

Synthèse en Français

Cette synthèse ne retrace que les grandes lignes du travail qui a été effectué. Pour plus de précisions, voir la version complète du manuscrit.

Les chocs non-collisionnels jouent un rôle majeur dans de nombreux événements astrophysiques à haute densité d'énergie (sursauts gamma, restes de supernova, vents de pulsar...), et seraient responsables de la génération de particules supra-thermiques et de radiations. Les simulations ont démontré qu'en l'absence de champs magnétiques externes, des instabilités électromagnétiques peuvent survenir lors de la collision de plasmas à haute vitesse. Les instabilités du type Weibel sont en effet capables de faire croître, dans ces milieux, une turbulence électromagnétique en mesure de défléchir et d'accélérer des particules par des processus du type Fermi. En plus d'une compréhension théorique toujours croissante, la génération expérimentale de tels chocs est maintenant étudiée à l'aide de lasers de puissance.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à tout l'historique de l'instabilité de Weibel, depuis le germe thermique des fluctuations magnétiques jusqu'au régime fortement non-linéaire de saturation et des chocs non-collisionnels turbulents qui en résultent. Pour cela, nous avons développé un schéma de résolution numérique des relations de dispersion linéaires d'une onde électromagnétique dans un plasma, valable pour toutes les fonctions de distribution de particules de symétrie cylindrique. Ce schéma, décrit en première partie, a été utilisé par la suite lors de l'étude des fluctuations thermiques d'un plasma et des germes thermiques associés à l'instabilité de filamentation.

Après s'être intéressé dans une deuxième partie aux premiers instants de l'instabilité de Weibel, *i.e.* son régime linéaire, nous nous sommes intéressés à son mécanisme de saturation, dans le cas où cette instabilité est dominée par des ions non relativistes. Nous présenterons donc, dans une troisième partie, un modèle analytique prédisant l'évolution non-linéaire des paramètres ioniques et spectraux. Ce modèle, capable de prédire l'évolution du plasma jusqu'à la "quasi-formation" du choc non-collisionnel, fut généralisé au cas de la propagation des chocs turbulents, prédisant ainsi analytiquement l'évolution du spectre magnétique proche du front de choc.

Enfin, nous avons mené une étude prospective d'un nouveau schéma de formation de choc non-collisionnel utilisant l'irradiation d'un plasma dense (opaque) par un faisceau laser de très haute intensité. Nous avons étudié l'instabilité magnétique (Weibel) générée dans la cible par les électrons et démontrerons qu'elle est en mesure de former un choc turbulent.

1 Tenseur diélectrique et relation de dispersion d'un plasma non-collisionnel en régime linéaire

1.1 Tenseur susceptibilité d'un plasma non-collisionnel en régime linéaire

Système d'équations de Vlasov-Maxwell linéarisées

Le tenseur diélectrique d'un plasma régit la réponse collective d'un ensemble de particules chargées à un champ électrique ou magnétique. Nous allons nous intéresser dans cette partie aux systèmes

dépourvus de champs extérieurs. Ainsi, les seuls champs interagissant avec les particules sont les champs auto-générés, c'est-à-dire, les champs générés par les particules elles-mêmes. Nous partirons donc d'un système composé de populations de particules indicées s . Chacune de ces populations est associée à une fonction de distribution initiale notée $f_s^{(0)}$. Cette fonction est la densité de probabilité de présence dans l'espace des positions et des impulsions et sera dans tout ce manuscrit normalisée à l'unité. Nous supposons que la neutralité de charge et de courant est vérifiée de sorte qu'aucun champ n'est associé à l'état initial. Nous partirons de l'équation de Vlasov qui régit l'évolution des fonctions de distribution. Elle est obtenue par conservation du nombre de particules dans l'espace des positions et des vitesses. L'équation de Vlasov appliquée à la fonction de distribution totale de la particule indicée s donne :

$$\delta_t f_s + \mathbf{v} \cdot \delta_{\mathbf{r}} f_s + \frac{q_s}{m_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \delta_{\mathbf{p}} f_s = 0. \quad (1)$$

Nous allons maintenant linéariser cette équation. En considérant que les champs sont nuls initialement, nous assimilerons \mathbf{E} et \mathbf{B} à des grandeurs du premier ordre. Cette approximation est valide tant que les champs n'ont pas crûs jusqu'à des valeurs capables d'affecter significativement les trajectoires, les vitesses et la répartition spatiale des particules. La fin de ce régime sera étudiée par la suite dans le cadre de l'instabilité de Weibel. Nous allons de même considérer l'écart de la fonction de distribution totale f_s à sa valeur initiale $f_s^{(0)}$ comme une grandeur d'ordre 1. Nous obtenons ainsi $f_s = f_s^{(0)} + f_s^{(1)}$ où $f_s^{(1)}$ est d'ordre 1. En remarquant que $f_s^{(0)}$ doit vérifier l'équation de Vlasov à l'état initial, nous obtenons à l'ordre 1 :

$$\delta_t f_s^{(1)} + \mathbf{v} \cdot \delta_{\mathbf{r}} f_s^{(1)} + \frac{q_s}{m_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \delta_{\mathbf{p}} f_s^{(0)} = 0. \quad (2)$$

En procédant à une transformée de Fourier spatio-temporelle :

$$f_s^{(1)} = \frac{i q_s}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \delta_{\mathbf{p}} f_s^{(0)}, \quad (3)$$

Le courant total \mathbf{j} peut être inséré dans les équations de Maxwell pour obtenir :

$$\mathbf{j}^{(1)} = \sum_s n_s Z_s \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_s^{(1)} = i\omega (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times) \cdot \mathbf{E}. \quad (4)$$

Nous avons introduit la matrice unité $\mathbf{1}$. L'équation (3) devient donc :

$$i \sum_s \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \delta_{\mathbf{p}} f_s^{(0)} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times) \cdot \mathbf{E} + i\omega (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times) \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (5)$$

Nous utiliserons maintenant \otimes comme étant le produit tensoriel de deux vecteurs. En utilisant les relations

$$\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = (\frac{\mathbf{k}}{\omega} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\omega}) \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = (\frac{\mathbf{k}}{\omega} \otimes \frac{\mathbf{k}}{\omega} - \frac{k^2}{\omega^2}) \cdot \mathbf{E}, \quad (7)$$

nous mettons l'équation (5) sous la forme :

$$\left\{ \omega^2 \left[\mathbf{1} + \sum_s \frac{q_s^2 n_s}{m_s} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \delta_{\mathbf{p}} f_s^{(0)} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega}) \right] + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - k^2 \right\} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

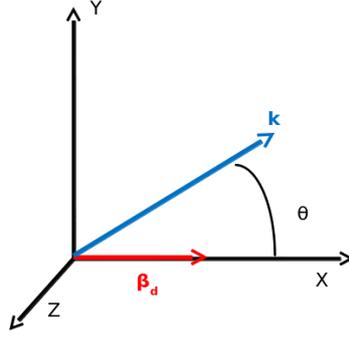


Figure 1. Axes du repère tridimensionnel utilisé dans ce manuscrit. Le vecteur d'onde considéré est dans le plan xy tandis que la dérive moyenne du plasma $\beta = \mathbf{v}/c$ est alignée avec l'axe x .

Cette équation possède des solutions \mathbf{E} non nulles si et seulement si le déterminant du tenseur entre accolades est nul. Nous allons maintenant supposer que les fonctions de distribution considérées possèdent toutes la même symétrie cylindrique ($f(p_x, p_y^2, p_z^2)$) dans l'espace des impulsions. Nous appellerons x cet axe de symétrie et y l'axe du repère cartésien contenu dans la plan $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k})$ (où \mathbf{k} est le vecteur d'onde quelconque). Le repère est illustré par la figure 1. L'axe z est donc hors du plan $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k})$. De l'équation (8), nous déduisons que les composantes xz et yz du tenseur entre accolades sont nulles. Nous obtenons ainsi deux relations de dispersion :

$$\omega^2 \epsilon_{zz} - k^2 c^2 = 0, \quad (9)$$

$$(\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2)(\omega^2 \epsilon_{yy} - k_x^2 c^2) - (\omega^2 \epsilon_{xy} + k_y k_x c^2)^2 = 0. \quad (10)$$

Nous avons introduit le tenseur diélectrique

$$\epsilon = 1 + \sum_s \chi_s, \quad (11)$$

où le tenseur susceptibilité χ_s de l'espèce s vérifie l'équation

$$\chi_s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \otimes \partial_{\mathbf{p}} f_s^{(0)} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p \left[\mathbf{v} \otimes \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \right] \frac{\mathbf{k} \cdot \partial_{\mathbf{p}} f_s^{(0)}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (12)$$

Généralisation de la méthode de Fried et Gould de résolution des relations de dispersion

En partant du formalisme général du tenseur diélectrique des équations (11) et (12), nous allons maintenant présenter une méthode de résolution des relations de dispersion (9) et (10). Dans ce but nous allons généraliser un schéma numérique initialement proposé par Fried et Gould dans le cas classique ($v/c \ll 1$) et électrostatique ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$). Cette méthode se base sur l'expression du module du vecteur d'onde comme une fonction de la vitesse de phase complexe. Pour une population de particules de distribution $f_s^{(0)}$ et de pulsation plasma ω_{ps} , nous introduisons le tenseur susceptibilité modifié :

$$\xi_s = \frac{\omega^2}{\omega_{ps}^2} \chi_s = \iiint d^3p \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \otimes \partial_{\mathbf{p}} f_s^{(0)} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p \left[\mathbf{v} \otimes \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \right] \frac{\cos \theta \partial_{p_x} f_s^{(0)} + \sin \theta \partial_{p_y} f_s^{(0)}}{v_\phi - v_x \cos \theta - v_y \sin \theta}. \quad (13)$$

