HAL
open science

Analyse de signaux multicomposantes : contributions à la décomposition modale Empirique, aux représentations temps-fréquence et au Synchrosqueezing

Thomas Oberlin

To cite this version:

Thomas Oberlin. Analyse de signaux multicomposantes : contributions à la décomposition modale Empirique, aux représentations temps-fréquence et au Synchrosqueezing. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM050 . tel-01134944

HAL Id: tel-01134944

https://theses.hal.science/tel-01134944

Submitted on 24 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Thomas Oberlin

Thèse dirigée par **Valérie Perrier**
et codirigée par **Sylvain Meignen**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Analyse de Signaux Multicomposantes

Contributions à la Décomposition Modale Empirique, aux Représentations temps-fréquence et au Synchrosqueezing

Thèse soutenue publiquement le **4 Novembre 2013**,
devant le jury composé de :

M. Patrick Flandrin
Directeur de recherche, École Normale Supérieure de Lyon, Président
M. Bruno Torrésani
Professeur, Université d'Aix-Marseille, Rapporteur
M. Gabriel Peyré
Chargé de recherche, Université Paris Dauphine, Rapporteur
M. Laurent Duval
Ingénieur de recherche, IFP Énergies nouvelles, Examinateur
M. Jérôme Mars
Professeur, Grenoble INP, Examinateur
Mme Valérie Perrier
Professeur, Grenoble-INP, Directeur de thèse
M. Sylvain Meignen
Maître de conférence, Grenoble-INP, Co-Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord, merci à mes directeurs de thèse, Valérie Perrier et Sylvain Meignen. Du stage de master jusqu'à la rédaction du manuscrit, vous m'avez toujours guidé tout en me laissant l'autonomie et la liberté nécessaire à tout travail de recherche. Merci pour votre spontanéité et votre générosité.

Je remercie chaleureusement Bruno Torrésani et Gabriel Peyré pour avoir pris le temps, malgré leurs agenda chargés, d'étudier mon travail et de rapporter sur ma thèse. Merci à Patrick Flandrin pour avoir accepté de présider mon jury, et pour les quelques discussions que nous avons eues. Je remercie également mes examinateurs, Jérôme Mars et Laurent Duval, pour leurs remarques et conseils éclairés.

Merci à Marianne Clausel pour sa gentillesse et sa tenacité face aux Besovs homogènes à exposants négatifs et autres ondelettes monogènes quaternioniques. Merci à Steve McLaughlin pour son accueil à Edimbourg.

Un grand merci à tous mes collègues du LJK, et en particulier tous les doctorants, post-doctorants et stagiaires, qui ont transformé la tour IRMA en un lieu de vie et d'échange. Merci pour l'ambiance, les discussions, les pauses café, le soutien moral, mais aussi ce que nous avons réalisé ensemble, fête de la science, journée des doctorants... Merci à Madison, Roland, Samuel, Pierre-Jean, Euriell, Burak, Brice, Lukas, Bertie, Jean-Mathieu, Chloë, Pierre-Olivier, Mathias, Kevin, Souleymane, Émilie, Gaëlle, Vincent, et tous les autres.

Je remercie également tous mes amis qui m'ont accompagné durant ces années, notamment en montagne et/ou au Family's... Merci notamment à Marion, Nath, Kéké, Nico et Claire. Merci aux Grenoblois : Gillou, Cookie, Thom, Cyril, Mapi et Tif, Schag et Jen, Clairette, Nanou, Coco et Daniel, Agnès, Gonzo, Dimou, Maël et Caro.

Merci à toute ma famille, à Jeanne, Sylvain et Sabine, Claire et Thomas, Évelyne, Olivier, mes grandes soeurs et leurs familles. Merci à mes parents, vous m'avez conduit jusqu'ici.

Et enfin, merci à Noëlle, pour tout.

Table des matières

Notations **9**

Introduction générale **11**

1 Décomposition Modale Empirique **15**

1.1 Introduction 15
1.2 Notion de fréquence instantanée 16
1.2.1 Motivation 16
1.2.2 Transformée de Hilbert et signal analytique 16
1.2.3 Couples canoniques, théorème de Bedrosian 18
1.3 Décomposition Modale Empirique 19
1.3.1 Motivation 19
1.3.2 Définitions 19
1.3.3 Exemples 21
1.3.4 Propriétés 22
1.4 Difficultés et quelques solutions 25
1.4.1 Séparation fréquentielle et mélange de composantes 26
1.4.2 Alternatives empiriques 29
1.4.3 Convergence du Sifting Process et de l'EMD 32
1.4.4 Alternatives théoriques 32
1.5 Une meilleure initialisation pour le SP : l'EMD-NI 33
1.5.1 Extrema et dérivation 33
1.5.2 Une moyenne locale intégrale 35
1.5.3 Résultats numériques 36
1.5.4 Réduire le mode-mixing avec l'EMD-NI 38
1.6 Nouvelle approche par optimisation : l'EMDOS 40
1.6.1 Optimisation dans une base de splines 40
1.6.2 Contraintes linéaires pour les IMFs 41
1.6.3 Discussion sur la méthode 43
1.6.4 Paramètres et sensibilité 46
1.6.5 Résultats numériques 49

1.7 Conclusion 53

2 Représentations temps-fréquence linéaires et ridges 55

2.1 Introduction 55
2.2 Analyses temps-fréquence 56
2.2.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT) 56
2.2.2 Transformée en ondelettes continue (TOC) 59
2.2.3 Autres distributions temps-fréquence 62
2.2.4 Principe d'incertitude 62
2.3 Signaux multicomposantes et ridges 63
2.3.1 Signaux multicomposantes 63
2.3.2 Détection des ridges 65
2.3.3 Approximation de la phase stationnaire et reconstruction . . 65
2.4 Reconstruction locale dans le plan temps-fréquence 66
2.4.1 Reconstruction locale au premier ordre 67
2.4.2 Reconstruction locale au deuxième ordre 72
2.4.3 Cas d'une fonction analysante Gaussienne 78
2.4.4 Validation numérique 80
2.5 Application au débruitage 83
2.5.1 Taille de l'intervalle d'intégration 83
2.5.2 Formules pour des fonctions analysantes gaussiennes 84
2.5.3 Résultats numériques 85
2.6 Stabilisation de la reconstruction en utilisant la structure des transformées 88
2.6.1 Position du problème 89
2.6.2 Régularisation par une méthode de projection 89
2.6.3 Équivalence avec la reconstruction dans $L^2(\mathbb{R})$ 91
2.7 Conclusion 92

3 Synchrosqueezing et réallocation 95

3.1 Introduction 95
3.2 Réallocation 96
3.2.1 Principe 96
3.2.2 Réallocation de la TFCT 97
3.2.3 Réallocation de la TOC 99
3.3 Synchrosqueezing 100
3.3.1 Synchrosqueezing de la TOC 100
3.3.2 Synchrosqueezing de la TFCT 102
3.3.3 Illustrations 103
3.4 Synchrosqueezing oblique 106
3.4.1 Principe 106
3.4.2 Estimation locale de la modulation 107
3.4.3 Synchrosqueezing oblique 108
3.4.4 Illustrations 110
3.5 Synchrosqueezing vertical d'ordre 2 111

3.5.1 Cas d'un chirp linéaire 112
3.5.2 Synchrosqueezing vertical d'ordre 2 pour la TFCT 112
3.5.3 Illustrations 113
3.6 Résultats numériques et comparaisons 113
3.6.1 Parcimonie des transformées 114
3.6.2 Reconstruction des modes 115
3.6.3 Gestion du bruit 116
3.7 Conclusion et perspectives 119

4 Transformée en ondelettes et synchrosqueezing monogène 121
4.1 Introduction et motivation 121
4.2 Transformée de Riesz et signal monogène 122
4.2.1 Transformée de Riesz 122
4.2.2 Signal Monogène 123
4.2.3 Illustrations 125
4.3 Transformée en ondelettes monogène 126
4.3.1 TOC bidimensionnelle 127
4.3.2 Transformée en ondelettes monogène 127
4.4 Analyse par ondelettes d'un mode AM–FM 129
4.5 Synchrosqueezing monogène 133
4.6 Mise en oeuvre 134
4.6.1 Discrétisation du SST monogène 134
4.6.2 Synchrosqueezing monogène isotrope 135
4.6.3 Cas d'une superposition d'ondes réelles 135
4.7 Expériences numériques 136
4.7.1 Représentation d'une image à trois composantes 136
4.7.2 Décomposition et Démodulation 137
4.7.3 Illustrations sur des images réelles 137
4.8 Conclusion 139

Conclusion générale 141

Annexes 145
A Synchrosqueezing de Fourier 145
B Calcul dans le corps des quaternions 149
C Preuves du Chapitre 4 151
C.1 Preuve de la Proposition 4.4.1 151
C.2 Preuve du théorème 4.4.1 154
C.3 Preuve de la Proposition 4.4.2 155
C.4 Preuve du Théorème 4.5.1 156

Bibliographie 164

Notations

Symboles mathématiques

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	ensembles des entiers naturels et relatifs
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	ensembles des nombres réels et complexes
i	nombre imaginaire $i^2 = -1$
z^*	conjugué du nombre complexe z
$\mathbb{H}$	corps des quaternions
$\bar{q}$	conjugué du quaternion q
$\operatorname{supp} f$	support de la fonction f

Espaces et normes

$L^1(\mathbb{R})$	espace des fonctions intégrables
$L^2(\mathbb{R})$	espace des fonctions de carré intégrable
$L^\infty(\mathbb{R})$	espace des fonctions essentiellement bornées
$\|.\|_p$	norme p : si f est une fonction, $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p \, dt$. On notera de la même manière la norme ℓ^p d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$: $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p$. Si p n'est pas précisé, il s'agit de la norme euclidienne ($p = 2$).
$\|.\|_\infty$	norme sup : $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} \|f(x)\|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$.
$\langle ., . \rangle_X$	produit scalaire dans l'espace de Hilbert X. On utilisera notamment le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)^* \, dx$.
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$	espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	classe de Schwartz des fonctions réelles dont les dérivées à tout ordre sont à décroissance rapide
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	son dual topologique, espace des distributions tempérées
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$	espace des fonctions continûment dérivables à l'ordre k

Transformées, opérateurs

$\mathcal{F}(f) = \hat{f}$	transformée de Fourier, $\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\nu t}\,dt$
$\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$	transformée de Fourier inverse de la fonction f
$\mathcal{I}$	opérateur identité
$\mathcal{H}$	transformée de Hilbert
∇f	gradient (différentielle) de la fonction f
$\partial_t f$	dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t
$\frac{d}{dt} f$	dérivée de la fonction d'une variable réelle f

Mesures d'erreurs

SNR	Pour un signal bruité $x = s + b$ où b est le bruit, son SNR vaut $\mathrm{SNR} = -20 \log \frac{\|b\|}{\|s\|}$

Fonctions usuelles

$U(x)$	est la fonction échelon unité
$\mathrm{signe}(x)$	est la fonction signe valant 1 si $x > 0$ et -1 sinon.

Introduction Générale

Préambule

La motivation première du traitement du signal est d'analyser des données pour extraire de l'information intéressante, souvent afin de les transformer, les restaurer, ou dans un objectif de décision. La spécifité d'un signal par rapport à un ensemble quelconque de données est qu'il possède une certaine cohérence temporelle ou spatiale. C'est ainsi le cas des signaux audio (musique, parole), ou de tout enregistrement d'un phénomène physique qui varie en fonction du temps et/ou de l'espace (signaux électriques, photographies). Depuis longtemps, un vaste domaine des mathématiques est consacré à la recherche de représentations "pertinentes" des signaux, et d'un formalisme mathématique adapté. Les informations intrinsèques étant souvent contenues dans les variations, les répétitions, les oscillations, le concept de fréquence joue bien entendu un rôle de premier plan. C'est également une notion intuitive : l'oreille humaine traduit naturellement les signaux audio en terme de fréquence et d'amplitude.

Cette notion de *fréquence* possède un formalisme mathématique ancien et cohérent, remontant à Joseph Fourier et la "théorie analytique de la chaleur". Si les représentations de type Fourier se sont révélées un formidable outil pour l'analyse des signaux stationnaires (dont les propriétés statistiques ne varient pas dans le temps), il a fallu créer un nouveau cadre pour analyser des signaux au contenu fréquentiel variable. Dans cette optique, de nouveaux outils ont été introduits, tels la transformée de Fourier à fenêtre et, plus récemment, les ondelettes. Parallèlement, des notions alternatives de la fréquence et de l'amplitude ont été étudiées en tant que valeurs instantanées. Si le principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor montre que la fréquence au sens de Fourier ne peut être "instantanée", une définition alternative au moyen du "signal analytique" a permis d'en donner un sens précis. Cette fréquence instantanée devient compatible avec l'intuition musicale, qui suggère qu'à tout instant d'une partition, il existe une (ou des) fréquence(s) et une amplitude, correspondant aux hauteurs de notes et au volume sonore.

Les signaux étudiés dans cette thèse seront des superpositions d'ondes modulées en amplitude et en fréquence (AM–FM), chacun de ces modes possédant

en tout point une amplitude et une fréquence instantanée. Cette classe de signaux permet de modéliser de nombreux phénomènes physiques, allant des signaux de parole [Dimitriadis 2005] aux phénomènes climatiques, et comprenant, en dimension 2, les textures orientées ou les empreintes digitales [Havlicek 1996]. On travaillera ainsi sur des *signaux multicomposantes*, qui s'écrivent en dimension 1 $f(t) = \sum A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$, les fonctions A_k et ϕ'_k correspondant aux *amplitudes* et *fréquences* instantanées. Nous verrons que pour donner un sens à ces grandeurs instantanées, les A_k et ϕ'_k doivent satisfaire des conditions de régularité, de variation lentes et de séparation fréquentielle.

Notons que ce modèle des signaux multicomposantes suppose que les *modes* $A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ sont continus et réguliers, mais nous verrons par la suite que les méthodes utilisées sur ces signaux s'appliquent également à des processus aléatoires, ou à des séries temporelles fortement irrégulières.

Quelques outils

Nous avons déjà évoqué l'incapacité de la théorie de Fourier à décrire des phénomènes non stationnaires, transitoires ou non périodiques. La théorie des représentations *temps-fréquence* est un moyen naturel d'étendre les outils de l'analyse de Fourier en introduisant une localité en temps. Parmi ces représentations, détaillées notamment dans [Flandrin 1993, Cohen 1995], citons la transformée de Fourier à court terme (TFCT), la distribution de Wigner-Ville et ses variantes, ou la transformée en ondelettes continues. En étudiant les représentations temps-fréquence des signaux multicomposantes, on s'aperçoit qu'elles dessinent des lignes de crête ou *ridges* le long des fréquences instantanées. Sous des conditions de séparation fréquentielle, il est ainsi possible de détecter et de reconstruire les modes [Delprat 1992]. L'ensemble de ces méthodes sera appelé analyse de ridges.

Le principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor se manifeste ici par le fait que la TFCT d'un mode possède une couronne de coefficients non nuls autour de sa ligne de crête. Pour éliminer cette diffusion et se rapprocher d'une représentation temps-fréquence instantanée idéale, des méthodes dites de réallocation [Kodera 1976, Auger 1995] déplacent ces coefficients a posteriori, au moyen d'une information souvent négligée : la phase. Une variante dénommée synchrosqueezing [Daubechies 1996] utilise une formule de reconstruction intégrale locale, pour produire une représentation similaire tout en étant inversible, ce qui n'est pas le cas de la réallocation.

Il convient ici de distinguer les représentations temps-fréquence *continues*, qui sont en général redondantes, d'outils discrets comme les *frames* ou les bases d'ondelettes. S'ils sont basés sur les mêmes transformées, leurs objectifs diffèrent en effet. Les frames, dictionnaires, paquets d'ondelettes cherchent en effet à représenter un signal discret de manière optimale, c'est-à-dire avec le moins de coefficients possibles. Au contraire, pour notre analyse des signaux AM–FM, nous chercherons à estimer le plus finement possible les grandeurs instantanées A_k et ϕ'_k. Ces deux approches ne sont cependant pas incompatibles, et les outils "continus" utilisés dans cette thèse peuvent être transposés à des frames.

Une question importante concerne l'*adaptativité* de la représentation, c'est-à-dire sa capacité à représenter un signal quelconque, sans a priori, en se basant directement sur les données. Ainsi lorsqu'on calcule une TFCT, on doit choisir la fenêtre d'analyse, et notamment sa résolution temps-fréquence, avec attention. La question se pose également pour les approches par dictionnaire. Le fait que ces méthodes parviennent à sélectionner la meilleure représentation d'un signal parmi un certain ensemble les rend adaptatives, mais il faut tout de même leur fournir un dictionnaire initial, à partir d'*a priori* connus.

Un exemple remarquable d'une décomposition totalement adaptative est la décomposition modale empirique (EMD), introduite dans [Huang 1998]. L'EMD consiste à décomposer un signal en une somme de modes AM–FM, en se basant sur les extrema locaux et la notion de *moyenne locale*. Bien que totalement empirique, elle conduit à des résultats étonnants, y compris sur des signaux aléatoires ou des séries temporelles. Malheureusement, l'EMD est définie comme la sortie d'un algorithme qui, bien qu'assez simple, est difficile à analyser. Cela fait qu'on dispose de très peu de résultats théoriques concernant cette décomposition, y compris pour des signaux simples.

Enfin, une question importante concerne l'extension des concepts temps-fréquence et fréquence instantanée en dimension supérieure à 1. Contrairement au cas de la dimension 1, il n'existe actuellement pas de définition unique pour les notions d'amplitude et de fréquence instantanée en dimensions supérieures. Plus précisément, plusieurs extensions différentes ont été proposées pour l'extension du concept de signal analytique, conduisant à différentes interprétations. Parmi elles, le *signal monogène* [Felsberg 2001] donne une définition cohérente d'un mode AM–FM en dimension deux (ou plus).

Plan de la thèse et contributions

Cette thèse s'articule autour de la décomposition modale empirique, l'analyse de ridges et le synchrosqueezing. La motivation initiale est la recherche d'un formalisme adéquat pour la décomposition adaptative et la démodulation des signaux multicomposantes. Nous commençons par rechercher une alternative mieux formalisée de la décomposition modale empirique, qui conserve son bon comportement empirique. Nous adoptons ensuite la démarche inverse : trouver des résultats théoriques et empiriques sur l'approximation des signaux multicomposantes, en utilisant les outils temps-fréquence et l'analyse de ridges. Nous étudierons enfin le synchrosqueezing, avant d'étendre les outils précédents en dimension 2. Plus précisément, le cheminement de la thèse est le suivant.

Le chapitre 1 construit une version alternative de la décomposition modale empirique dans un formalisme mathématique plus solide que la méthode originelle. Après avoir introduit la problématique de l'estimation de la fréquence instantanée, nous décrivons l'EMD, et rappelons ses principales caractéristiques et ses propriétés importantes. Nous analysons plusieurs faiblesses de l'EMD, en distinguant les considérations pratiques et théoriques. Nous présentons ensuite nos contributions, consistant en deux modifications de la méthode, publiées dans [Oberlin 2012a]. La

première, d'ordre pratique, concerne l'initialisation de l'algorithme. La seconde utilise cette meilleure initialisation pour construire une variante de l'EMD bien formalisée mathématiquement, basée sur une approche variationnelle. Nous montrons que cette définition alternative parvient à reproduire de nombreux résultats empiriques de l'EMD, sans toutefois résoudre toutes les questions théoriques posées par la méthode originelle.

Le chapitre 2 s'intéresse à l'extraction des modes d'un signal multicomposantes à partir de sa transformée de Fourier à court terme ou de sa transformée en ondelettes continue. Après avoir introduit ces deux outils et évoqué d'autres représentations temps-fréquence, nous présentons le principe de l'analyse de ridges, qui permet la capture et la reconstruction de chacun des modes. Puis nous établissons des théorèmes d'approximation inspirés du synchrosqueezing, qui justifient une nouvelle méthode pour reconstruire les modes, par intégration locale. Le principe d'intégration locale pour la reconstruction et le débruitage, fruit d'une collaboration avec Sylvain Meignen et Steve McLaughlin, a été publié dans [Meignen 2012b] et [Meignen 2012a]. Ces résultats sont ensuite étendus à un ordre supérieur pour de fortes modulations de fréquence, et l'intérêt de cette nouvelle méthode de reconstruction est confirmé par des tests numériques. Nous présentons ainsi des résultats expérimentaux concernant la reconstruction des modes au deuxième ordre, et le débruitage de signaux multicomposantes, publiés respectivement dans [Oberlin 2013a] et [Oberlin 2013b]. Enfin, nous proposons une méthode de stabilisation de la reconstruction, dont le principe a été exposé dans [Oberlin 2012b].

Le chapitre 3 utilise le formalisme et les définitions du chapitre 2, pour les appliquer aux représentations temps-fréquence réallouées. Nous exposons d'abord brièvement le principe de réallocation, ainsi que le synchrosqueezing, variante de la réallocation qui permet la reconstruction des modes. Nous énonçons ensuite le résultat de [Daubechies 2011] concernant la reconstruction des modes, que nous transposons au cas de la TFCT. Après avoir montré que le synchrosqueezing fournit une représentation moins concentrée que la réallocation classique, nous proposons enfin deux contributions qui améliorent la concentration du synchrosqueezing, tout en restant inversibles. Ces deux approches sont validées numériquement en les comparant avec l'état de l'art sur des signaux synthétiques.

Le chapitre 4 étend les outils des chapitres 2 et 3 en dimension supérieure à 1. Nous présentons d'abord le formalisme du signal monogène, et définissons l'amplitude et la fréquence instantanée en dimension supérieure à 1. Nous introduisons ensuite les signaux multicomposantes monogènes en dimension 2, et les analysons au moyen de la transformée en ondelettes monogène. Enfin, nous définissons le synchrosqueezing monogène, en étendant le résultat de [Daubechies 2011] à la dimension 2. Cette nouvelle méthode est confortée par des résultats numériques sur des superpositions de modes AM–FM en dimension 2, et par quelques illustrations sur des images réelles. La principale contribution de ce chapitre réside dans la formalisation du synchrosqueezing monogène, travail réalisé en collaboration avec Marianne Clausel et Valérie Perrier, et soumis à publication dans [Clausel 2012].

CHAPITRE 1

Décomposition Modale Empirique

1.1 Introduction

Les méthodes multi-échelles ont envahi le champ des mathématiques appliquées ces dernières décennies. Que ce soit en analyse de données, en vision par ordinateur ou en mécanique des fluides, élaborer des méthodes de calcul ou d'analyse efficaces nécessite en effet de distinguer les détails des variations lentes, la structure de la texture, le régime permanent des phénomènes transitoires. En traitement du signal, on a ainsi vu émerger les méthodes dites "temps-fréquence" [Flandrin 1993] ou "temps-échelle" [Mallat 2000]. Bien que leur caractère multi-échelle permette d'analyser finement les signaux, ces méthodes ne peuvent être considérées comme totalement adaptatives, dans la mesure où l'espace de représentation est fixé à l'avance.

Introduite récemment dans [Huang 1998], la décomposition modale empirique (EMD) se distingue des méthodes précédentes par son caractère *adaptatif* et *non-linéaire* : elle construit la décomposition directement à partir des données, et s'adapte efficacement à la non-linéarité des signaux qu'elle représente. Ces caractéristiques, ainsi que son caractère intuitif et une implémentation simple, l'ont rendu vite très populaire, comme en témoigne désormais la vaste littérature sur le sujet.

Mais, si l'EMD se révèle intéressante pour d'innombrables applications, c'est avant tout une méthode empirique, définie comme résultat d'un algorithme, et difficile à analyser mathématiquement. Un des champs de recherche actuel est de proposer des définitions alternatives de l'EMD qui, tout en préservant de bons résultats empiriques, établissent un cadre théorique rigoureux. Nos travaux présentés dans ce chapitre s'inscrivent dans cette optique.

Nous exposerons d'abord les motivations de la méthode originelle, en présentant notamment la théorie du signal analytique et la notion de fréquence instantanée. Après avoir défini l'EMD et illustré son application à certains types de signaux, nous présenterons brièvement ses propriétés, puis nous nous intéresserons aux principales lacunes de la méthode, autant d'un point de vue théorique que pratique, et à quelques réponses proposées récemment. Partant du constat que l'EMD est sensible

aux conditions initiales, nous présenterons en section 1.5 nos travaux sur la détection des extrema et l'amélioration de la méthode. Enfin, nous introduirons dans la section 1.6 une nouvelle définition de l'EMD par optimisation sous contraintes. Ces deux modifications de l'EMD originale, exposées initialement dans [Oberlin 2012a], seront testées, validées et comparées grâce à des expériences numériques.

1.2 Notion de fréquence instantanée

1.2.1 Motivation

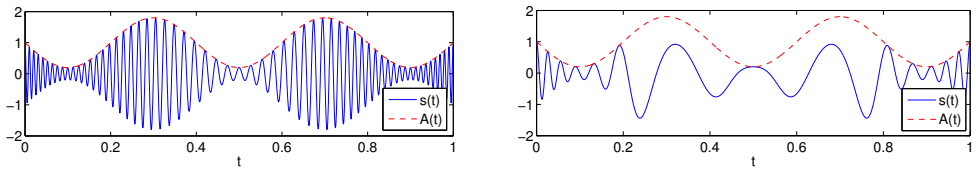
La transformée de Fourier permet de caractériser le contenu fréquentiel d'un signal, mais ne permet pas de décrire comment celui-ci varie au cours du temps, ce qui est fondamental dans de nombreuses situations. Les notions de fréquence et d'amplitude "instantanées" sont pourtant intuitives : pour un signal musical par exemple, les hauteurs de notes sont définies à tout moment, de même que leurs amplitudes, qui varient en fonction des nuances. En radio-transmission, ces grandeurs instantanées sont également connues, et servent à transmettre l'information par modulation de fréquence (FM) ou d'amplitude (AM).

Pourtant, le seul signal pour lequel ces grandeurs sont définies de manière évidente est le signal monochromatique $s(t) = Ae^{2i\pi\nu_0 t + i\phi}$ (ou bien ses parties réelle ou imaginaire), qui est entièrement caractérisé par son amplitude $A > 0$, sa fréquence ν_0 et sa phase à l'origine ϕ. Dans ce cas, le formalisme "instantané" rejoint celui de Fourier, puisqu'on a : $\hat{s}(\nu) = Ae^{i\phi}\delta(\nu - \nu_0)$. Lorsque l'amplitude et la fréquence ne sont plus constantes mais varient faiblement, on obtient une onde modulée en amplitude et en fréquence (AM–FM). Dans le cas réel cette onde est de la forme : $s(t) = A(t)\cos(2\pi\phi(t))$, A étant l'amplitude instantanée (AI) et ϕ' la fréquence instantanée (FI). En écrivant $\phi'(t) = \nu_0 + \Delta\nu(t)$, la condition de variations lentes impose que A et $\Delta\nu$ varient faiblement au cours d'une période, autrement dit que $|A'|, |\Delta\nu'| \ll \nu_0$.

Pour une onde modulée, AI et FI sont des notions graphiques ; l'AI correspond à l'enveloppe du signal, alors que la FI peut être estimée par l'inverse du temps entre chaque passage à zéro. La Figure 1.1(a) représente une onde AM–FM ainsi que son amplitude instantanée sous les conditions de variations lentes. Pour illustrer l'importance de ces conditions, on trace dans la Figure 1.1(b) une onde similaire avec la même fonction $A(t)$, mais avec une fréquence moyenne ν_0 plus petite ; l'AI ne correspond alors plus à l'enveloppe du signal. Pour définir de manière unique les notions d'AI et FI, on utilise la notion de signal analytique. La section suivante se penche sur cette notion et précise l'hypothèse de variation lente.

1.2.2 Transformée de Hilbert et signal analytique

Dans les années 1940, D. Gabor puis J. Ville eurent l'idée d'utiliser des outils classiques en mécanique quantique pour définir précisément des grandeurs instantanées à partir d'un signal, en faisant appel à la notion de *signal analytique* [Gabor 1946, Ville 1948]. Cette définition repose sur la transformée de Hilbert, que l'on commence par définir tout en rappelant quelques unes de ses propriétés.



(a) (b)

Figure 1.1 (a) : Une onde AM–FM. L'amplitude instantanée $a(t)$ est tracée en rouge, trait pointillé. (b) : Même chose lorsque l'hypothèse de variation lente n'est plus respectée : a ne correspond plus à l'enveloppe du signal.

Définition 1.2.1. *La transformée de Hilbert d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie presque partout par*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt. \tag{1.1}$$

On peut voir $\mathcal{H}f$ comme la convolution de f avec la distribution tempérée $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\,(\frac{1}{x})$. On obtient facilement l'écriture équivalente dans le domaine de Fourier : $\widehat{\mathcal{H}f}(\nu) = -i\,\mathrm{signe}(\nu)\hat{f}(\nu)$, qui montre que l'opérateur $\mathcal{I} + i\mathcal{H}$ "supprime" les fréquences négatives. Ses nombreuses propriétés en font un outil central dans de nombreuses branches des mathématiques. Les propriétés suivantes nous intéressent particulièrement :

Propriétés 1.2.1.

1. *Pour tout entier $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire continu de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même.*
2. *$\mathcal{H}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.*
3. *La transformée de Hilbert commute avec les translations et les dilatations.*
4. *$\mathcal{H}$ est une anti-involution, son inverse est $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$.*

On peut à présent définir proprement l'AI et la FI, fondées sur la notion de signal analytique.

Définition 1.2.2. *Soit $s \in L^2(\mathbb{R})$ un signal réel. On définit le* signal analytique *associé à s par $s_a = s + i\mathcal{H}s$. Le signal analytique étant une fonction complexe, il s'écrit sous la forme polaire $s_a(t) = A_s(t)e^{2i\pi\phi_s(t)}$. La* fréquence instantanée *de s est la fonction ϕ_s', et A_s est son* amplitude instantanée.

La définition équivalente du signal analytique dans l'espace des fréquences s'écrit $\hat{s}_a = 2U\hat{s}$, où U est la fonction échelon unité. On vérifie immédiatement que le signal analytique associé à l'onde pure $A\cos(2\pi\nu_0 t)$ est $Ae^{2i\pi\nu_0 t}$, et on retrouve bien l'AI A et la FI ν_0. Intuitivement, cette définition vient du fait que l'opérateur $\mathcal{H}$ est le seul opérateur linéaire commutant avec les translations et dilatations, et transformant $\cos(2\pi f t)$ en $e^{2i\pi f t}$. Le terme "analytique" vient de ce que s_a est alors la restriction réelle d'une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur. Pour de plus amples détails sur les opérateurs linéaires singuliers et le rapport entre transformée de Hilbert et fonctions holomorphes, le lecteur peut se reporter à [Stein 1970].

Remarque : Les ondes pures ou modulées ne sont en général pas dans $L^p(\mathbb{R})$, ce qui pourrait être problématique. Cependant, il y a deux moyens commodes de contourner le problème : soit utiliser une transformée de Hilbert périodique (une période correspondant à la fenêtre d'observation du signal), soit étendre $\mathcal{H}$ à des espaces de distributions. On pourra consulter [Pandey 1996] pour plus de détails à ce sujet.

1.2.3 Couples canoniques, théorème de Bedrosian

On s'attache maintenant à préciser l'hypothèse de variations lentes de l'AI et de la FI. Plus précisément, on aimerait des conditions pour que le signal $A(t)\cos(2\pi\phi(t))$ ait pour transformée de Hilbert $A(t)\sin(2\pi\phi(t))$, ou de manière équivalente pour que $A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ soit un signal analytique. Un tel couple (A,ϕ) sera appelé *canonique*. Une caractérisation de ces couples utilise le théorème suivant [Bedrosian 1962].

Théorème 1.2.1. *Bedrosian*
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *tels que* $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-B, B]$ *et* $\operatorname{supp}(\hat{g}) \bigcap [-B, B] = \emptyset$. *Alors,*

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g].$$

Démonstration. Supposons d'abord $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On écrit :

$$\widehat{\mathcal{H}[fg]}(\nu) = -i\,\mathrm{signe}(\nu)\widehat{fg}(\nu).$$

Or $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$, donc pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\nu-\xi)\,d\xi$. Comme $\widehat{\mathcal{H}[fg]} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut inverser la transformée de Fourier, ce qui donne pour tout t

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[fg](t) &= -i\int_{\mathbb{R}} \mathrm{signe}(\nu)\widehat{fg}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\,d\nu \\
&= -i\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{signe}(\nu)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\nu-\xi)e^{2i\pi\nu t}\,d\xi\,d\nu \\
&= -i\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{signe}(\nu+\xi)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\nu)e^{2i\pi(\nu+\xi)t}\,d\xi\,d\nu \qquad (1.2)\\
&= f(t)\times -i\int_{\mathbb{R}} \mathrm{signe}(\nu)\hat{g}(\nu)e^{2i\pi\nu t}\,d\nu = f(t)\mathcal{H}[g](t), \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

car $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\nu) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{signe}(\nu+\xi) = \mathrm{signe}(\nu)$, d'après les hypothèses sur les spectres de f et g. La preuve du résultat pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ en découle par densité. □

Ce théorème de Bedrosian donne une condition suffisante pour que $\mathcal{H}[A(t)\cos(2\pi\phi(t))] = A(t)\mathcal{H}[\cos(2\pi\phi(t))]$. Il explicite donc l'hypothèse de variation lente sur A, mais ne nous dit rien sur ϕ. Bernard Picinbono a complété l'analyse dans [Picinbono 1983] en étudiant les signaux de phase $e^{2i\pi\phi(t)}$ analytiques. En se ramenant à un théorème de M. Riesz [Riesz 1928], il montre que de tels signaux sont des produits de Blaschke du type

$$s(t) = \prod_k \frac{t-z_k}{t-z_k^*}\,e^{2i\pi(\nu_0 t+\phi_0)}, \qquad (1.4)$$

les nombres complexes z_k appartenant au demi-plan supérieur. Il est important de noter que pour être canonique, un couple (A,ϕ) doit donc vérifier des conditions très

fortes, et surtout non locales. Ce dernier point n'est pas étonnant, dans la mesure où même si l'AI et la FI sont des grandeurs locales, elles sont obtenues par le signal analytique, or $\mathcal{H}$ est un opérateur non-local.

1.3 Décomposition Modale Empirique

1.3.1 Motivation

La décomposition modale empirique (EMD pour Empirical Mode Decomposition) a été introduite par l'équipe de N.E. Huang de la NASA en 1998 [Huang 1998] pour étudier des données climato-atmosphériques. C'est une méthode non linéaire d'analyse de données qui ne fait pas appel à des hypothèses de stationnarité (propriétés statistiques constantes dans le temps). Elle est par ailleurs intuitive et simple à mettre en oeuvre, ne nécessitant quasiment aucun paramétrage. Enfin, c'est une méthode totalement adaptative, dans le sens où l'espace de représentation est construit directement à partir du signal.

On a vu que définir les grandeurs instantanées d'un signal est possible, dès lors que ce signal est une onde "faiblement" modulée en amplitude et en fréquence. Pourtant, la plupart des signaux issus de la physique sont complexes et n'entrent pas dans cette catégorie, même en première approximation. En revanche, la plupart des signaux peuvent être considérés comme une superposition d'ondes modulées AM–FM. L'EMD part de ce postulat, et construit au fur et à mesure ces ondes AM–FM, appelées *modes*, de manière adaptative et grâce à un algorithme assez simple. Pour interpréter la décomposition, on peut dans un second temps représenter chaque mode sur un diagramme temps-fréquence en calculant son AI et sa FI : cette représentation est appelée spectre de Hilbert-Huang.

1.3.2 Définitions

L'EMD postule que tout signal réel oscillant s se décompose en une composante AM–FM h_1 fortement oscillante, et une *moyenne locale* m_1 qui contient les variations lentes du signal. Cette dernière se décompose elle-même, ce qui donne une décomposition récursive, multi-échelles

$$s = \sum_i h_i + r, \tag{1.5}$$

où les h_i sont de moins en moins oscillants, et r est un résidu monotone. Définissons à présent les notions d'enveloppes, de moyenne locale et d'IMF.

Définition 1.3.1. *L'enveloppe supérieure E_{max} d'un signal est l'interpolée spline cubique de ses maxima locaux. L'enveloppe inférieure E_{min} interpole ses minima locaux.*

Remarque : On peut utiliser des interpolations splines à d'autres ordres, ou utiliser des polynômes de Hermite, ou toute autre méthode d'approximation se basant sur les extrema locaux du signal. Mais l'interpolation spline cubique correspond à la définition standard, car elle offre un bon compromis entre localité, régularité et facilité d'implémentation. Surtout, les splines cubiques minimisent l'énergie de tension parmi

Entrée : Le signal s
Sorties : Les IMFs $h_1, h_2, \ldots, h_N$, le résidu r

$r := s$, $i = 0$
Tant que r possède plus de 3 extrema
    Poser $i := i + 1$ et $h := r$.
    Sifting Process : tant que le critère d'arrêt stop(h) n'est pas satisfait, effectuer
        $h := h - \mathcal{M}h$
    Poser $h_i := h$. et $r := r - h$

Table 1.1 L'algorithme EMD

les fonctions interpolantes $\mathcal{C}^2$, ce qui pousse les enveloppes à rester dans l'enveloppe convexe des extrema locaux.

Définition 1.3.2. *La* moyenne locale *d'un signal s est la demi-somme de ses enveloppes supérieures et inférieures. On notera*

$$\mathcal{M}[s] = \frac{E_{max}[s] + E_{min}[s]}{2}. \tag{1.6}$$

Définition 1.3.3. *Une* IMF *(pour* Intrinsic Mode Function*), ou* mode*, est une fonction oscillante de moyenne nulle, c'est-à-dire une fonction :*

- *dont tous les maxima sont positifs, et tous les minima négatifs.*
- *dont la moyenne locale vérifie une condition de nullité approchée.*

Pour obtenir une moyenne "approximativement nulle", l'idée est d'appliquer un certain nombre de fois l'opérateur $\mathcal{I} - \mathcal{M}$ au signal de départ, en espérant la convergence du procédé. Cette étape consistant à retrancher itérativement la moyenne locale est appelée *Tamisage* (SP, pour Sifting Process). Lorsque la condition de nullité approchée est vérifiée, on obtient la première IMF h_1, la différence $m_1 = s - h_1$ étant la moyenne locale de niveau 1. Il suffit alors d'itérer le procédé sur m_1 de manière récursive pour obtenir toute la décomposition. La Table 1.1 résume l'algorithme de l'EMD.

Un des points clés de la méthode est le critère d'arrêt du SP (appelé *stop*(h) dans la Table 1.1), c'est-à-dire la condition de nullité approchée de la moyenne locale. Remarquons tout d'abord qu'on ne peut pas imposer une condition stricte de moyenne locale nulle : comme remarqué dans [Sharpley 2006], les seuls signaux oscillants ayant des enveloppes inférieures et supérieures strictement symétriques ont des enveloppes polynomiales de degré 3. Une solution simple proposée à l'origine dans [Huang 1998] est d'employer un critère de type Cauchy, qui compare h lors de deux itérations successives du SP ; lorsque la distance entre deux itérations descend sous un seuil fixé, on s'arrête. Un critère différent a été proposé par Flandrin et Rilling dans [Rilling 2003] : il consiste à vérifier que la moyenne locale est faible par rapport à l'amplitude instantanée. Il inclut par ailleurs une tolérance plus grande

sur une petite portion du signal. Plus précisément, pour un mode h défini sur $[0, T]$, $\text{stop}(h) = \text{true}$ dès que

1. Les maxima locaux sont positifs et les minima locaux négatifs
2. Les enveloppes E_{Max} et E_{min} vérifient

$$|E_{max}[h](t) + E_{min}[h](t)| \leq \alpha_{SP}|E_{max}[h](t) - E_{min}[h](t)|$$

   sur un ensemble de mesure $(1 - \gamma_{SP})T$
3. Pour tout t,

$$|E_{max}[h](t) + E_{min}[h](t)| \leq \beta_{SP}|E_{max}[h](t) - E_{min}[h](t)|$$

Les valeurs typiques des paramètres sont $(\alpha_{SP}, \beta_{SP}, \gamma_{SP}) = (0.05, 0.5, 0.05)$, c'est-à-dire que l'on tolère un défaut de symétrie de 5% sur 95% de la durée du signal, une tolérance plus grande (50%) étant appliquée sur la durée restante. Ce critère d'arrêt, fortement empirique, permet en pratique d'obtenir un bon compromis entre le nombre de modes et la condition de moyenne locale nulle.

1.3.3 Exemples

Un signal test

L'EMD étant une méthode algorithmique adaptative, il est souvent difficile d'apprécier quantitativement la qualité de ses résultats. Cependant, il existe une classe de signaux pour lesquels on connaît la décomposition théorique : ce sont les signaux multicomposantes, superposition de modes modulés en amplitude et en fréquence (AM–FM). La Figure 1.2(a) montre un tel signal, composé de trois modes modulés, bien séparés fréquentiellement. Les IMFs et le spectre de Hilbert-Huang de ce signal sont tracés dans les Figures 1.2(b) et (c) respectivement. Il est clair que l'EMD parvient à séparer les composantes, et permet d'obtenir une représentation temps-fréquence concentrée du signal.

Des données réelles

On se propose à présent d'illustrer le fonctionnement de l'EMD sur des données réelles. On considère pour cela la série temporelle des températures terrestres mensuelles moyennes sur la période 1851–2012, représentée en Figure 1.3(a). Ce jeu de données est disponible sur Internet à l'adresse `http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/temperature/`, et son analyse par EMD a été effectuée dans [Wu 2007]. L'EMD de cette série temporelle donne 8 IMFs et un résidu. Ici, ce sont plutôt les dernières IMFs qui nous intéressent, car elles donnent des indications sur les tendances globales et les phénomènes cycliques comme El Niño ou les cycles solaires. Plutôt que de tracer les IMFs, on trace en Figure 1.3(b) les approximations successives $d_0 = r$, $d_1 = r + h_N$, …, $d_N = s$, qui mettent en évidence un réchauffement. Le spectre de Hilbert-Huang, donné en Figure 1.3(c), met en évidence 2 oscillations de périodes comprises entre 10 et 20 ans, pouvant correspondre au cycle solaire et à l'oscillation décennale du Pacifique.

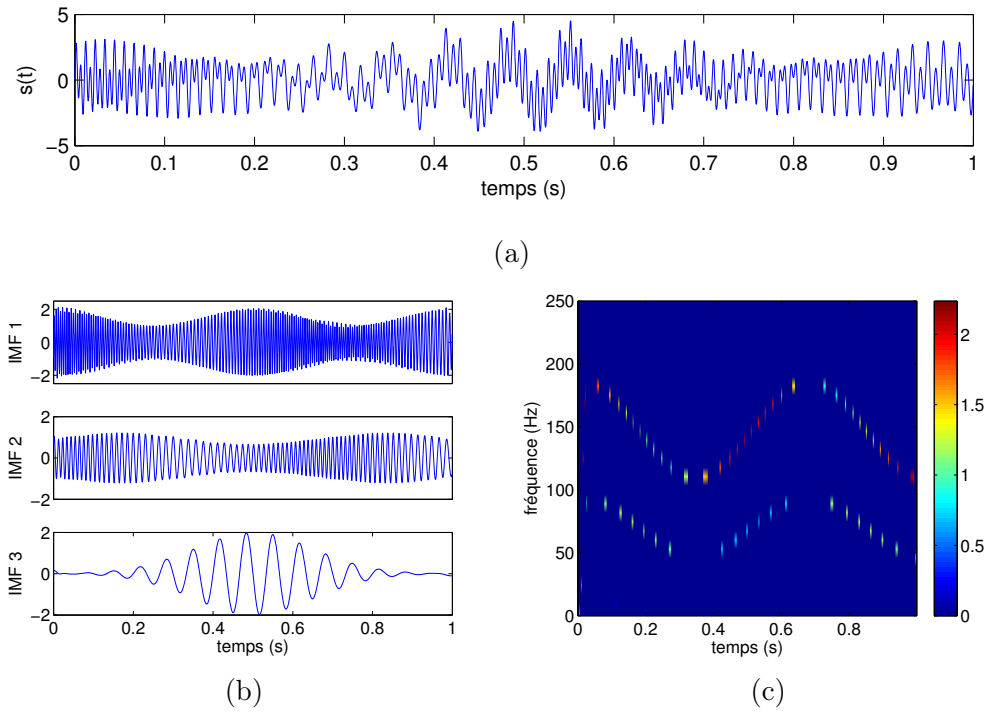


Figure 1.2 Décomposition modale empirique d'un signal test à 3 composantes bien séparées en fréquence. (a) Le signal. (b) Les trois IMFs correspondent aux trois composantes du signal. (c) Spectre de Hilbert-Huang : on obtient une représentation temps-fréquence concentrée du signal.

1.3.4 Propriétés

Bien que définie par un algorithme, l'EMD possède des propriétés empiriques qui ressemblent aux propriétés de décompositions plus "mathématiques" : orthogonalité, décroissance dyadique en fréquence des modes. On propose ici d'en dresser un rapide inventaire, dans le cas de l'interpolation spline avec l'un des deux critères d'arrêt exposés précédemment.

Non-linéarité

L'EMD est une transformation non-linéaire, dans le sens où la décomposition de la somme de deux signaux diffère de la somme (ou réunion) des décompositions de chaque signal. La cause principale de ce comportement est la dépendance de l'EMD aux extrema locaux, le critère d'arrêt et l'interpolation pouvant aussi créer des non-linéarités. Cette propriété permet de mieux analyser des données issues de systèmes eux-mêmes non-linéaires (on pourra par exemple se référer au chapitre 1 de [Huang 2005]).

Invariances et commutations

On suppose que l'EMD est calculée comme dans la méthode originale, notamment que les enveloppes sont obtenues par interpolation spline cubique. L'EMD commute avec les opérations discrètes suivantes :

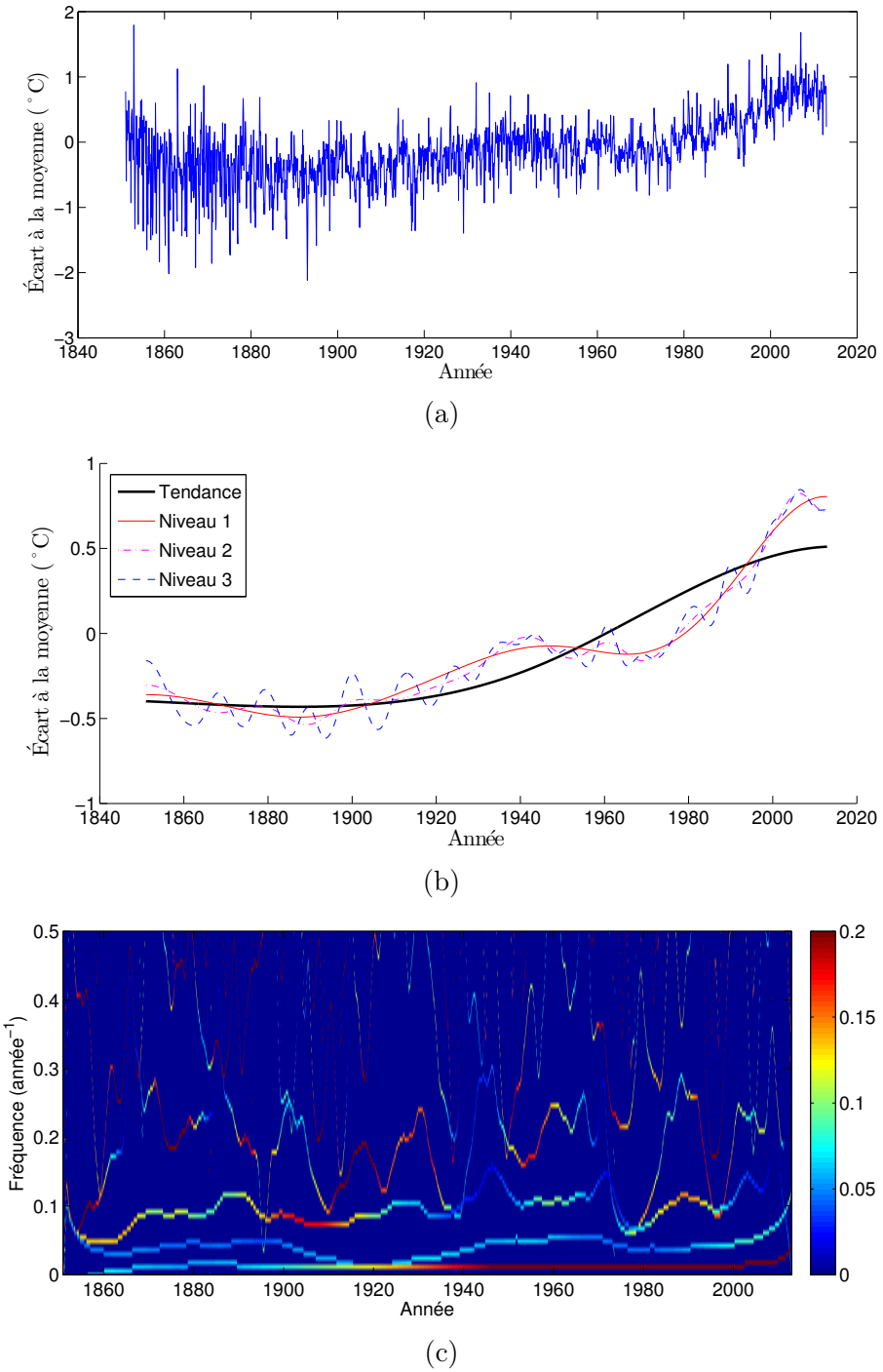


Figure 1.3 (a) : Températures moyennes mensuelles, données comme écart par rapport à la moyenne 1961–1990, en degrés Celsius. (b) : Approximations multi-échelles du signal ; on trace le résidu non oscillant, et les trois premières approximations obtenues en tenant compte des dernières IMFs, les moins oscillantes. (c) : spectre de Hilbert-Huang, zoom sur les basses fréquences.

- Multiplication par un scalaire
- Inversion du temps (réflexion)
- Translation de la grille d'échantillonnage
- Dilatation sur la grille (sur- ou sous-échantillonnage).

Par ailleurs, les IMFs d'une décomposition modale empirique sont invariants par ajout d'une constante, le résidu étant covariant, c'est-à-dire qu'il contient cette constante. Toutes ces propriétés se vérifient facilement d'après l'algorithme, pour une preuve explicite on pourra se référer à [Rilling 2007].

Quasi-orthogonalité

Étant donné que l'EMD décompose un signal en une somme d'IMFs de manière adaptative, il est naturel de s'interroger sur la qualité de cette décomposition, ce qui amène à quantifier l'orthogonalité des IMFs. Dans leur article fondateur [Huang 1998], les auteurs suggèrent déjà que la décomposition est quasi-orthogonale, avec l'argument suivant : deux ondes modulées ayant des fréquences instantanées suffisamment éloignées ont un produit scalaire faible. Cette quasi-orthogonalité peut être mesurée en calculant le produit scalaire normalisé entre chaque couple d'IMFs, appelé indice d'orthogonalité :

$$\mathrm{IO}_{ij} = \frac{\langle h_i, h_j \rangle}{\|s\|^2}, \tag{1.7}$$

l'indice associé à une décomposition entière est alors défini par

$$\mathrm{IO} = \sum_{i<j} \mathrm{IO}_{ij} \,. \tag{1.8}$$

Pour quantifier plus précisément le produit scalaire de deux modes AM–FM, on peut utiliser des résultats sur l'approximation asymptotique des intégrales oscillantes, et notamment le Lemme de Van der Corput et ses extensions, présentés en détail dans le chapitre 8 de [Stein 1993].

Comportement moyen en banc de filtres dyadiques

Si le comportement de l'EMD pour des sommes d'ondes modulées est assez clair, on peut s'interroger sur son application à des signaux plus complexes. En particulier, est-ce qu'il y a bien convergence de la méthode en un nombre fini d'IMFs, et si oui combien y en a-t-il ? Comment décroît la fréquence instantanée entre les IMFs successives ? Dans l'article [Flandrin 2004], les auteurs donnent une réponse empirique basée sur l'étude de bruit gaussien. Ils montrent qu'en moyenne, un bruit blanc gaussien sera décomposé de manière dyadique, c'est-à-dire que la fréquence moyenne entre deux IMFs successives est divisée par deux. Cette constatation leur permet notamment de caractériser l'exposant de Hurst de bruits gaussiens fractionnaires grâce à l'EMD. Ainsi, même si l'on ne dispose pas d'arguments théoriques, on observe qu'en pratique l'EMD d'un signal discret de taille N converge, le nombre d'IMFs étant du même ordre de grandeur que $\log_2(N)$.

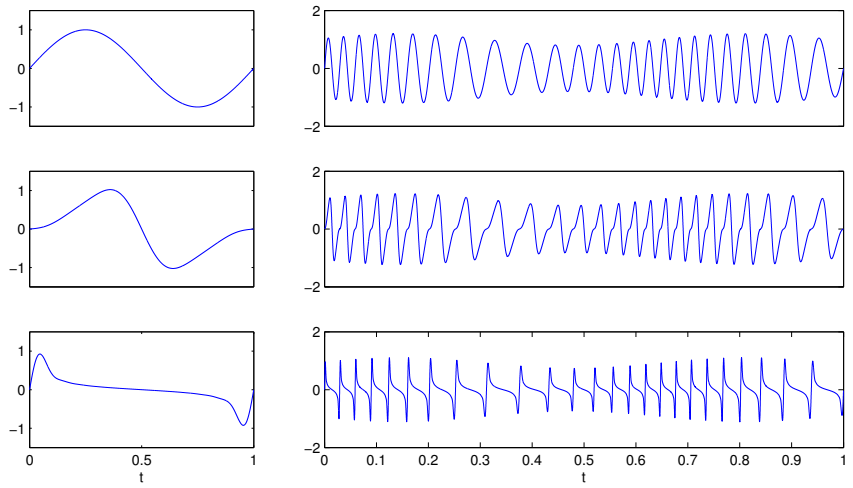


Figure 1.4 Différentes formes d'onde (colonne de gauche) et leur mode AM–FM associé (colonne de droite).

Non harmonicité des IMFs

Les IMFs ou modes extraits par l'EMD sont issus directement des données, et peuvent être considérés comme des ondes AM–FM. Mais contrairement à de nombreuses autres décompositions basées notamment sur la transformée de Fourier, l'EMD n'impose pas à ces ondes d'être harmoniques, c'est-à-dire de s'écrire sous la forme $h(t) = A(t)\cos(2\pi\phi(t))$. Considérons par exemple une forme d'onde $f(t)$, c'est-à-dire une fonction régulière, 2π-périodique, de moyenne nulle. Supposons qu'elle possède exactement un maximum et un minimum sur $[0, 2\pi]$. Considérons par ailleurs un couple (A, ϕ) d'amplitude et phase vérifiant des conditions de variations lentes ($\phi', A > 0$ et $|A'|, |\phi''| \ll \phi'$). Si ces conditions sont suffisamment restrictives, la fonction $A(t)f(2\pi\phi(t))$ est alors une IMF au sens de la définition 1.3.3. On illustre ce principe dans la Figure 1.4, qui représente trois formes d'onde avec pour chacune le mode AM–FM associé en utilisant le même couple (A, ϕ). Ces trois modes, bien que très différents, sont des IMFs de même amplitude et fréquence instantanée.

1.4 Difficultés et quelques solutions

Comme toute méthode, l'EMD possède plusieurs inconvénients qui sont analysés dans la littérature, et que l'on peut classer en trois catégories.

- La première concerne l'implémentation de l'algorithme : la méthode d'interpolation, le critère d'arrêt, mais surtout la gestion des bords. En effet, durant le tamisage il faut construire la moyenne locale, qui n'est pas définie aux bords (avant le deuxième extrema et après l'avant-dernier). On doit donc prolonger cette moyenne de manière intelligente, sans créer des artefacts qui peuvent ensuite être propagés par le SP. La thèse de Gabriel Rilling [Rilling 2007] s'intéresse en détail à ce problème, en présentant une analyse comparative de plusieurs méthodes de prolongement. Les difficultés d'implémentation, bien

que cruciales en pratique, ne seront pas étudiées dans notre travail, qui se consacre plutôt au coeur de la méthode. Nous utiliserons donc l'approche standard de prolongement par symétrisation des extrema [Rilling 2003].

- La seconde concerne l'initialisation du tamisage. En effet, la détection de l'échelle fine du signal (correspondant à la fréquence instantanée de la première IMF) par les extrema pose parfois problème, de même que la définition de la moyenne locale par interpolation des extrema. La section 1.4.1 étudie le problème, et quelques solutions de la littérature sont présentées en section 1.4.2.
- Enfin, la formulation classique de l'EMD empêche quasiment toute analyse mathématique de son fonctionnement et de ses propriétés, même pour des signaux simples. Cet aspect est étudié dans la section 1.4.3, le paragraphe 1.4.4 mentionnant quelques propositions pour contourner ce problème.

1.4.1 Séparation fréquentielle et mélange de composantes

C'est la caractérisation locale de l'échelle fine du signal par les extrema locaux qui donne à l'EMD son caractère adaptatif et "piloté par les données" (data-driven). Ceci a deux conséquences : d'une part, les extrema d'un mode haute fréquence de faible amplitude peuvent ne pas apparaître dans un signal, auquel cas ce mode ne sera pas détecté. D'autre part, si un tel mode est détecté seulement par intermittence, l'IMF correspondante sera un mélange entre ce mode et d'autres composantes basse fréquence. Ce phénomène, appelé *mélange de mode* (mode-mixing), s'observe sur quasiment toutes les données réelles, et peut nuire grandement à l'interprétation des résultats.

Commençons par étudier la séparation fréquentielle : peut-on garantir qu'un mode haute-fréquence sera bien détecté et extrait ? Pour répondre à cette question, Gabriel Rilling et Patrick Flandrin [Rilling 2008] ont étudié le comportement de l'EMD sur une somme de deux sinus, en faisant varier leurs amplitudes et fréquences. Ils ont montré que, selon les rapports d'amplitudes et de fréquences, l'EMD traite le signal soit comme un seul mode, soit comme 2 IMFs correspondant aux 2 sinus, soit d'une manière non définie. On rappelle ici rapidement ces résultats, en soulignant leur implication pratique. Considérons deux ondes pures $s_1(t) = \sin(2\pi t)$, $s_2(t) = a\sin(2\pi f t+\varphi)$, les paramètres $a > 0$ et $0 < f < 1$ permettant de faire varier le rapport d'amplitudes et de fréquences entre les deux ondes. Notons que l'EMD commutant avec les translations et dilatations, ces deux paramètres permettent d'analyser n'importe quelle somme de deux ondes monochromatiques. L'article [Rilling 2008] analyse la façon dont les extrema du mode haute fréquence s_1 apparaissent dans le signal $s = s_1 + s_2$.

Théorème 1.4.1. *([Rilling 2008])*

Si $af < 1$, s possède autant d'extrema que le mode haute fréquence s_1. Si $af^2 > 1$, s possède autant d'extrema que le mode basse fréquence s_2.

Ainsi, plus les fréquences entre les deux ondes sont proches (f se rapproche de 1), plus l'amplitude du mode basse fréquence s_2 doit être faible pour assurer la détection

des deux modes. Notons que la détection des extrema de s_1 n'assure pas que l'EMD extrait effectivement le mode, puisque cela dépend aussi du critère d'arrêt. En outre, dans la zone intermédiaire $1 < af$ et $af^2 < 1$, le nombre d'extrema ne correspond ni à celui de s_1 ni à celui de s_2, mais on peut quand même calculer leur densité moyenne. Pour une étude plus détaillée, on renvoie le lecteur au début du chapitre 2 de [Rilling 2007].

Le fait que l'EMD ne sépare pas deux composantes très proches fréquentiellement est finalement assez naturel, c'est un phénomène inhérent à tout appareil de mesure ou d'analyse. L'oreille humaine elle-même se comporte exactement de cette manière ; si l'on écoute la superposition d'un sinus à 440 Hz et d'un autre à 444 Hz (deux "la" légèrement différents), on ne perçoit pas les deux fréquences, mais on entend un "la" à 442 Hz modulé en amplitude. On illustre ce phénomène de battement sur la Figure 1.5, une analyse plus détaillée de sa perception par l'oreille humaine étant disponible, par exemple, dans [Rossi 2007]. Le défaut de l'EMD est que, contrairement à d'autres

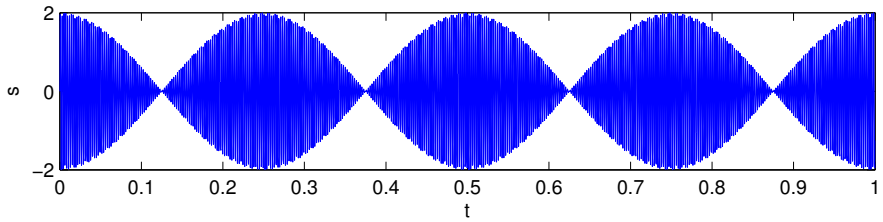


Figure 1.5 Illustration du phénomène de battement. Le signal représenté est $s(t) = \sin(2\pi 440t) + \sin(2\pi 444t) = 2\sin(2\pi 442t)\cos(4\pi t)$.

méthodes comme la transformée de Fourier à court terme, elle ne possède pas de paramètre permettant d'ajuster la séparation fréquentielle. Par ailleurs, deux signaux modulés voient leurs propriétés évoluer au cours du temps, ce qui fait qu'ils seront parfois séparés, parfois non. Ce comportement intermittent produit alors du mélange de mode.

Le phénomène de mode-mixing est illustré sur la Figure 1.6, où l'on représente l'EMD et le spectre de Hilbert-Huang du signal de la Figure 1.2, auquel on a ajouté un bruit blanc gaussien de faible variance (le SNR vaut 55 dB). La première IMF est d'amplitude très faible mais oscille très rapidement, elle contient uniquement du bruit. En revanche on observe que la seconde contient par moment la première composante du signal, et en d'autres endroits du bruit résiduel. Assez logiquement, l'IMF 3 contient un mélange entre les modes 1 et 2 du signal, alors que la composante basse fréquence du signal est répartie entre les IMFs 4 et 5. Ce mélange des modes est également mis en évidence sur le spectre de Hilbert-Huang, dans lequel les lignes temps-fréquences semblent intermittentes. Ainsi, du bruit de très faible amplitude suffit à perturber totalement la décomposition, donnant des IMFs "intermittentes".

