



Stratégies de mise en oeuvre des polytopes en analyse de tolérance

Lazhar Homri

► To cite this version:

Lazhar Homri. Stratégies de mise en oeuvre des polytopes en analyse de tolérance. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0156 . tel-01133691

HAL Id: tel-01133691

<https://theses.hal.science/tel-01133691>

Submitted on 20 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGENIEUR
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE ET INGÉNIERIE

Par Lazhar, HOMRI

**STRATÉGIES DE MISE EN ŒUVRE DES POLYTOPES EN
ANALYSE DE TOLÉRANCES**

Sous la direction de : Alex, BALLU
(Co-directeur : Denis, TEISSANDIER)

Soutenue le 13 novembre 2014

Membres du jury :

M. ANSELMETTI, Bernard
M. DANTAN, Jean-Yves
M. GIORDANO, Max
M. BALLU, Alex
M. TEISSANDIER, Denis
M. SENER, Gérald

Professeur des Universités, Université Paris-Sud
Professeur des Universités, ENSAM Metz
Professeur des Universités, Université de Savoie
Maître de conférences HDR, Université de Bordeaux
Maître de conférences HDR, Université de Bordeaux
Ingénieur R&D, Turbomeca

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Invité

Remerciements

Ce mémoire concrétise les travaux de recherche menés au sein de l'équipe IMC (Ingénierie **M**écanique et **C**onception) de l'I2M (Institut **M**écanique et d'Ingénierie de Bordeaux) sous la direction d'Alex BALLU et Denis TEISSANDIER, maîtres de conférences HDR à l'université de Bordeaux. Je leur exprime ma profonde gratitude et ma reconnaissance pour la confiance, le soutien, l'aide et la patience qu'ils m'ont accordé durant ces trois années de thèse ainsi pour leurs rigueurs scientifiques et leurs remarques qui ont permis l'aboutissement de ce travail et finalement toutes mes sincères remerciements de m'avoir fait découvrir le monde du tolérancement géométrique.

Je remercie infiniment Jean Yves DANTAN, professeur à l'ENSAM de Metz et Max GIORDANO, professeur émérite à l'université de Savoie d'avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse. Nos discussions et échanges ont été très enrichissants et ont contribué à l'amélioration de ce travail. Merci Max de votre lecture rigoureuse et détaillée.

Je tiens à remercier Bernard ANSELMETTI, professeur à l'université de Paris-Sud d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et Gérald SENGER, Ingénieur R&D chez Turbomeca d'avoir accepté d'être membre de ce jury.

Un grand merci à tous mes collègues et amis du laboratoire : Mohamed dziri, Karim, Abdoullaye, Racine, Emanuel, Maroun, Alexy, les deux Benoit, Pierric, Wadii, Ramzi, Helmi, Naoufel, Rihab, Alaa, Nejib, Julien, Dima, Nam, Santiago sans oublier Béatrice et Sandrine pour leur accueil et les échanges que nous avons pu avoir ainsi que les moments conviviaux que nous avons vécu ensemble.

D'un point de vue plus personnel, il me tient à cœur de remercier mes parents (Faheum et Aziza) qui se sont sacrifiés pour moi, pour mon frère et mes sœurs et nous ont toujours soutenu durant nos études. Leur amour, leur confiance et leur aide m'ont permis d'avancer et concrétiser mes objectifs. Je tiens à leur faire part de toute l'estime et la reconnaissance que j'ai pour eux. Je vous aime.

Table des matières

Introduction	9
1 Analyse de tolérances : du paramétrage des déplacements aux polytopes.....	15
1.1 Le tolérancement, pilier de la conception mécanique	15
1.2 Paramétrage de déplacements.....	17
1.2.1 Définition par application affine	17
1.2.2 Matrice homogène.....	19
1.2.3 Torseur de petits déplacements.....	20
1.3 Modélisation des chaînes de cotes.....	20
1.3.1 Architecture de mécanismes : graphe et cycle.....	22
1.3.2 Loi de comportement géométrique d'un mécanisme, fermeture des cycles.....	27
1.3.3 Cycle influent.....	28
1.4 Paramétrage des écarts.....	28
1.4.1 Caractérisation des surfaces par des surfaces de substitution	28
1.4.2 Ecart géométriques dans une pièce.....	29
1.4.3 Ecart de contact.....	33
1.5 Analyse de tolérances par des approches paramétriques	36
1.5.1 Hypothèses physiques.....	36
1.5.2 Modèles d'assemblage par les vecteurs (Vector Assembly Models).....	36
1.5.3 Droite d'analyse.....	37
1.5.4 Logiciels d'analyse de tolérances.....	38
1.5.5 Jacobien torseur	39
1.5.6 Méthode des " indéterminées "	40
1.5.7 Conclusion	40
1.6 Analyse de tolérances basée sur des systèmes de contraintes	40
1.6.1 Espace de Faisabilité	41
1.6.2 Opérations de " Pairing " et de " Chaining " de Fleming.....	43
1.6.3 S.A.T.T et contraintes	45
1.6.4 U.P.E.L.....	45
1.6.5 Domaine.....	47
1.6.6 T-Map®	50

1.6.7	Polyèdre – polytope.....	53
1.7	Conclusion	54
2	Polytopes et tolérancement.....	55
2.1	Introduction à l'approche polyédrale.....	56
2.1.1	Espaces affines, ensembles convexes.....	56
2.1.2	Cône polyédrique, polyèdre, polytope.....	60
2.1.3	Dualité.....	66
2.1.4	Somme de Minkowski.....	68
2.1.5	Intersection	72
2.2	Mise en œuvre en tolérancement géométrique.....	73
2.2.1	Contraintes géométriques.....	73
2.2.2	Contraintes de contact.....	80
2.2.3	Modélisation d'une spécification géométrique par un polyèdre.....	82
2.2.4	Condition fonctionnelle.....	86
2.3	Application : analyse de tolérances par des polyèdres.....	87
2.4	Problématique des opérations sur des polyèdres.....	91
3	Prise en compte des déplacements non bornés dans l'analyse de tolérances.....	93
3.1	Identification de polytopes dans $\mathbb{R}^6$	94
3.1.1	Polytope opérande associé aux contraintes géométriques	94
3.1.2	Polytope de contact.....	98
3.1.3	Synthèse.....	99
3.2	Mise en œuvre algorithmique	101
3.2.1	Principe de troncature	101
3.2.2	Intersection de polytopes.....	103
3.2.3	Somme de Minkowski de polytopes	104
3.3	Indentification des demi-espaces bouchons dans la double description d'une somme de Minkowski de polytopes.....	108
3.3.1	Problématique.....	108
3.3.2	Raffinement commun des éventails normaux des polytopes	110
3.3.3	Identification des facettes bouchons dans la $\mathcal{H}$ -description d'un polytope résultant.....	110
3.3.4	Identification des sommets bouchons dans $\mathcal{V}$ -description d'un polytope résultant.....	112
3.4	Identification des demi-espaces bouchons dans la double description d'une intersection de polytopes	112

3.4.1	Problématique.....	112
3.4.2	Détermination des demi-espaces bouchons de l'intersection de deux polytopes	114
3.5	Application.....	115
3.5.1	Définition des polytopes opérands.....	115
3.5.2	Simulation du respect de la CF.....	117
4	Mise en œuvre des opérations sur les polytopes.....	127
4.1	Paramètres de mises en œuvre.....	128
4.2	Conservation de la topologie des polytopes par les transformations affines.....	129
4.2.1	Théorème fondamental.....	130
4.2.2	Changement du point de définition d'un polytope.....	131
4.2.3	Changement de la base de définition d'un polytope.....	133
4.2.4	Homogénéisation des paramètres.....	135
4.2.5	Transformation affine d'un $\mathcal{HV}$ -polytope.....	138
4.3	Stratégies de mises en œuvre.....	139
4.3.1	Stratégie 1.....	140
4.3.2	Stratégie 2.....	140
4.3.3	Stratégie 3.....	141
4.3.4	Variante 1'.....	143
4.3.5	Variante 2'.....	143
4.3.6	Synthèse.....	143
4.4	Application sur un mécanisme.....	145
4.4.1	simulation de la CF1.....	149
4.4.2	Simulation de la CF2.....	150
	Conclusion générale & Perspectives.....	153
	Références bibliographiques.....	159
	Annexe1.....	169
	Annexe2.....	171

Introduction

Le développement industriel et l'augmentation de la concurrence entre les industries d'aujourd'hui nécessitent l'utilisation d'outils d'aide à la conception, permettant de satisfaire les cahiers des charges tout en assurant une qualité des produits manufacturés toujours supérieure et à moindre coût. Ceci reste un enjeu aussi important que complexe.

Au cours des dernières années, un grand intérêt a été accordé à l'étude de l'influence des tolérances sur le fonctionnement des systèmes mécaniques, et à la quantification des tolérances dimensionnelles et/ou géométriques des différents composants constitutifs assurant leurs interchangeabilités fonctionnelles.

Les différentes tolérances doivent être corrélées aux fonctionnalités du produit mais aussi à la capacité des moyens de production. Une bonne maîtrise des tolérances permet d'assurer la maîtrise de la performance d'un système mécanique. Ceci constitue l'objectif majeur de toute démarche communément appelée *analyse de tolérances*.

De nombreux modèles et approches d'analyse de tolérances 3d ont été proposés dans la littérature, parmi lesquels nous distinguerons les approches paramétriques et les approches basées sur des ensembles de contraintes.

L'approche polyédrale présentée dans cette thèse appartient à ces dernières approches. Elle a vocation à simuler le respect des conditions fonctionnelles d'un système mécanique, en considérant les spécifications géométriques des pièces constitutives et les spécifications de contacts entre ces pièces. A chaque spécification (géométrique ou de contact) est associé un ensemble de contraintes (géométriques ou de contacts) caractérisant les limites des déplacements dans une zone de tolérance ou les non interférences entre les surfaces potentiellement en contact. De manière générale, un ensemble de contraintes est conformé à un ensemble de demi-espaces de $\mathbb{R}^6$. Ces ensembles de demi-espaces définissent des objets mathématiques appelés polyèdres ou polytopes de $\mathbb{R}^6$. Par définition, un polyèdre de $\mathbb{R}^6$ est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^6$. Un polytope est un polyèdre borné.

La position relative entre deux surfaces quelconques dans un mécanisme est déterminée par des opérations (intersection et somme de Minkowski) sur ces ensembles de contraintes modélisés par des polyèdres ou des polytopes opérands.

Le principal verrou scientifique de ce type d'approche est la complexité algorithmique des sommes de Minkowski des polyèdres. Cette complexité s'avère rédhibitoire en dimension n supérieure à 3 sur des ensembles de contraintes non bornés. Pour pallier à ce problème, une méthode consiste à transformer les polyèdres opérands en des polytopes opérands. Ceci peut être réalisé par la fermeture des polyèdres par des demi-espaces de $\mathbb{R}^6$ supplémentaires que nous appellerons demi-espaces « bouchons ». La difficulté de cette méthode est de maîtriser l'influence des demi-espaces bouchons sur la topologie des polytopes résultants d'une somme ou d'une intersection. Ceci est primordial pour valider les tolérances géométriques des pièces constitutives d'un système mécanique au regard d'une exigence fonctionnelle.

La maîtrise de l'influence des demi-espaces bouchons sur la topologie d'un polytope résultant repose plus généralement sur la maîtrise de l'influence des demi-espaces des opérands dans un polytope résultant de sommes et d'intersections. Afin de pouvoir

appréhender ce problème les algorithmes mis en œuvre manipulent des polytopes en double description, souvent appelée $\mathcal{HV}$ -description ($\mathcal{H}$ pour demi-espace (halfspace) et $\mathcal{V}$ pour sommet (vertex)). Cela permet d'assurer la traçabilité des facettes et des sommets des opérandes au travers des opérations requises pour simuler la conformité d'un système mécanique. Ce choix a un coût d'un point de vue complexité algorithmique et donc en temps de calcul. Les algorithmes permettant de déterminer la double description d'un opérande, la double description d'une intersection, et la double description d'une somme de Minkowski, repose sur un seul et même algorithme appelé algorithme de troncature. L'algorithme de troncature est plus ou moins robuste selon la typologie des polytopes (polytopes de forme homogène ou polytopes dont les dimensions sont fortement différentes selon les axes). La typologie des polytopes dépend de la configuration de calcul du polytope : base d'expression, point d'expression et coefficients d'homogénéisation des variables. Plusieurs stratégies de détermination d'un polytope calculé peuvent être envisagées au regard des multiples configurations de calcul envisageables en vue d'optimiser précision et temps de calcul.

Ce document de thèse est constitué de quatre chapitres principaux.

Le premier chapitre résume le paramétrage des écarts caractérisés par des petits déplacements entre des surfaces de substitution. Puis un descriptif des principaux modèles et méthodes d'analyse de tolérances est réalisé. Ce descriptif repose sur une classification des principaux modèles en approches paramétriques et en approches basées sur des ensembles de contraintes.

Les aspects fondamentaux de l'approche polyédrale en tolérancement sont développés dans le deuxième chapitre. Après avoir introduit les principales notions mathématiques, les opérandes et les opérations mises en œuvre dans une approche polyédrale du tolérancement sont présentés. Enfin, un exemple simple illustre l'application de cette approche en fin de chapitre.

Le chapitre 3 introduit la notion des demi-espaces bouchons permettant de définir les polytopes opérandes, par adjonction de demi-espaces bouchons aux polyèdres développés dans le chapitre 2. La mise en œuvre algorithmique pour la définition de ces polytopes par algorithme de troncature est présentée. Finalement, une méthode de gestion des demi-espaces bouchons dans les opérations sur les polytopes pour la simulation de la conformité d'un mécanisme est proposée.

La mise en œuvre pratique des polytopes pour le tolérancement d'un mécanisme demande des opérations de discrétisation et de transformation affines dans l'espace : changements de points d'expression, changements de base et homogénéisations. Le chapitre 4 présente ces opérations et leur utilisation en analyse de tolérances. En analyse de tolérances, plusieurs stratégies d'utilisation sont possibles correspondant à des différents choix de points d'expression, de bases d'expression, de facteurs d'homogénéisation... Une première analyse de ces différentes stratégies est proposée en considérant la robustesse des calculs mais aussi les temps de calculs.

Finalement, les conclusions et apports de ce travail sont présentés en indiquant les principales perspectives.

La démarche suivie dans cette thèse est illustrée dans la figure 0-1.

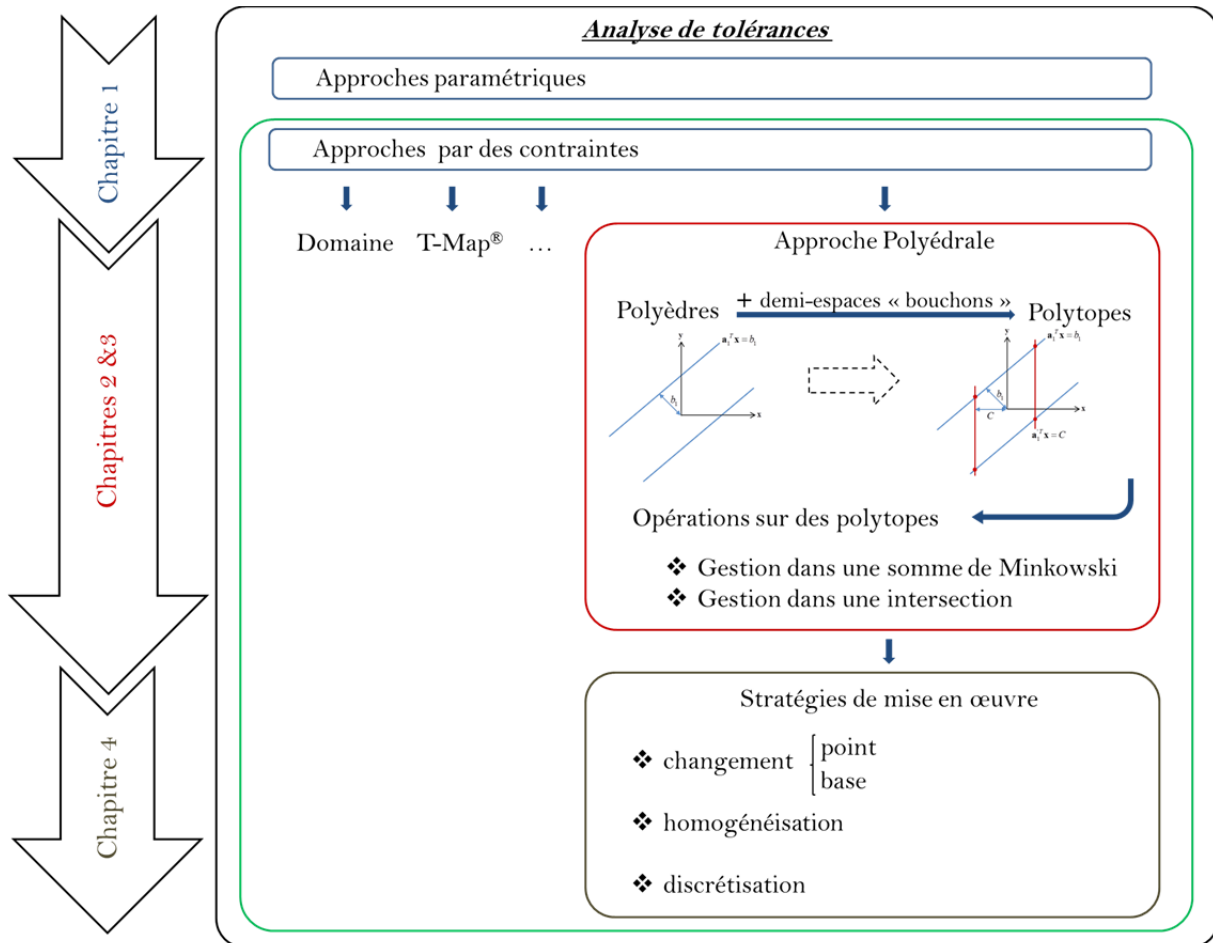


Figure 0-1. Plan du document de thèse.

1 Analyse de tolérances : du paramétrage des déplacements aux polytopes

Ce chapitre dresse un état de l'art des travaux d'analyse de tolérances. Une première partie est consacrée au paramétrage des différentes variations qui sont prises en compte dans un outil d'analyse de tolérances. Puis, sans être exhaustifs, nous décrivons en deux temps les principaux modèles d'analyse de tolérances. Nous évoquerons tout d'abord les approches paramétriques proposées pour la modélisation des chaînes de cotes et dans une seconde partie les approches basées sur la modélisation des limites des déplacements par des contraintes. Cette dernière partie sera plus particulièrement développée puisque le travail de thèse porte sur une technique de cette catégorie.

1.1 Le tolérancement, pilier de la conception mécanique

L'analyse de tolérances est un outil qui permet de comprendre comment les variations des différentes tolérances dimensionnelles ou géométriques affectent la conformité d'un système mécanique aux regards des exigences fonctionnelles.

L'intégration de l'analyse de tolérances dans le processus cycle de conception d'un produit (cf. Figure 1-1) est primordiale et affecte la qualité du produit, son coût et sa performance [DGEQ12].

Non seulement les tolérances affectent la capacité d'assembler le produit final, mais aussi le coût de production, la sélection des processus, de l'outillage, le coût d'installation et les compétences des opérateurs. Elles affectent directement la performance de l'ingénierie et de la robustesse d'une conception [ChMG97].

Le tolérancement permet de contribuer à la prise en compte des variations géométriques durant la phase de conception. En effet, pour la conception d'une pièce mécanique, le concepteur commence par définir la géométrie nominale de cette pièce, cette géométrie reste parfaite, c'est-à-dire sans défaut. La fabrication de la pièce en cet état est impossible. Le concepteur est ainsi obligé d'adjoindre des spécifications exprimant les variations admissibles par rapport au modèle nominal. Cette adjonction est aujourd'hui définie par des normes : ISO, ANSI.

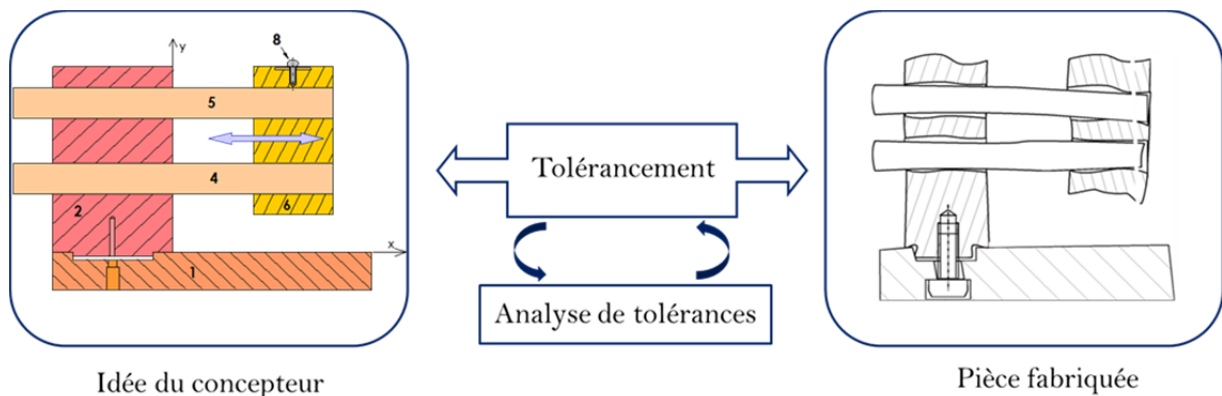


Figure 1-1. Intégration de l'analyse de tolérances en phase de conception.

J.Ph. Petit dans sa thèse mentionne l'importance de l'intégration du tolérancement dans la phase de conception. La qualité et le coût du produit final en dépendent [Peti04]. La conception d'un produit nécessite donc la maîtrise et l'optimisation des "intervalles" de tolérances et des variations géométriques des pièces. C'est entre autres l'objectif de l'analyse de tolérances.

L'analyse de chaque spécification géométrique ou dimensionnelle consiste à vérifier que les pièces élémentaires du système mécanique satisfont l'exigence (condition) fonctionnelle [Dant00]. L'analyse de tolérances permet d'estimer l'impact des écarts géométriques et dimensionnels sur les dimensions de l'assemblage final, tout comme sur les performances spécifiées (cf. Figure 1-2(a)). Inversement, la synthèse (ou l'allocation) de tolérances détermine les valeurs des tolérances à affecter pour permettre à l'assemblage d'atteindre les spécifications voulues (cf. Figure 1-2(b)).

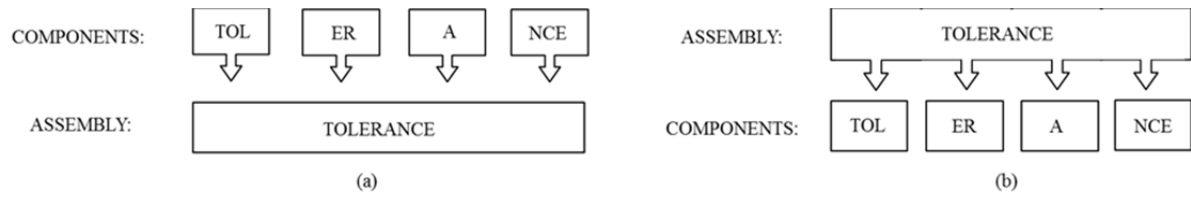


Figure 1-2. (a) Analyse de tolérances, (b) synthèse de tolérances [ChGr87].

Globalement, l'analyse de tolérances est réalisée selon deux aspects fondamentaux :

- Vérification de la montabilité et de la faisabilité des assemblages ;
- Vérification de la qualité des assemblages [SJSH95].

Et généralement, on peut distinguer deux types de méthodes d'analyse de tolérances :

- Analyse au pire des cas ("worst case") : toute combinaison de dimensions et tolérances produit un assemblage fonctionnel. La probabilité qu'un produit ne puisse pas être assemblé est nulle.
- Analyse statistique de tolérances : les variations admissibles de la géométrie des pièces sont modélisées par des distributions de probabilités et peuvent par exemple être simulées par tirage de Monte-Carlo [TuWo88], [ChGr87], [QDSB12]. La probabilité qu'un produit puisse être assemblé est calculée. La distribution d'une résultante est donnée en fonction des tolérances individuelles [NiTu95].

Des exemples d'étude selon cette approche sont donnés dans les travaux de Turner [TuWo88] et Hillyard [HiBr78].

1.2 Paramétrage de déplacements

Pour modéliser la position relative entre les surfaces d'une pièce en un point donné ou entre des surfaces potentiellement en contact, nous présentons les matrices homogènes et le concept de torseur de petits déplacements, approches définies pour paramétrer les déplacements dans un système mécanique.

1.2.1 Définition par application affine

Nous présentons tout d'abord la caractérisation générale d'un déplacement par une application affine dans l'espace de dimension 3.

Un déplacement est une application affine de l'espace euclidien E_3 de dimension 3 dans lui-même, définie à travers une translation et une rotation. La translation est caractérisée par une matrice colonne (3x1) $\mathbf{t}$ tandis que la rotation est définie par une matrice carré orthogonale (ou inversible) (3x3) $\mathbf{R}$. Le déplacement $\mathbf{D}$ des points M de E_3 peut mathématiquement être décrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}: E_3 &\rightarrow E_3 \\ M &\mapsto \mathbf{D}(M)=M'=\mathbf{t}+\mathbf{R}(M) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Si on considère le point $M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ alors M' a pour coordonnées $M' \begin{pmatrix} x_{M'} \\ y_{M'} \\ z_{M'} \end{pmatrix} = \mathbf{t} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$

Considérons le déplacement d'un point M d'un solide indéformable S défini initialement dans un repère $R_0(O_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$, en un point M' défini dans un repère $R_1(O_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ (cf. Figure 1-3). On note $\mathbf{D}_O = \mathbf{O}_0\mathbf{O}_1$ le déplacement du point O_0 en O_1 et $\mathbf{D}_M = \mathbf{M}\mathbf{M}'$ le déplacement du point M en M' . On écrit dans ce cas :

$$\mathbf{M}\mathbf{M}' = \mathbf{M}\mathbf{O}_0 + \mathbf{O}_0\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_1\mathbf{M}' \quad (1.2)$$

Ce que revient à l'équation vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_M = \mathbf{M}\mathbf{O}_0 + \mathbf{D}_O + \mathbf{O}_1\mathbf{M}' \\ \mathbf{D}_M = \mathbf{D}_O + \mathbf{O}_1\mathbf{M}' - \mathbf{O}_0\mathbf{M} \end{cases} \quad (1.3)$$

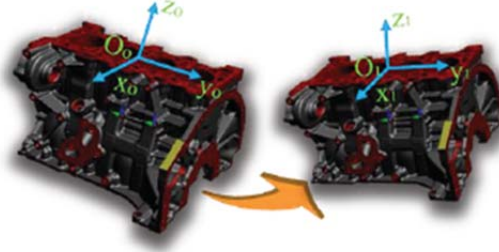


Figure 1-3. Changement de bases [Soco10].

Les corps étant supposés rigides, les coordonnées du point M dans le repère R_0 sont identiques à celles de M' dans le repère R_1 . On peut en déduire que :

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M}' = \mathbf{R}_{01} \cdot \mathbf{O}_0\mathbf{M} \quad (1.4)$$

Soit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_M = \mathbf{D}_O + \mathbf{R}_{01} \cdot \mathbf{O}_0\mathbf{M} - \mathbf{O}_0\mathbf{M} \\ \mathbf{D}_M = \mathbf{D}_O + (\mathbf{R}_{01} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{O}_0\mathbf{M} \end{cases} \quad (1.5)$$

La matrice $\mathbf{I}$ est la matrice identité d'ordre 3. La matrice de passage $\mathbf{R}_{01}$ peut être définie par le produit de trois matrices de rotations autour des trois axes $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ et d'angles respectifs (r_x, r_y, r_z) . Elle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r_x & -\sin r_x \\ 0 & \sin r_x & \cos r_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r_y & 0 & \sin r_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin r_y & 0 & \cos r_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r_z & -\sin r_z & 0 \\ \sin r_z & \cos r_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Soit :

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{pmatrix} \cos r_z \cdot \cos r_x & -\sin r_z \cdot \cos r_y & \sin r_y \\ \sin r_z \cdot \cos r_x + \cos r_z \cdot \sin r_y \cdot \sin r_x & \cos r_z \cdot \cos r_x + \sin r_z \cdot \sin r_y \cdot \sin r_x & -\cos r_y \cdot \sin r_x \\ \sin r_z \cdot \sin r_x - \cos r_z \cdot \sin r_y \cdot \cos r_x & \cos r_z \cdot \sin r_x + \sin r_z \cdot \sin r_y \cdot \cos r_x & \cos r_y \cdot \cos r_x \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

En considérant le cas de petites rotations, le cosinus et le sinus des angles de rotations identifiées dans l'équation (1.7) sont approximés, par un développement limité au premier ordre, à 1 pour les cosinus et à l'angle en radian pour les sinus. Nous obtenons (1.8) :

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & -r_z & r_y \\ r_z & 1 & -r_x \\ -r_y & r_x & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

La matrice $\mathbf{R}_{01} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique. Ceci permet

d'écrire finalement le déplacement d'un point M sous la forme :

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{D}_O + \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O}_0 \mathbf{M} \quad (1.9)$$

Pour conclure, en utilisons les équations (1.1) et (1.9), un déplacement $\mathbf{D}$ est une application affine telle que $\mathbf{D}(\mathbf{M}) = \mathbf{t}(\mathbf{M}) + \mathbf{R}(\mathbf{M})$ avec $\mathbf{t} = \mathbf{D}_O$ et $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -r_z & r_y \\ r_z & 1 & -r_x \\ -r_y & r_x & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.2 Matrice homogène

Le déplacement d'un point M peut être écrit en accord avec l'équation (1.1) par :

$$\mathbf{D}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' : \begin{pmatrix} 1 & -r_z & r_y \\ r_z & 1 & -r_x \\ -r_y & r_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{O}_0 \mathbf{M} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 & -r_z & r_y \\ r_z & 1 & -r_x \\ -r_y & r_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Avec $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{O}_0 \mathbf{O}_1 \cdot \mathbf{z} \end{pmatrix}$ le vecteur translation selon les trois directions.

Ceci peut être aussi écrit par une matrice carré (4x4) telle que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_1 \mathbf{M}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O}_0 \mathbf{M} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r_z & r_y & t_x \\ r_z & 1 & -r_x & t_y \\ -r_y & r_x & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Cette formulation matricielle (matrice homogène 4x4) a été adoptée généralement par les universités américaines, en particulier à L'Institut polytechnique Rensselaer [SoTu94], [Turn90] pour le tolérancement, et dans le domaine de la robotique en France [LaZe94]. La matrice est composée de :

- un vecteur translation $\mathbf{t}$ correspondant aux 3 translations dans les directions orthogonales,
- un vecteur rotation $\mathbf{R}$ (matrice 3x3) qui correspond aux 3 rotations autour des directions orthogonales.

1.2.3 Torseur de petits déplacements

La matrice $\mathbf{R}_{01} - \mathbf{I}$ est antisymétrique, on peut lui associer un opérateur de produit vectoriel caractérisant "le petit déplacement" du point M. Ceci peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{D}_O + \mathbf{M}\mathbf{O}_0 \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (1.12)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \text{ est un vecteur rotation invariant du mouvement du solide}$$

Le concept de torseur de petits déplacements a été utilisé dans les années soixante-dix par Pierre Bourdet et André Clément [BMLB96], [BoCl76], [ClBo88]. Il permet de modéliser le déplacement en tout point de l'espace. Le champ des déplacements de l'espace est déterminé à partir du déplacement d'un point O comme indiqué dans l'équation (1.12). Il forme un champ de moments et peut être exprimé sous la forme d'un torseur appelé torseur

de petits déplacements que l'on note $\{\mathbf{T}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{D}_O \end{bmatrix}_O$. C'est un vecteur de six composantes dont

trois rotations (qui doivent être petites) et trois translations. La relation (1.12) correspond à la formule de changement de point d'expression du moment en tout point M de l'espace.

Les torseurs ont été initialement utilisés pour des problèmes d'approximation et notamment en métrologie et en fabrication [Bour87], [BoCl76]. Ensuite, ce concept a été adopté par plusieurs auteurs pour différents domaines d'applications comme l'analyse de tolérances [GiDu93], [Gaun94]...

1.3 Modélisation des chaînes de cotes

Les variations géométriques peuvent mathématiquement être représentées par des vecteurs [GoZS88][RoLi99], des torseurs de petits déplacements [Bour95][Gaun94][Ball95][TeCG99], des matrices [Turn90][ChMG97] dont les composantes peuvent être bornées par des ensembles de contraintes [Flem87][Gior97][TeDC99][MuDS01][Dant00]. Ces variations concernent les surfaces d'une seule pièce (appelées par la suite des écarts géométriques par rapport à une position nominale) ou les surfaces de pièces potentiellement en contact (appelées par la suite écarts de contacts).

Historiquement, la modélisation des chaînes de cotes a été initiée dans les années 30 et a concerné les chaînes unidirectionnelles (cas 1d) (cf. Figure 1-4). Les travaux de Chase et Greenwood [ChGr87] témoignent de la prise en considération des tolérances dans un assemblage en modélisant les variations géométriques par la somme de tolérances supposées être définies à leurs valeurs maximales ou minimales. Hoffamn [Hoff82] propose une modélisation mathématique définie par un vecteur dans l'espace de dimension 1. Bourdet [Bour73] propose quant à lui la méthode des ΔI dans le cadre de la cotation de fabrication. Chaque surface possède une dispersion dans un intervalle appelé ΔI . La méthode permet de relier les dispersions et les tolérances de la cote condition d'une manière pertinente. La modélisation mathématique proposée est également un vecteur de l'espace de dimension 1 défini par une somme des intervalles.

La modélisation des chaînes de cotes 1d est une méthode fiable dans la mesure où les écarts angulaires ont une influence négligeable. En effet, elle est limitée par la prise en compte d'une seule direction et ne tient pas compte de l'orientation des surfaces. Pour cela, la modélisation des chaînes de cotes se fait de plus en plus aujourd'hui en 3d en tenant compte toutes les variations géométriques des pièces.

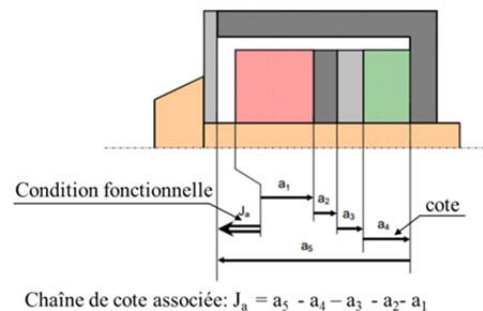


Figure 1-4. Chaîne de cotes d'un assemblage de 5 composants [Adra07].

L'analyse des tolérances repose sur l'étude de l'influence des variations géométriques des pièces constructives d'un système mécanique sur son comportement. Dantan [Dant00] distingue trois approches : une approche variationnelle où la géométrie réelle est appréhendée par une variation de la géométrie nominale, une approche par ce qu'il appelle zone enveloppe où la géométrie réelle est appréhendée par une zone définie entre deux surfaces décalées des surfaces nominales et une troisième approche structurale basée sur le regroupement des éléments géométriques (méthode SATT). Tichadou [Tich05] propose une classification des différents modèles en modèles variationnels, paramétriques, cinématiques, vectoriels et torsoriels. Nous regroupons ici les méthodes selon les approches suivantes :

- Les approches paramétriques caractérisant la position relative entre deux surfaces d'un mécanisme. Les relations (linéaires ou non linéaires) entre les écarts inhérents aux variations géométriques des pièces, les écarts inhérents aux variations géométriques des surfaces potentiellement en contact et les écarts fonctionnels sont définies.
- Les approches par contraintes caractérisant la position relative entre deux surfaces d'un mécanisme. Des contraintes, que nous noterons par la suite contraintes

géométriques, formalisent les positions relatives entre des surfaces d'une même pièce. Des contraintes, que nous noterons par la suite contraintes de contacts, formalisent les positions relatives entre deux surfaces de deux pièces potentiellement en contact. Certaines de ces approches mettent de plus en œuvre des opérations (sommets de Minkowski et intersections) entre des ensembles de contraintes géométriques et de contacts.

1.3.1 Architectures de mécanismes : graphe et cycle

Pour développer les différentes approches d'analyse de tolérances, les architectures des mécanismes doivent être modélisées. Ces architectures concernent les structures des mécanismes eux-mêmes (leurs décompositions en pièces) ainsi que les liaisons (entre les différentes pièces). Ces architectures se définissent par des graphes. L'utilisation des graphes pour formaliser la structure des mécanismes est très ancienne (depuis les années 70), ils demeurent néanmoins efficaces et adoptés dans différents domaines. Ils sont un moyen systématique utilisé pour écrire les équations traduisant le fonctionnement du mécanisme. Dans le cas du tolérancement, ces équations sont générées par la fermeture de cycles.

1.3.1.1 Graphe d'un mécanisme

Le concepteur a besoin d'informations sur la structure de son mécanisme. Cette structure est représentée par un graphe. Dans un graphe représentant la structure d'un mécanisme :

- Les sommets représentent les pièces (numérotées),
- Les arêtes reliant deux sommets représentent les liaisons entre deux pièces associées.

Une liaison existe entre deux pièces si et seulement si lors du fonctionnement normal du mécanisme, les deux pièces peuvent être en contact [BaML10]. Les liaisons sont définies par des noms (ponctuelle, pivot glissant, rotule, linéaire annulaire, linéaire rectiligne, appui plan). Sur le graphe (cf. Figure 1-5), Les liaisons sont identifiées par les initiales de leurs noms. Par exemples PG désigne une liaison pivot glissant, AP une liaison appui plan,... Il reste à remarquer que certains auteurs ajoutent des informations complémentaires sur la désignation des liaisons. Par exemple AP_x pour désigner par exemple une liaison appui plan de normale le vecteur $\mathbf{x}$.

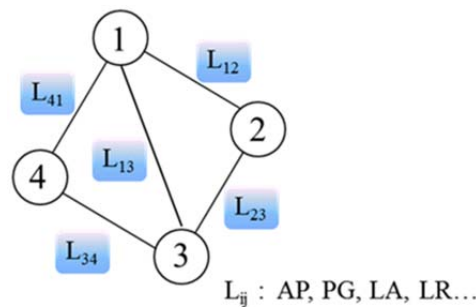


Figure 1-5. Exemple de graphe d'un mécanisme.

1.3.1.2 Graphe pour le tolérancement

A. Ballu [BaMa99a] a utilisé les graphes élémentaires dans le cadre du tolérancement. Un graphe élémentaire comprend les pièces en contact ainsi que les surfaces potentiellement en contact. En effet, chaque pièce est décomposée en surfaces élémentaires (plan, cylindre, sphère, cône, tore). Ces surfaces sont repérées par des notations spécifiques, on désigne par i,j la surface i de la pièce j , et sont représentées par des petits cercles ou pôles inclus dans les sommets représentant les pièces. La représentation graphique ne suit pas les règles classiques de représentation des graphes car les relations d'appartenance des surfaces aux pièces ne sont pas représentées par des arêtes mais par le fait qu'elles soient incluses dans les sommets représentant les pièces. Un exemple de graphe réalisé par Ballu et Mathieu [BaMa99a] est illustré dans la figure 1-6.

Chaque liaison entre les pièces est ainsi décomposée en des liaisons élémentaires entre surfaces. La condition fonctionnelle est représentée par un sommet rectangulaire relié aux pièces ou surfaces concernées et contenant l'attribut **CF** accompagné par une écriture mathématique associée à la condition (de position ou d'orientation) (cf. Figure 1-7).

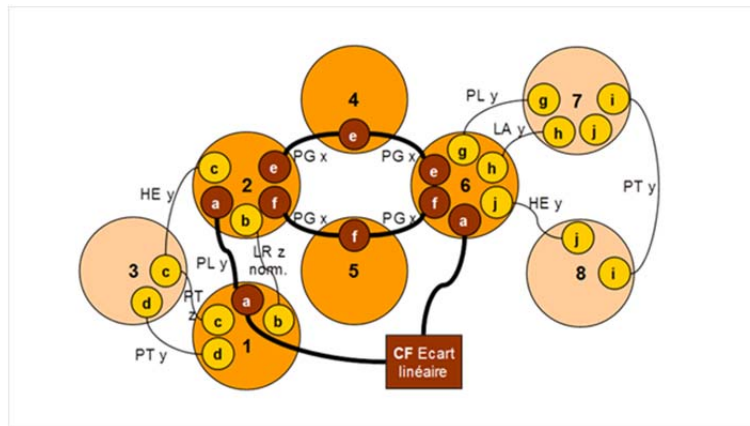


Figure 1-6. Graphe de liaison [BaMa99a].

Un cycle est une chaîne finie qui part d'un sommet et abouti au même sommet. En tolérancement, on ne considère que les cycles élémentaires passant au plus une fois par les sommets et où les arêtes sont donc toutes différentes [Berg67] (cf. Figure 1-7). C'est au travers de la fermeture des cycles que des équations sur les variations géométriques des surfaces sont définies.

La figure 1-7 illustre les différentes notations dans un graphe utilisé dans cette thèse.

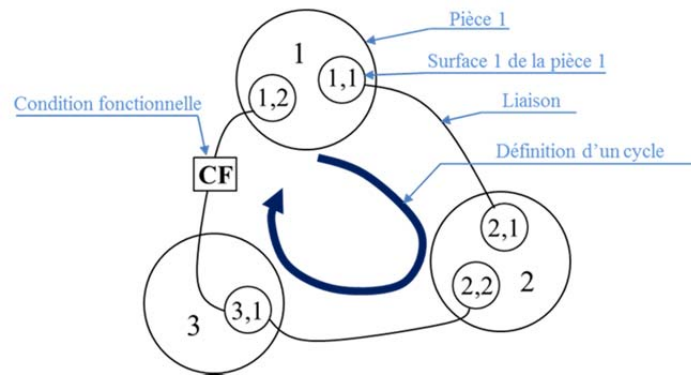


Figure 1-7. Exemple d'un graphe élémentaire, définition d'un cycle, définition d'une condition fonctionnelle.

1.3.1.3 Introduction de la nature du contact

Le comportement de chaque liaison du graphe peut être complété par la nature du contact. J.Y. Dantan [Dant00][DMBM05] propose trois configurations possibles des contacts :

- Contact fixe : le contact est contraint par une action mécanique ne permettant aucun déplacement entre les surfaces potentiellement en contact (cf. Figure 1-8(a)),
- Contact glissant : le contact est contraint par une action mécanique qui ne permet que des déplacements tangentiels lors d'une utilisation normale du mécanisme (cf. Figure 1-8(b)),
- Contact flottant : les deux surfaces en contact ont des déplacements relatifs possibles (tangentiels et normaux) (cf. Figure 1-8(c)).

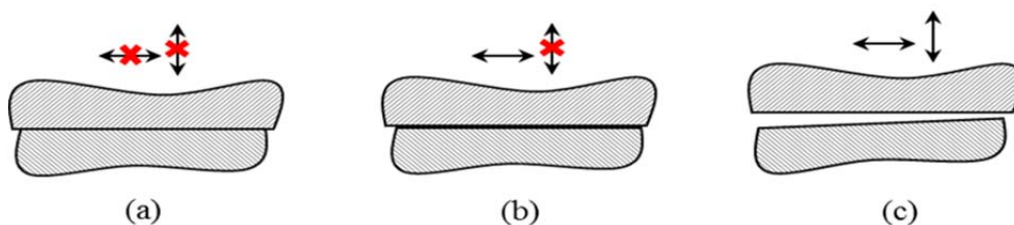


Figure 1-8. (a) contact fixe, (b) contact glissant et (c) contact flottant [Dant00].

Durant le processus d'assemblage, la nature des contacts peut changer. Un contact flottant ou glissant peut devenir fixe sous l'effet de boulonnage ou de collage par exemple. Le graphe du mécanisme est donc évolutif et Dantan associe à chaque séquence d'assemblage un graphe distinct [Dant00][DMBM05].

1.3.1.4 Autres travaux sur les graphes en tolérancement

L'équipe de recherche en tolérancement à l'université de Savoie propose aussi des graphes d'analyse, ces derniers sont orientés (cf. Figure 1-9). Des repères au niveau des sommets symbolisent des repères pièces. Les conditions fonctionnelles y sont définies par des double traits [Kata02][Peti04][Germ07][Mans12].

Teissandier [Teis95] propose un graphe non orienté où les sommets pièces sont clairement distingués des sommets représentant les surfaces élémentaires. Les arêtes entre les surfaces et les pièces représentent les écarts des surfaces par rapport au modèle nominal de la pièce.

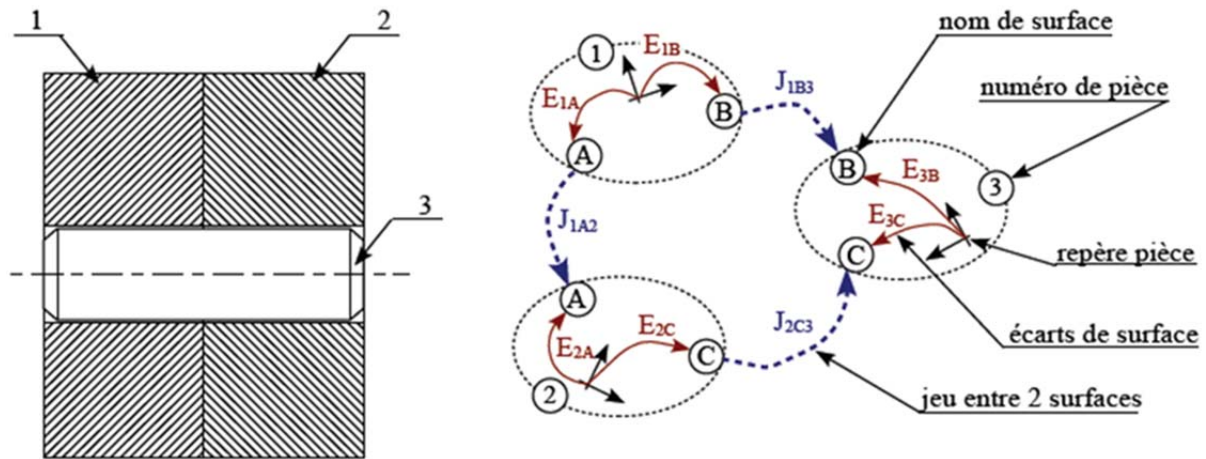


Figure 1-9. Exemple de graphe adopté dans le laboratoire SYMME [Germ07].

Desrochers et Rivière proposent un autre modèle de graphe utilisé en analyse tridimensionnelle. L'exemple de la figure 1-10 traite une pompe composée de trois pièces [RGDD94].

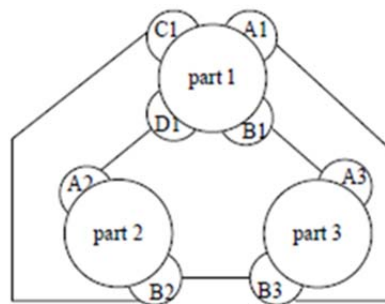


Figure 1-10. Graphe d'une pompe composée de trois pièces [RGDD94].

Les graphes deviennent de plus en plus utilisés dans des applications informatiques de tolérancement, on cite par exemple MECAMaster® [Meca14], CETOL® de la société Sigmetrix [Ceto14] et GAIA® (Graph Analysis for Interfaces of Assembly) développé au sein de l'entreprise EADS. L'outil GAIA® est basé sur des graphes d'assemblage et la notion de KC (Key Characteristics) [BFCM06]. Ce modèle de graphe permet de représenter les interactions et les conditions fonctionnelles entre les différents composants de l'assemblage (cf. Figure 1-11).

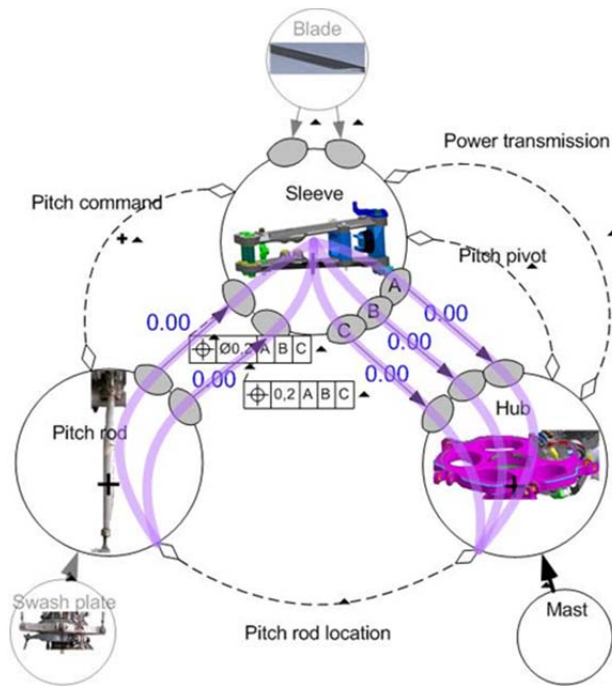


Figure 1-11. Mécanisme de rotor d'un hélicoptère modélisé avec l'outil GAIA® [BFCM06].

La figure 1-12 illustre un exemple de graphe produit avec le logiciel MECAmaster®

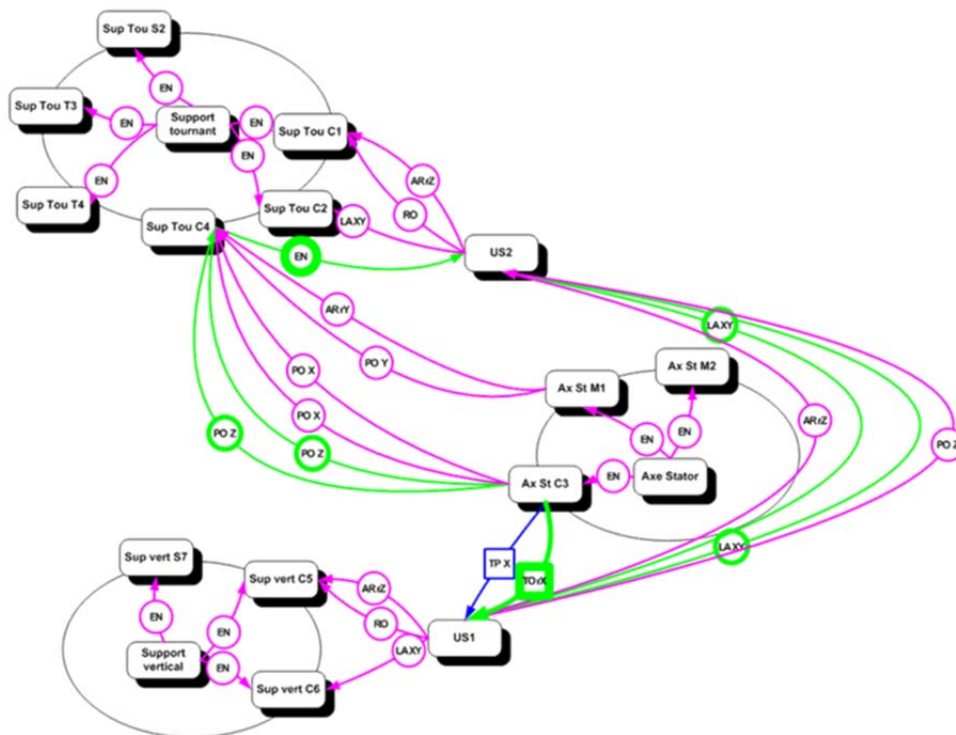


Figure 1-12. Exemple de graphe produit par MECAmaster® [ClRa10].

1.3.1.5 Architectures de mécanisme

Généralement, la structure d'un mécanisme est définie par des boucles simples, en parallèles, complexes ou par des chaînes ouvertes [Peti04]. La figure 1-13 représente ces différentes architectures.

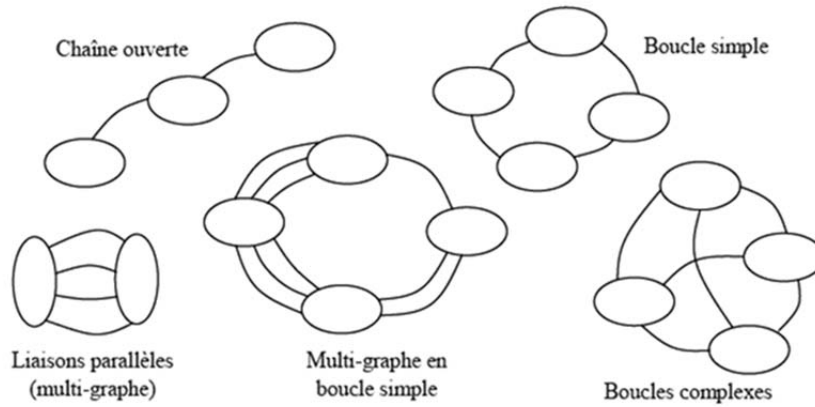


Figure 1-13. Architectures de mécanismes [Peti04].

1.3.2 Loi de comportement géométrique d'un mécanisme, fermeture des cycles

Une fois le mécanisme modélisé par un graphe et les cycles associés au graphe définis, les variations géométriques seront représentées par des outils mathématiques qui vérifient généralement la relation de Chasles [Ball95]. La relation de Chasles est appliquée aux déplacements dans les cycles fermés du graphe. Les cycles fermés définissent la topologie de la structure du mécanisme [SeRC10]. Les déplacements caractérisent les variations internes aux pièces et les variations entre les pièces constitutives d'un mécanisme. Dans cette partie de manuscrit, Un déplacement est noté $\mathbf{D}_{i/j}$ suivant la définition (1.1) et représente le déplacement de la surface i (ou de la pièce i) par rapport à sa position nominale j (ou à la pièce j).

Nous pouvons donc écrire la relation associée à la fermeture d'un cycle de n différents déplacements par exemple [Dant00]. La relation est due à la convention d'écriture des indices :

$$\mathbf{D}_{1/2} + \mathbf{D}_{2/3} + \dots + \mathbf{D}_{i/(i+1)} + \dots + \mathbf{D}_{(n-1)/n} + \mathbf{D}_{n/1} = 0 \quad (1.13)$$

Pour une condition fonctionnelle définie entre deux surfaces quelconques (notées m et n) dans un cycle fermé, le déplacement entre ces deux surfaces est caractérisé par une équation conforme à celle définie en (1.13) et l'on écrit :

$$\mathbf{D}_{m,n} = \sum_{(\text{écarts de surfaces})} \mathbf{D}_{i,j} + \sum_{(\text{écarts de liaisons entre pièces})} \mathbf{D}_{k,l} \quad (1.14)$$

Nous ne manipulerons que des graphes non orientés. Les lois de comportement géométrique d'un mécanisme sont identifiées par l'application de la relation de Chasles aux cycles indépendants du graphe [Ball95].

Le nombre de cycles fermés indépendants est donné par le nombre cyclomatique γ tel que :

$$\gamma = e - v + 1 \quad (1.15)$$

Avec e le nombre d'arêtes et v le nombre de sommets.

Remarque 1.1 : la relation (1.15) ne s'applique qu'à des graphes connexes [Berg67]. Dans un graphe connexe, il existe toujours un chemin entre deux sommets.

Les lois de comportement d'un mécanisme sont ainsi définies par la fermeture de γ cycles.

1.3.3 Cycle influent

La recherche des influences au niveau des surfaces et des liaisons reste une étape primordiale en analyse de tolérances. La notion d'influence est introduite dans le but d'exprimer les conséquences du déplacement local entre deux surfaces sur la variation d'un déplacement global d'un système mécanique limité par une exigence. Une surface est influente si ses variations géométriques (écarts) entraînent une variation au niveau de la condition fonctionnelle étudiée [BaMa99b]. La vérification de l'influence des surfaces doit être faite pour toutes les surfaces du mécanisme. Cette indication est actuellement (avec les développements informatiques) déterminée automatiquement.

Un cycle passant par la condition fonctionnelle est dit influent s'il est constitué uniquement de surfaces influentes, de pièces influentes et de liaisons influentes. Toute pièce influente appartient au moins à un cycle influent.

L'influence des cycles est aujourd'hui déterminée en utilisant le principe de superposition (MECAmaster® [ClRa10]) ou en résolvant le système de relations caractérisant les lois de comportement (AnaTole® [MaFC03]).

1.4 Paramétrage des écarts

Pour prendre en compte dans l'analyse de tolérances des variations géométriques entre les surfaces d'une pièce d'un mécanisme et les déplacements entre deux pièces en contact et leur associer des représentations mathématiques particulières, les surfaces doivent être caractérisées et les déplacements internes à la pièce et entre les pièces doivent être paramétrés.

1.4.1 Caractérisation des surfaces par des surfaces de substitution

La caractérisation des variations géométriques des surfaces repose sur le principe d'association d'une surface de substitution à un ensemble de points extraits de la surface réelle par une opération de mesure [Ball93]. Une surface de substitution est une surface idéale (géométriquement parfaite de type plan, cylindre, sphère, ...) de typologie identique à la surface nominale [Bour95] associée à la surface réelle. La surface nominale est la surface idéale définie par le concepteur généralement en Conception Assistée par Ordinateur (cf. Figure 1-14).

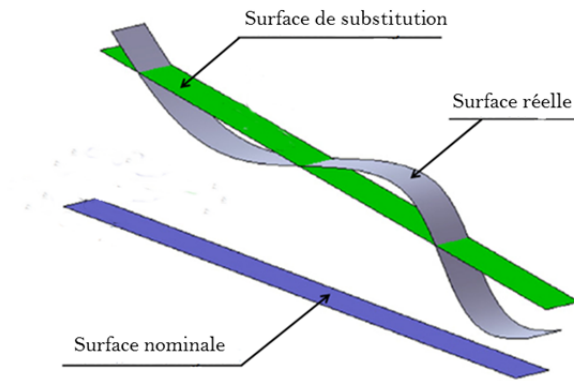


Figure 1-14. Surface réelle, nominale et de substitution.

En tolérancement géométrique, trois types de modèles de représentations des surfaces sont définis : modèles basés sur les surfaces de substitutions, modèles nominaux géométriquement parfaits utilisés généralement par les modeleurs géométriques et les «skin » modèles. Un « skin » modèle est une représentation mentale d'une pièce avec défaut. Le modèle a été introduit par Ballu et Mathieu dans le but de différencier l'objet physique (mécanisme) de son modèle exprimé sous forme de surfaces géométriques [Iso11]. Le « skin » modèle donne une représentation des surfaces réelles et sert de support graphique à l'expression de spécifications géométriques [DaBM08]. La figure 1-15 illustre les trois représentations des trois modèles.

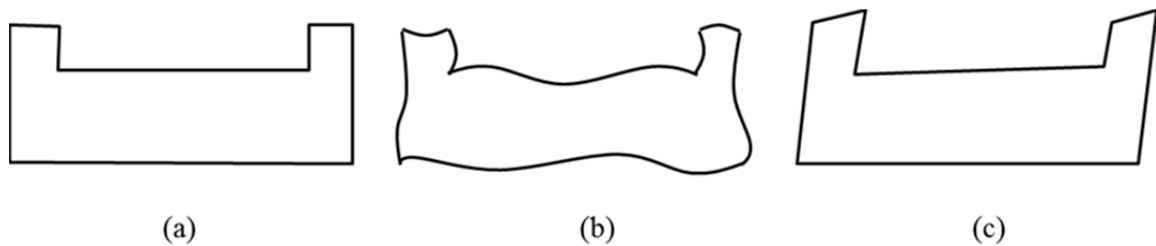


Figure 1-15. (a) Modèle nominal, (b) skin modèle, (c) représentation par des surfaces de substitutions.

1.4.2 Ecart géométrique dans une pièce

1.4.2.1 Ecart de situation dans une pièce

Une surface de substitution est caractérisée par sa classe d'invariance et ses éléments de situation. Hervé [Herv78] a retenu sept classes d'invariances correspondant à sept sous-groupes de déplacements laissant globalement invariants les surfaces. On distingue les classes : plane, cylindrique, de révolution, sphérique, prismatique, hélicoïdale et quelconque [CIRT94][Gaun94][CIDR91]. Ainsi, une surface de classe plane subissant une rotation autour de sa direction normale (axe z) et deux translations selon les deux autres axes (x et y) reste invariante (cf. Figure 1-16)

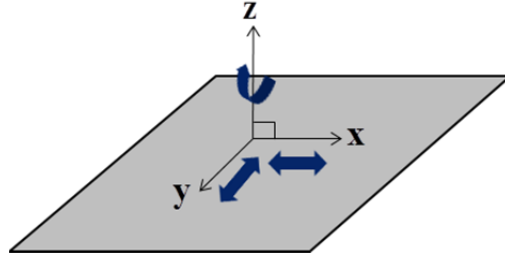


Figure 1-16. Déplacements invariants d'une surface plane.

