification du diagramme fondamental

Les différents paramètres permettant de construire le diagramme fondamental doivent être identifiés. Pour cela, nous devons, pour chaque cellule, identifier les paramètres suivants :

- $v_i$  la vitesse fluide (km/h)
- $w_i$  la vitesse de propagation amont des congestions (km/h)
- $\phi_{M_i}$  le flux maximal (veh/h)
- $\rho_{J_i}$  la densité maximale (veh/km)

Une méthode de calibration de ces différents paramètres est présentée dans [Munoz et al., 2004] et [Munoz et al., 2006]. La méthode de calibration est basée sur la méthode des moindres carrés. Nous avons appliqué cette méthode sur les données de terrain que nous possédons. Ces données sont décrites dans la section 2.4. Cette méthode nécessite d'avoir un nombre important de mesures notamment pour la partie congestionnée. La Figure 2.9 montre les résultats obtenus pour l'identification du diagramme fondamental de la configuration présenté dans la section 2.4.

Nous observons une dispersion des données de terrains autour du diagramme fondamental nominal obtenu par la méthode de calibration. Nous cherchons à modéliser cette dispersion en considérant des incertitudes paramétriques.

### 2.2.2 Incertitudes paramétriques

Les incertitudes paramétriques seront considérées sur les paramètres suivants :

- $v_i$  la vitesse fluide (km/h)
- $w_i$  la vitesse de propagation amont des congestions (km/h)
- $\phi_{M_i}$  le flux maximal (veh/h)

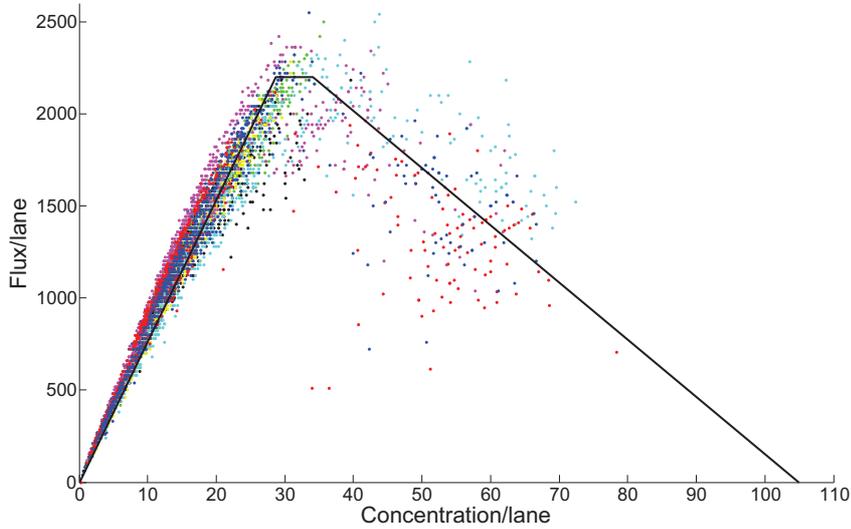


FIG. 2.9 – Identification du diagramme fondamental.

Nous n'ajoutons pas d'incertitudes sur le paramètre  $\rho_{J_i}$  car c'est une grandeur physique assez précise qui dépend peu du comportement des usagers de la route. Nous définissons les paramètres incertains de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_{i-1}(k) = v_{0_{i-1}} + \delta v_{i-1}(k), \\ \phi_{M_i}(k) = \phi_{M_{0_i}} + \delta \phi_{M_i}(k), \\ w_i(k) = w_{0_i} + \delta w_i(k), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Dans des conditions normales de trafic, ces incertitudes paramétriques peuvent être bornées en valeur absolue :

$$\begin{cases} |\delta v_{i-1}(k)| \leq \Delta v_{i-1}, \\ |\delta \phi_{M_i}(k)| \leq \Delta \phi_{M_i}, \\ |\delta w_i(k)| \leq \Delta w_i. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Les grandeurs  $\Delta v_{i-1}$ ,  $\Delta \phi_{M_i}$  et  $\Delta w_i$  peuvent être choisis en fonction de l'écart type obtenu pour les différents paramètres lors de la procédure de calibration. Le diagramme fondamental nominal représenté en Figure 2.6 est généralisé en tenant compte des incertitudes paramétriques définies par les équations (2.2.1) et (2.2.2). Ce diagramme fondamental incertain est représenté sur la figure 2.10.

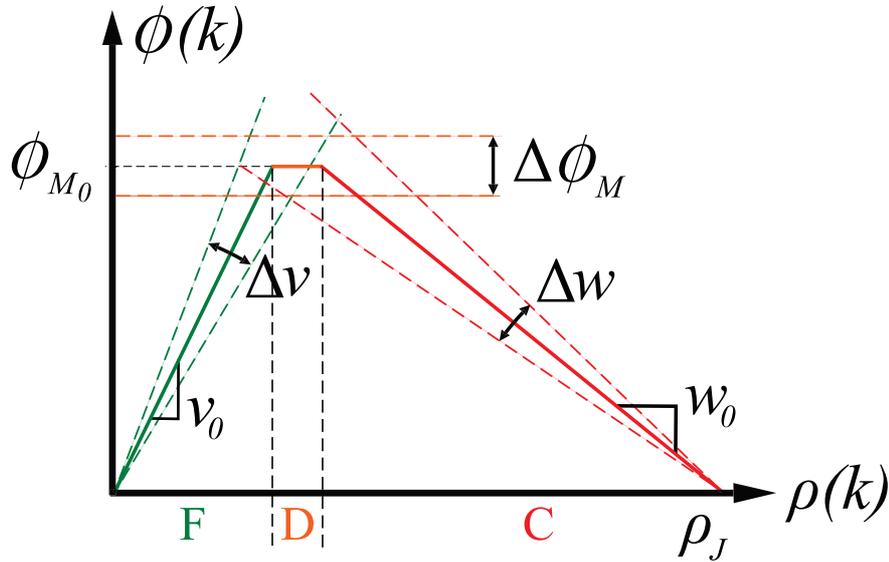


FIG. 2.10 – Diagramme fondamental incertain.

Nous constatons que ces incertitudes vont influencer sur le mode des jonctions. Ce phénomène sera pris en compte lors de la synthèse de commande.

## 2.3 Forme de représentation d'état générique

Nous avons décrit les différents éléments constitutif du CTM, et nous avons modélisé les incertitudes paramétriques. Dans cette section, nous modélisons un aménagement composé de plusieurs cellules, jonctions, rampes d'accès et de sorties. Nous considérons un tronçon sans rampe d'accès sur la première cellule et sans rampe de sortie sur la dernière cellule. Nous montrons que quelque soit le mode de fonctionnement le système peut s'écrire sous la forme d'une représentation d'état incertaine à commutation affine par morceau. Dans un premier temps, nous définissons  $\alpha(k)$  la variable de commutation qui représente le mode de fonctionnement du système. Pour un aménagement comportant  $N$  cellules donc  $N + 1$  jonctions, cette variable de commutation est définie de la manière suivante :

$$\alpha(k) := [\alpha_1(k), \dots, \alpha_{N+1}(k)] \quad (2.3.1)$$

où  $\alpha_i(k) \in \{F, D, C\}$  est le mode de fonctionnement de la jonction  $i$  défini dans la sous-section 2.1.2.

**Proposition 2.3.1.** *Pour tout mode  $\alpha(k)$ , les dynamiques d'un tronçon d'autoroute peuvent s'écrire comme une représentation d'état incertaine à commutation affine par morceau définie de la manière suivante :*

$$\rho(k+1) = A_{0_{\alpha(k)}} \cdot \rho(k) + B_{\alpha(k)} \cdot r(k) + E_{d_{\alpha(k)}} \cdot d(k) + a_{0_{\alpha(k)}} + \Theta \cdot d\phi_{\alpha(k)}(k) \quad (2.3.2)$$

où  $\rho(k) = [\rho_1(k), \dots, \rho_N(k)]^T$  est le vecteur d'état représentant la densité de véhicules dans chaque cellule.  $r(k) = [r_2(k), \dots, r_{N-1}(k)]^T$  sont les flux entrant sur le tronçon principal par les rampes d'accès ce vecteur contient autant d'éléments que de rampes d'accès.  $d(k) = [S_{\phi_0}(k), R_{\phi_{N+1}}(k)]^T$  sont les conditions aux limites.  $S_{\phi_0}(k)$  est le flux pouvant être fourni par le réseau amont (non modélisé) et  $R_{\phi_{N+1}}(k)$  est le flux pouvant être reçu par le réseau aval (non modélisé).  $a_{0_{\alpha(k)}}$  est un terme constant. Par ailleurs,  $d\phi_{\alpha(k)}(k) = [d\phi_{1_{\alpha(k)}}, \dots, d\phi_{N+1_{\alpha(k)}}(k)]$  sont les incertitudes sur les flux dans les jonctions dues aux paramètres incertains (2.2.1).  $A_{0_{\alpha(k)}}, B_{\alpha(k)}, E_{d_{\alpha(k)}}, \Theta$  sont des matrices connues de dimensions appropriées. Ces matrices sont définies dans la preuve.

**Proposition 2.3.2.** *Pour tout mode  $\alpha(k)$ , les dynamiques d'un tronçon d'autoroute peuvent s'écrire sous la forme suivante :*

$$\rho(k+1) = (A_{0_{\alpha(k)}} + F_{\alpha(k)}\Delta(k)G_{\alpha(k)}) \cdot \rho(k) + B_{\alpha(k)} \cdot r(k) + E_{\alpha(k)} \cdot w(k) + a_{0_{\alpha(k)}} \quad (2.3.3)$$

avec  $\Delta(k)^T \Delta(k) < 1$

où  $w(k)$  est un vecteur de perturbations externes contenant les conditions aux limites  $d(k)$  et certaines incertitudes additives (définies par la suite).  $\Delta(k)$  est un terme incertain. Les matrices  $E_{\alpha(k)}, F_{\alpha(k)}, G_{\alpha(k)}$  sont définies dans la preuve.

### Preuve 2.3.1 :

Pour établir la représentation d'état (2.3.2), nous effectuons dans un premier temps la mise sous forme matricielle de l'équation de conservation (2.1.4). Ainsi

$$\rho(k+1) = \rho(k) + \Theta \cdot \phi(k) + B \cdot r(k), \quad (2.3.4)$$

où  $\phi(k) = [\phi_1(k), \dots, \phi_{N+1}(k)]^T$  est le vecteur des flux dans chaque jonction, et

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{T}{l_1} & -(1 + \beta_2) \frac{T}{l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{T}{l_{N-1}} & -(1 + \beta_{N-1}) \frac{T}{l_{N-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{T}{l_N} & -\frac{T}{l_N} \end{pmatrix}, \quad (2.3.5)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \frac{T}{l_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{T}{l_{N-1}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

S'il n'y a pas de sortie sur la cellule  $i$  alors dans la matrice  $\Theta$ ,  $\beta_{i+1} = 0$ . Par ailleurs, certaines colonnes de la matrice  $B$  pourront être supprimées pour les cellules sans entrée. Nous constatons que l'équation de conservation (2.3.4) ne dépend pas de  $\alpha(k)$ .

Dans un second temps, nous écrivons, d'après les résultats de la sous-section 2.1.2, le vecteur  $\phi(k)$  sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \phi(k) &= A_{\phi_{\alpha(k)}}(k) \cdot \rho(k) + B_{\phi_{\alpha(k)}} \cdot r(k) + E_{\phi_{\alpha(k)}} \cdot d(k) + a_{\phi_{\alpha(k)}}(k), \\ \text{avec } a_{\phi_{\alpha(k)}}(k) &= a_{J_{\alpha(k)}}(k) \cdot \rho_J + a_{\phi_{M\alpha(k)}} \cdot \phi_M(k) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Laquelle peut s'écrire :

$$\phi(k) = A_{0\phi_{\alpha(k)}} \cdot \rho(k) + B_{\phi_{\alpha(k)}} \cdot r(k) + E_{\phi_{\alpha(k)}} \cdot d(k) + a_{0\phi_{\alpha(k)}} + d\phi_{\alpha(k)}(k), \quad (2.3.8)$$

où  $\rho_J := [\rho_{J_1}, \dots, \rho_{J_N}]^T$  est le vecteur des densités maximales dans chaque cellule,  $\phi_M(k) := [\phi_{M_1}(k), \dots, \phi_{M_{N+1}}(k)]^T$  est le vecteur des flux maximaux dans chaque jonction. Les matrices  $A_{\phi_{\alpha(k)}}(k)$ ,  $B_{\phi_{\alpha(k)}}$ ,  $E_{\phi_{\alpha(k)}}$ ,  $a_{J_{\alpha(k)}}(k)$ ,  $a_{\phi_{M\alpha(k)}}$  sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{\phi_{\alpha(k)}}(k) &= \begin{pmatrix} -w_1(k)e_{C_1}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1-\beta_2}v_1(k)e_{F_2}(k) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -w_{N-1}(k)e_{C_{N-1}}(k) & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{1-\beta_N}v_{N-1}(k)e_{F_N}(k) & -w_N(k)e_{C_N}(k) \\ 0 & \cdots & 0 & v_N(k)e_{F_{N+1}}(k) \end{pmatrix}, \\ B_{\phi_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_2e_{C_2}(k) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\gamma_{N-1}e_{C_{N-1}}(k) \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\phi_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} e_{F_1}(k) & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & 0 \\ 0 & e_{C_{N+1}}(k) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$a_{J_{\alpha}(k)} = \begin{pmatrix} e_{C_1}(k)w_1(k) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_{C_N}(k)w_N(k) \end{pmatrix},$$

$$a_{\phi_{M\alpha}(k)} = \begin{pmatrix} e_{D_1}(k) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e_{D_{N+1}}(k) \end{pmatrix},$$

avec,

$$e_{F_i}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si la jonction } i \text{ est en mode fluide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$e_{D_i}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si la jonction } i \text{ est en mode découplé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.10)$$

$$e_{C_i}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si la jonction } i \text{ est en mode congestionné} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Comme précédemment, s'il n'y a pas de sortie sur la cellule  $i$  alors dans la matrice  $A_{\phi_{\alpha}(k)}$ ,  $\beta_{i+1} = 0$ .

Nous avons défini tous les termes de l'équation (2.3.7). On peut noter que la matrice  $A_{\phi_{\alpha}(k)}$  et le vecteur  $a_{\phi_{\alpha}(k)}$  contiennent des paramètres incertains.

En prenant

$$A_{0\phi_{\alpha}(k)} = A_{\phi_{\alpha}(k)}|_{v_i(k)=v_{0_i}, w_i(k)=w_{0_i}}, \quad (2.3.12)$$

$$a_{0\phi_{\alpha}(k)} = a_{\phi_{\alpha}(k)}|_{w_i(k)=w_{0_i}, \phi_{M_i}(k)=\phi_{M_{0_i}}} \quad (2.3.13)$$

et

$$d\phi_{\alpha}(k) = \begin{pmatrix} -\delta w_1(k)e_{C_1}(k)\rho_1(k) + e_{D_1}(k)\delta\phi_{M_1}(k) \\ \frac{1}{1-\beta_2}\delta v_1(k)e_{F_2}(k)\rho_1(k) + e_{D_2}(k)\delta\phi_{M_2}(k) - \delta w_2(k)e_{C_2}(k)\rho_2(k) \\ \vdots \\ \frac{1}{1-\beta_N}\delta v_{N-1}(k)e_{F_N}(k)\rho_{N-1}(k) + e_{D_N}(k)\delta\phi_{M_N}(k) - \delta w_N(k)e_{C_N}(k)\rho_N(k) \\ \delta v_N(k)e_{F_N}(k)\rho_N(k) + e_{D_{N+1}}(k)\delta\phi_{M_{N+1}}(k) \end{pmatrix}, \quad (2.3.14)$$

nous obtenons l'équation (2.3.8).

D'après les équations (2.3.4) et (2.3.8), nous obtenons la représentation d'état

(2.3.2), où :

$$A_{0_{\alpha(k)}} = I + \Theta \cdot A_{0_{\phi_{\alpha(k)}}}(k), \quad (2.3.15)$$

$$B_{\alpha(k)} = B + \Theta \cdot B_{\phi_{\alpha(k)}}, \quad (2.3.16)$$

$$E_{d_{\alpha(k)}} = \Theta \cdot E_{\phi_{\alpha(k)}}, \quad (2.3.17)$$

$$a_{0_{\alpha(k)}} = \Theta \cdot a_{0_{\phi_{\alpha(k)}}}. \quad (2.3.18)$$

□

**Preuve 2.3.2 :**

Afin d'établir la représentation (2.3.3), nous décomposons les incertitudes en un terme d'incertitudes multiplicatives et un terme de perturbations additives :

$$\Theta d_{\phi_{\alpha(k)}}(k) = F_{\alpha(k)} \Delta(k) G \cdot \rho(k) + E_{w_{\alpha(k)}} \cdot w_{\Delta}(k) \quad (2.3.19)$$

avec,

$$F_{\alpha(k)} = \Theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & e_{C_1}(k) & & 0 \\ e_{F_2}(k) & & 0 & & \ddots & \\ & \ddots & & 0 & & e_{C_N}(k) \\ 0 & & e_{F_{N+1}}(k) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.20)$$

$$G = \begin{pmatrix} \Delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & \Delta v_N & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \Delta w_1 & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta w_N \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} \frac{\delta v_1(k)}{\Delta v_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & \frac{\delta v_N(k)}{\Delta v_N} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \frac{\delta w_1(k)}{\Delta w_1} & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\delta w_N(k)}{\Delta w_N} \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

$$E_{w_{\alpha}(k)} = \Theta \begin{pmatrix} e_{C_1}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & e_{C_{N+1}}(k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e_{D_1}(k) & \\ 0 & \dots & & 0 & e_{D_N}(k) \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

$$w_{\Delta}(k) = \begin{pmatrix} \delta w_1(k) \cdot \rho_{J_1} \\ \vdots \\ \delta w_N(k) \cdot \rho_{J_N} \\ \delta \phi_{M_1} \\ \vdots \\ \delta \phi_{M_{N+1}} \end{pmatrix}. \quad (2.3.24)$$

Ainsi d'après les équations (2.3.19), (2.3.8) et (2.3.2), nous obtenons la représentation d'état (2.3.3) avec

$$E_{\alpha}(k) = \begin{pmatrix} E_{d_{\alpha}(k)} & E_{w_{\alpha}(k)} \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

$$w(k) = \begin{pmatrix} d(k) \\ w_{\Delta}(k) \end{pmatrix} \quad (2.3.26)$$

□

En conclusion, nous obtenons à partir du modèle CTM et de la modélisation des incertitudes les formes génériques des représentations d'état (2.3.2) et (2.3.3), lesquelles sont valides quelque soit le mode de fonctionnement.

## 2.4 Validation du modèle

Dans cette section, nous validons le modèle proposé. Dans un premier temps, nous présentons les données dont nous disposons, nous identifions les paramètres des cellules, nous définissons les incertitudes, ainsi que les coefficients de divergences et de convergences. Enfin, nous confrontons le modèle avec les données de terrain.

### 2.4.1 Cas d'étude

Pour nos simulations, nous disposons de données de terrain collectées par la DDE69 (Direction Départementale de l'Équipement du Rhone). Ces données ont été mesurées sur la route D383 (Départementale 383) qui se situe à l'est de Lyon en France. Nous

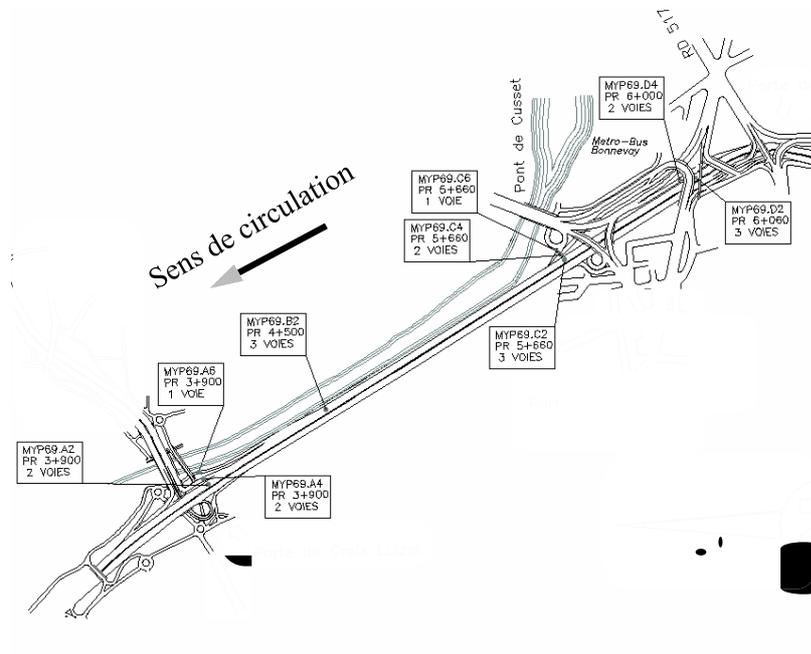


FIG. 2.11 – Cas d'étude, D383

avons isolé un secteur de cette route où les informations mesurées étaient complètes, c'est à dire que nous disposons de la mesure des flux entrants et sortants par toutes les voies d'accès et de sorties de ce secteur. Le secteur utilisé est représenté en Figure 2.11. Cette section est équipée de 8 capteurs mesurant le flux et/ou la densité.

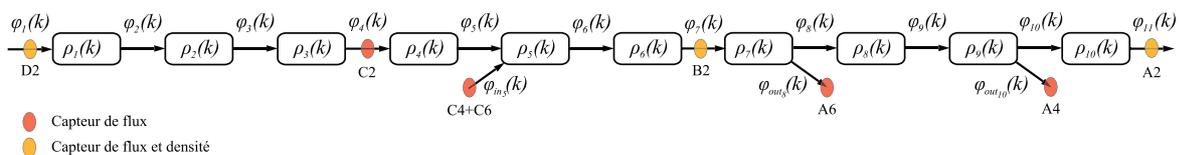


FIG. 2.12 – Découpage spatial du cas d'étude, D383

Le découpage effectué afin de modéliser ce secteur grâce au CTM est représenté en Figure 2.12. Le modèle ainsi obtenu comporte 10 cellules élémentaires, une jonction convergente et 2 jonctions divergentes, le reste des jonctions étant des jonctions simples. Les conditions aux limites sont imposées par les données collectées par le capteur D2, lequel mesure le flux entrant du tronçon principal, et par les données collectées par les capteurs C4 et C6, lesquelles mesurent les flux entrant de la voie d'accès associée à la jonction 5.

## 2.4.2 Identification des paramètres

### Paramètres du diagramme fondamental

Une méthode de calibration de ces différents paramètres du diagramme fondamental est présentée dans [Munoz et al., 2004] et [Munoz et al., 2006]. Le résultat de cette identification est présenté en Figure 2.9. Pour notre cas d'étude présenté sur la Figure 2.12, les paramètres nominaux sont définis dans le tableau 2.1.

Cellule	$l$ (km)	$v_0$ (km/h)	$w_0$ (km/h)	$\phi_{M_0}$ (veh/h)	$\rho_J$ veh/km)
1	0,2	76	35	7050	300
2	0,2	76	35	7050	300
3	0,2	76	35	7050	300
4	0,3	76	35	7050	300
5	0,3	76	35	7050	300
6	0,32	80	35	7050	300
7	0,32	80	35	7050	300
8	0,2	80	35	7050	300
9	0,2	80	35	7050	300
10	0,2	80	35	4700	200

TAB. 2.1 – Liste des paramètres de l'aménagement D383

### Incertitudes sur les paramètres nominaux

Nous proposons dans la section 2.2 une modélisation incertaine du diagramme fondamental. Au vu des données de terrains que nous possédons, nous définissons les incertitudes suivantes :

- $\Delta v_i = 5\%v_i$  incertitude sur la vitesse fluide (km/h)
- $\Delta w_i = 15\%w_i$  incertitude sur la vitesse de propagation amont des congestions (km/h)
- $\Delta \phi_{M_i} = 8\%\phi_{M_i}$  incertitude sur le flux maximal (veh/h)

La Figure 2.13 présente une analyse fréquentielle de l'incertitude  $\delta v(k)$ . Nous voyons que cette incertitude est située en basse fréquence. Nous générons de manière aléatoire des signaux nous permettant de simuler l'évolution lente des paramètres incertains  $v(k)$  (Figure 2.14),  $w(k)$  (Figure 2.15) et  $\phi_M(k)$  (Figure 2.16), le flux maximal est représenté par voies de circulation.

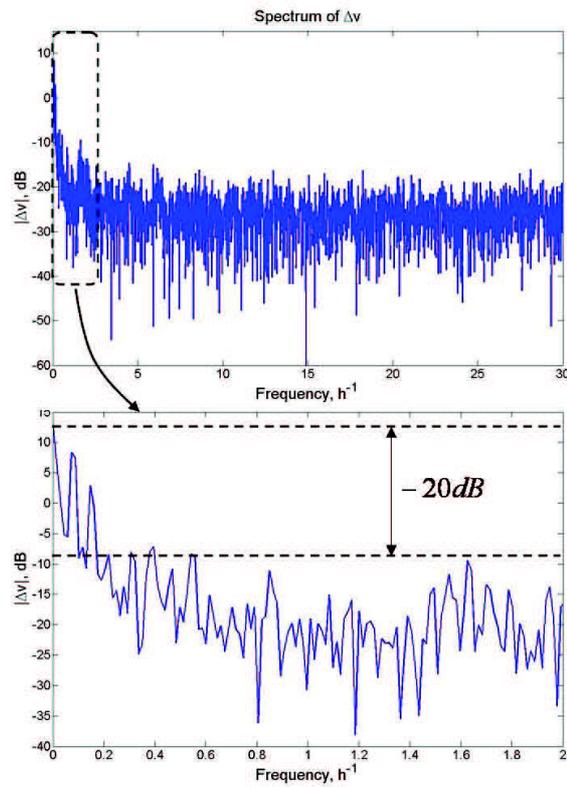


FIG. 2.13 –

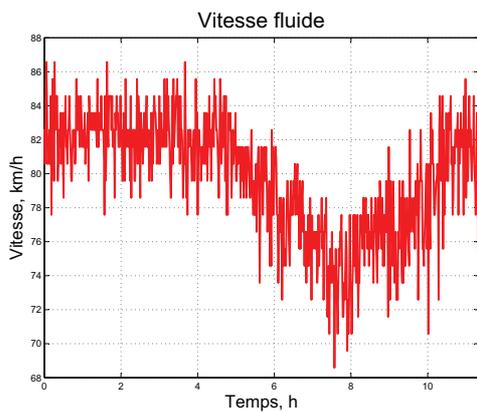


FIG. 2.14 – Paramètre incertain  $v(k)$

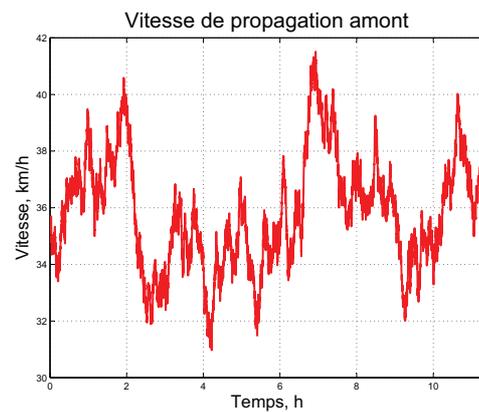


FIG. 2.15 – Paramètre incertain  $w(k)$

### Coefficients de divergence et de convergence

L'aménagement que nous modélisons comporte 2 rampes de sortie et une rampe d'accès. Nous avons donc deux jonctions divergentes et une jonction convergente. Nous avons vu dans la sous-section 2.1.2 que les jonctions divergentes sont caractérisées

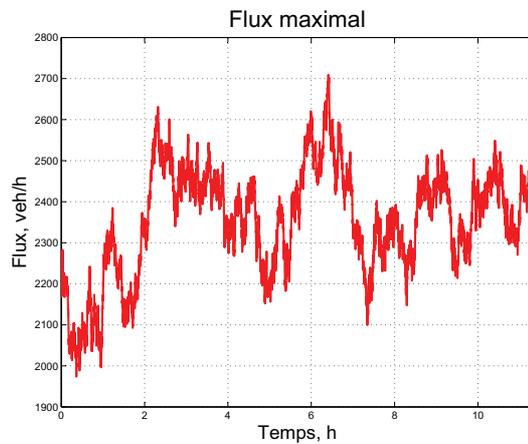


FIG. 2.16 – Paramètre incertain  $\phi_M(k)$ , par voie de circulation

par un coefficient de divergence. A partir des données de terrain dont nous disposons, nous pouvons calculer les coefficients de divergence. Ces coefficients de divergence sont représentés sur les figures 2.17 et 2.18 respectivement pour les jonctions 8 et 10.

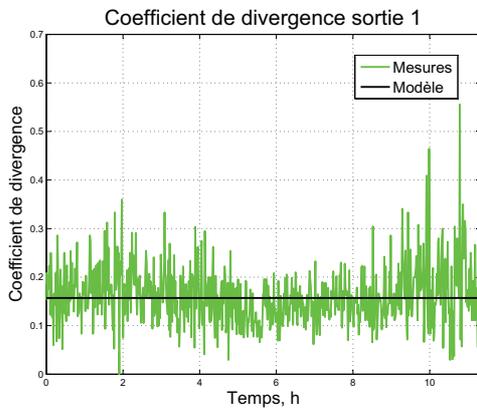


FIG. 2.17 – Coefficient de divergence sortie 1  $\beta = 0.157$

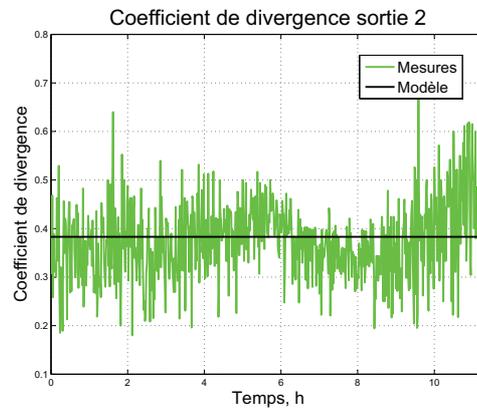


FIG. 2.18 – Coefficient de divergence sortie 2  $\beta = 0.383$

Nous avons choisi de modéliser les jonctions divergentes avec des coefficients de divergence constants. Cependant, pour les simulations, nous utiliserons les vrais profils de coefficients de divergence.

Les données dont nous disposons ne nous permettent pas d'obtenir une estimation fiable du coefficient de convergence. Cependant, des études statistiques menées au voisinage des voies d'accès dans [Treiber et al., 2006] et [Chung et al., 2007] nous

montre que le phénomène de chute de capacité peut être quantifié. Il est montré dans ces articles que la chute de capacité est d'environ 10% du flux entrant. Nous considérons donc un coefficient de convergence  $\gamma = 1.1$ .

### 2.4.3 Simulations

Les conditions aux limites sont imposées en entrée du tronçon principal et en entrée de la voie d'accès. Dans ce scénario, la dernière jonction (jonction 11) est toujours en mode fluide, nous n'avons donc pas besoin d'imposer de condition aux limites à la sortie du tronçon principal. Le flux entrant dans le tronçon principal est imposé par le flux mesuré par le capteur D2. Le flux en entrée de la voie d'accès est imposé par le flux mesuré par les capteurs C4 et C6.

Les figures 2.19 et 2.20 représentent l'évolution de la densité dans les différentes

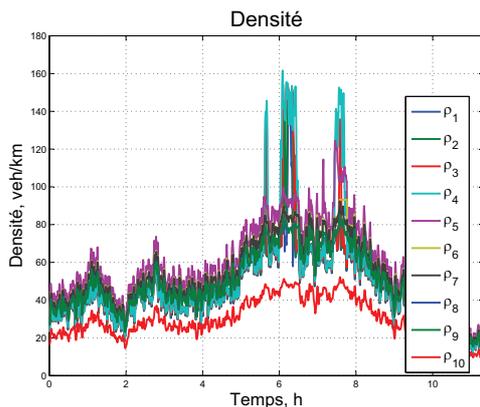


FIG. 2.19 – Densité dans les cellules

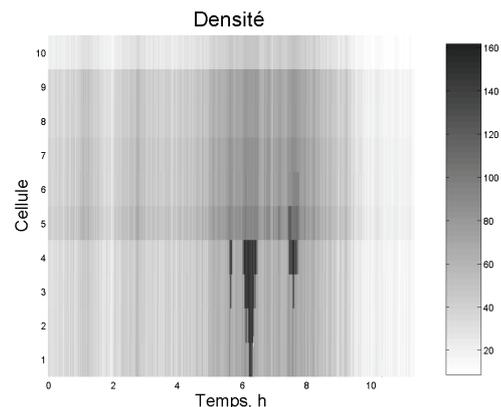


FIG. 2.20 – Densité dans les cellules

cellules de l'aménagement. Nous voyons l'apparition de 3 congestions. Une congestion de faible importance aux alentours de  $t = 5.5h$ , une seconde plus importante aux alentours de  $t = 6h$  puis une dernière de faible importance aux alentours de  $t = 7.5h$ . L'apparition de congestions va dépendre des paramètres incertains (figures 2.14,2.15,2.16). Nous voyons apparaître ici le caractère aléatoire de la création d'une congestion. En effet, lorsque les conditions d'apparition d'une congestion sont réunies, nous ne pouvons pas prédire le moment exact de l'apparition de la congestion. Ce phénomène est bien modélisé par le modèle proposé.

