HAL open science

Contrôle optimal et métriques de Clairaut-Liouville avec applications

Lionel Jassionnesse

▶ To cite this version:

Lionel Jassionnesse. Contrôle optimal et métriques de Clairaut-Liouville avec applications. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Bourgogne, 2014. Français. NNT : 2014DIJOS047 . tel-01131399

HAL Id: tel-01131399

https://theses.hal.science/tel-01131399

Submitted on 13 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ
DE
BOURGOGNE

UFR Sciences et Techniques

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Bourgogne
Discipline : Mathématiques

par
Lionel JASSIONNESSE

Le 24 Novembre 2014

Contrôle optimal et métriques de Clairaut-Liouville avec applications

Directeur de thèse
Bernard Bonnard

Rapporteurs :

Pomet Jean-Baptiste	INRIA	Rapporteur
Chyba Monique	University of Hawaï at Manoa	Rapporteur

Membres du jury :

Pomet Jean-Baptiste	INRIA	Rapporteur
Trélat Emmanuel	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur
Caillau Jean-Baptiste	Université de Bourgogne	Examinateur
Leblond Juliette	INRIA	Examinateur
Bonnard Bernard	Université de Bourgogne	Examinateur

Résumé

Le travail de cette thèse porte sur l'étude des lieux conjugué et de coupure de métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes en dimension 2. On se place du point de vue du contrôle optimal pour appliquer le principe du maximum de Pontryagin afin de caractériser les extrémales des problèmes considérés.

On va utiliser des méthodes géométriques, numériques et d'intégrabilité pour étudier des métriques de Clairaut-Liouville ou de Liouville sur la sphère. Dans le cas dégénéré de révolution, l'étude de l'ellipsoïde utilise des méthodes géométriques pour déterminer le lieu de coupure et la nature du lieu conjugué dans les cas oblat et prolat. Dans le cas général, les extrémales auront deux types de comportements distincts qui se rapportent à ceux observés dans le cas de révolution, et sont séparés par celles passant par des points ombilicaux. Les méthodes numériques sont utilisées pour retrouver rapidement la dernière conjecture géométrique de Jacobi : le lieu de coupure est un segment et le lieu conjugué contient quatre points de rebroussement.

L'étude d'une métrique pseudo-riemannienne vient d'un problème de contrôle quantique où le but est de transférer en temps minimal l'état d'un spin à travers une chaîne de trois spins couplés par des interactions de type Ising. Après réduction, la métrique obtenue possède une intégrale première supplémentaire et on peut donc la mettre sous forme de Liouville, ce qui nous donne les équations des géodésiques. En dehors du cas particulier de Grushin, dont la caustique est décrite, on utilise les méthodes numériques pour étudier le lieu conjugué et le lieu de coupure dans le cas général.

Mots clés : Contrôle optimal géométrique, Chaînes de spins de type Ising, Métriques de Liouville, Métrique pseudo-riemannienne, Lieu conjugué, Lieu de coupure.

Abstract

The work of this thesis is about the study of the conjugate and cut loci of 2D riemannian or almost-riemannian metrics. We take the point of view of optimal control to apply the Pontryagin Maximum Principle in the purpose of characterize the extremals of the problem considered.

We use geometric, numerical and integrability methods to study some Liouville and Clairaut-Liouville metrics on the sphere. In the degenerate case of revolution, the study of the ellipsoid uses geometric methods to fix the cut locus and the nature of the conjugate locus in the oblate and prolate cases. In the general case, extremals will have two distinct type of comportment which correspond to those observed in the revolution case, and are separated by those which pass by umbilical points. The numerical methods are used to find quickly the Jacobi's Last Geometric Statement : the cut locus is a segment and the conjugate locus has exactly four cusps.

The study of an almost-riemannian metric comes from a quantum control problem in which the aim is to transfer in a minimal time the state of one spin through an Ising chain of three spins. After reduction, we obtain a metric with a second first integral so it can be written in the Liouville normal form, which leads us to the equations of geodesics. Outside the particular case of Grushin, of which the caustic is described, we use numerical methods to study the conjugate locus and the cut locus in the general case.

Keywords : Geometric optimal control, Ising chains of spins, Liouville metrics, Almost-Riemannian geometry, Conjugate Locus, Cut Locus.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont de près ou de loin permis l'élaboration de cette thèse.

Tout d'abord Bernard Bonnard pour avoir supervisé cette thèse ainsi que mes mémoires de Master, Monique Chyba et Jean-Baptiste Pomet pour avoir accepté d'être mes rapporteurs, ainsi que les autres membres du Jury.

Je remercie aussi l'IMB et ses membres, en particulier le personnel administratif : Anissa, Caroline, Magali, Ibtissam, Nadia, Pierre et Francis qui veillent à ce que le travail de recherche se déroule dans de bonnes conditions, ainsi que le département de mathématiques, qui m'a mené jusqu'ici, en son personnel Muriel et Renée. Comment ne pas remercier aussi tous les doctorants et post-doctorants que j'aurai cotoyés pendant ces années ? Je ne les citerai pas (par peur d'en oublier), mais ils se reconnaitront : des anciens, adeptes du BANG de la pause déjeuner, aux nouveaux, adeptes des barbecues de fin d'année et de rentrée.

Finalement, je souhaite remercier ma famille et mes amis, qui sont toujours là pour me soutenir ou me changer les idées, et Fanny, qui m'a accompagné ces deux dernières années et qui m'accompagnera pour la suite.

Table des matières

1 Préliminaires **7**
1.1 Géométrie riemannienne d'un point de vue hamiltonien 7
1.1.1 Variété riemannienne, longueur d'une courbe 7
1.1.2 Géodésiques, application exponentielle, lieu de coupure . . 8
1.2 Problème de contrôle optimal 10
1.2.1 Systèmes de contrôle optimal 10
1.2.2 Le Principe du Maximum 11
1.2.3 Problème Riemannien 11
1.2.4 Cas presque-Riemannien 12
1.3 Conditions du second ordre 13
1.3.1 Le lieu de coupure 13
1.3.2 Lieu conjugué 13
1.4 Le code HAMPATH 14
1.4.1 Génération des trajectoires : exphvfun 14
1.4.2 Condition du second ordre : expdhvfun 14
1.5 Métriques de révolution et de Liouville 14
1.5.1 Généralités sur les métriques de Clairaut-Liouville 14
1.5.2 Intégration des métriques de Liouville 15
1.6 Le modèle de Grushin 17
1.6.1 Modèle de Grushin sur la sphère 17
1.6.2 Modèle de Grushin sur le plan 18

2 Application au contrôle quantique **21**
2.1 Présentation du modèle 21
2.1.1 Dynamique du système 21
2.1.2 Les systèmes de spin 1/2 21
2.1.3 Produit tensoriel et crochets de matrices 22
2.1.4 Transfert de cohérence 24
2.1.5 Transformation du système 26
2.2 Mise sous forme de Liouville 27
2.2.1 Recherche d'une intégrale première 27
2.2.2 Mise sous forme isotherme 28
2.2.3 Passage à la forme de Liouville 28
2.3 Intégration des géodésiques 30
2.3.1 Comportement des géodésiques 30
2.3.2 Intégrales elliptiques 30
2.4 Étude des singularités 31
2.5 Etude générique 33

A Geometric and numerical techniques to compute conjugate and cut loci on Riemannian surfaces 39
A.1 Introduction . . . 39
A.2 Riemannian metrics on surfaces of revolution . . . 40
A.2.1 Generalities . . . 40
A.2.2 Ellipsoids of revolution . . . 44
A.3 General Ellipsoids . . . 45
A.3.1 Geometric Properties [18] . . . 45
A.3.2 Geodesic Flow [18] . . . 47
A.3.3 Results on the Conjugate and Cut Loci . . . 48
A.4 Dynamics of spin particles . . . 50

B Integrability Methods In The Time Minimal Coherence Transfer For Ising Chains Of Three Spins. 59
B.1 Introduction . . . 60
B.2 The mathematical model . . . 61
B.3 Connection with invariant metrics on $SO(3)$ and integration . . . 63
B.3.1 Lifting procedure . . . 63
B.3.2 Extremal equations and Integration . . . 64
B.4 Direct integration on S^2 using Liouville theory . . . 67
B.4.1 2D-Riemannian metrics whose geodesics flows are integrable by mean of linear and quadratic integrals in momenta 67
B.4.2 Computations of the Liouville normal form . . . 68
B.5 Algebraic techniques . . . 71
B.5.1 Step 1 : Computation of the control . . . 71
B.5.2 Step 2 : Computation of the position . . . 71
B.5.3 Step 3 Simplifications of the solution . . . 73
B.5.4 Step 4 Special values . . . 75
B.6 Conclusion . . . 76
B.6.1 Comparison of the integrability methods and geometric applications. . . . 76
B.6.2 Optimality problem . . . 76
B.6.3 Link with conjugate and cut loci computation for an invariant Riemannian on sub-Riemannian metrics on $SO(3)$. 80
B.6.4 Extension to the case of 4 spins . . . 80

Conclusion et Perspectives 81

Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter une série de travaux sur une famille de métriques de Clairaut-Liouville sur la sphère S^2 motivés par deux problèmes issus de la géométrie et du contrôle quantique, fondés sur la combinaison de méthodes géométriques et de simulations numériques.

Les *métriques de Clairaut-Liouville*, ou métriques de révolution, sont des métriques à deux dimensions dont le flot géodésique cotangent admet une intégrale première linéaire en le vecteur adjoint. Localement ces métriques s'écrivent $\mathrm{d}s^2 = m(\varphi)\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\varphi^2$, et p_θ est une constante du mouvement. Les *métriques de Liouville* sont, quant à elles, des métriques qui admettent une intégrale première quadratique en le vecteur adjoint. On parle alors de *surface de Liouville* et on peut alors écrire localement la métrique sous *forme normale* : $\mathrm{d}s^2 = (f(u) + g(v))(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$.

Sur ces surfaces, les distances issues de la structure riemannienne peuvent être vues comme les solutions en temps minimal d'un problème de contrôle optimal. Le problème s'exprime :

$$\dot{q} = u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q), \quad \min \int_0^T u_1^2 + u_2^2,$$

où les champs de vecteur $F_1(q), F_2(q)$ forment un repère orthonormal (pour la métrique riemannienne) de T_qM. A l'aide du principe du maximum de Pontryagin, on obtient des conditions nécessaires de minimisation dans le formalisme hamiltonien, qui sont équivalentes aux équations de Euler-Lagrange. Une courbe γ partant de $\gamma(0) = q$ qui vérifie ces conditions est appelée *géodésique*. Une géodésique qui réalise la distance entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ est dite *minimale* (sur $[0, t]$), et toute géodésique est minimale pour un temps t assez petit. S'il existe un plus grand temps positif fini t_{cut} tel que γ soit minimale sur $[0, t_{cut}]$, alors t_{cut} est appelé temps de coupure et le point $\gamma(t_{cut})$ est appelé *point de coupure*. Il correspond à la perte d'optimalité globale de la géodésique. De la même manière on définit le premier temps conjugué comme le plus grand temps positif tel que le segment $[\gamma(0), \gamma(t_{conj})]$ soit minimal parmi les géodésiques partant de q qui lui sont C^1-proches, et alors $\gamma(t_{conj})$ est appelé *premier point conjugué de q le long de γ*. Il correspond à la perte d'optimalité locale. On définit alors le lieu de coupure $Cut(q)$ de q comme l'ensemble des points de coupure des géodésiques partant de q, et le lieu conjugué $Conj(q)$ comme l'ensemble des points conjugués le long des géodésiques partant de q.

L'objectif final étant de calculer le lieu conjugué et de coupure pour ces métriques et le lien avec la conjecture de Jacobi sur les ellipsoïdes : le lieu

conjugué a exactement 4 points de rebroussement et le lieu de coupure est un segment. Ce résultat n'a été démontré qu'en 2004 par Itoh et Kiyohara [18].

La première partie de notre étude est de retrouver ces résultats de façon rapide en combinant les techniques géométriques et le code HAMPATH, et donc de tester l'efficacité de ces méthodes.

Le code HAMPATH utilise la différentiation automatique pour générer les extrémales à partir de la donnée de l'hamiltonien. Ensuite, il génère les champs de Jacobi le long des ces extrémales, ce qui nous permet de calculer les points conjugués rapidement. Il permet aussi d'utiliser des méthodes homotopiques ou des méthodes de tir pour résoudre d'autres problèmes de contrôle optimal [13].

Pour trouver le lieu de coupure, le problème est a priori plus compliqué, mais une caractérisation des points de coupure issue de la géométrie riemannienne va nous permettre d'utiliser la géométrie du système. En effet, un point de coupure $p \in Cut_q$ est en fait soit le point d'intersection deux géodésiques distinctes issues de q, soit un (premier) point conjugué le long d'une géodésique partant de q.

Par exemple, dans le cas d'une métrique de révolution présentant une symétrie par rapport à l'équateur ($g(\theta, \pi - \varphi) = g(\theta, \varphi)$, quand θ représente la longitude et φ représente la colatitude), le point de coupure d'un point situé sur l'équateur sera soit le point de premier retour sur l'équateur soit le point situé à la latitude opposée, selon lequel apparaît en premier le long de la trajectoire. Dans le premier cas il correspond à l'intersection des deux trajectoires symétriques par rapport à l'équateur, et apparaît dans l'étude de l'ellipsoïde de révolution oblat, et dans le second à l'intersection des deux trajectoires symétriques par rapport au méridiens d'origine, qui correspond au cas prolat (voir annexe A). Les cas de points initiaux ou de métriques présentant moins de symétries sont plus complexes à traiter.

La seconde étude concerne une famille de métriques issues de la mécanique quantique et qui s'applique à la dynamique des spins conservatifs. L'exemple qui a servi de motivation est le cas de 3 particules de spin 1/2 avec des couplages de type Ising soumis à un champ de radio-fréquence (RF), où le but est de transférer l'état du premier spin au troisième en un temps minimum en utilisant le couplage et en faisant varier le champ RF [35, 36]. En choisissant judicieusement quelques états-clés du processus de transfert, on réduit la dimension du problème qui revient alors géométriquement à définir une métrique presque-riemannienne sur S^2 en se donnant 2 champs de rotation orthogonaux et cette métrique dégénère sur un ensemble que l'on peut identifier à l'équateur.

Le cas *presque-riemannien* est celui où les champs de vecteurs F_i n'engendrent pas l'espace tangent en tout point. La métrique n'est alors pas définie positive, mais la *condition de Hörmander* permet de tout de même définir une distance finie et continue. Cette condition assure de plus que la caractérisation du lieu de coupure de la géométrie riemannienne reste valable dans le cadre presque-riemannien.

En parallèle avec l'étude sur l'ellipsoïde, le cas dégénéré de révolution correspond au cas dit de Grushin où les couplages de type Ising sont égaux. Ce cas peut-être vu comme une déformation de la sphère ronde par homotopie, et l'intégration nous donne : les solutions non-méridiennes sont périodiques par rapport à φ et on a une expression explicite des variables θ et φ en fonction du temps.

Une première approche du cas non dégénéré est d'exploiter au maximum les symétries du système : la symétrie par rapport au méridien initial ($H(\theta, p_\theta) = H(-\theta, -p_\theta)$) et celle par rapport à l'équateur ($H(\pi - \varphi, -p_\varphi) = H(\varphi, p_\varphi)$). Pour cela on place un premier point initial en ($\theta(0) = 0, \varphi(0) = \pi/2$), et on obtient que le lieu de coupure est l'équateur privé de ce point initial.

Le cas général est très complexe. Notre contribution a été d'analyser ce cas et a permis de montrer que :

- Le cas général est un cas de Liouville sur S^2 où l'intégrale première supplémentaire est identifiée par le Casimir sur $SO(3)$ et ne dépend pas du couplage.
- Le système est intégré en utilisant le forme normale de Liouville.

Les résultats des simulations numériques montrent bien qu'en dehors d'un point dit ombilical où les lieux conjugué et de coupure se réduisent à un point et en dehors de la singularité équatoriale, le lieu conjugué a bien 4 points de rebroussement et le lieu de coupure est bien réduit à un segment dans les coordonnées de Liouville.

L'application au contrôle optimal est de décrire de façon globale la synthèse de la loi optimale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Géométrie riemannienne d'un point de vue hamiltonien

La géométrie riemannienne est une branche de la géométrie différentielle qui s'intéresse à des variétés différentielles munies d'une structure supplémentaire, une *métrique riemannienne* qui permet de mesurer la longueur d'une courbe. Les éléments présentés dans cette section sont issus principalement de [16], qui contient aussi de nombreux exemples. Les autres grandes références (modernes) sur la géométrie sont [22, 14].

1.1.1 Variété riemannienne, longueur d'une courbe

Définition 1.1. *Soit M une variété différentielle. Une métrique Riemannienne g sur M est l'association lisse à tout point $q \in M$ d'une forme bilinéaire définie positive $g_q : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$. On dit alors que (M, g) est une variété riemannienne.*

On peut exprimer la métrique en coordonnées locales $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(1\leq i\leq n)}$ (où n est la dimension de M) autour de q : soit u, $v \in T_qM$ avec

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad et \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Alors on écrit $g_q(u, v) = \sum g_{ij}(q)u^i v^j$, où

$$g_{ij}(q) = g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big).$$

On note donc

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j.$$

La métrique, comme son nom l'indique, permet de mesurer les distances ou plus précisément la longueur des courbes.

Définition 1.2 (Longueur d'une courbe C^1)**.** *Soit $c : [a, b] \to M$ une courbe C^1 par morceaux dans la variété riemannienne (M, g). La longueur de la courbe c est donnée par :*

$$L(c) = \int_a^b ||c'(t)||\mathrm{d}t$$

où $||c'|| = \sqrt{g(c', c')}$ est la norme euclidienne sur TM définie par la métrique riemannienne.

Ainsi, la distance d entre deux points sera l'infimum des longueurs des courbes C^1 qui passent par ces deux points. On appelle d *la distance induite* par g.

Remarque 1.1. *La longueur d'une courbe ne dépend pas du choix de la paramétrisation.*

1.1.2 Géodésiques, application exponentielle, lieu de coupure

Une notion qui vient naturellement après celle de distance, et qui va beaucoup nous intéresser dans ce travail, est celle de plus court chemin, ou *géodésique*. Elle est en revanche plus complexe à définir proprement, et fait appel à la notion plus théorique de *connexion*, que nous ne détaillerons pas mais nous allons tout de même en donner une caractérisation en coordonnées locales. Pour cela, on va utiliser une expression pratique de cette connexion, les *symboles de Christoffel*.

Définition 1.3 (Symboles de Christoffel)**.** *En coordonnées locales, on exprime les symboles de Christoffel par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{il}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k}g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{jk}\Big),$$

où $(g^{ij})_{(1\leq i,j\leq n)}$ est la matrice inverse de la représentation matricielle (g_{ij}) de la métrique.

On peut ainsi exprimer les équations qu'une courbe doit vérifier pour être une géodésique dans les coordonnées locales.

Proposition 1.1 (Géodésiques en coordonnées locales)**.** *Soit une courbe paramétrée $c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$ dans M, alors c est une géodésique si :*

$$\frac{\mathrm{d}^2c^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma_{jk}^i\big(c(t)\big)\frac{\mathrm{d}c^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}c^j}{\mathrm{d}t} = 0 \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Remarque 1.2. *Si $\gamma(t)$ est une géodésique alors sa vitesse $||\gamma'(t)||$ est constante. Comme la longueur n'est pas dépendante de la paramétrisation (Remarque 1.1), on choisira souvent un paramètre tel que $||\gamma'|| = 1$ et on dit que l'on paramétrise par la longueur d'arc. Dans ce cas, minimiser la longueur revient à minimiser le temps.*

Théorème 1.1 (Existence locale et unicité)**.** *Soit $q_0 \in M$, il existe un ouvert $U \subset M$ contenant q_0 et $\epsilon > 0$ tels que pour $q \in U$ et $v \in T_qM$ avec $||v|| < \epsilon$, il existe une unique géodésique $\gamma_v :]-1, 1[\to M$ avec $\gamma_v(0) = q$ et $\gamma_v'(0) = v$.*

Remarque 1.3. *On a de plus que l'application* $C : TU \times]-1,1[\to M$ *définie par* $C(v,t) = \gamma_v(t)$ *est lisse.*

Avec l'existence et l'unicité locale des géodésiques nous pouvons mesurer les distances de manière explicite : la distance entre deux points proches de M devient alors la longueur de la géodésique passant par les deux points. Une géodésique qui réalise la distance entre ses extrémités $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ est dite *minimisante* sur le segment $[0,t]$. Cette propriété n'étant en général pas globale, on parlera de *géodésique minimale* dans le cas d'une géodésique minimisante pour tout t.

Définition 1.4 (Application exponentielle)**.** *On considère* γ_v *la géodésique maximale (définie sur le plus grand intervalle de* $\mathbb{R}^+$*) qui vérifie* $\gamma_v(0) = q$ *et* $\gamma_v'(0) = v$*. On note* $\Omega \subset TM$ *l'ensemble des* $v \in TM$ *tels que* $\gamma_v(1)$ *est définie et est un ouvert de* TM *contenant le zéro* $0 \in T_qM$ *de chaque fibre. L'application exponentielle* $\exp : \Omega \subset TM \to M$ *est définie par* $\exp(v) = \gamma_v(1)$*. On note* $\exp_q$ *sa restriction à* T_qM*.*

On l'appelle exponentielle car dans le cas de $(SO(n), g)$, elle coïncide avec l'exponentielle de matrices.

Définition 1.5. *Une variété riemannienne* (M,g) *est dite géodésiquement complète si toute géodésique de* M *peut être étendue à une géodésique définie sur tout* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 1.2 (Hopf-Rinow)**.** *Soit* (M,g) *une variété riemannienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Soit* $q \in M$*. Si* $\exp_q$ *est définie sur* T_qM *alors tout point de* M *peut être relié à* q *par une géodésique minimale.*
2. M *est géodésiquement complète.*
3. (M,d) *est complète en tant que métrique où* d *est la distance induite par la métrique* g*.*
   N'importe laquelle de ces propriétés implique :
4. *Toute paire de points de* M *peut être reliée par une géodésique minimale.*

Définition 1.6 (Énergie d'une courbe C^1)**.** *L'énergie de la courbe* C^1 *par morceaux* $c : [a,b] \to M$ *est définie par :*

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b ||c'(t)||^2 \mathrm{d}t.$$

Remarque 1.4. *L'énergie dépend, elle, de la paramétrisation.*

Proposition 1.2 (Caractérisation des géodésiques)**.** *Soit* $c : [a,b] \to M$ *une courbe* C^1 *par morceaux.*

1. *Si* c *réalise la distance entre* a *et* b *(*$L(c) = \mathrm{d}(a,b)$*) et est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc alors* c *est une géodésique.*
2. *Si pour toute courbe* h *de* $c(a)$ *à* $c(b)$ *on a* $E(h) \geq E(c)$*, alors* c *est une géodésique paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc.*

Cette dernière proposition signifie que le problème de minimisation de la longueur est en fait équivalent au problème de minimisation de l'énergie. C'est un résultat très utile car la fonctionnelle de l'énergie est plus pratique à manipuler que celle de la longueur.

Dans le cadre du contrôle optimal riemannien, où les extrémales sont des géodésiques, on va logiquement s'intéresser à étudier la minimalité des géodésiques, afin de considérer l'optimalité globale.

Soit une géodésique $\gamma_v : [0,t] \to M$, avec $\gamma(0) = q$ et $\gamma'(0) = v$ où $v \in T_qM$ et $||v|| = 1$ (on considère une géodésique paramétrée par la longueur d'arc). On note $t_{cut}(v)$ le plus grand temps positif tel que γ soit minimal sur $[0, t_{cut}(v)]$.

Définition 1.7 (Lieu de coupure)**.** *On appelle $\gamma_v(t_{cut}(v))$ point de coupure de q le long de γ_v. Le lieu de coupure Cut_q est l'union des points de coupure le long des géodésiques partant de q :*

$$Cut_q = \{\gamma_v(t_{cut}(v)) \text{ pour } v \in T_qM \ ||v|| = 1 \text{ et } \gamma(0) = q\}.$$

1.2 Problème de contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal est l'étude des solutions optimales pour un coût donné d'un système dynamique muni d'un contrôle (ou commande). Le but va être de transférer le système d'un état initial donné à un état final voulu, tout en minimisant (ou maximisant) un certain coût.

1.2.1 Systèmes de contrôle optimal

Les systèmes contrôlés que nous allons considérer sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{q}(t) & = & f(t, q(t), u(t)) \\ q(t_0) & \in & M_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $q \in M$ et f est une application C^1 de $\mathbb{R} \times M \times \mathcal{U}$ dans TM, avec M une variété lisse de dimension n, et le contrôle $u : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{U}$ est une fonction mesurable bornée où $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ est le *domaine de contrôle admissible*. Les sous-variété M_0 et M_1 de M constituent les *conditions aux bords*.

Dans la cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires, le problème avec la condition initiale $q(0) = q_0$ est connu comme le *problème de Cauchy*. Dans ce cas, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'unicité de la solution (voir [2], 2.4.1).

Le *coût* est défini pour un contrôle admissible u de $[0, T]$ par :

$$C(T, u) = g(T, q(T)) + \int_0^T f^0(t, q(t), u(t))dt \tag{1.2}$$

avec $f^0 : \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1 et q est la trajectoire du système associée au contrôle u.

Le problème de contrôle optimal peut alors être formulé comme suit : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût, en un temps T fixé ou non.

1.2.2 Le Principe du Maximum

Le résultat fondamental du contrôle optimal est dû à Pontryagin et ses collaborateurs. Il s'agit d'une condition nécessaire d'optimalité.

