



# Développement d'outils numériques pour l'audit énergétique des bâtiments

Jordan Brouns

## ► To cite this version:

Jordan Brouns. Développement d'outils numériques pour l'audit énergétique des bâtiments. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1107 . tel-01135056

**HAL Id: tel-01135056**

**<https://theses.hal.science/tel-01135056>**

Submitted on 24 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de  
**Docteur en Sciences de l'Université Paris-Est**

---

## DÉVELOPPEMENT D'OUTILS NUMÉRIQUES POUR L'AUDIT ÉNERGÉTIQUE DES BÂTIMENTS

---

par **Jordan BROUNS**

Discipline : Sciences pour l'ingénieur

préparée à IFSTTAR Nantes  
soutenue le 1<sup>er</sup> décembre 2014 à IFSTTAR Marne-la-Vallée

### Jury :

#### Rapporteurs :

Elena PALOMO DEL BARRIO	Professeur	Université Bordeaux 1
Mattheos SANTAMOURIS	Professeur	Université d'Athènes

#### Examineurs :

Yves CANDAU	Professeur	Université Paris-Est
Jérôme IDIER	Directeur de Recherches	CNRS
Rofaïda LAHRECH	Docteur	CSTB

#### Direction :

Frédéric BOURQUIN	IGPEF, HdR	Université Paris-Est
Karim LIMAM	Maître de Conférences, HdR	Université La Rochelle
Alexandre NASSIOPOULOS	Chargé de Recherches	Université Paris-Est



# Résumé

Le secteur du bâtiment représente aujourd'hui près de 45% de la facture énergétique nationale, et le parc des bâtiments existants se renouvelle lentement. L'audit énergétique est un outil d'aide à la décision permettant d'améliorer la performance des bâtiments en proposant des scénarios de rénovation adaptés. Cependant, les méthodes d'audit actuelles ne parviennent pas à saisir réellement les propriétés thermiques des bâtiments et les propositions de rénovation peuvent être inadaptées.

Nous proposons une méthode innovante d'audit énergétique des bâtiments qui permet de réduire fortement les incertitudes sur les paramètres et la réponse thermique du modèle. Elle diffère des méthodes classiques par son protocole opératoire et ses outils de résolution numérique. En plus du recueil des scénarios d'usage, des caractéristiques thermiques des systèmes et du bâti, et des conditions climatiques, elle exploite l'information contenue dans la mesure de l'état thermique, composé des températures des pièces et des températures de surfaces de certaines parois et des émetteurs. Ces données alimentent un problème inverse d'identification de paramètres. L'utilisation d'un modèle aux EDP nous donne accès aux outils du contrôle optimal, et notamment à la méthode de l'état adjoint. Avec ce formalisme, le problème inverse se réécrit comme un problème d'optimisation non linéaire de calibration du modèle thermique. Les paramètres inconnus sont constitués des paramètres les plus influents : la capacité et la conductivité thermiques des parois, les caractéristiques des émetteurs, la transmittance des fenêtres et le débit de renouvellement d'air moyen. Nous proposons deux variantes de la méthode, que nous appliquons sur un cas d'étude numérique. La première nécessite les données de chaque puissance individuelle fournie aux émetteurs, et la seconde utilise une mesure globale de production de chaleur. L'approche est étudiée numériquement : le modèle thermique sert à la fois pour la génération des mesures et pour l'identification. Une fois les mesures de l'état thermique synthétisées, les paramètres retenus sont perturbés suivant les incertitudes classiques du bâtiment. Nous éprouvons la méthode sur un échantillon de tirages aléatoires, engendrant autant d'initialisations pour l'algorithme, afin de calculer l'incertitude de la méthode. L'allègement du protocole opératoire pour la seconde variante se traduit toutefois par une baisse de la précision de l'identification.

Nous analysons la robustesse de la méthode lorsque les conditions climatiques de l'audit changent, que le bruit des capteurs de l'état thermique augmente, et pour de fortes incertitudes initiales des paramètres. Nous montrons que la méthode est stable par rapport au bruit des capteurs et que l'incertitude sur l'état thermique du bâtiment est globalement réduite.

Afin d'améliorer la prise en compte de l'aéraulique, nous proposons une technique permettant de discriminer deux sources ayant des dynamiques différentes : l'une constante par morceaux, l'autre régulière dans le temps. La méthode résout un problème inverse prenant en compte la régularité des fonctions par projection. Cet outil est validé sur une étude expérimentale, dont les résultats démontrent la robustesse au bruit de mesure. Ce résultat constitue un jalon dans la volonté de s'affranchir de la contrainte de maîtrise de scénarios d'usage de la méthode d'audit.

Enfin, nous proposons un formalisme inverse pour caractériser les propriétés thermiques



## *RÉSUMÉ*

---

d'une structure 3D à partir de mesures de température sur une partie de sa frontière. L'outil permet de reconstruire différentes formes et natures de défauts. Il pourrait trouver des débouchés dans la caractérisation de défauts d'isolation ou de ponts thermiques.

# Abstract

The building sector currently accounts for nearly 45% of the national energy bill, and the existing buildings are slowly renewed. Energy audit is a tool for decision support to improve building performance by providing suitable renovation strategies. However, actual energy audit methods fail to completely determine the building thermal properties, and the proposed retrofit strategies may be inappropriate.

We propose an innovative energy audit method which significantly reduces the uncertainties on the building thermal parameters and the thermal state. It differs from conventional methods by its operating protocol and its numerical resolution. In addition to the collection of use scenarios, thermal characteristics of built and systems, and weather conditions, it exploits the information embedded in the measurement of the thermal state, composed of the temperatures of the rooms, and the surface temperature of walls and heating devices. This data feed an inverse problem of parameters identification. Using a model for EDP gives us a direct access to the tools of the optimal control theory, including the adjoint state method. With this formalism, the inverse problem can be rewritten as a nonlinear optimization problem of the calibration of the thermal model. The unknown parameters consist of the most influential parameters of the building thermal model : the heat capacity and the thermal conductivity of the walls, the heaters characteristics, the windows transmittance and the mean rate of air renewal. We propose two alternatives to the method. The first requires the data of each individual power provided to heating device, and the second uses a global measure of the heat production. We apply them on a numerical case study : the thermal model is used for both the measures generation and the parameters identification. Once the thermal state measurements are synthesized, the selected parameters are disturbed by conventional uncertainties of the building. We investigate the method on a randomly generated sample, which gives us as many starting values for the algorithm. This allows to compute the uncertainty of the method. Reducing the operating protocol for the second alternative results in a decrease of the identification accuracy.