On pourrait se satisfaire de ce comportement, en se disant qu'après tout c'est une conséquence logique de la nature adaptative de l'EMD, et qu'un algorithme de post-traitement pourrait réarranger les IMFs pour éviter ces intermittences. Mais l'EMD ne se contente pas de mélanger les composantes, elle crée aussi des artefacts autour des points de mélange. En effet, le mode-mixing produit des sauts d'amplitude,

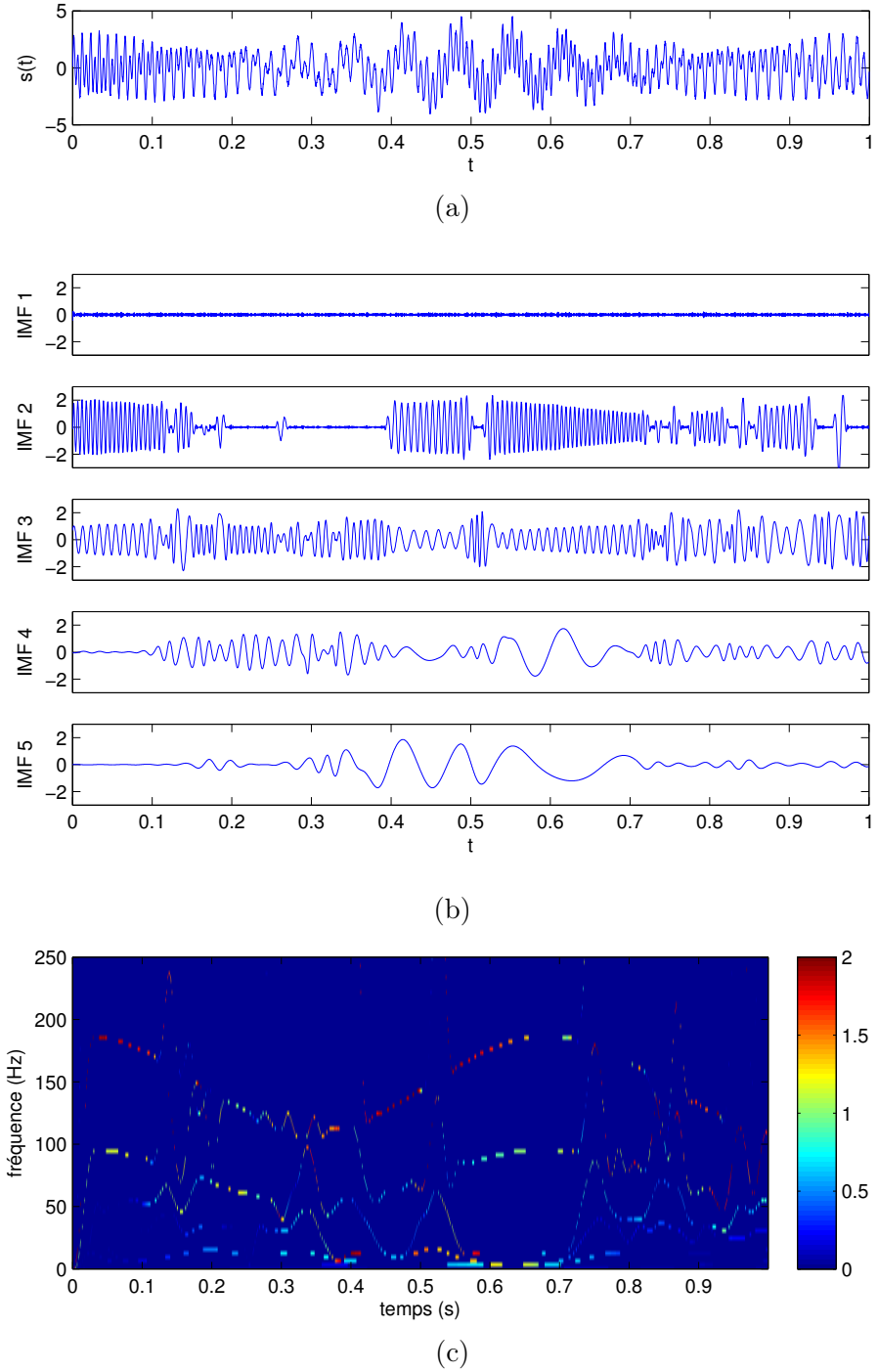
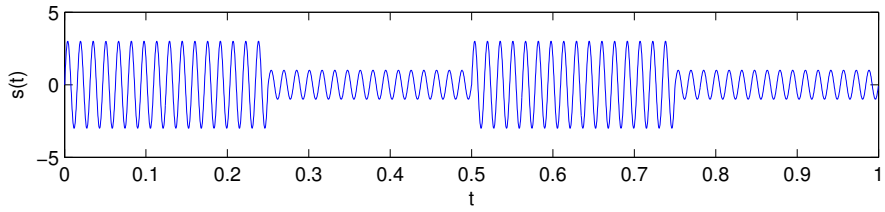
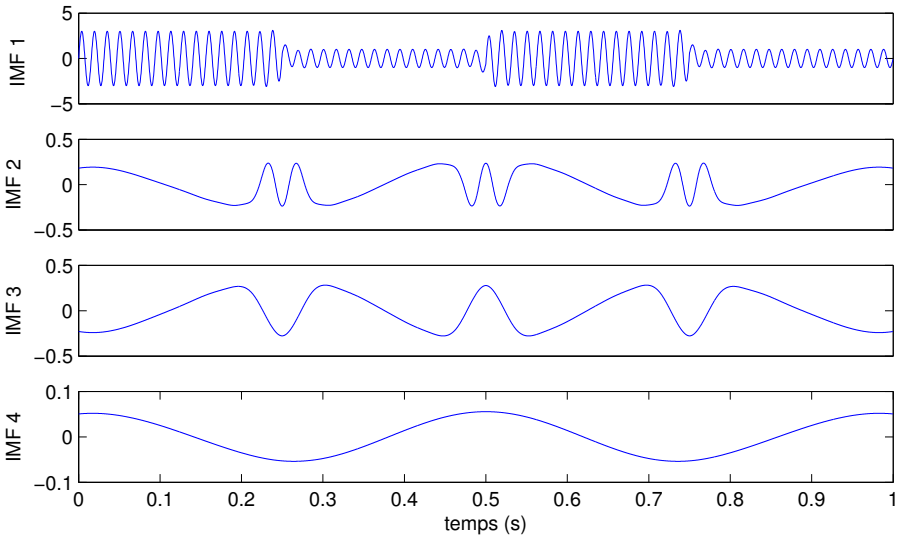


Figure 1.6 Illustration du mélange de modes sur un signal test. (a) : Le signal de la Figure 1.2 faiblement bruité (SNR = 55 dB). (b) : Les cinq premières IMFs données par l'EMD. (c) : Le spectre de Hilbert-Huang.

discontinuités que le Sifting Process va lisser en créant de l'information superflue. On verra ainsi apparaître des artefacts autour des points de mélange. La figure 1.7 illustre ce phénomène sur un exemple très simple : elle montre la décomposition d'un sinus comportant un saut d'amplitude. On remarque que la première IMF contient bien ce cosinus, mais que son amplitude a été lissée aux abords du saut. Ceci engendre la création de plusieurs IMFs qui n'ont pas de sens physique, et qui en outre ne sont pas localisées autour de la discontinuité. Notons que ce signal est pourtant continu, des discontinuités dans le signal amplifient encore le phénomène.



(a)



(b)

Figure 1.7 Illustration du lissage des enveloppes. (a) Un sinus comportant des sauts d'amplitude. (b) Les 4 premières IMFs. L'IMF 1 correspond presque au signal, mais l'amplitude a été lissée. Plusieurs autres modes sont créés par ce phénomène.

1.4.2 Alternatives empiriques

De nombreuses méthodes ont été développées pour améliorer la décomposition modale empirique, en prenant mieux en compte les problèmes de bord [Zhidong 2007], en limitant le mélange de modes [Deering 2005], en améliorant la détection des extrema [Kopsinis 2007a, Kopsinis 2007b] ou l'enveloppe moyenne dans le SP [Hong 2009, Chen 2006, Smith 2005, Park 2011]. Une approche différente qui a rencontré beaucoup de succès est l'EEMD (Ensemble EMD) [Wu 2009], une méthode de Monte-Carlo pour l'EMD, qui est très utilisée lorsque l'EMD classique ne fonctionne pas bien. Des dizaines d'autres implémentations ont été proposées, souvent adaptées à une

application spécifique. Aussi cette section n'a pas de prétention exhaustive, nous nous contenterons de présenter l'EEMD et des définitions alternatives pour les extrema et la moyenne locale, qui nous seront utiles par la suite.

EMD d'ensemble

L'EMD d'ensemble consiste à effectuer un certain nombre de fois l'EMD sur des réalisations bruitées d'un signal, puis à faire la moyenne IMF par IMF. On obtient ainsi une décomposition semblable à l'EMD, mais où l'on a amélioré la séparation fréquentielle et réduit le mélange de modes. En effet, le bruit introduit artificiellement crée de nombreux extrema, ce qui force la séparation ; par ailleurs en prenant un grand nombre de réalisations, on espère que le mélange de mode s'annulera, la décomposition sans mélange étant, on l'espère, la plus probable. Notons que l'EEMD, à cause de la moyennisation, n'est pas une décomposition complète : le signal n'est plus la somme de ses IMFs. Lorsque cet aspect est nécessaire, il vaudra mieux utiliser l'approche alternative [Torres 2011] qui est complète. Pour illustrer les résultats de l'EEMD, on représente sur la Figure 1.8 la décomposition du signal bruité à 3 composantes de la Figure 1.6, en prenant 1000 réalisations avec une variance de bruit $\sigma^2 = 0.04$. Les deux premières IMFs filtrent le bruit, et on retrouve bien les 3 composantes du signal dans les IMFs 3 à 5, avec moins de mélange entre modes. On observe également que la représentation temps-fréquence associée (spectre de Hilbert-Huang) est améliorée, tout en restant assez médiocre.

L'EEMD parvient sans conteste à améliorer la séparation fréquentielle et réduire le mode-mixing, ce qui en fait un outil très utilisé sur les données réelles pour lesquelles l'EMD simple ne donne pas de bons résultats. Cependant c'est au prix d'une augmentation considérable du temps de calcul, et d'un choix judicieux de la variance du bruit à ajouter. Comme remarqué par les auteurs eux-mêmes, le bruit permet en fait simplement de forcer l'EMD à adopter le comportement moyen en banc de filtres mis en évidence dans [Flandrin 2004], tout en restant adaptative.

Extrema, moyenne locale et interpolation

Si le problème de la détection des extrema du mode haute fréquence est crucial, la définition de la moyenne locale est également souvent problématique. En effet, il arrive souvent que le signal dépasse ses enveloppes, créant des "overshoots" ou "undershoots" qui créent des artefacts parasites. Par ailleurs, la construction par interpolation rend la moyenne locale très sensible à la détection des extrema. Yannis Kopsinis suggéra dans [Kopsinis 2007b] d'utiliser la dérivation pour améliorer la détection de ces points caractéristiques. Concernant les enveloppes et la moyenne locale, de nombreuses alternatives ont été proposées, l'approche [Hong 2009] notamment, qui construit la moyenne locale par intégration dans des voisinages. La section 1.5 présente ces deux approches, montrant qu'en les combinant on obtient de bien meilleures performances sur la décomposition.

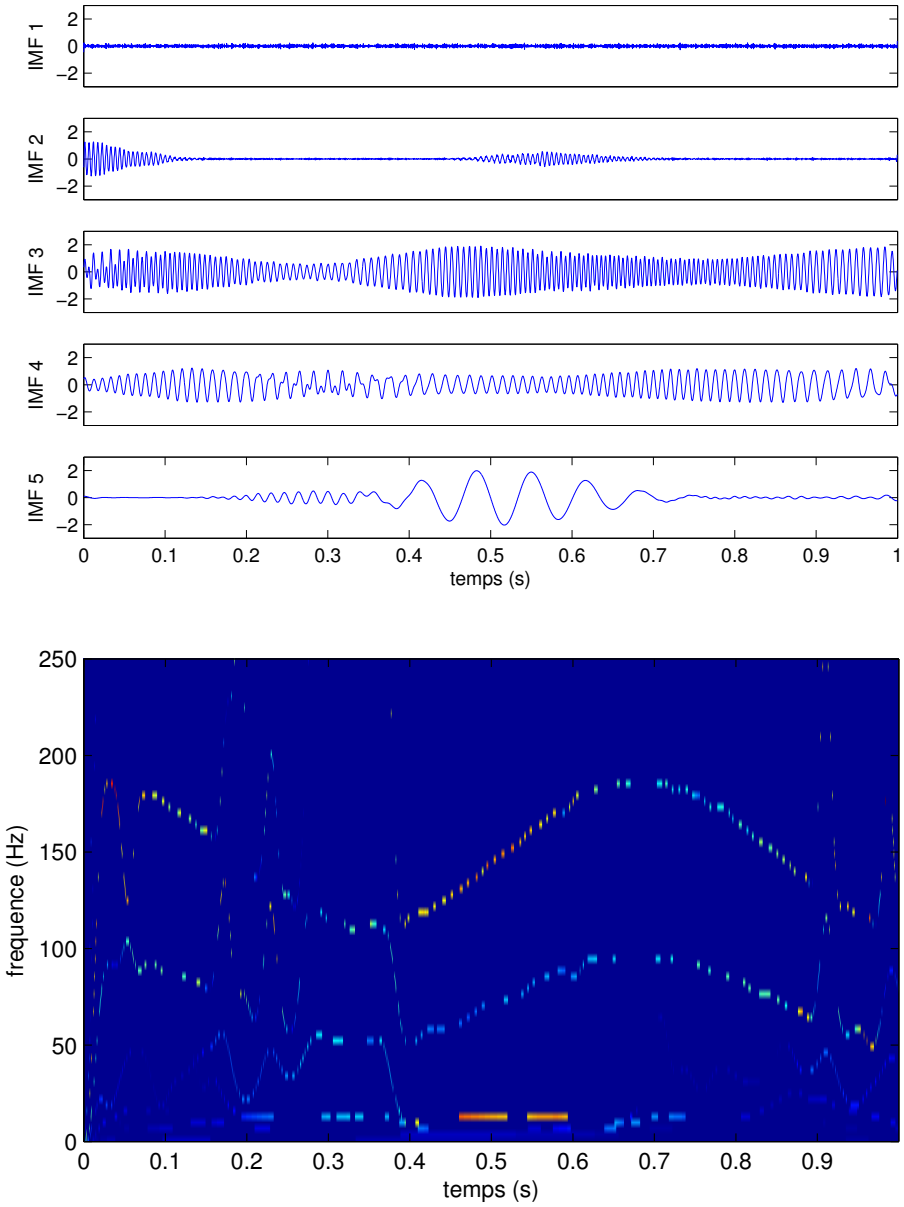


Figure 1.8 EMD d'ensemble du signal multicomposantes faiblement bruité de la Figure 1.6. Représentation temporelle des IMFs (en haut) et spectre de Hilbert-Huang (en bas).

1.4.3 Convergence du Sifting Process et de l'EMD

S'il existe de nombreuses méthodes pour améliorer l'implémentation de l'EMD et éviter certains effets indésirables, une grande lacune de la méthode, plus difficile à contourner, est l'absence de cadre mathématique et de résultats théoriques, et ce même pour des signaux très simples. Ainsi, non seulement les propriétés évoquées dans la section 1.3.4 sont pour la plupart empiriques, mais un résultat aussi crucial que la convergence de l'EMD paraît difficile à obtenir avec la définition actuelle de l'EMD. En particulier, deux questions de convergence restent en suspens :

- Peut-on assurer la convergence du Sifting Process ? Autrement dit, pour un seuil donné, peut-on assurer que la moyenne locale d'un mode au cours du SP décroisse jusqu'à devenir partout inférieure au seuil ? En pratique, les implémentations limitent le nombre d'itérations du SP, quitte à obtenir un mode qui n'est pas exactement une IMF.
- En supposant la convergence du SP, peut-on démontrer la convergence de l'EMD pour une certaine classe de signaux ? Peut-on également contrôler le nombre d'IMFs de la décomposition ?

A cause de la nature algorithmique de l'EMD, une réponse mathématique à ces questions paraît hors de portée. C'est pourquoi nombre d'auteurs ont défini des méthodes alternatives fondées sur des outils mieux formalisés comme l'optimisation ou les équations aux dérivées partielles (EDP), tout en essayant de conserver les caractéristiques essentielles de l'EMD : adaptativité et détection de l'échelle fine par les extrema. La section suivante présente certaines de ces méthodes.

1.4.4 Alternatives théoriques

Détaillons ici deux familles de définitions alternatives du SP. Au lieu d'itérer le tamisage jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait, les approches par optimisation imposent des contraintes de moyenne locale quasi-nulle pour le mode, et recherchent ensuite celui qui donne le résidu le plus régulier possible. Les approches par EDP ont une philosophie un peu différente, puisqu'elles tentent de modéliser le SP par une équation d'évolution en temps, le critère d'arrêt correspondant alors à un temps d'arrêt. Il faut bien noter que si ces méthodes résolvent la question de la convergence du SP, elles ne répondent pas au problème de la décomposition complète en un nombre fini et contrôlé de modes.

Approches variationnelles

Une première approche consiste à définir la première IMF comme solution d'un problème d'optimisation quadratique sous contraintes [Meignen 2007]. Le principe est de chercher la moyenne locale dans l'espace des polynômes de degré 3 par morceaux sur la subdivision des extrema, avec raccord $\mathcal{C}^1$. Par rapport aux splines cubiques, cela permet de gagner un degré de liberté. On peut alors ajouter des contraintes sur cette moyenne, et maximiser sa régularité. Bien que résolvant le problème de la

convergence du SP, cette méthode peine à reproduire les résultats expérimentaux de l'EMD, car elle n'intègre pas directement la contrainte de symétrie des enveloppes.

Mentionnons également une approche par optimisation très récente [Huang 2012], qui contraint le signal à rester strictement entre ses enveloppes, ce qui n'est pas toujours le cas dans la méthode originale. Cette approche ne résout cependant pas les problèmes de convergence, puisqu'elle utilise le tamisage. Enfn, des travaux récents [Pustelnik 2012] proposent une alternative efficace au Sifting Process par optimisation, basée sur une méthode proximale.

Modélisation du SP par des EDP

Plusieurs études ont tenté de modéliser le SP par une équation d'évolution, la variable temporelle continue remplaçant le nombre (discret) d'itérations du SP. En se rappelant le comportement en banc de filtres de l'EMD, on pense naturellement à une équation de diffusion non linéaire, le coefficient de diffusion dépendant de l'échelle locale du signal (elle-même pouvant être calculée comme dans l'EMD grâce à la densité des extrema locaux). Pourtant les deux approches de la littérature font un choix différent. Dans [El Hadji 2010], les auteurs cherchent ainsi l'IMF comme solution de l'équation de la chaleur rétrograde avec un coefficient de diffusion constant, ce qui pose des problèmes de stabilité, tout en perdant le caractère adaptatif de l'EMD. Une autre approche [Delechelle 2005] remplace le SP par une équation de diffusion à long terme, qui donne de bons résultats sur des signaux AM–FM synthétiques, mais la justification théorique du modèle n'est pas clairement établie.

1.5 Une meilleure initialisation pour le SP : l'EMD-NI

Le reste de ce chapitre présente une nouvelle variante de l'EMD utilisant l'optimisation sous contraintes. On montrera d'abord dans cette section comment améliorer l'initialisation du Sifting Process, qui est une étape cruciale. Ensuite, la section 1.6 présentera la phase d'optimisation. Ces travaux ont été publiés dans [Oberlin 2012a].

1.5.1 Extrema et dérivation

Partant de la constatation que la détection des extrema du mode haute fréquence est cruciale, on se propose d'améliorer cette détection en suivant l'idée de [Kopsinis 2007b], c'est-à-dire en utilisant les dérivées du signal. Pour cela, on revient à l'étude menée par Gabriel Rilling et Patrick Flandrin dans [Rilling 2008], en considérant une somme de deux signaux monochromatiques

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \cos(2\pi t) + a\cos(2\pi f t + \varphi) \quad 0 < f < 1,\ a \in \mathbb{R}_+^*. \tag{1.9}$$

On s'intéresse aux relations entre le nombre d'extrema des modes haute-fréquence (HF) s_1 et basse-fréquence (BF) s_2, et le nombre des extrema des dérivées paires du signal $s^{(2p)}$. Comme on travaille sur un signal infini, on s'intéresse plus précisément à la densité des extrema, nombre moyen d'extrema par unité de temps. Le théorème suivant est une extension du résultat obtenu dans [Rilling 2008], établi dans [Oberlin 2012a].

Théorème 1.5.1. *La densité d'extrema de $s^{(2p)}$ est égale à celle de s_1 (resp. s_2) lorsque $af^{2p+1} < 1$ (resp. $af^{2p+2} > 1$).*

Ce théorème étend le théorème 1.4.1 aux dérivées paires du signal. Concrètement, dériver le signal $2p$ fois revient à multiplier le mode basse fréquence s_2 par f^{2p}. Comme $f < 1$, s_2 sera atténué, et en comparaison le mode s_1 sera amplifié, d'autant plus que p est grand. Les extrema du mode HF seront donc plus visibles et mieux estimés.

Démonstration. La dérivée d'ordre $2p$ de s s'écrit

$$s^{(2p)}(t) = (-4\pi^2)^p[\cos(2\pi t) + af^{2p}\cos(2\pi ft + \varphi)].$$

On retrouve ainsi à une constante près le signal s, où le mode BF a été atténué (a est remplacé par af^{2p}). La preuve reprend le raisonnement de [Rilling 2008], et s'intéresse au signe de $s^{(2p+2)}$ évalué aux extrema de $s^{(2p)}$. Si t_0 est un extremum de $s^{(2p)}$, $s^{(2p+1)}(t_0) = 0$, ce qui conduit à

$$\sin(2\pi t_0) = -af^{2p+1}\sin(2\pi ft_0 + \varphi). \tag{1.10}$$

La dérivée d'ordre $2p + 2$ du signal en ce point s'écrit :

$$s^{(2p+2)}(t_0) = (-4\pi^2)^{p+1}[\cos(2\pi t_0) + af^{2p+2}\cos(2\pi ft_0 + \varphi)].$$

Pour distinguer lequel des deux termes est prépondérant, on s'intéresse à la différence de leur carré :

$$\begin{aligned}
&\cos^2(2\pi t_0) - (af^{2p+2})^2\cos^2(2\pi ft_0 + \varphi)\\
&\qquad = 1 - (af^{2p+1})^2\sin^2(2\pi ft_0 + \varphi) - (af^{2p+2})^2\cos^2(2\pi ft_0 + \varphi) \text{ par l'équation (1.10)}\\
&\qquad = 1 - (af^{2p+1})^2 + (af^{2p+1})^2(1 - f^2)\cos^2(2\pi ft_0 + \varphi) > 0 \text{ si } af^{2p+1} < 1\\
&\qquad = 1 - (af^{2p+2})^2 + (af^{2p+2})^2(\frac{1}{f^2} - 1)\sin^2(2\pi ft_0 + \varphi) < 0 \text{ si } af^{2p+2} > 1,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $0 < f < 1$ pour déterminer le signe des expressions. Finalement, on a montré que si t_0 est un extrema de $s^{(2p)}$, $s^{(2p+2)}(t_0)$ a même signe que $(-1)^{p+1}s_1^{(2p+2)}$ (resp. $(-1)^{p+1}s_2^{(2p+2)}$) si $af^{2p+1} < 1$ (resp. $af^{2p+2} > 1$). Les minima et maxima étant alternés, on en déduit que $s^{(2p)}$ a exactement un extremum entre deux passages à zéro de $s_1^{(2p+2)}$ (resp. $s_2^{(2p+2)}$) si $af^{2p+1} < 1$ (resp. $af^{2p+2} > 1$). Il suffit alors de remarquer que les passages à zéro de s_1 (resp. s_2) et $s_1^{(2p+2)}$ (resp. $s_2^{(2p+2)}$) sont identiques, pour conclure la démonstration. □

Pour illustrer ce résultat, on trace sur la Figure 1.9 le nombre d'extrema de $s^{(2p)}$ moins le nombre d'extrema de s_1, pour un signal fini. La zone blanche, délimitée par $af^{2p} < 1$, correspond aux valeurs (a, f) pour lesquelles les extrema du mode s_1 sont bien détectés. Il est clair que ce domaine s'agrandit lorsque p augmente.

Ainsi, dériver le signal permet d'améliorer l'estimation des extrema du mode HF, étape cruciale de l'EMD. Il va cependant de soi que c'est une opération délicate, qui amplifie le bruit (la dérivation discrète est un filtre passe-haut). Ainsi, on a intérêt à utiliser un ordre de dérivation le plus faible possible, tout en assurant une détection correcte des extrema. Pour déterminer l'ordre de dérivation, nous proposons dans [Oberlin 2012a] la méthode suivante :

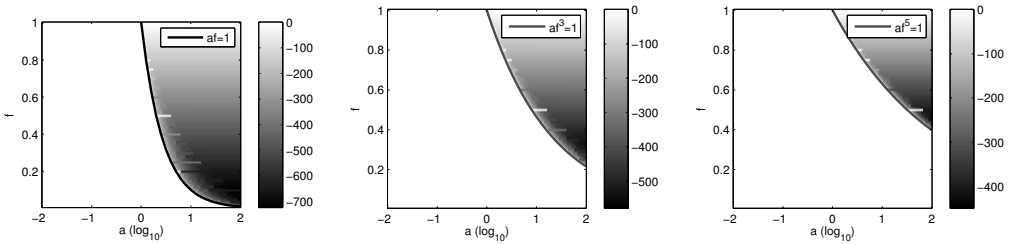


Figure 1.9 Illustration du théorème 1.5.1 : le niveau de gris représente la différence entre le nombre d'extrema de $s^{(2p)}$ et le nombre d'extrema du mode HF s_1 dans la plan (a, f). Les zones blanches correspondent au domaine où tous les extrema du mode s_1 sont détectés. De gauche à droite, $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$.

1. Poser $p = 0$.
2. Tant que $s^{(p+2)}$ a plus d'extrema que $s^{(p)}$, $p := p + 2$.
3. Utiliser les extrema de $s^{(p)}$ pour le calcul d'enveloppe.

En pratique pour le calcul des dérivées on utilise la formule d'ordre 4 suivante

$$s^{(2)}(t) \approx \frac{-s(t-2\delta) + 16s(t-\delta) - 30s(t) + 16s(t+\delta) - s(t+2\delta)}{12\delta^2}, \tag{1.11}$$

où δ est la période d'échantillonnage, en l'adaptant aux bords. La dérivée d'ordre 4 est obtenue en itérant cette formule deux fois, et on n'utilise pas les dérivées d'ordre supérieur. Les résultats de cette sélection adaptative de l'ordre de dérivation sont représentés dans la Figure 1.10 pour le signal (1.9). Chaque couleur correspond à un ordre de dérivation (0, 2 ou 4). On en conclut que notre procédure trouve les extrema du mode HF presque tout le temps lorsque $af^4 < 1$. Pour les autres valeurs de (a, f), on trouve les extrema du mode BF. Ce procédé présente trois avantages : la séparation fréquentielle est améliorée, l'estimation du lieu des extrema est plus précise, et on a supprimé le domaine flou $af > 1 > af^2$ dans lequel le comportement de l'EMD est mal défini. Remarquons que la Figure 1.10 comporte des raies noires horizontales, qui proviennent de la détection discrète des extrema sur un intervalle fini, mais qui sont peu gênantes en pratique.

1.5.2 Une moyenne locale intégrale

À présent que l'on dispose d'un vecteur $\hat{x} = (\hat{x}_i)$ estimant la position des extrema x_i du mode haute fréquence h, on va établir ici une estimation de la moyenne locale $s - h$. Pour cela, nous proposons d'éviter l'approche par interpolation, à cause de son instabilité et de possibleproximal algorithm s over- ou undershoots. A la place, nous construisons une moyenne locale $\hat{m}$ comme dans [Hong 2009] qui interpole les points $(\bar{t}_i, \bar{s}_i)_{i=1\ldots L-1}$ définis par :

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \frac{1}{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i} \int_{\hat{x}_i}^{\hat{x}_{i+1}} s(t)\, dt \\ \bar{t}_i &= \frac{\int_{\hat{x}_i}^{\hat{x}_{i+1}} t|s(t) - \bar{s}_i|^2\, dt}{\int_{\hat{x}_i}^{\hat{x}_{i+1}} |s(t) - \bar{s}_i|^2\, dt}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

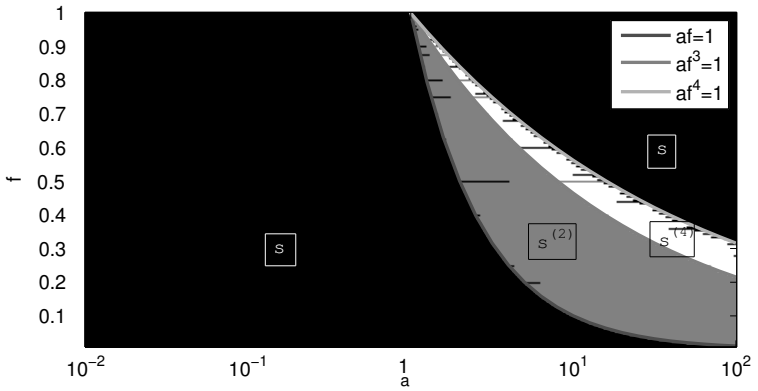


Figure 1.10 Détermination de l'ordre de dérivation de s pour calculer les extrema. De gauche à droite, on représente les zones dans lesquelles on utilise s (en noir), $s^{(2)}$ (en gris) ou $s^{(4)}$ (en blanc). On trace également les courbes de séparation, qui ont pour équation, de gauche à droite, $af = 1$, $af^3 = 1$, $af^4 = 1$. Ces courbes séparent les trois domaines.

La valeur $\bar{s}_i$ est la moyenne locale intégrale du signal entre deux extrema successifs. Quant au point $\bar{t}_i$, c'est une sorte de barycentre, il permet de tenir compte de la forme du signal sur l'intervalle $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]$, et choisir cette abscisse donne de meilleurs résultats par rapport à la solution naïve qui serait de définir $\bar{t}_i$ comme le milieu du segment $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]$. Les points de bord $(\bar{t}_0, \bar{s}_0)$ et $(\bar{t}_L, \bar{s}_L)$ sont définis comme les symétriques respectifs de $(\bar{t}_1, \bar{s}_1)$ et $(\bar{t}_{L-1}, \bar{s}_{L-1})$ par rapport à $\hat{x}_1$ (respectivement $\hat{x}_L$).

Nous définissons alors la moyenne locale $\hat{m}$ comme la spline d'ordre k qui interpole ces $L+1$ points, définie sur une subdivision $\tau = (\tau_i)_{0 \leq i \leq L+k}$. Autrement dit, $\hat{m}$ est un polynôme par morceaux de degré $k-1$ dans chaque intervalle $]\tau_i, \tau_{i+1}[$, ayant une régularité globale $\mathcal{C}^{k-2}$. Pour définir la subdivision τ, on utilise la définition classique de DeBoor [De Boor 1978], qui assure l'existence et l'unicité de l'interpolant :

- On définit des noeuds multiples aux bords : $\tau_0 = \ldots = \tau_{k-1} = \bar{t}_0$ et $\tau_{L+1} = \ldots = \tau_{L+k} = \bar{t}_L$,
- et des noeuds simples ailleurs

$$\forall i \in k \ldots L,\ \tau_i = \frac{1}{k-1} \sum_{p=i+1-k}^{i-1} \bar{t}_p. \tag{1.13}$$

Considérons $N^k_{i,\tau}$, la i^{e} B-spline d'ordre k définie sur la subdivision τ et ayant pour support $[\tau_i, \tau_{i+k}]$. Comme l'équation (1.13) implique que $\forall i \in 0, \ldots, L$, $N^k_{i,\tau}(\bar{t}_i) > 0$, le théorème de Schoenberg-Whitney assure l'existence et l'unicité d'un unique interpolant $\hat{m}$ d'ordre k en $(\bar{t}_i, \bar{s}_i)_{0 \leq i \leq L}$ (voir [Prautzsch 2002] pour plus de détails).

1.5.3 Résultats numériques

En combinant la détection des extrema par dérivation et la construction de la moyenne locale par interpolation des points $(\bar{t}_i, \bar{s}_i)$, on obtient une approximation de la moyenne locale du signal, que l'on peut utiliser pour initialiser le SP, le

reste de la méthode étant inchangé. Cette méthode sera dénommée EMD-NI (pour New Initialization) dans la suite. Pour l'évaluer, reprenons notre signal test à 3 composantes représenté dans la Figure 1.2. La Figure 1.11(a) montre une portion de ce signal, ainsi que les moyennes locales utilisées pour initialiser le SP dans l'EMD et l'EMD-NI. Pour comparer les deux méthodes, on trace aussi la "vraie" moyenne locale, c'est-à-dire $s - s_1 = s_2 + s_3$. On remarque que la méthode EMD-NI fournit une bien meilleure approximation de cette moyenne. Pour observer l'amélioration de la détection des extrema, nous traçons dans la Figure 1.11(b) le mode s_1, ainsi que les extrema estimés par l'EMD et l'EMD-NI. Il est clair que la seconde parvient à les localiser avec une précision bien meilleure.

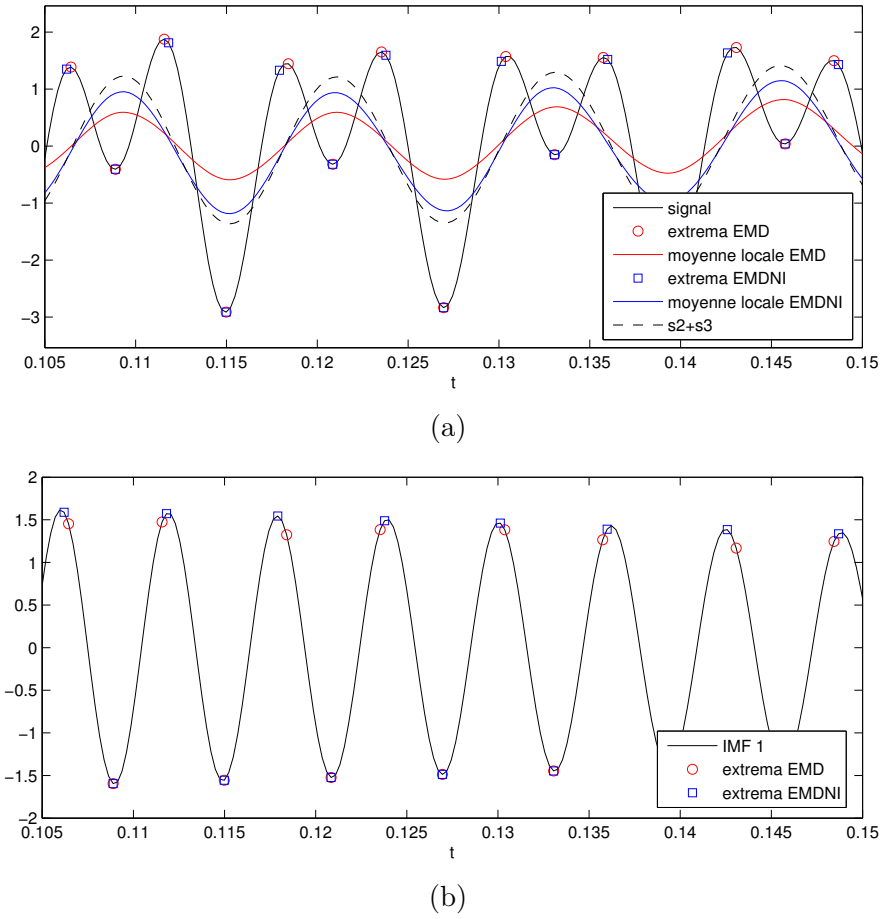


Figure 1.11 (a) : Le signal test, l'estimation des extrema de s_1 et de la moyenne locale, pour l'EMD et l'EMD-NI. (b) : Le mode s_1 et l'estimation de ses extrema par l'EMD et l'EMD-NI. L'ordre de dérivation utilisé dans l'EMD-NI vaut $p = 1$.

Vitesse de convergence du SP

À présent, on peut se demander si cette meilleure initialisation permet d'améliorer le résultat final. Pour cela, on va itérer le SP en partant de chacune des estimations de la moyenne locale. A chaque itération n, on mesure la distance entre le mode courant

h_1^n et la première composante s_1 du signal, en calculant

$$C_1(n) = \log_{10}\left(\frac{\|h_1^n - s_1\|}{\|s_1\|}\right). \tag{1.14}$$

La Figure 1.12 représente C_1 en fonction de n pour chacune des initialisations. À l'itération 0, on vérifie comme précédemment que notre nouvelle initialisation est plus performante que celle de l'EMD. Par ailleurs, il semble que l'EMD et l'EMD-NI ne convergent pas vers la même fonction, et l'écart entre les méthodes reste globalement constant au cours des itérations. Autrement dit, le SP ne parvient pas à rattraper l'erreur commise lors de l'initialisation, montrant que cette dernière est une étape cruciale. Sur cet exemple, l'EMD-NI améliore les résultats d'un facteur 4 environ. C'est ce qu'on observe en moyenne sur des superpositions de modes AM–FM réguliers, pour lesquels la détection des extrema par dérivation fonctionne très bien. La section suivante montre un cas d'application sur des signaux bruités.

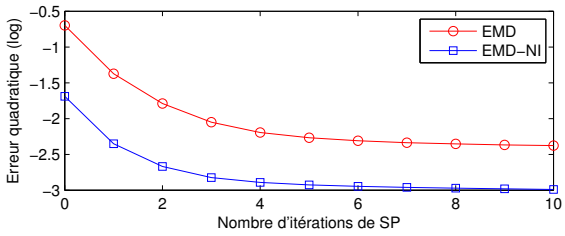


Figure 1.12 Coefficient C_1 pour l'EMD et l'EMD-NI, en fonction du nombre n d'itérations.

1.5.4 Réduire le mode-mixing avec l'EMD-NI

La détection des extrema par dérivation comme la construction de la moyenne locale intégrale ont été conçus pour un signal échantillonné finement, et son application à des séries temporelles ou à des signaux bruités peut poser problème. Pourtant, l'EMD-NI donne de bons résultats sur de tels signaux, notamment en réduisant le mélange de modes en présence de bruit. En effet, la dérivation discrète est un filtre passe-haut, et donc dans le cas d'un signal bruité, l'EMD-NI va mieux détecter les extrema dus au bruit.

Pour illustrer ce bon comportement, nous comparons les résultats donnés par l'EMD et l'EMD-NI dans la Figure 1.13. On considère pour cela le signal bruité représenté en Figure 1.13(a), qui comprend deux composantes s_1 et s_2 représentées en Figure 1.13(b), et du bruit blanc gaussien de variance $\sigma = 0.4$. En observant les résultats de l'EMD (Figure 1.13 (c)), on remarque que le premier IMF contient principalement du bruit pour $t \in [0, 0.5]$, alors que dans la seconde partie du signal il contient du bruit et le premier mode, car l'amplitude du bruit semble trop faible pour créer des extrema. Ce mélange de modes se répercute sur les IMFs 2 et 3, ce qui rend la décomposition difficile à interpréter. La décomposition fournie par l'EMD-NI est bien plus pertinente, car elle filtre quasiment tout le bruit dans le premier IMF, et réduit considérablement le mélange de modes.

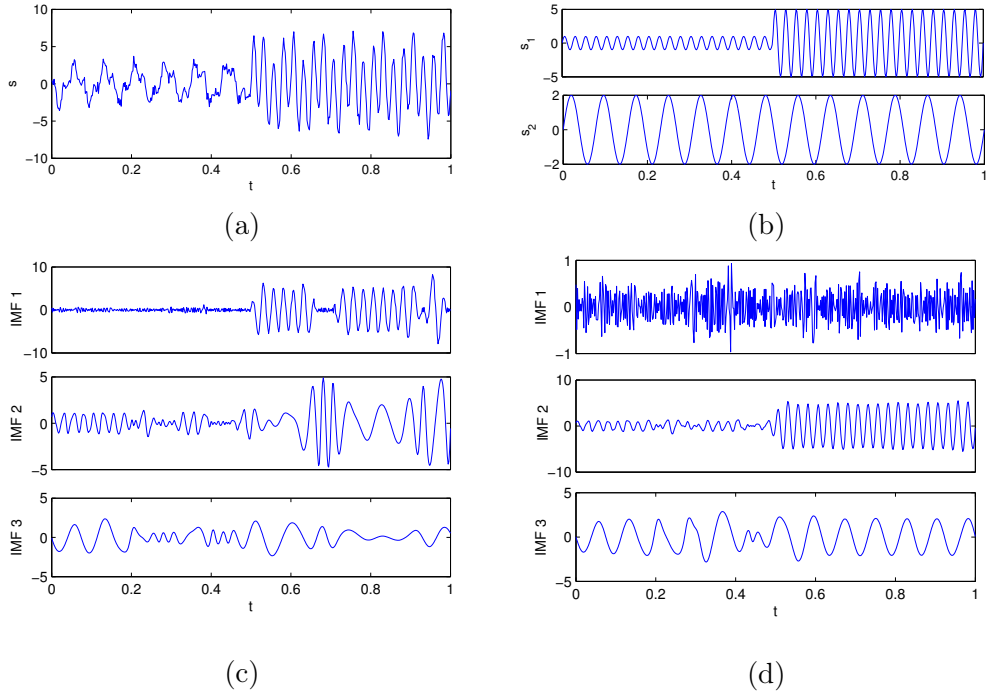


Figure 1.13 (a) : signal $s = s_1 + s_2$ et bruit blanc gaussien de variance $\sigma = 0.4$. (b) : les deux composantes s_1 et s_2. (c) : résultat de l'EMD, l'indice d'orthogonalité est IO $= 0.09$. (d) : résultat de l'EMD-NI, IO $= 0.007$. L'ordre de dérivation pour l'estimation des extrema est $p = 2$ pour le premier mode et $p = 0$ pour le second.

On donne une autre illustration de ce phénomène dans la Figure 1.14, qui représente la décomposition par EMD-NI du signal test bruité utilisé dans la Figure 1.6. On observe que le bruit est extrait dans les deux premières IMFs, les trois suivantes correspondant aux composantes du signal, sans mélange de mode et avec une très bonne séparation. En comparant avec la décomposition par EEMD (Figure 1.8), on obtient une bien meilleure séparation fréquentielle, tout en réalisant 1000 fois moins de calcul, et en gardant la possibilité de reconstruire le signal (ce que l'EEMD empêche). Notons que pour cette décomposition, on a forcé la méthode à utiliser les extrema du signal à partir de l'IMF 3. En effet, l'EMD ne filtrant pas totalement les hautes fréquences, les dérivées présentent encore des extrema, même si leur amplitude est infime. Sans cela, la décomposition extrait 8 IMFs contenant du bruit, puis les trois composantes du signal, bien séparées. Ce forçage peut être réalisé automatiquement en vérifiant l'énergie des IMFs extraites : si elle passe sous un certain seuil, on peut considérer que l'information extraite n'est pas pertinente, et diminuer l'ordre de dérivation p.

Notons que l'EMD-NI n'est pas une solution miracle, et qu'elle peut entraîner aussi du mélange de modes, notamment lorsque le niveau de bruit est fort. Mais ces expériences montrent qu'il suffit de détecter plus astucieusement les extrema du premier mode pour éviter le mode-mixing dans de nombreuses situations.

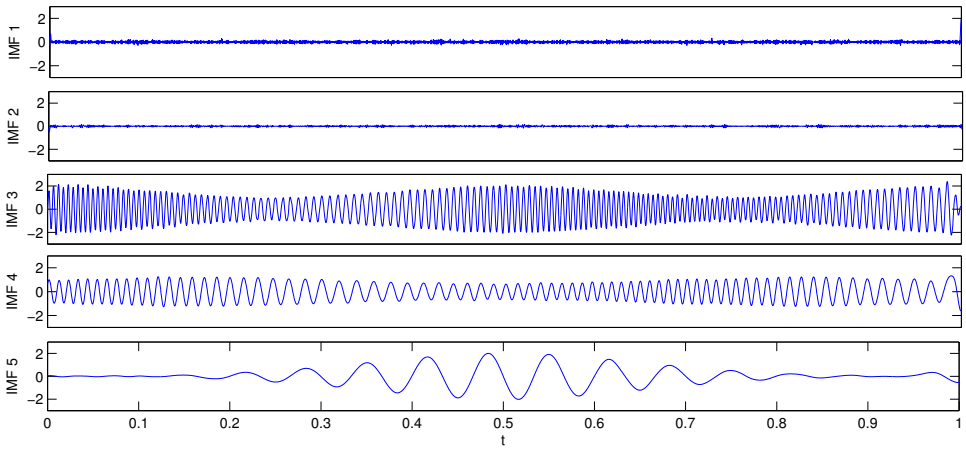


Figure 1.14 Décomposition par l'EMD-NI du signal faiblement bruité de la figure 1.6 (à comparer avec la Figure 1.8).

1.6 Nouvelle approche par optimisation : l'EMDOS

On a montré en section 1.5 comment une meilleure détection des extrema et une définition alternative de la moyenne locale permettait d'améliorer les résultats de l'EMD, notamment la séparation fréquentielle et le mélange de modes. Nous souhaitons à présent nous affranchir du problème de la convergence du SP. Plus précisément, nous allons proposer une méthode alternative au tamisage qui construit la moyenne locale par optimisation sous contraintes, en utilisant l'approximation plus fine de la moyenne locale donnée par l'EMD-NI. Ces travaux ont été publiés dans [Oberlin 2012a].

Nous décrirons successivement notre problème d'optimisation, puis les contraintes linéaires du problème. Après avoir analysé et critiqué certains points de cette nouvelle méthode, nous étudierons numériquement sa stabilité et l'influence de ses paramètres, pour enfin montrer son efficacité grâce à des expériences numériques.

Pour alléger les notations et ne pas multiplier les indices, nous présentons cette méthode d'optimisation pour l'extraction de la première moyenne locale m à partir du signal s, le reste de la décomposition étant obtenu récursivement en remplaçant s par m.

1.6.1 Optimisation dans une base de splines

Le Sifting Process se transpose assez naturellement comme un problème d'optimisation sous contraintes. En effet, il s'agit de décomposer le signal s en la somme de sa moyenne locale m et des détails h, l'IMF h devant satisfaire des contraintes de quasi-symétrie des enveloppes. Grâce à la section précédente, nous disposons déjà d'une approximation $\hat{m}$ de la moyenne m, qui vit dans un espace de splines. Alors que le SP travaille directement sur l'IMF, nous choisissons de calculer la moyenne locale m, en la cherchant dans cet espace de splines. Cette paramétrisation permet de minimiser grandement les coûts de calculs pour des signaux finement discrétisés, sans

pour autant commettre de grandes erreurs (cf. section 1.6.3). La difficulté consiste à trouver un ensemble de contraintes linéaires et non vides, alors que le critère de symétrie des enveloppes est fortement non-linéaire. La linéarisation de ces contraintes est expliquée dans le prochain paragraphe 1.6.2. Une fois ces contraintes établies, il nous faut définir quelle spline m est optimale. Pour cela, le critère principal est la taille globale de la décomposition : on aimerait que notre moyenne m se décompose elle-même en un petit nombre de modes. Pour obtenir une moyenne la plus régulière possible, nous suggérons ainsi de choisir la spline de dérivée seconde minimale.

Pour résumer, le calcul de m d'après s consiste en deux étapes :

- Calculer une approximation $\hat{m}$ de m dans Π_τ^k, l'espace des splines d'ordre k sur la subdivision τ. Ce calcul a été expliqué dans la section 1.5.2.
- Rechercher m dans $C(\hat{m})$, un ensemble convexe non vide de Π_τ^k, en résolvant le problème quadratique sous contraintes

$$m = \underset{\tilde{m} \in C(\hat{m})}{\operatorname{argmin}} \left\| \tilde{m}^{(2)} \right\|^2 . \tag{1.15}$$

Les autres IMFs et moyennes locales de niveau supérieur sont obtenues, comme dans l'EMD, en itérant ce procédé sur m au lieu de s. Notons que minimiser la dérivée seconde de s impose de travailler avec des splines au moins $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire d'imposer un ordre $k \geq 4$.

1.6.2 Contraintes linéaires pour les IMFs

Cette section définit l'ensemble de contraintes $C(\hat{m})$ à partir de l'approximation de la moyenne locale $\hat{m}$ et de la subdivision τ qui sont définies dans la section 1.5.2. Rappelons que cet ensemble de contraintes doit forcer le mode $h = s - m$ à avoir des enveloppes quasiment symétriques. Soit $x := (x_i)$ le vecteur des positions des extrema de h, définissons λ_i tel que (x_i, λ_i) appartienne au segment $[(x_{i-1}, h(x_{i-1})), (x_{i+1}, h(x_{i+1}))]$:

$$\lambda_i = \frac{h(x_{i+1}) - h(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) + h(x_{i-1}), \tag{1.16}$$

valide pour $i = 2, \cdots, L-1$, les points λ_1 et λ_L étant obtenus par symétrie miroir comme pour l'équation (1.12). Ces points (x_i, λ_i) interpolent donc les enveloppes linéaires comme le montre la Figure 1.15.

Dès lors, imposer une quasi-symétrie des enveloppes aux points d'abscisse x_i revient à imposer la condition

$$|h(x_i) + \lambda_i| \leq \varepsilon_i, \tag{1.17}$$

ε_i étant un seuil positif. De même que pour le critère d'arrêt de [Rilling 2003], nous faisons dépendre localement le seuil ε_i de l'amplitude du mode. Plus précisément, pour un seuil global α donné, on pose $\varepsilon_i = \alpha\,|h(x_i) - \lambda_i|$, De la sorte, si h a des enveloppes symétriques, $|h(x_i) - \lambda_i|$ vaut à peu près l'amplitude de h en x_i. L'équation (1.17) devient

$$|h(x_i) + \lambda_i| \leq \alpha |h(x_i) - \lambda_i|. \tag{1.18}$$

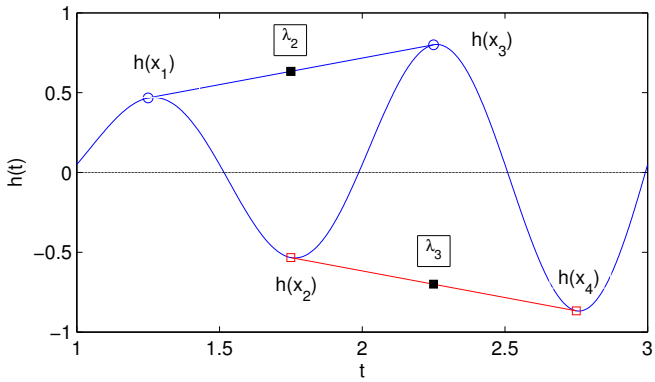


FIGURE 1.15 Définition de λ_2 et λ_3 sur un exemple

Le problème est que les positions x_i des extrema de h sont inconnues. On les remplace par leurs estimations $\hat{x}_i$ obtenues d'après la section précédente. Par ailleurs, nous linéarisons l'équation (1.18) en remplaçant $h(x_i)$ et λ_i par leurs estimations $(s-\hat{m})(\hat{x}_i)$ et $\hat{\lambda}_i$ dans le membre de droite. En posant

$$\hat{\lambda}_i(m) = \frac{(s-m)(\hat{x}_{i+1}) - (s-m)(\hat{x}_{i-1})}{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i-1}}(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}) + (s-m)(\hat{x}_{i-1}), \tag{1.19}$$

les contraintes linéarisées s'écrivent alors

$$|(s-m)(\hat{x}_i) + \hat{\lambda}_i(m)| \leq \alpha |(s-\hat{m})(\hat{x}_i) - \hat{\lambda}_i(\hat{m})|. \tag{1.20}$$

Cet ensemble de contraintes définit l'ensemble $C(\hat{m})$, ce qui nous permet de réécrire le problème d'optimisation (1.15) sous la forme suivante

$$m = \begin{cases} \underset{\tilde{m} \in C(\hat{m})}{\operatorname{argmin}} \left\| \tilde{m}^{(2)} \right\|^2 \\ C(\hat{m}) = \left\{ \tilde{m} \in \Pi_\tau^k,\ \forall i \in 1 \ldots L, \quad \frac{|\hat{\lambda}_i(\tilde{m}) + (s-\tilde{m})(\hat{x}_i)|}{|\hat{\lambda}_i(\hat{m}) - (s-\hat{m})(\hat{x}_i)|} \leq \alpha \right\}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Remarquons que la fonctionnelle est quadratique et s'écrit sous la forme $M^T H M$, avec M la matrice des coefficients de m dans la base B-spline $(N_{i,\tau}^k)_i$ et H la matrice de raideur $H_{iq} = \int (N_{i,\tau}^k)''(t)(N_{q,\tau}^k)''(t)\, dt$. Pour la résolution numérique, on utilise un algorithme d'optimisation sous contraintes de Matlab basé sur une méthode de Newton réflexive [Coleman 1996]. Le théorème suivant nous assure l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 1.6.1. *Pour $\alpha \geq 0$, le problème (1.21) a une unique solution m.*

Démonstration. Comme la fonctionnelle est quadratique, il suffit de montrer que l'ensemble de contraintes $C(\hat{m})$ est convexe et non vide. La convexité vient du fait que $C(\hat{m})$ est un polyèdre convexe (il est défini par des contraintes affines). Ensuite, $C(\hat{m})$ est non vide s'il existe une spline $\tilde{m}$ in Π_τ^k telle que

$$\hat{\lambda}_i(\tilde{m}) + (s-\tilde{m})(\hat{x}_i) = 0,\ i = 1, \ldots, L. \tag{1.22}$$

<table>
<tr><th>OS-décomposition</th><th>EMD</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Entrée : un signal s, un paramètre d'arrêt α
Sortie : les IMFs $h_1, h_2, \ldots, h_J$ et un résidu r
$m_0 := s; j = 0;$
tant que m_j a plus de 3 extrema
$j := j + 1$

</td></tr>
<tr><td>

Extraction de h_j : OS

- Estimation des extrema $\hat{x}_j$ de h_j à partir de m_{j-1}
- Construction de l'approximation $\hat{m}_j$ de m_j
- Calcul de la moyenne locale m_j de niveau j dans un espace de splines par (1.21)

$h_j := m_{j-1} - m_j$

</td><td>

Extraction de h_j : SP

- $n := 0$; $h_j^n := m_{j-1}$;
- **tant que** h_j^n ne satisfait pas le critère d'arrêt faire
$h_j^{n+1} = (\mathcal{I} - \mathcal{M})(h_j^n)$;
$n := n + 1$;
- $h_j := h_j^n$;

$m_j := m_{j-1} - h_j$;

</td></tr>
</table>

Table 1.2 Comparaison entre la décomposition OS et l'EMD.

Comme $\hat{\lambda}_i(\tilde{m})$ est une fonction linéaire du vecteur $((s - \tilde{m})(\hat{x}_i))_{i=1,\ldots,L}$ (1.19), il existe une solution à l'équation (1.22) si

$$\tilde{m}(\hat{x}_i) = s(\hat{x}_i),\ i = 1, \ldots, L. \tag{1.23}$$

Rappelons que dans la section 1.5.2, nous imposons à la subdivision τ de satisfaire $\forall i \in 0, \ldots, L$, $N_{i,\tau}^k(\bar{t}_i) > 0$. Cela implique notamment $\forall i \in 0, \ldots, L$, $\tau_i \leq \bar{t}_i \leq \tau_{i+k}$. Par ailleurs, par définition de $\bar{t}_i$, $\forall i \in 1, \ldots, L$, $\bar{t}_{i-1} < \hat{x}_i < \bar{t}_i$. Donc pour $i \in 1 \ldots L$, soit $N_{i-1,\tau}^k(\hat{x}_i) > 0$, soit $N_{i,\tau}^k(\hat{x}_i) > 0$. Le théorème de Schoenberg-Whitney [Prautzsch 2002] établit alors qu'il existe au moins une spline $\tilde{m}$ appartenant à Π_τ^k, qui interpole $(\hat{x}_i, s(\hat{x}_i))_i$. Ce qui prouve le théorème. □

1.6.3 Discussion sur la méthode

Dans la suite, nous nommerons *EMDOS* (OS pour Optimization on Splines), ou décomposition-OS, la décomposition de s en ses IMFs $(h_j)_{1 \leq j \leq J}$ obtenue en appliquant récursivement la procédure décrite en section 1.6.2. Au niveau j, $\hat{x}_j$, $\hat{m}_j$ et $C(\hat{m}_j)$ sont obtenus à partir de m_{j-1} de la même manière que $\hat{x}$, $\hat{m}$ et $C(\hat{m})$ à partir de $m_0 = s$. La Table 1.2 résume la méthode EMDOS, en la comparant avec l'EMD classique. Nous discutons à présent certains points de la méthode.

Paramètre α et critère d'arrêt

La décomposition OS remplace les itérations du SP par les contraintes linéaires de symétrie de l'équation (1.18), qui font appel à un paramètre α. Ce paramètre règle la "qualité" de la décomposition : un petit α donnera beaucoup d'IMFs avec des enveloppes bien symétriques, alors qu'un grand α réduira le nombre d'IMFs, tout autant que leur "qualité" (leurs enveloppes seront moins symétriques). Ce phénomène est très similaire au critère d'arrêt du SP proposé dans [Rilling 2003], où l'on arrête le tamisage lorsque

$$\sigma(h_j^n)(t) = \frac{|E_{\max}(h_j^n)(t) + E_{\min}(h_j^n)(t)|}{|E_{\max}(h_j^n)(t) - E_{\min}(h_j^n)(t)|} \leq \alpha_{SP}, \tag{1.24}$$

est satisfait pour presque tout t, typiquement pour 95% de la durée du signal (cf. section 1.3.2 pour une définition plus précise). La principale différence est que dans l'EMDOS, les contraintes sont approximatives (puisque linéarisées), et qu'elles s'appliquent seulement ponctuellement aux points $\hat{x}_i$. Par ailleurs, on ne peut plus comme dans [Rilling 2003] relâcher le critère sur 5% du signal, puisqu'on ne sait pas à l'avance quelles contraintes relâcher. L'analogie avec l'EMD suggère qu'une valeur acceptable du paramètre α pour la décomposition OS est 0.05, la sensibilité de la méthode étant analysée numériquement dans la section 1.6.4.

Choix de l'espace d'approximation

Dans de nombreuses situations, la décomposition modale empirique est appliquée à des signaux échantillonnés assez finement. Dès lors, rechercher la moyenne locale dans l'espace du signal serait très coûteux, et on a besoin d'une paramétrisation pour réduire la dimension. Parmi les différents choix possibles, nous avons choisi les B-splines pour les raisons suivantes :

- La formulation du problème d'optimisation est aisée, et permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution.
- Pour le calcul de la fréquence instantanée (et donc du spectre de Hilbert), l'avantage des B-splines sur d'autres paramétrisations comme l'interpolation d'Hermite par morceaux a été montré dans [Chen 2006]. Les auteurs montrent en effet que la transformée de Hilbert d'une B-spline se calcule par une simple formule récursive. Or les IMFs de niveau strictement supérieur à 1 sont des splines.

On peut quantifier grossièrement l'erreur d'approximation due à la paramétrisation spline par le raisonnement suivant. Supposons que le signal $s = s_1 + m$ contienne une onde pure haute fréquence $s_1(t) = \cos(2\pi\nu t)$, et une moyenne locale $m(t)$. Admettons que l'EMDOS détecte bien les extrema du mode s_1, elle interpole la moyenne aux extrema de s_1, qui forment une subdivision équidistante de pas $\Delta x = \frac{1}{2\nu}$. Par la formule de Taylor-Young, l'erreur de l'interpolation spline d'ordre k est alors bornée par

$$\|m - \hat{m}\|_\infty \leq \frac{\|m^{(k)}\|_\infty}{k!} \Delta x^k. \tag{1.25}$$

Comme l'EMD réalise en moyenne une décomposition dyadique, on peut supposer que m ne contient pas de fréquences supérieures à $\nu/2$. On peut ainsi raisonnablement supposer que $\forall k > 0$, $\left\|m^{(k)}\right\|_\infty \leq C\frac{(2\pi\nu)^k}{2^k}$, pour une certaine constante C. La borne de l'erreur s'écrit alors

$$\|m - \hat{m}\|_\infty \leq \frac{C(2\pi\nu)^k}{2^k k!}\frac{1}{(2\nu)^k} \leq \frac{\pi^k}{2^k k!}C. \tag{1.26}$$

Nous utiliserons principalement les ordres $k = 6, 8$ et 10, pour lesquels la borne (1.26) vaut respectivement $2C \times 10^{-2}$, $C \times 10^{-3}$ et $3C \times 10^{-5}$, ce qui est négligeable. Remarquons que quand le premier mode est une onde AM–FM, on peut suivre à peu près le même raisonnement, puisque l'erreur d'interpolation spline est locale.

Ainsi, les B-splines permettent une nette réduction de dimension, une implémentation simple et une analyse aisée de l'optimisation, sans générer d'erreurs importantes. Elles posent cependant un problème lorsqu'on calcule la seconde IMF et les suivantes. En effet, pour calculer h_2, on commence par estimer les extrema de m_1 qui est une spline d'ordre k. Si k est trop petit, la détection des extrema par dérivation ne fonctionne plus. En pratique, on choisira donc au moins des splines de degré 5 ($k = 6$), et on préférera utiliser $k = 8$.

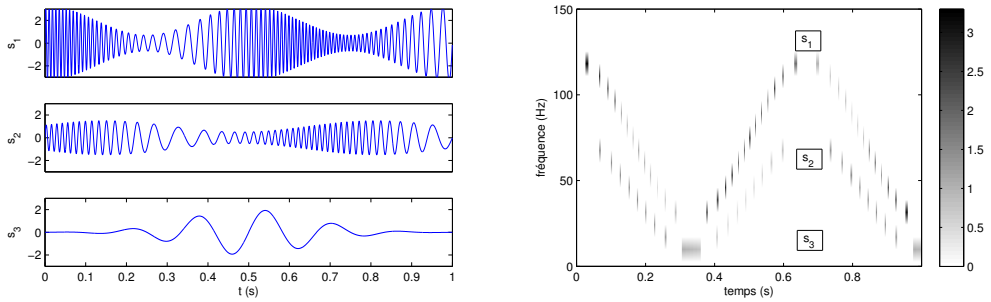
Enveloppes linéaires

Dans la décomposition OS, les contraintes (1.18) sont ponctuelles (vérifiées en les points x_i) et vérifient seulement la symétrie des enveloppes affines de l'IMF, alors que l'EMD standard utilise des enveloppes splines cubiques. Une question naturelle est de savoir si l'utilisation d'enveloppes affines pour contrôler la symétrie occasionne une erreur importante. Comme le montre l'étude de Gabriel Rilling [Rilling 2007] sur les différentes interpolations des enveloppes, la construction des enveloppes dans l'EMD standard par interpolation affine des extrema n'est pas satisfaisante. En effet, le Sifting Process utilise directement les enveloppes pour construire la moyenne locale, et celle-ci doit être assez régulière. Dans l'EMDOS en revanche, c'est la fonctionnelle à minimiser qui assure la régularité de la moyenne locale, les enveloppes affines ne sont cette fois utilisées que pour vérifier la symétrie.

Pour quantifier l'erreur, considérons un mode $A(t)\cos(2\pi\nu t)$ qui vérifie les hypothèses de variations lentes. Soit x_i la position d'un de ses extrema, et λ_i le point de même abscisse situé sur l'enveloppe affine opposée (équation 1.16). On cherche à quantifier l'erreur $e_i = |\lambda_i - A(x_i)|$. La formule de Taylor-Young nous donne

$$e_i \leq \frac{\left\|A^{(2)}\right\|_\infty}{4\nu^2}. \tag{1.27}$$

L'amplitude A variant faiblement par rapport à la fréquence ν, on a $\frac{\left\|A^{(2)}\right\|_\infty}{\nu} \ll 1$. En divisant ce résultat par 4ν, l'erreur e_i est négligeable par rapport au paramètre $\alpha \approx 0.05$. Là encore, on peut généraliser ce raisonnement à des fréquences modulées, l'erreur spline étant locale. Pour vérifier cela, nous avons implémenté des contraintes basées sur des enveloppes interpolées à des ordres supérieurs, les tests numériques confirmant que des ordres élevés n'améliorent pas sensiblement les résultats.



(a) (b)

Figure 1.16 (a) : Les trois composantes s_1, s_2, s_3 du signal test. (b) : La représentation temps-fréquence idéale du signal.

1.6.4 Paramètres et sensibilité

Une des caractéristiques de l'EMD, responsable en partie de son succès, est la quasi-absence de paramètres à régler. Le seul paramètre important est le critère d'arrêt, et celui proposé dans [Rilling 2003] convient dans l'immense majorité des cas. En analysant la sensibilité de l'EMDOS à ses principaux paramètres sur un signal multicomposantes, nous déduisons des valeurs de référence pour le paramètre de symétrie α et l'ordre des splines k. Puis nous analysons la dépendance de la méthode vis-à-vis de l'estimation des extrema et de l'approximation $\hat{m}$. Nous montrons ainsi, grâce à des expériences numériques, que l'EMDOS ne semble pas plus sensible que l'EMD. Dans un souci de reproductibilité, les codes Matlab utilisés ainsi que des scripts permettant de tracer la plupart des figures de cette section sont disponibles à `http://www-ljk.imag.fr/membres/Thomas.Oberlin/EMDOS.tar.gz`.