Théorème 1.3 (Principe du Maximum de Pontryagin)**.** *Soit $u \in \mathcal{U}$ un contrôle optimal sur $[0,T]$, alors il existe une application $p : [0,T] \to M$ absolument continue et une constante $p^0 \leq 0$, $(p,p^0) \neq 0$, telles que pour presque tout $t \in [0,T]$*

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p}(q(t),p(t),p^0,u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q}(q(t),p(t),p^0,u(t)), \\ \hat{H}(q(t),p(t),p^0,u(t)) &= \max_{v\in\mathcal{U}} H(q,p,p^0,v), \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $\hat{H}(q,p,p^0,u) := p^0 f^0(x,u) + \langle p, f(q,u)\rangle$ est le pseudo-hamiltonien du système.

Dans le cas où le temps final T est libre et le contrôle u continu, on a comme condition en T

$$\hat{H}(q(t),p(t),p^0,u(t)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T,q(T)), \quad \textit{pour presque tout } t \tag{1.4}$$

De plus on a la condition de transversalité aux bornes suivantes pour le vecteur adjoint

$$p(0) \perp T_{q(0)}M_0, \quad p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial q}(T,q(T)) \perp T_{q(T)}M_1. \tag{1.5}$$

Définition 1.8 (Extrémale)**.** *On appelle extrémale un quadruplé (q,p,p^0,u) qui est solution de (1.3). Si $p^0 = 0$, l'extrémale est dite anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.*

1.2.3 Problème Riemannien

Le point de vue du problème riemannien est de voir les géodésiques comme des solutions en temps minimal d'un problème de contrôle optimal, et ainsi pouvoir appliquer le principe du maximum pour obtenir une formulation hamiltonienne du problème.

Les géodésiques ayant une vitesse constante, minimiser la longueur revient à minimiser le temps, de plus si on considère des géodésiques paramétrées par la longueur d'arc, cela revient aussi à minimiser l'énergie. Cela au mène au système de contrôle optimal affine :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{n} u_i F_i(q), \quad \min_u \int_0^T \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \tag{1.6}$$

muni du problème de minimisation de l'énergie, où $F_1(q),..,F_n(q)$ forme un repère orthonormal (au sens de la métrique riemannienne) de T_qM.

Le pseudo-hamiltonien est alors :

$$\hat{H} = p^0 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} u_i \langle p, F_i \rangle.$$

Dans le cas normal, on peut normaliser $p^0 = -1/2$, et la condition de maximisation devient

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u} = 0$$

ce qui nous donne $u_i = \hat{H}_i$ où $\hat{H}_i$ est le *relevé hamiltonien* de F_i : $\hat{H}_i = \langle p, F_i \rangle$ et on obtient ainsi le hamiltonien maximisé :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} H_i^2. \tag{1.7}$$

Les solutions du problème initial sont donc les extrémales (q, p) qui vérifient :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{1.8}$$

et paramétriser par la longueur d'arc signifie fixer le niveau d'énergie $H = 1/2$.

On remarque que les équations du mouvement sont les équations de Hamilton-Jacobi, que l'on pourrait obtenir de manière classique à partir des équations d'Euler-Lagrange en utilisant la transformation de Legendre. L'avantage du point de vue du contrôle optimal géométrique est qu'il fonctionne dans des cas où la transformation de Legendre n'est pas utilisable.

1.2.4 Cas presque-Riemannien

Le cas presque-riemannien (ou pseudo-riemannien) correspond au cas où l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs $D =< F_1(q), ..., F_n(q) >$ n'est pas de rang plein pour tout $q \in M$. On demande donc en plus que les générateurs vérifient la *condition de Hörmander* : pour tout $q \in M$, l'algèbre de Lie engendrée par $(F_1(q), ..., F_n(q)$ est l'espace tangent T_qM en entier.

L'ensemble Z des points où $\dim D < n$ est appelé *ensemble singulier*. En dimension 2, Z correspond en fait aux points où les deux champs de vecteurs $F_1(q)$ et $F_2(q)$ sont colinéaires, Z et D sont de dimension 1 et on n'a que deux cas possibles :

- Le *cas transverse* ou *cas de Grushin* où Z est transverse à D. Dans ce cas $\dim(D(q) + [D(q), D(q)] = 2$.
- Le *cas tangentiel* où Z est tangent à D. Dans ce cas $\dim(D + [D, D]) = 1$ mais il suffit d'une itération supplémentaire pour obtenir T_qM.

Ainsi la métrique associée n'est pas définie positive, mais on peut tout de même définir la longueur d'une courbe admissible et une distance presque-riemannienne finie et continue. Comme dans le cas Riemannien, on utilise le principe du maximum pour obtenir un problème sous formulation hamiltonienne, avec un hamiltonien qui lui sera bien défini sur tout T^*M.

De plus la condition de Hörmander nous assure qu'il n'existe pas d'extrémales anormales. Ce dernier point nous permettra d'utiliser le Théorème 1.4 dans le cadre presque-riemannien. Voir [17] pour une introduction plus complète.

1.3 Conditions du second ordre

Les notions de lieux de coupure et conjugué ont une importance cruciale du point de vue de l'optimalité, car elles en définissent les limites. L'étude de la *caustique*, l'union du lieu de coupure et du lieu conjugué, a donc toujours été un des sujets importants de la géométrie riemannienne. Les premiers résultats ont bien sûr été obtenus sur la sphère, où la caustique se réduit à un point antipodal. Le cas a priori proche de l'ellipsoïde, est en fait resté longtemps une conjecture, la bien connue *dernière conjecture géométrique de Jacobi* : le lieu conjugué a exactement 4 points de rebroussement et le lieu de coupure est un segment. Elle n'a été démontrée que récemment par Itoh et Kiyohara [18]. Même sans en connaître la forme dans le cas général, il existe quelques résultats classiques [16, 14].

1.3.1 Le lieu de coupure

Théorème 1.4 (Caractérisation du lieu de coupure)**.** *Le point q' appartient au lieu de coupure de q si et seulement si au moins une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

- *il existe deux géodésiques minimisantes distinctes de q à q' ;*
- *il existe une géodésique γ de q à q' telle que q et q' sont conjugués le long de γ.*

A partir de l'analyse de la caustique faite par Poincaré dans un fameux article [29], on obtient les propriétés suivantes qui vont être primordiales pour la suite de ce travail :

Théorème 1.5 (Lieu de coupure)**.** *Soit g une métrique analytique sur S^2. Le lieu de coupure d'un point $q \in S$ est un arbre où les bifurcations correspondent aux points reliés par plus de deux géodésiques et où les extrémités sont des points de rebroussement du lieu conjugué. De plus ces points de rebroussement sont dits de type "foyers en pointe".*

1.3.2 Lieu conjugué

Là où le temps de coupure correspond à la perte d'optimalité globale d'une extrémale, le temps conjugué correspond à la perte d'optimalité de l'extrémale par rapport aux extrémales qui lui sont C^0-proches. La définition classique en géométrie riemannienne utilise la notion de courbure, que nous avons décidé de laisser de côté. Nous allons donner une définition équivalente dans le cadre hamiltonien.

Définition 1.9 (Champs de Jacobi)**.** *Soit $\vec{H}$ un champ de vecteur hamiltonien dont les courbes intégrales sont les extrémales d'un problème de contrôle optimal. Soit $z = (q, p)$ une extrémale de référence avec pour conditions initiales $z(0) = (q_0, p_0)$. On appelle équation de Jacobi l'équation linéarisée le long de z :*

$$\delta\dot{z}(t) = \mathrm{d}\vec{H}(z(t))\delta z(t). \tag{1.9}$$

Une solution non triviale de cette équation est appelée champ de Jacobi, noté $\delta z = (\delta q, \delta p)$ en coordonnées locales. Un tel champ est dit vertical au temps t si $\delta q = 0$.

Cette notion va nous permettre de caractériser les temps conjugués, et même de les calculer numériquement à partir du code HAMPATH.

Définition 1.10 (Temps conjugués)**.** *Un instant t_{conj} est un temps conjugué le long de z s'il existe un champ de Jacobi δz le long de z vertical en 0 et en t_{conj}. On appelle $q(t_{conj}$ point conjugué de q_0 le long de z et le (premier) lieu conjugué est l'union des premiers points conjugués le long des extrémales partant de q_0.*

1.4 Le code HAMPATH

Ce code est le produit du travail de O. Cots dans sa thèse [13] et fait suite au package cotcot développé par B. Bonnard, JB. Caillau et E. Trélat. A partir de la donnée de l'hamiltonien maximisé, ce compilateur fournit un ensemble de fonctions MATLAB permettant d'étudier un grand nombre de problèmes de contrôle optimal, comme des méthodes de tir (simple ou multiple) qu'on utilise pour trouver la stratégie de contrôle à utiliser pour atteindre une cible donnée, ce qui demande en étude a priori, ou encore la méthode homotopique qui permet d'étudier une famille de problèmes dépendant d'un paramètre. Nous allons ici détailler la partie du programme qui sera par la suite utilisée dans le cas de problèmes hamiltoniens : la génération des extrémales avec la fonction *exphvfun* et des champs de Jacobi le long de ces extrémales avec *expdhvfun*.

1.4.1 Génération des trajectoires : exphvfun

La fonction *exphvfun* sert à intégrer le flot hamiltonien $\dot{z}(t) = \vec{H}(t, z(t), \lambda)$ à partir de la donnée des conditions initiales $z(0) = (x(0), p(0))$, des éventuels paramètres du système, et d'un intervalle de temps $[t_0, t_f]$.

1.4.2 Condition du second ordre : expdhvfun

La fonction *expdhvfun* permet de calculer les champs de Jacobi $(\delta q, \delta p)$ le long de $z = (x, p)$, solutions non triviales de l'équation de Jacobi (1.9). Il est ensuite aisé numériquement de trouver le premier temps conjugué qui est le premier temps positif tel que $\delta q(0) = 0$ et $\delta q(t_{conj}) = 0$.

1.5 Métriques de révolution et de Liouville

Le premier cas que nous allons étudier est celui des ellipsoïdes de révolutions, qui est un cas particulier de métrique de Clairaut. Notre étude porte sur la détermination des lieux de coupure et conjugué. Le cas de l'ellipsoïde générale n'a que récemment été résolu par Itoh et Kiyohara [18].

1.5.1 Généralités sur les métriques de Clairaut-Liouville

Le métriques de Clairaut-Liouville sont des métriques en deux dimensions qui peuvent être obtenues dans $\mathbb{R}^3$ en restreignant la métrique euclidienne à une surface de révolution $\left(\sqrt{m(\varphi)}\cos\theta, \sqrt{m(\varphi)}\sin\theta, \varphi\right)$. On peut aussi les obtenir de manière intrinsèque en généralisant la formule de Clairaut : ce sont des métriques qui admettent une intégrale première linéaire en p. Ce sont donc des métriques dont le système hamiltonien est intégrable au sens de Liouville.

Définition 1.11 (Métrique de Clairaut-Liouville)**.** *Une métrique de Clairaut-Liouville est une métrique de dimension deux que l'on peut mettre sous forme normale de Darboux :*

$$g(\theta, \varphi) = m(\varphi)\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\varphi^2.$$

Une première propriété des métriques de Clairaut est que l'on en connait une intégrale première.

Lemme 1.1 (Formule de Clairaut)**.** *Soit ψ l'angle formé par une géodésique paramétrée par la longueur d'arc avec un parallèle, alors :*

$$p_\theta = \cos(\psi)\sqrt{m(\varphi)}$$

est une intégrale première de la métrique de Clairaut.

Proposition 1.3 (Courbure de Gauss d'un métrique de Clairaut-Liouville)**.** *La courbure de Gauss d'une métrique de Clairaut-Liouville est donnée par*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{m(\varphi)}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\sqrt{m(\varphi)}.$$

Il s'avère que les métriques de Clairaut-Liouville sont en fait un cas particulier d'une classe de métriques plus importantes : les métriques de Liouville.

Définition 1.12 (Métrique de Liouville)**.** *Une métrique de Liouville est une métrique qui peut se normaliser sous la forme dite normale :*

$$g(u, v) = \big(f(u) + g(v)\big)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

où $f(u)$, $g(v)$ sont des fonctions lisses positives.

Proposition 1.4. *Les métriques de Liouville admettent une intégrale première quadratique en p.*

L'existence d'*intégrales premières*, c'est-à-dire de quantités conservées le long du mouvement, est cruciale pour l'intégration des systèmes mécaniques. L'intégrabilité au sens de Liouville pour un système de dimension $2n$ correspond en effet à l'existence de n d'intégrales premières indépendantes. Dans le cas d'un problème riemannien, l'hamiltonien étant autonome, une seule intégrale première supplémentaire sera nécessaire.

1.5.2 Intégration des métriques de Liouville

Théorème 1.6 (Intégration des métriques sous forme de Liouville)**.** *Soit $g(u, v) = \big(f(u) + g(v)\big)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$ une métrique de Liouville sous forme normale.*

- *Le flot géodésique d'une métrique de Liouville sur une surface est complètement intégrable.*
- *L'équation des géodésiques est donnée par :*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm\frac{\sqrt{f(u) + a}}{\sqrt{g(v) - a}}, \tag{1.10}$$

et les géodésiques sont définies par :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u) + a}} \pm \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g(v) - a}} = b, \tag{1.11}$$

où a et b sont des constantes.

Ce théorème permet d'obtenir les équations des géodésiques à partir de la métrique sous forme normale. Quand la métrique que l'on traite n'est pas sous cette forme mais qu'elle admet une intégrale première quadratique, nous allons présenter une méthode développée dans [7] (chapitre 6).

Théorème 1.7. *Soit g une métrique dont le flot admet une intégrale première quadratique F dans un voisinage de $q \in M$. Si cette intégrale n'est pas colinéaire à l'hamiltonien H sur l'espace tangent T_qM, alors il existe un voisinage de q tel que la métrique est une métrique de Liouville, c'est-à-dire qu'il existe des coordonnées locales (u, v) telles que :*

$$g = (f(u) + g(v))(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \tag{1.12}$$

où f(u) et g(v) sont des fonctions positives lisses. De plus,

$$F(u, v, p_u, p_v) = \frac{(g(v) + C)p_u^2 - (f(u) - C)p_v^2}{f(u) + g(v)}, \tag{1.13}$$

où C est une constante.

Les outils permettant de trouver ces coordonnées (u, v) et ces fonctions f et g se trouvent dans la démonstration de ce théorème. En partant d'une métrique sous forme *isotherme*

$$g(x, y) = \lambda(x, y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) \tag{1.14}$$

et une intégrale première quadratique

$$F = b_1 p_x^2 + 2b_2 p_x p_y + b_3 p_y^2.$$

On considère la fonction holomorphe (voir [7], Proposition 6.2) R définie par :

$$R(z) = b_1 - b_3 + 2\mathrm{i}b_2, \quad z = x + \mathrm{i}y. \tag{1.15}$$

La condition de non-colinéarité de H et F implique qu'il existe des nouvelles coordonnées dans lesquelles R devient constant. On note

$$\Phi : z = x + \mathrm{i}y \to \omega = u + \mathrm{i}v$$

la transformation holomorphe qui vérifie :

$$\Phi(z)' = \frac{1}{\sqrt{R(z)}}. \tag{1.16}$$

Cette transformation conserve la forme isotherme de l'hamiltonien

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2\Lambda}, \tag{1.17}$$

où $\Lambda(u, v) = \lambda(x, y)|\Phi(z)'|^{-2}$ et dans ces nouvelles coordonnées l'intégrale première devient :

$$F = (c + 1)p_u^2 + cp_v^2. \tag{1.18}$$

Et le fait que H et F sont en involution donne comme condition sur Λ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\Lambda(c+1)) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\Lambda c) = 0. \end{cases}$$

En différentiant par v la première équation et par u la deuxième, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u \partial v} = 0. \tag{1.19}$$

Ce qui nous donne bien $\Lambda(u,v) = f(u) + g(v)$, et donc la métrique sous forme de Liouville. On a de plus :

$$c = \frac{C - f(u)}{f(u) + g(v)}, \tag{1.20}$$

où C est une constante et donc :

$$g(u,v) = \big(f(u) + g(v)\big)\big(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2\big), \tag{1.21}$$

$$F = \frac{(g(v) + C)p_u^2 + (C - f(u))p_v^2}{f(u) + g(v)} \tag{1.22}$$

1.6 Le modèle de Grushin

Le cas qui va particulièrement nous intéresser par la suite est le cas de Grushin sur la sphère S^2, ainsi que le lien qui existe localement entre la singularité de ce modèle et celle du modèle de Grushin sur le plan.

1.6.1 Modèle de Grushin sur la sphère

Un théorème classique de géométrie riemannienne nous affirme que toute paire de champs de vecteurs sur une sphère (de dimension paire) est colinéaire sur un ensemble non vide. Ainsi toute métrique définie globalement par deux champs de vecteurs sur la sphère est forcément presque-riemannienne.

On va donc considérer le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_2 z \\ \dot{y} &= -u_1 z \\ \dot{z} &= u_1 y - u_2 x \end{cases}$$

avec le problème de minimisation de l'énergie :

$$\min \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\mathrm{d}t.$$

Le système est engendré par les champs de vecteurs $y\partial_z - z\partial_y$ et $z\partial_x - x\partial_z$ qui correspondent à des rotations infinitésimales autour des axes Ox et Oy respectivement. Ce type de système apparaît en mécanique quantique, où la sphère représente une réduction de l'espace d'état adaptée à un problème particulier. L'ensemble singulier est ici le plan $z = 0$, et il est transverse à la distribution.

En passant en coordonnées sphériques classiques où φ est la colatitude et θ l'angle méridien,

$$\begin{cases} x &= \cos\theta\sin\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\varphi \end{cases}$$

et utilisant la transformation conservatrice

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

le système devient :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= -v_1\cot\varphi \\ \dot{\varphi} &= v_2. \end{cases}$$

Le problème s'écrit désormais :

$$\dot{q} = v_1F_1 + v_2F_2 \quad \min \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\mathrm{d}t, \tag{1.23}$$

avec $F_1 = -\cot\varphi\partial_\theta$, $F_2 = \partial_\varphi$. L'ensemble singulier correspond à $\varphi = \pi/2$, c'est-à-dire l'équateur. L'hamiltonien du système augmenté est

$$H = v_1\langle p, F_1\rangle + v_2\langle p, F_2\rangle - \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2),$$

et la condition de maximisation du PMP $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$ nous donne :

$$v_1 = \langle p, F_1\rangle \quad v_2 = \langle p, F_2\rangle.$$

En remplaçant dans l'hamiltonien augmenté, on obtient le hamiltonien vrai :

$$H_s = \frac{1}{2}\Big(p_\varphi^2 + \cot^2\varphi\, p_\theta^2\Big)$$

correspondant à la métrique de Clairaut-Liouville :

$$g_s = \mathrm{d}\varphi^2 + \tan^2\varphi\,\mathrm{d}\theta^2.$$

L'intégration de la métrique de Grushin sur S^2, vue comme une déformation de la sphère ronde par homotopie (Annexe B, B.4.2) et la caustique sont complètement décrites par la proposition B.12.

1.6.2 Modèle de Grushin sur le plan

Le modèle de Grushin sur la sphère est en fait issu du problème de Grushin sur le plan car il y correspond localement. En effet, lorsque φ est proche de la singularité $\pi/2$, la métrique est équivalente à la métrique de Grushin sur le plan :

$$g_p = \mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{x^2}.$$

Ce modèle nous permet de décrire la caustique pour un point situé sur l'équateur. En effet, bien que la métrique explose au voisinage de la singularité ($x = 0$), les extrémales restent définies par un hamiltonien lisse :

$$H_p = \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2p_y^2).$$

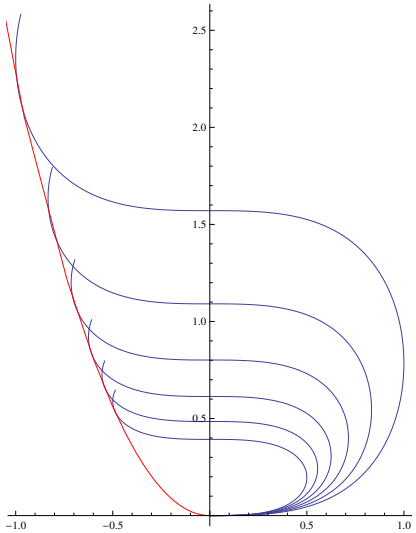

FIGURE 1.1 – Flot géodésique (en bleu) issu du point initial $(0,0)$ pour λ proche de 1, jusqu'à un temps légèrement supérieur au premier temps conjugué. Une branche du lieu conjugué apparait en rouge.

Comme cet hamiltonien ne dépend pas de y, p_y est une intégrale première et donc le système est intégrable. L'intégration nous donne, pour des conditions initiales $\{x(0) = 0,\ y(0) = 0\}$:

- Si $p_y = 0$, alors $p_x = \pm 1$, ce qui donne pour les extrémales (x(t),y(t)) :

$$x(t) = \pm t \quad y(t) = 0.$$

- Si $p_y \neq 0$, disons $p_y = \lambda$. On a donc pour p_x : $p_x^2 + \lambda^2 x^2 = 1$. On trouve donc :

$$x(t) = \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \quad y(t) = \frac{t}{2\lambda} - \frac{\sin 2\lambda t}{4\lambda^2}.$$

Dans le cas $p_y = 0$ les extrémales restent optimales pour tout t (dans le plan). Dans le cas général, le temps de coupure est $t_c = \pi/|\lambda]$ (lorsque les deux extrémales associées à p_x et $-p_x$ s'intersectent) et le lieu de coupure est $\{(0,r)\ où\ r \in \mathbb{R}^*\}$. On peut remarquer sur la figure 1.1 que les extrémales coupent la singularité de manière orthogonale. Le lieu conjugué est donné par le premier temps conjugué $t_{1c} = \tau\ |\lambda|$, où τ est la première solution (positive) de $\tan t = t$, il est représenté sur la figure 1.2. Le cas où $y(0) \neq 0$ est aussi étudié dans [1].

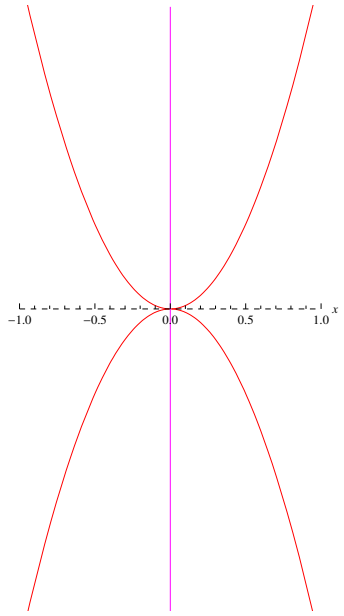

Figure 1.2 – Lieux de coupure (en violet) et conjugué (en rouge) pour le flot géodésique issu de $(0, 0)$ reconstitué grâce aux symétries de la caustique.

Chapitre 2

Application au contrôle quantique

2.1 Présentation du modèle

Le problème étudié ici est le transfert de cohérence dans une chaine de particules de spin 1/2 faiblement couplées qui suivent une interaction de type Ising. Ce problème apparaît dans un contexte de résonance magnétique nucléaire (RMN) et a été abordé par Glaser, Brockett, Khaneja, Zeier dans une série d'articles [36, 21] et par Yuan dans sa thèse [35].

2.1.1 Dynamique du système

Nous allons représenter l'état de notre système à l'aide de l'opérateur de densité ρ, qui est auto-adjoint et linéaire, et qui obéit à l'équation de *Liouville Von Neumann* :

$$\hbar \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -i[H, \rho] \tag{2.1}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck normalisée (par la suite nous considérerons $\hbar = 1$ par commodité dans les calculs) et H est l'hamiltonien décrivant la dynamique du système. H est un opérateur auto-adjoint de l'espace des états $\mathfrak{H}$ qui correspond à l'énergie du système.

Dans le cas d'une évolution libre, ie H ne dépend pas du temps, on peut décrire simplement l'évolution de l'opérateur de densité :

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^{-1}(t, t_0) \tag{2.2}$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution : $U(t, t_0) = \exp(-i(t - t_0)H)$.

De plus, on a $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$, l'égalité étant équivalente à un état pur.

2.1.2 Les systèmes de spin 1/2

Les particules de spins 1/2 est un cas souvent étudié car elles sont à la fois très utiles en physique (ce sont les nucléons et les électrons) et assez simples à représenter : elles n'admettent que 2 états possibles que l'on note $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Ainsi l'espace d'état correspondant à un spin 1/2 est de dimension 2. Ici nous étudions des chaines de n spins 1/2, l'état du système total, qui est le produit tensoriel des états de chaque spin, est donc de dimension 2^n.

Par la suite nous allons utiliser des matrices bien connues, *les matrices de Pauli* que voici :

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Elles vérifient les propriétés : $\sigma_v^2 = Id$, et $\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i}\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = \mathrm{i}\sigma_y$, que l'on note de manière concise :

$$\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z \circlearrowleft,$$

ce produit étant en plus anticommutatif.

Remarque 2.1. *Le symbole* $\circlearrowleft$ *signifie que l'on conserve la relation en effectuant une permutation circulaire sur* $\{A,B,C\}$.

Ainsi les matrices $i\sigma_x$, $i\sigma_y$, $i\sigma_z$ engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

De la même manière que les matrices de Pauli engendrent $\mathfrak{su}(2)$, les produits tensoriels de matrices de Pauli (et de l'identité) engendrent $\mathfrak{su}(2^n)$. On note les éléments de cette base : $I_{k_1v_1,\ldots,k_mv_m}$ où $\frac{1}{2}\sigma_{v_i}$ apparaît dans le k_i-ème terme du produit tensoriel, Id sinon.