Nous remarquons que le tenseur ξ_s de l'équation (13) ne dépend que de la vitesse de phase v_ϕ et de l'orientation de \mathbf{k} . La relation de dispersion de l'équation (10) peut-être mise sous la forme d'un polynôme en $k^2 = |\mathbf{k}|^2$ dont les coefficients dépendent de la vitesse de phase et de l'orientation de

k. L'équation (10) devient donc :

$$ak^4 + bk^2 + c = 0, \quad (14)$$

avec

$$a = (\beta_\phi^2 - \sin^2 \theta)(\beta_\phi^2 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \quad (15)$$

$$b = (\sin^2 \theta - \beta_\phi^2) \sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{yy} (\cos^2 \theta - \beta_\phi^2) \sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{zz} + 2 \cos \theta \sin \theta \sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{yz}, \quad (16)$$

$$c = \left(\sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{yy} \right) \left(\sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{zz} \right) - \left(\sum_s \omega_{ps}^2 \xi_{yz} \right)^2, \quad (17)$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (18)$$

Nous avons omis l'indice s dans les équations (15), (16) et (17) par soucis de clarté. Le module du vecteur d'onde peut donc être mis sous la forme :

$$k^2 = \frac{-b(\beta_\phi, \theta) + \sqrt{\Delta(\beta_\phi, \theta)}}{2a(\beta_\phi, \theta)} = \mathcal{G}_1(\beta_\phi, \theta), \quad (19)$$

$$k^2 = \frac{-b(\beta_\phi) - \sqrt{\Delta(\beta_\phi, \theta)}}{2a(\beta_\phi, \theta)} = \mathcal{G}_2(\beta_\phi, \theta). \quad (20)$$

Cette formulation de $k^2 (> 0)$ ne met en jeu que $\beta_\phi = v_\phi/c$, et se prête ainsi au schéma numérique proposé par [Fried & Gould \(1961\)](#) dans la limite non-relativiste et électrostatique. La première étape consiste à repérer les zéros de $\Im \mathcal{G}_{1,2}(\beta_\phi, \theta)$ (\Im et \Re désignent respectivement les parties imaginaires et réelles d'un complexe). L'utilisation d'une fonction graphique de contour permet de résoudre efficacement cette étape en maillant finement le plan complexe de β_ϕ . Nous repérons ensuite la partie de ces lieux vérifiant $\Re \mathcal{G}(\beta_\phi, \theta) > 0$. Cette méthode permet de résoudre simultanément tous les modes propres du système présents dans la partie du plan complexe de β_ϕ considérée. Nous obtenons donc une série de branches ($\Re \beta_\phi, \Im \beta_\phi, k$) qui nous permet d'obtenir simplement le taux de croissance $\Gamma = \Im(\beta_\phi)k$ et la pulsation réelle $\omega_r = \Re(\beta_\phi)k$. Cette méthode est illustrée par la suite dans le cas d'un mode propre électromagnétique faiblement amorti associé à une distribution de Maxwell-Jüttner. Il est important de noter qu'aucune hypothèse autre que la symétrie cylindrique n'a été faite sur la forme de la fonction de distribution. Ainsi, tous les modes propres (stables $\Gamma < 0$ ou instables $\Gamma > 0$) peuvent être calculés pour tous les systèmes de symétrie cylindrique, tant que les tenseurs ξ_s (équation 13) sont calculables. Cette méthode de résolution des modes propres d'un plasma a été publiée dans l'article ([Ruyer *et al.* 2013](#)) dans le cadre d'un système composé de fonction de distribution du type Maxwell-Jüttner. Nous nous sommes intéressés au calcul des tenseurs ξ_s pour trois différentes fonctions de distribution.

Nous avons d'abord considéré la fonction de distribution de Maxwell-Jüttner ([Wright & Hadley 1975](#)) :

$$f_s^{(0)}(\mathbf{p}) = F_s \exp[-\mu_s(\gamma - \beta_{ds} p_x)], \quad (21)$$

où $\gamma = \sqrt{1 + p^2/(m_s c)^2}$, $\mu_s = m_s c^2/T_s$ est l'inverse de la température normalisée et $\beta_{ds} = \langle v_x/c \rangle$ est la dérive moyenne du plasma alignée sur l'axe x . Le facteur de normalisation est $F_s = \mu_s/4\pi(m_s c)^3 \gamma_{ds}^2 K_2(\mu_s/\gamma_{ds})$ et fait intervenir $\gamma_{ds} = (1 - \beta_{ds}^2)^{-1/2}$ et la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce noté K_2 . Le tenseur diélectrique associé a été publié dans son intégralité dans les références suivantes : [Bret *et al.* \(2010a\)](#); [Ruyer *et al.* \(2013\)](#).

Ensuite, nous nous sommes intéressés à la fonction de distribution classique ($v \ll c$) bidimen-

sionnelle bi-Maxwellienne définie suivant l'équation :

$$f_s^{(0)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{T_x T_y}} \exp\left(-\frac{m_s(v_x - v_d)^2}{2T_x} - \frac{m_s v_y^2}{2T_y}\right). \quad (22)$$

Les paramètres de cette fonction de distribution sont sa vitesse moyenne v_d (alignée avec l'axe x) et ses températures axiale et transverse notées respectivement T_x et T_y . Nous pouvons ainsi utiliser la méthode de Fried & Gould généralisée ci-dessus.

$$\beta_d = 0.2, T = m_e c^2 / 100$$

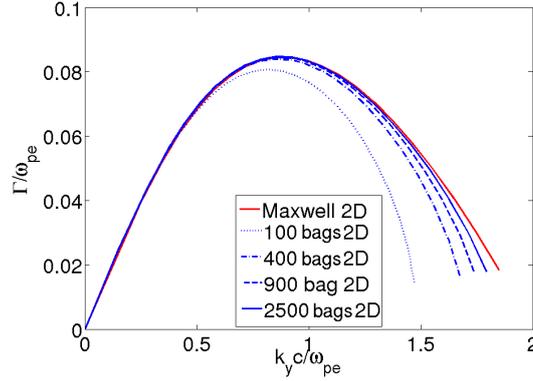


Figure 2. Taux de croissance de la filamentation obtenu par la méthode Fried & Gould généralisée en section 1.1 pour des populations électroniques contra-propagatives et symétriques avec des ions immobiles ($m_i = \infty$). Deux bi-Maxwelliennes de dérive moyenne $\beta_d = \pm 0.2$, et de température $T_x = T_y = m_e c^2 / 100$ comparées aux décompositions en somme de créneaux.

Enfin, nous avons étudiée la fonction de distribution créneau bidimensionnelle (Waterbag) qui s'écrit

$$f^{(0)} = \frac{1}{p_\perp p_\parallel} H(p_\parallel - |p_x - p_d|) H(p_\perp - |p_y|), \quad (23)$$

où H est la fonction escalier. Cette distribution est caractérisée par trois paramètres p_\parallel , p_\perp et p_d . Les deux premiers sont les largeurs impulsionsnelles axiales (p_\parallel) et transversales (p_\perp). L'impulsion moyenne de cette distribution est alignée avec l'axe x et est notée p_d . Toutes les formules associées à la fonction de distribution créneau sont entièrement analytiques, ce qui rend leur calcul numérique très rapide. Ainsi, la résolution des relations de dispersion par la méthode de Fried & Gould, généralisée dans la section 1.1, peut être faite pour un système composé de plusieurs milliers de fonctions de distribution créneaux en quelques secondes. Cela permet de décomposer n'importe quelle fonction de distribution cylindrique en somme de distributions créneaux (en particulier les distributions issues des simulations), puis de les injecter dans la résolution numérique des relations de dispersion introduite précédemment.

Application de la décomposition en créneaux pour l'instabilité de filamentation

Nous allons maintenant illustrer le schéma de décomposition par l'analyse de l'instabilité de filamentation (Weibel 1959). Cette instabilité étant transverse ($k = k_y$) et non propagative ($\Re\omega = 0$), nous allons résoudre l'équation (20) pour $\theta = \pi/2$ par la méthode de la section 1.1. Considérons des ions fixes ($m_i = \infty$) et deux populations électroniques bi-Maxwelliennes 2D classiques (équation (22)) avec $\beta_d = \pm 0.2$, $T_x = T_y = 5.11\text{keV}$. La courbe rouge de la figure 2(a) montre le taux de croissance exact de l'instabilité de filamentation. Les courbes bleues correspondent aux décompositions

de chacune des deux distributions en 100, 400, 900, et 2500 créneaux. Nous remarquons que la décomposition en 100 créneaux ne permet pas de résoudre le maximum du taux de croissance. Par contre, plus on augmente la résolution de la décomposition, mieux le taux de croissance est résolu ce qui valide le schéma. La figure 2(a) montre qu’une résolution d’environ 1000 créneaux suffit à résoudre entièrement le taux de croissance avec une faible erreur.