Pour étudier quantitativement les résultats des décompositions, nous procédons comme dans la section 1.5.3, en construisant un signal multicomposantes de la forme

$$s(t) = \sum_{j=1}^{J} s_j(t) := \sum_{j=1}^{J} A_j(t)\cos(2\pi\phi_j(t)),$$

tel que pour tout t, $\phi_j'(t) > \phi_{j-1}'(t) > 0$ et $A_j(t) > 0$. Nous supposerons que chaque composante s_j est AM–FM, c'est-à-dire que A_j et ϕ_j' sont à variations lentes. Enfin, les s_j sont bien séparées fréquentiellement, c'est-à-dire que $\phi_j' - \phi_{j-1}'$ est suffisamment grand pour que l'EMD soit capable d'extraire chaque mode. Au lieu de considérer le signal test des Figures 1.2 et 1.11, nous utiliserons un signal similaire, mais dont les composantes sont plus proches fréquentiellement. On rend ainsi le signal plus difficile à analyser, ce qui permet de souligner les différences entre les méthodes. Ce deuxième signal test est présenté en Figure 1.16, avec sa représentation temps-fréquence idéale.

Dans les simulations numériques suivantes, nous calculons l'EMD comme dans [Rilling 2003], où le critère d'arrêt du SP est basé sur deux seuils qui garantissent une moyenne locale faible sur une grande partie de l'IMF, tout en tolérant une moyenne locale plus grande sur de petites durées (voir section 1.3.2 pour la définition précise). Les paramètres utilisés sont $(\alpha_{SP}, \beta_{SP}, \gamma_{SP}) := (\alpha_{SP}, 10\,\alpha_{SP}, 0.05)$ comme

suggéré par les auteurs. Comme remarqué dans la section précédente, α_{SP} dans l'EMD est similaire à α dans la décomposition OS, aussi prendrons nous la même valeur $\alpha_{SP} = \alpha$ dans les comparaisons. Par ailleurs, $\hat{x}$, $\hat{m}$, h et m désigneront encore $\hat{x}_1$, $\hat{m}_1$, h_1 et m_1 respectivement.

Sensibilité aux paramètres α et k

Commençons par étudier la sensibilité de la décomposition au paramètre de symétrie α et à l'ordre k des splines. On se concentre sur l'extraction du premier mode du signal test, en le comparant à la première composante s_1. Notons $h(\alpha)$ le premier mode obtenu avec la valeur de paramètre α. On évalue d'abord la qualité de la décomposition en comparant $h(\alpha)$ et s_1 avec le critère

$$C_1(\alpha) = \log_{10}\left(\frac{\|s_1 - h(\alpha)\|}{\|s_1\|}\right). \tag{1.28}$$

Pour évaluer la stabilité, il est intéressant aussi d'avoir une idée de la distance entre $h(\alpha)$ et $h(\alpha+\delta)$ pour un petit δ. Pour cela, on calcule également le taux de variation $vr(\alpha)$ défini par

$$vr(\alpha) = \frac{\|h(\alpha+\delta) - h(\alpha)\|}{\delta}, \tag{1.29}$$

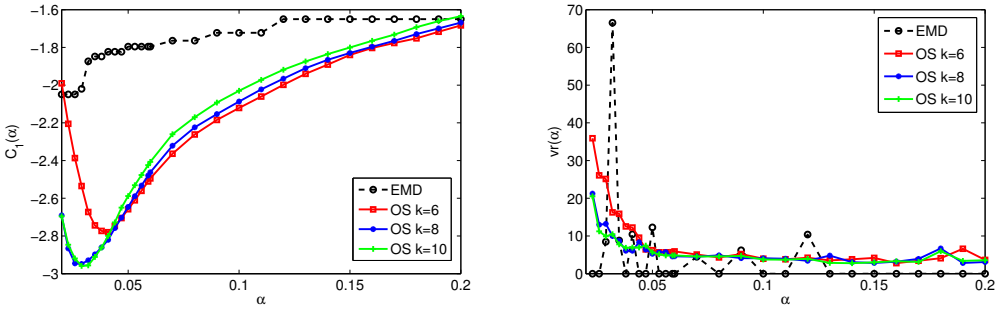
pour un δ petit fixé. Ces coefficients sont représentés à la Figure 1.17, pour l'EMD standard et pour l'EMDOS avec différentes valeurs de k. La Figure 1.17(a) suggère une valeur optimale de α entre 0.02 et 0.05 pour la décomposition OS, ce qui correspond à peu près au seuil α utilisé en pratique dans l'EMD standard. Si α est trop petit, les contraintes deviennent trop strictes, alors que pour un grand α, on n'extrait pas toute la composante s_1. On remarque que le coefficient $C_1(\alpha)$ est plus petit pour la décomposition OS, ce qui indique une meilleure décomposition. La Figure 1.17(b) montre que le taux de variation pour l'EMD et pour l'EMDOS sont du même ordre de grandeur. Pour l'EMD, $vr(\alpha)$ est soit assez important (lorsqu'il y a une itération supplémentaire du SP) soit nul (pas d'itérations du SP donc pas de changement du résultat). L'EMDOS montre un comportement plus régulier, puisque l'étape d'optimisation change le résultat même pour un petit δ. L'ordre k des splines ne semble pas avoir de grande influence, dès lors que α est suffisamment grand. En revanche, pour un paramètre α petit (de l'ordre de 0.02), les valeurs $k = 8$ ou $k = 10$ semblent nettement préférables.

Sensibilité à l'approximation $\hat{m}$

Une question importante est la sensibilité de la décomposition OS vis à vis de l'approximation initiale $\hat{m}$. Plus précisément, l'étape d'optimisation sous contraintes dépend des grandeurs suivantes

- La subdivision τ associée à l'espace de splines
- L'approximation $\hat{m}$ de la moyenne locale m.

La subdivision τ n'influence pas beaucoup la décomposition, pourvu que les noeuds soient intercalés avec les extrema $\hat{x}$, de manière à vérifier le Théorème 1.6.1. Quant



(a) (b)

Figure 1.17 (a) : Coefficient $C_1(\alpha)$, pour le signal test de la Figure 1.16. (b) : taux de variation vr, en fonction de α pour le même signal. Les résultats sont donnés pour l'EMD et pour la décomposition OS avec des splines d'ordre $k = 6, 8, 10$.

à l'approximation $\hat{m}$, elle est utilisée dans le terme de droite de l'équation (1.20), c'est-à-dire uniquement pour estimer l'amplitude locale de l'IMF. On peut donc supposer que de faibles variations de $\hat{m}$ ont peu d'impact sur le résultat m. Pour vérifier cela numériquement, considérons différentes définitions de $\hat{m}$:

1. La première est l'approche par moyenne intégrale, décrite par l'équation (1.12)
2. La seconde est l'approche traditionnelle de l'EMD, qui consiste à interpoler les extrema, les minima, et à prendre la demi-somme de ces enveloppes. Pour cette approche, on utilise la subdivision τ où chaque τ_i est au milieu de $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}]$.
3. La troisième calcule la moyenne locale $\hat{m}$ comme dans l'article [Chen 2006]. En définissant la même subdivision τ que pour l'EMDOS, on calcule simplement le poids associé à la B-spline $N^k_{j,\tau}$ par la formule barycentrique

$$c_j = \frac{1}{4}(s(\tau_{j+1}) + 2s(\tau_{j+2}) + s(\tau_{j+3})). \tag{1.30}$$

La moyenne obtenue est la B-spline

$$\hat{m}_b(t) = \sum_{j=0}^{L} c_j N^k_{j,\tau}(t). \tag{1.31}$$

En posant $k = 8$, on représente $C_1(\alpha)$ sur la Figure 1.18 pour chacune de ces trois variantes. Le résultat confirme ici l'intuition : la phase d'optimisation est très peu sensible aux différentes méthodes utilisées pour construire $\hat{m}$, et ce quelle que soit la valeur de α.

Paramètre α et quasi-orthogonalité

Une des propriétés importantes de l'EMD que l'on aimerait conserver est la quasi-orthogonalité des modes. Nous proposons ici de comparer l'indice d'orthogonalité de la décomposition OS et de l'EMD, en faisant varier les paramètres α et k comme dans la section 1.6.4. Rappelons l'indice d'orthogonalité d'une décomposition :

$$\mathrm{IO} = \frac{1}{\|s\|^2} \sum_{1 \le i < j \le J} |\langle h_i, h_j \rangle| .$$

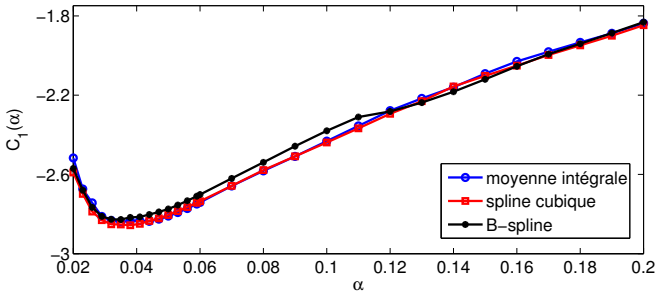


FIGURE 1.18 Coefficient C_1 en fonction de α, pour la décomposition OS en utilisant trois méthodes différentes pour calculer $\hat{m}(\hat{x})$. Le signal test est celui de la Figure 1.16.

La Figure 1.19 montre l'évolution de cet indice en fonction de α pour le signal test de la Figure 1.16 (dans ce cas $J = 3$). Nous comparons les résultats obtenus pour l'EMD et pour la décomposition OS avec différents ordres k, avec l'indice d'orthogonalité des composantes (s_1, s_2, s_3) qui vaut 3×10^{-3}.

On observe tout d'abord que les valeurs de IO sont similaires, sauf pour l'EMDOS avec $k = 6$. Cela rejoint la remarque de la section 1.6.3, puisque lorsque $k = 6$ on ne peut pas utiliser la détection des extrema par dérivation sur les modes 2 et 3. On observe par ailleurs, comme dans la Figure 1.17, que l'évolution de l'indice pour l'EMD et pour l'EMDOS est différente : pour l'EMD, IO(α) est une fonction croissante du temps et en paliers, car on peut augmenter α sans changer le nombre d'itérations de SP et donc sans changer la décomposition. Il est intéressant de noter que pour de grandes valeurs de α, IO est nettement inférieur pour l'EMDOS. Ce phénomène vient de la fonctionnelle définie en (1.15), car plus α est grand plus la moyenne locale sera lisse, ce qui n'est pas vrai avec l'EMD puisqu'on réalisera moins d'itérations de SP.

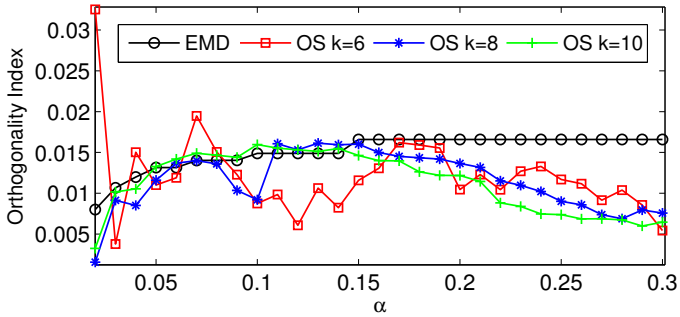
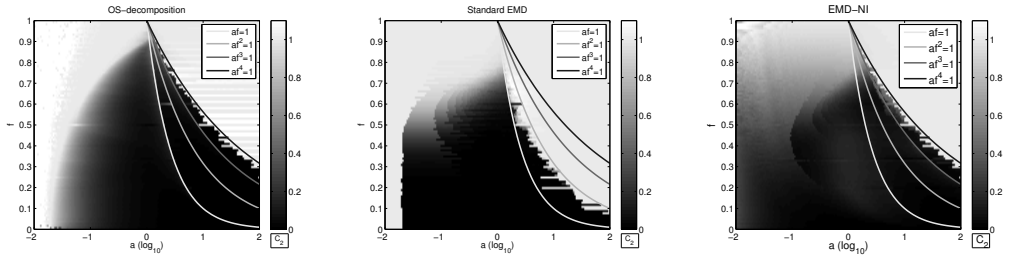


FIGURE 1.19 Indice d'orthogonalité de la décomposition du signal test (Figure 1.16) en 3 composantes, en fonction du paramètre α, pour l'EMD et l'EMDOS avec $k = 6$, $k = 8$, et $k = 10$.

1.6.5 Résultats numériques

Dans cette partie, nous allons évaluer numériquement la méthode OS, en la comparant avec l'EMD. Nous montrerons qu'elle reproduit la plupart des résultats attendus,



(a) (b) (c)

Figure 1.20 Coefficient $C_2(a, f)$ défini en (1.32). $C_2 = 0$ (zones noires) signifie que s_1 est extrait correctement, alors que $C_2 \approx 1$ (zones blanches) indique une mauvaise extraction. Les résultats sont donnés pour la décomposition OS (a), l'EMD (b) et l'EMD-NI (c).

parfois même avec une meilleure précision. Pour cela, nous nous intéresserons d'abord à la question de séparation des modes, puis nous évaluerons quantitativement les décompositions de signaux multi-composantes. Enfin, nous étudierons le cas de données bruitées. Rappelons que l'EMDOS désigne la nouvelle décomposition où le SP est remplacé par une étape d'optimisation sous contraintes. L'EMD sera calculée comme dans [Rilling 2003], et on analysera aussi les résultats de l'EMD-NI, qui consiste à utiliser le SP standard mais en l'initialisant comme dans l'EMDOS. Dans tous les tests numériques, on choisira $k = 8$ et $\alpha = 0.03$.

Séparation fréquentielle

Reprenons le test de séparation réalisé en section 1.5.1 : il s'agit d'évaluer la séparation de deux sinus en faisant varier les amplitudes et les fréquences relatives. Le signal est $s = s_1 + s_2$, et on évalue chaque méthode en mesurant le coefficient

$$C_2(a, f) = \frac{\|h - s_1\|}{\|s_2\|}. \tag{1.32}$$

Ce coefficient a été utilisé dans [Rilling 2008], il est similaire à C_1 sauf que s_2 remplace s_1 au dénominateur, ce qui permet de mieux évaluer la séparation lorsque a est petit. La séparation est bien effectuée lorsque $C_2 \approx 0$.

Dans la Figure 1.20, on trace ce coefficient C_2 en faisant varier a et f, pour chacune des trois méthodes. Si l'on s'intéresse au cas limite de séparation (autour des courbes $af^j = 1$), il est clair que la meilleure détection des extrema dans l'EMDOS et l'EMD-NI permet une meilleure séparation. Par ailleurs, on remarque des discontinuités pour l'EMD-NI et l'EMD, qui semblent provenir du SP, puisque dans le domaine $af < 1$ l'EMDOS donne un coefficient de séparation C_2 qui semble très régulier. En revanche, pour $af^4 > 1$ on voit apparaître des bandes horizontales. Enfin, l'EMD comme l'EMDOS effectuent une séparation médiocre lorsque a est très petit. Cela provient du paramètre α qui est assez grand (0.03), et qui entraîne l'arrêt du SP à la première itération pour l'EMD, et des contraintes faibles sur la symétrie des enveloppes pour l'EMDOS. Remarquons que quand a est très petit, la bonne initialisation dans l'EMD-NI rend possible la séparation.

Extraction de modes AM–FM

Comme dans la section 1.5.3, nous évaluons et comparons les décompositions en mesurant l'erreur log normalisée de la première IMF (équation (1.14)). Nous utilisons le signal test de la Figure 1.16. Nous comparons également les résultats obtenus avec une autre méthode par optimisation décrite dans [Meignen 2007]. Contrairement à la décomposition OS, dans [Meignen 2007] les auteurs utilisent des contraintes qui ne vérifient pas directement la symétrie des enveloppes, mais qui préservent la monotonie des extrema. En remplaçant les contraintes de symétrie par celles définies dans [Meignen 2007], nous construisons une méthode comparable, nommée EMD-MP. Pour évaluer chaque méthode et leur vitesse de convergence, on utilise à nouveau le coefficient C_1 en fonction du nombre d'itérations du SP n (équation (1.14)). Comme les méthodes par optimisation ne sont pas itératives, on ne calcule pour l'EMDOS et l'EMD-MP que $C_1(0)$ et $C_1(1)$, qui correspondent respectivement à l'approximation $s - \hat{m}$ et à l'IMF après optimisation $s - m$. Les résultats montrés dans la Figure 1.21 font apparaître la convergence de l'EMD vers un h_1 différent de la première composante s_1. On remarque de plus que cette convergence semble assez lente. Les résultats pour l'EMDOS et l'EMD-NI semblent bien meilleurs. On observe par ailleurs que les contraintes dans l'EMD-MP conduisent à un résultat moins bon qu'avec l'EMDOS, ce qui justifie a posteriori notre approche par symétrie des enveloppes.

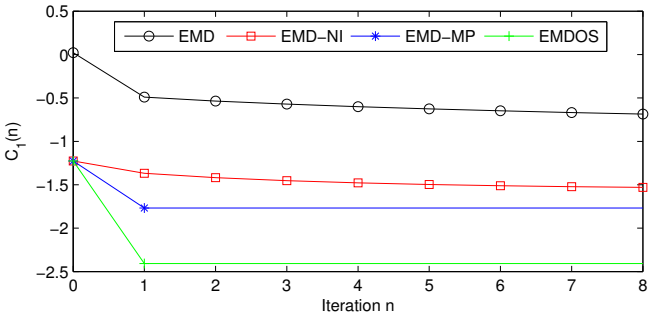
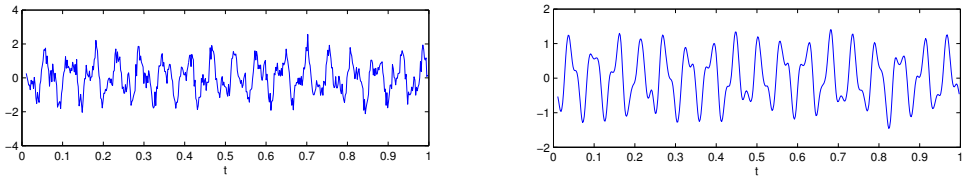


Figure 1.21 Coefficient $C_1(n)$ pour les 4 méthodes, pour le signal test de la Figure 1.16.

Signaux bruités

Nous avons déjà vu que l'EMD n'est pas robuste au bruit, car le bruit, en créant des extrema "parasites", engendre des instabilités et du mélange de modes. L'EMDOS ne résout pas ce problème, au contraire, puisque ses performances reposent sur sa capacité à estimer correctement les extrema du mode haute fréquence, ce qui n'est plus garanti pour des données bruitées. Par ailleurs, la construction de la moyenne locale par moyenne intégrale suppose une discrétisation plus fine que l'échelle des extrema. Pour traiter directement un signal bruité, nous avons montré dans la section 1.5.3 que l'EMD-NI est bien adaptée, mais dans ce cas on fait appel au procédé de tamisage, que l'on voulait justement éviter.

Pour contourner cette difficulté, nous proposons ici d'appliquer la décomposition



(a) (b)

Figure 1.22 (a) : signal bruité, somme de 2 cosinus et bruit blanc gaussien, $\sigma = 0.3$. (b) : signal débruité avec un seuillage SURE.

OS au signal préalablement débruité. Cette approche peut paraître artificielle, mais il faut bien noter que l'information pertinente recherchée dans les données réelles concerne très souvent les modes basse-fréquence : c'est le cas par exemple dans l'analyse des températures de la Figure 1.3. Un tel procédé est illustré dans la Figure 1.22, où l'on représente une somme de deux cosinus perturbés par un bruit blanc gaussien de variance $\sigma = 0.3$, ainsi que le même signal débruité par un seuillage SURE des coefficients d'ondelettes (cf. [Donoho 1994]). Ensuite, les Figures 1.23 (a) et (b) montrent l'EMD et l'EMDOS du signal débruité. Pour les deux méthodes, les résultats semblent satisfaisants et ont un indice d'orthogonalité très faible. Pour comparer, on a également représenté en Figure 1.23 (c) l'EMD du signal bruité, où l'on voit clairement le mélange de modes qui rend cette décomposition directe peu exploitable.

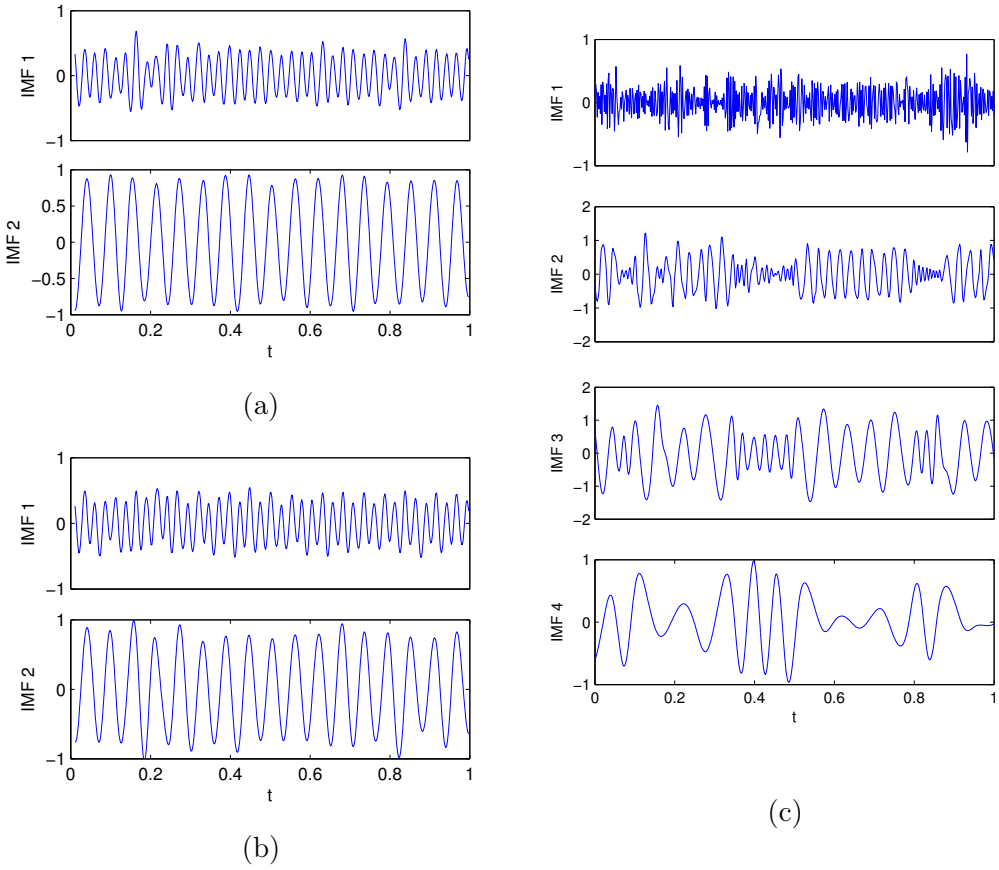


Figure 1.23 (a) : Le signal débruité (Figure 1.22 (b)) décomposé par EMD, l'indice d'orthogonalité est IO = 0.017. (b) : même chose avec l'EMDOS, IO = 0.009. (c) : EMD du signal bruité (Figure 1.22 (a)) IO = 0.07.

1.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la décomposition modale empirique, sa mise en oeuvre et ses principales propriétés, qui en font une méthode d'analyse utilisée dans de nombreuses applications. Nous avons pointé ses principaux inconvénients, concernant l'implémentation pratique de la méthode ou bien le cadre théorique. Nos contributions ont consisté en une amélioration de l'initialisation du SP, et une méthode alternative qui remplace le SP par un algorithme d'optimisation sous contraintes. L'intérêt de ces deux méthodes a été mis en évidence par des expériences numériques sur des signaux synthétiques, bruités ou non. Nous avons ainsi montré qu'un procédé d'optimisation pouvait remplacer le SP tout en conservant de bons résultats, pourvu que l'on prenne garde à la détection des extrema du mode haute-fréquence.

On gardera à l'esprit deux conclusions importantes, valables pour toutes les méthodes dérivées de l'EMD. Premièrement, remplacer le Sifting Process nécessite d'estimer finement les extrema du premier mode. Ceci est valable également pour les approches par EDP, où la densité de ces extrema renseigne sur l'échelle locale intrinsèque du mode. Deuxièmement, la caractérisation des IMFs par la symétrie des enveloppes est un concept fondamental pour décomposer des superpositions de modes

AM–FM : parmi les différentes contraintes testées (notamment [Meignen 2007]), c'est ce critère de symétrie qui donne les meilleurs résultats numériques.

Pour conclure, remarquons que même si l'EMDOS permet de résoudre le problème de la convergence du SP, elle ne fournit pas pour autant un cadre mathématique totalement clair : le problème de la convergence de la décomposition en un nombre fini de modes reste un problème ouvert. Dans la suite de cette thèse, nous adopterons une démarche différente, qui consistera à analyser les signaux multicomposantes par des outils mathématiques bien connus, comme l'analyse temps-fréquence et temps-échelle.

CHAPITRE 2

Représentations temps-fréquence linéaires et ridges

2.1 Introduction

Ce chapitre propose d'étudier les signaux multicomposantes à partir de leurs représentations temps-fréquence ou temps-échelle continues. Ces outils, introduits respectivement dans [Gabor 1946] et [Grossmann 1984], sont étudiés depuis plusieurs dizaines d'années et possèdent un cadre mathématique clair. L'enjeu ici sera de proposer des méthodes d'approximation et de séparation des modes, en insistant sur les résultats théoriques et les applications pour différentes classes de signaux. Bien que de nombreux résultats théoriques de ce chapitre ne soient pas nouveaux, ils permettent de faire le lien entre des travaux récents, notamment sur le synchrosqueezing [Daubechies 2011], et des méthodes bien plus anciennes. Ils seront de plus utilisés dans le prochain chapitre consacré au synchrosqueezing et à ses extensions.

On commencera par définir certaines représentations temps-fréquence, en se concentrant sur la transformée de Fourier à court terme (TFCT) et la transformée en ondelettes continue (TOC), ainsi que les relations d'incertitudes inhérentes à ce type de représentation. Ensuite, la section 2.3 présentera des approximations classiques pour la TFCT et la TOC de signaux multicomposantes. Ces approximations seront étendues dans la section 2.4 par de nouveaux résultats théoriques et numériques, où l'on présentera une nouvelle méthode de reconstruction des modes par intégration locale. On montrera également comment étendre cette reconstruction lorsque les modes comportent de fortes modulations fréquentielles. On illustrera l'application de ces nouvelles méthodes au débruitage de signaux multicomposantes dans la section 2.5, en les comparant à plusieurs méthodes de référence. Avant de conclure le chapitre, la section 2.6 posera la problème de la stabilité de la reconstruction, et proposera une méthode de régularisation.

2.2 Analyses temps-fréquence

L'analyse de Fourier, omniprésente dans de nombreux domaines, permet de décrire un signal par son spectre fréquentiel. Grâce à ses bonnes propriétés mathématiques et à l'algorithme de transformée rapide (*Fast Fourier Transform*) de Cooley et Tukey [Cooley 1965], elle est devenue un outil incontournable pour l'analyse de signaux stationnaires. Mais la plupart des signaux réels ne sont que rarement périodiques (ou stationnaires), rendant une analyse globale des fréquences moins pertinente. La transformée de Fourier à court terme (TFCT) fut introduite par Gabor [Gabor 1946] pour pallier cet inconvénient, en réalisant des transformées de Fourier locales au moyen d'une fenêtre glissante. Le choix de cette fenêtre est crucial, car il détermine la résolution de la décomposition en temps et en fréquence. Plus récemment, Grossmann et Morlet ont introduit [Grossmann 1984] la transformée en ondelettes continue (TOC), une décomposition qui ressemble à la TFCT mais où la fenêtre est dilatée en fonction de la fréquence.

Une limitation intrinsèque de ces deux transformées est l'inégalité de Heisenberg-Gabor, analogue au principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique, et qui stipule que la double résolution en temps et en fréquence est limitée, le meilleur compromis étant atteint pour une fenêtre gaussienne. D'autres représentations temps-fréquence non linéaires ont contourné partiellement cette limitation, telle la distribution de Wigner-Ville, introduite encore dans le cadre de la mécanique quantique [Wigner 1932].

2.2.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)

Transformée de Fourier

Commençons par définir la transformée de Fourier d'une fonction ou d'une distribution, pour ensuite introduire la TFCT et présenter certaines propriétés.

Définition 2.2.1. *La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction*

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t}\, dt. \tag{2.1}$$

La transformée de Fourier s'étend à $L^2(\mathbb{R})$ par densité, et à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées par dualité dans la classe de Schwartz : si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on définit pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $< \hat{T}, \phi >=< T, \hat{\phi} >$. Lorsque $\hat{f}$ est intégrable, la fonction f se reconstruit grâce à la transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t}\, d\nu. \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1. *La transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$, inversible dans $L^2(\mathbb{R})$. On a ainsi pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ la relation de Parseval-Plancherel*

$$\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2.$$

TFCT

Pour une fréquence ν donnée, $\hat{f}(\nu)$ peut être vue comme un produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ entre la fonction f et l'exponentielle complexe $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$, et contient donc la composante de f qui oscille à la fréquence ν sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour caractériser localement le spectre de f, il semble naturel d'introduire une transformée similaire, mais en restreignant l'analyse grâce à une fenêtre centrée en t : c'est la TFCT.

Définition 2.2.2. *Soit g une fonction à valeurs réelles, normalisée dans $L^2(\mathbb{R})$ et paire. La transformée de Fourier à court terme (TFCT) de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par*

$$V_f(\eta, t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau. \tag{2.3}$$

La représentation du module au carré $|V_f(\eta, t)|^2$ dans le plan temps-fréquence est appelée le spectrogramme *de f.*

Remarque : La définition traditionnelle de la TFCT diffère de l'équation (2.3) d'un facteur de déphasage $e^{2i\pi\eta t}$. Nous préférons cette définition par souci de cohérence avec la transformée en ondelettes continue. Par ailleurs, lorsqu'on considère une fenêtre g complexe, on doit utiliser la fenêtre conjuguée g^* dans l'équation (2.3).

Théorème 2.2.1. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, la TFCT admet dans $L^2(\mathbb{R})$ la formule de reconstruction suivante*

$$f(\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} V_f(\eta, t) g(\tau - t) e^{2i\pi\eta(\tau - t)}\, dt d\eta, \tag{2.4}$$

ainsi que l'égalité de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \iint_{\mathbb{R}^2} |V_f(\eta, t)|^2\, dt d\eta. \tag{2.5}$$

Cette formule de reconstruction remonte aux travaux de Gabor [Gabor 1946], on pourra se référer à [Mallat 2000, Gasquet 1990] pour une preuve de ce résultat. Comme pour la transformée de Fourier, on peut étendre la TFCT aux distributions tempérées, soit par dualité soit en imposant des conditions de régularité sur la fenêtre [Gröchenig 2000].

Atomes temps-fréquence

À partir de la fenêtre g, on peut construire une famille d'*atomes temps-fréquence* $g_{\eta,t}(\tau) = g(\tau - t) e^{2i\pi\eta(\tau - t)}$ obtenus par translation temporelle et modulation fréquentielle. La TFCT s'écrit alors comme un produit scalaire : $V_f(\eta, t) = \langle f, g_{\eta,t} \rangle$. Par ailleurs, si on note $g_\eta(\tau) = g(\tau) e^{2i\pi\eta\tau}$, on obtient $V_f(\eta, t) = (f \star g_\eta)(t)$, où $\star$ est l'opérateur de convolution (car g est paire). Cette écriture montre que la TFCT est un équivalent continu d'une décomposition en bancs de filtres.

Structure et redondance

La TFCT envoie l'espace $L^2(\mathbb{R})$ vers son image $VL^2 \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, cet espace image étant bien plus "petit" que $L^2(\mathbb{R}^2)$, ce qui donne une représentation *redondante*. Mathématiquement, cela se traduit par la structure d'espace à noyau reproduisant de VL^2.

Théorème 2.2.2. *Soit $V \in L^2(\mathbb{R}^2)$. La fonction V appartient à l'espace image VL^2 si et seulement si elle vérifie dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ l'équation à noyau auto-reproduisant*

$$V(\eta, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(\eta, t, \eta', t') V(\eta', t') \, d\eta' dt', \tag{2.6}$$

où le noyau reproduisant vaut $K(\eta, t, \eta', t') = \langle g_{\eta',t'}, g_{\eta,t} \rangle$.

Choix de la fenêtre

Pour calculer une représentation temps-fréquence du signal, une idée naïve serait de calculer la transformée de Fourier du signal autour du temps considéré, ce qui revient à utiliser une fonction porte pour la fenêtre dans la TFCT : $g = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Mais en appliquant l'égalité de Plancherel-Parseval, la définition de la TFCT (2.3) devient

$$V_f(\eta, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu - \eta)^* e^{2i\pi\nu t} \, d\nu.$$

Or la transformée de Fourier de la fonction porte est le sinus cardinal, qui décroît lentement à l'infini. Le coefficient $V_f(\eta, t)$ ne tiendra donc pas seulement compte des fréquences de $\hat{f}(\nu)$ proches de η, mais bien de tout son spectre. Comme on souhaite obtenir une représentation localisée, on imposera aux fenêtres des conditions de décroissance en temps et en fréquence, ce qui implique une certaine régularité de g. Par ailleurs, il est commode de considérer des fenêtres centrées en 0 en temps et en fréquence, sans perte de généralité. La section 2.2.4 reviendra sur le rôle de la fenêtre et notamment de sa taille, en énonçant le principe d'incertitude temps-fréquence.

Discrétisation de la TFCT

Considérons un signal réel discret $x \in \mathbb{R}^N$, on va expliquer rapidement comment et pour quelles fréquences discrètes calculer sa TFCT. On supposera ici, et ce sera le cas tout au long de cette thèse, que le signal est échantillonné aux temps $(j/N)_{j=0\ldots N-1}$, les fréquences seront donc les fréquences normalisées du signal. Comme on ne s'intéresse qu'aux fréquences positives (le reste du spectre étant connu par symétrie hermitienne car le signal est supposé réel), on construit un vecteur de fréquences discrètes $\eta = (k)_{k=0\ldots N/2}$. Ensuite, il suffit de calculer la TFCT discrète aux indices de temps j et de fréquence k, en utilisant la formule

$$V_x[k, j] = \mathrm{FFT}(x_j g)[k], \tag{2.7}$$

où x_j désigne le signal x translaté de (j/N) et FFT est la transformée de Fourier rapide. On doit bien sûr prolonger le signal x aux bords, en utilisant des méthodes classiques comme la symétrie miroir. Si le signal est complexe, on doit calculer V_x aussi pour les fréquences négatives, sauf si on le suppose analytique. On obtient ainsi une discrétisation de la TFCT continue, c'est-à-dire une décomposition discrète mais très redondante, dont le calcul nécessite $O(N^2 \log(N))$ opérations.

Pour diminuer le temps de calcul et l'espace mémoire, on peut utiliser une discrétisation en temps et/ou en fréquence plus grossière. Par ailleurs, on peut vouloir supprimer ou limiter la redondance de la décomposition de manière à ce que

l'opérateur discret soit un *frame* ou une base de Riesz, rendant la manipulation sur les coefficients plus aisée. Pour plus de détails sur les frames de Heisenberg-Gabor et les bases de Wilson, on pourra se référer à [Daubechies 1992].

2.2.2 Transformée en ondelettes continue (TOC)

Définitions

On a vu que la TFCT projette le signal sur une famille d'atomes temps-fréquence obtenus par translation temporelle et modulation fréquentielle. Ce faisant, on garde la même résolution fréquentielle quelle que soit la fréquence utilisée (le support de $\hat{g}_{\eta,t}$ ne dépend pas de η). La nécessité de faire varier ce support pour l'analyse de certains signaux, notamment pour l'étude des singularités, a conduit à la définition de la transformée en ondelettes continue dans les années 1980 [Grossmann 1984, Daubechies 1990]. Partant d'une fonction oscillante ψ appelée ondelette mère, on construit les atomes temps-fréquence par translations temporelles et *dilatations* : $\psi_{a,t}(\tau) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)$, avec $a > 0$ le paramètre d'échelle et $t \in \mathbb{R}$. On construit alors la TOC de la même façon que la TFCT, en adaptant la formule de reconstruction au cas des dilatations. On considère successivement les cas d'une ondelette réelle, puis d'une ondelette complexe analytique, qui permettent tous les deux de ne prendre en compte que les échelles positives.

Définition 2.2.3. *Une ondelette admissible à valeurs réelles est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante :*

$$0 < C_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} < \infty \tag{2.8}$$

Définition 2.2.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et ψ une ondelette réelle admissible, la transformée en ondelettes continue de f est définie pour $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par*

$$W_f(a,t) = \langle f, \psi_{a,t} \rangle = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)^* d\tau. \tag{2.9}$$

La représentation du module au carré $|W_f(a,t)|^2$ dans le plan temps-échelle est appelée le scalogramme *de f.*

Le théorème suivant donne la formule de reconstruction dans $L^2(\mathbb{R})$. C'est l'analogue du théorème 2.2.1 pour les atomes temps-échelle, la différence venant de l'utilisation de la mesure de Haar multiplicative $\frac{da}{a}$, associée au groupe affine.

Théorème 2.2.3. *(Calderón, Grossman, Morlet)*
Si ψ est une ondelette admissible à valeurs réelles, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet la décomposition

$$f(\tau) = \frac{1}{C_\psi}\iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} W_f(a,t)\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\frac{dadt}{a}, \tag{2.10}$$

l'égalité étant à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour une preuve de ce résultat fondamental, on pourra se reporter à [Torrésani 1995], chapitre II, théorème 2, ou à [Daubechies 1992].

Ondelettes mères, TOC analytique

Comme pour la fenêtre dans la TFCT, le choix de l'ondelette mère est crucial. Pour l'analyse temps-échelle continue, on choisit souvent une fenêtre (une fonction réelle symétrique et régulière), que l'on module linéairement en fréquence. Autrement dit, sa transformée de Fourier ψ est réelle, régulière et centrée autour d'une fréquence ν_0. Par ailleurs, il est intéressant d'utiliser une ondelette mère *analytique* $\psi \in H^2(\mathbb{R})$, l'espace de Hardy réel des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne possédant pas de fréquences négatives, du fait de la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ un signal à valeurs réelles, et soit ψ une ondelette admissible analytique (vérifiant $\nu \leq 0 \Rightarrow \hat{\psi}(\nu) = 0$). Notons $f_a = (\mathcal{I} + i\mathcal{H})f$ le signal analytique de f, on a $W_f = \frac{1}{2}W_{f_a}$. En particulier on a l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$*

$$f(\tau) = \mathcal{R}e\left\{\frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_f(a,t)\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\frac{dtda}{a}\right\}, \tag{2.11}$$

Cette proposition est simplement le corollaire du théorème 2.2.3, en utilisant le fait que la transformée de Hilbert commute avec les dilatations et les translations. La TOC analytique permet donc de considérer indifféremment des signaux réels ou complexes analytiques, ce qui est avantageux lorsqu'on travaille sur la fréquence instantanée. De plus, elle se décompose en un module et une phase, qui s'interprétent comme une énergie et une phase instantanées locales, ce que ne permet pas une TOC avec une ondelette réelle. Cet aspect sera développé dans le prochain chapitre sur le synchrosqueezing.

Les ondelettes mères que nous utiliserons seront donc, dans l'espace de Fourier, des fonctions réelles régulières, à décroissance rapide et à support inclus dans $\mathbb{R}^+$, centrées en la fréquence ν_0. À titre d'exemple, nous explicitons trois classes d'ondelettes couramment utilisées dans la littérature.

- Les ondelettes de Morse généralisées ont été étudiées dans [Olhede 2002, Lilly 2009, Lilly 2012] et sont définies en fonction de deux paramètres par

$$\hat{\psi}_{\beta,\gamma}(\nu) = U(\nu)a_{\beta,\gamma}\nu^\beta e^{-\nu^\gamma}, \tag{2.12}$$

  où $a_{\beta,\gamma}$ est une constante de normalisation. Ces ondelettes ont pour fréquence centrale $\nu_0 = (\beta/\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$, et incluent notamment les ondelettes dérivées de Gaussiennes comme le "chapeau mexicain".

- L'ondelette "Bump" est définie par

$$\hat{\psi}_{\mu,\sigma}(\nu) = a_{\mu,\sigma}e^{1-\frac{1}{1-\left(\frac{\nu-\mu}{\sigma}\right)^2}}\chi_{[\mu-\sigma,\mu+\sigma]}, \tag{2.13}$$

  où $a_{\mu,\sigma}$ est encore une constante de normalisation et où $\mu > \sigma > 0$. C'est une ondelette $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, et de fréquence centrale μ.

- Enfin, l'ondelette la plus utilisée dans les applications est l'ondelette de Morlet complexe, qui s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\hat{\psi}_{\sigma,\nu_0}(\xi) = a_{\sigma,\nu_0}e^{-\pi\sigma^2(\nu-\nu_0)^2}, \tag{2.14}$$

a_{σ,ν_0} étant une constante, les paramètres σ et ν_0 étant respectivement la largeur de bande et la fréquence centrale de l'ondelette. Dans le domaine temporel c'est encore une Gaussienne, mais modulée en fréquence :

$$\psi_{\sigma,\nu_0}(t) = a'_{\sigma,\nu_0} e^{-\pi \frac{t^2}{\sigma^2}} e^{2i\pi\nu_0 t}. \tag{2.15}$$

Ces ondelettes mères ont été utilisées intensivement en traitement du signal car leur support temps-fréquence est optimal, mais elles ne sont pas strictement admissibles, car une Gaussienne est toujours non nulle en 0, même si son centre ν_0 est grand.

Enfin, mentionnons les ondelettes de Shannon complexes, qui correspondent à une fonction porte translatée dans le domaine de Fourier mais qui ont une mauvaise localisation temporelle, ainsi que l'ondelette de Meyer complexe. Dans cette thèse nous utiliserons le plus souvent l'ondelette de Morlet complexe (tronquée) en vérifiant bien que $\sigma\nu_0 \gg 1$, de sorte qu'elle soit numériquement admissible.

Redondance et noyau reproduisant

Comme pour la TFCT, la transformée en ondelettes continue analytique envoie l'espace $L^2(\mathbb{R})$ dans son image $WL^2 \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \frac{dbda}{a})$, créant de la redondance. L'espace WL^2 a une structure d'espace de Hilbert à noyau reproduisant, c'est-à-dire que tout élément $W \in WL^2$ vérifie l'équation

$$W(a,b) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} K(a,b,a',b') W(a',b') \, \frac{db'da'}{a'}, \tag{2.16}$$

où le noyau reproduisant vaut $K(a,b,a',b') = \langle \psi_{a',b'}, \psi_{a,b} \rangle$.

Implémentation

Comme pour la TFCT, il faut distinguer le cas des ondelettes discrètes, où le but est de construire des bases biorthogonales, du cas des ondelettes continues, où la discrétisation peut être bien plus fine : on se place ici dans le second cas. On construit un vecteur d'échelles de manière logarithmique en choisissant un nombre n_v de coefficients par octave :

$$a[k] = 2^{-\frac{k}{n_v}}, \text{ avec } k \in \{k_{min}, \cdots, k_{max}\}, \tag{2.17}$$

Les bornes k_{min} et k_{max} étant calculées de sorte à couvrir toutes les fréquences possibles compte tenu de la taille du signal. Ensuite, on calcule simplement les coefficients à l'échelle $a[k]$ dans le domaine de Fourier, en utilisant la FFT :

$$W_x[k,l] = \mathrm{FFT}^{-1}(\hat{\psi}^*_{a[k]} \hat{x})[l],$$

ce qui nécessite $O(N \log(N)^2 n_v)$ opérations. Remarquons que l'on peut fixer la fréquence centrale de l'ondelette sans perte de généralité, en adaptant ensuite les valeurs de k_{min} et k_{max}. Pour alléger les notations, nous supposerons ainsi dans la suite de cette thèse $\nu_0 = 1$. L'échelle a est alors assimilable à l'inverse de la fréquence.

2.2.3 Autres distributions temps-fréquence

On s'est intéressé ici aux principales représentations linéaires, mais il existe de nombreuses autres représentations ou distributions, étudiées depuis plusieurs décennies. On peut citer en particulier la distribution de Wigner-Ville [Wigner 1932], introduite dans le cadre de la mécanique quantique, et définie par

$$\mathrm{WV}_f(\eta, t) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^* e^{-2i\pi\eta\tau}\, d\tau.$$

C'est une représentation quadratique du signal f, et elle n'est ainsi pas soumise au principe d'incertitude. En particulier, WV localise parfaitement les Diracs et les chirps linéaires, de la forme $e^{2i\pi ct^2}$. En revanche elle crée de nombreuses interférences intra et inter-modes, ce qui limite son intérêt pour l'étude des signaux multicomposantes. La classe de Cohen fournit une famille de versions lissées de cette transformée, qui parviennent à réduire les interférences, se référer à [Flandrin 1993] pour une présentation complète.

2.2.4 Principe d'incertitude

Pour obtenir une décomposition temps-fréquence pertinente d'un signal, nous avons vu la nécessité d'utiliser une fenêtre g ou une ondelette ψ bien localisée *en temps et en fréquence*. Ainsi, le choix $g = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ donne une bonne localisation temporelle mais une mauvaise résolution fréquentielle, car la fonction $\hat{g}$ est alors à décroissance lente. L'exemple le plus extrême est celui du Dirac, qui est parfaitement localisé en temps, mais dont la transformée de Fourier, la fonction unité, est distribuée identiquement sur toutes les fréquences. La recherche de fonctions concentrées en temps et en fréquence se heurte au principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor, énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.4. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, définissons ses positions temporelle et fréquentielle moyennes*

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2\, dt \ \text{ et } \bar{\nu}_f = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \nu|\hat{f}(\nu)|^2\, d\nu, \tag{2.18}$$

ainsi que les dispersion temporelles et fréquentielles

$$\sigma_t^2(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t}_f)^2 |f(t)|^2\, dt \ \text{ et } \sigma_\nu^2(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\nu - \bar{\nu}_f)^2 |\hat{f}(\nu)|^2\, d\nu.$$

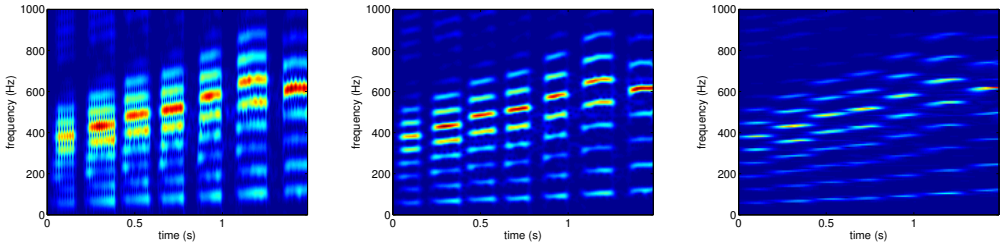
Alors on a

$$\sigma_\nu \sigma_t \geq \frac{1}{2}, \tag{2.19}$$

l'égalité étant obtenue si et seulement si f est une fonction gaussienne modulée linéairement, admettant l'écriture $f(t) = ae^{i\nu_0 t - b(t-t_0)^2}$ avec $\nu_0, t_0, b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$.

Ce théorème est l'analogue du principe d'incertitude de Heisenberg en mécanique quantique, qui précise l'incertitude sur la position et la quantité de mouvement d'une particule libre.

Pour la TFCT comme pour la TOC, on a donc intérêt à utiliser une fonction régulière et à décroissance rapide. Une fois cette fenêtre ou ondelette fixée, on



(a) (b) (c)

Figure 2.1 La TFCT (module) d'un son de trombone avec différentes largeurs de la fenêtre gaussienne. De gauche à droite, $\sigma = 9$ ms (a), $\sigma = 15$ ms (b) et $\sigma = 50$ ms (c).

peut encore agir sur la résolution temps-fréquence (TF) de la décomposition en jouant sur la taille de la fenêtre (par dilatation). Considérons par exemple une fenêtre gaussienne $g_\sigma(t) = \sigma^{-1/2} e^{-\pi \frac{t^2}{\sigma^2}}$, on sait que sa résolution temps-fréquence $\sigma_t \sigma_\nu = 1/2$ reste constante quelle que soit la valeur de σ, mais pour autant le paramètre σ est fondamental, car il règle la forme de cette résolution. La Figure 2.1 illustre ce principe en représentant la TFCT d'un extrait de trombone, pour différentes valeurs du paramètre σ. Lorsque σ est petit, les dispersions vérifient $\sigma_t \ll \sigma_f$, les attaques de chaque note sont donc bien localisées dans le temps, mais on ne peut pas déterminer leur hauteur (fréquence) avec précision. Pour un grand σ en revanche les fréquences sont bien visibles, mais c'est l'information temporelle qui est dégradée, de sorte qu'on ne distingue plus bien les différentes notes. Il faut donc ajuster σ, autrement dit la forme du rectangle TF, en fonction de l'information recherchée.

2.3 Signaux multicomposantes et ridges

Cette section étudie les représentations temps-fréquence des signaux multicomposantes, superpositions d'ondes AM–FM. Nous commencerons par définir de tels signaux, puis nous analyserons leur décomposition par la TFCT et la TOC, qui fait apparaître des lignes de fréquences instantanées, appelées *ridges*. Après avoir exposé des méthodes pour détecter ces ridges, nous présenterons une manière de reconstruire les modes, basée sur l'approximation de phase stationnaire. Ces techniques d'analyse et de reconstruction ont été développées dans [Delprat 1992] et des travaux suivants, et leur présentation complète peut être consultée dans [Torrésani 1995]. Rappelons que dans le reste du chapitre, les fonctions $\hat{g}$ et $\hat{\psi}$ atteignent leur maximum en 0 et 1 respectivement.

2.3.1 Signaux multicomposantes

Définition 2.3.1. *Un mode AM–FM est une fonction oscillante $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ où les fonctions A et ϕ' sont positives et à variations lentes.*

La fonction A est appelée amplitude instantanée de h, ϕ' est sa fréquence instantanée. Notons que la condition de variation lente n'est pas précisée, car elle dépend

de la transformée considérée et de la fenêtre d'analyse. Remarquons également qu'on peut utiliser une sinusoïde à la place de l'exponentielle complexe, du moment que l'on s'intéresse aux fréquences positives de la TFCT ou à la TOC analytique (voire Proposition 2.2.2). Autour d'un temps t fixé, la condition de variation lente permet de développer l'amplitude à l'ordre 0 et la phase à l'ordre 1, et ainsi d'approcher le mode h par l'onde pure suivante

$$\tilde{h}_t(\tau) = A(t)e^{2i\pi[\phi(t)+\phi'(t)(\tau-t)]}. \tag{2.20}$$

La TFCT et la TOC de h sont alors approchées par

$$\begin{aligned} V_h(\eta,t) &\approx V_{\tilde{h}_t}(\eta,t) = h(t)\hat{g}(\eta-\phi'(t)) \\ W_h(a,t) &\approx W_{\tilde{h}_t}(a,t) = h(t)\hat{\psi}(a\phi'(t))^*. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ainsi, la TFCT comme la TOC d'un mode AM–FM est non nulle sur une bande dans le plan temps-fréquence, qui atteint son maximum sur les lignes de crête ou *ridges* définis par $\eta = \phi'(t)$ pour la TFCT et $a = \frac{1}{\phi'(t)}$ pour la TOC. La largeur de la bande dépend de la taille du support de $\hat{g}$ ou de $\hat{\psi}$. Définissons à présent les signaux multicomposantes, qui sont des superpositions de modes AM–FM.

Définition 2.3.2. *Un signal multicomposantes est une superposition de modes AM–FM*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)e^{2i\pi\phi_k(t)}$$

où les modes f_k vérifient $\phi'_K > \cdots > \phi'_k > \cdots > \phi'_1 > 0$.

Lorsque les fréquences instantanées des modes sont trop proches, les supports de leurs ridges dans le plan TF se superposent, ce qui crée des interférences. Pour pouvoir les décomposer de manière univoque, nous imposerons aux signaux multicomposantes d'être *séparés* fréquentiellement. L'équation 2.21 montre que cette condition de séparation est de type linéaire pour la TFCT, et logarithmique pour la TOC.

Définition 2.3.3. *Si* $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-\Delta,\Delta]$*, un signal multicomposantes f est séparé au premier ordre pour la TFCT si les fréquences instantanées des modes vérifient pour tout $k \in \{1,\cdots,K-1\}$:*

$$\phi'_{k+1} - \phi'_k > 2\Delta.$$

Si $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset [1-\Delta,1+\Delta]$*, un signal multicomposantes f est séparé au premier ordre pour la TOC si les fréquences instantanées vérifient pour tout $k \in \{1,\cdots,K-1\}$:*

$$\frac{\phi'_{k+1} - \phi'_k}{\phi'_{k+1} + \phi'_k} > \Delta.$$

On vérifie facilement que sous ces conditions, chaque mode f_k occupe approximativement une zone disjointe dans le plan temps-fréquence (TF) ou temps-échelle (TE). Notons que si les fonctions analysantes $\hat{g}$ et $\hat{\psi}$ sont seulement à décroissance rapide, on peut se satisfaire d'une quasi-séparation en remplaçant le support par une mesure de dispersion fréquentielle.

2.3.2 Détection des ridges

L'équation (2.21) montre qu'il est possible d'estimer les fréquences et amplitudes instantanées d'un signal multicomposantes séparé en calculant les extrema locaux en fréquence de son spectrogramme (respectivement en échelle de son scalogramme). Cependant, il est clair que cette approche n'est plus valable dès que le signal est bruité, le bruit créant des maxima locaux dans tout le plan temps-fréquence. D'autre part, pour un signal comportant de nombreuses composantes, il faudra relier ces points pour définir des ridges continus sur la durée du signal. Depuis les travaux pionniers de [Delprat 1992], plusieurs algorithmes ont été proposés pour calculer ces ridges [Carmona 1999, Lilly 2010]. L'idée originelle était, en partant de la TFCT V_f, d'extraire les lignes $\varphi(t)$ maximisant l'énergie tout en étant les plus régulières possibles, en minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{E}_f[\varphi] = -\int_{\mathbb{R}} |V_f(\varphi(t), t)|^2 \, dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|^2 \, dt, \tag{2.22}$$

une fonctionnelle similaire étant utilisée pour l'extraction des ridges de la TOC. Une implémentation d'une méthode de descente de gradient peut être facilement réalisée, malheureusement le problème n'est pas convexe, et il faut trouver des astuces pour éviter autant que possible les minima locaux, comme par exemple l'algorithme du recuit simulé utilisé dans [Carmona 1997]. Une alternative proposée dans [Carmona 1999] est d'utiliser un modèle de Markov couplé à une résolution par algorithme de Monte Carlo (MCMC), pour obtenir un algorithme de détection adapté à des sauts de fréquence instantanée.

Dans cette thèse nous ne nous sommes pas intéressés à l'estimation des ridges, aussi utiliserons nous une implémentation heuristique qui consiste à chercher le ridge de proche en proche, en utilisant différentes initialisations. Pour les niveaux de bruit raisonnables ($> -5\,\mathrm{dB}$) utilisés dans ce chapitre, cet algorithme parvient à des résultats satisfaisants.

2.3.3 Approximation de la phase stationnaire et reconstruction

L'équation (2.21) montre que la TFCT ou la TOC d'un mode AM–FM h à un temps t vaut approximativement $h(t)$, atténué par un facteur qui dépend de la distance verticale au ridge. C'est donc une approximation "fréquentielle". Nous verrons dans la prochaine section que sous des hypothèses de faible modulation fréquentielle, cette approximation est pertinente. En revanche lorsque ϕ'' n'est pas négligeable, il faut développer la phase à l'ordre 2, ce qui conduit à des calculs plus coûteux. L'approche originelle [Delprat 1992] utilise une approximation différente de (2.21), issue du théorème de la phase stationnaire. C'est une approximation "temporelle", qui utilise la distance horizontale entre le ridge et le point considéré, et prend naturellement en compte le terme d'ordre 2 de ϕ.

Proposition 2.3.1. *Soit $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ un mode AM–FM, et soit un point (η, t) fixé du plan temps-fréquence. On suppose qu'il existe un unique point critique*

$\tau_c = \tau_c(\eta, t)$ tel que $\phi'(\tau_c) = \eta$, et que de plus $\phi''(\tau_c) \neq 0$. Alors

$$V_h(\eta, t) \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{signe}\,\phi''(\tau_c)} e^{-2i\pi\eta(\tau_c - t)}}{\sqrt{|\phi''(\tau_c)|}} g(\tau_c - t) h(\tau_c). \tag{2.23}$$

S'il existe plusieurs points critiques pour lesquels $\phi'(\tau_c) = \eta$, il suffit de sommer les différentes contributions. Si $\phi''(\tau_c) = 0$, on obtient un résultat similaire en augmentant l'ordre d'approximation jusqu'à trouver un entier k tel que $\phi^{(k)}(\tau_c) \neq 0$. Cette proposition est une simple conséquence du théorème de la phase stationnaire, qui donne des approximations d'une intégrale oscillante. Pour plus de détails sur la phase stationnaire, le lecteur pourra se référer à [Bleistein 1986], et à [Torrésani 1995] pour son application aux ridges. Notons que cette approximation fournit une méthode de reconstruction du signal à partir de ses valeurs sur le ridge $\eta = \phi'(t)$. En effet, sur le ridge le point critique est $\tau_c(\eta, t) = t$, et on a donc pour tout t vérifiant $\phi''(t) \neq 0$:

$$h(t) \approx \frac{\sqrt{|\phi''(t)|}}{g(0)} e^{-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{signe}\,\phi''(t)} V_h(\phi'(t), t). \tag{2.24}$$

Cette reconstruction sera nommée RR2 pour reconstruction sur le ridge à l'ordre 2 (elle fait intervenir ϕ''). Afin d'établir un résultat similaire pour la TOC, on écrit l'ondelette sous forme polaire $\psi = |\psi| e^{2i\pi\phi_\psi}$ et on suit le même raisonnement, détaillé dans [Delprat 1992].

Proposition 2.3.2. *Soit $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ un mode AM–FM, et soit un point (a, b) fixé du plan temps-échelle. On suppose qu'il existe un unique point critique τ_c tel que $\phi'(\tau_c) = \frac{1}{a}\phi'_\psi\left(\frac{\tau_c - b}{a}\right)$, et que de plus $\phi''(\tau_c) \neq \frac{1}{a^2}\phi''_\psi\left(\frac{\tau_c - b}{a}\right)$. Alors,*

$$W_h(a, b) \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{signe}\left[\phi''(\tau_c) - \frac{1}{a^2}\phi''_\psi\left(\frac{\tau_c - b}{a}\right)\right]}}{a\sqrt{\left|\phi''(\tau_c) - \frac{1}{a^2}\phi''_\psi\left(\frac{\tau_c - b}{a}\right)\right|}} \psi\left(\frac{\tau_c - b}{a}\right)^* h(\tau_c). \tag{2.25}$$

Notons que cette approximation permet également de reconstruire le signal à partir de ses valeurs sur le ridge. Nous considérerons souvent une classe particulière d'ondelettes, les ondelettes à fréquence instantanée constante, qui s'écrivent $\psi(t) = g(t)e^{2i\pi t}$, où g est une fonction fenêtre et où la fréquence centrale de l'ondelette vaut 1. Lorsque $\phi''(t) \neq 0$, le point critique en $(1/\phi'(t), t)$ est t, ce qui mène à l'approximation

$$h(t) \approx \frac{\sqrt{|\phi''(t)|}}{\phi'(t)\psi(0)^*} e^{-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{signe}\,\phi''(t)} W_h\left(\frac{1}{\phi'(t)}, t\right). \tag{2.26}$$

Cette approximation fournit la méthode de reconstruction RR2 pour la TOC.

2.4 Reconstruction locale dans le plan temps-fréquence

Dans la section précédente, nous avons montré qu'un signal multicomposantes peut être analysé à l'aide de la TFCT ou de la TOC, et qu'il est possible d'extraire les fréquences et amplitudes instantanées. Différentes approximations permettent alors de reconstruire les modes à partir de la valeur de la transformée sur les ridges. Cette approche permet donc, à l'instar de l'EMD, de séparer et démoduler les différentes composantes d'un signal. Cependant, elle comporte plusieurs limites.

- Cette méthode nécessite d'extraire les ridges, c'est-à-dire d'estimer précisément les fonctions ϕ' et ϕ''. On dispose pour cela de plusieurs algorithmes performants, mais qui nécessitent un temps de calcul non négligeable, et dont le résultat n'est jamais garanti.
- L'approximation de la phase stationnaire donne un équivalent asymptotique au premier ordre pour un mode AM–FM, mais elle n'est plus valide lorsqu'on sort de ce cadre (si les modes ne sont pas exactement des exponentielles complexes modulées).

Ces deux points peuvent poser problème en pratique, et c'est pour les contourner que l'on s'intéresse dans cette section à des reconstructions alternatives. Plus précisément, on construira des méthodes de reconstruction moins sensibles à l'estimation des ridges, et qui restent valable pour une classe de signaux la plus large possible.

On a vu précédemment que dans la TFCT ou la TOC d'un signal multicomposantes séparé, chaque mode occupe un domaine distinct dans le plan TF. Dès lors, pourquoi ne pas utiliser une formule de reconstruction intégrale classique, que l'on restreint au domaine occupé par le ridge ? Pour étudier cette alternative dans la présente section, on commencera par introduire une méthode de reconstruction à temps fixé, dite de Morlet dans le cadre de la TOC. Nous verrons ensuite comment adapter la taille du support d'intégration en fonction de la modulation fréquentielle, en s'intéressant en particulier au cas d'une fonction analysante gaussienne.

2.4.1 Reconstruction locale au premier ordre

Revenons à l'équation (2.21) : elle montre que pour un temps fixé, la TFCT d'un mode AM–FM est localisée autour du ridge, et décroît de la même manière que $\hat{g}$. Au lieu d'utiliser l'information sur le ridge, on peut reconstruire le signal au temps t en intégrant la TFCT en fréquence ou la TOC en échelle, comme l'établit la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Supposons que la fenêtre g soit dans $L^2(\mathbb{R})$ et continue en 0 avec $g(0) \neq 0$, et que l'ondelette analytique $\psi \in H^2(\mathbb{R})$ vérifie $0 < C'_\psi = \int_0^\infty \hat{\psi}(\nu)^* \frac{d\nu}{\nu} < \infty$. Alors pour tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ analytique, on a les formules de reconstruction au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{g(0)} \int_0^\infty V_f(\eta, t)\, d\eta \\ f(t) &= \frac{1}{C'_\psi} \int_0^\infty W_f(a, t)\, \frac{da}{a}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Démonstration. Pour la TFCT, on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty V_f(\eta, t)\, d\eta &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(\tau - t)^* e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau d\eta \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu - \eta)^* e^{2i\pi\nu t}\, d\nu d\eta \\ &= \int_0^\infty \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t}\, d\nu \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)^*\, d\xi. \end{aligned}$$

La première intégrale donne l'inversion de $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ en t, et la seconde vaut $g(0)^* = g(0)$, car g est continue en 0. La formule de Morlet pour la TOC se démontre de la même manière. $\square$

Remarque : On obtient facilement un résultat plus fort, la reconstruction ponctuelle en tout t, si l'on impose $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si l'on considère un signal réel, on obtient une reconstruction similaire en prenant 2 fois la partie réelle de ces équations.

Revenons à présent à l'étude d'un mode AM–FM $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$. On considère une fenêtre g et une ondelette ψ dont les transformées de Fourier sont à support compact : $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-\Delta_g, \Delta_g]$ et $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset [1-\Delta_\psi, 1+\Delta_\psi]$. L'équation (2.21) montre que $V_h(\eta, t)$ est approximativement nul lorsque $\eta \notin [\phi'(t) - \Delta_g, \phi'(t) + \Delta_g]$, et de manière similaire $W_h(a, b) \approx 0$ si $a \notin [\frac{1-\Delta\psi}{\phi'(b)}, \frac{1+\Delta_\psi}{\phi'(b)}]$. Cela suggère d'utiliser les formules de reconstruction (2.27) tronquées en intégrant seulement sur ces intervalles, ce qui donne

$$\begin{aligned} h(t) &\approx \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta_g}^{\phi'(t)+\Delta_g} V_h(\eta, t)\, d\eta \\ h(t) &\approx \frac{1}{C'_\psi} \int_{\frac{1-\Delta_\psi}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta_\psi}{\phi'(t)}} W_h(a, t)\, \frac{da}{a}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Les théorèmes suivants montrent la validité de cette approche. Dans toute la fin de ce chapitre, on supposera que les fonctions g et ψ sont dans la classe de Schwartz.