We analyze the robustness of the method when the weather conditions of the audit change, when the sensor noise of the thermal state increases, and when we deal with strong initial parameter uncertainties. We show that the method is stable compared to the sensor noise and the thermal response of the rooms is generally well reconstructed.

In order to improve the ventilation consideration, we then propose a technique to distinguish two thermal sources whose dynamics differ : one piecewise constant, and one smooth in time. The method is to solve an inverse problem, taking into account the temporal regularity of functions by a projection step. This tool has been validated on an experimental study, and the results demonstrate robustness to measurement noise. This result is a milestone in the will to overcome the constraint of precisely describing to use scenarios in the audit methodology.

Finally, we propose an inverse formalism to characterize the thermal properties of a 3D structure from temperature measurements on a part of its boundary. The tool allows the reconstruction of various types and forms of internal defects. He could find opportunities in the thermal building diagnostics for characterizing insulation defects or thermal bridges.



# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier particulièrement Alexandre Nassiopoulos pour la gentillesse et la patience dont il a su faire preuve quotidiennement, ainsi que sa disponibilité pour m'éclairer, me guider, me conseiller et m'encourager tout au long de ces années. La richesse de la problématique associée à la rigueur scientifique et la qualité de l'encadrement ont rendu ce sujet plus motivant qu'aucun autre. Je remercie également mes directeurs, Frédéric Bourquin et Karim Limam, pour nos échanges réguliers et leurs remarques, toujours pertinentes et instructives, qui ont permis l'aboutissement de ces travaux de thèse. J'espère avoir été digne de la confiance que vous trois m'avez accordée en ce jour d'été 2011 sous le soleil de La Rochelle, et que ces travaux de thèse se hissent à la hauteur de vos espérances. J'ai énormément appris à vos côtés, et je suis très fier et honoré de vous avoir eu dans mon encadrement.

Je remercie chaleureusement Elena Palomo Del Barrio et Mattheos Santamouris d'avoir accepté de rapporter cette thèse, ainsi qu'Yves Candau, Jérôme Idier et Rofaïda Lahrech pour leur participation au jury de soutenance. Les nombreuses questions et remarques qui m'ont été faites lors de cette ultime étape m'ont aidé à prendre du recul sur l'ensemble de ces travaux.

Ces trois années de thèse n'auraient jamais été aussi agréables sans l'accueil amical et la grande sympathie de l'ensemble des équipes du laboratoire SII. Un grand merci également à tous les collègues de travail : stagiaires, doctorants, postdocs et autres, pour la convivialité de nos collaborations. J'ai aussi une pensée pour les membres du projet MEMOIRE, avec qui j'ai partagé d'intenses réunions très instructives.

Un clin d'œil aux collègues de bureau : Louis-Daniel Thérout, tu vas nous manquer, j'espère que tout se passe bien dans ton nouveau boulot et que les collègues sont sympa ! ; et docteur Antoine Crinière, camarade de thèse, pour nos nombreuses pauses-café distrayantes et nos discussions aussi bien scientifiques que barrées<sup>1</sup>. Bonne chance pour la suite les amis !

Merci à Cécile Blanchemanche de l'école doctorale Paris-Est pour sa sympathie, sa disponibilité et sa réactivité, qui aura contribué au bon déroulement à distance de cette thèse.

Merci à la N3 de rink-hockey de l'ASTA, qui m'a permis de continuer à pratiquer mon sport/passion et de retrouver l'ambiance familiale de mon équipe sevranaise.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille pour son soutien inconditionnel. Tout d'abord ma puce Mélanie, qui m'a soutenu jours après jours, et qui me fait le plus beau cadeau qui existe. Un grand merci à Kelly Geneviève et Jacques, mais aussi Guilhem Jo et Mika, CaNiMaCé, Isabelle Antoine et Louise, JP, les Cordonne, et bien sûr mamie Yvette. Merci à Didier, Sylviane, Céline, Sylvia et Marylou pour leurs points de vue et leurs remarques intéressantes lors de nos discussions. Puis une pensée particulière pour mamie Michèle, mais aussi Pépé et mamie Coco, merci pour tout.

Et merci à tous les autres.

---

1. Si si, il arrive que ce soit compatible !



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Audits énergétiques des bâtiments</b>	<b>11</b>
1.1 Les méthodes d'audit . . . . .	12
1.2 Techniques d'instrumentation dans le bâtiment . . . . .	13
1.3 Insuffisance des données et incertitudes . . . . .	18
<b>2 Modélisation thermique</b>	<b>19</b>
2.1 Équation de la chaleur . . . . .	20
2.2 Discrétisations des zones . . . . .	21
2.2.1 Modélisation CFD . . . . .	21
2.2.2 Modélisation multizone nodale . . . . .	23
2.2.3 Modélisation multizone zonale . . . . .	25
2.2.4 Modélisation monozone . . . . .	26
2.2.5 D'autres choix de discrétisations . . . . .	27
2.3 Modélisation de l'enveloppe . . . . .	27
2.3.1 Propriétés internes . . . . .	28
2.3.2 Transferts thermiques aux limites . . . . .	30
2.3.3 Cas particulier des vitrages . . . . .	32
2.4 Apports internes dans les zones . . . . .	33
2.5 Aéraulique . . . . .	34
2.6 Modèle thermique de la méthode d'audit . . . . .	35
2.7 Application et influence des paramètres . . . . .	40
2.7.1 Description du modèle sur le cas d'étude . . . . .	40
2.7.2 Influence des incertitudes et choix des inconnues . . . . .	42
2.8 Conclusion . . . . .	45
<b>3 Problèmes inverses et application à l'audit énergétique</b>	<b>47</b>
3.1 Introduction aux problèmes inverses . . . . .	48
3.1.1 Principe et caractère mal posé . . . . .	48
3.1.2 Formulation dans le cas linéaire . . . . .	50
3.1.3 Régularisation . . . . .	52

