



HAL
open science

Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées

Damien Charleux

► **To cite this version:**

Damien Charleux. Étude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lyon, 2006. Français. NNT: . tel-01130569

HAL Id: tel-01130569

<https://theses.hal.science/tel-01130569v1>

Submitted on 12 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

MÉMOIRE DE THÈSE

PROPOSÉ POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

PAR

Damien CHARLEUX

**ÉTUDE DES EFFETS DE LA FRICTION EN PIED D'AUBE
SUR LA DYNAMIQUE DES ROUES AUBAGÉES**

Thèse soutenue publiquement le 16 mars 2006 devant le jury :

J.-C. GOLINVAL, Professeur du LTAS, Université de Liège	Rapporteur
S. BELLIZZI, Chargé de Recherches CNRS au LMA, Marseille	Rapporteur
F. THOUVEREZ, Professeur du LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
G. FERRARIS, Professeur du LDMS, INSA de Lyon	Examineur
C. GIBERT, Ingénieur de Recherche, École Centrale de Lyon	Examineur
J. DUPEUX, Ingénieur de Recherche, SNECMA	Examineur

Résumé

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude, tant du point de vue numérique que expérimental, du frottement en pied d'aube et de son impact sur la dynamique des roues aubagées. Le but affiché est de contribuer à une meilleure prévention des risques de fatigue des aubages de turbomachines dus principalement aux inhomogénéités du flux aérodynamique.

Nous avons développé et mis en oeuvre une méthode capable de prédire efficacement la réponse forcée d'un disque aubagé en prenant en compte les non-linéarités de contact et de frottement au niveau des attaches des aubes. Les équations sont résolues dans le domaine fréquentiel et les efforts de contact de même que les déplacements relatifs sont déterminés dans le domaine temporel au sein d'éléments de contact tridimensionnels. La méthode proposée permet d'utiliser directement les lois discontinues de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. Les simulations effectuées à partir de discrétisations éléments finis des interfaces de contact montrent aussi sa capacité à reproduire les phénomènes de microglissement et de perte de contact partielle au niveau des portées des aubes. La baisse de niveau vibratoire liée à la dissipation d'énergie en pied d'aube peut ainsi être quantifiée. Nous montrons également comment tirer parti des propriétés de périodicité cyclique des roues aubagées et des forces excitatrices pour n'effectuer les calculs non-linéaires que sur un seul secteur angulaire et ainsi économiser un temps de calcul important.

Une validation expérimentale des méthodes de calcul est proposée à l'aide d'un disque d'essai monté d'aubes réelles. Les réponses fréquentielles mesurées témoignent d'un comportement non-linéaire au voisinage des résonances qui est correctement reproduit par la simulation. Cette confrontation révèle néanmoins le besoin d'une caractérisation poussée des paramètres d'amortissement, en particulier du coefficient de frottement, si l'on espère une prédiction quantitative précise des niveaux vibratoires. Les contraintes normales de contact ont été mesurées par l'insertion de films sensibles à la pression au niveau des portées des aubes. La simulation donne grossièrement la même répartition, mais la discrétisation utilisée pour les calculs en dynamique ne permet pas d'accéder aux forts gradients de contrainte observés expérimentalement.

Au cours de ce travail, plusieurs variantes de modélisation du contact ont été testées. Nous avons ainsi étudié l'influence de l'ajout de raideurs de contact, d'un coefficient de frottement dépendant de la pression normale, mais aussi de la prise en compte d'un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique. Cette dernière configuration peut entraîner des comportements dynamiques étonnants et délicats à obtenir par des méthodes fréquentielles. Nous montrons en effet à partir de l'intégration temporelle de petits modèles frottants que la réponse à une excitation sinusoïdale peut dans certains cas être multipériodique voire a périodique.

Abstract

This PhD dissertation is devoted to the study of blade/disk attachments in turbomachinery with a particular emphasis on the impact of friction on the dynamic response of bladed disks. The problem was tackled both experimentally and numerically and the developed tools can be seen as a contribution to the prevention of high cycle fatigue failures due to the aerodynamic flow inhomogeneities.

A numerical method was developed in order to predict efficiently the forced response of a bladed disk taking into account the contact and friction nonlinearities in the blade roots. The equations are solved in the frequency domain whereas the contact forces and the relative displacements are determined in the time domain within special three-dimensional contact elements. The proposed method is able to handle the discontinuous functions governing unilateral contact and Coulomb friction. And when coupled with a finite element representation of the contact surfaces, it can simulate microslip and contact losses in the interface. The energy dissipations due to friction in the attachment can therefore be quantified as well as the corresponding decrease of the vibration amplitude of the blade. Another interesting fact is the possibility to use the cyclic symmetry properties of bladed disks and excitation forces so as to perform the non-linear resolution on a single angular sector. This technique saves a lot of CPU time.

An experimental validation of the numerical method was performed using a test disk mounted with four real blades. The tests revealed a non-linear behaviour of the assembly near its resonances that was well reproduced by the numerical calculations. Nonetheless, a precise measurement of the damping parameters - especially the friction coefficient - is needed to achieve a good quantitative prediction of the vibration levels. On the same test facility, we used pressure sensitive films to measure the normal stress distribution in the contacts between the blades and the disk and high stress gradients were observed. The mesh used for dynamic calculations could give the general distribution but was too coarse to reproduce the stress peaks.

During this study, several contact modelings were tested such as the addition of contact springs or the use of a pressure dependant coefficient of friction. A special attention was devoted to the impact of static friction. Unexpected dynamical behaviours were obtained when the static coefficient of friction is greater than the dynamic coefficient of friction. The response of small friction models to sinusoidal excitation was obtained with time integration and it was shown that in many cases, multiperiodic and aperiodic motions could occur, which impede the search for a solution in the frequency domain.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'Ecole Centrale de Lyon, ainsi que sur le site de SNECMA Villaroche. Il a été financé conjointement par le ministère de la recherche et par SNECMA.

Mes remerciements vont en premier lieu vers mon directeur de thèse Fabrice Thouverez qui a fait preuve d'une grande patience à mon égard et m'a toujours soutenu dans les moments difficiles. Un grand merci également à Claude Gibert pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans la partie expérimentale de l'étude. J'ai bénéficié de l'important travail effectué par Samuel Nacivet dans une thèse précédant la mienne. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir aidé à démarrer mes investigations numériques.

Jean-Claude Golinval et Sergio Bellizzi ont accepté de relire mon mémoire et de faire partie de mon jury : qu'ils en soient chaleureusement remerciés. Merci aussi à Guy Ferraris pour avoir présidé ce jury.

J'adresse un grand merci à Eric Seinturier, Jean-Pierre Lombard et Jérôme Dupeux qui ont suivi mes travaux pour le compte de SNECMA. Ils se sont toujours montrés disponibles pour répondre à mes questions et je garde en mémoire les moments enrichissants et conviviaux passés dans leur équipe au centre de Villaroche.

Enfin, au moment d'achever la rédaction de ce mémoire, j'ai une pensée émue pour de nombreuses personnes de l'équipe de Dynamique des Structures et des Systèmes de l'ECL. Elles ont contribué à rendre heureuses les années que j'ai vécues à leurs côtés.

Table des matières

Introduction	1
1 Problématiques liées au contact aube-disque	5
1.1 Présentation rapide d'un turboréacteur	5
1.2 Fatigue des roues aubagées	7
1.2.1 Caractéristiques de l'excitation	7
1.2.2 Fatigue polycyclique	9
1.2.3 Fatigue par fretting de la liaison aube-disque	11
1.3 L'enjeu du calcul de la réponse forcée	16
1.4 Revue de quelques sources d'amortissement dans les aubages	17
1.4.1 Amortissement intentionnel par frottement sec	18
1.4.2 Amortissement intentionnel par d'autres dispositifs	19
1.4.3 Amortissement par frottement en pied d'aube	20
1.5 Modélisation du contact aube-disque	21
1.5.1 Séparation	21
1.5.2 Microglissement	22
1.5.3 Frottement statique	26
Conclusions	26
2 Formulation et résolution d'un problème de contact avec frottement	27
2.1 Formulation du problème continu	27
2.1.1 Equations locales	27
2.1.2 Principe des puissances virtuelles	30
2.1.3 Egalité variationnelle	31
2.1.4 Inégalités variationnelles	32
2.1.5 Discrétisation par éléments finis	35
2.1.6 Conclusions	36
2.2 Stratégies de résolution de problèmes contraints	37
2.2.1 Multiplicateurs de Lagrange	37
2.2.2 Pénalisation	38
2.2.3 Lagrangiens augmentés	39
2.2.4 Conclusions	40
2.3 Méthodes fréquentielles pour les problèmes de contact	40
2.4 Dynamic Lagrangian mixed Frequency-Time method (DLFT)	41
2.4.1 Hypothèses de modélisation	41
2.4.2 Méthode de résolution	42

2.4.3	Calcul de l'équilibre statique	45
2.4.4	Pénalisation sur la vitesse relative	46
2.4.5	Choix du coefficient de pénalité	47
2.5	Evaluation de la performance de la DLFT	50
2.5.1	Pénalisation sur le déplacement relatif	50
2.5.2	Pénalisation sur la vitesse relative	51
2.5.3	Comparaison de la DLFT avec des méthodes fréquentielles usuelles	51
	Conclusions	59
3	Réponse forcée avec frottement en pied d'aube	61
3.1	Equations du mouvement des structures en rotation	61
3.1.1	Définitions	61
3.1.2	Expression des équations dans le repère tournant	62
3.1.3	Prise en compte de la raideur géométrique	64
3.1.4	Expression finale des équations du mouvement	67
3.2	Modélisation d'un secteur aube-disque en rotation	68
3.2.1	Présentation du modèle	68
3.2.2	Modèle réduit avec effets liés à la rotation.	68
3.3	Résultats dans la configuration de référence	70
3.3.1	Equilibre statique avec frottement	71
3.3.2	Réponse harmonique	73
3.3.3	Etude des effets gyroscopiques	79
3.4	Influence des paramètres de calcul	81
3.4.1	Influence du nombre d'harmoniques	81
3.4.2	Influence du coefficient de pénalité	81
3.5	Influence des paramètres physiques	83
3.5.1	Influence de l'amplitude de l'excitation	83
3.5.2	Influence du coefficient de frottement	83
3.5.3	Influence de la vitesse de rotation	86
3.6	Influence de la modélisation du contact	86
3.6.1	Influence de la discrétisation des surfaces de contact	86
3.6.2	Influence de la raideur de contact	89
	Conclusions	92
4	Confrontation expérimentale de la modélisation	93
4.1	Méthode expérimentale	93
4.1.1	Banc d'essais	93
4.1.2	Instrumentation	93
4.1.3	Résultats expérimentaux	94
4.2	Modèle numérique	95
4.2.1	Modèle éléments finis	95
4.2.2	Modélisation de l'excitation piezoélectrique	96
4.2.3	Recalage des raideurs pallier et des modes de disque	98
4.2.4	Prise en compte du désaccordage	98
4.2.5	Modèle réduit	100
4.3	Mesure de la répartition des pressions de contact	101

4.3.1	Méthode expérimentale	102
4.3.2	Résultats expérimentaux	102
4.3.3	Traitement des résultats	106
4.3.4	Comparaison avec les calculs	106
4.3.5	Conclusions	108
4.4	Comparaison des réponses forcées	108
4.4.1	Paramètres d'amortissement	108
4.4.2	Coefficient de frottement constant	111
4.4.3	Coefficient de frottement variable	115
	Conclusions	118
5	Réponse forcée d'une roue aubagée accordée	121
5.1	Prise en compte de la symétrie cyclique	121
5.2	Modes propres d'une structure à symétrie cyclique	123
5.2.1	Relations de propagation	123
5.2.2	Problème aux valeurs propres	123
5.2.3	Application à une roue aubagée	125
5.3	Réponse forcée d'une structure à symétrie cyclique	125
5.3.1	Méthode générale	125
5.3.2	Application à une roue aubagée	127
5.3.3	Cas non-linéaire	129
5.4	Méthode proposée	130
5.4.1	Théorie	131
5.4.2	Application à une roue aubagée	134
	Conclusions	138
6	Effet du frottement statique sur la dynamique des systèmes frottants	139
6.1	Revue de résultats expérimentaux	139
6.2	Revue de quelques lois de frottement	142
6.3	Modèle à un degré de liberté	145
6.3.1	Méthode de calcul	146
6.3.2	Réponse libre	149
6.3.3	Réponse forcée	150
6.3.4	Conclusions	154
6.4	Oscillateur avec frotteur flexible sans masse	154
6.4.1	Méthode de calcul	155
6.4.2	Résultats	156
6.4.3	Conclusions	158
6.5	Modèle à deux degrés de liberté	161
6.5.1	Méthode de calcul	161
6.5.2	Résultats	162
6.5.3	Conclusions	164
6.6	Prise en compte du frottement statique avec les méthodes fréquentielles.	168
6.6.1	Cas du système à 1 ddl	168
6.6.2	Cas du système à 2 ddl	171
6.6.3	Analyse de la stabilité adaptée aux méthodes fréquentielles	171

Conclusions	174
Conclusions et perspectives	177
Bibliographie	179
Annexes	189
A Equations du mouvement dans le domaine fréquentiel	189
A.1 Procédure de Galerkin	189
A.2 Condensation sur les ddls de contact	190
A.3 Condensation sur les déplacement relatifs	191
B Mesure de pression à l'aide de films Fuji Prescale	193
B.1 Principe de fonctionnement	193
B.2 Détermination du niveau de pression	194

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Les disques aubagés d'un turboréacteur sont des pièces de haute technologie dont la conception est optimisée pour participer à l'augmentation des performances moteur (rendement, réduction de la masse, réduction du bruit ...) tout en respectant les exigences de sécurité. La recherche du rendement a conduit à réduire au plus juste la distance rotor-stator ainsi qu'à dessiner des profils d'aubes de plus en plus complexes. L'amélioration des performances est aussi passée par l'introduction d'alliages spéciaux, notamment à base de titane et de nickel, capables aussi de remplir leur fonction dans un environnement difficile, c'est à dire de résister aux efforts centrifuges élevés, aux efforts dynamiques variés et aux contraintes thermiques, particulièrement importantes en sortie de chambre de combustion.

La maîtrise des vibrations des aubages est de première importance pour les constructeurs qui cherchent à écarter tout risque d'instabilité de flottement, mais aussi à s'assurer que le niveau vibratoire ne cause pas de fatigue, ce qui peut causer une fin de vie prématurée des pièces et des défaillances. Il est important de noter ici que la jonction aube-disque est une zone particulièrement sensible à la fatigue par fretting. Afin de mieux prévenir ces risques, et pour éviter des reconceptions tardives, des efforts importants sont lancés pour développer des outils numériques capables de prédire tôt dans le cycle de conception les amplitudes vibratoires des roues aubagées. Les numériques des fluides s'attachent à améliorer la modélisation tridimensionnelle de l'écoulement, ce qui permet de mieux reproduire les pressions stationnaires et instationnaires exercées sur les pales des aubes. Côté structural, on note parmi les progrès récents la prise en compte du désaccordage des aubages et l'introduction croissante des non-linéarités de contact et de frottement. Les calculs sont de plus en plus couplés fluide/structure pour une meilleure prédiction du flottement et de l'amortissement aérodynamique.

Parmi les zones de contact susceptibles d'influencer le comportement des disques aubagés, on peut citer la tête des aubes qui peut venir froter contre le stator, les nageoires, les talons, les dispositifs d'amortissement par frottement sec ou "frotteurs" qui sont utilisés pour atténuer les amplitudes de vibration, et enfin l'attache aube-disque, qui est l'objet de ce mémoire. Les études les plus nombreuses sont celles consacrées à la modélisation de l'effet des frotteurs avec un objectif d'optimisation de leur efficacité. Les efforts à ce sujet se sont essentiellement portés sur la résolution numérique des équations non-linéaires dues au frottement et parmi les solutions retenues pour calculer le régime permanent, les plus courantes sont celles basées sur la technique dite de balance harmonique. On trouve en revanche peu de validations expérimentales des méthodes employées, et le frottement est dans la majeure partie des cas pris en compte de façon simple par une modélisation en macroglissement à l'aide d'une loi de Coulomb. Des améliorations substantielles sont ainsi à

rechercher dans les travaux des tribologues, qui étudient la physique du contact avec une forte orientation expérimentale.

Objectifs de la thèse

La modélisation du frottement au niveau de la jonction aube-disque pose des difficultés spécifiques. En particulier, l'effort normal n'est pas connu *a priori*. De plus, comme la répartition de la pression de contact ne peut pas être supposée uniforme, et que l'énergie est dissipée essentiellement par un mécanisme de microglissement, le nombre de points de contact à prendre en compte est élevé, ce qui nécessite une méthode de résolution performante. A cet égard, le premier objectif identifié pour notre étude est de reprendre et développer une méthode apte à résoudre dans le domaine fréquentiel des problèmes de contact de grande taille, puis de l'étendre au cas d'un modèle tridimensionnel de contact aube disque. Le second objectif est d'apporter une validation expérimentale de la méthode numérique à partir d'un banc d'essais en rotation et à partir d'une mesure de la répartition des pressions de contact. Enfin, le troisième objectif est de proposer une méthode pour calculer de manière efficace la réponse d'une roue aubagée complète en prenant en compte le frottement en pied d'aube. Nous avons essayé durant toute cette étude de tirer profit de résultats trouvés dans la littérature de la tribologie afin d'explorer quelques possibilités d'enrichir les lois de contact et de frottement que nous avons mises en oeuvre.

Organisation du mémoire

Le mémoire se répartit en six chapitres. Le premier a une vocation essentiellement introductive. Après une présentation rapide du fonctionnement d'un turboréacteur, les conditions de fonctionnement des roues aubagées sont détaillées, ce qui permet de mieux comprendre les risques de fatigue vibratoire auxquels elles sont soumises. On a en particulier effectué une synthèse de la bibliographie consacrée à la fatigue par fretting au niveau du pied d'aube. Nous précisons aussi les difficultés spécifiques de la modélisation du contact frottant en pied d'aube et les apports attendus en termes de prévention de la fatigue.

Dans le chapitre 2, une formulation continue du problème général dynamique de contact avec frottement est donnée. Nous ne considérons pas un contact ponctuel mais bien une surface de contact. Les méthodes les plus employées pour traiter ce problème dans le cadre d'une résolution par intégration temporelle sont rapidement présentées, puis nous abordons les méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel et détaillons la méthode que nous avons mise en oeuvre, basée sur la DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency Time method). Nous proposons un moyen de choisir le paramètre de pénalisation et enfin analysons la performance de la méthode (précision, temps de calcul), à partir de modèles simples et par comparaison avec l'intégration temporelle et d'autres méthodes fréquentielles.

Nous utilisons au chapitre 3 la DLFT pour calculer le comportement dynamique d'une aube en rotation en prenant en compte les non-linéarités de contact et de frottement au niveau de son pied. La gestion tri-dimensionnelle du contact permet de mettre en évidence des mouvements relatifs complexes incluant des séparations partielles. La méthode permet une quantification de la réduction du niveau vibratoire et donne accès à la répartition des glissements, des contraintes de contact et des énergies dissipées localement dans l'interface de contact. La sensibilité de la réponse aux paramètres de la modélisation est aussi évaluée.

Une validation expérimentale des méthodes de calcul présentées aux chapitres 2 et 3 est proposée dans le chapitre 4. Un banc tournant situé à l'Ecole Centrale de Lyon comprenant un disque aubagé monté d'aubes réelles a été utilisé. Les résultats expérimentaux incluent aussi bien des résultats de réponse forcée, que la répartition des contraintes de contact mesurées à l'aide de films sensibles à la pression. Un modèle numérique du banc a été développé pour pouvoir disposer de résultats numériques à comparer aux résultats expérimentaux. Afin de mieux reproduire les résultats expérimentaux, et en s'inspirant de la littérature, nous proposons d'introduire dans la modélisation un coefficient de frottement variable en fonction de la vitesse de rotation du disque aubagé.

Les roues aubagées font partie des structures dites à symétrie cyclique. En négligeant le désaccordage inter-aube, il est ainsi possible de calculer leurs modes propres et leur réponse forcée linéaire à partir de la modélisation d'un seul secteur. Nous montrons dans le chapitre 5 comment on peut sous certaines conditions obtenir un avantage similaire dans le cas d'une réponse forcée incluant des non-linéarités. La méthode proposée est appliquée au cas d'un disque aubagé de 47 aubes avec contact frottant en pied d'aube.

Le mémoire se clôt sur le sixième chapitre, consacré à l'étude de l'effet du frottement statique sur la dynamique des systèmes frottants. Lorsque nous avons essayé de prendre en compte dans notre modélisation de la friction en pied d'aube un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique, nous avons rencontré des problèmes de convergence dans la DLFT. Ce chapitre montre à partir de petits modèles étudiés par intégration temporelle, que cette distinction peut conduire à des réponses forcées multipériodiques et parfois chaotiques, ce qui peut mettre en échec la méthode développée.

Chapitre 1

Problématiques liées au contact aube-disque

Ce chapitre donne le contexte industriel de l'étude et présente la démarche scientifique adoptée. Après un bref rappel du fonctionnement d'un turboréacteur, les risques de fatigue auxquels sont sujettes les roues aubagées sont présentés. L'accent est mis particulièrement sur l'endommagement par fretting de la liaison aube-disque. On montre ensuite comment le calcul de la réponse doit permettre de prévenir ces risques très en amont du cycle de conception. La précision recherchée dans ce domaine nécessite entre autres une bonne connaissance de l'amortissement dû au frottement à l'interface aube-disque. Les principales difficultés de modélisation du contact en pied d'aube sont finalement présentées et le chapitre se clôt par la définition des objectifs de l'étude.

1.1 Présentation rapide d'un turboréacteur

Le turboréacteur est apparu en Europe au début du 20e siècle. On peut citer le brevet du français Guillaume en 1921 qui propose un turboréacteur à compresseur axial. Mais ce sont les brevets de l'anglais Frank Whittle et de l'allemand Hans Von Ohain dans les années 30 qui ont conduit aux premières réalisations pratiques. Ces moteurs à combustion continue marquent une rupture par rapport aux moteurs à pistons d'alors en apportant un rapport puissance/poids beaucoup plus élevé.

La figure 1.1 montre un moteur utilisé actuellement sur les avions civils A318, A319, A320 et A321 d'Airbus. C'est une architecture dite double corps, double flux. En effet, en regardant le schéma simplifié du moteur présenté sur la figure 1.2, on distingue deux rotors indépendants ("double corps"). Le rotor basse pression comprend la soufflante, le compresseur basse pression et la turbine basse pression. Le rotor haute pression supporte le compresseur haute pression et la turbine haute pression. Le flux d'air aspiré dans le moteur par la soufflante est séparé en un flux primaire et un flux secondaire, ce qui justifie l'expression "double flux". Cette architecture tend à se généraliser, même si certains moteurs militaires restent des monorotors. Des moteurs civils triple corps double flux sont apparus récemment.

Au début du cycle de fonctionnement d'un tel moteur, l'air entre à l'avant du moteur par la soufflante, aussi appelée fan. Le flux est ensuite séparé en deux : une partie, le flux primaire, va passer dans la partie interne du moteur et est destiné à participer à la combustion. Le reste

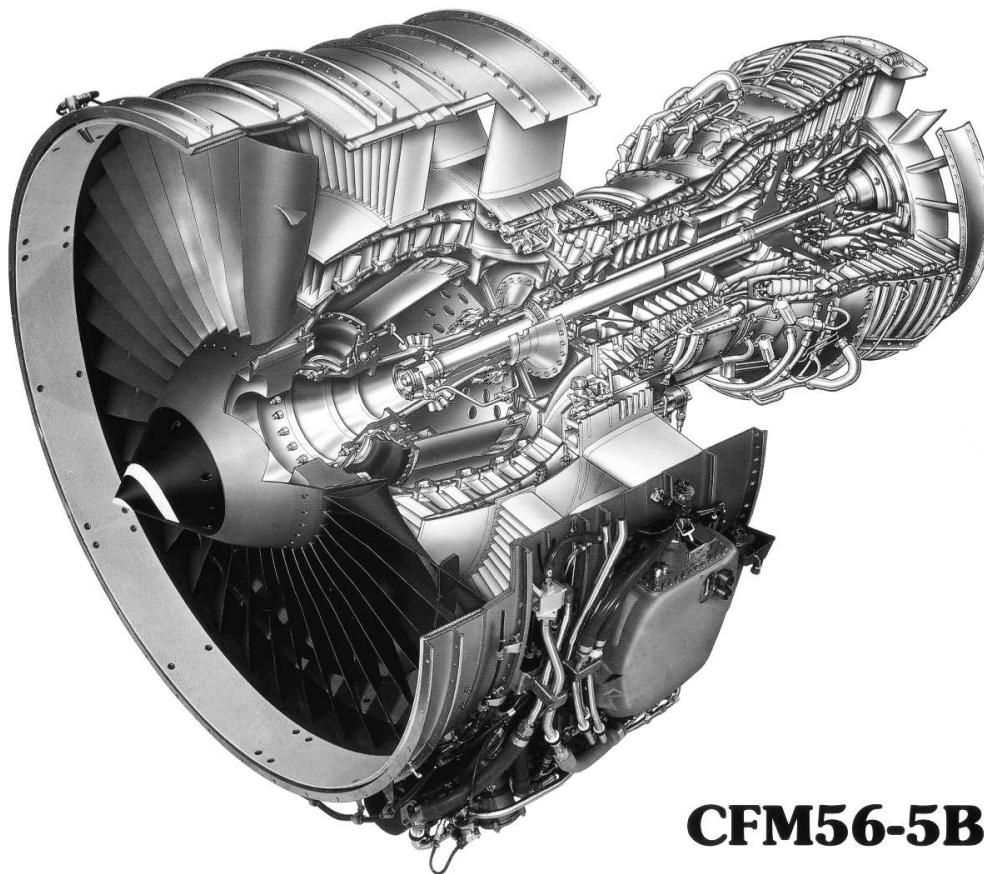


FIG. 1.1 – Turboréacteur civil double corps, double flux. Moteur CFM56-5B.

ressort directement du turboréacteur et compose le flux secondaire. Le flux primaire est comprimé successivement dans les étages du compresseurs basse pression et du compresseur haute pression. Le gaz, alors à sa pression maximale, est enflammé dans la chambre de combustion. Ceci s'accompagne d'une forte hausse de la température qui atteint des valeurs supérieures à 1500°C et d'une légère diminution de pression. Le gaz est ensuite détendu dans les turbines. La turbine haute pression entraîne le compresseur haute pression et la turbine basse pression entraîne la soufflante et le compresseur basse pression. Le flux primaire est enfin accéléré par la tuyère et fournit une partie de la poussée du moteur, le reste de la poussée étant due au flux secondaire.

Le rapport entre le débit d'air secondaire ne passant que dans la soufflante et le débit d'air primaire traversant tous les étages du moteur est appelé taux de dilution. Les moteurs civils sont conçus avec un fort taux de dilution ce qui permet d'une part de limiter la consommation et d'autre part de réduire les nuisances sonores en noyant le bruit du jet primaire. Par exemple, le moteur CFM56-5B de la figure 1.1 a un taux de dilution compris entre 5.5 et 6 suivant les configurations. Ainsi, les moteurs civils tirent l'essentiel de leur poussée du flux secondaire. C'est pourquoi la soufflante a un diamètre élevé (jusqu'à 3,1 m sur le moteur GE90 destiné au bimoteur gros porteur Boeing 777), avec des aubes au design particulièrement optimisé. Pour les moteurs militaires en revanche, les exigences de compacité et de rapport puissance/poids conduisent à des moteurs à taux de dilution plus faible (0,3 sur le M88 qui équipe le Rafale).

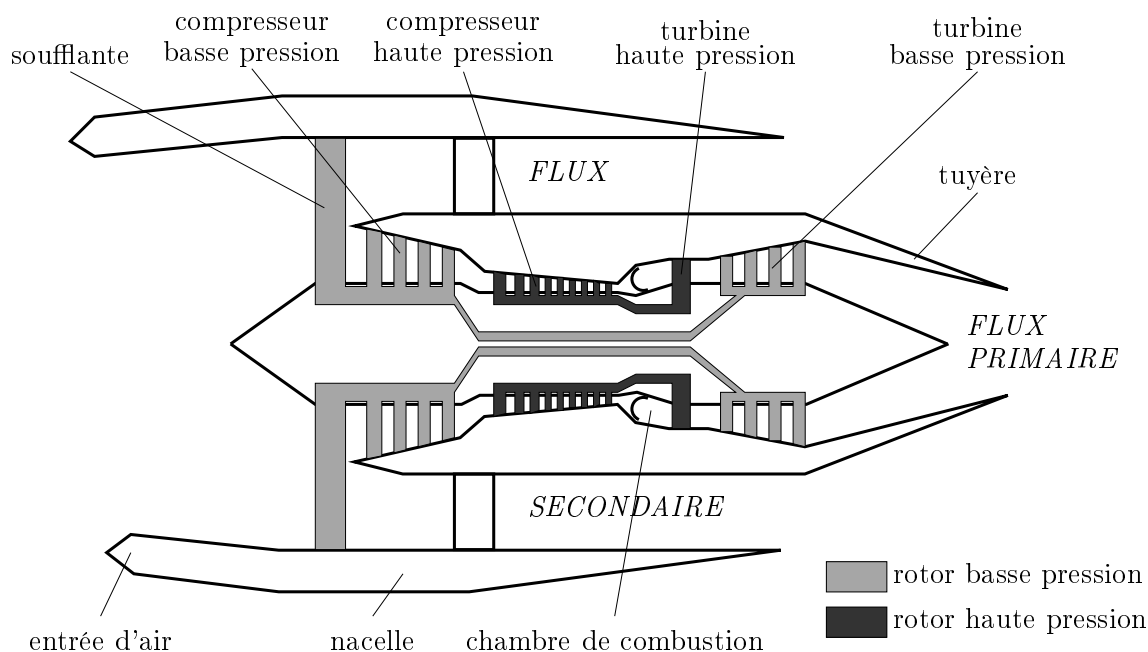


FIG. 1.2 – Schéma simplifié d'un turboréacteur civil double corps, double flux.

En raison des exigences de performance (masse, rendement) et de fiabilité, les matériaux composant le moteur sont choisis avec la plus grande attention. Les alliages de titane, en particulier le Ti-6Al-4V, ont une bonne tenue à la corrosion, une bonne tenue en température jusqu'à 600°C et un bon rapport propriétés mécaniques/densité. Ils sont utilisés massivement dans les compresseurs. Les superalliages à base de nickel qui se caractérisent par une excellente tenue à chaud (jusqu'à 1100°C) sont employés entre autres dans les turbines. Ces deux classes de métaux constituent environ 75% de la masse du moteur. On assiste par ailleurs à une introduction croissante des céramiques et des matériaux composites, utilisés par exemple pour les aubes de la soufflante du moteur GE90. Les recherches récentes ont permis la réalisation sur le moteur M88 d'aubes de turbine monocristallines et de disques obtenus par métallurgie des poudres.

1.2 Fatigue des roues aubagées

Les pièces du moteur sont soumises à des vibrations qui si elles sont excessives, causent des endommagements par fatigue qui peuvent aller jusqu'à la rupture. Les parties tournantes des compresseurs et des turbines sont les plus sollicitées et nécessitent des opérations de surveillance et de maintenance régulières. La figure 1.3 montre une roue aubagée de compresseur dans laquelle les 28 aubes périphériques sont liées au disque central par des joints en queue d'aronde. Des pertes d'aubes sont toujours à déplorer et très souvent le phénomène de fatigue haute fréquence en est la cause.

1.2.1 Caractéristiques de l'excitation

Les aubes sont soumis à de nombreuses sollicitations statiques et dynamiques. Parmi les sollicitations statiques, on compte la pression aérodynamique stationnaire et les effets de dilatation. Les étages tournants sont de plus soumis à des efforts centrifuges très importants. La charge sur

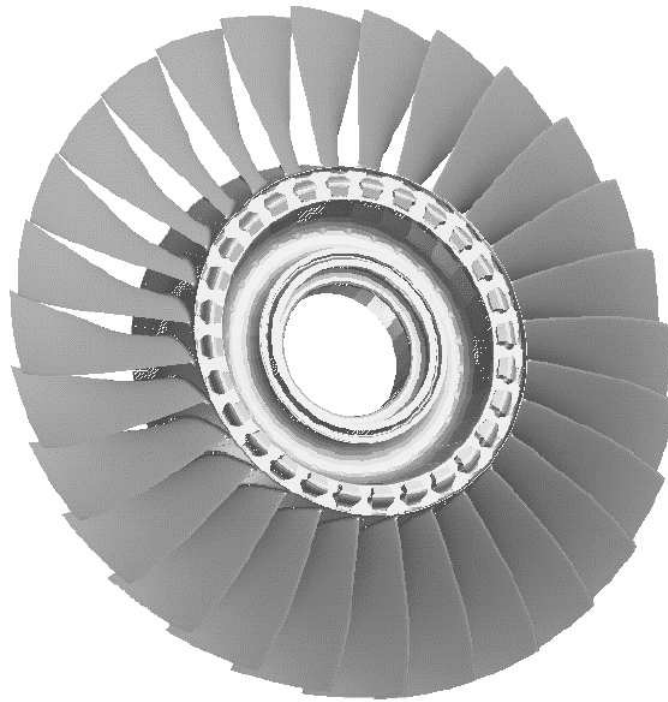


FIG. 1.3 – *Roue aubagée de compresseur.*

une seule aube de soufflante peut atteindre 100 tonnes. Certains étages tournants particulièrement sollicités, comme la turbine haute pression, requièrent des disques extrêmement massifs. Les excitations dynamiques dépendent fortement de la position dans le moteur de l'étage étudié et ont des origines diverses. On peut citer entre autres

- les balourds,
- les contacts aube-carter,

et tout ce qui peut conduire à un champ de pression non uniforme de l'écoulement :

- le sillage des aubages amont fixes et mobiles,
- le vent de travers (soufflante),
- les perturbations diverses de l'écoulement.

Ces dernières sollicitations d'origine aérodynamique sont les plus importantes à prendre en compte. Du point de vue d'une aube mobile, ces perturbations dans l'écoulement constituent une excitation périodique, de fréquence multiple de la vitesse de rotation. La figure 1.4 montre la succession des redresseurs fixes et des aubages mobiles dans un compresseur. Considérons une aube mobile défilant dans le sillage des redresseurs. Son excitation sera essentiellement composée d'harmoniques multiples de la fréquence de rotation et du nombre de redresseurs. De telles sollicitations sont dites polycycliques. On parle de sollicitation oligocyclique pour des fréquences beaucoup plus basses associées par exemple aux variations d'effort centrifuge quand le régime moteur change. Ces deux types de sollicitation peuvent causer la fatigue des disques aubagés, mais on s'intéresse plus particulièrement à la fatigue polycyclique qui est celle qui semble causer le plus de problèmes sur les moteurs actuels.

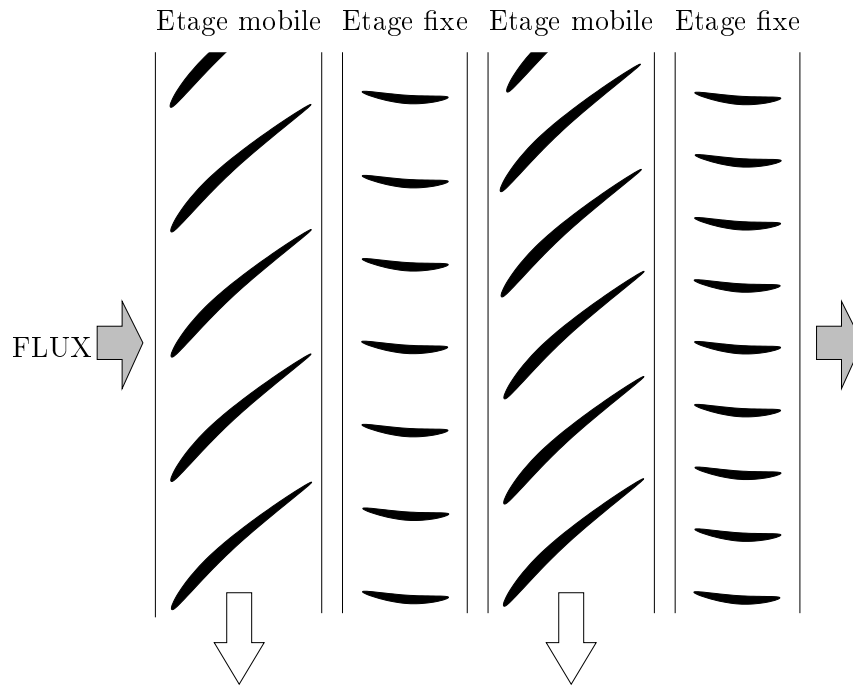


FIG. 1.4 – Schéma de quelques étages de compresseur.

1.2.2 Fatigue polycyclique

Présentation du phénomène

On vient de voir que les aubages sont soumis en permanence à des sollicitations dont les fréquences peuvent être élevées ($>1\text{kHz}$). Les contraintes dynamiques générées, même si elles sont inférieures à la limite élastique risquent de faire à la longue céder les aubages. Ce phénomène de fatigue est la cause principale de défaillance des turboréacteurs. L'endommagement commence par une fissuration microscopique dans les zones de fortes contraintes. Les zones critiques sont les surfaces, les défauts de la structure, intrinsèques ou apparus à cause de l'ingestion par le moteur de corps étrangers comme le sable, la glace, ou les oiseaux. Au fil des cycles de chargement la fissure devient macroscopique et continue à se propager jusqu'à la rupture. Les vitesses de propagation des fissures sont de l'ordre de 10^{-10}m ou 10^{-9}m par période. Vu les fréquences de vibration des aubes de turbomachines une fissure peut conduire à la rupture en quelques heures de vol.

Outils de conception

Le diagramme de Wöhler, représenté sur la figure 1.5 est un outil important pour l'analyse de la fatigue. La courbe de Wöhler ou courbe S-N (Stress-Number of cycles) est obtenue à partir d'essais de fatigue effectués sur des éprouvettes chargées uniaxialement ou plus rarement directement sur les pièces réelles. Avec une contrainte statique moyenne σ_m généralement nulle, une contrainte alternée d'amplitude σ_a inférieure à la limite de rupture statique R_m est appliquée jusqu'à la rupture, et le nombre de cycles à la rupture N_c est relevé. Chaque essai fournit un point du diagramme. C'est donc un diagramme long à construire mais il existe des formules permettant d'en donner

une bonne approximation. On distingue le domaine de fatigue oligocyclique ($N_c < 10^4$ cycles) où les déformations plastiques sont notables et le domaine de la fatigue polycyclique $N_c > 10^4$ cycles qui nous intéresse ici. On remarque sur la courbe qu'il existe une contrainte σ_e appelée limite d'endurance ou limite de fatigue, en dessous de laquelle il n'y a pas rupture quelque soit le nombre de cycles. C'est une propriété vérifiée par l'acier, mais aussi par les alliages de titane. Ainsi, le concepteur du moteur doit s'assurer que les contraintes dans les disques aubagés restent en dessous de la limite d'endurance avec une marge de sécurité suffisante. On note enfin que beaucoup de matériaux, en particulier les alliages d'aluminium, n'ont pas de limite d'endurance : quelque soit la contrainte σ_a appliquée, la rupture intervient toujours en un nombre fini de cycles. A défaut, on utilise alors une limite d'endurance pour un nombre de cycles donnés, par exemple 10^7 ou 10^8 .

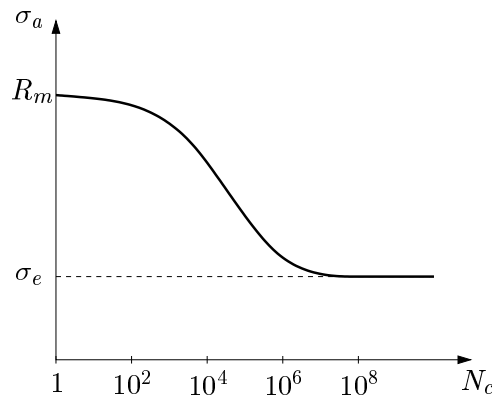


FIG. 1.5 – Courbe de Wöhler.

Le diagramme de Wöhler est classiquement tracé avec une contrainte moyenne nulle, or en pratique les aubages sont soumis à des contraintes statiques importantes dues aux efforts centrifuges et à la pression stationnaire du gaz. Il s'avère que la limite d'endurance σ_e obtenue pour une contrainte moyenne nulle n'est plus valable dans ce cas. On a alors recours au diagramme de Haigh (voir figure 1.6) qui représente l'évolution de la limite d'endurance en fonction de la contrainte moyenne σ_m . Pour tracer un diagramme de Haigh complet, il faut en théorie construire une courbe de Wöhler pour chaque valeur de la contrainte moyenne, ce qui est très fastidieux. Pour contourner cette difficulté, des modélisations simplifiées sont souvent utilisées et permettent de statuer rapidement sur le risque de fatigue. La droite de Goodman est très utilisée. Elle relie σ_e , limite d'endurance à contrainte moyenne nulle et R_m , contrainte de rupture statique. Les points de fonctionnement doivent se situer sous la droite pour éviter le risque de fatigue. La droite de Soderberg qui relie σ_e et la limite élastique R_e offre une marge de sécurité plus grande.

Facteurs aggravants

Dans quasiment tous les cas, les fissures démarrent à partir de la surface de la pièce, dans les zones de contraintes les plus fortes. Il faut donc faire particulièrement attention dans le cas de géométries à angles vifs et dans tous les cas où l'état de surface est susceptible d'être dégradé. Ainsi l'impact de corps étrangers sur les aubes de turbomachines peut altérer fortement leur résistance à la fatigue. De même les zones de contact en général sont très sensibles. Par exemple, les petits mouvements relatifs dans les liaisons peuvent être responsables d'usure et de départs de fissures.

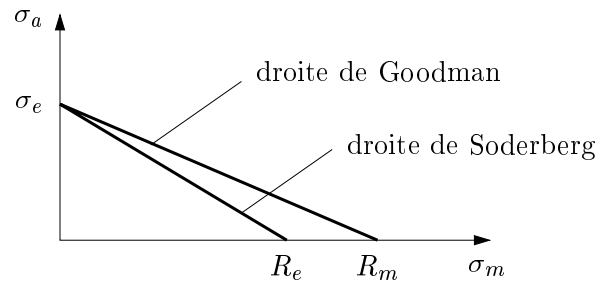


FIG. 1.6 – Diagramme de Haigh.

Ce phénomène de fretting est présenté plus en détail pour le cas de la liaison aube-disque dans le paragraphe suivant. L'environnement délicat dans certaines parties du turboréacteur (fortes températures, attaques chimiques) a également un impact négatif. Pour donner une meilleure résistance à la fatigue à leurs pièces, les constructeurs utilisent des revêtements spéciaux et des traitements de surface. Ainsi, le durcissement superficiel, le grenailage et le brunissage sont des techniques utilisées sur les aubes pour générer des contraintes résiduelles de compression bénéfiques [43] [115].

1.2.3 Fatigue par fretting de la liaison aube-disque

Présentation du phénomène

La région de l'attache aube-disque est particulièrement sensible à la fatigue et de nombreuses fissurations ont été relevées dans cette zone [43] [93] [123]. La figure 1.7 montre un dessin d'une attache en queue d'aronde. Le contact est assuré par la force centrifuge qui coince le pied de l'aube dans l'alvéole du disque. Il y a deux surfaces de contact qui sont appelées les portées de l'aube. Les excitations auxquelles sont soumises l'aube sont la cause d'efforts de contact tangentiels et normaux oscillants au niveau des portées, qui conduisent à des glissements alternés de faible amplitude de tout ou partie des interfaces de contact. Ce fretting cause l'usure des surfaces en contact et peut éventuellement produire l'initiation de fissures. La figure 1.7 montre une fissure à un endroit où elle est très susceptible d'apparaître [43] [85] [123]. La prévention de ces risques inclut des traitements de surfaces comme le grenailage et le dépôt de revêtements protecteurs. Un film de lubrifiant solide, typiquement à base de graphite ou de bisulfure de molybdène (MoS_2), constitue généralement la couche externe des surfaces de contact.

Lois d'endommagement

Les glissements en pied d'aube usent les surfaces en contact. On rappelle à cet effet la loi d'Archard qui estime le volume d'usure V dans un contact glissant par :

$$V = \frac{KN\delta}{H}, \quad (1.1)$$

avec

- K : coefficient d'usure dépendant des matériaux en contact,
- N : effort normal,
- δ : distance de glissement,
- H : dureté du corps le plus tendre.

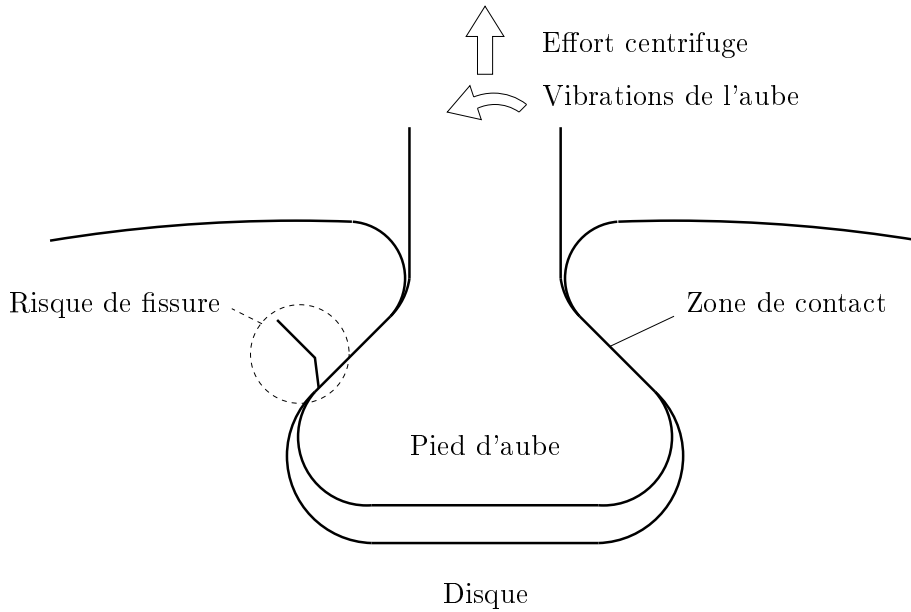


FIG. 1.7 – Attache en queue d'aronde.

On dérive facilement une loi locale qui donne la profondeur d'usure h en fonction de la contrainte de contact normale σ_n dans les zones de glissement :

$$h = \frac{K\sigma_n\delta}{H} . \quad (1.2)$$

Enfin en supposant que la loi de Coulomb est vraie localement, on peut écrire $\tau = \mu\sigma_n$, où τ est la contrainte de cisaillement due au frottement et μ est le coefficient de frottement. Ceci conduit à une relation de proportionnalité entre la profondeur d'usure h et l'énergie surfacique dissipée par frottement $\tau\delta$:

$$h = K'\tau\delta , \quad (1.3)$$

où $K' = \frac{K}{H\mu}$. Une prédiction correcte de l'usure nécessite donc une approche locale de la zone de contact permettant de déterminer les amplitudes de glissement et les répartitions de contraintes. Etant donné les faibles amplitudes, l'usure par fretting ne provoque pas des arrachements de matière très volumineux, mais suffit à endommager et éventuellement faire disparaître les couches protectrices des surfaces de contact, augmentant ainsi le risque de fissuration. Ainsi, dans les expériences menées par Fridrici [43], tant que l'alliage de titane était recouvert de Molydag (lubrifiant solide à base de MoS_2), aucune fissure n'apparaissait. Il a pu déterminer empiriquement un critère d'élimination du film de lubrifiant basé sur l'énergie dissipée localement dans le contact.

Les fissures induites par la fatigue en fretting peuvent avoir des conséquences graves, aussi il est important de disposer de moyens permettant de prédire l'endroit où la fissure apparaît et le nombre de cycles de fatigue jusqu'à l'amorçage de la macrofissure. Lykins *et al.* [83] ont testé de nombreux paramètres de fissuration à partir d'expérimentations en fretting-fatigue sur du Ti-6Al-4V. Il ressort que les meilleurs critères prennent en compte l'amplitude de la déformation et aussi la déformation moyenne. Le paramètre de Smith-Watson-Topper, utilisé en particulier dans [43], [93], [142], s'écrit pour un plan donné

$$\Gamma = \sigma_{max}\varepsilon_a , \quad (1.4)$$

où σ_{max} est la contrainte normale maximale et $\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2}$ est l'amplitude de déformation normale. Il faut dans un premier temps déterminer pour chaque point de la pièce l'orientation du plan qui maximise Γ . Ensuite, la répartition spatiale de ces maxima permet de déterminer le point correspondant au maximum absolu de Γ . La fissure est supposée s'amorcer à ce point dans le plan critique précédemment déterminé pour ce point. En outre, le nombre de cycles à l'amorçage N_f est prédit par la relation

$$\Gamma = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b'} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b'+c'} , \quad (1.5)$$

où E est le module de Young et σ'_f , ε'_f , b' , c' sont des paramètres qui dépendent du matériau et de la température. Pour l'alliage de titane étudié par Murthy *et al.* [93], l'équation (1.5) devient

$$\Gamma = 5109(2N_f)^{-0.252} + 651(2N_f)^{-0.406} . \quad (1.6)$$

La figure 1.8 montre l'allure de la courbe. L'utilisation d'un paramètre comme Γ est complexe puisqu'elle nécessite de connaître la répartition et l'amplitude des déformations. La méthode utilisée par Lykins *et al.* [83] consiste à mesurer dans un premier temps les efforts minimaux et maximaux auxquels sont soumis les pièces en contact. Ces efforts sont ensuite injectés dans un modèle élément finis de la zone de contact qui donne les répartitions des contraintes et des déformations dans le cas de chargement minimal et dans le cas de chargement maximal, ce qui permet au final d'évaluer Γ . Szolwinski *et al.* [142] utilisent un modèle analytique à la place du modèle éléments finis. Dans les deux cas, il a donc été fait l'hypothèse que la réponse était quasi-statique ce qui est peut-être effectivement le cas sur un banc expérimental, mais pas pour une aube de turbomachine où les fréquences d'excitation peuvent dépasser le kilohertz.

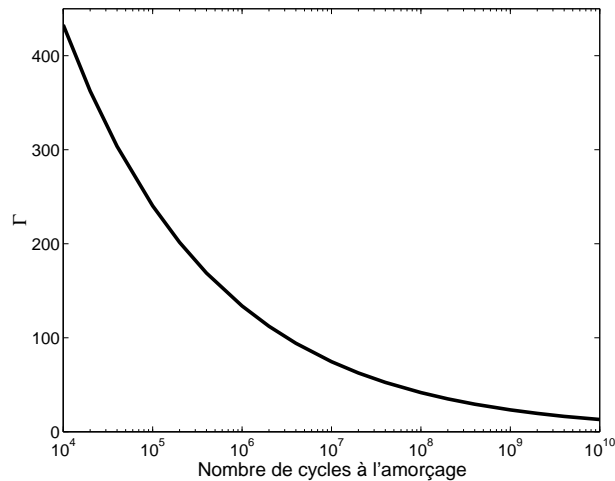


FIG. 1.8 – Relation entre le paramètre de Smith-Watson-Topper et la durée de vie avant fissuration, d'après [93].

Les dégradations par fretting sont très intimement liées à la configuration du contact étudié, aussi les études expérimentales, numériques ou analytiques doivent-elles reproduire le plus fidèlement possible les conditions réelles du contact aube-disque : géométrie du joint, efforts, appliqués, traitements des surfaces en contact. Or comme les essais de durée de vie sur machine tournante sont compliqués et chers, les expériences sont généralement menées avec une machine de fatigue

uniaxiale classique dans laquelle des patins, le plus souvent cylindriques, sont mis en contact avec l'éprouvette testée (voir la figure 1.9). Plusieurs études se sont focalisées sur l'alliage de titane Ti-6Al-4V en appliquant des efforts représentatifs de ceux rencontrés en pied d'aube, entre autres [83] [93] [121]. La configuration de la figure 1.9 permet certes une analyse plus facile, mais on peut s'interroger sur la validité des résultats pour une attache en queue d'aronde dans laquelle, du fait de l'angle des portées, l'effort normal et l'effort tangentiel sont couplés par les efforts centrifuges et les efforts cycliques. L'alternative proposée par Ruiz *et al.* [123] consiste à tester directement des joints en queue d'aronde à l'aide d'une machine de fatigue biaxiale. Les résultats montrent que l'usure est plus importante près des bords de la portée (points C et C' sur la figure 1.10(a)). De plus les fissures apparaissent toujours sur le disque et dans le bas de la portée (près du point C sur la figure 1.10(a)). Les calculs statiques par éléments finis confirment que cette région est effectivement celle où les surcontraintes sont les plus élevées. Selon les auteurs, la surcontrainte causée par le contact n'est pas la seule à prendre en compte pour estimer la durée de vie du joint. Il faut aussi tenir compte de l'usure par fretting, c'est pourquoi ils ont introduit le paramètre

$$k = \sigma_t \tau \delta \quad (1.7)$$

qui combine la contrainte de traction tangentielle σ_t et l'énergie surfacique dissipée par frottement $\tau \delta$. Le maximum de k donne la région où le risque de fissuration est le plus grand et le nombre de cycles à la rupture serait approximativement proportionnel à $(k_{max})^{-\frac{1}{2}}$. Lykins *et al.* [83] ont montré que si le critère k permet en effet de localiser correctement le lieu d'amorçage des fissures il est en revanche difficile de l'utiliser pour prédire la durée de vie avant fissuration.

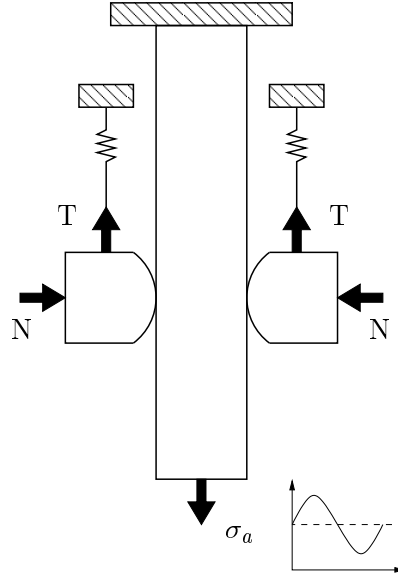


FIG. 1.9 – Expérimentation en fretting-fatigue.

Détermination des contraintes sous chargement statique

Le paragraphe précédent a montré que la connaissance des contraintes dans la liaison aube-disque était nécessaire pour prédire l'endommagement par fretting. Il est possible de calculer analytiquement les contraintes en considérant que le contact aube disque peut être représenté

par la modélisation simplifiée de la figure 1.10(b)). Il s'agit d'un contact à deux dimensions, non hertzien, où un poinçon élastique aux bords arrondis est en contact plan avec un demi espace élastique. Dans ces conditions, les contraintes sont singulières uniquement quand le rayon R tend vers 0, c'est à dire quand les bords forment des angles vifs [24] [134]. Les calculs donnent la répartition des glissements, des contraintes normales σ_n , des contraintes de cisaillement τ et des contraintes tangentielles σ_t [24] [48]. Les bords du contact sont des zones de glissement et les contraintes y sont les plus élevées, ce qui confirme que ce sont les régions les plus sensibles à l'endommagement par fretting.

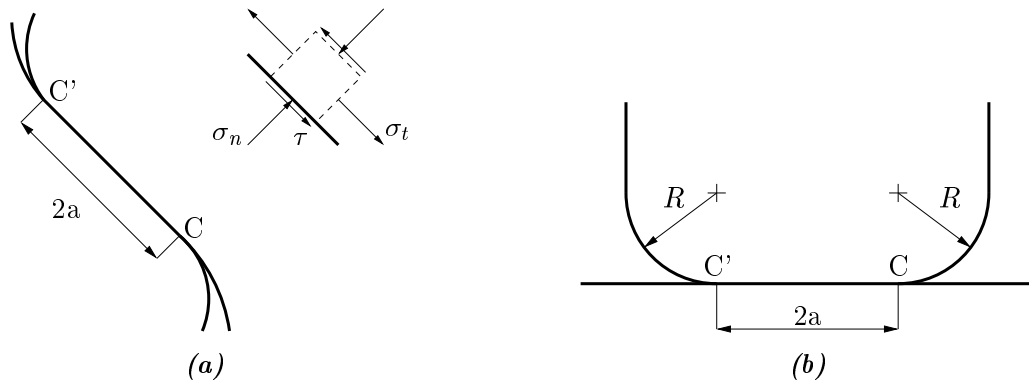


FIG. 1.10 – (a) Profil en queue d'aronde (b) Modélisation par un poinçon plan sur un espace semi-infini.

Des mesures expérimentales des contraintes dans les jonctions aube-disque ont été réalisées par photoélasticimétrie soit à l'arrêt [71], soit en rotation à des vitesses inférieures à 1000 tours par minute [85][86][106]. Dans ces études, les résultats ont été comparés avec ceux obtenus par éléments finis et confirment la présence de surcontraintes en bord de contact, et plus particulièrement en bas du contact (point C sur la figure 1.10(a)). Papanikos *et al.* ont obtenu une répartition tridimensionnelle des contraintes en analysant les franges de plusieurs tranches découpées dans l'épaisseur du disque. Ils ont trouvé des variations importantes des contraintes dans l'épaisseur du disque, ce qui souligne la nécessité d'une modélisation tri-dimensionnelle de ce type de contact.

Les calculs éléments finis réalisés dans [71], [85], [86] et [106] utilisent des maillages relativement grossiers et il n'est pas sûr que les pics de contrainte en bord de contact soient correctement prédits. Sinclair *et al.* [134] ont pu obtenir, au prix de raffinements intensifs de maillage, la convergence des contraintes statiques dans un joint en queue d'aronde. Les contraintes ne sont donc pas singulières, mais les gradients sont élevés, ce qui a nécessité pour cette analyse bidimensionnelle jusqu'à 50 000 éléments de contact. La figure 1.11 montre la répartition des contraintes normales de contact obtenue. Ces travaux se sont poursuivis avec des analyses tridimensionnelles [6][7], qui conduisent à des surcontraintes qui peuvent être significativement supérieures à celles prédites par les modèles bidimensionnels. Beisheim *et al.* [7] montrent enfin que l'utilisation de portées bombées permet de réduire les contraintes maximales.

Bilan

On trouve dans la littérature de nombreux outils permettant de prédire les endommagements par usure et par fissuration dus au fretting. Leur application à la liaison aube-disque nécessite

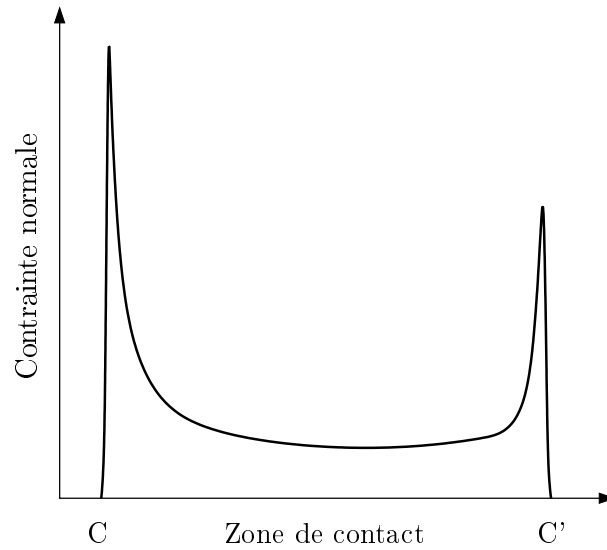


FIG. 1.11 – Répartition de la pression de contact sur une portée, d'après [7].

la connaissance de la répartition et des amplitudes des contraintes et des glissements au niveau de la zone de contact. Les calculs statiques prenant en compte le contact et le frottement ne donnent que la répartition et dans ce contexte les amplitudes ne peuvent être déterminées qu'avec l'hypothèse d'une réponse quasi-statique. Il n'existe pas encore à notre connaissance de procédure entièrement numérique de prédiction de l'endommagement par fretting. Notre étude est une étape vers cet objectif, puisque nous proposons un calcul dynamique de réponse forcée qui permet de déterminer la répartition et l'amplitude des efforts de contact normaux et tangentiels, ainsi que des glissements.

1.3 L'enjeu du calcul de la réponse forcée

Les aubages sont soumis à des contraintes alternées à fréquence élevée et on a vu qu'ils peuvent fatiguer rapidement si le niveau vibratoire est trop élevé. Le plus sûr moyen de rester en dessous de la limite d'endurance est d'éviter toute situation de résonance ou d'instabilité. On a vu au paragraphe 1.2.1 que la plupart des excitations auxquelles sont soumis les disques aubagés sont périodiques et de fréquence multiple de la vitesse de rotation. On peut alors repérer les résonances potentielles à l'aide d'un diagramme de Campbell (voir figure 1.12). Sur ce diagramme est reportée l'évolution des fréquences propres du disque aubagé en fonction de la vitesse de rotation. Figurent également les droites représentant les harmoniques de la vitesse de rotation. Les intersections entre ces deux familles de courbes représentent les résonances possibles. Les intersections potentiellement dangereuses sont celles situées dans le régime de fonctionnement du moteur. Il s'agit soit par l'expérience soit par le calcul de hiérarchiser la criticité de ces couples régime-fréquence. Les expériences étant chères et souvent peu représentatives des conditions réelles de fonctionnement du turboréacteur, les constructeurs cherchent à prévoir la réponse forcée des éléments du moteur par la simulation numérique. Le calcul de la réponse forcée doit permettre de situer le niveau vibratoire au voisinage des résonances par rapport à la limite d'endurance. Si une résonance est jugée vraiment critique, il faut soit réviser la géométrie de l'aubage afin de déplacer la fréquence propre, soit avoir recours à un dispositif d'amortissement pour réduire l'amplitude vibratoire (voir

le paragraphe 1.4).

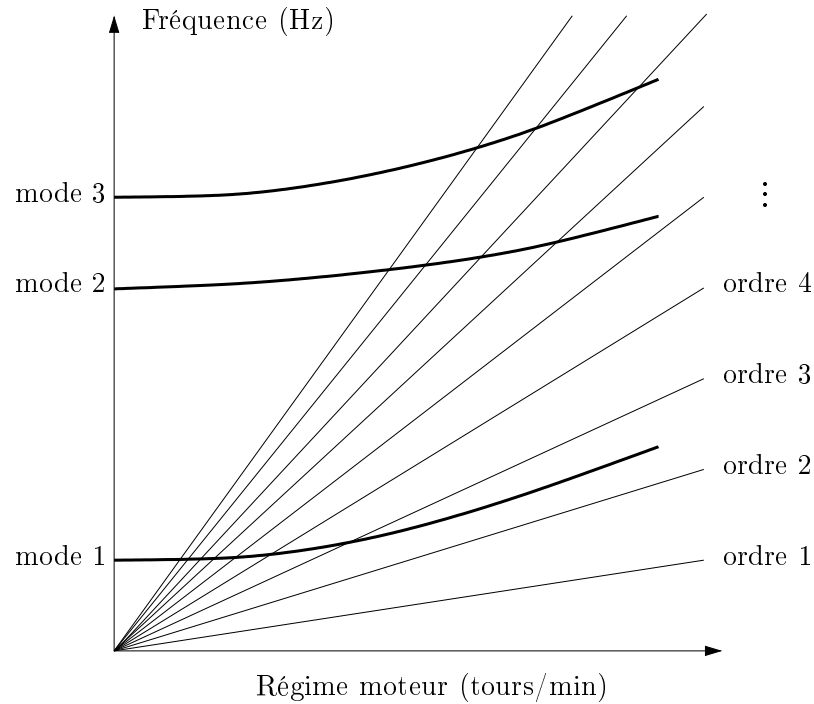


FIG. 1.12 – *Diagramme de Campbell d'une aube.*

La précision du calcul de la réponse forcée est ainsi un enjeu majeur pour les constructeurs. Dans l'état actuel du cycle de conception, les niveaux de vibration ne sont connus qu'en toute fin de développement, au moment des tests moteurs ou même seulement en vol [128]. Seulement de nombreuses informations nécessaires à un calcul véritablement prédictif en terme de niveau vibratoire manquent. Ainsi, l'excitation aérodynamique reste difficile à calculer précisément et le niveau d'amortissement total, combinaison de l'amortissement aérodynamique et de l'amortissement structural, est mal connu. Une difficulté supplémentaire vient du désaccordage de la structure : les petites différences géométriques existant inévitablement entre les aubes conduisent à un comportement très différent de celui prévu par les calculs effectués en considérant que la roue aubagée a une symétrie cyclique. Ces thématiques font l'objet de nombreuses recherches, synthétisées partiellement dans les articles de revue des références [117], [103], [138] et de façon plus complète dans [140].

Notre étude contribue aux efforts fournis actuellement pour l'amélioration de la réponse forcée des roues aubagées. Ce mémoire expose le développement et la validation d'outils de calcul permettant de prédire l'impact du frottement dans l'attache aube-disque. En particulier, nous avons cherché à quantifier la réduction du niveau vibratoire et les éventuels décalages fréquentiels dus au frottement.

1.4 Revue de quelques sources d'amortissement dans les aubages

Il s'avère qu'en pratique, il est impossible d'éviter toutes les résonances sur l'ensemble de la plage de fonctionnement du moteur car toutes les excitations ne sont pas connues au moment

de la conception. Certaines de ces résonances peuvent conduire à un niveau trop élevé risquant d'induire des dommages par fatigue. Par ailleurs les développements récents conduisent souvent à supprimer des liaisons mécaniques. Dans ce contexte, tous les constructeurs s'intéressent aux techniques d'amortissement capables d'augmenter la marge par rapport à la limite d'endurance des roues aubagées.

1.4.1 Amortissement intentionnel par frottement sec

Les dispositifs de dissipation par frottement sec exploitant le déplacement relatif entre les aubes et le disque ("blade to ground") ou entre deux aubes adjacentes ("blade to blade") sont très utilisés. La figure 1.13 montre une petite pièce métallique appelée frotteur ou bonbon placée entre deux aubes. Elle est plaquée sous les plate-formes par la force centrifuge et ainsi, le déplacement relatif des deux aubes engendre une dissipation d'énergie à l'interface entre le frotteur et les plate-formes. La masse du frotteur détermine la force normale de contact. Si elle est nulle, la résonance des aubes n'est pas amortie. Si en revanche elle est trop forte, elle ne permet plus le glissement, et aucune énergie n'est dissipée non plus. Il existe ainsi une masse optimale permettant la réduction maximale du niveau vibratoire. L'efficacité de cette technique a été montrée par des expériences à l'arrêt [50] et sur banc tournant [145]. Par ailleurs de tels dispositifs peuvent permettre d'accroître la marge au flottage des aubages [136].

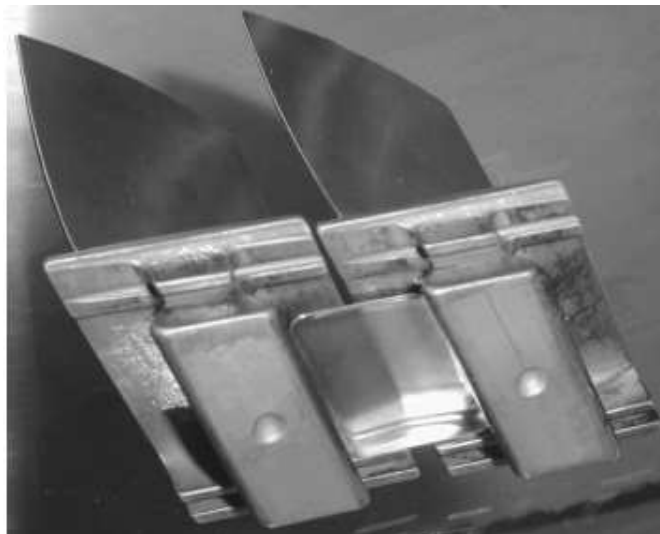


FIG. 1.13 – *Frotteur entre deux aubes adjacentes.*

Les premières modélisations ne comportaient que un degré de liberté non-linéaire représentant une aube amortie par un frotteur ponctuel et unidirectionnel. Le modèle de la figure 1.14 a été introduit notamment par Griffin [50]. Il représente un mode de l'aube, et le frotteur, supposé sans masse est modélisé par la raideur k_f . L'effort normal est supposé constant. Des extensions de ce type de modèle ont été proposées pour par exemple prendre en compte des variations de l'effort normal [89] ou simuler le microglissement [88] [125]. D'autres auteurs ont proposé des modélisations masses-ressorts-patins de disques aubagés complets qui ont permis d'étudier l'influence couplée du désaccordage et des frottements [51] [94] [95] [97].

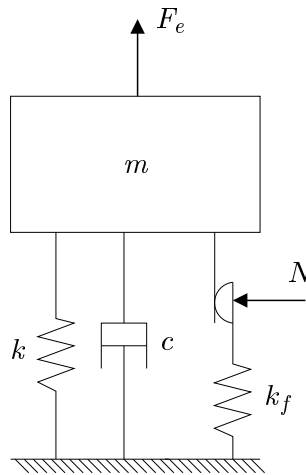


FIG. 1.14 – *Modèle à un degré de liberté d'une aube amortie par frottement sec.*

Les modélisations d'aubages amortis par frotteurs conduisent à des équations du mouvement non-linéaires. Parmi les méthodes de résolution utilisées on trouve l'intégration temporelle [147] et les éléments finis en temps [155]. Mais la plus utilisée est la méthode de balance harmonique, qui a été dans un premier temps mise en oeuvre analytiquement avec en général une harmonique (par exemple [50]), puis numériquement au fur et à mesure que les modèles ont comporté plus de degrés de liberté de contact et pris en compte plus d'harmoniques [53] [97] [113]. Les méthodes développées pour l'étude des aubes amorties par frotteurs ont inspiré en partie les développements proposés dans la thèse de Nacivet [96] et dans ce mémoire.

Les nageoires et les talons, permettent aussi de limiter les vibrations, en rigidifiant les aubages et en dissipant de l'énergie. Pour leur modélisation, il est essentiel de prendre en compte aussi bien les impacts inter-aubes que le frottement, ce qui a conduit au développement d'éléments de contact tridimensionnels [23] [108].

1.4.2 Amortissement intentionnel par d'autres dispositifs

La mise en oeuvre de l'amortissement par frottement sec n'est pas toujours pratique, en particulier dans le contexte actuel qui voit le développement d'aubes de soufflante à large corde et de disques aubagés monoblocs (DAM). De plus, à haute fréquence de vibration, l'amortissement par frottement sec, de même que l'amortissement aérodynamique, perdent leur efficacité [160].

Heureusement, l'imagination ne manque pas pour proposer des alternatives. Ainsi les matériaux viscoélastiques en couche externes ou internes ont été très étudiés en raison de leurs propriétés dissipatives. Par exemple, un brevet (US Patent No 6,102,664) de la NASA défend l'inclusion d'une couche viscoélastique au niveau du pied d'aube, dans l'interface de contact entre l'aube et le disque. Un brevet Rolls Royce (US Patent No 6,669,447) propose quant à lui l'utilisation de matériaux viscoélastiques à l'intérieur de l'aube, ce qui permettrait par exemple d'amortir efficacement des aubes fan creuses à large corde. Une autre idée du même type consiste à introduire un fluide magnétorhéologique à l'intérieur d'une aube [148]. Ce dispositif semi-actif repose sur le contrôle de la viscosité du fluide par un champ magnétique, ce qui permet d'ajuster l'amortissement de l'aube. On voit que l'on cherche souvent à introduire la source de dissipation à l'intérieur des aubes

pour éviter que les interactions avec l'écoulement. On peut ainsi encore citer les dispositifs à films d'air [84] ou à impacts [33]. Parmi les revêtements dissipatifs étudiés figurent les matériaux magnétoélastiques [160] et les dépôts solides [66]. On note enfin l'emploi possible de couches piezo-électriques en amortissement passif ou actif.

1.4.3 Amortissement par frottement en pied d'aube

La liaison aube-disque n'a pas pour seul but de dissiper de l'énergie. Elle permet en effet aussi le remplacement facile des aubes endommagées pendant les opérations de maintenance. Sa contribution à l'amortissement total se révèle néanmoins significative et doit donc être quantifiée.

Etudes expérimentales

Rao *et al.* [118] ont testé une poutre dont les extrémités représentent des pieds d'aube en forme de T. Les deux mors correspondants sont écartés l'un de l'autre par contrainte thermique, ce qui provoque la traction de la poutre. L'amortissement est mesuré à partir de la réponse libre. Les auteurs ont montré que plus la contrainte de traction représentant la force centrifuge était élevée, plus l'amortissement était faible.

Nacivet [96] a utilisé un banc similaire mais avec une poutre dont les extrémités sont en queue d'aronde. La poutre est chauffée puis insérée dans son socle. Le refroidissement à température ambiante provoque la contrainte de traction représentant l'effort centrifuge. La réponse fréquentielle a été étudiée au voisinage de la première fréquence propre. Il a été montré que l'amortissement augmente avec l'amplitude de l'excitation. Le passage du microglissement au macroglissement se traduit par une hausse plus nette de l'amortissement. Un modèle bidimensionnel du banc expérimental a été construit et l'algorithme de gestion du contact proposé par Nacivet (DLFT Dynamic Lagrangian mixed Frequency Time method) a permis de reproduire fidèlement les résultats expérimentaux.

Tokar' *et al.* [145] ont étudié l'amortissement en pied d'aube à partir d'essais sur banc tournant, à des vitesses de rotation allant jusqu'à 9000 tours par minute. Un couvercle est placé sur l'aube testée pour supprimer l'influence des efforts aérodynamiques. Dans le cas du joint en queue d'aronde, il ressort de cette étude que

- l'amortissement diminue avec la vitesse de rotation,
- l'amortissement augmente avec l'amplitude de l'excitation,
- parmi les revêtements testés, c'est un revêtement anti-friction à base de molybdène qui permet le plus d'amortissement.

L'amortissement dans ces essais reste néanmoins toujours faible, puisque les décrets logarithmiques relevés sont compris entre 0,14% et 0,43%, ce qui donne un facteur d'amortissement ζ compris entre 0,02% et 0,07%.

Etudes numériques

Rao et Saldanha ont modélisé le frottement dans un pied d'aube en T à l'aide de Ansys [119]. L'analyse de la réponse impulsionnelle a permis de déterminer pour chaque oscillation l'amplitude et un facteur d'amortissement visqueux équivalent ζ . L'évolution de ζ en fonction de l'amplitude a ainsi pu être tracée. Les auteurs n'ont pas rapproché ces résultats avec des calculs de réponse forcée.

Des études numériques de réponse forcée avec prise en compte du contact en pied d'aube ont été conduites récemment avec des modèles d'aube réalistes [19] [20] [21] [110]. Parmi ces références, trois sont issues directement des travaux menés dans le cadre de cette thèse [19] [20] [21]. Les tendances trouvées sont en accord avec les résultats expérimentaux de Tokar' *et al.* [145].

Bilan

Les études dédiées à l'amortissement en pied d'aube sont peu nombreuses. En particulier les outils de calcul numérique apparaissent tout juste et demandent encore une validation expérimentale. Cette thèse expose une méthode de calcul de la réponse forcée d'un disque aubagé en prenant en compte l'amortissement en pied d'aube. Elle est validée par des essais effectués sur un banc tournant.

1.5 Modélisation du contact aube-disque

Cette partie donne les spécificités du contact aube-disque et présente les choix de modélisation retenus pour cette étude, à la lumière des résultats expérimentaux et des modèles trouvés dans la littérature.

1.5.1 Séparation

Le contact aube-disque est fortement chargé, principalement en raison des efforts centrifuges. L'ordre de grandeur de la pression de contact moyenne sur une portée est la centaine de MPa. Mais, comme montré dans le paragraphe 1.2.3 la répartition des efforts de contact n'est pas uniforme et est de plus susceptible de varier en fonction des sollicitations dynamiques appliquées sur l'aube. Le chargement centrifuge de l'aube provoque l'ouverture de l'alvéole du disque ce qui peut entraîner une perte de contact d'une partie de l'interface. Les vibrations de l'aube peuvent aussi provoquer localement des séparations intermittentes. On a donc choisi d'inclure cette possibilité dans notre modélisation et les éléments de contact qui seront utilisés auront des degrés de liberté normaux pour prendre en compte la non-linéarité de contact unilatéral. Avec en plus les deux directions tangentielles, c'est donc une modélisation tridimensionnelle du contact qui est proposée.

La figure 1.15(a) montre une modélisation du contact, utilisée par exemple dans [22] et [108], qui fait intervenir une raideur de contact normale k_n . Ainsi, la loi de contact unilatéral n'est pas strictement vérifiée et une interpénétration est autorisée, dont la profondeur dépend de k_n (voir la figure 1.15(b)). Cette raideur de contact, qui peut être vue comme un coefficient de pénalisation, est introduite avant tout pour des raisons numériques, car elle permet une expression directe de la force de contact en fonction du déplacement relatif. Certains auteurs lui trouvent aussi une certaine justification physique. En effet, le contact entre deux solides rugueux se fait au niveau des aspérités. k_n permettrait ainsi de modéliser la déformation élastique des aspérités en contact. Mais ceci amène des objections. En premier lieu, la déformation des aspérités est en partie plastique [102]. Ensuite, même en considérant une déformation purement élastique, le modèle de Greenwood et Williamson [49] prédit une relation quasiment linéaire entre le déplacement relatif et le logarithme de l'effort normal. Enfin, les résultats expérimentaux rapportés dans [102], conduisent à exprimer la raideur de contact en fonction de l'effort normal N par

$$k_n = aN^b, \quad (1.8)$$

où a est une constante et b est un exposant valant en général 1 et parfois moins dans le cas de faibles pressions de contact. Ainsi, une modélisation avec raideur de contact normale de la figure 1.15(a) ne peut être valable que au voisinage d'un effort normal donné. Or pour le contact aube-disque, la pression de contact peut être nulle en cas de séparation et atteindre localement plusieurs centaines de MPa.

Le parti pris dans cette étude est d'imposer strictement la loi de contact unilatéral, ce qui correspond à une raideur de contact infinie. On se garde toutefois la possibilité d'ajouter des ressorts de contact par modification simple du modèle éléments finis des pièces en contact.

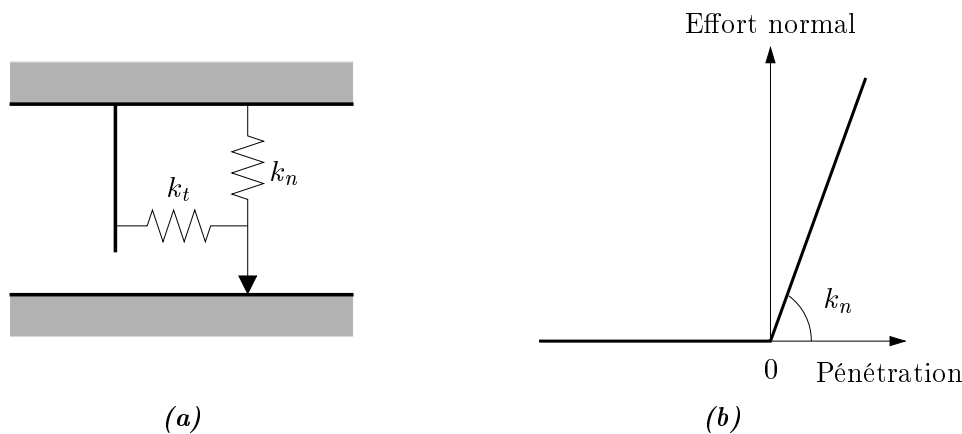


FIG. 1.15 – Utilisation de raideurs de contact : (a) élément de contact, (b) loi de contact unilatéral.