Approximation uniforme de la TFCT

Le théorème suivant montre la validité de cette approche pour des signaux faiblement modulés en fréquence.

Théorème 2.4.1. *Soit un mode $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ vérifiant $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout t, $A(t) > 0$, $\phi'(t) > 0$, $|A'(t)| \leq \varepsilon$, $|\phi''(t)| \leq \varepsilon$. Alors en tout point (η, t),*

$$|V_h(\eta, t) - h(t)\hat{g}(\eta - \phi'(t))| \leq \varepsilon C_1(t), \tag{2.29}$$

où la constante vaut $C_1(t) = I_1 + \pi A(t) I_2$ avec $I_n = \int_{\mathbb{R}} |u|^n |g(u)|\, du$.

Un théorème analogue, donnant une erreur plus locale pour une fenêtre g à support compact, peut être trouvé dans [Mallat 2000]. La preuve du théorème repose essentiellement sur deux développements de Taylor.

Démonstration. On décompose le mode $h(\tau)$ de la manière suivante :

$$h(\tau) = \underbrace{A(t)e^{2i\pi[\phi(t)+\phi'(t)(\tau-t)]}}_{h_1(\tau)} + \underbrace{(A(\tau) - A(t))e^{2i\pi\phi(\tau)}}_{h_2(\tau)} + \underbrace{A(t)e^{2i\pi\int_t^\tau \phi''(u)(\tau-u)\,du}}_{h_3(\tau)}.$$

La TFCT du premier terme donne immédiatement $V_{h_1}(\eta, t) = h(t)\hat{g}(\eta - \phi'(t))$, et l'on peut majorer la transformée des deux autres termes de la manière suivante :

$$|V_{h_2}(\eta, t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |A(\tau) - A(t)|\, |g(\tau - t)|\, d\tau \leq \int_{\mathbb{R}} \varepsilon|\tau - t||g(\tau - t)|\, d\tau \leq \varepsilon I_1, \tag{2.30}$$

et

$$\begin{aligned}
|V_{h_3}(\eta,t)| &\leq A(t)\left|\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\int_t^\tau \phi''(u)(\tau-u)\,du} g(\tau-t)e^{-2i\pi\eta(\tau-t)}\,d\tau\right| \\
&\leq 2\pi A(t)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_t^\tau |\phi''(u)||\tau-u|\,du\right)|g(\tau-t)|\,d\tau \\
&\text{car l'exponentielle complexe est 1-Lipschitzienne} \\
&\leq \pi A(t)\int_{\mathbb{R}} \varepsilon|\tau-t|^2|g(\tau-t)|\,d\tau \\
&\leq \pi A(t)\varepsilon I_2. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Reconstruction locale de la TFCT

Corollaire 2.4.1. *On se place dans le cadre du Théorème 2.4.1. On suppose de plus que* $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-\Delta,\Delta]$. *Alors pour tout* t,

$$\left|h(t) - \frac{1}{g(0)}\int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} V_h(\eta,t)\,d\eta\right| \leq C_2(t)\varepsilon, \qquad (2.32)$$

avec $C_2(t) = \frac{2\Delta}{g(0)}C_1(t)$.

Démonstration. La démonstration découle du Théorème 2.4.1 et du fait que $\hat{g}$ est à support compact inclus dans l'intervalle d'intégration. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\left|h(t) - \frac{1}{g(0)}\int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} V_h(\eta,t)\,d\eta\right| \\
&\leq \left|h(t) - \frac{h(t)}{g(0)}\int_{-\Delta}^{\Delta}\hat{g}(\eta)\,d\eta\right| \quad + \frac{1}{g(0)}\int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta}|V_h(\eta,t) - h(t)\hat{g}(\eta-\phi'(t))|\,d\eta \\
&\qquad\qquad \text{car } \int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} h(t)\hat{g}(\eta-\phi'(t))\,d\eta = h(t)g(0) \\
&\leq 0 \qquad\qquad + \frac{2\Delta}{g(0)}C_1(t)\varepsilon, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

$C_1(t)$ étant la constante du Théorème 2.4.1, finie car $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $A \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

Remarque : Lorsque la fenêtre $\hat{g}$ n'est pas à support compact, on peut se contenter de supposer que $\hat{g}$ est essentiellement inclus dans $[-\Delta,\Delta]$, en imposant par exemple l'hypothèse $\int_{|\nu|>\Delta}|\hat{g}(\nu)|\,d\nu \leq C'\varepsilon$ pour un certain Δ. Le premier terme de l'inégalité (2.33) n'est alors plus nul, mais reste majoré par $\frac{A(t)}{g(0)}\varepsilon C'$.

Approximation uniforme de la TOC

Pour établir un théorème analogue pour la TOC de signaux faiblement modulés, on change les hypothèses de variations lentes de A et ϕ' : en effet, lors du calcul de $W_h(a,t)$, on utilise une fenêtre dont la résolution fréquentielle dépend de l'échelle a. Les variations de A et ϕ' doivent donc être faibles par rapport à la fréquence instantanée de h.

Théorème 2.4.2. *Soit un mode* $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ *vérifiant* $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* t, $A(t) > 0$, $\phi'(t) > 0$, $|A'(t)| \leq \varepsilon\phi'(t)$, $|\phi''(t)| \leq \varepsilon\phi'(t)$ *et* $|\phi''(t)| \leq M$. *Alors en tout point* (a, t),

$$|W_h(a,t) - h(t)\hat{\psi}(a\phi'(t))^*| \leq C_1'(a,t)\varepsilon, \tag{2.34}$$

$C_1'(a,t) = \phi'(t)aJ_1 + (M + 2\pi A(t)\phi'(t))\,\frac{a^2}{2}J_2 + \pi A(t)M\frac{a^3}{3}J_3$ *et* $J_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^n|\psi(x)|\,dx$.

La démonstration de ce théorème nécessite de majorer $|A(\tau) - A(t)|$, mais contrairement au cas de la TFCT, l'hypothèse de variations lentes dépend du temps, on ne peut donc plus utiliser une approximation uniforme en t. Une solution est de supposer ψ à support compact, puis d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange. Nous choisissons plutôt l'alternative utilisée dans [Daubechies 2011], qui repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Pour tous* $t, \tau \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\phi'(\tau) \leq \phi'(t) + M|\tau - t|$$
$$|A(\tau) - A(t)| \leq \varepsilon|\tau - t|\phi'(t) + \frac{\varepsilon M}{2}|\tau - t|^2$$

Démonstration. La phase ϕ étant $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\phi'(\tau) = \phi'(t) + \int_t^\tau \phi''(x)\,dx,$$

donc $\phi'(\tau) \leq \phi'(t) + M|\tau - t|$. On écrit alors

$$|A(\tau) - A(t)| = \left|\int_t^\tau A'(u)\,du\right| \leq \varepsilon\int_t^\tau \phi'(u)\,du \leq \varepsilon[\phi'(t)|\tau - t| + \frac{M}{2}|\tau - t|^2].$$

□

Démonstration. Démontrons à présent le théorème. Comme précédemment, on découpe $h(\tau)$ en trois termes.

$$h(\tau) = \underbrace{A(t)e^{2i\pi[\phi(t)+\phi'(t)(\tau-t)]}}_{h_1(\tau)} + \underbrace{(A(\tau) - A(t))e^{2i\pi\phi(\tau)}}_{h_2(\tau)} + \underbrace{A(t)e^{2i\pi\int_t^\tau \phi''(u)(\tau-u)\,du}}_{h_3(\tau)}.$$

La TOC du terme principal s'écrit

$$W_{h_1}(a,t) = \frac{1}{a}A(t)e^{2i\pi\phi(t)}\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\phi'(t)(\tau-t)}\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)^* d\tau = h(t)\hat{\psi}(a\phi'(t))^*.$$

On majore ensuite la TOC des termes 2 et 3 :

$$\begin{aligned}
|W_{h_2}(a,t)| &\leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |A(\tau) - A(t)|\left|\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\right| d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{a}\int_{\mathbb{R}} \left(\phi'(t)|\tau - t| + \frac{M}{2}|\tau - t|^2\right)\left|\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\right| d\tau \\
&\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}} \left(\phi'(t)a|x| + \frac{M}{2}a^2|x|^2\right)|\psi(x)|\,dx \\
&\leq \varepsilon\left(\phi'(t)aJ_1 + \frac{M}{2}a^2J_2\right).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}|W_{h_3}(a,t)| &\leq \frac{A(t)}{a}\int_{\mathbb{R}}\left|e^{2i\pi\int_t^\tau \phi''(u)(\tau-u)\,du}\right|\left|\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\right|\,d\tau\\ &\leq \frac{2\pi A(t)}{a}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_t^\tau |\phi''(u)||\tau-u|\,du\right)\left|\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\right|\,d\tau.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.4.1, il vient

$$\begin{aligned}\int_t^\tau |\phi''(u)||\tau-u|\,du &\leq \varepsilon\int_t^\tau \phi'(u)|\tau-u|\,du\\ &\leq \varepsilon\int_t^\tau \left(\phi'(t)+M|u-t|\right)|\tau-u|\,du\\ &\leq \varepsilon\left(\frac{\phi'(t)}{2}|\tau-t|^2+\frac{M}{6}|\tau-t|^3\right),\end{aligned}$$

car si $\tau > t$,

$$\begin{aligned}\int_t^\tau |u-t||\tau-u|\,du &= \int_0^{\tau-t} v(\tau-t-v)\,dv = \int_0^{\tau-t}(v(\tau-t)-v^2)\,dv\\ &= \frac{(\tau-t)^3}{2}-\frac{(\tau-t)^3}{3} = \frac{(\tau-t)^3}{6},\end{aligned}$$

le cas $\tau < t$ se traitant de la même manière. On a donc

$$\begin{aligned}|W_{h_3}(a,t)| &\leq \frac{2\pi A(t)}{a}\varepsilon\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}\phi'(t)|\tau-t|^2+\frac{1}{6}M|\tau-t|^3\right)\left|\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\right|\,d\tau\\ &\leq 2\pi A(t)\varepsilon\left(\frac{a^2}{2}\phi'(t)J_2+\frac{a^3}{6}MJ_3\right).\end{aligned} \tag{2.36}$$

D'où le résultat. □

Reconstruction locale de la TOC

Corollaire 2.4.2. *On se place dans le cadre du théorème 2.4.2. On suppose de plus que* $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset [1-\Delta, 1+\Delta]$, *avec* $0 < \Delta < 1$. *Alors pour tout* t,

$$\left|h(t)-\frac{1}{C'_\psi}\int_{\frac{1-\Delta}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta}{\phi'(t)}} W_h(a,t)\,\frac{da}{a}\right| \leq C'_2(t)\varepsilon, \tag{2.37}$$

avec $C'_2(t) = \frac{1}{|C'_\psi|}\left[2\Delta J_1 + (M+2\pi A(t)\phi'(t))\frac{\Delta}{\phi'(t)^2}J_2 + 2\pi A(t)M\frac{\Delta(\Delta^2+3)}{9\phi'(t)^3}\right]$.

Démonstration. Comme pour la preuve du corollaire précédent, on écrit

$$\left|h(t)-\frac{1}{C'_\psi}\int_{\frac{1-\Delta}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta}{\phi'(t)}} W_h(a,t)\,\frac{da}{a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|C'_\psi|}\int_{\frac{1-\Delta}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta}{\phi'(t)}} C'_1(a,t)\,\frac{da}{a}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer la fonction $C'_1(a,t)/a$, polynôme de degré 2 sur le segment $\left[\frac{1-\Delta}{\phi'(t)}, \frac{1+\Delta}{\phi'(t)}\right]$ pour conclure. □

Remarque : Comme pour le théorème précédent, si $\hat{\psi}$ n'est pas à support compact, on peut se contenter de supposer qu'elle est suffisamment localisée autour de $\nu = 1$. Cette reconstruction locale à temps fixé est à la base du Synchrosqueezing

[Daubechies 1996, Daubechies 2011], qui sera présenté et étudié dans le prochain chapitre. Plusieurs variantes ont été étudiées et analysées dans [Meignen 2012b, Meignen 2012a] pour la TOC.

Ces deux corollaires fournissent donc une méthode de reconstruction par *intégration locale*, nommée IR1 dans la suite de cette thèse, car elle utilise une approximation de la phase au premier ordre. Notons que les théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 permettent de reconstruire le mode $h(t)$ d'après la valeur de la transformée sur le ridge, cette méthode sera appelée RR1, car l'approximation est au premier ordre.

Comparaison avec la reconstruction sur le ridge

On peut se demander quel est l'intérêt des formules de reconstruction locale intégrale données par les corollaires 2.4.1 et 2.4.2, puisque l'on dispose déjà de formules de reconstruction sur le ridge aux ordres 1 et 2. Bien que les deux types de reconstruction soient asymptotiquement équivalentes, la reconstruction intégrale offre plusieurs avantages :

- La reconstruction intégrale est valable pour une plus grande classe de signaux, car la formule de reconstruction de Morlet (2.27) est vraie pour tout signal d'énergie finie, et pas seulement pour un mode AM–FM. Il suffit seulement d'intégrer sur le bon support.
- La reconstruction intégrale est moins sensible à l'estimation du ridge $\phi'(t)$ que la reconstruction directe (méthodes RR1 et RR2), car cette estimation n'intervient que dans le calcul du support d'intégration.
- Le passage au discret est plus aisé avec la reconstruction intégrale, car l'équation (2.27) reste vraie dans le cas discret. Pour la reconstruction sur le ridge en revanche, si $\phi'(t)$ n'est pas sur la grille de discrétisation, on doit interpoler la transformée, ce qui génère une erreur supplémentaire.
- Dans le cas de signaux bruités, on peut ajuster le paramètre d'intégration Δ en fonction du niveau de bruit et de la confiance que l'on accorde dans l'estimation du ridge.

Le reste de ce chapitre met en évidence ces différents points, en comparant ces deux familles de reconstruction.

2.4.2 Reconstruction locale au deuxième ordre

Taille du support et modulation fréquentielle

Comme nous le verrons dans les exemples numériques, le fait d'intégrer verticalement (en fréquence ou en échelle) permet plus de souplesse que la reconstruction sur le ridge, et améliore les résultats sur de nombreux signaux. Cependant on remarque qu'aucun terme en ϕ'' n'apparaît dans l'équation (2.28), à l'inverse de l'approximation de phase stationnaire (2.23). Cela provient de l'hypothèse de faible modulation fréquentielle $|\phi''(t)| \leq \varepsilon$. Or de nombreux modes AM–FM possèdent des modulations fréquentielles non négligeables, par exemple les *chirps* utilisés en RADAR [Skolnik 2003], ou ceux

produits par des chauves-souris ou des mammifères marins [Kopsinis 2010]. Si les formules de reconstruction de Morlet (2.27) restent valables dans ce cas, le support du ridge est modifié, et la reconstruction tronquée au premier ordre n'est plus pertinente. La Figure 2.2 illustre ce phénomène en montrant le spectrogramme et sa coupe à un temps fixé, pour deux modes AM–FM, l'un étant fortement modulé fréquentiellement. On peut ainsi comparer l'épaisseur réelle du ridge, et son approximation $[-\Delta, \Delta]$. Pour le mode faiblement modulé, la reconstruction (2.28) semble pertinente dans la mesure où elle extrait l'information présente autour du ridge. Dans le cas du mode fortement modulé en revanche, l'intervalle d'intégration ne correspond plus au support du spectrogramme autour du ridge, ce qui donnera une reconstruction de piètre qualité.

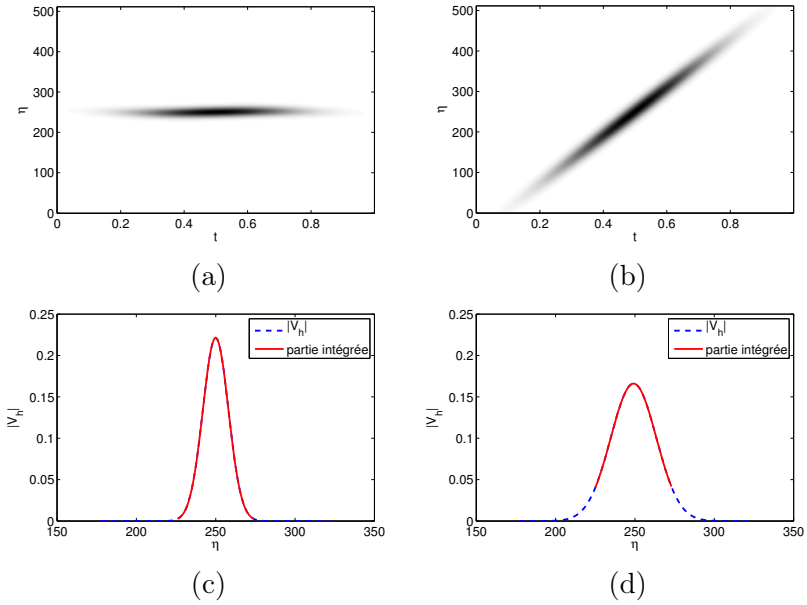


Figure 2.2 Illustration de la reconstruction locale pour deux modes AM–FM différents. (a) Module de la transformée de Gabor d'un mode faiblement modulé, avec $\sigma = 0.05$. (b) même chose pour un mode à forte modulation fréquentielle. (c) coupe du graphe (a) au temps $t = 0.5$, le trait rouge plein correspondant aux coefficients intégrés dans la formule (2.28). (d) idem pour le mode fortement modulé (b).

Pour pallier ce défaut de la reconstruction intégrale, on étudie toujours dans cette section les transformées de modes AM–FM $h(t) = A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$, en autorisant cette fois de plus fortes modulations fréquentielles. Concrètement, on suppose que ces modes peuvent être approximés localement par des chirps linéaires $Ae^{2i\pi(bt^2+ct+d)}$. Cela revient à effectuer le développement de Taylor de la phase à l'ordre 2, qui conduit à l'approximation

$$h(\tau) \approx \tilde{h}_t(\tau) = h(t)e^{2i\pi[\phi'(t)(\tau-t)+\frac{1}{2}\phi''(t)(\tau-t)^2]}. \tag{2.38}$$

Cette section étudie à présent le support des ridges de $V_{\tilde{h}_t}$ et $W_{\tilde{h}_t}$, ce qui va permettre d'affiner les formules de reconstruction locale (2.28). On s'intéressera ensuite au cas de fenêtres gaussiennes, qui permet d'écrire une formule de reconstruction simple. Enfin,

des tests numériques valideront la méthode, et la compareront avec la reconstruction sur le ridge.

Approximation d'ordre 2 pour la TFCT

Théorème 2.4.3. *On se place dans les hypothèses du théorème 2.4.1, avec $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, et en remplaçant $|\phi''(t)| \leq \varepsilon$ par $|\phi'''(t)| \leq \varepsilon$. Alors en tout point (η, t),*

$$|V_h(\eta,t) - h(t)\widehat{gc_t}(\eta - \phi'(t))| \leq \varepsilon K_1(t), \text{ avec } c_t(\tau) = e^{i\pi\phi''(t)\tau^2}, \tag{2.39}$$

la constante valant $K_1(t) = I_1 + \frac{\pi A(t)}{3} I_3$.

Démonstration. On décompose cette fois $h(\tau)$ de la manière suivante :

$$h(\tau) = \underbrace{A(t)e^{2i\pi[\phi(t)+\phi'(t)(\tau-t)+\frac{1}{2}\phi''(t)(\tau-t)^2]}}_{h_1(\tau)} + \underbrace{(A(\tau)-A(t))e^{2i\pi\phi(\tau)}}_{h_2(\tau)} + \underbrace{A(t)e^{i\pi\int_t^\tau \phi'''(u)(\tau-u)^2\,du}}_{h_3(\tau)}.$$

Le terme principal vaut

$$V_{h_1}(\eta,t) = h(t)\int_{\mathbb{R}} g(\tau-t)e^{i\pi\phi''(t)(\tau-t)^2}e^{-2i\pi(\eta-\phi'(t))(\tau-t)}\,d\tau = h(t)\widehat{gc_t}(\eta-\phi'(t)).$$

Le terme V_{h_2} est le même que dans le théorème 2.4.1, et le dernier terme vérifie :

$$\begin{aligned}
|V_{h_3}(\eta,t)| &\leq \pi A(t)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_t^\tau |\phi'''(u)||\tau-u|^2\,du\right)|g(\tau-t)|\,d\tau \\
&\leq \frac{\pi}{3}A(t)\int_{\mathbb{R}} \varepsilon|\tau-t|^3|g(\tau-t)|\,d\tau \\
&\leq \frac{\pi}{3}A(t)\varepsilon I_3.
\end{aligned}$$

□

On obtient ainsi une approximation similaire au théorème (2.4.1), sauf que la fenêtre g est modulée par un chirp linéaire pur c_t.

Reconstruction locale d'ordre 2 pour la TFCT

Montrons à présent qu'une reconstruction locale est possible pour des modes fortement modulés en fréquence. Pour cela, il suffit de disposer d'une fenêtre g telle que $\widehat{gc_t}$ soit suffisamment concentrée autour de 0. La fonction $\widehat{gc_t}$ n'étant pas à support compact lorsque $\phi''(t) \neq 0$, on relâche l'hypothèse $\hat{g}$ à support compact.

Corollaire 2.4.3. *On se place dans le cadre du théorème 2.4.3. On suppose de plus que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour tout t et pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$, il existe $\Delta'_{t,\delta} > 0$ tel que,*

$$\left| h(t) - \frac{1}{g(0)}\int_{\phi'(t)-\Delta'_{t,\delta}}^{\phi'(t)+\Delta'_{t,\delta}} V_h(\eta,t)\,d\eta \right| \leq K_2(t,\delta)\varepsilon^{1-\delta},$$

où $K_2(t,\delta)$ est explicitée dans l'équation (2.40).

Démonstration. La fonction $\hat{g}$ n'est plus à support compact. Cependant, pour tout $\Delta > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} V_h(\eta, t)\, d\eta \right| \\
&\leq \left| h(t) - \frac{h(t)}{g(0)} \int_{-\Delta}^{\Delta} \widehat{gc_t}(\eta)\, d\eta \right| \qquad + \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} |V_h(\eta, t) - h(t)\widehat{gc_t}(\eta - \phi'(t))|\, d\eta \\
&\leq |h(t)| \left| 1 - \frac{1}{g(0)} \int_{-\Delta}^{\Delta} \widehat{gc_t}(\eta)\, d\eta \right| \quad + \frac{2\Delta}{g(0)} K_1(t)\varepsilon \\
&\leq \frac{|h(t)|}{g(0)} \int_{|\eta|>\Delta} \widehat{gc_t}(\eta)\, d\eta \qquad\qquad + \frac{2\Delta}{g(0)} K_1(t)\varepsilon,
\end{aligned}$$

avec $K_1(t)$ la constante du Théorème 2.4.3, finie pour tout t, et où l'on a utilisé $g(0) = gc_t(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{gc_t}(\eta)\, d\eta$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon^{\frac{k}{k+1}} \leq \varepsilon^{1-\delta}$. Comme $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et c_t est régulière et bornée, le produit est aussi dans la classe de Schwartz. En particulier, il existe une constante M_k dépendant de k et g, telle que $\forall \eta$, $|\widehat{gc_t(\eta)}| \leq \frac{M_k}{(1+|\eta|)^{k+1}}$. On a donc pour tout $\Delta > 0$,

$$\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta}^{\phi'(t)+\Delta} V_h(\eta, t)\, d\eta \right| \leq \frac{2|h(t)|M_k}{g(0)k\Delta^k} + \frac{2\Delta}{g(0)} K_1(t)\varepsilon.$$

En choisissant $\Delta'_{t,\delta} = \varepsilon^{-\frac{1}{k+1}}$, on obtient facilement :

$$\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta'_{t,\delta}}^{\phi'(t)+\Delta'_{t,\delta}} V_h(\eta, t)\, d\eta \right| \leq \frac{2|h(t)|}{g(0)} \left(\frac{M_k}{k} + K_1(t) \right) \varepsilon^{\frac{k}{k+1}}, \tag{2.40}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Remarque : On n'a pas fait d'hypothèses sur la localisation de $\hat{g}$. Pour obtenir une petite constante K_2, on doit en fait utiliser une fenêtre bien localisée autour de 0, ce qui assure une petite valeur pour M_k.

Approximation d'ordre 2 pour la TOC

Théorème 2.4.4. *On se place dans les hypothèses du théorème 2.4.2, sauf que l'hypothèse $|\phi''(t)| \leq \varepsilon\phi'(t), |\phi''(t)| \leq M$ est remplacée par $|\phi'''(t)| \leq \varepsilon\phi'(t), |\phi'''(t)| \leq M$. On suppose de plus que $|\psi|$ est une fonction paire. Alors pour tout t,*

$$|W_h(a, t) - h(t)\widehat{\psi c_{a,t}}(a\phi'(t))^*| \leq K'_1(a, t)\varepsilon, \tag{2.41}$$

avec $K'_1(a, t) = \phi'(t)aJ_1 + \left(\frac{1}{6}M + \pi A(t)\phi'(t)\right) a^3 J_3 + \frac{1}{6}\pi A(t) M a^5 J_5$ et $c_{a,t}(\tau) = e^{-i\pi\phi''(t)a^2\tau^2}$.

La preuve est assez similaire à celle du théorème 2.4.2, mais pour supprimer le terme en ϕ'' on doit utiliser des développements de Taylor centrés. On utilisera le lemme suivant.

Lemme 2.4.2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a*

$$\int_{t-x}^{t+x} \phi'(u)\, du \leq \left(2\phi'(t)x + \frac{1}{3}Mx^3 \right).$$

Démonstration. Pour tout $u \in [t-x, t+x]$, le théorème de Taylor-Lagrange assure l'existence d'un réel t_u tel que

$$\phi'(t+u) = \phi'(t) + \phi''(t)u + \frac{1}{2}\phi'''(t_u)u^2.$$

Intégrer cette équation entre $-x$ et x annule le terme en $\phi''(t)$ et prouve le lemme. □

On peut à présent démontrer le théorème 2.4.4.

Démonstration. Comme précédemment, on découpe $h(\tau)$ en trois termes.

$$h(\tau) = \underbrace{A(t)e^{2i\pi[\phi(t)+\phi'(t)(\tau-t)+\frac{1}{2}\phi''(t)(\tau-t)^2]}}_{h_1(\tau)} + \underbrace{(A(\tau)-A(t))e^{2i\pi\phi(\tau)}}_{h_2(\tau)} + \underbrace{A(t)e^{i\pi\int_t^\tau \phi'''(u)(\tau-u)^2\,du}}_{h_3(\tau)}.$$

La TOC du terme principal s'écrit

$$\begin{aligned} W_{h_1}(a,t) &= \frac{h(t)}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{i\pi\phi''(t)(\tau-t)^2}\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)^* e^{2i\pi\phi'(t)(\tau-t)}\,d\tau \\ &= h(t)\int_{\mathbb{R}} e^{i\pi\phi''(t)a^2x^2}\psi(x)^* e^{2i\pi\phi'(t)ax}\,dx \\ &= h(t)\widehat{\psi c_{a,t}}(a\phi'(t))^*. \end{aligned}$$

On majore ensuite la TOC des termes 2 et 3 :

$$\begin{aligned} |W_{h_2}(a,t)| &\leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |A(t+x)-A(t)|\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right|\,dx \\ &\leq \frac{1}{a}\int_0^\infty (|A(t+x)-A(t)| + |A(t-x)-A(t)|)\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right|\,dx, \end{aligned}$$

par parité de $|\psi|$. D'après les hypothèses, on a pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} |A(t+x)-A(t)| + |A(t-x)-A(t)| &\leq \int_{t-x}^{t+x} |A'(u)|\,du \\ &\leq \varepsilon\int_{t-x}^{t+x} \phi'(u)\,du \\ &\leq \varepsilon\left(2\phi'(t)x + \frac{1}{3}Mx^3\right) \end{aligned}$$

par le Lemme 2.4.2. En utilisant $J_n = 2\int_0^\infty |x|^n|\psi(x)|\,dx$, on obtient finalement

$$|W_{h_2}(a,t)| \leq \varepsilon\left(\phi'(t)aJ_1 + \frac{1}{6}Ma^3J_3\right). \tag{2.42}$$

Pour le dernier terme, on écrit

$$\begin{aligned}
|W_{h_3}(a,t)| &\leq \frac{A(t)}{a}\int_R |e^{i\pi\int_t^\tau \phi'''(u)(\tau-u)^2\,du}|\left|\psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\right| d\tau \\
&\leq \frac{A(t)}{a}\int_R |e^{i\pi\int_0^x \phi'''(t+v)(x-v)^2\,dv}\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right| dx \text{ avec } \tau = x+t \text{ et } u = v+t \\
&\leq \frac{A(t)\pi}{a}\varepsilon\int_{\mathbb{R}} x^2\left(\int_0^x \phi'(t+v)\,dv\right)\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right| dx \text{ car } (x-v)^2 \leq x^2\ \forall v\in[0,x] \\
&\leq \frac{A(t)\pi}{a}\varepsilon\int_0^\infty x^2\left(\int_{-x}^x \phi'(t+v)\,dv\right)\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right| dx \text{ par parité de } |\psi|. \\
&\leq \frac{A(t)\pi}{a}\varepsilon\int_0^\infty x^2(2x\phi'(t)+\frac{1}{3}Mx^3)\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right)\right| dx \text{ par le Lemme 2.4.2} \\
&\leq \pi A(t)\varepsilon\left(\phi'(t)a^3J_3+\frac{1}{6}Ma^5J_5\right). \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Reconstruction d'ordre 2 pour la TOC

On se place dans le cadre du théorème 2.4.4. On aimerait montrer que pour tout t, il existe $\Delta'_t > 0$ tel que

$$\left|h(t) - \frac{1}{C'_\psi}\int_{\frac{1-\Delta'_t}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta'_t}{\phi'(t)}} W_h(a,t)\,\frac{da}{a}\right| \leq K'_2(t)\varepsilon, \qquad (2.44)$$

la constante K'_2 dépendant de t et de l'ondelette ψ. Comme dans le cas du corollaire 2.4.2, cela revient à s'intéresser à la décroissance de l'approximation $\widehat{\psi c_{a,t}}(a\phi'(t))$ lorsque a s'éloigne de $1/\phi'(t)$. Un résultat aussi fort que l'équation (2.44) est cependant difficile à obtenir, à cause de la dépendance en a. Nous observerons plus finement ce problème dans la section 2.4.3, dans le cas particulier de l'ondelette de Morlet.

Approximation et reconstruction de signaux multicomposantes

Les quatre corollaires vus précédemment montrent la validité de la reconstruction par intégration locale pour des modes. Si la modulation fréquentielle est faible (ordre 1), l'intervalle d'intégration, plus précisément le paramètre Δ, est constant pour tout le signal. Par ailleurs, on voit facilement que cette méthode s'adapte parfaitement aux signaux multicomposantes séparés fréquentiellement (définitions 2.3.3) : il suffit de traiter les modes un à un, les supports d'intégration étant disjoints.

Le cas des signaux fortement modulés fréquentiellement est cependant plus compliqué : le corollaire 2.4.3 montre que la même approche reste possible, mais ne construit pas l'intervalle d'intégration optimal. Le paramètre $\Delta'_{t,\delta}$, qui dépend cette fois du temps, devra être déterminé en fonction de la fenêtre ou de l'ondelette, et de la modulation locale $\phi''(t)$, par une méthode numérique. La prochaine section présente le cas d'une fenêtre ou ondelette gaussienne, pour lequel on peut calculer $\Delta'_{t,\delta}$ explicitement. On peut également généraliser cette approche pour des signaux multicomposantes, en modifiant la condition de séparation entre les modes. On obtiendra ainsi une condition de séparation temps-fréquence, qui dépend de la fonction analysante.

2.4.3 Cas d'une fonction analysante Gaussienne

Nous traitons ici le cas particulier des fenêtres ou ondelettes gaussiennes, qui permet d'écrire explicitement les approximations au second ordre. La fenêtre Gaussienne dépend d'un paramètre σ, elle est définie par

$$g(x) = \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}} \qquad \text{et} \qquad \hat{g}(\nu) = \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi\sigma^2\nu^2}. \tag{2.45}$$

L'ondelette de Morlet est la fenêtre gaussienne modulée par une exponentielle pure de fréquence 1 :

$$\psi(x) = \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi \frac{x^2}{\sigma^2}} e^{2i\pi t} \qquad \text{et} \qquad \hat{\psi}(\nu) = \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi\sigma^2(1-\nu)^2}. \tag{2.46}$$

Grâce aux propriétés de la Gaussienne, il est facile de calculer explicitement la TFCT et la TOC d'un chirp linéaire, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.4.2. *Si g et ψ sont respectivement la fenêtre gaussienne et l'ondelette de Morlet complexe, le module de la TFCT et de la TOC du chirp linéaire $\tilde{h}_t$ (équation 2.38) sont donnés par les formules suivantes*

$$|V_{\tilde{h}_t}(\eta, t)| = |h(t)|\sigma^{\frac{1}{2}}(1 + \sigma^4\phi''(t)^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\sigma^2(\eta-\phi'(t))^2}{1+\sigma^4\phi''(t)^2}} \tag{2.47}$$

$$|W_{\tilde{h}_t}(a, t)| = |h(t)|\sigma^{\frac{1}{2}}(1 + \sigma^4 a^2\phi''(t)^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\sigma^2(1-a\phi'(t))^2}{1+\sigma^4 a^2\phi''(t)^2}}. \tag{2.48}$$

Pour démontrer ce résultat on a besoin de calculer au préalable la transformée de Fourier du chirp c_t.

Lemme 2.4.3. *Soit la fonction $u(t) = e^{-\pi z t^2}$, où le complexe z s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\cos\theta \geq 0$, de telle sorte que u est au moins localement intégrable. Sa transformée de Fourier est la fonction suivante*

$$\hat{u}(\xi) = r^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{-\frac{\pi}{z}\xi^2}. \tag{2.49}$$

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas $z \in \mathbb{R}$: il suffit de dériver u et de passer l'équation différentielle dans le domaine de Fourier. On pourra se reporter à [Kammler 2008], Appendice A pour plus de détails. □

On peut à présent démontrer la proposition 2.4.2.

Démonstration. Rappelons (théorème 2.4.3) que la TFCT du chirp linéaire $\tilde{h}_t$ s'écrit

$$V_{\tilde{h}_t}(\eta, t) = h(t)\widehat{gc_t}(\eta - \phi'(t)), \text{ avec } gc_t(x) = \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\left(\frac{1}{\sigma^2} - i\phi''(t)\right)x^2}.$$

On utilise à présent le Lemme 2.4.3 avec $z = \frac{1}{\sigma^2} - i\phi''(t)$. On a $r = \sqrt{\frac{1}{\sigma^4} + \phi''(t)^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{1 + \phi''(t)^2\sigma^4}$ et $\theta = \arctan(-\phi''(t)\sigma^2)$, et :

$$\widehat{gc_t}(\nu) = \sigma^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\theta}{2}} e^{\frac{-\pi\sigma^2(1+i\phi''(t)\sigma^2)}{1+\phi''(t)^2\sigma^4}\nu^2}$$

$$|V_{\tilde{h}_t}(\eta, t)| = |h(t)||\widehat{gc_t}(\eta - \phi'(t))| = |h(t)|\sigma^{\frac{1}{2}}(1 + \sigma^4\phi''(t)^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi\sigma^2(\eta-\phi'(t))^2}{1+\sigma^4\phi''(t)^2}}.$$

Le calcul est quasiment le même pour la TOC avec l'ondelette de Morlet complexe, en appliquant le Lemme 2.4.3 à

$$W_{\tilde{h}_t}(a,t) = h(t)\widehat{\psi c_{a,t}}(a\phi'(t))^*, \text{ où } \psi c_{a,t}(x) = \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\left(\frac{1}{\sigma^2} - i\phi''(t)a\right)x^2 + 2i\pi t}.$$

□

Reconstruction pour la TFCT

Rappelons que l'on ne dispose pas d'une fenêtre à support compact, mais seulement dans la classe de Schwartz. Pour définir le support d'intégration, on propose de ne sélectionner que les coefficients (η, t) tels que $|V_{\tilde{h}_t}(\eta,t)| > \gamma$, le seuil $\gamma > 0$ étant fixé. En remplaçant $\tilde{h}_t$ par l'approximation d'ordre 1 (équation (2.20)) ou 2 (équation (2.38)), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta_1(\gamma) &= \sqrt{\frac{-\log\gamma}{\pi\sigma^2}} \\ \Delta_2(\gamma,t) &= \Delta_1(\gamma)\sqrt{1+\sigma^4\phi''(t)^2}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Le proposition montre qu'un choix judicieux de γ permet de reconstruire le signal avec une bonne précision.

Proposition 2.4.3. *Si h vérifie les hypothèses du théorème 2.4.1 (c'est un mode faiblement modulé), alors pour tout t*

$$\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta_1(\gamma)}^{\phi'(t)+\Delta_1(\gamma)} V_h(\eta,t)\, d\eta \right| = O(\varepsilon\sqrt{(-\log\gamma)} + \gamma). \tag{2.51}$$

Si h vérifie les hypothèses du théorème 2.4.3 (c'est un mode fortement modulé), alors pour tout t

$$\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta_2(\gamma,t)}^{\phi'(t)+\Delta_2(\gamma,t)} V_h(\eta,t)\, d\eta \right| = O(\varepsilon\sqrt{(-\log\gamma))} + \gamma). \tag{2.52}$$

Démonstration. Commençons par le mode faiblement modulé, en reprenant la démonstration du corollaire 2.4.1. On a

$$\begin{aligned} &\left| h(t) - \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta_1(\gamma)}^{\phi'(t)+\Delta_1(\gamma)} V_h(\eta,t)\, d\eta \right| \\ &\leq \left| h(t) - \frac{h(t)}{g(0)} \int_{-\Delta_1(\gamma)}^{\Delta_1(\gamma)} \hat{g}(\eta)\, d\eta \right| + \frac{1}{g(0)} \int_{\phi'(t)-\Delta_1(\gamma)}^{\phi'(t)+\Delta_1(\gamma)} |V_h(\eta,t) - h(t)\hat{g}(\eta-\phi'(t))|\, d\eta. \end{aligned}$$

Le corollaire 2.4.1 montre que le second terme est un $O(\varepsilon\Delta_1(\gamma)) = O(\varepsilon\sqrt{(-\log\gamma)})$. Quant au premier terme, il s'écrit

$$\begin{aligned} \left| h(t) - \frac{h(t)}{g(0)} \int_{-\Delta_1(\gamma)}^{\Delta_1(\gamma)} \hat{g}(\eta)\, d\eta \right| &\leq |h(t)|(1 - \sigma \int_{-\Delta_1(\gamma)}^{\Delta_1(\gamma)} e^{-\pi\sigma^2\eta^2}\, d\eta \\ &\leq 2|h(t)| \int_{\sigma\Delta_1(\gamma)}^{+\infty} e^{-\pi\eta^2}\, d\eta. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Pour conclure, on utilise la majoration suivante de la fonction erreur (erf), valable pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt \leq e^{-\pi x^2},$$

qui se démontre facilement en dérivant les deux termes. L'équation (2.53) est donc majorée par $2|h(t)|e^{-\pi\sigma^2\Delta_1(\gamma)^2} = 2|h(t)|\gamma$.

La reconstruction au deuxième ordre se démontre exactement de la même manière, en remplaçant $\hat{g}$ par $\widehat{gc_t}$, qui est aussi une Gaussienne explicitée dans l'équation (2.47). □

Reconstruction pour la TOC

Afin de calculer les intervalles d'intégration pour la TOC au premier ordre, on résout de la même manière l'équation

$$|W_{\tilde{h}_t}(\frac{1 \pm \Delta}{\phi'(t)}, t)| = \gamma |W_{\tilde{h}_t}(\frac{1}{\phi'(t)}, t)|.$$

Si $\tilde{h}_t$ est l'approximation d'ordre 1 (équation (2.20)), on obtient la même valeur $\Delta_1(\gamma)$ que pour la TFCT. En revanche, le cas du deuxième ordre est plus délicat : l'équation (2.48) montre que a apparaît à la fois dans et hors de l'exponentielle. Il faut alors étudier numériquement la fonction $a \mapsto W_{\tilde{h}_t}(a, t)$ pour trouver un intervalle d'intégration convenable.

2.4.4 Validation numérique

On présente ici quelques résultats numériques qui valident notre approche, en la comparant à la méthode de référence [Delprat 1992]. Dans un souci de concision on se limitera à étudier la TFCT avec une fenêtre gaussienne, des résultats similaires pouvant être obtenus pour la TOC ou avec une fenêtre quelconque. Afin d'analyser uniquement la reconstruction des modes, on utilisera dans l'algorithme les vraies valeurs de $\phi'(t)$ et $\phi''(t)$ (pour des tests en "situation réelle" où ϕ' est inconnue, on pourra se reporter à la section 2.5). Ces résultats ont été présentés dans [Oberlin 2013a], et le code utilisé peut être obtenu à l'adresse `http://www-ljk.imag.fr/membres/Thomas.Oberlin/codeIC13.tar.gz`.

Un test comparatif

Considérons la famille de signaux dépendant du paramètre c, définis pour $t \in [0, 1]$ par

$$h_c(t) = e^{-10\pi(t-0.5)^2} e^{2i\pi(250t + \frac{500}{\pi^2} c \sin(\pi t))}, \tag{2.54}$$

échantillonnés à 1024 Hz. Faisons varier c entre 0 et 1, de telle sorte que $\sup_t |\phi''(t)|$ varie entre 0 et 500. On dispose ainsi de deux familles de méthodes pour reconstruire le mode : la reconstruction sur le ridge (RR) et la reconstruction locale intégrale (IR). Pour chacune, on peut utiliser l'approximation au premier ou au second ordre, ce qui fait 4 méthodes de reconstruction. Les reconstructions sur le ridge RR1 et RR2 découlent respectivement des approximations des théorèmes 2.4.1 et 2.4.3, utilisées

sur le ridge $\eta = \phi'(t)$. La figure 2.3 montre la qualité de la reconstruction du mode pour chaque méthode, pour différentes valeurs de c, en terme de rapport signal sur bruit (SNR). Il est clair que les reconstructions d'ordre 1 deviennent très mauvaises lorsque $c \not\approx 0$, c'est-à-dire lorsque ϕ'' n'est plus négligeable. Par ailleurs, on remarque que la méthode IR2 semble plus précise que RR2 : cela est dû au problème de discrétisation mentionné précédemment, qui limite la précision de RR2. Notons que la méthode intégrale IR2 est seulement limitée par le seuil (ici $\gamma = 0.01$), que l'on peut prendre aussi petit que l'on veut.

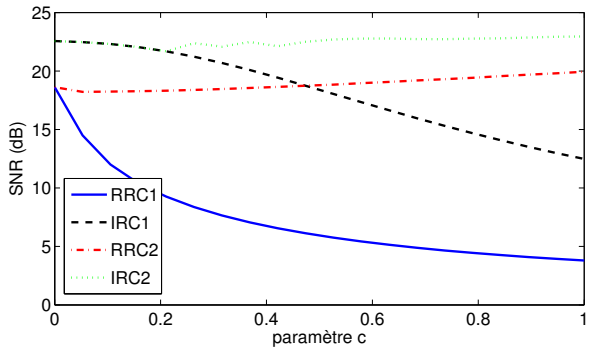


Figure 2.3 Comparaison des méthodes de reconstruction pour les signaux $h_c(t)$ de l'équation (2.54), avec $\gamma = 0.01$.

Paramètre γ

On aimerait à présent souligner les spécificités de la méthode IR2, et notamment l'influence du paramètre γ. Rappelons que ce paramètre détermine le "support principal" de la fonction gaussienne : pour reconstruire le mode h d'après sa TFCT, on ne sélectionnera que les coefficients tels que $|V_{\tilde{h}_t}(\eta, t)| > \gamma$. Lorsqu'il n'y a pas de bruit, il est clair que le résultat est d'autant meilleur que γ est petit. Cependant, lorsque le signal contient du bruit, ou bien lorsqu'il y a plusieurs composantes, il est important de n'intégrer que sur un petit support, et donc de choisir γ pas trop petit, puisque faire tendre γ vers 0 ramène à la formule de reconstruction exacte (2.27). Pour illustrer l'importance de ce paramètre, on trace sur la Figure 2.4 le SNR associé à l'extraction du mode $h_{0.7}$ en fonction de γ, avec différents niveaux de bruit. On utilise pour cela du bruit blanc gaussien, caractérisé par son SNR. On observe que quel que soit le niveau de bruit, le SNR après extraction augmente faiblement avec γ jusqu'à atteindre un maximum, après quoi il diminue rapidement. Cette valeur optimale pour γ est bien sûr liée au niveau de bruit.

Sensibilité à l'estimation du ridge

L'estimation du ridge $\phi'(t)$ et de la modulation fréquentielle $\phi''(t)$ est un problème difficile, et quelle que soit la méthode utilisée en pratique des erreurs d'estimation sont commises. Ce paragraphe compare les méthodes RR2 et IR2 en évaluant leur sensibilité à cette estimation. Pour cela, on trace sur la Figure 2.5(a) la qualité de la

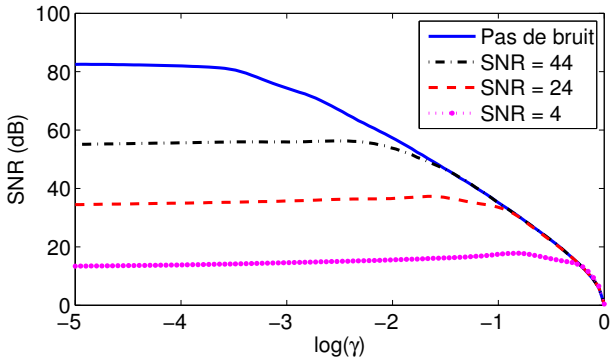


FIGURE 2.4 SNR après reconstruction du signal $h_{0.7}$ en fonction du seuil γ, pour la méthode IR2. On considère différents niveau de bruit avec des SNRs valant 44, 24 et 4.

reconstruction du signal test $h_{0.7}$ en fonction du niveau de bruit, pour la méthode RR2 et IR2 avec différentes valeurs de γ, lorsque le ridge est supposé connu. On observe que la reconstruction RR2 semble meilleure lorsque le bruit est important. Pour de faibles niveaux de bruit, la méthode IR2 est plus efficace, mais a toutefois une précision limitée, liée au paramètre de seuil γ.

Pour illustrer la sensibilité à l'estimation de ϕ' et ϕ'', nous traçons dans les Figures 2.5 (b), (c) et (d) les mêmes courbes, en remplaçant les vraies valeurs de ϕ' et ϕ'' par des valeurs biaisées $\tilde{\phi}' = \phi' + 3$ (erreur relative : 1%) et $\tilde{\phi}'' = \phi'' + 12$ (erreur relative : 5%). On observe qu'un biais dans l'estimation de ϕ'', bien que relativement faible, affecte fortement les performances de RR2, alors que les résultats de IR2 semblent peu modifiés. Ce phénomène est encore plus marqué lorsque c'est le ridge ϕ' lui-même qui est mal estimé (Figures 2.5 (c) (d)).

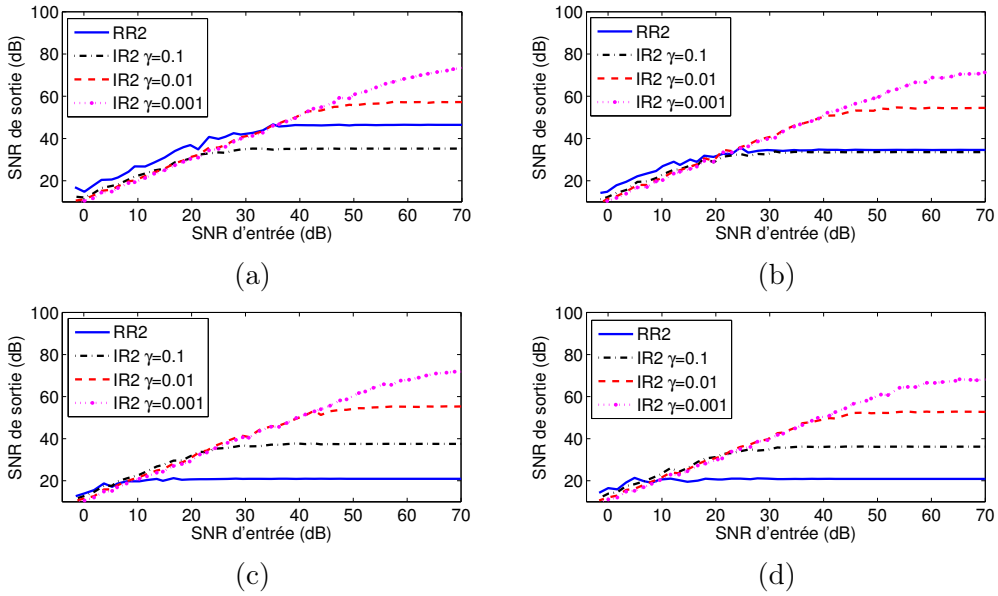


FIGURE 2.5 SNR associé à la reconstruction de $h_{0.7}$ en fonction du niveau de bruit (SNR d'entrée) pour les méthodes RR2 et IR2 avec différentes valeurs de γ. (a) on utilise les vraies valeurs de ϕ' et ϕ'', (b) on utilise ϕ' et $\tilde{\phi}''$, (c) on utilise $\tilde{\phi}'$ et ϕ'', (d) on utilise $\tilde{\phi}'$ et $\tilde{\phi}''$.

2.5 Application au débruitage

On a vu dans la section précédente comment l'information était diffusée dans la TFCT et la TOC autour des ridges, et comment cette répartition est modifiée par modulation fréquentielle. Cette analyse a permis une nouvelle méthode de reconstruction qui semble faire au moins aussi bien que la reconstruction sur le ridge, tout en étant moins sensible à l'estimation de la fréquence instantanée. On a évoqué également la possibilité de restreindre le support d'intégration lorsque c'est nécessaire, par exemple en présence de bruit, pour des modes mal séparés, ou encore lorsque la fenêtre ou l'ondelette n'est pas à support compact en Fourier. Cette section s'intéresse au cas des signaux bruités. Plus précisément, elle donne une méthode pour choisir le seuil γ, et donc la taille de l'intervalle d'intégration Δ, en fonction du niveau de bruit. Cette nouvelle méthode de débruitage, déjà évoquée dans [Meignen 2012a], consiste donc à :

- Estimer le ridge au temps t, $\phi'(t)$
- Calculer l'intervalle $\mathcal{I}(t)$ de telle sorte que si $\eta \in \mathcal{I}(t)$ si et seulement si $|V_{\tilde{h}_t}(\eta, t)|$ est plus grand que le niveau de bruit moyen
- Intégrer localement la transformée sur ce domaine pour estimer $h(t)$
- Itérer le procédé pour chaque mode et chaque instant t.

Ce procédé est illustré par la Figure 2.6, qui montre la TFCT et la TOC d'un mode AM–FM. La figure affiche également une coupe de chaque transformée pour $t = 0.5$, en faisant apparaître l'intervalle d'intégration et le niveau de bruit moyen. La prochaine section explique comment choisir les intervalles $\mathcal{I}(t)$, en considérant toujours des approximations au premier et au second ordre de la phase. La méthode exposée dans cette section a été présentée dans [Oberlin 2013b], et les codes traçant les figures sont disponibles à `http://www-ljk.imag.fr/membres/Thomas.Oberlin/Eusipco13.tar.gz`.

2.5.1 Taille de l'intervalle d'intégration

Commençons par quantifier le niveau de bruit moyen dans les plans TF et TE. On considère une réalisation bruitée $s(t) = h(t) + n(t)$, où le bruit n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ_n^2. On se place à une fréquence η ou une échelle a fixée, pour lesquelles un rapide calcul donne

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Var}(V_n(\eta, t)) & = & \sigma_n^2 \\ \mathrm{Var}(W_n(a, t)) & = & \frac{1}{a}\sigma_n^2. \end{array} \tag{2.55}$$

Supposons que la fenêtre $\hat{g}$ soit strictement monotone sur $(-\infty, 0)$ et $(0 + \infty)$, on définit alors l'intervalle d'intégration $\mathcal{I}(t) = [x_-(t), x_+(t)]$, où x_- et x_+ sont les deux solutions de l'équation $|V_{\tilde{h}_t}(\eta, t)| = \sigma_n$, en remplaçant $\tilde{h}_t$ par les approximations de premier ou de second ordre obtenues dans les théorèmes 2.4.1 ou 2.4.3. On peut raisonner de même pour la TOC, en résolvant l'équation $|W_{\tilde{h}_t}(a, t)| = \frac{1}{\sqrt{a}}\sigma_n$.

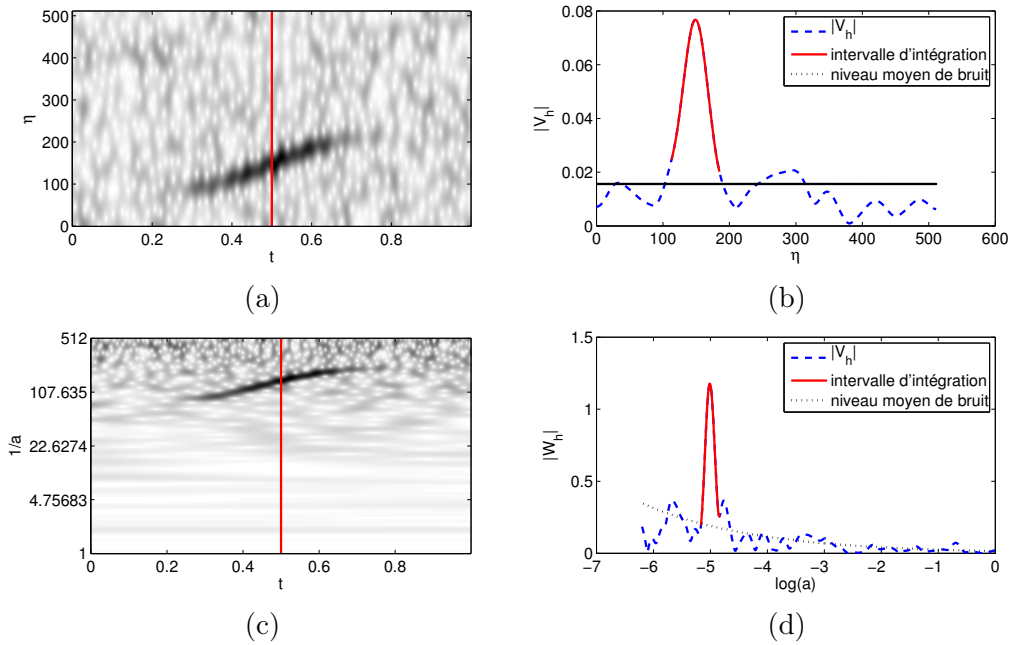


Figure 2.6 Illustration du débruitage par TFCT ou par TOC. (a) TFCT d'un mode AM–FM bruité (module). (b) une coupe de (a) au temps $t = \frac{1}{2}$, avec le niveau de bruit moyen et l'intervalle d'intégration. (c) et (d) : même chose pour la TOC.

2.5.2 Formules pour des fonctions analysantes gaussiennes

On donne ici les formules explicites des intervalles d'intégration pour une fenêtre ou une ondelette gaussienne, pour chacun des ordres d'approximation. Pour simplifier les expressions, on notera $V_{max}(t) = |V_h(\phi'(t), t)|$. Notons que ces expressions se déduisent directement de l'équation (2.50), en remplaçant le seuil γ par le niveau de bruit moyen.

- L'intervalle d'intégration pour la TFCT au premier ordre est de la forme $[-\Delta_{1,V}, +\Delta_{1,V}]$, avec
$$\Delta_{1,V} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{-\log\frac{\sigma_n}{V_{max}(t)}}. \tag{2.56}$$
- L'intervalle d'intégration pour la TFCT au second ordre s'écrit $[-\Delta_{2,V}, +\Delta_{2,V}]$, avec
$$\Delta_{2,V} = \frac{\sqrt{1+\sigma^4\phi''(t)^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{-\log\frac{\sigma_n}{V_{max}(t)}}. \tag{2.57}$$
On vérifie bien que l'intervalle grandit avec la modulation fréquentielle $|\phi''(t)|$.
- De même, l'intervalle d'intégration au premier ordre pour la TOC est $[\frac{1-\Delta_{1,W}}{\phi'(t)}, \frac{1+\Delta_{1,W}}{\phi'(t)}]$, avec $\Delta_{1,W}$ solution de l'équation
$$\Delta_{1,W} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{-\log\left(\frac{\sigma_n}{W_{max}(t)\sqrt{a}}\right)}, \tag{2.58}$$
où $a = \frac{1\pm\Delta_{1,W}}{\phi'(t)}$ est l'échelle correspondante, que l'on peut approximer par $1/\phi'(t)$ pour obtenir une expression analytique.

- L'intervalle au second ordre pour la TOC s'écrit de la même manière, mais avec
$$\Delta_{2,W} = \frac{\sqrt{1+a^4\sigma^4\phi''(t)^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{-\log\left(\frac{\sigma_n}{W_{max}(t)\sqrt{a}}\right)}. \tag{2.59}$$
où l'on peut encore utiliser $a \approx 1/\phi'(t)$.

2.5.3 Résultats numériques

On validera ici notre méthode de débruitage sur des signaux multicomposantes synthétiques. Les différentes méthodes seront désignées par TFCT1, TFCT2, TOC1 ou TOC2, en fonction de la transformée utilisée et de l'ordre d'approximation. Nous comparerons les résultats grâce à une méthode temps-fréquence plus générale de débruitage : le seuillage par blocs [Yu 2008], que l'on nommera BT dans la suite. Le BT est une technique basée sur la TFCT, bien adaptée aux signaux audio et qui ne nécessite pas de paramétrisation. Étant valable sur une plus grande classe de fonctions que les signaux multicomposantes, on peut s'attendre à ce qu'elle donne de moins bons résultats, mais elle fournit tout de même une comparaison significative. Les ridges seront estimés par un algorithme heuristique comme dans [Oberlin 2013a], alors que la modulation fréquentielle $\phi_k''(t)$ est calculée en dérivant la fréquence instantanée préalablement régularisée par une régression spline. Le code Matlab des méthodes de débruitage et les scripts reproduisant toutes les figures de cette section sont disponibles à l'adresse `http://www-ljk.imag.fr/membres/Thomas.Oberlin/Eusipco13.tar.gz`.

Un premier exemple

On commence par vérifier le bon comportement des méthodes d'ordre 1 pour un signal faiblement modulé fréquentiellement. Les Figures 2.7(a) et (b) montrent ainsi respectivement la TFCT et la TOC d'un signal à 3 composantes. Les performances de débruitage de ce signal sont représentées sur la Figure 2.7(c), montrant que les méthodes TFCT1 et TOC1 semblent bien plus efficaces que le seuillage par blocs sur cet exemple, quel que soit le SNR d'entrée. Il faut noter cependant que nos méthodes ne fonctionnent pas bien pour des niveaux de bruits très importants (lorsque SNR < -5 dB), car dans ce cas on n'arrive pas à extraire correctement le ridge.

TFCT ou TOC ?

On se propose ici d'illustrer les différences entre les deux transformées, et de discuter du rôle du paramètre σ. Rappelons que la qualité du débruitage dépend de la capacité de chaque transformée à représenter le signal multicomposantes de manière parcimonieuse, de façon à intégrer sur un domaine le plus petit possible. Ainsi pour un signal monochromatique, on pourra choisir une grande fenêtre pour obtenir une représentation TF concentrée, ce qui assurera un très bon résultat. Cependant lorsqu'il y a modulation fréquentielle, une grande fenêtre causera un étalement en temps, ce qui élargira le ridge (cf. théorème (2.4.3)). Il faut donc choisir la taille de

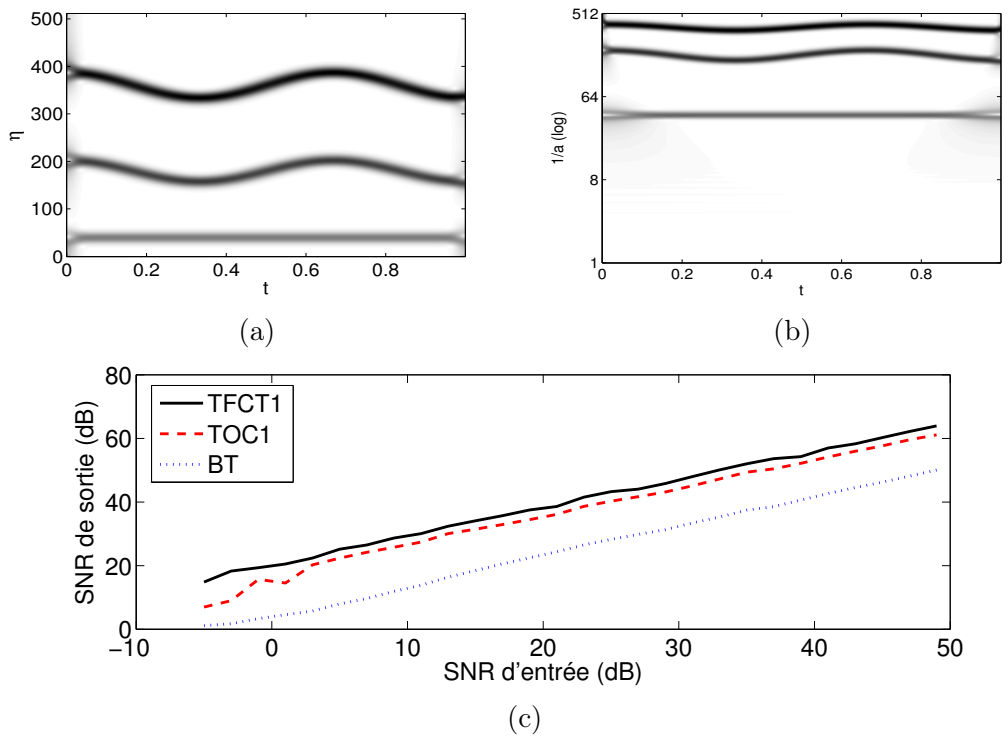


Figure 2.7 Performances de débruitage pour un signal faiblement modulé. (a) TFCT du signal, $\sigma = 0.05$ (b) TOC du signal, $\sigma = 7$. (c) Comparaison entre les méthodes d'ordre 1 et le BT.

la fenêtre, et donc le paramètre σ, de manière à obtenir un bon compromis entre localisation en temps et en fréquence.

Pour des signaux AM–FM, la principale différence entre la TFCT et la TOC réside dans leur gestion de la modulation fréquentielle : les hypothèses des théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 montrent que la TFCT se comporte bien lorsque ϕ'' est petit, alors que dans la TOC c'est le rapport ϕ''/ϕ' qui compte. Une autre différence non négligeable réside dans la condition de séparation, linéaire pour la TFCT et logarithmique pour la TOC. On illustre ces différences au moyen de 2 signaux tests : l'un est constitué de chirps polynomiaux, et sera bien adapté à la TFCT, alors que l'autre est constitué de chirps exponentiels dont la modulation est proportionelle à la fréquence instantanée, et sera plus adapté à la TOC. La TFCT et la TOC de chaque signal sont représentées sur la Figure 2.8, avec les performances de débruitage associées aux méthodes d'ordre 2. La Figure 2.8(c) montre que la TFCT est bien adaptée aux chirps polynomiaux, la méthode TOC2 semblant moins efficace. Pour le signal composé de chirps exponentiels en revanche, la Figure 2.8(f) montre que la méthode TOC2 est de loin la plus efficace. Dans ce cas, la TFCT est en effet trop diffuse lorsqu'il y a de fortes modulations fréquentielles, empêchant un filtrage efficace du bruit.

