



HAL
open science

Atténuation du bruit et des vibrations de structures minces par dispositifs piézoélectriques passifs : modèles numériques d'ordre réduit et optimisation

Luciano Pereira da Silva

► **To cite this version:**

Luciano Pereira da Silva. Atténuation du bruit et des vibrations de structures minces par dispositifs piézoélectriques passifs : modèles numériques d'ordre réduit et optimisation. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2014. Français. NNT : 2014CNAM0944 . tel-01132887

HAL Id: tel-01132887

<https://theses.hal.science/tel-01132887v1>

Submitted on 18 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par : **Luciano PEREIRA DA SILVA**

soutenue le : **05 septembre 2014**

pour obtenir le grade de : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**
spécialité : **Mécanique**

Atténuation du bruit et des vibrations de structures minces par dispositifs piézoélectriques passifs : modèles numériques d'ordre réduit et optimisation

THÈSE DIRIGÉE PAR :

M. DEÛ Jean-François

Professeur des Universités, Cnam, Paris

CO-ENCADRANT :

M. LARBI Walid

Maître de Conférences, Cnam, Paris

RAPPORTEURS :

M. COLLET Manuel

Directeur de Recherches CNRS, Ecole Centrale de Lyon

M. BENJEDDOU Ayech

Professeur des Universités, Supméca, St Ouen

EXAMINATEURS :

M. POUGET Joël

Directeur de Recherches CNRS, UPMC, Paris

M. OUISSSE Morvan

Professeur des Universités, Femto-ST, Besançon

“ À ma grand-mère, Dina Vrech Marangoni (1916-2010),
à qui je serai éternellement reconnaissant.”

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire national des arts et métiers de Paris. Il a été financé par une allocation du ministère de l'éducation nationale.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus chaleureux remerciements à Jean-François DEÛ, mon directeur de Thèse, et à Walid LARBI, mon co-encadrant, qui ont su me diriger et m'encadrer tout au long de cette thèse avec liberté, patience, rigueur, enthousiasme et bonne humeur. J'emporte avec moi pour toujours non seulement leurs judicieux conseils scientifiques, mais aussi leurs qualités humaines.

Je remercie profondément chacun des membres du jury pour l'intérêt manifesté envers ce travail. Je remercie Monsieur Joël POUGET pour avoir présidé ce jury avec élégance et rigueur. J'exprime également toute ma gratitude à Messieurs Manuel COLLET et Aych BENJEDDOU pour avoir accepté d'être rapporteur. Leurs appréciations m'ont permis d'améliorer ce manuscrit et d'enrichir mes connaissances scientifiques. Enfin, je remercie Monsieur Morvan OUISSE, mon ancien maître de stage et ami, pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Marcelo Areias TRINDADE de m'avoir accueilli pendant un mois au sein de son équipe à l'université de São Paulo au Brésil. Ce fut plus qu'un plaisir et j'estime avoir eu beaucoup de chance de travailler avec lui pour toutes ses qualités scientifiques et humaines.

Je ne peux pas oublier de remercier Monsieur Emmanuel FOLTÊTE pour m'avoir offert l'opportunité de venir en France et donc de réaliser cette thèse. Je ne saurais jamais rétribuer la confiance qu'il a investie en moi.

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance à tous les membres de l'équipe du LMSSC pour tous les moments très agréables partagés durant ces années de thèse :

- à Monsieur Roger OHAYON pour ses conseils et encouragements, souvent dans des courtes mais riches et plaisantes conversations ;

- à Monsieur Claude BLANZÉ pour son amitié, ses encouragements et son aide dans le domaine de l'enseignement. Ce fut plus qu'un plaisir de travailler avec lui pendant ces quatre dernières années ;
- à Monsieur Antoine LEGAY pour son amitié et l'aide qu'il m'a souvent apportée sur la méthode des éléments finis et dans le domaine de l'enseignement ;
- à Monsieur Georges VENIZELOS pour son amitié et son aide dans le domaine de l'enseignement ;
- à Monsieur Mathieu AUCEJO pour son amitié et son aide sur le plan informatique ;
- à Messieurs Philippe KEMPF et Frédéric GUILLERM et à Madame Sonia LEMJID pour leur amitié, leur disponibilité et leur aide de tous les jours ;
- à toute l'équipe d'acoustique, en particulier à Mesdames Sarah POIRÉE, Marie TAHON et Stéphanie LOBRÉAU et à Messieurs Yacine BRAICIA et Éric BAVU pour leur amitié et leurs encouragements ;
- à tous les doctorants, stagiaires et post-doctorants, en particulier à Mesdames Lucie ROULEAU et Tatiane GODOY, et à Messieurs Saeid NEZAMABADI et Yassine KARIM pour leur amitié et leurs encouragements.

Je remercie de plus tous les amis en France et au Brésil qui ont également contribué par leur amitié et leur soutien à rendre ces quatre années des plus agréables. Ma reconnaissance va en particulier à Youssef GERGES, à Yassine KARIM et à Roberto OSHIRO.

Enfin, je voudrais exprimer ma très vive reconnaissance à ma famille qui a toujours cru en moi. A mes beau parents Yves et Sylvie, mes belles sœurs Noémie et Violaine et mes beau frères Pierre-Yves et Julien pour leur amitié et leur accueil, à ma femme Juliette et à mes enfants Matteo et Giacomo pour leur confiance, amour et patience de tous les jours, à ma mère Marlene et à mes frères Joel et Fabiano pour leur amour et support incontestable de toujours. Quoi je fasse, je ne pourrais jamais rétribuer ce qu'ils m'ont donné.

Résumé

Dans le cadre de la lutte contre les nuisances sonores et vibratoires, cette thèse porte sur la modélisation numérique des structures amorties par dispositifs piézoélectriques shuntés. La première partie du travail concerne la modélisation par éléments finis de structures en vibrations avec des pastilles piézoélectriques shuntées. Dans un premier temps, une formulation éléments finis originale, qui utilise des variables électriques globales (différence de potentiel et charge dans chaque pastille piézoélectrique), est analysée et validée. Dans un second temps, différentes stratégies de réduction de modèle basées sur la méthode de projection modale sont proposées pour résoudre le problème électromécanique discrétisé par éléments finis à moindre coût. La convergence de ces modèles d'ordre réduits est ensuite analysée pour les cas de shunts résistif et résonant. La deuxième partie du travail est consacrée à l'optimisation du système électromécanique, dans le but de maximiser l'amortissement apporté par les dispositifs piézoélectriques shuntés. Pour cela, une procédure d'optimisation topologique, basée sur la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization method), est développée pour déterminer les géométries et les emplacements optimaux des pastilles piézoélectriques. Cette procédure permet de maximiser le coefficient de couplage électromécanique modal entre les éléments piézoélectriques et la structure hôte, ceci de façon indépendante du choix des composants du circuit électrique. Les avantages de l'approche proposée sont mis en avant à travers un exemple de validation et un cas d'application industrielle. Enfin, la dernière partie du travail propose une approche numérique pour modéliser et optimiser la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine des basses fréquences avec des éléments piézoélectriques shuntés. Cette approche est valable pour n'importe quelle plaque mince bafflée et non trouée, indépendamment des conditions aux limites. Un exemple d'application concernant l'atténuation du rayonnement acoustique d'une plaque avec renforts est présenté et analysé.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, modèles d'ordre réduit, réduction des vibrations, amortissement par dispositifs piézoélectriques shuntés, optimisation topologique, rayonnement acoustique.



Abstract

Passive structural vibration and noise reduction by means of shunted piezoelectric patches is addressed in this thesis. The first part of the work concerns the finite element modeling of shunted piezoelectric systems. Firstly, an original finite element formulation, with only a couple of electric variables per piezoelectric patch (the global charge/ voltage), is analyzed and validated. Secondly, several reduced order models based on a normal mode expansion are proposed to solve the electromechanical problem. The convergence of these reduced order models is then analyzed for a resistive and a resonant shunt circuits. In the second part of the work, the concept of topology optimization, based on the Solid Isotropic Material with Penalization method (SIMP), is employed to optimize, in terms of damping efficiency, the geometry of piezoelectric patches as well as their placement on the host elastic structure. The proposed optimization procedure consists of distributing the piezoelectric material in such a way as to maximize the modal electromechanical coupling factor of the mechanical vibration mode to which the shunt is tuned, independently of the choice of electric circuit components. Numerical examples validate and demonstrate the potential of the proposed approach for the design of piezoelectric shunt devices. Finally, the last part of the work concerns the numerical modeling of noise and vibration reduction of thin structures in the low frequency range by using shunted piezoelectric elements. An efficient approach that can be applied to any thin continuous plate in an infinite baffle, independently of the boundary conditions, is proposed. An application example of a thin plate with reinforcements is presented and analyzed.

Keywords: Finite element method, reduced order models, vibration reduction, shunted piezoelectric damping, topology optimization, acoustic radiation.



Table des matières

Liste des tableaux	13
Liste des figures	15
1. Introduction	19
1.1. Problématique et objectifs.....	19
1.1.1. Les technologies piézoélectriques.....	20
1.1.2. Shunts.....	21
1.1.3. Objectifs.....	21
1.2. Organisation du document	22
2. Formulation éléments finis d'une structure élastique avec pastilles piézoélectriques 25	25
2.1. Introduction à la piézoélectricité.....	26
2.1.1. Matériaux piézoélectriques	28
2.1.2. Piézoélectricité linéaire	33
2.1.3. Coefficients de couplages électromécaniques.....	39
2.2. Modélisation éléments finis d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques	41
2.2.1. Etude bibliographique	42
2.2.2. Formulation 3D	42
2.2.3. Formulation simplifiée.....	48
2.3. Conclusions.....	51
3. Implémentation numérique et comparaison des modèles.....	53
3.1. Implémentation numérique des modèles éléments finis	54
3.1.1. Outils numériques utilisés.....	54
3.1.2. Implémentation des formulations éléments finis	57
3.2. Comparaison des modèles.....	59
3.2.1. Développement d'une solution exacte 3D : vibrations libres d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée	60
3.2.2. Exemple d'une pastille piézoélectrique simplement appuyée	68
3.2.3. Exemple d'une poutre avec une pastille piézoélectrique shuntée.....	73

3.2.4. Exemple d'un pot d'échappement automobile muni d'une pastille piézoélectrique shuntée	78
3.2.5. Exemple d'une poutre console : corrélation calcul-essai.....	81
3.3. Conclusions.....	83
4. Atténuation des vibrations avec pastilles piézoélectriques shuntées : modèles d'ordre réduit	85
4.1. Les shunts pour l'atténuation des vibrations.....	86
4.1.1. Bibliographie.....	87
4.1.2. Formulation éléments finis : shunts R et RL	88
4.2. Modèles d'ordre réduit pour les vibrations d'une structure élastique avec pastilles piézoélectriques shuntées	90
4.2.1. Technique 1 : projection sur les modes en court-circuit	90
4.2.2. Technique 2 : projection sur les modes en circuit-ouvert.....	91
4.2.3. Technique 3 : projection sur la base combinée court-circuit/circuit-ouvert	92
4.2.4. Technique 4 : projection sur la base des modes couplés électromécaniques.....	93
4.3. Coefficients de couplage et optimisation des paramètres électriques des circuits shunts.....	94
4.3.1. Coefficient de couplage effectif.....	94
4.3.2. Optimisation des paramètres électriques du shunt.....	97
4.4. Comparaison entre les différentes techniques de projection.....	102
4.4.1. Exemple 1	104
4.4.2. Exemple 2	110
4.5. Conclusions.....	116
5. Optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques	117
5.1. Introduction à l'optimisation structurale.....	119
5.1.1. Formulation d'un problème d'optimisation	121
5.1.2. Optimisation topologique.....	122
5.2. Procédure d'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques	125
5.2.1. Méthode SIMP appliquée à un milieu piézoélectrique	125
5.2.2. Formulation du problème.....	128
5.2.3. Analyse de sensibilité	128
5.2.4. Algorithme et implémentation numérique	130
5.3. Exemples.....	132
5.3.1. Poutre encastrée libre avec une pastille piézoélectrique.....	133
5.3.2. Pot d'échappement avec un dispositif piézoélectrique shunté.....	137

5.4. Conclusions	142
6. Application à l'atténuation du rayonnement acoustique de plaque minces	143
6.1. Rayonnement acoustique d'une structure plane bafflée	144
6.1.1. Rappel du problème vibroacoustique.....	144
6.1.2. Calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ lointain dans les cas d'une plaque simplement appuyée	148
6.1.3. Méthode des sources élémentaires	151
6.2. Atténuation du rayonnement acoustique par dispositifs piézoélectriques shuntés ..	158
6.2.1. Modes les plus rayonnants	161
6.2.2. Mise en œuvre numérique.....	161
6.2.3. Exemple d'application	162
6.3. Conclusions	173
7. Conclusions et perspectives	175
7.1. Travail effectué	175
7.2. Perspectives.....	178
Annexes	181
A. Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique en 3D.....	183
B. Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique en 2D.....	189
C. Données matériaux du PIC-151	193
Bibliographie.....	195

Liste des tableaux

TAB. 2.1 : Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt.....	35
TAB. 2.2 : Différentes formes des lois de comportement piézoélectrique linéaire.....	36
TAB. 2.3 : Relation de passage entre les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques.	36
TAB. 3.1 : Propriétés géométrique et mécanique de la plaque.	66
TAB. 3.2 : 20 premières fréquences propres adimensionnées $\omega^* = \omega(L_x^2/H)\sqrt{\rho/C_{33}}$ pour la plaque élastique - comparaison entre les résultats donnés par Nastran et la solution exacte développée.	67
TAB. 3.3 : Propriétés des matériaux PZT-4, PZT-5A et PIC-151.	69
TAB. 3.4 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation 3D – différence entre les fréquences propres des 10 premiers modes de flexion et des 2 premiers modes de membrane.	70
TAB. 3.5 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation simplifiée – différence entre les fréquences propres des 10 premiers modes de flexion et des 2 premiers modes de membrane.	71
TAB. 3.6 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation simplifiée pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la plaque piézoélectrique en PIC-151 – différence entre fréquences propres des 10 premiers modes de flexion.....	72
TAB. 3.7 : Fréquences propres en court-circuit ($\omega_i^{(3D)}$) et en circuit-ouvert ($\hat{\omega}_i^{(3D)}$) obtenues avec la formulation 3D pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la pastille piézoélectrique (h_p).	75
TAB. 3.8 : Comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la pastille piézoélectrique – Différences entre les fréquences propres (court-circuit et circuit-ouvert) et les coefficients de couplage effectifs.	76
TAB. 3.9 : Comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée – Fréquences propres et coefficients de couplage effectifs pour les 5 premiers modes propres.....	80
TAB. 3.10 : Comparaison entre le modèle numérique et l'expérience – Fréquences propres (court-circuit et circuit-ouvert) et coefficients de couplage effectifs.	83
TAB. 4.1 : Valeurs des paramètres ω_i , $k_i\omega_i$ et C_{eq} pour les cas d'une pastille seule ou de P pastilles reliées en série ou en parallèle.	98
TAB. 4.2 : Valeur optimale de la résistance du shunt résistif pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.	99

TAB. 4.3 : Valeur optimale de la résistance et de l'inductance du shunt résonant pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.....	101
TAB. 4.4 : Valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt pour les différents modèles.....	107
TAB. 4.5 : Comparaison entre les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ et les facteurs des couplages modaux k_i pour les dix premiers modes du système.....	109
TAB. 4.6 : Valeurs optimales des paramètres électriques du shunt pour les différents modèles.	114
TAB. 4.7 : Comparaison entre les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ et les facteurs de couplages modaux k_i pour les dix premiers modes du système.	115
TAB. 5.1 : Configurations optimales pour les deux premiers modes de flexion – solutions analytiques déterminées dans (Thomas <i>et al.</i> , 2012b).	134
TAB. 5.2 : Distribution des pseudo-densités x_i (noir : matériau piézoélectrique, blanc : trou) sur la surface supérieur de la poutre pour les deux premiers mode de flexion et pour différentes combinaisons de facteurs de pénalisation - modélisation éléments finis et mesure de phase grise M_{nd}	136
TAB. 5.3 : Topologies des deux premiers modes de flexion avec $p_\rho = p_c = p_\varepsilon = 1$ et $p_p = 2$	137
TAB. 5.4 : Paramètres optimaux du circuit shunt.	140
TAB. 6.1 : Puissance acoustique rayonnée par les modes structuraux.	163
TAB. 6.2 : Paramètres optimaux des circuits shunts.....	168

Liste des figures

FIG. 2.1- Effet piézoélectrique direct.	27
FIG. 2.2- Effet piézoélectrique inverse.	27
FIG. 2.3- Cellule élémentaire d'un PZT. Gauche : structure cubique non polarisée (au-dessus de la température de Curie) ; droite : structure tétragonale polarisée (en dessous de la température de Curie) (Morgan Electro Ceramics, 2014).	28
FIG. 2.4- Polarisation et déformation en fonction du champ électrique (Ducarne, 2009).	30
FIG. 2.5- Différents états d'une pastille piézoélectrique. (a) état non polarisé ($P = 0$) ; (b) état saturé ($P = P_s$) ; (c) pastille après polarisation ($P = P_r$) (Ducarne, 2009).	30
FIG. 2.6- Efforts sur l'ion positif et déformations de la maille pour un champ nul, parallèle ou orthogonal à la polarisation rémanente (Ducarne, 2009).	31
FIG. 2.7- Structure élastique munie de deux éléments piézoélectriques.	43
FIG. 2.8- p-ième pastille piézoélectrique soumise à la différence de potentiel $V^{(p)}$, avec les potentiels $\psi_+^{(p)}$ et $\psi_-^{(p)}$ et les charges $Q_+^{(p)}$ et $Q_-^{(p)}$ sur les surfaces des électrodes.	46
FIG. 2.9- p-ième pastille piézoélectrique soumise à la différence de potentiel $V^{(p)}$, avec le champ électrique de composantes E_k normal aux électrodes et uniforme et, avec les charges $Q_+^{(p)}$ et $Q_-^{(p)}$ sur les surfaces des électrodes (avec $Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}$)	48
FIG. 3.1- Stratégie numérique ($k_{\text{eff},i}$ correspond au coefficient de couplage électromécanique effectif du i-ième mode).	58
FIG. 3.2- Plaque piézoélectrique : polarisation, géométrie et notations.	61
FIG. 3.3- Modèle éléments finis dans Patran : Maillage de la plaque avec $20 \times 20 \times 5 = 2000$ éléments hexaédriques à 20 nœuds (HEXA 20).	66
FIG. 3.4- Matrice de MAC des dix premières déformées modales de la plaque : Comparaison entre les résultats donnés par Nastran et la solution exacte.	67
FIG. 3.5- Modèle éléments finis dans Patran : Maillage de la plaque piézoélectrique avec 2000 éléments hexaédriques à 20 nœuds.	68
FIG. 3.6- Potentiel électrique dans l'épaisseur de la plaque piézoélectrique.	70
FIG. 3.7- Déformées modales des dix premiers modes de flexion et des deux premiers modes de membrane de la plaque piézoélectrique donnés par Nastran. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.	72
FIG. 3.8- Erreur absolue entre la formulation simplifiée et la formulation exacte en fonction de l'épaisseur de la plaque : fréquence propre du premier mode de flexion.	73

FIG. 3.9– Poutre munie d’une pastille piézoélectrique : géométrie et conditions aux limites (dimensions en mm).....	74
FIG. 3.10– Poutre munie d’une pastille piézoélectrique d’épaisseur 1 mm: modèle éléments finis dans Patran.	74
FIG. 3.11- Déformées modales des 4 premiers modes de flexion (F), du premier mode de Torsion (T) et du premier mode de flexion dans le plan (F_{x-y}) de la poutre munie de la pastille piézoélectrique de 1 mm d’épaisseur. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	75
FIG. 3.12- FRF au nœud d’application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d’un circuit shunt résonant accordée sur le premier mode de flexion : comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée.....	77
FIG. 3.13– Silencieux automobile avec les tubes d’admission et d’échappement. (dimensions en pouces).....	79
FIG. 3.14- Déformées modales des 5 premiers modes propres du silencieux automobile avec une pastille piézoélectrique. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	80
FIG. 3.15- FRF au point d’application de la force excitatrice pour le système (structure/pastille) munie d’un circuit shunt résonant accordée au troisième mode de vibration : comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée.....	81
FIG. 3.16– Poutre munie des deux pastilles piézoélectriques reliées en série.	82
FIG. 3.17- Déformées modales des 2 premiers modes de flexion de la poutre. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement (F : Flexion).	83
FIG. 4.1– Structure équipée d’une pastille piézoélectrique et shunts linéaires R ou RL.....	86
FIG. 4.2– Atténuation apportée par un shunt résistif en fonction du facteur de couplage modal k_i , pour différentes valeurs de l’amortissement modal ξ_i	100
FIG. 4.3– Atténuation apportée par un shunt résonant en fonction du facteur de couplage modal k_i , pour différentes valeurs de l’amortissement modal ξ_i	101
FIG. 4.4- Stratégie numérique.....	103
FIG. 4.5– Poutre munie d’une pastille piézoélectrique d’épaisseur 0.75 mm : modèle éléments finis dans Patran.	104
FIG. 4.6– FRF au point d’application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d’un circuit shunt résonant accordée sur le premier mode de vibration.....	105
FIG. 4.7– FRF au point d’application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d’un circuit shunt résistif accordée sur le premier mode de vibration.	106
FIG. 4.8– Evolution de k_i et $k_{eff,i}$ pour les deux premiers modes de flexion de la poutre en fonction de la position de la pastille piézoélectrique (position 1 correspond à la configuration de la FIG. 4.5).....	109
FIG. 4.9- Déformées modales des 2 premiers modes de la base couplée et du premier mode en court-circuit et en circuit-ouvert. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	110

FIG. 4.10– Plaque d'épaisseur 2 mm munie des deux pastilles piézoélectriques shuntées d'épaisseur 0.5 mm (dimensions en mm).....	111
FIG. 4.11– FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (plaque/pastilles) munie des deux circuits shunt résistif accordés sur les deux premiers modes de vibration : Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en court-circuit, la base des modes en circuit-ouvert et de la base combinée (CC+CO).	112
FIG. 4.12–FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (plaque/pastilles) munie des deux circuits shunt résonant accordés sur les deux premiers modes de vibration.	113
FIG. 4.13- Déformées modales des dix premiers modes de la plaque avec les pastilles piézoélectriques court-circuitées. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	114
FIG. 4.14- Déformées modales des 4 premiers modes de la base combinée. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	115
FIG. 5.1– Les trois types des problèmes d'optimisation structurale (Duysinx, 1996).....	120
FIG. 5.2– Modèle matériau basé sur la méthode d'homogénéisation.....	123
FIG. 5.3– Problème de checkboarding : Les pseudo-densités varient de façon périodique et similaire à un damier constitué d'une alternance de vides et d'éléments solides. L'élément blanc représente le vide.....	125
FIG. 5.4– Approche proposée.....	131
FIG. 5.5– Poutre encastree-libre avec une pastille piézoélectrique.....	133
FIG. 5.6– Evolution de la fonction coût (MEMCF) au cours de l'optimisation (Cas a : $\rho_p = \rho_\epsilon = \rho_c = 1$ et $\rho_e = 3$; Cas b : $\rho_p = \rho_\epsilon = 1$ et $\rho_e = \rho_c = 3$; Cas c : $\rho_p = \rho_\epsilon = \rho_c = \rho_e = 1$; Cas d : $\rho_p = \rho_\epsilon = \rho_e = 1$ et $\rho_c = 3$; Cas e : $\rho_p = \rho_c = 1$ et $\rho_\epsilon = \rho_e = 3$; Cas f : $\rho_p = 1$ et $\rho_\epsilon = \rho_e = \rho_c = 3$).	135
FIG. 5.7– Déformées modales des 2 premiers modes de flexion de la poutre. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.....	136
FIG. 5.8– Silencieux automobile avec tubes d'admission et d'échappement (dimensions en mm).	138
FIG. 5.9– Déformées modales des 3 premiers modes propres du silencieux automobile. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.	139
FIG. 5.10- Comparaison entre différents positions et géométrie de la pastille piézoélectrique : facteur de couplage modal électromécanique.	140
FIG. 5.11- FRF au point d'application de la force excitatrice : atténuation du deuxième mode de vibration avec un shunt résistif.....	141
FIG. 5.12- FRF au point d'application de la force excitatrice : atténuation du deuxième mode de vibration avec un shunt résonant.	141
FIG. 6.1– Problème Vibroacoustique : géométrie et notations.....	145
FIG. 6.2– Plaque rectangulaire simplement appuyée dans un baffle infini : systèmes d'axes et coordonnées.....	148

FIG. 6.3– Rendement radiatif des modes structuraux d’une plaque simplement appuyée (Wallace, 1972).	150
FIG. 6.4– Schémas de rayonnement pour différents modes structuraux d’une plaque simplement appuyée : Les zones vertes caractérisent le rayonnement (De Man, 2004).150	
FIG. 6.5– Discrétisation de la plaque par la méthode des sources élémentaires.	152
FIG. 6.6– Rendements radiatifs pour les modes (1,1), (2,1), (3,1) et entre les modes (1,1) et (3,1) pour une plaque simplement appuyée, bafflée et rayonnant dans l’air.	155
FIG. 6.7– Les six premiers modes radiatifs pour $kl = 1$: plaque des dimensions $0.21 \times 0.12 \text{ m}^2$ rayonnant dans l’air.	157
FIG. 6.8– Facteurs de rayonnement des modes radiatifs.	157
FIG. 6.9– Approche proposée.	160
FIG. 6.10- Stratégie numérique.....	162
FIG. 6.11– Plaque bafflée avec renforts (dimensions en mm).....	163
FIG. 6.12– Déformées modales des 15 modes propres de la plaque dans la bande fréquentielle d’intérêt. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.	164
FIG. 6.13– Placement des pastilles piézoélectriques (dimensions en mm).	166
FIG. 6.14– Détermination de la géométrie et de la position des dispositifs piézoélectriques (dimensions en mm).	167
FIG. 6.15– Premier cas (optimisation paramétrique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résistifs.	169
FIG. 6.16– Premier cas (optimisation paramétrique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résonants.....	170
FIG. 6.17– Second cas (optimisation topologique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résistifs.....	171
FIG. 6.18– Second cas (optimisation topologique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résonants.	172

Introduction

1.1. Problématique et objectifs

Dans de nombreux domaines d'application, la lutte contre les vibrations des structures légères dans un environnement dynamique est un enjeu majeur pour les concepteurs. En effet, les vibrations des structures modernes comme les avions, les satellites ou les voitures peuvent provoquer des dysfonctionnements, des dommages de fatigue ou le rayonnement d'un fort bruit indésirable.

Pour éviter que les vibrations ne soient un problème, le concepteur peut : (i) chercher à soustraire la structure aux sollicitations (suspension pour une voiture par exemple) ; ou (ii) ajouter de la masse et/ou de la raideur au système (pour éviter de faire coïncider les résonances de la structure avec l'excitation par exemple) ; ou bien encore (iii) utiliser un dispositif spécialement conçu pour jouer sur l'amortissement de la structure et régler le problème de vibration.

Une des solutions les plus utilisées pour réduire l'amplitude des vibrations est l'ajout de matériaux dissipatifs (par exemple viscoélastique) sur la structure. Ces matériaux, lorsqu'ils sont déformés, vont dissiper l'énergie des vibrations. Ils sont généralement placés là où la déformation est maximale pour le mode de vibration à réduire. C'est une solution simple à mettre en œuvre, peu onéreuse, efficace pour les vibrations hautes fréquences mais toujours pas efficace en basses fréquences (la quantité de matériau à ajouter pouvant devenir prohibitive).

Une deuxième manière de lutter contre les vibrations consiste à utiliser un amortisseur à masses accordées (Tuned Mass Damper). Ce type de dispositif peut être (i) un résonateur non amorti qui cherche à "pomper" l'énergie des vibrations de la structure principale ; ou (ii) un résonateur amorti, dans lequel un dispositif viscoélastique est rajoutée afin de dissiper également l'énergie. Ces dispositifs doivent être placés là où le déplacement est important et

imposent l'ajout d'une masse, ce qui peut être pénalisant. De plus, ils sont efficaces en basses fréquences mais nécessitent un accord précis.

Pour des cas de vibration à basses fréquences et à grande échelle, il est possible d'utiliser des amortisseurs à friction, hydrauliques ou magnéto-rhéologiques. Ces dispositifs doivent généralement être placés entre deux parties d'une structure ayant un déplacement relatif important, ce qui limite le nombre de leurs applications. Néanmoins, ce sont des technologies robustes, éprouvées et peu onéreuses.

Enfin, on peut citer les dispositifs faisant appel à un couplage électromécanique. Dans ce cas, on utilise un circuit électronique couplé à la structure pour réduire l'amplitude des vibrations. On peut citer deux grandes catégories de techniques :

- les systèmes électromagnétiques, qui utilisent le déplacement relatif d'aimants et de bobines. Comme pour les amortisseurs à friction, il est nécessaire d'avoir un déplacement relatif entre deux points ;
- les systèmes piézoélectriques, qui sont plus faciles à implémenter sur une structure quelconque car ils travaillent en déformation. Ces dispositifs sont généralement peu encombrants et peuvent être efficaces sur une large bande de fréquence. Dans cette thèse, c'est cette technique qui va être utilisée pour la réduction des vibrations et du rayonnement acoustique des structures.

1.1.1. Les technologies piézoélectriques

Les technologies piézoélectriques de réduction de vibrations peuvent être divisées en deux branches principales suivant le type des circuits électriques utilisés: (i) actives et (ii) passives.

Les systèmes actifs utilisent des capteurs et des actionneurs pour diminuer (contrôler) l'amplitude des vibrations en temps réels. Un contrôleur utilise des informations fournies par des capteurs pour élaborer une commande. Cette commande est envoyée grâce à un amplificateur aux éléments piézoélectriques actionneurs. Ce type de système peut être très efficace, mais requiert une électronique de contrôle et de puissance lourde et coûteuse en énergie, ce qui limite ses applications. De plus, comme de l'énergie est fournie au système, une commande mal maîtrisée peut engendrer une instabilité.

Dans les systèmes passifs, les circuits électriques connectés aux éléments piézoélectriques sont constitués uniquement de composants passifs (par exemple, une simple résistance). Dans

cette technologie, les éléments piézoélectriques convertissent une partie de l'énergie mécanique associée à la vibration de la structure en énergie électrique, qui ensuite est dissipée par effet joule à travers des circuits électriques (résistance électrique). Ces systèmes ont l'avantage de ne requérir ni énergie, ni information pour fonctionner, ce qui les rendent généralement moins chers que les systèmes actifs. L'efficacité est par contre à priori moins bonne.

Une variante des systèmes passifs, sont les systèmes semi-passifs qui utilisent des composants actifs pour le circuit électronique. À la différence d'un système actif, ils n'injectent pas directement d'énergie dans les éléments piézoélectriques. Ce type de système consomme relativement peu d'énergie (dans certains cas, il est possible d'alimenter un système semi-passif à partir d'une pile, ou même de l'énergie électrique présente dans l'élément piézoélectrique).

1.1.2. Shunts

Une catégorie particulière de dispositifs piézoélectriques passifs est celle faisant appel à des shunts linéaires. On appelle shunt un circuit qui vient se mettre en parallèle d'un autre. On peut citer le cas d'un shunt résistif (shunt "R") où une résistance électrique dissipera de la puissance par effet Joule et le cas d'un shunt inductif ou résonant (shunt "RL") où une inductance permet d'augmenter le courant circulant dans le shunt, et donc la dissipation par la résistance (Hagood et Von Flotow, 1991). Ces circuits doivent être accordés sur le mode de vibration que l'on souhaite réduire.

Parmi les systèmes semi-passifs, on peut citer les shunts à commutation où le circuit peut être ouvert ou fermé de manière synchronisée avec les vibrations de la structure. On peut citer notamment le cas des shunts "Synchronized Switch Damping on Short" (SSDS) et "Synchronized Switch Damping on Inductor" (SSDI), où le circuit associé est respectivement une résistance, ou bien une résistance et une inductance (Ducarne *et al.*, 2010). Chacun des circuits est de plus muni d'un dispositif à commutation qui ferme et ouvre le circuit à des instants bien choisis. Comme la commutation est synchronisée sur les vibrations, ce type de système est capable de s'adapter à différentes fréquences.

1.1.3. Objectifs

Le cadre général de cette thèse concerne le développement de techniques de réduction de vibrations et de rayonnement acoustique de structures minces dans le domaine des basses

fréquences à partir de l'utilisation d'éléments piézoélectriques aux bornes desquels on place un circuit électrique passif.

Le premier objectif du travail est de développer des modèles numériques adaptés à la simulation du comportement dynamique de systèmes complexes elasto-piézoélectriques. Il s'agira en particulier de construire des modèles éléments finis d'ordre réduit permettant de prendre en compte de façon efficace les couplages électromécaniques dus à la présence d'éléments piézoélectriques. Ces couplages conditionnent l'efficacité des dispositifs d'atténuation de vibrations.

Le deuxième objectif de la thèse est d'optimiser la taille et la position des éléments piézoélectriques ainsi que les circuits électriques associés de façon à diminuer les vibrations en basses fréquences. Les circuits électriques étudiés seront de type shunt résistif et shunt résonant.

Enfin, le troisième objectif de la thèse concerne la modélisation et l'optimisation de la réduction du rayonnement acoustique de structures minces dans le domaine de basses fréquences à partir des dispositifs piézoélectriques shuntés. Les modèles numériques d'ordre réduits développés et les procédures d'optimisation proposées précédemment seront utilisés.

1.2. Organisation du document

Ce document présente les travaux de recherche effectués depuis octobre 2010 au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Cnam Paris pour répondre à la problématique et aux objectifs de cette thèse donnés dans la section précédente. Il s'organise alors en cinq chapitres :

- Dans la première partie du Chapitre 2 nous proposons un rappel sur les matériaux piézoélectriques, notamment les piézocéramiques. Les phénomènes et les grandeurs physiques qui interviennent dans le comportement d'un matériau piézoélectrique sont ainsi introduits. La deuxième partie concerne la modélisation d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques. On présente alors deux formulations éléments finis : (i) une formulation 3D et (ii) une formulation simplifiée.
- La première partie du Chapitre 3 présente l'implémentation numérique des deux formulations éléments finis du Chapitre 2. Le choix des logiciels et l'algorithme d'implémentation sont détaillés. Dans la deuxième partie, nous proposons de vérifier

la validité de la formulation simplifiée. Plus particulièrement, l'hypothèse d'un potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur de la pastille piézoélectrique est analysée.

- Le Chapitre 4 concerne la technique de réduction de vibrations d'une structure élastique à partir de pastilles piézoélectriques shuntées. On présente tout d'abord un rappel sur la modélisation et l'optimisation de cette technique passive. On propose par la suite différentes stratégies basées sur la méthode de projection modale pour réduire le modèle électromécanique discrétisé par éléments finis. Enfin, on présente des exemples de validation où les différents modèles d'ordre réduit sont analysés. La stratégie la plus appropriée sera retenue pour la suite.
- Le chapitre 5 présente une procédure d'optimisation pour déterminer la position et la géométrie des éléments piézoélectriques sur une structure hôte élastique. L'approche proposée est basée sur une technique d'optimisation topologique consistant à trouver une solution optimale sans limitations des formes pour la géométrie des éléments piézoélectriques. Des exemples de validation et d'analyse sont présentés dans la dernière partie de ce chapitre.
- Le chapitre 6 concerne le développement d'une approche numérique pour modéliser et optimiser la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine des basses fréquences à partir des éléments piézoélectriques shuntés. On propose une approche valable pour n'importe quelle plaque mince bafflée et non trouée, indépendamment des conditions au limites. La dernière partie de ce chapitre présente des exemples d'analyse de l'approche proposée.
- Une conclusion rappelle les principaux résultats obtenus, les différentes originalités et donne quelques perspectives à ce travail.

Formulation éléments finis d'une structure élastique
avec pastilles piézoélectriques

2.1 Introduction à la piézoélectricité	26
2.1.1 Matériaux piézoélectriques.....	28
2.1.2 Piézoélectricité linéaire.....	33
Loi de comportement 3D.....	34
Loi de comportement réduite pour les plaques	37
Equations locales d'un milieu piézoélectrique.....	38
2.1.3 Coefficients de couplages électromécaniques	39
2.2 Modélisation éléments finis d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques.....	41
2.2.1 Etude bibliographique.....	42
2.2.2 Formulation 3D	42
Formulation variationnelle	43
Modèle éléments finis	44
Cas des pastilles piézocéramiques.....	45
2.2.3 Formulation simplifiée	48
Formulation variationnelle	48
Modèle éléments finis	49
2.3 Conclusions	51

Ce chapitre peut être divisé en deux parties principales : la première consiste en une introduction aux matériaux piézoélectriques et la deuxième concerne la modélisation de problèmes électromécaniques avec éléments piézoélectriques. Ce chapitre permettra également d'introduire les concepts et les notations utilisés par la suite

Dans la première partie, on présente les aspects technologiques des matériaux piézoélectriques, notamment les piézocéramiques. La loi de comportement piézoélectrique linéaire est ensuite exposée et réduite dans le cas des plaques, puis les équations dynamiques couplées d'un milieu piézoélectrique sont introduites. Finalement, les différents coefficients de couplage du matériau sont définis.

La seconde partie présente deux formulations éléments finis adaptées au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézocéramiques : (i) la première formulation, nommée formulation 3D, décrit la partie électrique de manière conventionnelle avec un degré de liberté électrique par nœuds (le potentiel électrique) ; (ii) la deuxième, nommée formulation simplifiée, est adaptée au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques minces. Son originalité, issue de (Thomas *et al.*, 2009), est qu'elle introduit des variables électriques globales : la différence de potentiel aux bornes des éléments piézoélectriques d'une part, et la charge contenue dans ses électrodes d'autre part.

2.1. Introduction à la piézoélectricité

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains matériaux de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et, réciproquement, de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique. Les deux effets sont indissociables. Le premier est appelé effet piézoélectrique direct (FIG. 2.1) et le second est l'effet piézoélectrique inverse (voir FIG. 2.2).

La première démonstration de l'effet piézoélectrique direct est due à Pierre et Jacques Curie en 1880 (Curie, 1859-1906). À cette époque, les deux frères sont préparateurs à la faculté des sciences de Paris. Combinant leurs connaissances de la pyroélectricité et de la structure cristalline, ils prédirent et vérifièrent l'existence de la piézoélectricité sur des cristaux de quartz, de tourmaline, de topaze, de sucre et de sel de Rochelle. L'existence de l'effet inverse fut prédite l'année suivante par Gabriel Lippmann (1881) sur la base de calculs thermodynamiques, et immédiatement vérifiée par les Curie (1859-1906). C'est également en 1881 que Wilhelm Hankel suggéra l'utilisation du terme piézoélectricité du grec "piezin" signifiant presser, appuyer.

FIG. 2.1- *Effet piézoélectrique direct.*FIG. 2.2- *Effet piézoélectrique inverse.*

La piézoélectricité resta une curiosité de laboratoire pendant une trentaine d'années. En 1910, Woldemar Voigt publie une étude rigoureuse des classes de cristaux asymétriques et de leurs propriétés piézoélectriques dans le formalisme de l'analyse tensorielle. D'un point de vue pratique, la piézoélectricité ne fut utilisée que pour réaliser quelques instruments de mesure en laboratoire (balance de précision et générateur de charges utilisant l'effet piézoélectrique respectivement direct et indirect).

L'invention du sonar par Paul Langevin, pendant la première guerre mondiale, et le développement du premier oscillateur à quartz, au début des années 1920, vont catalyser la recherche sur le sujet. Au cours de la seconde guerre mondiale, la recherche de matériaux diélectriques plus performants amena à la découverte des propriétés piézoélectriques de céramiques de synthèse composées d'oxydes à structure pérovskite (le titanate de baryum (BaTiO_3)), puis un peu plus tard les titano-zirconate de plomb ($\text{PbZr}_x\text{Ti}_{1-x}\text{O}_3$, abrégé en PZT). La demande importante va contribuer à créer une industrie de la céramique piézoélectrique.

Actuellement, les matériaux piézoélectriques trouvent de nombreuses applications dans l'industrie et la vie quotidienne, comme on le verra dans la suite de ce chapitre.

2.1.1. Matériaux piézoélectriques

Les matériaux avec propriétés piézoélectriques sont très nombreux. Ils sont normalement classés en grandes familles selon leur composition chimique, leur structure cristallographique ou leur intérêt scientifique ou industriel.

Comme principales catégories de matériaux piézoélectriques on a *les cristaux* (le quartz, le sucre, la tourmaline...), *les céramiques* (les PZTs), *les polymères* (PVDF et ses dérivés) et *les composites piézoélectriques* (association de fibres céramiques avec un réseau d'électrodes approprié).

Par la suite, seules les propriétés des céramiques piézoélectriques, utilisées dans cette thèse, seront abordées.

Céramiques

Une famille importante de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou Lead-Zirconate-Titanate en anglais) qui possèdent d'excellentes propriétés piézoélectriques. Leur formule générale s'écrit $A^{2+}B^{4+}O_3^-$ où A est un ion métallique divalent (comme le Plomb ou le Barium) et B est un ion métallique tétravalent (comme le titanium ou le zirconium). Une cellule élémentaire ou maille est représentée sur la FIG. 2.3.

À la différence des cristaux dont la structure est figée, les céramiques piézoélectriques ont une structure qui peut varier ; leur polarisation peut être modifiée, après quoi ils présentent une polarisation rémanente.

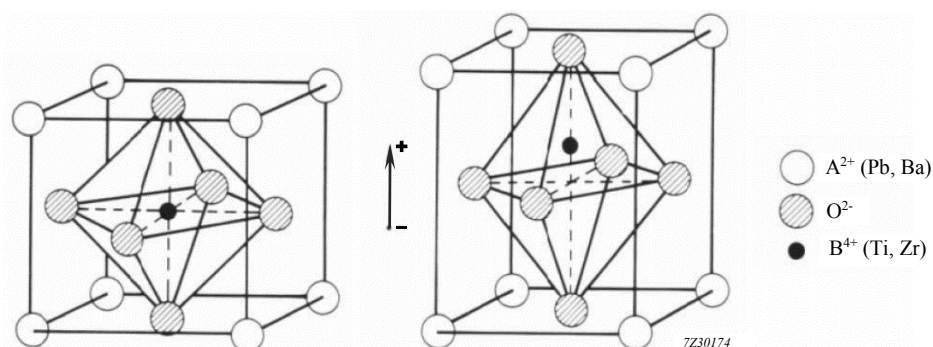


FIG. 2.3- Cellule élémentaire d'un PZT. Gauche : structure cubique non polarisée (au-dessus de la température de Curie) ; droite : structure tétragonale polarisée (en dessous de la température de Curie) (Morgan Electro Ceramics, 2014).

Structure initiale

Au-dessus d'une température appelée température de Curie (entre 200°C et 350°C pour les PZT (PI, 2014)), ces cristaux ont une structure cristalline cubique (FIG. 2.3 à gauche) avec les centres de gravité des charges positives et négatives coïncidents, si bien qu'ils ne sont pas polarisés ; comme ils sont souvent obtenus par frittage à chaud, ils commencent leur existence sous cette forme. Au sein du matériau, il est possible de distinguer plusieurs cristallites ou grains, où la structure est régulière. En dessous de la température de Curie, les cristaux ont une structure tétragonale (FIG. 2.3 à droite) pour laquelle l'ion B^{4+} n'est plus au centre de la structure, si bien que chaque maille est le siège d'un dipôle électrostatique, dont la direction et le moment peuvent être modifiés par application d'un champ électrostatique. Plusieurs mailles contiguës ont en général la même polarisation et constituent un domaine ferroélectrique (ou domaine de Weiss) auquel est associé un vecteur polarisation $\{\mathbf{P}\}$ particulier. Au sein d'une cristallite donnée peuvent coexister plusieurs domaines de Weiss, avec une polarisation qui peut prendre 6 directions différentes (la maille de la FIG. 2.3 à droite peut tourner dans 6 directions différentes). À ce stade, le matériau est globalement isotrope et ne présente pas de couplage piézoélectrique (FIG. 2.5(a)).

Polarisation

Une fois l'élément piézoélectrique équipé d'électrodes, un champ électrique important est appliqué. Le champ électrique $\{\mathbf{E}\}$, la polarisation $\{\mathbf{P}\}$ et le déplacement électrique $\{\mathbf{D}\}$ évoluent à des valeurs importantes (FIG. 2.4, tracé bleu) ; au sein du cristal, les ions B^{4+} se déplacent dans les mailles en direction de l'électrode négative. La polarisation augmente rapidement et de façon non linéaire ; dans chaque cristallite, le domaine de Weiss, qui correspond à une des 6 directions la plus proche du champ électrique, croît jusqu'à ce que chaque cristallite soit entièrement polarisé dans la même direction. Lorsque presque tous les dipôles sont alignés avec le champ électrique (FIG. 2.5(b)), la polarisation cesse d'augmenter rapidement ; la saturation est atteinte. Pendant ce processus, les mailles se déforment, s'étirent légèrement dans la direction du champ et se rétrécissent orthogonalement ; au niveau macroscopique le matériau s'étire dans la direction d'application du champ et se rétrécit dans les directions orthogonales.

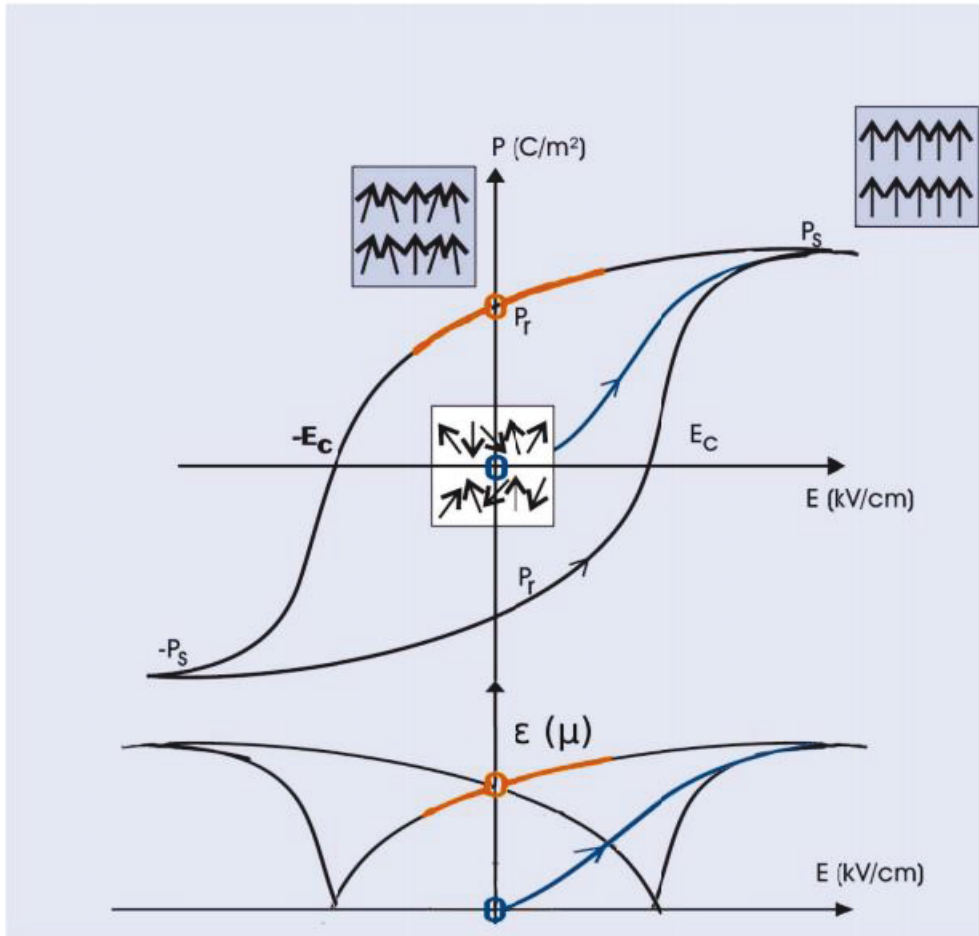


FIG. 2.4- Polarisation et déformation en fonction du champ électrique (Ducarne, 2009).

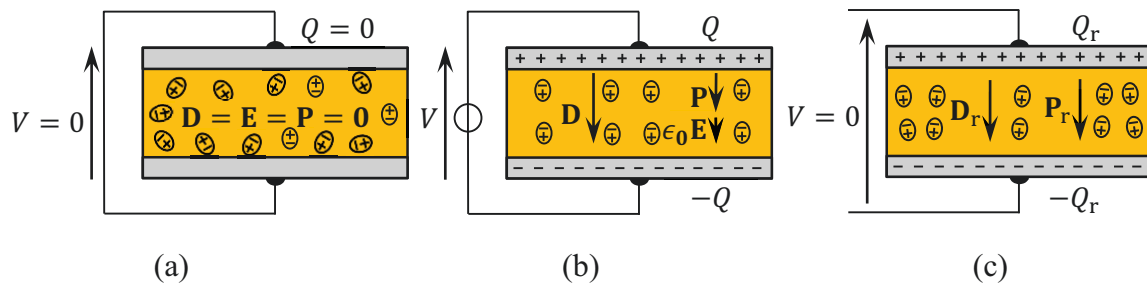


FIG. 2.5- Différents états d'une pastille piézoélectrique. (a) état non polarisé ($P = 0$) ; (b) état saturé ($P = P_s$) ; (c) pastille après polarisation ($P = P_r$) (Ducarne, 2009).

Polarisation rémanente

Lorsque l'application du champ électrique est interrompue et la différence de potentiel entre les électrodes est ramenée à 0 (FIG. 2.5(c), FIG. 2.4 au point cerclé en orange), les ions

ne se réarrangent pas dans les mailles de manière uniforme ; la plupart d'entre eux restent orientés vers l'électrode négative. Il subsiste ainsi une polarisation rémanente P_r et un déplacement électrique D_r , ainsi qu'une charge libre Q_r à la surface des électrodes, qui assure un champ électrique nul ($Q_r = P_r A$ où A est la surface des électrodes). Le matériau présente aussi une déformation rémanente. À partir de ce moment, les évolutions se font autour de cet état d'équilibre.

Effet piézoélectrique

Pour de petites variations du champ électrique autour de l'état polarisé, le milieu se déforme (FIG. 2.4, partie du graphique en orange) ; le matériau au niveau macroscopique présente désormais un couplage piézoélectrique. Une explication possible de ce phénomène réside dans le fait que les mailles sont plus ou moins toutes alignées ; l'application d'un champ électrique dans la direction de polarisation rémanente (souvent appelée direction 3) (FIG. 2.6), produit un étirement dans l'axe de polarisation (ce qu'on appelle le couplage "33") et une contraction dans les directions orthogonales (couplage "31") (FIG. 2.6, au centre). Ces deux couplages sont les plus fréquemment utilisés, car les mêmes électrodes sont utilisées pour la polarisation et pour utiliser l'effet piézoélectrique. Par contre, l'application d'un champ orthogonal à la direction de polarisation rémanente ; ce qui requiert de nouvelles électrodes et éventuellement d'enlever les anciennes ; produit un cisaillement du matériau (couplage "15" FIG. 2.6, à droite). En plus, au-dessus de certaines valeurs du champ électrique, le matériau risque de se dépolariser en changeant de branche du cycle de la FIG. 2.4.

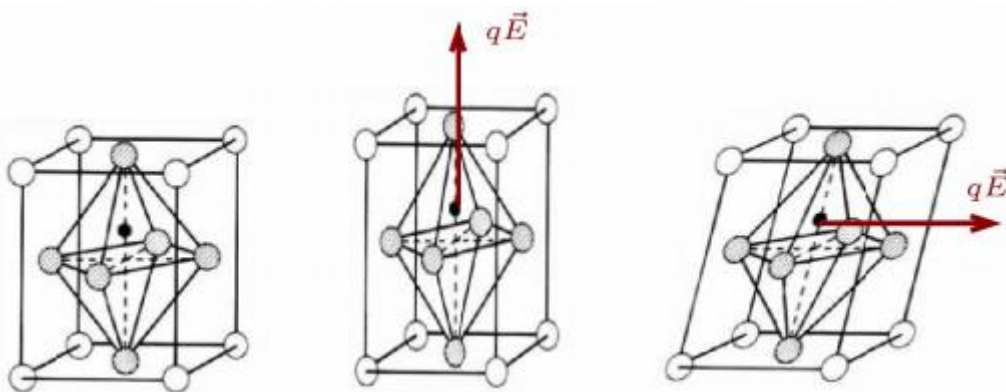


FIG. 2.6- Efforts sur l'ion positif et déformations de la maille pour un champ nul, parallèle ou orthogonal à la polarisation rémanente (Ducarne, 2009).

Propriétés

Les céramiques piézoélectriques sont produites et utilisées en volume. Du point de vue de la fabrication, l'obtention par frittage permet une variété de formes et de tailles bien plus importante que pour les cristaux. Pour obtenir un couplage important, il est préférable de maximiser le champ en tout point lors de la polarisation. Pour ce faire, une épaisseur constante entre les électrodes est préférable. Les éléments piézoélectriques sont donc très souvent des plaquettes droites ; il existe aussi des portions de coque sphérique (Saint-Gobain, 2014). Les céramiques présentent des couplages élevés, mais sont fragiles. Presque tous les paramètres piézoélectriques sont sensibles à la température (PI, 2014) et peuvent évoluer au cours du temps. Cependant, il est envisageable de les repolariser périodiquement afin de compenser ce vieillissement.

Exemples d'applications

Les éléments piézoélectriques sont utilisés pour des applications de capteur où l'effet piézoélectrique direct est utilisé, ou bien d'actionneur en utilisant l'effet piézoélectrique inverse. Ils ont des spécificités dans ce domaine qui les font préférer à d'autres éléments ou systèmes à couplage électromécanique, comme par exemple les alliages à mémoire de forme, les actionneurs électrodynamiques de type bobine-aimant et les dispositifs électrostrictifs :

- ce sont des actionneurs/capteurs solides travaillant directement en déformation, il n'y a pas de mécanisme pouvant s'user ou froter. Cela est un avantage pour les applications en milieux hostiles ;
- ils présentent une bonne linéarité et une réponse quasi-instantanée. Des applications haute fréquence sont ainsi possibles ;
- le phénomène étant réversible, le rendement est élevé ;
- la puissance massique admissible est importante, sous réserve de travailler en haute fréquence ;
- les céramiques sont très rigides (impédance mécanique élevée) et les tensions apparaissant sont élevées pour de faibles déformations (sensibilité).

En raison de ces qualités électromécaniques, les matériaux piézoélectriques trouvent un grand nombre d'applications dans l'industrie¹ et la vie quotidienne, telles que :

- l'allume-gaz et les briquets dits "électroniques" ;
- les capteurs de pression, d'effort, ou d'accélération où l'effet direct est utilisé ;
- les émetteurs ultrasonores utilisent l'effet indirect (par exemple, sonar de Langevin, hydrophones, échographie, les systèmes ultrasoniques air pour les détecteurs d'obstacles...);
- les filtres fréquentiels pour les applications FDM (Frequency Division Multiplex) ;
- les systèmes à onde acoustique de surface pour les filtres TV ;
- les moteurs piézoélectriques, ou moteurs à ultrasons ;
- les gyroscopes piézoélectriques ;
- les transducteurs pour atomiseurs de liquide ;
- les systèmes multi-éléments linéaires pour l'imagerie ultrasonore ;
- les multicouches céramiques pour les piézovannes pour injecteur diesel ;
- les systèmes basés sur les technologies couches minces comme les Micro et Nano ElectroMechanical Systems, dits MEMS et NEMS ;
- la récupération d'énergie de vibrations mécaniques sous forme électrique, appelée piezoelectric energy harvesting ;
- la réduction active, passive ou semi-passive du bruit et des vibrations.

2.1.2. Piézoélectricité linéaire

Cette section présente les lois de comportement d'un matériau piézoélectrique dans le cadre de la piézoélectricité linéaire ; le matériau est considéré linéaire lorsque les grandeurs

¹ Une étude de marché réalisée en 2008 par Innovative Research and Products (iRAP), intitulée Piezoelectric ceramic, polymer and ceramic/polymer composite devices - types, materials, applications, new developments, industry structure and global market, indique que la taille du marché global, constitué de 11 familles de technologies piézoélectriques, était de 10.6 milliards d'euros en 2007 et sera probablement autour de 19 milliards d'euros en 2012. Si les applications piézoélectriques traditionnelles représentent un marché mature, la demande adressée aux nouvelles technologies tire le marché global vers le haut puisqu'une croissance à 2 chiffres est attendue pour ce segment (Sénéchal, 2011).

électriques et mécaniques qui interviennent dans son comportement sont d'intensités modérées. Ces grandeurs sont :

- le champ des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}]$, un tenseur d'ordre 2, de composantes σ_{ij} , exprimées en Pa ;
- le champ des déformations $[\boldsymbol{\varepsilon}]$, un tenseur d'ordre 2, de composantes ε_{kl} , sans dimension ;
- le champ déplacement électrique $\{\mathbf{D}\}$, un tenseur d'ordre 1, de composantes D_i , exprimées en C/m² ;
- le champ électrique $\{\mathbf{E}\}$, un tenseur d'ordre 1, de composantes E_k , exprimé en V/m.

où les indices muets i, j, k, l peuvent correspondre aux trois directions x, y, z .

Loi de comportement 3D

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un milieu piézoélectrique montre que, à température constante (Lippman, 1881 ; Tiersten, 1969) :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad (2.1)$$

avec l'enthalpie H définie par :

$$H(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}) = U - \mathbf{E} \mathbf{D} \quad (2.2)$$

où U représente l'énergie interne. Dans le cadre d'une théorie linéaire, H s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^E E_i E_j \quad (2.3)$$

Les relations de comportement, dans le cadre de la piézoélectricité linéaire, sont alors donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \\ D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij}^E E_j \end{cases} \quad (2.4)$$

avec² :

² Le terme à droite de l'expression (2.5) correspond à l'approximation électrostatique du champ électrique.

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i(\psi) = -\psi_{,i} \quad (2.5)$$

et où :

- c_{ijkl}^E sont les constantes de raideur à champ électrique constant, exprimées en Pa ;
- e_{ijk} sont les constantes piézoélectriques, exprimées en N/m/V ;
- $\varepsilon_{ij}^\varepsilon$ sont les permittivités ou constantes diélectriques, à déformation constante (ou nulle), exprimées en F/m.

Ces constantes vérifient les symétries suivantes :

$$c_{ijkl}^E = c_{ijlk}^E = c_{jikl}^E = c_{klij}^E, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad \varepsilon_{ij}^\varepsilon = \varepsilon_{ji}^\varepsilon \quad (2.6)$$

Il est intéressant de remarquer que c'est à travers le tenseur des constantes piézoélectriques que se fait le couplage électromécanique propre au matériau. En l'absence de champ électrique, la première expression de l'Eq. (2.4) se ramène à la loi de Hooke.

Indices contractés et lois alternatives

En utilisant les notations de Voigt-Kelvin (Reddy, 1997), résumées dans le TAB. 2.1, et en tenant compte des symétries données par l'Eq. (2.6), la loi de comportement (2.4) peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

où maintenant $[\mathbf{C}^E]$ et $[\mathbf{e}]$ sont des tenseurs d'ordre 2 et $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ des vecteurs de dimension 6 (voir TAB. 2.1). De plus, la loi de comportement d'un matériau piézoélectrique peut s'écrire sous quatre formes équivalentes, comme le montre le TAB. 2.2 (IEEE, 1988). Les relations de passage entre les différentes constantes sont données dans le TAB. 2.3.

TAB. 2.1 : *Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt.*

	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{yz}	σ_{xz}	σ_{xy}	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}	$2\varepsilon_{yz}$	$2\varepsilon_{xz}$	$2\varepsilon_{xy}$
Voigt	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6

TAB. 2.2 : Différentes formes des lois de comportement piézoélectrique linéaire.

Forme	Variables indépendantes	Variables	Relations de comportement
“en d ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$	Intensives	$\begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{S}^E]\{\boldsymbol{\sigma}\} + [\mathbf{d}^T]\{\mathbf{E}\} \\ \{\mathbf{D}\} = [\mathbf{d}]\{\boldsymbol{\sigma}\} + [\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma]\{\mathbf{E}\} \end{cases}$
“en e ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$	Mélangées	$\begin{cases} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}^E]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - [\mathbf{e}^T]\{\mathbf{E}\} \\ \{\mathbf{D}\} = [\mathbf{e}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + [\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon]\{\mathbf{E}\} \end{cases}$
“en g ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$	Mélangées	$\begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{S}^D]\{\boldsymbol{\sigma}\} + [\mathbf{g}^T]\{\mathbf{D}\} \\ \{\mathbf{E}\} = -[\mathbf{g}]\{\boldsymbol{\sigma}\} + [\boldsymbol{\beta}^\sigma]\{\mathbf{D}\} \end{cases}$
“en h ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$	Extensives	$\begin{cases} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}^D]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - [\mathbf{h}^T]\{\mathbf{D}\} \\ \{\mathbf{E}\} = -[\mathbf{h}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + [\boldsymbol{\beta}^\varepsilon]\{\mathbf{D}\} \end{cases}$

TAB. 2.3 : Relation de passage entre les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques.

Elastiques	Piézoélectriques	Diélectriques
$[\mathbf{S}^D] = [\mathbf{S}^E - \mathbf{d}^T \mathbf{g}]$	$[\mathbf{d}] = [\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{g}]$	$[\boldsymbol{\beta}^\sigma] = [(\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^{-1}]$
$[\mathbf{C}^E] = [(\mathbf{S}^E)^{-1}]$	$[\mathbf{e}] = [\mathbf{d} \mathbf{C}^E]$	$[\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon] = [\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma - \mathbf{e} \mathbf{d}^T]$
$[\mathbf{C}^D] = [\mathbf{C}^E + \mathbf{e}^T \mathbf{h}]$	$[\mathbf{h}] = [\boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{e}]$	$[\boldsymbol{\beta}^\varepsilon] = [\boldsymbol{\beta}^\sigma - \mathbf{h} \mathbf{g}^T]$
$[\mathbf{C}^D] = [(\mathbf{S}^D)^{-1}]$	$[\mathbf{h}] = [\mathbf{g} \mathbf{C}^D]$	$[\boldsymbol{\beta}^\varepsilon] = [(\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon)^{-1}]$

Cas d'une céramique piézoélectrique

Dans le cas des céramiques piézoélectriques, les relations (2.4) correspondent à une linéarisation du comportement piézoélectrique autour de l'état de polarisation rémanente. Les champs $\{\mathbf{E}\}$ et $\{\mathbf{D}\}$ des relations (2.4) correspondent à des petites variations autour des valeurs à l'équilibre $\{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{P}_r\}$. D'autre part, la charge libre calculée à partir du $\{\mathbf{D}\}$ de (2.4) est, là encore, une variation autour de $Q = Q_r$ (FIG. 2.5(c)). D'un point de vue mécanique, une céramique piézoélectrique est en général considérée comme un matériau isotrope transverse, avec le plan d'isotropie orthogonal à la direction de polarisation. La relation (2.7), dans le cas où la direction de polarisation est $z \equiv 3$, s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Un matériau piézoélectrique isotrope transverse est donc caractérisé par 10 constantes indépendantes (5 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques). De plus, la polarisation explique les composantes nulles de l'opérateur $[\mathbf{e}]$: seule la composante suivant z ($E_3 = E_z$) du champ électrique crée des contraintes normales σ_{ii} . Inversement, seule la composante suivant z ($D_3 = D_z$) du déplacement électrique est modifiée par des déformations normales ε_{ii} .

Loi de comportement réduite pour les plaques

Dans le cas d'un solide piézoélectrique de la forme d'une plaque, la relation de comportement peut être réduite pour ne faire apparaître que les grandeurs mécaniques dans le plan moyen de la plaque et les grandeurs électriques dans la direction de polarisation.

Pour une plaque céramique piézoélectrique mince dont la direction de polarisation est la direction 3 ou z (direction transverse au plan moyen), la loi de comportement tridimensionnelle peut être réduite sous l'hypothèse de contraintes planes ($\sigma_{zz} = \sigma_3 = 0$) et en considérant que le champ de déplacement électrique est unidirectionnel avec $D_1 = D_2 = 0$. Sous ces hypothèses, la loi de comportement "en d " se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{12}^E & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ S_{12}^E & S_{11}^E & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E & 0 \\ \hline d_{31} & d_{31} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

et celle "en e " s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^E & \bar{C}_{12}^E & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{C}_{12}^E & \bar{C}_{11}^E & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

où \bar{C}_{11}^E , \bar{C}_{12}^E , \bar{e}_{31} et $\bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon$ sont des constantes matériaux modifiées en tenant compte de $\sigma_3 = 0$, définies par :

$$\bar{C}_{11}^E = \frac{C_{11}^E C_{33}^E - C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, \quad \bar{C}_{12}^E = \frac{C_{12}^E C_{33}^E - C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, \quad (2.11a)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}^E e_{33}}{C_{33}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon = \epsilon_{33}^\varepsilon + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}. \quad (2.11b)$$

Malgré la possibilité de réduire la loi de comportement tridimensionnelle en utilisant l'hypothèse de déformations planes ($\varepsilon_{zz} = 0$), seule la loi de comportement réduite à partir des hypothèses de contraintes planes sera abordée dans le cadre de cette thèse. Le lecteur est invité à consulter le mémoire de thèse de Salma Ghorbel (2009) pour une description complète ainsi que des comparaisons entre l'application de ces deux modèles au cas d'une plaque piézoélectrique.

