



HAL
open science

Estimation de canal à évanouissements plats dans les transmissions sans fils à relais multibonds

Soukayna Ghandour - Haidar

► **To cite this version:**

Soukayna Ghandour - Haidar. Estimation de canal à évanouissements plats dans les transmissions sans fils à relais multibonds. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, 2014. Français. NNT: . tel-01133741

HAL Id: tel-01133741

<https://theses.hal.science/tel-01133741v1>

Submitted on 20 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Signal, Image, Parole, Télécommunications (SIPT)**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Soukayna GHANDOUR-HAIDAR

Thèse dirigée par **Jean-Marc BROSSIER**

et codirigée par **Laurent ROS**

préparée au sein du laboratoire **Grenoble Images Parole Signal
Automatique (Gipsa-lab)**

dans l'école doctorale **Électronique, Électrotechnique, Automatique
et Traitement de Signal (ED EEATS)**

**Estimation de canal à
évanouissements plats dans les
transmissions sans fils à relais
multibonds**

Thèse soutenue publiquement le **12 Décembre 2014**,
devant le jury composé de :

Benoit GELLER

ENSTA Paristech Paris, Rapporteur, Président du jury

Jean-Marie GORCE

INSA Lyon, Rapporteur

Eric-Pierre SIMON

Université de Lille I, Examineur

Jean-Marc BROSSIER

Institut Polytechnique de Grenoble, Directeur de thèse

Laurent ROS

Institut Polytechnique de Grenoble, Encadrant de thèse



Aux enfants des guerres dépourvus d'enseignement

Remerciements

Avant tout développement sur cette expérience, il apparaît opportun de commencer ce manuscrit de thèse par des remerciements, à ceux qui m'ont beaucoup appris au cours de cette thèse, et même à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de cette thèse un moment très profitable.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Mr Laurent ROS, mon encadrant de thèse qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie. Je lui manifeste ma grande admiration pour ses compétences, ses qualités humaines et mon accueil avec amabilité et simplicité habituelles malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie Mr Jean Marc BROSSIER, je lui adresse toute ma profonde gratitude pour son soutien durant la période de travail. J'apprécie bien son aide précieux, ses suggestions et ses conseils judicieux qu'il a pu me prodiguer au cours de cette thèse.

Au GIPSA-Lab, l'ambiance qui règne est tout simplement exceptionnelle. Je tiens donc à remercier toutes les personnes grâce auxquelles ce fut un grand plaisir de venir au boulot tous les matins.

Je ne peux surtout pas oublier ma chère amie Fatima Nasser pour m'avoir soutenue tout au long de cette thèse, merci beaucoup.

À mon adorable soeur Zeinab qui ma manquée la dernière année après son retour au Liban, à mes soeurs Amina, Soumaïa, Batoul et Hiba, et à mes frères Mouhamed Houssein et Abbass, mille merci d'être à côté de moi.

A la fin, je me permets d'envoyer un grand merci à mon mari Jamal qui est resté à côté de moi pendant mes périodes les plus dures, et à mes parents à qui je dois toute ma vie, et je leur dédie ce travail.

Table des matières

| | |
|---|-------------|
| Table des sigles et acronymes | xiii |
| Table des notations | xv |
| Introduction | 1 |
| 1 Généralités sur les communications coopératives | 5 |
| 1.1 Les communications radio-mobile | 5 |
| 1.2 Diversité et passage aux communications coopératives | 9 |
| 1.3 Classification des canaux à relais | 18 |
| 1.4 Architectures des réseaux coopératifs | 23 |
| 1.5 Applications des communications coopératives | 24 |
| 2 Modèle mathématique de la liaison de transmission multi-bond | 27 |
| 2.1 Introduction au chapitre | 27 |
| 2.2 Description générale du canal | 29 |
| 2.3 Distribution du gain | 32 |
| 2.4 Autocorrélation temporelle | 38 |
| 2.5 Densité spectrale de Puissance | 40 |
| 2.6 Rapport Signal sur Bruit | 49 |
| 2.7 Bornes de Cramer Rao Bayésiennes | 50 |
| 2.8 Conclusion | 57 |
| 3 Algorithme basé sur un modèle Auto-Régressif et filtre de Kalman | 59 |
| 3.1 Introduction au chapitre | 60 |

| | | |
|-----|---|------------|
| 3.2 | Modèle d'approximation du canal de transmission | 61 |
| 3.3 | Filtre de Kalman | 66 |
| 3.4 | Analyse de l'erreur quadratique moyenne | 74 |
| 3.5 | Optimisation du paramètre du modèle $AR(1)$ selon le critère MAV | 78 |
| 3.6 | Résultats par simulation | 88 |
| 3.7 | Robustesse par rapport à la connaissance de $f_{eq}T$ | 91 |
| 3.8 | Robustesse par rapport à la connaissance du SNR_{dB} | 100 |
| 3.9 | Conclusion | 105 |
| | Conclusion | 109 |
| | A Distribution de la phase d'un canal multi-bond | 113 |
| | B Calcul de la distribution du module du gain d'un canal à "N" relais | 115 |
| | C Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes pour un canal sans relais | 119 |
| | D Calcul des coefficients du modèle $AR(p)$ et de σ_e^2 | 123 |
| | E Calcul du gain de Kalman asymptotique | 125 |
| | F Approximations de MSE_1 | 127 |
| | G Approximation de MSE_2 | 131 |
| | Bibliographie | 135 |
| | Abstract | 143 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | <i>Scénario typique de propagation radio-mobile [37]</i> | 11 |
| 1.2 | <i>Communication Coopérative à base de relais [55]</i> | 17 |
| 1.3 | <i>Comparaison entre les modes semi-duplex et full-duplex [2]</i> | 21 |
| 1.4 | <i>Comparaison entre les protocoles non- orthogonaux et encasés [2]</i> | 22 |
| 1.5 | <i>Architecture d'un réseau à relais en parallèle [73]</i> | 24 |
| 1.6 | <i>Architecture d'un réseau à relais en cascade [73]</i> | 24 |
| 2.1 | <i>Diagramme d'un canal multi-bond à N relais A&F</i> | 30 |
| 2.2 | <i>Réalisation de α (module) à différentes fréquences Doppler pour un canal Fixe-Mobile</i> | 33 |
| 2.3 | <i>Réalisation de α (module) pour un canal Mobile-Mobile, à différentes fréquences Doppler, de sorte que $(f_S^2 + f_D^2)T^2 = \text{constante} = 10^{-3}$</i> | 33 |
| 2.4 | <i>Réalisation de α (module) à même fréquence Doppler équivalente en fonction du nombre de noeuds</i> | 34 |
| 2.5 | <i>Réalisation de α (module) en fonction du nombre de relais mobiles</i> | 34 |
| 2.6 | <i>Distribution uniforme de la phase d'un canal à plusieurs bonds</i> | 35 |
| 2.7 | <i>Fonction d'autocorrélation d'un canal Fixe-Mobile à différentes fréquences Doppler, en modes 2D et 3D</i> | 39 |
| 2.8 | <i>Fonction d'autocorrélation d'un canal Mobile-Mobile à différentes fréquences Doppler, en modes 2D et 3D</i> | 40 |
| 2.9 | <i>Autocorrélation temporelle normalisée en 2D pour différents nombre de relais</i> . . | 41 |
| 2.10 | <i>Autocorrélation temporelle normalisée en 3D pour différents nombre de relais</i> . . | 41 |
| 2.11 | <i>Densité Spectrale de Puissance normalisée en 2D sur le lien "i" pour les deux cas : lorsque R_i bouge et R_{i-1} est fixe (figure à gauche) et lorsque R_i et R_{i-1} bougent (figure à droite) pour différents rapports entre f_i et f_{i-1}.</i> | 44 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.12 | <i>Densité Spectrale de Puissance normalisée en 3D sur le lien "i" pour les deux cas : lorsque R_i bouge et R_{i-1} est fixe (figure à gauche) et lorsque R_i et R_{i-1} bougent (figure à droite) pour différents rapports entre f_i et f_{i-1}.</i> | 44 |
| 2.13 | <i>Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" pour un scénario un seul bond fixe-mobile en modes de diffusion 2D et 3D, en fonction de la taille du bloc pour différents rapports SNR_{dB}</i> | 54 |
| 2.14 | <i>Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" pour un scénario un seul bond fixe-mobile en modes de diffusion 2D et 3D, en fonction de la taille du bloc pour différentes fréquences Doppler</i> | 55 |
| 2.15 | <i>Comparaison entre les Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" et les modes de diffusion 2D et 3D pour un scénario un seul bond fixe-mobile</i> | 55 |
| 3.1 | <i>Fonctions d'autocorrélations du vrai gain et du gain approché par des modèles AR(1), AR(2) et AR(3) dont les coefficients sont pris selon le critère de Correlation-Matching, pour un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler</i> | 65 |
| 3.2 | <i>Fonctions d'autocorrélations du vrai gain et du gain approché par des modèles AR(1), AR(2) et AR(3) dont les coefficients sont pris selon le critère de Correlation-Matching, pour un canal Fixe-Mobile à haute fréquence Doppler</i> | 65 |
| 3.3 | <i>Variation de l'erreur quadratique moyenne en fonction de a manuellement pour un canal Mobile-Fixe-Mobile en 2D</i> | 66 |
| 3.4 | <i>Estimation d'un canal Fixe-Mobile à haute fréquence Doppler, avec le filtre de Kalman, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM</i> | 69 |
| 3.5 | <i>Estimation d'un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler, avec le filtre de Kalman, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM</i> | 70 |
| 3.6 | <i>Convergence du gain de Kalman pour l'estimation d'un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM</i> | 71 |
| 3.7 | <i>Variation du gain de Kalman asymptotique en fonction de σ_e</i> | 73 |
| 3.8 | <i>Variation du gain de Kalman asymptotique en fonction de σ_n</i> | 73 |
| 3.9 | <i>Vérification de nos approximations des différentes composantes de l'erreur (MSE_1, MSE_2 et le total MSE) par intégration numérique</i> | 77 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.10 | <i>MSE en fonction de $f_D T = f_d T$ avec les choix CM et MAV pour un canal Fixe-Mobile en 2D où la source est fixe et la destination se déplace. Il n'existe aucun relais. Les résultats sont donnés pour deux valeurs différentes de SNR_{dB}.</i> | 89 |
| 3.11 | <i>MSE en fonction de $f_S T = f_D T$ avec les choix CM et MAV pour un canal mobile-mobile en 3D. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB}.</i> | 89 |
| 3.12 | <i>MSE en fonction de $f_{eq} T$ avec les choix CM et MAV pour un canal mobile-mobile en 3D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB}.</i> | 90 |
| 3.13 | <i>MSE en fonction de $f_S T = f_D T = f_d T$ avec les choix CM et MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à même vitesse, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB}.</i> | 90 |
| 3.14 | <i>MSE en fonction de $f_S T$ et $f_D T$ avec le choix MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour $SNR_{dB} = 0$ dB.</i> | 91 |
| 3.15 | <i>MSE en fonction de $f_S T$ et $f_D T$ avec le choix MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour $SNR_{dB} = 20$ dB.</i> | 91 |
| 3.16 | <i>MSE en fonction de SNR_{dB} avec les choix MAV et CM pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à mêmes vitesses, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour différentes valeurs de fréquences.</i> | 92 |
| 3.17 | <i>Valeur de MSE en fonction de f_{eq} pour différents nombre de bonds pour les cas CM et MAV et différentes valeurs de SNR_{dB}, en mode de diffusion 2D</i> | 92 |
| 3.18 | <i>Valeur de MSE en fonction de f_{eq} pour différents nombre de bonds pour les cas CM et MAV et différentes valeurs de SNR_{dB}, en mode de diffusion 3D</i> | 93 |
| 3.19 | <i>Robustesse par rapport à la connaissance de la fréquence Doppler équivalente en 3D</i> | 100 |
| 3.20 | <i>Robustesse par rapport à la connaissance de la fréquence Doppler équivalente en 2D</i> | 100 |
| 3.21 | <i>Variation de MSE en fonction de $f_{eq} T$ pour les cas CM et MAV avec mal-estimation de la fréquence équivalente. Le canal est mobile-mobile et le mode de diffusion est 3D.</i> | 101 |
| 3.22 | <i>Robustesse par rapport à la connaissance du rapport signal-sur-bruit en 3D</i> | 105 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.23 | <i>Robustesse par rapport à la connaissance du rapport signal-sur-bruit en 2D . . .</i> | 105 |
| 3.24 | <i>Variation de MSE en fonction de SNR_{dB} pour les cas CM et MAV avec SNR_{dB} fixé à trois valeurs (10, 15 et 20 dB), pas nécessairement les vraies valeurs du canal. Le canal est fixe-mobile et le mode de diffusion est 2D.</i> | 106 |
| F.1 | <i>Filtre passe-haut équivalent au filtrage de la partie dynamique de l'observation avec le filtre de Kalman pour différentes valeurs du coefficient a, pour $SNR_{dB} = 0, 10$ et 20 dB</i> | 128 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Comparaison entre a_{CM} et a_{MAV} pour un scénario M-F-M à différentes valeurs de fréquences Doppler (mode de diffusion $2D$, $SNR_{dB} = 0$ dB) | 86 |
| 3.2 | Comparaison entre a_{CM} et a_{MAV} pour un scénario M-F-M à différentes valeurs de fréquences Doppler (mode de diffusion $2D$, $SNR_{dB} = 20$ dB) | 86 |
| 3.3 | Valeurs numériques de a_{CM} et a_{MAV} pour différents scénarios mobile-mobile en mode de diffusion $3D$, mais ayant même fréquence Doppler équivalente. | 87 |

Table des sigles et acronymes

| | |
|---------------------------|---|
| 2D | Mode de diffusion bidimensionnel |
| 3D | Mode de diffusion tridimensionnel |
| AD&F | <i>Amplify/Decode-and-Forward</i> |
| A&F | <i>Amplify-and-Forward</i> |
| AR | Modèle AutoRegréssif |
| AR(1) | Modèle AutoRegréssif du premier ordre |
| AR(p) | Modèle AutoRegréssif d'ordre p |
| AWGN | <i>Additive white Gaussian Noise</i> (Bruit blanc additif Gaussien) |
| BCRB | <i>Bayesian Cramer Rao bounds</i> (Bornes de Cramér Rao Bayésiennes) |
| CDMA | <i>Code Division Multiple Access</i> |
| CM | <i>Correlation Matching criterion</i> |
| C&F | <i>Compress-and-Forward</i> |
| DDP | Densité De Probabilité |
| DSP | Densité Spectrale de Puissance |
| D&F | <i>Decode-and-Forward</i> |
| EQM | Erreur Quadratique Moyenne |
| E&F | <i>Equalize-and-Forward</i> |
| F-to-M | <i>Fixe-to-Mobile link</i> (lien Fixe-Mobile) |
| KF | <i>Kalman Filter</i> |
| M-to-M | <i>Mobile-to-Mobile link</i> (lien Mobile-Mobile) |
| MAV | <i>Minimum Asymptotic Variance criterion</i> |
| MSE | <i>Mean Square Error</i> (Erreur Quadratique moyenne) |
| MSE₁ | <i>Dynamic Mean Square Error</i> (Erreur Quadratique moyenne Dynamique) |
| MSE₂ | <i>Static Mean Square Error</i> (Erreur Quadratique moyenne statique) |
| MSE_{CM} | <i>Mean Square Error under CM criterion</i> (Erreur Quadratique moyenne sous le critère CM) |
| MSE_{MAV} | <i>Mean Square Error under MAV criterion</i> (Erreur Quadratique moyenne sous le critère MAV) |
| SNR | <i>Signal-to-Noise Ratio</i> (Rapport Signal-sur-Bruit) |
| SNR_{dB} | <i>Signal-to-Noise Ratio in dB</i> (Rapport Signal-sur-Bruit en dB) |
| WSS | <i>Wide Sense stationary</i> (Stationarité au sens large) |

Table des notations

| | |
|----------------|--|
| R_i | Relai numéro "i" |
| R_0 | Relai numéro "0" ou encore source de transmission |
| R_{N+1} | Relai numéro "N+1" ou encore destination |
| S | Source de transmission (émetteur) |
| D | Destination (récepteur final) |
| v_i | Vitesse du relai numéro "i" |
| v_0 | Vitesse de la source |
| v_{N+1} | Vitesse de la destination |
| v_S | Vitesse de la source |
| v_D | Vitesse de la destination |
| c | Célérité de la lumière |
| s_k | Signal émis de la source de transmission à l'instant "kT" |
| s | Signal émis de la source de transmission |
| y_k | Signal reçu à la destination à l'instant "kT" |
| y | Signal reçu à la destination |
| \mathbf{y}_k | Vecteur de M observations $[y_{k+1} \dots y_{k+M}]$ |
| $r_k^{(i)}$ | Signal sortant du relai numéro "i" à l'instant "kT" |
| $r^{(i)}$ | Signal sortant du relai numéro "i" |
| $r_k^{(0)}$ | Signal émis de la source de transmission à l'instant "kT" |
| $r_k^{(N+1)}$ | Signal reçu à la destination à l'instant "kT" |
| $A^{(i)}$ | Facteur d'amplification au relai "i" |
| $A^{(N+1)}$ | Facteur d'amplification à la destination ($A^{(N+1)} = 1$) |
| γ_i | Rapport signal-sur-bruit local au relai numéro "i" |
| γ | Rapport signal-sur-bruit global |
| E_i | Puissance débitée par le relai numéro "i" |
| E_0 | Puissance débitée par la source |
| E_S | Puissance débitée par la source |

| | |
|--------------------------------|---|
| f_i | Fréquence Doppler du relai numéro "i" |
| f_0 | Fréquence Doppler de la source |
| f_S | Fréquence Doppler de la source |
| f_{N+1} | Fréquence Doppler de la destination |
| f_D | Fréquence Doppler de la destination |
| f_p | Fréquence porteuse |
| f_{eq} | Fréquence Doppler équivalente |
| f_{max} | Fréquence maximale de $\Gamma_\alpha(f)$ |
| ζ | Gain semi-total incluant tous les liens sauf le dernier |
| $\alpha_k^{(i)}$ | Gain du lien "i" à l'instant "kT" |
| α_k | Gain du canal total à l'instant "kT" |
| α | Gain du canal total |
| $\tilde{\alpha}_k$ | Approximation du gain α_k par un modèle autorégressif |
| $\hat{\alpha}_k$ | Estimation du gain α_k |
| α_k^{\Re} | Partie réelle de α_k |
| α_k^{\Im} | Partie imaginaire de α_k |
| α_k | Vecteur de M gains $[\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+M}]$ |
| $\hat{\alpha}_k(\mathbf{y}_k)$ | Estimateur du vecteur de gains α_k basé sur le vecteur d'observations \mathbf{y}_k |
| $\sigma_{\alpha^{(i)}}^2$ | Variance du gain du lien "i" |
| σ_α^2 | Variance du gain total α |
| σ_ζ^2 | Variance du gain semi-total ζ |
| n | Bruit total additionné |
| n_k | Bruit total additionné à l'instant "kT" |
| $n_k^{(i)}$ | Bruit additionné au relai numéro "i" à l'instant "kT" |
| $n_k^{(N+1)}$ | Bruit additionné à la destination à l'instant "kT" |
| \mathbf{n}_k | Vecteur de M bruits $[n_{k+1} \dots n_{k+M}]$ |
| $\sigma_{n^{(i)}}^2$ | Variance du bruit ajouté au relai "i" |
| $\sigma_{n^{(N+1)}}^2$ | Variance du bruit ajouté à la destination |
| σ_n^2 | Variance du bruit total |

| | |
|--------------------------------|--|
| $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}$ | Fonction d'autocorrélation temporelle du gain $\alpha^{(i)}$ |
| $R_{\alpha\alpha}$ | Fonction d'autocorrélation temporelle du gain α |
| R_{α} | Matrice de covariance du vecteur de M gains α |
| R_n | Matrice de covariance du vecteur de M bruits n |
| I_M | Matrice Identité de dimension $M \times M$ |
| $\Gamma_{\alpha^{(i)}}$ | Densité spectrale de puissance du gain $\alpha^{(i)}$ |
| Γ_{α} | Densité spectrale de puissance du gain α |
| S_{2,f_i} | Spectre élémentaire en cas de diffusion $2D$ à la fréquence Doppler f_i (spectre de Jakes) |
| S_{3,f_i} | Spectre élémentaire en cas de diffusion $3D$ à la fréquence Doppler f_i (spectre plat) |
| ρ | Module du gain α |
| $\rho^{(i)}$ | Module du gain $\alpha^{(i)}$ |
| η | Module du gain ζ |
| $\theta^{(i)}$ | Phase du gain $\alpha^{(i)}$ |
| θ | Phase du gain α modulo 2π |
| θ' | Phase du gain α sans modulo 2π |
| $p(\cdot)$ | Fonction densité de probabilité |
| $f_{\rho}(\cdot)$ | Distribution selon la loi de ρ |
| $f_{\rho^{(i)}}(\cdot)$ | Distribution selon la loi de $\rho^{(i)}$ |
| $f_{\theta^{(i)}}(\cdot)$ | Distribution selon la loi de $\theta^{(i)}$ |
| $f_{\theta}(\cdot)$ | Distribution selon la loi de θ |
| $f_{\theta'}(\cdot)$ | Distribution selon la loi de θ' |
| $f_{\alpha^{(i)}}(\cdot)$ | Distribution selon la loi du gain local $\alpha^{(i)}$ |
| $f_{\alpha}(\cdot)$ | Distribution selon la loi du gain total α |
| $f_n(\cdot)$ | Distribution selon la loi du bruit n |
| a | Coefficient du modèle $AR(1)$ |
| a_{CM} | Coefficient du modèle $AR(1)$ sous le critère CM |
| a_{MAV} | Coefficient du modèle $AR(1)$ sous le critère MAV |
| a_m | Coefficient numéro "m" du modèle $AR(p)$ |

| | |
|----------------------|---|
| e_k | Erreur du modèle à l'instant $t = kT$ |
| σ_e^2 | Variance de l'erreur du modèle |
| C_f | Coefficient de mal-connaissance de la fréquence Doppler |
| C_n | Coefficient de mal-connaissance du rapport signal-sur-bruit |
| $\delta_{q\ell}$ | Symbole de kronecker |
| $\delta(\cdot)$ | Fonction distribution de Dirac |
| $\ln(\cdot)$ | Fonction logarithme à base "e" |
| $\exp(\cdot)$ | Fonction exponentielle |
| $\cosh(\cdot)$ | Fonction cosinus hyperbolique |
| $J_0(\cdot)$ | Fonction Bessel de première espèce, d'ordre 0 |
| $K_0(\cdot)$ | Fonction Bessel modifiée de deuxième type, d'ordre 0 |
| $K(\cdot)$ | Intégrale elliptique complète de première espèce |
| $\text{sinc}(\cdot)$ | Fonction sinus cardinal |
| \mathcal{N} | Loi Normale |
| \mathcal{CN} | Loi Complexe Normale |
| \mathbb{Z}^+ | ensemble des entiers positifs |
| \mathbf{J} | Matrice de Fisher |
| Jac | Matrice Jacobienne |
| \mathbf{E} | Matrice d'erreur quadratique du vecteur de gains α_k |
| N | Nombre de relais |
| M | Nombre d'échantillons dans le vecteur bloc de gains à estimer |
| k | Indice temporel |
| i | Indice du relai (dans la plupart du temps) |
| m | Indice des coefficients des modèles AR |
| j | Imaginaire pur |
| T | Temps symbole (période d'échantillonnage) |
| t | temps |
| f | Fréquence |

| | |
|---|--|
| $[2\pi]$ | Opérateur modulo 2π |
| $*$ | Opérateur conjuguée |
| \top | Opérateur transpose |
| \dagger | Opérateur conjuguée transpose |
| Σ | Opérateur addition |
| Π | Opérateur produit |
| \otimes | Opérateur produit de convolution |
| $ (\cdot) ^2$ | Opérateur module |
| \mathbb{E} | Opérateur espérance |
| $\mathbb{E}_{\alpha, \mathbf{y}}$ | Opérateur espérance selon la loi de distribution conjointe de α et \mathbf{y} |
| \mathbb{E}_{α} | Opérateur espérance selon la loi de distribution de α |
| $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$ | Opérateur dérivée partielle par rapport à x |
| $d(\cdot)$ | Opérateur Différentielle |
| $\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell}(\cdot)$ | Opérateur différentiel seconde |
| $\nabla_{\alpha_q}(\cdot)$ | Opérateur différentiel |
| $\frac{\partial}{\partial \alpha_q}(\cdot)$ | Opérateur pseudo-dérivée par rapport à α_q |
| $\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Re}}(\cdot)$ | Opérateur dérivée par rapport à la partie réelle de α_q |
| $\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Im}}(\cdot)$ | Opérateur dérivée par rapport à la partie imaginaire α_q |

Introduction

Au cours des dernières années, les systèmes de communication sans fil ont réalisé une véritable révolution. En raison de leur faible coût relatif, et à cause des exigences dues au milieu de propagation (dans des endroits où l'emploi de câbles semble être difficile), la connexion radio a été mise en place, et les systèmes de communication sans fil ont gagné une grande popularité. Cependant, les réseaux sans fil classiques fonctionnent à ou près de leurs limites en raison de la grande demande, ce qui a ouvert la porte à l'introduction des communications coopératives où des relais viennent se placer entre l'émetteur et le récepteur pour les aider à améliorer la fiabilité de la transmission.

Les recherches sur les réseaux de communications coopératives ont évolué au cours des dernières années, en se focalisant sur la capacité des canaux coopératifs et l'allocation de ressources sur ces canaux [23] [28] [96], ainsi que l'estimation du canal. Cette thèse se déroule sur l'estimation d'un canal de communication coopérative avec relais placés en cascade, et nous nous focalisons sur les relais "*Amplify-and-Forward (A&F)*".

Dans la plupart de ces systèmes, ainsi que dans notre étude, la transmission se fait à travers un canal dit "radio-mobile". Cela signifie que l'on a une transmission radiofréquence de l'information entre la station de base et le mobile en présence des différents obstacles, qui sont donc le siège d'un phénomène de propagation multi-trajet (diffusions, diffractions, réflexions), et par suite les conditions de propagation sont très variables.

C'est là qu'apparaît le problème de maintien d'une communication fiable, dont dérivent les problèmes d'estimation du gain complexe (incluant module et phase du canal), de synchronisation (estimation du délai de propagation et du déphasage), et d'égalisation. Les techniques de traitement du signal jouent un rôle extrêmement important pour surmonter ces problèmes.

Avant d'aborder les solutions de ces problèmes, il est intéressant de modéliser ce canal et de traiter ses caractéristiques statistiques telles que la distribution de son enveloppe complexe, sa fonction d'autocorrélation et sa Densité Spectrale de Puissance, afin de les prendre en compte ultérieurement.

Mais en raison des composantes multi-trajet, même dans le cas le plus simple entre une extrémité fixe et une autre mobile sans intermédiaire de relais, le modèle initial (supposé le modèle exact dans les études théoriques) du canal n'est pas très commode pour l'utiliser tel que dans les algorithmes d'estimation et de poursuite de canal. Dans ce cas fixe-mobile par exemple, l'enveloppe complexe du canal de transmission est largement modélisée dans la littérature avec un modèle (initial) de canal de type Rayleigh à spectre de Jakes. Et pour le cas d'un canal multi-bond le

problème est plus difficile car son expression analytique est plus compliquée.

Ainsi, pour approcher la dynamique du canal, on a traditionnellement recours à des simplifications à l'aide d'un modèle autorégressif d'ordre p avec le plus souvent $p = 1$ ($AR(1)$), et qu'on nomme encore "processus de Gauss-Markov de premier ordre" (les gains en fonction du temps représenteront une série de Markov de premier ordre).

Cette approche, combinée à d'autres choix de conception, a été largement utilisée dans la littérature. La méthode d'estimation résultante paraît complètement efficace dans le cas de variations (relativement) rapides du canal à l'échelle d'une période symbole. Mais cette méthode de littérature, bien que largement utilisée, ne semble pas forcément la meilleure dans le cas pourtant le plus usuel de faible fréquence Doppler normalisée où il y a une grande corrélation entre deux symboles consécutifs.

Dans un travail initial [30], j'ai traité ce problème d'estimation de canal radio-mobile à évanouissements lents, approché par un modèle $AR(1)$, pour le cas d'un seul lien fixe-mobile en mode de diffusion 2 dimensions ($2D$). J'ai cherché, tout comme le travail de Barbieri dans [12], à choisir le coefficient du modèle $AR(1)$ de façon plus adéquate que le choix de la littérature basé sur le critère CM (*Correlation Matching*). J'ai utilisé le filtre de Kalman pour l'estimation. La différence avec le travail de Barbieri est que nous avons travaillé dans le domaine fréquentiel, et nous avons abouti à des expressions analytiques du choix que nous avons nommé MAV (*Minimization of Asymptotic Variance*). L'étude s'est poursuivie dans cette thèse et a été élargie aux transmissions multi-bond, et pour les deux modes de diffusion, le $2D$ et le $3D$.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques généralités sur les communications coopératives. Dans sa suite, nous nous intéressons seulement au cas d'un réseau coopératif à relais A&F mis en cascade.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le modèle du canal en donnant les caractéristiques et les propriétés statistiques générales. Nous cherchons aussi les bornes d'erreur minimales qui peuvent être atteintes (bornes de Cramer Rao Bayésiennes) pour le cas d'un canal sans relais. Dans ce chapitre, deux petites contributions qui peuvent être améliorées ont été faites : l'expression de la distribution du gain du canal total sous forme d'intégrale multiple, ce qui peut aider dans un travail ultérieur à trouver les bornes de Cramer Rao Bayésiennes pour ce cas et donc de donner un repère de qualification des différents algorithmes d'estimation utilisés. La deuxième contribution est de donner l'allure de la Densité Spectrale de Puissance dans le cas d'un canal multi-bond avec un grand nombre de bonds.

Dans le troisième chapitre, qui contient les contributions majeures de la thèse, nous proposons et analyserons un algorithme d'estimation du gain du canal global multi-bond à l'aide d'un

filtre de Kalman. Le gain est modélisé par un modèle Autorégressif du premier ordre $AR(1)$. Une étude sur l'origine des erreurs d'estimation sera faite. À la fin de ce chapitre, la robustesse de notre choix par rapport au choix de la littérature sera testée pour des connaissances imparfaites des fréquences Doppler et des rapports Signal-sur-Bruit.

Les importantes contributions de ce chapitre se manifestent par fournir premièrement une expression analytique approchée de l'erreur quadratique moyenne MSE pour les critères CM et MAV , pour les cas fixe-mobile, mobile-mobile, et multi-bond, pour les deux modes de diffusion $2D$ et $3D$. Deuxièmement, on a contribué à trouver l'expression du coefficient du modèle $AR(1)$ sous le critère MAV pour un rapport Signal-sur-Bruit SNR et des fréquences Doppler donnés.

Des propositions de méthodes d'amélioration et des perspectives seront menées dans la conclusion générale de la thèse.

Publications de l'auteur :

Ci-dessous la liste des publications acceptées et liées à ce travail de thèse :

- S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, "On the use of first-order autoregressive modeling for Rayleigh Flat Fading Channel Estimation with Kalman filter", ELSEVIER Signal Processing, vol. 92, pp. 601–606, Feb. 2012.
- S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, "3-D Mobile-to-Mobile channel tracking with first-order autoregressive model-based Kalman filter", IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 15–17 Dec. 2013, Athens, Greece.
- S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, "Improving the tuning of First-Order Autoregressive Model for the estimation of Amplify and Forward Relay channel", IEEE 19th International Conference on Telecommunications, Jounieh, Lebanon, Apr. 2012.

Ces 3 publications sont liées au chapitre 3 de la thèse. Les deux premières donnent les résultats analytiques du canal 1 bond (fixe-mobile en $2D$ pour le premier, mobile-mobile en $3D$ pour le deuxième). La troisième publication montre des résultats de simulation pour le canal deux-bonds en $2D$. Les résultats analytiques du canal multi-bond restent à publier.

D'autres travaux auxquels j'ai participé sur l'estimation auto-adaptative d'un canal mono-bond ont été publiés dans :

- R. Gerzaguet, L. Ros, J.M. Brossier, S. Ghandour-Haidar and F. Belvèze, "Self-Adaptive Stochastic Rayleigh Flat Fading Channel Estimation", 18th IEEE international conference on Digital Signal Processing (DSP2013), Santorini, Greece, Jul. 2013.

- L. Ros, J.M. Brossier et S. Ghandour-Haidar, "Sur l'utilisation des filtres du premier-ordre pour l'estimation d'un canal radio-mobile de Rayleigh à évanouissement plat", 23ème colloque GRETSI, Bordeaux, France, Sep. 2011.

Généralités sur les communications coopératives

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | Les communications radio-mobile | 5 |
| 1.1.1 | Modèles de diffusion 2D et 3D | 6 |
| 1.1.2 | Communications Fixe-Mobile ou Mobile-Mobile | 8 |
| 1.2 | Diversité et passage aux communications coopératives | 9 |
| 1.2.1 | Les techniques de diversité | 12 |
| 1.2.2 | Combinaison des techniques de diversité | 15 |
| 1.2.3 | Passage aux communications coopératives | 16 |
| 1.3 | Classification des canaux à relais | 18 |
| 1.3.1 | Types de relais | 18 |
| 1.3.2 | Coopération Hybride et sélection de relais | 20 |
| 1.3.3 | Mode Semi-Duplex ou Full-Duplex | 21 |
| 1.3.4 | Protocole Orthogonal ou Non-orthogonal | 22 |
| 1.4 | Architectures des réseaux coopératifs | 23 |
| 1.5 | Applications des communications coopératives | 24 |

1.1 Les communications radio-mobile

Au cours du dernier siècle, on voit une véritable révolution dans les technologies de l'information et de la communication, en particulier dans les systèmes de communication sans fil tels que GSM (Global System for Mobile communication), UMTS (Universal Mobile Telecommunication System), WiMAX (Worldwide Interoperability for Microwave Access) et Bluetooth [81].

Ces derniers ont réalisé une grande popularité et importance dans notre vie quotidienne en raison de leur faible coût relatif, et à cause des exigences dues au milieu de propagation (dans des

endroits où l'emploi de câbles semble être difficile).

Et pendant les vingt dernières années, la tendance dans les technologies de communication sans fil est passée des communications mobiles vocales (2G, GSM)¹ aux communications mobiles d'aujourd'hui pour la voix et les données (3G, UMTS)².

Une réorientation vers les communications sans fil de la quatrième génération (4G, IMT-Advanced)³ est en cours.

Ainsi, pour communiquer et échanger les données, les services comme l'Internet, la téléphonie mobile, et l'accès multimédia sont disponibles à tout moment et depuis n'importe quel endroit.

Autre que les téléphones portables et les ordinateurs qu'on trouve aujourd'hui partout, on trouve aussi les capteurs sans fil qui deviennent de plus en plus essentiels à la croissance de divers secteurs tels que l'environnement, la finance, la surveillance, la santé et la fabrication.

Cependant, les réseaux sans fil classiques fonctionnent à ou près de leurs limites, ouvrant la porte à de récentes recherches comme la radio cognitive, les réseaux de capteurs sans fil et la communication coopérative, ainsi que certaines autres.

La connexion utilisée est une connexion "radio-mobile". Cela signifie que l'on a une transmission radiofréquence de l'information en présence des différents obstacles, qui sont donc le siège d'un phénomène de propagation multi-trajet (diffusions, diffractions, réflexions), et par suite les conditions de propagation sont très variables.

D'ailleurs, différents modèles sont appropriés pour décrire le canal de communication radio mobile, en fonction de l'environnement de diffusion et si un seul ou les deux terminaux sont en mobilité.

1.1.1 Modèles de diffusion 2D et 3D

Dans un système typique de communication mobile, les composantes multi-trajet arrivent avec différents angles d'arrivée (AOA), différentes amplitudes et différents retards. Divers chercheurs ont examiné la distribution des diffuseurs autour de la station mobile.

1. 2G correspond à la deuxième génération, son abréviation GSM désigne Global System for Mobile Communications

2. 3G correspond à la troisième génération, son abréviation UMTS désigne Universal Mobile Telecommunications System

3. IMT-Advanced désigne International Mobile Telecommunications Advanced

Le modèle de diffusion largement utilisé, proposé par Clarke en 1968 [21], est un modèle bidimensionnel ($2D$) en raison de l'hypothèse que les ondes arrivent seulement à partir de la direction azimut.

En particulier, le modèle suppose une diffusion isotrope, ce qui signifie une distribution uniforme de l'angle d'arrivée des composantes multi-trajet arrivant à la station mobile.

Pour une réception radio-mobile entre véhicules et les communications en zones rurales, un modèle de diffusion à deux dimensions $2D$ s'est avéré être utile pour calculer les statistiques du signal reçu [47] [74].

Dans ce cas, nous supposons que les fronts d'ondes se propageant seulement dans le plan horizontal arrivent à l'antenne du récepteur (quittent l'antenne émettrice).

Cependant, il est maintenant admis que les ondes électromagnétiques diffusées ne voyagent pas strictement en azimut mais en élévation aussi.

En général, le modèle de diffusion $3D$ est approprié si le signal émis/reçu arrive/quitte de/à n'importe quelle direction avec une probabilité égale et le récepteur/émetteur a une réponse isotrope [22].

Pour les communications personnelles (communications en zones urbaines), en particulier à l'intérieur des bâtiments, un modèle de diffusion à trois dimensions $3D$ peut être plus approprié [22] [47] [74].

Dans ce modèle de diffusion $3D$, les réseaux d'antennes émettrices et réceptrices sont souvent situés à proximité et plus bas que les bâtiments environnants. Ainsi, les ondes diffusées par diffraction à partir des bords des bâtiments peuvent se propager vers le bas à la rue et, par conséquent, pas nécessairement se déplacer horizontalement.

C'est la raison pour laquelle on adopte un modèle de diffusion $2D$ pour les environnements ruraux et un modèle de diffusion $3D$ pour les environnements urbains [100].

Pour obtenir des modèles réalistes de canaux de propagation, on espère une estimation précise de la distribution des diffuseurs dans l'espace et donc la distribution des angles d'arrivées des composantes multi-trajet. Ces informations sont très importantes dans de nombreuses applications.

Dans [5] la répartition des diffuseurs est modélisée avec une densité de probabilité Gaussienne.

Dans [21] la distribution des angles d'arrivées des composantes multi-trajet est modélisée en utilisant la distribution de Laplace.

Ces deux approches sont appliquées à la modélisation du canal en diffusion 2D.

Mammasis [51] a proposé un modèle 3D pour la distribution des angles d'arrivée des multi-trajet.

1.1.2 Communications Fixe-Mobile ou Mobile-Mobile

Les canaux de communications varient aussi selon la mobilité ; un canal de communication radio peut être un canal fixe-mobile (F-to-M) ou bien un canal mobile-mobile (M-to-M).

Le premier cas est vu avec des communications cellulaires, où la station de base (BS) est fixé à une altitude élevée, reçoit le signal à l'intérieur d'un faisceau de largeur étroite, et la station mobile (MS) est entouré par des diffuseurs locaux. C'est ce qu'on appelle la macro-cellule typique [10].

Cependant, les applications avec relais mobiles ainsi que les communications M-to-M ont récemment reçu beaucoup d'attention [19] [36] [43] [48] [57] [82] [93] [97]. Elles jouent un rôle important dans de nombreuses nouvelles applications, comme les réseaux mobiles Ad-hoc (Mobile Ad-hoc NETWORKS MANET), les systèmes radio mobile privés (Terrestrial Trunked Radio TETRA) avec un fonctionnement en mode direct (DMO), les systèmes intelligents de transport où les liens de communication doivent être extrêmement fiables, les réseaux cellulaires avec relais, les communications mobiles machine-machine (communications inter-véhiculaires, communications voiture-à-voiture C-to-C ou véhicule-à-véhicule V-to-V) et certaines autres.

Dans le cas des systèmes de communication M-to-M, et comme leur nom l'indique, toutes les entités du réseau sont en mouvement. Ces entités peuvent être soit des utilisateurs et / ou des véhicules mobiles.

Le récepteur et le transmetteur sont habituellement équipés par des antennes de basse élévation et sont entourés par des diffuseurs locaux [93] [100].

Comme pour tout autre système de communication, le développement de systèmes de communication M-to-M nécessite la connaissance des caractéristiques du canal de propagation. Les propriétés des canaux M-to-M sont différentes de celles des canaux cellulaires classiques F-to-M entre une station de base et une station mobile.

D'une part, et contrairement aux systèmes cellulaires classiques, dans les systèmes M-to-M, à la fois le transmetteur et le récepteur se déplacent avec leurs diffuseurs. Cela signifie que les conditions de propagation sont très dynamiques et les fluctuations des canaux M-to-M sont beaucoup plus rapides.

D'autre part, et selon l'application, les composantes dominantes du multi-trajet varient. Il peut ou non y avoir la présence d'un lien direct.

Dans les communications voiture-à-voiture, l'émetteur (Tx) et le récepteur (Rx) sont à la même hauteur et dans des environnements similaires. Selon le trafic et les coins de la rue entourée de bâtiments, le nombre de réfractions et réflexions devient de plus en plus important.

Par conséquent, les hypothèses relatives à la stationnarité des canaux M-to-M doivent être prises avec prudence. Notons que les caractéristiques du canal M-to-M sont influencées par les propriétés de l'environnement autour des extrémités (voitures, mobiles,..) communiquant [57].

1.2 Diversité et passage aux communications coopératives

Deux questions sont importantes avant d'entrer dans le détail des communications coopératives.

La première question qui se pose c'est **“qu'est-ce que les communications coopératives ?”**

Fondamentalement, le concept de coopération décrit l'idée qu'au moins un noeud aide le couple émetteur-récepteur pour améliorer certaines caractéristiques de transmission : fiabilité, débit, couverture...

Ce nœud supplémentaire est une sorte d'aide pour l'émetteur ou le récepteur : on parle respectivement de la coopération de transmission et la coopération de réception.

De nombreuses techniques ont été proposées sous le titre de la coopération , alors qu'elles ne désignent pas la même chose. Certaines distinctions doivent être faites pour différencier ces techniques de coopération.

Dans les réseaux cellulaires, par exemple, les stations de base proches partagent les informations destinées aux utilisateurs par le biais d'un réseau de liaisons. Ensuite, toutes les stations de base situées dans le voisinage d'un utilisateur donné lui transmettent ses données d'informations. Cette technique de coordination entre les stations de base est une sorte de communication coopérative.

Cependant, quand on parle de communications coopératives dans cette thèse, on implique la présence d'une troisième entité, dite relais, qui va essayer d'aider l'émetteur dans la transmission de son message vers son récepteur afin que ce dernier perçoive le message avec une meilleure qualité.

L'intervention du relais est différente de l'intervention des stations de base et de leur coordinations. Si on prend par exemple les communications radio-mobiles, normalement leur communication ne se fait pas directement entre deux terminaux :

Dans un premier temps, le premier terminal (un téléphone mobile par exemple) transmet le message à la station de base. Dans ce cas, le terminal fonctionne comme un émetteur, et la station de base comme récepteur. Le relais, s'il existe, intervient alors entre le téléphone mobile et la station de base.

Dans un deuxième temps, la station de base transmet le message au deuxième terminal (une tablette par exemple). Dans ce cas, l'émetteur est la station de base et le récepteur est la tablette. Le relais, s'il existe, intervient entre les deux.

Un autre exemple pris est la communication entre les véhicules. Alors qu'elle se fait directement entre les deux véhicules en absence du relais, le relais vient se placer pour fonctionner dans ce cas comme une sorte de répéteur qui transmet au récepteur (un des véhicules) un signal basé sur ce qu'il vient de recevoir de l'émetteur (le deuxième véhicule).

La deuxième question posée, c'est **“pourquoi les communications coopératives ?”**

Le nombre de véhicules sur les routes augmente de jour en jour en raison de la croissance de population. Cette augmentation du nombre de véhicules peut, cependant, être utilisée de manière constructive, en formant un réseau qui relie les informations d'un véhicule à l'autre.

En d'autres termes, par le déploiement de techniques de coopération dans les systèmes véhicule-à-véhicule, nous pouvons profiter des avantages des deux systèmes, à savoir les systèmes coopératifs et les systèmes véhicule-à-véhicule.

Ainsi, on peut atteindre des débits de transmission plus élevés, et assurer une transmission plus robuste.

De même pour le cas des utilisateurs de mobiles en réseau ad-hoc ainsi que les réseaux de capteurs sans fil et les relais coopératifs.

Ceci étant dit, pour répondre scientifiquement à notre question, il est important de savoir l'importance et les types de diversité.

Durant la propagation des ondes électromagnétiques, leur diffusion, réflexion, et diffraction génère des interférences complexes.

Comme ces interférences passent par des maximum et des minimum, ces grandes variations dans l'énergie nuisent à la réception radio-mobile et détériorent les performances en terme de probabilité d'erreur : on parle de phénomène d'évanouissements, ou de "fading" en anglais.

En disposant de copies des signaux transmis (canaux multiples) variant en temps, fréquence et / ou en espace ; sachant que ces variations sont indépendantes ou au moins non corrélées ; on peut atténuer ces effets d'évanouissements.

On parle alors de techniques de diversité dont les avantages sont considérables.

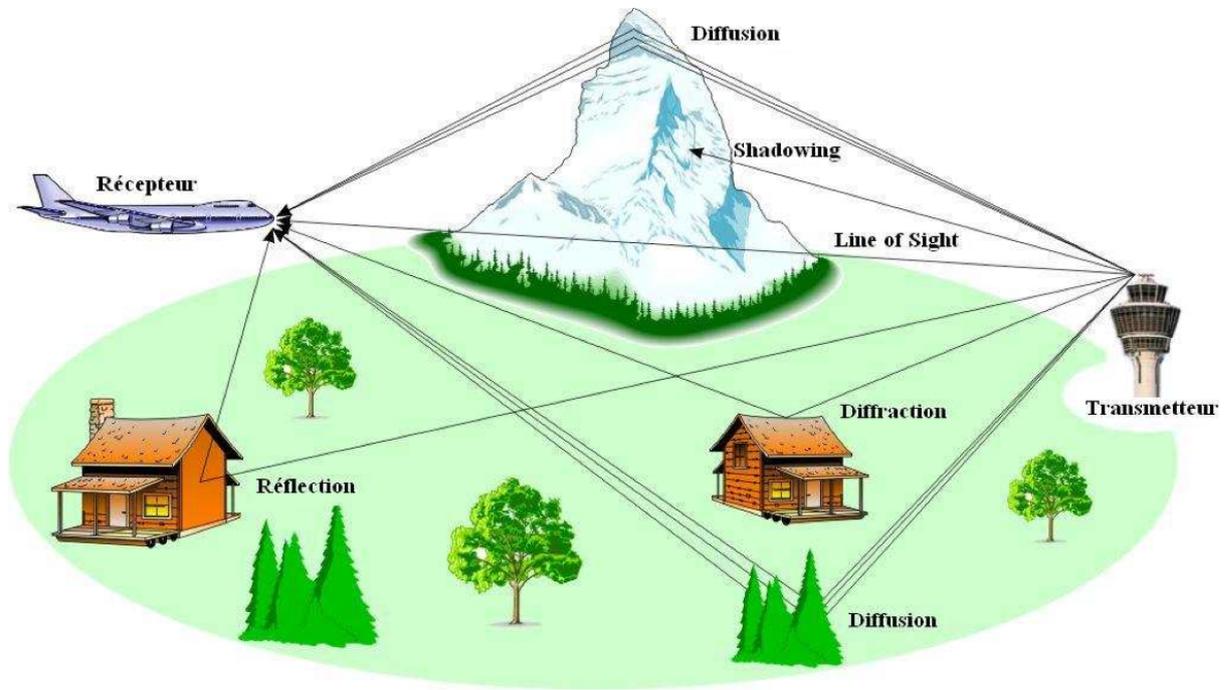


FIGURE 1.1 – Scénario typique de propagation radio-mobile [37]

Dans les diversités temporelles ou fréquentielles (Doppler ou trajets multiples), nous exploitons la propriété naturelle des canaux radio-mobiles à varier en temps et en fréquence. Dans la diversité spatiale, on place plusieurs antennes en créant des copies du signal transmis soit au niveau du récepteur, soit au niveau de l'émetteur, soit les deux.

Les techniques de diversité spatiale et temporelle ou fréquentielle sont opposées en termes de fiabilités et coût de placement.

D'une part, la diversité spatiale est plus fiable, mais elle est livrée avec un haut coût du matériel. D'autre part, les diversités temporelles et fréquentielles sont moins fiables (exploitent des phénomènes naturels qui peuvent ou non être présents dans un lien particulier), même si elles ne nécessitent généralement pas de matériel supplémentaire.

Dans cette section, nous citons rapidement plusieurs formes de diversité, puis nous parlons des

principales méthodes de combinaison. Nous finissons par le codage spatio-temporel, pour passer à la communication coopérative.