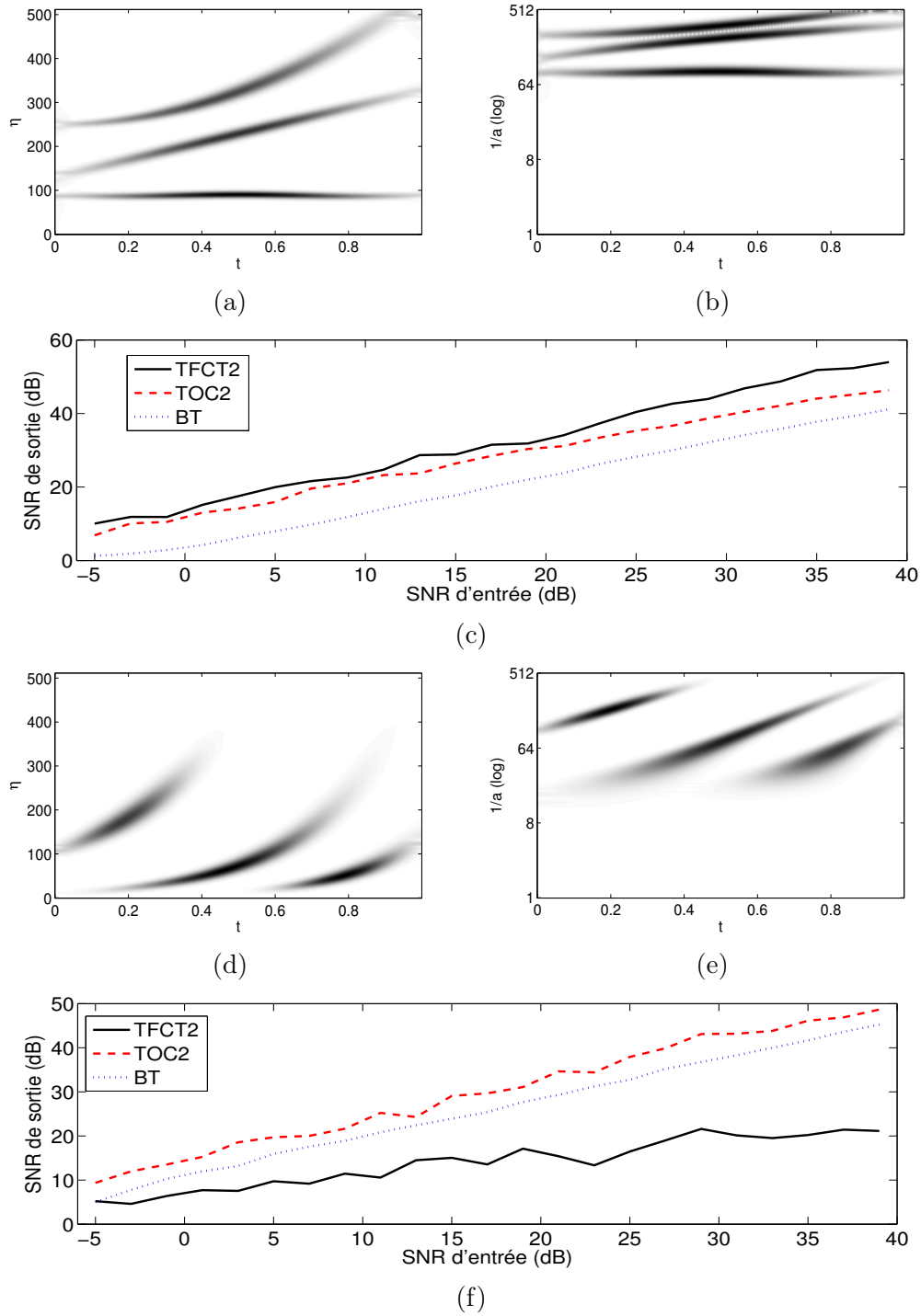
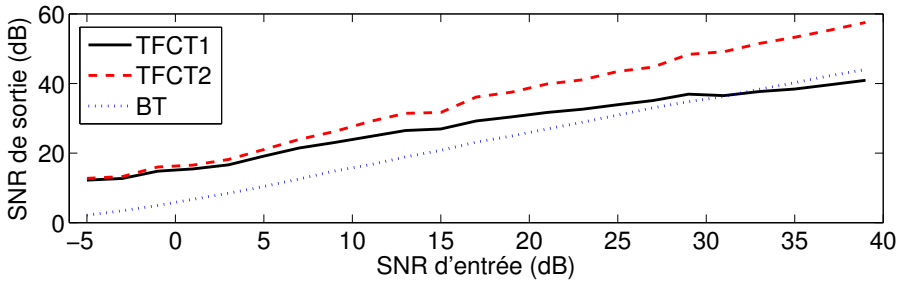
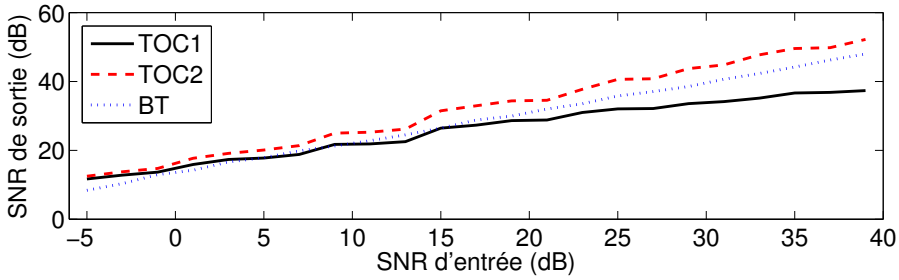


Figure 2.8 Débruitage de signaux comportant de fortes modulations fréquentielles. (a) TFCT d'une superposition de chirps polynomiaux ; (b) TOC du même signal ; (c) performances de débruitage sur ce signal, pour les méthodes TFCT2, TOC2 et BT. (d), (e) et (f) : Mêmes graphiques pour un signal composé de chirps exponentiels. Les paramètres sont $\sigma = 0.08$ pour la TFCT et $\sigma = 5$ pour la TOC.



(a)



(b)

Figure 2.9 Importance du terme d'ordre 2 dans le débruitage par reconstruction locale intégrale. (a) résultats de débruitage sur le signal des Figures 2.8(a) et (b), pour les méthodes TFCT1 et 2 avec $\sigma = 0.08$. (b) résultats pour CWT1 et CWT2, sur le signal des Figures 2.8 (d) et (e), avec $\sigma = 5$.

Contribution du modèle d'ordre 2

On montre ici l'importance du terme d'ordre 2 pour les signaux comportant une modulation fréquentielle non négligeable. Pour cela, on reprend les deux signaux de la Figure 2.8, et l'on compare les performances de débruitage entre les méthodes d'ordre 1 et celles d'ordre 2. Les résultats, affichés dans la Figure 2.9, montrent clairement que le terme d'ordre 2, s'il a un impact modéré lorsque le bruit est très fort, augmente considérablement la précision des méthodes pour des niveaux de bruit plus faibles.

2.6 Stabilisation de la reconstruction en utilisant la structure des transformées

Dans les sections précédentes, on a montré comment estimer les modes d'un signal multi-composantes à partir de ses ridges dans le plan TF ou TE, ou d'une bande autour de ses ridges. On peut se demander à l'inverse si la reconstruction de toute bande suffisament étroite du plan TF donne un mode AM–FM, auquel cas il serait facile de segmenter la plan TF pour obtenir une décomposition complète de type EMD. Or la reconstruction de Morlet à partir d'une bande ne donne en général pas un mode AM–FM.

Cette section revient ainsi sur le problème posé par la reconstruction par intégration locale. On commencera par motiver l'étude, notamment au travers d'un exemple. Puis on évoquera une méthode de projection pour régulariser la solution.

Enfin, on montrera que cette méthode équivaut à utiliser la reconstruction stable dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour changer, nous considérerons le cas de la transformée en ondelettes, une démarche équivalente existant pour la TFCT. Les résultats de cette section ont été présentés dans [Oberlin 2012b], et le code Matlab utilisé se trouve à l'adresse `http://www-ljk.imag.fr/membres/Thomas.Oberlin/segtool.tar.gz`.

2.6.1 Position du problème

Revenons donc sur la formule de reconstruction de Morlet tronquée (2.28), qui propose de reconstruire le mode $h(t) = a(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ au temps t par

$$h(t) \approx \frac{1}{C'_\psi} \int_{\frac{1-\Delta}{\phi'(t)}}^{\frac{1+\Delta}{\phi'(t)}} W_h(a,t)\, \frac{da}{a}. \tag{2.60}$$

Le corollaire 2.4.2 montre qu'en adaptant le paramètre Δ, cette méthode permet de reconstruire le mode, avec une faible erreur en norme $\|.\|_\infty$. Cependant, l'utilisation de cette reconstruction à t fixé peut poser problème :

- Le fait de reconstruire à temps fixé fait perdre la cohérence temporelle. En particulier, le signal reconstruit ne sera en général pas continu.
- Bien qu'on intègre la TOC sur la bande $X = \{(a,t) \text{ tels que } |a\phi'(t) - 1| \leq \Delta\}$, la TOC du signal reconstruit aura en général un support plus grand que cette bande, en particulier ça ne sera pas un mode AM–FM. La Figure 2.10 illustre ce phénomène : on sélectionne une fine bande régulière de la TOC d'une somme de 2 sinus, que l'on tronque comme illustré dans la Figure 2.10(a). On reconstruit ensuite un pseudo-mode en utilisant l'équation (2.28), et on représente sa TOC dans la Figure 2.10(b). Les Figures 2.10 (c) et (d) représentent le mode reconstruit, qui n'est clairement pas AM–FM, et possède des singularités. D'autre part, il est clair que le module de sa transformée en ondelettes ne correspond pas du tout à la bande d'intégration utilisée.

2.6.2 Régularisation par une méthode de projection

On considère dans cette section une ondelette ψ analytique, admettant des constantes C_ψ et C'_ψ finies et non nulles. Rappelons que l'espace WL^2, image de $L^2(\mathbb{R})$ par la TOC, est un espace de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS), c'est-à-dire que chaque élément $W_s \in WL^2$ satisfait :

$$W_s(a,t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} K_{a,b}(a',t') W_s(a',t')\, dt'\, \frac{da'}{a'}, \tag{2.61}$$

où la fonction $K_{a,t}$ est le noyau reproduisant, défini par $K_{a,t}(a',t') = \langle \psi_{a',t'}, \psi_{a,t} \rangle$. En utilisant l'égalité de Plancherel, on peut réécrire $K_{a,t}$ dans le domaine fréquentiel, ce qui est souvent plus simple :

$$\begin{aligned} K_{at}(a',t') &= \left\langle \hat{\psi}_{a',t'}, \hat{\psi}_{a,t} \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \hat{\psi}(a'\xi)\hat{\psi}(a\xi)^* e^{2i\pi\xi(t'-t)}\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.62}$$

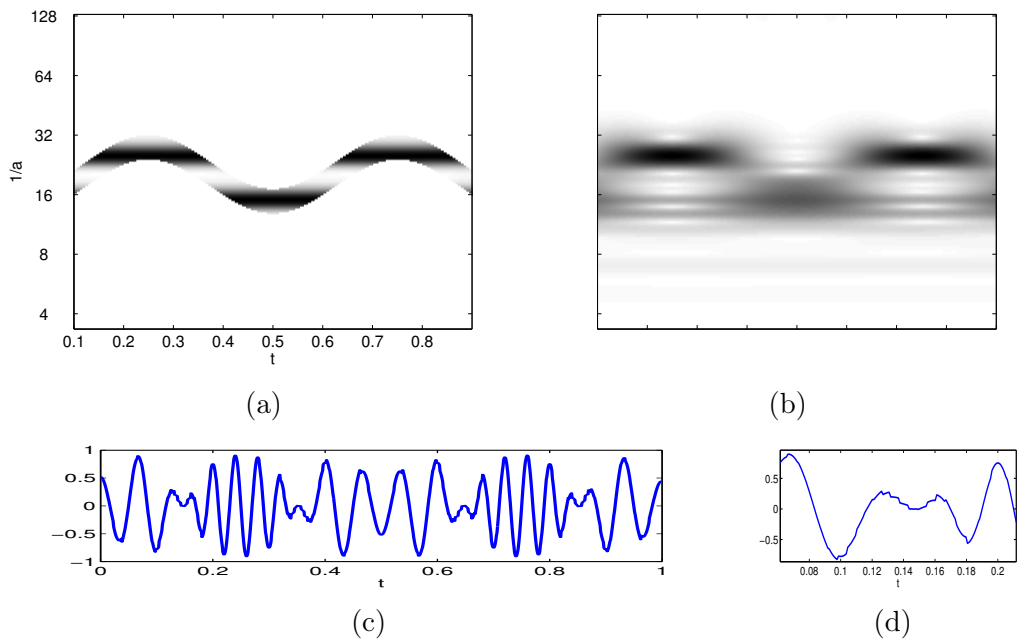


Figure 2.10 (a) La TOC d'une somme de 2 sinus tronquée sur une bande du plan TE. (b) La TOC du pseudo-mode reconstruit avec la formule de Morlet. (c) et (d) : le pseudo-mode, et un zoom sur des singularités.

Soit $W \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, on peut à présent définir son unique projection orthogonale $PW \in WL^2$ par :

$$PW(a,t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W(a',t') K_{a,t}(a',t')^* \, dt' \, \frac{da'}{a'}. \tag{2.63}$$

Résumons à présent notre méthode de régularisation. On considère un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$, dont on veut extraire un mode h. On détermine pour cela un ensemble de coefficients Y, et on tronque la TOC de f sur cet ensemble pour obtenir la TOC tronquée $W_Y = W_f \chi_Y$. Au lieu d'utiliser la reconstruction de Morlet sur W_Y, on projette d'abord sur WL^2 en calculant PW_Y comme dans l'équation (2.63). On obtient ainsi un élément de WL^2, c'est-à-dire que PW_Y est la transformée en ondelettes d'une fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$, que l'on peut obtenir par la formule de Morlet (2.27). On illustre ce procédé dans la Figure 2.11, en considérant un signal test à trois composantes, contaminé par un bruit blanc gaussien avec SNR = 2 dB. On construit de manière artificielle trois bandes de coefficients Y_1, Y_2 et Y_3 qui correspondent à peu près au support de chaque mode dans le plan TE, avec certaines irrégularités, ce qui arrive en pratique lorsqu'on extrait les ridges (Figure 2.11 (b)). Ensuite, les Figures 2.11 (c) et (d) montrent la TOC tronquée pour le second mode $W_2 = W_f \times \chi_{Y_2}$, ainsi que sa projection PW_2. La reconstruction de ce second mode est affichée dans les Figures 2.11 (e) et (f), en utilisant respectivement la reconstruction directe et la régularisation. Il est clair que la régularisation permet d'obtenir un mode lisse, sans modifier grandement le mode reconstruit.

En plus de son effet régularisant, s'intéresser à la projection PW peut s'avérer utile pour caractériser les modes dans le plan temps-échelle. On peut ainsi conjecturer

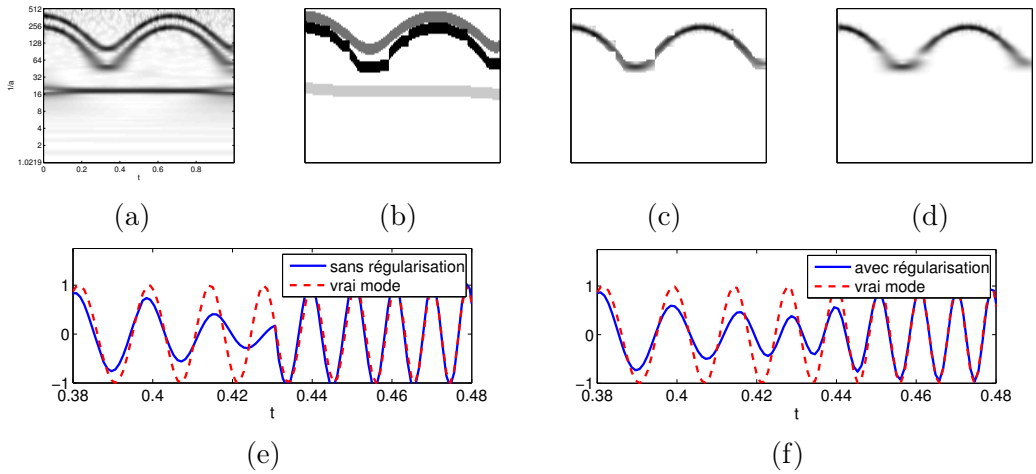


Figure 2.11 (a) : TOC d'un signal multicomposantes bruité. (b) : Les trois ensembles de coefficients séléectionnés pour reconstruire les modes. On a introduit artificiellement des perturbations sur le ridge du mode 2, ce qui crée des discontinuités (zone noire). (c) et (d) : TOC tronquée W et sa projection PW, respectivement. (e) et (f) : reconstruction du deuxième mode (trait plein) et valeur théorique (pointillés), avec et sans régularisation. On a réalisé un zoom autour d'une singularité.

que si W est une TOC tronquée, et si sa projection PW forme une bande suffisamment étroite et régulière dans le plan TE, la reconstruction à partir de PW sera alors un mode AM–FM. Cette idée ouvre des perspectives pour la segmentation directe dans le plan TE. Malheureusement, l'opération de projection est coûteuse numériquement, et difficilement applicable sur de gros signaux. On va montrer qu'elle peut être remplacée par une formule de reconstruction stable.

2.6.3 Équivalence avec la reconstruction dans $L^2(\mathbb{R})$

Lorsque l'on s'intéresse uniquement à la reconstruction du mode h, l'étape de projection de la TOC tronquée W n'est en fait pas nécessaire, car h peut être calculé directement par la formule de synthèse stable (2.10), comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.6.1. *Soit $f \in H^2(\mathbb{R})$, Y un ensemble de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, et $W = W_f \times \chi_Y$. Soit h le mode obtenu par reconstruction de Morlet à partir de PW (équations (2.63) et 2.60). On a également*

$$h(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} W(a', t') \psi\left(\frac{t - t'}{a'}\right) \frac{dt' da'}{a'^2}, \tag{2.64}$$

au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Ce résultat est souvent utilisé dans l'autre sens, pour montrer la structure d'espace à noyau reproduisant de WL^2 (dans [Mallat 2000] par exemple).

Écrivons simplement la projection PW au point (a,t) :

$$\begin{aligned} PW(a,t) &= \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\psi^*\left(\frac{\tau-t'}{a'}\right)\frac{d\tau}{aa'}W(a',t')\,dt'\frac{da'}{a'} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} W(a',t')\psi\left(\frac{\tau-t'}{a'}\right)\frac{dt'da'}{a'^2}\right)}_{h(t)}\psi^*\left(\frac{\tau-t}{a}\right)dt \\ &= W_h(a,t), \end{aligned}$$

où h est défini à l'équation (2.64). On vérifie bien $h \in L^2(\mathbb{R})$, et donc PW est la TOC de h, que l'on peut inverser dans $L^2(\mathbb{R})$ en utilisant la formule de Morlet (proposition 2.4.1). □

Cette proposition montre que pour régulariser le mode, il suffit d'utiliser la formule de reconstruction stable dans L^2 sur la TOC tronquée. En fait, les auteurs constatent dans [Daubechies 2011] que cela donne de meilleurs résultats, mais sans rentrer dans les détails. Remarquons également que l'idée de la projection sur l'espace WL^2 est utilisée dans [Mallat 1991], dans le cadre de la reconstruction d'un signal à partir des passages à zéro de sa transformée en ondelettes.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la structure des représentations temps-fréquence des signaux multicomposantes, en traitant précisément le cas de la TFCT et de la TOC. Nous avons rappelé plusieurs résultats d'approximation de ces transformées, permettant la reconstruction à partir des lignes de crête. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la reconstruction par intégration locale en fréquence ou en échelle, inspirée par les travaux récents sur le synchrosqueezing. Nous avons étendus les résultats d'approximation et de reconstruction aux signaux à forte modulation fréquentielle, en montrant qu'il suffit d'adapter le support d'intégration à la modulation fréquentielle. Par ailleurs, nous avons donné des formules explicites dans le cas de fonctions analysantes gaussiennes. Deux applications numériques de ces résultats ont été présentées, l'une pour la séparation et l'autre pour le débruitage de signaux multicomposantes. Enfin, le problème de la stabilisation de la reconstruction a été évoqué puis résolu grâce à une méthode de projection, ou à l'utilisation de la formule stable de reconstruction.

Par rapport à l'EMD, ce chapitre fournit donc un cadre d'étude précis. Cependant, les approches temps-fréquence possèdent plusieurs inconvénients pratiques par rapport à l'EMD. La plus grande difficulté est sans doute l'estimation des lignes de crête, pour laquelle plusieurs algorithmes performants existent, mais qui nécessitent tous des a priori forts sur les modes, et ne garantissent pas un résultat optimal. Un autre inconvénient des méthodes temps-fréquence concerne l'hypothèse d'harmonicité des modes (les formes d'onde sont des cosinus), qui n'est pas présente sous cette forme dans l'EMD. Une méthode simple permet cependant de contourner cette difficulté, que nous évoquerons plus en détail dans le prochain chapitre.

Parmi les nombreuses perspectives, on pourrait s'intéresser à de fortes variations d'amplitude, ce qui conduirait à développer A au deuxième ordre. Ce développement a été effectué dans [Torrésani 1995], mais uniquement pour des fréquences instantanées constantes. Une autre étude intéressante concerne le choix de la fenêtre, la possibilité d'utiliser différentes tailles de fenêtre simultanément [Xiao 2007], ou de déterminer ce paramètre localement, de manière adaptative.

CHAPITRE 3

Synchrosqueezing et réallocation

3.1 Introduction

La réallocation propose un cadre pour améliorer toute une classe de représentations temps-fréquence (TF) ou temps-échelle (TE), en les concentrant autour des lignes de crête correspondant aux fréquences instantanées. La représentation obtenue est alors plus concentrée, plus parcimonieuse, et donc plus aisée à interpréter ou à traiter. Prenons l'exemple du spectrogramme : on a vu au chapitre précédent qu'un mode AM–FM forme dans le plan TF une bande de coefficients non nuls, de largeur non négligeable. Si celle-ci peut être réduite en augmentant la taille (temporelle) de la fenêtre, c'est au prix d'une moindre résolution temporelle, et donc d'une moins bonne description des modulations fréquentielles. Considérant un signal multicomposantes $f(t) = \sum_k a_k(t) e^{2i\pi\phi_k(t)}$, on aimerait pourtant lui associer une représentation simple parfaitement concentrée le long des lignes de fréquence instantanée. On définit ainsi sa représentation TF idéale :

$$\mathrm{TI}_f(\eta, t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(t)^s \delta(\eta - \phi_k'(t)), \tag{3.1}$$

s valant 1 ou 2 selon que l'on cherche une représentation linéaire ou quadratique. Pour se rapprocher de cette représentation idéale, une solution est d'utiliser des distributions TF d'ordre supérieur, telle la distribution de Wigner-Ville, qui localise parfaitement les chirps linéaires [Flandrin 1993], ou des distributions multilinéaires [Peleg 1991] adaptées à des phases polynomiales. Ces techniques présentent toutefois bon nombre d'inconvénients, notamment la présence d'interférences, ainsi qu'une moindre lisibilité due à un grand nombre de variables. La réallocation est un principe différent, remontant à [Kodera 1976]. Elle consiste à calculer une représentation TF ou TE usuelle comme le spectrogramme, le scalogramme, ou toute autre distribution de la classe de Cohen ou de la classe affine. Parallèlement, on calcule un champ de réallocation à partir de la phase de ces transformées. Enfin, on *réalloue* la représentation TF d'après ce champ de vecteur. C'est donc un principe général de

post-traitement qui améliore les représentations, mais malheureusement ne permet pas de reconstruire les modes et le signal [Auger 1995].

Parallèlement, une variante de la réallocation a été introduite dans [Daubechies 1996], sous la dénomination de *synchrosqueezing* (SST). Cette technique permet à la fois d'obtenir une représentation concentrée, tout en autorisant la reconstruction des modes. Malheureusement, contrairement à la réallocation classique, elle n'est pas adaptée aux signaux comportant des modulations de fréquence non négligeables. Ce chapitre s'intéresse à des extensions du synchrosqueezing améliorant la concentration de la représentation TF. Nous construirons ainsi deux généralisations différentes du synchrosqueezing qui gèrent chacune les fortes modulations fréquentielles. L'une de ces approches s'apparente à une réallocation permettant la reconstruction, alors que l'autre ressemble plus à un synchrosqueezing au second ordre.

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire la réallocation et le synchrosqueezing, dans les sections 3.2 et 3.3 respectivement. Nous insisterons sur les liens entre ces deux approches, et énoncerons un théorème d'approximation pour le synchrosqueezing de la TFCT, avec des hypothèses plus faibles que la version existante. Ensuite, nous aborderons le problème des fortes modulations fréquentielles, en proposant deux nouvelles extensions du synchrosqueezing : le SST oblique (section 3.4) et le SST d'ordre 2 (section 3.5). Des expériences numériques montreront la validité de ces nouvelles approches dans la section 3.6.

3.2 Réallocation

Le principe de réallocation, introduit dans [Kodera 1976] et généralisé dans [Auger 1995], permet de s'approcher de la représentation TF idéale à partir d'une transformée classique, en déplaçant simplement le module des coefficients vers les lignes de crête formées par chacun des modes. Ce déplacement est calculé d'après la phase de la transformée. Cette section décrit brièvement la méthode et donne certaines interprétations, en se concentrant sur la TFCT et la TOC. Pour une présentation plus détaillée, on renverra le lecteur à [Auger 1995, Chassande Mottin 1998]. Dans tout ce chapitre, nous supposerons que les fonctions analysantes g et ψ sont dans la classe de Schwartz, ce qui permettra de dériver les transformées sans se poser la question de leur régularité.

3.2.1 Principe

On considère un signal multicomposantes f, et une distribution TF D_f de ce signal. On suppose qu'il existe des *opérateurs de réallocation* $\hat{\omega}_f(\eta, t)$ et $\hat{\tau}_f(\eta, t)$, formant un champ de vecteur pointant sur les lignes de crête. La réallocation consiste alors à effectuer dans le plan TF la transformation $(\eta, t) \mapsto (\hat{\omega}_f(\eta, t), \hat{\tau}_f(\eta, t))$. La transformée réallouée de D_f s'écrit alors

$$R_f(\omega, \tau) = \int_{\mathbb{R}^2} |D_f(\eta, t)| \delta(\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t)) \delta(\tau - \hat{\tau}_f(\eta, t))\, d\eta dt. \tag{3.2}$$

Cette écriture formelle n'est pas parfaitement correcte mathématiquement, et doit être comprise comme la limite d'une intégrale où l'on remplacerait la fonctionnelle

de Dirac δ par une approximation. Une définition mathématiquement rigoureuse sera donnée dans la section suivante pour le synchrosqueezing, nous utiliserons cependant cette notation, très courante en traitement du signal. La Figure 3.1 illustre le fonctionnement de la réallocation sur un signal multi-composantes pour la TFCT. On observe que les opérateurs de réallocation sont définis autour de chaque ridge, la transformée V_f étant trop faible ailleurs pour pouvoir les calculer de manière stable. Il est clair que la transformée réallouée est bien plus concentrée dans le plan temps-fréquence que le spectrogramme, on obtient ainsi quasiment trois lignes.

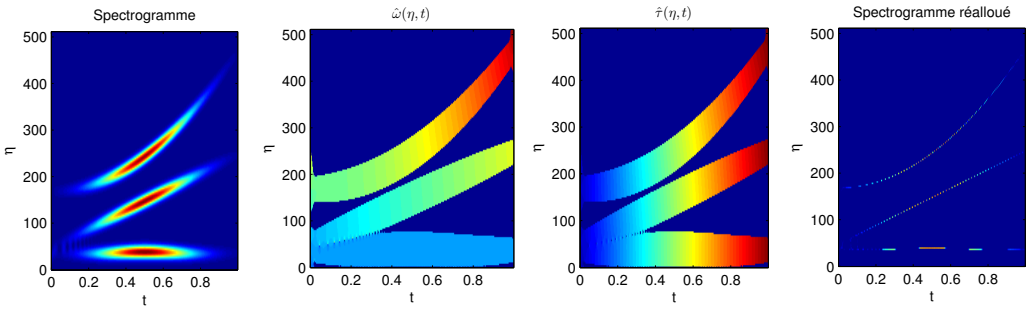


Figure 3.1 Illustration de la réallocation de la TFCT. De gauche à droite : le spectrogramme d'un signal multicomposantes f, ses opérateurs de réallocation $\hat{\omega}_f$ et $\hat{\tau}_f$, et son spectrogramme réalloué.

3.2.2 Réallocation de la TFCT

Définition 3.2.1. *Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$. Les opérateurs de réallocation pour la TFCT sont définis en tout point (η, t) où la TFCT est non nulle par*

$$\begin{cases} \hat{\omega}_f(\eta,t) = \dfrac{1}{2\pi}\partial_t \arg V_f(\eta,t) \\ \hat{\tau}_f(\eta,t) = t - \dfrac{1}{2\pi}\partial_\eta \arg V_f(\eta,t) \end{cases} \tag{3.3}$$

Pour le calcul pratique de ces opérateurs, on peut exprimer la dérivée de la phase comme la partie réelle d'une dérivée normalisée :

$$\frac{1}{2\pi}\partial_x \arg V_f(\eta,t) = \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial_x V_f(\eta,t)}{V_f(\eta,t)}\right\}, \tag{3.4}$$

la variable x désignant η ou t. Par ailleurs, le calcul des dérivées de la TFCT revient à calculer la TFCT du signal avec les fenêtres g' et $x \mapsto xg$, notées respectivement $V_f^{g'}$ et V_f^{xg}. Avec ces notations, on a donc

$$\begin{cases} \hat{\omega}_f(\eta,t) = \eta - \mathcal{R}e\left\{\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{V_f^{g'}(\eta,t)}{V_f^{g}(\eta,t)}\right\} \\ \hat{\tau}_f(\eta,t) = t + \mathcal{R}e\left\{\dfrac{V_f^{xg}(\eta,t)}{V_f^{g}(\eta,t)}\right\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

Définition 3.2.2. *Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ son spectrogramme réalloué est défini par*

$$S_f(\omega, \tau) = \int_{\mathbb{R}^2} |V_f(\eta, t)|^2 \delta(\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t))\delta(\tau - \hat{\tau}_f(\eta, t))\, d\eta dt. \tag{3.6}$$

Interprétations

L'équation (3.3) permet d'interpréter $\hat{\omega}_f$ comme la fréquence instantanée du signal filtré par g_η. On peut par ailleurs assimiler le décalage temporel $\tau_f(\eta, t) - t$ à un retard de groupe. Une autre interprétation, qui est soulignée dans [Auger 1995], fait appel à une écriture différente du spectrogramme. On a en effet

$$|V_f(\eta, t)|^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{WV}_f(\xi, \tau)\, \mathrm{WV}_g(\xi - \eta, \tau - t)\, d\xi d\tau, \tag{3.7}$$

où WV_f et WV_g sont les transformées de Wigner-Ville du signal et de la fenêtre d'analyse. Cette écriture montre que le spectrogramme d'un signal est un lissage bidimensionnel de sa transformée de Wigner-Ville. Une manière équivalente de définir les opérateurs de réallocation est de calculer les barycentres normalisés au moyen de cette écriture intégrale :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_f(\eta, t) = \dfrac{\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \xi\, \mathrm{WV}_f(\xi, \tau)\, \mathrm{WV}_g(\xi - \eta, \tau - t)\, d\xi d\tau}{|V_f(\eta, t)|^2} \\ \hat{\tau}_f(\eta, t) = \dfrac{\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \tau\, \mathrm{WV}_f(\xi, \tau)\, \mathrm{WV}_g(\xi - \eta, \tau - t)\, d\xi d\tau}{|V_f(\eta, t)|^2} \end{cases}.$$

Théorème 3.2.1. *Soit un chirp linéaire $h(t) = Ae^{2i\pi\phi(t)}$, où ϕ est une fonction polynomiale de degré 2 et $A > 0$. Alors, en tout point où les opérateurs de réallocation sont définis, on a $\hat{\omega}_h(\eta, t) = \phi'(\hat{\tau}_h(\eta, t))$.*

Ce résultat est important, car il montre que les opérateurs $\hat{\omega}$ et $\hat{\tau}$ localisent parfaitement un chirp linéaire dans le plan temps-fréquence, car les coefficients $V_f(\eta, t)$ sont déplacés exactement sur le ridge. Cela suggère que le spectrogramme réalloué d'un chirp linéaire correspond quasiment à sa représentation TF idéale. Pour une superposition de chirps, on peut raisonner comme dans le chapitre 2 : si les fréquences instantanées sont suffisamment éloignées, la TFCT de chaque mode occupe un support distinct dans le plan TF. Pour de tels signaux, on peut donc raisonnablement considérer que la réallocation traite chaque mode de manière isolée, localisant ainsi les ridges avec une grande précision.

Ce résultat est démontré dans [Auger 1995] en utilisant la propriété de parfaite localisation des chirps linéaires de la transformée de Wigner-Ville. Nous donnons quand même une preuve de ce résultat, en dérivant directement V_h.

Démonstration. On écrit

$$V_h(\eta, t) = A \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\phi(\tau)} g(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau.$$

En dérivant sous le signe intégral, il vient

$$\partial_\eta V_h(\eta,t) = -2i\pi A \int_{\mathbb{R}} (\tau - t) e^{2i\pi\phi(\tau)} g(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau$$
$$\partial_t V_h(\eta,t) = 2i\pi A \int_{\mathbb{R}} \phi'(\tau) e^{2i\pi\phi(\tau)} g(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau.$$

L'hypothèse $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ assure la convergence de ces intégrales, la fonction ϕ' étant affine. Par ailleurs, on peut écrire $\phi'(\tau) = \phi'(t) + (\tau - t)\phi''$, ϕ'' étant une constante. On a donc la relation

$$\partial_t V_h(\eta,t) = 2i\pi\phi'(t) V_h(\eta,t) - \phi'' \partial_\eta V_h(\eta,t).$$

On conclut en utilisant les équations (3.3) et (3.4) : si $V_h(\eta,t) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial_t V_h(\eta,t)}{2i\pi V_h(\eta,t)} &= \phi'(t) - \phi'' \frac{\partial_\eta V_h(\eta,t)}{2i\pi V_h(\eta,t)} \\ &= \phi'\left(t - \frac{\partial_\eta V_h(\eta,t)}{2i\pi V_h(\eta,t)}\right) \text{ car } \phi' \text{ est linéaire.}\end{aligned}$$

En prenant les parties réelles, on obtient bien $\hat{\omega}_h(\eta,t) = \phi'(\hat{\tau}_h(\eta,t))$. □

3.2.3 Réallocation de la TOC

Définition 3.2.3. *Les opérateurs de réallocation pour la TOC sont définis en tout point (a,t) où $W_f(a,t) \neq 0$ par*

$$\begin{cases} \hat{\omega}_f(a,t) = \mathcal{R}e\left\{\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{\partial_t W_f(a,t)}{W_f(a,t)}\right\} \\ \hat{\tau}_f(a,t) = \mathcal{R}e\left\{\dfrac{\int_{\mathbb{R}} \tau f(\tau)\frac{1}{a}\psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right)^*\, d\tau}{W_f(a,t)}\right\} \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour alléger les notations, ces opérateurs sont désignés par la même lettre qu'à la section précédente, les variables (η,t) ou (a,t) permettant de distinguer les cas de la TFCT et de la TOC. On remarque que $\hat{\omega}_f$ est toujours la dérivée temporelle de la phase de la TOC, alors que l'opérateur horizontal $\hat{\tau}_f$ ne s'exprime pas sous la forme d'une dérivée de la phase. Le même type d'interprétation que dans le cas de la TFCT réallouée s'applique, et on peut également calculer ces opérateurs de réallocation grâce à trois transformées en ondelettes. Comme nous réalisons le calcul de la TOC dans le domaine de Fourier (cf. section 2.2.2), nous utilisons les notations $W_f^{\hat{\psi}}$, $W_f^{\nu\hat{\psi}}$ et $W_f^{\hat{\psi}'}$ pour désigner la TOC calculée respectivement avec les fonctions $\hat{\psi}$, $\nu \mapsto \nu\hat{\psi}$ et $(\hat{\psi})'$. Les opérateurs de réallocation s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_f(a,t) = \mathcal{R}e\left\{\dfrac{W_f^{\nu\hat{\psi}}(a,t)}{W_f^{\hat{\psi}}(a,t)}\right\} \\ \hat{\tau}_f(a,t) = t + a\mathcal{R}e\left\{\dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{W_f^{\hat{\psi}'}(a,t)}{W_f^{\hat{\psi}}(a,t)}\right\}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Enfin, on montre également que la TOC réallouée localise parfaitement les chirps linéaires.

Théorème 3.2.2. *On considère une ondelette ψ telle que ψ, ψ' et $t \mapsto t\psi(t)$ soient des ondelettes admissibles. Alors, la TOC réallouée utilisant cette ondelette localise parfaitement les chirps linéaires, c'est-à-dire qu'en tout point (a,t) où $W_h(a,t) \neq 0$, on a $\hat{\omega}_f(a,t) = \phi'(\hat{\tau}_f(a,t))$.*

Démonstration. La démonstration est quasiment la même que celle du théorème 3.2.1, dans le cas du spectrogramme réalloué. □

Depuis la généralisation de la réallocation en 1995, plusieurs variantes ont amélioré le fonctionnement de la méthode, notamment [Chassande-Mottin 1997], ou plus récemment [Xiao 2007]. Notre objectif dans ce chapitre porte plutôt sur la recherche d'une variante de la réallocation qui soit inversible. Le synchrosqueezing, décrit dans la section suivante, en est le premier exemple.

3.3 Synchrosqueezing

Nous venons de voir que la réallocation est un moyen relativement simple et peu coûteux pour améliorer une représentation TF en exploitant sa redondance. Mais elle souffre d'un défaut non négligeable, qui est peut-être la cause de son succès modeste : elle n'est pas inversible, car elle ne fait pas intervenir la phase. Reconstruire les modes à partir d'une transformée réallouée n'est donc pas possible directement. On s'intéresse ici à un objectif différent : obtenir une représentation TF idéale où la transformée sur chaque ridge est égale au mode correspondant, ce qui permet une reconstruction directe. Pour un signal multicomposantes $f(t) = \sum_k f_k(t) = \sum_k A_k(t)e^{2i\pi\phi_k(t)}$, une telle représentation s'écrit

$$\mathrm{TIR}_f(\eta,t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)\delta(\eta - \phi_k'(t)). \tag{3.10}$$

Le synchrosqueezing est une variante de la réallocation, qui s'approche d'une telle représentation TF idéale inversible. Introduit d'abord dans [Daubechies 1996], il a connu un renouveau ces deux dernières années avec la publication de [Daubechies 2011], qui donne un résultat important d'approximation des signaux multicomposantes.

Le principe est de modifier le fonctionnement de la réallocation, de manière à obtenir une formule de reconstruction locale. Nous verrons cependant que c'est au prix d'une hypothèse de faible modulation fréquentielle, qui n'existe pas dans la réallocation classique. Plus précisément, on réalloue les coefficients uniquement en fréquence, par l'opération $\eta \mapsto \hat{\omega}_f(\eta,t)$ pour la TFCT ou $a \mapsto \hat{\omega}_f(a,t)$ pour la TOC. Comme cette transformation se fait à t fixé, on peut ultérieurement utiliser la formule de Morlet (tronquée) pour reconstruire les modes, comme au chapitre précédent. La Figure 3.2 illustre la méthode dans le cadre de la TFCT, en la comparant à la réallocation standard.

3.3.1 Synchrosqueezing de la TOC

Nous présentons d'abord le cas de la TOC introduit puis formalisé dans [Daubechies 1996, Daubechies 2011]. On définit successivement la classe des signaux multicomposantes

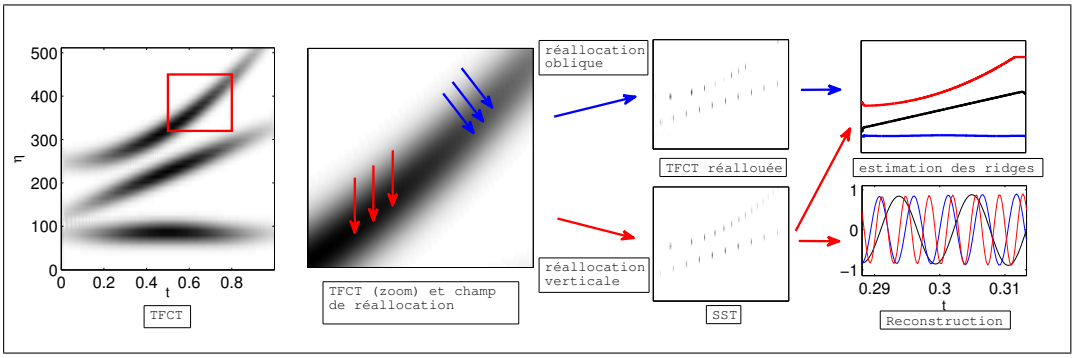


FIGURE 3.2 Illustration de la réallocation et du synchrosqueezing

séparés, ainsi que le synchrosqueezing. Cette transformée sera dénommée SST en ondelettes, ou bien simplement SST lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 3.3.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et $\Delta \in (0,1)$. On note $\mathcal{A}_{\Delta,\varepsilon}$ l'ensemble des signaux multicomposantes $f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)$ où*

- *les $f_k(t) = A_k(t)e^{2i\pi\phi_k(t)}$ vérifient les hypothèses de variations lentes du théorème 2.4.2 : $A_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $\sup_t \phi_k'(t) < \infty$ et pour tout t, $A_k(t) > 0$, $\phi_k'(t) > 0$, $|A_k'(t)| \leq \varepsilon\phi_k'(t)$, $|\phi_k''(t)| \leq \varepsilon\phi_k'(t)$ et $|\phi_k''(t)| \leq M_k$.*
- *les f_k sont séparés à la résolution Δ (définition 2.3.3), c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \cdots, K-1\}$ et pour tout t,*

$$\frac{\phi_{k+1}'(t) - \phi_k'(t)}{\phi_{k+1}'(t) + \phi_k'(t)} > \Delta.$$

Définition 3.3.2. *Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$, $\gamma, \delta > 0$ et f un signal multicomposantes, on définit le synchrosqueezing d'ondelettes (ou SST) de f au seuil γ, à la précision δ par*

$$T_f^{\delta,\gamma}(\omega,t) = \frac{1}{C_\psi'} \int_{|W_f(a,t)|>\gamma} W_f(a,t) \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(a,t)}{\delta}\right) \frac{da}{a}. \tag{3.11}$$

Si on fait tendre δ vers 0, on voit que l'on obtient une sorte de transformée réallouée, mais où l'on remplace $\hat{\tau}_f(a,t)$ par t, et où l'on utilise une formule de Morlet tronquée, ce qui permet la reconstruction de chaque mode a posteriori. En gardant les notations de la réallocation, on peut ainsi écrire formellement

$$T_f^{\gamma}(\omega,t) = \lim_{\delta\to 0} T_f^{\delta,\gamma}(\omega,t) = \frac{1}{C_\psi'} \int_{|W_f(a,t)|>\gamma} W_f(a,t)\delta\left(\omega - \hat{\omega}_f(a,t)\right) \frac{da}{a}. \tag{3.12}$$

On peut à présent énoncer un résultat d'approximation.

Théorème 3.3.1. *Soit $f \in \mathcal{A}_{\Delta,\varepsilon}$, on définit $\gamma = \varepsilon^{1/3}$. Soit une ondelette $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\operatorname{supp} \hat{\psi} \subset [1-\Delta, 1+\Delta]$, et une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$. Alors, si ε est suffisamment petit,*

- *$|W_f(a,t)| > \gamma$ seulement lorsqu'il existe $k \in \{1 \cdots, K\}$ tel que $(a,t) \in Y_k := \{(a,t) \,/\, |a\phi_k'(t) - 1| < \Delta\}$.*

- *Pour tout $k \in \{1 \cdots, K\}$ et toute paire $(a,t) \in Y_k$ telle que $|W_f(a,t)| > \gamma$, on a*

$$|\hat{\omega}_f(a,t) - \phi_k'(t)| \leq \gamma. \tag{3.13}$$

- *Pour tout $k \in \{1 \cdots, K\}$ il existe une constante C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \gamma} T_f^{\delta,\gamma}(\omega,t)\, d\omega \right) - f_k(t) \right| \leq C\gamma. \tag{3.14}$$

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra se référer à [Daubechies 2011]. Ce théorème étend donc le résultat de reconstruction du corollaire 2.4.2 à un support d'intégration $\{a \,/\, |\hat{\omega}_f(a,t) - \phi_k'(t)| < \gamma\}$, déterminé grâce à l'opérateur de réallocation $\hat{\omega}_f$. Il montre que l'on peut utiliser le synchrosqueezing en deux temps : le calcul de $T_f^{\gamma} = \lim_{\delta \to 0} T_f^{\delta,\gamma}$ fournit une représentation temps-fréquence concentrée, et l'intégration de cette représentation autour des ridges (équation (3.14)) permet de reconstruire les modes. On voit que le résultat est plus compliqué et plus faible que pour le théorème 2.4.2, car l'utilisation de $\hat{\omega}_f$ fait commettre une erreur supplémentaire. Une observation importante est l'hypothèse de faible modulation fréquentielle $|\phi_k''(t)| \leq \varepsilon \phi_k'(t)$, qui est nécessaire dans la mesure où l'on suppose $\hat{\tau}_f(a,t) \approx t$. Le SST convient donc pour des perturbations d'ondes pures, mais pas pour des chirps linéaires ou exponentiels.

3.3.2 Synchrosqueezing de la TFCT

Établi à l'origine uniquement pour la TOC, le synchrosqueezing n'a pas été clairement étendu à la TFCT. Notons qu'une approche récente [Thakur 2011] a proposé une variante du SST appliqué à la TFCT, mais qui ne permet pas la reconstruction des modes directement. En outre, le théorème d'approximation démontré dans ces travaux suppose une séparation fréquentielle globale des modes, du type $\inf_t \phi_{k+1}'(t) > \sup_t \phi_k'(t)$. Cette dernière hypothèse est très restrictive, et limite en pratique son utilisation.

Nous définissons ici une extension du SST appliqué à la TFCT qui permet la reconstruction des modes pour des signaux multicomposantes localement séparés. Notons que cette approche a été présentée dans [Auger 2013], mais sans le théorème d'approximation.

Définition 3.3.3. *Soit $\varepsilon > 0$ et $\Delta \in (0,1)$. On note $\mathcal{B}_{\Delta,\varepsilon}$ l'ensemble des signaux multicomposantes $f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t)$ où*

- *les $f_k(t) = A_k(t) e^{2i\pi\phi_k(t)}$ vérifient les hypothèses de variations lentes du théorème 2.4.1 : $A_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $\sup_t \phi_k'(t) < \infty$ et pour tout t, $A_k(t) > 0$, $\phi_k'(t) > 0$, $|A_k'(t)| \leq \varepsilon$ et $|\phi_k''(t)| \leq \varepsilon$.*
- *les f_k sont séparés à la résolution Δ (définition 2.3.3), c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \cdots, K-1\}$ et pour tout t,*

$$\phi_{k+1}'(t) - \phi_k'(t) > 2\Delta.$$

Définition 3.3.4. *Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$, $\gamma, \delta > 0$ et f un signal multi-composantes, on définit le synchrosqueezing de Fourier de f avec le seuil γ et à la précision δ par*

$$T_f^{\delta,\gamma}(\omega, t) = \frac{1}{g(0)} \int_{|V_f(\eta,t)|>\gamma} V_f(\eta, t) \frac{1}{\delta} \rho \left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t)}{\delta} \right) d\eta. \tag{3.15}$$

Si on fait tendre δ vers 0, on obtient là encore une transformée réallouée "au premier ordre" (car $\hat{\tau}_f = 0$) et basée sur les coefficients, et non sur leur module :

$$T_f^{\gamma}(\omega, t) = \lim_{\delta \to 0} T_f^{\delta,\gamma}(\omega, t) = \frac{1}{g(0)} \int_{|V_f(\eta,t)|>\gamma} V_f(\eta, t) \delta \left(\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t) \right) d\eta. \tag{3.16}$$

L'analogue du théorème 3.3.1 pour la TFCT s'énonce comme suit.

Théorème 3.3.2. *Soit $f \in \mathcal{B}_{\Delta,\varepsilon}$, et $\nu \in (0, \frac{1}{2})$. Soit une fenêtre $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} g \in [-\Delta, \Delta]$, et une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$. Alors, si ε est suffisamment petit,*

- *$|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$ seulement lorsqu'il existe $k \in \{1 \cdots, K\}$ tel que $(\eta, t) \in Z_k := \{(\eta, t) \,/\, |\eta - \phi_k'(t)| < \Delta\}$.*
- *Pour tout $k \in \{1 \cdots, K\}$ et toute paire $(\eta, t) \in Z_k$ telle que $|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$, on a*
$$|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| \leq \varepsilon^\nu. \tag{3.17}$$
- *Pour tout $k \in \{1 \cdots, K\}$ il existe une constante C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
$$\left| \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} T_f^{\delta,\gamma}(\omega, t) \, d\omega \right) - f_k(t) \right| \leq C \varepsilon^\nu. \tag{3.18}$$

Ce théorème est très proche du cas de la TOC, les principales différences étant les hypothèses de faible modulation et de séparation, déjà utilisées dans le théorème 2.4.1. On a par ailleurs remplacé $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ par ε^ν, ce qui ne change pas le raisonnement. La démonstration, bien que semblable au cas de la TOC, n'a jamais été publiée sous ces hypothèses, aussi la présenterons-nous dans l'annexe A.

3.3.3 Illustrations

Avant d'illustrer le fonctionnement du synchrosqueezing, il convient d'étudier sa mise en oeuvre. Le calcul de $\hat{\omega}_f$ et le déplacement des coefficients se fait comme dans la réallocation classique. Pour la reconstruction, les équations (3.14) et(3.18) montrent que l'on doit intégrer le SST autour du ridge, la longueur de l'intervalle d'intégration étant de l'ordre de $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. En pratique, ε n'étant pas connu, on choisit un paramètre d à la place. On estime donc le mode f_k à partir du SST T_f selon la formule :

$$f_k(t) \approx \int_{\phi_k'(t)-d}^{\phi_k'(t)+d} T_f(\omega, t) \, d\omega. \tag{3.19}$$

Pour illustrer le fonctionnement du synchrosqueezing, on reprend les signaux-tests à trois composantes utilisés dans le chapitre précédent (section 2.5). On rappelle que

le signal-test 1 est une superposition de chirps linéaires et quadratiques, qui est bien adapté à la TFCT car les modulations fréquentielles ne varient pas beaucoup avec la fréquence instantanée. Le signal-test 2 en revanche est composé de chirps exponentiels, dont la modulation ϕ'' est proportionnelle à la fréquence instantanée ϕ' : il est donc bien adapté à la TOC. La Figure 3.3 montre ainsi le SST sur ces signaux, pour la TFCT et la TOC, en comparant avec la réallocation. On observe que lorsque la pente du ridge $\phi''(t)$ est forte, le résultat du SST est moins concentré que celui donné par la réallocation. Le reste du temps, le SST semble donner un résultat similaire. Pour illustrer la spécificité du SST, nous montrons par ailleurs dans la Figure 3.4

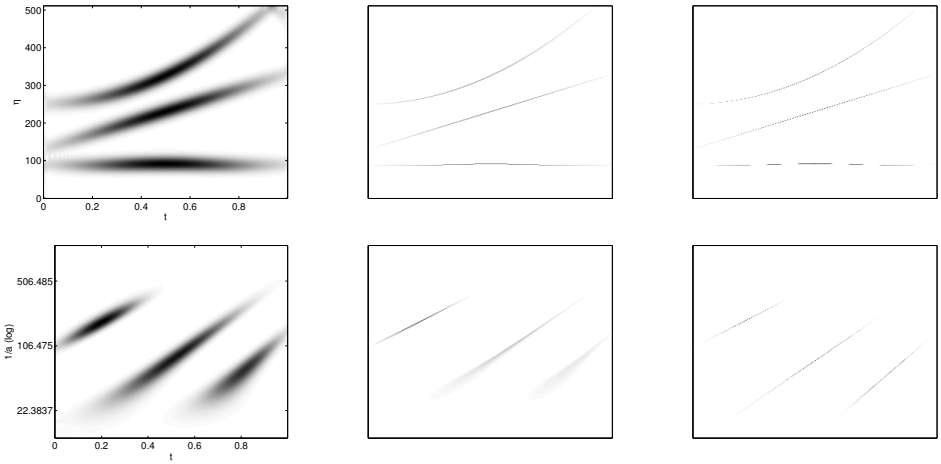


Figure 3.3 Illustration du synchrosqueezing pour les signaux tests de la section 2.5. En haut, de gauche à droite : le spectrogramme d'une somme de chirps polynomiaux, son SST et son spectrogramme réalloué. Ligne du bas : le scalogramme d'une superposition de chirps exponentiels, son SST et son scalogramme réalloué.

un exemple d'extraction des ridges et de reconstruction des modes. On utilise pour cela les mêmes signaux, mais en ajoutant un bruit blanc gaussien, de SNR 30 dB. On observe bien que le bruit se diffuse dans les plans TF et TE, et qu'il perturbe le synchrosqueezing. Le niveau du bruit étant raisonnable, on parvient cependant à extraire les lignes de crête. Il suffit alors de sommer les coefficients au voisinage de chaque ridge, pour reconstruire les modes. On observe que les résultats sont assez bons pour la TFCT sur les chirps polynomiaux, puisqu'on parvient à séparer les modes, en gagnant environ 12 dB par rapport au signal bruité. Les performances sont un peu moins bonnes pour la TOC sur les chirps exponentiels, notamment parce que les modes sont intermittents, alors que les ridges sont extraits sur toute la durée du signal : on obtient donc du bruit supplémentaire dans la reconstruction. On présentera des résultats numériques plus poussés dans la section 3.6, grâce à une comparaison de toutes les méthodes.

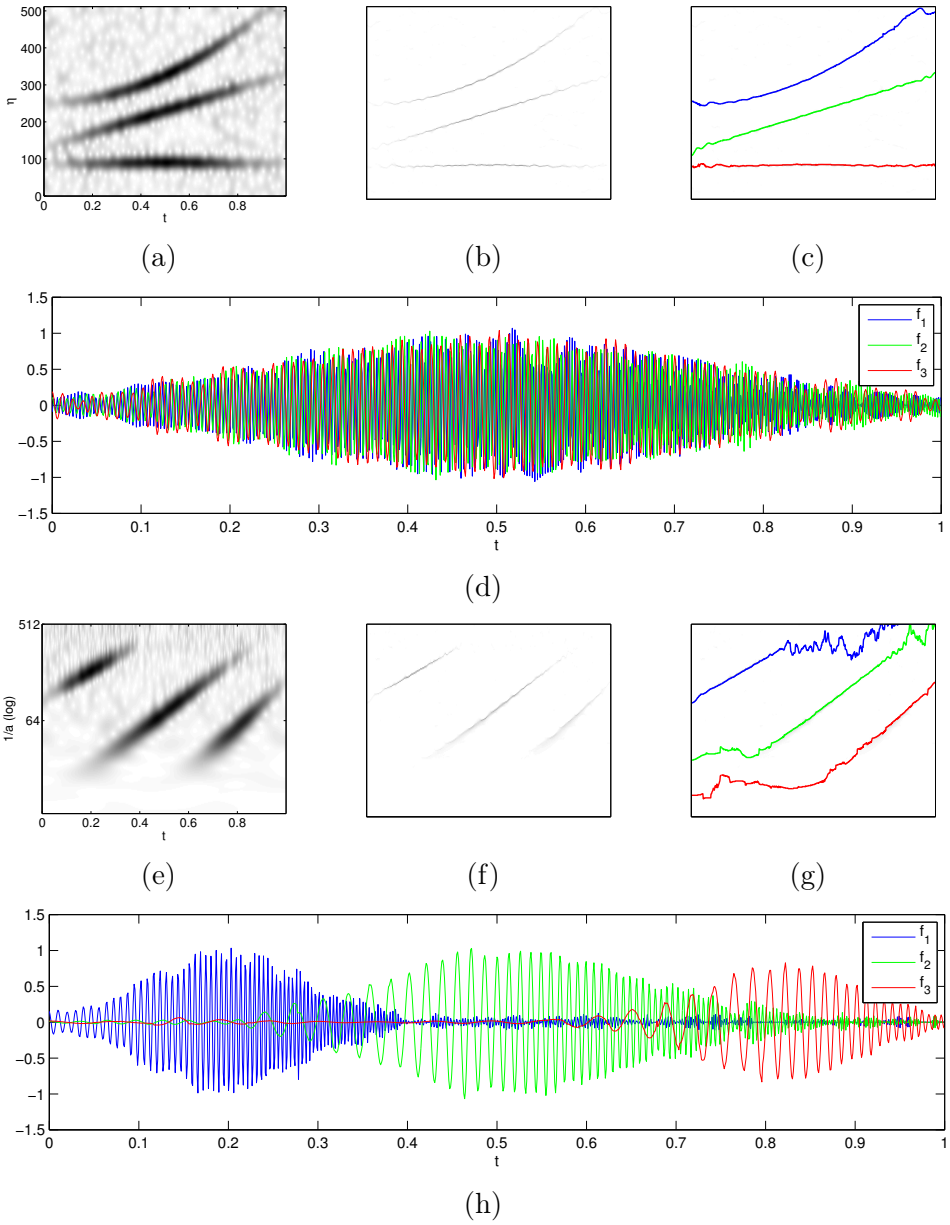


Figure 3.4 Illustration de la reconstruction sur des signaux multicomposantes faiblement bruités. (a) et (b) : TFCT et SST d'une somme de chirps polynomiaux, bruités à SNR = 30 dB. (c) : le SST avec les ridges estimés. (d) : les trois modes reconstruits, les SNRs valant respectivement 43, 43 et 41 dB. (e) à (h) : mêmes figures pour la TOC, avec une somme de chirps exponentiels. Les SNRs valent 36, 34 et 24 dB.

3.4 Synchrosqueezing oblique

Si le synchrosqueezing offre une solution attrayante pour améliorer la représentation TF tout en permettant de reconstruire les modes d'un signal, il s'avère bien moins efficace que la réallocation dès lors que la modulation fréquentielle ϕ'' est non négligeable. Or c'est le cas pour de nombreux signaux naturels, au moins sur certains intervalles de temps, et c'est souvent pendant ces grandes modulations de fréquence qu'une bonne localisation est attendue. Comme dans le chapitre 2 pour les ridges, on tentera de construire un synchrosqueezing du deuxième ordre, qui tienne compte de la modulation fréquentielle, afin d'obtenir une représentation au moins aussi concentrée que le fait la réallocation.

Bien que la formalisation du synchrosqueezing soit récente, plusieurs travaux de recherche se sont attaqués à cet aspect, dont [Li 2012], mais sans résoudre directement le problème. Dans cet article, il s'agit en effet d'une approche en deux étapes, utilisant un premier synchrosqueezing, une première estimation des ridges puis une démodulation, et enfin un second SST.

On a vu dans la section précédente que la réallocation tient compte naturellement du terme de second ordre de la phase, grâce à l'opérateur de décalage temporel. Mais, si l'on ne travaille plus à temps fixé, on ne peut plus utiliser une intégration locale en fréquence ou en échelle comme dans le SST classique. L'enjeu est donc ici d'adapter la formule de reconstruction aux opérateurs de réallocation. Nous allons ainsi proposer un synchrosqueezing oblique, qui améliore la concentration de la représentation tout en restant inversible. Nous verrons cependant que cette solution n'est pas entièrement satisfaisante , ce qui nous amènera à proposer dans la section 3.5 un SST au deuxième ordre différent, qui réalloue les coefficients en fréquence seulement, mais en adaptant l'opérateur de réallocation $\hat{\omega}_f$.

3.4.1 Principe

Pour la TFCT comme pour la TOC, on dispose d'opérateurs de réallocation qui localisent parfaitement les chirps linéaires. C'est-à-dire que si $h(t) = e^{2i\pi\phi(t)}$ a une fréquence instantanée ϕ' linéaire, on a partout $\hat{\omega}_h(\eta, t) = \phi'(\hat{\tau}_h(\eta, t))$. Les coefficients du spectrogramme réalloués en $(\phi'(\tau), \tau)$ sont donc l'ensemble

$$I_\tau = \{(\eta, t) \,/\, \hat{\tau}_h(\eta, t) = \tau\} = \{(\eta, t) \,/\, \hat{\omega}_h(\eta, t) = \phi'(\tau)\}. \tag{3.20}$$

Le but de cette section est de mettre en place une formule de reconstruction de $h(\tau)$ sous forme d'intégrale sur I_τ. Par rapport au synchrosqueezing, l'ensemble I_τ n'est plus la droite verticale (η, τ), on ne peut donc plus utiliser la formule de Morlet telle quelle. On va essayer de s'y ramener en utilisant la propriété d'invariance suivante.

Proposition 3.4.1. *Soit h un chirp linéaire, c'est-à-dire un mode $h(t) = Ae^{2i\pi\phi(t)}$, où ϕ'' est constante. Alors pour tous η, t, u réels, on a*

$$V_h(\eta + \phi'' u, t + u) = V_h(\eta, t) e^{2i\pi u(\phi'(t) + \frac{1}{2}\phi'' u)}.$$

Démonstration. Rappelons que la TFCT d'un chirp linéaire h s'écrit

$$V_h(\eta, t) = h(t)\widehat{g}c(\eta - \phi'(t)), \text{ avec } c(x) = e^{i\pi\phi'' x^2}. \tag{3.21}$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned} V_h(\eta+\phi''u, t+u) &= h(t+u)\widehat{gc}(\eta+\phi''u-\phi'(t+u)) \\ &= h(t+u)\widehat{gc}(\eta-\phi'(t)) \\ &= h(t)\widehat{gc}(\eta-\phi'(t))e^{2i\pi[\phi'(t)u+\frac{1}{2}\phi''u^2]}. \end{aligned}$$

□

Cela montre que la TFCT d'un chirp linéaire est invariante par translation de vecteur $u\cdot(\phi'',1)$, à un facteur de déphasage près. Ce facteur de déphasage dépend de la distance temporelle de la translation, et de la fréquence instantanée moyenne sur l'intervalle $[t, t+u]$. Cela suggère qu'il est possible de reconstruire le signal au point τ à partir des valeurs de I_τ, en corrigeant la phase des coefficients. Pour ce faire, on doit estimer la modulation ϕ''. Pour appliquer ultérieurement la méthode à des perturbations de chirps linéaires, on souhaite estimer localement la modulation $\phi''(t)$. La prochaine section s'intéresse à cette question, puis définit le synchrosqueezing oblique de Fourier.

3.4.2 Estimation locale de la modulation

Commençons par définir un nouvel opérateur $\hat{q}$. On montrera ensuite que c'est une bonne estimation locale de la modulation fréquentielle $\phi''(t)$.

Définition 3.4.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Son opérateur de modulation est défini en tout point (η, t) où V_h est non nulle et où $\partial_t\hat{\tau}_h(\eta,t) \neq 0$ par :*

$$\hat{q}_f(\eta,t) = \frac{\partial_t\hat{\omega}_h(\eta,t)}{\partial_t\hat{\tau}_h(\eta,t)}. \tag{3.22}$$

Proposition 3.4.2. *Si $h(t) = Ae^{2i\pi\phi(t)}$ où ϕ une fonction polynomiale de degré 2, avec $\phi''(t) = \phi'' \neq 0$, on a en tout point (η, t) où V_h est non nulle et où $\partial_t\hat{\tau}_h(\eta,t) \neq 0$,*

$$\hat{q}_h(\eta,t) = \phi''. \tag{3.23}$$

De plus, on peut calculer $\hat{q}_h(\eta,t)$ en ces points grâce à la formule suivante :

$$\hat{q}_h = \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2i\pi}\frac{V_h^{g''}V_h^g - (V_h^{g'})^2}{V_h^{xg}V_h^{g'} - V_h^{xg'}V_h^g}\right\}, \tag{3.24}$$

où $V_h^{g''}$ et $V_h^{xg'}$ désignent la TFCT de h utilisant respectivement les fenêtres $g''(x)$ et $x \mapsto xg'(x)$.