1.5.2 Microglissement

En pied d'aube, les déplacements relatifs des surfaces de contact sont très faibles. L'ordre de grandeur des glissements dus à la mise en charge de l'aube par la force centrifuge est suivant les cas de 10 ou 100 micromètres et l'amplitude des glissements dus aux excitations dynamiques est micrométrique. Ces petits débattements nécessitent des modèles spécifiques, à l'image de ceux utilisés par exemple dans l'étude des liaisons boulonnées soumises à des vibrations.

Définitions

On distingue principalement deux régimes de glissement :

- Le glissement total ou macroglissement, pour lequel toute la zone de contact est en glissement. L'effort tangentiel T est alors proportionnel à l'effort normal N : $T = \mu N$, où μ est le coefficient de frottement.
- Le glissement partiel ou microglissement, dans lequel une partie du contact est adhérente ($\tau < \mu\sigma_n$) et l'autre est glissante ($\tau = \mu\sigma_n$). τ et σ_n désignent respectivement la contrainte de cisaillement et la contrainte normale au niveau du contact. Dans la partie adhérente, un petit déplacement relatif est dû aux déformations élasto-plastiques des aspérités en contact.

Ces deux régimes sont illustrés sur la figure 1.16. La raideur de contact tangentielle initiale k_t traduit la déformation élastique des aspérités. La transition entre le glissement partiel et le glissement total se fait pour un déplacement δ^* qui est d'autant plus grand que l'effort normal N est grand. Dans le cas d'un contact sphère/plan, la théorie de Mindlin [91] conduit à δ^* proportionnel à N .

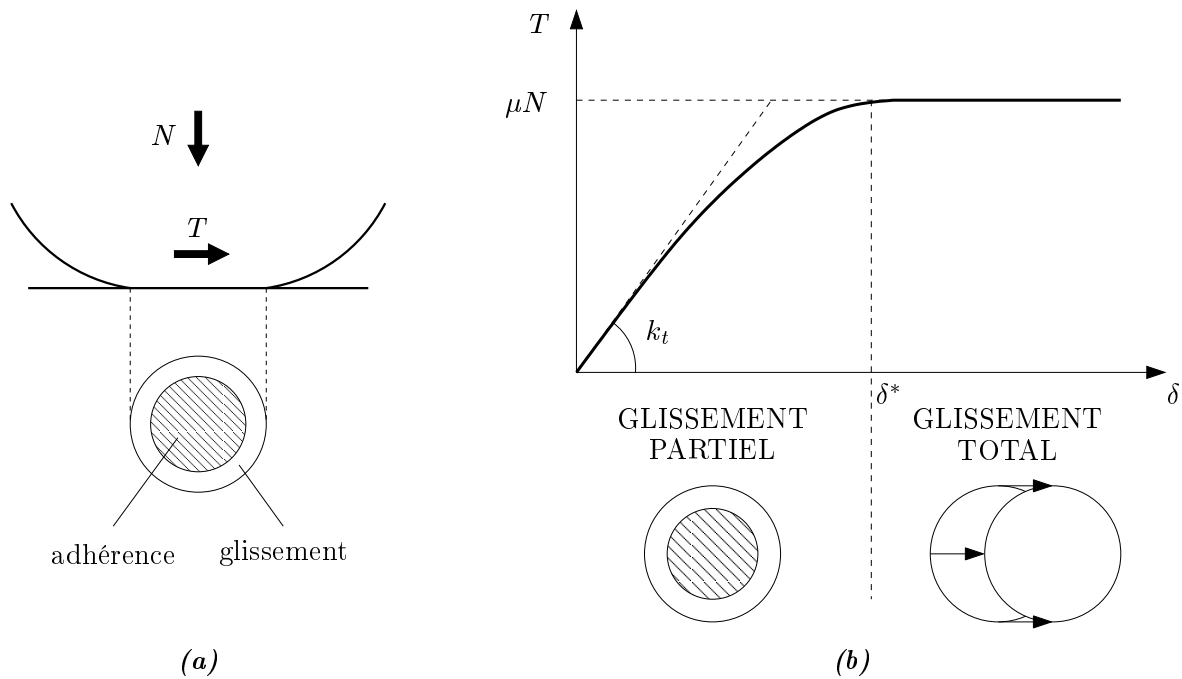


FIG. 1.16 – Régimes de glissement. (a) Contact sphère-plan (b) Force de frottement en fonction du déplacement tangentiel.

Résultats expérimentaux

Les expérimentations menées sur des tribomètres en petits débattements conduisent à des cycles effort-déplacement schématiquement représentés sur la figure 1.17 [104]. Ce comportement se retrouve dans plusieurs joints mécaniques, en particulier les liaisons boulonnées [32] [40] [52] [70]. La surface délimitée par le cycle d'hystérésis donne l'énergie dissipée par cycle. Le modèle de Coulomb macroscopique ne peut pas reproduire un tel comportement. En effet, pour l'amplitude de force de la figure 1.17(a), il ne prévoit pas de glissement et donc une énergie dissipée nulle. En revanche dans le cas du macroglissement (figure 1.17(b)), il prévoit un cycle rectangulaire et surestime donc la dissipation.

La raideur tangentielle du contact k_t augmente avec l'effort normal. Ferrero *et al.* [40] ont proposé à partir de leur résultats expérimentaux la relation $k_t = a\sqrt{N}$, où a est une constante. Crassous *et al.* [26] ont trouvé une relation à peu près linéaire sur la gamme d'effort normal étudiée. Ils ont en outre déterminé que la caractéristique effort-déplacement était entièrement caractérisée par une longueur indépendante de l'effort normal et de la fréquence, liée à la taille des aspérités.

Fridrici [43] a testé la résistance au fretting des revêtements utilisés en pied d'aube. En fonction de l'effort tangentiel appliqué, il a trouvé des cycles semblables à ceux schématisés dans la figure 1.17. Il a montré que le macroglissement est dangereux puisqu'il conduit à l'élimination rapide du lubrifiant, ouvrant ainsi la voie à des dégradations des couches internes du matériau et éventuellement à des fissures. Par ailleurs, au fil des cycles de fatigue, la forme du cycle varie et le coefficient de frottement augmente. L'augmentation du coefficient de frottement est particulièrement nette au moment de l'élimination du film de lubrifiant solide.

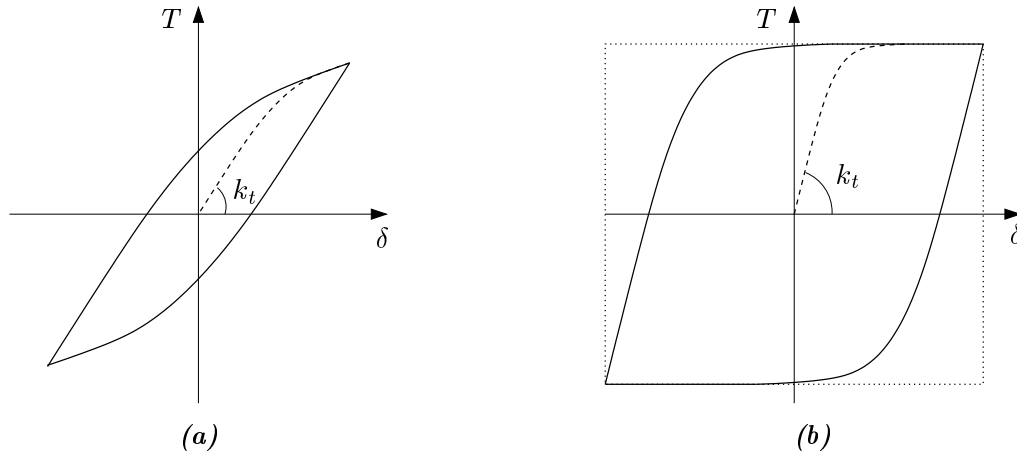


FIG. 1.17 – Boucles d'hystérésis en petits débattements : (a) glissement partiel uniquement, (b) glissement partiel et glissement total. - - : courbes de première charge, : modèle de Coulomb macroscopique.

Revue de quelques modèles

On a vu que le modèle de Coulomb macroscopique ne pouvait pas approcher correctement le comportement d'une interface en petits glissements. La figure 1.18(b) montre une première amélioration possible qui consiste à mettre en série une raideur représentative de la raideur tangentielle de contact, constituant ainsi un élément de contact dit bilinéaire ou de Jenkins. Le modèle rhéologique proposé par Iwan [67] est formé par un assemblage d'éléments de Jenkins arrangés en parallèle ou en série. Il a été beaucoup utilisé pour modéliser le frottement dans les joints (voir par exemple [70] [124]). Le modèle d'Iwan parallèle, aussi appelé modèle de Masing, est montré dans la figure 1.18(c). Il donne une bonne représentation physique du glissement partiel. Sanliturk *et al.* [125] ont quant à eux utilisé pour la modélisation du contact aube-bonbon un modèle de microglissement basé sur la courbe de premier chargement d'équation

$$T(\delta) = k_t(1 - e^{-a\delta}), \quad (1.9)$$

où a est une constante. Menq *et al.* [87] ont proposé un modèle continu de microglissement dans lequel la loi de Coulomb s'applique localement en chaque point de l'interface. Une fine couche élastoplastique est aussi insérée dans le contact pour modéliser les petits déplacements relatifs précédant le glissement. Le modèle a été utilisé pour la prédiction de la réponse d'une aube amortie par frotteur [88].

Enfin parmi les modèles très utilisés en automatique, on peut citer l'équation différentielle proposée par Dahl [29] :

$$\frac{dT}{d\delta} = k_t \left(1 - \frac{T}{\mu N} \operatorname{sgn}(\dot{\delta}) \right)^a, \quad (1.10)$$

où a est un paramètre souvent pris égal à 1. On parle ainsi souvent d'effet de Dahl pour désigner les déplacements relatifs précédant le macroglissement. Plus récemment, le modèle de Haessig et Friedland [54] et le modèle LuGre [17] ont été obtenus en considérant que le contact se fait par l'intermédiaire de "poils souples" aléatoirement répartis sur chacune des surfaces.

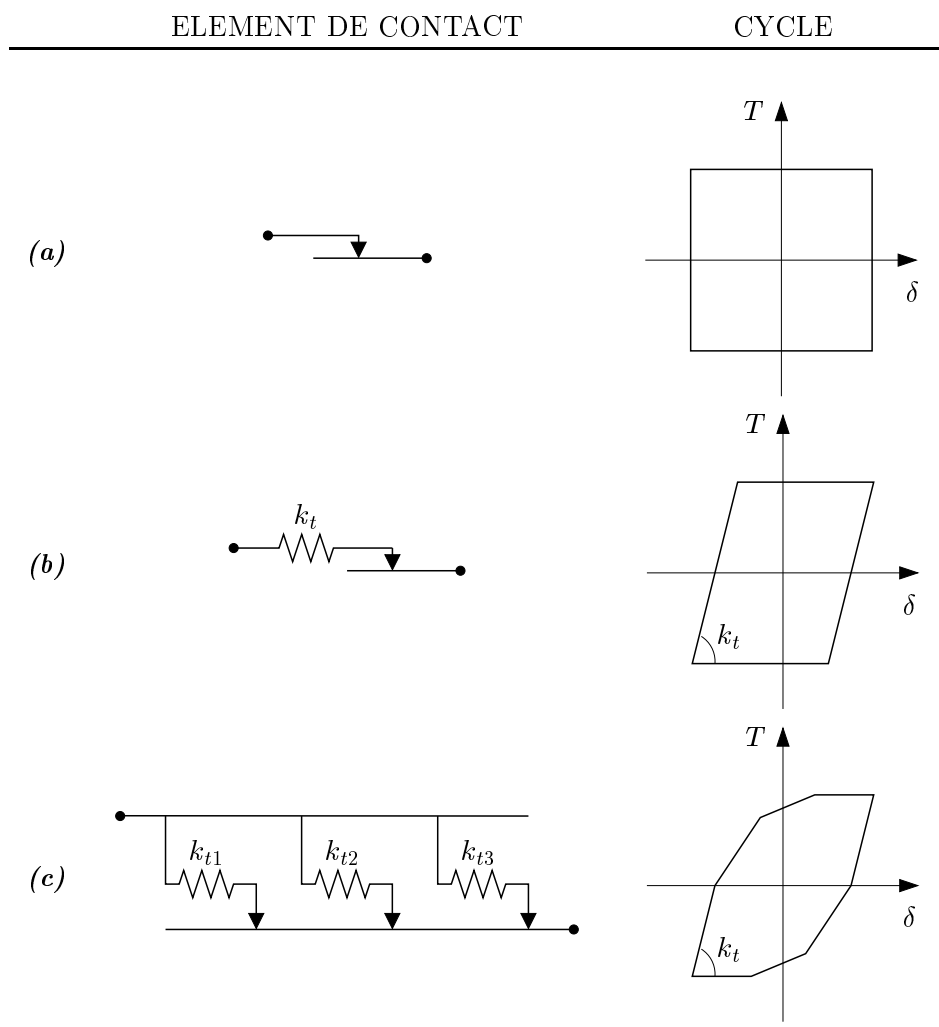


FIG. 1.18 – Quelques éléments de contact : (a) élément de Coulomb (b) élément de Jenkins, (c) modèle de Iwan parallèle avec 3 éléments de Jenkins, $k_t = k_{t1} + k_{t2} + k_{t3}$.

Modélisation retenue

Dans cette étude, nous utilisons la discrétisation par éléments finis des solides étudiés. La loi de frottement est supposée être vérifiée localement, au sein d'un certain nombre d'éléments de contacts répartis dans l'interface de contact. Cette discrétisation permet de modéliser le glissement partiel sans connaître *a priori* la répartition du chargement normal et autorise éventuellement une répartition non uniforme des paramètres de frottement.

Dans la majeure partie de l'étude, on utilise la loi de Coulomb, mais des raideurs tangentielles peuvent être ajoutées en modifiant de façon simple le modèle éléments finis. Les déformations plastiques des zones adhérentes n'ont pas été modélisées. Aussi, les seules dissipations énergétiques au niveau de l'interface de contact sont supposées venir des zones de glissement.

1.5.3 Frottement statique

Le passage de l'état d'adhérant à l'état glissant s'accompagne souvent d'une baisse de la force de frottement. On définit ainsi un coefficient de frottement statique μ_s pour l'initiation du glissement et un coefficient de frottement dynamique μ_d pour le glissement établi. μ_d est en général plus faible que μ_s et peut varier en fonction de la vitesse de glissement. Ces phénomènes, ainsi que leurs effets sont détaillés dans le chapitre 6.

Conclusions

Les constructeurs de turbomachines cherchent à connaître au plus tôt dans le cycle de conception les risques de fatigue des aubages. Ainsi, de gros efforts sont consentis actuellement par les industriels et les chercheurs pour améliorer le calcul de la réponse forcée des roues aubagées. Dans ce contexte, ce chapitre a montré qu'il est important de pouvoir prédire

1. l'influence du frottement en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées,
2. l'endommagement par fretting dans la liaison aube-disque.

On s'attaque principalement dans cette étude au point 1. Les calculs de réponse forcée avec frottement en pied d'aube sont effectués en reprenant la méthode de résolution proposée par Nacivet [96] [97] et en adoptant une approche locale de la zone de contact afin de reproduire le glissement partiel et les éventuelles séparations. On cherche en particulier à quantifier la réduction de niveau vibratoire et le décalage des fréquences de résonance par rapport au cas sans frottement. La résolution donne accès par ailleurs à la répartition et à l'évolution au cours du temps des amplitudes de glissement et efforts de contact, qui sont des données nécessaires pour le point 2.

Chapitre 2

Formulation et résolution d'un problème de contact avec frottement

Une formulation continue du problème de contact avec frottement est décrite au début de ce chapitre. Les méthodes les plus employées pour sa résolution numérique sont ensuite présentées. Pour le calcul du régime permanent des aubages avec frottement en pied d'aube, les méthodes fréquentielles sont très appropriées. Celle que nous utiliserons par la suite a été proposée par Nacivet [96] [97] et se nomme DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency Time method). Nous en donnons une présentation revue et complétée puis nous évaluons sa performance en terme de précision et de temps de calcul.

2.1 Formulation du problème continu

Dans cette section, le problème de contact avec frottement est formulé dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Deux non-linéarités sont prises en compte. L'une est liée au contact unilatéral et concerne la direction normale à la surface de contact et l'autre est liée au frottement et s'exerce dans la direction tangentielle. Les matériaux sont pris linéaires et nous faisons l'hypothèse que les déformations et les déplacements sont petits. Nous nous contentons de modèles simples de l'interface de contact : la loi de Coulomb est choisie pour modéliser le frottement et la loi de contact unilatéral est utilisée pour la direction normale.

Avec ces hypothèses, le problème est formulé brièvement. Puis nous explorons deux voies théoriques pour la résolution. Dans la première on applique le principe des puissances virtuelles ou le principe des travaux virtuels pour obtenir une égalité variationnelle où à la fois les forces de contact et les déplacements sont les inconnues. Dans la seconde, le problème est ramené à une inégalité variationnelle. La solution en déplacement est approchée par la résolution de sous-problèmes différentiables de minimisation avec contraintes.

2.1.1 Equations locales

On considère un problème de contact avec frottement entre deux solides déformables comme le montre la figure 2.1. On fait l'hypothèse que les déformations sont petites et que les déplacements sont petits. Cette dernière hypothèse implique aussi que l'on se limite à l'étude des petits glissements. Les solides occupent deux domaines Ω^l avec des frontières Γ^l , $l = 1, 2$. Ils se trouvent

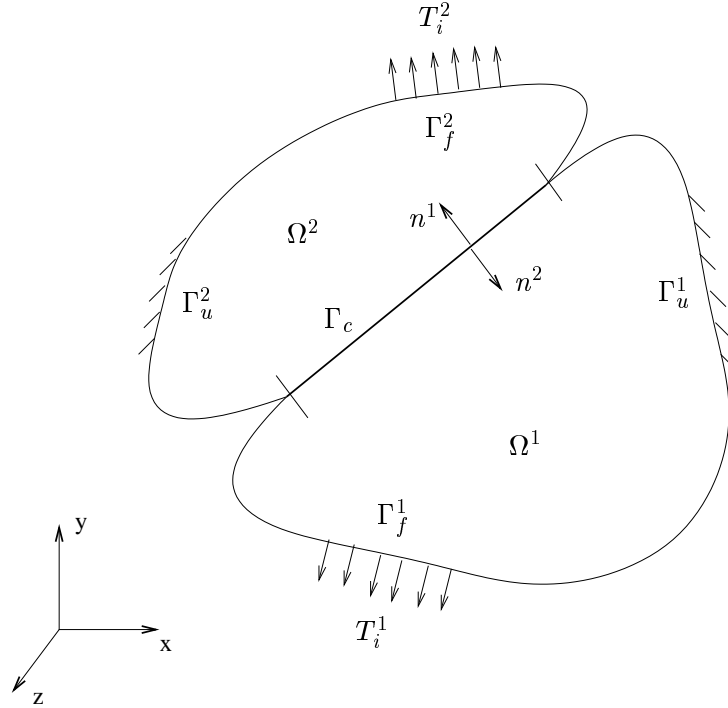


FIG. 2.1 – Contact entre deux corps : modèle continu.

initialement en contact sur $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Chaque solide l est soumis à des efforts de volume \mathbf{f}^l et à des forces \mathbf{T}^l qui agissent sur Γ_f^l . Par ailleurs un champ de déplacement \mathbf{U}^l est imposé sur Γ_u^l . La frontière Γ^l est ainsi la réunion de trois surfaces : $\Gamma^l = \Gamma_u^l \cup \Gamma_f^l \cup \Gamma_c$. Les déformations étant supposées petites, le tenseur des déformations s'écrit

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^l) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^l + u_{j,i}^l). \quad (2.1)$$

Le comportement des solides est supposé élastique et on note a_{ijkh}^l le tenseur d'élasticité. La loi de comportement s'écrit alors

$$\sigma_{ij}^l = a_{ijkh}^l \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^l) \quad l = 1, 2. \quad (2.2)$$

Les équations du mouvement dans leur forme locale sont :

$$\sigma_{ij,j}^l + f_i^l = \rho^l \frac{\partial^2 u_i^l}{\partial t^2} \quad l = 1, 2. \quad (2.3)$$

Les conditions initiales sont données par

$$\mathbf{u}^l(0) = \mathbf{u}_0^l, \quad \dot{\mathbf{u}}^l(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^l \quad l = 1, 2. \quad (2.4)$$

On doit naturellement avoir pour $l = 1, 2$

$$\mathbf{u}_0^l = \mathbf{U}^l(0), \quad \dot{\mathbf{u}}_0^l = \dot{\mathbf{U}}^l(0) \quad \text{sur } \Gamma_u^l. \quad (2.5)$$

Sur Γ_c , le vecteur contrainte est décomposé suivant ses composantes normale et tangentielle :

$$\mathbf{T}^l = \sigma_n^l \mathbf{n}^l + \boldsymbol{\sigma}_t^l \quad l = 1, 2. \quad (2.6)$$

\mathbf{n}^l est la normale sortante au corps l . La distance entre les deux corps est définie sur Γ_c par

$$d(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u}^1 \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \mathbf{n}^2), \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2). \quad (2.7)$$

Ceci étant posé, les conditions de contact avec frottement sur Γ_c sont les suivantes :

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2 = \sigma_n \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t^1 = -\boldsymbol{\sigma}_t^2 = \boldsymbol{\sigma}_t \quad (2.9)$$

$$d \geq 0 \quad (2.10)$$

$$d > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{d} = 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}_t\| < \mu |\sigma_n| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2 = \mathbf{0} \\ \|\boldsymbol{\sigma}_t\| = \mu |\sigma_n| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2 = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_t \end{cases} \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) est l'écriture de la loi de frottement de Coulomb. Le coefficient de frottement μ est ici une constante. $\dot{\mathbf{u}}_t^l$ est le déplacement tangentiel du solide l sur Γ_c . Localement, les deux corps en contact peuvent soit adhérer l'un à l'autre quand $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| < \mu |\sigma_n|$ soit glisser l'un par rapport à l'autre, et dans ce cas $\|\boldsymbol{\sigma}_t\| = \mu |\sigma_n|$. Pendant le glissement, la force de frottement agit dans la direction de la vitesse relative et en sens opposé. Le graphe force-vitesse de la loi de Coulomb est représenté sur la figure 2.2-b. On voit apparaître également dans (2.10), (2.11), (2.12) la gestion du contact unilatéral. Les deux solides ne peuvent pas pénétrer l'un dans l'autre. Ils peuvent s'appliquer des efforts normaux de compression mais pas de traction. Le contact peut être perdu. Ceci est classiquement résumé par une condition d'impenétrabilité, une condition de compression et une condition complémentaire :

$$d \geq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad d\sigma_n = 0. \quad (2.13)$$

Ces conditions sont résumées sur 2.2-a. On ajoute généralement aussi, pour les cas dynamiques la condition suivante :

$$\dot{d}\sigma_n = 0. \quad (2.14)$$

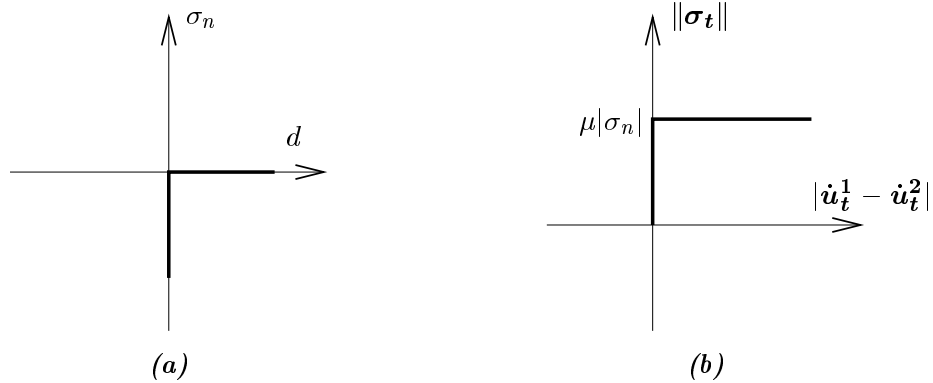


FIG. 2.2 – (a) Loi de contact unilatéral. (b) Loi de frottement de Coulomb.

2.1.2 Principe des puissances virtuelles

L'objectif est ici de dériver du problème exposé en 2.1.1 une formulation faible adaptée à une future discrétisation. On définit les espaces

$$V(\Omega^l) = \{\mathbf{v}^l, \mathbf{v}^l = \mathbf{U}^l \text{ sur } \Gamma_u^l\}$$

et

$$K = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in V(\Omega^1) \times V(\Omega^2), d(\mathbf{v}) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

K forme l'espace des déplacements admissibles. On remarquera que ici pas plus que en 2.1.1 on ne précise l'ensemble dans lequel sont pris les déplacements. Le cadre fonctionnel couramment utilisé par les mathématiciens ([34], [35], [59]) utilise les espaces de Sobolev. Par exemple, Duvaut et Lions [34] ont utilisé l'espace de Sobolev du premier ordre pour démontrer leurs résultats majeurs concernant le problème de frottement statique. Mais certains résultats d'autres auteurs concernant par exemple l'analyse des erreurs dues aux discrétisations nécessitent des régularités plus poussées (voir [8]). Nous nous contenterons ici de supposer la régularité "suffisante".

Soit $\mathbf{v} \in K$. Pour chaque corps l , $\dot{\mathbf{v}}^l$ est un champ de vitesses virtuelles compatible. En reprenant l'équation du mouvement 2.3 on peut écrire le bilan des puissances virtuelles pour chaque corps :

$$\int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{\mathbf{u}}_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l = \int_{\Omega^l} \sigma_{ij,j}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l + \int_{\Omega^l} f_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l. \quad (2.15)$$

On transforme la première intégrale du second membre en intégrant par parties et en appliquant le théorème d'Ostrogradski :

$$\int_{\Omega^l} \sigma_{ij,j}^l \dot{v}_i^l d\Omega^l = \int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l - \int_{\Omega^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_{i,j}^l d\Omega^l. \quad (2.16)$$

Par ailleurs comme $\sigma_{ij}^l = \sigma_{ji}^l$,

$$\sum_i \sum_j \sigma_{ij}^l \dot{v}_{i,j}^l = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}^l \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{v}}^l). \quad (2.17)$$

On a ainsi la forme habituelle du principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{\mathbf{u}}_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l + \int_{\Omega^l} \sigma_{ij}^l \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{v}}^l) d\Omega^l = \int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l + \int_{\Omega^l} f_i^l \dot{v}_i^l d\Omega^l. \quad (2.18)$$

Compte tenu des conditions aux limites exposées en 2.1.1, la puissance des efforts agissant sur la frontière Γ^l peut se décomposer de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l = \int_{\Gamma_f^l} T_i^l \dot{v}_i^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_u^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_c} \sigma_n^l \dot{v}_n^l d\Gamma^l + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_t^l \cdot \dot{\mathbf{v}}_t^l d\Gamma^l. \quad (2.19)$$

Pour les deux corps, on a au final :

$$\forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = L(\dot{\mathbf{v}}) + \langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle, \quad (2.20)$$

où $(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})$ représente la puissance virtuelle des efforts d'inertie :

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} \rho^l \ddot{\mathbf{u}}^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Omega^l, \quad (2.21)$$

$a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}})$ représente la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} a_{ijkl}^l \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^l) \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{v}}^l) d\Omega^l, \quad (2.22)$$

$L(\dot{\mathbf{v}})$ représente la puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$L(\dot{\mathbf{v}}) = \sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Omega^l} \mathbf{f}^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Omega^l + \int_{\Gamma_f^l} \mathbf{T}^l \cdot \dot{\mathbf{v}}^l d\Gamma^l \right), \quad (2.23)$$

$\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle$ représente la puissance virtuelle des efforts nécessaires pour imposer les déplacements sur Γ_u^1 et Γ_u^2 :

$$\langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_u^l} \sigma_{ij}^l \dot{v}_i^l n_j^l d\Gamma^l, \quad (2.24)$$

$\langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle$ représente la puissance virtuelle des efforts de contact normaux :

$$\langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_c} \sigma_n^l \dot{v}_n^l d\Gamma^l = - \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) \dot{d}(\mathbf{v}) d\Gamma, \quad (2.25)$$

$\langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle$ représente la puissance virtuelle des efforts de contact tangentiels :

$$\langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = \sum_{l=1}^2 \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}_t^l \cdot \dot{\mathbf{v}}_t^l d\Gamma^l. \quad (2.26)$$

On peut remarquer que la puissance réelle des efforts de contact normaux obtenue en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ est nulle : $\langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0$.

2.1.3 Egalité variationnelle

En reprenant l'équation (2.20) on peut formuler le problème de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) = L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Le terme lié aux déplacements imposés a disparu car

$$\text{sur } \Gamma_u^1 \times \Gamma_u^2 \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{U}} \Rightarrow \langle \mathbf{f}_u, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0. \quad (2.28)$$

C'est à partir de l'égalité variationnelle (2.27) qu'est formulé l'algorithme de résolution proposé par Nacivet [96] [97]. La plupart des codes éléments finis proposent également des algorithmes de résolution des problèmes de contact avec frottement qui sont également basés sur une formulation par des égalités variationnelles (voir [90]). La surface réelle de contact ainsi que les efforts de contact sont inconnus, c'est pourquoi une méthode incrémentale est nécessaire pour obtenir la solution. Des méthodes de type Newton sont souvent employées. Nous avons plutôt utilisé un algorithme dit hybride de Powell [114] qui a fait preuve de propriétés de robustesse supérieures dans les cas traités dans cette étude.

2.1.4 Inégalités variationnelles

Expression dans le cas général

On peut montrer en suivant la démarche de Duvaut et Lions [34] que le problème exposé en 2.1.1 est équivalent à

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \geq L(\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \mathbf{f}_{cn}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \end{array} \right. \quad (2.29)$$

où

$$j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\| d\Gamma. \quad (2.30)$$

On remarque en effet que si \mathbf{u} est solution de notre problème, alors σ_t^1 et la vitesse relative $\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2$ sont colinéaires et de sens opposé, d'où

$$\sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2) = -\|\sigma_t^1\| \|\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2\|. \quad (2.31)$$

Par ailleurs, pour tout $\mathbf{v} \in K$

$$\sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2) \geq -\|\sigma_t^1\| \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\|, \quad (2.32)$$

et donc

$$\sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2) - \sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2) \geq \|\sigma_t^1\| (\|\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2\| - \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\|). \quad (2.33)$$

Si il y a glissement, $\|\sigma_t^1\| = \mu |\sigma_n|$ donc

$$\sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2) - \sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2) \geq \mu |\sigma_n| (\|\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2\| - \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\|). \quad (2.34)$$

Si il y a adhérence, $-\|\sigma_t^1\| \geq -\mu |\sigma_n|$ donc

$$\sigma_t^1 \cdot (\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2) \geq -\mu |\sigma_n| \|\dot{\mathbf{v}}_t^1 - \dot{\mathbf{v}}_t^2\|, \quad (2.35)$$

ce qui redonne (2.34) avec $\dot{\mathbf{u}}_t^1 - \dot{\mathbf{u}}_t^2 = \mathbf{0}$. On a donc (2.29) car

$$\langle \mathbf{f}_{ct}, \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}} \rangle \geq j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}). \quad (2.36)$$

La démonstration de la réciproque est plus complexe et s'inspire de [34].

En utilisant les travaux virtuels à la place des puissances virtuelles, on trouve en suivant la même démarche que en 2.1.2 que notre problème équivaut à

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in K \quad (\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \langle \mathbf{f}_{cn}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}_{ct}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \end{array} \right. \quad (2.37)$$

On peut alors remarquer que

$$\langle \mathbf{f}_{cn}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = - \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) d(\mathbf{v}) d\Gamma \geq 0, \quad (2.38)$$

puisque $d(\mathbf{v}) \geq 0$ et $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$. Ceci nous conduit à une inégalité variationnelle d'écriture plus compacte que 2.29 :

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (2.39)$$

La résolution directe des inégalités (2.29) et (2.39) semble très délicate, c'est pourquoi Kikuchi et Oden [74] ont proposé de diviser le problème général en deux sous-problèmes : dans le premier les efforts de contact tangentiels sont supposés connus et dans l'autre, la surface de contact et les efforts de contact normaux sont supposés connus. La stratégie consiste à résoudre alternativement les deux sous-problèmes jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. En s'inspirant de ceci, deux cas particuliers sont étudiés ci-après.

Cas du contact sans frottement

La solution d'un problème de contact sans frottement se calcule facilement, car dans ce cas, on peut se ramener à un problème classique d'optimisation sous contrainte. Si par exemple on considère un problème quasi-statique, l'inégalité variationnelle (2.39) se réduit à

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (2.40)$$

et notre problème est équivalent à la minimisation de l'énergie potentielle totale en respectant la contrainte de non interpénétration des deux solides :

$$\min_{\mathbf{v} \in K} e_{pot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}). \quad (2.41)$$

En effet, si $\mathbf{u} \in K$ vérifie (2.40) pour tout \mathbf{v} de K alors

$$\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \leq -L(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(2a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u})). \quad (2.42)$$

On suppose que le tenseur d'élasticité est symétrique et qu'il vérifie la propriété habituelle d'ellipticité :

$$\exists \alpha > 0, \quad a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}. \quad (2.43)$$

On a donc

$$a(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}a(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}). \quad (2.45)$$

\mathbf{u} minimise donc l'énergie potentielle totale. Réciproquement, si $\mathbf{u} \in K$ vérifie pour tout \mathbf{v} de K :

$$\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}), \quad (2.46)$$

alors la symétrie de a donne

$$\frac{1}{2}a(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad (2.47)$$

puis l'ellipticité de a permet de retrouver (2.40). Cette même ellipticité permet de dire que le problème de minimisation est strictement convexe et admet donc un unique minimum. Pour transformer le problème de minimisation sous contrainte inégalité ainsi obtenu en un problème sans contrainte, des techniques de pénalité, de multiplicateurs de Lagrange ou encore de lagrangiens augmentés sont souvent utilisés.

Cas du frottement pur

Ici on suppose que la surface réelle de contact Γ_{cr} et les efforts normaux de contact sont connus. Alors la fonctionnelle liée au frottement devient :

$$j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{cr}} \mu |\sigma_n| \|\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2\| d\Gamma . \quad (2.48)$$

On peut de la même façon que dans le cas du contact sans frottement montrer que le problème est équivalent à la minimisation de

$$\pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + j(\mathbf{v}) . \quad (2.49)$$

A cause du terme en norme du déplacement relatif $\|\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2\|$, j n'est pas différentiable, c'est pour cela qu'il n'y a pas de problème d'optimisation standard équivalent. Pour contourner cette difficulté, certains chercheurs ont pensé à régulariser j [74]. Une régularisation de la norme classiquement utilisée consiste à définir pour un vecteur \mathbf{w} la fonction

$$\Phi_\nu(\mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{w}\|^2 & \text{si } \|\mathbf{w}\| \leq \nu \\ \|\mathbf{w}\| - \frac{\nu}{2} & \text{si } \|\mathbf{w}\| > \nu \end{cases} \quad (2.50)$$

qui est représentée dans la figure 2.3. On retrouve bien la fonction norme lorsque $\nu \rightarrow 0$. En introduisant une approximation de la fonctionnelle j liée au frottement par

$$j_\nu(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{cr}} \mu |\sigma_n| \Phi_\nu(\mathbf{v}_t^1 - \mathbf{v}_t^2) d\Gamma , \quad (2.51)$$

on peut écrire la nouvelle fonctionnelle à minimiser :

$$\pi_\nu(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + j_\nu(\mathbf{v}) . \quad (2.52)$$

π_ν est strictement convexe et admet donc un unique minimum.

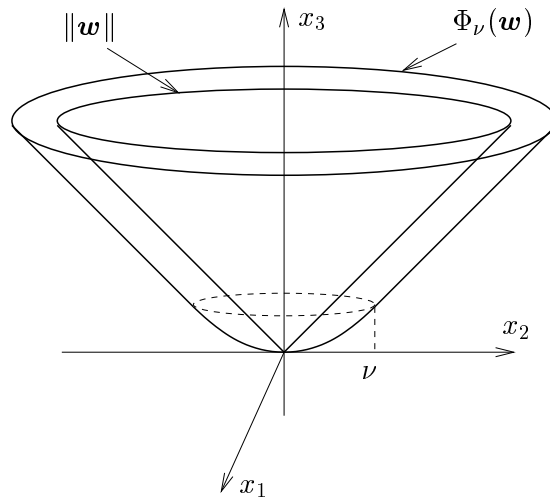


FIG. 2.3 – Approximation de la norme par une fonction différentiable convexe.

La régularisation rend la solution moins précise et dépendante d'un paramètre. D'un autre côté, cette régularisation simule une transition moins brusque entre l'état collé et l'état glissant, ce

qui est plus proche des résultats expérimentaux. Alart et Curnier [1] ont eux utilisé une technique de sous-différentielles. L'inégalité variationnelle se réduit alors à un problème de minimisation faisant intervenir des pseudo-potentiels (non dérivables). Le traitement est effectué par une méthode inspirée des lagrangiens augmentés.

Une autre solution proposée par Czekanski et Meguid [28] s'applique au cas où l'on a une seule dimension tangentielle. Le terme non différentiable devient alors $|\dot{v}_r|$ où \dot{v}_r désigne la vitesse relative tangentielle. Les auteurs proposent de résoudre deux sous-problèmes liés à une contrainte supplémentaire : dans l'un on impose $\dot{v}_r \geq 0$ et dans l'autre $\dot{v}_r \leq 0$. Chacun de ces sous-problèmes est différentiable. Pour au moins un des deux minima trouvés la contrainte est active : $\dot{v}_r = 0$. Si pour l'un des minima la contrainte est inactive, c'est la solution du problème global et elle correspond à un état glissant. L'état adhérent correspond au cas de figure où pour les deux minima la contrainte est active. Les deux solutions associées doivent alors être égales.

2.1.5 Discrétisation par éléments finis

Nous sommes jusqu'à présent restés dans le cadre continu. Nous allons à présent exprimer le problème à résoudre obtenu après une discrétisation des deux solides par éléments finis.

Expression à partir de l'égalité variationnelle

La forme discrétisée de l'égalité variationnelle (2.27) est (voir par exemple [4])

$$M\ddot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} + \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{ex}, \quad (2.53)$$

où M désigne la matrice de masse, K la matrice de raideur, \mathbf{F}_{ex} le vecteur des forces extérieures. \mathbf{F}_c regroupe les forces de contact. Il est d'usage de faire apparaître les forces non-linéaires \mathbf{F}_c à gauche du signe $=$ ce qui signifie que \mathbf{F}_c représente l'opposé des forces de contact. On verra en effet en 2.2 que les forces de contact peuvent être vues en théorie de l'optimisation comme des multiplicateurs de Lagrange. On note que dans l'équation (2.53) à la fois \mathbf{F}_c et \mathbf{U} sont des inconnues. Ils doivent vérifier les contraintes liées au contact et à la loi de frottement de Coulomb.

Le contact unilatéral impose les contraintes affines

$$\forall i \in 1, \dots, m \quad (A\mathbf{U})_i \leq (\mathbf{G})_i, \quad (2.54)$$

où m est le nombre de contraintes imposées, c'est à dire le nombre d'éléments de contact. A est dite matrice des contraintes de contact et dépend de la discrétisation des surfaces en contact et du type d'élément de contact utilisé. \mathbf{G} représente les distances de séparation initiales dans les éléments de contact. On résume (2.54) par la notation

$$A\mathbf{U} \leq \mathbf{G}. \quad (2.55)$$

Dans les chapitres suivants, on utilise des éléments de contact noeud à noeud puisque on se limite à de petits glissements et que les maillages sont compatibles au niveau de l'interface de contact. De plus la distance initiale entre les surfaces de contact est nulle ce qui implique que \mathbf{G} est nul. Dans ce cas, l'équation (2.55) prend une forme très simple :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{nl}^1 \\ U_l^1 \\ U_{nl}^2 \\ U_l^2 \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

où pour le solide l , \mathbf{U}_{nl}^l est le vecteur des degrés de liberté participant au contact et \mathbf{U}_l^l est le vecteur des autres degrés de liberté. I est la matrice identité. On a supposé ici que les éléments de contact occupent une position analogue dans \mathbf{U}_{nl}^1 et dans \mathbf{U}_{nl}^2 .

Par ailleurs, les composantes normales de \mathbf{F}_c doivent être positives là où il y a contact et nulles là où le contact est perdu. Dans les zones de contact \mathbf{F}_c et \mathbf{U}_{nl} doivent vérifier la loi de frottement de Coulomb. En outre, \mathbf{U}_l doit vérifier les contraintes de déplacements imposés. Cette dernière contrainte peut être gérée de façon habituelle par le code éléments finis choisi, mais les autres contraintes doivent être prises en compte par l'algorithme de gestion du contact.

Expression à partir des inégalités variationnelles

Les inégalités variationnelles exprimées en 2.1.4 s'expriment de manière semblable avec les déplacements nodaux. On retrouve aussi les problèmes de minimisation associés aux deux sous-problèmes précédemment évoqués : cas du contact sans frottement et cas du frottement pur.

Cas du contact sans frottement Le problème revient à minimiser l'énergie potentielle totale

$$E_{pot}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} \quad (2.57)$$

sous la contrainte $\mathbf{A} \mathbf{V} \leq \mathbf{G}$. C'est un problème de minimisation différentiable strictement convexe de dimension finie.

Cas du frottement pur La quantité à minimiser devient pour le problème régularisé

$$\Pi_\nu(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} + \mathbf{F}_d^T \Phi_\nu(\mathbf{V}). \quad (2.58)$$

$\mathbf{F}_d^T \Phi_\nu$ représente la forme discrétisée de la fonctionnelle j_ν . Le vecteur Φ_ν regroupe les valeurs de la fonction Φ_ν pour chaque élément de contact. \mathbf{F}_d est le vecteur des efforts de contact normaux donnés. On retrouve là aussi un problème de minimisation strictement convexe et de dimension finie. Ici, la contrainte liée au frottement est incluse dans le problème de minimisation. C'est l'intérêt des formulations par inégalités variationnelles. On doit simplement vérifier une contrainte égalité qui impose qu'il n'y a pas de perte de contact dans la zone où les efforts de contact normaux sont imposés :

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{G}. \quad (2.59)$$

2.1.6 Conclusions

L'utilisation traditionnelle des principes de la mécanique conduit à formuler le problème de contact avec frottement de Coulomb par une égalité variationnelle, mais on démontre en mathématiques qu'il est également possible de ramener le problème à la résolution d'une inégalité variationnelle. Cette formulation permet de prendre en compte de façon très élégante le frottement. En contre partie, elle conduit à un problème de minimisation non différentiable ce qui explique que peu d'auteurs l'utilisent. Pour les problèmes de contact sans frottement en revanche, la formulation par inégalités variationnelles suscite beaucoup d'attrait puisqu'elle conduit à des problèmes de minimisation sous contraintes classiques.

2.2 Stratégies de résolution de problèmes contraints

Dans cette section sont exposés de façon concise les techniques les plus répandues pour résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes. Les problèmes de contact et de frottement formulés en 2.1.5 sont systématiquement pris comme exemples d'application.

2.2.1 Multiplicateurs de Lagrange

Cas d'un problème avec contraintes d'égalité

On reprend le problème de frottement pur (2.58) (2.59). Pour la recherche du minimum de Π_ν avec la contrainte $AV = G$, on résout le système :

$$\begin{cases} KV + F_d^T \nabla \Phi_\nu(V) + A^T \lambda = F_{ex} & n \text{ équations} \\ AV = G & m \text{ équations} \end{cases} \quad (2.60)$$

Dans ce système, les composantes de λ sont des inconnues supplémentaires appelées multiplicateurs de Lagrange. Le nombre de multiplicateurs est égal au nombre m de contraintes imposées, qui est également le nombre d'éléments de contact. $\nabla \Phi_\nu$ est le gradient de Φ_ν . Il est linéaire par morceaux. Le système (2.60) est donc un système non-linéaire de $n + m$ équations à $n + m$ inconnues qui peut être résolu par une méthode de type Newton. Π_ν est convexe et dérivable et la contrainte est affine si bien que si le système (2.60) admet une solution (U, λ^*) , alors U est un minimum global du problème et même le seul minimum global puisque que Π_ν est strictement convexe.

Le lagrangien du problème est défini par

$$L(V, \lambda) = \frac{1}{2} V^T K V - F_{ex}^T V + F_d^T \Phi_\nu(V) + \lambda^T (AV - G). \quad (2.61)$$

Le vecteur λ multiplie les contraintes dans le lagrangien.

Cas d'un problème avec contraintes d'inégalité

On considère ici le problème de contact sans frottement (2.57). Le minimum U que l'on recherche vérifie nécessairement les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, c'est à dire qu'il existe un vecteur λ de multiplicateurs de Lagrange tel que

$$\begin{cases} KU + A^T \lambda = F_{ex} & n \text{ équations} \\ (AU - G)_i \leq 0 & m \text{ inéquations : } i = 1..m \\ (\lambda)_i \geq 0 & m \text{ inéquations : } i = 1..m \\ (\lambda)_i (AU - G)_i = 0 & m \text{ conditions de complémentarité : } i = 1..m \end{cases} \quad (2.62)$$

On voit que les multiplicateurs de Lagrange correspondent aux forces de contact à la matrice A près. Cette fois, le lagrangien du problème est défini par

$$L(V, \lambda) = \frac{1}{2} V^T K V - F_{ex}^T V + \lambda^T (AV - G). \quad (2.63)$$

Si on considère le problème tel qu'il est formulé en 2.1.1, c'est à dire avec des solides initialement en contact et que l'on utilise des éléments de contact noeud à noeud, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker deviennent

$$\begin{cases} KU + \lambda = F_{ex} \\ U_{i,n}^1 + U_{i,n}^2 = -d(U_i) \leq 0 & i = 1..m \\ (\lambda)_i \geq 0 & i = 1..m \\ (\lambda)_i d(U_i) = 0 & i = 1..m \end{cases} \quad (2.64)$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont alors exactement les opposés des forces normales de contact et on retrouve les trois conditions du contact unilatéral données en (2.13).

L'énergie potentielle totale est strictement convexe et dérivable et les contraintes sont convexes. On peut alors dire que si un couple (\mathbf{U}, λ^*) vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, alors \mathbf{U} est un minimum global du problème et même le seul minimum global puisque que l'énergie potentielle totale est strictement convexe.

La résolution des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker est plus difficile que la résolution des conditions d'optimalité dans le cas d'un problème avec contraintes d'égalité. Pour résoudre un problème avec contraintes inégalités, des méthodes à directions de descente admissibles peuvent être utilisées. Parmi elles on peut citer la méthode du chemin projeté ou encore la méthode d'activation des contraintes. Dans cette dernière, au cours des itérations, certaines contraintes peuvent être activées c'est à dire considérées comme des contraintes d'égalité. C'est une méthode qui semble convenir particulièrement bien pour l'optimisation quadratique donc entre autres pour la résolution du problème de contact sans frottement.

2.2.2 Pénalisation

La pénalisation est une méthode très utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes. Elle permet de transformer un problème contraint en un problème ou des problèmes sans contraintes. Elle a l'avantage de ne pas introduire d'inconnues supplémentaires à la différence des techniques de multiplicateurs de Lagrange. En revanche, elle peut conduire à de mauvais conditionnements.

On considère à nouveau le problème de contact sans frottement défini en 2.1.5. Avec des frotteurs noeud à noeud et pas de séparation initiale, le problème contraint s'écrit

$$(P) \begin{cases} \min E_{pot}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T K \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} \\ \mathbf{g}(\mathbf{V}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.65)$$

Les composantes de $\mathbf{g}(\mathbf{V})$ représentent les profondeurs de pénétration au niveau des m éléments de contact :

$$(\mathbf{g}(\mathbf{V}))_i = g(\mathbf{U}_i) = U_{i,n}^1 + U_{i,n}^2, \quad i = 1..m. \quad (2.66)$$

La technique de pénalisation consiste à remplacer ce problème par un problème sans contraintes :

$$(P_p) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \mathbf{V}^T K \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} + \frac{1}{2} \epsilon \|\mathbf{g}(\mathbf{V})_+\|^2. \end{cases} \quad (2.67)$$

Pour un vecteur \mathbf{X} à m composantes X_i on note \mathbf{X}_+ le vecteur dont les composantes sont pour i de 1 à m

$$(\mathbf{X}_+)_i = \max(X_i, 0). \quad (2.68)$$

Dans le problème (P_p) , ϵ est un scalaire positif appelé facteur de pénalisation. C'est un paramètre choisi par l'utilisateur. Le facteur $\frac{1}{2}$ devant ϵ est introduit seulement pour donner dans notre exemple à ϵ la signification d'une raideur normale de contact. La prise en compte de la contrainte de contact s'effectue ainsi par l'ajout d'une force de rappel proportionnelle à la profondeur de pénétration. La résolution du problème pénalisé (P_p) peut s'effectuer par exemple par une méthode de descente.

Il apparaît clairement que la solution du problème pénalisé (P_p) dépend du facteur ϵ . On parle de pénalisation inexacte puisque la solution du problème d'origine (P) n'est pas solution de (P_p). Il existe des pénalisation exactes, mais elles conduisent à des problèmes non différentiables. On voit que plus ϵ est choisi grand, mieux la contrainte de contact est prise en compte. D'un autre côté, lorsque ϵ augmente, le problème (P_p) devient de plus en plus mal conditionné, c'est à dire de plus en plus difficile à résoudre. La bonne démarche consiste à effectuer une première minimisation avec ϵ assez faible, puis ensuite à augmenter progressivement ϵ en commençant chaque nouvelle résolution à partir de la solution précédente. Il n'est pas possible par exemple de trouver rapidement un résultat convenable en une seule résolution avec ϵ élevé : E_{pot} n'est plus "vu" par la méthode de résolution qui s'occupe avant tout de vérifier les contraintes. La pénalisation est une méthode qui semble permettre à première vue de limiter les temps de calcul puisqu'elle n'introduit pas d'inconnues supplémentaires. En réalité, sa mise en oeuvre est assez coûteuse.

2.2.3 Lagrangiens augmentés

La méthode des Lagrangiens augmentés est à la différence de la pénalisation présentée en 2.2.2 une méthode exacte. On cherche toujours à résoudre le problème (P). On a vu que dans ce cas le lagrangien classique s'écrit

$$L(\mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T K \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{V}). \quad (2.69)$$

Le lagrangien augmenté prend lui la forme

$$L_a(\mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T K \mathbf{V} - \mathbf{F}_{ex}^T \mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{g}(\mathbf{V}))_+ + \frac{1}{2} \epsilon \|\mathbf{g}(\mathbf{V})_+\|^2. \quad (2.70)$$

où ϵ est un facteur de pénalisation. Le problème ainsi formulé peut être vu comme une pénalisation du problème aux multiplicateurs de Lagrange.

Les Lagrangiens augmentés sont généralement utilisés dans des méthodes itératives qui visent à trouver les multiplicateurs de Lagrange exacts. En reprenant la méthode de Laursen et Maker [78], à une itération k , on note $\boldsymbol{\lambda}^k$ l'estimation courante du vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Le système à résoudre est alors

$$K \mathbf{V} + (\boldsymbol{\lambda}^k + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{V}))_+ = \mathbf{F}_{ex}. \quad (2.71)$$

Par une stratégie de résolution non-linéaire, on trouve la solution \mathbf{U}^k de ce système et le vecteur des multiplicateurs de Lagrange est remis à jour par

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = (\boldsymbol{\lambda}^k + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{U}^k))_+. \quad (2.72)$$

On assure ainsi que les multiplicateurs sont toujours tous positifs. La boucle est arrêtée lorsque la valeur de $(\mathbf{g}(\mathbf{U}^k))_+$ est jugée suffisamment faible.

Le coefficient de pénalité ϵ est choisi initialement et reste inchangé pendant le déroulement de l'algorithme. Si on prend $\boldsymbol{\lambda}^0 = \mathbf{0}$, la première résolution correspond à une méthode de pénalisation. Pour des raisons déjà expliquées en 2.2.2, ϵ ne doit donc pas être choisi trop grand. Le nombre d'itérations peut donc parfois se montrer élevé ce qui conduit à un coût global de calcul important. En revanche, comme ϵ n'est pas trop grand, le conditionnement du système à résoudre à chaque itération reste bon.

2.2.4 Conclusions

Pour la prise en compte des contraintes dans les problèmes discrétisés, les méthodes itératives de pénalisation ou de lagrangien augmenté sont souvent mises en oeuvre. On verra dans la section 2.4 que la méthode que nous utilisons ne rentre dans aucune de ces deux catégories. C'est une méthode qui n'est pas exacte car la solution convergée dépend légèrement d'un coefficient de pénalité ϵ , mais à la différence des techniques de pénalisation et de lagrangien augmenté, ce n'est pas une méthode itérative : la résolution non-linéaire est appelée une seule fois ce qui permet de limiter de façon appréciable le coût de calcul global. On peut ainsi envisager la résolution de problèmes 3D de taille déjà importante.

2.3 Méthodes fréquentielles pour les problèmes de contact

Le calcul du régime permanent de la réponse forcée des systèmes non-linéaires par intégration temporelle peut être très long puisque tout le régime transitoire doit être calculé. De plus, la durée de celui-ci est inconnue *a priori* et est largement influencée par exemple par l'amortissement du système. Les méthodes fréquentielles développées récemment permettent de calculer directement et rapidement le régime permanent. L'hypothèse est alors faite que la réponse est périodique. À la différence des systèmes linéaires, la réponse des systèmes non-linéaires ne contient pas que les harmoniques de l'excitation.

La technique appelée Balance Harmonique (HB) propose de projeter les équations du mouvement sur une sélection d'harmoniques et de résoudre le problème réduit ainsi obtenu. On parle aussi de méthode de Galerkin. La méthode de balance harmonique a souvent été mise en oeuvre analytiquement. Dans ce cas, les études sont limitées à des problèmes de petite taille, l'excitation est souvent monoharmonique, et dans la plupart des cas seule l'harmonique fondamentale est retenue pour la résolution. L'utilisation d'un solveur numérique, par exemple de type Newton-Raphson (NR) permet de dépasser ces limitations. La Méthode de Balance Harmonique Incrémentale (IHBM) utilise une méthode de Newton-Raphson suivie d'une méthode de Galerkin. La procédure inverse est connue sous le nom de méthode de Galerkin Newton-Raphson (GNR). Ferri [41] a montré que ces deux méthodes donnent des résultats équivalents. La mise en oeuvre pratique du calcul des forces non-linéaires et du jacobien peut être fastidieuse. L'utilisation d'algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT) permet de remédier à cela, ainsi que montré par Cameron et Griffin [16]. La méthode AFT (Alternating Frequency Time) qu'ils ont proposé constitue un prolongement de la IHBM où les forces non-linéaires sont évaluées dans le domaine temporel.

Les non-linéarités de contact et de frottement sont dites fortes. Les lois de frottement de Coulomb et de contact unilatéral ne sont pas régulières, et la dépendance de la force de contact en fonction de l'état du système est complexe. Ceci rend l'application des méthodes fréquentielles évoquées ci-dessus compliquée. Si Pierre *et al.* [111] sont parvenus à étendre l'IHBM au cas du frottement coulombien en ayant recours à la théorie des distributions, l'approche classique consiste à lever la difficulté en "adoucisant" la non-linéarité. Il est par exemple courant d'ajouter des raideurs de contact ou d'utiliser des frotteurs flexibles sans masse. Une autre technique est d'approcher directement la loi de contact ou de frottement par une fonction plus régulière. Ces paramètres supplémentaires introduits dans le modèle peuvent éventuellement trouver une justification physique et représenter les déformations élastoplastiques des aspérités en contact.

2.4 Dynamic Lagrangian mixed Frequency-Time method (DLFT)

Nacivet *et al.* se sont inspirés des méthodes lagrangiennes présentées en 2.2 pour proposer une méthode fréquentielle permettant de déterminer le régime permanent d'un système avec contact et frottement où il n'est plus nécessaire de lisser les lois de contraintes ou d'ajouter des raideurs de contact [96] [97]. Grâce à cette méthode appelée DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency Time Method), la gestion du contact se fait directement à partir des maillages des pièces. La DLFT est présentée ici de façon différente par rapport à [96] [97]. On montre en particulier comment la détermination dans le domaine temporel des efforts de contact et des déplacements relatifs se fait selon une méthode de prédiction-corrrection.

2.4.1 Hypothèses de modélisation

Comme dans toute méthode de balance harmonique, l'hypothèse est faite que les efforts et les déplacements sont périodiques. Par ailleurs, on se limite aux petites déformations et aux petits déplacements. Ceci signifie en particulier que les glissements sont petits. Comme de plus on suppose que les maillages des pièces sont compatibles au niveau des interfaces de contact, des frotteurs noeud à noeud sont utilisés (voir la figure 2.4).

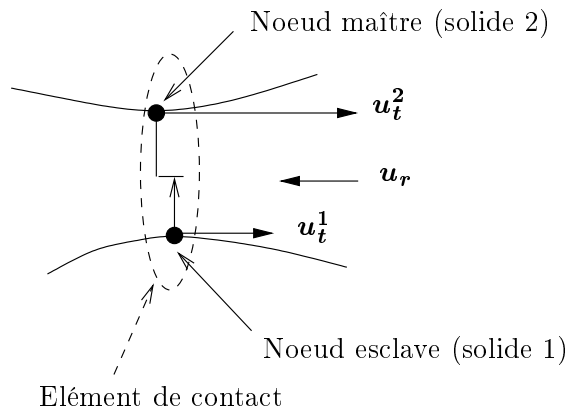


FIG. 2.4 – Frotteur noeud à noeud.

Les données nécessaires au calcul sont pour chaque solide l

- M^l , la matrice de masse,
- K^l , la matrice de raideur,
- F_{ex}^l le vecteur des efforts extérieurs.

On suppose que l'amortissement structural est représenté par une matrice d'amortissement visqueux C^l , combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de raideur (amortissement de Rayleigh) :

$$C^l = \alpha^l M^l + \beta^l K^l. \quad (2.73)$$

La zone de contact est déterminée par les éléments de contacts spécifiés par l'utilisateur. Pour chaque élément de contact, les déplacements relatifs et les forces de contact sont déterminés au cours de la résolution selon la loi de Coulomb et la loi de contact unilatéral.

2.4.2 Méthode de résolution

Transformation des équations du mouvement

Les équations du mouvement pour chaque solide l s'écrivent

$$M^l \ddot{\mathbf{U}}^l + C^l \dot{\mathbf{U}}^l + K^l \mathbf{U}^l + \mathbf{F}_c^l = \mathbf{F}_{ex}^l, \quad (2.74)$$

où \mathbf{F}_{ex}^l sont les forces extérieures. Les déplacements \mathbf{U}^l et les forces de contact \mathbf{F}_c^l sont inconnues et sont déterminés conjointement dans la résolution. Afin de lui donner la signification d'un vecteur de multiplicateurs de Lagrange, \mathbf{F}_c^l apparaît à gauche du signe = et représente donc l'opposé des forces réelles de contact. Le mouvement étant supposé périodique, une procédure de Galerkin, détaillée en annexe A, permet de reformuler les équations dans le domaine fréquentiel. Les déplacements et les forces sont alors représentés par des vecteurs multiharmoniques contenant les coefficients de Fourier jusqu'au nombre d'harmoniques N_h choisi pour la résolution. La taille du problème est multipliée par $2N_h + 1$. Deux réductions exactes sont ensuite effectuées dans le domaine fréquentiel. Dans la première, seuls les "noeuds non-linéaires", c'est à dire les noeuds participant au contact sont retenus. Une réduction supplémentaire d'un facteur deux est ensuite obtenue en reformulant les équations avec les déplacements relatifs pour nouvelles inconnues. Ces deux réductions sont aussi détaillées dans l'annexe A. Les équations du mouvement s'écrivent finalement

$$\Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r. \quad (2.75)$$

$\tilde{\mathbf{U}}_r$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\tilde{\mathbf{F}}_r$ sont les vecteurs multiharmoniques des déplacements relatifs, des multiplicateurs de Lagrange et des forces extérieures respectivement. Λ_r représente la matrice de raideur dynamique réduite. Un solveur non-linéaire est utilisé pour annuler la fonction définie par :

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_r) = \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \tilde{\mathbf{F}}_r. \quad (2.76)$$

Calcul des forces de contact

Le calcul de la fonction f définie par l'équation (2.76) nécessite d'évaluer les forces de contact $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ à partir d'une valeur du déplacement relatif $\tilde{\mathbf{U}}_r$. Il faut à cet égard s'assurer que lorsque la convergence est atteinte ($\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_r) = \mathbf{0}$), les contraintes de contact avec frottement exposées au paragraphe 2.1.1 sont vérifiées. La méthode des Lagrangiens dynamiques développée par Nacivet [96, 97] consiste à exprimer les efforts de contact par une pénalisation des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r - \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \epsilon(\tilde{\mathbf{U}}_r - \tilde{\mathbf{X}}_r), \quad (2.77)$$

où ϵ est un coefficient de pénalité et $\tilde{\mathbf{X}}_r$ est une nouvelle inconnue représentant un déplacement relatif. On va voir dans le paragraphe suivant que le couple $(\tilde{\mathbf{X}}_r, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$ est déterminé par une procédure AFT (Alternating Frequency Time) spécifique de manière à respecter les lois de contact et de frottement. Ainsi, le terme $\epsilon(\tilde{\mathbf{U}}_r - \tilde{\mathbf{X}}_r)$ ajouté à l'équation du mouvement force la vérification des contraintes. En effet, le report de (2.77) dans (2.76) donne

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_r) = \epsilon(\tilde{\mathbf{U}}_r - \tilde{\mathbf{X}}_r). \quad (2.78)$$

L'annulation de f donne bien $\tilde{\mathbf{U}}_r = \tilde{\mathbf{X}}_r$, ce qui assure que le couple $(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$ vérifie les contraintes de contact et de frottement, et garantit que les équations du mouvement (2.75) sont vérifiées. Le choix du coefficient de pénalité ϵ sera discuté en 2.4.5.

Prédiction-correction dans le domaine temporel

Ce paragraphe a pour but d'expliquer comment, à partir d'une donnée $\tilde{\mathbf{U}}_r$ les efforts de contact $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ et les déplacements relatifs $\tilde{\mathbf{X}}_r$ sont calculés pour vérifier les contraintes. En reprenant l'expression (2.77), on écrit

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}_r - \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \epsilon \tilde{\mathbf{U}}_r}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u} - \underbrace{\epsilon \tilde{\mathbf{X}}_r}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x}, \quad (2.79)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u$ est un vecteur force de contact ne dépendant que de $\tilde{\mathbf{U}}_r$ et $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$ est un vecteur force de contact directement proportionnel à $\tilde{\mathbf{X}}_r$.

La période \mathcal{T} est découpée en \mathcal{N} pas de temps, et on définit \mathcal{N} instants successifs :

$$t_n = \frac{n-1}{\mathcal{N}} \mathcal{T}, \quad n = 1.. \mathcal{N}. \quad (2.80)$$

Concentrons-nous à présent sur un seul élément de contact. Pour cet élément de contact, les vecteurs $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$, \mathbf{X}_r sont représentés dans le domaine temporel par les séquences de \mathcal{N} vecteurs à trois dimensions $\{\boldsymbol{\lambda}^n\}_{n=1.. \mathcal{N}}$, $\{\boldsymbol{\lambda}_u^n\}_{n=1.. \mathcal{N}}$, $\{\boldsymbol{\lambda}_x^n\}_{n=1.. \mathcal{N}}$, $\{\mathbf{X}_r^n\}_{n=1.. \mathcal{N}}$ respectivement. L'exposant n désigne la valeur à l'instant t_n .

A chaque itération du solveur non-linéaire, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u$ est calculé puis la suite $\{\boldsymbol{\lambda}_u^n\}_{n=1.. \mathcal{N}}$ est obtenue à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide inverse (FFT^{-1}). Une stratégie de prédiction-correction est ensuite utilisée à chaque instant t_n pour calculer les forces de contact $\boldsymbol{\lambda}^n$. Une force de contact prédite $\boldsymbol{\lambda}_{pre}^n$ est calculée en supposant que l'état du système est adhérent. Ceci signifie que le vecteur des déplacements relatifs tangentiels \mathbf{X}_r^T reste constant entre t_{n-1} et t_n et que le déplacement relatif normal X_r^N est nul. Ceci conduit à

$$PREDICTION : \quad \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,T} = \boldsymbol{\lambda}_u^{n,T} - \boldsymbol{\lambda}_x^{n-1,T} \\ \lambda_{pre}^{n,N} = \lambda_u^{n,N} \end{cases} \quad (2.81)$$

On utilise ici systématiquement l'exposant T pour les composantes tangentielles et l'exposant N pour la composante normale.

Les efforts de contact prédits sont dans un deuxième temps corrigés de telle sorte que les contraintes soient vérifiées. Ceci est effectué en calculant $\boldsymbol{\lambda}_x^n$ ce qui permet d'obtenir $\boldsymbol{\lambda}^n$ par

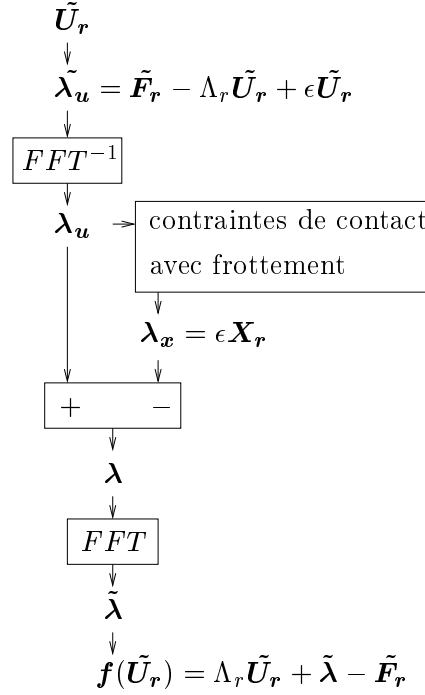
$$CORRECTION : \quad \boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{\lambda}_u^n - \boldsymbol{\lambda}_x^n \quad (2.82)$$

Les efforts de contact ainsi obtenus pour chaque frotteur permettent de calculer par transformée de Fourier rapide (FFT) le vecteur multiharmonique $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ puis le résidu $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_r)$. Les différentes étapes de la méthode sont résumées dans la figure 2.5. On détaille dans la suite le calcul de $\boldsymbol{\lambda}_x^n$ suivant les trois états possibles pour un élément de contact : *séparation*, *adhérence* et *glissement*.

Séparation : $\lambda_{pre}^{n,N} \geq 0$

La force prédite est une force de traction, ce qui signifie que le contact est perdu au niveau de l'élément de contact. La force de contact doit donc être nulle, ce qui nécessite

$$\boldsymbol{\lambda}_x^n = \boldsymbol{\lambda}_u^n. \quad (2.83)$$

FIG. 2.5 – Calcul de la fonction f à annuler.

Adhérence : $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$ et $\|\lambda_{pre}^{n,T}\| < \mu |\lambda_{pre}^{n,N}|$

Dans ce cas le déplacement normal est nul et le déplacement relatif tangential est constant. Ceci implique

$$\begin{cases} \lambda_x^{n,N} = 0 \\ \lambda_x^{n,T} = \lambda_x^{n-1,T} \end{cases} \quad (2.84)$$

Glissement : $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$ et $\|\lambda_{pre}^{n,T}\| \geq \mu |\lambda_{pre}^{n,N}|$

A nouveau, le déplacement relatif normal est nul ce qui donne la composante normale de λ_x^n :

$$\lambda_x^{n,N} = 0. \quad (2.85)$$

La force normale est donc donnée par

$$\lambda^{n,N} = \lambda_{pre}^{n,N}. \quad (2.86)$$

La correction de la force de contact tangentielle s'appuie sur la connaissance de l'effort normal par (2.86) et sur l'hypothèse que la vitesse relative tangentielle est définie de manière implicite :

$$\mathbf{V}_r^{n,T} = \frac{\mathbf{X}_r^{n,T} - \mathbf{X}_r^{n-1,T}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (2.87)$$

D'après les lois de frottement de Coulomb, la force de contact tangentielle doit avoir une norme égale à $\mu |\lambda_{pre}^{n,N}|$ et être colinéaire à $\mathbf{V}_r^{n,T}$ et de même sens (λ^n est défini comme l'opposé des forces de contact et agit donc dans le sens de la vitesse relative). Ces conditions sont résumées par

$$\lambda^{n,T} = \mu |\lambda_{pre}^{n,N}| \frac{\mathbf{V}_r^{n,T}}{\|\mathbf{V}_r^{n,T}\|}. \quad (2.88)$$

D'après (2.81) et (2.82) on peut écrire

$$\lambda_{pre}^{n,T} - \lambda^{n,T} = \lambda_x^{n,T} - \lambda_x^{n-1,T}. \quad (2.89)$$

Avec (2.87) et en rappelant que $\lambda_x^{n,T} = \epsilon \mathbf{X}_r^{n,T}$ pour tout n , il vient

$$\lambda_{pre}^{n,T} - \lambda^{n,T} = \epsilon(t_n - t_{n-1}) \mathbf{V}_r^{n,T}. \quad (2.90)$$

En combinant (2.88) et (2.89) on trouve

$$\lambda_{pre}^{n,T} = \left(\frac{\mu |\lambda_{pre}^{n,N}|}{\|\mathbf{V}_r^{n,T}\|} + \epsilon(t_n - t_{n-1}) \right) \mathbf{V}_r^{n,T}, \quad (2.91)$$

ce qui montre que $\lambda_{pre}^{n,T}$ et $\mathbf{V}_r^{n,T}$ sont colinéaires et de même sens. Ainsi

$$\frac{\mathbf{V}_r^{n,T}}{\|\mathbf{V}_r^{n,T}\|} = \frac{\lambda_{pre}^{n,T}}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|}, \quad (2.92)$$

et donc

$$\lambda^{n,T} = \mu |\lambda_{pre}^{n,N}| \frac{\lambda_{pre}^{n,T}}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|}. \quad (2.93)$$

En reportant (2.93) dans (2.89), on trouve la relation qui permet de calculer $\lambda_x^{n,T}$:

$$\lambda_x^{n,T} = \lambda_x^{n-1,T} + \lambda_{pre}^{n,T} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_{pre}^{n,N}|}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|} \right). \quad (2.94)$$

Pour l'initialisation au premier pas de temps ($n = 1$), on se sert d'une variable $\lambda_x^{0,T}$ qui peut être, dans le cas du calcul d'une réponse fréquentielle, prise égale à la dernière valeur $\lambda_x^{\mathcal{N},T}$ de la fréquence précédente. Une autre technique possible est de choisir $\lambda_x^{0,T}$ arbitrairement puis de calculer une période complète. En renouvelant le calcul sur une autre période, l'influence de l'erreur commise à l'initialisation est gommée. Le résidu est ensuite calculé avec cette seconde période.

2.4.3 Calcul de l'équilibre statique

Pour faciliter la convergence, il faut fournir au solveur non-linéaire un déplacement initial suffisamment proche de la solution. Dans le cas d'une réponse fréquentielle, il est assez facile de construire la solution de proche en proche. Par exemple, la solution convergée à une fréquence donnée peut servir d'initialisation pour le calcul à la fréquence suivante. L'utilisation d'un prédicteur de Lagrange peut fournir une estimation plus précise, et si l'on cherche à capturer les branches instables de la réponse, on peut avoir recours aux méthodes de continuation. Il n'en demeure pas moins que pour le premier calcul, il faut donner *ex nihilo* une initialisation.

Dans le cas du contact aube-disque, il s'avère que la configuration avec déplacement relatif nul en pied d'aube ne permet pas toujours la convergence pour la première fréquence calculée. C'est pourquoi on calcule en premier lieu l'équilibre statique avec frottement afin de fournir une meilleure condition initiale. Ceci est réalisé en annulant avec le solveur des fonctions f_θ définies par :

$$\mathbf{f}_\theta(\mathbf{U}_r) = \Lambda_r \mathbf{U}_r + \boldsymbol{\lambda} - \theta \mathbf{F}_r, \quad \theta \in]0, 1]. \quad (2.95)$$

\mathbf{F}_r désigne ici la charge statique incluant les efforts centrifuges et éventuellement les pressions stationnaires. Cette charge est appliquée progressivement en augmentant θ par palliers jusqu'à 1. Un déplacement relatif nul sert d'initialisation pour le premier pallier, puis les solutions sont calculées de proche en proche. On utilise la technique présentée à la section précédente pour la détermination des forces de contact.

2.4.4 Pénalisation sur la vitesse relative

On parle pour la méthode présentée en 2.4.2 de "pénalisation sur le déplacement relatif". Nous décrivons dans ce paragraphe une variante appelée "pénalisation sur la vitesse relative". En notant ∇ l'opérateur de dérivation dans le domaine fréquentiel, les forces de contact sont cette fois exprimées par

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r - \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \epsilon(\nabla \tilde{\mathbf{U}}_r - \tilde{\mathbf{V}}_r), \quad (2.96)$$

où $\tilde{\mathbf{V}}_r$ est une variable jouant un rôle analogue à $\tilde{\mathbf{X}}_r$ dans la formulation en déplacement relatif. C'est une vitesse relative qui est évaluée dans le domaine temporel, de manière à vérifier avec $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ la contrainte de frottement. On considère une partition semblable à celle utilisée précédemment :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_u = \tilde{\mathbf{F}}_r - \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \epsilon \nabla \tilde{\mathbf{U}}_r \quad (2.97)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x = \epsilon \tilde{\mathbf{V}}_r \quad (2.98)$$

Dans le domaine temporel, l'expression correspondante des forces de contact à l'instant t_n est

$$\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{\lambda}_u^n - \boldsymbol{\lambda}_x^n. \quad (2.99)$$

La force de prédiction est obtenue en supposant que l'élément de contact est adhérent, c'est à dire $\mathbf{V}_r^n = \mathbf{0}$. On a donc $\boldsymbol{\lambda}_{pre}^n = \boldsymbol{\lambda}_u^n$. La correction s'effectue en calculant $\boldsymbol{\lambda}_x^n$ afin d'obtenir $\boldsymbol{\lambda}^n$ par (2.99).

Séparation : $\lambda_{pre}^{n,N} \geq 0$

Pour annuler la force de contact, il faut $\boldsymbol{\lambda}_x^n = \boldsymbol{\lambda}_u^n$.

Adhérence : $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,T}\| < \mu |\lambda_{pre}^{n,N}|$

Dans ce cas la vitesse relative est nulle ce qui implique $\boldsymbol{\lambda}_x^n = \mathbf{0}$.

Glissement : $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$ et $\|\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,T}\| \geq \mu |\lambda_{pre}^{n,N}|$

La vitesse relative normale est nulle, ce qui implique $\lambda_x^{n,N} = 0$. La force normale est donc donnée par

$$\lambda^{n,N} = \lambda_{pre}^{n,N}. \quad (2.100)$$

La loi de Coulomb s'écrit

$$\boldsymbol{\lambda}^{n,T} = \mu |\lambda_{pre}^{n,N}| \frac{\boldsymbol{\lambda}_x^{n,T}}{\|\boldsymbol{\lambda}_x^{n,T}\|}. \quad (2.101)$$

En injectant cette équation dans (2.99), on obtient

$$\boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,T} = \left(\frac{\mu |\lambda_{pre}^{n,N}|}{\|\boldsymbol{\lambda}_x^{n,T}\|} + 1 \right) \boldsymbol{\lambda}_x^{n,T}, \quad (2.102)$$

ce qui montre que $\lambda_{pre}^{n,T}$ et $\lambda_x^{n,T}$ sont colinéaires de même sens. On a donc

$$\lambda_x^{n,T} = \mu |\lambda_{pre}^{n,N}| \frac{\lambda_{pre}^{n,T}}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|}. \quad (2.103)$$

En reportant (2.103) dans (2.99), on trouve la relation qui permet de calculer $\lambda_x^{n,T}$:

$$\lambda_x^{n,T} = \lambda_{pre}^{n,T} \left(1 - \mu \frac{|\lambda_{pre}^{n,N}|}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|} \right). \quad (2.104)$$

Dans le cas d'une pénalisation sur la vitesse relative, les coefficients de Fourier $\mathbf{a}_0(\mathbf{U}_r)$, représentant la position moyenne de l'élément de contact, ne peuvent pas être modifiés. A la différence de la pénalisation sur le déplacement relatif, cette méthode n'est donc valable que quand la position moyenne est connue, ce qui n'est en particulier pas le cas dans l'étude du frottement en pied d'aube.

2.4.5 Choix du coefficient de pénalité

La formulation de la DLFT inclut un paramètre ϵ que nous avons nommé coefficient de pénalité car il sert à imposer les contraintes. Dans ce paragraphe, on cerne son influence et on propose un moyen de le déterminer.

Nous avons constaté aux cours des simulations que le choix du coefficient de pénalité pouvait influencer légèrement la solution trouvée, notamment lorsque le nombre d'harmoniques retenus est faible. Considérons par exemple le modèle à deux degrés de liberté schématisé dans la figure 2.6. Ce système est soumis à une excitation harmonique et le frottement entre les deux masses est modélisé par une loi de Coulomb avec coefficient de frottement constant noté μ . L'effort normal est noté N . Dans les simulations présentées ci-après, les valeurs des paramètres sont

$$m_1 = m_2 = 1, \quad k_1 = 7\pi^2, \quad k_2 = \pi^2$$

La solution périodique recherchée est symétrique, ce qui signifie que pour tout temps t , on a la relation suivante pour la position d'une masse :

$$x(t + T/2) = -x(t),$$

où T désigne la période du mouvement. Ceci est confirmé par la littérature et l'intégration temporelle. Les calculs sont ainsi effectués en retenant simplement les harmoniques impaires. La figure 2.7 montre la comparaison entre les amplitudes obtenues pour $\epsilon = 1, 10, 100, 1000$ et les amplitudes obtenues avec les harmoniques exactes issues de l'intégration temporelle. On remarque tout d'abord que plus le nombre d'harmoniques retenus augmente, plus l'influence de ϵ est faible. Pour une base comportant les 1^{er}, 3^e et 5^e, harmoniques (figure 2.7 (c)), l'influence devient négligeable. On note aussi que plus le coefficient de pénalité est élevé, plus le contenu fréquentiel exact est précisément approché. Cela est particulièrement net sur la figure 2.7 (a) présentant le cas à 1 harmonique. Pour autant, et c'est l'objet de la discussion ci-après, ϵ ne peut être choisi trop grand car alors la méthode souffre de problèmes de convergence. Les ordres de grandeurs 1 à 1000 permettent une bonne convergence. En dessous et au dessus, la convergence se détériore.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où la technique de pénalisation sur le déplacement relatif est choisie. Pour que la DLFT converge vers la solution, il faut s'assurer que :

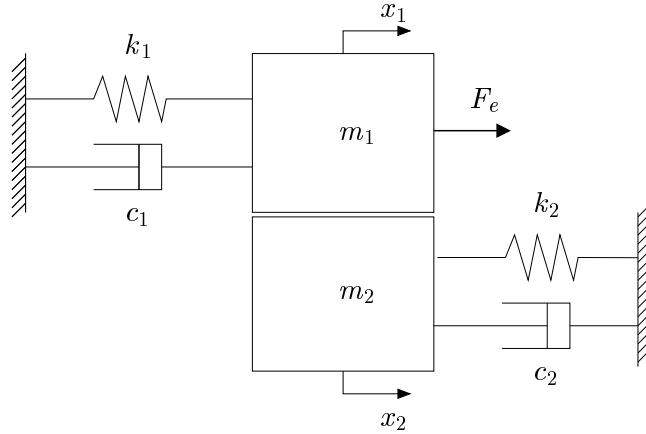


FIG. 2.6 – Modèle de frottement à deux degrés de liberté.