Equations locales d'un milieu piézoélectrique

On rappelle dans ce paragraphe les équations locales d'un milieu piézoélectrique en fonction du champ de déplacement u_i et du potentiel électrique ψ . On considère ici un élément piézoélectrique occupant un domaine Ω_p au repos. Cet élément est soumis à un déplacement imposé u_i^d sur une partie Γ_u de sa frontière et à une densité d'efforts t_i^d sur la partie complémentaire Γ_t . Les conditions aux limites électriques sont définies par un potentiel électrique imposé ψ^d sur la partie Γ_ψ de la frontière et une densité surfacique de charge libre q^d sur la partie restante Γ_q . Ainsi, la frontière totale de l'élément piézoélectrique, notée $\partial\Omega_p$, est telle que : $\partial\Omega_p = \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma_\psi \cup \Gamma_q$ avec $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \Gamma_\psi \cap \Gamma_q = \emptyset$.

De plus, on note n_j le vecteur normal unitaire sortant de Ω_p , ρ la masse volumique et t le temps.

Les équations locales du problème s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_p \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.12b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.12c)$$

et :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p \quad (2.13a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \Gamma_q \quad (2.13b)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur } \Gamma_\psi \quad (2.13c)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions initiales.

L'Eq. (2.12a) est l'équation fondamentale de la dynamique pour une structure libre d'efforts volumiques ; les Eqs. (2.12b) et (2.12c) sont les conditions aux limites mécaniques ; l'Eq. (2.13a) est la loi de Gauss libre de champs électriques volumiques ; les Eqs. (2.13b) et (2.13c) sont les conditions aux limites électriques (Johnk, 1988). Il est important de remarquer que l'Eq. (2.13b) n'est valide que lorsque le déplacement électrique autour de Ω_p est négligeable par rapport à celui régnant à l'intérieur. Le cas échéant, il faut considérer le saut de valeur à l'interface dans (2.13b). De plus, aucune charge volumique libre n'est présente dans Ω_p , car c'est soit un isolant (cas le plus fréquent, sans charge libre), soit un conducteur (cas où les charges libres sont toujours concentrées aux bords sous forme de densité surfacique) (Johnk, 1988).

Les Eqs. (2.12) et (2.13) sont complétées par la loi de comportement (2.4), qui relie le tenseur des contraintes σ_{ij} et le vecteur de champ électrique D_i au tenseur des déformations linéarisée ε_{ij} et au vecteur champ électrique E_i , pour prendre en compte les effets piézoélectriques directs et indirects.

2.1.3. Coefficients de couplages électromécaniques

Les coefficients de couplage électromécanique sont des paramètres généralement utilisés pour évaluer l'efficacité d'un matériau piézoélectrique. La valeur de ces coefficients, sans dimension, est comprise entre 0 et 1 (elle peut aussi être exprimée en pourcentage). Plus le coefficient s'approche de 1, meilleure est la capacité du matériau à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa. Parmi les nombreuses définitions qui sont

proposées dans la littérature (Ikeda, 1990), le coefficient de couplage k peut être défini par les deux relations équivalentes suivantes (Mason, 1950) :

$$k^2 = \frac{\text{énergie électrique stockée}}{\text{énergie mécanique fournie}} = \frac{\text{énergie mécanique stockée}}{\text{énergie électrique fournie}} \quad (2.14)$$

Un exemple est l'expression usuelle de k_{31} , définie par la norme IEEE (1988) :

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} \quad (2.15)$$

Ce coefficient est généralement déterminé par le constructeur à partir d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, chargé en traction compression suivant son axe 1, muni d'électrodes dans la direction 3 et soumis à des cycles de transformation imposés.

Une autre manière de faire apparaître le rapport des énergies, est de considérer les fréquences propres de vibrations d'un matériau piézoélectrique, soit en court-circuit (ω_i), soit en circuit-ouvert ($\hat{\omega}_i$). L'exemple d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique vibrant en traction compression suivant son axe 1 (direction x) et muni d'électrodes dans la direction 3 est étudié dans (Ducarne, 2009). Dans cette étude, qui ne prend pas en compte la condition d'équipotentialité sur les surfaces des électrodes et considère que toutes les grandeurs ne dépendent que de x , le rapport des carrés des fréquences propres est identique à celui des raideurs :

$$\frac{\hat{\omega}_i^2}{\omega_i^2} = \frac{S_{11}^E}{S_{11}^D} = \frac{\check{C}_{11}^D}{\check{C}_{11}^E} \quad (2.16)$$

où \check{C}_{11}^D et \check{C}_{11}^E sont de constantes matériaux modifiées en tenant compte des hypothèses poutre ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$). De plus, à partir des relations entre les coefficients de couplage et les constants matériaux, il est possible d'obtenir deux mesures du couplage :

$$k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2} \quad \text{ou} \quad k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2} \quad (2.17)$$

Les coefficients de couplage matériaux peuvent donc être directement reliés aux rapports des fréquences propres en court-circuit et circuit-ouvert d'un solide piézoélectrique.

Dans le cas d'une structure élastique équipée de P pastilles piézoélectriques, les coefficients de couplage, généralement appelés facteurs de couplage effectifs, caractérisent

l'échange d'énergie entre les éléments piézoélectriques et la structure. Selon la norme IEEE (1988), le calcul de k_{31} à partir de la première expression de l'Eq. (2.17) définit le facteur de couplage effectif $k_{\text{eff},i}$ pour le i -ième mode. Cependant, par convenance, c'est k_{31} défini par la seconde expression de l'Eq. (2.17) qui sera utilisé dans la suite.

2.2. Modélisation éléments finis d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques

On présente dans cette section deux formulations éléments finis adaptées au cas d'une structure élastique équipée avec P pastilles piézoélectriques. Les pastilles sont munies d'électrodes sur leurs surfaces supérieures et inférieures et polarisées dans leurs directions transverses (direction normale aux électrodes).

La première partie est dédiée au développement d'une formulation électromécanique sans hypothèses électriques additionnelles à part : (i) l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes et (ii) la nullité du déplacement électrique D_i et des constantes piézoélectriques e_{ijk} dans la structure élastique (Deü *et al.*, 2008). Dans cette formulation, qui est nommée ici formulation 3D, les parties mécaniques et électriques sont décrites de manière conventionnelle en fonction du déplacement et du potentiel électrique (u_i, ψ) . Malgré la description complète du champ électrique, l'utilisation de cette formulation, associée à des modèles éléments finis 3D, peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. De plus, la condition d'équipotentialité sur les surfaces des électrodes est intégrée à posteriori dans le modèle en imposant un potentiel identique à tous les nœuds correspondants.

La deuxième partie de cette section concerne la description d'une formulation éléments finis adaptée au cas d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques minces (Thomas *et al.*, 2009), nommée ici formulation simplifiée. Outre le déplacement mécanique de la structure, cette formulation utilise un seul couple de variables électriques par pastille piézoélectrique : la différence de potentiel et la charge électrique. Ce choix permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, il permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème les équations liées aux circuits électriques connectés aux patchs piézoélectriques.

2.2.1. Etude bibliographique

Le premier travail sur des éléments finis électromécaniques couplés par piézoélectricité a été réalisé par Allik et Hughes (1970). Ce travail repose sur une formulation couplant par effet direct et inverse les champs de déplacement mécanique et de potentiel électrique. On peut remarquer que dans le cas d'applications capteur ou actionneur uniquement, les variables électriques peuvent être condensées de sorte que le problème à résoudre prend la forme d'un problème d'élasticité conventionnel, avec l'effet d'éventuels actionneurs piézoélectriques similaire à un effort imposé proportionnel à la tension. Depuis, de nombreuses recherches ont portées sur le développement d'éléments finis piézoélectrique, parfois en utilisant la similitude avec la théorie de la thermo-élasticité (Tzou et Tseng, 1990 ; Hwang et Park, 1993 ; Kim *et al.*, 1997 ; Trindade *et al.*, 2001 ; Kögl and Bucalem, 2002 ; Bernaddou et Haenel, 2003a, 2003b ; Lammering et Mesecke-Rischmann, 2003 ; Vasques et Rodrigues, 2005 ; Carrera et Boscolo, 2007). Les premiers modèles concernent principalement des éléments volumiques 3D. A partir de la fin des années 1990, des éléments piézoélectriques du type poutre, plaque et coque sont utilisés plus fréquemment. On peut trouver dans (Saravanos et Heyliger, 1999 ; Benjeddou, 2000 ; Mackerle, 2003) une revue des développements dans le domaine.

Dans la suite, on présente le développement de deux formulations éléments finis (formulation 3D et formulation simplifiée), comme spécifié précédemment. À la différence de la plupart des modèles, la formulation simplifiée est très bien adaptée au cas des circuits type shunt (voir Chapitre 4). De plus, elle peut être appliquée à différents types d'éléments finis (3D, poutre, plaque, coque,...).

2.2.2. Formulation 3D

On considère une structure élastique qui occupe le domaine Ω_s munie de $P \in \mathbb{N}$ éléments piézoélectriques occupant chacun le domaine $\Omega^{(p)}$, $1 \leq p \leq P$. Le domaine total est noté Ω tel que $\Omega = \{\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)}\}$ (FIG. 2.7). Une partie Γ_u de la frontière de Ω est soumise à un déplacement imposé u_i^d tandis que sur la partie complémentaire Γ_t est appliquée une densité d'efforts t_i^d . Les éléments piézoélectriques sont soumis à un potentiel électrique imposé ψ^d sur la partie Γ_ψ du bord du domaine et à une densité surfacique de charge libres q^d sur la partie complémentaire Γ_q du bord. Ainsi, la frontière totale du système, notée $\partial\Omega$, est telle que $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma_\psi \cup \Gamma_q$ avec $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \Gamma_\psi \cap \Gamma_q = \emptyset$. De plus, on considère que :

1. seuls les éléments piézoélectriques sont constitués de matériau piézoélectrique. Les constantes de couplage piézoélectrique e_{ijk} sont donc nulles dans Ω_s ;
2. le champ de déplacement électrique, de composantes D_i , est négligé dans Ω_s par rapport à sa valeur dans $\Omega^{(p)}$ (Ducarne, 2009). Cependant le champ électrique ne s'annule pas toujours dans Ω_s .

Ainsi, les équations d'équilibre dynamique de ce problème sont identiques aux Eqs. (2.12) et (2.13) avec l'extension du domaine d'application de l'Eq. (2.12a) au domaine Ω au lieu de Ω_p .

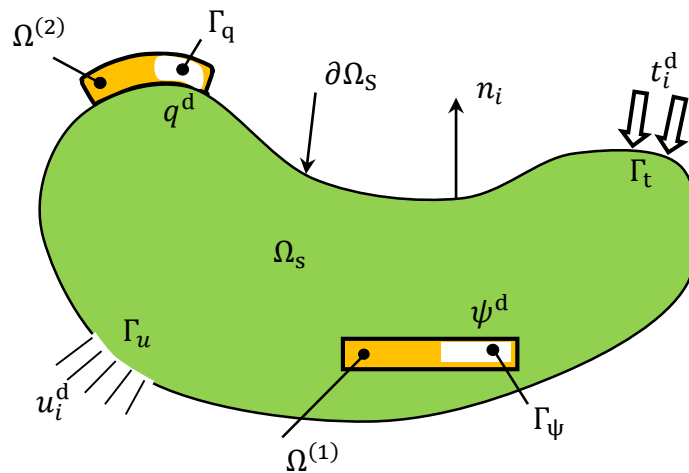


FIG. 2.7- Structure élastique munie de deux éléments piézoélectriques.

Formulation variationnelle

La formulation variationnelle associée aux équations locales de ce problème électromécanique est déterminée à partir de la méthode des fonctions tests (Larbi, 2006) :

- On introduit l'espace C_u des fonctions-tests suffisamment régulières, définies dans Ω et indépendantes du temps. En multipliant l'Eq. (2.12a) par une fonction test $\delta u_i \in C_u^* = \{\delta u_i \in C_u \mid \delta u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$, en appliquant la formule de Green, et enfin en tenant compte de l'Eq. (2.12b), des lois de comportement (2.4), et des considérations 1 et 2, on obtient, dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega - \sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} e_{ijk} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega \\
 & - \omega^2 \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i dS, \quad \forall \delta u_i \in C_u^*,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

- De même, on introduit l'espace C_ψ des fonctions-tests suffisamment régulières, définies dans Ω et indépendantes du temps. En multipliant l'Eq. (2.13a) par une fonction test $\delta\psi \in C_\psi^* = \{\delta\psi \in C_\psi \mid \delta\psi = 0 \text{ sur } \Gamma_\psi\}$, en appliquant la formule de Green, et enfin en tenant compte de l'Eq. (2.13b), de la relation de comportement (2.4), et des considérations 1 et 2, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) d\Omega + \sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} \varepsilon_{ik}^\xi E_k(\psi) E_i(\delta\psi) d\Omega \\
 & = \int_{\Gamma_q} q^d \delta\psi dS, \quad \forall \delta\psi \in C_\psi
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

La formulation variationnelle du problème électromécanique couplé consiste alors à trouver $\omega \in \mathbb{R}^+$, $u_i \in C_u$ et $\psi \in C_\psi$, satisfaisant les Eqs. (2.18) et (2.19).

Modèle éléments finis

Après discrétisation par éléments finis des formes bilinéaires de la formulation variationnelle ci-dessus, on obtient le système matriciel suivant :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\psi} \\ -\mathbf{K}_{u\psi}^T & \mathbf{K}_\psi \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

avec $\{\mathbf{U}\}$ et $\{\mathbf{\Psi}\}$ les vecteurs des degrés de liberté relatifs à u_i et à ψ , les autres sous-matrices et sous-vecteurs de l'Eq. (2.20) sont donnés par :

$$\int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega \Rightarrow \{\delta\mathbf{U}\}^T [\mathbf{M}_u] \{\mathbf{U}\} \tag{2.21a}$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega \Rightarrow \{\delta\mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}_u] \{\mathbf{U}\} \tag{2.21b}$$

$$-\sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega \Rightarrow \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}_{u\psi}] \{\Psi\} \quad (2.21c)$$

$$\int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i dS \Rightarrow \{\delta \mathbf{U}\}^T \{\mathbf{F}\} \quad (2.21d)$$

$$\sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta \psi) d\Omega \Rightarrow -\{\delta \Psi\}^T [\mathbf{K}_{u\psi}]^T \{\mathbf{U}\} \quad (2.21e)$$

$$\sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}} \varepsilon_{ik}^\varepsilon E_k(\psi) E_i(\delta \psi) d\Omega \Rightarrow \{\delta \Psi\}^T [\mathbf{K}_\psi] \{\Psi\} \quad (2.21f)$$

$$\int_{\Gamma_q} q^d \delta \psi dS \Rightarrow \{\delta \Psi\}^T \{\mathbf{q}\} \quad (2.21g)$$

où $[\mathbf{M}_u]$ et $[\mathbf{K}_u]$ sont les matrices de masse et de rigidité mécanique, de taille $N_m \times N_m$, avec N_m le nombre de degrés de liberté mécanique ; $[\mathbf{K}_{u\psi}]$ est la matrice de couplage électromécanique, de taille $N_m \times N_e$, avec N_e le nombre de degrés de liberté électrique ; $[\mathbf{K}_\psi]$ correspond à la matrice diélectrique, de taille $N_e \times N_e$; $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur des forces nodales appliquées sur la structure, de taille N_m ; et $\{\mathbf{q}\}$ est le vecteur de charges électriques, de taille N_e .

Cas des pastilles piézocéramiques

La formulation donnée par l'expression (2.20) peut être appliquée à des problèmes avec différentes catégories et formes d'éléments piézoélectriques. Dans le cas particulier de pastilles piézocéramiques planes d'épaisseur constante, notée $h^{(p)}$, et en considérant que :

- les surfaces supérieures et inférieures des pastilles sont munies d'électrodes conductrices très fines (FIG. 2.8) ;
- les pastilles sont polarisées dans la direction transverse (i.e. suivant l'épaisseur) ;
- la condition d'équipotentialité sur les surfaces des électrodes est appliquée en imposant un potentiel identique à tous les nœuds correspondants ;
- aucune charge libre surfacique n'est présente sur les surfaces latérales des pastilles piézoélectriques, ce qui est vérifié si ces surfaces sont en contact avec un milieu diélectrique ne pouvant amener de charges libres (Ducarne, 2009),

l'Eq. (2.20) devient :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\psi_+} & \mathbf{K}_{u\psi_{int}} & \mathbf{K}_{u\psi_-} \\ -\mathbf{K}_{u\psi_+}^T & \mathbf{K}_{\psi_+} & \mathbf{K}_{\psi_{+int}} & \mathbf{K}_{\psi_{+-}} \\ -\mathbf{K}_{u\psi_{int}}^T & \mathbf{K}_{\psi_{+int}}^T & \mathbf{K}_{\psi_{int}} & \mathbf{K}_{\psi_{int-}} \\ -\mathbf{K}_{u\psi_-}^T & \mathbf{K}_{\psi_{+-}}^T & \mathbf{K}_{\psi_{int-}}^T & \mathbf{K}_{\psi_-} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Psi_+ \\ \Psi_{int} \\ \Psi_- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q}_+ \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_- \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

où $\{\Psi_+\} = [\psi_+^{(1)}, \dots, \psi_+^{(p)}]^T$, $\{\Psi_-\} = [\psi_-^{(1)}, \dots, \psi_-^{(p)}]^T$, $\{\mathbf{Q}_+\} = [Q_+^{(1)}, \dots, Q_+^{(p)}]^T$ et $\{\mathbf{Q}_-\} = [Q_-^{(1)}, \dots, Q_-^{(p)}]^T$ sont les vecteurs des potentiels et charges électriques sur les surfaces des électrodes supérieures et inférieures des pastilles piézoélectriques. $\{\Psi_{int}\} = [\Psi_{int}^{(1)}, \dots, \Psi_{int}^{(p)}]^T$ où $[\Psi_{int}^{(p)}]^T$ est le vecteur des potentiels électriques dans les nœuds internes entre les surfaces supérieure et inférieure de la p -ième pastille piézoélectrique.

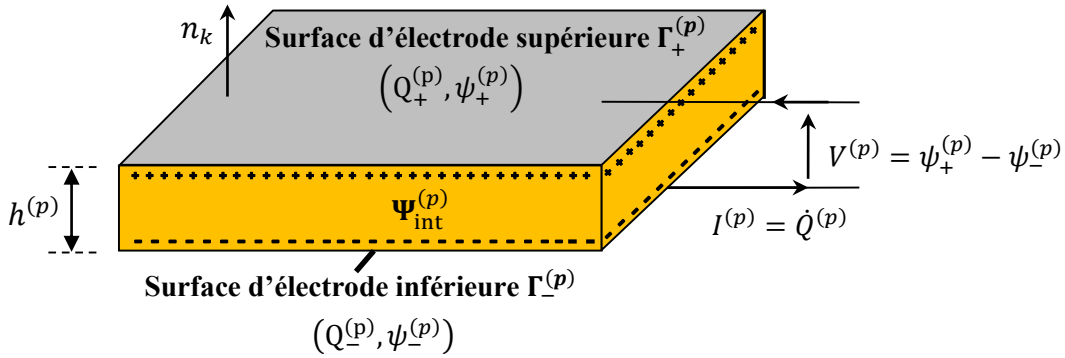


FIG. 2.8- p -ième pastille piézoélectrique soumise à la différence de potentiel $V^{(p)}$, avec les potentiels $\psi_+^{(p)}$ et $\psi_-^{(p)}$ et les charges $Q_+^{(p)}$ et $Q_-^{(p)}$ sur les surfaces des électrodes.

De plus, à l'équilibre électrostatique, en appliquant la forme intégrale du théorème de Gauss (Johnk, 1988) à une surface fermée Σ entourant le p -ième élément on obtient:

$$\oint_{\Sigma} D_i n_i dS = Q \quad (2.23)$$

L'application de cette équation à la frontière de Ω_s et au domaine externe de Ω , montre que le côté gauche de l'Eq. (2.23) s'annule et la charge libre intégralement contenue dans Σ est nulle, ce qui établit que les charges à la surface des électrodes sont opposées $Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}$. La formulation (2.22) peut être alors réécrite sous la forme suivante, en notant

$\{\mathbf{V}\} = [V^{(1)}, \dots, V^{(p)}]^T$ avec $V^{(p)} = \psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}$ la différence de potentiel électrique entre les surfaces supérieures et inférieures de la p -ième pastille et en choisissant $\psi_-^{(p)} = 0$, donc $V^{(p)} = \psi_+^{(p)}$:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\psi_+} & \mathbf{K}_{u\psi_{int}} \\ \mathbf{K}_{u\psi_+}^T & -\mathbf{K}_{\psi_+} & -\mathbf{K}_{\psi_{int}} \\ \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^T & -\mathbf{K}_{\psi_{int}}^T & -\mathbf{K}_{\psi_{int}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\Psi}_{int} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

ou encore, en considérant la charge comme degré de liberté et la différence de potentiel comme grandeur imposée :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^* & \mathbf{K}_{u\psi_+}^* & \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^* \\ \mathbf{K}_{u\psi_+}^{*T} & \mathbf{K}_{\psi_+}^{-1} & \mathbf{K}_{\psi_{int}}^* \\ \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^{*T} & \mathbf{K}_{\psi_{int}}^{*T} & \mathbf{K}_{\psi_{int}}^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\Psi}_{int} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

avec :

$$[\mathbf{K}_u^*] = [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{u\psi_+} \mathbf{K}_{\psi_+}^{-1} \mathbf{K}_{u\psi_+}^T], \quad [\mathbf{K}_{u\psi_+}^*] = [\mathbf{K}_{u\psi_+} \mathbf{K}_{\psi_+}^{-1}], \quad (2.26a)$$

$$[\mathbf{K}_{u\psi_{int}}^*] = [\mathbf{K}_{u\psi_{int}} - \mathbf{K}_{u\psi_+} \mathbf{K}_{\psi_+}^{-1} \mathbf{K}_{\psi_{int}}^T], \quad [\mathbf{K}_{\psi_{int}}^*] = [-\mathbf{K}_{\psi_+}^{-1} \mathbf{K}_{\psi_{int}}] \quad (2.26b)$$

$$[\mathbf{K}_{\psi_{int}}^*] = [-\mathbf{K}_{\psi_{int}} + \mathbf{K}_{\psi_{int}}^T \mathbf{K}_{\psi_+}^{-1} \mathbf{K}_{\psi_{int}}]. \quad (2.26c)$$

Le fait de choisir $\{-\mathbf{Q}\}$ à la place de $\{\mathbf{Q}\}$ dans l'Eq. (2.24), conduit à des systèmes matriciels symétriques.

De plus, selon que les pastilles sont en court-circuit ($\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{0}\}$) ou en circuit-ouvert $\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\}$, le problème homogène de vibrations libres associé à (2.24) et (2.25) prend les deux formes suivantes :

- en court-circuit :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\psi_{int}} \\ \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^T & -\mathbf{K}_{\psi_{int}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Psi}_{int} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.27a)$$

- en circuit-ouvert :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^* & \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^* \\ \mathbf{K}_{u\psi_{int}}^{*T} & \mathbf{K}_{\psi_{int}}^* \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Psi}_{int} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.27b)$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ijk} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i dS, \quad \forall \delta u_i \in C_u^* \quad (2.29)$$

et

$$\begin{aligned} - \sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i d\Omega + \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} \\ = \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)}, \quad \forall \delta V^{(p)} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec $C^{(p)} = \varepsilon_{33}^E S^{(p)} / h^{(p)}$ la capacité de la p -ième pastille piézoélectrique et $Q^{(p)}$ la charge électrique présente sur son électrode supérieure. De plus, $\varepsilon_{33}^E = \varepsilon_{ik}^E n_i n_k$ est la permittivité à déformation constante (ou bloquée) du matériau dans la direction normale aux électrodes et $S^{(p)}$ est la surface moyenne de l'élément.

La nouvelle formulation variationnelle consiste alors à trouver $\omega \in \mathbb{R}^+$, $u_i \in C_u^*$ et les P charges électriques $Q^{(p)}$ (avec les différences de potentiel $V^{(p)}$ imposées), satisfaisant les Eqs. (2.29) et (2.30).

Modèle éléments finis

Après discrétisation par éléments finis de la formulation variationnelle (Eqs. (2.29) et (2.30)), on obtient le système matriciel suivant :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{uv} \\ -\mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

avec $\{\mathbf{U}\}$ le vecteur des degrés de liberté relatif à u_i , $\{\mathbf{V}\} = [V^{(1)}, \dots, V^{(P)}]^T$ le vecteur de différences de potentiel, et les sous-matrices et sous-vecteurs définis par :

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega \Rightarrow \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathbf{K}_{uv}] \{\mathbf{V}\} \quad (2.32a)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i d\Omega \Rightarrow \{\delta \mathbf{V}\}^T [\mathbf{K}_{uv}]^T \{\mathbf{U}\} \quad (2.32b)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} \Rightarrow \{\delta \mathbf{V}\}^T [\mathbf{K}_v] \{\mathbf{V}\} \quad (2.32c)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)} \Rightarrow \{\delta \mathbf{V}\}^T \{\mathbf{Q}\} \quad (2.32d)$$

où $[\mathbf{K}_{uv}]$ est la matrice de couplage électromécanique, de taille $N_m \times P$; $[\mathbf{K}_v] = \text{diag}([C^{(1)}, \dots, C^{(P)}])$ est la matrice diagonale de capacités des P pastilles ; et $\{\mathbf{Q}\} = [Q^{(1)}, \dots, Q^{(P)}]^T$ est le vecteur colonne des charges électriques.

Le système (2.31) peut être reformulé avec la charge comme degré de liberté et la différence de potentiel imposée :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_u & \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

où $[\hat{\mathbf{K}}_u] = [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T]$ est la matrice de raideur en circuit-ouvert.

De plus, selon que les pastilles sont en court-circuit ($\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{0}\}$) ou en circuit-ouvert $\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\}$, le problème homogène associé à (2.31) et (2.33) prend les deux formes suivantes :

- en court-circuit :

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}_u] + [\mathbf{K}_u]) \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.34a)$$

- en circuit-ouvert :

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}_u] + [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T]) \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.34b)$$

Remarques

- Cette formulation éléments finis est adaptée à toute structure élastique munie de pastilles piézoélectriques minces. Sa principale originalité est qu'elle introduit des variables électriques globales (la différence de potentiel aux bornes des éléments piézoélectriques d'une part et la charge contenue dans ses électrodes d'autre part). Sans aucune restriction sur la partie mécanique du problème, toute formulation éléments finis standard peut être alors facilement modifiée pour intégrer l'effet des pastilles piézoélectriques et donc l'effet d'une action électrique externe. De plus, le

choix d'utiliser les variables électriques globales permet : (i) de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes et, (ii) d'intégrer facilement dans la formulation du problème les équations liées aux circuits électriques connectés aux pastilles piézoélectriques (voir Chapitre 4).

- Il est à noter que le problème modal associé au cas où les pastilles sont toutes court-circuitées (2.34a) ne dépend que de propriétés élastiques de Ω . De plus, l'effet du couplage électromécanique en circuit-ouvert sur la structure apparaît comme un effet de raideur ajoutée $[\mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T]$.

2.3. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les aspects technologiques des matériaux piézoélectriques, notamment des céramiques piézoélectriques. Nous avons également introduit la loi de comportement piézoélectrique tridimensionnelle et celle réduite au cas des plaques. Ces lois de comportement seront utilisées dans la suite du document. Les équations dynamiques d'un milieu piézoélectrique ont été ensuite présentées. Finalement, deux formulations éléments finis adaptées au cas d'une structure élastique munie de P pastilles piézoélectriques ont été développées.

La formulation simplifiée proposée, qui ne contient qu'un seul couple de variables électriques par pastille piézoélectrique (la différence de potentiel et la charge électrique dans une électrode), permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, elle permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux pastilles piézoélectriques.

Dans la suite, on s'intéresse à la formulation simplifiée et à la réduction de vibrations à partir des systèmes piézoélectriques shuntés. Le chapitre suivant présente la stratégie d'implémentation numérique des modèles éléments finis utilisés dans cette thèse et analyse la validité de la formulation simplifiée par comparaison avec les résultats de la formulation 3D.

Implémentation numérique et comparaison des modèles

3.1 Implémentation numérique des modèles éléments finis	54
3.1.1 Outils numériques utilisés	54
3.1.2 Implémentation des formulations éléments finis.....	57
3.2 Comparaison des modèles	59
3.2.1 Développement d'une solution exacte 3D : vibrations libres d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée.....	60
Formulation en espace d'état.....	60
Plaque piézoélectrique en appui simple	62
Validation de la formulation exacte dans le cas élastique.....	65
3.2.2 Exemple d'une pastille piézoélectrique simplement appuyée.....	68
3.2.3 Exemple d'une poutre avec une pastille piézoélectrique shuntée	73
3.2.4 Exemple d'un pot d'échappement automobile muni d'une pastille piézoélectrique shuntée.....	78
3.2.5 Exemple d'une poutre console : corrélation calcul-essai	81
3.3 Conclusions	83

On présente dans la première partie de ce chapitre l'implémentation numérique des deux formulations éléments finis proposées précédemment. Le choix des logiciels et l'algorithme d'implémentation sont détaillés.

Dans la seconde partie, on propose de vérifier la validité de la formulation simplifiée par comparaison avec la formulation 3D. Plus particulièrement, l'hypothèse d'un potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur de la pastille piézoélectrique est analysée. Trois exemples sont proposés : (i) une pastille piézoélectrique simplement appuyée, (ii) une poutre encastrée-libre munie d'une pastille piézoélectrique shuntée et (iii) un silencieux automobile avec une pastille piézoélectrique shuntée. Enfin, une comparaison d'un modèle éléments finis 2D avec les mesures expérimentales réalisés sur une poutre console munie de pastilles piézoélectriques (Ducarne, 2009) est présenté.

3.1. Implémentation numérique des modèles éléments finis

La partie implémentation numérique de cette thèse fait suite aux travaux de recherche de Aurélien Sénéchal (2011), réalisé dans le cadre de sa thèse sur la réduction des vibrations de structures complexes par shunts piézoélectriques, où l'auteur a utilisé *Nastran* en association avec *Patran*, *Matlab* et le langage de programmation *Awk* pour l'implémentation numérique de sa stratégie de control. Cette méthodologie est adapté dans ce travail en utilisant le langage de programmation DMAP (Direct Matrix Abstract Programming) et des éléments finis du type hexaèdre à 20 nœuds (HEXA 20) et quadrilatéral à 4 nœuds (QUAD 4) de *Nastran* (MSC, 2010).

3.1.1. Outils numériques utilisés

Les principales raisons à partir desquelles les logiciels mentionnés ci-dessus ont été sélectionnés sont :

- la résolution des problèmes dynamiques complets (sans réduction de modèle) ainsi que des problèmes aux valeurs propres associés, issus d'un modèle éléments finis de plusieurs milliers de degrés de libertés. En effet, ces opérations coûteuses en temps de calcul requièrent l'utilisation d'un code industriel performant ;
- le management et le pilotage des différentes étapes de l'algorithme de calcul ainsi que l'implémentation d'opérations spécifiques telles que la construction des matrices de couplage électromécanique $[\mathbf{K}_{uv}]$ et $[\mathbf{K}_{u\psi}]$ et des matrices diélectriques $[\mathbf{K}_v]$ et $[\mathbf{K}_\psi]$,

doivent être effectués à l'aide d'un langage de programmation flexible et facilement modifiable puisqu'il s'agit d'un travail de recherche susceptible d'évoluer ;

- les opérations de maillage doivent pouvoir se faire automatiquement en ligne de commande et la mise en forme et l'échange des données entre les différents codes doit être rapide.

Le logiciel *Patran* a été choisi pour effectuer le *pre* et le *post* traitement, c'est-à-dire l'ensemble des opérations attendant à la création des *P* pastilles sur la surface de la structure hôte, ainsi que le *post* traitement des fréquences et modes propres de l'ensemble structure/pastilles. Son utilisation peut être automatisée à travers des routines contenant des commandes PCL (Patran Command Language). Ces macros commandes, qui sont des fichiers texte de type "session file" (*.ses), permettent, de manière compacte, d'écrire toutes les instructions nécessaires pour :

- l'import et l'export des fichiers (*.bdf, *.rpt, *.OUT, ...);
- la création, suppression, vérification et renumérotation de maillage ;
- le lancement des calculs et la récupération des résultats.

Plus précisément, il s'agit, en un temps très court et de façon automatique :

- de générer la géométrie et le maillage de la structure élastique avec les *P* pastilles piézoélectriques ;
- d'appliquer les conditions aux limites et les propriétés matériaux au modèle ;
- écrire le fichier texte (*.bdf) d'entrée pour le calcul Nastran, lequel contient les coordonnées des nœuds, la table de connectivité, les conditions aux limites, les données matériaux et les propriétés de la structure hôte munie de ses pastilles ;
- d'écrire des fichiers textes (*.out) contenant les coordonnées des nœuds, la table de connectivité, les conditions aux limites et les propriétés des pastilles piézoélectriques ;
- de récupérer les résultats des analyses modales de *Nastran* pour le *post* traitement.

Le contenu des macros commandes *Patran* n'est pas connu a priori puisque la structure, les matériaux, le nombre de pastilles, etc., varient d'un calcul à un autre. Par conséquent, leur création doit elle aussi se faire automatiquement selon les données rentrées par l'utilisateur. Pour ce faire, un *script* de pilotage est chargé de récupérer les données utilisateurs et de

rédigé automatiquement les routines, qui sont à leur tour exécutées pour réaliser telle ou telle tâche *Patran*, *Nastran* ou *Matlab*.

Par ailleurs, le rôle du *script* est aussi d'adapter le contenu des routines aux spécifications d'un éventuel algorithme d'optimisation qui indique, à chaque itération, quelles positions et géométries des pastilles il faut tester.

Le code de calcul *Nastran* est très performant pour la résolution des problèmes dynamiques ainsi que des problèmes aux valeurs propres. C'est la raison pour laquelle il a été choisi. De plus, il permet, à l'aide du langage DMAP (MSC, 2010) :

- d'importer des matrices créées à l'extérieur du logiciel et les intégrer facilement au modèle ;
- d'inclure plusieurs opérations matricielles dans la procédure de résolution standard ;
- d'exporter des fichiers textes (*.op4) contenant les matrices de masse, d'amortissement, de rigidité, le vecteur d'efforts nodaux et les résultats³ ;

Le langage *Awk* est utilisé pour sa capacité à lire, écrire et modifier des fichiers textes volumineux beaucoup plus rapidement que *Matlab*.

Le langage de programmation *Matlab*, de part sa flexibilité, convient parfaitement à des travaux de recherche. *Matlab* est utilisé dans le cadre de cette thèse pour des opérations de calcul mais aussi pour le pilotage de *Patran*, *Awk* et *Nastran* :

- les matrices de couplages électromécaniques et les matrices diélectriques sont entièrement construites avec ce langage, de même que le calcul des facteurs de couplage modaux, le calcul des valeurs optimales des résistances et inductances des circuits électriques shunts et la construction des modèles réduits (voir Chapitre suivant) ;
- les routines de rédaction des scripts PCL, qui pilotent à leur tour *Patran*, sont également faites sous *Matlab*, de même pour les routines de rédaction des scripts *Awk* qui servent à lire et écrire les données échangées entre *Matlab*, *Patran* et *Nastran* ;
- les calculs *Nastran* sont aussi lancés et pilotés par des routines faites sous *Matlab*.

³ Les matrices qui définissent le problème (masse, rigidité, ...) ainsi que les résultats d'une opération de calcul peuvent être écrites en format "sparse". De plus, il est possible d'exporter les résultats spécifiques à quelques nœuds ou degrés de libertés seulement.

3.1.2. Implémentation des formulations éléments finis

L'algorithme illustré par la FIG. 3.1 résume l'implémentation numérique de la formulation 3D et de la formulation simplifiée. La construction de la partie purement élastique du modèle (matrices de masse $[\mathbf{M}_u]$ et de rigidité $[\mathbf{K}_u]$), la résolution des problèmes aux valeurs propres et l'analyse fréquentielle (construction de fonctions de réponses en fréquence) sont des tâches attribuées à *Nastran*. *Awk* exécute le transfert des données entre les différents logiciels et *Matlab* permet de piloter l'algorithme ainsi que de construire la partie électromécanique et diélectrique du modèle éléments finis (les matrices de couplage électromécaniques $[\mathbf{K}_{u\psi}]$ et $[\mathbf{K}_{uv}]$ et les matrices diélectriques $[\mathbf{K}_\psi]$ et $[\mathbf{K}_v]$).

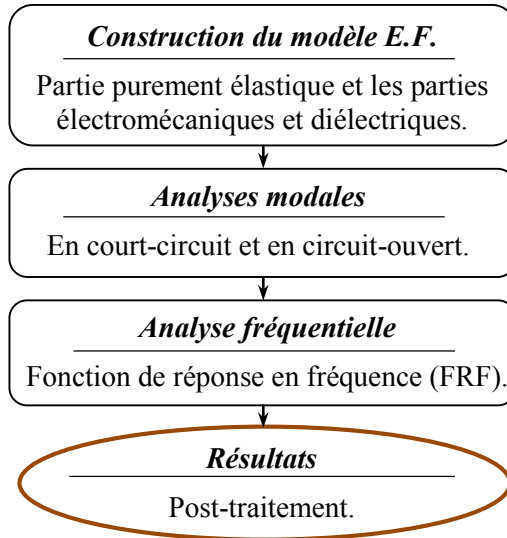
Comme les pastilles piézoélectriques étudiées ici ont la forme de structures élancées, l'élément hexaèdre à 20 nœuds (HEXA 20) a été choisi pour l'implémentation de la formulation 3D et de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle tridimensionnel. En plus d'être naturellement adaptés à ce type de géométrie, ces éléments, qui utilisent des fonctions de formes quadratiques par rapport aux coordonnées locales de l'élément, sont considérés comme parmi les plus performants des éléments volumiques (convergence rapide avec peu d'éléments).

En revanche, des éléments quadrilatères du premier ordre à 4 nœuds (QUAD 4) ont été choisis pour l'implémentation de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle bidimensionnel du type plaque. Malgré l'utilisation de fonctions de formes affines, ces éléments conduisent à des bons résultats.

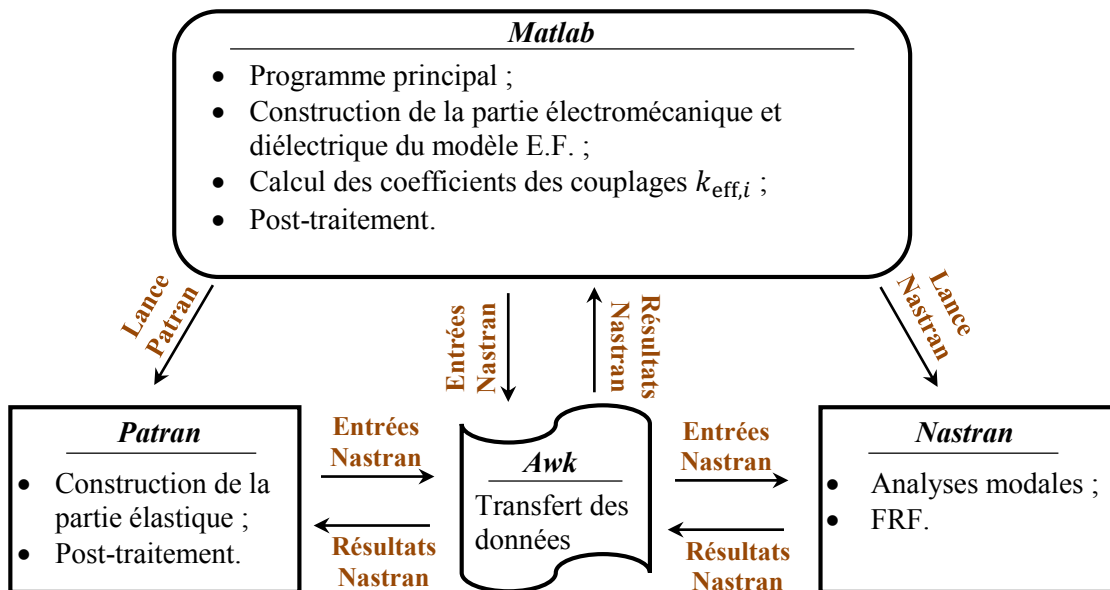
Les Annexes A et B présentent un aperçu sur le calcul des matrices éléments finis de couplage électromécanique et diélectrique qui ont été développées sous l'environnement *Matlab* pour les deux formulations proposées précédemment. L'Annexe A illustre la procédure de calcul au niveau élémentaire pour l'implémentation de la formulation 3D et de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle volumique. L'Annexe B montre le développement au niveau élémentaire de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle de plaque. Il est important de noter que ce modèle :

- tient compte des hypothèses cinématiques des plaques (Reddy, 1997) et de la théorie des stratifiés avec la loi de comportement réduite présentée au Chapitre 2 ;
- utilise l'élément QUAD 4 de Nastran pour le calcul de la partie purement élastique du modèle (matrices de masse $[\mathbf{M}_u]$ et de rigidité $[\mathbf{K}_u]$) et l'élément quadrilatère à 4

nœuds de l'Annexe B uniquement pour le calcul de la matrice de couplage électromécanique $[K_{uv}]$.



(a) *Algorithme de résolution*



(b) *Implémentation numérique*

FIG. 3.1- Stratégie numérique ($k_{eff,i}$ correspond au coefficient de couplage électromécanique effectif du i -ième mode).

3.2. Comparaison des modèles

On propose dans cette section d'analyser la formulation simplifiée par comparaison avec la formulation 3D.

Même si l'hypothèse d'un potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur d'une pastille est largement employée dans la littérature spécialisée, beaucoup de travaux de recherche déconseillent son utilisation. Par exemple, dans l'article de Benjeddou (2000), l'auteur rappelle que le potentiel électrique dans l'épaisseur d'une pastille piézoélectrique est non linéaire et peut être représenté par la fonction :

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \psi_{\text{ind}}(z) \quad (3.1)$$

où ψ_0 est linéaire et fonction des potentiels prescrits aux surfaces des électrodes supérieures et inférieures, tandis que le potentiel ψ_{ind} est quadratique et inconnu. Ce dernier est généralement lié aux déformations de flexion de la pastille. Il est nommé potentiel induit. L'auteur conclut son analyse en affirmant que l'effet piézoélectrique est représenté par un couplage électromécanique partiel et un vecteur de charge électrique équivalent dans le cas où le potentiel induit est négligé. Bernaddou et Haenel (2003a, 2003b) proposent des éléments finis de plaque et coque qui tiennent compte du potentiel induit dans l'épaisseur de l'élément piézoélectrique. Kögl and Bucalem (2002) ont introduit un élément MITC⁴ pour l'analyse des structures sandwich intelligentes avec une épaisseur modérée. Ils ont souligné l'importance de prendre en compte la variation quadratique du potentiel électrique à travers l'épaisseur de la couche piézoélectrique afin de modéliser avec précision le champ électrique. Collet et Cunafare (2008) proposent une approche, basée sur une méthode de condensation dynamique, permettant de construire un superélément piézoélectrique en tenant compte du potentiel induit et sans avoir besoin de correction statique.

En revanche, Rahmoune *et al.* (1998) démontre par des analyses asymptotiques que le potentiel électrique est linéaire dans l'épaisseur d'une plaque piézoélectrique soumise à des déformations de membrane. Fernandes (2000) montre dans sa thèse que le potentiel dévient asymptotiquement linéaire pour de fines pastilles. Enfin, les bonnes corrélations calculs-essais trouvées durant la thèse de Julien Ducarne (2009), sont en accord avec l'hypothèse de champ électrique uniforme dans l'épaisseur d'une pastille piézoélectrique mince collée sur la surface d'une structure élastique.

⁴ Mixed-Interpolated Tensorial Components.

En s'appuyant sur tous ces travaux, on présente dans ce qui suit une étude de convergence de la formulation simplifiée. Dans un premier temps, on présente une solution exacte tridimensionnelle pour l'analyse des vibrations libres de plaques piézoélectriques simplement appuyées. On propose ensuite une comparaison entre cette formulation exacte, la formulation éléments finis simplifiée et la formulation éléments finis 3D pour le cas d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée en vibration libre. Finalement, la formulation simplifiée est comparée à la formulation 3D pour le cas d'une structure élastique munie d'une pastille piézoélectrique. Deux exemples sont proposés : (i) le premier consiste en une poutre élastique encastrée-libre et équipée avec un élément piézoélectrique et (ii) le deuxième considère un silencieux automobile muni d'un dispositif piézoélectrique (Raju *et al.*, 2005). Pour bien assurer la comparaison entre les deux formulations éléments finis, ces études sont menées en utilisant des modèles tridimensionnels équivalents (Annexe A).

3.2.1. Développement d'une solution exacte 3D : vibrations libres d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée

On présente dans cette section une solution tridimensionnelle exacte pour l'analyse des vibrations libres de plaques piézoélectriques simplement appuyées. On s'intéresse ici au cas d'une structure piézocéramique uniforme, polarisée dans la direction 3 (direction z , selon l'épaisseur) et travaillant en extension.

La méthode développée ici, qui a déjà été utilisée pour l'étude des vibrations de plaques stratifiées piézoélectriques travaillant en cisaillement (Benjeddou et Deü, 2002), s'appuie sur une approche mixte d'espace d'état qui utilise comme variables mécaniques les déplacements et les contraintes transverses ainsi que le potentiel et les déplacements électriques transverses pour l'aspect piézoélectrique.

La solution proposée permet d'obtenir les fréquences et les modes propres du problème. Elle sera utilisée ensuite pour valider l'implémentation numérique des modèles éléments finis 3D et simplifié.

Formulation en espace d'état

On considère une plaque piézocéramique rectangulaire de longueur L_x , largeur L_y , d'épaisseur totale H et composée de N couches (voir FIG. 3.2). Les couches peuvent avoir des épaisseurs différentes. La plaque est supposée libre d'efforts mécaniques extérieurs, polarisée dans sa direction transversale (direction z), et peut être en configuration circuit-ouvert (charge

électrique nulle) ou court-circuit (potentiel électrique nul sur ses surfaces d'électrodes supérieure et inférieure).

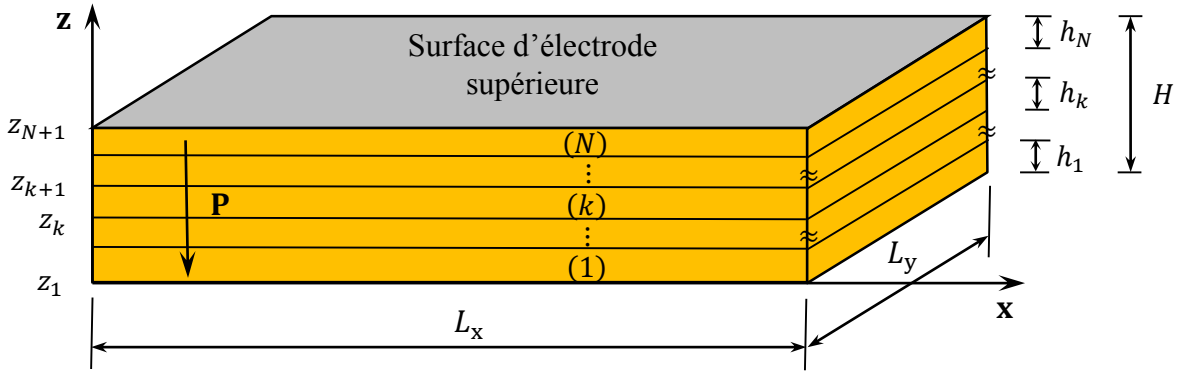


FIG. 3.2- *Plaque piézoélectrique : polarisation, géométrie et notations.*

La réponse de chaque couche k est gouvernée par les Eqs. (2.12a) et (2.13a) (l'équation fondamentale de la dynamique et la loi de Gauss). En introduisant la loi de comportement (2.4) et les relations (2.5) dans les Eqs. (2.12a) et (2.13a), on obtient pour chaque couche k l'équation d'espace d'état suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.2)$$

où

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ \sigma_{zz} \\ d_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ u_z \\ \psi \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{55}^E} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{e_{15}}{C_{55}^E} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{C_{44}^E} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{e_{24}}{C_{44}^E} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ -\frac{e_{15}}{C_{55}^E} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{e_{24}}{C_{44}^E} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \epsilon_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon_{22}^* \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix},$$

et

$$[\mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} -C_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -(C_{12}^* + C_{66}^E) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -C_{13}^* \frac{\partial}{\partial x} & -C_{14}^* \frac{\partial}{\partial x} \\ -(C_{12}^* + C_{66}^E) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -C_{22}^* \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{66}^E \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -C_{23}^* \frac{\partial}{\partial y} & -C_{24}^* \frac{\partial}{\partial y} \\ -C_{13}^* \frac{\partial}{\partial x} & -C_{23}^* \frac{\partial}{\partial y} & C_{33}^* & C_{34}^* \\ -C_{14}^* \frac{\partial}{\partial x} & -C_{24}^* \frac{\partial}{\partial y} & C_{34}^* & -C_{44}^* \end{bmatrix}$$

avec les constantes

$$\begin{aligned}
 C_{11}^* &= C_{11}^E - \left(\frac{C_{13}^E{}^2 \epsilon_{33} + 2C_{13}^E e_{31} e_{33} - e_{31}^2 C_{33}^E}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E} \right), & \epsilon_{11}^* &= \epsilon_{11}^E + \frac{e_{15}^2}{C_{55}^E}, & \epsilon_{22}^* &= \epsilon_{22}^E + \frac{e_{24}^2}{C_{44}^E}, \\
 C_{22}^* &= C_{22}^E - \left(\frac{C_{23}^E{}^2 \epsilon_{33}^E + 2C_{23}^E e_{32} e_{33} - e_{32}^2 C_{33}^E}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E} \right), & C_{13}^* &= \frac{C_{13}^E \epsilon_{33}^E + e_{31} e_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}, \\
 C_{12}^* &= C_{12}^E - \left(\frac{C_{13}^E C_{23}^E \epsilon_{33}^E + C_{13}^E e_{32} e_{33} + C_{23}^E e_{31} e_{33} - e_{31} e_{32} C_{33}^E}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E} \right), \\
 C_{14}^* &= \frac{C_{13}^E e_{33} - C_{33}^E e_{31}}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}, & C_{23}^* &= \frac{C_{23}^E \epsilon_{33}^E + e_{32} e_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}, & C_{24}^* &= \frac{C_{23}^E e_{33} - C_{33}^E e_{32}}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}, \\
 C_{33}^* &= \frac{\epsilon_{33}^E}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}, & C_{34}^* &= \frac{e_{33}}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E} \text{ et } C_{44}^* &= \frac{C_{33}^E}{e_{33}^2 + C_{33}^E \epsilon_{33}^E}.
 \end{aligned}$$

Plaque piézoélectrique en appui simple

On considère ici les vibrations libres d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée et libre de charge et potentiel électrique sur ses bords latéraux ($x = 0, L_x$ et $y = 0, L_y$). Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = u_y = u_z = d_z = \psi &= 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } L_x \\
 \sigma_{yy} = u_x = u_z = d_z = \psi &= 0 & \text{pour } y = 0 \text{ et } L_y
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les déplacements et les contraintes mécaniques transverses ainsi que le potentiel et le déplacement électrique transverse peuvent alors être développés en série de Fourier de façon à satisfaire les conditions aux limites précédentes :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \sigma_{zz} \\ d_z \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ u_z \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{m_x=0}^{\infty} \sum_{m_y=0}^{\infty} \begin{pmatrix} H U_x \cos(px) \sin(qy) \\ H U_y \sin(py) \cos(qx) \\ C_{33}^E \Sigma_{zz} \sin(py) \sin(qy) \\ \sqrt{C_{33}^E \epsilon_{33}^E} D_z \sin(py) \sin(qy) \\ C_{33}^E \Sigma_{zx} \cos(px) \sin(qy) \\ C_{33}^E \Sigma_{zy} \sin(py) \cos(qx) \\ H U_z \sin(py) \sin(qy) \\ H \sqrt{C_{33}^E / \epsilon_{33}^E} \Psi \sin(py) \sin(qy) \end{pmatrix} \exp(j\omega t) \tag{3.4}$$

où $j = \sqrt{-1}$, $p = m_x \pi / L_x$, $q = m_y \pi / L_y$ et ω est une pulsation angulaire. Les lettres majuscules représentent les quantités adimensionnées relatives aux paramètres physiques correspondants. Enfin, m_x et m_y sont respectivement le nombre de modes suivant les directions x et y .

La substitution des relations (3.4) dans l'équation d'espace d'état (3.2) donne :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.5)$$

ou sous forme condensée :

$$\frac{\partial}{\partial z} \{\mathbf{X}\}^{(k)} = [\mathbf{A}]^{(k)} \{\mathbf{X}\}^{(k)} \quad (3.6)$$

où

$$\{\mathbf{X}_1\} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ -\Sigma_{zz} \\ -D_z \end{Bmatrix}, \{\mathbf{X}_2\} = \begin{Bmatrix} \Sigma_{zx} \\ \Sigma_{zy} \\ U_z \\ \Psi \end{Bmatrix}, [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} \frac{C_{33}^E}{HC_{55}^E} & 0 & -p & -\frac{e_{15}p\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}}{C_{55}^E} \\ 0 & \frac{C_{33}^E}{HC_{44}^E} & -q & -\frac{e_{24}q\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}}{C_{44}^E} \\ -p & -q & \frac{H\rho\omega^2}{C_{33}^E} & 0 \\ -\frac{e_{15}p\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}}{C_{55}^E} & -\frac{e_{24}q\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}}{C_{44}^E} & 0 & \frac{H(\epsilon_{11}^*p^2 + \epsilon_{22}^*q^2)}{\epsilon_{33}^\epsilon} \end{bmatrix},$$

et

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} \frac{H}{C_{33}^E} (C_{11}^*p^2 + C_{66}^E q^2 - \rho\omega^2) & \frac{H}{C_{33}^E} (C_{12}^* + C_{66}^E) p q & C_{13}^* p & \frac{1}{\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}} C_{14}^* p \\ \frac{H}{C_{33}^E} (C_{12}^* + C_{66}^E) p q & \frac{H}{C_{33}^E} (C_{22}^*q^2 + C_{66}^E p^2 - \rho\omega^2) & C_{23}^* q & \frac{1}{\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}} C_{24}^* q \\ C_{13}^* p & C_{23}^* q & -\frac{C_{33}^E}{H} C_{33}^* & -\frac{\sqrt{C_{33}^E\epsilon_{33}^\epsilon}}{H} C_{34}^* \\ \frac{1}{\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}} C_{14}^* p & \frac{1}{\sqrt{C_{33}^E/\epsilon_{33}^\epsilon}} C_{24}^* q & -\frac{\sqrt{C_{33}^E\epsilon_{33}^\epsilon}}{H} C_{34}^* & \frac{\epsilon_{33}^\epsilon}{H} C_{44}^* \end{bmatrix}$$

On note que l'ordre des variables et le fait de choisir $-\Sigma_{zz}$ et $-D_z$ à la place de Σ_{zz} et D_z dans $\{\mathbf{X}_1\}$ conduit à des matrices $[\mathbf{A}_1]$ et $[\mathbf{A}_2]$ symétriques. Cependant, le système global (3.5) reste non-symétrique.

La solution de l'équation d'espace d'état (3.6) s'écrit, pour $z \in [z_k, z_{k+1}]$, sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{X}(z)\}^{(k)} = [\mathbf{T}(z - z_k)]^{(k)} \{\mathbf{X}(z_k)\}^{(k)} \text{ avec } [\mathbf{T}(z - z_k)]^{(k)} = \exp[(z - z_k)[\mathbf{A}]^{(k)}] \quad (3.7)$$

Le vecteur d'état sur la surface supérieure de la k -ième couche est alors :

$$\{\mathbf{X}(z_{k+1})\}^{(k)} = [\mathbf{T}(h_k)]^{(k)} \{\mathbf{X}(z_k)\}^{(k)} \quad (3.8)$$

avec $h_k = z_{k+1} - z_k$ l'épaisseur de la couche k et $[\mathbf{T}(h_k)]^{(k)}$ la matrice de transfert, qui relie les vecteurs d'état des surfaces supérieure et inférieure d'une même couche.

Les variables d'état sont naturellement continues à l'interface entre les couches k et $k + 1$. Ainsi, les conditions de continuité électromécanique pour toute interface $z = z_{k+1}$ (pour $k = 1, \dots, N - 1$) s'écrivent en fonction du vecteur d'état $\{\mathbf{X}\}$:

$$\{\mathbf{X}(z_k)\}^{(k+1)} = \{\mathbf{X}(z_{k+1})\}^{(k)} \quad (3.9)$$

L'application de ces conditions de continuité à toutes les interfaces conduit à l'équation d'espace d'état suivante :

$$\{\mathbf{X}(H)\} = [\mathbf{T}(H)] \{\mathbf{X}(0)\} \quad (3.10)$$

où la matrice de transfert globale $[\mathbf{T}]$ est donnée par :

$$[\mathbf{T}(H)] = \prod_{k=N}^1 [\mathbf{T}(h_k)] \quad (3.11)$$

Le vecteur d'état associé à la surface supérieure de la plaque piézoélectrique peut être donc déterminé en fonction du vecteur d'état associé à la surface inférieure seulement.

En séparant les variables de façon à satisfaire les conditions aux limites, l'Eq. (3.10) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_U(H) \\ \mathbf{X}_\Sigma(H) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{UU}(H) & \mathbf{T}_{U\Sigma}(H) \\ \mathbf{T}_{\Sigma U}(H) & \mathbf{T}_{\Sigma\Sigma}(H) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_U(0) \\ \mathbf{X}_\Sigma(0) \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

où les vecteurs $\{\mathbf{X}_U\}$ et $\{\mathbf{X}_\Sigma\}$ sont donnés par :

- cas du problème en court-circuit :

$$\{\mathbf{X}_U\} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ -D_z \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{X}_\Sigma\} = \begin{Bmatrix} \Sigma_{zx} \\ \Sigma_{zy} \\ -\Sigma_{zz} \\ \Psi \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

- cas du problème en circuit-ouvert :

$$\{\mathbf{X}_U\} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ \Psi \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{X}_\Sigma\} = \begin{Bmatrix} \Sigma_{zx} \\ \Sigma_{zy} \\ -\Sigma_{zz} \\ -D_z \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Pour le problème de vibrations libres considéré, les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont libres de contraintes, ce qui se traduit par l'équation

$\{\mathbf{X}_\Sigma(H)\} = \{\mathbf{X}_\Sigma(0)\} = \{\mathbf{0}\}$. Ainsi, en prenant en compte ces conditions, la deuxième ligne de l'Eq. (3.12) nous donne :

$$[\mathbf{T}_{\Sigma U}(H)] \{\mathbf{X}_U(0)\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.15)$$

Pour que l'Eq. (3.15) ait une solution autre que la solution triviale, il faut que le déterminant de la matrice (4×4) $[\mathbf{T}_{\Sigma U}(H)]$ soit nul. Les fréquences propres de la plaque, en court-circuit ou circuit-ouvert, peuvent donc être obtenues simplement en résolvant l'équation suivante:

$$\det [\mathbf{T}_{\Sigma U}(H)] = 0 \quad (3.16)$$

La résolution de l'Eq. (3.16) ainsi que les déformées modales sont déterminées numériquement à l'aide d'une routine Matlab. Dans un premier temps, la matrice $[\mathbf{T}_{\Sigma U}(H)]$ est évaluée pour plusieurs valeurs de ω dans une plage fréquentielle donnée. Chaque fois que la valeur du déterminant change de signe, la méthode de dichotomie (fonction "fzero" dans *Matlab*) est utilisée pour estimer avec précision la racine (valeur de ω_i ou $\hat{\omega}_i$) de la fonction. Pour chaque fréquence propre obtenue, $\{\mathbf{X}_U(0)\}$ est déterminée à partir de l'Eq. (3.15). Ensuite, on peut reconstruire l'ensemble des grandeurs mécaniques et électriques en tout point de la plaque et en particulier on peut avoir l'évolution de ces grandeurs dans l'épaisseur à partir des relations (3.8), (3.10) et (3.11).

Il est important de noter que la solution du problème en circuit-ouvert ne tient pas compte de la condition d'équipotentialité sur les surfaces des électrodes supérieure et inférieure de la plaque. Seule l'analyse d'une plaque piézoélectrique simplement appuyée en court-circuit sera donc abordée par la suite.

Validation de la formulation exacte dans le cas élastique

Pour valider la solution exacte présentée ci-dessus, une plaque élastique⁵ ($e_{ij} = 0$) simplement appuyée en vibration libre est analysée. Les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque sont données dans le TAB. 3.1. Les résultats sont comparés à ceux d'un modèle élément finis 3D Nastran (FIG. 3.3).

⁵ Il est important de noter que la solution exacte développée ici est valide pour l'analyse des plaques élastiques constituées de matériaux isotropes ou orthotropes.

TAB. 3.1 : *Propriétés géométrique et mécanique de la plaque.*

Paramètres	Valeur
Dimensions ($L_x \times L_y \times H$)	$100 \times 100 \times 2 \text{ mm}^3$
Matériau	Graphite-Epoxy
Masse volumique (ρ)	1580 kg/m^3
Constantes de raideur	$C_{11} = 183.44, C_{22} = C_{33} = 11.662,$ $C_{12} = C_{13} = 4.363, C_{23} = 3918,$ $C_{44} = 2.87, C_{55} = C_{66} = 7.17 \text{ (GPa)}$

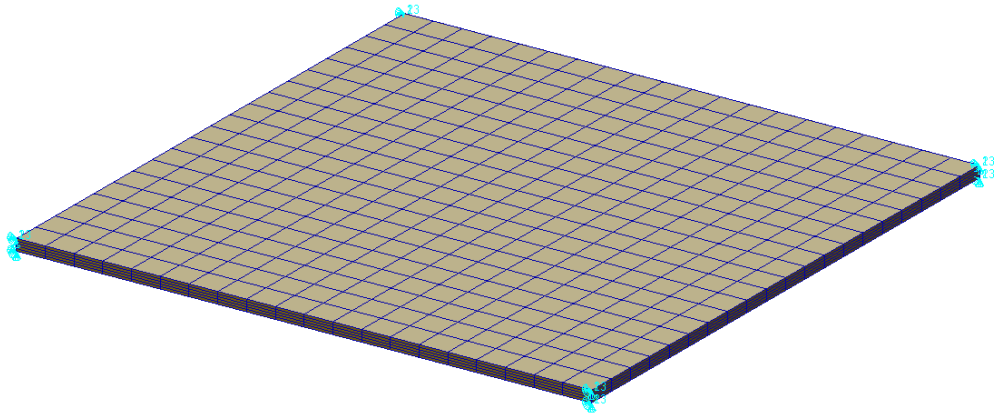


FIG. 3.3– *Modèle éléments finis dans Patran : Maillage de la plaque avec $20 \times 20 \times 5 = 2000$ éléments hexaédriques à 20 nœuds (HEXA 20).*

Le TAB. 3.2 permet de comparer les 20 premières fréquences propres et la FIG. 3.4 présente la matrice de MAC (*Modal Assurance Criterion*) pour les dix premières déformées modales de la structure. Le MAC est un critère de validation qui permet d'établir dans quelle mesure deux vecteurs sont corrélés entre eux (Randall, 2003). Dans notre cas, le MAC a pour expression :

$$\text{MAC}(i, j) = \frac{(\Phi_{i,\text{an}}^T \Phi_j)^2}{(\Phi_{i,\text{an}}^T \Phi_{i,\text{an}})(\Phi_j^T \Phi_j)} \quad (3.17)$$

où $\{\Phi_{i,\text{an}}^T\}$ et $\{\Phi_j\}$ sont respectivement les déformées modales du i -ème mode du modèle analytique et du j -ème mode du modèle éléments finis Nastran. Un MAC égal à 1 correspond à une corrélation parfaite entre deux modes, ce qui traduit l'égalité des sous espaces générés. Par ailleurs, le MAC ne dépend pas du type de normalisation, ainsi deux vecteurs normalisés selon deux critères différents, sont directement comparables.

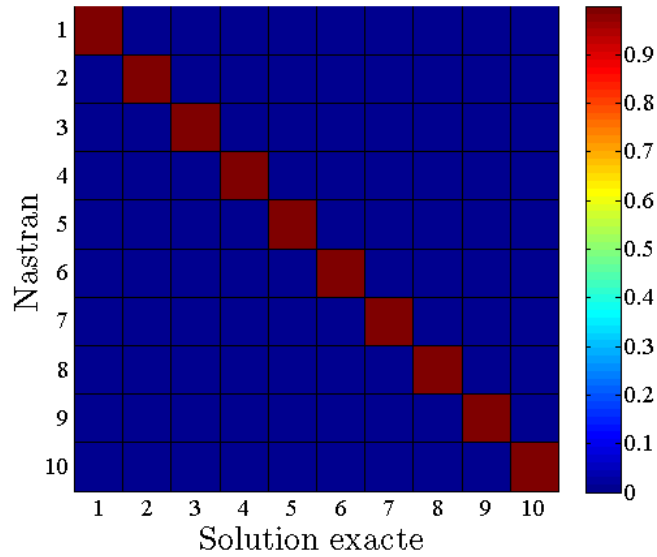


FIG. 3.4- Matrice de MAC des dix premières déformées modales de la plaque : Comparaison entre les résultats donnés par Nastran et la solution exacte.