Démonstration. On commence par écrire les opérateurs de réallocation d'un chirp linéaire. L'équation (3.21) donne

$$\arg V_h(\eta,t) = 2\pi\phi(t) + \arg\widehat{gc}(\eta-\phi'(t)).$$

D'après la définition des opérateurs (équation (3.3)), on a donc

$$\begin{cases} \hat{\omega}_h(\eta,t) = \phi'(t) - \phi''u(\eta-\phi'(t)) \\ \hat{\tau}_h(\eta,t) = t - u(\eta-\phi'(t)), \end{cases} \tag{3.25}$$

où u désigne la fonction $u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\arg \widehat{gc}(\xi)$. En dérivant par rapport à t, il vient

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\omega}_h(\eta,t) = \phi''(1-\phi'' u'(\eta-\phi'(t))) \\ \partial_t \hat{\tau}_h(\eta,t) = 1-\phi'' u'(\eta-\phi'(t)), \end{cases} \tag{3.26}$$

d'où le résultat. Pour le calcul de $\hat{q}$, rappelons d'abord que pour tout signal f,

$$\partial_t V_f^g(\eta,t) = -V_f^{g'}(\eta,t) + 2i\pi\eta V_f^g(\eta,t).$$

Pour alléger les écritures, nous noterons $V_h^g = V_h^g(\eta,t)$. L'équation (3.5) donne

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\omega}_h &= \partial_t \left(\eta - \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{V_h^{g'}(\eta,t)}{V_h^g(\eta,t)} \right\} \right) \\ &= -\mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial_t V_h^{g'} V_h^g - V_h^{g'} \partial_t V_h^g}{(V_h^g)^2} \right\} \\ &= -\mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{(-V_h^{g''} + 2i\pi\eta V_h^{g'}) V_h^g - V_h^{g'}(-V_h^{g'} + 2i\pi\eta V_h^g)}{(V_h^g)^2} \right\} \\ &= \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{V_h^{g''} V_h^g - (V_h^{g'})^2}{(V_h^g)^2} \right\}. \end{aligned}$$

On a de la même manière

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\tau}_h &= \partial_t \left(t + \mathcal{R}e \left\{ \frac{V_h^{xg}(\eta,t)}{V_h^g(\eta,t)} \right\} \right) \\ &= 1 + \mathcal{R}e \left\{ \frac{\partial_t V_h^{xg} V_h^g - V_h^{xg} \partial_t V_h^g}{(V_h^g)^2} \right\} \\ &= 1 + \mathcal{R}e \left\{ \frac{(-V_h^g - V_h^{xg'} + 2i\pi\eta V_h^{xg}) V_h^g - V_h^{xg}(-V_h^{g'} + 2i\pi\eta V_h^g)}{(V_h^g)^2} \right\} \\ &= \mathcal{R}e \left\{ \frac{V_h^{xg} V_h^{g'} - V_h^{xg'} V_h^g}{(V_h^g)^2} \right\}. \end{aligned}$$

□

3.4.3 Synchrosqueezing oblique

On considère un chirp linéaire h, et sa TFCT en (η,t). Par définition, la réallocation déplace le coefficient $V_h(\eta,t)$ vers le point $(\omega,\tau) = (\hat{\omega}_h(\eta,t), \hat{\tau}_h(\eta,t))$. De plus, on sait d'après le théorème 3.2.1 que ce point (ω,τ) appartient au ridge, c'est-à-dire que $\omega = \phi'(\tau)$. Par ailleurs, la proposition 3.4.1 montre que

$$\begin{aligned} V_h(\eta,t) &= V_h(\eta, \tau + t - \tau) \\ &= V_h(\eta + (\tau - t)\phi'', \tau) e^{2i\pi(t-\tau)(\phi'(\tau) + \frac{\phi''}{2}(t-\tau))} \\ &= V_h(\eta + (\tau - t)\phi'', \tau) e^{-i\pi(\tau-t)(2\omega - \phi''(\tau-t))}. \end{aligned}$$

Plutôt que de réallouer $|V_h(\eta,t)|^2$ comme dans la réallocation du spectrogramme, on propose de réallouer le coefficient $V_h(\eta,t)e^{+i\pi(\tau-t)(2\omega-\phi''(\tau-t))} = V_h(\eta + (\tau-t)\phi'', \tau)$.

Ce dernier appartient à la droite $I'_\tau = \{(\eta, \tau) \,/\, \eta \in \mathbb{R}\}$, on espère ainsi se ramener à une formule de reconstruction "à la Morlet" (équation (2.27)). La Figure 3.5 illustre le principe du synchrosqueezing oblique. On se place en un point (ω, τ) du ridge. L'ensemble des coefficients réalloués vers ce point est I_τ, en rouge. On somme chacun de ces coefficients, le déphasage permettant de se ramener à une intégration sur I'_τ, en bleu, de manière à obtenir la formule de reconstruction (2.27). On définit à

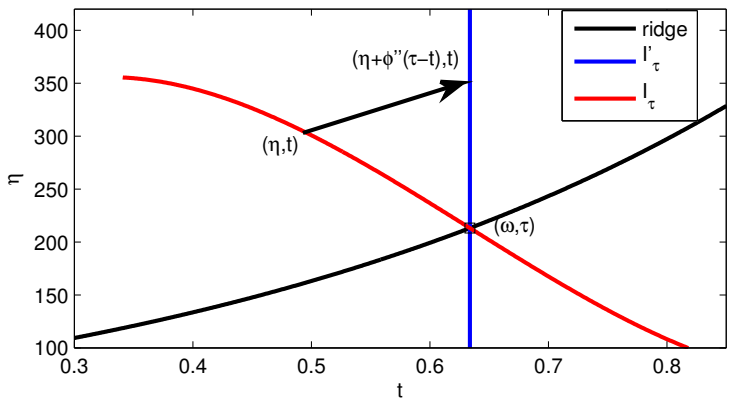


Figure 3.5 Illustration du synchrosqueezing oblique.

présent le synchrosqueezing oblique.

Définition 3.4.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, son synchrosqueezing oblique de Fourier (OSST) est la transformée*

$$T_f^{\delta,\rho}(\omega,\tau) = \frac{1}{g(0)} \iint_{\mathbb{R}^2} V_f(\eta,t) e^{i\pi(2\hat{\omega}_f(\eta,t) - \hat{q}_f(\eta,t)(\hat{\tau}_f(\eta,t)-t))(\hat{\tau}_f(\eta,t)-t)} \frac{1}{\delta^2} \rho\left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(\eta,t)}{\delta}\right) \rho\left(\frac{\tau - \hat{\tau}_f(\eta,t)}{\delta}\right) d\eta dt. \tag{3.27}$$

À la limite quand $\delta \to 0$, on peut écrire formellement

$$T_f(\omega,\tau) = \frac{1}{g(0)} \iint_{\mathbb{R}^2} V_f(\eta,t) e^{i\pi(2\omega - \hat{q}_f(\eta,t)(\tau-t))(\tau-t)} \delta\left(\omega - \hat{\omega}_f(\eta,t)\right) \delta\left(\tau - \hat{\tau}_f(\eta,t)\right) d\eta dt. \tag{3.28}$$

On retrouve ainsi quasiment la définition de la réallocation du spectrogramme, sauf que $|V_f(\eta,t)|^2$ est remplacé par un coefficient complexe déphasé. Pour reconstruire un mode, il suffit de prendre la valeur de T_f sur son ridge, ce qui revient à faire la reconstruction habituelle du SST avec $d = 0$:

$$f_k(t) \approx T_f(\phi'_k(t), t). \tag{3.29}$$

Il faudrait montrer que ce synchrosqueezing oblique localise et reconstruit parfaitement des chirps linéaires, et qu'il reste adapté pour des perturbations de chirps comme dans le théorème 2.4.3. Par manque de temps, nous ne sommes malheureusement pas en mesure de présenter de tels résultats théoriques dans cette thèse. Nous nous contenterons de valider la méthode par des tests numériques, présentés dans la section 3.6.

3.4.4 Illustrations

Commençons par tester le synchrosqueezing oblique sur un exemple simple. On considère un chirp exponentiel, d'amplitude constante :

$$h(t) = \exp\left(60i\pi e^{2t}\right).$$

La Figure 3.6 montre la TFCT, le synchrosqueezing standard et sa variante oblique, pour différentes tailles de fenêtre. Il est clair que le SST standard ne parvient pas à réallouer ce signal de manière satisfaisante, alors que le synchrosqueezing oblique (formule (3.27)) donne une représentation bien plus concentrée, similaire à ce que donne la réallocation. Ce phénomène s'accentue lorsque la taille de la fenêtre (paramètre σ) est grande, car cela rend l'approximation de la phase au premier ordre encore moins pertinente.

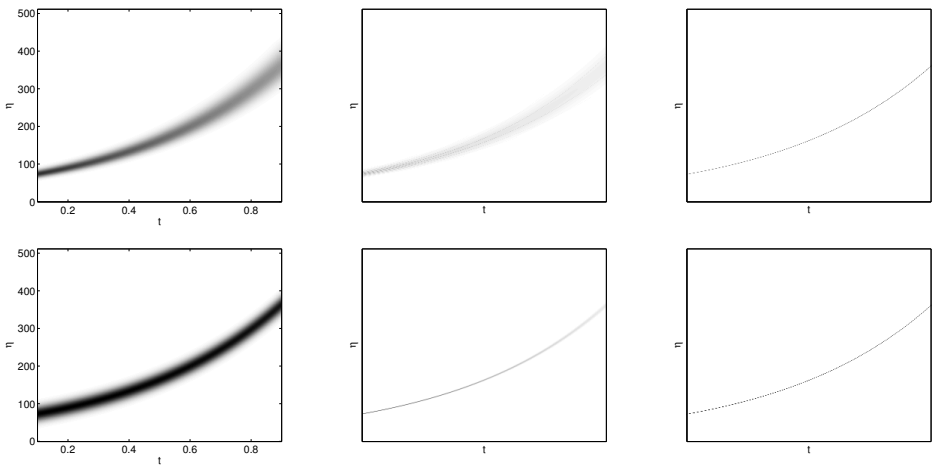


Figure 3.6 Illustration du synchrosqueezing oblique de Fourier pour un chirp exponentiel. De gauche à droite : le spectrogramme, le SST standard, le SST oblique. On utilise une fenêtre gaussienne avec $\sigma = 0.1$ (en haut) et $\sigma = 0.03$ (en bas).

On obtient donc bien une transformée presque similaire à la réallocation standard, les opérateurs de réallocation étant identiques. Lorsque l'on tente de reconstruire les modes, on est cependant confronté à deux difficultés :

- Lorsqu'on a affaire à des perturbations de chirps linéaires comme dans la Figure 3.6, on sait que les opérateurs de réallocation commettent une petite erreur, que le synchrosqueezing standard compense en effectuant une deuxième intégration autour du ridge. Cela revient en fait à utiliser un paramètre δ non nul dans l'équation (3.27). Pour le synchrosqueezing oblique, cette démarche en deux temps n'est cependant plus possible, car on a modifié la phase des coefficients. On peut certainement trouver des formules adaptées, qui donneraient une bonne reconstruction avec un paramètre δ ne tendant pas vers 0, mais ça serait au détriment de la localisation.
- D'autre part, même pour un chirp linéaire pur la formule (3.29) ne donne pas une reconstruction parfaite en pratique. En effet, pour calculer le synchrosqueezing oblique on doit intégrer numériquement sur la courbe I_τ, ce qui

cause des erreurs numériques à cause de la grille de discrétisation. Ce problème n'apparaît pas dans le synchrosqueezing classique, puisque la courbe I_τ est dans ce cas la ligne verticale $t = \tau$, qui correspond parfaitement à la grille discrète.

La Figure 3.7 illustre la reconstruction du synchrosqueezing oblique, sur le chirp exponentiel de la figure 3.6. On compare également les résultats avec la réallocation proposée par Gardner [Gardner 2006]. Dans cette dernière, le déphasage $(\hat{\omega}(\eta, t) - \frac{1}{2}\hat{q}(\eta, t))$ est remplacé par $(\hat{\omega}(\eta, t) + \eta)$, sans que cette formule soit expliquée en détail. Les résultats restent corrects pour des modulations raisonnablement faibles, mais deviennent franchement mauvais sinon. Dans notre exemple, le mode est reconstruit

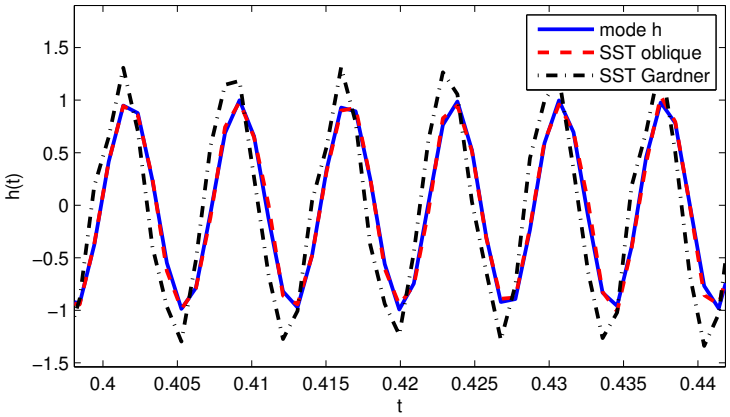


Figure 3.7 Illustration de la reconstruction à partir du SST oblique, sur le signal de la Figure 3.6. On représente une portion du signal h, ainsi que la reconstruction par SST oblique et par la méthode de Gardner. Les SNRs respectifs valent 38 et 8 dB.

avec un SNR de 38 pour notre méthode, et de 8 pour celle de Gardner. Si l'on compare avec le synchrosqueezing standard, les résultats dépendront fortement de la taille de l'intervalle de régularisation (paramètre d). Si l'on reconstruit directement sur le ridge ($d = 0$), on obtient un SNR de 2, si l'on choisit $d = 5$ on obtient un SNR de 15. Notons qu'en augmentant d on peut obtenir une précision aussi grande que l'on veut.

3.5 Synchrosqueezing vertical d'ordre 2

Le synchrosqueezing oblique est une solution naturelle pour faire de la réallocation inversible. Cependant, on a vu qu'en pratique une bonne reconstruction est incompatible avec une parfaite réallocation, car contrairement au synchrosqueezing classique, on ne peut pas régulariser a posteriori. Cette section propose une approche différente, qui reprend la formule classique du synchrosqueezing, en se contentant de modifier la définition de $\hat{\omega}$, pour prendre en compte de plus fortes modulations. Nous nous focaliserons sur le cas de la TFCT, une approche similaire pouvant être appliquée à la TOC. Le principe de ce synchrosqueezing vertical d'ordre 2 (VSST) a été exposé

brièvement et illustré dans [Auger 2013] pour une fenêtre gaussienne. Nous exposons ici plus en détail la méthode, pour une fenêtre quelconque.

3.5.1 Cas d'un chirp linéaire

Considérons d'abord le cas d'un chirp linéaire. Si $h(t) = Ae^{2i\pi\phi(t)}$ a une phase quadratique, les opérateurs de réallocation admettent l'écriture (équation 3.25) :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_h(\eta, t) = \phi'(t) - \phi'' u(\eta - \phi'(t)) \\ \hat{\tau}_h(\eta, t) = t - u(\eta - \phi'(t)), \end{cases}$$

avec u la fonction $u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\xi}\arg \widehat{gc}(\xi)$. On retrouve bien la propriété de localisation des opérateurs, c'est-à-dire que $\hat{\omega}_h = \phi'(\hat{\tau}_h)$ dans tout le plan temps-fréquence. Cette écriture montre aussi clairement que lorsque ϕ'' n'est pas nul, $\hat{\omega}_h(\eta, t)$ ne correspond pas à la fréquence instantanée $\phi'(t)$. En revanche, on a facilement

$$\phi'(t) = \hat{\omega}_h(\eta, t) + \phi'' u(\eta - \phi'(t) = \hat{\omega}_h(\eta, t) + (t - \hat{\tau}_h(\eta, t))\phi''. \tag{3.30}$$

La proposition 3.4.2 montre qu'il est aisé d'estimer localement la modulation ϕ'' grâce à l'opérateur $\hat{q}$, on peut donc calculer en pratique une meilleure approximation de la fréquence instantanée.

3.5.2 Synchrosqueezing vertical d'ordre 2 pour la TFCT

Définition 3.5.1. *Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit sa fréquence instantanée locale d'ordre 2 par*

$$\tilde{\omega}_f(\eta, t) = \begin{cases} \hat{\omega}_f(\eta, t) - \hat{q}_f(\eta, t)(\hat{\tau}_f(\eta, t) - t) & \text{si } \partial_t \hat{\tau}_f(\eta, t) \neq 0 \\ \hat{\omega}_f(\eta, t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut à présent définir rigoureusement le synchrosqueezing d'ordre 2, dénommé VSST dans la suite.

Définition 3.5.2. *Soit un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$. Soit une fonction test $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \rho = 1$, deux réels $\gamma, \delta > 0$ et f un signal multicomposantes, on définit le synchrosqueezing de Fourier de f avec le seuil γ et à la précision δ par*

$$T_f^{\delta,\gamma}(\omega, t) = \frac{1}{g(0)} \int_{|V_f(\eta,t)|>\gamma} V_f(\eta, t) \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\omega - \tilde{\omega}(\eta, t)}{\delta}\right) d\eta. \tag{3.31}$$

Avec les résultats de la section précédente sur $\hat{q}$, on voit que cette nouvelle définition localise parfaitement les chirps linéaires. Par ailleurs, comme la réallocation s'effectue à t fixé, on peut intégrer en fréquence autour du ridge comme pour le SST standard, ce qui assurera une bonne reconstruction. Comme $\tilde{\omega}$ reste un opérateur local, on s'attend à ce que le VSST reste bien adapté à des superpositions de perturbations de chirps linéaires, suffisamment séparés en fréquence. On aimerait notamment obtenir un théorème d'approximation similaire au théorème 3.3.2, mais valable pour les superpositions de modes AM–FM d'ordre 2. Par manque de temps nous ne sommes pas encore en mesure de présenter de tels résultats. Notons également que cette approche s'adapte facilement au cas de la TOC : il suffit d'adapter l'opérateur $\hat{q}$. Pour simplifier, le reste de ce chapitre se concentrera cependant sur la TFCT.

3.5.3 Illustrations

Pour illustrer le fonctionnement du VSST, nous reprenons le chirp exponentiel de la Figure 3.6. La caractéristique du VSST résidant dans la fréquence instantanée locale du second ordre $\tilde{\omega}$, nous comparons dans la Figure 3.8 les opérateurs $\hat{\omega}$ et $\tilde{\omega}$ sur ce signal. On observe bien que $\hat{\omega}$ dépend fortement de η, puisque les lignes de niveau dessinent des lignes obliques. En comparaison, $\tilde{\omega}$ paraît quasiment indépendant de η. On trace ensuite les modules du SST et du VSST, qui montrent clairement que la

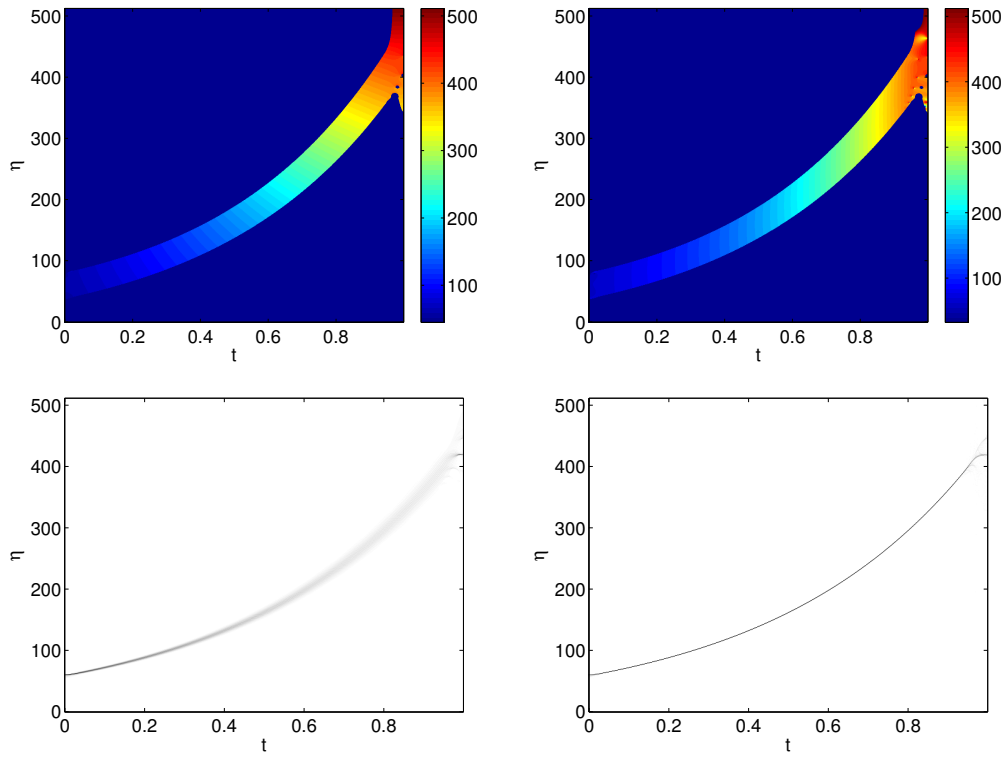


Figure 3.8 Ligne du haut : les opérateurs $\hat{\omega}_h(\eta, t)$ (à gauche) et $\tilde{\omega}_h(\eta, t)$ (à droite), pour un chirp exponentiel. En bas : le SST et le VSST correspondants.

méthode d'ordre 2 fournit un résultat bien mieux localisé. L'intérêt de cette bonne concentration pour la reconstruction sera développée plus en détail dans la section suivante.

3.6 Résultats numériques et comparaisons

Cette section présente des résultats numériques comparatifs concernant le SST, la réallocation, et les extensions oblique (OSST) et verticale (VSST). Pour simplifier, nous considérerons seulement le cas de la TFCT. Le même type de résultats s'appliquera pour le synchrosqueezing et la réallocation de la TOC, avec ses spécificités. En particulier, remarquons que lorsqu'on considère des fréquences instantanées élevées, le SST en ondelettes au premier ordre donne déjà souvent des résultats satisfaisants, car $|\phi''(t)| \ll \phi'(t)$. Au contraire, lorsqu'on considère les basses fréquences, la modulation

est moins bien gérée par la TOC que par la TFCT. Nous reprendrons la superposition de chirps polynomiaux utilisée au chapitre précédent (et en Figure 3.3), que nous nommerons signal test 1, ainsi qu'une somme de chirps sinusoïdaux représentés dans la Figure 3.9 (signal test 2). Sur cette figure, on a représenté la TFCT et les trois variantes de synchrosqueezing. L'intérêt de ce dernier signal est qu'il comporte de fortes modulations, et qu'il contient des points pour lesquels $\phi''(t) = 0$, ce qui peut potentiellement mettre en échec les méthodes d'ordre 2. En observant ces points sur la Figure 3.9, on remarque effectivement des zones où la réallocation est localement assez mauvaise. La présente section étudiera ainsi les résultats comparés de la réallo-

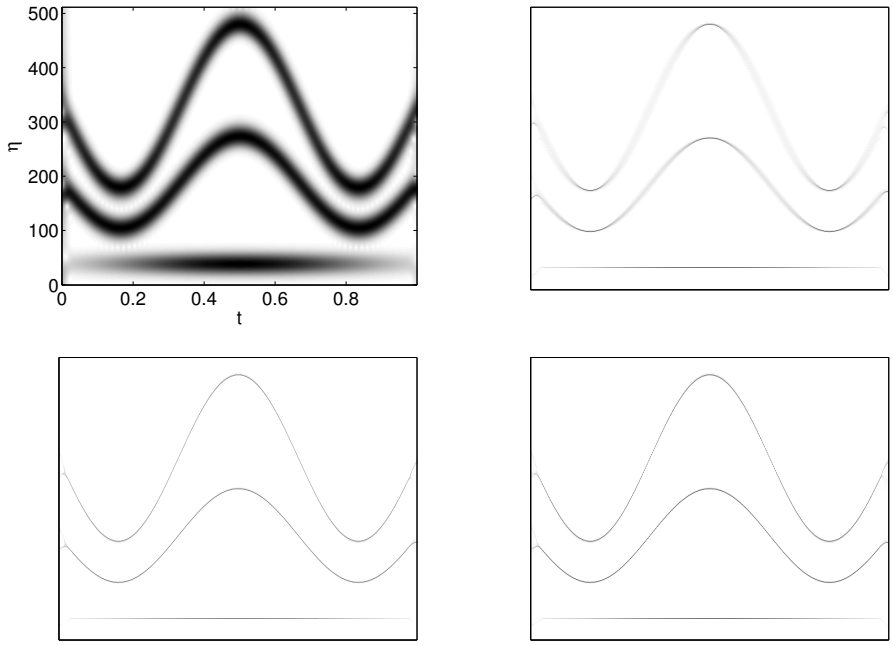


Figure 3.9 Signal-test 2. De haut en bas et de gauche à droite : la TFCT du signal-test2, puis ses SST, OSST et VSST.

cation, du SST et de ses extensions obliques et verticale, sur nos deux signaux tests. On mettra successivement l'accent sur la parcimonie des décompositions, la qualité de la reconstruction des modes, et enfin la gestion du bruit.

3.6.1 Parcimonie des transformées

Une des premières motivations de la réallocation et du synchrosqueezing est de rendre les représentations TF plus concentrées, et donc plus lisibles, plus facilement interprétables. Ce caractère étant difficile à évaluer quantitativement, on s'intéresse ici à évaluer la *parcimonie* des transformées. Pour cela, on trace dans la Figure 3.10 la décroissance des coefficients normalisés. On observe que les coefficients du spectrogramme décroissent de manière très lente, alors que pour les quatre autres transformées, la décroissance est beaucoup plus rapide. Plus intéressant, la figure confirme le bon comportement des SST oblique et vertical d'ordre 2, puisque leurs

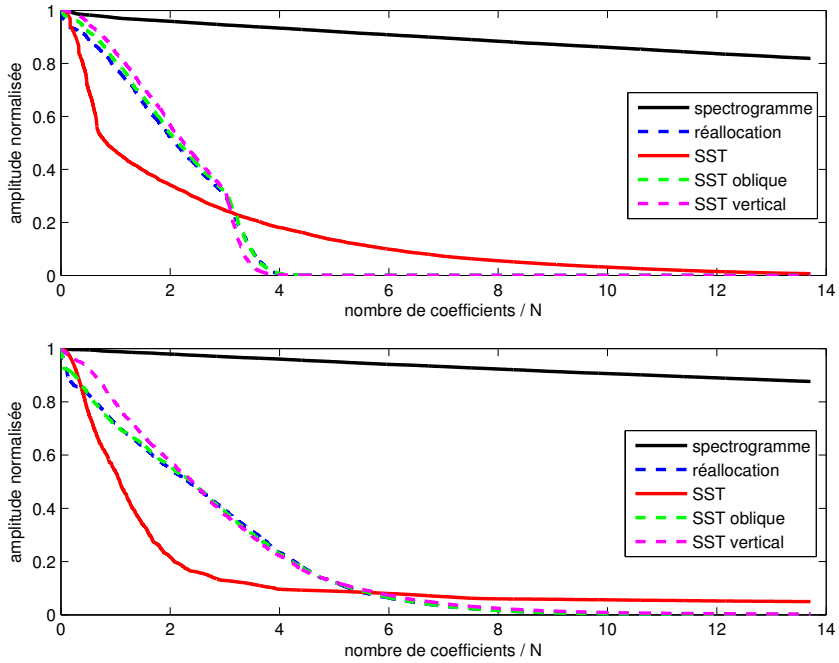


FIGURE 3.10 Décroissance des coefficients pour chaque transformée, sur les signaux-tests 1 (en haut) et 2 (en bas). L'abscisse donne le nombre de coefficients sur la taille N du signal, c'est-à-dire le nombre moyen de coefficients par ligne du plan TF.

résultats sont quasiment identiques à ceux du spectrogramme réalloué. Si l'on compare le SST standard et les méthodes du second ordre, on voit clairement que les secondes sont plus efficaces, donnant en moyenne seulement 4 coefficients non nuls par temps discret. La décroissance du SST est plus rapide au début, mais présente une "queue longue", avec beaucoup de coefficients non négligeables (autour de 5–10% du maximum).

3.6.2 Reconstruction des modes

Le principal avantage du synchrosqueezing sur la réallocation est son caractère inversible. Rappelons que pour retrouver les modes avec une bonne précision, il faut intégrer le SST en fréquence autour des lignes de crête, sur un intervalle de taille $2d$ (équation 3.19), d étant du même ordre de grandeur que la modulation $\phi''(t)$. On a vu que cette approche, qui permet de compenser les approximations des opérateurs de réallocation, n'est pas valable pour le synchrosqueezing oblique. On comparera donc dans cette section uniquement les synchrosqueezing "verticaux" d'ordre 1 et 2. Pour cela, on trace en Figure 3.11 les performances de la reconstruction des signaux-tests, en fonction du paramètre d. Pour supprimer l'influence du détecteur de ridges, on utilisera les vraies fréquences instantanées. La Figure 3.11 montre clairement la supériorité du SST vertical au second ordre : pour $d = 0$, c'est-à-dire sans intégration, la précision est déjà 2 à 3 fois plus grande que pour le SST standard. Et la reconstruction par le SST d'ordre 2 atteint très vite une précision quasi-parfaite, alors que celle du SST standard ne s'améliore que lentement en fonction de d. On

remarque par ailleurs, comme dans la figure précédente, que le signal-test 1 est bien mieux traité par chacune des méthodes, car il est moins modulé. Enfin, si l'on utilise le SST oblique avec une reconstruction sur le ridge, on obtient des SNRs de 30 et 11. C'est bien mieux que le résultat du SST avec $d = 0$, mais d'une moindre précision que le SST avec un grand paramètre d.

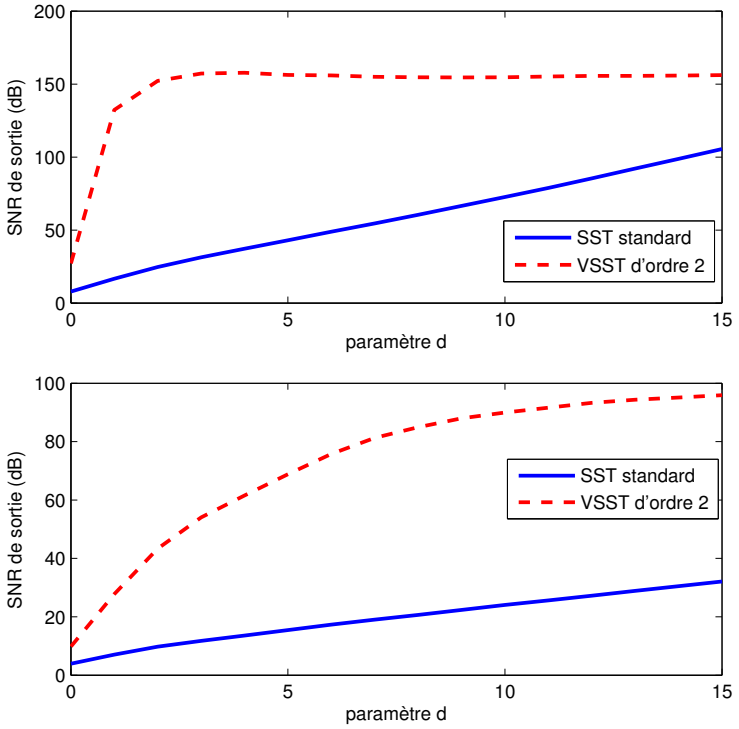


Figure 3.11 Reconstruction des modes en fonction du paramètre d, qui règle l'intervalle d'intégration. Les résultats sont exprimés en SNR, pour les signaux-tests 1 (en haut) et 2 (en bas).

3.6.3 Gestion du bruit

On a vu à plusieurs reprises qu'en l'absence de bruit, la reconstruction est d'autant meilleure que d est grand, car lorsque d tend vers ∞ on se ramène à la formule de reconstruction exacte (2.27). On intuite assez naturellement que ce n'est plus vrai lorsque le signal est bruité : d doit être suffisamment grand pour sélectionner les coefficients correspondant au signal, mais assez petit pour éliminer ceux produits par le bruit. Cette section illustre ce phénomène sur nos deux signaux-tests, en comparant toujours le SST standard et le SST vertical au second ordre. On commence par montrer dans la Figure 3.12 l'action du bruit sur la représentation temps-fréquence de ces signaux multicomposantes. On remarque que dans toutes les représentations, le bruit perturbe fortement les ridges, sans les faire disparaître pour autant. Si l'on observe ces transformées en-dehors des ridges, on remarque que le bruit forme sa propre structure dans le plan TF. Pour la réallocation ou le SST oblique, il semble ainsi former un pavage polygonal du plan TF, phénomène mis en évidence et analysé

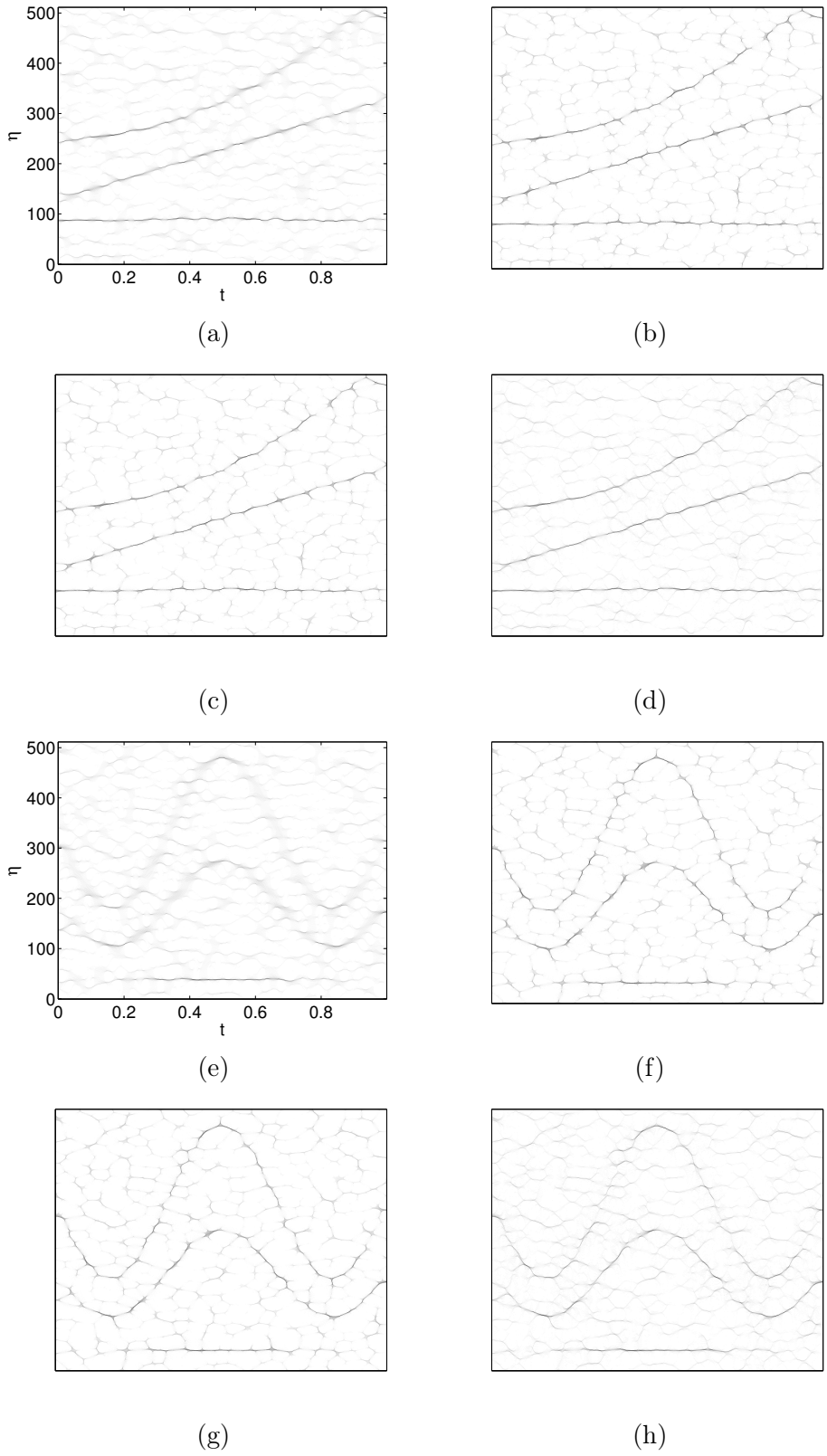


Figure 3.12 Représentations TF des signaux-tests bruités (SNR = 5 dB). On utilise le SST standard (a), la réallocation (b), le SST oblique (c) et le SST vertical d'ordre 2 (d) pour le signal-test 1. Les figures (e) à (h) correspondent au signal-test 2. On utilise une fenêtre gaussienne avec $\sigma = 0.05$ dans tous les cas.

dans [Flandrin 2012].

Pour analyser l'impact du bruit sur la reconstruction, on trace les mêmes figures que dans la section précédente, mais cette fois sur les signaux-tests bruités. La Figure 3.13 montre ainsi la précision de la reconstruction des deux signaux tests en fonction de d, pour différents niveaux de bruit. On vérifie bien que la reconstruction augmente avec d au début, puis diminue. Pour le signal-test1, les résultats par le SST standard et le VSST sont sensiblement les mêmes, alors que le VSST donne de meilleurs résultats sur le signal-test 2, comportant de plus fortes modulations.

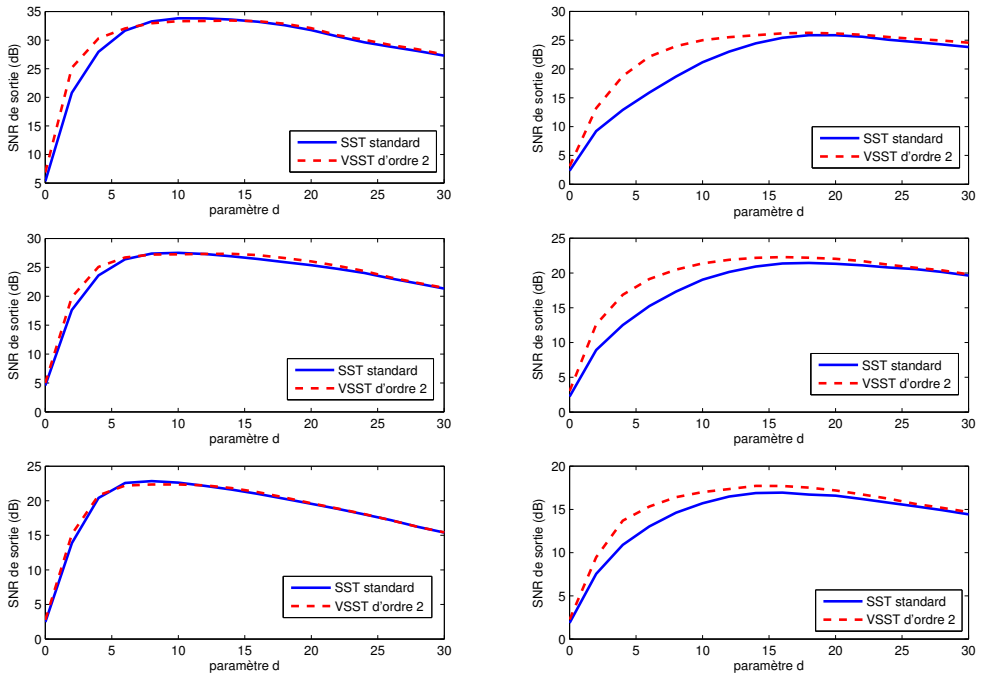


Figure 3.13 Reconstruction de signaux bruités sur les signaux-tests 1 (gauche) et 2 (droite). De haut en bas : les SNRs d'entrée valent 15, 10 et 5.

Pour comparer ces deux méthodes en situation réelle, nous réalisons une expérience similaire lorsque les lignes de crête ne sont pas connues. La Figure 3.14 montre ainsi les performances de reconstruction pour les signaux-tests faiblement bruités (SNR = 30 dB). Pour le signal-test 1, on observe que les ridges paraissent mieux détectés sur le VSST, et permettent d'obtenir une reconstruction plus précise lorsque d est petit. Ce phénomène est accentué pour le signal-test 2, puisque les ridges du SST standard sont très mal estimés, conduisant à une grosse erreur lors de la reconstruction.

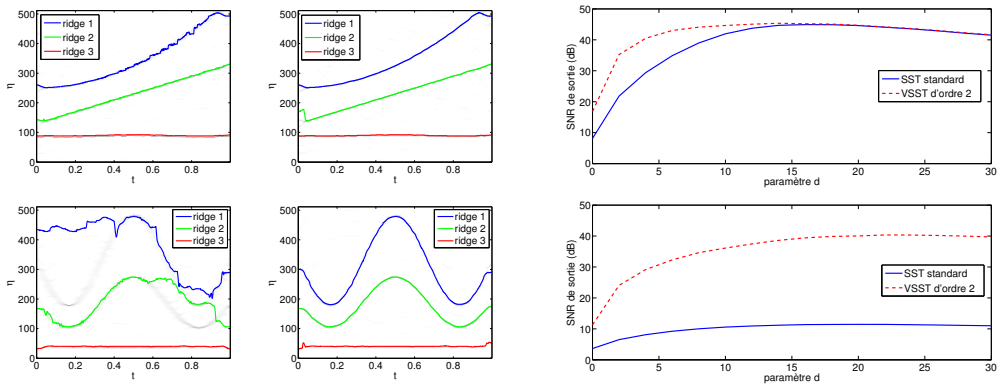


Figure 3.14 De gauche à droite : ridges calculés d'après le SST standard, ceux obtenus d'après le SST d'ordre 2, et la qualité de reconstruction pour les deux méthodes en fonction de d. On utilise les signaux-tests 1 (en haut) et 2 (en bas).

3.7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté de manière unifiée le principe de réallocation et le synchrosqueezing, pour la TFCT et pour la TOC. Bien que le SST permette la reconstruction des modes, on a montré qu'il n'était pas adapté à de fortes modulations fréquentielles, contrairement à la réallocation. Nous avons proposé deux généralisations du synchrosqueezing qui résolvent ce problème. Le synchrosqueezing oblique est peut-être l'extension la plus naturelle, car elle s'apparente à une réallocation où l'on change seulement la valeur des coefficients réalloués. Malheureusement, nous avons vu que cette approche posait deux problèmes, l'un concernant la discrétisation de la formule de reconstruction, et l'autre la difficulté de prendre en compte des perturbations de chirps linéaires. Cela nous a amené à une seconde extension du synchrosqueezing, qui garde la structure "verticale" (à temps fixé), et permet de conserver la formule de reconstruction à la Morlet. Nous avons montré que ce SST d'ordre 2 consiste seulement en la redéfinition de la fréquence instantanée locale (opérateur $\hat{\omega}_f$), et qu'il est parfaitement adapté pour des chirps linéaires. Nous avons enfin présenté quelques expériences numériques comparant ces 4 méthodes de réallocation, en insistant sur la parcimonie des décompositions, la précision de la reconstruction et la gestion du bruit.

Plusieurs perspectives intéressantes sont soulevées par ce travail, ou concernent le SST en général. La plus immédiate concerne l'obtention de résultats théoriques pour le synchrosqueezing d'ordre 2, montrant qu'il est parfaitement adapté à des perturbations de chirps linéaires. La seconde, d'ordre théorique également, concerne le cas des signaux bruités. Les théorèmes d'approximation supposent en effet que les modes sont réguliers, et on peut se demander si le principe du synchrosqueezing reste valide en présence de bruit, même faible. La figure 3.4 suggère une réponse positive, et l'on voit que le bruit perturbe le SST mais d'une manière stable. En fait, on intuite que les opérateurs de réallocation restent valides "en moyenne" sur un signal bruité, et qu'ils sont perturbés proportionnellement à la puissance du bruit. Une étude théorique est à présent nécessaire pour confirmer cette intuition et

l'observation empirique. Notons que le problème du bruit a été partiellement abordé dans [Thakur 2012], où les auteurs montrent une certaine stabilité du SST pour de faibles niveaux de bruits.

Enfin, plusieurs perspectives sont amenées naturellement par les applications. On peut citer ainsi le problème des formes d'onde non harmoniques, qui sont courantes en pratique (cf. page 25). Une façon de traiter cette situation est de décomposer la forme d'onde périodique $s(t)$ en sa série de Fourier, puis d'utiliser la linéarité de la TFCT et de la TOC. La représentation temps-fréquence d'un mode non harmonique fait donc apparaître plusieurs ridges dans le plan temps-fréquence. Si l'on connaît s, on peut agréger les différents ridges pour recomposer le mode. C'est le raisonnement suivi dans [Wu 2012], qui montre que le SST reste valable dans ce cas, mais ne donne pas de méthode pour calculer s. Pour ce faire, il semble naturel de se tourner vers des approches parcimonieuses utilisant des dictionnaires adaptés, comme dans [Chen 1998]. Un autre problème intéressant en pratique est la gestion des sauts de fréquence instantanée, qui concerne de nombreux signaux. Pour localiser de tels signaux, on pourrait imaginer une réallocation tantôt horizontale tantôt verticale, qui localise ainsi les harmoniques aussi bien que les singularités.

CHAPITRE 4

Transformée en ondelettes et synchrosqueezing monogène

4.1 Introduction et motivation

La notion de fréquence instantanée en dimension supérieure à un est moins intuitive, mais garde un sens physique certain : par exemple, une onde plane de la forme $A\cos(k \cdot x)$ avec $k \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ possède une amplitude A, et une fréquence instantanée bidimensionnelle $k = (k_1, k_2)$. Elle possède de plus une direction de propagation, et présente ainsi des crêtes orientées, formant des droites dans le plan. Une telle onde évoluant dans un milieu anisotrope continu sera perturbée, créant ainsi des modulations d'amplitude, de fréquence et d'orientation : c'est le cas par exemple pour la houle, la hauteur et la vitesse des vagues variant avec la profondeur. En fait, le modèle d'ondes modulées, que nous appellerons encore AM–FM, peut décrire de nombreuses situations physiques, mais aussi des images naturelles. On peut citer ainsi les franges d'interférences analysées en optique [Larkin 2001], mais aussi des textures localement parallèles comme des empreintes digitales [Kokkinos 2009], ou les images bio-médicales [Murray 2012, Elshinawy 2003].

Pour définir correctement les grandeurs instantanées en dimension 2, on a besoin d'une extension du signal analytique, proposée dans [Felsberg 2001] et dénommée *signal monogène*. Plusieurs approches ont été proposées récemment pour construire une TOC basée sur ce signal, appelée transformée en ondelettes monogène (TOM) [Olhede 2009, Unser 2009]. L'intérêt fondamental de la TOM est qu'elle permet de capturer l'orientation locale d'une image, tout en utilisant une ondelette *isotrope*, ce qui simplifie la transformée et réduit notablement l'espace de représentation. Le coeur de ce chapitre est l'introduction et la formalisation d'une extension naturelle du synchrosqueezing en dimension 2, qui s'appuie sur la TOM. Ces travaux ont fait l'objet d'une collaboration avec Marianne Clausel et Valérie Perrier, et ont été soumis à publication dans [Clausel 2012].

Notons que la recherche de représentations pertinentes en dimension 2 ou plus, qui prennent en compte l'orientation, l'anisotropie des données, est un vaste domaine de recherche, présenté de manière détaillée dans [Jacques 2011]. On peut notamment

citer les travaux pionniers autour de l'analyse de ridges en dimension 2 [Gonnet 1994] ou l'extraction des fréquences émergentes [Bovik 1992], mais aussi les extensions en 2 dimensions de la décomposition modale empirique [Nunes 2003, Damerval 2005]. Il convient aussi de mentionner une autre généralisation du synchrosqueezing basée sur des paquets d'ondelettes [Yang 2013], développée indépendamment, mais qui ne permet ni la reconstruction directe ni l'unicité de la décomposition.

Nous commençons par introduire le signal monogène dans la section 4.2, ainsi que la TOM en section 4.3. Puis nous étudions dans la section 4.4 la TOM d'une onde AM–FM, en montrant qu'il est possible de retrouver ses grandeurs instantanées (démodulation). Ensuite, nous définissons le SST monogène (MSST) dans la Section 4.5, en établissant un résultat d'approximation pour les images multicomposantes. Enfin, nous traitons brièvement en 4.6 la question de l'implémentation numérique et de l'application à des images réelles, et présentons quelques expériences numériques dans le section 4.7. Les preuves sont regroupées dans la section C de l'annexe, pour faciliter la lecture.

4.2 Transformée de Riesz et signal monogène

4.2.1 Transformée de Riesz

Commençons par définir les opérateurs de dilatation, de translation et de rotation, qui nous seront utiles dans tout le chapitre.

Définition 4.2.1. *Soit $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, on définit les opérateurs de dilatation D_a, de tranlation T_b et de rotation R_α sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ par :*

$$\begin{aligned} D_a f(x) &= a^{-1} f(x/a) \\ T_b f(x) &= f(x-b) \\ R_\alpha f(x) &= f(r_\alpha^{-1} x), \end{aligned}$$

où r_α est la matrice de rotation usuelle

$$r_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \tag{4.1}$$

On définit à présent la transformée de Riesz d'une image.

Définition 4.2.2. *Soit f une image de $\in L^2(\mathbb{R}^2)$. Sa transformée de Riesz, notée $\mathcal{R}f$, est la fonction*

$$\mathcal{R}f = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 f \\ \mathcal{R}_2 f \end{pmatrix},$$

où chaque $\mathcal{R}_i f$, $i = 1, 2$ est définie dans le domaine de Fourier pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ par

$$\widehat{\mathcal{R}_i f}(\xi) = -\mathrm{i}\, \frac{\xi_i}{|\xi|} \widehat{f}(\xi).$$

Une définition équivalente dans le domaine spatial est

$$\mathcal{R}_i f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^3} f(y) \, \mathrm{d}y \right).$$

Énonçons à présent les principales propriétés de $\mathcal{R}$. On commencera par montrer que $\mathcal{R}$ commute avec les translations et dilatations, et qu'elle admet de bonnes propriétés vis-à-vis des rotations. On verra également que la transformée de Riesz est un opérateur unitaire, antisymétrique sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour les démonstrations ou pour de plus amples détails sur la transformée de Riesz, on renvoie le lecteur à [Stein 1970].

Proposition 4.2.1. *La transformée de Riesz commute avec les translations et dilatations : pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}^2$,*

$$\mathcal{R} D_a f = D_a \mathcal{R} f \quad \text{et} \quad \mathcal{R} T_b f = T_b \mathcal{R} f.$$

Proposition 4.2.2. *La transformée de Riesz est orientable, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$,*

$$R_\theta(\mathcal{R} f) = r_\theta^{-1} \mathcal{R}(R_\theta f) = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \mathcal{R}_1(R_\theta f) + \sin\theta \ \mathcal{R}_2(R_\theta f) \\ -\sin\theta \ \mathcal{R}_1(R_\theta f) + \cos\theta \ \mathcal{R}_2(R_\theta f) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Proposition 4.2.3. *Pour tout $i \in \{1, 2\}$, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$:*

$$< \mathcal{R}_i f, g >_{L^2(\mathbb{R}^2)} = - < f, \mathcal{R}_i g >_{L^2(\mathbb{R}^2)} . \tag{4.3}$$

De plus $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2 = -Id$, et on a

$$\begin{aligned} < \mathcal{R} f, \mathcal{R} g >_{L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)} &= < \mathcal{R}_1 f, \mathcal{R}_1 g >_{L^2(\mathbb{R}^2)} + < \mathcal{R}_2 f, \mathcal{R}_2 g >_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= < f, g >_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.2 Signal Monogène

Définissons à présent le signal monogène, qui prolonge naturellement le signal analytique en dimension quelconque. Ce concept a été défini à l'origine dans [Felsberg 2001], et nous verrons comment il permet la définition de grandeurs instantanées d'une image.

Définition 4.2.3. *Le* signal monogène *associé à $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est défini par*

$$\mathcal{M} f = \begin{pmatrix} f \\ \mathcal{R} f \end{pmatrix}.$$

On voit que, à l'instar du signal analytique en dimension 1, le signal monogène ajoute une dimension à celle de l'espace de départ, puisque si f est à valeurs réelles, $\mathcal{M} f$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Les angles d'Euler du signal monogène permettent de le représenter plus naturellement, et de définir des grandeurs instantanées.

Définition 4.2.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on peut lui associer les grandeurs instantanées suivantes :*

- *Son amplitude instantanée est définie par*

$$A_f(x) = |\mathcal{M}f(x)| = \sqrt{|f(x)|^2 + |\mathcal{R}_1 f(x)|^2 + |\mathcal{R}_2 f(x)|^2}. \tag{4.5}$$

- *Sa phase instantanée est définie par*

$$\varphi_f(x) = \arccos\left(\frac{f(x)}{A_f(x)}\right) \tag{4.6}$$

- *Son orientation instantanée est définie par*

$$\theta_f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\mathcal{R}_1 f(x)}{\sqrt{\mathcal{R}_1 f(x)^2 + \mathcal{R}_2 f(x)^2}}\right) & si\ \mathcal{R}_2 f(x) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\mathcal{R}_1 f(x)}{\sqrt{\mathcal{R}_1 f(x)^2 + \mathcal{R}_2 f(x)^2}}\right) & si\ \mathcal{R}_2 f(x) < 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Ces grandeurs instantanées sont simplement les coordonnées sphériques du signal monogène, de même que l'amplitude et la phase instantanée étaient les coordonnées polaires du signal analytique en dimension 1. Pour illustrer ces grandeurs instantanées, considérons l'onde plane $f(x) = A_0 \cos(k \cdot x)$ avec $k = (k_1, k_2)$ et $k_1 > 0$. Un rapide calcul montre que

$$\mathcal{R}f(x) = A_0 \begin{pmatrix} \sin(k \cdot x)\frac{k_1}{|k|} \\ \sin(k \cdot x)\frac{k_2}{|k|} \end{pmatrix} = A_0 \frac{k}{|k|} \sin(k \cdot x).$$

En notant $\theta_0 = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$ et $\varphi(x) = k \cdot x$, on a immédiatement

$$\mathcal{M}f(x) = \begin{pmatrix} A_0 \cos\varphi(x) \\ A_0 \sin\varphi(x) \cos\theta_0 \\ A_0 \sin\varphi(x) \sin\theta_0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que A_0, φ et θ_0 correspondent aux grandeurs instantanées de $\mathcal{M}f$. Notons que dans ce cas, θ_0 est également l'orientation du vecteur $\nabla\varphi$. Plutôt que considérer la fréquence vectorielle φ, on pourrait aussi bien prendre en compte la *fréquence instantanée scalaire* $|\nabla\varphi(x)| = |k|$, ainsi que l'orientation θ_0.

Comme pour le signal analytique avec les nombres complexes, on peut plonger $\mathcal{M}f$ dans une algèbre isomorphe à $\mathbb{R}^3$, qui permette une écriture naturelle sous forme d'amplitude et de phase. On peut pour cela utiliser le formalisme des quaternions proposé dans [Felsberg 2001] et étendre la fonction exponentielle complexe. La section B de l'annexe récapitule les principales propriétés des quaternions, notamment l'extension de la fonction exponentielle complexe. Le signal monogène s'écrit alors

$$\mathcal{M}f = f + \mathcal{R}_1 f\ \mathrm{i} + \mathcal{R}_2 f\ \mathrm{j}\ ,$$

où $(1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ représente la base canonique du corps $\mathbb{H}$ des quaternions. On obtient alors une l'écriture suivante, qui fait apparaître naturellement la phase et l'orientation :

$$\mathcal{M}f = A\ \mathrm{e}^{\varphi n_\theta} = A\ (\cos\varphi + n_\theta \sin\varphi) \text{ avec } n_\theta = \cos\theta\ \mathrm{i} + \sin\theta\ \mathrm{j}\ ,$$

Si l'on reprend le signal monogène associé à une onde plane, il s'écrit

$$\mathcal{M}f(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ \mathcal{R}f(x) \end{pmatrix} = A_0 \mathrm{e}^{(k\cdot x)(\cos\theta_0 \ \mathrm{i} + \sin\theta_0 \ \mathrm{j})} \ .$$

Remarque : Notons que cette notation au moyen de l'exponentielle quaternionique prolonge agréablement l'exponentielle complexe et facilite l'écriture des signaux monogènes. Mais cela ne représente pas la structure intrinsèque des signaux monogènes, qui n'ont pas une structure d'algèbre.

4.2.3 Illustrations

Pour illustrer la démodulation d'une image AM–FM en utilisant le signal monogène, on crée une fonction $f(x) = A(x)\cos(2\pi\varphi(x))$, où A et $\nabla\varphi$ varient peu devant $|\nabla\varphi|$. Autrement dit, la fonction f peut être approchée autour du point b par l'onde pure $A(b)\cos(2\pi[\varphi(b) + \nabla\varphi(b)\cdot(x-b)])$. On calcule le signal monogène associé à f, et ses grandeurs instantanées définies en 4.2.4. On voit clairement sur la Figure 4.1 que l'amplitude, la fréquence instantanée et l'orientation correspondent aux variations locales de l'image. On remarque des petites perturbations, pour l'amplitude notamment, dues au fait que f n'est pas exactement une onde pure. Notons que lorsque les modulations sont plus fortes, ou surtout lorsque plusieurs composantes sont superposées, les grandeurs instantanées n'ont plus de sens physique. C'est pourquoi on introduit, dans la suite de ce chapitre, la transformée en ondelettes monogène.

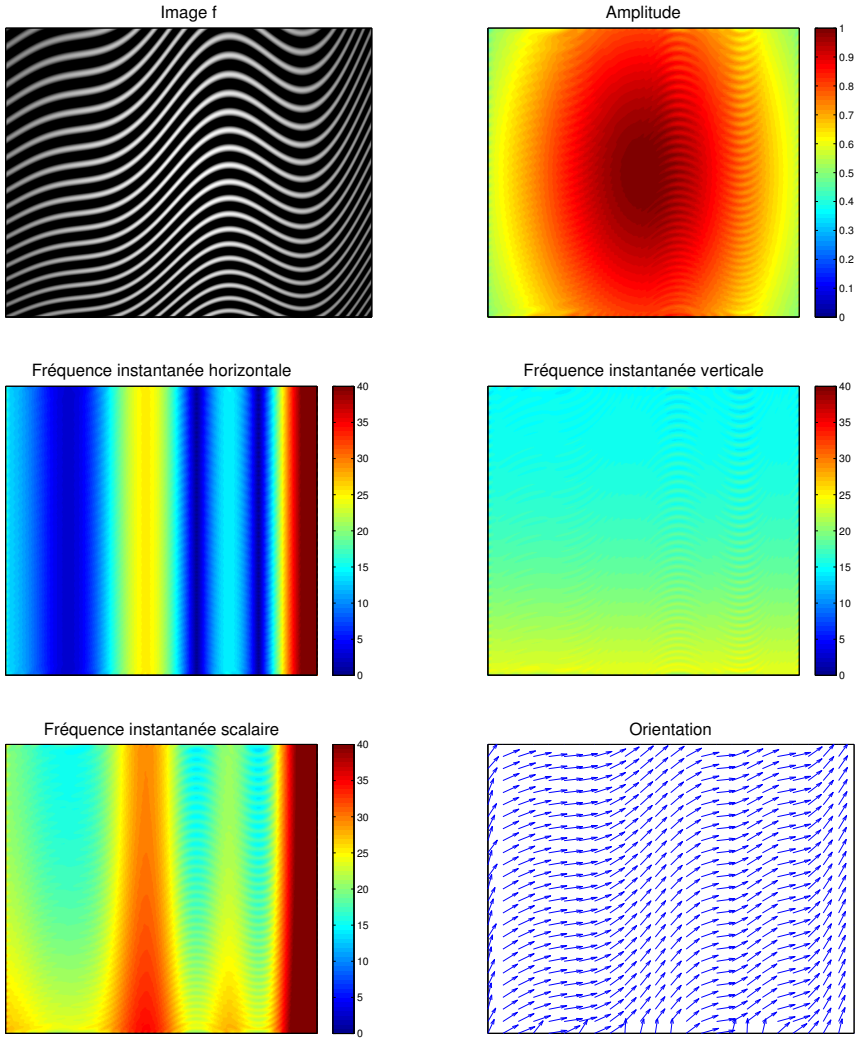


Figure 4.1 Illustration des grandeurs instantanées associées au signal monogène.

4.3 Transformée en ondelettes monogène

On a vu au chapitre précédent que la transformée en ondelettes analytique permet de traiter indifféremment un signal réel ou complexe, pourvu que l'on s'intéresse uniquement à sa partie analytique. Cette section définit la transformée en ondelettes monogène, et montre que l'on peut suivre à peu près le même raisonnement. On commencera par rappeler la définition de la TOC en deux dimensions dans la section 4.3.1. On présentera ensuite en section 4.3.2 les principales propriétés de la TOC monogène, introduite dans [Unser 2009, Olhede 2009]. On montrera notamment que pour toute image réelle f, les coefficients de la TOC du signal monogène $\mathcal{M}f$ sont liés aux coefficients de la TOC monogène de f (Proposition 4.3.1).

4.3.1 TOC bidimensionnelle

On présente ici rapidement la TOC bidimensionnelle, introduite dans [Murenzi 1990]. Une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est dite admissible si

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^2}\, d\xi \ < \ +\infty \tag{4.8}$$

On considère la famille $\{\psi_{a,\alpha,b}\}_{(a,\alpha,b)\in\mathbb{R}_+^*\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}^2}$ définie par $\psi_{a,\alpha,b} = T_b R_\alpha D_a \psi$. La transformée en ondelettes de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ est définie par :

$$W_f(a,\alpha,b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \psi_{a,\alpha,b}(x)^*\ \mathrm{d}x\ .$$

Si l'ondelette est isotrope, ces coefficients ne dépendent plus de α, on notera alors $W_f(a,b) = W_f(a,0,b)$ et $\psi_{a,b} = \psi_{a,0,b}$. Le théorème de reconstruction montre que toute fonction f s'écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{b\in\mathbb{R}^2} \int_{\alpha\in(0,2\pi)} \int_{a\in(0,+\infty)} W_f(a,\alpha,b)\ \psi_{a,\alpha,b}(x)\ \frac{\mathrm{d}a}{a^3}\mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}b\ , \tag{4.9}$$

au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Lorsque l'ondelette est isotrope, cela s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{b\in\mathbb{R}^2} \int_{a\in(0,+\infty)} W_f(a,b)\ \psi_{a,b}(x)\ \frac{\mathrm{d}a}{a^3}\mathrm{d}b\ .$$

Comme dans le cas de la dimension 1, on dispose également de la formule de reconstruction de Morlet, sur laquelle sera basée le synchrosqueezing. Dans le cas isotrope, elle s'écrit

$$f(x) = \frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi} \int_0^{+\infty} W_f(a,x)\ \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \text{ avec } \tilde{C}_\psi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{\psi}(\xi)^*}{|\xi|^2}\ \mathrm{d}\xi\ . \tag{4.10}$$

Définition 4.3.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on définit la TOC du signal monogène $F = \mathcal{M}f = f + \mathcal{R}_1 f\ \mathrm{i} + \mathcal{R}_2 f\ \mathrm{j}$ par*

$$W_F = W_f + W_{\mathcal{R}_1 f}\ \mathrm{i} + W_{\mathcal{R}_2 f}\ \mathrm{j} = \begin{pmatrix} W_f \\ W_{\mathcal{R}_1 f} \\ W_{\mathcal{R}_2 f} \end{pmatrix}\ .$$

4.3.2 Transformée en ondelettes monogène

Nous présentons à présent la TOC monogène telle que définie dans [Olhede 2009]. On considère pour cela une ondelette réelle admissible $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et on note $\psi^{(M)} = \mathcal{M}\psi$ l'ondelette monogène associée. On vérifie facilement que $\psi^{(M)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est aussi une ondelette admissible, car chacune de ses composantes vérifie la relation (4.8). On peut à présent définir la transformée en ondelettes monogène (TOM).