- Les équations du mouvement sont vérifiées : $\tilde{\lambda} = \tilde{F}_r - \Lambda_r \tilde{U}_r$
- Les contraintes de contact et de frottement sont respectées : $\tilde{U}_r = \tilde{X}_r$

Ainsi il ne faut pas que dans l'équation $\tilde{\lambda} = \tilde{F}_r - \Lambda_r \tilde{U}_r + \epsilon \tilde{U}_r - \tilde{X}_r$ l'un des termes représentant l'équation d'équilibre $\tilde{F}_r - \Lambda_r \tilde{U}_r$ ou servant à imposer les contraintes $\epsilon(\tilde{U}_r - \tilde{X}_r)$ soit trop prépondérant par rapport à l'autre. Afin d'assurer cet équilibre, on propose de choisir ϵ de sorte que son influence soit approximativement équivalente à celle de la matrice Λ_r . Cette matrice à une structure diagonale par blocs et on observe en outre que dans la réponse, l'harmonique correspondant à la fréquence de l'excitation est la plus importante. C'est pour cela que l'on s'intéresse à la sous matrice de Λ_r correspondant à l'harmonique de l'excitation. On note $\Lambda_{r,ex}$ cette sous matrice. Dans les simulations menées jusqu'à présent, le rayon spectral de cette matrice fournit un ordre de grandeur pour ϵ compris approximativement au milieu de la plage des ordres de grandeur possibles pour la convergence. Nous recommandons donc de choisir un coefficient de pénalité ayant le même ordre de grandeur que ce rayon spectral :

$$\epsilon \sim \rho(\Lambda_{r,ex}) . \quad (2.105)$$

La généralisation au cas de la pénalisation sur la vitesse relative est aisée et fournit l'ordre de grandeur suivant :

$$\epsilon \sim \rho(\nabla_{ex}^{-1} \Lambda_{r,ex}) , \quad (2.106)$$

où ∇_{ex}^{-1} est le bloc correspondant à l'harmonique de l'excitation de la matrice de primitivation.

La figure 2.8 montre les valeurs de rayon spectral obtenues pour l'exemple du modèle à deux degrés de liberté. Il est ainsi recommandé de prendre pour ordre de grandeur $\epsilon = 50$ pour la pénalisation sur le déplacement relatif et $\epsilon = 8$ pour la pénalisation sur la vitesse relative.

Cette section a permis de montrer que le choix du coefficient de pénalité influençait légèrement la solution trouvée, mais seulement si le nombre d'harmoniques retenus est très faible. On a par ailleurs proposé une méthode permettant de guider le choix de ce coefficient afin de garantir une bonne convergence de la DLFT.

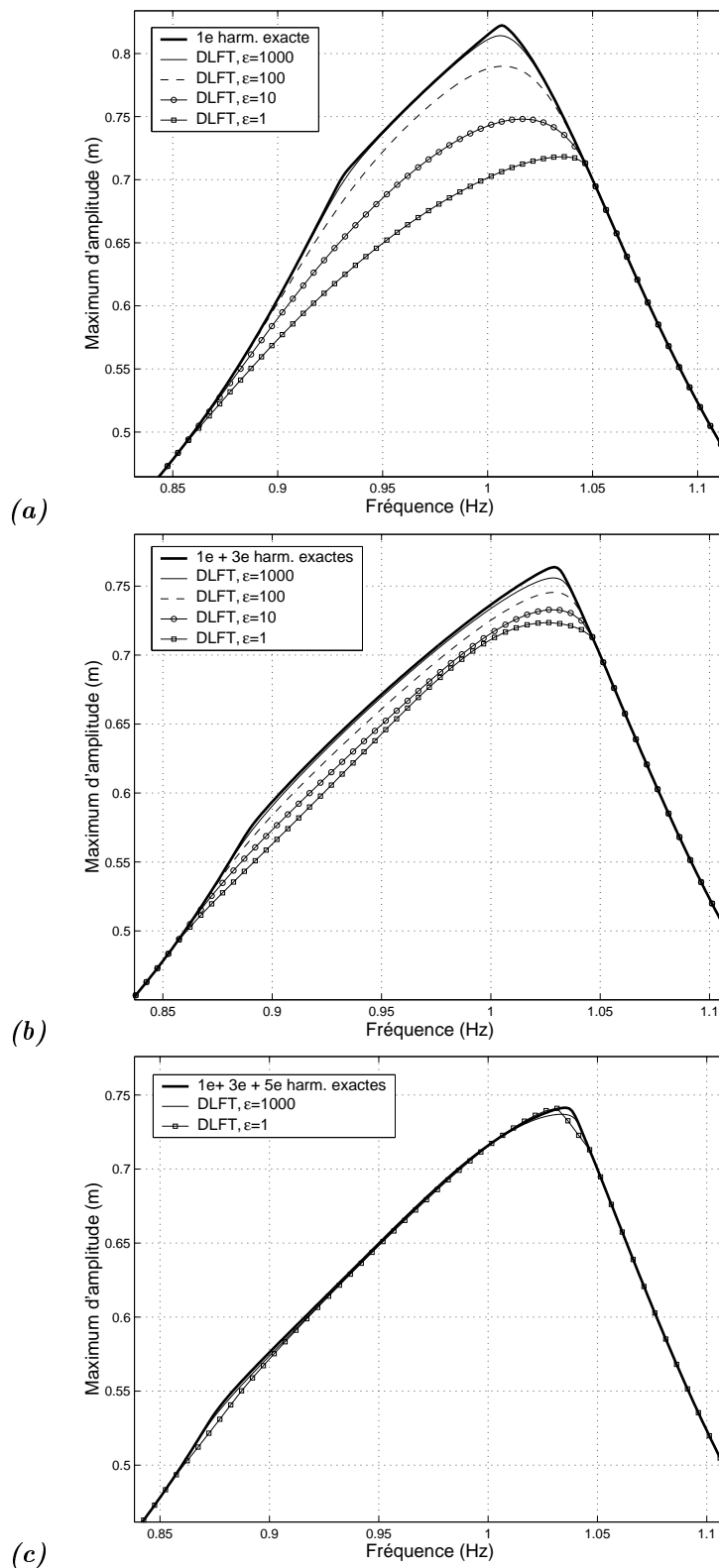


FIG. 2.7 – Influence du coefficient de pénalité ϵ sur la réponse calculée par la DLFT. Trait épais : maximum d'amplitude obtenu à partir de la sélection d'harmoniques de la solution calculée par intégration temporelle. Autres traits : résultats obtenus par la DLFT avec pénalisation sur la vitesse relative. (a) 1^e harmonique, (b) 1^e et 3^e harmoniques, (c) 1^e, 3^e et 5^e harmoniques.

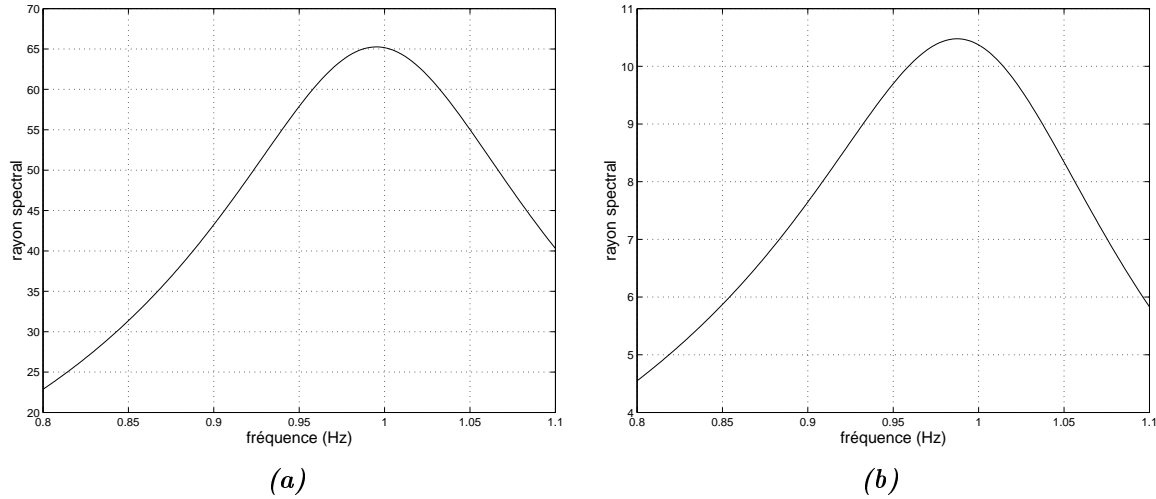


FIG. 2.8 – Calcul des rayons spectraux pour la détermination du coefficient de pénalité. Modèle à 2 degrés de liberté. (a) $\rho(\Lambda_{r,ex})$ (b) $\rho(\nabla_{ex}^{-1}\Lambda_{r,ex})$.

2.5 Evaluation de la performance de la DLFT

On se propose à l'aide d'un modèle simple à deux degrés de liberté de discuter les résultats obtenus par la DLFT avec pénalisation sur le déplacement relatif et pénalisation sur la vitesse relative. Les performances de la DLFT sont ensuite comparées à celles de la méthode de la balance harmonique incrémentale avec sa mise en oeuvre efficace par une méthode AFT (Alternating Frequency-Time).

2.5.1 Pénalisation sur le déplacement relatif

Le modèle à deux degrés de liberté présenté dans la figure 2.6 est repris ici. Les réponses fréquentielles obtenues par la DLFT sont montrées dans la figure 2.9 et comparées avec la réponse fréquentielle calculée par intégration temporelle. Les courbes tracées correspondent aux maxima d'amplitude c'est à dire à la moitié des amplitudes crête à crête. Le nombre d'harmoniques donné dans les légendes de la figure 2.9 correspond à l'ordre maximum des harmoniques retenues. Ainsi, le calcul pour une courbe notée "9 harmoniques" est effectué avec les harmoniques 1,3,5,7,9.

On constate sur la figure 2.9 que plus on retient d'harmoniques plus la précision est bonne. La convergence de la méthode est cependant assez lente : il faut beaucoup d'harmoniques pour approcher précisément la solution de référence donnée par l'intégration temporelle. Ceci est particulièrement vrai dans le cas où $\mu N = 10N$ (figure 2.9 (b)) où même en retenant les harmoniques jusqu'à l'ordre 15, il persiste un écart d'amplitude significatif.

Afin de valider davantage encore le calcul fréquentiel, la force de frottement approchée est comparée à celle obtenue par intégration temporelle dans les figures 2.10, 2.11, 2.12. On constate que effectivement dans le cas où $\mu N = 20N$ (figure 2.10), les zones d'adhérence et de glissement sont correctement prédites. Considérons à présent un cas où l'approximation fournie est médiocre. Pour $\mu N = 10N$, une fréquence d'excitation de 0.8Hz et une harmonique (figure 2.12), on constate un déphasage important entre la force de contact de référence et l'approximation à une harmonique calculée par la DLFT. Ceci se voit plus précisément sur la figure 2.13. Les instants de transition

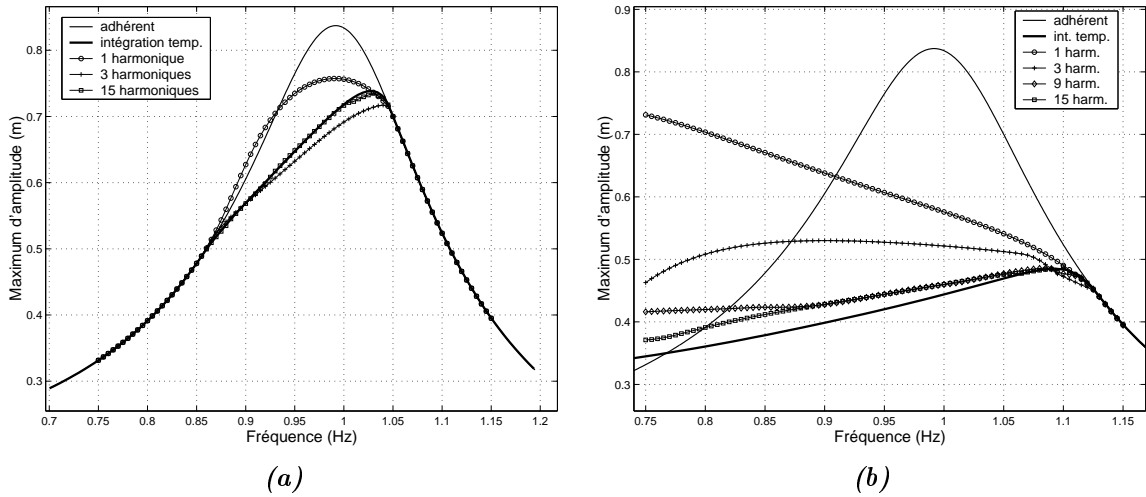


FIG. 2.9 – Comparaison entre la DLFT avec pénalisation sur le déplacement relatif et l'intégration temporelle. $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\epsilon = 100$. (a) $\mu N = 20N$, (b) $\mu N = 10N$.

entre les états adhérent et glissant ne sont pas prédits précisément. En conséquence, les déplacements approchés sont évidemment également imprécis. Cet état de fait est possiblement inhérent au choix d'une pénalisation sur le déplacement relatif. En effet, la solution correcte présente une force de contact et un déplacement relatif dont les maxima sont décalés, comme le montre la figure 2.14. Pendant le glissement, la force de frottement est maximale et vaut μN , mais le déplacement relatif varie et change de signe pendant cette phase. À l'inverse, pendant l'adhérence, le déplacement relatif est maximal et constant alors que la force de contact varie et change de signe. Si bien que si on suppose que $\tilde{\mathbf{U}}_r$ est un déplacement relatif proche de la solution, alors la force de frottement $\tilde{\mathbf{F}}_r - \Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r$ est perturbée par un terme $\epsilon \tilde{\mathbf{U}}_r$ dont les maxima ne sont pas situés dans la même zone. La correction dans le domaine temporel risque donc de trouver des zones de glissement là où il ne devrait pas y en avoir. Dans la section suivante on teste la pénalisation sur la vitesse relative. En observant la figure 2.14, on constate que les premières harmoniques de la vitesse relative et de la force de frottement sont en opposition de phase. Sachant que les multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\lambda}$ sont opposés aux forces de frottement, on s'attend donc à ce que la pénalisation sur la vitesse relative aide à prédire mieux et plus vite les transitions entre glissement et adhérence.

2.5.2 Pénalisation sur la vitesse relative

La figure 2.15 montre que pour le même modèle, la méthode de pénalisation sur la vitesse relative permet une très bonne convergence. En retenant les harmoniques jusqu'à l'ordre 5, c'est à dire en menant les calculs avec les harmoniques 1,3,5, la réponse obtenue est très proche de la réponse de référence obtenue par intégration temporelle. Les évolutions temporelles du déplacement et de la force de frottement présentées dans la figure 2.16 confirment que les périodes de collement et de glissement sont très bien évaluées.

2.5.3 Comparaison de la DLFT avec des méthodes fréquentielles usuelles

On vient de voir que la DLFT permet un calcul rapide et précis du régime permanent. Dans cette section, ses performances sont comparées à celles de la très répandue méthode AFT (Alter-

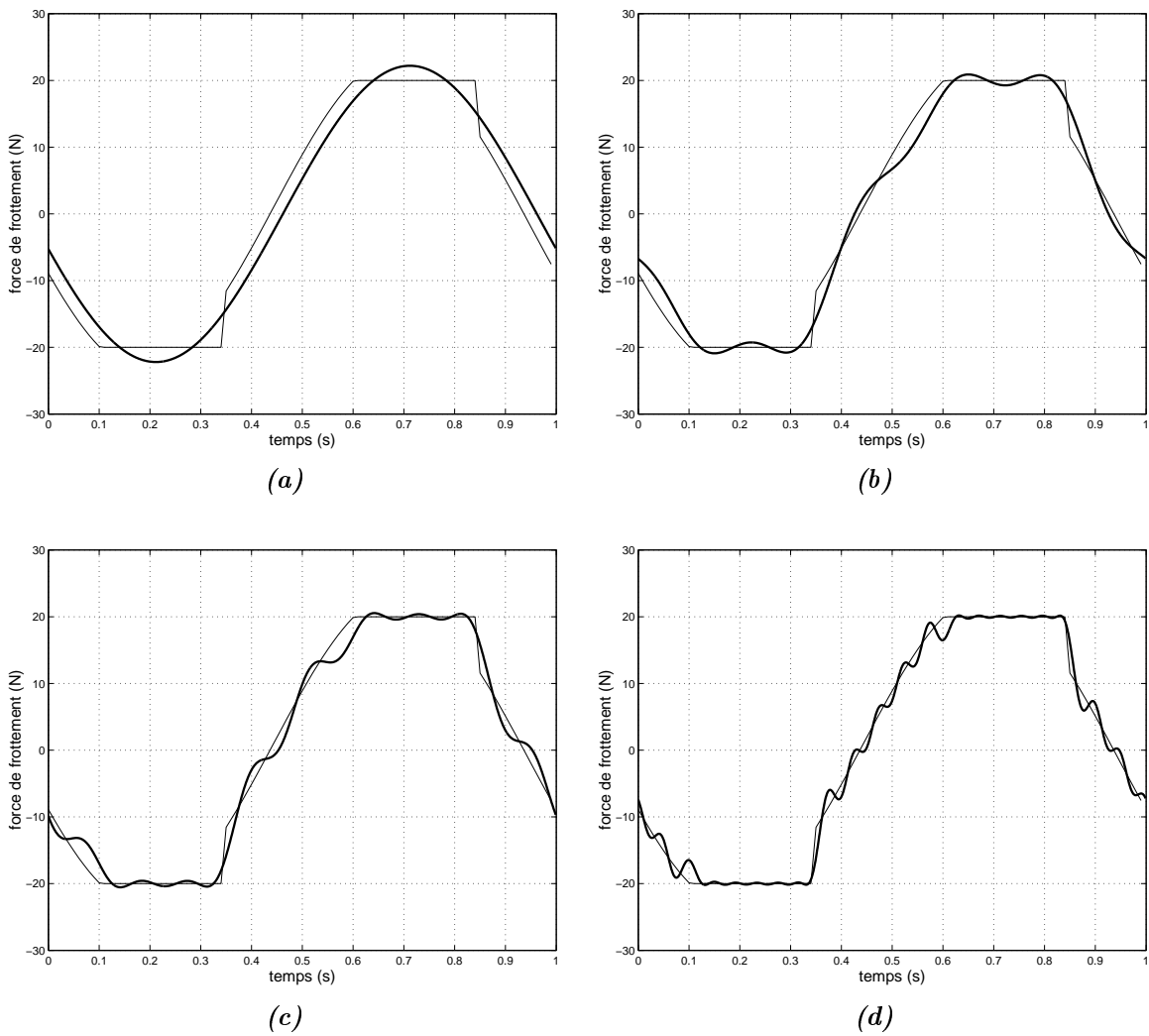


FIG. 2.10 – Comparaison entre la force de frottement calculée par intégration temporelle (trait fin) et par la DLFT (trait épais). $f = 1\text{Hz}$ $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu N = 20\text{N}$, $\epsilon = 100$. (a) 1 harmonique, (b) 5 harmoniques, (c) 9 harmoniques, (d) 21 harmoniques.

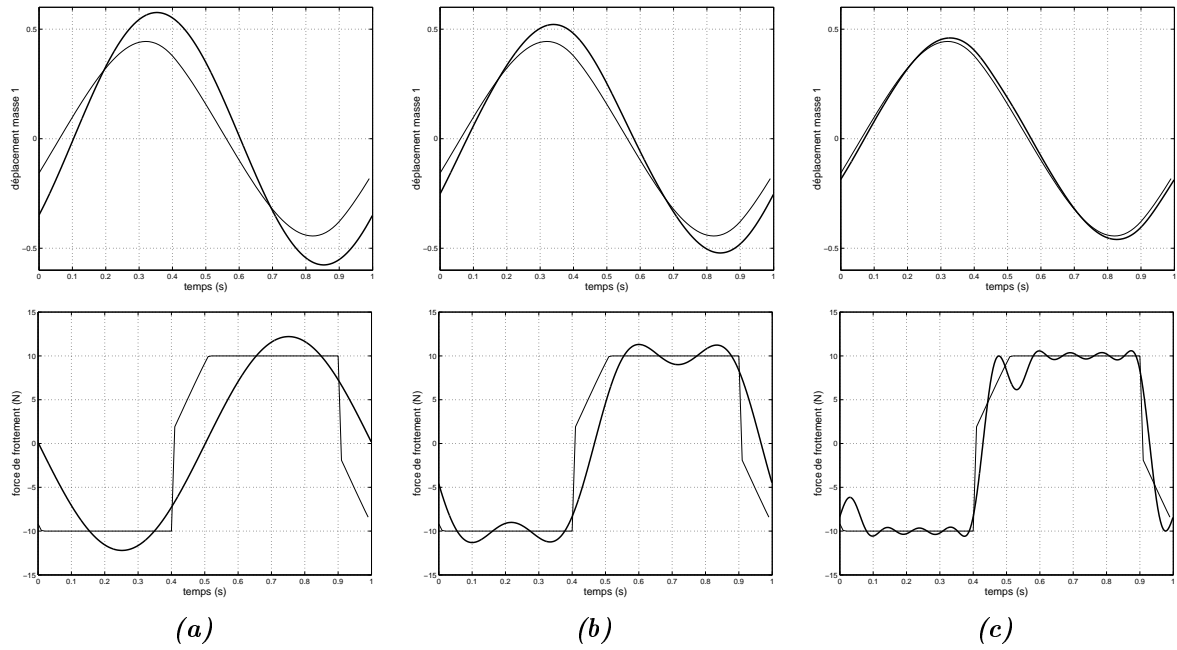


FIG. 2.11 – Comparaison entre l'intégration temporelle (trait fin) et la DLFT (trait épais). $f = 1\text{Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu N = 10\text{N}$, $\epsilon = 100$. (a) 1 harmonique, (b) 3 harmoniques, (c) 9 harmoniques.

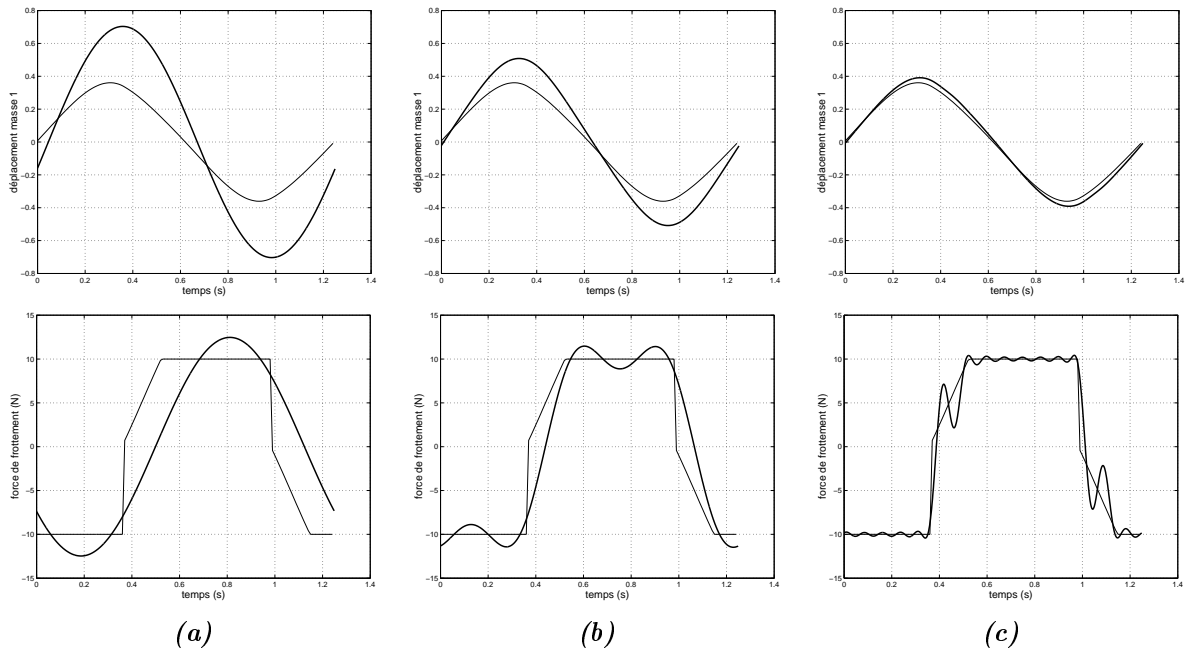


FIG. 2.12 – Comparaison entre l'intégration temporelle (trait fin) et la DLFT (trait épais). $f = 0.8\text{Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu N = 10\text{N}$, $\epsilon = 100$. (a) 1 harmonique, (b) 3 harmoniques, (c) 15 harmoniques.

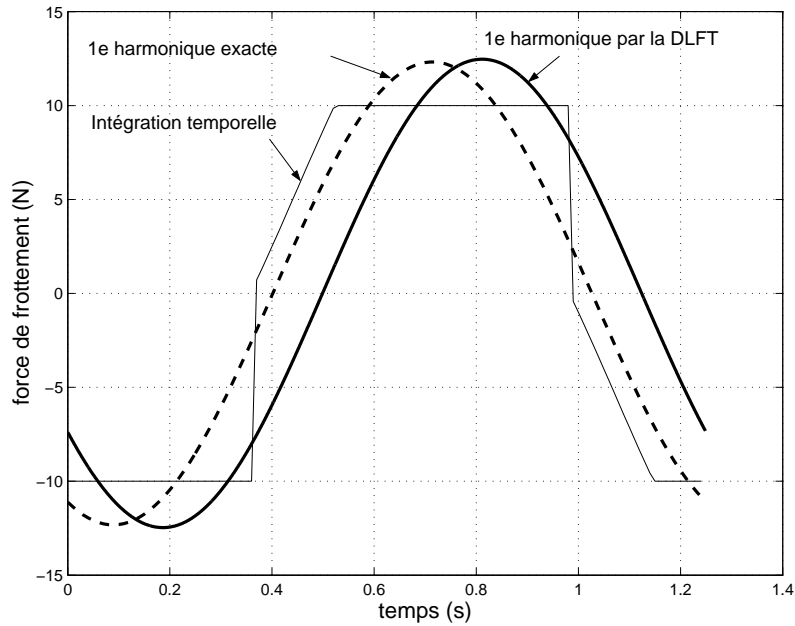


FIG. 2.13 – Comparaison entre l'intégration temporelle et la DLFT. $f = 0.8\text{Hz}$ $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu_s N = \mu_d N = 10N$, $\epsilon = 100$.

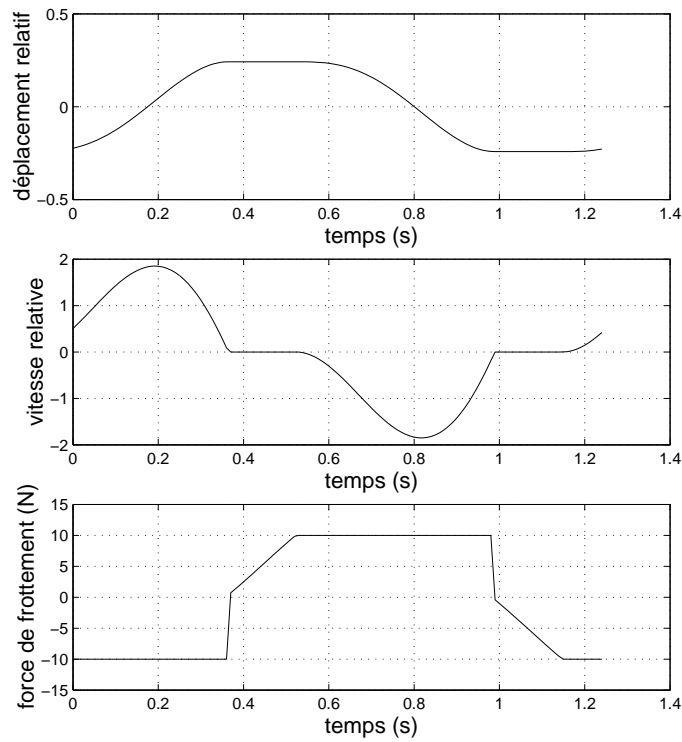


FIG. 2.14 – Déplacement relatif, vitesse relative et force de frottement. $f = 0.8\text{Hz}$ $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu_s N = \mu_d N = 10N$, $\epsilon = 100$.

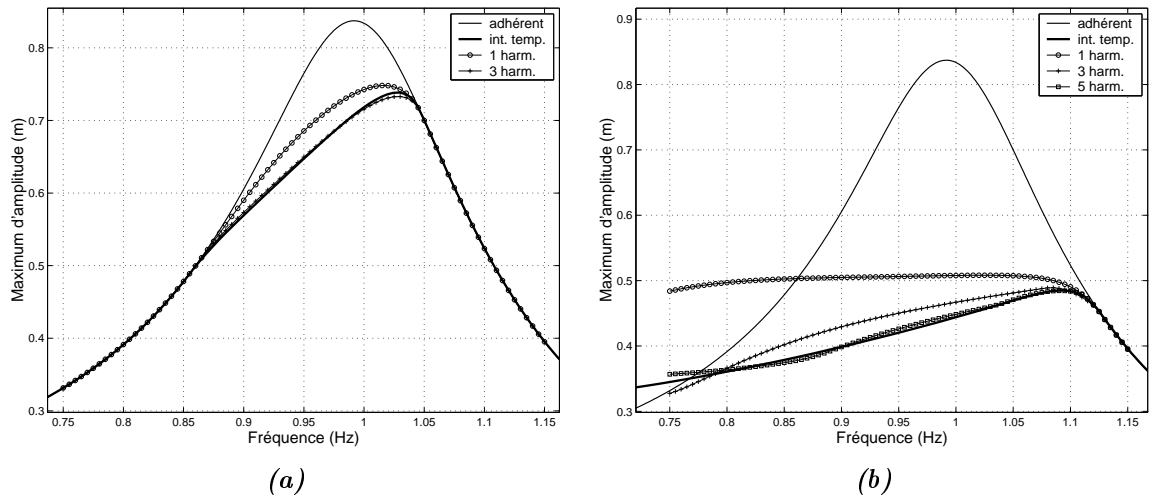


FIG. 2.15 – Comparaison entre la DLFT avec pénalisation sur la vitesse relative et l'intégration temporelle. $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\epsilon = 10$. (a) $\mu N = 20N$, (b) $\mu_s N = \mu_d N = 10N$.

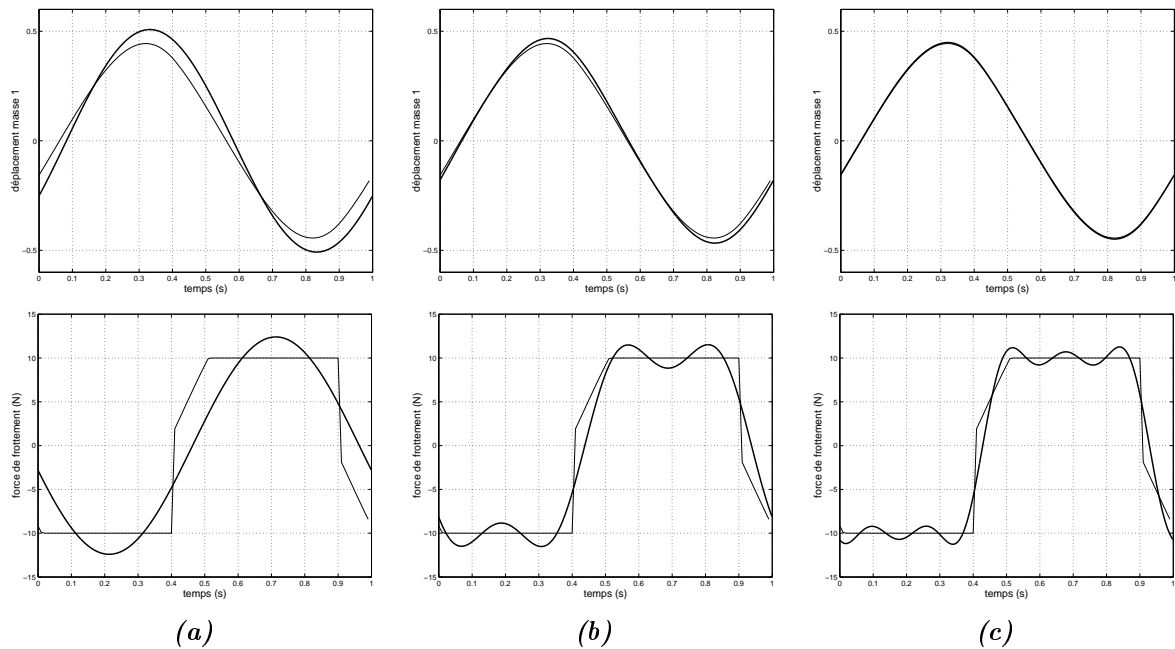


FIG. 2.16 – Comparaison entre l'intégration temporelle (trait fin) et la DLFT avec pénalisation sur la vitesse relative (trait épais). $f = 1Hz$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu N = 10N$, $\epsilon = 10$. (a) 1 harmonique, (b) 3 harmoniques, (c) 5 harmoniques.

nating Frequency Time Method).

La Méthode de Balance Harmonique Incrémentale (IHBM) proposée par Lau *et al.* [76] ainsi que la méthode de Galerkin Newton Raphson (GNR), proposent d'allier la technique de la balance harmonique à une méthode itérative de résolution des systèmes non-linéaires. La formulation originale de ces méthodes nécessite l'évaluation d'intégrales parfois complexes pour obtenir dans le domaine fréquentiel les forces non-linéaires et la matrice jacobienne permettant d'avancer la solution. Les calculs numériques peuvent être rendus plus performants par l'utilisation judicieuse d'algorithmes de transformée de Fourier discrète [15] [98]. La méthode retenue ici pour comparaison est la méthode AFT proposée par Cameron et Griffin [16]. Semler *et al.* [130] rappellent dans leur article de revue les grandes similitudes entre les méthodes IHB, GNR et AFT.

La méthode AFT a été très largement reprise récemment pour l'étude des non-linéarités de contact et de frottement dans les turbomachines. On peut citer par exemple les travaux de Guillen et Pierre [53], de Berthillier *et al.* [15] sur l'amortissement d'une aube fan par frotteur blade to ground, de Chen et Menq [23] sur le contact entre nageoires ou encore de Von Groll et Ewins [152] sur le contact rotor/stator. Afin de faciliter le traitement numérique, la non-linéarité est affaiblie par l'ajout de raideurs de contact dans [22], [23] et [152]. Cameron et Griffin [16] et Guillen et Pierre [53] travaillent eux avec le modèle proposé en 1980 par Griffin [50] où le frotteur est modélisé par une raideur sans masse. Ceci permet d'obtenir directement la force de frottement en fonction du déplacement du point de contact lié à l'aube. Dans [15], c'est directement la loi de frottement qui est régularisée comme montré sur la figure 2.17 avec δ petit. Ferri et Dowell [42] utilisent aussi cette loi linéaire par morceaux. Il débutent leur calcul avec une valeur de δ grande ce qui assure une convergence facile de leur méthode GNR. Cette solution convergée est utilisée comme point de départ d'une autre résolution avec δ plus petit. L'opération est répétée et δ diminué jusqu'à ce que la fonction signe soit correctement approchée. C'est un des atouts de la DLFT que de pouvoir directement traiter la loi discontinue sans avoir recours à ces procédés.

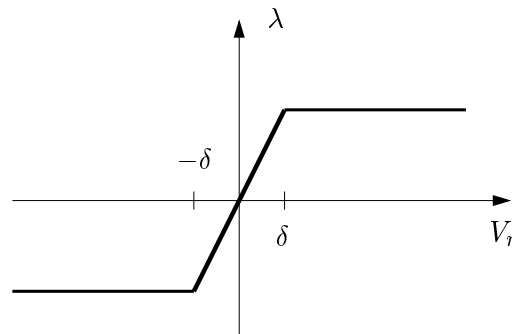


FIG. 2.17 – Suppression de la discontinuité de la loi de frottement quand la vitesse de glissement est nulle.

Le principe de la méthode AFT appliquée à la non-linéarité de frottement est schématisé dans la figure 2.18. Il est à noter ici que l'on suppose que les forces de frottement λ sont directement fonction des vitesses relatives V_r . On applique cette procédure au modèle à deux degrés de liberté et on choisit une loi de frottement régulière donnée par

$$\lambda(V_r) = \mu_d N \tanh(\alpha V_r). \quad (2.107)$$

On a en effet constaté que l'AFT souffre de gros problèmes de convergence si la fonction signe n'est pas lissée. La figure 2.19 montre les réponses fréquentielles obtenues avec $\alpha = 50$. On constate que comme la DLFT, l'AFT fournit des résultats très corrects. Avec une sélection comportant les harmoniques 1,3,5, la réponse est très proche de la réponse de référence fournie par l'intégration temporelle.

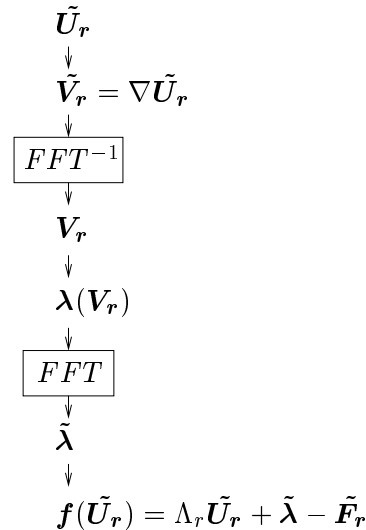


FIG. 2.18 – Calcul de la fonction f à annuler dans la méthode AFT.

La comparaison des temps de calculs entre la DLFT et la méthode AFT est présentée dans le tableau 2.1. Les deux méthodes ont été programmées en Fortran 90. La seule différence entre les deux programmes réside dans la méthode de calcul de la fonction f à annuler. La résolution de $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_r) = 0$ se fait dans les deux cas par la même algorithmes Powell hybride. Le calcul effectué porte sur 100 fréquences régulièrement espacées entre 0.85Hz et 1.05Hz. Le calcul d'une nouvelle fréquence se fait avec pour initialisation la solution convergée à la fréquence précédente. Le nombre de pas de temps par période est de 1024. On peut objecter que la comparaison n'est pas très rigoureuse puisque les lois de frottement utilisées ne sont pas les mêmes. C'est pourquoi on a effectué le calcul AFT avec différentes valeurs de α . Pour $\alpha = 1000$, la fonction signe est approchée très précisément. La DLFT est mise en oeuvre avec une pénalisation sur la vitesse relative et le coefficient de pénalité est pris égal à 10. On a constaté que la DLFT était toujours plus rapide que l'AFT. Pour un jeu d'harmonique donné, la DLFT est systématiquement pratiquement deux fois plus rapide que l'AFT. Il est intéressant de constater que la variation du paramètre α modifie peu le temps de calcul pour la méthode AFT. Ceci est probablement dû à l'utilisation de la continuité en fréquence.

L'examen du nombre d'appels à la fonction f montre qu'il n'y a pas de lien direct entre le temps de calcul et le nombre d'appels (cf figure 2.2). Le nombre d'appels nécessaires avec la DLFT n'est que légèrement plus faible que dans le cas de la méthode AFT.

Cette section nous a permis de mettre en avant deux atouts de la DLFT. La convergence peut être atteinte en utilisant les lois de frottement discontinues, contrairement aux méthodes fréquentielles usuelles qui nécessitent un lissage. En outre, à précision égale, la DLFT se montre plus performante en terme de temps de calcul.

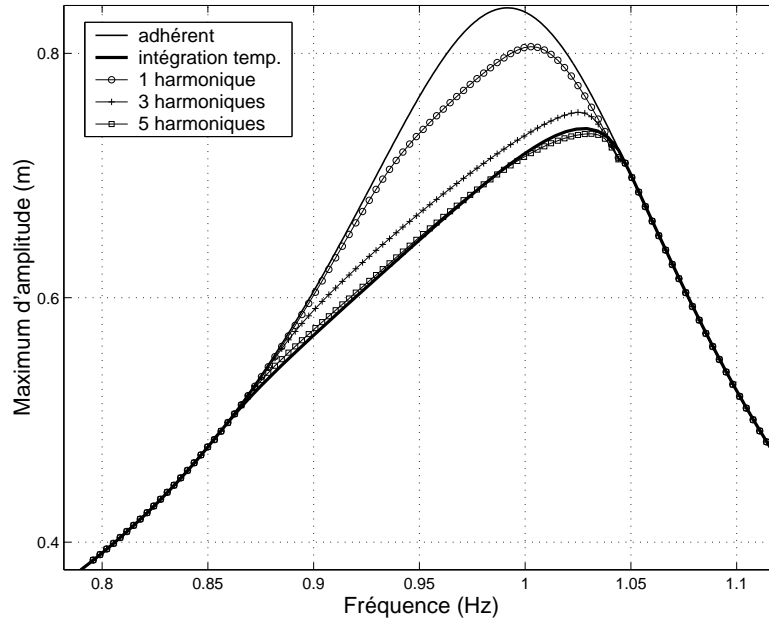


FIG. 2.19 – Comparaison entre la méthode AFT et l'intégration temporelle. $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu N = 20N$, $\alpha = 50$.

nb. harm.	DLFT $\epsilon = 10$	AFT $\alpha = 10$	AFT $\alpha = 50$	AFT $\alpha = 100$	AFT $\alpha = 1000$
1	0.26	0.43	0.48	0.48	0.44
3	0.38	0.63	0.64	0.64	0.62
5	0.48	0.80	0.81	0.80	0.87
21	1.50	2.29	2.33	2.31	3.33

TAB. 2.1 – Comparaison des temps de calcul en secondes entre la DLFT et la méthode AFT en fonction du nombre d'harmoniques retenues.

nb. harm.	DLFT $\epsilon = 10$	AFT $\alpha = 10$	AFT $\alpha = 50$	AFT $\alpha = 100$	AFT $\alpha = 1000$
1	690	915	1030	1027	1079
3	1221	1423	1546	1677	1749
5	1694	1908	2032	2108	2481
21	5196	5211	5510	5663	8029

TAB. 2.2 – Comparaison entre la DLFT et la méthode AFT : nombre d'appels à la fonction à annuler.

Conclusions

Dans ce chapitre, le problème général du contact frottant entre deux solides a été exposé dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Dans cette formulation, la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb sont prises en compte localement au niveau de l'interface de contact. Ceci permet en particulier de reproduire le phénomène de microglissement. On a présenté quelques méthodes issues de la théorie de l'optimisation couramment utilisées pour la résolution numérique du problème : multiplicateurs de Lagrange, pénalisation, lagrangiens augmentés. Celles-ci sont essentiellement utilisées dans la littérature pour la résolution de problèmes statiques. Par ailleurs, pour la recherche du régime stationnaire de systèmes dynamiques non-linéaires ce sont les méthodes fréquentielles, en particulier la méthode de Balance Harmonique, qui se sont imposées.

La DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency Time) est la méthode que nous utiliserons dans les chapitres suivants pour la prise en compte du contact aube-disque. C'est une méthode fréquentielle qui s'inspire des méthodes lagrangiennes précédemment évoquées. La prise en compte indirecte des contraintes par l'ajout d'un terme de pénalisation constitue sa spécificité la plus importante. Ceci permet d'utiliser sans régularisation préalable les lois de contact et de frottement, mais aussi de résoudre en une passe les équations, ce qui confère à cette méthode une grande rapidité de résolution. Nous avons aussi montré dans ce chapitre comment choisir le coefficient de pénalisation afin d'obtenir une bonne convergence. Enfin, les résultats obtenus pour un système simple ont été validés par comparaison avec l'intégration temporelle et la confrontation avec la méthode AFT a confirmé la grande efficacité de la DLFT en matière de temps de calcul.

Chapitre 3

Réponse forcée avec frottement en pied d'aube

Après avoir rappelé les équations linéarisées d'une structure en rotation, on applique dans ce chapitre la méthode de la DLFT au modèle éléments finis d'un ensemble composé d'une aube de compresseur et d'un secteur de disque. La réponse forcée tenant compte de la rotation et du contact frottant en pied d'aube permet de mettre en évidence les réductions de niveaux vibratoires potentielles. On analyse également localement le comportement des interfaces de contact. La fin du chapitre est consacrée à une étude de sensibilité à certains paramètres utilisés dans la modélisation.

3.1 Equations du mouvement des structures en rotation

Dans cette section, les équations de la dynamique d'une structure en rotation sont formulées dans le repère tournant. Elles font apparaître les effets gyroscopiques et les corrections de raideur. Le raidissement centrifuge, qui est l'effet dû à la rotation le plus visible pour une roue aubagée, est représenté par une matrice de raideur géométrique dont le mode de calcul est expliqué.

3.1.1 Définitions

Considérons un solide flexible en rotation S tel que le montre la figure 3.1. Notons (R_0) le repère galiléen et (R) le repère tournant lié au solide en rotation. On appelle $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]^T$ la vitesse de rotation du repère R par rapport au repère (R_0) , exprimée dans le repère (R) . Elle est supposée constante ici. La configuration de référence choisie est celle du solide S non déformé mais en rotation par rapport au repère galiléen (R_0) . Pour chaque point du solide S , on définit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= [x_1, x_2, x_3]^T && \text{position dans la configuration non déformée (coordonnées lagrangiennes),} \\ \boldsymbol{u} &= [u_1, u_2, u_3]^T && \text{déplacement,} \\ \boldsymbol{x}^* &= [x_1^*, x_2^*, x_3^*]^T && \text{position après déformation (coordonnées eulériennes),} \\ \boldsymbol{v} &= [v_1, v_2, v_3]^T && \text{vitesse absolue.} \end{aligned}$$

Il est important de préciser pour la suite que ces quatre vecteurs sont exprimés dans le repère tournant (R) . Les variables eulériennes et les variables lagrangiennes sont liées par

$$x_i^* = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

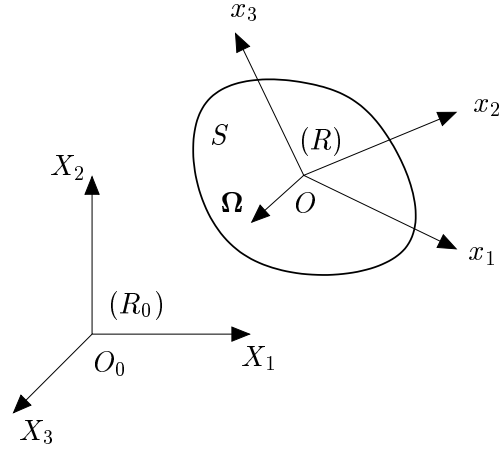


FIG. 3.1 – Solide S en rotation : (R_0) repère galiléen fixe, (R) repère lié au solide.

3.1.2 Expression des équations dans le repère tournant

La vitesse absolue exprimée dans le repère tournant (R) est obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation (3.1) :

$$\mathbf{v}(M, t) = \dot{\mathbf{u}} + \Omega(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad (3.2)$$

où Ω est la matrice antisymétrique

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

telle que $\Omega\mathbf{x} = \Omega \wedge \mathbf{x}$.

Energie cinétique

L'énergie cinétique du solide S est obtenue par intégration sur le volume τ occupé dans la configuration de référence (non déformée) :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\tau, \quad (3.4)$$

où ρ désigne la masse volumique. En utilisant la décomposition de la vitesse (3.2) et en notant que $\Omega^2 = -\Omega^T\Omega$, l'expression de l'énergie cinétique devient

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\tau + \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \Omega \mathbf{u} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{u}^T \Omega^2 \mathbf{u} d\tau \\ &\quad - \int_{\tau} \rho \mathbf{u}^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau + \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \Omega \mathbf{x} d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Plaçons-nous dans le cas où le champ de déplacement est approché par la méthode de Rayleigh-Ritz ou par une méthode éléments finis. Le problème continu est approché par un problème à n degrés de liberté. Le champ de déplacement \mathbf{u} peut alors s'exprimer en fonction du vecteur \mathbf{U} des déplacements nodaux (ou coordonnées généralisées) par

$$\mathbf{u}(x_i, t) = N(x_i)\mathbf{U}(t), \quad (3.6)$$

où N est une matrice de fonctions de forme de taille $3 \times n$. L'énergie cinétique exprimée en fonction des déplacements nodaux s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T N \dot{\mathbf{U}} d\tau + \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T \Omega N \mathbf{U} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{U}^T N^T \Omega^2 N \mathbf{U} d\tau \\ &- \int_{\tau} \rho \mathbf{U}^T N^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau + \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{U}}^T N^T \Omega \mathbf{x} d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La contribution des deux dernières intégrales aux équations de Lagrange est nulle.

Energie de déformation

On suppose que la relation contrainte-déformation est régie par une loi élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C} & \text{ la matrice d'élasticité,} \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]^T \text{ le vecteur des contraintes,} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}]^T \text{ le vecteur des déformations.} \end{aligned}$$

Pour cette loi de comportement, l'énergie potentielle de déformation s'écrit

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\tau. \quad (3.9)$$

On note B la matrice de taille $6 \times n$ liant les déformations aux degrés de liberté du système discrétisé :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_i, t) = B(x_i) \mathbf{U}(t). \quad (3.10)$$

B s'exprime facilement à partir des fonctions de forme par

$$B(x_i) = \nabla N(x_i), \quad (3.11)$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation qui a pour expression

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Avec l'équation (3.10), l'expression de l'énergie de déformation devient

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{U}^T B^T C B \mathbf{U} d\tau. \quad (3.13)$$

Equations de Lagrange

En l'absence de forces extérieures, les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial U_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial U_i} = 0. \quad (3.14)$$

En utilisant les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle données dans les équations (3.7) et (3.13), les équations de Lagrange deviennent :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + G\dot{\mathbf{U}} + (K - K_c)\mathbf{U} = \mathbf{F}_\Omega . \quad (3.15)$$

Les différents termes sont :

- matrice de masse :

$$M = \int_{\tau} \rho N^T N d\tau \quad (3.16)$$

- matrice gyroscopique :

$$G = 2 \int_{\tau} \rho N^T \Omega N d\tau \quad (3.17)$$

- matrice de raideur :

$$K = \int_{\tau} B^T C B d\tau \quad (3.18)$$

- matrice de raideur centrifuge :

$$K_c = - \int_{\tau} \rho N^T \Omega^2 N d\tau \quad (3.19)$$

- vecteur des efforts centrifuges :

$$\mathbf{F}_\Omega = - \int_{\tau} \rho N^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau \quad (3.20)$$

Dans les équations du mouvement du solide en rotation (3.15), on constate que la raideur est modifiée par un terme $-K_c$. Il est facile de montrer que ce terme induit un assouplissement de la structure. En effet, la matrice Ω^2 s'écrit

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} -\Omega_2^2 - \Omega_3^2 & \Omega_1\Omega_2 & \Omega_1\Omega_3 \\ \Omega_1\Omega_2 & -\Omega_1^2 - \Omega_3^2 & \Omega_2\Omega_3 \\ \Omega_1\Omega_3 & \Omega_2\Omega_3 & -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

et ses valeurs propres sont 0 (ordre de multiplicité 1) et $-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2$ (ordre de multiplicité 2). Ω^2 est donc symétrique négative ce qui signifie que K_c est symétrique positive. Le terme $-K_c$ correspond donc bien à un assouplissement de la structure. Dans cette étude, on s'intéresse aux vibrations des disques aubagés de turbomachine. Dans ce cas, la rotation s'effectue autour d'un seul axe. Les équations sont exprimées dans le repère lié au rotor. Le sous espace propre de Ω^2 correspondant à la valeur propre 0 est l'axe de rotation lui-même. Les caractéristiques de raideur dans la direction de l'axe de rotation ne sont donc pas modifiées. Ceci est confirmé par l'étude de Laurensen [77].

3.1.3 Prise en compte de la raideur géométrique

On vient de mettre en évidence un effet d'assouplissement lié à la rotation. Cette correction de raideur est pourtant insuffisante pour prédire précisément les fréquences propres des disques aubagés. En effet, les fréquences propres associées à l'équation du mouvement (3.15) s'avèrent sous-estimées, et ce d'autant plus que la vitesse de rotation est grande. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de prendre en compte la rigidification liée à la précontrainte de la structure par les

efforts d'inertie. Ceci implique de considérer l'expression complète du tenseur des déformations de Green-Lagrange,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)},\end{aligned}\quad (3.22)$$

avec les termes linéaires

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.23)$$

et les termes quadratiques

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (3.24)$$

On parle ainsi d'effet du second ordre. L'hypothèse d'élasticité linéaire du matériau est en revanche maintenue.

Analyse non-linéaire

La matrice B (voir équation (3.10)) est ainsi composée de termes linéaires et de termes non-linéaires. Les équations du mouvement sont modifiées par l'adjonction d'une matrice de raideur géométrique K_g dépendante de l'état de contrainte du matériau, et donc du vecteur déplacement. Ainsi pour déterminer l'équilibre statique de la structure en rotation, il faut résoudre le problème non-linéaire

$$(K - K_c + K_g(\mathbf{U}))\mathbf{U} = \mathbf{F}_\Omega. \quad (3.25)$$

Dans les références [38], [62], [68], on a recours à la méthode de Newton-Raphson pour cette résolution. Une fois l'équilibre statique déterminé, la matrice de raideur obtenue peut servir pour résoudre un problème dynamique.

Détermination rapide de la raideur géométrique

Dans le paragraphe précédent, la matrice de raideur géométrique est déterminée de manière incrémentale. Ici, on fait l'hypothèse que les déformations induites par la rotation restent faibles. Il est alors possible d'obtenir la matrice de raideur géométrique directement à partir des précontraintes. Si la rotation induit principalement des efforts de traction dans les aubes d'une turbomachine, alors les déformations seront effectivement petites. En revanche, certains aubages spécifiques subissent des déformations importantes à cause de la rotation : dévriillages importants, flexion. Dans ce cas, un calcul non-linéaire est préférable.

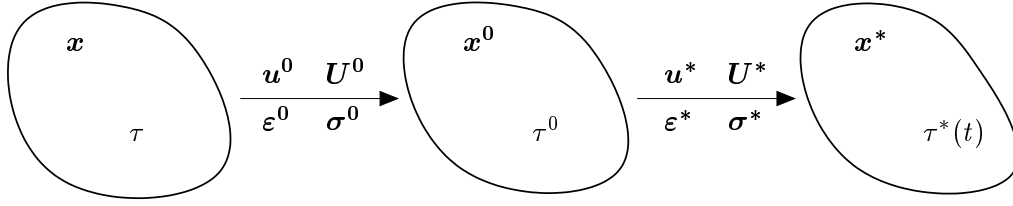
On cherche à connaître la dynamique du solide S alors que celui est soumis à une précontrainte initiale $\boldsymbol{\sigma}^0$ et une déformation initiale $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ petite (voir figure 3.2). Le champ total est la somme du champ dû à la précontrainte et du champ additionnel dû aux forces d'excitation. Ainsi on peut écrire les relations

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^*, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^*, \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^*. \quad (3.29)$$

FIG. 3.2 – Etat non déformé, précontraint et déformé du solide S .

Grâce à l'hypothèse des petites déformations, les coordonnées x_i^0 sont assimilées aux coordonnées x_i ce qui nous permet d'exprimer le tenseur des déformations additionnelles par

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right) \\ &= \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \varepsilon_{ij}^{*(2)}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Toujours grâce à l'hypothèse des petites déformations, les énergies sont sommées sur le volume de référence τ . Ainsi l'énergie de déformation s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int_{\tau} (\varepsilon^0 + \varepsilon^*)^T C (\varepsilon^0 + \varepsilon^*) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^{*T} C \varepsilon^* d\tau + \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^* d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^0 d\tau.\end{aligned}\quad (3.31)$$

On retient les termes jusqu'au deuxième ordre en les dérivées de \mathbf{u}^* , ce qui donne

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^{*(1)T} C \varepsilon^{*(1)} d\tau + \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^{*(1)} d\tau + \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^{*(2)} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^0 d\tau.\quad (3.32)$$

La dernière intégrale est une constante qui n'aura donc pas de contribution dans les équations du mouvement. La troisième intégrale correspond elle à l'énergie géométrique de précontrainte [47] :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_g &= \int_{\tau} \varepsilon^{0T} C \varepsilon^{*(2)} d\tau \\ &= \int_{\tau} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{*(2)} d\tau.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Pour le calcul pratique, le champ de déplacement additionnel est approché par

$$\mathbf{u}^*(x_i, t) = N(x_i) \mathbf{U}^*(t),\quad (3.34)$$

ce qui permet d'exprimer le terme quadratique du tenseur des contraintes en fonction des coordonnées généralisées \mathbf{U}^* par

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{*(2)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial N_{kp}}{\partial x_i} \frac{\partial N_{kq}}{\partial x_j} U_p^* U_q^*.\end{aligned}\quad (3.35)$$

En utilisant cette expression de $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$ dans (3.33), l'énergie géométrique de précontrainte se met sous la forme

$$\mathcal{U}_g = \frac{1}{2} \mathbf{U}^* K_g \mathbf{U}^*,\quad (3.36)$$

où K_g est la matrice de raideur géométrique de terme général

$$(K_g)_{pq} = \int_{\tau} \sigma_{ij}^0 \frac{\partial N_{kp}}{\partial x_i} \frac{\partial N_{kq}}{\partial x_j} d\tau. \quad (3.37)$$

K_g est ainsi une matrice symétrique qui représente les effets liés à la précontrainte. Elle peut être déterminée dès que la précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$ est connue.

3.1.4 Expression finale des équations du mouvement

L'expression de l'énergie de déformation (3.32) en fonction des coordonnées généralisées devient

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^{*T} K \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^{0T} K \mathbf{U}^* + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{*T} K_g \mathbf{U}^* + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{0T} K \mathbf{U}^0. \quad (3.38)$$

Si on reprend l'expression de l'énergie cinétique (3.7) en y introduisant la partition du champ de déplacement en un terme statique dû à la rotation \mathbf{U}^0 et un terme supplémentaire \mathbf{U}^* on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{*T} M \dot{\mathbf{U}}^* + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{*T} G \mathbf{U}^* + \frac{1}{2} \mathbf{U}^{*T} K_c \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^{0T} K_c \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{\Omega} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{U}^{0T} K_c \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^{0T} \mathbf{F}_{\Omega} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{*T} G \mathbf{U}^0 + \int_{\tau} \rho \dot{\mathbf{U}}^{*T} N^T \Omega \mathbf{x} d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \mathbf{x}^T \Omega^2 \mathbf{x} d\tau. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La contribution des cinq derniers termes aux équations du mouvement est nulle. Les équations de Lagrange sont écrites par rapport à \mathbf{U}^* qui est la composante du déplacement qui dépend du temps :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_i^*} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{U}_i^*} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{U}_i^*} = 0. \quad (3.40)$$

Avec les expressions de l'énergie de déformation (3.38) et de l'énergie cinétique (3.39), les équations de Lagrange deviennent

$$M \ddot{\mathbf{U}}^* + G \dot{\mathbf{U}}^* + (K - K_c + K_g) \mathbf{U}^* + (K - K_c) \mathbf{U}^0 = \mathbf{F}_{\Omega}. \quad (3.41)$$

Dans le code éléments finis Samcef que nous utiliserons par la suite pour nos calculs préliminaires, la matrice de raideur géométrique K_g est déterminée directement à partir de la résolution du problème statique linéaire

$$(K - K_c) \mathbf{U}^0 = \mathbf{F}_{\Omega}. \quad (3.42)$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$ associé donne K_g par (3.37). L'hypothèse est donc faite que la contrainte statique n'est pas influencée par les effets géométriques. La réponse forcée du solide en rotation soumis aux forces d'excitation \mathbf{F}_{ex} et à un amortissement visqueux représenté par la matrice C est alors obtenue en résolvant

$$M \ddot{\mathbf{U}}^* + (C + G) \dot{\mathbf{U}}^* + (K - K_c + K_g) \mathbf{U}^* = \mathbf{F}_{ex}. \quad (3.43)$$

Ce sont des équations du mouvement linéarisées autour de la position d'équilibre \mathbf{U}^0 . La matrice de raideur géométrique K_g a un effet rigidifiant et la matrice de raideur centrifuge K_c a un effet assouplissant. Leurs contributions sont du même ordre de grandeur mais globalement les fréquences propres des aubages augmentent avec la vitesse de rotation. On verra par la suite que la matrice gyroscopique G a peu d'influence sur la réponse forcée des disques aubagés.

3.2 Modélisation d'un secteur aube-disque en rotation

3.2.1 Présentation du modèle

Le modèle étudié dans ce chapitre est présenté sur la figure 3.3. Il est composé d'un secteur de disque et d'une aube liés par l'intermédiaire d'un joint en queue d'aronde. Il s'agit d'une aube de compresseur en alliage de titane d'une hauteur de 10 cm. Le rayon total du disque aubagé est 32 cm. Le maillage de l'aube est composé de 5605 tétraèdres et celui du secteur de 3379 tétraèdres. Des éléments du second degré sont utilisés, c'est à dire que chaque tétraèdre comporte dix noeuds : 4 noeuds aux sommets et 6 noeuds au milieu de chaque arête. Au total, le modèle de l'aube contient 30930 degrés de liberté et celui du secteur 17787 degrés de liberté. Les opérations de maillage ont été effectués à l'aide de Patran et les calculs numériques nécessaires pour prendre en compte les effets de la rotation et réduire la taille du système ont été réalisés avec Samcef.

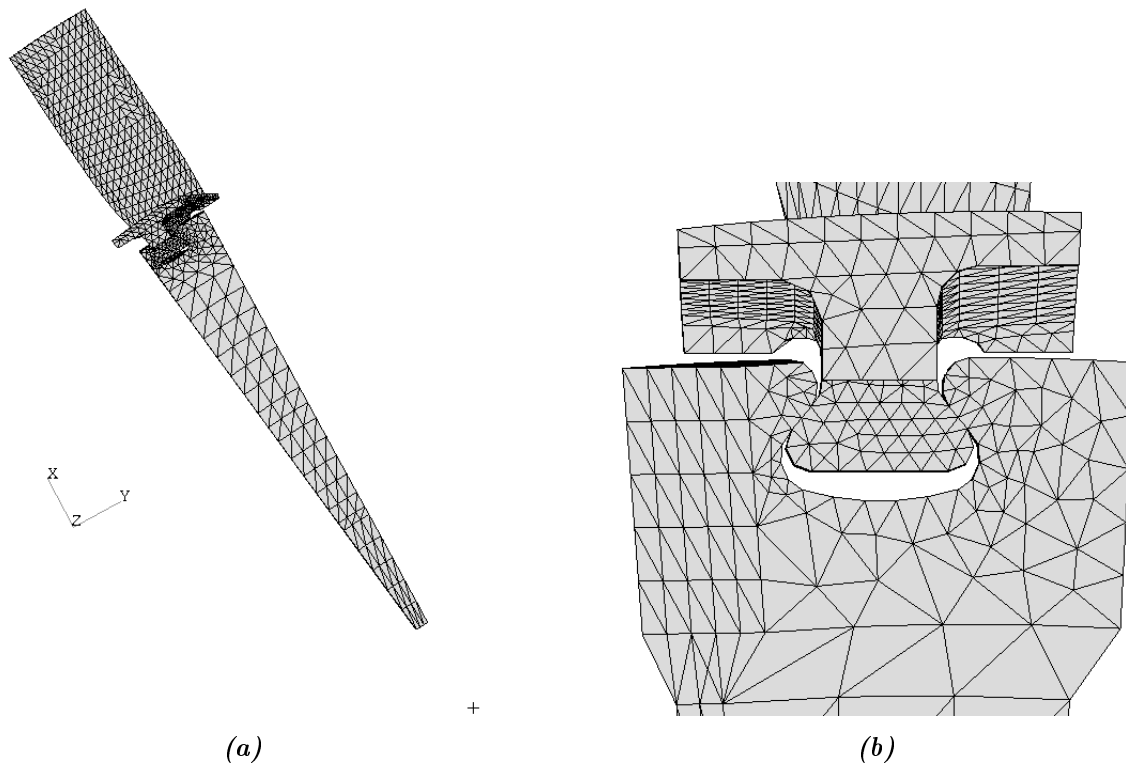


FIG. 3.3 – (a) maillage du secteur étudié, (b) détail de la liaison aube-disque.

Pour les simulations ci-dessous, les noeuds situés au niveau de l'alésage du disque ont été fixés (les noeuds du secteur les plus proches de l'axe de rotation) ainsi que les noeuds situés sur les deux flancs du secteur. Dans le chapitre 5 cette dernière condition aux limites sera remplacée par une condition de symétrie cyclique. Les maillages sont compatibles au niveau des interfaces de contact afin de pouvoir utiliser des éléments de contact noeud à noeud.

3.2.2 Modèle réduit avec effets liés à la rotation.

Le nombre de degrés de liberté pour chacune des deux sous-structures secteur et aube est réduit par la condensation de Craig et Bampton [25]. La base réduite de l'aube comprend les degrés de

liberté des noeuds impliqués dans le contact, un noeud en tête d'aube afin d'appliquer l'excitation, et 6 coordonnées modales. Celle du disque est formée des degrés de liberté de contact et de 9 coordonnées modales. On retient ici $8 \times 3 = 24$ noeuds sur chaque portée pour modéliser le contact (voir la figure 3.4).

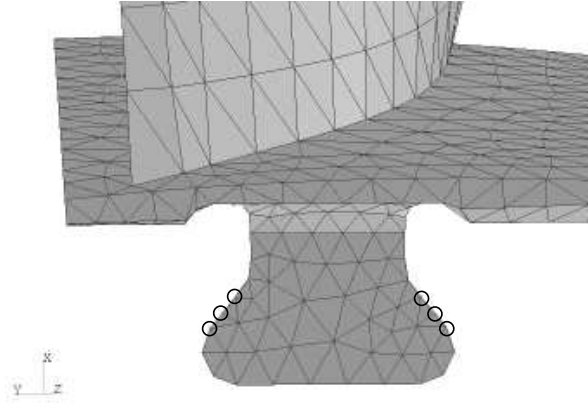


FIG. 3.4 – Localisation des noeuds de contact en pied d'aube.

Le calcul des matrices réduites prenant en compte les effets de la rotation est effectué à l'aide du code éléments finis Samcef en deux étapes principales :

1. Calcul de l'équilibre statique de l'ensemble aube+disque soumis aux efforts centrifuges selon l'équation (3.42). C'est un calcul linéaire où l'on ne prend en compte aucun déplacement relatif au niveau de l'interface de contact : l'aube et le secteur sont supposés former un solide unique.
2. Formation des matrices réduites. Le champ de contrainte σ^0 issu du calcul statique permet la formation des matrices de raideur géométrique pour l'aube et le secteur. Les matrices sont réduites par la méthode de Craig Bampton.

On récupère à l'issue de ces calculs pour chaque sous-structure l ($l = 1, 2$)

- la matrice de masse réduite :

$$\bar{M}^l = T^T M^l T, \quad (3.44)$$

- la matrice de raideur tangente réduite :

$$\bar{K}^l = T^T (K^l - K_c^l + K_g^l(\sigma^0)) T, \quad (3.45)$$

- le vecteur des efforts centrifuges réduit :

$$\bar{F}_\Omega^l = T^T F_\Omega^l, \quad (3.46)$$

- et éventuellement la matrice gyroscopique réduite :

$$\bar{G}^l = T^T G^l T. \quad (3.47)$$

T désigne ici la matrice de transformation associée à la méthode de Craig et Bampton. Dans la pratique, et ce sera vérifié dans les simulations, le déplacement centrifuge de l'aube lié au glissement

en pied d'aube est faible, ce qui permet d'utiliser les raideurs tangentes \bar{K}^l même si celles-ci sont calculées sans tenir compte du frottement. On applique enfin aux matrices obtenues des rotations afin d'obtenir pour chaque noeud de contact un degré de liberté dans la direction normale et deux dans le plan tangentiel. Les axes locaux (x,y,z) utilisés sont montrés sur la figure 3.5. Le problème dynamique avec frottement peut alors être résolu par la DLFT, comme présenté au chapitre 2.

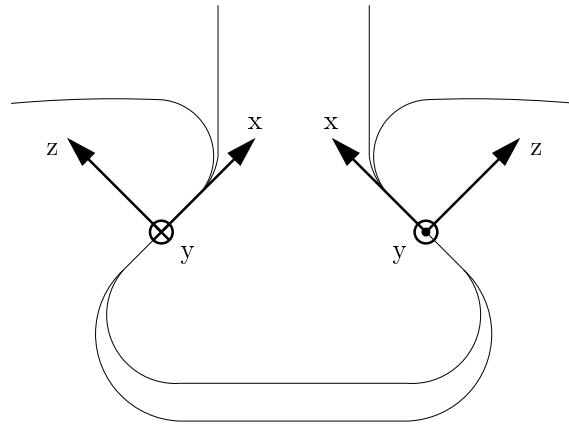


FIG. 3.5 – Axes locaux au niveau des interfaces de contact.

La précision du modèle réduit a été vérifiée en comparant ses fréquences propres avec celles obtenues pour le modèle complet. Le tableau 3.1 donne la comparaison des 6 premières fréquences à 5000 tours/min.

mode	modèle complet	modèle réduit	écart (%)
1	4.085	4.085	0.00
2	14.170	14.208	+ 0.27
3	15.257	15.287	+ 0.20
4	22.934	23.707	+ 3.37
5	33.683	33.910	+ 0.67
6	38.211	38.906	+ 1.81

TAB. 3.1 – Comparaison entre les fréquences propres normalisées du modèle complet et du modèle réduit (6 modes d'aube et 9 modes de disque) pour $\Omega = 5000$ tours/min.

3.3 Résultats dans la configuration de référence

Cette partie présente les résultats de statique et dynamique avec frottement en pied d'aube obtenus avec le modèle aube - secteur de disque présenté au paragraphe précédent. Une excitation harmonique est appliquée sur un noeud situé à proximité du haut du bord de fuite, comme le montre la figure 3.6. La sensibilité de la réponse à divers paramètres du modèle sera présentée dans la fin du chapitre. Ici, les calculs ont été effectués avec un jeu de référence :

Vitesse de rotation	: $\Omega = 5000tr/min$
Coefficient de frottement	: $\mu = 0.2$
Niveau de l'excitation	: $F_{ex} = 0.2N$
Facteur d'amortissement	: $\xi = 5.10^{-4}$
Nombre d'harmoniques	: $N_h = 3$
Coefficient de pénalité	: $\epsilon = 10000$
Nombre de pas de temps par période	: $N = 256$

Le coefficient de frottement de 0,2 est représentatif du contact en pied d'aube. En effet, les constructeurs utilisent un dépôt de lubrifiant solide afin d'éviter les amorces de fissures. Le coefficient de frottement est alors très faible (parfois moins de 0,1). Ce film solide est progressivement dégradé pendant l'utilisation du moteur, ce qui conduit à une hausse du coefficient de frottement [43]. Les autres sources d'amortissement ont été modélisées par un amortissement visqueux équivalent. On a choisi un coefficient $\xi = 5.10^{-4}$ de même que dans [110].

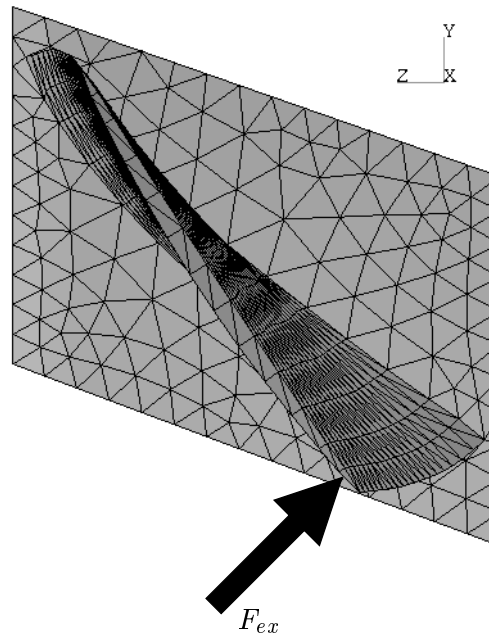


FIG. 3.6 – Excitation harmonique en tête d'aube.

3.3.1 Equilibre statique avec frottement

Le calcul de l'équilibre statique permet de connaître la répartition sur les portées des glissements et des efforts de contact dus aux efforts centrifuges. Il est aussi souvent nécessaire dans le calcul de la réponse forcée pour faciliter la convergence à la première fréquence calculée. Les déplacements statiques obtenus sont utilisés comme conditions initiales pour la résolution fréquentielle.

La figure 3.7 montre la répartition des contraintes normales de contact. Sur cet histogramme, il y a une barre par élément de contact. Chaque groupe de $3 \times 8 = 24$ barres représente donc une portée. On remarque qu'il n'y a pas de perte de contact et que la pression de contact n'est pas répartie de façon uniforme. On constate en effet que le bord d'attaque est plus chargé que

le bord de fuite et que pour chaque portée, le bord gauche est plus chargé que le bord droit. Ces déséquilibres sont normalement réduits par la pression stationnaire du fluide, qui n'a pas été incluse dans nos simulations. La figure 3.8 montre en effet que l'aube, à l'application de la charge centrifuge fléchit du côté intrados. Enfin, de nombreuses études consacrées au chargement statique des aubes en rotation ont mis en évidence que les bords des surfaces en contact peuvent présenter des surcontraintes importantes (voir chapitre 1). Le maillage des interfaces de contact n'est pas assez fin ici pour voir précisément cet effet.

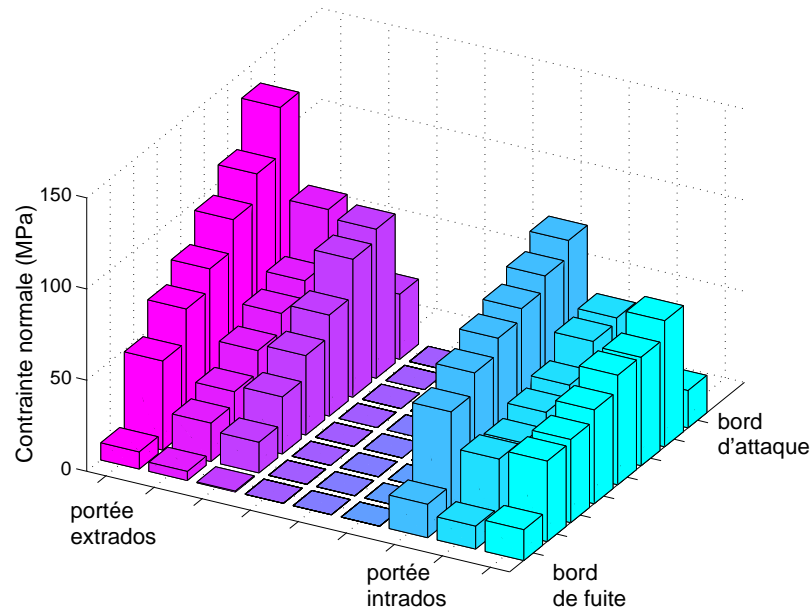


FIG. 3.7 – Répartition de la *contrainte normale*, $\Omega = 5000tr/min$.

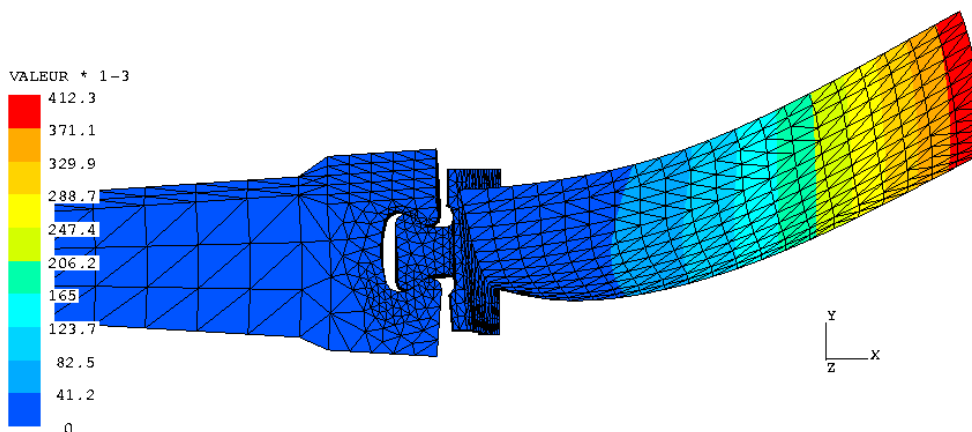


FIG. 3.8 – *Flexion de l'aube due à la rotation à $\Omega = 5000tr/min$. Déplacements (norme) en mm.*

Nous avons reporté dans la figure 3.9 les distances de glissement dues à la charge centrifuge. Un seul élément de contact reste adhérent. Pour tous les autres, l'effort de contact est sur le cône

de glissement : $\|\lambda_T\| = \mu|\lambda_N|$. L'ordre de grandeur des glissements est 10 micromètres. Ceci valide l'hypothèse de petits glissements que nous avons faite pour pouvoir utiliser des frotteurs noeud à noeud et pour calculer les matrices de raideur tangentes.

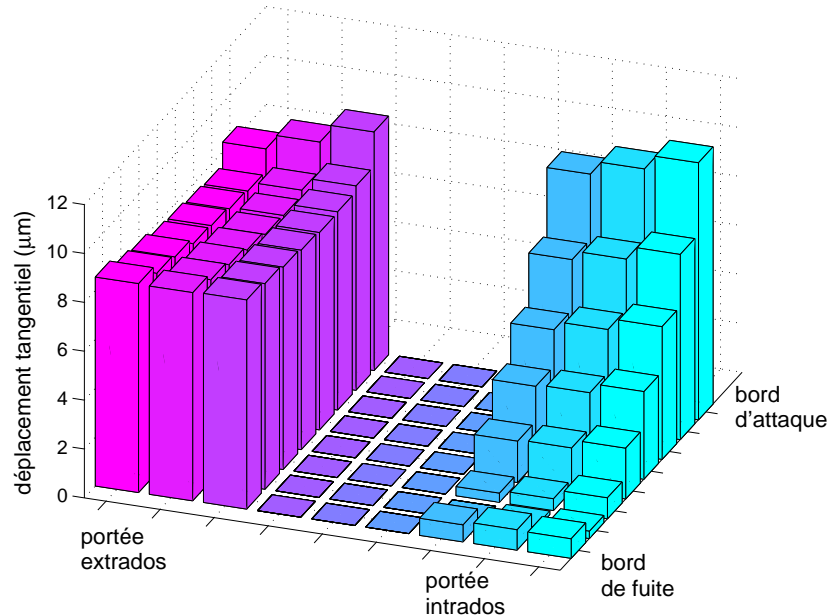


FIG. 3.9 – Glissements dus aux efforts centrifuges avec $\Omega = 5000tr/min$.

3.3.2 Réponse harmonique

La méthode de calcul proposée permet de quantifier l'impact du frottement en pied d'aube sur la réponse forcée du secteur aube-disque et d'avoir accès localement au niveau des zones de contact aux efforts et aux déplacements.

Comportement global

La figure 3.10 montre les réponses fréquentielles autour des six premiers modes de la structure. Dans chaque cas on compare le résultat obtenu par un calcul linéaire où tous les éléments de contact sont supposés dans l'état adhérent et le résultat du calcul non-linéaire. Les amplitudes sont relevées au niveau du noeud d'excitation et dans la direction de l'excitation (voir figure 3.6). La dissipation énergétique par frottement en pied d'aube conduit pour le cas étudié à une baisse significative du niveau de vibration et on remarque que la résonance est très peu décalée par la non-linéarité (toujours moins de 1%). Globalement, plus la fréquence du mode augmente, moins l'amortissement est important.

