



HAL
open science

Etude du spectre discret de perturbations d'opérateurs de la physique mathématique

Clement Dubuisson

► **To cite this version:**

Clement Dubuisson. Etude du spectre discret de perturbations d'opérateurs de la physique mathématique. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0127 . tel-01132967

HAL Id: tel-01132967

<https://theses.hal.science/tel-01132967>

Submitted on 18 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude du spectre discret de perturbations d'opérateurs de la physique mathématique

Study of the discrete spectrum of complex perturbations of operators from
mathematical physics

THÈSE

soutenue publiquement le 20 Novembre 2014

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Bordeaux
(spécialité mathématiques pures)

par

Clément DUBUISSON

Rapporteurs :

M. JOYE Alain
M. LAPTEV Ari

Prof. Univ. Grenoble 1
Prof. Imperial College London

Composition du jury :

M. BOUCLET Jean-Marc
M. GOLÉNIA Sylvain
M. HARTMANN Andreas
M. KUPIN Stanislas

Prof. Univ. Toulouse 3
MdC Univ. Bordeaux
Prof. Univ. Bordeaux
Prof. Univ. Bordeaux (Directeur)

Étude du spectre discret de perturbations d'opérateurs de la physique mathématique

Clément Dubuisson

Thèse de Mathématiques pures
Novembre 2014

Résumé

Le but de cette thèse est d'obtenir des informations sur le spectre discret d'opérateurs non auto-adjoints définis par des perturbations relativement compactes d'opérateurs auto-adjoints. Ces opérateurs auto-adjoints sont choisis parmi les opérateurs classiques de mécanique quantique. Il s'agit des opérateurs de Dirac, de Klein-Gordon et le laplacien fractionnaire qui généralise l'opérateur de Schrödinger habituellement considéré pour de tels problèmes. La principale méthode utilisée ici relève d'un théorème d'analyse complexe donnant une condition de type Blaschke sur les zéros d'une fonction holomorphe du disque unité. Cette condition traduit le comportement des valeurs propres de l'opérateur perturbé sous forme d'inégalités de type Lieb-Thirring. Une autre méthode venant d'analyse fonctionnelle a été employée pour obtenir de telles inégalités et les deux méthodes sont comparées entre elles.

Mots-clés : Spectre discret, inégalités de type Lieb-Thirring, opérateur de Dirac, opérateur de Klein-Gordon, opérateur Schrödinger fractionnaire, transformations conformes.

Abstract

The topic of this thesis concerns the discrete spectrum of non-selfadjoint operators defined by relatively compact perturbation of selfadjoint operators. These selfadjoint operators are chosen among classical operators of quantum mechanics. These are Dirac operator, Klein-Gordon operator, and the fractional Laplacian who generalize the Schrödinger operator. The main method is based on a theorem of complex analysis which gives Blaschke-type condition on the zeros of a holomorphic function on the unit disc. This Blaschke condition gives the information on the behaviour of eigenvalues of the perturbed operator by mean of Lieb-Thirring-type inequalities. Another method using functional analysis is also used to obtain these kind of inequalities and both methods are compared to each other.

Keywords : Discrete spectrum, Lieb-Thirring-type inequalities, conformal mappings, Dirac operator, Klein-Gordon operator, fractional Schrödinger operator.

Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251
351, cours de la Libération - F 33405 TALENCE cedex

À mes parents.

*"Ce n'est qu'en essayant continuellement qu'on finit par réussir...
En d'autres termes, plus ça rate, plus cela a de chances de réussir."
Proverbe Shadock*

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Stanislas Kupin, de m'avoir soutenu pour obtenir cette bourse de thèse d'abord, puis tout au long de ces trois années de doctorat (et maintenant l'ATER). Je suis impressionné par le calme et la patience dont il a fait preuve à mon égard et je lui en suis très reconnaissant. Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'en faire partie. Je remercie tout particulièrement les rapporteurs MM. Joye et Laptev pour leurs commentaires instructifs et M. Joye d'avoir pris le temps de m'aider à corriger certains défauts du mémoire.

Je remercie ensuite mes parents qui m'ont permis d'arriver à ce niveau d'étude. Décrire, témoigner ou expliquer tout ce qu'ils m'apportent depuis si longtemps serait une gageure tant ils m'ont accompagné dans mes diverses activités.

Dans mon parcours en mathématiques, j'ai une pensée émue pour mes professeurs du secondaire : Mme Guine, Mme Laubal et M. Luc, qui m'ont fait apprécier les mathématiques ; une pensée nostalgique pour MM. Cozar et Soladié, mes professeurs de CPGE qui m'ont fait découvrir les mathématiques dans leur rigueur et leur beauté ; une pensée pleine d'admiration pour MM. Cassou et Galusinski pour la magie de leurs enseignements. Je remercie également MM. Matignon, Deville et Fresnel pour leur implication dans l'agrégation et pour avoir toujours été disponibles pour répondre à mes questions. Tous ces professeurs sont des sources d'inspiration tant en mathématiques qu'en enseignement.

Pour avoir fait partie de divers conseils, je ne peux pas ne pas remercier les professeurs qui ont permis à ma génération de suivre une formation de qualité à l'université de Bordeaux (1) jusqu'à l'agrégation : MM. Fresnel, Jaulent et Matignon pour les noms que je connais et tous les professeurs qui y ont participé, sans oublier le personnel administratif qui fait preuve d'une belle efficacité pour tenir ces formations. Je tiens à leur témoigner toute ma reconnaissance d'autant plus par les temps actuels. Je remercie aussi tout le personnel BIATSS qui me (nous) permet de travailler dans d'excellentes conditions. Je remercie M. Ruch, directeur de l'UFR puis UF durant mon mandat d'élu étudiant pour m'avoir reçu et écouté à de nombreuses reprises.

Sur le plan professionnel, je remercie M. Boyer pour la confiance qu'il m'a accordée pour le tutorat, M. Golénia pour son aide depuis le début de mon premier article et M. Golinskii pour ses commentaires mathématiques très instructifs.

Enfin, je remercie les doctorants avec qui j'ai passé de bons moments : Giovanni, Stéphanie, Diomba, Samuel, Bruno, Nicola D.P., Nicolas De., Nicolas Du., Pierre, Youssef, Marouane, Aurélien, Nicolas M., Fanilo, Jocelyn, Jean-Baptiste, etc. J'espère que ceux que j'ai oubliés ne m'en tiendront pas rigueur...

Je remercie ma famille et mes proches pour leur présence tout au long de ces années. J'ai une pensée particulière pour Philippe T. qui aurait dû suivre un parcours analogue au mien et qui, au lieu de cela, doit se battre contre la maladie.

Last but not least, Alice, depuis notre rencontre et encore aujourd'hui dans la vie de tous les jours, j'admire ton intelligence, ta vivacité d'esprit et tes passions. Merci d'être à mes côtés tous les jours, malgré mon caractère...

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte et structure du mémoire	1
1.2	Un historique récent du problème	2
1.3	Méthodes employées et énoncés des principaux résultats	4
1.4	Prolongement de la thèse	8
2	Préliminaires	9
2.1	Généralités : définitions et notations	9
2.1.1	Différentes classes d'opérateurs	9
2.1.2	Spectre d'un opérateur et théorème de Weyl	11
2.2	Classes de Schatten-von Neumann et déterminants régularisés	13
2.2.1	Généralités	13
2.2.2	Un déterminant de perturbation	14
2.3	Résultats d'analyse complexe	16
2.3.1	Théorème de Borichev-Golinskii-Kupin	16
2.3.2	Des inégalités de comparaison	17
2.3.3	Transformations conformes	18
2.4	Une inégalité de Birman-Solomyak	18
3	Résultats pour l'opérateur de Dirac	21
3.1	Définition	21
3.2	Résultats et comparaisons	23
3.3	Démonstration en dimension supérieure à 2	26
3.3.1	Transformations conformes pour l'opérateur de Dirac	26
3.3.2	Majoration pour l'opérateur de Dirac	30
3.3.3	Majoration pour l'opérateur perturbé	32
3.3.4	Preuve du théorème 3.2.1 en dimension supérieure à 2	34
3.4	Le cas de la dimension 1	36
3.4.1	Majoration de la résolvante	36
3.4.2	Preuve du résultat en dimension 1	39
3.5	Le cas où la masse est nulle	40
3.5.1	Transformation conforme et majoration de la résolvante	40
3.5.2	Preuve du théorème 3.2.3	42
3.6	Cas de l'opérateur de Klein-Gordon	43
3.6.1	Définition et résultats	43
3.6.2	Démonstrations des résultats	46
4	Résultats pour le Laplacien fractionnaire	55

4.1	Définition	55
4.2	Résultats et démonstrations	56
4.2.1	Transformation conforme pour le Laplacien fractionnaire . . .	57
4.2.2	Majoration pour le Laplacien fractionnaire	58
4.2.3	Majoration de l'opérateur perturbé	61
4.2.4	Preuve du théorème 4.2.1	62
5	Inégalités de type Lieb-Thirring à l'aide d'un théorème de Hansmann	71
5.1	Théorème de Hansmann et résultats	71
5.1.1	Résultats de Hansmann	71
5.1.2	Énoncés des résultats et comparaisons	72
5.1.3	Distorsion pour résolvante	74
5.2	Cas du Laplacien fractionnaire	76
5.3	Cas de l'opérateur de Klein-Gordon	78
6	Annexes	81
6.1	Intégration des inégalités de type Lieb-Thirring dans le cas de l'opérateur de Dirac de masse nulle	81
6.2	Glossaire des notations	84
	Bibliographie	85
	Index	89

1 Introduction

Table des matières

1.1	Contexte et structure du mémoire	1
1.2	Un historique récent du problème	2
1.3	Méthodes employées et énoncés des principaux résultats	4
1.4	Prolongement de la thèse	8

1.1 Contexte et structure du mémoire

Nous présentons brièvement les notations et les données du problème considéré dans ce travail sous une forme générale; certaines notations et appellations seront précisées plus tard et un glossaire des notations se trouve en annexe à la fin du mémoire.

On considère un opérateur auto-adjoint H_0 tel que son spectre vérifie $\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$, où σ_{ess} désigne le *spectre essentiel* de l'opérateur. Un premier exemple d'un tel opérateur est le Laplacien $\Delta f = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. On ajoute à l'opérateur H_0 un *potentiel*, qui sera noté V , et qui agit comme *opérateur de multiplication* par l'application V . Nous désignons alors H_0 comme étant l'opérateur *non perturbé* et nous noterons l'opérateur dit *perturbé* par

$$H = H_0 + V \tag{1.1.1}$$

et cet opérateur agit sur un certain sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ où $n = 1$ pour le cas scalaire et $n > 1$ pour le cas vectoriel.

Dans le cas où $H_0 = -\Delta$, on parle de H comme étant *l'opérateur de Schrödinger*.

Nous verrons les cas où H_0 est soit *l'opérateur de Dirac* D_m (chapitre 3), soit *l'opérateur de Klein-Gordon* K_m (même chapitre, dernière section), où m désigne une masse, ou encore le *Laplacien fractionnaire* $(-\Delta)^s$, $s > 0$ (chapitre 4).

Le choix du potentiel V , pris dans un espace L^p , est fait de sorte que le *spectre essentiel* de l'opérateur H soit identique à celui de l'opérateur non-perturbé H_0 , c'est-à-dire

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0),$$

et comme nous connaissons le spectre essentiel de H_0 , il reste à « déterminer » le *spectre discret* $\sigma_d(H)$ de H , qui est constitué des valeurs propres de multiplicité algébrique finie.

Dans cette thèse, nous donnons des informations sur le spectre discret sous forme d'inégalités de type Lieb-Thirring, qui se présentent souvent de la façon suivante :

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma_{\text{ess}}(H))^\alpha}{d(\lambda, E)^\beta (1 + |\lambda|)^\gamma} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où E désigne les nombres complexes aux « extrémités » de $\sigma_{\text{ess}}(H)$ (à l'exception de ∞) et les constantes positives α, β, γ et C dépendent de différents paramètres.

Avant de passer à un historique récent sur le sujet, nous rappelons ici que l'inégalité de Lieb-Thirring classique est la suivante, [LT76] : pour des potentiels V réels tels que l'intégrale ci-dessous converge, on a

$$\sum_j (\lambda_j)_-^\gamma \leq L_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)_-^{\gamma+d/2} dx \quad (1.1.2)$$

où $L_{\gamma,d}$ est la constante optimale dans (1.1.2), $x_- = \max\{0; -x\}$, et $\gamma \geq \frac{1}{2}$ si $d = 1$, ou $\gamma > 0$ si $d = 2$, ou bien $\gamma \geq 0$ si $d \geq 3$. La recherche des constantes optimales est un sujet de recherche en soi qui ne sera pas abordé ici. Pour plus de détails concernant les hypothèses sur V ou les constantes, on pourra consulter [LW00] ou le théorème 12.4 [LL01] et les remarques qui le suivent.

L'origine des articles [LT76] et [LT75] se trouve dans l'élaboration d'une nouvelle preuve de « stabilité de la matière ». Pour plus de détails sur le sujet on pourra consulter le livre de Lieb et Seiringer [LS09b] et le livre de Balinsky et Evans [BE11].

Le mémoire est structuré ainsi :

1. Dans l'introduction (chapitre 1), on présente les données générales du problème, un bref historique du sujet, les méthodes utilisées et les résultats obtenus grâce à celles-ci.
2. Le chapitre 2 sur les préliminaires donne des définitions et résultats généraux de théorie des opérateurs et de théorie spectrale ainsi que des théorèmes plus spécifiques nécessaires dans ce travail.
3. Les chapitres 3, 4 et 5 respectivement sur l'opérateur de Dirac, le Laplacien fractionnaire et l'application du théorème de Hansmann sont dédiés à l'énoncé (complet) des résultats obtenus et à leurs démonstrations. Les résultats des chapitres 3 et 4 sont obtenus à l'aide du théorème 2.3.1 de Borichev, Golinskii et Kupin, tandis que les résultats du chapitre 5 sont obtenus grâce au résultat de Hansmann (théorème 5.1.1).

1.2 Un historique récent du problème

Comme précisé ci-dessus, le problème est d'obtenir des informations sur le spectre discret de l'opérateur H .

Nous allons dans un premier temps nous concentrer sur l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\Delta + V \quad (1.2.1)$$

Quand le potentiel V est à valeurs réelles, l'opérateur H est (essentiellement) auto-adjoint ce qui permet d'utiliser des techniques poussées pour obtenir des informations sur les valeurs propres du spectre. Ce qui nous intéresse dans ce travail concerne des potentiels à valeurs vectorielles donc l'opérateur perturbé n'est pas *a priori* auto-adjoint.

Au début des années 2000, Abramov, Aslanyan et Davies montrèrent, [AAD01, Theorem 4], que les valeurs propres λ de l'opérateur de Schrödinger agissant dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $V \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à valeurs complexes vérifient

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, |\lambda| \leq \frac{1}{4} \|V\|_{L^1}^2. \quad (1.2.2)$$

à l'aide d'un principe de Birman-Schwinger et en évaluant un certain noyau intégral. Cette inégalité nous donne très clairement une localisation du spectre discret de H puisqu'il se trouve dans le disque dont le centre est l'origine 0 et de rayon $\frac{1}{4} \|V\|_{L^1}^2$.

Cet article est à l'origine de nombreuses recherches et, en particulier, il est communément admis ([BO08], [GK07], [BGK09], [DHK09], etc.) que l'article qui a relancé l'étude des inégalités de type Lieb-Thirring est [FLLS06] en considérant un potentiel à valeurs complexes et non plus seulement réelles, comme ce fut le cas, par exemple, dans [CLN96] pour l'opérateur de Dirac, dans [HS02] pour les matrices de Jacobi, ou encore dans [FLS08] pour l'opérateur de Schrödinger fractionnaire. Dans l'article [FLLS06], les auteurs étudient l'opérateur de Schrödinger $H = -\Delta + V$, agissant dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

Comme ces derniers l'expliquent, la question (posée par Davies) était de trouver une inégalité similaire à (1.2.2) en dimension $d \geq 2$. À défaut d'avoir réussi à majorer le module des valeurs propres, ils ont obtenu une inégalité de type Lieb-Thirring [FLLS06, Theorem 1] :

Théorème 1.2.1. *Soient $d \geq 1$ et $\gamma \geq 1$.*

1. *Pour les valeurs propres de partie réelle négative,*

$$\sum_{\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0} |\operatorname{Re}(\lambda_j)|^\gamma \leq L_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re}(V(x))_-^{\gamma + \frac{d}{2}} dx.$$

2. *Si $\varkappa > 0$, alors les valeurs propres à l'extérieur du cône $\{|\operatorname{Im}(z)| < \varkappa \operatorname{Re}(z)\}$ vérifient*

$$\sum_{|\operatorname{Im}(\lambda_j)| \geq \varkappa \operatorname{Re}(\lambda_j)} |\lambda_j|^\gamma \leq C_{\gamma,d}(\varkappa) \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{\gamma + \frac{d}{2}} dx.$$

Ici $C_{\gamma,d}(\varkappa) = 2^{1+\gamma/2+d/4} \left(1 + \frac{2}{\varkappa}\right)^{\gamma+d/2} L_{\gamma,d}$ et $L_{\gamma,d}$ est la constante de Lieb-Thirring donnée en (1.1.2).

Par la suite de nombreux articles sont parus sur les inégalités de type Lieb-Thirring, généralement pour l'opérateur de Schrödinger, mais aussi sur les matrices de Jacobi, en tant que perturbations non auto-adjointes d'opérateurs auto-adjoints. Nous citons par exemple les articles de Bruneau et Ouhabaz ([BO08]), Borichev,

Golinskii et Kupin ([BGK09]), Laptev et Safronov ([LS09a]), Demuth, Hansmann et Katriel ([DHK09, DHK13]), Golinskii et Kupin ([GK12, GK13]), Hansmann et Katriel ([HK11]), Hansmann ([Han11, Han13]).

Enfin, concernant un équivalent de (1.2.2) en dimension $d \geq 2$ (la question posée par Davies), Frank a montré ([Fra11, Theorem 1]) une inégalité similaire pour $|\lambda|^\gamma$ avec $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

Jusqu'ici nous avons essentiellement parlé de l'opérateur de Schrödinger. Ce n'est pas le seul opérateur de la physique mathématique à avoir été étudié : l'opérateur de Klein-Gordon, l'opérateur de Dirac et plus récemment le Laplacien fractionnaire ont aussi fait l'objet d'études approfondies. Voici quelques références.

Pour l'opérateur de Dirac, citons en premier lieu le livre de Thaller [Tha91], puis les articles [CLN96], [CLT14] et [FS11].

Pour l'opérateur de Klein-Gordon, parfois appelé *opérateur de Schrödinger relativiste*, ainsi que pour le Laplacien fractionnaire, on se réfèrera à [FLS08] ou [LS09b].

Par ailleurs, ces opérateurs ont aussi été étudiés en présence d'un champ magnétique, leur structure est alors différente, mais ils ne seront pas étudiés dans ce travail, en particulier parce que les idées employées ici l'ont déjà été dans l'article de Sambou [Sam14] pour l'opérateur de Schrödinger magnétique.

Enfin, parmi les opérateurs sujets à de nombreux articles mais dont nous ne parlons pas, nous pouvons évoquer les matrices de Jacobi, en tant qu'opérateurs discrets. Comme ils ont aussi été l'objet des mêmes techniques que celles utilisées pour l'opérateur de Schrödinger, nous pouvons citer, par exemple, les articles suivants : [GK07] - pour appliquer les idées de [FLS06] aux matrices de Jacobi, [BGK09] - comme application du théorème de Borichev, Golinskii et Kupin 2.3.1, [HK11] - avec une amélioration du théorème sus-nommé, [FS11] - en présence d'un « saut » pour le spectre et dont les techniques ont aussi été appliquées à l'opérateur de Schrödinger (périodique) et de Dirac en dimension 1, et [Han11] - comme application du théorème 5.1.1.

1.3 Méthodes employées et énoncés des principaux résultats

Nous expliquons les deux méthodes utilisées dans ce mémoire. Puis nous donnons les résultats sous une forme allégée (les constantes auxiliaires ne seront pas explicitées).

La principale méthode employée dans ce travail est basée sur un théorème d'analyse complexe, le théorème 2.3.1 de Borichev, Golinskii et Kupin, prouvé dans [BGK09]. Cette méthode a été employée en particulier par les auteurs pour les matrices de Jacobi (complexes), par Demuth, Hansmann et Katriel dans [DHK09] pour l'opérateur de Schrödinger, et par Sambou dans [Sam14] pour l'opérateur de Schrödinger magnétique en dimension impaire.

Ce théorème fournit une condition de type Blaschke pour les zéros d'une fonction holomorphe sur le disque unité vérifiant l'hypothèse (2.3.1). Nous utilisons comme fonction holomorphe f une variante du déterminant régularisé de sorte que les zéros

de f coïncident avec les valeurs propres de l'opérateur perturbé H . Nous savons alors majorer cette application en fonction de la norme L^p du potentiel V et de la norme de la résolvante de H_0 . Par composition avec une transformation conforme, cette fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$ et sa majoration sont transférées dans le disque unité. Nous appliquons alors le théorème de Borichev, Golinskii et Kupin pour obtenir notre estimation sur les zéros de la fonction dans le disque, puis par la transformation conforme inverse, nous trouvons une estimation sur les valeurs propres de H qui est notre inégalité de type Lieb-Thirring.

L'autre méthode que nous employons est issue d'un résultat de Hansmann (théorème 5.1.1), prouvé dans [Han11]. Il établit une majoration en fonction de la norme L_p du potentiel pour la somme des distances des valeurs propres de l'opérateur perturbé par rapport à l'image numérique de l'opérateur non-perturbé. Il est présenté comme une variante d'un théorème de Kato ([Han11, Theorem 1.1]). Comme le résultat est donné pour des opérateurs bornés, nous l'appliquons aux résolvantes des opérateurs H et H_0 . Il faut alors majorer la norme de la résolvante qui apparaît (c'est la même majoration calculée dans la méthode précédente), et minorer la distance entre un point du plan et le spectre de la résolvante, pour retrouver l'inégalité de type Lieb-Thirring recherchée.

Hansmann a employé ce résultat pour une nouvelle estimation sur les matrices de Jacobi et l'opérateur de Schrödinger.

Dans les énoncés qui suivent nous ne donnons pas le détail de certaines constantes, d'une part par souci de lisibilité et d'autre part, à la différence du cas auto-adjoint, la recherche de constante optimale n'est pas d'actualité. Toutefois un soin particulier a été apporté pour expliciter les constantes apparaissant dans les théorèmes, et elles seront précisées dans les sections concernées pour chaque résultat.

Le premier résultat obtenu concerne l'opérateur de Dirac D_m , $m \geq 0$. On note $D = D_m + V$. En plus de son importance en physique, la particularité de cet opérateur est qu'il n'est pas semi-borné, contrairement à l'opérateur de Schrödinger.

Théorème 1.3.1 (cas $m > 0$). *Soit D_m l'opérateur de Dirac défini en (3.1.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors le spectre discret $\sigma_d(D)$ de D vérifie les inégalités de type Lieb-Thirring suivantes : pour $d \geq 2$ et pour tout $0 < \tau < \min\{p - d, 1\}$,*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m| \cdot |\lambda + m| (1 + |\lambda|)^{2p-2+2\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C est une constante dépendant de différents paramètres.

Et quand $d = 1$, nous avons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| \cdot (1 + |\lambda|)^{2p+2\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C est une constante dépendant de différents paramètres.

Dans le cas où la masse m est nulle, le résultat est le suivant :

Théorème 1.3.2 (cas $m = 0$). Soit D_0 l'opérateur de Dirac défini en (3.1.1) avec $m = 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $0 < \tau < \min\{p - d, 1\}$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(1 + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C est une constante dépendant de différents paramètres.

Nous avons réussi à améliorer ce résultat en appliquant adéquatement une idée au départ prévue pour les opérateurs semi-bornés. Nous obtenons alors le résultat suivant qui est démontré en annexe.

Théorème 1.3.3 (cas $m = 0$). Avec les notations précédentes, nous avons, pour $0 < \tau < p - d$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où ω est définie dans la proposition 6.1.3 et C dépend de n, p, d, ω et τ .

Grâce aux résultats auxiliaires démontrés pour aboutir à ces inégalités, nous avons pu aussi déterminer des inégalités de type Lieb-Thirring pour l'opérateur de Klein-Gordon K_m , $m \geq 0$. On note $K = K_m + V$.

Théorème 1.3.4 (cas $m > 0$). Soient K_m l'opérateur de Klein-Gordon défini en (3.6.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}))$. On suppose $p > d$. La constante ω est définie dans la proposition 3.6.7. Alors, pour $d \geq 2$ et τ suffisamment petit, nous avons l'estimation suivante :

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{d-1+2\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

où C dépend de ℓ, d, p, m, ω et τ .

En dimension $d = 1$, on trouve :

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{1+2\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

avec C dépendant de ℓ, p, m, ω et τ .

Lorsque la masse est nulle, on se réfère au Laplacien fractionnaire avec $s = \frac{1}{2}$. Il est intéressant de noter une différence au point m du spectre selon que $m > 0$ ou $m = 0$. Cela s'explique par une majoration différente de la norme de la résolvante (voir les propositions 3.3.6 et 4.2.5).

Par rapport aux résultats classiques concernant le Laplacien fractionnaire $H_0 = -(\Delta)^s$, l'apport ici est d'avoir des inégalités pour tout $s > 0$ et pas seulement pour $s < \min\{1; \frac{d}{2}\}$, comme c'est le cas dans [FLS08]. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 1.3.5. Soient $H = H_0 + V$ l'opérateur de Schrödinger fractionnaire défini par (4.1.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \frac{d}{2s}$. La constante ω est définie dans la proposition 4.2.7. On prendra $\tau > 0$ suffisamment petit.

Pour $0 < s \leq \frac{d}{2}$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^\alpha (\omega + |\lambda|)^\beta} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où les exposants vérifient $\alpha = \min\{\frac{p+\tau}{2}; \frac{d}{2s}\}$ et $\beta = 2\tau + \frac{1}{2}(\frac{d}{s} - p - \tau)_+$, et C dépend de n, d, p, s, ω et τ ,

Pour $s > \frac{d}{2}, p \geq 1$ et $\tau > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|^\alpha (\omega + |\lambda|)^\beta} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où les exposants vérifient $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \min\{p - \frac{d}{2s} + \tau; 1\}$ et $\beta = 2\tau + \frac{1}{2}(\frac{d}{2s} - p + 1 - \tau)_+$, et C dépend de n, d, p, s, ω et τ .

Enfin, à l'aide d'un théorème de Hansmann, nous avons pu obtenir les résultats suivants pour l'opérateur de Klein-Gordon et pour le Laplacien fractionnaire.

Théorème 1.3.6. Soit K_m l'opérateur de Klein-Gordon défini en (3.6.1) avec $m > 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $\tau > 0$, l'inégalité de type Lieb-Thirring suivante est vérifiée

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^p}{(\omega + |\lambda|)^{d+\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où ω est définie en (5.1.2) et la constante C dépend de n, d, p, m, ω et τ .

Concernant le Laplacien fractionnaire $H_0 = (-\Delta)^s$ nous avons l'inégalité suivante :

Théorème 1.3.7. Soient $H = H_0 + V$ l'opérateur défini en (4.1.1) pour $s > 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \max\{1; \frac{d}{2s}\}$. Alors, pour $\tau > 0$, l'inégalité suivante est vraie

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(\omega + |\lambda|)^{\frac{d}{2s}+\tau}} \leq C \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où ω est définie dans la proposition 4.2.7 et C dépend de s, n, d, p, ω et τ .

Avant d'évoquer la suite de ce travail, résumons la chronologie des résultats ci-dessus. Les travaux de Demuth, Hansmann et Katriel ont concerné l'opérateur de Schrödinger, ou plus généralement une perturbation d'un opérateur auto-adjoint positif. Nous nous sommes alors demandé ce qu'il en est pour un opérateur non-semi-borné, ce qui nous a conduit à l'opérateur de Dirac. Suite à l'étude de cet opérateur, nous avons pu en déduire des résultats sur l'opérateur de Klein-Gordon

qui est une « moitié » de l'opérateur de Dirac. Enfin, nous nous sommes intéressé au Laplacien fractionnaire comme généralisation de l'opérateur de Schrödinger et de Klein-Gordon (cas $m = 0$).

Des différents résultats obtenus avec nos hypothèses pour un opérateur de la forme $H = H_0 + V$, nous pouvons imaginer un comportement général des valeurs propres de H par rapport à la vitesse de convergence vers le spectre essentiel de H qui est, ici, le spectre de l'opérateur H_0 . En effet il semble que seulement trois cas se présentent selon que la limite est une borne réelle (finie) du spectre, ou l'infini, ou bien un point du spectre distinct des bornes (finies ou infinies). Ces résultats étant limités à l'hypothèse que de telles suites de valeurs propres existent, nous donnerons seulement quelques exemples de conclusions possibles à partir des inégalités obtenues dans le cas d'une perturbation de l'opérateur de Dirac, après la remarque 3.2.4. La comparaison entre les inégalités de type Lieb-Thirring obtenues par le théorème de Borichev, Golinskii et Kupin, et celles obtenues par le théorème de Hansmann pour un même opérateur est reportée à la sous-section 5.1.2.

1.4 Prolongement de la thèse

Le travail mené dans cette thèse nous conduit aux problèmes suivants sur lesquels nous envisageons de travailler à l'avenir :

- Une évolution du théorème de Borichev, Golinskii et Kupin permettant de prendre en compte les cas où en certains points du cercle unité la croissance est plus faible.
- Si l'opérateur non-perturbé est $H_0 = f(-\Delta)$ avec f une fonction de Bernstein, par exemple, sous quelles conditions peut-on obtenir une inégalité de type Lieb-Thirring avec les méthodes décrites ci-dessus ? Plus généralement, la question est posée pour des opérateurs définis comme multiplicateurs de la transformée de Fourier.
- Dans l'esprit de [GK13], peut-on déterminer des inégalités de type Lieb-Thirring pour des perturbations d'opérateurs auto-adjoints perturbés, comme l'opérateur de Stark, ou l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel de Coulomb ou de Hardy ?
- Parmi les méthodes non utilisées dans cette thèse figure le principe de Birman-Schwinger, cité après (1.2.2), qui permet notamment de localiser le spectre. La dimension $d = 1$ pour l'opérateur de Dirac a été traitée par Cuenin, Laptev et Tretter dans [CLT14]. La question en dimension $d \geq 2$ reste un problème ouvert.