Nous effectuons maintenant une comparaison entre les densités et flux mesurés par les capteurs et les densités et flux prédits par notre modèle. La Figure 2.21, représente le flux mesuré par le capteur C2. Les figures 2.22 et 2.23 représentent respectivement le flux et la densité du capteur B2. Les figures 2.24 et 2.25 représentent

## Chapitre 2. Modélisation du trafic routier

---

respectivement le flux et la densité du capteur B2. Les figures 2.26 et 2.27 représentent les flux de sortie pour les rampes de sorties 1 et 2. Nous voyons que le modèle est fidèle aux mesures disponibles. La différence entre les flux de sortie mesurés et simulés (figures 2.26 et 2.27) viennent du fait que les coefficients de divergences sont considérés constants. Néanmoins, la précision de ces flux est satisfaisante.

Ce modèle pourra donc être utilisé pour développer des lois de commande. La modélisation des incertitudes nous permettra de proposer des synthèses robustes aux incertitudes paramétriques.

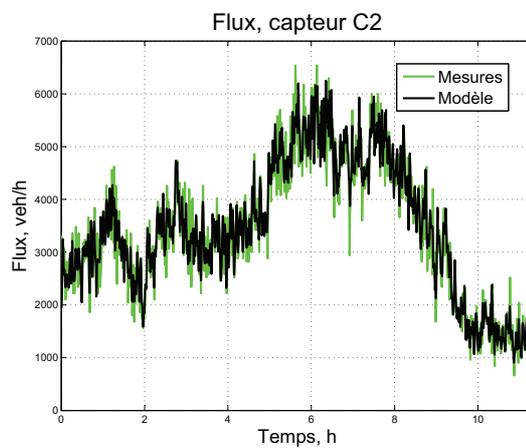


FIG. 2.21 – Comparaison mesures modèle, flux capteur C2

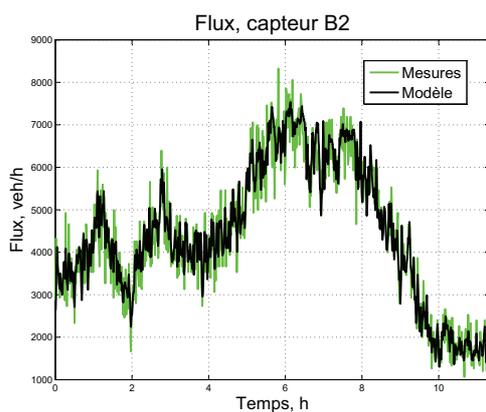


FIG. 2.22 – Comparaison mesures modèle, flux capteur B2

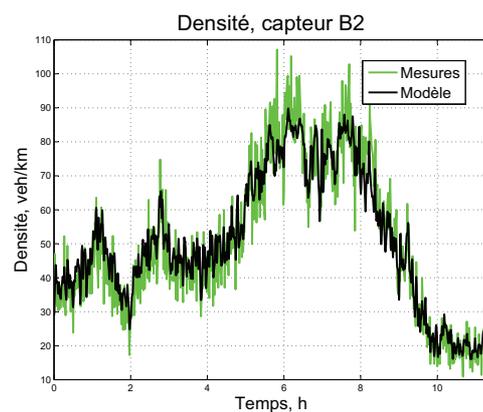


FIG. 2.23 – Comparaison mesures modèle, densité capteur B2

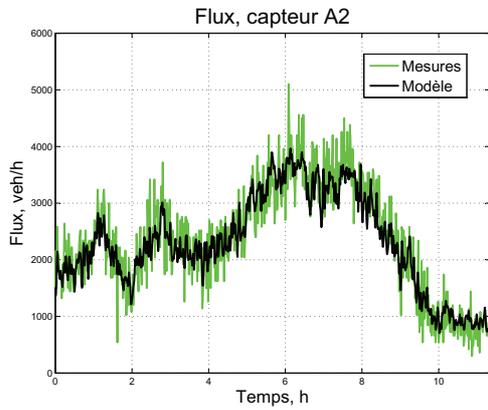


FIG. 2.24 – Comparaison mesures modèle, flux capteur A2

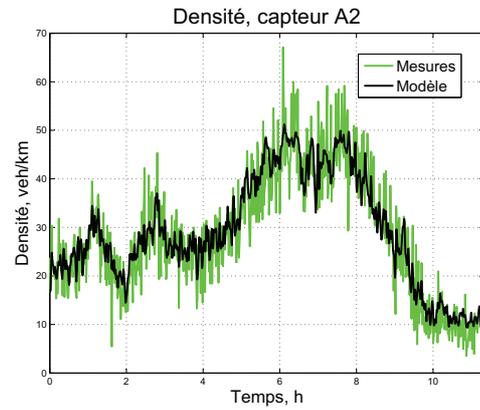


FIG. 2.25 – Comparaison mesures modèle, densité capteur A2

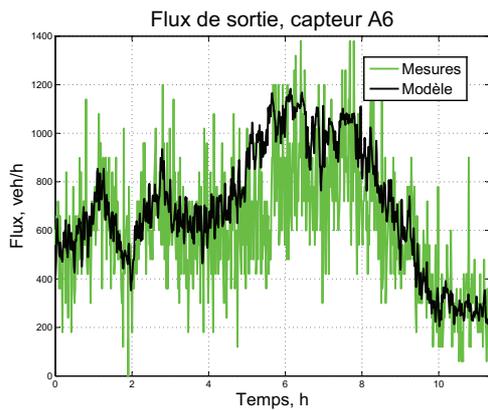


FIG. 2.26 – Comparaison mesures modèle, flux capteur A6

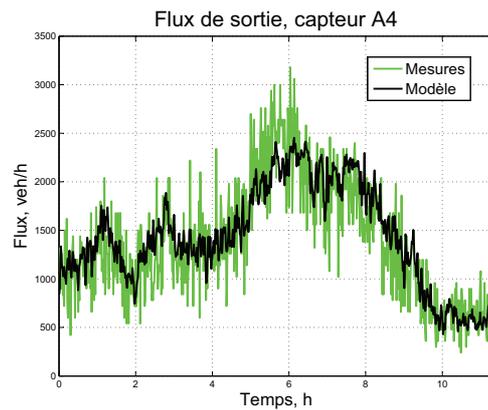


FIG. 2.27 – Comparaison mesures modèle, flux capteur A4

## 2.5 Voisinage d'une rampe d'accès

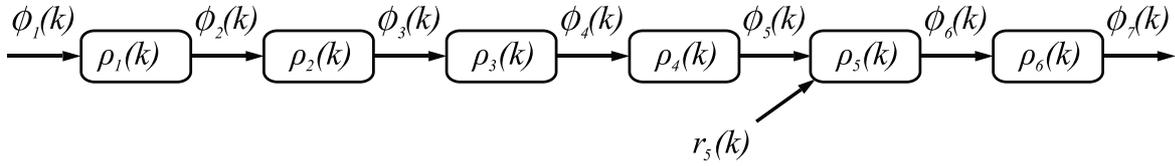


FIG. 2.28 – Voisinage d'une rampe d'accès.

Nous nous intéressons à la gestion locale du trafic. Nous travaillons donc au voisinage des rampes d'accès comme représenté sur la Figure 2.28. Dans cette section nous décrivons le phénomène de naissance et de disparition d'une congestion. Cette étude nous permet de définir les modes de fonctionnement possibles et les transitions entre ces modes. Nous étudions les propriétés de commandabilité et d'observabilité en présence ou non de congestion.

### 2.5.1 Création et dissipation d'une congestion

Les congestions naissent aux goulets d'étranglement de la route. Dans la configuration présentée sur la Figure 2.28, ce goulet se trouve sur la cellule numéro 5. En effet, cette cellule comporte une rampe d'accès, et donc la convergence du flux du tronçon principal et de la rampe d'accès crée un étranglement. La naissance de la congestion va donc se faire dans la cellule numéro 5. Dans le premier mode que nous considérons, l'ensemble des jonctions est en mode fluide. Le mode de fonctionnement global du système dans des conditions fluides de trafic est de la forme suivante :

$$\alpha_1 = [FFFFFFF]. \quad (2.5.1)$$

Les modes de fonctionnement sont décrits avec le formalisme introduit en (2.3.1). Avant l'apparition de la congestion, la densité de véhicules dans la cellule numéro 5 va augmenter. Ainsi la jonction numéro 6, située après la cellule comportant la rampe d'accès va passer en mode découplé et nous aurons le mode de fonctionnement global suivant :

$$\alpha_2 = [FFFFFFDF]. \quad (2.5.2)$$

Dans l'hypothèse où la densité de véhicules dans la cellule numéro 5 continue d'augmenter, nous aurons naissance d'une congestion. Dans ce cas, la jonction numéro 6, située au niveau de la rampe d'accès va passer en mode congestionné. Ainsi le mode de fonctionnement global devient :

$$\alpha_3 = [FFFFCDF]. \quad (2.5.3)$$

Si la congestion continue à se propager, nous passons successivement dans les modes de fonctionnement suivants

$$\alpha_4 = [FFCCDF], \quad (2.5.4)$$

$$\alpha_5 = [FCCCCDF], \quad (2.5.5)$$

$$\alpha_6 = [FCCCCDF]. \quad (2.5.6)$$

La disparition de la congestion se fera en sens inverse, le système commutera du mode 6 au mode 1 en passant par tous les modes intermédiaires.

Nous pouvons classer les jonctions en deux ensembles. Nous notons  $\mathfrak{J}_{FC}$  l'ensemble des jonctions pouvant être en mode congestionné ou fluide et  $\mathfrak{J}_{FD}$  l'ensemble des jonctions pouvant être en mode fluide ou découplé.

Pour la configuration représentée en Figure 2.28,

$$\mathfrak{J}_{FC} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \quad (2.5.7)$$

$$\mathfrak{J}_{FD} = \{6\}. \quad (2.5.8)$$

Nous notons  $\Omega$  l'ensemble des modes de fonctionnement du système considéré. Ici

$$\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}. \quad (2.5.9)$$

Nous notons  $\Upsilon$  l'ensemble des transitions possibles entre les modes. Ici

$$\Upsilon = \{\tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \tau_{2,1}, \tau_{2,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,2}, \tau_{3,3}, \tau_{3,4}, \tau_{4,3}, \tau_{4,4}, \tau_{4,5}, \tau_{5,4}, \tau_{5,5}, \tau_{5,6}, \tau_{6,5}, \tau_{6,6}\}. \quad (2.5.10)$$

où  $\tau_{n,m}$  correspond à la transition du mode  $\alpha_n$  vers le mode  $\alpha_m$ .

Ces modes et transitions sont représentés sous la forme d'un automate d'états en Figure 2.29.

### 2.5.2 Propriétés de commandabilité et d'observabilité

Dans cette sous-section, nous étudions les propriétés de commandabilité et d'observabilité au voisinage de la rampe d'accès décrite en figure 2.28. Ces résultats seront

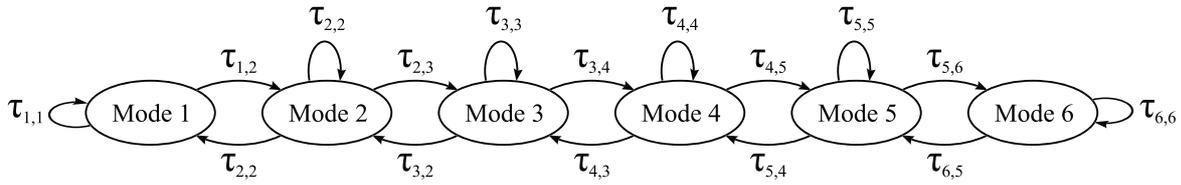


FIG. 2.29 – Modes et transitions.

donnés en utilisant les critères de commandabilité et d’observabilité de Kalman. Pour cela, nous nous intéressons aux sens de propagation des informations des différents modes de fonctionnement globaux décrits dans la sous-section 2.5.1. De la sous-section 2.1.2, nous pouvons déduire que, dans une jonction, il y a propagation de la cellule amont vers la cellule aval dans le mode fluide, de la cellule aval vers la cellule amont en mode congestionné, et il n’y a pas de propagation en mode découplé. Les figures 2.30 à 2.35 représente ces sens de propagation pour les modes 1 à 6. Nous représentons les sens de propagation lesquels ne correspondent pas forcément au sens de circulation des véhicules.

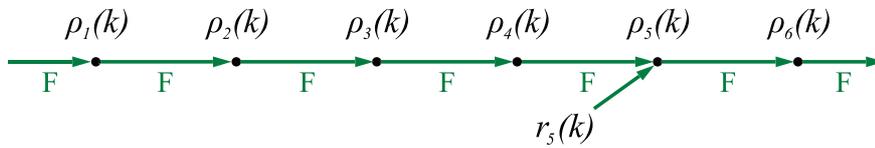


FIG. 2.30 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_1$ .

La Figure 2.30 représente les sens de propagation pour le mode  $\alpha_1$ , défini par (2.5.1). Dans ce mode, nous pourrons, par l’intermédiaire de  $r_5$ , commander la densité de véhicules dans les cellules 5 et 6 (respectivement  $\rho_5(k)$  et  $\rho_6(k)$ ). Nous aurons la complète observabilité de notre système en mesurant la densité dans la cellule 6 ( $\rho_6(k)$ ).

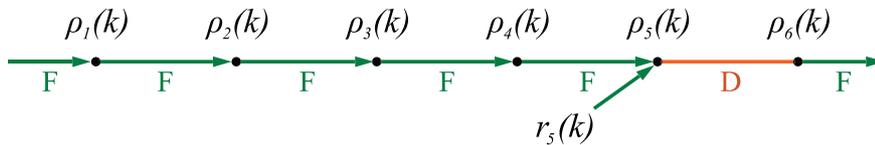


FIG. 2.31 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_2$ .

La Figure 2.31 représente les sens de propagation pour le mode  $\alpha_2$ , défini par (2.5.2). Dans ce mode, nous pourrons, par l’intermédiaire de  $r_5$ , commander la densité de véhicules dans la cellule 5 ( $\rho_5(k)$ ). Nous aurons la complète observabilité de notre

## Chapitre 2. Modélisation du trafic routier

---

système en mesurant la densité dans les cellules 5 et 6 (respectivement  $\rho_5(k)$  et  $\rho_6(k)$ ).

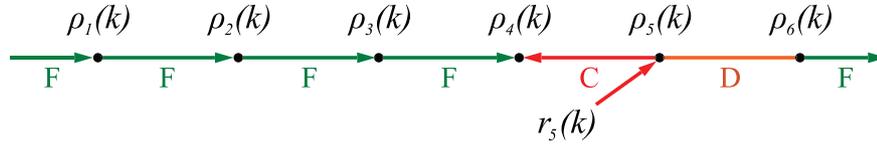


FIG. 2.32 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_3$ .

La Figure 2.32 représente les sens de propagation pour le mode  $\alpha_3$ , défini par l'équation (2.5.3). Dans ce mode, nous pourrions, par l'intermédiaire de  $r_5$ , commander la densité de véhicules dans les cellules 4 et 5 (respectivement  $\rho_4(k)$  et  $\rho_5(k)$ ). Nous aurons la complète observabilité du système en mesurant la densité dans les cellules 4 et 6 (respectivement  $\rho_4(k)$  et  $\rho_6(k)$ ).

De la même manière, nous définissons les figures 2.33, 2.34 et 2.35 correspondant respectivement aux modes  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$  et  $\alpha_6$ .

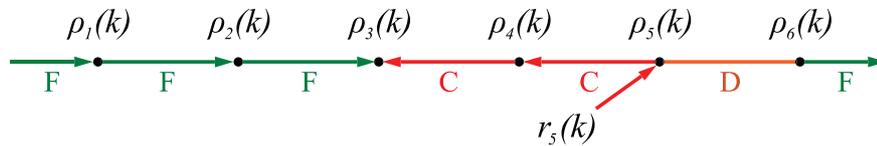


FIG. 2.33 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_4$ .

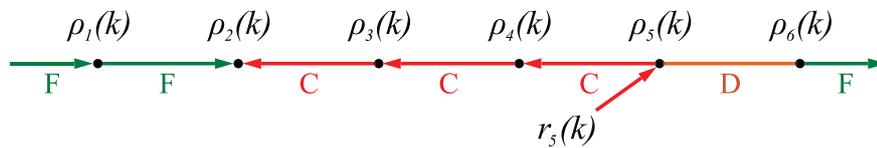


FIG. 2.34 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_5$ .

En conclusion, nous pouvons dire que si toutes les jonctions sont en mode fluide, nous pourrions, par l'action sur le flux d'entrée, commander la densité des cellules situées en aval de la rampe d'accès jusqu'à un éventuel front de congestion situé en aval. Si la jonction située en aval de la rampe d'accès passe en mode découplé, nous pourrions commander la cellule sur laquelle se trouve la rampe d'accès. Si une congestion se crée, nous pourrions commander les cellules en amont de la rampe d'accès jusqu'à la cellule où

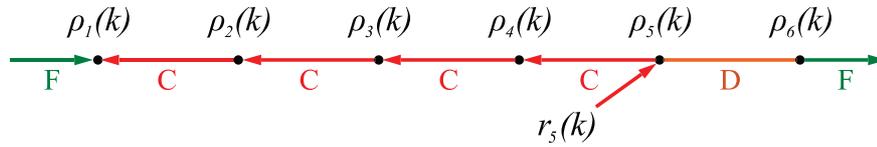


FIG. 2.35 – Sens de propagation,  $\alpha(k) = \alpha_6$ .

se trouve le front de congestion. Pour avoir la complète observabilité du système, nous devons mesurer la densité de la cellule dans laquelle se trouve le front de congestion.

## 2.6 Résumé des contributions

Les contributions majeures apportées dans ce chapitre sont la modélisation des incertitudes sous forme d'incertitudes paramétriques et l'élaboration d'une représentation d'état incertaine générique. La modélisation des incertitudes nous permet de développer des commandes robustes. La mise sous forme d'une représentation d'état généralisée nous permet de construire automatiquement les matrices caractéristiques du système dans les différents modes de fonctionnement. Ces travaux font l'objet d'une publication dans la conférence suivante :

Antoine Lemarchand, John J. Martinez, Damien Koenig, "Hierarchical Coordinated Freeway On-Ramp Metering Using Switching System Theory", 4<sup>th</sup> IFAC Symposium on Structured System, Septembre 2010, Ancona, Italie.



# Chapitre 3

## Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'estimation dynamique du mode de fonctionnement,  $\alpha(k)$  du système, et de détection et de localisation des fautes sur les flux  $d\phi_{\alpha(k)}(k)$  définies dans le système (2.3.2).

La majorité des méthodes d'estimation et de détection de fautes est basée sur des filtres de Kalman [Work et al., 2005; Sun et al., 2003]. Notre méthode est basée sur la génération de deux résidus pour chaque jonction. La connaissance de ces deux résidus associée à une logique de décision nous permet d'estimer le mode de fonctionnement de l'aménagement. Les estimateurs permettant de générer ces résidus sont déterminés par la résolution d'un problème  $H_\infty$  standard [Sadmia et al., 1996]

Ce schéma d'estimation dynamique du mode de fonctionnement nous permet de détecter certaines fautes dans le système. Les fautes que nous sommes en mesure d'estimer sont représentées par le terme  $d\phi_{\alpha(k)}(k)$  du système (2.3.2).

### Plan du chapitre

Ce chapitre est divisé de la manière suivante. Dans la section 3.1, nous présentons une méthode permettant d'estimer le mode de fonctionnement du système. Dans la section 3.2, nous montrons que les résultats de la section précédente nous permettent d'estimer des fautes additives sur les flux des jonctions. Dans la section 3.3, nous proposons une synthèse d'estimateurs permettant de générer les résidus nécessaires à la mise en place de l'estimation de mode et de fautes. Dans section 3.4 nous validons l'approche proposée

## Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

sur des données de terrain. Enfin, la section 3.5 synthétise les principales contributions à l'estimation dynamique du mode de fonctionnement et à l'estimation de fautes.

### Sommaire

---

Plan du chapitre . . . . .	59
<b>3.1 Principe d'estimation du mode de fonctionnement . . . . .</b>	<b>60</b>
3.1.1 Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$	61
Résidu en mode fluide . . . . .	61
Résidu en mode congestionné . . . . .	63
Logique de decision . . . . .	64
3.1.2 Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FD}$	64
Résidu en mode découplé . . . . .	65
Logique de décision . . . . .	66
3.1.3 Estimation du mode de fonctionnement global . . . . .	66
<b>3.2 Application à l'estimation des fautes . . . . .</b>	<b>67</b>
3.2.1 Types de fautes identifiables . . . . .	67
3.2.2 Estimation des fautes . . . . .	69
<b>3.3 Génération robuste des résidus . . . . .</b>	<b>70</b>
3.3.1 Transformation du problème d'estimation en un problème $H_\infty$ standard . . . . .	70
3.3.2 Génération des résidus en mode fluide . . . . .	73
3.3.3 Génération des résidus en mode congestionné ou découplé . . . . .	74
3.3.4 Analyse de sensibilité . . . . .	75
Remarques : . . . . .	76
<b>3.4 Validation . . . . .</b>	<b>79</b>
3.4.1 Estimation du mode fonctionnement . . . . .	79
3.4.2 Estimation des fautes . . . . .	81
<b>3.5 Résumé des contributions . . . . .</b>	<b>87</b>

---

## 3.1 Principe d'estimation du mode de fonctionnement

Nous nous intéressons ici à l'estimation du mode de fonctionnement du système. Dans un premier temps, nous nous intéressons au mode de fonctionnement de chaque jonction. Puis nous construisons un estimateur de mode de fonctionnement pour le système complet sous la forme d'un automate d'état.

Dans la section 2.5, nous avons identifié deux types de jonctions. Celle qui peuvent être

en mode fluide ou congestionné ( $\mathfrak{J}_{FC}$ ), elles sont situées sur les parties de la route où il n'y a pas de changement de géométrie. Et celles qui peuvent être en mode fluide ou découplé ( $\mathfrak{J}_{FD}$ ) situées au niveau des goulets d'étranglement.

### 3.1.1 Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$

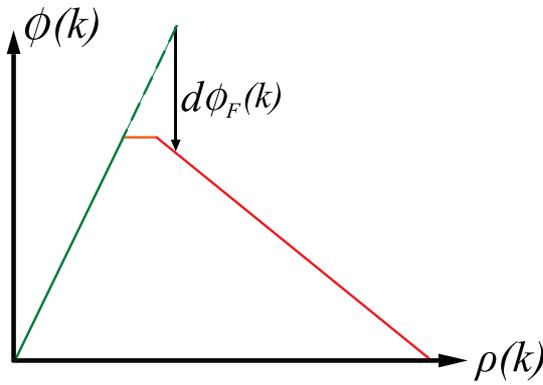


FIG. 3.1 – Mode Congestionné = Mode Fluide + Faute.

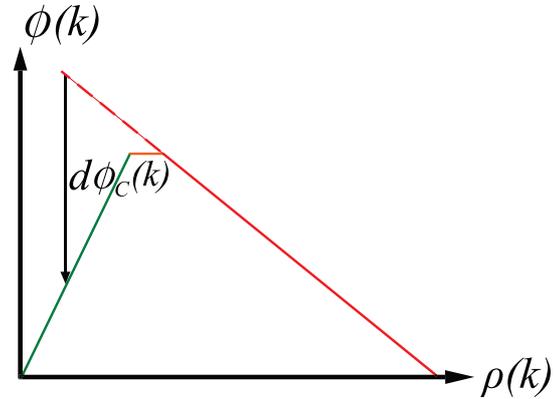


FIG. 3.2 – Mode Fluide = Mode Congestionné + Faute.

Nous nous intéressons à la différenciation du mode fluide et du mode congestionné. L'idée principale est de considérer le mode congestionné d'une jonction comme le mode fluide avec un offset sur le flux. Ce principe est représenté sur la Figure 3.1. De la même manière, nous considérons le mode fluide d'une jonction comme le mode congestionné avec un offset sur le flux (Figure 3.2). La connaissance de ces fautes associée à une logique de décision nous permettra d'estimer le mode de fonctionnement de chaque jonction. Nous considérons que les flux d'entrées sont mesurés.

#### Résidu en mode fluide

Dans un premier temps, nous considérons la jonction  $i$  en mode fluide. Nous écrivons le flux dans cette jonction de la manière suivante :

$$\phi_i(k) = \phi_{F_i}(k) + d\phi_{F_i}(k). \quad (3.1.1)$$

où  $\phi_{F_i}(k)$  est la partie nominale du flux, et  $d\phi_{F_i}(k)$  la partie incertaine.

D'après l'équation (2.1.10), la partie nominale du flux d'une jonction en mode

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

fluide est

$$\phi_{F_i}(k) = \frac{1}{1 - \beta_i} v_{0_{i-1}} \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.2)$$

avec  $\beta_i = 0$  s'il n'y a pas de rampe de sortie au niveau de la jonction  $i$ . Si la jonction  $i$  est effectivement en mode fluide sans faute, alors

$$\phi_i(k) = \frac{1}{1 - \beta_i} (v_{0_{i-1}} + \delta v_{i-1}(k)) \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.3)$$

D'après (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.3) nous avons

$$d\phi_{F_i}(k) = \frac{1}{1 - \beta_i} \delta v_{i-1}(k) \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.4)$$

Nous remarquons que cette faute est nulle en l'absence d'incertitudes paramétriques. Comme les incertitudes paramétriques sont bornées (2.2.2), nous avons

$$|d\phi_{F_i}(k)| \leq \frac{1}{1 - \beta_i} \Delta v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.5)$$

Nous définissons alors l'ensemble suivant :

$$\Omega_{F_i} : \{d\phi_{F_i}(k) \text{ tq } |d\phi_{F_i}(k)| \leq \frac{1}{1 - \beta_i} \Delta v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k)\}. \quad (3.1.6)$$

En conséquence, nous pouvons affirmer que si la jonction est en mode fluide sans faute alors cela implique que  $d\phi_{F_i}(k) \in \Omega_{F_i}$ .

Si la jonction, considérée en mode fluide, est en fait en mode congestionné, alors d'après l'équation (2.1.12), le flux dans la jonction est donnée par

$$\phi_i(k) = (w_{0_i} + \delta w_i(k)) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k). \quad (3.1.7)$$

D'après les équations (3.1.1) et (3.1.7) nous pouvons identifier

$$d\phi_{F_i}(k) = v_{0_{i-1}} \cdot \rho_{i-1}(k) - (w_{0_i} + \delta w_i(k)) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k). \quad (3.1.8)$$

Cette faute est représentée sur la Figure 3.1. Nous remarquons que lorsque les incertitudes paramétriques sont nulles, cette faute est négative.

Nous effectuons un raisonnement similaire en considérant que la jonction est en mode congestionné.

**Résidu en mode congestionné**

Nous considérons la jonction  $i$  en mode congestionné. Nous écrivons le flux dans cette jonction de la manière suivante :

$$\phi_i(k) = \phi_{C_i}(k) + d\phi_{C_i}(k). \quad (3.1.9)$$

où  $\phi_{C_i}(k)$  est la partie nominale du flux, et  $d\phi_{C_i}(k)$  la partie incertaine.

D'après l'équation (2.1.12) la partie nominale du flux d'une jonction en mode congestionné est

$$\phi_{C_i}(k) = w_{0_i} \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k). \quad (3.1.10)$$

avec  $r_i(k) = 0$  s'il n'y a pas d'entrée au niveau de la jonction  $i$ . Si la jonction  $i$  est effectivement en mode congestionné sans faute, alors

$$\phi_i(k) = (w_{0_i} + \delta w_i(k)) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k). \quad (3.1.11)$$

D'après (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11) nous pouvons identifier

$$d\phi_{C_i}(k) = \delta w_i(k) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)). \quad (3.1.12)$$

Nous remarquons comme précédemment que cette faute est nulle en l'absence d'incertitudes paramétriques.

Comme les incertitudes paramétriques sont bornées (2.2.2), nous avons

$$|d\phi_{C_i}(k)| \leq \Delta w_i(k) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)). \quad (3.1.13)$$

Nous définissons alors l'ensemble suivant :

$$\Omega_{C_i} : \{d\phi_{C_i}(k) \text{ tq } |d\phi_{C_i}(k)| \leq \Delta w_i(k) \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k))\}. \quad (3.1.14)$$

Nous pouvons affirmer que si la jonction est en mode congestionné alors  $d\phi_{C_i}(k) \in \Omega_{C_i}$ . Si la jonction considérée en mode congestionné est en mode fluide, alors, d'après l'équation (2.1.10), le flux dans la jonction est

$$\phi_i(k) = \frac{1}{1 - \beta_i} (v_{i-1} + \delta v_{i-1}(k)) \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.15)$$

D'après les équations (3.1.9) et (3.1.15) nous identifions

$$d\phi_{C_i}(k) = w_{0_i} \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) - \gamma_i r_i(k) - \frac{1}{1 - \beta_i} (v_{i-1} + \delta v_{i-1}(k)) \cdot \rho_{i-1}(k). \quad (3.1.16)$$

Cette faute est représentée sur la Figure 3.2. Nous remarquons comme précédemment que lorsque les incertitudes paramétriques sont nulles, cette faute est négative.

Ces deux fautes, en mode fluide et congestionné, sont associées à une logique de décision afin d'estimer le mode de fonctionnement de la jonction.

### Logique de décision

Nous présentons maintenant la logique de décision qui, à partir de la connaissance de  $d\phi_{F_i}(k)$  et de  $d\phi_{C_i}(k)$  nous permet d'estimer le mode de fonctionnement d'une cellule. Nous choisissons le mode pour lequel la faute est la plus faible. De plus, dans le cas nominal, c'est à dire pour des valeurs d'incertitudes nulles,  $d\phi_{F_i}(k) < 0$  si la jonction est en mode congestionné, et  $d\phi_{C_i}(k) < 0$  si la jonction est en mode fluide. Nous effectuons donc la logique de décision suivante :

La jonction  $i$  est en mode fluide ( $\hat{\alpha}_i(k) = F$ ) si

$$d\phi_{F_i}(k) \geq d\phi_{C_i}(k). \quad (3.1.17)$$

Elle est en mode congestionné ( $\hat{\alpha}_i(k) = C$ ) si

$$d\phi_{F_i}(k) < d\phi_{C_i}(k). \quad (3.1.18)$$

Le sens de ces inégalités, est dû au fait que les résidus  $d\phi_{F_i}(k)$ , respectivement  $d\phi_{C_i}(k)$  sont négatifs si la jonction est éloignée du mode fluide, respectivement congestionné.

### 3.1.2 Estimation du mode de fonctionnement pour les jonctions

⌋<sub>FD</sub>

Nous avons présenté une méthode nous permettant de différencier le mode fluide du mode congestionné. De la même façon, nous pouvons différencier le mode fluide du mode découplé, pour les jonctions se trouvant au niveau des goulets d'étranglement.

De la même manière que dans la sous-section 3.1.1, nous considérons le mode

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

fluide comme étant le mode découplé avec une faute et le mode découplé comme étant le mode fluide avec une faute. La faute  $d\phi_{F_i}(k)$ , garde la même définition que celle exposée précédemment.

#### Résidu en mode découplé

Nous construisons la faute  $d\phi_{D_i}(k)$  sur le flux en mode découplé, en considérant le flux de la manière suivante :

$$\phi_i(k) = \phi_{D_i}(k) + d\phi_{D_i}(k). \quad (3.1.19)$$

où  $\phi_{D_i}(k)$  est la partie nominale du flux, et  $d\phi_{D_i}(k)$  la partie incertaine.

D'après l'équation (2.1.11) la partie nominale du flux dans une jonction en mode congestionné est

$$\phi_{D_i}(k) = \phi_{M_{0_i}}. \quad (3.1.20)$$

Si la jonction  $i$  est effectivement en mode congestionné sans faute alors

$$\phi_i(k) = \phi_{M_{0_i}} + \delta\phi_{M_i}(k). \quad (3.1.21)$$

D'après (3.1.19), (3.1.20) et (3.1.21) nous pouvons identifier

$$d\phi_{D_i}(k) = \delta\phi_{M_i}(k). \quad (3.1.22)$$

Nous remarquons comme précédemment que cette faute est nulle en l'absence d'incertitudes paramétriques.

Comme les incertitudes paramétriques sont bornées (2.2.2), nous avons

$$|d\phi_{D_i}(k)| \leq \Delta\phi_{M_i}(k). \quad (3.1.23)$$

Nous définissons alors l'ensemble suivant :

$$\Omega_{D_i} : \{d\phi_{D_i}(k) \text{ tq } |d\phi_{D_i}(k)| \leq \Delta\phi_{M_i}(k)\}. \quad (3.1.24)$$

Nous pouvons affirmer que si la jonction est en mode découplé alors  $d\phi_{D_i}(k) \in \Omega_{D_i}$ .