A chaque classe d'invariance de surfaces est associé un (ou des) élément(s) de situation de type point, droite, plan ou hélice positionnant chaque surface dans l'espace.

Plusieurs outils mathématiques ont été proposés pour formaliser les écarts de situation d'une surface. Nous distinguons :

- les torseurs de petits déplacements [Bour95][Anse06][Cloz01],
- des vecteurs [RoLi99] ou des matrices [Turn90].

Par la suite, nous utilisons les torseurs de petits déplacements.

Les écarts de situation caractérisent la position relative entre les éléments de situation de la surface de substitution (identifiée par 1) et les éléments de situation de la surface nominale (identifiée par 0). Le torseur de petits déplacements caractérisant la position relative est composé de trois paramètres de translation et trois paramètres de rotation et peut être défini par :

$$\{\mathbf{D}_{1/0}\}_M = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{r}_{1/0} \\ \mathbf{t}_{M-1/0} \end{matrix} \right\}, \mathbf{r}_{1/0} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{t}_{M-1/0} = \begin{pmatrix} t_{M-x} \\ t_{M-y} \\ t_{M-z} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Où $\mathbf{r}_{1/0} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ caractérise les écarts de rotations et $\mathbf{t}_{M-1/0} = \begin{pmatrix} t_{M-x} \\ t_{M-y} \\ t_{M-z} \end{pmatrix}$ caractérise les

écarts de translations au point M.

Parmi les six paramètres identifiés en (1.16), on distingue généralement deux types : d'une part, les paramètres caractérisant la position relative entre les deux surfaces (substitution et nominale) d'autre part les paramètres n'ayant pas d'effet sur la position relative. Ces derniers correspondent aux paramètres laissant invariant la surface et sont caractérisés par la notation "*Indéterminées*" par E. Ballot [Ball95]. Ces paramètres seront désignés par Ir_x, Ir_y et Ir_z pour les rotations et It_{M-x}, It_{M-y} et It_{M-z} pour les translations en un point M, écrites respectivement dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

La figure 1-17 illustre les écarts de situation des surfaces de substitution associées à 2,1 et 2,3 par rapport aux surfaces nominales 2,1 et 2,3.

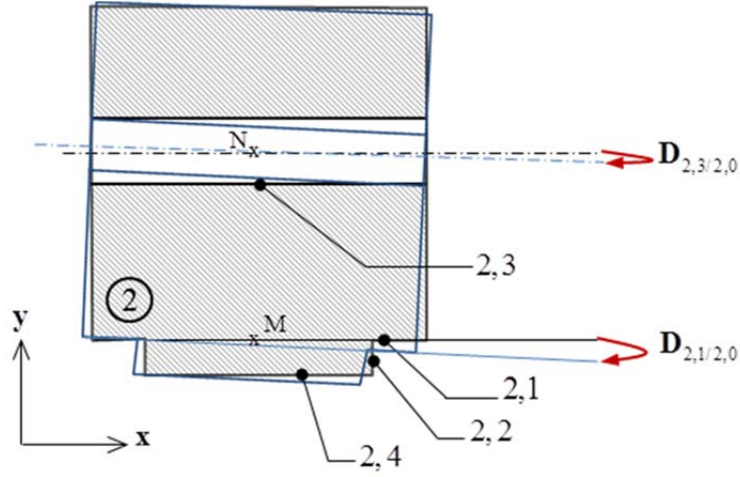


Figure 1-17. Géométrie de substitution d'une pièce notée 2.

Les torseurs associés sont identifiés en (1.17) et (1.18) :

$$\{\mathbf{D}_{2,1/2,0}\}_M = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{2,1/2,0} \\ \mathbf{t}_{M-2,1/2,0} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_{2,1/2,0} = \begin{pmatrix} r_{2,1/2,0x} \\ Ir_{2,1/2,0y} \\ r_{2,1/2,0z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_{M-2,1/2,0} = \begin{pmatrix} It_{M-2,1/2,0x} \\ t_{M-2,1/2,0y} \\ It_{M-2,1/2,0z} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\{\mathbf{D}_{2,3/2,0}\}_N = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{2,3/2,0} \\ \mathbf{t}_{N-2,3/2,0} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_{2,3/2,0} = \begin{pmatrix} Ir_{2,3/2,0x} \\ r_{2,3/2,0y} \\ r_{2,3/2,0z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_{N-2,3/2,0} = \begin{pmatrix} It_{N-2,3/2,0x} \\ t_{N-2,3/2,0y} \\ t_{N-2,3/2,0z} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Les paramètres $r_{2,1/2,0x}$, $r_{2,1/2,0z}$ et $t_{M-2,1/2,0y}$ caractérisent les écarts de situation de la surface 2,1 tandis que les composantes $Ir_{2,1/2,0y}$, $It_{M-2,1/2,0x}$ et $It_{M-2,1/2,0z}$ caractérisent les déplacements laissant globalement invariante la surface 2,1.

Le tableau 1-1 présente la caractérisation des 5 surfaces usuelles rencontrées en tolérancement.

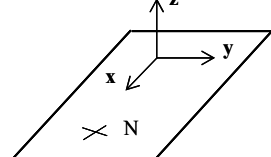
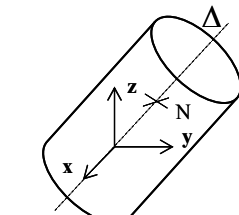
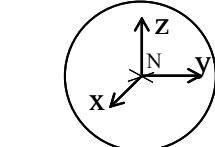
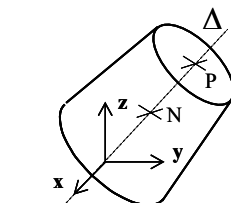
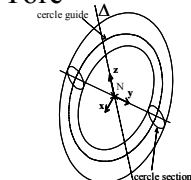
Surface de substitution S	Classe d'invariance	Degré d'invariance - Déplacements associés	Eléments de situation	Ecart de situation
Plan 	Plane	Degré d'invariance=3 r_z, t_{N-x}, t_{N-y}	S	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} It_{N-x} \\ It_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Cylindre 	Cylindrique	Degré d'invariance=2 r_y, t_{N-y}	Δ : axe de S	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ Ir_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ It_{N-x} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Sphère 	Sphérique	Degré d'invariance=3 r_x, r_y, r_z	N : centre de S	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ Ir_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Cône 	De révolution	Degré d'invariance=1 r_x	Δ : axe de S P : centre petite base	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Tore 	De révolution	Degré d'invariance=1 r_x	Δ : axe de S N : centre cercle guide	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$

Tableau 1-1. Caractérisation de 5 surfaces usuelles en tolérancement.

1.4.2.2 Ecart intrinsèques

Les écarts de situation ne prennent pas en compte les écarts des caractéristiques intrinsèques. Un diamètre (ou rayon) n'est pas pris en compte lors de la détermination des écarts de situation d'une surface de substitution de type cylindrique par exemple. Des écarts associés à ces caractéristiques intrinsèques doivent également être définis.

Par exemple, à la variation du diamètre du cylindre 2,3 en figure 1-18, on associe un écart intrinsèque défini par :

$$\Delta d_{2,3} = d_{2,3} - d_{2,3n} \quad (1.19)$$

Avec :

- $d_{2,3n}$ le diamètre de la surface nominale cylindrique (2,3) ;
- $d_{2,3}$ le diamètre de la surface de substitution associée.

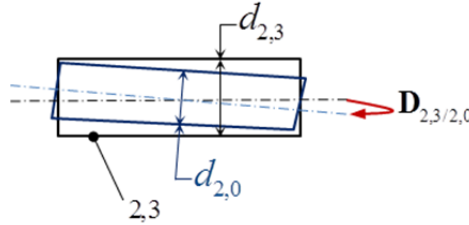


Figure 1-18. Ecart intrinsèque d'un cylindre.

1.4.3 Ecart de contact

La caractérisation des écarts de contact entre deux pièces se fait d'une manière analogue à celle des écarts de situation d'une surface d'une pièce. Cette similitude concerne les liaisons dont les éléments de contacts sont de type surfacique. Un élément de contact est l'élément constitué de l'ensemble des points de contacts possibles entre deux surfaces. Il résulte de l'intersection entre deux surfaces potentiellement en contact dans la configuration particulière où les deux surfaces sont confondues et sans jeu. C'est le cas des écarts des contacts appui plan, pivot glissant, rotule et pivot qui sont identifiés d'une manière analogue à celle des écarts de situation des surfaces planes, cylindrique, sphérique et conique respectivement. Pour chaque contact entre deux surfaces 1,i et 2,j de deux pièces différentes 1 et 2, le torseur de petits déplacements $\{\mathbf{D}_{1,i/2,j}\}$ caractérisant les écarts est :

$$\{\mathbf{D}_{1,i/2,j}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{1,i/2,j} \\ \mathbf{t}_{M-1,i/2,j} \end{Bmatrix}_M \quad (1.20)$$

En plus de son type (paragraphe 1.3.1), chaque liaison est définie par des éléments de situations des surfaces en contact et un jeu. Les éléments de situation permettent de positionner chaque liaison dans l'espace et donc de déterminer les degrés de liaison [BaML10]. Ainsi, l'élément de situation d'un contact appui plan est un plan (surface plane) et pour une liaison rotule, l'élément de situation est un point (centre de la sphère).

Pour le jeu, la norme ISO [Iso88] le définit comme étant la différence entre la taille de l'alésage et la taille de l'arbre lorsque le diamètre de l'arbre est plus petit que le diamètre de l'alésage (valeur positive). Un serrage est défini comme étant la différence entre la taille de l'alésage et la taille de l'arbre lorsque le diamètre de l'arbre est plus grand que le diamètre de l'alésage (valeur négative). Par commodité, dans la suite du mémoire, le terme de jeu englobera les serrages, c'est-à-dire que le jeu pourra avoir une valeur positive, négative ou nulle.

Afin d'illustrer la définition des écarts de contacts, nous allons décrire les écarts de contact entre les surfaces 2,3 et 3,3 d'une liaison pivot glissant (cf. Figure 1-19).

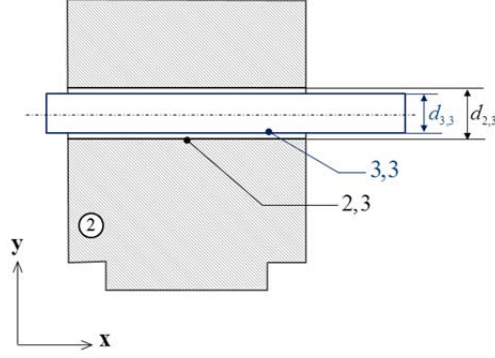


Figure 1-19. Modèle nominal d'un exemple de deux pièces en contact pivot glissant.

La droite $(N, \mathbf{x})$ définit l'élément de situation de la liaison pivot glissant. Le jeu est défini par (1.21) :

$$J = d_{2,3} - d_{3,3} \quad (1.21)$$

Les écarts de contact peuvent être formalisés par un torseur de petits déplacements $\{\mathbf{D}_{3,3/2,3}\}$ tel que :

$$\{\mathbf{D}_{3,3/2,3}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{3,3/2,3} \\ \mathbf{t}_{N-3,3/2,3} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_{3,3/2,3} = \begin{pmatrix} Ir_{3,3/2,3x} \\ r_{3,3/2,3y} \\ r_{3,3/2,3z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_{N-3,3/2,3} = \begin{pmatrix} It_{N-3,3/2,3x} \\ t_{N-3,3/2,3y} \\ t_{N-3,3/2,3z} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Les écarts de liaisons de plusieurs liaisons usuelles sont données dans [DuTe08] et [DMBM05]. Ils sont résumés dans le tableau 1-2. Les liaisons usuelles en tolérancement sont uniquement prises en compte. Les paramètres définis par Ir_x , Ir_y , Ir_z , It_{N-x} , It_{N-y} et It_{N-z} désignent les degrés de mobilités suivant les axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$.

1.5 Analyse de tolérances par des approches paramétriques

La position relative entre deux surfaces quelconques dans un système mécanique est modélisée par des relations mathématiques sur les écarts géométriques. Des équations linéaire (ou non linéaires) sont généralement formulées. Pour la résolution, une première approche classique est une approche paramétrique. Après avoir présenté les hypothèses usuellement posées, les principales approches paramétriques d'analyse de tolérances 3d sont introduites.

1.5.1 Hypothèses physiques

Les modèles d'analyse de tolérances tridimensionnelles sont historiquement basés sur les hypothèses physiques suivantes :

- Les défauts de forme sont négligés,
- Les surfaces en contact ne sont pas déformées localement,
- Les pièces ne sont pas déformées, elles sont considérées comme rigides, les déformations sont supposées négligeables devant les défauts géométriques.

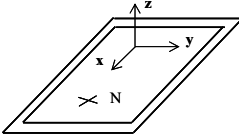
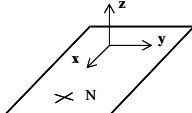
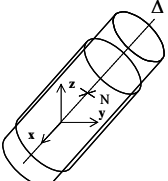
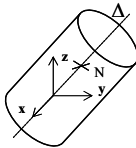
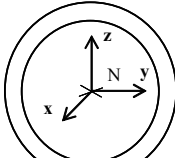
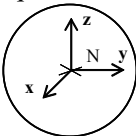
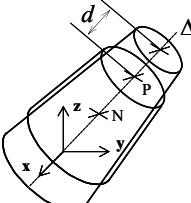
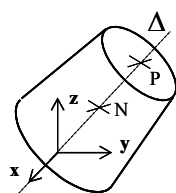
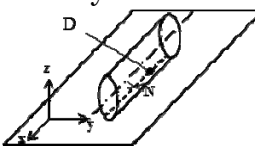
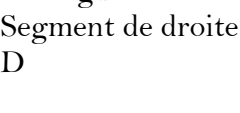
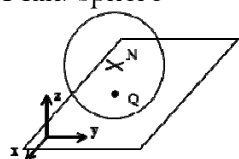
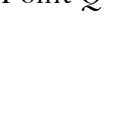
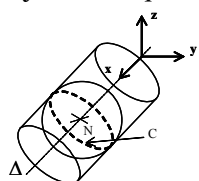
Surfaces en contact	Type de liaison-Élément de contact	Eléments de situation	Mobilités		Ecarts de liaison
Plan/plan 	Appui plan Plan S 	S	3	$\begin{matrix} Ir_z \\ It_{N-x} \\ It_{N-y} \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} It_{N-x} \\ It_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Cylindre/cylindre 	Pivot glissant Cylindre S 	Δ : axe de S		$\begin{matrix} Ir_y \\ It_{N-y} \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ Ir_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ It_{N-x} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Sphère/sphère 	Rotule Sphère S 	N : centre de S	3	$\begin{matrix} Ir_x \\ Ir_y \\ Ir_z \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ Ir_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Cône/cône 	Pivot Cône S 	Δ : axe de S P : centre petite base	1	Ir_x	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} t_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Plan/cylindre 	Linéaire rectiligne Segment de droite D 	Le plan et La droite support de D	4	$\begin{matrix} Ir_x \\ Ir_z \\ It_{N-x} \\ It_{N-y} \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ r_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} It_{N-x} \\ It_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Plan/sphère 	Ponctuelle Point Q 	Le plan et le point Q	5	$\begin{matrix} Ir_x & It_{N-x} \\ Ir_y & It_{N-y} \\ Ir_z & It_{N-z} \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ Ir_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} It_{N-x} \\ It_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$
Cylindre/sphère 	Linéaire annulaire Cercle C 	Δ et N (P : centre du cercle C)	4	$\begin{matrix} Ir_x & It_{N-x} \\ Ir_y & \\ Ir_z & \end{matrix}$	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Ir_x \\ Ir_y \\ Ir_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} It_{N-x} \\ t_{N-y} \\ t_{N-z} \end{pmatrix}$

Tableau 1-2. Ecarts de contact des liaisons usuelles en tolérancement.

1.5.2 Modèles d'assemblage par les vecteurs (Vector Assembly Models)

Cette première méthode [ChGM95] consiste à écrire une fonction implicite entre les paramètres de position des repères associés aux surfaces participant à une boucle ouverte ou fermée de contacts. La position relative entre deux repères (associés respectivement à deux surfaces de la même pièce ou à deux surfaces potentiellement en contact) résulte du produit d'une matrice de translation et d'une matrice de rotation. Le produit de ces deux matrices est formalisé dans l'espace euclidien par un vecteur : voir figure 1-20. Un vecteur est paramétré par sa longueur et son orientation définie par un angle en 2d et deux angles en 3d. La norme de ce vecteur est définie par la matrice de translation et son orientation est définie par la matrice de rotation. La relation (1.23) est l'exemple d'une fonction implicite définie sur la boucle fermée de vecteurs illustrée en figure 1-20. Cette boucle caractérise une boucle fermée de contacts entre les pièces " Hub ", " Roller " et " Ring " d'une roue libre.

La linéarisation des fonctions implicites associées aux boucles de vecteurs par des séries de Taylor du premier ordre (DLM Direct Linearization Method) permet d'obtenir un système d'équations linéaires et donc d'effectuer une analyse de sensibilité des paramètres de variations afin d'identifier les paramètres les plus sensibles [WiCH04]. Les auteurs proposent aussi d'étudier ces fonctions par une approche statistique reposant sur des tirages de Monte Carlo [ChMG97].

Cette méthode permet de caractériser mathématiquement un cycle ou une boucle ouverte d'un graphe par des combinaisons couplant les variations géométriques des composants, les variations géométriques de contacts et d'éventuels degrés de liberté résiduels. (cf. Figure 1-20).

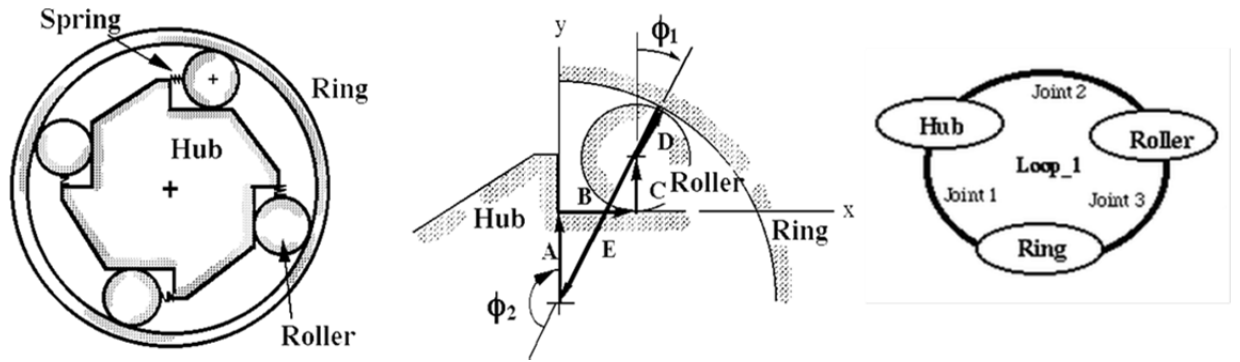


Figure 1-20. Modèle d'assemblage par des boucles de vecteurs.

Pour l'exemple, l'ensemble des relations peuvent être exprimées par la relation [ChGM95] :

$$[R_a][T_a][R_b][T_b][R_{c1}][T_{c1}][R_{c2}][T_{c2}][R_e][T_e][R_f] = [I] \quad (1.23)$$

Où R représente une matrice de transformation en rotation et T celle en translation. $[R_f]$ est la rotation finale permettant de fermer la boucle.

1.5.3 Droite d'analyse

La notion de droite d'analyse a été proposée par B. Anselmetti [Anse08] dans la méthode **CLIC** (**C**otation en **L**ocalisation avec **I**nfluences des **C**ontacts), elle permet une cotation fonctionnelle et normalisée d'un mécanisme. L'objectif de la méthode est de vérifier le respect d'une exigence fonctionnelle en tout point terminal en fonction de la répartition des tolérances dans une boucle d'assemblage. Pour chaque exigence, est établie une inéquation qui relie les dimensions nominales des pièces et les tolérances des spécifications, à la valeur limite de l'exigence [Anse07]. La surface terminale (ou fonctionnelle) est discrétisée en un nombre de points fonctionnels (ou terminaux). Le couple défini par un point terminal et une direction choisie pour l'étude définit la droite d'analyse.

La variation du point terminal peut être écrite comme la somme des variations dues aux différentes liaisons exprimées au même point terminal. Pour une architecture en série d'un mécanisme (cf. Figure 1-21), la droite d'analyse est définie par le couple $(F, \vec{f})$ où F est le point terminal et $\vec{f}$ la direction choisie. La variation complète au point F est définie par l'équation (1.24) où F^j caractérise l'influence des défauts de chaque liaison.

$$dF = \sum_j dF^j \quad (1.24)$$

Les variations $d(F, \vec{f})$ de la surface terminale suivant le droite d'analyse $(F, \vec{f})$ dépendent des variations des surfaces suivant les droites d'analyse primaires, secondaires et tertiaires [Anse07]. D'où la relation :

$$d(F, \vec{f}) = kp.d(P, \vec{p}) + ks.d(S, \vec{s}) + kt.d(T, \vec{t}) \quad (1.25)$$

La méthode rappelée dans cette partie se rapproche de la méthode utilisée dans le logiciel MECAMaster® appliquée aux assemblages isostatiques.

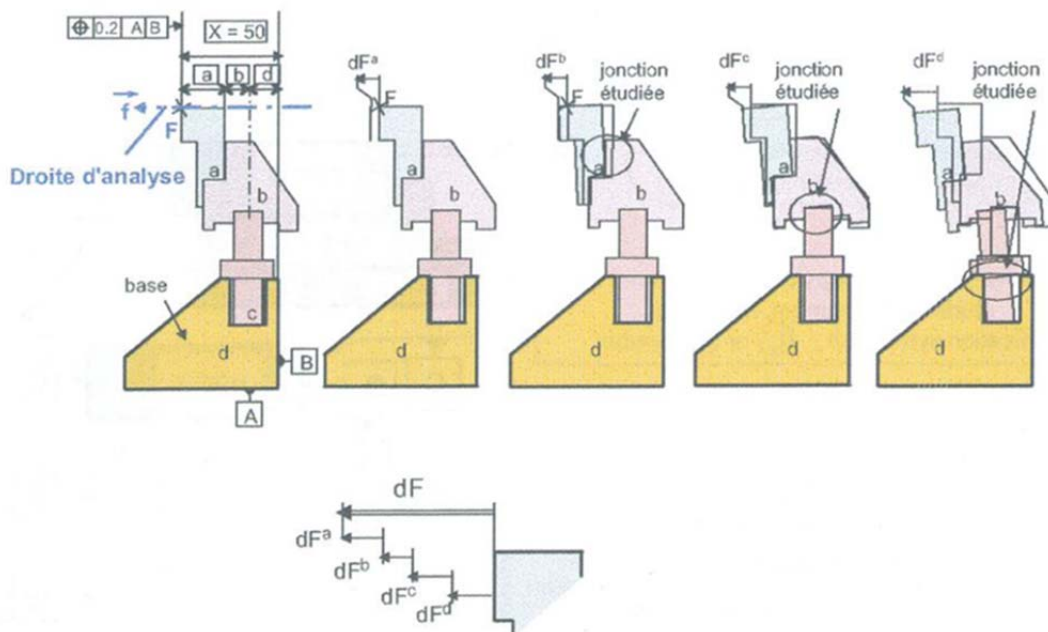


Figure 1-21. Assemblage en série en utilisant la méthode de la droite d'analyse [Anse07].

La figure 1-22 illustre les formules de transfert dans les liaisons classiques [Anse07]. Ces formules de transfert ont été démontrées pour les assemblages isostatiques [Anse10].

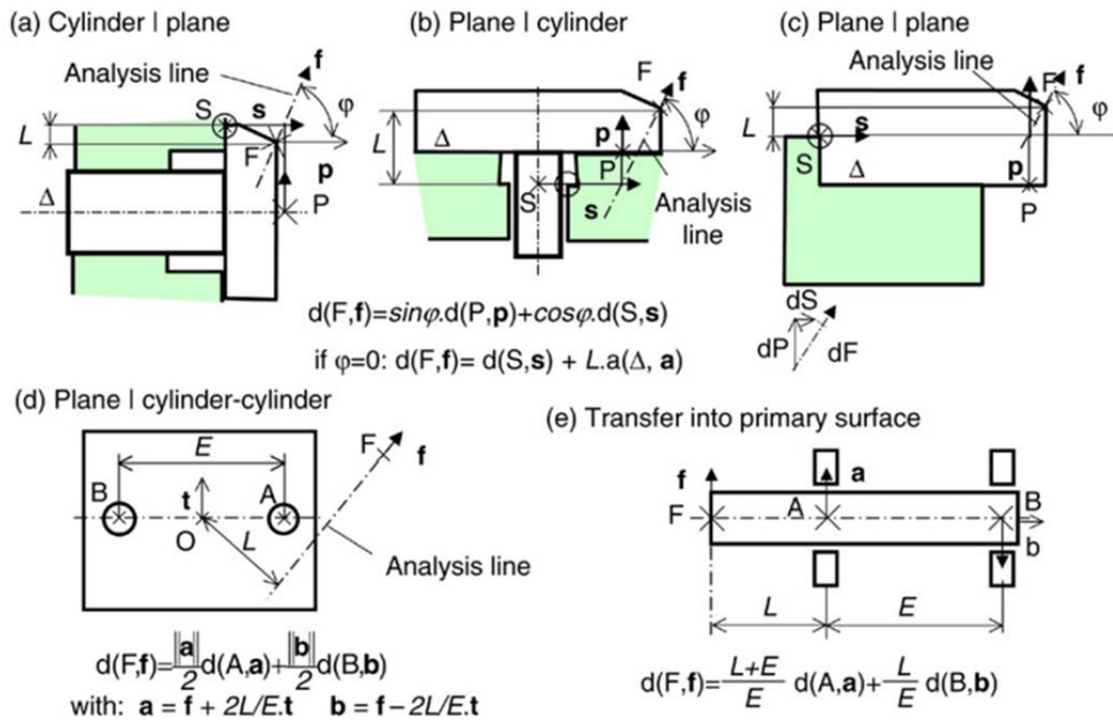


Figure 1-22. Transfert dans les liaisons classiques [Anse07].

1.5.4 Logiciels d'analyse de tolérances

MECAMaster® [ClRa10] et AnaTole® [MaFC03] (cf. Figure 1-23) sont deux logiciels utilisés pour l'étude, dans un stade d'avant-projet ou de conception détaillé, des sensibilités des liaisons dans un mécanisme vis-à-vis des exigences fonctionnelles. Ils permettent de conduire une simulation des petits déplacements au sein de chacune des liaisons pour connaître leurs influences sur les exigences fonctionnelles. Ces logiciels requièrent un modèle isostatique. Pour un mécanisme hyperstatique, ces logiciels proposent des outils d'aide à la relaxation des degrés d'hyperstatisme (cf. Figure 1-24). L'analyse de tolérances peut être conduite au pire des cas ou selon des approches statistiques.



Figure 1-23. Entrées/ sorties MECAMaster® et AnaTole®.

Le logiciel AnaTole® a été développé au sein de l'entreprise EADS. Son fonctionnement peut être illustré dans la figure 1-24.

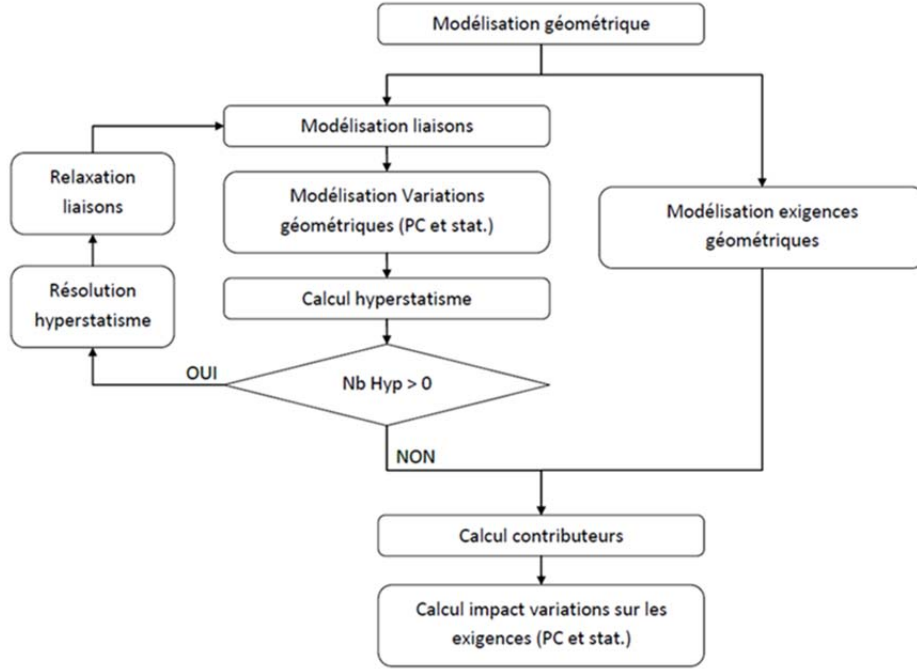


Figure 1-24. Fonctionnement du logiciel AnaTol[®] [Moun09].

1.5.5 Jacobian torseur

Le "Jacobian torseur" a été proposé par l'équipe canadienne de L. Laperrière à l'université du Québec à Trois-Rivières (UQTR) pour modéliser les mécanismes [LaLa99]. Dans ce modèle, un vecteur de petits déplacements est utilisé avec une matrice jacobienne. Le vecteur caractérise un défaut local de la surface et la matrice (de passage) permet de l'écrire au point de la condition fonctionnelle. Cette approche prendra ensuite le nom de "Unified jacobian-torsor model" adaptée par Desrochers, Laperrière et Ghie [GhLD02][LaGD02]. La formulation mathématique des écarts géométriques au niveau d'une condition fonctionnelle CF est telle que :

$$[CF] = [J][EF] \quad (1.26)$$

Avec :

- $[CF] = \begin{Bmatrix} t_o \\ r \end{Bmatrix}$ le vecteur 6×1 où r est le vecteur rotation (3×1) de la condition et t_o le vecteur translation (3×1),
- $[J] = [J_1 \cdots J_6]_{EF_1} \cdots [J_{6n-5} \cdots J_{6n}]_{EF_n}$ la matrice jacobienne des éléments fonctionnels $EF_1 \cdots EF_n$,
- $[EF]$ est un vecteur $1 \times 6n$ définissant les torseurs associés à chacun des n éléments fonctionnels

1.5.6 Méthode des " indéterminées "

E. Ballot et P. Bourdet [BaBT01] utilisent également le concept de torseur de petits déplacements pour modéliser les défauts de surfaces et de liaisons. Ils distinguent quatre torseurs associés à un mécanisme d'étude :

- Torseur jeu : correspond aux petits déplacements (jeu) entre deux surfaces de substitutions de deux pièces différentes du mécanisme et nominalement en contact,
- Torseur écarts : correspond aux déplacements (écarts) de chaque surface de substitution par rapport à la surface nominale,
- Torseur pièce : correspond au torseur de petits déplacements entre des pièces selon un repère défini,
- Torseur défaut : correspond au défaut relatif entre deux ou plusieurs surfaces réelles d'une même pièce. Il est généralement défini par la différence des torseurs écarts des deux surfaces. En un point quelconque A par exemple, ce torseur est défini par :

$$\{\mathbf{D}_{1/2}\}_{\text{défaut}} = {}_A \{\mathbf{D}_{1/0}\} - {}_A \{\mathbf{D}_{2/0}\} \quad (1.27)$$

Le système d'équation obtenue est résolu avec la méthode du pivot de Gauss. Après résolution du système, les " indéterminées " des torseurs jeux sont identifiées soit :

- en fonction des défauts et des jeux d'autres liaisons, c'est-à-dire le degré de mobilité est supprimé par les autres liaisons,
- en fonction des défauts et des jeux d'autres liaisons et d'autres indéterminées, le degré de mobilité subsiste.

1.5.7 Conclusion

Chaque approche paramétrique rappelée dans cette partie constitue un apport scientifique important pour la recherche des méthodes d'analyse de tolérances. Cependant, La principale limitation de ce type d'approche est qu'elle ne supporte pas les redondances de suppressions des degrés de liberté entre les pièces, créées par les architectures hyperstatiques. La méthode la plus aboutie de ce point de vue est la méthode des indéterminées. Dans le cas d'un système hyperstatique, celle-ci permet l'écriture des relations formelles sur les déplacements et une détermination des configurations de contact isostatique. Elle ne propose pas de résolution numérique du système obtenu. De manière générale, il est souvent nécessaire de générer plusieurs relations en plusieurs points et/ou suivant des directions différentes afin de simuler les variations entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme.

1.6 Analyse de tolérances basée sur des systèmes de contraintes

Dans les approches basées sur des ensembles de contraintes géométriques, les contraintes caractérisent l'ensemble des positions relatives possibles entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme. Ces ensembles de contraintes sont conformes à des

spécifications géométriques ou des spécifications de contacts. Ces ensembles de contraintes peuvent aussi être modélisées par des espaces géométriques. Cette partie du document introduit, sans être exhaustif, les différentes approches basées sur des systèmes de contraintes.

1.6.1 Espace de Faisabilité

Le concept d'Espace de Faisabilité a été introduit par J.U. Turner depuis 1987, année de publication de sa thèse. Ce concept décrit une base mathématique pour représenter les tolérances géométriques. Il se base sur une modélisation variationnelle [TuWo88] pour identifier une surface fabriquée ainsi que ses défauts à partir de la géométrie nominale. Chaque tolérance géométrique dans ce modèle est définie par des contraintes géométriques dans un espace cartésien [Turn93]. Chaque point dans l'Espace de Faisabilité correspond à une position particulière qui satisfait les différentes tolérances.

Dans la figure 1-25, nous considérons une surface plane d'équation $z=0$ dans un repère orthonormé direct. Le modèle variationnel associé à cette surface est bien une surface plane telle que :

$$z = \frac{OX}{X_{\max} - X_{\min}} x + \frac{OY}{Y_{\max} - Y_{\min}} y + LZ \quad (1.28)$$

Où OX , OY et LZ sont des variables indépendants du modèle.

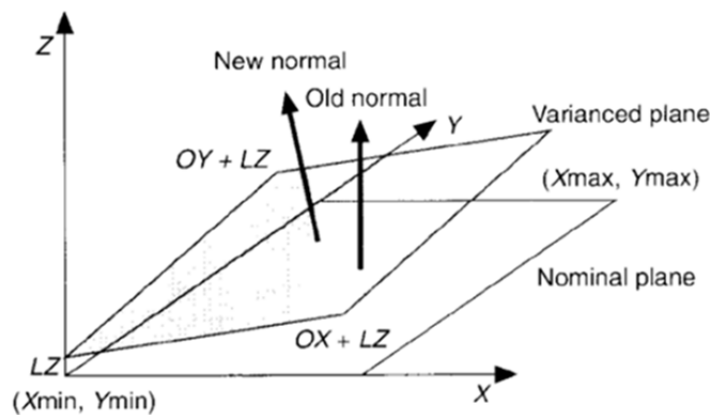


Figure 1-25. Modèle associé des variations à une surface plane [Turn93].

Les spécifications ajoutées au modèle seront exprimées par des contraintes définissant l'Espace de Faisabilité. Nous considérons un cas 2d illustré dans la figure 1-26 [Turn93], le but est de représenter les variations d'une surface plane par rapport à une autre. Ces variations sont contrôlées par deux spécifications géométriques : une localisation et un parallélisme. Les points M_1 et M_2 contrôlent la position et l'orientation de la surface. T_1 et T_2 sont les variables associées aux tolérances de localisation et T_3 la variable associée au parallélisme.

La définition des variables de tolérances est donnée par l'équation (1.29).

$$\begin{aligned}
T_1 &= M_1 \\
T_2 &= M_1 + M_2 \\
T_3 &= T_2 - T_1 = M_2
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

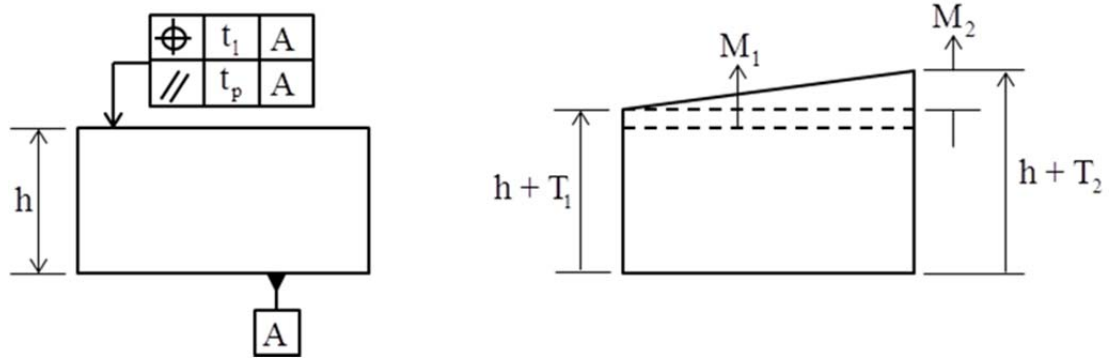


Figure 1-26. Tolérances de localisation et de parallélisme [Turn93].

Les contraintes associées aux tolérances sont ainsi définies par :

$$\begin{aligned}
-\frac{t_l}{2} &\leq T_1 \leq \frac{t_l}{2} \\
-\frac{t_l}{2} &\leq T_2 \leq \frac{t_l}{2} \\
-\frac{t_p}{2} &\leq T_3 \leq \frac{t_p}{2}
\end{aligned}
\tag{1.30}$$

Les Espaces de Faisabilité associés aux deux tolérances sont illustrés dans la figure 1-27.

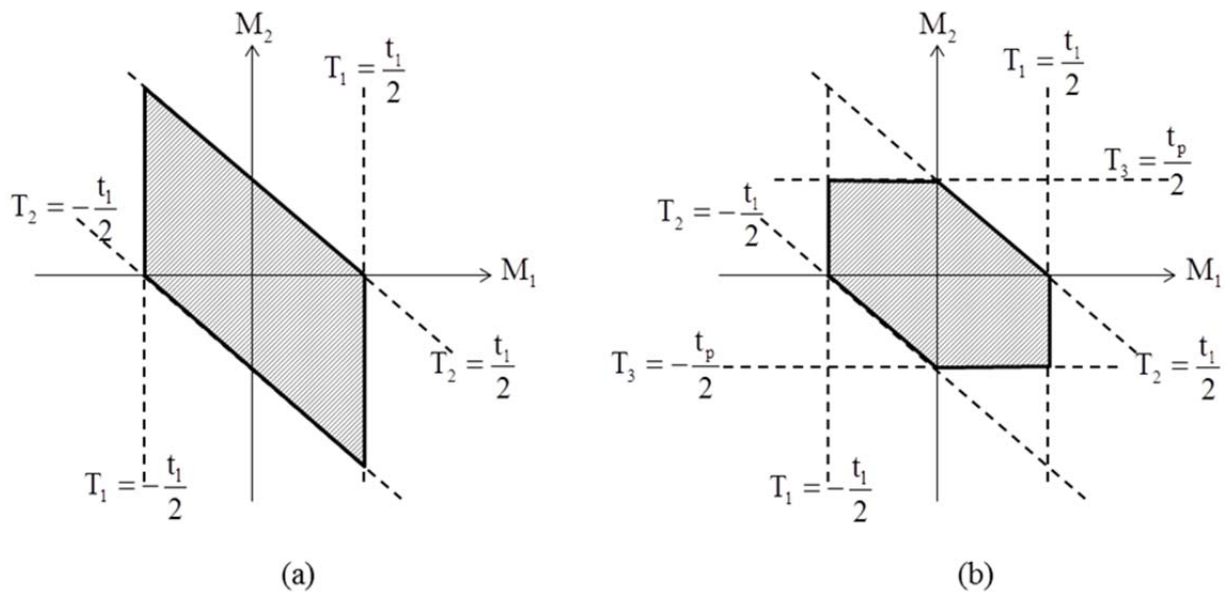


Figure 1-27. Espaces de Faisabilité associés à la localisation (a) et au parallélisme (b).

De la même manière, un Espace de Faisabilité peut être associé à une tolérance de forme. La surface doit être discrétisée en un nombre fini n de points auxquels sont associées les variables $M_{i(1 \leq i \leq n)}$. Un exemple détaillé est donné dans [Turn93].

1.6.2 Opérations de "Pairing" et de "Chaining" de Fleming

L'analyse de tolérances sous forme de contraintes géométriques a été initiée par A.D. Fleming [Flem87][Flem88]. Il considère pour chaque pièce tolérancée un "réseau" de zones de tolérances et de référentiels reliés par des arcs auxquels sont associés des contraintes (inégalités). Ce réseau conduit à l'écriture de contraintes sur la position relative des surfaces pour chacune des pièces.

Deux opérations permettent de manipuler ces contraintes au niveau du mécanisme. Une première opération appelée « pairing » consiste à déterminer l'intersection de contraintes entre deux pièces.

Considérons l'exemple illustré dans la figure 1-28(a) et déterminons la position entre les deux pièces (arbre et deux paliers). Les extrémités de l'arbre sont ajustées dans deux alésages où deux repères d'origines A et B sont définis. Les contraintes de position entre les deux pièces exprimées en ces deux points sont de la forme [Flem87] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(\text{Dhole-Drod})}{2} \pm (E/2)\Delta\theta \leq \Delta y \leq \frac{(\text{Dhole-Drod})}{2} \pm (E/2)\Delta\theta \\ -\frac{(\text{Dhole-Drod})}{E} \leq \Delta\theta \leq \frac{(\text{Dhole-Drod})}{E} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

La position relative exprimée au point C est définie par l'intersection de ces contraintes et est représentée dans la figure 1-28(b).

La deuxième opération dite de « chaining » consiste à déterminer la position relative entre deux pièces extrémales d'une « chaîne » de pièces. Considérons une chaîne de trois pièces 1, 2 et 3 telles que 1 est en contact avec 2 qui est en contact avec 3 (cf. Figure 1-29), la position relative entre 1 et 3 est définie par la somme des positions des deux liaisons (cf. Figure 1-30).

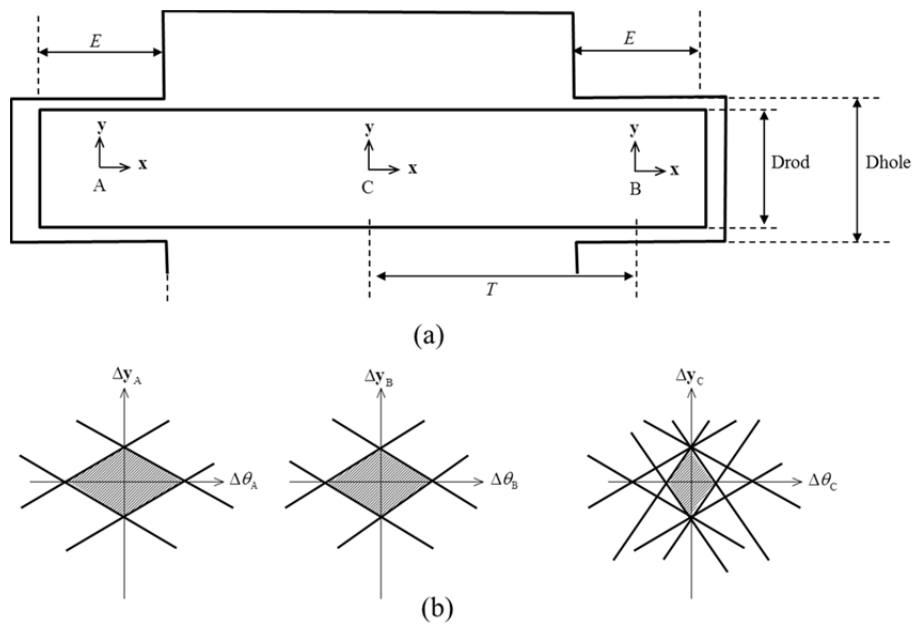


Figure 1-28. (a) exemple de mécanisme, (b) représentation de la position relative entre les deux pièces du mécanisme définie au point C.

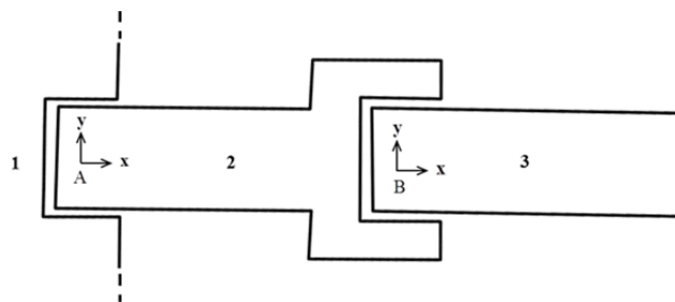


Figure 1-29. Assemblage de trois pièces.

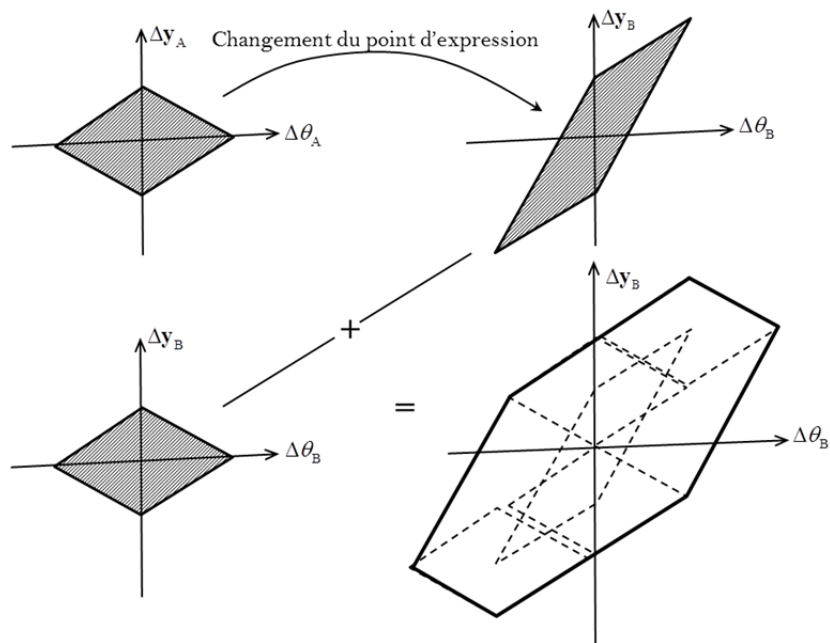


Figure 1-30. Représentation de la position relative entre les pièces 3 et 1.

1.6.3 S.A.T.T et contraintes

D. Gaunet [Gaun93] propose un modèle formel de tolérancement basé sur les concepts des classes d'invariances, des **S.A.T.T** (**S**urfaces **A**ssociées **T**echnologiquement et **T**opologiquement), des **E.G.R.M** (**E**lément **G**éométrique de **R**éférence **M**inimum) [CIRT94] et des torseurs de petits déplacements [Bour87]. Nous avons évoqué dans une partie précédente les sept classes d'invariance. Un E.G.R.M est associé à chaque classe d'invariance. Un E.G.R.M sert de référence pour la mise en position relative de deux éléments de deux classes d'invariances. Par exemple, un point (centre d'une sphère) est l'E.G.R.M de la classe des surfaces sphérique, une droite (axe du cylindre) est celui de la classe des surfaces cylindriques.

Des E.G.R.M sont associés au mécanisme, aux pièces, aux références et aux surfaces tolérancées. Des torseurs de petits déplacements appelés torseurs de tolérancement caractérisent la position relative de ces E.G.R.M.

Des contraintes sur des composantes de ces torseurs sont mises en place pour traduire l'inclusion des surfaces dans des zones de tolérances et les non interférences des surfaces. Les contraintes traduisant les zones de tolérances sont répertoriées pour les différents types de zones de tolérances normalisées et conduisent à des inégalités.

Pour les contacts sont distingués les contacts flottants et les contacts fixes conduisant respectivement à des inégalités ou des égalités.

De manière à obtenir des contraintes linéaires, une discrétisation des lignes des surfaces est effectuée.

1.6.4 U.P.E.L

Le concept d'**Union Pondérée d'Espaces de Liberté (U.P.E.L)** a été proposé par Y. Couétard en 1991 et a été développé par D.Teissandier dans sa thèse de doctorat [Teis95] au sein du **Laboratoire de Mécanique Physique (LMP)** devenu l'**Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M)** de Bordeaux en 2011. Le concept utilise une modélisation basée sur les torseurs de petits déplacements dont le but est de caractériser la position relative d'une surface fabriquée par rapport à sa position nominale et également la position relative entre deux surfaces de deux pièces différentes potentiellement en contact. Les défauts de forme des surfaces fabriquées sont négligés pour ce modèle.

Une U.P.E.L est un ensemble de six intervalles centrés sur "zéro", caractérisant les bornes de déplacements admissibles entre deux surfaces idéales (de forme parfaite), à l'intérieur desquelles peuvent varier les composantes du torseur de petits déplacements modélisant l'orientation et la position relatives entre les deux surfaces idéales, dans une base donnée et en un point donné. Une U.P.E.L caractérise donc une infinité de torseurs de petits déplacements [Teis95]. Les six intervalles sont définis selon les six composantes du torseur (trois rotations et trois translations) modélisant les déplacements admissibles entre les deux surfaces. Les valeurs extrémales sont prises en compte et sont associées aux composantes dites primaires définissant la position et l'orientation d'une surface par rapport à une autre. Les autres composantes (dites secondaires) sont généralement associées aux degrés d'invariance ou aux degrés de libertés. Les auteurs leur affectent l'attribut "NBO"

pour indiquer que les composantes sont "Non BOrnées". Une U.P.E.L est notée $\left[\tilde{S} \right]_M$ où M est son centre et est définie par (1.32) avec r_x, r_y et r_z sont les rotations et t_{Mx}, t_{My} et t_{Mz} sont les translations en un point M, écrites respectivement dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ définissant les composantes du TPD. Une composante d'une U.P.E.L représente toujours un demi-intervalle symétriquement réparti de part et d'autre d'une surface nominale. Des démonstrations de calcul des U.P.E.L associées aux différentes surfaces dites Surfaces Fonctionnelles (plan, cylindre, sphère, tore, cône) sont données dans [Teis95][TCGC96][TeCG98]. Pour chaque contact entre deux surfaces, une U.P.E.L est associée et est définie d'une manière analogue à (1.32).

$$\left[\tilde{S} \right]_M = \begin{bmatrix} R_x = [Min(r_x), Max(r_x)] \\ R_y = [Min(r_y), Max(r_y)] \\ R_z = [Min(r_z), Max(r_z)] \\ T_{Mx} = [Min(t_{Mx}), Max(t_{Mx})] \\ T_{My} = [Min(t_{My}), Max(t_{My})] \\ T_{Mz} = [Min(t_{Mz}), Max(t_{Mz})] \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Afin de pouvoir générer les chaînes de côtes tridimensionnelles, chaque mécanisme est décomposé en pièces puis en Surfaces Fonctionnelles et sa structure est définie par un graphe de liaisons dont les sommets correspondent aux Surfaces Fonctionnelles et les arcs du graphe aux deux types d'U.P.E.L : des U.P.E.L externes caractérisant la position relative entre deux surfaces de deux pièces potentiellement en contact et des U.P.E.L internes modélisant la position relative entre une surface fabriquée et la surface nominale correspondante. La position relative entre deux surfaces quelconques est déterminée par des opérations (union et intersection) sur ces ensembles d'U.P.E.L. Pour la mise en œuvre de cet outil, une étude théorique et expérimentale a été réalisée sur un mécanisme [Teis95].

La modélisation des limites des déplacements n'est pas assez fine pour représenter les dépendances entre les différentes composantes de déplacement. Depuis, l'étude des U.P.E.L a été abandonnée dans le laboratoire au profit des polytopes, nous y reviendrons en détail dans ce chapitre et dans le reste du document.

D'autres auteurs ont proposé une nouvelle écriture de (1.26) définie par l'arithmétique des intervalles [GhLD02].

Les valeurs mini $\underline{a}$ et maxi $\bar{a}$ des rotations (α, β, δ) ou des translations (u, v, w) définissent les torseurs associés à la condition fonctionnelle CF au niveau de l'élément fonctionnel EF_i .

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} J_{EF_1} & \dots & J_{EF_{n-1}} & J_{EF_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EF_1} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} [\underline{u} \quad \bar{u}] \\ [\underline{v} \quad \bar{v}] \\ [\underline{w} \quad \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} \quad \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} \quad \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} \quad \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EF_n} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

1.6.5 Domaine

La méthode des « Domaines » a été proposée par M. Giordano et D. Duret [GiDu93] au début des années 1990 au sein du laboratoire **SYMME** (**SY**stèmes et **Mat**ériaux pour la **ME**catronique) à l'université de Savoie. Cet outil est aussi basé sur les TPD et permet la modélisation des petits déplacements des surfaces dans une zone de tolérance et dans un assemblage. La méthode propose une représentation géométrique (objet appelée Domaine) des variations géométriques dans l'espace des déplacements avec la prise en compte des dépendances entre les déplacements. L'outil est particulièrement utilisé pour l'analyse et la synthèse des tolérances au sein de l'équipe annecienne [Kata02][Peti04][GiSP07][MaGH11][Mans12]. Nous allons le développer par la suite car il présente des concepts fondateurs pour cette thèse. Les notions importantes sont les notions de domaine écart, de domaine jeu et d'opérations sur les domaines.

1.6.5.1 Domaine écart

Un domaine écart permet de traduire les déplacements d'une entité géométrique dans une zone de tolérance. C'est une représentation mathématique dans l'espace 6d des petits déplacements (3 rotations et 3 translations) par l'ensemble des valeurs possibles que peut prendre le torseur écart pour la zone de tolérance associée à la spécification (position, orientation, ...). Un torseur écart modélise les variations géométrique d'une entité par rapport à son nominal.

Une zone de tolérance est définie selon la norme ISO [Iso04]. A chaque spécification peut être associée une zone de tolérance et un torseur écart. Chaque surface réelle doit rester à l'intérieur de la zone de tolérance.

En prenant en compte les dimensions de l'entité géométrique ainsi que la dimension t de la zone de tolérance, il est possible de modéliser l'étendue des variations géométriques autorisées par le tolérancement. Les limites des déplacements d'une surface de substitution par rapport à une surface nominale (associée à une surface réelle) suivant sa normale peuvent être caractérisées par des contraintes. A chaque contrainte est associé un système d'inéquations dont les variables sont les paramètres du torseur écart et les seconds membres sont exprimés en fonction de la dimension t de la zone de tolérance.

La figure 1-31(a) illustre un exemple de tolérancement d'une surface cylindrique. Il s'agit de la localisation de l'axe du cylindre. La zone de tolérance est cylindrique de diamètre t . L'axe doit être inclus dans cette zone de tolérance et mis en position par rapport aux surfaces de références A, B et C.

Le torseur écart écrit au point O_N peut être défini par :

$$\{\mathbf{D}_{Loc}\}_{O_N} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t}_{O_N} \end{matrix} \right\}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{O_N} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Le domaine écart est ainsi défini par les relations quadratiques :

$$\begin{cases} (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{y})^2 \leq \frac{t^2}{4} \\ (\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{y})^2 \leq \frac{t^2}{4} \end{cases} \quad (1.35)$$

Ce qui équivaut à

$$\left(t_x \pm \frac{a}{2} r_y \right)^2 + \left(t_y \pm \frac{a}{2} r_x \right)^2 \leq \frac{t^2}{4} \quad (1.36)$$

Le domaine écart défini par l'ensemble des inéquations (1.36) est représenté dans l'espace (t_x, t_y, r_y) par la figure 1-31(b).

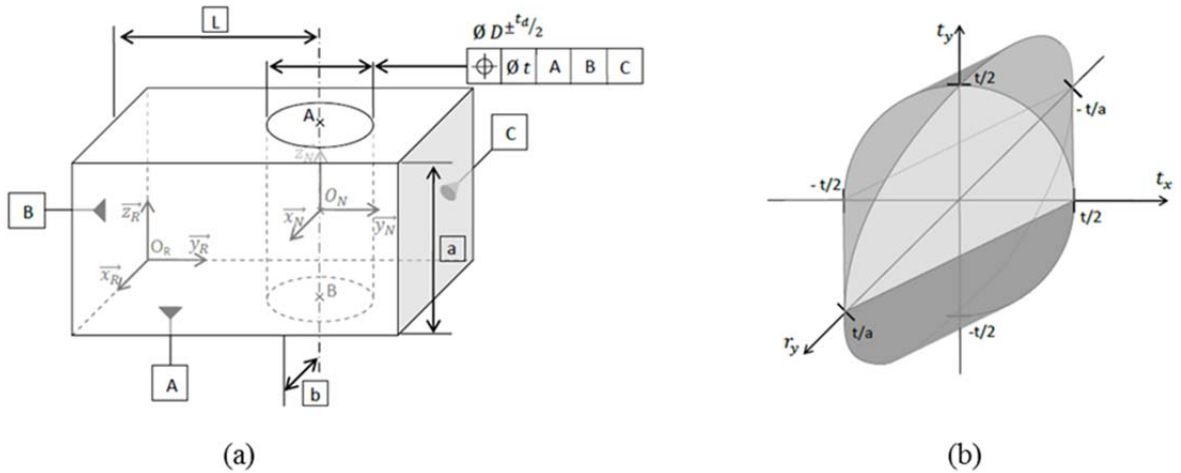


Figure 1-31. Domaine écart associé à la tolérance de localisation d'un axe de cylindre [Mans12].

1.6.5.2 Domaine jeu

Le domaine " jeu " modélise dans un espace 6d, d'une manière similaire au domaine écart, les variations géométrique possibles (déplacements) entre deux surfaces de deux pièces potentiellement en contact. Chaque déplacement, lorsque la liaison satisfait les contraintes

de non-interférence assurant la montabilité d'un système mécanique, peut être modélisé par un torseur jeu [GiDu93][Dant00]. Le torseur jeu d'une liaison représente donc la position relative entre deux surfaces composant cette liaison. Les paramètres primaires du torseur sont ceux associés à la non-interférence tandis les paramètres secondaires, selon les degrés de liberté, ne sont pas limités.

Les limites des déplacements définissant le domaine jeu pour une liaison peuvent être traduites par un système d'inéquations sur les 6 composantes des petits déplacements traduisant le jeu (3 rotations et 3 translations).

Soit l'exemple (cf. Figure 1-32) d'une liaison pivot glissant d'axe $\mathbf{z}$. Les surfaces en contact sont des cylindres de révolution d'axe $\mathbf{z}$.

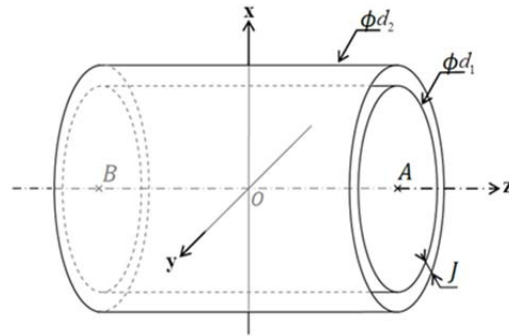


Figure 1-32. Contact pivot glissant.

Le torseur jeu de cette liaison est composé de 6 paramètres : 4 primaires (r_x, r_y, t_x, t_y) dus au jeu $(J = d_2 - d_1)$ interne de la liaison et 2 secondaires dus aux degrés de liberté de la liaison. Le torseur jeu écrit au point O est défini selon l'équation (1.37) :

$$\{\mathbf{D}_{\text{jeu}}\}_O = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t}_O \end{matrix} \right\}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_O = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

L'ensemble des équations définissant le domaine jeu sont exprimées par (1.38) :

$$\begin{cases} (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{y})^2 \leq \frac{J^2}{4} \\ (\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{x})^2 + (\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{y})^2 \leq \frac{J^2}{4} \end{cases} \quad (1.38)$$

Le domaine jeu obtenu est défini suivant les directions (r_x, r_y, t_x, t_y) . Pour le représenter, une des composantes est réduite à 0. Des exemples de domaines jeux sur d'autres types de surfaces ont été étudiés : surfaces planes et de contour quelconque [Mans12], les engrenages [Peti04].