L'étude de perturbations d'opérateurs ne se limitent pas au cas des espaces de Hilbert, et dans cette optique, le problème est souvent à reprendre au début.

- Dans certains espaces de Banach, la notion de déterminant est bien connue. Toutefois de nombreux points restent à établir pour pouvoir appliquer un résultat sur les zéros d'une fonction holomorphe, mais on peut obtenir des résultats similaires à ceux de cette thèse : voir [DH13].

2 Préliminaires

Table des matières

2.1 Généralités : définitions et notations	9
2.1.1 Différentes classes d'opérateurs	9
2.1.2 Spectre d'un opérateur et théorème de Weyl	11
2.2 Classes de Schatten-von Neumann et déterminants régularisés	13
2.2.1 Généralités	13
2.2.2 Un déterminant de perturbation	14
2.3 Résultats d'analyse complexe	16
2.3.1 Théorème de Borichev-Golinskii-Kupin	16
2.3.2 Des inégalités de comparaison	17
2.3.3 Transformations conformes	18
2.4 Une inégalité de Birman-Solomyak	18

2.1 Généralités : définitions et notations

2.1.1 Différentes classes d'opérateurs

Nous ne considérons dans ce travail que des *espaces de Hilbert complexes séparables* \mathcal{H} .

Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux espaces de Hilbert, on définit un *opérateur* de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_2 comme étant une application linéaire A définie sur un sous-espace \mathcal{D} de \mathcal{H}_1 , appelé *domaine de définition*, et à valeurs dans \mathcal{H}_2 . Souvent $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Si A est défini sur tout \mathcal{H}_1 , on dit que A est *continu*, ou *borné*, sur \mathcal{H}_1 s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathcal{H}, \|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'ensemble des opérateurs continus sur \mathcal{H}_1 à valeurs dans \mathcal{H}_2 . Et si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, on note simplement $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

En général, puisque les opérateurs que nous considérons sont issus d'équations différentielles, ils seront définis sur un sous-espace dense \mathcal{D} d'un espace de Hilbert \mathcal{H} et ne sont donc pas bornés sur tout l'espace de Hilbert. On parle alors *d'opérateur non-borné*.

Heureusement, l'avantage d'avoir un sous-espace dense \mathcal{D} en analyse est de pouvoir considérer l'adhérence $\overline{\mathcal{D}}$ de cet espace pour « prolonger » ou « étendre » des propriétés connus sur \mathcal{D} à $\overline{\mathcal{D}}$. Notamment nous voudrions définir la notion *d'adjoint* pour un opérateur non-borné. Mais pour cela il faut pouvoir « prolonger » l'opérateur lui-même de \mathcal{D} à \mathcal{H} .

La notion qui suit *d'opérateur fermable* est importante pour traiter des opérateurs non-bornés. Pour cela, il faut d'abord définir *le prolongement d'un opérateur*.

Définition 2.1.1 (prolongement d'un opérateur). Soient A et B deux opérateurs de \mathcal{H} . On dit que B est un *prolongement* de A , noté $A \subset B$ si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $\forall x \in \mathcal{D}(A), Ax = Bx$.

Définition 2.1.2 (opérateur fermé). On dit que l'opérateur $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est *fermé* si son *graphe* $\Gamma(A)$ défini par $\Gamma(A) := \{\langle x; Ax \rangle, x \in \mathcal{D}\}$ est fermé dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ muni du produit scalaire $\langle (x_1; y_1); (x_2; y_2) \rangle = \langle x_1; x_2 \rangle + \langle y_1; y_2 \rangle$.

On définit maintenant la notion *d'opérateur fermable*.

Définition 2.1.3 (opérateur fermable et fermeture). Un opérateur A est dit *fermable* s'il a un prolongement fermé.

Tout opérateur fermable a un plus petit prolongement fermé, appelé *fermeture*. On la note \overline{A} .

Tous les opérateurs ne sont pas fermables, mais les opérateurs auto-adjoints ou ceux essentiellement auto-adjoints le sont. On définit maintenant *l'adjoint* d'un opérateur.

Définition 2.1.4 (opérateur adjoint). Soit $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur défini sur un sous-espace dense \mathcal{D} . On note

$$\mathcal{D}(A^*) := \{x \in \mathcal{H}, \exists y \in \mathcal{H}, \forall z \in \mathcal{D}(A) \langle Az; x \rangle = \langle z; y \rangle\}.$$

Pour chaque $x \in \mathcal{D}(A^*)$, on définit $A^*x = y$. On appelle l'opérateur A^* *l'adjoint* de A .

Voir [Sch12, p.8] pour une définition avec $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$.

Proposition 2.1.5 (Théorème VIII.1 [RS80]). *Soit A un opérateur défini sur un sous-espace dense de \mathcal{H} . Alors*

1. A^* est fermé.
2. A est fermable si et seulement si $\mathcal{D}(A^*)$ est dense et dans ce cas $\overline{A} = A^{**}$.
3. Si A est fermable alors $(\overline{A})^* = A^*$.

Définition 2.1.6 (opérateur auto-adjoint, essentiellement auto-adjoint). Soit A un opérateur défini sur un sous-espace dense de \mathcal{H} .

1) On dit que A est *auto-adjoint* si $A = A^*$, c'est-à-dire si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $\forall x \in \mathcal{D}(A), Ax = A^*x$.

2) On dit que A est *essentiellement auto-adjoint* si \overline{A} est auto-adjoint.

Remarque 2.1.7. Si A est essentiellement auto-adjoint, alors il n'a qu'un unique prolongement auto-adjoint : \overline{A} . Par abus, nous noterons l'opérateur et sa fermeture par le même symbole.

Nous terminons cette section par la notion d'opérateur *compact*.

Définition 2.1.8 (opérateur compact). Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On dit que A est *compact* si pour tout sous-ensemble E borné, l'image $A(E)$ est relativement compacte dans \mathcal{H} (i.e. l'adhérence de $A(E)$ est compacte dans \mathcal{H}). On note l'espace des opérateurs compacts sur \mathcal{H} par \mathbf{S}_∞ (voir la section 2.2).

On rappelle le théorème de Riesz-Schauder (voir [RS80, Theorem VI.15], ou [EE89, Theorem I.1.9])

Théorème 2.1.9 (Théorème de Riesz-Schauder). *Soit A un opérateur compact de \mathcal{H} . Alors le spectre $\sigma(A)$ de A est discret avec, éventuellement, pour unique point d'accumulation $\lambda = 0$. De plus, tout élément $\lambda \in \sigma(A)$ non nul est une valeur propre de multiplicité (géométrique) finie.*

Remarque 2.1.10. On peut montrer que la multiplicité algébrique est elle-aussi finie ([EE89, Remark I.1.19]). Ces notions sont définies dans la sous-section suivante.

2.1.2 Spectre d'un opérateur et théorème de Weyl

Nous nous intéressons maintenant à la notion de *spectre* d'un opérateur.

Définition 2.1.11 (spectre et résolvante). Soit $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur fermé de \mathcal{H} défini sur \mathcal{D} .

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble *résolvant* $\rho(A)$ de A si l'opérateur $(\lambda \text{Id} - A)$ est une bijection de \mathcal{D} dans \mathcal{H} dont l'inverse est continu sur \mathcal{H} .

Dans ce cas, on appelle $(\lambda \text{Id} - A)^{-1}$ la *résolvante* de A au point λ .

Si $\lambda \notin \rho(A)$, on dit que λ appartient au *spectre* de A et on note $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Souvent on notera $(\lambda - A)^{-1}$ au lieu de $(\lambda \text{Id} - A)^{-1}$.

Définition 2.1.12 (valeurs propres). On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de A s'il existe $x \in \mathcal{H}$ non nul tel que $Ax = \lambda x$. On dit alors que x est un *vecteur propre* de A . On note $\sigma_p(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

L'indice p correspond à *point spectrum* en anglais. Si λ est une valeur propre de A alors $\lambda \text{Id} - A$ n'est pas injective donc $\lambda \in \sigma(A)$. Dit autrement, le noyau de $\lambda \text{Id} - A$, noté $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - A)$, n'est pas réduit au vecteur nul. Dans ce cas, la dimension de $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - A)$ est appelée la *multiplicité géométrique* de λ .

Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, on considère $\mathcal{R}_\lambda := \{x \in \mathcal{H}, \exists n \in \mathbb{N}^*, (\lambda \text{Id} - A)^n x = 0\}$ qui est un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} . On appelle *multiplicité algébrique* de la valeur propre λ , la dimension de \mathcal{R}_λ . Il est clair que la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique.

Pour plus de détails concernant les multiplicités géométriques et algébriques, on se reportera au livre de Edmunds et Evans [EE89].

La proposition suivante est issue de [EE89, Theorem IX.2.3].

Proposition 2.1.13 (spectre de résolvante). *Soient A un opérateur fermé de \mathcal{H} et $\mu \in \rho(A)$. Alors, pour $\lambda \neq \mu$,*

1. $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $(\mu - \lambda)^{-1} \in \rho((\mu \text{Id} - A)^{-1})$,

2. λ est une valeur propre de A si et seulement si $(\mu - \lambda)^{-1}$ en est une pour $(\mu \text{Id} - A)^{-1}$ et dans ce cas les multiplicités algébrique et géométrique coïncident,
3. et λ appartient au spectre essentiel de A (voir la définition ci-dessous) si et seulement si $(\mu - \lambda)^{-1}$ appartient au spectre essentiel de $(\mu \text{Id} - A)^{-1}$.

Remarque 2.1.14. Comme les opérateurs que nous considérons sont non-bornés alors, en particulier, pour $\mu \in \rho(A)$, $0 \in \sigma((\mu \text{Id} - A)^{-1})$ ([Dav07, lemma 8.1.9]).

Définition 2.1.15 (Spectre discret). Soit A un opérateur fermé de \mathcal{H} . On appelle *spectre discret* de A et on note $\sigma_d(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A de multiplicité algébrique finie.

L'indice d correspond à *discrete spectrum* en anglais.

Nous allons maintenant définir le *spectre essentiel* dans le cadre qui nous intéresse.

Avant cela, rappelons qu'il existe plusieurs définitions pour le spectre essentiel d'un opérateur fermé défini sur un sous-espace dense d'un espace de Banach. Une discussion détaillée se trouve au début de [EE89, section IX.1]. Le théorème 1.6 de [EE89, p.417] nous dit que ces différentes notions coïncident lorsque l'opérateur est auto-adjoint sur un espace de Hilbert. Pour une définition directement issue du cadre d'un espace de Hilbert, voir [RS80, sous-section VII.3]. Dans les deux cas, nous pouvons définir le spectre essentiel de la façon suivante.

Définition 2.1.16 (Spectre essentiel). Soit A un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} . Alors le *spectre essentiel* de A est défini comme le complémentaire dans $\sigma(A)$ du spectre discret, *i.e.*

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A).$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Weyl (voir [RS78, Theorem XIII.14], ou [EE89, Theorem IX.2.1]).

Théorème 2.1.17 (Théorème de Weyl). *Soient A un opérateur auto-adjoint et B un opérateur fermé tels que*

1. *Il existe $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(A)$ tel que $(A - \lambda)^{-1} - (B - \lambda)^{-1}$ est compact.*
2. *a) $\sigma(A) \neq \mathbb{R}$ et $\rho(B) \neq \emptyset$.*

ou bien

- b) Il existe des éléments de $\rho(B)$ dans le demi-plan supérieur et dans le demi-plan inférieur.*

Alors $\sigma_{\text{ess}}(B) = \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Dans notre situation le potentiel V sera une perturbation relativement compacte de H_0 , ou plus exactement une perturbation relativement Schatten-von Neumann (voir la section suivante) de H_0 , c'est-à-dire, $\text{dom}(H_0) \subset \text{dom}(V)$ et, pour $\lambda \in \rho(H_0)$, $V(\lambda - H_0)^{-1}$ est compact. La première condition du théorème de Weyl sera vérifiée car $(\lambda - H)^{-1} - (\lambda - H_0)^{-1} = (\lambda - H)^{-1}V(\lambda - H_0)^{-1}$, et 2a) sera vérifiée pour l'opérateur de Dirac pour $m > 0$, l'opérateur de Klein-Gordon et le Laplacien fractionnaire, tandis que 2b) sera vérifiée par l'opérateur de Dirac de masse nulle.

2.2 Classes de Schatten-von Neumann et déterminants régularisés

2.2.1 Généralités

Pour cette sous-section, nous nous appuyerons sur les livres de Gohberg et Krein [GK69] et Simon [Sim05], ainsi que sur l'article [Sim77].

On rappelle que l'espace des opérateurs compacts sur \mathcal{H} est noté par \mathbf{S}_∞ . Les espaces de Schatten-von Neumann \mathbf{S}_p , $1 \leq p < \infty$, d'opérateurs compacts sont définis par

$$\mathbf{S}_p := \{A \in \mathbf{S}_\infty, \|A\|_{\mathbf{S}_p}^p := \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(A)^p < +\infty\},$$

où $(s_n(A))_{\mathbb{N}}$ sont les *valeurs singulières* de A (ou *s-nombres*), c'est-à-dire les valeurs propres de $(AA^*)^{1/2}$ listées par ordre décroissant en module.

On rappelle ([GK69, Theorem 7.1]) que les espaces \mathbf{S}_p , $p \geq 1$, sont des idéaux bilatères de \mathbf{S}_∞ et forment une algèbre complète pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{S}_p}$. On a en outre l'inclusion suivante : pour $p \leq q$, alors $\mathbf{S}_p \subset \mathbf{S}_q$.

Pour $A \in \mathbf{S}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir le *déterminant régularisé*

$$\det_n(\text{Id} - A) := \prod_{k=1}^{+\infty} \left[(1 - \lambda_k) \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^j}{j} \right) \right],$$

où $(\lambda_k)_k$ est la suite des valeurs propres de A .

Ce déterminant vérifie les propriétés suivantes :

1. $\det_n(\text{Id}) = 1$.
2. Soit $A \in \mathbf{S}_n$, $\text{Id} - A$ est inversible si et seulement si $\det_n(\text{Id} - A) \neq 0$ ([Sim77, Cor.6.3]).
3. Pour tout $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant $AB, BA \in \mathbf{S}_n$, $\det_n(\text{Id} - AB) = \det_n(\text{Id} - BA)$.
4. Si $A(\cdot)$ est une fonction holomorphe sur un domaine Ω à valeurs dans \mathbf{S}_p , alors la fonction $\det_n(\text{Id} - A(\cdot))$ est elle-même holomorphe sur Ω ([Sim77, Lemma 6.1] et [GK69, 8. p.163]).
5. Soit $A \in \mathbf{S}_p$ pour un réel $p \geq 1$. Alors $A \in \mathbf{S}_{[p]}$, où $[p]$ est défini par $\min\{n \in \mathbb{N}, n \geq p\}$, et la propriété suivante est vérifiée

$$|\det_{[p]}(\text{Id} - A)| \leq \exp \left(\Gamma_p \|A\|_{\mathbf{S}_p}^p \right), \quad (2.2.1)$$

où Γ_p est une constante positive dépendant seulement de p ([Sim77, Theorem 6.4]).

La définition suivante est issue de [GK69, sous-section IV.3.1].

Définition 2.2.1 (déterminant de perturbation). Soient A et B des opérateurs bornés sur \mathcal{H} avec $B - A \in \mathbf{S}_p$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Id} - \mu A$ soit inversible, alors on appelle *déterminant de perturbation* de A par $B - A \in \mathbf{S}_p$ (ou de B par rapport à A), le déterminant défini par

$$d(\mu) := \det_{[p]} \left((\text{Id} - \mu B)(\text{Id} - \mu A)^{-1} \right)$$

La propriété suivante relie les zéros du déterminant de perturbation aux valeurs propres de l'opérateur perturbé.

Proposition 2.2.2 (Zéros du déterminant). *Si $\mu \in \rho(A)$ et $\mu \in \sigma_p(B)$ de multiplicité algébrique finie, alors l'ordre de μ^{-1} comme zéro de d est égal à la multiplicité algébrique de μ^{-1} comme valeur propre de B .*

Pour la preuve, consulter [GK69, sous-section IV.3.4] - cas $p = 1$ - ou [GGK00, theorem XII.2.3], ou encore [Han10, prop 1.5.8].

2.2.2 Un déterminant de perturbation

Cette sous-section est dévolue à la construction d'un déterminant de perturbation que nous utiliserons dans nos démonstrations. Elle s'appuie sur le travail réalisé dans l'article [DHK09] dans la section 3.1.1. en reprenant les résultats de [GK69, section IV.3].

On considère la situation générale suivante : H_0 est auto-adjoint et on suppose que $\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$. Puis $H = H_0 + V$ avec $V(\lambda - H_0)^{-1} \in \mathbf{S}_p$ à partir d'un certain rang p et pour tout $\lambda \in \rho(H_0)$. Donc, par le théorème de Weyl, $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$.

Nous allons démontrer la propriété suivante.

Proposition 2.2.3. *Avec les hypothèses ci-dessus, pour $-a \in \rho(H)$, on définit une fonction F de $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0)$ à valeurs dans \mathbf{S}_p par*

$$F(\lambda) = (\lambda + a)(a + H)^{-1}V(\lambda - H_0)^{-1}, \quad (2.2.2)$$

et une fonction $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(H_0) \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(\lambda) := \det_{[p]}(\text{Id} - F(\lambda)). \quad (2.2.3)$$

On appelle cette fonction f déterminant de perturbation de l'opérateur H par rapport à H_0 . Elle vérifie les propriétés suivantes : f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0)$, les zéros de f coïncident avec les valeurs propres de H et la multiplicité algébrique d'une valeur propre est égale à l'ordre du zéro correspondant.

Démonstration. Soient $\lambda \in \rho(H_0)$ et $-a \in \rho(H)$ (donc en particulier $-a \in \rho(H_0)$). En notant $\mu = \lambda + a$, $A = (a + H_0)^{-1}$ et $B = (a + H)^{-1}$, on trouve pour l'expression du déterminant de perturbation

$$\begin{aligned} (\text{Id} - \mu B)(\text{Id} - \mu A)^{-1} &= \text{Id} - \text{Id} + (\text{Id} - \mu B)(\text{Id} - \mu A)^{-1} \\ &= \text{Id} - [(\text{Id} - \mu A) - (\text{Id} - \mu B)](\text{Id} - \mu A)^{-1} \\ &= \text{Id} - \mu(B - A)(\text{Id} - \mu A)^{-1}. \end{aligned}$$

On rappelle que, pour tout $\lambda \in \rho(H_0)$, $\mu^{-1} \in \rho(A)$ d'après la proposition 2.1.13, ce qui justifie l'existence de l'inverse pour $\text{Id} - \mu A$. Nous avons en fait l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} \text{ inversible} &\Leftrightarrow [a + H_0 - \lambda - a](a + H_0)^{-1} \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow (\lambda - H_0) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \rho(H_0). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

On explicite les expressions ci-dessus en fonction de a, λ, H_0 et H . C'est-à-dire, nous avons l'équation de la résolvante suivante

$$\begin{aligned} B - A &= (a + H)^{-1} - (a + H_0)^{-1} \\ &= (a + H)^{-1} [(a + H_0) - (a + H)] (a + H_0)^{-1} \\ &= -(a + H)^{-1} V (a + H_0)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

donc, en remplaçant par les expressions ci-dessus, on obtient, pour $\lambda \in \rho(H_0)$,

$$\begin{aligned} \text{Id} - \mu(B - A)(\text{Id} - \mu A)^{-1} &= \\ &= \text{Id} + (\lambda + a)(a + H)^{-1} V (a + H_0)^{-1} [\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1}]^{-1} \\ &= \text{Id} + (\lambda + a)(a + H)^{-1} V \left[(\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1}) (a + H_0) \right]^{-1} \\ &= \text{Id} + (\lambda + a)(a + H)^{-1} V [-\lambda + H_0]^{-1} \\ &= \text{Id} - F(\lambda) \end{aligned}$$

où F est définie en (2.2.2) et $F(\lambda) \in \mathbf{S}_p$ puisque $V(\lambda - H_0)^{-1} \in \mathbf{S}_p$.

On montre maintenant que la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(H_0) \rightarrow \mathbb{C}$ définie en (2.2.3) vérifie les propriétés voulues.

Tout d'abord, d'après ce qui précède, l'application $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est bien définie sur $\rho(H_0)$ et à valeurs dans \mathbf{S}_p donc f est bien définie et holomorphe sur $\rho(H_0)$, et $f(-a) = \det_{[\rho]}(\text{Id}) = 1$.

Par ailleurs, nous allons montrer que $\text{Id} - F(\lambda)$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \sigma_d(H)$. D'après l'équation de la résolvante (2.2.5), nous avons

$$(a + H_0)^{-1} - (a + H)^{-1} = (a + H)^{-1} V (a + H_0)^{-1},$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Id} - (\lambda + a)(a + H)^{-1} &= \\ &= \text{Id} - (\lambda + a) \left[(a + H_0)^{-1} - (a + H)^{-1} V (a + H_0)^{-1} \right] \\ &= \text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} + (\lambda + a)(a + H)^{-1} V (a + H_0)^{-1} \end{aligned}$$

d'où, puisque $\lambda \in \rho(H_0)$,

$$\begin{aligned}
& \left(\text{Id} - (\lambda + a)(a + H)^{-1} \right) \left[\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} \right]^{-1} = \\
& = \left(\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} + (\lambda + a)(a + H)^{-1}V(a + H_0)^{-1} \right) \times \\
& \quad \times \left[\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} \right]^{-1} \\
& = \text{Id} + (\lambda + a)(a + H)^{-1}V(a + H_0)^{-1} \left[\text{Id} - (\lambda + a)(a + H_0)^{-1} \right]^{-1} \\
& = \text{Id} - F(\lambda).
\end{aligned}$$

Donc $\text{Id} - F(\lambda)$ est non inversible si et seulement si $\text{Id} - (\lambda + a)(a + H)^{-1}$ est non inversible. Or, par le même raisonnement qu'en (2.2.4) et sachant que $\lambda \notin \sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H)$, on a

$$\begin{aligned}
\text{Id} - (\lambda + a)(a + H)^{-1} \text{ non inversible} & \iff \lambda \in \sigma(H) \\
& \iff \lambda \in \sigma_d(H).
\end{aligned}$$

Au final, d'après la proposition 2.2.2,

$$f(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \sigma_d(H)$$

et l'ordre du zéro pour f est égal à la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ pour H . \square

2.3 Résultats d'analyse complexe

2.3.1 Théorème de Borichev-Golinskii-Kupin

Le théorème suivant, démontré dans [BGK09, Théorème 0.3], donne une majoration des zéros d'une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ selon sa croissance au voisinage de sa frontière $\mathbb{T} := \{|z| = 1\}$. L'aspect important de ce théorème pour ce qui va suivre est qu'il permet de tenir compte de l'existence de points « particuliers » (ζ_j) sur le cercle unité, là où la fonction croît plus vite qu'en les autres points de \mathbb{T} .

Théorème 2.3.1. *Soit h une fonction holomorphe sur \mathbb{D} avec $h(0) = 1$. On suppose que h satisfait une inégalité de la forme*

$$|h(z)| \leq \exp \left(\frac{K}{(1 - |z|)^\alpha} \prod_{j=1}^N \frac{1}{|z - \zeta_j|^{\beta_j}} \right), \quad (2.3.1)$$

où $K > 0$, $|\zeta_j| = 1$ et $\alpha, \beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$.

Alors, pour tout $\tau > 0$, les zéros de h vérifient la condition de type Blaschke suivante

$$\sum_{h(z)=0} (1 - |z|)^{\alpha+1+\tau} \prod_{j=1}^N |z - \zeta_j|^{(\beta_j-1+\tau)_+} \leq C \cdot K,$$

où C dépend de α, β_j, ζ_j et τ .

Ci-dessus, $x_+ = \max\{x, 0\}$.

La condition de type Blaschke ci-dessus montrent que les zéros de h peuvent s'accumuler « moins vite » vers les points ζ_j du cercle unité.

Remarque 2.3.2. Dans nos applications, les points ζ_j correspondent (en général) aux bornes du spectre essentiel de l'opérateur perturbé étudié. Par contre, il faut noter qu'un changement dans l'exposant β_j du facteur $|z - \zeta_j|$ n'implique pas seulement un changement dans l'exposant de la borne du spectre essentielle correspondante. En effet, en plus de vérifier cela avec les opérateurs étudiés dans cette thèse, il faut se souvenir qu'on travaille avec une fonction h holomorphe sur \mathbb{D} et donc qu'une modification du comportement de h au voisinage d'un point du disque peut induire des changements dans d'autres régions du disque.

Par exemple, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger fractionnaire, via la transformation conforme φ_a définie en (4.2.4), $0 \in \mathbb{C}$ est l'image de $-1 \in \mathbb{D}$, et la formule

(4.2.7) avec $|1 + z| = \frac{2\sqrt{|\lambda|}}{|\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}|}$ pour $z \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et a suffisamment grand, montre qu'un changement dans l'exposant du facteur $|1 + z|$ impacte le facteur $|\lambda|$ (comportement en 0) et $a + |\lambda|$ (comportement en ∞).

Remarque 2.3.3. Comme pour $\beta \in \mathbb{R}$, $(\beta_+ - 1 + \tau)_+ = (\beta - 1 + \tau)_+$, on appliquera directement le théorème 2.3.1 en présence d'une majoration du type 2.3.1 sans passer par l'étape de sélection des $\beta_j \geq 0$, et on distinguera ensuite selon les cas $\beta_j - 1 + \tau \geq 0$.

Ce résultat a été amélioré sous une certaine forme : [HK11, Théorème 4]. Mais dans les cas qui nous concernent et où il serait applicable (Dirac avec une masse nulle, Klein-Gordon, Laplacien fractionnaire), il n'apporte pas de différence avec le théorème 2.3.1 (voir la remarque 3.6.9).

Différentes investigations autour du théorème précédent ont été menées par Favorov et Golinski notamment (voir par exemple [FG09]).

2.3.2 Des inégalités de comparaison

Soient deux fonctions positives f et g définies sur un ensemble Ω du plan complexe \mathbb{C} , on note $f(\lambda) \approx g(\lambda)$ si les fonctions sont comparables au sens suivant : $\exists C_1, C_2 > 0$ telles que $\forall \lambda \in \Omega, C_1 f(\lambda) \leq g(\lambda) \leq C_2 f(\lambda)$. Et on note $f(\lambda) \lesssim g(\lambda)$ s'il existe $C > 0$ telle que $f(\lambda) \leq Cg(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Omega$. L'ensemble Ω dépendra du contexte.

Nous utiliserons à différentes reprises le lemme suivant (pour le calcul de majoration d'intégrales en particulier).

Lemme 2.3.4. 1. Soient $a, b \geq 0$ et $p \geq 1$, alors

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

2. Soient $a, b \geq 0$, alors

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Soient $0 < \alpha < 1$ et $a, b \geq 0$. Alors

$$2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha) \leq (a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

2.3.3 Transformations conformes

Les transformations conformes interviennent dans ce travail dans deux contextes : le premier concerne l'application du théorème 2.3.1 de Borichev, Golinskii et Kupin faisant intervenir des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} . L'autre concerne le théorème 5.1.2. Dans les deux cas, il s'agit d'un problème de *distorsion*, c'est-à-dire, de comparer la distance d'un point à la frontière d'une région et la distance de l'image de ce point à l'image de cette frontière par une application conforme bijective. On note la *distance entre z et A* par $d(z, A) := \inf_{w \in A} |z - w|$.

Cela nous permet de transférer l'étude dans \mathbb{C} du spectre discret à une étude dans \mathbb{D} pour utiliser le théorème 2.3.1 de Borichev, Golinskii et Kupin, ou alors de ramener un problème sur un opérateur à celui sur sa résolvante pour appliquer les résultats de Hansmann 5.1.1 ou 5.1.2.

Théorème 2.3.5 (Distorsion de Koebe). *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ injective. Alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Pour une démonstration, on se référera à [Pom92, Corollary 1.4].

Pour la suite, nous reformulons les inégalités du théorème précédent en introduisant la distance de z au cercle unité \mathbb{T} . Puisque, pour $z \in \mathbb{D}$, $1 \leq 1 + |z| \leq 2$, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{D}, \frac{1}{4} d(z, \mathbb{T}) |f'(z)| \leq d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leq 2 d(z, \mathbb{T}) |f'(z)|. \quad (2.3.2)$$

2.4 Une inégalité de Birman-Solomyak

Le résultat suivant est une généralisation aux fonctions à valeurs vectorielles du théorème [Sim05, Théorème 4.1] connu pour des fonctions à valeurs scalaires.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées complexes de taille n . Pour $p \geq 1$, on considère l'espace des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \left\{ V : \|V\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} \|V(x)\|_F^p dx \right\},$$

où $\|\cdot\|_F$ est appelée *norme de Frobenius*,

$$\|V(x)\|_F = \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} |(V(x))_{i,j}|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4.1)$$

Le choix de la norme de Frobenius est important pour la preuve de la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Soient f et $g \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors, nous avons l'inégalité suivante*

$$\|f \cdot g(-i\nabla)\|_{\mathcal{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^p}^p. \quad (2.4.2)$$

Démonstration. La preuve suit de près celle du [Sim05, Théorème 4.1], la principale modification étant l'utilisation de la norme de Frobenius et de la relation (2.4.3) pour des opérateurs intégraux à valeurs matricielles. Pour dégager les différences entre le cas à valeurs matricielles et le cas scalaire, nous explicitons un peu plus les détails que dans la preuve du théorème sus-cité de [Sim05].