1.2.1 Les techniques de diversité

Les techniques de diversité sont nombreuses. Pour chacune ses avantages et ses limitations.

1. Diversité temporelle

Dans cette technique de diversité, pour bénéficier des avantages de la diversité, le même signal est transmis sur différents intervalles de temps (message répété). Pour assurer l'indépendance des versions transmises, il faut que les intervalles de temps adjacents soient espacés d'une durée plus longue que le temps de cohérence du canal de transmission.

Dans les milieux à évanouissements rapides (environnements sélectifs en temps), la mobilité est grande, et la diversité en temps devient efficace pour remédier à la grande mobilité. Par contre, pour les milieux à évanouissements lents (applications sans fil fixes ou à faibles vitesses), elle offre peu de protection, sauf si les retards d'entrelacement sont importants.

2. Diversité fréquentielle

Dans cette forme de diversité, le même signal est envoyé via différentes fréquences porteuses, distants d'une bande de fréquences supérieure à la bande de cohérence du canal, pour assurer l'indépendance des différentes versions [71].

Comme plusieurs fréquences sont demandées, cette méthode n'est pas en général efficace en terme de bande passante. Une façon naturelle pour exploiter la diversité en fréquence, qui est parfois désignée par la diversité de trajets (path diversity), existe pendant l'envoi du signal dans des canaux multi-trajets sélectifs en fréquence. Il faut alors que l'étalement du temps de propagation (delay spread) soit une fraction significative de la période élémentaire du signal numérique (ordre de grandeur de l'inverse de la bande passante du signal transmis).

Dans ce cas, le signal reçu peut être interprété comme une combinaison linéaire du signal émis pondérée par des coefficients d'évanouissement plus ou moins indépendants.

Autrement dit, si le canal se comporte comme sélectif en fréquence, sa fonction de transfert influence plusieurs parties du spectre du signal différemment. Par conséquent, la di-

versité de trajets (diversité fréquentielle) est exploitée en résolvant les composantes du canal multi-trajet à des retards différents en utilisant une structure de récepteur approprié, comme par exemple le corrélateur RAKE pour les systèmes à accès multiple par répartition en code (Code division multiple access CDMA) [71], qui est le récepteur optimal dans le sens d'Erreur Quadratique Moyenne minimum (EQM) conçu pour ce type de canaux.

3. Diversité en polarisation

Une partie importante de l'énergie transmise à travers le canal radio est généralement transposée à un état de polarisation orthogonal à celui de l'antenne d'émission. Cela est dû à la réflexion et la diffusion multi-trajet que teste le signal transmis au cours de sa propagation.

L'utilisation d'un schéma de diversité polarisée permet au récepteur de profiter des deux états de co-polarisation (même états de polarisation pour le transmetteur et le récepteur) et polarisation croisée (transmission dans un état de polarisation et réception dans l'autre état) [39].

Le principal avantage de la diversité de polarisation est qu'elle améliore les performances en terme d'erreur binaire (BER) des systèmes de communication sans fil sans avoir besoin d'un grand espacement d'antennes qui est nécessaire dans une diversité spatiale.

L'inconvénient de cette technique est que nous devons transmettre 3 dB de plus parce que nous devons alimenter les deux antennes de polarisation au niveau de l'émetteur par le même signal transmis [39].

4. Diversité directionnelle

Le signal arrivé au niveau du récepteur se compose des signaux réfléchis, diffractés ou dispersés, et ils viennent de différents angles d'incidence.

Tous les chemins, arrivant suivant différents angles, peuvent être considérés comme mutuellement indépendants. Ainsi, si nous pouvons traiter le signal reçu en utilisant des antennes directives, nous pouvons bénéficier de versions indépendantes obtenues du même signal.

Autrement dit, lorsque nous utilisons une antenne directive, nous pouvons réduire l'étalement Doppler pour chaque branche [71].

5. Diversité spatiale – Diversité d’antennes

Récemment, la conception de systèmes sans fil utilisant plusieurs antennes du côté émetteur et / ou côté récepteur a gagné beaucoup d’intérêt. C’est une forme de diversité, aussi parfois appelée la diversité d’antenne.

Cette technique est particulièrement intéressante car elle ne nécessite pas une largeur de bande supplémentaire.

Pour bénéficier le plus des avantages de cette technique de diversité, l’espacement entre les antennes doit être suffisamment large par rapport à la longueur d’onde de la porteuse. Pour les séparations d’antennes suffisamment larges, les canaux peuvent être supposés indépendants, de sorte que la diversité est obtenue même pour les canaux quasi-statiques où la diversité de temps ne peut pas être exploitée.

La séparation nécessaire entre les antennes dépend de l’environnement de diffusion, ainsi que la fréquence porteuse.

Pour une station mobile qui se trouve près du sol avec de nombreux diffuseurs autour, la décorrélation par le canal se produit sur de courtes distances, et la séparation d’antennes typique et suffisante est entre la moitié et le total de la longueur d’onde porteuse.

Pour les stations de base sur de hauts tours, une séparation d’antenne nécessaire est plus grande, variant entre plusieurs et dizaines de longueurs d’ondes porteuses [39].

6. Diversité de transmission

La diversité spatiale, sous la forme d’antennes multiples du côté récepteur, a été utilisée avec succès dans la transmission en liaison montante des systèmes de communication cellulaires (c’est à dire de la station mobile vers la station de base).

Cependant, pour une transmission en liaison descendante (c’est à dire de la station de base vers station mobile), l’utilisation de plusieurs antennes réceptrices dans l’appareil de téléphonie mobile est plus difficile à mettre en oeuvre en raison des limitations de la taille et des frais des multiples convertisseurs des chemins RF [75].

Ceci nous pousse à utiliser plusieurs antennes émettrices aux niveau de la station de base pour la liaison descendante.

Une autre raison pour l’utilisation de plusieurs antennes à la station de base est que la station de base sert souvent de nombreuses stations mobiles ; il est donc plus économique d’ajouter le matériel supplémentaire et la charge de traitement de signal sur une station de

base, plutôt que tous les téléphones mobiles.

Ainsi, dans la liaison montante, nous utilisons la diversité spatiale au niveau récepteur, et dans la liaison descendante, nous utilisons la diversité spatiale au niveau transmission.

Par contre, l'émetteur est supposé savoir moins d'informations sur le canal que le récepteur et des problèmes de signalisation interviennent. Ainsi, et malgré ses clairs avantages, la diversité de transmission a été traditionnellement considérée comme plus difficile à exploiter.

Dans la dernière décennie, cette méthode de diversité a attiré une grande attention et des solutions pratiques ont été proposées pour remédier aux problèmes d'exploitation [39].

Il convient de souligner que l'efficacité de tout système de diversité repose sur la disponibilité de versions indépendantes du signal transmis de telle sorte que la probabilité de deux ou plusieurs versions du signal subissant un évanouissement profond est minimum [72].

1.2.2 Combinaison des techniques de diversité

Après que le récepteur ait reçu plusieurs répliques d'un même signal par l'intermédiaire des techniques de diversité, il les traite pour obtenir une seule représentation du signal désiré.

Il existe différentes méthodes de combinaison, chacune d'elles peut être utilisée en association avec plusieurs formes de diversité déjà citées.

Les techniques de combinaison des diversités varient selon le niveau de connaissance du canal au récepteur.

Les plus communes sont la technique de sélection (selection combining SC), la technique à gain égal (equal gain combining EGC) et la technique à rapport maximal (maximal ratio combining MRC) [72].

- La technique SC est conceptuellement la plus simple ; elle consiste à sélectionner à chaque fois, parmi les chemins de diversité disponibles, celui ayant la plus grande valeur de rapport signal-sur-bruit (SNR) [39].

Comme elle ne nécessite qu'une mesure des puissances reçues de chaque branche (chemin) et un interrupteur pour choisir entre les branches, elle est relativement facile à mettre en œuvre.

Toutefois, le fait qu'elle ne tienne pas compte des informations obtenues à partir de toutes les branches, mais seulement de celle sélectionnée, on déduit qu'elle n'est pas optimale.

- Dans la technique EGC, les signaux à la sortie des branches de diversité sont combinés

de manière linéaire, avec mêmes coefficients de pondération, sans tenir compte des différences entre les amplitudes des signaux.

On désigne par combinaison linéaire une combinaison qui se fait après co-phasage des signaux (compensation de la rotation de phase de chaque réplique - parallélisation) pour éviter une annulation (cancelation) des signaux.

Comme toutes les branches interviennent, et sont combinées linéairement, la technique EGC fonctionne mieux que la technique SC. Elle permet d'augmenter le rapport SNR.

Quand à la simplicité, cette méthode nécessite l'estimation de la phase de tous les signaux reçus de canal, mais non pas les amplitudes. Elle est moins simple que la technique SG.

- Dans la technique de combinaison à rapport maximal (MRC), les signaux à la sortie des branches de diversité sont combinés de manière linéaire et les coefficients de la combinaison linéaire sont sélectionnés afin de maximiser le SNR, prenant en compte à la fois, la phase et l'amplitude (pondération avec les conjugués complexes des gains puis sommation).

La méthode MRC s'avère plus performante que les deux autres (SC et EGC), car elle permet l'utilisation des informations sur l'amplitude et la phase à la fois.

Cependant, la différence entre les techniques EGC et MRC n'est pas considérablement grande en termes de rendement de puissance, et l'amélioration moyenne du rapport SNR moyenne avec la méthode EGC est d'environ 1 dB moins que l'amélioration avec la technique MRC, mais reste beaucoup mieux que sans diversité [72].

Par conséquent, la méthode EGC peut être préférée quand les coûts de mise en œuvre sont essentiels (Il y a une estimation d'amplitude en moins par rapport à la méthode MRC).

1.2.3 Passage aux communications coopératives

L'application de plusieurs antennes permet l'augmentation du débit et de la fiabilité en raison des degrés de liberté supplémentaires offerts par la dimension spatiale du canal sans fil.

De plus, la capacité d'information des systèmes de communication sans fil peut être considérablement augmentée par l'emploi de multiples antennes d'émission et de réception menant aux communications MIMO (multi-entrées multi-sorties) et employées pratiquement avec un codage spatio-temporel [39].

Avec leurs avantages significatifs, les techniques MIMO ont déjà été inclus dans diverses normes

de l'industrie telles que les normes IEEE WLAN 802.11n et la 3^{me} génération mobile.

Malheureusement, la mise en place de plusieurs antennes peut ne pas être pratique, voir des fois impossible, dans la liaison montante d'un système cellulaire, en raison de la taille, des limitations de puissance, et de la complexité matérielle des terminaux mobiles. Des restrictions similaires s'appliquent également aux réseaux de capteurs sans fil qui ont gagnés une grande attention et popularité les dernières années.

L'emploi de la diversité coopérative est une bonne façon pour surmonter ces limitations. La diversité coopérative réalise les avantages de la diversité spatiale de manière distribuée.

L'idée de la diversité coopérative repose sur le fait que, dans un environnement sans fil, le signal émis par le noeud de source est entendu par d'autres noeuds, qui peuvent être définis comme des «partenaires» ou «relais».

La source et ses partenaires peuvent traiter et transmettre leurs informations en coopérant ensemble, créant ainsi un "réseau d'antennes virtuel" et imitant la diversité de transmission.

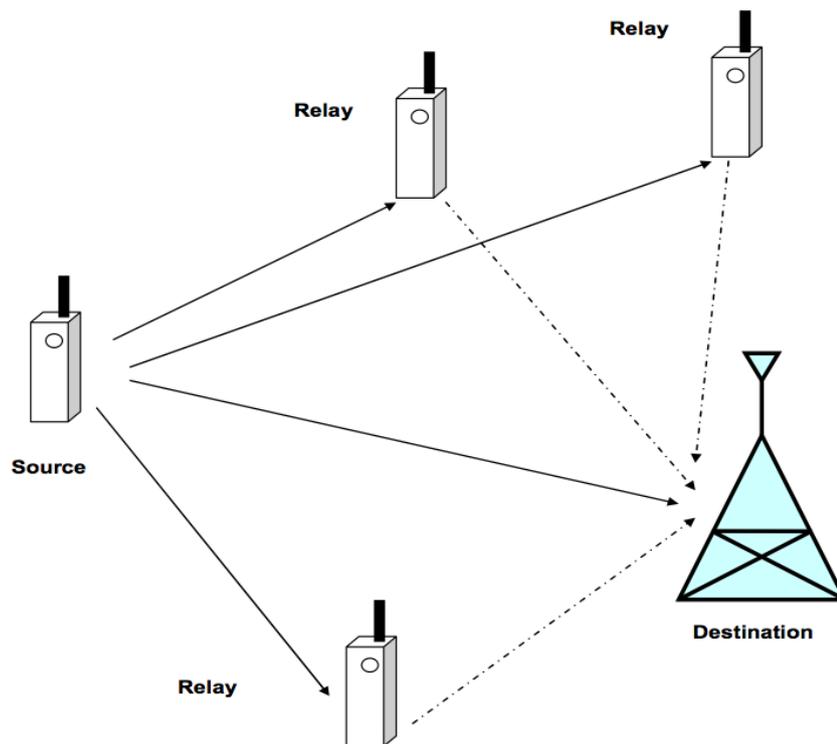


FIGURE 1.2 – *Communication Coopérative à base de relais [55]*

1.3 Classification des canaux à relais

Un canal à deux bonds consiste en un système à trois noeuds : une source, un relais et une destination. Le relais est ici un noeud qui vise à aider la source à transmettre ses messages à la destination de manière fiable.

La destination peut recevoir le message envoyé par la source de deux chemins différents : soit le chemin direct de la source à la destination directement, ou le chemin passant par le relais.

Un tel système est appelé un “canal à deux bonds” puisque le message est acheminé par deux voies le long du trajet - tout d’abord la voie source-relais, ensuite la voie relais-destination.

Une transmission coopérative consiste en deux étapes. La première étape est la phase d’écoute au cours de laquelle le relais écoute le signal diffusé par la source. La seconde étape est la phase de retransmission durant laquelle le relais transmet vers la destination un message, se basant sur le signal perçu de la source. Ce message varie selon le type de relais.

Le canal à relais à deux bonds est la dérivation simple du canal à relais multi-bond [17] [42] [70] où N relais séquentiel (consécutifs) sont impliqués dans le canal à relais qui est donc caractérisé par $N + 1$ bonds.

Notons qu’il est possible qu’aucun message ne soit transmis par la voie directe. En effet, les communications coopératives peuvent être utilisées pour atteindre les utilisateurs distants ou cachés, comme une alternative d’une transmission directe à haute puissance de transmission (en raison des atténuations des chemins, la puissance d’émission augmente avec la distance entre la source et la destination).

Le classement des canaux à relais et des protocoles des systèmes de communications coopératives peut se faire selon plusieurs critères : ils sont classés comme relais régénératifs et non-régénératifs, ou bien comme orthogonaux ou non-orthogonaux, ou bien comme opérant en mode semi-duplex ou bien full-duplex.

1.3.1 Types de relais

Les relais non-régénératifs ont pour rôle de juste amplifier le signal reçu et le transmettre vers la station de destination.

Les relais régénératifs toutefois vont intervenir dans le signal ; par exemple ils peuvent en premier temps décoder le signal reçu, puis l’encoder à nouveau et le transmettre ensuite à la destination finale [86].

Dans la littérature, les transmissions coopératives à deux bonds ont été largement étudiées et plusieurs types de relais de coopération ont été proposés, notamment les types Amplify-and-Forward (A&F) et Decode-and-Forward (D&F). Ces types se différencient selon la façon avec laquelle le relais traite les signaux qu'il vient de recevoir, avant de les transmettre vers les autres terminaux (utilisateurs).

Dans cette partie, nous proposons un état de l'art sur quatre principaux types coopératifs que les stations relais peuvent effectuer, couramment proposées dans la littérature [3] [14] [15] [16] [24] [45] [60] [98] [101] : Amplify-and-Forward (A&F), Decode-and-Forward (D&F), Compress-and-Forward (C&F) et Equalize-and-Forward (E&F).

1. Amplify-and-forward (A&F)

Dans la technique A&F, les relais tout simplement amplifient la puissance du signal perçu, pour répondre à la contrainte de puissance moyenne d'émission, puis transmettent le signal à la destination.

Le principal avantage du type A&F est la simplicité. Cependant, l'inconvénient est que le relais augmente la puissance de l'information utile ainsi que la puissance du bruit et de l'interférence [2].

2. Decode and Forward (D&F)

Un système de communication sans fil bénéficie généralement de la modulation numérique. Dans les scénarios où le relais a assez de puissance informatique de calcul, et peut décoder le signal, D&F est préférable. Le signal reçu est d'abord décodé puis re-codé.

Les avantages du type D&F sont l'annulation du bruit et des interférences perçus par le relais avant de transmettre le message à la destination, contrairement au type A&F. De plus, ce type peut bénéficier de l'emploi d'un code de correction d'erreur au relais.

Par contre, les types D&F souffrent aussi de quelques inconvénients. Ils sont plus complexes que les types A&F et nécessitent une grande puissance de calcul pour que le relais puisse décoder complètement le message d'origine.

Tout d'abord, le relais doit connaître le livre de code (codebook) de la source pour pouvoir récupérer son signal reçu. Deuxièmement, il y a une propagation de l'erreur vers la destination si le relais décode mal le signal. Troisièmement, avec le type D&F, il n'est plus possible de bénéficier du rapport de vraisemblance pour tester la fiabilité de la transmission.

Les types C&F et E&F sont peu utilisés dans la littérature. Cependant, nous donnerons

quelques détails sur la façon dont ils fonctionnent.

3. Compress-and-Forward (C&F)

Le principe du type C&F, tel que cité dans [3], est que le relais quantifie le signal reçu de la source et code les échantillons dans un nouveau paquet qui est transmis à la destination.

4. Equalize-and-Forward (E&F)

Dans le cas de E&F, le relais utilise un filtre spécifique pour effectuer une égalisation linéaire de l'erreur quadratique moyenne minimum, avant de retransmettre le signal. Dans [45], ce filtre spécifique est choisi pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre le signal émis de la source et le signal sortant du relais. Ainsi, le but de l'égaliseur au relais est de limiter les interférences dues au premier chemin du chemin total.

1.3.2 Coopération Hybride et sélection de relais

Les performances de la communication coopérative peut être limitée par le désign des relais. Les relais hybrides sont alors proposés ; ils essaient de mélanger les avantages de plusieurs types de relais en évitant leurs inconvénients [2]. Ils consistent à sélectionner le fonctionnement le mieux adapté entre plusieurs types de relais en basculant entre ces relais afin de maximiser le taux d'information mutuelle à la destination.

Dans la plupart des articles, les types A&F et D&F sont considérés, et le relais hybride dans ce cas sera le relais Amplify/Decode-and-Forward (AD&F).

Dans cette version hybride, le relais AD&F utilise sa connaissance des coefficients de canal pour prendre une décision d'agir soit comme un relais A&F ou un relais D&F.

Plus précisément, si la capacité de canal source-relais est suffisante, et que chaque utilisateur peut parfaitement décoder les informations de l'autre à l'aide d'un code de correction d'erreur, le relais agit comme D&F.

Dans le cas contraire (outage), il serait contre-productif de transmettre de fausses informations décodées, et donc le relais agit comme A&F en amplifiant et retransmettant le paquet.

La sélection de relais est une autre stratégie pour bénéficier de la communication coopérative de façon intelligente [40] [52] [56] [62]. Elle est appliquée plutôt aux relais fixes, où les stations mobiles de transmission peuvent choisir de faire ou non une coopération, se basant sur le rapport signal-sur-bruit (SNR) au niveau des relais et de la destination et la communication aura lieu lorsque c'est absolument nécessaire [86]. La station d'émission peut aussi choisir avec quel

relais va-t-elle communiquer.

1.3.3 Mode Semi-Duplex ou Full-Duplex

Les relais sont généralement choisis pour travailler en mode semi-duplex. Un appareil semi-duplex peut soit transmettre ou recevoir à un moment donné ; il ne peut pas émettre et recevoir en même temps et dans la même bande fréquentielle.

Par conséquent, les phases de transmission et de réception sont séparées en temps avec un relais semi-duplex. Ainsi, pour une communication multi-bond à plusieurs relais [17] [42] [70], les relais sont à l'écoute pendant l'émission, et l'interférence est atténuée .

Sachant que l'efficacité de la coopération pourrait être augmentée par une efficace coordination entre les relais.

Cependant, la principale motivation du mode semi-duplex est différente :

Un appareil en full-duplex nécessite une duplication des circuits radio-fréquences (RF) pour pouvoir recevoir et émettre en même temps.

Ainsi, la complexité, le prix, la consommation d'énergie, et aussi la taille du relais vont augmenter.

Les opérateurs ne sont pas donc prêts à adopter des relais full-duplex et préfèrent les relais semi-duplex.

Il existe aussi un relais semi-duplex par bande. Il peut simultanément émettre sur une bande fréquentielle le message émis par la source au temps (" $t - 1$ ") et écouter le message émis par sa source au temps " t " sur une autre bande (pour ne pas percevoir d'interférence).

L'avantage de ce mode est la bonne exploitation des ressources : Pour envoyer " N " trames coopératives, avec un relais semi-duplex, on a besoin de " $2N$ " time slots. Par contre, avec un relais semi-duplex par bande, on a besoin de " $N + 1$ " time slots.

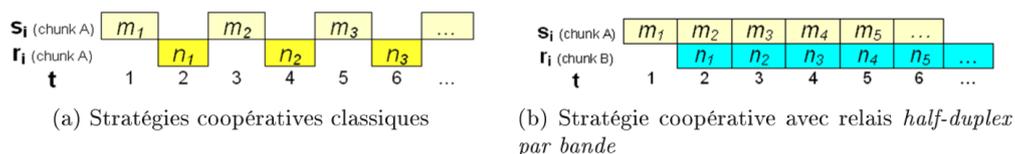


FIGURE 1.3 – Comparaison entre les modes semi-duplex et full-duplex [2]

1.3.4 Protocole Orthogonal ou Non-orthogonal

On a vu dans la section 1.3.1 les plus célèbres types de coopération à base de relais. En outre, tous ces types peuvent être dérivés en trois familles : orthogonaux, non-orthogonaux, et encasés (slotted) selon les étapes d'écoute et de transfert qui se suivent. Il existe donc un nombre important de protocoles de coopération avec chacune des avantages et des inconvénients. Nous dressons rapidement la différence entre ces trois protocoles (voir [2]).

Un protocole est dit orthogonal lorsque l'étape d'écoute et l'étape de diffusion sont séparées, soit dans le domaine tempore ou dans le domaine fréquentiel.

Nous expliquerons ceci dans le domaine tempore : Dans le premier intervalle de temps (première phase), la source transmet son message, alors que la destination et les relais écoutent, puis lors d'un second intervalle de temps (deuxième phase), la source reste silencieuse pendant que les relais transmettent le message à la destination. Par conséquent, la source émet une fois chaque deux intervalles de temps.

Cependant, pour les protocoles non-orthogonaux et les protocoles encasés, la source peut émettre un message à chaque intervalle de temps, et la destination serait donc en mesure d'écouter les messages de la source et des relais en même temps.

Pour expliquer la différence entre les protocoles orthogonaux, non-orthogonaux et encasés, on procède à la communication à deux bonds avec " N " relais, et on étudie leur structure de trame. La Figure 1.4 montre la différence. Dans le cas d'un unique relais, les protocoles non-orthogonaux et encasés sont équivalents.

Notons qu'ici la source émet vers les " N " relais, qui à leurs tours transmettront à la destina-

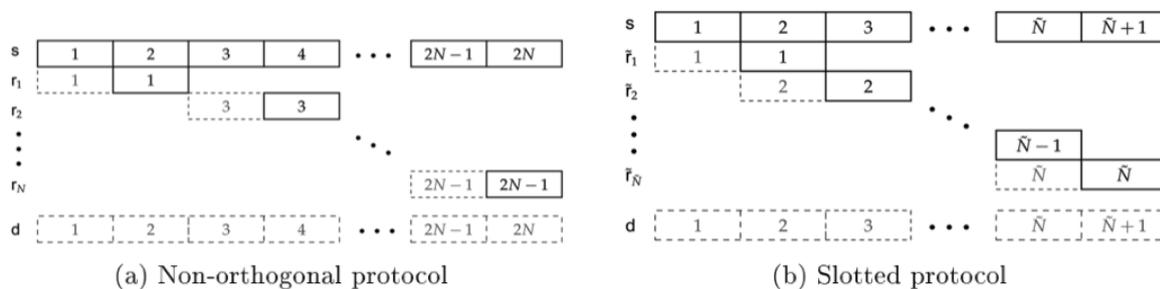


FIGURE 1.4 – Comparaison entre les protocoles non-orthogonaux et encasés [2]

tion, ce qui n'est pas le même cas qu'une communication multi-bond (voir Figure 2.1) car il n'y a pas d'interaction entre les relais.

Notons aussi que le protocole orthogonal est différent du mode semi-duplex. Ceci paraît aussi dans la Figure 1.4.

L'avantage du protocole orthogonal est sa simplicité. Par contre, les protocoles non-orthogonaux offrent une efficacité spectrale meilleure que les protocoles orthogonaux [55].

1.4 Architectures des réseaux coopératifs

Les systèmes de communication coopérative avec des relais A&F sont le centre d'attention de cette thèse.

Dans la configuration la plus simple, un système à relais A&F est constitué d'une station source (mobile ou non), une station destination (mobile ou non), et un noeud relais (mobile ou non).

Toutefois, selon les gains que nous cherchons à atteindre à partir du système coopératif, plusieurs relais peuvent être connectés en différentes configurations : le système multi-relais est soit un multi-bond associé à un scénario dans lequel les noeuds relayant sont connectés en série entre la source et la destination, soit un ensemble de liens à deux bonds en parallèle.

Comme mentionné dans la section précédente, les systèmes coopératifs sont livrés avec de nombreux avantages tels que l'augmentation des gains de multiplexage, de la qualité de service (QoS), et la diminution du déploiement de l'infrastructure, réduisant ainsi les coûts opérationnels.

L'augmentation du nombre de relais en série entraîne une augmentation de l'affaiblissement de propagation. Une augmentation du nombre de relais parallèles, d'autre part, augmente le gain de diversité [86].

Cependant, il n'y a pas un système parfait et chaque système apporte avec lui quelques inconvénients aussi.

Dans les systèmes coopératifs multi-relais [17] [42] [70], qu'ils soient à deux bonds (Figure 1.5) ou bien multi-bond (Figure 1.6), des algorithmes avancés et complexes pour le choix des relais partenaires participant à la coopération sont des fois nécessaires.

De plus, l'interférence, les délais, et les bits dédiés à la signalisation pour la synchronisation et l'estimation augmentent dans de tels systèmes [86].

Il est donc impératif pour les concepteurs de systèmes coopératifs d'analyser prudemment les lacunes de leurs systèmes et proposer les bonnes stratégies pour exploiter et bénéficier des avantages de la communication coopérative. Le développement de tels systèmes de communication

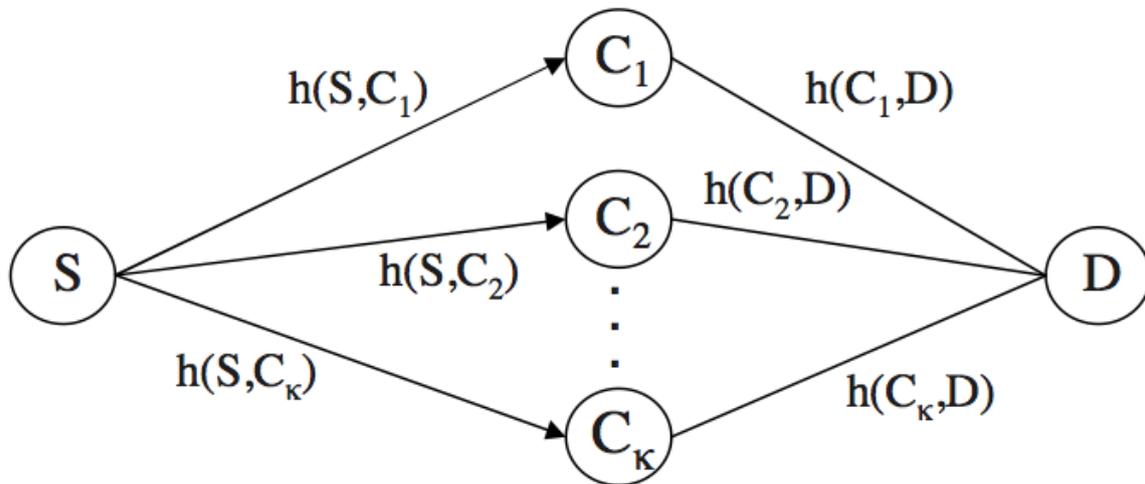


FIGURE 1.5 – Architecture d'un réseau à relais en parallèle [73]

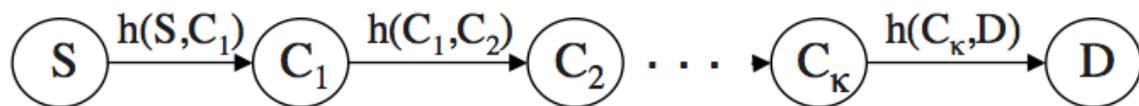


FIGURE 1.6 – Architecture d'un réseau à relais en cascade [73]

coopérative est, néanmoins, pas possible sans une connaissance du canal coopératif.

Une grande partie de cette thèse est dédiée à la modélisation et l'analyse des canaux à évanouissements lents dans les canaux à relais.

1.5 Applications des communications coopératives

Les communications M-to-M ont récemment acquis une grande part d'attention des chercheurs, des organismes de normalisation et des entreprises industrielles, car elles rentrent dans de nombreuses applications comme les réseaux cellulaires, Adhoc, réseaux de capteurs et plusieurs autres.

Certaines de ces applications sont ciblées pour réduire les accidents de la circulation ou pour faciliter l'écoulement du trafic. Tandis que d'autres incluent l'accès Internet dans les véhicules, la conduite automatique, ainsi que la régulation de vitesse et plusieurs autres [86].

Du côté normes, les communications à courte portée (Dedicated Short-Range Communications DSRC) ont été développées pour soutenir les systèmes de communication voiture-à-voiture. Plusieurs groupes de travail au sein de l'IEEE, comme IEEE 802.11p, IEEE 1609.2, .3, et .4, contribuent au développement de la communication M-to-M [86].

L'un des domaines inexploités où les technologies sans fil sont en train de faire un impact significatif est la communication inter-véhicules (IVC) [86], composante essentielle des systèmes de transport intelligents (Intelligent Transportation Systems ITSs). Ces systèmes impliquent l'application, de manière intégrée, du traitement avancé de l'information, des technologies de communications, de capteurs et de contrôle, afin d'améliorer le fonctionnement du système de transport. Ils comportent les communications véhicule-à-véhicule (V-to-V) et véhicule-à-route (V-to-R), permettant au véhicule de communiquer avec d'autres véhicules et des capteurs / points d'accès installés le long de la route.

La sécurité routière et la fluidité du trafic peuvent être améliorées si les conducteurs ont la capacité de prédire les événements survenant sur leur route et savoir si une collision s'est produite, ou s'ils se rapprochent d'un embouteillage. L'information en temps réel transmis par la communication IVC peut également aider les véhicules à des points critiques tels que les passages aveugles et des entrées d'autoroutes [39].

La communication IVC entre dans une phase passionnante. Les entreprises auto-mobiles investissent d'énormes ressources dans la recherche afin de faciliter cette technologie. Les travaux sont dirigés vers la sécurité, la qualité de service (QoS), ainsi que la modélisation et l'analyse de la couche physique.

Du côté industriel, un certain nombre de projets existent en Europe, aux États-Unis, et en Asie. Parmi les projets européens, on cite les projets "CAR 2 CAR Communication Consortium", "Cooperative Vehicle-Infrastructure Systems (CVIS)", "SAFESPOT", et "CALM" [86].

Aux États-Unis, on cite les projets "Driver Workload Metrics", "Forward Collision Warning Requirement", et "Vehicle Safety Communications" [86].

En Asie, on cite l'association "Advanced Cruise-Assist Highway Systems Research Association (AHSRA)", qui est l'une des principales associations qui contribuent au développement des communications voiture-à-voiture [86].

Plusieurs pays ont alloué une bande de fréquence dédiée aux communications voiture-à-voiture. Par exemple, aux États-Unis, une largeur de 75 MHz dans la bande 5,9 GHz a été allouée par la Commission Fédérale des Communications (FCC) pour les communications à courte portée.

En conclusion, nous avons présenté dans ce chapitre quelques généralités sur les communications coopératives, contexte de cette thèse. Nous allons dans les chapitres suivants rentrer dans le vif du sujet, en présentant d'abord le modèle mathématiques du canal de communication considéré dans la thèse.

Modèle mathématique de la liaison de transmission multi-bond

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction au chapitre | 27 |
| 2.2 | Description générale du canal | 29 |
| 2.3 | Distribution du gain | 32 |
| 2.3.1 | Distribution de la phase | 34 |
| 2.3.2 | Distribution du module | 35 |
| 2.4 | Autocorrélation temporelle | 38 |
| 2.5 | Densité spectrale de Puissance | 40 |
| 2.5.1 | DSP d'un seul lien avec un modèle de diffusion en $2D$ | 42 |
| 2.5.2 | DSP d'un seul lien avec un modèle de diffusion en $3D$ | 43 |
| 2.5.3 | Densité spectrale de puissance pour un canal multi-bond à "N" relais | 45 |
| 2.6 | Rapport Signal sur Bruit | 49 |
| 2.7 | Bornes de Cramer Rao Bayésiennes | 50 |
| 2.7.1 | Différence entre les bornes Bayésiennes et les bornes classiques | 51 |
| 2.7.2 | Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes | 51 |
| 2.7.3 | Tracé des bornes par simulation et discussion | 54 |
| 2.8 | Conclusion | 57 |

2.1 Introduction au chapitre

La modélisation d'un canal de transmission radio-mobile n'est pas une étude récente. Elle a commencé avec Clarke en 1968 [21] pour un canal fixe-mobile en mode de diffusion $2D$ dans un milieu isotrope.

Le travail dans un milieu non isotrope a été étudié par l'auteur de [41].

Pour le travail avec un canal mobile-mobile, le travail a commencé avec Akki dans [4] en 1986 et [5] en 1991, où il a lui aussi travaillé, comme Clarke, en mode de diffusion $2D$ et dans un milieu isotrope.

Son travail a été élargi par les auteurs de [66] qui ont proposé la simulation d'un canal mobile-mobile et [87] qui ont travaillé pour les cas LOS (Light Of Sight) et NLOS (Non Light Of Sight).

Le travail avec une transmission MIMO en mode de diffusion $2D$ a été fait par les auteurs de [10] et [68]. Et les propriétés statistiques d'un canal coopératif A&F ont été proposées par les auteurs de [67].

D'autre part, pour le mode de diffusion $3D$, cela a démarré en 1997, quand Clarke a démontré le fait curieux que lorsque les diffusions du signal reçu proviennent de toutes les directions avec une égale probabilité, et lorsque le récepteur a une réponse isotrope et se déplace à vitesse linéaire constante, le spectre Doppler des fluctuations du signal est uniforme sur toute la bande de fréquence centrée sur la fréquence porteuse et zéro à l'extérieur [22].

Le mode de diffusion $3D$ a attiré l'attention des chercheurs [51] [99]. Dans [99], Zajic a travaillé avec une transmission MIMO dans un mode de diffusion $3D$. Elle avait un modèle en $2D$ pour un canal multi-trajet Fixe-Mobile. Son but était de proposer un modèle de référence en $3D$ pour un canal multi-trajet Mobile-Mobile.

Ainsi, et pour y arriver, elle a tout d'abord fait une extension du travail d'Aulin dans [8] et de Parsons dans [64], en passant, pour une diffusion $2D$, du canal Fixe-Mobile à un canal Mobile-Mobile.

Elle s'est basée sur le fait que la diffusion locale se fait autour des deux antennes, l'émettrice et la réceptrice, et non pas une seule.

Elle a donc proposé un modèle à deux cylindres (canal Mobile-Mobile) en le considérant comme une extension du modèle à un cylindre (canal Fixe-Mobile).

Puis, à l'aide de ce modèle, elle a enfin proposé un nouveau modèle de référence pour les canaux MIMO Mobile-Mobile en diffusion $3D$: elle a ajouté les composantes d'élévation sur son modèle $2D$.

Zajic a dérivé sous forme approchée la fonction de corrélation spatio-temporelle conjointe pour un environnement de diffusion non-isotrope en $3D$.

Elle a démontré que dans la plupart des cas, les fonctions de corrélation des systèmes MIMO Fixe-Mobile en diffusions $2D$ et $3D$, ainsi que les systèmes Mobile-Mobile en diffusion $2D$ sont représentées comme des cas particuliers de la fonction de corrélation spatio-temporelle des systèmes MIMO Mobile-Mobile en diffusion $3D$.

Pour un environnement de diffusion non-isotrope en $3D$, le modèle de référence prend un nombre infini de diffuseurs, ce qui empêche une implémentation pratique. Zajiç, Patel et Mehrpouyan proposent des modèles de simulation déterministes et statistiques, basés sur une somme de sinusoïdes (SoS) [99][66][54].

À la fin, il faut parler du travail de [61], qui a cherché la distribution d'un produit de deux variables aléatoires complexes et Gaussiennes, mais qui peuvent ne pas être centrées en zéro, ni avoir une distribution de phase uniforme. Ce travail recouvre alors le cas particulier de deux bonds dans notre étude, travail aussi fait par [4] et [67]. Pourtant, la distribution du gain résultant de plus que deux bonds n'a pas été fait jusqu'à présent.

Dans ce chapitre, on va parler des propriétés statistiques pour un canal multi-bond, dans les deux modes de diffusions $2D$ et $3D$, et que ça soit avec des liens fixe-mobile ou mobile-mobile. Comme on a plusieurs relais avec des facteurs d'amplification différents et des liens différents, nous allons simplifier l'expression du signal reçu en fonction d'un gain global, du signal émis et d'un bruit total. Ceci pour simplifier l'étude de l'estimateur. On va décrire les caractéristiques statistiques du canal en donnant les distributions du gain (module et phase), puis les fonctions d'autocorrélation et la Densité Spectrale de Puissance qui nous seront importantes pour évaluer la dynamique du canal et pouvoir analyser ultérieurement l'erreur d'estimation dynamique qui résulte des variations du gain du canal. On finit par donner les bornes de Cramer Rao qui serviront pour l'évaluation de notre algorithme d'estimation dans un chapitre ultérieur.

2.2 Description générale du canal

Le système de transmission est décrit dans la Figure 2.1. On traite le cas d'une transmission multi-bond avec " $N + 1$ " bonds (liens), ou autrement dit, on dispose d'une source, de " N " relais, et d'une destination.

Les relais sont notés R_i pour $i = 1, 2, \dots, N$. La vitesse de R_i est v_i

Pour simplifier l'écriture, on varie l'indice i de 0 à $N + 1$. Ainsi, on désigne par R_0 la source S de vitesse $v_0 = v_S$, et par R_{N+1} la destination D de vitesse $v_{N+1} = v_D$.

Soit T l'intervalle de temps entre les symboles transmis (période symbole).

La fréquence $f_i = \frac{v_i}{c} f_p$ est la fréquence Doppler au relais numéro i , et $f_S = \frac{v_S}{c} f_p$ et $f_D = \frac{v_D}{c} f_p$ sont les fréquences Doppler à la source et la destination respectivement.

La fréquence f_p est la fréquence porteuse supposée la même sur tous les liens.

c est la célérité de la lumière.

On définit $\alpha_k^{(i)}$ le gain du lien " i " reliant R_{i-1} et R_i à l'instant $t = kT$ où $k \in \mathbb{Z}^+$ est l'indice temporel.

Pour un lien "i" ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) donné et un indice temporel $k \in \mathbb{Z}^+$ donné, le gain $\alpha_k^{(i)}$ est une variable aléatoire circulaire complexe Gaussienne et centrée, de variance $(\sigma_\alpha^{(i)})^2$. On sous-entend qu'on peut ainsi remplacer par R_0 la source S , et par R_{N+1} la destination D . Le premier bond est le lien entre la source S et le relais R_1 , le dernier bond est le lien entre le relais R_N et la destination D .

Sur les relais ainsi qu'au niveau de la destination, un bruit vient s'ajouter et on le note $n_k^{(i)}$ s'il s'ajoute à R_i , $i = 1, 2, \dots, N$, et $n_k^{(N+1)}$ s'il s'ajoute à la destination D . C'est un bruit blanc additif circulaire complexe Gaussien et centré, de variance $(\sigma_n^{(i)})^2$.

Les relais étant des relais *Amplify-and-Forward* (A&F), on note $A^{(i)}$ le facteur d'amplification du relais R_i , fixe en fonction du temps, pour $i = 1, 2, \dots, N$. Pour l'homogénéité des notations, on suppose qu'il existe $A^{(N+1)} = 1$ au niveau de la destination.

On travaille à partir de l'équivalent complexe en bande de base des signaux.

Le signal discret $r_k^{(i-1)}$ désigne l'entrée du lien "i" (en d'autres mots, c'est la sortie du relais

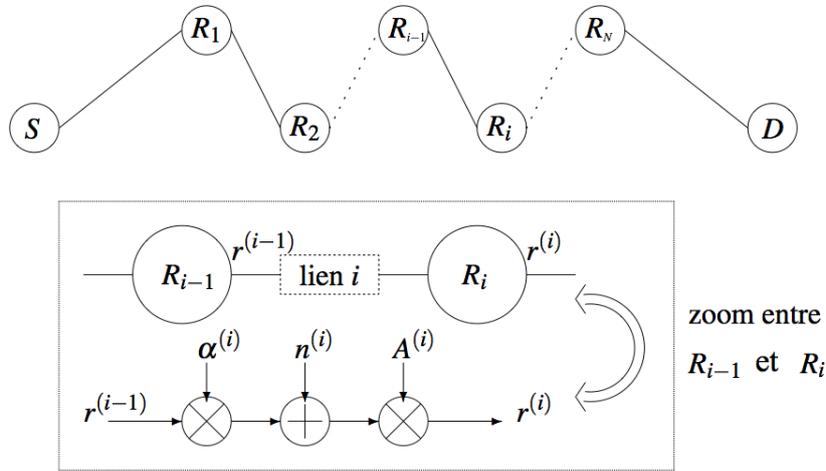


FIGURE 2.1 – Diagramme d'un canal multi-bond à N relais A&F

R_{i-1} après l'addition du bruit et l'amplification). Ensuite, $r_k^{(i-1)}$ est alors affecté par le gain $\alpha_k^{(i)}$ du lien "i", arrive à R_i où le bruit $n_k^{(i)}$ s'ajoute, s'amplifie par le gain $A^{(i)}$, pour devenir $r_k^{(i)}$, qui sera transmis par le lien "i+1".

Pour simplifier l'écriture, l'indice temporel k est omis. On écrit donc $r^{(i)}$ au lieu de $r_k^{(i)}$, $\alpha^{(i)}$ au

lieu de $\alpha_k^{(i)}$ et $n^{(i)}$ au lieu de $n_k^{(i)}$. $r^{(i)}$ est alors :

$$r^{(i)} = A^{(i)}[\alpha^{(i)}r^{(i-1)} + n^{(i)}]$$

Ce processus sera répété à chaque relais. On note s_k les symboles émis de la source S , et y_k l'observation au niveau de la destination D . On simplifie l'écriture en s et y , et on aura :

$$\begin{aligned} y = \alpha^{(N+1)} & \left[A^{(N)} \left(\alpha^{(N)} \dots \left[A^{(i)} \left(\alpha^{(i)} \dots \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left[A^{(2)} \left(\alpha^{(2)} \left[A^{(1)} \left(\alpha^{(1)} s + n^{(1)} \right) \right] + n^{(2)} \right) \right] + \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + n^{(i)} \right) \right] + \dots + n^{(N)} \right] + n^{(N+1)} \end{aligned}$$

Soit alors finalement, le modèle d'observation à partir duquel on va travailler dans la thèse pour établir les algorithmes :

$$y = \alpha s + n \quad (2.1)$$

$$\text{avec } \alpha = \prod_{i=1}^{N+1} A^{(i)} \alpha^{(i)} = \left(\prod_{i=1}^N A^{(i)} \right) \left(\prod_{i=1}^{N+1} \alpha^{(i)} \right)$$

Pour des liens indépendants, les gains $\alpha^{(i)}$ le sont, et on aura une variance globale $\sigma_\alpha^2 = \mathbb{E}\{|\alpha|^2\}$ ¹ du processus centré α , donnée par :

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\prod_{i=1}^N [A^{(i)}]^2 \right) \left(\prod_{i=1}^{N+1} [\sigma_{\alpha^{(i)}}^2] \right) \quad (2.2)$$

Soit $n = n^{(N+1)} + \sum_{i=1}^N \left[n^{(i)} \left(\prod_{j=i}^N A^{(j)} \right) \left(\prod_{j=i+1}^{N+1} \alpha^{(j)} \right) \right]$ la variable aléatoire modélisant le bruit global. Ce bruit est de moyenne nulle ($\mathbb{E}(n) = 0$).

La variance du bruit global $\sigma_n^2 = \mathbb{E}\{|n|^2\}$ est évaluée grâce à l'indépendance entre les bruits $n^{(i)}$, l'indépendance entre les gains $\alpha^{(j)}$, et l'indépendance entre $n^{(i)}$ et $\alpha^{(j)}$. On a alors :

$$\sigma_n^2 = \sigma_n^{(N+1)2} + \sum_{i=1}^N \left[\sigma_n^{(i)2} \left(\prod_{j=i}^N [A^{(j)}]^2 \right) \left(\prod_{j=i+1}^{N+1} [\sigma_{\alpha^{(j)}}^2] \right) \right] \quad (2.3)$$

Les figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 affichent des réalisations du gain de canal pour différents scénarios.

Dans la figure 2.2, pour un canal direct à destination mobile, on voit comment le nombre d'oscillations de α augmente dans un même intervalle de temps quand la fréquence Doppler augmente.

1. \mathbb{E} désigne l'espérance

Dans la figure 2.3, pour un canal Mobile-Mobile, on voit que le même comportement de α (en terme de nombre d'oscillations par unité de temps) reste le même pour des valeurs $f_S^2 T^2 + f_D^2 T^2$ identiques (égales à 10^{-3}).

Pour chaque lien direct entre deux extrémités, on note une fréquence équivalente dont le carré vaut la somme des carrés des fréquences de chacune des extrémités. Ainsi, pour un lien entre source et destination, la fréquence équivalente vaut $f_{eq}^2 = f_S^2 + f_D^2$. En ajoutant un relais, la fréquence équivalente du premier lien vaut $f_S^2 + f_1^2$, et celle du deuxième lien vaut $f_1^2 + f_D^2$; en total, la fréquence équivalente du canal multi-bond devient $f_{eq}^2 = f_S^2 + 2f_1^2 + f_D^2$. Ainsi de suite, on aura

$$f_{eq}^2 = f_S^2 + 2 \sum_{i=1}^N f_i^2 + f_D^2 \quad (2.4)$$

La notion de fréquence équivalente vient d'être défini par l'équation 2.4 et nous verrons dans les chapitres à venir qu'elle joue un rôle fondamental dans l'évaluation des performances de l'estimation d'un canal multi-bond, ainsi que dans la modélisation approchée d'un tel canal. Nous pouvons déjà faire quelques observations.

Dans la figure 2.4, le nombre de relais augmente, mais on garde la même valeur de fréquence équivalente (voir équation (3.30)). On voit alors que le nombre d'oscillations reste le même.

Dans la figure 2.5, tous les noeuds ont la même vitesse, et tous les liens ont des gains de même variance. En augmentant progressivement le nombre de relais, la variance totale diminue et la fréquence totale équivalente augmente (nombre d'oscillations augmente).

2.3 Distribution du gain

Soit $\alpha = \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(N+1)}$ le produit des gains des " $N + 1$ " liens, ou encore le gain global du canal multi-bond (on suppose pour l'instant que les facteurs d'amplification $A^{(i)} = 1 \quad \forall i$). Le gain $\alpha^{(i)}$ de chaque lien " i " est composé de deux parties indépendantes, une réelle et l'autre imaginaire, qui sont toutes les deux Gaussiennes centrées, de variances $\sigma_{\alpha^{(i)}}^2/2$. L'enveloppe de $\alpha^{(i)}$ possède une distribution de Rayleigh. On note $f_{\alpha^{(i)}}(\alpha^{(i)})$ la distribution du gain complexe $\alpha^{(i)}$, et on désire calculer $f_{\alpha}(\alpha)$ la distribution du gain complexe total.