3.1.4	Extension au cas non linéaire . . . . .	54
3.1.5	Identifiabilité . . . . .	56
3.1.6	Problèmes inverses et erreurs . . . . .	57
3.2	Identification de modèles thermiques . . . . .	58
3.2.1	Problème inverse d'identification de paramètres . . . . .	60
3.2.2	Adimensionnement . . . . .	60
3.2.3	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	62
3.2.4	Résolution par la méthode de Levenberg-Marquardt . . . . .	64
3.2.5	Calcul du gradient par l'état adjoint . . . . .	67
3.3	Méthode d'audit énergétique instrumenté . . . . .	71
3.3.1	Identification de paramètres pour le cas d'étude . . . . .	71
3.3.2	Application de la méthode d'audit : Variante 1 . . . . .	75
3.3.3	Application de la méthode d'audit : Variante 2 . . . . .	83
3.3.4	Incertitudes plus importantes . . . . .	90
3.4	Conclusions et perspectives . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Étude de la performance de la méthode d'audit</b>	<b>95</b>
4.1	Variables d'intérêt . . . . .	96
4.1.1	Consommations minimales intrinsèques . . . . .	96
4.1.2	Décomposition des flux thermiques . . . . .	99
4.2	Calcul des variables d'intérêt sur l'identification de paramètres . . . . .	100
4.3	Étude paramétrique de la procédure d'identification . . . . .	102
4.3.1	Saison de l'audit . . . . .	102
4.3.2	Bruit de mesure . . . . .	109
4.4	Propagation d'incertitude et sensibilité du contrôle . . . . .	114
4.4.1	Identification dans un contexte d'incertitudes . . . . .	114
4.4.2	Sensibilité du contrôle . . . . .	116
4.5	Conclusions et perspectives . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Discrimination de sources</b>	<b>121</b>
5.1	Cas d'étude et modélisation thermique . . . . .	122
5.2	Formulation du problème inverse . . . . .	123
5.3	Méthode de résolution . . . . .	125
5.3.1	Reconstruction de la source $Q$ dans $H^1(0; t_a)$ . . . . .	126
5.3.2	Méthode de point fixe . . . . .	127
5.3.3	Algorithme du gradient avec projection . . . . .	128
5.4	Résultats numériques . . . . .	128
5.5	Validation expérimentale . . . . .	130
5.6	Conclusions et perspectives . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Identification de défauts par thermographie IR active</b>	<b>137</b>
6.1	Description de l'étude et modélisation . . . . .	139
6.2	Formulation du problème inverse . . . . .	141
6.3	Méthode de résolution . . . . .	141
6.4	Résultats . . . . .	143
6.5	Méthode alternative . . . . .	145
6.6	Résultats avec la méthode alternative . . . . .	146
6.7	Étude sur d'autres formes de défaut . . . . .	148
6.8	Conclusions et perspectives . . . . .	152

<b>7 Conclusion générale de la thèse</b>	<b>153</b>
<b>A Expression du modèle adjoint</b>	<b>157</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>





# Nomenclature

## Modélisation thermique du bâtiment

$s$	Indice indiquant la paroi pour laquelle est définie la variable
$z$	Indice indiquant la zone pour laquelle est définie la variable
$\alpha_s$	Facteur d'absorption des surfaces
$\alpha_{sp}$	Coefficient d'échange radiatif entre surfaces
$A_z$	Aire des fenêtres
$\beta_s$	Coefficient d'échange radiatif entre les surfaces des parois et le ciel
$c_a$	Capacité calorifique de l'air
$C_z$	Capacité thermique des zones
$d_z$	Capacité thermique des émetteurs
$\gamma^b, \gamma^d$	Coefficients d'exposition solaire des surfaces (direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ ))
$h_{sz}$	Coefficient d'échange convectif entre zone et surface
$\bar{h}_s$	Coefficient d'échange convectif entre la surface et l'air extérieur
$\underline{h}_s$	Coefficient d'échange diffusif entre la surface et le sol
$k_s$	Conductivité thermique des parois
$L_s$	Épaisseur des parois
$\lambda_z$	Coefficient de couplage convectif entre l'air ambiant et les émetteurs
$\eta_z$	Rendement des émetteurs
$P_z$	Puissance fournie aux émetteurs
$\phi^b, \phi^d$	Densités de flux solaire direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ )
$q_z$	Débit d'infiltration dans les zones
$Q_z^i$	Gains internes convectifs dans les zones
$R_{zr}$	Échanges aérauliques entre zones
$\rho c_s$	Capacité thermique des parois
$S_s$	Superficie des parois
$\tau_z$	Coefficient de transmission des fenêtres
$T_a$	Température ambiante extérieure

$T^\infty$	Température de rayonnement équivalente du ciel
$T_g$	Température du sol
$T_z$	Température de l'air ambiant pour la zone $z$
$\theta_s$	Champ de température des parois
$\Theta_s$	Température des émetteurs
$T_z^0$	Température initiale des zones
$\theta_s^0$	Champ de température initiale des parois
$\Theta_s^0$	Température initiale des émetteurs