Tous les opérateurs considérés dans cette proposition agissent sur $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Soit B un opérateur borné donné par

$$(Bf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy,$$

où le noyau $K(\cdot, \cdot)$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f appartient à $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Un résultat connu de [GK69] ou [Sim05] dit que

$$\|B\|_{\mathbf{S}_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|K(x, y)\|_F^2 dx dy. \quad (2.4.3)$$

Maintenant, on note par $A := f(x)g(-i\nabla)$ l'opérateur intégral associé au noyau

$$(2\pi)^{-d/2} f(x) \check{g}(x - y),$$

où \check{g} est la transformée de Fourier inverse de g .

On suppose que f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. D'après la définition (2.4.1) et le fait que la norme est sous-multiplicative, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathbf{S}_2}^2 &= \|f(x)g(-i\nabla)\|_{\mathbf{S}_2}^2 = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\check{g}(x - y)\|_F^2 dx dy \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_F^2 \|\check{g}(x - y)\|_F^2 dx dy \\ &\leq (2\pi)^{-d} \|f\|_{L^2}^2 \cdot \|g\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé les théorèmes de Fubini et Fourier-Parseval. Donc, l'opérateur intégral A appartient à \mathbf{S}_2 (i.e., c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt), et nous avons une borne de (2.4.2) pour $p = 2$. En particulier, A est un opérateur compact.

On rappelle que L^∞ est l'espace muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} := \text{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}^d} \|f(x)\|_F.$$

Soient deux fonctions-tests ϕ, ψ appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ telles que

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \|\phi(x)\|_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2 \right) dx \leq 1$$

et $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 1$. Nous devons alors prouver que

$$\|A\| = \|A\|_{\mathbf{S}_\infty} = \sup_{\phi, \psi} |(\phi, A\psi)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty, \quad (2.4.4)$$

avec $f, g \in L^2 \cap L^\infty$. En effet,

$$\begin{aligned} |(\phi, A\psi)| &= |(\phi, f(\hat{g}\hat{\psi}))| = |(f^* \phi, (\hat{g}\hat{\psi}))| \\ &\leq \|f^* \phi\|_{L^2} \|(\hat{g}\hat{\psi})\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|f^* \phi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \|f^* \phi\|_2^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_F^2 \|\phi\|_2^2 dx \leq \|f\|_\infty^2 \|\phi\|_{L^2}^2,$$

et, de la même manière,

$$\|g \hat{\psi}\|_{L^2}^2 \leq \|g\|_\infty^2 \|\hat{\psi}\|_{L^2}^2 = \|g\|_\infty^2 \|\psi\|_{L^2}^2.$$

Par conséquent, (2.4.4) est démontrée pour tout f, g dans $L^2 \cap L^\infty$. Un argument d'interpolation complexe nous donne alors

$$\|f(x)g(-i\nabla)\|_{\mathbf{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} \|f\|_{L^p}^p \cdot \|g\|_{L^p}^p,$$

pour tout $2 \leq p < \infty$. Le même résultat suit pour $1 \leq p \leq 2$ par dualité. \square

3 Résultats pour l'opérateur de Dirac

Table des matières

3.1	Définition	21
3.2	Résultats et comparaisons	23
3.3	Démonstration en dimension supérieure à 2	26
3.3.1	Transformations conformes pour l'opérateur de Dirac	26
3.3.2	Majoration pour l'opérateur de Dirac	30
3.3.3	Majoration pour l'opérateur perturbé	32
3.3.4	Preuve du théorème 3.2.1 en dimension supérieure à 2	34
3.4	Le cas de la dimension 1	36
3.4.1	Majoration de la résolvante	36
3.4.2	Preuve du résultat en dimension 1	39
3.5	Le cas où la masse est nulle	40
3.5.1	Transformation conforme et majoration de la résolvante	40
3.5.2	Preuve du théorème 3.2.3	42
3.6	Cas de l'opérateur de Klein-Gordon	43
3.6.1	Définition et résultats	43
3.6.2	Démonstrations des résultats	46

3.1 Définition

Selon la théorie de Dirac (voir, par exemple, [Tha91, section 1]) le mouvement relativiste d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ - par exemple pour des électrons dans le cas d'une masse strictement positive $m > 0$ - (sans champ électromagnétique) est décrit à l'aide de l'opérateur de Dirac. À cause de la structure de spin, l'espace de « configuration » de la particule prend ses valeurs dans \mathbb{C}^n , avec $n = 2^\nu$ et $\nu \geq 1$. Le mouvement d'une particule libre de masse m est donnée par l'équation de Dirac,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_m \varphi,$$

où $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ avec $d \in \{1, \dots, n-1\}$, si $m > 0$ et $d \in \{1, \dots, n\}$ sinon. L'opérateur de Dirac est défini par

$$D_m := -i\hbar \alpha \cdot \nabla + mc^2 \beta = -i\hbar \sum_{k=1}^d \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + mc^2 \beta. \quad (3.1.1)$$

Ici c est la vitesse de la lumière et \hbar la constante de Planck réduite. Nous normalisons l'équation en considérant que $\hbar = c = 1$. Nous notons $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\beta := \alpha_{d+1}$. Les matrices α_i sont $d + 1$ applications linéairement indépendantes, auto-adjointes, agissant sur \mathbb{C}^n , et satisfaisant les relations d'anti-commutativité suivantes

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{i,j} \text{Id},$$

pour $i, j = 1, \dots, d + 1$. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , on peut choisir la représentation de Pauli-Dirac

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & -\text{Id}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix},$$

pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, les matrices carrées α_j de taille n sont construites dans une algèbre de Clifford (voir [Obo98, Chapter 1]). Sans perte de généralité on considère

$$\beta := \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbb{C}^{n/2}} & 0 \\ 0 & -\text{Id}_{\mathbb{C}^{n/2}} \end{pmatrix}.$$

En reproduisant les preuves des sections 1.1 à 1.4 de [Tha91, section 1], on peut vérifier que l'opérateur D_m est essentiellement auto-adjoint sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ et le domaine de sa fermeture est $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, l'espace de Sobolev d'ordre 1 à valeurs dans \mathbb{C}^n . La fermeture de l'opérateur est notée avec le même symbole D_m . À l'aide de la transformée de Fourier, on prouve que D_m est unitairement équivalente à

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta_{\mathbb{R}^d} + m^2} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^{n/2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\Delta_{\mathbb{R}^d} + m^2} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^{n/2}} \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Par conséquent le spectre de D_m est absolument continu et est donné par $]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[$.

On rappelle qu'on identifie la fonction V et l'opérateur de multiplication par V . On suppose que $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et $p > d$, alors nous montrons (proposition 2.4.1) que la multiplication par V est une *perturbation relativement Schatten-von Neumann* de D_m , c'est-à-dire, $\text{dom}(D_m) \subset \text{dom}(V)$, et

$$V(\lambda - D_m)^{-1} \in \mathbf{S}_p, \quad (3.1.3)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$ (et donc pour tous $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$). On considère l'opérateur perturbé

$$D = D_m + V. \quad (3.1.4)$$

Par le théorème de Weyl 2.1.17

$$\sigma_{\text{ess}}(D) = \sigma_{\text{ess}}(D_m) = \sigma(D_m) =]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[.$$

3.2 Résultats et comparaisons

Nos résultats principaux concernant l'opérateur de Dirac sont les suivants. Nous donnons d'abord le résultat dans le cas d'une masse strictement positive $m > 0$ et ensuite lorsque $m = 0$. Nous comparerons ensuite le théorème suivant avec les résultats précédemment connus.

Quelques précisions sur les constantes apparaissant dans le théorème et qui seront introduites dans les sections suivantes. La constante b est un nombre réel suffisamment grand pour définir la résolvante de l'opérateur perturbé D au point ib (voir le lemme 3.3.7), et Z_b est une constante issue du calcul de distorsion.

Théorème 3.2.1 (cas $m > 0$). *Soit D l'opérateur de Dirac perturbé défini en (3.1.4) avec $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors le spectre discret $\sigma_d(D)$ vérifie l'inégalité de type Lieb-Thirring suivante : pour $d \geq 2$ et pour tout $0 < \tau < p - d$,*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m| \cdot |\lambda + m| (1 + |\lambda|)^{2p-2+2\tau}} \leq C \cdot K_4 \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.2.1)$$

avec

$$1. K_4 = K_1 b^p 2^{5p+d-2+3\tau} \cdot \frac{(1+m)^{3p+d-3+2\tau}}{m^{3p+d-2+\tau}} \cdot Z_b^{12p+2d-13+3\tau},$$

$$a) \text{ où } K_1 = \Gamma_p 2^{d-2} (2\pi)^{-d} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} M (1+2m)^{d-1},$$

$$b) \text{ et } M, s_{d-1} \text{ sont définies dans la proposition 3.3.6 ;}$$

2. et C dépend de d, p, m et τ .

Lorsque $d = 1$ l'inégalité est

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| \cdot (1 + |\lambda|)^{2p+2\tau}} \leq C \cdot K_3 \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.2.2)$$

avec $K_3 = n^{\frac{p}{2}} s_0 \cdot \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot b^p \cdot M (1+2m) 2^{5p+4+3\tau} \cdot \frac{(1+m)^{3p+1+\tau}}{m^{3p+2+\tau}} \cdot Z_b^{12p+1+3\tau}$, les constantes M et s_0 étant définies dans la proposition 3.4.1, et C dépend de p, m et τ .

Remarque 3.2.2. Les constantes C ci-dessus sont issues de l'application du théorème 2.3.1 de Borichev-Golinskii-Kupin et ne sont pas explicites à la différence des constantes K_4 et K_3 qui, elles, proviennent des calculs effectués pour la démonstration des théorèmes. Cette remarque s'applique aux autres théorèmes obtenus à l'aide du théorème 2.3.1.

Nous allons comparer ce résultat avec ceux de Cancelier, Lévy-Bruhl et Nourrigat ([CLN96]), et, Frank et Simon ([FS11]). Ces articles considèrent le cas de perturbations auto-adjointes (les potentiels V sont réels), et dans ce cas, les relations (3.2.1) et (3.2.2) peuvent être réécrites sous une forme plus simple. En effet, le spectre discret $\sigma_d(D)$ est alors réel et donc contenu dans $] -m; m[$. On note $E_m = \{\pm m\}$ et on a $d(\lambda, \sigma(D_m)) = d(\lambda, E_m)$ pour $\lambda \in \sigma_d(D)$. Un rapide calcul montre que (3.2.1) s'écrit alors

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^{p-1+\tau} \lesssim \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.2.3)$$

et (3.2.2) s'écrit

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^{p+\tau} \lesssim \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.2.4)$$

Dans [CLN96], $d = 3$ et, avec nos notations, un de leurs principaux résultats (voir [CLN96, Corollaire 1.3]) énonce que

$$\forall \gamma > 0, \quad \sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^\gamma \leq C_p \left(\|V\|_{L^{\gamma+3}}^{\gamma+3} + \|V\|_{L^{\gamma+3/2}}^{\gamma+3/2} \right),$$

pour des potentiels réels tels que le membre de droite converge. En prenant $\gamma = p-3$, c'est-à-dire $p > d = 3$, on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^{p-3} \leq C_p \left(\|V\|_{L^p}^p + \|V\|_{L^{p-3/2}}^{p-3/2} \right), \quad (3.2.5)$$

où $p > 3$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \cap L^{p-3/2}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

Dans [FS11], $d = 1$ et ils prouvent (voir [FS11, Théorème 7.1]), pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $V \in L^{\gamma+1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap L^{\gamma+1/2}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^\gamma \leq C_{1,p} \|V\|_{L^{\gamma+1}}^{\gamma+1} + C_{2,p,m} \|V\|_{L^{\gamma+1/2}}^{\gamma+1/2}.$$

En prenant $\gamma = p - \frac{1}{2}$ avec $p \geq 1$, on obtient

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, E_m)^{p-\frac{1}{2}} \leq C_{1,p} \|V\|_{L^{p+\frac{1}{2}}}^{p+\frac{1}{2}} + C_{2,p,m} \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.2.6)$$

et $V \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap L^{p+1/2}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Clairement, les inégalités (3.2.5) et (3.2.6) sont meilleures que celles de (3.2.3) et (3.2.4). D'un autre côté, même dans le cas d'un potentiel réel, l'inégalité (3.2.3) est valable pour une classe de potentiels plus large. Le fait est que (3.2.1) reste vraie pour des perturbations à valeurs complexes. Comme souvent, la force de la méthode que nous utilisons participe aussi à sa faiblesse, c'est-à-dire, très générale et plutôt efficace, mais elle n'emploie pas autant qu'elle pourrait les spécificités de l'opérateur considéré. Par conséquent, les majorations sur le spectre discret sont sujettes à améliorations, au moins dans des cas plus précis.

Dans le cas d'une masse nulle, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.2.3 (cas $m = 0$). *Soit D l'opérateur de Dirac défini en (3.1.4) avec $m = 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $0 < \tau < p - d$, nous avons*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(1 + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} \leq C \cdot K_1 \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.2.7)$$

où C dépend de p, d et τ , et $K_1 = \Gamma_p 2^{2p-1} b^{p+d+\tau} K$, K étant définie dans la proposition 3.5.2.

Remarque 3.2.4. En annexe, nous améliorons ce résultat en utilisant l'intégration vue pour les opérateurs bornés inférieurement. Le résultat est le suivant (voir le théorème 6.1.1) :

Théorème 3.2.5 (cas $m = 0$). Avec les hypothèses du théorème précédent, pour $0 < \tau < p - d$, nous avons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} \leq C \cdot \frac{K_1}{I} \cdot \frac{C_\omega^p}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C dépend de p, d et τ , $K_1 = \Gamma_p 2^{2p-1} K$, K étant définie dans la proposition 3.5.2, $I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^{p+(p-d-1)_+} dt}{(t+1)^{2(p+\tau)-(p-d-1)_+}}$, et C_ω est définie dans la proposition 6.1.3.

Nous donnons ici un exemple d'estimations quantitatives que l'on peut déduire de l'inégalité de type Lieb-Thirring obtenue dans le théorèmes 3.2.1 pour $d \geq 2$. On considère une suite de valeurs propres $(\lambda_n) \subset \sigma_d(D)$ convergeant vers $\sigma_{\text{ess}}(D)$ pour $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour illustrer cela, on suppose $m > 0$ et on considère une suite $(\lambda_n) \subset \sigma_d(D)$ convergeant vers λ parmi trois exemples de situations possibles. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(\lambda_n) > 0$.

1. Si $\lambda = \pm m$. On suppose qu'il existe une constante C strictement positive telle que $|\text{Re}(\lambda_n \mp m)| \leq C |\text{Im} \lambda_n|$. Alors

$$d(\lambda_n, \sigma(D_m)) \approx |\lambda_n \mp m|, \quad |\lambda_n \pm m| \approx \text{const}, \quad 1 + |\lambda_n| \approx \text{const},$$

et l'inégalité (3.2.1) implique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \mp m|^{p-1+\tau} < +\infty.$$

2. Si $\lambda = \infty$ et $|\text{Im}(\lambda_n)| \leq C$. Alors

$$d(\lambda_n, \sigma(D_m)) \approx |\text{Im}(\lambda_n)|, \quad |\lambda_n + m| \cdot |\lambda_n - m| \approx |\lambda_n|^2, \quad 1 + |\lambda_n| \approx |\lambda_n|,$$

et l'inégalité (3.2.1) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{Im}(\lambda_n)|^{p+\tau}}{|\lambda_n|^{2p+2\tau}} < +\infty.$$

3. Enfin si $\lambda \in]m; \infty[$, alors

$$d(\lambda_n, \sigma(D_m)) \approx |\text{Im}(\lambda_n)|, \quad |\lambda_n + m| \cdot |\lambda_n - m| \approx \text{const}, \quad 1 + |\lambda_n| \approx \text{const},$$

et l'inégalité (3.2.1) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\text{Im}(\lambda_n)|^{p+\tau} < +\infty.$$

Dans un premier temps, nous démontrons les résultats pour $m > 0$ avec d'abord $d \geq 2$ puis $d = 1$. Ensuite, nous faisons le cas $m = 0$.

3.3 Démonstration en dimension supérieure à 2

Dans toute cette section et la suivante (pour $d = 1$), on suppose $m > 0$.

3.3.1 Transformations conformes pour l'opérateur de Dirac

Dans le cas de l'opérateur de Dirac D_m , nous devons envoyer l'ensemble résolvant $\rho(D_m) = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[\}$ dans le disque unité \mathbb{D} via une transformation conforme. Les applications que nous considérons sont donc les suivantes :

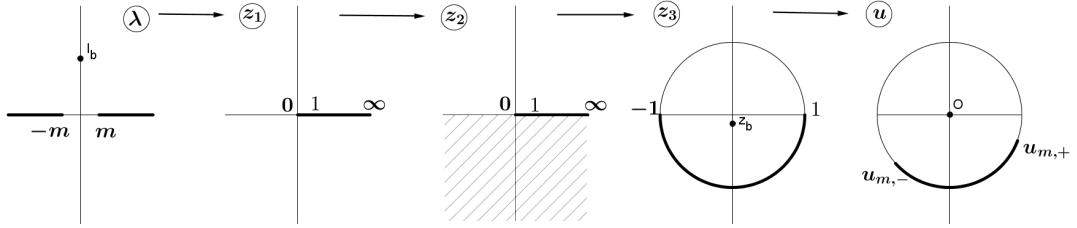


FIGURE 3.1: Domaine de définition des applications

1. $z_1 = \frac{\lambda - m}{\lambda + m} : \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m) \rightarrow \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. L'application inverse est donnée par $\lambda = m \frac{1 + z_1}{1 - z_1}$.
2. $z_2 = \sqrt{z_1} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[\rightarrow \{ \text{Im}(z) > 0 \}$. L'application inverse est $z_1 = z_2^2$.
3. $z_3 = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} : \{ \text{Im}(z) > 0 \} \rightarrow \mathbb{D}$. L'application inverse est $z_2 = i \frac{1 + z_3}{1 - z_3}$.
4. La normalisation $h(0) = 1$ nécessaire à l'application du théorème 2.3.1 est opérée par

$$u = e^{i\theta} \frac{z_3 - z_b}{1 - \overline{z_b} z_3} : \mathbb{D}_{z_3} \rightarrow \mathbb{D}_u,$$

où $z_b = -ib/(|m + ib| + m)$ est l'image de ib par les trois premières transformations conformes. On rappelle que b est un nombre réel nécessaire à la définition de la résolvante de D au point ib . Comme on vient de le faire, on indique parfois en indice la variable correspondante dans le disque unité \mathbb{D} , pour faciliter la lecture. On note aussi

$$u_{m,+} := u(1), \quad u_{m,-} := u(-1).$$

La réciproque est donnée par $z_3 = \frac{u + e^{i\theta} z_b}{e^{i\theta} + u \overline{z_b}}$.

Nous notons plus particulièrement les applications suivantes

$$\begin{aligned}\psi &= (z_3 \circ z_2 \circ z_1)^{-1} : \mathbb{D}_{z_3} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m), \\ \varphi &= (u \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1)^{-1} : \mathbb{D}_u \rightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m),\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

qui interviendront par la suite. La fonction ψ est simple à déterminer,

$$\lambda = \psi(z_3) = -2m \frac{z_3}{1 + z_3^2}.\tag{3.3.2}$$

Les propositions suivantes concernent le calcul de distorsion et font appel au théorème de distorsion de Koebe 2.3.5.

Remarque 3.3.1 (Notation). Pour simplifier les expressions à suivre, nous notons $Z_b = \frac{1 + |z_b|}{1 - |z_b|}$.

Lemme 3.3.2. *Avec les notations ci-dessus, nous avons*

1. $\frac{1}{2Z_b} d(u, \mathbb{T}) \leq d(z_3, \mathbb{T}) \leq 2Z_b d(u, \mathbb{T})$.
2. $Z_b^{-1} |u - u(a)| \leq |z_3 - a| \leq Z_b |u - u(a)|$, avec $a \in \{1, -1, i, -i\}$.

Démonstration. Pour alléger, nous notons dans cette démonstration z_3 par z . De façon générale, nous savons que $\forall z \in \mathbb{D}$, $\frac{1}{2}(1 - |z|^2) \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 1 - |z|^2$, puisque pour $z \in \mathbb{D}$, $1 \leq 1 + |z| \leq 2$.

Soit $z \in \mathbb{D}_z$, alors

$$\begin{aligned}1 - |z|^2 &= \frac{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2 - |u + e^{i\theta}z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \\ &= \frac{1 - |u|^2 + |uz_b|^2 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} = \frac{(1 - |u|^2)(1 - |z_b|^2)}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2}.\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{1 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \cdot d(u, \mathbb{T}) \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 2 \frac{1 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \cdot d(u, \mathbb{T}).\tag{3.3.3}$$

Voir la remarque suivant la preuve pour une utilisation du théorème de Koebe.

Démontrons le second point. On rappelle que $u_{m,+} = u(1) = e^{i\theta} \frac{1 - z_b}{1 - \bar{z}_b}$ et que $u_{m,-} = u(-1) = -e^{i\theta} \frac{1 + z_b}{1 + \bar{z}_b}$.

Lorsque $a = 1$, on a

$$\begin{aligned}|z - 1| &= \left| \frac{u + e^{i\theta}z_b - (e^{i\theta} + u\bar{z}_b)}{e^{i\theta} + u\bar{z}_b} \right| = \left| \frac{u(1 - \bar{z}_b) + e^{i\theta}(z_b - 1)}{e^{i\theta} + u\bar{z}_b} \right| \\ &= \left| \frac{1 - \bar{z}_b}{e^{i\theta} + u\bar{z}_b} \right| \cdot \left| \frac{u + e^{i\theta}z_b - 1}{1 - \bar{z}_b} \right| = \frac{|1 - \bar{z}_b|}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|} \cdot |u - u_{m,+}|.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

De la même façon, pour les autres valeurs de a , on obtient

$$|z + 1| = \frac{|1 + \bar{z}_b|}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|} \cdot |u - u_{m,-}|, \quad |z + i| = \frac{|1 + i\bar{z}_b|}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|} \cdot |u - u(-i)|,$$

et $|z - i| = \frac{|1 - i\bar{z}_b|}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|} \cdot |u - u(i)|.$

Pour finir d'expliciter les constantes dépendant de b , on a

$$1 - |z_b| \leq 1 - |u\bar{z}_b| \leq |e^{i\theta} + u\bar{z}_b| \leq 1 + |z_b|,$$

donc

$$\frac{1 - |z_b|}{1 + |z_b|} \leq \frac{1 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \leq \frac{1 + |z_b|}{1 - |z_b|},$$

puis, avec $a \in \{1, -1, i, -i\}$,

$$\frac{1 - |z_b|}{1 + |z_b|} \leq \frac{|1 + a\bar{z}_b|}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|} \leq \frac{1 + |z_b|}{1 - |z_b|}. \quad (3.3.5)$$

Ce qui, avec la notation de la remarque 3.3.1, nous donne le lemme. \square

Remarque 3.3.3. On peut aussi utiliser le théorème de distorsion de Koebe et on aurait obtenu

$$\frac{1}{4} \frac{1 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \cdot d(u, \mathbb{T}) \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 2 \frac{1 - |z_b|^2}{|e^{i\theta} + u\bar{z}_b|^2} \cdot d(u, \mathbb{T}).$$

D'une part, la fonction à traiter est relativement simple, donc, en terme de calcul, on gagne peu ; et d'autre part, cela nous donne un exemple explicite où les constantes dans les inégalités (2.3.2) ne sont pas optimales. Par contre, il est intéressant de voir que la dépendance en b de la constante est identique dans les deux méthodes. Cependant, pour établir la distorsion au voisinage des points -1 et 1 , le théorème de Koebe ne nous aide pas.

Proposition 3.3.4 (Distorsion entre $\mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$ et \mathbb{D}). *La distorsion entre $\mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$ et \mathbb{D} via l'application φ définie en (3.3.1) se comporte de la façon suivante :*

$$d(\lambda, \sigma(D_m)) \geq \frac{m}{2} Z_b^{-7} \frac{|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|}{|u - u(i)|^2 |u - u(-i)|^2} d(u, \mathbb{T}), \quad (3.3.6)$$

$$d(\lambda, \sigma(D_m)) \leq 4m Z_b^7 \frac{|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|}{|u - u(i)|^2 |u - u(-i)|^2} d(u, \mathbb{T}), \quad (3.3.7)$$

et

$$d(u, \mathbb{T}) \leq 16 Z_b (1 + m) \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda|)}, \quad (3.3.8)$$

$$d(u, \mathbb{T}) \geq \frac{m Z_b^{-1}}{8(1 + m)} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda|)}. \quad (3.3.9)$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{D}$, $\psi'(z) = -2m \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$, donc, d'après (2.3.2), on trouve

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{|1-z_3^2|}{|1+z_3^2|^2} d(z_3, \mathbb{T}) \leq d(\lambda, \sigma(D_m)) \leq 4m \cdot \frac{|1-z_3^2|}{|1+z_3^2|^2} d(z_3, \mathbb{T}). \quad (3.3.10)$$

Maintenant,

$$|1-z_3^2| = |1-z_3| \cdot |1+z_3| \text{ et } |1+z_3^2| = |z_3-i| \cdot |z_3+i|,$$

puis on utilise le lemme précédent pour obtenir (3.3.6) et (3.3.7).

Pour démontrer (3.3.8) et (3.3.9), nous reprenons (3.3.10) pour obtenir

$$\frac{1}{4m} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m)) |1+z_3^2|^2}{|1-z_3^2|} \leq 1 - |z_3| \leq \frac{2}{m} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m)) |1+z_3^2|^2}{|1-z_3^2|}. \quad (3.3.11)$$

Les définitions des applications $z_i, i = 1, 2, 3$, donnent les équations suivantes

$$1 - z_3^2 = \frac{4i\sqrt{z_1}}{(\sqrt{z_1} + i)^2} \text{ et } 1 + z_3^2 = \frac{2z_1 - 2}{(\sqrt{z_1} + i)^2}, \quad (3.3.12)$$

donc

$$\frac{|1+z_3^2|^2}{|1-z_3^2|} = \frac{|z_1-1|^2}{\sqrt{|z_1|} \cdot |\sqrt{z_1} + i|^2}$$

et

$$1 + |z_1| \leq |\sqrt{z_1} + i|^2 \leq 2(1 + |z_1|), \quad (3.3.13)$$

car $\text{Im}(\sqrt{z_1}) = \text{Im}(z_2) > 0$. Ensuite

$$|z_1 - 1| = \frac{2m}{|\lambda + m|}, \quad |\sqrt{z_1}| = \left| \frac{\lambda - m}{\lambda + m} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{1 + |z_1|} = \frac{|\lambda + m|}{|\lambda + m| + |\lambda - m|}. \quad (3.3.14)$$

Par ailleurs, d'après les inégalités du lemme 2.3.4, on a

$$\begin{aligned} |\lambda + m| + |\lambda - m| &\leq \sqrt{2} \sqrt{|\lambda + m|^2 + |\lambda - m|^2} = 2\sqrt{|\lambda|^2 + m^2} \\ &\leq 2(|\lambda| + m) \leq 2(1 + m)(1 + |\lambda|) \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

et

$$\begin{aligned} |\lambda + m| + |\lambda - m| &\geq \sqrt{|\lambda + m|^2 + |\lambda - m|^2} = \sqrt{2} \sqrt{|\lambda|^2 + m^2} \\ &\geq |\lambda| + m \geq \frac{m}{1 + m} (1 + |\lambda|). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

En composant toutes ces inégalités dans (3.3.11), on obtient

$$d(z_3, \mathbb{T}) \leq 8(1 + m) \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda|)}$$

et

$$d(z_3, \mathbb{T}) \geq \frac{m}{4(1 + m)} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda|)}.$$

On finit la preuve avec l'application du lemme 3.3.2. \square

3.3.2 Majoration pour l'opérateur de Dirac

On applique la proposition 2.4.1 à l'opérateur D_m en posant, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = V(x), \quad g(x) = (\lambda - \mu_m(x))^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^n},$$

où $\mu_m(x) := \sqrt{|x|^2 + m^2} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$. On obtient la proposition suivante

Proposition 3.3.5. *Soit $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$ et $\lambda \in \rho(D_m)$. Alors $V(\lambda - D_m)^{-1} \in \mathcal{S}_p$ et*

$$\|V(\lambda - D_m)^{-1}\|_{\mathcal{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} \|V\|_{L^p}^p \cdot \|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p$$

si $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, et

$$\|V(\lambda - D_m)^{-1}\|_{\mathcal{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} \|V\|_{L^p}^p \cdot \|(\lambda + \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p$$

si $\text{Re}(\lambda) \leq 0$.

Nous déterminons ensuite une majoration de l'expression $\|(\lambda \pm \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}$ qui apparaît dans l'inégalité ci-dessus pour $d \geq 2$; le cas $d = 1$ est traité dans la section correspondante.

Proposition 3.3.6. *On suppose $d \geq 2$. Soient $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$ et $p > d$. Alors*

$$\|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p \leq 2^{d-2} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} \cdot M \cdot \frac{(|\lambda - m| + m)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}}$$

pour $\lambda_0 \geq 0$, et

$$\|(\lambda + \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p \leq 2^{d-2} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} \cdot M \cdot \frac{(|\lambda + m| + m)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}}$$

pour $\lambda_0 \leq 0$.

Ci-dessus, $M = \max\{M_1; M_2\}$ où

1. $M_1 = 2^{\frac{d-1}{2}} \times \max \left\{ (1 + 2^{d-2}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}; 2^{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$,
2. et $M_2 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}$,

et $s_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}$ est la masse totale de la mesure invariante sur la sphère unité de dimension $d - 1$, Γ étant la fonction d'Euler.

Démonstration. Tout d'abord, on rappelle que $(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1} = (\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$, donc $\|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}^p = n^{p/2} \|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})}^p$.