Dans la suite, on précise les expressions de ces distributions. Même si ces expressions ne sont pas directement utilisées dans l'estimation du canal, elles peuvent nous donner une idée sur la

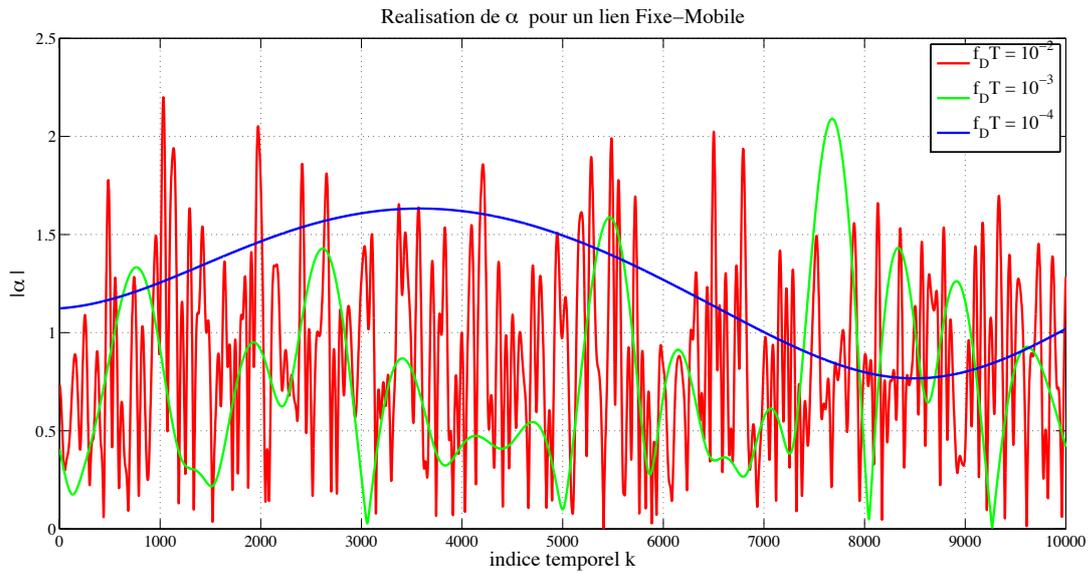


FIGURE 2.2 – Réalisation de α (module) à différentes fréquences Doppler pour un canal Fixe-Mobile

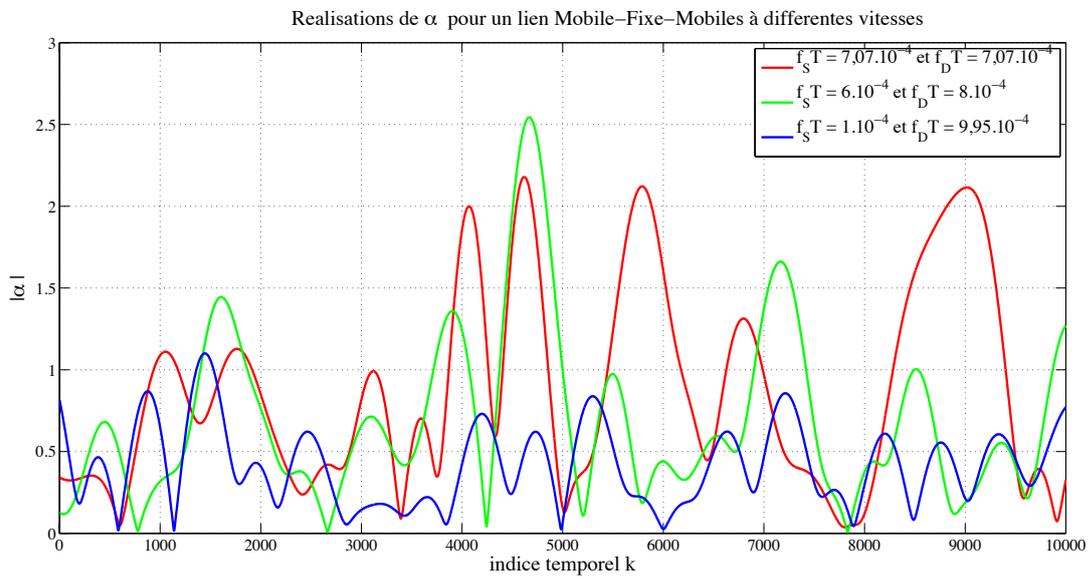


FIGURE 2.3 – Réalisation de α (module) pour un canal Mobile-Mobile, à différentes fréquences Doppler, de sorte que $(f_S^2 + f_D^2)T^2 = \text{constante} = 10^{-3}$

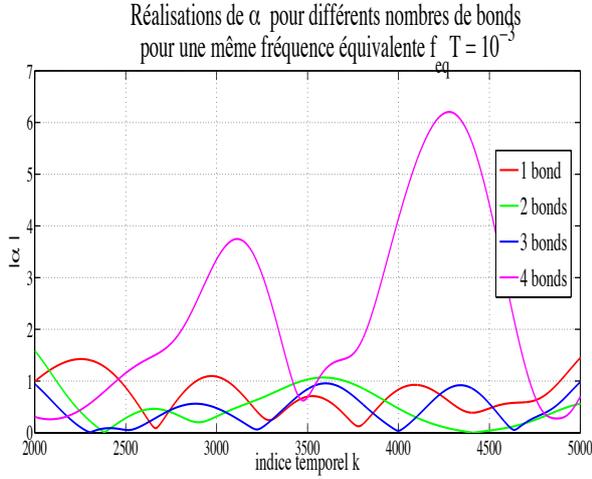


FIGURE 2.4 – Réalisation de α (module) à même fréquence Doppler équivalente en fonction du nombre de noeuds

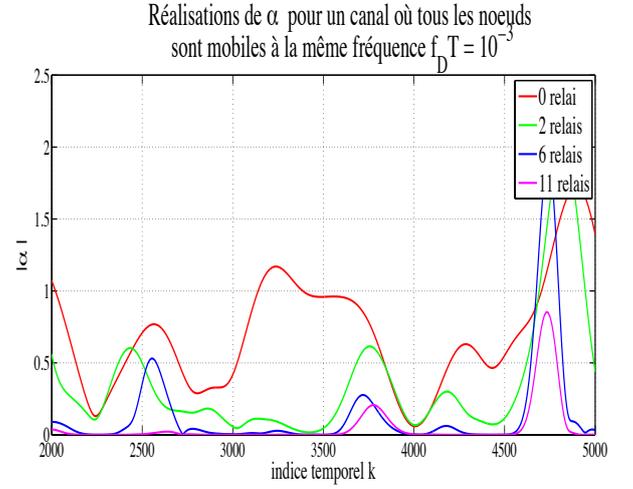


FIGURE 2.5 – Réalisation de α (module) en fonction du nombre de relais mobiles

distribution du gain total et de son module, plus particulièrement sur sa distribution autour de zéro et son étendue (allure de la distribution). D'autre part, ces expressions seront utiles pour calculer les Bornes de Cramer Rao de l'estimateur de α .

Pour calculer la distribution du gain complexe, on va évaluer la distribution du module total $\rho = \rho^{(1)}\rho^{(2)}\dots\rho^{(N+1)}$ et de la phase totale $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots + \theta^{(N+1)} \in [2\pi]$.²

Rappelons que dans ce cas, comme $A^{(i)} = 1 \forall i$, la variance du gain global est le produit des variances des gains locaux, c'est à dire $\sigma_{\alpha}^2 = \prod_{i=1}^N \sigma_{\alpha^{(i)}}^2$.

2.3.1 Distribution de la phase

Lorsque la distribution de la phase $\theta^{(i)}$ est uniforme quelque-soit "i", alors la distribution de la phase $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots + \theta^{(N+1)} \in [2\pi]$ est encore uniforme. La démonstration est faite dans l'annexe A.

L'analyse est illustrée dans la figure 2.6. Ainsi, à chaque fois qu'on ajoute une variable aléa-

2. $[2\pi]$ désigne modulo 2π , c'est à dire θ sera compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

toire de distribution uniforme, la distribution de la somme reste uniforme :

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{ si } -\pi < \theta < +\pi$$

où $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots + \theta^{(N+1)} \quad [2\pi]$

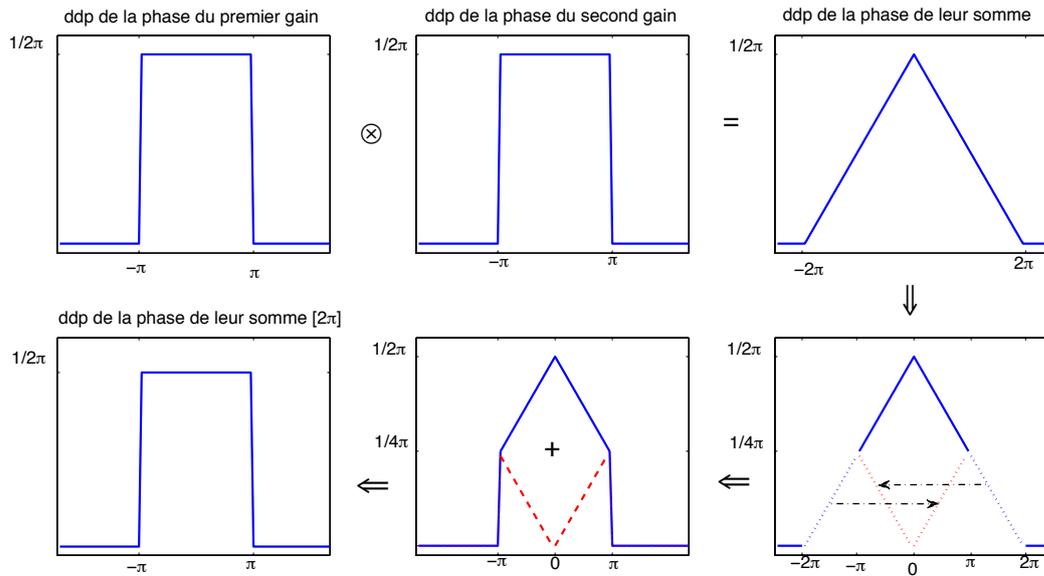


FIGURE 2.6 – Distribution uniforme de la phase d'un canal à plusieurs bonds

2.3.2 Distribution du module

L'évaluation de la distribution de probabilité (DDP) du module ρ du gain global α se fait par récursivité comme suit :

2.3.2.1 Un lien (Aucun relais)

On commence par le cas d'un lien seul sans aucun relais ($N = 0$). Le module du gain global est alors $\rho = \rho^{(1)}$, sa DDP est donc une distribution de Rayleigh dont l'expression est [4] [21] :

$$f_{\rho}(\rho) = \frac{2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}\right) \quad (2.5)$$

avec $\rho \in [0, +\infty)$ et $\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_{\alpha^{(1)}}^2$

2.3.2.2 Deux liens (Un seul relais)

Les deux liens étant indépendants, leurs modules le sont aussi. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f_{\rho^{(1)}\rho^{(2)}}(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}) &= f_{\rho^{(1)}}(\rho^{(1)})f_{\rho^{(2)}}(\rho^{(2)}) = \frac{2^2\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{\sigma_{\alpha^{(1)}}^2\sigma_{\alpha^{(2)}}^2} \exp\left(-\frac{[\rho^{(1)}]^2}{\sigma_{\alpha^{(1)}}^2} - \frac{[\rho^{(2)}]^2}{\sigma_{\alpha^{(2)}}^2}\right) \\ &= \frac{2^2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \exp\left(-\frac{[\rho^{(1)}]^2}{\sigma_{\alpha^{(1)}}^2} - \frac{[\rho^{(2)}]^2}{\sigma_{\alpha^{(2)}}^2}\right) \end{aligned}$$

avec $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)} \in [0, +\infty)$

On cherche $f_{\rho}(\rho)$ que l'on peut obtenir par marginalisation de $f_{\rho\rho^{(1)}}(\rho, \rho^{(1)})$, puis en utilisant un changement de variable pour passer de $(\rho, \rho^{(1)})$ à $(\rho^{(2)} = \frac{\rho}{\rho^{(1)}}, \rho^{(1)})$:

$$f_{\rho}(\rho) = \int_0^{+\infty} f_{\rho\rho^{(1)}}(\rho, \rho^{(1)}) d\rho^{(1)} = \int_0^{+\infty} f_{\rho^{(2)}\rho^{(1)}}\left(\frac{\rho}{\rho^{(1)}}, \rho^{(1)}\right) |Jac| d\rho^{(1)}$$

$$\text{où } Jac = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \rho^{(1)}} \\ \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \rho^{(1)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^{(1)}} & \frac{-\rho}{(\rho^{(1)})^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^{(1)}}$$

D'où la DDP du module du gain global [4] [47] :

$$\begin{aligned} f_{\rho}(\rho) &= \int_0^{+\infty} \frac{2^2\rho^{(1)}\frac{\rho}{\rho^{(1)}}}{\sigma_{\alpha^{(1)}}^2\sigma_{\alpha^{(2)}}^2} \exp\left(-\frac{[\rho^{(1)}]^2}{\sigma_{\alpha^{(1)}}^2} - \frac{\left[\frac{\rho}{\rho^{(1)}}\right]^2}{\sigma_{\alpha^{(2)}}^2}\right) \frac{d\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} \\ &= \frac{2^2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{\rho^{(1)}}{\sigma_{\alpha^{(1)}}}\right]^2 - \frac{\left[\frac{\rho}{\sigma_{\alpha^{(1)}}}\right]^2}{\left[\frac{\rho^{(1)}}{\sigma_{\alpha^{(1)}}}\right]^2}\right) \frac{d\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}} \\ &= \frac{2^2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u_1^2}{u_0^2} - \frac{\left[\frac{\rho}{\sigma_{\alpha}}\right]^2}{u_1^2}\right) \frac{du_1}{u_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où on a fait un changement de variable $u_1 = \frac{\rho^{(1)}}{\sigma_{\alpha^{(1)}}}$ et $u_0 = 1$

Cette expression est donnée de façon plus simple en faisant un changement de variable :

$exp(v_1) = \frac{u_1^2}{\left[\frac{\rho}{\sigma_\alpha}\right]} \Rightarrow exp(v_1)dv_1 = \frac{2u_1 du_1}{\left[\frac{\rho}{\sigma_\alpha}\right]} \Rightarrow dv_1 = \frac{2du_1}{u_1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f_\rho(\rho) &= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} \int_0^{+\infty} exp\left(-\frac{u_1^2}{u_0^2} - \frac{\left[\frac{\rho}{\sigma_\alpha}\right]^2}{u_1^2}\right) \frac{du_1}{u_1} \\
&= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} \int_0^{+\infty} exp\left(-\frac{\rho}{\sigma_\alpha} \left[\frac{u_1^2}{\frac{\rho}{\sigma_\alpha}} + \frac{\rho}{u_1^2}\right]\right) \frac{du_1}{u_1} \\
&= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{\rho}{\sigma_\alpha} [exp(v_1) + exp(-v_1)]\right) \frac{dv_1}{2} \\
&= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} 2 \int_0^{+\infty} exp\left(-\frac{\rho}{\sigma_\alpha} [exp(v_1) + exp(-v_1)]\right) \frac{dv_1}{2} \\
&= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} \int_0^{+\infty} exp\left(-2\frac{\rho}{\sigma_\alpha} cosh(v_1)\right) dv_1 \\
f_\rho(\rho) &= \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} K_0\left(\frac{2\rho}{\sigma_\alpha}\right) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

où $cosh(\cdot)$ est la fonction cosinus hyperbolique, et $K_0(\cdot)$ est la fonction de bessel modifiée, de deuxième type, et d'ordre zéro.

2.3.2.3 "N+1" liens ("N" relais)

Le calcul est fait par récurrence : pour connaître la distribution du module ρ du gain global $\alpha = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots\dots\alpha^{(N+1)}$, on a recours à la distribution du module η du gain semi-total $\zeta = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots\dots\alpha^{(N)}$, qui désigne le produit des gains seulement jusqu'à l'indice "N" (jusqu'au N^{ieme} lien).

De la même manière qu'on a calculé la distribution pour le cas de deux liens, on fait pour plusieurs liens.

$$f_\rho(\rho) = \frac{2^{N+1} \rho}{\sigma_\alpha^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \dots\dots \int_0^{+\infty}}_{N \text{ fois}} exp\left(-\sum_{i=1}^N \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2}\right] - \left[\frac{\rho^2}{\sigma_\alpha^2}\right] \frac{1}{u_N^2}\right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \dots\dots \frac{du_N}{u_N}$$

2.4 Autocorrélation temporelle

Comme déjà mentionné, il y a N relais ($N + 1$ liens), ainsi que la source S et la destination D . Vu l'indépendance des gains des liens, la fonction d'autocorrélation temporelle continue est :

$$R_{\alpha\alpha}(\Delta t) = \prod_{i=1}^{N+1} R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t)$$

Et la fonction d'autocorrélation discrète est :

$$R_{\alpha\alpha}[k] = R_{\alpha\alpha}(\Delta t = kT) = \prod_{i=1}^{N+1} R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}[k]$$

$\alpha^{(i)}$ étant le gain du lien "i" reliant le relais R_{i-1} et le relais R_i , $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}$ est la fonction d'autocorrélation de ce gain, bien connue. Elle a été calculée dans la littérature ([4] et [22]) pour les deux cas de diffusion 2D et 3D. T est la période symboles, et f_i est la fréquence Doppler au relais "i".

On explicite alors l'expression de la fonction d'autocorrélation en fonction des fréquences Doppler de chaque lien :

– Diffusion 2D (voir [4] [21]) :

$$R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}[k] = R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t = kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 J_0(2\pi f_{i-1}kT) J_0(2\pi f_i kT)$$

Alors

$$R_{\alpha\alpha}[k] = R_{\alpha\alpha}(\Delta t = kT) = \sigma_{\alpha}^2 J_0(2\pi f_S kT) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_i kT)]^2 J_0(2\pi f_D kT) \quad (2.8)$$

– Diffusion 3D (voir [22]) :

$$R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}[k] = R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t = kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 \text{sinc}(2\pi f_{i-1}kT) \text{sinc}(2\pi f_i kT)$$

Alors

$$R_{\alpha\alpha}[k] = R_{\alpha\alpha}(\Delta t = kT) = \sigma_{\alpha}^2 \text{sinc}(2\pi f_S kT) \prod_{i=1}^N [\text{sinc}(2\pi f_i kT)]^2 \text{sinc}(2\pi f_D kT) \quad (2.9)$$

La fonction $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0.

La fonction sinus cardinal étant définie comme $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Notons que lorsqu'un des relais ou bien la source ou bien la destination sont fixes, leurs vitesses ainsi que leurs fréquences Doppler sont nulles. Nos expressions restent valables car $J_0(0) = 1$ et

$\text{sinc}(0) = 1$.

Lorsqu'on a un lien mobile-mobile de gain $\alpha^{(i)}$, tout se passe comme si on a deux liens mobile-fixe ($\alpha_1^{(i)}$) et fixe-mobile ($\alpha_2^{(i)}$), reliés par un relai fixe, et de gain $\alpha^{(i)} = \alpha_1^{(i)} \cdot \alpha_2^{(i)}$.

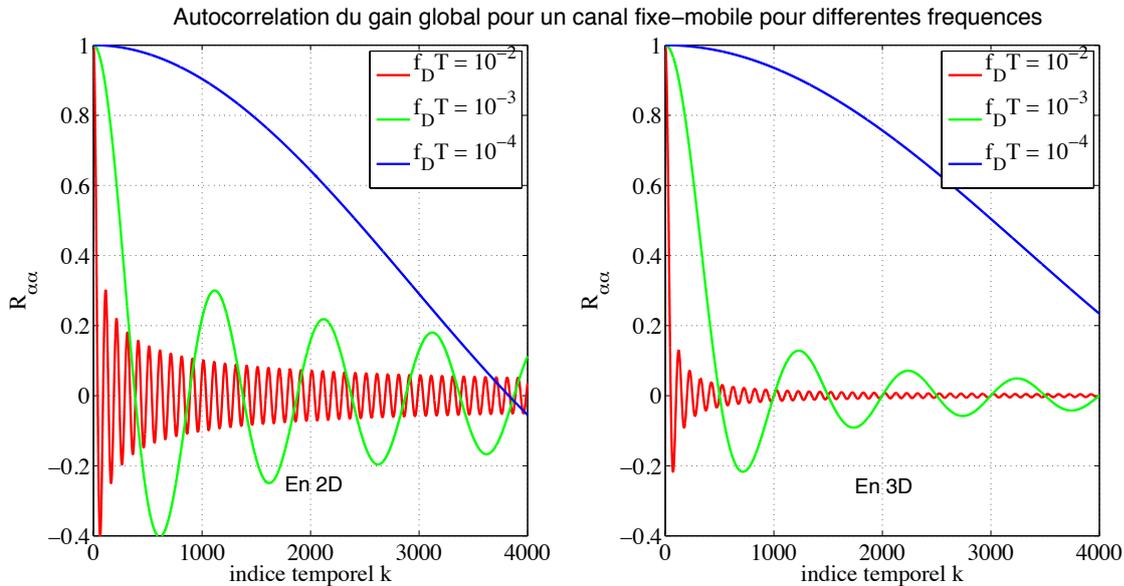


FIGURE 2.7 – Fonction d'autocorrélation d'un canal Fixe-Mobile à différentes fréquences Doppler, en modes 2D et 3D

Dans les figures 2.7 et 2.8, en comparant les 2 modes de diffusions, on voit que les oscillations sont plus importantes en 2D, que ça soit pour un canal Fixe-Mobile ou bien Mobile-Mobile.

On voit aussi que le nombre de ces oscillations est plus grand à hautes fréquences (courbe rouges par rapport à courbes bleues dans la figure 2.7).

La corrélation est plus haute à faible fréquence Doppler, (comparaison entre les courbes bleu et verte sur la figure 2.7). Ceci est normal car le canal varie plus lentement à faible fréquence Doppler.

Pour un lien Mobile-Mobile, en variant les vitesses des deux extrémités, mais en gardant leur fréquence équivalente ($f_{eq}T = \sqrt{(f_S T)^2 + (f_D T)^2}$) la même, la fonction d'autocorrélation est presque la même pour les points les plus significatifs (par exemple les premiers 300 points pour $f_{eq}T = 10^{-3}$ dans la figure 2.8). On ne sera ainsi pas étonné de voir dans les chapitres suivants que la fonction d'auto-corrélation pourra être approchée par une fonction dépendant directement de cette fréquence équivalente (voir les équations (3.40) et (3.46)).

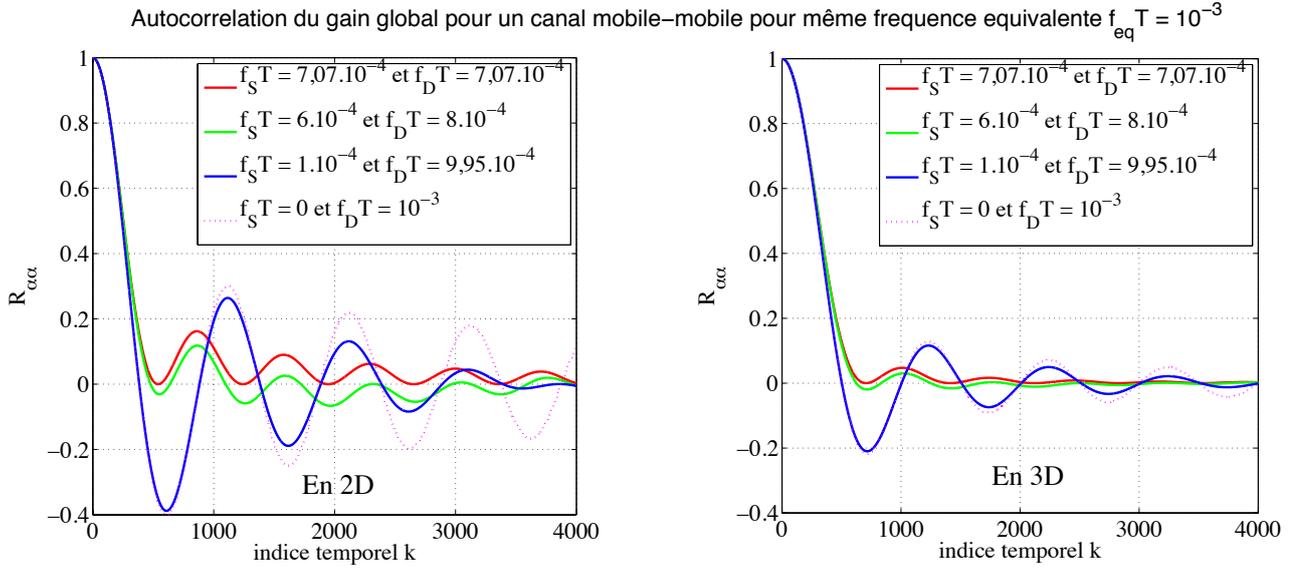


FIGURE 2.8 – Fonction d'autocorrélation d'un canal Mobile-Mobile à différentes fréquences Doppler, en modes 2D et 3D

Dans les figures 2.9 et 2.10, on voit les fonctions d'autocorrélation temporelles normalisées en 2D et 3D pour les cas où la source S se déplace seulement, lorsque la source S et la destination D se déplacent et lorsque la source, la destination et tous les relais bougent. On a supposé que tous les éléments qui se déplacent ont une fréquence Doppler normalisée $f_S T = f_D T = f_i T = 5e^{-4}$. La courbe noire représente alors aussi la fonction d'autocorrélation temporelle du gain relatif au lien "i" lorsque R_i bouge et R_{i-1} est fixe, et la courbe bleu clair représente la fonction d'autocorrélation temporelle du gain relatif au lien "i" lorsque R_i et R_{i-1} bougent. On voit qu'à partir de 3 mobiles ou plus, les oscillations diminuent beaucoup et tendent vers zéro. Une fois encore on voit que ces oscillations sont plus grandes en 2D.

2.5 Densité spectrale de Puissance

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) de α , aussi appelée Spectre Doppler du gain du canal (ou Spectre de Puissance Doppler), caractérise les propriétés dynamiques du processus α supposé stationnaire au sens large (Wide Sense stationary WSS). Il est calculée par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle $R_{\alpha\alpha}(\Delta t)$. C'est donc

$$\Gamma_{\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\alpha\alpha}(\Delta t) e^{-j2\pi f \Delta t} d\Delta t$$

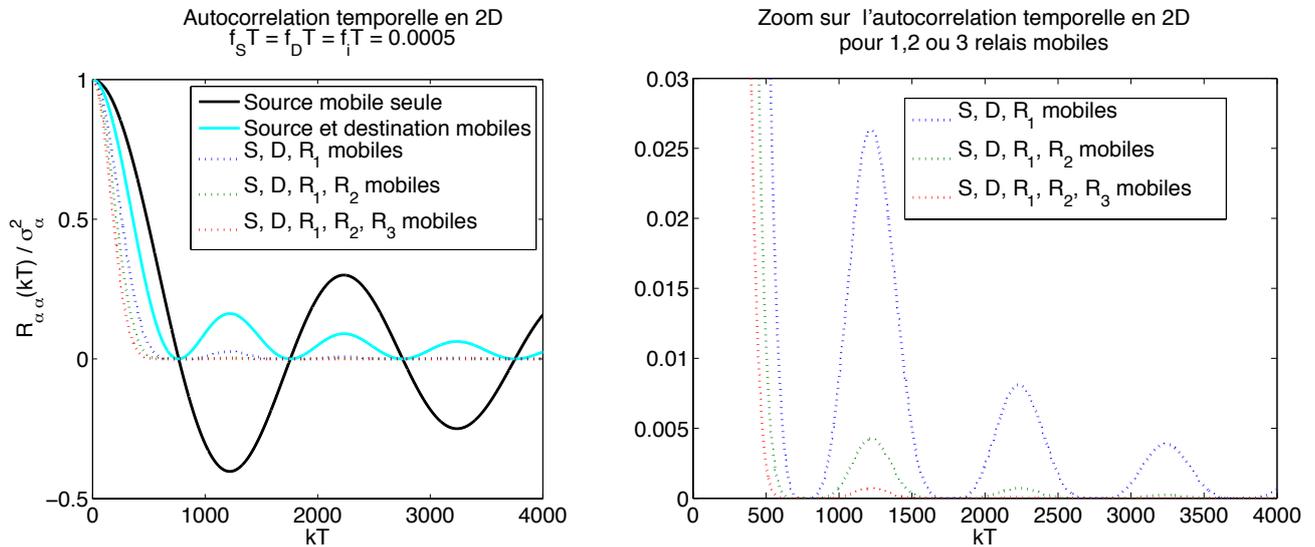


FIGURE 2.9 – Autocorrélation temporelle normalisée en 2D pour différents nombre de relais

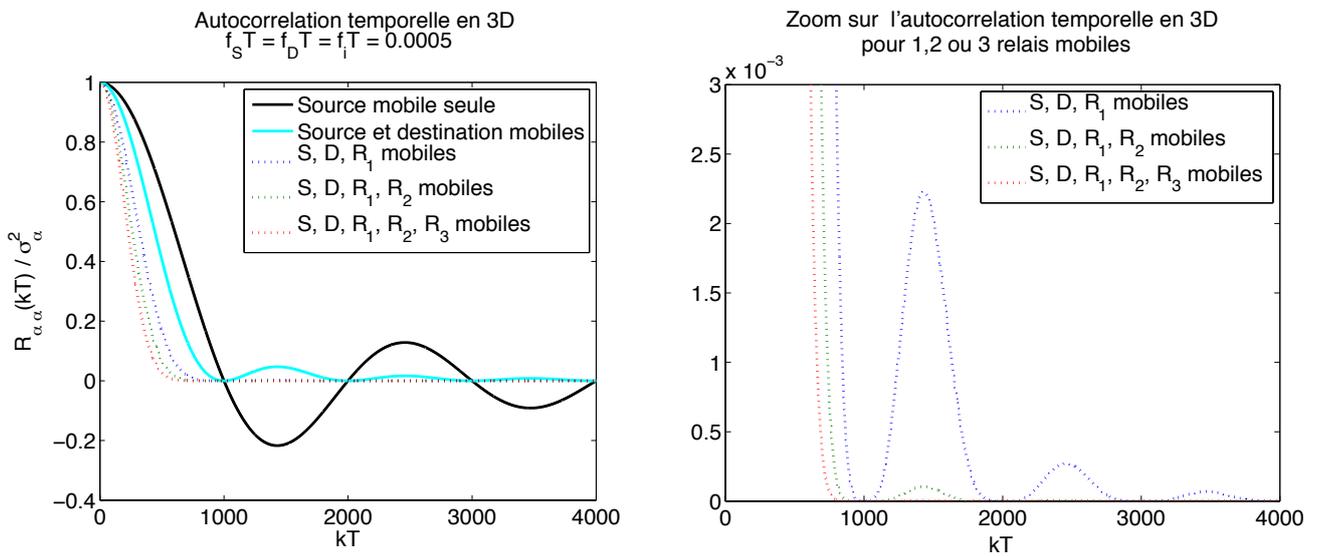


FIGURE 2.10 – Autocorrélation temporelle normalisée en 3D pour différents nombre de relais

Ou encore :

$$\Gamma_{\alpha}(f) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} \Gamma_{\alpha^{(i)}}(f)$$

\bigotimes est l'opérateur produit de convolution

$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f)$ est le densité spectrale de puissance sur le lien "i" reliant R_{i-1} à R_i . C'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t)$.

Si R_{i-1} et R_i sont fixes, $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2$, ce qui donne :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 \delta(f)$$

où $\delta(f)$ est la distribution de Dirac nulle sur toutes les fréquences en dehors de la fréquence zéro. Notons que la distribution de Dirac représente l'élément neutre du produit de convolution. Sachant qu'on a comme but de calculer la DSP pour un canal multi-bond, si l'on ajoute un lien fixe-fixe, ce qui change dans le produit de convolution sera la variance du canal seulement.

2.5.1 DSP d'un seul lien avec un modèle de diffusion en 2D

La densité spectrale de puissance $\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f)$ est donnée dans le cas de diffusion 2D dans la figure 2.11 (voir [4]) :

- Si R_{i-1} est fixe et R_i bouge (ou bien l'inverse), on a $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 J_0(2\pi f_i kT)$, ce qui donne :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{\pi f_i \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_i}\right)^2}} = \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{\pi \sqrt{f_i^2 - f^2}} & \text{si } |f| < f_i \\ 0 & \text{si } |f| > f_i \end{cases} \quad (2.10)$$

- Si R_{i-1} et R_i bougent, on a $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 J_0(2\pi f_{i-1} kT) J_0(2\pi f_i kT)$, alors

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{\pi^2 \sqrt{f_i f_{i-1}}} K \left(\sqrt{\frac{(f_i + f_{i-1})^2 - f^2}{4 f_i f_{i-1}}} \right) & \text{si } |f| < f_{i-1} + f_i \\ 0 & \text{si } |f| > f_{i-1} + f_i \end{cases}$$

avec $K(\cdot)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce [35].

En fait, on explicite l'expression de la DSP du lien "i", en mode de diffusion 2D, sous la forme $\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 S_{2,f_{i-1}}(f) \otimes S_{2,f_i}(f)$. Où $S_{2,f_i}(f)$ est le spectre élémentaire en cas de diffusion 2D, dit spectre de Jakes, valable pour un lien entre une extrémité fixe et une autre mobile à la

fréquence f_i , et calculé par la transformée de Fourier de $J_0(2\pi f_i \Delta T)$.

$$S_{2,f_i}(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{f_i^2 - f^2}} & \text{si } -f_i < f < f_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

On voit bien que l'on retombe sur la distribution de Dirac lorsque $f_i = 0$.

2.5.2 DSP d'un seul lien avec un modèle de diffusion en 3D

La densité spectrale de puissance $\Gamma_{\alpha^{(i)}}$ est donnée dans le cas de diffusion 3D dans la figure 2.12 :

- Si R_{i-1} est fixe et R_i bouge (ou bien l'inverse), on a $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 \text{sinc}(2\pi f_i kT)$, alors la densité spectrale de puissance a une forme rectangulaire [22] (on parle de spectre plat. Voir spectre noir dans la figure 2.12) :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{2f_i} & \text{si } -f_i \leq f \leq +f_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

- Si R_{i-1} et R_i bougent à la même vitesse ($f_{i-1} = f_i$), on a $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 [\text{sinc}(2\pi f_i kT)]^2$, alors la densité spectrale de puissance a une forme triangulaire (spectre rouge dans la figure 2.12) :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{4f_i^2} \begin{cases} -f + 2f_i & \text{si } 0 \leq f \leq 2f_i \\ f + 2f_i & \text{si } -2f_i \leq f \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

- Si R_{i-1} et R_i bougent à vitesses différentes, on a $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(kT) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 \text{sinc}(2\pi f_{i-1} kT) \text{sinc}(2\pi f_i kT)$. On suppose, sans perte de généralité, que $f_i > f_{i-1}$ alors la densité spectrale de puissance a une forme trapézoïdale (spectres vert et bleu dans la figure 2.12) :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \frac{\sigma_{\alpha^{(i)}}^2}{4f_{i-1}f_i} \begin{cases} 2f_i & \text{si } f_{i-1} - f_i \leq f \leq f_i - f_{i-1} \\ -f + f_i + f_{i-1} & \text{si } f_i - f_{i-1} \leq f \leq f_i + f_{i-1} \\ f + f_i + f_{i-1} & \text{si } -f_i - f_{i-1} \leq f \leq f_{i-1} - f_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.14)$$

Ici encore, on peut expliciter l'expression de la DSP du lien "i", en mode de diffusion 3D, sous la forme $\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 S_{3,f_{i-1}}(f) \otimes S_{3,f_i}(f)$. Où $S_{3,f_i}(f)$ est le spectre élémentaire en cas de diffusion 3D, dit spectre plat, valable pour un lien entre une extrémité fixe et une autre mobile à

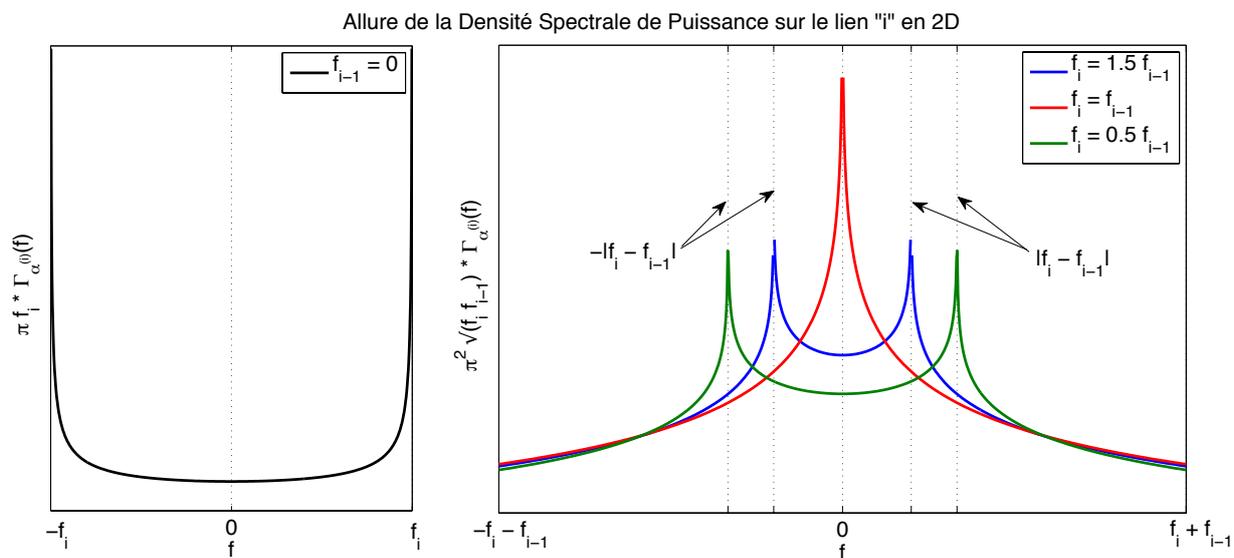


FIGURE 2.11 – Densité Spectrale de Puissance normalisée en 2D sur le lien "i" pour les deux cas : lorsque R_i bouge et R_{i-1} est fixe (figure à gauche) et lorsque R_i et R_{i-1} bougent (figure à droite) pour différents rapports entre f_i et f_{i-1} .

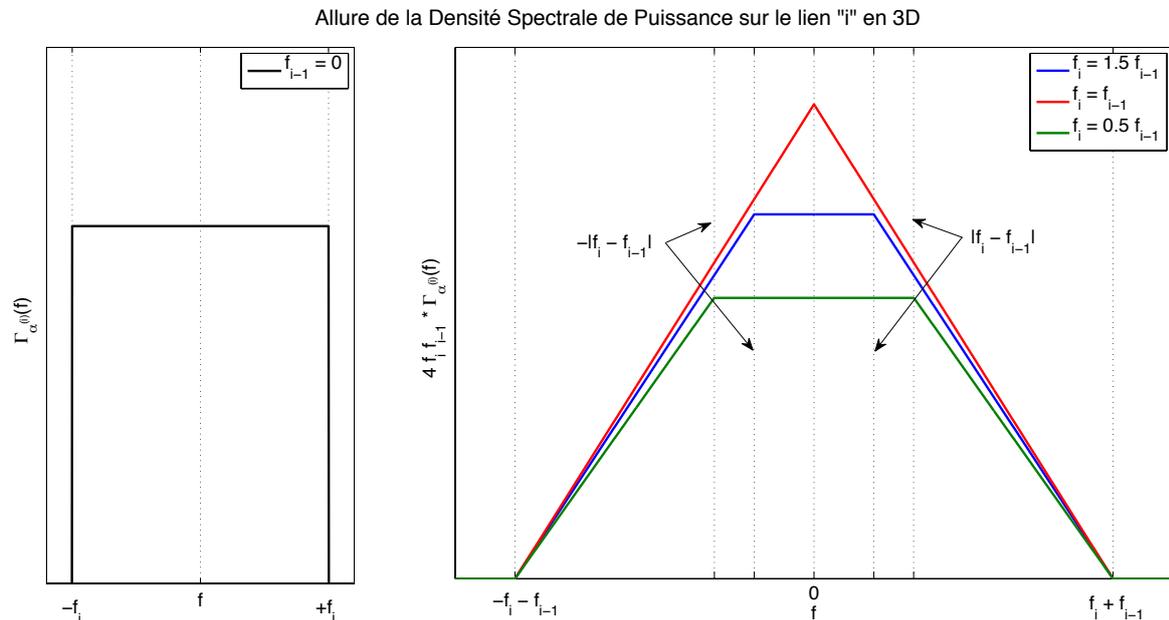


FIGURE 2.12 – Densité Spectrale de Puissance normalisée en 3D sur le lien "i" pour les deux cas : lorsque R_i bouge et R_{i-1} est fixe (figure à gauche) et lorsque R_i et R_{i-1} bougent (figure à droite) pour différents rapports entre f_i et f_{i-1} .

la fréquence f_i , et calculé par la transformée de Fourier de $\text{sinc}(2\pi f_i \Delta T)$.

$$S_{3,f_i}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2f_i} & \text{si } -f_i \leq f \leq f_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

On voit bien que l'on retombe sur la distribution de Dirac lorsque $f_i = 0$.

La figure 2.11 montre la densité spectrale de puissance normalisée en $2D$ pour un lien Fixe-Mobile (spectre de Jakes, figure à gauche). Cette densité est minimale à la fréquence nulle, et maximale à la fréquence Doppler. Cette figure montre aussi la densité spectrale de puissance pour un lien Mobile-Mobile (figure à droite). Cette densité est minimale à la fréquence Doppler totale (somme des deux fréquences Doppler pour les deux extrémités mobiles).

La figure 2.12 montre la densité spectrale de puissance normalisée en $3D$ pour un lien Fixe-Mobile (spectre plat, figure à gauche). Cette densité est constante sur toutes les fréquences inférieures à la fréquence Doppler. On voit aussi la densité spectrale de puissance pour un lien Mobile-Mobile (figure à droite). Cette densité est minimale à la fréquence Doppler totale (somme des deux fréquences Doppler pour les deux extrémités mobiles). Elle prend la forme triangulaire si les deux extrémités bougent à même vitesse (spectre rouge), ou bien trapézoïdale si les deux extrémités bougent à vitesses différentes (spectres bleu et vert).

On voit aussi qu'on a les mêmes points critiques pour les deux modes de diffusion.

2.5.3 Densité spectrale de puissance pour un canal multi-bond à "N" relais

L'expression de la densité spectrale de puissance dans le cas de plusieurs relais n'est pas simple. Il faut noter quand même que dans le calcul de la densité spectrale de puissance, c'est le nombre d'éléments mobiles parmi la source, les relais, et la destination qui compte.

On peut démontrer ceci d'après l'expression explicite de cette DSP, utilisant les spectres élémentaires. Dans le mode de diffusion $2D$, on aura :

$$\Gamma_{\alpha}(f) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} \Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = \sigma_{\alpha}^2 \bigotimes_{i=1}^{N+1} (S_{2,f_{i-1}}(f) \otimes S_{2,f_i}(f)) = \sigma_{\alpha}^2 S_{2,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{2,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{2,f_i} \otimes S_{2,f_D}$$

On a le même raisonnement avec un mode de diffusion $3D$.

Donc c'est le nombre de convolutions de ces spectres qui compte dans l'expression de cette DSP. Si parmi les "N" relais, il y a "M" relais qui sont mobiles, il y a alors :

- $2M - 1$ convolutions si S et D sont fixes
- $2M$ convolutions si S est fixe et D est mobile (et vice versa)

- $2M + 1$ convolutions si S et D sont mobiles

Dans le cas de diffusion $2D$, on a vu que pour deux convolutions, la densité spectrale de puissance commence à être compliquée. Ainsi, pour plus que deux convolutions, on n'a pas l'expression de cette DSP.

Par contre, dans le cas de diffusion $3D$, le calcul peut être fait, mais il est très long. Surtout qu'à chaque fois qu'on ajoute une convolution, le nombre de spectres possibles augmente énormément selon les valeurs des fréquences f_i non nulles. Un exemple rapide le montre :

- Une convolution, S et D mobiles, aucun relais fixe. Il y a deux spectres possibles, selon si f_S et f_D sont égales ou non.
- Deux convolutions, S fixe, R_1 et D mobiles.
 - Si $f_1 = f_D$, on aura la première allure
 - Si $f_1 < f_D$ et $2f_1 < f_D$, on aura la deuxième allure
 - Si $f_1 < f_D$ et $2f_1 \geq f_D$, on aura la troisième allure
 - Si $f_1 > f_D$, on aura la quatrième allure
- Pour trois convolutions, le nombre d'allures à tracer devient 18 !!!

Vu que l'expression de la DSP n'est pas si simple, il y a quand même intérêt à savoir le support de cette DSP, ainsi que son allure lorsque le nombre de relais mobiles augmente beaucoup.

2.5.3.1 Support de la densité spectrale de puissance

Le calcul du support de la densité spectrale de puissance est utile dans plusieurs cas. On cite le cas où l'on introduit cette densité spectrale de puissance dans une intégrale, comme l'on verra dans le chapitre suivant. On verra comment la connaissance du support peut aider à limiter les bornes de cette intégrale, et à simplifier le calcul de l'intégrale.

Mais avant de rentrer dans les indices, il vaut mieux commencer par un cas simple.

Soit la fonction $g(x) = g_1(x) \otimes g_2(x)$ où les deux fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$ ont comme supports $[-x_1; +x_1]$ et $[-x_2; +x_2]$ respectivement. Alors le support de $g(x)$ est $[-x_1 - x_2; +x_1 + x_2]$

La démonstration est très rapide. En fait, la formule du produit de convolution donne que $g(x) = g_1(x) \otimes g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)g_2(x-u)du$.

Cette intégrale est non nulle lorsque $-x_1 \leq u \leq +x_1$ et $-x_2 \leq x - u \leq +x_2$. Donc $-x_1 - x_2 \leq u - x_2 \leq x \leq u + x_2 \leq +x_1 + x_2$

Soit maintenant $g(x) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} g_i(x)$ où $g_i(x)$ a comme support $[-x_i; +x_i]$. Alors on peut déduire

rapidement que le support de $g(x)$ est $[-\sum_{i=1}^{N+1} x_i; +\sum_{i=1}^{N+1} x_i]$.

Appliquons ceci sur la densité spectrale de puissance dans le cas de "N" relais. Sachant que, et comme vu dans les figures 2.11 et 2.12, la densité spectrale de puissance du gain du lien "i" a comme support $[-f_i - f_{i-1}; f_i + f_{i-1}]$.³

Alors, le support de $\Gamma_{\alpha}(f) = \bigotimes_{i=1}^{N+1} \Gamma_{\alpha^{(i)}}$ est $[-f_{max}; +f_{max}]$, avec

$$f_{max} = \sum_{i=1}^{N+1} (f_i + f_{i-1}) = f_S + 2 \sum_{i=1}^N f_i + f_D \quad (2.16)$$

2.5.3.2 Allure asymptotique de la Densité Spectrale de Puissance

L'allure de la DSP de α lorsque le nombre de bonds N devient très grand peut être directement déduit par analogie avec un résultat bien connu en probabilité et statistiques, à savoir le théorème central limite [79].

Rappelons que densité spectrale de puissance (DSP) et fonction d'autocorrélation sont liées par une relation de Transformée de Fourier, tout comme densité de probabilité (DDP) et fonction caractéristique.

Ainsi, la DSP de $\alpha^{(i)}$, notée $\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f)$ est similaire à $P_{X_i}(x)$, la DDP d'une variable aléatoire X_i , dont la fonction caractéristique $\Phi_{X_i}(t)$ est égale à la fonction d'autocorrélation de $\alpha^{(i)}$, $R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t)$.

En d'autres termes, soit X_i une variable aléatoire de fonction caractéristique $\Phi_{X_i}(t)$ et de densité de probabilité $P_{X_i}(x_i)$

$$\Phi_{X_i}(t) = \mathbb{E}[e^{jX_i t}] = \int_{\mathbb{R}} P_{X_i}(x) e^{jxt} dx$$

Or on sait que

$$R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) e^{j2\pi f \Delta t} df$$

Ainsi :

$$\Gamma_{\alpha^{(i)}}(f) = P_{X_i}(x) \quad \text{lorsque} \quad \Phi_{X_i}(t) = R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t) \quad (2.17)$$

Il est bien connu que la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes

3. Ceci est vrai même si R_{i-1} est fixe, car dans ce cas, en annulant f_{i-1} , on tombe bien sur le bon support $[-f_i; f_i]$

est la convolution de leurs densités de probabilité [63] :

$$P_X(x) = \left(P_{\sum_{i=1}^{N+1} X_i} \right) (x) = \left(\bigotimes_{i=1}^{N+1} P_{X_i} \right) (x)$$

D'après l'équation (2.17), si on remplace les DDP par des DSP, on aura :

$$P_X(x) = \left(\bigotimes_{i=1}^{N+1} \Gamma_{\alpha^{(i)}} \right) (f) = \Gamma_{\alpha}(f) \quad (2.18)$$

De même, la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs fonctions caractéristiques [63] :

$$\Phi_X(t) = \left(\Phi_{\sum_{i=1}^{N+1} X_i} \right) (t) = \prod_{i=1}^{N+1} \Phi_{X_i}(t)$$

D'après l'équation (2.17), on aura :

$$\Phi_X(t) = \prod_{i=1}^{N+1} R_{\alpha^{(i)}\alpha^{(i)}}(\Delta t) = R_{\alpha\alpha}(\Delta t) \quad (2.19)$$

Ainsi, lorsque α est un produit d'un très grand nombre de gains indépendants, et de caractéristiques similaires, on peut étudier son spectre à partir de la comparaison avec la DDP d'une variable aléatoire X égale à la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Sa fonction d'autocorrélation, notée $R_{\alpha\alpha}$, et qui est égale à un produit de plusieurs fonctions d'autocorrélation élémentaires, est comparée à la fonction caractéristique de X , notée Φ_X , égale au produit de plusieurs fonctions caractéristiques élémentaires (voir l'équation (2.19)).