### Logique de décision

Nous effectuons la logique de décision suivante :

La jonction  $i$  est en mode fluide ( $\hat{\alpha}_i(k) = F$ ) si

$$d\phi_{F_i}(k) \geq d\phi_{D_i}(k). \quad (3.1.25)$$

Elle est en mode découplé ( $\hat{\alpha}_i(k) = D$ ) si

$$d\phi_{F_i}(k) < d\phi_{D_i}(k). \quad (3.1.26)$$

### 3.1.3 Estimation du mode de fonctionnement global

Dans cette sous section, nous nous intéressons à l'estimation dynamique du mode de fonctionnement global d'un tronçon composé de plusieurs jonctions, et à l'estimation des fautes sur le flux. Nous nous plaçons dans la configuration présentée dans la section 2.5.

L'ensemble des modes de fonctionnement du système sont définis par l'ensemble  $\Omega$  (2.5.9). Nous construisons notre estimateur de mode de fonctionnement global sous la forme d'un automate d'états. Pour cela, nous nous basons sur l'automate d'état (Figure 2.29) représentant les commutations du système. Dans un premier temps, nous définissons les conditions de transitions entre les différents états de l'automate.

La condition,  $C\tau_{1,2}$  pour passer du mode  $\alpha_1$  au mode  $\alpha_2$  est que la jonction 6 passe en mode découplé. Ainsi,

$$C\tau_{1,2} := d\phi_{F_6}(k) > d\phi_{D_6}(k). \quad (3.1.27)$$

La condition pour passer du mode  $\alpha_2$  au mode  $\alpha_1$  est que la jonction 6 passe en mode fluide. Ainsi,

$$C\tau_{2,1} := d\phi_{F_6}(k) < d\phi_{C_6}(k). \quad (3.1.28)$$

La condition pour passer du mode  $\alpha_2$  au mode  $\alpha_3$  est que la jonction 5 passe en mode congestionné. Ainsi,

$$C\tau_{2,3} := d\phi_{F_5}(k) > d\phi_{C_5}(k). \quad (3.1.29)$$

## Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

La condition pour passer du mode  $\alpha_3$  au mode  $\alpha_2$  est que la jonction 5 passe en mode fluide. Ainsi,

$$C\tau_{1,2} := d\phi_{F_5}(k) < d\phi_{C_5}(k). \quad (3.1.30)$$

De la même manière, nous définissons les transitions :

$$C\tau_{3,4} := d\phi_{F_4}(k) > d\phi_{C_4}(k) \quad (3.1.31)$$

$$C\tau_{4,3} := d\phi_{F_4}(k) < d\phi_{C_4}(k) \quad (3.1.32)$$

$$C\tau_{4,5} := d\phi_{F_3}(k) > d\phi_{C_3}(k) \quad (3.1.33)$$

$$C\tau_{5,4} := d\phi_{F_3}(k) < d\phi_{C_3}(k) \quad (3.1.34)$$

$$C\tau_{5,6} := d\phi_{F_2}(k) > d\phi_{C_2}(k) \quad (3.1.35)$$

$$C\tau_{6,5} := d\phi_{F_2}(k) < d\phi_{C_2}(k) \quad (3.1.36)$$

Enfin, la condition pour rester dans l'état courant est défini par :

$$C\tau_{n,n} := \overline{C\tau_{n,n+1}} \ \& \ \overline{C\tau_{n,n-1}} \quad (3.1.37)$$

où  $\&$  désigne l'opérateur logique ET, et  $\bar{\tau}$  représente l'inverse logique de  $\tau$ .

Nous avons décrit toutes les transitions permettant d'implanter notre estimateur dynamique de mode de fonctionnement global sous la forme de l'automate d'état représenté en Figure 2.29

## 3.2 Application à l'estimation des fautes

Dans cette section, nous montrons que certaines fautes vont pouvoir être détectées par le schéma mis en place précédemment.

### 3.2.1 Types de fautes identifiables

Nous identifions deux types de fautes principales pouvant apparaître sur la route. Le premier type de faute, représenté sur la Figure 3.3, est le blocage d'une des voies de circulation. Typiquement, cette faute apparaît lorsqu'un véhicule bloque une des voies de circulation.

La présence de cette faute vas influencer sur le diagramme fondamental. Elle aura

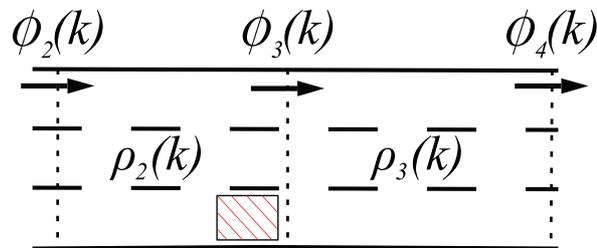


FIG. 3.3 – Faute type 1

pour effet de faire chuter le flux maximal et la densité maximale, cet effet est représenté sur la Figure 3.4. La chute de flux est facilement quantifiable, par exemple sur une route à trois voies de circulation, si l’une d’elle est bloquée, le flux maximal sera réduit d’un tiers. La réduction de la densité maximale est plus difficilement quantifiable.

Le second type de faute que nous avons considéré est une chute de la vitesse.

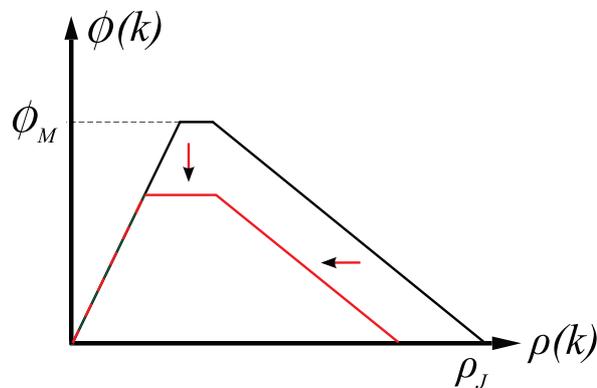


FIG. 3.4 – Faute type 1 : Influence sur le diagramme fondamental

Cette faute apparaît lorsqu’un événement extérieur vient faire ralentir les utilisateurs. Cette faute apparaît par exemple lorsqu’un véhicule est arrêté sur la bande d’arrêt d’urgence comme représenté sur la Figure 3.5, dans ce cas, elle aura une influence locale. Cette faute peut aussi apparaître dans chaque jonction si elle est causée par des perturbations climatiques (brouillard, pluie, neige). Ce dernier type de faute a été considéré dans [Wang, Papageorgiou & Messmer, 2008].

La présence de cette faute diminue la pente du diagramme fondamental pour le mode fluide. Cette influence est représentée sur la figure 3.6.

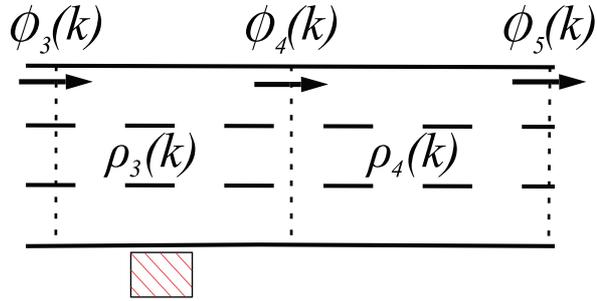


FIG. 3.5 – Faute type 2

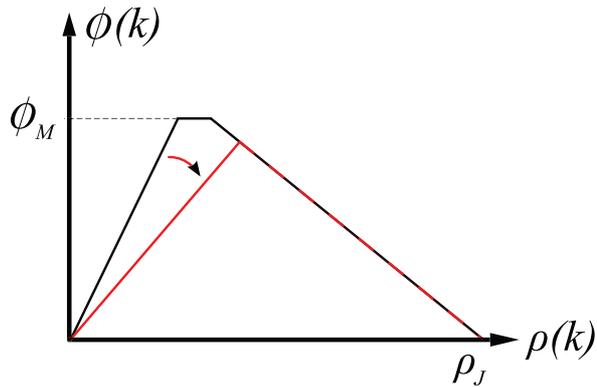


FIG. 3.6 – Faute type 2 : Influence sur le diagramme fondamental

### 3.2.2 Estimation des fautes

Ces fautes peuvent être considérées comme un terme additif sur le flux dans les jonctions. A partir des résidus considérés dans la section précédente, nous sommes capables d’estimer ces fautes additives. Nous définissons  $d\phi_i(k)$ , la faute additive sur le flux dans la jonction  $i$  de la manière suivante :

$$d\phi_i(k) = \begin{cases} \max(d\phi_{F_i}(k), d\phi_{D_i}(k)), & \forall i \in \mathcal{J}_{FD} \\ \max(d\phi_{F_i}(k), d\phi_{C_i}(k)), & \forall i \in \mathcal{J}_{FD} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Grâce aux équations (3.1.6) et (3.1.14), nous pouvons définir des seuils d’alerte pour la détection des fautes.

Ainsi, si la jonction est en mode fluide, nous sommes en présence d'une faute si

$$d\phi_{F_i}(k) \notin \Omega_{F_i} \quad (3.2.2)$$

Si la jonction est en mode découplé, nous sommes en présence d'une faute si

$$d\phi_{C_i}(k) \notin \Omega_{D_i} \quad (3.2.3)$$

Si la jonction est en mode congestionné, nous sommes en présence d'une faute si

$$d\phi_{C_i}(k) \notin \Omega_{C_i} \quad (3.2.4)$$

### 3.3 Génération robuste des résidus

Afin de mettre en place le schéma d'estimation du mode de fonctionnement et de détection des fautes présenté précédemment, nous devons générer des résidus estimant  $d\phi_{F_i}(k)$  et  $d\phi_{C_i}(k)$  ou  $d\phi_{D_i}(k)$ . Ces deux grandeurs doivent être estimées pour chaque jonction.

#### 3.3.1 Transformation du problème d'estimation en un problème $H_\infty$ standard

Afin de synthétiser les estimateurs nous permettant de générer nos résidus pour la jonction  $i$ , nous transformons le problème d'estimation représenté en Figure 3.7 en un problème  $H_\infty$  standard représenté en Figure 3.8. Ce type de transformation a été proposé par [Sadmia et al., 1996]. Ce schéma a été utilisé dans différents problèmes de commande tolérante aux fautes [Mammar et al., 2000],[Marx et al., 2004],[Wang et al., 2010].

Ainsi, nous cherchons à minimiser la norme  $H_\infty$  du transfert des perturbations vers la sortie de régulation. Dans ce problème, nous considérons les perturbations suivantes :  $d\phi_{\alpha_n}(k)$  les fautes sur les flux de chaque jonction,  $d(k)$  les conditions aux limites, et  $r(k)$  les flux d'entrée. Nous considérons que les flux d'entrée sont mesurés. La faute à estimer est située en basse fréquence, nous ajoutons donc un filtre de modelage passe bas. Ainsi, la norme  $H_\infty$  du transfert considéré sera minimisée sur la bande de fréquence qui nous intéresse. Nous choisissons d'utiliser un filtre du premier ordre sous la forme :

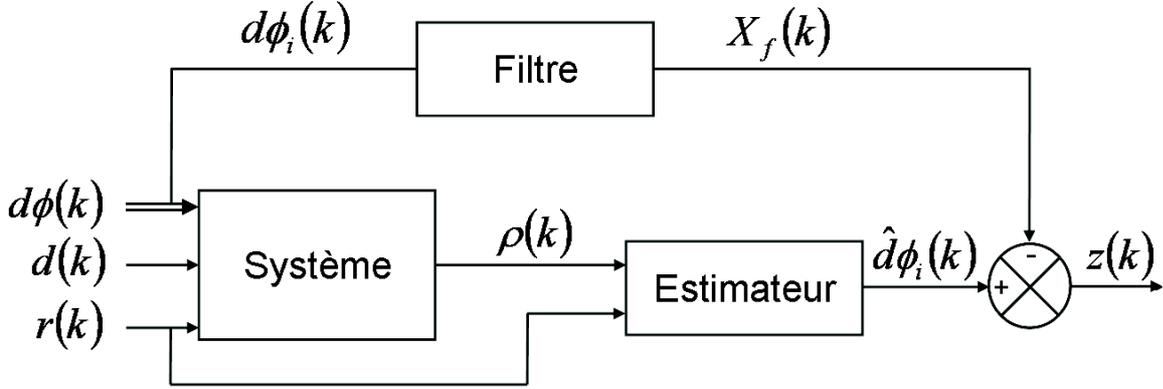


FIG. 3.7 – Problème d'estimation.

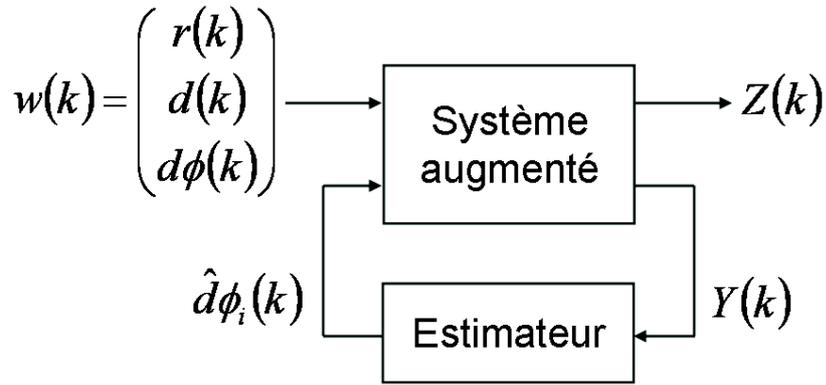


FIG. 3.8 – Problème d'estimation sous forme  $H_\infty$  standard.

$$X_f(k+1) = p_f \cdot X_f(k) + G_f \cdot (1 - p_f) \cdot \hat{d}\phi_{i\alpha_n}(k), \quad (3.3.1)$$

où  $p_f$  est le pôle du filtre,  $G_f$  son gain statique et  $u_f(k)$  son entrée. Les deux paramètres  $p_f$  et  $G_f$  nous permettront d'influencer respectivement la bande passante et la précision statique de l'estimateur.

Pour la jonction  $i$ , la sortie de régulation  $Z(k)$  est définie de la manière suivante :

$$Z(k) = d\phi_{i\alpha_n}(k) - X_f(k) \quad (3.3.2)$$

**Proposition 3.3.1.** *L'estimateur dynamique pour une jonction  $i$  et un mode  $\alpha_n$  est donné par le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} X_{e_{i\alpha_n}}(k+1) &= A_{e_{i\alpha_n}} \cdot X_{e_{i\alpha_n}}(k) + B_{e_{i\alpha_n}} \cdot Y(k) \\ \hat{d}\phi_i(k) &= C_{e_{i\alpha_n}} \cdot X_{e_{i\alpha_n}}(k) + D_{e_{i\alpha_n}} \cdot Y(k) - E_{f_i} \cdot a_{0\phi\alpha_n} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

où

$$\begin{cases} X_{e_{i\alpha_n}}(k+1) &= A_{e_{i\alpha_n}} \cdot X_{e_{i\alpha_n}}(k) + B_{e_{i\alpha_n}} \cdot Y(k) \\ \hat{f}_i(k) &= C_{e_{i\alpha_n}} \cdot X_{e_{i\alpha_n}}(k) + D_{e_{i\alpha_n}} \cdot Y(k) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

est solution du problème  $H_\infty$  standard suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) &= \begin{pmatrix} A_{0\alpha_n} & 0 \\ 0 & p_f \end{pmatrix} \cdot X(k) + \begin{pmatrix} B_{\alpha_n} & E_{d\alpha_n} & \Theta \\ 0 & 0 & G_f \cdot (1 - p_f) \cdot E_{f_i} \end{pmatrix} \cdot w(k) \\ Y(k) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r(k) \\ Z(k) &= (0 \ 0 \ E_{f_i}) w(k) - \hat{f}_i(k) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

où  $A_{0\alpha_n}$ ,  $B_{\alpha_n}$  et  $E_{d\alpha_n}$  sont les matrices du système (2.3.2).  $w(k) = [r(k), d(k), f(k)]$  est le vecteur de perturbations externes et  $X(k)$  est l'état du système (2.3.2) augmenté de l'état du filtre (3.3.1) défini de la manière suivante :

$$X(k) = \begin{pmatrix} \rho(k) \\ X_f(k) \end{pmatrix}, \quad (3.3.6)$$

$E_{f_i}$  est un vecteur ligne de dimension  $(1, N+1)$  (ou  $N$  est le nombre de cellules) tel que :

$$E_{f_i} = \begin{pmatrix} & & i & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.7)$$

En conséquence, pour une jonction  $i$  donnée et un mode  $\alpha_n$  donné

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}\phi_i(k) = d\phi_i(k) \quad (3.3.8)$$

#### Preuve 3.3.1 :

Nous posons

$$f(k) = d\phi_{\alpha_n}(k) + a_{0\phi_{\alpha_n}} \quad (3.3.9)$$

Nous cherchons à estimer le défaut affectant la  $i^{me}$  jonction.

$$f_i(k) = d\phi_{i\alpha_n}(k) + E_{f_i} \cdot a_{0\phi_{\alpha_n}} \quad (3.3.10)$$

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

Cette grandeur est choisie comme l'entrée  $u_f(k)$  du filtre (3.3.1).

D'après (2.3.2) et (2.3.18) le système augmenté peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{pmatrix} A_{0\alpha_n} & 0 \\ 0 & p_f \end{pmatrix} \cdot X(k) + \begin{pmatrix} B_{\alpha_n} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot r(k) + \begin{pmatrix} E_{d\alpha_n} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d(k) \\ \quad + \begin{pmatrix} \Theta \\ G_f \cdot E_{f_i} \end{pmatrix} \cdot f(k) \\ Y(k) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r(k) \end{cases} \quad (3.3.11)$$

Ainsi comme l'estimateur dynamique (3.3.4) est solution du problème  $H_\infty$  standard (3.3.5), et comme  $a_{0\phi_{\alpha_n}}$  est une constante donc par définition située en basse fréquence nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_i(k) = f_i(k)(k) \quad (3.3.12)$$

Nous construisons alors l'estimateur (3.3.3) en posant

$$\hat{d}\phi_{i\alpha_n}(k) = \hat{f}_i(k) - E_{f_i} \cdot a_{0\phi_{\alpha_n}} \quad (3.3.13)$$

Ainsi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}\phi_{i\alpha_n}(k) = d\phi_{i\alpha_n}(k) \quad (3.3.14)$$

□

#### 3.3.2 Génération des résidus en mode fluide

Nous cherchons à estimer  $d\phi_{F_i}(k)$ . Nous avons vu dans la sous-section 3.3.1 que dans le cas général, le problème d'estimation pouvait être transformé en un problème  $H_\infty$  standard. Nous étudions la configuration présentée en Figure 2.5. Nous considérons que le flux entrant par la voie d'accès, ainsi que le flux de sortie sur le tronçon principal est mesuré. Afin de générer un résidu estimant  $d\phi_{F_i}(k)$ , nous considérons que toutes les jonctions sont en mode fluide, c'est à dire  $\alpha_n = \alpha_1$ . Nous proposons l'estimateur suivant :

$$\begin{cases} X_{e_{i_F}}(k+1) = A_{e_{i_F}} \cdot X_{e_{i_F}}(k) + B_{e_{i_F}} \cdot Y(k) \\ \hat{d}\phi_{F_i}(k) = C_{e_{i_F}} \cdot X_{e_{i_F}}(k) + D_{e_{i_F}} \cdot Y(k) \end{cases}, \quad (3.3.15)$$

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

solution du problème  $H_\infty$  standard

$$\begin{cases} X(k+1) &= \begin{pmatrix} A_{0F} & 0 \\ 0 & p_f \end{pmatrix} .X(k) + \begin{pmatrix} B_F & E_{dF} & \Theta \\ 0 & 0 & G_f.(1-p_f).E_{f_i} \end{pmatrix} .w(k) \\ Y(k) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} .X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .r(k) \\ Z(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{f_i} \end{pmatrix} w(k) - \hat{d}\phi_i(k) \end{cases} \quad (3.3.16)$$

où  $A_{0F}$ ,  $B_F$  et  $E_{dF}$  sont les matrices connues du système (2.3.2) pour  $\alpha_n = \alpha_1$ . D'après la proposition 3.3.1 et sachant  $a_{0\phi_{\alpha_n}} = 0$  lorsque toute les jonctions sont en mode fluide, nous avons

$$\hat{d}\phi_{F_i}(k) \longrightarrow d\phi_{F_i}(k) \text{ quand } k \longrightarrow \infty \quad (3.3.17)$$

Nous remarquons que  $\hat{d}\phi_{F_1}(k)$  donne une estimation du flux entrant sur la première jonction du tronçon principal. Ainsi, cet estimé peut servir à remplacer la mesure du flux de sortie pour un sous-aménagement se trouvant en amont. Nous pouvons donc découper un problème complexe en plusieurs sous problèmes sans augmenter le nombre de flux de sortie à mesurer.

#### 3.3.3 Génération des résidus en mode congestionné ou découplé

Nous cherchons à estimer  $d\phi_{C_i}(k)$ . Pour ce faire, nous considérons que la congestion est maximale, c'est à dire que toutes les jonctions en amont de la rampe d'accès sont en mode congestionné, et que la jonction directement en aval est en mode découplé ( $\alpha_n = \alpha_6$ ). Nous proposons l'estimateur suivant :

$$\begin{cases} X_{e_{iC}}(k+1) &= A_{e_{iC}}.X_{e_{iC}}(k) + B_{e_{iC}}.Y(k) \\ \hat{f}_{C_i}(k) &= C_{e_{iC}}.X_{e_{iC}}(k) + D_{e_{iC}}.Y(k) \end{cases}, \quad (3.3.18)$$

Lequel est solution du problème  $H_\infty$  standard suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) &= \begin{pmatrix} A_{0_C} & 0 \\ 0 & p_f \end{pmatrix} .X(k) + \begin{pmatrix} B_C & E_{d_C} & \Theta \\ 0 & 0 & G_f.(1-p_f).E_{f_i} \end{pmatrix} .w(k) \\ Y(k) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} .X(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .r(k) \\ Z(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{f_i} \end{pmatrix} w(k) - \hat{f}_{C_i}(k) \end{cases} \quad (3.3.19)$$

où  $A_{0_C}$ ,  $B_C$  et  $E_{d_C}$   $a_{0\phi_C}$  sont les matrices du système (2.3.2) pour  $\alpha_n = \alpha_6$ .  
Le résidu  $\hat{f}_{C_i}(k)$  nous est donné par :

$$\hat{d}\phi_{C_i}(k) = \hat{f}_{C_i}(k) - E_{f_i}.a_{0\phi_C} \quad (3.3.20)$$

Alors d'après la proposition de la sous-section 3.3.1, nous avons

$$\hat{d}\phi_{C_i}(k) \longrightarrow d\phi_{C_i}(k) \text{ quand } k \longrightarrow \infty \quad (3.3.21)$$

### 3.3.4 Analyse de sensibilité

Nous appliquons la synthèse des résidus présenté dans les sous-sections 3.3.2 et 3.3.3 avec la configuration présenté en section 2.5.

Les résultats obtenus pour les différentes jonctions appartenant à  $\mathfrak{J}_{FC}$  sont très similaires. Nous présentons les fonctions de sensibilité obtenues pour la synthèse des résidus de la jonction 4 en figures 3.9 et 3.10.

La Figure 3.9 présente les fonctions de sensibilité obtenues pour la synthèse de l'estimateur nous permettant de générer le résidu  $\hat{d}\phi_{F_4}(k)$ . La courbe en pointillé représente la fonction de transfert entre  $d\phi_{F_4}(k)$  et  $\hat{d}\phi_{F_4}(k)$ . Les courbes en trait plein représentent les fonctions de transfert entre les différentes perturbations externes considérées dans la sous-section 3.3.1 et  $\hat{d}\phi_{F_4}(k)$ .

De la même manière, la Figure 3.10 présente les fonctions de sensibilité obtenues pour la synthèse de l'estimateur nous permettant de générer le résidu  $\hat{d}\phi_{C_4}(k)$ .

Nous présentons en figures 3.11 et 3.12 les fonctions de sensibilité obtenues pour la synthèse des résidus de la jonction 4 (appartenant à  $\mathfrak{J}_{FD}$ ).

Nous constatons que la synthèse des estimateurs est valide. En effet, nous avons

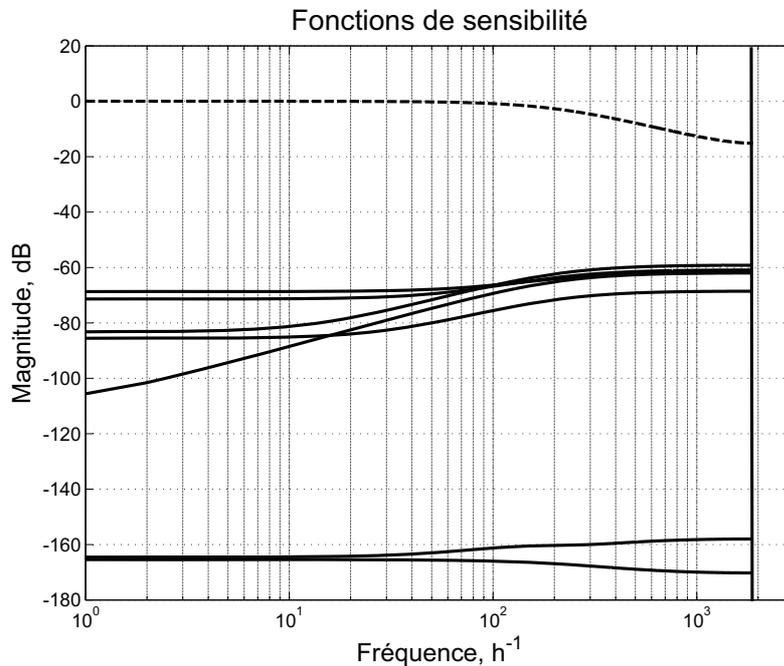


FIG. 3.9 – Fonction de sensibilité, Estimation de  $d\phi_{F_4}(k)$

une erreur statique nulle entre la faute à estimer et le résidu généré. De plus l'atténuation des perturbations est supérieure à  $-60dB$ .

**Remarques :**

- La bande passante de l'estimateur peut être réglée grâce au paramètre  $p_f$  du filtre (3.3.1). Cependant, l'augmentation de la bande passante va diminuer la précision statique.
- L'estimation de la faute associée à une jonction est insensible aux fautes dans les autres jonctions. En effet, ces fautes ont été considérées comme des perturbations externes dans la synthèse  $H_\infty$ . Ainsi, quelque soit le mode de fonctionnement du système, l'estimé de la faute est valable.
- L'estimation des résidus n'est pas sensible aux flux d'entrée. Cela s'explique par le fait que les flux d'entrée sur les rampes d'accès sont mesurés.

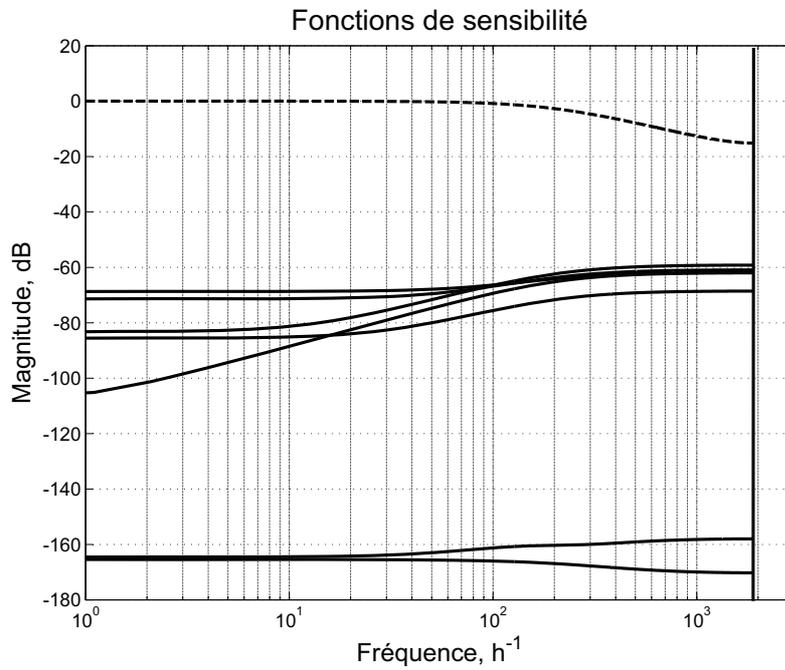


FIG. 3.10 – Fonction de sensibilité, Estimation de  $d\phi_{C_4}(k)$

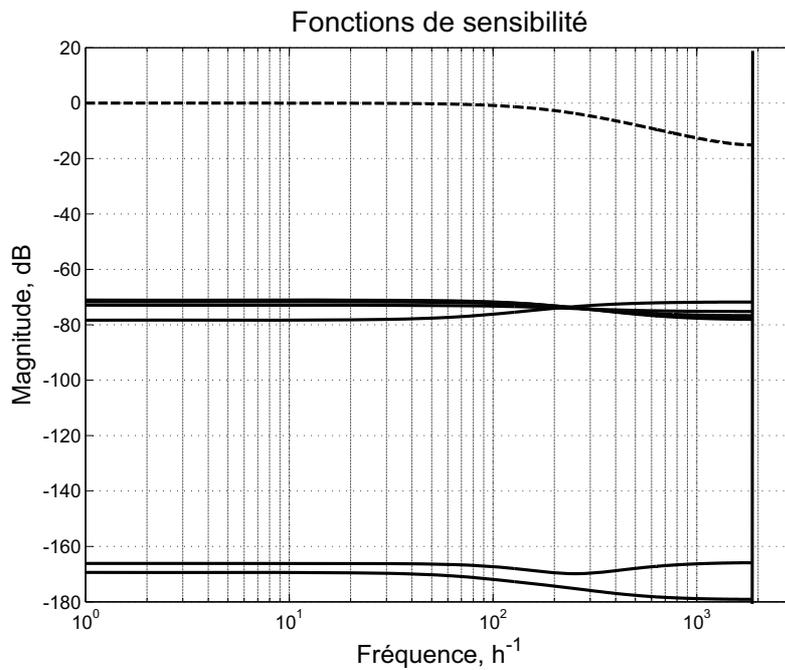


FIG. 3.11 – Fonction de sensibilité, Estimation de  $d\phi_{F_6}(k)$

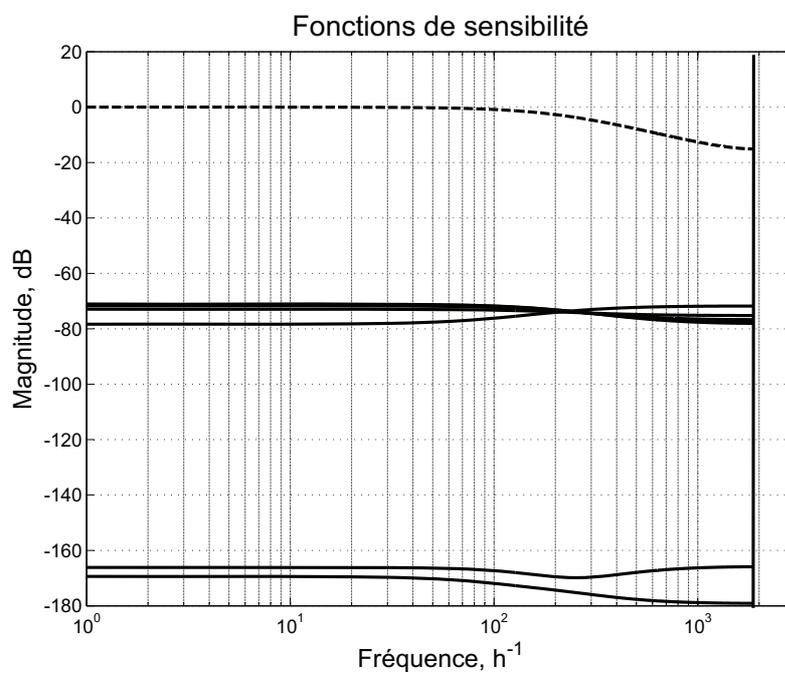


FIG. 3.12 – Fonction de sensibilité, Estimation de  $d\phi_{D_6}(k)$

## 3.4 Validation

Dans cette section, nous validons en simulation les résultats des sections précédentes. Dans un premier temps, nous validons la partie estimation du mode de fonctionnement, puis nous validons l'estimation des fautes.

### 3.4.1 Estimation du mode fonctionnement

Nous validons l'approche proposée pour l'estimation du mode de fonctionnement. Pour cela, nous utilisons le scénario présenté dans la section 2.4. Nous nous intéressons aux 6 premières cellules de la configuration présentée en section 2.5. Nous focalisons les simulations sur l'intervalle de temps où les congestions apparaissent. Le scénario ainsi sélectionné est représenté en Figure 3.13.