**Problèmes inverses**

$c$	Valeur des contraintes d'égalité sur les inconnues
$\mathcal{C}$	Espace des contraintes
$\epsilon$	Paramètre de régularisation de Tikhonov
$f$	Opérateur évaluant l'état thermique
$\hat{f}$	Réponse du modèle thermique aux points d'observation pour l'identification de paramètres
$f'(u)$	Modèle linéaire tangent au point $u$
$\hat{f}'(u)$	Réponse du modèle linéaire tangent aux points d'observation
$f'(u)^*$	Modèle adjoint du modèle linéaire tangent au point $u$
$\hat{f}'(u)^*$	Réponse du modèle adjoint aux points d'observation
$G$	Opérateur linéaire des contraintes d'égalité
$J$	Fonctionnelle du problème inverse non linéaire
$\tilde{J}_u$	Fonctionnelle du problème inverse linéaire sur le modèle linéaire tangent en $u$
$\nabla \tilde{J}_u$	Gradient de la fonctionnelle du problème inverse linéaire
$G$	Opérateur linéaire des contraintes d'égalité
$\mu$	Paramètre permettant d'ajuster la sévérité des contraintes d'égalité
$m$	Observation de l'état thermique
$\mathcal{M}$	Espace des mesures, observations partielles de l'état thermique
$\nu$	Paramètre d'amortissement de Marquardt
$O$	Opérateur d'observation partielle de l'état thermique
$p$	Jeu de paramètres supposés connus
$\mathcal{P}$	Espace des paramètres supposés connus
$P_t$	Puissance totale fournie aux émetteurs
$\mathcal{S}$	Espace des états thermiques
$u$	Jeu de paramètres inconnus à identifier
$u^0$	Initialisation des inconnues
$\mathcal{U}$	Espace des paramètres inconnus à identifier

# Introduction

En 1968, un groupe international de scientifiques, économistes, politiques et industriels indépendants se réunit à Rome afin de discuter de l'évolution des systèmes complexes que sont les sociétés actuelles. Dénommé le Club de Rome, il commande un rapport, au début des années 1970, traitant des problématiques environnementales liées à la croissance irréfléchie, [Meadows *et al.*, 1972]. Il définit notamment la notion d'empreinte écologique, et tire l'une des premières sonnettes d'alarme environnementale à grande échelle. Cette analyse est publiée dans le même temps que la création de la conférence des Nations Unies sur l'environnement humain, premier sommet de la Terre, tenue en 1972 à Stockholm. Celle-ci aboutit à un programme des Nations Unies pour l'environnement, et les dirigeants mondiaux s'engagent à faire un point régulier tous les dix ans sur l'évolution de la Terre. Parallèlement, le monde subit le choc pétrolier de 1973. Face à la hausse du prix des hydrocarbures, la France, à l'instar de nombreux pays, adopte une politique de réduction des consommations. Le secteur du bâtiment étant parmi les plus gourmands en énergie, cette politique se traduit par le vote de la première réglementation thermique française. L'histoire se répète en 1979 avec un second choc pétrolier, et la volonté de réduire les dépenses énergétiques s'accroît rapidement.

Durant la décennie suivante, la forte exposition médiatique de nombreuses catastrophes naturelles et industrielles va accélérer la prise de conscience collective de la nécessité d'une solidarité, aussi bien nationale qu'internationale, pour lutter contre les bouleversements environnementaux. Citons par exemple la découverte des pluies acides [Likens et Bormann, 1974], de l'effet de serre [National Research Council, 1979], du trou dans la couche d'ozone [Farman *et al.*, 1985], ou encore l'accident nucléaire de Tchernobyl en 1986. C'est dans ce contexte que la Commission mondiale sur l'environnement et le développement, fondée en 1983 par l'Organisation des Nations Unies, rédige le rapport Brundtland [Brundtland, 1987] résumant plus de 75 études internationales sur les problématiques environnementales et économiques des sociétés. Ce document définit un programme de coopération internationale pour appréhender les problèmes environnementaux. Il introduit et démocratise également le concept de *développement durable*, à l'époque éco-développement, comme suit :

Le développement durable est un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures de répondre aux leurs.

En particulier, le rapport servira de base pour la célèbre conférence des Nations Unies sur l'environnement et le développement, tenue à Rio en 1992.

## Les évolutions récentes dans le domaine de la construction

À l'aube des années 1990, le bâtiment, tête de liste des secteurs les plus consommateurs en énergie et émetteurs de gaz à effet de serre, reste l'un des enjeux économiques et environnementaux majeurs en France. Après celles de 1973 et 1982, une troisième réglementation thermique voit le jour en 1988, avec de nouvelles exigences en termes de consommations. Quelques années

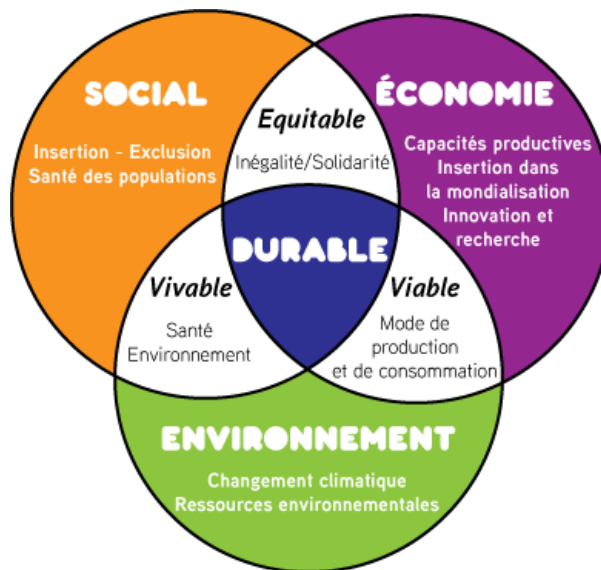


FIGURE 1 – Schéma du développement durable. Crédits Université Rennes 2.

plus tard, les signatures de la déclaration de Rio<sup>2</sup> en 1992 et du protocole de Kyoto<sup>2</sup> en 1995 appuient cette volonté politique, et donnent naissance à la loi de 1996 sur l'utilisation rationnelle de l'énergie. Ces mesures sont mises en application par le vote de la directive européenne sur la performance énergétique de 2002, l'adoption du plan climat de 2004, la définition du programme national de recherche et d'expérimentation sur l'énergie dans les bâtiments (PREBAT) lancé en 2006, et la publication de nouvelles réglementations thermiques en 2000 puis 2005. Outre une baisse des consommations et des émissions des bâtiments, ces nouvelles réglementations ajoutent la notion de confort d'été, et affinent la considération du climat local, de l'inertie thermique, et des énergies renouvelables. Elles contraignent également des aspects techniques, comme la performance des équipements (éclairage, chauffage, climatisation et eau chaude sanitaire).