Sa DSP, notée Γ_{α} , et qui est égale à un produit de convolution de plusieurs DSP élémentaires, est comparée à la DDP de X , notée P_X , égale au produit de convolution de plusieurs DDP élémentaires (voir l'équation (2.18)).

D'après le théorème central limite, la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi est une variable aléatoire Gaussienne, de densité de probabilité Normale et de fonction caractéristique $\exp\left(j\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

On peut donc en conclure, pour des bonds de caractéristiques similaires, que lorsque le nombre de bonds devient élevé, le spectre Doppler global prend une allure Gaussienne.

2.6 Rapport Signal sur Bruit

Les symboles s émis de la source S ont une puissance notée E_S . Le rapport signal-sur-bruit SNR global est alors :

$$SNR = \gamma = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_n^2} E_S \quad (2.20)$$

On définit aussi le rapport signal-sur-bruit en dB :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SNR) \quad (2.21)$$

Sachant que σ_α^2 et σ_n^2 sont donnés par les équations (2.2) et (2.3) respectivement.

Ceci étant donné d'une part, on peut d'autre part chercher la valeur du rapport SNR global en fonction des SNR locaux pour chaque relais.

Au relais R_i , le SNR local est noté :

$$\gamma_i = \frac{(\sigma_\alpha^{(i)})^2}{(\sigma_n^{(i)})^2} E_{i-1}$$

où E_i est la puissance débitée par le relais R_i et transmise dans le lien "i+1", pour $i = 1, 2, \dots, N$. $E_0 = E_S$ est l'énergie débitée par la source.

$$\begin{aligned} E_{i-1} &= \left(A^{(i-1)} \right)^2 \left(\left(\sigma_\alpha^{(i-1)} \right)^2 E_{i-2} + \left(\sigma_n^{(i-1)} \right)^2 \right) \\ &= \left(A^{(i-1)} \right)^2 \left(\sigma_n^{(i-1)} \right)^2 \left(\frac{\left(\sigma_\alpha^{(i-1)} \right)^2 E_{i-2}}{\left(\sigma_n^{(i-1)} \right)^2} + 1 \right) = \left(A^{(i-1)} \right)^2 \left(\sigma_n^{(i-1)} \right)^2 (\gamma_{i-1} + 1) \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma_i = \frac{(\sigma_\alpha^{(i)})^2}{(\sigma_n^{(i)})^2} \left(A^{(i-1)} \right)^2 \left(\sigma_n^{(i-1)} \right)^2 (\gamma_{i-1} + 1)$$

Ou encore

$$G_i = \frac{\gamma_{i+1}}{1 + \gamma_i} = \left(A^{(i)} \right)^2 \left(\sigma_\alpha^{(i+1)} \right)^2 \frac{\left(\sigma_n^{(i)} \right)^2}{\left(\sigma_n^{(i+1)} \right)^2}$$

Maintenant qu'on veut déduire l'expression du SNR global à partir des SNR locaux, on a :

– Le numérateur de γ :

$$E_S \sigma_\alpha^2 = E_S \prod_{i=1}^N (A^{(i)})^2 \prod_{i=1}^{N+1} (\sigma_\alpha^{(i)})^2 = E_S (\sigma_\alpha^{(1)})^2 \frac{(\sigma_n^{(N+1)})^2}{(\sigma_n^{(1)})^2} \prod_{i=1}^N G_i = (\sigma_n^{(N+1)})^2 \gamma_1 \prod_{i=1}^N G_i$$

avec

$$\prod_{i=1}^N G_i = \prod_{i=1}^N (A^{(i)})^2 \prod_{i=2}^{N+1} (\sigma_\alpha^{(i)})^2 \frac{(\sigma_n^{(1)})^2}{(\sigma_n^{(N+1)})^2}$$

– Le dénominateur de γ :

$$\sigma_n^2 = (\sigma_n^{(N+1)})^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_n^{(N+1)})^2 \prod_{j=i}^N G_j = (\sigma_n^{(N+1)})^2 \left(1 + \sum_{i=1}^N \prod_{j=i}^N G_j \right)$$

avec

$$\prod_{j=i}^N G_j = \prod_{j=i}^N (A^{(j)})^2 \prod_{j=i+1}^{N+1} (\sigma_\alpha^{(j)})^2 \frac{(\sigma_n^{(i)})^2}{(\sigma_n^{(N+1)})^2}$$

On aura alors la relation entre les *SNR* :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma_1 \prod_{i=1}^N G_i}{1 + \sum_{i=1}^N \prod_{j=i}^N G_j} \\ G_i &= \frac{\gamma_{i+1}}{1 + \gamma_i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Lorsque les *SNR* locaux sont égaux ($\gamma_i = \gamma_1$), on a alors $G_i = G_1 = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} \forall i$, et le *SNR* local est donné par (calcul très simple) :

$$\frac{1}{\gamma} = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{(1 + \gamma_1)^{i-1}}{\gamma_1^i}$$

2.7 Bornes de Cramer Rao Bayésiennes

Afin d'évaluer la performance d'un algorithme proposé pour l'estimation du gain α en terme d'erreur quadratique moyenne, nous allons calculer la borne minimale de référence qui est la borne de Cramer Rao Bayésienne.

2.7.1 Différence entre les bornes Bayésiennes et les bornes classiques

Les problèmes d'estimation sont présents dans presque tous les domaines scientifiques et en particulier dans celui des systèmes de communication numérique. Dans des problèmes de synchronisation, il faut estimer des délais et des décalages de phase et de fréquence. En radio-communication, il faut estimer le canal de propagation. Dans des systèmes de navigation, il faut estimer la position d'un récepteur mobile, etc. Un point crucial dans les problèmes d'estimation est l'obtention de bornes minimales de performance, qui nous servent comme référence pour savoir si l'on a un "bon estimateur" ou non.

Il y a deux approches possibles pour caractériser les problèmes d'estimation :

- Estimation classique, non-Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des inconnus déterministes.
- Estimation Bayésienne : on suppose que les paramètres à estimer sont des variables aléatoires avec une densité de probabilité a priori. Dans cette catégorie on peut inclure l'estimation hybride [13], adaptée au mélange de paramètres aléatoires et déterministes. On appelle bornes Bayésiennes, les bornes associées à un problème d'estimation Bayésien.

(Pour plus de détails, voir chapitre 2 de [91]).

Ici on traite le problème d'estimation de α_k qui est une variable aléatoire ayant une densité de probabilité normale supposée connue. Donc il est intéressant dans ce cas de calculer les bornes de Cramer Rao Bayésiennes.

2.7.2 Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes

Soit $\hat{\alpha}_k(\mathbf{y}_k)$ un estimateur du vecteur $\alpha_k = [\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+M}]^\top$ basé sur l'observation de $\mathbf{y} = [y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{k+M}]^\top$ où \top est l'opération transposée.

La matrice d'erreur quadratique \mathbf{E} de l'estimateur $\hat{\alpha}_k(\mathbf{y}_k)$ est définie par [25] :

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\alpha, \mathbf{y}} [(\hat{\alpha}_k(\mathbf{y}_k) - \alpha_k)(\hat{\alpha}_k(\mathbf{y}_k) - \alpha_k)^\dagger]$$

où \dagger est l'opération conjuguée transposée.

Et on a

$$\mathbf{E} \geq \mathbf{J}^{-1}$$

où $X \geq Y$ est interprété dans le sens que la matrice $X - Y$ est une matrice semidéfinie positive. \mathbf{J} est la matrice de Fisher. Avec dans notre cas :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]_{q,\ell} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\alpha,\mathbf{y}}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\mathbf{y}_k, \alpha_k)] \\ &= \mathbb{E}_{\alpha,\mathbf{y}}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\mathbf{y}_k | \alpha_k)] + \mathbb{E}_{\alpha}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\alpha_k)] \end{aligned}$$

avec : $\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell}(\cdot) \right)$ l'opérateur différentiel seconde

α_q étant complexe, on définit la pseudo-dérivée par rapport aux complexes par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_q} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Re}} - j \frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Im}} \right]$$

où α_q^{\Re} et α_q^{\Im} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de α_q .

Notons que la probabilité du vecteur d'observations sachant le vecteur de gains est la probabilité du vecteur de bruit :

$$p(\mathbf{y}_k | \alpha_k) = p(\mathbf{n}_k)$$

où $\mathbf{n}_k = [n_{k+1}, n_{k+2}, \dots, n_{k+M}]^\top = \mathbf{y}_k - \alpha_k$

Ici, le travail pour un canal à un ou plusieurs relais devient compliqué, car dans ces cas, les probabilités $f_\alpha(\alpha_k)$ et $f_n(n_k)$ ne sont pas sous forme exponentielle simple, et par suite on ne peut pas déduire les probabilités des vecteurs $p(\alpha_k)$ et $p(\mathbf{n}_k)$ par le théorème de circularité.

Calcul dans le cas d'un lien direct

Pour un lien direct entre la source et la destination, α et n sont Gaussiens, et donc :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}_k) = p(\mathbf{y}_k | \alpha_k) &= \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_n|} \exp(-(\mathbf{y}_k - \alpha_k)^\dagger \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \alpha_k)) \\ &= \frac{1}{(\pi \sigma_n^2)^M} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{y}_k - \alpha_k)^\dagger (\mathbf{y}_k - \alpha_k)\right) \end{aligned}$$

Et

$$p(\alpha) = \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_\alpha|} \exp(-\alpha_k^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \alpha_k)$$

où \mathbf{R}_α est la matrice de covariance du vecteur des gains α donnée par :

$$[\mathbf{R}_\alpha]_{q,\ell} = R_\alpha(q - \ell)$$

et \mathbf{R}_n la matrice de covariance du vecteur des bruits donnée par : $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ (\mathbf{I}_M est la matrice identité de dimensions $M \times M$)

$$\text{avec : } \Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\cdot) \right)$$

α_q étant complexe, on définit la pseudo-dérivée par rapport aux complexes par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_q} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Re}} - j \frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Im}} \right]$$

où α_q^{\Re} et α_q^{\Im} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de α_q .

La fonction α_q est supposée dérivable (elle satisfait les conditions de Cauchy) et donc la pseudo-dérivée coïncide avec la vraie dérivée.

Le calcul nous donne (voir annexe C)

$$E_{\alpha, \mathbf{y}} [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\mathbf{y} | \alpha))] = + \frac{1}{\sigma_n^2} \delta_{q\ell}$$

Et :

$$E_{\alpha} [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\alpha))] = [\mathbf{R}_{\alpha}^{-1}]_{q,\ell}$$

Et donc :

$$[\mathbf{J}]_{q,\ell} = \frac{1}{\sigma_n^2} \delta_{q\ell} + [\mathbf{R}_{\alpha}^{-1}]_{q,\ell}$$

où $\delta_{q\ell}$ est le symbole de kronecker

D'où :

$$\mathbf{J} = \left[\frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{\alpha}^{-1} \right] \quad (2.23)$$

Pour chercher la borne, on peut :

- Soit prendre la trace de \mathbf{J} , la borne sera dite une borne "bloc off-line".
- Soit prendre l'élément au milieu de la diagonale de \mathbf{J} , la borne sera dite une borne "milieu du bloc".
- Soit prendre l'élément $[\mathbf{J}]_{M,M}$, la borne sera dite une borne "on-line".

Notons que la borne on-line concerne l'erreur quadratique minimale qui se fait sur l'estimation de α_{k+M} à partir de toutes les observations présente et précédentes $[y_{k+1}, \dots, y_{k+M}]$, alors que la borne off-line représente l'erreur minimale en terme de moyenne quadratique, pour l'estimation de tout le bloc $\alpha = [\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+M}]$ à partir de toutes les observations $\mathbf{y} = [y_{k+1}, \dots, y_{k+M}]$.

2.7.3 Tracé des bornes par simulation et discussion

Sur MatLab on a fait des simulations pour voir l'évolution de la borne de Cramer Rao et étudier l'effet de la fréquence Doppler, du rapport SNR_{dB} , de la taille M du bloc, du mode de diffusion entre $2D$ et $3D$, ainsi que du type de borne entre "on-line" et "off-line".

Les remarques qu'on tire des figures 2.13, 2.14 et 2.15 sont les suivantes :

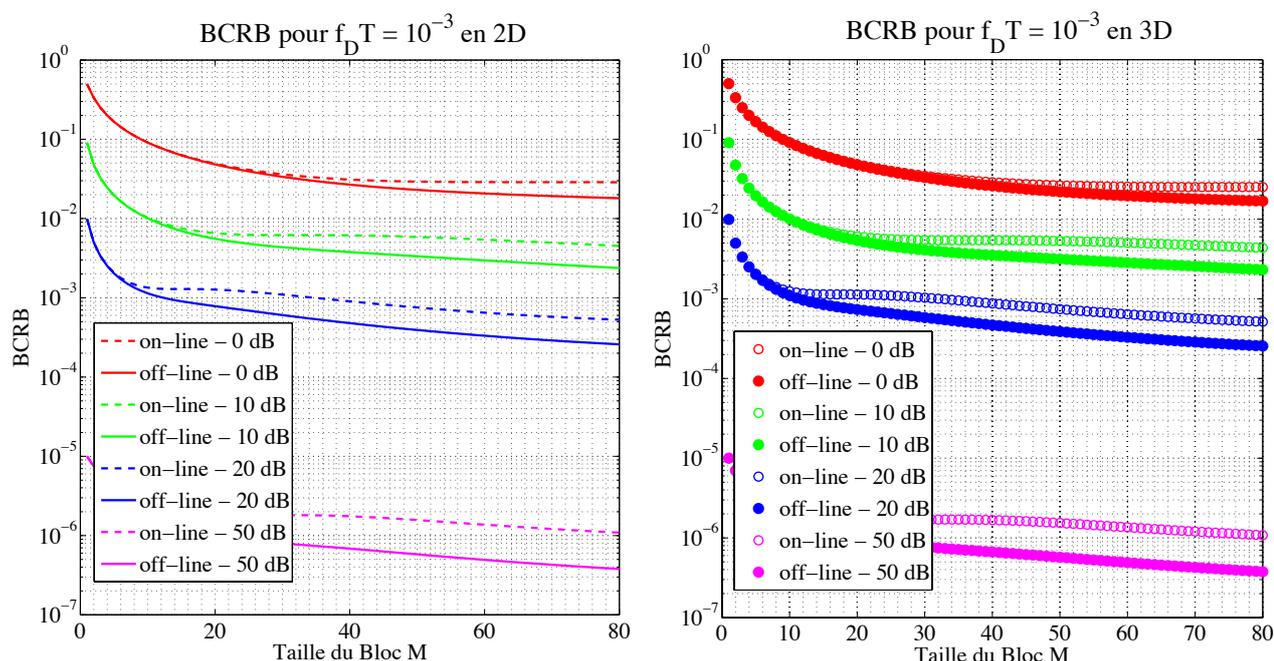


FIGURE 2.13 – Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" pour un scénario un seul bond fixe-mobile en modes de diffusion $2D$ et $3D$, en fonction de la taille du bloc pour différents rapports SNR_{dB}

1. La borne de Cramer Rao diminue progressivement quand la taille du bloc (M) augmente, jusqu'à atteindre presque une limite. Ceci est vrai que ça soit une borne "on-line" ou "off-line", que ça soit pour un mode de diffusion $2D$ ou $3D$, et quelque-soient le rapport SNR_{dB} ou la fréquence Doppler (figures 2.13, 2.14 et 2.15).

Interprétation : En fait, le nombre d'observations considérés pour l'estimation du vecteur α augmente avec la taille de ce vecteur (M) et par suite l'estimation sera meilleure (la borne diminue).

Puis, à un certain moment, l'addition d'observations précédentes mais trop éloignées (faiblement corrélées) n'apporte pas une grande amélioration.

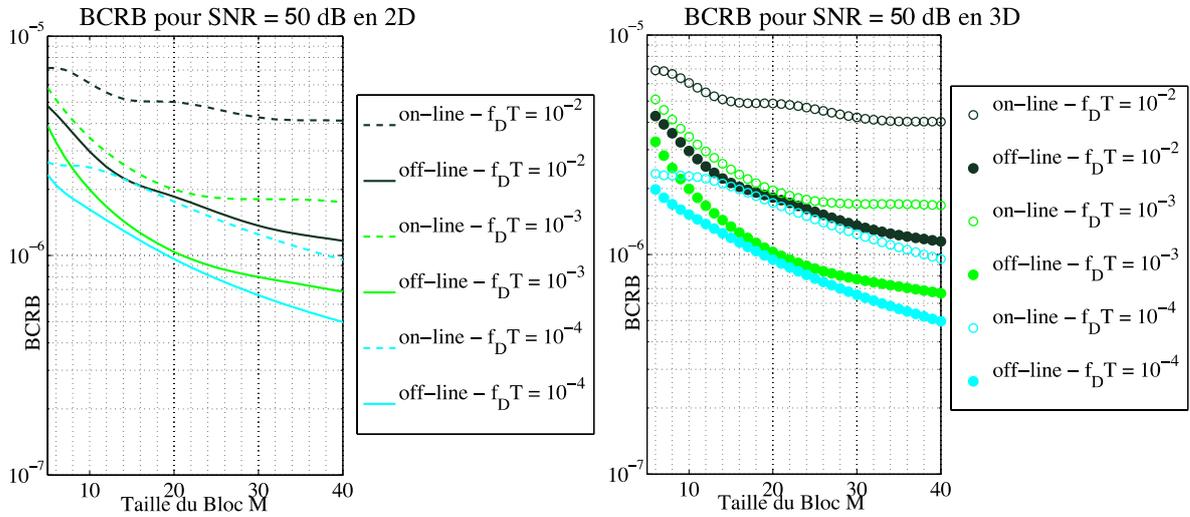


FIGURE 2.14 – Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" pour un scénario un seul bond fixe-mobile en modes de diffusion 2D et 3D, en fonction de la taille du bloc pour différentes fréquences Doppler

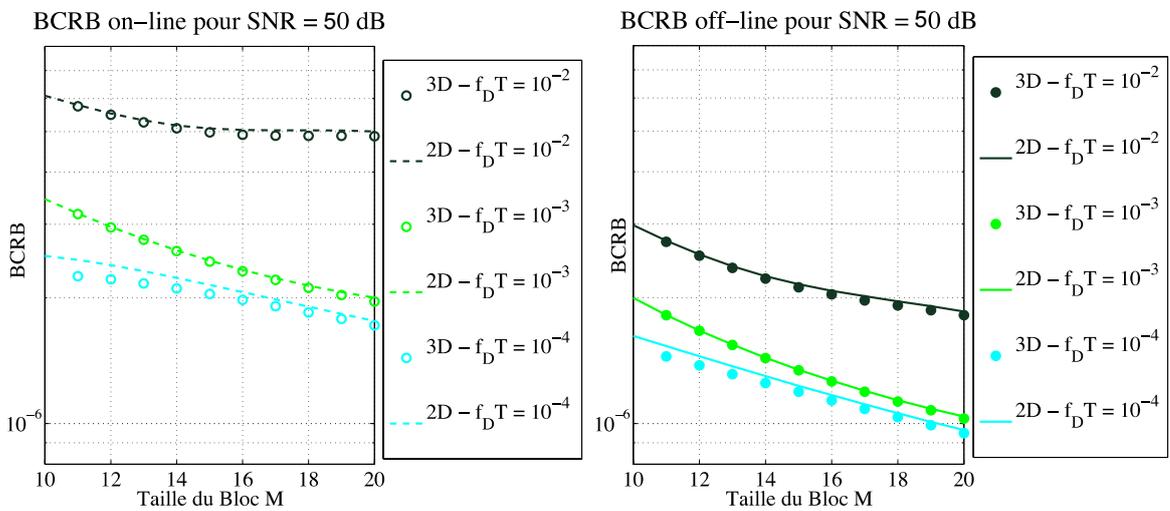


FIGURE 2.15 – Comparaison entre les Bornes de Cramer Rao Bayésiennes "on-line" et "off-line" et les modes de diffusion 2D et 3D pour un scénario un seul bond fixe-mobile

- Pour une même fréquence Doppler et même rapport SNR_{dB} , la limite est atteinte un peu plus vite si la borne est "on-line" pour les deux modes de diffusion. Par exemple, pour $f_D T = 10^{-3}$ et $SNR_{dB} = 50$ dB, (courbes vertes et violettes des figures 2.13 et 2.14

respectivement), la limite de la borne "on-line" est atteinte pour $M = 30$, alors que ce n'est pas le cas pour la limite de la borne "off-line".

- Pour une même fréquence Doppler, la limite est atteinte un peu plus vite si le rapport SNR_{dB} diminue pour les deux types de bornes et les deux modes de diffusion. Par exemple, sur la figure 2.13, pour $f_D T = 10^{-3}$, pour la borne "off-line", la limite est atteinte pour $M = 60$ quand $SNR_{dB} = 0$ dB (courbe continue rouge), alors que ce n'est pas le cas pour $SNR_{dB} = 50$ dB (courbe continue violette).
- Pour un même rapport SNR_{dB} , la limite est atteinte plus vite si la fréquence Doppler augmente, pour les deux types de bornes et les deux modes de diffusion. Par exemple, sur la figure 2.14, pour $SNR_{dB} = 50$ dB, pour la borne "on-line", la limite est atteinte pour $M = 30$ quand $f_D T = 10^{-3}$ (courbe discontinue verte), alors que ce n'est pas le cas pour $f_D T = 10^{-4}$ (courbe discontinue bleue claire). On peut déduire qu'on a intérêt à utiliser les observations précédentes encore plus si $f_D T$ est faible car les variations du canal sont plus lentes dans ce cas, et donc la corrélation (ou bien la relation) entre les observations précédentes est plus significative.

2. Les bornes "off-line" sont inférieures (meilleures) que les bornes "on-line" que ça soit en mode de diffusion $2D$ ou $3D$, et quelque-soit le rapport SNR_{dB} ou la fréquence Doppler (figures 2.13, 2.14 et 2.15).

Interprétation : Prenons par exemple $M = 61$, la borne "on-line" est l'erreur quadratique minimale possible sur l'estimation de α_M à partir de l'observation présente et 60 observations précédentes dont disons 20 n'ont plus d'intérêt car trop éloignés (faiblement corrélées). Par contre, la borne "milieu du bloc" utilise 30 observations précédentes et 30 suivantes toutes intéressantes dans cet exemple, et donc cela permet une meilleure estimation. C'est la meilleure borne. La borne "off-line" estime 61 éléments dont le premier utilise 60 observations suivantes dont 40 sont utiles, le deuxième utilise 1 observation précédente et 59 suivantes, et donc 41 sont utiles, le troisième éléments utilise 42 observations utiles, ainsi de suite. Donc la borne "off-line" est située entre la borne "on-line" et la borne "milieu du bloc".

- La différence entre les bornes "on-line" et "off-line" augmente quand la taille du bloc (M) augmente, ce qui est normal, jusqu'à ce que cette différence atteigne une limite quand ces bornes atteignent eux-mêmes leurs limites.
- La différence entre les bornes "on-line" et "off-line" augmente légèrement quand le rapport SNR_{dB} augmente (sur la figure 2.13 à gauche, la différence entre les deux courbes violettes est supérieure que la différence entre les deux courbes rouges).
- La différence entre les bornes "on-line" et "off-line" augmente légèrement quand la fréquence Doppler augmente (sur la figure 2.14 à gauche, la différence entre les deux courbes vertes est supérieure que la différence entre les deux courbes bleues claires).

3. Pour une même fréquence Doppler, les bornes diminuent quand le rapport SNR_{dB} augmente, quel que soit le type de borne et le mode de diffusion (voir la figure 2.13 et comparer les courbes de même forme mais de couleurs différentes).

Interprétation : Lorsque le rapport signal sur bruit SNR_{dB} augmente, σ_n^2 diminue. Physiquement, quand le bruit est plus faible, l'estimation peut être améliorée, et donc la borne de l'erreur peut diminuer. Mathématiquement, d'après la formule (2.23), on voit que J varie linéairement en fonction de $\frac{1}{\sigma_n^2}$ et par suite avec le SNR_{dB} , et donc la borne BCRB est à peu près inversement proportionnelle au SNR_{dB} . Lorsque SNR_{dB} augmente de 10 dB, BCRB diminue de 10 dB.

4. Pour un même rapport SNR_{dB} , les bornes diminuent quand la fréquence Doppler diminue quel que soit le type de borne et le mode de diffusion (figures 2.14 et 2.15).

Interprétation : On a déjà vu que la fonction d'autocorrélation est plus grande quand la fréquence Doppler est plus faible. Ainsi, l'inverse de R_α et par suite la borne diminue quand la fréquence Doppler diminue.

5. Il n'y a pas une grande différence entre les bornes en mode de diffusion $2D$ ou $3D$ (figure 2.15).

Une valeur $M = 80$ pour calculer les bornes est bonne car à cette valeur de M , la limite est presque atteinte pour toutes les valeurs du SNR_{dB} et de $f_D T$.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à donner les caractéristiques statistiques d'un canal de transmission à " N " A&F sauts pour les modes de diffusion $2D$ et $3D$ dont nous avons expliqué la différence.

Nous avons commencé par une description générale en donnant l'expression du gain de canal total et du bruit total en fonction des gains, facteurs d'amplification et bruits élémentaires.

Puis nous avons donné l'expression de la distribution du gain pour le cas d'un seul lien, ce qui a été donné dans la littérature. Une de nos contributions dans ce chapitre était de donner l'expression de la distribution du gain sous forme d'intégrale multiple.

Nous avons ensuite donné les formes des fonctions d'autocorrélation du gain dans le cas d'un seul bond ou même de plusieurs bonds. Nous avons donné des illustrations pour les environnements $2D$ et $3D$ pour différents nombres de bonds et différentes fréquences Doppler. Nous avons aussi introduit et illustré la notion de fréquence équivalente du canal global multi-bond qui jouera un rôle important dans le problème d'estimation de canal.

De plus, nous avons donné les Densités Spectrales de Puissance (DSP) du gain total du canal pour un seul lien, dépendant de l'état de la source et de la destination (fixe-mobile ou bien mobile-mobile) pour les deux modes de diffusion $2D$ et $3D$. Une autre contribution était de donner l'allure de cette DSP pour le cas d'un canal multi-bond, quand le nombre de bonds est élevé. Nous avons trouvé que la densité Spectrale de puissance s'approche d'une Gaussienne.

Nous avons donné à la fin l'expression du rapport Signal-sur-Bruit Global en fonction des rapports locaux, et terminé par le calcul des Bornes de Cramer Rao Bayésiennes (BCRB) pour le cas d'un seul lien fixe-mobile. Ces bornes nous seront utiles parce qu'elles donnent un repère pour qualifier la qualité de nos algorithmes d'estimation.

Dans le chapitre suivant, on va approcher le gain α par un gain $\tilde{\alpha}$ à l'aide d'un modèle linéaire, et l'objectif sera de faire une estimation en ligne $\hat{\alpha}$ à l'instant k à partir de toutes les estimations précédentes $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{k-1}$, dans un scénario de variation lente (fréquences Doppler $\lll 1$).

Algorithme basé sur un modèle Auto-Régressif et filtre de Kalman

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 3.1 | Introduction au chapitre | 60 |
| 3.2 | Modèle d'approximation du canal de transmission | 61 |
| 3.2.1 | Choix standard de la littérature, le critère CM | 62 |
| 3.2.2 | Nouveau choix proposé, le critère MAV | 64 |
| 3.3 | Filtre de Kalman | 66 |
| 3.3.1 | Équations générales du filtre de Kalman | 67 |
| 3.3.2 | Filtre de Kalman avec un modèle $AR(1)$ | 70 |
| 3.3.3 | Valeur asymptotique du Gain de Kalman | 72 |
| 3.4 | Analyse de l'erreur quadratique moyenne | 74 |
| 3.5 | Optimisation du paramètre du modèle $AR(1)$ selon le critère MAV | 78 |
| 3.5.1 | Calcul de I_α en mode de diffusion $3D$ | 78 |
| 3.5.2 | Calcul de I_α en mode de diffusion $2D$ | 82 |
| 3.5.3 | Résultats et expressions analytiques | 85 |
| 3.5.4 | Interprétation des résultats | 86 |
| 3.6 | Résultats par simulation | 88 |
| 3.7 | Robustesse par rapport à la connaissance de $f_{eq}T$ | 91 |
| 3.7.1 | Robustesse dans un mode de diffusion $3D$ | 94 |
| 3.7.2 | Robustesse dans un mode de diffusion $2D$ | 97 |
| 3.8 | Robustesse par rapport à la connaissance du SNR_{dB} | 100 |
| 3.8.1 | Robustesse dans un mode de diffusion $3D$ | 102 |
| 3.8.2 | Robustesse dans un mode de diffusion $2D$ | 104 |
| 3.9 | Conclusion | 105 |

3.1 Introduction au chapitre

L'estimation du canal fixe-mobile, mobile-mobile, et canal A&F est un problème qui occupe les chercheurs [6] [7] [18] [38] [46] [49] [50] [78] [85] [102]. L'utilisation de bons filtres estimateurs est nécessaire pour avoir une bonne estimation. Dans notre étude, nous utilisons le filtre de Kalman, couramment utilisé dans la littérature [6] [18] [38] [46] [50] [53] [102]. Mais la porte est ouverte pour d'autres méthodes d'estimation comme l'estimateur MMSE (Minimum Mean Square Error estimator) [65], l'estimateur des moindres carrés (Least Square LS estimator), l'estimation par filtre particulière [59], et bien beaucoup d'autres [1] [7].

Avant de rentrer dans l'estimation, on a recours à un modèle de canal simplifié sur lequel on pourra s'appuyer pour construire des algorithmes d'estimation. Le modèle le plus adopté dans la littérature est le modèle Autoregressif AR [9] [12] [54] [88] [92]. L'auteur de [92] a démontré qu'un modèle autorégressif d'ordre 1 est suffisant pour modéliser l'essentiel de la dynamique du canal de Rayleigh. Sa démonstration s'est basée sur le principe de l'information mutuelle entre les symboles. L'auteur de [88] a proposé une autre méthode pour vérifier le choix du modèle $AR(1)$. Par contre, dans la plupart des cas, les coefficients des modèles Autoregressifs sont choisis en se basant sur la coïncidence des fonctions d'autocorrélations du vrai processus se propageant dans le canal, et du processus AR modélisé pour les simulations. Un tel critère sera noté CM dans cette thèse, pour "Correlation Matching".

Nous proposons un autre choix de coefficient basé sur un autre critère, qu'on nomme critère *MAV* (pour "Minimisation of Asymptotic Variance"). Ceci avait, de manière indépendante à notre étude, été proposé et étudié principalement par simulation par l'auteur de [12]. Par contre, dans cette thèse, nous aboutissons à des expressions analytiques approchées qui s'expriment simplement en fonction des paramètres du canal, ainsi qu'aux valeurs d'Erreur Quadratique Moyenne correspondantes.

Le chapitre sera divisé en six principales parties. Dans la première partie, on présente le modèle d'approximation du canal par un modèle $AR(1)$. Ensuite on analyse le filtre de Kalman basé sur cette approximation $AR(1)$, et on analyse l'expression de l'Erreur Quadratique Moyenne jusqu'à obtenir les valeurs analytiques théoriques. Dans la quatrième partie, on valide nos résultats par simulation. L'étude de la robustesse est faite dans les deux dernières parties. On finit par une conclusion.

3.2 Modèle d'approximation du canal de transmission

En vue d'utiliser un algorithme "on-line" séquentiel, on s'intéresse à une modélisation d'état du problème.

Dans cette partie, on approche le canal de transmission avec un modèle autorégressif d'ordre p ($AR(p)$) aussi appelé "Gauss-Markov Model". Et donc on suppose que $\alpha_k \approx \tilde{\alpha}_k$ avec :

$$\tilde{\alpha}_k = \sum_{m=1}^p a_m \cdot \tilde{\alpha}_{k-m} + e_k \quad (3.1)$$

Où e_k est le bruit du modèle (bruit d'état), supposé Gaussien complexe et centré, de variance σ_e^2 .

Les coefficients a_m pour $m = 1, 2, \dots, p$ du modèle $AR(p)$ ne sont pas déterminés encore. Ils vérifient les équations de Yule-Walker, traditionnellement calculées afin de minimiser la variance de l'erreur du modèle σ_e^2 (Voir annexe D) :

$$\begin{cases} R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k] = \sum_{m=1}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k-m] & k \geq 1 \\ R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = \sum_{m=1}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[m] + \sigma_e^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Par contre, les valeurs de $R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k]$ ne sont pas connues. Il nous reste alors à choisir les coefficients a_m .

Modèle Autorégressif d'ordre 1

Les auteurs de [92] ont vérifié que dans le cas d'un canal sans relais, où l'une des extrémités est fixe et l'autre est mobile, en mode de diffusion $2D$, le modèle $AR(1)$ avec un bruit d'état Gaussien centré est suffisant pour modéliser le canal. Dans le cas d'un canal en mode de diffusion $3D$ et/ou multi-bond (présence de relais), ceci n'a pas été vérifié. Cela peut rester comme perspective pour un futur travail.

Dans ce travail, on approchera α qui est le produit des $\alpha^{(i)}$ (section 2.2 du deuxième chapitre) par un modèle $AR(1)$. Mais une justification plus argumentée pourrait mériter d'être faite dans un futur travail¹.

1. Soit $x = x_1 \cdot x_2$ avec $x_1[n] = x_1[n-1] + u_1[n]$ et $x_2[n] = x_2[n-1] + u_2[n]$ deux processus $AR(1)$. Ainsi $x[n] = x_1[n]x_2[n] = \underbrace{x_1[n-1]x_2[n-1]}_{x[n-1]} + \underbrace{u_1[n]x_2[n-1] + u_2[n]x_1[n-1] + u_1[n]u_2[n]}_{u[n]}$

Pour l'instant, on peut prendre le cas d'un modèle $AR(1)$ et le supposer suffisant ainsi qu'il est plus simple. Comme on n'a qu'un seul coefficient a_1 , on peut simplifier l'écriture et le noter tout simplement a . L'équation d'état sera alors (d'après l'équation (3.1)) :

$$\boxed{\tilde{\alpha}_k = a\tilde{\alpha}_{k-1} + e_k} \quad (3.3)$$

Les équations du système (3.2) seront alors simplifiées en :

$$R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[1] = aR_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] \quad (3.4)$$

$$R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = aR_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[1] + \sigma_e^2 \Rightarrow \sigma_e^2 = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0](1 - a^2) \quad (3.5)$$

Dans les deux choix qui vont suivre, on va supposer que $R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = R_{\alpha\alpha}[0] = \sigma_\alpha^2$, et donc :

$$\boxed{\sigma_e^2 = \sigma_\alpha^2(1 - a^2)} \quad (3.6)$$

3.2.1 Choix standard de la littérature, le critère CM

Avant de se focaliser sur le cas $AR(1)$, présentons brièvement le critère CM pour le cas général $AR(p)$ tel qu'il peut-être trouvé dans la littérature.

Cas d'un modèle $AR(p)$

Le choix standard de la littérature des coefficients a_m est soumis aux deux conditions suivantes :

1. La première condition est triviale et évidente. Les coefficients a_m pour $m = 1, 2, \dots, p$ vérifient les équations de Yule-Walker (système (3.2)).
2. La deuxième condition est d'imposer que la fonction d'autocorrélation du processus $AR(p)$ soit :

$$R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k] = R_{\alpha\alpha}[k] \text{ pour } k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\}$$

Autrement dit, la fonction d'autocorrélation discrète du processus $AR(p)$ coïncide avec la fonction d'auto-corrélation du vrai processus $R_{\alpha\alpha}(kT)$ (calculé dans les équations (2.8) et (2.9)) pour les $2p + 1$ échantillons d'indice $k \in \{-p, \dots, 0, 1, \dots, p\}$.

On l'appelle le choix CM (Correlation Matching). Il est proposé dans plusieurs travaux de la littérature comme [9], [37], [58], etc..

est approché dans ce travail par un processus $AR(1)$. D'ailleurs, le bruit d'état $u[n]$ n'est plus Gaussien et n'est pas totalement indépendant de $x[n]$.

Mathématiquement, ceci se traduit par $\mathbf{R}_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}\mathbf{a} = \mathbf{v}$, où :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} = \mathbf{R}_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} R_{\alpha\alpha}[0] & R_{\alpha\alpha}[-1] & \dots & \dots & R_{\alpha\alpha}[-(p-1)] \\ R_{\alpha\alpha}[1] & R_{\alpha\alpha}[0] & \dots & \dots & R_{\alpha\alpha}[-(p-2)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{\alpha\alpha}[p-1] & R_{\alpha\alpha}[p-2] & \dots & \dots & R_{\alpha\alpha}[0] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ \dots \ a_p]^\top$$

$$\mathbf{v} = [R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[1] \ R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[2] \ \dots \ \dots \ R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[p]]^\top = [R_{\alpha\alpha}[1] \ R_{\alpha\alpha}[2] \ \dots \ \dots \ R_{\alpha\alpha}[p]]^\top$$

D'où la solution :

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{v} \quad (3.7)$$

Et par suite

$$\sigma_e^2 = R_{\alpha\alpha}[0] - \sum_{k=1}^p a_k R_{\alpha\alpha}[k] \quad (3.8)$$

Dans les figures 3.1 et 3.2, on voit la fonction d'autocorrélation du canal dans les cas du vrai canal, ainsi que le cas d'un modèle autorégressif d'ordres 1, 2 et 3, les coefficients vérifiant le choix *CM* de la littérature.

Il paraît clair, d'après ces figures, que pour de faibles valeurs de p , la modélisation $AR(p)$ de la littérature convient mieux pour des valeurs relativement grandes de fréquences Doppler².

En fait, à faibles fréquences Doppler, le canal varie lentement (Figure 3.1), on remarque que, avec le choix *CM*, la fonction d'autocorrélation du processus $AR(1)$ paraît constante (courbe rouge), et les fonctions d'autocorrélation des processus $AR(2)$ et $AR(3)$ varient beaucoup plus que la vraie fonction d'autocorrélation. Et donc le choix *CM* de la littérature est moins convainquant dans le cas de faibles fréquences Doppler, contrairement à la situation de hautes fréquences Doppler, (Figure 3.2), où le choix *CM* est plus convainquant.

Ceci est naturel, car pour ces faibles fréquences Doppler, les fonctions $J_0(\cdot)$ et $\text{sinc}(\cdot)$ sont trop serrées, et les valeurs normalisées de la fonction d'autocorrélation s'approchent de 1, surtout avec un modèle $AR(1)$.

Notons qu'en terme de complexité, il vaut mieux ne pas prendre des modèles autorégressifs d'ordres élevés, pour cette raison d'inversion de matrice. Cela évitera aussi d'avoir trop de coefficients à contrôler.

2. Dans ces figures, on a mis le cas d'un seul lien, fixe-mobile, en modes de diffusions 2D et 3D. Le même résultat existe lorsqu'il y a plusieurs liens.

Avec un modèle $AR(1)$

Dans ce cas, et selon le choix CM de la littérature,

$$R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = \sigma_{\tilde{\alpha}}^2$$

$$\text{et } R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[1] = \begin{cases} \sigma_{\tilde{\alpha}}^2 J_0(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_i T)]^2 J_0(2\pi f_D T) & \text{en mode de diffusion } 2D \\ \sigma_{\tilde{\alpha}}^2 \text{sinc}(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [\text{sinc}(2\pi f_i T)]^2 \text{sinc}(2\pi f_D T) & \text{en mode de diffusion } 3D \end{cases}$$

le coefficient a , noté a_{CM} , sera alors (d'après l'équation (3.4) et les deux précédentes équations) :

$$a_{CM} = \begin{cases} J_0(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_i T)]^2 J_0(2\pi f_D T) & \text{en } 2D \\ \text{sinc}(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [\text{sinc}(2\pi f_i T)]^2 \text{sinc}(2\pi f_D T) & \text{en } 3D \end{cases} \quad (3.9)$$

La variance du bruit d'état est (d'après l'équation (3.5)) :

$$\sigma_{e_{CM}}^2 = \sigma_{\tilde{\alpha}}^2 (1 - a_{CM}^2) \quad (3.10)$$

3.2.2 Nouveau choix proposé, le critère MAV

Vu notre observation dans les figures 3.1 et 3.2, lorsqu'on est à basses fréquences, on ne va pas considérer le critère CM pour calculer le coefficient du modèle $AR(1)$ car on a besoin d'un coefficient plus faible que celui donné par le critère CM et qui vaut quasiment 1. Notre choix sera basé sur la Minimisation de la Variance Asymptotique de l'erreur quadratique moyenne (MAV).

Pour un modèle $AR(1)$, le coefficient a cherché sera noté a_{MAV} . En utilisant l'estimée en sortie du filtre d'estimation (filtre de Kalman dans cette thèse), et en variant manuellement la valeur de a , a_{MAV} correspond à la valeur avec laquelle on aboutit à l'erreur quadratique moyenne minimum. Un des objectifs de notre travail à venir sera d'obtenir l'expression théorique de a_{MAV} .

Par exemple, sur la Figure 3.3, on a un canal à source et destination mobiles, avec un seul relais fixe, et on est dans le mode de diffusion $2D$. On voit que la valeur de l'erreur quadratique moyenne a un minimum qui correspond à un coefficient a différent de a_{CM} . Ce coefficient là est a_{MAV} , dont on cherchera l'expression analytique dans la suite de ce chapitre.

Quand la fréquence Doppler est grande (c), la valeur de a_{MAV} est proche de a_{CM} , contrairement

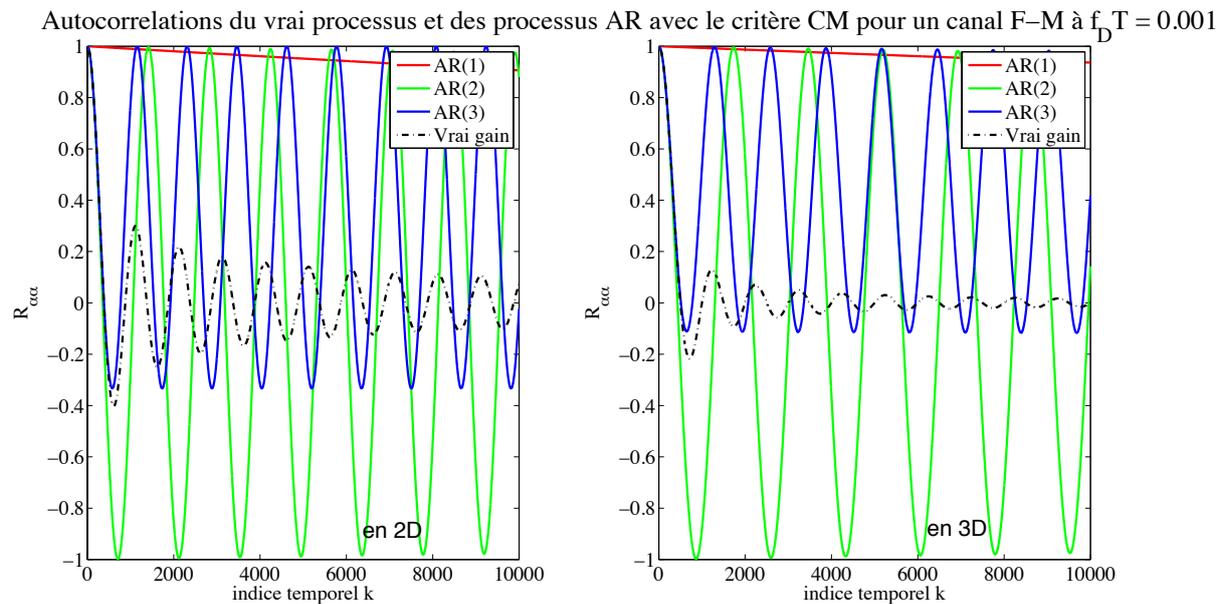


FIGURE 3.1 – Fonctions d'autocorrélations du vrai gain et du gain approché par des modèles AR(1), AR(2) et AR(3) dont les coefficients sont pris selon le critère de Correlation-Matching, pour un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler

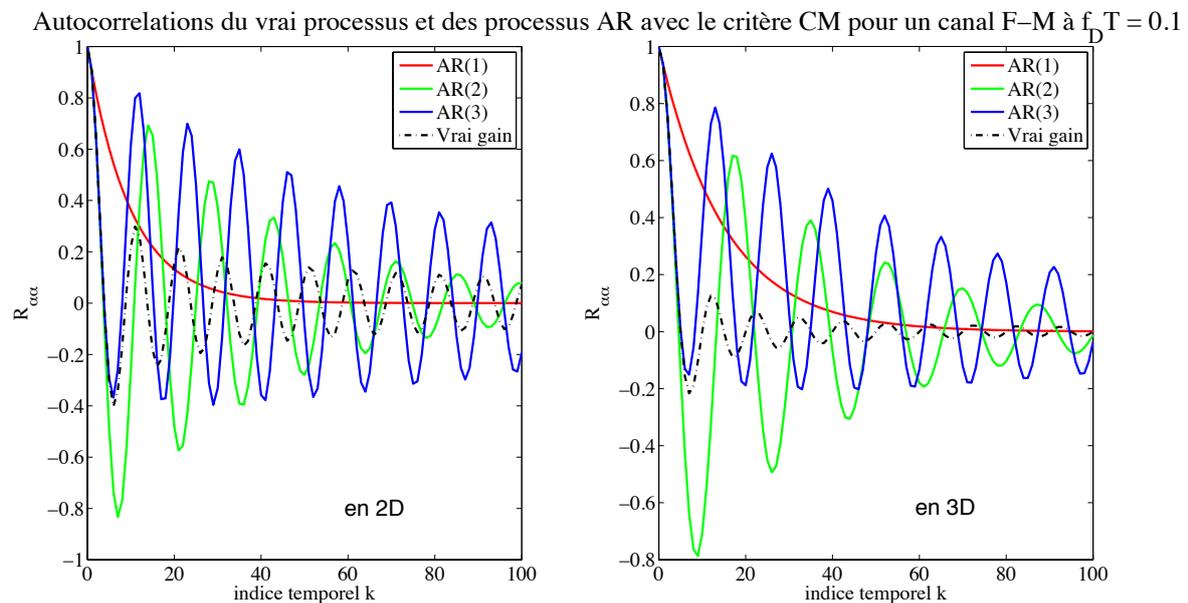


FIGURE 3.2 – Fonctions d'autocorrélations du vrai gain et du gain approché par des modèles AR(1), AR(2) et AR(3) dont les coefficients sont pris selon le critère de Correlation-Matching, pour un canal Fixe-Mobile à haute fréquence Doppler

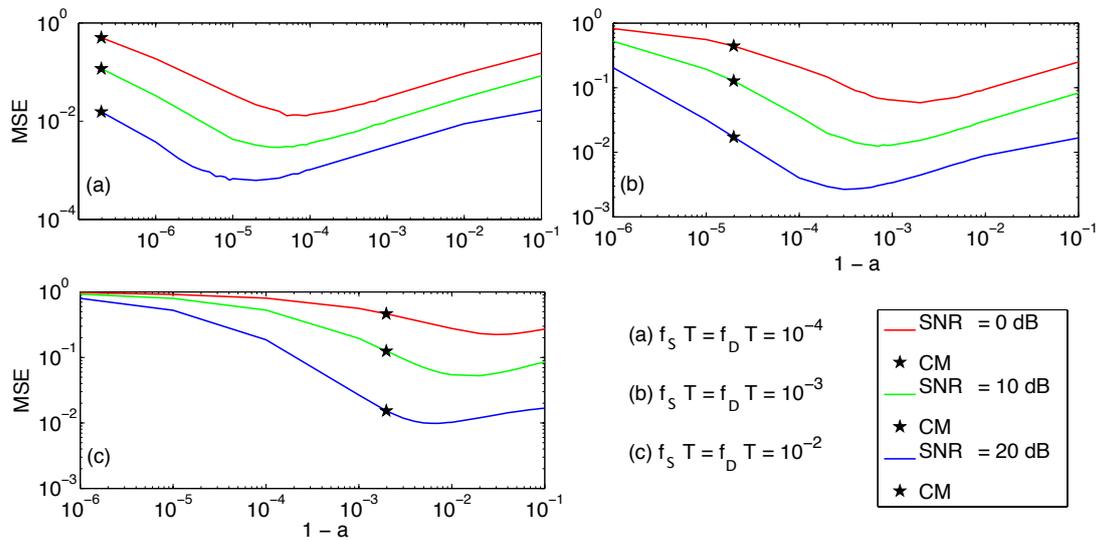


FIGURE 3.3 – Variation de l'erreur quadratique moyenne en fonction de a manuellement pour un canal Mobile-Fixe-Mobile en 2D

au cas de très basse fréquence Doppler (a). Ce résultat est cohérent avec l'analyse des Figures 3.1 et 3.2.