Comportement local

En regardant plus précisément au niveau du contact les résultats du calcul non-linéaire, on constate que le pied n'est jamais en macroglissement. La figure 3.11 montre les amplitudes maximales de déplacement relatif tangent obtenues à la résonance du premier mode. On remarque que

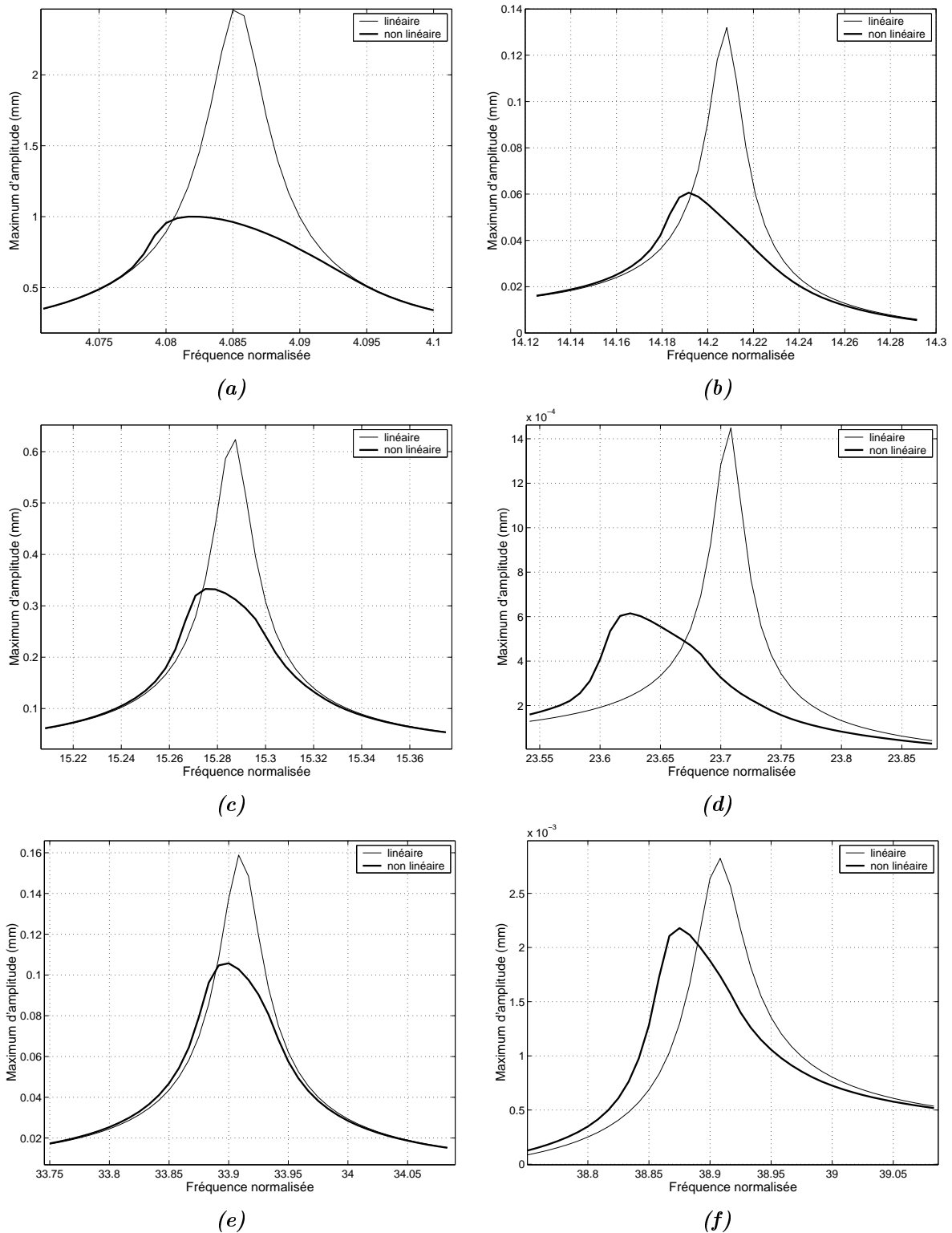


FIG. 3.10 – Réponses fréquentielles autour des 6 premiers modes : (a) flexion 1, (b) torsion 1, (c) flexion 2, (d) flexion 3, (e) torsion 2, (f) flexion 4.

plus de la moitié des éléments de contact restent adhérents et que les glissements ne dépassent pas le micromètre. Par ailleurs, alors qu'aucune séparation n'a été trouvée dans le calcul statique, des décollements sont enregistrés lors de la réponse fréquentielle pour trois éléments de contact (voir figure 3.12). Pour deux d'entre eux, il y a une perte de contact intermittente, alors que le troisième reste dans l'état séparé pendant toute la période. La figure 3.13 montre le cas d'un élément de contact qui passe par les trois états possibles au cours de la période : séparation, adhérence, glissement.

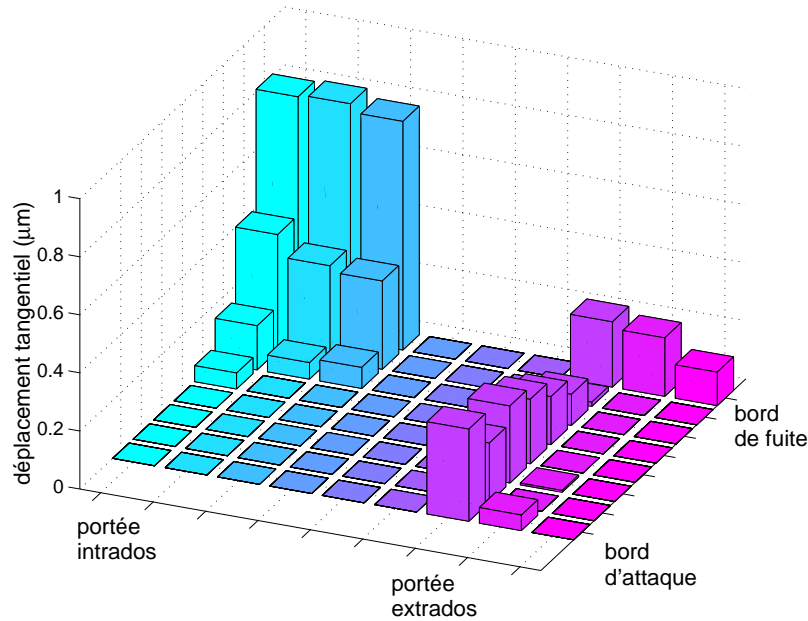


FIG. 3.11 – Amplitude des déplacements tangentiels dans la direction x à la première résonance.

Dans la figure 3.14 on compare le déplacement dans le domaine temporel \mathbf{X}_r et le déplacement dans le domaine fréquentiel $\tilde{\mathbf{U}}_r$ pour le cycle de stick-slip d'un élément de contact. Mis à part les trois présentant un décollement, les éléments de contact pour lesquels un déplacement relatif est enregistré ont tous un cycle similaire composé de deux glissements et de deux phases d'adhésion. Aucun n'est en glissement pendant toute la période. Le glissement se fait essentiellement dans la direction x de la figure 3.5. La figure 3.14(a) montre qu'avec trois harmoniques, le déplacement relatif est correctement approché. On remarque enfin que le mouvement n'est pas symétrique : $\mathbf{X}_r(t+T/2) \neq -\mathbf{X}_r(t)$. Ainsi, il convient de retenir une ou plusieurs harmoniques paires pour une résolution précise.

Dissipations énergétiques

On a vu au chapitre 1 que l'énergie dissipée localement jouait un rôle important pour la prédiction de l'endommagement par fretting. On a donc calculé pour chaque élément de contact l'énergie dissipée au cours d'une période par

$$E_{dissip} = \sum_{n=1}^N \lambda^{n,T} \cdot (\mathbf{X}_r^{n,T} - \mathbf{X}_r^{n-1,T}), \quad (3.48)$$

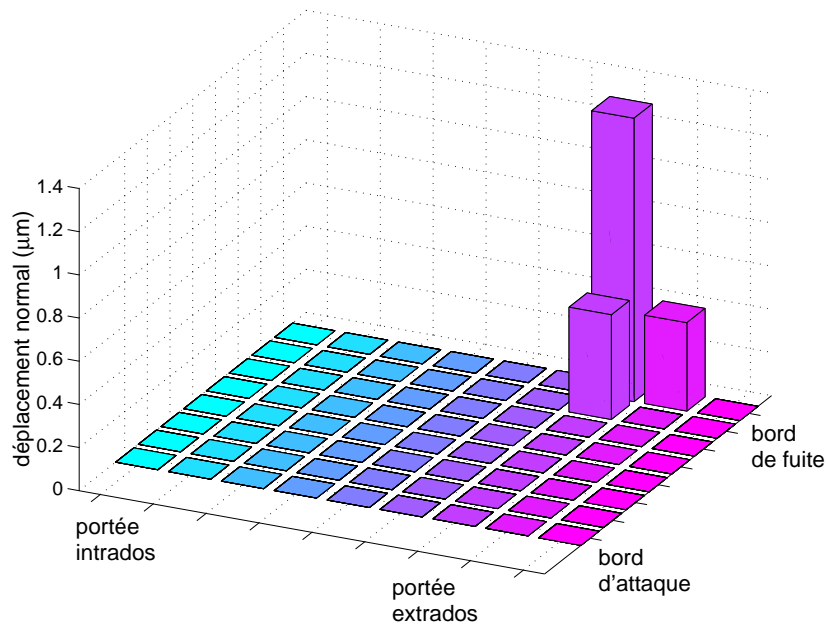


FIG. 3.12 – Déplacements normaux maximaux à la première résonance.

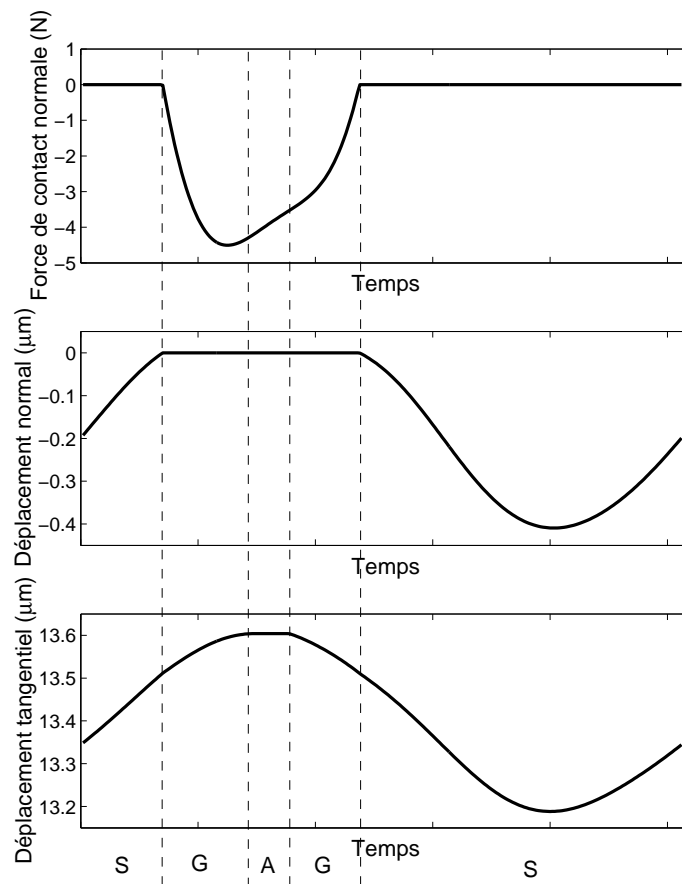


FIG. 3.13 – Evolutions temporelles pour un élément de contact qui passe par les trois états au cours d'une période : S, séparation, G, glissement, A, adhérence.

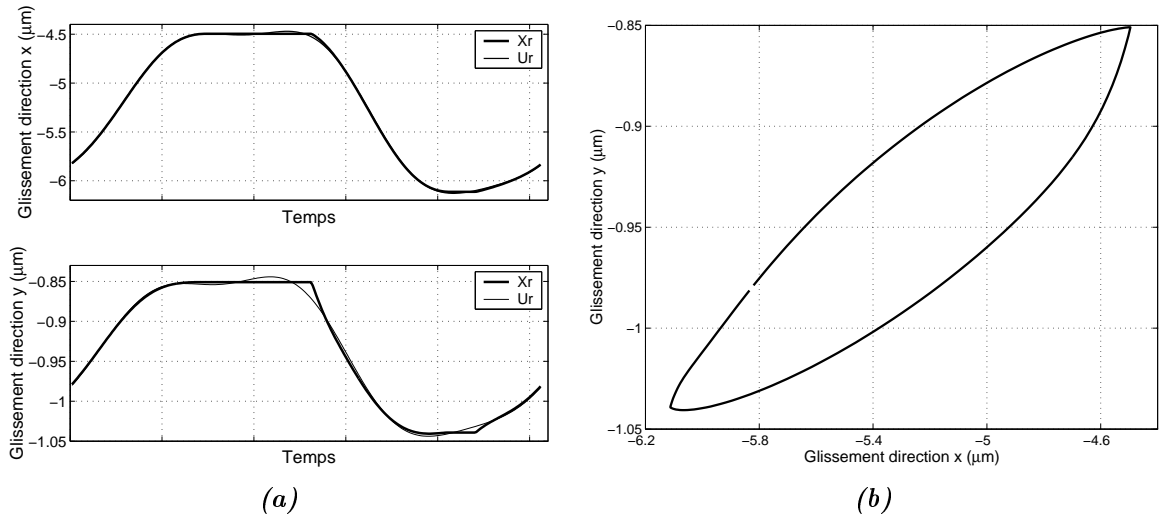


FIG. 3.14 – Déplacements relatifs tangentiels (glissements) pour l'élément de contact 25. (a) Comparaison entre le déplacement solution dans le domaine temporel (\mathbf{X}_r) et le déplacement solution dans le domaine fréquentiel avec 3 harmoniques ($\tilde{\mathbf{U}}_r$). (b) Glissements dans le plan tangentiel

où $\lambda^{n,T}$ et $\mathbf{X}_r^{n,T}$ désignent respectivement l'effort de contact tangentiel et le vecteur des déplacements relatifs tangentiels. La figure 3.15 donne la répartition des puissances de dissipation surfaciques moyennes obtenues par

$$P_{dissip} = \frac{E_{dissip} f}{A_c} \quad (3.49)$$

où f désigne la fréquence et A_c est la surface pour un élément de contact. Parce que la contrainte normale n'est pas uniforme sur les portées et varie au cours du temps, la répartition trouvée diffère de celle des déplacements tangentiels donnée dans la figure 3.11.

Modification de la position moyenne

L'excitation harmonique provoque des glissements alternés dans le pied d'aube qui font que la position moyenne est différente de celle trouvée dans le calcul de l'équilibre statique. La figure 3.16 montre que les vibrations conduisent à un léger basculement supplémentaire. Par rapport au cas statique, les efforts de contact tangentiels supportent une partie plus faible de l'effort centrifuge, et on voit ainsi sur la figure 3.17 que la contrainte normale moyenne est globalement plus importante. Par ailleurs, les fluctuations de la contrainte normale autour de la contrainte moyenne ont une amplitude qui va jusqu'à 20 MPa.

Evaluation du niveau d'excitation

Les résultats précédents ont mis en évidence un effet marqué des non-linéarités. Nous vérifions rapidement dans ce paragraphe que ceci n'est pas dû à un niveau d'excitation excessif en essayant de situer le niveau de vibration obtenu dans ces simulations par rapport à la limite de fatigue de l'aube. Les contraintes à proximité du contact n'étant pas accessibles avec précision à cause du maillage insuffisamment fin dans cette zone, nous nous limitons à la recherche des contraintes de Von Mises alternées dans la pale. Pour cela, nous avons effectué un calcul linéaire, c'est à dire sans aucun glissement ni décollement. La déformation de la pale est en effet peu affectée par les non-linéarités, puisque les glissements en pied d'aube sont inférieurs au micromètre.

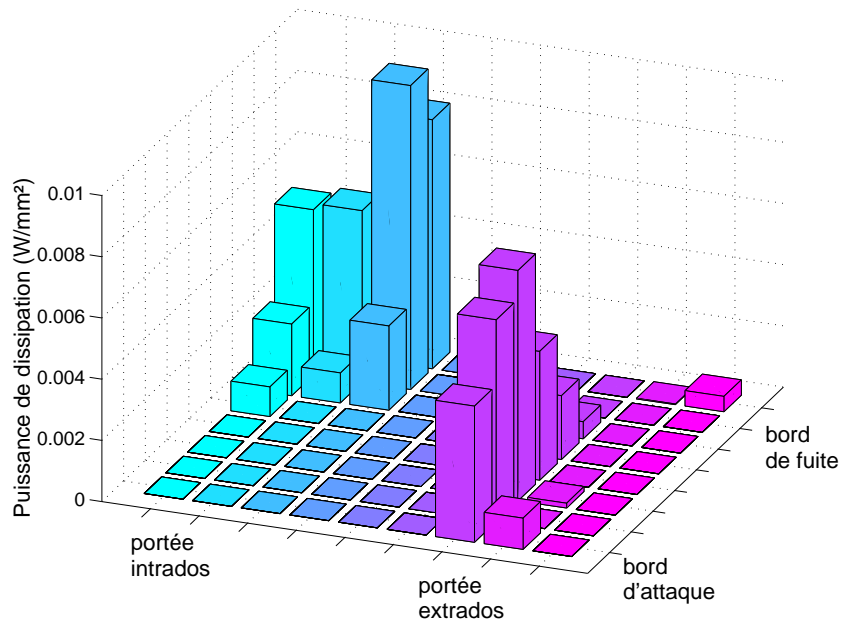


FIG. 3.15 – Répartition des puissances de dissipation par frottement à la résonance.

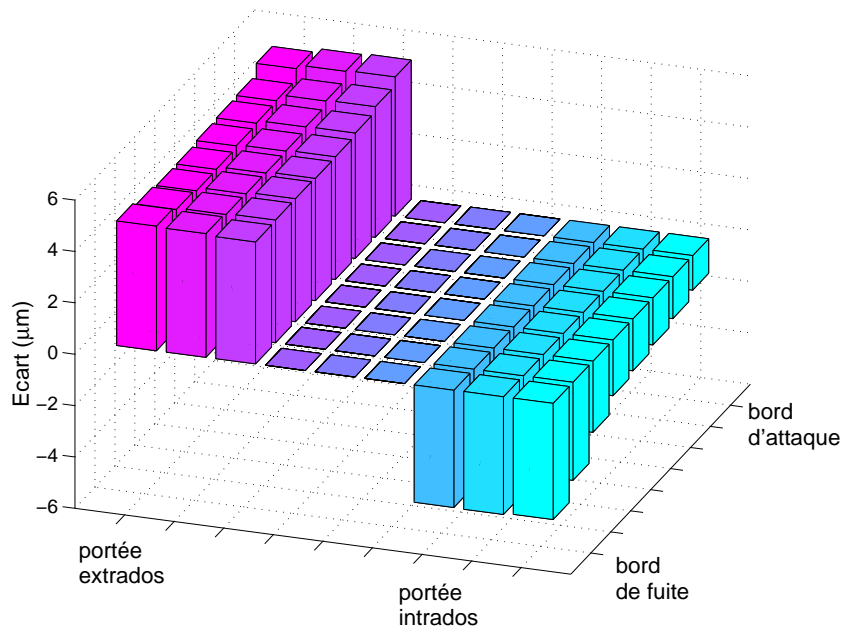


FIG. 3.16 – Ecart entre la position moyenne et la position calculée en statique selon l'axe x .

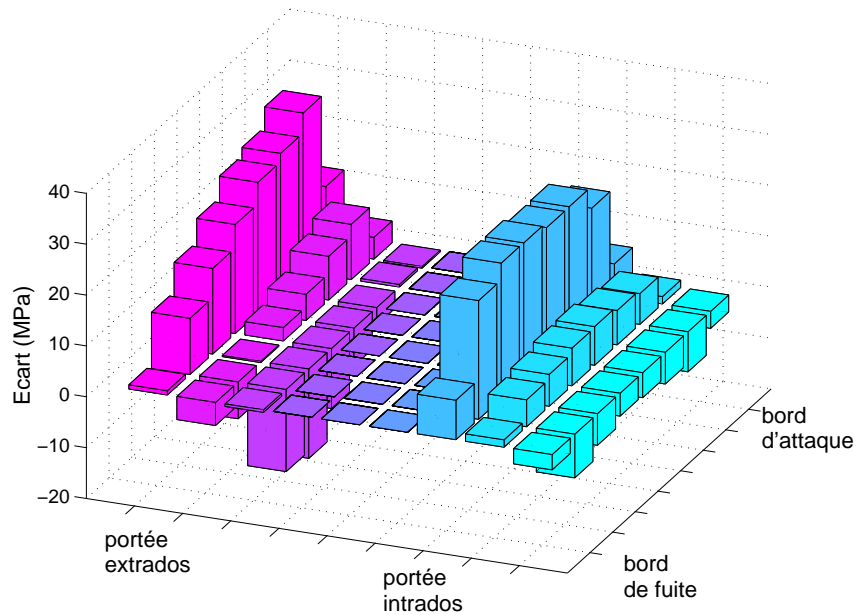


FIG. 3.17 – *Ecart entre la contrainte normale moyenne et la contrainte normale calculée en statique.*

La figure 3.18 montre les contraintes de Von Mises maximales obtenues pour le premier mode de flexion et un déplacement de 1 mm du noeud d'excitation, ce qui correspond à l'amplitude maximale trouvée dans le calcul non-linéaire de la figure 3.10(a). Une contrainte de Von Mises maximale d'environ 94 MPa est relevée sur le bas de l'extrados de la pale. Par ailleurs, un calcul statique a donné pour ce même point une contrainte de traction de 50 MPa due à la charge centrifuge. Ceci nous permet à l'aide du diagramme de Goodman de la figure 3.19 de constater que le niveau de vibration de ce premier mode est situé très en dessous de la limite d'endurance, au moins en ce qui concerne la pale. On a aussi reporté sur la figure 3.19 le niveau de contrainte correspondant à la résonance du cas linéaire de la figure 3.10(a). Il est aussi situé bien en dessous de la limite d'endurance.

3.3.3 Etude des effets gyroscopiques

Dans cette étude, les effets gyroscopiques sont négligés. Cette hypothèse, très souvent faite dans l'étude des disques aubagés, a été validée par un calcul prenant en compte les matrices gyroscopiques de l'aube et du secteur de disque. La figure 3.20 montre que les réponses forcées trouvées sont identiques à celles obtenues sans matrices gyroscopiques. Ceci est en accord avec les résultats de Laurenson [77], qui a montré par un calcul analytique que les modes d'une poutre en rotation et orientée radialement n'étaient pas modifiés par les effets gyroscopiques. Au contraire, Hashemi et Richard [55] ont trouvé que les forces de Coriolis pouvaient modifier sensiblement les fréquences propres d'une telle poutre, réduisant par exemple de 9% la fréquence propre du premier mode de flexion. Khader et Loewy ont eux travaillé sur la réponse forcée d'une roue aubagée montée sur un axe flexible [72]. Ils se sont intéressés aux modes à un diamètre, qui se couplent facilement avec la flexion de l'arbre. Les forces de Coriolis conduisent à des dédoublements de modes et les

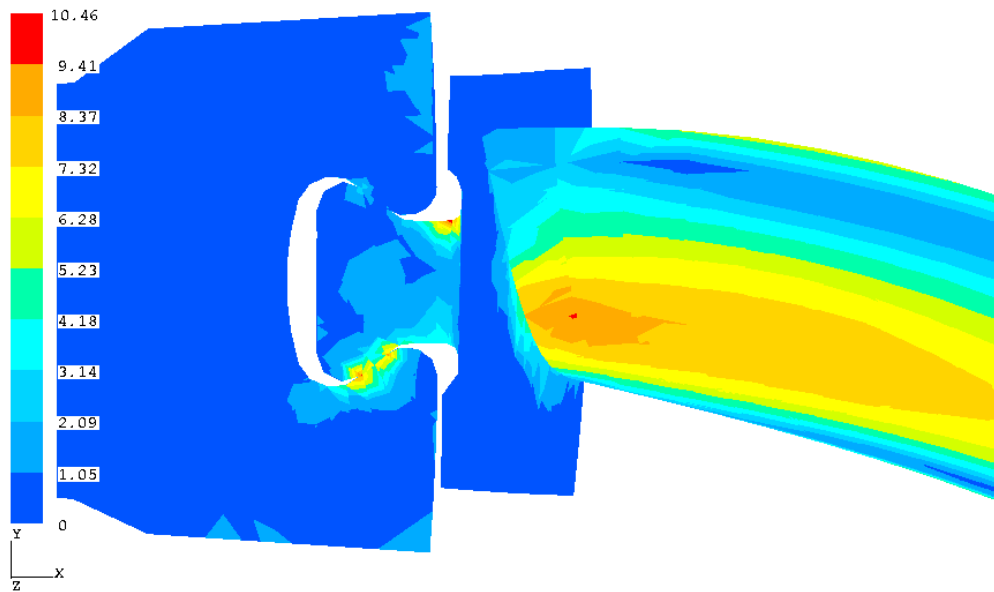


FIG. 3.18 – Calcul linéaire des contraintes de Von Mises maximales pour le premier mode de flexion à $\Omega = 5000\text{tr/min}$. Résultat pour un déplacement de 1 mm sur le noeud d'excitation. Contraintes en daN/mm^2 .

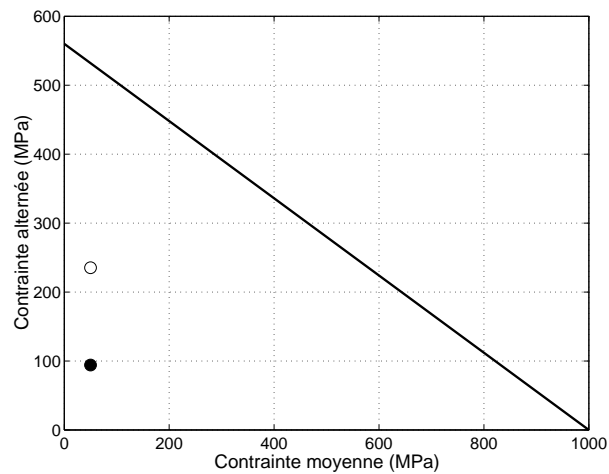


FIG. 3.19 – Diagramme de Goodman du Ti-6Al-4V (d'après [58]) et position à la résonance du premier mode dans le cas linéaire (o) et dans le cas non-linéaire (•).

auteurs ont trouvé des changements significatifs dans la réponse forcée, même dans le cas où l'arbre est rigide. Ces effets ne sont pas visibles pour notre modèle, dans lequel le secteur de disque est très rigidifié par les fixations et où la flexibilité de l'arbre n'est pas prise en compte.

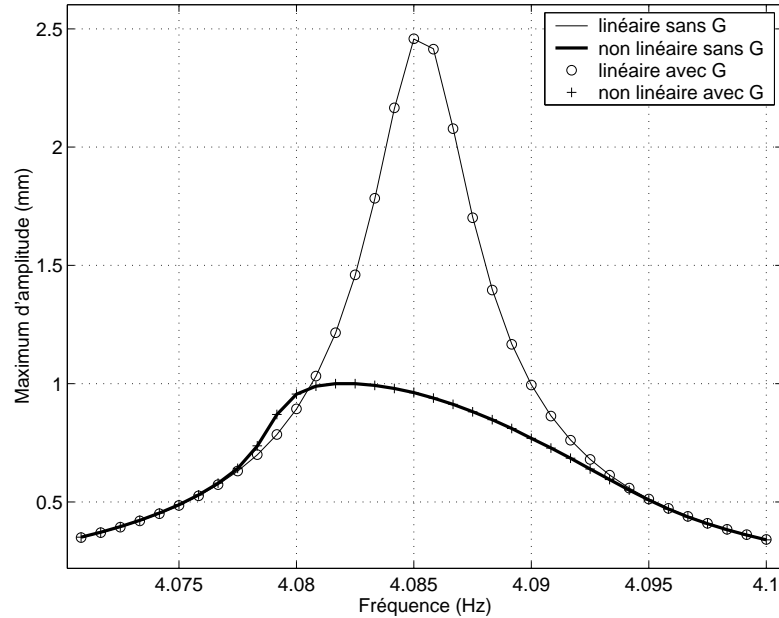


FIG. 3.20 – *Effet de la matrice gyroscopique G sur la réponse forcée.*

3.4 Influence des paramètres de calcul

3.4.1 Influence du nombre d'harmoniques

Pour notre problème, le nombre d'harmoniques retenues pour la résolution a peu d'influence sur l'amplitude de la réponse. La figure 3.21 montre que l'erreur commise est de l'ordre de 5% avec 1 harmonique et inférieure à 2% avec 3 harmoniques. L'amplitude obtenue avec une harmonique est par ailleurs toujours surestimée, ce qui est un élément appréciable dans le cas d'un dimensionnement à la fatigue. Par ailleurs, le tableau 3.2 montre que le temps de calcul augmente très fortement avec le nombre d'harmoniques.

Nombre d'harmoniques	Temps CPU moyen pour 1 fréquence
1	10s
3	56s
9	845s

TAB. 3.2 – *Influence du nombre d'harmoniques sur le temps de calcul.*

3.4.2 Influence du coefficient de pénalité

On a décrit en 2.4.5 une méthode de choix du coefficient de pénalité ϵ qui a été appliquée à un système simple à deux degrés de liberté. Pour le modèle aube/secteur de disque étudié dans ce

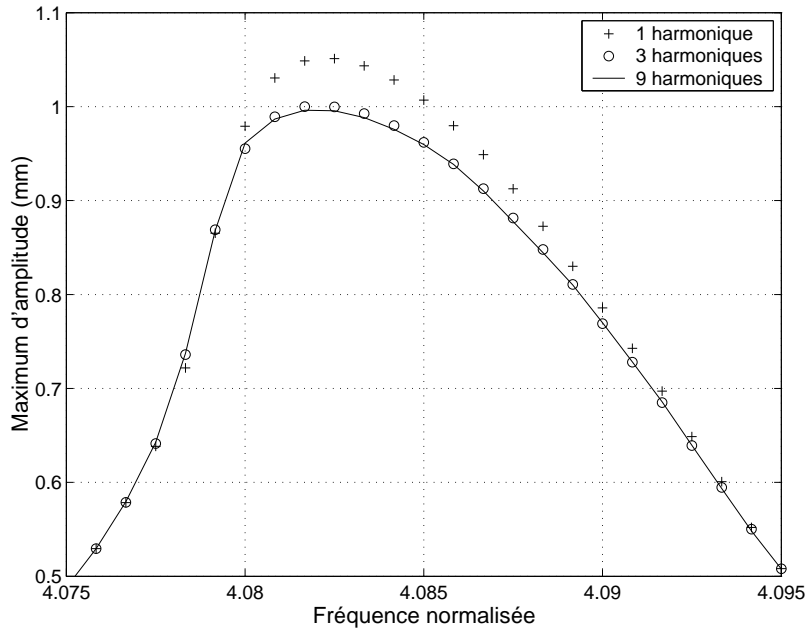


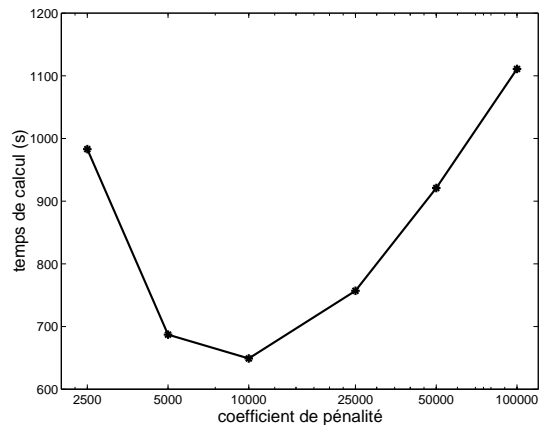
FIG. 3.21 – Influence du nombre d'harmoniques sur l'amplitude.

chapitre, ϵ peut être choisi dans la plage [2500 – 100000] sans que la convergence en souffre. Sur la plage fréquentielle étudiée, la méthode proposée donne une valeur de 24000 qui permet donc effectivement d'atteindre la convergence.

La figure 3.22 montre en outre que le coefficient de pénalité a une influence sur le temps de calcul et qu'il existe une valeur optimale, proche de $\epsilon = 10000$ permettant la rapidité maximale. C'est pourquoi les calculs dans le restant de ce chapitre sont effectués avec $\epsilon = 10000$. Par ailleurs, l'amplitude de la réponse change légèrement en fonction du coefficient de pénalité. La figure 3.23 montre que cette influence diminue au fur et à mesure que le nombre d'harmoniques retenus augmente.

ϵ	résidu maximal	temps CPU
2500	10^{-7}	983
5000	10^{-7}	687
10000	10^{-7}	649
25000	10^{-7}	757
50000	10^{-6}	921
100000	10^{-6}	1111

(a)



(b)

FIG. 3.22 – Influence du coefficient de pénalité sur le temps de calcul. 11 fréquences calculées avec 3 harmoniques.

3.5 Influence des paramètres physiques

3.5.1 Influence de l'amplitude de l'excitation

La figure 3.24(a) montre l'influence du niveau d'excitation sur la réponse forcée. On constate deux effets principaux au fur et à mesure que le niveau augmente : un décalage du maximum d'amplitude vers les fréquences basses et un aplatissement des pics de résonance, signe d'un amortissement de plus en plus élevé. Dans la figure 3.24(b), l'amplitude de la réponse a été divisée par le niveau de l'excitation. Si le système était linéaire, toutes les courbes seraient donc confondues. Loin de la résonance, le comportement est linéaire car il n'y a pas de glissement et dans une plage fréquentielle centrée autour de la fréquence de résonance où le comportement est non-linéaire : l'amortissement par frottement augmente avec le niveau vibratoire. La figure 3.25 donne la variation de l'amplitude maximale en fonction du niveau d'excitation.

Pour la force minimale de 0.02N utilisée sur la figure 3.24, tous les éléments de contact restent dans l'état adhérent. Pour la force de 1N, on est toujours en microglissement car 8 éléments de contact, agissant comme des pivots, restent dans l'état adhérent. C'est seulement pour des forces supérieures à 2N que l'on enregistre du macroglissement à la résonance. Pour de tels niveaux, l'amortissement par frottement devient très important (le facteur d'amortissement équivalent dépasse 1%). Il a aussi été constaté que les pertes de contact sont de plus en plus nombreuses au fur et à mesure que l'excitation augmente.

3.5.2 Influence du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est l'un des paramètres les plus importants du modèle. On peut voir en effet sur la figure 3.26 que le niveau de la réponse dépend largement de sa valeur. Pour autant, c'est une donnée extrêmement délicate à obtenir. Il est très rare d'avoir l'opportunité de mesurer le coefficient de frottement dans les conditions de fonctionnement exactes. Aussi, il faut la plupart du temps l'estimer à partir de suppositions sur l'état des surfaces, la température, l'environnement chimique...

Les pieds d'aube sont revêtus de dépôts solides qui assurent leur protection. La couche externe est en général formée par un film de lubrifiant solide. Au cours des cycles de sollicitation, la dégradation par fretting des surfaces de contact conduit souvent à une augmentation du coefficient de frottement [43] [121], ce qui d'après la figure 3.26 se traduit par une augmentation du niveau vibratoire de l'aube. La dégradation de la couche protectrice augmente non seulement le risque d'une fissuration amorcée par fretting dans la zone de contact, mais aussi le risque de fatigue dans le reste de l'aube. Fridrici [43] a trouvé que le coefficient de frottement pour un alliage Ti-6Al-4V revêtu d'un film à base de MoS₂, est inférieur à 0,2 au cours des premiers cycles de fretting. La valeur augmente ensuite progressivement et peut atteindre une valeur proche de 1 si le film de lubrifiant est totalement évacué.

Enfin, plusieurs auteurs soulignent que le coefficient de frottement peut varier avec l'effort normal, en particulier dans le cas d'une lubrification solide [116] [129]. Or sur une portée d'aube, la pression de contact n'est pas constante et comme de plus on doit s'attendre à une usure non

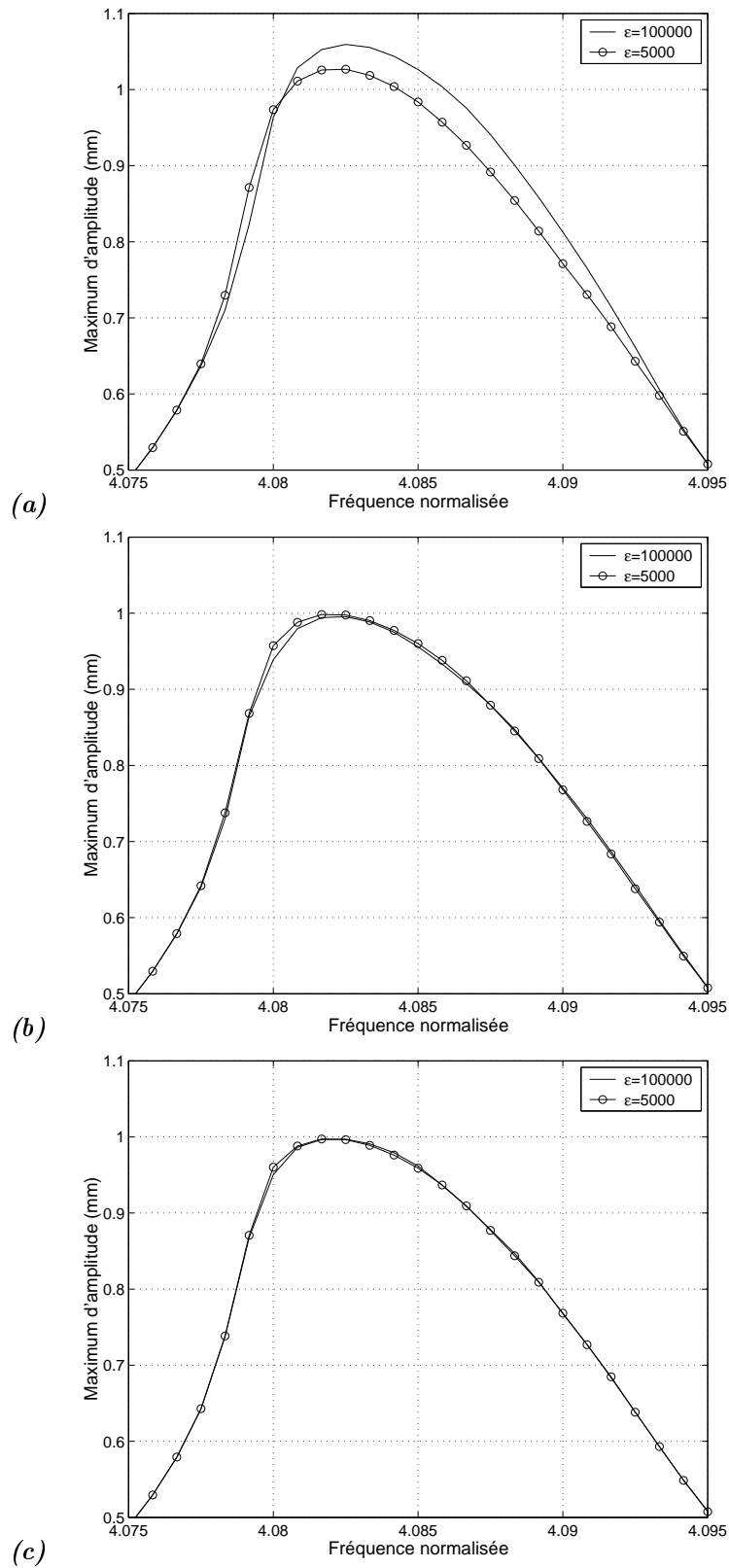


FIG. 3.23 – Influence du coefficient de pénalité ϵ sur la réponse calculée par la DLFT. Calcul avec (a) 1 harmonique, (b) 3 harmoniques, (c) 5 harmoniques.

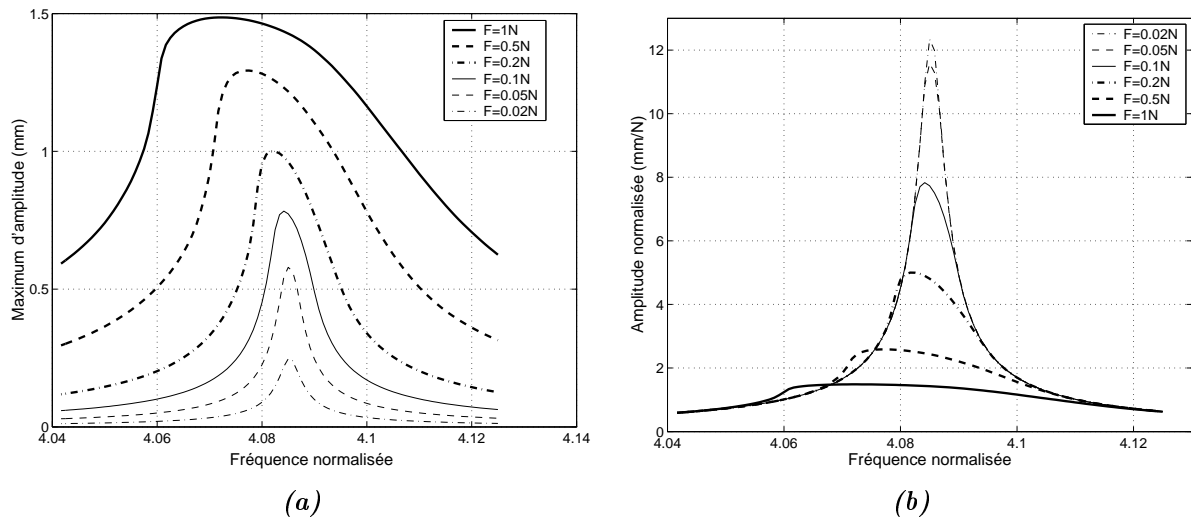


FIG. 3.24 – Influence de l'amplitude de l'excitation sur la réponse forcée : (a) déplacements, (b) déplacements divisés par l'amplitude de l'excitation.

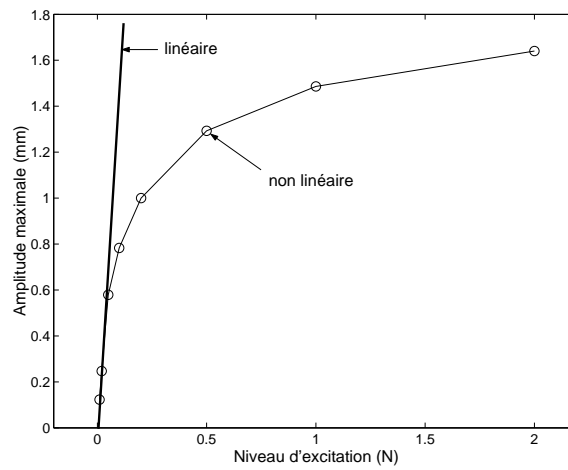


FIG. 3.25 – Amplitudes maximales à la résonance.

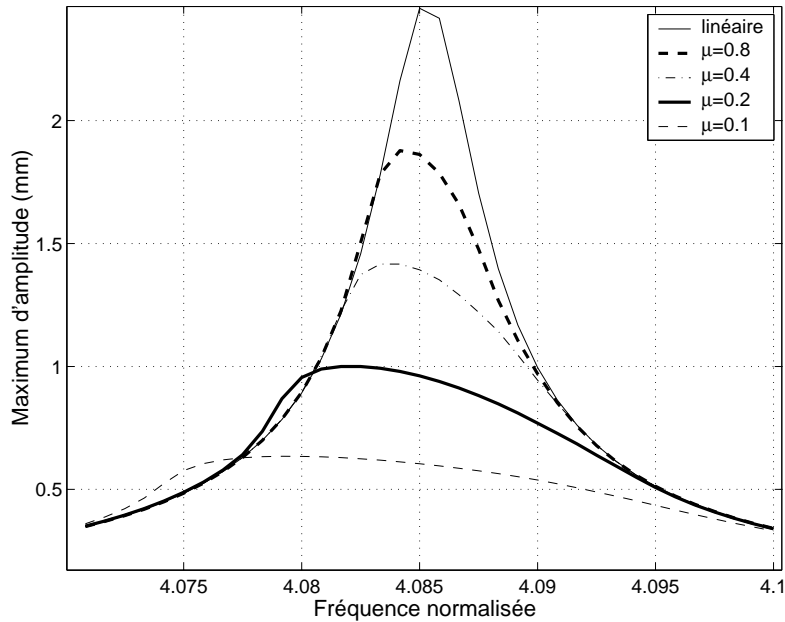


FIG. 3.26 – Influence du coefficient de frottement sur la réponse forcée.

uniforme, il faut admettre que la valeur coefficient de frottement peut ne pas être la même pour toute l'interface de contact.

3.5.3 Influence de la vitesse de rotation

L'augmentation de la vitesse de rotation a un double effet. En premier lieu elle provoque une hausse des contraintes de traction centrifuge dans l'aubage, ce qui fait augmenter les fréquences propres de l'aube (voir la figure 3.27(a)). Elle fait aussi augmenter la pression de contact sur les portées du pied d'aube ce qui limite les glissements. C'est pourquoi on constate sur la figure 3.28 que l'amortissement dû au frottement s'estompe peu à peu. Ainsi, la figure 3.27(b) montre que quand la vitesse de rotation augmente, l'amplitude de vibration augmente dans un premier temps puis décroît quand l'effort normal devient trop important et n'autorise plus aucun glissement.

3.6 Influence de la modélisation du contact

3.6.1 Influence de la discrétisation des surfaces de contact

On a vu en 3.5.1 que le pied d'aube se trouve constamment en microglissement sauf pour des niveaux d'excitation très élevés. On peut se demander si la discrétisation des portées par 24 éléments de contact que l'on a retenue jusqu'à présent est capable de reproduire fidèlement la propagation des zones de glissement et l'énergie dissipée dans le contact. Il est en tout cas certain que cela est insuffisant pour approcher correctement la répartition de la contrainte normale. On rappelle en effet que dans [6], [7] et [134], plusieurs milliers d'éléments de contact sont nécessaires pour obtenir la convergence des contraintes en statique. De tels raffinements sont beaucoup trop coûteux pour le calcul de la dynamique non-linéaire. On s'est donc limité ici aux 8 discrétisations présentées dans la figure 3.29. Pour chacune d'entre elles, un nouveau modèle réduit est créé dans

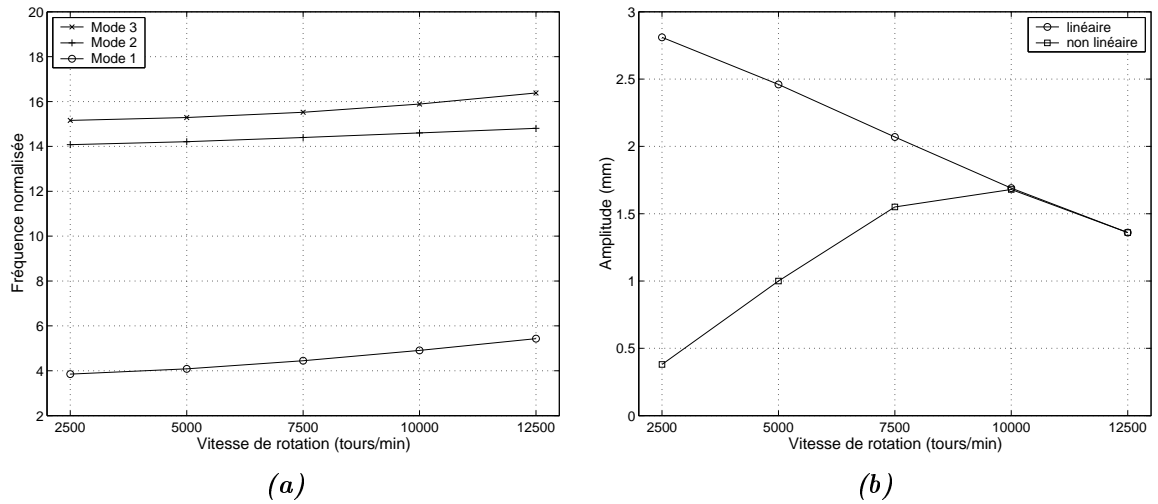


FIG. 3.27 – Influence de la vitesse de rotation (a) sur les fréquences propres, (b) sur l'amplitude à la première résonance.

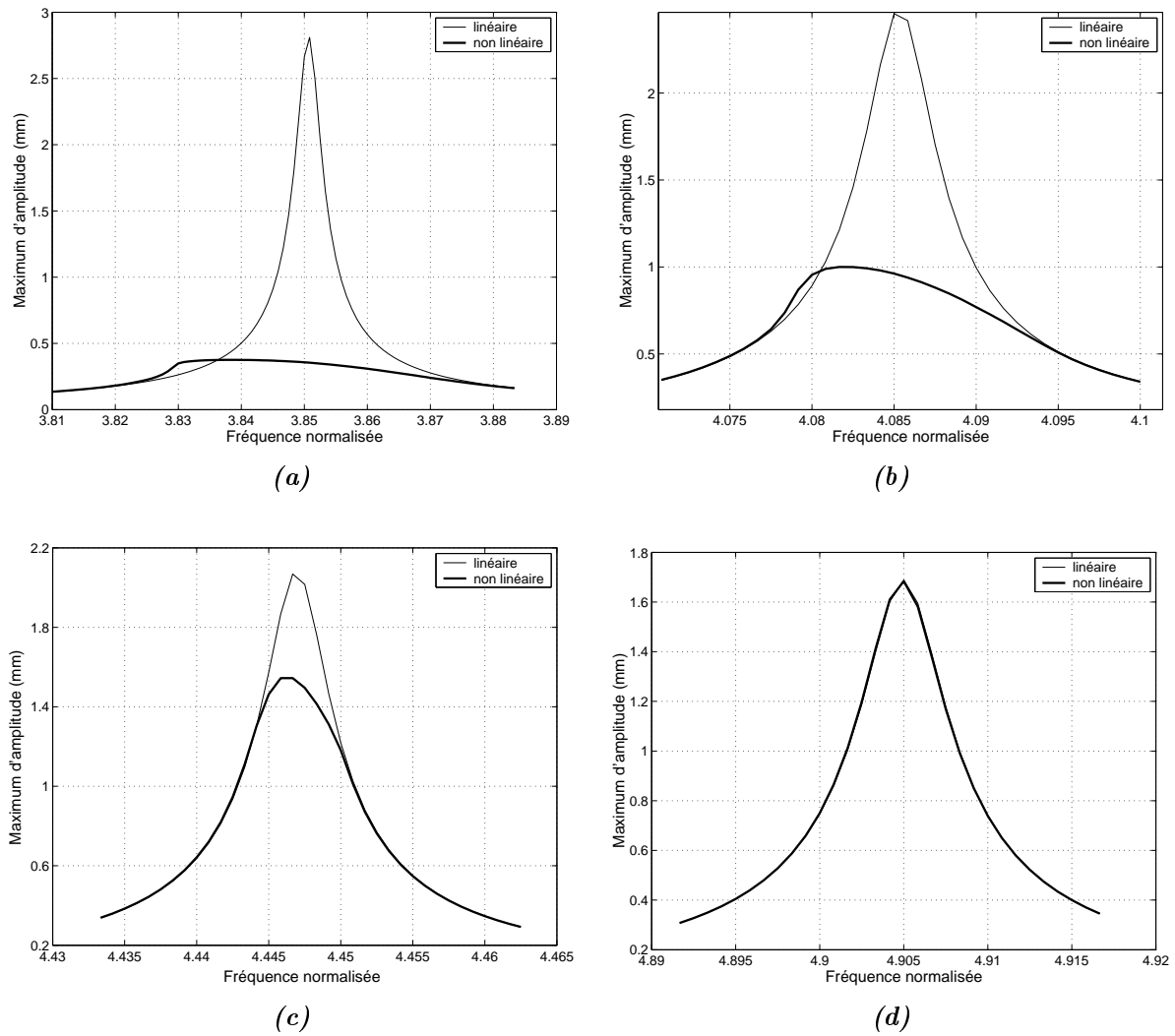


FIG. 3.28 – Influence de la vitesse de rotation sur la réponse forcée : (a) 2500 tours/min, (b) 5000 tours/min, (c) 7500 tours/min, (d) 10000 tours/min.

lequel la base de Craig et Bampton ne contient parmi les noeuds des portées que ceux impliqués dans le contact. Il s'avère que l'amplitude maximale calculée augmente avec le nombre d'éléments de contact retenus, comme le montre la figure 3.30. D'après la forme de la courbe, il semble que la discrétisation la plus fine donne une amplitude proche de la valeur asymptotique. Seules les configurations avec plus de 14 noeuds par portée donnent une erreur de moins de 10% par rapport à la configuration avec 75 noeuds. Par ailleurs, le tableau 3.3 montre que le temps de calcul augmente rapidement avec le nombre d'éléments de contact retenus (croissance plus que quadratique) et peut devenir rapidement prohibitif. Dans la figure 3.31 sont comparées les réponses obtenues avec la discrétisation la plus fine et avec la discrétisation la plus grossière. Dans la configuration à deux éléments de contact par portée, on constate que la plage fréquentielle où le comportement est non-linéaire est trop étroite. Le décrochage d'un élément de contact provoque brusquement une dissipation exagérée.

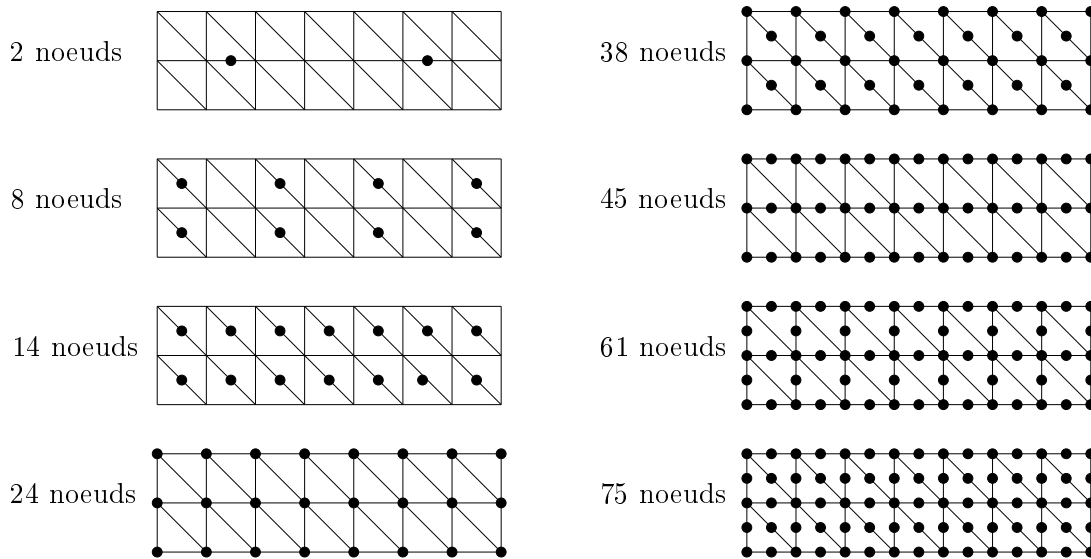


FIG. 3.29 – Position des éléments de contacts retenus (•) sur le maillage d'une portée.

Nombre de noeuds	Temps CPU (1 fréquence)
2	0.05s
8	0.74s
14	2.6s
24	10s
38	50s
45	89s
61	280s
75	535s

TAB. 3.3 – Influence de la discrétisation sur le temps de calcul.

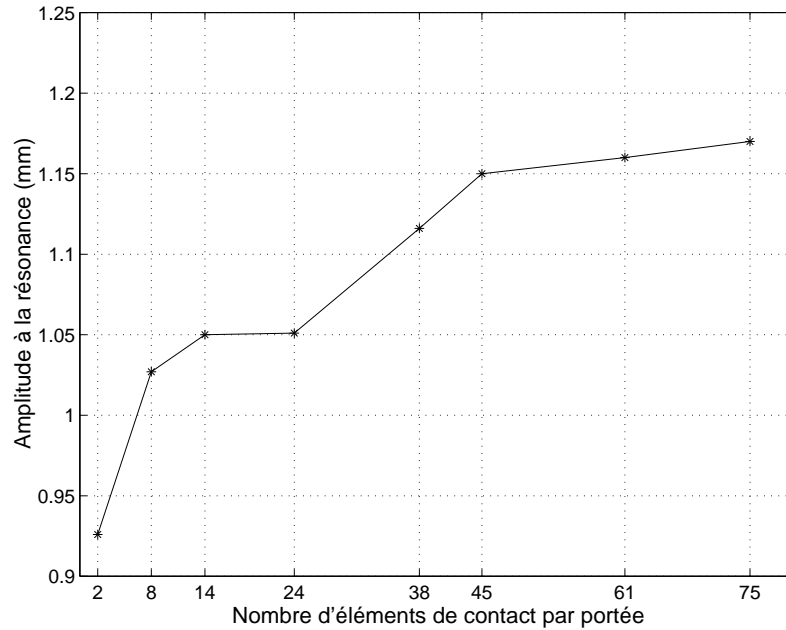


FIG. 3.30 – Influence de la discrétisation des interfaces de contact sur le niveau de vibration. Calculs non-linéaires avec 1 harmonique.

3.6.2 Influence de la raideur de contact

Il est facile de modéliser les raideurs de contact normales et tangentielles par une modification simple des matrices de l'une des deux structures en contact (nous l'appelons ici structure 1). Chaque élément de contact noeud à noeud est modifié par l'ajout d'un noeud supplémentaire sans masse (voir figure 3.32). Celui-ci est relié par l'intermédiaire d'une raideur

$$k_c = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

aux noeuds de contact 1. k_t et k_n désignent respectivement la valeur de la raideur tangentielle et la valeur de la raideur normale. Les deux noeuds de contact et le noeud supplémentaire ont été présentés dans des positions différentes sur la figure 3.32, mais ils sont bien sûr confondus dans la réalité. Pour la structure 1, on note

- \mathbf{U}_C le vecteur déplacement pour les degrés de liberté de contact,
- \mathbf{U}_S le vecteur déplacement pour les degrés de liberté supplémentaires,
- \mathbf{U}_A le vecteur déplacement pour les autres degrés de liberté,
- K_S la matrice de raideur supplémentaire due à l'ajout de ressorts de contact. C'est une matrice diagonale formée par l'assemblage des matrices k_c .

Les équations du mouvement de la structure 1 sont alors

$$\begin{bmatrix} M_{CC} & M_{CA} & 0 \\ M_{AC} & M_{AA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_C \\ \ddot{\mathbf{U}}_A \\ \ddot{\mathbf{U}}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{CC} + K_S & K_{CA} & -K_S \\ K_{AC} & K_{AA} & 0 \\ -K_S & 0 & K_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_C \\ \mathbf{U}_A \\ \mathbf{U}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{exC} \\ \mathbf{F}_{exA} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

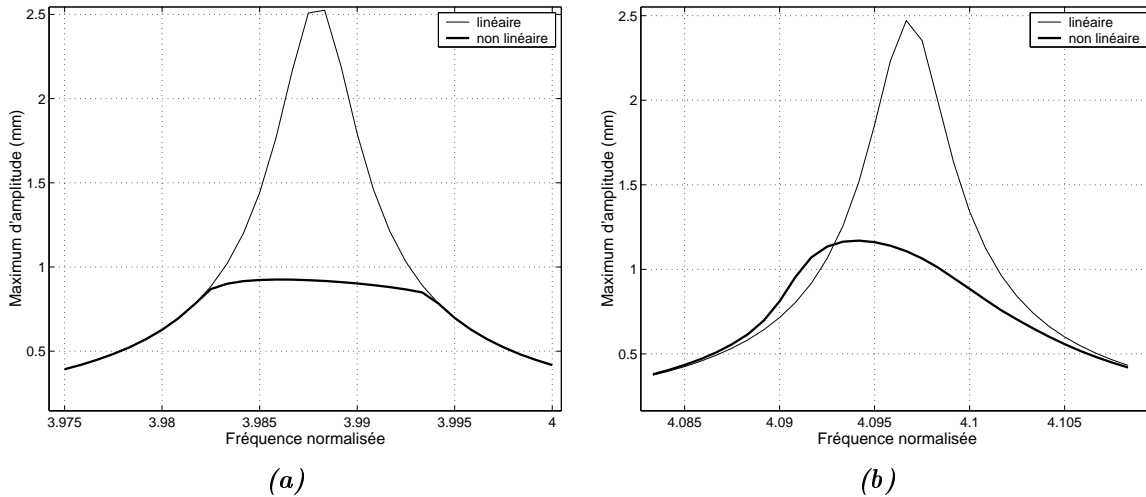


FIG. 3.31 – Influence de la discrétisation des interfaces de contact sur la réponse forcée : (a) 2 noeuds par portée. (b) 75 noeuds par portée. Calculs non-linéaires avec 1 harmonique.

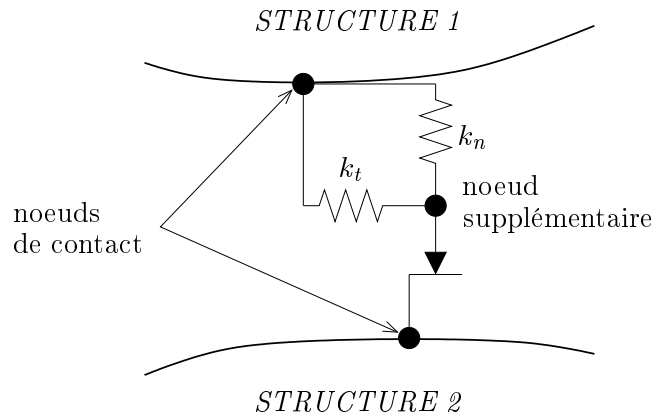


FIG. 3.32 – Ajout de raideurs de contact dans un élément noeud à noeud.

Avec ces nouvelles matrices, la DLFT est utilisée pour imposer la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb entre les noeuds supplémentaires et les noeuds de contact de la structure 2.

Avec cette méthode, l'influence des raideurs de contact sur la réponse harmonique du secteur aube-disque a pu être étudiée. En choisissant $k_t = k_n = 10^{12} \text{N/m}$, la réponse est strictement identique à la réponse de référence qui correspond à des raideurs infinies. Lorsque les raideurs sont diminuées, l'assouplissement de l'interface de contact conduit à une baisse des fréquences propres. Par ailleurs, la figure 3.33 montre que plus la valeur de la raideur tangentielle baisse, plus la réponse harmonique est modifiée. On remarque en particulier que l'amplitude maximale prédite diminue dans un premier temps jusqu'à une valeur de raideur d'environ 10^7N/m puis augmente ensuite, la réponse présentant finalement une branche instable. On note aussi le décalage de plus en plus important entre le pic obtenu par le calcul non-linéaire et celui obtenu par le calcul linéaire. On a aussi fait varier la raideur normale entre 10^{12}N/m et 10^6N/m ce qui n'a eu aucun effet sensible.

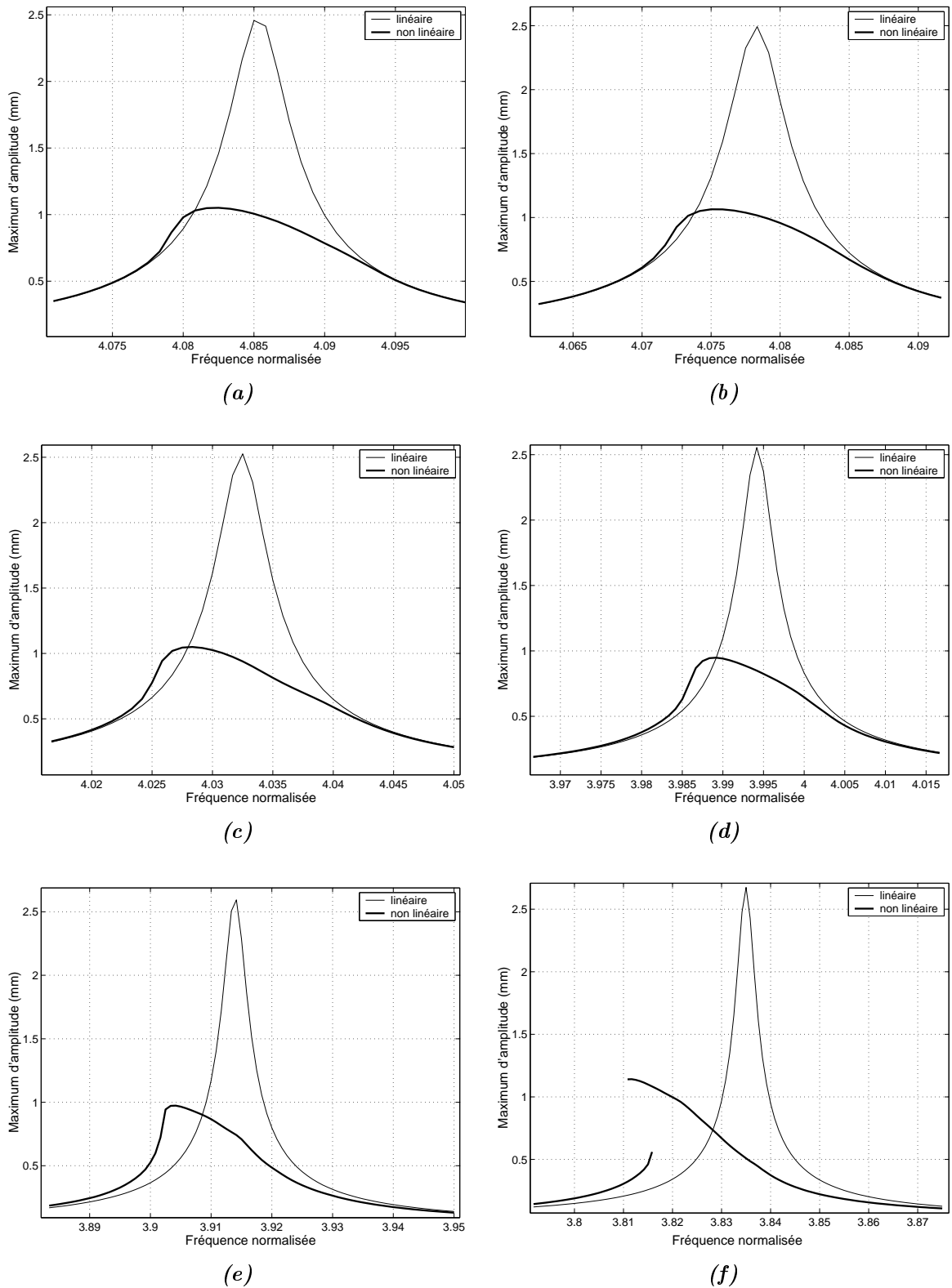


FIG. 3.33 – Influence de la raideur de contact tangentielle k_t sur la réponse forcée : (a) $k_t = 10^{12} \text{ N/m}$, (b) $k_t = 10^8 \text{ N/m}$, (c) $k_t = 10^7 \text{ N/m}$, (d) $k_t = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, (e) $k_t = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, (f) $k_t = 10^6 \text{ N/m}$, seules les branches stables ont été calculées. Calculs non-linéaires effectués avec 1 harmonique.

Chacune des simulations présentées dans cette section a été effectuée avec des valeurs uniques de k_t et de k_n . Mais les raideurs de contact dépendent largement de l'effort normal. Or pour notre application, ce dernier varie au cours du temps et n'est pas uniforme sur les surfaces de contact. Les raideurs de contact ne sont donc pas des données intrinsèques et sont susceptibles de varier en fonction de la position sur la portée et en fonction du temps.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté le calcul du comportement dynamique d'une aube en rotation soumise à un contact frottant au niveau de son pied.

Parmi les effets liés à la rotation, nous confirmons que les corrections de raideur apportées par la matrice de raideur centrifuge et la matrice de raideur géométrique sont importantes à considérer car elles modifient de façon sensible les fréquences propres. L'influence de la matrice gyroscopique s'est avérée en revanche négligeable pour le secteur aube-disque étudié.

Nous avons aussi montré que la méthode DLFT telle que présentée dans le chapitre 2 est capable de gérer un problème de contact tridimensionnel de taille importante. La résolution donne accès à la répartition des glissements, des contraintes de contact, des énergies dissipées localement dans l'interface de contact, toutes données nécessaires à l'évaluation des endommagements par fretting : usure et risque de fissuration. Cependant on note à cet égard que le niveau de discrétisation de l'aire de contact employé dans cette étude demeure insuffisant pour prédire fidèlement les pics de contrainte en dynamique. Ceci souligne le besoin de techniques numériques ou d'approximations permettant d'appréhender les problèmes de contact de grande taille.

Nous avons enfin exploré diverses variantes de modélisation du contact (coefficient de frottement, discrétisation de l'interface de contact) et montré leur influence sur la dynamique de l'aube. Dans une approche simplifiée, les déformations des aspérités en contact peuvent être représentées par des raideurs linéaires dont la valeur a une influence, outre sur les fréquences de résonance, sur l'allure de la réponse forcée.

Chapitre 4

Confrontation expérimentale de la modélisation

Dans ce chapitre, les résultats de réponse forcée obtenus dans une campagne d'essais menée sur un disque aubagé expérimental sont comparés aux résultats numériques obtenus par la méthode de la DLFT décrite au chapitre 2. Les caractéristiques principales du banc d'essais sont données en premier lieu, puis nous présentons le modèle numérique correspondant qui tient compte notamment du désaccordage entre les aubes. Le comportement non-linéaire observé expérimentalement est reproduit assez fidèlement par les simulations, en particulier si le coefficient de frottement est choisi variable en fonction de la vitesse de rotation. En outre, nous montrons que l'utilisation de films Fuji Prescale en pied d'aube apporte des informations intéressantes sur la répartition des pressions de contact statiques. Pour terminer, nous suggérons quelques pistes pour améliorer la modélisation.

4.1 Méthode expérimentale

4.1.1 Banc d'essais

Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre ont été obtenus sur un banc d'essais situé à l'Ecole Centrale de Lyon qui a été construit dans le but d'étudier les phénomènes de frottement dans les disques aubagés. Il est schématiquement représenté sur la figure 4.1. Le disque tourne dans une chambre à vide, ce qui permet de minimiser l'effet des forces aérodynamiques. Ce procédé a également été utilisé par Kielb et Abhari [73] pour les disques aubagés et dans [18] et [139] pour l'étude des pales d'hélicoptère. Le disque est monté avec quatre aubes séparées en deux groupes de deux montés diamétralement opposés, comme montré sur la figure 4.2. Les aubes sont des aubes de compresseur en alliage de titane identiques à celle étudiée dans le chapitre 3. L'arbre de rotation est maintenu par deux roulements à bille.

4.1.2 Instrumentation

Les aubes 1 et 2, qui peuvent être repérées sur la figure 4.2, sont équipées d'actionneurs piezo-électriques et de jauges extensométriques. Les aubes 3 et 4 restent nues. Les céramiques piezo-électriques sont des pastilles carrées de 1 cm de côté et de 1 mm d'épaisseur. Une colle epoxy isolante est utilisée pour la fixation sur les pales et permet une adaptation à la légère courbure des surfaces. Afin d'augmenter l'excitation produite, on utilise deux actionneurs par aube (un sur l'extrados et un sur l'intrados) qui fonctionnent en opposition de phase. Leur localisation a été

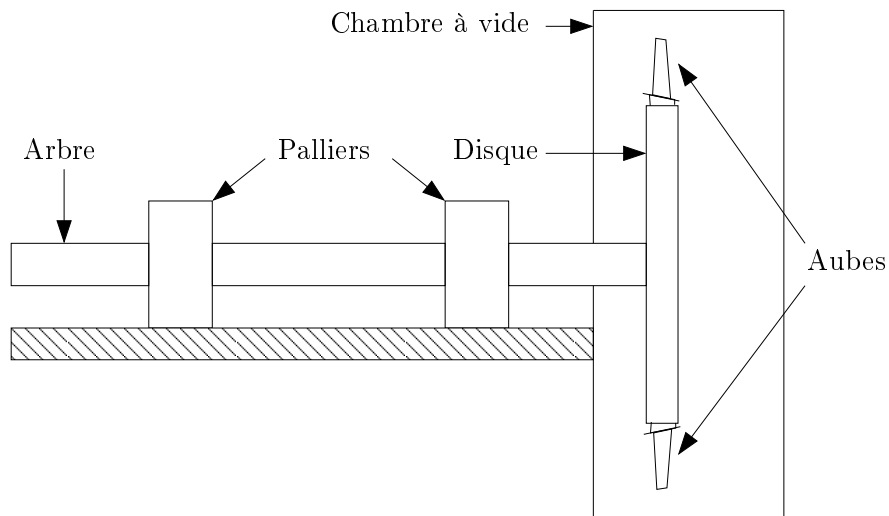


FIG. 4.1 – Vue schématique du banc expérimental.

choisie de manière à exciter efficacement le premier mode de flexion. Les fils nécessaires pour les jauges et les actionneurs passent dans l'arbre creux. Un collecteur est placé au bout de celui-ci afin de transmettre les signaux entre la partie fixe du banc et la partie tournante.

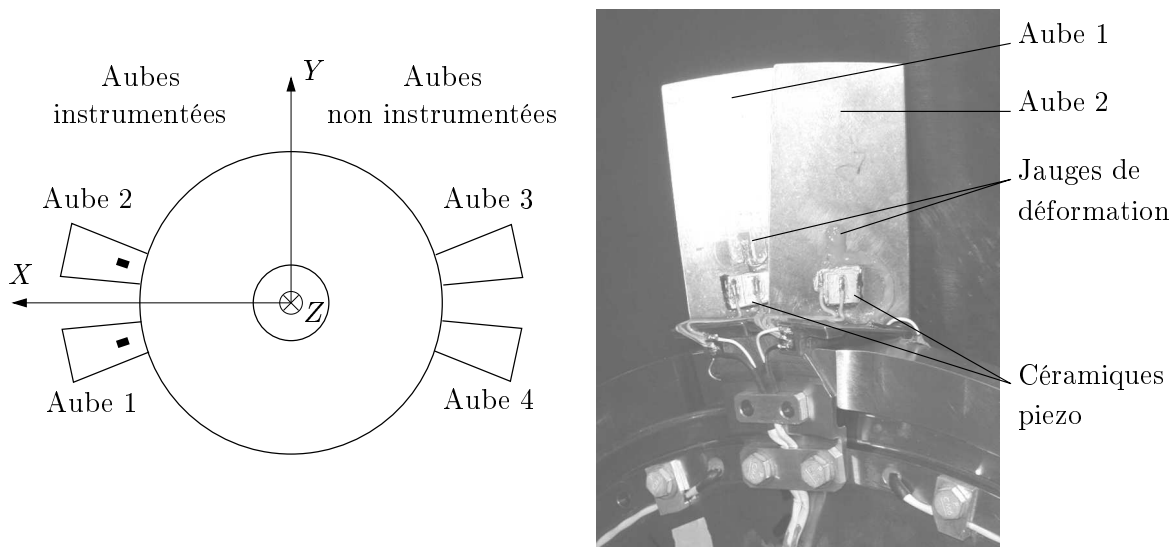


FIG. 4.2 – Numérotation et instrumentation des aubes.

4.1.3 Résultats expérimentaux

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec une pression stabilisée de 20 mbar dans l'enceinte à vide et pour des vitesses de rotation allant de 1000 à 5000 tours par minute. Les réponses harmoniques ont été obtenues en imposant aux actionneurs une excitation en sinus balayé. L'amplitude de l'excitation appliquée aux céramiques piezo-électriques peut être choisie jusqu'à 100V. Dans cette étude, on a retenu les niveaux 10V, 20V, 40V et 80V. La réponse harmonique

est récupérée par la chaîne d'acquisition et l'amortissement total aux résonances du système est évalué par la méthode de la chute à 3dB.

La figure 4.3(a) montre un exemple de réponse harmonique obtenue à 2000 tours/min autour d'un mode de la roue aubagée. L'excitation est appliquée sur l'aube 2 seulement et la réponse est mesurée sur cette même aube. On remarque que le pic de résonance se décale vers les basses fréquences au fur et à mesure que le niveau d'excitation augmente, ce qui est le signe d'une non-linéarité. Cet effet est encore plus visible sur la figure 4.3(b). Sur ce graphe, l'amplitude de la réponse est divisée par le niveau de l'excitation de telle sorte que si le système était linéaire, toutes les courbes seraient confondues. La non-linéarité est marquée au voisinage de la résonance, alors que loin du pic le comportement est quasiment linéaire. Nous pensons que cet effet est dû principalement au frottement dans la liaison aube-disque : quand l'amplitude augmente, le glissement devient plus important ce qui conduit à un amortissement plus grand. En fin de chapitre, d'autres résultats expérimentaux seront présentés et comparés aux résultats issus des calculs.

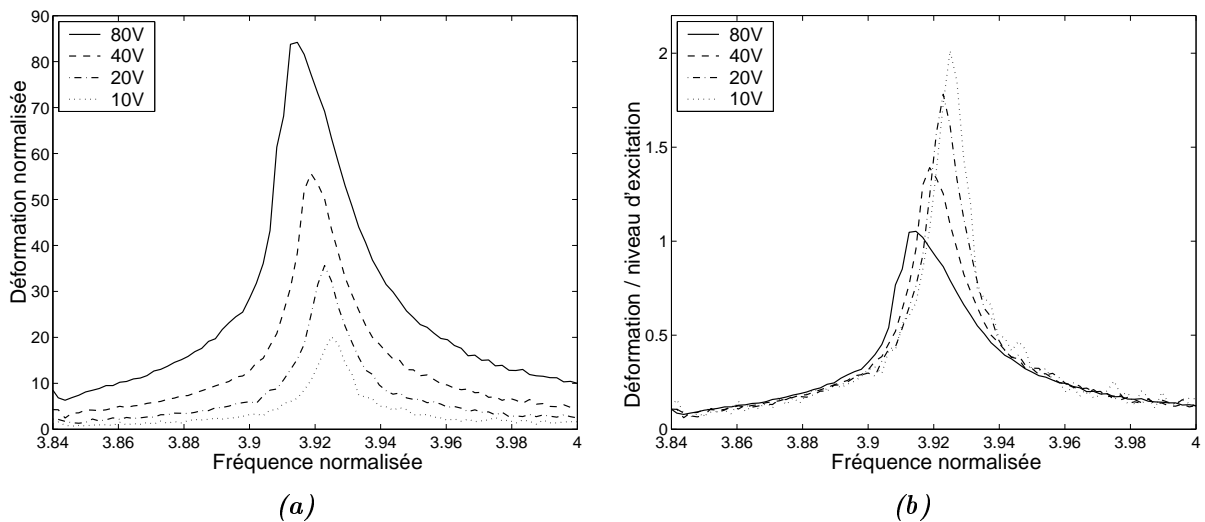


FIG. 4.3 – Réponses harmoniques expérimentales à $\Omega = 2000tr/min$: (a) amplitude, (b) amplitude divisée par le niveau d'excitation.

4.2 Modèle numérique

4.2.1 Modèle éléments finis

Un modèle numérique du banc a été créé à l'aide de Patran. La figure 4.4 montre le maillage des quatre aubes et du disque qui a été réalisé avec des éléments tétraédriques de degré 2, c'est à dire comprenant 10 noeuds. En effet, les tétraèdres de degré 1 sont beaucoup moins précis [11], en particulier dans notre cas où il n'y a qu'une arête d'élément dans l'épaisseur de la pale de l'aube. Les maillages du disque et des aubes coïncident au niveau des zones de contact. Des éléments poutre ont été utilisés pour modéliser l'arbre et pour la liaison avec le maillage du disque on a eu recours à des éléments de corps rigide. Les palliers sont quant à eux représentés par des raideurs linéaires radiales et axiales. Enfin les sealplates (plaques servant à la rétention des aubes) ont été modélisées par des masses ponctuelles et les autres masses tournantes (collecteur, capot) par des

inerties équivalentes.