2 Fluctuations thermiques et modes propres d’un plasma en régime relativiste

A l’équilibre ou quasi-équilibre, le plasma possède une énergie électromagnétique non nulle en raison du mouvement aléatoire des particules, combiné avec le comportement collectif du plasma. Ces fluctuations électromagnétiques spontanées jouent un rôle majeur dans la physique des plasmas en agissant comme les germes des instabilités induites par un apport d’énergie libre. Depuis la théorie des “particules habillées/enveloppées” développée par Rostoker et Rosenbluth (Rostoker & Rosenbluth 1960), le spectre des fluctuations thermiques d’un plasma a été analysé dans de nombreux articles et manuels (Sitenko 1982; Akhiezer *et al.* 1975; Klimontovich 1982; Ichimaru 1992; Tajima & Cable 1992; Lund *et al.* 1995; Opher & Opher 1996; Yoon 2007; Tautz & Schlickeiser 2007). Cependant, à l’exception de quelques travaux limités à des distributions de particules isotropes ou aux modes électrostatiques (Lerche 1968a; Stewart 1973; Klimontovich 1982), toutes ces études ont été réalisées dans le régime non relativiste, et n’ont donc pas abordé le spectre induit par un faisceau de plasma de température et de dérive relativiste. Une telle configuration est d’un intérêt particulier pour la modélisation des instabilités faisceaux-plasma relativistes (Bret *et al.* 2010b; Cottrill *et al.* 2008) et la génération connexe de chocs non-collisionnels (Lyubarsky & Eichler 2006; Spitkovsky 2008; Lemoine & Pelletier 2011; Bret *et al.* 2013). Schlickeiser, Lazar, Yoon et Felten (Schlickeiser & Yoon 2012; Felten *et al.* 2013; Lazar *et al.* 2012) ont récemment travaillé sur une théorie générale des fluctuations valable pour des plasmas relativistes instables, bien que les calculs pratiques soient effectués seulement dans la limite non-relativiste.

L’objectif de cette partie est de présenter des calculs analytiques et numériques exacts des spectres des fluctuations associés à des plasmas de dérive relativiste décrits par une fonction de distribution du type Maxwell-Jüttner (Wright & Hadley 1975; Bret *et al.* 2010a). Nous avons considéré des fluctuations électromagnétiques se propageant parallèlement ou perpendiculairement à la vitesse moyenne du plasma avec des polarisations de champs différentes. Dans chaque cas, nous avons calculé, à la fois les spectres résolus en (ω, k) et en k . Pour ce faire, nous avons fait la distinction entre la contribution des modes propres amortis subluminiques et non amortis supraluminiques. Ces derniers sont calculés à partir des relations de dispersion électromagnétiques ((9) et (10)) en utilisant le schéma numérique de Fried et Gould généralisé à la section 1.1. En vue de l’étude de l’instabilité de Weibel dans un plasma relativiste (Yoon 2005; Achterberg & Wiersma 2007), nous allons évaluer le spectre des modes magnétiques pour des vecteurs d’onde perpendiculaires à la vitesse de dérive du plasma.

Cette synthèse du chapitre 2 est organisé comme suit. En section 2.1, nous rappelons le formalisme de la théorie des fluctuations standard et l’adapterons à une distribution de Maxwell-Jüttner. Le spectre des fluctuations magnétiques se propageant perpendiculairement à la dérive du plasma sera tout d’abord présenté. Puis nous confronterons nos formules théoriques au code de simulation PIC (“Particle-In-Cell”) CALDER (Lefebvre *et al.* 2003). Enfin, nos résultats seront résumés dans la section 2.4.

2.1 Théorie des fluctuations électromagnétiques

Formalisme général

Considérons un plasma uniforme relativiste composé de populations de particules chargées de masse m_s , charge q_s et densité n_s . D'après [Sitenko \(1982\)](#); [Ichimaru \(1992\)](#), en supposant une mise en place lente des interactions électromagnétiques, la puissance spectrale du tenseur des fluctuations électriques se met sous la forme :

$$\langle \mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega} \cdot \langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle_{\mathbf{k},\omega} \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega}^\dagger, \quad (24)$$

où le terme source des fluctuations est $\langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle_{\mathbf{k},\omega}$ et correspond à la puissance spectrale des fluctuations de courant en régime balistique.

$$\langle j_\alpha j_\beta^* \rangle_{\mathbf{k},\omega} = 2\pi\epsilon_0 \sum_s m_s \omega_{ps}^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3p v_\alpha v_\beta f_s^{(0)}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (25)$$

avec $f_s^{(0)}(\mathbf{p})$ étant la fonction de distribution de l'équilibre, $\omega_{ps}^2 = n_s q_s^2 / m_s \epsilon_0$ est la fréquence plasma de l'espèce indiquée s . Le tenseur $\mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega}$ est défini par la relation linéaire :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}. \quad (26)$$

Pour un plasma décrit par une distribution d'équilibre de symétrie gyrotropique $f_s^{(0)}(p_\perp^2, p_x)$, le vecteur d'onde peut être pris dans le plan (k_y, k_x) sans perte (voir Fig. 1) de généralité. Ainsi, le tenseur $\mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega}$ vérifie :

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega} = -i \frac{\omega}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\omega^2 \epsilon_{zz} - k^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2} & 0 & 0 \\ \frac{D}{\omega^2 \epsilon_{xy} + k_y k_x c^2} & -\frac{\omega^2 \epsilon_{xy} + k_y k_x c^2}{\omega^2 \epsilon_{yy} - k_x^2 c^2} & 0 \\ \frac{D}{D} & \frac{D}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2 \epsilon_{zz} - k^2 c^2} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Nous avons introduit D et le tenseur diélectrique ([Ichimaru 1973](#)) détaillé en section 1.1.

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p \frac{p_\alpha}{\gamma} \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial p_\beta} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \iiint d^3p v_\alpha \frac{p_\beta}{\gamma} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_s^{(0)} / \partial \mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (28)$$

Ainsi que nous l'avons démontré dans la section 1.1, l'équation $|\mathbf{Z}_{\mathbf{k},\omega}| = 0$ nous donne les relations de dispersion des différents modes propres du système notés $\omega_l(\mathbf{k})$:

$$\omega^2 \epsilon_{zz} - k^2 c^2 = 0, \quad (29)$$

$$D = (\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2)(\omega^2 \epsilon_{yy} - k_x^2 c^2) - (\omega^2 \epsilon_{xy} + k_y k_x c^2)^2 = 0. \quad (30)$$

La fonction de distribution de Maxwell-Jüttner

A partir de maintenant, nous supposons que les populations de particules obéissent à la fonction de distribution de Maxwell-Jüttner ([Wright & Hadley 1975](#)) que nous rappelons ici :

$$f_s^{(0)}(\mathbf{p}) = F_s \exp[-\mu_s(\gamma - \beta_{ds} p_x)], \quad (31)$$

Nous rappelons de même que la fonction de distribution est normalisée à 1 : $\int f_s^{(0)}(\mathbf{p})d^3p = 1$. De plus nous faisons l'hypothèse de neutralité de charge et de courant afin que l'équilibre soit établi en champs moyens. Nous utiliserons donc le formalisme développé précédemment des tenseurs diélectriques.

En utilisant la définition de l'équation (25) nous pouvons calculer analytiquement (voir manuscrit complet) le tenseur des sources. Il vérifie $\langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle_{\mathbf{k},\omega} \propto H(1 - |\beta_\phi|)$ où $H(x)$ est la fonction escalier. Ainsi le tenseur des sources est nul pour les vitesses de phase supraluminiques.

2.2 Fluctuations magnétiques de vecteurs d'onde perpendiculaires à la dérive

Formules de départ

Nous allons étudier le cas particulier des fluctuations magnétiques se propageant perpendiculairement à la vitesse de dérive ($\theta = \pi/2$). Nous prendrons donc un vecteur d'onde suivant l'axe y sans perte de généralité. Dans le cadre de l'étude des modes à l'origine des champs induits par l'instabilité de filamentation [Bret et al. \(2013\)](#), nous étudierons les fluctuations de la composante B_z , de sorte que le champ électrique associé soit dans le plan xy . Les tenseurs ϵ , \mathbf{Z} , $\langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle$ et $\langle \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger \rangle$ ne sont plus diagonaux contrairement aux parties précédentes ($\theta = 0$). Leur expression dans le cas d'une distribution de Maxwell-Jüttner est obtenue facilement en prenant $\theta = \pi/2$. Pour un plasma d'électrons ou de paires de températures et dérivées égales, le tenseur des sources se met sous la forme :

$$\langle j_z j_z^* \rangle_{k_y, \omega} = \frac{T\omega \Im(\epsilon_{zz})}{\epsilon_0}, \quad (32)$$

$$\langle j_y j_y^* \rangle_{k_y, \omega} = \frac{T\omega \Im(\epsilon_{yy})}{\epsilon_0}, \quad (33)$$

$$\langle j_x j_x^* \rangle_{k_y, \omega} = \frac{T\omega \Im(\epsilon_{xx})}{\epsilon_0} = \frac{T\Im(\omega^2 \epsilon_{zz} - k_y^2 c^2)}{\epsilon_0 \omega}, \quad (34)$$

$$\langle j_y j_x^* \rangle_{k_y, \omega} = -\frac{T\omega \Im(\epsilon_{yx})}{\epsilon_0}. \quad (35)$$

En prenant $\langle E_x E_x^* \rangle_{k_y, \omega} = (\omega/k_y c)^2 \langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega}$ dans l'équation (24) :

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega} = k_y^2 \frac{|\epsilon_{yy}|^2 \langle j_x j_x^* \rangle_{k_y, \omega} + |\epsilon_{yx}|^2 \langle j_y j_y^* \rangle_{k_y, \omega} + 2\Re(\epsilon_{yy} \epsilon_{yx}^*) \langle j_y j_x^* \rangle_{k_y, \omega}}{|\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 \epsilon_{yy} - \omega^2 \epsilon_{yx}^2|^2}. \quad (36)$$

Le tenseur diélectrique pour $\theta = \pi/2$ est donné par [Bret et al. \(2010a\)](#) et calculé numériquement.