TAB. 3.2 : 20 premières fréquences propres adimensionnées $\omega^* = \omega(L_x^2/H)\sqrt{(\rho/C_{33})}$ pour la plaque élastique - comparaison entre les résultats donnés par Nastran et la solution exacte développée.

N°	Mode	Nastran (NAS)	Exacte (EXA)	Erreur : $100 \frac{(NAS_i - EXA_i)}{NAS_i}$ [%]
	(m_x, m_y, m_z)			
1	(1, 1, 1)	1.9884	1.9884	0.0002
2	(1, 2, 1)	2.9070	2.9070	0.0010
3	(1, 3, 1)	4.7980	4.7977	0.0073
4	(2, 1, 1)	7.1941	7.1940	0.0024
5	(1, 4, 1)	7.6112	7.6092	0.0266
6	(2, 2, 1)	7.8313	7.8312	0.0023
7	(2, 3, 1)	9.1769	9.1765	0.0042
8	(1, 5, 1)	11.2657	11.2580	0.0681
9	(2, 4, 1)	11.4223	11.4206	0.0149
10	(2, 5, 1)	14.6136	14.6069	0.0456
11	(3, 1, 1)	15.5832	15.5815	0.0105
12	(1, 6, 1)	15.7066	15.6841	0.1430
13	(3, 2, 1)	16.1273	16.1257	0.0100
14	(3, 3, 1)	17.1918	17.1901	0.0098
15	(2, 6, 1)	18.7053	18.6850	0.1088
16	(3, 4, 1)	18.9468	18.9443	0.0134
17	(0, 1, 1)	19.6026	19.6026	0.0001
18	(1, 0, 1)	19.6026	19.6026	0.0001
19	(1, 7, 1)	20.8926	20.8377	0.2637
20	(3, 5, 1)	21.5273	21.5210	0.0292

Les résultats du Tab. 3.2 (moins de 0.27% d'écart entre les fréquences propres des 20 premiers modes) et de la Fig. 3.4 (excellente corrélation entre les déformées modales) permettent de valider la solution exacte dans le cas élastique. Par la suite, cette solution sera utilisée pour valider l'implémentation numérique des modèles éléments finis 3D et simplifié.

3.2.2. Exemple d'une pastille piézoélectrique simplement appuyée

Dans cet exemple, on considère les vibrations libres d'une pastille piézocéramique rectangulaire en appui simple et de longueur $L_x = 10$ cm, largeur $L_y = 10$ cm et épaisseur $H = 2$ mm (voir FIG. 3.2). De plus, les surfaces des électrodes supérieure et inférieure sont court-circuitées.

Les algorithmes de la FIG. 3.1 et de l'Annexe A sont appliqués pour construire les modèles éléments finis 3D et simplifié et pour résoudre les problèmes modaux associés. De plus, comme précédemment, 2000 éléments hexaédriques à 20 nœuds sont utilisés pour les deux modèles (FIG. 3.5).

Trois matériaux différents sont utilisés : le PIC 151 (Sénéchal, 2011), le PZT-4 (Fernandes, 2000) et le PZT-5A (Godoy et Trindade, 2011). Leurs propriétés sont rappelées dans le TAB. 3.3.

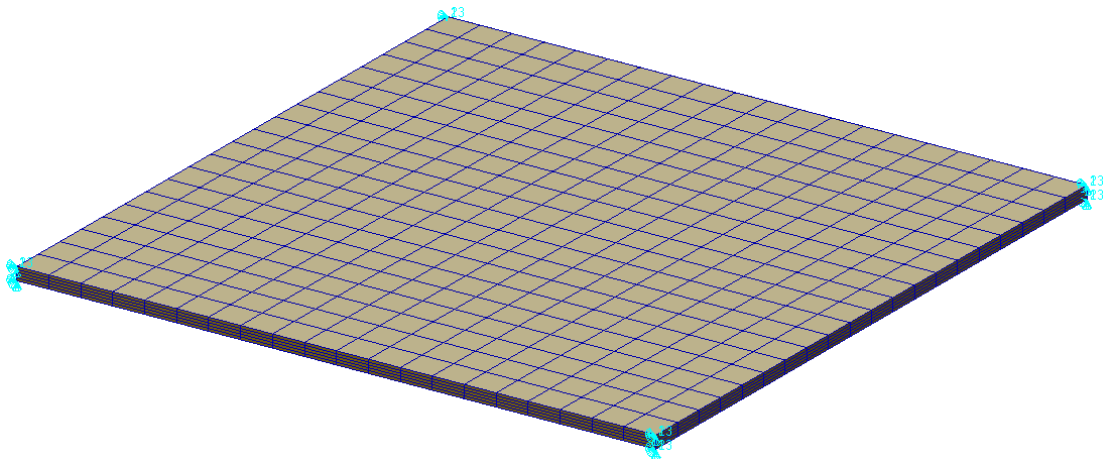


FIG. 3.5– *Modèle éléments finis dans Patran : Maillage de la plaque piézoélectrique avec 2000 éléments hexaédriques à 20 nœuds.*

TAB. 3.3 : Propriétés des matériaux PZT-4, PZT-5A et PIC-151.

Paramètres	PZT-4	PZT-5A	PIC-151
Masse volumique	7550 kg.m ⁻³	7750 kg.m ⁻³	7760 kg.m ⁻³
Constantes de raideur en GPa	$C_{11}^E = C_{22}^E = 139,$ $C_{33}^E = 115, C_{12}^E = 77.8,$ $C_{13}^E = C_{23}^E = 74.3,$ $C_{44}^E = C_{55}^E = 25.6,$ $C_{66}^E = 30.6.$	$C_{11}^E = C_{22}^E = 99.201,$ $C_{33}^E = 86.856, C_{12}^E = 54.016,$ $C_{13}^E = C_{23}^E = 50.778,$ $C_{44}^E = C_{55}^E = 21.1,$ $C_{66}^E = 22.6.$	$C_{11}^E = C_{22}^E = 107.6,$ $C_{33}^E = 100.4, C_{12}^E = 63.12,$ $C_{13}^E = C_{23}^E = 63.85,$ $C_{44}^E = C_{55}^E = 19.62,$ $C_{66}^E = 22.24.$
Constantes piézoélectriques en N.V ⁻¹ .m ⁻¹	$e_{15} = e_{24} = 12.7,$ $e_{31} = e_{32} = -5.2,$ $e_{33} = 15.1.$	$e_{15} = e_{24} = 12.322,$ $e_{31} = e_{32} = -7.209,$ $e_{33} = 15.118.$	$e_{15} = e_{24} = 12.0,$ $e_{31} = e_{32} = -9.6,$ $e_{33} = 15.1.$
Constantes diélectriques en nF.m ⁻¹	$\epsilon_{11}^\epsilon = \epsilon_{22}^\epsilon = 13.06,$ $\epsilon_{33}^\epsilon = 11.51.$	$\epsilon_{11}^\epsilon = \epsilon_{22}^\epsilon = 8.10,$ $\epsilon_{33}^\epsilon = 6.88.$	$\epsilon_{11}^\epsilon = \epsilon_{22}^\epsilon = 9.83,$ $\epsilon_{33}^\epsilon = 7.54.$
$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}$	0.0724	0.1189	0.1515

Les fréquences propres obtenues avec la solution exacte sont comparées aux fréquences propres du modèle 3D dans le TAB. 3.4, et aux fréquences propres du modèle simplifié dans le TAB. 3.5. Les résultats montrent que :

- la différence entre la formulation exacte et la formulation 3D, pour les fréquences propres des 10 premiers modes de flexion et les 2 premiers modes de membrane, est inférieur à 0.032%, ce qui valide l'implémentation numérique de la formulation 3D ;
- la différence entre la formulation exacte et la formulation simplifiée est relativement importante pour les modes de flexion et pratiquement nulle pour les modes de membrane. Ces résultats, qui sont en accord avec (Rahmoune *et al.*, 1998), traduisent l'influence du potentiel induit dans le comportement dynamique de la plaque. En effet, ce potentiel est bien nul pour les modes de membrane et quadratique pour les modes de flexion, comme le montre la FIG. 3.6. De plus, on constate que cette influence dépend principalement des propriétés du matériau piézoélectrique et peu du type de déformée. L'erreur entre les deux modèles est plus importante pour les matériaux avec le coefficient de couplage k_{31} plus élevé (environ 20% pour le PIC-151 ($k_{31}^2 = 0.1515$), environ 15% pour le PZT-5H ($k_{31}^2 = 0.1189$) et environ 8% pour le PZT-4 ($k_{31}^2 = 0.0724$)) et reste pratiquement constante pour tous les modes de flexion.

TAB. 3.4 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation 3D – différence entre les fréquences propres des 10 premiers modes de flexion et des 2 premiers modes de membrane.

Mode		Différence* en [%] $\left(D_{\text{diff}} = 100 \frac{ \omega_i^{(SE)} - \omega_i^{(3D)} }{\omega_i^{(SE)}} \right)$					
		PZT-4		PZT-5A		PIC-151	
(m_x, m_y, m_z)	Type	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}
(1,1,1)	Flexion	683.575	0.001	639.398	0.001	664.691	0.001
(1,2,1)	Flexion	1704.936	0.001	1594.913	0.002	1657.553	0.003
(2,1,1)	Flexion	1704.936	0.001	1594.913	0.002	1657.553	0.003
(2,2,1)	Flexion	2721.555	0.002	2546.254	0.002	2645.471	0.004
(1,3,1)	Flexion	3396.699	0.009	3178.072	0.008	3301.372	0.011
(3,1,1)	Flexion	3396.699	0.009	3178.072	0.008	3301.372	0.011
(3,2,1)	Flexion	4405.557	0.007	4122.538	0.007	4281.210	0.010
(2,3,1)	Flexion	4405.557	0.007	4122.538	0.007	4281.210	0.010
(1,4,1)	Flexion	5743.596	0.029	5375.296	0.028	5580.275	0.032
(4,1,1)	Flexion	5743.596	0.029	5375.296	0.028	5580.275	0.032
(1,0,0)	Membrane	10066.007	0.000	8538.339	0.000	8464.602	0.000
(0,1,0)	Membrane	10066.007	0.000	8538.339	0.000	8464.602	0.000

* $\omega_i^{(SE)}$ et $\omega_i^{(3D)}$ correspondent aux fréquences propres du i -ème mode obtenues avec la solution exacte et la formulation 3D, respectivement.

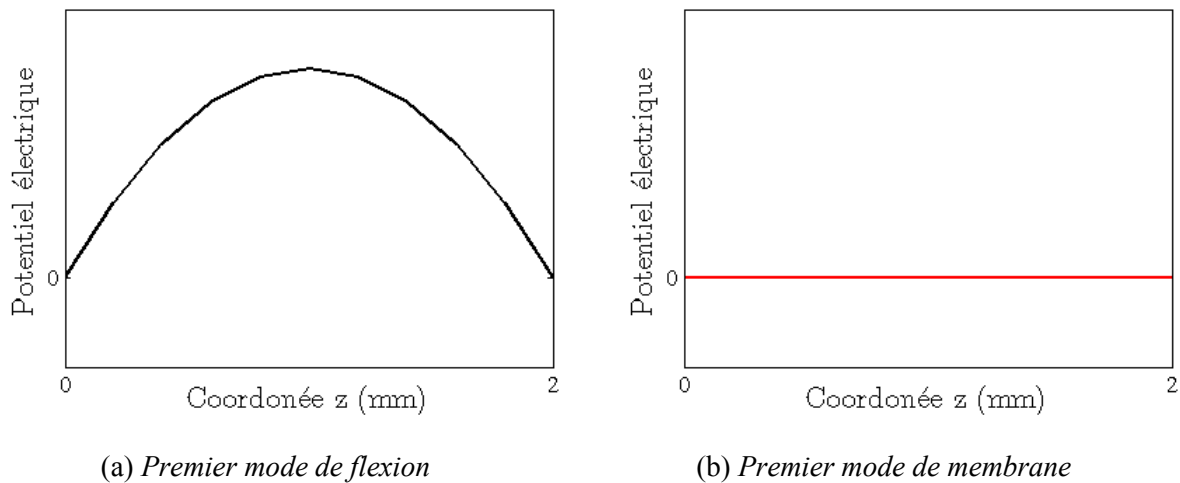


FIG. 3.6– Potentiel électrique dans l'épaisseur de la plaque piézoélectrique.

TAB. 3.5 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation simplifiée – différence entre les fréquences propres des 10 premiers modes de flexion et des 2 premiers modes de membrane.

Mode		Différence* en [%] $\left(D_{\text{diff}} = 100 \frac{ \omega_i^{(SE)} - \omega_i^{(SS)} }{\omega_i^{(SE)}} \right)$					
		PZT-4		PZT-5A		PIC-151	
(m_x, m_y, m_z)	Type	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}	$\omega_i^{(SE)}$ [Hz]	D_{diff}
(1,1,1)	Flexion	683.575	8.034	639.398	15.168	664.691	19.949
(1,2,1)	Flexion	1704.936	8.043	1594.913	15.175	1657.553	19.936
(2,1,1)	Flexion	1704.936	8.043	1594.913	15.175	1657.553	19.936
(2,2,1)	Flexion	2721.555	8.052	2546.254	15.181	2645.471	19.925
(1,3,1)	Flexion	3396.699	8.052	3178.072	15.181	3301.372	19.912
(3,1,1)	Flexion	3396.699	8.052	3178.072	15.181	3301.372	19.912
(3,2,1)	Flexion	4405.557	8.064	4122.538	15.189	4281.210	19.903
(2,3,1)	Flexion	4405.557	8.064	4122.538	15.189	4281.210	19.903
(1,4,1)	Flexion	5743.596	8.057	5375.296	15.181	5580.275	19.871
(4,1,1)	Flexion	5743.596	8.057	5375.296	15.181	5580.275	19.871
(1,0,0)	Membrane	10066.007	0.000	8538.339	0.000	8464.602	0.000
(0,1,0)	Membrane	10066.007	0.000	8538.339	0.000	8464.602	0.000

* $\omega_i^{(SE)}$ et $\omega_i^{(SS)}$ correspondent aux fréquences propres du i -ème mode obtenues avec la solution exacte et la formulation simplifiée, respectivement.

Puisque l'hypothèse de potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur d'une pastille est souvent associée à la valeur de son épaisseur, des analyses supplémentaires sont menées pour différentes épaisseurs de la plaque. Les résultats, donnés par le TAB. 3.6 et la FIG. 3.8, montrent que :

- l'erreur relative entre la formulation simplifiée et la formulation exacte ou la formulation 3D reste pratiquement constante pour différentes épaisseurs de la plaque. Nous en déduisons que l'influence du potentiel induit dans le comportement dynamique de la pastille est indépendante de son épaisseur ;
- l'erreur absolue entre la formulation simplifiée et la formulation exacte diminue avec la décroissance de l'épaisseur de la plaque ; ce fait corrobore l'hypothèse de potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur d'une pastille mince collée sur la surface d'une structure hôte. Comme nous le verrons dans la suite, l'effet du potentiel induit peut en effet être négligé dans l'étude du comportement dynamique global de l'ensemble structure/pastilles.

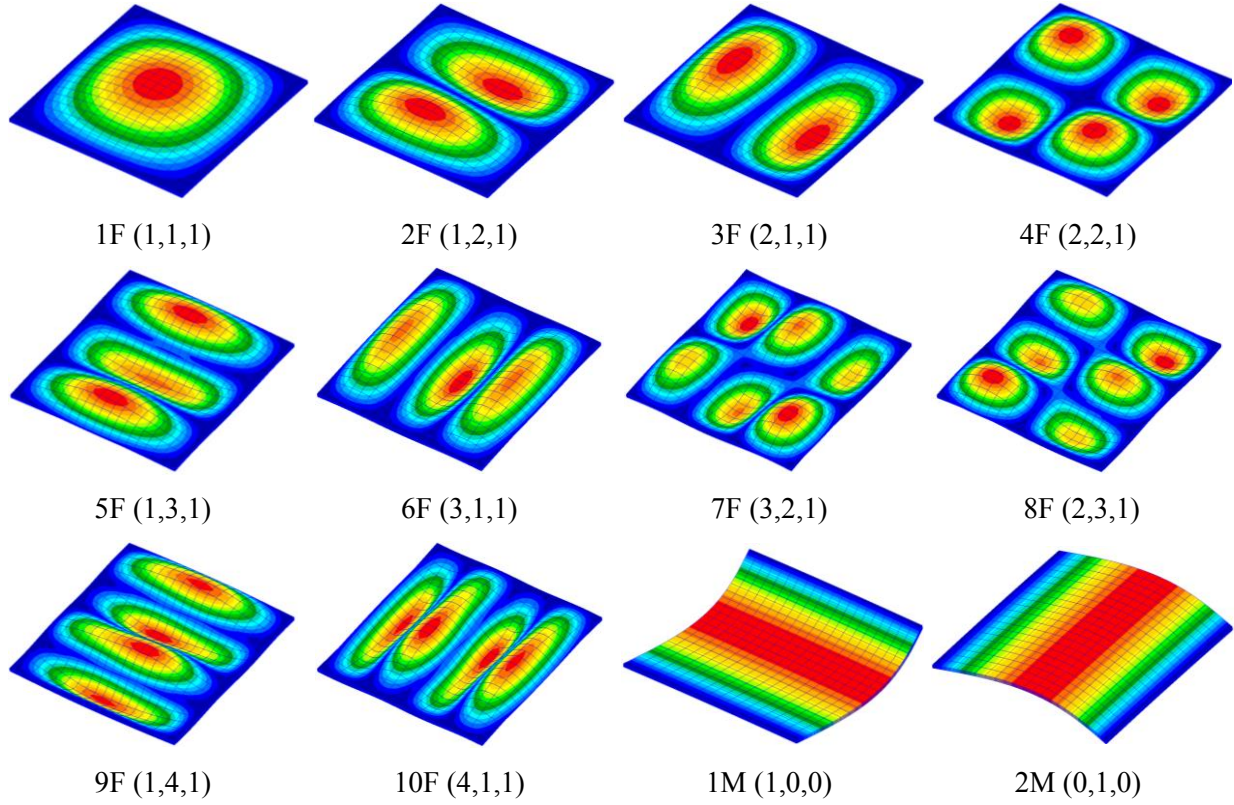


FIG. 3.7- Déformées modales des dix premiers modes de flexion et des deux premiers modes de membrane de la plaque piézoélectrique donnés par Nastran. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

TAB. 3.6 : Comparaison entre la formulation exacte et la formulation simplifiée pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la plaque piézoélectrique en PIC-151 – différence entre fréquences propres des 10 premiers modes de flexion.

Mode (m_x, m_y, m_z)	Différence* en % $\left(100 \frac{ \omega_i^{(SE)} - \omega_i^{(SS)} }{\omega_i^{(SE)}} \right)$			
	$H = 0.25$ mm	$H = 0.50$ mm	$H = 1.00$ mm	$H = 2.00$ mm
(1,1,1)	19.957	19.956	19.955	19.949
(1,2,1)	19.956	19.956	19.952	19.936
(2,1,1)	19.956	19.956	19.952	19.936
(2,2,1)	19.956	19.955	19.949	19.925
(1,3,1)	19.956	19.954	19.947	19.912
(3,1,1)	19.956	19.954	19.947	19.912
(3,2,1)	19.956	19.954	19.944	19.903
(2,3,1)	19.956	19.954	19.944	19.903
(1,4,1)	19.956	19.953	19.940	19.871
(4,1,1)	19.956	19.953	19.940	19.871

* $\omega_i^{(SE)}$ et $\omega_i^{(SS)}$ correspondent aux fréquences propres du i -ème mode obtenues avec la solution exacte et la formulation simplifiée, respectivement.

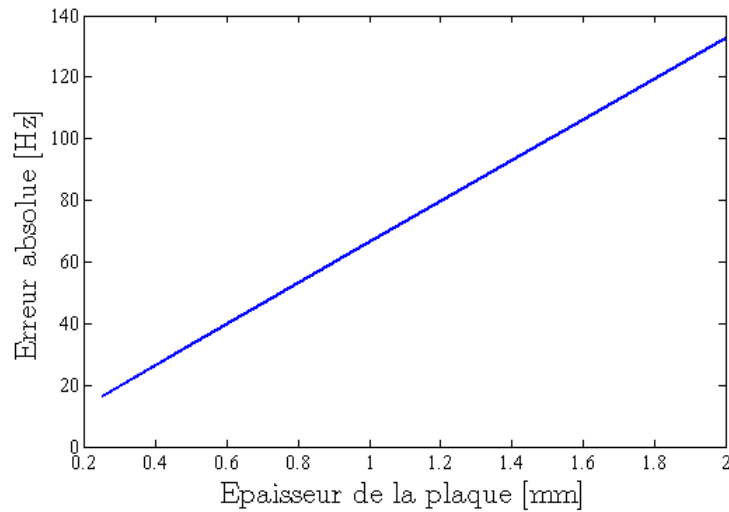


FIG. 3.8– *Erreur absolue entre la formulation simplifiée et la formulation exacte en fonction de l'épaisseur de la plaque : fréquence propre du premier mode de flexion*

Cet exemple nous permet de conclure que la formulation simplifiée n'est pas adaptée au cas d'une pastille piézoélectrique sollicitée en flexion. Néanmoins, les résultats obtenus valident l'implémentation de la formulation 3D. Par la suite, ce modèle 3D sera utilisé pour vérifier la validité de la formulation simplifiée dans le cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques.

3.2.3. Exemple d'une poutre avec une pastille piézoélectrique shuntée

On considère ici une poutre encastree-libre en aluminium (module de Young $E = 74$ GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et masse volumique $\rho = 2800$ kg.m⁻³) et munie d'une pastille piézoélectrique en PIC-151 (matériau avec un coefficient de couplage élevé $k_{31} = 0.38$) (voir FIG. 3.9). La poutre est sollicitée par un effort transverse harmonique d'amplitude unitaire. La pastille est connectée à un circuit électrique shunté, composé d'une résistance R_e et d'une inductance électrique L_e en série. Le circuit shunt impose une relation entre la charge Q et la différence de potentiel V , donnée pour la pastille par :

$$V - \omega^2 L_e Q + j \omega R_e Q = 0 \quad (3.18)$$

Le dispositif formé par la pastille piézoélectrique connectée au circuit shunt est utilisé pour réduire les vibrations du premier mode de flexion de la poutre. Les aspects technologiques ainsi que la modélisation de la technique du shunt seront détaillés dans le chapitre suivant.

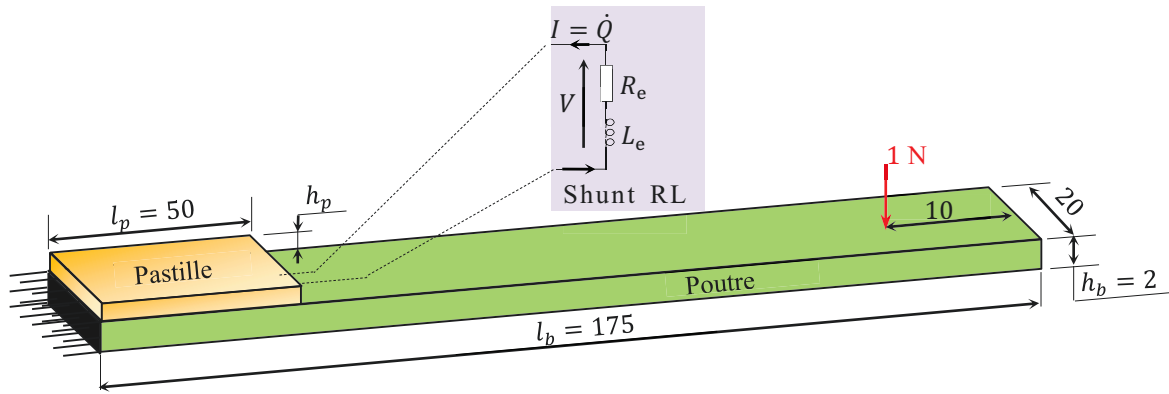


FIG. 3.9– Poutre munie d’une pastille piézoélectrique : géométrie et conditions aux limites (dimensions en mm).

Les algorithmes de la FIG. 3.1 et de l’Annexe A sont appliqués pour construire les deux modèles éléments finis et résoudre le problème (FIG. 3.10). 252 éléments quadrilatères à 8 nœuds (QUAD 8) sont utilisés pour modéliser la poutre en 2D. La pastille est modélisée avec 360 éléments hexaédriques à 20 nœuds. De plus, 253 éléments rigides RBE3 de Nastran (MSC, 2010) sont utilisés pour modéliser l’interface structure/pastille ; ces éléments connectent les nœuds de la surface inférieure de la pastille aux nœuds correspondants de la poutre en tenant compte des hypothèses cinématiques du modèle plaque et de la condition d’adhérence parfaite entre ces deux éléments (structure/pastille).

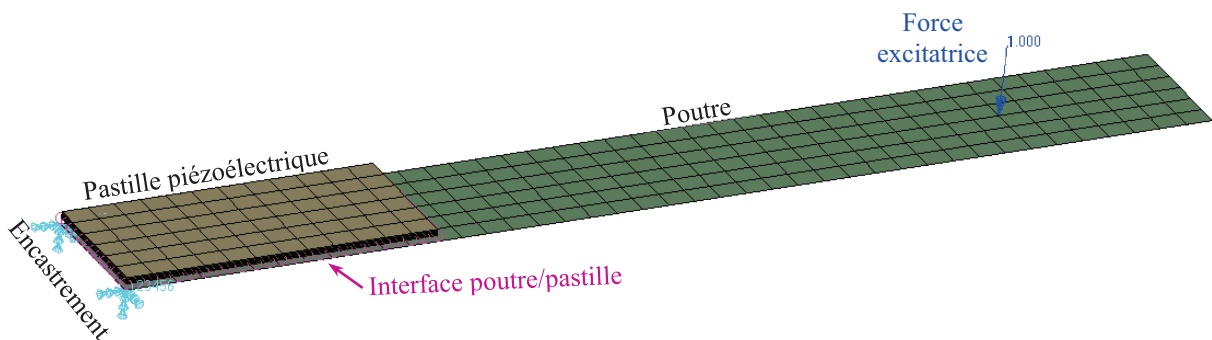


FIG. 3.10– Poutre munie d’une pastille piézoélectrique d’épaisseur 1 mm: modèle éléments finis dans Patran.

Le TAB. 3.8 compare les fréquences propres (en court-circuit et en circuit-ouvert) et les coefficients de couplage effectifs des deux modèles (3D et simplifié) pour les 10 premiers modes propres de la poutre. La FIG. 3.12 permet de comparer la réponse fréquentielle des deux modèles éléments finis au point d’application de la force excitatrice, en tenant compte de la différence de potentiel entre les électrodes. Les valeurs d’inductance et de résistance

électrique du shunt sont les mêmes pour les deux modèles. De plus, un amortissement mécanique structural ($\eta = 0.02$) est introduit dans les modèles.

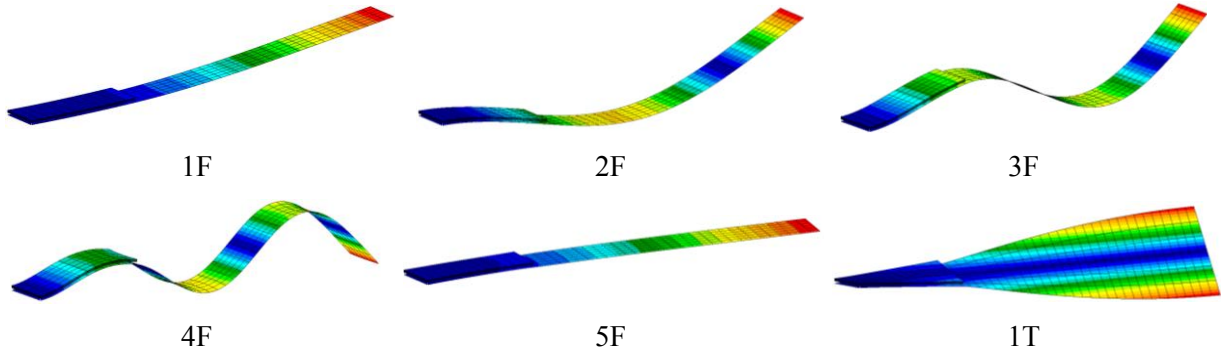


FIG. 3.11- Déformées modales des 4 premiers modes de flexion (F), du premier mode de Torsion (T) et du premier mode de flexion dans le plan (F_{x-y}) de la poutre munie de la pastille piézoélectrique de 1 mm d'épaisseur. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

TAB. 3.7 : Fréquences propres en court-circuit ($\omega_i^{(3D)}$) et en circuit-ouvert ($\hat{\omega}_i^{(3D)}$) obtenues avec la formulation 3D pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la pastille piézoélectrique (h_p).

Mode*	Fréquences en [Hz]									
	$h_p = \frac{1}{8} h_b$		$h_p = \frac{3}{8} h_b$		$h_p = \frac{1}{2} h_b$		$h_p = h_b$		$h_p = 2.5 h_b$	
	$\omega_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$	$\omega_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$	$\omega_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$	$\omega_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$	$\omega_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$
1F	60.78	61.98	71.89	73.48	76.54	77.99	89.01	89.73	99.44	99.55
2F	353.68	355.80	379.49	383.97	393.27	398.27	445.14	449.71	511.73	513.07
1F _{x-y}	556.29	556.29	587.02	587.02	599.68	599.68	637.81	637.81	697.71	697.71
3F	961.28	961.52	969.11	970.05	971.95	973.23	972.50	974.33	905.28	905.95
1T	954.73	954.73	1048.71	1048.71	1084.10	1084.10	1170.50	1170.50	1238.78	1238.78
4F	1877.71	1878.77	1904.56	1906.01	1918.95	1920.27	1947.66	1948.41	1928.75	1928.93
2T	2752.26	2752.26	2889.79	2889.79	2969.04	2969.04	3095.74	3095.74	2899.19	2899.19
2F _{x-y}	3186.28	3186.28	3184.53	3184.53	3182.84	3182.84	3338.39	3338.39	3606.15	3607.45
5F	3109.48	3112.51	3174.72	3181.42	3219.29	3226.94	3387.04	3394.45	3732.59	3732.59
3T	4491.07	4491.07	4432.39	4432.39	4433.16	4433.16	4548.45	4548.45	5426.59	5426.59

* F : Flexion, F_{x-y} : Flexion dans le plan de la poutre, T : Torsion.

TAB. 3.8 : Comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée pour plusieurs valeurs d'épaisseur de la pastille piézoélectrique – Différences entre les fréquences propres (court-circuit et circuit-ouvert) et les coefficients de couplage effectifs.

Mode **		Différences * [%] $\left(Er_i^{(CC)} = \frac{\omega_i^{(3D)} - \omega_i^{(SS)}}{\omega_i^{(3D)}} \text{ et } Er_i^{(CO)} = \frac{\hat{\omega}_i^{(3D)} - \hat{\omega}_i^{(SS)}}{\hat{\omega}_i^{(3D)}} \right)$									
		$h_p = \frac{1}{8} h_b$		$h_p = \frac{3}{8} h_b$		$h_p = \frac{1}{2} h_b$		$h_p = h_b$		$h_p = 2.5 h_b$	
type	$Er^{(CC)}$	$Er^{(CO)}$	$Er^{(CC)}$	$Er^{(CO)}$	$Er^{(CC)}$	$Er^{(CO)}$	$Er^{(CC)}$	$Er^{(CO)}$	$Er^{(CC)}$	$Er^{(CO)}$	
1F	0.01	0.01	0.16	0.12	0.26	0.19	0.49	0.39	0.44	0.41	
2F	0.01	0.01	0.12	0.11	0.24	0.21	0.77	0.68	1.46	1.42	
1F _{x-y}	0.00	0.00	0.02	0.02	0.04	0.04	0.13	0.13	0.36	0.36	
3F	0.01	0.01	0.09	0.10	0.17	0.17	0.51	0.51	1.04	1.04	
1T	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.04	0.04	
4F	0.01	0.01	0.10	0.09	0.16	0.15	0.31	0.29	0.25	0.24	
2T	0.00	0.00	0.02	0.02	0.03	0.03	0.16	0.16	0.55	0.55	
2F _{x-y}	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.03	0.02	0.02	0.05	0.05	
5F	0.01	0.01	0.10	0.09	0.18	0.16	0.45	0.40	0.38	0.35	
3T	0.00	0.00	0.02	0.02	0.03	0.03	0.06	0.06	0.21	0.20	

Mode		Coefficients de couplage effectifs [%] $\left(k_{\text{eff},i} = 100 \sqrt{\frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}} \right)$									
		$h_p = \frac{1}{8} h_b$		$h_p = \frac{3}{8} h_b$		$h_p = \frac{1}{2} h_b$		$h_p = h_b$		$h_p = 2.5 h_b$	
type	3D	Simplifiée	3D	Simplifiée	3D	Simplifiée	3D	Simplifiée	3D	Simplifiée	
1F	20.01	20.02	21.15	21.36	19.56	19.91	12.76	13.52	4.52	5.02	
2F	10.98	10.98	15.42	15.52	16.00	16.20	14.37	15.01	7.24	7.86	
1F _{x-y}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
3F	2.24	2.24	4.41	4.38	5.12	5.08	6.14	6.12	3.82	3.72	
1T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
4F	3.37	3.38	3.90	4.01	3.72	3.90	2.78	3.22	1.34	1.80	
2T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
2F _{x-y}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
5F	4.41	4.42	6.50	6.63	6.90	7.14	6.62	7.34	2.69	3.50	
3T	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

* $Er_i^{(CC)}$ et $Er_i^{(CO)}$ correspondent aux erreurs entre les deux modèles E.F. pour les fréquences propres du i -ème mode avec la pastille piézoélectrique en court-circuit et en circuit-ouvert, respectivement.

** F : Flexion, F_{x-y} : Flexion dans le plan de la poutre, T : Torsion.

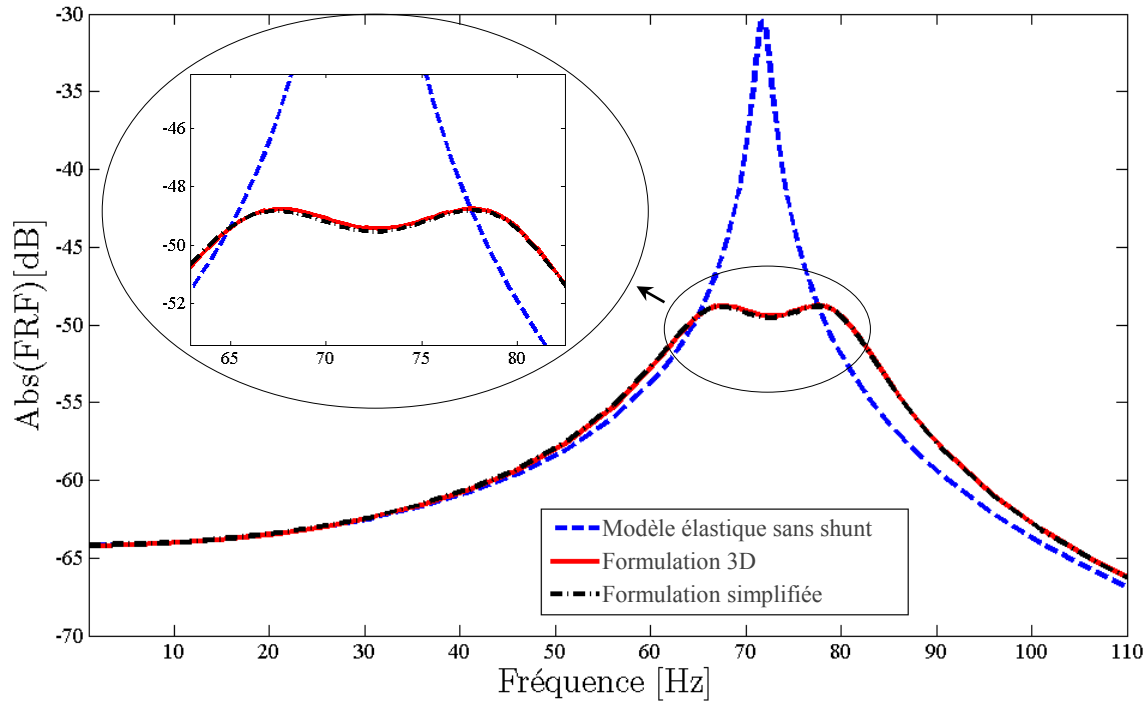
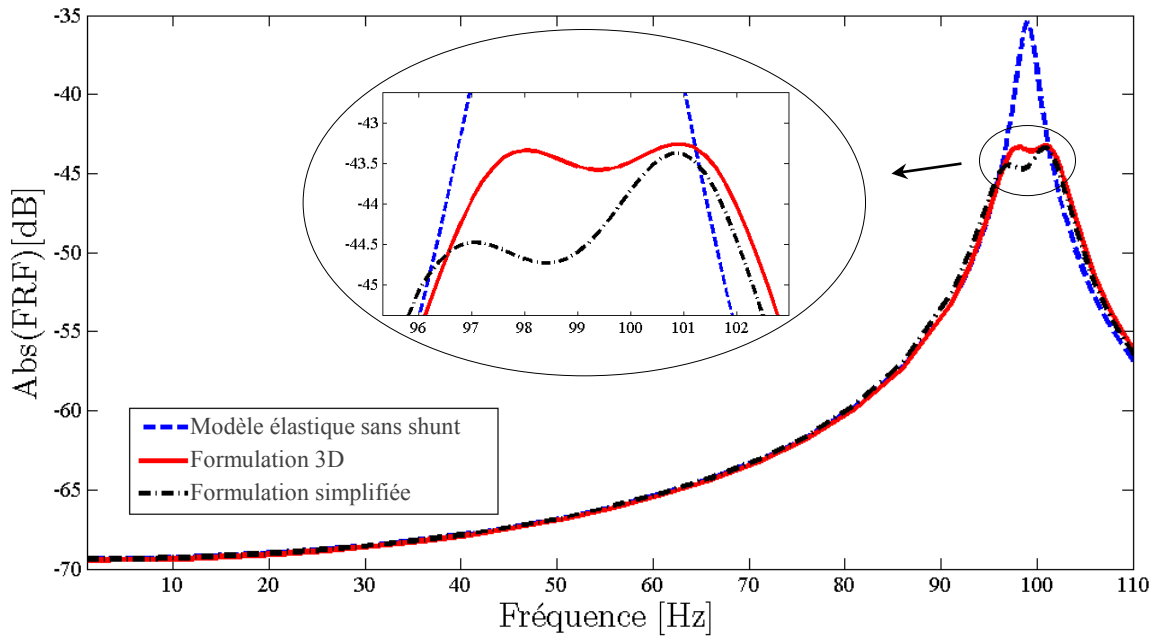
(a) Pastille avec épaisseur $h_p = 0.75$ mm(b) Pastille avec épaisseur $h_p = 5$ mm

FIG. 3.12- FRF au nœud d'application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d'un circuit shunt résonant accordée sur le premier mode de flexion : comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée.

On remarque que la différence entre les résultats des deux modèles est directement liée à l'épaisseur de la pastille. Pour des pastilles avec une épaisseur inférieure à 0.75 mm

(deuxième colonne du TAB. 3.8 ($h_p = \frac{3}{8}h_b$)), cette différence reste pratiquement nulle tandis que pour des pastilles plus épaisses, elle augmente considérablement. Malgré cela, les valeurs obtenues dans cet exemple restent raisonnables même pour une pastille de 5 mm d'épaisseur. De plus, il faut noter qu'on a utilisé une pastille avec une longueur importante par rapport à la longueur de la structure ($l_p = 0.28l_b$). Bien qu'on ne le montre pas ici, la différence entre les résultats des deux modèles diminue avec une pastille plus petite.

On peut donc conclure que la formulation simplifiée est bien adaptée au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques *de faible épaisseur*, plus particulièrement quand les dimensions des pastilles sont beaucoup plus petites que celles de la structure. Afin de consolider cette conclusion, les deux formulations éléments finis sont appliquées dans l'exemple suivant au cas d'un silencieux automobile muni d'une pastille piézoélectrique.

3.2.4. Exemple d'un pot d'échappement automobile muni d'une pastille piézoélectrique shuntée

Pour compléter les analyses précédentes et montrer l'efficacité de la formulation simplifiée dans un cas industriel, on considère le problème de réduction des vibrations d'un silencieux automobile en utilisant une pastille piézoélectrique shuntée (voir FIG. 3.13). Le silencieux est en aluminium ($E = 74$ GPa, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2700$ kg.m⁻³) avec une épaisseur de 0.12 pouces⁶ d'épaisseur tandis que les tubes d'admission et d'échappement sont en acier ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800$ kg.m⁻³) avec une longueur de 6 pouces et une épaisseur de 0.08 pouces. La pastille, qui est parfaitement collée sur la surface du silencieux, est fabriquée en PIC-151 avec une épaisseur de 0.025 pouces. De plus, le silencieux est soumis à une force harmonique transverse d'amplitude unitaire (FIG. 3.13(b)) et un amortissement mécanique est introduit avec un coefficient d'amortissement structural constant égal à $\eta = 0.02$.

Le silencieux et les tubes d'admission et d'échappement sont modélisés avec des éléments quadrilatères à 8 nœuds (QUAD 8) tandis que la pastille piézoélectrique est modélisée avec des éléments hexaédriques à 20 nœuds (FIG. 3.13(b)). De façon similaire à l'exemple précédent, des éléments rigides RBE3 de *Nastran* sont utilisés pour modéliser l'interface structure/pastille.

⁶ 1 pouce correspond à 0.0254 mètres.

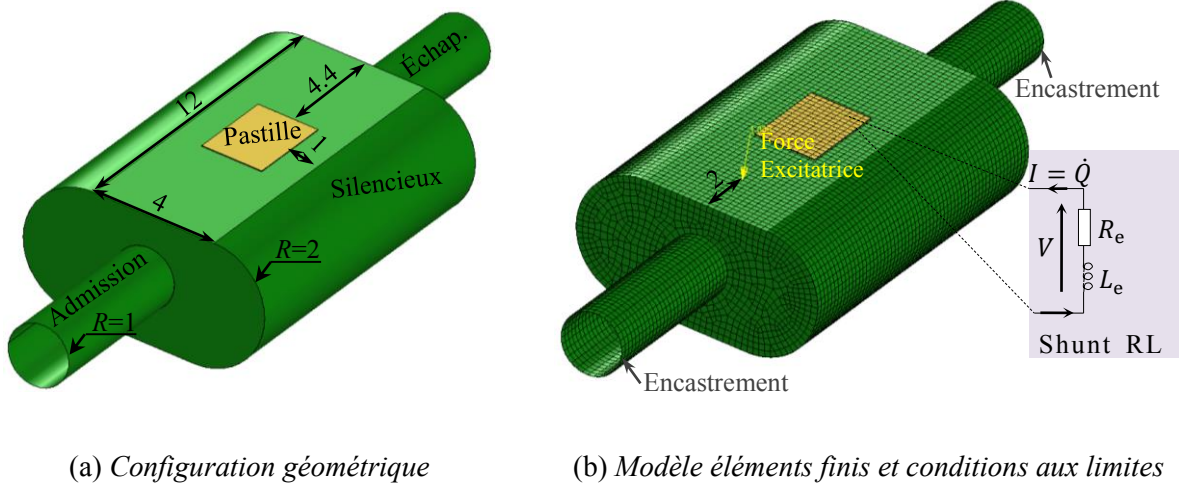


FIG. 3.13– Silencieux automobile avec les tubes d'admission et d'échappement. (dimensions en pouces).

Le TAB. 3.9 et la FIG. 3.15 comparent les résultats de la formulation simplifiée avec ceux de la formulation 3D.

Le TAB. 3.9 présente les coefficients de couplage effectifs pour les 5 premiers modes propres du système. On remarque que la différence entre les résultats des deux modèles (3D et simplifiée) est inférieure à 0.25 %. De plus, on observe que les déformées des modes 1, 4 et 5 produisent l'annulation des charges sur les surfaces des électrodes de la pastille (voir FIG. 3.14). Ce phénomène, qui a été mise en évidence par les deux modèles, est causé par des déformations opposées (antisymétriques) de la pastille piézoélectrique et il est caractérisé par un coefficient de couplage effectif nul ($k_{\text{eff},1} = k_{\text{eff},4} = k_{\text{eff},5} = 0$).

La FIG. 3.15 montre la réponse fréquentielle du système munie d'un circuit shunt résonant accordé au troisième mode de vibration (mode qui a le coefficient de couplage effectif le plus élevé). On vérifie un excellent accord entre les résultats des deux modèles. Il est important de noter que les valeurs d'inductance et de résistance électrique du shunt sont les mêmes pour les deux modèles.

En conclusion, cet exemple illustre une fois de plus l'efficacité de la formulation simplifiée dans le cas d'une structure élastique industriel munie d'une pastille piézoélectrique de faible épaisseur.

TAB. 3.9 : Comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée – Fréquences propres et coefficients de couplage effectifs pour les 5 premiers modes propres.

Fréquence CC [Hz]		Erreur [%]		Fréquence CO [Hz]		Erreur [%]	
Mode	$\omega_i^{(3D)}$	$\omega_i^{(SS)}$	$100 \left \frac{\omega_i^{(3D)} - \omega_i^{(SS)}}{\omega_i^{(3D)}} \right $	$\hat{\omega}_i^{(3D)}$	$\hat{\omega}_i^{(SS)}$	$100 \left \frac{\hat{\omega}_i^{(3D)} - \hat{\omega}_i^{(SS)}}{\hat{\omega}_i^{(3D)}} \right $	
1	437.07	437.07	0.00	437.07	437.07	0.00	
2	528.96	528.92	0.01	532.06	532.03	0.01	
3	582.81	582.76	0.01	587.31	587.26	0.01	
4	636.55	636.55	0.00	636.55	636.55	0.00	
5	666.28	666.28	0.00	666.28	666.28	0.00	

Mode	Coefficient de couplage effectif ($k_{\text{eff},i}$) [%]		Erreur [%] $\left(100 \left \frac{k_{\text{eff},i}^{(3D)} - k_{\text{eff},i}^{(SS)}}{k_{\text{eff},i}^{(3D)}} \right \right)$
	Formulation 3D	Formulation simplifiée	
1	0.00	0	0
2	10.84	10.86	0.19
3	12.45	12.46	0.08
4	0	0	0
5	0	0	0

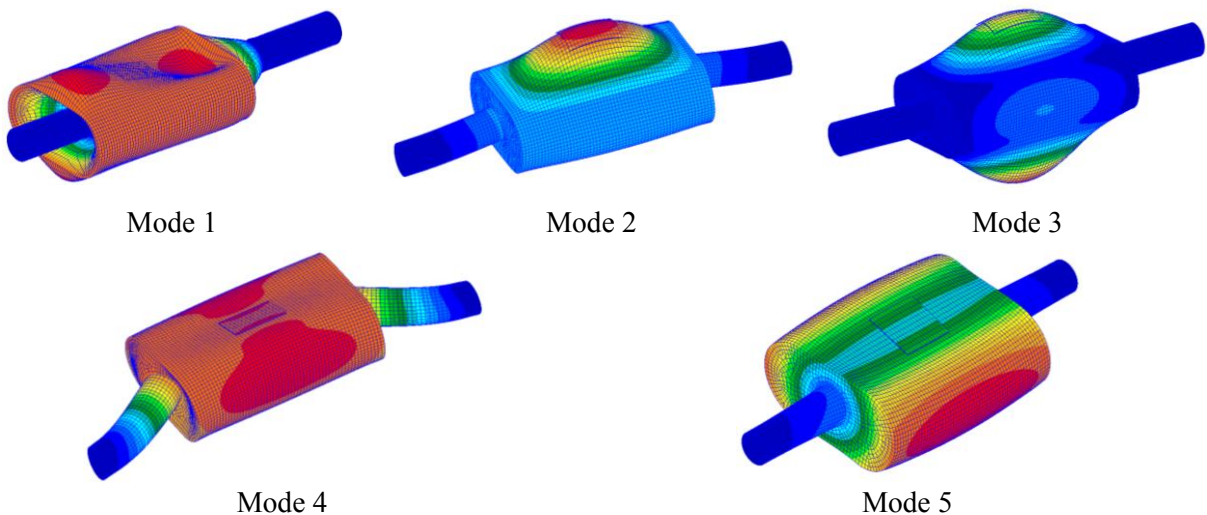


FIG. 3.14- Déformées modales des 5 premiers modes propres du silencieux automobile avec une pastille piézoélectrique. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

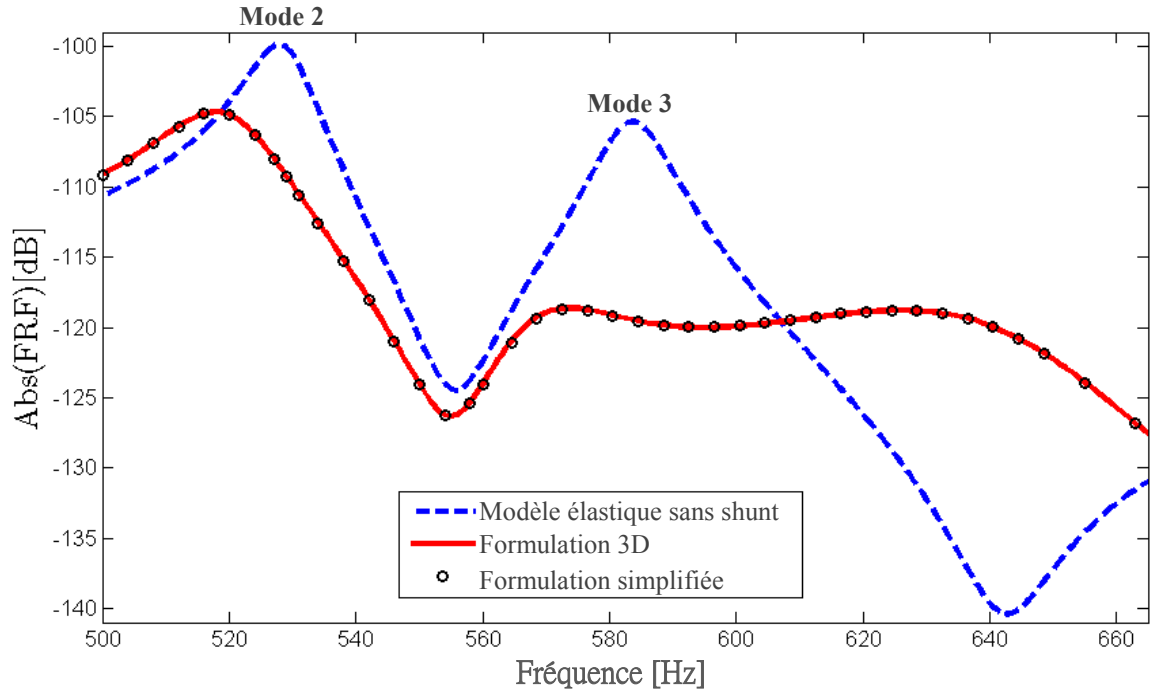


FIG. 3.15- FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (structure/pastille) munie d'un circuit shunt résonant accordée au troisième mode de vibration : comparaison entre la formulation 3D et la formulation simplifiée.

3.2.5. Exemple d'une poutre console : corrélation calcul-essai

Les analyses précédentes ont montré que la formulation simplifiée est appropriée aux cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques minces. Pour valider l'implémentation numérique du modèle 2D associé à la formulation simplifiée, on considère une poutre en aluminium, encadrée-libre et munie de deux pastilles piézoélectriques identiques en PIC-151 montées en série (voir FIG. 3.16(a)).

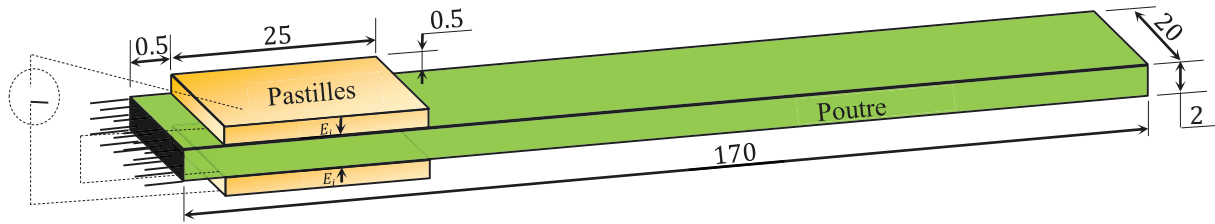
Le montage en série impose les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p \in [1,2] \quad Q^{(p)} = Q \\ \sum_{p=1}^N V^{(p)} = V \end{array} \right. \quad (3.19)$$

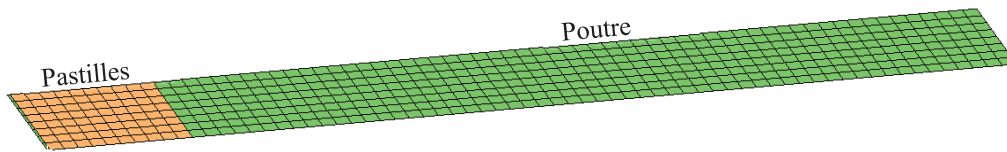
Les algorithmes de la FIG. 3.1 et de l'Annexe B sont appliqués pour construire le modèle éléments finis 2D simplifié (FIG. 3.16(b)) et résoudre les problèmes modaux associés⁷. Les

⁷ Le modèle considère une masse ponctuelle de 4.2 g sur l'extrémité libre de la poutre, laquelle représente l'aimant utilisé pour l'excitation de la poutre durant l'expérience (Ducarne, 2009).

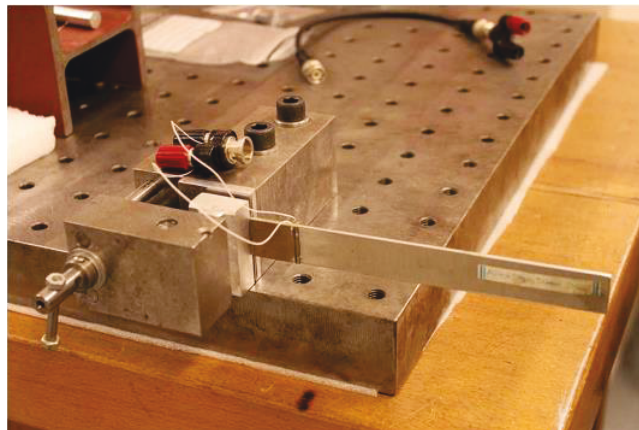
résultats sont alors comparés aux données expérimentales issues de (Ducarne, 2009) (FIG. 3.16(c)).



(a) géométrie et conditions aux limites (dimensions en mm)



(b) Modèle éléments finis dans Patran



(c) Montage expérimental

FIG. 3.16– Poutre munie des deux pastilles piézoélectriques reliées en série.

Le TAB. 3.10 permet de comparer les fréquences propres et les coefficients de couplage effectifs obtenus expérimentalement avec ceux calculés par le modèle éléments finis simplifié. Le bon accord obtenu valide ce dernier (moins de 5.94 % d'écart pour les fréquences propres et moins de 3.37 % d'écart pour coefficients effectifs).

TAB. 3.10 : Comparaison entre le modèle numérique et l'expérience – Fréquences propres (court-circuit et circuit-ouvert) et coefficients de couplage effectifs.

		Fréquence CC [Hz]		Erreur [%]	Fréquence CO [Hz]		Erreur [%]
Mode*	ω_i E.F.	ω_i Exp.	$100 \left \frac{\omega_i^{(\text{Exp})} - \omega_i^{(\text{EF})}}{\omega_i^{(\text{Exp})}} \right $		$\hat{\omega}_i$ E.F.	$\hat{\omega}_i$ Exp.	$100 \left \frac{\hat{\omega}_i^{(\text{Exp})} - \hat{\omega}_i^{(\text{EF})}}{\hat{\omega}_i^{(\text{Exp})}} \right $
1F	48.40	51.46	5.94		48.90	51.98	5.92
2F	336.27	335.4	0.25		339.59	338.5	0.32

		Coefficient de couplage effectif [%]		Erreur [%]
Mode	$k_{\text{eff},i}$ E.F.	$k_{\text{eff},i}$ Exp.	$100 \left \frac{k_{\text{eff},i}^{(\text{Exp})} - k_{\text{eff},i}^{(\text{EF})}}{k_{\text{eff},i}^{(\text{Exp})}} \right $	
1F	14.45	14.33	0.84	
2F	14.09	13.63	3.37	

* F : Flexion.

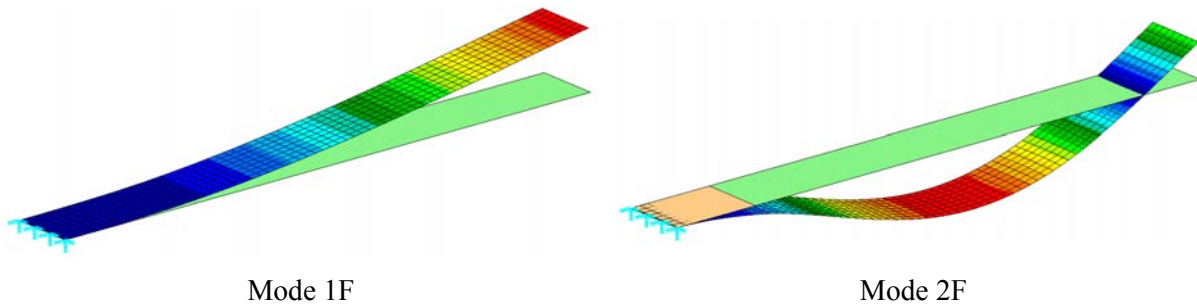


FIG. 3.17- Déformées modales des 2 premiers modes de flexion de la poutre. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement (F : Flexion).

3.3. Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté dans la première partie l'implémentation numérique des modèles éléments finis développés dans ce travail. Nous avons notamment mis en évidence la stratégie numérique utilisée qui est basée sur l'utilisation du code de calcul *Nastran* en association avec les logiciels *Patran*, *Matlab* et le langage de programmation *Awk*. Nous avons validé la formulation simplifiée par comparaison avec la formulation 3D et une solution exacte d'espace d'état tridimensionnelle. Les exemples analysés dans la deuxième partie du chapitre ont montré que la formulation simplifiée est bien adaptée au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques de faible épaisseur, spécialement quand

les dimensions des pastilles sont beaucoup plus petites que celles de la structure. Enfin, nous avons validé l'implémentation du modèle éléments finis 2D associé à la formulation simplifiée avec des mesures expérimentales (Ducarne, 2009) sur l'exemple d'une poutre console.

La principale originalité de ce chapitre concerne l'analyse de l'influence du potentiel induit dans le comportement dynamique d'une pastille piézocéramique munie d'électrodes sur ses surfaces supérieure et inférieure et polarisée dans sa direction transverse (direction normale aux électrodes). Les analyses effectuées montrent que cette influence est fonction principalement des propriétés du matériau piézoélectrique et peu du type de la déformée. L'exemple 3.2.2 (analyse d'une pastille piézoélectrique simplement appuyée) a montré que cette influence :

- est relativement importante pour les modes de flexion et pratiquement nulle pour les modes de membrane ;
- est plus important pour les matériaux avec le coefficient de couplage k_{31} plus élevé et reste pratiquement constante pour tous les modes de flexion ;
- reste pratiquement constante pour différentes épaisseurs de la pastille analysée ;
- ne peut être négligée dans l'étude du comportement dynamique d'une pastille en flexion.

Néanmoins, les exemples 3.2.3 (analyse d'une poutre avec une pastille piézoélectrique shuntée) et 3.2.4 (analyse d'un pot d'échappement automobile munie d'une pastille piézoélectrique shuntée) ont permis de vérifier que cette influence peut être négligé dans l'étude du comportement dynamique global d'un ensemble structure/pastilles pour de fines pastilles piézoélectriques.

Dans le chapitre suivant on propose différentes techniques basées sur la méthode de projection modale pour réduire le problème électromécanique.

Atténuation des vibrations avec pastilles piézoélectriques shuntées : modèles d'ordre réduit

4.1 Les shunts pour l'atténuation des vibrations.....	86
4.1.1 Bibliographie	87
4.1.2 Formulation éléments finis : shunts R et RL	88
4.2 Modèles d'ordre réduit pour les vibrations d'une structure élastique avec pastilles piézoélectriques shuntées	90
4.2.1 Technique 1 : projection sur les modes en court-circuit	90
4.2.2 Technique 2 : projection sur les modes en circuit-ouvert	91
4.2.3 Technique 3 : projection sur la base combinée court-circuit/circuit-ouvert.....	92
4.2.4 Technique 4 : projection sur la base des modes couplés électromécaniques	93
4.3 Coefficients de couplage et optimisation des paramètres électriques des circuits shunts	94
4.3.1 Coefficient de couplage effectif	94
4.3.2 Optimisation des paramètres électriques du shunt	97
Shunt résistif.....	99
Shunt résonant.....	100
4.4 Comparaison entre les différentes techniques de projection	102
4.4.1 Exemple 1	104
4.4.2 Exemple 2.....	110
4.5 Conclusions	116

Après avoir vérifié la validité de la formulation simplifiée au chapitre 3, on propose dans ce chapitre d'étudier la convergence de différents modèles d'ordre réduit associés à cette formulation pour la résolution des problèmes électromécaniques avec pastilles piézoélectriques shuntées.

Dans un premier temps, on propose un rappel sur la technique des shunts pour la réduction de vibrations. On présente ensuite quatre techniques basées sur la méthode de projection modale pour réduire le modèle éléments finis d'une structure élastique avec des pastilles piézoélectriques shuntées. Enfin, on présente des exemples de validation dans lesquels on compare et analyse ces quatre modèles d'ordre réduit pour deux types de shunts : (i) shunt résistif et (ii) shunt résonant.

4.1. Les shunts pour l'atténuation des vibrations

Une catégorie particulière de dispositifs piézoélectriques est celle faisant appel à des circuits shunts. Dans cette technologie, des circuits passifs ou semi-passifs sont connectés à des pastilles piézoélectriques pour réduire les vibrations d'une structure élastique (FIG. 4.1). Les pastilles piézoélectriques convertissent une partie de l'énergie mécanique associée aux vibrations de la structure en énergie électrique, qui est ensuite dissipée par effet joule à travers la résistance électrique du circuit shunt. On étudie ici le cas d'un shunt résistif (shunt "R") où une résistance électrique dissipe l'énergie électrique par effet Joule, et le cas d'un shunt inductif ou résonant (shunt "RL") où une inductance permet d'augmenter le courant circulant dans le shunt, et donc la dissipation par la résistance (FIG. 4.1).

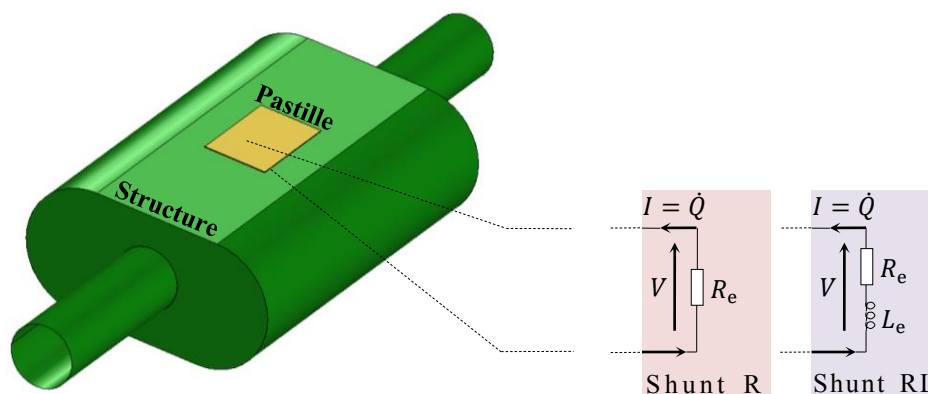


FIG. 4.1– Structure équipée d'une pastille piézoélectrique et shunts linéaires R ou RL.

4.1.1. Bibliographie

Les techniques de shunts R et RL ont été proposées par Hagood et Von Flotow (1991) d'après une idée initiale de (Forward, 1979). Les deux circuits proposés sont les analogues électriques d'un *amortisseur du type Lanchester* (Inman, 1994) pour le shunt résistif et d'un amortisseur à masses accordés (ou *amortisseur de Frahm*) (Den Hartog, 1956) pour le shunt résonant. Dans leur document, Hagood et Von Flotow présentent aussi l'optimisation de ces deux techniques dans le cas d'un système conservatif à un degré de liberté. Ils font les constatations suivantes :

- les shunts résistifs et résonants doivent être accordés à la pulsation du mode de vibration à atténuer et à la capacité de l'élément piézoélectrique. Cet accord doit être très précis dans le cas d'un shunt résonant, ce qui exclut l'amortissement de plusieurs modes ;
- la performance obtenue dépend du coefficient de couplage électromécanique ;
- les valeurs d'inductance requises sont très élevées en basses fréquences.