La Figure 3.14 présente les résultats de l'estimation du mode de fonctionnement

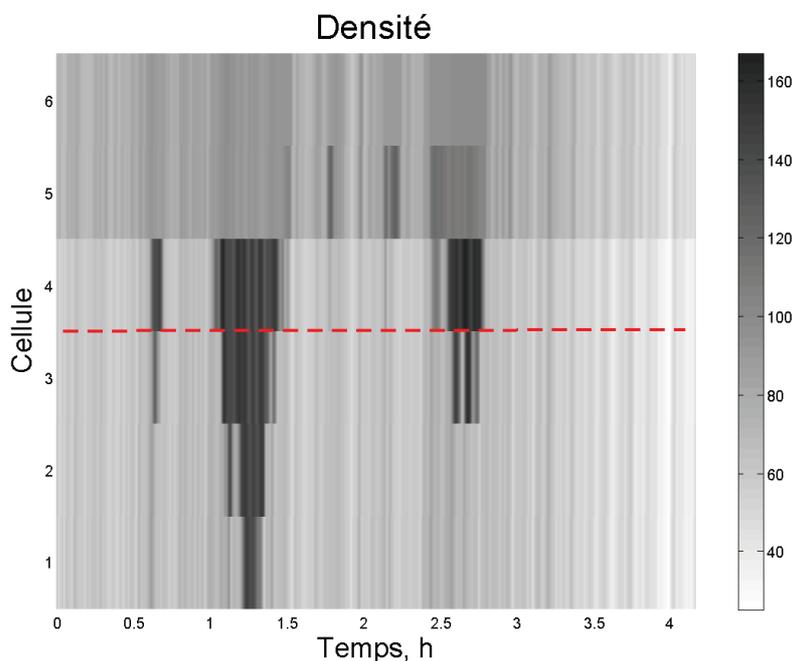


FIG. 3.13 – Estimation du mode de fonctionnement : Scénario de test

pour la jonction 4. Le premier graphique représente  $\hat{d}\phi_{E_4}(k)$ , l'estimation de la faute dans la jonction 4 en mode fluide, ainsi que les seuils d'alertes (équation (3.1.5)). Le second graphique représente  $\hat{d}\phi_{C_4}(k)$ , l'estimation de la faute dans la jonction 4 en mode congestionné, ainsi que les seuils d'alertes (équation (3.1.5)). Enfin, le dernier graphique

représente le mode de fonctionnement réel et estimé de la jonction.

Nous voyons que le mode de fonctionnement estimé est proche du mode de

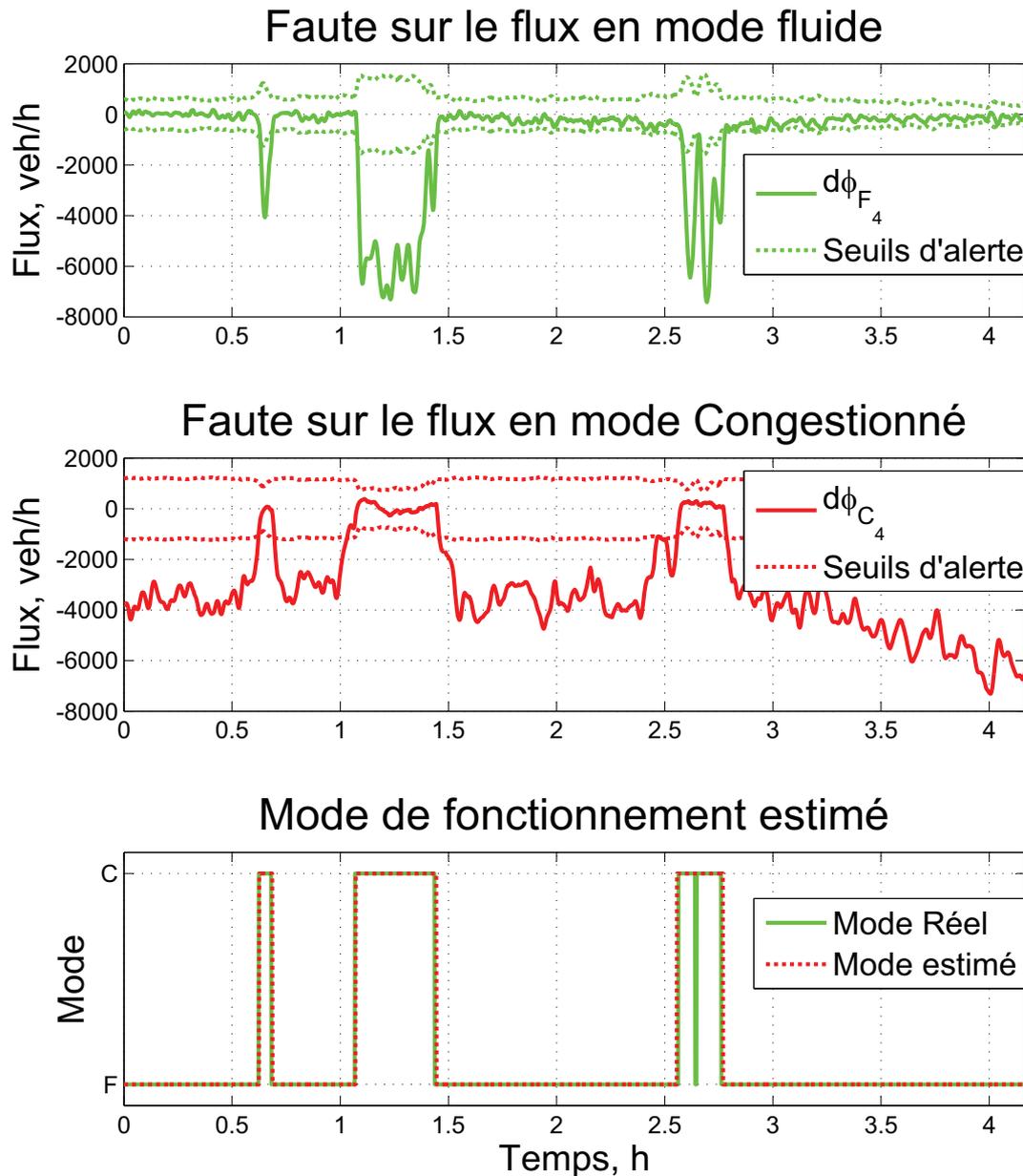


FIG. 3.14 – Estimation du mode de fonctionnement, jonction 4

fonctionnement réel de la cellule. Le comportement des résidus  $\hat{d}\phi_{F_4}(k)$  et  $\hat{d}\phi_{C_4}(k)$  correspondent au comportement attendu. En effet, lorsque la jonction passe en mode

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

congestionné,  $\hat{d}\phi_{F_4}(k)$  dépasse les seuils d’alerte. De la même manière, quand la jonction est en mode fluide,  $\hat{d}\phi_{C_4}(k)$  est en dehors de la zone admissible. Comme il n’y a pas de faute, ces deux résidus ne dépassent pas simultanément les seuils d’alerte.

Nous appliquons maintenant la procédure de détection globale du mode de fonc-

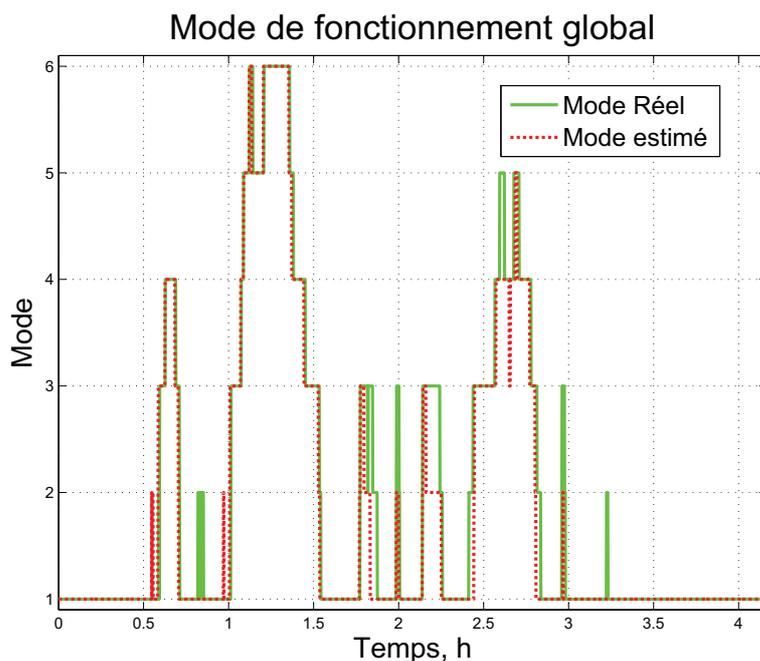


FIG. 3.15 – Estimation du mode global de fonctionnement

tionnement décrit en section 3.1.3. Nous implantons l’automate d’état décrit en Figure 2.29, avec les règles de transitions (3.1.27) à (3.1.37). Nous comparons ainsi le mode estimé en utilisant notre approche et le mode réel de fonctionnement du système. Là encore, nous voyons que le mode estimé est proche du mode de fonctionnement réel. Les différences sont dues aux incertitudes paramétriques du modèle.

#### 3.4.2 Estimation des fautes

Nous validons maintenant l’estimation des fautes sur le flux. Afin de tester la méthode de détection présentée dans ce chapitre, nous ajoutons des fautes au scénario présenté dans la sous-section 3.4.1. Nous avons une faute de type 1 sur la jonction 3 (entre la cellule 2 et 3), et une faute de type 2 sur la jonction 4. Le scénario de test est représenté sur la Figure 3.16.

### Chapitre 3. Estimation dynamique du mode de fonctionnement et estimation des fautes

---

La Figure 3.17 présente les résultats de l'estimation de la faute type 1 sur la

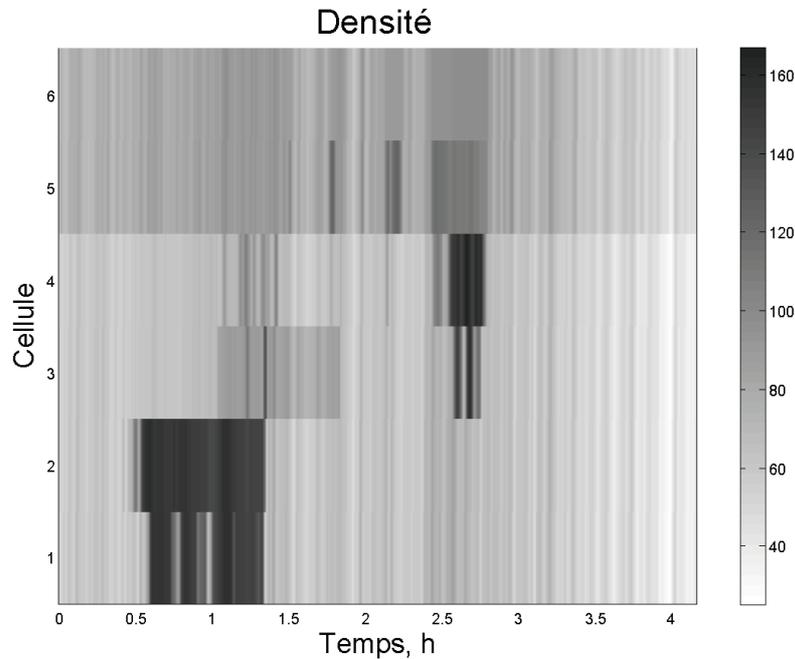


FIG. 3.16 – Estimation des fautes : Scénario de test

jonction 3. Le premier graphique représente  $\hat{d}\phi_{F_3}(k)$ , l'estimation de la faute dans la jonction 3 en mode fluide ainsi que les seuils d'alertes. Le second graphique représente  $\hat{d}\phi_{C_3}(k)$ , l'estimation de la faute dans la jonction 3 en mode congestionné ainsi que les seuils d'alertes. Le troisième graphique représente la faute et son estimé. Enfin, le dernier graphique représente le mode de fonctionnement estimé de la jonction.

La Figure 3.18 présente de manière identique à la figure précédente les résultats de l'estimation de la faute de type 2 sur la jonction 4.

Le comportement des résidus correspond au comportement désiré. Nous avons une bonne estimation des fautes et une détection rapide de ces dernières.

La Figure 3.19 présente l'estimation de fautes dans les différentes jonctions de l'aménagement. Nous retrouvons l'estimation des fautes type 1 et 2 sur la jonction 3 et 4. Pour les jonctions sur lesquelles il n'y a pas de défaut, le résidu reste proche de 0. L'approche proposée permet donc d'estimer deux défauts simultanés. De plus, la précision de l'estimé ne dépend pas du mode de fonctionnement du système.

La Figure 3.20 représente le flux d'entrée sur la première jonction du tronçon

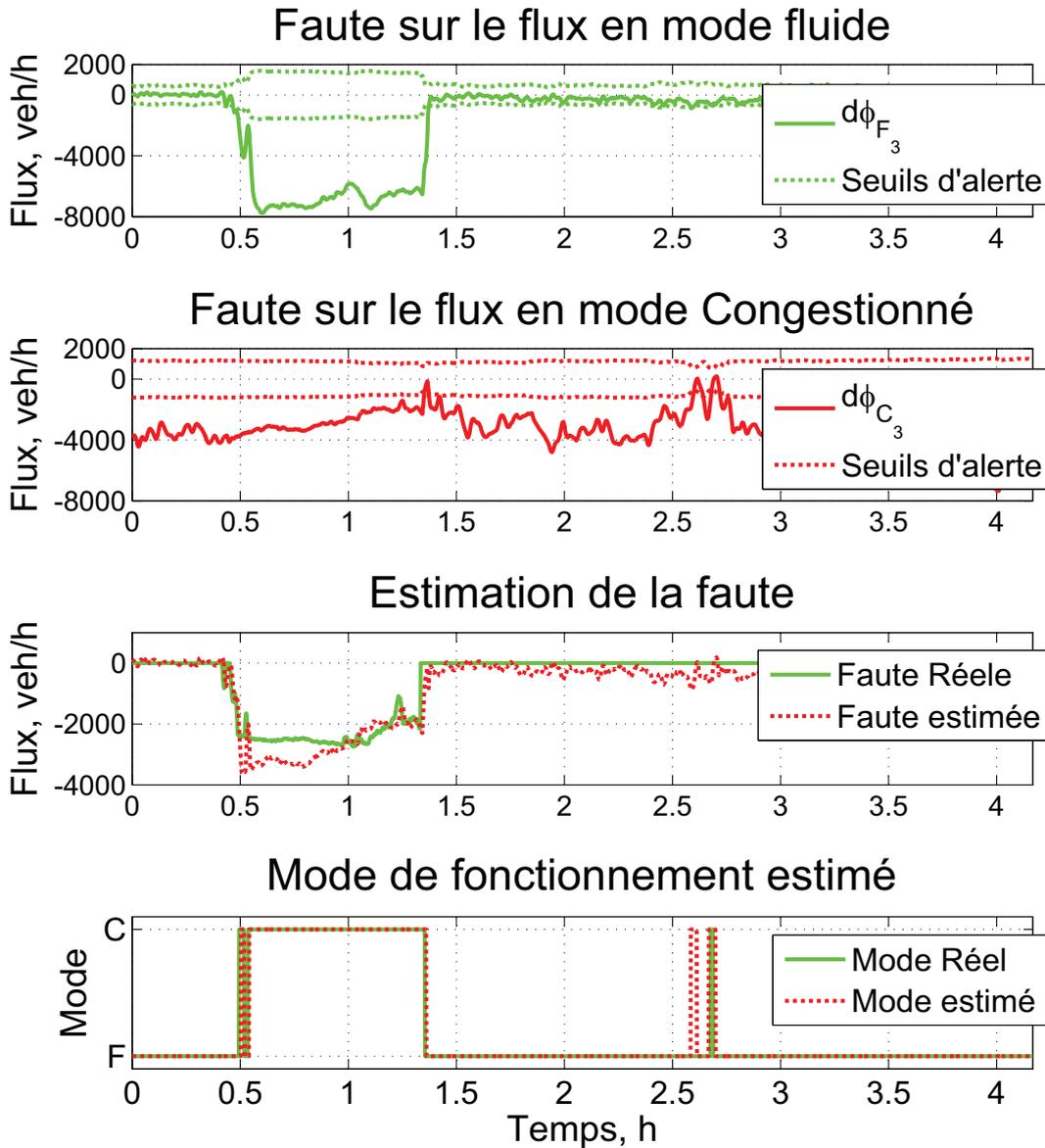


FIG. 3.17 – Estimation des fautes

principal et son estimé  $d\phi_{F_1}(k)$ . Comme nous l'avons conjecturé dans la sous-section 3.3.2,  $d\phi_{F_1}(k)$  nous fournit une estimation du flux d'entrée sur le tronçon principal. Cette information peut donc servir à remplacer la mesure du flux de sortie pour un aménagement se trouvant en amont de l'aménagement considéré.

La précision de la localisation des fautes dépend de la répartition des capteurs. Nous sommes en mesure de dire qu'un incident est situé entre deux capteurs sans

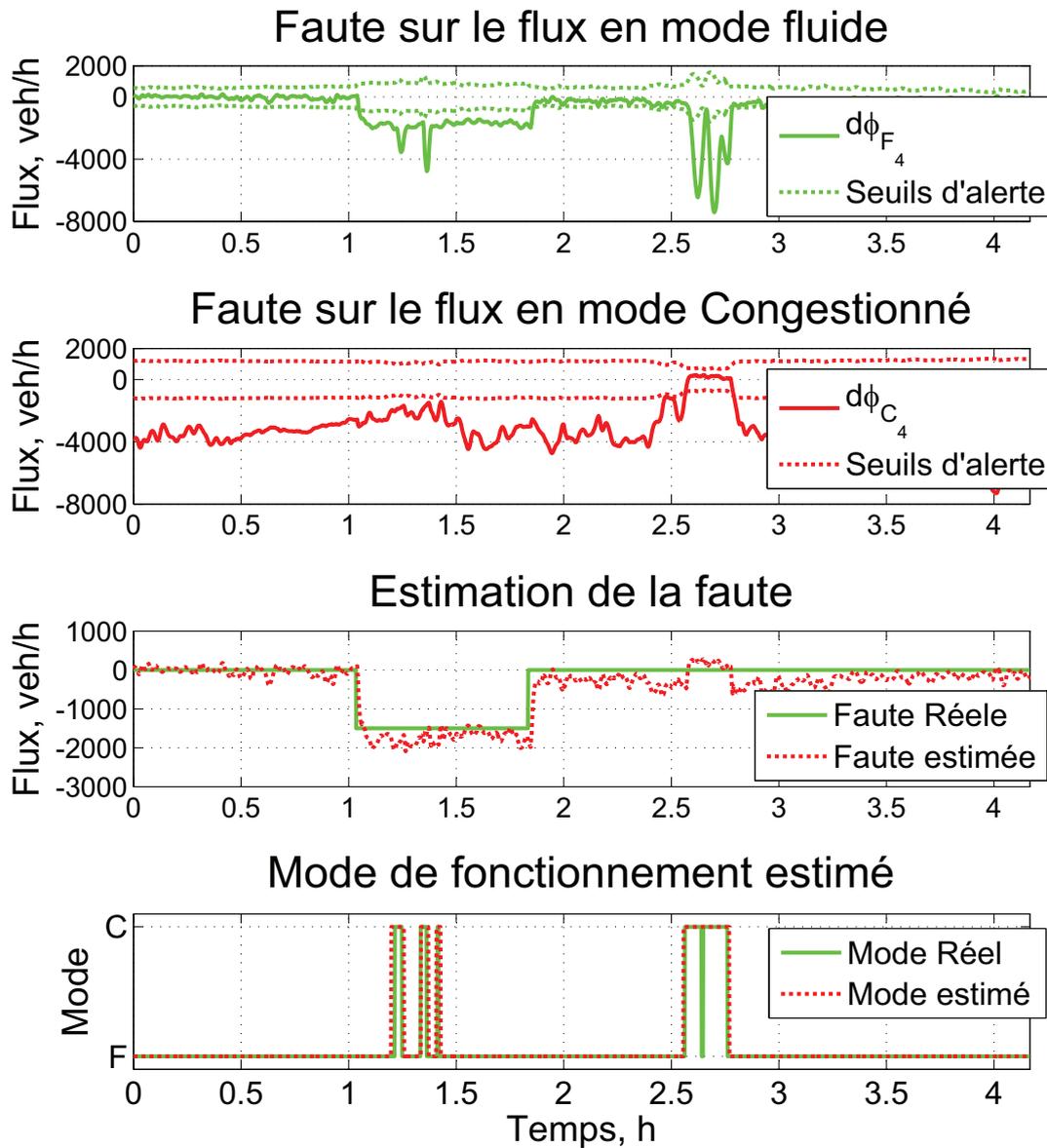


FIG. 3.18 – Estimation des fautes

pouvoir le localiser précisément.

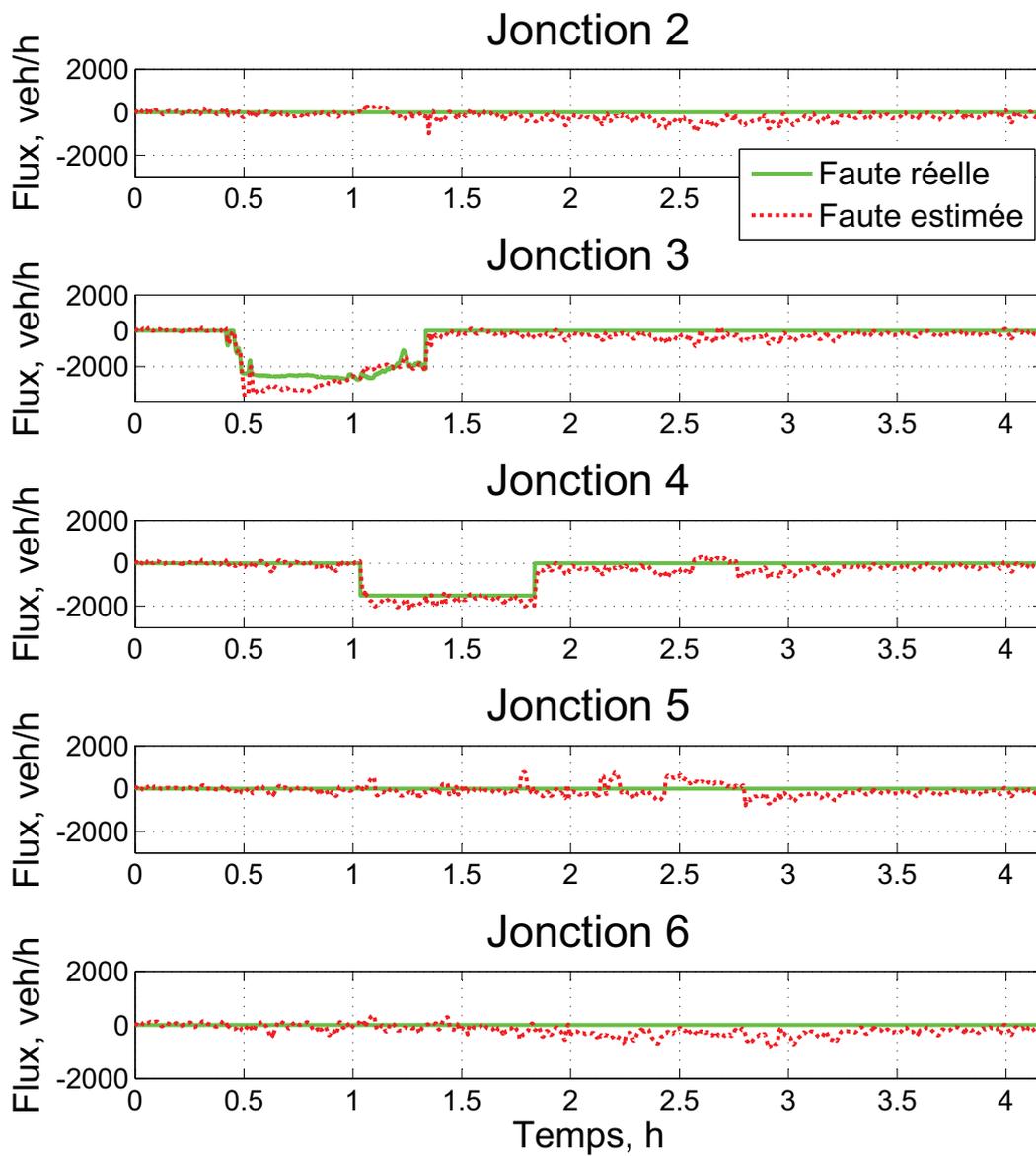


FIG. 3.19 – Estimation des fautes

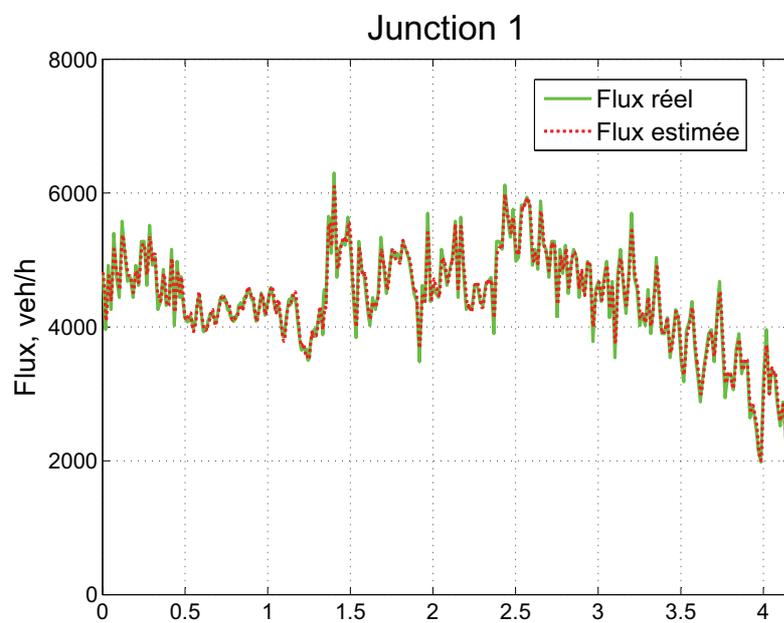


FIG. 3.20 – Estimation du flux d'entrée

## 3.5 Résumé des contributions

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode d'estimation dynamique du mode de fonctionnement et d'estimation des fautes pour assurer la supervision des systèmes de trafic routier. Les estimateurs calculés grâce à une synthèse  $H_\infty$  standard nous permettent d'estimer les fautes sur les flux quelque soit le mode de fonctionnement du système. Cette approche montre de bonnes performances en simulation.

Un article sera soumis prochainement à la conférence "Safe Process".



# Chapitre 4

## Contrôleur robuste PI à commutations

Dans ce chapitre, nous présentons la synthèse de contrôleurs locaux robustes. Ils ont pour fonction d'assurer localement le suivi des profils de densité calculés par le niveau supérieur. Nous notons  $\rho^*(k)$  ces profils de densité et  $u^*(k)$  le flux d'entrée correspondant.

La commande calculée par le contrôleur est le flux dans les rampes d'accès. C'est à dire le flux quittant la file d'attente et entrant sur le tronçon principal. La commande du flux d'entrée se fait au voisinage de chaque rampe d'accès. Nous disposons d'une mesure de la densité en aval de la rampe d'accès et d'un certain nombre de mesures de la densité en amont de cette rampe d'accès. Ces mesures peuvent être effectuées par des boucles magnétiques ou par l'analyse des images des caméras placées sur le tronçon [Balclar & Sönmez, 2008; Wang, Xiao & Gu, 2008].

Pour la configuration présentée en section 2.4 nous disposons de 4 mesures de densité en amont de la rampe d'accès.

Nous proposons un régulateur PI robuste à commutation classique. Pour cela, nous synthétisons un régulateur PI robuste pour chacun des modes de fonctionnement du système. En fonction de l'évolution du système, nous appliquerons le régulateur PI correspondant au mode de fonctionnement estimé  $\hat{a}(k)$ . Cette estimation est obtenue grâce aux résultats du chapitre 3. Le régulateur proposé est robuste aux incertitudes  $\Delta(k)$  et assurent une atténuation des perturbations externes au système. Le schéma de régulation est représenté en Figure 4.1.

### Plan du chapitre

Dans la section 4.1, nous présentons l'augmentation du système avec un intégrateur, afin de mettre en place les régulateurs PI. Dans la section 4.2, nous présentons la synthèse

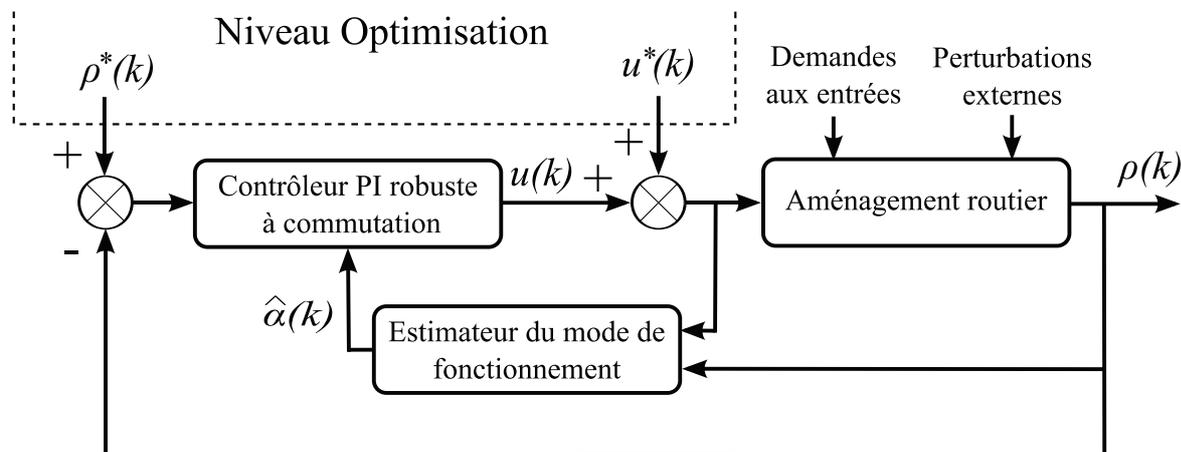


FIG. 4.1 – Schéma d'implantation du contrôleur local

des contrôleurs permettant de stabiliser et de placer les pôles du système. Ces contrôleurs sont déterminés par résolution d'un problème d'optimisation LMI. Les résultats de synthèse de ces régulateurs sont présentés dans la section 4.3. Enfin, dans la section 4.4 des résultats de simulation valident l'approche proposée.

## Sommaire

Plan du chapitre . . . . .	89
<b>4.1 Ajout de l'effet intégral . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>4.2 Synthèse des contrôleurs : formulation LMI . . . . .</b>	<b>93</b>
4.2.1 Outils de transformation LMI . . . . .	93
Complément de Schur . . . . .	93
Lemme de majoration . . . . .	93
4.2.2 Stabilisation du système . . . . .	93
4.2.3 Placement des pôles du système . . . . .	96
<b>4.3 Résultats de synthèse . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>4.4 Validation, simulation sur données réelles . . . . .</b>	<b>102</b>
4.4.1 Scénario de test . . . . .	102
4.4.2 Profils optimaux . . . . .	104
4.4.3 Contrôleur PI à commutations . . . . .	104
<b>4.5 Résumé des contributions . . . . .</b>	<b>105</b>

## 4.1 Ajout de l'effet intégral

Afin d'assurer le rejet de perturbation, nous augmentons notre système avec un intégrateur. Nous avons vu dans la sous section 2.5.2 que le sous espace de commandabilité évolue en fonction du mode de fonctionnement du système. Le critère de Popov nous montre que le système peut être augmenté d'un seul intégrateur sur une variable du sous espace commandable du système.

Nous prenons le vecteur d'état augmenté suivant :

$$X(k) = \begin{pmatrix} \rho(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

où  $z(k)$  représente l'effet intégral.

Pour les modes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de l'aménagement décrit en section 2.5, le sous espace commandable se trouve en aval de la rampe d'accès. Ainsi l'intégrateur est placé sur l'erreur de poursuite de la cellule en aval de la rampe d'accès. Ce qui revient à un schéma du type ALINEA [Papageorgiou et al., 1991].

Pour les modes  $\alpha_3$  à  $\alpha_6$ , la congestion est apparue. Le sous espace commandable se trouve en amont de la rampe d'accès. Nous plaçons l'intégrateur sur l'erreur de poursuite de la cellule dans laquelle se trouve le front de congestion. Cette cellule est la cellule la plus en amont du sous espace commandable.

Ainsi, nous avons :

$$z(k+1) = z(k) + \begin{cases} \epsilon_5(k) & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \\ \epsilon_4(k) & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_3 \\ \epsilon_3(k) & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_4 \\ \epsilon_2(k) & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_5 \\ \epsilon_1(k) & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_6 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

où  $\epsilon_i(k) = \rho_i(k) - \rho_i^*(k)$ .

Le système (2.3.3) augmenté de l'intégrateur (4.1.2) peut s'écrire sous la forme de représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = (A_{a_{\alpha(k)}} + F_{a_{\alpha(k)}} \cdot \Delta(k) \cdot G_a) \cdot X(k) \\ \quad \quad \quad + B_{a_{\alpha(k)}} \cdot u(k) + E_{a_{\alpha(k)}} \cdot w(k) \\ Z(k) = C_{a_{\alpha(k)}} \cdot X(k) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

avec

$$A_{a_{\alpha(k)}} = \begin{pmatrix} A_{0_{\alpha(k)}} & 0 \\ A_{z_{\alpha(k)}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.4)$$

$$F_{a_{\alpha(k)}} = \begin{pmatrix} F_{1_{\alpha(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

$$G_a = \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

$$B_{a_{\alpha(k)}} = \begin{pmatrix} B_{\alpha(k)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

$$E_{a_{\alpha(k)}} = \begin{pmatrix} f_d \cdot E_{\alpha(k)} & 0 & f_{\phi} \cdot H_{\phi_{M_{\alpha(k)}}} & f_J \cdot H_{J_{\alpha(k)}} & f_w \cdot H_{w_{\alpha(k)}} \\ 0 & -f_z \cdot A_{z_{\alpha(k)}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

$$C_{a_{\alpha(k)}} = \begin{pmatrix} A_{z_{\alpha(k)}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.9)$$

$$w(k) = \begin{pmatrix} d(k) & \rho^*(k) & \phi_M(k) & \rho_J & w_{\Delta}(k) \end{pmatrix}^T, \quad (4.1.10)$$

D'après (4.1.2), nous avons :

$$A_{z_{\alpha(k)}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & , \text{ si } \alpha(k) = \alpha_6 \end{cases}$$

et  $f_d, f_z, f_{\phi}, f_J$  et  $f_w$  sont des coefficients de pondération ajoutés à la matrice  $E_{a_{\alpha(k)}}$  pour pondérer l'influence des différentes perturbations en fonction de leur ordre de grandeur.