Les cas $\pm\lambda_0 \geq 0$ étant similaires, on se limite au cas $\lambda_0 \geq 0$ (et $\lambda_1 > 0$). Avec un changement de variable en coordonnées polaires,

$$\|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})}^p = s_{d-1} \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} dr,$$

où $s_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}$. Donc on se ramène à l'étude de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} dr.$$

On écrit $|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p = \left((\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2\right)^{\frac{p}{2}}$ et on effectue le changement de variable $s = \sqrt{r^2 + m^2} - m$. Donc,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{((s+m)^2 - m^2)^{\frac{d-2}{2}} (s+m)}{((s+m-\lambda_0)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}} ds. \quad (3.3.17)$$

On distingue maintenant les cas $m \leq \lambda_0$ et $0 \leq \lambda_0 < m$. Pour $m \leq \lambda_0$, on observe que $d(\lambda, \sigma(D_m)) = |\lambda_1|$. On pose $\beta = \lambda_0 - m \geq 0$ et (comme $d \geq 2$) on utilise l'inégalité $\sqrt{(s+m)^2 - m^2} \leq s+m$, d'où

$$I \leq \int_0^{+\infty} \frac{(s+m)^{d-1}}{((s-\beta)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}} ds.$$

Puisque $m \leq \lambda_0$ and $\lambda \notin \sigma(D_m)$, nous avons $|\lambda_1| > 0$, et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(s+m)^{d-1}}{((s-\beta)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}} &= \frac{1}{|\lambda_1|^p} \int_0^\beta \frac{(s+m)^{d-1}}{\left(\left(\frac{s-\beta}{\lambda_1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} ds \\ &+ \frac{1}{|\lambda_1|^p} \int_\beta^{+\infty} \frac{(s+m)^{d-1}}{\left(\left(\frac{s-\beta}{\lambda_1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Dans le membre de droite de l'égalité (3.3.18), on effectue le changement de variable $t = \frac{\beta - s}{\lambda_1}$ dans la première intégrale et $t = \frac{s - \beta}{\lambda_1}$ dans la seconde (on suppose $\lambda_1 > 0$). Ensuite on applique l'inégalité $(a+b)^{d-1} \leq 2^{d-2}(a^{d-1} + b^{d-1})$ pour $a, b \geq 0$. Cela conduit à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} I \leq \frac{2^{d-2}}{|\lambda_1|^{p-1}} &\left(\int_0^{\frac{\beta}{\lambda_1}} \frac{(\beta - \lambda_1 t)^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} + \int_0^{\frac{\beta}{\lambda_1}} \frac{m^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right. \\ &\left. + \int_0^{+\infty} \frac{(\beta + \lambda_1 t)^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} + \int_0^{+\infty} \frac{m^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Pour $0 \leq t \leq \frac{\beta}{\lambda_1}$, $\beta - \lambda_1 t \leq \beta$ puisque $\lambda_1 > 0$, puis, se souvenant que $p > d$, on peut majorer de la façon suivante

$$I \leq \frac{2^{d-2}}{|\lambda_1|^{p-1}} \left[\left((1 + 2^{d-2})\beta^{d-1} + 2m^{d-1} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} + 2^{d-2} |\lambda_1|^{d-1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right].$$

Par ailleurs, à l'aide des inégalités du lemme 2.3.4

$$\beta^{d-1} + |\lambda_1|^{d-1} \leq (\lambda_0 - m + \lambda_1)^{d-1} \leq \left(\sqrt{2} \sqrt{(\lambda_0 - m)^2 + \lambda_1^2} \right)^{d-1},$$

on obtient, pour $m \leq \lambda_0$,

$$I \leq \frac{2^{d-2}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}} \left(M_1 |\lambda - m|^{d-1} + M_2 m^{d-1} \right),$$

avec $M_1 = 2^{\frac{d-1}{2}} \max \left\{ (1 + 2^{d-2}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}; 2^{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$ et

$$M_2 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}.$$

On s'intéresse maintenant au cas $0 \leq \lambda_0 < m$ et on se souvient que $d(\lambda, \sigma(D_m)) = |\lambda - m|$; On revient à l'égalité (3.3.17) et on applique l'inégalité $(s + m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2 \geq s^2 + |\lambda - m|^2$. Par conséquent

$$I \leq \frac{1}{|\lambda - m|^p} \int_0^{+\infty} \frac{(s + m)^{d-1}}{\left(\left(\left(\frac{s}{|\lambda - m|} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{p}{2}} \right)} ds.$$

Avec le changement de variable $t = \frac{s}{|\lambda - m|}$ et en majorant comme dans le cas précédent, on obtient, pour $0 \leq \lambda_0 < m$,

$$I \leq \frac{2^{d-2}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}} \left(\tilde{M}_1 |\lambda - m|^{d-1} + \tilde{M}_2 m^{d-1} \right),$$

avec $\tilde{M}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}$ et $\tilde{M}_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}$. Ceci conclut la preuve. \square

3.3.3 Majoration pour l'opérateur perturbé

Nous montrons avec le lemme suivant que, pour b suffisamment grand, $ib \in \rho(H)$. Et bien que cela ne soit pas une obligation, il est commode de majorer $\|(-ib + D)^{-1}\|$ par 1.

Lemme 3.3.7. Soit $p > d \geq 2$. Alors pour b suffisamment grand, nous savons que

1. l'opérateur $-ib + D$ est inversible, c'est-à-dire $ib \in \rho(D)$,
2. et $\|(-ib + D)^{-1}\| \leq 1$.

Nous utilisons la majoration de la proposition 3.3.6, donc nous supposons $d \geq 2$.

Démonstration. Premièrement, on remarque que l'inégalité $\|V(ib - D_m)^{-1}\| < 1$ implique que l'opérateur $(-ib + D)$ est inversible.

En effet, l'inégalité $\|V(ib - D_m)^{-1}\| < 1$ implique que $\text{Id} - V(ib - D_m)^{-1}$ est inversible, et on a

$$\begin{aligned} \text{Id} - V(ib - D_m)^{-1} &= (ib - D_m)(ib - D_m)^{-1} - V(ib - D_m)^{-1} \\ &= (ib - D_m - V)(ib - D_m)^{-1} \\ &= (ib - D)(ib - D_m)^{-1}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, on montre que $\|V(ib - D_m)^{-1}\| < 1$ pour b suffisamment grand. Puisque $\|A\| \leq \|A\|_{\mathbf{S}_p}$, pour tout opérateur A , les propositions 2.4.1 et 3.3.5 nous conduisent à

$$\begin{aligned} \|V(ib - D_m)^{-1}\|^p &\leq \|V(ib - D_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \\ &\leq K \|V\|_{L^p}^p \frac{(1 + |ib - m|^{d-1})}{|ib - m|^{p-1}}, \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

où la constante K ne dépend pas de b . Il est commode de noter

$$C(b)^p = K \|V\|_{L^p}^p \frac{(1 + |ib - m|^{d-1})}{|ib - m|^{p-1}}.$$

Le membre de droite de l'inégalité (3.3.19) tend vers zéro quand b tend vers l'infini, et donc $\|V(ib - D_m)^{-1}\| \leq C(b) < 1$ pour b suffisamment grand.

Maintenant on prouve que $\|(-ib + D)^{-1}\| \leq 1$ pour b suffisamment grand. À l'aide de l'équation de la résolvante, on obtient

$$\begin{aligned} \|(-ib + D)^{-1}\| &\leq \|(-ib + D_m)^{-1}\| + \|(-ib + D)^{-1}\| \cdot \|V(-ib + D_m)^{-1}\| \\ &\leq \|(-ib + D_m)^{-1}\| + \|(-ib + D)^{-1}\| \cdot \|V(-ib + D_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}. \end{aligned}$$

Puisque $D_m^* = D_m$,

$$\|(-ib + D_m)^{-1}\| = \frac{1}{d(ib, \sigma(D_m))} = \frac{1}{|ib - m|},$$

et, d'après ce qui précède, on arrive à

$$\|(-ib + D)^{-1}\| \leq \frac{1}{|ib - m|} + C(b) \|(-ib + D)^{-1}\|.$$

En résolvant cette inégalité par rapport à $\|(-ib + D)^{-1}\|$, on obtient le résultat. \square

3.3.4 Preuve du théorème 3.2.1 en dimension supérieure à 2

On rappelle de (2.2.3) que $f(\lambda) = \det_{[\rho]}(\text{Id} - F(\lambda))$, avec

$$F(\lambda) := (\lambda - ib)(-ib + D)^{-1}V(\lambda - D_m)^{-1} \in \mathbf{S}_p.$$

Par propriété du déterminant régularisé on a

$$|f(\lambda)| \leq \exp\left(\Gamma_p \|(\lambda - ib)(D - ib)^{-1}V(\lambda - D_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p\right). \quad (3.3.20)$$

D'après les propositions 3.3.5 et 3.3.6, on a, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$,

$$\begin{aligned} \|V(\lambda - D_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p &\leq (2\pi)^{-d} \|V\|_{L^p}^p \|(\lambda \pm \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p \\ &\leq (2\pi)^{-d} 2^{d-2} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} M \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{(|\lambda \pm m| + m)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}} \\ &\leq (2\pi)^{-d} 2^{d-2} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} M (1 + 2m)^{d-1} \|V\|_{L^p}^p \frac{(1 + |\lambda|)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}} \end{aligned}$$

avec M définie dans la proposition 3.3.6.

On applique le lemme 3.3.7 et l'inégalité précédente à (3.3.20), et on obtient

$$\log |f(\lambda)| \leq K_1 \|V\|_{L^p}^p \frac{|\lambda - ib|^p (1 + |\lambda|)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}},$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$ et avec $K_1 = \Gamma_p 2^{d-2} (2\pi)^{-d} s_{d-1} n^{\frac{p}{2}} M (1 + 2m)^{d-1}$. Comme $|\lambda - ib|^p \leq b^p (1 + |\lambda|)^p$, on se retrouve avec

$$\log |f(\lambda)| \leq K_1 b^p \|V\|_{L^p}^p \frac{(1 + |\lambda|)^{p+d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p-1}}. \quad (3.3.21)$$

Maintenant, nous allons nous placer dans \mathbb{D} pour pouvoir appliquer le théorème de Borichev-Golinskii-Kupin (Théorème 2.3.1). Pour cela, on considère la fonction $g(u) = f \circ \varphi(u)$, où φ est définie en (3.3.1); la fonction g est holomorphe sur \mathbb{D}_u . D'après les inégalités (3.3.16) puis (3.3.14), on a

$$\begin{aligned} 1 + |\lambda| &\leq \frac{1 + m}{m} (|\lambda + m| + |\lambda - m|) \\ &\leq \frac{1 + m}{m} \cdot \frac{1 + |z_1|}{|z_1 - 1|}. \end{aligned}$$

Or $z_1 = z_2^2 = -\left(\frac{1 + z_3}{1 - z_3}\right)^2$, c'est-à-dire, $z_1 - 1 = -2\frac{1 + z_3^2}{(1 - z_3)^2}$ et $1 + |z_1| = 2\frac{1 + |z_3|^2}{|1 - z_3|^2}$,

d'où $\frac{1 + |z_1|}{|z_1 - 1|} = \frac{1 + |z_3|^2}{|1 + z_3|^2} \leq \frac{2}{|1 + z_3|^2}$. Par conséquent, à l'aide du lemme 3.3.2, on obtient

$$1 + |\lambda| \leq 2 \frac{1 + m}{m} \cdot \frac{Z_b^2}{|u - u(i)||u - u(-i)|} \quad (3.3.22)$$

D'après la minoration de $d(\lambda, \sigma(D_m))$ dans la proposition 3.3.4 et de l'inégalité précédente, on majore (3.3.21) par

$$\log |g(u)| \leq K_2 \cdot \|V\|_{L^p}^p \frac{|u - u(i)|^{p-d-1} |u - u(-i)|^{p-d-1}}{d(u, \mathbb{T})^{p-1} |u - u_{m,+}|^{p-1} |u - u_{m,-}|^{p-1}},$$

avec $K_2 = K_1 b^p \left(2Z_b^2 \frac{1+m}{m}\right)^{p+d-1} \left(\frac{2Z_b^7}{m}\right)^{p-1}$.

On applique le théorème 2.3.1, alors, pour $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{g(u)=0} (1 - |u|)^{p+\tau} (|u - u_{m,+}| |u - u_{m,-}|)^{p-2+\tau} (|u - u(i)| |u - u(-i)|)^{(d-p+\tau)+} \\ \leq C K_2 \cdot \|V\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

avec C dépendant de $d, p, \{u_{m,+}; u_{m,-}; u(i); u(-i)\}$ et τ , et K_2 est décrite ci-dessus.

Par hypothèse, nous avons toujours $p > d \geq 2$, donc, pour $0 < \tau < p - d$, on obtient

$$\sum_{g(u)=0} (1 - |u|)^{p+\tau} |u - u_{m,+}|^{p-2+\tau} |u - u_{m,-}|^{p-2+\tau} \leq C K_2 \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.3.23)$$

La dernière étape de la démonstration consiste à transférer la relations (3.3.23) à nouveau dans $\rho(D_m) = \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$. On se souvient du lemme 3.3.2 et de la proposition 3.3.4 pour obtenir

$$1 - |u| = d(u, \mathbb{T}) \geq \frac{mZ_b^{-1}}{8(1+m)} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}} (1 + |\lambda|)},$$

et, d'après le lemme 3.3.2 et les (in)égalités (3.3.12) à (3.3.15), on a

$$\begin{aligned} |u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}| &\geq Z_b^{-2} |z_3 - 1| \cdot |z_3 + 1| = 4Z_b^{-2} \frac{|z_1|^{\frac{1}{2}}}{|\sqrt{z_1} + i|^2} \\ &\geq 2Z_b^{-2} \frac{|z_1|^{\frac{1}{2}}}{1 + |z_1|} = 2Z_b^{-2} \frac{(|\lambda - m| |\lambda + m|)^{\frac{1}{2}}}{|\lambda + m| + |\lambda - m|} \\ &\geq \frac{Z_b^{-2}}{1+m} \cdot \frac{(|\lambda - m| \cdot |\lambda + m|)^{1/2}}{1 + |\lambda|}. \end{aligned}$$

Donc, pour $p > d \geq 2$ et τ suffisamment petit, nous arrivons à

$$(1 - |u|)^{p+\tau} (|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|)^{p-2+\tau} \geq \frac{K_3 d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| (1 + |\lambda|)^{2(p+\tau-1)}},$$

avec $K_3 = \left(\frac{mZ_b^{-1}}{2^3(1+m)}\right)^{p+\tau} \left(\frac{Z_b^{-2}}{1+m}\right)^{p-2+\tau}$. On en déduit les résultats du théorème

3.2.1, et en particulier, on trouve comme constante,

$$\begin{aligned}
K_4 &= K_2 \times K_3^{-1} \\
&= K_1 b^p \left(2Z_b^2 \frac{1+m}{m} \right)^{p+d-1} \left(\frac{2Z_b^\tau}{m} \right)^{p-1} \left(\frac{2^3(1+m)}{mZ_b^{-1}} \right)^{p+\tau} \times \\
&\quad \times \left(\frac{1+m}{Z_b^{-2}} \right)^{p-2+\tau} \\
&= K_1 b^p 2^{5p+d-2+3\tau} \cdot \frac{(1+m)^{3p+d-3+2\tau}}{m^{3p+d-2+\tau}} \cdot Z_b^{12p+2d-13+3\tau}.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve. \square

Remarque 3.3.8. Bien sûr on peut se demander ce que devient (3.3.23) lorsque $\tau \geq p-d$. On peut alors vérifier que le théorème 2.3.1 s'applique toujours mais, comme on peut s'y attendre, l'inégalité obtenue est plus faible. En effet, le terme supplémentaire $|u - u(i)| \cdot |u - u(-i)|$ donne une contribution en $\frac{1}{|\lambda + m| + |\lambda - m|}$ et après calculs, nous trouvons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| (1 + |\lambda|)^{p+d+3\tau}} \lesssim \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.3.24)$$

La comparaison entre (3.2.1) et (3.3.24) donne $\frac{(1 + |\lambda|)^{2p-2+2\tau}}{(1 + |\lambda|)^{d+p+3\tau}} = \frac{1}{(1 + |\lambda|)^{d-p+2+\tau}}$ qui est plus petit que 1 car $d - p + 2 > 1$.

3.4 Le cas de la dimension 1

3.4.1 Majoration de la résolvante

On commence par calculer la norme de la résolvante.

Proposition 3.4.1. *Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$, $m > 0$ et $p > d = 1$. Alors*

$$\|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p \leq n^{p/2} s_0 M \cdot \frac{d(\lambda; \sigma(D_m)) + m}{d(\lambda, \sigma(D_m))^p},$$

avec $M = \max \left\{ 1; \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$ et $s_0 = 2$.

Démonstration. Tout d'abord $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|\sqrt{x^2 + m^2} - \lambda|^p} = s_0 n^{p/2} \int_0^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p}$.

On note $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$. On suppose $0 \leq \lambda_0 < m$, i.e. $d(\lambda, \sigma(D_m)) = |\lambda - m| > 0$, et $\lambda_1 \geq 0$, on sépare l'intégrale

$$I = \int_0^{|\lambda-m|} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} + \int_{|\lambda-m|}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p}. \quad (3.4.1)$$

et on rappelle que $|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p = ((\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}$.

Pour $0 \leq r \leq |\lambda - m|$, on a $0 < m - \lambda_0 \leq \sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{|\lambda-m|} \frac{dr}{\left((\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2\right)^{\frac{p}{2}}} &\leq \int_0^{|\lambda-m|} \frac{dr}{\left((m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2\right)^{\frac{p}{2}}} \\ &\leq \int_0^{|\lambda-m|} \frac{dr}{|\lambda - m|^p} = \frac{|\lambda - m|}{|\lambda - m|^p}. \end{aligned}$$

Pour $r \geq |\lambda - m| > 0$, on effectue le changement de variable $s + m = \sqrt{r^2 + m^2}$ puis on utilise les inégalités $\sqrt{(s + m)^2 - m^2} \geq s$ et $(s + m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2 \geq s^2 + |\lambda - m|^2$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda-m|}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} &= \int_A^{+\infty} \frac{(s + m) ds}{\left((s + m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2\right)^{\frac{p}{2}} \sqrt{(s + m)^2 - m^2}} \\ &\leq \int_A^{+\infty} \frac{(s + m) ds}{(s^2 + |\lambda - m|^2)^{\frac{p}{2}} \sqrt{(s + m)^2 - m^2}}, \end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{|\lambda - m|^2 + m^2} - m$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{x + m}{\sqrt{(x + m)^2 - m^2}}$ est décroissante sur $[A; +\infty[$ (la dérivée

est négative sur cet intervalle), donc $\forall x \geq A, f(x) \leq f(A) = \frac{\sqrt{|\lambda - m|^2 + m^2}}{|\lambda - m|} \leq \frac{|\lambda - m| + m}{|\lambda - m|}$. Donc, en majorant et avec le changement de variable $s = |\lambda - m|t$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda-m|}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} &\leq \frac{|\lambda - m| + m}{|\lambda - m|^{p+1}} \int_A^{+\infty} \frac{ds}{\left(\left(\frac{s}{|\lambda - m|}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} \\ &\leq \frac{|\lambda - m| + m}{|\lambda - m|^p} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

Donc $I \leq N \cdot \frac{|\lambda - m| + m}{|\lambda - m|^p}$ avec $N = \max \left\{ 1; \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$. On a fini le cas $0 \leq \lambda_0 < m$.

On suppose maintenant que $m \leq \lambda_0$ et on procède de la même façon. Dans ce cas, on a toujours $\lambda_1 \neq 0$. On suppose $\lambda_1 > 0$ (sinon $-\lambda_1 > 0$) et on sépare l'intégrale

$$I = \int_0^{\lambda_1} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} + \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p}. \quad (3.4.2)$$

D'un côté

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_1} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} &= \int_0^{\lambda_1} \frac{dr}{((\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}} \\ &\leq \int_0^{\lambda_1} \frac{dr}{\lambda_1^p} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^p}. \end{aligned}$$

et pour $r \geq \lambda_1$, on effectue le changement de variable $s + m = \sqrt{r^2 + m^2}$ d'où, en posant $A = \sqrt{\lambda_1^2 + m^2} - m$,

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dr}{((\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2)^{\frac{p}{2}}} = \int_A^{+\infty} \frac{(s + m)ds}{|(s + m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2|^{\frac{p}{2}} \sqrt{(s + m)^2 - m^2}}.$$

Comme précédemment, $f : x \mapsto \frac{x + m}{\sqrt{(x + m)^2 - m^2}}$ est décroissante sur $[A; +\infty[$,

donc $\forall x \geq A, f(x) \leq f(A) = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + m^2}}{\lambda_1} \leq \frac{\lambda_1 + m}{\lambda_1}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} &\leq \frac{\lambda_1 + m}{\lambda_1} \int_A^{+\infty} \frac{ds}{|(s + m - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2|^{\frac{p}{2}}} \\ &\leq \frac{\lambda_1 + m}{\lambda_1^{p+1}} \int_A^{+\infty} \frac{ds}{\left(\left(\frac{s + m - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{s + m - \lambda_0}{\lambda_1}$, d'où

$$\int_A^{+\infty} \frac{ds}{\left(\left(\frac{s + m - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{p}{2}}} = \lambda_1 \int_B^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \leq \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}.$$

Par conséquent, on trouve

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dr}{|\sqrt{r^2 + m^2} - \lambda|^p} \leq \frac{\lambda_1 + m}{\lambda_1^p} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}},$$

et donc $I \leq \frac{M}{\lambda_1^p}(\lambda_1 + m)$, avec $M = \max \left\{ 1; \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$. On en déduit la proposition. \square

3.4.2 Preuve du résultat en dimension 1

Nous reprenons l'inégalité (3.3.20) et on applique les propositions 3.3.5 et 3.4.1, sachant que $d(\lambda, \sigma(D_m)) \leq |\lambda - m|$, d'où

$$\begin{aligned} \log |f(\lambda)| &\leq \Gamma_p \|(\lambda - ib)(D - ib)^{-1}V(\lambda - D_m)^{-1}\|_{\mathbb{S}_p}^p \\ &\leq \frac{\Gamma_p}{2\pi} s_0 n^{p/2} M |\lambda - ib|^p \|(D - ib)^{-1}\|^p \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{d(\lambda; \sigma(D_m)) + m}{d(\lambda, \sigma(D_m))^p} \\ &\leq \frac{\Gamma_p}{2\pi} s_0 n^{p/2} b^p M \|(D - ib)^{-1}\|^p \|V\|_{L^p}^p (1 + |\lambda|)^p \cdot \frac{|\lambda - m| + m}{d(\lambda, \sigma(D_m))^p} \\ &\leq K_1 b^p \|(D - ib)^{-1}\|^p \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{(1 + |\lambda|)^{p+1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^p}, \end{aligned}$$

avec $K_1 = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot s_0 n^{p/2} M (1 + 2m)$.

En reprenant la démonstration de lemme 3.3.7, $C(b)$ devient

$$C(b)^p = \|V\|_{L^p}^p K \cdot \frac{m + |ib - m|}{|ib - m|^p}$$

qui a une limite nulle lorsque b tend vers $+\infty$. Donc le lemme s'applique pour $p > 1$. Par conséquent, pour b suffisamment grand, $\|(D - ib)^{-1}\| \leq 1$.

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D_m)$,

$$\log |f(\lambda)| \leq K_1 b^p \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{(1 + |\lambda|)^{p+1}}{d(\lambda, \sigma(D_m))^p},$$

avec K_1 décrite ci-dessus.

On rappelle que, d'après (3.3.22) et (3.3.6), on a

$$\begin{aligned} 1 + |\lambda| &\leq 2 \frac{1 + m}{m} \cdot \frac{Z_b^2}{|u - u(i)||u - u(-i)|} \\ \text{et } d(\lambda, \sigma(D_m)) &\geq \frac{m}{2} Z_b^{-7} \frac{|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|}{|u - u(i)|^2 |u - u(-i)|^2} d(u, \mathbb{T}), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \log |g(u)| &\leq K_1 b^p \left(2 \frac{1 + m}{m} Z_b^2\right)^{p+1} \left(\frac{2Z_b^7}{m}\right)^p \|V\|_{L^p}^p \frac{|u - u(i)|^{p-1} |u - u(-i)|^{p-1}}{d(u, \mathbb{T})^p |u - u_{m,+}|^p |u - u_{m,-}|^p} \\ &\leq K_2 \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|u - u(i)|^{p-1} |u - u(-i)|^{p-1}}{d(u, \mathbb{T})^p |u - u_{m,+}|^p |u - u_{m,-}|^p}, \end{aligned}$$

avec $K_2 = K_1 \cdot b^p 2^{2p+1} Z_b^{9p+2} \cdot \frac{(1 + m)^{p+1}}{m^{2p+1}}$. Comme $p - 1 > 0$, on trouve après application du théorème 2.3.1,

$$\sum_{g(u)=0} d(u, \mathbb{T})^{p+1+\tau} (|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|)^{p-1+\tau} \leq C \cdot K_2 \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C dépend de $p, \{u_{m,+}; u_{m,-}; u(i); u(-i)\}$ et τ . Or, on sait que

$$|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}| \geq \frac{Z_b^{-2}}{1+m} \cdot \frac{(|\lambda - m| \cdot |\lambda + m|)^{1/2}}{1 + |\lambda|}$$

et $d(u, \mathbb{T}) \geq \frac{mZ_b^{-1}}{8(1+m)} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))}{(|\lambda + m| \cdot |\lambda - m|)^{\frac{1}{2}}(1 + |\lambda|)},$

d'où

$$d(u, \mathbb{T})^{p+1+\tau} (|u - u_{m,+}| \cdot |u - u_{m,-}|)^{p-1+\tau} \geq \frac{m^{p+1+\tau} Z_b^{-3p+1-3\tau}}{2^{3(p+1+\tau)}(1+m)^{2p+2\tau}} \times \\ \times \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| \cdot (1 + |\lambda|)^{2p+2\tau}}$$

Au final,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda + m| \cdot |\lambda - m| \cdot (1 + |\lambda|)^{2p+2\tau}} \leq C \cdot K_3 \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

avec $K_3 = K_1 \cdot b^p 2^{5p+4+3\tau} \cdot \frac{(1+m)^{3p+1+\tau}}{m^{3p+2+\tau}} \cdot Z_b^{12p+1+3\tau}.$

3.5 Le cas où la masse est nulle

Nous démontrons dans cette partie le théorème 3.2.3. La méthode est la même mais le spectre de D_0 est, dans ce cas, toute la droite réelle : $\sigma(D_0) = \mathbb{R}$. Les légères différences avec le cas $m > 0$ viennent de l'étude de la transformation conforme et la majoration de la norme de Schatten de la résolvante dans l'expression $V(\lambda - D_0)^{-1}, \lambda \in \rho(D_0)$.

3.5.1 Transformation conforme et majoration de la résolvante

Pour la transformation conforme, on rappelle que $\rho(D_0) = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$, où \mathbb{C}^\pm sont les ensembles $\{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \text{Im}(\lambda) > 0\}$. Donc on peut calculer les contributions du spectre discret $\sigma_d(D) \cap \mathbb{C}^\pm$ à (3.2.7) et les additionner. C'est pourquoi, sans perte de généralités, on considère le cas $\lambda \in \sigma_d(D) \cap \mathbb{C}^+$, et le cas $\sigma_d(D) \cap \mathbb{C}^-$ se traite de la même façon. La transformation conforme φ prise en compte est particulièrement simple,

$$\lambda = \varphi(z) = ib \cdot \frac{1+z}{1-z} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^+, \\ z = \varphi^{-1}(\lambda) = \frac{\lambda - ib}{\lambda + ib} : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{D}.$$

avec $b \geq 1$.

Proposition 3.5.1 (distorsion entre \mathbb{C}^+ et \mathbb{D}). *Pour $b \geq 1$, les distorsions entre \mathbb{C}^+ et \mathbb{D} sont*

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{d(z, \mathbb{T})}{|z-1|^2} \leq d(\lambda, \sigma(D_0)) \leq 4b \cdot \frac{d(z, \mathbb{T})}{|z-1|^2},$$

et

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(1+|\lambda|)^2} \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 16b \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(1+|\lambda|)^2}.$$

Démonstration. Pour la première séquence d'inégalités, on applique (2.3.2) à φ , avec $\varphi'(z) = \frac{2ib}{(z-1)^2}$.

La seconde séquence découle de la première puisque $|z-1|^2 = \frac{4b^2}{|\lambda+ib|^2}$. Puis, comme $b \geq 1$, on majore par $|\lambda+ib|^2 \leq (|\lambda|+b)^2 \leq b^2(1+|\lambda|)^2$ et on minore par $|\lambda+ib|^2 \geq |\lambda|^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(|\lambda|+b)^2 \geq \frac{1}{2}(1+|\lambda|)^2$. Donc

$$\frac{1}{b^2(1+|\lambda|)^2} \leq \frac{1}{|\lambda+ib|^2} \leq \frac{2}{(1+|\lambda|)^2},$$

et on peut conclure. □

Proposition 3.5.2. *Soit $p > d$. Alors*

$$\|V(\lambda - D_0)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \leq K \|V\|_{L^p}^p \frac{|\lambda|^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p-1}},$$

avec,

1. si $d \geq 2$,

$$a) K = n^{\frac{p}{2}} s_{d-1} (2\pi)^{-d} 2^{\frac{d-1}{2}} M$$

$$b) \text{ où } M = \max \left\{ (1+2^{d-2}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}}; 2^{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1} dt}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right\}.$$

2. Sinon $d = 1$ et on a $K = n^{\frac{p}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}}$.

Démonstration. Pour $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 \in \mathbb{C}^+$, d'après l'inégalité 2.4.2, la majoration de la résolvante s'écrit

$$\|V(\lambda - D_0)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} n^{\frac{p}{2}} \|V\|_{L^p}^p \|(\lambda - \mu_0(x))^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})}^p,$$

où $\mu_0(x) = |x|$. Puis on suit la démonstration de la proposition 3.3.6.