Depuis, plusieurs améliorations et variantes ont été proposées à ce modèle de base. On peut citer l'utilisation d'éléments piézoélectriques périodiques (Collet *et al.*, 2009 ; Casadei *et al.*, 2010) et de fibres composites actives (Belloli *et al.* 2007 ; Seba *et al.* 2006). Caruso (2001), Park (2003) et Viana et Steffen (2006) ont comparé les performances des circuits shunts selon leur composition et montage (RL parallèle, RLC parallèle et RL série). La valeur importante de l'inductance dans ces types de shunt, souvent de l'ordre de plusieurs Henry, a poussé certains auteurs (Behrens *et al.*, 2003) à ajouter une capacité additionnelle afin de réduire cette valeur, ce qui conduit à réduire également les performances du shunt. La même technique peut être utilisée d'une manière opposée, à l'aide d'une capacité négative, pour augmenter le facteur de couplage et donc les performances du shunt (Tang et Wang, 2001 ; Zhang *et al.*, 2001 ; de Marneffe et Preumont, 2008 ; Tateo *et al.*, 2013). Cependant, cette technique, qui est active et nécessite des composants électriques synthétiques, peut se révéler instable. D'autres auteurs proposent une inductance synthétique (Fleming *et al.*, 2000). Quelques études proposent des shunts résonants à plusieurs branches avec pour objectif d'amortir plusieurs modes d'un système à plusieurs degrés de liberté (Hollkamp, 1994). La plupart des études sur des shunts multimodes butent sur la difficulté d'optimiser un circuit où tous les composants ont des réglages fortement dépendants. Une solution pour contourner ce problème consiste à utiliser un réseau d'éléments piézoélectriques reliés par des shunts

résonants ; ce réseau constitue un analogue électrique de la structure (Alessandroni *et al.*, 2002 ; dell'Isola *et al.*, 2004 ; Maurini *et al.*, 2004 ; Rosi *et al.*, 2013). Dans (Hollkamp et Starchville Jr, 1994, Wu, 1998; Niederberger *et al.*, 2004), les auteurs proposent des circuits adaptatifs où l'inductance s'adapte automatiquement à la fréquence de résonance à atténuer pour pallier les inconvénients de la technique du shunt RL. Enfin, certaines techniques semi-passives, communément appelées "shunts à commutation" ou "switch techniques" dans la littérature anglo-saxonne (Richard *et al.*, 2000; Cunefare *et al.*, 2000; Badel *et al.*, 2007 ; Guyomar *et al.*, 2006, 2008 ; Ducarne *et al.*, 2010 ; Larbi *et al.*, 2010), ont récemment été proposées pour pallier les inconvénients du shunt RL, à savoir les valeurs d'inductance très élevées et l'accord précis avec la pulsation du mode de vibration à atténuer. Elles sont basées sur les modifications répétées de l'impédance électrique de manière synchrone avec l'oscillation de la structure. Ces deux dernières techniques sortent du cadre de cette étude.

Une revue des développements dans le domaine peut être trouvée dans (Lesieutre, 1998 ; Moheimani, 2003) ; une très bonne classification des différents types de shunts est faite dans l'introduction de (Niederberger, 2005) et enfin un exemple d'application du shunt résonant à un cas concret dans (Park, 2004).

4.1.2. Formulation éléments finis : shunts R et RL

On rappelle que le modèle éléments finis (formulation simplifiée) appliquée au cas d'une structure élastique munie des P pastilles piézoélectriques, s'écrit :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Cette formulation est bien adaptée au cas de pastilles piézoélectriques "shuntées", car elle permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux pastilles piézoélectriques. Un circuit shunt n'impose ni la charge Q , ni la différence de potentiel V , mais plutôt une relation entre les deux, liée à son impédance électrique. Cette relation, pour un shunt résistif (composé d'une résistance R_e) ou résonant (composé d'une résistance R_e et d'une inductance L_e) connecté à la p -ième pastille, est donnée par :

$$V^{(p)} + j \omega R_e Q^{(p)} = 0 \quad (\text{shunt résistif}) \quad (4.2a)$$

$$V^{(p)} - \omega^2 L_e Q^{(p)} + j \omega R_e Q^{(p)} = 0 \quad (\text{shunt résonant}) \quad (4.2b)$$

En introduisant (4.2) dans (4.1), on obtient alors le modèle éléments finis (formulation simplifiée) appliquée au cas des shunts linéaires :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

avec $[\mathbf{C}_u]$ la matrice d'amortissement mécanique, $[\mathbf{L}_e] = \text{diag} \left([L_e^{(1)}, \dots, L_e^{(P)}] \right)$ et $[\mathbf{R}_e] = \text{diag} \left([R_e^{(1)}, \dots, R_e^{(P)}] \right)$ les matrices de résistances et inductances des circuits électriques. Dans le cas où les shunts sont résistifs (composés uniquement de résistances $R_e^{(p)}$) la matrice $[\mathbf{L}_e]$ est nulle.

On remarque que le modèle (4.3) est valide pour le cas où chaque pastille est connectée à un circuit shunt indépendant. Cependant, lorsque plusieurs pastilles sont connectées à un seul circuit, les grandeurs utiles sont la charge totale contenue dans le circuit, notée Q , et la tension aux bornes du circuit, notée V , et non plus le vecteur $\{\mathbf{Q}\}$ des charges contenues dans chaque électrode et le vecteur $\{\mathbf{V}\}$ des différences de potentiel. Une réécriture de (4.3) est donc nécessaire pour passer de (\mathbf{Q}, \mathbf{V}) à (Q, V) .

Lorsque N pastilles sont reliées en série ou en parallèle, les relations entre les $V^{(p)}$ et les $Q^{(p)}$ deviennent :

$$\text{En série} \Rightarrow \begin{cases} \forall p \in [1, N] & Q^{(p)} = Q \\ & \sum_{p=1}^N V^{(p)} = V \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\text{En parallèle} \Rightarrow \begin{cases} \forall p \in [1, N] & V^{(p)} = V \\ & \sum_{p=1}^N Q^{(p)} = Q \end{cases} \quad (4.4b)$$

En utilisant ces expressions, on peut adapter le modèle (4.3) au cas de plusieurs pastilles connectées à un seul shunt. Cependant, ces développements ne seront pas abordés dans ce manuscrit. Le lecteur est invité à consulter le mémoire de thèse de Aurélien Sénéchal (2011) pour une analyse complète de modèles avec association de pastilles piézoélectriques.

4.2. Modèles d'ordre réduit pour les vibrations d'une structure élastique avec pastilles piézoélectriques shuntées

On présente dans cette section différentes stratégies pour réduire le problème (4.3) en projetant les inconnues de déplacement mécanique sur une base de modes propres. Les méthodes largement utilisées dans la littérature consistent à utiliser la base modale du problème en court-circuit (Thomas *et al.*, 2009, 2012a, 2012b) ou en circuit-ouvert (Godoy et Trindade, 2011). On propose ici deux nouvelles bases modales de projections : (i) la base combinée, formée à la fois par les modes propres du problème en court-circuit et en circuit-ouvert ; et (ii) la base des modes couplés électromécaniques qui prend en compte l'effet de des inductances électriques des circuits shunts (Da Silva *et al.*, 2012). La convergence de ces quatre techniques fait l'objet de la Section 4.4.

4.2.1. Technique 1 : projection sur les modes en court-circuit

Les modes propres $\{\Phi_i\}$ et les pulsations propres ω_i du système en court-circuit (CC) sont solutions du problème :

$$[\mathbf{K}_u - \omega^2 \mathbf{M}_u] \{\Phi\} = \{0\} \quad (4.5)$$

Ces quantités ne dépendent que des propriétés mécaniques du système Ω (structure/pastilles) et vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\forall (i, j), \quad \{\Phi_i\}^T [\mathbf{M}_u] \{\Phi_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_u] \{\Phi_j\} = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (4.6)$$

En tenant compte de la base modale formée par les N_m vecteurs propres en court-circuit, le vecteur déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_m} \{\Phi_i\} \varphi_i(\omega) = [\Phi] \{\varphi(\omega)\}. \quad (4.7)$$

avec $[\Phi] = [\Phi_1 \dots \Phi_{N_m}]$ la matrice contenant les N_m vecteurs propres et $\{\varphi(\omega)\} = [\varphi_1(\omega) \dots \varphi_{N_m}(\omega)]^T$ le vecteur des coordonnées modales. En tronquant la base modale aux \tilde{N} premiers modes, avec $\tilde{N} \ll N_m$, en insérant l'Eq. (4.7) dans la formulation (4.3), puis en multipliant la partie mécanique du système par $[\Phi]^T$ et enfin en prenant en compte l'orthogonalité des modes (4.6), on obtient le modèle d'ordre réduit suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\omega^2 + 2j\omega\xi_i\omega_i + \omega_i^2)\varphi_i + \sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{\chi_i^{(p)}\chi_n^{(p)}}{C^{(p)}}\varphi_n + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_i^{(p)}}{C^{(p)}}Q^{(p)} = F_i, \quad \forall i \in \{1 \dots \tilde{N}\} \\ \left(-\omega^2 L_e^{(p)} + j\omega R_e^{(p)} + \frac{1}{C^{(p)}}\right)Q^{(p)} + \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{\chi_n^{(p)}}{C^{(p)}}\varphi_n = 0 \quad \forall p \in \{1 \dots P\} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec ξ_i le coefficient d'amortissement en CC associé au i -ième mode et $\chi_i^{(p)}$ le coefficient de couplage en CC du i -ième mode avec la p -ième pastille piézoélectrique, défini par :

$$\left[\chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)} \dots \chi_i^{(P)} \right] = \{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_{uv}], \quad \forall i \in [1, \tilde{N}] \quad (4.9)$$

et où $F_i(\omega) = \{\Phi_i\}^T \{\mathbf{F}(\omega)\}$ est la force modale en CC du i -ième mode.

L'avantage de cette méthode est que le calcul des modes en court-circuit ne nécessite qu'une seule analyse modale du problème purement élastique (Thomas *et al.*, 2009).

4.2.2. Technique 2 : projection sur les modes en circuit-ouvert

Les modes propres $\{\hat{\Phi}_i\}$ et les pulsations propres $\hat{\omega}_i$ du système en circuit-ouvert (CO) sont solutions du problème :

$$[\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T - \omega^2\mathbf{M}_u]\{\Phi\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.10)$$

Ces modes vérifient les propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$\forall (i, j), \quad \{\hat{\Phi}_i\}^T [\mathbf{M}_u] \{\hat{\Phi}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{\Phi}_i\}^T [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T] \{\hat{\Phi}_j\} = \hat{\omega}_i^2 \delta_{ij}. \quad (4.11)$$

En tenant compte de la base modale formée par les N_m vecteurs propres en circuit-ouvert, le vecteur déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_m} \{\hat{\Phi}_i\} \hat{\varphi}_i(\omega) = [\hat{\Phi}] \{\hat{\varphi}(\omega)\}. \quad (4.12)$$

avec $[\hat{\Phi}] = [\hat{\Phi}_1 \dots \hat{\Phi}_{N_m}]$ la matrice contenant les N_m vecteurs propres et $\{\hat{\varphi}(\omega)\} = [\hat{\varphi}_1(\omega) \dots \hat{\varphi}_{N_m}(\omega)]^T$ le vecteur des coordonnées modales. En tronquant la base modale aux \tilde{N} premiers modes, avec $\tilde{N} \ll N_m$, en insérant l'Eq. (4.12) dans la formulation (4.3), puis en multipliant la partie mécanique du système par $[\hat{\Phi}]^T$ et enfin en prenant en compte l'orthogonalité des modes (4.11), on obtient le modèle d'ordre réduit suivant :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2j\omega \hat{\xi}_i \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_i^2) \hat{\varphi}_i + \sum_{p=1}^P \frac{\hat{\chi}_i^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = \hat{F}_i, \quad \forall i \in \{1 \dots \tilde{N}\} \\ \left(-\omega^2 L_e^{(p)} + j\omega R_e^{(p)} + \frac{1}{C^{(p)}} \right) Q^{(p)} + \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{\hat{\chi}_n^{(p)}}{C^{(p)}} \hat{\varphi}_n = 0 \quad \forall p \in \{1 \dots P\} \end{cases} \quad (4.13)$$

avec $\hat{\xi}_i$ le coefficient d'amortissement en CO associé au i -ième mode et $\hat{\chi}_i^{(p)}$ le coefficient de couplage en CO du i -ième mode avec la p -ième pastille piézoélectrique, défini par :

$$\left[\hat{\chi}_i^{(1)} \hat{\chi}_i^{(2)} \dots \hat{\chi}_i^{(P)} \right] = \{\hat{\Phi}_i\}^T [\mathbf{K}_{uv}], \quad \forall i \in [1, \tilde{N}] \quad (4.14)$$

et où $\hat{F}_i(\omega) = \{\hat{\Phi}_i\}^T \{\mathbf{F}(\omega)\}$ est la force modale en CO du i -ième mode.

4.2.3. Technique 3 : projection sur la base combinée court-circuit/circuit-ouvert

Cette méthode consiste à construire une base réduite de projection en combinant des modes en court-circuit et des modes en circuit-ouvert :

$$[\Phi_C] = [\Phi_1 \dots \Phi_{\tilde{N}} \hat{\Phi}_1 \dots \hat{\Phi}_{\tilde{N}}] \quad (4.15)$$

En tenant compte de la base modale ci-dessus, le vecteur déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_m} \{\Phi_i\} \varphi_i(\omega) + \sum_{i=1}^{N_m} \{\hat{\Phi}_i\} \hat{\varphi}_i(\omega) = [\Phi_C] \{\boldsymbol{\varphi}_C(\omega)\}. \quad (4.16)$$

En insérant l'Eq. (4.16) dans la formulation (4.3) et en multipliant la partie mécanique du système par $[\Phi_C]^T$, on obtient le modèle d'ordre réduit suivant :

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \Phi_C^T \mathbf{M}_u \Phi_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \Phi_C^T \mathbf{C}_u \Phi_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \Phi_C^T (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T) \Phi_C & \Phi_C^T \mathbf{K}_{uv} \mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1} \mathbf{K}_{uv}^T \Phi_C & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_C^T \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ce type de stratégie de réduction de modèle par projection sur les vecteurs propres des deux cas extrêmes ($R_e^{(p)} = 0$ et $R_e^{(p)} = \infty$) a été mise en place avec succès par différents auteurs dans le cadre de l'amortissement des structures par ajout de matériaux viscoélastique

(voir (Rouleau, 2013)). Deux inconvénients demeurent néanmoins : (i) la nécessité de deux analyses modales et (ii) le fait que les vecteurs propres en court-circuit et en circuit-ouvert ne sont pas orthogonaux par rapport à la matrice de masse et de rigidité du problème. Un procédé, basé sur l'algorithme de Gram Schmidt modifié, sera appliqué dans cette thèse de manière à orthogonaliser la base de projection et ainsi construire un modèle d'ordre réduit formé par des matrices bien conditionnées.

4.2.4. Technique 4 : projection sur la base des modes couplés électromécaniques

Dans le cas d'un shunt résonant, cette technique consiste à calculer les modes propres réels du système conservatif associé à l'Eq. (4.3). Ainsi, les inductances des circuits sont prises en compte dans la matrice de masse alors que l'effet des résistances et l'amortissement mécanique est négligé. Les modes propres ($\{\Phi_{CE_i}\}, \omega_{CE_i}$) de ce problème sont solutions de l'équation :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (4.18)$$

Après construction d'une base modale de projection $[\Phi_{CE}]$ formée par les $N_m + P$ vecteurs propres de taille N_m (on ne retient que les composants du déplacement mécanique), le vecteur déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{U}(\omega)\} = [\Phi_{CE}]\{\varphi_{IN}(\omega)\}. \quad (4.19)$$

En tronquant la base modale aux \tilde{N} premiers modes, avec $\tilde{N} \ll N_m + P$, en insérant l'Eq. (4.19) dans la formulation (4.3), en multipliant la partie mécanique du système par $[\Phi_{CE}]^T$, on obtient le modèle d'ordre réduit suivant :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \Phi_{IN}^T \mathbf{M}_u \Phi_{IN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_e \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \Phi_{IN}^T \mathbf{C}_u \Phi_{IN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{IN}^T (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T) \Phi_{IN} & \Phi_{IN}^T \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1} \\ \mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T \Phi_{IN} & \mathbf{K}_v^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{IN}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Cette méthode a été utilisée dans (Da Silva *et al.*, 2012) et a montré son efficacité. Une limitation demeure néanmoins : les valeurs optimales des inductances électriques doivent être connues à l'avance.

Remarque :

En substituant $\{\mathbf{Q}\}$ en fonction de $\{\mathbf{U}\}$ à partir de la deuxième ligne de l'Eq. (4.18), le problème modal revient à résoudre :

$$(-\omega^2[\mathbf{M}_u] + [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T - \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}(\mathbf{K}_v^{-1} - \omega^2\mathbf{L}_e)^{-1}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T])\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.21)$$

où on observe que :

- si $[\mathbf{L}_e] = [\mathbf{0}]$ on retrouve le problème en court-circuit :
 $(-\omega^2[\mathbf{M}_u] + [\mathbf{K}_u])\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\};$
- si chaque inductance $L_e^{(p)} = \infty$ on retrouve le problème en circuit-ouvert :
 $(-\omega^2[\mathbf{M}_u] + [\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_{uv}\mathbf{K}_v^{-1}\mathbf{K}_{uv}^T])\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{0}\}.$

4.3. Coefficients de couplage et optimisation des paramètres électriques des circuits shunts

On rappelle dans cette section les résultats obtenus dans des travaux antérieurs réalisés au LMSSC sur la réduction des vibrations à partir des dispositifs piézoélectriques shuntés (Thomas *et al.*, 2009, 2012b). Ces travaux considèrent la technique 1 (projection sur la base de modes en court-circuit) pour réduire le problème électromécanique et optimiser les paramètres électriques du shunt. Ces rappels sont faits de façon à présenter les équations utilisées pour l'évaluation des coefficients de couplage électromécanique modal et des paramètres électriques optimaux. La section suivante montre à travers deux exemples que ces coefficients de couplage permettent de quantifier le couplage électromécanique entre la structure élastique et les pastilles piézoélectriques. Cependant, les paramètres électriques obtenus par la procédure mentionnée ci-dessus ne s'avèreront pas optimaux.

4.3.1. Coefficient de couplage effectif

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que le coefficient $\chi_i^{(p)}$ introduit ci-dessus (technique 1) est directement lié au coefficient de couplage effectif modal $k_{\text{eff},i}$ introduit dans le Chapitre 2. Ce coefficient $k_{\text{eff},i}$ caractérise l'échange d'énergie entre les pastilles piézoélectriques et la structure hôte. Plusieurs auteurs ont souligné son importance dans le passé (Davis et Lesieutre, 1995; Lesieutre et Davis, 1997; Caruso, 2001; Trindade et Benjeddou, 2009). Il est défini ici pour le i -ième mode par :

$$k_{\text{eff},i}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2} \quad (4.22)$$

En projetant le déplacement mécanique sur la base en court-circuit tronquée à la i -ième ligne uniquement (c'est-à-dire $\varphi_j \equiv 0, \forall j \neq i$) et en multipliant la partie mécanique du système par $\{\Phi_i\}^T$, le modèle éléments finis (4.1) appliqué au cas d'une structure élastique munie des P pastilles piézoélectriques (sans shunt) devient :

$$(-\omega^2 + \omega_i^2)\varphi_i + \sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)} V^{(p)} = F_i \quad (4.23a)$$

$$C^{(p)}V^{(p)} - Q^{(p)} - \chi_i^{(p)}\varphi_i = 0, \quad \forall p \in [1, P] \quad (4.23b)$$

ou encore, sous une forme plus compacte, en remplaçant $V^{(p)}$ par $Q^{(p)}$ à partir de l'Eq. (4.23b) :

$$\left(-\omega^2 + \omega_i^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_i^{(p)})^2}{C^{(p)}} \right) \varphi_i + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_i^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = F_i \quad (4.24)$$

En circuit-ouvert ($Q^{(p)} = 0, \forall p$), le problème s'écrit :

$$(-\omega^2 + \hat{\omega}_i^2)\varphi_i = F_i \quad (4.25)$$

En comparant les Eqs. (4.24) et (4.25) on obtient une approximation de la fréquence du i -ième mode en circuit-ouvert, donnée par :

$$\hat{\omega}_i^2 \cong \omega_i^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_i^{(p)})^2}{C^{(p)}} \quad (4.26)$$

Ainsi, la combinaison des Eqs. (4.22) et (4.26) nous donne le coefficient de couplage effectif⁸ pour le i -ième mode :

$$k_{\text{eff},i}^2 \cong \sum_{p=1}^P (k_i^{(p)})^2 \quad (4.27)$$

⁸ En reprenant les définitions matricielles de $\chi_i^{(p)}$, $C^{(p)}$ et ω_i liées au problème initial (2.35) on obtient une autre expression pour $k_{\text{eff},i}$ d'après (4.27) : $k_{\text{eff},i}^2 \cong \frac{\{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_{uv}] [\mathbf{K}_v]^{-1} [\mathbf{K}_{uv}]^T \{\Phi_i\}}{\{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_u] \{\Phi_i\}}$.

où $k_i^{(p)}$, défini par :

$$k_i^{(p)} = \frac{\chi_i^{(p)}}{\omega_i \sqrt{C^{(p)}}} \quad (4.28)$$

est le coefficient de couplage réduit entre le i -ième mode et la p -ième pastille piézoélectrique. L'expression (4.27) définit le coefficient de couplage global $k_{\text{eff},i}$, qui regroupe les participations de tous les éléments piézoélectriques. Le coefficient de couplage effectif entre le i -ième mode et la p -ième pastille $k_{\text{eff},i}^{(p)}$ est défini par la différence des pulsations entre la situation où toutes les pastilles sont en court-circuit et le cas où elles sont en court-circuit sauf la p -ième qui est en circuit-ouvert (pulsation notée $\hat{\omega}_i^{(p)}$) :

$$k_{\text{eff},i}^{(p)} = \frac{\left(\hat{\omega}_i^{(p)}\right)^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}, \quad (4.29)$$

Ce dernier coefficient est approximativement égal au coefficient de couplage réduit entre le i -ième mode et la p -ième pastille piézoélectrique en valeur absolue :

$$k_{\text{eff},i}^{(p)} \cong \left| k_i^{(p)} \right| \quad (4.30)$$

On peut résumer les caractéristiques de ces divers coefficients de couplage comme suit :

- $\chi_i^{(p)}$ est obtenu à partir de la matrice de couplage électromécanique et des modes en court-circuit ;
- $k_i^{(p)}$ est lié à $\chi_i^{(p)}$ et présente l'avantage d'être sans dimension ;
- $k_{\text{eff},i}^{(p)}$ est lié à $k_i^{(p)}$ et est facilement mesurable (il suffit en effet d'identifier les fréquences propres mentionnées dans la relation (4.29)) ;
- $k_{\text{eff},i}$ est le coefficient de couplage global et regroupe les participations de tous les éléments piézoélectriques.

Ces coefficients sont importants pour quantifier la performance des applications de type shunt (Thomas *et al.*, 2009, 2012a, 2012b) ou switch (Ducarne, 2010) ; il est souvent essentiel de les maximiser. Il faut cependant remarquer que la formule (4.30) n'est pertinente que si la troncature à un mode est valide, ce qui exclut les cas de fréquences propres proches les unes des autres.

4.3.2. Optimisation des paramètres électriques du shunt

Dans cette partie on présente un rappel sur la modélisation et l'optimisation des paramètres électriques du shunt résistif et du shunt résonant dans le cas où ils sont connectés à des dispositifs piézoélectriques pour réduire les vibrations d'une structure élastique. La performance de ces techniques est directement liée au choix des paramètres des circuits shunt, c'est-à-dire la valeur de la résistance pour le shunt R ou de la résistance et de l'inductance pour le shunt RL. Dans ce contexte, on rappelle ici la démarche et les résultats issus du travail (Thomas *et al.*, 2012b), qui seront utilisés pour modéliser et optimiser chacun des deux circuits shunts considérés.

Les résultats concernant l'optimisation des performances d'un shunt ont été obtenus en considérant une structure élastique munie d'une pastille piézoélectrique ou de P pastilles piézoélectriques connectées entre elles. Dans ce cas, les équations mécaniques et électriques tronquées au i -ème mode (en court-circuit) uniquement⁹, peuvent s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\varphi}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{\varphi}_i + \hat{\omega}_i^2 \varphi_i + k_i \omega_i Q = F_i \quad (4.31a)$$

$$k_i \omega_i \varphi_i + \frac{Q}{C^{eq}} = V \quad (4.31b)$$

où les paramètres $\hat{\omega}_i$, $k_i \omega_i$ et C^{eq} dépendent du type de connexion des pastilles. Le TAB. 4.1 rappelle les valeurs de ces paramètres dans le cas d'une pastille seule ou de plusieurs pastilles reliées en série ou en parallèle. Ces résultats sont calculés à partir de l'expression (4.23) tronquée au i -ième mode en association avec les expressions (4.4a) et (4.4b). Le lecteur est invité à consulter le mémoire de thèse d'Aurélien Sénéchal (2011), pour une description complète sur le calcul de ces paramètres.

Ce formalisme est utilisé dans (Thomas *et al.*, 2012b) pour réaliser l'optimisation d'un shunt R ou RL, qui vise à définir la valeur des paramètres électriques qui maximisent l'amortissement apporté. Cette étude considère la technique du placement de pôle lorsque la structure est en vibration libre et la méthode de la fonction de transfert pour la réponse forcée.

⁹ On remarque que les équations montrées ici ont été obtenues avec l'hypothèse que les modes de la structure sont découplés, ce qui autorise à tronquer les équations au i -ième mode uniquement.

TAB. 4.1 : Valeurs des paramètres $\hat{\omega}_i$, $k_i\omega_i$ et C^{eq} pour les cas d'une pastille seule ou de P pastilles reliées en série ou en parallèle.

	$\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2$	$k_i\omega_i$	C^{eq}
Une pastille	$\frac{\chi_i^2}{C}$	$\frac{\chi_i}{\sqrt{C}}$	C
Association des pastilles en parallèle	$\frac{\left(\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)}\right)^2}{\sum_{p=1}^P C^{(p)}}$	$\frac{\sum_{p=1}^P \chi_i^{(p)}}{\sum_{p=1}^P C^{(p)}}$	$\sum_{p=1}^P C^{(p)}$
Association des pastilles en série	$\sum_{p=1}^P \frac{\left(\chi_i^{(p)}\right)^2}{C^{(p)}}$	$\sum_{p=1}^P \frac{\chi_i^{(p)}}{C^{(p)}}$	$\left(\sum_{p=1}^P \frac{1}{C^{(p)}}\right)^{-1}$

La technique du placement de pôle permet de trouver les paramètres du circuit qui minimisent le temps de décroissance des oscillations libres de la structure. Pour cela, les parties réelles des pôles de la fonction de transfert de l'Eq. (4.31) doivent être maximisées. Par ailleurs, si une de ces parties réelles est très supérieure aux autres, alors c'est elle qui pilote le temps de décroissance de $\varphi_i(t)$ et Q ; il suffit, par conséquent, de trouver les paramètres électriques qui maximisent cette partie réelle. D'autre part, cette dernière est aussi celle qui permet de mesurer l'amortissement total du système, composé de l'amortissement naturel ξ_i ainsi que l'amortissement supplémentaire apporté par le shunt ξ_{add} .

La méthode de la fonction de transfert consiste à choisir la valeur des paramètres électriques qui minimisent le pic d'amplitude du module de la fonction de réponse en fréquence (FRF). Cela permet de définir l'indicateur A_{dB} , lequel représente le niveau de réduction des vibrations apporté par le shunt par rapport à la situation en court-circuit :

$$A_{dB} = 20 \log \frac{H_{CC}}{H_{SH}} \quad (4.32)$$

où H_{CC} est le pic d'amplitude de la FRF en court-circuit et H_{SH} correspond à celui où le shunt est connecté aux pastilles piézoélectriques.

Shunt résistif

On considère un circuit shunt résistif constitué d'une unique résistance électrique R_e . Par conséquent, la relation entre la charge et la tension est la loi d'Ohms, qui s'écrit $V = -R_e \dot{Q}$. En remplaçant V dans l'expression (4.31b), on obtient :

$$\ddot{\varphi}_i + 2\omega_i \xi_i \dot{\varphi}_i + \hat{\omega}_i^2 \varphi_i + \omega_i k_i Q = F_i \quad (4.33a)$$

$$R_e \dot{Q} + \frac{Q}{C^{eq}} + \omega_i k_i \varphi_i = 0 \quad (4.33b)$$

L'optimisation de ce type de circuit a été réalisée en considérant la similitude avec l'amortissement par ajout de matériau dissipatif avec un modèle viscoélastique, ou bien encore avec un *amortisseur de type Lanchester* présentés dans (Inman, 1994). Les résultats de cette étude sont présentés dans le TAB. 4.2 et la FIG. 4.2. Le TAB. 4.2 donne la valeur optimale de la résistance électrique R_e ainsi que l'indicateur de performance associé pour une réponse libre ou forcée. La FIG. 4.2 permet, connaissant l'amortissement modal de la structure, de relier directement le niveau de réduction des vibrations au facteur de couplage modal nécessaire pour l'atteindre. Le lecteur est invité à se reporter à (Thomas *et al.*, 2012b) pour les détails de calculs.

TAB. 4.2 : Valeur optimale de la résistance du shunt résistif pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.

	Réponse libre	Réponse forcée
Résistance optimale	$R_e = \frac{1}{C^{eq} \omega_i \left(1 + \frac{k_i^2}{2}\right)}$	$R_e = \frac{1}{C^{eq} \omega_i \sqrt{1 + \frac{k_i^2}{2}}}$
Performances	$\xi_{add}^R = \frac{k_i^2}{4 \sqrt{1 + \frac{k_i^2}{2} - \frac{k_i^4}{16}}} \approx \frac{k_i^2}{4}$	$A_{dB}^R = 20 \log \frac{k_i^2 2\sqrt{2} \xi_i \sqrt{2 + k_i^2}}{4 \xi_i \sqrt{1 - \xi_i^2}}$

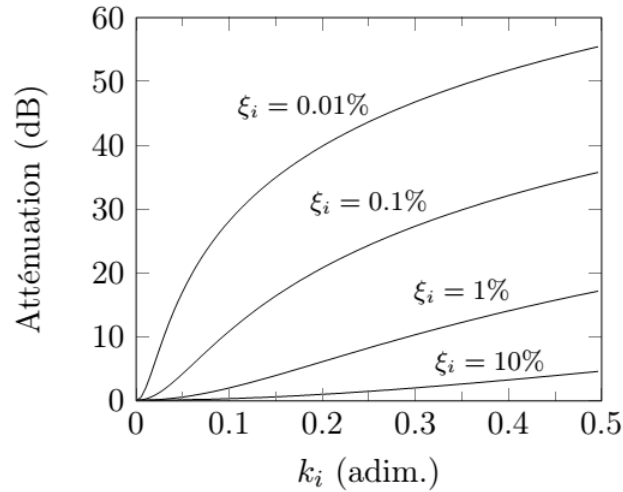


FIG. 4.2– Atténuation apportée par un shunt résistif en fonction du facteur de couplage modal k_i , pour différentes valeurs de l’amortissement modal ξ_i .

La technique de shunt résistif est simple et autonome. En effet, il est très facile d’associer une résistance à un élément piézoélectrique. De plus, la performance n’est pas trop dégradée si un des paramètres varie. Par contre, il est nécessaire d’avoir un couplage élevé pour obtenir un amortissement important. Cela impose, sauf cas particulier, des éléments piézoélectriques de grande taille, et donc un ajout de masse et/ou un encombrement important.

Shunt résonant

Un circuit shunt résonant est constitué d’une résistance électrique R_e et d’une inductance électrique L_e connectées en série. La relation entre la tension et la charge s’écrit $V = -L_e\ddot{Q} - R_e\dot{Q}$. En remplaçant V dans l’expression (4.31b), on obtient :

$$\ddot{\varphi}_i + 2\omega_i\xi_i\dot{\varphi}_i + \hat{\omega}_i^2\varphi_i + \omega_ik_iQ = F_i \quad (4.34a)$$

$$L_e\ddot{Q} + R_e\dot{Q} + \frac{Q}{C_{eq}} + \omega_ik_i\varphi_i = 0 \quad (4.33b)$$

L’étude de l’optimisation d’un shunt résonant utilise une démarche qui s’apparente à celle d’un amortisseur à masse accordée (*Tuned mass Damper, TMD*, ou *Damped Vibration Absorber, DVA*, ou *amortisseur de Frahm* du nom de son inventeur) (Den Hartog, 1956). Les résultats de cette étude sont présentés dans le TAB. 4.3 et la FIG. 4.3. Le TAB. 4.3 donne la valeur optimale de la résistance R_e et de l’inductance L_e ainsi que l’indicateur de performance associé pour une réponse libre ou forcée. La FIG. 4.3 permet, connaissant l’amortissement modal de la structure, de relier directement le niveau de réduction des vibrations au facteur de

couplage modal nécessaire pour l'atteindre. Les détails des calculs ainsi que l'expression de A_{dB}^{RL} sont disponibles dans (Thomas *et al.*, 2012b).

TAB. 4.3 : Valeur optimale de la résistance et de l'inductance du shunt résonant pour une réponse libre ou forcée et indicateur de performance associé.

	Réponse libre	Réponse forcée
Résistance optimale	$R_e = \frac{2k_i}{C^{eq}\omega_i(1+k_i^2)^{3/2}}$	$R_e = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k_i}{C^{eq}\omega_i\sqrt{1+k_i^2}}$
Inductance optimale	$L_e = \frac{1}{C^{eq}\omega_i^2(1+k_i^2)^2}$	$L_e = \frac{1}{C^{eq}\omega_i^2(1+k_i^2)}$
Performance	$\xi_{add}^{RL} = \frac{\ k_i\ }{\sqrt{4-k_i^2}} \approx \frac{\ k_i\ }{2}$	$A_{dB}^{RL} = A_{dB}^{RL}(k_i, \xi_i)$

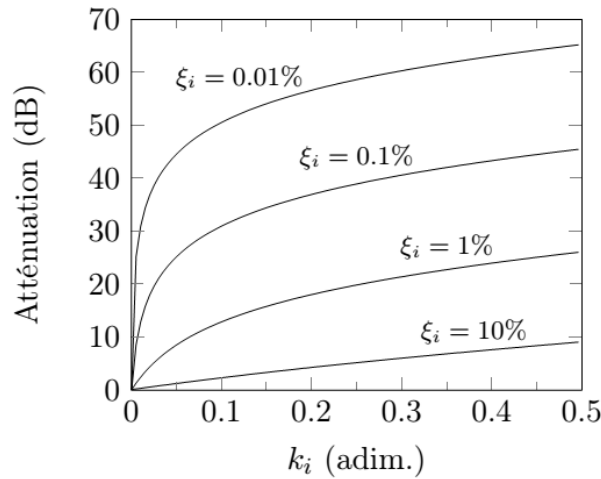


FIG. 4.3– Atténuation apportée par un shunt résonant en fonction du facteur de couplage modal k_i , pour différentes valeurs de l'amortissement modal ξ_i .

La FIG. 4.3 permet de voir que le shunt résonant est bien plus efficace que le shunt résistif, même si l'amortissement mécanique est important. Néanmoins, il dépend de l'accord précis de l'inductance avec la résonance du système, ce qui implique que ses performances sont très réduites si ω_i, R_e et L_e varient légèrement. Étant donné que les caractéristiques du système peuvent varier au cours du temps, par exemple en fonction de la température, la mise en œuvre de shunts résonants nécessite une adaptation permanente de l'accord. De plus, cette technique n'est efficace que sur une faible plage de fréquences. Enfin, les inductances très élevées requises, font qu'il est nécessaire de faire appel à des inductances synthétiques, qui

sont des composants actifs. Dès lors, le système est plus complexe à mettre en œuvre et une alimentation électrique est nécessaire.

Remarques

Les résultats ci-dessus montrent que la performance du système avec shunt résistif ou résonant ne dépend que du coefficient de couplage k_i . Par conséquent, l'optimisation d'un tel système peut être répartie en deux étapes distinctes :

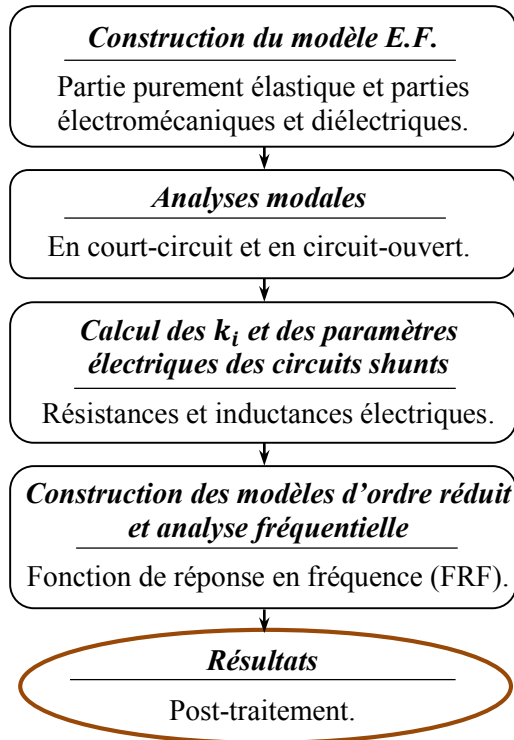
1. *Optimisation mécanique* : dans cette étape initiale, l'objectif est de déterminer une configuration optimale de l'ensemble structure/pastilles, c'est-à-dire trouver les dimensions et positions des pastilles qui maximisent les facteurs de couplage k_i ;
2. *Optimisation des paramètres des circuits shunts* : une fois la configuration de l'ensemble structure/pastilles optimisée géométriquement, les valeurs optimales des paramètres électriques des shunts sont ajustées d'après les formules des tableaux TAB. 4.2 et TAB. 4.3.

4.4. Comparaison entre les différentes techniques de projection

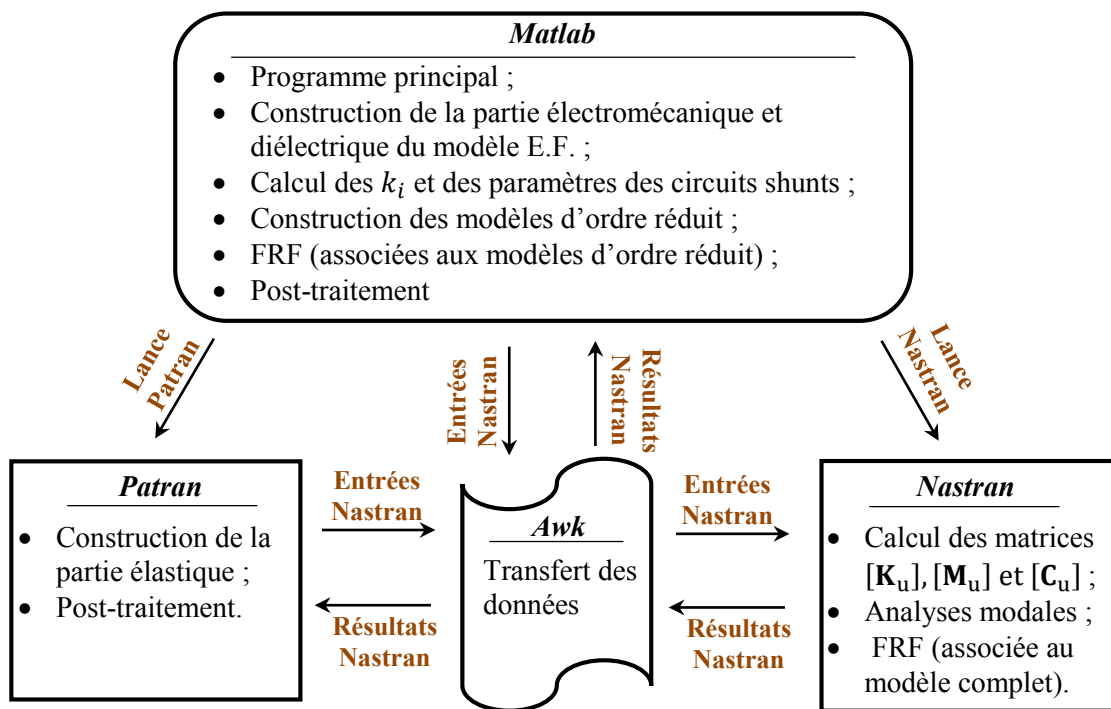
Nous avons présenté dans le paragraphe 4.2 quatre techniques (selon la base de projection) pour réduire le modèle éléments finis (4.3) : (1) la base des modes en court-circuit, (2) la base des modes en circuit-ouvert, (3) la base combinée formée par les modes en court-circuit et en circuit-ouvert et (4) la base des modes couplés électromécaniques, donnée par l'Eq. (4.18).

Pour répondre à la question : “quelle méthode (base modale) est la plus appropriée pour réduire ce type de problème ?”, on propose dans ce paragraphe d'analyser la convergence des modèles d'ordre réduit associés à ces quatre bases modales. Pour cela, deux exemples sont analysés. De plus, les résultats sur l'optimisation des paramètres électriques des shunts résistifs et résonants, rappelés dans le paragraphe 4.3, sont vérifiés.

L'algorithme illustré par la FIG. 4.4 résume l'implémentation numérique appliquée ici. La construction et la résolution des modèles d'ordre réduit sont réalisées par des routines *Matlab*.



(a) Algorithme de résolution



(b) Implémentation numérique

FIG. 4.4- Stratégie numérique.

4.4.1. Exemple 1

On reconsidère dans cet exemple le problème décrit dans la section 3.2.3. La structure étudiée est une poutre de section rectangulaire pleine, en aluminium, encastrée-libre, sollicitée par un effort transverse harmonique d'amplitude unitaire et munie d'une pastille piézoélectrique shuntée, comme le montre la FIG. 3.9. Cependant, contrairement à l'exemple du Chapitre 3, la pastille, en PIC-151, a une épaisseur fixe de 0.75 mm et une longueur de 50 mm.

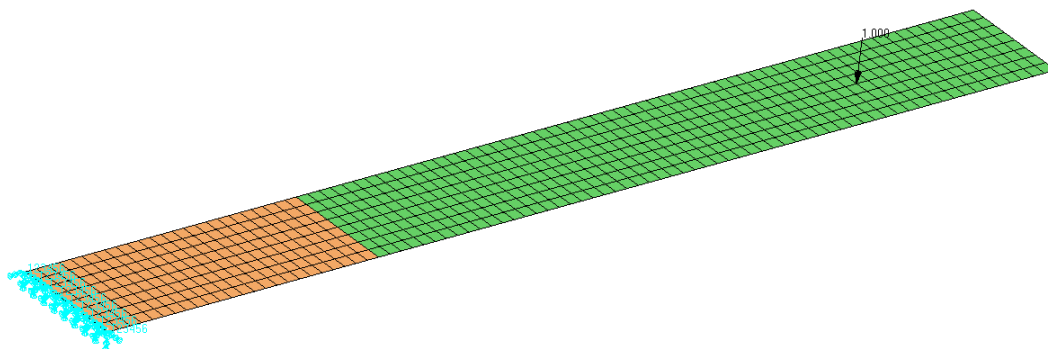
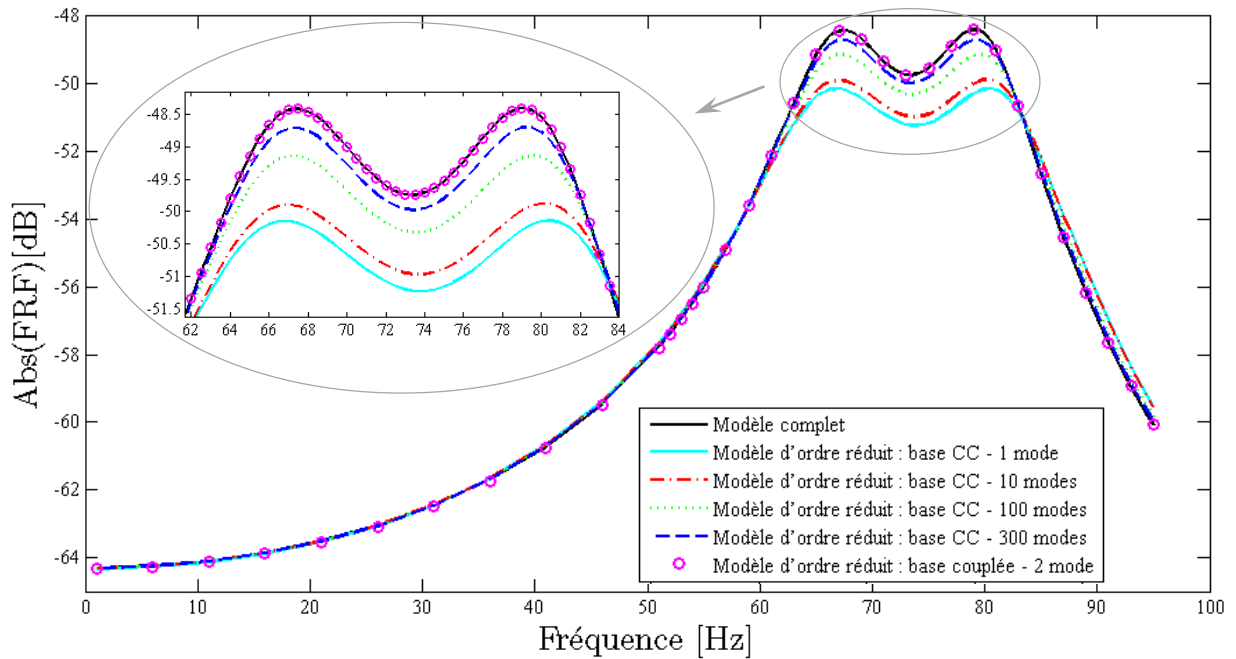


FIG. 4.5– Poutre munie d'une pastille piézoélectrique d'épaisseur 0.75 mm : modèle éléments finis dans Patran.

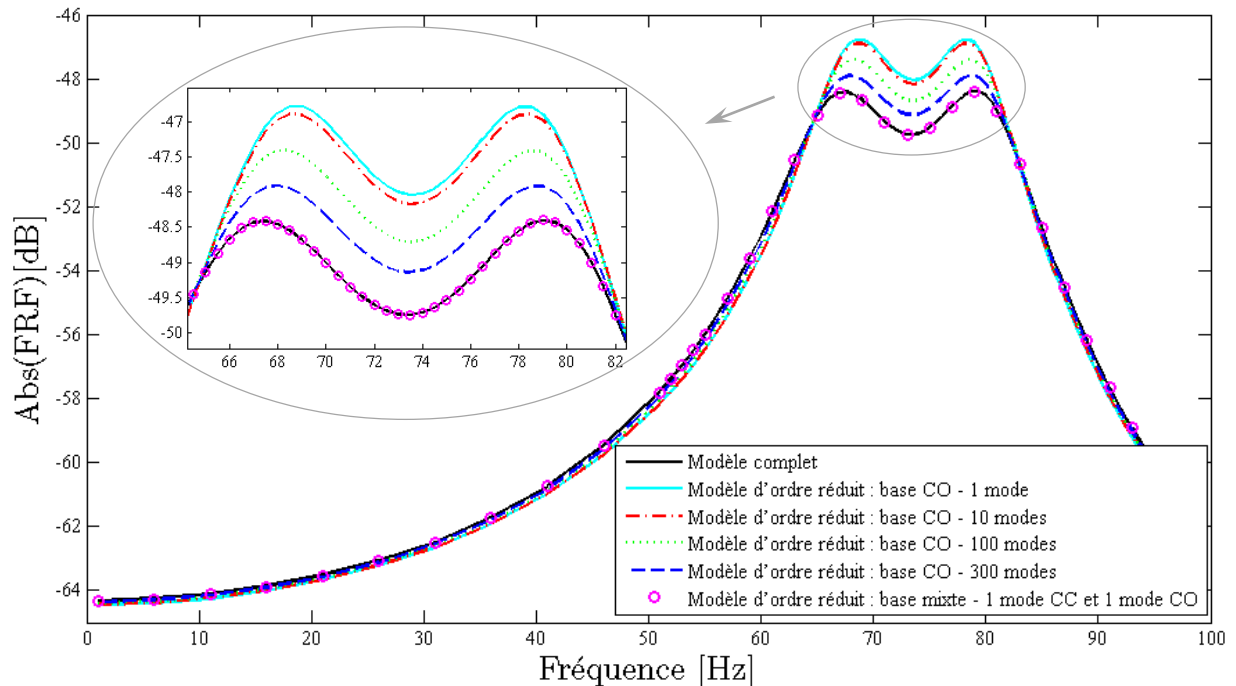
Les algorithmes de la FIG. 4.4 et de l'Annexe B (modèle plaque) sont appliqués pour construire les modèles éléments finis et résoudre les problèmes. 672 éléments quadrilatères à 4 nœuds (QUAD 4) sont utilisés pour modéliser la poutre munie de la pastille piézoélectrique shuntée (FIG. 4.5).

Les Figs. 4.6 et 4.7 et le Tab. 4.4 permettent de comparer et de vérifier la convergence des différents modèles d'ordre réduit pour un circuit shunt résonant et résistif. Les Figs. 4.6 et 4.7 montrent la réponse fréquentielle du système couplé au point d'application de la force excitatrice. Le Tab. 4.4 présente les valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt. Les valeurs présentées dans la première ligne de ce tableau ont été obtenues avec les formules déterminées dans (Thomas et al., 2012a) et rappelées dans le Tab. 4.2 et le Tab. 4.3. Les lignes suivantes présentent les valeurs optimales des paramètres électriques pour chaque modèle éléments finis. Ces valeurs ont été calculées avec une procédure d'optimisation itérative. Il est important de noter que le shunt est accordé au premier mode de flexion de la poutre et que les modèles ne prennent pas en compte l'amortissement mécanique. De plus, le TAB. 4.5 permet de comparer les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ avec les facteurs des couplages modaux k_i pour les dix premiers modes propres du système. Finalement, la Fig. 4.8

compare l'évolution de k_i et $k_{\text{eff},i}$ pour les deux premiers modes de flexion de la poutre en fonction de la position de la pastille piézoélectrique.

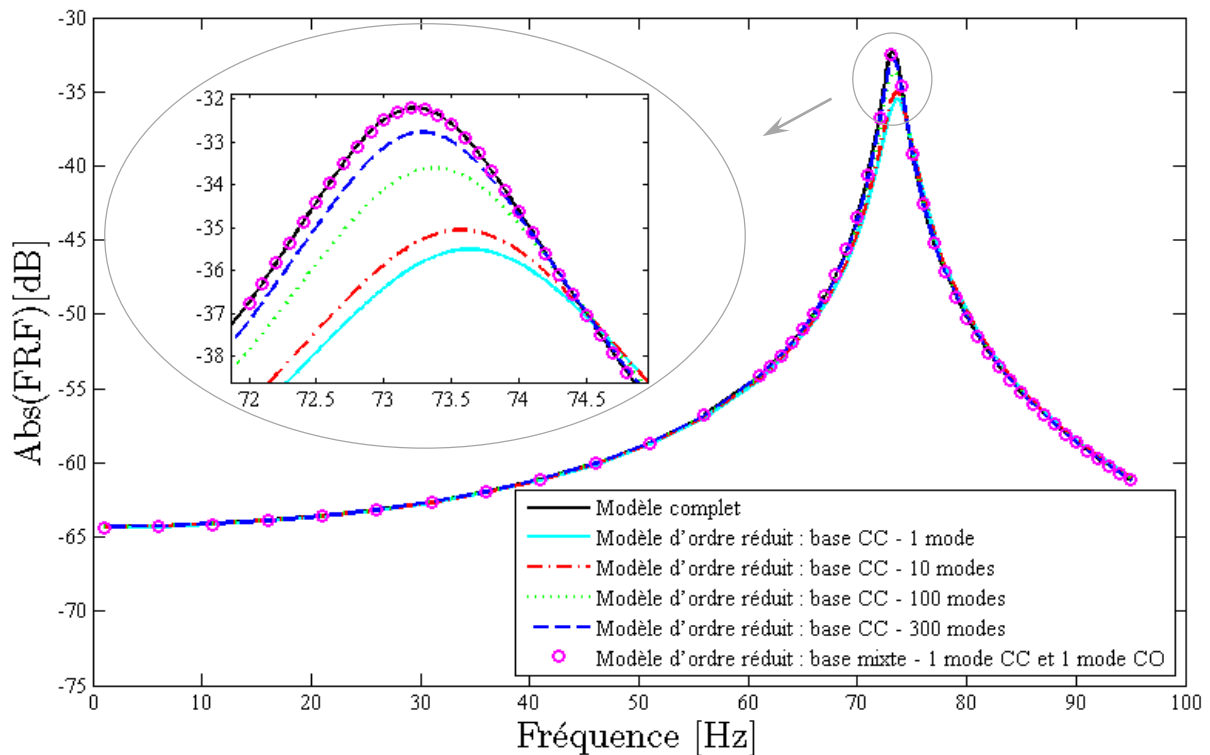


(a) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en court-circuit et de la base des modes couplés.

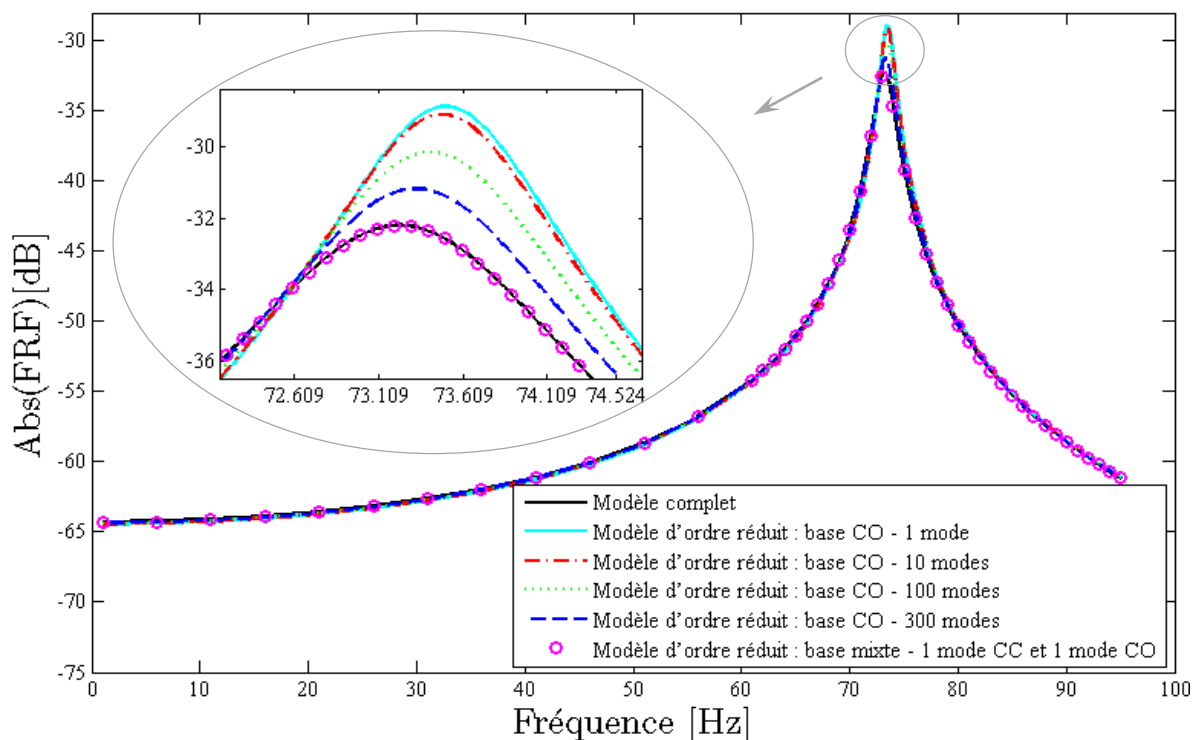


(b) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en circuit-ouvert et de la base combinée (CC+CO).

FIG. 4.6– FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d'un circuit shunt résonant accordée sur le premier mode de vibration.



(a) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en court-circuit et de la base combinée (CC+CO).



(b) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en circuit-ouvert et de la base combinée (CC+CO).

FIG. 4.7– FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (poutre/pastille) munie d'un circuit shunt résistif accordée sur le premier mode de vibration.

TAB. 4.4 : Valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt pour les différents modèles.

Modèles	Shunt résonant		Shunt résistif	
	$R_e^{(1)}$ [Ω]	$L_e^{(1)}$ [H]	$R_e^{(1)}$ [Ω]	
Formules (TAB. 4.2 et TAB. 4.3)	53482.47	345.08	165223.97	
Modèle complet	29950.18	241.21	114004.54	
Modèles d'ordre réduit	1 mode CC	53482.47	165223.97	
	10 modes CC	49738.69	156962.77	
	100 modes CC	38507.38	132179.17	
	300 modes CC	33159.13	120613.50	
	1 mode CO	36368.08	165223.97	
	10 modes CO	35833.25	160267.25	
	100 modes CO	33693.95	143.744.85	
	300 modes CO	32089.48	128048.58	
	2 modes - base couplée	29950.18	241.21	----
	1 mode CC et 1 mode CO	29950.18	241.21	114004.54

D'après ces résultats, les points suivants peuvent être notés :

- Le modèle d'ordre réduit construit à partir de la base des modes couplés (technique 4) est extrêmement efficace. La réponse du modèle converge lorsqu'on projette les inconnues de déplacement mécanique sur les deux premiers vecteurs propres seulement. En effet, la technique de shunt résonant résulte de deux modes de fréquences distinctes autour du mode à atténuer (voir FIG. 4.6). Dans cet exemple, ces deux modes correspondent aux deux premiers modes de la base couplée, avec des déformées modales très proches comme le montre la FIG. 4.9. Cela nous conduit à conclure que cette base, formée par les modes propres réels du système couplée structure/pastilles/shunt, est très efficace dans la réduction du problème ;
- Contrairement aux résultats obtenus avec la base des modes couplés, les modèles d'ordre réduits construits à partir de la base en court-circuit (technique 1) ne convergent pas complètement avec un nombre réduit de vecteurs propres. On vérifie que les niveaux d'atténuation sont surestimés (FIG. 4.6 et FIG. 4.7) et que les valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt présentent des différences considérables comparées à celles du modèle sans réduction (TAB. 4.4). On vérifie

aussi que ces écarts sont directement liés au nombre de modes de la base de projection. La réponse du modèle réduit converge vers la réponse du modèle complet lorsque le nombre de modes de la base de projection est important ;

- Comme pour le point précédent, les modèles d'ordre réduits construits à partir de la base en circuit-ouvert (technique 2) ne convergent pas complètement avec un nombre réduit de vecteurs propres. On vérifie que les niveaux d'atténuation sont sous-estimés (FIG. 4.6, FIG. 4.7 et TAB. 4.4) ;
- Les modèles d'ordre réduit construits à partir de la base combinée (technique 3) donnent d'excellents résultats. En effet, la réponse du modèle, avec shunt résistif ou résonant, converge lorsqu'on projette les inconnues de déplacement mécanique sur deux vecteurs propres seulement : les vecteurs propres en court-circuit et en circuit-ouvert du mode à atténuer (FIG. 4.6, FIG. 4.7 et TAB. 4.4) ;
- Bien que la troncature modale sur un seul mode en court-circuit soit imprécise, on observe que les facteurs de couplages modaux k_i sont du même ordre de grandeur que les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ (TAB. 4.5). De plus, en faisant varier la position de la pastille piézoélectrique le long de la poutre, on vérifie que k_i se comporte de la même façon que $k_{\text{eff},i}$ (voir Fig. 4.8). Ces résultats montrent également que la différence entre k_i et $k_{\text{eff},i}$ est fonction du niveau de couplage électromécanique entre la structure et la pastille piézoélectrique (cette différence augmente à mesure que le niveau de couplage augmente). Ces facteurs peuvent donc effectivement être utilisés comme paramètres d'optimisation au lieu des coefficients de couplages effectifs $k_{\text{eff},i}$. Ce choix peut réduire énormément le coût et le temps de calcul d'une procédure d'optimisation des positions et dimensions des pastilles piézoélectriques car seule l'analyse modale du problème en court-circuit est nécessaire pour déterminer k_i (Eq. (4.28)).

TAB. 4.5 : Comparaison entre les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ et les facteurs des couplages modaux k_i pour les dix premiers modes du système.

Mode		$k_{\text{eff},i}$ [%]	k_i [%]	Erreur : $100 \left \frac{k_{\text{eff},i} - k_i}{k_i} \right $ [%]
(i)	type*			
1	F	22.25	26.89	20.83
2	F	16.60	19.76	19.07
3	F _{x-y}	0.00	0.00	0.00
4	F	5.40	6.37	18.74
5	T	0.00	0.00	0.00
6	F	3.21	3.82	19.00
7	T	0.00	0.00	0.00
8	F _{x-y}	0.00	0.00	0.00
9	F	5.78	6.89	19.06
10	T	0.00	0.00	0.00

* F : Flexion, F_{x-y} : Flexion dans le plan de la poutre, T : Torsion..

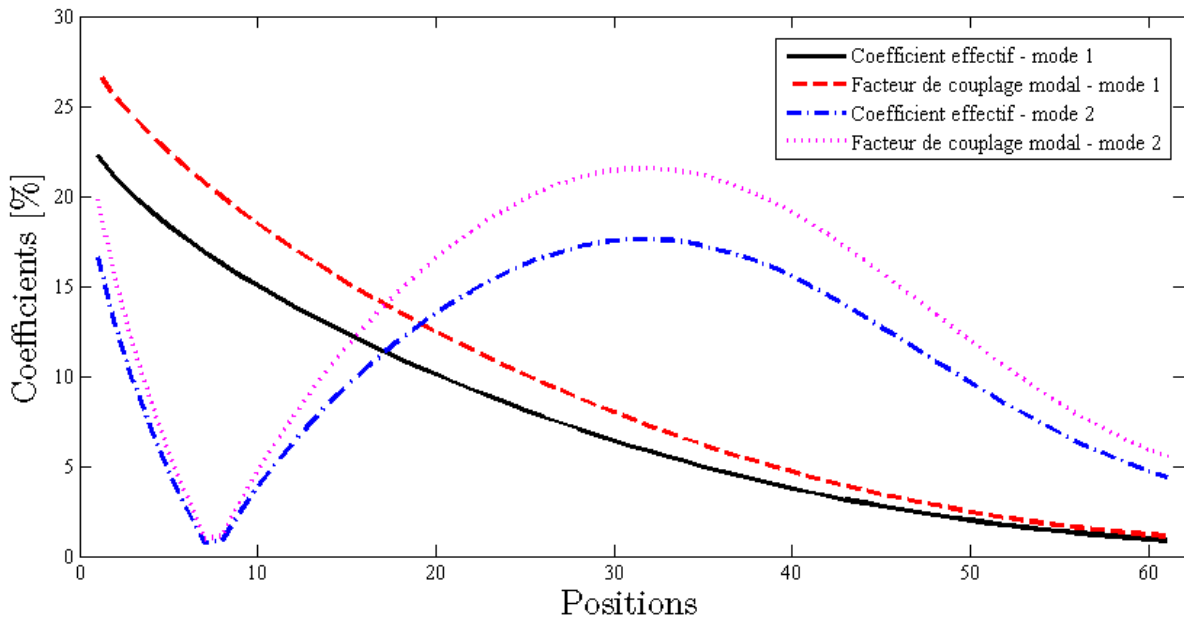


FIG. 4.8– Evolution de k_i et $k_{\text{eff},i}$ pour les deux premiers modes de flexion de la poutre en fonction de la position de la pastille piézoélectrique (position 1 correspond à la configuration de la FIG. 4.5).