Définition 4.3.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. La transformée en ondelettes monogène (TOM) de f est définie par*

$$W_f^{(M)}(a,\alpha,b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{\psi_{a,\alpha,b}^{(M)}(x)}\ \mathrm{d}x\ , \tag{4.11}$$

où pour tout $(a,\alpha,b) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}^2$, $\psi_{a,\alpha,b}^{(M)} = T_b R_\alpha D_a(\mathcal{M}\psi)$.

Remarque : Pour tout (a, α, b), $W_f^{(M)}(a, \alpha, b)$ est un vecteur de Clifford, et peut être noté $W_f^{(M)}(a, \alpha, b) = W_f(a, \alpha, b) + W_f^{(1)}(a, \alpha, b)\ \mathrm{i} + W_f^{(2)}(a, \alpha, b)\ \mathrm{j}$ où l'on note, pour $i = 1, 2$,

$$W_f^{(i)}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{(T_b R_\alpha D_a \mathcal{R}_i \psi)(x)}\ \mathrm{d}x\ .$$

On renvoie le lecteur à l'Annexe B pour plus de détails sur cette notation. La proposition suivante précise la relation entre la TOM d'une image réelle et la TOC de son signal monogène.

Proposition 4.3.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $F = \mathcal{M}f$ son signal monogène. Alors pour tout $(a, \alpha, b) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2$*

$$W_F(a, \alpha, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r_\alpha \end{pmatrix} W_f^{(M)}(a, \alpha, b)\ . \tag{4.12}$$

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe des propriétés de la transformée de Riesz. On montre la relation équivalente suivante :

$$W_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r_\alpha^{-1} \end{pmatrix} W_F(a, \alpha, b)\ ,$$

Par définition de la TOM, on a

$$W_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{T_b R_\alpha D_a (\mathcal{M}\psi)(x)}\ \mathrm{d}x\ .$$

La transformée de Riesz est invariante par translation et dilatation, et "orientable" (Propositions 4.2.1 et 4.2.2). On a donc

$$T_b R_\alpha D_a (\mathcal{R}\psi) = r_\alpha^{-1} \mathcal{R}(\psi_{a,\alpha,b})\ .$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{T_b R_\alpha D_a (\mathcal{R}\psi)(x)}\ \mathrm{d}x = r_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \overline{\mathcal{R}(\psi_{a,\alpha,b})(x)}\ \mathrm{d}x\ . \tag{4.13}$$

On utilise à présent le fait que $\mathcal{R}$ est un opérateur antisymétrique unitaire (Proposition 4.2.3) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\mathcal{R}(\psi_{a,\alpha,b})(x)}\ \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} < f, \mathcal{R}_1(\psi_{a,\alpha,b}) >_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ < f, \mathcal{R}_2(\psi_{a,\alpha,b}) >_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{pmatrix} = -\int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{R}f)(x)\ \overline{\psi_{a,\alpha,b}(x)}\ \mathrm{d}x\ . \tag{4.14}$$

Les équations (4.13) et (4.14) prouvent la proposition. □

Considérons maintenant le cas d'une ondelette réelle *isotrope* ψ. Cela inclut toutes les ondelettes radiales obtenues à partir des familles d'ondelettes en dimension 1, notamment l'ondelette de Morlet ou les ondelettes de Morse généralisées (cf. section 2.2.2 page 60). L'équation (4.12) se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W_F(a, b) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r_\alpha \end{pmatrix} W_f^{(M)}(a, \alpha, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_f(a, b) \\ W_f^{(1)}(a, \alpha, b) \\ W_f^{(2)}(a, \alpha, b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_f(a, b) \\ -\cos\alpha\ W_f^{(1)}(a, \alpha, b) + \sin\alpha\ W_f^{(2)}(a, \alpha, b) \\ -\sin\alpha\ W_f^{(1)}(a, \alpha, b) - \cos\alpha\ W_f^{(2)}(a, \alpha, b) \end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{4.15}$$

En pratique, il est plus simple d'imposer $\alpha = 0$. On obtient alors

$$W_F(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix} W_f^{(M)}(a,0,b) \ . \tag{4.16}$$

4.4 Analyse par ondelettes d'un mode AM–FM

Dans cette section, on considère un mode AM–FM monogène de la forme $A(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)n(x)}$, et on analysera sa transformée en ondelettes. On montrera que comme dans le cas de la dimension 1, pourvu que les fonctions A, φ et n varient lentement, la transformée en ondelettes de ce mode dessine un *ridge* dans le plan espace-échelle. On verra qu'il est possible de localiser ce ridge, et ainsi d'estimer son amplitude, sa fréquence et son orientation instantanées. On commencera par donner une définition de ces modes monogènes, que l'on appelera IMMF pour Intrinsic Monogenic Mode Function.

Définition 4.4.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Un mode monogène (IMMF) de précision ε et de régularité $\sigma > 0$ est une fonction $F \in \dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{H})$ de la forme*

$$F(x) = A(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)n_{\theta(x)}} \ \textit{avec}\ n_{\theta(x)} = \cos(\theta(x))\mathrm{i} + \sin(\theta(x))\mathrm{j} \ , \tag{4.17}$$

où $A > 0$ et $A, \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. La fonction A est appelée l'amplitude de F, φ sa phase scalaire et n_θ son orientation locale.
On suppose que φ possède des dérivées bornées d'ordre 1 et 2 :

$$\forall i \in \{1,2\},\ 0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^2} |\partial_{x_i}\varphi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\partial_{x_i}\varphi(x)| < \infty \ , \tag{4.18}$$

$$M = \max_{i_1,i_2=1,2} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left|\partial^2_{x_{i_1}x_{i_2}}\varphi(x)\right| < \infty \ . \tag{4.19}$$

On suppose en outre que $A, \theta, \nabla\varphi$ sont à variations lentes par rapport à $\nabla\varphi$, c'est-à-dire que pour $i = 1, 2$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \max\left(|\partial_{x_i}A(x)|, |\partial_{x_i}\theta(x)|\right) \leq \varepsilon|\partial_{x_i}\varphi(x)| \ . \tag{4.20}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \max_{i_1,i_2=1,2} \left|\partial^2_{x_{i_1}x_{i_2}}\varphi(x)\right| \leq \varepsilon|\nabla\varphi(x)| \ . \tag{4.21}$$

Remarque 4.4.1. *Remarquons que dans la suite, on considère des fonctions qui ne sont pas dans L^2. Dans ce cas, les formules de reconstruction (4.9) et (4.10) ne sont plus forcément valables (cf. Appendix B de [Jaffard 2001]). On a donc besoin d'une hypothèse supplémentaire pour s'assurer de la convergence de $\int_0^{+\infty} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$. Par ailleurs, nous allons contrôler*

$$\int_{a_0}^{+\infty} |W_F(a,b)|\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$$

pour tout $a_0 > 0$.
L'hypothèse supplémentaire $F \in \dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{H})$ pour $\sigma > 0$ est équivalente à la condition suivante sur la transformée en ondelettes (cf. [Triebel 1978]) :

$$\|F\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} = \int_0^\infty \sup_{b\in\mathbb{R}^2} |W_F(a,b)|\frac{\mathrm{d}a}{a^{2-\sigma}} < +\infty \ . \tag{4.22}$$

On en déduit alors que pour tout $a_0 > 0$:

$$\sup_{b\in\mathbb{R}^2}\int_{a_0}^{\infty}|W_F(a,b)|\frac{\mathrm{d}a}{a^2} = \sup_{b\in\mathbb{R}^2}\int_{a_0}^{\infty}|W_F(a,b)|\frac{1}{a^\sigma}\frac{\mathrm{d}a}{a^{2-\sigma}} \leq a_0^{-\sigma}\ \|F\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} \tag{4.23}$$

Par hypothèse, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{H})$ et ∇F est bornée. La définition de la TOC implique

$$|W_F(a,b)| \leq a^2\|\nabla F\|_{L^\infty}\|x\psi\|_{L^1}\ , \qquad \forall b\in\mathbb{R}^2$$

ce qui montre que pour tout $a_0 > 0$

$$\sup_{b\in\mathbb{R}^2}\int_0^{a_0}|W_F(a,b)|\frac{\mathrm{d}a}{a^2} < \infty\ . \tag{4.24}$$

Ceci assure l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$.

On aimerait estimer l'amplitude et la fréquence instantanée d'une IMMF. On a besoin pour cela des hypothèses suivantes sur l'ondelette mère :
Hypothèses (W)

1. l'ondelette ψ est à valeurs réelles, isotrope.
2. $\psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$.
3. Les premiers moments positifs de ψ et $\nabla\psi$ sont finis, i.e.

$$\sup_{n\in\{1,2,3\}} I_n < \infty, \quad \sup_{n\in\{1,2,3\}} I'_n < \infty\ ,$$

où pour tout $n > 0$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^2}|x|^n|\psi(x)|\mathrm{d}x\ , \quad I'_n = \int_{\mathbb{R}^2}|x|^n|\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x\ . \tag{4.25}$$

Commençons par analyser le cas d'une onde monogène pure.

Lemme 4.4.1. *Soit F une IMMF de la forme $F(x) = A_0\mathrm{e}^{(k\cdot x)n_\theta}$ avec $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$, $A_0 \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$, et soit ψ une ondelette réelle isotrope de $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$.*
La TOC de F est donnée par

$$W_F(a,b) = A_0 a\widehat{\psi}(ak)\left(\cos(k\cdot b) + \sin(k\cdot b)(\cos\theta\ \mathrm{i} + \sin\theta\ \mathrm{j})\right) = a\widehat{\psi}(ak)\left(A_0\mathrm{e}^{(k\cdot b)n_\theta}\right) \tag{4.26}$$

et l'on a pour $i = 1,2$:

$$\partial_{b_i}W_F(a,b) = k_i n_\theta\left(a\widehat{\psi}(ak)\right)\left(A_0\mathrm{e}^{(k\cdot b)n_\theta}\right)\ . \tag{4.27}$$

Les vecteurs k et n_θ peuvent être calculés par les relations suivantes :

$$k_1 n_\theta = \partial_{b_1}W_F(a,b)\times(W_F(a,b))^{-1}\ ,$$

$$k_2 n_\theta = \partial_{b_2}W_F(a,b)\times(W_F(a,b))^{-1}\ .$$

Démonstration. Par définition, l'ondelette étant réelle isotrope,

$$W_F(a,b) = a^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} F(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x = a\int_{\mathbb{R}^2} F(au+b)\psi(u)\mathrm{d}u$$

Un calcul simple mène à

$$\begin{aligned} W_F(a,b) &= aA_0\begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2}\cos(k\cdot(au+b))\psi(u)\mathrm{d}u \\ \cos\theta\int_{\mathbb{R}^2}\sin(k\cdot(au+b))\psi(u)\mathrm{d}u \\ \sin\theta\int_{\mathbb{R}^2}\sin(k\cdot(au+b))\psi(u)\mathrm{d}u \end{pmatrix} \\ &= A_0 a\widehat{\psi}(ak)\begin{pmatrix} \cos(k.b) \\ \sin(k.b)\cos(\theta) \\ \sin(k.b)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= a\widehat{\psi}(ak)F(b)\ , \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\widehat{\psi}(-ak) = \widehat{\psi}(ak)$, l'ondelette étant isotrope.

À présent, comme $\psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ et $F \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\partial_{b_i} W_F(a,b) = a^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} F(x)\partial_{b_i}\left[\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]\mathrm{d}x = -a^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} F(x)(\partial_{x_i}\psi)\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x\ .$$

Un calcul similaire, utilisant $\widehat{\partial_{x_i}\psi}(\xi) = \mathrm{i}\xi_\mathrm{i}\widehat{\psi}(\xi), \forall\xi = (\xi_1,\xi_2)$, et l'isotropie de ψ, donne

$$\partial_{b_i} W_F(a,b) = A_0 a k_i\widehat{\psi}(ak)\begin{pmatrix} -\sin(k.b) \\ \cos(k.b)\cos(\theta) \\ \cos(k.b)\sin(\theta) \end{pmatrix} = ak_i\widehat{\psi}(ak)\ n_\theta F(b)\ ,$$

car

$$n_\theta F(b) = A_0 n_\theta(\cos(k\cdot b) + n_\theta\sin(k\cdot b)) = -\sin(k\cdot b) + n_\theta\cos(k\cdot b)A_0.$$

Cela fournit (4.27), et conclut la preuve. □

Remarquons que, plus généralement, si $F(x) = A_0\mathrm{e}^{(k\cdot x+\alpha)n_\theta}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$:

$$W_F(a,b) = A_0 a\widehat{\psi}(ak)\mathrm{e}^{(k\cdot b+\alpha)n_\theta} = a\widehat{\psi}(ak)\ F(b) \tag{4.28}$$

$$\partial_{b_i} W_F(a,b) = ak_i\widehat{\psi}(ak)\ n_\theta F(b) \tag{4.29}$$

Les équations (4.26) et (4.27) peuvent s'étendre dans le cas général des IMMF, modulées en amplitude, fréquence et orientation (4.17).

Proposition 4.4.1. *Soit ψ une ondelette vérifiant (W) et F une IMMF de précision ε et de régularité $\sigma > 0$, de la forme(4.17). Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2$, on a*

1.

$$W_F(a,b) = a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\left(A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n(b)}\right) + \varepsilon a^2 R_1(a,b)\ ,$$

avec

$$\begin{aligned} |R_1(a,b)| \ \leq\ & I_1(\sqrt{2}A(b)+1)|\nabla\varphi(b)| + aI_2A(b)\left(|\nabla\varphi(b)| + \sqrt{2}M\right)/2 \\ & + aI_2M/2 + a^2I_3A(b)M/6\ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

2.

$$\partial_{b_i} W_F(a,b) = \partial_{b_i}\varphi(b) n_{\theta(b)} \left(a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\right)\left(A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\right) + \varepsilon a R_2(a,b) \ ,$$

avec

$$\begin{aligned} |R_2(a,b)| \ \leq \ & A(b)\left(a\,|\nabla\varphi(b)|\,I_2'/2 + a^2 M I_3'/6\right) \\ & + \left(\sqrt{2}A(b)+1\right)\left(|\nabla\varphi(b)| I_1' + aMI_2'/2\right) \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Remarque 4.4.2. *Rappelons que dans le cas isotrope, $W_F(a,b)$ et $W_f^{(M)}(a,\alpha,b)$ sont reliés par la relation (4.15). La proposition ci-dessus précise donc le résultat de [Metikas 2007] et [Olhede 2009], en donnant une borne sur l'erreur d'approximation.*

Démonstration. On se reportera à la section C.1 de l'annexe. □

Définissons à présent les opérateurs de fréquence instantanée.

Définition 4.4.2. *On définit les opérateurs Λ_1 et Λ_2 par*

$$\begin{aligned} \Lambda_1(a,b) &= \partial_{b_1} W_F(a,b) \times (W_F(a,b))^{-1} \ , \\ \Lambda_2(a,b) &= \partial_{b_2} W_F(a,b) \times (W_F(a,b))^{-1} \ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ces deux vecteurs vont fournir une approximation de $\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}$ pour une IMMF F de la forme (4.17), comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.4.1. *Soit F une IMMF de précision $\varepsilon > 0$ et de régularité $\sigma > 0$ de la forme (4.17). Soit une ondelette ψ vérifiant (W), considérons $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ tels que*

$$|W_F(a,b)| > \varepsilon^\nu \ \textit{pour un certain } \nu \in (0,1/2) \ .$$

Alors pour $i = 1,2$:

$$|\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}| \leq \varepsilon^{1-\nu} a \ \left(|R_2(a,b)| + a|R_1(a,b)|\ |\nabla\varphi(b)|\right) \tag{4.33}$$

où R_1, R_2 sont définis dans les équations (4.30) et (4.31). En outre, pour tout $a_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $(a,b) \in (0,a_0) \times \mathbb{R}^2$ et tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$|\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}| \leq \varepsilon^\nu \tag{4.34}$$

Démonstration. La preuve est fournie dans la Section C.2 de l'annexe. □

Comme $\cos(\varphi(x)) = \cos(-\varphi(x))$, la définition de la fréquence instantanée $\nabla\varphi$ est ambigüe, dans la mesure où φ peut être remplacée par $-\varphi$. Pour lever cette ambigüité, on suppose couramment que la première composante de la fréquence instantanée est positive [Murray 2012]. Sous cette hypothèse, on peut estimer l'amplitude et la fréquence instantanée d'une IMMF.

Proposition 4.4.2. *On reprend les notations et les hypothèses du théorème 4.4.1. On suppose de plus que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \partial_{x_1}\varphi(x) > 0\ .$$

Alors pour tout $i = 1, 2$, et $(a, b) \in (0, a_0) \times \mathbb{R}$:

$$|\partial_{b_1}\varphi(b) - |\Lambda_1(a, b)|| \leq \varepsilon^{\nu}\ . \tag{4.35}$$

et

$$|\partial_{b_2}\varphi(b) - |\Lambda_2(a, b)|\ \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\partial_{b_1}W_F(a, b)\ \overline{\partial_{b_2}W_F(a, b)}))| \leq \varepsilon^{\nu}\ . \tag{4.36}$$

Démonstration. La preuve est détaillée dans la section C.3. □

4.5 Synchrosqueezing monogène

Cette section traite le cas de la superposition d'IMMFs séparées. On commencera par définir cette notion de séparation, puis l'on montrera comment de tels signaux peuvent être démodulés et reconstruits en utilisant le synchrosqueezing monogène.

Définition 4.5.1. *Une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ est une superposition d'IMMFs séparées de régularité $\sigma > 0$, précision $\varepsilon > 0$ et séparation $d > 0$, s'il existe un entier L tel que*

$$F(x) = \sum_{\ell=1}^{L} F_\ell(x)\ , \tag{4.37}$$

où toutes les F_ℓ sont des IMMFs de régularité σ et précision ε de la forme (4.17) : $F_\ell(x) = A_\ell(x)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(x) n_{\theta_\ell(x)}}$, et qui vérifient pour tout x, $\ell > \ell'$ et $i \in \{1, 2\}$:

$$|\partial_{x_i}\varphi_\ell(x)| > |\partial_{x_i}\varphi_{\ell'}(x)|\ , \tag{4.38}$$

et

$$\left|\partial_{x_i}\varphi_\ell(x) n_{\theta_\ell(x)} - \partial_{x_i}\varphi_{\ell'}(x) n_{\theta_{\ell'}(x)}\right| \geq d\ \left[|\partial_{x_i}\varphi_\ell(x)| + |\partial_{x_i}\varphi_{\ell'}(x)|\right]\ . \tag{4.39}$$

L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathcal{A}_{\varepsilon,\sigma,d}$.

On peut à présent définir le synchrosqueezing monogène (MSST) de toute fonction F appartenant à $\mathcal{A}_{\varepsilon,\sigma,d}$.

Définition 4.5.2. *Soit ψ une ondelette vérifiant (W), et telle que*

$$\mathrm{supp}(\widehat{\psi}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2\ ;\ 1 - \Delta \leq |\xi| \leq 1 + \Delta\}\ ,$$

avec

$$\Delta < \frac{d}{2(1 + d)}\ . \tag{4.40}$$

Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x = 1$. Soit $\delta > 0$, $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, et $\varepsilon > 0$. Soit $F \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\sigma,d}$, on définit son synchrosqueezing monogène (MSST) pour tout $(b, k, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ étant la sphère unité de $\mathbb{R}^2$) par

$$S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b, k, n) = \int_{A_{\varepsilon,F}(b)} W_F(a, b)\frac{1}{\delta^2}h\left(\frac{k_1 - \mathrm{Re}(\overline{n}\ \Lambda_1(a, b))}{\delta}\right) h\left(\frac{k_2 - \mathrm{Re}(\overline{n}\ \Lambda_2(a, b))}{\delta}\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\ , \tag{4.41}$$

avec

$$A_{\varepsilon,F}(b) = \{a \in \mathbb{R}_+ \ ; \ |W_F(a,b)| > \varepsilon^\nu\} \ ,$$

et où $\Lambda_1(a,b)$, $\Lambda_2(a,b)$ *sont définis dans l'équation (4.32).*

On peut à présent énoncer notre résultat principal.

Théorème 4.5.1. *On reprend les notations de la définition 4.5.2. Soit* $F \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\sigma,d}$ *et* $\nu \in (0, 1/(2+4/\sigma))$. *Si* $\varepsilon > 0$ *est suffisamment petit, les résultats suivants sont vérifiés :*

- $|W_F(a,b)| > \varepsilon^\nu$ *seulement s'il existe* ℓ *tel que*

$$(a,b) \in Z_\ell = \{(a,b), \ |a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\} \ . \tag{4.42}$$

- *Pour tout* $\ell = \{1, \cdots, L\}$ *et tout couple* $(a,b) \in Z_\ell$ *vérifiant* $|W_F(a,b)| > \varepsilon^\nu$, *on a pour* $i = 1, 2$ *:*

$$|\Lambda_i(a,b) - \partial_i\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}| \leq \varepsilon^\nu \ .$$

- *Enfin pour tout* $\ell \in \{1, \cdots, L\}$, *il existe* $C > 0$, *tel que pour tout* $b \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{\delta \to 0} \left| \frac{1}{\tilde{C}_\psi} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^\delta_{f,\varepsilon}(b,k,n) \mathrm{d}k\mathrm{d}n - A_\ell(b) \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}} \right| \leq \widetilde{\varepsilon} \ .$$

  où l'on a noté $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^\nu$, $\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon}, n, b) = \{k \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \max_i |k_i n - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}| \leq \widetilde{\varepsilon}\}$, *et* $\tilde{C}_\psi$ *est défini en (4.10).*

Démonstration. La preuve se trouve dans la section C.4 de l'annexe. □

4.6 Mise en oeuvre

4.6.1 Discrétisation du SST monogène

Comme pour le cas de la dimension 1, on commence par discrétiser les variables, en construisant des ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{O}$ pour les échelles a, les fréquences normalisées (k_1, k_2), et les orientations θ. On utilise une échelle logarithmique pour a et k, en utilisant n_v coefficients par octave : $\mathcal{A} = \{2^{j/n_v}\}_{j=0\cdots n_a-1}$. On doit ensuite calculer la TOC discrète du signal monogène $W_F(a,b)$, ainsi que les estimations des fréquences instantanées $\Lambda_1(a,b)$ et $\Lambda_2(a,b)$ définies par l'équation (4.32). Pour cela, comme dans le cas du SST 1D ou de la réallocation, on fait porter la dérivation sur l'ondelette, en écrivant pour $i = 1, 2$:

$$\partial_{b_i} W_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \partial_{b_i} \psi_{a,b}(x) \ \mathrm{d}x,$$

les autres composantes $\partial_{b_i} W_{\mathcal{R}_1 f}(a,b)$ et $\partial_{b_i} W_{\mathcal{R}_2 f}(a,b)$ étant calculées de la même manière. Le synchrosqueezing monogène consiste alors à réallouer la TOC. Étant

donné un seuil γ, et en notant Δ_k la résolution fréquentielle, on écrit pour tout $a \in \mathcal{A}, (k_1, k_2) \in \mathcal{K}^2, \theta \in \mathcal{O}$:

$$S_{F,\gamma}(b, k_1, k_2, n_\theta) = \frac{\log(2)}{n_v} \sum_{a \in \mathcal{A} \text{ tels que } \begin{cases} |W_F(a,b)| > \gamma \\ |k_1 - \mathrm{Re}(\Lambda_1(a,b)\ \overline{n}_\theta)| \leq \frac{\Delta_{k_1}}{2} \\ |k_2 - \mathrm{Re}(\Lambda_2(a,b)\ \overline{n}_\theta)| \leq \frac{\Delta_{k_2}}{2} \end{cases}} \frac{W_F(a,b)}{a}. \tag{4.43}$$

Le terme $\frac{\log(2)}{an_v}$ vient de la mesure $\frac{da}{a^2}$ de l'équation (4.41), car nous considérons des échelles logarithmiques. Notons que si l'on utilise des échelles de fréquence logarithmiques, la résolution Δ_k dépend de la valeur de k.

4.6.2 Synchrosqueezing monogène isotrope

Ce MSST discret est relativement simple à calculer, mais pose des problèmes d'interprétation, car il donne une représentation dépendant de 5 variables réelles. Ce grand nombre de variables nuit à la lisibilité, et rend les étapes d'analyse et de traitement (détection des ridges, reconstruction) plus coûteuses. Pour diminuer le nombre de variables, remarquons que si un signal multicomposantes monogène vérifie la condition de séparation de l'équation (4.38), alors pour tout $\ell > \ell'$ les fréquences instantanées vérifient $|\nabla\varphi_\ell(x)| > |\nabla\varphi_{\ell'}(x)|$. Ainsi, les superpositions d'IMMFs considérées dans le MSST ont des normes du vecteur fréquence instantanée séparées. Au lieu de réallouer la TOM en fonction de la fréquence vectorielle et de l'orientation, on peut donc considérer seulement $|(k_1, k_2)|$. Cela nous amène à définir le MSST discret isotrope, défini pour tout $a \in \mathcal{A}$ and $k \in \mathcal{K}$ par :

$$S_{F,\gamma}(b, k) = \frac{\log(2)}{n_v} \sum_{a \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \begin{cases} |W_F(a,b)| > \gamma \\ \left|k - \sqrt{|\Lambda_1(a,b)|^2 + |\Lambda_2(a,b)|^2}\right| \leq \frac{\Delta_k}{2} \end{cases}} \frac{W_F(a,b)}{a}. \tag{4.44}$$

Le coefficient $S_{F,\gamma}(b, k_p)$ contient donc tous les $W_F(a, b)$ dont la "fréquence instantanée isotrope" $\sqrt{|\Lambda_1(a,b)|^2 + |\Lambda_2(a,b)|^2}$ est proche de la valeur de k. Ce MSST isotrope réduit clairement la complexité de la représentation, puisqu'il ne dépend plus que de trois variables réelles : la position et la fréquence scalaire. Remarquons qu'on ne perd pas pour autant d'information : l'anisotropie locale des IMMFs, c'est-à-dire leur orientation, est alors donnée par la direction du vecteur fréquence instantanée. Dans les exemples de ce chapitre nous mettrons en oeuvre cette implémentation, en utilisant par ailleurs l'ondelette de Morlet anisotrope de paramètres $\mu > 0$ et $\sigma > 0$, définie dans le domaine de Fourier par :

$$\hat{\psi}_{\mu,\sigma}(\xi) = \exp(-\pi^2\sigma(|\xi| - \mu)^2)\ . \tag{4.45}$$

4.6.3 Cas d'une superposition d'ondes réelles

Une dernière question pratique concerne la forme des signaux. Le théorème 4.5.1 suppose que le signal est une somme d'IMMFs, c'est-à-dire un signal vivant dans

$\mathbb{R}^3$. Or en pratique, on dispose d'une image f à valeurs réelles. Remarquons qu'on a le même problème en une dimension, lorsque l'on considère des modes réels de la forme $h(t) = A(t)\cos(2\pi\phi(t))$, alors que le théorème d'approximation 3.3.1 suppose des IMFs complexes de la forme $A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$. En fait, cela ne change pas grand chose, car le coeur du théorème montre que sous les hypothèses de variations lentes, $A(t)e^{2i\pi\phi(t)}$ peut être approximée au point x par l'onde pure $A(x)e^{2i\pi[\phi(x)+\phi'(x)(t-x)]}$. Cette dernière étant analytique, il est équivalent de considérer uniquement sa partie réelle.

Dans le cas monogène, si l'on dispose d'une IMF réelle $f(x) = A(x)\cos(\phi(x))$, on peut lui associer l'IMMF

$$m(x) = A(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(x)} \text{ avec } n_\theta = \frac{\partial_{x_1}\varphi}{|\nabla\varphi|}\mathrm{i} + \frac{\partial_{x_2}\varphi}{|\nabla\varphi|}\mathrm{j}. \tag{4.46}$$

On peut vérifier que la fonction $\theta(x)$ vérifie les conditions lentes, ce qui fait que la fonction m est une IMMF au sens de la définition 4.4.1. On a alors toutes les hypothèses pour appliquer le théorème 4.5.1 à la partie réelle de m.

4.7 Expériences numériques

4.7.1 Représentation d'une image à trois composantes

On illustre dans cette section l'intérêt du MSST pour la représentation d'un signal multicomposantes synthétique en 2 dimensions. On considère le signal-test $f = f_1 + f_2 + f_3$, les modes étant définis par :

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= e^{-10((x-0.5)^2+(y-0.5).^2))}\sin(10\pi(x^2+y^2+2(x+0.2y)) \\ f_2(x,y) &= 1.2\sin(40\pi(x+y)) \\ f_3(x,y) &= \cos(2\pi(70x+20x^2+50y-20y^2-41xy)) \end{cases} \tag{4.47}$$

On calcule sa TOM W_F et son MSST isotrope S_F. Rappelons que la transformée $|W_F|$ dépend de trois variables scalaires x, y et a, alors que $|S_F|$ dépend de x, y et k. Comme ces deux transformées sont de dimension 3, leur visualisation sous forme d'image, le niveau de gris codant l'amplitude, n'est plus possible. On proposera ici deux visualisations dans le domaine espace-fréquence ; la première est une représentation volumique, représentant S_F ou W_F comme un nuage de points, dont la densité et la couleur sont proportionnelles au module de la transformée. La seconde est une représentation d'un plan de l'espace fréquence, pour une droite $ax + by + c$ fixée. Cette dernière représentation est comparable à une représentation TF classique, ce qui facilite la comparaison. La Figure 4.2 suivante montre ces deux visualisations de W_F et S_F pour le signal-test de l'équation (4.47). Il est clair que le MSST est bien plus concentré, facilitant l'analyse et l'interprétation du signal.

Remarquons que les Figures 4.2(f) et (h) sont semblables à la TOC et au SST du signal monodimensionnel $x \mapsto f(x, 0.5)$. L'avantage du MSST par rapport au SST 1-dimensionnel réalisé sur les lignes ou les colonnes de l'image réside dans sa capacité à retrouver l'orientation locale.

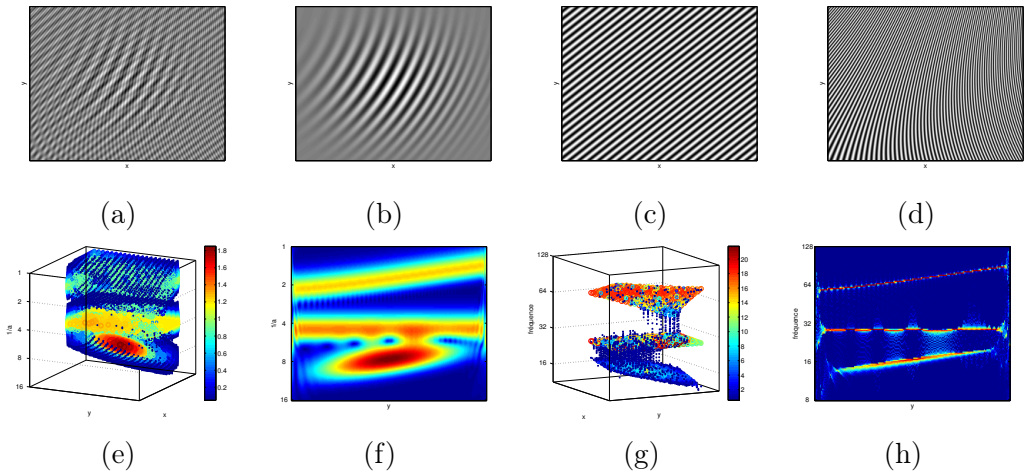


Figure 4.2 (a) : L'image-test de l'équation (4.47). (b,c,d) : ses trois composantes. (e,f) : la TOM $|W_F|$ représentée comme une densité volumique, et une coupe bidimensionnelle pour $y = 0.5$ fixé. (g,h) : mêmes visualisations pour le MSST $|S_F|$.

4.7.2 Décomposition et Démodulation

Une fois le MSST calculé, l'étape clé est l'estimation des fréquences instantanées isotropes de chaque mode $|\nabla\varphi_\ell(b)|$, qui forment les ridges du MSST. Comme dans le cas 1D, c'est un problème difficile pour lequel aucun algorithme optimal n'est disponible. On se contentera, comme aux chapitres précédents, d'utiliser un algorithme heuristique (cf. section 2.3.2), qui founit une approximation $\hat{k}_\ell(b)$ de $|\nabla\varphi_\ell(b)|$. Comme dans le SST standard, on peut ensuite reconstruire l'IMMF F_ℓ, en intégrant localement en fréquence :

$$\tilde{F}_\ell(b) \approx \sum_{\hat{k}_\ell(b)-\kappa \leq k \leq \hat{k}_\ell(b)+\kappa} S_{F,\gamma}(b,k) \ , \tag{4.48}$$

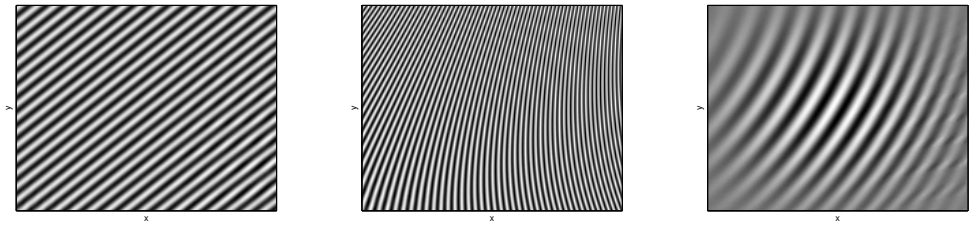
où la taille κ du support d'intégration doit être de l'ordre de grandeur de ε^ν (cf. théorème 4.5.1). On choisira en pratique $\kappa = 5\Delta_k$. Pour évaluer la qualité de la reconstruction, nous comparons le mode réel f_ℓ avec la reconstruction $\mathcal{R}e\{\tilde{F}_\ell\}$ en calculant l'erreur quadratique normalisée

$$MSE(\tilde{F}_\ell) = \frac{\|\mathcal{R}e\{\tilde{F}_\ell\} - f_\ell\|}{\|f_\ell\|} \ . \tag{4.49}$$

On représente la partie réelle de chaque IMMF obtenue par reconstruction du MSST dans la Figure 4.3, en indiquant la MSE correspondante. Bien que notre détecteur de ridge soit assez naïf, on parvient à retrouver les trois modes avec une grande précision.

4.7.3 Illustrations sur des images réelles

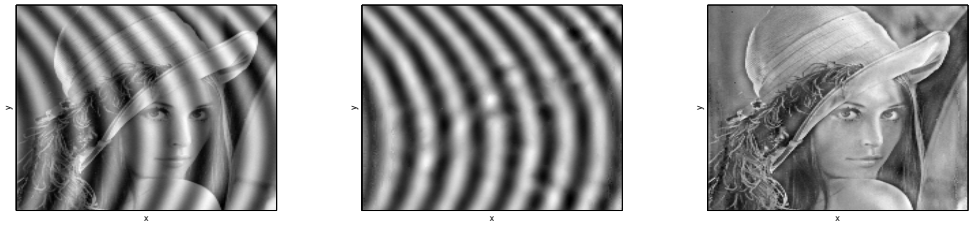
Nous aimerions montrer ici l'intérêt du MSST pour traiter des images réelles, qui ne sont pas exactement des superpositions séparées d'IMMFs, mais contiennent quand même des motifs périodiques orientés. La figure 4.4(a) montre l'image Lenna, à laquelle on a ajouté une composante oscillante. Un synchrosqueezing monogène nous



(a) (b) (c)

Figure 4.3 Les modes reconstruits d'après le MSST, pour le signal-test de l'équation (4.47). Les erreurs normalisées valent respectivement 0.03, 0.06 et 0.05. Nous avons utilisé l'ondelette de Morlet anistrope $\psi_{\mu,\sigma}$ définie en (4.45), avec $\sigma = 2$ et $\mu = 1$.

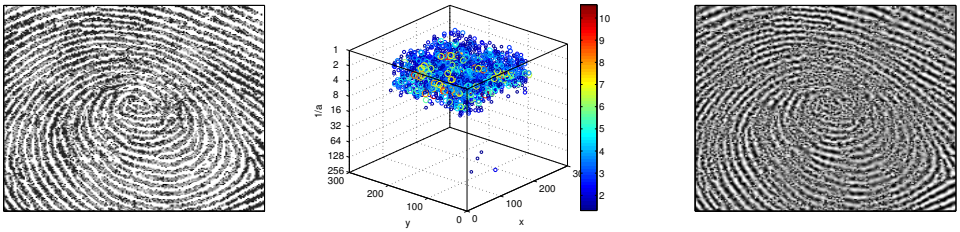
permet d'extraire le mode oscillant, et de reconstruire grossièrement l'image originale. Ce type de tests a été utilisé dans [Unser 2009] pour illustrer la transformée en ondelettes monogène, mais avec une modulation d'amplitude (le motif oscillant est multiplié à l'image originale). Remarquons que l'image reconstruite contient de forts artefacts, les angles et contours ne semblant pas correctement reproduits. En effet, les contours, en tant que singularités, se retrouvent dans toutes les échelles de la TOM, et retirer une bande dans cette TOM, comme le fait notre extraction de mode, les impacte forcément.



(a) (b) (c)

Figure 4.4 Illustration de l'extraction de mode avec une image réelle. (a) : image d'entrée, somme de Lenna et d'un motif oscillant. (b) : le mode oscillant extrait d'après le MSST. Les paramètres sont les mêmes que dans la Figure 4.3, l'erreur normalisée vaut 0.12. (c) : Le résidu, approximation de l'image originale Lenna.

Nous réalisons un autre test sur une image naturelle ressemblant à une IMF : une empreinte digitale. La Figure 4.5 montre une empreinte digitale, la visualisation volumique de son synchrosqueezing monogène, et le mode principal reconstruit. On voit clairement que, malgré une image de faible qualité, et qui comporte de nombreuses singularités, le MSST parvient à bien capturer l'information fréquentielle.



(a) (b) (c)

Figure 4.5 Analyse d'une empreinte digitale par MSST. (a) : l'image originale, (b) : la visualisation volumique de son MSST, (c) : la reconstruction du mode principal.

4.8 Conclusion

Nous avons présenté brièvement dans ce chapitre l'intérêt potentiel des méthodes espace-fréquence pour l'analyse d'image. Nous avons présenté la notion de signal monogène en utilisant le formalisme des quaternions, qui prolonge le concept de signal analytique complexe en dimension 1. Nous avons ensuite introduit le synchrosqueezing monogène en deux dimensions, en montrant qu'il représente de manière compacte des sommes d'ondes monogènes modulées (IMMFs), tout en permettant leur démodulation et leur reconstruction.

On se convaincra aisément que les autres outils temps-fréquence discutés dans cette thèse, notamment l'analyse de ridges et la réallocation, peuvent se généraliser en dimension supérieure grâce au formalisme du signal monogène. De même, la prise en compte des fortes modulations fréquentielles exposée dans les chapitres 2 et 3 doit se transposer aisément en dimension supérieure. Toutefois, les représentations espace-fréquence en dimension 2 ou plus sont moins intuitives, car moins facilement visualisables. Une prochaine étape importante sera la mise en oeuvre d'applications concrètes basées sur le MSST, les ridges monogènes ou les transformées monogènes réallouées, ce qui nécessitera une optimisation des calculs, notamment pour limiter la quantité de données produites par ces représentations.

Il serait par ailleurs intéressant de comparer notre synchrosqueezing monogène avec les différentes extensions de l'EMD en dimension 2. On remarque immédiatement que la plupart des extensions actuelles [Damerval 2005, Nunes 2003] considèrent des IMFs non orientées, similaires à des produits tensoriels de cosinus. Notre définition des IMMFs au contraire suppose qu'elles forment des lignes de crête localement parallèles, et ne comportent donc pas d'extrema isolés, mais des lignes de niveau lisses. Cela suggère une nouvelle extension de l'EMD en dimension 2 fondée sur ces critères, adaptée à l'analyse d'ondes planes modulées.

Conclusion générale

Conclusion

Nous avons étudié tout au long de cette thèse différentes classes de méthodes pour l'analyse des signaux multicomposantes, reposant sur différentes caractérisations de ces signaux. L'EMD se focalise ainsi sur la symétrie des enveloppes de chaque mode, alors que les décompositions basées sur la TFCT ou la TOC s'intéressent à leur structure en ridges dans les plans TF ou TE, la réallocation et le synchrosqueezing se concentrant quant à elles sur la qualité de la représentation. Pour chaque approche, nous avons proposé des variantes ou des généralisations qui améliorent les résultats, renforcent le cadre théorique ou étendent le domaine d'application des décompositions. L'analyse de signaux multicomposantes par de telles méthodes permet la mise en oeuvre d'applications classiques de traitement du signal, dont certaines ont été présentées dans cette thèse : cela inclut l'estimation des grandeurs instantanées, la séparation des modes ou le débruitage.

L'évaluation globale et la comparaison des différentes décompositions n'est pas aisée, car leurs performances dépendent grandement des applications et des types de signaux considérés. On a vu cependant au cours de ce travail plusieurs critères quantitatifs : évaluer la parcimonie renseigne sur la qualité de la représentation, et l'on peut facilement calculer les performances de démodulation et de reconstruction pour des signaux multicomposantes synthétiques. Pour comparer les différentes méthodes de manière plus générale, nous retiendrons les conclusions suivantes, qui dépendent de critères plus qualitatifs.

- **Qualité de la représentation :** si l'objectif est la visualisation de cartes temps-fréquence concentrées à partir de signaux multicomposantes, les méthodes basées sur la réallocation semblent les plus efficaces. Si l'on souhaite par ailleurs reconstruire directement des modes, le synchrosqueezing du second ordre de la section 3.5 semble parfaitement adapté.
- **Débruitage de signaux :** plusieurs tests sur des signaux bruités ont illustré au chapitre 1 les inconvénients de l'EMD pour l'analyse de signaux bruités. Différentes méthodes permettent de contourner le problème, grâce à des post-

traitements, des répétitions aléatoires (EEMD) ou une meilleure détection des extrema (EMD-NI), mais aucune n'est pleinement satisfaisante. L'EMD semble bien adaptée pour traiter le bruit *en moyenne*, mais reste trop instable pour donner de bons résultats de débruitage. Un phénomène similaire apparaît pour le SST ou la réallocation : la structure du bruit est bien mise en valeur, mais cela perturbe fortement les ridges. De ce point de vue, les méthodes de reconstruction par intégration locale développées au chapitre 2 semblent clairement les plus efficaces.

- **Adaptativité et généralité :** toutes les méthodes discutées dans cette thèse sont adaptatives, dans le sens où elles s'adaptent aux variations du contenu fréquentiel, aux modulations. Mais l'EMD possède deux caractéristiques qui la rendent plus générale que les autres méthodes. D'une part, elle gère naturellement des formes d'onde non harmoniques (provenant de phénomènes non linéaires), pourvu qu'elles possèdent exactement un maximum et un minimum par période. D'autre part, l'EMD ne nécessite aucun paramétrage, les valeurs par défaut du critère d'arrêt fonctionnant dans quasiment tous les cas.

- **Incertitude et séparation :** on a vu que l'EMD ne permet pas de séparer deux modes qui ont des fréquences instantanées trop proches, car sa résolution fréquentielle dépend de la détection des extrema. Dans cette optique, l'EMD-NI offre une alternative intéressante, qui augmente cette résolution grâce à une meilleure détection des extrema. Pour les méthodes temps-fréquence, on ajuste facilement la résolution fréquentielle en choisissant la taille de la fenêtre d'analyse. On peut ainsi séparer deux modes arbitrairement proches, pourvu que leurs modulations soient suffisamment faibles.

- **Détection des modes et démodulation :** c'est sûrement le point le plus difficile à évaluer. Chaque méthode fonctionne correctement sur des superpositions idéales d'ondes modulées, bien séparées en fréquence. On a vu comment les alternatives proposées dans cette thèse améliorent les résultats sur de tels signaux par rapport aux méthodes originelles. Pour les méthodes temps-fréquence, l'intérêt de considérer un développement d'ordre 2 pour prendre en compte la modulation fréquentielle a été clairement démontré. Concernant le choix de la classe de méthode (EMD, ridges, SST), il dépend fortement des caractéristiques des modes. Pour des signaux réels possédant des intermittences, des singularités, et dégradés par du bruit, la comparaison entre ces méthodes est difficile, car les performances dépendent fortement du détecteur de ridges utilisé.

- **Caractère bien posé de la méthode :** comme on l'a vu, l'EMDOS ne résout pas tous les problèmes théoriques soulevés par l'EMD. Si l'on s'intéresse à la représentation TF, les méthodes temps-fréquence des chapitres 2 et 3 restent bien mieux formalisées. Pour l'extraction des modes en revanche, on ne dispose pas de garanties théoriques sur le détecteur de ridges.

- **Facilité d'utilisation :** c'est un point important, qui explique en partie le succès de l'EMD. Cette dernière repose en effet sur un algorithme simple

et des concepts intuitifs, la symétrie des enveloppes et la moyenne locale. Nécessitant en outre peu de paramétrage, elle peut être facilement testée dans de nombreuses situations. Les autres méthodes restent plus compliquées en terme de compréhension, de temps de calcul ou de paramétrage.

- **Compression de signaux ou d'images :** bien que non traitée ici, cette application semble assez naturelle. Par définition, un mode AM–FM a en effet une amplitude et une fréquence instantanée qui varient faiblement par rapport à sa fréquence centrale. Ces grandeurs peuvent ainsi être échantillonnées à une cadence bien plus lente que la fréquence de Nyquist du signal lui-même. Dans cette optique, toutes les méthodes évoquées ici semblent intéressantes.

Perspectives

Les diverses méthodes étudiées dans cette thèse reflètent la richesse des approches permettant l'analyse locale multiéchelle des variations des signaux. Cela tient à la diversité des points de vue, des applications, et comme souvent à la présence de différentes communautés scientifiques concernées. Pour conclure cette thèse, on se propose ici d'évoquer de manière non exhaustive les principales perspectives. On commencera par les développements qui nous paraissent importants à court terme, pour ensuite proposer deux pistes plus globales.

Des résultats théoriques pour le synchrosqueezing d'ordre 2

Comme remarqué dans le chapitre 3, les deux généralisation du SST adaptées aux fortes modulations fréquentielles ne sont pas étayées par des résultats théoriques. On aimerait pourtant disposer d'un résultat similaire aux théorèmes 3.3.2 et 3.3.1, mais prenant en compte des superpositions de chirps linéaires. Dans le cas du synchrosqueezing oblique, on pourrait déjà montrer qu'il fournit une représentation inversible idéale pour les chirps linéaires. Le cas des perturbations de chirps semble cependant difficile à traiter, car il faudrait alors s'assurer que les domaines d'intégration $\mathcal{I}_\tau$ sont tous disjoints lorsque τ varie. En ce qui concerne le synchrosqueezing vertical d'ordre 2, l'objectif semble assez raisonnable, dans la mesure où l'on dispose déjà des théorèmes 2.4.3 et 2.4.4 pour un seul mode. Le cas multicomposantes ne devrait pas poser de problèmes insurmontables, quitte à supposer une condition forte de séparation fréquentielle.

Mise en oeuvre et applications du synchrosqueezing monogène

Le chapitre 4 donne un cadre théorique clair au synchrosqueezing monogène, mais ne présente pas d'applications réelles de cette transformée. Une étude ultérieure devra montrer l'intérêt du MSST pour l'analyse de certains types d'images, en le comparant à la TOM ou bien aux décompositions discrètes comme la "dual-tree wavelet transform" [Selesnick 2005]. Le principal obstacle à cette mise en oeuvre est la nécessité de disposer d'un détecteur de ridges efficace, adapté à la dimension 2 et à la nature parcimonieuse du synchrosqueezing.

Le problème de l'estimation des ridges

En fait, le problème de l'estimation des ridges est un point crucial, également en dimension 1, qui empêche de comparer toutes les différentes méthodes. Par exemple, s'il est clair que la réallocation fournit une représentation plus compacte des signaux multicomposantes, l'estimation des ridges à partir d'une transformée réallouée avec notre algorithme naïf n'est pas toujours meilleure que l'estimation directe à partir de la transformée non réallouée. En effet, la réallocation concentre la représentation, mais la rend en même temps irrégulière, alors que la régularité de la TFCT ou de la TOC peut être exploitée lors de la détection des ridges. Il nous paraît donc important de construire un détecteur de ridges bien adapté aux représentations réallouées. On pourrait pour cela se tourner vers des approches plus "discrètes", comme l'estimation de variétés à partir d'un nuage de points, ou bien vers des approches de traitement d'image comme les contours actifs, déjà parfois utilisées [Terrien 2008].

Résultats d'estimation

Un problème lié est la gestion du bruit. Alors que la TOC ou la TFCT d'un signal bruité sont bien connues, la structure de leur transformée réallouée n'a pas été clairement étudiée, empêchant la mise au point d'un détecteur de ridge robuste pour les transformées réallouées. On souhaiterait disposer de résultats d'estimation, similaires aux théorèmes 3.3.2 et 3.3.1 mais pour des signaux aléatoires. Cela ouvrirait la voie également à l'étude des processus aléatoires utilisant des transformées réallouées.

La comparaison avec les approches parcimonieuses

Enfin, une perspective qui nous semble particulièrement importante est la comparaison avec les approches par dictionnaire. Ces dernières années, avec le développement des algorithmes de programmation convexe, cette classe de méthodes a été utilisée avec succès dans de nombreux domaines, y compris pour des applications traditionnelles des méthodes temps-fréquence. Pour ne citer qu'un exemple, la détection des chirps émis par les ondes gravitationnelles fait actuellement l'objet de deux expériences internationales, qui utilisent des approches par poursuite de dictionnaires de chirplets [Candes 2008, Chassande-Mottin 2006]. Mais dans de telles approches, la modulation fréquentielle $\phi''(t)$ est codée nécessairement dans les atomes du dictionnaire, alors qu'elle est prise en compte naturellement dans les méthodes temps-fréquence traditionnelles.

Annexes

A Synchrosqueezing de Fourier

Démontrons le théorème 3.3.2, pour le synchrosqueezing de la TFCT. On suivra globalement les étapes de la preuve dans [Daubechies 2011] : on s'intéresse d'abord aux estimations de V_f, de $\hat{\omega}_f$, puis on montre la validité de ces approximations à ε^ν près, dans chaque bande Z_k. La preuve est plus simple que dans le cas de la TOC, car les bornes d'erreur sont uniformes en la fréquence η.

Lemme A.1. *Soit $f \in \mathcal{B}_{\Delta,\varepsilon}$, on a pour tout $(\eta, t) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\left| V_f(\eta, t) - \sum_{k=1}^{K} f_k(t)\hat{g}(\eta - \phi_k'(t)) \right| \leq \varepsilon \Gamma_1(t),$$

avec $\Gamma_1(t) = KI_1 + \pi I_2 \sum_{k=1}^{K} A_k(t)$, et les I_n sont les "moments positifs" $I_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^n |g(x)|\, dx$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème d'approximation 2.4.1 sur chaque mode f_k, en se servant de la linéarité de la TFCT. □

On approche à présent $\partial_t V_f$ de la même manière.

Lemme A.2. *Soit $f \in \mathcal{B}_{\Delta,\varepsilon}$, on a pour tout $(\eta, t) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\left| \partial_t V_f(\eta, t) - 2i\pi \sum_{k=1}^{K} f_k(t)\phi_k'(t)\hat{g}(\eta - \phi_k'(t)) \right| \leq \varepsilon \left(\Gamma_2(t) + 2\pi|\eta|\Gamma_1 \right), \tag{50}$$

avec $\Gamma_2(t) = KI_1' + \pi I_2' \sum_{k=1}^{K} A_k(t)$, et les I_n' sont les "moments positifs" de g' : $I_n' = \int_{\mathbb{R}} |x|^n |g'(x)|\, dx$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, comme $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\partial_t V_f$ est bien définie, et l'on peut dériver sous l'intégrale. On obtient :

$$\partial_t V_f(\eta, t) = -\int_{\mathbb{R}} f(\tau) g'(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau + 2i\pi\eta V_f(\eta, t).$$

Comme g' est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut appliquer le lemme A.1 au premier terme de cette équation, ce qui donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\ g'(\tau - t) e^{-2i\pi\eta(\tau - t)}\, d\tau - \sum_{k=1}^{K} f_k(t) \widehat{g'}(\eta - \phi_k'(t)) \right| \leq \varepsilon \Gamma_2(t). \tag{51}$$

On écrit alors :

$$\sum_{k=1}^{K} f_k(t) \widehat{g'}(\eta - \phi_k'(t)) = 2i\pi \sum_{k=1}^{K} f_k(t)(\eta - \phi_k'(t)) \hat{g}(\eta - \phi_k'(t)). \tag{52}$$

On a donc :

$$\left| \partial_t V_f(\eta, t) - 2i\pi \sum_{k=1}^{K} f_k(t) \phi_k'(t) \hat{g}(\eta - \phi_k'(t)) \right| \leq \varepsilon \Gamma_2(t) + 2\pi|\eta| \left| V_f(\eta, t) - \sum_{k=1}^{K} f_k(t) \hat{g}(\eta - \phi_k'(t)) \right|,$$

Il suffit d'appliquer le Lemme A.1, et l'on obtient la majoration souhaitée (50). □

On s'intéresse à présent à la séparation des modes, et à la valeur de V_f loin des ridges.

Lemme A.3. *Si ε est assez petit, $|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$ seulement s'il existe $1 \leq k \leq K$ tel que $(\eta, t) \in Z_k$, où les ensembles Z_k sont les bandes du plan temps-fréquence définies par $|\eta - \phi_k'(t)| < \Delta$.*

Démonstration. On suppose que ε est suffisamment petit, c'est-à-dire que pour tout t,

$$\varepsilon \leq \Gamma_1(t)^{\frac{-1}{1-\nu}}. \tag{53}$$

Remarquons qu'un tel $\varepsilon > 0$ existe, car Γ_1 est borné par $KI_1 + \pi \sum_k \|A_k\|_\infty I_2$. Si $(\eta, t) \notin \bigcup_{k=1}^{K} Z_k$, le Lemme A.1 donne

$$|V_f(\eta, t)| \leq \varepsilon \Gamma_1(t) \leq \varepsilon^\nu.$$

Par contraposée, on a donc montré que si $|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$, il existe au moins un k tel que $(\eta, t) \in Z_k$. Remarquons également que par l'hypothèse de séparation, les Z_k sont disjoints, l'entier k est donc unique. □

On s'intéresse à présent à l'approximation de l'opérateur $\hat{\omega}_f$.

Lemme A.4. *Soit $1 \leq k \leq K$ et (η, t) tels que $|\eta - \phi_k'(t)| < \Delta$ et $|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$. Alors,*

$$|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| \leq \left[(2\phi_k'(t) + \Delta)\Gamma_1(t) + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2(t) \right] \varepsilon^{1-\nu}.$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
&|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| \\
&\quad \leq \left| \frac{\partial_t V_f(\eta, t) - 2i\pi\phi_k'(t) f_k(t) \hat{g}(\eta - \phi'(t))}{2i\pi V_f(\eta, t)} \right| + \left| \frac{\phi_k'(t)(f_k(t)\hat{g}(\eta - \phi_k'(t)) - V_f(\eta, t))}{V_f(\eta, t)} \right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon\Gamma_2(t) + 2\pi|\eta|\varepsilon\Gamma_1(t)}{2\pi\varepsilon^\nu} + \phi_k'(t) \frac{\varepsilon\Gamma_1(t)}{\varepsilon^\nu} \\
&\quad \leq \left[(|\eta| + \phi_k'(t))\Gamma_1(t) + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2(t) \right] \varepsilon^{1-\nu}.
\end{aligned}$$

On a utilisé les Lemmes A.1 et A.2 pour majorer le numérateur de chaque terme, en remarquant que seul le terme en f_k est non nul (Lemme A.3). Il suffit ensuite d'écrire $|\eta| \leq \phi_k'(t) + \Delta$, pour conclure. □

Les lemmes A.3 et A.4 correspondent aux 2 premières assertions du théorème 3.3.2. On peut à présent démontrer le dernier point de ce théorème, qui concerne la reconstruction des modes. On va montrer que pour tout $k \in \{1 \cdots, K\}$ il existe une constante C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left| \lim_{\delta \to 0} \left(\int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} T_f^{\delta, \varepsilon^\nu}(\omega, t)\, d\omega \right) - f_k(t) \right| \leq C\varepsilon^\nu. \tag{54}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, on écrit :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \to 0} \int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} T_f^{\delta, \varepsilon^\nu}(\omega, t)\, d\omega \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} \frac{1}{g(0)} \int_{|V_f(\eta,t)| > \varepsilon^\nu} V_f(\eta, t) \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t)}{\delta} \right) d\eta d\omega && (55) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int_{|V_f(\eta,t)| > \varepsilon^\nu} \frac{1}{g(0)} V_f(\eta, t) \int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t)}{\delta} \right) d\omega d\eta && (56) \\
&= \frac{1}{g(0)} \int_{|V_f(\eta,t)| > \varepsilon^\nu} V_f(\eta, t) \lim_{\delta \to 0} \int_{|\omega - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu} \frac{1}{\delta} \rho\left(\frac{\omega - \hat{\omega}_f(\eta, t)}{\delta} \right) d\omega d\eta && (57) \\
&= \frac{1}{g(0)} \int_{\{|V_f(\eta,t)| > \varepsilon^\nu\} \bigcap \{|\hat{\omega}_f(\eta,t) - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu\}} V_f(\eta, t)\, d\eta, && (58)
\end{aligned}$$

où l'on utilise le théorème de Fubini pour l'équation (56) et le théorème de convergence dominée pour (57). En effet, le lemme A.3 montre que l'ensemble $\{\eta \,/\, |V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu\}$ est inclus dans l'ensemble borné $\bigcup_k Z_k(t)$, où $Z_k(t) = (\phi_k'(t) - \Delta, \phi_k'(t) + \Delta)$. Par ailleurs, toutes les fonctions sont bornées, donc intégrables. Pour l'équation (58), on utilise à nouveau le théorème de convergence dominée sur cette approximation de l'unité.

On aimerait à présent montrer que l'intervalle d'intégration de l'équation (58), que l'on notera $X = \{|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu\} \bigcap \{|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| < \varepsilon^\nu\}$, est égal à l'ensemble suivant :

$$Y = \{|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu\} \bigcap \{|\eta - \phi_k'(t)| < \Delta\}.$$

Remarquons d'abord que si η vérifie $|V_f(\eta, t)| > \varepsilon^\nu$, le lemme A.3 montre qu'il existe un unique l tel que $|\eta - \phi_l'(t)| < \Delta$. Si $l \neq k$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| &\geq |\phi_l'(t) - \phi_k'(t)| - |\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_l'(t)| \\
&\geq 2\Delta - \varepsilon^\nu,
\end{aligned}$$

par le Lemme A.4. Si ε est suffisament petit, i.e. s'il vérifie

$$\varepsilon^\nu < \Delta, \tag{59}$$

on obtient $|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| > \varepsilon^\nu$. Cela montre que $X \subset Y$. Réciproquement, si $\eta \in Y$, le Lemme A.4 montre que

$$|\hat{\omega}_f(\eta, t) - \phi_k'(t)| \leq \left[(2\phi_k'(t) + \Delta)\Gamma_1(t) + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2(t) \right] \varepsilon^{1-\nu}.$$

Si ε est suffisamment petit, c'est-à-dire q'il vérifie pour tout t et tout k :

$$\varepsilon < \left[(2\phi_k'(t)+\Delta)\Gamma_1(t) + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2(t)\right]^{\frac{-1}{1-2\nu}}, \tag{60}$$

alors par le lemme A.3, on a :

$$|\hat{\omega}_f(\eta,t) - \phi_k'(t)| \leq \left[(2\phi_k'(t)+\Delta)\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)\right]\varepsilon^{1-\nu} < \varepsilon^{\nu}.$$

On obtient bien l'égalité des ensembles, $X = Y$.

Finalement, on peut majorer l'erreur de reconstruction de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{|\omega-\phi_k'(t)|<\varepsilon^{\nu}} T_f^{\delta,\gamma}(\omega,t)\,d\omega\right) - f_k(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{g(0)}\int_{\{|V_f(\eta,t)|>\varepsilon^{\nu}\}\bigcap\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}} V_f(\eta,t)\,d\eta - f_k(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{g(0)}\int_{\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}} V_f(\eta,t)\,d\eta - f_k(t) - \frac{1}{g(0)}\int_{\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}\bigcap\{|V_f(\eta,t)|\leq\varepsilon^{\nu}\}} V_f(\eta,t)\,d\eta\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{g(0)}\int_{\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}} V_f(\eta,t)\,d\eta - f_k(t)\right| + \frac{2\Delta}{g(0)}\varepsilon^{\nu} \\
&\leq \left|\frac{1}{g(0)}\int_{\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}} f_k(t)\hat{g}(\eta-\phi_k'(t))\,d\eta - f_k(t)\right| \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{g(0)}\int_{\{|\eta-\phi_k'(t)|<\Delta\}} \left|V_f(\eta,t) - f_k(t)\hat{g}(\eta-\phi_k'(t))\right|\,d\eta + \frac{2\Delta}{g(0)}\varepsilon^{\nu} \\
&\leq 0 + \frac{2\Delta}{g(0)}\varepsilon\Gamma_1(t) + \frac{2\Delta}{g(0)}\varepsilon^{\nu}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse ε assez petit de l'équation (53) donne enfin :

$$\left|\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{|\omega-\phi_k'(t)|<\varepsilon^{\nu}} T_f^{\delta,\gamma}(\omega,t)\,d\omega\right) - f_k(t)\right| \leq \frac{4\Delta}{g(0)}\varepsilon^{\nu}.$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.3.2, la constante C valant $\frac{4\Delta}{g(0)}$, ne dépendant pas de t. □

Remarque : Cette preuve explicite les conditions sur ε, qui doit ainsi vérifier les relations (53), (59) et (60). Si l'on considère une superposition de modes réels de la forme $f_k(t) = A(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ et que l'on adapte la reconstruction en prenant 2 fois la partie réelle, cette preuve reste valable, pourvu que $\bigcup_k Z_k \subset \mathbb{R}_+$. Ceci est vérifié si toutes les fréquences instantanées ϕ_k' sont supérieures à Δ.

B Calcul dans le corps des quaternions

Dans cette section, nous introduisons rapidement l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$, leurs propriétés et les moyens de calculer. On pourra trouver une présentation plus détaillée par exemple dans [Sudbery 1979].
$\mathbb{H}$ est l'espace vectoriel de dimension 4 engendré par $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$, c'est-à-dire que tout quaternion s'écrit $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$, où le produit d'algèbre est défini par $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ et $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$.
Étant donné un quaternion $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$, on définit :

- sa partie réelle : $\mathrm{Re}(q) = q_0$,
- sa partie vectorielle : $\mathrm{Vect}(q) = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Si $\mathrm{Re}(q) = 0$, $q = q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$ est dit quaternion pur.