3.3 Filtre de Kalman

On considère un système dynamique causal, modélisé par les deux équations suivantes : une équation d'état, qui détermine l'évolution des paramètres inconnus, et une équation d'observation qui exprime le lien entre les observations et les états. Soit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_{k-1}; e_k) \\ \mathbf{y}_k &= h_k(\mathbf{x}_k; n_k) \end{aligned}$$

Le problème d'estimation optimale est celui de l'obtention récursive d'une estimée des états à partir des observations. On peut considérer trois cas différents :

- Filtrage : on veut estimer l'état à l'instant k , \mathbf{x}_k , à partir des observations jusqu'à cet instant, $\mathbf{y}_{1:k}$.
- Lissage : on veut estimer l'état à l'instant k , \mathbf{x}_k , à partir d'observations passées et futures, $\mathbf{y}_{1:k+k'}$, avec $k' > 0$.
- Prédiction : on veut prédire l'état à l'instant $k + k'$, avec $k' > 0$, $\mathbf{x}_{k+k'}$, à partir des observations jusqu'à l'instant k , $\mathbf{y}_{1:k}$.

Dans notre étude, nous nous intéressons au problème d'estimation "on-line" (filtrage). Nous allons utiliser le filtre de Kalman, également appelé l'estimateur linéaire quadratique.

En fait, le filtre de Kalman est largement utilisé dans de multiples applications. Il donne une solution optimale au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) dans le cas où le système est un vrai système linéaire Gaussien.

Autrement dit, c'est le filtre optimal utilisé pour estimer les états d'un véritable processus autorégressif avec bruit additif gaussien, d'une façon récursive : prédiction des états et correction à partir de la dernière observation obtenue [91].

Ici, le système serait "linéaire Gaussien" si les équations d'état et d'observation étaient obtenues avec un canal linéaire (de type processus autorégressif), et en présence d'un bruit d'observation n_k Gaussien. Les équations d'observation et d'évolution d'état sont linéaires vis à vis de l'état, et les bruits du système et de mesure, sont des bruits blancs additifs et Gaussiens (AWGN), d'où la nomination "linéaire Gaussien".

En appliquant le filtre de Kalman dans notre cas, nous arrivons à une solution d'estimation sous-optimale. Nous ne prétendons pas alors qu'il est l'estimateur optimal pour deux raisons à rappeler :

- La première raison est que dans cette étude, les vraies observations découlent du vrai processus qui n'est pas exactement un processus autorégressif.
- La deuxième raison est que n_k est blanc Gaussien seulement s'il n'y a aucun relais entre la source et la destination.

Et donc la porte reste ouverte pour la recherche d'autres solutions améliorées.

Dans la suite de travail de ce chapitre, on cherche à faire l'estimation à l'aide d'un filtre de Kalman vu que c'est la solution la plus simple. Elle a été proposée aussi par ([46], [53], [18]...).

3.3.1 Équations générales du filtre de Kalman

On va partir d'un cas général, avec les équations d'état et d'observation suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \end{aligned}$$

avec $e_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ et $n_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$.

- \mathbf{x}_k est le vecteur d'état à l'instant k
- \mathbf{F}_k est la matrice qui relie l'état précédent \mathbf{x}_{k-1} à l'état actuel \mathbf{x}_k
- \mathbf{u}_k est l'entrée de commande
- \mathbf{B}_k est la matrice qui relie l'entrée de commande \mathbf{u} à l'état \mathbf{x}
- e_k représente le vecteur du bruit d'état
- \mathbf{Q}_k est la matrice de covariance du bruit d'état
- \mathbf{y}_k représente l'observation à l'instant k
- \mathbf{H}_k est la matrice qui relie l'état \mathbf{x} à l'observation \mathbf{y}
- n_k représente le vecteur du bruit d'observation
- \mathbf{R}_k est la matrice de covariance du bruit d'observation

Ce système est donc un système linéaire Gaussien. Les équations du filtre de Kalman sont alors les suivantes [44] :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k|k-1}] \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1} \end{aligned}$$

où les deux premières équations désignent l'étape de prédiction, la troisième équation calcule le gain de Kalman, et les deux dernières équations sont les équations d'estimation (mise à jour de la covariance et de l'état).

- \mathbf{K}_k est le gain de Kalman à l'instant k
- $\mathbf{P}_{k|k-1}$ est la matrice d'estimation a priori de la covariance de l'erreur.
- \mathbf{P}_k est la matrice de covariance de l'erreur
- $\mathbf{x}_{k|k-1}$ est l'estimation à priori de l'état à l'instant k sans prise en compte de l'observation à l'instant k
- $\hat{\mathbf{x}}_k$ est l'estimation de l'état à l'instant k après correction et prise en compte de l'observation à l'instant k
- \mathbf{I} est la matrice d'identité

Rappelons que pour notre étude, on n'a pas de commande ($\mathbf{B}_k = 0$).

La linéarité provient de l'utilisation d'un modèle autorégressif du gain du canal α , qui est à estimer (voir l'équation (3.1)).

Le bruit d'état étant donné par $e_k = [e_k \ 0 \ \dots \ 0]$ de matrice de covariance \mathbf{Q}_k nulle partout sauf pour le premier élément $Q_k(1, 1) = \sigma_e^2$ (σ_e^2 donnée par l'équation (3.8)).

Dans ce cas, l'observation est y_k (scalaire) et le bruit d'observation est n_k de variance $R_k = \sigma_n^2$ (voir l'équation (2.1), discrète en temps).

Nous obtenons alors une modélisation du problème avec une équation d'état et une équation d'observation approchées suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_k e_k \\ y_k \approx \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + n_k \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = [\tilde{\alpha}_k \ \tilde{\alpha}_{k-1} \ \tilde{\alpha}_{k-2} \ \dots \ \tilde{\alpha}_{k-p+1}]^\top \\ \Gamma_k = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^\top \\ \mathbf{H}_k = [s_k \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \end{cases}$$

et

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

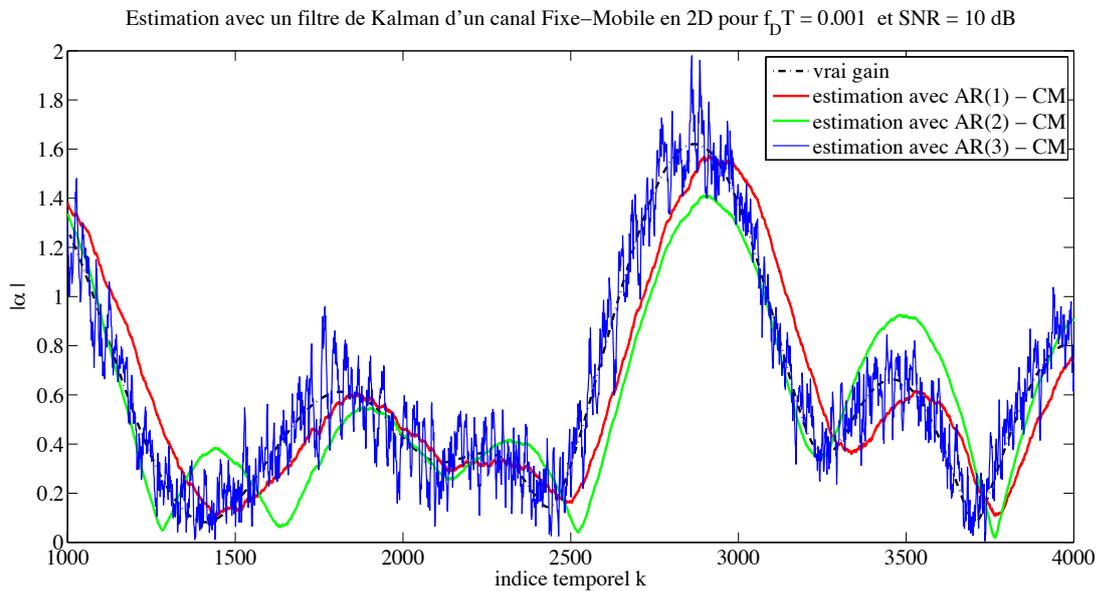


FIGURE 3.4 – Estimation d'un canal Fixe-Mobile à haute fréquence Doppler, avec le filtre de Kalman, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM

Dans les Figures 3.4 et 3.5, on voit les estimations d'un canal Fixe-mobile par un filtre de Kalman, en modélisant le canal par des modèles autorégressifs d'ordre 1, 2 et 3, pour haute et

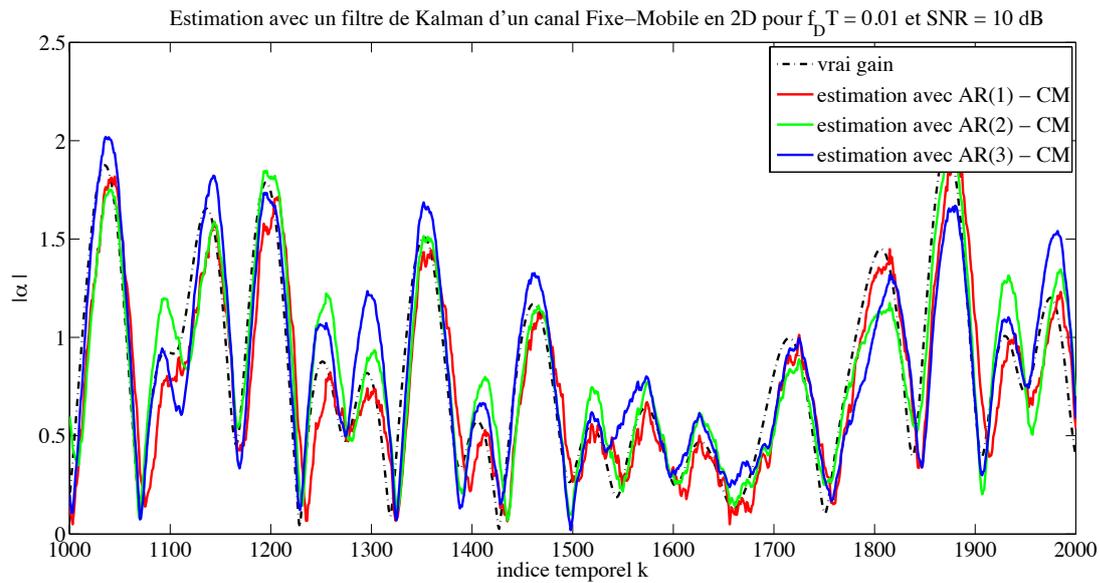


FIGURE 3.5 – Estimation d'un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler, avec le filtre de Kalman, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM

basse fréquence Doppler normalisée respectivement.

On voit qu'à basse fréquence, l'estimation avec un modèle AR(3) est plus bruitée mais plus centrée autour du vrai gain, et donc l'erreur quadratique moyenne prend presque la même valeur entre les trois modèles. Il n'y a pas donc une grande différence dans ces estimations, et on serait tenté de dire que le modèle AR(1) est suffisant. En fait, [92] a justifié que le modèle AR(1) est suffisant pour un canal de Rayleigh à spectre de Jakes. Dans la suite, on va alors continuer avec le modèle AR(1).

On voit aussi dans la Figure 3.6 que le gain de Kalman converge rapidement dans le cas des trois modèles, ce qui peut être intéressant pour l'analyse du comportement du filtre de Kalman en régime asymptotique.

3.3.2 Filtre de Kalman avec un modèle AR(1)

Comme on a dit avant, on peut prendre le cas d'un modèle autorégressif d'ordre 1 car il semble suffisant ainsi qu'il est plus simple. Le coefficient a_1 est noté tout simplement a . Dans ce cas, $\mathbf{x}_k = \tilde{\alpha}_k$, $\mathbf{F}_k = a$ et $\mathbf{Q}_k = \sigma_e^2 = (1 - a^2)R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}$ (d'après l'équation (3.5)). L'équation d'état est donnée par (3.3).

Le paramètre à estimer est α_k . On suppose que l'estimation du vrai α_k est la même que l'estima-

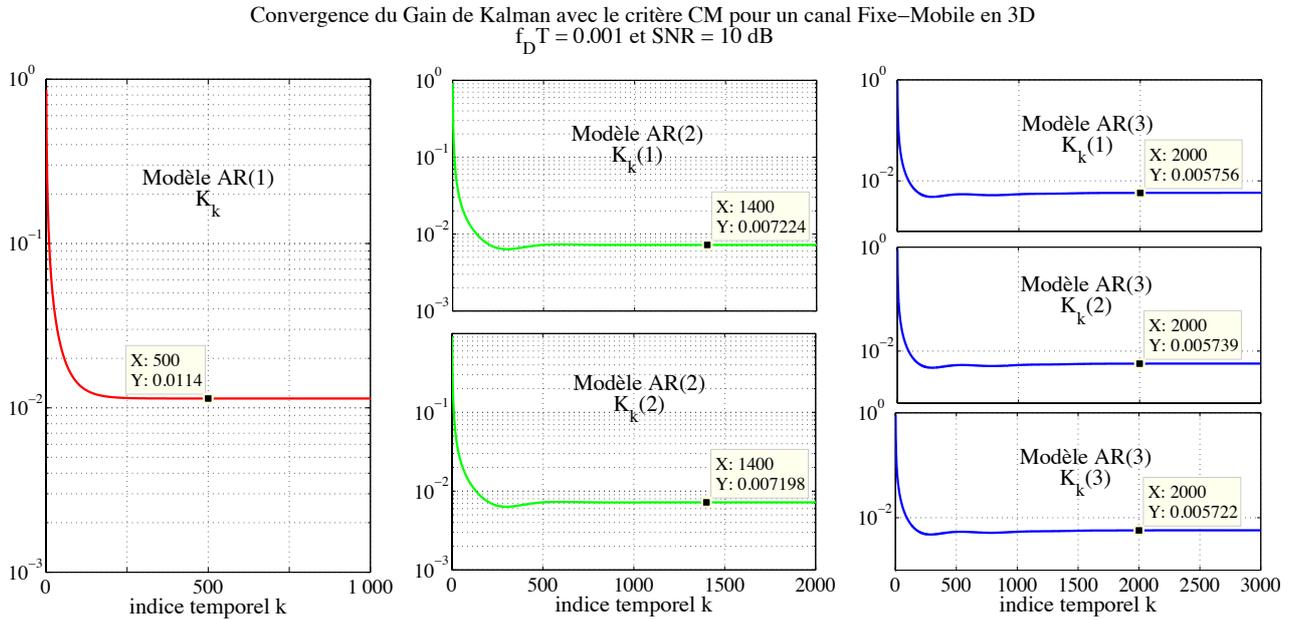


FIGURE 3.6 – Convergence du gain de Kalman pour l'estimation d'un canal Fixe-Mobile à basse fréquence Doppler, pour des modélisations AR(1), AR(2) et AR(3), avec le critère CM

tion de $\tilde{\alpha}_k$, et on note $\hat{\alpha}_k$ cet estimateur non biaisé.

Aussi, $\mathbf{H}_k = s_k$ et $\mathbf{R}_k = \sigma_n^2$.

Pour l'analyse théorique, on suppose les symboles parfaitement connus (décodés, $s_k = 1$, et donc $E_S = 1$ dans l'équation (2.20)). Ceci peut représenter par exemple la transmission via un canal à trajets multiples, sélectif en fréquence, dans un système OFDM, pour chaque sous-porteuse pilote.

L'équation d'observation (2.1) sera approchée et simplifiée :

$$y_k \approx \tilde{\alpha}_k + n_k \quad (3.11)$$

Rappelons aussi l'équation d'état pour un modèle AR(1) :

$$\tilde{\alpha}_k = a\tilde{\alpha}_{k-1} + e_k$$

Les équations du filtre de Kalman seront simplifiées [44] :

$$K_k = [a^2 P_{k-1} + \sigma_e^2] / [a^2 P_{k-1} + \sigma_e^2 + \sigma_n^2] \quad (3.12)$$

$$P_k = (1 - K_k)(a^2 P_{k-1} + \sigma_e^2) \quad (3.13)$$

$$\hat{\alpha}_k = a \hat{\alpha}_{k-1} + K_k (y_k - a \hat{\alpha}_{k-1}) \quad (3.14)$$

Rappelons que K_k est le gain de Kalman à l'iteration k , P_k est la variance de l'erreur d'estimation.

3.3.3 Valeur asymptotique du Gain de Kalman

On considère le système linéaire des deux équations (3.3) et (3.11). Il est observable et contrôlable, et donc un régime asymptotique est vite atteint ([20]). Nous calculons les valeurs asymptotiques du Gain de Kalman (K_∞) et de la variance de l'erreur (P_∞) basés sur (3.12) et (3.13), sachant (3.6). Ce qui consiste à résoudre les équations dites de Riccati :

$$P_\infty = \frac{\sigma_n^2(a^2 - 1) - \sigma_e^2 + \sqrt{\Delta}}{2a^2}$$

$$K_\infty = \frac{a^2 P_\infty + \sigma_e^2}{a^2 P_\infty + \sigma_e^2 + \sigma_n^2}$$

avec $\Delta = (\sigma_n^2 + \sigma_e^2 - a^2 \sigma_n^2)^2 + 4a^2 \sigma_n^2 \sigma_e^2$.

On suppose $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2$, et nous travaillons dans un intervalle de $SNR_{dB} > 0$ dB, ce qui veut dire que

$$\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2 < \sigma_\alpha^2$$

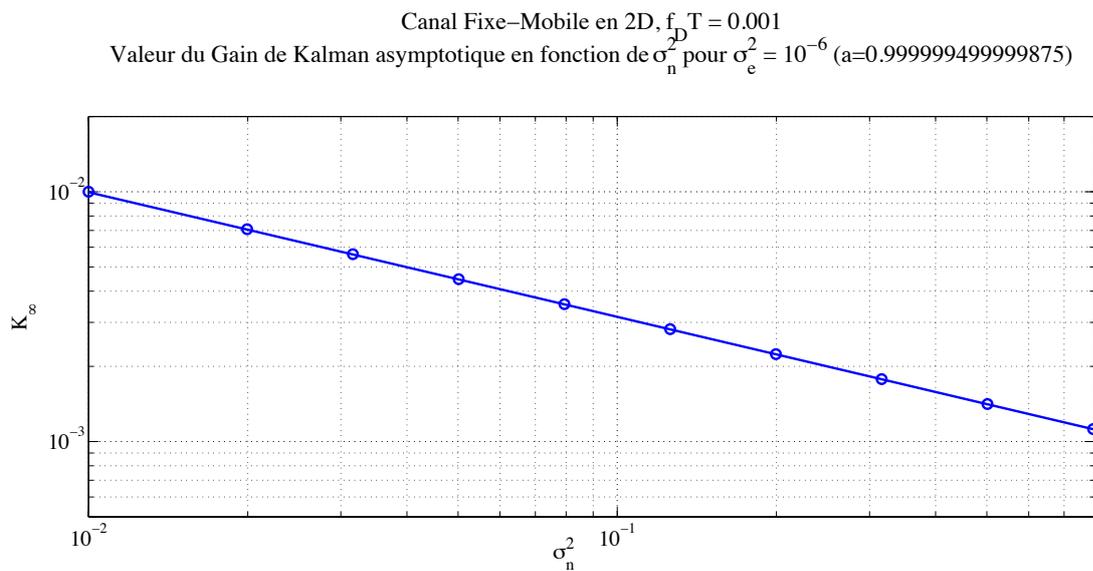
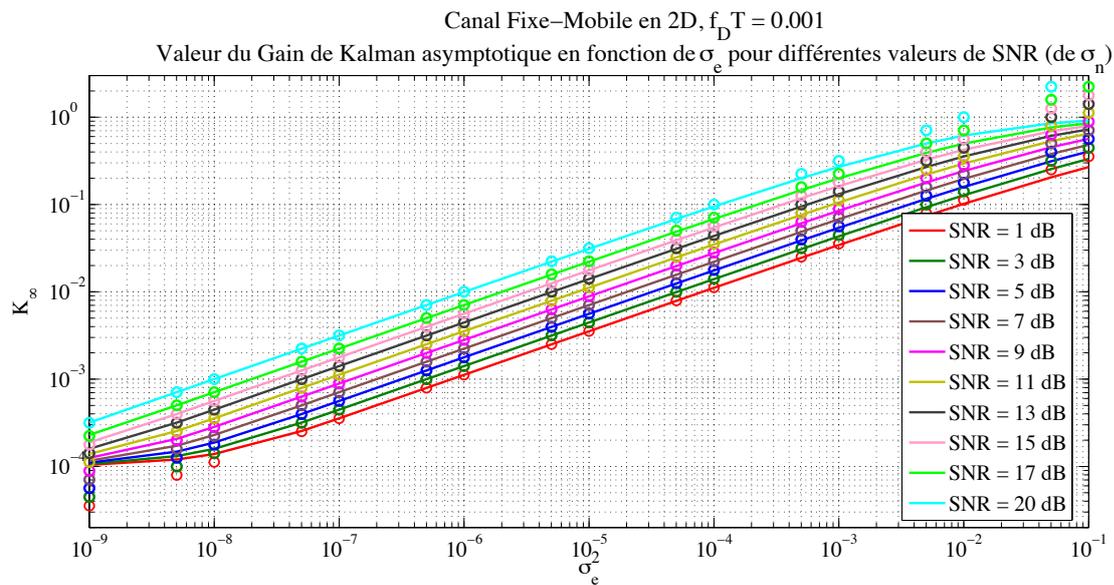
Ainsi, sous cette hypothèse, nous pouvons approximer la valeur du gain de Kalman (voir annexe E)

$$\boxed{K_\infty \approx \frac{\sigma_e}{\sigma_n}} \quad (3.15)$$

On a lancé le filtre de Kalman pour un canal Fixe-Mobile à la fréquence Doppler $f_D T = 10^{-3}$, modélisé par un modèle $AR(1)$, avec des valeurs différentes de a (donc de σ_e^2) et de σ_n^2 (donc de SNR_{dB}). On a $\sigma_\alpha^2 = 1$.

On a tiré ensuite la valeur du gain de Kalman après 1000 itérations (en supposant qu'à cet instant la convergence a été établie), et tracé la valeur du gain à ce moment (supposé donc K_∞) en fonction de $\sigma_e^2 = \sigma_\alpha^2(1 - a^2)$ sur la Figure 3.7 puis en fonction de σ_n^2 sur la Figure 3.8.

Sur la Figure 3.7, les courbes correspondent aux valeurs tirées expérimentalement, et les ronds



correspondent à la valeur théorique selon l'équation (3.15). K_∞ varie linéairement en fonction de σ_e dans l'échelle logarithmique, ce qui valide notre équation. On voit que la formule de l'équation (3.15) est vérifiée expérimentalement dans la plupart des cas. Cependant :
 Quand σ_e^2 devient très faible, ($\sigma_e^2 < 10^{-7}$), les valeurs expérimentales et théoriques ne coïncident

pas pour la simple raison que dans ce cas la valeur de a devient très grande, et donc on a besoin de plus que 1000 itérations pour la convergence.

Quand σ_e^2 devient grande ($\sigma_e^2 > 10^{-2}$), les valeurs expérimentales et théoriques ne coïncident pas quand la valeur du SNR_{dB} est relativement grande. Par exemple, quand $\sigma_e^2 = 10^{-2}$ et $SNR_{dB} > 13$ dB, alors $\sigma_n^2 < 5 \cdot 10^{-2}$ n'est pas très grande devant σ_e^2 . Un autre exemple, quand $\sigma_e^2 = 10^{-1}$, il faut que $\sigma_n^2 \geq 1$ ($SNR_{dB} \leq 0$ dB) pour que l'hypothèse $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2$ soit vérifiée, et que notre formule approchée soit valable.

Dans la Figure 3.7, on voit que K_∞ est fonction de $\frac{1}{\sigma_n}$. En fait la courbe est tracée pour $\sigma_e^2 = 10^{-6}$, et son équation obtenue graphiquement est $\log_{10}(K_\infty) = -0.5 \log_{10}(\sigma_n^2) - 3 = \log_{10}(\frac{\sigma_e}{\sigma_n})$. Ainsi l'équation (3.15) est bien validée.

3.4 Analyse de l'erreur quadratique moyenne

Dans un premier temps, on a calculé le gain asymptotique. Maintenant, avant de chercher des solutions d'amélioration au filtre de Kalman basé sur un modèle $AR(1)$ dont le paramètre a été fixé par le critère CM , il paraît opportun d'analyser théoriquement pour le modèle $AR(1)$ (le plus simple et le plus utilisé), les différentes composantes de cette erreur. On va chercher à séparer l'erreur en deux parties : l'une provenant de la dynamique du modèle, et l'autre du bruit d'observation.

On cherchera en particulier les expressions mathématiques de l'erreur en fonction des paramètres d'intérêt (les fréquences normalisées $f_i T$, SNR_{dB} et du paramètre a du modèle $AR(1)$). On s'intéressera au cas des faibles SNR_{dB} (entre 0 dB et 30 dB) et aux faibles fréquences Doppler (entre 10^{-4} et 10^{-2}).

On analyse l'erreur dans le régime asymptotique, et on utilise la transformée de Z (\mathcal{Z}) de l'équation (3.14) :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(z) &= L(z)Y(z) \\ L(z) &= \frac{K_\infty z}{z - a(1 - K_\infty)} \\ \varepsilon(z) &= [1 - L(z)]\alpha(z) - L(z)N(z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$L(z)$ est la fonction de transfert entre le vrai gain bruité (α) et le gain estimé ($\hat{\alpha}$), $\varepsilon(z) = \mathcal{Z}(\varepsilon(k))$, et $\varepsilon(k) = \alpha_k - \hat{\alpha}_k$. L'erreur est composée de deux parties, l'erreur dynamique reliée à α_k , et

l'erreur statique reliée à n_k :

$$MSE = \mathbb{E}\{|\varepsilon(k)|^2\} = MSE_1 + MSE_2 \quad (3.17)$$

$$MSE_1 = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} |1 - L(e^{j2\pi fT})|^2 \Gamma_\alpha(f) df \quad (3.18)$$

$$MSE_2 = \int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi fT})|^2 \Gamma_n(f) df \quad (3.19)$$

où $\Gamma_\alpha(f)$ est la densité spectrale de puissance du gain total du canal, définie dans la section 2.5, et $\Gamma_n(f)$ et la DSP du bruit n_k .

– Analyse de MSE_1

On peut voir, sur la Figure F.1, que $1 - L(e^{j2\pi fT})$ est essentiellement un filtre passe haut avec fréquence de coupure f_c , et une autre fréquence très basse f_{VLF} .

En fait, pour les basses fréquences normalisées, *i.e.* pour $fT < f_{max}T \ll 1$, on peut supposer que $z^{-1} = e^{-j2\pi fT} \approx 1 - j2\pi fT$

En utilisant cette approximation dans l'équation (3.16), on aura

$$\left|1 - L(e^{j2\pi fT})\right|^2 \approx \left|\frac{2\pi f_{VLF}T + j2\pi fT}{2\pi f_cT + j2\pi fT}\right|^2$$

$$\text{où } 2\pi f_{VLF}T = \frac{1}{a} - 1 \text{ et } 2\pi f_cT = \frac{1 - a(1 - K_\infty)}{a(1 - K_\infty)}$$

Ces deux fréquences de coupures peuvent être approchées sachant l'hypothèse $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2 < \sigma_\alpha^2$: (voir annexe F)

$$- 2\pi f_{VLF}T \approx \frac{\sigma_e^2}{2\sigma_\alpha^2}$$

$$- 2\pi f_cT \approx \frac{\sigma_e}{\sigma_n}$$

f_{VLF} a un effet négligeable sur la valeur de MSE . Et donc, seulement l'asymptote médiane rentre dans le calcul de MSE_1 , *i.e.* $\left|1 - L(e^{j2\pi fT})\right|^2 \approx \left|\frac{2\pi fT}{2\pi f_cT}\right|^2 \approx \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} |2\pi fT|^2$. D'où

$$\begin{aligned} MSE_1 &\approx \frac{\sigma_n^2}{(1 - a^2)\sigma_\alpha^2} \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi fT)^2 \Gamma_\alpha(f) df \\ &\approx \frac{\sigma_n^2}{(1 - a^2)\sigma_\alpha^2} I_\alpha \end{aligned} \quad (3.20)$$

où

$$I_\alpha = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi fT)^2 \Gamma_\alpha(f) df \quad (3.21)$$

et f_{max} est le support de $\Gamma_\alpha(f)$ vu dans l'équation (2.16).

Ainsi, pour un modèle de canal stationnaire donné défini par sa fonction d'autocorrélation temporelle, ou de manière équivalente par son spectre Doppler $\Gamma_\alpha(f)$, on pourra calculer la valeur de la constante I_α , et déduire la valeur de l'erreur quadratique moyenne dynamique.

– Analyse de MSE_2

n_k est assimilé à un bruit blanc additif Gaussien, discret en temps, de période symboles (pas) T . La densité spectrale du bruit d'observation est ainsi (Voir annexe G) :

$$\Gamma_n(f) = \sigma_n^2 T \quad \text{pour} \quad \frac{-1}{2T} < f < \frac{1}{2T} \quad (3.22)$$

En utilisant les équations (3.16) et (3.22), on calcule MSE_2 pour obtenir (voir annexe G) :

$$MSE_2 = \frac{K_\infty^2 \sigma_n^2}{1 - a^2 (1 - K_\infty)^2}$$

D'après l'équation (3.6), l'expression approximative de K_∞ dans l'équation (3.15), et sous l'hypothèse $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2$, on a :

$$MSE_2 \approx \sigma_n^2 \frac{\sigma_e}{2\sigma_n} = \frac{\sqrt{(1-a^2)} \sigma_n \sigma_\alpha}{2} \quad (3.23)$$

– MSE minimal

Enfin, d'après les équations (3.17), (3.20) et (3.23), on écrit facilement MSE en fonction du paramètre a :

$$MSE(a) = \frac{\Omega}{1-a^2} + \beta \sqrt{1-a^2} \quad (3.24)$$

où

$$\begin{cases} \Omega &= \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} I_\alpha \\ \beta &= \frac{\sigma_n \sigma_\alpha}{2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Sur la Figure 3.9, on voit les différentes composantes de l'erreur calculées par intégrations numériques de $L(z)$, ainsi que nos formules approchées (équations (3.20), (3.23) et (3.24)),

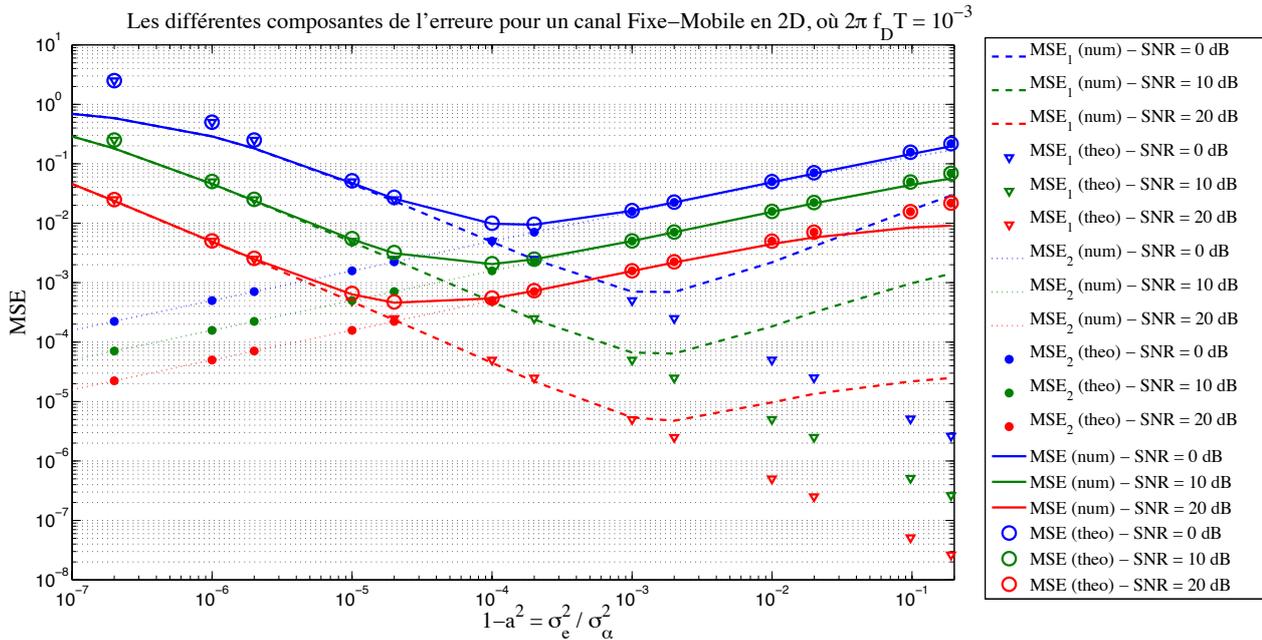


FIGURE 3.9 – Vérification de nos approximations des différentes composantes de l'erreur (MSE_1 , MSE_2 et le total MSE) par intégration numérique

pour le cas d'un canal Fixe-Mobile avec $f_D T = 10^{-3}$. On voit que nos formules approchées sont bien adoptées pour $10^{-6} < \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} < 10^{-3}$.

Quand la valeur de σ_e^2 augmente plus que 10^{-3} , la formule théorique de MSE_2 reste bonne (courbes pointillées et points), par contre, celle de MSE_1 montre des erreurs (courbes en tirets et triangles), elle est sous-estimée. Ceci est normal car $2\pi f_{VLF} T$ augmente avec σ_e^2 , et dans ce cas, l'hypothèse $2\pi f_{VLF} T \lll 2\pi f_{max} T$ n'est plus bonne. Mais on voit quand même que MSE_2 est dominante pour σ_e^2 relativement grande. Ainsi, dans ce cas, la formule théorique de MSE reste adéquate.

Quand la valeur de σ_e^2 diminue en dessous de 10^{-6} , la formule théorique de MSE_2 reste bonne, par contre, celles de MSE_1 et de MSE (courbe continue et ronds) sont sur-estimées si $SNR_{dB} = 0$ dB seulement. Ceci est dû au fait que $2\pi f_{max} T < 2\pi f_c T$ n'est plus respectée car $2\pi f_c T$ diminue quand σ_e^2 diminue et σ_n^2 augmente.

En gros, la formule théorique de la somme $MSE(a)$ (équation (3.24)) est vérifiée par le calcul numérique, surtout sur l'intervalle qui donne la valeur minimale de MSE .

3.5 Optimisation du paramètre du modèle $AR(1)$ selon le critère MAV

Dans cette section, nous proposons de trouver la valeur du coefficient $AR(1)$ qui donne la variance minimum de l'erreur d'estimation en régime asymptotique. Ce coefficient sera noté a_{MAV} et vérifie : $\frac{dMSE}{da} = 0$ et donc $(1 - a_{MAV}^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\Omega}{\beta}$.

Le coefficient a_{MAV} choisi sous le critère MAV , et l'expression de l'erreur quadratique moyenne y correspondante $MSE_{MAV} = MSE(a_{MAV})$ seront donc donnés en fonction de I_α (qui dépend de la densité spectrale de puissance $\Gamma_\alpha(f)$, comme vu dans l'équation (3.21)) :

$$a_{MAV} = \sqrt{1 - \left[\frac{2\Omega}{\beta}\right]^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{16\sigma_n^2 I_\alpha^2}{\sigma_\alpha^6}}} \quad (3.26)$$

$$MSE_{MAV} = \Omega \left[\frac{\beta}{2\Omega}\right]^{\frac{2}{3}} + \beta \left[\frac{2\Omega}{\beta}\right]^{\frac{1}{3}} = 3 \left(\frac{\Omega\beta^2}{4}\right)^{1/3} = \left[\frac{27}{16}\sigma_n^4 I_\alpha\right]^{1/3} \quad (3.27)$$

3.5.1 Calcul de I_α en mode de diffusion $3D$

On commence par calculer l'expression analytique de I_α pour un mode de diffusion $3D$ puisque dans ce cas, l'expression de la DSP $\Gamma_\alpha(f)$ est plus simple.

Rappelons que (équation (3.21))

$$I_\alpha = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi fT)^2 \Gamma_\alpha(f) df$$

I_α est donc, au facteur $(2\pi T)^2$ près, le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire X qui aurait pour DDP $P_X(x)$ égale à la DSP $\Gamma_\alpha(f)$ (voir la section 2.5.3.2 Allure asymptotique de la Densité Spectrale de Puissance).

On a vu dans la section 2.5 que la DSP est un produit de convolution de plusieurs DSP élémentaires sur chaque lien. Et on a vu ensuite que la DSP élémentaire de chaque lien est calculée à partir d'un spectre élémentaire $S_{3,f_i}(f)$.

Donc on peut calculer I_α à travers le produit de convolution des $S_{3,f_i}(f)$. On commence dans le cas d'aucune convolution (canal fixe-mobile), puis dans le cas d'une convolution (canal mobile-mobile), et ensuite dans le cas général de plusieurs convolutions.

3.5.1.1 Pour un canal fixe-mobile, en mode de diffusion 3D

D'après l'équation (3.21) et l'expression de Γ_α dans le cas d'un lien fixe-mobile (équation (2.12)), on calcule la valeur de I_α (qu'on note $I_{\alpha SD}$) pour un canal direct entre la source fixe et la destination bougeant à la fréquence f_D :

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha SD} &= \int_{-f_D}^{+f_D} (2\pi T)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2f_D} f^2 df \\
 &= (2\pi T)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2f_D} \left[\frac{f^3}{3} \right]_{-f_D}^{f_D} = \frac{\sigma_\alpha^2 (2\pi f_D T)^2}{3} \\
 &= \frac{\sigma_\alpha^2 ((2\pi f_D T)^2 + (2\pi f_S T)^2)}{3}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.5.1.2 Pour un canal mobile-mobile à mêmes vitesses, en mode de diffusion 3D

La source et la destination bougent à la même vitesse, $f_S = f_D$, et Γ_α est donnée par l'équation (2.13) :

$$\Gamma_\alpha(f) = \frac{\sigma_\alpha^2}{4f_D^2} \begin{cases} -f + 2f_D & \text{si } 0 \leq f \leq 2f_D \\ f + 2f_D & \text{si } -2f_D \leq f \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, on peut calculer $I_{\alpha SD}$ d'après l'équation (3.21)

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha SD} &= \int_{-2f_D}^{+2f_D} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha(f) df \\
 &= 2 \int_0^{2f_D} (2\pi T)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{4f_D^2} (-f^3 + 2f_D f^2) df \\
 &= (2\pi T)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2f_D^2} \left[-\frac{(2f_D)^4}{4} + \frac{2f_D(2f_D)^3}{3} \right]_0^{2f_D} \\
 &= (2\pi T)^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2f_D^2} \left[\frac{(2f_D)^4}{12} \right] = \frac{2\sigma_\alpha^2 (2\pi f_D T)^2}{3} \\
 &= \frac{\sigma_\alpha^2 ((2\pi f_D T)^2 + (2\pi f_S T)^2)}{3}
 \end{aligned}$$

3.5.1.3 Pour un canal mobile-mobile à vitesses différentes, en mode de diffusion 3D

La source et la destination bougent à différentes vitesses. Ainsi, f_S et f_D ne sont pas égales et Γ_α est donnée par l'équation (2.14) :

$$I_{\alpha^{SD}} = (2\pi T)^2 \frac{\sigma_{\alpha}^2}{4f_S f_D} \quad (2J)$$

avec

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{f_D - f_S} (2f^2 f_S) df + \int_{f_D - f_S}^{f_D + f_S} (f_D + f_S) f^2 df - \int_{f_D - f_S}^{f_D + f_S} f^3 df \\ &= \frac{(2f_S - (f_D + f_S))(f_D - f_S)^3}{3} + \frac{(f_D + f_S)^4}{3} - \frac{(f_D + f_S)^4}{4} + \frac{(f_D - f_S)^4}{4} \\ &= \frac{(f_D + f_S)^4}{12} - \frac{(f_D - f_S)^4}{12} = \frac{8f_D^3 f_S + 8f_D f_S^3}{12} \end{aligned}$$

Ainsi

$$I_{\alpha^{SD}} = \frac{\sigma_{\alpha}^2 ((2\pi f_D T)^2 + (2\pi f_S T)^2)}{3}$$

3.5.1.4 Calcul de I_{α} pour un canal avec "N" relais en mode de diffusion 3D

On a dit dans la section 2.5.2 que dans un mode de diffusion 3D,

$$\Gamma_{\alpha}(f) = \sigma_{\alpha}^2 S_{3,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{3,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{3,f_i} \otimes S_{3,f_D}$$

de support $[-f_{max}; +f_{max}]$, avec $f_{max} = \sum_{i=1}^{N+1} (f_i + f_{i-1}) = f_S + 2\sum_{i=1}^N f_i + f_D$

à qui correspond $I_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha}(f) df = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha}(f) df$ à calculer.

$$\text{Normalisons } \Gamma_{\alpha}(f) : \Gamma_{\alpha}^{norm}(f) = \frac{\Gamma_{\alpha}(f)}{\sigma_{\alpha}^2} = S_{3,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{3,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{3,f_i} \otimes S_{3,f_D},$$

$$\text{et calculons } I_{\alpha}^{norm} = \frac{I_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}^2} = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha}^{norm}(f) df.$$

$$\text{Posons } \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) = S_{3,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{3,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{N-1} S_{3,f_i} \otimes S_{3,f_D}$$

de support rapidement déduit $[-f_{max^*}; +f_{max^*}]$ où $f_{max^*} = f_S + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_i + f_N + f_D$

$$\text{à qui correspond } I_{\alpha^*}^{norm} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) df = \int_{-f_{max^*}}^{+f_{max^*}} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) df$$

Comme $\Gamma_{\alpha}^{norm}(f) = (\Gamma_{\alpha^*}^{norm} \otimes S_{3,f_N})(f)$, on peut exprimer l'expression de I_{α}^{norm} en fonction de

$I_{\alpha^*}^{norm}$.

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^{norm} &= \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi fT)^2 \Gamma_{\alpha}^{norm}(f) df \\
&= \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi fT)^2 (\Gamma_{\alpha^*}^{norm} \otimes S_{3,f_N})(f) df \\
&= \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi fT)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) S_{3,f_N}(f-\tau) d\tau df \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\int_{-f_{max}}^{+f_{max}} f^2 S_{3,f_N}(f-\tau) df \right) d\tau \\
&= \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} (2\pi T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\int_{-f_{max}}^{+f_{max}} f^2 S_{3,f_N}(f-\tau) df \right) d\tau
\end{aligned}$$

Or d'après l'équation (2.15), $S_{3,f_N}(f-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2f_N} & \text{si } -f_N + \tau \leq f \leq f_N + \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

avec $-f_{max}^* < \tau < f_{max}^*$, et $f_{max} = f_{max}^* + f_N$, donc $-f_{max} < -f_N + \tau$ et $f_N + \tau < f_{max}$

D'où

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^{norm} &= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\int_{-f_N + \tau}^{f_N + \tau} \frac{f^2}{2f_N} df \right) d\tau \\
&= \frac{(2\pi T)^2}{2f_N} \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{(f_N + \tau)^3 - (-f_N + \tau)^3}{3} \right) d\tau \\
&= \frac{(2\pi T)^2}{2f_N} \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{2}{3} f_N^3 + 2f_N \tau^2 \right) d\tau \\
&= \frac{(2\pi f_N T)^2}{3} \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) d\tau + I_{\alpha^*}^{norm} \\
&= \frac{(2\pi f_N T)^2}{3} .1 + I_{\alpha^*}^{norm}
\end{aligned}$$

Ainsi, à chaque fois qu'on ajoute un spectre élémentaire S_{3,f_i} sur le produit de convolution dans $\Gamma_{\alpha}^{norm}(f)$, on additionne $\frac{(2\pi f_i T)^2}{3}$ sur la valeur de I_{α}^{norm} .

On en déduit que $I_{\alpha}^{norm} = \frac{(2\pi f_S T)^2}{3} + \sum_{i=1}^N 2 \frac{(2\pi f_i T)^2}{3} + \frac{(2\pi f_D T)^2}{3} = \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{3}$.

On redéduit alors la valeur de $I_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 I_{\alpha}^{norm}$:

$$\boxed{I_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{3}} \quad (3.29)$$

avec

$$f_{eq}^2 = f_S^2 + 2 \sum_{i=1}^N f_i^2 + f_D^2 \quad (3.30)$$

3.5.2 Calcul de I_α en mode de diffusion 2D

Le même raisonnement se fait pour les cas de diffusion 3D et 2D. Ici, on va passer du cas fixe-mobile (aucune convolution) au cas général directement par récursivité.

3.5.2.1 Pour un canal fixe-mobile, en mode de diffusion 2D

Sans perte de généralité, on peut supposer que la source est fixe, et la destination est mobile. La vitesse de la destination est v_D , la fréquence Doppler correspondante est f_D . Le gain du canal étant α , sa densité spectrale de puissance est $\Gamma_\alpha(f) = \sigma_\alpha^2 S_{2,f_D}$ d'après les équations (2.10) et (2.11). On doit calculer $I_\alpha = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha(f) df$. On le note I_{α^D} (car seule la destination bouge) :

$$I_{\alpha^D} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\alpha^2 (2\pi f T)^2 S_{2,f_D}(f) df$$

Le calcul est vite fait : Il faut faire un changement de variable $f = f_D \cos(u)$, puis remplacer $\cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$

$$\begin{aligned} I_\alpha = I_{\alpha^D} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\alpha^2 (2\pi f T)^2 S_{2,f_D}(f) df \\ &= 2 \int_0^{+f_D} \frac{\sigma_\alpha^2 (2\pi f T)^2}{\pi \sqrt{f_D^2 - f^2}} df \\ &= 2 \int_\pi^0 \frac{\sigma_\alpha^2 (2\pi f_D \cos(u) T)^2}{\pi \sqrt{f_D^2 (1 - \cos(u)^2)}} (-f_D \sin(u) du) \\ &= \frac{2\sigma_\alpha^2 (2\pi f_D T)^2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(u) du \\ &= \frac{2\sigma_\alpha^2 (2\pi f_D T)^2}{\pi} \left[\frac{u + \sin(2u)}{2} \right]_0^\pi \\ &= \sigma_\alpha^2 (2\pi f_D T)^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.5.2.2 Calcul de I_α pour un canal avec "N" relais en mode de diffusion 2D

Dans un mode de diffusion 2D, on a dit dans la section 2.5.1 que

$$\Gamma_\alpha(f) = \sigma_\alpha^2 S_{2,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{2,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{2,f_i} \otimes S_{2,f_D}$$

de support $[-f_{max}; +f_{max}]$, avec $f_{max} = \sum_{i=1}^{N+1} (f_i + f_{i-1}) = f_S + 2 \sum_{i=1}^N f_i + f_D$

à qui correspond $I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha(f) df = \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha(f) df$ à calculer.