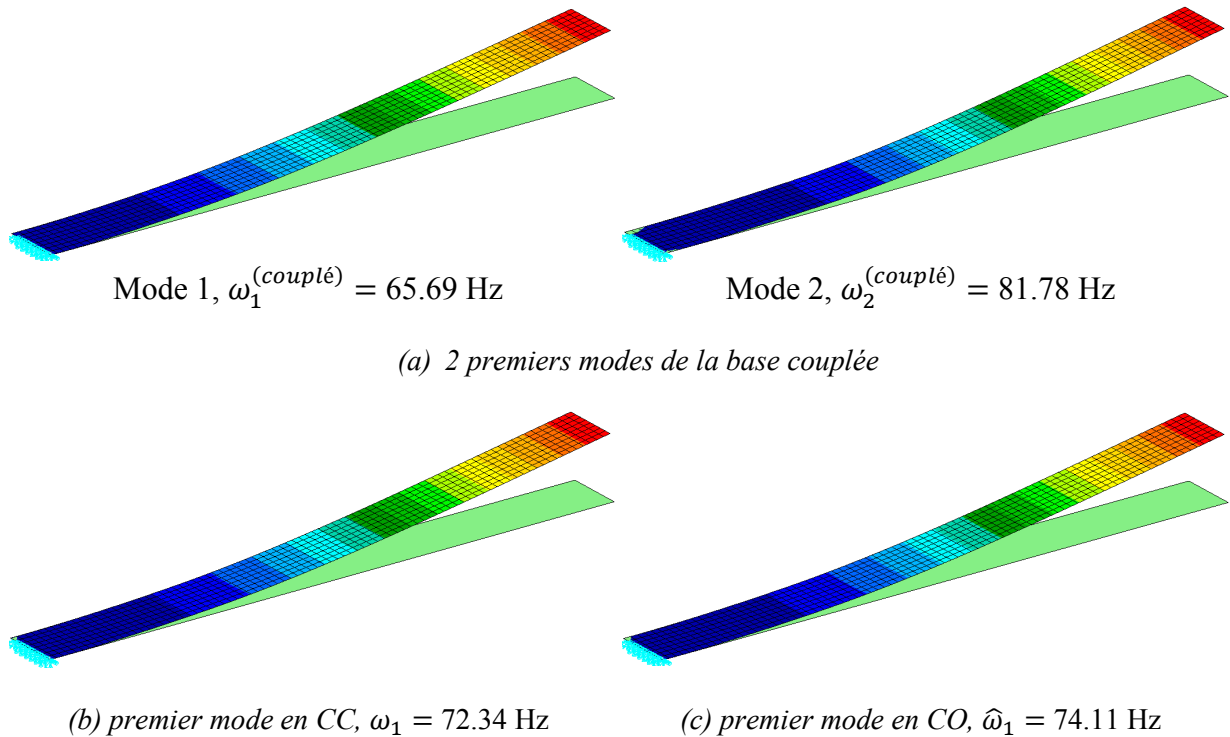


FIG. 4.9- Déformées modales des 2 premiers modes de la base couplée et du premier mode en court-circuit et en circuit-ouvert. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

Cet exemple nous montre l'efficacité de la technique de projection sur une base combinée (technique 3) ou sur les modes couplés (technique 4) pour la résolution de la réponse fréquentielle d'une structure élastique avec pastilles piézoélectriques shuntées. On propose dans l'exemple suivant de vérifier la performance de ces techniques sur un exemple de plaque munie de deux pastilles shuntées.

4.4.2. Exemple 2

On considère maintenant une plaque en aluminium encastree sur ses quatre bords et munie des deux pastilles piézoélectriques shuntées en PIC-151 (FIG. 4.10(a)). La plaque est sollicitée par un effort transverse harmonique d'amplitude unitaire et les systèmes pastille1/shunt1 et pastille2/shunt2 sont accordés respectivement aux deux premiers modes de flexion de la plaque. L'amortissement mécanique est négligé pour cet exemple.

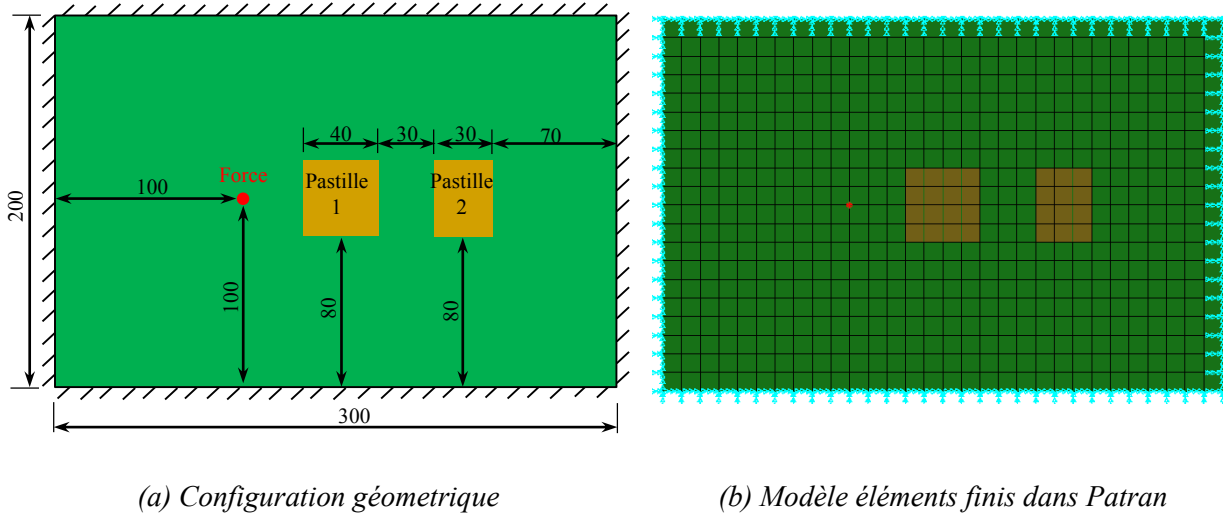


FIG. 4.10– Plaque d'épaisseur 2 mm munie des deux pastilles piézoélectriques shuntées d'épaisseur 0.5 mm (dimensions en mm).

Les algorithmes de la FIG. 4.4 et de l'Annexe B (modèle plaque) sont appliqués pour construire les modèles éléments finis et résoudre le problème. 600 éléments quadrilatères à 4 nœuds (QUAD 4) sont utilisés pour modéliser la plaque munie des deux pastilles piézoélectriques shuntées (FIG. 4.10(b)).

Les FIGs. 4.11 et 4.12 et le TAB. 4.6 permettent de comparer et de vérifier la convergence des différents modèles d'ordre réduit pour un circuit shunt résonant et résistif. Les FIGs. 4.11 et 4.12 montrent la réponse fréquentielle du système couplé au point d'application de la force excitatrice. Le TAB. 4.6 présente les valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt. De plus, le TAB. 4.7 permet de comparer les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}^{(p)}$ avec les facteurs des couplages modaux $k_i^{(p)}$ pour les dix premiers modes propres du système (voir FIG. 4.13).

Les résultats confirment les constatations obtenues avec l'exemple précédent. On vérifie ainsi que :

- Le modèle d'ordre réduit construit à partir de la base combinée (technique 4) donne d'excellents résultats comparés aux résultats de la méthode directe. Cette convergence est atteinte en utilisant les 40 premiers modes. On note qu'avec seulement quatre modes (modes résultant de la technique de shunt résonant (FIG. 4.14)), cette convergence est limitée aux fréquences de résonance et n'est pas assurée dans les autres zones (FIG. 4.12 et FIG. 4.11).

- Pour la technique 3, on obtient d'excellents résultats dans les zones de résonance lorsqu'on projette les inconnues de déplacement mécanique sur la base de projection formée par les deux premiers modes en court-circuit et les deux premiers modes en circuit-ouvert (technique 3). En utilisant les 38 premiers modes en court-circuit (respectivement en circuit-ouvert) et les deux premiers modes en circuit-ouvert (respectivement court-circuit), la réponse du modèle converge dans les zones de résonance et également hors de ces zones (FIG. 4.12 et FIG. 4.11) ;
- Les modèles d'ordre réduits construits à partir de la base en court-circuit (technique 1) ou en circuit-ouvert (technique 2) ne convergent pas complètement avec un nombre réduit de vecteurs propres (FIG. 4.12, FIG. 4.11 et TAB. 4.6). Par contre, les facteurs de couplages modaux $k_i^{(p)}$ sont en accord avec les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}^{(p)}$ (TAB. 4.7).

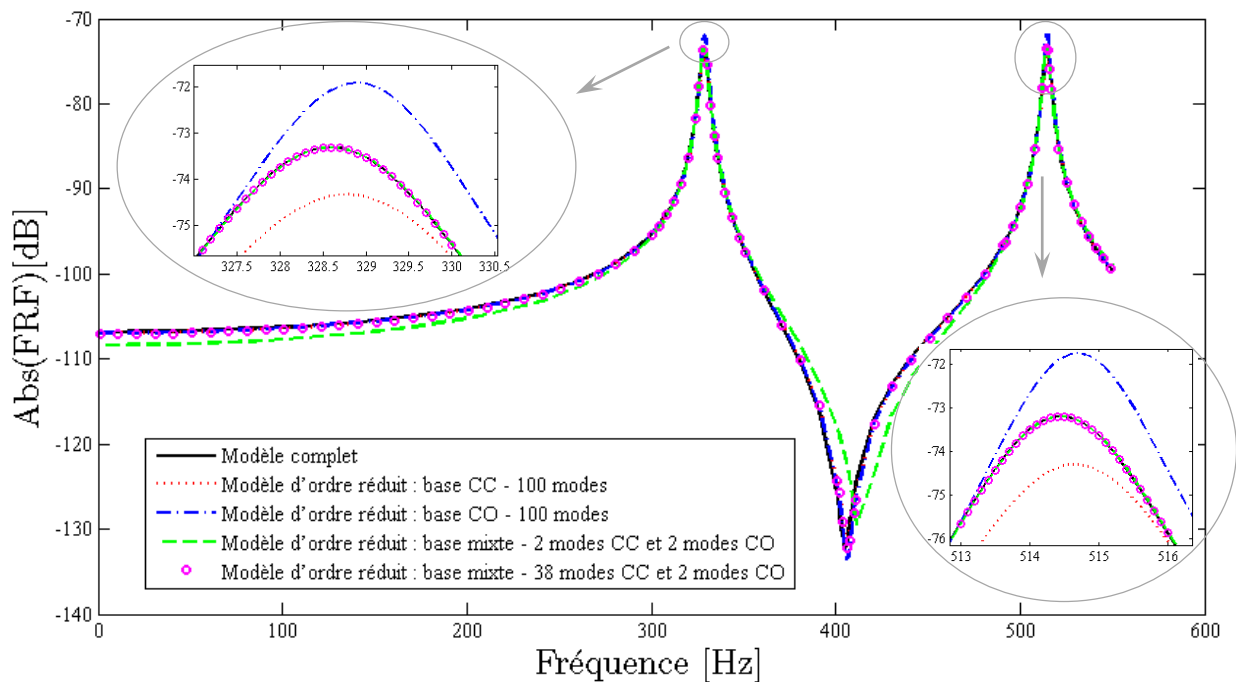
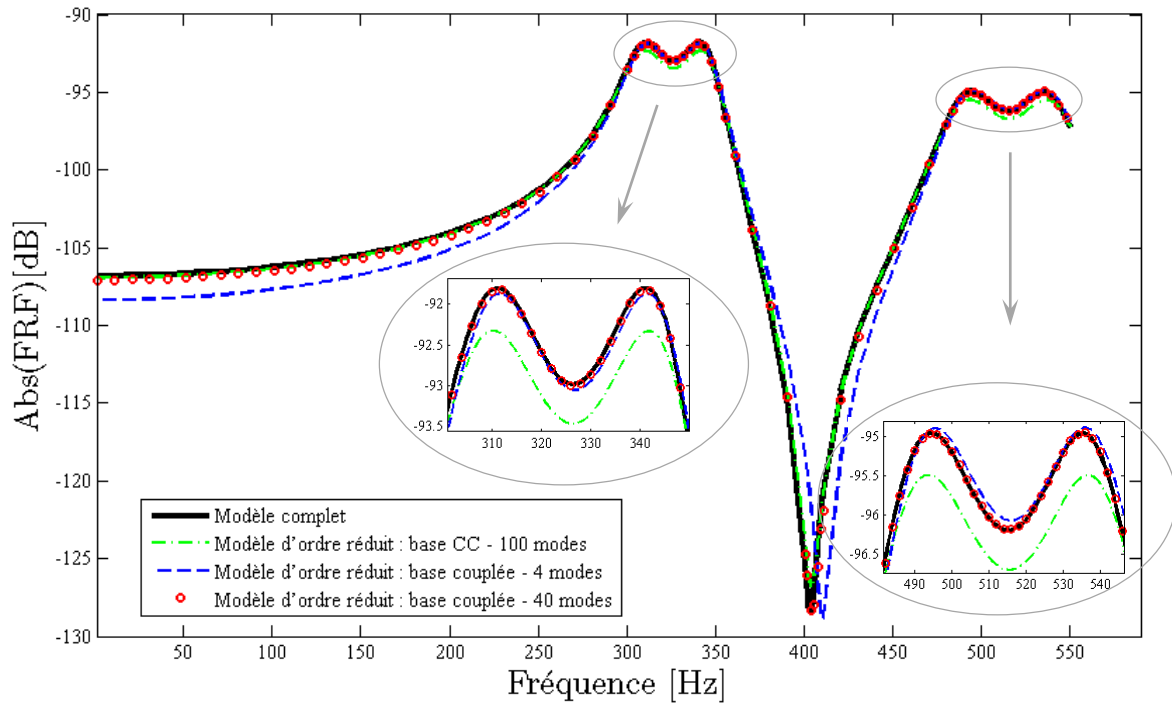
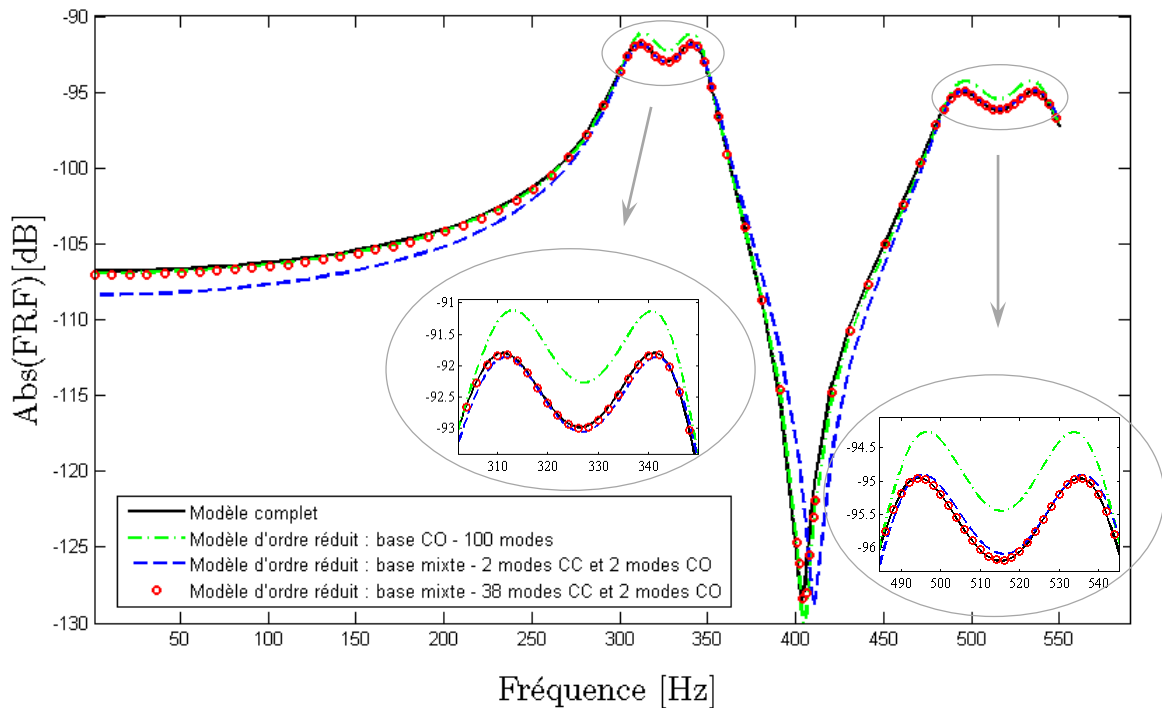


FIG. 4.11– *FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (plaque/pastilles) munie des deux circuits shunt résistif accordés sur les deux premiers modes de vibration : Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en court-circuit, la base des modes en circuit-ouvert et de la base combinée (CC+CO).*



(a) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en court-circuit et de la base inductive.



(b) Comparaison entre le modèle complet et les modèles d'ordre réduit obtenus à partir de la base des modes en circuit-ouvert et de la base combinée (CC+CO).

FIG. 4.12—FRF au point d'application de la force excitatrice pour le système (plaque/pastilles) munie des deux circuits shunt résonant accordés sur les deux premiers modes de vibration.

TAB. 4.6 : Valeurs optimales des paramètres électriques du shunt pour les différents modèles.

Shunt résonant							
Mode	Paramètres	Formules (TAB. 4.3)	Modèle complet	Modèles d'ordre réduits			
				100 modes CC	100 modes CO	4 modes Base couplée	4 modes Base combinée (2 CC + 2 CO)
1	$R_e^{(1)}$ [Ω]	2821.81	1834.18	2201.01	2003.50	1834.18	1834.18
	$L_e^{(1)}$ [H]	7.38	5.64	6.35	6.59	5.64	5.64
2	$R_e^{(2)}$ [Ω]	2107.07	1390.67	1685.66	1517.09	1390.67	1390.67
	$L_e^{(2)}$ [H]	4.02	3.05	3.45	3.60	3.05	3.05

Shunt résistif							
Mode	Paramètres	Formule (TAB. 4.2)	Modèle complet	Modèles d'ordre réduits			
				100 modes CC	100 modes CO	4 modes Base combinée (2 CC + 2 CO)	
1	$R_e^{(1)}$ [Ω]	15411.31	11558.48	12945.50	13484.90	11558.48	
2	$R_e^{(2)}$ [Ω]	13120.42	9971.52	11152.36	11677.17	9971.52	

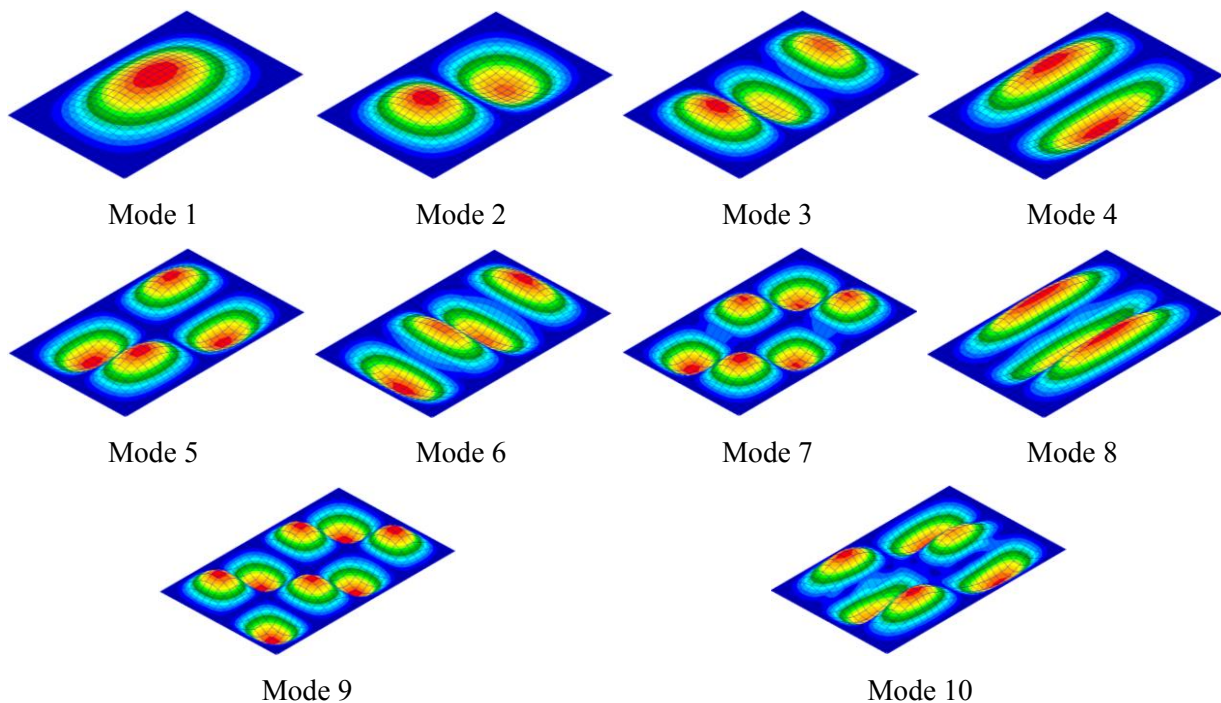
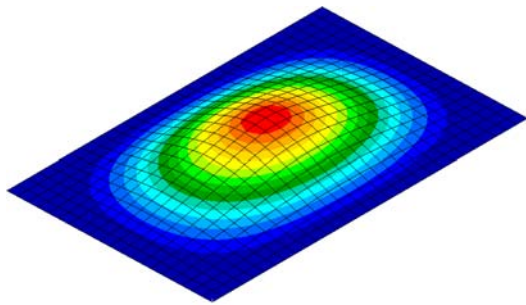


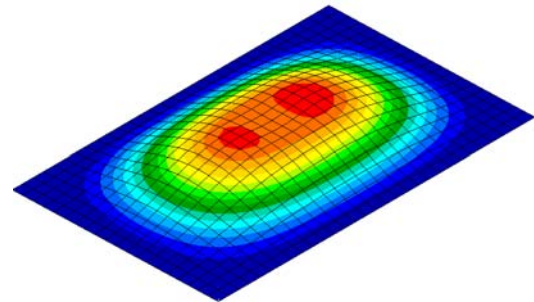
FIG. 4.13- Déformées modales des dix premiers modes de la plaque avec les pastilles piézoélectriques court-circuitées. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

TAB. 4.7 : Comparaison entre les coefficients de couplage effectifs $k_{\text{eff},i}$ et les facteurs de couplages modaux k_i pour les dix premiers modes du système.

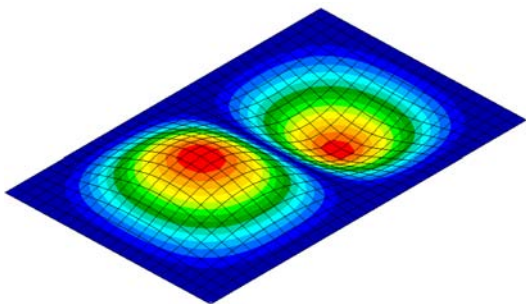
Mode (i)	$k_{\text{eff},i}^{(1)}$ [%]	$k_i^{(1)}$ [%]	Erreur : $100 \left \frac{k_{\text{eff},i}^{(1)} - k_i^{(1)}}{k_{\text{eff},i}^{(1)}} \right $ [%]	$k_{\text{eff},i}^{(2)}$ [%]	$k_i^{(2)}$ [%]	Erreur : $100 \left \frac{k_{\text{eff},i}^{(2)} - k_i^{(2)}}{k_{\text{eff},i}^{(2)}} \right $ [%]
1	13.03	15.03	15.37	7.31	8.51	16.37
2	0.46	0.53	14.98	11.43	13.17	15.18
3	11.05	15.07	3.64	7.62	8.75	14.76
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1.24	1.45	16.77
7	0	0	0	0	0	0
8	12.15	14.26	17.38	6.97	8.40	20.54
9	0	0	0	0	0	0
10	15.56	18.53	19.10	11.54	13.61	17.98



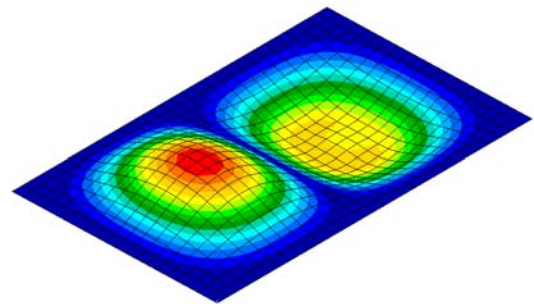
Mode 1, $\omega_1^{(\text{couplée})} = 306.68$ Hz



Mode 2, $\omega_2^{(\text{couplée})} = 348.79$ Hz



Mode 3, $\omega_1^{(\text{couplée})} = 486.10$ Hz



Mode 4, $\omega_2^{(\text{couplée})} = 544.23$ Hz

FIG. 4.14- Déformées modales des 4 premiers modes de la base combinée. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

4.5. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté un rappel sur la technique du shunt pour la réduction de vibrations des structures élastiques. Nous avons aussi rappelé les résultats du calcul des paramètres électriques pour les circuits shunts résistifs et résonants (Thomas *et al.*, 2012b) ainsi que leurs relations avec les divers coefficients de couplage électromécaniques.

Quatre méthodes de projection modales pour la résolution de la réponse fréquentielle du problème électromécanique shunté sont ensuite présentées et puis comparées à travers deux exemples. Nous avons alors constaté :

- les bonnes performances des bases de projection combinée (technique 3) et couplée (technique 4) par comparaison aux résultats de la méthode directe avec un nombre de modes réduit. Cependant, la technique de projection sur les modes couplés ne peut être appliquée que dans le cas d'un shunt résonant et nécessite la connaissance des valeurs optimales des inductances avant projection. Pour la base combinée, deux inconvénients demeurent : (i) la nécessité d'effectuer deux calculs modaux (court-circuit et circuit-ouvert) et (ii) la perte d'orthogonalité après projection des matrices de masse et rigidité ;
- le modèle d'ordre réduit construit à partir des modes en court-circuit ou en circuit-ouvert nécessite un nombre de modes élevé pour assurer la convergence.

Le chapitre suivant propose un algorithme d'optimisation topologique pour déterminer la position et la géométrie des pastilles piézoélectriques afin de maximiser les facteurs de couplages modaux $k_i^{(p)}$.

Optimisation de la position et de la géométrie
des pastilles piézoélectriques

5.1 Introduction à l'optimisation structurale	119
5.1.1 Formulation d'un problème d'optimisation.....	121
5.1.2 Optimisation topologique	122
5.2 Procédure d'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques.....	125
5.2.1 Méthode SIMP appliquée à un milieu piézoélectrique	125
5.2.2 Formulation du problème	128
5.2.3 Analyse de sensibilité	128
5.2.4 Algorithme et implémentation numérique.....	130
Algorithme principal	131
Algorithme d'optimisation	132
5.3 Exemples	132
5.3.1 Poutre encastrée libre avec une pastille piézoélectrique	133
5.3.2 Pot d'échappement avec un dispositif piézoélectrique shunté	137
5.4 Conclusions	142

Ce chapitre concerne le développement d'une méthode pour maximiser les couplages modaux électromécaniques entre un ensemble de pastilles piézoélectriques shuntées et une structure élastique quelconque discrétisée par la méthode des éléments finis. Les valeurs optimales des couplages sont ensuite utilisées pour maximiser les performances des circuits shunts.

On rappelle que pour maximiser l'amortissement d'une structure munie de dispositifs piézoélectriques shuntés, différents paramètres doivent être optimisés : (i) le type de matériau piézoélectrique, (ii) la position et la géométrie des pastilles et (iii) les composants électroniques du circuit shunté. On rappelle également que ces deux optimisations, mécanique et électrique, peuvent être réalisées séparément. Dans un premier temps, les paramètres à maximiser sont les facteurs de couplage électromécaniques modaux (MEMCF), qui caractérisent les échanges d'énergie entre les pastilles piézoélectriques et la structure selon les différents modes de vibration de cette dernière. Dans un second temps, les composants du circuit électrique du shunt sont réglés afin de maximiser la dissipation d'énergie (voir Chapitre 4 et (Thomas *et al.*, 2009, 2012a, 2012b)).

L'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques sur une structure hôte élastique a suscité une large attention dans la communauté scientifique les deux dernières décennies. Des revues récentes des développements dans le domaine, disponibles dans (Frecker, 2003 ; Belloli et Ermanni, 2007), montrent que les applications portent principalement sur le contrôle actif des vibrations. Quelques études portent également sur l'optimisation des systèmes piézoélectriques shuntés, mais la plupart d'entre eux gardent une forme fixe des pastilles piézoélectriques (rectangulaires dans la majorité des cas) et seule leur taille et/ou positions sont optimisées (Belloli et Ermanni, 2007; Sénéchal *et al.*, 2010 ; Godoy et Trindade, 2011 ; Thomas *et al.*, 2012b ; Rosi *et al.*, 2013). Ceci simplifie le problème d'optimisation mais limite l'optimalité de la solution. La méthode d'optimisation topologique (Bendsøe et Sigmund, 2003) semble être un bon moyen pour trouver une solution optimale sans limitations de forme pour la géométrie et positions des pastilles piézoélectriques.

L'optimisation topologique, en particulier la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization dans la littérature anglo-saxonne) (Bendsøe et Sigmund, 2003), a été employée avec succès pour de nombreuses applications avec des matériaux piézoélectriques dans les dix dernières années, en particulier pour le contrôle actif des vibrations et dans les domaines de récupération de l'énergie (Energy Harvesting dans la littérature anglo-saxonne) (Silva et Kikuchi, 1999 ; Kögl et Silva, 2005 ; Carbonari *et al.*, 2007; Nakasone *et al.*, 2008 ; Rupp *et*

al., 2009 ; Silva, 2009 ; Wein *et al.*, 2009 ; Zheng *et al.*, 2009 ; Nakasone et Silva, 2011). Dans le contexte de l'amortissement par systèmes piézoélectriques shuntés, la suppression des vibrations du bras actionneur d'un disque dur à l'aide d'un dispositif piézoélectrique shunté optimisé a été étudiée par Sun *et al.* (2009). Dans ce travail, les auteurs utilisent le module d'optimisation topologique proposé dans *ANSYS* pour optimiser la forme du dispositif piézoélectrique couplé au bras du disque dur. A notre connaissance, ce document est la seule contribution qui applique une méthode d'optimisation topologique à des problèmes avec systèmes piézoélectriques shuntés.

Il est donc évident que l'attention portée dans la littérature à la technique d'optimisation topologique dans ce type de problème est insuffisante. Motivé par ce fait, l'optimisation topologique, basée sur la méthode SIMP, est employée ici pour trouver une répartition optimale de matériau piézoélectrique sur une structure hôte élastique de façon à maximiser l'efficacité de l'amortissement des dispositifs piézoélectriques shuntés. Un algorithme d'optimisation, basé sur le travail de Silva et Kikuchi (1999), est développé avec les facteurs de couplages modaux (MEMCFs) comme fonction objectif. Par ailleurs, même si cela n'est pas montré ici, l'approche proposée reste valable dans le cas des shunts à commutation (switch).

Le chapitre débute avec un rappel sur l'optimisation structurale et l'optimisation topologique. La formulation et le fonctionnement de l'algorithme d'optimisation proposés sont ensuite détaillés. Enfin, trois exemples numériques sont présentés afin de valider et d'analyser l'approche proposée.

5.1. Introduction à l'optimisation structurale

L'optimisation structurale est un problème de première importance dans la conception d'une pièce mécanique. Il s'agit en général de diminuer le poids, l'encombrement ou le coût de réalisation des structures tout en améliorant leurs performances.

Parmi les problèmes d'optimisation des structures, on distingue aujourd'hui trois approches (Duysinx, 1996 ; Christensen et Klarbring, 2009), comme le montre la FIG. 5.1 :

- *L'optimisation paramétrique ou de dimensionnement* : ne permet de modifier que les dimensions (épaisseur, section, ...) d'une structure dont la forme et la topologie sont fixées.

- *L'optimisation de forme* : admet des changements de forme compatibles avec une topologie fixée au préalable. L'optimisation de forme classique modifie la représentation paramétrique des frontières du domaine. Cette technique admet un changement de dimensions aussi bien qu'une modification de la configuration de la structure, mais il n'est pas permis d'altérer la connectivité ou la nature des membres structuraux.
- *L'optimisation topologique* : permet de modifier plus fondamentalement la nature de la structure. La géométrie de la pièce est envisagée sans imposer a priori la connectivité des domaines ou des membres structuraux présents dans la solution. L'optimisation topologique revient à rechercher la répartition optimale de la matière et des trous dans un volume donné soumis à des contraintes. Certains auteurs (voir (Duysinx, 1996)) lui attribuent aussi le nom d'optimisation de forme généralisée.

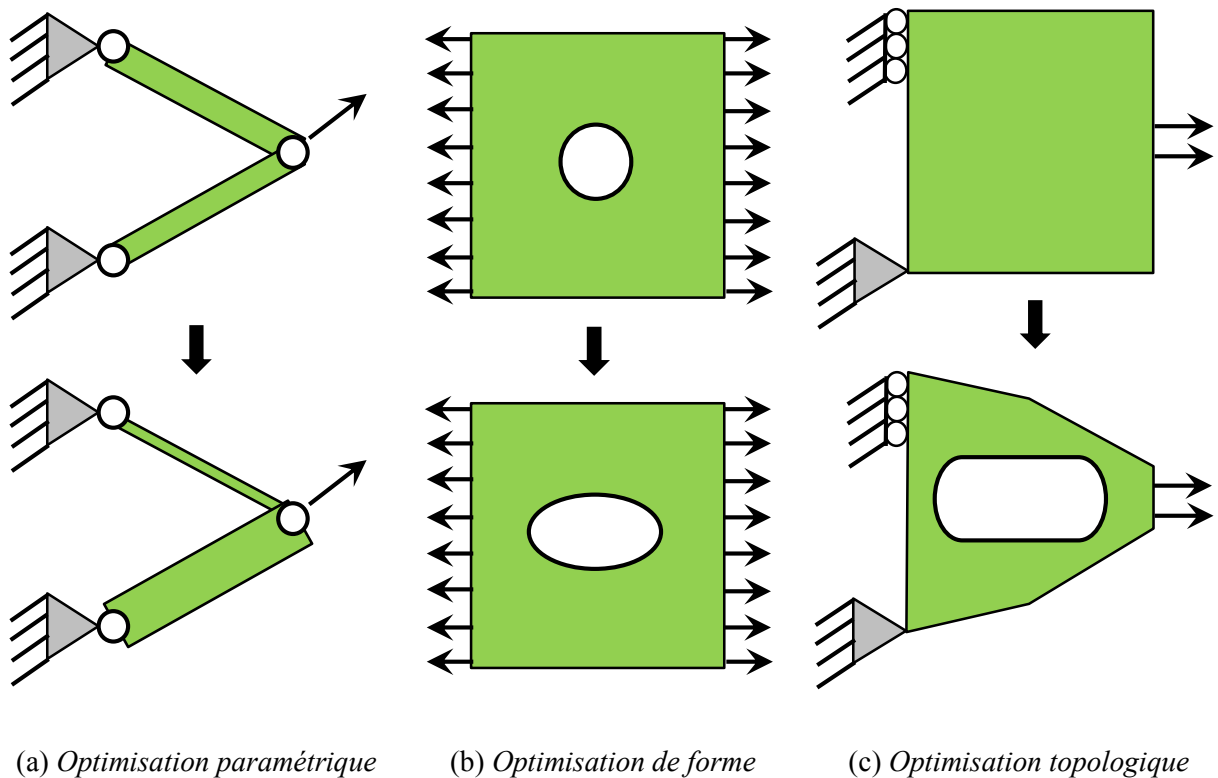


FIG. 5.1– Les trois types des problèmes d'optimisation structurale (Duysinx, 1996).

La recherche scientifique dans le domaine d'optimisation structurale se concentre aujourd'hui sur le développement des méthodes d'optimisation de forme pour des applications telles que l'estampage, et sur le développement des méthodes d'optimisation topologique dans divers domaines de l'ingénierie (non seulement structurale) (Silva, 2003).

5.1.1. Formulation d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation s'écrit :

Trouver $\{\mathbf{x}\}$ tel que $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ soit maximisée ou minimisée

sous les contraintes : $x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}, \quad i = 1, \dots, N_x$

$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, N_h$

$g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_g$

où

- $\{\mathbf{x}\} = \{x_1, \dots, x_{N_x}\}$ est le vecteur des variables de conception ($\{\mathbf{x}\} \in \mathbb{R}^{N_x}$) : paramètres du problème qui peuvent être modifiés pour optimiser le système;
- $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ est la fonction coût ou fonction objective : fonction qui permet d'évaluer l'état du système, comme par exemple la performance ;
- $x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}$ pour $i = 1, \dots, N_x$, $h_k(\mathbf{x}) = 0$ pour $k = 1, \dots, N_h$ et $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ pour $j = 1, \dots, N_g$ correspondent aux trois types de restrictions ou limitations imposées aux variables de conception (contraintes de bornes inférieures et supérieures, d'égalité et d'inégalité).

Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer les variables de conception conduisant aux meilleures conditions de fonctionnement du système (ce qui revient à minimiser ou maximiser la fonction coût) tout en respectant les contraintes imposées.

L'ensemble \mathcal{A} des points vérifiant toutes les limitations est appelé le *domaine admissible*. L'*optimum global* $\{\mathbf{x}^*\}$, s'il existe, vérifie le problème de maximisation suivant :

$$\mathcal{H}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}, \quad \exists \{\mathbf{x}^*\} \in \mathcal{A} \mid \forall \{\mathbf{x}\} \in \mathcal{A}, \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}^*) \geq \mathcal{H}(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

La solution $\{\mathbf{x}^*\}$ est considérée un *optimum local* de \mathcal{H} s'il est un minimum dans une région limitée seulement, c'est-à-dire s'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \{\mathbf{x}\} \in \mathcal{A}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{x}^*) \geq \mathcal{H}(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Généralement, l'optimum d'un problème avec limitations est atteint sur la frontière du domaine admissible. Dans le cas contraire, les restrictions sont inutiles (Christensen et Klarbring, 2009).

5.1.2. Optimisation topologique

Contrairement à l'optimisation paramétrique et à l'optimisation de forme qui se limitent respectivement à faire varier les dimensions et la frontière d'un domaine prédéfini, l'optimisation topologique revient à rechercher la répartition optimale de matière et de trous dans un volume donné soumis à des contraintes. Il n'y a donc aucune restriction sur les formes admissibles et le nombre de paramètres de conception est illimité. Ce problème d'optimisation n'admet en général pas de solution si l'on n'élargit pas le cadre mathématique dans lequel il est naturellement formulé. Les méthodes d'optimisation topologique relaxent le problème à travers un modèle matériau définissant un mélange microscopique de deux ou plusieurs matériaux et permettant de passer continument de l'état vide (absence de matériau) à l'état solide (existence de matériau) pour chaque point du domaine. En d'autres termes, le matériau en chaque point du domaine peut varier d'un solide (existence de matériau) au vide (absence de matériau) et peut prendre des densités intermédiaires selon le modèle de matériau défini. Cela assure la relaxation du problème d'optimisation en évitant le passage brusque de vide à solide, ce qui se traduit sous la forme d'instabilités dans les calculs numériques (optima locaux multiples). Les phases intermédiaires de matériau, qui sont appelés phases grises, n'ont pas de signification physique et correspondent uniquement à une relaxation du problème mathématique.

Un algorithme d'optimisation topologique est alors classiquement utilisé pour trouver de manière itérative la répartition idéale de matériau dans un domaine. Il combine essentiellement des méthodes d'optimisation avec une méthode d'analyse numérique, tels que la méthode des éléments finis. Les méthodes d'optimisation accélèrent la recherche de la répartition idéale de matériau à travers du calcul des gradients de la fonction coût par rapport à la quantité de matériau dans chaque élément.

Depuis sa création (Bendsøe et Kikuchi, 1988), la méthode d'optimisation topologique a suscité un très vif intérêt dans la communauté scientifique et de nouvelles contributions ont permis d'étendre son application à de nombreux domaines de l'ingénierie. On peut citer notamment les contributions de Bendsøe (1989), de Suzuki et Kikuchi (1991, 1992), de Thomsen (1991), de Allaire et Kohn (1993a, 1993b), de Rozvany et *al.* (1992, 1993), de Sigmund et Torquato (1999) et de Silva et Kikuchi (1999). L'excellente monographie publiée par Bendsøe et Sigmund (2003) décrit les principales techniques et différentes applications de l'optimisation topologique.

La méthode d'homogénéisation et la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization dans la littérature anglo-saxonne) constituent les deux principales approches pour décrire le matériau dans l'optimisation topologique.

La méthode d'homogénéisation a été introduite par Bendsøe et Kikuchi (1988). L'approche consiste à définir une microstructure de matériau composite en chaque point du domaine, comme indiqué sur la FIG. 5.2. Cette microstructure est initialement constituée d'une cellule unitaire avec un trou rectangulaire à l'intérieur dont les dimensions sont définies par les variables de conception a et b et par l'angle θ (angle d'ortotropie du matériau). Ainsi, les propriétés du domaine sont, en chaque point, égales aux propriétés d'un matériau composite formé par la répétition périodique de la microstructure de dimensions a , b et θ . Au cours de l'optimisation, la distribution des propriétés du matériau dans le domaine est modifiée en faisant varier les valeurs de a , b et θ dans ce domaine, de façon à ce qu'au terme de l'optimisation, il n'existe que des points sans matériau ($a = b = 1$), ou avec matériau ($a = b = 0$) et quelques points avec matériaux intermédiaires. Le problème consiste alors à optimiser la répartition de matière dans un domaine perforé avec une infinité de micro-trous. Les propriétés en chaque point sont obtenues par une méthode d'homogénéisation qui permet de déterminer les propriétés macroscopiques moyennes du matériau en fonction de sa microstructure.

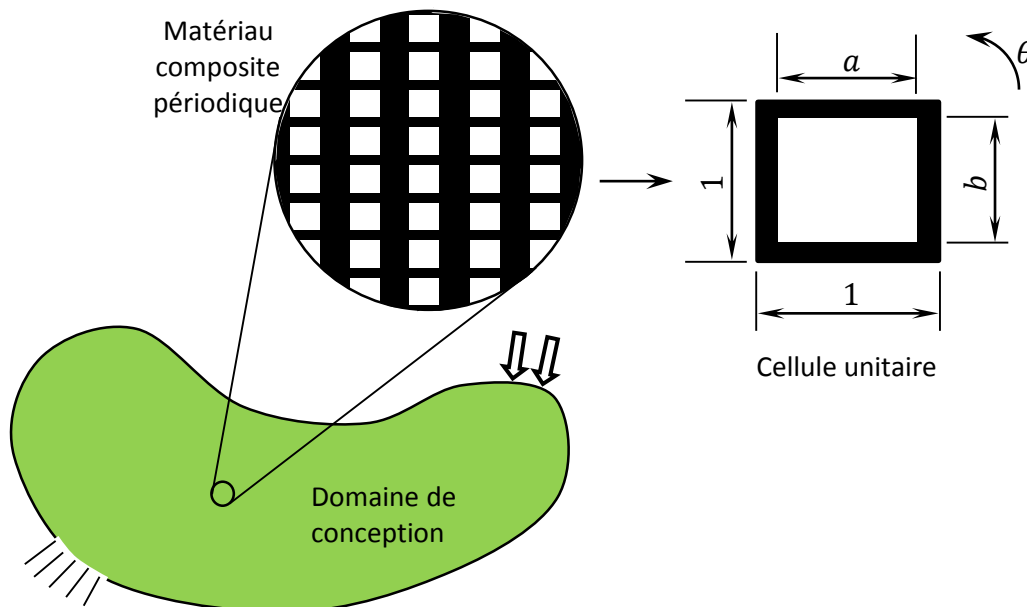


FIG. 5.2– *Modèle matériau basé sur la méthode d'homogénéisation.*

La méthode SIMP a été proposée d’abord par Bendsøe (1989) sous les termes “approche directe” ou “approche de densité artificielle”. Le terme SIMP a été introduit par Rozvani en 1992 (voir (Rozvani, 2001)). Cette approche consiste à introduire une pseudo-densité x (tel que $0 \leq x_{\min} \leq x \leq 1$) en chaque point du domaine, de sorte que les propriétés locales du matériau sont modifiées par cette variable. Une pseudo-densité par élément est introduite dans le cas où le domaine est discrétisé par la méthode des éléments finis. Pour $x = 1$ le matériau est présent, alors que pour $x = x_{\min}$ le matériau est absent (trou). La valeur $x = 0$ est généralement exclue afin d’éviter que les matrices du problème éléments finis, comme par exemple les matrices de rigidité et de masse, ne deviennent singulières. Au cours de l’optimisation, les propriétés du matériau de chaque élément sont modifiées par une interpolation mathématique en fonctions des pseudo-densités, comme par exemple:

$$E = x^p E^0 \quad (5.3)$$

où E^0 représente la propriété réelle du matériau et l’exposant $p \geq 1$ est le facteur de pénalisation, qui a pour fonction de pénaliser les valeurs intermédiaires et ainsi pousser x à atteindre ses valeurs extrêmes (0 ou 1) à la fin de l’optimisation. De plus, x^p correspond à la forme standard d’interpolation de la méthode SIMP. Cette forme est appropriée pour des analyses statiques ou quasi-statiques ou encore pour des analyses dynamiques en basse fréquence. Pour d’autres cas, le système d’interpolation RAMP, défini par $x/(1 + p(1 - x))$ est mieux adapté (Sigmund, 2007 ; Nakasone et Silva, 2011).

Contrairement à la méthode d’homogénéisation, la formulation de la méthode SIMP est empirique et les résultats dépendent du maillage (le problème est donc mal posé). En revanche, cette technique est simple, facile à implémenter, en particulier dans les logiciels commerciaux de calcul par éléments finis, et moins coûteuse par rapport à la méthode d’homogénéisation. De plus, la dépendance du maillage et les problèmes de “checkboarding” (cf. FIG. 5.3) peuvent être éliminés en introduisant une contrainte sur la variation de la pseudo-densité de façon à limiter l’espace de conception. Cela est fait en pratique à travers l’introduction d’une contrainte de périmètre, d’une contrainte du gradient local ou d’un filtre (Sigmund, 2007). Le lecteur est invité à consulter (Bendsøe et Sigmund, 2003) pour une description complète de la formulation de ces techniques, et (Allaire, 1997 ; Rozvani, 2001, 2009) pour des comparaisons entre elles.

Dans cette thèse, on s’intéresse à la méthode SIMP pour l’optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques sur une structure hôte.

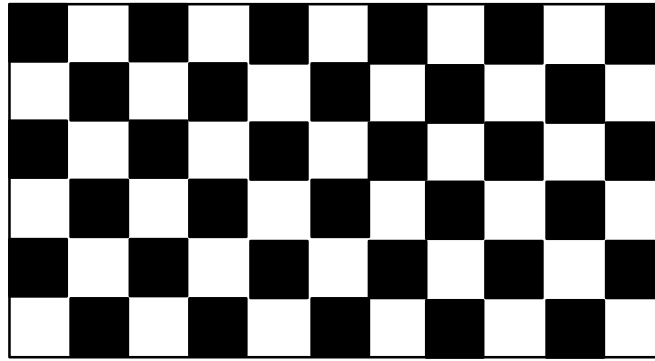


FIG. 5.3– *Problème de checkboarding : Les pseudo-densités varient de façon périodique et similaire à un damier constitué d'une alternance de vides et d'éléments solides. L'élément blanc représente le vide.*

5.2. Procédure d'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques

On présente ici le développement d'un algorithme d'optimisation topologique, basée sur la méthode SIMP, pour trouver la répartition optimale de matériau piézoélectrique sur une structure hôte élastique de façon à maximiser l'efficacité d'amortissement des dispositifs piézoélectriques shuntés. Cet algorithme est basé sur le travail de Silva et Kikuchi (1999) et utilise les facteurs de couplages modaux (MEMCFs) comme fonction objective.

5.2.1. Méthode SIMP appliquée à un milieu piézoélectrique

L'optimisation topologique selon la méthode SIMP est une technique d'optimisation structurale puissante qui s'est avérée très efficace pour de nombreuses applications. Cette technique combine généralement la méthode des éléments finis avec un algorithme d'optimisation pour trouver la distribution optimale de matériau dans un domaine donné (Bendsøe et Sigmund, 2003).

L'application de la méthode SIMP avec des matériaux piézoélectriques a été initialement proposée par Silva et Kikuchi (1999), dans le but de concevoir des transducteurs piézoélectriques optimisés. Ensuite, de nombreuses contributions impliquant l'utilisation de matériaux piézoélectriques ont utilisé avec succès l'optimisation topologique selon la méthode SIMP, en particulier dans les domaines de contrôle actif des vibrations et de la récupération de l'énergie (Kögl et Silva, 2005 ; Carbonari *et al.*, 2007; Nakasone *et al.*, 2008; Rupp *et al.*, 2009; Silva, 2009; Wein *et al.*, 2009; Zheng *et al.*, 2009 ; Nakasone et Silva, 2011).

L'idée de base de la méthode SIMP est d'introduire des pseudo-densités x tel que $0 \leq x_{\min} \leq x \leq 1$ pour chacun des N_o éléments finis du domaine de l'optimisation, ce qui définit le vecteur de variables de conception $\{\mathbf{x}\} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_o}]^T$. On rappelle que pour $x = 1$, le matériau est présent, tandis que pour $x = x_{\min}$, le matériau est absent (trou). Bien que x ait une interprétation physique que pour ces deux valeurs extrêmes, on rappelle également que la variation continue entre x_{\min} et l'unité lors de l'optimisation évite les instabilités numériques causées par la présence de plusieurs minima locaux de l'espace de conception discret (Duysinx, 1996 ; Bendsøe et Sigmund, 2003 ; Kögl et Silva, 2005).

On définit maintenant le modèle de matériau piézoélectrique modifié par les variables de conception x . En appliquant la forme standard d'interpolation de la méthode SIMP, la masse volumique et les tenseurs de constantes de raideur, de constantes piézoélectriques et de constantes diélectriques, pour chaque élément n du domaine de conception, deviennent respectivement :

$$\rho^{(n)} = x_n^{p_\rho} \rho^0, \quad c_{ijkl}^{(n)} = x_n^{p_c} c_{ijkl}^0, \quad e_{ijk}^{(n)} = x_n^{p_e} e_{ijk}^0, \quad \epsilon_{ijk}^{(n)} = x_n^{p_\epsilon} \epsilon_{ijk}^0 \quad (5.4)$$

où l'exposant 0 représente la propriété réelle du matériau et où p_ρ, p_c, p_e et p_ϵ sont les facteurs de pénalisation, qui ont pour fonction la pénalisation des valeurs intermédiaire de x de façon à minimiser les phases grises à la fin de l'optimisation (zones intermédiaires entre présence et absence de matériau).

Le choix des valeurs pour les facteurs de pénalisation est donc essentiel pour le succès de l'optimisation. On trouve souvent dans la littérature la valeur 1 pour p_ρ (Wein *et al.*, 2011). Pour des problèmes de minimum de compliance avec des matériaux élastiques, il a été prouvé que la valeur optimale pour p_c est égal à 3 (Bendsøe et Sigmund, 2003). Kögl et Silva (2005) ont fait une analyse paramétrique simplifiée pour choisir les valeurs des facteurs de pénalisations p_c, p_e et p_ϵ pour la conception des actionneurs piézoélectriques (analyses statiques). Ils ont étudiés différentes configurations en attribuant la valeur 1 ou 3 à chaque facteur. Récemment, Wein *et al.* (2011) ont étudié l'existence du phénomène qu'ils ont appelé auto-pénalisation pour des problèmes d'optimisation topologique avec matériau piézoélectrique. L'auto-pénalisation se produit lorsque les solutions ne présentent qu'une quantité insignifiante de phases grises en l'absence (*i*) de pénalisation

($p_p = p_c = p_e = p_\epsilon = 1$), (ii) de restriction de volume et (iii) d'utilisation de filtres¹⁰ (Bendsøe et Sigmund, 2003 ; Sigmund, 2007). On effectuera ici une analyse paramétrique similaire à celle faite dans (Kögl et Silva, 2005) pour choisir les valeurs des facteurs de pénalisation et analyser le phénomène d'auto-pénalisation dans le cadre de notre étude. Une poutre encastree-libre munie d'une pastille piézoélectrique sera analysée à cet effet. Les résultats de différentes combinaisons seront comparés aux solutions analytiques déterminées dans (Thomas *et al.*, 2012b).

Compte tenu des nouvelles propriétés matériaux données par l'Eq. (5.4), les matrices élémentaires de masse, de rigidité, de couplage électromécanique et de capacités piézoélectriques, pour chaque élément n du domaine de conception, s'écrivent respectivement:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{M}}_u^e]_n &= x_n^{p_p} [\mathbf{M}_u^e]_n, & [\tilde{\mathbf{K}}_u^e]_n &= x_n^{p_c} [\mathbf{K}_u^e]_n, \\ [\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^e]_n &= x_n^{p_e} [\mathbf{K}_{uv}^e]_n, & [\tilde{\mathbf{K}}_v^e]_n &= x_n^{p_\epsilon} [\mathbf{K}_v^e]_n. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La formulation éléments finis du problème électromécanique (formulation simplifiée) donnée par l'Eq. 2.33 devient alors :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^S + \tilde{\mathbf{M}}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u^S + \tilde{\mathbf{K}}_u & \tilde{\mathbf{K}}_{uv} \\ -\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^T & \tilde{\mathbf{K}}_v \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

où $[\mathbf{M}_u^S]$ et $[\mathbf{K}_u^S]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité de la structure hôte tandis que $[\tilde{\mathbf{M}}_u]$, $[\tilde{\mathbf{K}}_u]$, $[\tilde{\mathbf{K}}_{uv}]$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_v]$ sont respectivement les matrices de masse, de rigidité, de couplage électromécanique et des capacités modifiées par la méthode SIMP. Par la suite, on adopte les notations suivantes : $[\mathbf{M}_u] = [\mathbf{M}_u^S + \tilde{\mathbf{M}}_u]$ et $[\mathbf{K}_u] = [\mathbf{K}_u^S + \tilde{\mathbf{K}}_u]$.

Remarque

Kögl et Silva (2005) ont proposé un nouveau modèle pour des matériaux piézoélectriques appelé PEMAP-P (Piezoelectric MAterial with Penalization and Polarization dans la littérature anglo-saxonne), qui considère, en plus de la pseudo-densité x , une nouvelle variable de conception pour déterminer la polarisation du matériau. Ce modèle n'est pas pris en compte dans cette thèse.

¹⁰ On rappelle que dans certains cas, l'utilisation d'un filtre (ou d'une contrainte additionnelle) est nécessaire pour améliorer les résultats (dépendance du maillage) et éviter le problème de checkboarding (Sigmund, 2007).

5.2.2. Formulation du problème

On rappelle que pour optimiser la position et la géométrie des pastilles, les seuls paramètres à maximiser sont les facteurs de couplage modaux électromécaniques (MEMCF), qui caractérisent les échanges d'énergie entre les pastilles piézoélectriques et la structure selon les différents modes de vibration de cette dernière (voir Chapitre 4 et (Thomas *et al.*, 2009, 2012a, 2012b)).

Le problème d'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques sur une structure hôte est défini alors par :

$$\text{Maximiser } \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \left(k_i^{(p)} \right)^2, \text{ où } \{\mathbf{x}\} = [x_1 \cdots x_{N_o}]^T \text{ et } k_i^{(p)} \text{ défini par (4.28)}$$

$$\{\mathbf{x}\}$$

$$\text{sous les contraintes : } [\mathbf{K}_u(\mathbf{x}) - \omega_i^2 \mathbf{M}_u(\mathbf{x})] \{\Phi_i\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$0 \leq x_{\min} \leq x_i \leq 1,$$

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{x}) = \int \{\mathbf{x}\} d\Omega = \sum_{i=1}^{N_o} x_i \Omega_i \leq \tilde{\Omega}_{\max}$$

où $\tilde{\Omega}$ est le volume du domaine de conception, Ω_i représente le volume d'un élément fini dans ce domaine et $\tilde{\Omega}_{\max}$ est le volume maximal admissible pour les pastilles piézoélectriques. De plus, la limite x_{\min} est utilisée afin d'éviter les singularités dans les matrices définissant le problème. Il est courant de choisir $x_{\min} = 0.001$.

Dans (Silva et Kikuchi, 1999), les auteurs ont proposé une fonction multiobjective en fonction de plusieurs valeurs propres pour surmonter le problème de la commutation des modes de vibration au cours de l'optimisation. On se restreint ici à l'utilisation d'une fonction objective monomodale et on considère le critère d'assurance modal (MAC) pour surmonter ce problème éventuel. Par conséquent, même si les modes commutent au cours de l'optimisation, le facteur de couplage relatif au mode choisi est toujours maximisé. De plus, en basse fréquence et dans les cas où les fréquences propres sont suffisamment espacées et les pastilles piézoélectriques ne modifient pas de manière significative le comportement dynamique de la structure hôte, ce problème est négligeable.

5.2.3. Analyse de sensibilité

Comme cela a été fait dans (Silva et Kikuchi, 1999), on utilise la programmation linéaire séquentielle (PLS) pour résoudre le problème d'optimisation (Hanson et Hiebert, 1981). Cela

nécessite la connaissance des sensibilités (gradients) de la fonction coût \mathcal{H} par rapport aux variables de conception x_i , qui sont données par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_n} = \frac{1}{(C^{(p)} \omega_i^2)^2} \left(\frac{\partial (\chi_i^{(p)})^2}{\partial x_n} C^{(p)} \omega_i^2 - (\chi_i^{(p)})^2 \frac{\partial C^{(p)}}{\partial x_n} \omega_i^2 - (\chi_i^{(p)})^2 C^{(p)} \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_n} \right) \quad (5.7)$$

avec

$$\frac{\partial (\chi_i^{(p)})^2}{\partial x_n} = 2 \chi_i^{(p)} \left(\frac{\partial \{\Phi_i\}^T}{\partial x_n} [\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^{(p)}] + \{\Phi_i\}^T \frac{\partial [\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^{(p)}]}{\partial x_n} \right) \quad (5.8)$$

et

$$\frac{\partial C^{(p)}}{\partial x_n} = \frac{\partial [\tilde{\mathbf{K}}_v^{(p)}]}{\partial x_n} \quad (5.9)$$

Les expressions (5.8) et (5.9) correspondent respectivement aux sensibilités du coefficient de couplage $\chi_i^{(p)}$ et de la capacité $C^{(p)}$. Les sensibilités de la valeur propre $\partial \omega_i^2 / \partial x_i$ et du vecteur propre $\partial \{\Phi_i\} / \partial x_i$ sont obtenues en dérivant les équations suivantes par rapport aux variables de conception x_i :

$$[\mathbf{K}_u - \omega_i^2 \mathbf{M}_u] \{\Phi_i\} = \{\mathbf{0}\}, \quad \{\Phi_i\}^T [\mathbf{M}_u] \{\Phi_i\} = 1 \quad (5.10)$$

Ce qui conduit à :

$$[\mathbf{K}_u - \omega_i^2 \mathbf{M}_u] \frac{\partial \{\Phi_i\}}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_i} [\mathbf{M}_u] \{\Phi_i\} = - \left[\frac{\partial \mathbf{K}_u}{\partial x_i} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial x_i} \right] \{\Phi_i\} \quad (5.11)$$

$$\{\Phi_i\}^T [\mathbf{M}_u] \frac{\partial \{\Phi_i\}}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \{\Phi_i\}^T \frac{\partial [\mathbf{M}_u]}{\partial x_i} \{\Phi_i\} \quad (5.12)$$

En multipliant l'expression (5.11) par $\{\Phi_i\}^T$, on obtient :

$$\{\Phi_i\}^T [\mathbf{K}_u - \omega_i^2 \mathbf{M}_u] \frac{\partial \{\Phi_i\}}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_i} \{\Phi_i\}^T [\mathbf{M}_u] \{\Phi_i\} = - \{\Phi_i\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_u}{\partial x_i} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial x_i} \right] \{\Phi_i\} \quad (5.13)$$

Les sensibilités de la valeur propre $\partial \omega_i^2 / \partial x_i$ sont alors :

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_i} = \{\Phi_i\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_u}{\partial x_i} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial x_i} \right] \{\Phi_i\} \quad (5.14)$$

Les sensibilités du vecteur propre $\partial\{\Phi_i\}/\partial x_i$ sont obtenues à partir de la résolution du système ci-dessous, qui est formé par la combinaison des expressions (5.11) et (5.12) :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_u - \omega_i^2 \mathbf{M}_u) & -\mathbf{M}_u \Phi_i \\ -\Phi_i^T \mathbf{M}_u & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \mathbf{K}_u}{\partial x_n} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial x_n} \right) \Phi_i \\ \frac{1}{2} \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}_u}{\partial x_n} \Phi_i \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Finalement, en raison du modèle de matériau proposé dans (5.5), les dérivés $\partial[\mathbf{K}_u]/\partial x_i$, $\partial[\mathbf{M}_u]/\partial x_i$, $\partial[\tilde{\mathbf{K}}_{uv}]/\partial x_i$ et $\partial[\tilde{\mathbf{K}}_v]/\partial x_i$ sont proportionnelles aux matrices élémentaires $[\tilde{\mathbf{M}}_u^e]_n$, $[\tilde{\mathbf{K}}_u^e]_n$, $[\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^e]_n$ et $[\tilde{\mathbf{K}}_v^e]_n$. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\mathbf{K}_u]}{\partial x_n} &= p_c \frac{[\tilde{\mathbf{K}}_u^e]_n}{x_n}, & \frac{\partial[\mathbf{M}_u]}{\partial x_n} &= p_\rho \frac{[\tilde{\mathbf{M}}_u^e]_n}{x_n}, \\ \frac{\partial[\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^{(p)}]}{\partial x_n} &= p_e \frac{[\tilde{\mathbf{K}}_{uv}^e]_n}{x_n}, & \frac{\partial[\tilde{\mathbf{K}}_v^{(p)}]}{\partial x_n} &= p_\epsilon \frac{[\tilde{\mathbf{K}}_v^e]_n}{x_n} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Les sensibilités de la fonction coût \mathcal{H} par rapport aux variables de conception x_i sont alors obtenues en introduisant (5.16) dans (5.8), (5.9), (5.14) et (5.15).

5.2.4. Algorithme et implémentation numérique

L'algorithme illustré par la FIG. 5.4 définit l'approche proposée dans cette thèse. La FIG. 5.4(a) résume l'algorithme général utilisé pour résoudre le problème de réduction des vibrations et/ou bruit rayonnée à travers des dispositifs piézoélectrique shuntés et, la FIG. 5.4(b) détaille l'algorithme d'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques. Comme on le décrit dans les chapitres précédents, la construction de la partie purement élastique des modèles (matrices de masse $[\mathbf{M}_u]$ et de rigidité $[\mathbf{K}_u]$) et la résolution des problèmes aux valeurs propres sont des tâches réalisées à l'aide du logiciel *Nastran*. Le langage *Awk* permet de réaliser le transfert des données entre les différents logiciels. *Matlab* permet de piloter l'algorithme, de construire la partie électromécanique et diélectrique du modèle éléments finis (les matrices de couplage électromécanique $[\mathbf{K}_{uv}]$ et diélectrique $[\mathbf{K}_v]$), de résoudre les sous-problèmes d'optimisation linéaire. Matlab est aussi utilisé pour construire et résoudre les modèles d'ordres réduits. Notons enfin que l'élément

QUAD 4 (quadrilatère à 4 nœuds) est utilisé pour discrétiser la structure avec ou sans pastilles piézoélectriques (Annexe B).

Algorithme principal

Dans un premier temps, on modélise la structure avec la méthode des éléments finis puis on choisit les modes des vibrations à atténuer. On rappelle que dans les simulations numériques de cette thèse on considère un dispositif constitué d'une pastille piézoélectrique connectée à un circuit shunt résistif ou résonant pour chaque mode à atténuer. Dans un deuxième temps, on applique l'algorithme d'optimisation, détaillé dans le paragraphe suivant, pour déterminer les géométries et les emplacements des pastilles piézoélectriques, dans le but de maximiser l'atténuation des vibrations. Ensuite, on détermine les paramètres optimaux des circuits shunts puis on calcule la réponse du système avec les dispositifs piézoélectriques shuntés à partir du modèle d'ordre réduit défini au Chapitre 4 (base combinée court-circuit/circuit-ouvert).

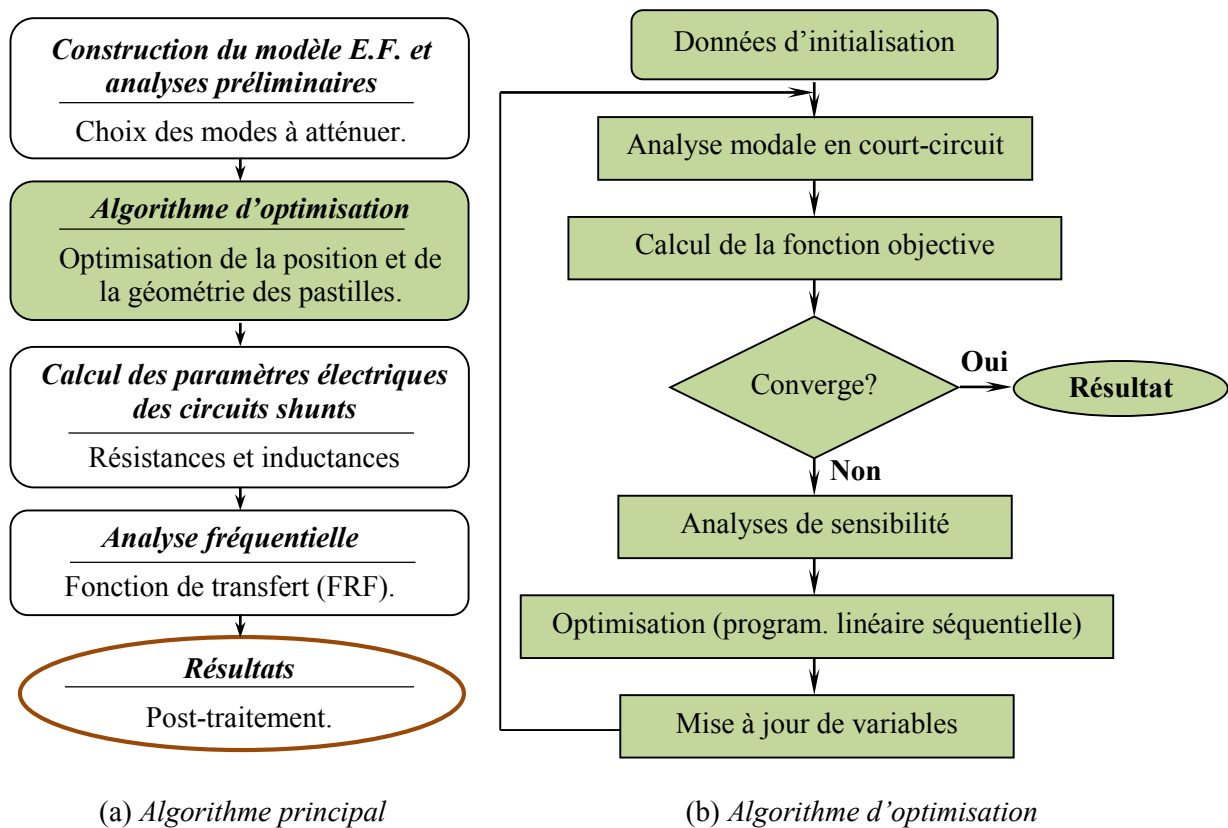


FIG. 5.4— Approche proposée.