On peut maintenant définir dans cette représentation les *opérateurs moment angulaire* :

$$I_x := \tfrac{1}{2}\sigma_x \quad I_y := \tfrac{1}{2}\sigma_y \quad I_z := \tfrac{1}{2}\sigma_z$$

On remarque qu'ils vérifient les relations :

$$I_xI_y = \tfrac{i}{2}I_z \quad I_yI_z = \tfrac{i}{2}I_x \quad I_zI_x = \tfrac{i}{2}I_y \quad I_v^2 = \tfrac{1}{4}Id \quad I_vI_w = -I_wI_v$$

et donc les propriétés de commutation *cyclique* suivantes :

$$[I_x, I_y] = iI_z \quad [I_y, I_z] = iI_x \quad [I_z, I_x] = iI_y$$

2.1.3 Produit tensoriel et crochets de matrices

L'état du système étudié, une chaine de trois spins, est donc représenté par un produit tensoriel de matrices 2×2, que nous allons expliciter. De manière formelle, le produit tensoriel de deux matrices $M \in V_n = M_n(\mathbb{K})$ et $M \in V_p = M_p(\mathbb{K})$ correspond à l'isomorphisme entre $V_n \otimes V_p$ et $V_{np} = M_{np}$, ce qui implique le produit tensoriel d'espaces vectoriels.

Définition 2.1 (Produit tensoriel de matrices)**.** *Soient* $M = (m_{ij})_(1 \leq i, j \leq n)$ *une matrice carrée d'ordre* n *et* $M' = (m'_{kl})_(1 \leq k, l \leq p)$ *une matrice carrée d'ordre* p*, alors on définit le produit tensoriel des matrices* M*,* M' *par la matrice carrée d'ordre* $m \times n$ *:*

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} m_{11}M' & \ldots & m_{1n}M' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}M' & \ldots & m_{nn}M' \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2. *On a ici choisi un ordre lexicographique (à savoir ici $\mathcal{L}^2$). C'est en effet nécessaire pour définir correctement une base de $\mathbb{K}^{np}$ à partir de bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$.*

Proposition 2.1 (Règles de calcul du produit tensoriel)**.** *Soient $M, N \in V_n$, $M', N' \in V_p$, $M'' \in V_r$.*

1. *Le produit tensoriel est associatif :*
$$M \otimes M' \otimes M'' = (M \otimes M') \otimes M'' = M \otimes (M' \otimes M'').$$
2. *$M \otimes M'$ est bilinéaire par rapport au produit de matrices :*
$$(M \times N) \otimes (M' \times N') = (M \otimes M') \times (N \otimes N').$$

La propriété d'associativité 1) permet donc calculer séquentiellement le produit tensoriel d'un nombre quelconque de matrices.

Exemple : On peut ainsi écrire les éléments de la base de $\mathfrak{su}(2^3)$ comme des matrices 8×8.

$$\begin{aligned}
I_{2y} &= Id \otimes \frac{1}{2}\sigma_y \otimes Id = \frac{1}{2} Id \otimes \sigma_y \otimes Id \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque 2.3. *La propriété 2) appliquée aux opérateurs moment angulaire permet de parfois simplifier les notations. Par exemple le produit commutatif $I_{iv_i} I_{jw_j} = I_{iv_i jw_j}$ (où $i \neq j$). On utilise donc les deux notations indifféremment.*

Crochets de matrices produits tensoriels

Par la suite, on va avoir à calculer des crochets de matrices de $\mathfrak{su}(2^3)$, qui sont de la forme précédente. Pour éviter de manipuler des matrices 8×8, on applique les règles de calcul suivantes :

$$[M_1 \otimes C, M_2 \otimes C] = M_1.M_2 \otimes C^2 - M_2.M_1 \otimes C^2 = [M_1, M_2] \otimes C^2$$
$$[C \otimes M_1, C \otimes M_2] = C^2 \otimes [M_1, M_2]$$

Si on applique ça aux matrices $I_{1v_1 2v_2 3v_3}$ et $I_{1w_1 2w_2 3w_3}$ avec $u_i, w_j \in \{0, x, y, z\}$ (en posant $\sigma_0 = 2Id$) que l'on a définies plus tôt, on a plusieurs cas possibles :

- S'il n'y a pas de paire de (v_j, w_j) où $v_j \neq w_j$ et $v_j, w_j \neq 0$, alors ils commutent et leur crochet est nul.
- S'il existe une seule paire (v_j, w_j) où $v_j \neq w_j$ et $v_j, w_j \neq 0$, supposons $j = 1$ (sans perte de généralité). Alors : $[I_{1v_1}, I_{1w_1}] = [I_{v_1}, I_{w_1}] \otimes Id \otimes Id$. En particulier :
$$[I_{jx}, I_{jy}] = \mathrm{i} I_{jz} \circlearrowleft \quad j \in \{1, 2, 3\} \tag{2.4}$$
- S'il existe exactement 2 paires (v_j, w_j), $v_k, w_k)$, alors les opérateurs commutent et leur crochet est nul.
- Si les 3 éléments de chaque tenseur sont différents de l'identité et ceux correspondants au même spin différents 2 à 2, on a :
$$[I_{1v_1 2v_2 3v_3}, I_{1w_1 2w_2 3w_3}] = \frac{1}{4}[I_{v1}, I_{w1}] \otimes [I_{v2}, I_{w2}] \otimes [I_{v3}, I_{w3}] \tag{2.5}$$

2.1.4 Transfert de cohérence

Le système étudié ici consiste en 3 particules de spin 1/2 faiblement couplés en chaîne, les interactions sont de type Ising et le couplage différent pour les 2 couples de particules. Le but est de transférer l'état du premier spin au troisième à l'aide de pulsations RF et de l'évolution du système. Le système est placé dans un repère tournant avec chaque spin selon sa fréquence de résonance, ce qui nous permet de considérer un contrôle qui permet d'agir sur l'état de chaque spin indépendamment. L'hamiltonien pour ce système est donc de la forme : $H = H_{libre} + H_{RF}$. L'hamiltonien décrivant l'évolution libre s'écrit :

$$H_{libre} = 2\pi(J_{12} I_{1z2z} + J_{23} I_{2z3z}) \tag{2.6}$$

Pour rappel, $I_{1z2z} = I_{1z} \otimes I_{2z} = I_z \otimes I_z \otimes \mathrm{Id}$.

Et l'hamiltonien RF est lui de la forme :

$$H_{RF} = \sum_{j=1}^{3} u_{jx} I_{jx} + u_{jy} I_{jy} \tag{2.7}$$

Comme on considère des constantes de couplages J_{12}, J_{23} faibles par rapport au contrôle, on peut considérer sur des temps de contrôle petits que l'action du couplage est négligeable devant l'action de H_{RF} lors des impulsions. Une description complète de l'hamiltonien des systèmes de spins est faite dans [25].

Le transfert que nous allons considérer va impliquer deux types d'interactions, et donc deux types d'opérateurs : l'opérateur d'évolution libre, qui décrit les effets du couplage entre les spins au cours du temps, et l'opérateur de contrôle ou opérateur RF. On effectue les calculs à l'aide de la *formule de sandwich*.

Lemme 2.1 (Formule de sandwich)**.** *Soit 3 opérateurs A, B, C qui vérifient la propriété de commutation cyclique :* $[A, B] = \mathrm{i}C \circlearrowleft$ *, alors on a :*

$$\exp(-\mathrm{i}\theta A)B\exp(\mathrm{i}\theta A) = \cos(\theta)B + \sin(\theta)C \circlearrowleft .$$

L'opérateur d'évolution libre $U(t) = \exp(-\mathrm{i}tH_{libre})$

Comme les opérateurs $2I_{1z2z}$ et $2I_{2z3z}$ commutent, leurs puissances de tout ordre commutent aussi, et on peut écrire $U(t) = U_{12}(t)U_{23}(t) = U_{23}(t)U_{12}(t)$, où :

$$U_{jk}(t) = \exp(-\mathrm{i}t2\pi J_{jk}I_{jzkz}).$$

Ainsi, pour identifier son action sur les opérateurs, on va devoir commencer par identifier une commutation cyclique pour utiliser la formule de sandwich.

Exemple : Étape 1 Pour calculer l'évolution temporelle de I_{1x}, on identifie les cycles de commutation : $[2I_{1z2z}, I_{1x}] = \mathrm{i}2I_{1y2z} \circlearrowleft$ et $[2I_{2z3z}, I_{1x}] = 0$ (il est en effet logique que le couplage entre le deuxième et le troisième spin n'influence pas l'état du premier). Ainsi, on en déduit $U(t)I_{1x}U(-t) = \cos(\pi tJ_{12})I_{1x} + \sin(\pi tJ_{12})2I_{1y2z}$. En l'absence de contrôle (et de dissipation), notre état initial va donc osciller entre I_{1x} et $2I_{1y2z}$ au cours du temps.

L'opérateur de contrôle $U_{RF} = \exp(-\mathrm{i}tH_{RF})$

Ici les composantes du contrôle ne commutent pas toutes entre elles, en revanche on peux considérer que l'on effectue le contrôle composante par composante, vu que les temps des impulsions sont négligeables. Ainsi le contrôle génère les rotations du type : $R_{jv}(\theta) = \exp(-i\theta I_{jv})$ où $v \in x, y$.

Exemple : Étape 2 L'état du premier spin est décrit à l'aide de l'opérateur de densité partiel $\rho_1 = \mathrm{Tr}_{2\otimes 3}(\rho)$ (c'est en fait un opérateur sur $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{C}^2$, l'espace des états du premier spin, que l'on plonge dans $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2 \otimes \mathfrak{H}_3$). Cet opérateur partiel ρ_1 est donc représenté par une matrice hermitienne 2×2, de trace 1. Comme les matrices de Pauli engendrent $\mathfrak{su}(2)$, toute matrice de ce type peut s'écrire de la forme : $\rho_1 = \frac{1}{2}Id + a_xI_x + a_yI_y + a_zI_z$, où $(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$. Transférer l'état du premier spin revient donc à transférer $I_{1x} \to I_{3x}$, $I_{1y} \to I_{3y}$, $I_{1z} \to I_{3z}$. En fait tout état sur le premier spin peut se coder à l'aide du contrôle en état de la forme $\rho_1 = \frac{1}{2}Id + \lambda I_{1x}$. Ainsi on peut se restreindre à étudier le transfert $I_{1x} \to I_{3x}$.

Pour effectuer un tel transfert la stratégie classique [26] est la procédure suivante :

1. on laisse évoluer librement I_{1x} en $2I_{1y2z}$ en un temps $t_1 = (2J_{12})^{-1}$.
2. on effectue un contrôle sur le deuxième spin pour avoir $2I_{1y2x}$.
3. on laisse évoluer jusqu'à $4I_{1y2y3z}$ en un temps $t_2 = (2J_{23})^{-1}$.
4. on contrôle $4I_{1y2y3z}$ pour obtenir $4I_{1z2y3y}$.
5. l'évolution libre amène à $2I_{2x3y}$ en un temps t_2.
6. le contrôle sur le second spin nous donne $2I_{2z3y}$.
7. Une dernière évolution temporelle nous donne I_{3x} en en temps t_1.

On peut remarquer que les étapes 1 à 3 et 5 à 7 sont en fait symétriques par rapport au second spin, pour un temps total de $2(t_1 + t_2)$. Nous allons voir que si l'on diffuse le contrôle de l'étape 2 lors du passage $I_{1x} \to 4I_{1z2y3y}$ on obtient un meilleur temps.

Pour déduire la dynamique de ce contrôle, on va désormais s'intéresser aux valeurs moyennes des opérateurs impliqués. Dans la représentation par opérateur de densité, la valeur moyenne est donnée par $\langle X \rangle = \mathrm{Tr}(\rho X)$, mais on peut aussi l'obtenir à partir de la représentation par les états. On note $X_1 = \langle I_{1x} \rangle$, $X_2 = \langle 2I_{1y2z} \rangle$, $X_3 = \langle 2I_{1y2x} \rangle$, $X_4 = \langle 4I_{1y2y3z} \rangle$. La dynamique de ces valeurs moyennes se déduit à partir de l'équation de Liouville Von Neuman :

$$\frac{d}{dt}\langle X \rangle = -i\langle [X, H] \rangle \tag{2.8}$$

On trouve ainsi en considérant uniquement le contrôle que nous utilisons dans cette transformation, ie $H_{rf} = uI_{2y}$:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= -i\langle [I_{1x}, H] \rangle = -i\pi J_{12}\langle [I_{1x}, 2I_{1z2z}] \rangle \\
&= -\pi J_{12} X_2 \\
\dot{X}_2 &= -i\langle [2I_{1y2z}, H] \rangle = -i\pi J_{12}\langle [2I_{1y2z}, 2I_{1z2z}] \rangle - iu\langle [2I_{1y2z}, 2I_{2y}] \rangle \\
&= \pi J_{12} X_1 - uX_3 \\
\dot{X}_3 &= -i\langle [2I_{1y2x}, H] \rangle == -i\pi J_{23}\langle [2I_{1y2x}, 2I_{2z3z}] \rangle - iu\langle [2I_{1y2x}, 2I_{2y}] \rangle \\
&= \pi J_{23} X_4 + uX_2 \\
\dot{X}_4 &= -i\langle [4I_{1y2y3z}, H] \rangle = -i\pi J_{23}\langle [4I_{1y2y3z}, 2I_{2z3z}] \rangle \\
&= \pi J_{23} X_3
\end{aligned}$$

Ce qui devient, en reparamétrant le temps par $(\pi J_{12})^{-1}$, pour le vecteur $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & u & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} X \quad k = \tfrac{J_{23}}{J_{12}} \tag{2.9}$$

Et le problème devient alors de transférer $(1, 0, 0, 0)^T$ à $(0, 0, 0, 1)^T$, ou de manière plus générale, $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0, 0)^T \to (0, 0, \cos\beta, \sin\beta)^T$.

2.1.5 Transformation du système

En effectuant un changement de variable adéquat on va pouvoir désormais considérer le problème sur une sphère suivant une certaine métrique :

$$r_1 = X_1 \quad r_2 = \sqrt{X_2^2 + X_3^2} \quad r_3 = X_4$$

où $\tan\xi = \frac{X_3}{X_2}$. On note $u_1 = -k\sin\xi$ et $u_3 = -\cos\xi$ les composantes du contrôle. Le nouveau système sur $R = (r_1, r_2, r_3)^T$ obtenu est donc :

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} R \tag{2.10}$$

Le transfert est donc désormais

$$(1,0,0)^T \to (0,0,1)^T$$

ou en général

$$(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T \to (0, \cos\beta, \sin\beta)^T$$

et l'on cherche à minimiser le temps.

Le problème peut désormais s'écrire comme un problème de minimisation L^2 :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = u_3 r_2, \quad \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = -u_3 r_1 + u_1 r_3, \quad \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} = -u_1 r_2, \\ &\min_{u(.)} \int_0^T (I_1 u_1^2(t) + I_3 u_3^2(t))\mathrm{d}t, \quad I_1 = {J_{12}}^2, \quad I_3 = {J_{23}}^2, \quad k^2 = \frac{I_3}{I_1}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le problème est équivalent au problème *quasi-riemannien* sur la sphère S^2 avec une singularité de type Grushin à l'équateur ($r_2 = 0$) pour la métrique :

$$g = \frac{k^2 \mathrm{d}r_1^2 + \mathrm{d}r_3^2}{r_2^2}. \tag{2.12}$$

(Voir [1] et Annexe B pour des détails sur ces métriques.)

En coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} r_1 &= \sin\varphi\cos\theta, \\ r_2 &= \cos\varphi, \\ r_3 &= \sin\varphi\sin\theta. \end{cases} \tag{2.13}$$

la métrique (2.12) devient :

$$\begin{aligned} g = &\tan^2\varphi\big(\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta\big)\mathrm{d}\theta^2 + \big(k^2\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)\mathrm{d}\varphi^2 \\ &- 2\tan\varphi\sin\theta\cos\theta(k^2-1)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \end{aligned} \tag{2.14}$$

et l'hamiltonien associé est

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2k^2}\Big(&\cot^2\varphi\big(k^2\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)p_\theta^2 + \big(\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta\big)p_\varphi^2 \\ &+ 2(k^2-1)\cot\varphi\sin\theta\cos\theta p_\theta p_\varphi\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2 Mise sous forme de Liouville

Dans cette section nous allons utiliser le résultat sur les métriques de Liouville présenté au chapitre précédent 1.7.

2.2.1 Recherche d'une intégrale première

Lemme 2.2. *Le système admet comme intégrale première quadratique :*

$$F = \frac{p_\theta^2}{\sin^2\varphi} + p_\varphi^2. \tag{2.16}$$

2.2.2 Mise sous forme isotherme

Pour mettre (2.12) sous forme isotherme, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = kr_1 \quad y = r_3$$

La métrique s'écrit donc :

$$g(x,y) = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{1 - \frac{x^2}{k^2} - y^2} = \lambda(x,y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \tag{2.17}$$

Pour exprimer l'intégrale première, on utilise les relations entre les coordonnées (x, y) et (θ, ϕ) :

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{ky}{\sqrt{x^2 + k^2y^2}}$$
$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2} - y^2} \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{x^2}{k^2} + y^2}.$$

Et sur les variables duales :

$$p_\theta = \sin\varphi(\cos\theta p_y - k\sin\theta p_x)$$
$$p_\varphi = \cos\varphi(k\cos\theta p_x + \sin\theta p_y).$$

Et ainsi, dans ces coordonnées isothermes, l'intégrale première (2.16) devient :

$$F = (k^2 - x^2)p_x^2 - 2xyp_xp_y + (1 - y^2)p_y^2 \tag{2.18}$$

2.2.3 Passage à la forme de Liouville

Ainsi l'équation à résoudre (1.16) s'écrit :

$$\Phi(z)' = \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \quad \text{avec} \quad R(z) = k^2 - 1 - z^2. \tag{2.19}$$

On trouve comme solution :

$$\Phi(z) = \omega = \arctan\frac{z}{\sqrt{k^2 - 1 - z^2}} + C_1. \tag{2.20}$$

Si on pose $\omega_1 = \omega - C_1$ où C_1 est la constante d'intégration, on obtient :

$$z^2 = (k^2 - 1)\sin^2\omega_1$$

• **Cas** $k < 1$ Dans ce cas on peut écrire :

$$z = \pm\mathrm{i}\sqrt{1 - k^2}\sin\omega_1.$$

En rappelant que $z = x + \mathrm{i}y$, on obtient par exemple :

$$x = \sqrt{1 - k^2}\cos u_1 \sinh v_1 \quad y = -\sqrt{1 - k^2}\sin u_1 \cosh v_1$$

où $u_1 = \Re(\omega_1)$, $v_1 = \Im(\omega_1)$.

Les variables duales deviennent dans ces coordonnées :

$$p_x = \frac{\cos u_1 \cosh v_1 p_v - \sin u_1 \sinh v_1 p_u}{\sqrt{1-k^2}(\cos^2 u_1 + \sinh^2 v_1)}$$
$$p_y = -\frac{\cos u_1 \cosh v_1 p_u + \sin u_1 \sinh v_1 p_v}{\sqrt{1-k^2}(\cos^2 u_1 + \sinh^2 v_1)}$$

On met F de la forme (1.18) :

$$F = (\alpha+1)p_u^2 + \alpha p_v^2$$

avec

$$\alpha = \frac{1+k^2-(1-k^2)\cosh 2v_1}{(1-k^2)(\cos 2u_1 + \cosh 2v_1)} = \frac{C_1 - f(u_1)}{f(u)+g(v_1)}.$$

On choisit la constante d'intégration C_1 de manière à avoir $f, g \geq 0$ et $f(0) = g(0) = 0$, c'est-à-dire $v_1 = v$ et $u_1 = u - \frac{\pi}{2}$. L'autre constante est ici $C_1 = 1$. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Pour $k < 1$, la forme de Liouville est donnée par :*

$$f(u) = \frac{(1-k^2)(1-\cos 2u)}{1+k^2-(1-k^2)\cos 2u} \quad g(v) = \frac{(1-k^2)(\cosh 2v - 1)}{1+k^2-(1-k^2)\cosh 2v}.$$

On rappelle qu'on passe des coordonnées isothermes à celles de Liouville pour $k < 1$ par :

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-k^2}\sin u \sinh v \\ y = \sqrt{1-k^2}\cos u \cosh v. \end{cases} \tag{2.21}$$

• **Cas** $k > 1$ De la même manière en partant de :

$$z = \pm\sqrt{k^2-1}\sin\omega_2,$$

les coordonnées de Liouville sont :

$$x = \sqrt{k^2-1}\sin u_2 \cosh v_2 \quad y = \sqrt{k^2-1}\cos u_2 \sinh v_2.$$

De la même manière que pour le cas $k < 1$, on choisit les constantes d'intégration de manière à avoir $f, g \geq 0$ et $f(0) = g(0) = 0$, ici $u_2 = \pi/2 - u$, $v_2 = v$. Et l'autre constante qui apparait dans l'intégrale première est alors $C_2 = k^2$.

Proposition 2.3. *Pour $k > 1$, la forme de Liouville est donnée par :*

$$f(u) = \frac{k^2(k^2-1)(1-\cos 2u)}{1+k^2-(k^2-1)\cos 2u} \quad g(v) = \frac{k^2(k^2-1)(\cosh 2v - 1)}{1+k^2-(k^2-1)\cosh 2v}.$$

On rappelle qu'on passe des coordonnées isothermes à celles de Liouville pour $k > 1$ par :

$$\begin{cases} x = \sqrt{k^2-1}\cos u \cosh v \\ y = \sqrt{k^2-1}\sin u \sinh v. \end{cases} \tag{2.22}$$

On peut dans les deux cas exprimer l'intégrale première sous la forme :

$$F = \frac{(g(v)+C)p_u^2 + (C - f(u))p_v^2}{f(u)+g(v)}, \tag{2.23}$$

avec $C = 1$ si $k < 1$ et $C = k^2$ si $k > 1$.

2.3 Intégration des géodésiques

2.3.1 Comportement des géodésiques

Nous avons une métrique sous forme normale de Liouville (1.21), qui correspond à l'hamiltonien :

$$H = \frac{p_u^2 + p_v^2}{2(f(u) + g(v))}. \tag{2.24}$$

De plus on a une intégrale première supplémentaire (2.23).

On fixe le niveau d'énergie $F = c$ et on paramétrise par la longueur d'arc $H = \frac{1}{2}$ pour obtenir les équations des géodésiques :

$$\epsilon_1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u) + c - C}} = \epsilon_2 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g(v) + C - c}}, \tag{2.25}$$

$$\mathrm{d}t = \epsilon_1 \sqrt{f(u) + c - C}\,\mathrm{d}u + \epsilon_2 \sqrt{g(v) + C - c}\,\mathrm{d}v, \tag{2.26}$$

où ϵ_1 (respectivement ϵ_2) est le signe de $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (respectivement $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$).

En utilisant les techniques développées par Itoh et Kiyohara sur les surfaces de Liouville [19], on peut désormais connaître le comportement des géodésiques $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ en fonction du niveau d'énergie $F = c$. On se fixe un point initial $q_0 = (u_0, v_0)$ tel que $u_0 \in [0, \pi/2]$ et $v_0 \in [0, v_{max}]$. Soient ν_f la première valeur de u telle que $f(\nu_f) = C - c$ et $\nu \in [0, \pi/2]$ et ν_g la première valeur de v telle que $g(\nu_g) = c - C$ et $\nu_g \in [0, v_{max}]$. On a $v_{max} = \frac{1}{2} \operatorname{arg\,cosh} \frac{1+k^2}{|1-k^2|}$.

- Si $c < C$: alors $v(t)$ est monotone et $u(t)$ oscille entre ν_f et $\pi - \nu_f$ (ou entre $\pi + \nu_f$ et $2\pi - \nu_f$).
- Si $c > C$: alors $u(t)$ est monotone et $v(t)$ oscille entre ν_g et v_{max} (ou entre $-v_{max}$ et $-\nu_g$).
- Si $c = C$: alors $u(t)$ et $v(t)$ sont monotones et γ passe par un point singulier.

2.3.2 Intégrales elliptiques

Dans les calculs qui vont suivre on utilise les intégrales elliptiques de première et troisième espèces suivantes :

$$F(\varphi|m) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}$$

$$\Pi(n, \varphi|m) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 - n\sin^2\theta)\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}$$

Proposition 2.4 (Intégration des géodésiques)**.** *L'intégration des géodésiques donne :*

- *Pour $k < 1$:*

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u) + c - 1}} = \frac{-1}{k\sqrt{1-c}} \Big(F(X|m) - (1 - k^2)\Pi(k^2, X|m) \Big)$$

où $X = \mathrm{i}\arg\sinh(\tan u/k)$ *et* $m = \frac{c-k^2}{c-1}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g(v)+1-c}} = \frac{k}{c\sqrt{c-k^2}}\Big(cF(Y|m') + (1-c)\Pi(\frac{1}{c}, Y|m')\Big)$$

où $Y = \arcsin\sqrt{c + \frac{(c-1)k^2}{(k^2-1)\cosh^2 v}}$ *et* $m' = \frac{1-k^2}{c-k^2}$.

- *Pour* $k > 1$ *:*

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)+c-k^2}} = \frac{1}{c\sqrt{(c-1)k^2}}\Big(cF(Z|m'') + (k^2-c)\Pi(\frac{k^2}{c}, Z|m'')\Big)$$

où $Z = \arcsin\sqrt{\frac{c(k^2-1)\cos^2 u + c - k^2}{k^2(k^2-1)\cos^2 u}}$ *et* $m'' = \frac{k^2-1}{c-1}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g(v)+k^2-c}} = \frac{1}{ck\sqrt{c-1}}\Big(cF(W|m'') - (1-c)\Pi(\frac{1}{c}, W|m'')\Big)$$

où $W = \arcsin\sqrt{\frac{c(k^2-1)\cosh^2 v - c + k^2}{k^2(k^2-1)\cosh^2 v}}$.