FIGURE 2 – Logo du Grenelle Environnement

Les initiatives prises depuis les années 1990 ont permis de stabiliser les hausses des consommations d'énergie et d'émissions de gaz à effet de serre. Cela s'observe en particulier dans le secteur du bâtiment, puisque les politiques de maîtrise de l'impact environnemental ont compensé la construction de nouveaux ouvrages ainsi que la multiplication des appareils électriques. Pour aller plus loin dans cette démarche, et suite au Pacte écologique de 2006, la France organise le Grenelle Environnement, une série de rencontres politiques, durant la fin de l'année 2007. Ces réunions

2. Ces engagements font respectivement suite au sommet de la Terre de Rio et à la conférence des parties de Kyoto.

ont pour ambition de prendre des décisions sur le long terme en matière d’environnement et de développement durable. Elles concernent, entre autres, l’amélioration de l’efficacité énergétique et la réduction des émissions de gaz à effet de serre des bâtiments à l’horizon 2020. Les objectifs se concrétisent par l’application de mesures réglementaires, la mise en place de soutiens financiers, de sensibilisation et de formation, et l’ouverture du secteur à de nouveaux acteurs industriels et de services. Ces efforts sont accompagnés par un second volet du programme de recherche PREBAT2, ayant pour objectif de moderniser le parc des bâtiments existants, et proposer des solutions innovantes, tant au niveau des techniques que des composants, pour généraliser les constructions à énergie positive [PREBAT, 2008]. La volonté gouvernementale d’améliorer la performance énergétique du bâtiment est de nouveau clairement exposée. Elle donne naissance à une nouvelle réglementation thermique en 2012, ajoutant des exigences de résultats en ce qui concerne l’efficacité énergétique du bâti, la consommation énergétique de l’ouvrage et le confort d’été dans les bâtiments non climatisés [MEDDE, 2011].

### Un parc de bâtiments qui se renouvelle lentement

Aujourd’hui, les constructions neuves sont largement encadrées en termes de consommation énergétique et d’émissions de gaz à effet de serre, notamment grâce aux outils utilisés lors de la conception, et aux nouvelles techniques et technologies disponibles. Les labels Bâtiment basse consommation (BBC) et Bâtiment à énergie positive (BEPOS), voir figure 3, l’illustrent parfaitement, [ADEME, 2010, ADEME, 2012]. Malgré cela, le secteur du bâtiment représente

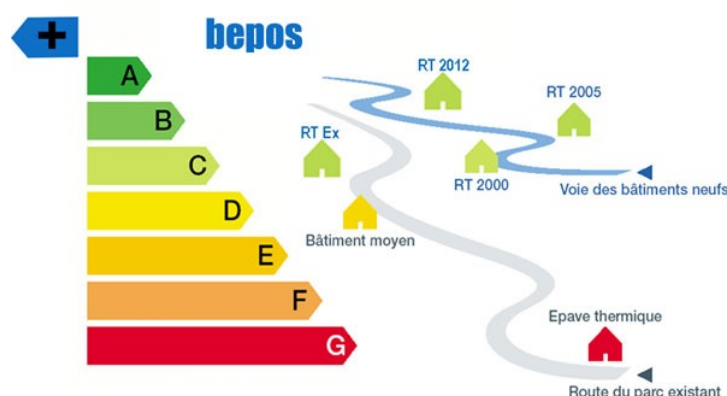


FIGURE 3 – Performances énergétiques des bâtiments. Crédits Effinergie.

aujourd’hui encore près de 45% des consommations d’énergie en France [ADEME, 2014, MEDDE, 2014]. Par ailleurs, étant donné son taux annuel de renouvellement de l’ordre de 1%, on estime que la moitié du parc des bâtiments existants en 2050 sera constitué de constructions précédant les réglementations thermiques, *i.e.* bâties avant 1975. Pour atteindre l’objectif de réduction des consommations d’un facteur 4 à l’horizon 2020, le pays doit exploiter l’important gisement d’économies d’énergie que représente le parc de bâtiments existants.

En parallèle des actions gouvernementales, le développement durable s’est fait une place importante dans les consciences collectives. Une étude récente met en avant le fait que seulement 2,5% des industriels perçoivent l’efficacité énergétique comme une contrainte [Coutance, 2014]. La plupart la perçoit comme un devoir (21%), une priorité (29%), ou comme un moyen de réduire les coûts d’exploitation (45%), voir figure 4. La volonté d’utiliser les ressources énergétiques avec parcimonie est manifeste dans tous les secteurs du bâtiment, [ADEME, 2012].