1.6.5.3 Modélisation des assemblages : opérations sur les domaines

La modélisation d'un assemblage commence par une présentation de sa structure par un graphe. Le graphe adopté par l'équipe annecienne est un graphe orienté. Au niveau de

chaque liaison, l'ensemble des variations géométriques et mobilité peuvent être représentées par la figure 1-33. Les domaines au niveau du mécanisme sont déterminés par des opérations (somme, différence (« sweeping » [Peti04]) et intersection) sur les domaines écarts et les domaines jeux. La condition d'assemblabilité est définie par la relation (1.39).

$$\Sigma(\{\mathbf{D}_{\text{écart}}\}) \subseteq \Sigma(\{\mathbf{D}_{\text{jeu}}\}) \quad (1.39)$$

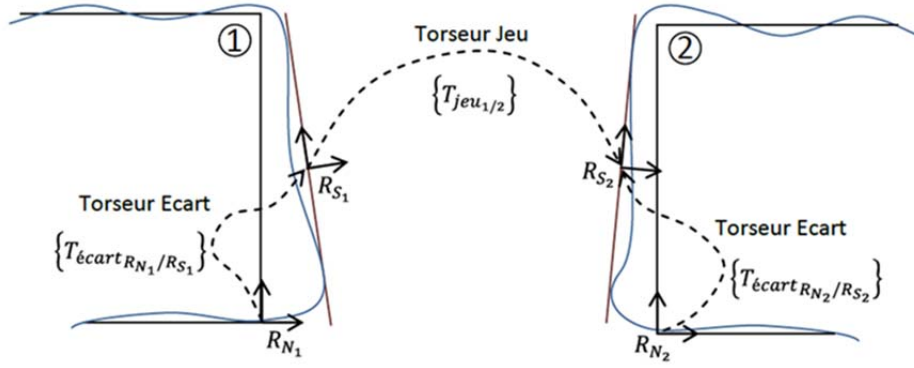


Figure 1-33. Variations géométriques – mobilité de liaison [Mans12].

1.6.6 T-Map®

Parmi les modélisations par des domaines, on trouve le modèle des T-Map®. Le modèle des T-Map® (Tolerance-Map®) a été proposé par D. Davidson et J. Shah de l'université d'Arizona au début des années 2000 [DaMS02]. Ce modèle permet une représentation mathématique des variations géométriques d'une entité géométrique dans une zone de tolérance. Un T-Map® est défini comme étant une bijection entre l'espace des positions maximales des variations géométriques d'une surface incluse dans une zone de tolérance et l'espace euclidien. La particularité des T-Map® est qu'ils sont exprimés dans un système de coordonnées barycentriques normalisées (areal coordiantes) [Coxe89] et qu'ils sont basés sur la construction de n -simplexes (un triangle en 2d, un tétraèdre en 3d,...). Un n -simplexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $n+1$ points affinement indépendants de l'espace de dimension n . La dimension du T-Map® est définie par les degrés de liberté limités par la zone de tolérance. Pour n degrés de liberté, un T-Map® de dimension n est défini.

Les coordonnées barycentriques normalisées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ d'un point σ dans le plan sont définies selon une base constituée par trois points σ_1 , σ_2 et σ_3 telles que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. On écrit :

$$\sigma = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 \quad (1.40)$$

Les coordonnées des points σ_1 , σ_2 et σ_3 sont respectivement données par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Le simplexe défini ainsi est constitué des sommets du triangle $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. La figure 1-34 illustre un triangle base déterminant les coordonnées barycentriques λ_1 , λ_2 et λ_3 d'un point σ . Ces coordonnées définissent respectivement les aires des sous-

triangles $\sigma\sigma_2\sigma_3$, $\sigma\sigma_3\sigma_1$ et $\sigma_1\sigma\sigma_2$ d'où le terme de « areal coordinates » en anglais [Coxe89].

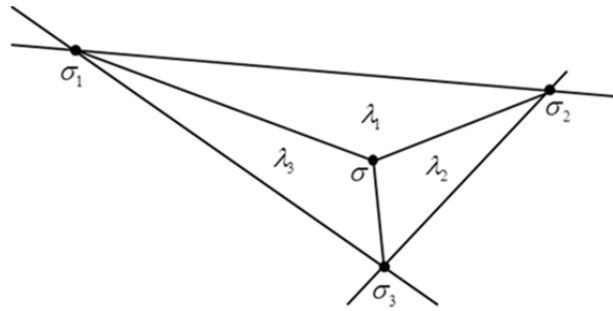


Figure 1-34. Base de définition des coordonnées barycentriques d'un point σ dans le plan.

La détermination des coordonnées barycentriques se fait d'une manière similaire en toute dimension. En 3d, nous considérons 4 points formant un tétraèdre. La définition peut être généralisée pour n dimensions.

1.6.6.1 T-Map® d'une surface plane de contour circulaire

La figure 1-35(a) illustre en coupe une pièce de forme cylindrique dont l'une des extrémités est un plan de normale $\mathbf{z}$ et de contour circulaire (diamètre d). La zone de tolérance d'une spécification de localisation est définie par deux plans parallèles distants de t dimension de la zone de tolérance.

La figure 1-35(b) représente le triangle (2-simplexe) de référence $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ du T-Map® associé à la spécification de localisation, définie dans le plan, comme représentée en figure 1-35(a). Le T-Map® est engendré par les coordonnées barycentriques λ_1 , λ_2 et λ_3 dans ce triangle de référence avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Le triangle est un triangle isocèle de base $\sigma_1\sigma_2$ et de hauteur t . Un repère est défini (O, s, q') tel que O et σ_3 définissent (O, q') et σ_1 et σ_2 sont portés par (O, s) .

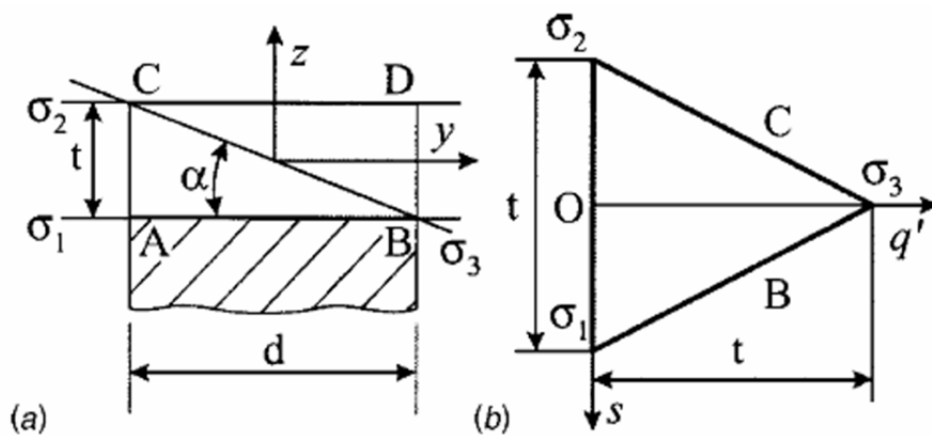
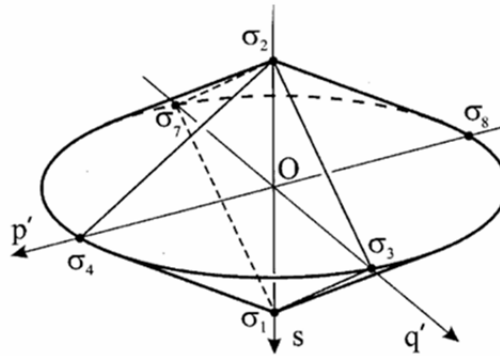


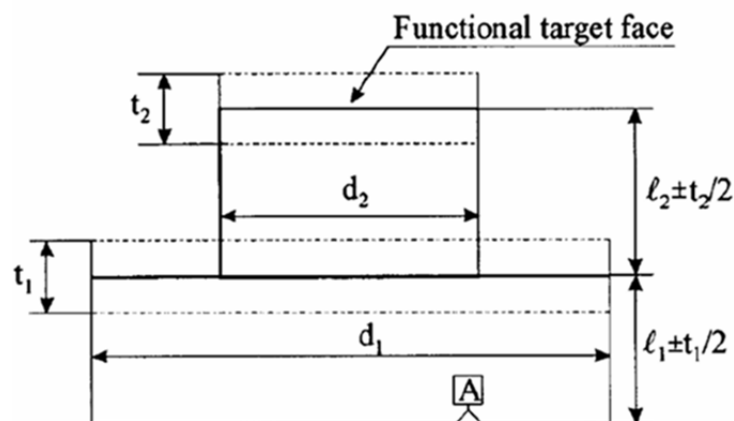
Figure 1-35. Définition du simplexe de construction d'un T-Map® associé à une surface plane de contour circulaire [DaMS02].

Le T-Map[®] de la surface de contour circulaire est généré par une rotation de 360° suivant $\sigma_1\sigma_2$ et peut être illustré dans la figure 1-36.



Plusieurs travaux ont été réalisés afin de définir les T-Map[®] associés à d'autres types d'éléments géométriques (les surfaces planes rectangulaires [MuDS01], les surfaces polygonales [MuDS04]), les surfaces cylindriques [SASD07][SADS09], les axes [BASD05] etc...) et aussi à des assemblages ([WuSD03][SADS09][SADS13] etc...). Cependant, il n'existe pas de méthode pour les identifier pour tout type de surface en général.

Un article sur les T-Map® [DaMS02] propose de les mettre en œuvre pour l'assemblage de deux pièces à bases circulaires (cf. Figure 1-37). Les variations de la surface supérieure de l'assemblage sont modélisées par la somme des T-Map® associés à deux spécifications de position.



52

Les deux surfaces planes de contours circulaires sont de diamètres respectifs d_1 et d_2 et ont des T-Map[®] différents (cf. Figure 1-38(a), Figure 1-38(b)).

La somme de Minkowski des T-Map[®] est ensuite définie dans la figure 1-38(c). La figure 1-38(d) illustre l'inclusion du T-Map[®] calculé dans le T-Map[®] fonctionnel et donc la vérification du respect de l'exigence fonctionnelle. Cette vérification est faite initialement sur les bases c.-à-d. sur les triangles (ou 2 simplexes). Des algorithmes de calcul de la somme ont été développés [WuSD03].

Les T-Map[®] ont des spécificités intéressantes. Nous retiendrons particulièrement que :

- Les T-Map[®] ont des coordonnées de mêmes dimensions homogènes à une longueur. Cela assoit la robustesse des résolutions numériques.
- un T-Map[®] est caractérisé par son volume permettant la recherche d'un optimum dans le remplissage d'un T-Map[®] fonctionnel.

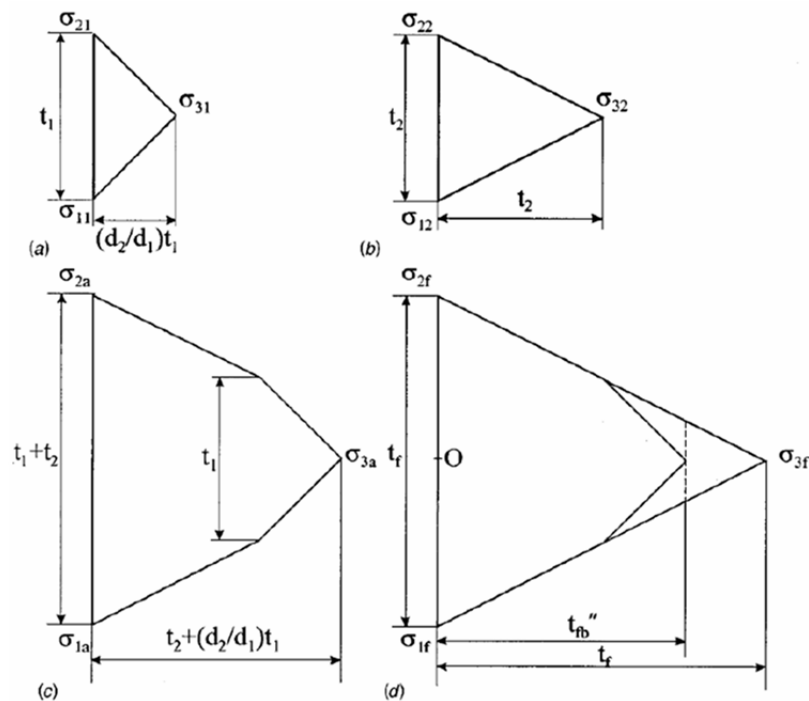


Figure 1-38. Respect d'une exigence fonctionnelle défini par l'inclusion entre un T-Map[®] calculé et un T-Map[®] fonctionnel [DaMS02].

1.6.7 Polyèdre – polytope

U. Roy et B. Li proposent de modéliser les spécifications de forme [RoLi98] de position et d'orientation [RoLi99] par des polyèdres. Les variations géométriques associées aux zones de tolérances sont caractérisées par des contraintes dites contraintes *algébriques*. Ces variations ont été déterminées en des points particuliers des surfaces appelés points de contrôle. Ces points doivent toujours rester à l'intérieur d'une zone de tolérance appelée résultante lorsqu'il y a un cumul de spécifications géométriques associées à la surface.

Le concept de polytope pour l'analyse de tolérances a été introduit par D. Teissandier en 1999 [TeDC99]. Nous pouvons définir un polytope comme étant un polyèdre borné ou

en tolérancement comme un domaine (écart ou jeu) borné facétisé (les surfaces tolérancées sont discrétisées). La topologie des polytopes, plus simple que celle des polyèdres, et leur linéarité par morceaux ont motivé leur utilisation en analyse de tolérances. Nous reviendrons en détail sur ce point puisque cela constitue la base de ce travail.

Les Espaces de Faisabilité [Turn93] traités précédemment s'apparentent à une approche polyédrale, mais avec un système de paramétrage des déplacements différent.

De manière générale, les approches polyédrales sont définies à partir de **contraintes linéaires**. Ces modèles sont dérivés des domaines ou des T-Map® par une linéarisation.

1.7 Conclusion

Ce premier chapitre dresse un état de l'art des approches utilisées en analyse de tolérances. La première partie a présenté le paramétrage des écarts géométriques ou de contacts caractérisant les variations prises en compte dans un outil d'analyse de tolérances. Les systèmes d'équations modélisant les chaînes de cotes 1d et 3d dans un système mécanique ont été introduits. Dans une seconde partie, une synthèse des différentes approches paramétriques et des approches basées sur des systèmes de contraintes dédiées à l'analyse de tolérances, a été réalisée. Nous nous intéressons aux modèles manipulant des systèmes de contraintes afin de vérifier la conformité d'un système mécanique au regard des exigences fonctionnelles. L'intérêt de ces types d'approches est de pouvoir simuler des variations pour des architectures hyperstatiques. De plus, une seule relation est suffisante pour simuler les variations entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme.

Les trois modèles : domaines, T-Map et polytopes entrent dans cette catégorie. Nous retiendrons le modèle des polytopes qui possèdent les propriétés suivantes avec leurs avantages et inconvénients :

- Les frontières des polytopes sont linéaires par morceaux, d'où une simplification de la résolution mais également une imprécision car en tolérancement, certaines limites de déplacements ne sont pas linéaires; par exemple, les limites de déplacements d'un segment de droite dans une zone de tolérance cylindrique [GiDu93].
- Un polytope est un ensemble borné, d'où une simplification de la mise en œuvre algorithmique, cependant, en tolérancement, certains déplacements ne sont en général pas bornés ; par exemple les déplacements correspondant aux degrés de liberté ou aux degrés d'invariance.
- Un polytope est un ensemble convexe et borné, d'où une comparaison de polytopes plus simple (entre polytope résultant et un polytope fonctionnel par exemple).

2 Polytopes et tolérancement

Ce chapitre introduit la méthode d'analyse de tolérances géométriques par des polyèdres (en particulier des polytopes) développée au sein du laboratoire I2M à l'université de Bordeaux. La méthode repose sur une modélisation des variations géométriques des pièces et des liaisons par des objets mathématiques appelés polyèdres ou polytopes. Les propriétés mathématiques essentielles (topologiques et algorithmiques) des polyèdres et polytopes sont présentées dans la première partie. En seconde partie, est abordée l'utilisation de cette approche polyédrale en tolérancement géométrique.

2.1 Introduction à l'approche polyédrale

Avant d'aborder leur utilisation en tolérancement géométrique, quelques définitions importantes et propriétés fondamentales des polyèdres et des polytopes sont présentées. Quelques aspects fondamentaux de la géométrie algorithmique sont introduits. Le lecteur souhaitant approfondir ses connaissances en géométrie algorithmique pourra se référer en particulier à [Zieg95], [Robe83], [Ewal96] et [BoYv98].

Les polytopes (ou polyèdres) caractérisent généralement les solutions admissibles d'un programme linéaire de la forme : $\max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \}$. Les solutions sont des convexes dont les concepts et terminologies sont décrits ci-après.

2.1.1 Espace affine, ensemble convexe

On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'espace affine de dimension n . $\mathbb{R}^n$ est dirigé par un espace vectoriel de dimension n sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ des points de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

2.1.1.1 Combinaison linéaire et sous-espace vectoriel

On appelle combinaison linéaire des points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ tout point $\mathbf{y}$ qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (2.1)$$

Un sous ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\mathbf{x}_i \in E \quad i \in (1, 2, \dots, r) \Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in E \quad (2.2)$$

Remarque 2.1 :

- Chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est stable par addition (opération interne) et multiplication (opération externe sur des réels) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E &\Rightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in E \\ \mathbf{x} \in E, \lambda \in \mathbb{R} &\Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in E \end{aligned} \quad (2.3)$$

- Chaque sous-espace vectoriel non vide contient l'origine (0), l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est aussi un sous-espace vectoriel.

2.1.1.2 Combinaison affine et sous-espace affine

On appelle combinaison affine des points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ tout point $\mathbf{y}$ qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{et } \sum_i \lambda_i = 1 \quad (2.4)$$

Un sous-espace E est dit affine s'il est stable par combinaison affine :

$$\mathbf{x}_i \in E \quad i \in (1, 2, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in E \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{avec } \sum_i \lambda_i = 1 \quad (2.5)$$

Le plus petit sous-espace affine contenant E est appelé enveloppe affine de E . On peut l'écrire selon la relation (2.6).

$$\text{aff}(E) = \left\{ \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in E, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.6)$$

Les points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ de $\mathbb{R}^n$ sont affinement indépendants si quels que soient les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ vérifiant $\sum_{j=1}^r \lambda_j = 0$ et $\sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ alors nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Un sous-espace affine est de dimension k si et seulement si le nombre maximal de points affinement indépendants qu'il contient est égal à $k+1$ [Terz09].

Remarque 2.2 :

- Un sous-espace affine contenant l'origine est un sous-espace vectoriel,
- L'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine.

2.1.1.3 Hyperplan et demi-espace

Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0, 1, 2 et $(n-1)$ sont appelés respectivement point, droite, plan et hyperplan.

Un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme [Mcmu71] :

$$\begin{aligned} H &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \} \quad \text{avec } \mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\mathbf{a}^T \neq \mathbf{0}$ représente la transposée du vecteur colonne $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

A chaque hyperplan $H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \}$, sont associés deux demi-espaces fermés : voir Figure 2-1. Un demi espace fermé positif est défini par (2.8); un demi-espace fermé négatif est défini par (2.9) [Mcmu71].

$$\overline{H}^+ = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n \geq b \} \quad (2.8)$$

$$\overline{H}^- = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n \leq b \} \quad (2.9)$$

De même, deux demi-espaces ouverts associés à H sont définis. Un demi espace ouvert positif est défini par (2.10); un demi-espace ouvert négatif est défini par (2.11).

$$H^+ = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n > b \} \quad (2.10)$$

$$H^- = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} < b \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n < b \} \quad (2.11)$$

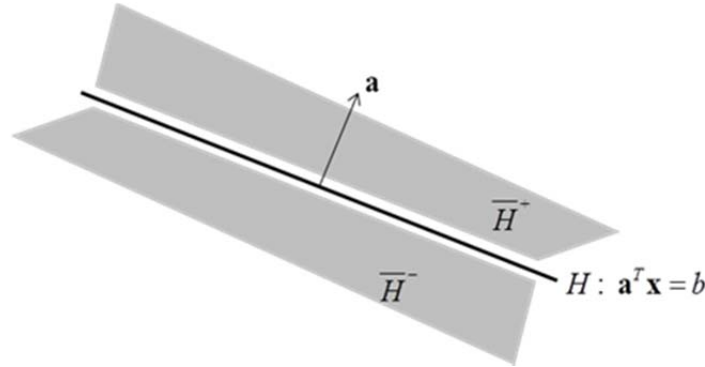


Figure 2-1. Illustration de demi-espaces associés à un hyperplan.

Nous pouvons déduire deux propriétés élémentaires de (2.8) et (2.9) :

$$\begin{aligned} \overline{H^+} \cap \overline{H^-} &= H \\ \overline{H^+} \cup \overline{H^-} &= \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.1.4 Combinaison convexe et sous-ensemble convexe

Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$) et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

On définit un segment de E par la formule suivante :

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{ \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1 \} \quad (2.13)$$

E est dit convexe si pour tous points $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, E contient le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

La figure 2-2(a) illustre un sous-ensemble non convexe ; la figure 2-2(b) illustre un sous-ensemble convexe.

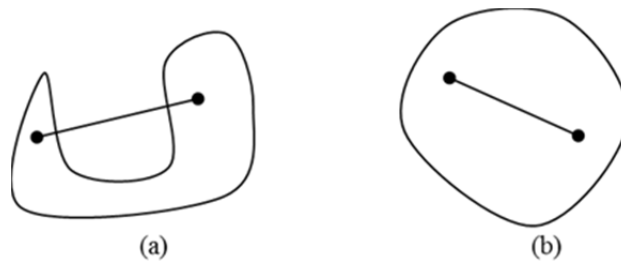


Figure 2-2. (a) sous-espace non convexe, (b) sous-espace convexe.

On appelle combinaison convexe des points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ tout point $\mathbf{y}$ s'écrivant sous la forme :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sum_i \lambda_i = 1 \quad (2.14)$$

Un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe s'il est stable par combinaison convexe :

$$\mathbf{x}_i \in E \quad i \in (1, 2, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in E \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_i \lambda_i = 1 \quad (2.15)$$

Autrement dit, un sous-ensemble E est convexe s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses points.

Le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ contenant E définit l'enveloppe convexe de E notée $\text{conv}(E)$:

$$\text{conv}(E) = \left\{ \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r : \{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \} \subseteq E, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.16)$$

Remarque 2.3 :

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est convexe,
- Chaque sous-espace vectoriel est un sous-ensemble convexe,
- Chaque sous-espace affine est un sous-ensemble convexe,
- Chaque intersection de convexes est convexe.

2.1.1.5 Combinaison conique et cône

On appelle combinaison conique des points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ tout point $\mathbf{y}$ qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \mathbf{x}_i \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \quad (2.17)$$

Un sous-ensemble E non vide de $\mathbb{R}^n$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$) est appelé *cône* convexe s'il est stable par toute combinaison conique :

$$\mathbf{x}_i \in E \quad i \in (1, 2, \dots, r) \Rightarrow \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in E \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \quad (2.18)$$

L'ensemble de toutes les combinaisons conique des points $\mathbf{x}_i \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé enveloppe conique de E et s'écrit :

$$\text{cone}(E) = \left\{ \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in E, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.19)$$

Un cône convexe E est un ensemble non vide égal à son enveloppe conique, dans le cas où E contient un nombre fini de points $\mathbf{x}_i$. La relation (2.19) caractérise la $\mathcal{V}$ -description d'un cône polyédrique.

Remarque 2.4 :

- Chaque cône convexe E est stable par addition et multiplication par des scalaires positifs :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E &\Rightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in E \\ \mathbf{x} \in E, \lambda \geq 0 &\Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in E \end{aligned} \quad (2.20)$$

- Chaque cône convexe non vide contient l'origine,
- Chaque sous-espace vectoriel est un cône convexe,
- L'intersection de cônes convexes est aussi un cône convexe.

2.1.1.6 Synthèse sur les combinaisons et sous-ensembles associés

Le tableau 2-1 résume les propriétés des différentes combinaisons de points et des différentes enveloppes associées évoquées en §2.1.

Condition(s) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$	sur Combinais on définie par $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \mathbf{x}_i$	Ensemble de toutes les combinaisons de points de E
$\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\sum_i \lambda_i = 1$	Combinais on affine	Enveloppe affine de E , notée $\text{aff}(E)$ $\text{aff}(E)$: plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ contenant E .
$\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_i \lambda_i = 1$	Combinais on convexe	Enveloppe convexe de E , notée $\text{conv}(E)$ $\text{conv}(E)$: plus petit sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant E .
$\lambda_i \in \mathbb{R}^+$	Combinais on conique	Enveloppe conique de E notée $\text{cone}(E)$ $\text{cone}(E)$: cône convexe.

Tableau 2-1. Définition des sous-espaces affines et ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$.

2.1.2 Cône polyédrique, polyèdre, polytope

Ce paragraphe présente les ensembles polyédriques mis en œuvre dans cette thèse. Pour une description plus complète de ces ensembles, le lecteur pourra se référer à : [Grün67], [Zieg95] et [Grün03].

2.1.2.1 Cône polyédrique

Un cône polyédrique de $\mathbb{R}^n$ est un cône convexe, solution d'un système d'inéquations linéaires de $\mathbb{R}^n$. Il peut être défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces linéaires contenant l'origine.

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq 0 \right\} = \bigcap_i \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0 \right\} \quad (2.21)$$

Où $\mathbf{a}_i^T$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\mathbf{A}$.

Cette définition caractérise la $\mathcal{H}$ -description d'un cône polyédrique. Nous rappelons que la relation (2.19) caractérise la $\mathcal{V}$ -description d'un cône polyédrique. La $\mathcal{H}$ -définition et la $\mathcal{V}$ -définition sont équivalentes [Zieg95]. La figure 2-3(a) illustre un exemple d'un $\mathcal{H}$ -cône polyédrique de $\mathbb{R}^2$ et la figure 2-3(b) illustre un exemple d'un $\mathcal{V}$ -cône polyédrique de $\mathbb{R}^2$.

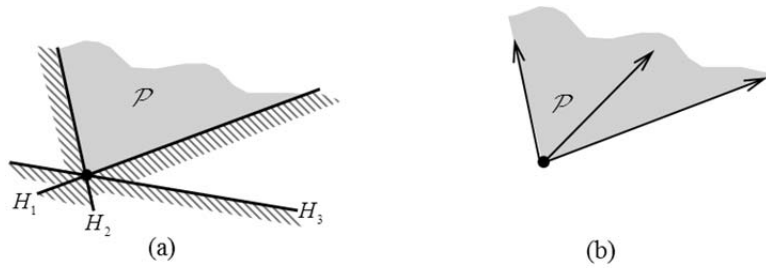


Figure 2-3. Illustration des deux définitions d'un cône.

Un sous ensemble $F \subseteq \mathcal{P}$ d'un cône polyédrique $\mathcal{P}$ est appelé face de $\mathcal{P}$ si $F = \mathcal{P}$ ou si F est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec un hyperplan H telle que $\mathcal{P}$ soit entièrement inclus dans l'un des demi-espaces $\overline{H}^+$ ou $\overline{H}^-$. Nous écrivons :

$$F \text{ face de } \mathcal{P} \Rightarrow \exists \mathbf{a}_i : \forall y \in \mathcal{P} \quad \mathbf{a}_i^T y \leq 0 \text{ et } F = \mathcal{P} \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = 0 \right\} \quad (2.22)$$

Chaque cône polyédrique admet un nombre fini de faces. Toute face d'un cône polyédrique est aussi un cône polyédrique.

2.1.2.2 Polyèdre

Un polyèdre $\mathcal{P}$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$. On écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \bigcap_{i=1}^m \overline{H}_i^- = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, i = 1, \dots, m \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \right\}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Où $\mathbf{a}_i^T$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{A}$ et b_i la $i^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{b}$. Cette définition caractérise la $\mathcal{H}$ -description de $\mathcal{P}$.

La dimension d'un polyèdre non vide $\mathcal{P}$ est définie par : $d = \dim(\mathcal{P}) = \dim(\text{aff}(\mathcal{P}))$. On parle alors d'un d -polyèdre. La dimension du polyèdre vide est égale à -1 . $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre de dimension n [Ewal96].

La figure 2-4 illustre une représentation d'un polyèdre de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$.

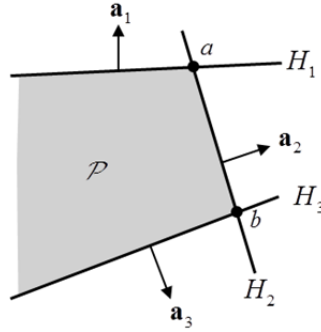


Figure 2-4. Exemple d'un 2-polyèdre.

Remarquons que le polyèdre $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{0})$ est un cône polyédrique. L'équivalence avec la définition (2.19) du cône a été démontrée par le théorème de Minkowski-Weyl [Weib07].

2.1.2.3 Polytope

Un polytope de $\mathbb{R}^n$ est un polyèdre borné. Un polytope est une intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$. Ceci caractérise la $\mathcal{H}$ -description d'un polytope notée $\mathcal{H}$ -polytope. Un polytope de dimension d est noté d -polytope dans $\mathbb{R}^n$, ($d \leq n$).

Un polytope $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ est aussi défini par l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Ceci caractérise la $\mathcal{V}$ -description de $\mathcal{P}$ notée $\mathcal{V}$ -polytope. Un hypercube défini à partir de ses sommets $Q = \text{conv}(\{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \times \dots \times \{-1, 1\})$ est un $\mathcal{V}$ -polytope. Un n -simplexe, enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants est un polytope.

Les deux définitions d'un polytope, $\mathcal{V}$ -définition et $\mathcal{H}$ -définition, sont équivalentes. Si $\mathcal{P}$ est un polytope alors il admet un nombre fini de points extrêmes (dits sommets) et le polytope est l'enveloppe convexe de ces sommets. Inversement, l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est un $\mathcal{H}$ -polytope. Cette équivalence constitue le théorème de Weyl et Minkowski [Barv02].

La figure 2-5 illustre les deux définitions d'un même polytope de $\mathbb{R}^2$.

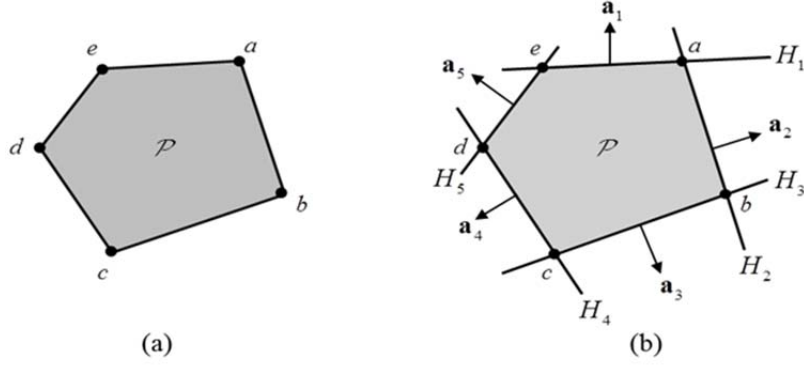


Figure 2-5. (a) représentation d'un $\mathcal{V}$ -polytope de $\mathbb{R}^2$, (b) représentation d'un $\mathcal{H}$ -polytope de $\mathbb{R}^2$.

2.1.2.4 Hyperplan support et faces

Soit un polytope $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$. On appelle *fonction support* la fonction $h_{\mathcal{P}}$ définie par [HeRZ97] :

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto h_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \max \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathcal{P} \} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ désigne le produit scalaire entre les deux vecteurs.

Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, on définit un *hyperplan support* du polytope $\mathcal{P}$ de normale $\mathbf{v}$ par [HeRZ97] :

$$H_{\mathcal{P}, \mathbf{v}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = h_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) = v_0 \} \quad (2.25)$$

La propriété est généralisable pour les polyèdres et les cônes.

Autrement dit, un hyperplan H est un *hyperplan support* d'un polytope (ou d'un polyèdre ou d'un cône) $\mathcal{P}$ si :

$$H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P} \subset \overline{H}^+ \text{ ou } \mathcal{P} \subset \overline{H}^- \quad (2.26)$$

L'intersection de $\mathcal{P}$ avec un de ses hyperplans support définit une *face* de $\mathcal{P}$. Une face peut être ainsi définie par [Zieg95][McMu71] :

$$F = \mathcal{P} \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = h_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) \} \quad (2.27)$$

avec l'inégalité $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \leq v_0$ valide pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

La dimension d'une face F de $\mathcal{P}$ est définie par $\dim(F) = \dim(\text{aff}(F))$. Une k -face est une face de dimension k .

L'espace vide $\emptyset$ et $\mathcal{P}$ sont deux faces de $\mathcal{P}$ dites faces triviales et de dimensions respectives -1 et $\dim(\mathcal{P})$. Toute autre face de $\mathcal{P}$ est dite face propre. Les 0-face, 1-face et

$(\dim(\mathcal{P})-1)$ -face sont des faces propres appelées respectivement sommet, arête et facette de $\mathcal{P}$ [Ewal96][BoYv98].

Nous pouvons résumer ces notations dans le tableau 2-2 suivant :

Dimension	Nom	Dimension	Nom
d	polytope	2	2-face
$d-1$	facette	1	arête
$d-2$	crête	0	sommet
$\vdots$	$\vdots$	-1	$\emptyset$

Tableau 2-2. Faces d'un polytope.

La figure 2-6 illustre quelques exemples d'hyperplans support et de faces d'un polytope $\mathcal{P}$.

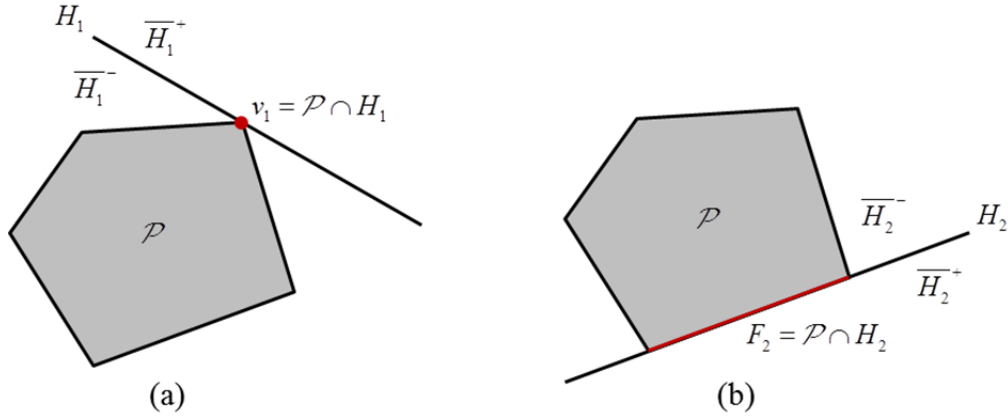


Figure 2-6. (a) définition d'un sommet, (b) définition d'une arête d'un 2-polytope.

Remarque 2.5 :

- Une k -face d'un polytope est un k -polytope,
- Chaque intersection de faces d'un polytope $\mathcal{P}$ est aussi une face de $\mathcal{P}$.

Le nombre de faces de dimensions k d'un polytope $\mathcal{P}$ de dimension d est défini par $f_k(\mathcal{P})$. On appelle f -vecteur de $\mathcal{P}$ la série $(f_{-1}(\mathcal{P}), f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), \dots, f_d(\mathcal{P}))$. $f_0(\mathcal{P})$ est le nombre des sommets du polytope $\mathcal{P}$. On remarque que :

$$f_{-1}(\mathcal{P}) = f_d(\mathcal{P}) = 1 \quad (2.28)$$

La relation d'Euler permet d'écrire la propriété suivante [FuWe05] :

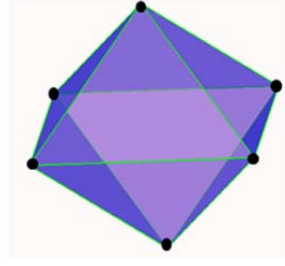
$$\sum_{k=-1}^{k=d} (-1)^k f_k(\mathcal{P}) = 0 \quad (2.29)$$

En particulier pour un 3-polytope, nous obtenons :

$$f_0(\mathcal{P}) - f_1(\mathcal{P}) + f_2(\mathcal{P}) = 2 \quad (2.30)$$

Considérons l'exemple d'un octaèdre (cf. Figure 2-7). Nous obtenons :

$$f_0(\mathcal{P}) - f_1(\mathcal{P}) + f_2(\mathcal{P}) = 6 - 12 + 8 = 2 \quad (2.31)$$



$$f_0(\mathcal{P}) = 6$$

$$f_1(\mathcal{P}) = 12$$

$$f_2(\mathcal{P}) = 8$$

Figure 2-7. Octaèdre.

2.1.2.5 Treillis de faces d'un polytope

Un treillis permet de formaliser les relations entre les faces d'un polytope. Cette section présente les notions générales d'ensemble partiellement ordonné (ou poset) et de treillis (cas particulier de poset) pour montrer leur application aux faces.

Un ensemble partiellement ordonné, ou *poset*, est un ensemble muni d'une relation antisymétrique, transitive et réflexive sur un ensemble fini [Zieg95]. Deux éléments en relation sont dits comparables. On appelle ordre la relation d'un poset.

Si le couple (a, b) appartient à la relation d'un poset, on dit que l'élément a est plus petit que l'élément b . Le poset opposé est défini par l'ordre inverse. Un ordre est total ou linéaire si deux éléments quelconques sont comparables. Une chaîne d'un poset est un sous-poset totalement ordonné. La longueur d'une chaîne est son nombre d'éléments moins un. Une borne inférieure (resp. supérieure) d'une partie X d'un poset est un élément plus petit (resp. plus grand) que tout élément de X et plus grand (resp. plus petit) que tout élément ayant cette propriété. Un poset est borné s'il admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Définition 2.1 (treillis) : un treillis est un poset borné tel que toute paire d'éléments admet une borne inférieure appelée "meet" et une borne supérieure appelée "join".

Un poset est gradué si la longueur de toute chaîne maximale dont le plus grand élément est fixé ne dépend que de cet élément. Cette longueur est alors appelée rang de cet élément. Dans un treillis gradué les éléments de rang 1 sont appelés atomes et ceux de rang un de moins que l'élément maximal sont appelés coatomes. Un treillis est atomique (coatomique) si tout élément est un "join" ("meet") d'atomes (de coatomes). Un élément b est dit successeur d'un élément a si l'intervalle $[a, b]$ est précisément la paire (a, b) . Le diagramme de Hasse d'un poset est un graphe de sa relation successeur où les ordonnées des points représentant les éléments sont dans un ordre compatible avec l'ordre du poset.

Définition 2.2 (treillis de faces) : le treillis de faces d'un polytope $\mathcal{P}$ est un poset $L := L(\mathcal{P})$ de toutes les faces, partiellement ordonné par inclusion.

Pour chaque polytope $\mathcal{P}$, on peut construire un poset dit treillis des faces de $\mathcal{P}$ dont ses éléments sont les faces de $\mathcal{P}$. Ce treillis noté $L(\mathcal{P})$ est partiellement ordonné par inclusion de faces. Le polytope $\mathcal{P}$ est l'unique plus élevée face dans le treillis tandis que l'espace vide, face de dimension -1 est l'unique plus basse face.

La figure 2-8 illustre le treillis de faces $L(\mathcal{P})$ du polytope $\mathcal{P}$ défini par $\mathcal{P} = \text{conv}(\{a, b, c, d, e\})$.

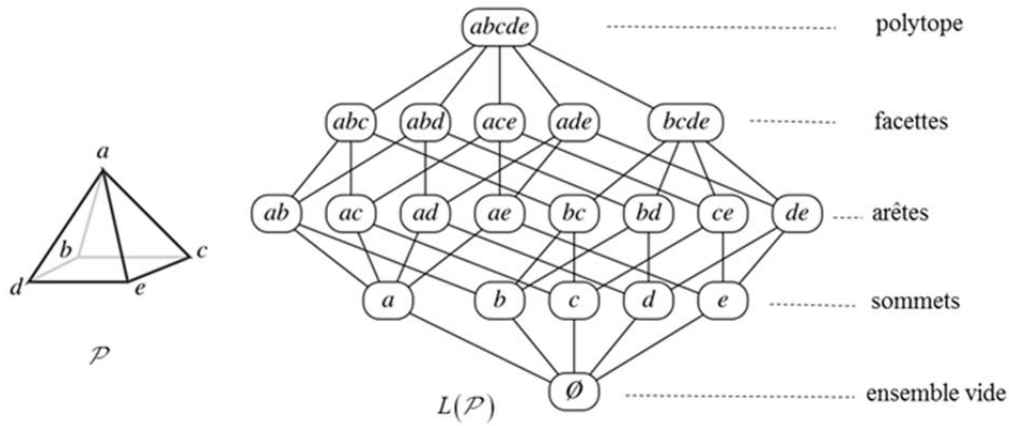


Figure 2-8. Diagramme de Hasse du treillis de faces.

2.1.3 Dualité

Avant d'aborder les opérations sur les polyèdres et les polytopes, la dualité sur les cônes et les éventails normaux sont présentés car ils sont à la base des algorithmes utilisés dans cette thèse pour l'opération de somme de Minkowski.

2.1.3.1 Cône dual

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône convexe et fermé. On définit un *cône dual* (ou normal)¹ de C par [Terz09] :

$$N = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in C \} \quad (2.32)$$

N est aussi un cône convexe et fermé : voir figure 2-9

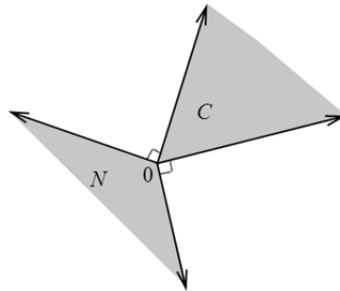


Figure 2-9. Exemple d'un cône dual de $\mathbb{R}^2$.

A chaque face F non vide d'un polytope ou d'un polyèdre $\mathcal{P}$ correspond un cône dual noté N_F . Ce cône comprend l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^n)^*$ tels que la fonction $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ appartenant à $\mathcal{P}$) atteint son maximum dans F [Zieg95] :

$$N_F = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathbb{R}^n)^* : F \subseteq \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{P} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \right\} \right\} \quad (2.33)$$

Le cône dual associé à une face est le cône dual d'un cône primal contenant la face. Les figure 2-10(a) et figure 2-10(b) illustrent les deux cônes duaux de $\mathbb{R}^2$ respectivement associés à une facette et un sommet.

La figure 2-10(c) illustre un exemple de cônes duaux (N_{F_j} et N_{F_i}) associés respectivement aux sommets $F_{j(j \in \{12,23,34,45,51\})}$ et aux facettes $F_{i(1 \leq i \leq 5)}$ d'un polytope $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^2$.

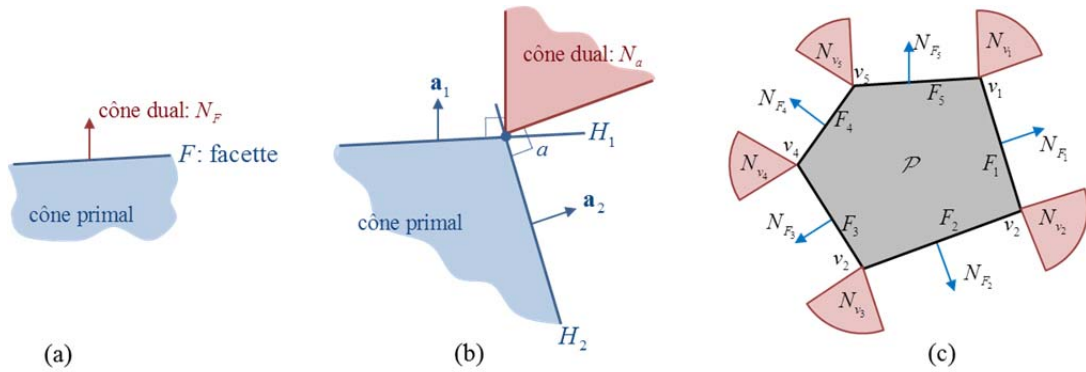


Figure 2-10. Cônes normaux associés aux faces d'un polytope de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 2.1 : Pour toute face F d'un polytope (ou polyèdre) $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\dim(N_F) = n - \dim(F) \quad (2.34)$$

Dans la figure 2-10(c), nous pouvons vérifier par exemple que $\dim(N_{F_{51}}) = 2 - \dim(F_{51}) = 2 - 0 = 2$ et $\dim(N_{F_5}) = 2 - \dim(F_5) = 2 - 1 = 1$.

2.1.3.2 Eventail normal

Un *éventail* de $\mathbb{R}^n$ est une famille $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de cônes telle que [Zieg95] :

- chaque face non vide d'un cône de $\mathcal{F}$ est aussi un cône de $\mathcal{F}$,
- l'intersection de deux cônes de $\mathcal{F}$ est une face commune des deux cônes.

L'éventail $\mathcal{F}$ est complet si : $\bigcup_{i=1}^k C_i = \mathbb{R}^n$. L'éventail d'un polytope (ensemble convexe borné) est complet [Zieg95]. L'éventail d'un polyèdre peut ne pas être complet.

Un *éventail normal* noté N d'un polyèdre ou d'un polytope est défini comme étant l'union de tous les cônes duaux. Il peut être écrit selon la formule (2.35) :

$$N(\mathcal{P}) = \{N_F : F \in L(\mathcal{P}), F \neq \emptyset\} \quad (2.35)$$

L'éventail normal d'un polytope est complet, c'est-à-dire que l'union des cônes duaux partitionne $\mathbb{R}^n$

La figure 2-11 illustre les éventails normaux associés à un polyèdre (cf. Figure 2-11(a)) et à un polytope (cf. Figure 2-11(b))

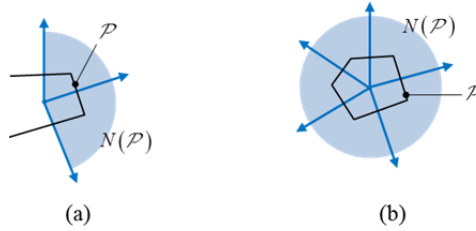


Figure 2-11. Éventails normaux d'un polyèdre et d'un polytope de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 2.6 : nous nous intéresserons aux cônes duaux et éventails normés (normalized dual cones) associés au polytope $\mathcal{P}$, c'est-à-dire à l'intersection de l'éventail normal avec la sphère unité. Cela pourra se traduire par la relation :

$$\hat{N}(\mathcal{P}) = N(\mathcal{P}) \cap \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1\} \quad (2.36)$$

Un éventail normal et normé sera noté $N(\mathcal{P})$.

2.1.3.3 Raffinement commun

Le raffinement commun de deux éventails $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ noté $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ est un éventail formé par les intersections de tous les cônes des deux éventails pris deux à deux. On écrit [Zieg95] :

$$\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} = \{C_{\mathcal{F}} \cap C_{\mathcal{G}} : C_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}, C_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}\} \quad (2.37)$$

L'intersection des cônes sera abordée dans une étape ultérieure de ce mémoire. Elle résulte de la mise en œuvre de l'algorithme de troncature entre deux cônes polyédriques.

2.1.4 Somme de Minkowski

La somme de Minkowski a été introduite pendant l'année 1903 par Herman Minkowski². Cette opération fondamentale est utilisée dans différentes applications pour l'animation et l'interpolation [KaRo92], la morphologie mathématique [Serr83], la mesure de similarités entre polyèdres convexes [TuRH00], la Conception et de Fabrication Assistées par Ordinateur [LeKE98] et bien sûr le tolérancement géométrique [Srin93][TeDe11].

¹ Les deux définitions de dualité d'un cône sont identiques (cône dual = cône normal)

2.1.4.1 Définitions

Soient A et B deux ensembles quelconques munis d'une loi additive. La somme de Minkowski S des deux ensembles est définie par sommation des points de A et de B . On écrit :

$$\begin{aligned} S = A \oplus B &= \{a + b : a \in A, b \in B\} \\ &= \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \{a + b\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous notons X_h le vecteur translation de X par h , c'est-à-dire, $X_h = \{x + h : x \in X\}$. La définition (2.38) peut être ainsi transformée en (2.39).

$$S = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b = \bigcup_{a \in A} B_a \quad (2.39)$$

La définition (2.39) montre que la somme de Minkowski de A et de B est obtenue par un balayage de l'origine de A sur la frontière de B , ou inversement, puis par l'union des éléments calculés.

La translation d'un ensemble A est la somme de Minkowski de A et d'un ensemble singleton réduit à un point.

La figure 2-12 illustre un exemple de calcul de somme de Minkowski par balayage d'un polytope A sur la frontière d'un polytope B .

La figure 2-13 illustre un exemple de calcul de somme de Minkowski dans $\mathbb{R}^3$.

²Herman Minkowski (1864-1908) a fait ses études à l'université de Königsberg en Allemagne conclues par une thèse de Doctorat sur les formes quadratiques en 1885. Il enseigne dans de nombreuses universités notamment à Bonn, à Königsberg ou à l'École polytechnique fédérale de Zurich. Albert Einstein fut l'un de ses élèves à Zurich. Il publie en 1907 le traité "space-time continuum" appelé maintenant "Minkowski space" sur lequel repose la théorie de la relativité développée par Einstein. Il meurt prématurément en 1908 d'une crise d'appendicite.



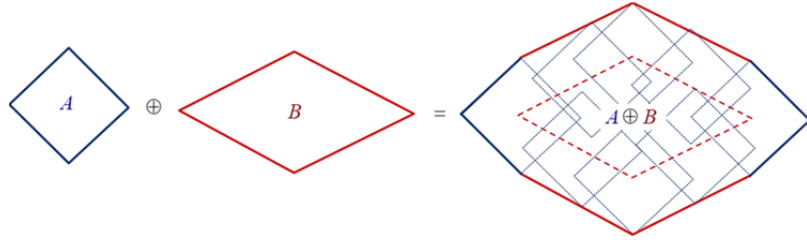


Figure 2-12. Somme de Minkowski de deux ensembles de $\mathbb{R}^2$.

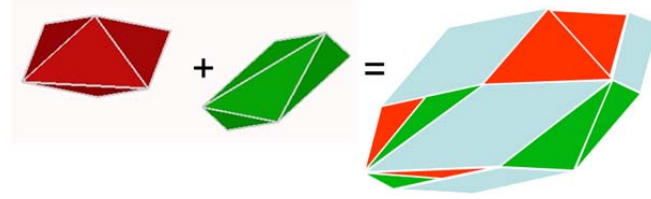


Figure 2-13. Somme de Minkowski de deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.

2.1.4.2 Propriétés

La somme de Minkowski possède des propriétés algébriques [Ser83][Kaul93][FaPR01]. Nous pouvons les résumer ainsi :

- (i) Commutativité et associativité : les deux propriétés découlent directement de la définition de la somme (2.38). Nous les formulons par :

$$\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_1 \quad (2.40)$$

$$(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) \oplus \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \oplus (\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3) \quad (2.41)$$

- (ii) Distributivité par rapport à l'union :

$$\mathcal{Q} \oplus \left(\bigcup_i \mathcal{P}_i \right) = \bigcup_i (\mathcal{P}_i \oplus \mathcal{Q}) \quad (2.42)$$

$$\left(\bigcup_j \mathcal{Q}_j \right) \oplus \left(\bigcup_i \mathcal{P}_i \right) = \bigcup_j \left[\bigcup_i (\mathcal{Q}_j \oplus \mathcal{P}_i) \right] \quad (2.43)$$

- (iii) Non distributivité par rapport à l'intersection :

$$\mathcal{Q} \oplus \left(\bigcap_i \mathcal{P}_i \right) \subset \bigcap_i (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{P}_i) \quad (2.44)$$

Ces propriétés sont utilisées dans ce qu'on appelle la "décomposition" d'objets complexes afin de calculer leur somme. Un objet non convexe par exemple peut être décomposé en sous-ensembles convexes pour lesquels l'application de la somme de Minkowski devient plus facile à réaliser. En effet, la somme de deux convexes est convexe [GuSe87]. Ce principe a été par exemple adopté par Minkowski et Weyl pour définir la $\mathcal{V}$ -

description d'un polyèdre $\mathcal{P}$. Cette propriété est souvent utilisée dans les applications de morphing [BaDD09].

La somme de Minkowski permet également d'écrire une $\mathcal{V}$ -définition d'un polyèdre.

Définition 2.3: Un polyèdre $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ est la somme de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (polytope) et d'une enveloppe conique de vecteurs (cône). On écrit [Zieg95] :

$$\mathcal{P} = \text{conv}(V) \oplus \text{cone}(Y) \quad V \in \mathbb{R}^{d \times n}, Y \in \mathbb{R}^{d \times n'} \quad (2.45)$$

Cette définition est équivalente à la $\mathcal{H}$ -description de $\mathcal{P}$ énoncée dans (2.23).

Finalement, nous énonçons les propriétés suivantes :

- La somme de Minkowski de deux polytopes est un polytope. Pour deux polytopes $\mathcal{P}_1 = \text{conv}(V_1)$, $V_1 = \{v_{1i} : 1 \leq i \leq f_0(\mathcal{P}_1)\}$ et $\mathcal{P}_2 = \text{conv}(V_2)$, $V_2 = \{v_{2i} : 1 \leq i \leq f_0(\mathcal{P}_2)\}$, la propriété de la convexité permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \text{conv}(V_1 \oplus V_2) = \text{conv}(v_{11} \oplus v_{12}, \dots, v_{1i} \oplus v_{2i}, \dots) \quad (2.46)$$

- La somme de Minkowski de deux polyèdres est un polyèdre,
- La fonction support de la somme de polyèdres est égale à la somme des fonctions support des polyèdres opérands [FuWe05] : soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ un polytope (ou polyèdre) écrit comme une somme de Minkowski de polytopes (ou de polyèdres) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s$ tel que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s$. Alors :

$$h_{\mathcal{P}} = h_{\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s} = h_{\mathcal{P}_1} + h_{\mathcal{P}_2} + \dots + h_{\mathcal{P}_s} \quad (2.47)$$

- Une face de la somme de polyèdres est égale à la somme de faces des polyèdres opérands [Fuku04][Weib07] : si F est une face de $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s$ alors il existe $F_1, F_2, \dots, F_s$ faces respectivement de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_s$ telles que :

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_s \quad (2.48)$$

Cette décomposition est unique. En particulier, un sommet v de $\mathcal{P}$ résulte de la somme de sommets des opérands : $v = v_1 \oplus v_2 \oplus \dots \oplus v_s$.

- Les cônes duaux (ou normaux) associés à des faces d'une somme de Minkowski de polytopes $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s$ sont les intersections des cônes duaux des opérands. Nous donnons la formule suivante :

$$N_{F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_s} = \bigcap_{i=1}^s N_{F_i} \quad (2.49)$$

- L'éventail normal d'une somme de Minkowski de polytopes (ou polyèdres) est le raffinement commun (2.37) des éventails normaux des opérandes [Zieg95][GrSt93] :

$$N(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s) = N(\mathcal{P}_1) \wedge N(\mathcal{P}_2) \dots \wedge N(\mathcal{P}_s) \quad (2.50)$$

C'est-à-dire l'intersection de tous les cônes duaux des opérandes pris deux à deux.

Ces diverses propriétés permettent de conduire à des algorithmes de calcul de la somme de Minkowski. Ont ainsi été développés : des algorithmes basés sur l'enveloppe convexe **CH** [Rour98], les diagrammes gaussiens [Ghos93], les sommets contributifs [BaDD09], les éventails normaux [TeDe11] ainsi que diverses autres méthodes [FoHa07][Fuku04][VaMa06][WuSD03]. Nous reviendrons par la suite sur la mise en œuvre algorithmique de la somme de Minkowski, en développant la méthode utilisée à l'I2M, à savoir, une méthode basée sur les éventails normaux et la propriété énoncée en (2.50).

2.1.5 Intersection

Considérons deux polyèdres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{R}^n$ définis selon (2.51) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \}; \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}(\mathbf{C}, \mathbf{d}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Cx} \leq \mathbf{d} \}; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ et } \mathbf{d} \in \mathbb{R}^q \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'intersection des deux polyèdres identifie un polyèdre $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ tel que :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ex} \leq \mathbf{f} \}; \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times n} \text{ et } \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{p+q} \quad (2.52)$$

La matrice $\mathbf{E}$ et le vecteur $\mathbf{f}$ sont construits respectivement par concaténation en lignes des deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ et par concaténation des deux vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$. On écrit :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^T \\ c_j^T \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i \\ d_j \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \quad (2.53)$$

Où : a_i^T et c_j^T sont respectivement les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$. b_i et d_j sont respectivement les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes des vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$.

La figure 2-14 illustre un exemple d'intersection de deux polyèdres (polytopes) de $\mathbb{R}^3$.

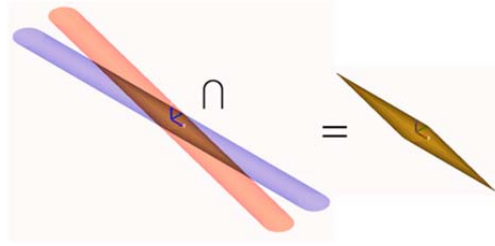


Figure 2-14. Intersection de deux polytopes de $\mathbb{R}^3$ [HoTB13].

2.2 Mise en œuvre en tolérancement géométrique

Nous allons montrer l'application des concepts mathématiques présentés précédemment dans l'outil d'analyse de tolérances développée à l'I2M.

2.2.1 Contraintes géométriques

Quels que soient les procédés de fabrication mis en œuvre, quels que soient les matériaux mis en œuvre, une pièce fabriquée n'est jamais géométriquement parfaite. Toute caractéristique géométrique de forme ou de dimension d'une pièce fabriquée n'est jamais égale à la caractéristique nominale dont elle représente une réalisation physique particulière. D'une façon générale, les variabilités des procédés d'obtention génèrent des écarts géométriques par rapport à un modèle géométrique nominal généré par un outil de Conception et Assisté par Ordinateur (CAO). Ces écarts, également appelés défauts, peuvent compromettre le fonctionnement attendu d'un système mécanique. Le tolérancement consiste à donner des limites admissibles aux défauts à l'aide de spécifications géométriques tout en garantissant le fonctionnement attendu d'un système mécanique. Ces limites sont essentiellement données au travers de zones de tolérances, c'est-à-dire des zones dans lesquelles les surfaces fabriquées doivent être incluses.

Mathématiquement, les limites des déplacements d'une surface dans une zone de tolérance sont définies par un ensemble de contraintes géométriques. Une zone de tolérance ZT est obtenue par un offset extérieur matière et un offset intérieur matière réalisés sur la surface nominale [RoRe86]. Cela permet de caractériser la zone de tolérance par sa dimension t et deux écarts d^{inf} et d^{sup} ($d^{\text{sup}} - d^{\text{inf}} = t$ avec $d^{\text{inf}} \leq d^{\text{sup}}$) la positionnant par rapport à la surface nominale S_0 . Si $|d^{\text{inf}}| = |d^{\text{sup}}| = \frac{t}{2}$, la surface nominale est confondue avec la surface médiane de la zone de tolérance. Chaque surface réelle est modélisée par une surface de substitution (i.e. de forme parfaite) S_1 caractérisant une réalisation physique particulière de la surface nominale S_0 (voir figure 2-15).

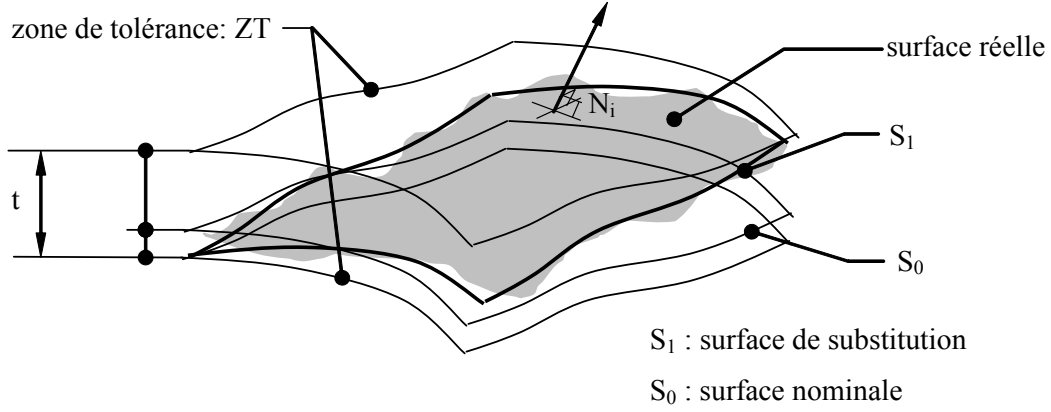


Figure 2-15. Contraintes géométriques d'une surface quelconque [TeDC99].