## 4.2 Synthèse des contrôleurs : formulation LMI

### 4.2.1 Outils de transformation LMI

Dans un premier temps, nous présentons quelques outils de transformation LMI qui vont nous servir à poser les problèmes d'optimisation LMI nous permettant de calculer les différents contrôleurs.

#### Complément de Schur

**Proposition 4.2.1.** *Pour tout  $Q > 0$  et  $S > 0$  les trois inégalités matricielles suivantes sont équivalentes :*

1.  $\begin{pmatrix} Q & R \\ * & S \end{pmatrix} > 0$
2.  $Q - RS^{-1}R^T > 0$
3.  $S - R^TQ^{-1}R > 0$

#### Lemme de majoration

**Proposition 4.2.2.** *Pour tout  $F$  tel que  $FF^T < 1$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que*

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \epsilon^{-1}DD^T + \epsilon E^T E \quad (4.2.1)$$

### 4.2.2 Stabilisation du système

Les différents contrôleurs PI sont déterminés sous forme de retour d'état du système augmenté (4.1.3). Nous prenons le retour d'état suivant :

$$u(k) = -K_{\alpha(k)}X(k) \quad (4.2.2)$$

Pour des raisons de simplifications, nous prenons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= n \\ \alpha(k+1) &= m \end{aligned}$$

La proposition 4.2.3 nous permet de déterminer les correcteurs  $K_{\alpha(k)}$ . Les contrôleurs ainsi déterminés assurent la stabilité du système en boucle fermée et l'atténuation des

## Chapitre 4. Contrôleur robuste PI à commutations

---

perturbations selon un critère  $H_\infty$ .

**Proposition 4.2.3.** *Si  $\exists Q_n = Q_n^T > 0, \epsilon_n > 0, U_n$  pour chaque mode  $\alpha_n \in \Omega$  tels que la LMI (4.2.3) est vérifiée pour tous couple  $(n, m)$  tel que  $\tau_{n,m} \in \Upsilon$ ,*

$$\begin{pmatrix} \epsilon_n \cdot F_{a_n} F_{a_n}^T - Q_m & A_{a_n} Q_i + B_{a_n} U_n & E_{a_n} & 0 & 0 \\ * & -Q_n & 0 & Q_n G_a^T & Q_n C_{a_n}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_n I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.3)$$

alors :

- Le système augmenté (4.1.3) est stable avec le retour d'état (4.2.2) où  $K_n = U_n Q_n^{-1}$ ,
- Le système augmenté (4.1.3) est robuste aux incertitudes  $\Delta(k)$ ,
- La norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert entre  $w(k)$  et  $Z(k)$  est bornée par  $\gamma$  (pondéré par  $f_d, f_z, f_\phi, f_J$  et  $f_w$  pour les différentes perturbations).

### Preuve 4.2.3 :

Nous choisissons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_n(k) = X(k)^T P_n X(k), n \in \Omega. \quad (4.2.4)$$

où  $P_n$  est une matrice symétrique définie positive. c'est à dire  $P_n = P_n^T > 0$ . Pour assurer la stabilité interne du système et garantir l'atténuation des perturbations, nous écrivons l'inégalité suivante :

$$X(k+1)^T P_m X(k+1) - X(k)^T P_n X(k) + Z(k)^T Z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) < 0 \quad (4.2.5)$$

En utilisant les équations dynamiques du système (4.1.3) dans l'inégalité 4.2.5, et en notant

$$A_{a_n} - B_{a_n} K_n = \Gamma_n, \quad (4.2.6)$$

nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & ((\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a) \cdot X(k) + E_{a_n} \cdot w(k))^T \cdot P_m \cdot ((\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a) \cdot X(k) + E_{a_n} \cdot w(k)) \\ & - X(k)^T P_n X(k) + (C_n X(k))^T (C_n X(k)) - \gamma^2 w(k)^T w(k) < 0, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Cette inégalité peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} X(k) \\ w(k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Pi_{11}^1 & \Pi_{21}^1 \\ * & E_{a_n}^T E_{a_n} - \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(k) \\ w(k) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Pi_{11}^1 & \Pi_{21}^1 \\ * & E_{a_n}^T E_{a_n} - \gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^1 &= (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a)^T P_m (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a) - P_n + C_n^T C_n \\ \Pi_{21}^1 &= (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a)^T P_m E_{a_n} \end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur sur le terme  $\Pi_{11}^1$  de l'équation (4.2.9), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -P_n + C_n^T C_n & 0 & (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a)^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n} \\ * & * & -P_m^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.10)$$

l'inégalité (4.2.10) peut s'écrire sous la forme :

$$Y + \begin{pmatrix} G_a^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta(k)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{a_n}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{a_n} \end{pmatrix} \Delta(k) \begin{pmatrix} G_a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} -P_n + C_n^T C_n & 0 & \Gamma_n^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n} \\ * & * & -P_m^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Le lemme de majoration exposé en sous section 4.2.1 est appliqué à l'inégalité (4.2.11). Ainsi, il existe  $\epsilon_n > 0$  tel que l'inégalité (4.2.10) est majorée par :

$$\begin{pmatrix} -P_n + C_n^T C_n + \epsilon_n^{-1} G_a^T G_a & 0 & \Gamma_n^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n} \\ * & * & -P_m^{-1} + \epsilon_n F_{a_n} F_{a_n}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.13)$$

$$(4.2.14)$$

Nous appliquons le complément de Schur et obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -P_n + C_n^T C_n + \epsilon_n^{-1} G_a^T G_a & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \Gamma_n^T \\ E_{a_n}^T \end{pmatrix} \left( P_m^{-1} - \epsilon_n F_{a_n} F_{a_n}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_n & E_{a_n} \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

En multipliant (4.2.15) à droite et à gauche par  $\begin{pmatrix} P_n^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  et en appliquant le

complément de Schur, nous obtenons (4.2.16).

$$\begin{pmatrix} -P_m^{-1} + \epsilon_n F_{a_n} F_{a_n}^T & \Gamma P_n^{-1} & E_{a_n} \\ * & \Pi_{22}^2 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.16)$$

$$\Pi_{22}^2 = -P_n^{-1} + P_n^{-1} C_n^T C_n P_n^{-1} + \epsilon_n^{-1} P_n^{-1} G_a^T G_a P_n^{-1}$$

Enfin, en appliquant deux fois le complément de Schur sur l'élément  $\Pi_{22}^2$ , l'inégalité (4.2.16) devient :

$$\begin{pmatrix} -P_m^{-1} + \epsilon_n F_{a_n} F_{a_n}^T & \Gamma P_n^{-1} & E_{a_n} & 0 & 0 \\ * & -P_n^{-1} & 0 & P_n^{-1} G_a^T & P_n^{-1} C_n^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_n I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.17)$$

En prenant  $P_n^{-1} = Q_n$ ,  $P_m^{-1} = Q_m$  et  $U_n = K_n P_n^{-1}$  nous obtenons (4.2.3), avec  $Q_n = Q_n^T > 0$ ,  $Q_m = Q_m^T > 0$   $\epsilon_n > 0$ .

□

### 4.2.3 Placement des pôles du système

Nous cherchons à stabiliser notre système en plaçant les pôles dans une certaine région afin d'améliorer ses performances. Cette procédure s'appelle la D-stabilisation. Les contraintes pouvant être imposées sur les pôles peuvent être des contraintes de secteur comme proposé dans [Haddad & Bernstein, 1992], [Arzelier et al., 1993], [Furuta & Kim, 1987]. Les aspects de robustesse du placement des pôles ont été étudiés dans [Chilali et al., 1999], [Chilali et al., 1997], [Garcia & Bemussou, 1995], [Arzelier et al., 1993]. Ces contraintes sur le placement des pôles en boucle fermée peuvent être associées à des objectif de régulation notamment à une optimisation  $H_\infty$  [Chilali & Gahinet, 1996], [Bambang et al., 1993].

Nous choisissons de placer nos pôles dans un disque. D'après [Montagner et al., 2003], placer les pôles de la matrice  $\frac{A_n - B_n K_n - \sigma I}{r}$  dans le disque unité revient à placer les pôles de la matrice  $A_n - B_n K_n$  dans un disque de centre  $\sigma$  et de rayon  $r$ . Ce disque est représenté sur la Figure 4.2

Nous pouvons donc établir la proposition suivante :

**Proposition 4.2.4.** *Si  $\exists Q_n = Q_n^T > 0$ ,  $e_n > 0$ ,  $U_n$  pour chaque mode  $\alpha_n \in \Omega$  tel que la*

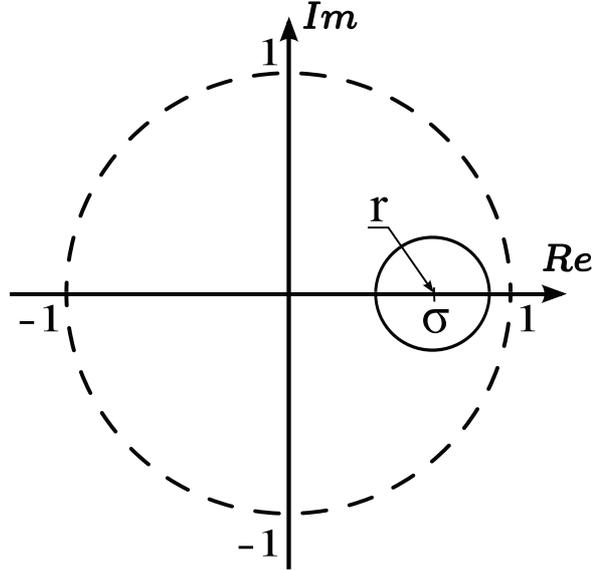


FIG. 4.2 – Placement des pôles dans un disque.

LMI (4.2.18) est vérifiée pour toutes les transitions  $\tau_{n,m} \in \Upsilon$ ,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_n F_{a_n} F_{a_n}^T - r Q_m & A_{a_n} Q_n + B_{a_n} U_n - \sigma Q_n & r E_{a_n} & 0 & 0 \\ * & -r Q_n & 0 & Q_n G_a^T & Q_n C_a^T \\ * & * & -r \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_n I & 0 \\ * & * & * & * & -r^{-1} I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.2.18)$$

Alors :

- Les pôles du système en boucle fermée avec le retour d'état (4.2.2) où  $K_n = U_n Q_n^{-1}$  sont situés dans un disque de centre  $\sigma$  et de rayon  $r$ ,
- Le système augmenté (4.1.3) est robuste aux incertitudes  $\Delta(k)$ ,
- La norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert entre  $w(k)$  et  $Z(k)$  est bornée par  $\gamma$  (pondéré par  $f_d, f_z, f_\phi, f_J$  et  $f_w$  pour les différentes perturbations).

#### Preuve 4.2.4 :

En appliquant la proposition 4.2.3 avec

$$\Gamma_n = \frac{A_n - B_n \cdot K_n - \sigma I}{r}, \quad (4.2.19)$$

nous obtenons la LMI (4.2.18). Ainsi d'après les conclusions de [Montagner et al., 2003], la proposition est démontrée.

□

### 4.3 Résultats de synthèse

Dans cette section, nous présentons les résultats de synthèse de régulateurs  $K_{\alpha(k)}$  associés à chaque mode de fonctionnement du système. Ces régulateurs sont calculés en utilisant la propriété 4.2.4. Les modes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont des propriétés similaires, ainsi, nous calculons un seul régulateur pour ces deux modes.

Cette propriété nous permet de placer les pôles du système en boucle fermée. Nous définissons le disque pour le placement des pôles avec les paramètres  $\sigma = 0.6$  et  $r = 0.35$  pour les transitions  $\tau_{ij}, i = j$  et  $\sigma = 0$  et  $r = 1$  pour les transitions  $\tau_{ij}, i \neq j$ . C'est à dire que nous assurons le placement de pôles lorsque le système reste dans un mode particulier, et nous assurons la stabilité du système aux instants de commutation. Nous faisons ce choix afin de réduire le conservatisme de l'approche proposée. Le résultat du placement des pôles pour chaque mode est représenté en Figure 4.3.

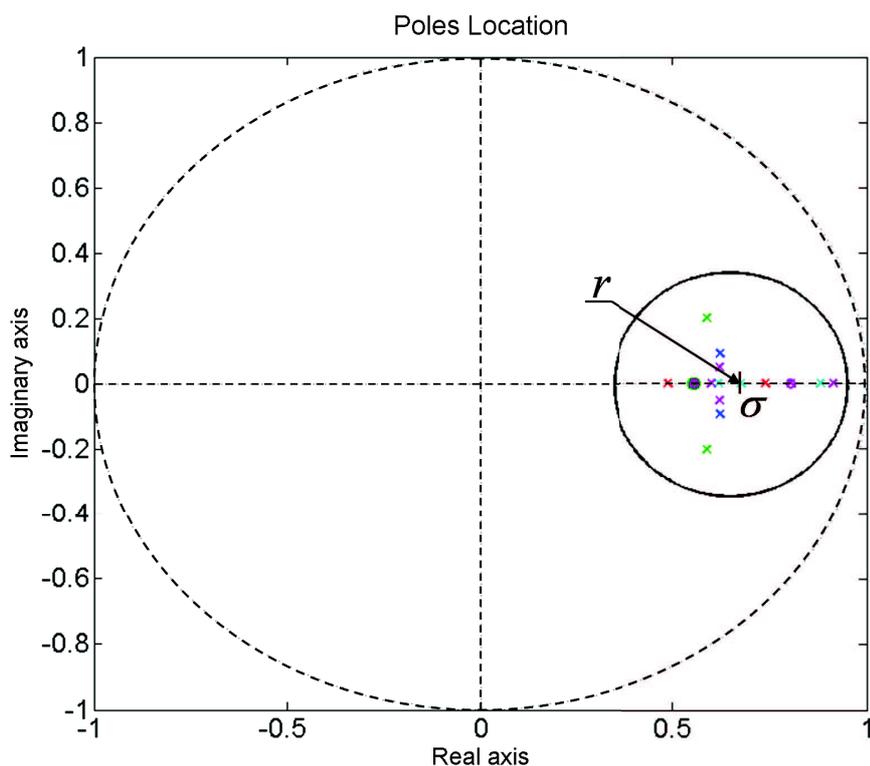


FIG. 4.3 – Résultat du placement de pôles.

Nous voyons que pour chaque mode, les pôles sont bien placés dans la zone définie en section 4.2.3.

## Chapitre 4. Contrôleur robuste PI à commutations

---

Nous définissons les pondérations de la matrice (4.1.8) associées à chaque type de perturbations externes.

$$\begin{aligned}f_d &= 1, \\f_z &= 1, \\f_J &= \frac{1}{22}, \\f_p &= 1, \\f_w &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ces pondérations sont choisies en fonction des ordres de grandeurs des différents types perturbations.

La Figure 4.4 représente les fonctions de transfert en boucle fermée du système dans les différents modes de fonctionnement. Pour chacun des modes considérés, nous obtenons une erreur statique nulle. La bande passante est fixée par les contraintes sur les pôles.

La Figure 4.5 représente les fonctions de transfert entre les différentes perturbations et la sortie de régulation pour chacun des modes de fonctionnement. Les différentes perturbations sont atténuées d'au moins 25 dB. Le nombre de perturbations n'est pas la même pour chaque mode de fonctionnement. En effet, la matrice (4.1.8) contient dans certains modes des colonnes de 0.

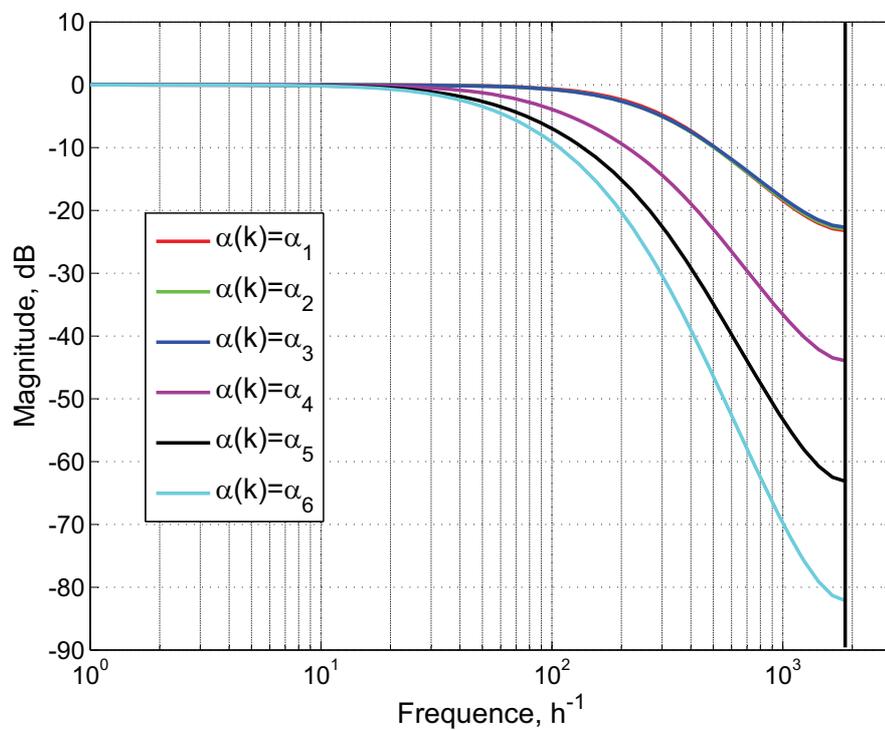


FIG. 4.4 – Transfert du système en boucle fermée

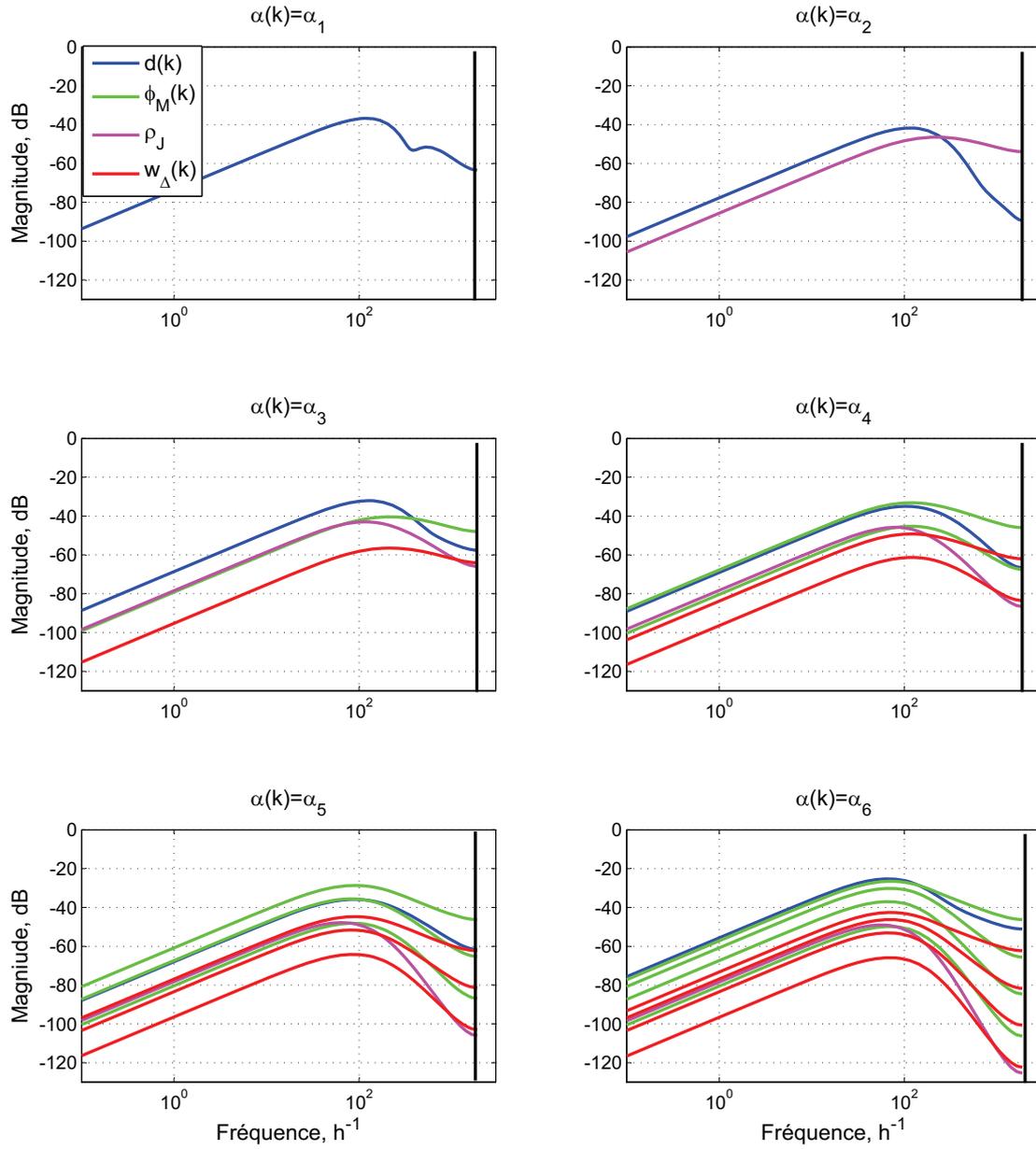


FIG. 4.5 – Fonctions de sensibilité aux différentes perturbations

## 4.4 Validation, simulation sur données réelles

### 4.4.1 Scénario de test

Nous testons le régulateur PI sur le scénario de test utilisé dans la section 2.4. Nous nous intéressons plus particulièrement aux 5 premières cellules de l'aménagement représenté en Figure 2.12 et à la période de congestion. Ainsi, nous sélectionnons la période de 4h où les densités sont les plus fortes. Les conditions aux limites sont imposés par le flux entrant dans la première cellule du tronçon principal (Figure 4.6) et par le flux entrant dans la rampe d'accès (Figure 4.7).

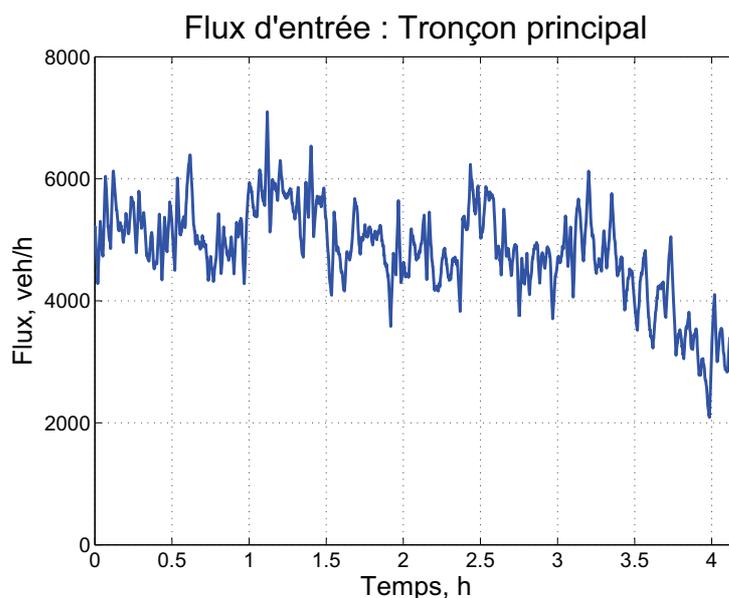


FIG. 4.6 – Conditions aux limites : Flux entrant dans le tronçon principal.

La réponse libre du système est représenté en Figure 4.8. Nous voyons que 3 congestions se forment en amont de la rampe d'accès. Une première de faible amplitude, une seconde de forte amplitude et une dernière d'amplitude moyenne. Nous appellerons respectivement ces congestions 1, 2 et 3.

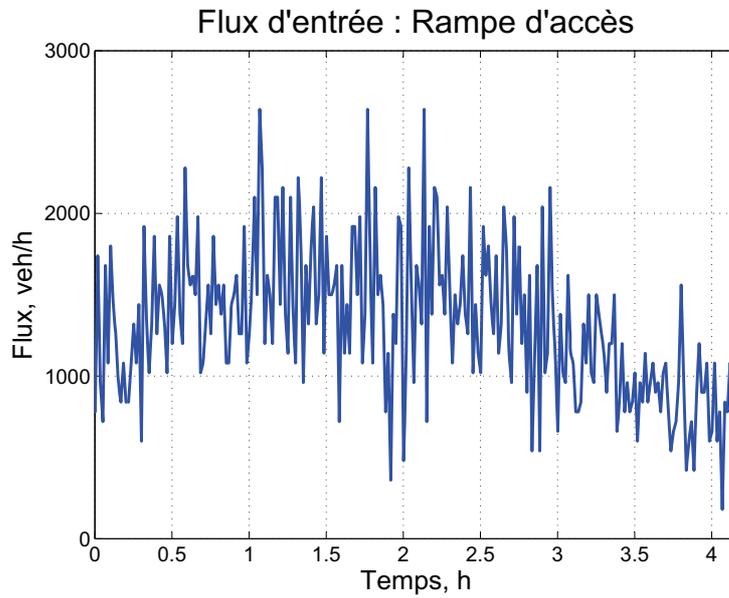


FIG. 4.7 – Conditions aux limites : Flux entrant dans la rampe d'accès.

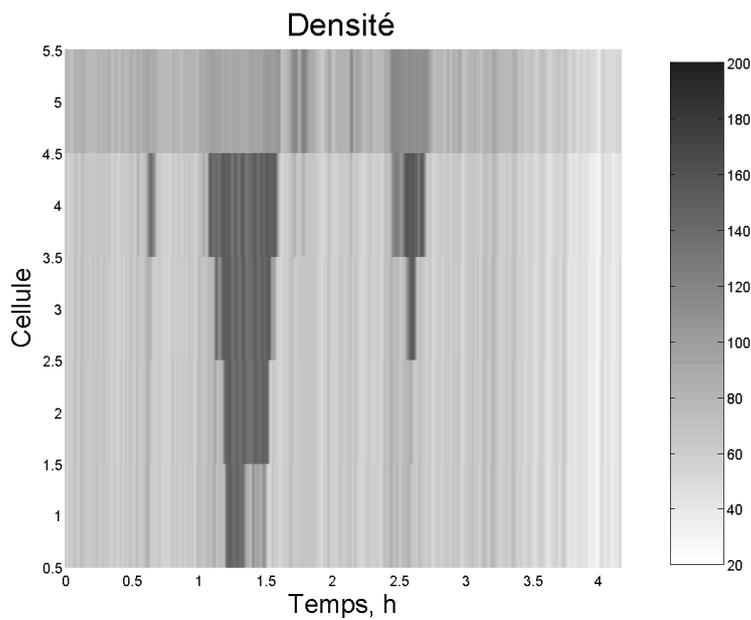


FIG. 4.8 – Réponse libre du système.

### 4.4.2 Profils optimaux

Les profils optimaux de densité à appliquer dans les différentes cellules sont calculés grâce à la méthode présentée dans [Gomes & Horowitz, 2006]. Ils sont représentés sur la Figure 4.9.

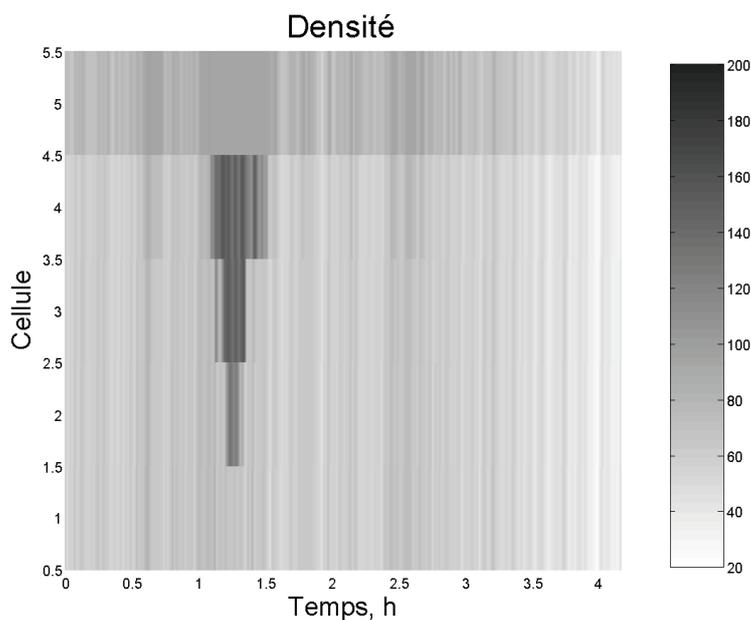


FIG. 4.9 – Profils de densité optimaux.

L'influence des congestions 1 et 3 ont été effacé et l'influence de la congestion 2, de plus forte amplitude, a été atténuée.

### 4.4.3 Contrôleur PI à commutations

Nous implantons les régulateurs PI synthétisés dans la section 4.3. Nous utilisons la loi de commutation dynamique développée dans le chapitre 3. Nous ne tenons pas compte des limitations de la commande due à la capacité des rampes d'accès. Les densités dans les différentes cellules ainsi obtenues sont représentées sur la Figure 4.10

La Figure 4.11 reprend les densités des différentes cellules (traits pleins) et présente les profils de densités optimaux (trait pointillés), ainsi que la loi de commutation et la commande appliquée au système.

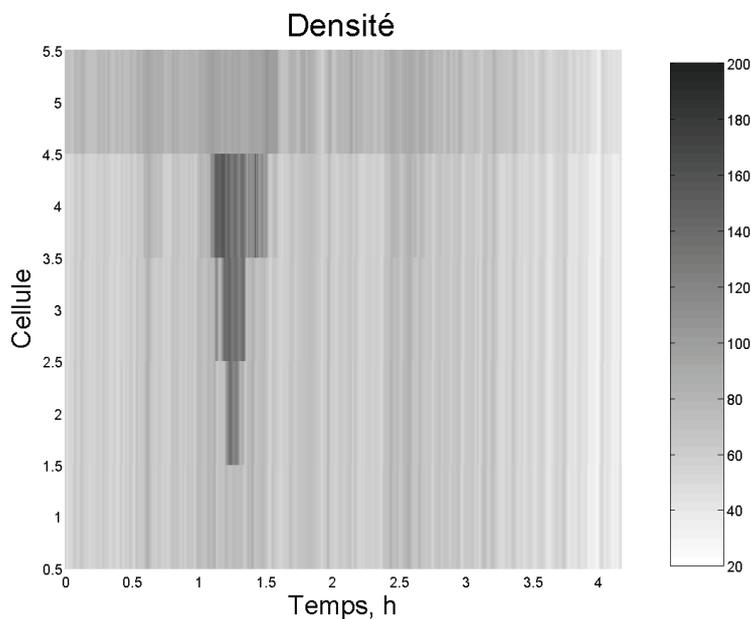


FIG. 4.10 – Contrôleur PI à commutation : Réponse du système.

Nous voyons que le régulateur PI à commutation proposé dans ce chapitre permet de suivre les profils de densités optimaux. Nous avons une bonne précision au niveau du front de congestion, et cela malgré les différentes perturbations additives du système et les paramètres incertains. Nous voyons cependant un problème de commutation rapide et d'oscillation de la commande aux instants de changement de contrôleurs. Cela est dû au fait que les profils de densité sont calculés avec le système nominal et des conditions aux limites estimés. De plus, le régulateur activé ne correspond pas forcément au mode de fonctionnement du système lorsque nous sommes proches des commutations. Ce constat nous pousse à proposer une nouvelle loi de commutation permettant d'éviter ces problèmes.