En insérant les équations (33)-(35) dans (36), nous obtenons le spectre magnétique

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega} = -\frac{k_y^2 T}{\epsilon_0 \omega} \Im \left[\frac{\epsilon_{yy}}{(\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2) \epsilon_{yy} - \omega^2 \epsilon_{yx}^2} \right]. \quad (37)$$

Puisque les particules ne peuvent avoir des vitesses supérieure à c ; les modes supraluminiques ne peuvent pas être excités par un mécanisme du type Landau-inverse (Cerenkov). Pour un plasma de paires, l'équation ci-dessus est proportionnelle à $\Im(\epsilon_{yy} D)/|D|^2$. Comme démontré dans ([Klimontovich 1982](#)), cela implique que $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_x, \omega} \propto \delta(D)$ dans la région supraluminique ($|\beta_\phi| > 1$). En conséquence, la partie supraluminique du spectre des fluctuations ne résulte que des singularités (en $\delta(D)$ en l'absence de collisions) associées aux modes propres supraluminiques, solutions de l'équation (37).

Relations de dispersion

Le dénominateur de l'équation (37) correspond à la relation de dispersion électromagnétique (30) avec $k_x = 0$. Nous obtenons après résolution, deux branches $\beta_{\phi,1} = \omega_1/k_y c$ et $\beta_{\phi,2} = \omega_2/k_y c$, définies respectivement par Eqs. (19) et (20). Nous utiliserons encore la méthode de Fried et Gould généralisée dans 1.1 pour résoudre simultanément les modes propres.

Nous trouvons qu'il n'existe que quatre modes propres non amortis, ou faiblement amortis (deux modes de vitesses de phase opposées par branche). Ces solutions correspondent aux transformées de Lorentz des modes dominants électromagnétiques (branche 1) et électrostatiques (branche 2) d'un plasma au repos comme le montrent les courbes colorées en pointillés des figures 3(a,c). Ceci est démontré dans le régime basse température ($\mu = 100$) où les courbes exactes et issues de la transformée de Lorentz des modes classiques $\omega = \omega_p(1 + k^2 c^2/\omega_p^2)^{1/2}$ (transverse) et $\omega = \omega_p(1 + 3k^2 c^2/\omega_p^2 \mu)^{1/2}$ (longitudinal) coïncident exactement. Notons que les modes propres associés à la branche 1 sont tous purement supraluminiques, quel que soit k_y .

Puisque le terme ϵ_{yx} de l'équation (29) est non nul, le champ électrique associé aux modes propres de vecteur d'onde perpendiculaire à la dérive est à la fois longitudinal (E_y) et transversal (E_x). Cette propriété a été analysée en détail dans les travaux de Tzoufras *et al.* (2006); Bret *et al.* (2007) dans le contexte de l'instabilité de filamentation. L'orientation du champ électrique est déterminée par la formule suivante (Bret *et al.* 2004) :

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{\omega^2 \epsilon_{zz} - k_y^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_{yx}} = -\frac{\omega^2 \epsilon_{yx}}{\omega^2 \epsilon_{yy}}. \quad (38)$$

Les limites pour $k_y \rightarrow 0$ et $k_y \rightarrow \infty$ de l'équation ci-dessus peuvent être évaluées analytiquement. Ainsi, les modes propres $\omega_{1,\pm}$ sont purement électrostatiques pour $k_y = 0$ ($E = E_y$) et deviennent électromagnétiques pour $k_y \rightarrow \infty$ ($E = E_x$). Au contraire, les modes propres $\omega_{2,\pm}$ sont purement électrostatiques pour $k_y \rightarrow \infty$ et électromagnétiques pour $k_y = 0$. La dépendance en k_y de l'angle $\phi = \arctan(E_y/E_x)$ est illustrée pour les deux branches sur la figure 4(d) dans le cas d'une température relativiste ($\mu = 1$, $\beta_d = 0.9$).

Spectres résolus en (ω, k)

Les figures 3(a,b,c) illustrent l'équation (37) pour $\beta_d = 0.9$ et $\mu = (1, 10, 100)$. Seule la moitié des spectres sont montrés à cause de leur parité en ω . Comme nous nous y attendions, la trace du mode propre $\omega_{2,+}$ est d'autant plus visible dans la partie subluminaire du spectre que la température diminue.

Nous observons les structures piquées autour de $\omega = 0$. Comme le montre les références Yoon (2007); Tautz & Schlickeiser (2007); Bret *et al.* (2013), ces fluctuations de fréquence nulle sont associées aux modes instables de filamentation (Weibel). En combinant les formules du tenseur diélectrique (Bret *et al.* 2010a) avec (36), nous obtenons la formule suivante :

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega=0} = \frac{\gamma_d^3}{k_y^3} \frac{\mathcal{J}}{\left(k_y^2 + \frac{\omega_p^2 \mu}{\gamma_d^2}\right)^2} \frac{\omega_p^2 e^{-\frac{\mu}{\gamma_d}}}{2\mu^2 K_2\left(\frac{\mu}{\gamma_d}\right)}, \quad (39)$$

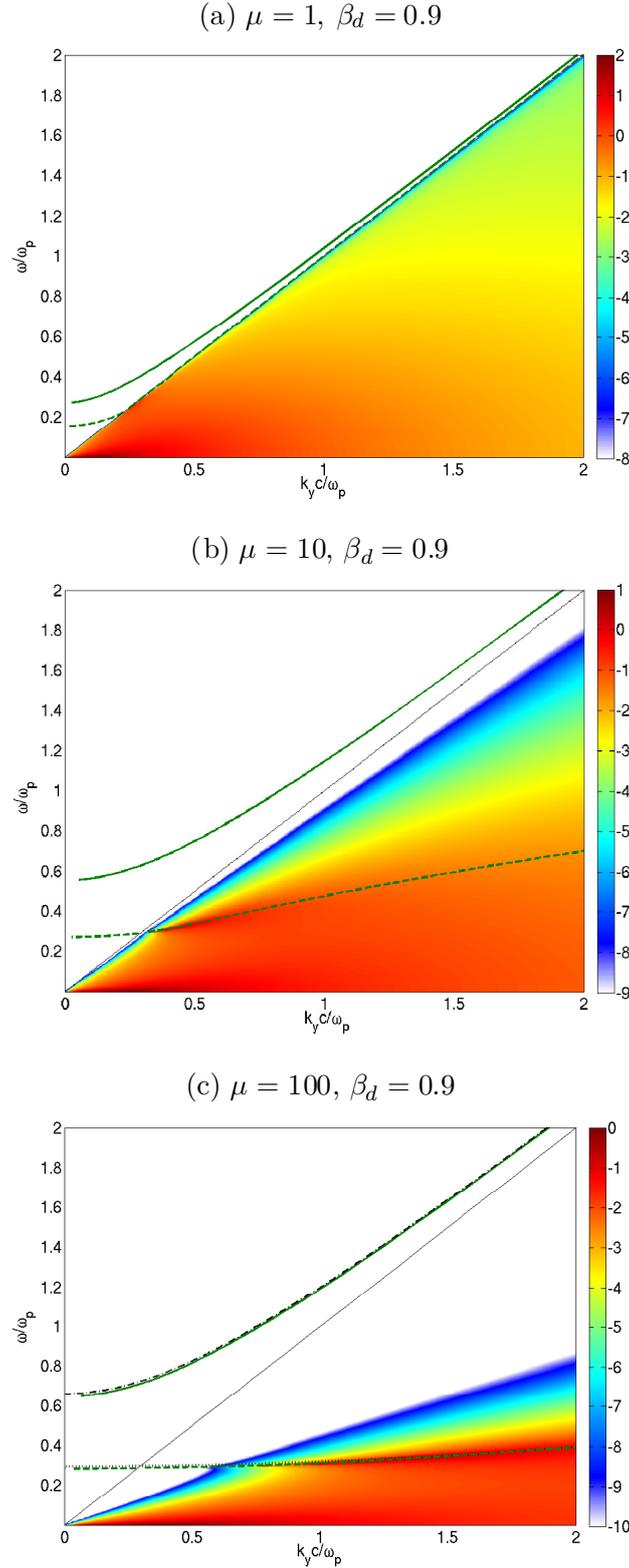


Figure 3. Puissance spectrale $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega}$ (normalisée par $m_e^2 c / e^2$) en échelle logarithmique pour un plasma d'électrons/paires pour $\theta = \pi/2$, $\beta_d = 0.9$ et différentes valeurs de μ . Les deux lignes pleines noires délimitent la région subluminaire ($|\beta_\phi| \leq 1$). Les modes propres exacts correspondent aux lignes vertes pleines (branche 1) et pointillées (branche 2). Dans le cas à faible température ($\mu = 100$), nous montrons la transformée de Lorentz des modes classiques électrostatiques (ligne noire en points) et électromagnétiques (ligne bleue en points-pointillés).

avec K_2 étant la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & (k_y^2 + \omega_p^2 \mu)^2 \left[\left(\frac{\mu}{\gamma_d} + 1 \right) (1 + 2\beta_d^2) + \beta_d^2 \frac{\mu^2}{\gamma_d^2} \right] + \omega_p^4 \mu^2 \beta_d^2 \left[\left(\frac{\mu}{\gamma_d} + 1 \right) (2 + \beta_d^2) + \frac{\mu^2}{\gamma_d^2} \right] \\ & - 2 (k_y^2 + \omega_p^2 \mu) \omega_p^2 \mu \beta_d^2 \left(3 \frac{\mu}{\gamma_d} + 3 + \frac{\mu^2}{\gamma_d^2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Nous avons donc généralisé la formule obtenue par [Yoon \(2007\)](#) à toutes les températures et dérivées dans le régime relativiste. Comme dans le cas non-relativiste, nous trouvons que $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega=0}$ évolue comme k_y^{-3} pour $k_y^2 \ll \omega_p^2 \mu / \gamma_d^2$.