2.4 Étude des singularités

Dans cette section, on va s'intéresser aux points présentant des caractéristiques semblables aux points ombilicaux que l'on connait dans le cas de surface plongée. En effet, la définition standard nécessite de calculer les courbures principales ou la seconde forme fondamentale de la surface, or ces éléments ne sont pas définis dans le cas d'une métrique abstraite. En revanche il existe des points qui ont des caractéristiques proches de celles des points ombilicaux dans le cas plongé.

Définition 2.2 (Points de colinéarité)**.** *Les points de colinéarité sont les points où les intégrales premières sont proportionnelles en tant que formes quadratiques.*

Il s'agit en fait des zéros de la fonction $R(z)$ (1.15). Au voisinage de ces points on ne peut pas mettre la métrique sous forme de Liouville de cette manière mais on peut quand même trouver une seconde intégrale première fonctionnellement indépendante de l'hamiltonien. Plus précisément on utilise un résultat de [7] :

Théorème 2.1. *Soit g une métrique (riemannienne) dont le flot géodésique admet une intégrale première quadratique F dans un voisinage de $q \in M$. Si q est un point de colinéarité, alors on a un des deux cas suivants :*

1. *Dans un voisinage de q, il existe des coordonnées locales u, v dans lesquelles la métrique prend la forme :*

$$g(u,v) = f(u^2+v^2)(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2),$$

où f est une fonction lisse positive. Dans ce cas, le flot géodésique possède une intégrale supplémentaire linéaire $\widetilde{F} = vp_u - up_v$.

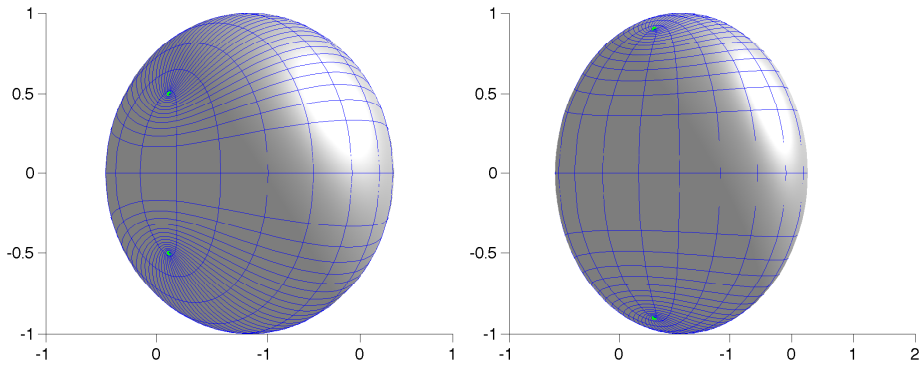

FIGURE 2.1 – En vert ω_1 et son symétrique par rapport à l'équateur pour $k = 0.5$ et $k = 0.9$. En bleu apparaissent les lignes de niveau correspondant aux coordonnées de Liouville, les points de colinéarité apparaissent à l'intersection des ces lignes.

2. *Dans un voisinage de q, il existe des coordonnées locales u, v dans lesquelles la métrique prend la forme :*

$$g(u,v) = \frac{h(r+u) - h(u-r)}{2r}\big(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2\big),$$

où $r = \sqrt{u^2+v^2}$ et h est une fonction lisse (au voisinage de 0) et telle que $h' > 0$. L'intégrale quadratique F peut prendre la forme

$$F = -\frac{r(h(u+r)+h(u-r))}{h(u+r)-h(u-r)}(p_u^2 + p_v^2) + (up_u^2 + 2vp_up_v - up_v^2).$$

Lemme 2.3. *Les points de colinéarité vérifient $z^2 = 1 - k^2$, ce sont des zéros d'ordre 1 de R. Cela correspond au cas 1) du théorème.*

En coordonnées isothermes, on obtient ainsi comme points :

$$(0, \pm\sqrt{1-k^2}) \quad et \quad (\pm\sqrt{k^2-1}, 0).$$

Les premiers étant définis pour $k < 1$ et les seconds pour $k > 1$. En distinguant les cas, cela correspond sur la sphère à :

- k<1

$$\begin{aligned}&\Big\{\Big(\frac{\pi}{2}, \arcsin\sqrt{1-k^2}\Big), \Big(\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\sqrt{1-k^2}\Big),\\ &\Big(\frac{3\pi}{2}, \arcsin\sqrt{1-k^2}\Big), \Big(\frac{3\pi}{2}, \pi - \arcsin\sqrt{1-k^2}\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{2.27}$$

- k>1

$$\begin{aligned}&\Big\{\Big(0, \arcsin\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}\Big), \Big(0, \pi - \arcsin\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}\Big),\\ &\Big(\pi, \arcsin\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}\Big), \Big(\pi, \pi - \arcsin\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}}\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{2.28}$$

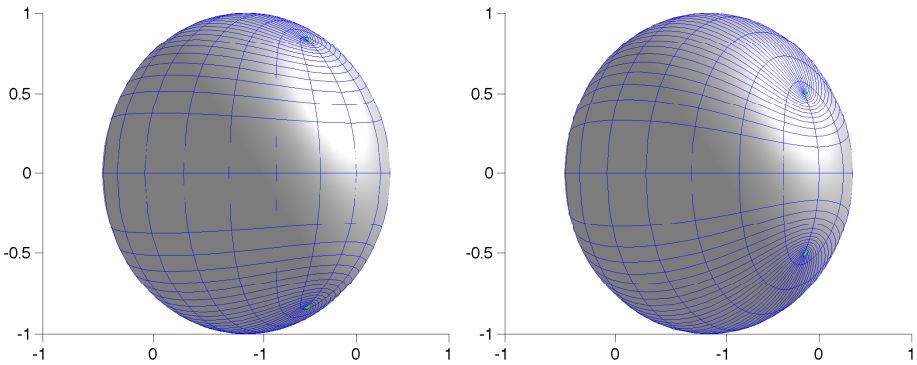

FIGURE 2.2 – En vert ω_2 et son symétrique par rapport à l'équateur pour $k = 1.2$ et $k = 2$.

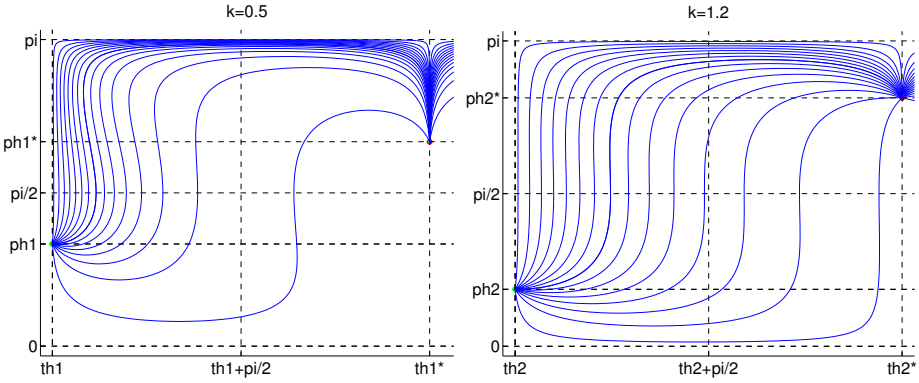

FIGURE 2.3 – Lieu conjugué (en rouge) et trajectoires partant du point initial ω_1 et ω_2 (en vert). Les trajectoires sont générées jusqu'au temps conjugué. On remarque que le lieu conjugué est réduit à l'antipode ω_1^* de ω_1 pour $k = 0.5$ et ω_2^* de ω_2 pour $k = 1.2$.

Pour $k < 1$ on note $\omega_1 = (\theta_1, \varphi_1) = (\frac{\pi}{2}, \arcsin\sqrt{1-k^2})$, et les autres points sont son antipode $(\theta_1^*, \varphi_1^*)$ et leurs symétriques par rapport à l'équateur (θ_1, φ_1^*) et (θ_1^*, φ_1). Pour $k > 1$ on utilise les notations semblables pour $\omega_2 = (\theta_2, \varphi_2) = (0, \arcsin\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}})$.

Conjecture 2.1 (Caustique d'un point singulier)**.** *Le lieu conjugué et le lieu de coupure des points de colinéarité définis précédemment sont réduits à un point, qui est situé à l'antipode.*

2.5 Etude générique

On se place désormais en un point non singulier qui n'est pas situé sur l'équateur, ce cas ayant déjà été traité dans l'annexe A.

La figure 2.5 présente l'essentiel des comportements observés lors des simulations numériques. Le lieu conjugué contient 4 points de rebroussement dont 2

sont reliés par le lieu conjugué. Lorsque la déformation augmente (ie k s'éloigne de 1) les lieux conjugués vont sembler plus complexes, mais en les représentant sur la sphère (figure 2.5) on remarque qu'en fait ils s'enroulent comme s'enroulent les géodésiques.

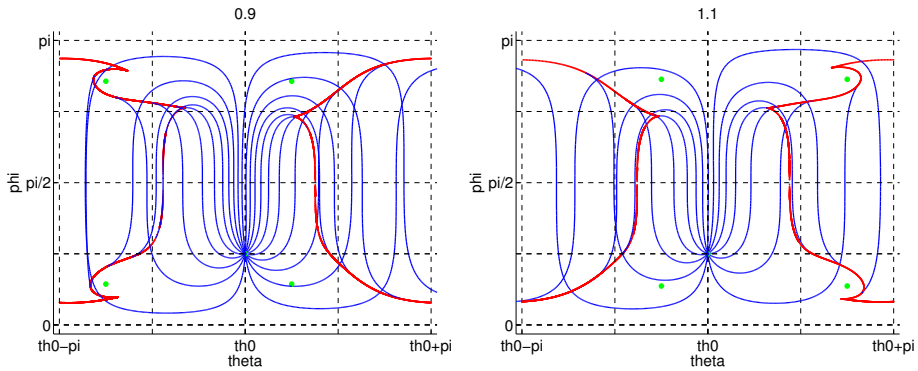

Figure 2.4 – Lieu conjugué (en rouge) pour le point $(\theta_0 = \pi/4, \phi_0 = \pi/4)$, pour $k = 0.9$ à gauche et $k = 1.1$ à droite. Les points singuliers apparaissent en vert. On remarque que les géodésiques arrivent par l'extérieur de la caustique sur les points de rebroussement les plus proches en θ alors qu'elles arrivent par l'intérieur pour les points de rebroussement plus éloignés. Le lieu de coupure est donc le segment (dans les coordonnées de Liouville) qui relie les deux points de rebroussement les plus proches le long des trajectoires.

Conjecture 2.2. *La métrique* (2.14) *vérifie la conjecture de Jacobi.*

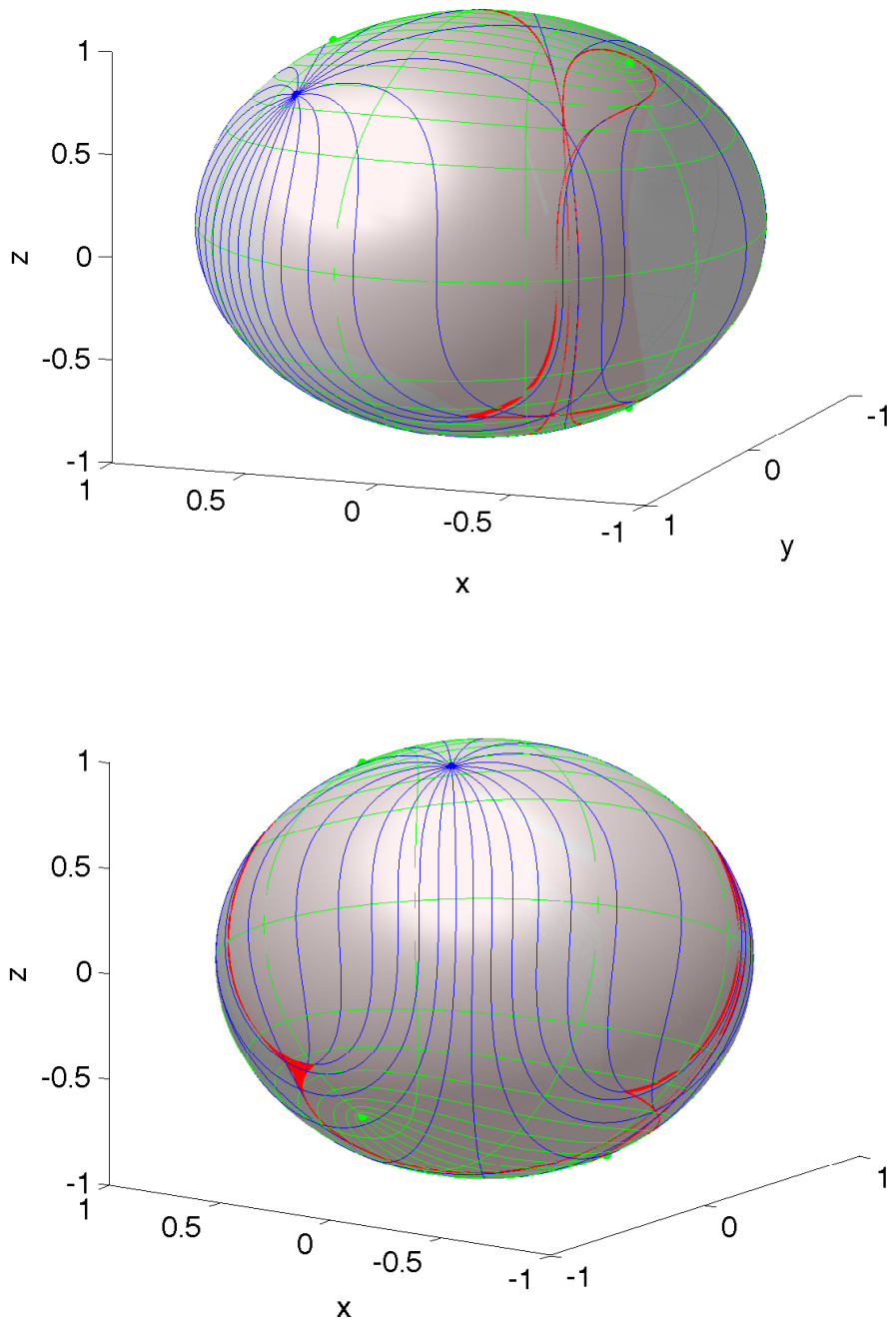

FIGURE 2.5 – Ici on augmente la déformation ($k = 1.2$). On remarque que les points de rebroussement qui ne sont pas extrémités du lieu de coupure s'enroulent autour de la sphère.

Méthodes géométriques et numériques pour calculer les lieux conjugué et de coupure sur les surfaces riemanniennes

Cet article de 2013 présente les techniques géométriques et numériques que nous utilisons pour calculer les lieux conjugué et de coupure sur des surfaces riemanniennes à travers trois exemples : l'ellispoïde de révolution, l'ellipsoïde générale et la métrique pseudo-riemannienne sur S^2 issue de la mécanique des spins.

A partir de méthodes fines sur les surfaces de révolution, comme l'étude de l'application premier retour ou de l'application période, on établit que l'ellipsoïde de révolution vérifie la conjecture de Jacobi et l'on explicite la caustique. Dans le cas oblat, le lieu de coupure est un segment situé sur le parallèle antipodal et correspond à la demi-période pour un point générique, et au rayon d'injectivité $\pi/\sqrt{G(\pi/2)}$ (où G est la courbure de Gauss). Dans le cas prolat, le lieu de coupure correspond à l'intersection des géodésiques associées à p_θ et $-p_\theta$, ce qui revient à résoudre $\theta(t, p_\theta) = \pi$ le long des trajectoires, c'est donc un segment du méridien antipodal.

En se basant sur le travail de Itoh et Kiyohara [18] sur l'ellipsoïde générale, et en combinant avec les techniques numériques, on montre de quelle manière apparaissent les comportements du cas dégénéré de révolution au sein du cas général. En effet les extrémales du cas général peuvent être classifiées selon qu'elles se comportent comme dans le cas prolat ou le cas oblat, et les deux types de comportements sont séparés par les trajectoires qui passent par les points ombilicaux.

La dernière étude est une première approche de la métrique pseudo-riemannienne étudiée dans le chapitre 2 (mais avec toutefois un paramétre k différent). En n'ayant pas connaissance de l'intégrale première supplémentaire, l'étude se restreint aux techniques numériques et aux symétries pour étudier la caustique du point $(\theta(0) = 0, \varphi(0) = \pi/2)$. Les simulations montrent que l'application premier retour est strictement décroissante et surjective, et que les trajectoires ne s'intersectent pas avant le premier retour à l'équateur (pour des valeurs de k comprises entre 0 et $k_3 > 1$). On en déduit que le lieu de coupure

du point sur l'équateur est tout l'équateur privé de ce point.

Annexe A

Geometric and numerical techniques to compute conjugate and cut loci on Riemannian surfaces

Bernard Bonnard
Institut de mathématiques de Bourgogne, Dijon, France
Olivier Cots
INRIA, Sophia Antipolis, France
Lionel Jassionnesse
Institut de mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

Abstract

We combine geometric and numerical techniques – the Hampath code – to compute conjugate and cut loci on Riemannian surfaces using three test bed examples : ellipsoids of revolution, general ellipsoids, and metrics with singularities on $\mathbf{S}^2$ associated to spin dynamics.

A.1 Introduction

On a Riemannian manifold (M, g), the cut point along the geodesic γ emanating from q_0 is the first point where γ ceases to be minimizing, while the first conjugate point is where it ceases to be minimizing among the geodesics C^1-close to γ. Considering all the geodesics starting from q_0 they will form respectively the cut locus $C_{\text{cut}}(q_0)$ and the conjugate locus $C(q_0)$. The computations of the conjugate and cut loci on a Riemannian surface is an important problem in global geometry [5] and it can be extended to optimal control with many important applications [10]. Also convexity property of the injectivity domain of the exponential map is related to the continuity property of the Monge transport map T on the surfaces [15]. The structure of the conjugate and cut loci on surfaces diffeomorphic to $\mathbf{S}^2$ was investigated in details by Poincaré and Myers [28, 29]. In the analytic case, the cut locus is a finite tree and the extremity of each branch

is a cusp point. But the explicit computation of the number of branches and cusps points is a very complicated problem and only very recently was proved the four cusp Jacobi conjecture on ellipsoids [18, 32].

The aim of this article is to present techniques which lead to the explicit computation of the cut and conjugate loci based on three examples, combining geometric techniques and numerical simulations using the Hampath code [12]. Geometry is used in a first step to choose appropriate coordinates to analyze the metric (for instance the computation of curvature and principal lines of curvature) and the geodesic flow. Also the explicit computations will be related to the micro-local complexity of this flow. This is clear in the example of an ellipsoid of revolution : geodesics can be meridians, the equator and a family of geodesics such that representing the metric in the normal form $g = \mathrm{d}\varphi^2 + m(\varphi)\mathrm{d}\theta^2$, θ increases or decreases monotonously while φ oscillates between φ^- and φ^+. The important task is to evaluate the first conjugate point t_{1c} which corresponds to the existence of a solution of the Jacobi equation $\ddot{J}(t) + G(\gamma(t))J(t) = 0$ such that $J(0) = J(t_{1c}) = 0$, G being the Gauss curvature. Since in our case the usual Sturm theorem [22] is not very helpful to estimate conjugate points, our approach is to compute them in relation with the period mapping T of the φ-variable.

In the case of an ellipsoid of revolution it can be shown that conjugate and cut loci can be computed with only the first and second order derivative of the period mapping [8].

The Hampath code is useful to analyze the geodesics and to evaluate conjugate points and the conjugate locus, using Jacobi fields and continuation method. In particular the analysis of the case of revolution can be easily extended to a general ellipsoid.

The time optimal transfer of three linearly coupled spins with Ising coupling described in [35] leads to study a one parameter Riemannian metric on $\mathbf{S}^2$ with equatorial singularity which is a deformation of the Grushin case $g = \mathrm{d}\varphi^2 + \tan^2\varphi \mathrm{d}\theta^2$. Again the analysis of the flow and conjugate points computation lead to describe the conjugate and cut loci for various values of the parameter.

A.2 Riemannian metrics on surfaces of revolution

We briefly recall the general tools to handle the analysis of surfaces of revolution with applications to the ellipsoids [8, 31].

A.2.1 Generalities

Taking a chart (U, q) the metric can be written in polar coordinates as

$$g = \mathrm{d}\varphi^2 + m(\varphi)\mathrm{d}\theta^2.$$

We use Hamiltonian formalism on T^*U, $\frac{\partial}{\partial p}$ is the vertical space, $\frac{\partial}{\partial q}$ is the horizontal space and $\alpha = p\mathrm{d}q$ is the (horizontal) Liouville form. The associated Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{m(\varphi)}\right)$$

and we denote $\exp t\vec{H}$ the one-parameter group. Parameterizing by arc length amounts to fix the level set to $H = 1/2$. Extremals solution of $\vec{H}$ are denoted $\gamma : t \to (q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))$ and fixing q_0 it defines the exponential mapping $\exp_{q_0} : (t, p_0) \to q(t, q_0, p_0) = \Pi(\exp t\vec{H}(q_0, p_0))$ where $\Pi : (q, p) \to q$ is the standard projection. Extremals are solutions of the equations

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = p_\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\theta}{m(\varphi)}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}p_\theta^2\frac{m'(\varphi)}{m^2(\varphi)}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Definition A.1. *The relation $p_\theta = Constant$ is called* **Clairaut** *relation on surfaces of revolution. We have two types of specific solutions :* **meridians** *for which $p_\theta = 0$ and $\theta(t) = \theta_0$ and* **parallels** *for which $\frac{d\varphi}{dt}(0) = p_\varphi(0) = 0$ and $\varphi(t) = \varphi(0)$.*

To analyze the extremal behaviours, we fix $H = 1/2$ and we consider the mechanical system

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(\varphi, p_\theta) = 1$$

where $V(\varphi, p_\theta) = p_\theta^2/m(\varphi)$ is the **potential** mapping depending upon the parameter p_θ and parallels correspond to local extrema.

Assumptions 1. *In the sequel we shall assume the following*

- *(A1) $\varphi = 0$ is a parallel solution with a local minimum of the potential and the corrresponding parallel is called the* **equator**.
- *(A2) The metric is* **reflectionally symmetric** *with respect to the equator : $m(-\varphi) = m(\varphi)$.*

Micro-local behaviors of the extremals

We describe a set of solutions confined to the segment $[-\varphi^{\mathbf{max}}, +\varphi^{\mathbf{max}}]$ where $\varphi^{\mathbf{max}}$ is the local maximum of V closest to 0. Let I be the open interval $p_\theta \in (\sqrt{m(\varphi^{\mathbf{max}})}, \sqrt{m(\varphi(0))})$. Taking such an extremal, φ oscillates periodically between φ^- and φ^+. The dynamics is described by :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{1}{g}, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\theta}{m(\varphi)},$$

where

$$g(\varphi, p_\theta) = \sqrt{\frac{m(\varphi)}{m(\varphi) - p_\theta^2}}$$

and for an increasing branch one can parameterize θ by φ and we get

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{g(\varphi, p_\theta)p_\theta}{m(\varphi)} = f(\varphi, p_\theta),$$

where

$$f(\varphi, p_\theta) = \frac{p_\theta}{\sqrt{m(\varphi)}\sqrt{m(\varphi) - p_\theta^2}}.$$

The trajectory $t \mapsto \varphi(t, p_\theta)$ is periodic and one can assume $\varphi(0) = 0$. The period of oscillation T is given by

$$T = 4\int_0^{\varphi^+} g(\varphi, p_\theta)\mathrm{d}\varphi$$

and the first return to the equator is at time $T/2$ and the variation of θ at this time is given by

$$\Delta\theta = 2\int_0^{\varphi^+} f(\varphi, p_\theta)\mathrm{d}\varphi.$$

Definition A.2. *The mapping $p_\theta \in I \to T(p_\theta)$ is called the* **period mapping** *and $R : p_\theta \to \Delta\theta$ is called the* **first return mapping**.

Definition A.3. *The extremal flow is called* **tame** *on I if the first return mapping R is such that $R' < 0$.*

Proposition A.1. *For extremal curves with $p_\theta \in I$, in the tame case there exists no conjugate times on $(0, T/2)$.*

Démonstration. If $R' < 0$, the extremal curves initiating from the equator with $p_\theta \in I$ are not intersecting before returning to the equator. As conjugate points are limits of intersecting extremals curves, conjugate points are not allowed before returning to the equator. □

Assumptions 2. *In the tame case we assume the following*

(A3) At the equator the Gauss curvature $G = -\frac{1}{\sqrt{m(\varphi)}}\frac{\partial^2\sqrt{m(\varphi)}}{\partial\varphi^2}$ is positive and maximum.

Using Jacobi equation we deduce :

Lemma A.1. *Under assumption (A3), the first conjugate point along the equator is at time $\pi/\sqrt{G(0)}$ and realizes the minimum distance to the cut locus $C_{\mathrm{cut}}(\theta(0) = 0, \varphi(0) = 0)$. It is a cusp point of the conjugate locus.*

Parameterization of the conjugate locus under assumptions (A1-2-3) for $p_\theta \in I$

Fixing a reference extremal γ, Jacobi equation is the variational equation :

$$\delta\dot{z}(t) = \frac{\partial\vec{H}(\gamma(t))}{\partial z}\delta z(t), \quad \delta z = (\delta q, \delta p)$$

and a Jacobi field $J(t)$ is a non trivial solution of Jacobi equation. According to standard theory on surfaces, if γ is parametrized by arc length, let $J_1(t) = (\delta q(t), \delta p(t))$ denotes the Jacobi field vertical at time $t = 0$, that is $\delta q(0) = 0$ and such that $\langle p(0), \delta p(0)\rangle = 0$. Since $J_1(0)$ is vertical, $\alpha(J_1(0)) = 0$ and then $\alpha(J_1(t)) = 0$.