### 4.5 Résumé des contributions

Dans ce chapitre, nous avons proposé un régulateur PI robuste à commutation. Ce régulateur tient compte des mesures de densité en aval et en amont de la rampe d'accès. Le schéma de régulation s'adapte au mode de fonctionnement du système estimé grâce aux résultats du chapitre 3. Les incertitudes modélisées dans la section 2.2 nous permettent de synthétiser des contrôleurs robustes aux incertitudes paramétriques. Les résultats de simulation sont bons mais nécessitent certaines améliorations. Les travaux réalisés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication :

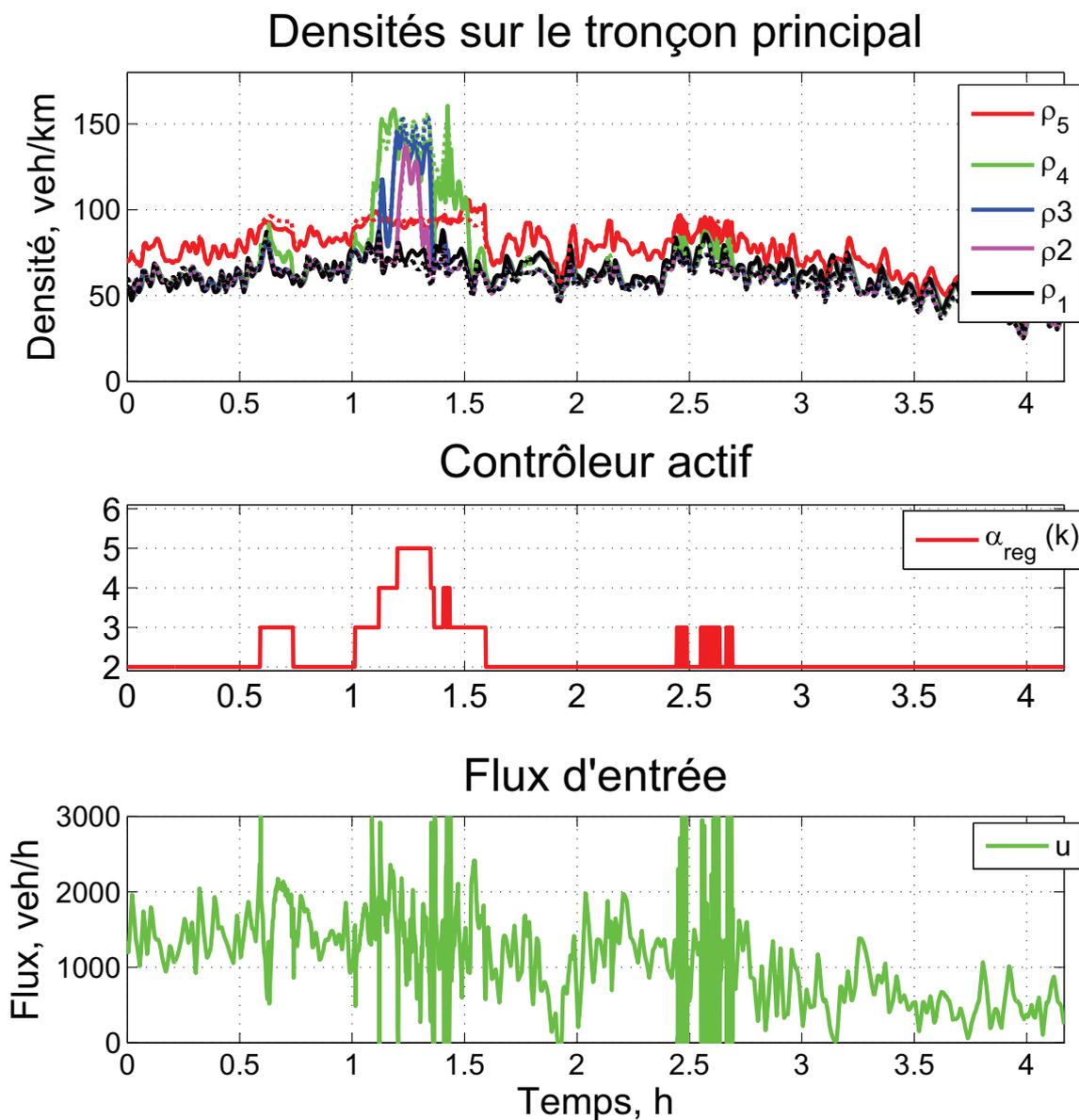


FIG. 4.11 – Contrôleur PI à commutation : Résultats de simulation.

Antoine Lemarchand, Damien Koenig, John J. Martinez "Robust Design of a Switched PI Controller for an Uncertain Traffic Model", 49<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Décembre 2010, Atlanta, USA.

# Chapitre 5

## Contrôleur PI à commutation douces

L'approche proposée précédemment fait apparaître des discontinuités de la commande aux instants de commutation et des problèmes de commutations rapides. Pour remédier à ces problèmes, nous proposons d'établir un contrôleur PI à commutation douce.

Nous partons du constat suivant : dans certaines partitions de l'espace d'état, le mode de fonctionnement est incertain en raison des incertitudes paramétriques. Dans ces partitions, nous appliquons une combinaison convexe des régulateurs calculés pour chacun des modes de fonctionnement. Lorsque le mode de fonctionnement est certain nous appliquons le régulateur calculé pour ce mode. Ainsi, nous choisissons le retour d'état suivant :

$$u(k) = \sum_{\alpha(k) \in \kappa(\rho(k))} -\mu_{\alpha(k)}(\rho(k)) K_{\alpha(k)} \cdot X(k) \quad (5.0.1)$$

où  $\kappa(\rho(k))$  représente l'ensemble des modes pouvant être actifs pour un profil de densité  $\rho(k)$  et où les lois de pondération  $\mu_{\alpha(k)}(\rho(k))$  ont les propriétés suivantes :

$$\mu_{\alpha(k)}(\rho(k)) = 0, \alpha(k) \notin \kappa(\rho(k)) \quad (5.0.2)$$

$$\mu_{\alpha(k)}(\rho(k)) \geq 0, \alpha(k) \in \kappa(\rho(k)) \quad (5.0.3)$$

$$\sum_{\alpha(k) \in \kappa(\rho(k))} \mu_{\alpha(k)}(\rho(k)) = 1 \quad (5.0.4)$$

Le schéma d'implantation du contrôleur proposé dans ce chapitre est représenté en Figure 5.1.

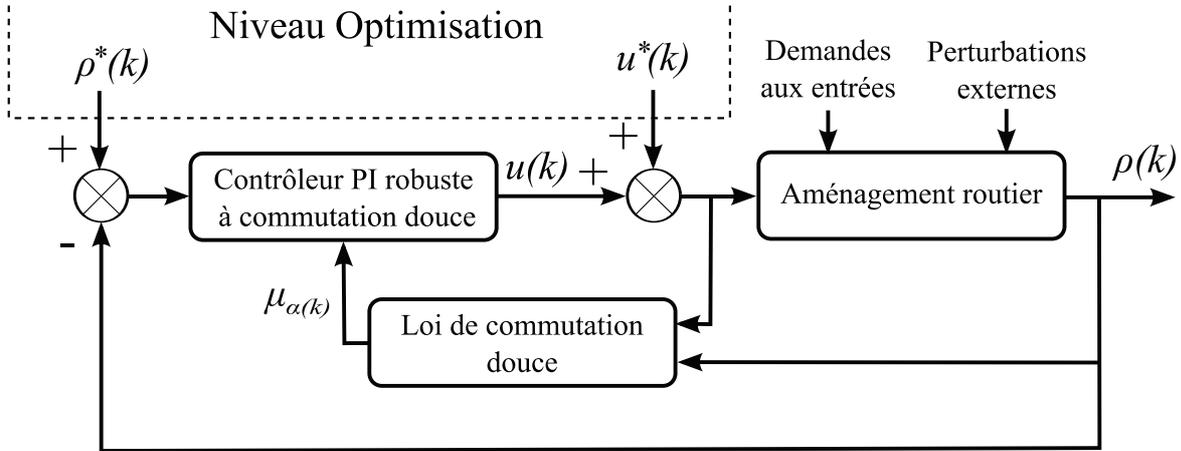


FIG. 5.1 – Schéma d'implantation du contrôleur PI à commutations douces

### Plan du chapitre

Dans la section 5.1, nous étudions les incertitudes sur la loi de commutation qui motive le choix de cette approche. Dans la section 5.2, nous proposons des lois de commutation douce. Ces dernières nous permettent de calculer la combinaison convexe de contrôleurs à appliquer au système. Ensuite, nous définissons une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux [Johansson et al., 1999; Johansson & Rantzer, 1998] afin de montrer la stabilité en boucle fermée de l'approche proposée (section 5.3). Dans la section 5.4, nous proposons une formulation LMI nous permettant de synthétiser les régulateurs PI robustes pour chacun des modes de fonctionnement. Enfin, des simulations valident l'approche développée en section 5.5.

### Sommaire

Plan du chapitre . . . . .	108
<b>5.1 Etude des incertitudes sur la loi de commutation . . . . .</b>	<b>109</b>
5.1.1 Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$ . . . . .	109
5.1.2 Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FD}$ . . . . .	111
5.1.3 Etude des incertitudes sur la loi de commutation globale . . . . .	111
<b>5.2 Loi de commutation douce . . . . .</b>	<b>113</b>
5.2.1 Loi de commutation statique . . . . .	113
5.2.2 Loi de commutation dynamique . . . . .	118
<b>5.3 Fonction de Lyapunov Quadratique par Morceaux (PWQ) . . . . .</b>	<b>118</b>
5.3.1 Définition de la fonction de Lyapunov . . . . .	119

5.3.2	Construction de la fonction de Lyapunov . . . . .	120
	Continuité aux frontières des sous-espaces, jonctions de $\mathfrak{J}_{FC}$ . .	120
	Continuité aux frontières des sous-espace, jonctions de $\mathfrak{J}_{FD}$ . .	123
	Continuité aux frontières des sous-espace, problème global . . .	123
<b>5.4</b>	<b>Synthèse des régulateurs robustes locaux : Formulation LMI</b>	<b>124</b>
<b>5.5</b>	<b>Validation, simulations sur données réelles . . . . .</b>	<b>127</b>
5.5.1	Contrôleur PI à commutation douce . . . . .	127
5.5.2	Contrôleur PI à commutation douce avec saturation de la commande . . . . .	132
<b>5.6</b>	<b>Résumé des contributions . . . . .</b>	<b>135</b>

---

## 5.1 Etude des incertitudes sur la loi de commutation

Les équations (2.1.7),(2.1.8) et (2.1.9) permettant de déterminer le mode de fonctionnement  $\alpha(k)$  des jonctions sont fonctions des paramètres incertains (2.2.1). Ainsi, dans certaines zones de l'espace d'état, le mode de fonctionnement du système est incertain. Nous commençons notre étude en nous intéressant au mode de fonctionnement d'une jonction en particulier.

### 5.1.1 Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FC}$

Nous étudions les incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions  $\mathfrak{J}_{FC}$ , c'est à dire les jonctions qui admettent les modes fluide et congestionné.

Nous définissons les notations suivantes :

$$v_i^+ = v_{0_i} + \Delta v_i, \quad (5.1.1)$$

$$v_i^- = v_{0_i} - \Delta v_i, \quad (5.1.2)$$

$$w_i^+ = w_{0_i} + \Delta w_i, \quad (5.1.3)$$

$$w_i^- = w_{0_i} - \Delta w_i. \quad (5.1.4)$$

Ainsi, d'après (2.1.7),(2.1.8) et (2.1.9) la jonction  $i$  est de manière certaine en mode fluide si

$$v_{i-1}^+ \rho_{i-1}(k) \leq w_i^- (\rho_{J_i} - \rho_i(k)). \quad (5.1.5)$$

Elle est de manière certaine en mode congestionné si

$$v_{i-1}^- \rho_{i-1}(k) \geq w_i^+ (\rho_{J_i} - \rho_i(k)) \quad (5.1.6)$$

Lorsque (5.1.5) et (5.1.6) ne sont pas vérifiées, le mode de fonctionnement de la jonction dépend de la valeur des paramètres incertains définis par (2.2.1).

Ainsi, pour chaque jonction  $\mathfrak{J}_{FC}$ , nous définissons 3 partitions de l'espace.  $\Psi_{F_i}$ , le sous espace dans lequel la jonction  $i$  est en mode fluide. Il est défini par la condition (5.1.5).  $\Psi_{C_i}$ , le sous espace dans lequel la jonction  $i$  est en mode congestionné. Il est défini par la condition (5.1.6). Et  $\Psi_{FC_i}$ , le sous espace où le mode de fonctionnement de la jonction  $i$  est incertain. Ces trois sous-espaces sont représentés dans l'espace d'état en Figure 5.2. La trajectoire  $\tau_{FC}$  représenté sur la Figure 5.2 représente une trajectoire de transition classique entre le mode fluide et congestionné au passage d'une congestion dans la jonction  $i$

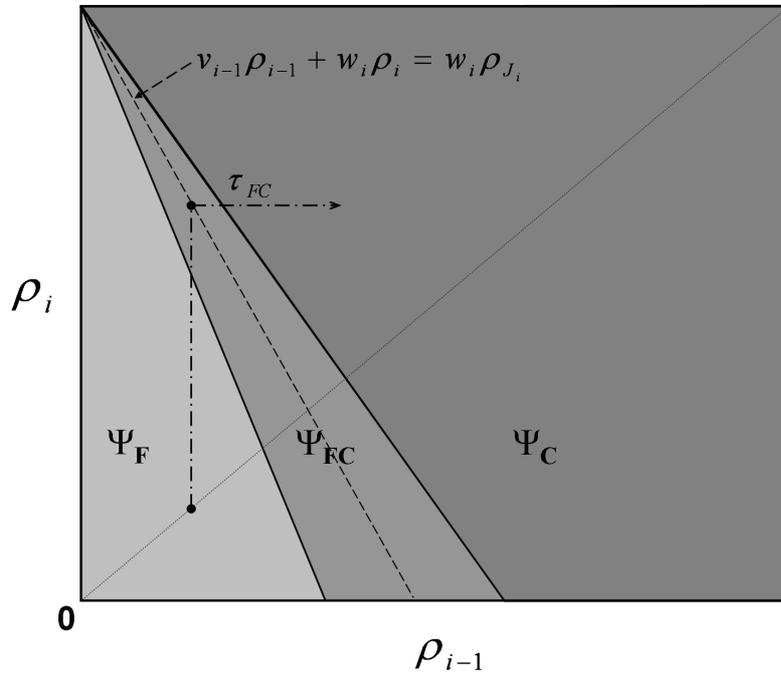


FIG. 5.2 – Sous espaces .

### 5.1.2 Etude des incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions $\mathfrak{J}_{FD}$

Nous étudions les incertitudes sur la loi de commutation pour les jonctions  $\mathfrak{J}_{FD}$ , c'est à dire les jonctions qui admettent les modes fluide et découplé.

Nous définissons les notations suivantes :

$$\phi_{M_i}^+ = \phi_{M_{0_i}} + \Delta\phi_{M_i}, \quad (5.1.7)$$

$$\phi_{M_i}^- = \phi_{M_{0_i}} - \Delta\phi_{M_i}. \quad (5.1.8)$$

Ainsi, d'après (2.1.7),(2.1.8) et (2.1.9) la jonction  $i$  est de manière certaine en mode fluide si

$$v_{i-1}^+ \rho_{i-1}(k) \leq \phi_{M_i}^-. \quad (5.1.9)$$

Elle est de manière certaine en mode découplé si

$$v_{i-1}^- \rho_{i-1}(k) \geq \phi_{M_i}^+. \quad (5.1.10)$$

Dans le sous espace où à la fois (5.1.9) et (5.1.10) ne sont pas vérifiées, le mode de fonctionnement de la jonction dépend de la valeur des paramètres incertains définis par (2.2.1).

Ainsi, pour chaque jonction de  $\mathfrak{J}_{FD}$ , nous définissons 3 sous espace.  $\Psi_{F_i}$ , le sous espace dans lequel la jonction  $i$  est en mode fluide. Il est défini par la condition (5.1.9).  $\Psi_{C_i}$ , le sous espace dans lequel la jonction  $i$  est en mode congestionné. Il est défini par la condition (5.1.10). Et  $\Psi_{FD_i}$ , le sous espace où le mode de fonctionnement de la jonction  $i$  est incertain. Ces trois sous-espaces sont représentés dans l'espace d'état en Figure 5.3. La trajectoire  $\tau_{FD}$  représenté sur la Figure 5.2 représente une trajectoire de transition classique entre le mode fluide et découplé lors de l'apparition d'une congestion en amont de la jonction  $i$

### 5.1.3 Etude des incertitudes sur la loi de commutation globale

Pour la configuration présentée en section 2.5, nous découpons notre espace d'état en 11 sous espaces correspondant à chaque mode et à chaque transition entre mode

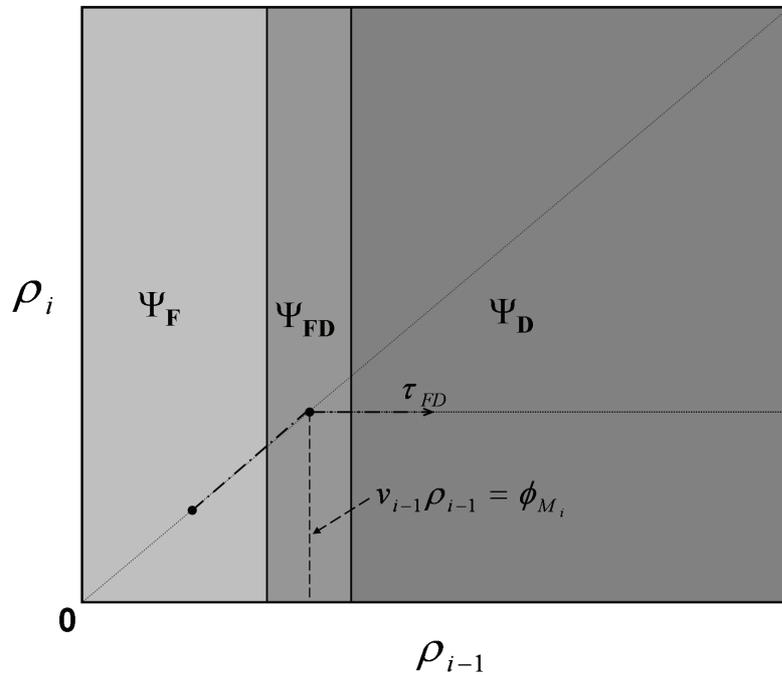


FIG. 5.3 – Mode subspaces for junction  $i$ .

contigus. Nous notons  $\bar{\Psi}$  l'ensemble de ces sous espaces. Ils sont définis grâce aux résultats des sous-sections précédentes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{F_5} \cap \Psi_{F_6} \\
\Psi_2 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{F_5} \cap \Psi_{FD_6} \\
\Psi_3 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{F_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_4 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{FC_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_5 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_6 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{FC_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_7 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{C_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_8 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{FC_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_9 &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{F_2} \cap \Psi_{C_3} \cap \Psi_{C_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_{10} &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{FC_2} \cap \Psi_{F_3} \cap \Psi_{F_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6} \\
\Psi_{11} &= \Psi_{F_1} \cap \Psi_{C_2} \cap \Psi_{C_3} \cap \Psi_{C_4} \cap \Psi_{C_5} \cap \Psi_{D_6}
\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Nous notons  $\kappa(\rho(k))$  l'ensemble des modes du système pouvant être actif à l'instant  $k$ . Nous remarquons que pour tout l'espace d'état,  $\kappa(\rho(k))$  contient 1 ou 2 éléments.

## 5.2 Loi de commutation douce

Nous proposons deux lois de commutation. Une loi de commutation statique basée sur une étude statistique des données de terrain, et une loi de commutation dynamique basée sur les résultats du chapitre 3.

### 5.2.1 Loi de commutation statique

Afin de définir les pondérations de la combinaison convexe (5.0.1), nous effectuons une analyse statistique de la répartition des incertitudes paramétriques. Cette étude est effectuée sur des données de terrain. La Figure 5.4 représente les densités de probabilité des incertitudes  $\delta v$  et  $\delta w$  sur un intervalle normalisé entre -1 et 1.

Ainsi, nous pouvons caractériser le sous espace  $\Psi_{FC_i}$  en calculant la probabilité de se trouver en mode fluide ou congestionné. Cette probabilité est obtenue facilement en intégrant le produit de convolution entre les densités de probabilité de  $\delta v$  et  $\delta w$ . La Figure 5.5 représente la probabilité de se trouver en mode congestionné  $\mu_{C_i}(x)$  sur un intervalle normalisé qui est l'image du sous espace  $\Psi_{FC_i}$ . Nous proposons d'approximer cette probabilité par une fonction de la forme :

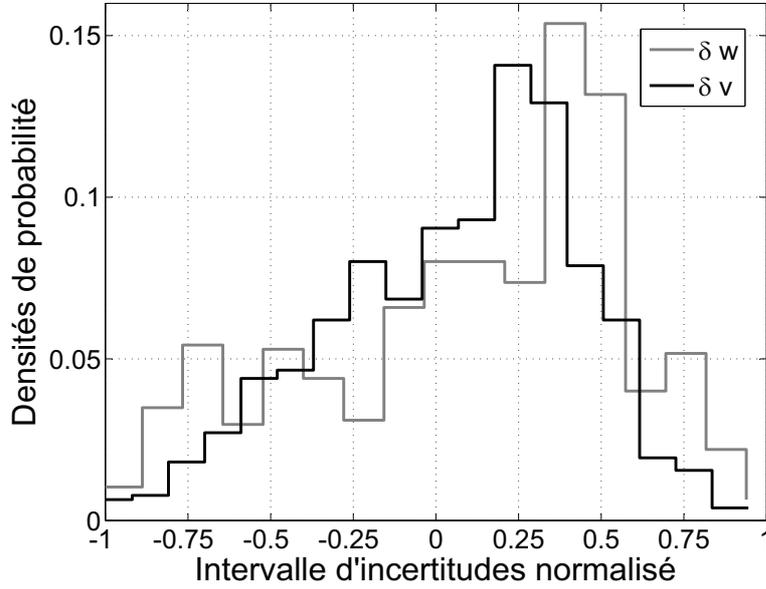


FIG. 5.4 – Fonctions de densité de probabilité des incertitudes  $\delta v$  et  $\delta w$  sur un intervalle normalisé.

$$\mu(k) = \frac{\arctan\left(\left(\frac{x-a(k)}{b(k)-a(k)} - .5\right) \cdot \beta\right) + 1}{2 * \arctan(\beta/2)} \quad (5.2.1)$$

où  $a$  et  $b$  sont les bornes du sous espace pouvant être calculées grâce à (5.1.5) et (5.1.6), et  $\beta$  un paramètre permettant de régler la pente de la tangente au point d'inflexion. Pour un  $\rho_i$  fixé, nous avons :

$$a(k) = \rho_{i-1}^-(k) = \frac{w_i^-(\rho_{J_i} - \rho_i(k))}{v_{i-1}^+} \quad (5.2.2)$$

$$b(k) = \rho_{i-1}^+(k) = \frac{w_i^+(\rho_{J_i} - \rho_i(k))}{v_{i-1}^-} \quad (5.2.3)$$

Une comparaison de la fonction d'approximation et de la fonction de probabilité est représentée en Figure 5.5.

Ainsi, pour les jonctions  $\mathfrak{J}_{FC}$ , nous définissons  $\mu_{F_i}(\rho)$  et  $\mu_{C_i}(\rho)$ , les probabilités que la jonction  $i$  soit respectivement en mode fluide ou congestionné :

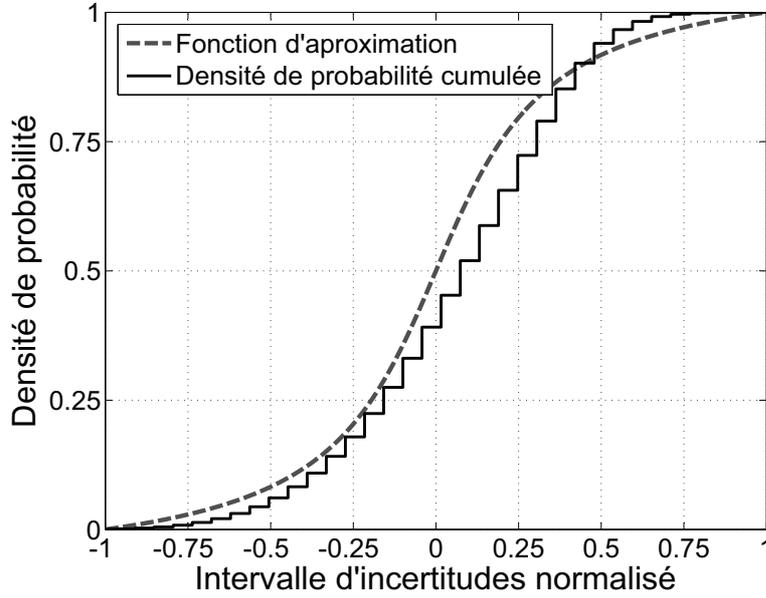


FIG. 5.5 – Fonction de probabilité cumulée, fonction d'approximation ( $\beta = 8, a = -1, b = 1$ ).

$$\mu_{C_i}(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{si } \rho_i < \rho_{i-1}^- \\ 1, & \text{si } \rho_i > \rho_{i-1}^+ \\ \frac{\arctan\left(\frac{\rho_i - \rho_{i-1}^-}{\rho_{i-1}^+ - \rho_{i-1}^-} - 0.5\right) \cdot \beta + 1}{2 \cdot \arctan(\beta/2)}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

$$\mu_{F_i}(\rho) = 1 - \mu_{C_i}(\rho) \quad (5.2.5)$$

La Figure 5.6 représente les probabilités  $\mu_{F_i}(\rho)$  et  $\mu_{C_i}(\rho)$  pour les jonctions  $\mathfrak{J}_{FC}$ .

Pour les jonctions de  $\mathfrak{J}_{FD}$ , nous définissons les bornes

$$a(k) = \rho_{i-1}^- = \frac{\phi_{M_i}^-}{v_{i-1}^+} \quad (5.2.6)$$

$$b(k) = \rho_{i-1}^+ = \frac{\phi_{M_i}^+}{v_{i-1}^-} \quad (5.2.7)$$

Ainsi, nous définissons  $\mu_{F_i}(\rho)$  et  $\mu_{D_i}(\rho)$ , les probabilités que la jonction  $i$  soit respectivement en mode fluide ou découplé, de la manière suivante :

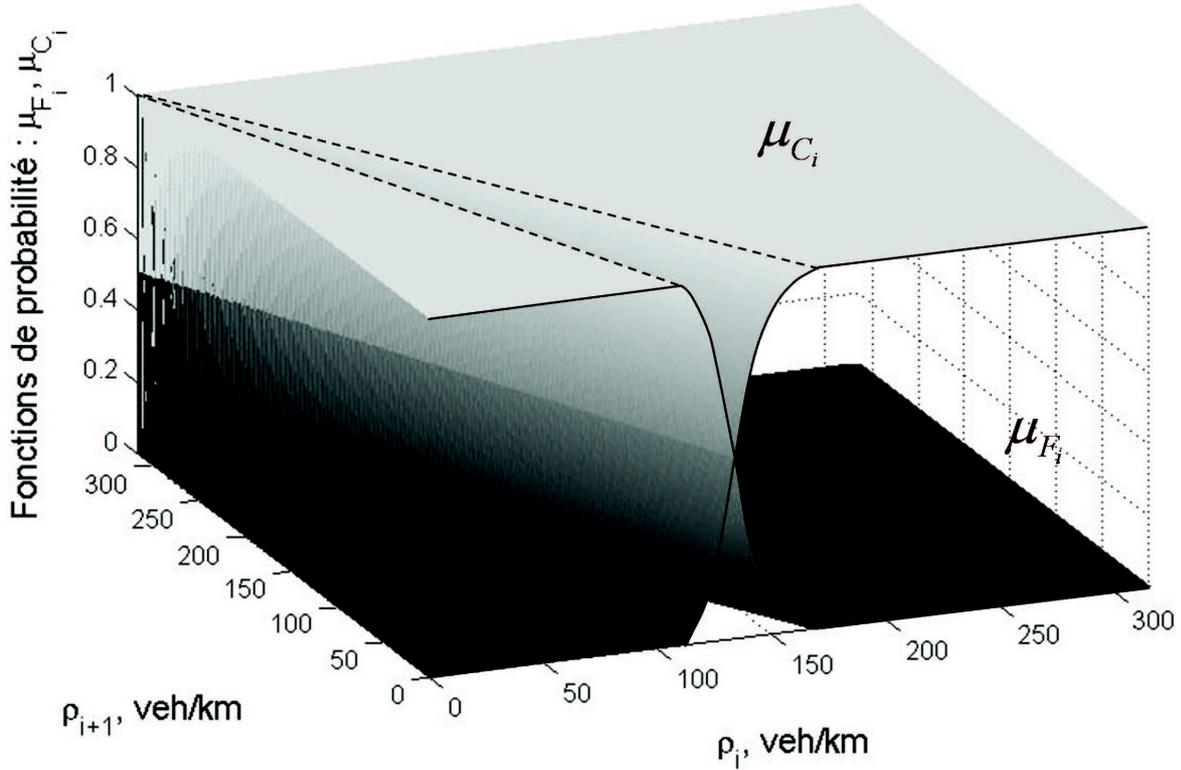


FIG. 5.6 – Fonctions de probabilité :  $\mu_{F_i}(\rho), \mu_{C_i}(\rho), i \in \mathbb{J}_{FC}$ .

$$\mu_{D_i}(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{si } \rho_i < \rho_{i-1}^- \\ 1, & \text{si } \rho_i > \rho_{i-1}^+ \\ \frac{\arctan\left(\left(\frac{\rho_i - \rho_{i-1}^-}{\rho_{i-1}^+ - \rho_{i-1}^-} - 0.5\right) \cdot \beta\right) + 1}{2 \cdot \arctan(\beta/2)}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

$$\mu_{F_i}(\rho) = 1 - \mu_{D_i}(\rho) \quad (5.2.9)$$

La Figure 5.7 représente les probabilités  $\mu_{F_i}(\rho)$  et  $\mu_{D_i}(\rho)$  pour les jonctions appartenant à  $\mathbb{J}_{FD}$ .

Nous notons  $\mu_{\alpha(k)}$  la probabilité de se trouver dans le mode  $\alpha(k)$ . Ces probabilités peuvent être calculées d'après la définition des sous espaces (5.1.11) comme un produit des probabilités individuelles  $\mu_{F_i}(\rho), \mu_{C_i}(\rho)$  et  $\mu_{D_i}(\rho)$  pour chaque jonction. Ainsi,

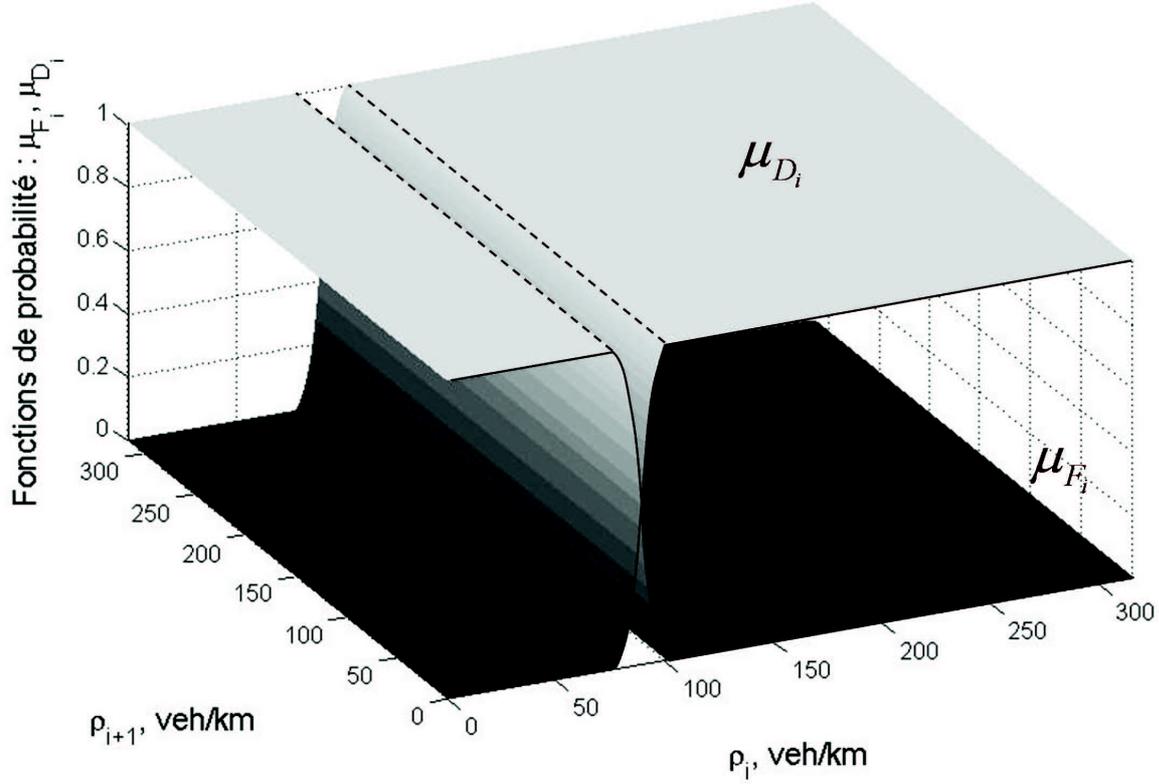


FIG. 5.7 – Fonctions de probabilité :  $\mu_{F_i}(\rho), \mu_{D_i}(\rho), i \in \mathbb{I}_{FD}$ .

$$\begin{aligned}
 \mu_{\alpha_1}(\rho) &= \mu_{F_2}(\rho) \cdot \mu_{F_3}(\rho) \cdot \mu_{F_4}(\rho) \cdot \mu_{F_5}(\rho) \cdot \mu_{F_6}(\rho) \\
 \mu_{\alpha_2}(\rho) &= \mu_{F_2}(\rho) \cdot \mu_{F_3}(\rho) \cdot \mu_{F_4}(\rho) \cdot \mu_{F_5}(\rho) \cdot \mu_{D_6}(\rho) \\
 \mu_{\alpha_3}(\rho) &= \mu_{F_2}(\rho) \cdot \mu_{F_3}(\rho) \cdot \mu_{F_4}(\rho) \cdot \mu_{C_5}(\rho) \cdot \mu_{D_6}(\rho) \\
 \mu_{\alpha_4}(\rho) &= \mu_{F_2}(\rho) \cdot \mu_{F_3}(\rho) \cdot \mu_{C_4}(\rho) \cdot \mu_{C_5}(\rho) \cdot \mu_{D_6}(\rho) \\
 \mu_{\alpha_5}(\rho) &= \mu_{F_2}(\rho) \cdot \mu_{C_3}(\rho) \cdot \mu_{C_4}(\rho) \cdot \mu_{C_5}(\rho) \cdot \mu_{D_6}(\rho) \\
 \mu_{\alpha_6}(\rho) &= \mu_{C_2}(\rho) \cdot \mu_{C_3}(\rho) \cdot \mu_{C_4}(\rho) \cdot \mu_{C_5}(\rho) \cdot \mu_{D_6}(\rho)
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Ces probabilités respectent les propriétés (5.0.2-5.0.4). Cependant, cette loi de commutation dépend directement des mesures de densité. Du fait des bruits de mesure, nous ne pouvons pas implanter ce type de loi de commutation sur le système réel.