Comme nous avons fait avec un mode de diffusion 3D, nous allons calculer la valeur normalisée de I_α par récursivité.

$$I_\alpha^{norm} = \frac{I_\alpha}{\sigma_\alpha^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha^{norm}(f) df$$

$$\text{où } \Gamma_\alpha^{norm}(f) = \frac{\Gamma_\alpha(f)}{\sigma_\alpha^2}$$

$$\text{Posons } \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) = S_{2,f_S} \otimes \bigotimes_{i=1}^N S_{2,f_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{N-1} S_{2,f_i} \otimes S_{2,f_D}$$

de support rapidement déduit $[-f_{max^*}; +f_{max^*}]$ où $f_{max^*} = f_S + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f_i + f_N + f_D$

$$\text{à qui correspond } I_{\alpha^*}^{norm} = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) df = \int_{-f_{max^*}}^{+f_{max^*}} (2\pi f T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(f) df$$

Comme $\Gamma_\alpha^{norm}(f) = (\Gamma_{\alpha^*}^{norm} \otimes S_{2,f_N})(f)$, on peut exprimer l'expression de I_α^{norm} en fonction de $I_{\alpha^*}^{norm}$ (même raisonnement qu'avec une diffusion 3D) :

$$\begin{aligned} I_\alpha^{norm} &= \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 \Gamma_\alpha^{norm}(f) df \\ &= \int_{-f_{max}}^{+f_{max}} (2\pi f T)^2 (\Gamma_{\alpha^*}^{norm} \otimes S_{2,f_N})(f) df \\ &= \int_{-f_{max^*}}^{+f_{max^*}} (2\pi T)^2 \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\int_{-f_{max}}^{+f_{max}} f^2 S_{2,f_N}(f - \tau) df \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Or d'après l'équation (2.11), } S_{2,f_N}(f - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{f_N^2 - (f - \tau)^2}} & \text{si } -f_N + \tau < f < f_N + \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $-f_{max^*} < \tau < f_{max^*}$, et $f_{max} = f_{max^*} + f_N$, donc $-f_{max} < -f_N + \tau$ et $f_N + \tau < f_{max}$

D'où

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^{norm} &= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\int_{-f_N+\tau}^{f_N+\tau} \frac{f^2}{\pi \sqrt{f_N^2 - (f-\tau)^2}} df \right) d\tau \\
&= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{1}{\pi f_N} \int_{-f_N+\tau}^{f_N+\tau} \frac{f^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{f-\tau}{f_N}\right)^2}} df \right) d\tau
\end{aligned}$$

On pose $f = f_N \cos(u) + \tau$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha}^{norm} &= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{1}{\pi f_N} \int_{\pi}^0 \frac{(f_N \cos(u) + \tau)^2}{\sqrt{1 - \cos^2(u)}} (-f_N \sin(u)) du \right) d\tau \\
&= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f_N^2 \cos^2(u) + 2f_N \tau \cos(u) + \tau^2) du \right) d\tau \\
&= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f_N^2}{2} \left[u + \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi} + 2f_N \tau [\sin(u)]_0^{\pi} + \tau^2 [u]_0^{\pi} \right) du \right) d\tau \\
&= (2\pi T)^2 \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) \left(\frac{f_N^2}{2} + \tau^2 \right) d\tau \\
&= \frac{(2\pi f_N T)^2}{2} \int_{-f_{max}^*}^{+f_{max}^*} \Gamma_{\alpha^*}^{norm}(\tau) d\tau + I_{\alpha^*}^{norm} \\
&= \frac{(2\pi f_N T)^2}{2} \cdot 1 + I_{\alpha^*}^{norm}
\end{aligned}$$

Ainsi, à chaque fois qu'on ajoute un spectre élémentaire S_{2,f_i} sur le produit de convolution dans $\Gamma_{\alpha}^{norm}(f)$, on additionne $\frac{(2\pi f_i T)^2}{2}$ sur la valeur de I_{α}^{norm} .

On en déduit que $I_{\alpha}^{norm} = \frac{(2\pi f_S T)^2}{2} + \sum_{i=1}^N 2 \frac{(2\pi f_i T)^2}{2} + \frac{(2\pi f_D T)^2}{2} = \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{2}$.

On redéduit alors la valeur de $I_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 I_{\alpha}^{norm}$:

$$\boxed{I_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{2}} \quad (3.32)$$

avec $f_{eq}^2 = f_S^2 + 2 \sum_{i=1}^N f_i^2 + f_D^2$ la même fréquence Doppler équivalente obtenue dans l'équation (3.30).

3.5.3 Résultats et expressions analytiques

On remplace l'expression de I_α donnée par (3.29) et (3.32) dans (3.26) et (3.27) :

– Dans un mode de diffusion $3D$

$$a_{MAV} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{16}{9} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} (2\pi f_{eq} T)^4}} \quad (3.33)$$

$$MSE_{MAV} = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \sigma_n^4 \sigma_\alpha^2 (2\pi f_{eq} T)^2} \quad (3.34)$$

– Dans un mode de diffusion $2D$

$$a_{MAV} = \sqrt{1 - \sqrt[3]{4 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} (2\pi f_{eq} T)^4}} \quad (3.35)$$

$$MSE_{MAV} = \sqrt[3]{\frac{27}{32} \sigma_n^4 \sigma_\alpha^2 (2\pi f_{eq} T)^2} \quad (3.36)$$

Les tables 3.1 et 3.2, comparent les valeurs de a_{MAV} et a_{CM} pour le cas d'un canal à deux bonds, où la source et la destination sont mobiles, et le relais est fixe, en mode de diffusion $2D$ [32]. On voit clairement, surtout pour des fréquences Doppler faibles, que le coefficient a_{CM} est supérieur à a_{MAV} .

La table 3.3 montre les valeurs de a_{CM} et a_{MAV} pour le cas d'un canal mobile-mobile sans relais, en mode de diffusion $3D$. Pour une fréquence Doppler équivalente f_{eq} donnée, la valeur a_{CM} dépend des fréquences Doppler de la source et de la destination (f_S et f_D) mais non pas du SNR_{dB} . Quant à la valeur de a_{MAV} , elle change avec la valeur du rapport Signal sur Bruit (SNR_{dB}), mais reste la même si les vitesses de la source et de la destination changent en gardant la même valeur de fréquence équivalente f_{eq} .

On voit bien, en comparant les deux dernières lignes de chaque colonne, que la valeur de a_{MAV} augmente lorsque SNR_{dB} augmente (elle diminue avec σ_n^2 dans l'équation 3.33). On voit aussi, en comparant les trois colonnes pour chacune des deux dernières lignes, que la valeur de a_{MAV} augmente quand $f_{eq}T$ augmente.

Le plus important, c'est que $a_{MAV} < a_{CM}$ dans nos plages de fréquences Doppler équivalente et SNR_{dB} , tout comme dans les tables 3.1 et 3.2.

Ceci peut être vérifié puisque plus on diminue la valeur du coefficient du modèle $AR(1)$, plus on améliore la poursuite de la dynamique du gain (la courbe rouge dans la Figure 3.1 représentant la fonction d'autocorrélation basée sur un modèle $AR(1)$ s'approche de la courbe noire

| $\frac{a_{CM}}{a_{MAV}}$ | $f_S T = 1e-4$ | $f_S T = 1e-3$ | $f_S T = 1e-2$ |
|--------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $f_D T = 1e-4$ | $\frac{0.9999998}{0.9999000}$ | $\frac{0.9999900}{0.9990000}$ | $\frac{0.9990131}{0.9900000}$ |
| $f_D T = 1e-3$ | $\frac{0.9999900}{0.9990000}$ | $\frac{0.9999802}{0.9990000}$ | $\frac{0.9990034}{0.9900000}$ |
| $f_D T = 1e-2$ | $\frac{0.9990131}{0.9900000}$ | $\frac{0.9990034}{0.9900000}$ | $\frac{0.9980275}{0.9900000}$ |

TABLE 3.1 – Comparaison entre a_{CM} et a_{MAV} pour un scénario M-F-M à différentes valeurs de fréquences Doppler (mode de diffusion $2D$, $SNR_{dB} = 0$ dB)

| $\frac{a_{CM}}{a_{MAV}}$ | $f_{d1} T = 1e-4$ | $f_{d1} T = 1e-3$ | $f_{d1} T = 1e-2$ |
|--------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $f_{d2} T = 1e-4$ | $\frac{0.9999998}{0.9999900}$ | $\frac{0.9999900}{0.9999000}$ | $\frac{0.9990131}{0.9900000}$ |
| $f_{d2} T = 1e-3$ | $\frac{0.9999900}{0.9999000}$ | $\frac{0.9999802}{0.9990000}$ | $\frac{0.9990034}{0.9900000}$ |
| $f_{d2} T = 1e-2$ | $\frac{0.9990131}{0.9900000}$ | $\frac{0.9990034}{0.9900000}$ | $\frac{0.9980275}{0.9900000}$ |

TABLE 3.2 – Comparaison entre a_{CM} et a_{MAV} pour un scénario M-F-M à différentes valeurs de fréquences Doppler (mode de diffusion $2D$, $SNR_{dB} = 20$ dB)

pointillée représentant la vraie fonction d'autocorrélation), et donc plus on minimise la variance de l'erreur à la sortie du filtre de Kalman. Et c'est bien ça la base du choix du coefficient a_{MAV} .

3.5.4 Interprétation des résultats

On remarque que pour les deux modes de diffusion, MSE_{MAV} a la même forme, dans les équations (3.34) et (3.36), proportionnelle à la puissance $2/3$ de f_{eq} , mais avec un coefficient de proportionnalité différent. Ceci est normal car dans les deux cas I_α avait la même forme, proportionnelle à f_{eq}^2 (voir les équations (3.29) et (3.32)).

D'ailleurs, il n'est pas étonnant d'avoir la même forme de I_α pour les deux modes de diffusion, avec de plus une expression qui ne dépend pas des fréquences Doppler élémentaires mais de la fréquence Doppler équivalente.

| | $f_{eq}T = 0.0005$ | $f_{eq}T = 0.001$ | $f_{eq}T = 0.005$ |
|-----------------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| a_{CM} scénario 1 | 0,999998355066833 | 0,999993420278139 | 0,999835515596909 |
| a_{CM} scénario 2 | 0,999998355066994 | 0,999993420280710 | 0,999835517204046 |
| a_{CM} scénario 3 | 0,999998355067016 | 0,999993420281050 | 0,999835517416166 |
| a_{CM} scénario 4 | 0,999998355066912 | 0,999993420279386 | 0,999835516376127 |
| a_{MAV} pour $SNR_{dB} = 5$ dB | 0,999810109358414 | 0,999521436486264 | 0,995900917333125 |
| a_{MAV} pour $SNR_{dB} = 20$ dB | 0,999939955205278 | 0,999848689693471 | 0,998705575182885 |

TABLE 3.3 – Valeurs numériques de a_{CM} et a_{MAV} pour différents scénarios mobile-mobile en mode de diffusion 3D, mais ayant même fréquence Doppler équivalente. Pour le scénario 1, $f_S = 0.3f_{eq}$. Pour scénario 2, $f_S = f_D = \frac{f_{eq}}{\sqrt{2}}$. Pour scénario 3, $f_S = 0.6f_{eq}$. Et pour scénario 4, $f_S = 0.9f_{eq}$. Pour f_{eq} donnée, la valeur a_{CM} dépend de f_D et f_S mais non pas du SNR. C'est l'inverse pour a_{MAV} .

En fait, comme on a dit dans la section 2.5.3.2, la DSP $\Gamma_\alpha(f) = \Gamma_{\alpha(1)}(f) \otimes \Gamma_{\alpha(2)}(f) \otimes \dots$ est regardée comme la DDP $P_X(x) = P_{X_1}(x) \otimes P_{X_2}(x) \otimes \dots$ d'une variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \dots$, où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes centrées.

Par ailleurs, on peut regarder I_α , à un facteur multiplicatif près, comme $\mathbb{E}(X^2)$, le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire $X : I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} (2\pi fT)^2 \Gamma_\alpha(f) df = (2\pi T)^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 P_X(x) dx = (2\pi T)^2 \mathbb{E}(X^2)$.

Or on sait que le moment d'ordre 2 (qui est aussi la variance) d'une somme de variables aléatoires indépendantes centrées est la somme des moments d'ordre 2 (des variances) des variables aléatoires.

Donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_2^2) + \dots$, ou encore $\sigma_X^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots$. Il suffit de savoir calculer les variances $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma_{X_i}^2$ pour pouvoir déduire la variance $\mathbb{E}(X^2) = \sigma_X^2$.

En comparant, on déduit directement que $I_\alpha = I_{\alpha(1)} + I_{\alpha(2)} + \dots$ où $I_{\alpha(i)} = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{\alpha(i)}(f) df = (2\pi T)^2 \mathbb{E}(X_i^2)$:

$$\begin{aligned}
 I_\alpha &= (2\pi T)^2 \mathbb{E}(X^2) \\
 &= (2\pi T)^2 [\mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_2^2) + \dots] \\
 &= I_{\alpha(1)} + I_{\alpha(2)} + \dots
 \end{aligned}$$

Il suffit de savoir calculer $I_{\alpha(i)}$ pour pouvoir déduire I_α . Pour un seul lien, on a trouvé que $I_{\alpha(i)}$ est proportionnelle, à une constante près, à f_i^2 (voir les équations (3.28) et (3.31)). Ainsi, I_α sera proportionnelle à la somme des f_i^2 qui est f_{eq}^2 . C'est-ce qui est démontré par calcul.

3.6 Résultats par simulation

La première figure est celle pour le cas le plus simple. Dans la figure 3.10, on a un canal fixe-mobile en mode de diffusion $2D$. Ces résultats ont été publiés dans [31]. En comparant les courbes pointillées avec celles continues et larges, on voit dans cette figure que le filtre de Kalman fonctionne mieux avec le choix MAV que le choix CM pour différentes valeurs de $f_d T$ et de SNR_{dB} (toutes les couleurs). Plus on est à fréquence Doppler basse, et à rapport SNR_{dB} petit, plus l'amélioration avec le choix MAV est claire. Ceci est bien notre but et nous y sommes arrivés.

On remarque aussi que, pour un filtre de Kalman avec le choix MAV , les valeurs de MSE retirées par simulation (courbes continues larges) coïncident avec celles théoriques (les croix). Ce qui valide notre équation (3.36). Ces valeurs croient lorsque $f_d T$ et/ou SNR_{dB} augmentent.

L'équation (3.42) qui passera dans la suite, est aussi validée par cette figure. On voit que MSE , dans le choix CM , est presque constant en fonction de la fréquence Doppler, il diminue quand SNR_{dB} augmente (σ_n^2 diminue).

Aussi on a tracé dans cette figure les bornes de Cramer Rao. On voit que le filtre de Kalman avec le choix MAV est proche des bornes quand $f_d T$ et SNR_{dB} sont faibles.

Dans les figures 3.11 et 3.12, on reste dans le cas d'un seul lien mais maintenant avec un canal mobile-mobile et en mode de diffusion $3D$. Notons que le cas d'un canal mobile-mobile (marqué M-to-M dans les courbes) en mode de diffusion $2D$ est similaire, au cas d'un canal A&F où le relais est fixe et les source et destination sont mobiles (à une constante SNR_{dB} près). Ces résultats ont été publiés dans [33].

Les mêmes remarques que le cas fixe-mobile en $2D$ sont observées.

On remarque aussi, dans la figure 3.12, que lorsque les valeurs de f_s et f_D changent telles que f_{eq} reste la même, on a les mêmes valeurs de MSE dans les cas MAV et CM (courbes superposées), pour bas et haut SNR_{dB} .

Dans les figures 3.13, 3.14 et 3.15, ainsi que la figure 3.16, on traite le cas d'un canal à un seul relais fixe et une source et destination mobiles. Ces figures ont été publiées dans [32]. On observe les mêmes remarques qu'avant.

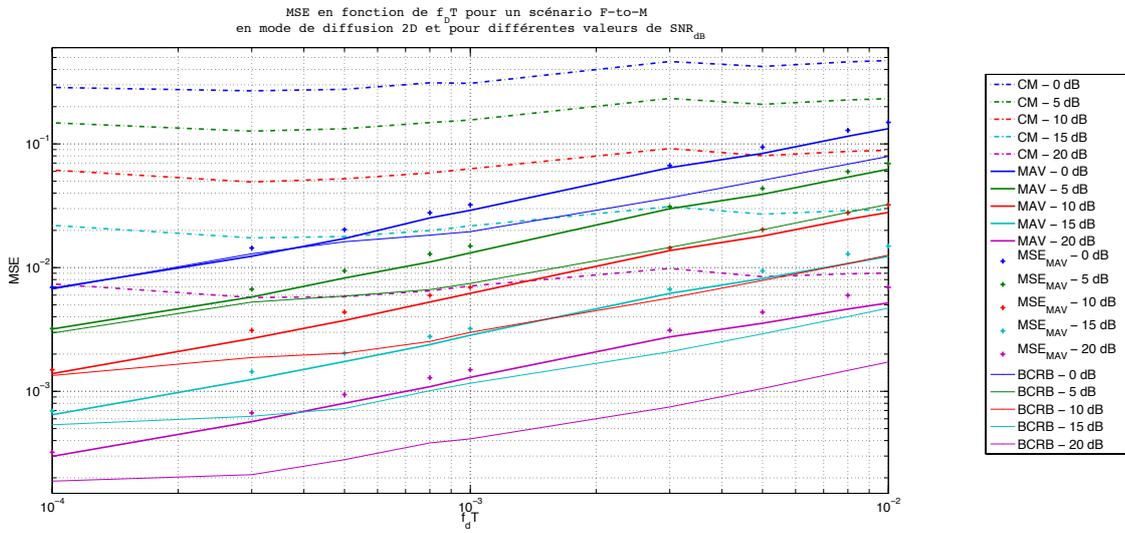


FIGURE 3.10 – MSE en fonction de $f_D T = f_d T$ avec les choix CM et MAV pour un canal Fixe-Mobile en 2D où la source est fixe et la destination se déplace. Il n'existe aucun relais. Les résultats sont donnés pour deux valeurs différentes de SNR_{dB} .

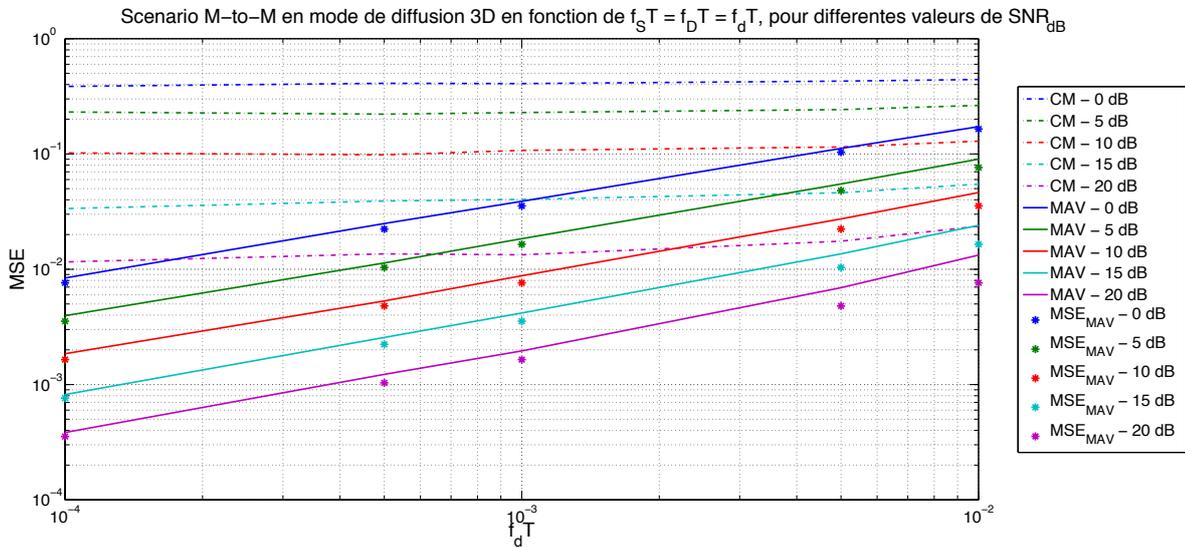


FIGURE 3.11 – MSE en fonction de $f_s T = f_D T$ avec les choix CM et MAV pour un canal mobile-mobile en 3D. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB} .

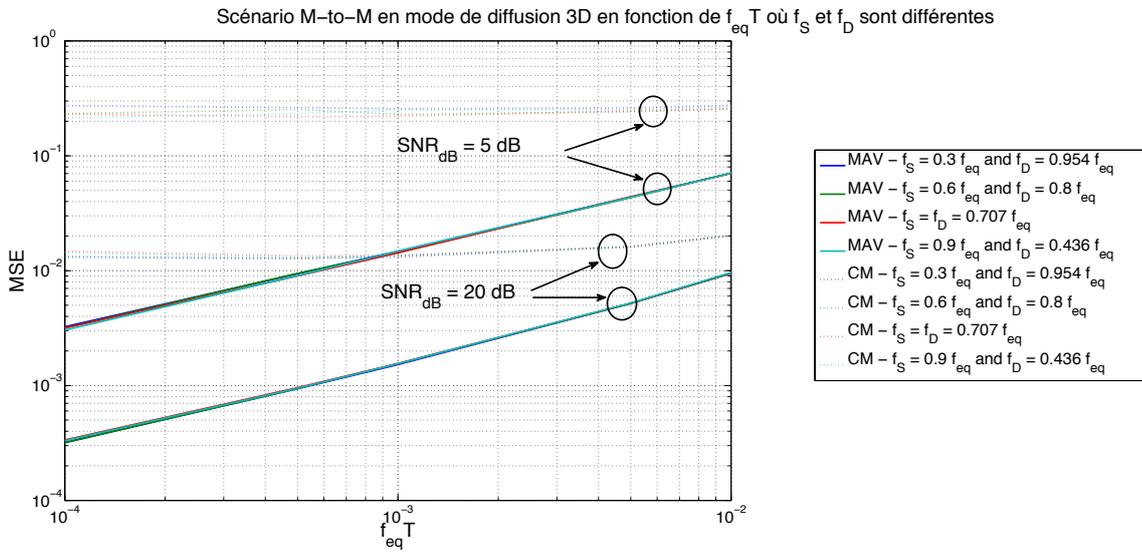


FIGURE 3.12 – MSE en fonction de $f_{eq}T$ avec les choix CM et MAV pour un canal mobile-mobile en 3D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB} .

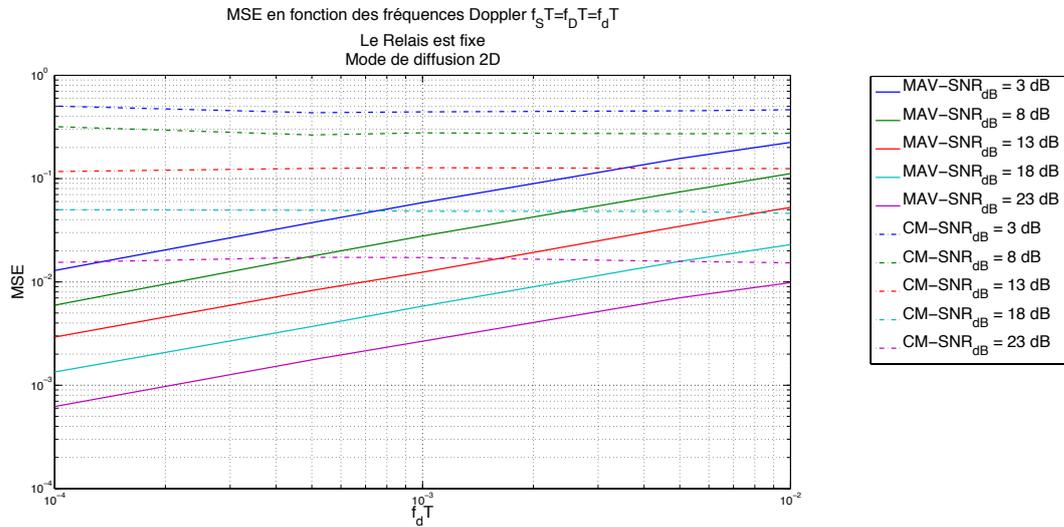


FIGURE 3.13 – MSE en fonction de $f_S T = f_D T = f_d T$ avec les choix CM et MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à même vitesse, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour deux valeurs différentes de SNR_{dB} .

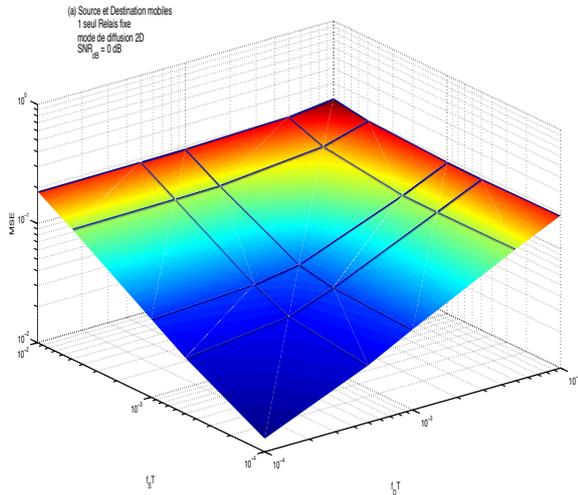


FIGURE 3.14 – MSE en fonction de $f_s T$ et $f_D T$ avec le choix MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour $SNR_{dB} = 0$ dB.

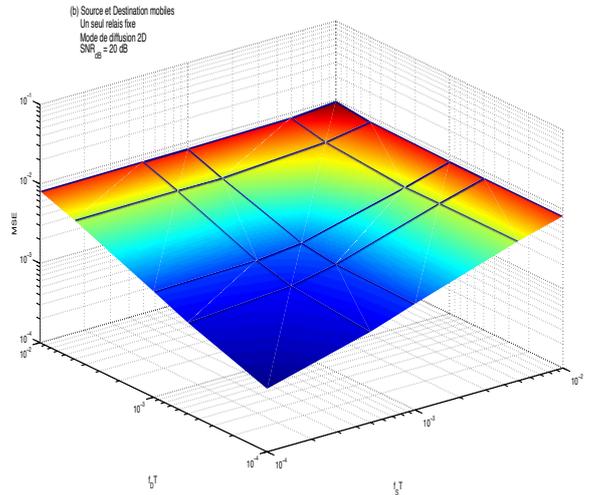


FIGURE 3.15 – MSE en fonction de $f_s T$ et $f_D T$ avec le choix MAV pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à vitesses différentes, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour $SNR_{dB} = 20$ dB.

Dans les figures 3.17 et 3.18, on trace les courbes de MSE en changeant le nombre de bonds et en variant les vitesses des sources, relais et destinations, de façon à garder la même fréquence équivalente. On remarque (plus évident dans le cas MAV), dans les deux modes de diffusion, que la valeur de MSE ne dépend pas du nombre de bonds, mais de la fréquence équivalente. Les valeurs théoriques MSE_{MAV} sont validées.

3.7 Robustesse par rapport à la connaissance de $f_{eq}T$

Le choix du coefficient a du modèle $AR(1)$ dépend de la fréquence Doppler équivalente f_{eq} . Ceci est dans le cas du choix CM de la littérature, ainsi que dans le choix MAV pour lequel nous venons d'apporter une contribution.

Ainsi, il est très utile de savoir la valeur exacte de cette fréquence. Rappelons que ce qui inter-

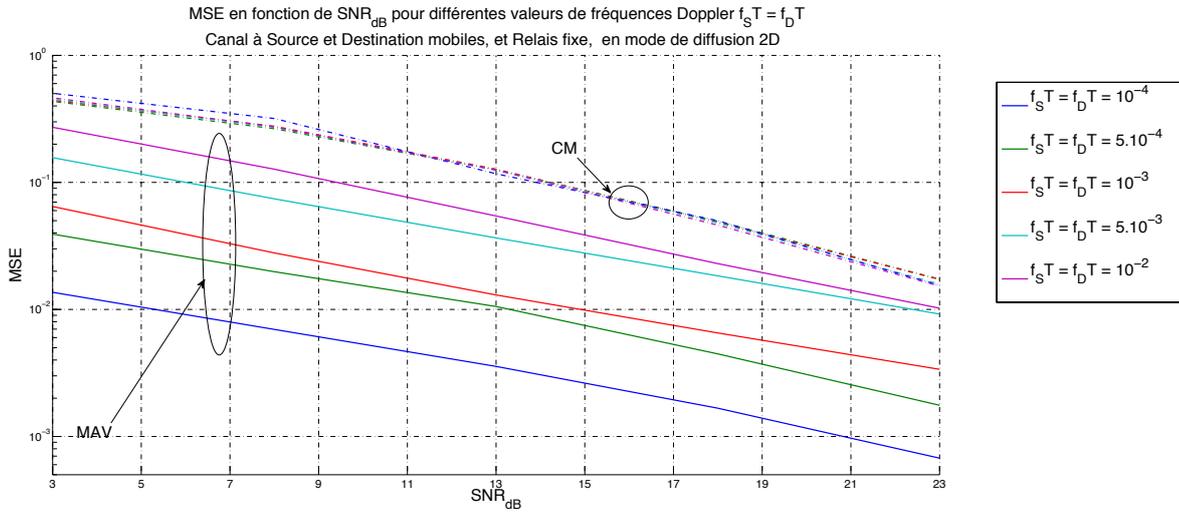


FIGURE 3.16 – MSE en fonction de SNR_{dB} avec les choix MAV et CM pour un canal A&F en 2D où la source et la destination se déplacent à mêmes vitesses, et il existe un seul relais fixe. Les résultats sont données pour différentes valeurs de fréquences.

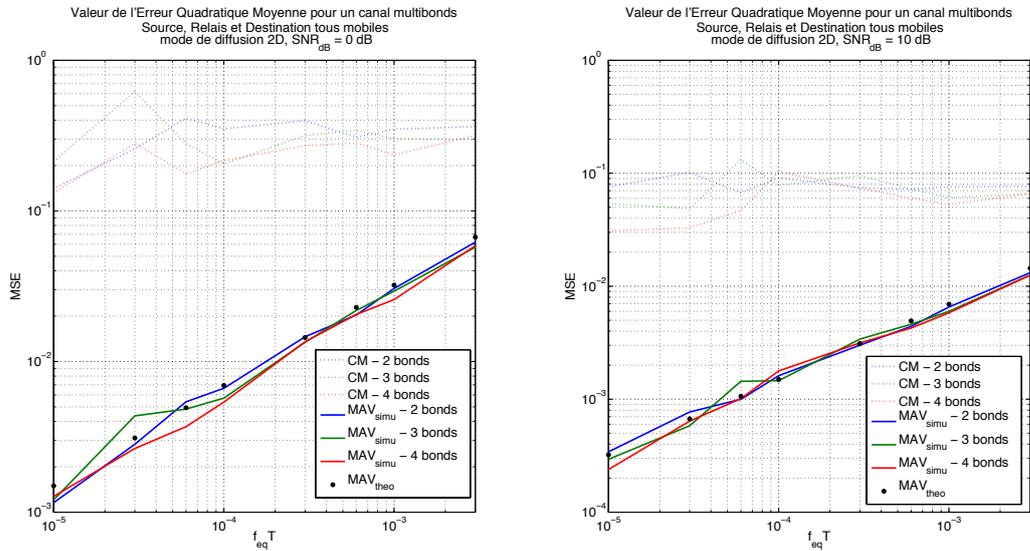


FIGURE 3.17 – Valeur de MSE en fonction de f_{eq} pour différents nombre de bonds pour les cas CM et MAV et différentes valeurs de SNR_{dB} , en mode de diffusion 2D

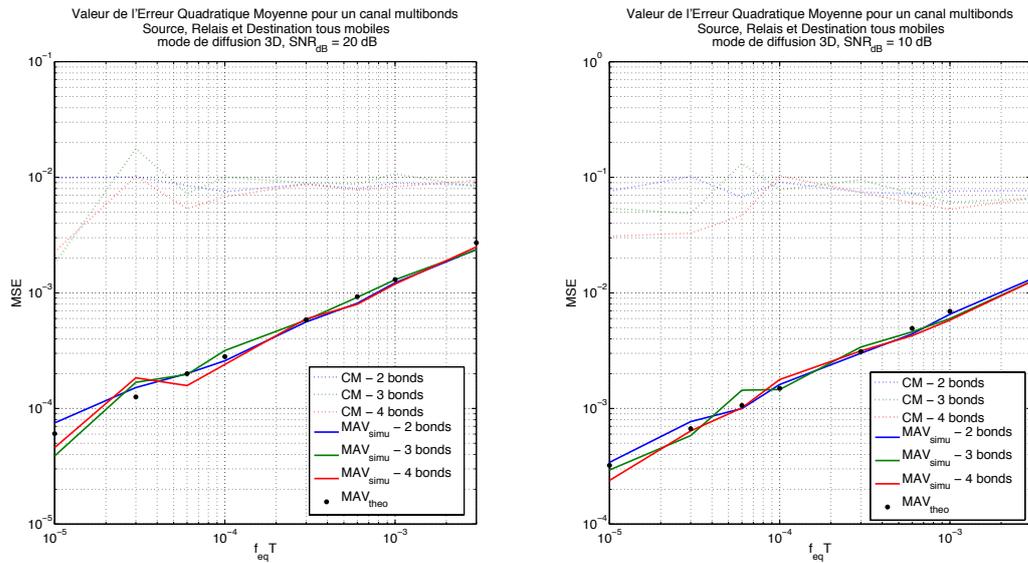


FIGURE 3.18 – Valeur de MSE en fonction de f_{eq} pour différents nombre de bonds pour les cas CM et MAV et différentes valeurs de SNR_{dB} , en mode de diffusion 3D

vient dans le coefficient a est la valeur de la fréquence Doppler équivalente, et non pas les valeurs des fréquences Doppler de chacun de la source, relais et destination.

On a bien vu aussi que la valeur de l'erreur quadratique moyenne MSE est plus faible avec le choix MAV . Ceci a été établi pour une connaissance parfaite de la valeur de fréquence Doppler équivalente.

Par contre, de nouvelles questions se posent :

Si l'on ne connaît pas parfaitement la fréquence Doppler équivalente, est-ce que l'erreur quadratique moyenne reste plus faible avec le choix MAV ?

Comment est modifiée la valeur de l'erreur quadratique moyenne MSE en présence d'une mal-connaissance de la fréquence Doppler équivalente ?

Pour répondre à ces deux questions, on va calculer la valeur de l'erreur quadratique moyenne (MSE_{CM}^f et MSE_{MAV}^f) obtenues avec les faux coefficients, a_{CM}^f et a_{MAV}^f . Ces deux coefficients étant calculés avec la fausse valeur de f_{eq} selon les critères de "Correlation Matching" et "Minimum Asymptotic Variance" respectivement.

Les fréquences Doppler de chaque noeud (source, relais et destination) ne sont pas bien connus. On suppose

- $f_S^* = C_S f_S$ la fausse fréquence Doppler sur la source,
- $f_D^* = C_D f_D$ la fausse fréquence Doppler sur la destination,

– $f_i^* = C_i f_i$ la fausse fréquence Doppler sur le relais i , pour $i = 1, 2, \dots, N$

où C_S, C_D, C_i sont de constantes réelles positives, différentes de 1 en présence d'erreur sur la connaissance des fréquences correspondantes.

La fréquence Doppler équivalente estimée est donc

$$f_{eq}^{*2} = f_S^{*2} + 2 \sum_{i=1}^N f_i^{*2} + f_D^{*2} = C_f^2 f_{eq}^2$$

où f_{eq} est la fréquence Doppler équivalente exacte, calculée dans l'équation (3.30)

Les équations du filtre de Kalman restent inchangées, et donc $MSE(a)$ garde la même expression dans l'équation (3.24) :

$$MSE(a) = \frac{\Omega}{1-a^2} + \beta \sqrt{1-a^2}$$

Nous sommes intéressés à une plage de $C_f \in [0.5; 2]$, à une plage de $SNR_{dB} \in [0; 20]$ dB et à une plage de $2\pi f_{eq} T \leq 10^{-2}$

3.7.1 Robustesse dans un mode de diffusion 3D

– Sous le critère MAV, le coefficient $AR(1)$ avec la fausse fréquence Doppler est appelé a_{MAV}^f . On le calcule de l'équation (3.33) :

$$\begin{aligned} 1 - (a_{MAV}^f)^2 &= \sqrt[3]{\frac{16}{9} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} (2\pi f_{eq}^* T)^4} \\ &= C_f^{4/3} (1 - a_{MAV}^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sachant (3.24), (3.26) et (3.37), l'expression de MSE sous le critère MAV avec non connaissance de la fréquence Doppler équivalente est :

$$\begin{aligned}
 MSE_{MAV}^f &= \frac{\Omega}{1 - (a_{MAV}^f)^2} + \beta \sqrt{1 - (a_{MAV}^f)^2} \\
 &= C_f^{-4/3} \Omega \left[\frac{\beta}{2\Omega} \right]^{2/3} + C_f^{2/3} \beta \left[\frac{2\Omega}{\beta} \right]^{1/3} \\
 &= (C_f^{-4/3} + 2C_f^{2/3}) \left[\frac{\Omega\beta^2}{4} \right]^{1/3} \\
 &= MSE_{MAV} \left(\frac{1}{3} C_f^{-4/3} + \frac{2}{3} C_f^{2/3} \right)
 \end{aligned}$$

où

$$\left[\frac{\Omega\beta^2}{4} \right]^{1/3} = \left[\frac{\sigma_n^4 I_\alpha}{16} \right]^{1/3} = \frac{MSE_{MAV}}{3}$$

(voir l'équation (3.27))

D'où

$$\boxed{\frac{MSE_{MAV}^f}{MSE_{MAV}} = \frac{1}{3} C_f^{-4/3} + \frac{2}{3} C_f^{2/3}} \quad (3.38)$$

Ce rapport est minimum quand $C_f = 1$, ceci correspondant au bon réglage du filtre de Kalman avec la bonne valeur de f_{eq} , et conduisant à la MSE minimum.

- Sous le critère CM , le coefficient $AR(1)$ est appelé a_{CM}^f . Pour le calculer, on utilise le fait que

$$sinc(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

Dans le cas où $x_i \ll 1 \ \forall \ i$, on approche

$$\prod sinc(x_i) \approx \prod \left(1 - \frac{x_i^2}{6} \right) \approx 1 - \sum \frac{x_i^2}{6}$$

Et

$$1 - [\prod sinc(x_i)]^2 \approx 1 - \left[1 - \sum \frac{x_i^2}{6} \right]^2 \approx \sum \frac{x_i^2}{3}$$

Dans notre plage de fréquences Doppler, on a $x_i = 2\pi f_i^* T \ll 1$, ainsi, et d'après l'équation

(3.9) :

$$\begin{aligned}
1 - (a_{CM}^f)^2 &= 1 - [\text{sinc}(2\pi f_S^* T) \prod_{i=1}^N [\text{sinc}(2\pi f_D^* T)]^2 \text{sinc}(2\pi f_D^* T)]^2 \\
&\approx \frac{(2\pi f_S^* T)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (2\pi f_D^* T)^2 + (2\pi f_D^* T)^2}{3} \\
&= \frac{C_f^2 (2\pi f_{eq} T)^2}{3}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

De même, on a

$$1 - a_{CM}^2 \approx \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{3} \tag{3.40}$$

En utilisant (3.24), (3.29) avec (3.39) et (3.40), les expressions de MSE sous le critère CM dans les cas de f_{eq} inconnue et connue sont respectivement :

$$MSE_{CM}^f = \sigma_n^2 \frac{1}{C_f^2} + C_f \frac{\sigma_\alpha \sigma_n (2\pi f_{eq} T)}{\sqrt{12}} \approx \frac{\sigma_n^2}{C_f^2} \tag{3.41}$$

et

$$MSE_{CM} = \sigma_n^2 + \frac{\sigma_\alpha \sigma_n (2\pi f_{eq} T)}{\sqrt{12}} \approx \sigma_n^2 \tag{3.42}$$

avec $1 < \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_n^2} < 100$ pour $0 \text{ dB} < SNR_{dB} < 20 \text{ dB}$.

On fait l'approximation car dans notre plage de fréquences, de rapport SNR_{dB} , et de C_f , l'erreur statique (deuxième terme) est négligeable par rapport à l'erreur dynamique (premier terme).

En fait, comme $2\pi f_{eq} T < 0.01$, $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_n^2} < 100$ et $C_f \leq 2$, alors $\frac{\sigma_n \sqrt{12}}{\sigma_\alpha (2\pi f_{eq} T)} \geq 34.64 \gg 8 \geq C_f^3$

D'où :

$$\boxed{\frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{CM}} \approx \frac{1}{C_f^2}} \tag{3.43}$$

Ce rapport décroît lorsque C_f augmente. Autrement dit, quand on utilise le filtre de Kalman avec un modèle $AR(1)$ sous le critère CM , MSE diminue lorsqu'on surestime la fréquence Doppler équivalente (on diminue la valeur de a).

– Deux autres rapports sont importants :

- Le premier obtenu à l'aide des équations (3.38), (3.43), et (3.34)

$$\begin{aligned} \frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} &\approx \frac{3}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)} \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \\ &\approx \frac{3}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)} \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^2}{9 \sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq}T)^2}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

- Le deuxième obtenu à l'aide des équations (3.43), et (3.34).

$$\begin{aligned} \frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} &\approx \frac{1}{C_f^2} \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \\ &\approx \frac{1}{C_f^2} \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^2}{9 \sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq}T)^2}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ces rapports sont valides pour notre intervalle de C_f . Si C_f augmente encore plus, le deuxième terme dans (3.41) ne sera plus négligeable et nous aurons d'autres expressions. Notons que ces rapports croient quand SNR_{dB} et/ou f_{eq} décroient. Quand SNR_{dB} et f_{eq} sont maximum ($SNR_{dB} = 20$ dB donc $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} = 0.01$ et $2\pi f_{eq}T = 10^{-2}$), ces rapports sont minimums.

- Le rapport dans (3.44) est le rapport des MSE entre le cas CM et MAV , quand on estime mal la fréquence Doppler équivalente. Ce rapport est important pour voir si le filtre de Kalman reste meilleur avec le choix MAV qu'avec le choix CM , surtout quand on surestime f_{eq} .

Pour nos intervalles de SNR_{dB} , $f_{eq}T$, et C_f , $\frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} \geq \frac{16.8}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)} > 1$, et donc le critère MAV est plus favorisé que le critère CM .

- Le rapport dans (3.45) est plus grand que 1 car MSE_{MAV} est la valeur minimum de MSE . Ce rapport sert à calculer, pour SNR_{dB} et f_{eq} donnés, la valeur de C_f dont le filtre de Kalman a besoin pour atteindre le MSE minimum sous le critère CM .

Quand $SNR_{dB} = 20$ dB et $2\pi f_{eq}T = 10^{-2}$, pour $C_f = \sqrt[3]{\frac{4 \sigma_n}{3 \sigma_\alpha} \frac{1}{2\pi f_{eq}T}} = 2.37$ (pas dans notre plage), et en utilisant le choix CM , on arrive à MSE minimum. Quand SNR_{dB} et/ou f_{eq} sont moins faibles, C_f doit être encore plus grande pour arriver au MSE minimum.

3.7.2 Robustesse dans un mode de diffusion 2D

Dans un mode de diffusion 2D, on aboutit aux mêmes rapports.

– Sous le critère *MAV*, et d'après l'équation (3.35),

$$1 - (a_{MAV}^f)^2 = \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^2}{9 \sigma_\alpha^2} (2\pi f_{eq}^* T)^4} = C_f^{4/3} (1 - a_{MAV}^2)$$

et donc l'équation (3.37) reste la même. Ainsi, et comme les équations (3.24), (3.26) et (3.27) sont les mêmes pour les deux modes de diffusion, le rapport (3.38) reste le même en mode de diffusion *2D*.

– Sous le critère *CM*, avec un mode de diffusion *2D*, on utilise le fait que

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{x^n}{2^n (n)!} \right]^2 = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{128} + \dots$$

Dans le cas où $x_i \ll 1 \forall i$, on approche

$$\prod J_0(x_i) \approx \prod \left(1 - \frac{x_i^2}{4} \right) \approx 1 - \sum \frac{x_i^2}{4}$$

Et

$$1 - [\prod J_0(x_i)]^2 \approx 1 - \left[1 - \sum \frac{x_i^2}{4} \right]^2 \approx \sum \frac{x_i^2}{2}$$

Comme on a $x_i = 2\pi f_i^* T \ll 1$, ainsi, et de la même manière qu'avec les équations (3.39) et (3.40), on a :

$$1 - (a_{CM}^f)^2 = 1 - [J_0(2\pi f_S^* T) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_D^* T)]^2 J_0(2\pi f_D^* T)]^2 \approx \frac{C_f^2 (2\pi f_{eq} T)^2}{2}$$

Et

$$1 - a_{CM}^2 \approx \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{2} \quad (3.46)$$

Les expressions de *MSE* sous le critère *CM* changent (le deuxième terme change), mais leur approximations restent les mêmes :

$$MSE_{CM}^f = \sigma_n^2 \frac{1}{C_f^2} + C_f \frac{\sigma_\alpha \sigma_n (2\pi f_{eq} T)}{\sqrt{8}} \approx \frac{\sigma_n^2}{C_f^2}$$

et

$$MSE_{CM} = \sigma_n^2 + \frac{\sigma_\alpha \sigma_n (2\pi f_{eq} T)}{\sqrt{8}} \approx \sigma_n^2$$

avec $1 < \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_n^2} < 100$ pour $0 \text{ dB} < SNR_{dB} < 20 \text{ dB}$.

Notons que pour les intervalles pris de SNR_{dB} , f_{eq} et C_f , $\frac{\sigma_n \sqrt{8}}{\sigma_\alpha (2\pi f_{eq} T)} \geq 28.28 \gg 8 \geq C_f^3$

Et donc le rapport dans (3.43) reste le même.

– Pour les deux derniers rapports :

- L'équation (3.44) devient

$$\frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} \approx \frac{2}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)} \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \approx \frac{2}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)} \sqrt[3]{\frac{32 \sigma_n^2}{27 \sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq} T)^2}}$$

Pour nos intervalles de SNR_{dB} , $f_{eq}T$, et C_f , $\frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} \geq \frac{9.8}{C_f^{2/3}(1+2C_f^2)}$. Ce rapport peut devenir ≤ 1 pour $C_f \geq 1,712$. Donc le critère MAV n'est pas toujours meilleur que le critère CM si l'on surestime la fréquence équivalente.

- L'équation (3.45) devient

$$\frac{MSE_{CM}^f}{MSE_{MAV}^f} \approx \frac{1}{C_f^2} \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \approx \frac{1}{C_f^2} \sqrt[3]{\frac{32 \sigma_n^2}{27 \sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq} T)^2}}$$

Quand $SNR_{dB} = 20 \text{ dB}$ et $2\pi f_{eq}T = 10^{-2}$, pour $C_f = 2.21$ (pas dans notre plage), et en utilisant le choix CM , on arrive à MSE minimum. Quand SNR_{dB} et/ou f_{eq} sont moins faibles, C_f doit être encore plus grande pour arriver au MSE minimum.

Les figures 3.19 et 3.20 illustrent les résultats qu'on a obtenu pour les deux modes de diffusion. On voit que l'utilisation du filtre de Kalman avec le choix MAV paraît plus robuste par rapport à la mal-connaissance de la fréquence Doppler équivalente, dans le sens que l'erreur quadratique moyenne sortante varie moins en changeant C_f (courbe bleue), et reste proche de l'erreur minimale MSE_{MAV} . Ceci est vrai pour les deux modes de diffusions.

Avec le choix CM , l'erreur augmente si l'on sous-estime la fréquence, mais elle diminue si l'on sur-estime cette fréquence (courbe rouge). Par contre, avec le choix MAV , l'erreur augmente une fois qu'on estime mal la fréquence (courbe bleue). Ceci est normal car l'erreur obtenue avec le choix MAV en cas de connaissance de la fréquence est l'erreur minimale qu'on puisse obtenir avec n'importe quel coefficient a dans nos plages de SNR_{dB} et $f_{eq}T$. Ceci est validé avec la courbe en points verts qui montre que même lorsqu'on sur-estime la fréquence, et que l'erreur avec le choix CM diminue, cette erreur reste plus grande que MSE_{MAV} .

Finalement, la courbe en pointillés noirs montre que l'erreur avec le choix MAV est inférieure à

celle avec le choix CM (donc meilleure) quand C_f est inférieur à 2.

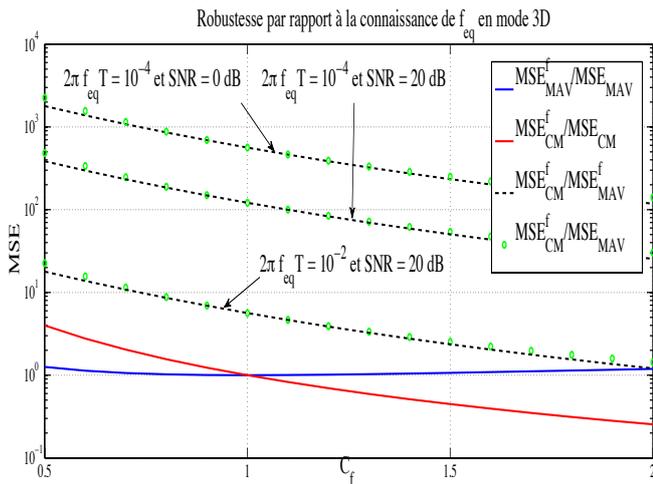


FIGURE 3.19 – Robustesse par rapport à la connaissance de la fréquence Doppler équivalente en 3D

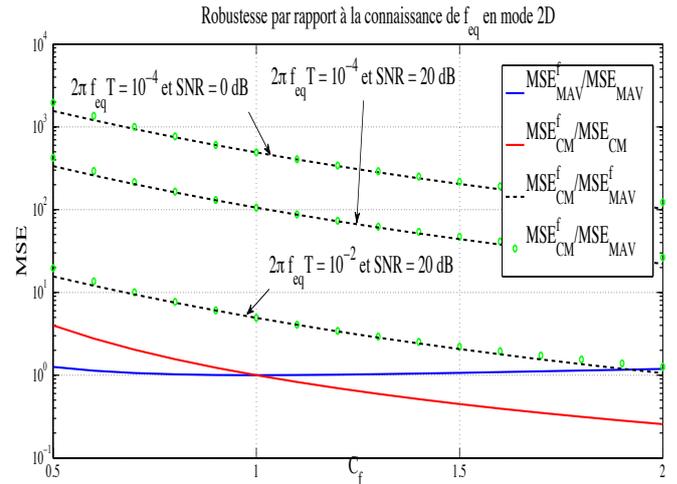


FIGURE 3.20 – Robustesse par rapport à la connaissance de la fréquence Doppler équivalente en 2D

On a essayé aussi de faire une estimation du canal avec les fréquences Doppler mal-estimées. Les résultats sont données dans la figure 3.21. En présence d'une fausse valeur du coefficient a_{MAV} , les valeurs de MSE ne sont pas loins de la valeur minimale MSE_{MAV} , contrairement au cas CM où la variation de a_{CM} implique une grande variation de MSE . Le filtre de Kalman sous le critère MAV est donc plus robuste.