Spectre résolu en k

Pour intégrer $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y, \omega}$ suivant $\omega \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction

$$L_B = - \frac{T}{\epsilon_0 \omega} \frac{k_y^2 \epsilon_{yy}}{(\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2) \epsilon_{yy} - \omega^2 \epsilon_{yx}^2}, \quad (41)$$

de sorte que

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y} = \Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} L_B. \quad (42)$$

Nous avons pu mettre en évidence que le spectre magnétique résolu en k est déterminé par le terme en ω^{-1} de l'équation (41) (voir manuscrit complet). Pour calculer le résidu correspondant, nous devons évaluer la limite quand $\omega \rightarrow 0$ de ϵ_{yy} , $\omega \epsilon_{yx}$ et $\omega^2 \epsilon_{xx}$. L'équation (28) pour $\theta = \pi/2$ donne

$$\epsilon_{yy} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \mu_s}{\omega} \int_{\mathbb{R}} d^3 p \frac{v_y v_y}{\omega - k_y v_y} f_s^{(0)}, \quad (43)$$

$$\omega \epsilon_{yx} = - \sum_s \omega_{ps}^2 \mu_s \int_{\mathbb{R}} d^3 p \frac{v_y v_x}{\omega - k_y v_y} f_s^{(0)}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \epsilon_{xx} = & \omega^2 - \sum_s \omega_{ps}^2 \mu_s \omega \int_{\mathbb{R}} d^3 p \frac{v_x v_x}{\omega - k_y v_y} f_s^{(0)}. \\ & + \sum_s \omega_{ps}^2 \mu_s \beta_{ds}^2 \end{aligned} \quad (45)$$

En prenant $\omega \rightarrow 0$ dans les équations (43)-(45) puis en utilisant

$$\lim_{v_\phi \rightarrow 0} \frac{1}{v_\phi} \int d^3 p \frac{v_y f_s^{(0)}}{v_\phi - v_y} = \int d^3 p f_s^{(0)} = 1, \quad (46)$$

nous obtenons

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon_{yy} = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \mu_s}{k_y^2}, \quad (47)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \epsilon_{yz} = - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2 \mu_s}{k_y} \beta_{ds}, \quad (48)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \epsilon_{zz} = \sum_s \omega_{ps}^2 \mu_s \beta_{ds}^2. \quad (49)$$

Les équations (47)-(49) permettent d'obtenir le spectre total :

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y} = \frac{\mu_0 T}{2} \frac{k_y^2 c^2 + \omega_p^2 \mu}{k_y^2 c^2 + \omega_p^2 \mu / \gamma_d^2}. \quad (50)$$

Comme dans les autres cas (voir manuscrit complet), le spectre supraluminique découle de la singularité supraluminique $\omega_{1,2S}$ de l'équation (41).

$$\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y}^{|\beta_\phi| > 1} = \sum_{\omega=\omega_{1,2S}} \frac{\mu_0 T}{2} \frac{k_y^2 \epsilon_{yy}}{\omega \partial D / \partial \omega|_\omega}, \quad (51)$$

avec $D = (\omega^2 \epsilon_{xx} - k_y^2 c^2) \epsilon_{yy} - \omega^2 \epsilon_{yx}^2$. Seules les solutions $\omega_{1S\pm}$ contribuent à l'équation ci-dessus, ce qui implique $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y}^{|\beta_\phi| > 1} \sim \mu_0 T / 2$.

Les figures 4(a,b,c) montrent la dépendance en k_y des spectres totaux, subluminiques et supraluminiques pour $\beta_d = 0.9$ et différentes valeurs de μ . Notons que les fluctuations magnétiques sont purement subluminiques pour $k_y = 0$, avec $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y=0} = \mu_0 \gamma_d^2 T / 2$. L'intégration numérique sur la partie subluminiq ue de ω reproduit précisément la formule déduite de l'équation provenant de la soustraction de (51) à (50). La discontinuité observée sur les spectres subluminiques vient du mode propre $\omega_{2S\pm}$ qui devient subluminiq ue pour des vecteurs d'onde supérieurs à la valeur critique :

$$k_{2S}^2 = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\gamma_d^3} \frac{K_1(\frac{\mu_s}{\gamma_{ds}}) + 2 \frac{\gamma_{ds}}{\mu_s} K_0(\frac{\mu_s}{\gamma_{ds}})}{K_2(\frac{\mu_s}{\gamma_{ds}})}. \quad (52)$$

Ainsi le passage de $k > k_{2S}$ à $k < k_{2S}$ se traduit par une discontinuité qui est difficile à résoudre numériquement dans le cas froid $\mu = 100$.

2.3 Comparaison aux simulations PIC

Dans ce qui suit, nous confrontons nos formules analytiques des fluctuations électromagnétiques induites par un plasma numérique et modélisé par le schéma PIC. L'objectif est d'analyser le bruit numérique qui ensemence les modes amplifiés des simulations PIC d'instabilités plasmas relativistes. Notre code CALDER (Lefebvre *et al.* 2003) utilise la méthode de Yee pour la résolution des équations de Maxwell (Yee 1966). Un schéma conservatif de dépôt des charges et des courants est utilisé (Esirkepov 2001) avec un facteur de forme du troisième ordre pour les macro-particules. Les simulations effectuées ont une dimension spatiale et trois dimensions d'impulsion. Les pas spatiaux et temporels sont respectivement $\Delta x = 0.1c/\omega_p$ et $\Delta t = 0.095/\omega_p$. La longueur du plasma est de $560c/\omega_p$ avec des conditions aux limites périodiques pour les champs et les macro-particules. Les champs sont initialisés à zéro. Nous prendrons un plasma de paires e^+e^- initialisé par une fonction de distribution de Maxwell-Jüttner, avec $\mu = 10$ et $\beta_d = 0.9$. Les macro-particules ont une charge et une masse égale respectivement à $Q_p = \pm W_p q_e$ et $M_p = W_p m_e$, où W_p est le poids statistique. Pour que le plasma numérique se comporte collectivement comme son homologue physique, les fréquences plasmas des deux systèmes doivent être égales, ce qui implique

$$W_p = \frac{m_e \epsilon_0 \omega_{pe}^2}{e^2} \frac{\Delta x}{N_p}, \quad (53)$$

où N_p est le nombre de macro-particules par nœud et par espèce. Notre géométrie étant 1D, W_p correspond à une densité de surface. Puisque la température inverse normalisée μ est invariante, le tenseur susceptibilité reste inchangé dans les simulations. Par contre, le terme source est modifié

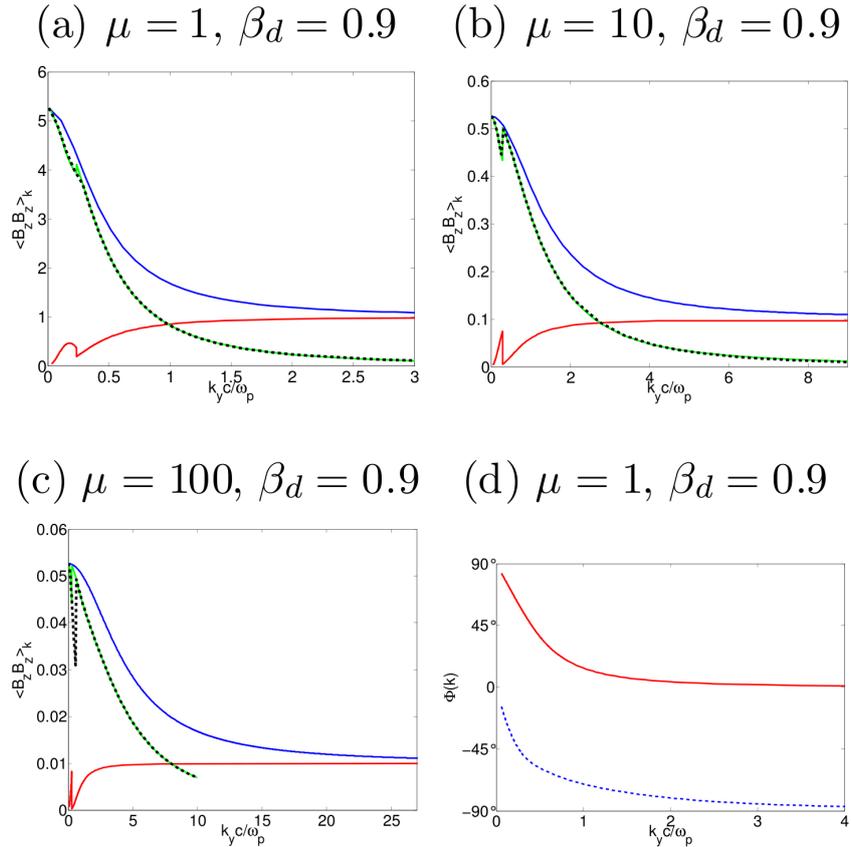


Figure 4. (a,b,c) Spectre $\langle B_z B_z^* \rangle_{k_y}$ (normalisé par $\frac{m_e^2 c^3}{e^2} (\sum_s \omega_{ps}^2)^{1/2}$) pour un plasma d'électrons/paires à une température pour $\beta_d = 0.9$ et différentes valeurs de μ . Comparaison du spectre total (bleu), supraluminique (rouge) et subluminique (vert). Les lignes en pointillés montrent le résultat de l'intégration numérique de (37) sur le domaine subluminique $|\omega| < k_y c$. (d) Angle $\phi(k_y) = \arctan(E_y/E_x)$ pour le mode propre issu de la branche 1 (ligne pleine rouge) et de la branche 2 (ligne en pointillés bleus).