Algorithme d'optimisation

L'algorithme d'optimisation est décrit dans la FIG. 5.4(b). Le modèle éléments finis défini par l'Eq. (5.6) est utilisé pour résoudre le problème modal en court-circuit et calculer la fonction objective \mathcal{H} . Les variables de conception sont les valeurs des pseudo-densités x_i , qui peuvent être différentes dans chaque élément fini.

Le problème d'optimisation est résolu avec la méthode de programmation linéaire séquentielle (PLS). Cette méthode consiste à approcher le problème d'optimisation non linéaire en une succession de sous-problèmes linéaires par l'intermédiaire du développement de la fonction objective en série de Taylor autour de la variable de conception x_i (Hanson et Hiebert, 1981). Des limites mobiles appropriées (entre 3% et 15%) sont définies à chaque interaction. Par ailleurs, les sous-problèmes linéaires sont résolus ici grâce à la fonction *Linprog* de *Matlab*. De cette façon, le vecteur de variables de conception est mis à jour à chaque interaction. La procédure s'arrête lorsque la fonction coût converge, autrement dit, lorsque la fonction coût et les variables de conception n'évoluent plus.

Le résultat final consiste en une répartition optimale des pseudo-densités x_i dans le domaine de conception. Cette distribution peut contenir des valeurs intermédiaires (phases grises) qui n'ont pas de signification physique. Ces valeurs intermédiaires doivent être interprétées comme zéro (trou) ou 1 (matériau réel) avant de poursuivre l'algorithme principal (FIG. 5.4(a)).

La qualité des résultats peut-être évaluée à partir de la mesure de phases grises, définie par (Sigmund, 2007) :

$$M_{\text{nd}} = \frac{\sum_{n=1}^{N_o} 4x_n(1-x_n)}{N_o} \times 100\% \quad (5.17)$$

Un résultat sans phase grise est caractérisé par $M_{\text{nd}} = 0$, tandis que $M_{\text{nd}} = 100\%$ caractérise un résultat totalement gris ($x_i = 0.5, \forall i \in 1 \dots N_o$).

5.3. Exemples

On présente dans cette section deux exemples pour valider et évaluer l'algorithme d'optimisation topologique proposé.

On propose tout d'abord de choisir les facteurs de pénalisation et de valider l'algorithme d'optimisation développé par l'analyse d'une poutre console munie d'une pastille

piézoélectrique. Les résultats sont alors comparés à ceux de la solution analytique donnée dans (Thomas *et al.*, 2012b).

On propose par la suite d'appliquer l'approche développée au problème de réduction des vibrations du pot d'échappement présenté au Chapitre 3 à partir d'un dispositif piézoélectrique shunté.

5.3.1. Poutre encastrée libre avec une pastille piézoélectrique

Dans ce premier exemple, la solution analytique trouvée dans (Thomas *et al.*, 2012b) est utilisée pour choisir les valeurs des facteurs de pénalisation et valider l'algorithme d'optimisation proposé. On considère une poutre de section rectangulaire pleine, en aluminium ($E = 74$ GPa, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2700$ kg.m⁻³), encastrée-libre, et munie d'une pastille piézoélectrique, comme décrit dans la FIG. 5.5. La pastille, qui est parfaitement collée sur la surface supérieure de la poutre, est polarisée dans sa direction transversale (direction normale aux électrodes) et faite en PIC-151 (voir TAB. 3.3 pour les propriétés). De plus, sa largeur est fixe et égale à la largeur de la poutre.

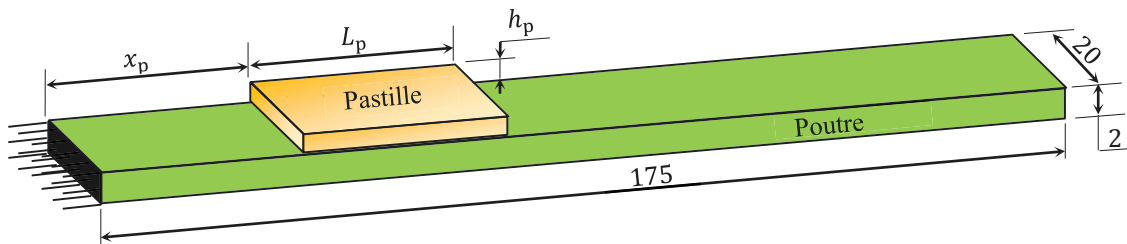


FIG. 5.5– Poutre encastrée-libre avec une pastille piézoélectrique.

Le problème consiste alors à trouver la position (x_p), la longueur (L_p) et l'épaisseur (h_p) de la pastille de façon à maximiser le facteur de couplage modal (MEMCF) souhaité. Le TAB. 5.1 rappelle les solutions analytiques trouvées par Thomas *et al.* (2012b) pour les deux premiers modes de flexion de la poutre (déformées présentées dans la FIG. 5.7).

Notre approche d'optimisation utilise la modélisation du système par éléments finis pour déterminer la distribution optimale de matériau piézoélectrique sur la structure hôte. Le système (poutre avec couche de matériau piézoélectrique) est modélisé ici avec 70 éléments quadrilatères à 4 nœuds (éléments de plaque en utilisant la théorie de Reissner Mindlin – voir (Reddy, 1997) et l'Annexe B). Afin d'assurer la comparaison avec les résultats analytiques, le système est discrétisé avec un seul élément selon sa largeur, comme le montre le TAB. 5.2. Avec cette modélisation et pour une épaisseur fixe de la couche piézoélectrique, le problème

d'optimisation est réduit à la détermination de la longueur optimale (L_p) et de la position optimale (x_p) de la pastille piézoélectrique.

TAB. 5.1 : Configurations optimales pour les deux premiers modes de flexion – solutions analytiques déterminées dans (Thomas *et al.*, 2012b).

Mode de vibration	Paramètres
Mode 1F	$x_p = 0.00$ mm
	$L_p = 99.75$ mm
	$h_p = 0.91$ mm
Mode 2F	$x_p = 30.10$ mm
	$L_p = 109.38$ mm
	$h_p = 1.06$ mm

Par ailleurs, comme indiqué précédemment, la performance de l'approche proposée dépend des valeurs des facteurs de pénalisation p_ρ , p_c , p_e et p_ϵ . Pour choisir la combinaison de valeurs la plus appropriée à notre cas, on teste ici différentes combinaisons en attribuant la valeur 1 ou 3 à chaque facteur (Kögl et Silva, 2005). Pour chacun des 16 cas testés, l'algorithme d'optimisation est initialisé avec $x_i = 0.5$ pour les 70 éléments du domaine de conception et aucune restriction de volume $\tilde{\Omega}_{\max}$ n'est considérée. De plus, les valeurs d'épaisseurs optimales trouvées dans (Thomas *et al.*, 2012b) et rappelées dans le TAB. 5.1 sont utilisées pour la couche de matériau piézoélectrique.

Les résultats obtenus pour les deux premiers modes de flexion sont présentés dans le TAB. 5.2 et la FIG. 5.6. Cette dernière figure donne l'évolution de la fonction coût (MEMCF) au cours des 40 premières interactions et le TAB. 5.2 présente les résultats en termes de facteurs de pénalisation et mesure de phases grises. On peut ainsi comparer la qualité des résultats d'une part par rapport à la quantité de phases grises et d'autre part par rapport aux solutions analytiques.

Il est important de noter qu'on ne présente ici que les résultats pour six combinaisons des facteurs de pénalisation. Les cas avec $p_\rho = 3$ et les cas avec la combinaison $p_e = 1$ et $p_\epsilon = 3$ ne sont pas présentés. Les résultats avec $p_\rho = 3$ sont globalement similaire à ceux avec $p_\rho = 1$. Dans tous les cas avec $p_e = 1$ et $p_\epsilon = 3$, l'algorithme d'optimisation n'a pas convergé (x_i tend vers x_{\min}). Mathématiquement, il y a deux méthodes pour maximiser la

fonction coût : (i) maximiser les coefficients de couplage $\chi_i^{(p)}$, qu'on peut qualifier de “bonne méthode” à suivre et, (ii) minimiser la valeur de la capacité $C^{(p)}$, ce qui conduit à la minimisation des pseudo-densités x_i dans tout le domaine de conception. Les combinaisons avec $p_e = 1$ et $p_e = 3$ pénalisent principalement la valeur de la capacité $C^{(p)}$ et conduit à l'utilisation de la deuxième méthode.

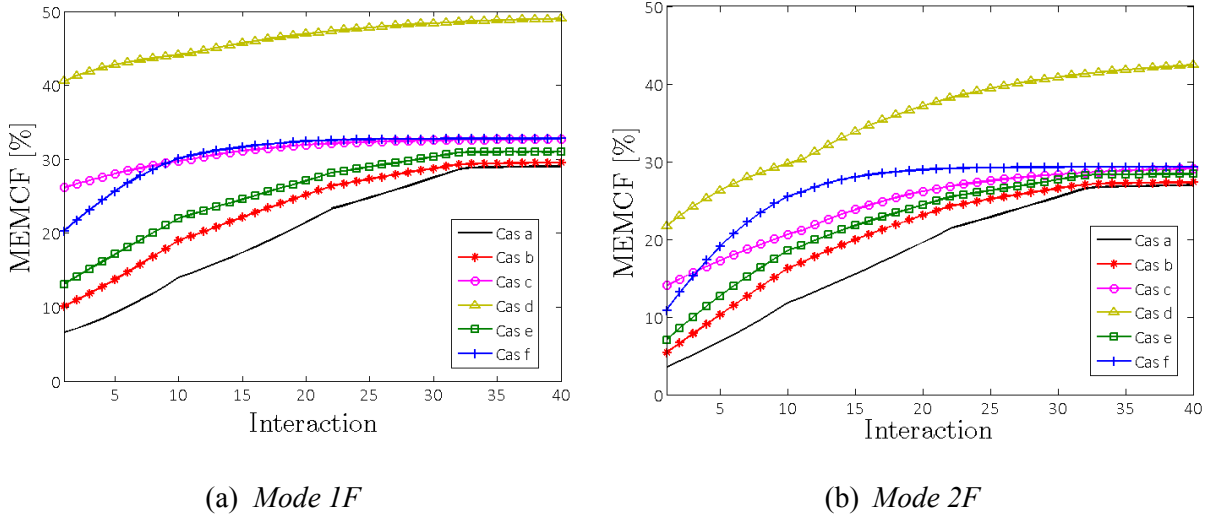














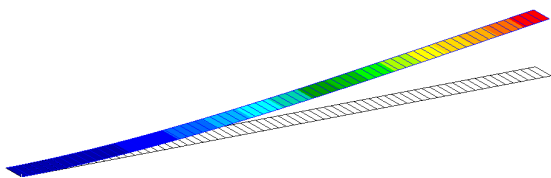


FIG. 5.6– Evolution de la fonction coût (MEMCF) au cours de l'optimisation (**Cas a**: $p_\rho = p_\epsilon = p_c = 1$ et $p_e = 3$; **Cas b**: $p_\rho = p_\epsilon = 1$ et $p_e = p_c = 3$; **Cas c**: $p_\rho = p_\epsilon = p_c = p_e = 1$; **Cas d**: $p_\rho = p_\epsilon = p_e = 1$ et $p_c = 3$; **Cas e**: $p_\rho = p_c = 1$ et $p_\epsilon = p_e = 3$; **Cas f**: $p_\rho = 1$ et $p_\epsilon = p_e = p_c = 3$).

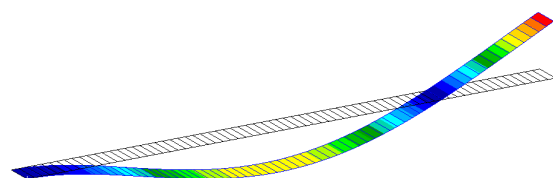
Comme prévu, la combinaison des facteurs de pénalité $p_\rho = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 3$ (cas a) donne les meilleurs résultats avec une très faible quantité de phases grises. En effet, cette configuration ne pénalise que la matrice de couplage électromécanique $[\mathbf{K}_{uv}]$ en conduisant ainsi l'algorithme d'optimisation à prendre le bon chemin : maximiser la fonction coût en maximisant les coefficients de couplage $\chi_i^{(p)}$. La combinaison $p_\rho = p_\epsilon = 1$ et $p_c = p_e = 3$ (cas b) donne également de bons résultats avec peu de phases grises. Les autres configurations ont un effet nocif sur la performance de l'algorithme d'optimisation. Bien que les fonctions coûts atteignent des valeurs plus élevées avec ces combinaisons (voir FIG. 5.6), l'algorithme ne fournit pas un design “noir et blanc” (1 ou 0) et les topologies finales sont ainsi caractérisées par une grande quantité de matériaux intermédiaires (phases grises).

TAB. 5.2 : Distribution des pseudo-densités x_i (noir : matériau piézoélectrique, blanc : trou) sur la surface supérieur de la poutre pour les deux premiers mode de flexion et pour différentes combinaisons de facteurs de pénalisation - modélisation éléments finis et mesure de phase grise M_{nd} .

Mode 1F	Mode 2F
Solutions analytiques (Thomas <i>et al.</i> , 2012b)	
	
Cas a: $p_p = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 3$	
	
$M_{nd} = 0 \%$	$M_{nd} = 1.55 \%$
Cas b: $p_p = p_\epsilon = 1$ et $p_c = p_e = 3$	
	
$M_{nd} = 11.34 \%$	$M_{nd} = 6.68 \%$
Cas c: $p_p = p_c = p_e = p_\epsilon = 1$	
	
$M_{nd} = 50.12 \%$	$M_{nd} = 43.06 \%$
Cas d: $p_p = p_e = p_\epsilon = 1$ et $p_c = 3$	
	
$M_{nd} = 54.21 \%$	$M_{nd} = 55.50 \%$
Cas e: $p_p = p_c = 1$ et $p_e = p_\epsilon = 3$	
	
$M_{nd} = 35.36 \%$	$M_{nd} = 22.53 \%$
Cas f: $p_p = 1$ et $p_c = p_e = p_\epsilon = 3$	
	
$M_{nd} = 52.27 \%$	$M_{nd} = 37.75 \%$



(a) Mode 1F



(b) Mode 2F

FIG. 5.7– Déformées modales des 2 premiers modes de flexion de la poutre. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

Malgré les bons résultats obtenus avec les cas (a) et (b), on observe que les topologies finales ne correspondent pas exactement aux résultats analytiques. Afin de trouver une configuration qui améliore cette convergence, nous avons testé des nouvelles combinaisons pour les facteurs de pénalisation à partir des cas (a) et (b). Parmi tous les tests effectués, nous avons constaté que la combinaison $p_\rho = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 2$ semble être le meilleur choix. Comme le montre le TAB. 5.3, cette configuration permet d'obtenir une très bonne approximation par rapport aux solutions analytiques avec peu de phases grises. Cela est confirmé par les excellents résultats de l'exemple suivant.

TAB. 5.3 : Topologies des deux premiers modes de flexion avec $p_\rho = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 2$.

Mode 1F	Mode 2F
Solutions analytiques (Thomas <i>et al.</i> , 2012b)	
Cas optimale: $p_\rho = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 2$	
$M_{nd} = 0 \%$	$M_{nd} = 1.55 \%$

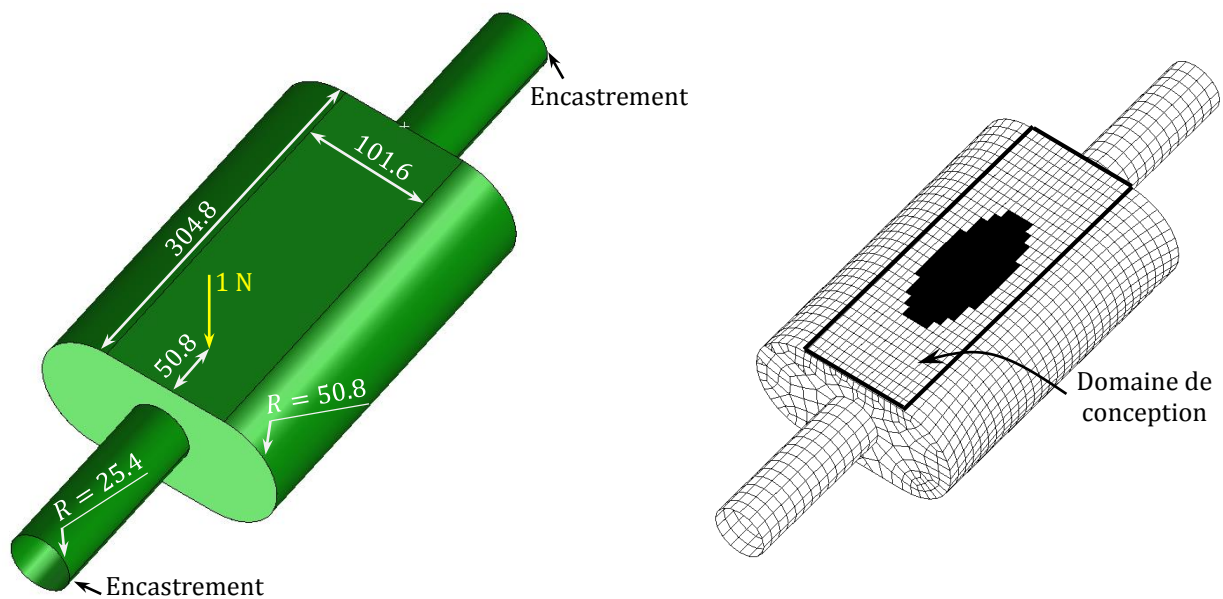
Ce premier exemple nous a permis de valider et montrer l'efficacité de notre algorithme d'optimisation par rapport à des solutions analytiques. On a vérifié également que les combinaisons des facteurs de pénalisation qui affectent uniquement la matrice de couplage électromécanique $[K_{uv}]$ conduisent aux meilleurs résultats parmi un ensemble d'expériences numériques. En particulier, la combinaison $p_\rho = p_c = p_\epsilon = 1$ et $p_e = 2$ nous a donné les meilleurs résultats par rapport à la solution analytique avec peu de phases grises. Même si une analyse plus approfondie doit être considérée pour établir un résultat optimal, cette combinaison des facteurs de pénalisation semble être un bon choix pour le problème d'optimisations traité dans cette thèse. De plus, nous avons aussi observé que sans pénalisation ($p_\rho = p_c = p_\epsilon = p_e = 1$) l'algorithme donne des résultats avec une grande quantité des phases grises, ce qui demande un effort important de post traitement pour obtenir des topologies réalistes.

5.3.2. Pot d'échappement avec un dispositif piézoélectrique shunté

Dans cet exemple, on reconsidère le problème de réduction des vibrations du silencieux automobile du Chapitre 3. La géométrie et les conditions aux limites du problème sont

rappelées dans la FIG. 5.8(a). On rappelle également que le silencieux est fabriqué en aluminium ($E = 74 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$) avec une épaisseur de 3.048 mm tandis que les tubes d'admission et d'échappement sont en acier ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$) avec une longueur de 152.4 mm et une épaisseur de 2.032 mm. De plus, le silencieux est soumis à une force harmonique transverse d'amplitude unitaire (FIG. 5.8(a)).

Un dispositif piézoélectrique shunté est parfaitement collé sur la surface supérieure du silencieux pour amortir le deuxième mode de vibration du système. Ce dispositif est fait en PIC-151 (voir TAB. 3.3 pour les propriétés) et avec une épaisseur de 0.635 mm.



(a) Configuration géométrique et conditions aux limites

(b) Modèle éléments finis et configuration optimale de la pastille piézoélectrique.

FIG. 5.8– Silencieux automobile avec tubes d'admission et d'échappement (dimensions en mm).

L'algorithme d'optimisation proposé est appliqué ici pour déterminer la distribution optimale de matériau piézoélectrique sur la surface supérieure du silencieux de façon à maximiser le facteur de couplage électromécanique du deuxième mode de vibration (FIG. 5.9). La restriction de volume $\tilde{\Omega}_{\max} = 4600 \text{ mm}^3$ est utilisée pour limiter la zone dans laquelle le matériau piézoélectrique peut-être présent. Le circuit shunt résistif ou résonant connecté au système est alors accordé au deuxième mode de vibration afin d'obtenir une dissipation d'énergie maximale pour ce mode. La réponse du système couplé est obtenue par projection modale sur une base construite à partir des 10 premiers modes du silencieux avec la

pastille en court-circuit et du deuxième mode du silencieux avec la pastille en circuit-ouvert. Par ailleurs, un amortissement mécanique est introduit par l'intermédiaire d'un coefficient d'amortissement modal $\xi = 0.005$ pour tous les modes retenus dans la base réduite.

Les algorithmes de la FIG. 5.4 et de l'Annexe B sont appliqués pour construire les modèles éléments finis et résoudre le problème. 2582 éléments QUAD 4 sont utilisés pour modéliser le silencieux muni de la pastille piézoélectrique shuntée (voir FIG. 5.8(b)). De plus, afin de satisfaire toutes les contraintes, l'algorithme d'optimisation est initialisé avec $x_i = 0.2$ pour tous les éléments dans le domaine de conception (surface supérieure du silencieux).

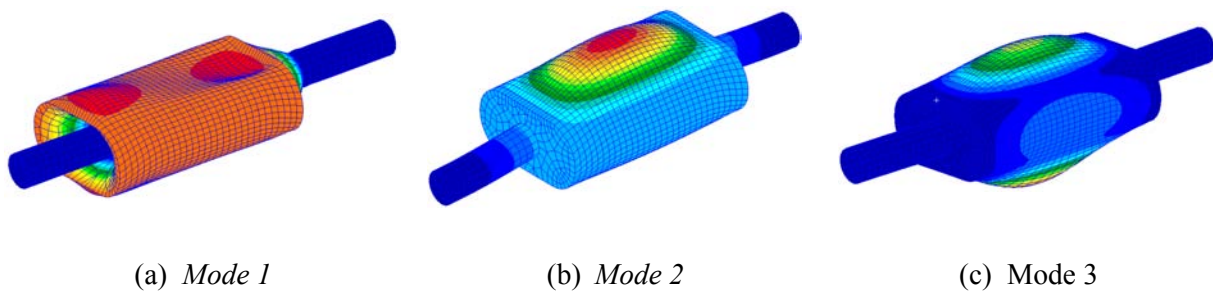


FIG. 5.9– Déformées modales des 3 premiers modes propres du silencieux automobile. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

La FIG. 5.8(b) présente la topologie obtenue avec l'algorithme d'optimisation et la FIG. 5.10 compare la performance de cette configuration avec d'autres configurations qui utilisent une géométrie rectangulaire pour la pastille piézoélectrique. Dans la FIG. 5.11 et la FIG. 5.12, la FRF au point de l'excitation est tracée et comparée pour (i) le silencieux sans pastille piézoélectrique, (ii) le cas court-circuité, et (iii) le cas shunté. Ces figures montrent respectivement la réduction de l'amplitude de résonance du deuxième mode avec un shunt résistif et résonant. Enfin, le TAB. 5.4 présente les valeurs optimales des paramètres électriques du circuit shunt.

Dans cet exemple, la stratégie d'optimisation proposée dans cette thèse permet de trouver la meilleure géométrie et position de la pastille piézoélectrique et ainsi de maximiser l'atténuation des vibrations du système. Cela peut être vérifié en comparant les résultats obtenus avec d'autres géométries et positions de la pastille piézoélectrique, comme cela est montré dans la FIG. 5.10.

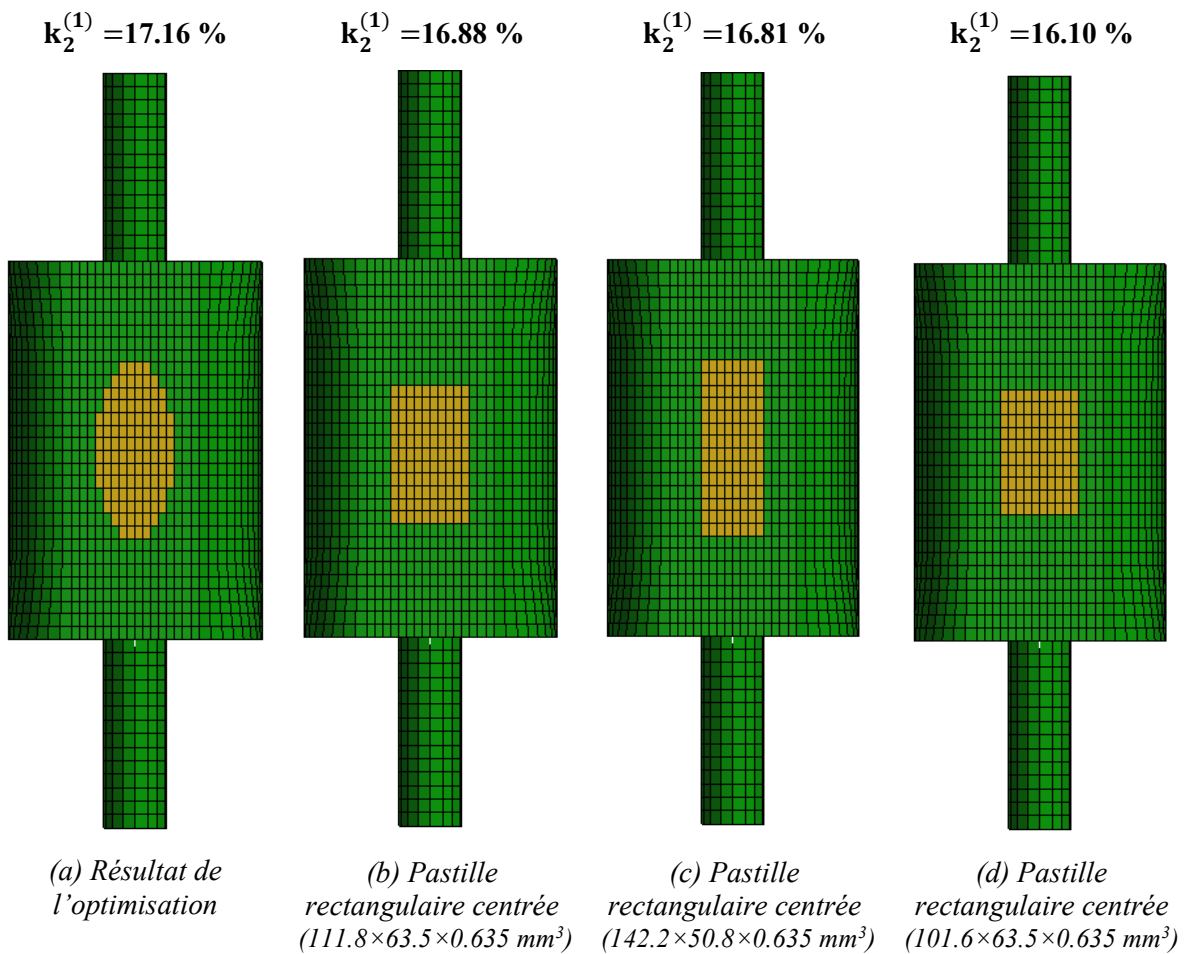


FIG. 5.10- Comparaison entre différents positions et géométrie de la pastille piézoélectrique : facteur de couplage modal électromécanique.

TAB. 5.4 : Paramètres optimaux du circuit shunt.

Shunt	Paramètres	Valeurs
Résonant	Résistance [Ω]	392.00
	Inductance [H]	0.64
Résistif	Résistance [Ω]	2116.24

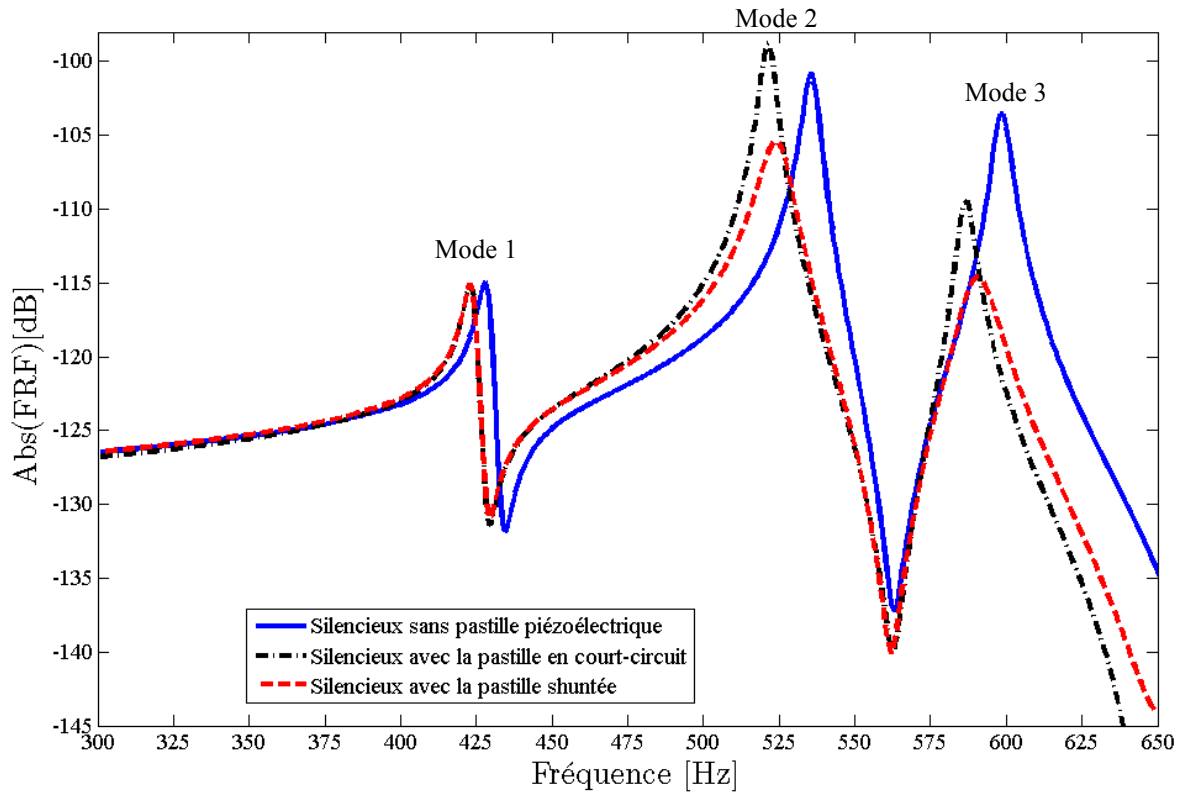


FIG. 5.11- *FRF au point d'application de la force excitatrice : atténuation du deuxième mode de vibration avec un shunt résistif.*

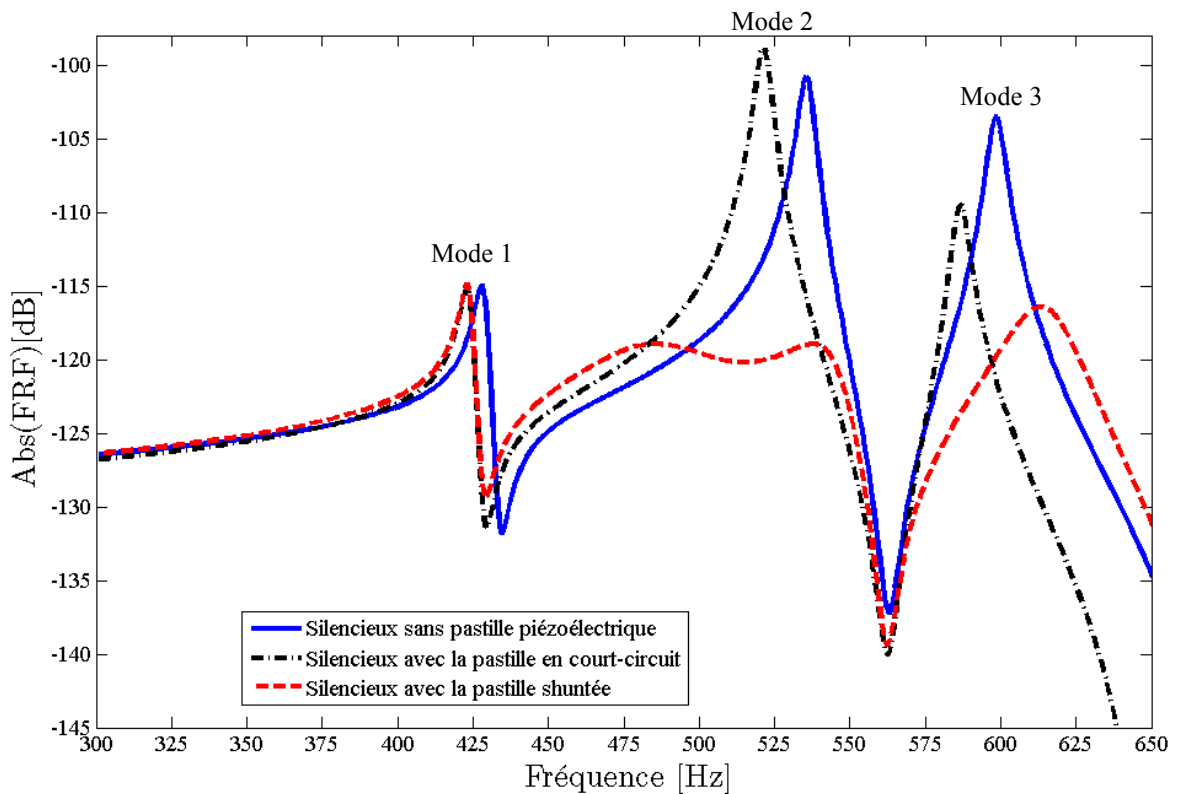


FIG. 5.12- *FRF au point d'application de la force excitatrice : atténuation du deuxième mode de vibration avec un shunt résonant.*

5.4. Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté le développement d'un algorithme d'optimisation topologique pour optimiser la géométrie et la position des pastilles piézoélectriques sur une structure hôte élastique. Cet algorithme est basé sur la méthode SIMP et consiste à déterminer la distribution optimale de matériau piézoélectrique sur une structure élastique quelconque discrétisée par la méthode des éléments finis pour maximiser les facteurs de couplage modaux électromécaniques. Le premier exemple proposé a permis de valider l'algorithme développé par comparaison avec une solution analytique. Cet exemple a permis aussi de choisir une combinaison de valeurs pour les facteurs de pénalisation, qui fournit d'excellents résultats avec une petite quantité de phases grises et ainsi peu de post-traitement. Le second exemple a permis de vérifier la performance de l'approche proposée au cas d'une atténuation monomodale d'une structure complexe. Le résultat obtenu est une pastille piézoélectrique avec une forme non conventionnelle (elliptique). Du point de vu de la fabrication, on rappelle que les céramiques piézoélectriques sont normalement produites par frittage ce qui permet un grand choix de formes et de tailles. Néanmoins, une épaisseur constante entre les électrodes est préférable afin de maximiser le champ électrique en tout point lors de la polarisation ce qui permet d'obtenir ainsi un couplage important.

Le calcul des sensibilités du vecteur propre $\partial\{\Phi_i\}/\partial x_i$ est le principal inconvénient de notre approche. Cette opération peut s'avérer coûteuse car l'inversion d'une matrice est nécessaire pour chaque itération (voir Eq. (5.15)). Ce problème peut être évité en utilisant les coefficients des couplages effectifs (EEMCF) comme fonction coût à la place des MEMCFs. Dans ce cas, bien qu'une analyse modale supplémentaire (en circuit-ouvert) soit nécessaire, seules les sensibilités des valeurs propres doivent être évaluées. De plus, on ne rencontre pas le problème de checkboarding dans les exemples proposés. Si nécessaire, un filtre peut éliminer ce problème et améliorer les résultats de l'optimisation (voir le travail de Sigmund (2007)).

Enfin, bien que cela ne soit pas montré ici, l'approche proposée reste valable dans le cas de shunts à commutation (switch).

Application à l'atténuation du rayonnement
acoustique de plaque minces

6.1 Rayonnement acoustique d'une structure plane bafflée	144
6.1.1 Rappel du problème vibroacoustique	144
Problème vibroacoustique	144
Puissance acoustique rayonnée	147
6.1.2 Calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ lointain dans les cas d'une plaque simplement appuyée	148
6.1.3 Méthode des sources élémentaires	151
Rendements radiatifs de modes structuraux	154
Modes radiatifs et vitesse volumétrique	156
6.2 Atténuation du rayonnement acoustique par dispositifs piézoélectriques shuntés..	158
6.2.1 Modes les plus rayonnants	161
6.2.2 Mise en œuvre numérique	161
6.2.3 Exemple d'application	162
Modes les plus rayonnants	163
Dispositifs piézoélectriques shuntés	164
Atténuation des modes les plus rayonnants	166
6.3 Conclusions	173

On présente dans la première partie de ce chapitre un rappel sur le rayonnement acoustique de structures planes. Le problème vibroacoustique est défini puis les mécanismes physiques intervenant dans le rayonnement acoustique de plaques planes, notamment en basses fréquences, sont rappelés.

La deuxième partie concerne le développement d'une approche numérique pour modéliser et optimiser la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine des basses fréquences. On propose ici une approche valable pour n'importe quelle plaque mince bafflée et non trouée, indépendamment des conditions au limites.

Finalement, un exemple d'application concernant l'atténuation du rayonnement acoustique d'une plaque avec renforts est présenté et analysé.

6.1. Rayonnement acoustique d'une structure plane bafflée

On présente dans cette section un rappel sur le rayonnement acoustique des plaques planes. Contrairement à un piston rigide, une structure flexible possède un profil vibratoire qui n'est pas constant sur sa surface. En dessous de la fréquence critique, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde acoustique est grande devant la longueur d'onde structurale, le phénomène du rayonnement est directement lié aux propriétés modales de la structure ainsi qu'aux excitations auxquelles elle est soumise (De Man, 2004).

On définit tout d'abord le problème vibroacoustique traité dans le cadre de la thèse, puis on rappelle les principaux indicateurs de mesure et d'évaluation acoustique. On s'intéresse ensuite au rayonnement acoustique de structures planes bafflées. On rappelle dans un premier temps la solution analytique développée par Wallace (1972) dans le cas d'une plaque simplement appuyée rayonnant dans un fluide léger. Cela permettra d'exposer les mécanismes physiques intervenant dans le rayonnement acoustique de plaques planes, notamment en basses fréquences. Ensuite, nous présenterons la méthode des sources élémentaires (Elliott et Johnson, 1993 ; Fahy et Gardonio, 2007), qui va être utilisée dans les simulations numériques de cette thèse. Finalement, les modes radiatifs et la vitesse volumétrique seront introduits.

6.1.1. Rappel du problème vibroacoustique

Problème vibroacoustique

On considère une structure élastique occupant le domaine Ω_s et entourée par un fluide compressible, non-visqueux et linéaire qui occupe le domaine Ω_f (voir FIG. 6.1). Les effets de la gravité sont négligés. La structure est soumise à un déplacement

imposé u_i^d sur une partie Γ_u de sa frontière et à une densité d'efforts t_i^d sur la partie complémentaire Γ_t . Ainsi, la frontière totale de la structure, notée $\partial\Omega$, est telle que : $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ avec $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$. De plus n_i représente la normale extérieure au domaine Ω_s .

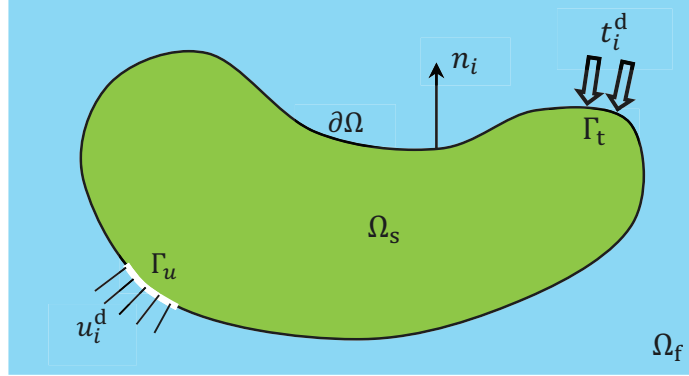


FIG. 6.1– *Problème Vibroacoustique : géométrie et notations.*

Les équations régissant le mouvement du système couplé en fonction du déplacement u_i de la structure et de la pression p_f du fluide s'écrivent, dans le domaine fréquentiel :

$$\sigma_{ik,k} + \rho_s \omega^2 u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (6.1a)$$

$$\sigma_{ik} n_k = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (6.1b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (6.1c)$$

$$\sigma_{ik} n_k = -p_f n_i \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.1d)$$

$$j \rho_f \omega v_i n_i = -p_{f,i} n_i \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.1e)$$

$$p_{f,ii} + \frac{\omega^2}{c_f^2} p_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (6.1f)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(\frac{\partial p_f}{\partial r} + j k p_f \right) \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p_f = 0 \quad (6.1g)$$

où ρ_s , ρ_f , représentent respectivement les masses volumiques de la structure et du fluide, c_f c'est la vitesse de propagation des ondes dans le fluide, $v_i = j \omega u_i$ est la vitesse de la structure, $j = \sqrt{-1}$ et $k = \omega/c_f$ désigne le nombre d'onde.

L'Eq. (6.1a) est l'équation de l'élastodynamique ; Les Eqs. (6.1b) et (6.1c) sont les conditions aux limites en termes de densité surfacique de forces appliquée sur Γ_t et de déplacement imposé sur Γ_u ; les Eqs. (6.1d) et (6.1e) représentent respectivement les conditions de continuité de contrainte normale et de vitesse normale sur l'interface fluide-structure ; l'Eq. (6.1f) correspond à l'équation de propagation d'onde dans le milieu fluide ; enfin les expressions (6.1g) correspondent aux conditions de finitude de Sommerfeld qui

traduisent l'impossibilité de réflexion d'onde à l'infini (Filippi, 1994 ; Fahy et Gardonio, 2007).

En général, la résolution de ce type de problème se heurte à la difficulté de modéliser la propagation acoustique dans le milieu fluide en respectant les conditions de finitude de Sommerfeld. Dans les dernières décennies, plusieurs méthodes numériques ont été proposées avec l'objectif de bien caractériser la propagation acoustique dans un milieu infini, comme par exemple la méthode des éléments de frontières (BEM) (Brebbia et Skerget, 2008), la méthode des éléments infinis (IEM) (Gerdes, 1998 ; Astley, 2000) et la méthode PML (Perfectly Matched Layer de la littérature anglo-saxonne) (Bérenger, 1994 ; Basu et Chopra ; 2003).

Le problème vibroacoustique donné par les Eqs. (6.1) est donc souvent résolu en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) (domaine structure Ω_s) couplée avec une des méthodes citées dans le paragraphe précédent (pour le domaine fluide Ω_f). On peut ainsi citer : FEM/BEM (Zienkiewicz *et al.*, 1977 ; Estorff, 1992 ; Feng *et al.*, 2013), FEM/IEM (Gerdes, 1998 ; Astley, 2000) et FEM/PML (Basu et Chopra, 2003 ; Harari et Albocher, 2006). Certains auteurs utilisent la méthode BEM pour modéliser les deux domaines structure Ω_s et fluide Ω_s (BEM/BEM) (Brebbia et Skerget, 2008). Dans le cadre de cette thèse, on se limitera à l'étude des structures planes bafflées rayonnant dans un espace semi-infini rempli par un fluide léger (l'air). L'hypothèse de fluide léger permet de considérer que la structure vibre de la même façon que dans le vide, et que ses vibrations engendrent un champ acoustique qui ne perturbe pas les vibrations structurales. Cela permet aussi de découpler le problème vibroacoustique : on détermine dans un premier temps la solution vibratoire de la structure (Eqs. 6.1a– 6.1c), avant de calculer le champ acoustique rayonné (Eqs. 6.1d – 6.1g). De plus, dans le cas des structures planes bafflées, le champ de pression rayonnée peut être calculé par résolution de l'intégrale de Rayleigh, qui s'écrit (Wallace, 1972 ; Filippi, 1994 ; Fahy et Gardonio, 2007 ; Ouisse et Sadoulet-Reboul, 2010) :

$$p_a(M, \omega) = \rho_f \frac{j\omega}{2\pi} \int_S v_n(G, \omega) \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (6.2)$$

où M est un point dans le volume Ω_f , G est un point sur la surface S de la structure, $v_n = v_i n_i$ correspond à la vitesse normale de la structure et r est la distance entre M et G . Cette intégrale peut-être interprétée comme une sommation de la contribution d'un ensemble de sources

volumiques élémentaires réparties sur une surface plane à la pression acoustique en un point de l'espace.

Puissance acoustique rayonnée

La puissance acoustique rayonnée par une surface vibrante S se calcule en intégrant la densité de flux acoustique (intensité acoustique) sur un hémisphère H entourant S . En régime harmonique, la puissance acoustique moyenne $W(\omega)$ s'exprime par (Filippi, 1994 ; Fahy et Gardonio, 2007 ; Ouisse et Sadoulet-Reboul, 2010) :

$$W(\omega) = \int_H \{\mathbf{I}(\omega)\} \{\mathbf{n}\} dH = \int_H \frac{1}{2} \Re(p_a \{\mathbf{v}^*\}) \{\mathbf{n}\} dH \quad (6.3)$$

où $\{\mathbf{I}(\omega)\} = \frac{1}{2} \Re(p_a \{\mathbf{v}^*\})$ est le vecteur d'intensité acoustique moyenne (ou active) d'un signal harmonique, $\{\mathbf{v}^*\}$ correspond au vecteur vitesse conjugué et $\{\mathbf{n}\}$ est la normale extérieure à la surface H .

La puissance acoustique rayonnée caractérise l'énergie acoustique totale rayonnée par la structure. Par rapport à la variable naturelle qui est la pression, la puissance ne dépend pas de la nature du champ et elle est constante tant que le volume d'intérêt conserve ses sources, alors qu'elle est variable dans l'espace.

Par ailleurs, la transparence acoustique d'une structure séparant deux milieux est définie comme le rapport de l'énergie acoustique transmise sur l'énergie acoustique incidente par l'intermédiaire de cette structure :

$$\tau(\omega) = \frac{W_t(\omega)}{W_{in}(\omega)} \quad (6.4)$$

où W_t et W_{in} représentent respectivement la puissance acoustique transmise et incidente. L'indice d'affaiblissement acoustique¹¹ (Transmission Loss de la littérature anglo-saxonne) est donné par :

$$TL(\omega) = 10 \log\left(\frac{1}{\tau(\omega)}\right) \quad (6.5)$$

Ces deux indicateurs (τ et TL) permettent de mesurer et de caractériser l'énergie acoustique transmise d'un milieu à un autre au travers d'une structure. Nous invitons le lecteur à consulter (Filippi, 1994 ; Fahy et Gardonio, 2007) pour une description complète des

¹¹ Cette indice est également appelé Sound Reduction Index (R) dans la littérature anglo-saxonne.

mécanismes physiques intervenant dans la transparence acoustique d'une paroi simple ou double.

6.1.2. Calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ lointain dans les cas d'une plaque simplement appuyée

Le calcul de la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée en utilisant l'intégrale de Rayleigh (6.3) requiert la connaissance de la distribution des vitesses normales sur toute sa surface. Dans le cas d'une plaque simplement appuyée, une solution analytique existe pour la pression en champ lointain, c'est-à-dire à une distance bien supérieure aux dimensions de la plaque et en champ libre (De Man, 2004). Cette solution, qui a été déterminée par Wallace (1972) en utilisant le système de coordonnées sphériques, est rappelée ci-dessous (voir FIG. 6.2).

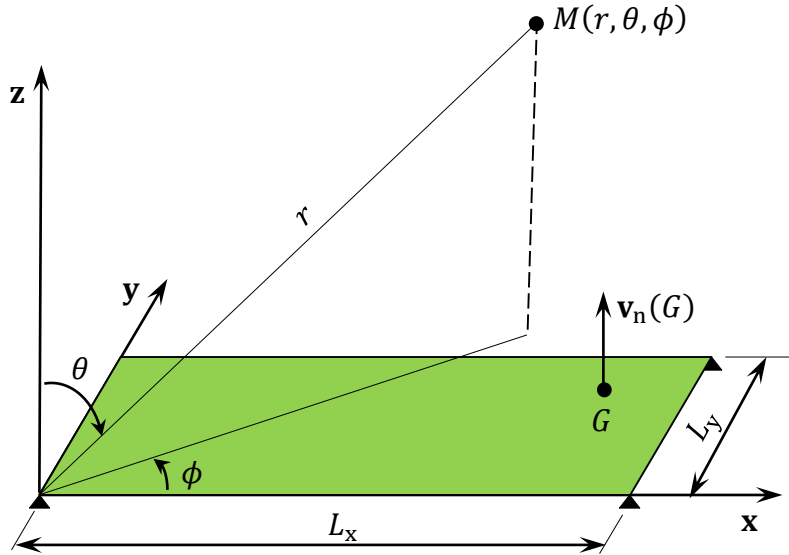


FIG. 6.2– *Plaque rectangulaire simplement appuyée dans un baffle infini : systèmes d'axes et coordonnées.*

On considère une plaque bafflée et simplement appuyée, comme décrit la FIG. 6.2. La vitesse normale en un point de coordonnées (x, y) correspondant au mode (m_x, m_y) s'exprime par :

$$v_n(G, \omega) = v_{m_x m_y}(\omega) \sin\left(\frac{m_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m_y \pi y}{L_y}\right) \quad (6.6)$$

où $v_{m_x m_y}$ est le champ de vitesse du mode (m_x, m_y) . En considérant (6.6), Wallace (1972) a déterminé la solution analytique de (6.2) pour chaque mode indépendamment :

$$p_{a_{m_x m_y}}(M, \omega) = \frac{e^{-jkr}}{r} B_{m_x m_y}(\omega) v_{m_x m_y}(\omega) \quad (6.7)$$

avec :

$$B_{m_x m_y}(\omega) = j k \rho_f c_f \frac{L_x L_y}{2\pi m_x m_y \pi^2} \left[\frac{(-1)^{m_x} e^{-j\alpha} - 1}{\left(\frac{\alpha}{m_x \pi}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{(-1)^{m_y} e^{-j\beta} - 1}{\left(\frac{\beta}{m_y \pi}\right)^2 - 1} \right] \quad (6.8)$$

où :

$$\alpha = k L_x \sin(\theta) \cos(\phi), \quad \beta = k L_y \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (6.9)$$

Afin de comprendre le problème physique associé au rayonnement d'un mode donné, Wallace (1972) a défini le rendement radiatif modal :

$$\eta_{m_x m_y}(\omega) = \frac{W_{m_x m_y}(\omega)}{\langle |v_{m_x m_y}|^2 \rangle \rho_f c_f L_x L_y} \quad (6.10)$$

où $W_{m_x m_y}(\omega)$ est la puissance acoustique rayonnée par le mode (m_x, m_y) , $\langle |v_{m_x m_y}|^2 \rangle$ la vitesse quadratique en moyenne surfacique et $\langle |v_{m_x m_y}|^2 \rangle \rho_f c_f L_x L_y$ la puissance acoustique rayonnée par un piston de même aire que la plaque oscillant à la même vitesse moyenne. Ce rendement est tracé (FIG. 6.3) en fonction de k/k_b , avec $k_b = \sqrt{\left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L_y}\right)^2}$ le nombre d'onde du mode (m_x, m_y) .

On distingue clairement deux zones dans cette figure : (i) en dessous de $k/k_b = 1$, les rendements radiatifs de modes structuraux sont forts différents les uns des autres et augmentent avec la fréquence ; (ii) au-dessus de $k/k_b = 1$, les rendements radiatifs deviennent indépendants de l'ordre de modes et tendent vers l'unité.

Dans la première zone, la longueur d'onde acoustique est grande devant la longueur d'onde structurale, ce qui produit un effet d'interférence entre les différentes zones de la plaque délimitées par les lignes nodales. Deux demi-cellules adjacentes de phases opposées interfèrent destructivement. Ainsi, il y a un effet d'annulation au centre de la plaque et le rayonnement global d'un mode est caractérisé par le rapport des phases des demi-cellules sur les bords ou les coins de la plaque, cellules dont les vibrations ne peuvent pas être

compensées. Ceci a conduit certains auteurs à classer les différents modes structuraux selon le type de rayonnement : monopolaire ou mode piston, dipolaire ou mode de bord et quadripolaire ou mode de coin (FIG. 6.4) (De Man, 2004, Fahy et Gardonio, 2007, Ouisse et Sadoulet-Reboul, 2010).

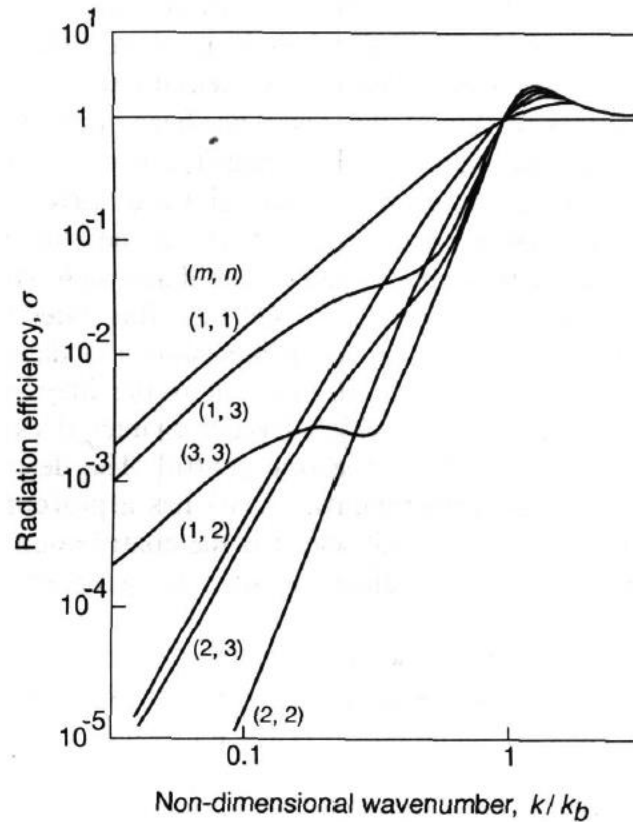


FIG. 6.3– Rendement radiatif des modes structuraux d'une plaque simplement appuyée (Wallace, 1972).

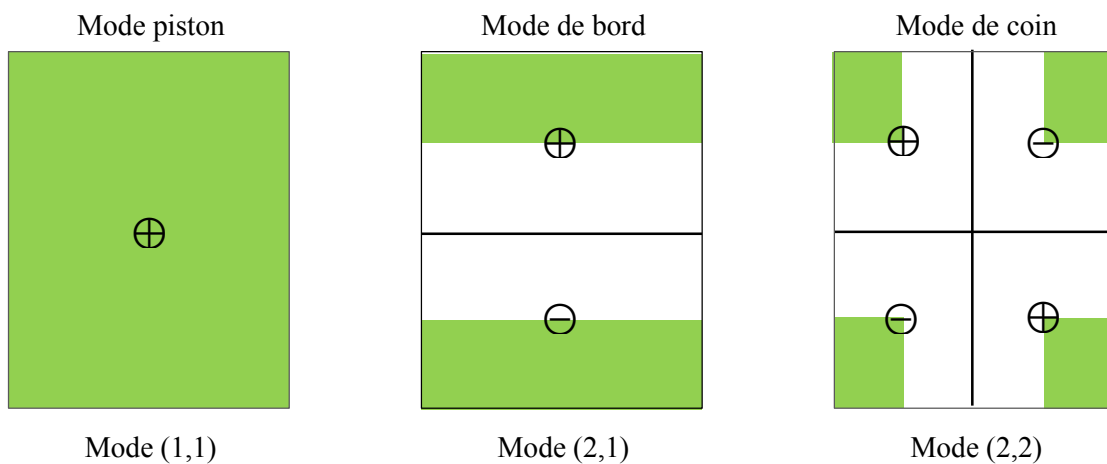


FIG. 6.4– Schémas de rayonnement pour différents modes structuraux d'une plaque simplement appuyée : Les zones vertes caractérisent le rayonnement (De Man, 2004).

La solution ainsi que les observations qui viennent d'être faites ne concernent qu'un seul mode. En tenant compte des $M \times N$ premiers modes de la plaque, on obtient :

$$p_a(M, \omega) = \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{m_x=1}^M \sum_{m_y=1}^N B_{m_x m_y}(\omega) v_{m_x m_y}(\omega) \quad (6.11)$$

La puissance acoustique rayonnée $W(\omega)$ s'écrit alors:

$$W(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|p_a(M, \omega)|^2}{\rho_f c_f} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (6.12)$$

ou sous forme condensée (Fahy et Gardonio, 2007, Elliott et Johnson, 1993):

$$W(\omega) = \{\mathbf{v}_a(\omega)\}^H [\mathbf{M}] \{\mathbf{v}_a(\omega)\} \quad (6.13)$$

avec $\{\mathbf{v}_a(\omega)\}$ le vecteur des vitesses modales de la plaque, l'exposant H fait référence à la transposée conjuguée (l'Hermitien) et $[\mathbf{M}]$ désigne la matrice de résistance de radiation des modes structuraux, qui est réelle, symétrique et définie positive. Les termes diagonaux de $[\mathbf{M}]$ représentant les résistances de radiation propre de chaque mode et les termes non diagonaux sont les résistances de radiation mutuelles entre les modes.

L'expression (6.13) permet de constater qu'il existe un couplage entre les différents modes structuraux, c'est-à-dire que les modes structuraux ne rayonnent pas indépendamment ($[\mathbf{M}]$ n'est pas diagonale).

6.1.3. Méthode des sources élémentaires

La puissance acoustique rayonnée peut également être calculée en champ proche à partir de la méthode des sources élémentaires (Elliott et Johnson, 1993 ; Fahy et Gardonio, 2007), qui va être utilisée dans la suite de ce travail. La surface S de la structure est décomposée en N_p sources élémentaires, comme illustre la FIG. 6.5. Le rayonnement total de la structure est la somme des rayonnements des N_p sources qu'on considère comme des pistons élémentaires en oscillation harmonique.

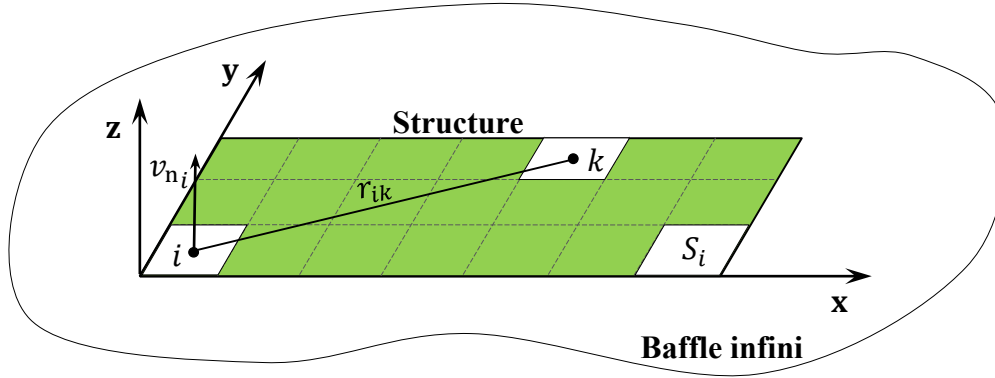


FIG. 6.5– Discretisation de la plaque par la méthode des sources élémentaires.

Pour une pulsation ω , la puissance rayonnée par chaque élément i , dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde acoustique, est donnée par :

$$W_i(\omega) = \frac{S_i}{2} \Re \left(v_{n_i}^*(\omega) p_{a_i}(\omega) \right) \quad (6.14)$$

où S_i est l'aire de la source élémentaire i , $v_{n_i}^*$ l'amplitude complexe conjuguée de la vitesse normale à la surface, et p_{a_i} l'amplitude complexe de la pression au niveau de la source¹². Dans le cas où toutes les sources élémentaires ont la même taille S_i , la puissance totale W peut être calculée par :

$$W(\omega) = \frac{S_i}{2} \Re(\{\mathbf{V}_n(\omega)\}^H \{\mathbf{P}_a(\omega)\}) \quad (6.15)$$

dont les éléments des vecteurs $\{\mathbf{V}_n\}$ et $\{\mathbf{P}_a\}$ sont les vitesses et pressions de chacune des sources. Le vecteur $\{\mathbf{P}_a\}$ peut être exprimé en fonction de $\{\mathbf{V}_n\}$ par :

$$\{\mathbf{P}_a(\omega)\} = [\mathbf{Z}(\omega)] \{\mathbf{V}_n(\omega)\} \quad (6.16)$$

où $[\mathbf{Z}(\omega)]$ désigne la matrice d'impédance acoustique qui est une matrice symétrique de taille $N_p \times N_p$ reliant la pression p_{a_i} en chacune des N_p sources à la vitesse normale v_{n_i} de toutes les sources.

¹² On calcule la partie réelle notée \Re car seule l'intensité active produit un travail et contribue au rayonnement en champ lointain.

En remplaçant (6.16) dans (6.15), on obtient l'expression de la puissance acoustique rayonnée en fonction des vitesses normales en un nombre discret de points de la surface :

$$W(\omega) = \{\mathbf{V}_n(\omega)\}^H [\mathbf{R}(\omega)] \{\mathbf{V}_n(\omega)\} \quad (6.17)$$

où $[\mathbf{R}(\omega)] = \frac{S_i}{2} \Re([\mathbf{Z}(\omega)])$ désigne la matrice de résistance de rayonnement, qui est réelle, symétrique et définie positive. Pour une surface plane bafflée, $[\mathbf{R}(\omega)]$ est donnée par (Elliott et Johnson, 1993 ; Fahy et Gardonio, 2007) :

$$[\mathbf{R}(\omega)] = \frac{\omega^2 \rho_f S_i}{4\pi c_f} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(kr_{12})}{kr_{12}} & \dots & \frac{\sin(kr_{1N_p})}{kr_{1N_p}} \\ \frac{\sin(kr_{21})}{kr_{21}} & 1 & \dots & \frac{\sin(kr_{2N_p})}{kr_{2N_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sin(kr_{N_p1})}{kr_{N_p1}} & \frac{\sin(kr_{N_p2})}{kr_{N_p2}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

où $r_{ik} = r_{ki}$ représente la distance entre les sources élémentaires i et k (FIG. 6.5).

La méthode des sources élémentaires permet aussi de résoudre l'intégrale de Rayleigh et donc de déterminer le niveau de pression en champ lointain. La pression acoustique en un point M de l'espace peut être calculée à partir de l'expression :

$$p_a(M, \omega) = [\mathbf{E}(M, \omega)] \{\mathbf{V}_n(\omega)\} \quad (6.19)$$

où $[\mathbf{E}(\omega)]$ est la matrice de propagation, qui pour une surface plane bafflée est donnée par (Bai et Tsao, 2002):

$$[\mathbf{E}(M, \omega)] = j \frac{\rho_f c_f k S_i}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{e^{-jkr_{M1}}}{r_{M1}} & \frac{e^{-jkr_{M2}}}{r_{M2}} & \dots & \frac{e^{-jkr_{MN_p}}}{r_{MN_p}} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

avec r_{Mi} la distance entre la source élémentaire i et le point de l'espace M .

Le principe de cette méthode est valable pour n'importe quelle surface plane bafflée. Seule la connaissance de la géométrie de la surface et de la distribution de vitesse sont nécessaires, quelles que soient les conditions aux limites. Dans cette thèse, une approche éléments finis est utilisée pour évaluer ce champ de vitesses en prenant un nombre suffisant d'éléments rayonnants discrets sur la surface selon la plus petite longueur d'onde considérée.

Rendements radiatifs de modes structuraux

En tenant compte de la base modale formée par les N_m vecteurs propres de la structure, le vecteur vitesse normale $\{\mathbf{V}_n\}$ de chacune des N_p sources peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{V}_n(\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_m} \{\tilde{\Phi}_i\} a_i(\omega) = [\tilde{\Phi}] \{\mathbf{a}(\omega)\}. \quad (6.21)$$

où $\{\mathbf{a}(\omega)\}$ est le vecteur des vitesses modales et $[\tilde{\Phi}]$ contient les vecteurs propres correspondant aux déformées modales de la structure, de taille $N_p \times N_m$.