L'ensemble des contraintes géométriques est défini par la relation suivante [TeDC99] :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_i \in S_0 : d^{\inf} \leq \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i \leq d^{\sup} \quad (2.54)$$

Où $\mathbf{t}_{N_i}$ est le déplacement en translation de S_1 par rapport à S_0 au point N_i , $\mathbf{n}_i$ est le vecteur unitaire normal à la surface S_0 en N_i tel qu'il soit orienté positivement du côté extérieur matière (voir figure 2-16).

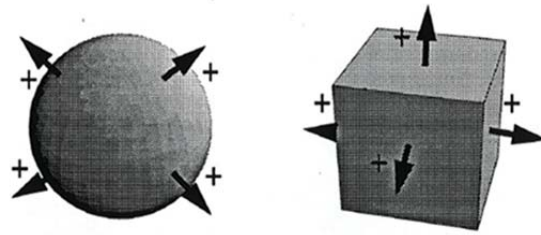


Figure 2-16. Illustration des conventions de signe [Ball95].

La discrétisation de la surface S_0 en n points N_i permet d'obtenir n relations (2.54) avec $1 \leq i \leq n$. Le nombre n de points de discrétisation dépend non seulement du type et de l'étendue de chaque surface mais également de la précision désirée et du temps de calcul nécessaire pour la résolution.

L'utilisation des champs de petits déplacements permet d'écrire la relation (2.54) en tout point M de l'espace euclidien [BMLB96] :

$$\mathbf{t}_{N_i} = \mathbf{t}_M + \mathbf{N}_i \mathbf{M} \wedge \mathbf{r} \quad (2.55)$$

Avec :

$\mathbf{r}$: vecteur rotation de S_1 par rapport à S_0 ,

$\mathbf{t}_M$: vecteur translation de S_1 par rapport à S_0 au point M ,

$\mathbf{N}_i \mathbf{M} \wedge \mathbf{r}$: produit vectoriel entre les deux vecteurs $\mathbf{N}_i \mathbf{M}$ et $\mathbf{r}$.

En développant la relation (2.55) on obtient (2.56) :

$$\mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i = (\mathbf{t}_M + \mathbf{N}_i \mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t}_M + (\mathbf{M} \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t}_M \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Où $\mathbf{y}^T$ est la transposée du vecteur $\mathbf{y}$.

Nous définissons dans une base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ les composantes des vecteurs suivants :

$$\mathbf{t}_M \begin{pmatrix} t_{M-x} \\ t_{M-y} \\ t_{M-z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_i \begin{pmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Cela permet d'écrire la relation (2.56) dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ selon (2.57) :

$$\mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i = (\mathbf{M} \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t}_M = \begin{pmatrix} n_{iz}(y_i - y_M) - n_{iy}(z_i - z_M) \\ n_{ix}(z_i - z_M) - n_{iz}(x_i - x_M) \\ n_{iy}(x_i - x_M) - n_{ix}(y_i - y_M) \\ n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ t_{M-x} \\ t_{M-y} \\ t_{M-z} \end{pmatrix} = a_i^T \mathbf{x} \quad (2.57)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{n}_1 & \cdots & \mathbf{M} \mathbf{N}_i \wedge \mathbf{n}_i & \cdots & \mathbf{M} \mathbf{N}_n \wedge \mathbf{n}_n \\ \mathbf{n}_1 & \cdots & \mathbf{n}_i & \cdots & \mathbf{n}_n \end{pmatrix}^T = (a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 6}, \\ \mathbf{A}'' &= -\mathbf{A}', \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t}_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \\ \mathbf{b}' &= (d^{\sup})_n \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mathbf{b}'' = (-d^{\inf})_n \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Finalement, la relation définissant n contraintes géométriques peut s'écrire selon (2.59).

$$\begin{aligned} S_1 \subseteq ZT &\Leftrightarrow \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i \leq d^{\sup} \text{ et } -\mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i \leq -d^{\inf} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}' \text{ et } \mathbf{A}'' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}'' \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}'' \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

La relation (2.59) permet de conformer (2.54) en une $\mathcal{H}$ -définition d'un polyèdre $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^6$.

Elle définit $2n$ demi-espaces $\overline{H}^-$ avec $1 \leq k \leq 2n$ dont l'intersection caractérise $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}', \mathbf{A}'' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}'' \right\} = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{H'_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{H''_k} \right) \\
&= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\} = \bigcap_{k=1}^{k=2.n} \overline{H_k}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Le polyèdre $\mathcal{P}$ est le polyèdre de $\mathbb{R}^6$ associé aux limites de déplacements d'une surface quelconque (ou complexe). La méthode proposée pour la caractérisation par un polyèdre (suivant les relations (2.59) et (2.60)) est applicable pour tout type de surface.

2.2.1.1 Cas d'une surface plane

Considérons l'exemple de la figure 2-17, une surface nominale plane de contour carré ($b \times b$). La surface réelle est modélisée par une surface de substitution S_1 située dans une zone de tolérance ZT définie par deux plans parallèles distants de t . Dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, les points A, B, C et D, sommets du carré ($b \times b$), sont de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{-b}{2} \quad \frac{+b}{2} \quad 0 \right), \left(\frac{+b}{2} \quad \frac{+b}{2} \quad 0 \right), \left(\frac{-b}{2} \quad \frac{-b}{2} \quad 0 \right) \text{ et } \left(\frac{+b}{2} \quad \frac{-b}{2} \quad 0 \right)$$

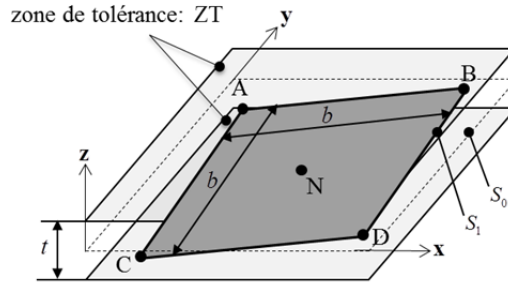


Figure 2-17. Surface plane incluse dans une zone de tolérance.

Les contraintes géométriques caractérisant les limites des déplacements de S_1 dans la zone de tolérance ZT de dimension t sont définies par la relation (2.54) avec $d^{\text{inf}} = -\frac{t}{2}$ et $d^{\text{sup}} = +\frac{t}{2}$. Nous écrivons :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_i \in S_0 : -\frac{t}{2} \leq \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \tag{2.61}$$

Nous choisissons d'exprimer les contraintes en fonction des écarts de translation au point M centre de la surface carré ABCD :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_i \in S_0 : -\frac{t}{2} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{N}_i \mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \tag{2.62}$$

La relation (2.61) peut être simplifiée en prenant en compte seulement les contraintes provenant des sommets du carré ($b \times b$). Nous obtenons :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{t}{2} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{A}\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{B}\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{C}\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{D}\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \end{cases} \quad (2.63)$$

Les contraintes, définies par (2.63), sont par la suite conformées à huit demi-espaces dont l'intersection définit un polyèdre $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^6$ selon la relation suivante :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{M-x}, t_{M-y}, t_{M-z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\} \quad (2.64)$$

Avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b/2 & b/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b/2 & b/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b/2 & -b/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b/2 & -b/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -b/2 & -b/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b/2 & -b/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -b/2 & b/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b/2 & b/2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 6} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \left(\frac{t}{2} \right)_8 \in \mathbb{R}^8 \quad (2.65)$$

Les composantes de petits déplacements, r_x, r_y et t_{M-z} correspondent aux écarts de situation de la surface plane de normale $\mathbf{z}$. Les trois autres composantes correspondent aux degrés d'invariance de la surface et ne sont pas limités car elles sont multipliées par 0 (colonnes 3, 4 et 5 de la matrice A) dans l'expression (2.65).

La figure 2-18 illustre une représentation graphique du polyèdre $\mathcal{P}$ dans l'espace affine construit sur la base (r_x, r_y, t_{M-z}) . Il s'agit d'un octaèdre régulier.

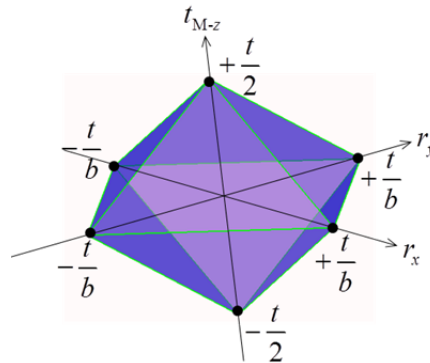


Figure 2-18. Section dans la base (r_x, r_y, t_{M-z}) du polyèdre associé aux limites des déplacements de S_1 dans une zone de tolérance de dimension t .

Remarque 2.7 : Si la surface étudiée S_1 est une surface plane de contour circulaire, le contour est discrétisé en un nombre fini de points pour conserver la linéarité des contraintes géométriques.

De manière générale, le contour de la surface plane étudiée est décomposé en courbes élémentaires. Chaque courbe élémentaire, différente d'un segment de droite, est discrétisée en un nombre fini de points et finalement la plus petite enveloppe convexe des points du contour (extrémités des segments + points de discrétisation) est déterminée.

2.2.1.2 Cas d'une surface cylindrique

Soit maintenant une surface nominale cylindrique modélisée par une surface de substitution S_1 et dont l'élément géométrique (son axe = $[A,B]$) est situé dans une zone de tolérance de type cylindrique de diamètre $\varnothing t$: voir figure 2-19.

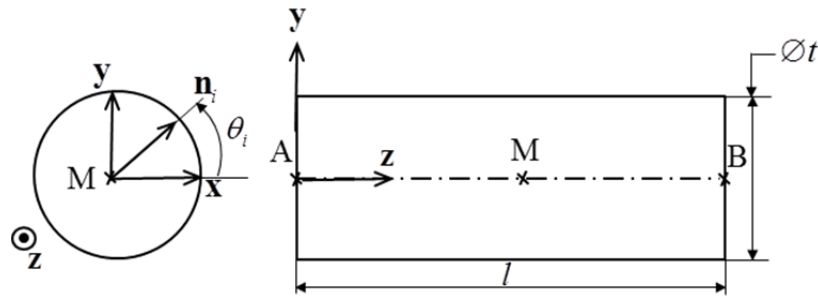


Figure 2-19. Zone de tolérance cylindrique.

L'écriture des contraintes géométriques se fait tel que décrit en (2.54). Pour vérifier l'inclusion de la surface S_1 dans la zone de tolérance, il convient d'exprimer les contraintes en des points situés sur les deux contours circulaires extrêmes du cylindre nominal. Soit n le nombre d'occurrences de discrétisation sur un contour. Ecrire ces contraintes géométriques en ces points selon les normales à la surface, revient à écrire ces mêmes contraintes aux deux extrémités de l'axe, c'est-à-dire aux points A et B. Alors :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall 0 \leq i < n : \begin{cases} -\frac{t}{2} \leq \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{n}_i \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq \mathbf{t}_B \cdot \mathbf{n}_i \leq +\frac{t}{2} \end{cases} \quad (2.66)$$

Avec :

$$\mathbf{n}_i = \cos \theta_i \cdot \mathbf{x} + \sin \theta_i \cdot \mathbf{y}$$

$$\theta_i = i \frac{\pi}{n}$$

La relation (2.66) peut être écrite au point M, milieu de $[A,B]$:

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall 0 \leq i < n : \begin{cases} -\frac{t}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left(t_{M-x} - \frac{l}{2} \cdot r_y \right) + \sin \theta_i \cdot \left(t_{M-y} + \frac{l}{2} \cdot r_x \right) \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left(t_{M-x} + \frac{l}{2} \cdot r_y \right) + \sin \theta_i \cdot \left(t_{M-y} - \frac{l}{2} \cdot r_x \right) \leq +\frac{t}{2} \end{cases}, \theta_i = i \frac{\pi}{n} \quad (2.67)$$

Finalement, l'intersection de ces demi-espaces de $\mathbb{R}^6$ définit un polyèdre $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ avec :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) \in \mathbb{R}^{4n \times 6} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \left(\frac{t}{2} \right)_{4n} \in \mathbb{R}^{4n} \quad (2.68)$$

Où :

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} +\sin \theta_i \cdot \frac{l}{2} & -\cos \theta_i \cdot \frac{l}{2} & 0 & +\cos \theta_i & +\sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \frac{l}{2} & +\cos \theta_i \cdot \frac{l}{2} & 0 & -\cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \frac{l}{2} & +\cos \theta_i \cdot \frac{l}{2} & 0 & +\cos \theta_i & +\sin \theta_i & 0 \\ +\sin \theta_i \cdot \frac{l}{2} & -\cos \theta_i \cdot \frac{l}{2} & 0 & -\cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \quad (2.69)$$

Une section du polyèdre $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ dans la base (r_y, t_{M-x}, t_{M-y}) est illustrée en figure 2-20 pour différentes finesses de discrétisation.

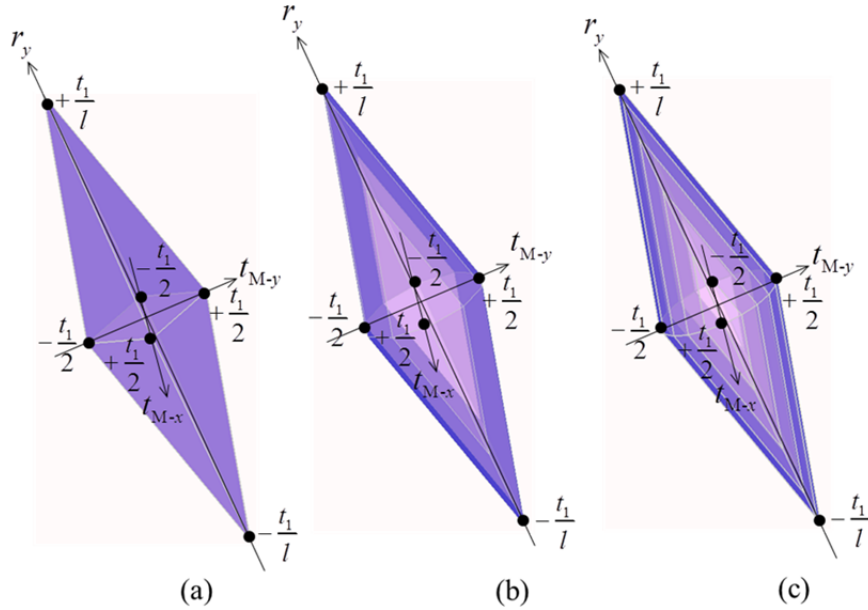


Figure 2-20. Section de la définition du polyèdre géométrique $\mathcal{P}$ dans la base (r_y, t_{M-x}, t_{M-y}) avec : (a) 4 points de discrétisation, (b) 10 points de discrétisation et (c) 20 points de discrétisation.

2.2.2 Contraintes de contact

D'une manière analogue aux contraintes géométriques décrites en §2.2.1, les non interférences des surfaces potentiellement en contact sont caractérisés par des contraintes de contact.

La relation (2.54) peut être caractérisée telle que :

$$\forall N_i \in E_c : d^{\inf} \leq \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i \leq d^{\sup} \quad (2.70)$$

Avec :

- E_c : Élément de contact qui peut être surfacique, linéique ou ponctuel,
- $\mathbf{t}_{N_i}$: déplacement en translation au point N_i de la surface 1 par rapport à la surface 2 entre deux pièces potentiellement en contact,
- $\mathbf{n}_i$: vecteur unitaire normal au plan tangent aux deux surfaces au point N_i , orienté vers l'extérieur matière (cf. Figure 2-16) par rapport à la surface 2,
- $d^{\inf} = -\frac{J}{2}$ et $d^{\sup} = +\frac{J}{2}$ dans le cas où les liaisons sont en contact bilatéral (généralement cas d'un pivot glissant, linéaire annulaire, rotule) étant J ($J = \text{dimension alésage} - \text{dimension arbre}$). le jeu dans la liaison La définition de J est conforme à la définition indiquée selon la norme ISO [Iso88]. Dans ce cas, un polyèdre dit de contact est défini de la même façon qu'en (2.59) et (2.60) pour un polyèdre géométrique.

Considérons par exemple, le cas d'un contact pivot glissant où l'élément de contact est une surface cylindrique : voir figure 2-21. Les non-interférences entre les deux surfaces en contact sont définies par des contraintes de contact écrites d'une manière similaire aux contraintes géométriques d'un cylindre. Soit l'équation (2.71) en accord avec (2.66) telle que:

$$\begin{cases} -\frac{J}{2} \leq \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{n}_i \leq +\frac{J}{2} \\ -\frac{J}{2} \leq \mathbf{t}_B \cdot \mathbf{n}_i \leq +\frac{J}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}_i = \cos \theta_i \cdot \mathbf{x} + \sin \theta_i \cdot \mathbf{y}, \quad \theta_i = i \frac{\pi}{n} \quad (2.71)$$

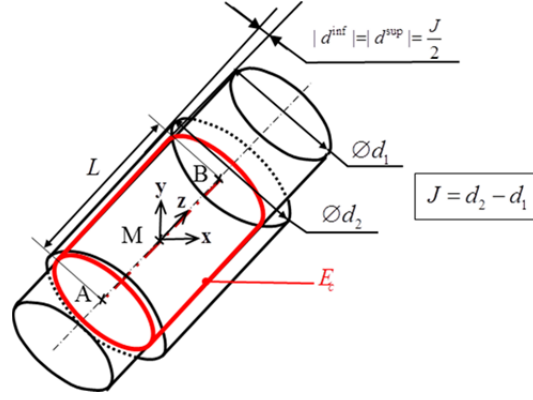


Figure 2-21. Contact pivot glissant.

Le développement de l'équation (2.71) et son écriture au point M milieu de $[A,B]$ permet d'aboutir à la définition d'un polyèdre $\mathcal{P}$ de contact selon (2.72).

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{M-x}, t_{M-y}, t_{M-z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$$

Avec:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) \in \mathbb{R}^{4n \times 6} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \left(\frac{t}{2} \right)_{4n} \in \mathbb{R}^{4n}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} +\sin \theta_i \cdot \frac{L}{2} & -\cos \theta_i \cdot \frac{L}{2} & 0 & +\cos \theta_i & +\sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \frac{L}{2} & +\cos \theta_i \cdot \frac{L}{2} & 0 & -\cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cdot \frac{L}{2} & +\cos \theta_i \cdot \frac{L}{2} & 0 & +\cos \theta_i & +\sin \theta_i & 0 \\ +\sin \theta_i \cdot \frac{L}{2} & -\cos \theta_i \cdot \frac{L}{2} & 0 & -\cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \quad (2.72)$$

La figure 2-22 illustre une section dans la base (r_z, t_{M-y}, t_{M-z}) du polyèdre de contact ainsi défini pour 20 directions de discrétisation à chaque extrémité.

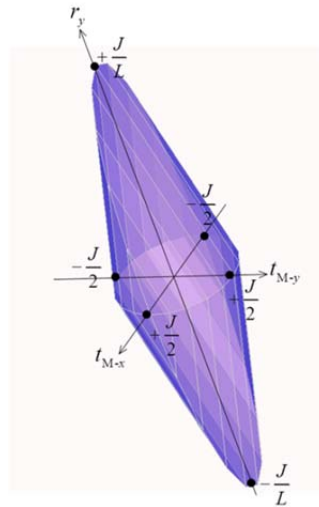


Figure 2-22. Section dans la base (r_z, t_{M-y}, t_{M-z}) du polyèdre de contact de $\mathbb{R}^6$.

Dans le cas des liaisons à contact unilatéral (généralement le cas des liaisons : ponctuelle, linéaire rectiligne ou appui plan). $d^{\text{inf}} = 0$ et d^{sup} n'est pas défini. $d^{\text{inf}} = 0$ définit les contraintes de non-interpénétration entre les surfaces en contact (cf. Figure 2-23).

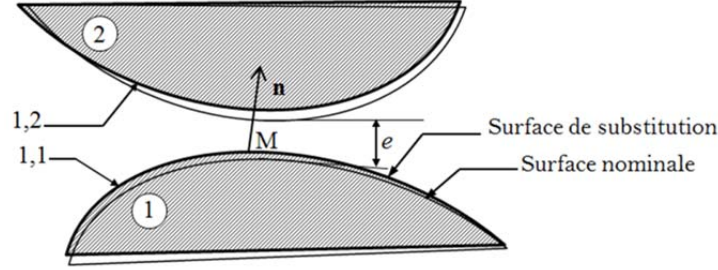


Figure 2-23. Contrainte de non-interpénétration [Dant00].

Il en résulte dans ce cas que seules les relations $d^{\text{inf}} \leq \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i$ définies en (2.59) sont générées par les contraintes de contact. Pour n points de l'élément de contact, n contraintes de contact sont définies. Le polyèdre de contact (unilatéral) $\mathcal{P}_2$ associé est défini par l'équation suivante :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}'' \mathbf{x} \leq \mathbf{b}'' \right\} = \bigcap_{k=1}^{k=n} H''_k \quad (2.73)$$

Pour $d^{\text{inf}} = 0$, on a $\mathbf{b}'' = \mathbf{0}$.

2.2.3 Modélisation d'une spécification géométrique par un polyèdre

Dans ce cas, les contraintes sont spécifiées par rapport à une surface de références et non plus par rapport à une surface nominale comme présenté en §2.2.1.

2.2.3.1 Spécification de position

La caractérisation d'une spécification de position par des polyèdres s'effectue selon la méthode décrite en §2.2.1. Les contraintes associées peuvent être écrites par la même relation (2.54) avec $\mathbf{t}_{N_i}$ définit le déplacement en translation entre la surface S_1 (élément tolérancé) et la surface S_0 (référence spécifiée confondue avec la surface de substitution) au point N_i .

Pour une surface nominale plane de normale $\mathbf{z}$ (avec une zone de tolérance définie par deux plans parallèles), les contraintes associées à la spécification de position sont écrites aux quatre points du contour comme dans la figure 2-17. Un polyèdre $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^6$ est défini tel que $\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{M-x}, t_{M-y}, t_{M-z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$.

La figure 2-24 illustre une section du polyèdre $\mathcal{P}$ dans la base (r_x, r_y, t_{M-z}) .

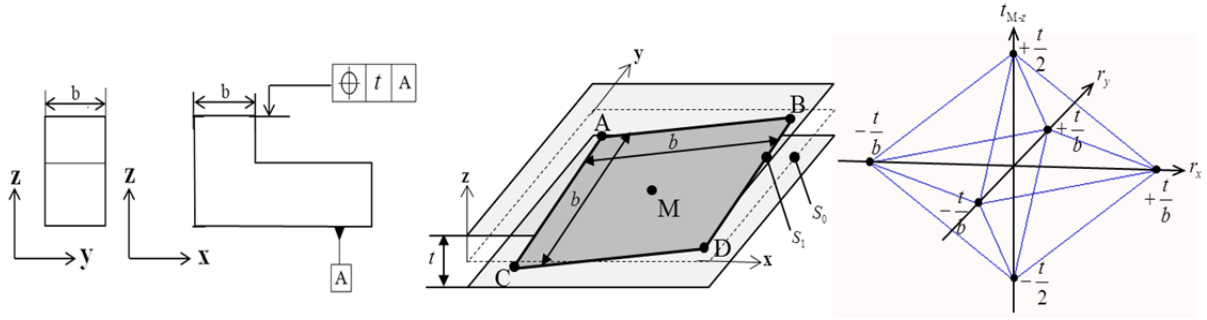


Figure 2-24. Section dans la base (r_x, r_y, t_{M-z}) du polyèdre associé à une spécification de position d'une surface plane dans une zone de tolérance définie par deux plans parallèles.

2.2.3.2 Spécification d'orientation des surfaces planes et des surfaces cylindriques

Dans le cas d'une spécification d'orientation sur une surface tolérancé S_1 de type plane ou cylindrique, les contraintes peuvent mathématiquement être écrites selon la relation (2.74):

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_i, N_j \in S_1, -t \leq (\mathbf{t}_{N_i} - \mathbf{t}_{N_j}) \cdot \mathbf{n} \leq +t \quad (2.74)$$

Si la zone de tolérance est définie par deux plans parallèles, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal au plan médian. Si la zone de tolérance est un cylindre, $\mathbf{n}$ est orthogonal à l'axe de la zone de tolérance. Il est écrit en fonction des coordonnées polaires.

La relation (2.74) peut être simplifiée en (2.75).

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N_i, N_j \in S_1, i \neq j : -t \leq (\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \leq +t \quad (2.75)$$

Soit :

$$\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \begin{pmatrix} x_{N_j} - x_{N_i} \\ y_{N_j} - y_{N_i} \\ z_{N_j} - z_{N_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{r} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

L'équation (2.75) peut être reformulée par (2.76) :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (y_{N_j} - y_{N_i})n_z - (z_{N_j} - z_{N_i})n_y \\ (z_{N_j} - z_{N_i})n_x - (x_{N_j} - x_{N_i})n_z \\ (x_{N_j} - x_{N_i})n_y - (y_{N_j} - y_{N_i})n_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (z_{N_j} - z_{N_i})n_y - (y_{N_j} - y_{N_i})n_z \\ (x_{N_j} - x_{N_i})n_z - (z_{N_j} - z_{N_i})n_x \\ (y_{N_j} - y_{N_i})n_x - (x_{N_j} - x_{N_i})n_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ t_{N_i N_j - x} \\ t_{N_i N_j - y} \\ t_{N_i N_j - z} \end{pmatrix} = (a_k \quad -a_k)^T \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ t_{N_i N_j - x} \\ t_{N_i N_j - y} \\ t_{N_i N_j - z} \end{pmatrix} \leq (t) \\
& (2.76)
\end{aligned}$$

Pour une discrétisation en n couples de points (N_i, N_j) , la relation (2.76) peut être conforme à une caractérisation d'un polyèdre de $\mathbb{R}^6$ suivant.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{N_i N_j - x}, t_{N_i N_j - y}, t_{N_i N_j - z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \right\} \\
& \text{avec:} \\
& \mathbf{A} = (a_1 \cdots a_k \cdots a_n \quad -a_1 \cdots (-a_k) \cdots (-a_n))^T \in \mathbb{R}^{2n \times 6} \\
& \mathbf{b} = (t)_{\mathbb{R}^{2n}} \\
& (2.77)
\end{aligned}$$

Considérons le cas de la figure 2-25, une spécification de parallélisme dans une zone de tolérance définie par deux plans parallèles. La surface tolérancée est définie par un contour rectangulaire dont les bords sont A, B, C et D.

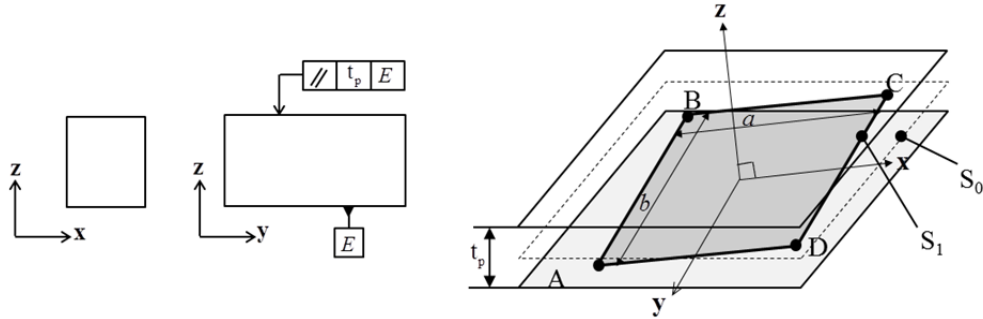


Figure 2-25. Spécification de parallélisme d'un plan de contour rectangulaire.

Les couple de points retenus pour exprimer mathématiquement la spécification sont les couples de points les plus défavorables, dans ce cas, les couples de points diagonalement opposés.

Nous écrivons :

$$S_1 \subseteq ZT \Leftrightarrow \begin{cases} -t_p \leq (\mathbf{AC} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +t_p \\ -t_p \leq (\mathbf{BD} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{z} \leq +t_p \end{cases} \quad (2.78)$$

Ce qui équivaut à $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & +a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +b & +a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \text{ et } \mathbf{b} = (t_p)_{\mathbb{R}^4} \quad (2.79)$$

La figure 2-26 illustre une section dans la base (r_x, r_y) (les 4 autres directions ne sont pas bornées) du polyèdre associé à la spécification d'orientation (parallélisme) d'une surface plane de contour rectangulaire dans une zone de tolérance définie par deux plans parallèles distant de t_p .

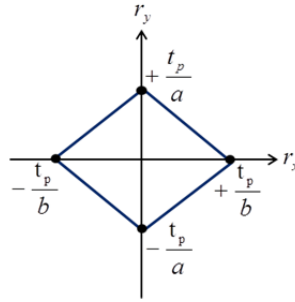


Figure 2-26. Section dans la base (r_x, r_y) du polyèdre associé à une spécification d'orientation d'une surface plane.

2.2.3.3 Analyse de tolérances d'une pièce

A une surface tolérancée peuvent être attribuées plusieurs spécifications géométriques (de position et/ou d'orientation). Nous avons montré que chaque spécification peut être modélisée par un polyèdre de $\mathbb{R}^6$. La synthèse de deux spécifications définies entre les mêmes surfaces d'une pièce est modélisée par l'intersection des polyèdres associés à chaque spécification, contrairement à l'approche T-Map® évoquée dans le premier chapitre où une somme de Minkowski est appliquée selon un processus particulier.

La figure 2-27 illustre l'exemple d'une surface spécifiée par une localisation et un parallélisme. Le polyèdre résultant des deux spécifications est représenté en figure 2-28.

Nous reviendrons en détail sur l'intersection pour la mise en œuvre des chaînes de cotes 3d dans le chapitre suivant lorsque nous aborderons le concept des polytopes.

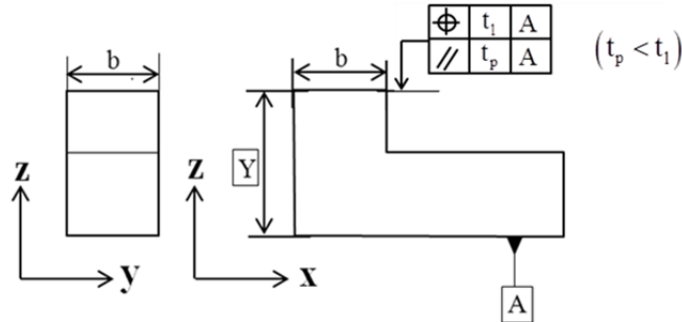


Figure 2-27. Parallélisme et localisation entre deux mêmes surfaces.

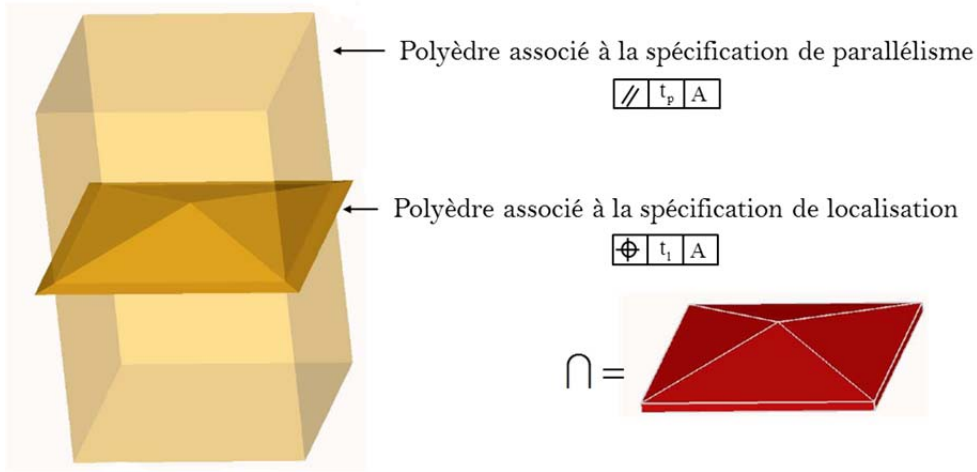


Figure 2-28. Polyèdre associé à la synthèse de deux spécifications.

2.2.4 Condition fonctionnelle

La position relative entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme est limitée par une (ou des) condition(s) (ou exigence(s)) fonctionnelle(s) à respecter dans le cadre de l'analyse de tolérances.

Ces conditions fonctionnelles consistent à ce qu'un (ou plusieurs) élément(s) géométrique (s) restent inclus dans une zone de tolérance dont la position peut être contrainte par rapport à un (ou plusieurs) autre(s) élément(s) [TeDC99][RoLi99][Dant00].

Les conditions fonctionnelles sont alors traduites par des inégalités caractérisant des contraintes d'inclusion dans la zone de tolérance. Ces inégalités qui sont linéarisées comme précédemment forment des demi-espaces conduisant à la définition de polyèdres fonctionnels. Dans ce travail on se limite au cas où les jeux sont défavorables. Dans le cas contraire, les opérations sur les polyèdres ne sont pas les mêmes. Une opération de différence ("sweeping" [Peti04]) n'a pas été prise en compte.

L'analyse de tolérances consiste donc à vérifier l'inclusion définie par (2.80) :

$$\left(\begin{array}{c} \bigcap_{i,j} \\ \text{et/ou} \\ \sum_{i,j} \end{array} \left(\begin{array}{c} \mathcal{P}_i^{\text{géométrique}} \\ \mathcal{P}_j^{\text{contact}} \end{array} \right) \right) \subseteq (\mathcal{P}^{\text{fonctionnel}}) \quad (2.80)$$

Considérons l'exemple de la figure 2-29. Une condition fonctionnelle est définie au point M sur la distance d entre l'axe de l'arbre et la surface plane du support du mécanisme telle que :

$$d_{\min} \leq d \leq d_{\max} \quad (2.81)$$

La relation (2.81) peut s'écrire encore selon :

$$dev_{\inf} \leq dev \leq dev_{\sup} \quad (2.82)$$

Avec d_0 la valeur nominale de d et :

$$\begin{aligned} dev &= d - d_0 \\ dev_{\inf} &= d_{\min} - d_0 \\ dev_{\sup} &= d_{\max} - d_0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

La variable dev est l'écart en translation suivant y du point M de l'arbre 3 par rapport au support 1, limité par une borne inférieure $dev_{\inf}$ et une borne supérieure $dev_{\sup}$.

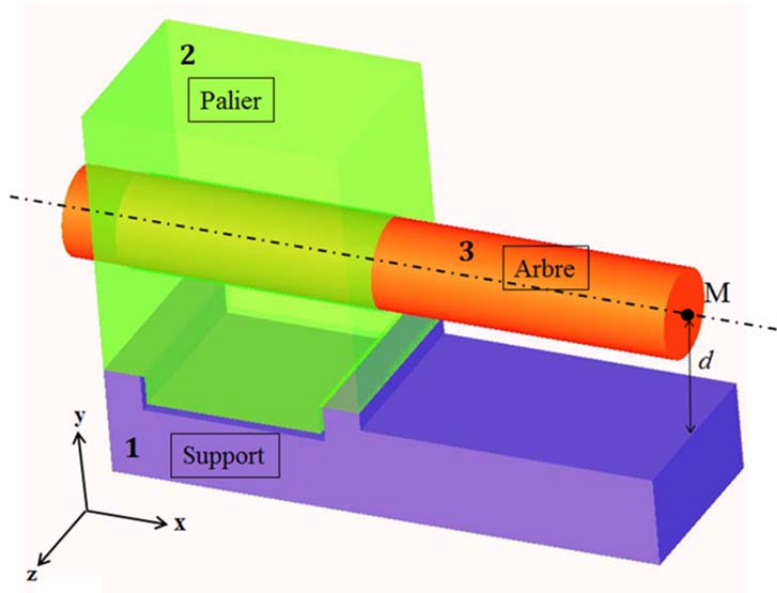


Figure 2-29. Définition d'une condition fonctionnelle.

2.3 Application : analyse de tolérances par des polyèdres

Nous proposons dans cette partie une application des opérations sur des polyèdres mises en œuvre dans la simulation du respect d'une condition fonctionnelle du système mécanique illustré dans la figure 2-29. Ce système est constitué de trois pièces : support 1, palier 2 et arbre 3. Aucun degré de mobilité n'est autorisé entre le support 1 et le palier 2 (le degré de mobilité en translation selon z est bloqué par une vis non représentée). Deux degrés de mobilité sont permis entre l'arbre 3 et le palier 2 : une rotation et une translation suivant x .

L'objectif de cette application est de simuler la conformité du système mécanique au regard de la condition fonctionnelle CF présentée précédemment étant donné des variations géométriques allouées aux pièces 1, 2 et 3. Les pièces 1, 2 et 3 sont uniquement constituées de surfaces planes et cylindriques. On note i,j la surface j de la pièce i .

Les surfaces 2,4 et 3,4 sont cylindriques ; les surfaces 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 2,1 ; 2,2 et 2,3 sont des surfaces planes. La structure topologique du système mécanique est définie par un graphe de contacts voir figure 2-30.

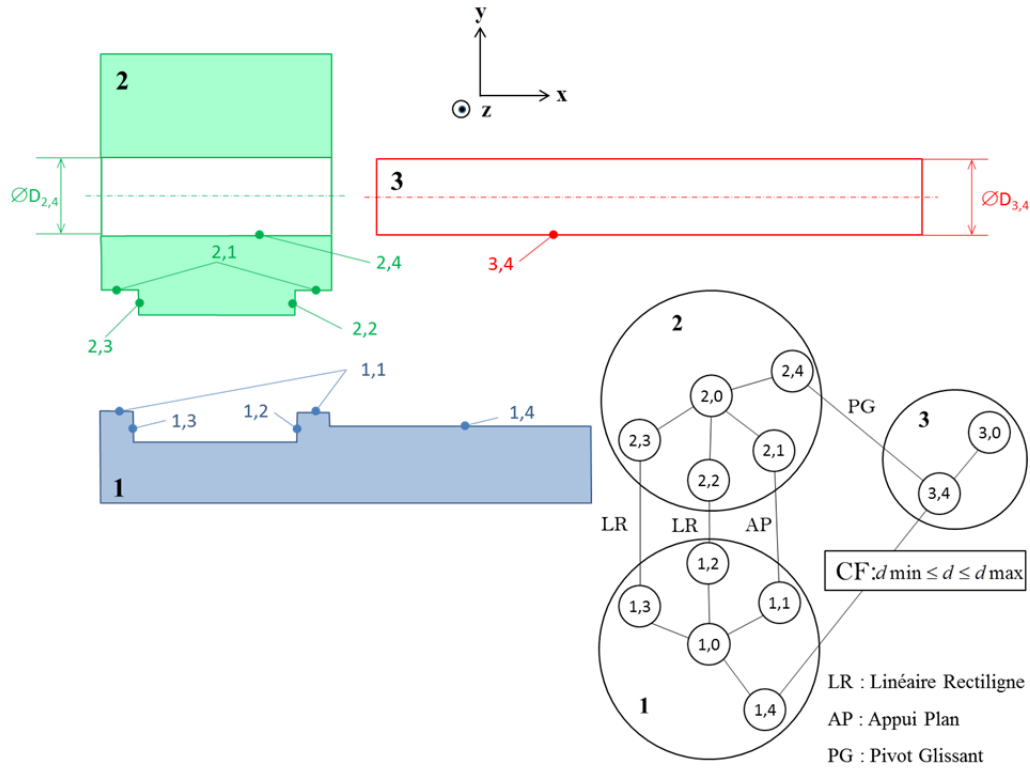


Figure 2-30. Structure topologique du mécanisme.

A chaque surface i,j correspond un sommet i,j du graphe. Aux modèles nominaux des pièces 1, 2 et 3 correspondent respectivement les sommets 1,0 ; 2,0 et 3,0 : voir figure 2-30.

Une arête connectée à un sommet désigné $i,0$ ($i= 1, 2$ ou 3) correspond à des écarts de position d'une surface i,j par rapport à sa position nominale.

Les pièces 1, 2 et 3 sont mises en position par quatre spécifications de contacts telles que :

- le contact entre les surfaces 1,1 et 2,1 est « unilatéral » de type appui plan, élément de contact plan de normale $\mathbf{y}$, attribut de contact glissant (i.e. le jeu J_1 entre 1,1 et 2,1 est nul).
- les deux contacts entre les surfaces 1,2/2,2 et 1,3/2,3 sont unilatéraux, de type linéaire rectiligne, élément de contact droite parallèle à $\mathbf{z}$ contenue dans un plan de normale $\mathbf{x}$, attribut de contact : flottant.
- le contact entre 3,4 et 2,4 est bilatéral, de type pivot glissant, élément de contact cylindre de vecteur directeur $\mathbf{x}$, attribut de contact flottant (le jeu J_4 entre 2,4 et 3,4 est tel que : $J_4 = D_{2,4} - D_{3,4}$ avec $J_4 > 0$).

Un polyèdre issu des contraintes géométriques est associé à chaque arête du graphe connectée à un sommet désigné $i,0$ ($i= 1, 2$ ou 3). Ce polyèdre caractérise les variations de

position d'une surface i,j par rapport à sa surface nominale à l'intérieur d'une zone de tolérance de dimension $t_{i,j}$.

Pour une surface plane i,j , $t_{i,j}$ est la distance entre deux plans parallèles disposés symétriquement par rapport à un plan nominal comme cela a été présenté en figure 2-17.

Pour une surface cylindrique, $t_{i,j}$ est le diamètre d'un cylindre coaxial avec l'axe du cylindre nominal correspondant.

Une arête entre deux surfaces de pièces distinctes correspond aux écarts de position entre deux surfaces potentiellement en contact. Un polyèdre de contact est associé à chaque arête connectée entre deux surfaces de pièces distinctes.

Les différents points (I, J, L, M, N ...) illustrés sur le système mécanique dans la permettent de définir les contraintes géométriques et les contraintes de contacts afin de caractériser les polyèdres opérands.

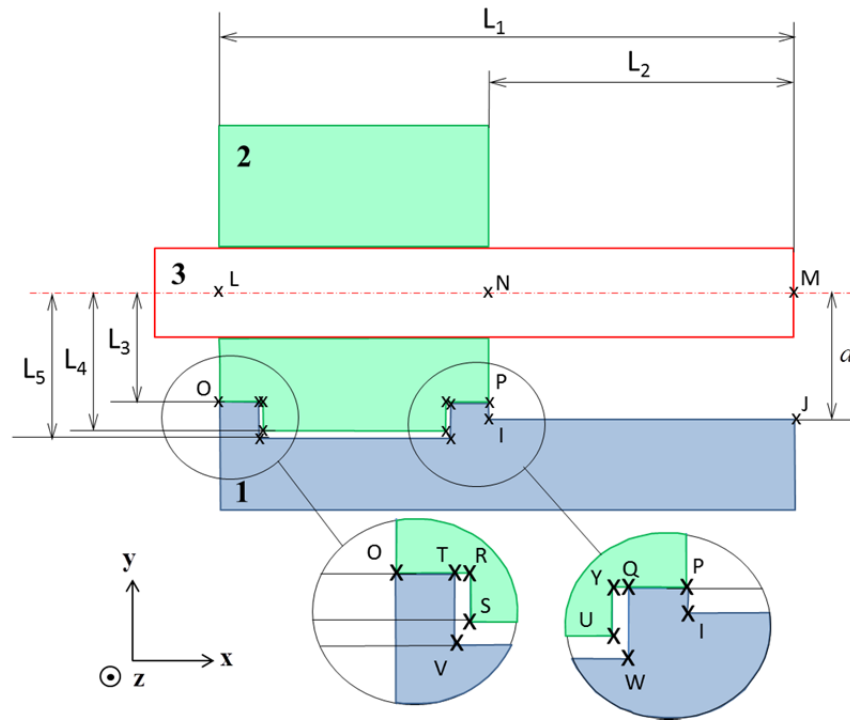


Figure 2-31. Définitions des points d'expression des contraintes.

On désigne par $\mathcal{P}_{i,j/i,0}$ le polyèdre modélisant les contraintes géométriques qui caractérisent les variations de position entre la surface i,j et son modèle nominal $i,0$.

On désigne par $\mathcal{P}_{i,j/u,v}$ le polyèdre de contact caractérisant les variations de position entre la surface i,j et la surface u,v .

Les contraintes géométriques et les contraintes de contact sont détaillées respectivement dans le tableau 3-4 et le tableau 3-5 du chapitre suivant. Elles définissent les différents polyèdres opérands.

La structure topologique du graphe de contacts permet de définir les opérations requises entre les polyèdres opérandes pour déterminer le polyèdre $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ caractérisant les variations de position entre les surfaces 3,4 et 1,4.

Le polyèdre $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ est défini par :

$$\mathcal{P}_{3,4/1,4} = \mathcal{P}_{3,4/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/2,0} \oplus \left[\begin{array}{c} (\mathcal{P}_{2,0/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,1/1,0}) \\ \cap \\ (\mathcal{P}_{2,0/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/1,2} \oplus \mathcal{P}_{1,2/1,0}) \\ \cap \\ (\mathcal{P}_{2,0/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/1,3} \oplus \mathcal{P}_{1,3/1,0}) \end{array} \right] \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,4} \quad (2.84)$$

La conformité du système mécanique est vérifiée par l'inclusion du polyèdre calculé $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ dans le polyèdre fonctionnel $\mathcal{P}_{3,4/1,4}^f$ selon (2.85) résultant de la condition CF définie par (2.82) et (2.83).

$$\mathcal{P}_{3,4/1,4} \subseteq \mathcal{P}_{3,4/1,4}^f \quad (2.85)$$

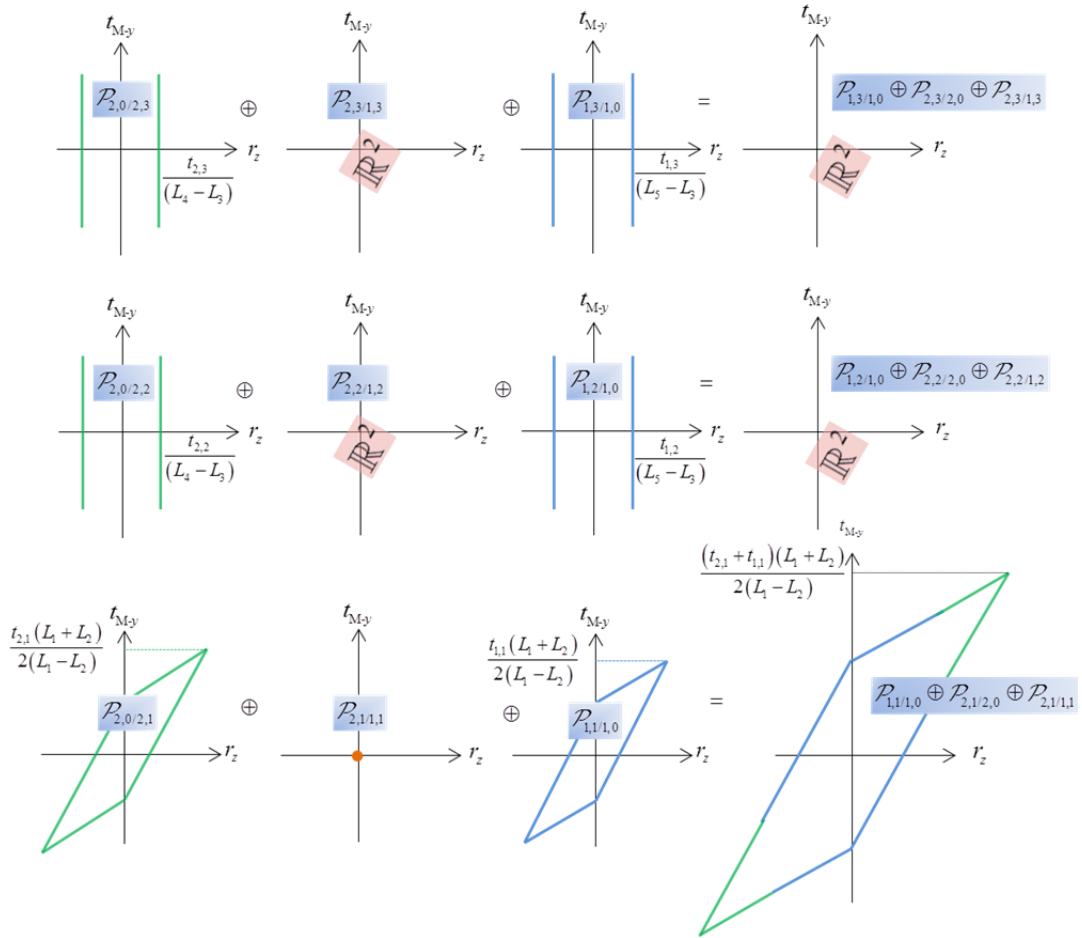


Figure 2-32. Polyèdres opérandes des architectures en parallèle du graphe.

Pour simplifier les développements sur les opérations définissant les polyèdres opérands, on se limite dans cette partie à la section dans la base (r_z, t_{M-y}) . Tous les polyèdres sont exprimés au même point M, lieu d'expression de la condition fonctionnelle. Chaque polyèdre issu de contraintes géométriques est représenté par la même couleur que la pièce associée. Les polyèdres de contacts sont représentés en jaune : voir figure 2-32 et figure 2-33.

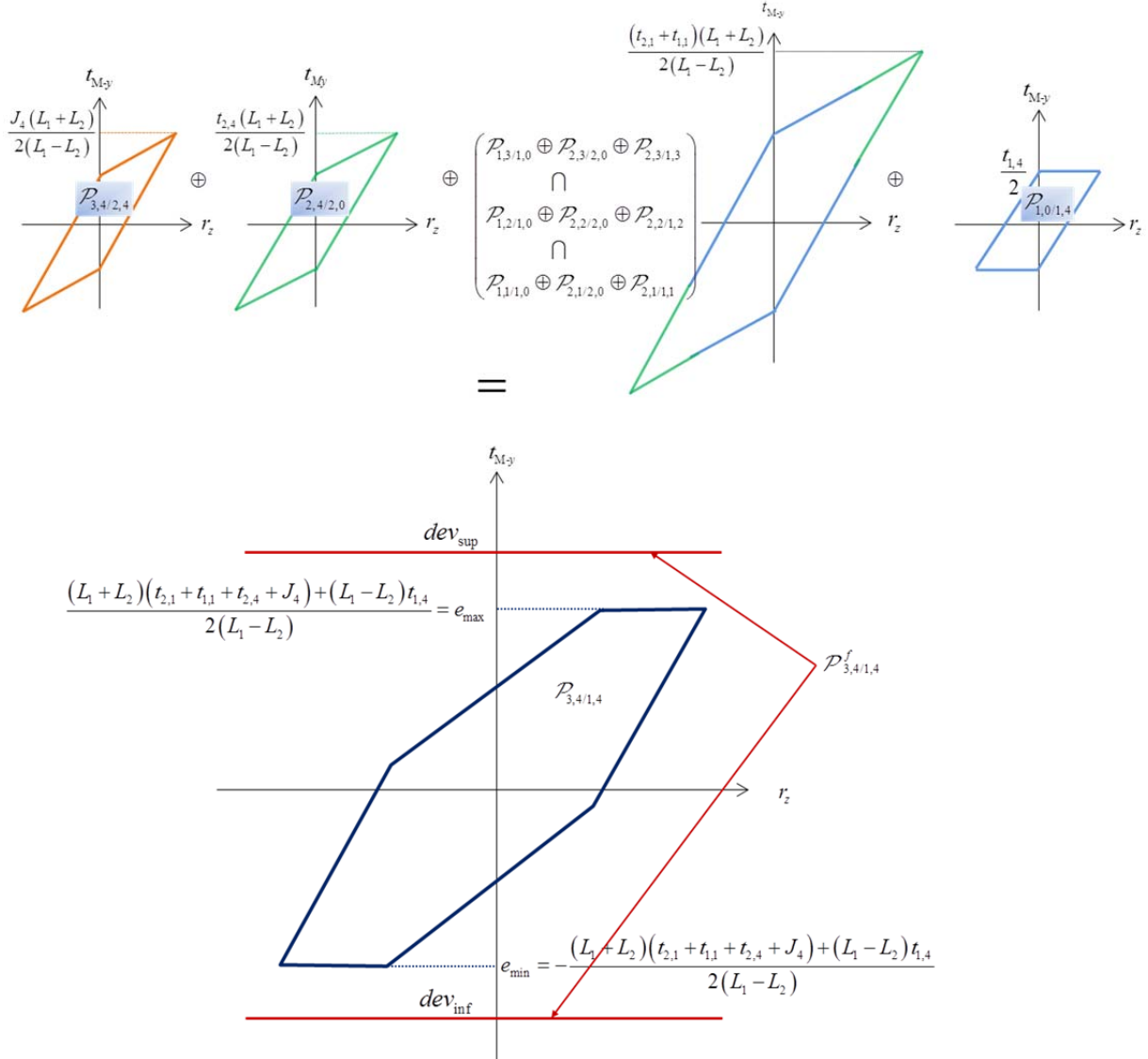


Figure 2-33. Simulation du respect de la condition fonctionnelle par des opérations sur des polyèdres.

2.4 Problématique des opérations sur des polyèdres

Précédemment, nous avons montré que l'analyse de tolérances d'une chaîne de cotes peut être réalisée par des opérations sur des polyèdres (géométriques et de contact), c'est-à-dire des ensembles généralement non bornés de $\mathbb{R}^6$. Ceci est dû au degré d'invariance d'une surface ou au degré de mobilité d'une liaison caractérisant des déplacements théoriquement illimités [CIRS95][GiDu93].

Cependant, la somme de Minkowski des polyèdres de $\mathbb{R}^n$ conduit à des algorithmes complexes car les polyèdres sont ouverts et eux-mêmes constitués de faces ouvertes. Pour pallier à ce problème, nous proposons de transformer les ensembles de contraintes manipulés en ensembles bornés. Cela consiste à borner les polyèdres opérands en polytopes opérands. Un polytope est par définition un polyèdre borné.

La transformation d'un polyèdre en un polytope repose sur l'adjonction de demi-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^6$ que nous appellerons demi-espaces "bouchons" qui permettent de fermer les polyèdres.

Des opérations sur les polytopes opérands sont alors mises en œuvre pour l'analyse de tolérances. La détermination de la position relative entre deux surfaces d'un système mécanique ne repose alors que sur des opérations sur des polytopes opérands générant un polytope calculé.

La vérification du respect d'une exigence fonctionnelle (paragraphe §2.2.4) repose sur l'inclusion du polytope calculé dans le polyèdre fonctionnel.

3 Prise en compte des déplacements non bornés dans l'analyse de tolérances

Ce chapitre introduit la notion de demi-espaces "bouchons" adjoints aux ensembles de demi-espaces définissant les polyèdres (géométriques et de contact) afin de les conformer à des polytopes. Finalement, seuls des polytopes ou ensembles bornés seront manipulés. La position relative entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme est déterminée uniquement par des opérations sur des polytopes. La problématique de ce chapitre est de montrer comment sont adjoints ces demi-espaces bouchons et d'étudier leurs influences sur la topologie des polytopes calculés au travers des sommations et intersections pour simuler le respect des exigences fonctionnelles.

3.1 Identification de polytopes dans $\mathbb{R}^6$

Dans cette partie, sont définis les polytopes de dimensions 6 mis en œuvre en tolérancement géométrique. La transformation des polyèdres en polytopes est motivée par la complexité algorithmique des opérations effectuées sur les polyèdres afin de modéliser les chaînes de cotes. Désormais, tout ensemble de contraintes sera conformé en polytope opérande de $\mathbb{R}^6$.

3.1.1 Polytope opérande associé aux contraintes géométriques

Les polyèdres géométriques définis précédemment par (2.60) ne sont en général pas bornés car les surfaces ont en général des degrés d'invariance [CRSV98]. Le degré d'invariance d'une surface sera noté d_{inv} par la suite. Ces polyèdres ne sont donc pas des polytopes de $\mathbb{R}^6$.

Dans cette étude, nous proposons de borner ces polyèdres par l'adjonction de m demi-espaces $\overline{Hc_k^-}$, appelés demi-espaces " bouchons ", à l'ensemble des demi espaces induits par les contraintes géométriques. Le degré d'invariance d'une surface dépend de la classe de la surface [CRSV98]. Un degré d'invariance caractérise un déplacement laissant globalement invariant la surface tolérancée dans l'espace euclidien. Nous proposons de borner ce déplacement par deux limites caractérisées par deux demi-espaces bouchons. Par conséquent, deux demi-espaces bouchons par degré d'invariance sont adjoints aux demi-espaces définissant le polyèdre caractérisant l'ensemble des contraintes géométriques (voir tableau 3-1). De manière générale dans $\mathbb{R}^6$, le polytope géométrique issu de cette adjonction de $m = 2.d_{inv}$ demi-espaces bouchons est défini par l'expression :

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{k=1}^{k=2.n} \overline{H_k^-} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=2.d_{inv}} \overline{Hc_k^-} \right) \quad (3.1)$$

Où : d_{inv} est le degré d'invariance de la surface.

Remarque 3.1 : le mot " bouchon " a été traduit par " cap " en anglais. L'indice " c " pour les demi-espaces bouchons provient de l'initiale de " cap ".

Les demi-espaces bouchons sont des demi-espaces adjoints permettant de conformer un polyèdre de $\mathbb{R}^6$ à un polytope de $\mathbb{R}^6$ tout en conservant la topologie du polyèdre, c'est-à-dire les faces support du polyèdre.

Ce polytope caractérise les limites :

- des déplacements de la surface à l'intérieur d'une zone de tolérance,
- des déplacements laissant globalement invariant la surface limités par les demi espaces bouchons.

Classes de surface	Degrés d'invariance	Nombre de demi-espaces bouchons
Plane	3	6
Cylindrique	2	4
Sphérique	3	6
Prismatique	1	2
Révolution	1	2
Hélicoïdale	1	2
Quelconque	0	0

Tableau 3-1. Nombre de demi-espaces bouchons en fonction de la classe de surface.

Les demi-espaces identifiés par la relation (3.1) sont décrits par (3.2) :

$$\begin{aligned}\overline{H_k}^- &= \mathbf{a}_k^T \mathbf{x} \leq b_k, \quad b_k = d^{\sup} \quad \text{ou} \quad b_k = -d^{\inf} \\ \overline{Hc_k}^- &= \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \leq C, \quad C \in]0, +\infty[\end{aligned} \quad (3.2)$$

Les seconds membres des demi-espaces correspondent respectivement aux distances de leurs hyperplans par rapport à l'origine des déplacements, voir figure 3-1.

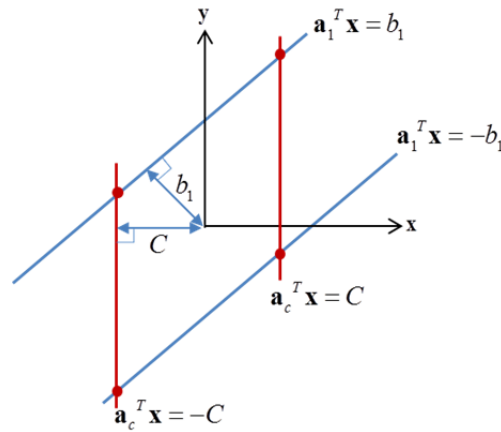


Figure 3-1. Définition de demi-espaces bouchons.

Le second membre d'un demi-espace généré par une contrainte géométrique dépend de $d^{\sup}$ ou de $d^{\inf}$, c'est à dire de la dimension de la zone de tolérance t et de la position de la zone de tolérance par rapport à la surface nominale.

Le second membre d'un demi-espace bouchon $\overline{Hc_k}^-$, identifié C , est une valeur strictement positive.

L'introduction des demi-espaces bouchons a pour seul objectif de faciliter le calcul des sommes et des intersections de polyèdres (ensembles non bornés) en les transformant en polytopes (ensembles bornés). La valeur de C doit être suffisamment grande pour ne pas influencer le résultat des opérations successives. Le choix de la valeur de C sera étudié dans la suite du chapitre.

Les coefficients $\mathbf{c}_k$ dépendent des classes des surfaces et de leurs éléments de situation.

Une base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est associée à chaque surface selon les axes de déplacements la laissant globalement invariante. Les demi-espaces bouchons permettant de les limiter sont définis à partir de ces axes : voir tableau 3-2.

Considérons le cas de la figure 3-2(a) : une surface plane où $d_{inv} = 3$. Dans $\mathbb{R}^6$, $2.d_{inv} = 6$ demi-espaces bouchons sont au minimum requis pour borner l'intersection des demi-espaces induits par les contraintes géométriques. Dans une base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ liée à la surface plane telle que $\mathbf{w}$ soit une normale à la surface, les déplacements laissant globalement invariant la surface sont limités selon (3.3), avec $C > 0$ et N le point de d'expression des demi-espaces $\overline{H}_k^-$.