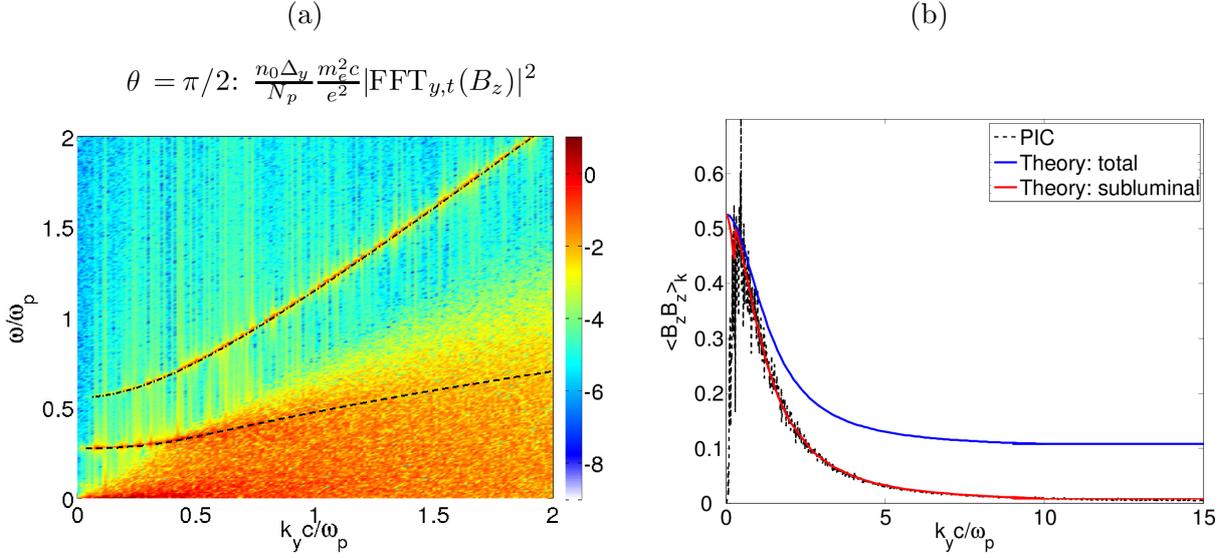


Figure 5. Spectres (k, ω) (a) et spatial (b) simulés en échelle logarithmique pour $\mu = 10$ et $\beta_d = 0.9$. La figure correspond à un vecteur d'onde perpendiculaire à la dérive ($\theta = \pi/2$). Les courbes en pointillés et points-pointillés sont les modes propres issus des résolutions de la relation de dispersion (20) (a). (b) Spectre spatial simulé comparés aux spectres théoriques subluminaire (ligne pleine rouge) et total (ligne pleine bleue) normalisées par $\frac{m_e^2 c^3}{e^2} (\sum_s \omega_{ps}^2)^{1/2}$. La taille du système est $L = 560c/\omega_p$.

suivant

$$\langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{PIC}} = W_p^{-1} \langle \mathbf{j}\mathbf{j}^\dagger \rangle_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (54)$$

L'effet de la taille des macroparticules est ici négligé (Birdsall & Langdon 1985). Ainsi, les quantités des simulations qui peuvent être comparées aux spectres théoriques sont $W_p \langle \mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{PIC}}$. En pratique, le spectre des fluctuations est calculé par la valeur absolue élevée au carré de la transformée de Fourier spatio-temporelle $|\text{FFT}_{z,t}(B_z)|^2$. Nous avons pris soin de sélectionner un domaine temporel pour lequel le système a atteint un état d'équilibre, c'est-à-dire, que ni l'énergie électromagnétique ni les fonctions de distribution ne sont modifiées. La fenêtre temporelle sélectionnée fait quelques $1000\omega_{pe}^{-1}$.

La figure 5(a) montre les spectres résolus en (k, ω) des puissances spectrales des fluctuations électriques et magnétiques simulées pour $\theta = \pi/2$. Dans ce cas, la simulation résout l'axe y perpendiculaire à la dérive. Ces résultats concordent de façon satisfaisante (sur plus de ~ 3 décades) avec la prévision théorique représentée par la figure 3(b). Nous noterons que les modes propres supraluminiques, absents des spectres théoriques en raison de leur caractère infiniment fin (du type Dirac), apparaissent maintenant sur le spectre simulé.

Il y a plusieurs raisons à cela : la fenêtre temporelle est de taille finie, il existe dans la simulation des collisions numériques entre les macro-particules et enfin l'initialisation des champs à zéro viole l'hypothèse d'adiabaticité. Les références Lerche (1968b, 1969b,a) ont montré la grande sensibilité des fluctuations supraluminiques à l'initialisation du plasma. En effet les modes supraluminiques simulés n'étant que très peu amortis (pour les raisons évoquées ci-dessus), s'il existe des modes supraluminiques introduits lors de l'initialisation non adiabatique, ils resteront dans la simulation. Nous ne traiterons pas dans ce manuscrit de l'impact de l'initialisation des simulations sur leurs résultats.

Considérons maintenant les spectres des fluctuations spatiales. Avec le même raisonnement que précédemment, nous comparons les formules théoriques aux quantités simulées $W_p \langle |\text{FFT}_x(E_\alpha)|^2 \rangle_t$, où $\langle \rangle_t$ représente une moyenne temporelle. Le spectre spatial subluminaire théorique présenté

dans la figure 5(b) s'avère être en meilleur accord avec les résultats de simulation que le spectre total. Nous avons vérifié que l'énergie correspondant aux parties supraluminiques 5(a) sous-estime significativement les résultats théoriques.

2.4 Synthèse

Les puissances spectrales des fluctuations électriques et magnétiques induites spontanément par un plasma non-collisionnel non magnétisé du type Maxwell-Jüttner ont été évaluées explicitement pour des vecteurs d'onde parallèles (voir manuscrit complet) ou perpendiculaires à la vitesse moyenne du plasma. Nous avons élaboré une méthode d'intégration analytique suivant ω de ces spectres permettant de distinguer la partie subluminaire et supraluminaire. Nous avons ainsi généralisé les résultats connus non-relativistes et sans dérive (Akhiezer *et al.* 1975) au cas relativiste avec dérive. Pour ce faire nous avons utilisé la méthode de Fried et Gould (Fried & Gould 1961) pour résoudre l'ensemble des modes propres du système. Cette technique peut également être utilisée pour des systèmes instables et des vecteurs d'ondes obliques comme dans le reste du manuscrit.

Le cas particulier des fluctuations magnétiques avec des vecteurs d'onde perpendiculaires à la dérive du faisceau a été étudié en détail. Il a été montré que les fluctuations magnétiques spatiales à grandes longueurs d'onde ($k_y \ll \omega_p \sqrt{\mu}/c$) dépassent les fluctuations à petites longueurs d'onde d'un facteur γ_d^2 .

De plus, nous avons confronté nos résultats théoriques aux simulations PIC 1D de dérive de plasmas. Les spectres théoriques sont dans l'ensemble, bien reproduits dans la région subluminaire. Les relations de dispersion des modes propres sont résolues avec précision, bien que l'énergie du domaine supraluminaire soit sous-estimée.

Une expression explicite des fluctuations magnétiques à $\omega = 0$ est également disponible. Cette formule a récemment servi à estimer l'énergie magnétique à partir de laquelle croissent les champs induits par la filamentation (voir manuscrit complet). Les estimations sont en bon accord avec les simulations de chevauchement de faisceau sur plus de trois ordres de grandeur d'énergie de dérive (Bret *et al.* 2013). Le modèle présenté ici relie de façon simple les fluctuations thermiques d'un plasma homogène à l'amplitude initiale des modulations magnétiques. Une approche plus complexe de ce problème est menée dans Schlickeiser & Yoon (2012); Felten *et al.* (2013); Lazar *et al.* (2012), en généralisant la théorie des fluctuations thermiques aux cas instables. Par contre, ces articles utilisent des fonctions de distribution isotropes et ne sont donc pas applicables au cas de la filamentation qui nous intéresse.