En remplaçant (6.21) dans (6.17), on vérifie que les matrices $[\mathbf{R}]$ et $[\mathbf{M}]$ sont liées par l'expression :

$$[\mathbf{M}] = [\tilde{\Phi}]^T [\mathbf{R}] [\tilde{\Phi}]. \quad (6.22)$$

Dans le cas où seule le i -ième mode normalisé de la structure est excité, la puissance acoustique rayonnée $W(\omega)$ et la vitesse quadratique en moyenne surfacique $\langle \overline{v^2}(\omega) \rangle$ sont respectivement :

$$W(\omega) = |a_i|^2 M_{ii}, \quad \langle \overline{v^2}(\omega) \rangle = \frac{|a_i|^2}{2} \quad (6.23)$$

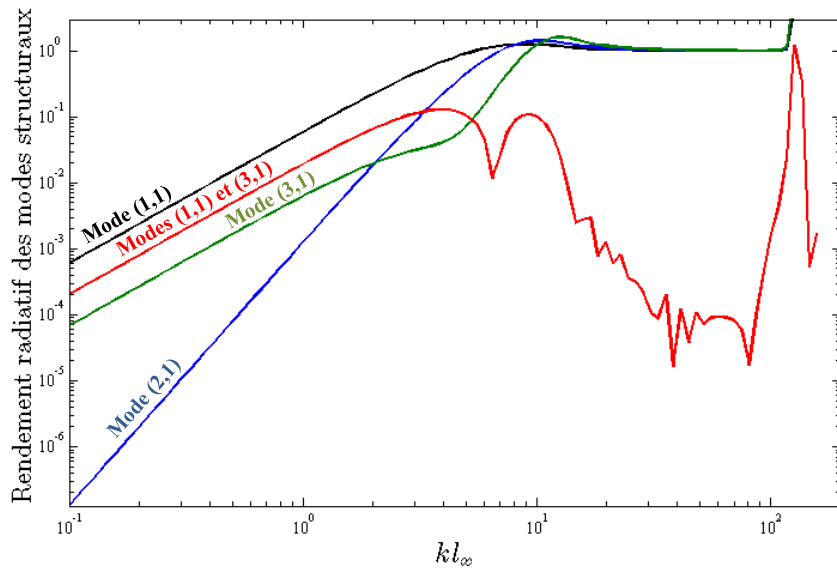
Le rendement radiatif du i -ième mode, défini par l'Eq. (6.10), est alors :

$$\eta_i = \frac{2M_{ii}}{\rho_f c_f S} \quad (6.24)$$

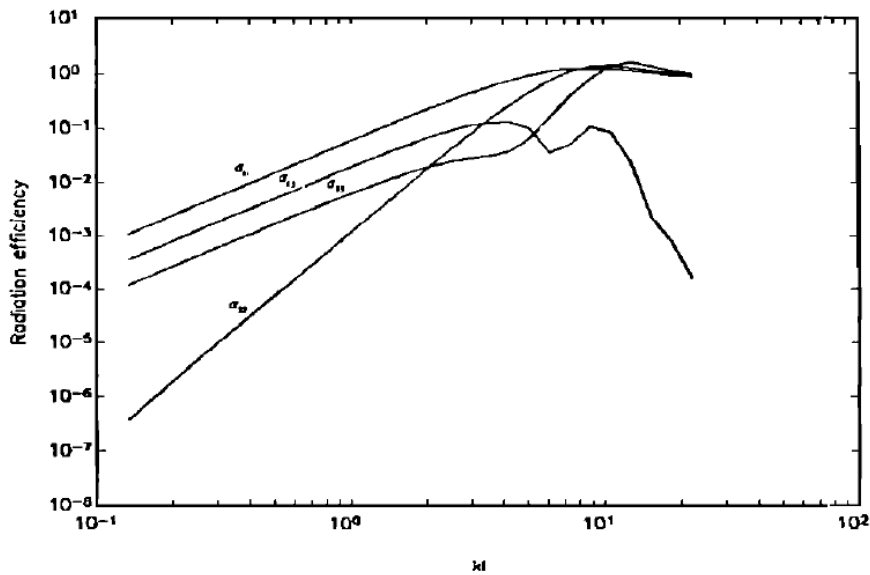
Elliott et Johnson (1993) ont utilisé cette normalisation pour définir la matrice des rendements radiatifs des modes structuraux :

$$[\mathbf{H}(\omega)] = \frac{2}{\rho_f c_f S} [\mathbf{M}(\omega)] \quad (6.25)$$

dont les éléments diagonaux η_{ii} sont les rendements radiatifs de chaque mode i et, dont chaque élément hors-diagonale η_{ik} représente le rendement radiatif normalisé mutuel entre le i -ième et le k -ième mode.



(a) Résultats de l'implémentation numérique dans Matlab.



(b) Résultats dans (Elliott et Johnson, 1993).

FIG. 6.6– Rendements radiatifs pour les modes (1,1), (2,1), (3,1) et entre les modes (1,1) et (3,1) pour une plaque simplement appuyée, bafflée et rayonnant dans l'air.

La FIG. 6.6 montre l'évolution, en fonction de la fréquence, du rendement radiatif des trois premiers modes structuraux et du rendement radiatif mutuel entre le premier et le troisième mode d'une plaque simplement appuyée, bafflée et rayonnant dans l'air. Pour ces simulations,

la plaque, dont les dimensions sont $0.21 \times 0.12 \text{ m}^2$, est discrétisée avec 252 pistons carrés de 0.01 m de côté. L'ensemble du problème a été développé sous l'environnement *Matlab*. Les résultats de la FIG. 6.6(a) sont comparés à ceux présentés dans (Elliott et Johnson, 1993) (FIG. 6.6(b)).

On observe une très bonne concordance avec les résultats trouvés par Elliott et Johnson (1993) ce qui permet de valider notre implémentation numérique. De plus, ces résultats mettent en évidence la contrainte de prendre un nombre suffisant d'éléments rayonnants discrets sur la surface selon la plus petite longueur d'onde considérée ; les courbes divergent en haute fréquence dans la Fig. 6.6(a).

Modes radiatifs et vitesse volumétrique

Comme la matrice $[\mathbf{R}(\omega)]$ est symétrique et définie positive elle peut être décomposée en valeurs propres et vecteurs propres (Elliott et Johnson, 1993 ; Fahy et Gardonio, 2007):

$$[\mathbf{R}(\omega)] = [\mathbf{Q}(\omega)]^T [\mathbf{\Lambda}(\omega)] [\mathbf{Q}(\omega)] \quad (6.26)$$

où $[\mathbf{Q}(\omega)]$ est une matrice réelle unitaire, dont les colonnes sont les vecteurs propres (modes radiatifs) de $[\mathbf{R}(\omega)]$, et $[\mathbf{\Lambda}(\omega)]$ est la matrice diagonale des valeurs propres, qui correspondent aux facteurs de rayonnement des modes radiatifs.

A titre d'exemple, la FIG. 6.7 montre les six premiers vecteurs propres correspondants aux six premiers modes radiatifs, pour une plaque de dimensions $0.21 \times 0.12 \text{ m}^2$ rayonnant dans l'air et à une fréquence correspondante à $kl = 1$, où k est le nombre d'onde et l correspond à la valeur supérieure entre la largeur et la longueur de la plaque. On constate que chaque mode radiatif regroupe une famille de modes structuraux. Seuls les modes d'indices (impair, impair) contribuent au premier mode de radiation dans le cas d'une plaque simplement appuyée. De plus, il est important de remarquer que les formes des modes radiatifs et leurs facteurs de rayonnement associés varient avec la fréquence (FIG. 6.8).

En remplaçant (6.26) dans (6.17) et en posant $\{\mathbf{y}(\omega)\} = [\mathbf{Q}(\omega)]\{\mathbf{V}_n(\omega)\}$, on obtient une expression de la puissance acoustique rayonnée comme une somme des contributions indépendantes des modes radiatifs :

$$W(\omega) = \{\mathbf{y}(\omega)\}^H [\mathbf{\Lambda}(\omega)] \{\mathbf{y}(\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_p} \lambda_i(\omega) |y_i(\omega)|^2 \quad (6.27)$$

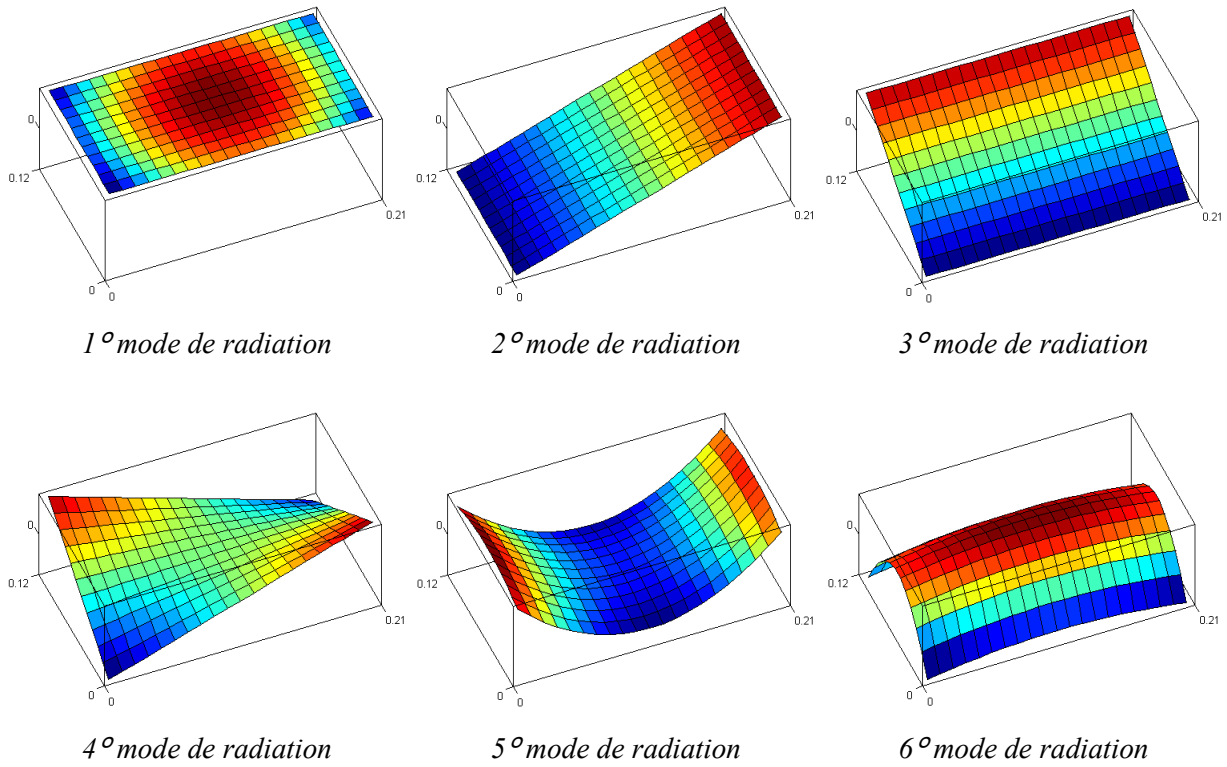


FIG. 6.7– Les six premiers modes radiatifs pour $kl = 1$: plaque des dimensions $0.21 \times 0.12 \text{ m}^2$ rayonnant dans l'air.

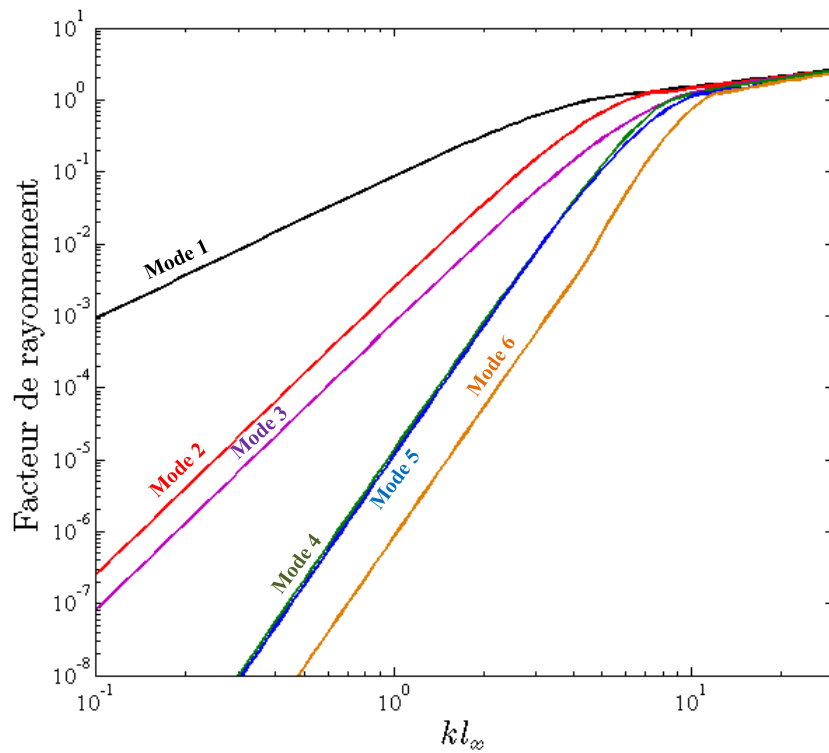


FIG. 6.8– Facteurs de rayonnement des modes radiatifs.

Comme montré dans (Elliott et Johnson, 1993), la contribution du premier mode radiatif dans la puissance acoustique rayonnée est très importante en basses fréquences. Pour $kl < 1$, ce mode est un mode piston avec une amplitude pratiquement constante qui peut être assimilée à la vitesse volumétrique de la surface et qui est définie par :

$$V(\omega) = \int_S v_n(G, \omega) dS \quad (6.28)$$

Ainsi, la réduction de cette vitesse entraîne une diminution de la puissance acoustique rayonnée. Pour cette raison, la détermination et la réduction de la vitesse volumétrique sont des thèmes fréquemment abordés dans les applications de contrôle vibroacoustique sans modèle, spécialement dans des études avec contrôle actif (De Man, 2004).

Il faut remarquer que les modes radiatifs peuvent aussi être obtenus à partir de la décomposition modale de la matrice $[\mathbf{M}(\omega)]$, qui est symétrique et définie positive (voir (Elliott et Johnson, 1993)).

En résumé, contrairement aux modes structuraux, les modes radiatifs rayonnent indépendamment et un nombre réduit de vecteurs propres est nécessaire pour bien représenter la puissance acoustique rayonnée en basse fréquence. Aussi, ils permettent de classer en différentes familles les modes fortement rayonnants et les modes peu rayonnants. Cependant, cette méthode demande une analyse modale à chaque pas de fréquence et le nombre des modes radiatifs nécessaire pour bien représenter la puissance acoustique rayonnée augmente très rapidement avec la fréquence (voir (Elliott et Johnson, 1993)), ce qui limite son intérêt. De plus, les modes structuraux les plus rayonnants peuvent être déterminés facilement à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée ou des rendements radiatifs. Malgré donc l'excessif intérêt porté dans la littérature, cette technique ne sera pas utilisée dans les simulations numériques de cette thèse.

6.2. Atténuation du rayonnement acoustique par dispositifs piézoélectriques shuntés

Les techniques de réduction de vibrations et de bruit rayonné avec des matériaux piézoélectriques sont divisées en deux branches principales : (i) actives et (ii) passives. Nous nous intéressons ici uniquement à la réduction du rayonnement acoustique de structures minces à partir des dispositifs piézoélectriques passifs. Contrairement aux technologies actives, les techniques passives ont l'avantage, outre leur simplicité de mise en œuvre, d'être

stables, puisqu'il n'y a aucune énergie injectée dans la structure à contrôler. Le lecteur est invité à consulter (Elliott et Johnson, 1993 ; Lee et Chen, 1999 ; Trindade *et al.*, 2001, Oude Nijhuis et Boer, 2002 ; Carneal et Fuller, 2004 ; De Man, 2004 ; Gardonio *et al.*, 2004 ; Zhang *et al.* 2004 ; Gardonio et Elliott 2005 ; Vasques et Diaz Rodriguez, 2006 ; Chomette *et al.*, 2008 ; Malgaca et Karagulle, 2009 ; Kim *et al.*, 2013) pour des exemples sur le contrôle actif des vibrations et du bruit rayonné.

La technique de réduction de vibrations à partir des dispositifs piézoélectriques shuntés a été largement étudiée dans les vingt dernières années mais en traitant presque toujours des cas académiques de poutres ou de plaques. Certaines de ces études concernant la réduction du rayonnement acoustique sont brièvement examinées ci-dessous.

Ahmadian *et al.* (2001) ont effectué une analyse détaillée de résultats expérimentaux de transmission du son pour trois plaques différentes : une plaque non amortie, une plaque avec une couche viscoélastique amortissante et une plaque avec matériaux piézoélectrique shunté. Zhang *et al.* (2001) ont étudié l'annulation d'écho acoustique par une couche piézoélectrique sur une surface acoustique rigide et shunté avec diverses combinaisons de résistance, capacitance et inductance en série. Un modèle électroacoustique unidimensionnel a été utilisé pour calculer la réduction d'écho acoustique pour les différents circuits de dérivation. Basé sur les résultats des simulations numériques, un circuit capacitif de capacité négative a été proposé. Ozer *et al.* (2003) ont présenté une nouvelle méthode pour déterminer les valeurs optimales de l'inductance et de la résistance d'un shunt résonant. Ce travail a porté sur la réduction du rayonnement acoustique d'une plaque simplement appuyée. Guyomar *et al.* (2006) ont étudié le problème de la réduction du bruit en utilisant la technique non linéaire du shunt à commutation ou switch (SSD). Plus tard, Guyomar *et al.* (2008) ont appliqué cette même technique pour atténuer la transmission du son à travers une plaque encastrée. Dans cette étude, un modèle analytique et un modèle éléments finis sont proposés pour obtenir les dimensions et positions optimales des dispositifs piézoélectriques. Une bonne atténuation des oscillations de la plaque et de la transmission de l'onde sonore a été obtenue. Pietrzko and Mao (2009) ont analysé et comparé les performances des différents types de circuits shuntés (RL en série, RL en parallèle, RL-C et RL à commutation ou switch SSDI) en termes d'atténuation du bruit rayonné par une plaque encastrée. Rosi *et al.* (2010, 2013) ont appliqué les stratégies de contrôle localisé et distribué pour réduire la puissance acoustique rayonnée d'une plaque en aluminium et simplement appuyée. De plus, les auteurs ont introduit le

concept de la plaque avec une électrode résistif (PRE), qui s'avérée plus efficace qu'une plaque avec traitement viscoélastique équivalent.

On s'intéresse ici à la modélisation de la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine de basses fréquences à partir d'éléments piézoélectriques shuntés. Nous proposons une approche valable pour n'importe quelle plaque mince bafflée et non trouée, indépendamment des conditions aux limites et des formes géométriques.

L'approche proposée (FIG. 6.9) consiste dans un premier temps à déterminer les modes de vibrations les plus rayonnants de la structure dans la bande fréquentielle d'intérêt. La méthode de sources élémentaires, rappelée dans le paragraphe précédent, est utilisée pour calculer le rayonnement acoustique de la structure et ainsi caractériser le rayonnement des modes structuraux. Ensuite, ces modes seront atténués par l'utilisation de pastilles piézoélectriques connectées à des circuits électriques de type shunt résistifs ou résonants. Le modèle éléments finis d'ordre réduit développé précédemment (technique 3 du Chapitre 4) est utilisé pour modéliser le problème électromécanique (plaque avec pastilles piézoélectriques). Le modèle discret, qui prend en compte les couplages électromécaniques de façon efficace, est ensuite utilisé pour optimiser le système, dans le but de maximiser l'atténuation des vibrations et du bruit rayonné. L'algorithme d'optimisation topologique développé dans le chapitre précédent permet de déterminer les géométries et les positions des pastilles piézoélectriques qui maximisent les coefficients de couplages modaux.

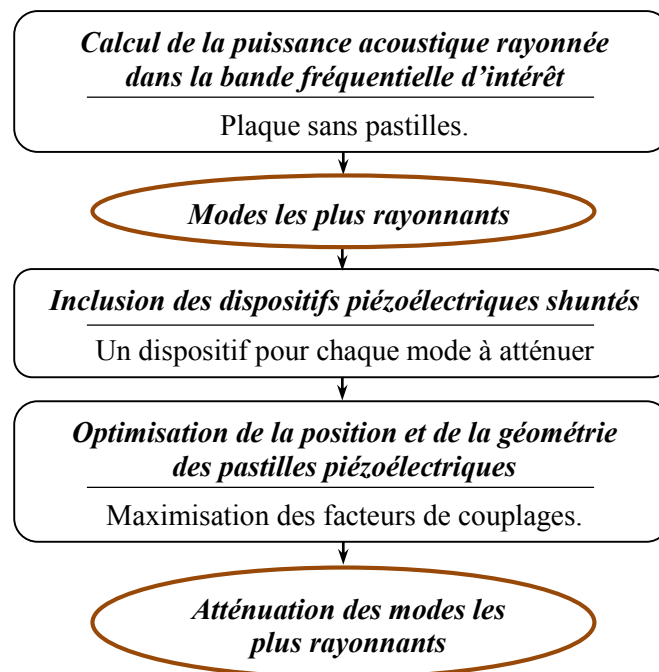


FIG. 6.9– Approche proposée.

6.2.1. Modes les plus rayonnants

On a vu précédemment que les modes structuraux ne rayonnent pas indépendamment. La puissance acoustique rayonnée par un mode de vibration est donc influencée par l'amplitude des autres modes. Cet effet est mis en évidence par les termes hors-diagonaux de la matrice des résistances de radiation des modes structuraux $[\mathbf{M}]$. En pratique, pour une structure faiblement amortie, au-dessous de la fréquence critique seule les modes avec une fréquence naturelle proche de l'excitation sont fortement excités. De plus, seuls certains de ces modes rayonnent efficacement : ces sont les modes les plus rayonnants (Elliott et Johnson, 1993).

Dans la littérature, le choix des modes les plus rayonnants est souvent associé au calcul des rendements radiatifs des modes structuraux $\eta_i(\omega_i)$ à leurs fréquences naturelles ω_i (Rosi *et al.*, 2013). Même si le rendement radiatif permet de classer les modes structuraux suivant leurs capacités à rayonner du bruit, ces facteurs négligent l'action des efforts extérieurs sur le comportement dynamique de la structure. Par ailleurs, suivant la position des efforts appliqués, certains modes de vibrations ne sont pas excités. C'est pourquoi nous avons choisi ici d'évaluer le rayonnement acoustique de chaque mode structural contenu dans la bande fréquentielle d'intérêt par le calcul de la puissance acoustique rayonnée, à partir de l'expression suivante :

$$W_i(\omega_i) = a_i(\omega_i)^* \{\tilde{\Phi}_i\}^T [\mathbf{R}(\omega_i)] \{\tilde{\Phi}_i\} a_i(\omega_i) = a_i(\omega_i)^* M_{ii}(\omega_i) a_i(\omega_i) \quad (6.29)$$

où $W_i(\omega_i)$ est la puissance acoustique rayonnée par le mode i à sa fréquence de résonance ω_i .

Il est important de noter que dans le cas où l'excitation est inconnue, le calcul des rendements radiatifs des modes structuraux reste le meilleur moyen pour estimer les modes les plus rayonnants.

6.2.2. Mise en œuvre numérique

L'algorithme illustré par la FIG. 6.9 résume l'approche proposée et celui de la FIG. 6.10 détaille l'implémentation numérique appliquée dans le cas où les géométries et les positions des pastilles piézoélectriques sont a priori connues. Comme décrit dans les chapitres précédents, la construction de la partie purement élastique des modèles (matrices de masse $[\mathbf{M}_u]$ et de rigidité $[\mathbf{K}_u]$) et la résolution des problèmes aux valeurs propres sont des tâches attribuées à *Nastran*. *Awk* exécute le transfert des données entre les différents logiciels et *Matlab* est responsable du pilotage (automatisé) de l'algorithme, de la construction de la

partie électromécanique et diélectrique du modèle éléments finis (les matrices de couplage électromécanique $[K_{uv}]$ et diélectrique $[K_v]$) et de la construction et de la résolution des modèles d'ordres réduits ainsi que les problèmes acoustiques.

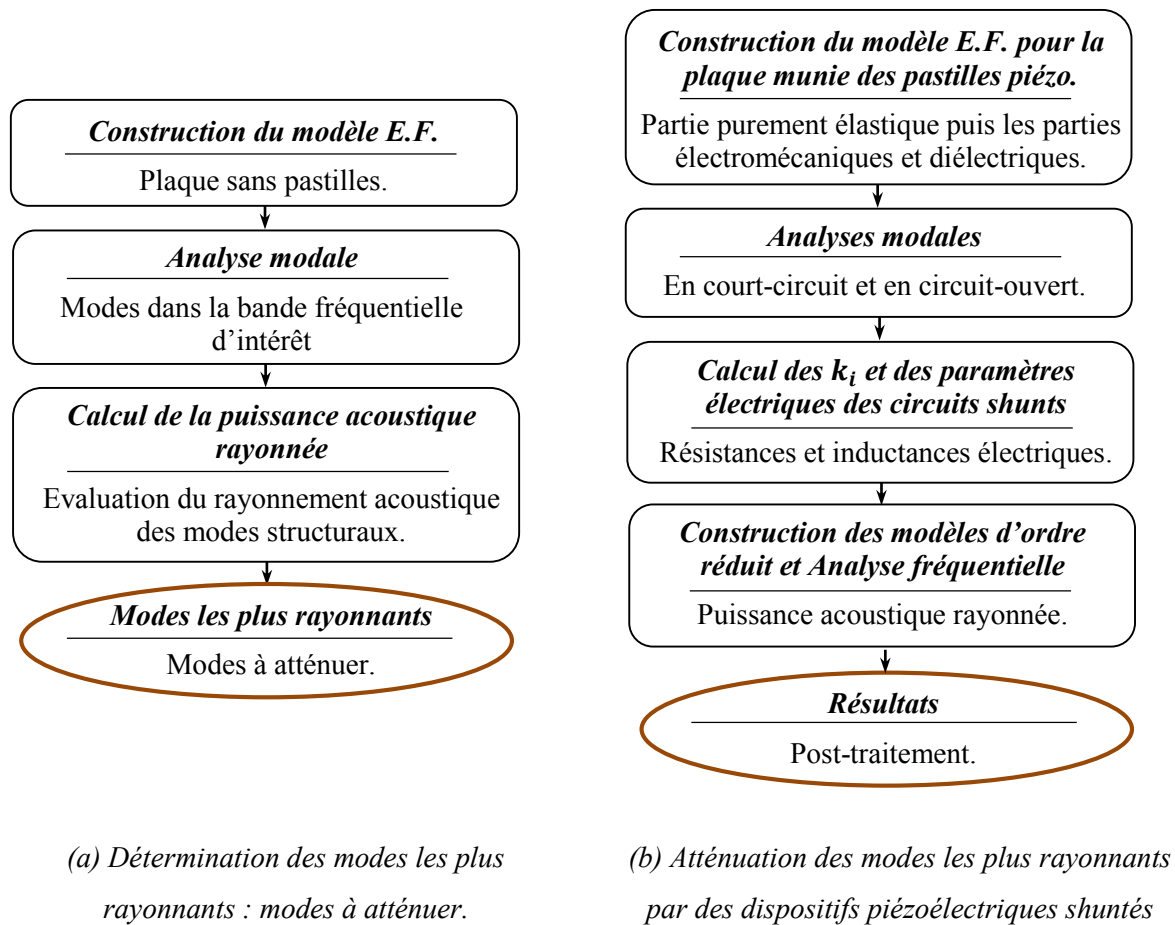
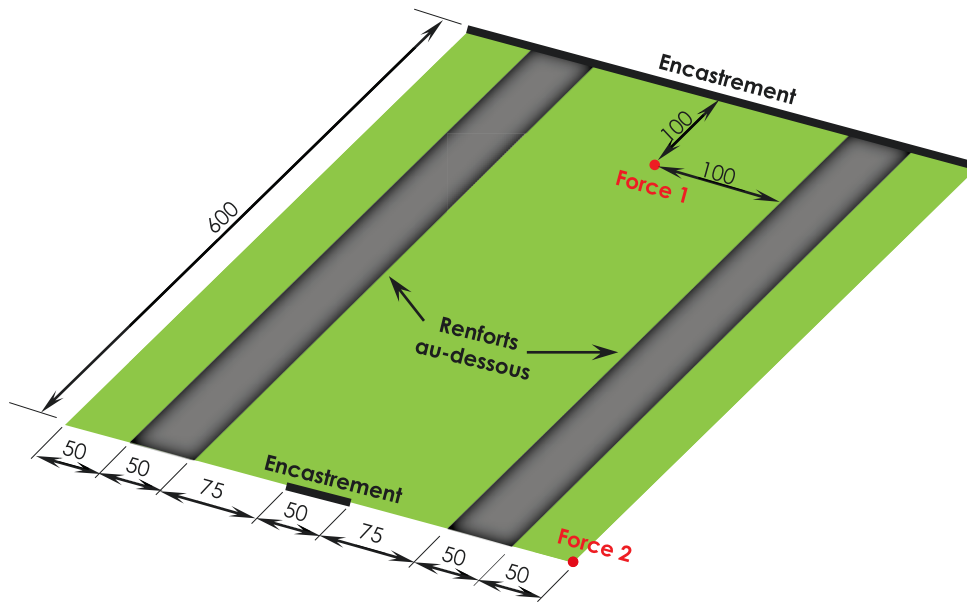


FIG. 6.10- Stratégie numérique.

6.2.3. Exemple d'application

Pour valider et illustrer l'approche proposée dans ce chapitre, nous considérons une plaque rectangulaire bafflée en aluminium ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2700$ kg.m⁻³) de dimensions 0.4 m \times 0.6 m \times 0.002 m avec deux renforts également en aluminium de dimensions 0.05 m \times 0.6 m \times 0.002 m, fixés sur la face inférieure de la plaque. La position des renforts ainsi que les conditions aux limites du problème sont données sur la FIG. 6.11. Un maillage avec 1536 éléments quadrangles à 4 nœuds est utilisé pour les calculs éléments finis. La plaque est excitée par deux forces ponctuelles harmoniques (en phase) et d'amplitude unitaire (1 N) dont la position est donnée dans la FIG. 6.11. De plus, la plaque rayonne dans un milieu semi-infini rempli d'air ($\rho_f = 1.2$ kg/m³, $c_f = 1.2$ m/s).

FIG. 6.11– *Plaque bafflée avec renforts (dimensions en mm).*

Modes les plus rayonnants

Le calcul des modes propres du système (sans pastilles piézoélectriques) ainsi que de la puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt [0, 430] Hz (TAB. 6.1) montrent que les modes 1, 6 et 14 sont les plus rayonnants pour l'excitation appliquée. Par ailleurs, l'amortissement mécanique est introduit par un coefficient d'amortissement modal constant $\xi = 0.005$ pour toutes les 15 modes contenus dans la bande fréquentielle d'intérêt.

TAB. 6.1 : *Puissance acoustique rayonnée par les modes structuraux.*

Mode	Fréquence propres ω_i [Hz]	W_i (dB ref. 1E-12 Watts)
1	33.98	109.19
2	34.02	86.05
3	69.38	100.29
4	88.97	86.02
5	118.20	90.08
6	146.94	109.82
7	171.08	92.98
8	216.10	92.25
9	244.24	71.52
10	249.07	84.99
11	293.49	95.03
12	322.08	66.78
13	328.63	61.84
14	372.95	105.57
15	428.88	84.51

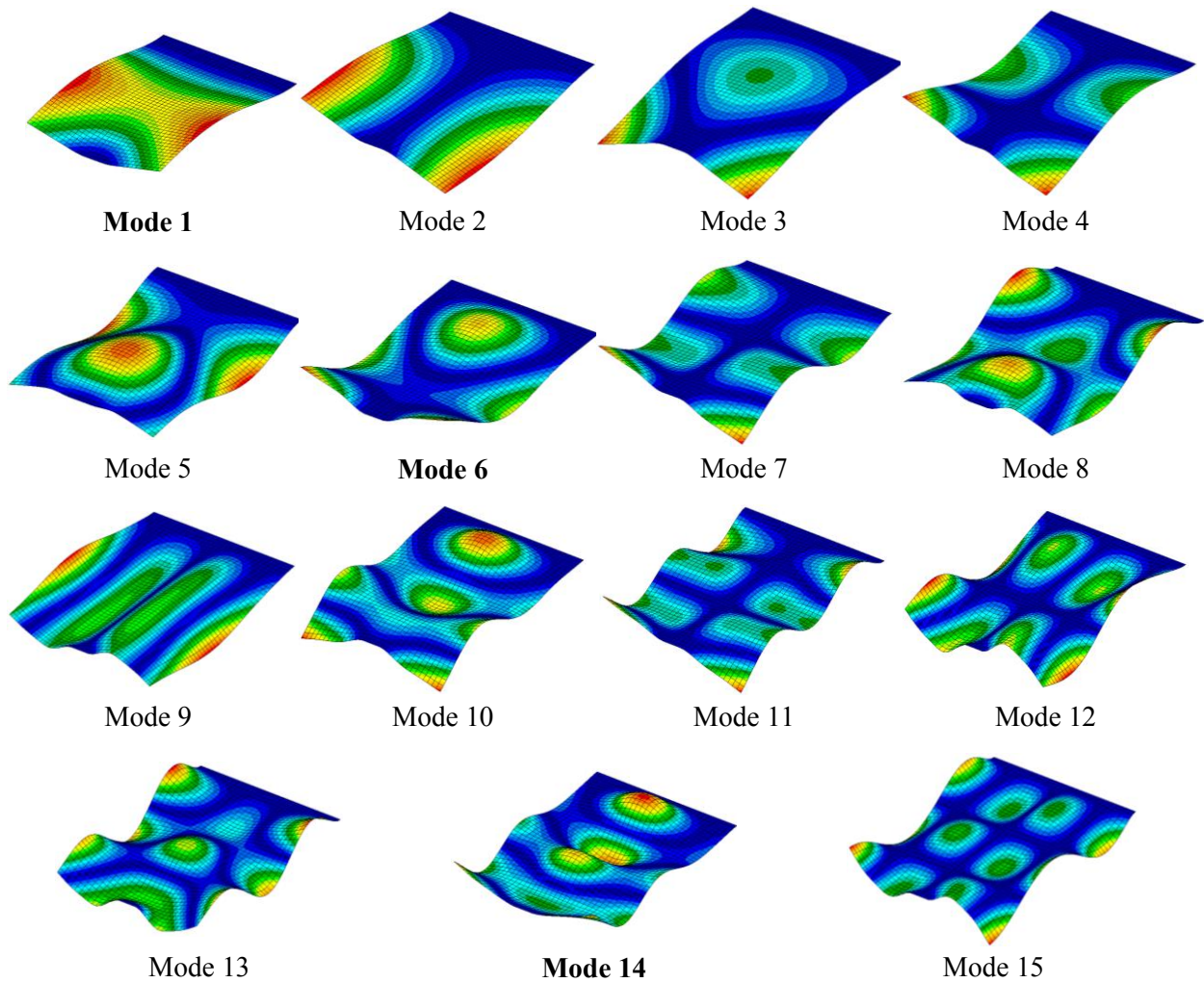


FIG. 6.12– Déformées modales des 15 modes propres de la plaque dans la bande fréquentielle d'intérêt. Les niveaux de couleurs représentent le module du déplacement.

Dispositifs piézoélectriques shuntés

Pour réduire le rayonnement acoustique des modes 1, 6 et 14, trois dispositifs piézoélectriques shuntés en PIC151 sont collés sur la surface supérieure de la plaque. Deux cas sont étudiés ici : (i) dans le premier cas, trois pastilles piézoélectrique de dimensions $0.05 \text{ m} \times 0.05 \text{ m} \times 0.001 \text{ m}$ sont utilisées et, (ii) dans le deuxième cas, l'algorithme d'optimisation topologique développé au chapitre précédent est utilisé pour déterminer la géométrie et position optimales des trois dispositifs piézoélectriques.

Premier cas : optimisation paramétrique

Avec l'objectif d'obtenir une bonne efficacité en terme de réduction de la puissance acoustique rayonnée, la position des trois pastilles a été déterminée en utilisant l'algorithme d'optimisation génétique de *Matlab*.

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et de l'évolution naturelle : croisements, mutations, sélection, etc. Généralement, l'algorithme génétique commence par définir une population initiale d'un groupe d'individus créés aléatoirement. Les individus au sein de la population sont évalués en utilisant une fonction coût fournie par l'utilisateur. Ensuite, certains de ces individus sont choisis pour se "reproduire" en générant un ou plusieurs "enfants", pendant que d'autres sont mutés au hasard. Enfin, tous les individus sont classés selon leur adaptation (valeur de la fonction coût). Après ces opérations, une nouvelle génération de la population est établie. Cette procédure évolutive continue jusqu'à ce que la population n'évolue plus ou jusqu'à ce que l'algorithme atteigne un certain nombre de générations prédéfini par l'utilisateur. Le lecteur est invité à consulter (Goldberg, 1989) pour une description détaillée de cette méthode dans divers domaines d'application.

Dans cet exemple, un individu est défini par un vecteur de taille 3 (nombre de pastilles) dont les composants sont les positions de chaque pastille piézoélectrique. L'objectif est de trouver l'individu qui maximise les MEMCFs des trois modes à atténuer. De plus, l'algorithme génétique de *Matlab* est appliqué avec les paramètres définis par défaut.

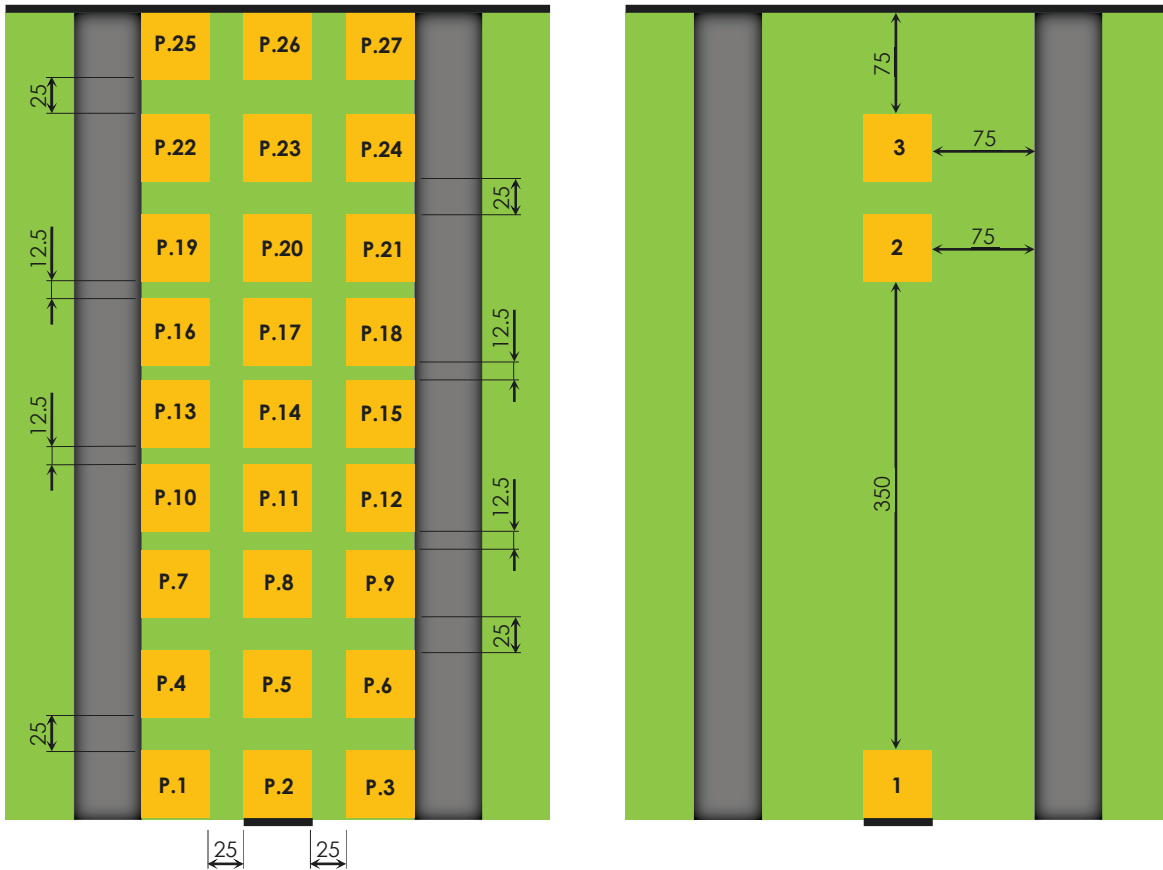
Pour simplifier le problème, les positions des pastilles piézoélectriques sont limitées à 27 emplacements ($27 \times 26 \times 25 = 17\,550$ solutions possibles), selon la FIG. 6.13(a). Par ailleurs, le maillage de la plaque est figée et il est le même que celui utilisé dans le calcul des modes les plus rayonnants.

Le résultat obtenu est présenté sur la FIG. 6.13(b). Dans cette configuration, les pastilles 1, 2 et 3 sont positionnées respectivement pour atténuer les modes 1, 6 et 14 de la plaque. De plus, les facteurs de couplages modaux sont : $k_1^{(1)} = 18.0 \%$, $k_6^{(2)} = 8.9 \%$ et $k_{14}^{(3)} = 11.4 \%$.

Second cas : optimisation topologique

Dans ce cas, l'algorithme d'optimisation proposé dans le chapitre précédent est appliqué pour déterminer la distribution optimale de matériau piézoélectrique sur la surface supérieure de la plaque et ainsi maximiser l'amortissement pour les trois modes sélectionnés. Avec

l'objectif de concevoir les trois dispositifs piézoélectriques simultanément, on a délimité trois domaines de conception, comme le montre la FIG. 6.14(a). Ces domaines ont été choisis selon les déformées modales des trois modes à atténuer (FIG. 6.12). De plus, l'épaisseur de chaque dispositif est fixée à 0.5 mm et leur volume est limité à $\tilde{\Omega}_{\max} = 3 \text{ cm}^3$, ce qui conduit à initialiser l'algorithme d'optimisation avec les pseudo-densités $x_i = 0.2$ pour tous les éléments dans les trois domaines de conception.



(a) Emplacements pour les pastilles

(b) Configuration optimale.

FIG. 6.13– Placement des pastilles piézoélectriques (dimensions en mm).

La FIG. 6.14(b) présente la géométrie et position obtenue pour chaque pastille piézoélectrique. Par ailleurs, les facteurs de couplage modaux obtenus sont : $k_1^{(1)} = 21.0 \%$, $k_2^{(6)} = 14.7 \%$ et $k_3^{(14)} = 17.3 \%$.

Atténuation des modes les plus rayonnants

Une fois que le placement des pastilles est défini, l'algorithme de la FIG. 6.10(b) est appliqué pour résoudre les problèmes électromécanique et acoustique. Chacune des trois

pastilles est connectée à un circuit shunt (résistif ou résonant) pour atténuer les trois modes les plus rayonnants. La réponse du système couplé est obtenue par projection modale sur une base construite à partir des 40 premiers modes de la plaque avec les pastilles en court-circuit et des modes 1, 6 et 14 de la plaque avec les pastilles en circuit-ouvert. Un amortissement mécanique est introduit à ce niveau grâce au coefficient d'amortissement modal défini précédemment.

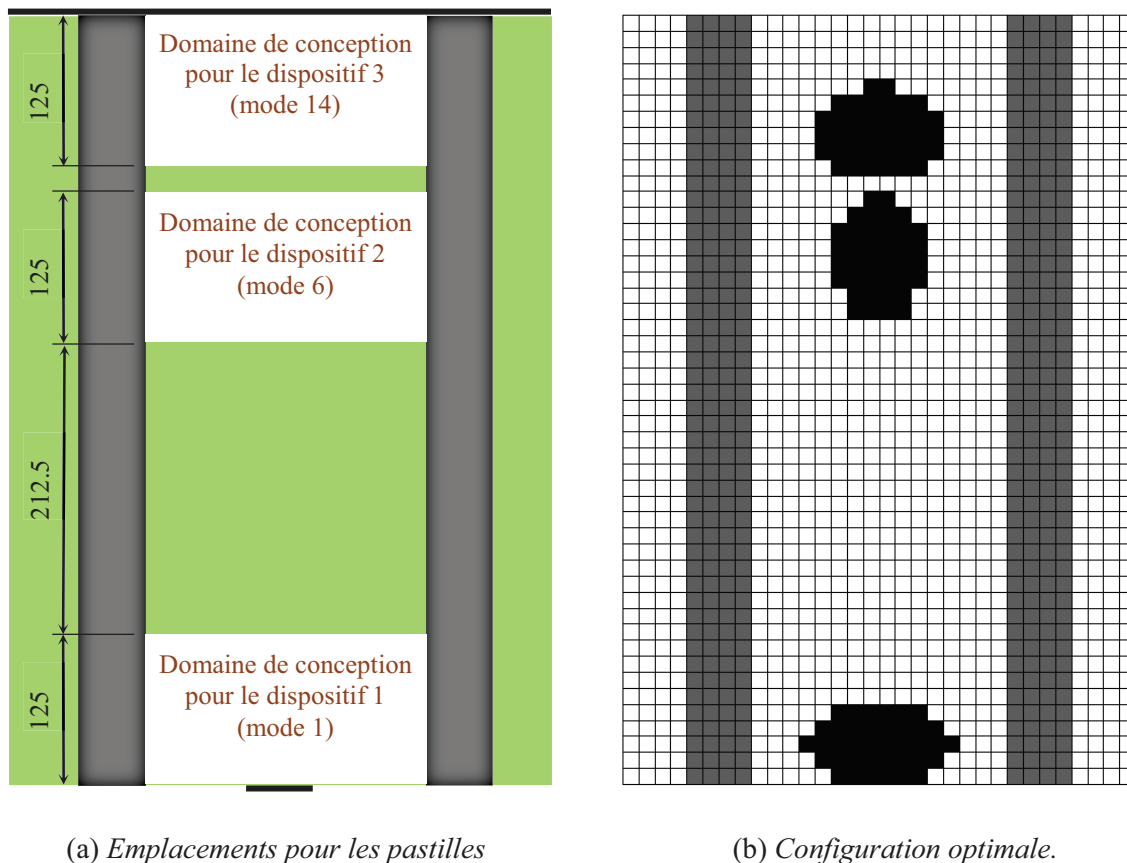


FIG. 6.14— Détermination de la géométrie et de la position des dispositifs piézoélectriques (dimensions en mm).

Le TAB. 6.2 montre les valeurs optimales des paramètres électriques des circuits shunts. On note des valeurs élevées pour les inductances, en particulier pour le mode 1. En pratique, cela oblige à utiliser des inductances synthétiques, qui sont des composants actifs. Dès lors, le système est plus complexe à mettre en œuvre et une alimentation électrique est nécessaire (Fleming *et al.*, 2000).

Les FIG. 6.15 à FIG. 6.18 présentent le rayonnement acoustique du système pour les deux cas d'étude à partir des shunts résistifs et résonants. Ces figures montrent une comparaison de la réponse fréquentielle du système pour trois cas d'études : (i) plaque sans pastilles,

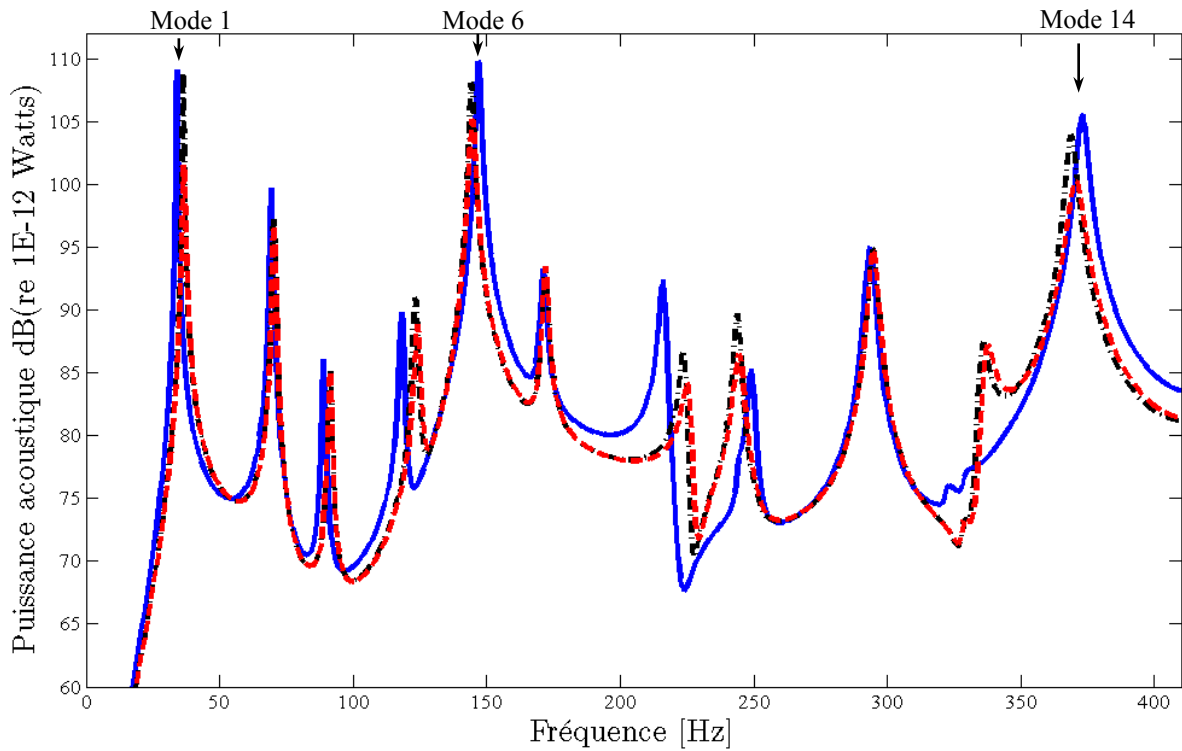
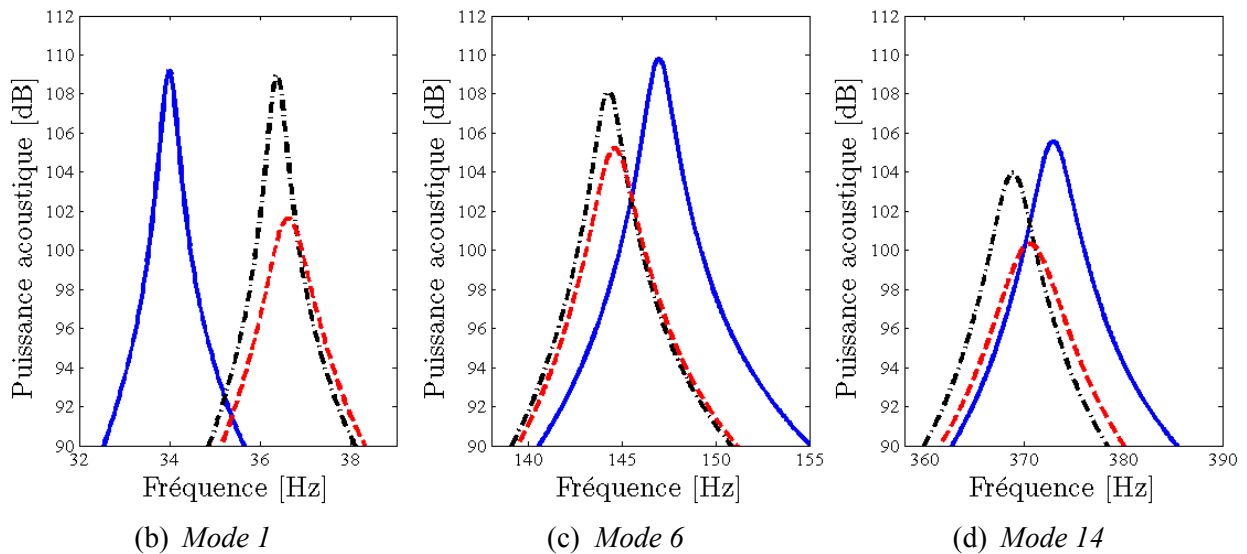
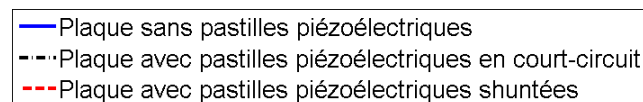
(ii) plaque avec pastilles en court-circuit et (iii) plaque avec pastilles shuntées. Cette comparaison illustre les performances des dispositifs piézoélectriques dans l'atténuation des vibrations des modes le plus rayonnants. L'atténuation obtenue dans le *premier cas* (optimisation paramétrique) pour les trois modes est entre 17 et 20 dB en utilisant des shunts résonnants et entre 5 et 7 dB avec shunts résistifs. Dans le *second cas* (optimisation topologique), l'atténuation est entre 20 et 25 dB en utilisant des shunts résonnants et entre 7 et 10 dB avec shunts résistifs. Ceci est dû à la conversion d'une partie de l'énergie de déformation des pastilles piézoélectriques en une énergie électrique et à sa dissipation en chaleur grâce aux circuits électriques.

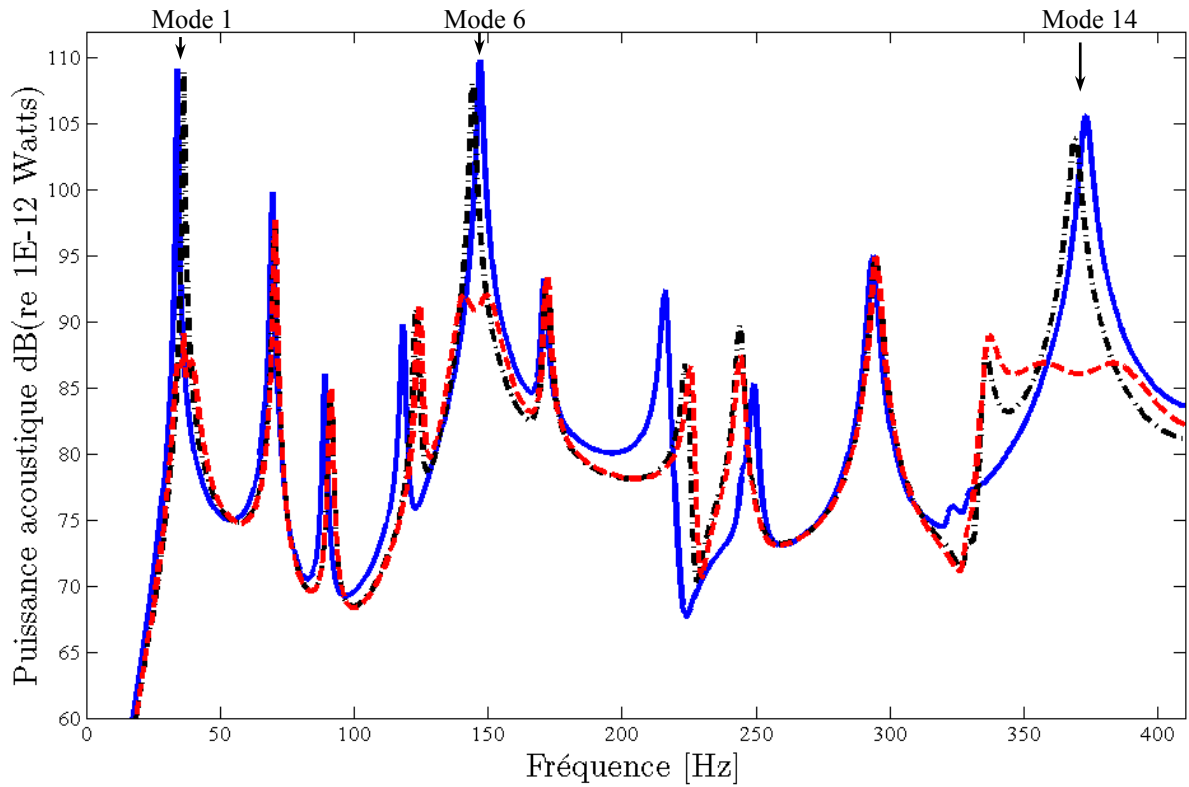
On rappelle que l'atténuation est fonction des facteurs de couplage électromécaniques et des coefficients d'amortissement modaux ξ_i (Ducarne, 2009), ce qui explique la meilleure performance du système dans le *second cas*.

Finalement, on observe un pic dans la zone de résonance du mode 1 pour le cas des shunts résonnants (FIG. 6.16(b) et FIG. 6.18(b)). Ce pic correspond à la résonance du mode 2 qui a été mis en évidence avec l'atténuation du mode 1.

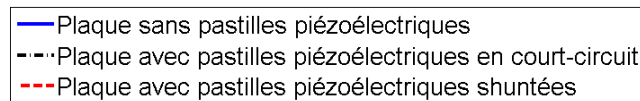
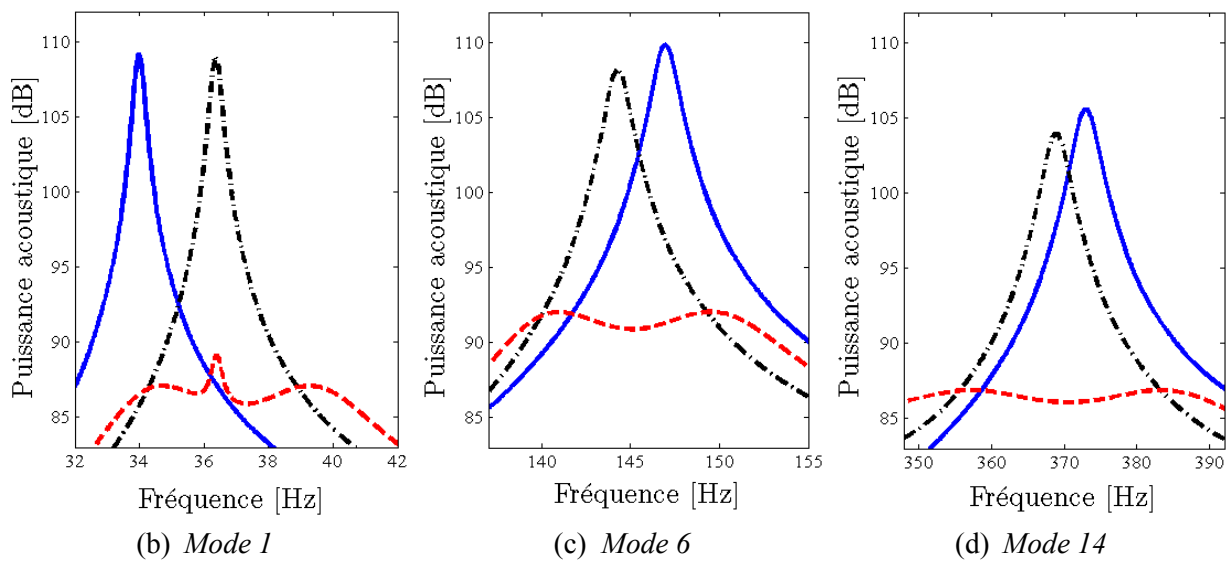
TAB. 6.2 : Paramètres optimaux des circuits shunts.

Shunt	Paramètres	Modes		
		1	6	14
Premier cas (optimisation paramétrique)				
Résonant	Résistance [Ω]	24046.42	2827.32	1617.79
	Inductance [H]	530.99	31.50	4.91
Résistif	Résistance [Ω]	126612.00	28309.65	11642.93
Second cas (optimisation topologique)				
Résonant	Résistance [Ω]	6467.51	1078.00	519.34
	Inductance [H]	126.29	7.27	1.20
Résistif	Résistance [Ω]	29238.72	6764.94	2818.77

(a) *Puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt.*(b) *Mode 1*(c) *Mode 6*(d) *Mode 14*(e) *Légende*FIG. 6.15– *Premier cas (optimisation paramétrique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résistifs.*

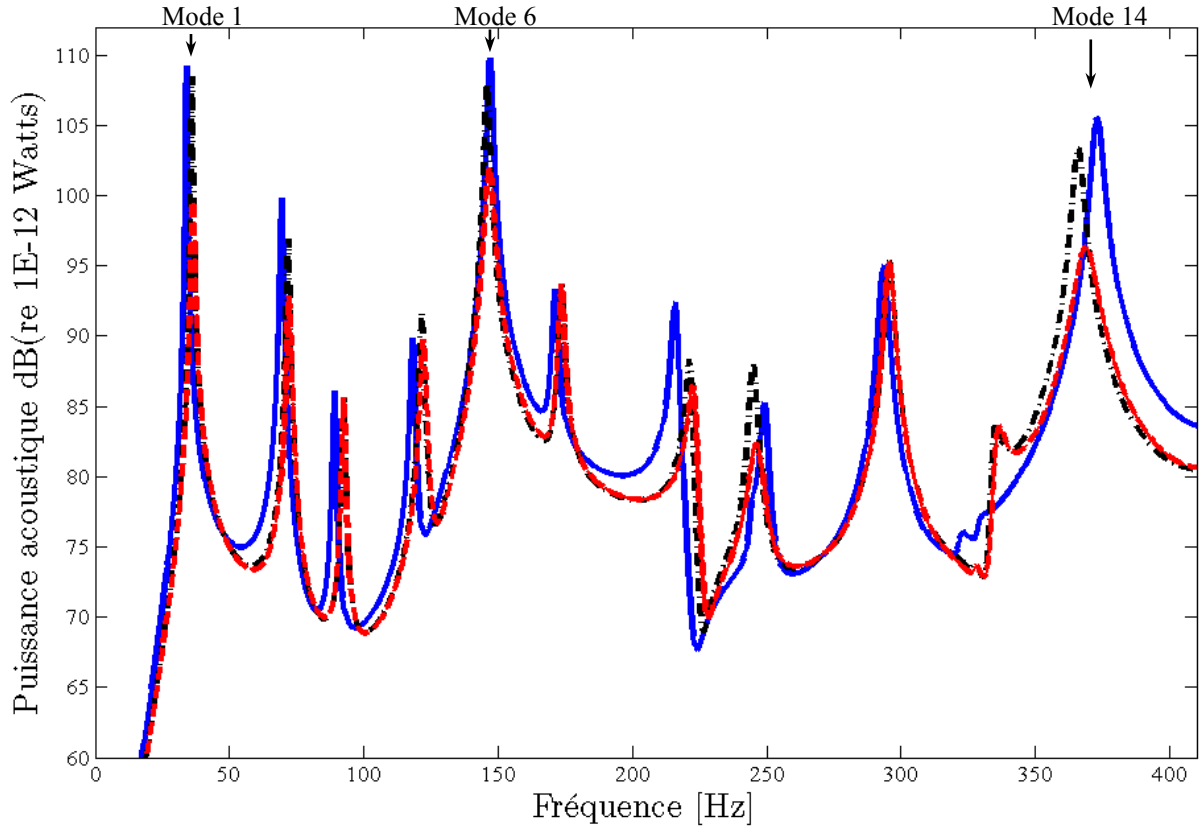


(a) Puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt.

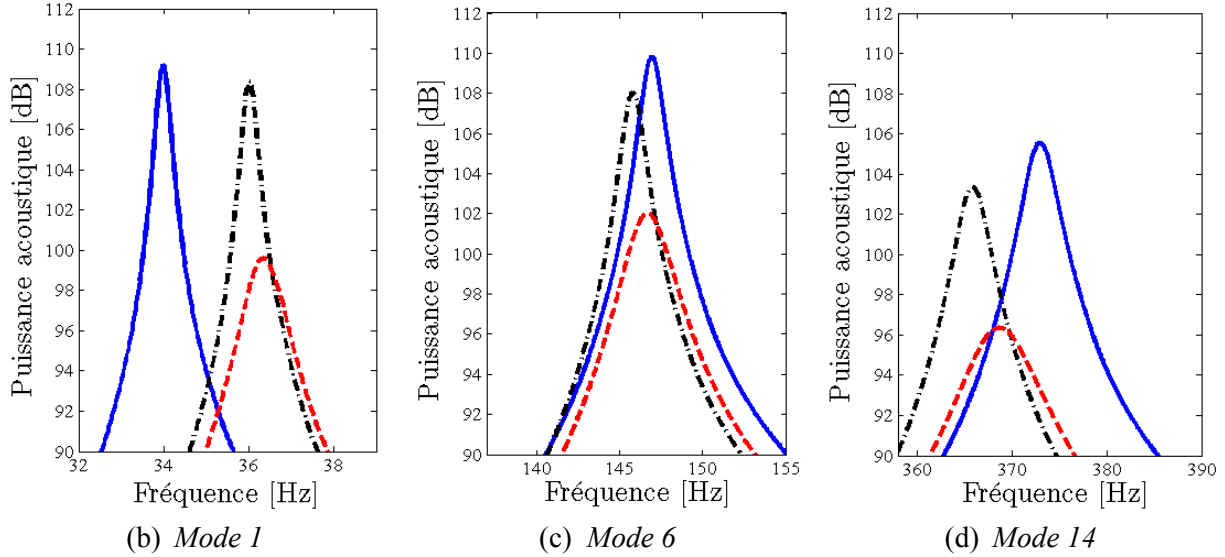


(e) Légende

FIG. 6.16– Premier cas (optimisation paramétrique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résonants.



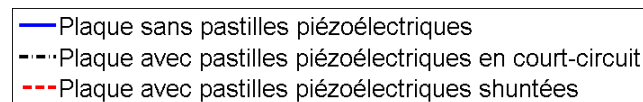
(a) Puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt.