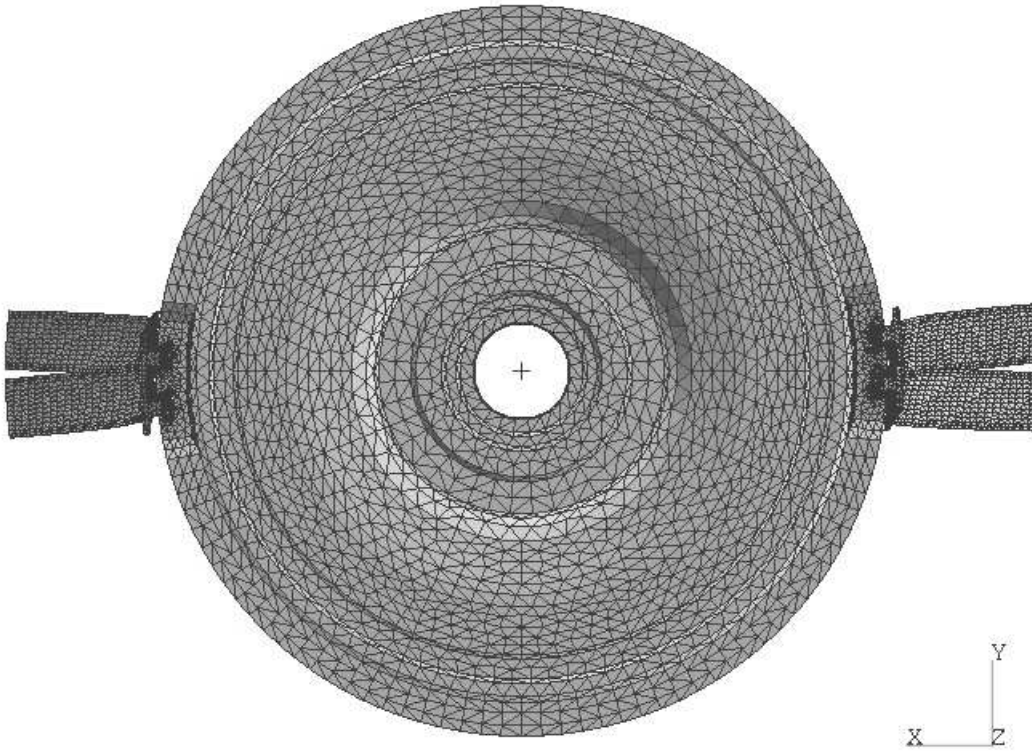


FIG. 4.4 – Maillage du disque et des 4 aubes.

4.2.2 Modélisation de l'excitation piézoélectrique

Un matériau piézoélectrique a la propriété de se polariser électriquement sous l'action d'une force mécanique (effet direct) et, réciproquement, de se déformer lorsqu'on lui applique un champ électrique (effet inverse). Les équations de base de la piezoélectricité sont (voir par exemple [10])

$$\mathbf{D} = d\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + e\mathbf{E} \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}d^T\mathbf{E} \quad (4.2)$$

avec

$\boldsymbol{\sigma}$	(6×1)	vecteur des contraintes	(N/m^2)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	(6×1)	vecteur des déformations	
\mathbf{D}	(3×1)	déplacement électrique	(C/m^2)
\mathbf{E}	(3×1)	champ électrique	(V/m)
\mathbf{C}	(6×6)	matrice d'élasticité	(N/m^2)
d	(3×6)	matrice des constantes piezoélectriques	(m/V)
e	(3×3)	matrice des constantes diélectriques	(F/m)

On utilisera dans la suite le modèle simplifié et unidirectionnel qui est présenté sur la figure 4.5. Il est très proche de celui proposé par Jemai [69], sauf que ici, la raideur de la colle n'est pas

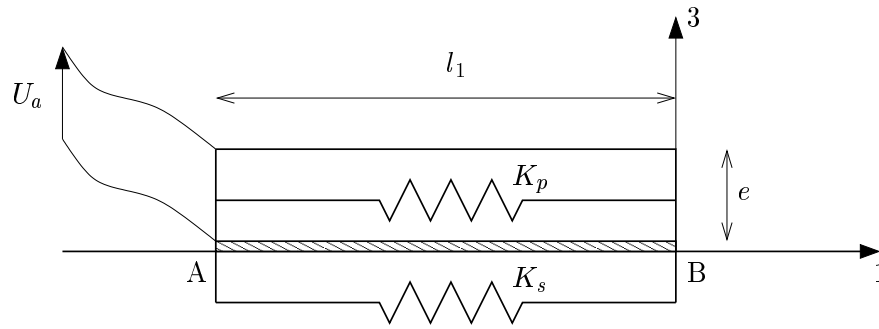


FIG. 4.5 – Modélisation simplifiée de l'excitation piézoélectrique.

prise en compte. La tension U_a appliquée aux électrodes produit un champ électrique E_3 dans la direction 3. La contrainte dans la direction 1, σ_{11} , et la déformation dans la direction 1, ε_{11} , sont alors reliées d'après (4.2) par

$$\sigma_{11} = Y_{11}\varepsilon_{11} - Y_{11}d_{31}E_3, \quad (4.3)$$

où d_{31} est le coefficient piézo-électrique transverse et Y_{11} est le module de Young de la céramique dans la direction 1. Si on suppose que l'effort est transmis à la structure par les deux points extrêmes A et B, alors l'équation (4.3) donne

$$F_1 = \frac{S_1 Y_{11}}{l_1} \Delta l_1 - \frac{d_{31} S_1 Y_{11}}{e} U_a, \quad (4.4)$$

où F_1 est la force transmise et S_1 la surface de la section. e , l_1 , et Δl_1 sont respectivement l'épaisseur de la céramique, sa longueur et son élongation dans la direction 1. La raideur de l'actionneur piézoélectrique entre les points A et B est notée K_p :

$$K_p = \frac{S_1 Y_{11}}{l_1}. \quad (4.5)$$

Si K_s est la raideur locale de la structure dans la direction 1 à l'emplacement de l'excitateur, alors la force produite F_1 peut aussi s'exprimer par

$$F_1 = -K_s \Delta l_1. \quad (4.6)$$

En combinant les équations (4.4), (4.5) et (4.6), on obtient une expression simple de la force d'excitation en fonction de la tension appliquée :

$$F_1 = \frac{d_{31} S_1 Y_{11}}{e \left(1 + \frac{K_p}{K_s}\right)} U_a. \quad (4.7)$$

C'est avec cette relation de proportionnalité très pratique que l'on a modélisé l'excitation des aubes. Pour chaque actionneur piézoélectrique, deux noeuds situés à l'emplacement de la céramique ont été retenus dans la base réduite de Craig et Bampton afin d'utiliser ce modèle. La raideur de la structure, K_s , a été déduite d'un simple calcul statique où deux forces opposées sont appliquées dans la direction 1 aux noeuds A et B. Le déplacement relatif calculé permet d'obtenir K_s . La validité de la modélisation proposée sera vérifiée *a posteriori* lors de la comparaison des réponses harmoniques numériques et expérimentales.

4.2.3 Recalage des raideurs pallier et des modes de disque

La réponse impulsionnelle de l'ensemble arbre-disque a été mesurée et les fréquences propres trouvées sont rassemblées dans le tableau 4.1. Elles ont guidé le choix des raideurs des palliers. La raideur axiale a ainsi été déterminée à partir des modes où l'arbre se déforme en traction-compression et la raideur radiale à partir des modes où l'arbre se déforme en flexion. Les raideurs ont été supposées identiques pour les deux palliers. Une légère retouche du module de Young du disque a aussi été nécessaire pour obtenir la corrélation présentée dans la figure 4.1. Le disque étant pratiquement axisymétrique, certains modes propres ont des fréquences très rapprochées qui n'ont pas été toujours été distinguées lors des mesures.

Déformation disque	Déformation arbre	Fréquences propres mesurées	Fréquences propres calculées (NASTRAN)
	1F	1.125	1.120 1.129
0D	1TC	1.833	1.858
1D	1F	2.829	2.833 2.851
1D	2F	3.129	3.105 3.135
2D		4.417 4.446	4.414 4.532
0D	2TC	4.788	4.793
1D 1C			6.188 6.195
3D		6.938 7.092	7.124 7.146
0D	1To		8.318

TAB. 4.1 – Modes de l'ensemble disque-arbre et comparaison des fréquences propres mesurées et calculées. 1D 1C désigne un mode pour lequel le disque présente 1 diamètre nodal et 1 cercle nodal. Les déformations de l'arbre sont notées F pour flexion, TC pour traction-compression et To pour torsion.

4.2.4 Prise en compte du désaccordage

Les aubes montées sur le banc tournant sont numérotées de 1 à 4. La figure 4.2 montre leur répartition sur le disque. On cherche ici à évaluer le désaccordage en fréquence des quatre aubes afin de l'introduire dans la simulation numérique. Ce désaccordage provient de la dispersion inévitable entre les masses et raideurs des 4 aubes et du fait que seules les aubes 1 et 2 soient équipées d'excitateurs piezoélectriques et de jauges extensométriques. Il est important d'inclure le désaccordage dans les calculs car il peut changer de façon importante les modes et la réponse forcée des disques aubagés [127] [128] [140].

Dispositif expérimental

Les quatre aubes ont été pesées afin d'ajuster les masses volumiques dans le modèle numérique. Le désaccordage en fréquence a été mesuré à l'aide du dispositif expérimental montré sur la figure 4.6. L'aube testée est encastrée au niveau de son pied dans un mors spécialement usiné. Le maintien est obtenu à l'aide d'une cale serrée contre la partie inférieure du pied. La réponse impulsionnelle est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser et le signal est envoyé sur une carte d'acquisition qui permet la visualisation sur un PC. Le couple de serrage de la vis est contrôlé à l'aide d'une clé dynamométrique.

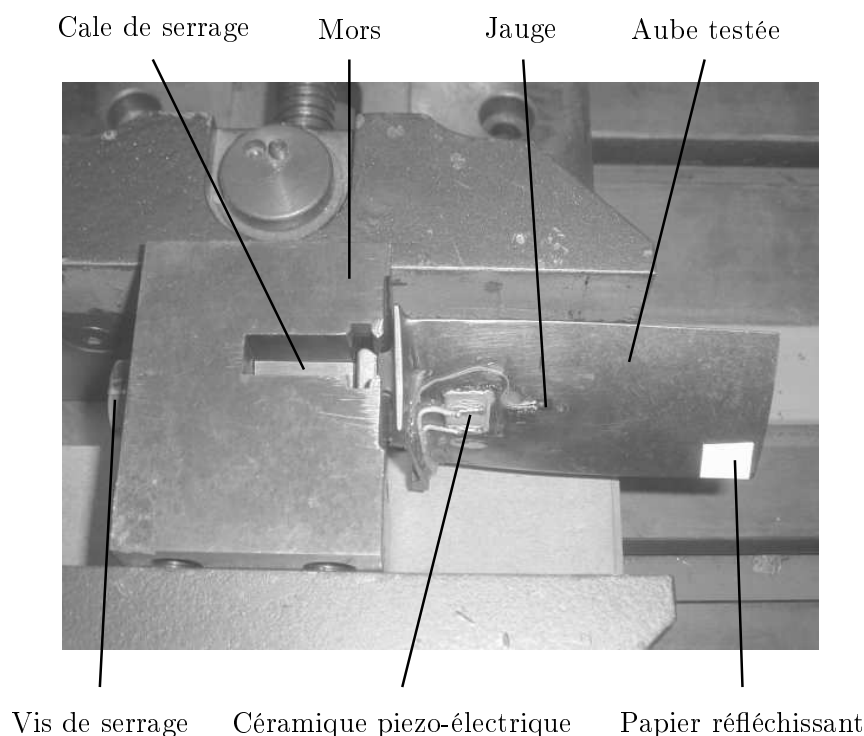


FIG. 4.6 – *Mesure des fréquences propres des aubes encastrées par vibrométrie laser. Photo de l'aube 1 (instrumentée) : les céramiques piezo-électriques et la jauge extensométrique sont inactives dans cet essai.*

Validation de la procédure expérimentale

On cherche à connaître le désaccordage en fréquence des quatre aubes. Il faut donc s'assurer que pour une même aube, la dispersion des résultats est faible. Pour vérifier cela, on enregistre plusieurs réponses impulsionnelles pour chaque aube. Il a également été vérifié l'influence du montage de l'aube dans le mors : l'aube testée est démontée du mors puis remontée à nouveau avec le même couple de serrage et de nouvelles réponses impulsionnelles sont enregistrées. Les résultats pour deux aubes sont rassemblés dans le tableau 4.2. Les écarts trouvés d'un essai à l'autre sont très faibles, en particulier pour la première fréquence propre. La procédure permet donc de déterminer de façon fiable le désaccordage.

Fréquences propres aube 2			Fréquences propres aube 3		
3.88	13.28	14.48	3.76	13.08	14.49
3.88	13.28	14.48	3.76	13.09	14.48
3.88	13.28	14.48	3.76	13.09	14.49
Démontage puis remontage					
3.87	13.23	14.46	3.76	13.08	14.47
3.88	13.27	14.48	3.76	13.08	14.47
3.88	13.26	14.48	3.76	13.08	14.47

TAB. 4.2 – *Fréquences propres relevées pour différentes réponses impulsionnelles. Couple de serrage 10Nm.*

Synthèse des résultats

Les fréquences propres moyennes obtenues pour les quatre aubes sont présentées dans le tableau 4.3. Le couple de serrage de la vis du mors est dans tous les cas $10Nm$. Bien que les céramiques piezo-électriques et les jauges alourdissent les aubes 1 et 2, l'effet rigidifiant semble l'emporter globalement. En particulier les fréquences mesurées pour le premier mode sont plus élevées que sur les aubes nues. L'ajustement des modules de Young des quatre aubes a été effectué en prenant en compte les fréquences du premier mode de flexion car c'est lui qui intervient principalement dans les modes globaux de la structure qui seront étudiés dans la fin du chapitre.

Numéro aube	fréquence propre 1	fréquence propre 2	fréquence propre 3
1	3.85	13.23	14.62
2	3.88	13.27	14.48
3	3.76	13.08	14.48
4	3.79	13.30	14.66

TAB. 4.3 – *Fréquences propres moyennes. Couple de serrage 10Nm.*

4.2.5 Modèle réduit

Un modèle réduit prenant en compte les effets liés à la rotation est obtenu par une méthode similaire à celle présentée en 3.2.2. Cette fois-ci, la condensation de Craig et Bampton est appliquée sur cinq sous-structures : une pour l'ensemble disque-arbre et une pour chacune des quatre aubes. La base réduite de l'ensemble disque-arbre comprend les degrés de liberté de contact dans les quatre alvéoles et 18 coordonnées modales. Pour les aubes, on retient les degrés de liberté de contact, les degrés de liberté nécessaires pour représenter les céramiques piezoélectriques et les jauges de déformation et trois coordonnées modales. $8 \times 3 = 24$ éléments de contact tridimensionnels sont définis sur chaque flanc d'aube. La figure 3.4 (voir chapitre 3) montre leur position sur le pied d'aube. Pour le système complet, cela représente donc 192 éléments de contact, 384 noeuds de contact et 1152 degrés de liberté non-linéaires. Avec les degrés de liberté linéaires, la taille totale du problème se monte à 1290.

Le tableau 4.4 montre la précision du modèle réduit. Les vingt premières fréquences propres obtenues pour une vitesse de rotation nulle y sont comparées avec celles obtenues avec le modèle

complet. Nous remarquons entre autres une bonne précision pour les modes 10 et 11 qui sont ceux qui nous intéresseront plus particulièrement dans la suite.

Pour chaque sous-structure, les matrices de masse, la matrice de raideur prenant en compte la rotation et le vecteur des efforts, exprimés dans la base réduite, sont récupérés afin de pouvoir calculer le régime permanent non-linéaire par la méthode DLFT, présentée au chapitre 2.

mode	modèle complet	modèle réduit	écart (%)
1	1.113	1.117	+ 0.36
2	1.130	1.132	+ 0.18
3	1.848	1.851	+ 0.16
4	2.770	2.788	+ 0.65
5	2.869	2.870	+ 0.03
6	3.054	3.063	+ 0.29
7	3.164	3.166	+ 0.06
8	3.513	3.530	+ 0.48
9	3.727	3.735	+ 0.21
10	3.825	3.832	+ 0.18
11	3.851	3.857	+ 0.16
12	4.377	4.431	+ 1.23
13	4.553	4.554	+ 0.02
14	4.788	4.791	+ 0.06
15	6.192	6.205	+ 0.21
16	6.230	6.230	+ 0.00
17	6.847	6.954	+ 1.56
18	7.180	7.201	+ 0.29
19	8.181	8.526	+ 4.22
20	9.502	9.561	+ 0.62

TAB. 4.4 – *Comparaison des fréquences propres normalisées du modèle complet et du modèle réduit à l'arrêt.*

4.3 Mesure de la répartition des pressions de contact

Nous avons cherché à mesurer sur le banc expérimental présenté en 4.1 la distribution de la pression normale de contact aux interfaces entre le disque et les aubes. Une mesure en dynamique avait été initialement envisagée afin d'apporter une validation précise de la méthode numérique. Ceci est possible en effet avec des capteurs électriques tels que ceux proposés par Tekscan. Cependant cette solution s'avère très coûteuse et compliquée à utiliser pour notre configuration de contact. Nous nous sommes donc contentés de la mesure des pressions statiques à l'aide de films Fuji Prescale qui peuvent s'insérer facilement dans le contact en pied d'aube. Ce type de film est très utilisé en biomécanique pour mesurer les pressions dans les articulations [133] [151] [154]. Il contient des microcapsules qui éclatent sous l'application de la charge et causent des marques rouges. L'intensité de la coloration obtenue renseigne sur le niveau de pression. Davantage de détails sont fournis dans l'annexe B. Les mesures vont nous permettre de juger de l'importance des

surcontraintes en bord de contact et d'effectuer une comparaison avec les pressions trouvées dans le calcul statique servant d'initialisation au calcul de la réponse fréquentielle.

4.3.1 Méthode expérimentale

Le pied de l'aube étudiée ainsi que l'alvéole du disque sont préalablement nettoyés à l'alcool afin de ne pas tacher le film qui se trouvera dans le contact. Le film est découpé en rectangles de taille 8×34 mm environ. Deux morceaux sont placés sur les portées de l'aube et maintenus à l'aide d'un adhésif, comme le montre la figure 4.7(a). L'aube ainsi équipée est insérée sur le disque puis la cloche à vide est refermée et vidée de son air. La vitesse de rotation est alors augmentée progressivement pendant deux minutes environ puis stabilisée à la valeur désirée pendant une minute environ. Après l'arrêt du banc, les films sont récupérés pour être analysés.

Les résultats présentés dans la section suivante ont été obtenus avec deux types de film différents, appelés par le fabricant MS et HS. Le lecteur intéressé peut trouver en annexe B, les différents types de film disponibles. Le film MS (Medium pressure) est dédié aux pressions allant de 10 MPa à 50 MPa, tandis que le film HS (High pressure) couvre les pressions allant de 50 MPa à 130 MPa. Le film LW (Low pressure) a aussi été essayé, mais malheureusement, aucun résultat n'a pu être obtenu car le montage de l'aube sur le disque et le démontage suffisaient à marquer le film.

De nombreux essais ont été menés avec quatre aubes différentes dénommées par la suite A, B, C et D. Seuls les emplacements des aubes non instrumentées (aubes 3 et 4 sur la figure 4.2) ont été utilisés. Les aubes A et B ont été toujours montées à l'emplacement 3 et les aubes C et D à l'emplacement 4.

4.3.2 Résultats expérimentaux

Plusieurs tests ont été conduits en changeant les aubes utilisées et en variant la vitesse de rotation de 1000 à 5000 tr/min. L'ensemble des résultats obtenus sont rassemblés dans la figure 4.8 et les morceaux de films sont systématiquement orientés de la même façon que dans la figure 4.7(b). Les deux lignes verticales que l'on distingue sur les films extradados correspondent à deux légères saillies présentes sur la portée correspondante.

On remarque facilement que la répartition de la pression est très similaire d'un essai à l'autre. En effet, le côté des portées situé vers le bord d'attaque est toujours plus chargé que le côté opposé. Aussi, sur la portée extradados, c'est toujours le côté extérieur (gauche) qui reçoit le plus de pression. La partie basse du côté intérieur n'est elle jamais marquée si bien que l'on peut supposer que le disque et l'aube ne sont pas en contact à cet endroit. On remarque enfin nettement sur la portée intradados les surcontraintes à proximité du bord du contact qui se manifestent par deux lignes verticales d'une coloration plus intense. Ces remarques sont vraies quels que soient l'aube utilisée ou l'emplacement où elle a été montée. La reproductibilité s'avère correcte comme en témoignent les trois essais qui ont été doublés : 2000 MS B, 4000 HS A, 4000 HS D.

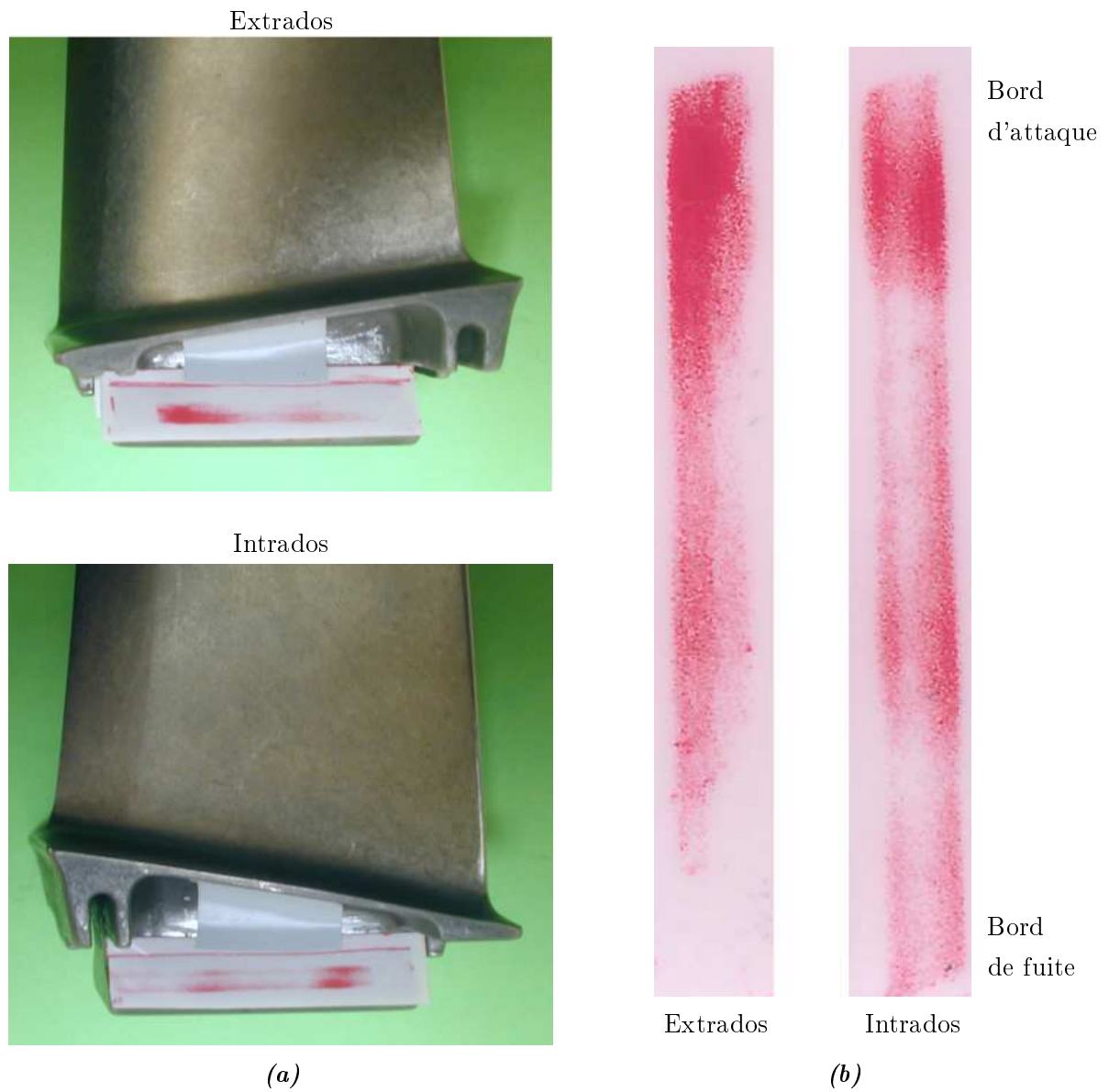
































FIG. 4.7 – *Mesure de la pression de contact en pied d'aube à l'aide de film Fuji Prescale (3000 tr/min, film MS, aube A) : (a) positionnement du film, (b) détail de la coloration à l'interface aube-disque.*

Aube	1000 MS	2000 MS		2000 HS	3000 MS		3000 HS	
A								
B	 	   		 	 			
C	 	 		 	 			
D					 			

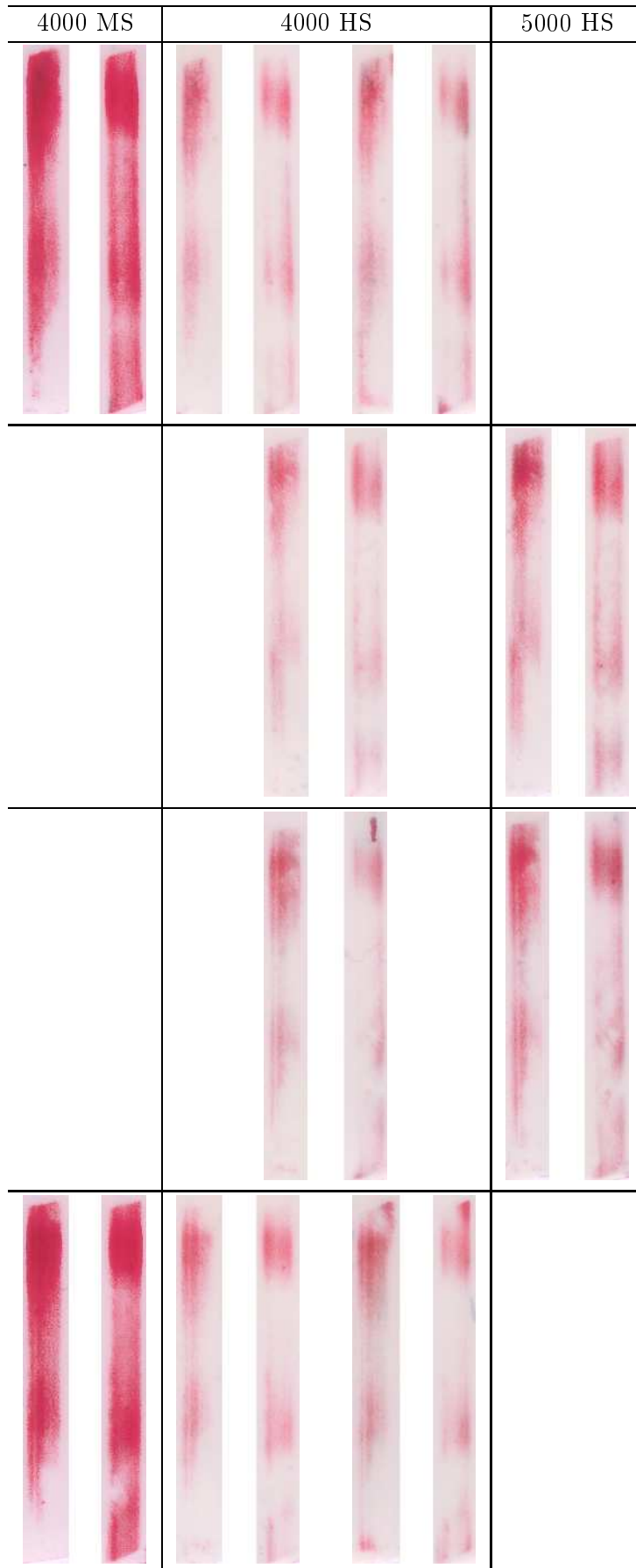


FIG. 4.8 – *Tableau de synthèse des résultats expérimentaux. 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 : vitesse de rotation en tours par minute. MS : film pour pressions moyennes. HS : film pour hautes pressions.*

4.3.3 Traitement des résultats

Dans le but d'analyser les résultats plus précisément, les films ont été scannés à 150 dpi (dots per inch). Cette résolution est le résultat d'un compromis. En effet, une bonne précision est recherchée, mais une résolution trop fine risque de faire apparaître l'aspect granulaire de la coloration dû aux microcapsules contenues dans le film. D'après le fabricant, la coloration doit être moyennée sur au moins 0.1mm^2 pour donner une indication valable de la pression, c'est pourquoi les résolutions inférieures à 200 dpi ne sont pas recommandées. Une discussion détaillée sur ces problèmes a été proposée par Liggins *et al.* [81].

Il faut dans un deuxième temps analyser la coloration de chaque pixel de l'image numérique afin d'estimer la pression associée. On a pour cela utilisé les colorations de référence et les courbes de calibration fournies par le fabricant (voir annexe B). Les images des films de même que les colorations de référence, ont été transformées en noir et blanc. Ainsi, pour chaque pixel l'intensité de gris est donnée par une valeur comprise entre 0 (noir) à 255 (blanc) qui peut être comparée aux niveaux de gris de référence. Pour les niveaux intermédiaires, une interpolation linéaire a été utilisée. A la fin de cette opération, chaque pixel a donc une valeur de densité qui peut se traduire en valeur de pression grâce à la courbe de calibration.

La figure 4.9 montre un exemple de résultat obtenu avec cette méthode pour une vitesse de rotation de 2000 tr/min et un film moyenne pression. Il est intéressant de remarquer sur la figure 4.8 que pour cette vitesse, le film haute pression est à peine marqué, ce qui signifie que la pression maximale est très légèrement supérieure à 50 MPa et que donc le film MS correspond bien à la gamme de pression rencontrée. La figure 4.9 confirme ce que l'on observait déjà sur la figure 4.8, à savoir que les contraintes de contact ne sont pas du tout uniformes sur les portées que l'écart entre la contrainte minimale et la contrainte maximale est très important. Mais on note que la pression en dehors des zones de contact n'est pas tout à fait nulle et vaut environ 5 MPa. Ce genre d'erreur est sûrement dû au fait que l'on a utilisé les courbes de calibration du fabricant qui ne correspondent pas parfaitement à nos conditions expérimentales. Une précision plus grande aurait pu être atteinte en effectuant une calibration indépendante des films, dans les conditions de température et d'humidité des essais, en leur appliquant des pressions connues.

4.3.4 Comparaison avec les calculs

Les calculs dynamiques effectués dans la DLFT sont coûteux en temps si le nombre d'éléments de contact répartis sur les portées est trop important. Les répartitions de contraintes telle celle présentée dans la figure 4.9 ne peuvent donc pas être fidèlement reproduites. Afin de pouvoir comparer les pressions expérimentales et numériques, il a fallu dans un premier temps retenir sur les images des films seulement les pixels correspondant aux portées. Nous nous sommes pour cela aidés des essais où les films sont fortement colorés et où l'emplacement des portées apparaît clairement (voir par exemple la colonne 4000 MS sur la figure 4.8). Dans un deuxième temps, la surface de contact est divisée en sous-surfaces qui chacune correspondent à un élément de contact. En effectuant la moyenne de la pression sur chacune des sous-surfaces, on obtient le résultat présenté dans la figure 4.10(a). La figure 4.10(b) montre elle le résultat d'un calcul statique effectué avec un coefficient de frottement de 0.2 et on remarque que l'allure générale est proche de la distribution de pression expérimentale. Par ailleurs, l'intégration de la contrainte normale sur la surface de contact a révélé que l'effort normal expérimental était 10 % plus élevé que celui trouvé par le calcul. Parmi

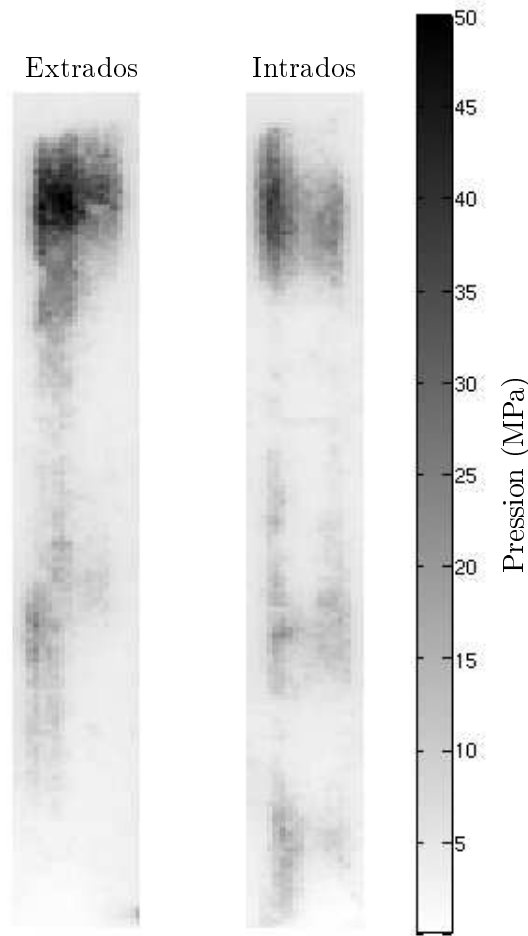


FIG. 4.9 – Pressions de contact numériques 2000 tours/min, aube B, film MS.

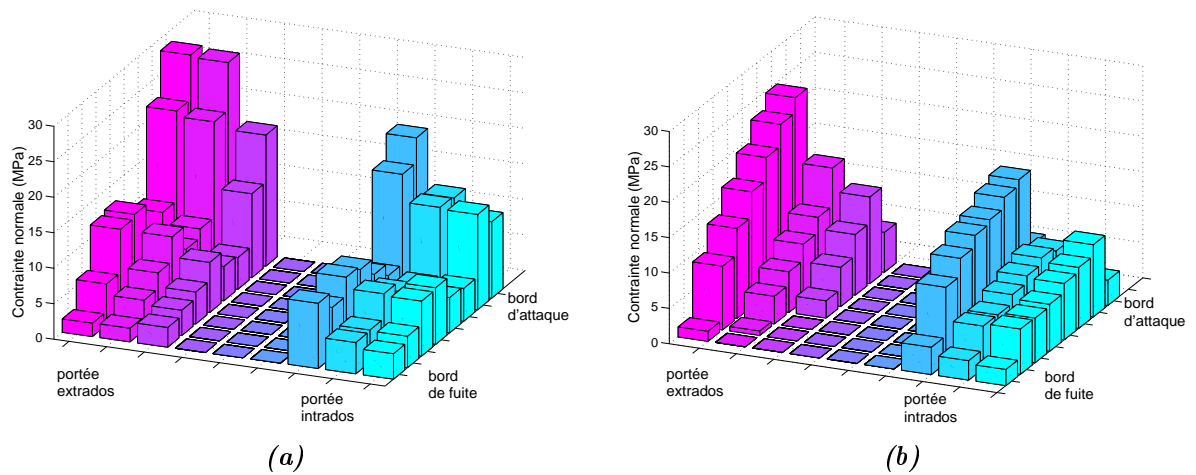


FIG. 4.10 – Pressions de contact pour l'emplacement 3 et l'aube B à 2000 tr/min. (a) résultat expérimental, (b) résultat numérique.

les causes de cet écart, on peut citer les erreurs de calibration précédemment évoquées, mais aussi l'incertitude sur le coefficient de frottement. En effet, étant donné la géométrie du pied d'aube, la valeur du coefficient de frottement fait varier l'effort normal de contact pour un effort centrifuge donné. Il faut également garder à l'esprit que l'introduction du film, même si son épaisseur est faible (0.11 mm), modifie la configuration du contact étudié, double les interfaces de contact et modifie le coefficient de frottement.

4.3.5 Conclusions

L'utilisation de film sensible à la pression et de faible épaisseur a fourni des informations intéressantes sur les contraintes de contact en pied d'aube. En particulier, tous les essais montrent, avec une bonne reproductibilité, des variations importantes de la contrainte statique de contact sur les portées. En certains endroits, le contact est même selon toute vraisemblance perdu. En revanche pour obtenir à partir des colorations expérimentales des valeurs numériques de pression précises, il s'avère nécessaire d'effectuer une calibration par soi-même des films. Nous manquons par ailleurs d'informations sur l'effet des contraintes tangentielles et de cisaillement sur la coloration des films.

4.4 Comparaison des réponses forcées

Dans cette partie, on s'intéresse à une petite bande de fréquence pour laquelle le comportement est clairement non-linéaire. Elle comprend deux pics de résonance qui correspondent aux modes 10 et 11 de la structure complète. Pour ces deux modes, l'énergie de déformation est essentiellement localisée dans une seule aube qui vibre selon son premier mode de flexion. Un tel phénomène est dû au désaccordage entre les aubes. A la première résonance (mode 10), l'aube 1 a la plus grande amplitude de vibration parmi les quatre et elle vibre en phase avec l'aube 2 adjacente. A la seconde résonance (mode 11), c'est l'aube 2 qui se déforme le plus et les aubes 1 et 2 vibrent en opposition de phase. La réponse fréquentielle autour de ces deux résonances a été mesurée pour des vitesses de rotation allant de 1000 à 5000 tours par minute et pour une excitation harmonique, appliquée sur l'aube 2, d'amplitude variant de 10V à 80V.

Dans le modèle, le contact en pied d'aube est régi par la loi de frottement de Coulomb et la loi de contact unilatéral. Les déformations élastoplastiques des aspérités en contact n'ont pas été prises en compte dans le modèle, parce que nous manquons d'informations sur les caractéristiques locales du contact étudié. Ceci signifie que lorsque un élément de contact est en état d'adhérence, aucun déplacement relatif n'est permis.

4.4.1 Paramètres d'amortissement

Il y a deux sources d'amortissement dans le modèle : le frottement en pied d'aube gouverné par le coefficient de frottement μ et un amortissement visqueux de facteur ζ . Le choix de ces deux paramètres est déterminant pour représenter la non-linéarité constatée et les amplitudes mesurées, et deux stratégies différentes ont été mises en oeuvre à cet effet. Dans la première, on a ajusté μ et ζ de manière à reproduire au mieux les amplitudes mesurées, mais en s'imposant de garder les mêmes valeurs pour toutes les vitesses de rotation. Dans une seconde approche, on a choisi un coefficient de frottement qui décroît en fonction de la vitesse de rotation, ζ restant constant à une valeur choisie comme la plus plausible physiquement.

Amortissement visqueux

Sur le banc d'essais étudié, l'amortissement n'est pas seulement dû au frottement en pied d'aube. De l'énergie est également dissipée dans les matériaux et dans l'instrumentation, c'est à dire dans les capteurs, les actionneurs, les fils ainsi que dans leurs attaches sur les aubes et le disque. Toutes ces sources d'amortissement ont été modélisées par un amortissement visqueux équivalent de facteur ζ . En pratique, celui-ci a été introduit dans le modèle par une matrice d'amortissement de Rayleigh :

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (4.8)$$

où M et K sont les matrices de masse et de raideur du modèle réduit, après condensation de Craig et Bampton. La matrice K tient compte de la rigidification centrifuge liée à la rotation. Les coefficients α et β ont été ajustés de manière à obtenir le facteur ζ désiré à la résonance étudiée. La même valeur de ζ a été utilisée pour toutes les vitesses de rotation et pour tous les niveaux d'excitation. On a donc supposé que le frottement dans les joints en queue d'aronde était seul responsable des variations de l'amortissement global.

Dans notre première approche, ζ a servi de paramètre d'ajustement ce qui a conduit à choisir une valeur de 0.075%. Dans la seconde, on a essayé de prendre une valeur de ζ la plus physique possible. Pour cela, on a considéré le cas où la part d'énergie dissipée par frottement en pied d'aube est minimale, c'est à dire à la vitesse de rotation la plus élevée (5000 tr/min) et pour le niveau d'excitation le plus faible. Dans ces conditions, un facteur d'amortissement de 0.055% a été identifié sur la réponse fréquentielle. Cette valeur a donc été retenue pour ζ .

Coefficient de frottement

Dans la première approche, le coefficient de frottement a été ajusté à une valeur de 0.08. Cette faible valeur est due au lubrifiant solide qui constitue la couche externe du revêtement du pied d'aube. Dans ce cas des coefficients de frottement de cet ordre de grandeur sont normaux, comme en témoigne par exemple l'article de Teer [143], consacré à des lubrifiants au graphite et au bisulfure de molybdène.

Dans notre deuxième approche, on a tenu compte de références qui indiquent que pour plusieurs lubrifiants solides, le coefficient de frottement diminue quand l'effort normal augmente [63] [116] [129] [143]. Ce phénomène existe aussi dans les systèmes de freinage [105] et avait déjà été rapporté par Archard en 1957 [3]. On a donc supposé que le coefficient de frottement était régi par l'équation donnée dans [63] :

$$\mu = \gamma N^{-\nu}, \quad (4.9)$$

où γ est une constante, N est l'effort normal et ν est un paramètre de valeur positive. Avant d'utiliser une telle relation dans le cas du contact aube-disque, il faut avoir à l'esprit que la contrainte normale de contact n'est pas uniforme sur les portées et varie au cours du temps du fait des vibrations. C'est pourquoi, si on se réfère à l'équation (4.9), le coefficient de frottement devrait varier également. Cet effet n'a pourtant pas été pris en compte et pour des raisons de simplicité, le coefficient de frottement μ a été supposé constant sur les portées et au cours du temps. On a donc pour chaque vitesse de rotation utilisé une valeur de μ unique qui a été déterminée par une analyse statique bidimensionnelle que l'on décrit ci-après.

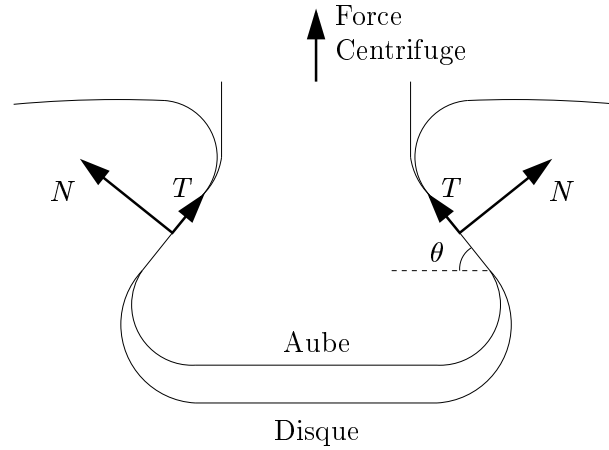


FIG. 4.11 – Bilan des efforts en pied d'aube.

Comme le montre la figure 4.11, les efforts centrifuges induisent des efforts de contact statiques en pied d'aube dont la composante normale est notée N et la composante tangentielle T . En supposant que la rotation entraîne le macroglissement du pied (ce qui sera vérifié dans les simulations avec le modèle tridimensionnel), on peut écrire

$$T = \mu N . \quad (4.10)$$

Les expériences et les simulations ont été conduites pour cinq vitesses de rotation de 1000 tr/min à 5000 tr/min. Ces dernières sont notées $\Omega_j = 1000j$, pour j de 1 à 5. En notant N_j et μ_j les efforts normaux et les coefficients de frottement pour chacune des vitesses, et en rappelant que la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation, l'équilibre statique peut se formuler par

$$cj^2 = N_j(\cos \theta + \mu_j \sin \theta) , \quad (4.11)$$

où c est une constante. En définissant par Ψ_j l'effort normal adimensionné par l'effort normal à 1000 tr/min :

$$\Psi_j = N_j/N_1 , \quad (4.12)$$

l'équation (4.9) peut se transformer en

$$\mu_j = \mu_1 \Psi_j^{-\nu} . \quad (4.13)$$

A l'aide des équations (4.12) et (4.13) et en utilisant le cas $j = 1$ pour déterminer l'expression de la constante c , l'équation (4.11) devient

$$(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)j^2 = \Psi_j(\cos \theta + \mu_1 \Psi_j^{-\nu} \sin \theta) . \quad (4.14)$$

Les paramètres qui interviennent dans cette équation ont les valeurs suivantes :

- Angle des portées : $\theta = 50^\circ$
- Exposant : $\nu = 0.34$
- Coefficient de frottement à 1000 tr/min : $\mu_1 = 0.15$

La valeur de ν a été choisie à partir de la référence [129] où des revêtements au bisulfure de molybdène (MoS_2) sont étudiés. Le lubrifiant solide utilisé sur les pieds des aubes du banc d'essai ayant une structure proche, on a supposé que la valeur trouvée dans le cas du MoS_2 pouvait

s'appliquer. La valeur de μ_1 a été choisie de manière à ajuster au mieux les résultats numériques aux résultats expérimentaux. L'équation (4.14) est non-linéaire en Ψ_j et a été résolue avec une méthode de Newton pour j de 2 à 5. Ensuite, les coefficients de frottement ont été obtenus par l'équation (4.13). Les résultats sont synthétisés dans le tableau 4.5.

Vitesse de rotation Ω_j (tr/min)	Effort normal adimensionnalisé Ψ_j	Coefficient de frottement μ_j
1000	1	0.15
2000	4.25	0.092
3000	9.80	0.069
4000	17.67	0.056
5000	27.86	0.048

TAB. 4.5 – *Coefficients de frottement utilisés pour les différentes vitesses de rotation.*

4.4.2 Coefficient de frottement constant

Dans ce paragraphe sont présentés les résultats d'une première série de calculs menés avec $\mu = 0.08$ et $\zeta = 0.075\%$ pour toutes les vitesses de rotation.

Réponse fréquentielle à 3000 tr/min

Les calculs mettent en évidence que le frottement en pied d'aube est responsable d'une baisse de l'amplitude à la résonance et d'un léger décalage du pic vers les basses fréquences. Ces effets sont visibles sur la figure 4.12(a), où l'amplitude obtenue par le calcul non-linéaire est comparée à celle obtenue dans le cas linéaire, c'est à dire sans aucun déplacement relatif au niveau de l'attache des aubes. Ces résultats ont été obtenus avec une harmonique. La figure 4.12(b) montre que l'influence du nombre d'harmoniques retenues sur la réponse est faible. En effet, pour ce cas à 3000 tr/min, le passage à trois harmoniques cause seulement une baisse de 4% de l'amplitude maximale, et au delà il ne semble plus y avoir d'évolution notable.

La comparaison des réponses fréquentielles expérimentales et numériques est donnée dans la figure 4.13 et on constate une bonne corrélation, tant au niveau des amplitudes que des phases. La résonance du mode 10 est visible dans la réponse de l'aube 1 mais quasiment imperceptible dans celle de l'aube 2. On remarque également que les pics expérimentaux correspondant au mode 11 se décalent légèrement vers les basses fréquences quand U_a est augmenté de 10V à 80V. Ceci n'est pas bien reproduit par la simulation et les raisons en sont probablement le niveau de discrétisation des surfaces de contact et l'absence de raideurs de contact dans le modèle. Nous avons en effet montré au chapitre 3 que le décalage fréquentiel augmente quand la discrétisation est plus fine et quand la raideur tangentielle de contact diminue.

La figure 4.13 fournit également des informations intéressantes concernant la qualité du modèle d'excitation piezoélectrique présenté en 4.2.2. En effet, on remarque en (a) et (c) que pour un niveau de 10V, les amplitudes maximales calculées et mesurées sont très proches. Dans ce cas, l'énergie dissipée par frottement dans les joints en queue d'aronde est minimale et le comportement est pratiquement linéaire. Par ailleurs, les facteurs d'amortissement relevés sur les courbes expé-

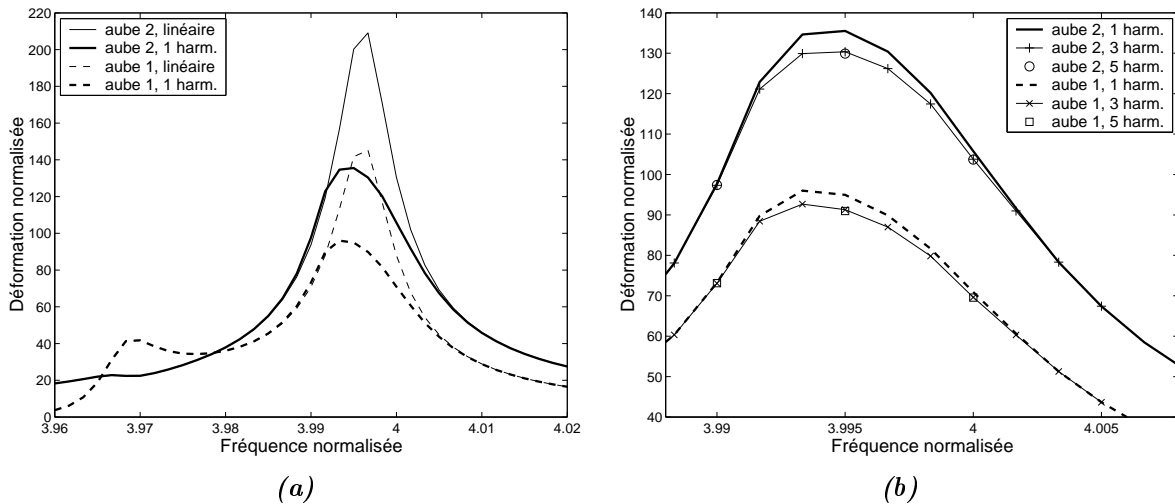


FIG. 4.12 – Réponses forcées numériques pour $\Omega = 3000\text{tr}/\text{min}$ et une excitation sur l'aube 2 d'amplitude $U_a = 80\text{V}$: (a) comparaison entre le cas complètement adhérent et le cas non-linéaire, (b) influence du nombre d'harmoniques retenues.

riméntales et numériques sont identiques. Donc avec le même niveau d'amortissement, le calcul donne une amplitude similaire à celle relevée expérimentalement, ce qui montre que la précision de notre modèle d'excitation est acceptable.

Influence de la vitesse de rotation.

La figure 4.14 montre l'évolution de la fréquence de résonance du mode 11 en fonction de la vitesse de rotation. Ces résultats ont été obtenus pour le niveau d'excitation le plus faible, ce qui minimise le décalage du pic de résonance dû à la non-linéarité. L'écart maximal entre les fréquences calculées et les fréquences expérimentales est de 1%, le raidissement centrifuge est donc correctement prédit par le calcul. On remarque tout de même que les deux courbes n'ont pas exactement la même forme. La courbe expérimentale est pratiquement droite, alors que la courbe numérique est plus incurvée. Cette différence tient peut-être au fait que le modèle ne prend pas en compte la raideur des aspérités en contact. En effet, les expériences rapportées dans [26] et [40] montrent que la raideur tangentielle du contact augmente avec l'effort normal. Introduire dans le modèle une raideur tangentielle dépendante de l'effort normal rendrait la courbe numérique plus droite.

La vitesse de rotation a une influence importante sur les niveaux vibratoires. Kielb et Abhari ont en effet trouvé à partir d'essais menés sur un banc similaire au nôtre que l'amortissement global suivait approximativement une loi en $a/\Omega^2 + b$, où Ω est la vitesse de rotation [73]. Sur une plage allant de 0 à 20000 tr/min, ils ont ainsi trouvé que l'amplitude à la résonance augmente progressivement avec la vitesse de rotation. Nos résultats expérimentaux confirment cette tendance et sur la figure 4.15 on constate que les amplitudes relevées sur les deux aubes instrumentées à la résonance du mode 11 augmentent de façon quasiment linéaire avec la vitesse de rotation. La figure 4.16 montre elle l'amortissement équivalent calculé par la méthode de la chute à 3dB. Contrairement à ce que suggèrent Kielb et Abhari, une loi en $a/\Omega + b$ permet de mieux approcher ces courbes expérimentales.

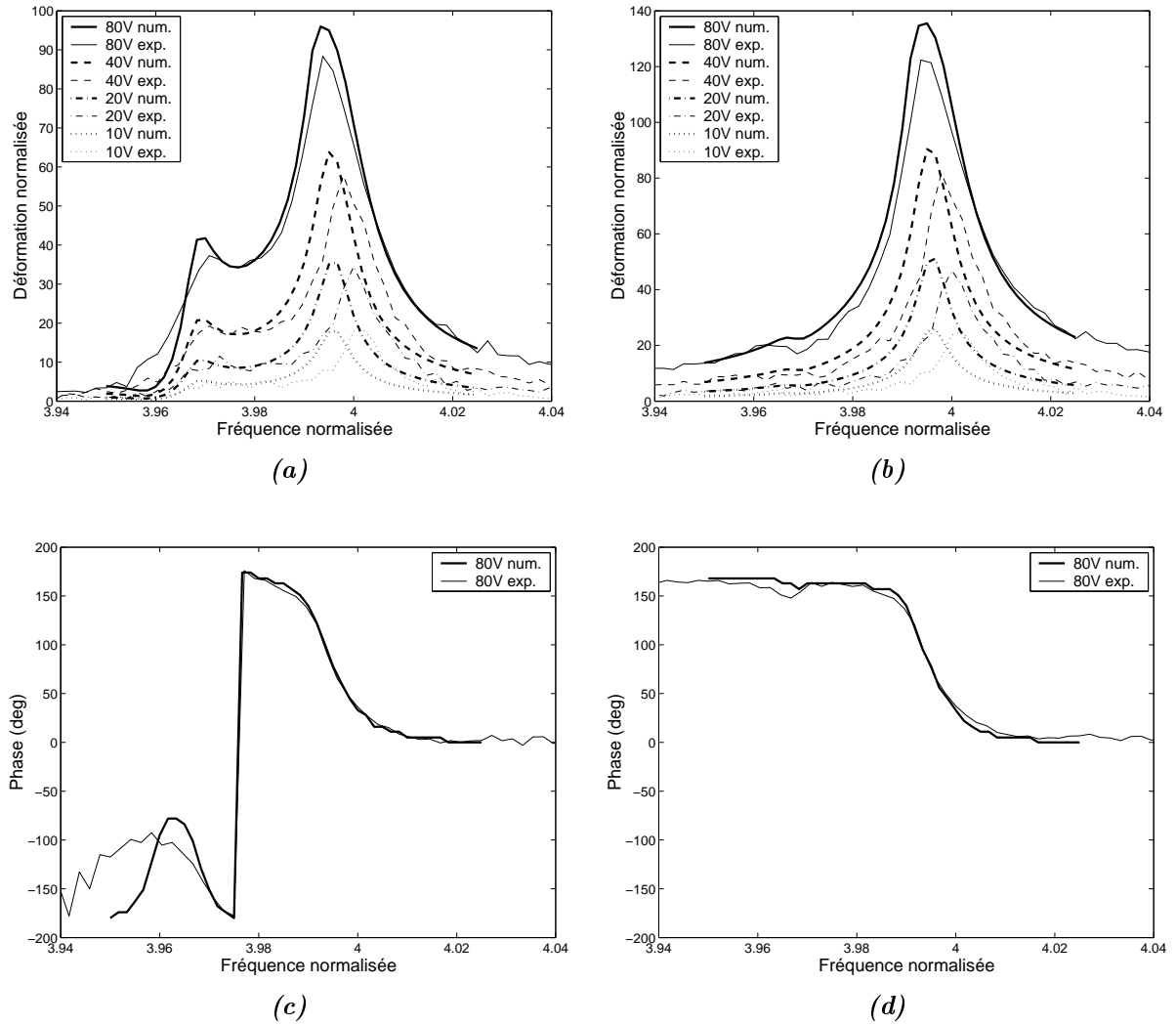


FIG. 4.13 – Réponses forcées numériques et expérimentales à $\Omega = 3000\text{tr/min}$: (a) amplitude pour l'aube 1, (b) amplitude pour l'aube 2, (c) phase pour l'aube 1, (d) phase pour l'aube 2.

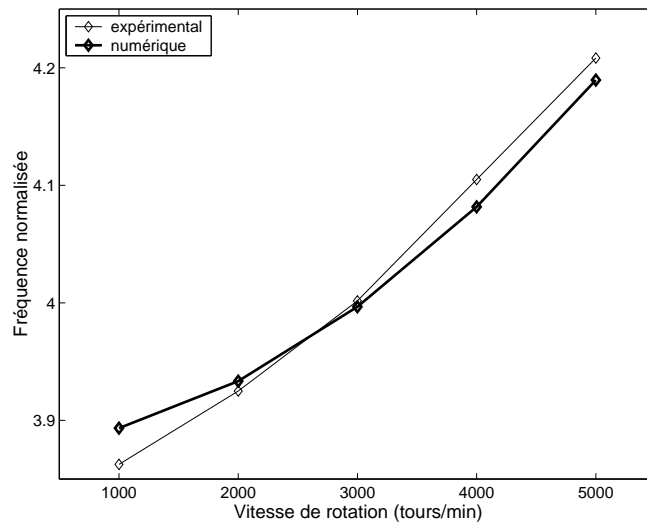


FIG. 4.14 – Fréquences de résonance pour $U_a = 10V$.

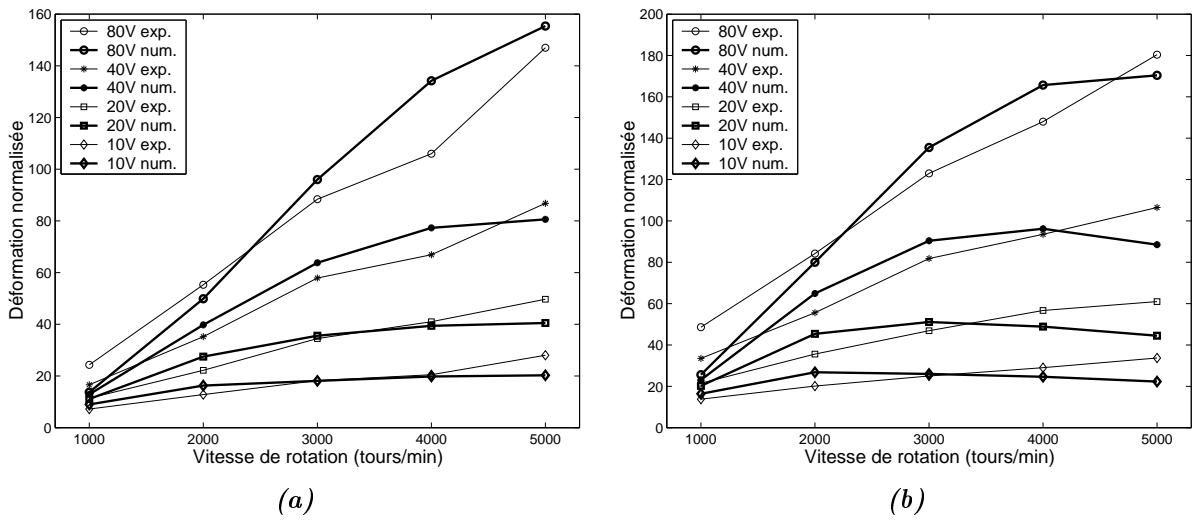


FIG. 4.15 – Amplitudes maximales expérimentales et numériques : (a) aube 1, (b) aube 2.

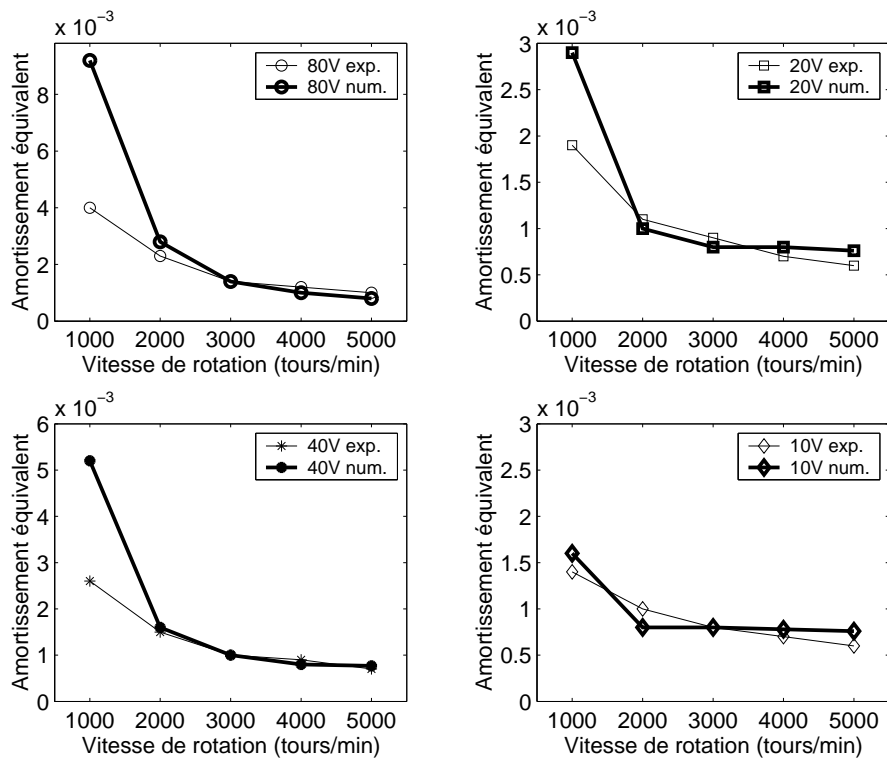


FIG. 4.16 – Facteur d'amortissement équivalent.

Les figures 4.15 et 4.16 présentent aussi en trait épais les résultats des calculs. Si les tendances observées expérimentalement sont à peu près reproduites, des erreurs demeurent en particulier pour les vitesses extrêmes. Aussi, la pente des courbes numériques devient plus faible ou même négative quand la vitesse de rotation augmente, ce qui n'est pas le cas des courbes expérimentales. En se référant à la figure 4.16, on constate que le niveau total d'amortissement prédit par la simulation pour 1000 tr/min est surestimé. Ceci suggère que le coefficient de frottement de 0.08 est trop faible pour cette vitesse de rotation alors qu'il semble donner des résultats convenables à 3000 tr/min. Par ailleurs pour les niveaux d'excitation faibles (10V, 20V) et pour les vitesses élevées (4000 tr/min, 5000 tr/min), le facteur d'amortissement relevé sur les réponses fréquentielles expérimentales est inférieur à 0.075%. Dans le modèle, la valeur du paramètre ζ est donc trop élevée pour ces vitesses de rotation. Ces remarques soulignent les limites d'une modélisation où le coefficient de frottement et l'amortissement structural sont choisis comme indépendants de la vitesse de rotation.

4.4.3 Coefficient de frottement variable

Afin de tenter d'améliorer les résultats précédents, des simulations ont été conduites avec un coefficient de frottement variable en fonction de la vitesse de rotation et un facteur d'amortissement visqueux de 0.055% conformément à ce que nous avons présenté au paragraphe 4.4.1. La figure 4.17 montre les amplitudes que l'on a obtenues pour les différentes vitesses de rotation. La comparaison avec la figure 4.15 révèle que l'allure des courbes numériques a changé significativement. Elles sont en particulier plus droites, ce qui correspond mieux à ce qui est observé expérimentalement. Les amplitudes de déformation calculées pour l'excitation de 80V sont proches des amplitudes expérimentales, mais pour les niveaux plus faibles elles sont légèrement trop élevées. La figure 4.18 confirme que l'amortissement équivalent issu de la simulation est sous-estimé en particulier pour les niveaux 10V et 20V.

Les figures 4.17 et 4.18 confirment par ailleurs la précision du modèle d'excitation utilisé. En effet, pour la vitesse de 5000 tr/min et les niveaux 10V et 20V, le niveau d'amortissement calculé correspond à celui relevé sur les réponses fréquentielles expérimentales et les amplitudes numériques et expérimentales sont proches également.

Tous les calculs ont été à nouveau effectués en retenant 3 harmoniques dans la DLFT, et la figure 4.19 montre les amplitudes maximales obtenues. La comparaison avec le cas monoharmonique révèle que les amplitudes sont diminuées, mais de façon légère puisque l'écart maximal relevé est de -10% pour 1000 tr/min et 80V.

La figure 4.20 montre que l'on retrouve une bonne corrélation entre les réponses fréquentielles calculées et mesurées. En divisant les amplitudes par le niveau d'excitation, de la même manière que dans la figure 4.3, on observe que le comportement est linéaire à la résonance du mode 10 (premier pic sur la figure (a)) aussi bien pour l'expérience que pour le calcul. L'écart d'amplitude constaté à cette résonance signifie donc que l'amortissement structural que l'on a retenu pour les calculs ($\zeta = 0.055\%$) est trop faible pour la vitesse de rotation de 3000 tr/min, alors qu'il semble convenir pour 5000 tr/min. Ceci suggère une possible variation de l'amortissement structural avec la vitesse de rotation.

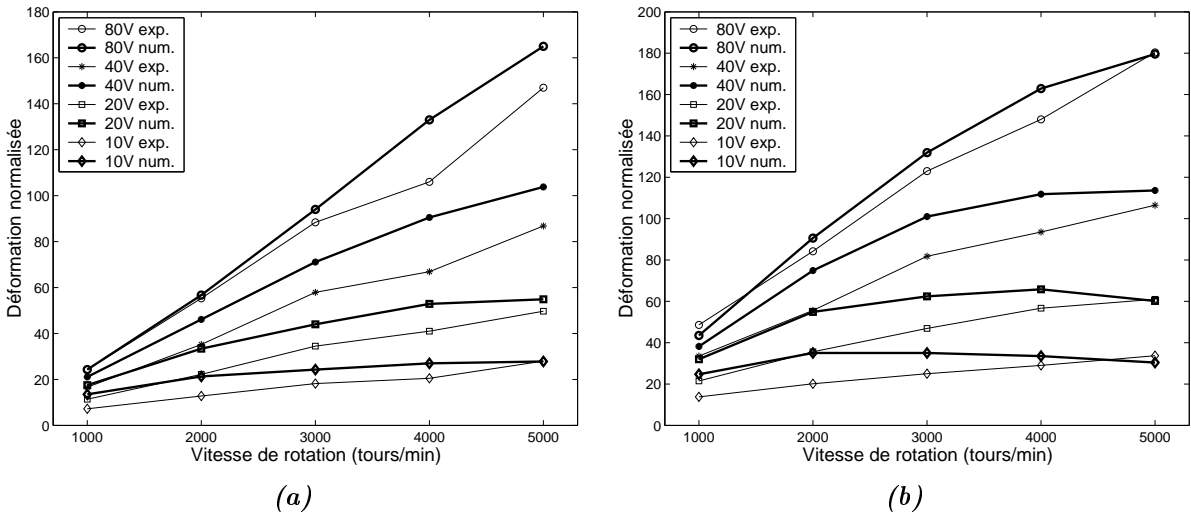


FIG. 4.17 – Amplitudes maximales expérimentales et numériques : (a) aube 1, (b) aube 2. Calculs avec coefficient de frottement variable et 1 harmonique.

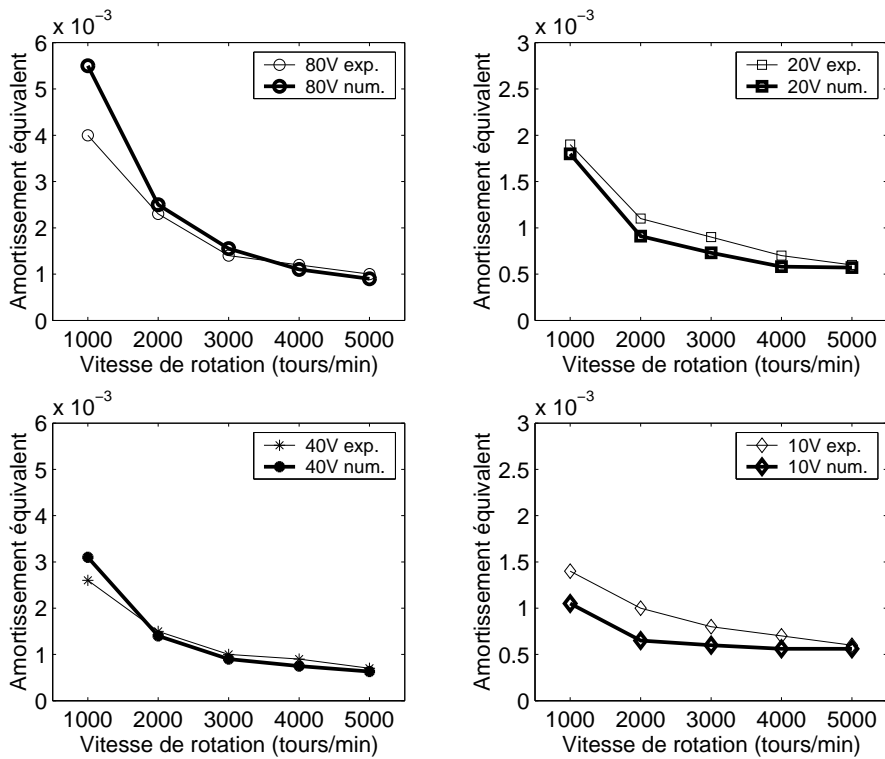


FIG. 4.18 – Facteur d'amortissement équivalent.

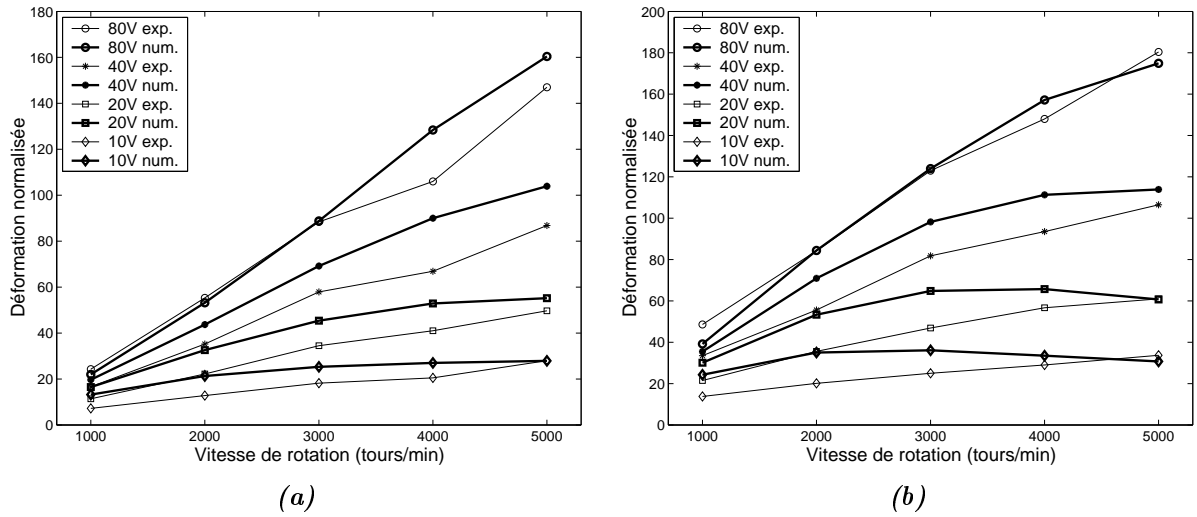


FIG. 4.19 – Amplitudes maximales expérimentales et numériques : (a) aube 1, (b) aube 2. Calculs avec coefficient de frottement variable et 3 harmoniques.

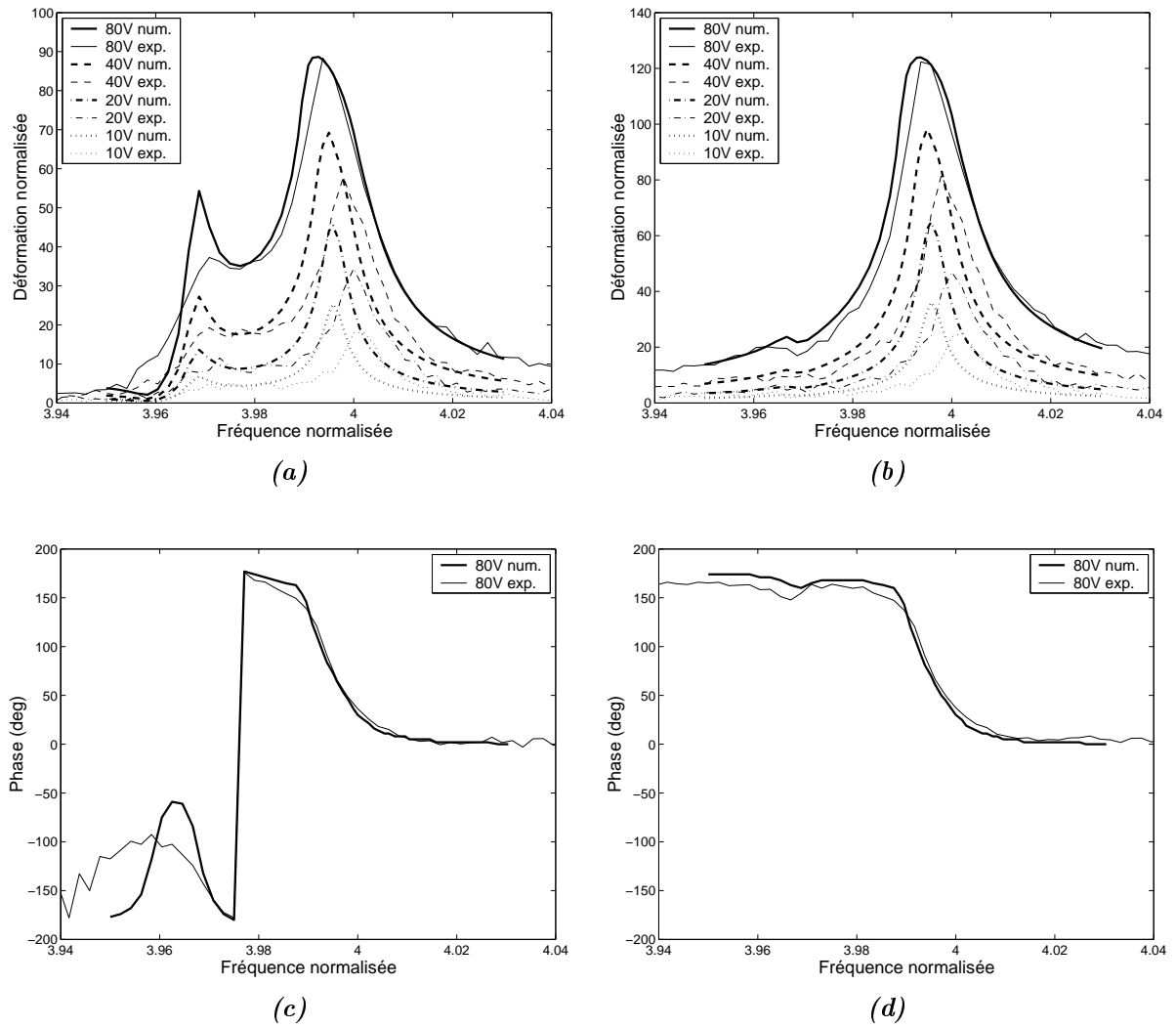


FIG. 4.20 – Réponses forcées numériques et expérimentales : (a) amplitude pour l'aube 1, (b) amplitude pour l'aube 2, (c) phase pour l'aube 1, (d) phase pour l'aube 2. $\Omega = 3000\text{tr}/\text{min}$, 3 harmoniques.

Conclusions

Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre ont été obtenus lors d'essais effectués sur un disque tournant dans une cloche à vide, ce qui a permis de minimiser l'amortissement aérodynamique. Les sources principales d'amortissement sont alors le frottement au niveau de l'attache des aubes et l'amortissement structural. Les réponses fréquentielles obtenues avec une excitation harmonique reflètent un comportement non-linéaire au voisinage des résonances que nous avons essayé de reproduire par la simulation en supposant que cette non-linéarité est entièrement imputable au contact en pied d'aube. Pour ce faire, nous avons construit un modèle tridimensionnel du banc, qui prend en compte le déaccordage des aubes et reproduit l'excitation piezoélectrique, et lui avons appliqué la méthode DLFT présentée au chapitre 2, avec les non-linéarités de frottement de Coulomb et de contact unilatéral. Les fréquences de résonance du modèle se sont révélées proches de celles mesurées. Par ailleurs, les calculs de réponse harmonique ont été menés avec deux réglages des paramètres d'amortissement. L'amortissement structural a toujours été pris constant, alors que le coefficient de frottement a en premier lieu été supposé indépendant de la vitesse de rotation puis dans un deuxième temps supposé décroissant avec l'effort normal de contact (et donc avec la vitesse de rotation). Si des résultats convenables ont pu être obtenus pour les deux réglages, l'utilisation d'un coefficient de frottement dépendant de l'effort normal de contact a permis de mieux reproduire la variation de l'amplitude avec la vitesse de rotation.

La mesure des pressions de contact (voir la section 4.3) a montré que leur répartition n'était pas du tout uniforme sur les portées des aubes. Le problème pour le numéricien est de trouver un moyen de représenter le champ de pression avec un nombre de degrés de liberté non-linéaires raisonnable de manière à pouvoir conduire des calculs en dynamique. Dans notre étude, nous savons que le nombre d'éléments de contact retenus pour effectuer les calculs est insuffisant pour reproduire de telles distributions de pression, ce qui constitue donc une source d'erreur dans l'estimation des zones de glissement et des amplitudes de glissement. Par ailleurs, les petites dissipations énergétiques qui ont lieu lorsque l'amplitude de vibration est faible ne peuvent pas être reproduites. Ceci peut expliquer pourquoi les amplitudes simulées sont plus grandes que celles mesurées pour les faibles niveaux (10V, 20V), comme le montre la figure 4.19. Cependant, il faut noter que les amplitudes de vibration des aubes restent probablement faibles par rapport à ce qui peut être rencontré en service. En effet, dans le cas d'amplitude maximale (aube 2, 5000 tr/min, 80V), le calcul du maximum dans la pale de la contrainte de Von Mises alternée donne une valeur d'environ 20 MPa, soit seulement un vingtième de la limite d'endurance de cet alliage de titane. Malgré cela un comportement non-linéaire a été clairement perçu au cours des expériences. On doit s'attendre à ce que pour les résonances présentant un risque de fatigue polycyclique, l'effet du frottement en pied d'aube soit encore plus marqué.

Une hypothèse importante de notre modélisation est que le frottement dans l'attache des aubes est seul responsable de la non-linéarité observée expérimentalement. Ainsi, nous n'avons pas pris en compte la possible variation de l'amortissement structural avec l'amplitude de vibration. De plus, l'augmentation de la vitesse de rotation cause un raidissement centrifuge croissant qui pourrait s'accompagner d'une baisse de l'amortissement structural. Ce phénomène a en effet été rapporté par Smith et Wereley dans le cas de poutres composites [139], mais en ce qui concerne les alliages de titane, aucune étude expérimentale similaire n'a été trouvée dans la littérature. Pour augmenter la précision de la modélisation, il serait donc intéressant de caractériser l'amortissement structural

seul en déterminant notamment la façon dont il varie avec l'amplitude et l'effort centrifuge. Cela n'a pas pu être fait sur le banc d'essais faute de dispositif pour éliminer la dissipation d'énergie en pied d'aube.

On note enfin qu'il est bénéfique de prendre en compte dans la modélisation les raideurs de contact, et en particulier les raideurs tangentielles, qui peuvent avoir un impact sur les fréquences de résonance et sur l'allure de la réponse fréquentielle calculée. Les introduire dans le modèle, si on avait eu une idée de leur ordre de grandeur, aurait permis de mieux approcher les résultats expérimentaux. Là encore, il y a besoin d'essais partiels pour déterminer dans les conditions de fonctionnement les paramètres de contact (coefficient de frottement, raideurs de contact ...) ainsi que leur évolution avec la vitesse de rotation.