### 5.2.2 Loi de commutation dynamique

Nous proposons une nouvelle loi de commutation basée sur les résultats du chapitre 3. En effet, les résidus  $d\phi_{F_i}(k)$ ,  $d\phi_{D_i}(k)$  et  $d\phi_{C_i}(k)$  nous donnent une estimation de la distance entre le flux réel dans la jonction et les flux correspondant respectivement aux modes fluide, découplé et congestionné.

Ainsi, nous définissons les pondérations suivantes :

Pour les jonctions appartenant à  $\mathfrak{J}_{FC}$  :

$$\mu_{F_i}(\rho) = \frac{|d\phi_{C_i}(k)|}{|d\phi_{F_i}(k)| + |d\phi_{C_i}(k)|}, \quad (5.2.11)$$

$$\mu_{C_i}(\rho) = \frac{|d\phi_{F_i}(k)|}{|d\phi_{F_i}(k)| + |d\phi_{C_i}(k)|}. \quad (5.2.12)$$

Pour les jonctions appartenant à  $\mathfrak{J}_{FD}$  :

$$\mu_{F_i}(\rho) = \frac{|d\phi_{D_i}(k)|}{|d\phi_{F_i}(k)| + |d\phi_{D_i}(k)|}, \quad (5.2.13)$$

$$\mu_{D_i}(\rho) = \frac{|d\phi_{F_i}(k)|}{|d\phi_{F_i}(k)| + |d\phi_{D_i}(k)|}. \quad (5.2.14)$$

Nous saturons ces fonctions de pondération pour garantir un rapport maximal entre les deux résidus à partir duquel nous considérons que le mode de fonctionnement est certain.

La Figure 5.8 représente les résidus  $d\phi_F(k)$  et  $d\phi_C(k)$  ainsi que les fonctions de pondération saturées et non-saturées correspondantes. Comme précédemment, les probabilités  $\mu_{\alpha(k)}$  pour chaque mode de fonctionnement sont calculés avec l'équation (5.2.10). Nous pouvons montrer facilement que ces probabilités respectent les propriétés (5.0.2-5.0.4)

## 5.3 Fonction de Lyapunov Quadratique par Morceaux (PWQ)

La fonction de commutation douce que nous avons définie dans la sous-section 5.2 ne nous permet pas d'utiliser la fonction de Lyapunov (4.2.4) utilisée dans le chapitre 4. Dans [Johansson et al., 1999],[Johansson, 1999] les auteurs proposent une fonction de Lyapunov quadratique par morceau adapté à notre système.

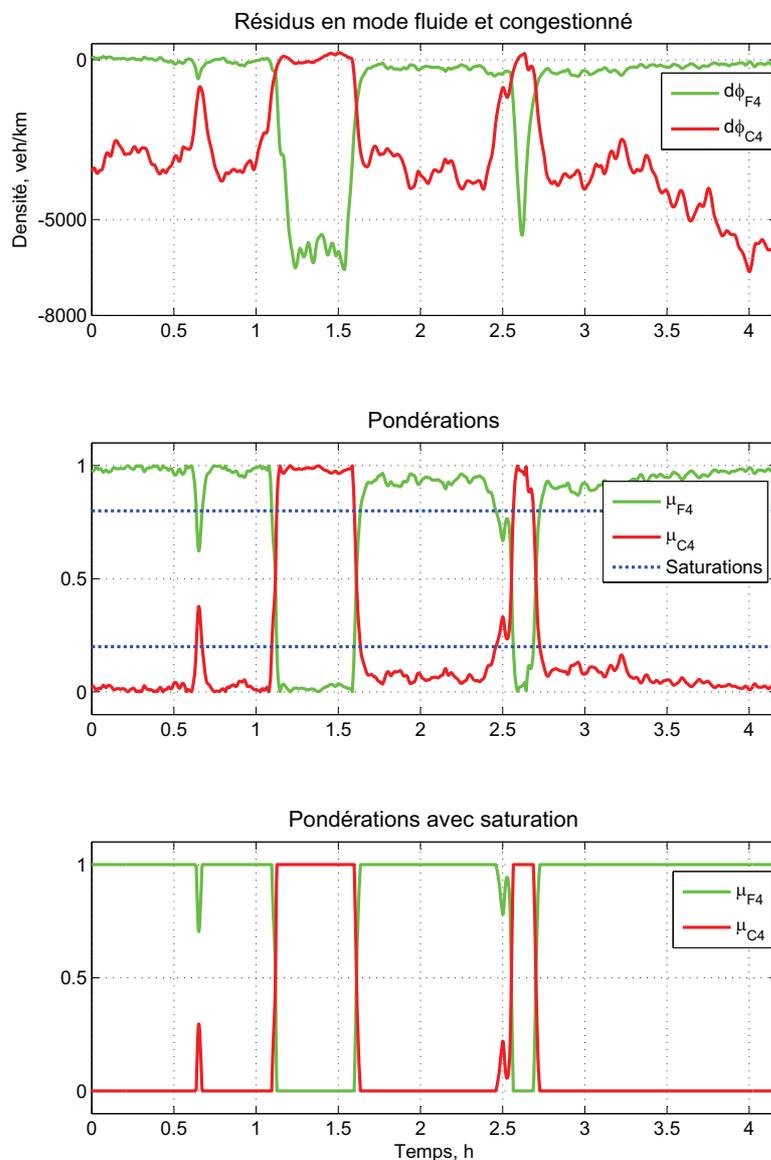


FIG. 5.8 – Loi de commutation dynamique : jonction 4.

### 5.3.1 Définition de la fonction de Lyapunov

Afin d'utiliser la fonction de Lyapunov proposé dans [Johansson et al., 1999],[Johansson, 1999], [Rantzer & Johansson, 2000] nous définissons la notation suivante :

$$\bar{X}(k) = \begin{pmatrix} X(k) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la fonction de Lyapunov PWQ que nous utilisons se définit de la manière suivante :

**Proposition 5.3.1.** *Soit la fonction de Lyapunov  $V(X)$  de la forme :*

$$V(X) = \begin{cases} X^T P_p X, & \forall X \in \Psi_p, \Psi_p \in \bar{\Psi}_0 \\ \bar{X}^T P_{\Psi_p} \bar{X}, & \forall X \in \Psi_p, \Psi_p \in \bar{\Psi}_1 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

avec  $\bar{\Psi}_0$  l'ensemble des partitions  $\Psi$  de l'espace d'état contenant l'origine et  $\bar{\Psi}_1$  son complémentaire.  $P_p$  est construit de la manière suivante :

$$P_p = \begin{cases} L_p^T T L_p, & \forall X \in \Psi_p, \Psi_p \in \bar{\Psi}_0 \\ \bar{L}_p^T T \bar{L}_p, & \forall X \in \Psi_p, \Psi_p \in \bar{\Psi}_1 \\ T = T^T \geq 0 \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Si

$$\bar{L}_p \bar{X} = \bar{L}_q \bar{X}, \quad \forall X \in \Psi_p \cap \Psi_q, (p, q) \in \bar{\Psi} \quad (5.3.3)$$

$$\bar{L}_p = (L_p \quad l_p), \quad (5.3.4)$$

$$l_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \Psi_p \in \bar{\Psi}_0 \quad (5.3.5)$$

alors  $V(X)$  est continue à toutes les frontières des partitions  $\bar{\Psi}$  de l'espace d'état.

### 5.3.2 Construction de la fonction de Lyapunov

Nous devons construire les matrices  $\bar{L}_p$  pour chaque sous espace  $\Psi_p \in \bar{\Psi}$ . La méthode de construction de ces matrices est présentée dans [Johansson & Rantzer, 1998]. Nous commençons par construire des matrices correspondant aux sous espaces associés à chaque jonction. Nous construisons ensuite à partir de ces dernières les matrices  $\bar{L}_p$ .

#### Continuité aux frontières des sous-espaces, jonctions de $\mathfrak{J}_{FC}$

Nous construisons les matrices  $\bar{L}\Psi_{Fi}$ ,  $\bar{L}\Psi_{FCi}$  et  $\bar{L}\Psi_{Ci}$  assurant la continuité de la fonction de Lyapunov aux frontières des sous espaces  $\Psi_{Fi}$ ,  $\Psi_{FCi}$  et  $\Psi_{Ci}$  représentés sur

la Figure 5.2. Ainsi ces matrices devront vérifier les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}\Psi_{Fi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}\Psi_{FCi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} \in \Psi_{Fi} \cap \Psi_{FCi} \end{array} \right. \quad (5.3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}\Psi_{FCi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}\Psi_{Ci} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} \in \Psi_{FCi} \cap \Psi_{Ci} \end{array} \right. \quad (5.3.7)$$

Dans un premier temps, nous construisons  $\bar{L}1_{\Psi_{Fi}}$  et  $\bar{L}1_{\Psi_{FCi}}$  pour la jonction  $i$  afin d'assurer la continuité de la fonction de Lyapunov à la frontière  $\Psi_{Fi} \cap \Psi_{FCi}$  caractérisée par l'équation :

$$v_{i-1}^+ \rho_{i-1} + w_i^- \rho_i = w_i^- \rho_{J_i} \quad (5.3.8)$$

Elles ont la propriété suivante :

$$\bar{L}1_{\Psi_{Fi}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}1_{\Psi_{FCi}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3.9)$$

$$\forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} \in \Psi_{Fi} \cap \Psi_{FCi}$$

Une méthode de calcul de ces matrices est présentée dans [Johansson & Rantzer, 1998]. Les auteurs calculent ces matrices sous la forme :

$$\bar{L}1_{\Psi_{Fi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \varepsilon_{\Psi_{Fi}} (v \varepsilon_{\Psi_{Fi}})^{-1} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{L}1_{\Psi_{FCi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \varepsilon_{\Psi_{FCi}} (v \varepsilon_{\Psi_{FCi}})^{-1} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} 0 & w_i^- \rho_{J_i} & \frac{w_i^+ v_{i-1}^+}{v_{i-1}^-} \rho_{J_i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} v_{i-1}^+ & w_i^- \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{\Psi_{F_i}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_{\Psi_{FC_i}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans un second temps, en utilisant la même procédure, nous construisons  $\bar{L}2_{\Psi_{FC_i}}$  and  $\bar{L}2_{\Psi_{C_i}}$ , assurant la continuité à la frontière  $\Psi_{FC_i} \cap \Psi_{C_i}$  définie par l'équation :

$$v_{m_{i-1}} \rho_{i-1} + w_{M_i} \rho_i = w_{M_i} \rho_{J_i}. \quad (5.3.10)$$

Elles ont la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \bar{L}2_{\Psi_{FC_i}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} &= \bar{L}2_{\Psi_{C_i}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} &\in \Psi_{FC_i} \cap \Psi_{C_i}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

En prenant :

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\Psi_{F_i}} &= \begin{pmatrix} \bar{L}1_{\Psi_{F_i}} \\ \bar{L}2_{\Psi_{FC_i}} \end{pmatrix} \\ \bar{L}_{\Psi_{FC_i}} &= \begin{pmatrix} \bar{L}1_{\Psi_{FC_i}} \\ \bar{L}2_{\Psi_{FC_i}} \end{pmatrix} \\ \bar{L}_{\Psi_{C_i}} &= \begin{pmatrix} \bar{L}1_{\Psi_{FC_i}} \\ \bar{L}2_{\Psi_{C_i}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les conditions (5.3.6) et (5.3.7) sont assurées à toutes les frontières des sous espaces associés à la jonction  $i$ . La fonction de Lyapunov sera donc continue aux frontières traversées par la trajectoire  $\tau_{FC}$  du système. C'est à dire lorsqu'une congestion se propage à travers la jonction.

**Continuité aux frontières des sous-espace, jonctions de  $\mathfrak{J}_{FD}$**

Nous construisons les matrices  $\bar{L}\Psi_{Fi}$ ,  $\bar{L}\Psi_{FDi}$  et  $\bar{L}\Psi_{Di}$  assurant la continuité de la fonction de Lyapunov aux frontières des sous espaces  $\Psi_{Fi}$ ,  $\Psi_{FDi}$  et  $\Psi_{Di}$  représentés sur la Figure 5.3. Ainsi ces matrices devront vérifier les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}\Psi_{Fi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}\Psi_{FDi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} \in \Psi_{Fi} \cap \Psi_{FDi} \end{array} \right. \quad (5.3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}\Psi_{FDi} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}\Psi_{Di} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \end{pmatrix} \in \Psi_{FDi} \cap \Psi_{Di} \end{array} \right. \quad (5.3.13)$$

Ces matrices sont calculées directement par la méthode décrite dans [Johansson & Rantzer, 1998] car les frontières  $\Psi_{Fi} \cap \Psi_{FDi}$  et  $\Psi_{FDi} \cap \Psi_{Di}$  sont parallèles.

**Continuité aux frontières des sous-espace, problème global**

Les matrices  $L_p$  associées à chaque sous espace de  $\bar{\Psi}$  peuvent être construites à partir des matrices associées à chaque jonction.

Pour deux jonctions, les matrices assurant la continuité de la fonction de Lyapunov sont construites de la manière suivante :

$$\bar{L}_{\Psi_{Fi} \cap \Psi_{Ci+1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_{\Psi_{Fi}} \vdots l_{\Psi_{Fi}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots L_{\Psi_{Ci+1}} \quad l_{\Psi_{Ci+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.14)$$

$$\bar{L}_{\Psi_{FCi} \cap \Psi_{Ci+1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_{\Psi_{FCi}} \vdots l_{\Psi_{FCi}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots L_{\Psi_{Ci+1}} \quad l_{\Psi_{Ci+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.15)$$

D'après (5.3.6) et (5.3.7), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{\Psi_{Fi} \cap \Psi_{Ci+1}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ \rho_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{L}_{\Psi_{FCi} \cap \Psi_{Ci+1}} \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ \rho_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \forall \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_i \\ \rho_{i+1} \end{pmatrix} \in (\Psi_{Fi} \cap \Psi_{Ci+1}) \cap (\Psi_{FCi} \cap \Psi_{Ci+1}) \end{array} \right. \quad (5.3.16)$$

Par récurrence, nous construisons les matrices associées à chaque sous espace de  $\bar{\Psi}$ .

## 5.4 Synthèse des régulateurs robustes locaux : Formulation LMI

Les coefficients du retour d'état  $K_n$  correspondant à chaque mode de fonctionnement du système sont calculés en résolvant un problème d'optimisation LMI. Pour cela, nous utilisons la fonction de Lyapunov PWQ définie par (5.3.1) de la proposition 5.3.1. Les matrices  $L_p, \Psi_p \in \bar{\Psi}$  sont les matrices définies dans la section 5.3.2, et  $A_{a_n}, F_{a_n}, G_a, B_{a_n}, C_n$  sont les matrices du système augmenté (4.1.3).

**Proposition 5.4.1.** *Si  $\exists T = T^T > 0, e_n > 0$  et  $U_n$  pour chaque mode  $n \in \Omega$  tel que :*  
(5.4.1) *est vérifiée sur chaque partition de l'espace  $\Psi_p \in \bar{\Psi}_0$  et pour tout mode  $\alpha_n \in \kappa(\Psi_p)$ ,*  
(5.4.2) *est vérifiée sur chaque partition de l'espace  $\Psi_p \in \bar{\Psi}_1$  et pour tout mode  $\alpha_n \in \kappa(\Psi_p)$ ,*

$$\begin{pmatrix} -T^{-1}L_p^T - L_p T^{-1} + T^{-1} & 0 & T^{-1}A_{a_n}^T L_p^T - U_n^T B_{a_n}^T L_p^T & T^{-1}C_n^T & T^{-1}G_a^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_p^T & 0 & 0 \\ * & * & -T^{-1} + \epsilon_n L_p F_{a_n}^T F_{a_n}^T L_p^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_n I \end{pmatrix} < \textcircled{0}(5.4.1)$$

$$\begin{pmatrix} -T^{-1}\bar{L}_i^T - \bar{L}_i T^{-1} + T^{-1} & 0 & T^{-1}\bar{A}_{a_n}^T \bar{L}_i^T - U_n^T \bar{B}_{a_n}^T \bar{L}_i^T & T^{-1}\bar{C}_n^T & T^{-1}\bar{G}_a^T \\ * & -\gamma^2 I & \bar{E}_{a_n}^T \bar{L}_i^T & 0 & 0 \\ * & * & -T^{-1} + \epsilon_n \bar{L}_i \bar{F}_{a_n}^T \bar{F}_{a_n}^T \bar{L}_i^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_n I \end{pmatrix} < \textcircled{0}(5.4.2)$$

Alors,

- Le système augmenté (4.1.3) est stable avec le retour d'état (5.0.1) où  $K_n = U_n T$ ,
- Le système augmenté (4.1.3) est robuste aux incertitudes  $\Delta(k)$ ,
- La norme  $H_\infty$  du transfert des perturbations  $w(k)$  vers la sortie de régulation  $Z(k)$  est bornée par  $\gamma$

**Preuve 5.4.1 :**

Nous présentons la construction de la LMI (5.4.1) c'est à dire pour  $\Psi_i \in I_0, k \in \kappa(\Psi_i)$ . Dans un premier temps, nous posons l'inégalité suivante, propre à la résolution d'un problème  $H_\infty$  :

$$X(k+1)^T P_{\Psi_i} X(k+1) - X(k)^T P_{\Psi_i} X(k) + Z(k)^T Z(k) - \gamma^2 w(k)^T w(k) < 0 \quad (5.4.3)$$

En prenant la notation :

$$A_{a_n} - B_{a_n} K_n = \Gamma_n \quad (5.4.4)$$

L'équation (5.4.3) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11}^1 & \Pi_{21}^1 \\ * & E_{a_n}^T L_i^T T L_i E_{a_n} - \gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^1 &= (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a)^T L_i^T T L_i (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a) - L_i^T T L_i + C_n^T C_n, \\ \Pi_{21}^1 &= (\Gamma_n + F_{a_n} \cdot \Delta(k) \cdot G_a)^T L_i^T T L_i E_{a_n}. \end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} -L_i^T T L_i + C_n^T C_n & 0 & (\Gamma_i + F_{a_k} \Delta(k) G_a)^T L_i^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_i^T \\ * & * & -T^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.4.6)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$Y + \begin{pmatrix} G_a^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta(k)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{a_i}^T L_i^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_i F_{a_i} \end{pmatrix} \Delta(k) \begin{pmatrix} G_a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.7)$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} -L_i^T T L_i + C_n^T C_n & 0 & \Gamma_i^T L_i^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_i^T \\ * & * & -T^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.4.8)$$

En utilisant le Lemme de majoration, nous pouvons dire que l'inégalité (5.4.9) est vérifiée si  $\exists \epsilon_n > 0$  tel que :

$$\begin{pmatrix} -L_i^T T L_i + C_n^T C_n & 0 & \Gamma_n^T L_i^T \\ +\epsilon_n^{-1} G_a^T G_a & & \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_i^T \\ * & * & -T^{-1} + \epsilon_n L_i F_{a_n} F_{a_n}^T L_i^T \end{pmatrix} < 0 \quad (5.4.9)$$

Nous multiplions (5.4.9) par  $\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$  à droite et à gauche. Ainsi, en appliquant deux fois le complément de Schur, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} -T^{-1} L_i^T T L_i T^{-1} & 0 & T^{-1} \Gamma_n^T L_i^T & T^{-1} C_n^T & T^{-1} G_a^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_i^T & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33}^2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_n I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.4.10)$$

$$\Pi_{33}^2 = -T^{-1} + \epsilon_n L_i F_{a_n} F_{a_n}^T L_i^T$$

Comme  $-T^{-1} L_i^T T L_i T^{-1} \leq -T^{-1} L_i^T - L_i T^{-1} + T^{-1}$ , l'inégalité précédente est vraie

si

$$\begin{pmatrix} -T^{-1}L_i^T - L_iT^{-1} + T^{-1} & 0 & T^{-1}\Gamma_n^T L_i^T & T^{-1}C_n^T & T^{-1}G_a^T \\ * & -\gamma^2 I & E_{a_n}^T L_i^T & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33}^2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_n I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.4.11)$$

En prenant  $U_n = K_n T^{-1}$ , nous obtenons la LMI (5.4.1). En utilisant le premier théorème de [Johansson et al., 1999], la preuve est terminée. La preuve est similaire pour (5.4.2) avec :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{a_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} A_{a_{\alpha(k)}} & a_{\alpha(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{B}_{a_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} B_{a_{\alpha(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{F}_{a_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} F_{a_{\alpha(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{G}_a &= \begin{pmatrix} G_a & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{E}_{a_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} E_{a_{\alpha(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{C}_{a_{\alpha(k)}} &= \begin{pmatrix} C_{a_{\alpha(k)}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Cette proposition nous permet de calculer les régulateurs PI associés à chaque mode assurant la stabilité du système en boucle fermée avec le retour d'état (5.0.1).

## 5.5 Validation, simulations sur données réelles

Nous utilisons le même scénario de simulation que dans la section 4.4. Les conditions aux limites sont représentées sur les figures 4.6 et 4.7. La réponse libre est représentée en Figure 4.8, et les profils optimaux sur la figure 4.9.

### 5.5.1 Contrôleur PI à commutation douce

Nous implantons le retour d'état (5.0.1), où les différents régulateurs sont calculés avec la proposition 5.4.1. Les fonctions de pondérations sont calculées de manière dynamique selon l'approche proposée en section 5.2.2. Comme précédemment, aucune limitation sur la commande n'est imposée.

La réponse du système est représentée sur la Figure 5.9.

La Figure 5.10 reprend les densités des différentes cellules (traits pleins) et les profils de densités optimaux (trait pointillés) et présente la loi de commutation douce (c'est à dire les pondérations appliquées à chaque contrôleur) et la commande appliquée au système.

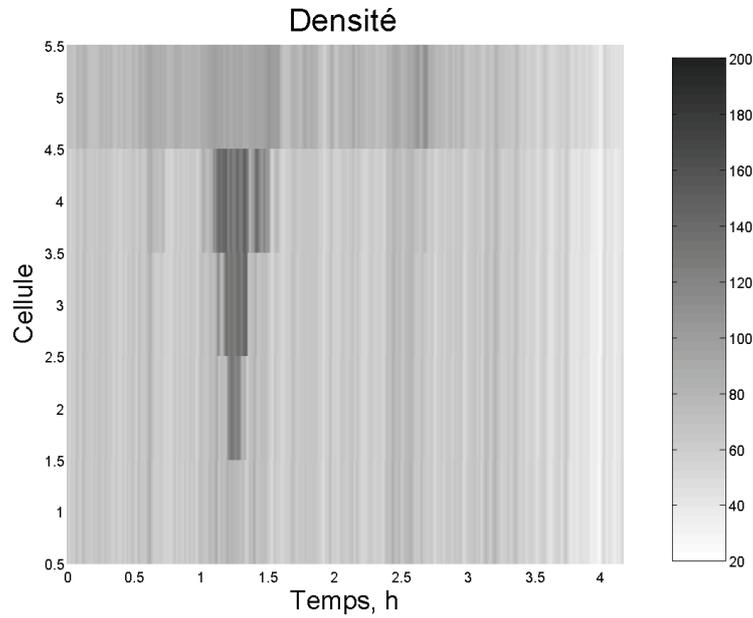


FIG. 5.9 – PI à commutation douce : Réponse du système.

Le système suit correctement les profils de densité optimaux sur le tronçon principal. De plus, la commutation entre les régulateurs se fait de manière douce. Nous n'avons pas de problème de commutation rapide ni de discontinuité de la commande. Ainsi, la loi de commutation douce définie dans ce chapitre corrige bien les problèmes identifiés avec le correcteur PI à commutation développé dans le chapitre 4.

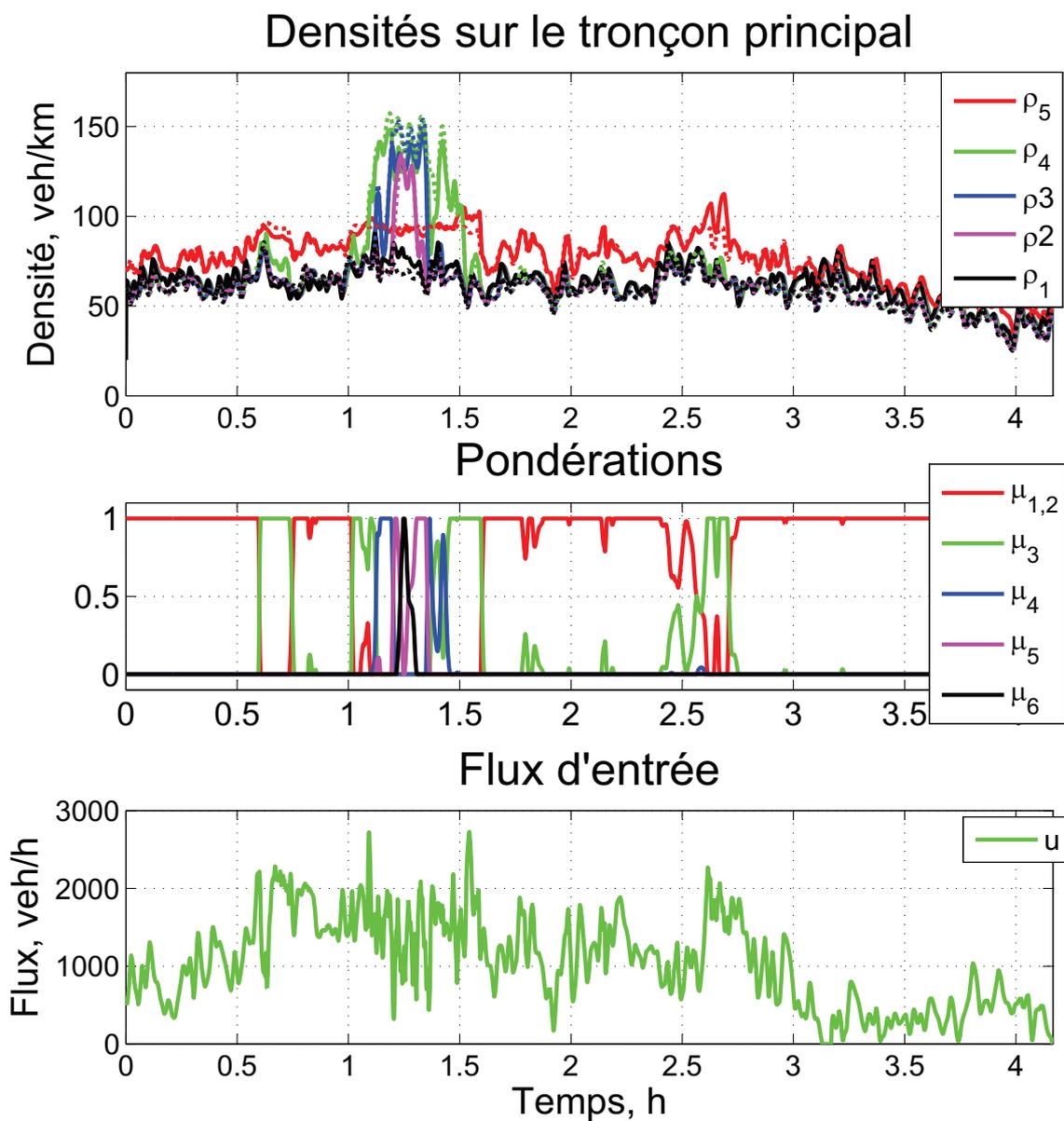


FIG. 5.10 – PI à commutation douce : Résultats de simulations.

## Chapitre 5. Contrôleur PI à commutation douces

---

Les figures 5.11 à 5.14 représentent les pondérations  $\mu_F$  et  $\mu_C$  calculées à partir des résidus  $d\phi_F$  et  $d\phi_C$  pour les jonctions 2 à 5. Ces pondérations nous permettent de calculer les pondérations  $\mu_\alpha$  pour chaque mode de fonctionnement avec l'équation (5.2.10).

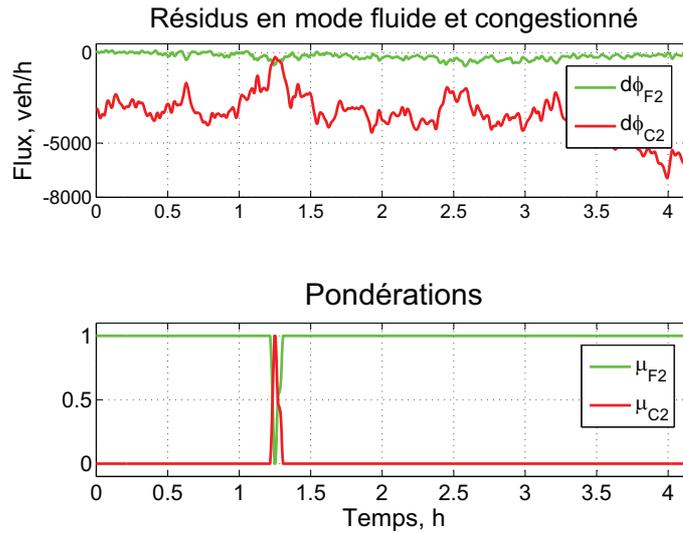


FIG. 5.11 – Fonctions de pondération : jonction 2

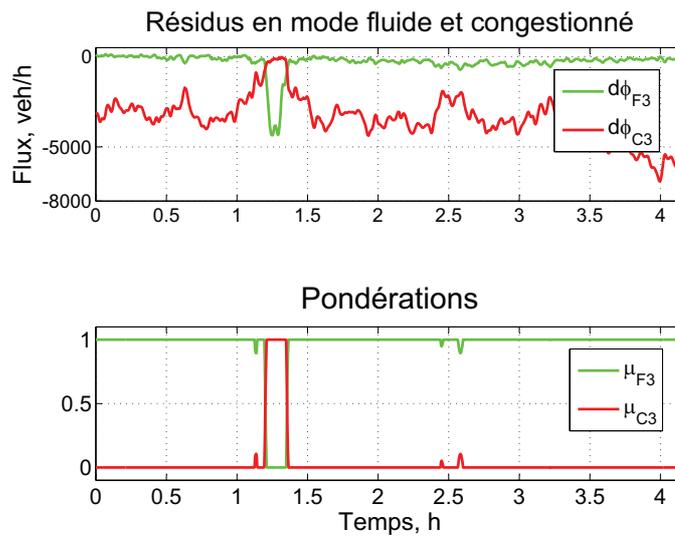


FIG. 5.12 – Fonctions de pondération : jonction 3

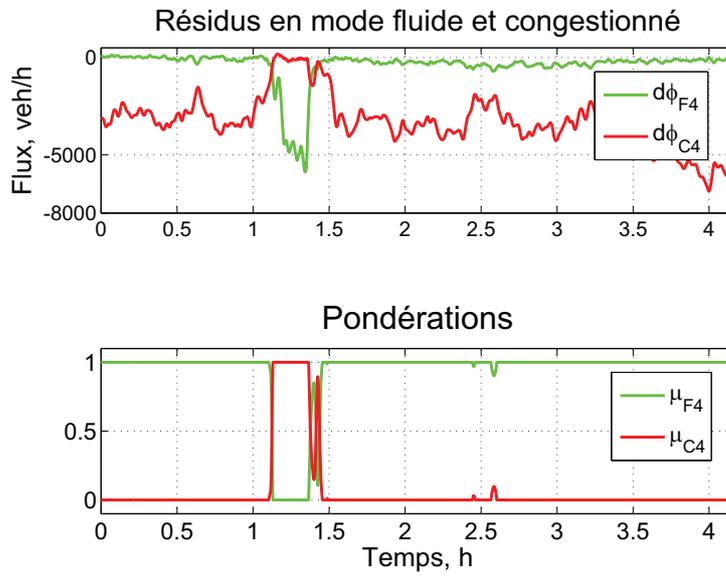


FIG. 5.13 – Fonctions de pondération : jonction 4

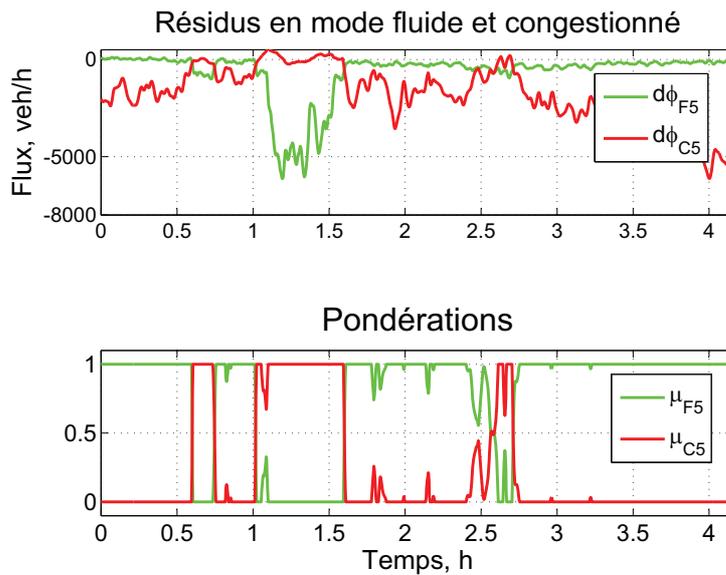


FIG. 5.14 – Fonctions de pondération : jonction 5

### 5.5.2 Contrôleur PI à commutation douce avec saturation de la commande

Afin de prendre en compte la capacité des files d'attentes nous devons imposer des bornes minimales et maximales de la commande. La borne maximale de la commande est définie de la manière suivante :

$$u_M = \min(r_M, \rho_{in} \frac{l_{in}}{T_e}) \quad (5.5.1)$$

où  $r_M$  est le flux maximal imposé par la géométrie de l'aménagement et  $\rho_{in} \frac{l_{in}}{T_e}$  le flux correspondant à la quantité de véhicules dans la file d'attente. Cette dernière condition garanti lors de la simulation que la densité dans la file d'attente reste positive.