We have [22, 31] :

Proposition A.2. *Conjugate points are given by the relation $\mathrm{d}\Pi(J_1(t)) = 0$ and*

$$\mathrm{d}\Pi(J_1(t)) = \left(\frac{\partial\varphi(t, p_\theta)}{\partial p_\theta}, \frac{\partial\theta(t, p_\theta)}{\partial p_\theta}\right).$$

In particular we have at any time the collinearity condition :

$$p_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\theta} + p_\theta\frac{\partial\theta}{\partial p_\theta} = 0.$$

The conjugate locus will be computed **by continuation**, starting from the cusp point at the equator. Let $p_\theta \in I$ and $t \in (T/2, T/2 + T/4)$. One has the formula

$$\theta(t, p_\theta) = \Delta\theta(p_\theta) + \int_{T/2}^{t} \frac{p_\theta}{m(\varphi)} \mathrm{d}t$$

and on $[T/2, t]$, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} < 0$, $\varphi < 0$. Hence

$$\int_{T/2}^{t} \frac{p_\theta}{m(\varphi)} \mathrm{d}t = \int_{\varphi(t,p_\theta)}^{0} f(\varphi, p_\theta) \mathrm{d}\varphi.$$

We have :

Lemma A.2. *For $p_\theta \in I$ and conjugate times between $(T/2, T/2 + T/4)$ the conjugate locus is solution of*

$$\frac{\partial \theta(\varphi, p_\theta)}{\partial p_\theta} = 0, \tag{A.1}$$

where $\theta(\varphi, p_\theta) = \Delta\theta(p_\theta) + \int_\varphi^0 f(\varphi, p_\theta) \mathrm{d}\varphi$.

This gives a simple relation to compute the conjugate locus by continuation. One notes $p_\theta \to \varphi_{1c}(p_\theta)$ the solution of eq. A.1 initiating from the equator. Differentiating one has

$$\Delta\theta' + \int_{\varphi}^{0} \frac{\partial f}{\partial p_\theta} \mathrm{d}\varphi = 0$$

at $\varphi_{1c}(p_\theta)$. Differentiating again one obtains

$$\Delta\theta'' + \int_{\varphi_{1c}}^{0} \frac{\partial^2 f}{\partial p_\theta^2} \mathrm{d}\varphi - \frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial p_\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_\theta} = 0.$$

One can easily check that $\frac{\partial f}{\partial p_\theta} > 0$ and $\frac{\partial^2 f}{\partial p_\theta^2} > 0$. In particular

$$\frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial p_\theta} = \left(\Delta\theta'' + \int_{\varphi_{1c}}^{0} \frac{\partial^2 f}{\partial p_\theta^2} \mathrm{d}\varphi \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_\theta} \right)^{-1}$$

and one deduces the following.

Proposition A.3. *If $\Delta\theta'' > 0$ on I, then $\frac{\partial \varphi_{1c}}{\partial p_\theta} \neq 0$ and the curve $p_\theta \to (\varphi_{1c}(p_\theta), \theta_{1c}(p_\theta))$ is a curve defined for $p_\theta \in I$ and with no self-intersection in the plane (φ, θ). In particular it is without cusp point.*

Remark A.1. *Self-intersections are depending upon the parameterization of the conjugate locus but not cusp points of the conjugate locus.*

To simplify the computations we use the following lemma :

Lemma A.3. *We have the relation*

$$R'(p_\theta) = \frac{T'(p_\theta)}{2p_\theta}.$$

A.2.2 Ellipsoids of revolution

The ellipsoid of revolution is generated by the curve

$$y = \sin\varphi, \quad z = \varepsilon\cos\varphi$$

where $0 < \varepsilon < 1$ corresponds to the oblate (flattened) case while $\varepsilon > 1$ is the prolate (elongated) case. The restriction of the Euclidian metric is

$$g = F_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi^2 + F_2(\varphi)\mathrm{d}\theta^2$$

where $F_1 = \cos^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi$, $F_2 = \sin^2\varphi$. The metric can be written in the normal form setting :

$$\mathrm{d}\Phi = F_1^{1/2}(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Observe that φ oscillates periodically and θ is monotonous. Hence the period mapping can be computed in the (ψ, θ)-coordinate, $\psi = \pi/2 - \varphi$ and $\psi = 0$ is the equator. The Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\varphi^2}{F_1(\varphi)} + \frac{p_\theta^2}{F_2(\varphi)}\right)$$

and with $H = 1/2$, one gets

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{(\cos^2\psi - p_\theta^2)^{1/2}}{\cos\psi(\sin^2\psi + \varepsilon^2\cos^2\psi)^{1/2}}.$$

Denoting $1 - p_\theta^2 = \sin^2\psi_1$ and making the rescaling $Y = \sin\psi_1 Z$, where $Y = \sin\psi$, one gets

$$\frac{(\varepsilon^2 + Z^2\sin^2\psi_1^2(1-\varepsilon^2))^{1/2}}{(1-Z^2)^{1/2}}\mathrm{d}Z = \mathrm{d}t.$$

Hence the formula for the period mapping is

$$\frac{T}{4} = \int_0^1 \frac{(\varepsilon^2 + Z^2\sin^2\psi_1(1-\varepsilon^2))^{1/2}}{(1-Z^2)^{1/2}}\mathrm{d}Z$$

which corresponds to an elliptic integral. The discussion is the following.

Oblate Case

In this case the Gauss curvature is increasing from the north pole to the equator and the problem is tame and the period mapping is such that

$$T'(p_\theta) < 0 < T''(p_\theta)$$

for each admissible $p_\theta > 0$. The cut point of $q(0) = (\varphi(0), 0)$ is given by $t_0(p_\theta) = T(p_\theta)/2$ and corresponds to the intersection of the two extremal curves associated to $\dot\varphi(0)$, and $-\dot\varphi(0)$. The cut locus $C_{\mathrm{cut}}(q(0))$ of a point different of a pole is a segment of the antipodal parallel. If $q(0)$ is not a pole nor on the equator, the distance to the cut locus is the half-period of the extremal starting from $\varphi(0)$ with $\dot\varphi(0) = 0$ and the injectivity radius is realized for $\varphi(0) = \pi/2$ on the equator, and is given by $\pi/\sqrt{G(\pi/2)}$ where G is the Gauss curvature. The conjugate locus $C(q(0))$ of a point different of a pole has exactly four cusps, two on the antipodal parallel which are the extremities of the cut locus segment and two on the antipodal meridian.

Prolate Case

In this case, the Gauss curvature is decreasing from the north pole to the equator and the first return mapping to the equator is an increasing function of $p_\theta \geq 0$. Let a geodesic being not a meridian circle, the cut point $t_0(p_\theta)$ is given by solving $\theta(t_0, p_\theta) = \pi$ and corresponds to the intersection of the two extremal curves associated respectively to p_θ and $-p_\theta$. The cut locus of a point which is not a pole is a segment of the antipodal meridian. The conjugate locus $C(q(0))$ of such a point has exactly four cusps, two on the antipodal meridian which are the extremities of the cut locus and two on the antipodal parallel.

Conclusion

To resume both cases are distinguished by the monotonicity property of the Gauss curvature or equivalently of the first return mapping. The cut loci are computed using the symmetric property of the extremal curves : in the oblate case, the symmetry of the metric with respect to the equator and in the prolate case the symmetry of the metric with respect to the meridian. Additionaly to this discrete symmetry, the symmetry of revolution ensures the existence of an additionnal one-dimensional group of symmetry which gives according to Noether theorem the first integral p_θ linear with respect to the adjoint vector and corresponds to a Clairaut metric [7].

A.3 General Ellipsoids

We shall extend the result on ellipsoids of revolution to general ellipsoids. Roughly speaking, the general case intertwines the oblate and the prolate case, which will be easily seen in the classification of the extremal flow.

A.3.1 Geometric Properties [18]

A general ellipsoid E is defined by the equation

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1, \quad a_1 > a_2 > a_3 > 0$$

and we use the double covering parameterization of E $(\theta_1, \theta_2) \in T^2 = S^1 \times S^1 \to E$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a_1} \cos\theta_1 \sqrt{(1-\beta)\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\ x_2 &= \sqrt{a_2} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ x_3 &= \sqrt{a_3} \cos\theta_2 \sqrt{\beta\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \end{aligned}$$

where $\beta = (a_2 - a_3)/(a_1 - a_3) \in (0, 1)$ and the (θ_1, θ_2)-coordinates are related to the elliptic coordinates (λ_1, λ_2) by

$$\lambda_1 = a_1 \sin^2\theta_1 + a_2 \cos^2\theta_1, \quad \lambda_2 = a_2 \cos^2\theta_2 + a_3 \sin^2\theta_2.$$

In the (θ_1, θ_2)-coordinates the restriction of the euclidian metric on $\mathbf{R}^3$ takes the form

$$g = (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - a_3}\mathrm{d}\theta_1{}^2 + \frac{\lambda_2}{a_1 - \lambda_2}\mathrm{d}\theta_2{}^2\right).$$

The metric has two main discrete symmetries defined for $i = 1, 2$ by the change of variables : $\theta_i \to \pi - \theta_i$ and $\theta_i \to -\theta_i$. The associated Hamiltonian is

$$2H = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1 - a_3}{\lambda_1} p_{\theta_1}^2 + \frac{a_1 - \lambda_2}{\lambda_2} p_{\theta_2}^2\right)$$

and an additional first integral quadratic in $(p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$ is given by

$$F = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1 - a_3}{\lambda_1}(a_2 - \lambda_2) p_{\theta_1}^2 - \frac{a_1 - \lambda_2}{\lambda_2}(\lambda_1 - a_2) p_{\theta_2}^2\right).$$

According to Liouville theory [7], the metric can be written in the normal form

$$g = (F_1(u_1) + F_2(u_2))\left(\mathrm{d}u_1^2 + \mathrm{d}u_2^2\right),$$

where u_1, u_2 are defined by the quadratures

$$\mathrm{d}u_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - a_3}}\mathrm{d}\theta_1, \quad \mathrm{d}u_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{a_1 - \lambda_2}}\mathrm{d}\theta_2$$

and see [22] for the relation with elliptic coordinates. The third fondamental form is given for $x_3 \neq 0$ by

$$\mathrm{III}(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2) = \frac{x_1 x_2 x_3}{a_1 a_2 a_3}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1}\right)\mathrm{d}x_1^2 - \frac{x_1 x_2 x_3}{a_1 a_2 a_3}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)\mathrm{d}x_2^2$$

$$+\frac{x_3}{a_3}\left(\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

and we get the four umbilical points $\left(\pm\sqrt{a_1}\sqrt{1-\beta}, 0, \pm\sqrt{a_3}\beta\right)$. Besides in elliptic coordinates the lines $\lambda_i = Constant$ are the curvature lines. Finally, taking the Liouville normal form, the Gauss curvature is given by

$$G(u_1, u_2) = \frac{F_1'(u_1)^2 + F_2'(u_2)^2}{2\left(F_1(u_1) + F_2(u_2)\right)^3} - \frac{F''(u_1) + F''(u_2)}{2\left(F_1(u_1) + F_2(u_2)\right)^2}$$

or similarly, in the elliptic coordinates, one has

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{a_1 a_2 a_3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in [a_2, a_1] \times [a_3, a_2].$$

We represent in Fig. A.1 the Gauss curvature in the (θ_1, θ_2)-coordinates restricted to $(\theta_1, \theta_2) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ by symmetry.

Remark A.2. *We have the following correspondences with the ellipsoid of revolution : in the limit case $a_1 = a_2 > a_3$ (oblate case), the metric g reduces to the form presented in A.2.2 where $(\varphi, \theta) \equiv (\theta_2, \theta_1)$ and we have $F \geq 0$. In the limit case $a_1 > a_2 = a_3$ (prolate case), the metric g reduces to the form presented in A.2.2 where $(\varphi, \theta) \equiv (\theta_1, \theta_2)$ and we have $F \leq 0$.*

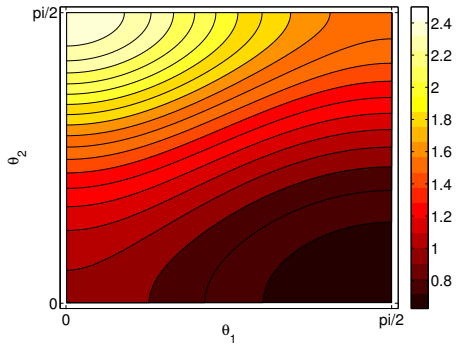

FIGURE A.1 – Gauss curvature in (θ_1, θ_2)-coordinates for $(\theta_1, \theta_2) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. The maximum $a_1/(a_2 a_3)$ of G is at $(0, \pi/2)$ which is the intersection of the longest and the middle ellipses while the minimum $a_3/(a_2 a_1)$ is at $(\pi/2, 0)$, the intersection of the shortest and the middle ellipses.

A.3.2 Geodesic Flow [18]

Parameterizing by arc length $H = 1/2$ and setting $F = c$, the extremal equations are described by

$$\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1} \mathrm{d}\theta_1}{\sqrt{\lambda_1 - a_3}\sqrt{\lambda_1 - a_2 + c}} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\lambda_2} \mathrm{d}\theta_2}{\sqrt{a_1 - \lambda_2}\sqrt{a_2 - c - \lambda_2}}$$

and

$$\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1 - a_2 + c}}{\sqrt{\lambda_1 - a_3}} \mathrm{d}\theta_1 + \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\lambda_2}\sqrt{a_2 - c - \lambda_2}}{\sqrt{a_1 - \lambda_2}} \mathrm{d}\theta_2$$

where $\varepsilon_i = \pm 1$ is the sign of $\mathrm{d}\theta_i/\mathrm{d}t$, $i = 1, 2$. The value c of F varies between $-(a_1 - a_2)$ and $(a_2 - a_3)$ and the behavior of the extremals depends on the sign of c.

- If $0 < c < a_2 - a_3$, then $\theta_1(t)$ increases or decreases monotonously and $\theta_2(t)$ oscillates between $\nu_2(c)$ and $\pi - \nu_2(c)$, where $\nu_2(c)$ is defined by

  $$\sin \nu_2(c) = \sqrt{\frac{c}{a_2 - a_3}}, \quad 0 < \nu_2(c) < \frac{\pi}{2}.$$

  These trajectories do not cross transversely the segments $\theta_2 = 0$ and $\theta_2 = \pi$ which degenerate into two poles in the oblate case. Here the longest ellipse $\theta_2 = \pi/2$ plays the role of the equator from the oblate case.

- If $-(a_1 - a_2) < c < 0$, then $\theta_2(t)$ increases or decreases monotonously and $\theta_1(t)$ oscillates periodically between $\nu_1(c)$ and $\pi - \nu_1(c)$ where $\nu_1(c)$ is defined by

  $$\sin \nu_1(c) = \sqrt{\frac{-c}{a_1 - a_2}}, \quad 0 < \nu_1(c) < \frac{\pi}{2}.$$

  These trajectories do not cross transversely the segments $\theta_1 = 0$ and $\theta_1 = \pi$ which degenerate into two poles in the prolate case. Here the longest ellipse plays the role of the meridian circle from the prolate case.

– The separating case $c = 0$ is the level set containing the umbilical points. Arc length geodesic curves $\gamma(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ can be parameterized by c but we introduce the parameter η defined by :

$$\nu(\eta) = \cos\eta e_1 + \sin\eta e_2$$

where (e_1, e_2) is a orthonormal basis

$$e_1 = \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1}{\lambda_1 - a_3}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial\theta_1}, \quad e_2 = \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2}{a_1 - \lambda_2}\right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial\theta_2}.$$

A.3.3 Results on the Conjugate and Cut Loci

According to [18] we have the following proposition which generalizes the case of an ellipsoid of revolution.

Proposition A.4. *The cut locus of a non-umbilical point is a subarc of the curvature lines through its antipodal point and the conjugate locus has exactly four cusps.*

The Analysis

Fixing the initial point to $(\theta_1(0), \theta_2(0))$, the relation between η and c is given by :

$$c(\eta) = \big(a_2 - \lambda_2(\theta_2(0))\big)\cos^2\eta - \big(\lambda_1(\theta_1(0)) - a_2\big)\sin^2\eta$$

and let η_0 be the unique η such that $c(\eta_0) = 0$, $0 \leq \eta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

- The case $c > 0$, cf. Fig. A.2. We use the parameterization (θ_1, θ_2) with $\theta_1 \in T^1$ and $0 \leq \theta_2 \leq \pi$.
  - For $\eta \in (0, \eta_0) \cup (\pi - \eta_0, \pi)$ the value of θ_2 along the geodesic increases until it reaches a maximum θ_2^+ and then it decreases. The cut time $t_0(\eta)$ is the second positive time such that θ_2 takes the value $\pi - \theta_2(0)$.
  - For $\overline{\eta} = 2\pi - \eta$, the value of θ_2 along the geodesic decreases until it reaches a minimum θ_2^- and then it increases. The cut time $t_0(\overline{\eta})$ is the first positive time such that θ_2 takes the value $\pi - \theta_2(0)$.
  - Besides, we have $t_0(\eta) = t_0(\overline{\eta})$ and $\gamma_\eta(t_0(\eta)) = \gamma_{\overline{\eta}}(t_0(\overline{\eta}))$.
- The case $c \leq 0$, cf. Fig. A.3. We use the parameterization (θ_1, θ_2) with $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ and $\theta_2 \in T^1$.
  - For $\eta \in (\eta_0, \pi - \eta_0)$, θ_2 increases monotonously and let $t_0(\eta)$ be the first positive time t such that θ_2 takes the value $\theta_2(0) + \pi$. The cut time is given by $t_0(\eta)$.
  - For $\overline{\eta} = 2\pi - \eta$, θ_2 decreases monotonously and let $t_0(\eta)$ be the first positive time t such that θ_2 takes the value $\theta_2(0) - \pi$. The cut time is given by $t_0(\eta)$.
  - Besides, we have $t_0(\eta) = t_0(\overline{\eta})$ and $\theta_{1,\eta}(t_0(\eta)) = \theta_{1,\overline{\eta}}(t_0(\overline{\eta}))$.

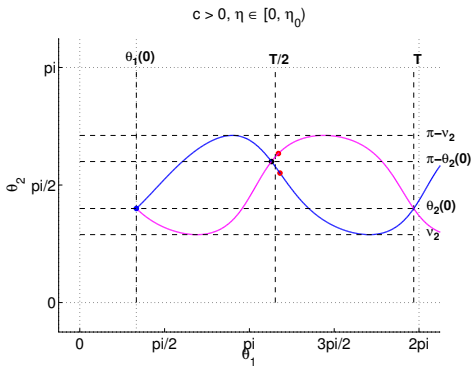

FIGURE A.2 – Trajectories, cut and conjugate points in the case $c > 0$. The trajectory with $\dot{\theta}_2(0) > 0$ corresponds to $\eta \in (0, \eta_0)$ while the other corresponds to $\overline{\eta} = 2\pi - \eta$. The two conjugate points are plotted in red and come after the cut point in black. The period T of the θ_2-variable is equal for each trajectory and is represented with the half-period.

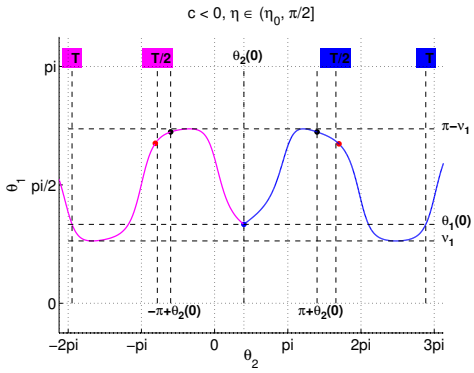

FIGURE A.3 – Trajectories, cut and conjugate points in the case $c < 0$. The trajectory with $\dot{\theta}_2(0) > 0$ corresponds to $\eta \in (0, \eta_0)$ while the other corresponds to $\overline{\eta} = 2\pi - \eta$. The two conjugate points are plotted in red and come after the cut point in black. The periods of the θ_2-variable are not equal for each trajectory and are represented with the half-period.

Numerical Computation of Conjugate and Cut Loci

We fix the parameters of the ellipsoid $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ such that $a_1 - a_2 \neq a_2 - a_3$ to avoid any additionnal symmetry. We take $(a_1, a_2, a_3) = (1.0, 0.8, 0.5)$ and $(\theta_1(0), \theta_2(0)) = (\pi/3, 2\pi/5)$ for the computations, which correspond to a generic situation. Indeed, if the initial point is on $\theta_2 = 0$ or π, $c(\eta) \leq 0$ then there are only oblate-like extremals. Similarly, if $\theta_1(0) = 0$ or π, there are only prolate-like extremals.

First of all we represent the conjugate and cut loci on Fig. A.4 using the double covering parameterization, with several trajectories for $\eta \in [0, 2\pi)$ on the top subplot. The conjugate and cut loci are given on Fig. A.5 in (x_1, x_2, x_3)-coordinates. Finally, the cut time t_0, the first conjugate time t_1 and the half-

period $T/2$ of the oscillating variable is plotted Fig. A.6.

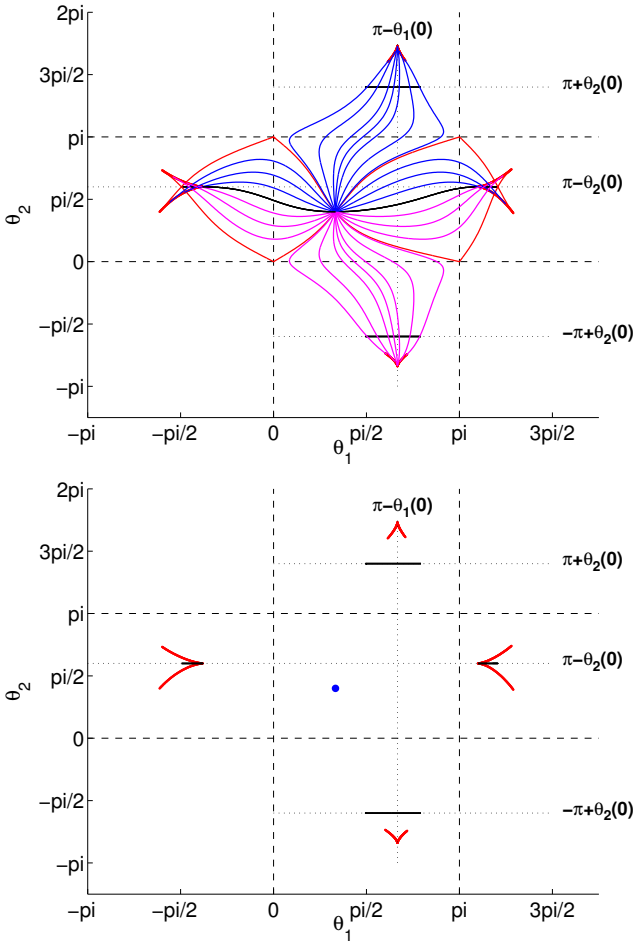

Figure A.4 – On the top subplot is represented several trajectories γ_η, $\eta \in [0, 2\pi)$, with the conjugate (in red) and cut (in black) loci, using the double covering parameterization. In blue are plotted the trajectories for $\eta \in (0, \pi)$ and in magenta for $\overline{\eta} = 2\pi - \eta$. The four trajectories in red such that $c(\eta) = 0$ pass through an umbilical point. They separate oblate-like ($c > 0$) behaviour from prolate-like ($c < 0$) one. The two intersections of these trajectories are junction of parts of the cut locus coming from oblate-like extremals and the cut locus coming from prolate-like extremals. One should notice that in red are plotted the four trajectories passing through the umbilical points with the parameterization (θ_1, θ_2), $\theta_1 \in T^1$ and $0 \leq \theta_2 \leq \pi$. (Bottom) Conjugate and cut loci.

A.4 Dynamics of spin particles

The problem fully described in [35, 36] arises in the case of a spin chain of three linearly coupled spins with Ising coupling. Using appropriate coordinates

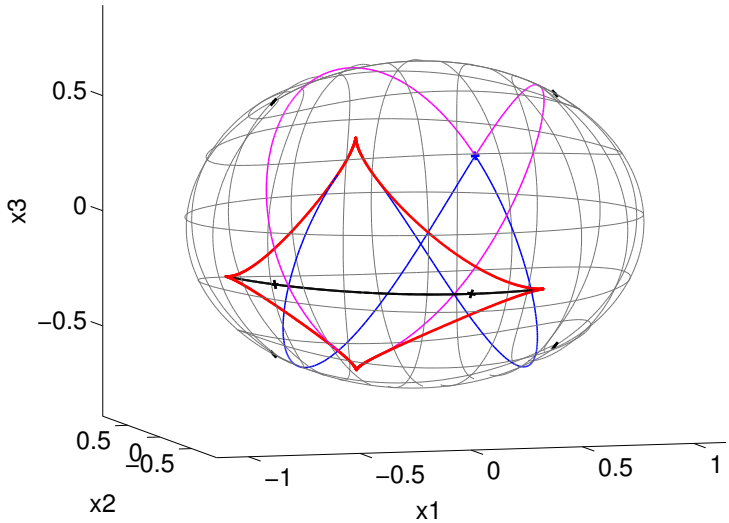

FIGURE A.5 – Conjugate (in red) and cut (in black) loci in (x_1, x_2, x_3)-coordinates obtained from Fig. A.4. The center segment of the cut locus corresponds to prolate-like case while the two extreme parts come from oblate-like case.