L’outil majeur s’appliquant aux bâtiments existants est l’audit énergétique, dont l’objectif est de caractériser les performances de l’ouvrage étudié au moyen de mesures et de relevés. Dans

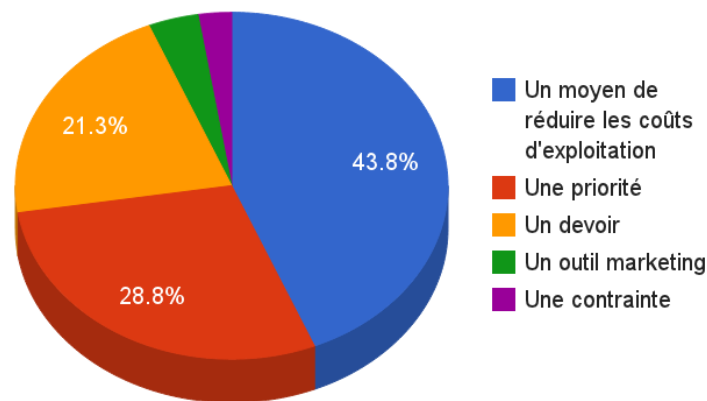


FIGURE 4 – Perception de l'efficacité énergétique chez les industriels, [Coutance, 2014]

le cadre de la réhabilitation de bâtiments, ces diagnostics constituent le principal outil d'aide à la décision dans la planification de travaux de rénovation, [ADEME, 2011], en fournissant une base d'évaluation des scénarios de travaux. Malheureusement, en l'absence de carnet de santé des ouvrages, ces relevés d'informations sont souvent superficiels ou incomplets, ce qui engendre des incertitudes dans le modèle permettant de prévoir la performance de différents travaux de rénovation. Un manque se fait ressentir aujourd'hui pour des outils permettant de prévoir de manière fiable et quantitative l'impact d'un bouquet de travaux. Le besoin se situe essentiellement sur la caractérisation de l'état du bâtiment qui doit être rénové pour fournir un modèle suffisamment détaillé et précis pour le représenter avec autant d'exactitude que possible en envisageant différents types de travaux. Les travaux de la thèse se sont orientés vers le développement de méthodes de caractérisation de propriétés thermiques du bâtiment pour répondre à ce besoin.

### Approche développée dans la thèse

Les méthodes d'audit classiques utilisent des données sur les conditions environnementales, les scénarios d'usage et notamment les puissances fournies aux émetteurs, et la géométrie ainsi que les propriétés physiques du bâtiment. Ces informations sont obtenues lors d'une campagne de relevé et d'instrumentation *in situ*. Les méthodes d'audit des bâtiments les plus lourdes proposent une étape de modélisation thermique, suivie éventuellement d'une phase de comparaison modèle-mesures et d'ajustement des paramètres du modèle. Cette dernière s'effectue généralement sur les mesures de consommations.

La méthode d'audit développée permet de fortement réduire les incertitudes sur les paramètres. Comparée aux méthodes classiques, son protocole opératoire nécessite la mesure de l'état thermique du bâtiment en plus des informations traditionnellement collectées. Elle utilise en effet la connaissance de l'évolution de la température des zones, des émetteurs et des surfaces de certaines parois et fenêtres. Ces données sont obtenues à l'aide de capteurs de température d'air, et de capteurs de température de surface. La phase de modélisation repose sur un modèle thermique constitué d'équations aux dérivées partielles (EDP). Nous montrons dans la foulée que les modèles classiques de thermique du bâtiment ne sont en réalité que des discrétisations particulières de l'EDP parabolique de la chaleur résolue par décompositions de domaines entre les zones et les parois. Ce choix de modèle aux EDP nous donne directement accès aux outils issus de la théorie du contrôle, avec notamment l'état adjoint permettant de calculer rapidement le gradient d'une fonctionnelle. Les conditions limites sont semblables à celles utilisées dans les modèles classiques. Le bâtiment est intégré dans son environnement par ses conditions limites

constituées d'échanges convectifs entre les parois et l'air ambiant, d'infiltrations à travers le bâti, d'échanges radiatifs avec le ciel, d'échanges conductifs avec le sol, et d'apports solaires (directe et diffus). Les zones et les composants du bâti sont couplés par des échanges convectifs et radiatifs de grande longueur d'onde. Le modèle des systèmes fait intervenir le couplage convectif avec les zones, le rendement de production ou de distribution, et la dynamique. Nous disposons d'un outil permettant le passage d'une géométrie décrite au format gbXML au modèle thermique correspondant, avec les adjacences et les coefficients d'échanges correctement définis. Nous proposons une étude portant sur l'influence thermique des paramètres du modèle. Pour cela, nous calculons l'impact d'une variation de ces paramètres sur la température des zones. Les variations utilisées sont représentatives des incertitudes classiques dans le bâtiment. L'analyse de cet impact nous permet d'identifier les paramètres dont l'incertitude influence le plus la thermique des zones. Les paramètres en tête de liste sont les propriétés internes, les coefficients d'échanges convectifs ainsi que le coefficient d'absorption des parois. Nous savons que l'identification simultanée (par méthode inverse) de tous ces paramètres n'est pas réalisable, mais que le calcul des propriétés internes, la capacité et la conductivité thermiques, permet de reconstruire correctement le flux thermique des parois. Cette valeur de flux étant la variable d'intérêt du concepteur de la campagne de rénovation, nous choisissons comme paramètres à identifier la capacité et la conductivité thermiques. Les autres paramètres dans la liste des paramètres influents sont le rendement des émetteurs, le débit de renouvellement d'air et le facteur de transmission des fenêtres. Ici encore, l'identification simultanée des deux derniers n'est pas réalisable. Pour contourner le problème, nous choisissons d'identifier un débit de renouvellement d'air moyen au lieu d'une fonction du temps, cela permet de réduire le nombre d'inconnues et d'améliorer l'identifiabilité. Étant donné que le seul paramètre inconnu des émetteurs est le rendement, nous sélectionnons également la dynamique des émetteurs ainsi que leur coefficient de couplage avec la zone. Nous obtenons ainsi un vecteur d'inconnues constitué des propriétés internes des parois, des caractéristiques des émetteurs (rendement, dynamique, couplage convectif avec la zone), du débit de renouvellement d'air moyen, et du coefficient de transmission des fenêtres. Ces paramètres constituent les inconnues de notre méthode d'audit.