Chapitre 5

Réponse forcée d'une roue aubagée accordée

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de calcul dans le domaine fréquentiel de la réponse forcée non-linéaire d'une roue aubagée accordée. Nous tirons parti des propriétés de l'excitation et de la symétrie cyclique de la structure pour effectuer les simulations sur un seul secteur. Le début de l'exposé est consacré à une présentation du calcul modal et de réponse forcée dans le cas linéaire, ce qui sert de base pour l'explication de la méthode mise en oeuvre dans le cas non-linéaire. Un même modèle de disque aubagé est utilisé pour illustrer ces différentes étapes. La non-linéarité considérée est toujours celle du contact frottant en pied d'aube.

5.1 Prise en compte de la symétrie cyclique

Les disques aubagés font partie des structures dites à symétrie cyclique, ce qui signifie qu'elles sont constituées par la répétition circulaire d'un même motif. La figure 5.1 montre le maillage d'un disque aubagé (b) généré par la rotation d'un secteur de base représenté en (a).

Il est possible de tirer parti de cette propriété de symétrie cyclique pour calculer les modes et la réponse forcée de la structure complète à partir d'un seul secteur, ce qui réduit considérablement la taille des problèmes à résoudre et permet d'économiser du temps de calcul. Thomas [144], Henry [56] et Wildheim [159] ont été parmi les premiers à proposer de telles techniques de calcul pour les structures linéaires. Il s'avère cependant que dans la réalité, les disques aubagés ne sont pas parfaitement symétriques : des écarts de géométrie, de masse, de raideur existent entre les différents secteurs. Ce désaccordage, même faible, peut engendrer des modes et une réponse forcée sensiblement différents de ceux prévus dans le cas parfaitement accordé. Des phénomènes de localisation peuvent apparaître, ce qui signifie que l'énergie vibratoire se concentre davantage dans certains secteurs. Pour reproduire les effets du désaccordage, un calcul sur la structure complète est nécessaire, ce qui est très pénalisant pour le temps de calcul, notamment dans le cas où des non-linéarités sont prises en compte. Pour cette raison, nous nous limitons dans ce chapitre au cas d'une roue aubagée parfaitement accordée. Nous montrons sous quelles hypothèses il est possible de calculer la réponse forcée tenant compte des non-linéarités de contact et de frottement en pied d'aube à partir d'un seul secteur.

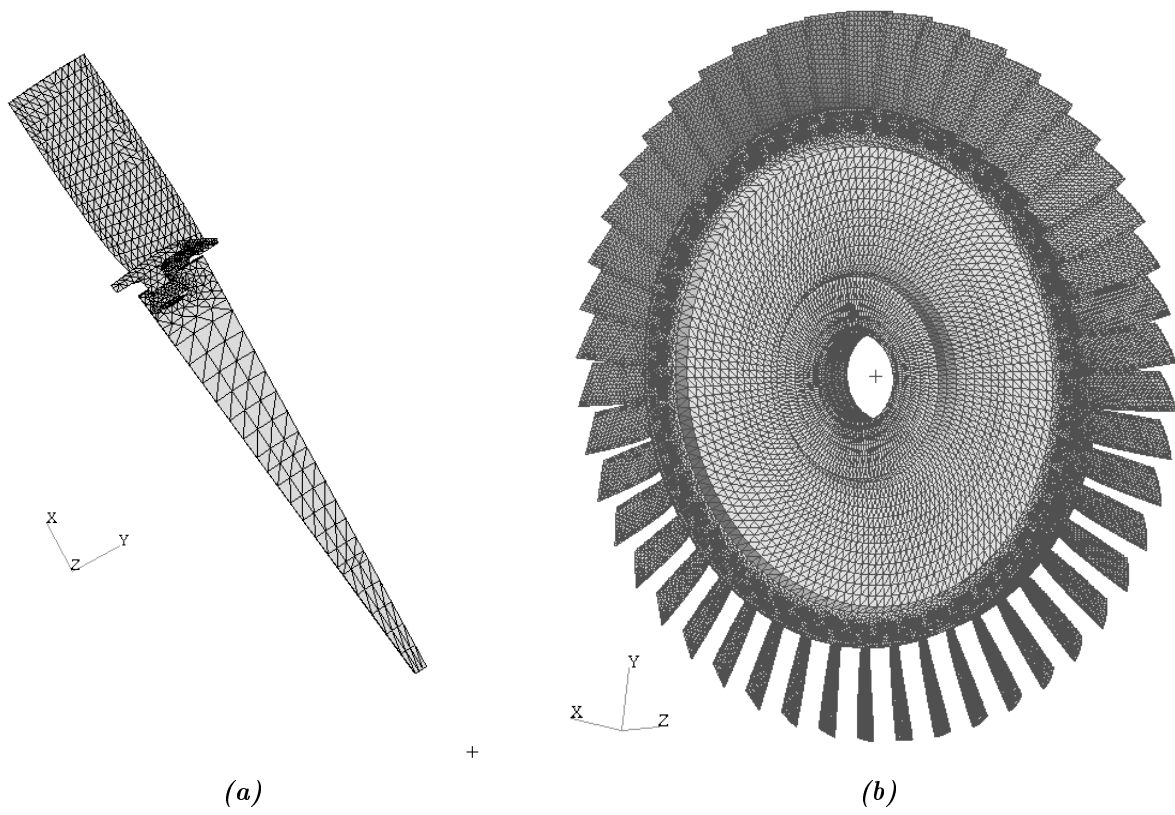


FIG. 5.1 – (a) maillage du secteur étudié, (b) disque aubagé complet.

5.2 Modes propres d'une structure à symétrie cyclique

5.2.1 Relations de propagation

Considérons une structure à symétrie cyclique formée de N secteurs identiques. La figure 5.2 montre que pour un secteur donné, on peut distinguer les degrés de liberté situés sur les frontières avec les secteurs adjacents (indiqués g et d pour gauche et droite) et les degrés de libertés internes (indiqués i). Pour une onde non amortie se propageant dans la structure, on note β le déphasage entre deux points homologues de deux secteurs adjacents. Ceci se traduit en termes de déplacements pour le secteur de la figure 5.2 par

$$\mathbf{U}_g = e^{i\beta} \mathbf{U}_d. \quad (5.1)$$

β est positif si l'onde se propage de la gauche vers la droite et négatif dans le cas inverse. En notant \mathbf{F}_g (respectivement \mathbf{F}_d) les efforts exercés par le secteur adjacent gauche (respectivement droite) sur le secteur isolé, on peut aussi écrire

$$\mathbf{F}_g = -e^{i\beta} \mathbf{F}_d. \quad (5.2)$$

Comme la structure se referme sur elle-même, le déphasage β ne peut prendre que des valeurs discrètes bien précises qui sont données par

$$\beta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{N}}. \quad (5.3)$$

N valeurs sont donc possibles dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, mais dans cet exposé, nous ne retenons que les valeurs positives car les déphasages β et $-\beta$ correspondent à des ondes identiques se propageant en sens opposé. Ainsi, il est seulement nécessaire de considérer les valeurs

$$\begin{aligned} \beta &= 0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N}{2} - 1 \right), \pi && \text{si } N \text{ est pair,} \\ \beta &= 0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N-1}{2} \right) && \text{si } N \text{ est impair.} \end{aligned}$$

β peut se mettre sous la forme

$$\beta = \frac{2\pi k}{N}, \quad (5.4)$$

où k est une constante positive appelée nombre d'onde ou nombre de diamètres, ou encore pulsation spatiale.

5.2.2 Problème aux valeurs propres

Les équations du mouvement du secteur discrétisé, après partition des matrices de masse et de raideur suivant les degrés de liberté droite, gauche et internes, peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} M_{dd} & M_{dg} & M_{di} \\ M_{gd} & M_{gg} & M_{gi} \\ M_{id} & M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_d \\ \ddot{\mathbf{U}}_g \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dg} & K_{di} \\ K_{gd} & K_{gg} & K_{gi} \\ K_{id} & K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_g \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{F}_g \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

A l'aide des relations de propagation (5.1) et (5.2), la taille de ce système peut être diminuée en éliminant les degrés de liberté gauches :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{dd} + M_{gg} + e^{i\beta} M_{dg} + e^{-i\beta} M_{gd} & M_{di} + e^{-i\beta} M_{gi} \\ M_{id} + e^{i\beta} M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_d \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{dd} + K_{gg} + e^{i\beta} K_{dg} + e^{-i\beta} K_{gd} & K_{di} + e^{-i\beta} K_{gi} \\ K_{id} + e^{i\beta} K_{ig} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

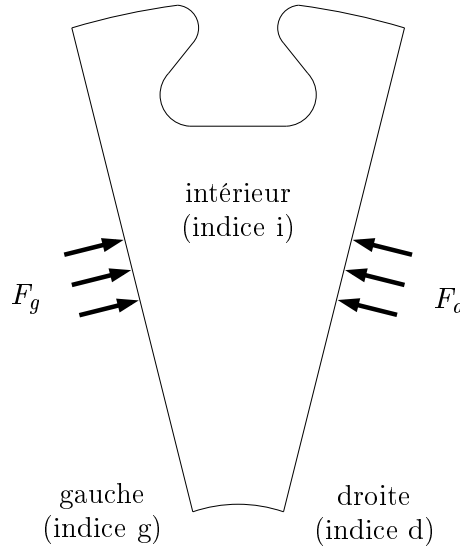


FIG. 5.2 – Notations pour un secteur de base d'un disque.

Cette équation peut être réécrite sous la forme d'un problème aux valeurs propres, dont les matrices dépendent du nombre de diamètres k :

$$(\bar{K}_k - \omega^2 \bar{M}_k) \bar{U} = \mathbf{0} . \quad (5.7)$$

La résolution donne pour un nombre de diamètres donné les fréquences propres et les déformées propres exprimées sur le secteur isolé. Pour obtenir une déformée modale sur la structure complète, il suffit d'appliquer des relations de propagation du type de (5.1). Ainsi, si on suppose que le secteur modélisé porte le numéro 1 ($\bar{U}_1 = \bar{U}$), alors la déformée du j -ième secteur est donnée par

$$\bar{U}_j = e^{ij\beta} \bar{U}_1 . \quad (5.8)$$

Dans les cas où $k = 0$ ($\beta = 0$) et $k = N/2$ ($\beta = \pi$), les matrices \bar{M}_k et \bar{K}_k sont réelles symétriques et les valeurs propres sont réelles et simples. On parle de modes non dégénérés. Dans les autres cas, \bar{M}_k et \bar{K}_k sont complexes et hermitiennes et les valeurs propres sont réelles et doubles. On parle alors de modes dégénérés et il est alors préférable pour des raisons numériques de résoudre le problème aux valeurs propres réel de taille double issu de la séparation entre les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{K}_k^r & -\bar{K}_k^i \\ \bar{K}_k^i & \bar{K}_k^r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{M}_k^r & -\bar{M}_k^i \\ \bar{M}_k^i & \bar{M}_k^r \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{U}^r \\ \bar{U}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} , \quad (5.9)$$

avec

$$\bar{M}_k = \bar{M}_k^r + i\bar{M}_k^i , \quad (5.10)$$

$$\bar{K}_k = \bar{K}_k^r + i\bar{K}_k^i , \quad (5.11)$$

$$\bar{U} = \bar{U}^r + i\bar{U}^i . \quad (5.12)$$

L'expression de la matrice de masse intervenant dans (5.9), en fonction de $\beta = \frac{2\pi k}{N}$ est donnée par

$$\bar{M}_k^r = \begin{bmatrix} M_{dd} + M_{gg} + \cos \beta (M_{dg} + M_{gd}) & M_{di} + \cos \beta M_{gi} \\ M_{id} + \cos \beta M_{ig} & M_{ii} \end{bmatrix} , \quad (5.13)$$

$$\bar{M}_k^i = \begin{bmatrix} \sin \beta (M_{dg} - M_{gd}) & -\sin \beta M_{gi} \\ \sin \beta M_{ig} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

La matrice de raideur s'écrit de manière analogue. Dans la suite, nous emploierons systématiquement un formalisme réel et nous utiliserons les définitions suivantes pour \bar{M}_k et \bar{K}_k quand $k \neq 0$ et $k \neq N/2$:

$$\bar{M}_k = \begin{bmatrix} \bar{M}_k^r & -\bar{M}_k^i \\ \bar{M}_k^i & \bar{M}_k^r \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_k = \begin{bmatrix} \bar{K}_k^r & -\bar{K}_k^i \\ \bar{K}_k^i & \bar{K}_k^r \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Pour résumer, nous dirons qu'il est possible d'accéder aux modes d'une structure à symétrie cyclique à partir de la modélisation d'un seul secteur de base, ce qui réduit fortement la taille du problème aux valeurs propres à résoudre.

5.2.3 Application à une roue aubagée

La méthode présentée ci-dessus est appliquée à la roue de 47 aubes montrée sur la figure 5.1. Les noeuds situés au niveau de l'alésage (les plus proches de l'axe de rotation) ont été fixés, et aucun déplacement relatif n'est autorisé à la jonction aube-disque. Dans ces conditions, on a calculé les six premières fréquences propres à 5000 tr/min pour tous les nombres de diamètres. Les résultats sont rassemblés sur la figure 5.3. L'influence de la souplesse du disque se manifeste clairement pour les faibles nombres de diamètres. En revanche, pour les grands nombres de diamètres, les fréquences se stabilisent à des valeurs proches de celles de l'aube seule fixée à son pied. Ceci est confirmé par le tableau 5.1 dans lequel sont comparées les fréquences propres issues du calcul en symétrie cyclique pour le plus grand nombre de diamètres avec celles obtenues pour l'aube seule et avec celles obtenues pour un secteur aube-disque dont les frontières sont bloquées. Cette dernière configuration offre une très bonne approximation des fréquences propres et peut donc être utilisée avantageusement pour reproduire le comportement de la roue complète lorsque celle-ci vibre selon un mode à fort nombre de diamètres.

Mode	23 diamètres	Secteur fixé		Aube seule	
1	4.09	4.09	0.0%	4.12	+ 0.7 %
2	14.19	14.17	- 0.1%	14.35	+ 1.1 %
3	15.27	15.26	- 0.1%	15.41	+ 0.9 %
4	23.00	22.93	- 0.3%	25.15	+ 9.3 %
5	33.68	33.68	0.0%	33.86	+ 0.5 %
6	38.21	38.21	0.0%	39.64	+ 3.7 %

TAB. 5.1 – Comparaison des fréquences propres obtenues par symétrie cyclique pour un nombre de diamètres élevé et de celles obtenues en fixant les frontières du secteur et pour l'aube seule. $\Omega = 5000$ tours/min.

5.3 Réponse forcée d'une structure à symétrie cyclique

5.3.1 Méthode générale

De même que pour le calcul des modes propres, la réponse forcée d'une structure à symétrie cyclique peut être calculée sur un seul secteur à l'aide d'un formalisme complexe ou d'un formalisme

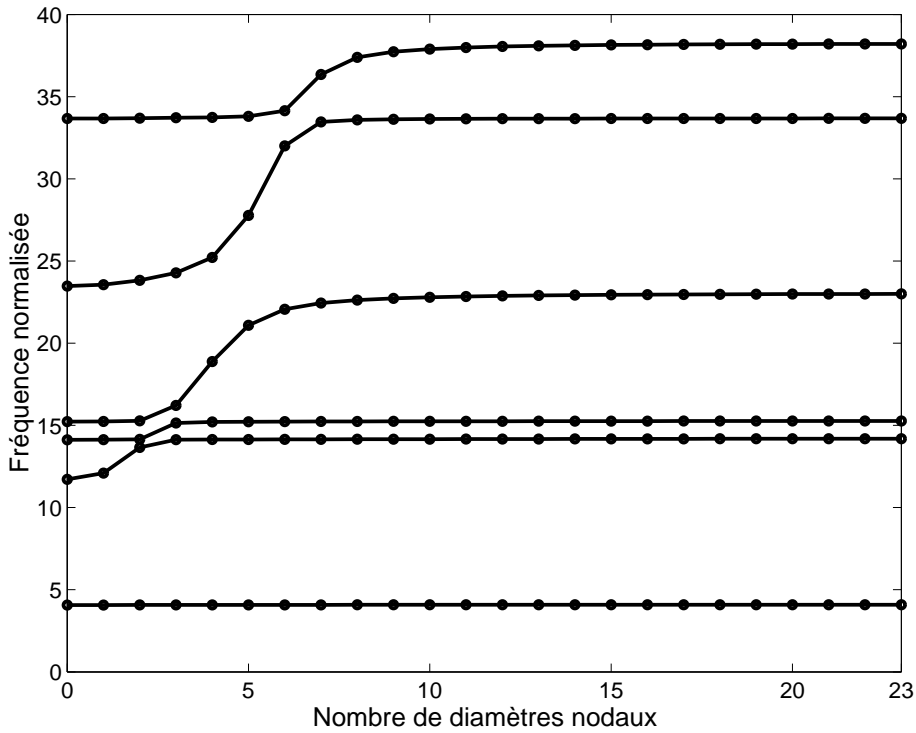


FIG. 5.3 – Fréquences propres de la roue aubagée pour $\Omega = 5000$ tr/min.

réel faisant intervenir des matrices de taille double quand les modes dégénérés sont excités. Nous optons ici pour la présentation du formalisme réel.

La structure est supposée linéaire dans ce paragraphe, ce qui permet d'utiliser le principe de superposition. Dans une première étape, les efforts appliqués sont décomposés à l'aide d'une transformation de Fourier spatiale selon le nombre de diamètres excités. On passe ainsi des grandeurs physiques \mathbf{F}_j , qui sont les forces appliquées sur chacun des secteurs à des grandeurs cycliques notées $\bar{\mathbf{F}}_k$, qui sont des coefficients de Fourier discrets :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{F}}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \\
 \bar{\mathbf{F}}_k^A &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cos \frac{k(j-1)2\pi}{N} \\
 \bar{\mathbf{F}}_k^B &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \sin \frac{k(j-1)2\pi}{N} \\
 \bar{\mathbf{F}}_{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \mathbf{F}_j .
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Le dernier coefficient n'existe que dans le cas où N est pair.

Dans une deuxième étape, on résout sur le secteur de référence les équations linéaires corres-

pondant à chaque nombre de diamètre k excité :

$$\begin{aligned}
k = 0 & \quad \bar{M}_0 \ddot{\bar{U}}_0 + \bar{K}_0 \bar{U}_0 = \bar{F}_0, \\
0 < k < \frac{N}{2} & \quad \begin{bmatrix} \bar{M}_k^r & -\bar{M}_k^i \\ \bar{M}_k^i & \bar{M}_k^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{U}}_k^A \\ \dot{\bar{U}}_k^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_k^r & -\bar{K}_k^i \\ \bar{K}_k^i & \bar{K}_k^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_k^A \\ \bar{U}_k^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_k^A \\ \bar{F}_k^B \end{bmatrix}, \\
k = \frac{N}{2} & \quad \bar{M}_{N/2} \ddot{\bar{U}}_{N/2} + \bar{K}_{N/2} \bar{U}_{N/2} = \bar{F}_{N/2}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Les matrices \bar{M}_k et \bar{K}_k sont définies dans les équations (5.13) et (5.14) et tiennent compte du déphasage inter-secteurs correspondant au nombre de diamètres k .

La dernière étape consiste à reconstituer les déplacements physiques sur chaque secteur à partir des déplacements obtenus pour chaque harmonique spatiale :

$$U_j = \bar{U}_0 + \sum_{k=1}^K \bar{U}_k^A \cos \frac{k(j-1)2\pi}{N} + \bar{U}_k^B \sin \frac{k(j-1)2\pi}{N} + (-1)^{j-1} \bar{U}_{N/2}. \tag{5.18}$$

Dans cette expression, le dernier terme n'existe que pour N pair et

$$K = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair,} \\ \frac{N-2}{2} & \text{si } N \text{ est pair.} \end{cases} \tag{5.19}$$

5.3.2 Application à une roue aubagée

Description de l'excitation

Nous nous intéressons dans cette partie au cas d'une roue aubagée tournant en aval d'un étage fixe de redresseurs. Les pressions aérodynamiques instationnaires s'exerçant sur les aubages peuvent être représentées sur le secteur de référence par le vecteur de forces nodales

$$\mathbf{F}_1(t) = \sum_{p=1}^{N_h} \mathbf{F}^{cp} \cos(pn\Omega t) - \mathbf{F}^{sp} \sin(pn\Omega t) \tag{5.20}$$

avec

- p le numéro de l'harmonique,
- N_h le nombre d'harmoniques retenues,
- n le nombre d'obstacles en amont de la roue aubagée,
- Ω la vitesse de rotation en rad/s.

Dans le cas où l'excitation tourne dans le sens de numérotation des secteurs, les efforts aérodynamiques sur le secteur j s'écrivent

$$\mathbf{F}_j(t) = \sum_{p=1}^{N_h} \mathbf{F}^{cp} \cos \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right] - \mathbf{F}^{sp} \sin \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right] \tag{5.21}$$

Modes excités

Chaque harmonique de l'excitation ne peut exciter que les modes ayant un nombre de diamètres bien particulier. Pour le montrer, considérons la p -ième harmonique de l'excitation donnée en (5.21)

$$\mathbf{F}_j^p(t) = \mathbf{F}^{cp} \cos \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right] - \mathbf{F}^{sp} \sin \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right], \tag{5.22}$$

et calculons les coefficients $\bar{\mathbf{F}}_k^p(t)$ à l'aide des relations (5.16). On a pour $k \neq 0$ et $k \neq N/2$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_k^{pA} - i\bar{\mathbf{F}}_k^{pB} &= \\ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}^{cp} \cos \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right] - \mathbf{F}^{sp} \sin \left[pn \left(\Omega t - \frac{2\pi(j-1)}{N} \right) \right] e^{-i\frac{k(j-1)2\pi}{N}}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Le développement des sinus et cosinus en exponentielles complexes donne

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_k^{pA} - i\bar{\mathbf{F}}_k^{pB} &= \frac{\mathbf{F}^{cp}}{N} \left[e^{-ipn\Omega t} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{(pn-k)(j-1)2\pi}{N}} + e^{ipn\Omega t} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn+k)(j-1)2\pi}{N}} \right] \\ &\quad - \frac{i\mathbf{F}^{sp}}{N} \left[e^{-ipn\Omega t} \sum_{j=1}^N e^{i\frac{(pn-k)(j-1)2\pi}{N}} - e^{ipn\Omega t} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn+k)(j-1)2\pi}{N}} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Plusieurs cas peuvent être distingués à ce stade :

Cas 1 : il existe q entier tel que $pn + k = qN$.

On a alors

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn+k)(j-1)2\pi}{N}} = N. \quad (5.25)$$

$pn - k$ n'est pas multiple de N puisque nous avons supposé dans un premier temps que $k \neq 0$ et $k \neq N/2$. Il vient donc

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn-k)(j-1)2\pi}{N}} = 0, \quad (5.26)$$

car c'est la somme des N racines N -ièmes de l'unité. Ainsi

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{pA} - i\bar{\mathbf{F}}_k^{pB} = (\mathbf{F}^{cp} + i\mathbf{F}^{sp})e^{ipn\Omega t} \quad (5.27)$$

ce qui donne

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{pA} = \mathbf{F}^{cp} \cos pn\Omega t - \mathbf{F}^{sp} \sin pn\Omega t \quad (5.28)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{pB} = -\mathbf{F}^{cp} \sin pn\Omega t - \mathbf{F}^{sp} \cos pn\Omega t \quad (5.29)$$

Cas 2 : il existe q entier tel que $pn - k = qN$.

Dans ce cas,

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn+k)(j-1)2\pi}{N}} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(pn-k)(j-1)2\pi}{N}} = N, \quad (5.30)$$

ce qui conduit à

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{pA} = \mathbf{F}^{cp} \cos pn\Omega t - \mathbf{F}^{sp} \sin pn\Omega t \quad (5.31)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{pB} = \mathbf{F}^{cp} \sin pn\Omega t + \mathbf{F}^{sp} \cos pn\Omega t \quad (5.32)$$

Autres cas : Toutes les sommes sont nulles dans (5.24), ce qui conduit à $\bar{\mathbf{F}}_k^{pA} = \bar{\mathbf{F}}_k^{pB} = \mathbf{0}$.

On montre de même que $\bar{\mathbf{F}}_0^p$ est non nul uniquement si il existe un entier q tel que $pn = qN$ et que dans ce cas

$$\bar{\mathbf{F}}_0^p = \mathbf{F}^{cp} \cos pn\Omega t - \mathbf{F}^{sp} \sin pn\Omega t = \mathbf{F}_1^p. \quad (5.33)$$

Enfin, $\bar{\mathbf{F}}_{N/2}^p$ est non nul uniquement si il existe un entier q tel que $pn = \frac{N}{2} + qN$ et on a alors

$$\bar{\mathbf{F}}_{N/2}^p = \mathbf{F}^{cp} \cos pn\Omega t - \mathbf{F}^{sp} \sin pn\Omega t = \mathbf{F}_1^p. \quad (5.34)$$

En résumé, l'harmonique p n'excite qu'une seule classe de modes, dont le nombre de diamètres k est donné par

$$k = -pn + qN \quad (5.35)$$

$$\text{ou } k = pn - qN, \quad (5.36)$$

de manière à respecter la contrainte $0 \leq k \leq N/2$. Ainsi, on peut représenter comme montré sur la figure 5.4 l'évolution du nombre de diamètres excité en fonction du produit pn . Les expressions correspondantes des coefficients de Fourier sont données dans les équations (5.28), (5.29) et (5.31) à (5.34). Les autres nombres de diamètres ne participent pas à la solution puisque les coefficients de Fourier associés sont nuls.

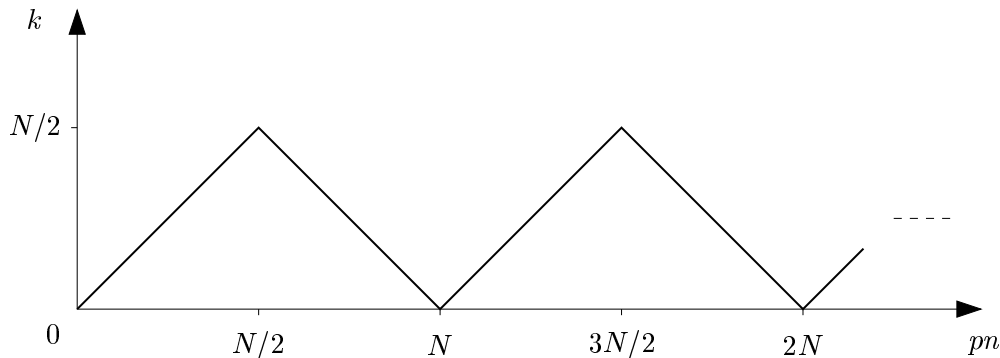


FIG. 5.4 – Nombre de diamètres des modes excités par l'harmonique p d'une excitation à n diamètres.

Si l'on prend l'exemple d'une roue aubagée de $N = 47$ aubes tournant en aval de $n = 29$ redresseurs et que l'on s'intéresse à sa réponse à l'harmonique $p = 3$ de l'excitation aérodynamique, la figure 5.4 donne directement

$$k = 2N - pn = 7 \quad (5.37)$$

puisque $3N/2 \leq pn \leq 2N$. Les modes à $k = 7$ diamètres sont donc ceux intervenant dans la solution.

5.3.3 Cas non-linéaire

Le principe de superposition utilisé précédemment n'est plus valable quand la structure est non-linéaire. Il n'est plus possible de calculer séparément les réponses à chacune des harmoniques

de l'excitation et de les combiner pour trouver la réponse juste. La réponse à l'ensemble des harmoniques doit être calculée en une seule résolution non-linéaire. La question qui se pose alors est : cette unique résolution peut-elle être conduite sur un seul secteur, ou doit-on mener le calcul sur la structure complète ?

Un premier élément de réponse nous est apporté par le travail de Pierre et Shaw [112]. Ils se sont intéressés au cas d'une non-linéarité distribuée de façon non symétrique dans une structure par ailleurs parfaitement symétrique. Autrement dit, la non-linéarité est la seule source de dissymétrie. Les résultats montrent des phénomènes de localisation semblables à ceux observés sur les disques aubagés désaccordés. Ce type de réponse ne peut pas être reproduit à partir d'un seul secteur. Si l'on souhaite calculer la réponse d'une structure à symétrie cyclique présentant des non-linéarités, il semble donc nécessaire que les paramètres intervenant dans ces non-linéarités soient les mêmes pour tous les secteurs.

Pour que la réponse obtenue sur un seul secteur puisse être étendue à l'ensemble de la structure, il faut pouvoir écrire une relation de propagation telle que

$$\mathbf{U}_j(t) = \mathbf{U}_1(t + (j - 1)\delta t), \quad (5.38)$$

où \mathbf{U}_j est la réponse en déplacement du j -ième secteur et δt représente le déphasage temporel entre deux secteurs adjacents. Nous avons fait l'hypothèse que le secteur numéro 1 était choisi pour effectuer les calculs et servait ainsi de référence. Poudou et Pierre [113] ont supposé que la relation (5.38) était vérifiée, ce qui leur a permis de calculer la réponse forcée d'un disque aubagé amorti par des frotteurs inter-aubes, à partir d'un seul secteur.

Petrov [109] s'est penché sur le cas des structures à symétrie cyclique présentant des non-linéarités aux propriétés elles aussi symétriques. Il a de plus supposé que les forces d'excitation vérifiaient une relation de propagation :

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{F}_1(t + (j - 1)\delta t). \quad (5.39)$$

D'après l'auteur, cette dernière hypothèse permet d'assurer que (5.38) est vérifiée et rend ainsi le calcul de la réponse à partir d'un seul secteur possible. Dans le même article, cette méthode est validée pour plusieurs types de non-linéarités en montrant que le calcul à partir d'un seul secteur donne le même résultat que le calcul avec le modèle complet.

Les résultats obtenus par Petrov sont importants pour notre étude. En effet, si on suppose que la modélisation et les paramètres représentant le contact en pied d'aube sont les mêmes pour tous les secteurs (même coefficient de frottement, même nombre d'éléments de contact, ...), alors la condition de cyclicité de la non-linéarité est remplie. De plus, les forces d'excitation aérodynamiques typiques des disques aubagés présentées dans le paragraphe 5.3.2 vérifient la relation (5.39). Il est donc possible sous ces deux hypothèses de calculer la réponse forcée d'une roue aubagée tenant compte du frottement en pied d'aube à partir d'une analyse sur un seul secteur de référence.

5.4 Méthode proposée

Cette partie montre les adaptations qu'il est nécessaire d'effectuer dans la DLFT pour prendre en compte la symétrie cyclique. On se place dans l'hypothèse où les déplacements et les forces d'excitation vérifient les relations de propagation (5.38) et (5.39).

5.4.1 Théorie

La formulation présentée dans ce paragraphe s'appuie sur les travaux de Poudou et Pierre [113] et de ceux de Petrov [109]. Poudou et Pierre ont utilisé un formalisme complexe pour prendre en compte la symétrie cyclique. Petrov a lui présenté dans son article les deux formulations, complexe et réelle. Nous avons choisi d'utiliser le formalisme réel.

Equations du secteur de référence dans le domaine fréquentiel

Reprenons les équations du mouvement (5.5) du secteur de référence et ajoutons les contributions de l'amortissement matériau (représenté par la matrice C), des efforts non-linéaires \mathbf{F}_{nl} et des forces d'excitation \mathbf{F}_{ex} :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} + \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ex} . \quad (5.40)$$

Le déplacement étant supposé périodique, il peut être représenté par la série de Fourier tronquée

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^0 + \sum_{p=1}^{N_h} \mathbf{U}^{cp} \cos(p\omega t) + \mathbf{U}^{sp} \sin(p\omega t) . \quad (5.41)$$

p ne désigne plus ici les harmoniques de l'excitation, mais les harmoniques retenues pour la résolution. Toutefois, dans les cas classiques, l'harmonique $p = 1$ correspond au fondamental de l'excitation. Pour la simplicité de l'exposé, on a supposé que l'on retenait les N_h premières harmoniques dans l'ordre, mais la méthode reste valable si certaines harmoniques ne sont pas retenues. Le vecteur multiharmonique du déplacement s'écrit

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^0 \\ \mathbf{U}^{c1} \\ \mathbf{U}^{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{cN_h} \\ \mathbf{U}^{sN_h} \end{bmatrix} . \quad (5.42)$$

Avec des définitions analogues pour les vecteurs multiharmoniques $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{ex}$, l'équation (5.40) s'écrit dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\Lambda \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\mathbf{F}}_{ex} , \quad (5.43)$$

où la matrice de raideur dynamique Λ est diagonale par blocs :

$$\Lambda = \text{diag}[\Lambda^0, \Lambda^1, \dots, \Lambda^{N_h}] , \quad (5.44)$$

avec

$$\Lambda^0 = K \quad \text{et} \quad \Lambda^p = \begin{bmatrix} K - (p\omega)^2 M & p\omega C \\ -p\omega C & K - (p\omega)^2 M \end{bmatrix} . \quad (5.45)$$

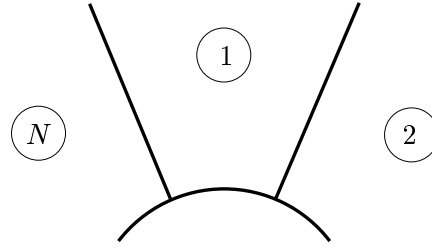


FIG. 5.5 – Numérotation des secteurs.

Prise en compte de la symétrie cyclique dans le domaine fréquentiel

Afin de prendre en compte la condition limite de symétrie cyclique s'exerçant sur les frontières du secteur choisi pour référence, les degrés de liberté de droite (indice d), de gauche (indice g) et internes (indice i) sont distingués :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_g \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

La même partition est réalisée sur les coefficients de Fourier :

$$\mathbf{U}^{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{cp} \\ \mathbf{U}_g^{cp} \\ \mathbf{U}_i^{cp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^{sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{sp} \\ \mathbf{U}_g^{sp} \\ \mathbf{U}_i^{sp} \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

En supposant que les secteurs sont numérotés comme sur la figure 5.5 avec le secteur 1 choisi comme référence ($\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$), l'écriture de la relation (5.38) donne

$$\mathbf{U}_{2g}(t) = \mathbf{U}_{1g}(t + \delta t). \quad (5.48)$$

Comme $\mathbf{U}_{2g} = \mathbf{U}_{1d} = \mathbf{U}_d$, cette équation se transforme en

$$\mathbf{U}_d(t) = \mathbf{U}_g(t + \delta t), \quad (5.49)$$

puis en

$$\mathbf{U}_d(t) = \mathbf{U}_g^0 + \sum_{p=1}^{N_h} \mathbf{U}_g^{cp} \cos p\omega(t + \delta t) + \mathbf{U}_g^{sp} \sin p\omega(t + \delta t) \quad (5.50)$$

à l'aide de (5.41). Au final, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_d(t) = \mathbf{U}_g^0 + \sum_{p=1}^{N_h} & [\mathbf{U}_g^{cp} \cos p\omega\delta t + \mathbf{U}_g^{sp} \sin p\omega\delta t] \cos p\omega t \\ & + [-\mathbf{U}_g^{cp} \sin p\omega\delta t + \mathbf{U}_g^{sp} \cos p\omega\delta t] \sin p\omega t. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Les coefficients de Fourier de la frontière gauche et de la frontière droite sont donc liés par

$$\mathbf{U}_d^0 = \mathbf{U}_g^0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{cp} \\ \mathbf{U}_d^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\omega\delta t \mathbf{I} & \sin p\omega\delta t \mathbf{I} \\ -\sin p\omega\delta t \mathbf{I} & \cos p\omega\delta t \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_g^{cp} \\ \mathbf{U}_g^{sp} \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

où I représente la matrice identité. En utilisant plutôt la relation inverse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_g^{cp} \\ \mathbf{U}_g^{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p\omega\delta t I & -\sin p\omega\delta t I \\ \sin p\omega\delta t I & \cos p\omega\delta t I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{cp} \\ \mathbf{U}_d^{sp} \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

de manière à éliminer comme en 5.2.2 les degrés de liberté gauche, il vient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^0 \\ \mathbf{U}_g^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{T_0} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{cp} \\ \mathbf{U}_g^{cp} \\ \mathbf{U}_i^{cp} \\ \mathbf{U}_d^{sp} \\ \mathbf{U}_g^{sp} \\ \mathbf{U}_i^{sp} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \cos p\omega\delta t I & 0 & -\sin p\omega\delta t I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \sin p\omega\delta t I & 0 & \cos p\omega\delta t I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{T_p} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d^{cp} \\ \mathbf{U}_i^{cp} \\ \mathbf{U}_d^{sp} \\ \mathbf{U}_i^{sp} \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

En assemblant les équations de ce type pour toutes les harmoniques, on obtient finalement

$$\tilde{\mathbf{U}} = T\tilde{\mathbf{U}}^*, \quad (5.55)$$

où $\tilde{\mathbf{U}}$ est le vecteur multiharmonique complet et $\tilde{\mathbf{U}}^*$ est un vecteur multiharmonique ne comprenant que les coefficients de Fourier relatifs aux degrés de liberté de la frontière droite et au degrés de liberté internes. T est une matrice rectangulaire formée de l'assemblage des matrices T_p :

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_{N_h} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

En prémultipliant par T^T l'équation (5.43), il vient

$$\Lambda^* \tilde{\mathbf{U}}^* + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}^* = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^*, \quad (5.57)$$

où $\Lambda^* = T^T \Lambda T$, $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}^* = T^T \tilde{\mathbf{F}}_{nl}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{ex}^* = T^T \tilde{\mathbf{F}}_{ex}$. De la même façon que en 5.2.2, les efforts exercés par les secteurs adjacents sur le secteur de référence disparaissent des équations du mouvement : $T^T \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$. Le système non-linéaire à résoudre (5.57) représente le comportement de la structure complète avec N fois moins de degrés de liberté.

La matrice de raideur dynamique Λ^* a une structure diagonale par blocs :

$$\Lambda^* = \text{diag}[\Lambda^{*0}, \Lambda^{*1}, \dots, \Lambda^{*N_h}]. \quad (5.58)$$

On vérifie que chaque bloc peut se mettre sous la forme

$$\Lambda^{*p} = \bar{K}_{k(p)} - (p\omega)^2 \bar{M}_{k(p)} + p\omega \bar{C}'_{k(p)}, \quad (5.59)$$

où $k(p)$ désigne le nombre de diamètres correspondant à l'harmonique p . $\bar{M}_{k(p)}$ et $\bar{K}_{k(p)}$ sont les matrices de masse et de raideur définies dans les équations (5.13) à (5.15) et

$$\bar{C}'_{k(p)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{k(p)}^i & \bar{C}_{k(p)}^r \\ -\bar{C}_{k(p)}^r & \bar{C}_{k(p)}^i \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

5.4.2 Application à une roue aubagée

Reprenons l'exemple du disque aubagé de 47 aubes présenté sur la figure 5.1, en considérant les forces non-linéaires de contact à l'interface aube-disque. On suppose que les forces extérieures sont décrites par (5.20) et (5.21). Elles vérifient donc la relation (5.39) avec

$$\delta t = \frac{2\pi}{N\Omega}, \quad (5.61)$$

ce qui nous permet de mettre en oeuvre la méthode présentée ci-dessus.

Nous utilisons une approche semblable à celle déjà employée dans le chapitre 3 : l'aube et le secteur de disque sont considérés comme deux sous-structures sur lesquelles on applique une condensation de Craig et Bampton de manière à manipuler des matrices de masse et de raideur de taille limitée. Seulement, la prise en compte de la condition limite de symétrie cyclique sur le secteur de disque impose un traitement particulier. Le code Samcef propose deux types de superéléments dédiés à la symétrie cyclique et qui sont représentés sur la figure 5.6. Dans le premier cas (type I), les noeuds de frontière inter-secteurs sont retenus dans la base réduite, ce qui permet d'utiliser le superélément pour tous les nombres de diamètres. Le second superélément, au contraire, n'est valable que pour un nombre de diamètres donné. Le déphasage inter-secteur étant fixé, les degrés de liberté de l'une des frontières peuvent être éliminés, puis la condensation de Craig et Bampton permet de ne garder que les degrés de liberté utiles pour la prise en compte des non-linéarités.

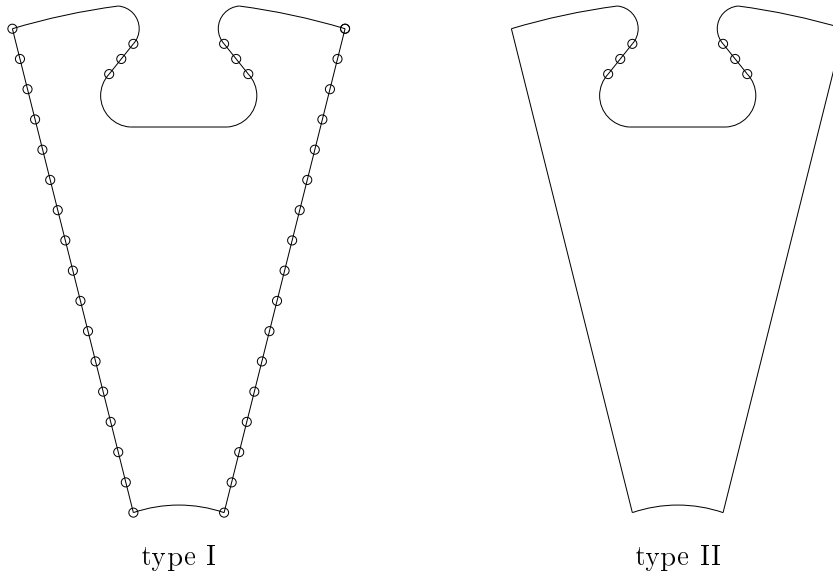


FIG. 5.6 – Superéléments dédiés à la symétrie cyclique proposés par Samcef. \circ : noeuds retenus dans la base réduite.

Pour cette étude, le second type de superélément a été choisi pour modéliser le secteur de disque et la méthode suivante a été utilisée : pour chaque harmonique p retenue pour la résolution, le nombre de diamètres k à considérer est déterminé à l'aide de la figure 5.4, puis les matrices réduites \bar{M}_k et \bar{K}_k de la sous-structure sont récupérées. Une fois que cette opération a été répétée pour toutes les harmoniques, on dispose des matrices nécessaires pour former la matrice de raideur dynamique du secteur de disque, Λ^* , qui est définie en (5.58) et (5.59). La matrice de raideur

dynamique de l'aube est obtenue de la même manière que dans le paragraphe 3.2.2. La résolution du problème de contact frottant est ensuite réalisée dans le domaine fréquentiel avec la DLFT.

Des exemples de résultats sont présentés sur les figures 5.7 et 5.8. Ils ont été obtenus pour une vitesse de rotation de 5000 tr/min et une excitation monoharmonique appliquée en tête de l'aube du secteur de référence, comme montré sur la figure 3.6. Il est bien entendu que cela correspond à une excitation sur la roue complète appliquée sur chacune des aubes et de manière déphasée, pour respecter (5.39). Les paramètres (coefficient de frottement, amortissement visqueux, niveau d'excitation ...) ont été choisis comme en 3.3. Trois harmoniques ont été retenues pour la résolution du problème non-linéaire : ordre 0, ordre 1 (correspondant à l'excitation et qui prédomine dans la solution) et ordre 3. On a supposé tour à tour que l'excitation comprenait 0, 2, 5 et 15 diamètres. Le tableau 5.2 montre pour chacun de ces 4 cas les nombres de diamètres à considérer pour les harmoniques 0, 1 et 3. Par exemple, pour une excitation à 15 diamètres, les matrices (\bar{M}_0, \bar{K}_0) , $(\bar{M}_{15}, \bar{K}_{15})$ et (\bar{M}_2, \bar{K}_2) sont utilisées.

Les résonances présentées dans les figures 5.7 et 5.8 correspondent aux modes 4 et 5 pour les nombres de diamètres 0, 2, 5 et 15. Il est intéressant de constater que dans le cas à 15 diamètres (d), les réponses sont proches en niveau et en allure de celles obtenues lorsque les frontières du secteur sont fixées (voir les figures 3.10 (d) et (e)). Ceci était prévisible puisque dans les modes à grand nombre de diamètres les déplacements sont concentrés au niveau des aubes et faibles au niveau du disque.

nombre de diamètres de l'excitation	harmonique p	nombre de diamètres k
0	0	0
	1	0
	3	0
2	0	0
	1	2
	3	6
5	0	0
	1	5
	3	15
15	0	0
	1	15
	3	2

TAB. 5.2 – Nombres de diamètres à considérer pour chacune des harmoniques.

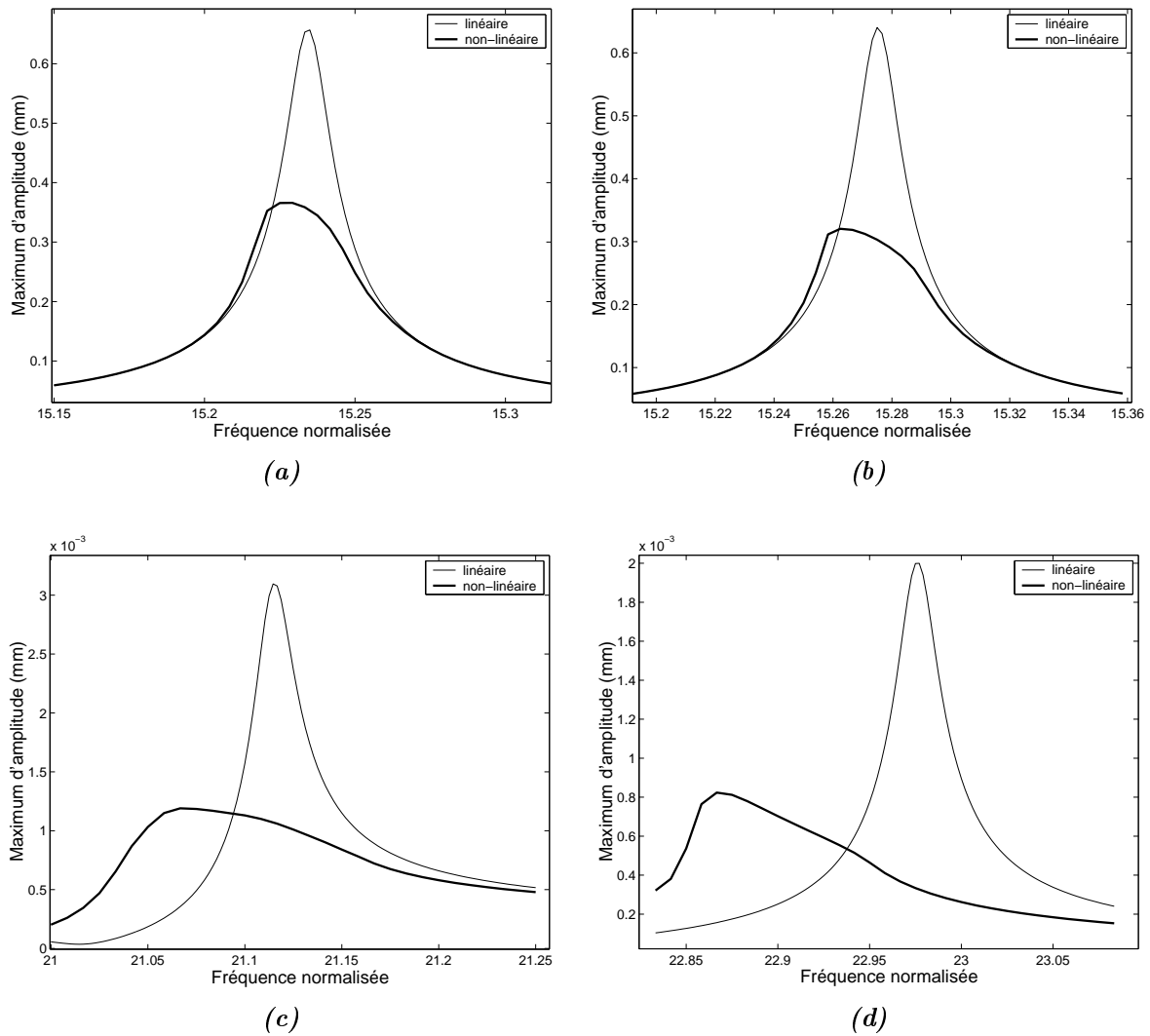


FIG. 5.7 – Réponses fréquentielles pour : (a) 4^e mode à 0 diamètres, (b) 4^e mode à 2 diamètres, (c) 4^e mode à 5 diamètres, (d) 4^e mode à 15 diamètres.

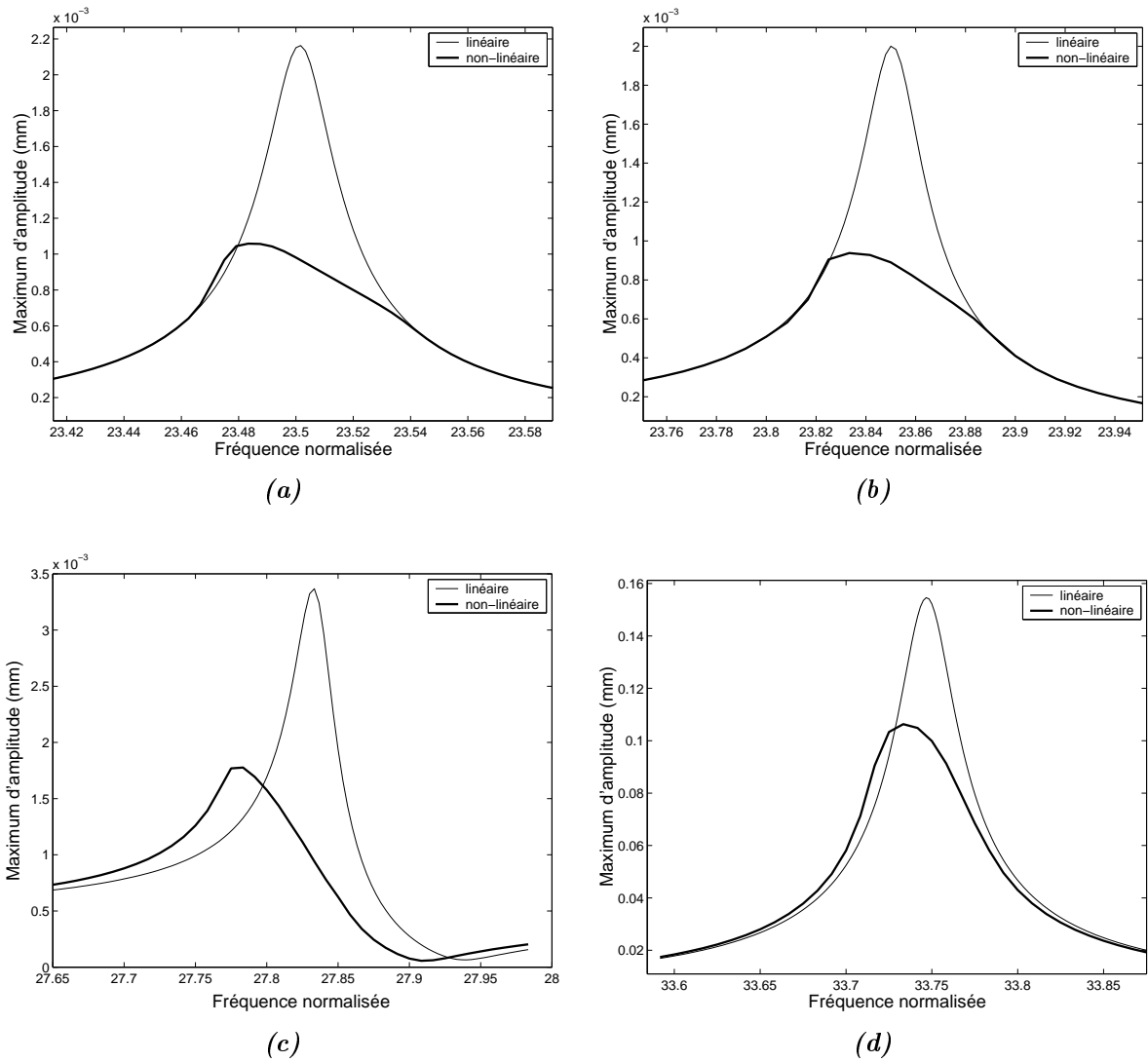


FIG. 5.8 – Réponses fréquentielles pour : (a) 5e mode à 0 diamètres, (b) 5e mode à 2 diamètres, (c) 5e mode à 5 diamètres, (d) 5e mode à 15 diamètres.

Conclusions

Nous avons montré dans ce chapitre comment calculer la réponse forcée non-linéaire d'une roue aubagée accordée à partir du modèle d'un seul secteur. La taille du problème non-linéaire à résoudre est ainsi divisée par le nombre N de secteurs du disque, ce qui amène une réduction très importante du temps de calcul. Ceci a été rendu possible grâce à la structure d'onde tournante de l'excitation.

Du fait de la non-linéarité du problème, les modes dont le diamètre correspond à celui de l'excitation ne sont pas les seuls à intervenir dans la réponse. Ainsi, lorsque le problème est formulé dans le domaine fréquentiel, il est nécessaire pour chaque harmonique de faire intervenir les matrices de masse et de raideur correspondant à un déphasage inter-secteurs spécifique. Pour les générer, nous avons utilisé un code éléments finis qui nous a permis d'imposer la condition limite de symétrie cyclique, de modéliser les effets liés à la rotation et de condenser le modèle du secteur sur les degrés de liberté nécessaires à la prise en compte de la non-linéarité.

Chapitre 6

Effet du frottement statique sur la dynamique des systèmes frottants

De nombreuses études expérimentales mettent en évidence que le coefficient de frottement dépend de la vitesse de glissement. Il est en particulier courant que pour les faibles vitesses, le coefficient de frottement dynamique décroisse rapidement depuis la valeur du coefficient de frottement statique. Nous avons ainsi essayé d'intégrer ce phénomène dans notre modélisation du contact en pied d'aube, mais l'utilisation d'un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique conduit à des problèmes de convergence dans les calculs fréquentiels. Nous mettons en effet en évidence dans ce chapitre que pour certaines lois de frottement, la réponse n'est plus forcément de même période que l'excitation et peut parfois n'être plus périodique du tout. Pour montrer cela, nous nous basons sur des petits modèles frottants à un ou deux degrés de libertés dont la réponse à une excitation harmonique est calculée par intégration temporelle. Les solutions obtenues par calcul fréquentiel, quand elles sont convergées, diffèrent parfois de celles issues de l'intégration temporelle. Leur stabilité peut être évaluée directement dans le domaine fréquentiel à l'aide de la méthode proposée en fin de chapitre.

6.1 Revue de résultats expérimentaux

Le comportement des systèmes mécaniques soumis à des frottements est très complexe à prévoir tant sont nombreux les paramètres entrant en jeu. La nature des surfaces en contact est bien sûr de première importance. Les efforts de frottement sont très dépendants des matériaux en contact, de la nature des couches superficielles et de la rugosité. La présence d'un "troisième corps", que ce soit un lubrifiant ou des particules d'usure joue également un rôle fondamental. Dans [63], Ibrahim a synthétisé de nombreux résultats expérimentaux et il ressort que le coefficient de frottement dépend aussi de la température et de l'effort normal. En outre, le coefficient de frottement statique semble augmenter avec la durée d'adhésion et l'humidité ([39] [45]) et le coefficient de frottement dynamique varie en fonction de la vitesse de glissement. C'est ce dernier point qui retient plus particulièrement notre attention ici.

Les articles de revue de Oden et Martins [102], de Ibrahim [63] ou encore de Berger [12] présentent une synthèse de nombreux résultats expérimentaux mettant en avant entre autres la dépendance de la force de frottement vis à vis du mouvement relatif. Les expériences menées concernent généralement des contacts métal-métal. Dans le cas du frottement sec, la charge est

supportée par les aspérités. Le contact se fait au niveau des couches superficielles (contaminants, molécules adsorbées, oxydes), c'est pourquoi on parle aussi de lubrification limite. La force de contact décroît en fonction de la vitesse relative dans la plupart des cas. Par contre, pour un contact lubrifié, la pente devient positive quand la vitesse relative devient suffisante pour créer un film de lubrifiant. Le coefficient de frottement est alors donné par la viscosité du lubrifiant. On peut distinguer trois phases, comme le montre la figure 6.1 : le régime de lubrification limite précédemment évoqué, le régime mixte dans lequel il reste des contacts solides intermittents et enfin le régime de lubrification complète où la charge est entièrement portée par le fluide. Dans le cas lubrifié, la différence peut être très importante entre la valeur maximale du coefficient de frottement (coefficient de frottement statique) et la valeur minimale.

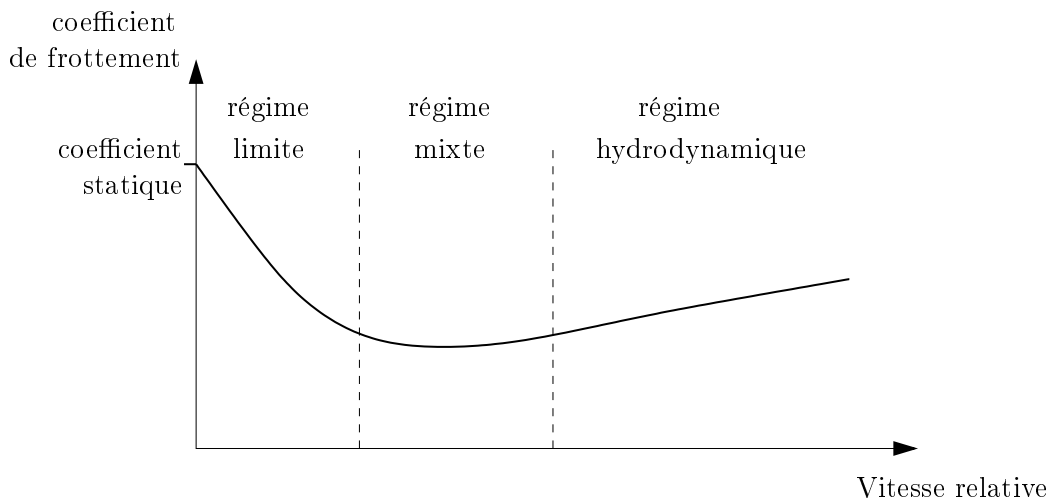


FIG. 6.1 – Courbe de Stribeck montrant les différents régimes de lubrification.

Pour le frottement sec qui nous intéresse ici, la pente de la courbe frottement-vitesse est généralement négative. Pour expliquer ce phénomène, Tolstoy [146] a mené une expérience intéressante. En amortissant fortement les vibrations dans la direction normale au contact, il a observé que cette décroissance n'existait plus et que la force de frottement prenait une valeur plus élevée. Ce procédé permet en outre de supprimer les vibrations de stick-slip. Un amortissement dans la direction tangentielle supprime également le stick-slip, mais la courbe friction-vitesse demeure décroissante. Par ailleurs, l'ajout d'une vibration dans la direction normale à l'aide d'excitateurs piézoélectriques conduit à une baisse de la force de friction. Cette baisse est d'autant plus forte que la fréquence s'approche de la fréquence propre du contact. Le mécanisme permettant d'expliquer la décroissance de la courbe friction-vitesse semble donc être le suivant : lorsque la vitesse augmente, l'amplitude des vibrations dans la direction normale augmente, ce qui provoque une diminution de la profondeur moyenne de pénétration et donc la baisse de la force de frottement.

Ibrahim *et al.* [65] ont mesuré les forces de contact et les vitesses relatives d'un système dynamique soumis à une excitation sinusoïdale. Pour ce contact acier-acier, ils ont trouvé que l'effort de friction était la somme d'une composante périodique de même période que l'excitation et d'une fluctuation aléatoire. Ainsi, pour la même valeur de vitesse relative, plusieurs valeurs du coefficient de frottement sont possibles comme le montre la figure 6.2 (a). Il est à noter que dans ces essais,

les durées d'adhésion très courtes. C'est pratiquement un régime de glissement permanent. Ainsi, il n'est pas possible de vérifier une éventuelle augmentation du coefficient de frottement statique avec la durée d'adhésion. Par contre, les résultats montrent une décroissance très nette de la force de frottement au début de chaque phase de glissement (figure 6.2 (b)).

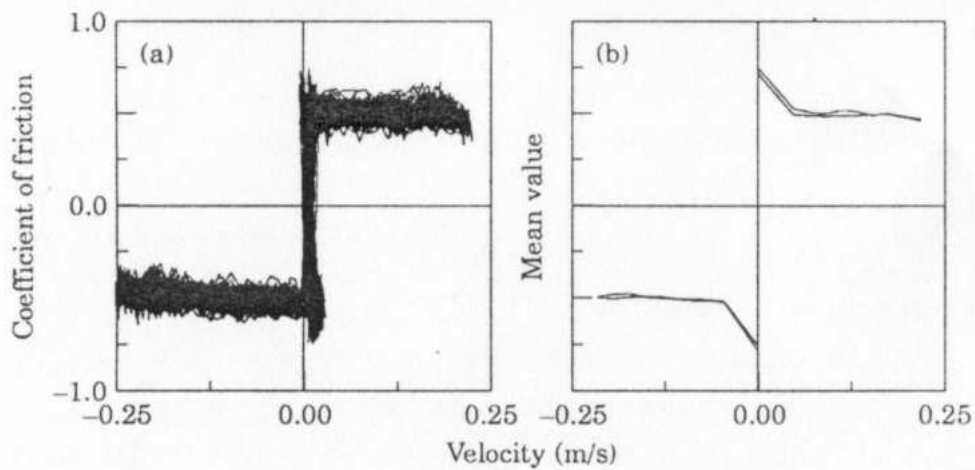


FIG. 6.2 – Courbes coefficient de frottement-vitesse relative : (a) courbe expérimentale, (b) coefficient de frottement moyen. (D'après [65].)

Les expériences rapportées dans les références [5] [63] [101] [102] [141] [149] montrent que la force de frottement enregistrée pendant la phase où l'accélération relative est positive est différente de celle enregistrée pendant la décélération. Les courbes friction-vitesse enregistrées présentent ainsi souvent des boucles comme c'est le cas sur la figure 6.3. Dans la majorité des cas, la branche d'accélération correspond à une force de frottement plus élevée [102] [149]. La courbe forme alors une boucle parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre. Pourtant, certains auteurs, dont Oancea et Laursen [101] ont trouvé des cas contraires. Une explication de ce phénomène a été proposée par Van De Velde et De Baets [149]. Ils se sont intéressés à la relation friction-vitesse pendant un cycle de stick-slip et ils ont montré qu'il était important de prendre en compte les variations de vitesse des deux structures en contact. Négliger la souplesse de la structure la plus rigide peut conduire à des courbes présentant des boucles parcourues dans le sens trigonométrique.

Les nombreuses expériences rapportées dans la littérature permettent de tirer les conclusions suivantes pour les contacts avec frottement sec :

- Le maximum de la courbe coefficient de frottement - vitesse de glissement est atteint pour des vitesses très faibles. On parle de coefficient de frottement statique pour désigner ce maximum.
- Lorsque la vitesse de glissement augmente, le coefficient de frottement commence généralement par baisser rapidement, puis il se stabilise et peut enfin augmenter pour des vitesses élevées.
- Le coefficient de frottement dynamique n'est pas une fonction directe de la vitesse de glissement puisque les branches obtenues en accélération et en décélération sont en général distinctes.

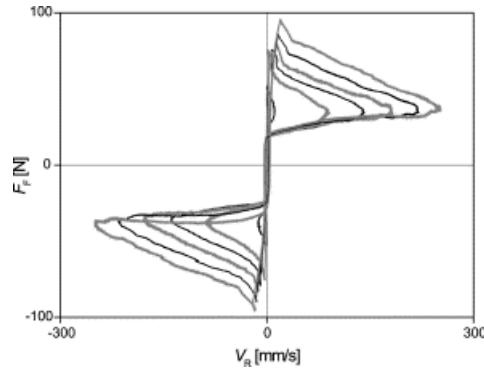


FIG. 6.3 – Famille de courbes force de frottement-vitesse relative. (D’après [141].)

Cependant, de nombreux auteurs insistent sur l’extrême précaution nécessaire à la conduite des mesures tant sont nombreux les paramètres susceptibles de venir perturber les résultats. La dispersion des résultats est de toute façon souvent importante [5] [65].

6.2 Revue de quelques lois de frottement

La loi la plus simple et la plus couramment utilisée en mécanique du contact est la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement statique égal au coefficient de frottement dynamique (figure 6.4 (a)). La force de frottement est alors proportionnelle à la fonction signe. La discontinuité en 0 peut être levée afin de faciliter les calculs numériques en utilisant des fonctions approchant la fonction signe comme par exemple erf, tangente hyperbolique, ou arc tangente [92]. Seulement, une telle loi de frottement ne permet pas de reproduire le mouvement de stick-slip tel qu’il est rapporté dans de nombreuses expériences. Le stick-slip est une oscillation auto-entretenu présentant une succession de cycles de glissement-adhésion. Il est la source par exemple du son des instruments à cordes frottées, mais il peut aussi apparaître dans les systèmes de freinage entre autres. Le modèle le plus largement utilisé pour l’étude du stick-slip est montré par la figure 6.5. L’équation du système est

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_c = 0, \quad (6.1)$$

où F_c est la force de frottement. La vitesse du dispositif d’entraînement est dans la plupart des études choisie constante. On la note ici V_0 . La vitesse relative entre les deux corps est donnée par $V_r = \dot{x} - V_0$. La charge normale constante est notée N et le coefficient de frottement μ . Pendant la phase de glissement, la force de frottement est donnée par

$$F_c = \text{signe}(V_r)N\mu(V_r, \dot{V}_r, \dots). \quad (6.2)$$

Il est nécessaire d’enrichir la loi de frottement pour reproduire précisément des phénomènes tels que le stick-slip. Gao *et al.* [46] rappellent que la dynamique du système est notoirement influencée par le fait que le coefficient de frottement dynamique est dépendant de la vitesse de glissement et par le fait que le coefficient de frottement statique augmente avec le temps d’adhésion. Toutes les lois données dans les figures 6.4(b), 6.6 et 6.7 sont susceptibles pour certains réglages des paramètres de la loi de frottement et des paramètres du système masse-ressort-amortisseur de produire des oscillations de stick-slip. Dans le cas où le coefficient de frottement dynamique est constant (figure

6.4), le point d'équilibre où la masse est immobile est stable. La force de frottement est alors égale à la force du ressort. Ce point d'équilibre peut être rendu instable si la caractéristique friction-vitesse présente une pente négative, c'est à dire

$$\frac{\partial F_c}{\partial V_r} < 0. \quad (6.3)$$

Le système pompe l'énergie apportée par le mécanisme d'entraînement. L'instabilité est bornée par la non-linéarité elle-même et un cycle limite de stick-slip s'établit.

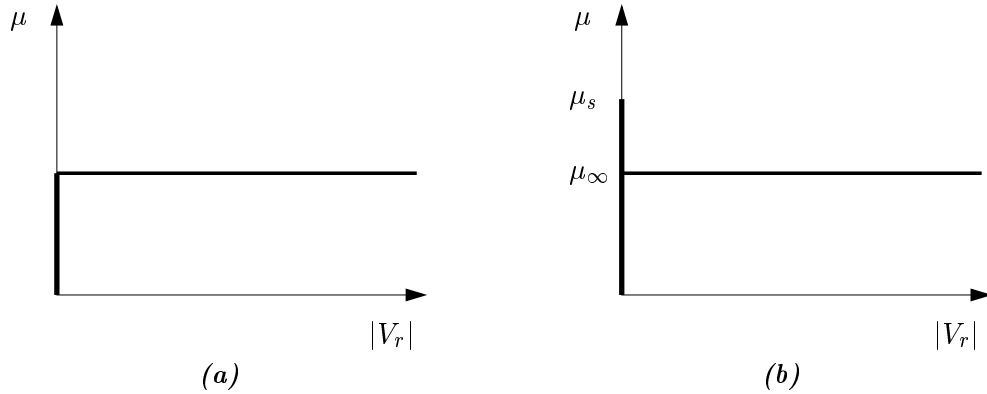


FIG. 6.4 – La loi de Coulomb : coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

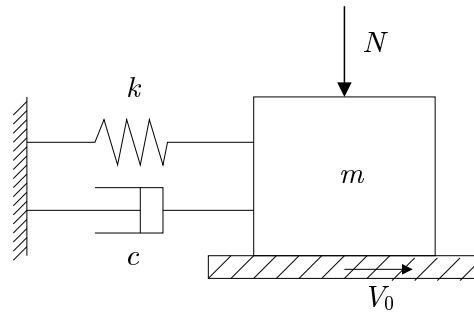


FIG. 6.5 – Oscillateur à un degré de liberté entraîné par la base.

Ainsi, le choix de la relation force de frottement - vitesse relative est capital pour l'étude du stick-slip. Hinrichs *et al.* [60] ont entre autres utilisé la loi de frottement telle que formulée par Coulomb, présentant un coefficient de frottement statique plus grand que le coefficient de frottement dynamique figure 6.4(b). Il est aussi courant ([102], [150], [46]) d'utiliser une relation affine entre la vitesse et la force de frottement (figures 6.6 (a) et (b)) ou affine par morceaux (figure 6.6(c)) comme l'ont fait Berger *et al.* [13]. La décroissance de la force de frottement est souvent modélisée par une exponentielle ([2], figure 6.7(a)) :

$$\mu(V_r) = \mu_\infty + (\mu_s - \mu_\infty)e^{-\alpha|V_r|}. \quad (6.4)$$

μ_s désigne le coefficient de frottement statique et μ_∞ la limite du coefficient de frottement quand la vitesse de glissement tend vers l'infini. On trouve aussi dans la littérature des relations permettant

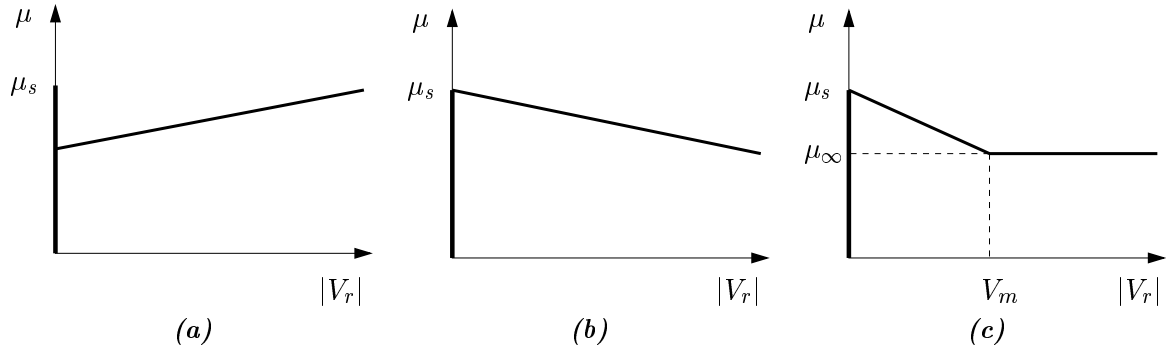


FIG. 6.6 – Coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

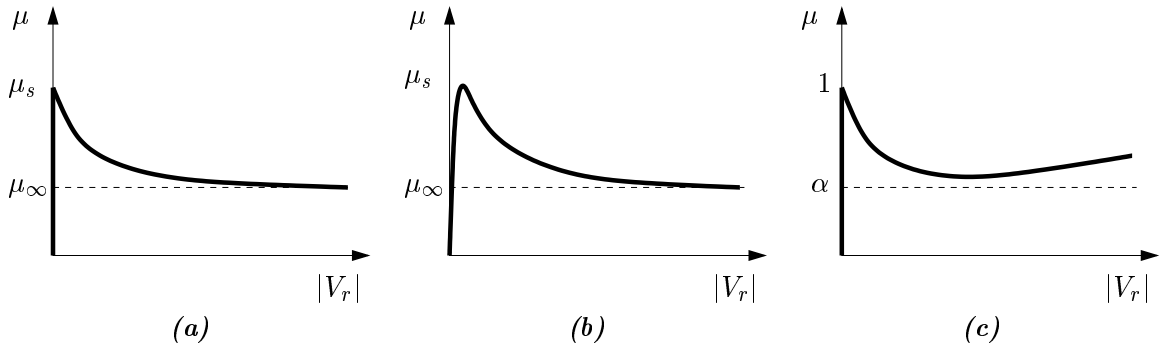


FIG. 6.7 – Coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

de rendre compte de l'augmentation de la force de frottement pour les hautes vitesses (figure 6.7(c)). Cela se traduit par l'ajout d'un terme quadratique dans [44], [60], [158] :

$$\mu(V_r) = \frac{1 - \alpha}{1 + \gamma|V_r|} + \alpha + \beta V_r^2, \quad (6.5)$$

ou cubique dans [64], [82] :

$$\mu(V_r) = \mu_s(1 - \alpha|V_r| + \beta|V_r|^3). \quad (6.6)$$

On peut également noter les lois où la force de frottement s'exprime comme une fonction continue et dérivable de la vitesse et dont la figure 6.7(b) montre un exemple. Bengisu et Akay [9] se sont servis de l'expression

$$\mu(V_r) = (1 - e^{-\beta|V_r|}) \left[\mu_\infty + (\mu_s - \mu_\infty)e^{-\alpha|V_r|} \right], \quad (6.7)$$

tandis que Feeny et Moon [36] ont proposé

$$\mu(V_r) = \left(\mu_\infty + \frac{\mu_s - \mu_\infty}{\cosh(\beta|V_r|)} \right) \tanh(\alpha|V_r|). \quad (6.8)$$

Cette régularité en $V_r = 0$ peut permettre un traitement numérique plus aisé et trouve en outre une justification expérimentale. En effet elle permet de simuler le déplacement relatif, préliminaire au glissement proprement dit, dû aux déformations élastoplastiques de l'interface.

Le coefficient de frottement statique dépend du temps d'adhésion. A partir de la valeur du coefficient dynamique à vitesse nulle, il augmente très rapidement au début et tend vers une

asymptote pour les longues périodes d'adhérence [45]. Leine *et al.* [79] ont utilisé la loi exponentielle suivante pour modéliser ce phénomène :

$$\mu_s(t_{stick}) = \mu_d(V_r = 0) \left(1 + (\beta - 1) \left(1 - e^{-\alpha t_{stick}} \right) \right), \quad (6.9)$$

où t_{stick} désigne la durée d'adhésion, $\mu_d(V_r = 0)$ désigne la valeur limite du coefficient de frottement dynamique quand la vitesse de glissement tend vers 0 et β est le rapport entre la valeur de l'asymptote et la valeur initiale ($t_{stick} = 0$).

On a vu dans la section précédente que la force de frottement n'était pas une simple fonction de la vitesse de glissement instantanée, avec pour preuve que les mesures effectuées pendant les cycles de stick-slip conduisent à des branches d'accélération et de décélération distinctes dans le diagramme force-vitesse. Ceci semble être un phénomène dynamique transitoire puisque les expériences rapportées dans [100] montrent que quand la vitesse de glissement est stabilisée, alors la force de frottement prend toujours la même valeur. Ceci suggère d'utiliser une loi force de frottement - vitesse présentant la même "colonne vertébrale" que les lois précédentes. Cette courbe de référence représente la valeur de la force de frottement quand la vitesse est stabilisée. Les perturbations de la vitesse de glissement amènent la force de frottement à s'écarter de la courbe de référence. Si la vitesse se stabilise, la force de frottement rejoint progressivement la valeur de référence. Pour reproduire de tels résultats, Rice et Ruina [122] ont ajouté une dépendance envers de nouvelles variables α_i appelées variables d'état :

$$\mu(V_r, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^t. \quad (6.10)$$

L'évolution de ces variables d'état est gérée par des équations du type

$$\dot{\alpha}_i = g_i(V_r, \boldsymbol{\alpha}). \quad (6.11)$$

Ce type de modèle de frottement qui introduit donc un "effet mémoire" a été utilisé par exemple par Feeny et Moon [36] et par Oancea et Laursen [100] [101].

Enfin, pour reproduire la dispersion relevée dans les mesures, certains auteurs ont utilisé des modèles stochastiques de frottement [60], [65]. Le plus simple donne le coefficient de frottement comme la somme d'une composante déterministe et d'une composante aléatoire suivant généralement une loi normale :

$$\mu(V_r) = \mu_d(V_r) + \mu_a(V_r). \quad (6.12)$$

Haessig et Friedland [54] ont introduit un modèle plus sophistiqué où le contact se fait par l'intermédiaire de "poils" souples aléatoirement répartis sur chacune des surfaces. Cette idée a été reprise dans [60].

6.3 Modèle à un degré de liberté

On a vu que dans le cadre de l'étude des oscillations auto-entretenues, les modèles de frottement utilisés visent généralement à tirer parti au mieux des mesures expérimentales. Ceci est capital puisque les phénomènes à simuler, notamment l'instabilité de stick-slip, sont largement influencés par la loi choisie. En revanche pour l'étude de la réponse forcée des systèmes avec frottement, la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement constant est quasi systématiquement choisie.

D'autres lois sont parfois utilisées, mais seulement dans de très petits modèles comme le système à un degré de liberté étudié dans cette section ou le système à "un degré de liberté et demi" qui est l'objet de la section suivante.

On s'intéresse ici à la réponse forcée du modèle frottant le plus simple. Il est schématisé sur la figure 6.8. L'équation du mouvement est donnée par

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e + F_c, \quad (6.13)$$

où F_c désigne la force de contact tangentielle. Seulement la première harmonique de la force extérieure F_e est retenue :

$$F_e = F_0 \cos(\omega t). \quad (6.14)$$

En 1930, Den Hartog [30] a établi la solution analytique du problème en prenant un coefficient de frottement constant et en se focalisant sur la solution présentant deux arrêts par cycle. Shaw [131] a présenté une extension de ces travaux en utilisant un coefficient de frottement statique plus grand que le coefficient de frottement dynamique (voir la figure 6.4(b)). En outre, il a mené une étude de la stabilité des régimes permanents périodiques trouvés en traitant notamment le cas où l'amortissement visqueux est négatif, ce qui peut reproduire par exemple un couplage aéroélastique. Natsavias [99] a étudié la stabilité d'un système à un degré de liberté linéaire par morceaux où l'amortissement visqueux, la raideur, et l'amortissement constant (frottement) sont susceptibles de changer avec le signe de la vitesse. Dans [101], Oancea et Laursen ont utilisé une loi de frottement avec variable d'état pour approcher les résultats expérimentaux.

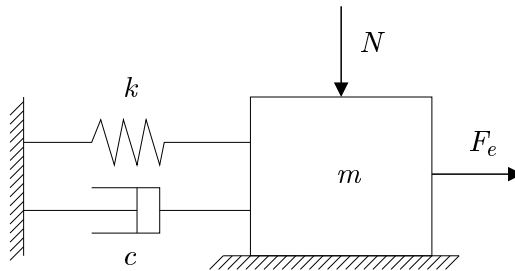


FIG. 6.8 – Oscillateur à un degré de liberté avec frottement et excitation harmonique.

6.3.1 Méthode de calcul

On utilise ici une intégration temporelle explicite à pas de temps fixe. On note h ce pas de temps. La passage de l'instant n à l'instant $n + 1$ se fait par les formules du schéma centré :

$$\dot{x}^{n+1/2} = \dot{x}^{n-1/2} + h\ddot{x}^n, \quad (6.15)$$

$$x^{n+1} = x^n + h\dot{x}^{n+1/2}, \quad (6.16)$$

et l'équation du mouvement écrite à l'instant n :

$$m\ddot{x}^n + c\dot{x}^{n-1/2} + kx^n = F_e^n + F_c^n. \quad (6.17)$$

Deux états sont possibles pour le système : adhérence ou glissement. La gestion des transitions entre ces deux états s'effectue grâce à une méthode de prédiction-corrrection décrite ci-dessous.