(b) Mode 1

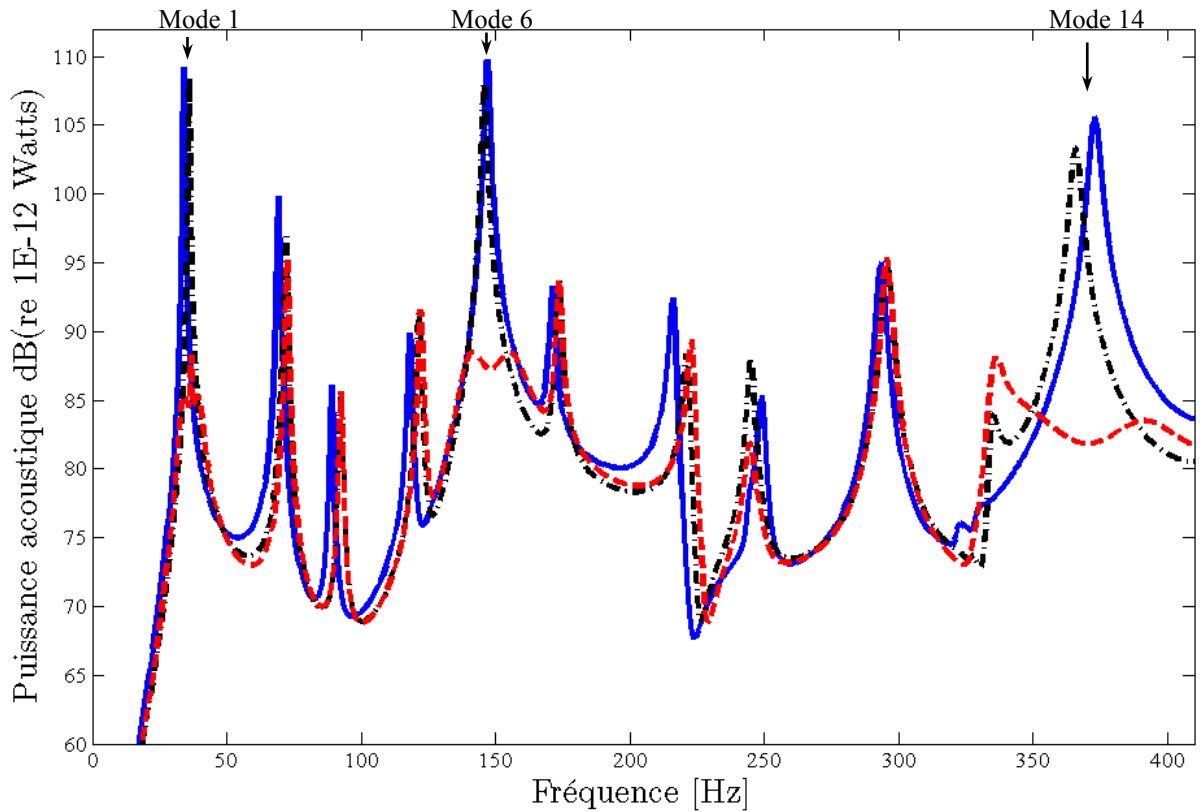
(c) Mode 6

(d) Mode 14

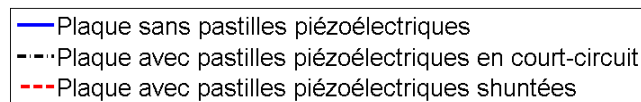
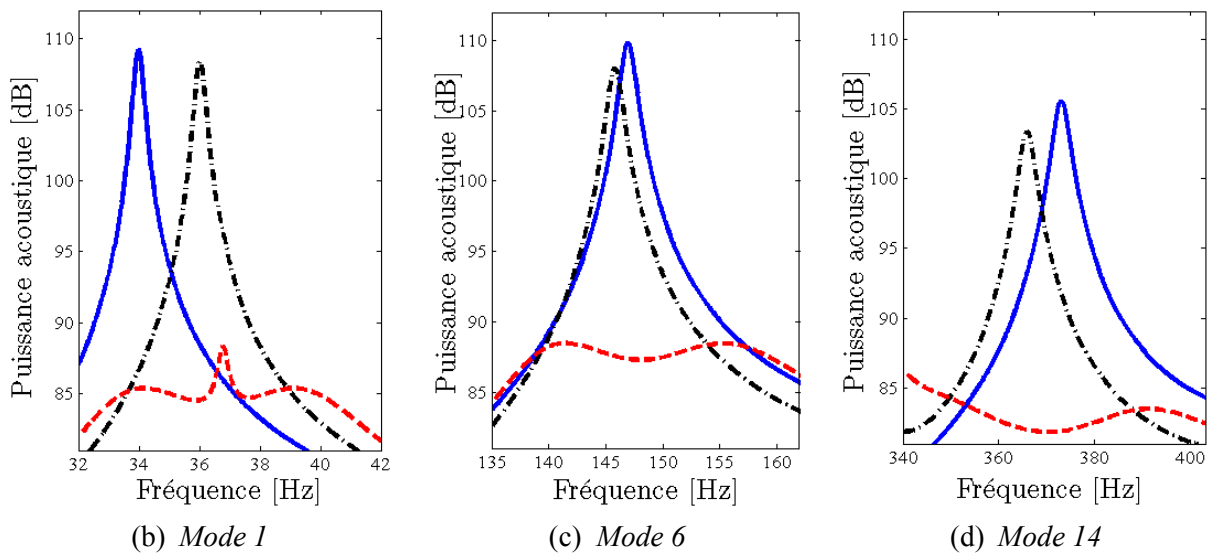


(e) Légende

FIG. 6.17– Second cas (optimisation topologique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résistifs.



(a) Puissance acoustique rayonnée dans la bande fréquentielle d'intérêt.



(e) Légende

FIG. 6.18– *Second cas (optimisation topologique) : Atténuation des modes les plus rayonnants avec shunts résonants.*

6.3. Conclusions

Nous avons défini dans la première partie de ce chapitre le problème vibroacoustique traité dans cette thèse et ensuite nous avons abordé les principaux aspects du rayonnement acoustique des plaques planes. A partir de la résolution de l'intégrale de Rayleigh en champ lointain, nous avons mis en évidence les contributions au rayonnement acoustique des modes structuraux, notamment en basses fréquences (en-dessous de la fréquence critique), puis nous avons présenté la méthode des sources élémentaires, qui a été retenue pour les simulations numériques de cette thèse.

La deuxième partie a été consacrée au développement d'une approche numérique pour tester l'efficacité des systèmes piézoélectriques shuntés dans la réduction du rayonnement acoustique des structures minces dans le domaine des basses fréquences. La technique proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ proche. L'atténuation de ces modes est ensuite réalisée grâce à l'utilisation de pastilles piézoélectriques collées à la plaque et connectées à des circuits de type shunt résistif ou résonnant. L'approche proposée a été appliquée au problème de réduction du rayonnement acoustique d'une plaque mince avec renforts. Deux cas ont été étudiés : (a) le premier cas considère l'utilisation de pastilles piézoélectriques identiques avec forme prédéfinie. Dans ce cas, l'algorithme d'optimisation génétique de *Matlab* a été utilisé pour déterminer les emplacements de ces pastilles, dans le but d'augmenter l'atténuation des vibrations et du bruit rayonné, (b) dans le second cas, l'algorithme d'optimisation topologique développé au chapitre précédent est appliqué pour déterminer la géométrie et la position des dispositifs piézoélectriques, en maximisant les couplages électromécaniques.

Les résultats obtenus ont démontré l'efficacité du shunt résonant en termes de niveaux d'atténuation. En pratique, ses performances reposent sur un réglage fin des paramètres électriques et nécessitent une inductance synthétique à cause des valeurs importantes d'inductance requise. Ces deux inconvénients limitent fortement les possibilités d'implémentation industrielle de cette technique à nos jours. À l'inverse, bien que l'implémentation du shunt résistif soit aisée puisque le circuit shunt consiste uniquement en une résistance et bien qu'il soit robuste vis-à-vis d'une imprécision sur le réglage de la résistance ou d'une dérive des valeurs des paramètres du système, l'atténuation apportée reste cependant faible et de l'ordre de quelques dB. La technologie de shunts à commutation peut être une alternative intéressante pour pallier les défauts des shunts linéaires (voir (Richard *et*

al., 2000; Cunefare *et al.*, 2000; Badel *et al.*, 2007 ; Guyomar *et al.*, 2006, 2008 ; Ducarne *et al.* 2010 ; Larbi *et al.* 2010)).

Finalement, les bons résultats obtenus dans le *second cas* démontrent l'efficacité pour une atténuation multimodale et mettent en évidence encore une fois l'importance de l'algorithme d'optimisation topologique proposé.

Conclusions et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont porté sur la problématique de réduction des vibrations et du bruit à partir de dispositifs piézoélectriques shuntés. Les contributions de cette thèse concernent principalement la modélisation et l'optimisation des systèmes électromécaniques constitués d'une structure élastique munie de pastilles piézocéramiques.

On présente dans ce qui suit une synthèse des travaux effectués ainsi que les perspectives envisagées.

7.1. Travail effectué

Ce document commence (Chapitre 2) par un rappel sur les matériaux piézoélectriques, notamment sur les piézocéramiques. Nous avons ainsi pu introduire, dans ce rappel, les phénomènes et les grandeurs physiques qui interviennent dans le comportement d'un matériau piézoélectrique. Toujours dans le même chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation par éléments finis des structures piézoélectriques. Nous avons introduit d'abord la loi de comportement piézoélectrique tridimensionnelle et puis réduite au cas des plaques. Ensuite, nous avons rappelé les équations dynamiques couplées d'un milieu piézoélectrique. Finalement, deux formulations éléments finis adaptées au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques ont été présentées : une formulation 3D et une formulation simplifiée, initialement développée dans (Thomas *et al.*, 2009) au LMSSC. Nous avons notamment rappelé l'intérêt de la formulation simplifiée : cette formulation, qui ne contient qu'un seul couple de variables électriques par pastille piézoélectrique (la différence de potentiel et la charge électrique dans une électrode), permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, elle permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux pastilles piézoélectriques. Par contre, son efficacité est limitée à l'utilisation de

pastilles minces où l'on considère l'hypothèse d'un potentiel électrique linéaire dans l'épaisseur de la pastille.

Dans le chapitre 3 nous avons présenté en première partie l'implémentation numérique des modèles éléments finis développés dans cette thèse. Nous avons notamment mis en évidence la stratégie numérique utilisée qui est basée sur l'utilisation du code de calcul *Nastran* en association avec les logiciels *Patran*, *Matlab* et le langage de programmation *Awk*. Nous avons vérifié la validité de la formulation simplifiée par comparaison avec la formulation 3D et une solution exacte d'espace d'état tridimensionnelle. Les exemples analysés ont montré que la formulation simplifiée est bien adaptée au cas d'une structure élastique munie de pastilles piézoélectriques *de faible épaisseur*, plus particulièrement quand les dimensions des pastilles sont beaucoup plus petites que celles de la structure hôte. Enfin, nous avons validé l'implémentation du modèle éléments finis 2D associé à la formulation simplifiée avec des mesures expérimentales sur l'exemple d'une poutre console (Ducarne, 2009).

Le Chapitre 4 a été consacré à l'analyse des différents modèles éléments finis d'ordre réduits pour la résolution de la réponse fréquentielle d'une structure équipée de pastilles piézoélectriques shuntées. Nous avons proposé quatre techniques de réduction basées sur la méthode de projection modale : (1) projection sur les modes en court-circuit, (2) projection sur les modes en circuit-ouvert, (3) projection sur la base combinée court-circuit/circuit-ouvert et (4) projection sur la base des modes couplés électromécaniques. Deux exemples ont été ensuite proposés afin d'analyser la convergence des quatre modèles d'ordre réduits proposés. Nous avons constaté que :

- les techniques 3 et 4 sont très efficaces dans la réduction du problème avec un nombre réduit de modes propres. Cependant, les techniques 1 et 2 nécessitent quant à elles un grand nombre de modes pour assurer la convergence par comparaison avec le modèle complet ;
- les formules de calcul des paramètres optimaux des circuits shunts (résistance et/ou inductance), issues de (Thomas *et al.*, 2012b) se sont avérées non adaptées dans le cas de systèmes multi-modes. Cependant, nous avons montrés que les facteurs de couplages modaux $k_i^{(p)}$ permettent de quantifier efficacement le couplage électromécanique entre le i -ième mode de la structure et la p -ième pastille piézoélectrique.

Nous avons donc retenu la technique 3 pour réduire les problèmes électromécaniques avec des pastilles piézoélectriques shuntées. Contrairement à la technique 4, cette technique peut être appliquée au cas de shunts résistifs ou résonants et elle est indépendante des valeurs optimales des inductances des circuits shunts. L'algorithme de Gram Schmidt modifié doit être cependant utilisé pour orthogonaliser la base de projection combinée des modes en court-circuit et en circuit-ouvert et construire ainsi un modèle d'ordre réduit bien conditionné.

Les études présentées aux Chapitres 3 (validation de la formulation simplifiée) et 4 (vérification de différents modèles d'ordre réduits appliqués aux cas des shunts linéaires) ont fait l'objet de publications dans deux congrès internationaux (Da Silva *et al.*, 2013 ; Pereira da Silva *et al.*, 2013a).

Dans le deuxième volet de ce travail nous avons proposé un algorithme d'optimisation topologique pour optimiser la géométrie et la position des pastilles piézoélectriques sur une structure hôte élastique. Basé sur la méthode SIMP (Bendsøe et Sigmund, 2003) et la méthode des éléments finis, cet algorithme consiste à déterminer la distribution optimale de matériau piézoélectrique afin de maximiser les facteurs des couplages modaux électromécaniques. Deux exemples ont été proposés afin de valider et d'analyser l'approche développée. Cet algorithme d'optimisation topologique a fait l'objet d'une publication dans une revue avec comité de lecture (Pereira da Silva *et al.*, 2014a) et dans un congrès international (Pereira da Silva *et al.*, 2014b).

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse a été dédié à la modélisation et l'optimisation de la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine de basses fréquences à partir d'éléments piézoélectriques shuntés. Nous avons proposé une approche valable pour n'importe quelle plaque mince bafflée et non trouée, indépendamment des conditions aux limites. Un exemple d'application concernant l'atténuation du rayonnement acoustique d'une plaque avec renforts est présenté et analysé. Les résultats ont notamment permis de vérifier l'efficacité de l'algorithme d'optimisation proposé dans un cas où plusieurs dispositifs piézoélectriques sont utilisés (atténuation multimodale). Cette approche numérique a fait l'objet d'une publication dans un congrès international (Da Silva *et al.*, 2012a) et de plusieurs publications dans des congrès et conférences nationales (Da Silva *et al.*, 2011a, 2011b, 2012b ; Pereira da Silva *et al.*, 2013a). Un article pour une revue avec comité de lecture est actuellement en préparation (Pereira da Silva *et al.*, 2014c).

7.2. Perspectives

Ce travail a permis de soulever différentes questions et permet d'envisager les perspectives suivantes :

- Concernant les formulations éléments finis, nous avons vérifié la validité de la formulation simplifiée dans les cas de pastilles piézocéramiques planes et polarisées dans leurs directions transverses (direction normale aux électrodes). Une extension à des pastilles courbées et/ou travaillant en cisaillement peut être envisagée afin de compléter l'étude présentée au Chapitre 3. De plus, la formulation 3D peut être utilisée avec une méthode de condensation comme proposé dans (Collet et Cunefare, 2008). Cela permettrait de prendre en compte du potentiel induit à travers l'épaisseur des pastilles piézoélectriques ;
- Nous avons montré dans le Chapitre 4 que les formules pour le calcul des paramètres optimaux des circuits shunts, issues de (Thomas *et al.*, 2012), sont non adaptés dans le cas de systèmes multi-modes. Cela est dû à la troncature modale utilisée (un seul mode en court-circuit). Pour une meilleure approximation, il serait donc nécessaire de refaire l'étude présentée dans (Thomas *et al.*, 2012) en utilisant la troncature modale à deux modes : un en court-circuit et un en circuit-ouvert ;
- Concernant l'optimisation de la position et de la géométrie des pastilles piézoélectriques, nous avons proposé un algorithme d'optimisation topologique basé sur la forme standard d'interpolation de la méthode SIMP (x^p). L'utilisation du système d'interpolation ($x/(1 + p(1 - x))$) reste à vérifier. On peut aussi considérer : (i) l'implémentation d'un filtre (voir l'article de Sigmund (2007)) afin d'éliminer les inconvénients de la méthode SIMP (dépendance du maillage et le problème de "checkboarding") ; (ii) l'utilisation du modèle PEMAP-P (voir (Kögl et Silva, 2005)), qui introduit une variable additionnelle au problème de façon à déterminer aussi la direction de polarisation optimale des éléments piézoélectriques. Enfin, une extension de l'algorithme proposé à des structures composites avec des pastilles piézoélectriques incorporées dans ces structures peut être envisagée ;
- Concernant la modélisation et l'optimisation de la réduction du rayonnement acoustique, nous nous sommes limités à étudier des plaques planes bafflées et à utiliser la technique des shunts linéaires. Une extension à des structures plus complexes peut être envisagée à partir de l'utilisation d'une méthode numérique pour

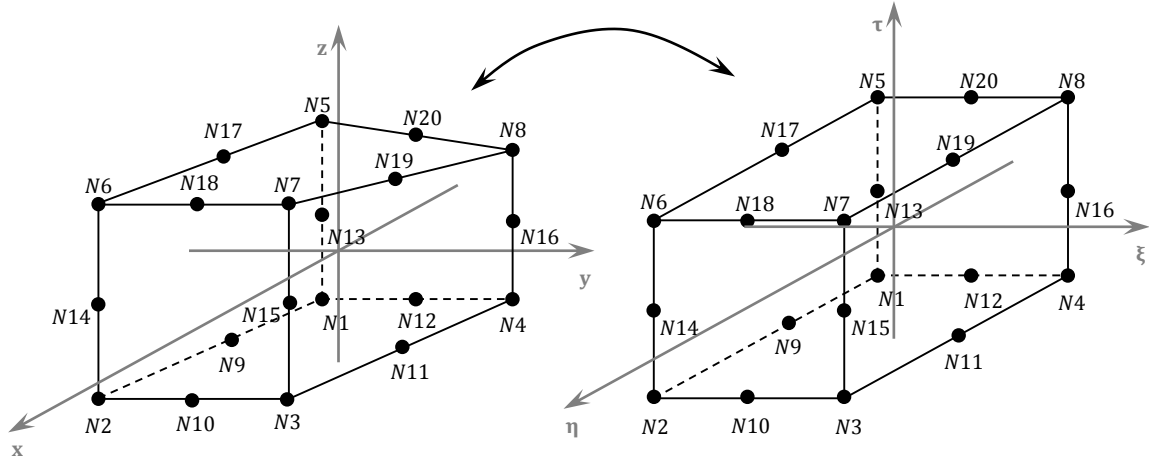
modéliser le domaine acoustique infini. On peut citer notamment la méthode des éléments de frontières (BEM), la méthode des éléments infinis (IEM) et la méthode PML. On peut aussi s'intéresser dans ces cas à la réduction du modèle couplé (FEM/BEM ou FEM/PML ou FEM/IEM). De plus, la technologie de shunts à commutation peut être une alternative intéressante pour pallier les défauts des shunts linéaires (voir Ducarne, 2009). Cette technique permet de conserver les performances élevées du shunt résonant tout en évitant d'avoir un accord précis à réaliser. Une comparaison entre diverses stratégies de contrôle multi-modes sur des systèmes complexes élasto-acoustiques pourrait s'avérer intéressante. Enfin, une validation expérimentale des modèles développés pourra également être menée.

Annexes

Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique en 3D

Dans ce qui suit, on présente un aperçu sur le calcul par éléments finis des matrices de couplage électromécaniques ($[\mathbf{K}_{u\psi}]$ et $[\mathbf{K}_{uv}]$) et des matrices diélectriques ($[\mathbf{K}_\psi]$ et $[\mathbf{K}_v]$) pour l'implémentation de la formulation 3D et de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle tridimensionnel. On rappelle que ces matrices ont été développées sous l'environnement *Matlab* avec l'élément hexaèdre à 20 nœuds (HEXA 20).

Transformation entre l'élément réel et l'élément de référence



Coordonnées des nœuds

Nœuds	Elément réel			Elément de référence		
	x	y	z	η	ξ	τ
N1	x_1	y_1	z_1	-1	-1	-1
N2	x_2	y_2	z_2	1	-1	-1
N3	x_3	y_3	z_3	1	1	-1
N4	x_4	y_4	z_4	-1	1	-1
N5	x_5	y_5	z_5	-1	-1	1
N6	x_6	y_6	z_6	1	-1	1
N7	x_7	y_7	z_7	1	1	1
N8	x_8	y_8	z_8	-1	1	1
N9	x_9	y_9	z_9	0	-1	-1
N10	x_{10}	y_{10}	z_{10}	1	0	-1
N11	x_{11}	y_{11}	z_{11}	0	1	-1
N12	x_{12}	y_{12}	z_{12}	-1	0	-1
N13	x_{13}	y_{13}	z_{13}	-1	-1	0
N14	x_{14}	y_{14}	z_{14}	1	-1	0
N15	x_{15}	y_{15}	z_{15}	1	1	0
N16	x_{16}	y_{16}	z_{16}	-1	1	0
N17	x_{17}	y_{17}	z_{17}	0	-1	1
N18	x_{18}	y_{18}	z_{18}	1	0	1
N19	x_{19}	y_{19}	z_{19}	0	1	1
N20	x_{20}	y_{20}	z_{20}	-1	0	1

Discrétisation du vecteur déplacement élémentaire et du potentiel électrique élémentaire

$\{\mathbf{u}^e\} = [u_x^e \ u_y^e \ u_z^e]^T = [\mathbf{N}_u]\{\mathbf{U}^e\}$	$\psi^e = [\mathbf{N}_\psi]\{\Psi^e\}$
$\{\mathbf{U}^e\} = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \dots \ u_{x20} \ u_{y20} \ u_{z20}]^T$	$\{\Psi^e\} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{20}]^T$
$[\mathbf{N}_u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{N}_\psi] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{20}]$

Fonctions de formes

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\xi)(1-\tau)(-2-\eta-\xi-\tau) & N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\tau) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\xi)(1-\tau)(-2+\eta-\xi-\tau) & N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\tau) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\xi)(1-\tau)(-2+\eta+\xi-\tau) & N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\tau^2)(1-\eta)(1-\xi) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\xi)(1-\tau)(-2-\eta+\xi-\tau) & N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\tau^2)(1+\eta)(1-\xi) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\xi)(1+\tau)(-2-\eta-\xi+\tau) & N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\tau^2)(1+\eta)(1+\xi) \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\xi)(1+\tau)(-2+\eta-\xi+\tau) & N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\tau^2)(1-\eta)(1+\xi) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\xi)(1+\tau)(-2+\eta+\xi+\tau) & N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\tau) \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\xi)(1+\tau)(-2-\eta+\xi+\tau) & N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\tau) \\
 N_9 &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\tau) & N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\tau) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\tau) & N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\tau)
 \end{aligned}$$

Discrétisation du vecteur déformation élémentaire et du vecteur champ électrique élémentaire

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ \varepsilon_3^e \\ \varepsilon_4^e \\ \varepsilon_5^e \\ \varepsilon_6^e \end{Bmatrix} = [\mathbf{H}_u][\mathbf{N}_u]\{\mathbf{U}^e\}, \quad [\mathbf{H}_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{E}^e\} = \begin{Bmatrix} E_1^e \\ E_2^e \\ E_3^e \end{Bmatrix} = -[\mathbf{H}_\psi][\mathbf{N}_\psi]\{\Psi^e\}, \quad [\mathbf{H}_\psi] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Dérivées des fonctions de formes

Les dérivées des fonctions de formes des éléments physiques sont calculées à partir des dérivées des fonctions de formes de l'élément de référence par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = ([\mathbf{F}]^{-1})^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \tau} \end{Bmatrix} \text{ avec } [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne $[\mathbf{F}]$ se calcule facilement dans le cas d'un élément isoparamétrique (Batoz, 1995).

Points de Gauss

Point	η	ξ	τ	Poids (w)	Point	η	ξ	τ	Poids (w)
1	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	λ_1^3	15	0	0	α	$\lambda_1 \lambda_2^2$
2	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$\lambda_1^2 \lambda_2$	16	0	α	$-\alpha$	$\lambda_1^2 \lambda_2$
3	$-\alpha$	$-\alpha$	α	λ_1^3	17	0	α	0	$\lambda_1 \lambda_2^2$
4	$-\alpha$	0	$-\alpha$	$\lambda_1^2 \lambda_2$	18	0	α	α	$\lambda_1^2 \lambda_2$
5	$-\alpha$	0	0	$\lambda_1 \lambda_2^2$	19	α	$-\alpha$	$-\alpha$	λ_1^3
6	$-\alpha$	0	α	$\lambda_1^2 \lambda_2$	20	α	$-\alpha$	0	$\lambda_1^2 \lambda_2$
7	$-\alpha$	α	$-\alpha$	λ_1^3	21	α	$-\alpha$	α	λ_1^3
8	$-\alpha$	α	0	$\lambda_1^2 \lambda_2$	22	α	0	$-\alpha$	$\lambda_1^2 \lambda_2$
9	$-\alpha$	α	α	λ_1^3	23	α	0	0	$\lambda_1 \lambda_2^2$
10	0	$-\alpha$	$-\alpha$	$\lambda_1^2 \lambda_2$	24	α	0	α	$\lambda_1^2 \lambda_2$
11	0	$-\alpha$	0	$\lambda_1 \lambda_2^2$	25	α	α	$-\alpha$	λ_1^3
12	0	$-\alpha$	α	$\lambda_1^2 \lambda_2$	26	α	α	0	$\lambda_1^2 \lambda_2$
13	0	0	$-\alpha$	$\lambda_1 \lambda_2^2$	27	α	α	α	λ_1^3
14	0	0	0	λ_2^3					

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \lambda_1 = \frac{5}{8}, \quad \lambda_2 = \frac{8}{9}$$

Matrices de couplage électromécanique et diélectrique élémentaires

Formulation 3D

$$[\mathbf{K}_{u\psi}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_u]^T [\mathbf{e}]^T [\mathbf{B}_\psi] J d\eta d\xi d\tau, \Rightarrow [\mathbf{K}_{u\psi}^e] = \sum_{i=1}^{27} [\mathbf{B}_u]_i^T [\mathbf{e}]^T [\mathbf{B}_\psi]_i J w_i$$

$$[\mathbf{K}_\psi^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_\psi]^T [\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon] [\mathbf{B}_\psi] J d\eta d\xi d\tau, \Rightarrow [\mathbf{K}_\psi^e] = \sum_{i=1}^{27} [\mathbf{B}_\psi]_i^T [\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon] [\mathbf{B}_\psi]_i J w_i$$

Formulation simplifiée*

$$\{\mathbf{K}_{uv}^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_u]^T [\mathbf{e}]^T \{\mathbf{n}\} J d\eta d\xi d\tau, \Rightarrow \{\mathbf{K}_{uv}^e\} = \sum_{i=1}^{27} [\mathbf{B}_u]_i^T [\mathbf{e}]^T \{\mathbf{n}\} J w_i$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{n}\} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

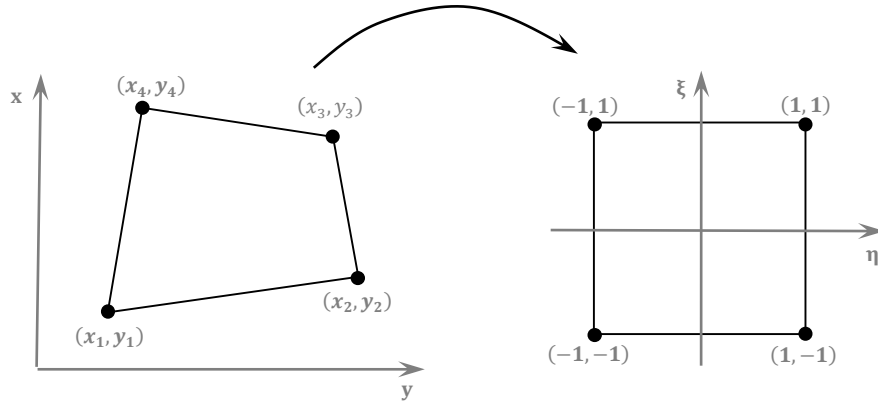
$$[\mathbf{B}_u] = [\mathbf{H}_u][\mathbf{N}_u], \quad [\mathbf{B}_\psi] = [\mathbf{H}_\psi][\mathbf{N}_\psi].$$

*La matrice diélectrique $[\mathbf{K}_v]$ est une matrice diagonale constituée par les capacités des pastilles piézoélectriques (voir Chapitre 2).

Modélisation éléments finis d'un problème électromécanique en 2D

Dans ce qui suit, on présente un aperçu sur le calcul par éléments finis de la matrice de couplage électromécanique ($[\mathbf{K}_{uv}]$) et de la matrice diélectrique ($[\mathbf{K}_v]$) pour l'implémentation de la formulation simplifiée dans le cas d'un modèle bidimensionnel. On rappelle que ces matrices ont été développées sous l'environnement *Matlab* avec l'élément quadrilatère à 4 nœuds (QUAD 4).

Transformation entre l'élément réel et l'élément de référence



Discrétisation du vecteur déplacement élémentaire

$$\{\mathbf{u}^e\} = [u_x^e \ u_y^e \ u_z^e \ \theta_x^e \ \theta_y^e]^T = [\mathbf{N}_u]\{\mathbf{U}^e\}$$

$$\{\mathbf{U}^e\} = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ u_{x4} \ u_{y4} \ u_{z4} \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}]^T$$

$$[\mathbf{N}_u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \xi),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi)$$

Discrétisation du vecteur déformation élémentaire

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ \varepsilon_6^e \end{Bmatrix} = ([\mathbf{H}_m] + z[\mathbf{H}_b])[\mathbf{N}_u]\{\mathbf{U}^e\}, \quad [\mathbf{H}_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dérivées des fonctions de formes

Les dérivées des fonctions de formes des éléments physiques sont calculées à partir des dérivées des fonctions de formes de l'élément de référence par :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = ([\mathbf{F}]^{-1})^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \text{ avec } [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne $[\mathbf{F}]$ se calcule facilement dans le cas d'un élément isoparamétrique (Batoz, 1995).

Points de Gauss

Point	η	ξ	Poids (w)
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

*Vecteur de couplage électromécanique élémentaire **

$$\begin{aligned} \{\mathbf{K}_{uv}^e\} &= \frac{1}{h^{(p)}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (h^{(p)} [\mathbf{B}_m]^T + \Delta_z [\mathbf{B}_b]^T) [\bar{\mathbf{e}}]^T J d\eta d\xi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{\mathbf{K}_{uv}^e\} = \frac{1}{h^{(p)}} \sum_{i=1}^4 (h^{(p)} [\mathbf{B}_m]_i^T + \Delta_z [\mathbf{B}_b]_i^T) [\bar{\mathbf{e}}]^T J w_i \end{aligned}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} [\bar{\mathbf{e}}] &= [\bar{e}_{31} \quad \bar{e}_{31} \quad 0], \\ [\mathbf{B}_m] &= [\mathbf{H}_m][\mathbf{N}_u], \\ [\mathbf{B}_b] &= [\mathbf{H}_b][\mathbf{N}_b], \end{aligned} \quad \begin{aligned} h^{(p)} &= z_{\text{sup}}^{(p)} - z_{\text{inf}}^{(p)} \\ \Delta_z &= \frac{(z_{\text{sup}}^{(p)})^2 - (z_{\text{inf}}^{(p)})^2}{2} \end{aligned}$$

*Capacité de la p-ième pastille piézoélectrique **

$$C^{(p)} = \bar{\epsilon}_{33}^{\epsilon} \frac{S^{(p)}}{h^{(p)}}$$

* $z_{\text{sup}}^{(p)}$ et $z_{\text{inf}}^{(p)}$ sont respectivement les coordonnées transversales des surfaces supérieure et inférieure de la p -ième pastille piézoélectrique. De plus, \bar{e}_{31} et $\bar{\epsilon}_{33}^{\epsilon}$ sont les constantes matériaux modifiées par l'hypothèse de contrainte plane (voir Chapitre 2).

Données matériaux du PIC-151

Les paramètres matériau ont été fournis par PI Ceramic. Ils ont été mesurés d'après la norme standard Européenne EN 50324 2.

Coefficient	Unité	Valeur	Coefficient	Unité	Valeur
ρ	Kg.m ⁻³	7760	N_1	Hz.m	1384
Q_m		88	N_3	Hz.m	1817
ϵ_{11}^σ		1936	N_5	Hz.m	1050
ϵ_{33}^σ		2400	N_p	Hz.m	1915
ϵ_{11}^ϵ		1110	N_t	Hz.m	2118
ϵ_{33}^ϵ		852	d_{31}	m.V ⁻¹	$-2.14 \cdot 10^{-10}$
Tan δ		$15.7 \cdot 10^{-3}$	d_{33}	m.V ⁻¹	$4.23 \cdot 10^{-10}$
k_{31}		0.382	d_{15}	m.V ⁻¹	$6.10 \cdot 10^{-10}$
k_{33}		0.697	g_{31}	V.m.N ⁻¹	$-1.15 \cdot 10^{-2}$
k_{15}		0.653	g_{33}	V.m.N ⁻¹	$2.18 \cdot 10^{-2}$
k_p		0.663	g_{15}	V.m.N ⁻¹	$3.65 \cdot 10^{-2}$
k_t		0.528	e_{31}	N.V ⁻¹ .m ⁻¹	-9.60
ν		0.34	e_{33}	N.V ⁻¹ .m ⁻¹	15.10
S_{11}^E	m ² .N ⁻¹	$1.683 \cdot 10^{-11}$	e_{15}	N.V ⁻¹ .m ⁻¹	12.00
S_{33}^E	m ² .N ⁻¹	$1.900 \cdot 10^{-11}$	C_{11}^E	N.m ⁻²	$1.076 \cdot 10^{11}$
S_{12}^E	m ² .N ⁻¹	$-5.656 \cdot 10^{-12}$	C_{33}^E	N.m ⁻²	$1.004 \cdot 10^{11}$
S_{13}^E	m ² .N ⁻¹	$-7.107 \cdot 10^{-12}$	C_{12}^E	N.m ⁻²	$6.312 \cdot 10^{10}$
S_{44}^E	m ² .N ⁻¹	$5.096 \cdot 10^{-11}$	C_{13}^E	N.m ⁻²	$6.385 \cdot 10^{10}$
S_{66}^E	m ² .N ⁻¹	$4.497 \cdot 10^{-11}$	C_{44}^E	N.m ⁻²	$1.962 \cdot 10^{10}$
S_{11}^D	m ² .N ⁻¹	$1.436 \cdot 10^{-11}$	C_{66}^E	N.m ⁻²	$2.224 \cdot 10^{10}$
S_{33}^D	m ² .N ⁻¹	$9.750 \cdot 10^{-11}$	C_{11}^D	N.m ⁻²	$1.183 \cdot 10^{11}$
S_{12}^D	m ² .N ⁻¹	$-8.112 \cdot 10^{-12}$	C_{33}^D	N.m ⁻²	$1.392 \cdot 10^{11}$
S_{13}^D	m ² .N ⁻¹	$-2.250 \cdot 10^{-12}$	C_{12}^D	N.m ⁻²	$4.376 \cdot 10^{10}$
S_{44}^D	m ² .N ⁻¹	$2.294 \cdot 10^{-11}$	C_{13}^D	N.m ⁻²	$4.436 \cdot 10^{10}$
S_{66}^D	m ² .N ⁻¹	$4.497 \cdot 10^{-11}$	C_{44}^D	N.m ⁻²	$3.420 \cdot 10^{10}$
			C_{66}^D	N.m ⁻²	$2.224 \cdot 10^{10}$

Bibliographie

- Ahmadian, M. and Jeric, K.M. (2001), “On the application of shunted piezoceramics for increasing acoustic transmission loss in structures”. *Journal of Sound and Vibration*, **243**(2): 347-359.
- Allaire, G. and Kohn, R. (1993a), “Explicit bounds on the elastic energy of a two-phase composite in two space dimensions”. *Quarterly of Applied Mathematics*, **51**(4): 675–699.
- Allaire, G. and Kohn, R. (1993b), “Topology optimization and optimal shape design using homogenization”. In: *Bendsøe, M.P.; Mota Soares, C.A. (eds.), Topology design of structures (Proc. NATO ARW, Sesimbra, Portugal 1992)*, pp. 207–218.
- Allaire, G. (1997), “The homogenization method for topology and shape optimization”. In: *Rozvany, G.I.N. (ed.), Topology optimization in structural mechanics (Proc. CISM Course, held in Udine, 1996)*, pp. 101–133.
- Alessandroni, S., dell’Isola, F. and Porfiri, M.A. (2002), “A revival of electric analogs for vibrating mechanical systems aimed to their efficient control by pzt actuators”. *International Journal of Solids and Structures*, **39**(20): 5295–5324.
- Allik, H. and Hughes, T. J. R. (1970), “Finite Element Method for Piezoelectric Vibration”. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **2**(2): 151–157
- Astley, R.J. (2000), “Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**(7), 951-976.
- Bai, M. R. and Tsao, M. (2002), “Estimation of sound power of baffled planar sources using radiation matrices”. *Journal of the Acoustical Society of America*, **112**(3), 876:883.
- Badel, A., Lagache, M., Guyomar, D., Lefeuvre, E. and Richard, C. (2007), “Finite element and simple lumped modeling for flexural nonlinear semi-passive damping”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **18**(7): 727–742.
- Basu, U. and Chopra, A.K. (2003), “Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**: 1337-1375.
- Batoz, J.L. (1995), *Modélisation des Structures par éléments Finis Vol. 1*, Editions Hermès, Paris, France.
- Becker, J., Fein, O., Maess, M. and Gaul, L. (2006), “Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping”. *Computers and Structures*, **84**: 2340–2350.
- Behrens, S., Moheimani, S., and Fleming, A. J. (2003), “Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller”. *Journal of Sound and Vibration*, **266**(5): 929–942.

- Belloli, A. and Ermanni, P. (2007), "Optimum placement of piezoelectric ceramic modules for vibration suppression of highly constrained structures". *Smart Materials and Structures*, **16**(5): 1662–1671.
- Belloli, A., Nedereberger, D., Pietrzko, S., Morari, M. and Ermanni, P. (2007), "Structural vibration control via r–l-shunted active fiber composites". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **18**(3): 275–287.
- Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N. (1988), "Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method". *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**:197–224
- Bendsøe, M.P. (1989). "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem". *Structural Optimization*, **1**: 193-202.
- Bendsøe, M.P. and Sigmund, O. (2003), *Topology Optimization – Theory, Methods and Applications*, Springer, New York, USA.
- Benjeddou, A. (2000), "Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey". *Computers and Structures*. **76**(1–3): 347–363.
- Benjeddou, A. and Deü, J-F. (2002), "A two-dimensional closed-form solution for the free-vibrations analysis of piezoelectric sandwich plates". *International Journal of Solids and Structures*. **39**(6): 1463–1486.
- Bérenger, J.-P. (1994), "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *Journal of Computational Physics*, **114**(1): 185–200.
- Berkhoff, A.P. (2000), "Sensor scheme design for active structural acoustic control", *Journal of the Acoustical Society of America*, **108**(3): 1037–1045.
- Bernadou, M. and Haenel, C. (2003a), "Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells. Part I: The continuous problem". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **192**(37–38): 4003–4043.
- Bernadou, M. and Haenel, C. (2003b), "Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells, Part II: approximation by finite element methods and numerical experiments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*". **192**(37–38): 4045–4073.
- Brebbia, C.A. and Skerget, L. (2008), *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXX*, WIT Press, Southampton, UK.
- Carbonari, R.C., Silva, E.C.N. and Nishiwaki, S. (2007), "Optimum placement of piezoelectric material in piezo actuator design". *Smart materials and structures*, **16**: 207–220.
- Carneal, J.P. and Fuller, C. (2004), "An analytical and experimental investigation of active structural acoustic control of noise transmission through double panel systems", *Journal of Sound and Vibration*, **272**(3-5): 749-771.
- Carrera, E. and Boscolo, M. (2007), "Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **70**(10): 1135–1181.
- Caruso, G. (2001), "A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping". *Smart Materials and Structures*, **10**(5): 1059–1068.

- Casadei, F., Ruzzene, M., Dozio, L. and Cunefare, K.A. (2010), "Broad band vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates". *Smart Materials and Structures*, **19**(1): 015002.
- Chen, S., Wang, Z., and Liu, X.-H. (1997), "Active vibration control and suppression for intelligent structures". *Journal of Sound and Vibration*, **200**(2): 167–177.
- Chomette, B., Remond, D. R., Chesne, S. and Gaudiller, L. (2008), "Semi-adaptive modal control of on-board electronic boards using an identification method". *Smart Materials and Structures*, **17**(6): 065019. doi:10.1088/0964-1726/17/6/065019.
- Christensen, P.W. and Klarbring, A. (2009), *An Introduction to Structural Optimization*, Springer Science + Business Media B.V., Ontario, CA.
- Collet, M., Cunefare, K.A. (2008), "Modal synthesis and dynamical condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **19**(11): 1251-1271.
- Collet, M., Cunefare, K.A. and Ichchou, M.N. (2009), "Wave motion optimization in periodically distributed shunted piezocomposite beam structures". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **20**(7): 787–808.
- Cunefare, K.A., de Rosa, S., Sadegh, N. and Larson, G. (2000), "State-Switched Absorber for Semi-Active Structural Control". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **11**(4): 300-310.
- Curie, P. (1859-1906), *Œuvres de Pierre Curie publiées par les soins de la société française de physique*. Éditions des archives contemporaines, 1859-1906. Texte complet disponible à l'adresse <http://gallica2.bnf.fr>
- da Silva, L.P., Larbi, W. and Deü, J-F. (2011a), "Modèles numériques d'ordre réduits pour la prédiction et l'atténuation du rayonnement acoustique de structures par dispositifs piézoélectriques shuntés". In: *Actes du 20ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2011)*, Besançon, France, 29 august – 2 September 2011.
- da Silva, L.P., Larbi, W. and Deü, J-F. (2011b), "Modèles numériques d'ordre réduits pour la prédiction et l'atténuation du rayonnement acoustique de structures par dispositifs piézoélectriques shuntés". In: *Journées des Jeunes Chercheurs en vibro-Acoustique et contrôle du Bruit (JJCAB Nevers)*, Nevers, France, 9-10 November 2011.
- da Silva, L.P., Deü, J-F., Larbi, W. and Trindade, M.A. (2012a), "An efficient finite element approach for reduction of structural vibration and acoustic radiation by passive shunted piezoelectric systems". In: *Proceedings of 10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM 2012)*, São Paulo, Brazil, 8–13 July 2012. doi: <http://dx.doi.org/10.5151/meceng-wccm2012-18711>
- da Silva, L.P., Larbi, W. and Deü, J-F. (2012b), "Modèles numériques d'ordre réduits pour la prédiction et l'atténuation du rayonnement acoustique de structures par dispositifs piézoélectriques shuntés". In: *Journées des Jeunes Chercheurs en vibro-Acoustique et contrôle du Bruit (JJCAB 2012)*, Les Mans, France, 15-16 November 2012.

- da Silva, L.P., Deü, J.-F., Larbi, W. and Trindade, M. A. (2013), “Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient F.E. formulation and reduced-order models”. In: *Proceedings of the 1st Euro-Mediterranean Conference on Structural Dynamics and Vibroacoustics* (MEDYNA 2013), Marrakech, Morocco, 23-25 April 2013.
- Davis, C.L. and Lesieutre, G.A. (1995), “A modal strain energy approach to the prediction of resistively shunted piezoceramic damping”. *Journal of Sound and Vibration*, **184**(1): 129–139.
- De Man, P. (2004), “Contrôle actif du rayonnement acoustique des plaques: une approche à faible autorité PhD thesis Active Structures”, PhD thesis, Laboratory of Université libre de Bruxelles, Bruxelles.
- de Marneffe, B., and Preumont, A. (2008), “Vibration damping with negative capacitance shunts : theory and experiment”. *Smart Materials and Structures*, **17**(3): 035015.
- dell’Isola, F., Maurini, C. and Porfiri, M. (2004), “Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers: prototype design and experimental validation”. *Smart Materials and Structures*, **13**(2): 299–308.
- Den Hartog, J. P. (1956), *Mechanical vibrations*, Mc Graw Hill Book Company, New York, NY, USA.
- Deü, J.-F., Larbi, W. and Ohayon, R. (2008), “Piezoelectric structural acoustic problems: symmetric variational formulations and finite element results”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(19-20): 1715-1724.
- Ducarne, J. (2009), “Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d’amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés”, PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris.
- Ducarne, J., Thomas, O. and Deü, J.-F. (2010), “Structural vibration reduction by switch shunting of piezoelectric elements: modeling and optimization”. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, **21**(8): 797–816.
- Duysinx, P. (1996), “Optimisation topologique : du milieu continu à la structure élastique”, PhD thesis, Université de Liège, Liège.
- Elliott, S.J. and Johnson, M.E. (1993), “Radiation modes and the active control of sound power”. *Journal of Acoustical Society of America*, **94**(4): 2194-2204.
- Engquist, B. and Majda, A. (1977), “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”. *Mathematics of Computation*, **31**(139): 629-651.
- Estorff, O. Von (1992), “Coupling of BEM and FEM in the Time Domain - Some Remarks on Its Applicability and Efficiency”. *Computers & Structures*, **44**(1-2): 325-337.
- Fahy, F.J. and Gardonio, P. (2007), *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*, Academic Press Elsevier, New York, NY, USA.
- Feng, J., Zheng, X., Wang, H. *et al.* (2013) “Low-Frequency Acoustic-Structure Analysis Using Coupled FEM-BEM Method”. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**: 583079. doi:10.1155/2013/583079
- Fernandes, A. (2000), “Modèle et étude de composants piézoélectriques : applications aux structures multifonctionnelles”, PhD thesis, Université Paris VI, Paris.

- Filippi, P.J.T. (1994), *Acoustique Générale*, Les Ulis: Les éditions de physique & Société Française d'Acoustique, Paris, France.
- Fleming, A.J., Behrens, S. and Moheimani, S.O.R. (2000), "Synthetic impedance for implementation of piezoelectric shunt-damping circuits". *Electronics Letters*, **36**(18): 1525-1526.
- Foda, M.A. and Alsaif, K.A. (2012), "Vibration mitigation of composite laminated satellite solar panels using distributed piezoelectric patches". *Smart Structures and Systems*, **10**(2): 111-130.
- Forward, R.L. (1979), "Electronic Damping of Vibrations in Optical Structures". *Applied Optics*, **18**(5): 690-697.
- Frecker, M.I. (2003), "Recent advances in optimization of smart structures and actuators". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **14**(4-5): 207-216.
- Gardonio, P., Bianchi, E. and Elliott, S.J. (2004), "Smart panel with multiple decentralized units for the control of sound transmission. Part I: theoretical predictions". *Journal of Sound and Vibration*, **274**(1-2): 163-192.
- Gardonio, P. and Elliott, S.J. (2005), "Smart panels with velocity feedback control systems using triangularly shaped strain actuators". *Journal of the Acoustical Society of America*, **117**(4): 2046-2064.
- Gerdes, K. (1998), "A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **164**(1-2): 95-105
- Ghorbel, S. (2009), "Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques : expérimentations, simulations et corrélations", PhD thesis, Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des Matériaux, Supméca, Paris.
- Godoy, T.C. and Trindade, M.A. (2011), "Modeling and analysis of laminate composite plates with embedded active-passive piezoelectric networks". *Journal of Sound and Vibration*, **330**: 194-216.
- Goldberg, D.E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA.
- Guyomar, D., Faiz, A., Petit, L. and Richard, C. (2006), "Wave reflection and transmission reduction using piezoelectric semipassive nonlinear technique". *The Journal of the Acoustical Society of America*, **119**(1): 285-298.
- Guyomar, D., Richard, T. and Richard, C. (2008), "Sound wave transmission reduction through a plate using synchronized switch damping technique". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **19**(7): 791-803.
- Hagood, N.W. and Flotow, A.V. (1991), "Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks". *Journal of Sound and Vibration*, **146**(2): 243-68.
- Hanson, R.J. and Hiebert, K.L. (1981), "A Sparse Linear Programming Subprogram". *Technical Report SAND81-0297* Sandia National Laboratories.
- Harari, I. and Albocher, U. (2006), "Studies of FE/PML for exterior problems of time-harmonic elastic waves". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**(29-32): 3854-3879.
- Hollkamp, J.J. (1994), "Multimodal passive vibration suppression with piezoelectric materials and resonant shunts". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **5**(1): 49-57.

- Hollkamp, J.J. and Starchville, T.F. Jr. (1994), "A self-tuning piezoelectric vibration absorber". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **5**(4): 559–566.
- Hwang, W.-S., and Park, H. C. (1993), "Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators". *AIAA Journal*, **31**(5): 930–937.
- IEEE (1988), *IEEE Standard on Piezoelectricity. ANSI/IEEE Standard 176-1987*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., New York, NY, USA.
- Ikeda, T. (1990), *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- Inman, D. J. (1994), *Engineering Vibration*. Prentice Hall International, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Karim, Y. (2013), "Caractérisation robuste de liaisons amortissantes avec dispositifs piézo-électriques pour la réduction de vibrations de structures", PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris.
- Kim, B., Washington, G. N. and Yoon, H.-S. (2013), "Active Vibration Suppression of a 1D Piezoelectric Bimorph Structure Using Model Predictive Sliding Mode Control". *Smart Structures and Systems*, **11**(6): 623-635.
- Kim, J., Varadan, V. V., and Varadan, V. K. (1997), "Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(5): 817–832.
- Johnk, C. T. A. (1988), *Engineering electromagnetic fields and waves, 2nd. ed.*, John Wiley & sons, Hoboken, NJ, USA.
- Kögl, M. and Silva, E.C.N. (2005), "Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators". *Smart Materials & Structures*, **14**(2): 387–399.
- Lammering, R., and Mesecke-Rischmann, S. (2003), "Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells". *Smart Materials and Structures*, **12**(6): 904. doi:10.1088/0964-1726/12/6/007.
- Larbi, W. (2006), "Modélisation d'interfaces dissipatives intelligentes en interaction fluide-structure - Application aux structures composites de révolution avec fluide interne", PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris.
- Larbi, W., Deü, J.-F., Ciminello, M. ad Ohayon, R. (2010), "Structural-acoustic vibration reduction using switched shunt piezoelectric patches: a finite element analysis". *Journal of Vibration and Acoustics*, **132**(5): 051006.
- Lee, J. and Chen, J. (1999), "Active control of sound radiation from a rectangular plate excited by line moment". *Journal of Sound and Vibration*, **220**(1): 99-115.
- Lesieutre, G.A. and Davis, C.L. (1997), "Can a coupling coefficient of a piezoelectric device be higher than those of its active material?". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **8**(10): 859–867.
- Lesieutre, G. A. (1998), "Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials". *The Shock and Vibration Digest*, **30**(3): 187–195.
- Lippman, G. (1881), "Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques". *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, **10**(1): 381-394.

- Mackerle, J. (2003), "Smart materials and structures – a finite element approach – an addendum : a bibliography (1997-2002)". *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **11**(5): 707. DOI:10.1088/0965-0393/11/5/302.
- Malgaca, L. and Karagulle, H. (2009), "Simulation and experimental analysis of active vibration control of smart beams under harmonic excitation". *Smart Structures and Systems*, **5**(1), 55-68.
- Mason, W. P. (1950), *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, NY, USA.
- Maurini, C., dell'Isola, F. and Del Vescovo, D. (2004), "Comparison of piezoelectronic networks acting as distributed vibration absorbers". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**(5): 1243–1271.
- Maurini, C., Pouget, J. and dell'Isola, F. (2006), "Extension of the Euler–Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach". *Computers and structures*, **4**(22–23), 1438–1458.
- Moheimani, S. O. R. (2003), "A Survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **11**(4): 482:494.
- Morgan Electro Ceramics (2014). Piezoelectric ceramics. Properties & Applications. <http://www.xmarks.com/site/www.morganelectroceramics.com/pzbook.html> (accessed Jun 2014).
- MSC (2010), *MD-NASTRAN 2010 Documentation*, MSC Software Corporation.
- Nakasone, P.H., Kiyono, C.Y. and Silva, E.C.N. (2008), "Design of piezoelectric sensors, actuators, and energy harvesting devices using topology optimization". In: *Proceedings of SPIE 6932, Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2008*, San Diego, USA, 8 April 2008. pp: 69322W.
- Nakasone, P.H. and Silva, E.C.N. (2011), "Dynamic design of piezoelectric laminated sensors and actuators using topology optimization". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **21**: 1627–1652.
- Niederberger, D., Fleming, A., Moheimani, S.O.R. and Morari, M. (2004), "Adaptive multi-mode resonant piezoelectric shunt damping". *Smart Materials and Structures*, **13**(5): 1025–1035.
- Niederberger, D. (2005), "Smart Damping Materials using Shunt Control". PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology – ETH, Zurich, Swiss
- Oude Nijhuis, Marco H.H. and Boer, A. de (2002), "Finite Element Models Applied in Active Structural Acoustic Control", *Proceedings of the SPIE 4693, Smart Structures and Materials 2002: Modeling, Signal Processing, and Control*, San Diego, CA, USA, March.
- Ouisse, M. et Sadoulet-Reboul, E. (2010), *Acoustique & Vibroacoustique – Bruits des systèmes industriels*, Notes de cours, Ecole National Supérieure de Mécanique et Microtechniques, ENSMM, Besançon.
- Ozer, M.B. and Royston, T.J. (2003), "Passively minimizing structural sound radiation using shunted piezo-electric materials". *Journal of Acoustical Society of America*, **114**(4): 1934-1946.

- Park, C. H. (2003), “Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements”. *Journal of Sound and Vibration*, **268**: 115–129.
- Park, J., Lim, S., Choi, S., Kim, J., and Park, Y. (2004), “Vibration reduction of a CD-ROM drive base using a piezoelectric shunt circuit”. *Journal of Sound and Vibration*, **269**: 1111–1118.
- Pereira da Silva, L., Larbi, W. and Deü, J-F. (2013a), “Comparison of finite element formulations for the dynamic analysis of elastic structures with piezoelectric patches”. In: *6th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials (SMART 2013)*, Turin, Italy, 24–26 June 2013.
- Pereira da Silva, L., Larbi, W. and Deü, J-F. (2013b), “Modélisation et optimisation de l'atténuation du rayonnement acoustique de plaques minces par dispositifs piézoélectriques shuntés”. In: *Actes du 21ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2013)*, Bordeaux, France, 26-30 August 2013.
- Pereira da Silva, L., Larbi, W. and Deü, J-F. (2014a), “Topology optimization of shunted piezoelectric elements for structural vibration reduction”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. **In press**. doi: 10.1177/1045389X14538533
- Pereira da Silva, L., Larbi, W. and Deü, J-F. (2014b), “Topology optimization of shunted piezoelectric elements for structural-acoustic control”. In: *Proceedings of the 5th International Symposium on Aircraft Materials (ACMA 2014)*, Marrakech, Morocco, 23-26 April 2014.
- Pereira da Silva, L., Larbi, W., Deü, J-F. and Trindade, M.A. (2014c), “A FE approach for radiation reduction of thin structures using shunted piezo-systems”. **In preparation**.
- PI (2014), Physik Instrumente. Piezoelectric ceramic products. <http://www.piceramic.com>. (accessed Jun 2014).
- Pietrzko, S.J. and Mao, Q. (2009), “Reduction of structural sound radiation and vibration using shunt piezoelectric materials”. *Solid State Phenomena*, **147-149**: 882-889.
- Randall, J. A. (2003), “The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse”. *Sound and Vibration*, **August 2003**: 14-20.
- Raju, B., Bianchini, E., Arata, J. and Roylance, M. (2005), Improved Performance of a Baffle-less Automotive Muffler Using Piezoelectric Materials. *SAE Technical Paper 2005-01-2353*.
- Rahmoune, M., Benjeddou, A. and Ohayon, R. (1998), “New thin piezoelectric plate models”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. **9**(12): 1017–1029.
- Richard, C., Guyomar, D., Audigier, D. and Bassaler, H. (2000), “Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor”. In: *Proceeding of SPIE 3989, Smart Structures and Materials 2000: Passive Damping and Isolation*, Newport Beach, CA, 06 March 2000, pp: 288–299.
- Reddy, J.N. (1997), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- Rosi, G., Pouget, J., dell’Isola, F. (2010), “Control of sound radiation and transmission by a piezoelectric plate with an optimized resistive electrode”. *European Journal of Mechanics/A Solids*, **29**(5): 859 – 870.

- Rosi, G., Paccapeli, R., Ollivier, F., Pouget, J. (2013), "Optimization of piezoelectric patches positioning for passive sound radiation control of plates". *Journal of Vibration and Control* **19**(5): 658 – 673.
- Rouleau, L. (2013), "Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux viscoélastiques", PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris.
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M. and Birker, T. (1992), "Generalized shape optimization without homogenization". *Structural Optimization*, **4**(3-4), 250–254.
- Rozvany, G.I.N., Zhou, M. Birker, T. and Sigmund, O. (1993), "Topology Optimization Using Iterative Continuum-Type Optimality Criteria (COC) Methods for Discretized Systems". *Topology Design of Structures (M.P. Bendsøe et C.A. Mota Soares, eds.)*, **227**: 273-286.
- Rozvany, G.I.N. (2001), "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **21**: 90–108.
- Rozvany, G.I.N. (2009), "A critical review of established methods of structural topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **37**: 217–237.
- Rupp, C.J., Evgrafov, A., Maute, K. and Dunn, M.L. (2009), "Design of Piezoelectric Energy Harvesting Systems: A Topology Optimization Approach Based on Multilayer Plates and Shells". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **20**(16): 1923–1939.
- Saint-Gobain (2014). Céramiques piézoélectriques. <http://www.quartz.saint-gobain.com>. (accessed Jun 2014).
- Saravanos, D. A. and Heyliger P. (1999), "Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shell". *Applied Mechanics Review*, **52**(10): 305-320.
- Seba, B., Ni, J. and Lohmann, B. (2006), "Vibration attenuation using a piezoelectric shunt circuit based on finite element method analysis". *Smart Materials and Structures*, **15**(2): 509–517.
- Sénéchal, A., Thomas, O. and Deü, J-F. (2010), "Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures—application to a turbojet fan blade". In: *The ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences (IDETC) and Computers and Information in Engineering Conference (CIE)*, Montreal, Canada, 15–18 August 2010.
- Sénéchal, A. (2011), "Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : Application aux turbomachines", PhD thesis, Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam, Paris.
- Sigmund, O. and Torquato, S. (1999), "Design of smart composite materials using topology optimization". *Smart Materials and Structures*, **8**(9): 365-379.
- Sigmund, O. (2007), "Morphology-based black and white filters for topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **33**(4): 401–424.
- Silva, E.C.N. and Kikuchi, N. (1999), "Design of piezoelectric transducers using topology optimization". *Smart Materials and Structures*, **8**(3): 350–364.

- Silva, E.C.N. (2003), *PMR 5215 Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos*, Apostila de curso, Escola Politécnica da USP, USP, São Paulo. <http://sites.poli.usp.br/p/emilio.silva/> (accessed Mars 2013).
- Silva, E.C.N. (2009), "Comment on "Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials"". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **39**(3): 337–338.
- Sun, H., Yang, Z.C., Li, K.X., Bin, L., Xie, J., Wu, D. and Zhang, L.L. (2009), "Vibration suppression of a hard disk driver actuator arm using piezoelectric shunt damping with a topology-optimized PZT transducer". *Smart Materials and Structures*, **18**(6): 065010.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N. (1991), "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **93**: 291-318.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N. (1992), "Generalized Layout Optimization of Shape and Toplogy in Three Dimensional Shell Structures". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **93**: 291-318.
- Tang, J., and Wang, K.W. (2001), "Active-passive hybrid piezoelectric networks for vibration control: comparisons and improvement". *Smart Materials and Structures*, **10**(4): 794–806.
- Tateo, F., Collet, M., Ouisse, M., Ichchou, M.N. and Cunefare, K.A. (2013), Design and experimntal validation of a metacomposite made of an array of piezopatches shunted on negative capacitance circuits for vibroacoustic control", In: *Proceedings of the ASME 2013, Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, Snowbird, Utah, USA, September 16–18, 2013.
- Tiersten, H. F. (1969), *Linear piezoelectric plate vibrations*, Plenum Press, New York, NY, USA.
- Thomas, O., Deü, J–F. and Ducarne, J. (2009), "Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite elements formulation and electromechanical couplings coefficients". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **80**(2): 235–268.
- Thomas, O., Ducarne, J. and Deü, J–F. (2012a), "Performance of piezoelectric shunts for vibration Reduction". *Smart Materials and Structures*, **21**(1): 015008.
- Thomas, O., Ducarne, J. and Deü, J–F. (2012b), "Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction". *Journal of Sound and Vibration*, **331**(14): 3286–3303.
- Thomsen, J. (1991). "Optimization of Composite Discs", *Structural Optimization*, **3**: 89-98.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A. and Ohayon, R. (2001), "Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams. Part 1: formulation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**(7), 835-854.
- Trindade, M.A. and Maio, C.E.B. (2008), "Multimodal passive vibration control of sandwich beams with shunted shear piezoelectric materials". *Smart Materials and Structures*, **17**: 055015.
- Trindade, M.A. and Benjeddou, A. (2008), "Refined sandwich model for the vibration of beams with embedded shear piezoelectric actuators and sensors". *Computers and Structures*, **86**(9): 859-869.

- Trindade, M.A. and Benjeddou, A. (2009), "Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization". *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **16**: 210–223.
- Tzou, H. S. and Tseng, C. I. (1990), "Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach". *Journal of Sound and Vibration*, **138**(1): 17-34.
- Vasques, C. M. A. and Rodrigues, J. D. (2005), "Coupled three-layered analysis of smart piezoelectric beams with different electric boundary conditions". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **62**(11): 1488–1518.
- Vasques, C.M.A. and Dias Rodriguez, J. (2006), "Active vibration control of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies", *Computers & Structures*, **84**(22-23): 1402-1414.
- Viana, F.A.C. and Steffen Jr, V. (2006), "Multimodal vibration damping through piezoelectric patches and optimal resonant shunt circuits". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, **28**(3), 293-310.
- Wallace, C.E. (1972), "Radiation resistance of a rectangular panel". *Journal of the Acoustical Society of America*, **51**(3), 946–952.
- Wein, F., Kaltenbacher, M., Leugering, G., Bänsch, E. and Schury, F. (2009), "Topology optimization of a piezoelectric-mechanical actuator with single- and multiple frequency excitation". *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, **30**(3–4): 201–221.
- Wein, F., Kaltenbacher, M., Leugering, G., Bänsch, E., and Schury, F. (2011), "On the effect of self-penalization of piezoelectric composites in topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **43**(3): 405–417.
- Wu, S.Y. (1998), "Method for multiple-mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer". In: *Proceeding of SPIE 3327, Smart Structures and Materials 1998: Passive Damping and Isolation*, San Diego, CA, 16 June 1998, pp: 159–168. doi:10.1117/12.310680
- Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W. and Bettess, P. (1977), "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**(2): 355–375.
- Zhang, J.M., Chang, W., Varadan, V.K. and Varadan, V.V. (2001), "Passive underwater acoustic damping using shunted piezoelectric coating", *Smart Materials and Structures*, **10**: 414–420.
- Zhang, W., Qiu, J. and Tani, J. (2004), "Robust vibration control of a plate using self-sensing actuators of piezoelectric patches", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **15**(12): 923-931.
- Zheng, B., Chang, C–J. and Gea, H.C. (2009), "Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **38**: 17–23.

Résumé

Dans le cadre de la lutte contre les nuisances sonores et vibratoires, cette thèse porte sur la modélisation numérique des structures amorties par dispositifs piézoélectriques shuntés. La première partie du travail concerne la modélisation par éléments finis de structures en vibrations avec des pastilles piézoélectriques shuntées. Une formulation éléments finis originale est analysée et validée. Puis, différentes stratégies de réduction de modèle basées sur la méthode de projection modale sont analysées pour les cas de shunts résistif et résonant. La deuxième partie du travail est consacrée à l'optimisation du système électromécanique, dans le but de maximiser l'amortissement apporté par les dispositifs piézoélectriques shuntés. Une procédure d'optimisation topologique, basée sur la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization method), est développée pour déterminer les géométries et les emplacements optimaux des pastilles piézoélectriques. Enfin, la dernière partie du travail propose une approche numérique pour modéliser et optimiser la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces dans le domaine des basses fréquences avec des éléments piézoélectriques shuntés.

Mots clés : Méthode des éléments finis, modèles d'ordre réduit, réduction des vibrations, amortissement par dispositifs piézoélectriques shuntés, optimisation topologique, rayonnement acoustique.

Abstract

Passive structural vibration and noise reduction by means of shunted piezoelectric patches is addressed in this thesis. The first part of the work concerns the finite element modeling of shunted piezoelectric systems. An original finite element formulation is analyzed and validated. Then, several reduced order models based on a normal mode expansion are analyzed for a resistive and a resonant shunt circuits. In the second part of the work, the concept of topology optimization, based on the Solid Isotropic Material with Penalization method (SIMP), is employed to optimize, in terms of damping efficiency, the geometry of piezoelectric patches as well as their placement on the host elastic structure. The proposed optimization procedure consists of distributing the piezoelectric material in such a way as to maximize the modal electromechanical coupling factor of the mechanical vibration mode to which the shunt is tuned. Finally, the last part of the work concerns the numerical modeling of noise and vibration reduction of thin structures in the low frequency range by using shunted piezoelectric elements. An efficient approach that can be applied to any thin continuous plate in an infinite baffle is proposed.

Keywords: Finite element method, reduced order models, vibration reduction, shunted piezoelectric damping, topology optimization, acoustic radiation.