Pour $d \geq 2$, on procède d'abord au changement de variable en coordonnées polaires puis il faut majorer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|r-\lambda|^p} dr.$$

On rappelle que, dans le cas présent, $d(\lambda, \sigma(D_0)) = \text{Im}(\lambda) = \lambda_1 > 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|(r - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2|^{\frac{p}{2}}} dr \\ &= \frac{1}{|\lambda_1|^p} \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{\left| \left(\frac{r - \lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 + 1 \right|^{\frac{p}{2}}} dr \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $s = \frac{r - \lambda_0}{\lambda_1}$, donc, en utilisant adéquatement les inégalités du lemme 2.3.4, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{|\lambda_1|^{p-1}} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 s + \lambda_0)^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds \\ &= \frac{1}{|\lambda_1|^{p-1}} \left(\int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^0 \frac{(\lambda_1 s + \lambda_0)^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds + \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_1 s + \lambda_0)^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds \right) \\ &= \frac{1}{|\lambda_1|^{p-1}} \left(\int_0^{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} \frac{(-\lambda_1 s + \lambda_0)^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds + \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_1 s + \lambda_0)^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{p-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{|\lambda_0|^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds + 2^{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{|\lambda_1 s|^{d-1} + |\lambda_0|^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_1|^{p-1}} \left((1 + 2^{d-2}) |\lambda_0|^{d-1} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} + 2^{d-2} |\lambda_1|^{d-1} \int_0^{+\infty} \frac{s^{d-1} ds}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Toujours à l'aide du lemme 2.3.4, on a

$$|\lambda_0|^{d-1} + |\lambda_1|^{d-1} \leq (|\lambda_0| + \lambda_1)^{d-1} \leq \left(\sqrt{2} \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2} \right)^{d-1} = 2^{\frac{d-1}{2}} |\lambda|^{d-1}.$$

En prenant $M = \max \left\{ (1 + 2^{d-2}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds; 2^{d-2} \int_0^{+\infty} \frac{s^{d-1}}{(s^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} ds \right\}$, on arrive à

$$I \leq \frac{2^{\frac{d-1}{2}} M}{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p-1}} \cdot |\lambda|^{d-1}$$

et la proposition en découle. La majoration pour $d = 1$ est quasiment obtenue une fois le second changement de variable effectué, donc la preuve est omise. \square

3.5.2 Preuve du théorème 3.2.3

D'après les propriétés du déterminant de perturbation dans \mathbf{S}_p et le résultat de la proposition 3.5.2, on a

$$\log |f(\lambda)| \leq \Gamma_p K \|(ib - D)^{-1}\|^p \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|\lambda - ib|^p |\lambda|^{d-1}}{d(\lambda; \sigma(D_0))^{p-1}},$$

où f est définie par (2.2.3) et F est identique à (2.2.2) avec $m = 0$. Comme précédemment on majore $\|(ib - D)^{-1}\| \leq 1$ pour b suffisamment grand. Avec $\lambda = \varphi(z)$ et $g = f \circ \varphi$, nous obtenons, grâce aux résultats de la proposition 3.5.1,

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &\leq K_1 b^d \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|z|^p |1 + z|^{d-1}}{|1 - z|^{d+p-1}} \cdot \frac{|1 - z|^{2(p-1)}}{d(z, \mathbb{T})^{p-1}} \\ &\leq K_1 b^d \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|z|^p |1 + z|^{d-1}}{|1 - z|^{d-p+1} d(z, \mathbb{T})^{p-1}}, \end{aligned}$$

où $K_1 = \Gamma_p 2^{2p-1} K$ et K est définie dans la proposition 3.5.2. Nous appliquons le théorème 2.3.1 à la fonction g pour obtenir, pour tout $\tau > 0$,

$$\sum_{g(z)=0} d(z, \mathbb{T})^{p+\tau} |z - 1|^{(d-p+\tau)_+} \leq C \cdot K_1 \cdot b^d \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.5.1)$$

avec C dépendant de $p, d, \{1\}$ et τ , et K_1 est donné ci-dessus. Comme $p > d$, pour $0 < \tau < p - d$, on a $d - p + \tau < 0$; et, d'après les inégalités de distorsion, $d(z, \mathbb{T}) \geq \frac{1}{b} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(1 + |\lambda|)^2}$, donc

$$\sum_{\lambda \in \sigma(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(1 + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} \leq C \cdot b^{p+d+\tau} K_1 \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

D'où le résultat. □

3.6 Cas de l'opérateur de Klein-Gordon

3.6.1 Définition et résultats

Un autre opérateur proche de celui de Dirac est le suivant [Tha91, formula (1.3)]

$$K_m = \sqrt{-\Delta_{\mathbb{R}^d} + m^2} \times \text{Id}_{\mathbb{C}^\ell} \quad (3.6.1)$$

avec $m \geq 0$ et $\ell \geq 1$. On l'appelle *opérateur de Klein-Gordon* mais il existe d'autres conventions possibles; il est souvent appelé *opérateur de Schrödinger relativiste* avec parfois un qualificatif comme « quasi » ([BE11]). Dans [LS09b] (ou [Sei10]) les auteurs remplacent l'étude de l'opérateur de Klein-Gordon par celle de l'opérateur de Schrödinger « ultra-relativiste » $(-\Delta)^{1/2}$.

Comme l'indique Thaller dans [Tha91, section 1.1] l'équation de Klein-Gordon [Tha91, formule (1.3)] ne satisfait pas certains postulats de la mécanique quantique (par exemple que la dérivation par rapport au temps doit être d'ordre 1).

Remarque 3.6.1. On peut trouver une étude plus poussée des problèmes rencontrés avec cet opérateur dans le chapitre VI du livre de Holstein *Topics in quantum mechanics*.

Cette fois, à la différence de l'opérateur de Dirac, la dimension ℓ n'est pas reliée à la dimension d . Cet opérateur sert de modèle pour une particule avec masse m sans spin (voir [BE11, section 2.2]); Vu la représentation (3.1.2), c'est « une moitié » de l'opérateur de Dirac. Comme pour l'opérateur de Dirac, il est essentiellement auto-adjoint sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^\ell)$, le domaine de sa fermeture est $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^\ell)$, et son spectre est absolument continu et est égal à $[m, +\infty[$.

On considère l'opérateur de Klein-Gordon perturbé

$$K = K_m + V,$$

avec $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}))$ pour $p > d$. Comme pour l'opérateur de Dirac, nous avons, par le théorème de Weyl 2.1.17,

$$\sigma_{\text{ess}}(K) = \sigma_{\text{ess}}(K_m) = [m; +\infty[.$$

Un avantage de l'opérateur de Klein-Gordon par rapport à l'opérateur de Dirac est qu'il est borné inférieurement. Grâce à cela, nous pourrions procéder à une intégration selon la méthode développée par Demuth, Hansmann et Katriel.

Cela donne le résultat suivant.

Théorème 3.6.2. *Soient K l'opérateur de Klein-Gordon perturbé défini ci-dessus et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}))$. On suppose $p > d$. Les constantes ω et C_ω sont décrites dans la proposition 3.6.7. Alors, pour $d \geq 2$ et τ suffisamment petit, nous avons*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{d-1+2\tau}} \leq C \cdot \frac{K_3}{I} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.2)$$

où

$$1. K_3 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} \cdot \ell^{p/2} s_{d-1} M (1+m)^{d-1} 2^\delta \cdot \frac{C_\omega^p}{\tau \omega^\tau},$$

avec a) M est définie dans la proposition 3.3.6,

$$b) \delta = 2p + d - \max\{\frac{p-\tau}{2}; d\} - 1 + \tau,$$

c) C_ω définie dans la proposition 3.6.7,

$$2. I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+(\frac{p}{2}-d-1-\frac{\tau}{2})_+}}{(t+1)^{p+d+2\tau+(\frac{p}{2}-d-1-\frac{\tau}{2})_+}} dt,$$

3. et enfin C dépend de d, p, m et τ .

Et en dimension $d = 1$, on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{1+2\tau}} \leq C \cdot \frac{K_3}{I} \cdot \frac{1}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.6.3)$$

avec $K_3 = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot \ell^{\frac{p}{2}} s_0 M C_\omega^p (1+m) 2^{\frac{1}{2}(7p+9+3\tau)}$, M étant définie dans la proposition

3.4.1, $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+\frac{1}{2}(p-3-\tau)_+}}{(t+1)^{p+2+2\tau+\frac{1}{2}(p-3-\tau)_+}} dt$, et C dépendant de p, m et τ .

On rappelle que la constante C provient du théorème 2.3.1 (voir remarque 3.2.2).

Nous rappelons, qu'à l'aide des calculs faits pour l'opérateur de Dirac perturbé, nous avons obtenu les résultats suivants dans [Dub14b].

Théorème 3.6.3 (cas $m > 0$). *Avec les notations ci-dessus, nous avons*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(1 + |\lambda|)^{p+\max\{\frac{p}{2}; d\}-1+2\tau}} \lesssim \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.4)$$

Et pour la dimension $d = 1$, on a

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(1 + |\lambda|)^{\frac{3}{2}(p+\tau)+\frac{1}{2}}} \lesssim \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.5)$$

On remarque que, pour $m = 0$, l'opérateur est simplement

$$K = (-\Delta)^{1/2} + V,$$

c'est-à-dire le Schrödinger fractionnaire avec $s = \frac{1}{2}$ (voir chapitre suivant). Dans ce cas, on observe qu'une dégénérescence non-triviale de la majoration de la résolvante de K_0 apparaît et l'inégalité du théorème 3.6.2 peut se raffiner de la façon suivante (voir le théorème 4.2.1) :

Théorème 3.6.4 (cas $m = 0$). *Soit K l'opérateur de Klein-Gordon défini ci-dessus avec $m = 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $0 < \tau$ suffisamment petit, nous avons*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\min\{(p+\tau)/2, d\}}(\omega + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(2d-p-\tau)_++2\tau}} \lesssim \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.6)$$

On rappelle que ω est définie dans la proposition 3.6.7.

Comme indiqué précédemment, l'opérateur de Klein-Gordon avec une masse nulle est aussi le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ avec $s = \frac{1}{2}$. Dans [FLS08] et [LS09b, chapter 4] se trouvent les inégalités de type Lieb-Thirring pour cet opérateur dans le cas auto-adjoint.

On compare donc le théorème 3.6.4 avec leurs résultats pour $s = 1/2$. Bien entendu, dans ce cas, le spectre discret $\sigma_d(K)$ se trouve sur l'axe réel négatif. Avec nos notations, le théorème 2.1 de [FLS08] dit que

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} |\lambda|^{p-d} \leq C_{p,d} \|V_-\|_{L^p}^p, \quad (3.6.7)$$

où $p > d$ et $V_- = \min\{V, 0\}$. Puisque $d(\lambda, \sigma(K_0)) = |\lambda|$, la majoration (3.6.6) devient

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{|\lambda|^{\max\{(p+\tau)/2, p+\tau-d\}}}{(\omega + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(2d-p-\tau)_++2\tau}} \leq C \|V\|_{L^p}^p, \quad (3.6.8)$$

qui est légèrement plus faible que (3.6.7) comme nous allons le voir maintenant. En effet, lorsque $p + \tau - d > (p + \tau)/2$ (ou, dit autrement, $p/2 \geq d$), le membre de gauche de (3.6.8) est

$$\frac{|\lambda|^{p+\tau-d}}{(\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \leq |\lambda|^{p-d} \cdot \left(\frac{|\lambda|}{(\omega + |\lambda|)^2} \right)^\tau \leq |\lambda|^{p-d}.$$

Si $p/2 < d$, le membre de gauche de (3.6.8) devient

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda|^{(p+\tau)/2}}{(\omega + |\lambda|)^{d-(p+\tau)/2}} &\leq \frac{|\lambda|^{p+\tau-d} \cdot |\lambda|^{-(p+\tau)/2+d}}{(\omega + |\lambda|)^{d-(p+\tau)/2}} \\ &= |\lambda|^{p-d} \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\omega + |\lambda|} \right)^{d-(p+\tau)/2} \cdot \frac{|\lambda|^\tau}{(\omega + |\lambda|)^{2\tau}}, \end{aligned}$$

et une simple majoration utilisant $d - (p + \tau)/2 > 0$ prouve que le deuxième facteur dans la formule précédente est plus petit que 1.

3.6.2 Démonstrations des résultats

On commence par le calcul des distorsions.

On considère l'application $\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ définie par $\varphi_a(z) = -a \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$ (voir (4.2.4)) et l'application $\psi_a(z) = m + \varphi_a(z)$. On note $\lambda_1 = \varphi_a(z)$ et $\lambda = \lambda_1 + m = \psi_a(z)$. On précise que le paramètre a est nécessaire pour définir la résolvante de l'opérateur perturbé au point $-a+m$ apparaissant dans l'expression du déterminant perturbé.

Les distorsions pour φ_a sont connues par la proposition 4.2.3, donc on en déduit aisément celles de ψ_a .

Proposition 3.6.5 (Distorsion entre $\sigma(K_m)$ et \mathbb{D}). *La distorsion via ψ_a se comporte de la façon suivante :*

$$a \cdot d(z, \mathbb{T}) \frac{|z+1|}{|z-1|^3} \leq d(\lambda, \sigma(K_m)) \leq 8a \cdot d(z, \mathbb{T}) \frac{|1+z|}{|1-z|^3}, \quad (3.6.9)$$

et

$$\frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))}{\sqrt{|\lambda-m|(a+|\lambda-m|)}} \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 4\sqrt{a} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))}{\sqrt{|\lambda-m|(a+|\lambda-m|)}}. \quad (3.6.10)$$

Remarque 3.6.6. Dans l'article [Dub14b], nous avons utilisé une version moins précise de (3.6.10) :

$$\frac{1}{4\sqrt{a}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))}{\sqrt{|\lambda-m|(1+|\lambda-m|)}} \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 4\sqrt{a} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))}{\sqrt{|\lambda-m|(1+|\lambda-m|)}}. \quad (3.6.11)$$

Démonstration. On se réfère à la preuve de la proposition 4.2.3.

Pour l'inégalité (3.6.9), il suffit de remarquer que $\psi'_a(z) = \varphi'_a(z)$ et d'utiliser (4.2.5).

Pour l'inégalité (3.6.10), il s'agit seulement d'un changement de variable $\lambda_1 = \lambda - m$ dans (4.2.6). \square

À la différence de l'opérateur de Dirac, l'opérateur de Klein-Gordon est borné inférieurement, donc on peut montrer la propriété suivante

Proposition 3.6.7. *Soit $p > d$, il existe $\omega > 0$ dépendant de d, ℓ, p, m et V tel que*

$$\forall a - m > \omega, \|(-a + m - K)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{a - \omega}. \quad (3.6.12)$$

Démonstration. Par commodité, certains détails sont reportés à la preuve de la proposition 4.2.7, et ne donnons ici les détails distincts.

On a $\|V(\lambda - K_m)^{-1}\| < 1 \Rightarrow \lambda \in \rho(K_m)$ (voir proposition 4.2.7). Prenons $\lambda = -a + m$ et montrons qu'il existe $\omega > 0$ tel que pour tout $a > \omega + m$, $\|V(-a + m - K_m)^{-1}\| < 1$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|V(-a + m - K_m)^{-1}\| &\leq \|V(-a + m - K_m)^{-1}\|_{\mathbf{s}_p} \\ &\leq (2\pi)^{-d/p} \|V\|_{L^p} \cdot \|(-a + m - \mu_m(x))^{-1}\| \end{aligned}$$

et, d'après les majorations obtenues dans la proposition 3.3.6 (et 3.4.1 en dimension $d = 1$) pour l'opérateur de Dirac lorsque $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$. D'où l'existence de ω .

Maintenant, pour tout $a - m \geq \omega > 0$, on a $\|(-a + m - K_m)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{a - \omega}$. En effet, d'après la relation 4.2.13, avec $\lambda = -a + m$ nous avons

$$\begin{aligned} \|(-a + m - K)^{-1}\| &\leq \frac{1}{d(-a + m; \sigma(K_m))} \cdot \frac{1}{1 - \|V(-a + m - K_m)^{-1}\|} \\ &\leq \frac{C_\omega}{a} \leq \frac{C_\omega}{a - \omega}, \end{aligned}$$

car $d(-a + m, \sigma(K_m)) = a \geq a - \omega$ et $\|V(-a + m - K_m)^{-1}\|$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$. \square

Remarque 3.6.8. Dans l'article [Dub14b], comme pour les distorsions, nous nous étions limités à l'utilisation des résultats obtenus pour l'opérateur de Dirac, donc, dans cet esprit, nous avons majoré $\|(-a + m - K)^{-1}\|$ par 1. En suivant les idées de Demuth, Hansmann et Katriel ([DHK09] ou [DHK13]), grâce à la majoration ci-dessus, nous obtenons une meilleure estimation (voir la remarque 3.6.9).

Preuve du théorème 3.6.2. On reprend l'expression de F définie en (2.2.2) avec, cette fois-ci, l'opérateur $K_m : F(\lambda) = (\lambda + a - m)(-a + m - K)^{-1}V(\lambda - K_m)^{-1}$, et f définie comme en (2.2.3) pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(K_m)$.

On commence par le cas $d \geq 2$. Comme $\|(-a + m - K)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|a - \omega|}$, pour $a - m > \omega$, alors, d'après ce qui précède et la proposition 3.3.6 pour $d \geq 2$,

$$\log(f(\lambda)) \leq \frac{\Gamma_p C_\omega^p}{|a - \omega|^p} \cdot |\lambda + a - m|^p \|V(\lambda - K_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \quad (3.6.13)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{K_1}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot |\lambda + a - m|^p \cdot \frac{(|\lambda - m| + m)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p-1}} \\ &\leq \frac{K_1(1+m)^{d-1}}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p |\lambda_1 + a|^p \cdot \frac{(1 + |\lambda_1|)^{d-1}}{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p-1}}, \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

où, d'après la proposition 3.3.6 pour $d \geq 2$, $K_1 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} C_\omega^p 2^{d-2} \ell_{\frac{p}{2}} s_{d-1} M$. Par définition $|\lambda_1| = a \left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2$, d'où

$$|\lambda + a - m| = |\lambda_1 + a| = \frac{4a|z|}{|z-1|^2} \text{ et } 1 + |\lambda_1| = 2a \frac{(1 + |z|^2)}{|z-1|^2} \leq \frac{4a}{|z-1|^2}.$$

On exprime l'inégalité (3.6.14) en fonction de $z \in \mathbb{D}$, d'où

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &\leq \frac{K_1(1+m)^{d-1}}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{(4a|z|)^p \cdot (4a)^{d-1} \cdot a^{1-p} |z-1|^{3p-3}}{|z-1|^{2p} \cdot |z-1|^{2d-2} \cdot d(z, \mathbb{T})^{p-1} |z+1|^{p-1}} \\ &\leq K_2 \cdot \frac{a^d}{|a - \omega|^p} \cdot \frac{\|V\|_{L^p}^p}{d(z, \mathbb{T})^{p-1} |z+1|^{p-1} |z-1|^{2d-p+1}}, \end{aligned}$$

avec $K_2 = K_1(1+m)^{d-1} 4^{p+d-1}$. On applique le théorème 2.3.1, d'où, pour tout $\tau > 0$,

$$\sum_{g(z)=0} d(z, \mathbb{T})^{p+\tau} |z-1|^{(2d-p+\tau)_+} |z+1|^{p-2+\tau} \leq C \cdot K_2 \cdot \frac{a^d}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \quad (3.6.15)$$

où C dépend de $d, p, \{1; -1\}$ et τ , et K_2 est décrite ci-dessus. Comme $p > d \geq 2$, on a toujours $p - 2 > 0$, il reste à distinguer $d < p \leq 2d$ et $p > 2d$.

On rappelle les inégalités suivantes :

$$\text{on a } z = \frac{\sqrt{\lambda - m} - i\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda - m} + i\sqrt{a}}, \text{ d'où } z - 1 = \frac{-2i\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda - m} + i\sqrt{a}} \text{ et } z + 1 = \frac{2\sqrt{\lambda - m}}{\sqrt{\lambda - m} + i\sqrt{a}}.$$

Par ailleurs $|\sqrt{\lambda - m} + i\sqrt{a}|^2 \leq 2a(1 + |\lambda - m|)$, donc

$$|z - 1| \geq \frac{\sqrt{2a}}{a + |\lambda - m|}, \quad |z + 1| \geq \frac{\sqrt{2|\lambda - m|}}{a + |\lambda - m|}. \quad (3.6.16)$$

Si $p > 2d$ alors

$$\begin{aligned} d(z, \mathbb{T})^{p+\tau} |z+1|^{p-2+\tau} &\geq \left(\frac{\sqrt{a}}{4} \right)^{p+\tau} 2^{\frac{1}{2}(p-2+\tau)} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau} |\lambda - m|^{\frac{p+\tau}{2}-1}}{|\lambda - m|^{\frac{p+\tau}{2}} (a + |\lambda - m|)^{p+\tau+\frac{p+\tau}{2}-1}} \\ &\geq \frac{a^{\frac{p+\tau}{2}}}{2^{\frac{3}{2}(p+\tau)+1}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{3\frac{p+\tau}{2}-1}} \lesssim K_2 \cdot 2^{\frac{3}{2}(p+\tau)+1} \cdot \frac{a^{d-\frac{p+\tau}{2}}}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.17)$$

De la même façon, si $d < p \leq 2d$, alors

$$d(z, \mathbb{T})^{p+\tau} |z - 1|^{2d-p+\tau} |z + 1|^{p-2+\tau} \geq \frac{a^{d+\tau}}{2^{2p-d+1+\tau}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{p+d-1+2\tau}}.$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{p+d-1+2\tau}} \lesssim K_2 \cdot 2^{2p-d+1+\tau} \cdot \frac{a^{-\tau}}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (3.6.18)$$

Remarque 3.6.9. Une idée très intéressante de Demuth, Hansmann et Katriel est d'avoir pensé à voir les inégalités du type (3.6.17) et (3.6.18) comme une famille d'inégalités indexées par le paramètre a . Leur idée est de faire une « moyenne » de cette famille en intégrant par rapport à a entre ω et $+\infty$.

On suit la preuve du théorème 4.4.6 de [DHK13], mais la différence ici est que nous avons seulement utilisé le théorème de Borichev, Golinskii et Kupin et non pas le théorème 3.3.5 de [DHK13] qui n'apporte pas de différence sauf peut-être pour la constante devant $\|V\|_{L^p}$. L'autre différence concerne l'intégration du membre de gauche : l'inégalité donnée avant la formule (4.4.19) p.27 dans [DHK13] n'est pas tout à fait correcte si $\varphi_1 - 1 + \tau < 0$. Heureusement, par une minoration évidente, on retrouve le même exposant pour le facteur $|\lambda| + \omega$, mais la constante diffère.

Nous reprenons les cas ci-dessus. On précise que l'interversion de la série et de l'intégrale est licite, par le théorème de Fubini-Tonelli, puisque les fonctions sont positives.

Lorsque $p > 2d$ alors, de (3.6.17) on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{\frac{p+\tau}{2}-d-1-\tau} |a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{3\frac{p+\tau}{2}-1}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

L'intégrale dans le membre de droite de l'inégalité vaut $\frac{1}{\tau\omega^\tau}$. Dans le membre de gauche, on effectue le changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda - m| + \omega}$, puis, si $\frac{p}{2} - d - 1 > 0$, on minore $(|\lambda - m| + \omega)t + \omega$ par $(|\lambda - m| + \omega)t$, sinon on majore $(|\lambda - m| + \omega)t + \omega$

par $(|\lambda - m| + \omega)(t + 1)$, donc, si $\frac{p}{2} - d - 1 > 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{\frac{p-\tau}{2}-d-1} |a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{3\frac{p+\tau}{2}-1}} da \\
&= \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{[(|\lambda - m| + \omega)t + \omega]^{\frac{p-\tau}{2}-d-1} t^p}{(t + 1)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}} dt \\
&\geq \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{p-\tau}{2}-d-1}}{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{p}{2}-2+\frac{3\tau}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3p}{2}-d-1-\frac{\tau}{2}}}{(t + 1)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}} dt \\
&\geq \frac{1}{(|\lambda - m| + \omega)^{d-1+2\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3p}{2}-d-1-\frac{\tau}{2}}}{(t + 1)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}} dt,
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour $2d < p$ et $\frac{p}{2} - d - 1 > 0$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{d-1+2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I} \cdot 2^{\frac{3}{2}(p+\tau)+1} \frac{1}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

avec $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3p}{2}-d-1-\frac{\tau}{2}}}{(t + 1)^{\frac{3}{2}(p+\tau)-1}} dt$.

Et si $\frac{p}{2} - d - 1 \leq 0$ alors

$$\int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{\frac{p-\tau}{2}-d-1} |a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{3\frac{p+\tau}{2}-1}} da \geq \frac{1}{(|\lambda - m| + \omega)^{d-1+2\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{p+d+2\tau}}.$$

D'où, pour $2d < p$ et $\frac{p}{2} - d - 1 \leq 0$

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{d-1+2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I} \cdot 2^{\frac{3}{2}(p+\tau)+1} \cdot \frac{1}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

avec $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{p+d+2\tau}}$.

Maintenant, si $d < p \leq 2d$ alors de (3.6.18) on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{-1} |a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{p+d-1+2\tau}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Ici, on minore d'abord a^{-1} par $(a + |\lambda - m|)^{-1}$, puis à l'aide du changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda - m| + \omega}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{-1} |a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{p+d-1+2\tau}} &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p}{(a + |\lambda - m|)^{p+d+2\tau}} da \\
&\geq \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda - m| + \omega)^{p+d+2\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{p+d+2\tau}}.
\end{aligned}$$

D'où, pour $d < p \leq 2d$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+\tau}}{|\lambda - m|(\omega + |\lambda - m|)^{d-1+2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I} \cdot 2^{2p-d+1+\tau} \cdot \frac{1}{\tau\omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

$$\text{avec } I = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+d+2\tau}}.$$

En comparant les différents cas, on obtient l'inégalité annoncée pour $d \geq 2$.

Remarque 3.6.10. On peut se demander ce que donne le raisonnement précédent si, dans le membre de droite de (3.6.18), au lieu de majorer par l'intégrale $\int_\omega^{+\infty} \frac{1}{a^{1+\tau}} da$, on majore par $\int_\omega^{+\infty} \frac{1}{a^2} da$ par exemple. Dans ce cas, la puissance au numérateur du membre de gauche est plus petite, et donc la puissance du quotient plus élevée, or, pour obtenir la meilleure estimation possible, il faut qu'elle soit la plus petite possible.

On s'intéresse maintenant au cas de la dimension $d = 1$.

On rappelle le résultat de la proposition 3.4.1 :

$$\|(\lambda - \mu_m(\cdot))^{-1}\|_{L^p}^p \leq \ell^{p/2} s_0 M \cdot \frac{d(\lambda; \sigma(K_m)) + m}{d(\lambda, \sigma(K_m))^p},$$

avec M dépendant de p seulement et on majorera $d(\lambda; \sigma(K_m))$ par $|\lambda - m|$. On a toujours $\|(a - m - K)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|a - \omega|}$, pour $a \geq \omega$, d'où, en repartant de (3.6.13),

$$\begin{aligned} \log(f(\lambda)) &\leq \frac{\Gamma_p C_\omega^p}{|a - \omega|^p} \cdot |\lambda + a - m|^p \|V(\lambda - K_m)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \\ &\leq \frac{K_1}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p |\lambda + a - m|^p \cdot \frac{|\lambda - m| + m}{d(\lambda, \sigma(K_m))^p} \\ &\leq \frac{K_1(1+m)}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p |\lambda_1 + a|^p \cdot \frac{|\lambda_1| + m}{d(\lambda, \sigma(K_m))^p}, \end{aligned}$$

avec $K_1 = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \cdot \ell^{\frac{p}{2}} s_0 M C_\omega^p$, M est définie dans la proposition 3.4.1. Ensuite

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &\leq \frac{K_1(1+m)}{|a - \omega|^p} \|V\|_{L^p}^p \frac{(4a|z|)^p}{|z-1|^{2p}} \cdot \frac{4a}{|z-1|^2} \cdot \frac{a^{-p}|z-1|^{3p}}{d(z, \mathbb{T})^p |z+1|^p} \\ &\leq K_2 \frac{a}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|z|^p}{d(z, \mathbb{T})^p |z-1|^{2-p} |z+1|^p}, \end{aligned}$$

avec $K_2 = K_1(1+m)4^{p+1}$. On applique le théorème 2.3.1 et on trouve

$$\sum_{g(z)=0} d(z, \mathbb{T})^{p+1+\tau} |z+1|^{p-1+\tau} |z-1|^{(1-p+\tau)_+} \leq C \cdot K_2 \cdot \frac{a}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où K_2 est décrite ci-dessus et C est une constante dépendant de $p, \{1; -1\}$ et τ .