3 Régime de saturation non-linéaire de l'instabilité de Weibel-filamentation ionique et chocs non-collisionnels associés

Nous avons ensuite mené une étude théorique et numérique des collisions de plasma d'électrons-ions en régime non-collisionnel ayant lieu lors d'événements astrophysiques tels que les restes de supernovae. Au-delà d'un intérêt académique de compréhension des processus de transfert/transport d'énergie au sein des plasmas, la récente génération de tels plasmas en laboratoire ouvre des perspectives inédites en astrophysique des hautes énergies. La zone de recouvrement de ces faisceaux de particules est sujette à des instabilités cinétiques du type Weibel, générant des champs magnétiques. Nous avons modélisé l'évolution non-linéaire d'un système soumis à l'instabilité de Weibel ionique, et obtenu des formules analytiques de l'évolution des paramètres plasmas (températures et vitesse de dérive) et des champs magnétiques. Nous prédisons l'évolution du système jusqu'à un stade proche de l'isotropisation complète des populations de particules et donc jusqu'à la formation d'un choc non-collisionnel. Ce modèle se décompose en deux étapes.

Tout d'abord, nous avons simplifié la théorie quasilinear de l'instabilité de Weibel développée par Davidson *et al.* (1972) dans le cas d'un plasma composé de deux faisceaux ioniques bi-Maxwelliens neutralisés par un bain d'électrons chauds et isotropes. Nous introduisons maintenant le facteur d'anisotropie ionique a_i : le rapport entre le flux d'impulsion axial sur le flux d'impulsion transverse auquel on retranche l'unité. Dans le cas de populations ioniques bi-Maxwelliennes, ce dernier s'écrit en fonction des températures et des dérivées moyennes : $a_i = (m_i v_i^2 + T_{ix})/T_{iy} - 1$. Les équations quasilineaires, qui relient les grandeurs plasmas au spectre magnétique, ont pu être simplifiées en considérant que dans les systèmes qui nous intéressent, $a_i \gg 1$. Il en résulte

$$T_{iy}(t) \simeq \sqrt{T_{iy}^{(0)2} + 2 \frac{Z_i^2}{m_i} \alpha K_i^{(0)} \Delta S_p(t)} \quad (55)$$

$$v_i(t) \simeq v_i^{(0)} \exp \left[-\frac{2}{K_i^{(0)}} \left(T_{iy}(t) - T_{iy}^{(0)} \right) \right] \quad (56)$$

$$a_i(t) \simeq \frac{K_i^{(0)}}{\sqrt{T_{iy}^{(0)2} + 2 \frac{Z_i^2}{m_i} \alpha K_i^{(0)} \Delta S_p(t)}} - 2 \quad (57)$$

$$k_{\text{sat}}(t) \simeq 0.5 \frac{\omega_{pi}}{c} \sqrt{a_{ni}(t)} \quad (58)$$

Nous avons introduit une énergie qui dépend des paramètres initiaux ioniques $K_i^{(0)} = K_{ix}^{(0)} + 2T_{iy}^{(0)}$ et la variable $S_p = q_e^2 \sum_{k_y} |B_{k_y}|^2 / k_y^2$ qui dépend directement des fluctuations magnétiques. Le système de quatre équations ci-dessus est non prédictif. De plus k_{sat} désigne le vecteur d'onde qui maximise le spectre magnétique et $\alpha \simeq 0.5$. Mesurant la grandeur S_p dans des simulations 2D périodiques, les prédictions théoriques du modèle ont pu être comparées avec les résultats PIC (voir Fig. 6), démontrant ainsi la robustesse du modèle jusqu'à sa limite marginale de validité, $a_i = 2 \gg 1$. En effet, les courbes noires pointillées du modèle reproduisent assez bien les courbes pleines rouges des simulations sur un ou deux ordres de grandeur d'évolution de a_i et T_{iy} . Ainsi, le modèle reste valide pendant la phase non-linéaire de l'instabilité.

Afin de fermer le système d'équations précédant et obtenir un modèle prédictif, nous avons modélisé cette dernière phase. Elle est caractérisée par la création de filaments de courants qui accompagnent les modulations magnétiques. Dans le cas de la filamentation ionique qui nous intéresse, ces courants sont portés principalement par les ions. Les électrons, quant à eux, ont tendance à écranter le courant imposé par les ions. Les filaments ainsi créés ont tendance à s'attirer ou se repousser par interaction magnétique suivant le signe du courant qu'ils portent. Lorsque deux filaments de même signe sont suffisamment proches, ils coalescent pour générer un filament plus gros. Ce phénomène fut modélisé suivant Medvedev & Zakutnyaya (2009) en tenant compte de l'écrantage électronique modélisé par Achterberg *et al.* (2007). Nous avons ainsi pu fermer le système d'équations quasilineaires et obtenir des équations analytiques qui prédisent l'évolution des grandeurs ioniques et spectrales. Ces formules dépendent des conditions initiales suivantes : l'état du plasma avant interaction ($v_i(t=0) = v_0$, $T_{iy}(t=0) = T_i^{(0)}$) et la longueur d'onde magnétique dominante λ_* au début de la phase de saturation à $t = t_*$ (ou la fin de la phase linéaire). En

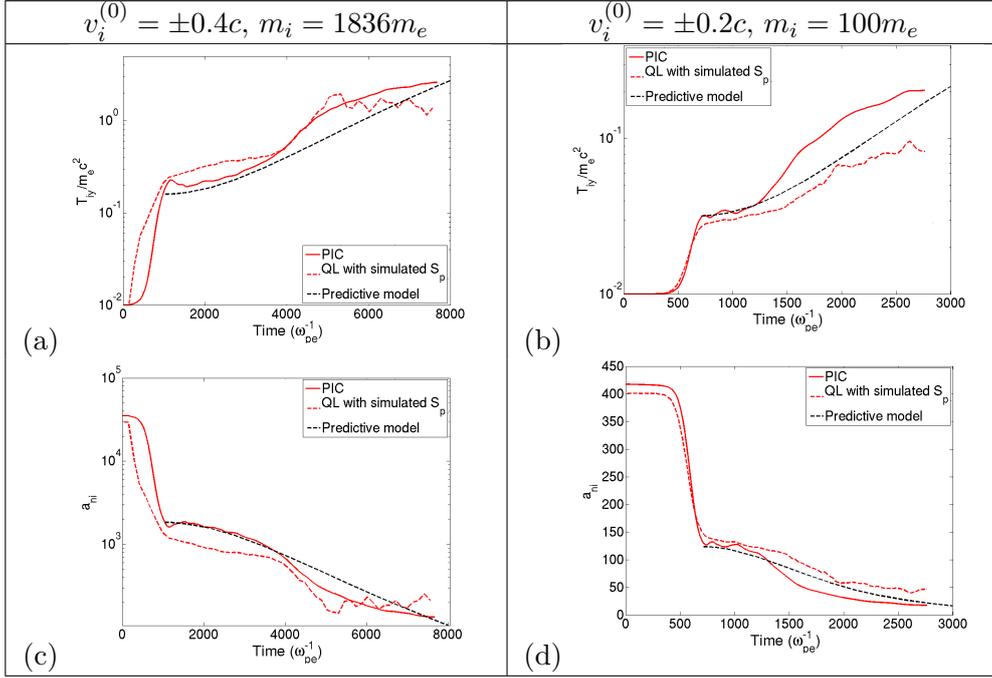


Figure 6. Température transverse (a,b) et facteur d’anisotropie (c,d) ionique moyen au cours du temps dans des simulations de filamentation ionique 2D périodiques (courbes pleines rouges). Les prédictions théoriques du modèle quasilinéaire Eqs. (55) et (57), mesurant S_p dans les simulations, sont superposées en courbes noires pointillées. Les prédictions du modèle de coalescence (Eqs. (62) et (63)) sont superposées en courbes rouges pointillées.

introduisant $\Delta t = t - t_*$, nous obtenons

$$\lambda_{\text{sat}} = \frac{2\pi}{k_{\text{sat}}} \simeq \lambda_*(1 + \Delta t^2/\tau_0^2) \quad (59)$$

$$S_p \simeq \frac{m_i^2 v_i^{(0)2}}{2\alpha Z_i^2} \frac{(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^4}{(4k_*^2 c^2 + 2(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2)^2} \quad (60)$$

$$a_i \simeq \frac{4k_*^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \frac{1}{(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2} \quad (61)$$

$$T_{iy} \simeq m_i v_i^{(0)2} \frac{(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2}{4k_*^2 c^2/\omega_{pi}^2 + 2(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2} \quad (62)$$

$$v_i \simeq v_0 \exp \left[\frac{2T_i^{(0)}}{K_i^{(0)}} - \frac{2(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2}{4k_*^2 c^2/\omega_{pi}^2 + 2(1 + \Delta t^2/\tau_0^2)^2} \right] \quad (63)$$

$$v_0 \tau_0 = 9(m_i/m_e)^{1/4} \sqrt{\lambda_* c/\omega_{pi}} \quad (64)$$

Ce modèle, en accord avec des simulations périodiques (courbes rouges pointillées, Fig. 6), a pu aussi être comparé à des simulations de formation de chocs non-collisionnels et à des résultats expérimentaux récents.

Enfin, l’étude de la propagation des chocs non-collisionnels nous a permis de généraliser le précédent modèle au cas de la turbulence magnétique ayant lieu en amont du front de choc.