Le conjugé du quaternion q est $\overline{q} = q_0 - q_1\mathrm{i} - q_2\mathrm{j} - q_3\mathrm{k}$, et sa norme (son module) est défini par :

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Pour tout $(q, q') \in \mathbb{H}^2$,

$$\overline{qq'} = \overline{q'}\ \overline{q} \quad et \quad |qq'| = |q|\ |q'|\ .$$

Par ailleurs, les quaternions sont une algèbre à division, c'est-à-dire que tout quaternion non nul admet un inverse :

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}\ . \tag{61}$$

Remarquons que l'on a $\overline{q^{-1}} = \frac{q}{|q|^2} = (\overline{q})^{-1}$. L'ensemble des quaternions unitaires $\{q \in \mathbb{H}\ ;\ |q| = 1\}$ sera noté $\mathbb{S}^3$.
La fonction exponentielle s'étend sur $\mathbb{H}$ par

$$\exp\ : q \mapsto \mathrm{e}^q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{q^\ell}{\ell!}\ ,$$

qui converge car $\exp(|q|)$ converge. En utilisant cette fonction exponentielle, on voit que tout quaternion de $\mathbb{S}^3$ ($|q| = 1$) tel que $Vect(q) \neq 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$q = (\cos\varphi + n\ \sin\varphi) = \mathrm{e}^{\varphi n} \quad avec\ \ n = \frac{Vect(q)}{|Vect(q)|},\ \ \cos\varphi = Re(q)\ \ et\ \ \sin\varphi = |Vect(q)| \tag{62}$$

ce qui donne une extension de l'exponentielle complexe. Remarquons que la propriété $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$ n'est plus satisfaite, les quaternions n'étant pas commutatifs. La forme polaire d'un quaternion q est donc donnée par :

$$q = |q|\ (\cos\varphi + n\ \sin\varphi) = |q|\ \mathrm{e}^{\varphi n} \tag{63}$$

où n est un quaternion unitaire pur : $n = a\ \mathrm{i} + b\ \mathrm{j} + c\ \mathrm{k}$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et $\varphi \in \mathbb{R}$. Si $(\varphi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ vérifie (63), on dit que φ est l'argument scalaire de q, et que n est son orientation vectorielle.

Un quaternion de la forme $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j}$ avec $(q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3$ $(q_4 = 0)$ est appelé vecteur de Clifford. Remarquons que si $q = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j}$ et $q' = a'_0 + a'_1\mathrm{i} + a'_2\mathrm{j}$ avec $(a_0, a_1, a_2), (a'_0, a'_1, a'_2) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\overline{qq'} = \overline{q'} \times \overline{q} \ . \tag{64}$$

Dans ce cas, l'orientation vectorielle de q s'écrit :

$$n = a\mathrm{i} + b\mathrm{j} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \ .$$

Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $n = \cos\theta \ \mathrm{i} + \sin\theta \ \mathrm{j}$. Notamment, q admet la forme polaire

$$q = |q| \ (\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta \ \mathrm{i} + \sin\varphi\sin\theta \ \mathrm{j}) = |q| \ \mathrm{e}^{\varphi(\cos\theta\mathrm{i} + \sin\theta\mathrm{j})} \ . \tag{65}$$

Si $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie (65), on dit que φ est l'argument scalaire de q et que θ est son orientation scalaire. On remarque que φ et θ sont également les angles d'Euler associés au vecteur $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

C Preuves du Chapitre 4

C.1 Preuve de la Proposition 4.4.1

Nous démontrons la Proposition 4.4.1 en plusieurs étapes.

Un résultat préliminaire

On a d'abord besoin du résultat suivant :

Lemme C.1. *Supposons que F est une IMMF de précision ε de la forme (4.17). Pour tout $y, h \in \mathbb{R}^2$ on a les estimations suivantes :*

$$|A(y+h) - A(y)| \leq \varepsilon \left(|h||\nabla\varphi(y)| + |h|^2 \frac{M}{2} \right) , \tag{66}$$

$$|\cos\theta(y+h) - \cos\theta(y)| \leq \varepsilon \left(|h||\nabla\varphi(y)| + |h|^2 \frac{M}{2} \right) , \tag{67}$$

$$|\sin\theta(y+h) - \sin\theta(y)| \leq \varepsilon \left(|h||\nabla\varphi(y)| + |h|^2 \frac{M}{2} \right) , \tag{68}$$

$$|\nabla\varphi(y+h) - \nabla\varphi(y)| \leq \varepsilon \left(|h||\nabla\varphi(y)| + |h|^2 \frac{M}{2} \right) , \tag{69}$$

où M est la constante définie en (4.19).

Démonstration. On démontrera seulement l'inégalité (66), les autres estimations étant obtenues de la même manière. Observons que :

$$A(y+h) - A(y) = \int_0^1 \nabla A(y+th) \cdot h \, \mathrm{d}t$$

par hypothèse (4.20), ∇A varie faiblement devant $\nabla\varphi$, et donc :

$$|A(y+h) - A(y)| \leq \varepsilon |h| \int_0^1 |\nabla\varphi(y+th)| \mathrm{d}t$$

par le théorème de Taylor-Lagrange, on a pour tout t :

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(y+th)| &\leq |\nabla\varphi(y)| + |\nabla\varphi(y+th) - \nabla\varphi(y)| \\ &\leq |\nabla\varphi(y)| + t|h| \max_{i_1,i_2} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^2} |\partial^2_{x_{i_1},x_{i_2}} \varphi(y)| \right) \\ &\leq |\nabla\varphi(y)| + Mt|h| , \end{aligned}$$

en utilisant (4.19) sur les dérivées partielles d'ordre 2 de φ. Pour résumer,

$$|A(y+h) - A(y)| \leq \varepsilon |h| \int_0^1 |\nabla\varphi(y)| \mathrm{d}t + \varepsilon M |h|^2 \int_0^1 t \mathrm{d}t \leq \varepsilon \left(|h||\nabla\varphi(y)| + M \frac{|h|^2}{2} \right) .$$

□

Preuve de la Proposition 4.4.1

Preuve du point (1) de la Proposition 4.4.1
Par définition de la TOC de F,

$$W_F(a,b) = \int_{\mathbb{R}^2} A(x) \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} a^{-1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \ .$$

On décompose cette expression en trois termes :

$$\begin{aligned} W_F(a,b) \quad = \quad & a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(b)}} \psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \\ & + a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left[\mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} - \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(b)}}\right] \psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \\ & + a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \left[A(x) - A(b)\right] \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} \psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \ . \end{aligned} \tag{70}$$

Remarquons que

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \nabla\varphi(b) \cdot (x-b) + \int_0^1 \left[\nabla\varphi(b + t(x-b)) - \nabla\varphi(b)\right] \cdot (x-b) \mathrm{d}t \ . \tag{71}$$

On pose $u = \frac{x-b}{a}$ et on utilise l'équation (4.28) avec $k = \nabla\varphi(b)$. On en déduit :

$$a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{(\varphi(b) + \nabla\varphi(b)\cdot(x-b)) n_{\theta(b)}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\varphi(b) n_{\theta(b)}} \ a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b)) \ . \tag{72}$$

En combinant les équations (96), (71) et (72), il vient :

$$\begin{aligned} & W_F(a,b) - a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b)) \left(A(b) \ \mathrm{e}^{\varphi(b) n_{\theta(b)}}\right) \\ = \quad & A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{(\varphi(b) + \nabla\varphi(b)\cdot(x-b)) n_{\theta(b)}} \left(\mathrm{e}^{n_{\theta(b)} \int_0^1 [\nabla\varphi(b+t(x-b)) - \nabla\varphi(b)]\cdot(x-b)\mathrm{d}t} - 1\right) a^{-1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \\ & + A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left[\mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} - \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(b)}}\right] a^{-1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} \left[A(x) - A(b)\right] \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} a^{-1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left|W_F(a,b) - a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b)) \left(A(b) \ \mathrm{e}^{\varphi(b) n_{\theta(b)}}\right)\right| \\ \leq \quad & a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left|\mathrm{e}^{\left[\int_0^1 [\nabla\varphi(b+t(x-b)) - \nabla\varphi(b)]\cdot(x-b)\mathrm{d}t\right] n_{\theta(b)}} - 1\right| \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \mathrm{d}x \\ & + a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left|\mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(x)}} - \mathrm{e}^{\varphi(x) n_{\theta(b)}}\right| \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \mathrm{d}x \\ & + a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \left|A(x) - A(b)\right| \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

On majore à présent les trois termes :

$$\begin{aligned} & a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left|\mathrm{e}^{\left[\int_0^1 ([\nabla\varphi(b+t(x-b)) - \nabla\varphi(b)]\cdot(x-b))\mathrm{d}t\right] n_{\theta(b)}} - 1\right| \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \mathrm{d}x \\ \leq \quad & a^{-1} A(b) \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_0^1 \left|(\nabla\varphi(b + t(x-b)) - \nabla\varphi(b)) \cdot (x-b)\right| \mathrm{d}t\right] \ \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \mathrm{d}x \ . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (69) avec $y = b$ et $h = t(x-b)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& a^{-1}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_0^1 |(\nabla\varphi(b+t(x-b)) - \nabla\varphi(b))\cdot(x-b)|\,\mathrm{d}t\right]\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
\leq\ & \varepsilon a^{-1}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_0^1 (|t||x-b|^2\,|\nabla\varphi(b)| + M|t|^2\frac{|x-b|^3}{2})\mathrm{d}t\right]\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
\leq\ & \varepsilon a^{-1}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{|x-b|^2}{2}\,|\nabla\varphi(b)| + M\frac{|x-b|^3}{6}\right]\cdot\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
\leq\ & \varepsilon A(b)\ \left(\frac{a^3}{2}\,|\nabla\varphi(b)|\,I_2 + \frac{a^4}{6}MI_3\right) \qquad (73)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $u = \frac{x-b}{a}$ dans la dernière intégrale.
Pour le deuxième terme, comme

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)n_{\theta(x)}} - \mathrm{e}^{\varphi(x)n_{\theta(b)}} = \sin(\varphi(x))(n_{\theta(x)} - n_{\theta(b)})\ ,$$

on a :

$$\begin{aligned}
& a^{-1}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathrm{e}^{\varphi(x)n_{\theta(x)}} - \mathrm{e}^{\varphi(x)n_{\theta(b)}}\right|\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
& \leq a^{-1}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left|n_{\theta(x)} - n_{\theta(b)}\right|\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
& \leq \varepsilon a^{-1}A(b)\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|x-b||\nabla\varphi(b)| + |x-b|^2\frac{M}{2}\right)\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\
& \leq \varepsilon a^2 A(b)\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|u||\nabla\varphi(b)| + a|u|^2\frac{M}{2}\right)|\psi(u)|\mathrm{d}u \\
& \leq \varepsilon A(b)\sqrt{2}\ \left(a^2|\nabla\varphi(b)|I_1 + a^3\frac{M}{2}I_2\right) \qquad (74)
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (66), on majore de la même manière le dernier terme :

$$a^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}|A(x) - A(b)|\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \leq \varepsilon\ \left(a^2|\nabla\varphi(b)|I_1 + a^3\frac{M}{2}I_2\right)\ . \qquad (75)$$

En combinant les équations (73, 74 et 75), on obtient :

$$\begin{aligned}
|W_F(a,b)\ & -a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\Big| \\
& \leq \varepsilon a^2 A(b)\left(\left(\frac{a}{2}\,|\nabla\varphi(b)|\,I_2 + \frac{a^2}{6}MI_3\right) + \sqrt{2}\left(|\nabla\varphi(b)|I_1 + a\frac{M}{2}I_2\right)\right) \\
& + \varepsilon a^2\ \left(|\nabla\varphi(b)|I_1 + a\frac{M}{2}I_2\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne (4.30).

Preuve du point (2) de la 4.4.1
Comme $A \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\psi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\partial_{b_i}W_F(a,b) = -\int_{\mathbb{R}^2}A(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(x)}a^{-2}\partial_{x_i}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x\ .$$

Comme précédemment, nous séparons cette expression en trois termes :

$$\begin{aligned}\partial_{b_i} W_F(a,b) \quad = \quad & -a^{-2}A(b)\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(b)}\partial_{x_i}\psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x \\ & -a^{-2}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(x)}-\mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(b)}\right)\partial_{x_i}\psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x \\ & -a^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[A(x)-A(b)\right]\mathrm{e}^{\varphi(x)n_\theta(x)}\partial_{x_i}\psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{76}$$

Nous utilisons à nouveau les équations (71) et (4.28) avec $k = \nabla\varphi(b)$, ce qui donne :

$$-a^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{(\varphi(b)+\nabla\varphi(b)\cdot(x-b))n_{\theta(b)}}\partial_{x_i}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\,\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}\,a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\ . \tag{77}$$

Ainsi, on en déduit

$$\begin{aligned}& \left|\partial_{b_i}W_F(a,b)-\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}\left(a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\right)\left(A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\right)\right| \\ \leq\ & a^{-2}A(b)\int_{\mathbb{R}^2}\left|\mathrm{e}^{(\int_0^1[\nabla\varphi(b+t(x-b))-\nabla\varphi(b)]\cdot(x-b)\mathrm{d}t)n_{\theta(b)}}-1\right|\left|\partial_{x_i}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\ & +a^{-2}A(b)\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left|n_{\theta(x)}-n_{\theta(b)}\right|\left|\partial_{x_i}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x \\ & a^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\left|A(x)-A(b)\right|\left|\partial_{x_i}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Une approche similaire au point (1) donne la borne suivante :

$$\begin{aligned}& \left|\partial_{b_i}W_F(a,b)-\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}\left(a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\right)\left(A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\right)\right| \\ \leq\ & \varepsilon A(b)\ \left(\frac{a^2}{2}\left|\nabla\varphi(b)\right|I_2'+\frac{a^3}{6}MI_3'\right) \\ & +\varepsilon A(b)\sqrt{2}\ \left(a|\nabla\varphi(b)|I_1'+a^2\frac{M}{2}I_2'\right) \\ & +\varepsilon\ \left(a|\nabla\varphi(b)|I_1'+a^2\frac{M}{2}I_2'\right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'estimation (2) de la Proposition 4.4.1, avec :

$$|R_2(a,b)| \leq A(b)\left(\frac{a}{2}\left|\nabla\varphi(b)\right|I_2'+\frac{a^2}{6}MI_3'\right)+\left(\sqrt{2}A(b)+1\right)\left(|\nabla\varphi(b)|I_1'+a\frac{M}{2}I_2'\right)\ .$$

C.2 Preuve du théorème 4.4.1

Démontrons à présent le théorème 4.4.1. Pour $i = 1, 2$, on a par définition :

$$\Lambda_i(a,b) = \left(\partial_{b_i}W_F(a,b)\right)\left(W_F(a,b)\right)^{-1}\ .$$

Posons $B = a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi(b))\left(A(b)\mathrm{e}^{\varphi(b)n_{\theta(b)}}\right)$. La proposition 4.4.1 implique :

$$|W_F(a,b)-B| \leq \varepsilon a^2\left|R_1(a,b)\right|\ , \tag{78}$$

et

$$|\partial_{b_i}W_F(a,b)-\partial_{b_i}\varphi(b)n_\theta(b)B| \leq \varepsilon a\left|R_2(a,b)\right|\ , \tag{79}$$

où $R_1(a,b)$ et $R_2(a,b)$ vérifient respectivement les inégalités (4.30) et (4.31). On a donc pour $i = 1, 2$:

$$\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)} = \left[\partial_{b_i}W_F(a,b)-\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}B+\partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}(B-W_F(a,b))\right]\left[W_F(a,b)\right]^{-1}\ .$$

En utilisant les équations (78) et (79), il vient :

$$|\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi(b)n_{\theta(b)}| \leq \varepsilon \left[a|R_2(a,b)| + a^2|R_1(a,b)||\partial_{b_i}\varphi(b)|\right] \ |W_F(a,b)|^{-1} .$$

Par hypothèse, $|W_F(a,b)| > \varepsilon^\nu$ pour tout (a,b), ce qui donne (4.33). La dernière estimation (4.34) vient du fait que pour tout $a_0 > 0$

$$\sup_{(a,b)\in(0,a_0)\times\mathbb{R}} \left(a|R_2(a,b)| + a^2|R_1(a,b)||\nabla\varphi(b)|\right) < \infty .$$

Comme $\nu \in (0,1/2)$, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de a_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$a|R_2(a,b)| + a^2|R_1(a,b)||\nabla\varphi(b)| \leq \varepsilon^{2\nu-1} ,$$

ce qui équivaut à

$$\varepsilon^{1-\nu}\left(a|R_2(a,b)| + a^2|R_1(a,b)||\nabla\varphi(b)|\right) \leq \varepsilon^\nu .$$

Cette dernière inégalité, ainsi que (4.33), montrent (4.34).

C.3 Preuve de la Proposition 4.4.2

La preuve de la Proposition 4.4.2 repose sur le Théorème 4.4.1 et sur le Lemme suivant :

Lemme C.2. *Soit F une IMMF de précision $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, le signe de* $\mathrm{Re}(\partial_{b_1}W_F(a,b)\overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)})$ *est le même que celui de $\partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b)$.*

Démonstration. Observons tout d'abord que le Théorème 4.4.1 implique que pour tout (a,b) :

$$\begin{aligned}\Lambda_1(a,b) &= \partial_{b_1}\varphi(b)n_{\theta(b)} + O(\varepsilon^\nu)\\ \Lambda_2(a,b) &= \partial_{b_2}\varphi(b)n_{\theta(b)} + O(\varepsilon^\nu)\end{aligned}$$

Alors,

$$\Lambda_1(a,b)\overline{\Lambda_2(a,b)} = \partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b) + O(\varepsilon^\nu) . \tag{80}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le signe de $\Lambda_1(a,b)\overline{\Lambda_2(a,b)}$ est celui de $\partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b)$.

Pour terminer la preuve, nous établissons un rapport entre $\Lambda_1(a,b)\overline{\Lambda_2(a,b)}$ et $\partial_{b_1}W_F(a,b)\overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)}$. Remarquons d'abord que la définition des vecteurs de Clifford $\Lambda_1(a,b), \Lambda_2(a,b)$ (équation (4.32)) implique :

$$\mathrm{Re}\left(\Lambda_1(a,b)\overline{\Lambda_2(a,b)}\right) = \mathrm{Re}\left(\partial_{b_1}W_F(a,b)\ (W_F(a,b))^{-1}\overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)\ (W_F(a,b))^{-1}}\right) . \tag{81}$$

On utilise le fait que $\partial_{b_i}W_F(a,b)$ et $W_F(a,b)$ sont tous deux des vecteurs de Clifford. En appliquant l'égalité (64) avec $q = \partial_{b_2}W_F(a,b)$ et $q' = (W_F(a,b))^{-1}$, il vient :

$$\overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)\ (W_F(a,b))^{-1}} = \overline{(W_F(a,b))^{-1}} \times \overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)} .$$

En utilisant l'équation (81), il vient

$$\mathrm{Re}\left(\Lambda_1(a,b)\overline{\Lambda_2(a,b)}\right) = \mathrm{Re}\left(\partial_{b_1}W_F(a,b)\ \overline{\partial_{b_2}W_F(a,b)}\right)|W_F(a,b)|^{-2} . \tag{82}$$

L'équation (80) devient alors

$$\frac{\mathrm{Re}\left(\partial_{b_1} W_F(a,b)\ \overline{\partial_{b_2} W_F(a,b)}\right)}{|W_F(a,b)|^2} = \partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b) + O(\varepsilon^\nu)\ ,$$

ce qui implique que $\mathrm{Re}\left(\partial_{b_1} W_F(a,b)\ \overline{\partial_{b_2} W_F(a,b)}\right)$ et $\partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b)$ ont le même signe pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. □

Démontrons à présent la Proposition 4.4.2.

Preuve de la Proposition 4.4.2

Le Théorème 4.4.1 montre directement que pour tous $i = 1, 2$ et (a, b) considérés :

$$||\Lambda_i(a,b)| - |\partial_{b_i}\varphi(b)|| \leq \varepsilon^\nu\ .$$

Comme $\partial_{b_1}\varphi(b)$ est supposé toujours positif, on obtient (4.35). Comme par ailleurs $\partial_{b_2}\varphi(b)$ et $\partial_{b_1}\varphi(b)\partial_{b_2}\varphi(b)$ ont même signe, le Lemme C.2 implique (4.36).

C.4 Preuve du Théorème 4.5.1

On démontrera le Théorème 4.5.1 en plusieurs étapes.

Lemme C.3. *Soit F une fonctions de $\mathcal{A}_{\varepsilon,d}$. Pour tout (a, b), il y a au plus un $\ell \in \{1, \cdots, L\}$ tel que*

$$|a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\ . \tag{83}$$

Remarque C.1. *La Condition (83) est nécessaire pour avoir $\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) \neq 0$. Le Lemme C.3 montre ensuite qu'il y a au plus un ℓ tel que $\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) \neq 0$. Ainsi, chacune des deux sommes suivantes contient en chaque point au plus un terme :*

$$\sum_{\ell=1}^{L} A_\ell(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}}\ a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))\ ,$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{L} A_\ell(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}}\ a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))\partial_i\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}\ ,$$

Démonstration. On suit le même raisonnement que dans [Daubechies 2011]. Supposons qu'il existe (ℓ_1, ℓ_2) qui vérifient la condition (83) avec $\ell_1 < \ell_2$. On a alors pour $j = 1, 2$,

$$a^{-2}(1-\Delta)^2 < \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_j}(b)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_j}(b)}{\partial x_2}\right|^2 < a^{-2}(1+\Delta)^2\ ,$$

ce qui entraîne

$$\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_2}\right|^2 > 2a^{-2}(1-\Delta)^2\ ,$$

et

$$\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_2}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_1}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_2}\right|^2 < 4a^{-2}\Delta\ .$$

De plus, par hypothèse (4.38), pour tout $i = 1, 2$,

$$\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_i}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_i}\right|^2 \geq \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_i}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2-1}(b)}{\partial x_i}\right|^2 \geq d\left[\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2-1}(b)}{\partial x_i}\right|\right]^2 .$$

où l'on a utilisé l'hypothèse(4.39) :

$$\begin{aligned} ||\partial_{x_i}\varphi_{\ell_2}(x)| - |\partial_{x_i}\varphi_{\ell_2-1}(x)|| &\geq \left|\partial_{x_i}\varphi_{\ell_2}(x)n_{\theta_\ell(x)} - \partial_{x_i}\varphi_{\ell_2-1}(x)n_{\theta_{\ell'}(x)}\right| \\ &\geq d\ \left[|\partial_{x_i}\varphi_{\ell_2}(x)| + |\partial_{x_i}\varphi_{\ell_2-1}(x)|\right] . \end{aligned}$$

L'inégalité classique $(u+v)^2 \geq u^2 + v^2$, valable pour $u, v \geq 0$, montre que

$$\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_i}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_i}\right|^2 \geq d\left[\left|\frac{\partial\varphi_{\ell_2}(b)}{\partial x_i}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi_{\ell_1}(b)}{\partial x_i}\right|^2\right] .$$

En sommant sur $i = 1, 2$ il vient :

$$4a^{-2}\Delta > 2da^{-2}(1-\Delta)^2 \geq 2da^{-2}(1-2\Delta) ,$$

c'est-à-dire

$$\Delta > d/\left[2(1+d)\right] .$$

ce qui mène à une contradiction. □

Lemme C.4. *Soit F une superposition d'IMMFs de précision ε et d-séparées de la forme (4.37). Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$,*

$$\left|W_F(a,b) - a\sum_{\ell'=1}^{L}\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))\left(A_\ell(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}}\right)\right| \leq \varepsilon a^2\Gamma_1(a,b) .$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1(a,b) \quad = \quad & I_1\textstyle\sum_{\ell=1}^{L}(\sqrt{2}A_\ell(b)+1)\ |\nabla\varphi_\ell(b)| + a\ \frac{I_2}{2}\left[\sum_{\ell=1}^{L}A_\ell(b)\ \ (|\nabla\varphi_\ell(b)| + M_\ell)\right] \\ & + a\ \tfrac{I_2}{2}\textstyle\sum_{\ell=1}^{L}M_\ell + a^2\ \frac{I_3}{6}\sum_{\ell=1}^{L}A_\ell(b)M_\ell . \end{aligned} \tag{84}$$

(I_n est défini dans (4.25)). En particulier,

- *Si pour $\ell_0 \in \{1, \cdots, L\}$*

$$|a|\nabla\varphi_{\ell_0}(b)| - 1| < \Delta . \tag{85}$$

  alors

$$\left|W_F(a,b) - a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_{\ell_0}(b))A_{\ell_0}(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_{\ell_0}(b)n_{\theta_{\ell_0}(b)}}\right| \leq \varepsilon a^2\Gamma_1(a,b) . \tag{86}$$

- *S'il existe $\ell \in \{1, \cdots, L\}$ pour lequel la condition (85) n'est pas vérifiée, alors*

$$|W_F(a,b)| \leq \varepsilon a^2\Gamma_1(a,b) . \tag{87}$$

Démonstration. Par hypothèse, F s'écrit

$$F = \sum_{\ell=1}^{L} A_\ell \mathrm{e}^{\varphi_\ell n_\ell} \ ,$$

où pour chaque ℓ, $F_\ell = A_\ell \mathrm{e}^{\varphi_\ell n_\ell}$ est une IMMF de précision ε. La Proposition 4.4.1 appliquée successivement à $F_1, \cdots, F_L$ et la linéarité de la TOC entraînent :

$$\left| W_F(a,b) - a \sum_{\ell=1}^{L} \widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) A_\ell(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}} \right| \leq \varepsilon a^2 \Gamma_1(a,b) \ .$$

Le reste de la preuve vient de la remarque C.1, qui montre que sous l'hypothèse (85), la somme

$$\sum_{\ell=1}^{L} A_\ell(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}}\ a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) \ ,$$

se ramène à $A_{\ell_0}(b)\ \mathrm{e}^{\varphi_{\ell_0}(b) n_{\theta_{\ell_0}(b)}}\ a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_{\ell_0}(b))$, et 0 si la condition (85) n'est jamais vérifiée. □

Lemme C.5. *Soit F une superposition d'IMMFs de précision ε et d-séparées. Pour tous a, b tels que*

$$|a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta \ , \tag{88}$$

on a pour $i = 1, 2$:

$$\left| \partial_{b_i} W_F(a,b) - a\partial_i\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)} \widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) \left(A_\ell(b) \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}} \right) \right| \leq \varepsilon a \Gamma_2(a,b) \ , \tag{89}$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_2(a,b) \ &= \ I_1' \textstyle\sum_{\ell=1}^{L} |\nabla\varphi_\ell(b)|(\sqrt{2}A_\ell(b) + 1) + a\frac{I_2'}{2} \sum_{\ell=1}^{L} \left(M_\ell + A_\ell(b)(\sqrt{2}M_\ell + |\nabla\varphi_\ell(b)|) \right) \\ &\quad + a^2 \frac{I_3'}{6} \textstyle\sum_{\ell=1}^{L} A_\ell(b)\ M_\ell \end{aligned} \tag{90}$$

(I_n' étant défini en (4.25)).

Démonstration. Comme pour le Lemme C.4, F s'écrit $F = \sum_{\ell=1}^{L} A_\ell \mathrm{e}^{\varphi_\ell n_\ell}$, où chaque $F_\ell = A_\ell \mathrm{e}^{\varphi_\ell n_\ell}$ est une IMMF de précision ε. La Proposition 4.4.1 appliquée successivement aux $F_1, \cdots, F_L$ ainsi que la linéarité de la TOC entraînent :

$$\left| \partial_{b_i} W_F(a,b) - a \sum_{\ell'=1}^{L} \partial_i\varphi_{\ell'}(b) n_{\theta_{\ell'}(b)} \widehat{\psi}(a\nabla\varphi_{\ell'}(b)) \left(A_{\ell'}(b) \mathrm{e}^{\varphi_{\ell'}(b) n_{\theta_{\ell'}(b)}} \right) \right| \leq \varepsilon a \Gamma_2(a,b) \ .$$

La remarque C.1 montre que sous la condition (85), la somme

$$\sum_{\ell'=1}^{L} \partial_i\varphi_{\ell'}(b) n_{\theta_{\ell'}(b)} \widehat{\psi}(a\nabla\varphi_{\ell'}(b)) \left(A_{\ell'}(b) \mathrm{e}^{\varphi_{\ell'}(b) n_{\theta_{\ell'}(b)}} \right) \ ,$$

se ramène à $\partial_i\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)} \widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b)) \left(A_\ell(b) \mathrm{e}^{\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}} \right)$. □

Lemme C.6. *Soit F une superposition d'IMMFs de précision $\varepsilon > 0$ et d-séparées. Soit $\ell \in \{1, \cdots, L\}$. pour tous a, b tels que*

$$|a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta \ , \tag{91}$$

on a pour $i = 1, 2$

$$|\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}| \leq a\varepsilon^{1-\nu}\left(\Gamma_2(a,b) + a|\nabla\varphi_{\ell_0}(b)|\Gamma_1(a,b)\right) \ . \tag{92}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Théorème 4.4.1, en remplaçant les majorations (78) et (79) par (86) et (89) respectivement. □

On peut à présent démontrer le Théorème 4.5.1.

Preuve du Théorème 4.5.1

Pour cette preuve, nous introduisons les notations suivantes :

$$a_{\min} = \frac{1-\Delta}{\max_{\ell\in\{1,\cdots,L\}} \sup_{b\in\mathbb{R}^2}(|\nabla\varphi_\ell(b)|)}, \ a_{\max} = \frac{1+\Delta}{\min_{\ell\in\{1,\cdots,L\}} \inf_{b\in\mathbb{R}^2}(|\nabla\varphi_\ell(b)|)} \ .$$

Par hypothèse sur les phases φ_ℓ, $a_{\min}$ et $a_{\max}$ sont toutes deux finies et positives. Pour tout $\ell \in \{1, \cdots, L\}$, $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $b \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{S}^1$, on définit également :

$$\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon}, n, b) = \{k \in \mathbb{R}^2 \ ; \max_i |k_i n - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}| \leq \widetilde{\varepsilon}\} \ .$$

On montre à présent le Théorème 4.5.1. Posons $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon^\nu$ et fixons $\ell \in \{1, \cdots, L\}$. Montrons d'abord que

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\ = \ & 2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a;\max_i|\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}\}} a^{-2} W_F(a,b)\mathrm{d}a \ . \end{aligned} \tag{93}$$

par définition de $S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\ = \ & \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} \left(\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} W_F(a,b)\delta^{-2}\prod_{i=1}^2 h\left(\frac{k_i - \mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \ . \end{aligned}$$

On utilise le théorème de Fubini. Remarquons que :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)}\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} \left|W_F(a,b)\delta^{-2}\prod_{i=1}^2 h\left(\frac{k_i - \mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\right|\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\ \leq \ & \int_{A_{\varepsilon,F}(b)} a^{-2}|W_F(a,b)|\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}^2}\delta^{-2}\prod_{i=1}^2\left|h\left(\frac{k_i - \mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\right|\mathrm{d}k\mathrm{d}n\mathrm{d}a \\ \leq \ & 2\pi\|h\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} a^{-2}|W_F(a,b)|\mathrm{d}a \ < \ +\infty \ , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que F est une somme finie d'IMMFs F_ℓ, dont les coefficients vérifient (4.23) et (4.24) (cf. Remarque 4.4.1 pour plus de détails). Le

théorème de Fubini donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\
=\ &\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} a^{-2}W_F(a,b)\left(\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n\right)\mathrm{d}a\ .
\end{aligned}$$

Comme l'intégrande est majorée par :

$$\left|a^{-2}W_F(a,b)\left(\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n\right)\right| \leq 2\pi\|h\|^2_{L^1(\mathbb{R})}a^{-2}|W_F(a,b)|\ ,$$

qui appartient à $L^1(A_{\varepsilon,F}(b))$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Finalement,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\
=\ &\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} a^{-2}W_F(a,b)\left(\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n\right)\mathrm{d}a \\
=\ &\int_{A_{\varepsilon,F}(b)} a^{-2}W_F(a,b)\left(\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)\cap\mathcal{B}'(\delta R,n,b)} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n\right)\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

où l'on pose $\mathcal{B}'(\delta R,n,b)=\{k\in\mathbb{R}^2\ ;\ \max_i|k_in-\Lambda_i(a,b)|\leq\delta R\}$, avec R la borne du support de h. Remarquons à présent que, si $\max_i|\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|>\widetilde{\varepsilon}$, alors pour δ assez petit

$$\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)\cap\mathcal{B}'(\delta R,n,b)=\emptyset\ ,$$

la limite ci-dessus valant alors 0. Par ailleurs, si $\max_i|\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}$, pour δ suffisamment petit on a :

$$\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)\cap\mathcal{B}'(\delta R,n,b)=\mathcal{B}'(\delta R,n,b)\ ,$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}'(\delta R,n,b)} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\
&=\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}^2} \delta^{-2}\prod_{i=1}^{2} h\left(\frac{k_i-\mathrm{Re}(\Lambda_i(a,b)\ \overline{n})}{\delta}\right)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\
&=2\pi\ ,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}}h=1$. On en déduit l'égalité (93).

Observons à présent que pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, il existe $a_0\geq a_{\max}$ tel que

$$2\pi\ \|F\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}}a_0^{-\sigma}\leq\varepsilon^\nu \quad \text{et} \quad \sup_{(a,b)\in(0,a_0)\times\mathbb{R}^2}\varepsilon^{1-\nu}a\left(\Gamma_2(a,b)+a|\nabla\varphi_\ell(b)|\Gamma_1(a,b)\right)\leq\varepsilon^\nu\ . \tag{94}$$

En effet, par définition de $\Gamma_1(a,b), \Gamma_2(a,b)$ (équations (84) et (90)), il existe $C_\Gamma > 0$ ne dépendant pas de a_0 tel que

$$\sup_{(a,b)\in(0,a_0)\times\mathbb{R}^2} a\left(\Gamma_2(a,b) + a|\nabla\varphi_\ell(b)|\Gamma_1(a,b)\right) \leq C_\Gamma a_0^4 \,.$$

Cela montre que pour démontrer (94), il suffit de trouver a_0 tel que

$$a_{\max} \leq \left(2\pi \, \|F\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} \varepsilon^{-\nu}\right)^{1/\sigma} \leq a_0 \leq \left(C_\Gamma^{-1}\varepsilon^{2\nu-1}\right)^{1/4} \,. \tag{95}$$

Comme $\nu < 1/(2+4/\sigma)$, on en déduit que $\varepsilon^{(2\nu-1)/4}/\varepsilon^{-\nu/\sigma}$ tend vers ∞ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ainsi, pour ε assez petit, il existe $a_0 \geq a_{\max}$ vérifiant (95). Jusqu'à la fin de la démonstration, nous fixerons un tel a_0.

Nous séparons à présent l'intégrale de l'équation (93) en deux termes :

$$\begin{array}{rl} & \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n \\ = & 2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a\in(0,a_0);\, \max_i |\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}\}} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \\ + & 2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a\geq a_0;\, \max_i |\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}\}} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \,. \end{array} \tag{96}$$

Rappelons que comme F est une superposition d'IMMFs, l'inégalité (4.23) est vérifiée pour un $\sigma > 0$ (cf. Remarque 4.4.1). On a donc pour tout a_0 vérifiant (94) :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{I} & = & 2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a\geq a_0;\, \max_i |\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}\}} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \\ & \leq & 2\pi \int_{a_0}^{+\infty} |W_F(a,b)|\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \leq 2\pi \, \|F\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} a_0^{-\sigma} \leq \widetilde{\varepsilon} \,. \end{array} \tag{97}$$

Considérons à présent l'intégrale

$$2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a\in(0,a_0);\, \max_i |\Lambda_i(a,b)-\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}|<\widetilde{\varepsilon}\}} W_F(a,b)\frac{\mathrm{d}a}{a^2} \,,$$

et montrons que sous la condition (94),

$$\begin{array}{r} A_{\varepsilon,F}(b) \cap \{a \in (0,a_0),\ \max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}| < \widetilde{\varepsilon}\} \\ = A_{\varepsilon,F}(b) \cap \{a \in (0,a_0);\ |a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\} \,. \end{array} \tag{98}$$

Supposons tout d'abord que $a \in A_{\varepsilon,F}(b) \cap \{a \in (0,a_0);\ |a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\}$. Comme $|a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta$, le Lemme C.6 et l'hypothèse (94) entraînent

$$\max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}| \leq a\varepsilon^{1-\nu}\left(\Gamma_2(a,b) + a|\nabla\varphi_\ell(b)|\Gamma_1(a,b)\right) \leq \widetilde{\varepsilon} \,,$$

c'est-à-dire $a \in \{a \in (0,a_0),\ \max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}| < \widetilde{\varepsilon}\}$.

Inversement, supposons que $a \in A_{\varepsilon,F}(b) \cap \{a \in (0,a_0);\ \max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}| < \widetilde{\varepsilon}\}$. Comme $a \in A_{\varepsilon,F}(b)$, $|W_F(a,b)| > \widetilde{\varepsilon}$, par le Lemme C.4 il existe un $\ell' \in \{1,\cdots,L\}$ tel que $|a|\nabla\varphi_{\ell'}(b)| - 1| < \Delta$ (sinon, (94) et (87) mèneraient à une contradiction). De plus, remarquons que si $\ell' \neq \ell$, on a

$$\max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}| \geq |\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)} - \partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)n_{\theta_{\ell'}(b)}| - \max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)n_{\theta_{\ell'}(b)}|$$

Comme ci-dessus, le Lemme C.6 et l'hypothèse (94) entraînent alors

$$\max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)n_{\theta_{\ell'}(b)}| \leq \widetilde{\varepsilon} \,.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\max_i |\Lambda_i(a,b) - \partial_{b_i}\varphi_\ell(b) n_{\theta_\ell(b)}| &\geq d\ [|\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)| + |\partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)|] - \widetilde{\varepsilon} \\ &\geq \widetilde{\varepsilon}\,,\end{aligned}$$

pourvu que ε soit assez petit, plus précisément que

$$\varepsilon \leq \left(\frac{d}{2}\,[|\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)| + |\partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)|]\right)^{\frac{1}{\nu}} \quad i.e. \quad d\ [|\partial_{b_i}\varphi_\ell(b)| + |\partial_{b_i}\varphi_{\ell'}(b)|] \geq 2\tilde{\varepsilon},\ \ \forall \ell, \ell', \forall i \tag{99}$$

On aura donc nécessairement $\ell = \ell'$, et donc $a \in A_{\varepsilon,F}(b) \cap \{a \in (0,a_0),\ |a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\}$.

En outre, on a

$$\begin{aligned}2\pi \int_{A_{\varepsilon,F}(b)\cap\{a\in(0,a_0),|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}} & W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a \\ &= 2\pi \int_{\{a\in(0,a_0),\,|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}} W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a \\ &\quad - 2\pi \int_{\{a\in(0,a_0),|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}\setminus A_{\varepsilon,F}(b)} W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a\,,\end{aligned}$$

avec $|\widetilde{I}| \leq \widetilde{\varepsilon}$. En utilisant les équations (96) et (97), on en déduit

$$\begin{aligned}&\left|\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\tilde{C}_\psi}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n - A_\ell(b)\mathrm{e}^{\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}}\right| \\ \leq\ & \left|\frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi}\int_{\{a\in(0,a_0),|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}} W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a - A_\ell(b)\mathrm{e}^{\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}}\right| \\ &+ \left|\frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi}\int_{\{a\in(0,a_0),|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}\setminus A_{\varepsilon,F}(b)} W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a\right| + \widetilde{\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

Remarquons que le domaine $\{a \in (0,a_0), |a|\nabla\varphi_\ell(b)| - 1| < \Delta\}$ est borné inférieurement par $a_{\min}$, qui dépend seulement de F. par ailleurs, si $a \notin A_{\varepsilon,F}(b)$, l'inégalité (87) est vérifiée. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\{a\in(0,a_0),\,|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}\setminus A_{\widetilde{\varepsilon},F}(b)} W_F(a,b)a^{-2}\mathrm{d}a\right| &\leq \varepsilon\left|\int_{a_{\min}}^{a_0}\left[\sup_{a\in(0,a_0)} a^2\Gamma_1(a,b)\right]a^{-2}\mathrm{d}a\right| \\ &\leq \varepsilon\left[\sup_{a\in(0,a_0)} a^2\Gamma_1(a,b)\right]a_{\min}^{-1} \\ &\leq \varepsilon^{1-\nu}\left[\sup_{a\in(0,a_0)} a^2\Gamma_1(a,b)\right]a_{\min}^{-1} \\ &\leq C\widetilde{\varepsilon}\,,\end{aligned} \tag{100}$$

où $C = (a_{\min}\inf_{b\in\mathbb{R}^2}|\nabla\varphi_\ell(b)|)^{-1}$. La dernière inégalité vient de l'hypothèse (94), valable pour $\varepsilon > 0$ assez petit. En utilisant aussi l'équation (86) du lemme C.4 , on

obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{\delta\to 0}\frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi}\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathcal{B}_\ell(\widetilde{\varepsilon},n,b)} S^{\delta,\nu}_{F,\varepsilon}(b,k,n)\mathrm{d}k\mathrm{d}n - A_\ell(b)\mathrm{e}^{\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}}\right| \\
\leq\ &\left|\frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi}\int_{\{a\in(0,a_0),\,|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}}\left(a\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))A_\ell(b)\mathrm{e}^{\varphi_\ell(b)n_{\theta_\ell(b)}}\right)a^{-2}\mathrm{d}a - A_\ell(x)\mathrm{e}^{\varphi_\ell(x)n_{\theta_\ell(x)}}\right| \\
&+\left|\frac{2\pi}{\tilde{C}_\psi}\int_{\{a\in(0,a_0),\,|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}}(\varepsilon a^2\Gamma_1(a,b))a^{-2}\mathrm{d}a\right| + (C+1)\widetilde{\varepsilon}\,.
\end{aligned}$$

Pour conclure, observons que le premier terme du membre de droite s'annule. En effet, l'ondelette réelle est isotrope, et pour tout $b\in\mathbb{R}^2$, $a\to\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))$ est supporté dans $(0,a_{\max})$. Comme $a_0\geq a_{\max}$, on a ainsi :

$$\int_{\{a\in(0,a_0),|a|\nabla\varphi_\ell(b)|-1|<\Delta\}}\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))\frac{\mathrm{d}a}{a} = \int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}(a\nabla\varphi_\ell(b))\frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\overline{\widehat{\psi}(\xi)}}{|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\tilde{C}_\psi}{2\pi}\,,$$

où $\tilde{C}_\psi$ est défini en (4.10). Le second terme peut être majoré par le même raisonnement que dans l'inégalité (100). On obtient enfin le théorème 4.5.1.

Bibliographie

[Auger 1995] F. Auger et P. Flandrin. *Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 43, no. 5, pages 1068–1089, 1995.

[Auger 2013] F. Auger, E. Chassande-Mottin, Y.T. Lin, P. Flandrin, S. McLaughlin, S. Meignen, T. Oberlin et H-T. Wu. *Recent advances in time-frequency reassignment and synchrosqueezing.* submitted to IEEE Signal Processing Magazine, 2013.

[Bedrosian 1962] E. Bedrosian. *A product theorem for Hilbert transforms.* Proceedings of the IEEE, no. 51, pages 868–869, 1962.

[Bleistein 1986] N. Bleistein et R.A. Handelsman. Asymptotic expansions of integrals. 1986. Dover, New York, 1986.

[Bovik 1992] A.C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth et A. Restrepo. *Localized measurement of emergent image frequencies by Gabor wavelets.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 2, pages 691–712, 1992.

[Candes 2008] E.J. Candes, P.R. Charlton et H. Helgason. *Detecting highly oscillatory signals by chirplet path pursuit.* Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 24, no. 1, pages 14–40, 2008.

[Carmona 1997] R.A. Carmona, W.L. Hwang et B. Torrésani. *Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45, no. 10, pages 2586–2590, 1997.

[Carmona 1999] R.A. Carmona, W.L. Hwang et B. Torrésani. *Multiridge detection and time-frequency reconstruction.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 2, pages 480–492, 1999.

[Chassande-Mottin 1997] E. Chassande-Mottin, I. Daubechies, F. Auger et P. Flandrin. *Differential reassignment.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 4, no. 10, pages 293–294, 1997.

[Chassande Mottin 1998] E. Chassande Mottin. *Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non stationnaires.* PhD thesis, 1998.

[Chassande-Mottin 2006] E. Chassande-Mottin et A. Pai. *Best chirplet chain : Near-optimal detection of gravitational wave chirps.* Physical review D, vol. 73, no. 4, page 042003, 2006.

[Chen 1998] S.S. Chen, D.L. Donoho et M.A. Saunders. *Atomic decomposition by basis pursuit.* SIAM journal on scientific computing, vol. 20, no. 1, pages 33–61, 1998.

[Chen 2006] Q. Chen, N. Huang, S. Riemenschneider et Y. Xu. *A B-spline approach for empirical mode decompositions.* Advances in Computational Mathematics, vol. 24, no. 1, pages 171–195, 2006.

[Clausel 2012] M. Clausel, T. Oberlin et V. Perrier. *The Monogenic Synchrosqueezed Wavelet Transform : a tool for the decomposition/demodulation of AM-FM images.* arXiv preprint arXiv :1211.5082, 2012.

[Cohen 1995] L. Cohen. Time-frequency analysis, volume 778. Prentice Hall PTR New Jersey, 1995.

[Coleman 1996] T.F. Coleman et Y. Li. *A reflective Newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables.* SIAM Journal on Optimization, vol. 6, no. 4, pages 1040–1058, 1996.

[Cooley 1965] J.W. Cooley et J.W. Tukey. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.* Mathematics of computation, vol. 19, no. 90, pages 297–301, 1965.

[Damerval 2005] C. Damerval, S. Meignen et V. Perrier. *A fast algorithm for bidimensional EMD.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 10, pages 701–704, 2005.

[Daubechies 1990] I. Daubechies. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 36, no. 5, pages 961–1005, 1990.

[Daubechies 1992] I. Daubechies. Ten lectures on wavelets, volume 61. SIAM, 1992.

[Daubechies 1996] I. Daubechies et S. Maes. *A nonlinear squeezing of the continuous wavelet transform based on auditory nerve models.* Wavelets in Medicine and Biology, pages 527–546, 1996.

[Daubechies 2011] I. Daubechies, J. Lu et H-T. Wu. *Synchrosqueezed wavelet transforms : an empirical mode decomposition-like tool.* Applied and computational harmonic analysis, vol. 30, no. 2, pages 243–261, 2011.

[De Boor 1978] C. De Boor. A practical guide to splines. Springer-Verlag, New York, 1978.

[Deering 2005] R. Deering et J.F. Kaiser. *The use of a masking signal to improve empirical mode decomposition.* In Proceedings of Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005 (ICASSP'05), volume 4, pages iv–485. IEEE, 2005.

[Delechelle 2005] E. Delechelle, J. Lemoine et O. Niang. *Empirical mode decomposition : an analytical approach for sifting process.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 11, pages 764–767, 2005.

[Delprat 1992] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian et B. Torrésani. *Asymptotic wavelet and Gabor analysis : Extraction of instantaneous frequencies.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 2, pages 644–664, 1992.

[Dimitriadis 2005] D-V. Dimitriadis, P. Maragos et A. Potamianos. *Robust AM-FM features for speech recognition.* Signal Processing Letters, IEEE, vol. 12, no. 9, pages 621–624, 2005.

[Donoho 1994] D.L. Donoho et J.M. Johnstone. *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage.* Biometrika, vol. 81, no. 3, pages 425–455, 1994.

[El Hadji 2010] S.D. El Hadji, R. Alexandre et A.O. Boudraa. *Analysis of intrinsic mode functions : a PDE approach.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 17, no. 4, pages 398–401, 2010.

[Elshinawy 2003] M.Y. Elshinawy et M.F. Chouikha. *Using am-fm image modeling technique in mammograms.* In Circuits and Systems, 2003 IEEE 46th Midwest Symposium on, volume 2, pages 660–663. IEEE, 2003.

[Felsberg 2001] M. Felsberg et G. Sommer. *The monogenic signal.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 12, pages 3136–3144, 2001.

[Flandrin 1993] P. Flandrin. Temps-fréquence en traitement du signal. Éditions Hermès, 1993.

[Flandrin 2004] P. Flandrin, G. Rilling et P. Goncalves. *Empirical mode decomposition as a filter bank.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, no. 2, pages 112–114, 2004.

[Flandrin 2012] P. Flandrin, E. Chassande-Mottin et F. Auger. *Uncertainty and spectrogram geometry.* In Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), pages 794–798. IEEE, 2012.

[Gabor 1946] D. Gabor. *Theory of communication. Part 1 : The analysis of information.* Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering, Journal of the Institution of, vol. 93, no. 26, pages 429–441, 1946.

[Gardner 2006] T.J. Gardner et M.O. Magnasco. *Sparse time-frequency representations.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 103, no. 16, pages 6094–6099, 2006.

[Gasquet 1990] C. Gasquet et P. Witomski. Analyse de fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes. Masson Paris, 1990.

[Gonnet 1994] C. Gonnet et B. Torresani. *Local frequency analysis with two-dimensional wavelet transform.* Signal Processing, vol. 37, no. 3, pages 389–404, 1994.

[Gröchenig 2000] K. Gröchenig. Foundations of time-frequency analysis. Birkhäuser Boston, 2000.

[Grossmann 1984] A. Grossmann et J. Morlet. *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape.* SIAM journal on mathematical analysis, vol. 15, no. 4, pages 723–736, 1984.

[Havlicek 1996] J.P. Havlicek, D.S. Harding et A.C. Bovik. *The multicomponent AM-FM image representation.* IEEE Transactions on Image Processing, vol. 5, no. 6, pages 1094–1100, 1996.

[Hong 2009] H. Hong, X. Wang et Z. Tao. *Local integral mean-based sifting for empirical mode decomposition.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 16, no. 10, page 841, 2009.

[Huang 1998] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung et H.H. Liu. *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis.* Proceedings of the Royal Society : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 454, no. 1971, pages 903–995, 1998.

[Huang 2005] N.E. Huang et S.S. Shen. Hilbert-huang transform and its applications, volume 5. World Scientific Publishing Company Incorporated, 2005.

[Huang 2012] B. Huang et A. Kunoth. *An optimization based empirical mode decomposition scheme.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012.

[Jacques 2011] L. Jacques, L. Duval, C. Chaux et G. Peyré. *A panorama on multiscale geometric representations, intertwining spatial, directional and frequency selectivity.* Signal Processing, vol. 91, no. 12, pages 2699–2730, 2011.

[Jaffard 2001] S. Jaffard, Y. Meyer et R.D. Ryan. Wavelets : Tools for science & technology. Siam, 2001.

[Kammler 2008] D.W. Kammler. A first course in fourier analysis. Cambridge University Press, 2008.

[Kodera 1976] K. Kodera, C. De Villedary et R. Gendrin. *A new method for the numerical analysis of non-stationary signals.* Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol. 12, no. 2, pages 142–150, 1976.

[Kokkinos 2009] I. Kokkinos, G. Evangelopoulos et P. Maragos. *Texture analysis and segmentation using modulation features, generative models, and weighted curve evolution.* Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 31, no. 1, pages 142–157, 2009.

[Kopsinis 2007a] Y. Kopsinis et S. McLaughlin. *Enhanced empirical mode decomposition using a novel sifting-based interpolation points detection.* In Statistical Signal Processing, 2007. SSP'07. IEEE/SP 14th Workshop on, pages 725–729. IEEE, 2007.

[Kopsinis 2007b] Y. Kopsinis et S. McLaughlin. *Investigation and performance enhancement of the empirical mode decomposition method based on a heuristic search optimization approach.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 1, pages 1–13, 2007.

[Kopsinis 2010] Y. Kopsinis, E. Aboutanios, D.A. Waters et S. McLaughlin. *Time-Frequency and Advanced Frequency Estimation Techniques for the Investigation of Bat Calls.* Journal of the Acoustical Society of America, pages 1124–1134, 2010.

[Larkin 2001] K.G. Larkin, D.J. Bone et M.A. Oldfield. *Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. I. General background of the spiral phase quadrature transform.* JOSA A, vol. 18, no. 8, pages 1862–1870, 2001.

[Li 2012] C. Li et M. Liang. *A generalized synchrosqueezing transform for enhancing signal time–frequency representation.* Signal Processing, vol. 92, no. 9, pages 2264–2274, 2012.

[Lilly 2009] J.M. Lilly et S.C. Olhede. *Higher-order properties of analytic wavelets.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, no. 1, pages 146–160, 2009.

[Lilly 2010] J.M. Lilly et S.C. Olhede. *On the analytic wavelet transform.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 56, no. 8, pages 4135–4156, 2010.

[Lilly 2012] J.M. Lilly et S.C. Olhede. *Generalized Morse Wavelets as a Superfamily of Analytic Wavelets.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 11, pages 6036–6041, 2012.

[Mallat 1991] S. Mallat. *Zero-crossings of a wavelet transform.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 4, pages 1019–1033, 1991.

[Mallat 2000] S. Mallat. Une exploration des signaux en ondelettes. Éditions de l'École Polytechnique, 2000.

[Meignen 2007] S. Meignen et V. Perrier. *A new formulation for empirical mode decomposition based on constrained optimization.* IEEE Signal Processing Letters, vol. 14, no. 12, pages 932–935, 2007.

[Meignen 2012a] S. Meignen, T. Oberlin et S. McLaughlin. *Multicomponent signal denoising with synchrosqueezing.* In Statistical Signal Processing Workshop (SSP), 2012 IEEE, pages 660 –663, aug. 2012.

[Meignen 2012b] S. Meignen, T. Oberlin et S. McLaughlin. *A new algorithm for multicomponent signals analysis based on SynchroSqueezing : with an application to signal sampling and denoising.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 11, pages 5787 –5798, nov. 2012.

[Metikas 2007] G. Metikas et S.C. Olhede. *Multiple multidimensional Morse wavelets.* Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 3, pages 921–936, 2007.

[Murenzi 1990] R. Murenzi. *Transformée en ondelettes multidimensionnelle et application à l'analyse d'images.* PhD thesis, Univ. Louvain-La-Neuve, 1990.

[Murray 2012] V. Murray, M.S. Pattichis, E.S. Barriga et P. Soliz. *Recent multiscale AM-FM methods in emerging applications in medical imaging.* EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 2012, no. 1, pages 1–14, 2012.

[Nunes 2003] J.C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang et P. Bunel. *Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition.* Image and vision computing, vol. 21, no. 12, pages 1019–1026, 2003.

[Oberlin 2012a] T. Oberlin, S. Meignen et V. Perrier. *An alternative formulation for the Empirical Mode Decomposition.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 5, pages 2236–2246, 2012.

[Oberlin 2012b] T. Oberlin, S. Meignen et V. Perrier. *On the mode synthesis in the synchrosqueezing method.* In Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2012 Proceedings of the 20th European, pages 1865–1869. IEEE, 2012.

[Oberlin 2013a] T. Oberlin, S. Meignen et S. McLaughlin. *Analysis of strongly modulated multicomponent signals with the short-time Fourier transform.* In Proceedings of ICASSP, 2013.

[Oberlin 2013b] T. Oberlin, S. Meignen et S. McLaughlin. *A Novel Time-Frequency Technique for Multicomponent Signal Denoising.* In Proceedings of EUSIPCO, 2013.

[Olhede 2002] S.C. Olhede et A.T. Walden. *Generalized Morse wavelets.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 11, pages 2661–2670, 2002.

[Olhede 2009] S.C. Olhede et G. Metikas. *The monogenic wavelet transform.* Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 57, no. 9, pages 3426–3441, 2009.

[Pandey 1996] J.N. Pandey. The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications. Wiley New York, 1996.

[Park 2011] C. Park, D. Looney, M.M. Van Hulle et D.P. Mandic. *The complex local mean decomposition.* Neurocomputing, vol. 74, no. 6, pages 867–875, 2011.

[Peleg 1991] S. Peleg et B. Porat. *Estimation and classification of polynomial-phase signals.* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 2, pages 422–430, 1991.

[Picinbono 1983] B. Picinbono et W. Martin. *Représentation des signaux par amplitude et phase instantanées.* Annals of Telecommunications, vol. 38, no. 5, pages 179–190, 1983.

[Prautzsch 2002] H. Prautzsch, W. Boehm et M. Paluszny. Bézier and B-spline techniques. Springer Verlag, 2002.

[Pustelnik 2012] N. Pustelnik, P. Borgnat et P. Flandrin. *A multicomponent proximal algorithm for empirical mode decomposition.* In Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), pages 1880–1884. IEEE, 2012.

[Riesz 1928] M. Riesz. *Sur les fonctions conjuguées.* Mathematische Zeitschrift, vol. 27, no. 1, pages 218–244, 1928.

[Rilling 2003] G. Rilling, P. Flandrin et P. Gonçalvès. *On empirical mode decomposition and its algorithms.* In IEEE-EURASIP workshop on nonlinear signal and image processing NSIP-03, Grado (I), 2003.

[Rilling 2007] G. Rilling. *Décompositions Modales Empiriques. Contributions à la théorie, l'algorithmie et l'analyse de performances.* PhD thesis, ENS Lyon, 2007.

[Rilling 2008] G. Rilling et P. Flandrin. *One or two frequencies ? The empirical mode decomposition answers.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 1, pages 85–95, 2008.

[Rossi 2007] M. Rossi. Audio. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.

[Selesnick 2005] I.W. Selesnick, R.G. Baraniuk et N.C. Kingsbury. *The dual-tree complex wavelet transform.* Signal Processing Magazine, IEEE, vol. 22, no. 6, pages 123–151, 2005.

[Sharpley 2006] R.C. Sharpley et V. Vatchev. *Analysis of the intrinsic mode functions.* Constructive Approximation, vol. 24, no. 1, pages 17–47, 2006.

[Skolnik 2003] M.I. Skolnik. Introduction to radar system. McGraw-Hill Education, 2003.

[Smith 2005] J.S. Smith. *The local mean decomposition and its application to EEG perception data.* Journal of the Royal Society Interface, vol. 2, no. 5, pages 443–454, 2005.

[Stein 1970] E.M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions, volume 30. Princeton university press Princeton, 1970.

[Stein 1993] E.M. Stein. Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, volume 43. Princeton University Press, 1993.

[Sudbery 1979] A. Sudbery. *Quaternionic analysis.* In Math. Proc. Camb. Phil. Soc, volume 85, pages 199–225. Cambridge Univ Press, 1979.

[Terrien 2008] J. Terrien, C. Marque et G. Germain. *Ridge extraction from the time–frequency representation (TFR) of signals based on an image processing approach : application to the analysis of uterine electromyogram AR TFR.* Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 5, pages 1496–1503, 2008.

[Thakur 2011] G. Thakur et H-T. Wu. *Synchrosqueezing-based recovery of instantaneous frequency from nonuniform samples.* SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 43, no. 5, pages 2078–2095, 2011.

[Thakur 2012] G. Thakur, E. Brevdo, N.S. Fučkar et H-T. Wu. *The Synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis : robustness properties and new paleoclimate applications.* Signal Processing, 2012.

[Torres 2011] M.E. Torres, M.A. Colominas, G. Schlotthauer et P. Flandrin. *A complete ensemble empirical mode decomposition with adaptive noise.* In IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'11), pages 4144–4147. IEEE, 2011.

[Torrésani 1995] B. Torrésani. Analyse continue par ondelettes. CNRS Éditions, 1995.

[Triebel 1978] H. Triebel. Spaces of besov-hardy-sobolev type. BSB Teubner, 1978.

[Unser 2009] M. Unser, D. Sage et D. Van De Ville. *Multiresolution monogenic signal analysis using the Riesz–Laplace wavelet transform.* Image Processing, IEEE Transactions on, vol. 18, no. 11, pages 2402–2418, 2009.

[Ville 1948] J. Ville. *Théorie et applications de la notion de signal analytique.* Câbles et Transmissions, no. 2A(1), pages 61–74, 1948.

[Wigner 1932] E. Wigner. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium.* Physical Review, vol. 40, no. 5, page 749, 1932.

[Wu 2007] Z. Wu, N.E. Huang, S.R. Long et C-K. Peng. *On the trend, detrending, and variability of nonlinear and nonstationary time series.* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 104, no. 38, pages 14889–14894, 2007.

[Wu 2009] Z. Wu et N.E. Huang. *Ensemble empirical mode decomposition : A noise-assisted data analysis method.* Advances in Adaptive Data Analysis, vol. 1, no. 01, pages 1–41, 2009.

[Wu 2012] H-T. Wu. *Instantaneous frequency and wave shape functions (I).* Applied and Computational Harmonic Analysis, 2012.

[Xiao 2007] J. Xiao et P. Flandrin. *Multitaper time-frequency reassignment for nonstationary spectrum estimation and chirp enhancement.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, no. 6, pages 2851–2860, 2007.

[Yang 2013] H. Yang et L. Ying. *Synchrosqueezed Wave Packet Transform for 2D Mode Decomposition.* SIAM Journal on Imaging Sciences, vol. 6, no. 4, pages 1979–2009, 2013.

[Yu 2008] G. Yu, S. Mallat et E. Bacry. *Audio denoising by time-frequency block thresholding.* IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 5, pages 1830–1839, 2008.

[Zhidong 2007] Z. Zhidong et W. Yang. *A new method for processing end effect in empirical mode decomposition.* In International Conference on Communications, Circuits and Systems, 2007 (ICCCAS'07), pages 841–845. IEEE, 2007.

Résumé

Les superpositions d'ondes modulées en amplitude et en fréquence (modes AM–FM) sont couramment utilisées pour modéliser de nombreux signaux du monde réel : cela inclut des signaux audio (musique, parole), médicaux (ECG), ou diverses séries temporelles (températures, consommation électrique). L'objectif de ce travail est l'analyse et la compréhension fine de tels signaux, dits "multicomposantes" car ils contiennent plusieurs modes. Les méthodes mises en oeuvre vont permettre de les représenter efficacement, d'identifier les différents modes puis de les démoduler (c'est-à-dire déterminer leur amplitude et fréquence instantanée), et enfin de les reconstruire. On se place pour cela dans le cadre bien établi de l'analyse temps-fréquence (avec la transformée de Fourier à court terme) ou temps-échelle (transformée en ondelettes continue). On s'intéressera également à une méthode plus algorithmique et moins fondée mathématiquement, basée sur la notion de symétrie des enveloppes des modes : la décomposition modale empirique.

La première contribution de la thèse propose une alternative au processus dit "de tamisage" dans la décomposition modale empirique, dont la convergence et la stabilité ne sont pas garanties. À la place, une étape d'optimisation sous contraintes ainsi qu'une meilleure détection des extrema locaux du mode haute fréquence garantissent l'existence mathématique du mode, tout en donnant de bons résultats empiriques. La deuxième contribution concerne l'analyse des signaux multicomposantes par la transformée de Fourier à court terme et à la transformée en ondelettes continues, en exploitant leur structure particulière "en ridge" dans le plan temps-fréquence. Plus précisément, nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction des modes par intégration locale, adaptée à la modulation fréquentielle, avec des garanties théoriques. Cette technique donne lieu à une nouvelle méthode de débruitage des signaux multicomposantes. La troisième contribution concerne l'amélioration de la qualité de la représentation au moyen de la "réallocation" et du "synchrosqueezing". Nous prolongeons le synchrosqueezing à la transformée de Fourier à court terme, et en proposons deux extensions inversibles et adaptées à des modulations fréquentielles importantes, que nous comparons aux méthodes originelles. Une généralisation du synchrosqueezing à la dimension 2 est enfin proposée, qui utilise le cadre de la transformée en ondelettes monogène.

Abstract

Many signals from the physical world can be modeled accurately as a superposition of amplitude- and frequency-modulated waves. This includes audio signals (speech, music), medical data (ECG) as well as temporal series (temperature or electric consumption). This thesis deals with the analysis of such signals, called multicomponent because they contain several modes. The techniques involved allow for the detection of the different modes, their demodulation (ie, determination of their instantaneous amplitude and frequency) and reconstruction. The thesis uses the well-known framework of time-frequency and time-scale analysis through the use of the short-time Fourier and the continuous wavelet transforms. We will also consider a more recent algorithmic method based on the symmetry of the enveloppes : the empirical mode decomposition.

The first contribution proposes a new way to avoid the iterative "Sifting Process" in the empirical mode decomposition, whose convergence and stability are not guaranteed. Instead, one uses a constrained optimization step together with an enhanced detection of the local extrema of the high-frequency mode. The second contribution analyses multicomponent signals through the short-time Fourier transform and the continuous wavelet transform, taking advantage of the "ridge" structure of such signals in the time-frequency or time-scale planes. More precisely, we propose a new reconstruction method based on local integration, adapted to the local frequency modulation. Some theoretical guarantees for this reconstruction are provided, as well as an application to multicomponent signal denoising. The third contribution deals with the quality of the time-frequency representation, using the reassignment method and the synchrosqueezing transform : we propose two extensions of the synchrosqueezing, that enable mode reconstruction while remaining efficient for strongly modulated waves. A generalization of the synchrosqueezing in dimension 2 is also proposed, based on the so-called monogenic wavelet transform.