Cas où la masse est en adhérence

- Phase de prédiction

La masse avait une vitesse nulle $\dot{x}^{n-1/2} = 0$ et on suppose ici qu'elle reste adhérente. On a donc

$$\dot{x}_p^{n+1/2} = 0, \quad (6.18)$$

où l'indice p indique qu'il s'agit d'une prédiction. D'après la formule (6.15), on a

$$\ddot{x}_p^n = 0, \quad (6.19)$$

puis par l'équation du mouvement (6.17), on obtient la prédiction suivante pour la force de contact :

$$F_{cp}^n = kx^n - F_e^n. \quad (6.20)$$

- Phase de correction

A partir de cette force prédite, la force correcte s'obtient par :

$$F_c^n = \begin{cases} \mu_s N \text{signe}(F_{cp}^n) & \text{si } |F_{cp}^n| > \mu_s N. \quad \text{La masse devient glissante.} \\ F_{cp}^n & \text{si } |F_{cp}^n| \leq \mu_s N. \quad \text{La masse reste adhérente.} \end{cases}$$

Cas où la masse est glissante

- Phase de prédiction

On suppose cette fois que le glissement persiste. La force de contact doit alors être

$$F_{cp}^n = -\mu_d N \text{signe}(\dot{x}^{n-1/2}), \quad (6.21)$$

où μ_d désigne le coefficient de frottement dynamique. Il peut être choisi variable selon la vitesse de glissement connue $\dot{x}^{n-1/2}$. L'équation du mouvement (6.17) nous fournit l'accélération prédite

$$\ddot{x}_p^n = \frac{1}{m}(-c\dot{x}^{n-1/2} - kx^n + F_e^n + F_{cp}^n). \quad (6.22)$$

La vitesse de glissement prédite est alors

$$\dot{x}_p^{n+1/2} = \dot{x}^{n-1/2} + h\ddot{x}_p^n. \quad (6.23)$$

- Phase de correction

Le signe de $\dot{x}_p^{n+1/2}$ est comparé au signe de $\dot{x}^{n-1/2}$. Si le signe de la vitesse de glissement a changé, on décrète que le système passe à l'état adhérent. On peut objecter que parfois la masse peut changer de sens sans s'arrêter de glisser. Ceci est en effet susceptible d'arriver si le rapport entre la force de frottement statique et la force d'excitation est faible, ou si la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre du système masse-ressort. Nous prenons le parti de dire que dans ce cas, le système est adhérent pendant un pas de temps avant que la masse ne se mette à glisser dans l'autre sens. La vitesse corrigée est alors

$$\dot{x}^{n+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{signe}(\dot{x}_p^{n+1/2}) \neq \text{signe}(\dot{x}^{n-1/2}). \quad \text{La masse devient adhérente.} \\ \dot{x}_p^{n+1/2} & \text{si } \text{signe}(\dot{x}_p^{n+1/2}) = \text{signe}(\dot{x}^{n-1/2}). \quad \text{La masse reste glissante.} \end{cases}$$

La procédure de calcul est résumée dans la figure 6.9.

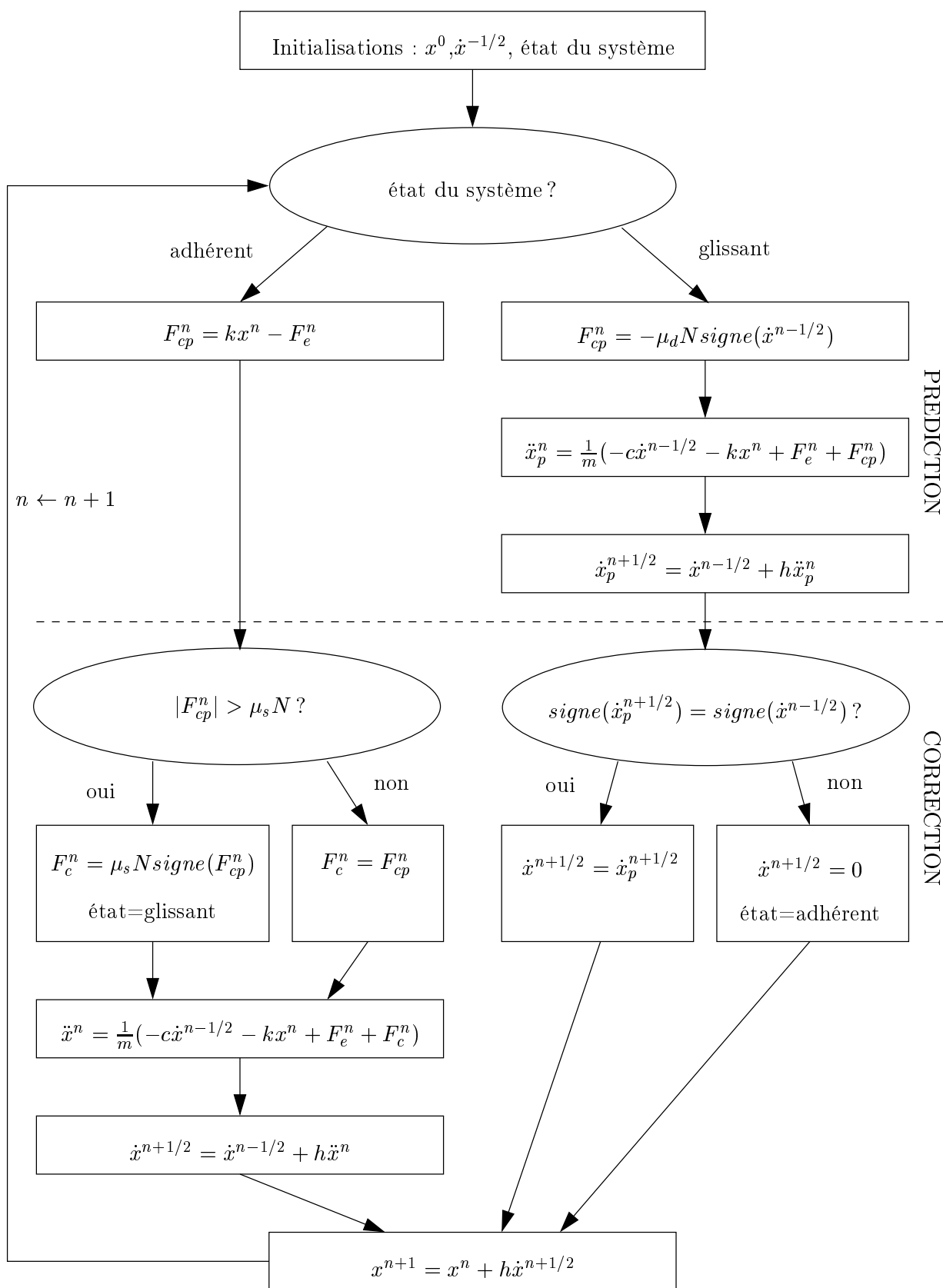


FIG. 6.9 – Schéma explicite de calcul du frottement.

6.3.2 Réponse libre

L'algorithme précédent a été utilisé et les résultats ont été comparés aux résultats analytiques de Shaw [131]. Les figures 6.10 et 6.11 présentent le mouvement obtenu pour une loi de frottement de Coulomb dans les cas où le coefficient de frottement est égal au coefficient de frottement dynamique, et dans le cas où il est plus grand. Les courbes obtenues analytiquement sont exactement confondues. Le mouvement s'arrête si au moment du changement de sens de la masse, la force du ressort est inférieure à $\mu_s N$.

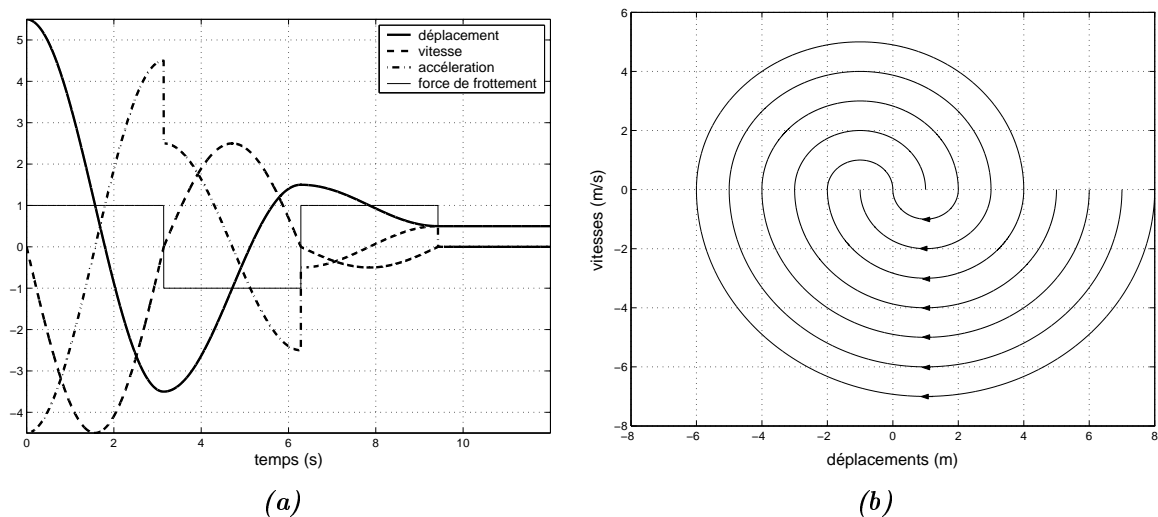


FIG. 6.10 – Réponse libre avec $m = 1$, $k = 1$, $c = 0$, $\mu = 1$, $N = 1$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

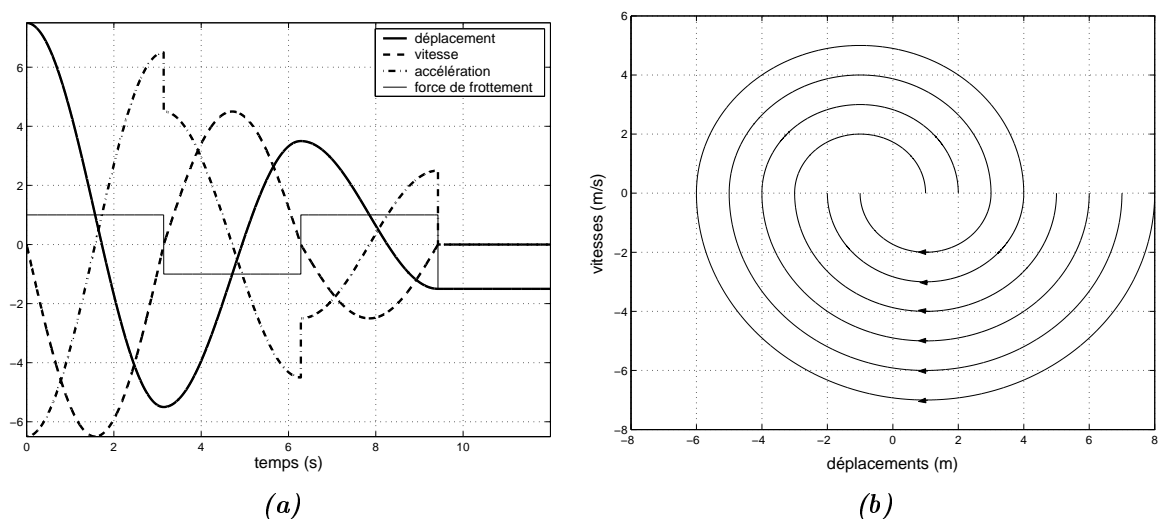


FIG. 6.11 – Réponse libre avec $m = 1$, $k = 1$, $c = 0$, $\mu_d = 1$, $\mu_s = 2$, $N = 1$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

6.3.3 Réponse forcée

La réponse forcée avec un coefficient de frottement constant a été étudiée de façon exhaustive par Hong et Liu [61]. Ils ont mené quantité de simulations en faisant varier la fréquence d'excitation et l'effort normal. Les régimes permanents trouvés sont toujours périodiques de même période T que l'excitation. Le nombre d'arrêts par cycle (nombre de phases d'adhérence) est très variable : 0,1,2,4,6 ... Il semble que le nombre d'arrêts ne cesse de croître au fur et à mesure que la fréquence d'excitation s'approche de 0. Le terme d'arrêt anormal est choisi pour qualifier les arrêts se produisant lorsque la masse n'est pas à une position extrême : à l'issue de la phase d'adhérence, le déplacement s'effectue dans le même sens que celui précédant l'arrêt. La réponse pendant le régime glissant se compose d'un terme sinusoïdal à la fréquence de l'excitation et d'un terme sinusoïdal amorti à la fréquence propre du système. C'est ce transitoire qui est responsable des arrêts anormaux.

On a choisi ici de prendre un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique. Les figures 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 montrent des réponses typiquement obtenues en faisant varier la fréquence d'excitation entre 0 et la fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ du système linéaire. Ce sont des réponses périodiques symétriques : $x(t + T/2) = -x(t)$.

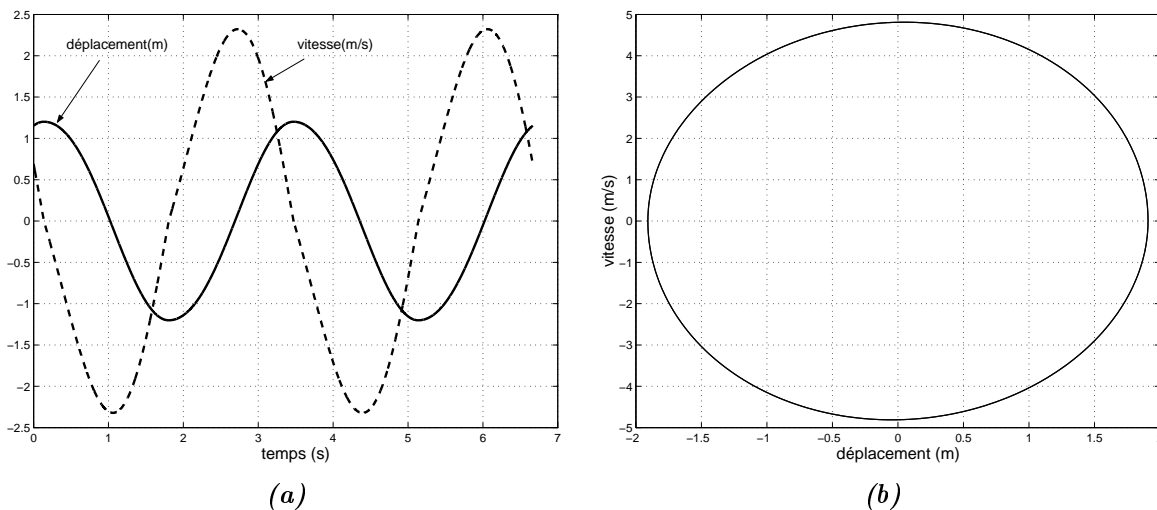


FIG. 6.12 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 8\text{N}$, $f = 0.3\text{Hz}$, $\mu_d N = 1\text{N}$, $\mu_s N = 2\text{N}$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

Les résultats présentés dans [60] section 2.5 ont été retrouvés, et notamment le régime permanent avec un arrêt par cycle présenté dans la figure 6.16. Ce n'est plus un mouvement symétrique. Leine et Van Campen [80] parlent de bifurcation discontinue rompant la symétrie pour qualifier le passage à un tel mouvement. Les bifurcations discontinues, aussi qualifiées de C-bifurcations dans [31], sont caractérisées par des sauts des multiplicateurs de Floquet. Ceux-ci sortent du cercle unité brusquement. D'autres réponses non symétriques sont possibles : la figure 6.17 montre un cas avec trois arrêts par cycle (deux arrêts "normaux" et un arrêt "anormal").

Les réponses présentées jusqu'alors étaient périodiques de même période que l'excitation. Nous avons trouvé un cas où ceci n'est plus vrai (cf figure 6.18). La réponse présente une alternance de

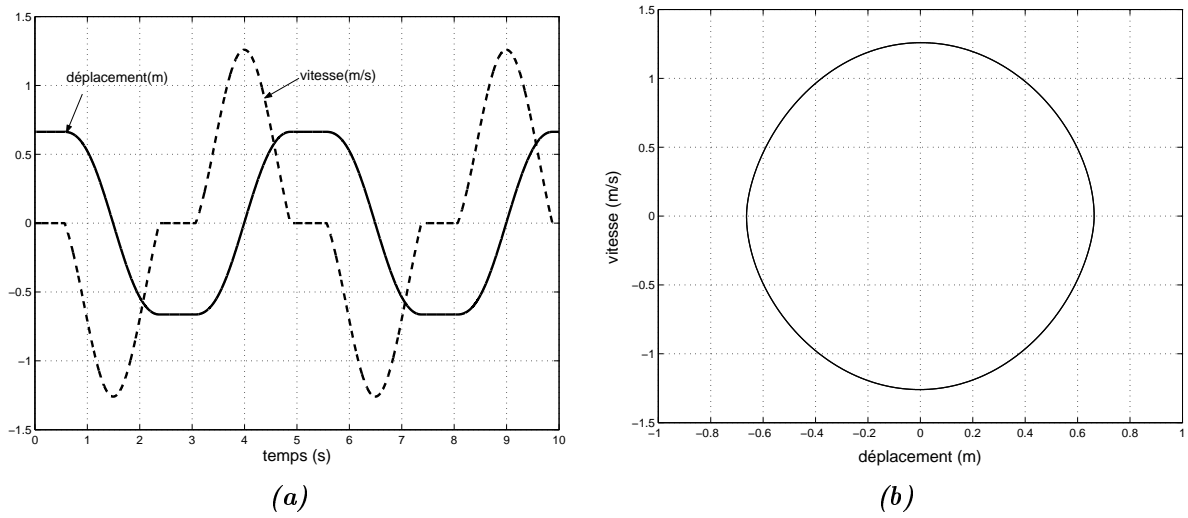


FIG. 6.13 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5Hz$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 6N$, $f = 0.2Hz$, $\mu_d N = 1N$, $\mu_s N = 2N$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

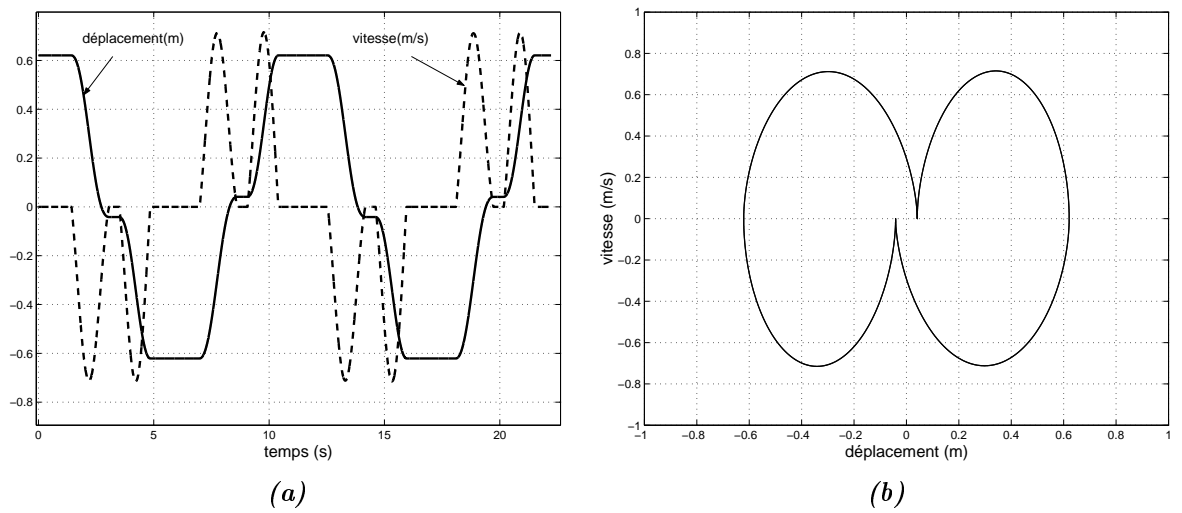


FIG. 6.14 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5Hz$, $\xi = 0$, $F_0 = 6N$, $f = 0.09Hz$, $\mu_d N = 1N$, $\mu_s N = 2N$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

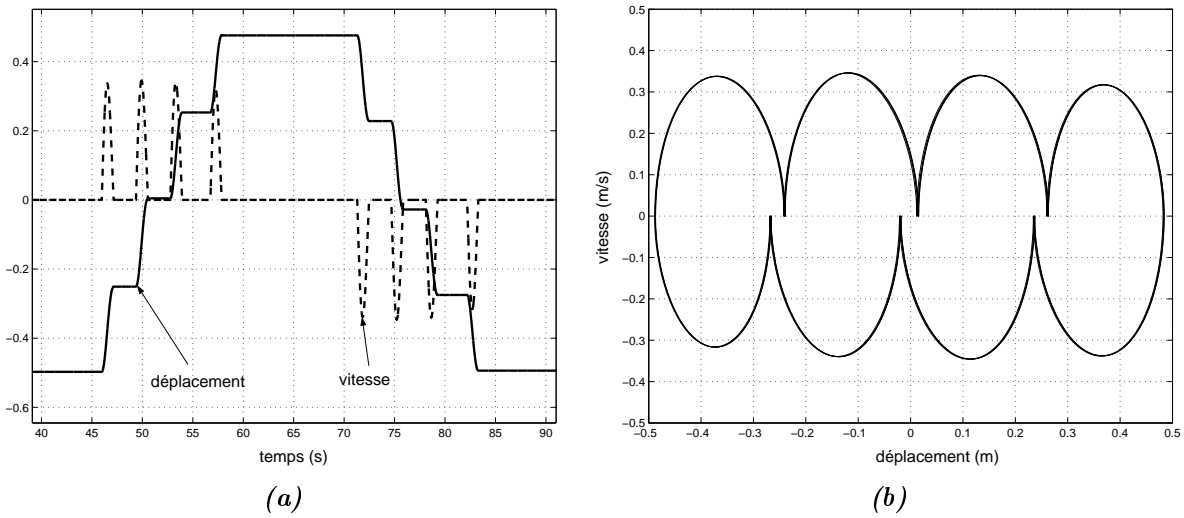


FIG. 6.15 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 6\text{N}$, $f = 0.02\text{Hz}$, $\mu_d N = 1$, $\mu_s N = 2\text{N}$: (a) évolution temporelle sur une période, (b) portrait de phase.

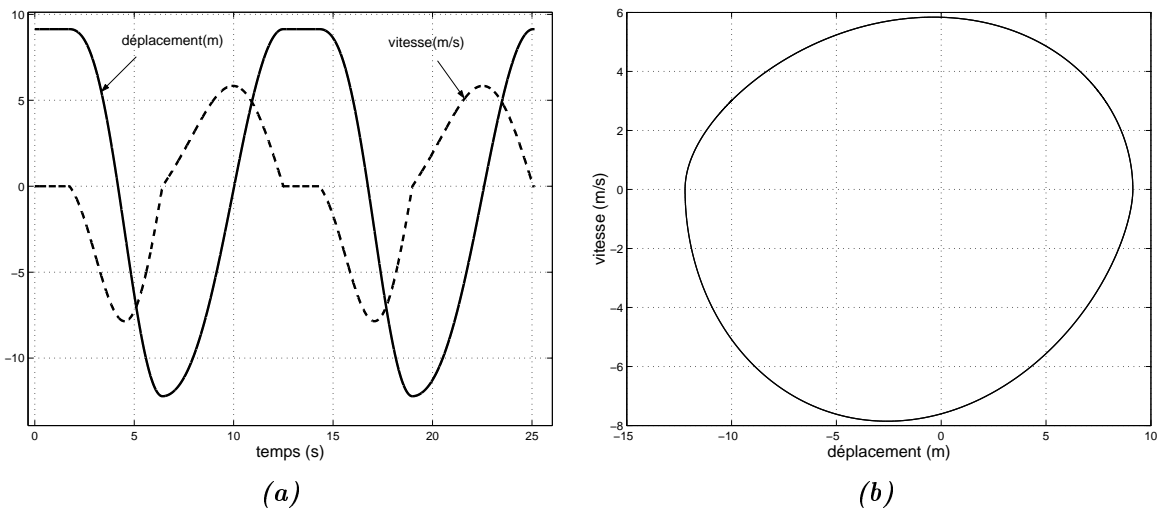


FIG. 6.16 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5/(2\pi)\text{Hz}$, $\xi = 0$, $F_0 = 8\text{N}$, $f = 0.08\text{Hz}$, $\mu_d = 2.5$, $\mu_s = 0.4$, $N = 10\text{N}$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

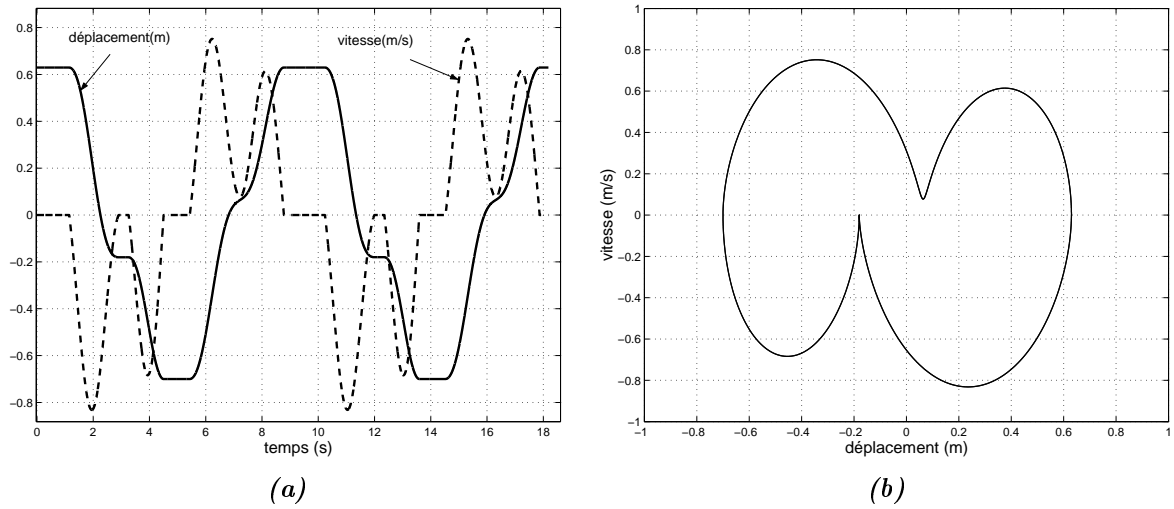


FIG. 6.17 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0$, $F_0 = 6\text{N}$, $f = 0.11\text{Hz}$, $\mu_d N = 1\text{N}$, $\mu_s N = 2\text{N}$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

cycles à deux arrêts et de cycles à un arrêt. Le portrait de phase a été tracé sur vingt périodes de l'excitation. Le pas de temps utilisé jusqu'à présent pour les simulations était 10^{-3}s , ce qui permettait de retrouver précisément les solutions analytiques de Shaw, et les résultats numériques présentés dans la littérature. Il a été diminué à 10^{-5}s pour vérifier la convergence de cette solution, qui n'a pas été rapportée dans la littérature à notre connaissance.

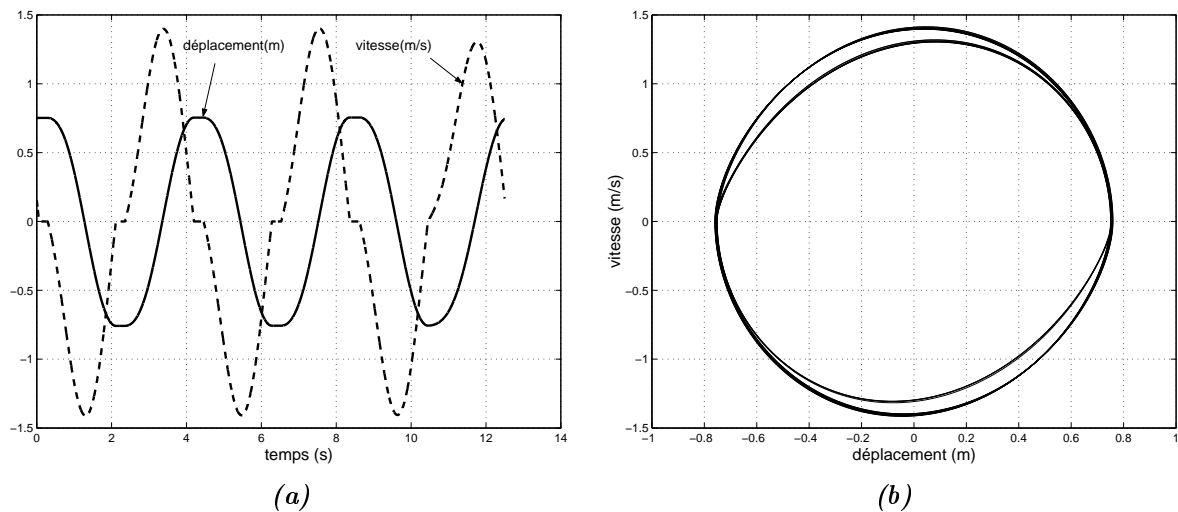


FIG. 6.18 – Réponse forcée avec $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 6\text{N}$, $f = 0.24\text{Hz}$, $\mu_d N = 1\text{N}$, $\mu_s N = 2\text{N}$: (a) évolution temporelle, (b) portrait de phase.

La loi de frottement exponentielle décrite par l'équation (6.4) a également utilisée. Une évolution temporelle caractéristique est présentée dans la figure 6.19. Pour une telle loi, on a trouvé uniquement des régimes permanents T-périodiques. La figure 6.20 montre une comparaison des lois de frottement utilisées dans cette section. Les amplitudes les plus élevées sont obtenues quand

le coefficient de frottement dépend de la vitesse relative. Même la loi de Coulomb avec $\mu = 1$ donne une amplitude plus faible que la loi avec $\mu_s = 2$ et $\mu_d = 1$ ou que la loi exponentielle. Il est donc important de prendre en compte le frottement statique pour prédire efficacement l'amplitude du mouvement.

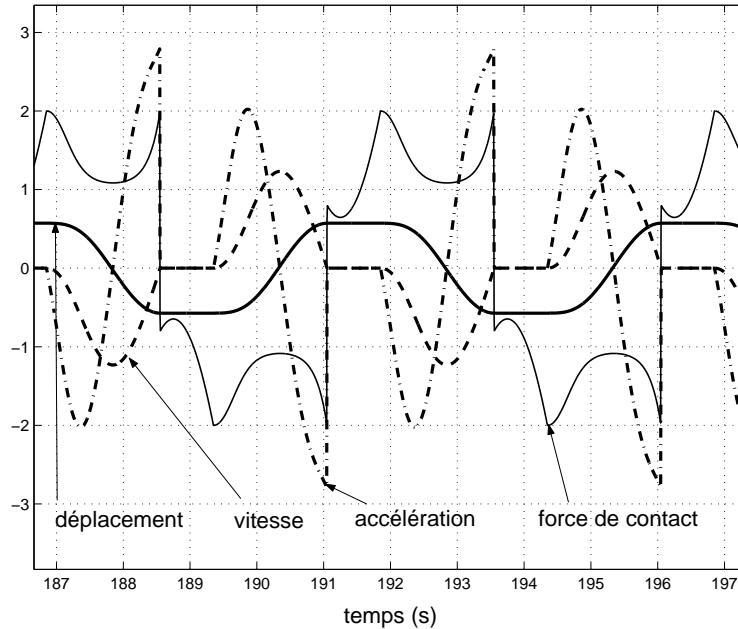


FIG. 6.19 – Réponse forcée avec une loi de frottement exponentielle. $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 5\text{N}$, $f = 0.2\text{Hz}$, $\mu_\infty N = 1\text{N}$, $\mu_s N = 2\text{N}$, $\alpha = 2\text{s.m}^{-1}$.

6.3.4 Conclusions

Le système frottant à un degré de liberté sous excitation harmonique présente une grande variété de comportements. Le nombre d'arrêts par cycle est très variable et peut devenir important si la fréquence d'excitation devient faible devant la fréquence de résonance du système masse-ressort. Cependant, le mouvement reste dans la grande majorité des cas T-périodique, où T est la période de l'excitation. La prise en compte de la décroissance de la force de frottement dès que le glissement s'amorce conduit à des amplitudes de vibration plus élevées que si le coefficient de frottement statique est le même que le coefficient de frottement dynamique.

6.4 Oscillateur avec frotteur flexible sans masse

Le modèle à "un degré de liberté et demi" présenté dans la figure 6.21 a fait l'objet de nombreuses études. Il a été introduit par Griffin [50] pour représenter le comportement au voisinage d'un mode d'une aube amortie par frottement. Il s'agit d'un frottement "blade to ground" entre l'aube et le disque par l'intermédiaire d'une troisième pièce appelée frotteur dont la masse est négligée. Wang [156] a calculé la solution analytique de ce problème, avec un coefficient de frottement constant. La loi de Coulomb avec frottement statique (voir la figure 6.4(b)) a été utilisée par Sinha et Griffin [135]. Wang et Shieh [153] [157] ont eux introduit une loi exponentielle (voir l'équation (6.4)). Sinha et Griffin ont montré que sous certaines conditions, la réponse pouvait

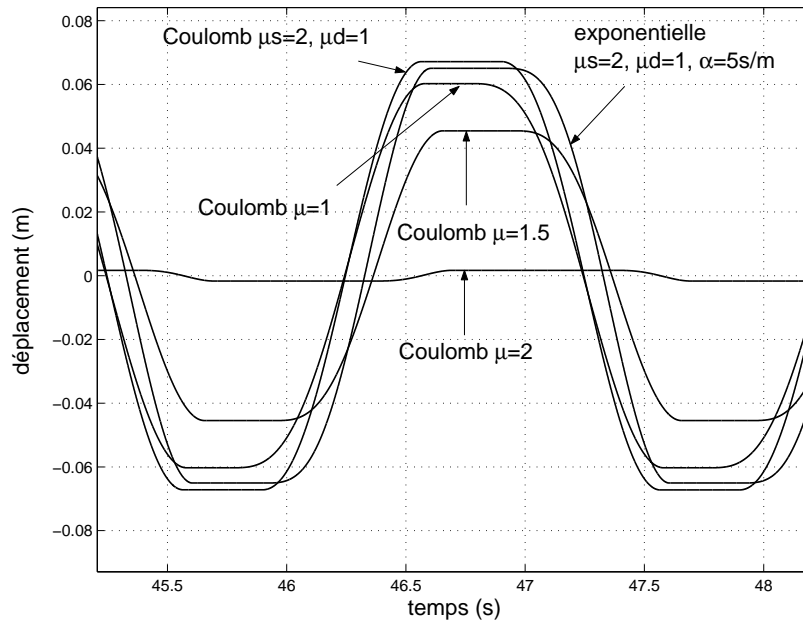


FIG. 6.20 – Comparaison de lois de frottement. $f_0 = 1\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $F_0 = 2.1\text{N}$, $f = 0.5\text{Hz}$, $N = 1\text{N}$.

comporter des sous-harmoniques ce qui complique beaucoup l'accès à la solution par les méthodes fréquentielles [135].

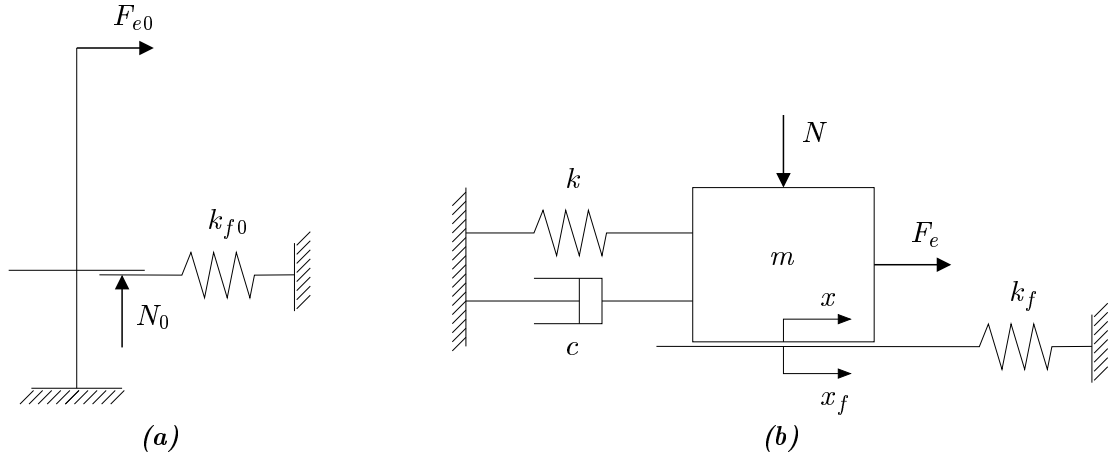


FIG. 6.21 – (a) Aube amortie par un frotteur flexible, (b) modèle à un degré de liberté équivalent au voisinage d'un mode.

6.4.1 Méthode de calcul

La méthode utilisée ici est semblable à celle utilisée en 6.3. L'algorithme employé est résumé dans la figure 6.22. On note x le déplacement de la masse, x_f le déplacement du frotteur et F_c la force de frottement. A chaque instant n , les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x}^n + c\dot{x}^{n-1/2} + kx^n = F_e^n + F_c^n \\ F_c^n = -k_f x_f^n \end{cases} \quad (6.24)$$

Durant la phase de prédiction, on suppose que le système reste dans l'état précédent. Cette hypothèse nous permet de calculer une force prédite F_{cp}^{n+1} .

Dans le cas où le système est adhérent, on suppose qu'il le reste encore. La vitesse relative doit donc rester nulle, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned}\dot{x}^{n+1/2} &= \dot{x}_{fp}^{n+1/2} \\ &= -\frac{F_{cp}^{n+1} - F_c^n}{hk_f}.\end{aligned}\quad (6.25)$$

On déduit donc l'expression suivante pour la force de contact prédite :

$$F_{cp}^{n+1} = F_c^n - hk_f \dot{x}^{n+1/2}.\quad (6.26)$$

Dans le cas où le système est glissant, on prédit que la force de frottement reste d'amplitude $\mu_d N$, c'est à dire

$$F_{cp}^{n+1} = \mu_d N \text{signe}(F_c^n).\quad (6.27)$$

On déduit ainsi une nouvelle vitesse relative supposée :

$$\begin{aligned}V_{rp}^{n+1} &= \dot{x}^{n+1/2} - \dot{x}_{fp}^{n+1/2} \\ &= \dot{x}^{n+1/2} + \frac{F_{cp}^{n+1} - F_c^n}{hk_f}.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Si cette vitesse relative prédite est de même signe que la vitesse relative précédente, le glissement perdure et la prédiction de la force de contact s'avère exacte. Dans le cas, contraire, la vitesse de glissement est passée par 0. On décide alors que le frotteur adhère à la masse pour un pas de temps au moins. La force de frottement est corrigée de manière à imposer une vitesse de glissement nulle :

$$F_c^{n+1} = F_c^n - hk_f \dot{x}^{n+1/2}.\quad (6.29)$$

6.4.2 Résultats

Les paramètres de masse et de raideur sont choisis de sorte que la fréquence de résonance lorsque le système est totalement adhérent soit 100 Hz. La force d'excitation est harmonique :

$$F_e = F_0 \cos(\omega t),\quad (6.30)$$

et on étudie la plage de fréquence située autour de la fréquence de résonance de 100 Hz. Par ailleurs on a

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{m(k+k_f)}} = 0.01, \quad \epsilon = \frac{k_f}{k_f + k} = 0.3.\quad (6.31)$$

On se place ainsi dans une configuration représentative d'une aube de turbomachine amortie par frottement [135].

En supposant le coefficient de frottement dynamique constant, on a trouvé de nombreux cas où la réponse du système est complexe. La figure 6.23 montre quelques exemples pour lesquels le rapport entre le coefficient de frottement dynamique et le coefficient de frottement statique est

$$\gamma = \frac{\mu_d}{\mu_s} = 0.6,\quad (6.32)$$

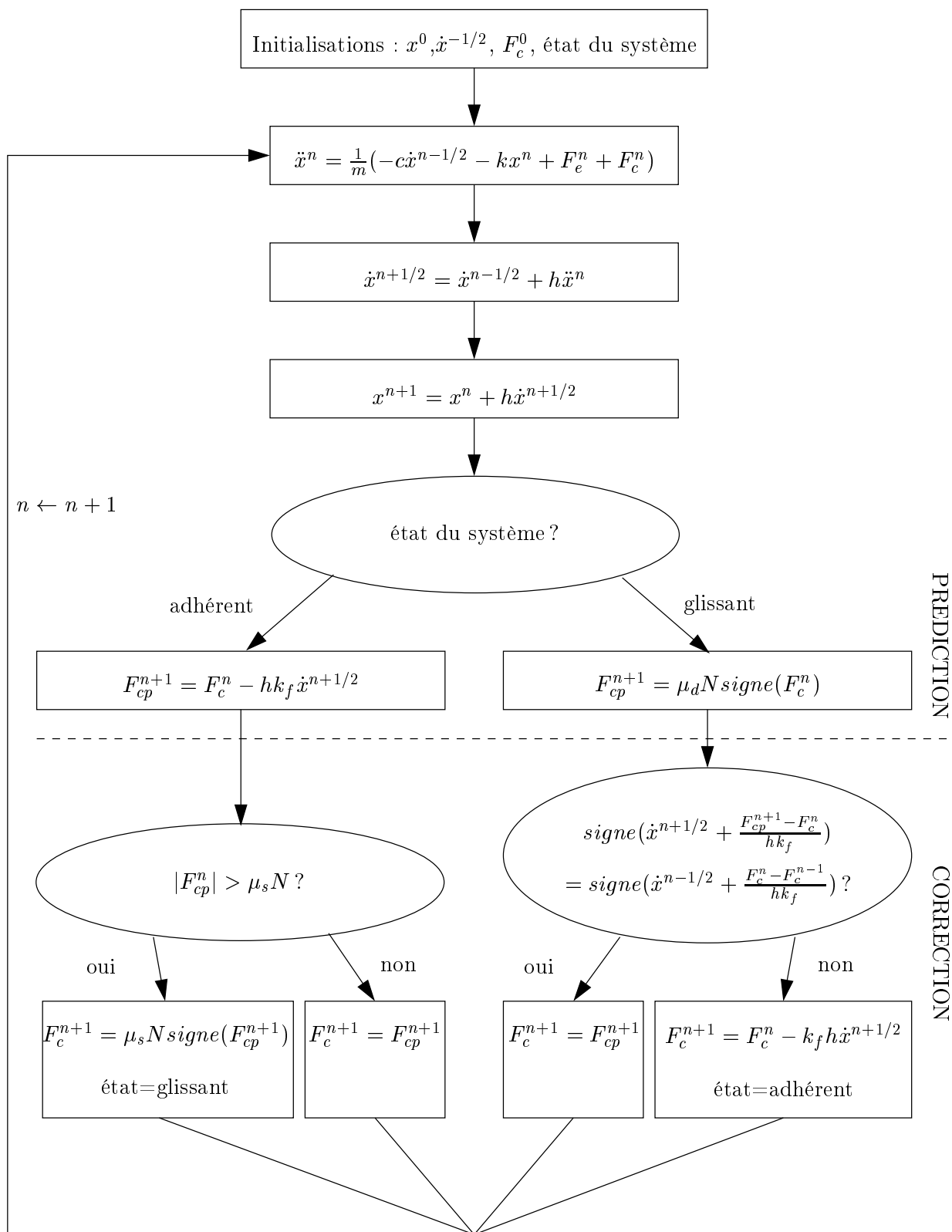


FIG. 6.22 – Schéma explicite de calcul du frottement.

et le rapport entre le seuil de frottement statique et la force d'excitation est

$$S = \frac{\mu_s N}{F_0} = 4. \quad (6.33)$$

La réponse se présente comme une oscillation harmonique à la fréquence d'excitation modulée par des sous-harmoniques. La figure 6.23 montre des exemples 5T-périodiques, 2T-périodiques et 6T-périodiques respectivement (T désigne la période de l'excitation). Une synthèse des réponses dans la gamme [104Hz - 106Hz] est présentée dans la figure 6.24. Ces courbes ont été obtenues en faisant varier la fréquence au cours d'une même intégration temporelle et en évitant toute discontinuité dans la force d'excitation au moment de l'incrément de la fréquence. On trace les extremums du déplacement de la masse. Les sous-harmoniques sont recherchées jusqu'à l'ordre 6. On remarque que pour certaines fréquences, plusieurs régimes sont stables. Par exemple, à 96 Hz, le régime harmonique sans glissement est stable (figure 6.24 (a)), mais aussi un régime multipériodique complexe présentant du glissement (figure 6.24 (b)). Il est aussi intéressant de remarquer que après les régimes d'adhérence-glissement successifs le régime sans glissement obtenu est décentré dans le cas général : la composante continue des oscillations est non nulle. Ceci se voit sur la plage [104.3Hz - 106Hz] sur la figure 6.24 (a) et sur la plage [94Hz - 95.5Hz] sur la figure 6.24 (b).

La figure 6.25 montre les régimes obtenus en faisant varier le coefficient de frottement dynamique. Là encore on a recherché les sous-harmoniques jusqu'à l'ordre 6. On identifie clairement des régimes T-périodiques, 2T-périodiques et 3T-périodiques, mais aussi des régimes plus complexes autour des valeurs $\gamma = 0.3$ et $\gamma = 0.6$. La figure 6.26 présente un régime complexe obtenu pour $\gamma = 0.25$. Il est intéressant de noter que le cas $\gamma = 1$ fournit une borne supérieure pour l'amplitude du déplacement de la masse. On a vu dans la section précédente que ce n'était pas le cas pour le système à un degré de liberté. Sinha et Griffin [135] ont calculé une solution analytique en supposant que le déplacement était monoharmonique. Avec cette hypothèse, ils ont trouvé des solutions tant que S (voir l'équation (6.33)) restait inférieur à la valeur

$$S_T = \frac{1}{\frac{2(1-\gamma)}{\pi} + \frac{\xi(1+\gamma)}{\epsilon}}. \quad (6.34)$$

Au delà, le régime est multipériodique. Cette formule s'est révélée être au cours des simulations une bonne indication du point de bifurcation entre le régime T-périodique et le régime multipériodique. Avec la valeur des paramètres de la figure 6.25 on trouve que la limite correspond à $\gamma = 0.69$ ce qui correspond effectivement à peu près au seuil d'apparition du régime multipériodique. Nous n'avons pas trouvé de cas où la réponse est multipériodique avec $\gamma = 1$. Les simulations conduites avec $S > S_T(\gamma = 1)$ conduisent à des régimes sans glissement.

La loi de frottement exponentielle a aussi été utilisée. Elle modifie très peu le comportement décrit précédemment. Puisque le frotteur est sans masse, il s'arrête immédiatement au moment où le système devient glissant. La force de frottement chute toujours aussi rapidement.

6.4.3 Conclusions

Pour ce système amorti par un frotteur sans masse, on doit s'attendre à trouver des sous-harmoniques dans la réponse si la différence entre le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique est importante. La simulation de ce type de régime par des

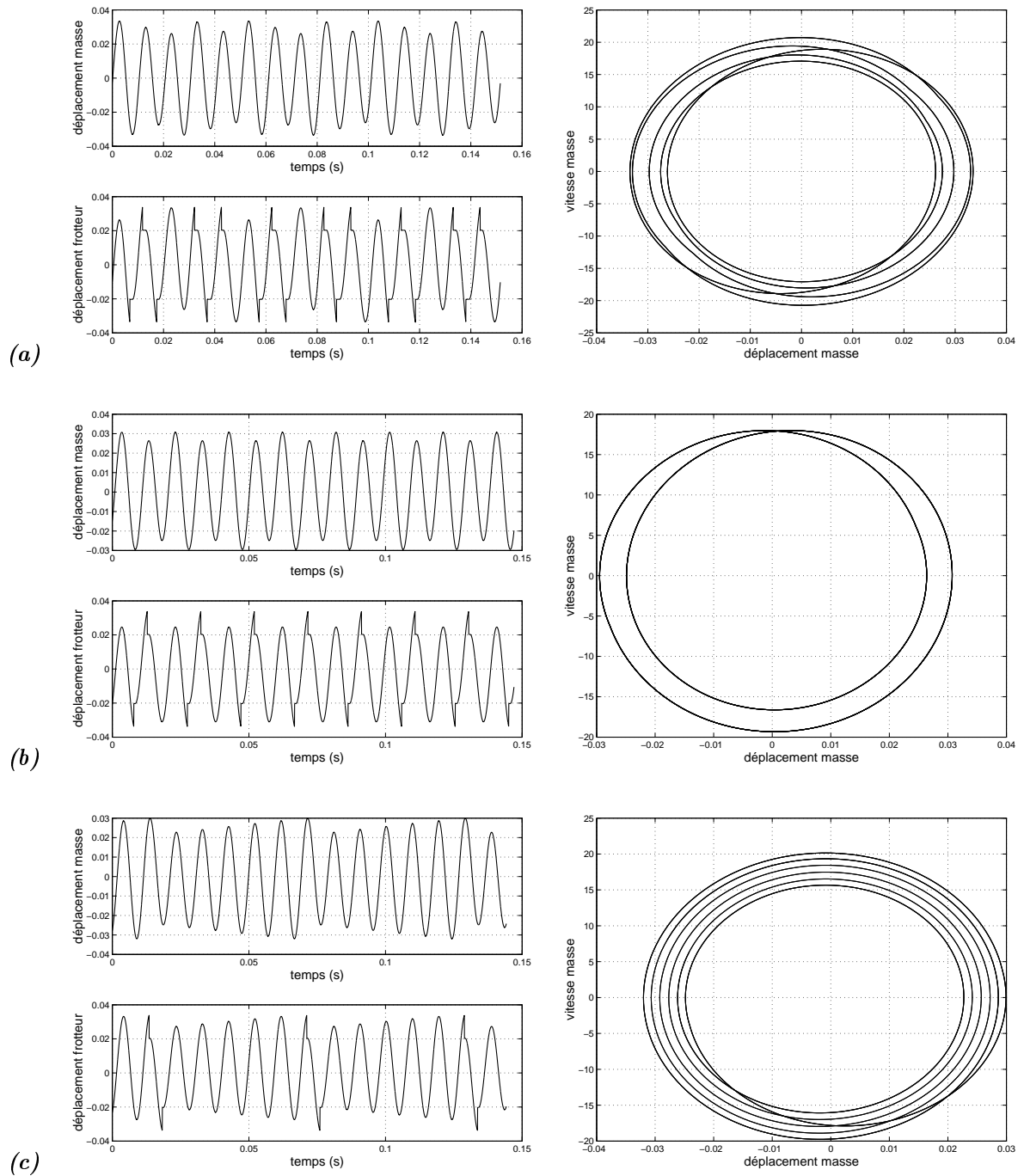


FIG. 6.23 – Evolutions temporelles et portraits de phase pour (a) $f = 99\text{Hz}$, (b) $f = 102\text{Hz}$, (c) $f = 104\text{Hz}$. $\xi = 0.01$, $\gamma = 0.6$, $\epsilon = 0.3$, $S = 4$.

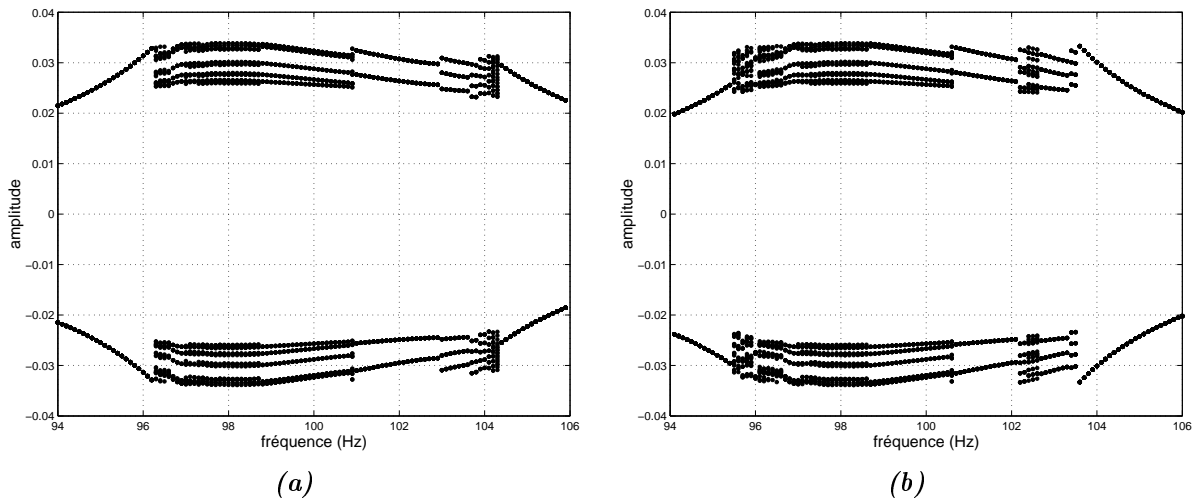


FIG. 6.24 – Diagramme de bifurcation, paramètre : fréquence. $\gamma = 0.6$, $\xi = 0.01$, $\epsilon = 0.3$, $S = 4$. (a) fréquence croissante. (b) fréquence décroissante.

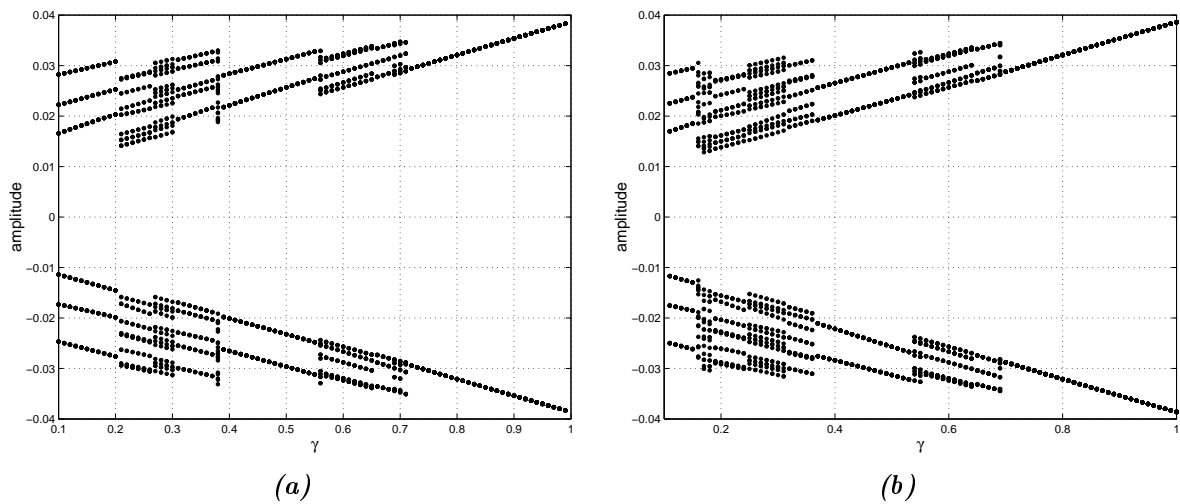


FIG. 6.25 – Diagramme de bifurcation, paramètre : γ , μ_s constant. $f = 100\text{Hz}$, $\xi = 0.01$, $\epsilon = 0.3$, $S = 4$. (a) γ croissant. (b) γ décroissant.

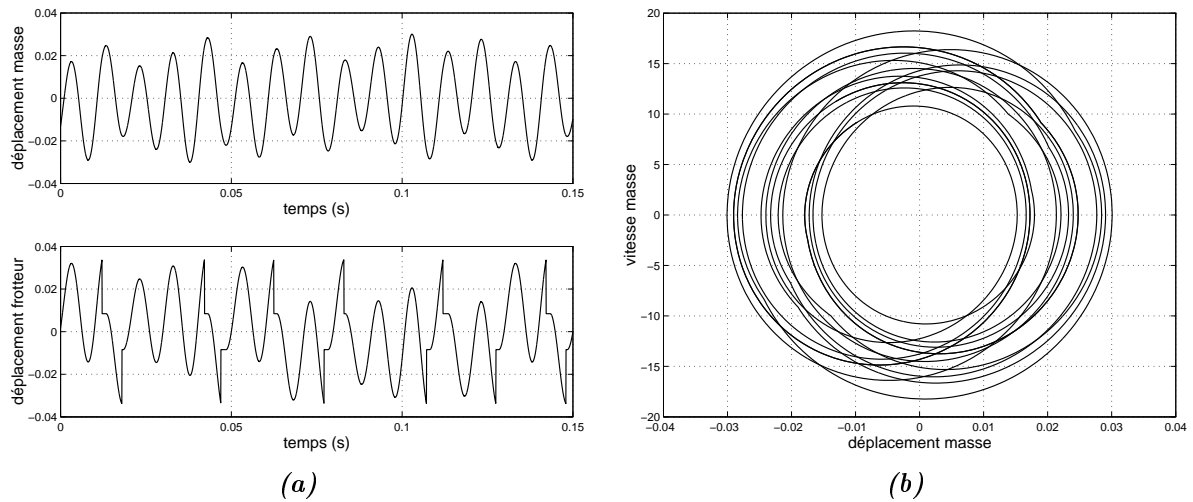


FIG. 6.26 – $f = 100\text{Hz}$, $\xi = 0.01$, $\gamma = 0.25$, $\epsilon = 0.3$, $S = 4$. (a) Evolution temporelle. (b) Portrait de phase.

méthodes fréquentielles peut s'avérer délicate car l'ordre maximal des sous-harmoniques présentes n'est pas connu *a priori*. Cependant, le concepteur peut tirer parti du fait que le cas où $\mu_d = \mu_s$ fournit une majoration de l'amplitude pour tous les cas où $\mu_d < \mu_s$ (pour le même μ_s).

6.5 Modèle à deux degrés de liberté

Le système à deux degrés de liberté schématisé dans la figure 6.27 constitue la représentation minimale de deux corps flexibles frottant l'un sur l'autre avec excitation harmonique.

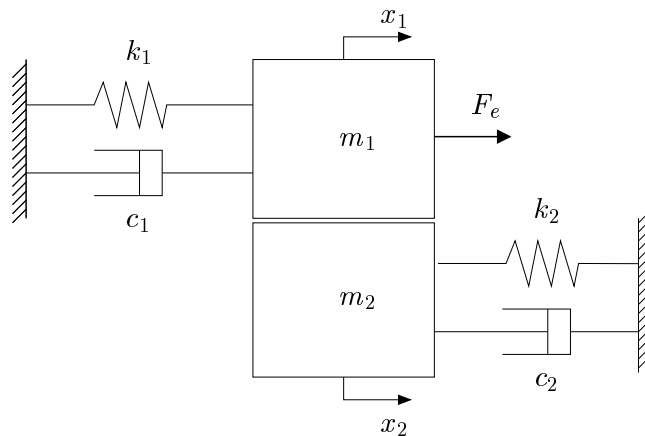


FIG. 6.27 – Modèle de frottement à deux degrés de liberté.

6.5.1 Méthode de calcul

La méthode utilisée pour le système à un degré de liberté (voir figure 6.9) est étendue au cas à deux degrés de liberté. Les quelques modifications à apporter sont brièvement décrites ci-dessous :

Cas où le système est adhérent

On a $\dot{x}_1^{n-1/2} = \dot{x}_2^{n-1/2}$. Si on suppose que les deux masses restent adhérentes, alors elles ont la même accélération \ddot{x}_p^n . La force de contact F_{cp}^n et l'accélération \ddot{x}_p^n prédites sont donc solution du système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_p^n + c_1 \dot{x}_1^{n-1/2} + k_1 x_1^n = F_e^n + F_{cp}^n \\ m_2 \ddot{x}_p^n + c_2 \dot{x}_2^{n-1/2} + k_2 x_2^n = -F_{cp}^n \end{cases} \quad (6.35)$$

La correction s'effectue ensuite en évaluant la force prédite par rapport au seuil de glissement.

Cas où le système est glissant

On suppose que le système reste glissant à l'instant suivant, ce qui nous permet d'obtenir deux vitesses prédites $\dot{x}_{1p}^{n+1/2}$ et $\dot{x}_{2p}^{n+1/2}$. C'est en comparant le signe de la vitesse relative prédite $\dot{x}_{1p}^{n+1/2} - \dot{x}_{2p}^{n+1/2}$ et de la vitesse relative précédente $\dot{x}_1^{n-1/2} - \dot{x}_2^{n-1/2}$ que l'on détermine si le système reste glissant ou si il devient adhérent. Dans ce dernier cas, on doit imposer la même valeur aux vitesses des deux corps : $\dot{x}_1^{n+1/2} = \dot{x}_2^{n+1/2}$. Ainsi, les accélérations \ddot{x}_1^n , \ddot{x}_2^n et la force de frottement F_c^n s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1^n + c_1 \dot{x}_1^{n-1/2} + k_1 x_1^n = F_e^n + F_c^n \\ m_2 \ddot{x}_2^n + c_2 \dot{x}_2^{n-1/2} + k_2 x_2^n = -F_c^n \\ \dot{x}_1^{n-1/2} + h \ddot{x}_1^n = \dot{x}_1^{n-1/2} + h \ddot{x}_2^n \end{cases} \quad (6.36)$$

6.5.2 Résultats

Dans les simulations présentées ci-après, les valeurs retenues sont

$$m_1 = m_2 = 1, \quad k_1 = 7\pi^2, \quad k_2 = \pi^2$$

Ceci conduit à une fréquence propre de 1Hz pour le mode du système sans glissement. On étudie la capacité du frottement à réduire l'amplitude des oscillations pour les fréquences voisines de ce mode. La loi de Coulomb avec un coefficient de frottement statique égal au coefficient de frottement dynamique semble toujours conduire à un déplacement périodique de même période que l'excitation. En revanche, lorsque on utilise une loi de Coulomb avec $\gamma = \mu_d/\mu_s < 1$, des sous-harmoniques peuvent apparaître dans la réponse. La figure 6.28 présente un cas où $\gamma = 0.5$. La fréquence est incrémentée au cours d'une unique intégration temporelle. A chaque fréquence on attend que le régime permanent se stabilise et on retient 15 périodes de l'excitation pour le caractériser. On trace tous les extremums du déplacement de la masse 1. Les régimes d'adhésion-glissement sont en général ici 2T-périodiques ou 3T-périodiques. Les résultats obtenus pour la fréquence croissante et la fréquence décroissante sont différents et mettent en évidence des plages de fréquence où plusieurs régimes permanents sont stables.

Dans la figure 6.29, l'amplitude obtenue avec $\gamma = 0.5$ est comparée aux amplitudes obtenues avec $\gamma = 1$. On voit clairement que, à la différence du système à "un degré de liberté et demi" étudié dans la section précédente, l'utilisation de la loi de frottement pour laquelle $\gamma = 1$ n'offre pas de majoration de l'amplitude du mouvement. Dans ce cas, à cause du fort amortissement, l'amplitude pour $\gamma = 0.5$ est même supérieure pour certaines fréquences à l'amplitude obtenue pour le cas linéaire sans glissement.

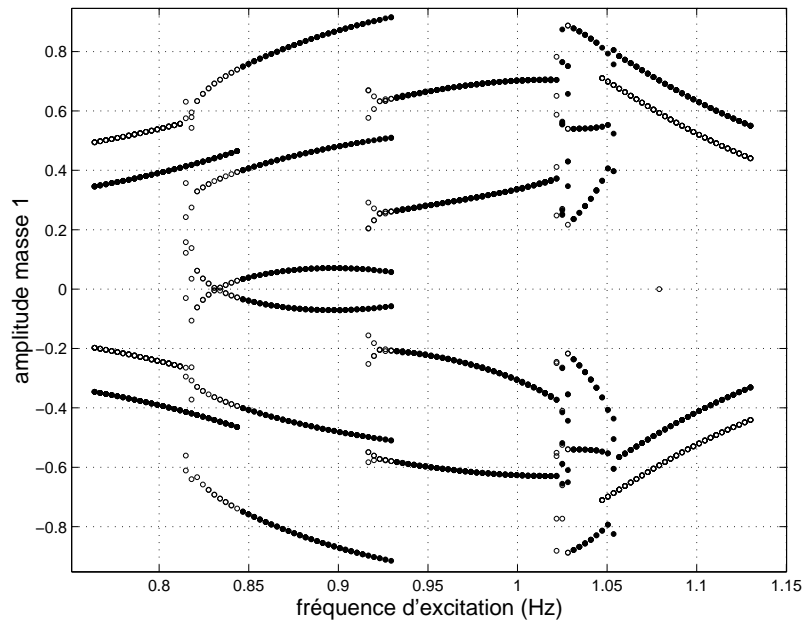


FIG. 6.28 – Diagramme de bifurcation, paramètre : fréquence. $\gamma = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$. ● fréquence croissante. ○ fréquence décroissante.

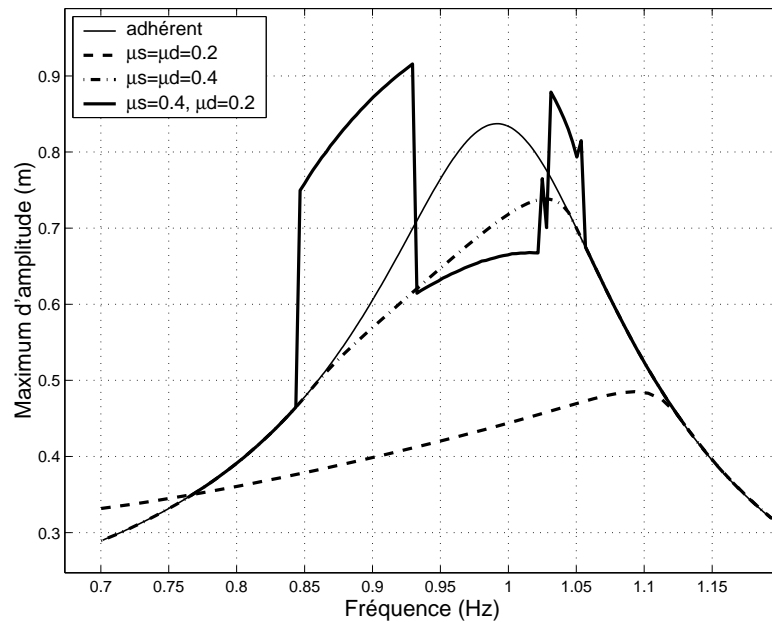


FIG. 6.29 – Comparaison des réponses fréquentielles. $\gamma = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$.

Le diagramme de bifurcation obtenu en faisant varier le coefficient de frottement dynamique est présenté dans la figure 6.30. Quand γ diminue, le régime devient 2T-périodique puis 3T-périodique et enfin plus complexe. Les amplitudes ont tendance à augmenter.

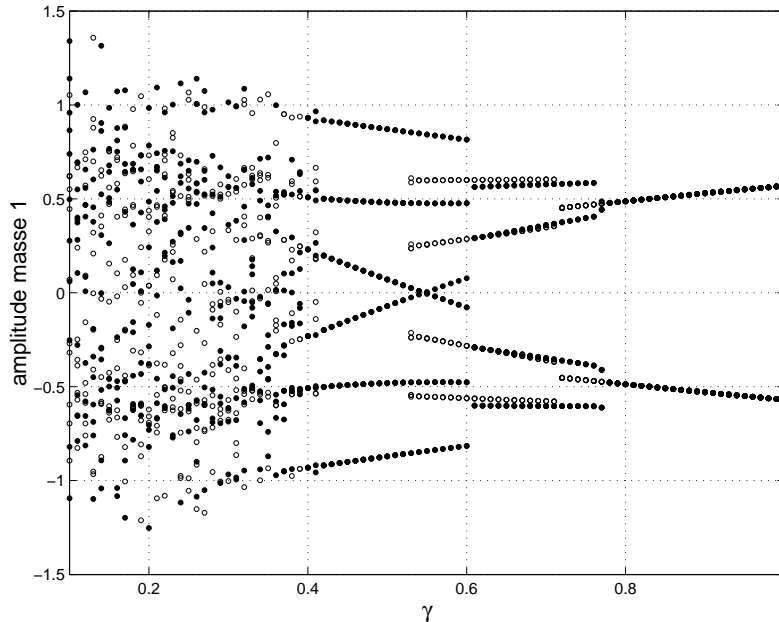


FIG. 6.30 – Diagramme de bifurcation, paramètre : γ . $f = 0.9\text{Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$. • γ croissant. ◦ γ décroissant.

Des simulations ont en outre été conduites avec un amortissement visqueux plus faible. Les réponses enregistrées sur la figure 6.31 semblent chaotiques. La figure 6.32 montre un comportement intermédiaire entre un régime 4T-périodique et un régime 5T-périodique. La figure 6.33 montre une route vers le chaos sous la forme d'une cascade sous-harmonique lorsque le coefficient de frottement dynamique diminue. La solution devient multipériodique dès $\gamma = 0.8$ et chaotique pour $\gamma < 0.6$.

La difficulté de l'intégration temporelle vient de la discontinuité de la loi de frottement. L'utilisation de lois régularisées, par ailleurs plus proches de la physique, rend l'intégration très simple. Nous proposons d'utiliser la loi de Feeny et Moon [36]. Elle est donnée dans l'équation (6.8). La force de frottement correspondante est représentée sur la figure 6.34. On trouve les mêmes comportements qu'avec la loi discontinue. La figure 6.35 montre l'exemple d'un régime 2T-périodique. La figure 6.36 révèle que la régularisation conduit à une atténuation des amplitudes de déplacement.

6.5.3 Conclusions

Le système à deux degrés de liberté étudié présente une grande variété de comportements. Le nombre de sous-harmoniques dans la réponse peut être très élevé. A la différence du système à un degré de liberté avec frotteur sans masse, l'amplitude obtenue avec un coefficient de frottement variable est pour de nombreuses fréquences supérieure à celle obtenue lorsque le coefficient de frottement est constant.

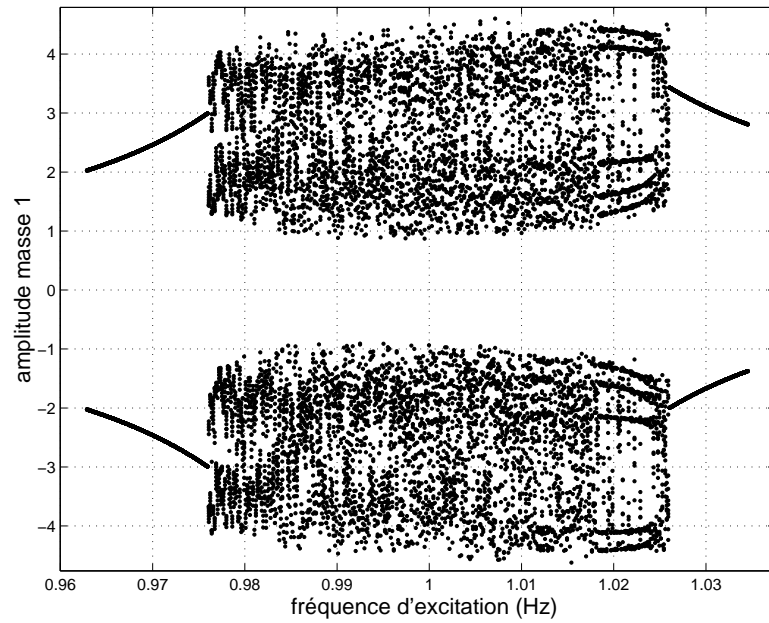


FIG. 6.31 – Diagramme de bifurcation, paramètre : fréquence croissante. $\gamma = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$.

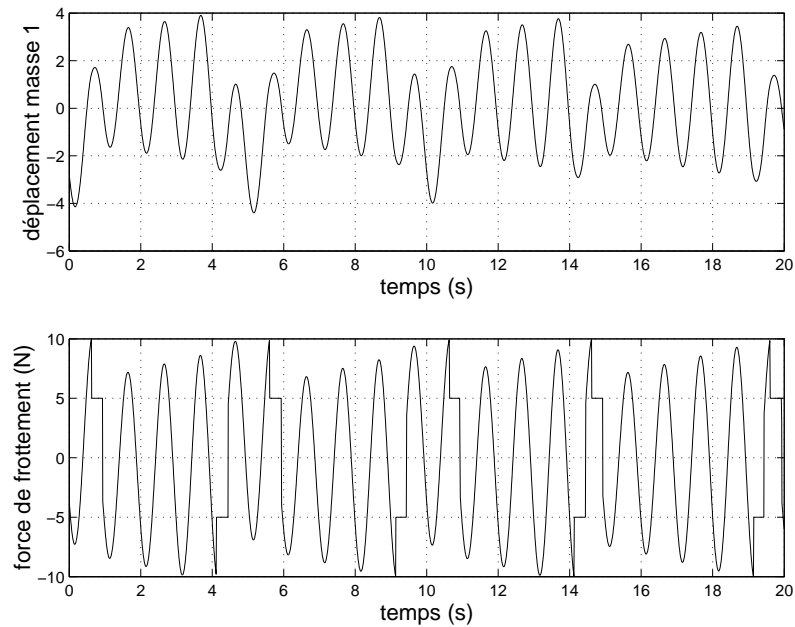


FIG. 6.32 – Evolution temporelle non périodique. $f = 1\text{Hz}$, $\gamma = 0.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$.

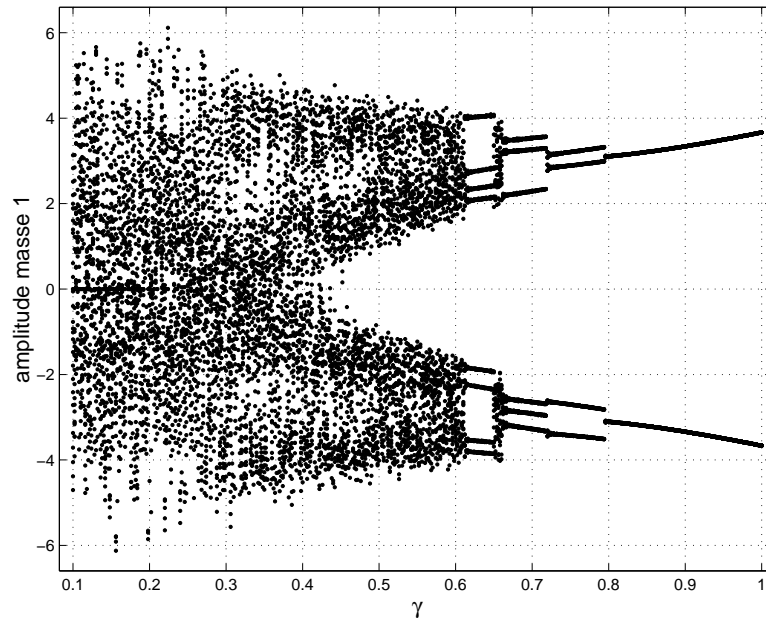


FIG. 6.33 – Diagramme de bifurcation, paramètre γ décroissant. $f = 1\text{Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$.

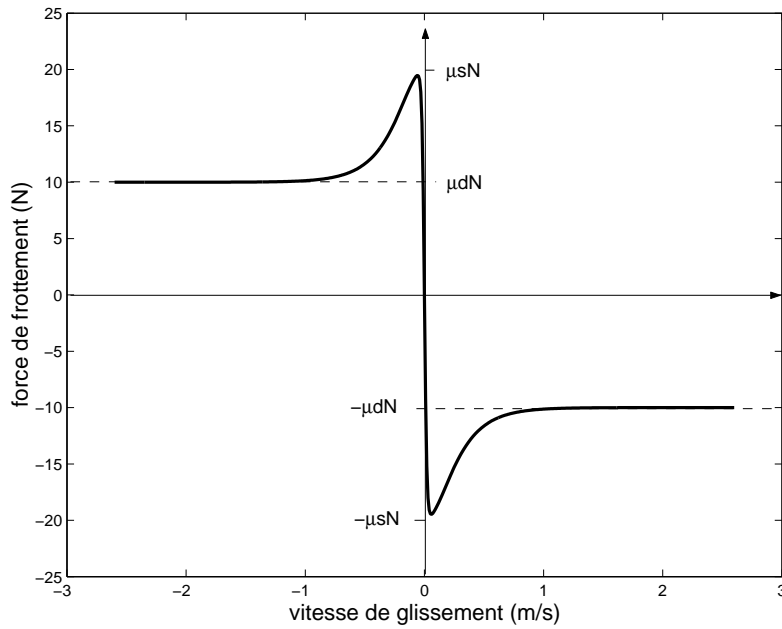


FIG. 6.34 – Loi de frottement régularisée avec $\alpha = 50$, $\beta = 5$, $\gamma = 0.5$.

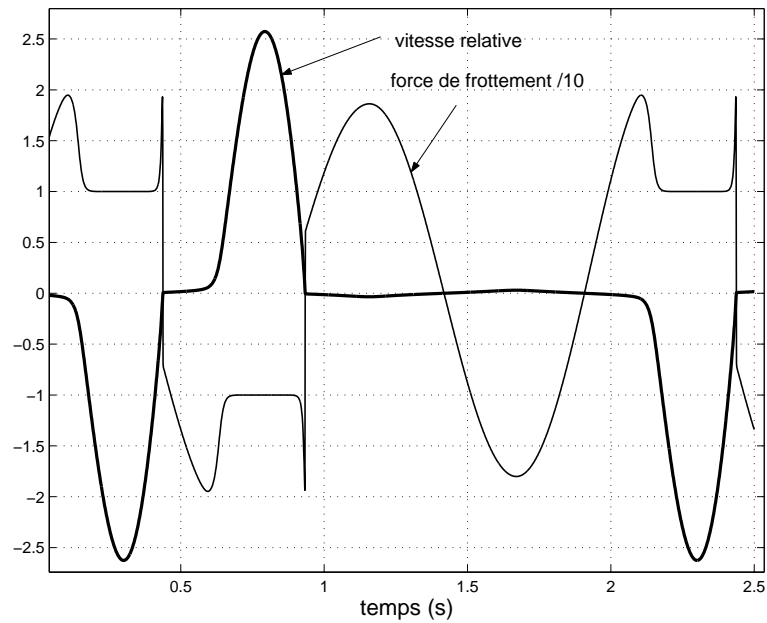


FIG. 6.35 – Exemple de régime permanent obtenu avec la régularisation de la loi de frottement. Réponse $2T$ -périodique. $f = 1\text{ Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$, $\alpha = 50$, $\beta = 5$, $\gamma = 0.5$.

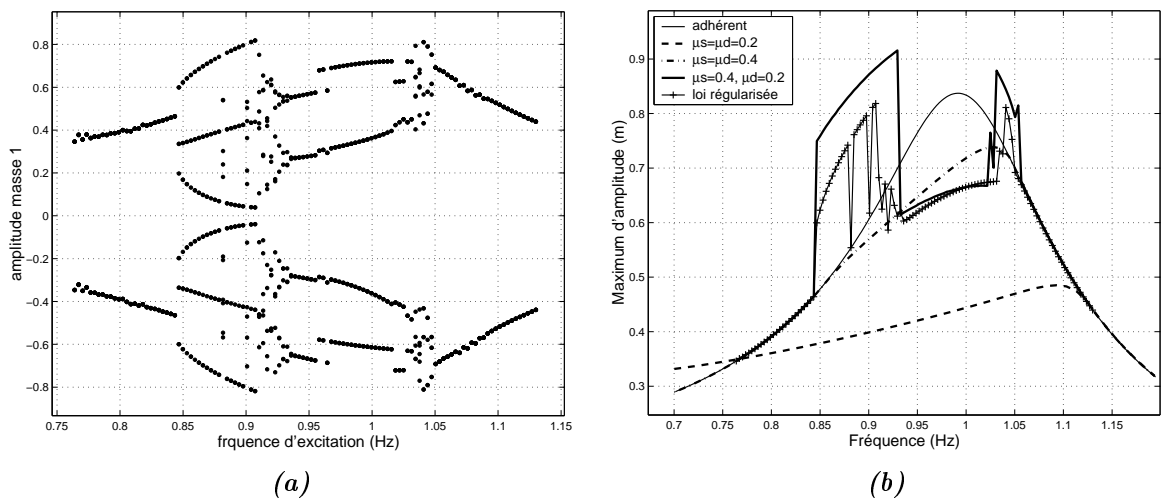


FIG. 6.36 – (a) Diagramme de bifurcation avec fréquence croissante (b) Comparaison de la loi de frottement lissée avec les lois discontinues. $\alpha = 50$, $\beta = 5$, $\gamma = 0.5$ $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$.