La borne minimale de la commande est définie de la manière suivante :

$$u_m = \max(0, \frac{l_{in}}{T_e}(\rho_{J_{in}} - \rho_{in}) + d(k)). \quad (5.5.2)$$

Le terme  $\frac{l_{in}}{T_e}(\rho_{J_{in}} - \rho_{in}) + d(k)$  impose que la concentration dans le file d'attente ne dépasse pas la capacité maximale.

Enfin, nous assurons que le système ne stocke pas de véhicules dans la rampe d'accès alors que les conditions de trafic sont bonnes. Pour cela, nous imposons dans la cellule en aval de la rampe d'accès une densité,  $\rho_m^*$  au dessous de laquelle le flux entrant dans le tronçon principal n'est pas contraint. Ainsi, nous prenons :

$$\rho_5^*(k) = \max(\rho_5^*(k), \rho_m^*) \quad (5.5.3)$$

$\rho_m^*$  doit être choisi de telle manière que :

$$\rho_m^* \leq \rho_{c5} \quad (5.5.4)$$

La mise en place de ces 3 saturations nous oblige à implanter un dispositif anti-saturation sur l'intégrateur.

La réponse du système avec les régulateurs PI à commutation douce ainsi implantés est représentée en Figure 5.15.

La Figure 5.16 reprend les densités des différentes cellules (trais pleins) et les profils de densités optimaux (trait pointillés), et présente la loi de commutation douce (c'est

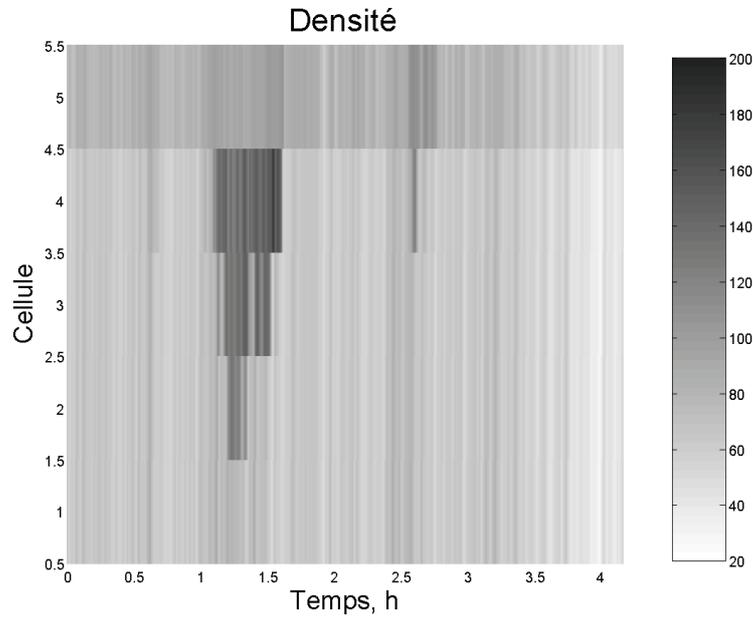


FIG. 5.15 – PI à commutation douce avec saturation de la commande : Réponse du système.

à dire les pondérations appliquées à chaque contrôleur) et la commande appliquée au système bornée par (5.5.2) et (5.5.1).

Nous constatons que le système suit les profils de densité optimaux tant que la capacité de stockage de la file d'attente n'a pas atteint sa capacité maximale. Lorsque la file d'attente atteint sa capacité maximale, nous ne sommes plus en mesure de garantir le suivi des profils optimaux. Lorsque la densité de la file d'attente diminue, la régulation reprend. Nous ne stockons pas de véhicules dans la file d'attente lorsque les conditions de trafic sont bonnes. Finalement, la régulation est active pendant de courtes périodes. En effet, nous n'agissons pas lorsque le trafic est fluide ou que la file d'attente est saturée. Tout ceci correspond bien au comportement souhaité.

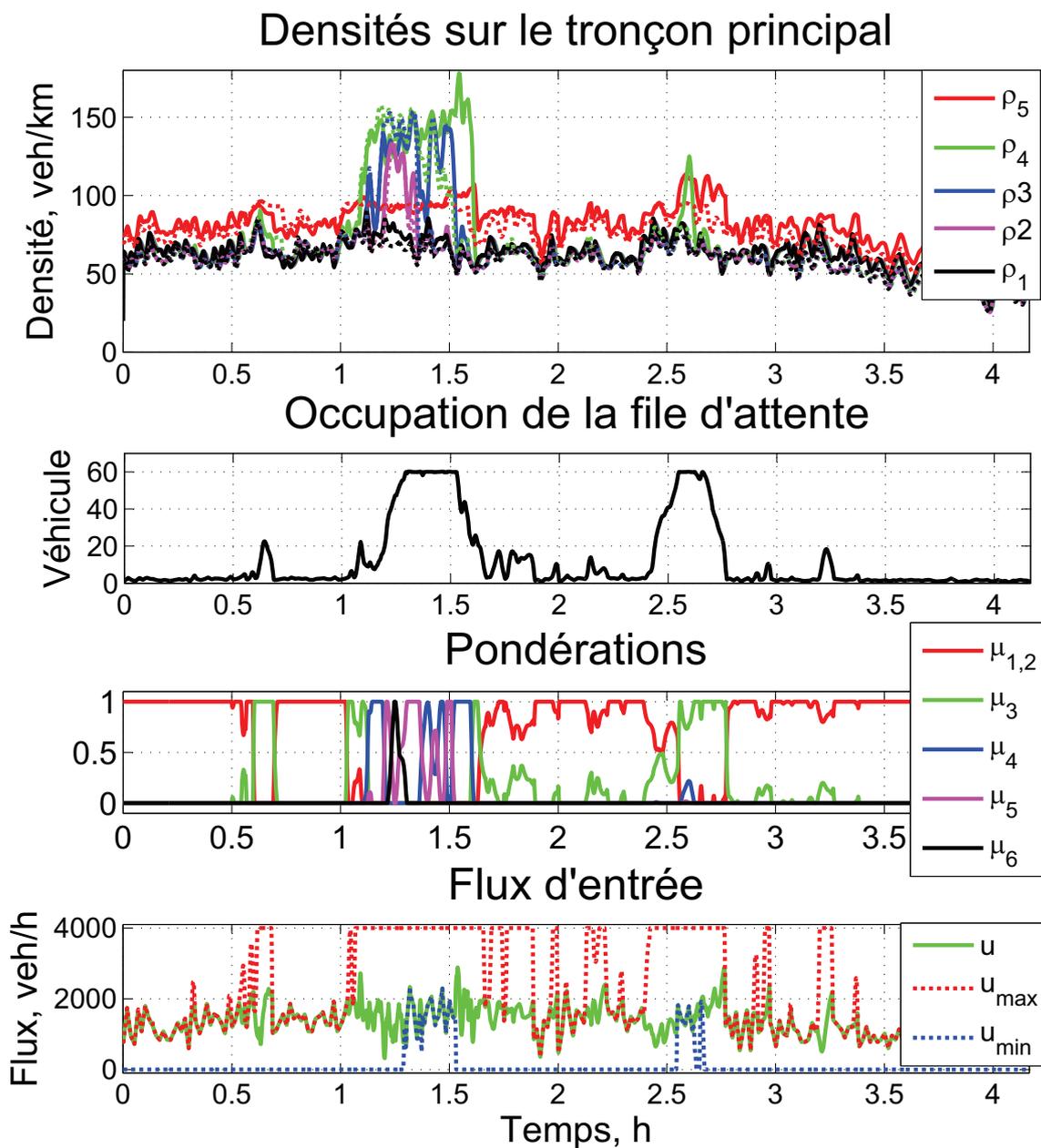


FIG. 5.16 – PI à commutation douce avec saturation de la commande : Résultats de simulation.

## 5.6 Résumé des contributions

Dans ce chapitre, nous avons proposé un nouveau contrôleur PI à commutation douce. Dans un premier temps, nous avons montré que le mode de fonctionnement du système dépend à la fois de l'état du système et des incertitudes paramétriques. Nous avons caractérisé cette relation entre les incertitudes et le mode de fonctionnement d'un point de vue probabiliste. Ceci nous a amené à proposer une combinaison convexe de régulateurs calculée à partir des probabilités associées à chaque mode. L'ensemble des pondérations de la combinaison convexe est appelé loi de commutation douce. Ces pondérations sont définies dynamiquement à partir des résultats du chapitre 3. La stabilité globale et la robustesse de l'approche est assurée par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov PWQ. Malgré le conservatisme de l'approche, cette méthode montre de bonnes performances en simulation. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication en conférence :

Antoine Lemarchand, Damien Koenig, John J. Martinez "Smooth Switching  $H_\infty$  PI Controller for Local Traffic On-ramp Metering, an LMI Approach", 18<sup>th</sup> IFAC World Congress, August-September 2011, Milano, Italy.



# Chapitre 6

## Conclusions

### 6.1 Bilan

Ce travail de thèse porte sur la régulation locale robuste de la densité d'une autoroute au voisinage d'une rampe d'accès. L'objectif étant d'assurer le suivi robuste de profils de densité optimaux calculés en parallèle. Nous avons supposé avoir connaissance de ces profils optimaux.

#### Modélisation

Dans un premier temps, nous avons étudié la modélisation des systèmes de trafic routier. Le modèle CTM a été étendu afin de tenir compte des incertitudes paramétriques. Nous avons montré que ce modèle incertain pouvait s'écrire sous une forme générique de représentation d'état à commutation. Les incertitudes ont été modélisées pour infine développer des correcteurs robustes. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 2. Le modèle de trafic proposé est facile à mettre en oeuvre. La forme générique de représentation d'état nous permet d'appliquer les outils de calcul matriciel. De plus, il permet de traiter les aspects de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

#### Supervision

Dans un second temps nous nous sommes intéressés à l'estimation du mode de fonctionnement du système. Pour cela, nous avons déterminé plusieurs estimateurs qui, associés à une logique de décision, nous permettent d'estimer le mode de fonctionnement du système. Nous avons montré que ce schéma pouvait nous permettre d'estimer certaines fautes sur le système et ainsi détecter certains incidents. Ces travaux sont présentés

dans le chapitre 3. Le schéma proposé nous donne une bonne approximation du mode de fonctionnement du système. Cependant la résolution de cette méthode est donnée par l'implantation des capteurs sur l'aménagement. Une détection précise du mode de fonctionnement et des fautes nécessite donc un nombre de capteurs importants.

### Commande locale robuste

Enfin, nous avons proposé deux contrôleurs PI robustes à commutation. Ces régulateurs s'adaptent au changement de mode du système. En effet, lors des changements de mode, les propriétés de commandabilité du système évoluent. Pour chacun des contrôleurs PI à commutation, nous proposons une formulation LMI permettant de déterminer les correcteurs associés à chaque mode de fonctionnement du système. Ces correcteurs assurent la robustesse aux incertitudes paramétriques, le suivi de consigne et le rejet des perturbations.

Le premier contrôleur proposé utilise une loi de commutation classique. Cette loi de commutation est donnée par le résultat de l'estimation du mode de fonctionnement décrit dans le chapitre 3. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 4. Les différents correcteurs sont faciles à calculer, la méthode n'est pas très conservatrice. Elle permet de placer facilement les pôles et donc les performances du système. Pour chaque mode, le contrôleur montre de bonnes performances. Néanmoins, il révèle des défauts de commutation rapide et de discontinuité de la commande en simulation.

Le second contrôleur PI utilise une loi de commutation douce. Du fait des incertitudes dans la loi de commutation du système, nous avons proposé cette nouvelle loi de commutation douce. Ainsi, la commande appliquée au système est une combinaison convexe des commandes des différents correcteurs. Les pondérations de cette combinaison convexe sont calculés grâce aux résultats du chapitre 3. Cette méthode est plus difficile à mettre en oeuvre que la précédente. Nous ne pouvons pas garantir que la LMI proposée admette une solution. Plus le nombre de modes considérés est grand, plus la LMI risque de ne pas admettre de solution. Ce correcteur montre de bonnes performance en régulation et résout les problèmes aux commutations soulevés dans l'approche précédente.

## 6.2 Perspectives

### Modélisation

Le modèle utilisé approxime le diagramme fondamental par une fonction affine par morceaux. Dans la section 5.2, nous avons étudié les fonctions de répartition et en avons déduit les probabilités de se trouver dans un mode particulier. Ce qui nous amène à envisager de proposer une nouvelle approximation du diagramme fondamental par la méthode de modélisation de Takagi Sugeno. Par exemple pour une jonction simple, sans changement de géométrie, l'équation du flux actuellement définie par :

$$\phi_i(k) = \min(v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k), w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k))). \quad (6.2.1)$$

serait remplacée par l'équation suivante :

$$\phi_i(k) = \mu_{F_i}(k) \cdot v_{i-1} \cdot \rho_{i-1}(k) + \mu_{C_i}(k) \cdot w_i \cdot (\rho_{J_i} - \rho_i(k)). \quad (6.2.2)$$

Nous pouvons nous attendre à obtenir une caractéristique flux/densité non-linéaire similaire à celle représentée en Figure 6.1.

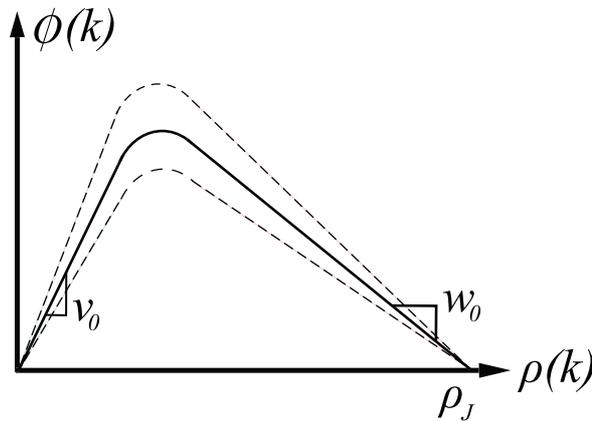


FIG. 6.1 – Diagramme fondamental approximé par une méthode de Takagi Sugeno.

Cette modélisation permettrait de modéliser le phénomène de ralentissement des voitures à l'approche d'un front de congestion.

### Supervision

Le défi principal de la supervision est d'arriver à obtenir une localisation des défauts plus précise que l'implantation des capteurs. Cela ne semble pas possible avec l'approche envisagée dans ces travaux. Il faudra donc proposer une nouvelle approche pour pouvoir détecter plus précisément les incidents. Pour cela, nous pourrions utiliser des modèles utilisant des modèles de queue de modèle variable proposé dans [Ciccia et al., 2007].

### Commande locale robuste

Le schéma de régulation que nous avons proposé utilise plusieurs mesures de densité en amont de la rampe d'accès. Ceci nous permet de suivre et de contrôler la propagation d'un front de congestion. Si l'objectif du contrôle d'accès est de maximiser la fluidité du tronçon principal, nous pouvons supposer que les profils optimaux auront tendance à éviter la création des congestions ou à les limiter au plus proche voisinage possible de la rampe d'accès. Ainsi, lorsque nous serons dans les modes les plus congestionnés ( $\alpha_4$  à  $\alpha_6$ ) la rampe d'accès sera saturée. Le schéma de régulation pourra donc se réduire à un schéma à deux capteurs sur le tronçon principal. Un en amont et un en aval de la rampe d'accès comme dans [Sun & Horowitz, 2005]. Ainsi, le contrôleur PI à commutation douce proposé dans le chapitre 5 sera plus facile à calculer.

Avec ce schéma de régulation réduit, nous pourrions affiner l'étude de la convergence des flux au niveau des rampes d'accès. Ceci nous permettrait de proposer une modélisation plus fine du phénomène de chute de capacité. Ce qui pourrait nous amener à proposer de nouvelles lois de commutation douce. Pour limiter le conservatisme, il serait intéressant d'envisager une manière différente de prouver la stabilité de l'approche.

# Bibliographie

- Alvarez, L., Horowitz, R., Chao, S. & Gomes, G. [1998], Optimal desired traffic flow patterns for automated highway systems, *in* 'Proceedings of the IEEE American Control Conference', Philadelphia, Pennsylvania USA, pp. 1828–1832.
- Arzelier, D., Bernussou, J. & Garcia, G. [1993], 'Pole assignment of linear uncertain systems in a sector via a lyapunov-type approach', *IEEE Transaction on Automatic Control* **38**(7), 1993–1997.
- Bai, X., Zhao, D. & Yi, J. [2009], Coordinated multiple ramps metering based on neuro-fuzzy adaptive dynamic programming, *in* 'Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks', Atlanta, Georgia USA, pp. 241–248.
- Balclar, M. & Sönmez, A. C. [2008], Extracting vehicle density from background estimation using kalman filter.
- Bambang, R., Shimemura, E. & Uchjida, K. [1993], Mixed h<sub>2</sub>/h<sub>inf</sub> control with pole placement : State feedback case, *in* 'Proceedings of the American Control Conference', San Francisco, California USA, pp. 2777–2779.
- Blinkin, M. [1976], 'Problem of optimal control of traffic flow on highways', *Automat. Remote Control* **37**, 662–667.
- Chilali, M. & Gahinet, P. [1996], 'H<sub>inf</sub> design with pole placement constraints : An lmi approach', *IEEE Transaction on Automatic Control* **41**(3), 358–367.
- Chilali, M., Gahinet, P. & Apkarian, P. [1997], Robust pole placement in lmi regions, *in* 'Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control', San Diego, California USA, pp. 1291–1296.
- Chilali, M., Gahinet, P. & Apkarian, P. [1999], 'Robust pole placement in lmi regions', *IEEE Transaction on Automatic Control* **44**(12), 2257–2270.
- Chung, K., Rudjanakanoknad, J. & Cassidy, M. J. [2007], 'Relation between traffic density and capacity drop at three freeway bottlenecks', *Transportation Research Part B* **41**, 82–95.
- Ciccia, M., Giglio, D., Minciardi, R. & Viarengo, M. [2007], A queue-based macroscopic model for performance evaluation of congested urban traffic networks, *in* 'Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference', Seattle, WA, USA, pp. 922–928.

## Bibliographie

---

- Daganzo, C. F. [1994], ‘The cell transmission model , a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory’, *Transportation Research Part B* **28**, 269–288.
- Daganzo, C. F. [1995a], ‘A finite difference approximation of the kinematic wave model of traffic flow’, *Transportation Research Part B* **29**, 261–276.
- Daganzo, C. F. [1995b], ‘The cell transmission model part ii : Network traffic’, *Transportation Research Part B* **29**, 79–93.
- Daganzo, C. F. [1998], ‘Requiem for second-order fluid approximation of traffic flow’, *Transportation Research Part B* **29B**, 277–286.
- Daganzo, C. F. [2002a], ‘A behavioral theory of multi-lane traffic flow. part i : Long homogeneous freeway sections.’, *Transportation Research Part B* **36**, 131–158.
- Daganzo, C. F. [2002b], ‘A behavioral theory of multi-lane traffic flow. part ii : Merges and the onset of congestions’, *Transportation Research Part B* **36**, 149–169.
- Daganzo, C. F. & Geroliminis, N. [2008], ‘An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic’, *Transportation Research Part B* **42**, 771–781.
- Erera, A., Daganzo, C. F. & Lovell, D. [1999], ‘The access control problem on capacitated fifo networks with unique o-d paths is hard’, *California PATH program Institute of transportation studies UCB-ITS-PRR-99-35*, 1–19.
- Furuta, K. & Kim, S. . B. [1987], ‘Pole assignment in a specified disk’, *IEEE Transaction on Automatic Control* **32**(5), 423–427.
- Garcia, G. & Bemussou, J. [1995], ‘Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback’, *IEEE Transaction on Automatic Control* **40**(1), 184–190.
- Geroliminis, N. & Daganzo, C. F. [2008], ‘Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams : Some experimental findings’, *Transportation Research Part B* **42**, 759–770.
- Ghods, A. H., Kian, A. R. & Tabib, M. [2009], ‘Adaptive freeway ramp metering and variable speed limit control a genetic fuzzy approach’, *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* **1**, 27–36.
- Gomes, G. & Horowitz, R. [2003], A study of two onramp metering schemes for congested freeways, in ‘Proceedings of the IEEE American Control Conference’, Denver, Colorado USA.
- Gomes, G. & Horowitz, R. [2004], Globally optimal solutions to the on-ramp metering problem - part ii, in ‘Proceedings of the IEEE conference on intelligent transportation systems’, Washington DC, USA, pp. 515–520.
- Gomes, G. & Horowitz, R. [2006], ‘Optimal freeway ramp metering using the asymmetric cell transmission model’, *Transportation Research Part C* **14**, 244–262.

## Bibliographie

---

- Gomes, G., May, A. & Horowitz, R. [2004], 'A microsimulation model of a congested freeway using vissim.', *Transportation Research Record* pp. 71–81.
- Greenshields, B. D. [1935], 'A study in highway capacity', *Proceedings of highway research board* **14**, 448–477.
- Haddad, W. M. & Bernstein, D. S. [1992], 'Controller design with regional pole constraints', *IEEE Transaction on Automatic Control* **37**(1), 54–69.
- Haj-Salem, H., Poirier, P., Heylliard, J.-F. & Peynaud, J.-P. [2001], Alinea : a local traffic responsive strategy for ramp metering : Field results on a6 motorway in paris, in 'Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference', Oakland (CA), USA, pp. 106–111.
- Haut, B., Bastin, G. & Chitour, Y. [2006], A macroscopic traffic model for road networks with a representation of the capacity drop phenomenon at the junctions, in 'Proceedings of the 16th IFAC World Congress'.
- Hegyi, A., Schutter, B. D. & Hellendoorn, J. [2005], 'Optimal coordination of variable speed limits to suppress shock waves', *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **6**(1), 102–122.
- Hegyi, Schutter, D., Hellendoorn & van den Boom [2002], Optimal coordination of ramp metering and variable speed control-an mpc approach, in 'Proceedings of the IEEE American Control Conference', Anchorage, Alaska USA, pp. 3600–3605.
- Jacquet, D. [2008], Freeway traffic management using linear programming, in 'Proceedings of the The International Federation of Automatic Control World Congress', Seoul, Korea, pp. 13064–13069.
- Jiang, N. & Tang, S. [2009], An approach of controlling both freeway on-ramp and mainline, in 'International Joint Conference on Artificial Intelligence'.
- Johansson, M. [1999], Analysis of piecewise linear systems via convex optimization – a unifying approach, in 'Proceedings of the 14th IFAC World Congress', Beijing, China.
- Johansson, M. & Rantzer, A. [1998], 'Computation of piecewise quadratic lyapunov functions for hybrid systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(4), 555–559.
- Johansson, M., Rantzer, A. & Arzen, K.-E. [1999], 'Piecewise quadratic stability of fuzzy systems', *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(6), 713–712.
- Kotsialos, A. & Papageorgiou, M. [2004a], 'Efficiency and equity properties of freeway network-wide ramp metering with amoc', *Transportation Research Part C* **12**, 401–420.
- Kotsialos, A. & Papageorgiou, M. [2004b], 'Nonlinear optimal control applied to coordinated ramp metering', *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **12**(6), 920–932.

## Bibliographie

---

- Kotsialos, A. & Papageorgiou, M. [2005], A hierarchical ramp metering control scheme for freeway networks, *in* 'Proceeding of the IEEE American Control Conference', Portland, Oregon USA, pp. 2257–2262.
- Lighthill, M. J. & Whitham, J. B. [1955], 'On kinematic waves ii : A theory of traffic flow on long crowded roads', *Proceedings of the Royal Society A* **229**, 317–345.
- Lu, X.-Y., Qiu, T. Z., Varaiya, P., Horowitz, R. & Shladover, S. E. [2010], Combining variable speed limits with ramp metering for freeway traffic control, *in* 'Proceedings of the IEEE American Control Conference', Baltimore, MD USA, pp. 2266–2271.
- Mammar, S., Baghdassarian, V. B. & Koenig, D. [2000], Robust control and fault detection synthesis with application to tractor- semitrailer automatic steering, *in* 'Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications', Anchorage, Alaska, USA, pp. 86–91.
- Marx, B., Koenig, D. & Georges, D. [2004], 'Robust fault-tolerant control for descriptor systems', *IEEE Transaction on Automatic Control* **49**(10), 1869–1865.
- Montagner, V. E., Leiteosb, V. J. S. & Peres, P. L. D. [2003], Discrete-time switched systems : Pole location and structural constrained control, *in* 'Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control', Maui, Hawaii USA, pp. 2146–1151.
- Munoz, J. C. & Daganzo, C. F. [2002], 'The bottleneck mechanism of a freeway diverge', *Transportation Research Part A* **36**, 483–505.
- Munoz, L., Sun, X., Horowitz, R. & Alvarez, L. [2006], 'Piecewise-linearized cell transmission model and parameter calibration methodology', *Transportation Research Record* pp. 183–191.
- Munoz, L., Sun, X., Sun, D., Gomes, G. & Horowitz, R. [2004], Methodological calibration of the cell transmission model, *in* 'Proceeding of the American Control Conference', Boston, Massachusetts, USA, pp. 798–803.
- Muñoz, L., Sun, X., Horowitz, R. & Alvarez, L. [2003], Traffic density estimation with the cell transmission model, *in* 'Proceedings of the IEEE American Control Conference', Denver, Colorado USA, pp. 3750–3755.
- Papageorgiou, Hadj-Salem & Blosseville [1991], 'Alinea : a local feedback control for on-ramp metering', *Transportation Research Record* pp. 58–64.
- Papageorgiou, Hadj-Salem & Middelham [1997], 'Alinea local ramp metering : Summary of field results', *Transportation Research record* pp. 90–98.
- Papageorgiou, M. [1998], 'Some remarks on macroscopic traffic flow modeling', *Transportation Research Part A* **32**, 323–329.
- Papageorgiou, M., Blosseville, J.-M. & Haj-Salem, H. [1990a], 'Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of the boulevard peripherique in paris : Part 1 : Modeling', *Transportation Research Part A* **24**, 345–359.

## Bibliographie

---

- Papageorgiou, M., Blosseville, J.-M. & Haj-Salem, H. [1990*b*], ‘Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of the boulevard peripherique in paris : Part 2 : Coordinated on-ramp metering’, *Transportation Research Part A* **24**, 345–359.
- Papageorgiou, M., Diakaki, C., Dinopoulou, V., Kotsialos, A. & Wang, Y. [2003], ‘Review of road traffic control strategies’, *Proceedings of the IEEE* **91**(12), 2043–2067.
- Papageorgiou, M., Kosmatopoulos, E., Papamichail, I. & Wang, Y. [2008], ‘A misapplication of the local ramp metering strategy alineá’, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **9**, 360365.
- Papageorgiou, M. & Kotsialos, A. [2000], Freeway ramp metering : An overview, in ‘Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference’, Dearborn, MI USA, pp. 228–239.
- Papageorgiou, M. & Kotsialos, A. [2002], ‘Freeway ramp metering : An overview’, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **3**(4), 271–281.
- Papamichail, I., Margonis, A. K. I. & Papageorgiou, M. [2010], ‘Coordinated ramp metering for freeway networks Ū a model-predictive hierarchical control approach’, *Transportation Research Part C* **18**, 311–331.
- Payne, H. J. [1971], ‘Models of freeway traffic control’, *Ssimulation Councils Proceedings series* **1**, 51–61.
- Rantzer, A. & Johansson, M. [2000], ‘Piecewise linear quadratic optimal control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(4), 629–637.
- Richard, P. I. [1956], ‘Shock waves on the highway’, *Operation research* **4**, 42–51.
- Sadmia, M. A., Chen, J. & Patton, R. J. [1996], ‘Robust fault diagnosis observer design using hinf, optimisation’, *The Institution of Electrical Engineers* pp. 911–926.
- Schrank & Lomax [2007], ‘Urban mobility report’, *Texas Transportation Institute and The Texas A&M University System* pp. 1–138.
- Sun, X. & Horowitz, R. [2005], A localized switching ramp-metering controller with a queue length regulator for congested freeways, in ‘Proceedings of the IEEE American Control Conference’, Portland, Oregon USA, pp. 2141–2146.
- Sun, X. & Horowitz, R. [2006], ‘A set of new traffic-responsive rampmetering algorithm and microscopic simulation results’, *Transportation Research Record* pp. 9–18.
- Sun, X., Muñoz, L. & Horowitz, R. [2003], Highway traffic state estimation using improved mixture kalman filters for effective ramp metering control, in ‘Proceedings of the IEEE Conference on Descision and Control’, Maui, Hawaii USA, pp. 2237–2242.
- Sun, X., Muñoz, L. & Horowitz, R. [2004], Mixture kalman filter based highway congestion mode and vehicle density estimator and its application, in ‘Proceedings of the IEEE American Control Conference’, Boston, Massachusetts USA, pp. 2098–2103.

## Bibliographie

---

- Treiber, M., Kesting, A. & Helbing, D. [2006], ‘Understanding widely scattered traffic flows, the capacity drop, and platoons as effects of variance-driven time gaps’, *Physical review E* **74**, 016123.
- Vukanovic, S. & Ernhof, O. [2006], Evaluation and field implementation of the fuzzy logic based ramp metering algorithm *acezz*, in ‘Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference’, Toronto, Canada, pp. 437–441.
- Wang, G., Xiao, D. & Gu, J. [2008], A robust traffic state parameters extract approach based on video for traffic surveillance, in ‘Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics’, Qingdao, China, pp. 3060–3065.
- Wang, Y., Coppola, P., Tzimitsi, A. & Messmer, A. [2008], Large-scale field testing of a real-time freeway network traffic state estimator in south italy, in ‘Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems’, Beijing, China, pp. 395–401.
- Wang, Y., Coppola, P., Tzimitsi, A., Messmer, A., Papageorgiou, M. & Nuzzolo, A. [2011], ‘Real-time freeway network traffic surveillance : Large-scale field-testing results in southern italy’, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **12**(2), 548–562.
- Wang, Y., Ma, G. & Li, C. [2010], Fault diagnosis using cascade hinf observers with application to spacecraft attitude control, in ‘5th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications’, pp. 1976–1981.
- Wang, Y., Papageorgiou, M. & Messmer, A. [2005], An adaptive freeway traffic state estimator and its real-data testing Part 1 : Basic properties, in ‘Proceedings of the 8th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems’, Vienna, Austria, pp. 531–536.
- Wang, Y., Papageorgiou, M. & Messmer, A. [2006a], ‘A real-time freeway network traffic surveillance tool’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **14**(1), 18–32.
- Wang, Y., Papageorgiou, M. & Messmer, A. [2006b], Renaissance : A real-time freeway network traffic surveillance tool, in ‘Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference’, Toronto, Canada, pp. 839–844.
- Wang, Y., Papageorgiou, M. & Messmer, A. [2008], ‘Real-time freeway traffic state estimation based on extended kalman filter : Adaptive capabilities and real data testing’, *Transportation Research Part A* **42**, 1340–1358.
- Work, D. B., Tossavainen, O.-P., Blandin, S., Bayen, A. M., Iwuchukwu, T. & Tracton, K. [2005], An ensemble kalman filtering approach to highway traffic estimation using gps enabled mobile devices, in ‘Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control’, Cancun, Mexico,, pp. 5062–5068.
- Xu, J., Zhao, X. & Srinivasan, D. [2010], Fuzzy logic controller for freeway ramp metering with particle swarm optimization and paramics simulation, in ‘Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems’.