Comme $p > 1$ alors, pour tout $0 < \tau < p - 1$, on a $1 - p + \tau < 0$. Puis

$$d(z, \mathbb{T}) \geq \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))}{\sqrt{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)}} \text{ et } |z + 1| \geq \left(\frac{2|\lambda - m|}{a + |\lambda - m|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned} d(z, \mathbb{T})^{p+1+\tau} |z + 1|^{p-1+\tau} &\geq \frac{a^{\frac{1}{2}(p+1+\tau)}}{2^{2(p+1+\tau) - \frac{1}{2}(p-1+\tau)}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} \\ &\geq \frac{a^{\frac{1}{2}(p+1+\tau)}}{2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{5}{2}}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} \lesssim \frac{a^{-\frac{1}{2}(p-1+\tau)}}{|a - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

Il reste à intégrer l'inégalité précédente par rapport à a entre ω et $+\infty$. Il faut donc minorer l'intégrale suivante

$$\int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p a^{\frac{1}{2}(p-1+\tau) - 1 - \tau}}{(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} da = \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p a^{\frac{1}{2}(p-3-\tau)}}{(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} da.$$

On doit distinguer selon que $p > 3$ ou $1 < p \leq 3$ et effectuer le changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda - m| + \omega}$. On commence par $p > 3$, donc on minore $(|\lambda - m| + \omega)t + \omega$ par $(|\lambda - m| + \omega)t$ d'où

$$\begin{aligned} &\int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p a^{\frac{1}{2}(p-3-\tau)}}{(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} da \\ &= \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p [(|\lambda - m| + \omega)t + \omega]^{\frac{p-3-\tau}{2}}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{1}{2}(p-3-\tau)}}{(|\lambda - m| + \omega)^{\frac{1}{2}(p-1+3\tau)}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(3p-3-\tau)}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} dt. \end{aligned}$$

D'où, pour $p > 3$, avec $K_3 = K_2 2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{5}{2}}$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{1+2\tau}} \lesssim \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(3p-3-\tau)}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} dt \right)^{-1} \frac{K_3}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Et si $1 < p \leq 3$ alors on majore d'abord a par $a + |\lambda - m|$ puis

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p a^{\frac{1}{2}(p-3-\tau)}}{(a + |\lambda - m|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{1}{2}}} da &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|a - \omega|^p da}{(a + |\lambda - m|)^{p+2+2\tau}} \\ &\geq \frac{(|\lambda - m| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda - m| + \omega)^{p+2+2\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+2+2\tau}} dt. \end{aligned}$$

D'où, pour $1 < p \leq 3$, avec K_3 définie ci-dessus,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^{p+1+\tau}}{|\lambda - m|(a + |\lambda - m|)^{1+2\tau}} \lesssim \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+2+2\tau}} dt \right)^{-1} \frac{K_3}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Ceci termine la preuve du théorème 3.6.3. □

Pour le cas $m = 0$, il s'agit d'un cas particulier du Laplacien fractionnaire $s = \frac{1}{2}$, donc pour la démonstration, on se réfère aux calculs effectués au chapitre suivant en prenant la bonne valeur de s . Toutefois, nous précisons que ces derniers ont été faits pour l'article [Dub14a] qui fait suite à [Dub14b].

4 Résultats pour le Laplacien fractionnaire

Table des matières

4.1	Définition	55
4.2	Résultats et démonstrations	56
4.2.1	Transformation conforme pour le Laplacien fractionnaire	57
4.2.2	Majoration pour le Laplacien fractionnaire	58
4.2.3	Majoration de l'opérateur perturbé	61
4.2.4	Preuve du théorème 4.2.1	62

4.1 Définition

L'opérateur suivant a été porté à notre connaissance par le rapporteur de l'article concernant l'opérateur de Dirac [Dub14b] : il s'agit du Laplacien fractionnaire. On définit pour $s > 0$ le *Laplacien fractionnaire* $(-\Delta)^s$ à l'aide du calcul fonctionnel appliqué à l'opérateur positif $-\Delta$. Donc $(-\Delta)^s$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ et le domaine de sa fermeture est l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{2,2s}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n) := \{f, \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\zeta|^2)^s \|\widehat{f}(\zeta)\|^2 d\zeta < +\infty\}$, où \widehat{f} est la transformée de Fourier de f . Par le théorème spectral, le spectre de $(-\Delta)^s$ est $[0; +\infty[$.

Soit $H_0 := (-\Delta)^s, s > 0$, et considérons l'opérateur perturbé

$$H = H_0 + V \tag{4.1.1}$$

où V est l'opérateur de multiplication par V . On l'appelle *opérateur de Schrödinger fractionnaire*. Là encore, nous supposons que V est une perturbation relativement Schatten-von Neumann de H_0 (voir (3.1.3)).

Le potentiel V appartient à $L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \left\{ V : \int_{\mathbb{R}^d} \|V(x)\|_F^p dx < +\infty \right\}$, où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius,

$$\|V(x)\|_F = \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} |(V(x))_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et $p > \frac{d}{2s}$ alors les hypothèses (3.1.3) sont satisfaites (voir proposition 2.4.1).

Par le théorème de Weyl 2.1.17 sur le spectre essentiel

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = \sigma(H_0) = [0, +\infty[.$$

4.2 Résultats et démonstrations

Les inégalités de type Lieb-Thirring suivantes ont été obtenues à l'aide du théorème 2.3.1 de Borichev, Golinskii et Kupin et en utilisant la méthode d'intégration de Demuth, Hansmann et Katriel.

Théorème 4.2.1. *Soient H l'opérateur de Schrödinger fractionnaire défini par (4.1.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \frac{d}{2s}$. On prendra τ suffisamment petit. Les constantes ω et C_ω sont définies dans la proposition 4.2.7.*

Pour $0 < s \leq \frac{d}{2}$, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^\alpha (\omega + |\lambda|)^\beta} \leq C \cdot \frac{K_1}{I} \cdot \frac{2^\delta}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.1)$$

avec C dépend de d, p, s et τ , $K_1 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s} \cdot M_1$, M_1 étant définie dans

la proposition 4.2.5, $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+\frac{1}{2}(p-\frac{d}{s}-2-\tau)_+}}{(t+1)^{p+1+2\tau+\frac{1}{2}\max\{\frac{d}{s}-p-2\tau; 0; p-\frac{d}{s}-2-\tau\}}} dt$ et les exposants

vérifient

1. $\alpha = \min\{\frac{p+\tau}{2}; \frac{d}{2s}\}$,
2. $\beta = 2\tau + \frac{1}{2}(\frac{d}{s} - p - \tau)_+$,
3. $\delta = \frac{7p}{2} + \frac{3\tau}{2} + \min\{p; \frac{d}{s}\} - \frac{d}{2s}$.

Pour $s > \frac{d}{2}$, $p \geq 1$ et $\tau > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|^\alpha (\omega + |\lambda|)^\beta} \leq C \cdot \frac{K_4}{I} \cdot \frac{2^\delta}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.2)$$

où C dépend de d, p, s et τ , $K_4 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} C_\omega^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s} \cdot N_1$, N_1 étant définie dans la

proposition 4.2.5 $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+\frac{1}{2}(p-\frac{3d}{2s}-1-\tau)_+}}{(t+1)^{p+1+2\tau+\frac{1}{2}\max\{p-\frac{3d}{2s}-1-\tau; \frac{d}{2s}+1-p-\tau; 0\}}} dt$, et les exposants

vérifient

1. $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \min\{p - \frac{d}{2s} + \tau; 1\}$,
2. $\beta = 2\tau + \frac{1}{2}(\frac{d}{2s} - p + 1 - \tau)_+$,
3. $\delta = 2(2p + 1 - \frac{d}{2s} + \tau) - \frac{1}{2} \max\{p - \frac{d}{2s} - 1 + \tau; 0; \frac{3d}{2s} - p - 1 + \tau\}$.

On rappelle que les constantes C ci-dessus proviennent du théorème 2.3.1 (voir remarque 3.2.2).

À titre de comparaison, voici le résultat que l'on obtient sans l'intégration.

Théorème 4.2.2. *Soit H l'opérateur de Schrödinger fractionnaire défini par (4.1.1)*

et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \frac{d}{2s}$.

Pour $0 < s \leq \frac{d}{2}$ et $\tau > 0$ suffisamment petit, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^\alpha (1 + |\lambda|)^\beta} \lesssim \|V\|_{L^p}^p,$$

où

1. $\alpha = \min\{\frac{p+\tau}{2}; \frac{d}{2s}\}$,
2. $\beta = \frac{p}{2} + \max\{p; \frac{d}{s}\} - \frac{d}{2s} + 2\tau$.

Pour $s > \frac{d}{2}$, $p \geq 1$ et $\tau > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|^\alpha (1 + |\lambda|)^\beta} \lesssim \|V\|_{L^p}^p,$$

où

1. $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \min\{p - \frac{d}{2s} + \tau; 1\}$,
2. $\beta = p - \frac{d}{2s} + 1 + \frac{3\tau}{2} + \frac{1}{2} \max\{p - \frac{d}{2s} - 1; 0; \frac{3d}{2s} - p - 1\}$.

Pour le cas auto-adjoint, nous nous référons au théorème 2.1 dans [FLS08]. Dans ce cas, $\sigma_d(K)$ est inclus dans la demi-droite réelle négative et $0 < s < \min\{1; \frac{d}{2}\}$. Avec nos notations, la formule (5.11) de [FLS08] énonce que

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} |\lambda|^{p-\frac{d}{2s}} \leq C_{p,d} \|V_-\|_{L^p}^p, \quad (4.2.3)$$

avec $p > \frac{d}{2s}$ et $V_- = \min\{V, 0\}$. Comme précédemment dans le cas de l'opérateur de Klein-Gordon (avec $m = 0$), mais cette fois pour $0 < s < \min\{1; \frac{d}{2}\}$, un calcul simple montre que (4.2.1) et (5.1.1) sont plus faibles que (4.2.3).

4.2.1 Transformation conforme pour le Laplacien fractionnaire

On note φ_a l'application de \mathbb{D} à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^+\}$ définie pour $a > 0$ par

$$\varphi_a : z \mapsto \lambda := -a \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2, \quad (4.2.4)$$

et l'application inverse est définie sur $\bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+$ par

$$\varphi_a^{-1} : \lambda \mapsto z := \frac{\sqrt{\lambda} - i\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}}.$$

Proposition 4.2.3 (Distorsion entre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et \mathbb{D}). *La distorsion via φ_a se comporte de la façon suivante :*

$$a \cdot d(z, \mathbb{T}) \frac{|z+1|}{|z-1|^3} \leq d(\lambda, \mathbb{R}^+) \leq 8a \cdot d(z, \mathbb{T}) \frac{|1+z|}{|1-z|^3}, \quad (4.2.5)$$

et

$$\frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{d(\lambda, \mathbb{R}^+)}{\sqrt{|\lambda|(a+|\lambda|)}} \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 4\sqrt{a} \frac{d(\lambda, \mathbb{R}^+)}{\sqrt{|\lambda|(a+|\lambda|)}}. \quad (4.2.6)$$

Démonstration. La première distorsion s'obtient par application directe de (2.3.2) à la fonction φ_a avec, pour $z \in \mathbb{D}$, $\varphi'_a(z) = 4a \frac{z+1}{(z-1)^3}$.

Pour la seconde, nous avons

$$|1+z| = \frac{2\sqrt{|\lambda|}}{|\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}|} \text{ and } |1-z| = \frac{2\sqrt{a}}{|\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}|}. \quad (4.2.7)$$

Par ailleurs, $|\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}|^2 = |\lambda| + a + 2\sqrt{a} \operatorname{Im}(\sqrt{\lambda})$, et comme $\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda}) \geq 0$, on obtient

$$|\lambda| + a \leq |\sqrt{\lambda} + i\sqrt{a}|^2 \leq (|\sqrt{\lambda}| + |\sqrt{a}|)^2 \leq 2(a + |\lambda|).$$

En reprenant les inégalités (4.2.5), on obtient (4.2.6). \square

4.2.2 Majoration pour le Laplacien fractionnaire

D'après la proposition 2.4.1, nous avons

Proposition 4.2.4. *Soient $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $p > \frac{d}{2s}$ et $\lambda \in \rho(H_0)$.*

Alors $V(\lambda - H_0)^{-1} \in \mathcal{S}_p$, et

$$\|V(\lambda - H_0)^{-1}\|_{\mathcal{S}_p}^p \leq (2\pi)^{-d} \|V\|_{L^p}^p \cdot \|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}^p.$$

Nous allons maintenant majorer l'expression $\|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p}$ apparaissant dans la proposition précédente. On rappelle que $s_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ pour $d \geq 2$ et, par commodité, $s_0 = 2$ pour $d = 1$.

Proposition 4.2.5. *Soient $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et $p > \frac{d}{2s}$. On note dans cette proposition $\delta = \frac{d}{2s} - 1$.*

Pour $0 < s \leq \frac{d}{2}$, on a

$$\|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p}^p \leq \frac{n^{\frac{p}{2}} s_{d-1}}{2s} \cdot M_1 \cdot \frac{|\lambda|^{\frac{d}{2s}-1}}{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-1}}, \quad (4.2.8)$$

avec $M_1 = \max \left\{ K_2; \int_0^{+\infty} \frac{t^\delta dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$, et K_2 , définie dans la preuve, dépend de d, p et s .

Et pour $s > \frac{d}{2}$, on a

$$\|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p}^p \leq \frac{n^{\frac{p}{2}} s_{d-1}}{2s} \cdot \frac{N_1}{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}}}, \quad (4.2.9)$$

où $N_1 = \max \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{t^\delta}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}}; \int_0^1 t^\delta dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} \right\}$.

Démonstration. Comme pour les autres opérateurs, on commence par

$$\begin{aligned} \|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_n \mathbb{C})}^p &= n^{\frac{p}{2}} \|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})}^p \\ &= n^{\frac{p}{2}} s_{d-1} I, \end{aligned}$$

avec s_{d-1} connu pour $d \geq 2$, $s_0 = 2$ pour $d = 1$ et où

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|r^{2s} - \lambda|^p} dr = \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{|(r^{2s} - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2|^{\frac{p}{2}}} dr. \quad (4.2.10)$$

On suppose premièrement que $\lambda_0 < 0$, c'est-à-dire $d(\lambda, \sigma(H_0)) = |\lambda|$. Dans (4.2.10), on utilise $(r^{2s} - \lambda_0)^2 \geq r^{4s} + \lambda_0^2$, et on effectue le changement de variable $t = \frac{r^{2s}}{|\lambda|}$, d'où

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(r^{4s} + |\lambda|^2)^{\frac{p}{2}}} dr \\ &\leq \frac{1}{2s} \cdot \frac{|\lambda|^{\frac{d}{2s}}}{|\lambda|^p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{d}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

L'intégrale dans (4.2.11) est convergente puisque $p > \frac{d}{2s} > 0$.

Maintenant, nous supposons que $\lambda_0 \geq 0$ et $\lambda_1 > 0$ (sinon $-\lambda_1 > 0$). Dans (4.2.10), nous effectuons le changement de variable $t = \frac{r^{2s} - \lambda_0}{\lambda_1}$. Donc,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2s\lambda_1^{p-1}} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d-1}{2s}} (\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{1}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{2s\lambda_1^{p-1}} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Si $s = \frac{d}{2}$, la majoration est évidente.

Maintenant on suppose que $0 < s < \frac{d}{2}$. Comme $\lambda_1 > 0$, $-\frac{\lambda_0}{\lambda_1} < 0$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt &= \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^0 \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d}{2s}-1}}{(t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}} dt. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale du membre de droite de l'égalité ci-dessus, nous avons $\lambda_1 t + \lambda_0 \leq \lambda_0$, et dans la seconde $(\lambda_1 t + \lambda_0)^{\frac{d}{2s}-1} \leq C_{d,s} \left((\lambda_1 t)^{\frac{d}{2s}-1} + \lambda_0^{\frac{d}{2s}-1} \right)$, avec

$C_{d,s} = \max\{1; 2^{\frac{d}{2s}-2}\}$. Donc, en notant $\delta = \frac{d}{2s} - 1$, nous avons

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{2s\lambda_1^{p-1}} \left[\lambda_0^\delta \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^0 \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt + \right. \\ &\quad \left. + C_{d,s}\lambda_1^\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^\delta}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt + C_{d,s}\lambda_0^\delta \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt \right] \\ &\leq \frac{K_1}{2s\lambda_1^{p-1}} \cdot [\lambda_0^\delta + \lambda_1^\delta], \end{aligned}$$

avec $K_1 = \max\left\{(1 + C_{d,s}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}}; C_{d,s} \int_0^{+\infty} \frac{t^\delta dt}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}}\right\}$. Puis, en notant $C'_{d,s} = \max\{1; 2^{1-\delta}\}$, on a

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{K_1}{2s\lambda_1^{p-1}} \cdot C'_{d,s}(\lambda_0 + \lambda_1)^\delta \\ &\leq \frac{K_1}{2s\lambda_1^{p-1}} \cdot C'_{d,s}(\sqrt{2})^\delta |\lambda|^\delta. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\lambda_0 \geq 0$, $I \leq \frac{K_2}{2s} \cdot \frac{|\lambda|^{\frac{d}{2s}-1}}{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-1}}$ avec $K_2 = K_1 \cdot C'_{d,s}(\sqrt{2})^\delta$.

Ceci finit le cas $s \leq \frac{d}{2}$.

Maintenant, nous traitons le cas $s > \frac{d}{2}$ et on suppose encore $\lambda_1 > 0$. De (4.2.12), nous savons que

$$I = \frac{1}{2s\lambda_1^{p-1}} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^\delta}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt.$$

La difficulté ici est que $-1 < \delta = \frac{d}{2s} - 1 < 0$. En effectuant le changement de variable $u = t + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0)^\delta}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt &= \lambda_1^\delta \int_{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}^{+\infty} \frac{(t + \frac{\lambda_0}{\lambda_1})^\delta}{(t^2+1)^{\frac{p}{2}}} dt \\ &= \lambda_1^\delta \int_0^{+\infty} \frac{u^\delta}{\left(\left(u - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} du. \end{aligned}$$

Donc nous majorons la dernière intégrale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{u^\delta}{\left(\left(u - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} du &\leq \int_0^1 u^\delta du + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(\left(u - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}} du \\ &\leq \int_0^1 u^\delta du + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{p}{2}}} du. \end{aligned}$$

En effet, pour la première inégalité, on utilise que $(u - \frac{\lambda_0}{\lambda_1})^2 + 1 \geq 1$ quand $0 \leq u \leq 1$, et que $u^\delta \leq 1$ quand $u \geq 1$ (puisque $\delta < 0$). Donc, pour $\lambda_0 \geq 0$, $I \leq \frac{K_3}{2s} \cdot \frac{\lambda_1^\delta}{\lambda_1^{p-1}}$, avec

$$K_3 = \int_0^1 u^\delta du + 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^{\frac{p}{2}}}. \text{ Ceci termine la preuve. } \quad \square$$

Remarque 4.2.6. Lorsque $0 < s \leq d/2$, on ne peut pas factoriser par λ_1 dans le calcul pour $\lambda_0 \geq 0$, car on ne peut pas ensuite majorer aussi facilement sur $[1; +\infty[$.

4.2.3 Majoration de l'opérateur perturbé

Pour majorer $\|(-a - H)^{-1}\|$ on peut reprendre exactement la même démonstration que celle pour l'opérateur de Dirac perturbé. Toutefois, nous aurons besoin pour la démonstration de l'inégalité de type Lieb-Thirring, d'une majoration de $\|(-a - H)^{-1}\|$ sous la forme suivante

Proposition 4.2.7. *Soit $p > \frac{d}{2s}$, il existe $\omega > 0$, dépendant de n, d, p, s et V , tel que*

$$\forall a \geq \omega > 0, \|(-a - H)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|\omega - a|}.$$

Démonstration. Nous utilisons la relation suivante

$$\forall \lambda \in \rho(H_0), \lambda - H = (\text{Id} - V(\lambda - H_0)^{-1})(\lambda - H_0). \quad (4.2.13)$$

Comme $\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H)$, on en déduit que $\lambda \in \rho(H)$ si et seulement si $\text{Id} - V(\lambda - H_0)^{-1}$ est inversible. Or on sait que $\|V(\lambda - H_0)^{-1}\| < 1$ implique $\text{Id} - V(\lambda - H_0)^{-1}$ est inversible donc $\|V(\lambda - H_0)^{-1}\| < 1$ implique $\lambda \in \rho(H)$.

En prenant $\lambda = -a$, montrons que, pour tout $a \geq \omega$ où $\omega \in \mathbb{R}^+$ est suffisamment grand, l'inégalité $\|V(-a - H_0)^{-1}\| < 1$ est vérifiée. Pour cela on utilise l'inégalité de Birman-Solomyak (2.4.2). En effet,

$$\begin{aligned} \|V(-a - H_0)^{-1}\| &\leq \|V(-a - H_0)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p} \\ &\leq (2\pi)^{-d/p} \|V\|_{L^p} \cdot \|(-a - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 4.2.5, on trouve

$$\|V(-a - H_0)^{-1}\| \leq K'(d, n, p, s) \|V\|_{L^p} \cdot a^{\frac{1}{p}(\frac{d}{2s} - p)}.$$

Le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$, donc il existe $\omega > 0$, dépendant de n, d, p, s et V , tel que $\forall a \geq \omega, \|V(-a - H_0)^{-1}\| < 1$.

On montre maintenant que, pour $a \geq \omega$, on a $\|(-a - H)^{-1}\| \leq \frac{C(\omega)}{|\omega - a|}$. D'après la relation (4.2.13), on a pour $\lambda \in \rho(H)$,

$$\begin{aligned} \|(\lambda - H)^{-1}\| &\leq \|(\lambda - H_0)^{-1}\| \cdot \|(\text{Id} - V(\lambda - H_0)^{-1})^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(H_0))} \cdot \frac{1}{1 - \|V(\lambda - H_0)^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = -a$, $d(-a, \sigma(H_0)) = a \geq |\omega - a|$, et comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|V(-a - H_0)^{-1}\| = 0$, il existe $\omega > 0$ tel que pour tout $a > \omega$,

$$\|(-a - H)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{a} \leq \frac{C_\omega}{|\omega - a|}.$$

□

Remarque 4.2.8. Pour un cadre plus général, voir la démonstration du lemme 3.3.4 dans [Han10]. Il démontre l'existence de ω tel que, dans $R(\omega) = \{\lambda \in \rho(H_0), \operatorname{Re}(\lambda) \leq -\omega\}$, on a $\forall \lambda \in R(\omega), \|(\lambda - H)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|\operatorname{Re}(\lambda) + \omega|}$.

4.2.4 Preuve du théorème 4.2.1

On se souvient de (2.2.3) que $f(\lambda) = \det_{[p]}(\operatorname{Id} - F(\lambda))$, avec

$$F(\lambda) := (\lambda + a)(a + H)^{-1}V(\lambda - H_0)^{-1} \in \mathbf{S}_p, p \geq 1.$$

Par les propriétés du déterminant régularisé nous savons que

$$\log(|f(\lambda)|) \leq \Gamma_p \|(\lambda + a)(a + H)^{-1}V(\lambda - H_0)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p.$$

D'après la proposition 4.2.7, pour $p > \frac{d}{2s}$ et $a \geq \omega$, on a $\|(a + H)^{-1}\| \leq \frac{C(\omega)}{|\omega - a|}$, et d'après la proposition 2.4.1 nous avons l'inégalité suivante

$$\log |f(\lambda)| \leq \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} \cdot \frac{C_\omega^p}{|\omega - a|^p} \cdot |\lambda + a|^p \|V\|_{L^p}^p \|(\lambda - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}^p, \quad (4.2.14)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Cas $0 < s \leq \frac{d}{2}$. D'après (4.2.8), nous avons

$$\log |f(\lambda)| \leq \frac{K_1}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|\lambda + a|^p |\lambda|^{\frac{d}{2s}-1}}{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-1}}. \quad (4.2.15)$$

où $K_1 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s} \cdot M_1$, et M_1 est définie en (4.2.8).

Nous devons maintenant transférer cette inégalité dans \mathbb{D} pour appliquer le théorème 2.3.1. Pour cela on considère la fonction $g(z) = f \circ \varphi_a(z)$, où φ_a est définie par (4.2.4); elle est clairement holomorphe dans \mathbb{D} . Par définition de (4.2.4) nous avons $|\lambda + a| = \frac{4a|z|}{|1 - z|^2}$. D'après cette égalité et la proposition 4.2.3 appliquées à l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &\leq \frac{K_1}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{(4a)^p |z|^p a^{\frac{d}{2s}-1} |z + 1|^{\frac{d}{s}-2} |z - 1|^{3(p-1)}}{|z - 1|^{2p} |z - 1|^{\frac{d}{s}-2} a^{p-1} d(z, \mathbb{T})^{p-1} |1 + z|^{p-1}} \\ &\leq \frac{K_2 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|z|^p}{d(z, \mathbb{T})^{p-1} |1 + z|^{p-\frac{d}{s}+1} |1 - z|^{\frac{d}{s}-p+1}}, \end{aligned}$$

avec $K_2 = 4^p K_1$.

On applique alors le théorème 2.3.1, donc, pour tout $\tau > 0$, nous avons

$$\sum_{g(z)=0} (1 - |z|)^{p+\tau} |z - 1|^{(\frac{d}{s}-p+\tau)_+} |z + 1|^{(p-\frac{d}{s}+\tau)_+} \lesssim \frac{K_2 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.16)$$

avec K_2 définie ci-dessus.

On considère d'abord le cas $\frac{d}{2s} < p < \frac{d}{s}$. Alors, pour $0 < \tau < \frac{d}{s} - p$, (4.2.16) devient

$$\sum_{g(z)=0} (1 - |z|)^{p+\tau} |z - 1|^{\frac{d}{s} - p + \tau} \leq C \cdot \frac{K_2 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.17)$$

où C dépend de $d, p, s, \{-1; 1\}$ et τ .

Dans le deuxième cas, nous avons $p = \frac{d}{s}$. Nous obtenons

$$\sum_{g(z)=0} (1 - |z|)^{p+\tau} |z - 1|^\tau |1 + z|^\tau \leq C \cdot \frac{K_2 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.18)$$

où C dépend de $d, p, s, \{-1; 1\}$ et τ .

Le troisième et dernier cas est $\frac{d}{s} < p$, et (4.2.16) devient, pour $0 < \tau < p - \frac{d}{s}$,

$$\sum_{g(z)=0} (1 - |z|)^{p+\tau} |z + 1|^{p - \frac{d}{s} + \tau} \leq C \cdot \frac{K_2 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.19)$$

où C dépend de $d, p, s, \{-1; 1\}$ et τ .

L'étape suivante de la preuve consiste à transférer les relations (4.2.17), (4.2.18) et (4.2.19) à nouveau dans $\rho(H_0) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On rappelle que, d'après la proposition 4.2.3,

$$1 - |z| = d(z, \mathbb{T}) \geq \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))}{|\lambda|^{1/2}(a + |\lambda|)},$$

$$|1 + z|^2 \geq \frac{2|\lambda|}{a + |\lambda|}, \quad \text{et} \quad |1 - z|^2 \geq \frac{2a}{a + |\lambda|}.$$

À partir de l'équation (4.2.17) nous arrivons à

$$(1 - |z|)^{p+\tau} |z - 1|^{\frac{d}{s} - p + \tau} \geq \frac{a^{\frac{d}{2s} + \tau}}{2^{\frac{5p}{2} + \frac{3\tau}{2} - \frac{d}{2s}}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+\tau}{2}} (a + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + \frac{3\tau}{2}}},$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+\tau}{2}} (a + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + \frac{3\tau}{2}}} \lesssim a^{-\tau} \cdot \frac{K_2}{|\omega - a|^p} \cdot 2^{\frac{5p}{2} + \frac{3\tau}{2} - \frac{d}{2s}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

De l'équation (4.2.18) nous obtenons

$$(1 - |z|)^{p+\tau} |z - 1|^\tau |z + 1|^\tau \geq \frac{a^{\frac{p}{2} + \tau}}{2^{2p+\tau}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma_d(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p}{2}} (a + |\lambda|)^{p+2\tau}},$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p}{2}}(a + |\lambda|)^{p+2\tau}} \lesssim a^{-\tau} \cdot \frac{K_2}{|\omega - a|^p} \cdot 2^{2p+\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Et de l'équation (4.2.19) nous obtenons

$$(1 - |z|)^{p+\tau} |z + 1|^{p - \frac{d}{s} + \tau} \geq \frac{a^{\frac{p+\tau}{2}}}{2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{d}{2s}}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2s}}(a + |\lambda|)^{\frac{3p}{2} - \frac{d}{2s} + \frac{3\tau}{2}}},$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2s}}(a + |\lambda|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} \lesssim a^{\frac{d}{2s} - \frac{p+\tau}{2}} \cdot \frac{K_2}{|\omega - a|^p} \cdot 2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{d}{2s}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

On peut procéder à une intégration par rapport à $a \in [\omega; +\infty[$ (voir la remarque 3.6.9).

Nous reprenons les cas ci-dessus. On précise que l'interversion de la série et de l'intégrale est licite, par le théorème de Fubini-Tonelli, puisque les fonctions sont positives.

Si $\frac{d}{2s} < p < \frac{d}{s}$ alors,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+\tau}{2}}} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{-1}}{(a + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + \frac{3\tau}{2}}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

D'un côté, $\int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} = \frac{1}{\tau \omega^{\tau}}$, et dans le membre de gauche, on procède au changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda| + \omega}$ d'où, puisque $a \leq a + |\lambda|$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{-1}}{(a + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + \frac{3\tau}{2}}} da &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p}{(a + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + 1 + \frac{3\tau}{2}}} da \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + 1 + \frac{3\tau}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + 1 + \frac{3\tau}{2}}}. \end{aligned}$$

Donc, pour $\frac{d}{2s} < p < \frac{d}{s}$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+\tau}{2}}(\omega + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} - \frac{p}{2} + \frac{3\tau}{2}}} \lesssim \frac{K_2}{I_1} \cdot \frac{2^{\frac{5p}{2} + \frac{3\tau}{2} - \frac{d}{2s}}}{\tau \omega^{\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.20)$$

$$\text{où } I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{d}{2s} + \frac{p}{2} + 1 + \frac{3\tau}{2}}}.$$

Si $p = \frac{d}{s}$, la démonstration est la même, et on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p}{2}}(\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I_2} \cdot \frac{2^{2p+\tau}}{\tau \omega^{\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.21)$$

avec $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+1+2\tau}}$.