3.8 Robustesse par rapport à la connaissance du SNR_{dB}

Le choix du coefficient a du modèle $AR(1)$ dépend de la variance du bruit d'observation σ_n^2 dans le cas du choix MAV mais pas dans le cas du choix CM .

Par contre, la valeur de l'erreur quadratique moyenne MSE , qui dépend de a , dépend aussi du filtre de Kalman. Si ce filtre est mal réglé, *i.e.* si la valeur de la variance du bruit d'observation, introduite dans les équations du filtre, est différente de la vraie variance de ce bruit, et même si la valeur de a reste la même, la valeur de l'erreur d'estimation (MSE) va varier.

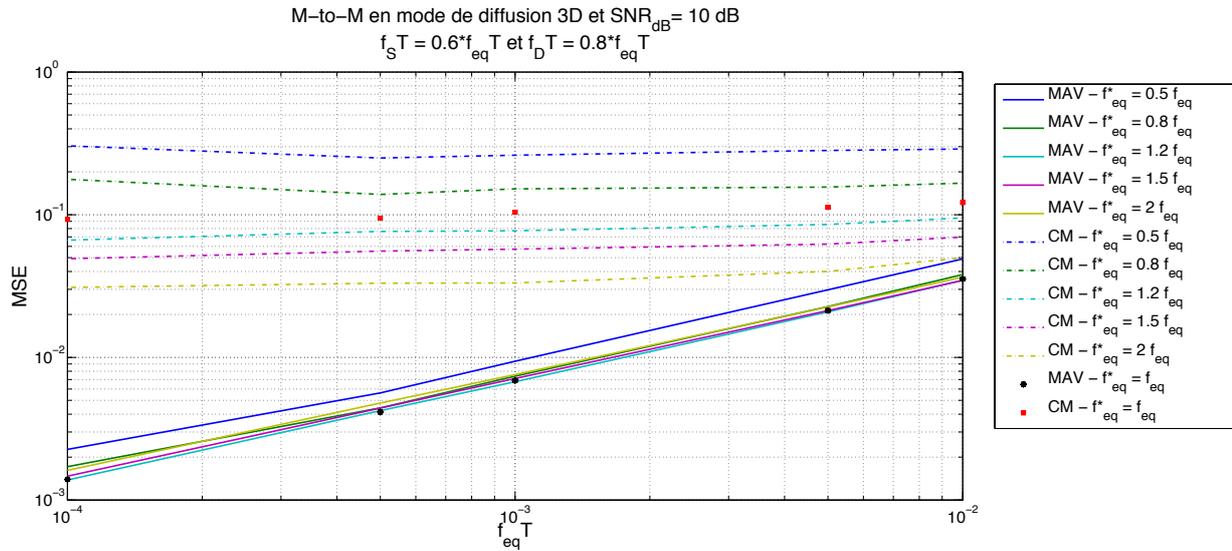


FIGURE 3.21 – Variation de MSE en fonction de $f_{eq}T$ pour les cas CM et MAV avec mal-estimation de la fréquence équivalente. Le canal est mobile-mobile et le mode de diffusion est 3D.

Ainsi, si l'on estime mal la variance du bruit d'observation, la performance du filtre va varier dans les deux cas, CM et MAV .

Rappelons que σ_n^2 est la variance du bruit total où tous les bruits élémentaires sur les relais et la destination apparaissent (voir l'équation (2.3)).

Soit

$$\sigma_n^{*2} = C_n^2 \sigma_n^2$$

la fausse valeur de la variance du bruit d'observation.

On s'intéresse à l'intervalle de valeurs de $C_n \in [0.5; 2]$. Les mêmes questions se posent :

Si l'on ne connaît pas parfaitement σ_n^2 , est-ce que MSE reste plus faible avec le choix MAV ?

Comment varie MSE en fonction de σ_n^{*2} ?

Pour répondre à ces deux questions, on va calculer la valeur de l'erreur quadratique moyenne (MSE_{CM}^n et MSE_{MAV}^n) obtenues en utilisant a_{CM} et a_{MAV}^n (la dernière étant calculée avec σ_n^{*2}).

Quant au comportement du filtre de Kalman, en fait, l'équation (3.12) du filtre de Kalman est la seule qui va changer, en remplaçant σ_n^2 par $\sigma_n^{*2} = C_n^2 \sigma_n^2$. Ainsi, la valeur de K_∞ va changer pour devenir $K_\infty^* \approx \frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^*} = \frac{\sigma_e^2}{C_n \sigma_n}$

Pour l'effet sur MSE_1 , la fréquence de coupure du filtre passe haut sera $2\pi f_c^* T \approx \frac{\sigma_e}{C_n \sigma_n}$, et son module est approché par : $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 \approx \frac{C_n^2 \sigma_n^2}{\sigma_e^2} |2\pi f T|^2$. Ainsi

$$MSE_1^n \approx \frac{\Omega^*}{1-a^2} \text{ où } \Omega^* = C_n^2 \Omega = \frac{C_n^2 \sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} I_\alpha$$

Pour l'effet sur MSE_2 , la valeur de $\Gamma_n(f)$ dans l'équation (3.22) n'est pas affectée par C_n car $Y(z) = \alpha(z) + N(z)$ dans l'équation (3.16) où $N(z)$ est le vrai bruit.

Ainsi l'équation (3.23) sera $MSE_2^n \approx \beta^* \sqrt{1-a^2}$ où $\beta^* = \frac{\beta}{C_n} = \frac{\sigma_\alpha \sigma_n}{2C_n}$

La valeur de l'erreur quadratique moyenne est donc :

$$\begin{aligned} MSE^n(a) &= \frac{C_n^2 \Omega}{1-a^2} + \frac{\beta}{C_n} \sqrt{1-a^2} \\ &= \frac{C_n^2 \sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2 (1-a^2)} I_\alpha + \frac{\sigma_\alpha \sigma_n}{2C_n} \sqrt{1-a^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.8.1 Robustesse dans un mode de diffusion 3D

- On utilise le filtre de Kalman avec le critère MAV. Le bruit est mal estimé, et le coefficient $AR(1)$ sera nommé a_{MAV}^n . On calcule de (3.33) et (3.26) :

$$\begin{aligned} 1 - (a_{MAV}^n)^2 &= \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^{*2}}{9 \sigma_\alpha^2} (2\pi f_{eq} T)^4} \\ &= C_n^{2/3} (1 - a_{MAV}^2) \\ &= C_n^{2/3} \left[\frac{2\Omega}{\beta} \right]^{2/3} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sachant les équations (3.27), (3.47) et (3.48), on calcule MSE sous le critère MAV quand le rapport SNR_{dB} n'est pas connu. On l'appelle MSE_{MAV}^n :

$$\begin{aligned} MSE_{MAV}^n &= \frac{C_n^2 \Omega}{1 - (a_{MAV}^n)^2} + \frac{\beta}{C_n} \sqrt{1 - (a_{MAV}^n)^2} \\ &= \left[\frac{\Omega \beta^2}{4} \right]^{1/3} \left(C_n^{4/3} + 2C_n^{-2/3} \right) \\ &= MSE_{MAV} \left(\frac{1}{3} C_n^{4/3} + \frac{2}{3} C_n^{-2/3} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{MSE_{MAV}^n}{MSE_{MAV}} = \frac{1}{3}C_n^{4/3} + \frac{2}{3}C_n^{-2/3}} \quad (3.49)$$

Ce rapport est minimum quand $C_n = 1$ (L'erreur quadratique moyenne MSE est minimum si on connaît exactement la valeur du rapport signal-sur-bruit SNR_{dB}).

- Si on utilise le filtre de Kalman sous le critère CM , le coefficient $AR(1)$ quand SNR_{dB} n'est pas connu reste le même que le cas de SNR_{dB} connu, c'est a_{CM} .

Ainsi, on utilise l'équation (3.47). En mode de diffusion $3D$, on remplace $1 - a_{CM}^2$ par $\frac{(2\pi f_{eq}T)^2}{3}$ (vu dans l'équation (3.40)), et I_α par $\sigma_\alpha^2 \frac{(2\pi f_{eq}T)^2}{3}$ (vu dans l'équation (3.29)). La valeur de MSE sous le critère CM pour SNR_{dB} inconnu sera :

$$MSE_{CM}^n = C_n^2 \sigma_n^2 + \frac{\sigma_\alpha \sigma_n (2\pi f_{eq}T)}{2\sqrt{3}C_n} \approx C_n^2 \sigma_n^2$$

Alors que si le SNR_{dB} est connu, l'expression de MSE sera $MSE_{CM} \approx \sigma_n^2$ (vu dans (3.42)).

D'où

$$\boxed{\frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{CM}} \approx C_n^2} \quad (3.50)$$

- Les deux derniers rapports sont :

•

$$\begin{aligned} \frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}^n} &\approx \frac{3}{C_n^{-2/3}(1+2C_n^{-2})} \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \\ &\approx \frac{3}{C_n^{-2/3}(1+2C_n^{-2})} \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^2}{9 \sigma_\alpha^2 (2\pi f_{eq}T)^2}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Pour nos intervalles de SNR_{dB} , $f_{eq}T$, et C_n , $\frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}^n} \geq \frac{16.8}{C_n^{-2/3}(1+2C_n^{-2})} > 1$, et donc le critère MAV est plus favorisé que le critère CM même si le rapport SNR_{dB} est sur-estimé ou sous-estimé d'un rapport inférieur à 2.

•

$$\begin{aligned} \frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}} &\approx C_n^2 \frac{MSE_{CM}}{MSE_{MAV}} \\ &\approx C_n^2 \sqrt[3]{\frac{16 \sigma_n^2}{9 \sigma_\alpha^2 (2\pi f_{eq}T)^2}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Quand $SNR_{dB} = 20 \text{ dB}$ et $2\pi f_{eq}T = 10^{-2}$, pour $C_n = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_n} 2\pi f_{eq}T} = 0.42$ (pas dans notre plage), et en utilisant le choix CM , on arrive à MSE minimum. Quand SNR_{dB} et/ou f_{eq} sont moins faibles, C_n doit être encore plus petit pour arriver au MSE minimum. D'où, et dans notre plage de C_n , le filtre de Kalman est plus performant sous le critère MAV .

3.8.2 Robustesse dans un mode de diffusion 2D

Le raisonnement est pareil qu'avec le mode 3D, et les résultats sont cités rapidement :

- Le rapport de l'équation (3.49) reste le même.
- Le rapport de l'équation (3.50) reste encore le même.
- Les rapports (3.51) et (3.52) deviennent respectivement :

$$\frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}^n} \approx \frac{3}{C_n^{-2/3}(1+2C_n^{-2})} \sqrt[3]{\frac{32}{27} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq}T)^2}}$$

et

$$\frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}^n} \approx C_n^2 \sqrt[3]{\frac{32}{27} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} \frac{1}{(2\pi f_{eq}T)^2}}$$

Pour nos intervalles de SNR_{dB} , $f_{eq}T$, et C_n , le filtre de Kalman sous le critère CM n'atteint pas la valeur minimale de MSE . Par contre, pour $f_{eq}T = 10^{-2}$ et $SNR_{dB} = 20\text{dB}$, pour $C_n \leq 0.58$, le choix CM peut devenir mieux que le MAV $\left(\frac{MSE_{CM}^n}{MSE_{MAV}^n} = \frac{9.8}{C_n^{-2/3}(1+2C_n^{-2})} \leq 1 \right)$.

Les figures 3.22 et 3.23 illustrent par simulation, les résultats des rapports qu'on a obtenu pour les deux modes de diffusion.

On voit que l'utilisation du filtre de Kalman avec le choix MAV paraît plus robuste par rapport à la mal-connaissance de la variance du bruit d'observation, dans le sens que l'erreur quadratique moyenne sortante varie moins en changeant C_n (courbe bleue), et reste proche de l'erreur minimale MSE_{MAV} . Ceci est vrai pour les deux modes de diffusions.

Avec le choix CM , l'erreur augmente si l'on sur-estime cette variance (sous-estime le SNR_{dB}), mais elle diminue si l'on sous-estime cette variance (courbe rouge). Par contre, avec le choix MAV , l'erreur augmente une fois qu'on estime mal le rapport SNR_{dB} (courbe bleue). Ceci est normal car l'erreur obtenue avec le choix MAV en cas de connaissance du rapport SNR_{dB} est l'erreur minimale qu'on puisse obtenir avec n'importe quel coefficient a dans nos plages de SNR_{dB} et $f_{eq}T$. Ceci est validé avec la courbe en points verts qui montre que même lorsqu'on sous-estime la variance du bruit, et que l'erreur avec le choix CM diminue, cette erreur reste plus grande que MSE_{MAV} .

Finalement, la courbe en pointillés noirs montre que l'erreur avec le choix MAV est inférieure à

celle avec le choix CM (donc meilleure) quand C_n est supérieur à 0.5.

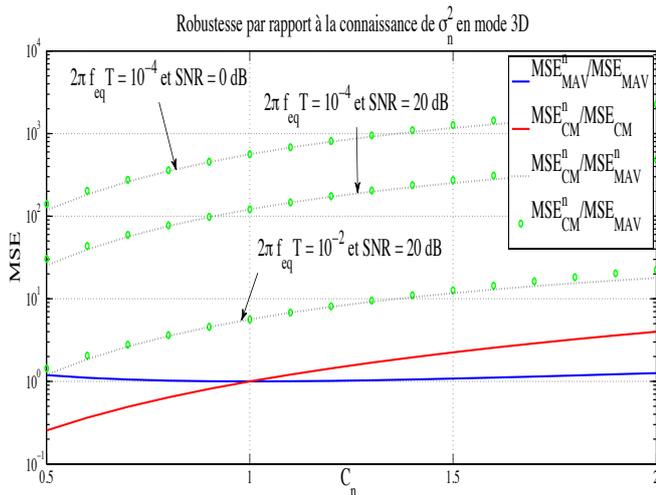


FIGURE 3.22 – Robustesse par rapport à la connaissance du rapport signal-sur-bruit en 3D

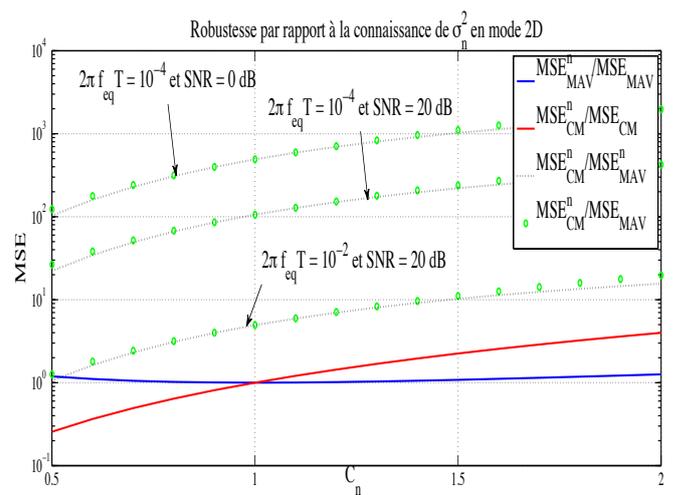


FIGURE 3.23 – Robustesse par rapport à la connaissance du rapport signal-sur-bruit en 2D

On a vérifié aussi, comme le montre la Figure 3.24, que même lorsque le coefficient a_{MAV} est mal estimé du fait d'une mal connaissance de la valeur du SNR_{dB} , il reste mieux que le choix CM . Dans cette figure, le vrai SNR_{dB} varie. Les courbes bleue, verte et rouge ont été faites avec des coefficients a_{MAV} calculées en croyant que SNR_{dB} vaut 10, 15 et 20 dB. On voit que la variation de MSE n'est pas si grande, et que le Filtre de Kalman avec choix MAV est plus performant que le choix CM .

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a traité le problème d'estimation d'un canal multi-bond (à plusieurs relais) en présence d'un bruit blanc additif Gaussien sur chaque relais. Le modèle autorégressif d'ordre p ($AR(p)$) ainsi que le filtre de Kalman associé, ont été présentés.

On s'est concentré dans la suite à la conception du filtre de Kalman pour estimer le canal modélisé par un modèle $AR(1)$ seulement, et on a mené à une étude sur l'origine de la variance de

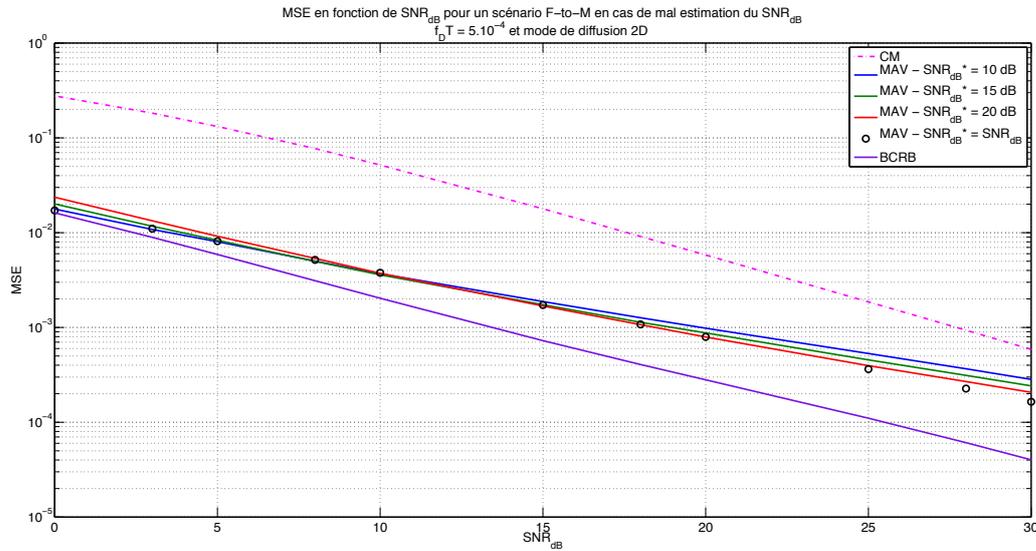


FIGURE 3.24 – Variation de MSE en fonction de SNR_{dB} pour les cas CM et MAV avec SNR_{dB} fixé à trois valeurs (10, 15 et 20 dB), pas nécessairement les vraies valeurs du canal. Le canal est fixe-mobile et le mode de diffusion est 2D.

l'erreur d'estimation.

On a trouvé que cette erreur dépend du rapport SNR_{dB} et d'une fréquence équivalente dont on a trouvé l'expression en fonction des différentes fréquences Doppler.

Nous avons mis en évidence que le choix de la littérature convient bien pour les fréquences Doppler normalisées élevées ($f_{eq}T \geq 10^{-2}$), mais n'est pas optimal lorsque le canal a des variations plus lentes : on a pu trouver une méthode d'amélioration qui diminue la variance de l'erreur d'estimation surtout pour les cas de SNR_{dB} et fréquences Doppler faibles.

On a à la fin étudié la robustesse de notre algorithme pour le cas de SNR_{dB} et fréquences Doppler mal connus, et on a vu que notre algorithme reste plus robuste que le choix de la littérature dans la plupart des cas. Des simulations ont justifié nos calculs.

Tout ce travail a été fait pour les deux modes de diffusion, 2D et 3D.

L'étude ne s'arrête pas là. Le modèle étudié était simple, mais il est aussi fondamental, et est à la base des diverses études plus complexes d'estimation de canal qui pourront être envisagées. On peut continuer l'étude avec le modèle $AR(2)$ puis $AR(p)$.

Des méthodes d'estimation de fréquence Doppler ou directement du paramètre du modèle auto-régressif (paramètre a) peuvent être proposées.

De plus, on peut chercher une méthode d'amélioration indépendante du SNR_{dB} qui n'est pas toujours bien estimé.

Cette étude peut être étendue aussi pour étudier le cas d'un canal réel qui n'aurait pas exactement

les caractéristiques et statistiques supposées.

D'autres perspectives peuvent aussi être mises à table de discussion.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'estimation d'une cascade de canaux radio-mobiles à évolution lente, pour un système coopératif avec relais Amplify-and-Forward A&F. Nous avons étendu notre travail [30] qui a été fait initialement pour le cas d'un seul lien fixe-mobile en mode de diffusion 2D. L'étude dans cette thèse a été faite pour deux modes de diffusion, l'environnement 2D isotrope et celui 3D.

Nous avons commencé par le calcul du gain de canal total et du bruit total en fonction des gains élémentaires de chaque lien, des facteurs d'amplification des relais, et des bruits locaux sur chaque relais.

Nous avons donné, pour le cas d'un seul lien, la distribution du module du gain qui est une distribution de Rayleigh, et de la phase du gain qui est une distribution uniforme. Pour le cas de deux liens, les distributions sont encore données. Ensuite, une de nos contributions était de proposer une expression sous forme d'intégrale multiple, de la distribution du module du gain de canal multi-bond. Nous avons aussi calculé la distribution de la phase du gain qui reste uniforme.

Nous avons ensuite donné les formes des fonctions d'autocorrélation du gain dans le cas d'un seul bond ou même de plusieurs bonds. Nous avons interprété à l'aide des figures 2.7 à 2.10, la variation de cette fonction d'autocorrélation en augmentant le nombre de bonds, ou encore en changeant les valeurs des fréquences Doppler, pour les deux modes de diffusion 2D et 3D. Nous avons trouvé que cette fonction d'autocorrélation est plus serrée à hautes fréquences Doppler, et quand les fréquences Doppler élémentaires (f_S , f_i et f_D) changent, mais la fréquence équivalente $f_{eq}^2 = f_S^2 + 2\sum_{i=1}^N f_i^2 + f_D^2$ reste la même, la fonction d'autocorrélation du gain total reste presque la même pour les points les plus significatifs.

Nous avons ensuite donné les Densités Spectrales de Puissance (DSP) du gain total du canal pour un seul lien, dépendant de l'état de la source et de la destination (fixe-mobile ou bien mobile-mobile) pour les deux modes de diffusion 2D et 3D. Une de nos contributions était de donner l'allure de cette DSP pour le cas d'un canal multi-bond, quand le nombre de bonds est élevé. Nous avons trouvé que la densité Spectrale de puissance s'approche d'une Gaussienne.

Nous avons calculé les Bornes de Cramer Rao Bayésiennes (BCRB) pour le cas d'un seul lien fixe-mobile. Ces bornes sont utiles parce qu'elles donnent un repère pour qualifier la qualité de nos algorithmes d'estimation.

Mais avant de s'intéresser à l'estimation, nous avons utilisé un modèle autoregressif du premier ordre $AR(1)$ pour approcher le canal. Notre démarche a consisté à régler le coefficient du

modèle $AR(1)$, nommé a , le mieux possible en terme d'erreur quadratique moyenne de l'estimation finale, plutôt qu'en terme de meilleure ressemblance de corrélation (critère de "*Correlation Matching*", CM).

L'algorithme d'estimation est basé sur le Filtre de Kalman (KF), également appelé l'estimateur linéaire quadratique. Il est largement utilisé dans de multiples applications, et il donne une solution optimale au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) dans le cas où le modèle linéaire Gaussien est exact.

Une étude analytique ainsi que les simulations montrent clairement que le choix le plus utilisé dans la littérature du coefficient du modèle $AR(1)$ (le critère CM) n'est pas bien adapté pour de faibles rapports signal-sur-bruit et de faibles fréquences Doppler. Un autre choix se révèle meilleur.

Ainsi, en variant la valeur du coefficient du modèle $AR(1)$ comme proposé dans [12] et [30], en passant par la minimisation de la variance asymptotique de l'erreur d'estimation (critère MAV), on peut réaliser l'optimisation du modèle $AR(1)$ et le calcul de ses performances.

Notre contribution importante s'est manifestée par fournir premièrement une expression analytique approchée de l'erreur quadratique moyenne MSE pour les critères CM et MAV , et deuxièmement celle du coefficient du modèle $AR(1)$ sous le critère MAV pour un rapport Signal-sur-Bruit SNR et des fréquences Doppler donnés.

Cela a passé par une étape de calcul intermédiaire, celle du gain asymptotique de Kalman. Nous avons montré que ce gain asymptotique est approximé par σ_e/σ_n où σ_e^2 et σ_n^2 sont les variances des bruits d'état et d'observation respectivement. Cette approximation nécessite une première contrainte sur le bruit d'observation qui doit être largement supérieur au bruit d'état. Une contrainte supplémentaire est mise sur les fréquences Doppler : la démarche n'a intérêt que si la fréquence Doppler équivalente du canal f_{eq} est relativement faible.

Nous avons présenté une étude théorique de l'erreur quadratique moyenne MSE à la sortie du filtre de Kalman en régime asymptotique. Nous avons analysé cette erreur en la séparant en deux parties : l'erreur dynamique relative à la dynamique du gain, et celle statique reliée au bruit d'observation.

Nous avons démontré que l'erreur quadratique moyenne MSE de l'estimé à la sortie du filtre de Kalman, pour un modèle $AR(1)$, et sous le critère MAV , est proportionnelle à la puissance $2/3$ du produit $\sigma_n^2(2\pi f_{eq}T)$, où σ_n^2 est la variance totale du bruit d'observation, et f_{eq} est la fréquence Doppler équivalente du canal telle que $f_{eq}^2 = f_S^2 + 2\sum_{i=1}^N f_i^2 + f_D^2$.

Les différentes simulations faites valident le travail. Nous avons validé par exemple, dans la Figure 3.11, que l'erreur quadratique moyenne MSE est inférieure avec le choix MAV que celle avec le choix CM et elle est très proche des performances optimales (bornes de Cramer Rao). Aussi nous avons vu que MSE dépend de la fréquence Doppler équivalente plutôt que des fréquences élémentaires.

Les algorithmes proposés devraient être capables de pallier dans une certaine mesure aux erreurs de prédiction des fréquences Doppler et des rapports Signal-sur-Bruit SNR . Nous avons fait alors une étude sur la robustesse de notre choix et nous avons trouvé que la sensibilité de l'algorithme pour des connaissances imparfaites de f_{eq} et σ_n^2 est très faible. Et bien que le coefficient du modèle $AR(1)$ avec le choix CM ne nécessite pas la connaissance de σ_n^2 , notre choix MAV montre de meilleures performances.

Nous pouvons maintenant citer quelques perspectives à ce travail, certaines immédiates, d'autres plus lointaines. Tout d'abord, nous avons utilisé seulement un modèle $AR(1)$ du système, mais la question sur la suffisance de ce choix pour le cas multi-bond n'est pas vérifiée jusqu'à maintenant. On pourrait aussi utiliser un modèle $AR(2)$, puis un modèle plus général, le modèle $AR(p)$. De même, il serait un plus d'étudier des modèles autre que le modèle autorégressif.

Ensuite, il serait intéressant d'étudier l'approximation avec d'autres distributions, comme par exemple la distribution de Rice qui ont été traité dans la littérature pour le cas de deux liens (voir [86]).

De plus, tout ce travail a été réalisé dans le cadre d'un filtre de Kalman. Il existe d'autres algorithmes comme l'algorithme adaptatif basé sur la moyenne des moindres carrés (Least Mean Square (LMS) algorithm), le filtre auto-optimisé et les boucles de poursuite utilisés dans [29], [76], [77] et [84] pour le cas d'un seul lien fixe-mobile en mode de diffusion $2D$. Aussi le filtre particulière a été utilisé par [59] pour le cas d'un canal coopératif pour deux bonds. Il serait bien d'étendre toutes ces études vers le cas d'un canal multi-bond pour les deux modes de diffusion $2D$ et $3D$.

On pourrait aussi chercher à mieux comparer notre algorithme avec les Bornes de Cramer Rao. Ces bornes ont été données dans cette thèse pour le cas d'un seul lien car la distribution du gain et du bruit existe analytiquement dans ce cas. On peut essayer alors de bénéficier des expressions des distributions sous formes d'intégrales multiples pour le calcul des bornes pour le cas de deux liens puis plusieurs, un travail dur et pas évident.

Pour poursuivre le travail, on peut proposer des algorithmes pour estimer les fréquences Doppler et la fréquence équivalente, un travail qui a été fait dans la littérature pour des cas simples [11]

[80] [83]. Aussi il faut proposer des algorithmes pour estimer le rapport Signal-sur-Bruit dans notre cas multi-bond comme fait dans [27] [69] et [95], sachant que nous avons un canal multi-bond et le bruit a une distribution non Gaussienne.

Enfin, certainement les portes restent ouvertes pour étudier le cas des évanouissements rapides, et faire l'étude avec une modulation PSAM (*Pilot Symbol Assisted Modulation*)[26] [34] [89] [90] [94].

Distribution de la phase d'un canal multi-bond

On démontre dans cette partie que lorsque la distribution de la phase $\theta^{(i)}$ est uniforme quelque-soit "i", alors la distribution de la phase $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \dots + \theta^{(N+1)}$ $[2\pi]$ est encore uniforme.

Prenons un cas simple, soient

$$p_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-\pi; +\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-\pi; +\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } p_3(t) = p_1(t) \otimes p_2(t) = \begin{cases} \frac{t}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [-2\pi; 0] \\ \frac{-t}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} & \text{si } t \in [0; +2\pi] \end{cases}$$

La densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires est le produit de convolution de leurs densités de probabilité. Ainsi, on peut remplacer $p_1(t)$ par $f_{\theta^{(1)}}(\theta^{(1)})$, $p_2(t)$ par $f_{\theta^{(2)}}(\theta^{(2)})$, et $p_3(t)$ par $f_{\theta'}(\theta' = \theta^{(1)} + \theta^{(2)})$.

Si $\theta = \theta'[2\pi] = \theta^{(1)} + \theta^{(2)}[2\pi]$, alors

$$\theta = \begin{cases} \theta' & \text{si } -\pi < \theta' < +\pi \\ \theta' + 2\pi & \text{si } \theta' < -\pi \\ \theta' - 2\pi & \text{si } \theta' > +\pi \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_{\theta}(0 < \theta < \pi) &= f_{\theta'}(\theta' \text{ si } 0 < \theta' < \pi) + f_{\theta'}(\theta' + 2\pi \text{ si } -2\pi < \theta' < -\pi) \\ &= p_3(t \text{ si } 0 < t < \pi) + p_3(t + 2\pi \text{ si } -2\pi < t < -\pi) \\ &= \left(\frac{-t}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) + \left(\frac{t - 2\pi}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_{\theta}(-\pi < \theta < 0) &= f_{\theta'}(\theta' \text{ si } -\pi < \theta' < 0) + f_{\theta'}(\theta' - 2\pi \text{ si } \pi < \theta' < 2\pi) \\ &= p_3(t \text{ si } -\pi < t < 0) + p_3(t - 2\pi \text{ si } \pi < t < -\pi) \\ &= \left(\frac{t}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) + \left(\frac{-(t+2\pi)}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Calcul de la distribution du module du gain d'un canal à "N" relais

On essaie de calculer l'expression du gain d'un canal à "N + 1" bonds. Pour faire ceci, on a recours à la récursivité. Pour connaître la distribution du module ρ du gain global $\alpha = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots\dots\alpha^{(N+1)}$, on a recours à la distribution du module η du gain semi-total $\zeta = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots\dots\alpha^{(N)}$, qui désigne le produit des gains seulement jusqu'à l'indice "N" (jusqu'au N^{ieme} lien).

On a alors :

$$\begin{aligned} - \rho &= \prod_{i=1}^{N+1} \rho^{(i)} = \eta \rho^{(N+1)} \text{ où } \eta = \prod_{i=1}^N \rho^{(i)} \\ - \sigma_{\alpha}^2 &= \prod_{i=1}^{N+1} \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 = \sigma_{\zeta}^2 \sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2 \text{ où } \sigma_{\zeta}^2 = \prod_{i=1}^N \sigma_{\alpha^{(i)}}^2 \end{aligned}$$

On va démontrer que pour "N + 1" liens ("N" relais), la DDP du module du gain global est :

$$f_{\rho}(\rho) = \frac{2^{N+1} \rho}{\sigma_{\alpha}^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \dots\dots \int_0^{+\infty}}_{N \text{ fois}} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2} \right] - \left[\frac{\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}}{u_N^2} \right] \right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \dots\dots \frac{du_N}{u_N} \quad (\text{B.1})$$

avec $u_0 = 1$.

Cette formule est validée pour :

- $N = 0$ (aucun relais) : L'expression dans (B.1) implique qu'il n'y a aucune intégrale, la somme dans l'exponentielle n'existe pas, et le deuxième terme de l'exponentielle vaut $\frac{\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}}{u_0^2} = \frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}$. Ainsi,

$$f_{\rho}(\rho) = \frac{2\rho}{\sigma_{\alpha}^2} \exp \left(- \frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2} \right)$$

C'est la même expression dressée dans (2.5)

- $N = 1$ (un seul relais) : L'expression dans (B.1) implique qu'il y a une seule intégrale, la somme dans l'exponentielle vaut $\frac{u_1^2}{u_0^2} = u_1^2$, le deuxième terme de l'exponentielle vaut $\frac{\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha}^2}}{u_1^2}$,

et on a à la fin de l'intégrale le terme $\frac{du_1}{u_1}$. Ainsi,

$$f_\rho(\rho) = \frac{2^2 \rho}{\sigma_\alpha^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-u_1^2 - \frac{\rho^2}{u_1^2}\right) \frac{du_1}{u_1}$$

avec $\sigma_\alpha^2 = \sigma_{\alpha^{(1)}}^2 \sigma_{\alpha^{(2)}}^2$. C'est la même expression obtenue dans (2.6).

– Supposons l'expression est vraie pour " $N - 1$ " relais (" N " liens), alors :

$$f_\eta(\eta) = \frac{2^N \eta}{\sigma_\zeta^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty}}_{N-1 \text{ fois}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2}\right] - \left[\frac{\frac{\eta^2}{\sigma_\zeta^2}}{u_{N-1}^2}\right]\right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \dots \frac{du_{N-1}}{u_{N-1}} \quad (\text{B.2})$$

On veut démontrer que la formule dans (B.2) reste vraie pour " $N + 1$ " liens (" N " relais), et on a recours à la méthode de récurrence. Autrement dit, on veut aboutir à l'expression (B.1).

L'évaluation de la DDP du module du gain global peut être faite par marginalisation et changement de variable en passant de (ρ, η) à $(\rho^{(N+1)} = \frac{\rho}{\eta}, \eta)$:

$$\begin{aligned} f_\rho(\rho) &= \int_0^{+\infty} f_{\rho\eta}(\rho, \eta) d\eta = \int_0^{+\infty} f_{\rho^{(N+1)}\eta}(\rho^{(N+1)}, \eta) |Jac| d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} f_{\rho^{(N+1)}\eta}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) \frac{d\eta}{\eta} \end{aligned}$$

$$\text{où } Jac = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho^{(N+1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \rho^{(N+1)}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \rho} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\eta} & \frac{-\rho}{\eta^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\eta}$$

Notons que les liens étant indépendants, on a $f_{\rho^{(N+1)}\eta}\left(\frac{\rho}{\eta}, \eta\right) = f_{\rho^{(N+1)}}\left(\frac{\rho}{\eta}\right) f_\eta(\eta)$. Ainsi :

$$f_\rho(\rho) = \int_0^{+\infty} f_{\rho^{(N+1)}}\left(\frac{\rho}{\eta}\right) f_\eta(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (\text{B.3})$$

Rappelons que

$$f_{\rho^{(N+1)}}(\rho^{(N+1)}) = \frac{2\rho^{(N+1)}}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2} \exp\left(-\frac{(\rho^{(N+1)})^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2}\right)$$

Ainsi

$$f_{\rho^{(N+1)}}\left(\frac{\rho}{\eta}\right) = \frac{2\frac{\rho}{\eta}}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2} \exp\left(-\frac{\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

Introduisons les expressions (B.2) et (B.4) dans (B.3).

$$\begin{aligned}
f_\rho(\rho) &= \int_0^{+\infty} f_{\rho^{(N+1)}}\left(\frac{\rho}{\eta}\right) f_\eta(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\frac{\rho}{\eta}}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2} \exp\left(-\frac{\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2}\right) \cdot \\
&\quad \frac{2^N \eta}{\sigma_\zeta^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{N-1 \text{ fois}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2}\right] - \left[\frac{\frac{\eta^2}{\sigma_\zeta^2}}{u_{N-1}^2}\right]\right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \cdots \frac{du_{N-1}}{u_{N-1}} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= \frac{2^{N+1} \rho}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2 \sigma_\zeta^2} \cdot \\
&\quad \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{N \text{ fois}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2}\right] - \left[\frac{\frac{\eta^2}{\sigma_\zeta^2}}{u_{N-1}^2}\right] - \left[\frac{\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2}\right]\right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \cdots \frac{du_{N-1}}{u_{N-1}} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= \frac{2^{N+1} \rho}{\sigma_\alpha^2} \cdot \\
&\quad \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdot \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{N \text{ fois}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{u_i^2}{u_{i-1}^2}\right] - \left[\frac{u_N^2}{u_{N-1}^2}\right] - \left[\frac{\frac{\rho^2}{\sigma_\alpha^2}}{u_N^2}\right]\right) \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2} \cdots \frac{du_{N-1}}{u_{N-1}} \frac{du_N}{u_N}
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression (B.1) que nous voulons démontrer. Ceci a été fait en remplaçant $\frac{\eta^2}{\sigma_\zeta^2}$ par u_N , ainsi :

$$\begin{aligned}
- \frac{d\eta}{\eta} &= \frac{du_N}{u_N} \\
- \frac{\left(\frac{\rho}{\eta}\right)^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2} &= \frac{\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2}}{\eta^2} = \frac{\frac{\rho^2}{\sigma_{\alpha^{(N+1)}}^2 \sigma_\zeta^2}}{\frac{\eta^2}{\sigma_\zeta^2}} = \frac{\frac{\rho^2}{\sigma_\alpha^2}}{u_N^2}
\end{aligned}$$

Calcul des bornes de Cramer Rao Bayésiennes pour un canal sans relais

On part du modèle de base qui est tout simplement :

$$y_k = \alpha_k + n_k$$

α_k est une variable aléatoire complexe Gaussienne et circulaire, qu'on note $\alpha_k \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_\alpha^2)$, et n_k est un bruit blanc Gaussien complexe circulaire centré et de variance σ_n^2 .

On cherche à calculer les bornes de Cramer Rao minimales d'un estimateur utilisé pour estimer un bloc de gains α_k à partir d'un bloc d'observations \mathbf{y}_k .

Pour simplifier les notations, dans la suite de cette annexe, on ne va pas noter l'indice k sous les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{y} et \mathbf{n}

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]_{q,\ell} &\stackrel{\text{def}}{=} E_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}}[\nabla_{\alpha_q} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}) \nabla_{\alpha_\ell}^\top \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha})] \\ &= E_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha})] \\ &= E_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha})] + E_{\boldsymbol{\alpha}}[-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} \ln p(\boldsymbol{\alpha})] \end{aligned}$$

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha}) = p(\mathbf{n} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_n|} \exp(-(\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha})^\dagger \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha})) = \frac{1}{(\pi \sigma_n^2)^M} \exp(-\frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha})^\dagger (\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}))$$

Et

$$p(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_\alpha|} \exp(-\boldsymbol{\alpha}^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\alpha})$$

Avec :

$\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell}(\cdot) = \nabla_{\alpha_q}(\nabla_{\alpha_\ell}^\top(\cdot))$ l'opérateur différentiel seconde,

et $\nabla_{\alpha_q} = [\frac{\partial}{\partial \alpha_q^1}, \frac{\partial}{\partial \alpha_q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_q^M}]^\top$ où α_q^l est la composante numéro l de l'élément α_q se trouvant à la position q du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$.

Les α_q étant des scalaires, ∇_{α_q} sera formé d'un seul élément, on l'écrit sous la forme $\frac{\partial}{\partial \alpha_q}$. Et

comme α_q est complexe, on définit la dérivée par rapport aux complexes par :

$\frac{\partial}{\partial \alpha_q} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Re}} - j \frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Im}} \right]$, où α_q^{\Re} et α_q^{\Im} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de α_q .

– Calcul du premier terme

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \mathbf{y}} [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\mathbf{y} | \alpha))] &= -E_{\alpha, \mathbf{y}} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_q \partial \alpha_\ell} \left(Cte - \frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{y} - \alpha)^\dagger (\mathbf{y} - \alpha) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} E_{\alpha, \mathbf{y}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\mathbf{y} - \alpha)^\dagger (\mathbf{y} - \alpha) \right] \end{aligned}$$

– Première dérivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} [(\mathbf{y} - \alpha)^\dagger (\mathbf{y} - \alpha)] &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) \right] \cdot (\mathbf{y} - \alpha) + (\mathbf{y} - \alpha)^\dagger \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\mathbf{y} - \alpha) \right] \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned}$$

– Calcul de M_1

On a : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Re}} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]$ (le -1 se trouvant à la position " ℓ ")

et : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Im}} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) = [0, \dots, 0, +j, 0, \dots, 0]$ (le $+j$ se trouvant à la position " ℓ ")

Donc : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Re}} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) - j \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Im}} (\mathbf{y}^\dagger - \alpha^\dagger) \right] = [0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0]$

D'où : $M_1 = 0$

– Calcul de M_2

On a : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Re}} (\mathbf{y} - \alpha) = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]^\top$ (le -1 se trouvant à la position " ℓ ")

et : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Im}} (\mathbf{y} - \alpha) = [0, \dots, 0, -j, 0, \dots, 0]^\top$ (le $-j$ se trouvant à la position " ℓ ")

Donc : $\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} [(\mathbf{y} - \alpha)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Re}} (\mathbf{y} - \alpha) - j \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^{\Im}} (\mathbf{y} - \alpha) \right] = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]^\top$

D'où : $M_2 = -(\mathbf{y}_\ell^* - \alpha_\ell^*)$ où $*$ est l'opération conjuguée.

– Deuxième dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} [(\mathbf{y} - \alpha)^\dagger (\mathbf{y} - \alpha)] = -\frac{\partial}{\partial \alpha_q} (\mathbf{y}_\ell^* - \alpha_\ell^*)$$

On a : $\frac{\partial}{\partial \alpha_q^{\Re}} (\mathbf{y}_\ell^* - \alpha_\ell^*) = -\delta_{q\ell}$

$$\text{et : } \frac{\partial}{\partial \alpha_q^S} (y_\ell^* - \alpha_\ell^*) = -j \delta_{q\ell}$$

$$\text{Donc : } -\frac{\partial}{\partial \alpha_q} (y_\ell^* - \alpha_\ell^*) = -\frac{1}{2} (-\delta_{q\ell} + j^2 \delta_{q\ell}) = -\delta_{q\ell}$$

où $\delta_{q\ell}$ est le symbole de kronecker vaut 1 si $q = \ell$, et nul sinon.

Et donc on aura au total :

$$E_{\alpha, \mathbf{y}} [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\mathbf{y} | \alpha))] = +\frac{1}{\sigma_n^2} \delta_{q\ell}$$

– Calcul du second terme

$$\begin{aligned} E_{\alpha} [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\alpha))] &= -E_{\alpha} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_q \partial \alpha_\ell} (\text{Cte} - \alpha^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \alpha) \right] \\ &= E_{\alpha} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_q \partial \alpha_\ell} (\alpha^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \alpha) \right] \end{aligned}$$

– Première dérivée partielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\alpha^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \alpha) &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} \alpha^\dagger \right] \cdot (\mathbf{R}_\alpha^{-1} \alpha) + \alpha^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} \alpha \right] \\ &= N_1 + N_2 \end{aligned}$$

– Calcul de N_1

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^R} \alpha^\dagger = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \text{ (le 1 se trouvant à la position "l")}$$

$$\text{et : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^S} \alpha^\dagger = [0, \dots, 0, -j, 0, \dots, 0] \text{ (le } -j \text{ se trouvant à la position "l")}$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} \alpha^\dagger = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^R} \alpha^\dagger - j \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^S} \alpha^\dagger \right] = [0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0]$$

$$\text{D'où : } N_1 = \mathbf{0}$$

– Calcul de N_2

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^R} \alpha = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^\top \text{ (le 1 se trouvant à la position "l")}$$

$$\text{et : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell^S} \alpha = [0, \dots, 0, +j, 0, \dots, 0]^\top \text{ (le } +j \text{ se trouvant à la position "l")}$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} \alpha = \frac{1}{2} [0, \dots, 0, 1 - j^2, 0, \dots, 0]^\top = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^\top$$

$$D'o\grave{u} : N_2 = \sum_{b=1}^M [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{b,\ell} \cdot \alpha_\ell$$

– Deuxième d eriv ee partielle

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_q} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_\ell} (\boldsymbol{\alpha}^\dagger \mathbf{R}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\alpha}) \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \sum_{b=1}^M [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{b,\ell} \cdot \alpha_\ell$$

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial \alpha_q^2} \sum_{b=1}^M [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{b,\ell} \cdot \alpha_\ell = [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell}$$

$$\text{et : } \frac{\partial}{\partial \alpha_q^2} \sum_{b=1}^M [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{b,\ell} \cdot \alpha_\ell = j [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell}$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \sum_{b=1}^M [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{b,\ell} \cdot \alpha_\ell = \frac{1}{2} (1 - j^2) [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell} = [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell}$$

Et donc on aura au total :

$$E_\alpha [-\Delta_{\alpha_q}^{\alpha_\ell} (\ln p(\boldsymbol{\alpha}))] = [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell}$$

$$\text{Donc } [\mathbf{J}]_{q,\ell} = [\mathbf{R}_\alpha^{-1}]_{q,\ell} + \frac{1}{\sigma_n^2} \delta_{q\ell}$$

Calcul des coefficients du modèle $AR(p)$ et de σ_e^2

Partant d'un modèle autorégressif d'ordre p ,

$$\tilde{\alpha}_k = \sum_{m=1}^p a_m \tilde{\alpha}_{k-m} + e_k$$

On cherche à calculer les coefficients a_m tels que la variance de e_k soit minimale : On va dériver les équations de Yule-Walker correspondantes, puis on va déduire la valeur de cette erreur minimale.

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 = E[e_k e_k^*] &= E\left[\left(\sum_{m=0}^p a_m \tilde{\alpha}_{k-m}\right)\left(\sum_{j=0}^p a_j \tilde{\alpha}_{k-j}\right)^*\right] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p a_m a_j E[\tilde{\alpha}_{k-m} \tilde{\alpha}_{k-j}^*] \\ &= \sum_{m=0}^p \sum_{j=0}^p a_m a_j R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k-m, k-j] \end{aligned}$$

avec $a_0 = 1$.

Si on a un processus stationnaire au sens large, alors :

- on a $R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[k-m, k-j] = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[(k-j) - (k-m)] = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[m-j]$
- et $R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[j-m] = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[m-j]$

Et donc on aura :

$$\sigma_e^2 = \sum_{m=0}^p a_m^2 R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] + 2 \sum_{m \neq j}^p a_m a_j R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|j-m|]$$

Minimiser la variance s'exprime donc par le système des "p" équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a_1}(\sigma_e^2) = 0 \Rightarrow 2a_1 R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] + 2 \sum_{m \neq 1} a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|1-m|] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2}(\sigma_e^2) = 0 \Rightarrow 2a_2 R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] + 2 \sum_{m \neq 2} a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|2-m|] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial a_l}(\sigma_e^2) = 0 \Rightarrow 2a_l R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] + 2 \sum_{m \neq l} a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|l-m|] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial a_p}(\sigma_e^2) = 0 \Rightarrow 2a_p R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] + 2 \sum_{m \neq p} a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|p-m|] = 0 \end{array} \right.$$

Donc : $\sum_{m=0}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|l-m|] = 0, \forall 1 \leq l \leq p$, avec $a_0 = -1$.