Le cœur de notre méthode d'audit est fondé sur la théorie des problèmes inverses. Ce domaine étudie l'estimation d'état et/ou de paramètres à partir de mesures partielles de l'état du système. Ces problèmes apparaissent dans de nombreux domaines, dès lors que l'état d'un système est plus accessible que ses paramètres. C'est comme si nous souhaitions, à l'opposé du principe de causalité, retrouver les causes en observant les conséquences. Les problèmes inverses souffrent généralement d'un caractère mal posé, *a contrario* des problèmes dits bien posés définis par Hadamard comme vérifiant existence, unicité et continuité de la solution par rapport aux données. Ce constat renvoie à la notion d'identifiabilité et au besoin de régularisation pour résoudre ces problèmes de manière approchée. De nombreux problèmes inverses se formulent par un problème d'optimisation. Cela s'explique notamment par le fait qu'un modèle n'est jamais qu'une représentation<sup>3</sup> de la réalité. Dans ces problèmes d'optimisation, les inconnues sont recherchées de sorte à minimiser une fonction coût qui quantifie l'écart entre le modèle et les mesures. La théorie du contrôle optimal fournit des outils théoriques et pratiques pour résoudre ce type de problèmes dans le cadre déterministe. Nous choisissons d'utiliser la méthode de régularisation de Tikhonov, ayant l'avantage d'être applicable aux problèmes inverses non linéaires, comme c'est le cas pour la plupart des paramètres intrinsèques considérés. Ce choix nous permet de prendre en compte la régularisation directement dans la définition de la fonction coût du problème inverse par l'ajout d'un terme de pénalisation. Pour faciliter la résolution du problème inverse avec les fortes hétérogénéités des ordres de grandeur des paramètres inconnus, et

---

3. Vision idéalisée.



donc le mauvais conditionnement des matrices des systèmes linéaires à résoudre, nous choisissons d'utiliser une technique d'adimensionnement. Celle-ci a l'originalité de s'appliquer, non pas au modèle, mais au vecteur de paramètres inconnus, en factorisant l'ordre de grandeur des inconnues. Cette technique est à la fois plus simple à mettre en œuvre et plus efficace que l'adimensionnement classique de modèle. Nous ajoutons à la fonctionnelle du problème inverse un autre terme de pénalisation afin de prendre en compte des contraintes linéaires entre inconnues. Cela permet notamment d'utiliser l'information que les parois extérieures possèdent généralement une composition interne semblable et de réduire l'instrumentation à une seule paroi par type de parois. Ce terme nous permet également de proposer une seconde variante à notre méthode d'audit, dans laquelle nous ne demandons pas la donnée des puissances individuelles fournies aux émetteurs, mais simplement la puissance totale fournie pour le chauffage. Les puissances individuelles sont alors ajoutées aux paramètres inconnus et identifiées à partir de la puissance totale et des températures des émetteurs. Le problème inverse non linéaire est résolu par un algorithme de type Levenberg-Marquardt, qui consiste à calculer la solution de manière itérative en résolvant des sous-problèmes inverses linéaires définis sur le modèle linéaire tangent au point de linéarisation. Cet algorithme est très populaire et efficace pour résoudre les problèmes d'optimisation non linéaires. Chacun des sous-problèmes linéaires est défini par une nouvelle fonctionnelle et résolu par la méthode du gradient conjugué. Le gradient de la fonctionnelle est obtenu par la méthode de l'état adjoint issue de la théorie du contrôle. Celle-ci permet de calculer le gradient en ne résolvant que deux problèmes de nature semblables. De nouveau, cette méthode est couramment utilisée pour la résolution de problèmes d'optimisation par descente de gradient.

Les deux variantes proposées sont ensuite appliquées à un cas d'étude. Nous les analysons numériquement en utilisant le même modèle pour engendrer les mesures et pour faire l'identification, avec néanmoins des perturbations aléatoires des données de mesure. L'audit se déroule sur la première semaine du mois de février, les données météo sont importées du logiciel EnergyPlus, et les scénarios d'usage sont traditionnels des bâtiments de bureau. Nous partons d'une vision biaisée des paramètres que nous identifions, correspondant aux incertitudes classiques des audits énergétiques du bâtiment. La méthode d'audit classique est alors représentée par cette vision erronée, tandis que notre méthode résulte du calibrage des paramètres à partir des mesures de l'état thermique. La variante 1, qui nécessite la connaissance des puissances individuelles fournies pour chaque émetteur, réduit fortement l'erreur des paramètres, sauf pour le débit de renouvellement d'air. Cela se confirme sur l'évolution de la température des zones puisque l'erreur modèle-mesures pour la réponse thermique de la zone 1 passe de 2°C pour l'audit classique à moins de 0,1°C. Le problème d'identification du débit de renouvellement d'air semble être dû à un manque de sensibilité de la fonctionnelle à ce paramètre, puisque la réponse thermique est excellente. La variante 2, qui calcule les puissances individuelles à partir de la connaissance de la puissance totale fournie pour le chauffage, améliore également la plupart des résultats. Dans ce cas, le coefficient de transmission des fenêtres ainsi que le débit d'infiltration moyen ne sont pas identifiables. Sur la confrontation modèle-mesures, nous observons que la méthode d'audit réduit l'erreur sur la réponse thermique de la zone 1 puisque celle-ci passe de 2°C en moyenne pour l'audit classique à moins de 1°C. Afin d'évaluer l'incertitude de la méthode, nous engendrons un échantillon de Monte-Carlo de 50 tirages aléatoires suivant les incertitudes classiques dans les bâtiments, et donc dans les audits actuels. De nouveau, les paramètres perturbés par ces incertitudes sont les paramètres que nous identifions dans la méthode d'audit. Chaque tirage aléatoire est utilisé comme initialisation pour notre outil. Nous obtenons ainsi, pour chacune des deux variantes, une famille de paramètres identifiés à partir de différentes initialisations. Cette étude est justifiée car notre méthode de résolution est une descente de gradient, donc *a priori* sensible à l'initialisation. Les résultats de la variante 1 montrent que les propriétés internes