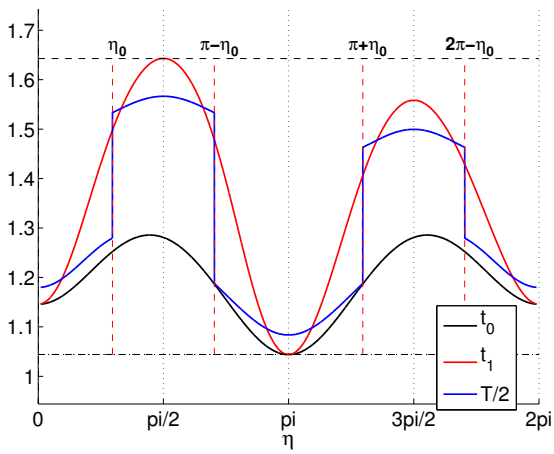

FIGURE A.6 – The cut time t_0, the first conjugate time t_1 and the half-period $T/2$ of the oscillating variable, with respect to the parameter $\eta \in [0, 2\pi]$. In the generic case, the half-period is not equal to the cut time, even for oblate-like trajectories. This is still true for an initial point on $\theta_1 = 0$ or π. The period is discontinuous when $c(\eta) = 0$ since the oscillating variable changes. The only relevant symmetry is on the period mapping. Indeed, for η such that $c(\eta) > 0$, $T(\eta) = T(2\pi - \eta)$.

the dynamics takes the form :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta(t) & 0 \\ \cos\theta(t) & 0 & -k\sin\theta(t) \\ 0 & k\sin\theta(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

where $k = 1$ corresponds to equal coupling. Setting $u_3 = -\cos\theta$, $u_1 = -k\sin\theta$, the dynamics is :

$$\dot{r}_1 = u_3 r_2, \quad \dot{r}_2 = -u_3 r_1 + u_1 r_3, \quad \dot{r}_3 = -u_1 r_2.$$

The optimal problem is transferring the system from $r_0 = (1,0,0)$ to $r(T) = (0,0,1)$ and minimizing the functional :

$$\int_0^T \left(I_1 u_1^2 + I_3 u_3^2\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \min, \quad k^2 = \frac{I_1}{I_3}.$$

We introduce the metric :

$$g = I_1 u_1^2 + I_3 u_3^2 = I_3 \left(\frac{\mathrm{d}r_1^2 + I_1 I_3^{-1} \mathrm{d}r_3^2}{r_2^2}\right)$$

and this defines an almost Riemannian metric on the sphere $\mathbf{S}^2$:

$$g = \frac{\mathrm{d}r_1^2 + k^2 \mathrm{d}r_3^2}{r_2^2}, \quad k^2 = \frac{I_1}{I_3}.$$

Lemma A.4. *In the spherical coordinates $r_2 = \cos\varphi$, $r_1 = \sin\varphi\cos\theta$, $r_3 = \sin\varphi\sin\theta$ the metric g takes the form :*

$$g = (\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\varphi^2 + 2(k^2-1)\tan\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta + \tan^2\varphi(\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2,$$

while the associated Hamiltonian function is given by

$$H = \frac{1}{4k^2}\Big(p_\varphi^2(\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta) + p_\theta^2\cot^2\varphi(\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta) \\ - 2(k^2-1)p_\varphi p_\theta \cot\varphi\sin\theta\cos\theta\Big).$$

We deduce the following

Lemma A.5. *For $k = 1$*

$$H = \frac{1}{4}\left(p_\varphi^2 + p_\theta^2\cot^2\varphi\right),$$

and it corresponds to the so-called Grushin case $g = \mathrm{d}\varphi^2 + \tan^2\varphi\mathrm{d}\theta^2$.

The Grushin case is analyzed in details in [8]. Moreover, we have

Lemma A.6. *The family of metrics g depending upon the parameter k have a fixed singularity on the equator $\varphi = \pi/2$ and a discrete symmetry group defined by the two reflexions : $H(\varphi, p_\varphi) = H(\pi - \varphi, -p_\varphi)$ and $H(\theta, p_\theta) = H(-\theta, -p_\theta)$.*

Numerical Computation of Conjugate and Cut Loci

Next the conjugate and cut loci are computed for the fixed initial conditions : $\varphi(0) = \pi/2$, $\theta(0) = 0$, and are represented via the deformation of the parameter k starting from $k = 1$. There are two different cases to be analyzed : $k > 1$ and $k < 1$. Starting from the axis of symmetry, the Hamiltonian reduces to $H(\theta(0), \varphi(0), p_\theta(0), p_\varphi(0)) = p_\varphi^2(0)/4$, and restricting the extremals to $H = 1$, we can parameterize the geodesics by $p_\varphi(0) = \pm 2$, $p_\theta(0) \in \mathbf{R}$. By symmetry we can fix $p_\varphi(0) = -2$ and consider $p_\theta(0) \geq 0$. For any k, the conjugate locus has a contact of order two at the initial point, as $p_\theta(0) \to \infty$.

• $\mathbf{k \geq 1}$. We study the deformation of the conjugate locus for $k \geq 1$ in Figs. A.7–A.9. The key point is : when $k > 1$, θ is not monotonous for all the trajectories. This is true even for small k, like $k = 1.01$, taking $p_\theta(0) = 0.1$ and $t_f > 14$.

We denote $t_1(p_\theta, k)$ the first conjugate time and $q_1(p_\theta, k) = (\theta, \varphi)_{|t=t_1(p_\theta,k)}$ the associated conjugate point. In Fig. A.7, we represent the map $k \in [1, 1.5] \mapsto q_1(k)$ for p_θ fixed to 10^{-4}. The value 1.5 is heuristically chosen to simplify the analysis. We can notice that $\theta(t_1(k))$ only takes approximately the values 0 and π and so it is on the same meridian as the initial point. It switches three times at $1 < k_1 < k_2 < k_3 < 1.5$, with $k_2 - k_1 \neq k_3 - k_2$. We then restrict the study of the conjugate locus to $k \leq k_3$ to simplify.

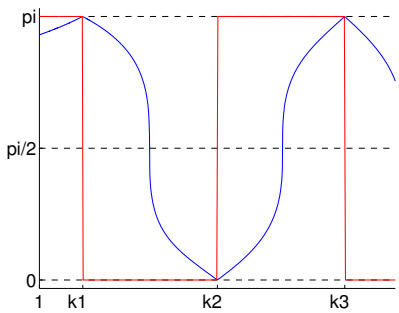

FIGURE A.7 – The first conjugate point with respect to k, for $p_\theta(0)$ fixed to 10^{-4}. In red is plotted $\theta(t_1(p_\theta, k))$ while we have in blue $\varphi(t_1(p_\theta, k))$. The θ-variable takes the values 0 and π. The values k_1, k_2, k_3 are approximately and respectively 1.061, 1.250, 1.429.

We can see in Fig. A.8, three subplots which represent the deformation of one branch ($p_\varphi(0) = -2$ and $p_\theta(0) \geq 0$) of the conjugate locus resp. for k in $[1, k_1]$, $[k_1, k_2]$ and $[k_2, k_3]$. For any $k \in [1, k_3]$, the branch is located in the half-plane $\theta \geq 0$. If we denote $k_1 < \overline{k} < k_2$, the parameter value such that $\varphi(t_1(\overline{k})) = \pi/2$, then the branch form a loop for $\overline{k} \leq k \leq k_3$.

The deformation of the conjugate locus can be explained analysing the behaviors of the trajectories. We describe four types of trajectories in (θ, φ)-coordinates (see Fig. A.9), limiting the study to $k \leq k_3$ to simplify and $p_\theta(0) \geq 0$ by symmetry. These trajectories clarify the evolution of the conjugate locus.

- The first type occuring for any k such that $1 \leq k \leq k_3$, is represented in the top left subplot of Fig. A.9. Its characteristic is that the θ-variable is

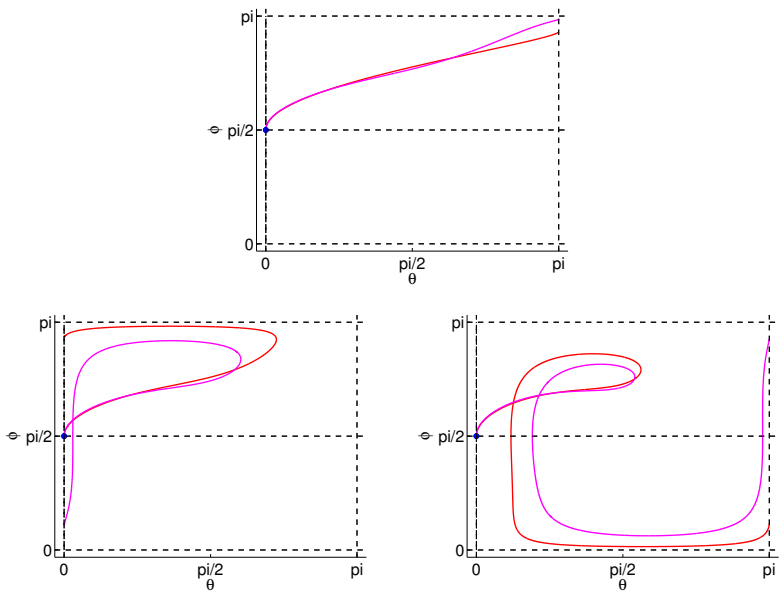

FIGURE A.8 – The deformation of one branch ($p_\varphi(0) = -2$ and $p_\theta(0) \geq 0$) of the conjugate locus with respect to the parameter $k \in [1, k_3]$. (top) $k = 1.0$, 1.05. (left) $k = 1.1$, 1.2. (right) $k = 1.3$, 1.4.

monotonous non-decreasing on $[0, t_1]$.

The three others trajectories do not have a monotonous θ-variable on $[0, t_1]$. We denote $\bar{t}$ the first time when the trajectory leaves the domain $0 \leq \theta \leq \pi$.

- The second type (top right) existing for $k_1 \leq k \leq k_3$ has no self-intersection on $[0, \bar{t}]$ and is such that $\theta(\bar{t}) = 0$.

The last types of extremals have a self-intersection in the state-space in $[0, \bar{t}]$.

- The third kind of trajectories (bottom left) is such that $\theta(\bar{t}) = 0$ and occurs for $\overline{k} \leq k \leq k_3$.
- The last one (bottom right) exists only for $k_2 \leq k \leq k_3$ and has $\theta(\bar{t}) = \pi$.

• $\mathbf{k \leq 1}$. The deformation of the conjugate locus in the case $k < 1$ is easier to analyze. We give on Fig. A.10 the conjugate locus for $k \in \{0.8, 0.5, 0.2, 0.1\}$ with 15 chosen trajectories. The key point is the non-monotony of the θ-variable for $k < 1$.

The deformation of the conjugate locus on the sphere is given Fig. A.11. Only the half : $p_\varphi(0) = -2$, $p_\theta(0) \in \mathbf{R}$ is plotted to clarify the figures. The deformation is clear : the cusp moves along the meridian with respect to the parameter k. It does not cross the equator for $k < 1$ while for $k > 1$ it first crosses the North pole ($k = k_1$), then the equator ($k = \overline{k}$). For $k \geq \overline{k}$, the conjugate locus has self-intersections. Then, it crosses poles again for $k = k_2$ and k_3. This is repeated for greater values of k making the loops smaller and

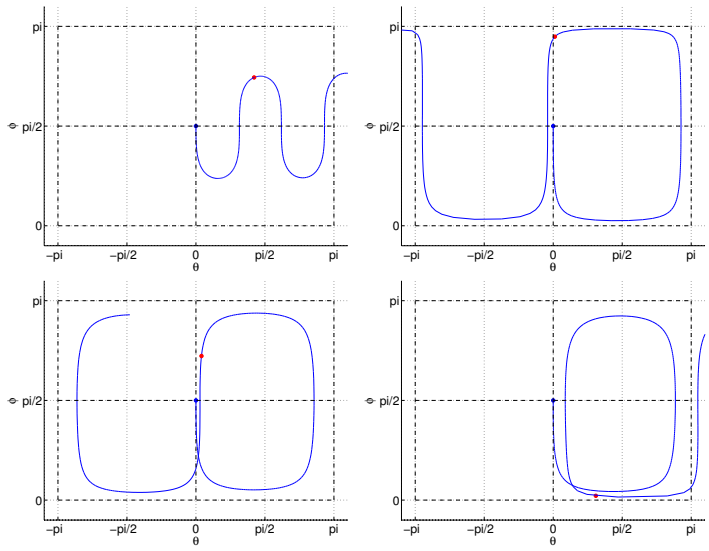

FIGURE A.9 – The four types of trajectories which clarify the evolution of the conjugate locus.

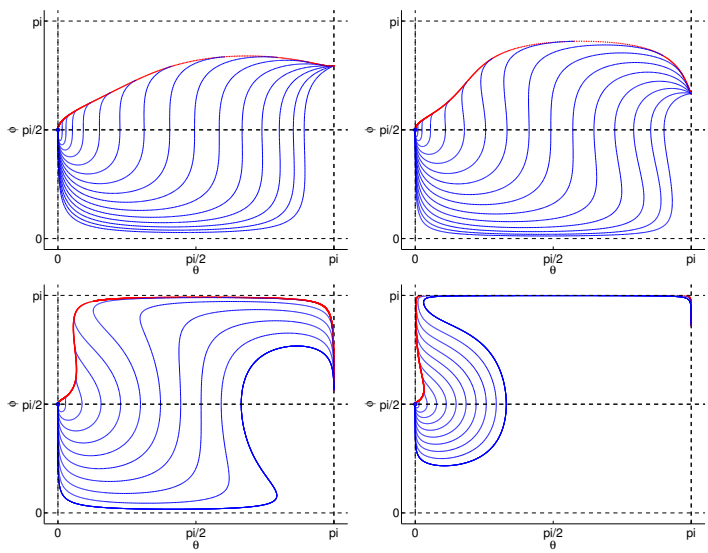

FIGURE A.10 – Conjugate locus with 15 trajectories for $k = 0.8, 0.5, 0.2, 0.1$ from top left-hand to bottom right-hand.

smaller.

We give a preliminary experimental result about the cut loci to conclude these numerical computations. We denote $p_\theta(0) > 0 \mapsto \Delta\theta_k(p_\theta) \in (0, \pi)$ the variation of θ at the first return to the equator (or first return mapping) as in §A.2.1. The previous numerical simulations show that $\Delta\theta_k$ is well defined for $k \in [0, k_3]$. The figure A.12 indicates that for any k, the first return mapping is monotonous non-increasing and surjective. As a consequence, for a fixed k and

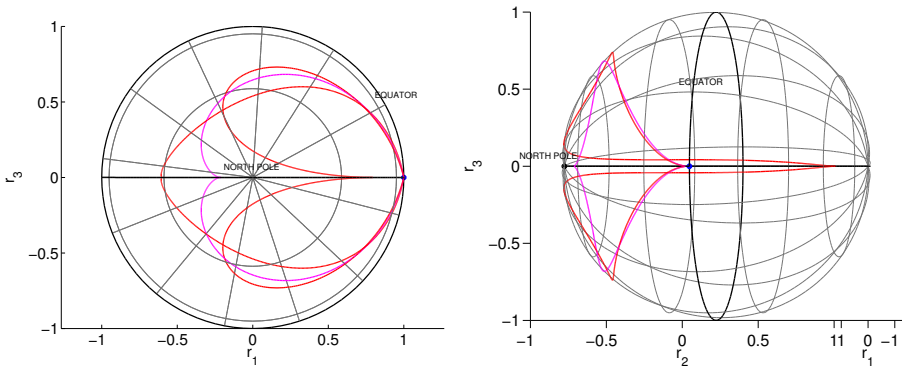

Figure A.11 – Half of the conjugate locus on the sphere. (left) For $k = 1.0$ in magenta and $k = 0.8$, 1.15 in red. (right) For $k = 1.0$ in magenta and $k = 1.18$ in red.

starting from $\varphi(0) = \pi/2$, $\theta(0) = 0$, if there is no intersection between trajectories before the first return to the equator, then the cut locus is the equator minus the initial point. The figure A.10 shows that there is no intersection before the first return to the equator for $k < 1$. Similar computations for $k \in [1, k_3]$ lead to the same conclusion.

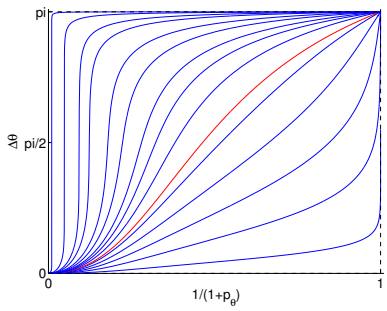

Figure A.12 – First return mapping for different values of the parameter $k \in [0.1, 50]$. In red is plotted the curve for $k = 1$.

Méthodes d'intégrabilité dans le transfert de cohérence en temps minimal pour un chaîne de trois spins de type Ising

Cet article étudie l'intégrabilité d'une famille de métriques pseudo-riemanniennes issue du problème en temps minimal du transfert de cohérence le long d'une chaîne de trois spins avec un couplage de type Ising. Trois approches sont ainsi developpées : le relèvement du problème en un problème sous-riemannien sur $SO(3)$, l'étude directe de la métrique sous forme de Liouville et une approche algébrique qui utilise la théorie de Galois différentielle.

Le problème sous-riemannien sur $SO(3)$ obtenu est vu comme un cas dégénéré du problème bien connu du corps solide d'Euler-Poinsot. Le problème est ainsi intégrable par quadratures et on présente les calculs dans le cas sous-riemannien.

L'intégration directe utilise comme dans le chapitre 2 (mais avec un paramètre k différent) la technique du théorème 1.7 pour trouver la forme normale de Liouville de la métrique à partir d'une deuxième intégrale première quadratique en p et traite le cas particulier de Grushin qui apparaît pour $k = 1$.

La méthode algébrique se base sur les contrôles intégrés par des fonctions elliptiques dans le problème sous-riemannien. Le groupe de Galois des équations du mouvement est dans le cas général isomorphe à $\mathbb{C}^*$ et on le décrit plus précisément dans les cas de valeurs particulières des paramètres.

Annexe B

Integrability Methods In The Time Minimal Coherence Transfer For Ising Chains Of Three Spins.

Bernard Bonnard

Institut de mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

Thierry Combot and Lionel Jassionnesse

Institut de mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

Résumé

Abstract

The objective of this article is to analyze the integrability properties of extremals solutions of Pontryagin Maximum Principle in the time minimal control of a linear spin system with Ising coupling in relation with conjugate and cut loci computations. Restricting to the case of three spins, the problem is equivalent to analyze a family of almost-Riemannian metrics on the sphere S^2, with Grushin equatorial singularity. The problem can be lifted into a SR-invariant problem on $SO(3)$, this leads to a complete understanding of the geometry of the problem and to an explicit parametrization of the extremals using an appropriate chart as well as elliptic functions. This approach is compared with the direct analysis of the Liouville metrics on the sphere where the parametrization of the extremals is obtained by computing a Liouville normal form. Finally, an algebraic approach is presented in the framework of the application of differential Galois theory to integrability.

B.1 Introduction

Over the past decade, the application of geometric optimal control techniques to the dynamics of spin systems with applications to Nuclear Magnetic Resonance (NMR) spectroscopy and quantum information processing [25] has been an intense research direction. In particular, a series of articles focus on the time optimal control of a linear chain of spins with Ising couplings [21, 36]. Using Hamiltonian Formalism and an adapted rotating frame, the control system is defined by $H = H_d + H_c$, where H_d is the internal Hamiltonian, $H_d = \sum_{i,j} J_{ij} I_{iz} I_{jz}$, with J_{ij} representing the coupling between the spins, $I_{k\alpha} = 1 \otimes ... \otimes I_\alpha \otimes ... \otimes 1$, I_α, $\alpha \in x, y, z$ being the Pauli matrix and the system is controlled by external radio-frequency pulse on resonance to each spin defining $H_c = \sum_i (u_{i1} I_{ix} + u_{i2} I_{iy})$.

Restricting to the case of three spins, the objective of this article is to provide the preliminary work to compute the optimal solutions parametrized by Pontryagin Maximum Principle. We here focus on the integrability aspects of the problem by using three different approaches.

A first point of view which already appears in the pioneering work [21], see also [11] in a different context, consists in lifting the problem on a sub-Riemannian invariant (SR-invariant) problem on $SO(3)$ that depends on a parameter k representing the ratio of the coupling constants J_{12}, J_{23} between the spins. Such metrics is a limit case of invariant Riemannian metrics on $SO(3)$, the so-called Euler-Poinsot rigid body problem in mechanics. Using the seminal work in [20], we define a chart that identifies locally $SO(3)$ to $S^2 \times S^1$ which enlightens the geometry of the problem and leads to an explicit computation of the extremals using elliptic functions.

Another approach consists in integrating the system directly on S^2. In this context the problem is equivalent to analyze a family of $2D-$ Liouville metrics on S^2 with an equatorial singularity. The integrability properties is equivalent to the calculation of the Liouville normal form [6, 7] using the additional first integral. In our case it corresponds to the Hamiltonian of the round metrics on S^2, induced by the Casimir function on $SO(3)$. This point of view is very important to analyze the optimality properties related to the conjugate and cut loci of the metrics, indeed it is related to similar calculations on Liouville surfaces that generalizes the case of ellipsoids [18, 19].

Finally, the third approach consists in using our problem as a bed-test platform to apply the algebraic framework of Galois differential theory in integrability [27] to compute the solutions. First, the optimal control is calculated using the Jacobi elliptic functions and inserted in the equations. This reduces the computations to the integration of a time-depending linear equation whose coefficients are expressed in terms of the Jacobi elliptic functions. The Picard Vessiot extension and the associated Galois group are computed to parametrize the extremal solutions.

Different computations we done independently but the parametrization are compared in the conclusion. Also we briefly discuss the application to the computations of the conjugate and cut loci, following the method in Annexe 1 combining geometric analysis on Liouville surfaces and numerical computations.

B.2 The mathematical model

In this paper, we detail the presentation of the problem in the case of three spins, but the problem can be easily generalized to a chain of n spins. We follow the presentation of [21, 35, 36].

We introduce the spin 1/2 matrices I_α related to the Pauli matrices by a 1/2 factor. Such matrices satisfy :

$$[I_x, I_y] = \mathrm{i}I_z, \quad I_x^2 = I_y^2 = I_z^2 = 1/4.$$

The Hilbert space L of the system is the space formed by the tensor product of the three two-dimensional spin 1/2 Hilbert space. Assuming a single input system, the Hamiltonian of the system decomposes into :

$$H = H_d + H_c$$

where

$$H_d = 2(J_{12}I_{1z}I_{2z} + J_{23}I_{2z}I_{3z}), \qquad H_c = u(t)I_{2y}.$$

We consider the time evolution of the vector $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ where $x_1 = \langle I_{1x}\rangle$, $x_2 = \langle 2I_{1y2z}\rangle$, $x_3 = \langle 2I_{1y2x}\rangle$, $x_4 = \langle 4I_{1y2y3z}\rangle$ with $\langle\ \rangle$ denoting the *expectation value*. To compute the dynamics, we introduce a 8×8 matrix $\rho \in L$, called the *density matrix*, which satisfies :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = -\mathrm{i}[H, \rho].$$

Using the definition of the expectation value of a given operator : $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}(O\rho)$, one gets :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle I_{1x}\rangle = \mathrm{Tr}(I_{1x}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}) = -\mathrm{i}\mathrm{Tr}(I_{1x}[H,\rho]) = -\mathrm{i}\mathrm{Tr}([I_{1x}, H]\rho).$$

Hence, we deduce that :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 = -J_{12}\mathrm{Tr}(2I_{1y}I_{2z}\rho).$$

By rescaling the time by a factor J_{12}, it becomes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 = -x_2$$

Similar computations lead to the evolution of X given by :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -u & 0 \\ 0 & u & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} X, \quad \text{where } k = \frac{J_{23}}{J_{12}}.$$

The optimal control problem is to transfer in minimum time $(1,0,0,0)^\top$ to $(0,0,0,1)^\top$. It is an intermediate step to realize the transfer in minimum time from I_{1x} to I_{3x}. Indeed, it connects the first spin to the third one by controlling the second spin.

Introducing the following coordinates :

$$r_1 = x_1 \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \quad r_3 = x_4$$

and denoting

$$\tan\alpha = x_3/x_2,$$

the system becomes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

where $r = (r_1, r_2, r_3) \in S^2$ and $u_1 = -k\sin(\alpha)$, $u_3 = -\cos(\alpha)$ are the components of the control.

In those coordinates, the minimum time problem is equivalent to determine the fastest transfer on the sphere from $(1,0,0)$ to $(0,0,1)$.

It can be written as an L^2-minimization problem as follows :

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = u_3 r_2, \quad \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = -u_3 r_1 + u_1 r_3, \quad \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} = -u_1 r_2,$$
$$\min_{u(.)} \int_0^T (I_1 u_1^2(t) + I_3 u_3^2(t))\mathrm{d}t, \qquad k^2 = \frac{I_1}{I_3}.$$

The problem is equivalent to an *almost-Riemannian* problem on the sphere S^2 with a singularity at the equator $r_2 = 0$, for the corresponding metric :

$$g = \frac{\mathrm{d}r_1^2 + k^2 \mathrm{d}r_3^2}{r_2^2}$$

(See [1] for more details about such metrics.)

Introducing the spherical coordinates $r_2 = \cos\varphi$, $r_1 = \sin\varphi\cos\theta$, $r_3 = \sin\varphi\sin\theta$, where $\varphi = \pi/2$ corresponds to the equator, the metric g take the form

$$\begin{aligned} g = &\tan^2\varphi(k^2\cos^2\theta + \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 + (\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\varphi^2 \\ &+ 2(k^2-1)\tan\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

with the associated Hamiltonian

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{4k^2}\Big(&\mathrm{cotan}^2\varphi(\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)p_\theta^2 + (k^2\cos^2\theta + \sin^2\theta)p_\varphi^2 \\ &- 2(k^2-1)\mathrm{cotan}\varphi\sin\theta\cos\theta p_\theta p_\varphi\Big). \end{aligned}$$

If $k = 1$, the Hamiltonian takes the form $H = \frac{1}{2}\big(p_\varphi^2 + p_\theta^2\mathrm{cotan}^2\varphi\big)$ and describes the *standard Grushin metric on* S^2.