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C & -\mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C & , \quad -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C & -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C \end{cases} \quad (3.3)$$

Les relations (3.3) sont conformables à 6 demi-espaces bouchons de $\mathbb{R}^6$ de manière analogue à la relation (3.1).

Nous définissons maintenant dans une base quelconque $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ les projections suivantes (3.4) :

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \mathbf{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Les 6 demi-espaces bouchons sont alors définis tels que :

$$\begin{cases} r_x \cdot w_x + r_y \cdot w_y + r_z \cdot w_z \leq C \\ -r_x \cdot w_x - r_y \cdot w_y - r_z \cdot w_z \leq C \\ t_{N-x} \cdot u_x + t_{N-y} \cdot u_y + t_{N-z} \cdot u_z \leq C \\ -t_{N-x} \cdot u_x - t_{N-y} \cdot u_y - t_{N-z} \cdot u_z \leq C \\ t_{N-x} \cdot v_x + t_{N-y} \cdot v_y + t_{N-z} \cdot v_z \leq C \\ -t_{N-x} \cdot v_x - t_{N-y} \cdot v_y - t_{N-z} \cdot v_z \leq C \end{cases} \quad (3.5)$$

La figure 3-2(b) illustre les limites des déplacements d'une surface plane telle que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est identique à $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Parmi les six composantes, sont représentées les trois composantes (r_x, r_y, t_{N-x}) . Parmi ces trois composantes, le déplacement suivant t_{N-x} n'est pas borné et les demi-espaces bouchons correspondants sont définis en figure 3-2(c).

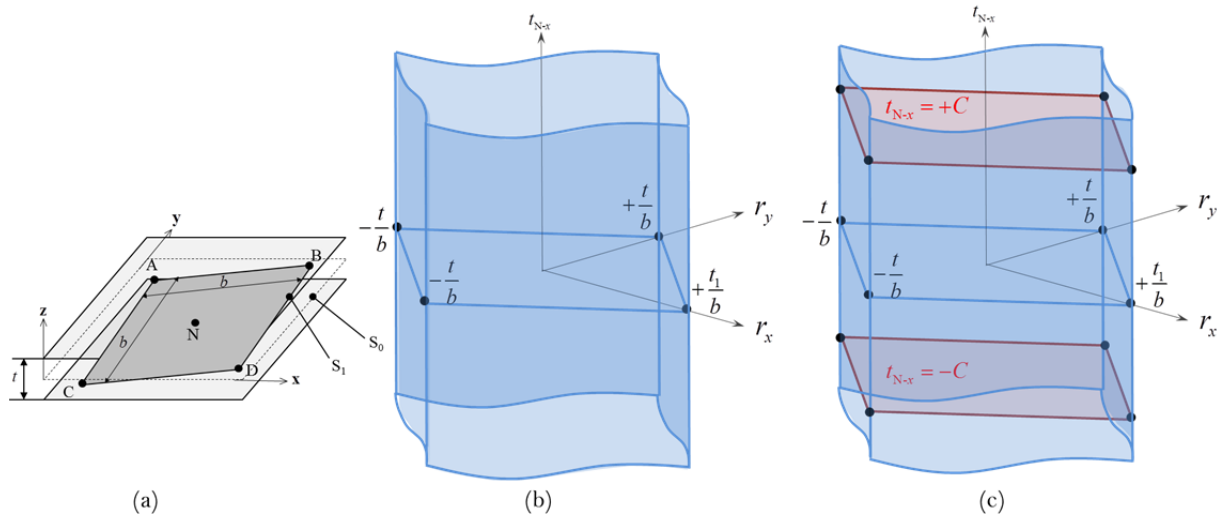


Figure 3-2. Déplacement non borné suivant t_{N-x} et adjonction de demi-espaces bouchons associés.

D'une manière analogue, on définit les demi-espaces bouchons pour les classes de surfaces : sphérique, cylindrique, de révolution ou prismatique. La classe hélicoïdale est particulière puisque le degré d'invariance est lié à la rotation et à la translation de manière simultanée au travers du pas. Les limites sont donc introduites selon ce degré d'invariance.

Remarque 3.2 : généralement, l'indexation angulaire des surfaces hélicoïdales n'est pas fonctionnelle, il en est ainsi de vis de fixation. En conséquence, ces surfaces sont souvent modélisées par des surfaces de classe cylindrique.

3.1.2 Polytope de contact

Généralement, les polyèdres de contact définis précédemment ne sont pas bornés car les liaisons possèdent des degrés de liberté d_{mob} . D'une manière analogue aux limites des déplacements d'une surface dans une zone de tolérance, il est également possible de modéliser les limites de déplacements entre deux surfaces potentiellement en contact dans le cas des contacts *bilatéraux*. Les demi-espaces bouchons limitent les déplacements inhérents aux degrés de liberté des liaisons.

Le nombre de demi-espaces bouchons dans ce cas dépend du type de liaison (voir tableau 3-3).

Chaque degré de liberté caractérise un déplacement théoriquement non borné qui est limité par deux demi-espaces bouchons. Finalement, $2.d_{mob}$ demi-espaces bouchons sont adjoints aux demi-espaces générés par des contraintes de contact par analogie aux $2.d_{inv}$ demi-espaces bouchons adjoints aux demi-espaces générés par des contraintes géométriques (3.1). Le polytope résultant est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{H'_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=m} \overline{Hc_k} \right) \quad \text{avec } m = 2.d_{mob} \quad (3.6)$$

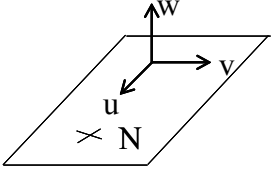
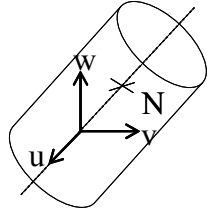
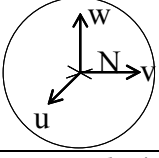
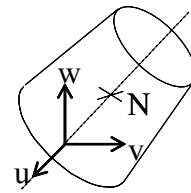
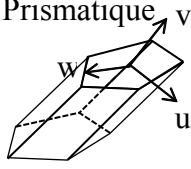
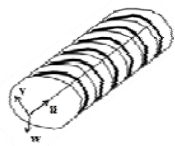
Classe de surface	Degré d'invariance - déplacements laissant invariant la surface	Demi-espaces bouchons
Plane 	Degré d'invariance = 3 $\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C & -\mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C & , -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C & -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C \end{cases}$
Cylindrique 	Degré d'invariance = 2 $\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C & -\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C \\ \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C & , -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} \leq C \end{cases}$
Sphérique 	Degré d'invariance = 3 $\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C & -\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \leq C & , -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \leq C \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C & -\mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \leq C \end{cases}$
De révolution 	Degré d'invariance = 1 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$	$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C, -\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \leq C$
Prismatique 	Degré d'invariance = 1 $\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C, -\mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} \leq C$
Hélicoidale 	Degré d'invariance = 1 $(p/2\pi)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u}$ (p = pas (positif ou négatif))	$\begin{aligned} (p/2\pi)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} &\leq C \\ -(p/2\pi)\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{u} &\leq C \end{aligned}$

Tableau 3-2. Expression des demi-espaces bouchons des principales classes de surfaces.

Dans le cas particulier des liaisons à contact *unilatéral*, chaque contrainte de contact limite un déplacement dans un seul sens (2.73). Les contraintes de contact génèrent seulement n demi-espaces de $\mathbb{R}^6$ au lieu de $2n$. Dans ce cas, le polyèdre de contact (2.73) est défini par la matrice $\mathbf{A}''$ uniquement. Afin de borner l'intersection de ces n demi-espaces, n autres contraintes sont ajoutées pour supprimer l'unilatéralité du contact. Ces contraintes sont identifiées par la matrice $\mathbf{A}'$ (2.58) (de dimension n) opposée de la matrice $\mathbf{A}''$. Ces n contraintes forment n demi-espaces bouchons supplémentaires ajoutés aux demi-espaces bouchons limitant les déplacements induits par les degrés de liberté selon la relation (3.7).

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n} \overline{H''_k}^- \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=m+n} \overline{Hc_k}^- \right) \quad \text{avec } m = 2.d_{mob} \quad (3.7)$$

De même que pour les demi-espaces bouchons des polytopes géométriques, la valeur de C des seconds membres doit être choisie avec attention afin de ne pas influencer le résultat final.

Liaison	Degrés de liberté	Nombre de demi-espaces bouchons
Appui plan	3	6
Pivot glissant	2	4
Ponctuelle	5	10
Rotule	3	6
Linéaire rectiligne	4	8
Linéaire annulaire	4	8
Glissière	1	2
Pivot	1	2

Tableau 3-3. Nombre des demi-espaces bouchons en tenant compte des degrés de liberté des liaisons.

3.1.3 Synthèse

Un polytope opérande $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^6$ sera défini par la suite de la manière suivante :

$$\mathcal{P} = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{nc}} \overline{H_k}^- \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_c} \overline{Hc_k}^- \right) \quad \text{avec } n_{nc} + n_c = 2n + m \quad (3.8)$$

Où n_{nc} (nc pour " non cap " en anglais) est l'ensemble des demi-espaces $\overline{H_k}^-$ induits par les contraintes géométriques ou de contact et n_c l'ensemble des demi-espaces bouchons $\overline{Hc_k}^-$. L'intersection des n_{nc} demi-espaces définit un polyèdre de $\mathbb{R}^6$.

Nous posons désormais les deux propriétés suivantes :

Propriété 3.1 : une j -face d'un polytope est qualifiée de j -face non-bouchon si et seulement si elle est incluse dans une j -face du polyèdre correspondant.

Propriété 3.2 : toute j -face qui n'est pas une j -face non bouchon est bouchon.

Les facettes non bouchons sont donc incluses dans les hyperplans H_k , frontières des demi-espaces $\overline{H_k^-}$ induits par les contraintes géométriques ou de contacts valides.

La figure 3-3 synthétise la procédure d'analyse de tolérances par les polytopes. Les zones de tolérances d'une part et les liaisons d'autre part induisent l'écriture de contraintes respectivement géométriques et de contacts. Ces contraintes définissent généralement des ensembles non bornés, c'est-à-dire des polyèdres. Des demi-espaces bouchons leur sont adjoints afin de les borner pour les transformer en polytopes. Il est alors possible de calculer les sommes et les intersections de ces polytopes pour simuler les variations géométriques selon la structure du mécanisme par un polytope résultant. Le polytope résultant permet d'identifier les limites des défauts fonctionnels du mécanisme et ainsi de conclure si leurs limites spécifiées dans un cahier des charges sont respectées.

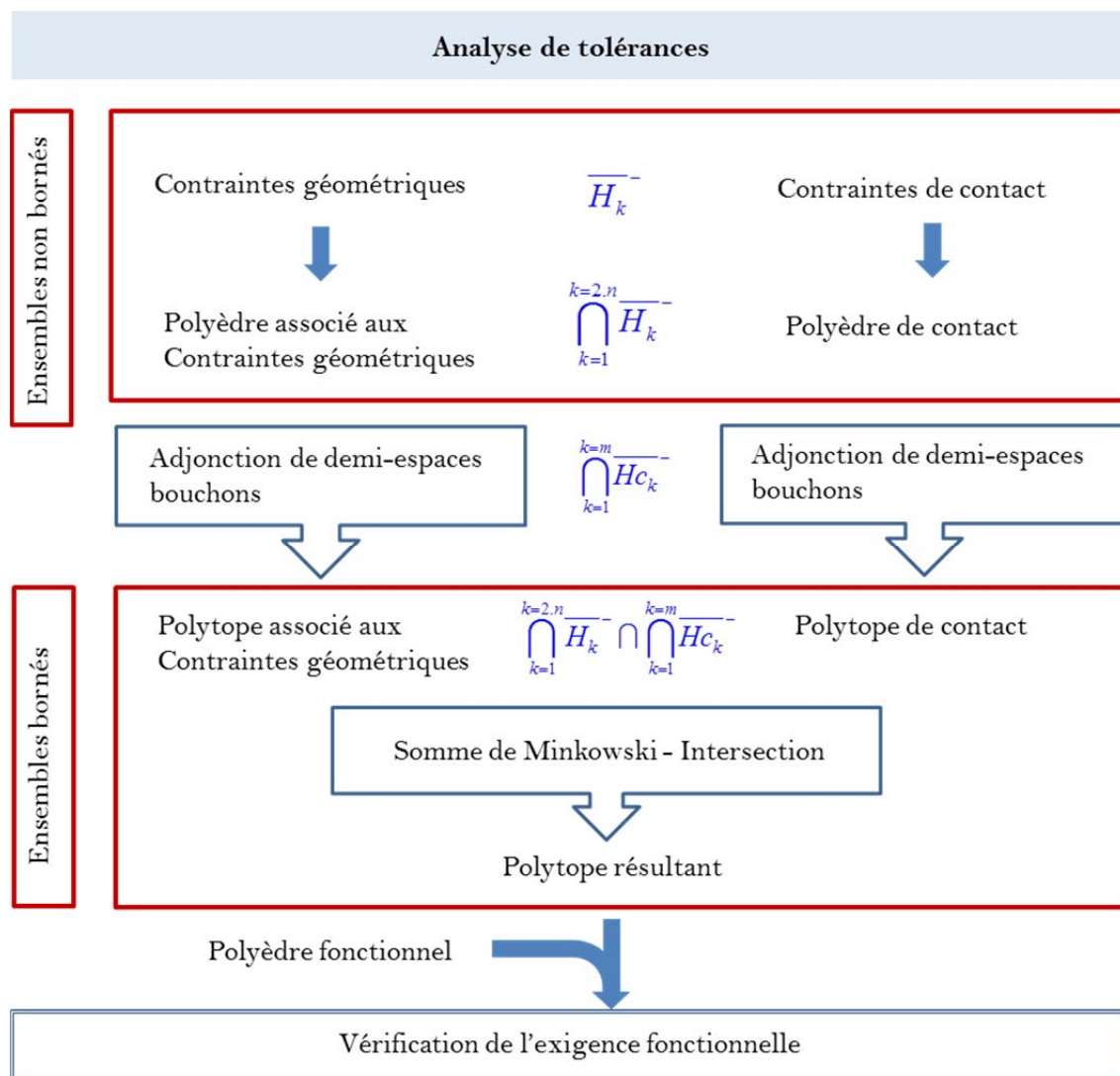


Figure 3-3. Synthèse : analyse de tolérances par approche polytope.

Dans le paragraphe suivant sont présentées les méthodes développées et mises en œuvre au sein de l'I2M pour définir des polytopes opérantes à partir des contraintes, calculer une somme de Minkowski de polytopes et calculer une intersection de polytopes.

3.2 Mise en œuvre algorithmique

Le principe de base des algorithmes développés et utilisés est de décrire les polytopes à la fois par leur $\mathcal{V}$ et par leur $\mathcal{H}$ description. La $\mathcal{V}$ -description est bien adaptée aux sommes, tandis que la $\mathcal{H}$ -description est bien adaptée aux intersections. Il aurait été possible d'utiliser par exemple uniquement la $\mathcal{V}$ -description avec des transformations en $\mathcal{H}$ -description pour les intersections comme réalisé par Petit [Peti04]. Le choix a été fait de la double description afin de pouvoir tracer les contributions des contraintes géométriques ou de contact.

3.2.1 Principe de troncature

La détermination d'un polytope opérande est réalisée par un algorithme de troncature [TeDC99][Delo97]. L'algorithme permet de tronquer un hypercube initial de $\mathbb{R}^6$ successivement par tous les demi-espaces de la $\mathcal{H}$ -description du polytope. Au plus $m + 2.n$ intersections sont donc à effectuer (3.8).

L'hypercube initial est centré sur l'origine des déplacements. La distance entre deux sommets situés sur la même arête est de $2.c$ tel que :

$$c = \text{Max}\left(|\text{Max}(x_i)|, |\text{Min}(x_i)|\right) + \varepsilon, \varepsilon > 0$$

où :

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1 \cdot r_x, & x_2 &= h_2 \cdot r_y, & x_3 &= h_3 \cdot r_z \\ x_4 &= h_4 \cdot t_{M-x}, & x_5 &= h_5 \cdot t_{M-y}, & x_6 &= h_6 \cdot t_{M-z} \end{aligned} \tag{3.9}$$

La détermination des $\text{Min}(x_i)$ et $\text{Max}(x_i)$ est réalisée par l'algorithme de simplexe sur l'ensemble des contraintes successivement pour chacun des x_i , soit 12 optimisations à réaliser.

Les coefficients h_i sont des coefficients d'homogénéisation. Nous reviendrons sur le rôle de ces coefficients dans le chapitre suivant. Par défaut, ces coefficients sont tous égaux à 1.

L'algorithme de troncature permet donc de déterminer la double description ($\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$) du polytope en considérant :

- la liste des sommets du polytope, résultats des intersections caractérisant le $\mathcal{H}$ -polytope,
- les frontières auxquelles chaque sommet est attaché à une tolérance près.

Définissons tout d'abord l'hyperplan de *séparation*. Un hyperplan H_1 sépare un polytope $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{P} \not\subset \overline{H_1}^+$ et $\mathcal{P} \not\subset \overline{H_1}^-$ [Chat11].

Considérons un premier hyperplan de séparation H_1 associé au demi-espace $\overline{H}_1^-$ issu d'une première contrainte. Plusieurs cas se présentent :

- $C \subset \overline{H}_1^-$: Le demi-espace est redondant, il est supprimé de la liste des demi-espaces objets de la troncature,
- H_1 sépare l'hypercube. Un sommet sera créé par intersection avec toute arête constituée par deux sommets tels qu'un sommet, dit sommet intérieur, est inclus dans $\overline{H}_1^-$ et que l'autre sommet, dit sommet extérieur, est inclus dans $\overline{H}_1^+$. La liste des sommets initialement constituée par les sommets de l'hypercube est mise à jour. L'opération est répétée pour le reste des demi-espaces, c'est-à-dire les $m + 2.n - 1$ demi-espaces restant définissant le $\mathcal{H}$ -polytope.

La figure 3-4 illustre un exemple de troncature d'un hypercube initial par un hyperplan H_1 associé au demi-espace $\overline{H}_1^-$, générant les sommets v_1, v_2, v_3 et v_4 .

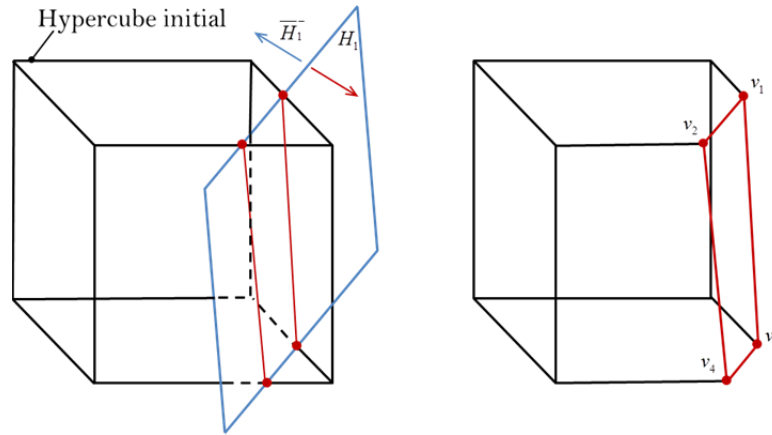


Figure 3-4. Troncature d'un hypercube initial par un demi-espace du $\mathcal{H}$ -polytope.

Considérons l'exemple d'une surface plane dont le plus petit contour convexe est le groupe des six points A, B, C, D, E et F : voir figure 3-5.

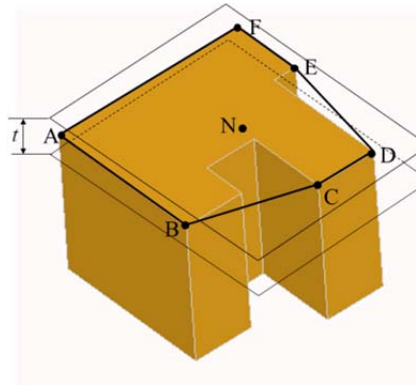


Figure 3-5. Surface étudiée.

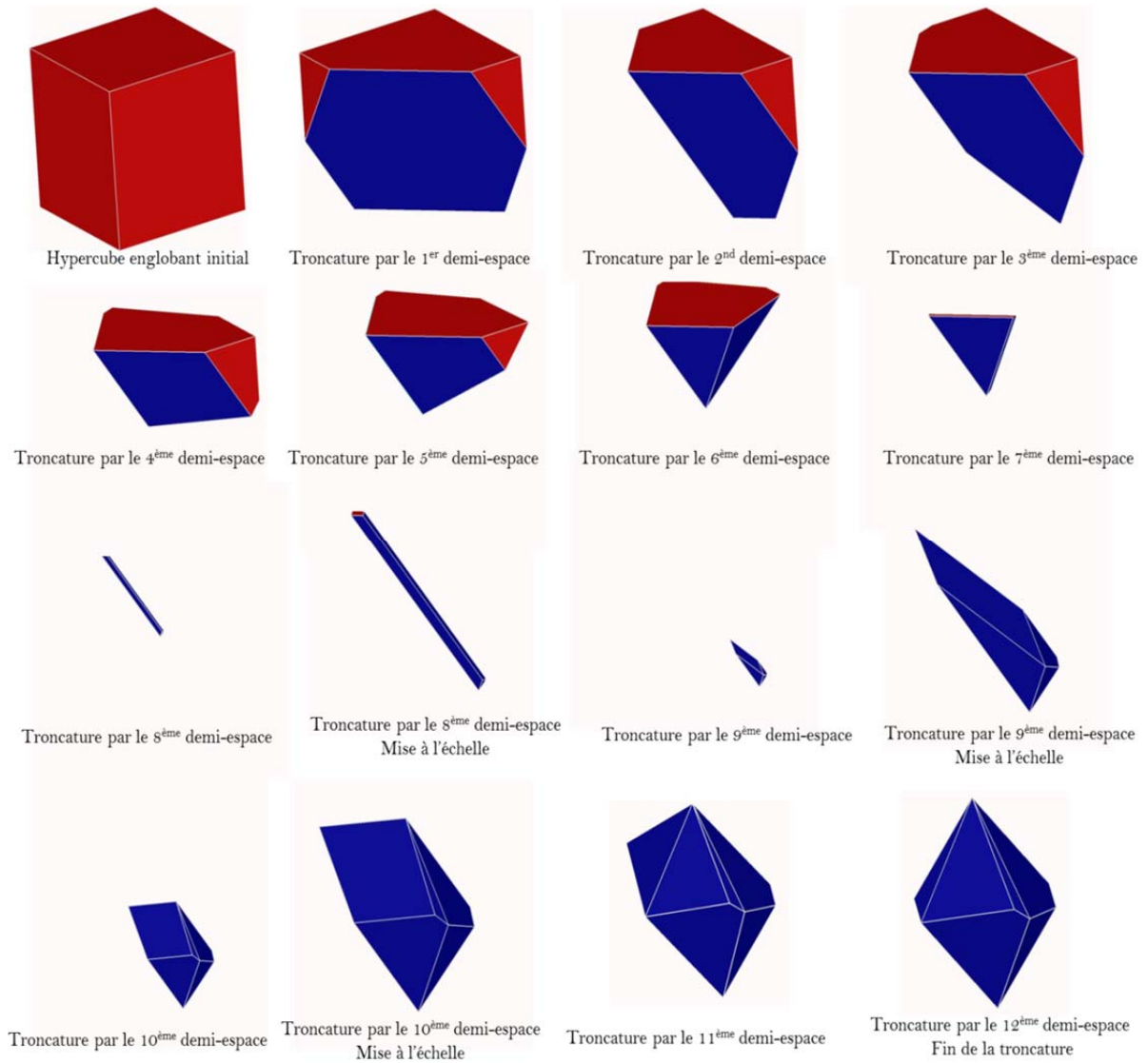


Figure 3-6. Principe de troncature visualisé avec l'application développée dans Open CASCADE.

Le polytope résultant de l'intersection des douze contraintes géométriques induites par les six points A, B, C, D, E et F, définies au point N barycentre des six points, modélise les limites des déplacements de la surface plane dans une zone de tolérance de dimension t : voir figure 3-6. Cette simulation illustre les troncatures successives d'un hypercube initial par les douze demi-espaces induits par les douze contraintes géométriques. Le résultat est calculé et représenté à l'aide d'une application écrite dans l'environnement Open CASCADE [Open12]. Les résultats numériques associés sont exprimés dans l'annexe 1.

3.2.2 Intersection de polytopes

L'intersection de deux polytopes opérands $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'intersection des demi-espaces provenant de l'union des ensembles des demi-espaces spécifiant la $\mathcal{H}$ -description des opérands :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \left(\bigcap_{u=1}^{u=n_1} \overline{H_u} \right) \cap \left(\bigcap_{v=1}^{v=n_2} \overline{H_v} \right) = \bigcap_{w=1}^{w=n_1+n_2} \overline{H_w} \quad (3.10)$$

De ce fait la détermination de l'intersection de deux polytopes est également basée sur l'algorithme de troncature où l'un des deux opérandes se substitue à l'hypercube initial.

3.2.3 Somme de Minkowski de polytopes

Considérons deux polytopes définis par leurs doubles descriptions respectives ($\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$) dont nous cherchons la somme. Il s'agit de déterminer la double description du polytope somme. Certaines facettes sont obtenues par une translation des facettes des opérandes, mais d'autres facettes, dites de raccord, apparaissent. La détermination des facettes de raccord constitue la principale complexité dans la détermination des sommes de Minkowski [BaDD09][TeDe11][TeDH13].

Le calcul de la somme de Minkowski de deux polytopes de $\mathbb{R}^6$ considérée dans ce mémoire est basé sur la détermination du raffinement commun des éventails normaux des polytopes opérandes, c'est-à-dire sur l'intersection des cônes duaux issus des opérandes. L'algorithme de troncature est également appliqué dans ce cas, mais cette fois ci, sur des cônes polyédriques.

3.2.3.1 Détermination de la $\mathcal{V}$ -description de la somme de Minkowski de deux polytopes

Un sommet de la somme de Minkowski de deux polytopes est déterminé selon la propriété suivante :

Propriété 3.3 : Soient v_1 et v_2 deux sommets respectifs de deux polytopes opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$:

$$\dim(N_{v_1} \cap N_{v_2}) = 6 \Leftrightarrow v_1 + v_2 \text{ est un sommet de } \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$$

$$\dim(N_{v_1} \cap N_{v_2}) \neq 6 \Leftrightarrow v_1 + v_2 \text{ n'est pas un sommet de } \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$$

Cette propriété résulte des travaux de Fukuda et Weibel [FuWe05]. En particulier de la relation que nous avons rappelée en (2.34). Si F est une i -face d'un polytope $\mathcal{P}$ alors le cône normal associé N_F est de dimension $(6-i)$ dans $\mathbb{R}^6$.

En outre, nous rappelons les propositions suivantes [Weib07] : si $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ est la somme de Minkowski de deux polytopes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ alors :

Chaque face F_3 de $\mathcal{P}_3$ est la somme de deux faces F_1 et F_2 respectivement des deux opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et cette décomposition est unique,

le cône normal en F_3 est égal à l'intersection des cônes normaux en F_1 et F_2 ,
 $N_{F_3} = N_{F_1} \cap N_{F_2}$.

La démonstration de la propriété 3.3 [TeDe11] découle directement de ces propriétés. S'il existe $v_3 = v_1 + v_2$ un sommet de $\mathcal{P}_3$ alors $N_{v_3} = N_{v_1} \cap N_{v_2}$. En particulier, $\dim(N_{v_1} \cap N_{v_2}) = 6$.

Réciproquement, si $\dim(N_{v_1} \cap N_{v_2}) = 6$, alors il existe $\mathbf{z}$ tel que $\mathbf{z} \in N_{v_1}$, $\mathbf{z} \in N_{v_2}$ et
(2.33) : $\mathbf{z} \cdot v_1 \geq \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_1$ et $\mathbf{z} \cdot v_2 \geq \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}_2$. Finalement,

$$\mathbf{z} \cdot v_3 = \mathbf{z} \cdot (v_1 + v_2) = \mathbf{z} \cdot v_1 + \mathbf{z} \cdot v_2 \geq \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}), \forall (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathcal{P}_3 \quad (3.11)$$

Ce que prouve l'existence de $v_3 = v_1 + v_2$, un sommet de $\mathcal{P}_3$.

Cette propriété 3.3 est généralisable pour toute dimension [TeDe11][TeDH13].

Les figure 3-7 et figure 3-8 illustrent deux représentations graphiques dans $\mathbb{R}^3$ des deux axiomes de la propriété 3.3 La finalité de cette méthode est de déterminer la $\mathcal{V}$ -description du polytope résultant d'une somme de Minkowski de deux polytopes ainsi que son éventail normal.

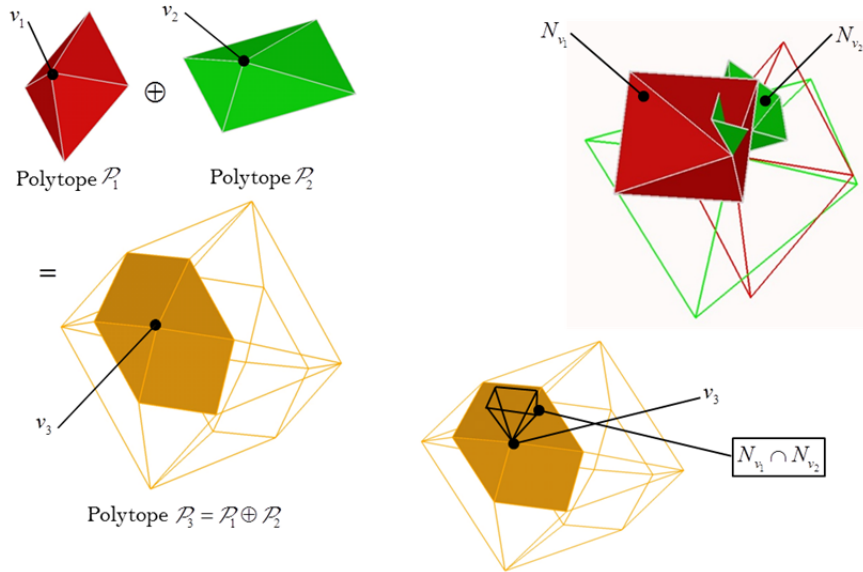


Figure 3-7. $v_3 = v_1 + v_2$ est un sommet de la somme de Minkowski [TeDH13].

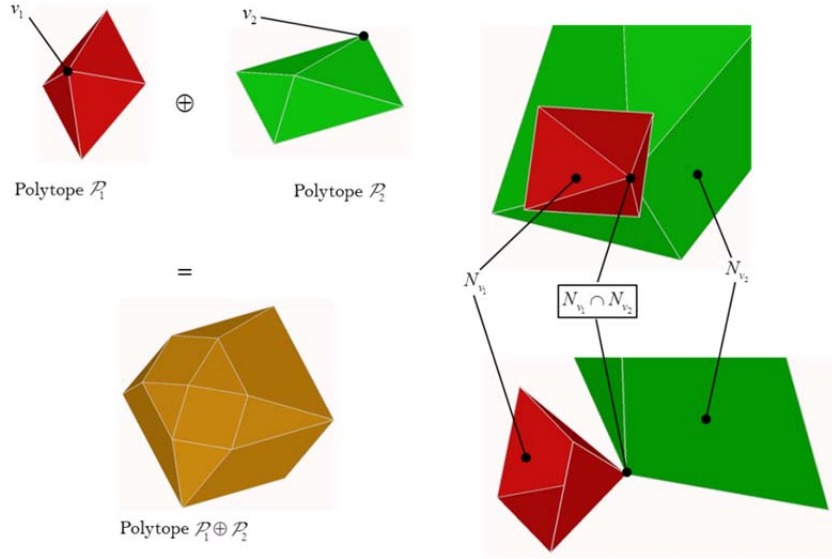


Figure 3-8. $v_1 + v_2$ n'est pas un sommet de la somme Minkowski des deux polytope [TeDe11].

Pour conclure, chercher un sommet d'une somme de Minkowski de polytopes revient à calculer une intersection de cônes polyédriques associées aux sommets des opérandes. Il s'agit donc d'utiliser l'algorithme de troncature sur les cônes duaux pris deux à deux. Un des deux cônes polyédrique est tronqué successivement par les demi-espaces de définition de l'autre cône. La figure 3-9 représente la troncature à l'étape j où le cône est tronqué par le demi-espace H_j représentant la $j^{\text{ème}}$ contrainte supplémentaire du deuxième cône.

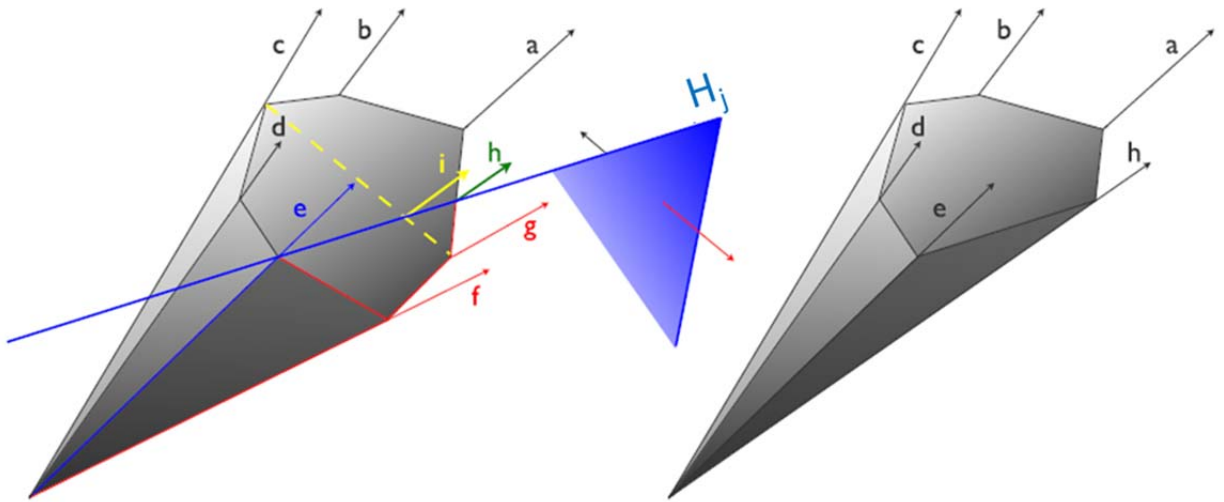


Figure 3-9. Étape d'itération de la troncature de deux cônes polyédriques [Terz09].

3.2.3.2 Détermination de la $\mathcal{H}$ -description de la somme de Minkowski de deux polytopes

La détermination des facettes d'une somme de Minkowski de polytopes a été démontrée dans des travaux menés à l'I2M [TeDe11][TeDH13]. Nous proposons de la résumer dans cette partie.

La méthode proposée est basée sur deux propriétés fondamentales issues de [Zieg95].

Propriété 3.4 : Les cônes normaux associés aux sommets d'une même facette d'un polytope partagent une seule et même arête dans l'éventail normal.

Propriété 3.5 : Deux cônes normaux associés aux deux sommets d'une même arête d'un polytope partagent une même face dans l'éventail normal.

En utilisant ces deux propriétés, un algorithme a été conçu. Il permet de déterminer les facettes du polytope résultant d'une somme. Il est détaillé dans [TeDe11].

Remarque 3.3 : les deux propriétés sont vraies pour tout n , dimension de l'espace de définition du polytope.

La figure 3-10(a) illustre la liste des 4 sommets et les cônes normaux associés d'une même facette dans le polytope résultant. La figure 3-10(b) illustre une translation, en un des sommets, des 4 cônes normaux. Ils partagent une même arête selon la propriété 3.4. Cette arête est une normale à la facette.

La figure 3-10(c) illustre la propriété 2 en considérant l'arête définie par $[c_1, c_4]$.

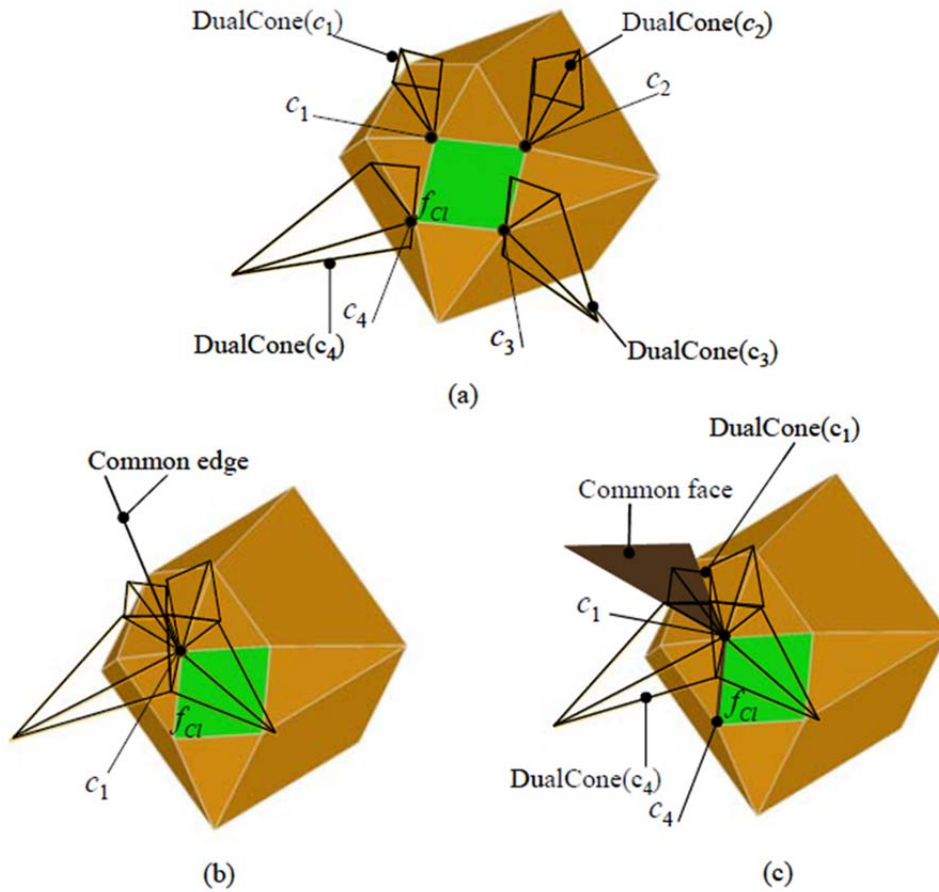


Figure 3-10. Illustration des deux propriétés.

3.3 Identification des demi-espaces bouchons dans la double description d'une somme de Minkowski de polytopes

Un $\mathcal{H}$ -polytope de $\mathbb{R}^6$ est une intersection de demi-espaces issus des contraintes, dits non-bouchons et demi-espaces bouchons. Des faces bouchons et des faces non-bouchons sont ainsi formées. Il est capital pour l'analyse de tolérances de savoir quelles sont les facettes « artificiellement » rajoutées, c'est-à-dire les facettes bouchons, puisqu'elles n'ont pas du tout le même rôle que les autres facettes. Dans le paragraphe suivant sont présentées les méthodes mises en œuvre afin de différencier les facettes bouchons et non-bouchons d'un polytope résultant d'une somme.

3.3.1 Problématique

Soit le polytope $\mathcal{P}_3$ résultant de la somme de Minkowski de deux polytopes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathbb{R}^6$ défini par : $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \{p_1 + p_2 \mid p_1 \in \mathcal{P}_1, p_2 \in \mathcal{P}_2\}$

Nous allons chercher à caractériser les faces du polytope $\mathcal{P}_3$ indépendantes des demi-espaces bouchons des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ en manipulant les polytopes par leur double description (i.e. par leur $\mathcal{V}$ -description et leur $\mathcal{H}$ -description).

K.Fukuda a montré que toute face de la somme $\mathcal{P}_3$ de deux n -polytopes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ peut se décomposer de manière unique en la somme de deux faces des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ [Fuku04].

Formulons la proposition suivante

Proposition 3.1 : les faces de $\mathcal{P}_3$ résultant de la somme de deux faces non bouchons de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des faces non bouchons. Toutes les autres faces sont des faces bouchons de $\mathcal{P}_3$

La figure 3-11 illustre un exemple classique de la somme de Minkowski de deux polytopes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ en tolérancement géométrique. Le polytope $\mathcal{P}_1$ est constitué de quatre facettes non bouchons e_{11} , e_{12} , e_{13} et e_{14} (en trait continu sur la figure 3-11). Le polytope $\mathcal{P}_2$ est constitué de deux facettes non bouchons e_{22} et e_{24} (en trait continu sur la figure 3-11) et de deux facettes bouchons e_{21} et e_{23} (en trait pointillé sur la figure 3-11).

Tous les sommets de $\mathcal{P}_1$ sont non bouchons tandis que tous les sommets de $\mathcal{P}_2$ sont bouchons. En effet, le polytope $\mathcal{P}_1$ est identique au polyèdre correspondant et les sommets de $\mathcal{P}_1$ sont donc des sommets du polyèdre, par conséquent ils sont non bouchons selon la propriété 3.1. Les sommets de $\mathcal{P}_2$ n'existent pas sur le polyèdre correspondant : ils sont donc bouchons selon les propriétés 3.1 et 3.2 énoncées au §3.1.3

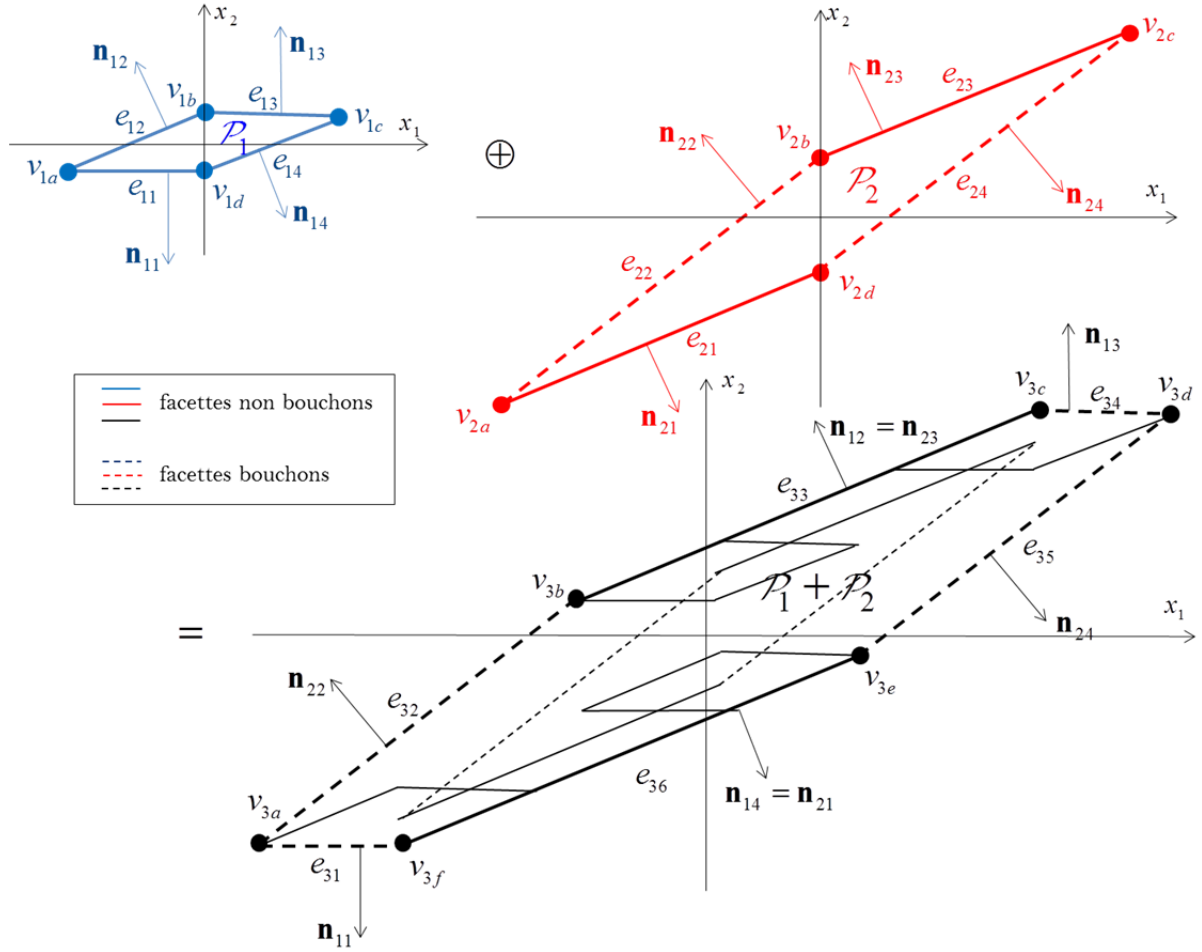


Figure 3-11. Somme de Minkowski de deux polytopes dans $\mathbb{R}^2$.

Nous allons considérer deux exemples de sommes de faces (arêtes et sommets) dans cet exemple.

Le premier exemple est la somme des deux arêtes non bouchons e_{12} et e_{23} . Le résultat est l'arête e_{33} de $\mathcal{P}_3$ avec $e_{33} = e_{12} \oplus e_{23}$. e_{33} qui est une arête non bouchon selon la propriété 3.1, voir figure 3-11.

Le deuxième exemple est la somme de Minkowski de l'arête non bouchon e_{11} de $\mathcal{P}_1$ et du sommet bouchon v_{2a} respectivement de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Le résultat est une arête bouchon e_{31} de $\mathcal{P}_3$ avec $e_{31} = e_{11} \oplus v_{2a}$. e_{31} est une arête bouchon selon la propriété 3.1, voir figure 3-11.

Le deuxième exemple montre qu'une facette non bouchon d'un polytope opérande peut se translater en une facette bouchon dans le polytope somme. Autrement dit, une facette bouchon du premier opérande peut modifier le statut (de non bouchon à bouchon) d'une facette du polytope somme, résultant de la translation d'une facette du second opérande.

Dans $\mathbb{R}^6$, la mise en œuvre algorithmique de la propriété énoncée par K.Fukuda [Fuku04] nécessite de déterminer les d -faces des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ pour toutes les dimensions ($0 \leq d \leq 5$) afin d'identifier toutes les facettes bouchon dans $\mathcal{P}_3$. Cette mise en

œuvre est très complexe en dimension supérieure à 3 et est rédhibitoire en complexité algorithmique et donc en temps de calcul.

C'est pourquoi nous avons fait le choix de manipuler les polytopes par leur $\mathcal{V}$ -description et leur $\mathcal{H}$ -description, c'est-à-dire par leur double description [TeDC99][TeDH13]. Ce choix entraîne une difficulté pour distinguer les faces bouchons et les faces non bouchons puisque la propriété 3.1 ne peut pas être appliquée.

3.3.2 Raffinement commun des éventails normaux des polytopes

Pour réaliser la somme de polytopes, nous exploitons les propriétés sur les éventails normaux des polytopes opérands comme présenté au paragraphe §0. Afin d'identifier les facettes bouchons de ces sommes, nous allons étudier les éventails normaux, non seulement associés aux polytopes, mais aussi aux polyèdres correspondants,

Si $\mathcal{P}_1^R$ et $\mathcal{P}_2^R$ sont des polyèdres, $\mathcal{P}_3^R = \mathcal{P}_1^R \oplus \mathcal{P}_2^R$ est aussi un polyèdre ; les éventails normaux $N(\mathcal{P}_1^R)$, $N(\mathcal{P}_2^R)$ et $N(\mathcal{P}_3^R)$ des trois polyèdres ne sont pas complets, c'est-à-dire qu'ils ne partitionnent pas $\mathbb{R}^n$. L'éventail normal d'un polyèdre est un éventail de Gröbner régulier [Jens07a][Jens07b].

De manière générale, $N(\mathcal{P}_1)$ désigne l'éventail normal du polytope $\mathcal{P}_1$ et $N(\mathcal{P}_1^R)$ désigne l'éventail normal du polyèdre correspondant contenant $\mathcal{P}_1$.

Selon l'équation (3.12) appliquée aux polyèdres correspondants :

$$N(\mathcal{P}_3^R) = N(\mathcal{P}_1^R) \wedge N(\mathcal{P}_2^R) \quad (3.12)$$

3.3.3 Identification des facettes bouchons dans la $\mathcal{H}$ -description d'un polytope résultant

Pour identifier les facettes bouchons et non bouchons, nous énonçons la propriété suivante :

Propriété 3.6 : Les normales des facettes non bouchons de $\mathcal{P}_3$ résultent du raffinement commun des éventails normaux $N(\mathcal{P}_1^R)$ et $N(\mathcal{P}_2^R)$ des polyèdres opérands correspondants.

La figure 3-12(a) illustre l'éventail normal $N(\mathcal{P}_3)$ du polytope $\mathcal{P}_3$, résultant du raffinement commun des éventails $N(\mathcal{P}_1)$ et $N(\mathcal{P}_2)$. Les arêtes des cônes duaux constitutifs de $N(\mathcal{P}_3)$ sont les normales des facettes de $\mathcal{P}_3$.

Remarque 3.3 : les éventails normaux représentés sont des éventails normaux normés (normalized normal fan), c'est-à-dire qu'ils sont intersectés avec la sphère unité [Weib07]

La figure 3-12(b) illustre l'éventail normal $N(\mathcal{P}_3^R)$, raffinement commun des éventails normaux $N(\mathcal{P}_1^R)$ et $N(\mathcal{P}_2^R)$ respectivement des polyèdres $\mathcal{P}_1^R$ et $\mathcal{P}_2^R$ associés à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Le polyèdre $\mathcal{P}_1^R$ résulte de l'intersection des demi-espaces définissant $\mathcal{P}_1$ privé de ses demi-espaces bouchons. Il en est de même pour le polyèdre $\mathcal{P}_2^R$ associé à $\mathcal{P}_2$.

Dans l'exemple de la figure 3-11, le polyèdre $\mathcal{P}_1^R$ et le polytope $\mathcal{P}_1$ sont identiques, puisque $\mathcal{P}_1$ n'a pas de demi-espaces bouchons. Il en est de même pour leurs éventails normaux. L'éventail normal $N(\mathcal{P}_2^R)$ du polyèdre $\mathcal{P}_2^R$ est réduit à deux demi-droites (deux cônes de dimension 1). Il en est de même pour le raffinement commun $N(\mathcal{P}_1^R) \wedge N(\mathcal{P}_2^R)$.

Les arêtes de l'éventail normal $N(\mathcal{P}_3^R)$ sont les normales des facettes du polyèdre somme de Minkowski de $\mathcal{P}_1^R$ et $\mathcal{P}_2^R$.

On en déduit que les normales des facettes non bouchons de $\mathcal{P}_3$ correspondent aux arêtes de $N(\mathcal{P}_3)$ communes aux arêtes de $N(\mathcal{P}_3^R)$, c'est-à-dire les arêtes e_{33} et e_{36} , voir figure 3-12(a) et figure 3-12(b).

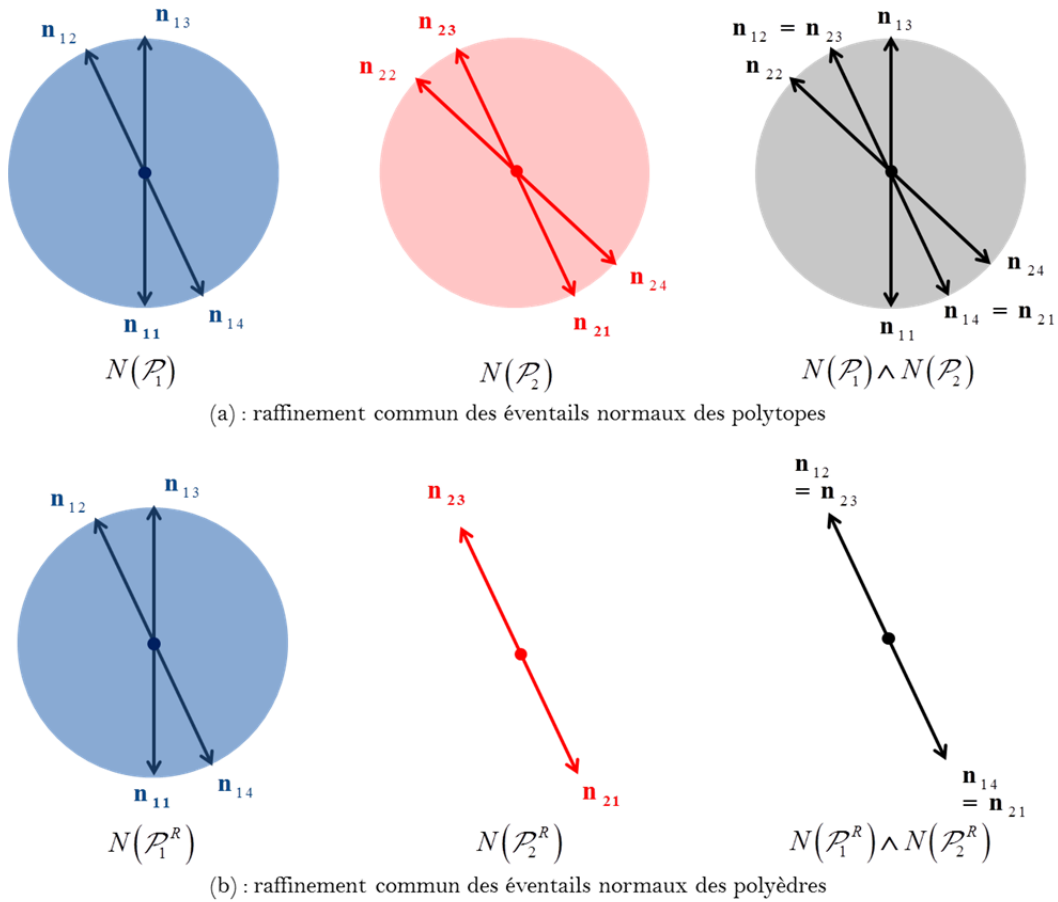


Figure 3-12. Raffinement commun des éventails normaux des opérandes.

3.3.4 Identification des sommets bouchons dans la $\mathcal{V}$ -description d'un polytope résultant

Les sommets non bouchons de $\mathcal{P}_3$ sont faciles à identifier.

A partir des propriétés 3.1 et 3.3 issue des travaux de K.Fukuda, on peut en déduire les relations suivantes :

Si v_{1i} et v_{2j} sont des sommets non bouchons :

$$\dim(N_{v_{1i}} \cap N_{v_{2j}}) = n \Leftrightarrow v_{1i} + v_{2j} \text{ est un sommet non bouchon de } \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$$

Si v_{1i} ou v_{2j} est un sommet bouchon :

$$\dim(N_{v_{1i}} \cap N_{v_{2j}}) = n \Leftrightarrow v_{1i} + v_{2j} \text{ est un sommet bouchon de } \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$$

3.4 Identification des demi-espaces bouchons dans la double description d'une intersection de polytopes

3.4.1 Problématique

L'intersection de deux polytopes opérands $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est égale à l'intersection de l'ensemble des demi-espaces de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ selon la relation (3.10).

D'après la définition (3.8), nous avons :

$$\mathcal{P}_i = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{nc_i}} \overline{H_{i,k}} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{c_i}} \overline{Hc_{i,k}} \right) \quad \text{avec} \quad n_{nc_i} + n_{c_i} = n_i, \quad (i=1,2) \quad (3.13)$$

Où : n_{nc_i} est le nombre des demi-espaces non-bouchons notés $\overline{H_{i,k}}$ et n_{c_i} est le nombre des demi-espaces bouchons notés $\overline{Hc_{i,k}}$.

En tolérancement géométrique, nous avons besoin de déterminer l'intersection des déplacements limités par les contraintes géométriques et/ou de contacts. Cette intersection résulte de l'intersection des demi-espaces non bouchons des opérands $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, c'est-à-dire des polyèdres $\mathcal{P}_1^R$ et $\mathcal{P}_2^R$ contenant respectivement $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, voir figure 3-13(a) Afin de pouvoir conformer cette intersection à un polytope $\mathcal{P}_3$ (i.e. ensemble borné), il convient d'y adjoindre un ensemble de demi-espaces bouchons, voir figure 3-13(b).

Le polytope $\mathcal{P}_3$ peut être défini par la relation (3.14) conformément à (3.8) :

$$\mathcal{P}_3 = \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{nc_1}} \overline{H_{1,k}} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{nc_2}} \overline{H_{2,k}} \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{c_3}} \overline{Hc_{3,k}} \right) \quad (3.14)$$

Où $\overline{Hc_{3,k}}$ désigne un demi-espace bouchon de $\mathcal{P}_3$.

La détermination des demi-espaces bouchons $\overline{Hc_{3,k}}$ n'est pas triviale. La topologie du polytope $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est dépendante du choix du second membre C des demi-espaces bouchons des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Nous pouvons remarquer l'influence du second membre en figure 3-13(c), en effet, sur cette figure $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ ne correspond pas au résultat attendu. Les demi-espaces non-bouchons disparaissent car les demi-espaces bouchons tronquent les polytopes en deçà de ces demi-espaces. Les demi-espaces bouchons restreignent trop les polytopes.

Par conséquent le polytope $\mathcal{P}_3$ considéré peut être différent de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

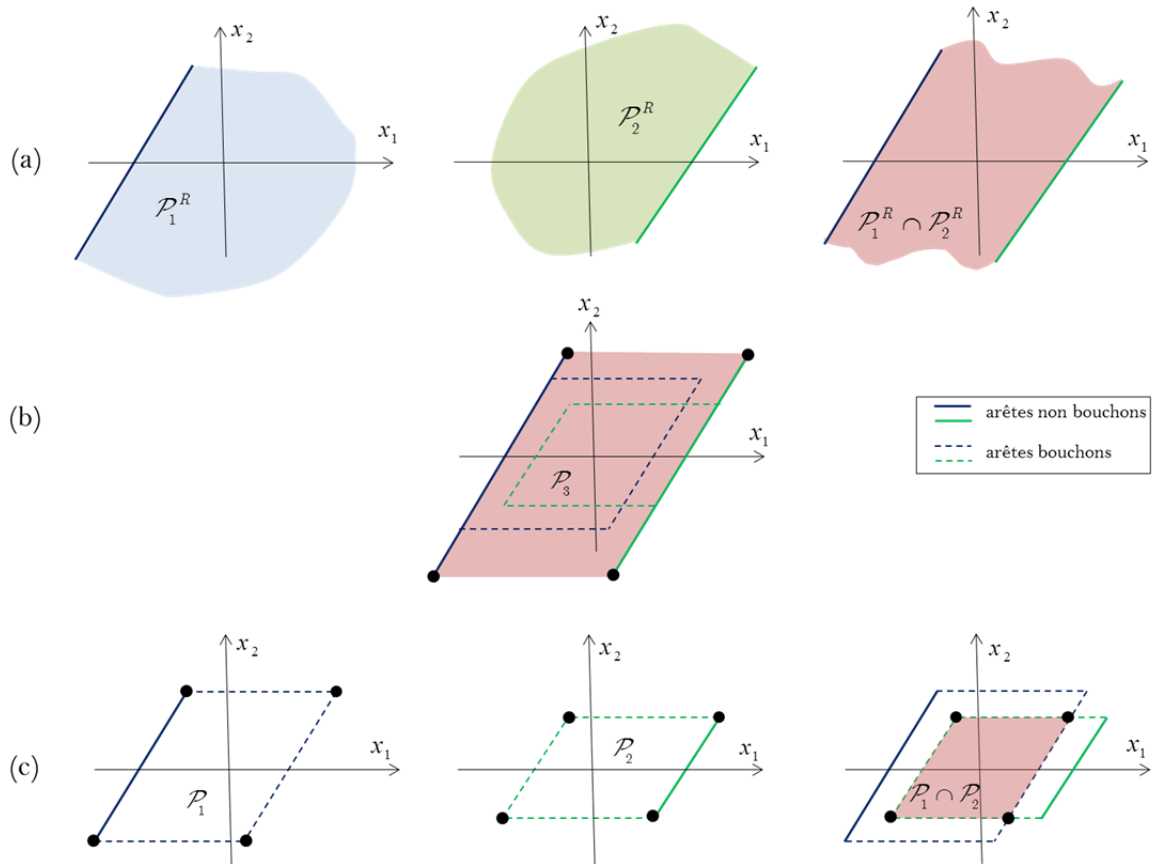


Figure 3-13. Intersections de deux polyèdres $\mathcal{P}_1^R$ et $\mathcal{P}_2^R$ et de deux polytopes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

La section suivante propose une méthode de troncature d'un hyper-parallélépipède afin de déterminer les déplacements limités par les demi-espaces non bouchons résultants de l'intersection entre deux polytopes opérandes.