6.6 Prise en compte du frottement statique avec les méthodes fréquentielles.

Nous venons de voir que la prise en compte du frottement statique pouvait modifier sensiblement le comportement des systèmes frottants. Dans certains cas, on a enregistré des réponses multiharmoniques voire chaotiques. Les réponses apériodiques et chaotiques ne pourront pas être trouvées par les méthodes fréquentielles, puisque celles-ci se basent sur une hypothèse de périodicité pour évaluer le régime permanent. Il est par contre envisageable de trouver les réponses présentant des sous-harmoniques de l'excitation en retenant ces dernières dans la décomposition en séries de Fourier.

Dans cette section, le modèle à un degré de liberté et le modèle à deux degrés de liberté sont repris afin de tester la méthode fréquentielle DLFT présentée au chapitre 2, dans le cas où le coefficient de frottement statique est supérieur au coefficient de frottement dynamique. Nous proposons ensuite une méthode d'analyse de la stabilité en fréquentiel. Elle est inspirée de la méthode décrite dans les références [137] et [152] pour le cas des forces non-linéaires dépendantes des déplacements.

6.6.1 Cas du système à 1 ddl

Le modèle de la figure 6.8 est simulé par la DLFT avec une pénalisation sur la vitesse relative et un coefficient de pénalité $\epsilon = 10$. L'étude par intégration temporelle nous a montré que les réponses attendues sont périodiques, c'est pourquoi on ne retient pas de sous-harmoniques pour la résolution. Les réponses présentées dans cette section sont obtenues avec

$$\gamma = \frac{\mu_d}{\mu_s} = 0.5 . \quad (6.37)$$

Le mouvement sans arrêt n'est pas influencé par le frottement statique. Seul le frottement dynamique joue un rôle comme le confirme la figure 6.37. Le mouvement est correctement prédit par la DLFT. La figure 6.38 montre le cas à deux arrêts par cycle. Là encore, la DLFT converge vers la bonne solution. Il faut retenir un nombre élevé d'harmoniques si on veut capturer dans l'évolution temporelle de la force de contact les "pics" dus au frottement statique.

Les cas plus rares présentés dans le chapitre précédent posent davantage de problèmes. Les solutions non symétriques, c'est à dire contenant des harmoniques paires, tel le mouvement à un arrêt par cycle n'ont pas été retrouvées. Le solveur se trouve bloqué sur un minimum local qui n'est pas la solution puisque c'est une réponse à deux arrêts par cycle. Les solveurs non-linéaires testés pour cette étude traitent le problème $f(X) = 0$ par minimisation de $f(X)^2$ et s'arrêtent dès que un minimum est trouvé. Les réponses à basse fréquence présentant un grand nombre d'arrêts par cycle nécessitent quant à elles un grand nombre d'harmoniques afin d'être fidèlement approchées par la DLFT.

La DLFT permet de retrouver précisément les réponses à 0 et 2 arrêts par cycles qui sont celles qui se produisent le plus souvent. Les résultats obtenus par la DLFT pour ce système à un degré de liberté sont donc jugés satisfaisants.

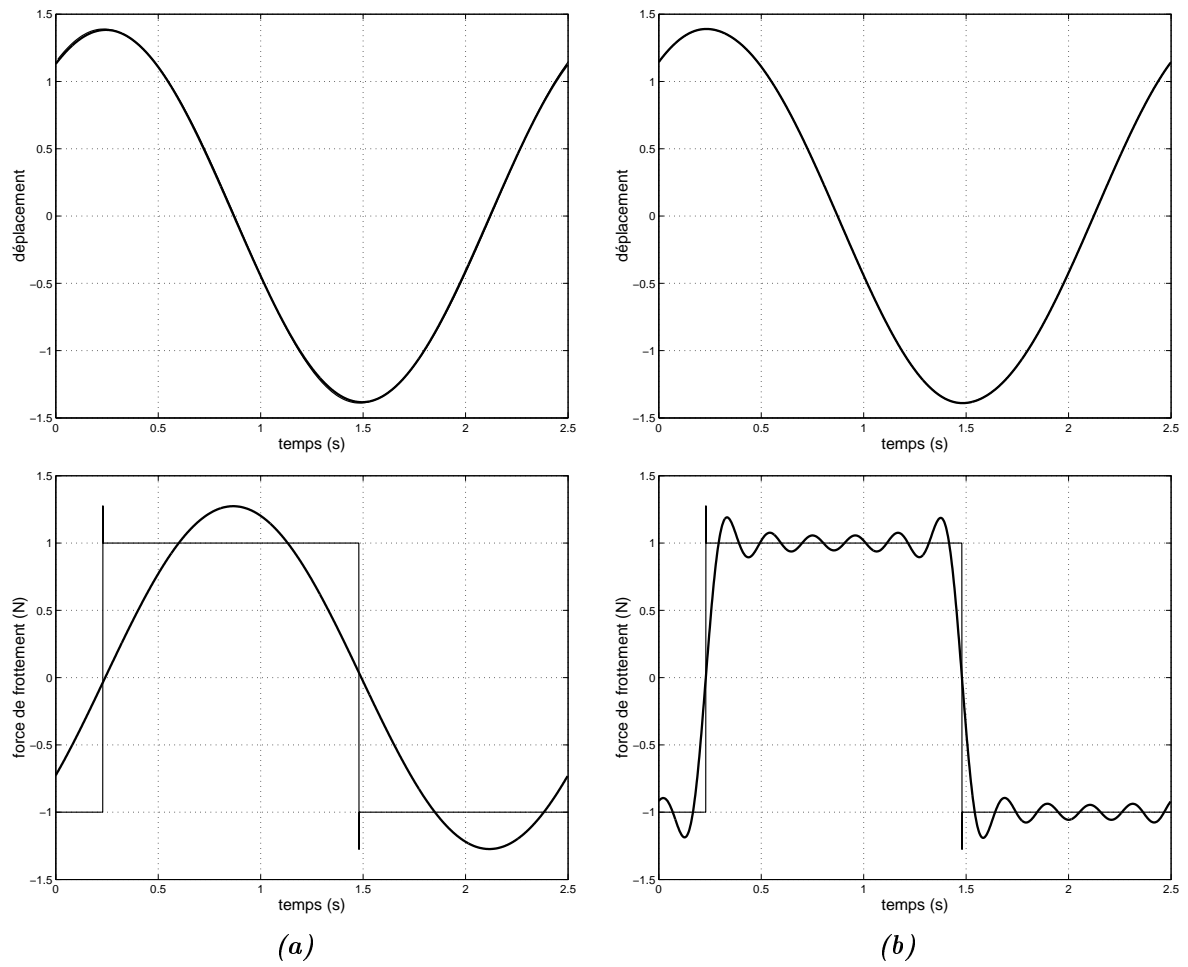


FIG. 6.37 – Comparaison entre le calcul par intégration temporelle (trait fin) et par la DLFT (trait épais). $f_0 = 0.5Hz$, $\xi = 0.1$, $\mu_s N = 20N$, $\mu_d N = 10N$, $F_0 = 6N$, $f = 0.4Hz$, $\epsilon = 10$. (a) 1 harmonique, (b) 11 harmoniques.

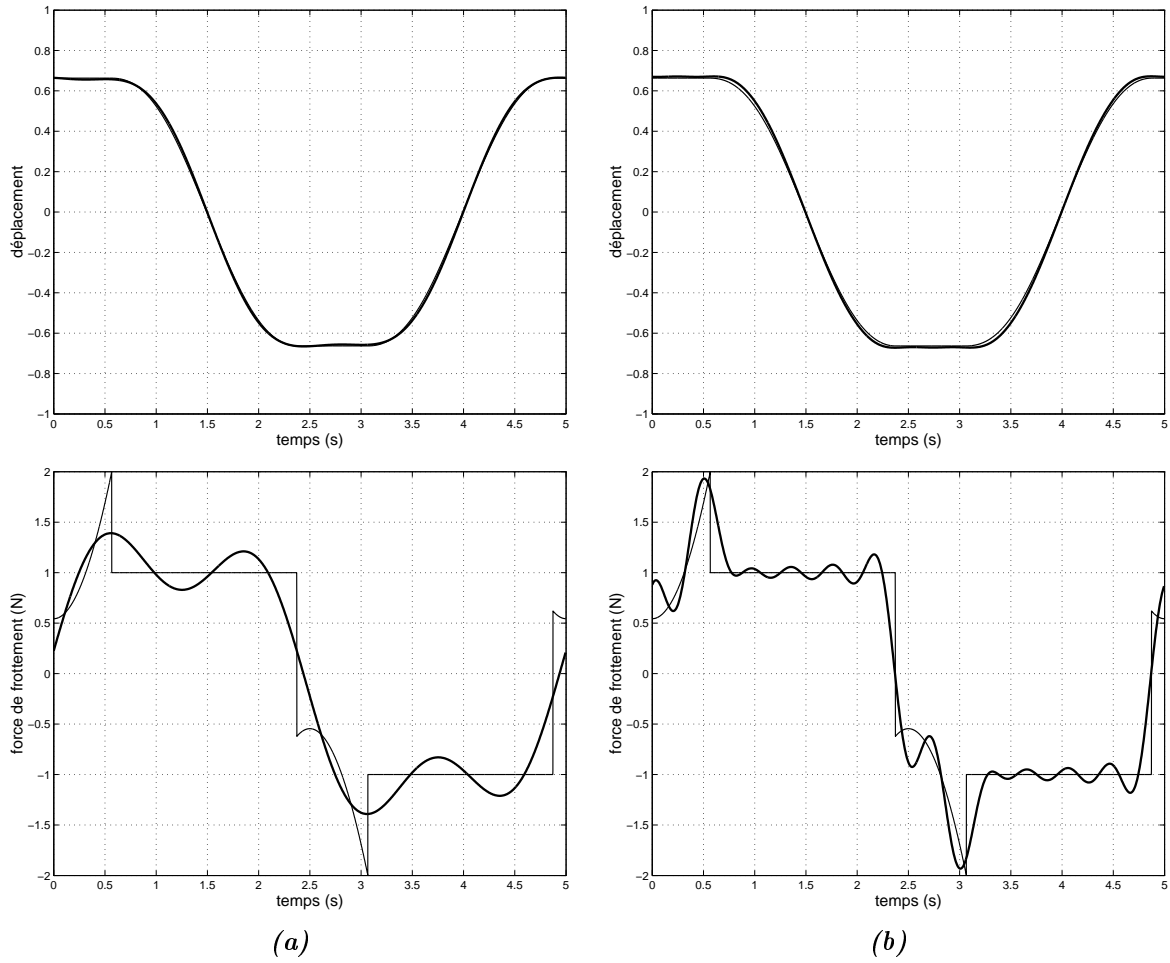


FIG. 6.38 – Comparaison entre le calcul par intégration temporelle (trait fin) et par la DLFT (trait épais). $f_0 = 0.5\text{Hz}$, $\xi = 0.1$, $\mu_s N = 20\text{N}$, $\mu_d N = 10\text{N}$, $F_0 = 6\text{N}$, $f = 0.2\text{Hz}$, $\epsilon = 10$. (a) 3 harmoniques, (b) 11 harmoniques.

6.6.2 Cas du système à 2 ddl

Le modèle à deux degrés de liberté de la figure 6.27 est simulé par la DLFT. Lorsque γ est proche de 1, le comportement du système reste T-périodique. T désigne ici la période de l'excitation. Dans ce cas, la DLFT converge vers la solution trouvée par l'intégration temporelle. La figure 6.39 présente un cas où $\gamma = 0.8$.

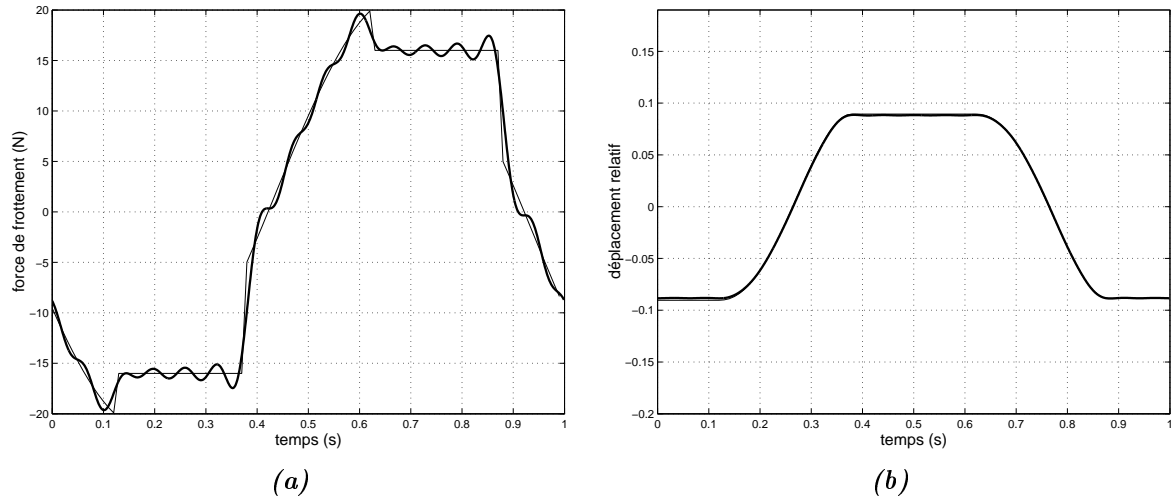


FIG. 6.39 – Comparaison entre le calcul par intégration temporelle (trait fin) et par la DLFT (trait épais). $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu_s N = 20N$, $\mu_d N = 16N$, $f = 1Hz$, $\epsilon = 50$, 15 harmoniques. (a) force de frottement, (b) déplacement relatif.

La figure 6.40 présente un comportement $3T$ -périodique. Bien que les calculs fréquentiels aient été conduits en retenant les sous-harmoniques nécessaires, ce type de réponse n'a pas été trouvé par la DLFT. En effet, soit la convergence n'est pas atteinte car le solveur se trouve bloqué sur un minimum local, soit on converge vers une solution T-périodique à deux arrêts par cycle du type de celle présentée dans la figure 6.39. On peut alors se poser la question de la stabilité d'une telle solution. On abordera cette question ci-après.

L'utilisation d'une méthode AFT (Alternating Frequency Time) avec une loi de frottement lissée a aussi été essayée mais n'a pas non plus permis de trouver les solutions multipériodiques recherchées. En conclusion, dans son état de développement actuel, la DLFT donne des résultats satisfaisants si le coefficient de frottement dynamique n'est pas trop inférieur au coefficient de frottement statique.

6.6.3 Analyse de la stabilité adaptée aux méthodes fréquentielles

Il est possible par les méthodes fréquentielles de suivre par continuation des solutions qui peuvent devenir instables [126] [130]. Cela peut être vu comme un atout des méthodes fréquentielles, mais il est nécessaire de le prédire. La stabilité est le plus souvent déterminée dans le domaine temporel en utilisant la théorie de Floquet [132] [126] [98], mais on trouve dans [152] et [137] une méthode d'analyse de la stabilité dans le domaine fréquentiel. Cette méthode est dans cette section étendue à la non-linéarité de frottement.

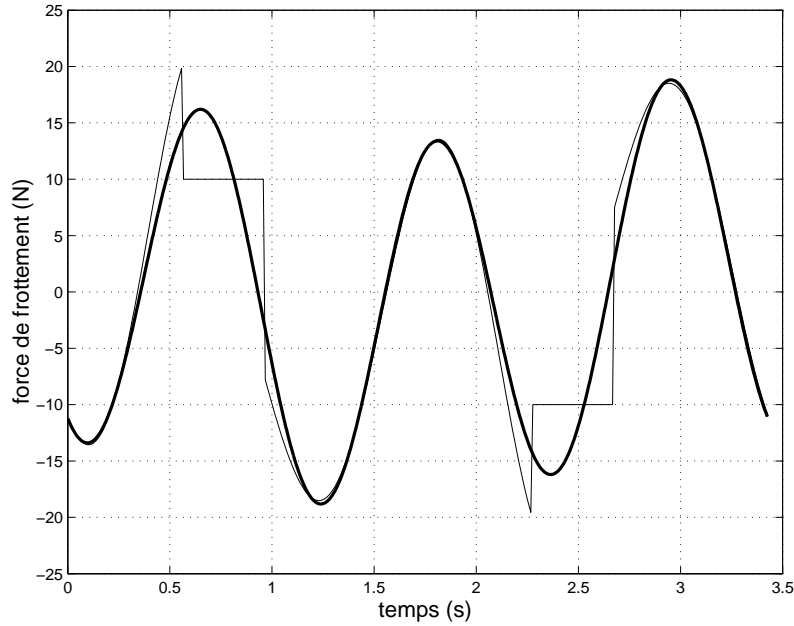


FIG. 6.40 – Force de frottement $3T$ -périodique. - : intégration temporelle, - : approximation en retenant la fréquence de l'excitation et la fréquence $1/3$ de l'excitation. $f = 0.875\text{Hz}$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$, $\mu_s N = 20\text{N}$, $\mu_d N = 10\text{N}$.

Présentation de la méthode

On considère un système mécanique soumis à une excitation périodique et présentant une interface de frottement. Les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} + \mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{F}_{ex}. \quad (6.38)$$

Les efforts de frottement \mathbf{F}_c sont ici supposés ne dépendre que du vecteur des vitesses $\dot{\mathbf{U}}$. Considérons une solution \mathbf{U}^* de (6.38). On détermine la stabilité de cette solution en regardant l'effet de l'ajout d'une petite perturbation. Si la perturbation conduit le système à s'écarter de la solution étudiée, la solution est dite instable. Si au contraire le système retourne vers la solution étudiée, alors cette solution est stable. L'astuce de la méthode est d'écrire la perturbation sous la forme d'une exponentielle et d'un terme exprimable dans la base des harmoniques retenues dans la méthode fréquentielle :

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\lambda t) \underbrace{\left(\frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{nh} \cos(n\omega t)\mathbf{a}_n + \sin(n\omega t)\mathbf{b}_n \right)}_{\mathbf{S}(t)}. \quad (6.39)$$

Le signe de λ va nous permettre de déterminer si la perturbation augmente ou diminue et donc de déterminer la stabilité. La linéarisation des forces de frottement autour de la solution \mathbf{U}^* peut s'écrire

$$\mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{U}}^* + \dot{\mathbf{P}}) = \mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{U}}^*) + J(\dot{\mathbf{U}}^*)\dot{\mathbf{P}}, \quad (6.40)$$

où $J(\dot{\mathbf{U}}^*)$ désigne la matrice jacobienne des forces de frottement exprimée à la solution. En écrivant les équations du mouvement (6.38) en $\mathbf{U}^* + \mathbf{P}$, il vient

$$M\ddot{\mathbf{P}} + C\dot{\mathbf{P}} + K\mathbf{P} + J(\dot{\mathbf{U}}^*)\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}. \quad (6.41)$$

La dérivation de l'équation (6.39) nous donne

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \exp(\lambda t) \left(\lambda \mathbf{S}(t) + \dot{\mathbf{S}}(t) \right), \quad (6.42)$$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = \exp(\lambda t) \left(\lambda^2 \mathbf{S}(t) + 2\lambda \dot{\mathbf{S}}(t) + \ddot{\mathbf{S}}(t) \right). \quad (6.43)$$

En injectant ces deux expressions dans (6.41) et en simplifiant par $\exp(\lambda t)$, on obtient l'équation suivante :

$$\lambda^2 M \mathbf{S} + \lambda(2M \dot{\mathbf{S}} + C \mathbf{S} + J(\dot{\mathbf{U}}^*) \mathbf{S}) + M \ddot{\mathbf{S}} + (C + J(\dot{\mathbf{U}}^*)) \dot{\mathbf{S}} + K \mathbf{S} = 0. \quad (6.44)$$

L'équation (6.44) est alors exprimée dans le domaine fréquentiel au moyen de la méthode de Galerkin. La projection sur la base des harmoniques retenues donne le problème aux valeurs propres

$$\left(\lambda^2 \tilde{A}_2 + \lambda (\tilde{A}_1 + \tilde{J}_1) + \tilde{A}_0 + \tilde{J}_0 \right) \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{0}, \quad (6.45)$$

où $\tilde{\mathbf{S}}$ est le vecteur multiharmonique correspondant à \mathbf{S} . \tilde{A}_2 , \tilde{A}_1 , \tilde{A}_0 sont des matrices diagonales par blocs. Si pour une harmonique k donnée, la base des coefficients de Fourier est organisée de telle sorte que les a_k précèdent les b_k , alors les blocs liés à cette harmonique peuvent s'écrire

$$\tilde{A}_{2k} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{1k} = \begin{pmatrix} C & 2k\omega M \\ -2k\omega M & C \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{0k} = \begin{pmatrix} K - (k\omega)^2 M & k\omega C \\ -k\omega C & K - (k\omega)^2 M \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

De même la matrice de dérivation ∇ est diagonale par blocs. Le bloc k s'écrit

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} 0 & k\omega I \\ -k\omega I & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.47)$$

La matrice \tilde{J}_0 est la matrice jacobienne liée aux efforts de contact :

$$\tilde{J}_0 = \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}_c}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}(\tilde{\mathbf{U}}^*) \right], \quad (6.48)$$

et les matrices \tilde{J}_0 et \tilde{J}_1 sont liées par

$$\tilde{J}_0 = \tilde{J}_1 \nabla. \quad (6.49)$$

Les équations du mouvement (6.38) s'écrivent dans le domaine fréquentiel

$$\tilde{A}_0 \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{F}}_c = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}. \quad (6.50)$$

Si par exemple on résout le problème par une méthode fréquentielle en donnant à annuler par un solveur non-linéaire la fonction

$$f(\tilde{\mathbf{U}}) = \tilde{A}_0 \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{F}}_c - \tilde{\mathbf{F}}_{ex}, \quad (6.51)$$

alors le jacobien de f obtenu à la solution $\tilde{\mathbf{U}}^*$ sera

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}(\tilde{\mathbf{U}}^*) \right] = \tilde{A}_0 + \tilde{J}_0. \quad (6.52)$$

On peut ainsi déduire facilement la matrice \tilde{J}_0 , puis par (6.49) la matrice \tilde{J}_1 .

La résolution du problème aux valeurs propres quadratique (6.45) peut se faire par exemple en le transformant en un problème d'ordre 1 de taille double ou encore en utilisant une routine spécifique comme la fonction `polyeig` de Matlab. Une fois les valeurs propres obtenues il faut regarder le signe de leurs parties réelles. Si l'une d'entre elle possède une partie réelle strictement positive, alors la solution périodique \mathbf{U}^* est instable.

Résultats

On reprend ici le modèle à 2 degrés de liberté. La figure 6.41 montre un exemple où la solution T-périodique à deux arrêts par cycle est suivie par continuité en γ en partant de $\gamma = 1$. La réponse obtenue par l'intégration temporelle bifurque pour $\gamma = 0.7$ vers une solution 2T-périodique. Les lignes continues montrent la solution obtenue par une méthode AFT. Cette méthode fréquentielle suit sur toute la plage de γ étudiée la solution T-périodique. En mettant en oeuvre la méthode de stabilité proposée, on trouve une valeur limite de γ en dessous de laquelle la solution est détectée comme instable. La figure 6.42 montre que cette limite de stabilité est très dépendante du nombre d'harmoniques retenues dans la méthode fréquentielle. On précise que les résultats présentés sont obtenus avec un même nombre d'harmoniques pour la réponse et pour la perturbation. Avant que la limite trouvée soit stabilisée, il faut retenir un nombre élevé d'harmoniques. La valeur limite ainsi déterminée est $\gamma = 0.82$. Il faut ici remarquer que les résultats de l'intégration temporelle sont obtenus en faisant varier γ au cours de la même intégration temporelle et en attendant à chaque fois que le régime permanent soit atteint. Seulement, il est possible que si l'instabilité se développe très lentement à partir de $\gamma = 0.82$ on ne la détecte pas avant d'avoir incrémenté plusieurs fois γ . La limite de stabilité déterminée par notre méthode n'est donc pas *a priori* incompatible avec le résultat d'intégration temporelle fourni.

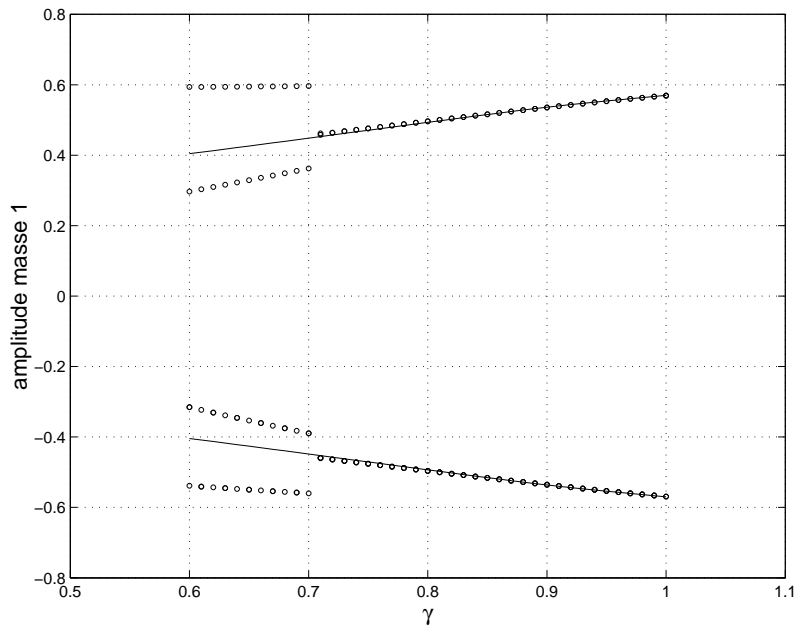


FIG. 6.41 – Comparaison des solutions suivies par l'intégration temporelle et par une méthode fréquentielle. $f = 0.9\text{Hz}$, $\mu_s N = 20\text{N}$, $\alpha = 100$, $\beta = 10$, \circ : Intégration temporelle avec γ décroissant, $-$: méthode AFT avec 21 harmoniques.

Conclusions

Le coefficient de frottement statique détermine la force tangentielle nécessaire à l'initiation du glissement. Quand il est plus élevé que le coefficient de frottement dynamique, les simulations temporelles de réponse harmonique menées sur des petits systèmes ont montré qu'il pouvait cau-

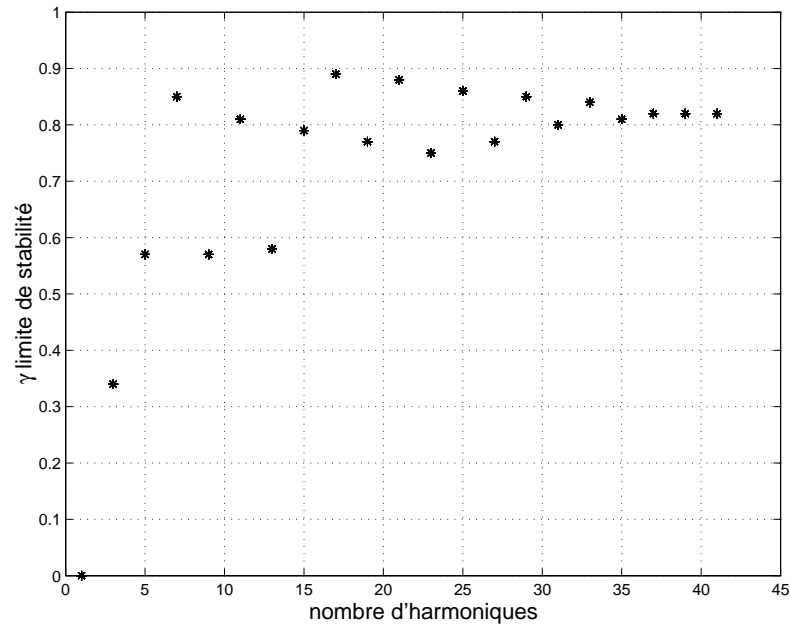


FIG. 6.42 – Evolution de la limite de stabilité en fonction du nombre d'harmoniques.

ser des comportements multipériodiques voire chaotiques. Notre méthode fréquentielle, la DLFT, s'avère capable de trouver les solutions de même période que l'excitation mais les comportements multipériodiques tels ceux enregistrés pour le système à deux degrés de liberté dans le cas d'un rapport γ faible n'ont pu être retrouvés. Même en retenant les sous-harmoniques nécessaires, il y a souvent convergence vers une solution différente de celle prédite par l'intégration temporelle. Selon la méthode fréquentielle d'analyse de la stabilité présentée en fin de chapitre, le calcul fréquentiel peut effectivement converger vers une solution instable. Cependant, cette technique nécessite une validation plus poussée et semble requérir un grand nombre d'harmoniques afin de donner une évaluation claire de la stabilité.

Pour améliorer la convergence des calculs fréquentiels, il pourrait être intéressant d'enrichir la base des harmoniques par l'introduction de un ou de plusieurs termes non réguliers, comme l'ont proposé Kim et Perkins [75], dans l'espoir d'approcher plus facilement les discontinuités de la force de frottement.

Conclusions et perspectives

Ce mémoire a montré comment modéliser l'effet du frottement en pied d'aube sur la dynamique des disques aubagés de turbomachines. La recherche du régime permanent en prenant en compte les non-linéarités de contact et de frottement s'est faite à l'aide de la DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency Time method). Cette méthode a été étendue au cas d'un modèle tridimensionnel de contact aube-disque. Le nombre important d'éléments de contact définis à l'interface a permis de reproduire les phénomènes de microglissement et de décollement partiel des surfaces de contact. Nous avons également proposé une méthode pour choisir le coefficient de pénalité intervenant dans la définition des Lagrangiens Dynamiques, afin de garantir une bonne convergence. Enfin, en tirant parti des caractéristiques de l'excitation aérodynamique s'exerçant sur les aubages et en faisant l'hypothèse d'une symétrie cyclique parfaite, on a pu réaliser dans le domaine fréquentiel le calcul de la réponse forcée d'une roue aubagée complète avec frottement dans les attaches aube-disque à partir de la modélisation d'un seul secteur.

Une part importante de l'étude a été consacrée à la validation et à l'évaluation de la performance de la méthode proposée. Les validations numériques ont consisté à comparer sur des petits modèles ses résultats avec ceux obtenus par intégration temporelle et par une méthode AFT (Alternating Frequency Time). Ces comparaisons ont en outre démontré la grande rapidité de résolution de la DLFT.

Nous avons également confronté les résultats numériques à des résultats expérimentaux obtenus sur un banc d'essais comprenant un disque monté de quatre aubes tournant dans une cloche à vide. Ceci a permis de supprimer les sources d'amortissement d'origine aérodynamique afin d'isoler l'influence de l'amortissement d'origine structurale. Les réponses fréquentielles expérimentales témoignent d'un comportement non-linéaire au voisinage des résonances. En effet, les différents niveaux d'excitation imposés font apparaître clairement un effet molissant. Dans la simulation, on a supposé que le frottement en pied d'aube était la seule source de la non-linéarité observée, et à partir d'un modèle tridimensionnel complet du banc, nous avons pu obtenir des résultats numériques relativement proches des observations expérimentales. Nous avons également montré que l'utilisation d'un coefficient de frottement dépendant de l'effort normal de contact permettait de mieux reproduire la variation de l'amplitude avec la vitesse de rotation. Des résultats plus fiables auraient pu être obtenus si une caractérisation expérimentale précise des sources d'amortissement autres que le frottement en pied d'aube et des propriétés de l'interface de contact (coefficient de frottement, raideurs de contact) avait pu être réalisée. Par ailleurs, la mesure de la répartition des pressions de contact à l'aide de film Fuji Prescale a révélé de forts gradients de contrainte qui n'ont pas pu être reproduits fidèlement faute d'une discrétisation des surfaces de contact suffisante. Pour réduire cette source d'erreur, il faudrait trouver un moyen d'augmenter de façon significative le nombre d'éléments de contact sans pénaliser de façon excessive le temps de calcul.

Dans la plupart des simulations effectuées au cours de cette étude, la loi de Coulomb avec coefficient de frottement unique a été utilisée pour modéliser le frottement au niveau de chaque élément de contact. Par ailleurs, le décollement partiel des portées de l'aube a été simulé par la loi de contact unilatéral. Ces lois discontinues ont pu être utilisées sans régularisation dans la DLFT grâce à la prise en compte indirecte des contraintes, qui confère en outre à la méthode une grande rapidité de résolution. Mais nous avons aussi testé l'influence de plusieurs enrichissements de la modélisation, en s'appuyant sur la littérature de la tribologie. Nous avons en particulier montré que l'ajout de raideurs de contact tangentielles pouvait avoir un impact significatif sur les fréquences propres et sur la forme de la réponse fréquentielle. L'utilisation de telles raideurs pourraient notamment être un moyen de trouver une meilleure adéquation avec les allures observées expérimentalement. Nous avons aussi trouvé, à partir de l'étude de petits systèmes frottants, que la prise en compte d'un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique pouvait modifier de façon nette le comportement dynamique, la réponse à une excitation harmonique devenant parfois multipériodique voire chaotique.

Les travaux menés dans cette thèse ont abouti à un outil numérique capable de quantifier l'amortissement dû au frottement en pied d'aube et qui sera donc utile pour le concepteur désireux de prédire les niveaux vibratoires des roues aubagées par la simulation. Cependant, sa mise en oeuvre dans une démarche purement prédictive est délicate : il est nécessaire de s'appuyer sur des tests expérimentaux partiels ou sur l'expérience pour évaluer des paramètres essentiels, tel le coefficient de frottement, ayant un impact majeur sur l'amplitude de la réponse. Il faut également garder à l'esprit que le coefficient de frottement ainsi que les caractéristiques des surfaces de contact évoluent en fonction des cycles de sollicitation et à mesure que l'usure progresse. On note également que la résolution du problème non-linéaire par notre méthode donne accès à la répartition des glissements, des contraintes de contact et des énergies dissipées localement dans l'interface de contact qui sont des données couramment utilisées dans les critères de dommage par fretting. Notre méthode pourrait donc être utilisée par exemple pour l'évaluation des risques de fissuration dans l'attache des aubes. Là encore, la précision est conditionnée par le nombre d'éléments de contact retenus. Des efforts sont encore à faire pour prédire fidèlement la répartition des contraintes de contact en dynamique.

Il serait également intéressant pour améliorer la compréhension et la qualité de la prédiction de la réponse forcée des disques aubagés, de mener des analyses couplées permettant de prendre en compte conjointement le frottement en pied d'aube et d'autres phénomènes ayant un impact important. Ce pourrait être par exemple l'étude des effets cumulés du frottement en pied d'aube et de ceux liés aux autres zones de contact potentielles : nageoires, talons, frotteurs sous plateforme... La méthode proposée dans ce mémoire peut aussi être employée pour évaluer l'impact du frottement en pied d'aube sur la stabilité aéroélastique. Par ailleurs, de nombreux travaux ont mis en évidence les effets liés au désaccordage des disques aubagés, en particulier l'amplification, localisée sur certaines aubes, des niveaux vibratoires. Mais l'impact quantitatif du frottement en pied d'aube sur la réponse d'un disque désaccordé n'a pas été étudié pour le moment.

Enfin la démarche proposée peut être transposée au cas d'autres types de liaisons. Par exemple, elle permettrait d'évaluer l'amortissement d'une liaison boulonnée. De manière générale, elle est applicable à l'étude en dynamique de contacts dans lesquels les amplitudes de glissement sont faibles et pour lesquels la répartition de l'effort normal n'est pas forcément connue à l'avance.

Bibliographie

- [1] P. Alart, A. Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 92, 353-375, 1991.
- [2] U. Andreaus, P. Casini. *Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force*. Journal of Sound and Vibration, vol. 245, n° 4, 685-699, 2001.
- [3] J.F. Archard. *Elastic deformation and the laws of friction*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A : Mathematical and Physical Sciences, vol. 243, 190-205, 1957.
- [4] E. Arnoult, I. Guilloreau, B. Peseux, J. Bonini. *Présentation d'un nouvel élément fini de contact*. Mécanique et Industries, vol. 2, n° 1, 33-42, 2001.
- [5] R. Barron, J. Wojewoda, J. Brindley, T. Kapitaniak. *Interpretation Of Aperiodic Time Series : A New View Of Dry Friction*. Journal of Sound and Vibration, vol. 162, n° 2, 369-375, 1993.
- [6] J.R. Beisheim, G.B. Sinclair. *On the three-dimensional finite element analysis of dovetail attachments*. ASME Journal of Turbomachinery, vol. 125, 372-379, 2003.
- [7] J.R. Beisheim, G.B. Sinclair. *Three-dimensional finite element analysis of dovetail attachments with and without crowning*. Paper ASME GT2004-53222, Proceedings of ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, 2004.
- [8] F. Ben Belgacem. *Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element methods*. SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 37, n° 4, 1198-1216, 2000.
- [9] M.T. Bengisu, A. Akay. *Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 171, n° 4, 557-570, 1994.
- [10] A. Benjeddou. *Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptative structural elements : a survey*. Computers and Structures, vol. 76, 347-363, 2000.
- [11] S.E. Benzley, E. Perry, K. Merkley, B. Clark, G. Sjaardama. *A comparison of all hexagonal and all tetrahedral finite element meshes for elastic and elasto-plastic analysis*. 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 179-191, 1995.
- [12] E.J. Berger. *Friction modeling for dynamic system simulation*. ASME Applied Mechanics Reviews, vol. 55, n° 6, 535-577, 2002.
- [13] E.J. Berger, C.M. Krousgrill, F. Sadeghi. *Friction-induced sliding instability in a multi-degree-of-freedom system with oscillatory normal forces*. Journal of Sound and Vibration, vol. 266, 369-387, 2003.
- [14] M. Berthillier, M. Dhainaut, F. Burgaud, V. Garnier. *A numerical method for the prediction of bladed disk forced response*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 119, 404-410, 1997.

-
- [15] M. Berthillier, C. Dupont, R. Mondal, J.J. Barrau. *Blades forced response analysis with friction dampers*. ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 120, 468-474, 1998.
- [16] T.M. Cameron, J.H. Griffin. *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 56, 149-154, 1989.
- [17] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Aström, P. Lischinsky. *A new model for control of systems with friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, n° 3, 419-425, 1995.
- [18] R. Chandra, I. Chopra. *Experimental-theoretical investigation of the vibration characteristics of rotating composite box beams*. Journal of Aircraft, vol. 29, n° 4, 657-664, 1992.
- [19] D. Charleux, F. Thouverez, J.P. Lombard. *Three-dimensional multiharmonic analysis of contact and friction in dovetail joints*. Paper 348, International Modal Analysis Conference XXII, Dearborn, Michigan, 2004.
- [20] D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez, J.P. Lombard, J. Dupeux. *Analysis of a bladed disk with friction in blade attachments*. Paper 213, International Modal Analysis Conference XXIII, Orlando, Florida, 2005.
- [21] D. Charleux, C. Gibert, F. Thouverez, J. Dupeux. *Numerical and experimental study of friction damping in blade attachments of rotating bladed disks*. Soumis à l'ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power.
- [22] J.J. Chen, B.D. Yang, C.H. Menq. *Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints*. Journal of Sound Vibration, vol. 229, n° 4, 775-792, 2000.
- [23] J.J. Chen, C.H. Menq. *Periodic response of blades having three-dimensional nonlinear shroud constraints*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 123, 901-909, 2001.
- [24] M. Ciavarella, G. Demelio. *A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints*. International Journal of Solids and Structures, vol. 38, 1791-1811, 2001.
- [25] R.R. Craig, M.C.C. Bampton. *Coupling of substructures for dynamic analyses*. AIAA Journal, vol. 6, n° 7, 1313-1319, 1968.
- [26] J. Crassous, S. Ciliberto, E. Charlaix, C. Laroche. *Hysteresis and recovery length in a dry solid friction experiment*. Journal de Physique II France, vol. 7, 1745-1751, 1997.
- [27] A. Czekanski, S.A. Meguid, N. El-Abbasi, M.H. Refaat. *On the elastodynamic solution of frictional contact problems using variational inequalities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, n° 3, 611-627, 2001.
- [28] A. Czekanski, S.A. Meguid. *Solution of dynamic frictional contact problems using nondifferentiable optimization*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 43, n° 6, 1369-1386, 2001.
- [29] P.R. Dahl. *Solid friction damping of mechanical vibrations*. AIAA Journal, vol. 14, n° 12, 1675-1682, 1976.
- [30] J.P. Den Hartog. *Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, vol. 53, 107-115, 1931.
- [31] M. Di Bernardo, M.I. Feigin, S.J. Hogan, M.E. Homer. *Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 10, n° 11, 1881-1908, 1999.

- [32] S. Dubigeon, C.B. Kim. *Modélisation de liaisons non linéaires du type frottement sec dans les assemblages*. Revue Française de Mécanique, 1987, n° 3, 149-158, 1987.
- [33] K.P. Duffy. *Durability of the self-tuning impact damper in rotating turbine blades*. Proceedings of the 9th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference, Pinehurst, North Carolina, 2004.
- [34] G. Duvaut, J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [35] G. Duvaut. *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 290, Série A, 263-265, 1980.
- [36] B. Feeny, F.C. Moon. *Chaos in a forced dry-friction oscillator : experiments and numerical modelling*. Journal of Sound Vibration, vol. 170, n° 3, 303-323, 1994.
- [37] B. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs, K. Popp. *A historical review on dry friction and stick-slip phenomena*. ASME Applied Mechanics Reviews, vol. 51, n° 5, 321-341, 1998.
- [38] G. Ferraris, R. Henry, M. Lalanne, P. Trompette. *Frequencies and mode shapes of rotating bladed axisymmetric structures. Application to a jet engine*. Vibrations of bladed disk assemblies. 9th biennial conference on mechanical vibration and noise, Dearborn, 1983.
- [39] J.F. Ferrero, J.J. Barrau. *Study of dry friction under small displacements and near-zero sliding velocity*. Wear, vol. 209, 322-327, 1997.
- [40] J.F. Ferrero, E. Yettou, J.J. Barrau, S. Rivallant. *Analysis of a dry friction problem under small displacements : application to a bolted joint*. Wear, vol. 256, 1135-1143, 2004.
- [41] A.A. Ferri. *On the equivalence of the Incremental Harmonic Balance Method and the Harmonic Balance Newton Raphson Method*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 53, 455-456, 1986.
- [42] A.A. Ferri, E.H. Dowell. *Frequency domain solutions to multi-degree-of-freedom, dry friction damped systems*. Journal of Sound Vibration, vol. 124, n° 2, 207-224, 1988.
- [43] V. Fridrici. *Fretting d'un alliage de titane revêtu et lubrifié : application au contact aube/disque*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [44] U. Galvanetto, S.R. Bishop. *Dynamics of a simple damped oscillator undergoing stick-slip vibrations*. Meccanica, vol. 34, 337-347, 1999.
- [45] C. Gao, D. Kuhlmann-Wilsdorf, D.D. Makel. *Fundamentals of stick-slip*. Wear, vol. 162-164, 1139-1149, 1993
- [46] C. Gao, D. Kuhlmann-Wilsdorf, D.D. Makel. *The dynamic analysis of stick-slip motion*. Wear, vol. 173, 1-12, 1994.
- [47] M. Géradin, D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, 1992.
- [48] I.G. Goryacheva, H. Murthy, T.N. Farris. *Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges*. International Journal of Fatigue, vol. 24, 1191-1201, 2002.
- [49] J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson. *Contact of nominally flat surfaces*. Proceedings of the Royal Society of London, Series A : Mathematical and Physical Sciences, vol. 295, 300-319, 1966.
- [50] J.H. Griffin. *Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils*. ASME Journal of Engineering for Power, vol. 102, 329-333, 1980.

- [51] J.H. Griffin, A. Sinha. *The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 107, 205-211, 1985.
- [52] M. Groper. *Microslip and macroslip in bolted joints*. Experimental Mechanics, vol. 25, n° 2, 171-174, 1985.
- [53] J. Guillen, C. Pierre. *An efficient hybrid frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems*. IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Dynamics, Munich, 1998.
- [54] D.A. Haessig, B. Friedland. *On the modelling and simulation of friction*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 113, 354-362, 1991.
- [55] S.M. Hashemi, M.J. Richard. *Natural frequencies of rotating uniform beams with Coriolis effects*. ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 123, n° 4, 444-455, 2001.
- [56] R. Henry. *Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires*. Journal de Mécanique appliquée, vol. 4, n° 1, 61-82, 1980.
- [57] R. Henry, G. Ferraris. *Substructuring and wave propagation : an efficient technique for impeller dynamic analysis*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 106, 2-10, 1984.
- [58] M.H. Herman Shen. *Reliability assessment of high cycle fatigue design of gas turbine blades using the probabilistic Goodman Diagram*. International Journal of Fatigue, vol. 21, 699-708, 1999.
- [59] P. Hild. *Elements finis non conformes pour un problème de contact unilatéral avec frottement*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 324, Série 1, 707-710, 1997.
- [60] N. Hinrichs, M. Oestreich, K. Popp. *On the modelling of friction oscillators*. Journal of Sound and Vibration, vol. 216, n° 3, 435-459, 1998.
- [61] H.-K. Hong, C.-S. Liu. *Coulomb friction oscillator : modelling and responses to harmonic loads and base excitations*. Journal of Sound and Vibration, vol. 229, n° 5, 1171-1192, 2000.
- [62] S.H. Hsieh, J.F. Abel. *Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies*. Journal of Sound and Vibration, vol. 182, n° 1, 91-107, 1995.
- [63] R.A. Ibrahim. *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part I : Mechanics of contact and friction*. ASME Applied Mechanics Reviews, vol. 47, n° 7, 209-226, 1994.
- [64] R.A. Ibrahim. *Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos. Part II : Dynamics and modelling*. ASME Applied Mechanics Reviews, vol. 47, n° 7, 227-253, 1994.
- [65] R.A. Ibrahim, S.A. Zielke, K. Popp. *Characterization of interfacial forces in metal-to-metal contact under harmonic excitation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 220, n° 2, 365-377, 1999.
- [66] F.T. Ivancic. *The effect of hard coating on the damping and fatigue life of titanium*. Master Thesis, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 2003.
- [67] W. D. Iwan. *On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol.89, 612-617, 1967.
- [68] G. Jacquet-Richardet, G. Ferraris, P. Rieutord. *Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies : a global cyclic symmetry approach*. Journal of Sound and Vibration, vol. 191, n° 5, 901-915, 1996.

- [69] B. Jemai. *Contrôle actif de structures flexibles à l'aide de matériaux piezo-électriques : applications*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [70] L. Jezequel. *Extension des méthodes de synthèse modale au cas non-linéaire*. Revue Française de Mécanique, 1987, n° 3, 159-172, 1987.
- [71] B. Kenny, E.A. Patterson, M.Said, K.S.S. Aradhya. *Contact stress distributions in a turbine disc dovetail type joint - a comparison of photoelastic and finite elements results*. Strain, vol. 27, n° 1, 21-24, 1991.
- [72] N. Khader, R.G. Loewy. *Shaft flexibility effects on the forced response of a bladed-disk assembly*. Journal of Sound and Vibration, vol. 139, n° 3, 469-485, 1990.
- [73] J.J. Kielb, R.S. Abhari. *Experimental study of aerodynamic and structural damping in a full-scale rotating turbine*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 125, 102-112, 2003.
- [74] N. Kikuchi, J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : a Study of Variational Inequalities ans Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [75] W.J. Kim, N.C. Perkins. *Harmonic balance / Galerkin method for non-smooth dynamic systems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 261, 213-224, 2003.
- [76] S.L. Lau, Y.K. Cheung, S.Y. Wu. *A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear vibration of elastic systems*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 49, 849-853, 1982.
- [77] R.M. Laurenson. *Modal analysis of rotating flexible structures*. AIAA Journal, vol. 14, n° 10, 1444-1450, 1976.
- [78] T.A. Laursen, B.N. Maker. *An augmented lagrangian quasi-Newton solver for constrained nonlinear finite element applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, 3571-3590, 1995.
- [79] R.I. Leine, D.H. Van Campen, A. De Kraker, L. Van Den Steen. *Stick-slip vibrations induced by alternate friction models*. Nonlinear Dynamics, vol. 16, 41-54, 1998.
- [80] R.I. Leine, D.H. Van Campen. *Discontinuous bifurcations of periodic solutions*. Mathematical and Computer Modelling, vol. 36, 259-273, 2002.
- [81] A.B. Liggins, W.R. Hardie, J.B. Finlay. *The spatial and pressure resolution of Fuji pressure-sensitive film*. Experimental Mechanics, vol. 35, n° 2, 166-173, 1995.
- [82] C.-S. Liu, W.-T. Chang. *Frictional behaviour of a belt-driven and periodically excited oscillator*. Journal of Sound and Vibration, vol. 258, n° 2, 247-268, 2002.
- [83] C.D. Lykins, S. Mall, V. Jain. *An evaluation of parameters for predicting fretting fatigue crack initiation*. International Journal of Fatigue, vol. 22, 703-716, 2000.
- [84] R.M. Mathison, M.G. Dunn, M.M. Weaver, A. Dushko. *Measurement of air film damping effectiveness*. ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, June 14-17, 2004.
- [85] S.A. Meguid, M.H. Refaat, P. Papanikos. *Theoretical and experimental studies of structural integrity of dovetail joints in aeroengine discs*. Journal of Materials Processing Technology, vol. 56, 668-677, 1996.
- [86] S.A. Meguid, P.S. Kanth, A. Czekanski. *Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 35, 305-317, 2000.

- [87] C.H. Menq, J. Bielak, J.H. Griffin. *The influence of microslip on vibratory response, part I : a new microslip model*. Journal of Sound and Vibration, vol. 107, n° 2, 279-283, 1986.
- [88] C.H. Menq, J.H. Griffin, J. Bielak. *The influence of microslip on vibratory response, part II : a comparison with experimental results*. Journal of Sound and Vibration, vol. 107, n° 2, 295-307, 1986.
- [89] C.H. Menq, J.H. Griffin, J. Bielak. *The influence of variable normal load on the forced vibration of a frictionally damped structure*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 108, 300-305, 1986.
- [90] A.R. Mijar, J.S. Arora. *Review of formulations for elastostatic frictional contact problems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 20, n° 3, 167-189, 2000.
- [91] R.D. Mindlin. *Compliance of elastic bodies in contact*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 16, 259-268, 1949.
- [92] N. Mostaghel, T. Davis. *Representations of Coulomb friction for dynamic analysis*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 26, 541-548, 1997.
- [93] H. Murthy, G. Harish, T.N. Farris. *Influence of contact profile on fretting crack nucleation in a titanium alloy*. Paper AIAA-2000-1546, 41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, Atlanta, GA, 2000.
- [94] A. Muszyńska, D.I.G. Jones. *On tuned bladed disk dynamics : some aspects of friction related mistuning*. Journal of Sound and Vibration, vol. 86, n° 1, 107-128, 1983.
- [95] A. Muszyńska, D.I.G. Jones. *A parametric study of dynamic response of a discrete model of turbomachinery bladed disk*. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol. 105, 434-443, 1983.
- [96] S. Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [97] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, L. Jezequel. *A dynamic lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 265, n° 1, 201-219, 2003.
- [98] S. Narayanan, P. Sekar. *A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 211, n° 3, 409-424, 1998.
- [99] S. Natsavias. *Stability of piecewise linear oscillators with viscous and dry friction damping*. Journal of Sound and Vibration, vol. 217, n° 3, 507-522, 1998.
- [100] V.G. Oancea, T.A. Laursen. *Dynamics of state variable frictional law in finite element analysis*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 22, 25-40, 1996.
- [101] V.G. Oancea, T.A. Laursen. *Investigations of low frequency stick-slip motion : experiments and numerical modelling*. Journal of Sound and Vibration, vol. 213, n° 4, 577-600, 1998.
- [102] J.T. Oden, J.A.C. Martins. *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 52, 527-634, 1985.
- [103] V. Omprakash, V. Ramamurti. *Analysis of bladed disks - a review*. The Shock and Vibration Digest, vol. 20, n° 11, 14-21, 1988.
- [104] U. Olofsson. *Cyclic micro-slip under unlubricated conditions*. Tribology International, vol. 28, n° 4, 207-217, 1995.
- [105] G.P. Ostermeyer. *On the dynamics of the friction coefficient*. Wear, vol. 254, 852-858, 2003.

- [106] P. Papanikos, S.A. Meguid, Z. Stjepanovic. *Three-dimensional nonlinear finite element analysis of dovetail joints in aeroengine discs*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 29, 173-186, 1998.
- [107] R. Persianoff, P. Ray. *Introduction d'une loi de frottement expérimentale dans un modèle éléments finis*. Mécanique et Industries, vol. 2, n° 2, 119-131, 2001.
- [108] E.P. Petrov, D.J. Ewins. *Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks*. ASME Journal of Turbomachinery, vol. 125, 364-371, 2003.
- [109] E.P. Petrov. *A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks*. ASME Journal of Turbomachinery, vol. 126, 175-183, 2004.
- [110] E.P. Petrov, D.J. Ewins. *Analysis of essentially non-linear vibration of large-scale models for bladed discs with variable contact and friction at root joints*. Proceedings of the 8th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 163-172, IMechE Event Publications, 2004.
- [111] C. Pierre, A.A. Ferri, E.H. Dowell. *Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 52, 958-964, 1985.
- [112] C. Pierre, S.W. Shaw. *Mode localization due to symmetry-breaking nonlinearities*. International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 1, n° 2, 471-475, 1991.
- [113] O. Poudou, C. Pierre. *Etude de la réponse forcée élastique d'une roue aubagée amortie par frotteurs de type coin : analyse théorique et simulations numériques*. 14^e Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, Lyon, 2004.
- [114] M.J.D. Powell. *A hybrid method for nonlinear equations*. In P. Rabinowitz, editor, Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, 87-114, Gordon and Breach, London, 1970.
- [115] P.S. Prevéy, R. Ravindranath, J.T. Cammett. *Application of low-plasticity burnishing to improve damage tolerance of a Ti-6Al-4V first stage fan blade*. Proceedings of the 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Norfolk, Virginia, 2003.
- [116] E. Rabinowicz. *Friction and Wear of Materials*. John Wiley and Sons, New-York, 1965.
- [117] J.S. Rao. *Turbomachine blade vibration*. The Shock and Vibration Digest, vol. 19, n° 5, 3-10, 1987.
- [118] J.S. Rao, M.A.W. Usmani, C.V. Ramakrishnan. *Interface damping in blade attachment region*. Third international conference on rotor dynamics, Lyon, 185-190, 1990.
- [119] J.S. Rao, A. Saldanha. *Turbomachine blade damping*. Journal of Sound and Vibration, vol. 262, 731-738, 2003.
- [120] M.H. Refaat, S.A. Meguid. *On the modeling of frictional contact problems using variational inequalities*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 19, 89-101, 1995.
- [121] W. Ren, S. Mall, J.H. Sanders, S.K. Sharma. *Evaluation of coatings on Ti-6Al-4V substrate under fretting fatigue*. Surface and Coatings Technology, vol. 192, 177-188, 2005.
- [122] J.R. Rice, A.L. Ruina. *Stability of steady frictional slipping*. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 50, 343-349, 1983.

- [123] C. Ruiz, P.H.B. Boddington, K.C. Chen. *An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint*. Experimental Mechanics, vol. 24, n° 3, 208-217, 1984.
- [124] K.Y. Sanliturk, D.J. Ewins. *Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method*. Journal of Sound and Vibration, vol. 193, n° 2, 511-523, 1996.
- [125] K.Y. Sanliturk, M. Imregun, D.J. Ewins. *Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers*. ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 119, 96-103, 1997.
- [126] S. Sarkar, K. Venkatraman. *A numerical technique to predict periodic and quasi-periodic response of nonlinear dynamic systems*. Computers and Structures, vol. 81, n° 13, 1383-1393, 2003.
- [127] E. Seinturier, J.P. Lombard, M. Berthillier, O. Sgarzi. *Turbine mistuned forced response prediction, comparison with experimental results*. Paper ASME GT-2002-30424, ASME Turbo Expo, Amsterdam, The Netherlands, 2002.
- [128] E. Seinturier, J.P. Lombard, M. Dumas, C. Dupont, V. Sharma, J. Dupeux. *Forced response prediction methodology for the design of HP compressors bladed disks*. Paper ASME GT-2004-53372, ASME Turbo Expo, Vienna, Austria, 2004.
- [129] L.E. Seitzman, R.N. Bolster, I.L. Singer. *IBAD MoS₂ lubrication of titanium alloys*. Surface and Coatings Technology, vol. 78, 10-13, 1996.
- [130] C. Semler, W.C. Gentleman, M.P. Paidoussis. *Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations*. Journal of Sound and Vibration, vol. 195, n° 4, 553-574, 1996.
- [131] S.W. Shaw. *On the dynamic response of a system with dry friction*. Journal of Sound and Vibration, vol. 108, n° 2, 305-325, 1986.
- [132] T.N. Shiau, J.S. Rao, Y.D. Yu, S.T. Choi. *Steady-state response and stability of rotating composite blades with frictional damping*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 120, 131-139, 1998.
- [133] R.J. Singerman, D.R. Pedersen, T.D. Brown. *Quantitation of pressure-sensitive film using digital image scanning*. Experimental Mechanics, vol. 27, n° 1, 99-105, 1987.
- [134] G.B. Sinclair, N.G. Cormier, J.H. Griffin, G. Meda. *Contact stresses in dovetail attachments : finite element modeling*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 124, 182-189, 2002.
- [135] A. Sinha, J.H. Griffin. *Effects of static friction on the forced response of frictionally damped turbine blades*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 106, 65-69, 1984.
- [136] A. Sinha, J.H. Griffin, R.E. Kielb. *Influence of friction dampers on torsional blade flutter*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 108, 313-318, 1986.
- [137] S.K. Sinha. *Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub*. Journal of Sound and Vibration, vol. 273, 875-919, 2004.
- [138] J.C. Slater, G.R. Minkiewicz, A.J. Blair. *Forced response of bladed disk assemblies - a survey*. The Shock and Vibration Digest, vol. 31, n° 1, 17-24, 1999.

- [139] C.B. Smith, N.M. Wereley. *Transient analysis for damping identification in rotating composite beams with integral damping layers*. Smart Materials and Structures, vol. 5, 540-550, 1996.
- [140] A.V. Srinivasan. *Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades*. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 119, 742-775, 1997.
- [141] A. Stefański, J. Wojewoda, M. Wiercigroch, T. Kapitaniak. *Chaos caused by non-reversible dry friction*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 16, n° 5, 661-664, 2003.
- [142] M.P. Szolwinski, J.F. Matlik, T.N. Farris. *Effects of HCF loading on fretting fatigue crack nucleation*. International Journal of Fatigue, vol. 21, 671-677, 1999.
- [143] D.G. Teer. *New solid lubricant coatings*. Wear, vol. 251, 1068-1074, 2001.
- [144] D.L. Thomas. *Dynamics of rotationally periodic structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, 81-102, 1979.
- [145] I.G. Tokar', A.P. Zinkovskii, V.V. Matveev. *On the problem of improvement of the damping ability of rotor blades of contemporary gas-turbine engines*. Strength of Materials, vol. 35, n° 4, 2003.
- [146] D.M. Tolstoi. *Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibrations in contact friction*. Wear, vol. 10, 199-213, 1967.
- [147] A. Toufine, J.J. Barrau, M. Berthillier. *Dynamic study of a simplified mechanical system with presence of dry friction*. Journal of Sound and Vibration, vol. 225, n° 1, 95-109, 1999.
- [148] A.V. Valevate, J.C. Slater, J.A. Menart, C.J. Cross, T. George. *Semi-active vibration control of fan blades*. Proceedings of the 9th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference, Pinehurst, North Carolina, 2004.
- [149] F. Van De Velde, P. De Baets. *The relation between friction force and relative speed during the slip-phase of a stick-slip cycle*. Wear, vol. 219, 220-226, 1998.
- [150] P. Vielsack. *Stick-slip instability of decelerative sliding*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 36, 237-247, 2001.
- [151] T. Villa, F. Migliavacca, D. Gastaldi, M. Colombo, R. Pietrabissa. *Contact stresses and fatigue life in a knee prosthesis : comparison between in vitro measurements and computational simulations* Journal of Biomechanics, vol. 37, 45-53, 2004.
- [152] G. Von Groll, D.J. Ewins. *The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 241, n° 2, 223-233, 2001.
- [153] J.H. Wang, W.L. Shieh. *The influence of a variable friction coefficient on the dynamic behavior of a blade with a friction damper*. Journal of Sound and Vibration, vol. 149, n° 1, 137-145, 1991.
- [154] C.L. Wang, C.K. Cheng, C.W. Chen, C.M. Lu, Y.S. Hang, T.K. Liu. *Contact areas and pressure distributions in the subtalar joint*. Journal of Biomechanics, vol. 28, n° 3, 269-279, 1995.
- [155] Y. Wang. *Stick-slip motion of frictionally damped turbine airfoils : a Finite Element in Time (FET) approach*. DE-Vol. 84-1, ASME Design Engineering Technical Conferences vol. 3, 1071-1082, 1995.

-
- [156] Y. Wang. *An analytical solution for periodic response of elastic-friction damped systems.* Journal of Sound and Vibration, vol. 189, n° 3, 299-313, 1996.
- [157] M. Wiercigroch. *Comments on the study of a harmonically excited linear oscillator with a Coulomb damper.* Journal of Sound and Vibration, vol. 167, n° 3, 560-563, 1993.
- [158] M. Wiercigroch. *A note on the switch function for the stick-slip phenomenon.* Journal of Sound and Vibration, vol. 175, n° 5, 700-704, 1994.
- [159] J. Wildheim. *Excitation of rotating circumferentially periodic structures.* Journal of Sound and Vibration, vol. 75, n° 3, 397-416, 1981.
- [160] H.Y. Yen, M.H. Herman Shen. *Passive vibration suppression of beams and blades using magnetomechanical coating.* Journal of Sound and Vibration, vol. 245, n° 4, 701-714, 2001.

Annexe A

Equations du mouvement dans le domaine fréquentiel

A.1 Procédure de Galerkin

Les équations du mouvement pour chaque solide l s'écrivent dans le domaine temporel

$$M^l \ddot{\mathbf{U}}^l + C^l \dot{\mathbf{U}}^l + K^l \mathbf{U}^l + \mathbf{F}_c^l = \mathbf{F}_{ex}^l . \quad (\text{A.1})$$

Le mouvement est supposé périodique de période T . La procédure de Galerkin consiste à projeter ces équations du mouvement sur un certain nombre de fonctions trigonométriques. Supposons ici que l'on choisit de décrire le mouvement par ses N_h premières harmoniques. On fait alors successivement le produit scalaire de (A.1) avec les fonctions $\cos(k\omega t)$ et $\sin(k\omega t)$ pour k de 0 à N_h . Dans le cas des fonctions cosinus, cela donne

$$\int_0^T (M^l \ddot{\mathbf{U}}^l + C^l \dot{\mathbf{U}}^l + K^l \mathbf{U}^l + \mathbf{F}_c^l - \mathbf{F}_{ex}^l) \cos(k\omega t) dt = 0 . \quad (\text{A.2})$$

On obtient ensuite par intégration par parties

$$\begin{aligned} (-k\omega)^2 M^l \int_0^T \mathbf{U}^l \cos(k\omega t) dt + k\omega C^l \int_0^T \mathbf{U}^l \sin(k\omega t) dt + K^l \int_0^T \mathbf{U}^l \cos(k\omega t) dt \\ + \int_0^T \mathbf{F}_c^l \cos(k\omega t) dt = \int_0^T \mathbf{F}_{ex}^l \cos(k\omega t) dt . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On rappelle que la définition des coefficients de Fourier est

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{U}^l) = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{U}^l \cos(k\omega t) dt , \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{b}_k(\mathbf{U}^l) = \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{U}^l \sin(k\omega t) dt , \quad (\text{A.5})$$

ce qui permet de reformuler (A.3) par

$$-(k\omega)^2 M^l \mathbf{a}_k(\mathbf{U}^l) + k\omega C^l \mathbf{b}_k(\mathbf{U}^l) + K^l \mathbf{a}_k(\mathbf{U}^l) + \mathbf{a}_k(\mathbf{F}_c^l) = \mathbf{a}_k(\mathbf{F}_{ex}^l) . \quad (\text{A.6})$$

Les mêmes opérations répétées pour les fonctions sinus donnent

$$-(k\omega)^2 M^l \mathbf{b}_k(\mathbf{U}^l) - k\omega C^l \mathbf{a}_k(\mathbf{U}^l) + K^l \mathbf{b}_k(\mathbf{U}^l) + \mathbf{b}_k(\mathbf{F}_c^l) = \mathbf{b}_k(\mathbf{F}_{ex}^l) . \quad (\text{A.7})$$

En assemblant les équations (A.6) et (A.7) on obtient le système des équations du mouvement du solide l dans le domaine fréquentiel, dont la taille est $(2N_h + 1)$ fois plus grande que celle du système initial (A.1) :

$$\Lambda^l \tilde{\mathbf{U}}^l + \tilde{\mathbf{F}}_c^l = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^l. \quad (\text{A.8})$$

Le \sim désigne un vecteur multiharmonique. Le vecteur multiharmonique du déplacement s'écrit

$$\tilde{\mathbf{U}}^l = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{a}_0(\mathbf{U}^l) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{U}^l) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{U}^l) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{U}^l) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{U}^l) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Les vecteurs multiharmoniques des efforts de contact et des efforts extérieurs sont définis de manière analogue. Λ^l est la matrice de raideur dynamique, diagonale par blocs, définie par

$$\Lambda^l = \begin{bmatrix} K^l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} K^l - \omega^2 M^l & \omega C^l \\ -\omega C^l & K^l - \omega^2 M^l \end{bmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \begin{bmatrix} K^l - (N_h \omega)^2 M^l & N_h \omega C^l \\ -N_h \omega C^l & K^l - (N_h \omega)^2 M^l \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Condensation sur les ddls de contact

On montre dans ce paragraphe comment diminuer la taille du système d'équations à résoudre par le solveur non-linéaire. L'écriture des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel offre en effet la possibilité d'effectuer des condensations exactes, c'est à dire sans aucune approximation. Dans le cas présent, on sépare pour chaque solide l les degrés de liberté soumis aux forces non-linéaires de contact (indice C) et les autres degrés de liberté (indice A) sur lesquels ne s'exercent que des forces linéaires. Ainsi l'équation (A.8) se met sous la forme

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{CC}^l & \Lambda_{CA}^l \\ \Lambda_{AC}^l & \Lambda_{AA}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_C^l \\ \tilde{\mathbf{U}}_A^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{exC}^l \\ \tilde{\mathbf{F}}_{exA}^l \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

La deuxième ligne de l'équation (A.11) fournit la relation

$$\tilde{\mathbf{U}}_A^l = (\Lambda_{AA}^l)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{exA}^l - \Lambda_{AC}^l \tilde{\mathbf{U}}_C^l). \quad (\text{A.12})$$

En injectant cette relation dans la première ligne de (A.11) on obtient

$$\Lambda_{red}^l \tilde{\mathbf{U}}_C^l + \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l = \tilde{\mathbf{F}}_{red}^l, \quad (\text{A.13})$$

avec

$$\Lambda_{red}^l = \Lambda_{CC}^l - \Lambda_{CA}^l (\Lambda_{AA}^l)^{-1} \Lambda_{AC}^l, \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{red}^l = \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l - \Lambda_{CA}^l (\Lambda_{AA}^l)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{exA}^l. \quad (\text{A.15})$$

Le nouveau système d'équations à résoudre par le solveur non-linéaire (A.13) a une taille réduite par rapport à (A.8). Une fois que les déplacements aux noeuds de contact $\tilde{\mathbf{U}}_C^l$ sont connus, le champ de déplacement dans le reste de la structure $\tilde{\mathbf{U}}_A^l$ est obtenu par (A.12).

A.3 Condensation sur les déplacements relatifs

Pour les problèmes de contact, il est possible d'obtenir une réduction d'un facteur 2 de la taille du système non-linéaire à résoudre en utilisant les déplacements relatifs comme inconnues. Prenons l'exemple où deux solides 1 et 2 sont en contact et supposons que les maillages sont compatibles à l'interface de contact. Dans ce cas, le principe d'action-réaction permet d'écrire

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^1 = -\tilde{\mathbf{F}}_{cC}^2. \quad (\text{A.16})$$

Le vecteur des déplacements relatifs est

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_r &= \tilde{\mathbf{U}}_C^1 - \tilde{\mathbf{U}}_C^2 \\ &= (\Lambda_{red}^1)^{-1}(\tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - \tilde{\lambda}) - (\Lambda_{red}^2)^{-1}(\tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 + \tilde{\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'équation (A.17) peut se mettre sous la forme

$$\Lambda_r \tilde{\mathbf{U}}_r + \tilde{\lambda} = \tilde{\mathbf{F}}_r, \quad (\text{A.18})$$

où Λ_r et $\tilde{\mathbf{F}}_r$ sont respectivement la matrice de raideur dynamique réduite et le vecteur réduit des forces extérieures, dont les expressions sont

$$\Lambda_r = \left[(\Lambda_{red}^1)^{-1} + (\Lambda_{red}^2)^{-1} \right]^{-1}, \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_r = \Lambda_r \left[(\Lambda_{red}^1)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - (\Lambda_{red}^2)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 \right]. \quad (\text{A.20})$$

La résolution non-linéaire de (A.18) fournit les déplacements relatifs $\tilde{\mathbf{U}}_r$ et les efforts de contact $\tilde{\lambda}$. L'équation (A.13) utilisée pour $l = 1, 2$ fournit ensuite les déplacements sur chacune des surfaces de contact.

Annexe B

Mesure de pression à l'aide de films Fuji Prescale

B.1 Principe de fonctionnement

Fuji Prescale propose des films permettant d'évaluer les surfaces et les pressions de contact. Ils sont disponibles en six versions différentes qui couvrent au total une gamme de pression allant de 0.2 à 130 MPa, comme le montre la figure B.1.

Kinds of films	Pressure range: [MPa]	Products size : W(mm)xL(m)	Film type
	0.2 0.5 0.6 2.5 10 50 130		
Ultra super low pressure (LLLW)		270x4	Two-sheet type
Super low pressure (LLW)		270x5	Two-sheet type
Low pressure (LW)		270x10	Two-sheet type
Medium pressure (MW)		270x10	Two-sheet type
Medium pressure (MS)		270x10	Mono-sheet type
High pressure (HS)		270x10	Mono-sheet type

FIG. B.1 – *Gammes de pression couvertes.*

Le principe de fonctionnement est décrit dans la figure B.2. L'application de la pression entraîne l'éclatement des microcapsules et la libération d'un liquide, lequel va, au contact d'une couche révélatrice, produire une coloration magenta. Les microcapsules ne sont pas toutes identiques : la

solidité de leur paroi et leur taille sont variables. Ainsi, il suffit d'une pression faible pour rompre les microcapsules ayant une faible paroi et une grande taille, alors que les petites microcapsules avec une paroi solide n'éclateront que pour les pressions élevées. C'est ainsi que l'intensité de la coloration obtenue dépend de la pression appliquée.

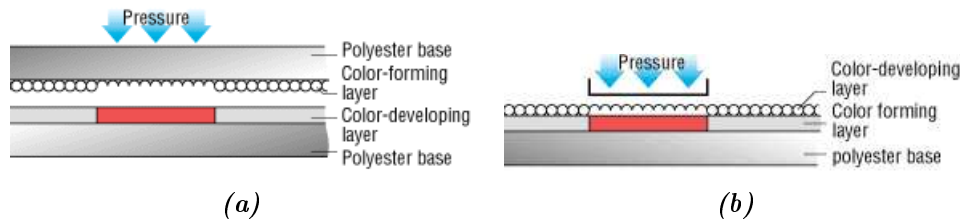


FIG. B.2 – Principe de fonctionnement (a) film double, (b) film simple.

Pour les faibles pressions (films LLLW, LLW, LW, MW) les microcapsules et la couche révélatrice sont placés dans deux films séparés (voir la figure B.2(a)). Au moment de l'utilisation, les deux films sont placés l'un en face de l'autre. Pour les plus fortes pressions (films MS, HS) les microcapsules et la couche révélatrice se trouvent au sein d'un unique film (voir la figure B.2(b)). L'épaisseur du film est faible (180 microns pour un film double et 110 microns pour un film simple), ce qui permet de ne pas trop modifier la configuration du contact. Dans le cadre de cette étude, trois types de film ont été utilisés : LW, MS et HS. Malheureusement, aucun résultat n'a pu être obtenu avec le film LW car il n'a pas été possible de l'insérer dans le contact aube-disque sans provoquer une coloration. Ce marquage est probablement dû au frottement entre les deux parties du film au moment de l'insertion.

Les résultats obtenus dépendent des conditions de température et d'humidité ainsi que de la vitesse d'application de la pression. Le fabricant recommande une utilisation pour une température comprise entre 20°C et 35°C et un taux d'humidité compris entre 35%RH et 80%RH.

B.2 Détermination du niveau de pression

Même si l'observation visuelle de la coloration obtenue permet de se faire une idée de la distribution de pression, il est possible d'obtenir des valeurs numériques approchées en utilisant les intensités de références présentées dans la figure B.3 et les courbes présentées dans la figure B.4. La comparaison de la coloration avec l'échelle de la figure B.3 permet de déterminer son intensité. Puis la valeur de la pression est obtenue avec les graphes (c)(d) de la figure B.4. Le choix de la courbe à utiliser dépend des conditions de température et d'humidité.

Afin d'analyser plus précisément les résultats, il peut être utile de numériser l'image obtenue et d'appliquer la méthode ci-dessus à chaque pixel. A cet effet, il faut savoir que la taille des microcapsules va de quelques microns à quelques dizaines de microns. Ainsi, si après l'application de la pression on observe le film avec une résolution suffisamment fine, on constate un aspect granulaire avec des taches correspondant à la taille des microcapsules. Il faut faire un lissage ou une moyenne spatiale pour pouvoir utiliser l'échelle d'intensité de la figure B.3. Ainsi, lors de la numérisation des résultats, le fabricant recommande de ne pas utiliser une résolution plus fine que 200 dpi (dots per inch). Une résolution de 150 dpi a été utilisée pour notre étude.

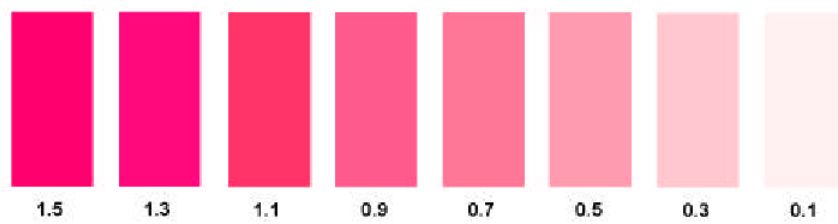
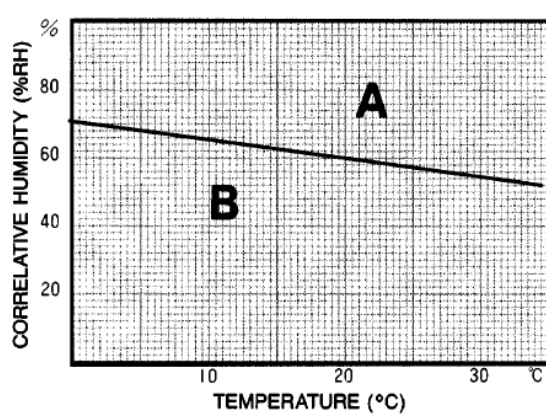
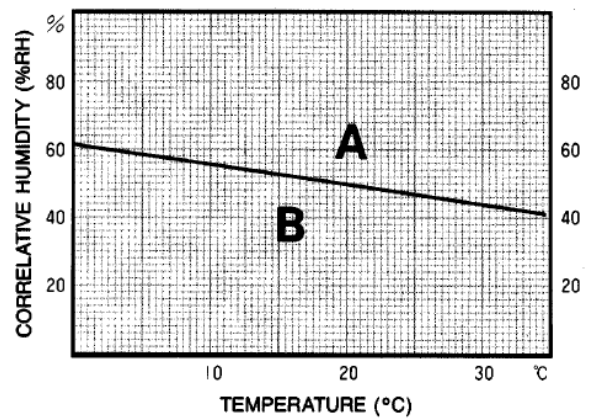


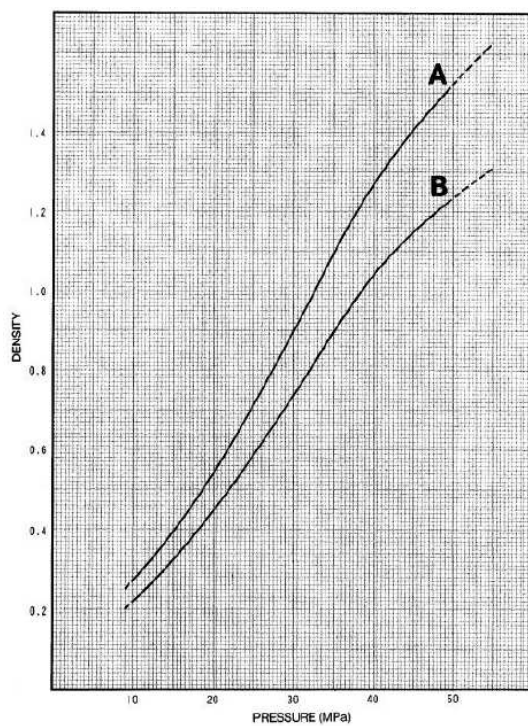
FIG. B.3 – Intensités de coloration.



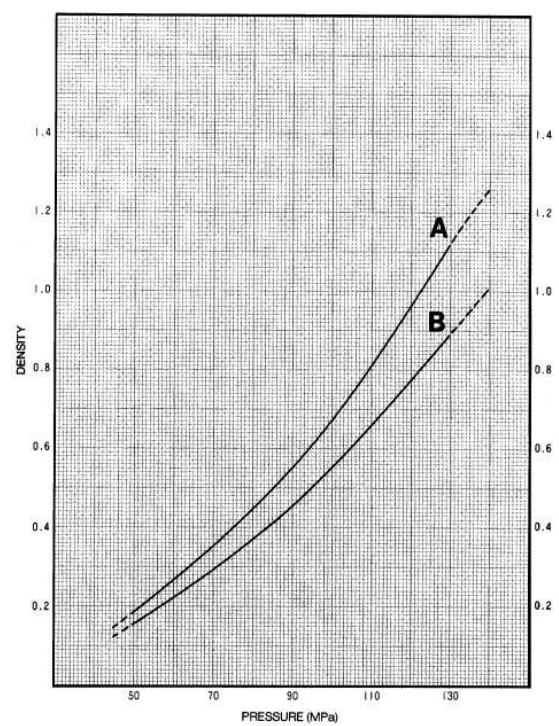
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. B.4 – Détermination de la pression à partir de l'intensité de la coloration. (a)(c) film MS, (b)(d) film HS.