Si $p > \frac{d}{s}$ alors,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2s}}} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{p+\tau}{2} - \frac{d}{2s} - 1 - \tau}}{(a + |\lambda|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Comme précédemment, on procède au changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda| + \omega}$ d'où, selon que $\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau) \geq 0$, auquel cas on minore $(|\lambda| + \omega)t + \omega$ par $(|\lambda| + \omega)t$, ou $\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau) < 0$, et dans ce cas, on majore $(|\lambda| + \omega)t + \omega$ par $(|\lambda| + \omega)(t + 1)$. On fait le cas $\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau) \geq 0$, le second étant identique aux deux précédents.

$$\begin{aligned} & \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} da = \\ &= \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p [(|\lambda| + \omega)t + \omega]^{\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau)}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{\frac{p}{2} - \frac{d}{2s} - 1 - \frac{\tau}{2}}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{p}{2} - \frac{d}{2s} - 1 + \frac{3\tau}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3p}{2} - \frac{d}{2s} - 1 - \frac{\tau}{2}}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} dt \end{aligned}$$

Donc, lorsque $\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau) \geq 0$, on obtient

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2s}} (\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I_3} \cdot \frac{2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{d}{2s}}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.22)$$

avec $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3p}{2} - \frac{d}{2s} - 1 - \frac{\tau}{2}}}{(t+1)^{\frac{3}{2}(p+\tau) - \frac{d}{2s}}} dt$. Et lorsque $\frac{1}{2}(p - \frac{d}{s} - 2 - \tau) < 0$, on obtient

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+\tau}}{|\lambda|^{\frac{d}{2s}} (\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \lesssim \frac{K_2}{I_4} \cdot \frac{2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{d}{2s}}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.23)$$

où $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+1+2\tau}}$. En comparant (4.2.20) à (4.2.23), on trouve (4.2.1). Ceci termine le cas $0 < s \leq \frac{d}{2}$.

Cas $s > \frac{d}{2}$.

En utilisant (4.2.9) et la proposition 4.2.7, l'inégalité (4.2.14) devient

$$\log |f(\lambda)| \leq \frac{K_4}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \frac{|\lambda + a|^p}{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p - \frac{d}{2s}}},$$

où $K_4 = \frac{\Gamma_p}{(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s} \cdot N_1$, avec N_1 dépendant seulement de d, n, p et s .

Alors, comme précédemment, nous avons

$$\log |g(z)| \leq \frac{K_4}{|\omega - a|^p} \cdot \frac{4^p a^{\frac{d}{2s}} |z|^p}{d(z, \mathbb{T})^{p - \frac{d}{2s}} |1 - z|^{\frac{3d}{2s} - p} |1 + z|^{p - \frac{d}{2s}}}.$$

On note $K_5 = K_4 4^p$. D'après le théorème 2.3.1, nous avons

$$\sum_{g(z)=0} (1 - |z|)^{p - \frac{d}{2s} + 1 + \tau} |z - 1|^{(\frac{3d}{2s} - p - 1 + \tau)_+} |z + 1|^{(p - \frac{d}{2s} - 1 + \tau)_+} \lesssim \frac{K_5 a^{\frac{d}{2s}}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Les différents cas possibles selon p et $\frac{d}{2s}$ apparaissent plus clairement à partir de la figure suivante (Figure 4.1). L'axe des abscisses représente p et l'axe des ordonnées représente $\frac{d}{2s}$. On dessine aussi les droites d'équations $y = 1$, $x - y - 1 = 0$, $-x + 3y - 1 = 0$ et $x - 3y - 1 = 0$. Cette dernière droite nous sera utile lors de l'intégration des inégalités.

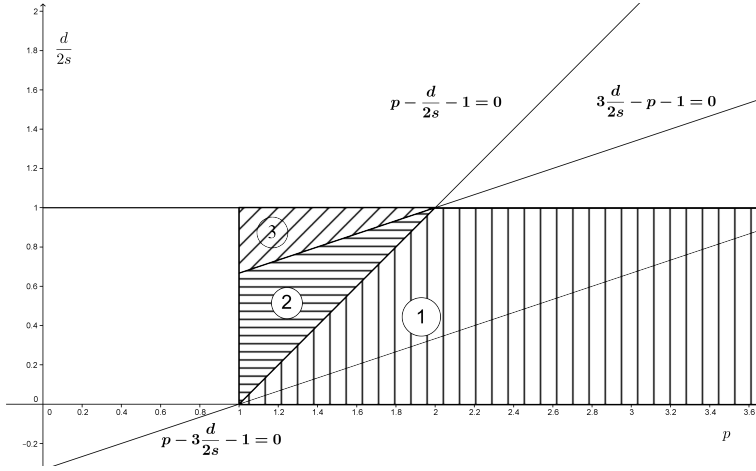


FIGURE 4.1: Les différents cas pour $s > \frac{d}{2}$.

Par conséquent, il existe trois cas à distinguer :

cas 1. La région 1 : $p - \frac{d}{2s} - 1 \geq 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 < 0$.

cas 2. La région 2 : $p - \frac{d}{2s} - 1 < 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 < 0$.

cas 3. La région 3 : $p - \frac{d}{2s} - 1 < 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 \geq 0$.

Les calculs sont similaires au précédent cas $s \leq \frac{d}{2}$. Pour mémoire, on rappelle que,

$$1 - |z| = d(z, \mathbb{T}) \geq \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))}{|\lambda|^{1/2}(a + |\lambda|)},$$

$$|1 + z|^2 \geq \frac{2|\lambda|}{a + |\lambda|}, \quad \text{et} \quad |1 - z|^2 \geq \frac{2a}{a + |\lambda|}.$$

Dans le premier cas, nous avons

$$\begin{aligned} d(z, \mathbb{T})^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau} |z + 1|^{p - \frac{d}{2s} - 1 + \tau} &\geq \left(\frac{\sqrt{a}}{4}\right)^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau} \cdot 2^{\frac{1}{2}(p - \frac{d}{2s} - 1 + \tau)} \times \\ &\times \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau} |\lambda|^{\frac{p-1+\tau}{2} - \frac{d}{4s}}}{|\lambda|^{\frac{p+1+\tau}{2} - \frac{d}{4s}} (a + |\lambda|)^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau + \frac{p-1+\tau}{2} - \frac{d}{4s}}} \\ &\geq \frac{a^{\frac{1}{2}(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)}}{2^{\frac{3}{2}(p+\tau) + \frac{5}{2} - \frac{3d}{4s}}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}}{|\lambda|(a + |\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3d}{4s}}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|(a+|\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2}-\frac{3d}{4s}+\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{a^{-\frac{1}{2}(p+1-\frac{3d}{2s}+\tau)}}{|\omega-a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (4.2.24)$$

Dans le deuxième cas, nous trouvons

$$d(z, \mathbb{T})^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau} \geq \left(\frac{\sqrt{a}}{4}\right)^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+1+\tau}{2}-\frac{d}{4s}}(a+|\lambda|)^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}},$$

donc

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1-\frac{d}{2s}+\tau)}(a+|\lambda|)^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}} \lesssim \frac{a^{-\frac{1}{2}(p+1-\frac{3d}{2s}+\tau)}}{|\omega-a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (4.2.25)$$

Dans le dernier cas, nous avons

$$\begin{aligned} & d(z, \mathbb{T})^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau} |z-1|^{\frac{3d}{2s}-p-1+\tau} \geq \\ & \geq \left(\frac{\sqrt{a}}{4}\right)^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau} (\sqrt{2a})^{\frac{3d}{2s}-p-1+\tau} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+1+\tau}{2}-\frac{d}{4s}}(a+|\lambda|)^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau+\frac{3d}{4s}-\frac{p+1-\tau}{2}}} \\ & \geq \frac{a^{\frac{d}{2s}+\tau}}{2^{\frac{5}{2}(p+1)-\frac{7d}{4s}+\frac{3\tau}{2}}} \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1-\frac{d}{2s}+\tau)}(a+|\lambda|)^{\frac{p+1}{2}+\frac{d}{4s}+\frac{3\tau}{2}}} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p-\frac{d}{2s}+1+\tau}}{|\lambda|^{\frac{p+1+\tau}{2}-\frac{d}{4s}}(a+|\lambda|)^{\frac{p+1}{2}+\frac{d}{4s}+\frac{3\tau}{2}}} \lesssim \frac{a^{-\tau}}{|\omega-a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p. \quad (4.2.26)$$

Il reste à intégrer par rapport à a sur $[\omega; +\infty[$. On procède de la même façon que $0 < s \leq \frac{d}{2}$.

Dans le premier cas : $p - \frac{d}{2s} - 1 \geq 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 < 0$, nous obtenons à partir de (4.2.24)

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1-\frac{d}{2s}+\tau}}{|\lambda|} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega-a|^p a^{\frac{1}{2}(p-\frac{3d}{2s}-1-\tau)}}{(a+|\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2}-\frac{3d}{4s}+\frac{1}{2}}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

D'un côté, $\int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} = \frac{1}{\tau\omega^\tau}$, et dans le membre de gauche, si $p - \frac{3d}{2s} - 1 > 0$ on procède au changement de variable $t = \frac{a-\omega}{|\lambda|+\omega}$, et si $p - \frac{3d}{2s} - 1 \leq 0$ on majore d'abord a par $a+|\lambda|$, (voir la figure 4.1 pour le tracé de la droite $p - \frac{3d}{2s} - 1 = 0$)

donc, si $p - \frac{3d}{2s} - 1 > 0$, pour τ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} & \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} da = \\ &= \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p [(|\lambda| + \omega)t + \omega]^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(t+1)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{p}{2} - \frac{3d}{4s} - \frac{1}{2} + \frac{3\tau}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(3p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(t+1)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} dt. \end{aligned}$$

Donc, si $p - \frac{3d}{2s} - 1 > 0$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}}{|\lambda|(\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \lesssim \frac{K_5}{I_5} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}(3(p+\tau)+5 - \frac{3d}{2s})}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.27)$$

avec $I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}(3p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(t+1)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} dt$. Et si $p - \frac{3d}{2s} - 1 \leq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} da &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p (a + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{3\frac{p+\tau}{2} - \frac{3d}{4s} + \frac{1}{2}}} da \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{p+1+2\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+1+2\tau}}. \end{aligned}$$

Donc, si $p - \frac{3d}{2s} - 1 \leq 0$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}}{|\lambda|(\omega + |\lambda|)^{2\tau}} \lesssim \frac{K_5}{I_6} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}(3(p+\tau)+5 - \frac{3d}{2s})}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.28)$$

avec $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t+1)^{p+1+2\tau}}$.

Dans le deuxième cas, on a $p - \frac{d}{2s} - 1 < 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 < 0$. On intègre l'inégalité (4.2.25), ce qui donne

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p - \frac{d}{2s} + 1 + \tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)}} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

On a $p - \frac{3d}{2s} - 1 \leq 0$, donc on majore a par $a + |\lambda|$ puis, avec le même changement

de variable, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{\frac{1}{2}(p - \frac{3d}{2s} - 1 - \tau)}}{(a + |\lambda|)^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}} da &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p}{(a + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(p + \frac{d}{2s} + 3 + 3\tau)}} da \\
&\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{1}{2}(p + \frac{d}{2s} + 3 + 3\tau)}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{1}{2}(p + \frac{d}{2s} + 3 + 3\tau)}} \\
&\geq \frac{1}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2s} - p + 1 + 3\tau)}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{1}{2}(p + \frac{d}{2s} + 3 + 3\tau)}},
\end{aligned}$$

et on sait que $\frac{d}{2s} - p + 1 > 0$ par hypothèse, donc

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)} (\omega + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2s} - p + 1 + 3\tau)}} \lesssim \frac{K_5}{I_7} \cdot \frac{2^{2(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.29)$$

avec $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{1}{2}(p + \frac{d}{2s} + 3 + 3\tau)}}$. On rappelle qu'ici, $0 < p - \frac{d}{2s} < 1$, donc $\frac{d}{2s} - p + 1 > 0$.

Enfin, le dernier cas : $p - \frac{d}{2s} - 1 < 0$ et $\frac{3d}{2s} - p - 1 \geq 0$; en intégrant l'inégalité (4.2.26) on trouve

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p - \frac{d}{2s} + 1 + \tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)}} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{-1}}{(a + |\lambda|)^{\frac{p+1}{2} + \frac{d}{4s} + \frac{3\tau}{2}}} da \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

En majorant a par $a + |\lambda|$, puis par le même changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p a^{-1}}{(a + |\lambda|)^{\frac{p+1}{2} + \frac{d}{4s} + \frac{3\tau}{2}}} da &\geq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\omega - a|^p}{(a + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(p+3 + \frac{d}{2s} + 3\tau)}} da \\
&\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{1}{2}(p+3 + \frac{d}{2s} + 3\tau)}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{1}{2}(p+3 + \frac{d}{2s} + 3\tau)}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^{p+1 - \frac{d}{2s} + \tau}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}(p+1 - \frac{d}{2s} + \tau)} (\omega + |\lambda|)^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2s} - p + 1 + 3\tau)}} \lesssim \frac{K_5}{I_8} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}(5(p+1) - \frac{7d}{2s} + 3\tau)}}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (4.2.30)$$

avec $I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{\frac{1}{2}(p+3 + \frac{d}{2s} + 3\tau)}}$. Comme pour le cas précédent, $0 < p - \frac{d}{2s} < 1$, donc $\frac{d}{2s} - p + 1 > 0$.

Pour plus de lisibilité dans l'énoncé du théorème, pour le cas 2., on minore $\frac{1}{(1 + |\lambda|)^\tau}$ par $\frac{1}{(1 + |\lambda|)^{\frac{3\tau}{2}}}$, d'où l'expression de β .

La preuve du théorème 4.2.2 est finie. \square

5 Inégalités de type Lieb-Thirring à l'aide d'un théorème de Hansmann

Table des matières

5.1	Théorème de Hansmann et résultats	71
5.1.1	Résultats de Hansmann	71
5.1.2	Énoncés des résultats et comparaisons	72
5.1.3	Distorsion pour résolvante	74
5.2	Cas du Laplacien fractionnaire	76
5.3	Cas de l'opérateur de Klein-Gordon	78

5.1 Théorème de Hansmann et résultats

5.1.1 Résultats de Hansmann

Le théorème suivant est l'ingrédient principal de la démonstration des théorèmes 5.2.2 et 5.3.1. Sa démonstration se trouve dans l'article [Han11].

Théorème 5.1.1. *Soient A un opérateur borné et normal, et B un opérateur borné tels que $B - A \in \mathbf{S}_p$ pour un $p \geq 1$. On suppose en outre que $\sigma(A)$ est convexe, alors*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(B)} d(\lambda, \sigma(A))^p \leq \|B - A\|_{\mathbf{S}_p}^p.$$

Ce théorème a été généralisé de la façon suivante ([Han13, Cor. 1]) :

Théorème 5.1.2. *Soient A borné et auto-adjoint et B borné tels que $B - A \in \mathbf{S}_p$ pour un $p > 1$. Alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(B)} d(\lambda, \sigma(A))^p \leq C_p \|B - A\|_{\mathbf{S}_p}^p,$$

où C_p dépend seulement de p .

La constante C_p peut être explicitée dans une certaine mesure. On a

$$C_p = \begin{cases} 12^{2-p} \Gamma_p & \text{si } 1 < p < 2 \\ 2 & \text{si } p = 2 \\ 2^{p/2-1} 4^{p-2} \Gamma_p & \text{si } p > 2 \end{cases},$$

où Γ_p est une constante donnée avant le théorème 1 dans [Han13], et vérifiant $\Gamma_p \geq 2$ pour tout $p > 1$.

On remarquera dans un premier temps que le premier résultat considère les $p \geq 1$ tandis que le précédent se restreint à $p > 1$, puis que la constante C_p dans le théorème 5.1.2 est plus grande que 1, donc, dans le cas où les deux théorèmes s'appliquent (par exemple quand le spectre de l'opérateur non-perturbé est convexe), le théorème 5.1.1 est plus intéressant. Pour plus de détails, on se référera aux articles [Han11], [Han13] et [DHK13].

Dans [Han11], l'auteur a appliqué le théorème 5.1.1 aux opérateurs de Schrödinger et de Jacobi, et dans [Han13], au cas d'un opérateur unitaire, mais aussi aux zéros des transformées de Cauchy de mesures de Borel sur le cercle unité.

Par ailleurs, le théorème 5.1.2 a été employé par Golinskii et Kupin dans [GK13] pour une perturbation d'un opérateur de Schrödinger auto-adjoint, et par Sambou dans [Sam14] pour des opérateurs de Schrödinger magnétiques.

De façon plus générale, nous avons vu comment majorer la norme de la résolvante de l'opérateur perturbé (voir la proposition 4.2.7) lorsque l'opérateur non-perturbé est borné inférieurement. On peut alors utiliser le théorème 5.3.3 dans [DHK13] qui emploie une intégration par rapport au paramètre a , permettant ici de définir les résolvantes des opérateurs, et qui fournit un meilleur résultat que les résultats 5.1.1 et 5.1.2 seuls. Dans les résultats qui suivent nous explicitons les constantes présentes à l'exception de ω et C_ω .

5.1.2 Énoncés des résultats et comparaisons

On a vu dans la proposition 4.2.7 qu'il existe ω , dépendant de n, d, p, s et V , tel que

$$\forall a > \omega > 0, \|(-a - H)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|\omega - a|}.$$

Dans ce cas, le résultat obtenu pour le Schrödinger fractionnaire est

Théorème 5.1.3. *Soient H l'opérateur défini en (4.1.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \max\{1; \frac{d}{2s}\}$ avec $s > 0$.*

Alors, pour $\tau > 0$, l'inégalité suivante est vraie

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(\omega + |\lambda|)^{\frac{d}{2s} + \tau}} \leq \frac{K_2}{I} \cdot \frac{1}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (5.1.1)$$

avec

1. $K_2 = (2\sqrt{5})^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot M_1$ si $0 < s \leq \frac{d}{2}$,
2. $K_2 = (2\sqrt{5})^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot N_1$ si $s > \frac{d}{2}$,
3. et $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p+(p-\frac{d}{2s}-1-\tau)_+}}{(t+1)^{p+\frac{d}{2s}+1+\tau+(p-\frac{d}{2s}-1-\tau)_+}} dt$,

où M_1 et N_1 sont définies dans la proposition 4.2.5.

Pour comparer les théorèmes 4.2.1 et 5.1.3, on considère une suite $(\lambda_n)_\mathbb{N} \subset \sigma_d(H)$ qui converge vers $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Sans perte de généralités, on suppose $d(\lambda_n, \sigma(H)) \leq 1$.

Le cas le plus simple est $\lambda \in]0; +\infty[$. Dans ce cas, (5.1.1) est meilleure que (4.2.1) ou (4.2.2) .

Le cas $\lambda = \infty$ est aussi simple, après distinction des différents cas possibles en fonction de p par rapport à $\frac{d}{s}$, puisque le terme général de (4.2.1) devient $\frac{d(\lambda_n, \sigma(H))^{p+\tau}}{|\lambda_n|^{\frac{d}{2s}+2\tau}}$

et celui de (5.1.1) devient $\frac{d(\lambda_n, \sigma(K))^p}{|\lambda_n|^{\frac{d}{2s}+\tau}}$. Et on a $\frac{d(\lambda_n, \sigma(K))^\tau}{|\lambda_n|^\tau} \leq 1$. Donc (5.1.1) est meilleure que (4.2.1). Le même raisonnement est valide pour comparer (5.1.1) et (4.2.2) et donne la même conclusion.

La méthode d'intégration introduite par Demuth, Hansmann et Katriel s'avère ici fructueuse en terme de comparaison car, sans elle, l'inégalité (4.2.1) donne un meilleur résultat en ∞ que (5.2.1).

Lorsque $\lambda = 0$, la situation est plus délicate : Si $d(\lambda_n, \sigma(H)) \approx |\lambda_n|$, c'est-à-dire, $\text{Re}(\lambda_n) \leq 0$ ou $0 \leq \text{Re}(\lambda_n) \leq C|\text{Im}(\lambda_n)|$ avec $C > 0$; alors (4.2.1) donne un meilleur résultat que (5.1.3). Sinon, lorsque $d(\lambda_n, \sigma(H)) = |\text{Im}(\lambda)|$ et $\text{Re}(\lambda_n) \geq |\text{Im}(\lambda_n)|$,

il y a deux cas. En effet, le terme général de (4.2.1) devient $\frac{|\text{Im}(\lambda)|^{p+\tau}}{|\lambda_n|^{\min\{(p+\tau)/2; d/2s\}}}$ et celui de (5.1.3) devient $|\text{Im}(\lambda)|^p$. Donc le quotient donne $\frac{|\lambda_n|^{\min\{(p+\tau)/2; d/2s\}}}{|\text{Im}(\lambda)|^\tau} \approx$

$\frac{\text{Re}(\lambda_n)^{\min\{(p+\tau)/2; d/2s\}}}{|\text{Im}(\lambda)|^\tau}$. Les deux cas à distinguer sont alors clairs. De même avec (4.2.2). Au final la situation est plus ambiguë lorsque $\lambda = 0$ avec un léger avantage pour (4.2.1) ou (4.2.2) par rapport à (5.1.1).

De même pour l'opérateur de Klein-Gordon, il existe ω , dépendant de n, d, p, m et V , tel que

$$\forall a > \omega > -m, \|(-a - K)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|\omega - a|}. \quad (5.1.2)$$

On obtient alors

Théorème 5.1.4. *Soit $K = K_m + V$ une perturbation de l'opérateur de Klein-Gordon $K_m, m > 0$, défini en 3.6.1 et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $\tau > 0$, nous avons l'inégalité suivante*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(K)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^p}{(\omega + |\lambda|)^{d+\tau}} \leq \frac{K_3}{I} \cdot J \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (5.1.3)$$

avec $K_3 = (2\sqrt{5})^p \cdot \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot 2^\delta M$, où

1. $\delta = 2d - 3$ et $M = \max\{M_1; M_2\}$ si $d \geq 2$ (voir la proposition 3.3.6),
2. sinon $\delta = 1$ et M définie en proposition 3.4.1 pour $d = 1$,

puis $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p-d-2\tau} dt}{(t+2+m+)^{2p}(t+1)^{1-\tau}}$, et $J = \int_\omega^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\tau}(t+m)^{2\tau}}$.

Nous allons comparer le résultat (3.6.2) obtenu avec le théorème de Borichev, Golinskii et Kupin avec le résultat (5.1.3) obtenu avec le théorème de Hansmann.

Pour cela on considère une suite $(\lambda_n)_\mathbb{N} \subset \sigma_d(K)$ qui converge vers $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(K)$. Sans perte de généralités, on suppose $d(\lambda_n, \sigma(K)) \leq 1$.

Le cas le plus simple est $\lambda \in]m; +\infty[$. Dans ce cas, (5.1.3) est meilleure que (3.6.2). Le cas $\lambda = \infty$ est aussi simple puisque dans ce cas, le terme général de (3.6.2) devient $\frac{d(\lambda_n, \sigma(K))^{p+\tau}}{|\lambda_n|^{d+2\tau}}$ et celui de (5.1.3) devient $\frac{d(\lambda_n, \sigma(K))^p}{|\lambda_n|^{d+\tau}}$. Et on a $\frac{d(\lambda_n, \sigma(K))^\tau}{|\lambda_n|^\tau} \leq 1$. Donc (5.1.3) est meilleure que (3.6.2). Comme pour le laplacien fractionnaire, la méthode d'intégration introduite par Demuth, Hansmann et Katriel apporte une amélioration significative car, sans elle, l'inégalité (3.6.4) donne un meilleur résultat en ∞ que (5.3.1).

Lorsque $\lambda = m$, la situation est plus mitigée : Si $d(\lambda_n, \sigma(K)) \approx |\lambda_n - m|$, c'est-à-dire, $\text{Re}(\lambda_n) \leq m$ ou $0 \leq \text{Re}(\lambda_n) - m \leq C|\text{Im}(\lambda_n)|$ avec $C > 0$; alors (3.6.2) donne un meilleur résultat que (5.1.3). Sinon, lorsque $d(\lambda_n, \sigma(K)) = |\text{Im}(\lambda)|$ et $\text{Re}(\lambda_n) - m \geq |\text{Im}(\lambda_n)|$, il y a deux cas. En effet, le terme général de (3.6.2) devient $\frac{|\text{Im}(\lambda)|^{p+\tau}}{|\lambda_n - m|}$ et celui de (5.1.3) devient $|\text{Im}(\lambda)|^p$. Donc le quotient donne $\frac{|\lambda_n - m|}{|\text{Im}(\lambda)|^\tau} \approx \frac{\text{Re}(\lambda_n) - m}{|\text{Im}(\lambda)|^\tau}$. Les deux cas à distinguer sont alors clairs.

5.1.3 Distorsion pour résolvante

Nous appliquerons le théorème 5.1.1 aux résolvantes des opérateurs (puisque ceux-ci sont non-bornés). Pour déterminer la distorsion entre le spectre de l'opérateur et celui de sa résolvante, nous avons besoin des distorsions de l'application $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$ entre $\mathbb{C} \setminus [a; +\infty[$ et $\mathbb{C} \setminus]0; \frac{1}{a}]$. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 5.1.5. *Soit $a > 0$. La distorsion entre $\mathbb{C} \setminus]0; \frac{1}{a}]$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ via la fonction inverse est donnée par*

$$d\left(\frac{1}{\lambda}, \left]0; \frac{1}{a}\right]\right) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda, [a; +\infty[)}{|\lambda| \cdot (a + |\lambda|)}. \tag{5.1.4}$$

Démonstration. Nous détaillons le calcul. Pour cela, on distingue quatre zones notées 1., 2., 3. et 4. (voir la figure 5.1). On note $I_z =]0; \frac{1}{a}]$ et $I_\lambda = [a; +\infty[$.

Lorsque $\lambda \in 1.$, on a $d(\lambda, I_\lambda) = |\lambda - a|$ et $d(z, I_z) = |z| = \frac{1}{|\lambda|} = \frac{|\lambda - a|}{|\lambda| \cdot |\lambda - a|}$. Comme $|\lambda - a| \leq a + |\lambda|$, on en déduit

$$\text{pour } \lambda, z \in 1., d(z, I_z) \geq \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

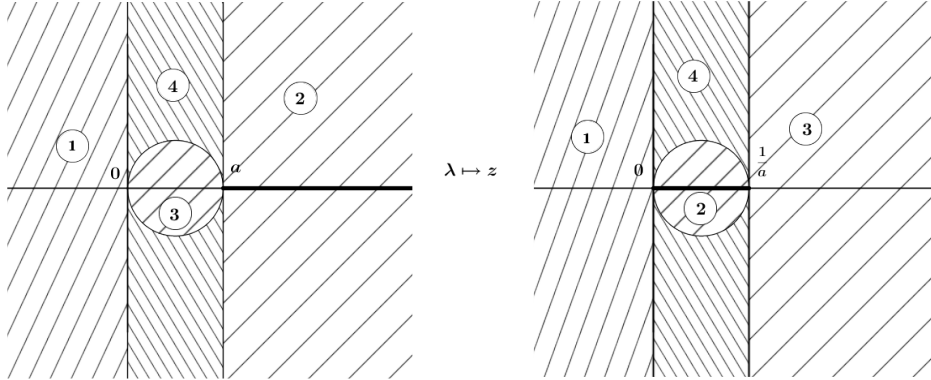


FIGURE 5.1: Les différentes zones pour l'inversion

De la même façon, lorsque $\lambda \in 2.$, on a $d(\lambda, I_\lambda) = |\text{Im}(\lambda)|$ et $d(z, I_z) = |\text{Im}(z)| = \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{|\lambda|^2}$, et comme $|\lambda| \leq a + |\lambda|$, on trouve

$$\text{pour } \lambda, z \in 2., d(z, I_z) \geq \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

En procédant de même, lorsque $\lambda \in 3.$, on a $d(\lambda, I_\lambda) = |\lambda - a|$ et $d(z, I_z) = \left|z - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - \lambda}{a\lambda}\right| = \frac{|\lambda - a|}{a|\lambda|}$. Or $a \leq a + |\lambda|$ donc

$$\text{pour } \lambda, z \in 3., d(z, I_z) \geq \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

Pour $\lambda \in 4.$, on a toujours $0 \leq \text{Re}(\lambda) \leq a$. On a toujours $d(\lambda, I_\lambda) = |\lambda - a|$ et $d(z, I_z) = |\text{Im}(z)| = \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{|\lambda|^2}$. On distingue selon que

1. $\text{Im}(\lambda) \geq \frac{a}{2}$,
2. $\text{Im}(\lambda) \leq \frac{a}{2}$ et $\text{Re}(\lambda) \leq \frac{a}{2}$,
3. $\text{Im}(\lambda) \leq \frac{a}{2}$ et $\text{Re}(\lambda) \geq \frac{a}{2}$.

On commence par $\text{Im}(\lambda) \geq \frac{a}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} |\lambda - a| &= \sqrt{(\text{Re}(\lambda) - a)^2 + \text{Im}(\lambda)^2} \\ &\leq \sqrt{a^2 + \text{Im}(\lambda)^2} \quad \text{car } 0 \leq \text{Re}(\lambda) \leq a \\ &\leq \sqrt{5}|\text{Im}(\lambda)| \quad \text{car } |\text{Im}(\lambda)| \geq \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Donc, comme précédemment,

$$d(z, I_z) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

Cas 2. On a $|\operatorname{Im}(\lambda)| \geq \operatorname{Re}(\lambda)$, donc $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq \sqrt{2}|\operatorname{Im}(z)|$ car $|\operatorname{Im}(z)| = \frac{|\operatorname{Re}(\lambda)|}{|\lambda|^2} \leq \frac{|\operatorname{Im}(\lambda)|}{|\lambda|^2} = |\operatorname{Im}(z)|$. Par conséquent, $d(z, I_z) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|z| = \frac{1}{\sqrt{2}|\lambda|}$. Or $\frac{|\lambda - a|}{a + |\lambda|} \leq 1$ donc

$$d(z, I_z) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

Cas 3. Le dernier cas est similaire au précédent, on utilise cette fois $|\operatorname{Im}(\lambda)| \geq a - \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, et on obtient

$$d(z, I_z) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d(\lambda, I_\lambda)}{|\lambda|(a + |\lambda|)}.$$

Ce qui prouve l'inégalité de distorsion annoncée. \square

5.2 Cas du Laplacien fractionnaire

On introduit la fonction $g : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} \setminus [-\frac{1}{a}, 0[$ définie par $g(\lambda) = \frac{-1}{a + \lambda}$. La proposition suivante est l'application de la proposition 5.1.5 à H_0 et sa résolvante en $-a$: on a $(-a - H_0)^{-1} = g(H_0)$.