B.3 Connection with invariant metrics on $SO(3)$ and integration

B.3.1 Lifting procedure

A first approach to analyze the optimal control problem and parametrize the extremals consists in lifting the problem onto $SO(3)$. We introduce the matrix $R(t) = (r_{ij}(t))$ on $SO(3)$ where the third row is identified to the unit vector $r(t)$ defined previously : $r_{31} = r_1$, $r_{32} = r_2$, $r_{33} = r_3$, and we consider the right-invariant control system :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^\top(t) = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} R^\top(t)$$

where the last column of $R^\top$ describes the evolution of the vector r. Our optimal control problem can then be stated as :

$$\min_{u(.)} \int_0^T (I_1 u_1^2(t) + I_3 u_3^2(t))\mathrm{d}t$$

for the right-invariant control system with the following boundary conditions :

$$R^\top(0) = \begin{bmatrix} & 1 \\ * & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad R^\top(T) = \begin{bmatrix} & 0 \\ * & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

which consist in steering the third axis of the frame $R^\top$ from e_1 to e_3, where (e_i) is the canonical basis of $\mathbb{R}^3$.

Similarly, it can be transformed into a left-invariant control problem to use the geometric framework and the computations in [20] :

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = R \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & u_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \min_{u(.)} \int_0^T (I_1 u_1^2(t) + I_3 u_3^2(t))\mathrm{d}t$$

with the corresponding boundary conditions.

This defines a left-invariant SR-problem on $SO(3)$ depending upon the parameter $k^2 = I_1/I_3$. Upon an appropriate limit process $I_2 \to +\infty$, this is related to the Euler-Poinsot rigid body motion [3] :

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = R \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \min_{u(.)} \int_0^T (I_1 u_1^2(t) + I_2 u_2^2(t) + I_3 u_3^2(t))\mathrm{d}t$$

which is well-known model for left-invariant metrics on $SO(3)$, depending on two parameters e.g. the ratios I_2/I_1, I_3/I_1. Two special cases are :

- The bi-invariant case $I_1 = I_2 = I_3$ where the geodesics are the rotations of $SO(3)$.
- The case of revolution where $I_1 = I_3$.

B.3.2 Extremal equations and Integration

The optimal solutions to our problem can be parametrized by the Pontryagin Maximum Principle [30], and thanks to the explicit formula given in [20], the solutions can be computed in both the Riemannian and the sub-Riemannian cases using elliptic functions.

We introduce :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

that satisfy the Lie brackets relations :

$$[A_1, A_2] = -A_3, \quad [A_1, A_3] = A_2, \quad [A_2, A_3] = -A_1.$$

Consider now the following optimal control problem on $SO(3)$:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{A}_i(R), \quad \min_{u(.)} \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{3} I_i u_i^2(t) \mathrm{d}t$$

where the I_i's are the principal momenta of inertia of the body. The extremal equation will be derived using appropriate coordinates. Let λ be an element of $T_R^* SO(3)$ and denote $H_i = \lambda(\vec{A}_i(R))$, $i = 1, 2, 3$ the symplectic lift on the vector fields $\vec{A}_i$. The pseudo-Hamiltonian associated to the problem takes the form :

$$H = \sum_{i=1}^{3} u_i H_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} I_i u_i^2.$$

The extremal control is computed using the relation $\dfrac{\partial H}{\partial u_i} = 0$, and we obtain

$$u_i = \frac{H_i}{I_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Plugging this expression for the u_i into H, we get the Hamiltonian :

$$H_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{H_1^2}{I_1} + \frac{H_2^2}{I_2} + \frac{H_3^2}{I_3}\Big)$$

The SR-case is obtained by setting $u_2 = 0$ which corresponds to take $I_2 \to +\infty$, and leads to the Hamiltonian :

$$H_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{H_1^2}{I_1} + \frac{H_3^2}{I_3}\Big).$$

The evolution of the vector $H = (H_1, H_2, H_3)$ is given by the Euler equation :

$$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}H_i(\vec{H}_n) = \{H_i, H_n\}$$

where $\{,\}$ denotes the Poisson bracket. Using the relation between Poisson and Lie brackets : $\{H_i, H_j\} = \lambda([A_i, A_j])$, we obtain the *Euler-equation* :

- Riemannian case

$$\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} = H_2H_3(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}), \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t} = H_1H_3(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}), \frac{\mathrm{d}H_3}{\mathrm{d}t} = H_1H_2(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}). \tag{B.2}$$

- SR-case ($I_2 \to +\infty$)

$$\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} = \frac{H_2H_3}{I_3}, \quad \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t} = H_1H_3(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}), \quad \frac{\mathrm{d}H_3}{\mathrm{d}t} = -\frac{H_1H_2}{I_1}. \tag{B.3}$$

The extremals equations are a classical example of (super) integrable system which is a consequence of the following proposition [20].

Proposition B.1. *For each invariant Hamiltonian H_n on $SO(3)$, the extremal system is integrable by quadratures using the four first-integrals : the Hamiltonian H_n and the Hamiltonian lifts of the right-invariant vector fields A_iR.*

To provide details on the quadratures we introduce the following.

Distinguished chart

Each element $R \in SO(3)$ is represented on a chart U by the following element (r, Φ_1) of $S^2 \times S^1$ where :
- r is the third row of the matrix R,
- Φ_1, Φ_2, Φ_3 are the Euler-angles computed with the convention :

$$R = \exp(\Phi_1 A_3) \circ \exp(\Phi_2 A_2) \circ \exp(\Phi_3 A_3). \tag{B.4}$$

Useful formulas

We recall the following :

Hamiltonian using Euler-angles. Expressed in terms of the Euler angles the Hamiltonian for the Euler Poinsot rigid body motion takes the form :

$$\begin{aligned} H_n =& \frac{1}{2I_1}\Big(p_2 \sin\Phi_3 - \frac{\cos\Phi_3}{\sin\Phi_2}(p_1 - p_3\cos\Phi_2)\Big)^2 + \frac{1}{2I_3}p_3^2 \\ &+ \frac{1}{2I_2}\Big(p_2\cos\Phi_3 + \frac{\sin\Phi_3}{\sin\Phi_2}(p_1 - p_3\cos\Phi_2)\Big)^2 \end{aligned}$$

where p_i is the canonical impulse associated to Φ_i, $i = 1, 2, 3$. Observe that Φ_1 is a cyclic variable. As previously, the SR-case is obtained by taking $I_2 \to +\infty$.

In both cases we have the following crucial proposition [20].

Proposition B.2.

- *The angles Φ_2 and Φ_3 can be obtained from the relations :*

$$H_1 = -|H|\sin\Phi_2\cos\Phi_3, \quad H_2 = |H|\sin\Phi_2\sin\Phi_3, \quad H_3 = |H|\cos\Phi_2$$

- *We have, with $r = (r_1, r_2, r_3) \in S^2$ (third row of R) :*

$$r_1 = -\sin\Phi_2\cos\Phi_3 = \frac{H_1}{|H|}, \quad r_2 = \sin\Phi_2\sin\Phi_3 = \frac{H_2}{|H|}, \quad r_3 = \cos\Phi_2 = \frac{H_3}{|H|}$$

While the Euler equation can be integrated using H_n and the Casimir function $G^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$, the angle Φ_1 can be computed by quadrature using [20].

Proposition B.3. *In the invariant case, Φ_1 is solution of the equation*

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = |H| \frac{H_1 \frac{\partial H_n}{\partial H_1} + H_2 \frac{\partial H_n}{\partial H_2}}{H_1^2 + H_2^2}$$

This leads to an uniform integration procedure in the invariant case using elliptic functions that we detail in the SR-case.

Integration of the Euler equation in the SR-case

We fix the level set for the Hamiltonian $H_n = \frac{1}{2}\left(\frac{H_1^2}{I_1} + \frac{H_3^2}{I_3}\right) = \frac{1}{2}$, and we introduce the angle β as follows :

$$\cos\beta = \frac{H_1}{\sqrt{I_1}}, \quad \sin\beta = \frac{H_3}{\sqrt{I_3}}.$$

Using the Euler equation, we deduce that β is solution of the pendulum equation :

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{2}\sin 2\beta\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3}\right).$$

We introduce $\nu = 2\beta$, and we obtain the equation :

$$\dot{\nu}^2 + 2\frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3}\cos\nu = C$$

We can assume $I_3 > I_1$ and $I_3 = 1$ and use [24]. We define

$$\omega^2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} > 0,$$

and according to the constant C we have two types of generic solutions.

- **Oscillating solutions**

$$\sin\beta = m\,\mathrm{sn}(\omega t, m)$$
$$\cos\beta = \mathrm{dn}(\omega t, m)$$

  where m is the modulus defined by C and we denote $4K(m)$ the period of sn,

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\Phi}}$$

  and the control is given by :

$$u_1 = \frac{H_1}{I_1}, \quad u_3 = \frac{H_3}{I_3}$$

- **Rotating solutions** we have :

$$\sin\beta = \mathrm{sn}(\omega t/m, m)$$
$$\cos\beta = \mathrm{cn}(\omega t/m, m)$$

We can deduce the following proposition.

Proposition B.4. *Setting* $\omega^2 = \frac{1}{k^2} - 1$, *the components of the control are given by :*

- *In the oscillating case :*

$$u_1 = \frac{1}{k}\,\mathrm{dn}(\omega t, m), \quad u_3 = m\,\mathrm{sn}(\omega t, m)$$

- *In the rotating case :*

$$u_1 = k\,\mathrm{cn}(\omega t/m, m), \quad u_3 = \mathrm{sn}(\omega t/m, m)$$

To compute Φ_1, we need the elliptic integral of the third kind

$$\Pi(u, a, k) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{(1 - at^2)\sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - k^2 t^2}}$$

See [24] for the result in the Riemannian case and [9] in the SR-case.

B.4 Direct integration on S^2 using Liouville theory

B.4.1 2D-Riemannian metrics whose geodesics flows are integrable by mean of linear and quadratic integrals in momenta

We first recall some results from [6, 7].

Linear Case

Let g be a real analytic Riemannian metric $g(x, y) = a(x, y)\mathrm{d}x^2 + c(x, y)\mathrm{d}y^2 + 2b(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ on a surface M and assume that the extremal flow possesses a non zero linear (in momenta) integral F. Then, there exists local coordinates u and v in which the metric has the polar form $\mathrm{d}u^2 + m(u)\mathrm{d}v^2$ and p_v is a first integral (Clairaut relation). This case is called *the case of revolution.*

Liouville case

If the metric g admits an additional first integral F quadratic in momenta, the surface M is called a *Liouville surface.* This case is more intricate, and we present in details the algorithm to compute a normal form to integrate the extremal flow. First, we introduce *isothermal coordinates* (x, y) such that the metric takes the form :

$$g = \lambda(x, y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

If we denote p_x, p_y the adjoint variables, the first integral is given by :

$$F = b_1(x, y)p_x^2 + 2b_2(x, y)p_x p_y + b_3(x, y)p_y^2,$$

where the functions $b_i(x, y)$ are analytic. Let us now consider the function

$$R(z) = b_1 - b_3 + 2ib_2, \qquad z = x + iy.$$

According to [6] this mapping R is holomorphic.

Every diffeomorphism $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ which preserves the isothermal form and the orientation satisfies the Cauchy-Riemann relations :

$$\varphi_u = \psi_v, \qquad \varphi_v = -\psi_u$$

and the mapping

$$\phi : w = u + \mathrm{i}u \to z = x + \mathrm{i}y$$

is holomorphic. We denote $D = (\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v)^{-1} = (\varphi_u^2 + \psi_u^2)^{-1}$, and we have :

$$p_x = D(p_u\psi_v - p_v\psi_u), \qquad p_y = D(-p_u\varphi_v + p_v\varphi_u)^{-1}.$$

Expressing F using the (u,v) coordinates, we obtain :

$$F(u,v) = p_u^2 b_1'^2(u,v) + 2p_u p_v b_2'(u,v) + p_v^2 b_3'(u,v).$$

An easy computation provides :

$$S = (b_1' - b_3' + 2\mathrm{i}b_2') = D^2(\varphi_u - \mathrm{i}\psi_u)^2(b_1 - b_3 + 2\mathrm{i}b_2) = (\varphi_u + \mathrm{i}\psi_u)^{-2}(b_1 - b_3 + 2\mathrm{i}b_2),$$

where $\phi' = (\varphi_u + \mathrm{i}\psi_u)$. We choose the change of coordinates such that $S = 1$. Hence, we must solve the equation

$$\varphi_u + \mathrm{i}\psi_u = \sqrt{R(z)}. \tag{B.5}$$

In the new coordinates, the metric takes the the *Liouville normal form*

$$g(u,v) = (f(u) + g(v))(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

To integrate, we use [7], Theorem 6.5.

Theorem B.1.

- *The equations of the extremals for the Liouville metric can be written as :*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm\frac{\sqrt{f(u)+a}}{\sqrt{g(v)-a}}.$$

- *The extremals themselves are defined by the relation :*

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{f(u)+a}} \pm \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g(v)-a}} = c.$$

B.4.2 Computations of the Liouville normal form

The Hamiltonian can be written as :

$$H = H_0 + k^* H'^2, \qquad k^* = k^2 - 1,$$

where H_0 is the Hamiltonian of the Grushin case ($k = 1$) :

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_\varphi^2 + p_\theta^2 \mathrm{cotan}^2\varphi)$$

and

$$H' = p_\varphi \cos\theta - p_\theta \mathrm{cotan}\varphi \sin\theta.$$

We can interpret S^2 as the homogeneous space $SO(3)/SO(2)$ where $SO(2)$ is the Lie subgroup leaving e_3 invariant. In this interpretation, the Casimir function $|G|^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ corresponds to the bi-invariant case. On the homogeneous space, this defines the round sphere with constant curvature $+1$ whose metric in spherical coordinates takes the form :

$$g = \mathrm{d}\varphi^2 + \sin^2\varphi \mathrm{d}\theta^2$$

and corresponds to the Hamiltonian :

$$F = p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{\sin^2\varphi}.$$

A direct computation provides the following proposition.

Proposition B.5. *We have :*

$$\{H_0, F\} = \{H', F\} = 0$$

which implies that $\{H, F\} = 0$ *for each* k^*.

Integration in the Grushin case

This situation corresponds to a case of revolution and the integration is standard. The metric is already in the polar form and in our problem it is interesting to interpret the Grushin case as a deformation of the round case using the following homotopy :

$$g_\lambda = \mathrm{d}\varphi^2 + m_\lambda(\varphi)\mathrm{d}\theta^2,$$

where $m_\lambda(\varphi) = \sin^2\varphi/(1 - \lambda\sin^2\varphi)$, $\lambda \in [0, 1]$. Indeed, it allows us to use the geometric framework developed in [8].

Except for the meridian solutions, the $\varphi-$variable is T-periodic and denoting $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, the evolution of ψ is given by :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\cos^2\psi - p_\theta^2(1 - \lambda\cos^2\psi)}{\cos^2\psi}.$$

We denote $X = \sin\psi$ and X_+ and X_- the positive and negative roots of :

$$1 + p_\theta^2(\lambda - 1) = X^2(1 + \lambda p_\theta^2).$$

Introducing Y as $X = X_+ Y$, we have the following proposition.

Proposition B.6.

1. *The period is given by :*

$$T(p_\theta) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \lambda p_\theta^2}}.$$

2. *The ψ-variable in the normalized coordinates is given by :*

$$\arcsin Y(t) = (1+\lambda p_\theta^2)^{1/2} t.$$

The θ-variable is integrated using :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = p_\theta \frac{1-\lambda(1-\sin^2\psi)}{1-\sin^2\psi}$$

and we get

$$\theta(t) = \frac{p_\theta}{\sqrt{1+\lambda p_\theta^2}\sqrt{1-X_+^2}} \arctan\left(\sqrt{1-X_+^2}\tan\left(t\sqrt{1+\lambda p_\theta^2}\right)\right) - \lambda p_\theta t.$$

Integration $k \neq 1$

The metric is

$$g = \lambda(x,y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2),$$

where $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{r_2^2} = \dfrac{1}{1-x^2-y^2/k^2}$ and the dual variables are related by $p_\varphi = \cos\varphi(p_x\cos\theta + kp_y\sin\theta)$, $p_\theta = \sin\varphi(-p_x\sin\theta + kp_y\cos\theta)$.

Moreover :

$$\cos\varphi = \sqrt{1-x^2-y^2/k^2} \qquad \sin\varphi = \sqrt{x^2+y^2/k^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2/k^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2/k^2}}$$

Hence in the isothermal coordinates (x,y) :

$$F = (1-x^2)p_x^2 - 2xyp_xp_y + (k^2-y^2)p_y^2$$

and using the notation of section 4.1.2, one has :

$$R(z) = 1-k^2-z^2$$

The solution of (B.5) is

$$w = \Phi(z) = \arctan\frac{z}{\sqrt{1-k^2-z^2}} + C$$

Hence

$$\tan w = \frac{z}{\sqrt{1-k^2-z^2}} \Rightarrow z^2 = (1-k^2)\sin^2 w.$$

Case k<1 We take

$$z = \sqrt{1-k^2}\sin\omega \quad x = \sqrt{1-k^2}\sin u\cosh v \quad y = \sqrt{1-k^2}\cos u\sinh v.$$

The dual variables are given by :

$$p_x = \frac{p_u\cos u\cosh v + p_v\sin u\sinh v}{\sqrt{1-k^2}(\cos^2 u + \sinh^2 v)},\ p_y = \frac{p_v\cos u\cosh v - p_u\sin u\sinh v}{\sqrt{1-k^2}(\cos^2 u + \sinh^2 v)}$$

Hence we have

$$F = (c+1)p_u^2 + cp_v^2 \quad c = \frac{(k^2-1)\sinh^2 v + k^2}{(1-k^2)(\cos^2 u\sinh^2 v)}$$

Therefore we have the following proposition :

Proposition B.7. *In the case $k < 1$, the Liouville form is given by :*

$$f(u) = \frac{2k^2}{-1 - k^2 + (k^2 - 1)\cos 2u} \quad g(v) = \frac{2k^2}{1 + k^2 + (k^2 - 1)\cosh 2v}$$

Case k>1 Similarly using $z = \mathrm{i}\sqrt{k^2 - 1}\sin w$, we get :

$$f(u) = -\frac{2k^2}{1 + k^2 + (k^2 - 1)\cos 2u} \quad g(v) = -\frac{2k^2}{-1 - k^2 + (k^2 - 1)\cosh 2v}$$

In both cases, the integration of the geodesics using Theorem B.1 gives us elliptic integrals.

B.5 Algebraic techniques

In this section we present the techniques to integrate the equations using differential Galois techniques, see [4, 27] for an introduction.

B.5.1 Step 1 : Computation of the control

To illustrate the techniques it is sufficient to consider one case. Hence for simplicity we assume the following normalizations : $I_3 = 1$ and $I_1 > I_3$.

The components of the control are given in proposition B.4.

B.5.2 Step 2 : Computation of the position

One must integrate the time depending linear equation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

There are two possible controls

$$u_3 = m\,\mathrm{sn}(\omega t, m), \qquad u_1 = k^{-1}\mathrm{dn}(\omega t, m), \tag{B.7}$$

$$u_3 = \mathrm{sn}(\omega t/m, m), \qquad u_1 = k^{-1}\mathrm{cn}(\omega t/m, m), \tag{B.8}$$

We first begin with the controls (B.7). This is a system of differential equations, and its coefficients belong to the function field $K = \mathbb{C}(\mathrm{sn}(\omega t, m), \mathrm{cn}(\omega t, m), \mathrm{dn}(\omega t, m))$. This field is a differential field, i.e. for any $f \in K$, $\partial_t f \in K$. Let us consider the resolvent matrix of equation (B.6), and the differential field extension $L = K(a_{1,1}, \ldots, a_{3,3})$ generated by the entries of the resolvent matrix.

Definition B.1. *See ([34],1.42) We call L the Picard-Vessiot field of equation* (B.6)*. We say that equation* (B.6) *is solvable if there exist a tower of field extensions $K_0 = K \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$ such that for all $i = 0 \ldots n - 1$*

- *$K_{i+1} = K_i(a)$ where a is algebraic over K_i.*
- *$K_{i+1} = K_i(a)$ where $\partial_t a \in K_i$.*
- *$K_{i+1} = K_i(a)$ where $\frac{\partial_t a}{a} \in K_i$.*

The Galois group of equation (B.6) *is the group of differential automorphisms of L stabilizing K, i.e. automorphisms σ of L such that $\partial_t\sigma = \sigma\partial_t$ and $\sigma_{|_K} = \mathrm{id}$, see ([34],1.25,1.26,1.27) for details.*

Proposition B.8. *The Galois group G of equation* (B.6) *is isomorphic to a Lie subgroup of $GL_3(\mathbb{C})$. The equation* (B.6) *is solvable if and only if G is virtually solvable, i.e. its identity component is solvable.*

Until now, all these concepts are theoretical. But we can classify all Lie subgroup of $GL_3(\mathbb{C})$ and make some test to know if the Galois group is a virtually solvable one, this has been done in all generality for third order operators in [33]. The first thing to notice is that equation (B.6) conserves the Euclidean norm. Indeed, $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ is constant because the matrix associated to the differential system (B.6) is in $so(3)$. So the Galois group G is in fact a subgroup of the (complex) group $SO_3(\mathbb{C})$.

The Lie subgroups of $SO_3(\mathbb{C})$ are well known. All strict subgroups of $SO_3(\mathbb{C})$ are finite or stabilize one axis. So the Galois group is either finite, either a finite extension of $SO_2(\mathbb{C})$, or $SO_3(\mathbb{C})$. All these groups are virtually solvable, except the last one $SO_3(\mathbb{C})$ which is simple. So, if we want to try to solve this equation, the first thing to do is to know if G stabilize one axis.

Theorem B.2. *If $m \notin \{-1,0,1\}$, $k \notin \{-1,1\}$, $m^2k^2-k^2-m^2 \neq 0$ then the Galois group of equation* (B.6) *with controls* (B.7) *is isomorphic to $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. We begin by a variable change $z = sn(wt,m)$. The system now becomes

$$w\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-m^2z^2}r' = \begin{bmatrix} 0 & mz & 0 \\ -mz & 0 & k^{-1}\sqrt{1-m^2z^2} \\ 0 & -k^{-1}\sqrt{1-m^2z^2} & 0 \end{bmatrix} r$$

The coefficients are now in $K_0 = \mathbb{C}(\sqrt{1-z^2},\sqrt{1-m^2z^2})$, which is an algebraic field and so will be easier to manipulate. We denote abusively again L the Picard Vessiot field of this system. We now use the cyclic vector method to build a third order differential equation for which r_1 is solution : for any $i \in \mathbb{N}$, $\partial_t^i r_1$ is a linear form in r_1, r_2, r_3. Thus these linear forms for $i = 0\dots3$ are not independent. So there exist a linear combination of $\partial_t^i r_1$, $i = 0\dots3$ equal to zero. The relation between these linear forms gives a differential equation for $r_1(z)$ (taking into account the relation between parameters $w^2 = 1/k^2-1$)

$$\begin{aligned} &z^2(k^2-1)(m^2z^2-1)(m^2z^4-m^2z^2-z^2+1)r_1'''+ \\ &z(3m^4z^6-4m^2z^4-2m^2z^2+z^2+2)(k^2-1)r_1''+ \\ &(-k^2m^2z^4+3k^2m^2z^2-3m^2z^2-2k^2+z^2+2)r_1'+k^2m^2z^3r_1 = 0 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Let us remark the following

- We can express r_2, r_3 as linear combinations in K_0 of derivatives of r_1. Thus L is generated by the solutions of (B.9) and their derivatives. So L is also the Picard Vessiot field of equation (B.9).
- The equation (B.9) has now rational coefficients due to simplifications. The relation $w^2 = 1/k^2-1$ allowed to only use the parameters m, k.

Now the expsols routine of package DEtools of Maple find $r_1(z) = \sqrt{1-m^2z^2}$ as solution (which is dn before the variable change). So there is a solution in K_0, and this implies that the Galois group stabilize an axis (and is equal to id on this axis). So we already know that the Galois group is a subgroup of $O_2(\mathbb{C})$, and thus that our equation is solvable. We can now reduce the order of the equation, posing $r_1(z) = \sqrt{1-m^2z^2}\int f(z)dz$. We obtain a second order differential equation, on which we use the Kovacic algorithm [23] to obtain the solutions for r_1 :

$$\begin{aligned} r_1(z) = \sqrt{1-m^2z^2}\Big(c_1 + \\ c_2\int \frac{z}{m}\sqrt{\frac{k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2}{(1-m^2z^2)^3(1-z^2)}}e^{\int \frac{k\sqrt{k^2m^2-k^2-m^2}\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}{\sqrt{1-k^2}(z^2-1)(k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2)}\mathrm{d}z}\mathrm{d}z + \\ c_3\int \frac{z}{m}\sqrt{\frac{k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2}{(1-m^2z^2)^3(1-z^2)}}e^{-\int \frac{k\sqrt{k^2m^2-k^2-m^2}\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}{\sqrt{1-k^2}(z^2-1)(k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2)}\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\Big) \end{aligned} \tag{B.10}$$

This implies that the integral

$$\int \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}{(z^2-1)(k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2)}\mathrm{d}z$$

belongs to L. This is an integral over an element of K_0, and this integral is an elliptic integral, [24]. So it does not belong to K_0, and thus the Galois group G is of dimension at least 1. Now the only two remaining possibilities for G are $SO_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$ or $O_2(\mathbb{C})$. In the first case, the Galois group would be connected, and so no algebraic extensions would be necessary to express the solutions. This is indeed the case, as we can put the square root $\sqrt{k^2m^2+m^2z^2-k^2-m^2}$ inside the integral in the exponential. So expressing the solutions only uses an exponential integral of an element of K_0. So $G \simeq \mathbb{C}^*$.