3.4.2 Détermination des demi-espaces bouchons de l'intersection de deux polytopes

Une méthode pour déterminer $\mathcal{P}_3$ consiste à déterminer l'intersection entre :

- un hyper-parallélépipède droit circonscrit à l'union des sommets de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$,
- les demi-espaces non bouchons des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les facettes du polytope $\mathcal{P}_3$ dont les hyperplans contiennent les facettes de l'hyper-parallélépipède droit sont les facettes bouchons de $\mathcal{P}_3$, permettant de définir $\left(\bigcap_{k=1}^{k=n_{e3}} \overline{Hc_{3,k}} \right)$ introduits dans la relation (3.8). Toutes les autres facettes sont non bouchons. De plus, tous les sommets de $\mathcal{P}_3$, situés sur un hyperplan contenant l'une des facettes de l'hyper-parallélépipède droit initial sont des sommets bouchons. Tous les autres sommets sont non bouchons.

La figure 3-14(a) illustre la détermination d'un hyper-parallélépipède droit circonscrit (un rectangle dans cet exemple) à l'union des sommets de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

L'hyper-parallélépipède droit circonscrit ne doit pas être de volume minimal. Dans ce cas, il serait possible d'obtenir un hyper-parallélépipède dont une facette est susceptible d'être confondue avec une facette de $\mathcal{P}_1$ ou $\mathcal{P}_2$. Il ne serait pas alors possible de détecter si une telle facette serait bouchon ou non-bouchon. Il en serait de même pour les sommets.

De plus, l'hyper-parallélépipède droit circonscrit doit être suffisamment grand pour que chaque intersection avec une face du polyèdre correspondant soit non vide. Si une des intersections est vide, cela signifie qu'au moins une facette de l'hyper-parallélépipède est trop proche du centre de l'hyper-parallélépipède.

Afin d'éviter ces cas, l'hyper-parallélépipède droit circonscrit est défini avec un décalage ε de l'hyper-parallélépipède droit circonscrit de volume minimal où $\varepsilon > 0$. Aujourd'hui la détermination de la valeur de ε se fait d'une manière empirique (cf. Figure 3-14(a))

La figure 3-14(b) illustre le polytope $\mathcal{P}_3$ résultant de l'intersection entre un hyper-parallélépipède droit circonscrit aux sommets de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et les demi-espaces non bouchons des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

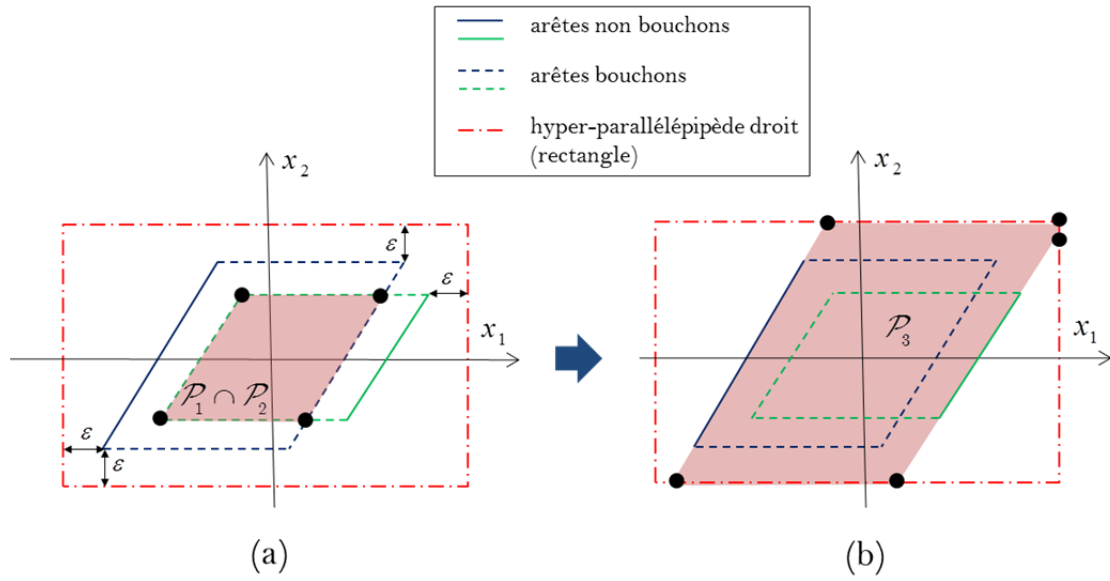


Figure 3-14. Détermination de $\mathcal{P}_3$.

3.5 Application

Nous revenons dans cette partie à l'exemple traité dans le paragraphe §2.3 du chapitre 2. Dans le chapitre précédent, l'exemple a été traité par les polyèdres de manière théorique. Dans ce chapitre, le même exemple est traité numériquement par les polytopes grâce à la notion de bouchon et aux algorithmes associés.

3.5.1 Définition des polytopes opérandes

Le tableau 3-4 synthétise la définition des polytopes associés aux contraintes géométriques respectivement accordées aux surfaces identifiées dans la figure 2-30 selon la démarche présentée en §2.2.1.

Remarque 3.4 : par soucis de simplification, on considère $L_4 = L_5$ pour les polytopes géométriques respectivement associés aux surfaces 2,2 et 2,3, voir figure 2-30.

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{P}_{i,j/i,0}$ le polytope caractérisant les variations de position entre la surface i,j et son modèle nominal i,0.

Le tableau 3-5 synthétise la définition des polytopes de contacts respectivement associés aux quatre spécifications de contact du système étudié, selon la démarche présentée en §2.2.2.

On désigne par $\mathcal{P}_{i,j/u,v}$ le polytope de contact caractérisant les variations de position entre la surface i,j et la surface u,v.

$\mathcal{P}_{i,j/i,0}$	Contraintes géométriques	Demi-espaces bouchons	Polytope exprimé au point M
1,1 / 1,0	$-\frac{t_{1,1}}{2} \leq \mathbf{t}_{O-1,1/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$ $-\frac{t_{1,1}}{2} \leq \mathbf{t}_{P-1,1/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-1,1/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$-\frac{t_{1,1}}{2} \leq t_{M-1,1/1,0y} - L_1 \cdot r_{1,1/1,0z} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$ $-\frac{t_{1,1}}{2} \leq t_{M-1,1/1,0y} - L_2 \cdot r_{1,1/1,0z} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$ $-C \leq t_{M-1,1/1,0x} \leq +C$
1,2 / 1,0	$-\frac{t_{1,2}}{2} \leq \mathbf{t}_{Q-1,2/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{1,2}}{2}$ $-\frac{t_{1,2}}{2} \leq \mathbf{t}_{W-1,2/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{1,2}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-1,2/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$-\frac{t_{1,2}}{2} \leq t_{M-1,2/1,0x} + L_3 \cdot r_{1,2/1,0z} \leq +\frac{t_{1,2}}{2}$ $-\frac{t_{1,2}}{2} \leq t_{M-1,2/1,0x} + L_5 \cdot r_{1,2/1,0z} \leq +\frac{t_{1,2}}{2}$ $-C \leq t_{M-1,2/1,0y} \leq +C$
1,3 / 1,0	$-\frac{t_{1,3}}{2} \leq \mathbf{t}_{T-1,3/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{1,3}}{2}$ $-\frac{t_{1,3}}{2} \leq \mathbf{t}_{V-1,3/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{1,3}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-1,3/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$-\frac{t_{1,3}}{2} \leq t_{M-1,3/1,0x} + L_3 \cdot r_{1,3/1,0z} \leq +\frac{t_{1,3}}{2}$ $-\frac{t_{1,3}}{2} \leq t_{M-1,3/1,0x} + L_5 \cdot r_{1,3/1,0z} \leq +\frac{t_{1,3}}{2}$ $-C \leq t_{M-1,3/1,0y} \leq +C$
1,4 / 1,0	$-\frac{t_{1,4}}{2} \leq \mathbf{t}_{I-1,4/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,4}}{2}$ $-\frac{t_{1,4}}{2} \leq \mathbf{t}_{J-1,4/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,4}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-1,4/1,0} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$-\frac{t_{1,4}}{2} \leq t_{M-1,4/1,0y} - L_2 \cdot r_{1,4/1,0z} \leq +\frac{t_{1,4}}{2}$ $-\frac{t_{1,4}}{2} \leq t_{M-1,4/1,0y} \leq +\frac{t_{1,4}}{2}$ $-C \leq t_{M-1,4/1,0x} \leq +C$
2,1 / 2,0	$-\frac{t_{2,1}}{2} \leq \mathbf{t}_{O-2,1/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$ $-\frac{t_{2,1}}{2} \leq \mathbf{t}_{P-2,1/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,1/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$-\frac{t_{2,1}}{2} \leq t_{M-2,1/2,0y} - L_1 \cdot r_{2,1/2,0z} \leq +\frac{t_{2,1}}{2}$ $-\frac{t_{2,1}}{2} \leq t_{M-2,1/2,0y} - L_2 \cdot r_{2,1/2,0z} \leq +\frac{t_{2,1}}{2}$ $-C \leq t_{M-2,1/2,0x} \leq +C$
2,2 / 2,0	$-\frac{t_{2,2}}{2} \leq \mathbf{t}_{Y-2,2/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{2,2}}{2}$ $-\frac{t_{2,2}}{2} \leq \mathbf{t}_{U-2,2/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{2,2}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,2/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$-\frac{t_{2,2}}{2} \leq t_{M-2,2/2,0x} + L_3 \cdot r_{2,2/2,0z} \leq +\frac{t_{2,2}}{2}$ $-\frac{t_{2,2}}{2} \leq t_{M-2,2/2,0x} + L_4 \cdot r_{2,2/2,0z} \leq +\frac{t_{2,2}}{2}$ $-C \leq t_{M-2,2/2,0y} \leq +C$
2,3 / 2,0	$-\frac{t_{2,3}}{2} \leq \mathbf{t}_{R-2,3/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{2,3}}{2}$ $-\frac{t_{2,3}}{2} \leq \mathbf{t}_{S-2,3/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{2,3}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,3/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$-\frac{t_{2,3}}{2} \leq t_{M-2,3/2,0x} + L_3 \cdot r_{2,3/2,0z} \leq +\frac{t_{2,3}}{2}$ $-\frac{t_{2,3}}{2} \leq t_{M-2,3/2,0x} + L_4 \cdot r_{2,3/2,0z} \leq +\frac{t_{2,3}}{2}$ $-C \leq t_{M-2,3/2,0y} \leq +C$
2,4 / 2,0	$-\frac{t_{2,4}}{2} \leq \mathbf{t}_{L-2,4/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{2,4}}{2}$ $-\frac{t_{2,4}}{2} \leq \mathbf{t}_{N-2,4/2,0} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{2,4}}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,4/2,0} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$-\frac{t_{2,4}}{2} \leq t_{M-2,4/2,0y} - L_1 \cdot r_{2,4/2,0z} \leq +\frac{t_{2,4}}{2}$ $-\frac{t_{2,4}}{2} \leq t_{M-2,4/2,0y} - L_2 \cdot r_{2,4/2,0z} \leq +\frac{t_{2,4}}{2}$ $-C \leq t_{M-2,4/2,0x} \leq +C$

Tableau 3-4. Définitions des polytopes associés aux contraintes géométriques.

	Contraintes de contacts	Demi-espaces bouchons	Polytope de contact en M
2,1 / 1,1	$\mathbf{t}_{O-2,1/1,1} \cdot \mathbf{y} = 0$ $\mathbf{t}_{P-2,1/1,1} \cdot \mathbf{y} = 0$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,1/1,1} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$t_{M-2,1/1,1y} - L_1 \cdot r_{2,1/1,1z} = 0$ $t_{M-2,1/1,1y} - L_2 \cdot r_{2,1/1,1z} = 0$ $-C \leq t_{M-2,1/1,1x} \leq +C$
2,2 / 1,2	$0 \leq -\mathbf{t}_{Q-2,2/1,2} \cdot \mathbf{x} + d$	$-\mathbf{t}_{Q-2,2/1,2} \cdot \mathbf{x} \leq +B$ $-C \leq \mathbf{r}_{2,2/1,2} \cdot \mathbf{z} \leq +C$ $-C \leq \mathbf{t}_{M-2,2/1,2} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$0 \leq -(t_{M-2,2/1,2x} + L_3 \cdot r_{2,2/1,2z}) + d$ $-(t_{M-2,2/1,2x} + L_3 \cdot r_{2,2/1,2z}) + d \leq +B$ $-C \leq \mathbf{r}_{2,2/1,2} \cdot \mathbf{z} \leq +C$ $-C \leq \mathbf{t}_{M-2,2/1,2} \cdot \mathbf{y} \leq +C$
2,3 / 1,3	$0 \leq \mathbf{t}_{T-2,3/1,3} \cdot \mathbf{x} + d$	$\mathbf{t}_{T-2,3/1,3} \cdot \mathbf{x} \leq +C$ $-C \leq \mathbf{r}_{2,3/1,3} \cdot \mathbf{z} \leq +C$ $-C \leq \mathbf{t}_{M-1,3/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$	$0 \leq t_{M-2,3/1,3x} + L_3 \cdot r_{2,3/1,3z} + d$ $t_{M-2,3/1,3x} + L_3 \cdot r_{2,3/1,3z} + d \leq +C$ $-C \leq \mathbf{r}_{2,3/1,3} \cdot \mathbf{z} \leq +C$ $-C \leq \mathbf{t}_{M-1,3/1,0} \cdot \mathbf{y} \leq +C$
3,4 / 2,4	$-\frac{J_4}{2} \leq \mathbf{t}_{L-3,4/2,4} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{J_4}{2}$ $-\frac{J_4}{2} \leq \mathbf{t}_{N-3,4/2,4} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{J_4}{2}$	$-C \leq \mathbf{t}_{M-2,4/3,4} \cdot \mathbf{x} \leq +C$	$-\frac{J_4}{2} \leq t_{M-2,4/3,4y} - L_1 \cdot r_{2,4/3,4z} \leq +\frac{J_4}{2}$ $-\frac{J_4}{2} \leq t_{M-2,4/3,4y} - L_2 \cdot r_{2,4/3,4z} \leq +\frac{J_4}{2}$ $-C \leq t_{M-2,4/3,4x} \leq +C$

Tableau 3-5. Définition des polytopes de contacts.

3.5.2 Simulation du respect de la CF

Le polytope $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ est défini selon la relation (3.15) :

$$\mathcal{P}_{3,4/1,4} = \mathcal{P}_{3,4/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/2,0} \oplus \left(\begin{array}{c} \left(\mathcal{P}_{2,0/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,1/1,0} \right) \\ \cap \\ \left(\mathcal{P}_{2,0/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/1,2} \oplus \mathcal{P}_{1,2/1,0} \right) \\ \cap \\ \left(\mathcal{P}_{2,0/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/1,3} \oplus \mathcal{P}_{1,3/1,0} \right) \end{array} \right) \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,4} \quad (3.15)$$

Pour des commodités d'écriture, conformément à la méthode décrite au §3.4, l'opérateur $\cap$ désigne une opération consistant à déterminer l'intersection entre :

- un hyper-parallélépipède droit circonscrit à l'union des sommets de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$,
- les demi-espaces non bouchons des polytopes opérands.

La conformité du système mécanique est validée par l'inclusion du polytope calculé $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ dans le polytope fonctionnel $\mathcal{P}_{3,4/1,4}^f$ résultant de la condition fonctionnelle CF.

La relation (3.15) peut s'écrire selon :

$$\mathcal{P}_{3,4/1,4} = \mathcal{P}_{3,4/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/2,0} \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,4} \oplus (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3) \quad (3.16)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_{2,0/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,1/1,0} \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}_{2,0/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/1,2} \oplus \mathcal{P}_{1,2/1,0} \\ \mathcal{P}_3 &= \mathcal{P}_{2,0/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/1,3} \oplus \mathcal{P}_{1,3/1,0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dans un premier temps, les polytopes $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont déterminés en appliquant la méthode décrite en §3.1. Les polytopes $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ seront déterminés selon la méthode présentée au §3.4. Finalement, le polytope $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ sera déduit de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ et des autres opérandes en appliquant la méthode détaillée en §3.3.

Afin de simplifier les représentations graphiques, les simplifications suivantes sont considérées :

- les dimensions des zones de tolérance $t_{i,j}$ sont toutes égales à 0,1mm,
- le jeu J_4 est tel que : $J_4 = t_{i,j}$.

Par la suite, les explications et les figures sont relatives à la projection des polytopes dans $\mathbb{R}^3$, cependant les calculs ont été réalisés dans $\mathbb{R}^6$. Pour les représentations graphiques :

- les facettes visualisées en mode ombré sont des facettes non-bouchons,
- les facettes visualisées en mode filaire sont des facettes bouchons.

3.5.2.1 Détermination des polytopes $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$

Les polytopes $\mathcal{P}_{1,1/1,0}$ et $\mathcal{P}_{2,1/2,0}$ sont identiques et ont pour centres de symétrie l'origine des déplacements ; seules les facettes orthogonales à la direction t_{M-x} sont bouchons : voir tableau 3-4.

Etant donné les contraintes de contacts définies en tableau 3-5, le polytope $\mathcal{P}_{2,1/1,1}$ est un segment de droite de $\mathbb{R}^3$ selon la direction t_{M-x} correspondant au degré de liberté de la liaison en translation selon $\mathbf{x}$. Les algorithmes de calcul de la somme de polytopes ne gèrent pas les polytopes de dimensions inférieure à la dimension de l'espace de calcul. Cependant, ce polytope peut être considéré comme un polytope réduit à un sommet unique correspondant à l'origine des déplacements car ce polytope est sommé aux polytopes géométriques des

surfaces en contact qui sont de dimensions 3 et qui possèdent des degrés d'invariance selon la même direction.

La figure 3-15(a) illustre la détermination du polytope $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{2,0/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/1,1} \oplus \mathcal{P}_{1,1/1,0}$) dans $\mathbb{R}^3$ où $\mathcal{P}_{2,1/1,1}$, élément neutre de la somme de Minkowski, n'est pas représenté. La figure 3-15(b) illustre une section du polytope $\mathcal{P}_1$ dans le plan (r_z, t_{M-y}) . Dans cet exemple, la topologie du polytope $\mathcal{P}_1$ est identique aux topologies de $\mathcal{P}_{1,1/1,0}$ et $\mathcal{P}_{2,1/2,0}$ étant donné que la somme de Minkowski entre deux polytopes isométriques s'apparente à une homothétie de coefficient 2. Seules les facettes de $\mathcal{P}_1$ orthogonales à la direction t_{M-x} sont bouchons.

Les polytopes $\mathcal{P}_{1,2/1,0}$ et $\mathcal{P}_{2,2/2,0}$ sont identiques et ont pour centre de symétrie l'origine des déplacements, voir tableau 3-4. Les facettes bouchons de $\mathcal{P}_{1,2/1,0}$ et $\mathcal{P}_{2,2/2,0}$ sont les facettes orthogonales à la direction t_{M-y} .

Le polytope $\mathcal{P}_{2,2/1,2}$ n'est pas centré sur l'origine des déplacements et n'a qu'une facette non-bouchon correspondant à son unique contrainte de contact, voir tableau 3-5.

Le polytope $\mathcal{P}_2$ peut être déterminé de la même méthode que $\mathcal{P}_1$ avec $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{2,0/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/1,2} \oplus \mathcal{P}_{1,2/1,0}$.

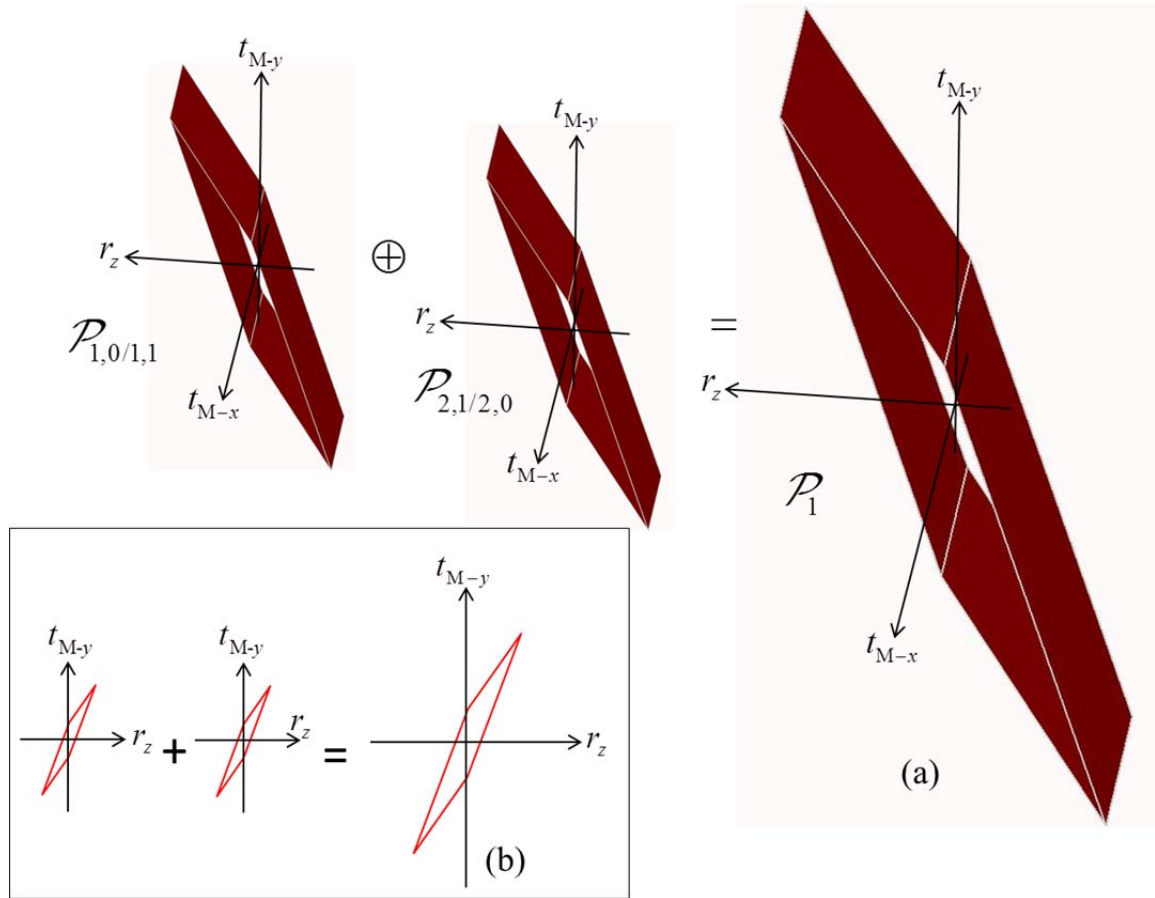


Figure 3-15. Détermination du polytope $\mathcal{P}_1$

La figure 3-16(a) illustre une section du polytope $\mathcal{P}_2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. La figure 3-16(b) illustre une section du polytope $\mathcal{P}_2$ dans le plan (r_z, t_{M-y}) .

Le polytope $\mathcal{P}_2$ n'a qu'une facette non bouchon car le polytope de contact $\mathcal{P}_{2,2/1,2}$ ne possède qu'une seule facette non bouchon.

De manière analogue, la figure 3-17(a) illustre la détermination de $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_{2,0/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/1,3} \oplus \mathcal{P}_{1,3/1,0}$) dans $\mathbb{R}^3$ et la figure 3-17(b) montre une section de $\mathcal{P}_3$ dans le plan (r_z, t_{M-y}) .

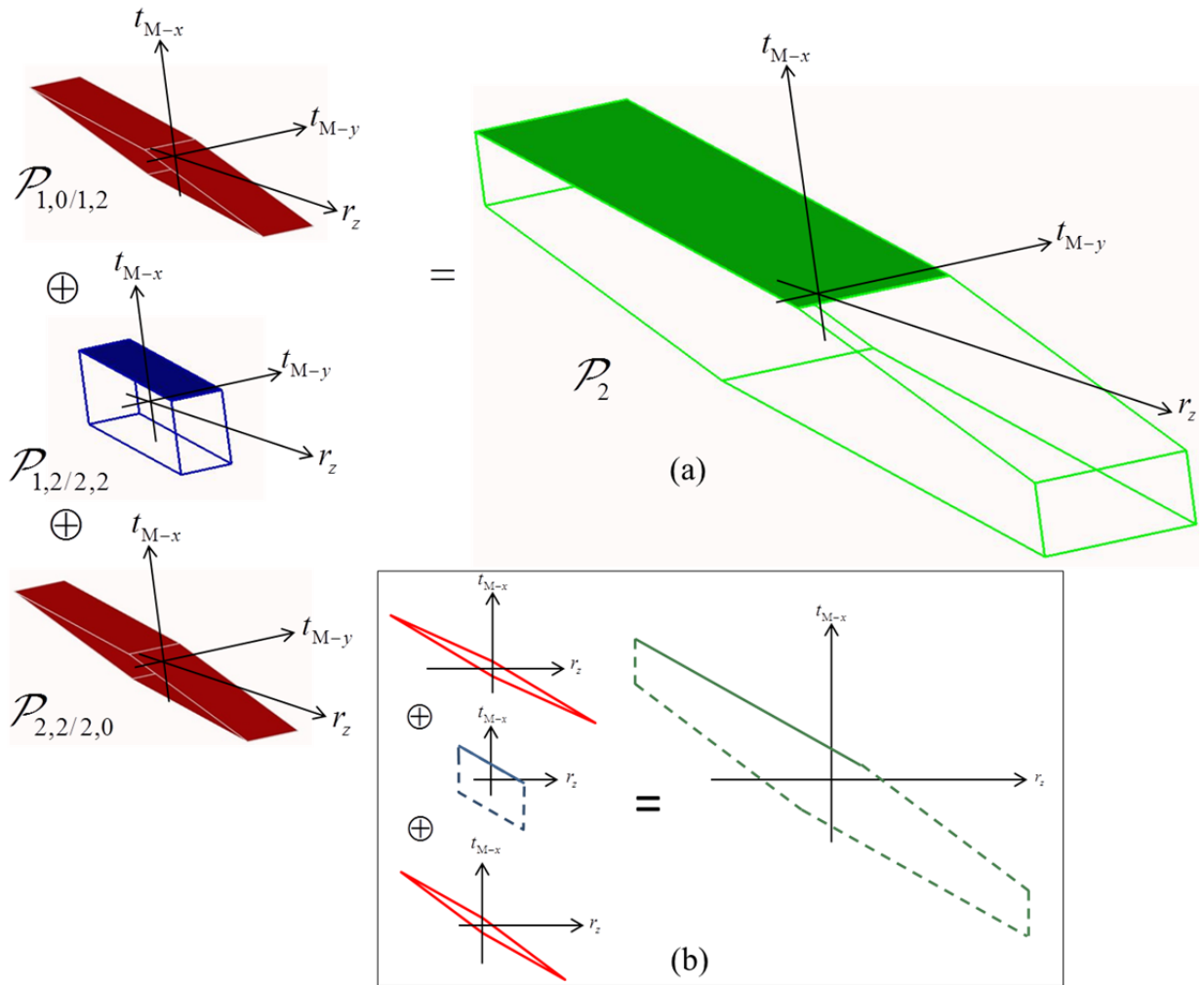


Figure 3-16. Détermination du polytope $\mathcal{P}_2$.

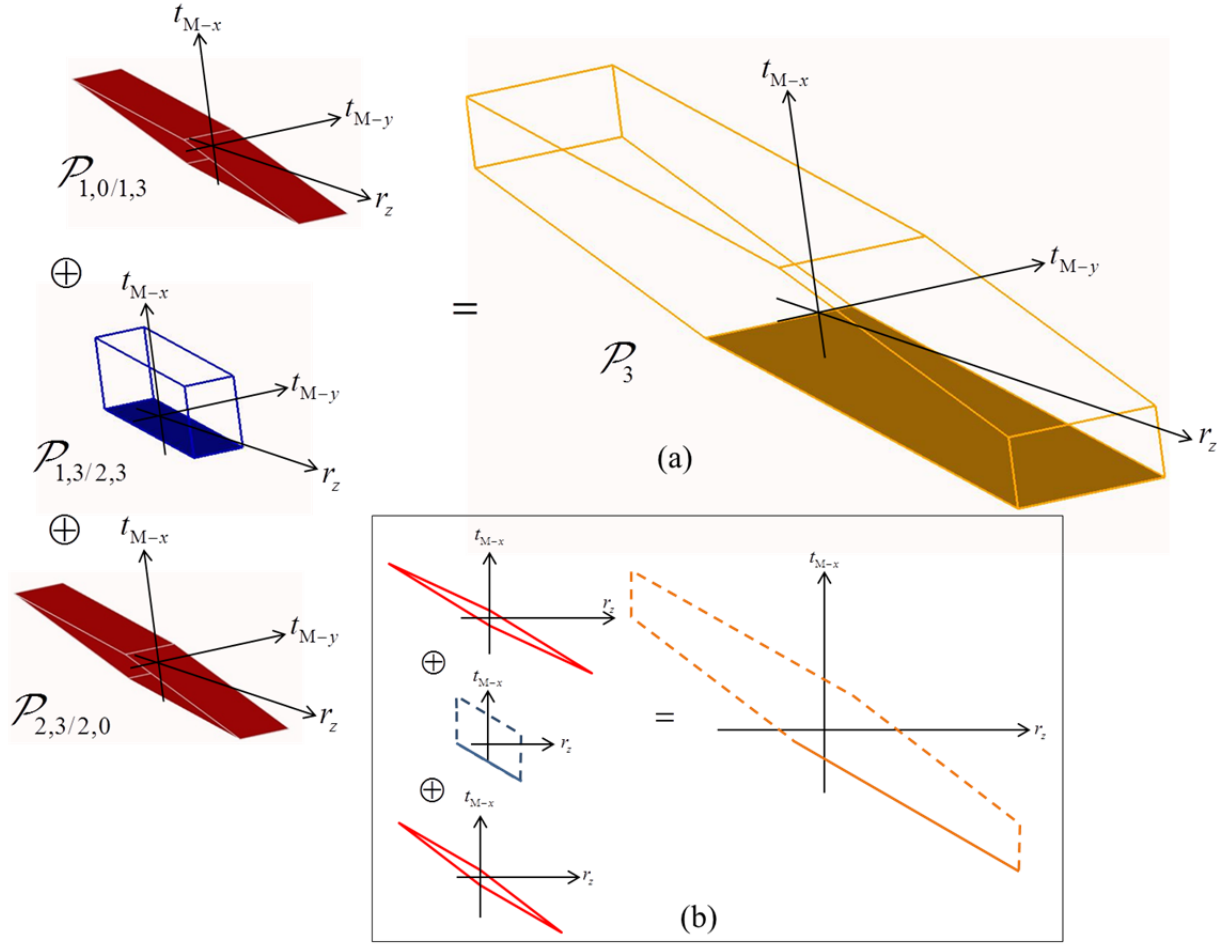


Figure 3-17. Détermination du polytope $\mathcal{P}_3$.

3.5.2.2 Détermination de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ et de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$

Appliquons la méthode présentée au §3.4.2 afin de déterminer $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$. Définissons un parallélépipède droit circonscrit à l'union des sommets de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. L'intersection entre ce parallélépipède et les demi-espaces non bouchons de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ génère $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$: voir figure 3-18.

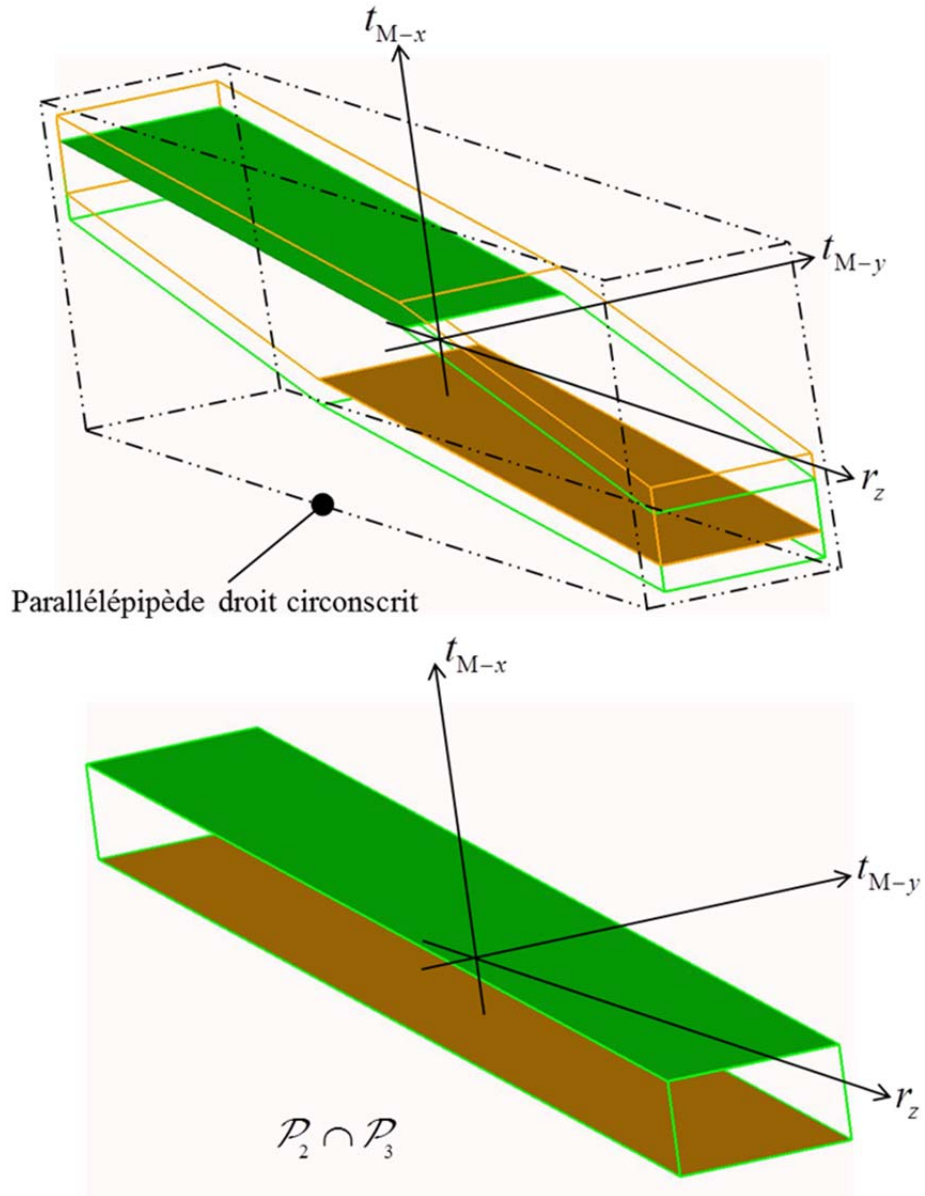


Figure 3-18. Détermination de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

La détermination de $\mathcal{P}_1 \cap (\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3)$ est un cas particulier où l'intersection des demi-espaces non-bouchons des opérandes génère un ensemble borné. Le polytope obtenu ne contient pas de demi-espaces bouchons, voir figure 3-19.

Dans ce cas, l'intersection d'un hyper-parallélépipède droit circonscrit à l'union des sommets des opérandes $\mathcal{P}_1$ et $(\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3)$ avec les demi-espaces non bouchons de ces opérandes donne le même résultat que l'intersection des demi-espaces non-bouchons, voir figure 3-19.

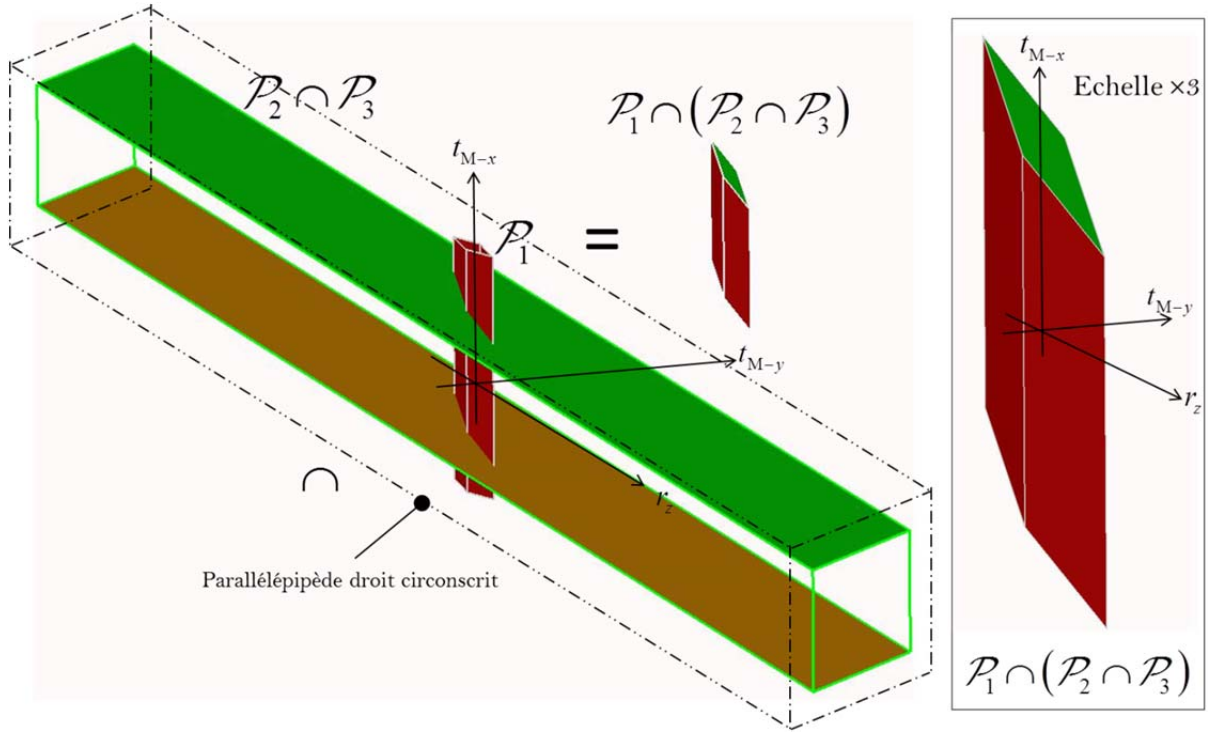


Figure 3-19. Détermination de $\mathcal{P}_1 \cap (\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3)$.

3.5.2.3 Détermination de $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$

La détermination de $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ est illustrée en figure 3-20. On peut remarquer que les polytopes $\mathcal{P}_{3,4/2,4}$ et $\mathcal{P}_{2,4/2,0}$ sont identiques car nous avons considéré que $t_{2,4} = J_4$. Tous les polytopes opérands ($\mathcal{P}_{3,4/2,4}$, $\mathcal{P}_{2,4/2,0}$, $\mathcal{P}_{1,0/1,4}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$) et par conséquent le polytope $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ sont centrés sur l'origine des déplacements.

L'application de la méthode présentée au §3.3 permet de détecter que le polytope $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ est constitué de deux calottes polyédriques bouchons affichées en filaire sur la. Cela signifie qu'il n'est pas possible de contrôler les variations géométriques au point M en translation suivant la direction $\mathbf{x}$ entre les surfaces 3,4 et 1,4.

Cette particularité est due à la mobilité en translation suivant $\mathbf{x}$ entre les pièces 3 et 1.

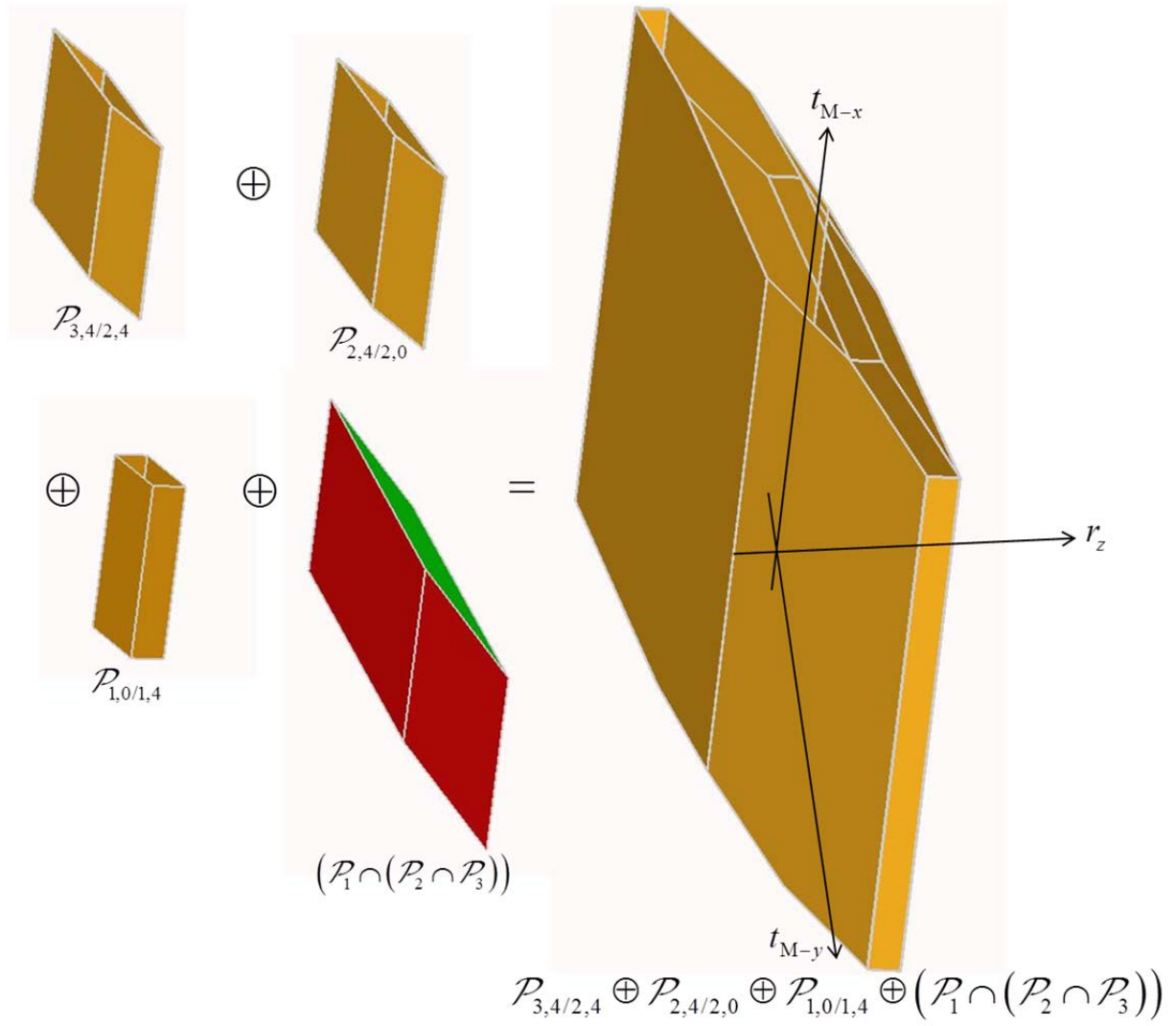


Figure 3-20. Détermination de $\mathcal{P}_{3,4/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/2,0} \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,4} \oplus (\mathcal{P}_1 \cap (\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3))$.

La figure 3-21 illustre le polytope calculé $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ inclus dans le polyèdre fonctionnel défini par la relation (2.81). Le déploiement des attributs bouchon et non-bouchon sur les sommets et facettes des polytopes dans les opérations mises en œuvre montre que cette inclusion ne dépend pas de demi-espaces bouchons. On en déduit qu'il est possible de maîtriser les variations de position au point M en translation suivant $\mathbf{y}$ entre les surfaces 3,4 et 1,4. Par conséquent, il est possible de respecter la condition fonctionnelle CF définie par la relation (2.81).

Dans l'exemple étudié dans ce mémoire, les polytopes opérands ont été calculés avec les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} t_{i,j} &= J_4 = 0.1 \text{ mm}, \\ L_1 &= 150 \text{ mm}, \\ L_2 &= 80 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Les limites des déplacements en translation t_{M-y} définies au point M identifiées par $e_{\min}$ et $e_{\max}$ sont respectivement égaux à -0.758 mm et +0.758 mm.

La vérification de l'inclusion d'un polytope calculé dans un polyèdre fonctionnel permet de simuler la conformité d'un système mécanique au regard d'une exigence fonctionnelle CF, c'est-à-dire de vérifier la relation suivante :

$$\begin{aligned} dev_{\inf} &\leq e_{\min} \\ dev_{\sup} &\geq e_{\max} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les limites des déplacements $e_{\min}$ et $e_{\max}$ obtenus par un calcul de chaîne de cotes 1d réalisé indépendamment sont respectivement -0.25 mm and +0.25 mm.

La différence entre les résultats (0.508 mm) est due à l'effet des rotations.

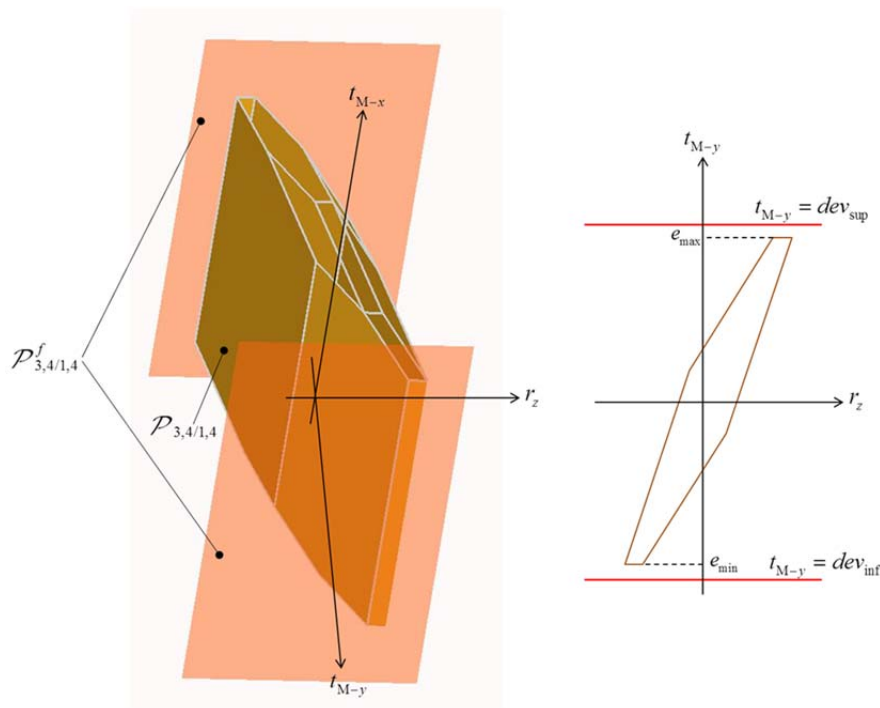


Figure 3-21. Inclusion de $\mathcal{P}_{3,4/1,4}$ dans le polyèdre fonctionnel $\mathcal{P}_{3,4/1,4}^f$.

Ce chapitre introduit les différents algorithmes de calcul utilisés pour réaliser l'analyse de tolérances par les polytopes.

Tout d'abord, le principe de la troncature permet de déterminer les polytopes opérands et les intersections de polytopes. Il permet également de réaliser l'intersection des cônes normaux, base de l'algorithme de calcul utilisé pour la somme des polytopes.

Ensuite est introduite la notion de demi-espaces bouchons adjoints afin de pouvoir borner les polyèdres associés aux contraintes géométriques pour les transformer en polytopes. Ces demi-espaces bouchons limitent les déplacements non bornés d'une surface à l'intérieur d'une zone de tolérance. De manière analogue, les polyèdres de contacts sont bornés par des demi-espaces bouchons afin d'obtenir des polytopes de contact. Ces demi-espaces limitent les déplacements non bornés entre deux surfaces potentiellement en contact.

Ainsi la position relative entre deux surfaces quelconques d'un système mécanique peut être formalisée par des opérations, somme de Minkowski et intersection, sur des polytopes opérands de $\mathbb{R}^6$. L'utilisation de demi espaces bouchons pour borner des polyèdres en polytopes est motivée par la complexité algorithmique des sommes de Minkowski de polyèdres de $\mathbb{R}^n$.

Les mécanismes d'identification des demi-espaces bouchons d'une somme de Minkowski et d'une intersection ont été décrits. L'influence des demi-espaces bouchons sur la topologie d'un polytope obtenu par sommation ou intersection est primordiale afin de valider la conformité d'un système mécanique au regard d'une exigence fonctionnelle.

Bien que l'exemple d'application soit traité comme un problème plan permettant de ne manipuler que des polytopes de $\mathbb{R}^3$, les mécanismes d'identification des demi-espaces bouchons dans les sommes et les intersections peuvent être déployés dans $\mathbb{R}^6$ sans aucune restriction.

4 Mise en œuvre des opérations sur les polytopes

Pour mettre en œuvre les polytopes dans un processus d'analyse de tolérances, certaines problématiques opérationnelles sont à gérer. Ces problématiques opérationnelles reposent entre autres, sur le choix d'une configuration de calcul pour un polytope. Une configuration de calcul est définie par un point d'expression, une base d'expression et un ensemble de coefficients d'homogénéisation des variables manipulées.

Après avoir identifié les paramètres influents sur la détermination de la double description d'un polytope, nous allons nous focaliser sur les paramètres caractérisant une configuration de calcul. Nous allons montrer qu'il est possible de déduire la double description d'un polytope dans une configuration de calcul quelconque étant donné la double description de ce même polytope dans une configuration de calcul donnée par une transformation affine. Cette propriété fondamentale permet de décliner plusieurs stratégies de calculs laissant entrevoir un moyen de mieux gérer les problèmes de précision numérique et les temps de calculs.

Nous allons dans ce chapitre exposer différentes stratégies de résolution.

Un exemple d'application sur un spectromètre de masse illustrera une démarche d'analyses de tolérances selon plusieurs stratégies de simulations.

4.1 Paramètres de mises en œuvre

Cette partie est consacrée aux paramètres inhérents à la mise en œuvre des polytopes. Ces paramètres ont une influence sur la précision d'un polytope au regard des limites des variations géométriques simulées mais aussi sur la précision d'un polytope d'un point de vue numérique. La maîtrise de la précision d'un polytope repose sur des stratégies de mise en œuvre de l'algorithme de troncature permettant de déterminer la double description d'un opérande, une intersection entre deux opérandes ou bien une somme de deux opérandes. Ces paramètres ont également une influence sur les temps de calculs qui ne sont pas à négliger dans un contexte d'application industrielle.

Les paramètres influents sur la précision d'un polytope sont les suivants :

- Le nombre de points discrétisant une surface tolérancée ou un élément de contact : ce nombre détermine le nombre de contraintes géométriques ou de contact et donc le cardinal de l'ensemble des demi-espaces non bouchons d'un opérande. Plus ce nombre augmente, plus l'approximation des limites des variations géométriques simulées diminue, mais il peut exacerber des problèmes de précision numérique. Une des problématiques de la maîtrise de la précision d'un polytope est de déterminer un nombre optimal de points vis-à-vis de la précision des limites de variation à atteindre.
- La tolérance numérique de la troncature : la structure topologique de la double description d'un polytope opérande est constituée :
 - de la liste des demi-espaces du polytope,
 - des sommets obtenus par l'intersection des demi-espaces,
 - des frontières des demi-espaces sur lesquelles est attaché chaque sommet à une tolérance numérique près.

La valeur de cette tolérance conditionne le nombre de sommets générés par chaque troncature d'un demi-espace. Une tolérance numérique faible garantit une bonne précision d'un point de vue des limites de variations géométriques simulées. Plus la tolérance numérique est faible, plus le nombre de sommets augmente impactant la complexité des éventails normaux et donc la détermination des sommes de Minkowski. Une problématique consiste à déterminer la tolérance numérique de troncature optimale vis-à-vis de la précision des limites de variations géométriques recherchées versus la complexité des éventails normaux.

- Le point d'expression d'un polytope : les demi-espaces caractérisent des contraintes de déplacement en un point donné, de même les coordonnées des sommets indiquent les limites de déplacements à ce même point. Théoriquement, il est possible de déterminer la double description d'un polytope en n'importe quel point de l'espace qu'il s'agisse de la détermination d'un opérande ou d'un polytope résultant d'une somme ou d'une intersection.

L'enveloppe convexe sur laquelle est disposée les sommets d'un polytope tend à se déformer (à s'aplatir) en fonction de la distance séparant le point de calcul du polytope et le barycentre des points de discrétisation définissant les demi-espaces non bouchons. Cette déformation est source de problème numérique au regard de la troncature. Une problématique consiste à chercher un point d'expression optimal au regard de la précision numérique de l'algorithme de troncature dans le cas de la détermination de la somme ou de l'intersection entre deux opérandes.

- La base d'expression des demi-espaces et des sommets : les éléments de situation des liaisons et des surfaces tolérancées ne sont pas alignés sur les axes d'un même repère global. Théoriquement, la détermination d'un polytope peut être réalisée dans une base quelconque. Une problématique consiste à chercher la base dans laquelle déterminer la somme ou l'intersection de deux opérandes définis initialement dans deux bases locales respectives.
- Les coefficients d'homogénéisation : les six paramètres pris en compte pour définir un polytope (ou polyèdre) de $\mathbb{R}^6$ ne sont pas homogènes d'un point de vue unité. En effet, les unités ne sont pas les mêmes selon qu'il s'agisse de rotation (rad) ou de translation (mm). Les valeurs des paramètres de rotations varient selon les dimensions de la surface tolérancée (ou de l'élément de contact). Les paramètres de translation dépendent du point d'expression du polytope. De plus, les six paramètres dépendent de la base d'expression. Les rapports sont généralement de l'ordre de 10^{-3} entre les composantes de rotation et de translation exprimées au barycentre des points de discrétisation de l'élément tolérancé. Cela génère des angles faibles entre des normales de demi-espaces connexes et donc des polytopes aplatis. Cela conduit à des problématiques de précision numérique pour la troncature. Une solution pour palier à ce problème est de diviser les coefficients des variables de rotation des demi-espaces respectivement par des coefficients d'homogénéisation supérieurs à 1. Une problématique consiste à déterminer ces coefficients d'homogénéisation afin de maîtriser les problèmes numériques de la troncature.

Parmi les paramètres influents listés ci-dessus, nous allons nous focaliser par la suite sur les paramètres définissant une configuration de calcul, à savoir le point et la base d'expression ainsi que les coefficients d'homogénéisation.

4.2 Conservation de la topologie des polytopes par les transformations affines

Pour répondre aux problématiques énoncées, nous montrons dans cette partie du document un résultat primordial illustrant la conservation de la topologie par un changement de point d'expression du polytope, par un changement de base d'expression ou par l'homogénéisation des paramètres.

4.2.1 Théorème fondamental

En se basant sur les notions de treillis de faces définies dans la chapitre 2 §2.1.2.5, soit la définition suivante [HeRZ97], [GrSt93] :

Définition 4.1 : deux polytopes sont dits combinatoirement équivalents si les treillis de leurs faces sont isomorphes.

Un isomorphisme est une application linéaire et bijective entre deux espaces vectoriels quelconques.

Nous énonçons la proposition suivante :

Proposition 4.1 : Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ un polytope et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une transformation affine alors $f(\mathcal{P})$ est un polytope combinatoirement équivalent à $\mathcal{P}$.

Remarque 4.1 :

- Une transformation affine est une application bijective.
- Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous espaces affines de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite affine si pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}) \quad (4.1)$$

Généralement, une transformation est affine si elle laisse invariantes les combinaisons affines (2.4).

- Une transformation affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ peut être définie par $\mathbf{x} \mapsto M.\mathbf{x} + \mathbf{y}$ où M est une application linéaire et $\mathbf{y} \in \mathcal{E}$.
- Le déplacement d'un point d'un solide dans l'espace est une transformation affine (§1.2.1).
- La proposition 4.1 est généralisable aux polyèdres.

Démonstration (*proposition 4.1*): soit $f = t \circ l$ la décomposition de f en une transformation linéaire l et une translation t par un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Montrons tout d'abord que $f(\mathcal{P})$ est un polytope de $\mathbb{R}^n$. Soit la $\mathcal{V}$ -définition de $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} = \text{conv}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\})$. Pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{p}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{p} = \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i$ avec $\sum_i \lambda_i = 1$ (voir §2.1.2.3). Soit donc $\mathbf{v} = \mathbf{v} \sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}$.

Par application de la fonction f , nous avons :

$$f(p) = t \circ l(p) = \mathbf{v} + \sum_i \lambda_i l(\mathbf{x}_i) = \sum_i \lambda_i (\mathbf{v} + l(\mathbf{x}_i)) = \sum_i \lambda_i f(\mathbf{x}_i) \quad (4.2)$$

Ce que prouve que $f(\mathcal{P}) = \text{conv}(\{f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_r)\})$. $f(\mathcal{P})$ est ainsi un $\mathcal{V}$ -polytope.

Prouvons maintenant que les deux polytopes $\mathcal{P}$ et $f(\mathcal{P})$ sont combinatoirement équivalents.

Soit F une face de $\mathcal{P}$ définie par : $F := \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = v_0\}$ (2.27)

Une application linéaire quelconque l_a est généralement définie par : $l_a : \mathbf{x} \mapsto a \cdot \mathbf{x}, a \in \mathbb{R}^n$. Soit ici l'application linéaire $l_v : \mathbf{p} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in F$.

La fonction f est inversible donc la fonction $l_v \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie. soit $l_{v'} = l_v \circ f^{-1}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$. Nous avons $l_{v'}(f(\mathbf{p})) = l_v \circ f^{-1}(f(\mathbf{p})) = v_0, \forall \mathbf{p} \in F$.

F est une face de $\mathcal{P}$ donc pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ nous avons $l_v(\mathbf{p}) \leq v_0$ (2.27). Par conséquent, $l_{v'}(f(\mathbf{p})) = l_v(\mathbf{p}) \leq v_0$ et par conséquent $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' \leq v_0$ pour tout $\mathbf{q} = f(\mathbf{p}) \in f(\mathcal{P})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(F) &= \{f(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in F\} = \{f(\mathbf{p}) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = v_0, \mathbf{p} \in \mathcal{P}\} \\ &= \{f(\mathbf{p}) : l_v(\mathbf{p}) = v_0, \mathbf{p} \in \mathcal{P}\} \\ &= \{\mathbf{q} \in f(\mathcal{P}) : l_{v'}(\mathbf{q}) = l_v \circ f^{-1}(\mathbf{q}) = v_0\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

est une face de $f(\mathcal{P})$.

La transformation affine et bijective f préserve la loi de composition interne (l'inclusion), c'est à dire que si F et G sont deux faces de $\mathcal{P}$ telles que $F \subset G$ alors $f(F) \subset f(G)$ et les deux polytopes $\mathcal{P}$ et $f(\mathcal{P})$ ont deux treillis de faces isomorphes donc par définition 4.1, les deux polytopes sont combinatoirement équivalents.

4.2.2 Changement du point de définition d'un polytope

En analyse de tolérances, le changement de point d'expressions des polytopes opérands est utile. En effet, les polytopes opérands modélisant les variations internes (variations entre les surfaces d'une même pièce) et les polytopes opérands modélisant les variations externes (variations entre deux surfaces de deux pièces différentes) sont exprimés en différents points. Pour calculer une somme de Minkowski ou une intersection de deux polytopes opérands, les polytopes doivent être écrits en un point unique, le changement de point d'expression est alors indispensable.

Soit $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$ -polytope initialement exprimé en un point quelconque M . On souhaite réécrire ce même polytope en un point M' différent de M .

En utilisant les propriétés des déplacements détaillées dans le §1.2 du chapitre 1 avec $\mathbf{D}_M = \mathbf{M}\mathbf{M}' = (x \ y \ z)^T$, nous obtenons la matrice de passage suivante $V_{M \rightarrow M'}$ associée au changement du point, appliquée à un vecteur $\mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{M-x}, t_{M-y}, t_{M-z})^T$ telle que :

$$V_{M \rightarrow M'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & y & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Cette matrice de passage est inversible. La transformation associée au changement du point d'expression du polytope est affine et bijective. Les deux polytopes associés sont donc combinatoirement équivalents selon la proposition 4.1. La topologie du polytope reste inchangée tandis que sa forme est différente.