D'où :

$$\sum_{m=1}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|l-m|] = -a_0 R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[l-0] = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[l] \forall 1 \leq l \leq p$$

$$\text{Or : } \tilde{\alpha}_k = \sum_{m=1}^p a_m \tilde{\alpha}_{k-m} + e_k$$

$$\text{Donc : } R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[m] = E(\tilde{\alpha}_k \tilde{\alpha}_{k-m}^*) = \sum_{n=1}^p a_n E[\tilde{\alpha}_{k-n} \tilde{\alpha}_{k-m}^*] + E[e_k \tilde{\alpha}_{k-m}]$$

Prenons $m = 0$, on aura

$$R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = \sum_{n=1}^p a_n E[\tilde{\alpha}_{k-n} \tilde{\alpha}_k^*] + E[e_k \tilde{\alpha}_k^*] = \sum_{n=1}^p a_n R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[n] + \sigma_e^2$$

(On a utilisé le fait que e_k est un bruit blanc, donc il n'est pas corrélé avec les échantillons e_{k-1}, e_{k-2}, \dots et donc $E[e_k \tilde{\alpha}_k^*] = E[e_k \left(\sum_{m=1}^p a_m \tilde{\alpha}_{k-m}^* + e_k^* \right)] = \sum_{m=1}^p a_m E[e_k \tilde{\alpha}_{k-m}^*] + E[e_k e_k^*] = \sigma_e^2$).

$$\text{D'où : } R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] = \sum_{m=1}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[-m] + \sigma_e^2$$

On obtient finalement les équations de Yule-Walker :

$$\sum_{m=1}^p a_m R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[|l-m|] = -a_0 R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[l-0] = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[l] \forall 1 \leq l \leq p$$

Et on a la valeur de la variance de l'erreur :

$$\sigma_e^2 = R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[0] - \sum_{n=1}^p a_n R_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}}[n]$$

Calcul du gain de Kalman asymptotique

Supposons que le gain asymptotique existe. Dans ce cas, les deux premières équations du filtre de Kalman sont données en régime asymptotique :

$$\begin{cases} K_\infty &= [a^2 P_\infty + \sigma_e^2] / [a^2 P_\infty + \sigma_e^2 + \sigma_n^2] \\ P_\infty &= (1 - K_\infty)(a^2 P_\infty + \sigma_e^2) \end{cases}$$

où $K_k = K_\infty$ et $P_k = P_\infty \forall k$ en régime asymptotique. Donc

$$\begin{aligned} P_\infty &= \left(1 - \frac{a^2 P_\infty + \sigma_e^2}{a^2 P_\infty + \sigma_e^2 + \sigma_n^2}\right) (a^2 P_\infty + \sigma_e^2) \\ &= \frac{(a^2 P_\infty + \sigma_e^2) \sigma_n^2}{a^2 P_\infty + \sigma_e^2 + \sigma_n^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$a^2 P_\infty^2 + [\sigma_n^2 + \sigma_e^2 - a^2 \sigma_n^2] P_\infty - \sigma_e^2 \sigma_n^2 = 0$$

On pose

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sigma_n^2 + \sigma_e^2 - a^2 \sigma_n^2)^2 + 4a^2 \sigma_n^2 \sigma_e^2 \\ &= (\sigma_n^2(1 - a^2) + \sigma_e^2)^2 + 4a^2 \sigma_n^2 \sigma_e^2 \\ &= \left(\sigma_n^2 \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} + \sigma_e^2\right)^2 + 4 \left(1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}\right) \sigma_n^2 \sigma_e^2 \\ &= \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2}\right)^2 \sigma_e^4 + 4\sigma_n^2 \sigma_e^2 - 4 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} \sigma_e^4 \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2}\right)^2 \sigma_e^4 + 4\sigma_n^2 \sigma_e^2 \\ &\approx 4\sigma_n^2 \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Car on a dans notre hypothèse que $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2$.

On aura ensuite :

$$P_\infty = \frac{\sigma_n^2(a^2 - 1) - \sigma_e^2 + \sqrt{\Delta}}{2a^2}$$

Et on peut approcher P_∞ par :

$$\begin{aligned}
 a^2 P_\infty &= \frac{\sigma_n^2(a^2 - 1) - \sigma_e^2 + \sqrt{\Delta}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{\sigma_e^2}{2} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2}\right) \\
 &\approx \sigma_e \sigma_n - \frac{\sigma_e^2}{2} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2}\right) \\
 &\approx \sigma_e \sigma_n
 \end{aligned}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}
 K_\infty &= \frac{a^2 P_\infty + \sigma_e^2}{a^2 P_\infty + \sigma_e^2 + \sigma_n^2} \\
 &\approx \frac{\sigma_e \sigma_n + \sigma_e^2}{\sigma_e \sigma_n + \sigma_e^2 + \sigma_n^2} \\
 &\approx \frac{\sigma_e \sigma_n}{\sigma_n^2} = \frac{\sigma_e}{\sigma_n}
 \end{aligned}$$

Vérification de l'hypothèse utilisée

Pour un modèle $AR(1)$, en choisissant le critère CM , on a : (voir les équations (3.40) et (3.46))

$$\text{En mode } 2D : \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} = 1 - a_{CM}^2 = 1 - \left[J_0(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [J_0(2\pi f_i T)]^2 J_0(2\pi f_D T) \right]^2 \approx \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{2}$$

$$\text{En mode } 3D : \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} = 1 - a_{CM}^2 = 1 - \left[\text{sinc}(2\pi f_S T) \prod_{i=1}^N [\text{sinc}(2\pi f_i T)]^2 \text{sinc}(2\pi f_D T) \right]^2 \approx \frac{(2\pi f_{eq} T)^2}{3}$$

Or $2\pi f_{eq} T \leq 10^{-2}$ dans notre plage de fréquences

Et $0.01 \leq \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} \leq 1$ dans notre plage de SNR_{dB}

$$\text{Ainsi } \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} \leq \frac{10^{-4}}{2} \ll 10^{-2} \leq \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\alpha^2} \leq 1$$

L'hypothèse $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2$ est donc vérifiée avec le critère CM . Et pour le choix MAV , on varie le coefficient $AR(1)$ autour de a_{CM} , et donc on reste dans la même plage. L'hypothèse reste vraie.

Approximations de MSE_1

Les approximations faites pour obtenir (3.20) sont :

1. Pour les basses fréquences normalisées, *i.e.*, pour $f \ll 1/T$, l'équation de transfert du filtre de Kalman, $L(z)$, sera approchée dans le domaine des fréquences en utilisant

$$z^{-1} = e^{-j2\pi fT} \approx 1 - j2\pi fT$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L(z = e^{j2\pi fT}) &= \frac{K_\infty z}{z - a(1 - K_\infty)} = \frac{K_\infty}{1 - a(1 - K_\infty)z^{-1}} \\ &\approx \frac{K_\infty}{1 - a(1 - K_\infty)(1 - j2\pi fT)} = \frac{A}{2\pi f_c T + j2\pi fT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A &= \frac{K_\infty}{a(1 - K_\infty)} \\ \text{et } 2\pi f_c T &= \frac{1 - a(1 - K_\infty)}{a(1 - K_\infty)} \end{aligned}$$

Alors

$$1 - L(e^{j2\pi fT}) \approx \frac{2\pi f_c T - A + j2\pi fT}{2\pi f_c T + j2\pi fT} = \frac{2\pi f_{VLF} T + j2\pi fT}{2\pi f_c T + j2\pi fT}$$

$$\text{où } 2\pi f_{VLF} T = 2\pi f_c T - A = \frac{1 - a}{a}$$

Notons que pour un bon filtrage, la fréquence de coupure f_c du filtre $L(e^{j2\pi fT})$ doit être plus grande que le support de $\Gamma_\alpha(f)$, et donc il faut que $f_{max} < f_c$.

Il faut encore que cette fréquence de coupure soit bien inférieure à la fréquence d'échantillonnage $1/T$.

Ces deux conditions sont bien compatibles pour les faibles fréquences Doppler, on les résume par : $f_{max} T < f_c T \ll 1$.

Notons aussi que $\frac{1}{a} = \left[1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}$. Ainsi

$$2\pi f_{VLF} T = \frac{1}{a} - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} = \frac{1 - a^2}{2}$$

D'après les équations (3.40) et (3.46), on a :

$$\frac{1 - a_{CM}^2}{2} \approx \frac{(2\pi f_{eq}T)^2}{3} \text{ en mode } 3D$$

$$\text{et } \frac{1 - a_{CM}^2}{2} \approx \frac{(2\pi f_{eq}T)^2}{2} \text{ en mode } 2D$$

avec pour des basses fréquences Doppler :

$$(2\pi f_{eq}T)^2 = (2\pi f_S T)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (2\pi f_i T)^2 + (2\pi f_D T)^2 \ll 2\pi f_S T + 2 \sum_{i=1}^N 2\pi f_i T + 2\pi f_D T = 2\pi f_{max} T$$

Ainsi, pour un modèle AR(1) sous le critère CM, on a l'hypothèse

$$f_{VLF} T \ll f_{max} T < f_c T \ll 1$$

Cette hypothèse reste vrai encore en changeant a .

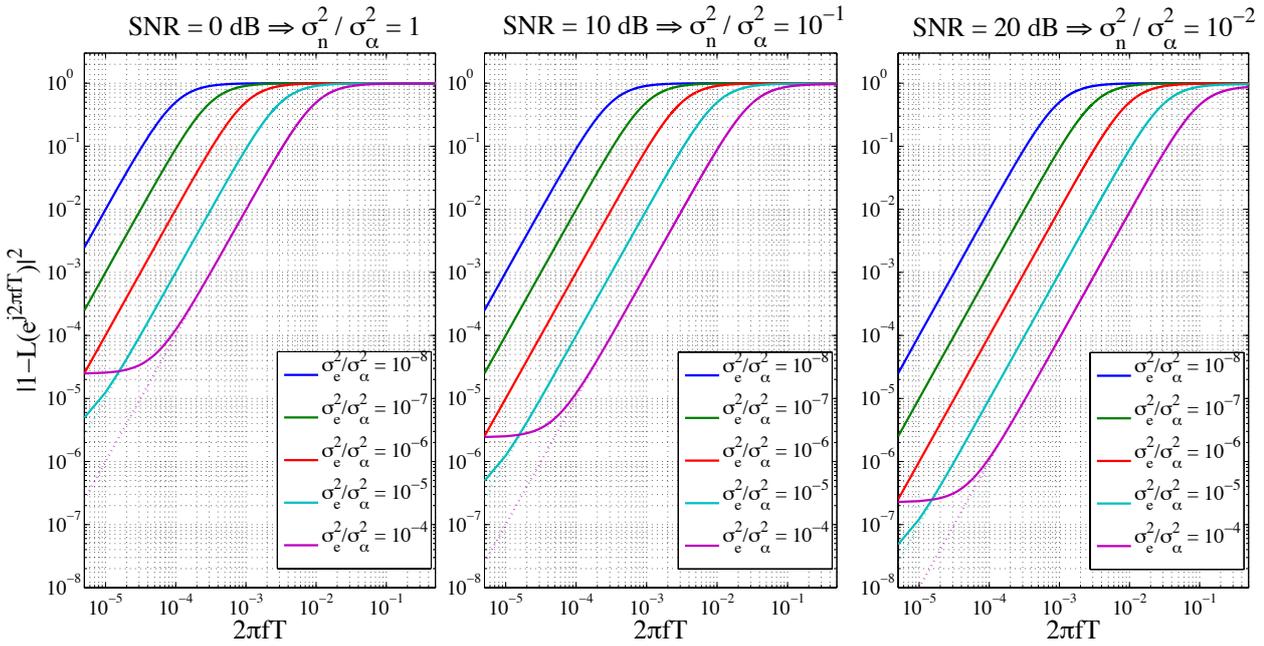


FIGURE F.1 – *Filtre passe-haut équivalent au filtrage de la partie dynamique de l'observation avec le filtre de Kalman pour différentes valeurs du coefficient a , pour $SNR_{dB} = 0$, 10 et 20 dB*

2. La fonction $1 - L(e^{j2\pi f T})$ sera asymptotiquement divisée en trois parties (on peut le vérifier dans la Figure F.1) traçant $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$ en fonction de f pour différentes valeurs du

paramètre (coefficient) a (pas nécessairement a_{CM}) et bien sûr indépendamment si le canal est Fixe-Mobile ou Mobile-Mobile ou multi-bond (indépendance de Γ_α) :

- (a) Pour $0 < fT < f_{VLF}T$, une partie constante approximativement égale à $\frac{2\pi f_{VLF}T}{2\pi f_c T}$
- (b) Pour $f_{VLF}T < fT < f_c T$, une partie linéaire approximativement égale à $\frac{2\pi fT}{2\pi f_c T}$
- (c) Pour $fT > f_c T$, une partie constante approximativement égale à 1, non considérée dans l'intégrale de MSE_1 (équation 3.19), car $\Gamma_\alpha(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$, et $f_{max}T < f_c T$.

D'où

$$MSE_1 \approx 2(I_1 + I_2) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_0^{+f_{VLF}} \left[\frac{2\pi f_{VLF}T}{2\pi f_c T} \right]^2 \Gamma_\alpha(f) df \\ I_2 = \int_{+f_{VLF}}^{+f_{max}} \left[\frac{2\pi fT}{2\pi f_c T} \right]^2 \Gamma_\alpha(f) df \end{array} \right.$$

On pose

$$\left. \begin{array}{l} I'_1 = \int_0^{+f_{VLF}} \left[\frac{2\pi fT}{2\pi f_c T} \right]^2 \Gamma_\alpha(f) df \\ I''_1 = \int_0^{+f_{VLF}} \frac{(2\pi f_{VLF}T)^2 - (2\pi fT)^2}{(2\pi f_c T)^2} \Gamma_\alpha(f) df \end{array} \right\} \text{ alors } I_1 = I'_1 + I''_1$$

Ainsi, $MSE_1 \approx 2(I''_1 + I'_1 + I_2)$

Pour deux raisons, on peut supposer que $I''_1 \ll I_2$:

- La première raison est que l'intervalle d'intégration est beaucoup plus grand dans I_2 vu que $f_{VLF} \ll f_{max}$
- La deuxième raison est que la valeur à intégrée dans I''_1 est plus faible que celle dans I_2 .
En fait, le numérateur de I''_1 est $f_{VLF}^2 - f^2 < f_{VLF}^2$. Et le numérateur de I_2 est $f^2 > f_{VLF}^2$ (car $f > f_{VLF}$ dans l'intervalle de I_2).

on a alors

$$MSE_1 \approx 2(I'_1 + I_2) = 2 \int_0^{+f_{max}} \left[\frac{2\pi fT}{2\pi f_c T} \right]^2 \Gamma_\alpha(f) df$$

Ce qui veut dire qu'on suppose que la partie linéaire commence pour $f = 0$ (prolongements sur la Figure F.1).

3. L'approximation de la fréquence de coupure $2\pi f_c T$:

$$\begin{aligned} 2\pi f_c T &= \frac{1 - a(1 - K_\infty)}{a(1 - K_\infty)} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1 - K_\infty} - 1 \end{aligned}$$

or $a^2 = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}$, et $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \left[1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}\right]^{-1/2} \approx 1 + \frac{\sigma_e^2}{2\sigma_\alpha^2}$

Et $K_\infty \approx \frac{\sigma_e}{\sigma_n}$ (équation (3.15)) $\Rightarrow \frac{1}{1 - K_\infty} \approx \frac{\sigma_n}{\sigma_n - \sigma_e}$

D'où :

$$\begin{aligned} 2\pi f_c T &\approx \left(1 + \frac{\sigma_e^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_n - \sigma_e}\right) - 1 = \frac{2\sigma_\alpha^2\sigma_n + \sigma_e^2\sigma_n - 2\sigma_\alpha^2\sigma_n + 2\sigma_\alpha^2\sigma_e}{2\sigma_\alpha^2(\sigma_n - \sigma_e)} \\ &\approx \frac{2\sigma_\alpha^2\sigma_e}{2\sigma_\alpha^2\sigma_n} = \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \end{aligned}$$

Approximation de MSE_2

Dans cette annexe, on calcule la valeur :

$$MSE_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| L(e^{j2\pi fT}) \right|^2 \Gamma_n(f) df$$

Pour le calcul de MSE_2 , on doit savoir la valeur de la densité spectrale de puissance du bruit d'observation $\Gamma_n(f)$ ainsi que son support.

Or d'après la section 2.2 :

$$n = n^{(N+1)} + \sum_{i=1}^N \left[n^{(i)} \left(\prod_{j=i}^N A^{(j)} \right) \left(\prod_{j=i+1}^{N+1} \alpha^{(j)} \right) \right]$$

Ainsi, et comme les bruits $n^{(i)}$ et les gains $\alpha^{(j)}$ sont indépendants entre eux et l'un de l'autre $\forall i$ et $\forall j$, alors :

$$\Gamma_n(f) = \Gamma_{n^{(N+1)}}(f) + \sum_{i=1}^N \left[\left(\prod_{j=i}^N A^{(j)} \right) \Gamma_{n^{(i)}}(f) \otimes M^{(i)}(f) \right]$$

où

$$M^{(i)}(f) = \bigotimes_{j=i+1}^{N+1} \Gamma_{\alpha^{(j)}}(f)$$

Le support de $M^{(i)}$ est la somme des supports des $\Gamma_{\alpha^{(j)}}$ pour j allant de $i+1$ à $N+1$:

$$\left[-f_{max}^{(i)}; +f_{max}^{(i)} \right] \text{ où } f_{max}^{(i)} = f_i + 2 \sum_{j=i+1}^N f_j + f_D$$

Le bruit $n^{(i)}$ est un bruit blanc Gaussien,

$$\Gamma_{n^{(i)}} = \sigma_n^{(i)2} T$$

sur le support $\left[-\frac{1}{2T}; +\frac{1}{2T} \right]$

Comme nous travaillons avec des fréquences Doppler telles que $2\pi f_i T < 10^{-2}$ alors $f_{max}^{(i)} \ll \frac{1}{2T}$

Par suite, l'effet de $M^{(i)}$ dans le produit de convolution est négligeable ($M^{(i)}$ est assimilée à une distribution de Dirac), seule la variance de $M^{(i)}$ qui reste.

Ainsi, et d'après l'équation (2.3) :

$$\Gamma_n(f) = \sigma_n^{(N+1)^2} T + \sum_{i=1}^N \left[\left(\prod_{j=i}^N A^{(j)} \right) \sigma_n^{(i)^2} T \prod_{j=i+1}^{N+1} \left[\sigma_\alpha^{(j)^2} \right] \right] = \sigma_n^2 T$$

et

$$MSE_2 = \sigma_n^2 T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi fT})|^2 df$$

Calculons alors le module du filtre $L(z)$ donné par l'équation (3.16) :

$$\begin{aligned} |L(e^{j2\pi fT})|^2 &= \left| \frac{K_\infty e^{j2\pi fT}}{e^{j2\pi fT} - a(1 - K_\infty)} \right|^2 \\ &= \frac{K_\infty^2}{1 + a^2(1 - K_\infty)^2 - 2a(1 - K_\infty)\cos(2\pi fT)} \\ &= \frac{B}{1 + A\cos(2\pi fT)} \end{aligned}$$

$$\text{où } A = \frac{-2a(1 - K_\infty)}{1 + a^2(1 - K_\infty)^2} \text{ et } B = \frac{K_\infty^2}{1 + a^2(1 - K_\infty)^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} MSE_2 &= \sigma_n^2 T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi fT})|^2 df \\ &= 2\sigma_n^2 T \int_0^{+\frac{1}{2T}} \frac{B}{1 + A\cos(2\pi fT)} df \\ &= \frac{\sigma_n^2}{\pi} \int_0^{+\pi} \frac{B}{1 + A\cos(x)} dx \end{aligned}$$

Or d'après [35] (3.613) : $\int_0^\pi \frac{1}{1 + A\cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1 - A^2}}$ si $|A| < 1$

Vérifions dans notre cas : $1 + a^2(1 - K_\infty)^2 - 2a(1 - K_\infty) = [1 - a(1 - K_\infty)]^2 > 0$,
ainsi $1 + a^2(1 - K_\infty)^2 > 2a(1 - K_\infty)$ et $|A| = \frac{2a(1 - K_\infty)}{1 + a^2(1 - K_\infty)^2} < 1$

$$\text{On calcule } \sqrt{1 - A^2} = \sqrt{\frac{(1 + a^2(1 - K_\infty)^2)^2 - (-2a(1 - K_\infty))^2}{(1 + a^2(1 - K_\infty)^2)^2}} = \frac{1 - a^2(1 - K_\infty)^2}{1 + a^2(1 - K_\infty)^2}$$

D'où :

$$MSE_2 = \frac{B\sigma_n^2}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{\sigma_n^2 K_\infty^2}{1-a^2(1-K_\infty)^2}$$

L'approximation peut se faire si on tient compte de l'hypothèse $\sigma_e^2 \ll \sigma_n^2 < \sigma_\alpha$ et sachant l'approximation $K_\infty \approx \frac{\sigma_e}{\sigma_n}$ vue dans l'équation (3.15) et l'expression de σ_e^2 vue dans l'équation (3.6) :

$$\begin{aligned} \frac{K_\infty^2}{1-a^2(1-K_\infty)^2} &\approx \frac{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_n^2}}{1 - \left(1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_\alpha^2}\right) \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_n}\right)^2} \\ &= \frac{\sigma_e^2 \sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_n^2 - (\sigma_\alpha^2 - \sigma_e^2) (\sigma_n - \sigma_e)^2} \\ &\approx \frac{\sigma_e^2 \sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 \sigma_n^2 - (\sigma_\alpha^2) (\sigma_n - \sigma_e)^2} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2\sigma_n \sigma_e - \sigma_e^2} \\ &\approx \frac{\sigma_e^2}{2\sigma_n \sigma_e} \\ &= \frac{\sigma_e}{2\sigma_n} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] H. Abeida, J.-M. Brossier, L. Ros and J. Vilà-Valls, “An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of a slowly varying fading channel for CPM signals”, in *Proc. IEEE Globecom*, Hawaï, Dec. 2009. (Cité en page 60.)
- [2] C. Abgrall, “*Allocation de ressources dans les réseaux de communications sans fil denses*”, Thèse à Telecom ParisTech, 2010. (Cité en pages vii, 19, 20, 21 et 22.)
- [3] B. Akhbari, M. Mirmohseni, and M. R. Aref, “Compress-and-Forward Strategy for The Relay Channel With Non-Causal State Information”, in *IEEE International Symposium on Information Theory*, Seoul, Korea, Jun. 2009 (Cité en pages 19 et 20.)
- [4] A. S. Akki and F. Haber, “A Statistical Model of Mobile-to-Mobile Land Communication Channel”, in *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 35, no. 1, Feb 1986. (Cité en pages 28, 29, 35, 36, 38 et 42.)
- [5] A. S. Akki, “Statistical properties of mobile-to-mobile land communication channels”, in *IEEE transactions on vehicular technology*, vol. 43, no. 4, pp. 826–831, Nov. 1994. (Cité en pages 7 et 28.)
- [6] T. Y. Al-Naffouri, “An EM-based forward–backward Kalman filter for the estimation of time-variant channels in OFDM”, in *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 55, Jul. 2007 (Cité en page 60.)
- [7] O. Amin, B. Gedik, and M. Uysal, Murat, “Channel estimation for amplify-and-forward relaying : Cascaded against disintegrated estimators”, in *IET communications*, vol. 4, no. 10, pp. 1207–1216, Jul. 2010. (Cité en page 60.)
- [8] T. Aulin, “A modified model for the fading signal at a mobile radio channel”, in *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 28, no. 3, pp. 182—203, Aug. 1979. (Cité en page 28.)
- [9] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu, “Autoregressive modeling for fading channel simulation”, in *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 4, no. 4, pp. 1650–1662, Jul. 2005. (Cité en pages 60 et 62.)
- [10] G. Bakhshi, R. Saadat and K. Shahtalebi, “A Modified Two-Ring Reference Model for MIMO Mobile-to-Mobile Communication Channels ”, in *Inter. Symposium on Telecom.*, Aug. 2008 (Cité en pages 8 et 28.)
- [11] R. Bamler, “Doppler frequency estimation and the Cramér-Rao bound”, in *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 29, no. 3, pp. 385–390, May 1991. (Cité en page 111.)
- [12] A. Barbieri, A. Piemontese, G. Colavolpe, “On the ARMA Approximation for Frequency Channels Described by the Clarke Model with Applications to Kalman-based Receivers”, in *IEEE Trans. on Wireless Comm.*, vol. 8, no. 2, Feb. 2009. (Cité en pages 2, 60 et 110.)

- [13] S. Bay, B. Geller, A. Renaux, J. P. Barbot, and J.M. Brossier, “On the Hybrid Cramér Rao Bound and Its Application to Dynamical Phase Estimation”, in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, pp. 453–456, 2008. (Cité en page 51.)
- [14] M. R. Bhatnagar and A. Hjørungnes, “Double differential modulation for decode-and-forward cooperative communications”, in *IEEE International Conference on Signal Processing and Communications ICSPC*, 24–27 Nov. 2007, Dubai, United Arab Emirates. (Cité en page 19.)
- [15] A. Chakrabarti, A. de Baynast, A. Sabharwal, and B. Aazhang, “Half-Duplex Estimate-and-Forward Relaying : Bounds and Code Design”, in *IEEE International Symposium on Information Theory*, Seattle, Washington, USA , Jul. 2006 (Cité en page 19.)
- [16] A. Chakrabarti, E. Erkip, A. Sabharwal, and B. Aazhang, “Code designs for cooperative communication”, in *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 5, pp. 16–26, Sep. 2007. (Cité en page 19.)
- [17] F. M. Chang, I. P. Hsieh, and S. J. Kao, “An efficient uplink scheduling mechanism with enabling multi-device transmission and maximum latency fulfillment in IEEE 802.16 j networks”, in *6th International Conference on Computer Science & Education (ICCSE)*, 3–5 Aug. 2011. (Cité en pages 18, 21 et 23.)
- [18] W. Chen and R. Zhang, “Kalman-filter channel estimator for OFDM systems in time and frequency-selective fading environment”, in *Proc. IEEE ICASSP*, Montréal, Canada, May 2004. (Cité en pages 60 et 67.)
- [19] H. Chowdhury, J. Lehtomaki, J. Iinatti, and P. Pirinen, “Data downloading in relay assisted mobile vehicles”, in *1st International Conference on Wireless Communication, Vehicular Technology, Information Theory and Aerospace & Electronic Systems Technology (Wireless VITAE) , 17–20 May 2009*. (Cité en page 8.)
- [20] G. K. Chui and G. Chen, *Kalman Filtering with real-time applications*, Springer-Verlag, 1987. (Cité en page 72.)
- [21] R.H. Clarke, “A statistical theory of mobile-radio reception”, in *Bell system technical journal, Wiley Online Library*, vol. 47, no. 6, pp. 957–1000, 1968. (Cité en pages 7, 8, 27, 35 et 38.)
- [22] R. H. Clarke and W. L. Khoo, “3-D Mobile Radio Channel Statistics”, in *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 46, no. 3, August 1997 (Cité en pages 7, 28, 38 et 43.)
- [23] T. Cover, and A. EL. Gamal, “Capacity theorems for the relay channel”, in *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 5, pp. 572–584, Sep. 1979. (Cité en page 1.)
- [24] R. Dabora and S.D. Servetto, “On the role of estimate-and-forward with time sharing in cooperative communication”, in *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 54, no. 10, pp. 4409–4431, Oct. 2008 (Cité en page 19.)
- [25] J. Dauwels, “Computing bayesian cramér-rao bounds”, in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory ISIT*, 4–9 Sep. 2005 (Cité en page 51.)

- [26] M. Dong, L. Tong, and B.M. Sadler, “Optimal insertion of pilot symbols for transmissions over time-varying flat fading channels”, in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 5, pp. 1403–1418, May 2004. (Cité en page 112.)
- [27] M. Enescu and V. Koivunen, “On the estimation of state matrix and noise statistics in state space models”, in *Proc. IEEE 56th Vehicular Technology Conference*, Vancouver BC, Sep. 2002. (Cité en page 112.)
- [28] P. Ferrand, J. M. Gorce, and C. Goursaud, “Power allocation in relay channels under a global power constraint using virtual nodes”, in *IEEE 24th International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, pp. 949–953, London, United Kingdom, 8–11 Sep. 2013. (Cité en page 1.)
- [29] R. Gerzaguet, L. Ros, J.M. Brossier, S. Ghandour-Haidar, and F. Belveze, “Self-adaptive stochastic rayleigh flat fading channel estimation”, in *IEEE 18th International Conference on Digital Signal Processing (DSP 2013)*, Santorini, Greece, 1–3 Jul. 2013. (Cité en page 111.)
- [30] S. Ghandour, *Estimation de canal à évanouissements lents pour les communications radio-mobiles*, Master’s degree report at Grenoble-INP, Jun. 2010. (Cité en pages 2, 109 et 110.)
- [31] S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, “On the use of first-order autoregressive modeling for Rayleigh Flat Fading Channel Estimation with Kalman filter”, in *ELSEVIER Signal Processing*, vol. 92, pp. 601–606, Feb. 2012. (Cité en page 88.)
- [32] S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, “Improving the tuning of First-Order Autoregressive Model for the estimation of Amplify and Forward Relay channel”, in *IEEE 19th International Conference on Telecommunications*, Jounieh, Lebanon, Apr. 2012 (Cité en pages 85 et 88.)
- [33] S. Ghandour-Haidar, L. Ros and J. M. Brossier, “3-D Mobile-to-Mobile channel tracking with first-order autoregressive model-based Kalman filter”, in *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT)*, 15–17 Dec. 2013, Athens, Greece. (Cité en page 88.)
- [34] M. Ghogho, D. McLernon, E. Alameda-Hernandez, and A. Swami, “Channel estimation and symbol detection for block transmission using data-dependent superimposed training”, in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 3, pp. 226–229, Mar. 2005. (Cité en page 112.)
- [35] Gradshteyn and Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Alan Jeffrey editions, 1994. (Cité en pages 42 et 132.)
- [36] Z. Han, A.L. Swindlehurst, and K. Liu, “Optimization of MANET connectivity via smart deployment/movement of unmanned air vehicles”, in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, no. 7, pp. 3533–3546, Sep. 2009. (Cité en page 8.)
- [37] H. Hijazi, “*Estimation de canal radio-mobile à évolution rapide dans les systèmes à modulation OFDM*”, Thèse de l’Institut Polytechnique de Grenoble, Nov. 2008. (Cité en pages vii, 11 et 62.)

- [38] H. Hijazi and L. Ros, “Joint Data QR-Detection and Kalman Estimation for OFDM Time-varying Rayleigh Channel Complex Gains”, in *IEEE Trans. Comm.*, vol. 58, no. 1, pp. 170–178, January 2010. (Cité en page 60.)
- [39] M.J. Hussain, *Cooperative Diversity for Inter-Vehicular Communications*, Master’s degree report at University of Waterloo, 2008. (Cité en pages 13, 14, 15, 16 et 25.)
- [40] A. S. Ibrahim, A. K. Sadek, W. Su, and K. J. R. Liu, “Cooperative communications with relay-selection : when to cooperate and whom to cooperate with?”, in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 7, pp. 2814–2827, Jul. 2008. (Cité en page 20.)
- [41] R. Iqbal, T. D. Abhayapala and T. A. Lamahewa, “Generalized Clarke Model for Mobile Radio Reception ”, in *IET Communications*, vol. 3, no. 4, pp. 644–654, Apr. 2009 (Cité en page 27.)
- [42] B. Jaumard, T. M. Murillo, and S. Sebbah, “Scheduling vs. pseudo-scheduling models in IEEE 802.16 j wireless relay networks”, in *26th Biennial Symposium on Communications (QBSC)*, 28–29 May 2012. (Cité en pages 18, 21 et 23.)
- [43] Y. Jiang, G. Zhu, and Z. Wang, “A specific mobile relay with Doppler diversity in OFDM system for high-speed railway scenario”, in *2nd IEEE International Conference on Network Infrastructure and Digital Content*, pp. 742–747, 24-26 Sep 2010. (Cité en page 8.)
- [44] Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993. (Cité en pages 68 et 72.)
- [45] A. Klein and P. Duhamel, “Equalization with part-time help”, in *7th IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP*, 2007. (Cité en pages 19 et 20.)
- [46] C. Kominakis, C. Fragouli, A. H. Sayed and R. D. Wesel, “Multi-Input Multi-Output fading channel tracking and equalization using Kalman estimation”, in *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 50, May 2002. (Cité en pages 60 et 67.)
- [47] I. Z. Kovács, P. C. F. Eggers, K. Olesen and L. G. Petersen, “Investigations of Outdoor-to-Indoor Mobile-to-Mobile Radio Communication Channels ”, in *IEEE 56th Vehicular Tech. Conference*, 2002. (Cité en pages 7 et 36.)
- [48] H.J. Lee, S.H. Kang, and J.H. Kim, “A cooperative scanning mechanism for the mobile relay in the moving network environment”, in *7th IEEE Consumer Communications and Networking Conference (CCNC)*, 9-12 Jan 2010. (Cité en page 8.)
- [49] F. Liu, Z. Chen, X. Zhang and D. Yang, “Channel Estimation for Amplify and Forward Relay in OFDM System”, in *Proc. IEEE 4th Wireless Communications, Networking and Mobile Computing Conference WiCOM*, Oct. 2008. (Cité en page 60.)
- [50] Z. Liu, X. Ma, and G. B. Giannakis, “Space-time coding and Kalman Filtering for time selective fading channels”, in *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, no. 2, Feb. 2002. (Cité en page 60.)
- [51] K. Mammassis, E. Pfann, R.W. Stewart and G. Freeland, “ Three-dimensional channel modelling using spherical statistics for smart antennas ”, in *Electronics Letters*, vol. 44, no. 2, Jan. 2008 (Cité en pages 8 et 28.)

- [52] W. Mardini, Y. Khamayseh, and A. E. Shorouq, "Optimal Number of Relays in Cooperative Communication in Wireless Sensor Networks", in *Communications and Network Journal*, vol. 4, pp. 101, May 2012. (Cité en page 20.)
- [53] M. McGuire and M. Sima, "Low-order Kalman filters for channel estimation", in *IEEE Comm., Computers and Signal Proc.*, pp. 352–355, Aug. 2005. (Cité en pages 60 et 67.)
- [54] H. Mehrpouyan and S. D. Blostein, "ARMA Synthesis of Fading Channels", in *IEEE Trans. on Wireless Comm.* vol. 7, no. 8, pp. 2846–2850, Aug. 2008 (Cité en pages 29 et 60.)
- [55] H. Mheidat, *Channel Estimation and Equalization for Cooperative Communication*, PhD degree at University of Waterloo, 2006. (Cité en pages vii, 17 et 23.)
- [56] D. S. Michalopoulos, H. A. Suraweera, G. K. Karagiannidis, and R. Schober, "Amplify-and-forward relay selection with outdated channel estimates", in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 60, no. 5, pp. 1278–1290, May 2012. (Cité en page 20.)
- [57] A. F. Molisch, F. Tufvesson, J. Karedal and C. F. Mecklenbrauker, "A survey on vehicle-to-vehicle propagation channels", in *IEEE Wireless Comm.*, vol. 16, no. 6, pp 12-22, Dec. 2009 (Cité en pages 8 et 9.)
- [58] H.J.Myung and D.J. Goodman, *Single Carrier FDMA*. Wiley Series on Wireless Communications and Mobile Computing, 2008. (Cité en page 62.)
- [59] I. Nevat, G.W. Peters G.W., A. Doucet and J. Yuan, "Channel Tracking in Relay Systems via Particle MCMC", in *IEEE Vehicular Technology Conference*, San Francisco, USA, Sep. 2011. (Cité en pages 60 et 111.)
- [60] A. Nosratinia, T. E. Hunter, and A. Hedayat, "Cooperative communication in wireless networks", in *IEEE Communications Magazine*, vol. 42, no. 10, pp. 74–80, Oct. 2004. (Cité en page 19.)
- [61] N. ODonoughue and J.M.F. Moura, "On the product of independent complex Gaussians", in *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 60, No. 3, pp. 1050–1063, 2012 (Cité en page 29.)
- [62] T. J. Oechtering and H. Boche, "Relay selection in bidirectional relay communication", in *IEEE 8th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications SPAWC*, 17–20 Jun 2007. (Cité en page 20.)
- [63] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002 (Cité en page 48.)
- [64] J. D. Parsons and A. M. D. Turkmani, "Characterisation of mobile radio signals : Model description", in *Proc. Inst. Electr. Eng. I, Commun., Speech, Vision*, vol. 138, no. 6, pp. 549–556, Dec. 1991. (Cité en page 28.)
- [65] C. S. Patel and G. L. Stüber, "Channel Estimation for Amplify and Forward Relay Based Cooperation Diversity Systems", in *IEEE Trans. on Wireless Comm.*, vol. 6, no. 6, Jun. 2007. (Cité en page 60.)

- [66] C. S. Patel, G. L. Stuber, and T. G. Pratt, "Simulation of Rayleigh-faded mobile-to-mobile communication channels", in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 53, no. 11, pp. 1876–1884, Nov. 2005. (Cité en pages 28 et 29.)
- [67] C. S. Patel, G. L. Stüber and T. G. Pratt, "Statistical Properties of Amplify and Forward Relay Fading Channels", in *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 55, no. 1, Jan. 2006. (Cité en pages 28 et 29.)
- [68] M. Pätzold, B. O. Hogstad, N. Youssef and D. Kim, "A MIMO Mobile-To-Mobile Channel Model : Part I - The Reference Model ", in *16th IEEE PIMRC Symposium*, Sep. 2005. (Cité en page 28.)
- [69] D. R. Pauluzzi, and N. C. Beaulieu, "A comparison of SNR estimation techniques for the AWGN channel", in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 10, pp. 1681–1691, Oct. 2000. (Cité en page 112.)
- [70] S. W. Peters, and R. W. Heath, "The future of WiMAX : multihop relaying with IEEE 802.16 j", in *IEEE Communications Magazine*, vol. 47, no. 1, pp. 104–111, Jan. 2009. (Cité en pages 18, 21 et 23.)
- [71] J. G. Proakis, "Digital Communications", in *New York : McGraw-Hill*, 1989. (Cité en pages 12 et 13.)
- [72] T. S. Rappaport, "Wireless Communications : Principles and Practice", Prentice Hall PTR, 2000. (Cité en pages 15 et 16.)
- [73] A. Ribero, "*Wireless Cooperative Communications and Networking*", PhD degree at University of Minnesota, Dec. 2006. (Cité en pages vii et 24.)
- [74] D. Roque, C. Siclet and J. M. Brossier, "A Low-Complexity Multicarrier Scheme with LDPC Coding for Mobile-to-Mobile Environment", in *IEEE Military Comm. Conference*, Orlando, Florida, United States, Oct. 2012. (Cité en page 7.)
- [75] L. Ros, "*Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes : Application au mode TDD de l'UMTS*", Thèse à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001. (Cité en page 14.)
- [76] L. Ros, J. M. Brossier and S. Ghandour-Haidar , "Sur l'utilisation des filtres du premier ordre pour l'estimation d'un canal radio-mobile de rayleigh à évanouissement plat", in *23ème colloque Gretsisi*, Bordeaux, France, 2011. (Cité en page 111.)
- [77] L. Ros, H. Hijazi, and E. P. Simon, "Complex Amplitudes Tracking Loop for multipath channel estimation in OFDM systems under slow to moderate fading", in *Signal Processing*, vol. 97, pp. 134–145, Apr. 2014. (Cité en page 111.)
- [78] L. Ros, H. Hijazi, E. P. Simon, "Paths complex gain tracking algorithms for OFDM receiver in slowly-varying channels", in *Proc. IEEE ISCCSP, Limassol, Cyprus*, Mar. 2010. (Cité en page 60.)
- [79] M. Rosenblatt, "A central limit theorem and a strong mixing condition", in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 1956 (Cité en page 47.)

- [80] A. Sampath and J. M. Holtzman, “Estimation of maximum Doppler frequency for handoff decisions”, in *43rd IEEE Vehicular Technology Conference*, 18–20 May 1993. (Cité en page 112.)
- [81] M. Sauter, “Communication Systems for the Mobile Information Society”, in *John Wiley & Sons*, 2006. (Cité en page 5.)
- [82] A. Scaglione, D. L. Goeckel, and J. N. Laneman, “Cooperative communications in mobile ad hoc networks”, in *IEEE Signal Processing Magazine*, Sep. 2006. (Cité en page 8.)
- [83] W. T. Shi, J. G. Huang, C. B. He, and Y. Hou, “2D angle and Doppler frequency estimation in MIMO radar”, in *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science WCECS*, 19–21 Oct. 2011, San Francisco, USA. (Cité en page 112.)
- [84] H. Shu, *Algorithmes de poursuite pour l’estimation de canal radio-mobile et performances asymptotiques : applications pour les systèmes OFDM*, Thèse à l’Université Lille I, Nov. 2013. (Cité en page 111.)
- [85] H. Shu, E. P. Simon and L. Ros “Third-Order Kalman Filter : Tuning and Steady-State Performance”, in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 11, pp. 1082–1085, Nov. 2013. (Cité en page 60.)
- [86] B. Talha, *Mobile-to-Mobile Cooperative Communication Systems : Channel Modeling and System Performance Analysis*, PhD degree report at University of Agder, 2010. (Cité en pages 18, 20, 23, 25 et 111.)
- [87] B. Talha and M. Patzold, “Channel models for mobile-to-mobile cooperative communication systems : A state of the art review”, in *IEEE Vehicular Technology Magazine*, vol. 6, no. 2, pp. 33–43, Jun. 2011. (Cité en page 28.)
- [88] C. C Tan, N. C. Beaulieu, “On first-order Markov modeling for the Rayleigh fading channel”, in *IEEE Trans. on Communications*, vol. 48, no. 12, pp. 2032–2040, Dec. 2000 (Cité en page 60.)
- [89] J. K. Tugnait, and W. Luo, “On channel estimation using superimposed training and first-order statistics”, in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing Proceedings (ICASSP)*, Sep. 2003. (Cité en page 112.)
- [90] J.K. Tugnait and S. He, “Doubly-selective channel estimation using data-dependent superimposed training and exponential basis models”, in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 6, no. 11, pp. 3877–3883, Nov. 2007. (Cité en page 112.)
- [91] J. Vilà Valls, “*Estimation Dynamique non-linéaire de canaux de transmissions pour récepteurs satellites mobiles*”, Thèse à l’Institut Polytechnique de Grenoble, Mar. 2010. (Cité en pages 51 et 67.)
- [92] H. S. Wang and P. C. Chang, “On verifying the first-order Markovian Assumption for a Rayleigh Fading Channel Model”, in *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 45, no. 2, pp. 353–357, May 1996. (Cité en pages 60, 61 et 70.)

- [93] C. X. Wang, X. Cheng, and D. I. Laurenson, “Vehicle-to-Vehicle Channel Modeling and Measurements : Recent Advances and Future Challenges”, in *IEEE Communication Magazine*, pp. 96–103, Nov. 2009 (Cité en page 8.)
- [94] R.J. Whang, H. Liu, and E.K. Hong, “Multiuser cooperative relay communication employing hierarchical modulation”, in *IEEE 71st Vehicular Technology Conference (VTC 2010-Spring)*, 16–19 May 2010. (Cité en page 112.)
- [95] A. Wiesel, J. Goldberg, and H. Messer, “Non-data-aided signal-to-noise-ratio estimation”, in *IEEE International Conference on Communications ICC*, 28 Apr.–2 May 2002. (Cité en page 112.)
- [96] L. L. Xie and P. R. Kumar, “A network information theory for wireless communication : Scaling laws and optimal operation”, in *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 5, pp. 748–767, May 2004. (Cité en page 1.)
- [97] Y. Yang, H. Hu, J. Xu, and G. Mao, “Relay technologies for WiMAX and LTE-advanced mobile systems”, in *IEEE Communications Magazine*, vol. 47, no. 10, pp. 100–105, Oct. 2009. (Cité en page 8.)
- [98] Y. Yang, L. Luo, and R. S. Cheng, “Dynamic Decode-And-Forward and Amplify-And-Forward Cooperative Strategy Using Distributed Space-Time Code in Uplink MIMO Systems with Multiple Relays”, in *IEEE International Conf. on Comm.*, Dresden, Germany, 14–18 Jun. 2009. (Cité en page 19.)
- [99] A. G. Zajic and G. L. Stuber, “Three-Dimensional Modeling, Simulation, and Capacity Analysis of Space–Time Correlated Mobile-to-Mobile Channels”, in *IEEE Trans. on Vehicular Tech*, vol. 57, no. 4, Jul. 2008 (Cité en pages 28 et 29.)
- [100] A. G. Zajic and G. L. Stüber, “Maximum Likelihood Method for MIMO Mobile-to-mobile Channel Parameter Estimation”, in *IEEE GLOBECOM Conference*, Nov. 30 – Dec. 4 2008. (Cité en pages 7 et 8.)
- [101] X. J. Zhang and Y. Gong, “On the diversity gain in dynamic decode-and-forward channels with imperfect CSIT”, in *IEEE Transactions on Communications*, vol. 59, no. 1, pp. 59–63, Jan. 2011. (Cité en page 19.)
- [102] X. Zhou, T. A. Lamahewa and P. Sadeghi, “Kalman Filter-based Channel Estimation for Amplify and Forward Relay Communications”, in *43th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Nov. 2009. (Cité en page 60.)

Estimation de canal à évanouissements plats dans les transmissions sans fils à relais multibonds

Résumé — Cette thèse traite de l'estimation d'un canal de communication radio-mobile multibond. La communication entre l'émetteur et le récepteur est ainsi faite par l'intermédiaire de relais (de type « Amplify and-Forward ») en série. Les différents éléments (émetteurs, relais, récepteurs) peuvent être fixes ou mobiles. Chaque lien de communication (chaque bond) est modélisé par un canal de Rayleigh à évanouissements plats, avec un spectre Doppler issu de deux environnements possibles de diffusion : en deux dimensions ($2D$, amenant le spectre en U de Jakes), ou en trois dimensions ($3D$, amenant un spectre Doppler plat). L'objectif majeur de la thèse est l'estimation dynamique du canal global issue de la cascade des différents liens. A cette fin, la cascade de canaux est approchée par une modèle auto-régressif du premier ordre ($AR(1)$), et l'estimation est réalisée à l'aide d'un algorithme standard, le filtre de Kalman. La méthode couramment utilisée dans la littérature pour fixer le paramètre du modèle $AR(1)$ est basée sur un critère de « corrélation matching » (CM). Cependant, nous montrons que pour des canaux à variations lentes, un autre critère basé sur la minimisation de la variance asymptotique (MAV) de la sortie du filtre de Kalman est plus approprié. Pour les deux critères, CM et MAV , cette thèse donne une justification analytique en fournissant des formules approchées de la variance d'estimation par le filtre de Kalman, ainsi que du réglage optimal du paramètre du modèle $AR(1)$. Ces formules analytiques sont données en fonctions des fréquences Doppler et du rapport signal sur bruit, pour les environnements de diffusion $2D$ et $3D$, quel que soit le nombre et le type de bonds (fixe-mobile ou mobile-mobile). Les résultats de simulations montrent un gain considérable en termes de l'erreur quadratique moyenne (MSE) de l'estimateur de canal bien réglé, en particulier pour le scénario le plus courant de canal à évanouissements lents.

Mots clés : Système Coopératif multibonds, Relais Amplify-and-Forward, Estimation de canal, Filtre de Kalman, Modèle autorégressif, Mode de diffusion, Communication Mobile-Mobile, évanouissement plat, Spectre de Jakes, canal de Rayleigh, fréquence Doppler, Auto-corrélation, Bornes Bayésiennes de Cramér-Rao BCRB.

Flat fading channel estimation for multihop relay wireless transmissions

Abstract — This thesis deals with the estimation of the multihop Amplify-and-Forward relay communications. The various objects (transmitter, relays, receivers) can be fixed or mobile. Each link is modeled by a flat fading Rayleigh channel, with a Doppler spectrum resulting from two-dimensional ($2D$, leading to the U-shape Doppler spectrum) or three-dimensional ($3D$, leading to a flat Doppler spectrum) scattering environments. The cascade of channel hops is approximated by a first-order autoregressive ($AR(1)$) model and is tracked by a standard estimation algorithm, the Kalman Filter (KF). The common method used in the literature to tune the parameter of the $AR(1)$ model is based on a Correlation Matching (CM) criterion. However, for slow fading variations, another criterion based on the off-line Minimization of the Asymptotic Variance (MAV) of the KF is shown to be more appropriate. For both the CM and MAV criteria, this thesis gives analytic justification by providing approximated closed-form expressions of the estimation variance in output of the Kalman filter, and of the optimal $AR(1)$ parameter. The analytical results are calculated for given Doppler frequencies and Signal-to-Noise Ratio for both scattering environments, whatever the number and type of transmission hops (Fixed-to-Mobile or Mobile-to-Mobile). The simulation results show a considerable gain in terms of the Mean Square Error (MSE) of the well tuned Kalman-based channel estimator, especially for the most common scenario of slow-fading channel.

Keywords : Multihop cooperative system, Amplify-and-Forward Relay, Channel estimation, Kalman Filter, Autoregressive model, scattering environment, Mobile-to-Mobile communication, Flat fading, Jakes' spectrum, Rayleigh channel, Doppler Frequency, Auto-correlation, Bayesian Cramér-Rao Bounds BCRB.

Grenoble Images Parole Signal Automatique (Gipsa-lab)
Département Image et Signal (DIS)
Équipe Communication Information and Complex Systems (CICS)
ENSE3, Domaine Universitaire
11 rue des mathématiques
38402 Saint Martin d'Hérès