□

Remark that the Galois group we computed is over the base field K_0. However, the third order differential equation for r_1 has rational coefficients. So it makes sense to compute the Galois group over $\mathbb{C}(z)$. Over $\mathbb{C}(z)$, $\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}$ is an extension of degree 2, and so the Galois group is $G \simeq D_\infty = O_2(\mathbb{C})$.

B.5.3 Step 3 Simplifications of the solution

This expression is Liouvillian (finitely many integrals, exponentials and algebraic extensions), but is not the optimal one. Indeed, the Galois group has dimension one. This suggests that only one integral symbol should be necessary to write the solution. So a simple expression with no iterated integrals exists. Let us find it. As the Galois group over $\mathbb{C}(z)$ is D_∞, there exists a basis of solutions of the form

$$R_1^t(z) = c_1\sqrt{1-m^2z^2} + c_2Fe^{\int\sqrt{G}\mathrm{d}z} + c_3Fe^{-\int\sqrt{G}\mathrm{d}z} \tag{B.11}$$

with $F'/F, G \in \mathbb{C}(z)$. We first compute the symmetric power 2 of equation (B.9), i.e. the linear differential equation whose solutions are the products of

two solutions of equation (B.9). We remark that this symmetric power should have F^2 in its space of solutions. We only have to compute the vector space of hyperexponential solutions to find "candidates" for F. The solutions are $\alpha+\beta z^2$. Thus F should be of the form $F=\sqrt{\alpha+\beta z^2}$.

We can now inject $Fe^{\int\sqrt{G}\mathrm{d}z}$ in equation (B.9). This produces a large non linear differential equation in $G(z)$. But $\sqrt{G(z)}$ also appears in the equation, and we can act the multivaluation of the square root $\sqrt{G(z)}\longrightarrow-\sqrt{G(z)}$. This gives us another equation, and after simplification, we manage to obtain a linear equation for G

$$\begin{aligned}&2(6\alpha m^2z^6-3\alpha m^2z^4+3\beta m^2z^4-4\alpha z^4+\alpha z^2-\beta z^2-2\beta)(m^2z^2-1)(k^2-1)G(z)\\&+3z(m^2z^2-1)^2(\alpha z^2+\beta)(z^2-1)(k^2-1)G'(z)+\\&2z^2(\alpha z^2+\beta)^{-2}(\beta m^2+\alpha)(3\alpha^2k^2m^2z^4+3\alpha\beta k^2m^2z^4-3\alpha^2m^2z^4-3\alpha\beta m^2z^4-\\&2\alpha^2k^2z^2+\alpha^2z^4-2\alpha\beta k^2z^2+2\alpha^2z^2+\alpha\beta k^2+4\alpha\beta z^2+\beta^2k^2-\alpha\beta)=0\end{aligned}\tag{B.12}$$

Solving this equation with dsolve, we obtain only one solution in $\mathbb{C}(z)$

$$G(z)=z^2\frac{(\alpha k^2+\alpha z^2+\beta k^2-\alpha)(\beta m^2+\alpha)}{(\alpha z^2+\beta)^2(m^2z^2-1)(k^2-1)(z^2-1)}$$

Injecting this in the original non linear equation gives

$$\frac{(m^2z^2-1)^2(\alpha z^2+\beta)^4(\alpha k^2+\beta k^2-\alpha)}{zm^2(\alpha k^2+\alpha z^2+\beta k^2-\alpha)^2)}=0$$

Thus $\alpha k^2+\beta k^2-\alpha=0$. Thus with $\alpha=k^2,\beta=1-k^2$ the equation is satisfied. So the solutions for r_1 are

$$\begin{aligned}r_1=&c_1\sqrt{1-m^2z^2}+c_2\sqrt{k^2z^2+1-k^2}e^{\int\frac{z^2k}{k^2z^2-k^2+1}\sqrt{\frac{m^2k^2-k^2-m^2}{(1-k^2)(1-m^2z^2)(1-z^2)}}\mathrm{d}z}\\&+c_3\sqrt{k^2z^2+1-k^2}e^{-\int\frac{z^2k}{k^2z^2-k^2+1}\sqrt{\frac{m^2k^2-k^2-m^2}{(1-k^2)(1-m^2z^2)(1-z^2)}}\mathrm{d}z}\end{aligned}\tag{B.13}$$

To conclude, let us do the same for the second equation.

Theorem B.3. *If $m\notin\{-1,0,1\}$, $k\notin\{-1,1\}$, $m^2k^2-k^2-1\neq0$ then the Galois group of equation* (B.6) *with controls* (B.8) *is isomorphic to $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. The proof is similar to the previous one for controls (B.7). We produce a third order differential equation for r_1. This time, the expsols routine finds $\sqrt{1-z^2}$. Again, we search solutions under the form $c_1\sqrt{1-z^2}+c_2Fe^{\int\sqrt{G}dz}+c_3Fe^{-\int\sqrt{G}dz}$, and we find

$$\begin{aligned}r_1=&c_1\sqrt{1-z^2}+c_2\sqrt{k^2m^2z^2+1-k^2}e^{\int\frac{z^2km^2}{k^2m^2z^2-k^2+1}\sqrt{\frac{k^2m^2-k^2+1}{(k^2-1)(1-z^2)(1-m^2z^2)}}\mathrm{d}z}\\&+c_3\sqrt{k^2m^2z^2+1-k^2}e^{-\int\frac{z^2km^2}{k^2m^2z^2-k^2+1}\sqrt{\frac{k^2m^2-k^2+1}{(k^2-1)(1-z^2)(1-m^2z^2)}}\mathrm{d}z}\end{aligned}\tag{B.14}$$

□

B.5.4 Step 4 Special values

For some special values of m, k, the Galois group simplifies. These exceptional parameter values can be seen as singularities or confluences on the formula of r_1. Let us make an analysis for controls (B.7) (the other one is similar).

The main case appear when the integral in the exponential identically vanishes, i.e. $k^2m^2 - k^2 - m^2 = 0$. There is one singularity for $k = 0$, but which is present in the original system and so is excluded. The other problematic cases are confluences : The elliptic integral simplifies, and it is no longer guaranteed that the exponential of it is transcendental. These are the cases $k^2 = 1$ and $m^2 = 1$.

Proposition B.9. *Let* $E = \{\pm\sqrt{1-s^2},\ s \in \mathbb{Q}\}$. *The Galois group of* (B.6) *over* K_0 *is*

- *id if* $k^2 = 1$.
- $\mathbb{C}^*$ *if* $m^2 = 1,\ 1/k \notin E$.
- $\mathbb{C}^*$ *if* $m = 0,\ k \notin E$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *if* $m^2 = 1,\ 1/k \in E$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *if* $m = 0,\ k \in E$.
- $\mathbb{C}^+$ *if* $k^2m^2 - k^2 - m^2 = 0$ *and* $k^2 \neq 1$.
- $\mathbb{C}^*$ *in other cases.*

Démonstration. For $k^2m^2 - k^2 - m^2 = 0$, the solutions can be obtained using a limiting process noting $k^2m^2 - k^2 - m^2 = \epsilon$ and making a series expansion in ϵ

$$\sqrt{k^2z^2 - k^2 + 1},\ \sqrt{k^2z^2 - k^2 + 1}\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}(k^2z^2 - k^2 + 1)^{3/2}}\mathrm{d}z$$

$$\sqrt{k^2z^2 - k^2 + 1}\left(\left(\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}(k^2z^2 - k^2 + 1)^{3/2}}\mathrm{d}z\right)^2 + \frac{k^2-1}{k^4(k^2z^2 - k^2 + 1)}\right)$$

The Galois group is then additive instead of multiplicative, $G \simeq \mathbb{C}^+$. If $k^2 = 1$, the equation becomes a first order equation, whose solutions are $c_1\sqrt{1-m^2z^2}$, so in K_0, thus $G = id$.
If $m^2 = 1$, the dsolve command returns an expression in which the only possibly transcendental term is $((z-1)/(z+1))^{\frac{k}{2\sqrt{k^2-1}}}$. This term is algebraic if and only if $1/k \in E$ (and so $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). If $m = 0$, the integral is no longer elliptic, and is given by

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1-k^2} + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1-k^2} - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

The exponential of this expression is algebraic if and only if $k \in E$ (and so $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). □

Coming back to the initial variable

The algebraic solution for the controls (B.7) (corresponding to $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$) gives

$$r = (\mathrm{dn}(\omega t, m), -wm\,\mathrm{cn}(\omega t, m), m/k\,\mathrm{sn}(\omega t, m))$$

The solution for $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$ is given by

$$r_1(t) = \sqrt{k^2 \mathrm{sn}(\omega t, m)^2 + 1 - k^2} e^{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2m^2-k^2-m^2}{1-k^2}}\left(\omega t - \Pi\left(\mathrm{sn}(\omega t,m), \frac{k^2}{k^2-1}, m\right)\right)}$$

where Π denotes the elliptic integral of the third kind.

In the special case $k^2m^2 - k^2 - m^2 = 0$, only an elliptic integral of the second kind is necessary, and in the even more special case of finite Galois groups, all the solutions are algebraic in z, and thus are algebraic in $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ or $\exp(\omega t)$. Note also that with the modulus $m \in]0, 1]$, $k^2m^2 - k^2 - m^2 \neq 0$.

B.6 Conclusion

B.6.1 Comparison of the integrability methods and geometric applications.

Integrability methods

Euler angles and proposition 2 lead to compute the third row of the matrix $R(t) \in SO(3)$ using Jacobi elliptic functions (solutions of the pendulum equation) and a further quadrature gives the elliptic integral Π to parametrize the angle Φ_1 (the formulas (B.4) gives exponential). The computations of all the rows solutions of the matrix $R(t)$ is associated to the computation of the Picard Vessiot extension. The method of section 5 consists in reducing the computation to a third order linear differential equation which is reparametrized using Jacobi elliptic functions to produce a specific algebraic solution corresponding to the third row of the matrix. Using this specific solution the third order equation is reduced to a second order equation which is solved using Kovacic algorithm. Concerning Liouville approach and theorem 4.1 the explicit computations of the integral $\int (f(u)+a)^{-1/2}\mathrm{d}u$ and $\int (g(v)-a)^{-1/2}\mathrm{d}v$ superposes the Jacobi elliptic functions and the elliptic integral of the third kind.

Geometric applications

The geometric applications on the computations are the following. The Liouville approach is used to determine the conjugate and cut loci which is achieved in the next section. The Picard Vessiot extension is an important step to compute the conjugate and cut loci for the SR-invariant metrics on $SO(3)$.

B.6.2 Optimality problem

Our work is a preliminary study to a complete analysis of the optimality problem which can be handled using the technical framework introduced in Annexe A combining geometric analysis and numerical simulations.

We use the following concepts. On the almost-Riemannian surface (M, g), the cut point along a geometric curve γ, projection of an extremal solution of the Maximum Principle, emanating from $q_0 \in M$ is the first point where it ceases to be minimizing and we denote $C_{cut}(q_0)$ the set of such points forming the cut locus. The first conjugate point is the point where it ceases to be minimizing among the set of geodesics C^1-close to γ emanating from q_0 and we denote $C(q_0)$ the set of such points, forming the conjugate locus.

The computations of the conjugate and cut loci on surfaces is a very difficult problem and only recently [18] was proved the Jacobi conjecture : the conjugate locus of a non-umbilical point on ellipsoids has exactly four cusps. A consequence being that the cut locus is a segment. Also in [19] the result was extended to a wider class of Liouville surfaces which possess such simple cut and conjugate loci.

To generalize such computations in our case we can use two different techniques. First of all, we can make an explicit computations of the conjugate loci using our extremal parametrization or numerical simulations (Annexe A). Secondly we can try to relate the simple structure of the conjugate loci to some monotonicity properties of Gaussian curvature or parametrized integrals related to extremals.

Also in our case, one must take into account the existence of equatorial Grushin singularities of the metric.

We briefly present the method to determine the conjugate and cut loci of an one parameter family of Liouville metrics.

First, we have the following lemma.

Lemma B.1. *The family of metrics g depending upon the parameter k have a discrete symmetry group generated by the two reflexions : $H(\varphi, p_\varphi)) = H(\pi - \varphi, -p_\varphi)$ (reflexion with respect to the equator) and $H(\theta, p_\theta) = H(-\theta, -p_\theta)$ (reflexion with respect to the meridian).*

The next step is to use the Grushin singularity resolution described in [8]. (This result is valid for every k.)

Proposition B.10. *Near the equator point q_0 identified to 0, the conjugate and cut loci for the metric restricted to a neighborhood of 0 can be computed using the local model : $\mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{x^2}$ where $x = 0$ is the equator. The cut locus is a segment $[-\epsilon, \epsilon]$ minus 0 while the conjugate locus is formed by four symmetric curves of the form $x = cy^2$, minus 0, and tangential to the meridian identified to $\theta_0 = 0$.*

Note in particular that this computation allows to determine by continuation the conjugate and cut loci at an equatorial point. In particular we have, see also [11] for a similar result.

Proposition B.11. *For every k, the cut locus of an equatorial point is the equator minus this point.*

Démonstration. A simple computation shows that the Gaussian curvature in each hemisphere is strictly negative. Hence there is no conjugate point for a geodesic starting from the equatorial point before returning to the equator. Due to the reflectional symmetry with respect to the equator two geodesics starting from an equatorial point intersect with same length when returning to the equator. This proves the result. □

Finally, the simple structure of the conjugate and cut loci in the Grushin case is well known. Roughly spoken it can be simply deduced from the convexity of the period mapping $p_\theta \to T(p_\theta) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+p_\theta^2}}$ given in proposition B.6, see [8].

Proposition B.12. *In the Grushin case we have :*

- *The cut and conjugate loci of a pole is the antipodal point.*

- *The cut locus of an equatorial point q_0 is the whole equator minus this point, while the conjugate locus has a double heart shape, with four meridional singularities, two at q_0 and two cusps on the opposite meridian.*
- *The conjugate locus of a point not a pole nor on the equator has only four cusps and the cut locus is a simple segment on the antipodal parallel.*

The problem is to generalize this simple description to the case $k \neq 1$. This is the analog on the ellipsoid to generalize the oblate case of revolution to a general ellipsoid.

From the theoretical point of view the main steps are the following :

Step 1 : Liouville metrics on the sphere are classified using different notions of equivalence (Liouville equivalence, equivalence of geodesic flow or isometry of the metrics) see [7] and the relation between the case of ellipsoids and Euler-Poinsot rigid body motion is well understood.

Step 2 : The characterization of the metrics on the sphere satisfying the Jacobi conjecture on the ellipsoids : "The conjugate locus of a generic point has only four cusps and the cut locus is a segment" is the object of intense research activities [18, 19] but the verification of the conditions is always a complicated task even in the case of revolution.

Due to this difficulty we adopt here a different point of view coming from (Annexe A) applied to the case of spins and to be compared to a similar analysis on the ellipsoid.

Geometric framework

Ellipsoids The general case is obtained by gluing the oblate and prolate cases and the conjugate and cut loci are numerically determined using this analysis. For a non umbilical point the conjugate locus has four cusps and the cut locus is a segment. For an umbilical point they shrink to a single point.

Spin case The sphere is interpreted by gluing the two hemispheres at the equator associated to the Grushin singularity of the metric.

The Grushin case $k = 1$ is described in Proposition B.12 and corresponds to the oblate case for an ellipsoid (outside the equator).

For the case $k \neq 1$ the first step is to compute the set η of points where the first integral F is proportional to the Hamiltonian H. For a general ellipsoid we have $\#\eta = 4$ and such points are umbilical points. In the spin cases we have again $\#\eta = 4$, those points being solutions of $R(z) = 0$.

We represent on fig.B1 such points in each hemisphere in relation with the level sets of the Liouville coordinates.

Numerically we evaluate the conjugate and cut loci of a point in η which shrinks into a single point, see fig.B2.

We compute numerically the conjugate and cut loci of a point not on the equator nor in η. It is represented on fig.B3 confirming the simple structure of the conjugate and cut loci.

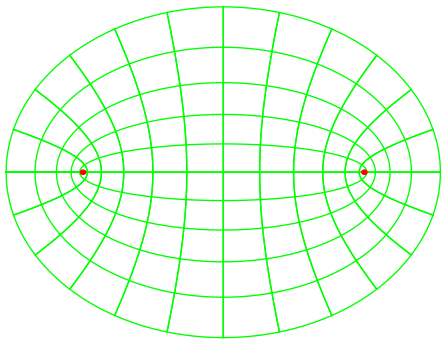

FIGURE B.1 – Level sets of Liouville coordinates and the two points of η on the north hemisphere. (Projection on the (x,y)-plane.)

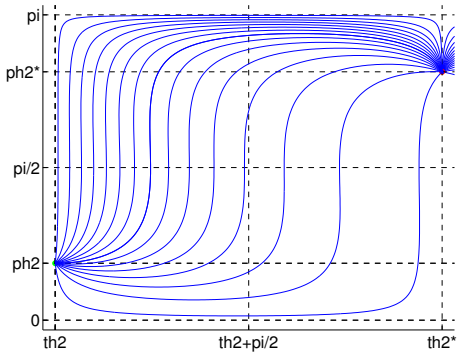

FIGURE B.2 – Conjugate and cut loci of a point in η. (Spherical coordinates.) Here we use the value $k = 1.2$.

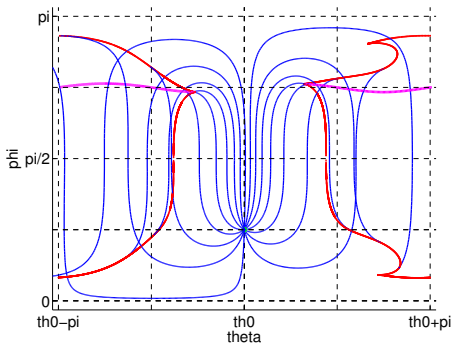

FIGURE B.3 – Conjugate and cut loci of a generic point. (Spherical coordinates.) We set $k = 1.1$ and we start from $(\pi/4, \pi/4)$.

B.6.3 Link with conjugate and cut loci computation for an invariant Riemannian on sub-Riemannian metrics on $SO(3)$.

Note also that a side effect of our computations is a first step towards the computation of conjugate and cut loci for the metrics on $SO(3)$, which is an important challenge. Also it can be generalized to the case of simple groups of dimension 3.

B.6.4 Extension to the case of 4 spins

In this case, we introduce the coordinates $x_1 = \langle I_{1x} \rangle$, $x_2 = \langle 2I_{1y}I_{2z} \rangle$, $x_3 = \langle 2I_{1y}I_{2x} \rangle$, $x_4 = \langle 4I_{1y}I_{2y}I_{3z} \rangle$, $x_5 = \langle 4I_{1y}I_{2y}I_{3x} \rangle$, $x_6 = \langle 8I_{1y}I_{2y}I_{3y}I_{4z} \rangle$, and the vector $X = (x_1, \ldots, x_6)^\top$.

Controlling the two spins 2 and 3, one gets the system :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \end{bmatrix} X$$

where $k_3 = \frac{J_{23}}{J_{12}}$, $k_5 = \frac{J_{34}}{J_{12}}$.

Using the notations :

$$x_1 = r_1, \qquad x_2 = r_2 \cos\alpha_2, \qquad x_3 = r_2 \sin\alpha_2,$$
$$x_4 = r_3 \cos\alpha_3, \qquad x_5 = r_3 \sin\alpha_3, \qquad x_6 = r_4.$$

We get the system

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = u_1 \begin{bmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -r_3 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_5 u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_4 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

with

$$u_1 = \cos\alpha_2, \quad u_2 = \sin\alpha_2 \cos\alpha_3, \quad u_3 = \sin\alpha_3.$$

From the control parametrization, the control set is the surface $M = \{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_1^2 u_3^2 = 1\}$. The control constraint can be written :

$$v\Big(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big) = g_2\Big(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big) + g_4\Big(r, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big) = 1$$

with g_2, g_4 respectively quadratic and quartic with respect to the speed.

The optimal control problem is a time minimal transfer. The candidate as minimizers can be computed using the maximum principle. One can observe that the optimal problem is not a SR-problem unless we consider small controls and the control constraints can be approximated with $g_4 = 0$. In this case the problem is associated to an invariant SR-problem on $SO(4)$. An interesting question in this context is to generalize the integrability issues.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons utilisé des méthodes à la fois géométriques, numériques et d'intégration pour étudier le flot géodésique et la caustique de métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes sur la sphère S^2.

Les méthodes ont premièrement été éprouvées sur des cas présentant beaucoup de symétries ou bien connus afin de simplifier le problème qui est en général complexe. Il en résulte une caractérisation très précise du lieu de coupure et du lieu conjugué dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, et qui se retrouve au sein du cas général.

La contribution principale de ce travail est l'étude d'une famille de métriques pseudo-riemanniennes issue du contrôle quantique. Le cas particulier bien connu de Grushin a été identifié, et le cas plus simple partant de l'équateur est étudié lors d'une première approche. Dans le cas général, on a vu qu'il possède une deuxième intégrale première quadratique, que l'on a utilisée pour trouver la forme normale de Liouville de la métrique et on a intégré les équations des géodésiques à l'aide d'intégrales elliptiques. Une étude numérique du problème nous porte à croire que la métrique vérifie la conjecture de Jacobi. Une étude plus poussée du comportement des géodésiques en s'inspirant du travail de Itoh et Kiyohara sur les surfaces de Liouville permettrait probablement d'établir ce dernier résultat.

Bibliographie

[1] A. Agrachev, U. Boscain, and M. Sigalotti. A Gauss-Bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20(4) :801–822, 2008.

[2] A. A. Agrachev and Y. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint.* Springer, 2004.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer, 1989.

[4] M. Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité.* Collection SMF. Société mathématique de France, 2001.

[5] M. Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] G. D. Birknoff. Dynamical systems. In *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 1960.

[7] A. Bolsinov and A. Fomenko. *Integrable geodesic flows on two-dimensional surfaces.* Monographs in contemporary mathematics. Consultants Bureau, 2000.

[8] B. Bonnard, J.-B. Caillau, R. Sinclair, and M. Tanaka. Conjugate and cut loci of a two-sphere of revolution with application to optimal control. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4) :1081–1098, 2009.

[9] B. Bonnard, O. Cots, J.-B. Pomet, and N. Shcherbakova. Riemannian metrics on 2D-manifolds related to the Euler-Poinsot rigid body motion. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2014. to appear.

[10] B. Bonnard and D. Sugny. *Optimal control with applications in space and quantum dynamics*, volume 5 of *AIMS Series on Applied Mathematics.* American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2012.

[11] U. Boscain, T. Chambrion, and G. Charlot. Nonisotropic 3-level quantum systems : complete solutions for minimum time and minimum energy. *arXiv preprint quant-ph/0409022*, 2004.

[12] J.-B. Caillau, O. Cots, and J. Gergaud. Differential continuation for regular optimal control problems. *Optim. Methods Softw.*, 27(2) :177–196, 2012.

[13] O. Cots. *Contrôle optimal géométrique : méthode homotopiques et applications.* PhD thesis, 2012.

[14] M. do Carmo. *Riemannian Geometry.* Mathematics (Birkhäuser) theory. Birkhäuser Boston, 1992.

[15] A. Figalli, L. Rifford, and C. Villani. Nearly round spheres look convex. *Amer. J. Math.*, 134(1) :109–139, 2012.

[16] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Universitext (1979). U.S. Government Printing Office, 2004.

[17] R. Ghezzi. On Almost-Riemannian Surfaces. *ArXiv e-prints*, Mar. 2012.

[18] J.-i. Itoh and K. Kiyohara. The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids. *manuscripta mathematica*, 114(2) :247–264, 2004.

[19] J.-i. Itoh, K. Kiyohara, et al. The cut loci on ellipsoids and certain liouville manifolds. *Asian Journal of Mathematics*, 14(2) :257–290, 2010.

[20] V. Jurdjevic. *Geometric control theory.* Cambridge university press, 1997.

[21] N. Khaneja, S. J. Glaser, and R. Brockett. Sub-riemannian geometry and time optimal control of three spin systems : quantum gates and coherence transfer. *Physical Review A*, 65(6), 2002.

[22] W. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1982.

[23] J. J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 2(1) :3–43, 1986.

[24] D. Lawden. *Elliptic Functions and Applications.* Applied Mathematical Sciences. Springer, 2010.

[25] M. H. Levitt. *Spin dynamics.* John Wiley & Sons, 2013.

[26] A. Majumdar and E. R. P. Zuiderweg. Efficiencies of double-and triple-resonance j cross polarization. *Journal of Magnetic Resonance. Series A*, 113 :19–3l, 1995.

[27] J. J. Morales-Ruiz and J.-P. Ramis. Integrability of dynamical systems through differential galois theory : a practical guide. In *Differential Algebra, Complex Analysis and Orthogonal Polynomials : Jairo Charris Seminar 2007-2008, Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia*, volume 509, page 143. American Mathematical Soc., 2010.

[28] S. B. Myers. Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces. *Duke Math. J.*, 1(3) :376–391, 1935.

[29] H. Poincaré. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6(3) :237–274, 1905.

[30] L. S. Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes.* CRC Press, 1987.

[31] K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka. *The geometry of total curvature on complete open surfaces*, volume 159 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[32] R. Sinclair and M. Tanaka. Jacobi's last geometric statement extends to a wider class of Liouville surfaces. *Math. Comp.*, 75(256) :1779–1808 (electronic), 2006.

[33] M. F. Singer and F. Ulmer. Galois groups of second and third order linear differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 16(1) :9–36, 1993.

[34] M. van der Put and M. F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[35] H. Yuan. *Geometry, optimal control and quantum computing.* PhD thesis, Cambridge, MA, USA, 2006. AAI3217947.

[36] H. Yuan, R. Zeier, and N. Khaneja. Elliptic functions and efficient control of ising spin chains with unequal couplings. *Physical Review A*, 77(3) :032340, 2008.