4 Chocs non-collisionnels induits par l'instabilité de Weibel et généré par irradiation d'une cible dense par laser ultra-intense

Dans le cadre de l'étude de la physique des hautes énergies induite par des lasers ultra-intenses, nous nous sommes consacré enfin aux chocs non-collisionnels créés dans un plasma dense (opaque) irradié par un laser intense. L'interaction laser-plasma qui en résulte donne lieu à un important courant d'électrons relativistes, à l'origine d'instabilités cinétiques (de filamentation, notamment) susceptibles d'évoluer en choc non-collisionnel. Nous avons observé que, pour les paramètres considérés (un laser d'éclairement $\sim 10^{21}$ W.cm⁻² interagissant avec des plasmas de densité $\sim 10^{23}$ cm⁻³), le choc résulte de la turbulence magnétique produite par l'instabilité électronique, plutôt que par l'instabilité ionique (dont la croissance est plus tardive). En d'autres termes, compte tenu de l'énergie très élevée des électrons accélérés par laser, la turbulence d'origine électronique s'avère assez forte pour rapidement défléchir les ions. De plus nous avons pu mettre en évidence le rôle prédominant des électrons du courant de retour (sur les électrons accélérés par le laser) lors du développement de l'instabilité cinétique de Weibel.

Bibliography

- ACHTERBERG, A. & WIERSMA, J. (2007). *The Weibel instability in relativistic plasmas. i. linear theory.* A & A **475**, p. 1–18.
- ACHTERBERG, A., WIERSMA, J. & NORMAN, C. A. (2007). *The Weibel instability in relativistic plasmas. ii. nonlinear theory and stabilization mechanism.* A & A **475**, p. 19–36.
- AKHIEZER, A. I., AKHIEZER, I. A., POLOVIN, R. V., SITENKO, A. G. & STEPANOV, K. N. (1975). *Plasma electrodynamics. Volume 2 - Non-linear theory and fluctuations.* Pergamon Press.
- BIRDSALL, C. K. & LANGDON, A. B. (1985). *Plasma physics via computer simulation.* McGraw-Hill, New York.
- BRET, A., FIRPO, M. C. & DEUTCH, C. (2004). *Collective electromagnetic modes for beam-plasma interaction in the whole k space.* Phys. Rev. E **70**, p. 046401.
- BRET, A., GREMILLET, L. & BELLIDO, J. C. (2007). *How really transverse is the filamentation instability ?* Phys. Plasmas **14**, p. 032103.
- BRET, A., GREMILLET, L. & BÉNISTI, D. (2010a). *Exact relativistic kinetic theory of the full unstable spectrum of an electron-beam-plasma system with Maxwell-Jüttner distribution functions.* Phys. Rev. E **81**, no. 3, p. 036402.
- BRET, A., GREMILLET, L. & DIECKMANN, M. E. (2010b). *Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime.* Phys. Plasmas **17**, no. 12, p. 120501.
- BRET, A., STOCKEM, A., FIUZA, F., RUYER, C., GREMILLET, L., NARAYAN, R. & SILVA, L. O. (2013). *Collisionless shock formation, spontaneous electromagnetic fluctuations, and streaming instabilities.* Phys. Plasmas **20**, no. 4, p. 042102.
- COTTRILL, L. A., LANGDON, A. B., LASINSKI, B. F., LUND, S. M., MOLVIG, K., TABAK, M., TOWN, R. P. J. & WILLIAMS, E. A. (2008). *Kinetic and collisional effects on the linear evolution of fast ignition relevant beam instabilities.* Phys. Plasmas **15**, p. 082108.
- DAVIDSON, R. C., HAMMER, D. A., HABER, I. & WAGNER, C. E. (1972). *Nonlinear development of electromagnetic instabilities in anisotropic plasmas.* Phys. Fluids **15**, no. 2, p. 317.
- ESIRKEPOV, T. Z. (2001). *Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form-factor.* Comp. Phys. Comm. **135**, p. 144–153.
- FELTEN, T., SCHLICKEISER, R., YOON, P. H. & LAZAR, M. (2013). *Spontaneous electromagnetic fluctuations in unmagnetized plasmas ii: Relativistic form factors of aperiodic thermal modes.* Phys. Plasmas **20**, p. 052113.
- FRIED, B. D. & GOULD, W. (1961). *Longitudinal ion oscillations in a hot plasma.* Phys. Fluids B **4**, no. 1, p. 139–147.
- ICHIMARU, S. (1973). *Basic Principles of Plasma Physics.* Benjamin, Reading, MA.

BIBLIOGRAPHY

- ICHIMARU, S. (1992). *Statistical Plasma Physics. Volume I: Basic Principles*, chapitre 7, p. 229–292. Addison-Wesley, Tokyo.
- KLIMONTOVICH, Y. L. (1982). *Kinetic Theory of Nonideal Gases & Nonideal Plasmas*. Pergamon Press.
- LAZAR, M., YOON, P. H. & SCHLICKEISER, R. (2012). *Spontaneous electromagnetic fluctuations in unmagnetized plasmas iii: Generalized kappa distributions*. *Phys. Plasmas* **19**, p. 122108.
- LEFEBVRE, E., COCHET, N., FRIZLER, S., MALKA, V., ALÉONARD, M.-M., CHEMIN, J.-F., DARBON, S., DISDIER, L., FAURE, J., FEDOTOFF, A., LANDOAS, O., MALKA, G., MÉOT, V., MOREL, P., RABEC LE GOAHEC, M., ROUYER, A., RUBBELYNCK, C., TIKHONCHUK, V., WROBEL, R., AUDEBERT, P. & ROUSSEAU, C. (2003). *Electron and photon production from relativistic laser-plasma interactions*. *Nucl. Fusion* **43**, p. 629–633.
- LEMOINE, M. & PELLETIER, G. (2011). *Dispersion and thermal effects on electromagnetic instabilities in precursor of relativistic shocks*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **417**, p. 1148–1161.
- LERCHE, I. (1968a). *Enhanced Bremsstrahlung from Supraluminous, and Subluminous, Waves in an Isotropic, Homogeneous Plasma*. *Phys. Fluids* **11**, p. 2459–2471.
- LERCHE, I. (1968b). *Supra-Luminous Waves and the Power Spectrum of an Isotropic, Homogeneous Plasma*. *Phys. Fluids* **11**, p. 413–422.
- LERCHE, I. (1969a). *Reply to Comments by Norman Rostoker*. *Phys. Fluids* **12**, p. 1955–1956.
- LERCHE, I. (1969b). *Reply to the Comments by Kulsrud, Oberman, Dawson, and Rosenbluth*. *Phys. Fluids* **12**, p. 1959.
- LUND, E. J., TREUMANN, R. A. & LABELLE, J. (1995). *Quasi-thermal fluctuations in a beam-plasma system*. *Phys. Plasmas* **3**, no. 4, p. 1234–1240.
- LYUBARSKY, Y. & EICHLER, D. (2006). *Are gamma-ray burst shocks mediated by Weibel instability ?* *Astrophys. J.* **647**, no. 2, p. 1250.
- MEDVEDEV, M. V. & ZAKUTNYAYA, O. V. (2009). *Magnetic fields and cosmic rays in GRBs: a self-similar collisionless foreshock*. *Astrophys. J.* **696**, no. 2, p. 2269–2274.
- OPHER, M. & OPPER, R. (1996). *Was the electromagnetic spectrum a blackbody in the early universe?* *Phys. Rev. Lett.* **79**, no. 14, p. 2628–2631.
- ROSTOKER, N. & ROSENBLUTH, M. N. (1960). *Test Particles in a Completely Ionized Plasma*. *Phys. Fluids* **3**, p. 1–14.
- RUYER, C., GREMILLET, L., BÉNISTI, D. & BONNAUD, G. (2013). *Electromagnetic fluctuations and normal modes of a drifting relativistic plasma*. *Phys. Plasmas* **20**, no. 4, p. 112104.
- SCHLICKEISER, R. & YOON, P. H. (2012). *Spontaneous electromagnetic fluctuations in unmagnetized plasmas i: General theory and nonrelativistic limit*. *Phys. Plasmas* **19**, p. 022105.
- SITENKO, A. G. (1982). *Fluctuations & Non-linear Wave Interactions in Plasmas*, tome 107. Pergamon Press, Kiev.
- SPITKOVSKY, A. (2008). *On the structure of relativistic collisionless shocks in electron-ion plasmas*. *Astrophys. J. Lett.* **673**, no. 1, p. L39–L42.
- STEWART, P. (1973). *Relativistically Induced Interstellar Density Fluctuations*. *Astrophys. Space Sci.* **24**, p. 269–277.
- TAJIMA, T. & CABLE, S. (1992). *On zero-frequency magnetic fluctuation in plasmas*. *Phys. Fluids B* **4**, no. 7, p. 2338–2345.

BIBLIOGRAPHY

- TAUTZ, R. C. & SCHLICKEISER, R. (2007). *Spontaneous emission of Weibel fluctuations by anisotropic distributions*. Phys. Plasmas **14**, p. 102102.
- TZOUFRAS, M., REN, C., TSUNG, F. S., TONGE, J. W., MORI, W. B., FIORE, M., FONSECA, R. A. & SILVA, L. O. (2006). *Space charge effects in the current filamentation or Weibel instability*. Phys. Rev. Lett. **96**, p. 105002.
- WEIBEL, E. S. (1959). *Spontaneous growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution*. Phys. Rev. Lett. **2**, no. 3, p. 83–84.
- WRIGHT, T. P. & HADLEY, G. R. (1975). *Relativistic distribution functions and applications to electron-beams*. Phys. Rev. A **12**, no. 2, p. 686–697.
- YEE, K. (1966). *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*. IEEE Trans. Antennas Propag. **14**, p. 302–307.
- YOON, P. H. (2005). *Effects of spontaneous fluctuations on generalized weak turbulence theory*. Phys. Plasmas **12**, p. 042306.
- YOON, P. H. (2007). *Spontaneous thermal magnetic field fluctuation*. Phys. Plasmas **14**, p. 064504.