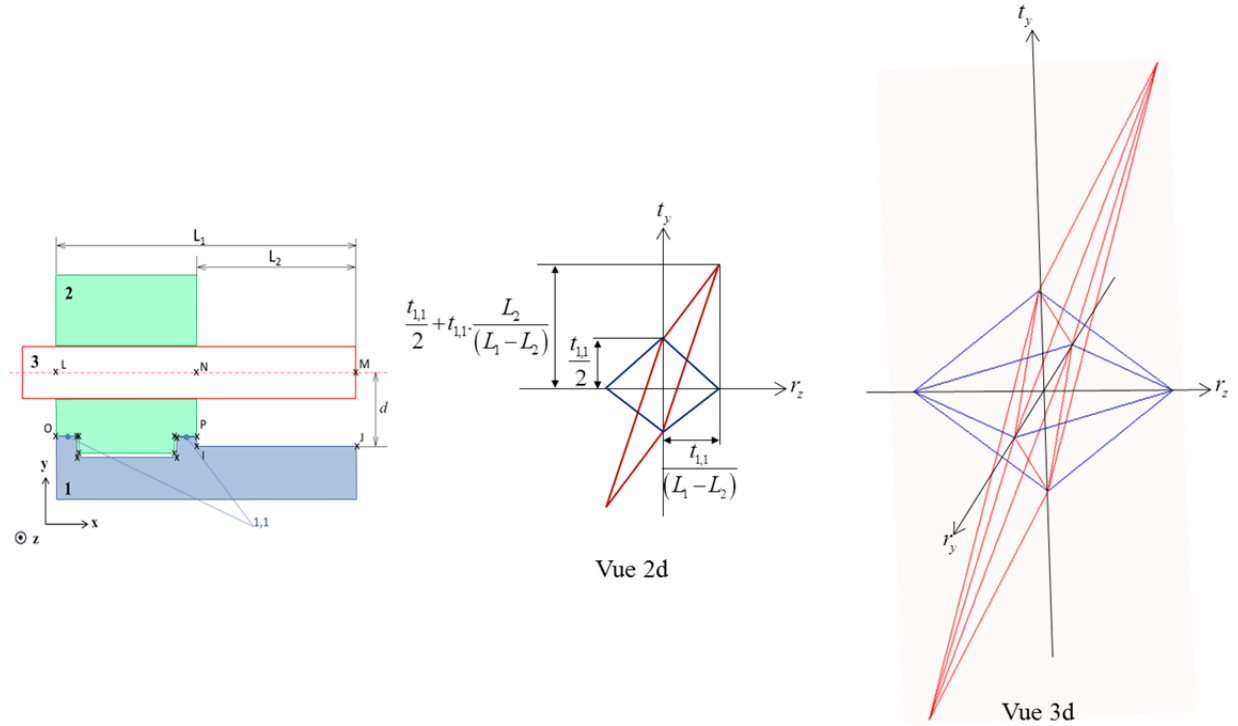


Figure 4-1. Changement du point d'expression du polytope $\mathcal{P}_{1,1/1,0}$.

De même, si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{H}$ -polytope, la matrice de passage $H_{M \rightarrow M'}$, appliquée au vecteur des coefficients $(a_i)_i$ des demi-espaces, peut être définie selon :

$$H_{M \rightarrow M'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Considérons l'exemple de l'application traitée dans le chapitre 3 §3.5. Le polytope $\mathcal{P}_{1,1/1,0}$ est écrit initialement au centre de la surface plane de contour rectangulaire (en bleue) puis au point de la condition fonctionnelle M (en rouge) (cf. Figure 4-1).

4.2.3 Changement de la base de définition d'un polytope

Lors des opérations de somme et d'intersection, les polytopes doivent être exprimés selon une même base. Or, les polytopes peuvent être définis dans des bases locales différentes si toutes les liaisons et surfaces du mécanisme ne sont pas orientées selon les mêmes axes. Dans ce cas, un changement de base est indispensable.

Pour le changement de base, la matrice de rotation (détaillée dans le §1.2) peut être définie par :

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z \cdot \cos \theta_x & -\sin \theta_z \cdot \cos \theta_y & \sin \theta_y \\ \sin \theta_z \cdot \cos \theta_x + \cos \theta_z \cdot \sin \theta_y \cdot \sin \theta_x & \cos \theta_z \cdot \cos \theta_x + \sin \theta_z \cdot \sin \theta_y \cdot \sin \theta_x & -\cos \theta_y \cdot \sin \theta_x \\ \sin \theta_z \cdot \sin \theta_x - \cos \theta_z \cdot \sin \theta_y \cdot \cos \theta_x & \cos \theta_z \cdot \sin \theta_x + \sin \theta_z \cdot \sin \theta_y \cdot \cos \theta_x & \cos \theta_y \cdot \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Les angles θ_x , θ_y et θ_z sont les angles de Cardan.

La matrice de passage entre deux bases b_0 et b_1 , dans lesquelles le polytope est exprimé, peut être définie par (4.7) :

$$P_{b_0 \rightarrow b_1} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{R}_{01}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\mathbf{R}_{01}} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La matrice de passage est inversible, l'application associée est bijective. Les deux polytopes ainsi définis sont donc combinatoirement équivalents selon la proposition 4.1.

La matrice utilisée pour déterminer le changement de base d'une $\mathcal{V}$ -description est la même matrice pour déterminer le changement de base d'une $\mathcal{H}$ -description d'un polytope.

Considérons dans la figure 4-2 la cas de la surface 1,1 du mécanisme traité en §2.3 (dont ses déplacements sont modélisés par $\mathcal{P}_{1,1/1,0}$).

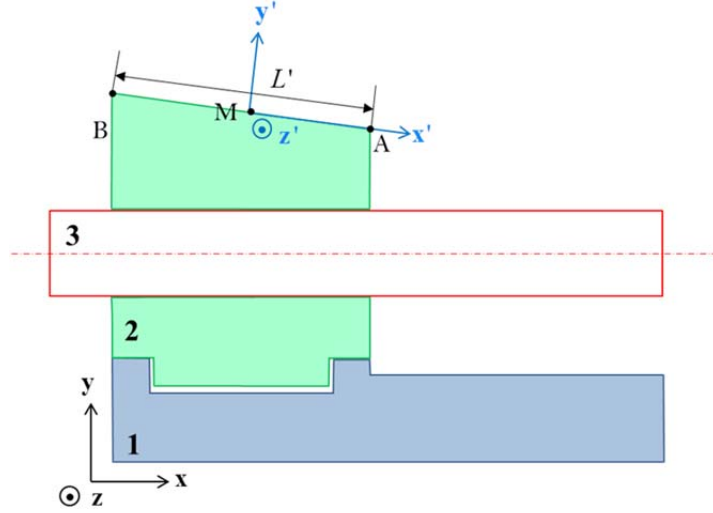


Figure 4-2. Changement de base d'expression associé à la surface 1,1 modifiée.

Les déplacements dans la base $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ de la surface en un point M sont définis par le triplet $(t'_{M-x}, t'_{M-y}, r'_z)$ et proposons de ré-exprimer ces déplacements dans la base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Les déplacements seront notés par (t_{M-x}, t_{M-y}, r_z) . La transformation associée est réduite à:

$$\begin{pmatrix} t_{M-x} \\ t_{M-y} \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_{M-x} \\ t'_{M-y} \\ r'_z \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les déplacements exprimés selon t_{M-x} , t_{M-y} et r_z dans une base b_0 sont les images des déplacements t'_{M-x} , t'_{M-y} et r'_z dans une base b_1 définie par une rotation d'angle autour de l'axe $\mathbf{z}$. La transformation inverse définie par la rotation inverse définit les déplacements dans b_1 en fonction des déplacements dans la base b_0 . Les deux transformations sont bijectives, les polytopes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ exprimés dans les deux bases b_1 et b_0 respectivement sont alors combinatoirement équivalents. La topologie est donc conservée.

Les polytopes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont définis par les écritures suivantes, où C est le second membre du demi-espace bouchon :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}' &:= \begin{cases} \frac{-t_{1,1}}{2} \leq t'_{M-y} - \frac{L'}{2} r'_z \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ \frac{-t_{1,1}}{2} \leq t'_{M-y} + \frac{L'}{2} r'_z \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ -C \leq t'_{M-x} \leq +C \end{cases} \\
\mathcal{P} &:= \begin{cases} \frac{-t_{1,1}}{2} \leq -\sin \theta_z t_{M-x} + \cos \theta_z t_{M-y} - \frac{L'}{2} r_z \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ \frac{-t_{1,1}}{2} \leq -\sin \theta_z t_{M-x} + \cos \theta_z t_{M-y} + \frac{L'}{2} r_z \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ -C \leq \sin \theta_z t_{M-x} + \cos \theta_z t_{M-y} \leq +C \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Soit $\cos \theta_z > 0$. La figure 4-3 illustre une représentation graphique deux sections du polytope $\mathcal{P}$ dans la base (t_{M-x}, t_{M-y}) et (t_{M-y}, r_z) . Le polytope est défini par une rotation du polytope $\mathcal{P}'$ exprimé dans la base b_0

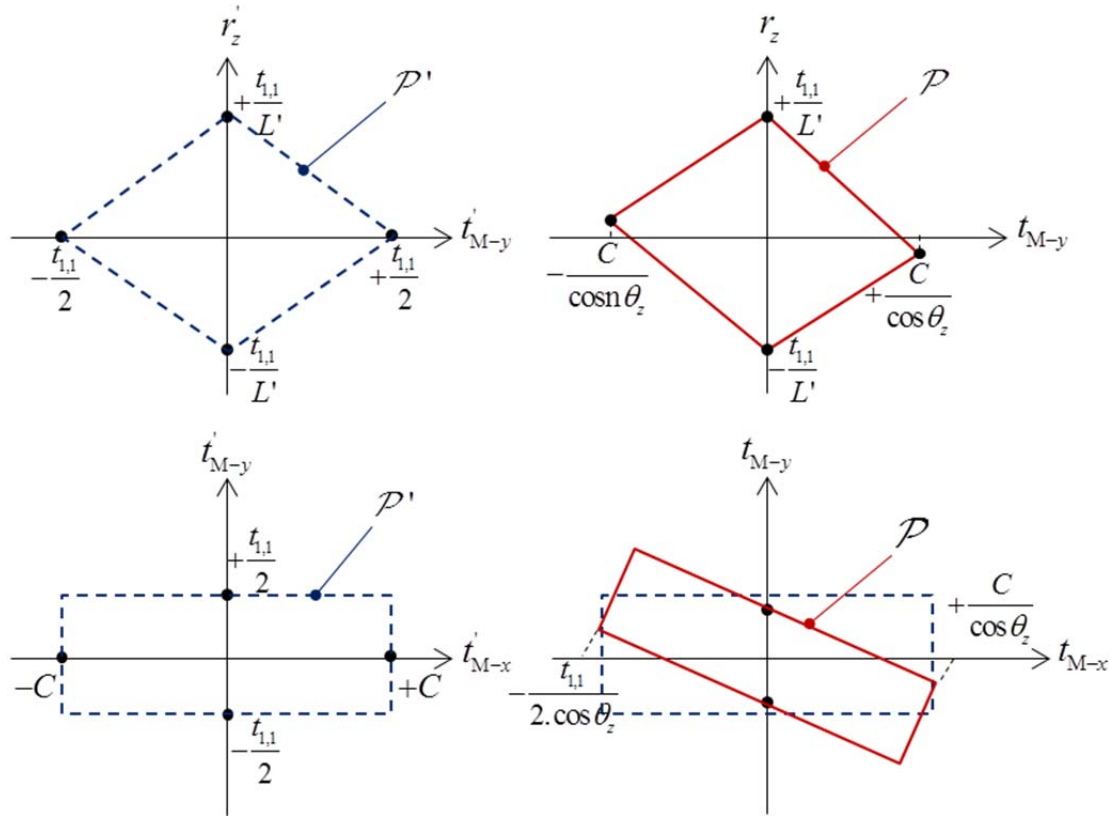


Figure 4-3. Coupes des deux polytopes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dans les bases (t_{M-x}, t_{M-y}) et (t_{M-y}, r_z) .

4.2.4 Homogénéisation des paramètres

Généralement en tolérancement, les rotations sont des angles exprimés en radians. Ils sont en fonction des tolérances ou des jeux, respectivement, de l'ordre de :

$$\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{t}{d_1} \text{ ou } \alpha = \frac{J}{d_2} \quad (4.10)$$

Où d_1 est une distance caractérisant l'étendue de la surface tolérancée et d_2 une distance caractérisant l'étendue d'une surface de contact.

Il en résulte que les rotations et les translations sont d'ordre de grandeurs très différentes si on choisit le mm et le rd comme unités et si les dimensions caractéristiques de la machine sont de plusieurs mm. Cela entraîne des difficultés pour comparer l'effet des rotations et des translations, mais cela entraîne également la construction de polytopes « aplatis » avec pour conséquence possible des problèmes de calcul numériques lors des troncatures. L'expression d'un polytope dans une base dont tous les axes ont les mêmes unités (des longueurs de préférence, car nous sommes plus familiers de ces grandeurs) dépendra donc des coefficients h_i dits d'homogénéisation. Ces coefficients dépendent du type de surface étudiée et de son étendue.

Remarque 4.2 : Une homogénéisation dimensionnelle est globale peut être réalisée pour tous les paramètres en considérant une dimension référence dans le mécanisme. Ce choix n'a pas été adapté dans la thèse. En effet une homogénéisation par différentes dimensions pour des études locales a été choisie.

Remarque 4.3 : Dans ce mémoire, nous avons choisi d'homogénéiser seulement les paramètres de rotation et ainsi d'utiliser le même facteur d'homogénéisation. Le vecteur d'homogénéisation $(h, h, h, 1, 1, 1)^T$ été uniquement considéré pour les exemples présentés dans la thèse. Cependant, tous les paramètres (en rotation et translation) peuvent être théoriquement homogénéisés et avec des coefficients différents. Considérons ainsi la propriété suivante :

Propriété 4.1 : L'homogénéisation est une transformation affine bijective.

Les coefficients d'homogénéisation d'une transformation affine sont respectivement égaux à : $h_i = \frac{h_{final_i}}{h_{initial_i}} (1 \leq i \leq 6)$ où :

- $h_{initial_i}$ sont les coefficients du polytope initial avant la transformation affine,
- h_{final_i} sont les coefficients du polytope final, image du polytope initial par la transformation affine.

On considère la fonction suivante :

$$f : \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^6 \quad (4.11)$$

Telle que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$ avec $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)^T \in \mathbb{R}^6$

Cette fonction est affine et bijective. La fonction inverse est définie par :

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{h}^{-1} \cdot \mathbf{y} \text{ avec } \mathbf{h}^{-1} = \left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}, \frac{1}{h_5}, \frac{1}{h_6} \right)^T, \mathbf{y} \in \mathcal{P}' \quad (4.12)$$

Dans notre cas, un $\mathcal{H}$ -polytope $\mathcal{P}$ manipulé en tolérancement est généralement défini par :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} = (r_x, r_y, r_z, t_{M-x}, t_{M-y}, t_{M-z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \right\}$$

Avec:

$$\mathbf{A} = (a_1 \quad \dots \quad a_i \quad \dots \quad a_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 6}, \quad a_i^T = \begin{pmatrix} n_{iz}(y_i - y_M) - n_{iy}(z_i - z_M) \\ n_{ix}(z_i - z_M) - n_{iz}(x_i - x_M) \\ n_{iy}(x_i - x_M) - n_{ix}(y_i - y_M) \\ n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix}^T \quad (4.13)$$

et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

L'application d'un facteur d'homogénéisation $\mathbf{h} = (h, h, h, 1, 1, 1)^T$ permet de définir un polytope $\mathcal{P}'$ tel que :

$$\mathcal{P}' = \left\{ \mathbf{x}' = (r'_x, r'_y, r'_z, t'_{M-x}, t'_{M-y}, t'_{M-z})^T \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}' \right\} \quad (4.14)$$

$$\text{Avec } (a'_i)^T = \begin{pmatrix} [n_{iz}(y_i - y_M) - n_{iy}(z_i - z_M)] / h \\ [n_{ix}(z_i - z_M) - n_{iz}(x_i - x_M)] / h \\ [n_{iy}(x_i - x_M) - n_{ix}(y_i - y_M)] / h \\ n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix}^T \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{A}'.$$

Pour un $\mathcal{V}$ -polytope, il suffit de considérer le vecteur de coefficients $\mathbf{h}$ tel que : $\mathbf{x}' = \mathbf{h} \cdot \mathbf{x}$.

Considérons le même exemple que précédemment, c'est-à-dire l'exemple de la surface plane 1,1 (cf. voir Figure 4-4(a)) et proposons d'homogénéiser les paramètres de rotation par la distance $L_1 - L_2$. En utilisant (4.14), nous obtenons le résultat illustré dans la figure 4-4(b) :

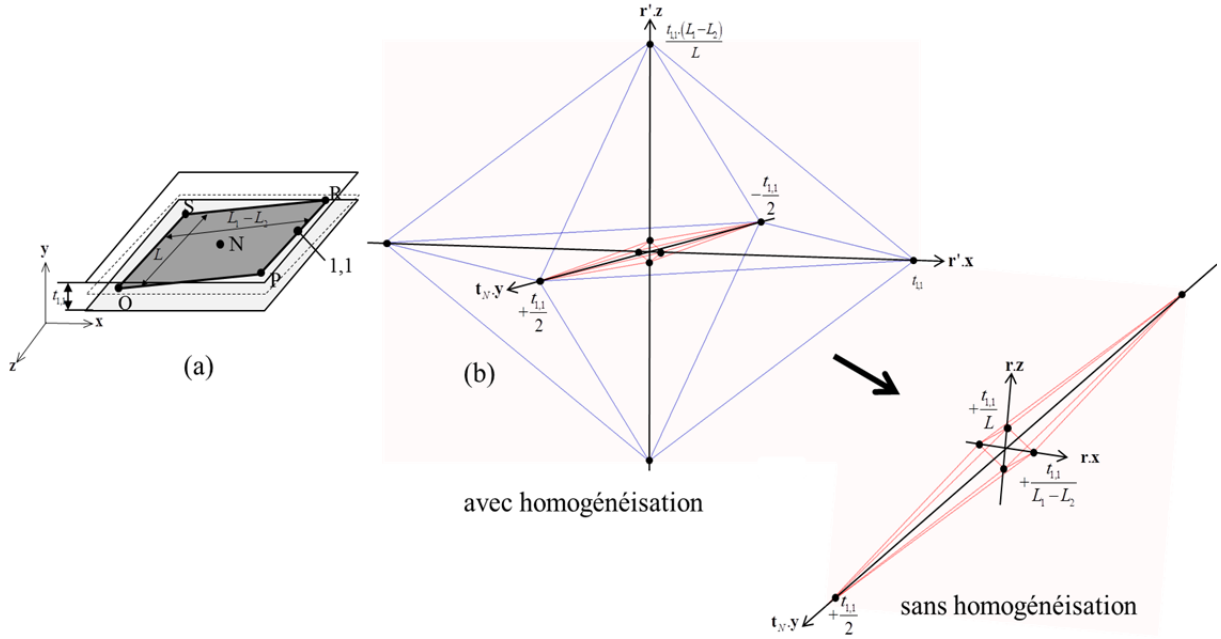


Figure 4-4. Introduction du coefficient d'homogénéisation.

Le polytope de $\mathbb{R}^6$ modélisant les limites des déplacements de la même surface dans une zone de tolérance est défini par adjonction de demi-espaces bouchons selon :

$$\begin{cases} -C \leq \mathbf{r}' \cdot \mathbf{y} = (L_1 - L_2) \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{y}) \leq +C \\ -C \leq \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{x} \leq +C \\ -C \leq \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{z} \leq +C \end{cases} \quad (4.15)$$

Remarque 4.4 : Pour l'homogénéisation des variables de rotation dans le cas d'une surface circulaire incluse dans une zone de tolérance. Le coefficient pris en compte est son diamètre.

Remarque 4.5 : En conformant toutes les variables à des écarts de translation (de même unité), un *volume* du polytope homogénéisé peut être calculé. Ce volume peut être maximisé pour remplir au mieux le polyèdre fonctionnel associé à une exigence fonctionnelle afin d'optimiser les valeurs de tolérances. Si l'homogénéisation n'est pas effectuée auparavant, les termes en translations seraient prépondérants lors de l'optimisation. Cela a été retenu pour les T-Map® [DaMS02]. G. Ameta [AmSG11] mentionne : “A very important difference between the tolerance-maps and deviation domains is that T-Maps have all the axes (in the hypothetical Euclidean space) of the same units (length units) while deviation domains can have axes of different units (angle and length units). Such homogenization of the axes, allows the T-Map model to compare two different specifications on the same feature in terms of the volume of the T-Map”.

4.2.5 Transformation affine d'un $\mathcal{HV}$ -polytope

Un polytope opérande manipulé dans cette thèse est défini par sa double description ($\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$), initialement exprimé en un point particulier, une base particulière et sans facteur d'homogénéisation. Au cours des opérations sur ces polytopes opérandes, des

transformations sont à appliquer. Il s'agit du changement du point d'expression, de la base associé et l'attribution d'un coefficient d'homogénéisation. Une transformation "globale" T_{pbc} associée à ces trois opérations se traduit par le produit des trois matrices "de passages" associées.

Une matrice $\mathbf{T}_{v-pbc}$ associée à une transformation globale T_{pbc} résultant de la combinaison d'un changement de point, de base et de coefficients d'homogénéisation entre les deux sommets $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ permet d'écrire : $\mathbf{v}' = \mathbf{T}_{v-pbc} \cdot \mathbf{v}$.

Par analogie la matrice de la transformation globale d'une $\mathcal{H}$ – description $\mathbf{T}_{h-pbc}$ est telle que : $(a_i)' = \mathbf{T}_{h-pbc} \cdot (a_i)$.

Les expressions des matrices $\mathbf{T}_{v-pbc}$ et $\mathbf{T}_{h-pbc}$ sont données dans le tableau 4-1.

$\mathcal{V}$ - description	$T_{v-pbc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & y & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{R}_{01}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\mathbf{R}_{01}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathcal{H}$ - description	$T_{h-pbc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{R}_{01}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\mathbf{R}_{01}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 4-1. Définition des matrices de transformations globales $\mathbf{T}_{v-pbc}$ et $\mathbf{T}_{h-pbc}$.

4.3 Stratégies de mises en œuvre

La vérification du respect de la condition fonctionnelle repose dans notre étude sur l'inclusion d'un polytope calculé par différents opérations sur des polytopes opérands. Les polytopes opérands sont déterminés par l'algorithme de troncature. La troncature est réalisée à différents niveaux de calculs : détermination de la double description d'un opérande, intersection et somme.

Pour calculer la somme de Minkowski ou l'intersection de deux polytopes, ces deux derniers doivent être définis au même point, dans la même base et avec le même coefficient d'homogénéisation. Ceci implique d'appliquer les transformations nécessaires.

Les changements de points et de bases et l'homogénéisation des paramètres peuvent être réalisés à différentes étapes. Il n'y a pas une manière unique de procéder aux transformations, il est ainsi possible de ramener tous les polytopes en un même point, une même base, aux mêmes coefficients d'homogénéisation dès les premiers calculs ou bien de procéder aux transformations au fur et à mesure des opérations mises en œuvres. Diverses stratégies peuvent donc être envisagées.

Nous proposons dans cette partie de décrire les principales stratégies qui peuvent être mises en œuvre pour faire de l'analyse de tolérances par des opérations sur des polytopes. La liste proposée n'est pas exhaustive. La classification des stratégies est aussi arbitraire. Elle repose seulement sur l'expérience de l'utilisation de l'outil développé à I2M.

Nous considérons que les contraintes sont initialement définies en des points locaux et dans des bases locales aux surfaces et liaisons étudiées.

4.3.1 Stratégie 1

La stratégie est décrite selon les points suivants :

- Expression initiale des ensembles de contraintes pour chaque surface au point fonctionnel P_F , dans la base associée et attribution d'un coefficient d'homogénéisation afin de définir les polytopes opérands,

Les contraintes fonctionnelles sont également écrites au point fonctionnel,

Rappel: le point fonctionnel est le point où la condition fonctionnelle sur le mécanisme est exprimée.

- Définition des polytopes opérands par troncature au même point fonctionnel P_F , dans la base globale R_F et avec le même coefficient d'homogénéisation. Des polytopes $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i, \dots$ et $\mathcal{P}_n$ sont ainsi définis

Un polyèdre fonctionnel est calculé au point fonctionnel, ce polyèdre est transformé en polytope pour simplification du calcul,

- Calcul du polytope résultant au point fonctionnel P_F . Si f_i désigne la $i^{\text{ème}}$ opération entre les polytopes alors le polytope résultant peut être déterminé par : $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_i \circ \dots \circ f_1(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i, \dots, \mathcal{P}_n)$.

L'inclusion du dernier polytope calculé dans le polyèdre fonctionnel peut finalement être vérifiée et l'analyse de tolérances peut ainsi être réalisée.

Les différentes opérations inhérentes à cette stratégie sont recommencées pour chaque condition fonctionnelle supplémentaire du mécanisme.

4.3.2 Stratégie 2

Une deuxième stratégie peut être définie selon les étapes suivantes :

- Expression de toutes les contraintes locales en un point global P_G choisi arbitrairement au niveau du mécanisme. Un changement de point est réalisée. Il en est de même pour la base et l'homogénéisation,

Expression de toutes les contraintes fonctionnelles au point global P_G . Un changement de point, de base et une homogénéisation sont réalisés,

- Définition par algorithme de troncature des polytopes opérands associés aux contraintes dans le point global. des polytopes opérands $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i, \dots$ et $\mathcal{P}_n$ sont ainsi définis,

Définition du polytope résultant au point global par opérations sur des polytopes opérands,

- Définition du polyèdre fonctionnel par algorithme de troncature,
- L'inclusion du polytope résultant dans le polyèdre fonctionnel peut être vérifiée en ce point global ou dans un autre point par transformation affine.

Certains polytopes intermédiaires peuvent être communs à plusieurs exigences. Ils sont ainsi calculés une seule fois puisqu'ils sont tous exprimés au même point et dans la même base avec les mêmes facteurs d'homogénéisations. Le nombre des opérations à réaliser dans cette stratégie est donc généralement inférieur à celui de la stratégie 1. Cependant, le choix d'une configuration unique (point de calcul, base de calcul et coefficient d'homogénéisation) peut s'avérer néfaste à la précision numérique des calculs.

4.3.3 Stratégie 3

Cette stratégie introduit la possibilité de choisir une configuration particulière pour chaque opération favorisant la précision numérique des calculs.

Les opérations sur des polytopes sont réalisées d'une manière récursive en différentes configurations caractéristiques définies à partir des opérands. Cette stratégie peut être résumée par ces différents points :

- Ecriture initiale des différentes contraintes aux points caractéristiques des surfaces. Les contraintes sont ensuite conformées à des demi-espaces de $\mathbb{R}^6$,
- Définition de tous les polytopes opérands aux différents points caractéristiques par algorithme de troncature. Des polytopes opérands $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i, \dots$ et $\mathcal{P}_n$ sont ainsi déterminés,
- Changement du point, de base et attribution d'un facteur d'homogénéisation pour la réalisation d'une première opération f_1 entre deux premiers polytopes. Les deux polytopes mis en œuvre dans une opération sont ainsi définis en un point $p_{1,2}$, une base $B_{1,2}$ et un unique facteur d'homogénéisation $coef_{1,2}$. Pour une autre opération avec d'autres polytopes, un changement de point et de base et l'attribution d'un nouveau coefficient d'homogénéisation sont effectués sur le dernier polytope défini par f_1 ainsi sur un autre polytope résultant défini par

opération f_2 pour définir le résultant des trois. C'est-à-dire $f_2 \circ f_1$. Cette stratégie de calcul est refaite d'une manière récursive. Un polytope final est calculé et finalement un dernier changement de point P_F et de base B_F et d'une homogénéisation (facteur Coef_F) doit être effectué afin de vérifier l'inclusion dans le polyèdre fonctionnel.

Soit f_i une opération réalisée entre deux polytopes. Dans ce mémoire, f_i identifie soit une somme de Minkowski soit une intersection de polytopes.

Cette stratégie minimise également le nombre d'opérations à réaliser. De plus, chaque opération est réalisée dans une configuration optimale d'un point de vue de la stabilité numérique. Elle offre donc le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision numérique.

Dans cette stratégie, les contraintes sont initialement exprimées en des points caractéristiques, les polytopes le sont aussi et les opérations sont réalisées en ces points d'une manière récursive pour calculer un polytope résultant. Un changement de point et de base et une homogénéisation associés aux points fonctionnels sont à réaliser à la fin. La figure 4-5 illustre les différentes étapes. Deux nouvelles stratégies peuvent être encore envisagées.

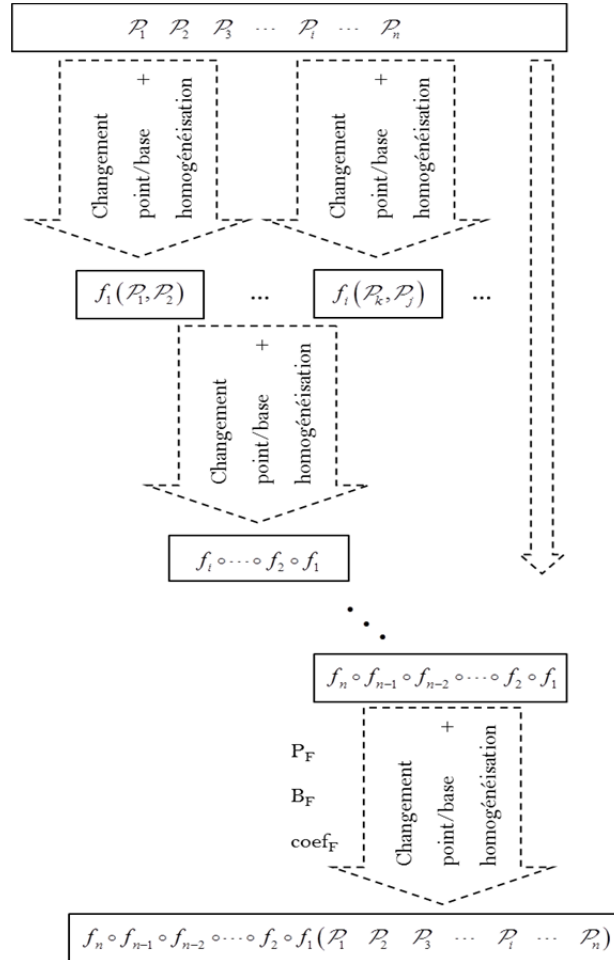


Figure 4-5. Étapes de la stratégie 3.

4.3.4 Variante 1'

La variante 1' est issue de la stratégie 1 dans laquelle les polytopes opérands sont y définis dans un premier temps dans leurs configurations locales respectives puis sont transférés selon les configurations fonctionnelles (cf. Figure 4-6). Des opérations sont y alors effectuées et les comparaisons peuvent être réalisées par rapport aux polyèdres fonctionnels.

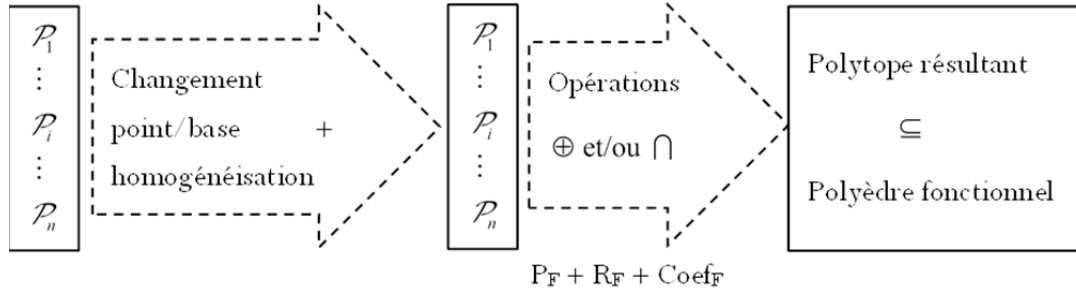


Figure 4-6. D'une configuration locale à une configuration fonctionnelle.

4.3.5 Variante 2'

La variante 2' est issue de la stratégie 2 dans laquelle les polytopes opérands sont définis dans un premier temps dans leurs configurations locales respectives puis sont transférés selon la configuration globale. Des opérations sont y alors effectuées et les comparaisons peuvent être réalisées par rapport aux polyèdres fonctionnels.

4.3.6 Synthèse

Les différentes stratégies exploitées dans cette partie peuvent être résumées dans la figure 4-7 et la figure 4-8.

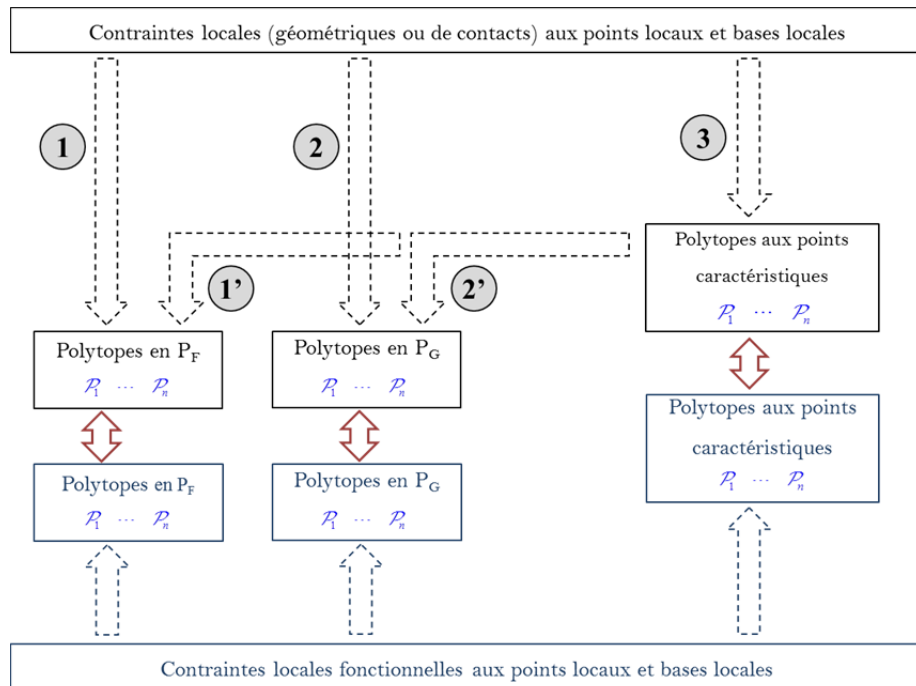


Figure 4-7. Synthèse des stratégies.

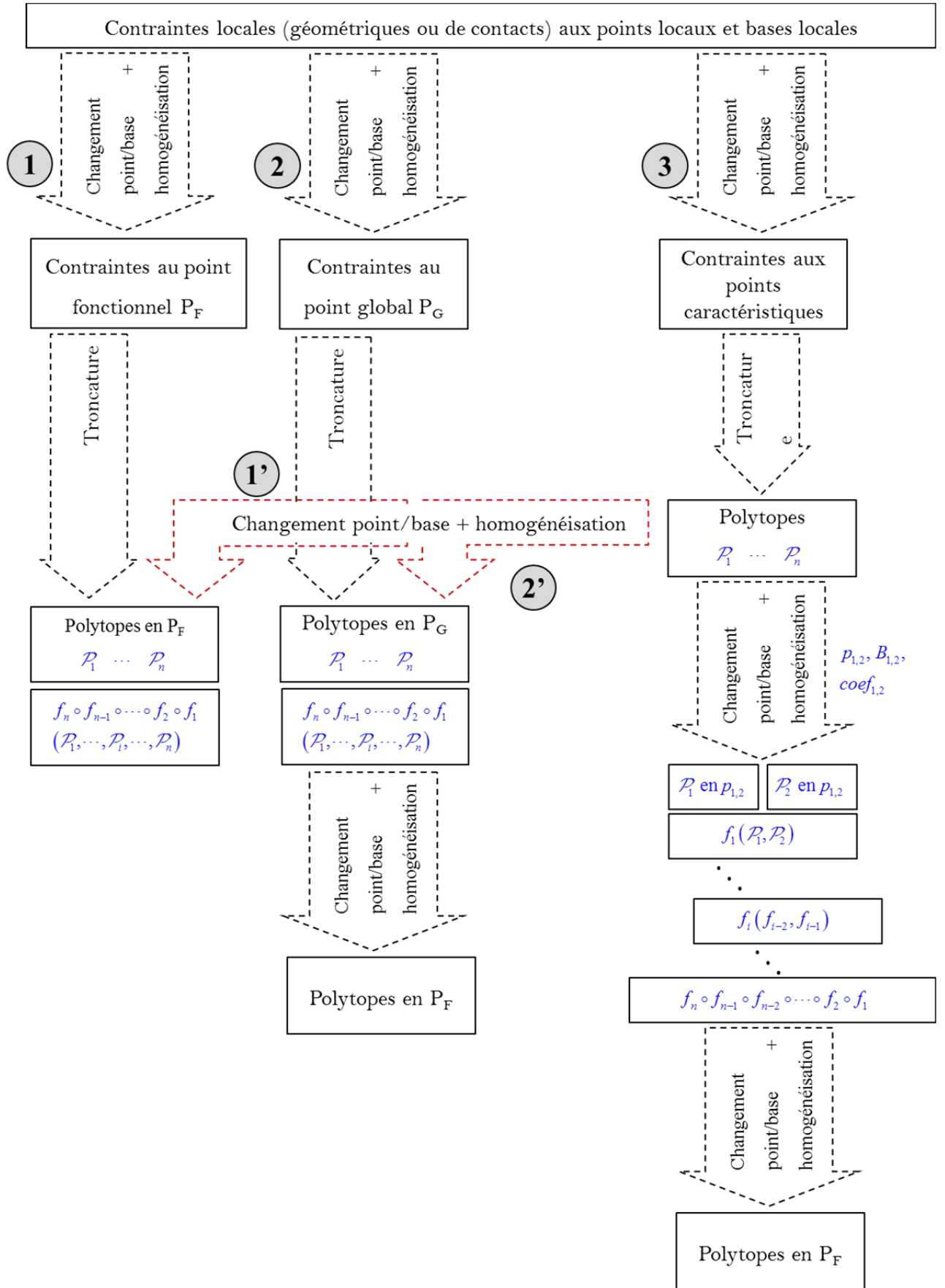


Figure 4-8. Détail des stratégies.

4.4 Application sur un mécanisme

Nous proposons dans cette partie une première application des stratégies proposées. Toutes les stratégies développées dans le paragraphe précédent ne sont pas appliquées à cet exemple. L'objectif est d'illustrer et de comparer au moins deux stratégies et de montrer l'utilité des transformations affines présentées dans ce chapitre.

Le mécanisme étudié (cf. Figure 4-9) est une version simplifiée d'un spectromètre de masse conçu par le bureau d'études du Centre d'Études Nucléaires de Bordeaux Gradignan.

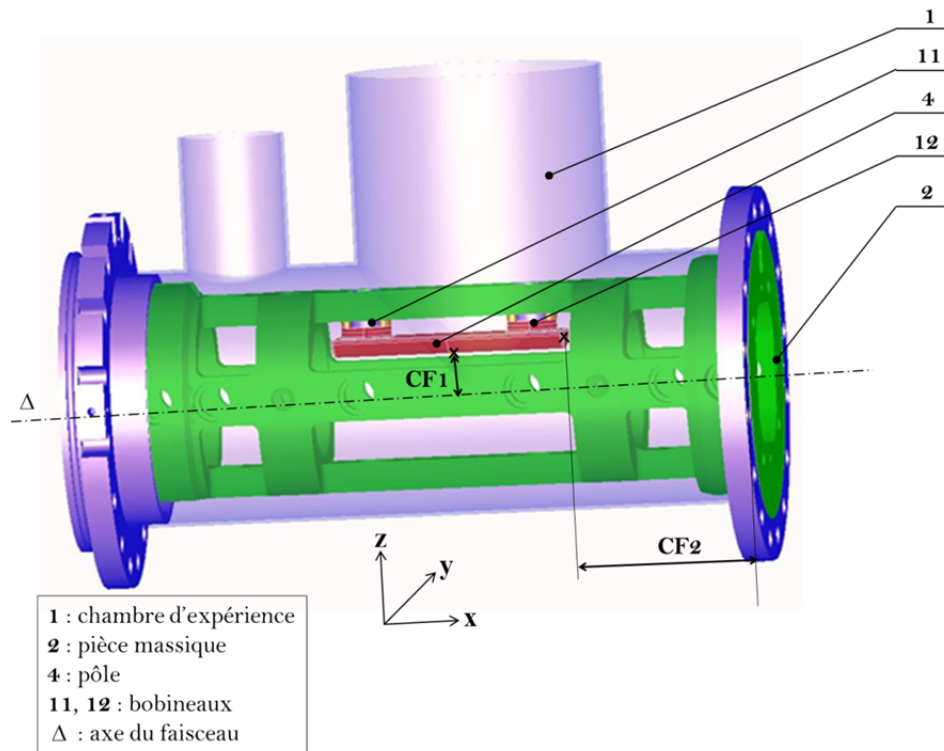


Figure 4-9. Mécanisme d'étude.

La figure 4-10 illustre une vue 2d simplifiée du mécanisme.

L'architecture du mécanisme est définie par un graphe (cf. Figure 4-11).

Un faisceau de particules Δ traverse la chambre d'expérience 1 de forme cylindrique. Nous allons admettre que le faisceau de particules est nominalement confondu avec les axes des surfaces cylindriques repérées 1,4 et 1,5. Le fonctionnement du spectromètre impose la maîtrise de la position radiale du pôle 4 par rapport à l'axe du faisceau (selon z) et de la position axiale du pôle par rapport à un plan d'extrémité du système (selon x).

Un pôle 4 est positionné à l'intérieur de la chambre 1 par un appui plan sur la pièce massique 2 et par deux centrages longs sur deux bobineaux 11 et 12 d'axes z (contacts flottants). Les bobineaux 11 et 12 sont eux-mêmes en centrages longs avec la pièce massique 2 selon l'axe z . Ces deux centrages longs ont un attribut de contact fixe (i.e. pas de jeu, pas de mouvement possible entre les pièces en contact). Les bobineaux 11 et 12 sont également en contact ponctuel avec la pièce massique 2 suivant l'axe z . Nous allons considérer dans tout ce qui suit que les pièces 11 et 12 font partie intégrante de la pièce massique 2.

La pièce massive 2 est deux fois en centrage court avec la chambre 1 : il s'agit des liaisons linéaires annulaires d'axe $\mathbf{x}$ entre les surfaces 1,4/2,4 et 1,5/2,5. La pièce massive 2 est également en appui plan normal à $\mathbf{x}$ avec la chambre 1, il s'agit de la liaison 1,6/2,6.

Deux conditions fonctionnelles sont associées au mécanisme :

- CF1 : la distance d_1 entre le pôle 4 et l'axe du faisceau doit être maîtrisée (cf. Figures 4.9, 4.10 et 4.11). Pour tous les points N_i de la génératrice de la surface cylindrique 4,4 la plus proche de Δ , on a : $d_1 - \frac{t_{cf1}}{2} \leq d_1 \leq d_1 + \frac{t_{cf1}}{2}$. On

obtient finalement pour CF1 :
$$\left\{ -\frac{t_{cf1}}{2} \leq \mathbf{t}_{\text{Ni-4,4/1,4-1,5}} \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t_{cf1}}{2} \right\}.$$

Par la suite les contraintes fonctionnelles de CF1 sont exprimées au point N (voir figure. 4.2).

- CF2 : la distance d_2 entre le pôle 4 et la surface 1,7 de la chambre doit être maîtrisée (cf. figures 4.9, 4.10 et 4.11). Pour tous les points N_i de la surface plane 4,5 ; on a : $d_2 - \frac{t_{cf2}}{2} \leq d_2 \leq d_2 + \frac{t_{cf2}}{2}$.

On obtient finalement pour CF2 :
$$\left\{ -\frac{t_{cf2}}{2} \leq \mathbf{t}_{\text{Ni-4,5/1,7}} \cdot \mathbf{x} \leq +\frac{t_{cf2}}{2} \right\}.$$

Par la suite les contraintes fonctionnelles de CF2 sont exprimées au point M (voir figure. 4.9, 4.10 et 4.11).

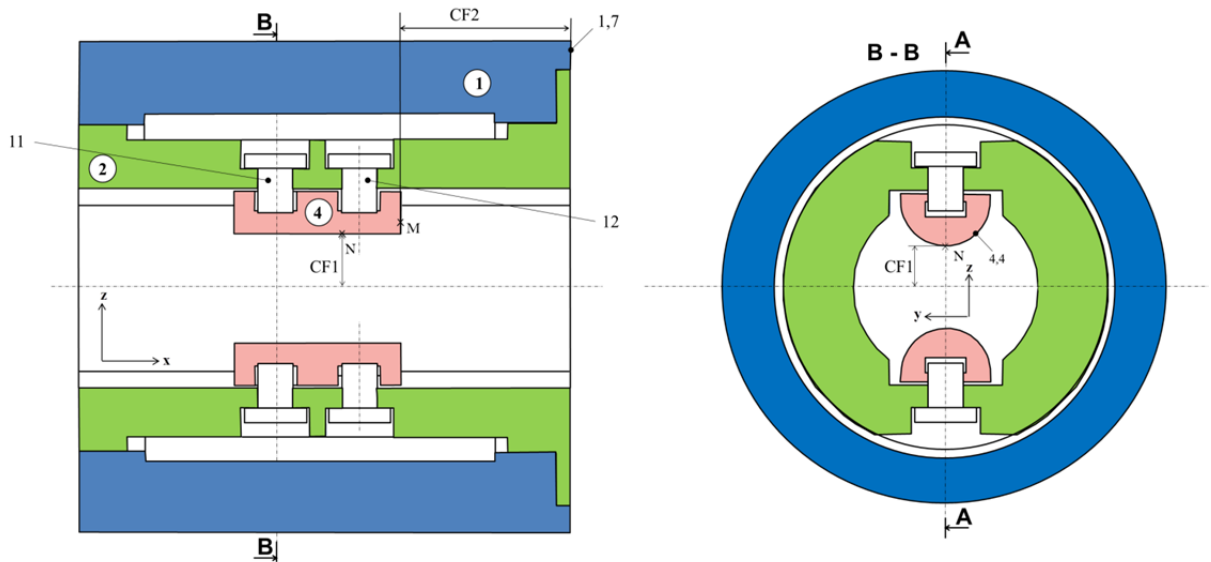


Figure 4-10. Vue 2d simplifiée du mécanisme.

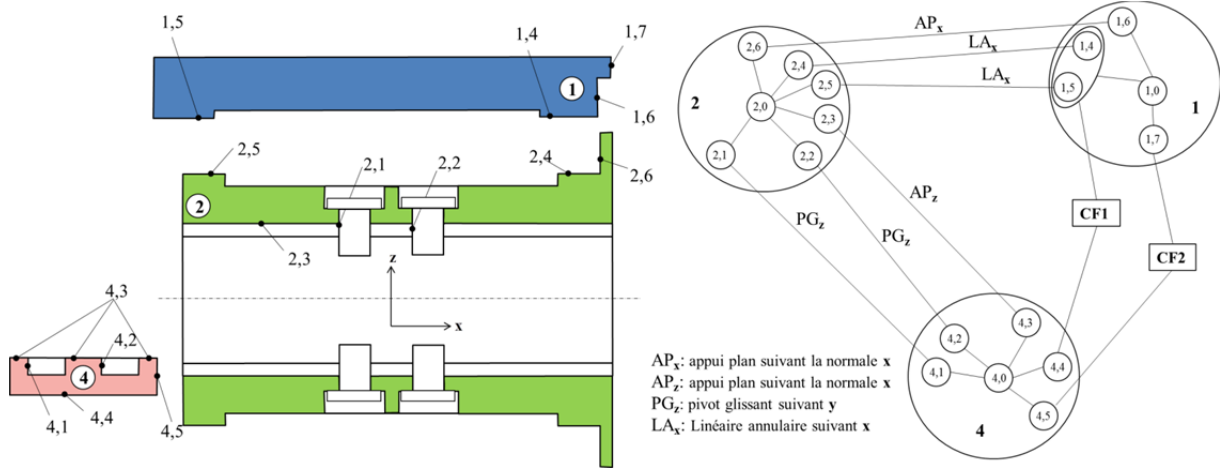


Figure 4-11. Surfaces et graphe du mécanisme.

Les expressions (4.16) et (4.17) des deux polytopes associés aux deux conditions fonctionnelles sont déterminées à partir du graphe présenté en figure 4-11. Il est possible de constater qu'une branche est commune aux deux conditions fonctionnelles et donc une partie de leur expression est commune. Il s'agit du polytope $\mathcal{P}_{4,0/2,0}$ que l'on retrouve dans la définition des deux polytopes.

Une des stratégies consiste à calculer $\mathcal{P}_{4,0/2,0}$ une seule fois en un des deux points fonctionnels M ou N et d'appliquer par la suite une transformation affine, comme défini en §4.2.2, pour redéfinir le même polytope au second point.

Remarque 4.6 : Dans cet exemple, il n'y pas de changement de base à effectuer car les liaisons sont toutes selon les axes principaux du repère de définition du système, seules des transformations affines associées à des changements de points et à des homogénéisations sont appliquées.

Soit les définitions des polytopes $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$ et $\mathcal{P}_{4,5/1,7}$ telles que :

$$\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5} = \mathcal{P}_{4,4/4,0} \oplus \mathcal{P}_{4,0/2,0} \oplus \mathcal{P}_{2,0/1,4-1,5}$$

avec:

$$\mathcal{P}_{4,0/2,0} = (\mathcal{P}_{4,0/4,1} \oplus \mathcal{P}_{4,1/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/2,0}) \cap (\mathcal{P}_{4,0/4,2} \oplus \mathcal{P}_{4,2/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/2,0}) \cap (\mathcal{P}_{4,0/4,3} \oplus \mathcal{P}_{4,3/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/2,0}) \quad (4.16)$$

$$\mathcal{P}_{2,0/1,4-1,5} = (\mathcal{P}_{2,0/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/1,4}) \cap (\mathcal{P}_{2,0/2,5} \oplus \mathcal{P}_{2,5/1,5}) \cap (\mathcal{P}_{2,0/2,6} \oplus \mathcal{P}_{2,6/1,6} \oplus \mathcal{P}_{1,6/1,0} \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,4-1,5})$$

$$\mathcal{P}_{4,5/1,7} = \mathcal{P}_{4,5/4,0} \oplus \mathcal{P}_{4,0/2,0} \oplus \mathcal{P}_{2,0/1,0} \oplus \mathcal{P}_{1,0/1,7}$$

avec:

$$\mathcal{P}_{4,0/2,0} = (\mathcal{P}_{4,0/4,1} \oplus \mathcal{P}_{4,1/2,1} \oplus \mathcal{P}_{2,1/2,0}) \cap (\mathcal{P}_{4,0/4,2} \oplus \mathcal{P}_{4,2/2,2} \oplus \mathcal{P}_{2,2/2,0}) \cap (\mathcal{P}_{4,0/4,3} \oplus \mathcal{P}_{4,3/2,3} \oplus \mathcal{P}_{2,3/2,0}) \quad (4.17)$$

$$\mathcal{P}_{2,0/1,0} = (\mathcal{P}_{2,0/2,4} \oplus \mathcal{P}_{2,4/1,4} \oplus \mathcal{P}_{1,4/1,0}) \cap (\mathcal{P}_{2,0/2,5} \oplus \mathcal{P}_{2,5/1,5} \oplus \mathcal{P}_{1,5/1,0}) \cap (\mathcal{P}_{2,0/2,6} \oplus \mathcal{P}_{2,6/1,6} \oplus \mathcal{P}_{1,6/1,0})$$

Le respect de CF1 se traduit par l'inclusion du polytope $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$ dans le polyèdre fonctionnel $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}^f$ associé à la condition fonctionnelle :

$$\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5} \subseteq \mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}^f \quad (4.18)$$

Le respect de CF2 se traduit par l'inclusion du polytope $\mathcal{P}_{4,5/1,7}$ dans le polyèdre fonctionnel $\mathcal{P}_{4,5/1,7}^f$ associé à la condition fonctionnelle :

$$\mathcal{P}_{4,5/1,7} \subseteq \mathcal{P}_{4,5/1,7}^f \quad (4.19)$$

Afin de simplifier les représentations graphiques, les indications suivantes sont considérées :

- les dimensions des zones de tolérance $t_{i,j}$ sont toutes égales à 0,1mm,
- les jeux de toutes les liaisons définies dans le mécanisme sont telles que $J_k = t_{i,j}$

La figure 4-12 illustre la définition du polytope $\mathcal{P}_{4,0/2,0}$ initialement au point N puis par transformation affine, au point M.

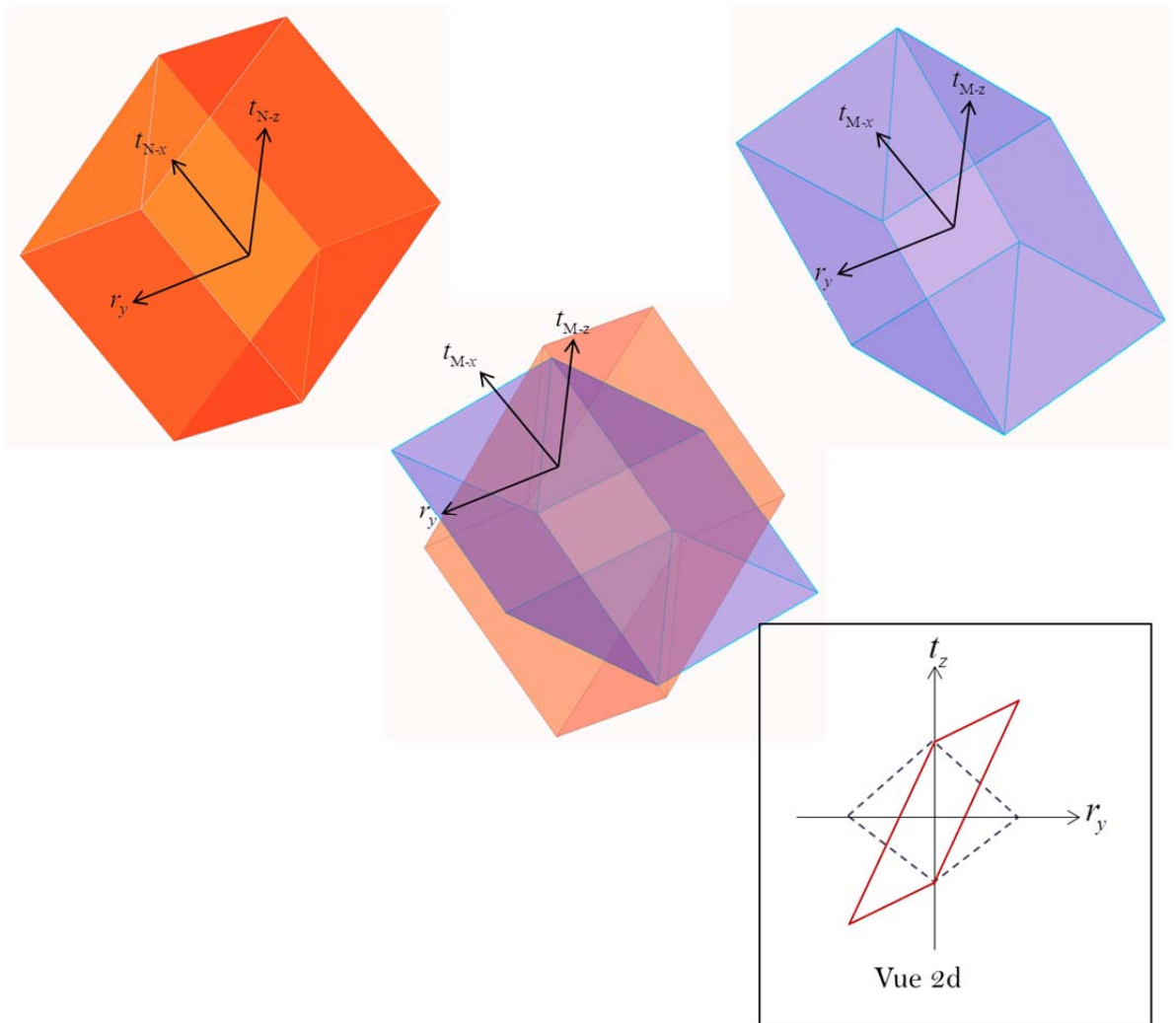


Figure 4-12. Polytope $\mathcal{P}_{4,0/2,0}$ et sa transformation affine.

4.4.1 Simulation de CF1

Dans cette partie, nous représentons le polytope $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$ défini par (4.16) illustrant les variations de la surface 4,4 du pôle 4 au point N par rapport à l'axe du faisceau.

La figure 4-13 illustre le polytope $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$ résultant. La figure 4-14 montre la vérification du respect de la CF1.

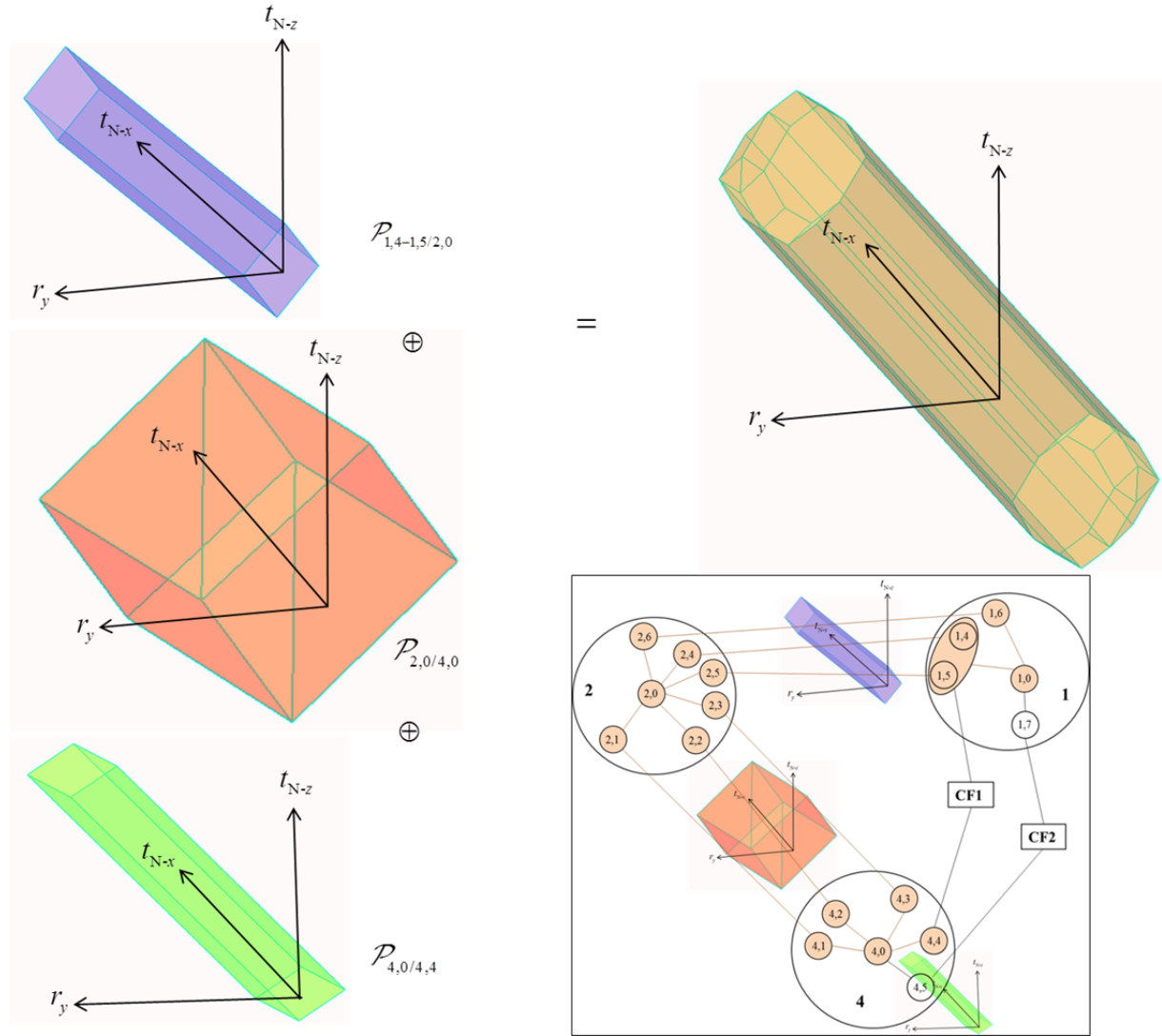


Figure 4-13. Calcul de $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$.