Proposition 5.2.1. *La distorsion entre $\mathbb{C} \setminus [-\frac{1}{a}; 0[$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ est donnée par*

$$d\left(g(\lambda), \left[-\frac{1}{a}, 0\right]\right) \geq \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda, \mathbb{R}^+)}{(a + |\lambda|)^2}.$$

Démonstration. On compose la relation 5.1.4 par la translation $T : \lambda \mapsto \lambda + a$, d'où

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\lambda + a}, \left]0; \frac{1}{a}\right]\right) &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda + a, [a; +\infty[)}{|\lambda + a| \cdot (a + |\lambda + a|)} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda, [0; +\infty[)}{|\lambda + a| \cdot (a + |\lambda|)}, \end{aligned}$$

puis on minore à l'aide de $|\lambda + a| \leq a + |\lambda|$. \square

Le théorème suivant est une première inégalité de type Lieb-Thirring obtenue grâce au théorème 5.1.1.

Théorème 5.2.2. *Soient H l'opérateur défini en (4.1.1) et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > \max\{1; \frac{d}{2s}\}$ avec $s > 0$. Alors, pour $a > \omega > 0$ l'inégalité suivante est vraie*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} \leq K_2 \cdot \frac{a^{\frac{d}{2s} - p}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (5.2.1)$$

avec (voir la proposition 4.2.5 pour la définition de M_1 et N_1)

$$1. K_2 = (2\sqrt{5})^p \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot M_1 \text{ si } 0 < s \leq \frac{d}{2},$$

$$2. \text{ ou } K_2 = (2\sqrt{5})^p \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot N_1 \text{ si } s > \frac{d}{2}.$$

Démonstration. On pose $A = (-a - H_0)^{-1}$ et $B = (-a - H)^{-1}$ pour $a > \omega$ de sorte que A et B existent. Nous savons que $B - A = BVA \in \mathbf{S}_p$, donc on peut appliquer le théorème 5.1.1. Il implique, pour $p \geq 1$,

$$\sum_{\mu \in \sigma_d(B)} d(\mu, \sigma(A))^p \leq \|B - A\|_{\mathbf{S}_p}^p. \quad (5.2.2)$$

Maintenant on majore le membre de droite de l'inégalité (5.2.2), à l'aide des propositions 4.2.4, 4.2.5 et 4.2.7, pour $p > \max\{1; \frac{d}{2s}\}$,

$$\begin{aligned} \|B - A\|_{\mathbf{S}_p}^p &\leq (2\pi)^{-d} \|(-a - H)^{-1}\|^p \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot \|(-a - |x|^{2s})^{-1}\|_{L^p}^p \\ &\leq K_1 \cdot \frac{|a|^{\frac{d}{2s}-p}}{|\omega - a|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

où $K_1 = \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot M_1$ si $0 < s \leq \frac{d}{2}$ ou $K_1 = \frac{n^{p/2} s_{d-1}}{2s(2\pi)^d} \cdot C_\omega^p \cdot N_1$ si $s > \frac{d}{2}$ (voir la proposition 4.2.5). Puis, d'après la proposition 2.1.13, $\mu = (-a - \lambda)^{-1} = g(\lambda) \in \sigma_d(B)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma_d(H)$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \in \sigma_d(B)} d(\mu, \sigma(A))^p &= \sum_{\{g(\lambda), \lambda \in \sigma_d(H)\}} d(g(\lambda), \sigma(A))^p \\ &\geq \frac{1}{(2\sqrt{5})^p} \cdot \sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(a + |\lambda|)^{2p}}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

La dernière inégalité résulte de la proposition 5.2.1. Le résultat est une conséquence de (5.2.3) et (5.2.4). \square

La dernière étape pour obtenir le théorème 5.1.3 est une intégration en fonction de a telle qu'elle est pratiquée dans [DHK13] lors de la preuve du théorème 5.3.3.

Preuve du théorème 5.1.3. D'après le théorème 5.2.2 nous avons, pour tout $a > \omega$,

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} \cdot \frac{|\omega - a|^p}{a^{\frac{d}{2s}-p+1+\tau}} \leq C \cdot \frac{1}{a^{1+\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

où C ne dépend pas de a . On intègre par rapport à a entre ω et $+\infty$ l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} \int_\omega^{+\infty} \sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(H_0))^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} \cdot \frac{|\omega - a|^p}{a^{\frac{d}{2s}-p+1+\tau}} da &\lesssim \int_\omega^{+\infty} \frac{1}{a^{1+\tau}} da \cdot \|V\|_{L^p}^p \\ \implies \sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} d(\lambda, \sigma(H_0))^p \int_\omega^{+\infty} \frac{a^{p-\frac{d}{2s}-1-\tau} |\omega - a|^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} da &\lesssim \frac{\|V\|_{L^p}^p}{\tau \omega^\tau}. \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a interverti la somme et l'intégrale par le théorème de Fubini-Tonelli (les fonctions sont positives). On minore le membre de gauche de l'inégalité précédente selon que $p - d/2s \leq 1$ ou $p - d/2s > 1$ puis on effectue le changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda| + \omega}$. D'où, en supposant d'abord $p - d/2s > 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau} (a - \omega)^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} da &= \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{2p}} \int_0^{+\infty} \frac{[(|\lambda| + \omega)t + \omega]^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau} t^p}{[t + 1]^{2p}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau}}{(|\lambda| + \omega)^{p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau}}{[t + 1]^{2p}} dt \\ &\geq \frac{1}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{d}{2s} + \tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau}}{(t + 1)^{2p}} dt. \end{aligned}$$

Et lorsque $p - d/2s \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{a^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau} (a - \omega)^p}{(a + |\lambda|)^{2p}} da &= \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1}}{(|\lambda| + \omega)^{2p}} \int_0^{+\infty} \frac{[(|\lambda| + \omega)t + \omega]^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau} t^p}{[t + 1]^{2p}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau}}{(|\lambda| + \omega)^{p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{(t + 1)^{p - \frac{d}{2s} - 1 - \tau} t^p}{[t + 1]^{2p}} dt \\ &\geq \frac{1}{(|\lambda| + \omega)^{\frac{d}{2s} + \tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(t + 1)^{p + \frac{d}{2s} + 1 + \tau}} dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

5.3 Cas de l'opérateur de Klein-Gordon

Pour démontrer le théorème 5.1.4, nous commençons par établir le résultat suivant.

Théorème 5.3.1. *Soit $K = K_m + V$ une perturbation de l'opérateur de Klein-Gordon $K_m, m > 0$, défini en 3.6.1 et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $a > \omega > -m$, nous avons l'inégalité suivante*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^p}{(a + m + |\lambda|)^{2p}} \leq (2\sqrt{5})^p K_2 \cdot \frac{(a + m)^{d-p}}{(a - \omega)^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (5.3.1)$$

avec $K_2 = \frac{s_{d-1} n^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^d} \cdot C_{\omega}^p \cdot 2^{\delta} M$ où

1. $\delta = 2d - 3$ et $M = \max\{M_1; M_2\}$ si $d \geq 2$ (voir la proposition 3.3.6),
2. sinon $\delta = 1$ et M définie en proposition 3.4.1 pour $d = 1$.

Démonstration. On considère les opérateurs $A = (-a - K_m)^{-1}$ et $B = (-a - K)^{-1}$ pour $a > \omega$. D'après la proposition 2.1.13, on a $\sigma((-a - K_m)^{-1}) = \left[-\frac{1}{a+m}; 0\right]$. En

notant $\lambda_1 = \lambda + a$, la proposition 5.1.5 nous donne

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\lambda_1}, \left[0; \frac{1}{a+m}\right]\right) &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda_1; [a+m; +\infty[)}{|\lambda_1|(a+m+|\lambda_1|)} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda; [m; +\infty[)}{|\lambda+a|(a+m+|\lambda+a|)} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{d(\lambda; [m; +\infty[)}{(a+m+|\lambda|)^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant les résultats de la proposition 3.3.6 (ou 3.4.1 pour $d = 1$),

$$\begin{aligned} \|B - A\|_{\mathfrak{S}_p}^p &\leq \|B\|^p \|VA\|_{\mathfrak{S}_p}^p \\ &\leq (2\pi)^{-d} \|(-a - K)^{-1}\|^p \|V\|_{L^p}^p \|(-a - \sqrt{|x|^2 + m^2})^{-1}\|_{L^p}^p \\ &\leq K_1 \cdot \frac{C_\omega^p}{(a - \omega)^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p \cdot 2^{\delta'} (a + m)^{d-p} \\ &\leq K_2 \cdot \frac{(a + m)^{d-p}}{(a - \omega)^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

avec, si $d \geq 2$, $\delta' = d - 1$, $K_1 = \frac{s_{d-1} n^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^d} \cdot 2^{d-2} M$ avec $M = \max\{M_1; M_2\}$ (voir proposition 3.3.6), ou, si $d = 1$, $\delta' = 1$, $K_1 = \frac{s_0 n^{\frac{p}{2}}}{(2\pi)^d} \cdot M$, M étant définie en proposition 3.4.1; puis $K_2 = K_1 C_\omega^p 2^{\delta'}$. On applique maintenant le théorème 5.1.1 à A et B d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} \frac{d(\lambda, \sigma(K_m))^p}{(a+m+|\lambda|)^{2p}} \leq \frac{(2\sqrt{5})^p K_2}{(a-\omega)^p (a+m)^{p-d}} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

d'où l'inégalité (5.3.1). \square

Preuve du théorème 5.1.4. Il reste à faire l'intégration de (5.3.1) par rapport à a entre ω et $+\infty$ pour obtenir (5.1.3), sachant que ω peut être négatif.

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(H)} d(\lambda, \sigma(K_m))^p \int_{\omega}^{+\infty} \frac{(a - \omega)^p (a + m)^{p-d-2\tau}}{(a + m + |\lambda|)^{2p} a^{1-\tau}} \lesssim \int_{\omega}^{+\infty} \frac{da}{a^{1-\tau} (a + m)^{2\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

Comme ω peut être négatif, il faut que l'intégrale impropre du membre de droite converge en 0 et en $+\infty$, d'où l'introduction de $(a+m)^{2\tau}$. Dans l'intégrale du membre de gauche, on effectue le changement de variable $t = \frac{a - \omega}{|\lambda| + \omega}$,

$$\begin{aligned} &\int_{\omega}^{+\infty} \frac{(a - \omega)^p (a + m)^{p-d-2\tau}}{(a + m + |\lambda|)^{2p} a^{1-\tau}} da = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(|\lambda| + \omega)^{p+1} t^p [(|\lambda| + \omega)t + m + \omega]^{p-d-2\tau}}{[(|\lambda| + \omega)t + m + \omega + |\lambda|]^{2p} [(|\lambda| + \omega)t + \omega]^{1-\tau}} dt \\ &\geq \frac{(|\lambda| + \omega)^{2p-d+1-2\tau}}{(|\lambda| + \omega)^{1-\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p-d-2\tau}}{[(|\lambda| + \omega)t + m + \omega + |\lambda|]^{2p} (t + 1)^{1-\tau}} dt \\ &\geq \frac{1}{(|\lambda| + \omega)^{d+\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p-d-2\tau}}{(t + 2 + m)^{2p} (t + 1)^{1-\tau}} dt. \end{aligned}$$

On a utilisé $m + \omega > 0$ dans l'avant-dernière inégalité. D'où le résultat. \square

6 Annexes

Table des matières

6.1	Intégration des inégalités de type Lieb-Thirring dans le cas de l'opérateur de Dirac de masse nulle	81
6.2	Glossaire des notations	84

6.1 Intégration des inégalités de type Lieb-Thirring dans le cas de l'opérateur de Dirac de masse nulle

L'une des raisons pour lesquelles on ne peut pas procéder à une intégration des inégalités de type Lieb-Thirring obtenues dans le théorème 3.2.1 comme pour les opérateurs semi-bornés est l'absence du paramètre b dans le comportement à l'infini des distorsions.

Il se trouve que pour l'opérateur de Dirac de masse nulle, ce paramètre est présent. On présente ci-dessous la démonstration de l'amélioration suivante du théorème 3.2.3.

Théorème 6.1.1 (cas $m = 0$). *Soit D l'opérateur de Dirac défini en (3.1.4) avec $m = 0$ et $V \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $p > d$. Alors, pour $0 < \tau < p - d$, nous avons*

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} \leq C \cdot \frac{K_1}{I} \cdot \frac{C_\omega^p}{\tau \omega^\tau} \cdot \|V\|_{L^p}^p, \quad (6.1.1)$$

où C dépend de p, d et τ , $K_1 = \Gamma_p 2^{2p-1} K$, K étant définie dans la proposition 3.5.2,

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^{p+(p-d-1)_+} dt}{(t+1)^{2(p+\tau)-(p-d-1)_+}}, \text{ et } C_\omega \text{ est définie dans la proposition 6.1.3.}$$

Pour démontrer ce résultat, on exprime différemment la proposition 3.5.1. On garde les mêmes fonctions et on travaille dans \mathbb{C}^+ .

Proposition 6.1.2 (distorsion entre \mathbb{C}^+ et \mathbb{D}). *Soit $b > 0$, les distorsions entre \mathbb{C}^+ et \mathbb{D} sont*

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{d(z, \mathbb{T})}{|z-1|^2} \leq d(\lambda, \sigma(D_0)) \leq 4b \cdot \frac{d(z, \mathbb{T})}{|z-1|^2},$$

et

$$b \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(b+|\lambda|)^2} \leq d(z, \mathbb{T}) \leq 16b \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(b+|\lambda|)^2}. \quad (6.1.2)$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 3.5.1 sauf qu'on utilise $\frac{1}{2}(|\lambda| + b)^2 \leq |\lambda + ib|^2 \leq (|\lambda| + b)^2$. \square

La nouveauté concerne la résolvante de l'opérateur perturbé D puisque nous avons pu obtenir une inégalité similaire à (3.6.12) ou celle de la proposition 4.2.7.

Proposition 6.1.3. *Il existe $\omega > 0$ dépendant de d, n, p et V tel que, pour tout $b \geq \omega$,*

$$\|(ib - D)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{|b - \omega|}.$$

Démonstration. En effet, en reprenant la démonstration de la proposition 4.2.7, on utilise que

$$\|V(ib - D_0)^{-1}\|_{\mathbf{S}_p}^p \leq K \|V\|_{L^p}^p \frac{b^{d-1}}{b^{p-1}}$$

tend vers 0 lorsque b tend vers $+\infty$. \square

Preuve du théorème 6.1.1. On revient à l'inégalité (3.5.1) qui devient, sachant que $p > d$

$$\sum_{g(z)=0} d(z, \mathbb{T})^{p+\tau} \leq C \cdot K_1 \cdot \frac{C_\omega^p b^d}{|b - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

Or, d'après la nouvelle expression pour la distorsion (6.1.2), nous avons

$$d(z, \mathbb{T}) \geq b \cdot \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))}{(b + |\lambda|)^2},$$

d'où

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(b + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} \lesssim \frac{b^{d-p-\tau}}{|b - \omega|^p} \cdot \|V\|_{L^p}^p.$$

On intègre cette inégalité en fonction de b entre ω et $+\infty$ de la façon suivante

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau} \int_\omega^{+\infty} \frac{|b - \omega|^p b^{p-d-1}}{(b + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} db \lesssim \|V\|_{L^p}^p \int_\omega^{+\infty} \frac{db}{b^{1+\tau}}. \quad (6.1.3)$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale par le théorème de Fubini-Tonelli. L'intégrale du membre de droite vaut $\frac{1}{\tau \omega^\tau}$. Concernant l'intégrale du membre de gauche, il faut distinguer selon le signe de $p - d - 1$. Si $p - d - 1 \geq 0$ alors, avec le changement de variable $t = \frac{b - \omega}{\omega + |\lambda|}$, on a

$$\begin{aligned} \int_\omega^{+\infty} \frac{|b - \omega|^p b^{p-d-1}}{(b + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} db &= \frac{(\omega + |\lambda|)^{p+1}}{(\omega + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p ((\omega + |\lambda|)t + \omega)^{p-d-1}}{(t+1)^{2(p+\tau)}} dt \\ &\leq \frac{(\omega + |\lambda|)^{p-d-1}}{(\omega + |\lambda|)^{p-1+2\tau}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^{2p-d-1}}{(t+1)^{2(p+\tau)}} dt \\ &\leq \frac{1}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^{2p-d-1}}{(t+1)^{2(p+\tau)}} dt. \end{aligned}$$

Et si $p - d - 1 < 0$, on majore b par $b + |\lambda|$, puis avec le même changement de variable, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|b - \omega|^p b^{p-d-1}}{(b + |\lambda|)^{2(p+\tau)}} db &\leq \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|b - \omega|^p}{(b + |\lambda|)^{p+d+1+2\tau}} db \\ &\leq \frac{(\omega + |\lambda|)^{p+1}}{(\omega + |\lambda|)^{p+d+1+2\tau}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{2(p+\tau)}} \\ &\leq \frac{1}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{p+d+1+2\tau}}. \end{aligned}$$

Donc, en revenant à (6.1.3), nous obtenons

$$\sum_{\lambda \in \sigma_d(D)} \frac{d(\lambda, \sigma(D_0))^{p+\tau}}{(\omega + |\lambda|)^{d+2\tau}} db \leq C \cdot \frac{K_1}{I} \cdot \frac{C_{\omega}^p}{\tau \omega^{\tau}} \cdot \|V\|_{L^p}^p,$$

avec C, K_1 et C_{ω} décrites ci-dessus, $I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^{2p-d-1}}{(t + 1)^{2(p+\tau)}} dt$ si $p - d - 1 \geq 0$, ou $I = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^p dt}{(t + 1)^{p+d+1+2\tau}}$ si $p - d - 1 < 0$. \square

6.2 Glossaire des notations

- \mathcal{C}_c^∞ est l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact. Voir les sections 3.1, 3.6.1 et 4.1.
- \mathbb{C}^+ (resp. \mathbb{C}^-) désigne le demi-plan de partie imaginaire strictement positive (resp. strictement négative). Voir section 3.5.1.
- $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans \mathbb{C} .
- $d(z; A)$ désigne la distance entre z et A . Voir section 2.3.3.
- \mathcal{H}^1 est l'espace de Sobolev d'ordre 1. Voir les sections 3.1 et 3.6.1.
- $s_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}$ est la masse totale de la mesure invariante sur la sphère unité de dimension $d - 1$ pour $d \geq 2$. Pour $d = 1$, par commodité dans ce mémoire, on pose $s_0 = 2$.
Voir propositions 3.3.6, 3.5.2 et 4.2.5.
- \mathbf{S}_p : classes de Schatten-von Neumann. Voir section 2.2. En particulier \mathbf{S}_∞ désigne l'espace des opérateurs compacts.
- $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ est le cercle unité dans \mathbb{C} .
- $W^{2,2s}$ est l'espace de Sobolev fractionnaire. Voir la section 4.1.
- $Z_b = \frac{1 + |z_b|}{1 - |z_b|}$, constante de majoration de transformation conforme; Voir remarque 3.3.1.
- Γ_p : deux définitions. En dehors du chapitre 5, c'est la constante de majoration pour le déterminant régularisé. Voir la formule (2.2.1).
Dans le chapitre 5, c'est la constante de majoration dans le théorème 5.1.2.
- $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Voir section 2.4.
- $f \approx g$ et $f \lesssim g$. Symboles de comparaisons entre fonctions positives. Voir section 2.3.2.
- \hat{f} et \check{g} désignent respectivement l'image par la transformée de Fourier de f et l'image par la transformée de Fourier inverse de g .

Bibliographie

- [AAD01] A. A. Abramov, A. Aslanyan, and E. B. Davies. Bounds on complex eigenvalues and resonances. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 34(1) :57–72, 2001. 3
- [BE11] A.A. Balinsky and W.D. Evans. *Spectral analysis of relativistic operators*. Imperial College Press, London, 2011. 2, 43, 44
- [BGK09] A. Borichev, L. Golinskii, and S. Kupin. A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(1) :117–123, 2009. 3, 4, 16
- [BO08] Vincent Bruneau and El Maati Ouhabaz. Lieb-Thirring estimates for non-self-adjoint Schrödinger operators. *J. Math. Phys.*, 49(9) :093504, 10, 2008. 3
- [CLN96] C. Cancelier, P. Lévy-Bruhl, and J. Nourrigat. Remarks on the spectrum of Dirac operators. *Acta Appl. Math.*, 45(3) :349–364, 1996. 3, 4, 23, 24
- [CLT14] Jean-Claude Cuenin, Ari Laptev, and Christiane Tretter. Eigenvalue estimates for non-selfadjoint Dirac operators on the real line. *Ann. Henri Poincaré*, 15(4) :707–736, 2014. 4, 8
- [Dav07] E. Brian Davies. *Linear operators and their spectra*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007. 12
- [DH13] Michael Demuth and Franz Hanauska. On the distribution of the discrete spectrum of nuclearly perturbed operators in Banach space. arxiv, preprint 1309.4594., 2013. 8
- [DHK09] Michael Demuth, Marcel Hansmann, and Guy Katriel. On the discrete spectrum of non-selfadjoint operators. *J. Funct. Anal.*, 257(9) :2742–2759, 2009. 3, 4, 14, 47
- [DHK13] Michael Demuth, Marcel Hansmann, and Guy Katriel. Eigenvalues of non-selfadjoint operators : a comparison of two approaches. In *Mathematical physics, spectral theory and stochastic analysis*, pages 107–163. Basel : Birkhäuser/Springer, 2013. 3, 47, 49, 72, 77
- [Dub14a] Clement Dubuisson. Notes on Lieb-Thirring type inequality for a complex perturbation of a fractional Schrödinger operator. submitted, arxiv, 2014. 53
- [Dub14b] Clement Dubuisson. On quantitative bounds on eigenvalues of a complex perturbation of a Dirac operator. *Integral Equations Oper. Theory*, 78(2) :249–269, 2014. 45, 46, 47, 53, 55

- [EE89] D.E. Edmunds and W.D. Evans. *Spectral theory and differential operators. Paperback ed.* Oxford : Clarendon Press, paperback ed. edition, 1989. 11, 12
- [FG09] S. Favorov and L. Golinskii. A Blaschke-type condition for analytic and subharmonic functions and application to contraction operators. In *Linear and complex analysis. Dedicated to V. P. Havin on the occasion of his 75th birthday*, pages 37–47. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2009. 17
- [FLLS06] Rupert L. Frank, Ari Laptev, Elliott H. Lieb, and Robert Seiringer. Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with complex-valued potentials. *Lett. Math. Phys.*, 77(3) :309–316, 2006. 3, 4
- [FLS08] Rupert L. Frank, Elliott H. Lieb, and Robert Seiringer. Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators. *J. Am. Math. Soc.*, 21(4) :925–950, 2008. 3, 4, 6, 45, 57
- [Fra11] Rupert L. Frank. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4) :745–750, 2011. 4
- [FS11] Rupert L. Frank and Barry Simon. Critical Lieb-Thirring bounds in gaps and the generalized Nevai conjecture for finite gap Jacobi matrices. *Duke Math. J.*, 157(3) :461–493, 2011. 4, 23, 24
- [GGK00] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Nahum Krupnik. *Traces and determinants of linear operators.* Basel : Birkhäuser, 2000. 14
- [GK69] I.C. Gohberg and M.G. Krein. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space. Translations of Mathematical Monographs. 18. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). XV, 378 p. (1969)., 1969. 13, 14, 19
- [GK07] Leonid Golinskii and Stanislav Kupin. Lieb–Thirring bounds for complex Jacobi matrices. *Lett. Math. Phys.*, 82(1) :79–90, 2007. 3, 4
- [GK12] L. Golinskii and S. Kupin. A Blaschke-type condition for analytic functions on finitely connected domains. Applications to complex perturbations of a finite-band selfadjoint operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 389(2) :705–712, 2012. 3
- [GK13] Leonid Golinskii and Stanislas Kupin. On discrete spectrum of complex perturbations of finite band Schrödinger operators. In *Recent trends in analysis. Proceedings of the conference in honor of Nikolai Nikolski on the occasion of his 70th birthday, Bordeaux, France, August 31 – September 2, 2011*, pages 113–121. Bucharest : The Theta Foundation, 2013. 3, 8, 72
- [Han10] Marcel Hansmann. *On the discrete spectrum of linear operators in Hilbert spaces.* PhD thesis, TU Clausthal, 2010. 14, 62
- [Han11] Marcel Hansmann. An eigenvalue estimate and its application to non-selfadjoint Jacobi and Schrödinger operators. *Lett. Math. Phys.*, 98(1) :79–95, 2011. 3, 4, 5, 71, 72

- [Han13] Marcel Hansmann. Variation of discrete spectra for non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators. *Integral Equations Oper. Theory*, 76(2) :163–178, 2013. 3, 71, 72
- [HK11] Marcel Hansmann and Guy Katriel. Inequalities for the eigenvalues of non-selfadjoint Jacobi operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 5(1) :197–218, 2011. 3, 4, 17
- [HS02] Dirk Hundertmark and Barry Simon. Lieb-Thirring inequalities for Jacobi matrices. *J. Approx. Theory*, 118(1) :106–130, 2002. 3
- [LL01] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis. 2nd ed.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2nd ed. edition, 2001. 2
- [LS09a] Ari Laptev and Oleg Safronov. Eigenvalue estimates for Schrödinger operators with complex potentials. *Commun. Math. Phys.*, 292(1) :29–54, 2009. 3
- [LS09b] Elliott H. Lieb and Robert Seiringer. *The stability of matter in quantum mechanics.* Cambridge : Cambridge University Press, 2009. 2, 4, 43, 45
- [LT75] Elliott H. Lieb and Walter E. Thirring. Bounds for the kinetic energy of fermions which proves the stability of matter. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :687–689, 1975. Errata *ibid.*, 1116 (1975). 2
- [LT76] Elliott H. Lieb and Walter E. Thirring. Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities. *Stud. math. Phys., Essays Honor Valentine Bargmann*, 269–303 (1976)., 1976. 2
- [LW00] Ari Laptev and Timo Weidl. Recent results on Lieb-Thirring inequalities. In *Journées “Équations aux dérivées partielles”, La Chapelle sur Erdre, Nantes, France, 5 au 9 juin 2000. Exposés Nos. I-XX*, page ex. Nantes : Université de Nantes, 2000. 2
- [Obo98] Elena Obolashvili. *Partial differential equations in Clifford analysis.* Harlow : Longman, 1998. 22
- [Pom92] Christian Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps.* Berlin : Springer-Verlag, 1992. 18
- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV : Analysis of operators.* New York - San Francisco - London : Academic Press. XV, 396 p., 1978. 12
- [RS80] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I : Functional analysis.* Rev. and enl. ed. New York etc. : Academic Press, A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, XV, 400 p., 1980. 10, 11, 12
- [Sam14] Diomba Sambou. Lieb-Thirring type inequalities for non-self-adjoint perturbations of magnetic Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 266(8) :5016–5044, 2014. 4, 72
- [Sch12] Konrad Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space.* Dordrecht : Springer, 2012. 10

- [Sei10] Robert Seiringer. Inequalities for Schrödinger operators and applications to the stability of matter problem. In *Entropy and the quantum. Arizona school of analysis with applications, March 16–20, 2009, University of Arizona, Tucson, AZ, USA.*, pages 53–72. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2010. 43
- [Sim77] Barry Simon. Notes on infinite determinants of Hilbert space operators. *Adv. Math.*, 24 :244–273, 1977. 13
- [Sim05] Barry Simon. *Trace ideals and their applications. 2nd ed.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2nd ed. edition, 2005. 13, 18, 19
- [Tha91] Bernd Thaller. *The Dirac equation.* Berlin : Springer-Verlag, 1991. 4, 21, 22, 43

Index

- déterminant
 - de perturbation, **14**, 14–16
 - régularisé, 4, **13**
- distorsion, **18**, 27, 28, 57
- distorsion
 - fonction inverse, 74
- ensemble résolvant, **11**
- espace
 - de Schatten-von Neumann, 13
- inégalité de Lieb-Thirring classique, 2
- inégalité de type Lieb-Thirring, 2, 3, 5–7, 23–25, 44, 45, 56, 57, 72, 73, 76, 78, 81
- multiplicité
 - algébrique, 1, **11**, 11, 12, 14, 16
 - géométrique, **11**, 11, 12
- opérateur
 - adjoint, 9, **10**
 - auto-adjoint, 1, **10**, 10, 12
 - borné, 5, **9**
 - compact, **11**, 11, 12
 - de multiplication, 1
 - Dirac, 1, 3–5, **21**, 21, 23, 24, 44, 81
 - essentiellement auto-adjoint, 3, **10**, 10
 - Klein-Gordon, 1, 4, 6, 7, **43**, 44, 45, 73, 78
 - Laplacien, 1
 - Laplacien fractionnaire, 1, 3, 4, 6, 7, 45, **55**, 72, 76
 - matrices de Jacobi, 3–5
 - non perturbé, **1**
 - non-borné, 9, 10
 - perturbé, **1**, 3, 22, 55
 - Schrödinger, **1**, 2–5
 - Schrödinger fractionnaire, 6, 7, 45, **55**, 56
 - Schrödinger relativiste, 4, 43
- potentiel, 1, 3, 4
- relativement Schatten-von Neumann, 12, **22**, 55
- résolvante, 5, **11**
- résolvante
 - norme de, 4, 5
- s-nombre
 - voir valeur singulière, 13
- spectre
 - discret, 1, 2, **12**, 12, 14, 18, 45
 - définition, **11**
 - essentiel, 1, **12**, 12
 - opérateur compact, 11
- Théorème
 - Borichev-Golinskii-Kupin, 4, 5, **16**, 18, 35, 39, 43, 48, 51, 62, 66
 - Hansmann, 4, 5, 7, 18, **71**, 77, 79
 - Weyl, **12**, 22, 44, 55
- transformation conforme, 4, 18, 26, 27, 40, 46, 57
- valeur propre, 1, 3–5, 11–13, 16
- valeur singulière, 13