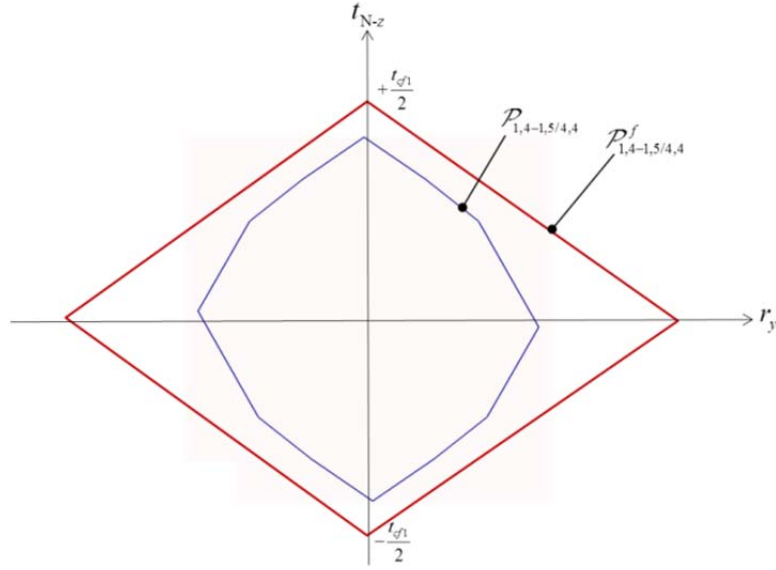


Figure 4-14. Vérification du respect de CF1.

4.4.2 Simulation de CF2

La remarque 4.1 a été prise en compte dans le calcul de $\mathcal{P}_{4,5/1,7}$. Une transformation affine entre les deux configurations a été appliquée (cf. Figure 4-12).

Le polytope résultant défini par $\mathcal{P}_{4,5/1,7}$ est illustré dans la figure 4-15. L'analyse de tolérances vérifiant le respect de CF2 est illustrée dans la figure 4-16.

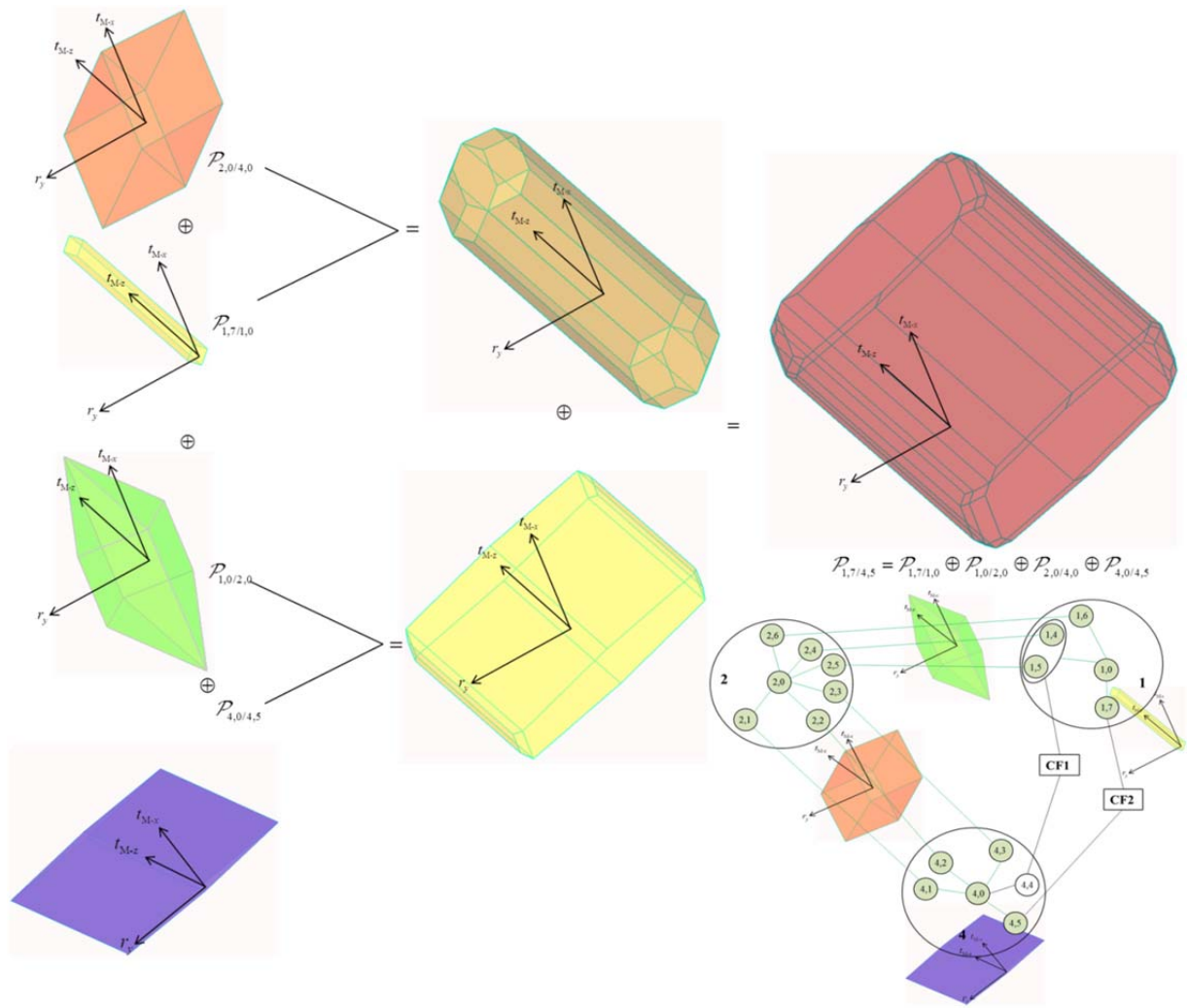


Figure 4-15. Calcul de $\mathcal{P}_{1,7/4,5}$.

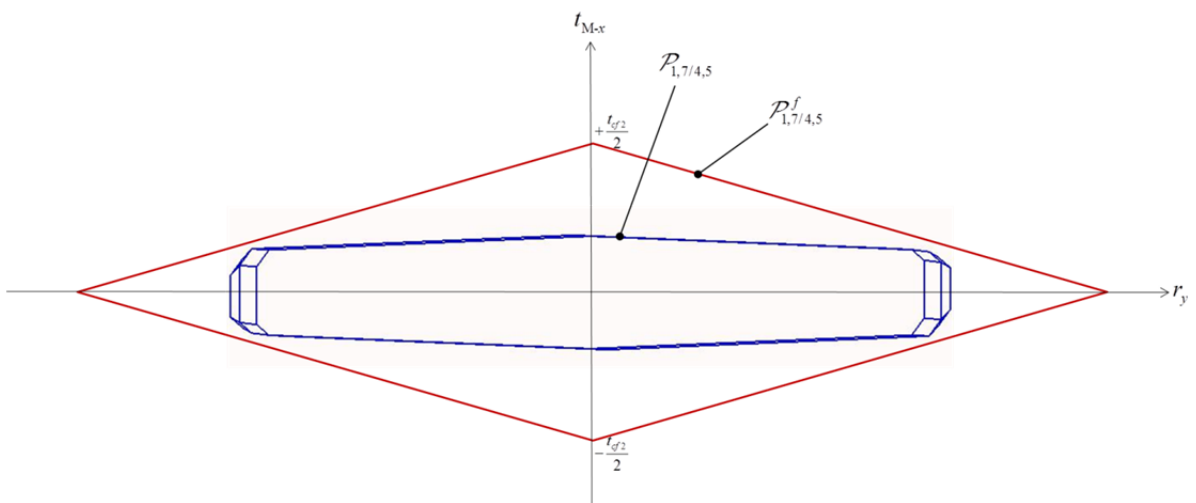


Figure 4-16. Simulation du respect de CF2.

Ces deux simulations montrent comment une transformation affine permet d'utiliser un résultat intermédiaire de la simulation de CF1 dans la simulation de CF2 en faisant

l'économie de plusieurs opérations potentiellement coûteuses en temps de calcul. Dans cet exemple, la transformation affine effectue un changement de point d'expression du polytope $\mathcal{P}_{4,0/2,0}$ du point N vers le point M (voir figure 4-10). Cependant les gains en temps de calculs ne sont pas significatifs sur cet exemple.

La simulation de CF1 a été réalisée avec des coefficients d'homogénéisation tous égaux à 100. Les résultats sont identiques avec des temps de calculs comparables à la même simulation avec des coefficients d'homogénéisation égaux à 1. L'annexe 2 résume les résultats numériques associés aux différentes étapes de calcul du polytope $\mathcal{P}_{4,4/1,4-1,5}$ de ces deux simulations.

L'outil d'analyse de tolérances développé à I2M repose sur des polytopes manipulés en double description (i.e. description des demi-espaces ($\mathcal{H}$ -description) et des sommets ($\mathcal{V}$ -description)). Les algorithmes permettant de déterminer la structure topologique d'un opérande, de déterminer l'intersection ou la somme de deux opérandes repose sur un seul algorithme : l'algorithme de troncature.

La première partie de ce quatrième chapitre a dressé la liste des paramètres influents sur cet algorithme : le nombre de points de discrétisation choisi et la tolérance de connexion entre un sommet et une facette. De plus, plusieurs configurations de calculs peuvent être définies pour la détermination d'un polytope. Une configuration de calcul implique le choix d'un point d'expression et d'une base de d'expression des demi-espaces et donc des sommets du polytope, ainsi que des coefficients d'homogénéisation des variables.

La deuxième partie a montré que deux polytopes identiques déterminés selon deux configurations de calcul différentes génèrent deux polytopes dont l'un est la transformation affine de l'autre. Cette propriété fondamentale permet de déduire que deux polytopes déterminés selon deux configurations de calcul différentes conservent la même topologie.

La troisième partie concerne la mise en œuvre d'une démarche d'analyse de tolérances par des polytopes abordée selon plusieurs stratégies de calculs qui sont déclinées selon plusieurs configurations de calculs. Une configuration de calcul a potentiellement une influence sur la stabilité de l'algorithme de troncature exacerbée par des demi-espaces connexes de normales presque parallèles. Cela a permis de jeter les bases de plusieurs stratégies de simulations exploitant cette propriété permettant de mettre en œuvre l'algorithme de troncature dans des configurations stables tout en optimisant les temps de calculs.

Enfin, une dernière partie illustre l'application de deux stratégies d'analyse de tolérances d'un spectromètre de masse développé au Centre d'Etudes Nucléaire de Bordeaux Gradignan (CENBG). Les configurations de calculs concernent uniquement des changements de points d'expression des polytopes ainsi que des coefficients d'homogénéisation. Une comparaison en temps de calcul entre les stratégies est aussi effectuée.

Cet exemple ne montre pas de différence significative d'un point de vue résultat et temps de calcul. Cela est dû au peu de retour d'expérience dont nous disposons sur l'utilisation de l'outil d'analyses de tolérances développé à I2M. De nombreuses autres simulations dans diverses configurations sont requises pour pouvoir qualifier cet outil.

Conclusion générale & Perspectives

L'analyse de tolérances est une étape primordiale et nécessaire pour assurer la conformité des systèmes mécaniques au regard des exigences fonctionnelles attendues. Elle repose sur l'étude de l'influence des variations géométriques des pièces constitutives d'un système sur son fonctionnement. Plusieurs approches ont été proposées pour l'étude des variations entre des surfaces d'une même pièce ou entre des surfaces de pièces distinctes potentiellement en contact. Ces approches peuvent être classées en approches paramétriques et en approches basées sur des systèmes de contraintes.

Cette thèse définit les concepts fondamentaux d'une approche polyédrale du tolérancement : elle appartient aux approches basées sur des systèmes de contraintes. Elle se focalise sur la manipulation d'ensembles de contraintes linéaires de l'espace $\mathbb{R}^6$, espace défini par six paramètres de petits déplacements : trois rotations et trois translations.

Dans un premier chapitre, une étude bibliographique comparative des approches d'analyses de tolérances a été menée pour situer l'approche polyédrale par rapport aux autres travaux. Dans cette étude ont été évoquées les méthodes mathématiques permettant de caractériser les déplacements entre deux surfaces. La fermeture des chaînes de cotes formalisées par des graphes caractérisant l'architecture des mécanismes a été abordée. Finalement, des modèles d'analyse de tolérances ont été détaillés. Ces modèles ne constituent pas une liste exhaustive : nous avons fait le choix de faire une classification en des approches paramétriques, utilisées généralement dans différents outils commerciaux et dont les variations sont modélisées par une simple relation entre les six paramètres, et des approches basées sur des systèmes de contraintes. Cette première partie met en valeur l'approche polyédrale, en soulignant que les ensembles traités sont généralement linéaires et bornés.

L'approche polyédrale est ensuite développée dans un second chapitre.

Une première partie est consacrée à l'introduction des notions mathématiques sur lesquelles reposent les polytopes et plus généralement les polyèdres, puis à leur intégration en analyse de tolérances. Les polytopes sont par définition des ensembles bornés dont les frontières sont linéaires. Les variations géométriques des pièces mécaniques sont généralement définies par des ensembles non bornés, c'est-à-dire des polyèdres de $\mathbb{R}^6$, afin de prendre en compte les degrés d'invariance des surfaces. De même, des polyèdres de $\mathbb{R}^6$ définissent les déplacements entre deux surfaces potentiellement en contact afin de prendre en compte les degrés de liberté des liaisons et le comportement unilatéral de certaines liaisons. La modélisation d'une chaîne de cotes permettant de vérifier le respect d'une exigence fonctionnelle, requiert des opérations (intersection et somme de Minkowski) sur ces polyèdres opérands.

La première contribution de cette thèse est la mise en forme des principales propriétés mathématiques nécessaires au tolérancement par des approches polyédrales. Celles-ci forment la base des connaissances minimum pour le développement de la suite de la thèse mais également pour les développements futurs.

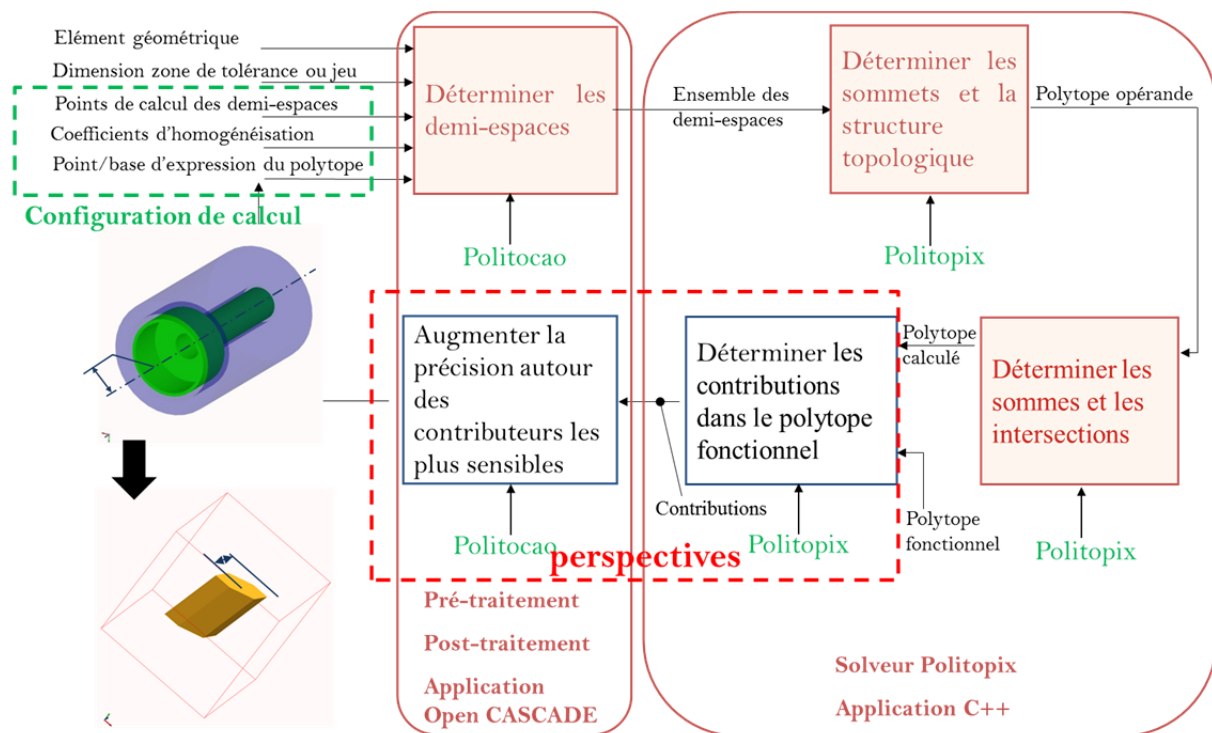
La seconde contribution, sujet central de ce travail de recherche, porte sur la mise en œuvre de la fermeture des polyèdres pour les conformer en polytopes. Ceci est motivé par la complexité algorithmique rédhibitoire des sommes de Minkowski de polyèdres dans $\mathbb{R}^6$. Les polyèdres sont bornés pour devenir des polytopes de $\mathbb{R}^6$, par l'adjonction de demi-espaces

dit "bouchons" (cap half-space en anglais). La traçabilité des demi-espaces doit être assurée dans les opérations sur les polytopes afin de pouvoir distinguer parmi les faces d'un polytope calculé, les faces résultant des contraintes géométriques et des contraintes de contacts, des faces résultant des demi-espaces bouchons. Un demi-espace résultant d'un demi-espace "bouchon" caractérise un degré d'invariance ou une mobilité. Il est nécessaire de pouvoir les identifier afin de pouvoir conclure sur le respect d'une exigence fonctionnelle. Des méthodes de gestion des demi-espaces "bouchons" de polytopes en double description ont été proposées dans une seconde partie de ce troisième chapitre. Des propriétés ont été ainsi formulées et démontrées. Ces méthodes ont été appliquées à un mécanisme simple en utilisant les développements informatiques déjà réalisés au sein de l'équipe de l'I2M et basés sur un algorithme de troncature.

Cet algorithme de troncature donne des résultats différents selon le nombre de points de discrétisation choisi et selon la précision des calculs numériques. La stabilité des calculs et la précision numérique peuvent dépendre des configurations de calcul choisies. Une configuration de calcul est définie par le point et la base d'expression des polytopes, ainsi que par les coefficients d'homogénéisation des variables. Selon les configurations, les polytopes peuvent être plus ou moins aplatis créant des imprécisions sur les intersections entre des hyperplans quasiment parallèles.

La troisième contribution essentielle de cette thèse concerne la mise en œuvre de l'analyse de tolérances selon plusieurs stratégies de calculs basées sur différentes configurations. A cette fin, le passage d'une configuration à une autre est formalisé par une transformation affine conservant la topologie des polytopes. A partir de cette propriété, une typologie de stratégies de simulation est établie en précisant les performances attendues pour chacune d'elle. Deux stratégies différentes ont été appliquées sur un spectromètre de masse. Cette partie constitue les prémices d'un travail ambitieux nécessaire pour qualifier la robustesse des calculs effectués par l'outil développé à I2M.

Ce travail introduit les aspects fondamentaux d'une approche polyédrale pour le tolérancement géométrique. Cette approche permet de prendre en compte les variations géométriques d'un système mécanique hyperstatique où les variations sont linéarisées en petits déplacements selon trois rotations et trois translations en un point donné.



Les différents développements théoriques présentés ont été intégrés par l'équipe dans la plateforme informatique existant déjà au laboratoire I2M et sont opérationnelles (voir figure ci-dessus). La figure ci-dessous illustre toutes les étapes de pré-traitement et de post-traitement ainsi de calcul proprement dit des polytopes par le solveur Politopix [Poli14] composant cette plateforme.

Dans les perspectives de validation des stratégies proposées dans cette thèse, des applications à des cas industriels d'envergure sont prévues. Une des études portera sur un turbomoteur dans le cadre d'une thèse en collaboration avec la société Turbomeca (Janvier 2015). Ces cas industriels serviront à alimenter une base de tests pour qualifier la précision des calculs de l'outil développé et évaluer les temps de calcul selon différents paramètres (nombre de liaisons et de surfaces, niveau de discrétisation, paramètres internes à Politopix, stratégies). Ces cas industriels permettront également de détecter les configurations de mécanismes non modélisables par les systèmes de contraintes actuellement manipulés.

Le module de calcul sur les polytopes (Politopix) donne satisfaction en termes de temps de calcul et de précision sur des cas non singuliers. Cependant, un travail supplémentaire doit être accompli pour prendre en compte les cas particuliers de faces confondues ou parallèles. Dans ces cas particuliers, nous pouvons avoir une multiplication excessive du nombre de faces créées ; le module de calcul ne les détecte pas ces cas singuliers fréquents en tolérancement. Différentes solutions peuvent être envisagées : substitution des faces quasiment confondues par une seule face, détection de ces cas singuliers à partir d'un attribut attaché à chaque élément en fonction des particularités des polyèdres opérandes...

Des attributs liés aux faces doivent être implémentés de manière à suivre des propriétés telles que le parallélisme des faces ou la propriété de bouchons ou non-bouchons

au cours des opérations. La prise en compte de ces attributs va nourrir une réflexion plus large concernant la mise en œuvre de la traçabilité des facettes et des sommets qui constitue un verrou scientifique prioritaire. Ce verrou sera abordé dans une thèse débutant en Octobre prochain.

Parmi les problématiques liées à la précision numérique des opérations sur des polytopes, nous avons évoqué le problème de discrétisation. Une détermination du nombre optimal des points de discrétisation pour le calcul des demi-espaces vis-à-vis d'une exigence permettra de répondre à cette problématique. Une solution est de manipuler des polytopes adaptatifs. Il s'agit de réaliser une première simulation avec très peu de points de discrétisation sur les éléments géométriques, générant ainsi un nombre restreint de demi-espaces dans les opérandes, puis les points générant les demi-espaces qui contribuent à la création des sommets sont identifiés et des points supplémentaires sont ajoutés localement, dans les zones sensibles, pour augmenter la précision des polytopes au voisinage des extrémums.

Pour que l'approche polyédrale proposée soit complète, il est primordial qu'elle prenne en compte les spécifications géométriques normalisées associées à des surfaces dans les mécanismes. Certaines de ces spécifications peuvent être traitées sur les bases de cette thèse. Toutefois, la génération des contraintes doit être formalisée pour tout type de spécification afin de les prendre en compte dans les simulations. En outre, certaines architectures ne sont pas prises en compte du fait de la complexité du graphe des liaisons qui ne peuvent être décomposées en sous-graphes séries/parallèles. Cette complexité se retrouve au sein des pièces du fait du réseau complexe de spécifications. Il faut gérer la complexité des relations au sein d'une pièce, mais également au sein d'un mécanisme.

Ces travaux sont limités à des défauts sur des surfaces de substitution de solides indéformables. Une application a néanmoins été réalisée avec des déformations d'origine thermomécaniques [Pier11]. Des travaux ont également été réalisés au sein du laboratoire sur la prise en compte de défauts de forme dans une liaison isolée par des polytopes [Lê14]. Le développement à long terme est naturellement de prendre en compte défauts de forme et déformations des pièces.

Références bibliographiques

- [Adra07] ADRAGNA, P. A.: *Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal*. Laboratoire Systèmes et Matériaux pour la Mécatronique (SYMME), Université de Savoie, Thèse de Doctorat, 2007
- [AmSG11] AMETA, G. ; SAMPER, SERGE ; GIORDANO, MAX: Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis: Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS. In: *Journal of Computing and Information Science in Engineering* Bd. 11 (2011), S. 1–8
- [Anse06] ANSELMETTI, B.: Generation of functional tolerancing based on positioning features. In: *Computer-Aided Design* Bd. 38 (2006), S. 902–919
- [Anse07] ANSELMETTI, B.: Calcul tridimensionnel de la résultante d'une chaîne de cotes en cotation ISO, en vue d'un calcul probabiliste. In: *Mécanique & Industries* Bd. 8 (2007), Nr. 3, S. 173–185
- [Anse08] ANSELMETTI, B.: *Cotation fonctionnelle tridimensionnelle et statistique*, Hermes. Paris : Lavoisier, 2008 — ISBN 978-2-7462-1597-9
- [Anse10] ANSELMETTI, B.: CLIC: A Method for Geometric Specification of Products. In: *Geometric tolerancing of products*: ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010, S. 210–239
- [BaBT01] BALLOT, E. ; BOURDET, P. ; THIÉBAUT, F.: Determination of relative situations of parts for tolerance computation. In: . Cachan (France) : ISBN 1-4020-1423-6 - Kluwer academic publisher, 2001, S. 63–72
- [BaDD09] BARKI, HICHEM ; DENIS, FLORENCE ; DUPONT, FLORENT: Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra. In: *Computer-Aided Design* Bd. 41 (2009), Nr. 7, S. 525–538
- [Ball93] BALLU, ALEX: *Identification des modèles géométriques composés pour la spécification et la mesure par coordonnées des caractéristiques fonctionnelles des pièces mécaniques*. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, Université Nancy I, Thèse de Doctorat, 1993
- [Ball95] BALLOT, ERIC: *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement*. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Thèse de Doctorat, 1995

- [BaMa99a] BALLU, A. ; MATHIEU, L.: Méthode de choix des spécifications fonctionnelles par des graphes. In: *Technologies et Formations* (1999), Nr. 84, S. 12–19
- [BaMa99b] BALLU, A. ; MATHIEU, L.: Choice of functional specifications using graphs within the frame work of education. In: . Enschede (Netherlands): ISBN 0-7923-5654-3, Kluwer academic publisher, 1999, S. 197–206
- [BaML10] BALLU, A. ; MATHIEU, L. ; LEGOFF, O.: Representation of Mechanical Assemblies and Specifications by Graphs. In: *Geometric tolerancing of products*: ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010, S. 87–110
- [Barv02] BARVINOK, A.: *A Course in Convexity*. Bd. 54. AMS., first edition. Aufl., 2002
- [BASD05] BHADE, S. ; AMETA, G. ; SHAH, J. J. ; DAVIDSON, J. K.: Tolerance-Maps Applied to the Straightness and Orientation of an Axis. In: *CIRP: Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing*, 2005, S. 45–54
- [Berg67] BERGE, C.: *théorie des graphes et ses applications*. 5219. Aufl. Paris : DUNOD, 1967
- [BFCM06] BALLU, A. ; FALGARONE, H. ; CHEVASSUS, N. ; MATHIEU, L.: A new Design Method based on Functions and Tolerance Specifications for Product Modelling. In: *Annals of the CIRP* Bd. 55 (2006), Nr. 1, S. 139–142
- [BMLB96] BOURDET, P. ; MATHIEU, L. ; LARTIGUE, C. ; BALLU, A.: The concept of the small displacement torsor in metrology. In: *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Advanced mathematical tools in metrology II* Bd. 40 (1996), S. 110–122
- [BoCl76] BOURDET, PIERRE ; CLEMENT, ANDRÉ: Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine. In: *Annals of the CIRP* Bd. 25 (1976), S. 359–364
- [Bour73] BOURDET, P.: Chaînes de cotes de fabrication. In: *L'Ingénieur et le Technicien de l'Enseignement Technique* Bd. 191 (1973)
- [Bour87] BOURDET, PIERRE: *Contribution à la mesure tridimensionnelle: Modèle d'identification géométrique des surfaces, Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, Correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles*. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, Université de Nancy I, Thèse pour obtenir le grade de docteur ès-sciences, 1987
- [Bour95] BOURDET, P.: Geometrical behavior laws for computer aided tolerancing. In: *4th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. Tokyo (Japan), 1995, S. 143–153

- [BoYv98] BOISSONNAT, JEAN DANIEL ; YVINEC, MARIETTE: *Algorithmic Geometry*: ISBN-13: 9780521565295, Cambridge University Press, 1998
- [Ceto14] CETOL: *www.sigmetrix.com*, 2014
- [Chat11] CHATELAIN, V.: *Contribution à la théorie des matroïdes: Polytopes de bases, Orientations et Algorithmes*. Paris, Université Pierre et Marie Curie, Thèse de Doctorat, 2011
- [ChGM95] CHASE, K. W. ; GAO, J. ; MAGLEBY, S.P.: General 2-D tolerance analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustment. In: *Journal of Design and Manufacturing* Bd. 5 (1995), Nr. 4, S. 263–274
- [ChGr87] CHASE, K. W. ; GREENWOOD, W. H.: Design issues in mechanical Tolerance analysis. In: *Manufacturing Review* Bd. 1 (1987), Nr. 1, S. 50–59
- [ChMG97] CHASE, K.W. ; MAGLEBY, S.P. ; GLANCY, C.G.: Tolerance Analysis of 2-D and 3-D Mechanical Assemblies with Small Kinematic Adjustments. In: *Advanced Tolerancing Techniques Zhang H. C. Ed.: Wiley* (1997), Nr. 103–38
- [ClBo88] CLÉMENT, A. ; BOURDET, P.: A study of optimal-criteria identification based on the small-displacement screw model. In: *Annals of the CIRP* Bd. 37 (1988), Nr. 1
- [ClDR91] CLÉMENT, A. ; DESROCHERS, A. ; RIVIÈRE, A.: Theory and practice of 3D tolerancing for assembly. In: . Penn State University (USA), 1991
- [Cloz01] CLOZEL, P.: 3d tolerance analysis, from preliminary study. In: *7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*: Cachan (France) : ISBN 1-4020-1423-6 - Kluwer academic publisher, 2001, S. 93–104
- [ClRa10] CLOZEL, P. ; RANCE, P.A.: MECAMaster: a Tool for Assembly Simulation from Early Design, Industrial Approach. In: *Geometric tolerancing of products*: ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010, S. 241–273
- [ClRS95] CLÉMENT, A. ; RIVIÈRE, A. ; SERRE, P.: A Declarative Information Model for Functional Requirements. In: . Bd. 1–29. Tokyo (Japan), 1995
- [ClRT94] CLEMENT, A. ; RIVIERE, A. ; TEMMERMAN, M.: *Cotation fonctionnelle des systèmes mécaniques* : PYC édition - ISBN 2-85330-132-X, 1994
- [Coxe89] COXETER, H.S.M.: *Introduction to Geometry - Second edition* : ISBN 0-471-50458-0, 1989
- [CRSV98] CLÉMENT, A. ; RIVIÈRE, A. ; SERRÉ, P. ; VALADE, C.: The TTRS: 13 Constraints for Dimensioning and Tolerancing. In: . Toronto (Canada) : ISBN 13: 9780412830006, Chapman & Hall, 1998, S. 122–129

- [DaBM08] DANTAN, J.Y. ; BALLU, A. ; MATHIEU, L.: Geometrical product specifications : model for product lifecycle. In: *Computer-Aided Design* Bd. 40 (2008), Nr. 4, S. 493–501
- [DaMS02] DAVIDSON, J. K. ; MUJEZINOVIC, A. ; SHAH, J. J.: A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. In: *ASME Transactions on Journal of Mechanical Design* Bd. 124 (2002), S. 609–622
- [Dant00] DANTAN, JEAN YVES: *Synthèse des spécifications géométriques: modélisation par Calibre à Mobilités Internes*. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469, Université Bordeaux 1, Thèse de Doctorat, 2000
- [Delo97] DELOS, V.: *Opérations sur les polytopes: application à l'analyse des tolérances d'un mécanisme* (Mémoire de DESS d'ingénierie mathématiques et outils informatiques). Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469: Mémoire de DESS d'ingénierie mathématiques et outils informatiques de l'Université de Pau et des pays de l'Adour, 1997
- [DGEQ12] DANTAN, JEAN YVES ; GAYTON, NICOLAS ; ETIENNE, ALAIN ; QUERSHI, AHMED JAWAD ; DUMAS, ANTOINE: Mathematical issues in mechanical tolerance analysis. In: *13e Colloque National AIP PRIMECA*. Mont Dore, 2012
- [DMBM05] DANTAN, J.Y. ; MATHIEU, L. ; BALLU, A. ; MARTIN, P.: Tolerance synthesis: quantifier notion and virtual boundary. In: *Computer-Aided Design* Bd. 37 (2005), Nr. 2, S. 231–240
- [DuTe08] DUFAURE, J. ; TEISSANDIER, D.: A tolerancing framework to support geometric specifications traceability. In: *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* Bd. 36 (2008), Nr. 9-10, S. 894–907
- [Ewal96] EWALD, GUNTER: *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*: ISBN 9780387947556, Springer, 1996
- [FaPR01] FAROUKI, R. T. ; PYO MOON, H. ; RAVANI, B.: Minkowski Geometric Algebra of Complex Sets. In: *Geometriae Dedicata* Bd. 85 (2001), Nr. 1-3, S. 283–315
- [Flem87] FLEMING, A.D.: *Analysis of Uncertainties and Geometric Tolerances in Assemblies of Parts*, University of Edinburgh, PhD thesis, 1987
- [Flem88] FLEMING, A.D.: Geometric relationships between toleranced features. In: *Artificial Intelligence* Bd. 37 (1988), Nr. 1-3, S. 403–412
- [FoHa07] FOGEL, E. ; HALPERIN, D.: Exact and efficient construction of Minkowski sums of convex polyhedra with applications. In: *Computer-Aided Design* Bd. 39 (2007), Nr. 11, S. 929–940

- [Fuku04] FUKUDA, K.: From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes. In: *Journal of Symbolic Computation* Bd. 38 (2004), Nr. 4, S. 1261–1272
- [FuWe05] FUKUDA, K. ; WEIBEL, C.: Computing All Faces of the Minkowski Sum of V-Polytopes. In: *Proceedings of the 17th Canadian Conference on Computational Geometry*. Windsor, Ontario, 2005
- [Gaun93] GAUNET, D.: Vectoral tolerancing model. In: *3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*. Cachan (France), 1993
- [Gaun94] GAUNET, DOMINIQUE: *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanismes en CFAO*. Laboratoire de Mécatronique de l'I.S.M.C.M, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Thèse de Doctorat, 1994
- [Germ07] GERMAIN, FREDERIC: *Tolérancement statistique tridimensionnel, intégration en CFAO*. Laboratoire Systèmes et Matériaux pour la Mécatronique (SYMME), Université de Savoie, Thèse de Doctorat, 2007
- [GhLD02] GHIE, W. ; LAPERRIÈRE, L. ; DESROCHERS, A.: A unified jacobian-torsor model for analysis in computer aided tolerancing. In: *IDMME*. France, 2002
- [Ghos93] GHOSH, PIJUSH K.: A unified computational framework for Minkowski operations. In: *Computers & Graphics* Bd. 17 (1993), Nr. 4, S. 357–378
- [GiDu93] GIORDANO, M. ; DURET, D.: Clearance Space and Deviation Space. In: *3rd CIRP seminar on Computer Aided Tolerancing*. Cachan (France): ISBN 2-212-08779-9, 1993 — ISBN 2-212-08779-9, S. 179–196
- [Gior97] GIORDANO, M.: Modèle de détermination des tolérances géométriques. In: *5ème Colloque national sur la conception intégrée PRIMECA97*. La Plagne (France), 1997
- [GiSP07] GIORDANO, M. ; SAMPER, S. ; PETIT, J.: Tolerance analysis and synthesis by means of deviation domains, axi-symmetric cases. In: . Tempe (Arizona - USA) : ISBN 978-1-4020-5437-2, Springer, 2007. — CO, S. 85–94
- [GoZS88] GOSSARD, D. C. ; ZUFFANTE, R. P. ; SAKURIA, H.: Representing dimensions, tolerances and features in MCAE systems. In: *IEEE Computer Graphics & Applications* Bd. 8 (1988), Nr. 2, S. 51–69
- [GrSt93] GRITZMANN, P. ; STURMFELS, B.: Minkowski addition of polytopes: computational complexity and applications to Gröbner bases. In: *Siam Journal of Discrete Mathematics* Bd. 6 (1993), Nr. 2, S. 246–269
- [Grün03] GRÜNBAUM, B.: *Convex polytopes, Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 221. New-York : Springer-Verlag, 2003. — Prepared andwith a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.

- [Grün67] GRÜNBAUM, BRANKO: *Convex polytopes*. University of Washington USA : Springer-Verlag, 1967 — ISBN 0-387-00424-6
- [GuSe87] GUIBAS, L. ; SEIDEL R.: Computing convolutions by reciprocal search. In: *Discrete and Computational Geometry* Bd. 2 (1987), Nr. 1, S. 175–193
- [Herv78] HERVE, J.M.: Analyse structurelle des mécanismes par groupe de déplacements. In: *Mechanism and Machine Theory* Bd. 13 (1978), Nr. 4, S. 437–450
- [HeRZ97] HENK, M. ; RICHER-GEBERT, J. ; ZIEGLER, G.: Basic Properties Of Convex Polytopes. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. USA : CRC Press, Inc. Boca Raton, FL, 1997 — ISBN 0-8493-8524-5, S. 243–270
- [HiBr78] HILLYARD, R. C. ; BRAID, I. C.: Analysis of dimensions and tolerances in computer-aided mechanical design. In: *Computer-Aided Design* Bd. 10 (1978), Nr. 3, S. 161–166
- [Hoff82] HOFFMAN, P.: Analysis of tolerances in process inaccuracies in discrete part manufacturing. In: *Computer Aided Design* Bd. 14 (1982), Nr. 2, S. 83–88
- [HoTB13] HOMRI, L. ; TEISSANDIER, D. ; BALLU, A.: Tolerancing analysis by operations on polytopes. In: *Design and Modeling of Mechanical Systems*. Djerba (Tunisie) : Springer-Verlag, 2013 — ISBN 978-3-642-37142-4, S. 597–604
- [Iso04] ISO1101: Geometrical Product Specifications (GPS), Geometrical tolerancing, Tolerances of form, orientation, location and run-out (2004)
- [Iso11] ISO17450-1: Geometric Product Specification (GPS) - General concepts - Part 1: Geometrical Model for specification and verification (2011)
- [Iso88] ISO286-1: ISO system of limits and fits - Part 1 : Bases of tolerances, deviations and fits (1988)
- [Jens07a] JENSEN, ANDERS NEDERGAARD: A Non-Regular Gröbner Fan. In: *Discrete and Computational Geometry* (2007)
- [Jens07b] JENSEN, ANDERS NEDERGAARD: *Algorithmic Aspects of Gröbner Fans and Tropical Varieties*. Danemark, University of Aarhus, PhD thesis, 2007
- [KaRo92] KAUL, A. ; ROSSIGNAC, J.: Solid-interpolating deformations: construction and animation of PIPs. In: *Computational Graph* Bd. 16 (1992), Nr. 1, S. 107–115
- [Kata02] KATAYA, BASSAM: *Modélisation des tolérances géométriques pour leur intégration en conception assistée par ordinateur*. Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMécA) Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy, Université de Savoie, Thèse de Doctorat, 2002

- [Kaul93] KAUL, A.: *Computing Minkowski sums*, Columbia University, Doctor of Philosophy, 1993
- [LaGD02] LAPERRIÈRE, L. ; GHIE, W. ; DESROCHERS, A: Statistical and Deterministic Tolerance Analysis and Synthesis Using Unified Jacobian-Torsor Model. In: *Annals of the CIRP* Bd. 51 (2002), Nr. 1, S. 417–420
- [LaLa99] LAFOND, P. ; LAPERRIÈRE, L.: Jacobian-based Modeling of Dispersions Affecting Pre-Defined Functional Requirements of Mechanical Assemblies. In: *Proceedings of the 1999 IEEE*. Porto - Portugal, 1999
- [LaZe94] LALLEMAND, J. P. ; ZEGHLOUL, S.: *Robotique: Aspects fondamentaux*. Paris : MASSON Editeur, 1994 — ISBN 2-225-84354-6
- [Lê14] LÊ, HOAI NAM: *Influences des défauts de forme sur le comportement des liaisons: étude expérimentale et théorique*. Bordeaux (France), Université Bordeaux, Thèse de Doctorat, 2014
- [LeKE98] LEE, I. K. ; KIM, M. S. ; ELBER, G.: Polynomial/rational approximation of Minkowski sum boundary curves. In: *Graphical Models Image Process* Bd. 60 (1998), Nr. 2, S. 136–165
- [MaFC03] MARGUET, B. ; FALGARONE, H. ; CHEVASSUS, N.: AnaTole: un outil d'analyse 3D des variations géométriques pour la conception de produit aéronautique. In: *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique* Bd. 18 (2003), Nr. 1, S. 113–122
- [MaGH11] MANSUY, MATHIEU ; GIORDANO, MAX ; HERNANDEZ, PASCAL: A new calculation method for the worst case tolerance analysis and synthesis in stack-type assemblies. In: *Computer-Aided Design* Bd. 43 (2011), S. 1118–1125
- [Mans12] MANSUY, MATHIEU: *Aide au tolérancement tridimensionnel: Modèle des domaines*. Laboratoire Systèmes et Matériaux pour la Mécatronique (SYMME), Université de Savoie, Thèse de Doctorat, 2012
- [McMu71] MCMULLEN, P.: On zonotopes. In: *Transactions of the American Mathematical Association* Bd. 159 (1971)
- [Meca14] MECAMASTER SARL: *MECAmaster Assembly Software*, www.mecamaster.com, 2014
- [Moun09] MOUNAUD, M.: *Contribution à l'analyse des défauts géométriques dans le routage d'un réseau hydraulique en aéronautique: indices sur la conception*, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009
- [MuDS01] MUJEZINOVIC, A. ; DAVIDSON, J. K. ; SHAH, J. J.: A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Rectangular Faces. In: *ASME Design Engr. Technical Conf.s*. Pittsburgh, PA (USA), 2001
- [MuDS04] MUJEZINOVIC, A. ; DAVIDSON, J. K. ; SHAH, J. J.: A new mathematical model for geometric tolerances as applied to polygonal faces. In:

ASME Transactions on Journal of Mechanical Design Bd. 126 (2004), Nr. 3, S. 504–518

- [NiTu95] NIGAM, S. D. ; TURNER, J. U.: Review of statistical approaches of tolerance analysis. In: *Computer-Aided Design* Bd. 27 (1995), S. 6–15
- [Open12] OPEN CASCADE: *Open CASCADE Technology*, www.opencascade.com, 2012
- [Peti04] PETIT, J. P.: *Spécification géométrique des produits : méthode d'analyse de tolérances. Application en Conception Assistée par Ordinateur*. Laboratoire de Mécanique Appliquée (LMécA) Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy, Université de Savoie, Thèse de Doctorat, 2004
- [Pier11] PIERRE, LAURENT: *Analyse des spécifications géométriques pour l'aide à la décision en conception, application à une turbine de moteur d'hélicoptère*. Institut Mécanique et Ingénierie de Bordeaux - UMR 5295, Ecole Supérieure d'Arts et Métiers, Thèse de Doctorat, 2011
- [Poli14] POLITOPIX: <http://i2m.u-bordeaux.fr/politopix> , 2014
- [QDSB12] QUERSHI, A. J. ; DANTAN, J.Y. ; SABRI, V. ; BEAUCAIRE, P. ; GAYTON, N.: A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimisation and Monte-Carlo simulation. In: *Computer Aided Design* Bd. 44 (2012), Nr. 2, S. 132–142
- [RGDD94] RIVIERE, A. ; GAUNET, D. ; DUBE, I. ; DESROCHERS, A.: Une approche matricielle pour la représentation des zones de tolérance et des jeux. In: . McGill University : Société Canadienne de Genie Mécanique, 1994
- [Robe83] ROBERTSON, S. A.: *Polytopes and Symmetry*. New-York : Cambridge University Press, 1983
- [RoLi98] ROY, U. ; LI, B.: Representation et interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects -I: Form tolerances. In: *Computer Aided Design* Bd. 30 (1998), Nr. 2, S. 151–161
- [RoLi99] ROY, U. ; LI, B.: Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II.: Size, orientation and position tolerances. In: *Computer-Aided Design* Bd. 31 (1999), Nr. 4, S. 273–285
- [RoRe86] ROSSIGNAC, R. ; REQUICHA, A. A. G.: Offsetting operations in solid modelling. In: *Computer Aided Geometric Design* Bd. 3 (1986), S. 129–148
- [Rour98] ROURKE, JO: *Computational geometry in C*. 2nd ed. Aufl. Cambridge University Press, 1998
- [SADS09] SINGH, G. ; AMETA, G. ; DAVIDSON, J. K. ; SHAH, J. J.: Worst-Case Tolerance Analysis of a Self-Aligning Coupling Assembly using Tolerance-Maps. In: *11th CIRP International Conference of Computer Aided Tolerancing*. Annecy (France), 2009

- [SADS13] SINGH, G. ; AMETA, G. ; DAVIDSON, J. K. ; SHAH, J. J.: Tolerance Analysis of a Self-Aligning Coupling Assembly using Tolerance-Maps in Design. In: *Journal of Mechanical Design* Bd. 135 (2013), Nr. 3
- [SASD07] SHAH, J. J. ; AMETA, G. ; SHEN, Z. ; DAVIDSON, J. K.: Navigating the tolerance analysis maze. In: *Computer-Aided Design and Applications* Bd. 4 (2007), Nr. 5, S. 705–718
- [SeRC10] SERRE, P. ; RIVIÈRE, A. ; CLÉMENT, A.: Parametric Specification of Mechanisms. In: *Geometric tolerancing of products*: ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, 2010
- [Serr83] SERRA, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Bd. v. 1. Academic Press., Inc. Aufl. Orlando (USA), 1983 — ISBN 0126372403
- [SJSH95] SALOMONS, O. W. ; JONGE POERINK, H. J. ; SLOOTEN, F. ; VAN HOUTEN, F.J.A.M ; KALS, H.J.J.: A Computer Aided Tolerancing Tool based on Kinematic Analogies. In: *Computer-aided Tolerancing*. Tokyo (Japan) : Fumihiko Kimura, 1995 — ISBN 978-94-010-7183-3 (Print) 978-94-009-1529-9 (Online)
- [Soco10] SOCOLIUC, M.: *Introduction et analyse des schemas de cotation en avance de phase*. Paris, Ecole Centrale de Paris, Thèse de Doctorat, 2010
- [SoTu94] SODHI, R. ; TURNER, J.U.: Relative positioning of variational part models for design analysis. In: *Computer-Aided Design* Bd. 26 (1994), Nr. 5, S. 366–278
- [Srin93] SRINIVASAN, V.: Role of Sweeps in Tolerancing Semantics. In: *International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology*. Bd. 27, 1993, S. 69–78
- [TCGC96] TEISSANDIER, D. ; COUÉTARD, Y. ; GÉRARD, A. ; CENTA, P. ; LE BRETON, F.: Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L: Unions Pondérées d'Espaces de Liberté). In: . Bd. 80. Montpellier (France) : ISBN 0-7918-1503-X, 1996, S. 129–136
- [TeCG98] TEISSANDIER, D. ; COUÉTARD, Y. ; GÉRARD, A.: Three-dimensional Functional Tolerancing with Proportioned Assemblies Clearance Volume (U.P.E.L: Unions Pondérées d'Espaces de Liberté): application to setup planning. In: . Toronto (Canada) : ISBN 13: 9780412830006, Chapman & Hall, 1998, S. 171–182
- [TeCG99] TEISSANDIER, D. ; COUÉTARD, Y. ; GÉRARD, A.: A Computer Aided Tolerancing Model : Proportioned Assemblies Clearance Volume. In: *Computer-Aided Design* Bd. 31 (1999), S. 805–817
- [TeDC99] TEISSANDIER, D. ; DELOS, V. ; COUÉTARD, Y.: Operations on polytopes: application to tolerance analysis. In: . Enschede (Netherlands) : Kluwer academic publisher, 1999 — ISBN 0-7923-5654-3, S. 425–433

- [TeDe11] TEISSANDIER, D. ; DELOS, V.: Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes based on normal fans. In: *Computer-Aided Design* Bd. 43 (2011), S. 1567–1576
- [TeDH13] TEISSANDIER, D. ; DELOS, V. ; HOMRI, L.: Algorithm to calculate the Minkowski sums of 3-polytopes: application to tolerance analysis. In: *procedia CIRP* Bd. 10 (2013), S. 84–90
- [Teis95] TEISSANDIER, DENIS: *L'Union Pondérée d'espaces de Liberté: un nouvel outil pour la cotation fonctionnelle tridimensionnelle*. Laboratoire de Mécanique Physique - UMR 5469, Université Bordeaux 1, Thèse de Doctorat, 1995
- [Terz09] TERZER, MARCO: *Large Scale Methods to Enumerate Extreme Rays and Elementary Modes*. Zurich, Swiss Federal Institute of Technology, Doctor of Sciences, 2009
- [Tich05] TICHADOU, S.: *Modélisation et quantification tridimensionnelles des écarts de fabrication pour la simulation d'usinage*. Nantes-France, École Centrale de Nantes, Thèse de Doctorat, 2005
- [TuRH00] TUZIKOV, A. ; ROERDINK, J. ; HEIJMANS, H.: Similarity measures for convex polyhedra based on Minkowski addition. In: *Pattern Recognition* Bd. 33 (2000), S. 979–995
- [Turn90] TURNER, J.U.: Relative positionning of parts in assemblies using mathematical programming. In: *Computer-Aided Design* Bd. 22 (1990), Nr. 7, S. 394–400
- [Turn93] TURNER, J.U.: A Feasability Space Approach for Automated Tolerancing. In: *Journal of Engineering for Industry* Bd. 115 (1993), S. 341–346
- [TuWo88] TURNER, J. U. ; WOZNY, M. J.: A mathematical theory of tolerances, in: *Geometric Modelling for CAD Applications*, Elsevier Science Publishers (1988)
- [VaMa06] VARADHAN, G. ; MANOCHA, D.: Accurate Minkowski sum approximation of polyhedral models. In: *Graphical Models* Bd. 68 (2006), Nr. 4, S. 343–355
- [Weib07] WEIBEL, CHRISTOPHE: *Minkowski Sums of Polytopes: Combinatorics and Computation*, Ecole polytechnique fédérale de LAUSANNE, 2007
- [WiCH04] WITTEWER, J. W. ; CHASE, K.W. ; HOWELL, L. L.: The direct linearization method applied to position error in Kinematic linkages. In: *Mechanism and Machine Theory* Bd. 39 (2004), Nr. 7, S. 681–693
- [WuSD03] WU, Y. ; SHAH, JAMI J. ; DAVIDSON, JOSEPH K.: Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes. In: *Computer-Aided Design* Bd. 35 (2003), Nr. 13, S. 1181–1192
- [Zieg95] ZIEGLER, GUNTER: *Lectures on polytopes*: ISBN 0-387-94365-X, Springer Verlag, 1995 — ISBN 0-387-94365-X

Annexe1

Les résultats numériques donnés dans cette partie sont obtenus par l'application informatique développée à l'I2M. Il s'agit de "*Politopix*". L'entrée de l'application est la liste des demi-espaces de $\mathbb{R}^6$ caractérisant la $\mathcal{H}$ -description du polytope. Dans notre cas, soit la liste suivante :

#	Dimension	NumberOfHalfspaces	NumberOfGenerators						
6	18	0							
# HALFSPACES :	a0 + a1.x1 + ... + an.xn >= 0. ← Ecriture des demi-espaces de $\mathbb{R}^6$								
100	0	0	1	0	0	0	0	0	
100	-0	-0	-1	0	0	0	0	0	
100	0	0	0	1	0	0	-0	0	
100	0	0	0	-1	-0	0	0	0	
100	0	0	0	0	-0	1	0	0	
100	0	0	0	0	-1	-0	0	0	
0.05	-1.4642091	1.489629	0	0	0	0	1		
0.05	1.1857909	1.489629	-0	0	0	0	1		
0.05	1.1857909	0.50259275	-0	0	0	0	1		
0.05	0.87131365	-1.1974072	0	0	0	0	1		
0.05	0.053552275	-1.1974072	0	0	0	0	1		
0.05	-1.4642091	-0.69740725	0	0	0	0	1		
0.05	1.4642091	-1.489629	-0	-0	-0	-0	-1		
0.05	-1.1857909	-1.489629	0	-0	-0	-0	-1		
0.05	-1.1857909	-0.50259275	0	-0	-0	-0	-1		
0.05	-0.87131365	1.1974072	-0	-0	-0	-0	-1		
0.05	-0.053552275	1.1974072	-0	-0	-0	-0	-1		
0.05	1.4642091	0.69740725	-0	-0	-0	-0	-1		

Liste des demi-espaces bouchons $\overline{H}_c$ définissant le $\mathcal{H}$ -polytope

Liste des demi-espaces $\overline{H}_k$ issus des contraintes et définissant le $\mathcal{H}$ -polytope

Les résultats de l'application sont, autres que la liste des demi-espaces définissant le polytope, la liste des sommets (donc la caractérisation du $\mathcal{V}$ -polytope) et celle des frontières auxquelles chaque sommet est connecté.

#	GENERATORS :	V = (v1, ..., vn)							
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	-100	-100	-100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	100	-100	-100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	-100	100	-100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	100	100	-100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	-100	-100	100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	100	-100	100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	-100	100	100	-0.05				
4.22364516e-15	-4.524158825e-15	100	100	100	-0.05				
-0.03530339825	0.006530656426	-100	-100	-100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	100	-100	-100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	-100	100	-100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	100	100	-100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	-100	-100	100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	100	-100	100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	-100	100	100	-0.01141981218				
-0.03530339825	0.006530656426	100	100	100	-0.01141981218				
4.219724214e-15	0.03721572489	-100	-100	-100	-0.005437623058				
4.219724214e-15	0.03721572489	100	-100	-100	-0.005437623058				

Exemples des sommets du 6-polytope écrits dans la base $(r_x, x_y, r_z, t_{N_x}, t_{N_y}, t_{N_z})$

GENERATOR CONNECTION : Ha, Hb, ... ← Les 18 hyperplans sont désignés dans l'application par: $H_0, H_1, \dots, H_{17}$

0 2 4 6 7 8 9 10 11
1 2 4 6 7 8 9 10 11 ← Le sommet 2 appartient aux hyperplans : $H_1, H_2, H_4, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}$ et H_{11}
0 3 4 6 7 8 9 10 11
1 3 4 6 7 8 9 10 11
0 2 5 6 7 8 9 10 11
1 2 5 6 7 8 9 10 11
0 3 5 6 7 8 9 10 11
1 3 5 6 7 8 9 10 11
0 2 4 8 9 12
1 2 4 8 9 12
0 3 4 8 9 12
1 3 4 8 9 12
0 2 5 8 9 12
1 2 5 8 9 12
0 3 5 8 9 12
1 3 5 8 9 12
0 2 4 9 10 12 13
1 2 4 9 10 12 13
0 3 4 9 10 12 13
1 3 4 9 10 12 13

Annexe2

===== Détermination 1,45 / 2,0 par APx 1,6/2,6 ===== Determination 1,45/1,0 + 1,0/1,6 + 1,6/2,6 + 2,6/2,0 TIME=4.212 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 934 2496 Check generators..... OK Check facets..... OK Commentaire : P16 et P26 sont homothétiques. ===== Détermination 1,45 / 2,0 par LAx 1,4/2,4 ===== TIME=0.841 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 106 624 Check generators..... OK Check facets..... OK ===== Détermination 1,45 / 2,0 par LAx 1,5/2,5 ===== TIME=0.608 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 56 448 Check generators..... OK Check facets..... OK ===== Détermination 1,45 / 2,0= Int(P_145_20a,b,c) ===== TIME=15.413 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 58 840 Check generators..... OK Check facets..... OK TIME=1.654 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators	===== Détermination 1,45 / 2,0 par APx 1,6/2,6 ===== Determination 1,45/1,0 + 1,0/1,6 + 1,6/2,6 + 2,6/2,0 TIME=4.071 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 934 2496 Check generators..... OK Check facets..... OK Commentaire : P16 et P26 sont homothétiques. ===== Détermination 1,45 / 2,0 par LAx 1,4/2,4 ===== TIME=0.8110000000000001 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 106 624 Check generators..... OK Check facets..... OK ===== Détermination 1,45 / 2,0 par LAx 1,5/2,5 ===== TIME=0.609 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 56 448 Check generators..... OK Check facets..... OK ===== Détermination 1,45 / 2,0= Int(P_145_20a,b,c) ===== TIME=13.9 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 58 840 Check generators..... OK Check facets..... OK TIME=1.56 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 50 996 Check generators..... OK
---	---

6 50 996 Check generators..... OK Check facets..... OK ===== Détermination 2,0 / 4,0 par APx 2,3/4,3 ===== TIME=0.436 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 38 192 Check generators..... OK Check facets..... OK Commentaire : P_2,3/4,3 est nul. ===== Détermination 2,0 / 4,0 par LAx 2,1/4,1 ===== Somme de 2 polytopes homothétiques ===== Détermination 2,0 / 4,0 par LAx 2,2/4,2 ===== Somme de 2 polytopes homothétiques ===== Détermination 2,0 / 4,0= Int(P_20_40a,b,c) ===== TIME=0 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 18 48 Check generators..... OK Check facets..... OK TIME=0.015 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 24 80 Check generators..... OK Check facets..... OK Sommes finales ... ===== Détermination 1,45 / 4,0 ===== TIME=86.767 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 9768 17610 Check generators..... OK Check facets..... OK =====	Check facets..... OK ===== Détermination 2,0 / 4,0 par APx 2,3/4,3 ===== TIME=0.39 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 38 192 Check generators..... OK Check facets..... OK Commentaire : P_2,3/4,3 est nul. ===== Détermination 2,0 / 4,0 par LAx 2,1/4,1 ===== Somme de 2 polytopes homothétiques ===== Détermination 2,0 / 4,0 par LAx 2,2/4,2 ===== Somme de 2 polytopes homothétiques ===== Détermination 2,0 / 4,0= Int(P_20_40a,b,c) ===== TIME=0.031 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 18 48 Check generators..... OK Check facets..... OK TIME=0.031 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 24 80 Check generators..... OK Check facets..... OK Sommes finales ... ===== Détermination 1,45 / 4,0 ===== TIME=81.09 The result is NOT empty. # Dimension NumberOfHalfspaces NumberOfGenerators 6 9768 17610 Check generators..... OK Check facets..... OK =====
---	---

STRATÉGIES DE MISE EN ŒUVRE DES POLYTOPES EN ANALYSE DE TOLÉRANCES

En analyse de tolérances géométriques, une approche consiste à manipuler des polyèdres de $\mathbb{R}^n$ issus d'ensembles de contraintes linéaires. La position relative entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme est déterminée par des opérations (somme de Minkowski et intersection) sur ces polyèdres. Ces polyèdres ne sont pas bornés selon les déplacements illimités dus aux degrés d'invariance des surfaces et aux degrés de liberté des liaisons.

Dans une première partie sont introduits des demi-espaces "bouchons" destinés à limiter ces déplacements afin de transformer les polyèdres en polytopes. Cette méthode implique de maîtriser l'influence des demi-espaces bouchons sur la topologie des polytopes résultants. Ceci est primordial pour garantir la traçabilité de ces demi-espaces dans le processus d'analyse de tolérances.

Une seconde partie dresse un inventaire des problématiques de mise en œuvre numérique des polytopes. L'une d'entre elles repose sur le choix d'une configuration de calcul (point et base d'expression, coefficients d'homogénéisation) pour définir un polytope. Après avoir montré que le changement de configuration de calcul est une transformation affine, plusieurs stratégies de simulations sont déclinées afin d'appréhender les problèmes de précision numérique et de temps de calculs.

Mots clés : analyse de tolérances, géométrie algorithmique, polyèdre, polytope, somme de Minkowski, intersections.

STRATEGIES OF POLYTOPES IMPLEMENTATION IN TOLERANCE ANALYSIS

In geometric tolerancing analysis area, a classical approach consists in handling polyhedrons coming from sets of linear constraints. The relative position between any two surfaces of a mechanism is determined by operations (Minkowski sum and intersection) on these polyhedrons. The polyhedrons are generally unbounded due to the inclusion of degrees of invariance for surfaces and degrees of freedom for joints defining theoretically unlimited displacements.

In a first part are introduced the cap half-spaces to limit these displacements in order to transform the polyhedron into polytopes. This method requires controlling the influence of these additional half-spaces on the topology of calculated polytopes. This is necessary to ensure the traceability of these half-spaces through the tolerancing analysis process.

A second part provides an inventory of the issues related to the numerical implementation of polytopes. One of them depends on the choice of a computation configuration (expression point and base, homogenization coefficients) to define a polytope. After proving that the modification of a computation configuration is an affine transformation, several simulation strategies are listed in order to understand the problems of numerical precision and computation time.

Keywords : tolerance analysis, computational geometry, polyhedron, polytope, Minkowski sum, intersections.