des parois ont été parfaitement identifiées, avec des incertitudes passant de 25% à moins de 0,3%. Les caractéristiques des émetteurs sont également précisées, puisque les incertitudes sont divisées par 2 pour le rendement, par 4 pour le coefficient de couplage avec les zones, et par 10 pour la capacité thermique. L'incertitude sur le coefficient de transmission des fenêtres est divisée par 2 et passe de 11,3% à 6,4%. Comme dans le premier test unitaire de la méthode, seul le débit de renouvellement d'air moyen n'est pas amélioré et reste avec une incertitude de 30%, probablement dû à un manque de sensibilité de la fonctionnelle. Sur la confrontation modèle-mesures, nous observons que notre méthode d'audit réduit fortement l'erreur sur la réponse thermique de la zone 1 puisque celle-ci passe de 2°C pour l'audit classique à moins de 0,2°C avec notre méthode. Les résultats de la variante 2 sur l'échantillon de Monte-Carlo attestent du fait que l'allègement du protocole opératoire engendre une baisse de la précision sur les résultats. Globalement, les erreurs moyennes de la famille des paramètres identifiés sont non nulles, ce qui signifierait que la méthode présente un biais d'estimation. Cela se confirme sur la confrontation modèle-mesures, qui met en évidence que notre méthode d'audit réduit l'erreur sur la réponse thermique de la zone 1, mais cette erreur est signée car sa moyenne n'est pas centrée en 0. En l'état actuel, la variante 2 réduit les incertitudes sur l'état thermique et sur certains paramètres comme les propriétés internes des parois, mais semble introduire une erreur systématique sur d'autres paramètres comme le débit de renouvellement d'air.

Pour alléger le protocole opératoire de la méthode et réduire les coûts de l'opération, nous étudions la robustesse de l'outil face à de fortes incertitudes sur les paramètres à identifier. En pratique, cela revient à réduire la procédure de recueil de données, tout en augmentant l'incertitude sur les valeurs d'initialisation. Nous avons augmenté les incertitudes de l'échantillon de Monte-Carlo pour évaluer le comportement de la méthode pour ces nouvelles initialisations. Les incertitudes sur chacun des paramètres sont d'environ 50%. L'étude s'est concentrée sur la variante 1 de la méthode. Malgré l'utilisation d'un algorithme de descente de gradient, ayant donc la particularité d'être local et de dépendre de l'initialisation, la méthode réduit de nouveau fortement les incertitudes sur les paramètres. Les caractéristiques des parois sont identifiées avec une incertitude inférieure à 1%. Le rendement et le coefficient de couplage convectif des émetteurs sont identifiés avec une incertitude de seulement 5%. L'incertitude du coefficient de transmission des fenêtres est divisée par 4 et passe de 47% à 11%. Cependant, la capacité thermique des émetteurs reste incertaine en passant de 35% à 30% d'incertitude. Seul le débit de renouvellement d'air n'est pas amélioré par la méthode. La comparaison de la réponse des modèles thermiques incertains et calibrés montre que notre méthode réduit fortement l'incertitude sur la réponse thermique. En effet, nous passons d'une erreur de près de 20°C, à seulement 0,5°C. Les bons résultats des propriétés internes des parois et des émetteurs devraient donc permettre d'alléger la procédure de recueil des données pour ces éléments, sans réellement dégrader la précision de l'estimation.

Nous analysons ensuite la robustesse de la variante 1 de la méthode d'audit. Pour cela, nous commençons par introduire de nouvelles quantités, appelées variables d'intérêt, qui permettent d'approfondir les conclusions de l'audit. La première est constituée des consommations minimales intrinsèques, représentant le besoin énergétique minimal du bâti avec un usage standardisé. Cet indicateur se calcule en résolvant un problème d'optimisation linéaire qui cherche les consommations minimales permettant d'atteindre une température de consigne. La seconde variable d'intérêt sert également d'outil d'expert dans l'analyse des résultats. Il s'agit de la décomposition de la réponse du modèle en flux thermiques. Elle permet de faire la part des choses entre les différents postes d'apports et de pertes thermiques. Traditionnellement, les résultats de ce type de calcul peuvent être mis sous la forme d'un diagramme de Sankey. La méthode est confrontée à des études paramétriques, évaluant l'influence des conditions environnementales (saison de l'audit) et du bruit de mesure de l'état thermique sur les résultats de l'audit. Les

variables d'intérêt sont calculées sur les résultats de ces études paramétriques, et permettent de conclure que même si les paramètres sont moins précisément identifiés, la décomposition de flux et les consommations minimales intrinsèques peuvent être correctement reconstruites. Les conclusions de ces études sont que la saison n'a pas d'impact sur la performance des résultats (à condition que les systèmes de chauffage présents s'activent lors de la période de mesure), que la méthode d'audit instrumenté est robuste par rapport au bruit de mesure de l'état thermique, et que les consommations intrinsèques minimales sont très bien identifiées par l'outil puisque les incertitudes sur cette variable d'intérêt passent de 10% à moins de 1%. La méthode est ensuite testée dans un contexte fortement incertain, lorsque tous les paramètres (les paramètres inconnus et ceux supposés connus) sont perturbés par leur incertitude propre. Sans surprise, les estimations de la méthode perdent en précision, avec des biais importants et de fortes incertitudes. Néanmoins, la méthode instrumentée réduit l'incertitude sur l'état thermique des zones, puisque dans ce contexte elle passe d'une erreur de 10°C à une erreur de 5°C.

L'une des difficultés de la méthode d'audit développée est son protocole opératoire, puisqu'elle nécessite la connaissance précise des scénarios d'usage, notamment des apports internes. Par ailleurs, nous avons observé que les variantes 1 et 2 de la méthode n'étaient généralement pas capable, en l'état, d'identifier le débit de renouvellement d'air moyen. Nous proposons une étude exploratoire pour traiter ces deux problématiques. Pour cela, nous modifions légèrement le modèle et choisissons de considérer le renouvellement d'air par un terme source dans la zone. La physique nous indique que ce terme possède une régularité particulière, puisqu'il évolue de manière lisse dans le temps. A l'opposé, les gains internes des appareils électriques et des présences, qui sont eux aussi des sources thermiques dans la zone, sont des fonctions constantes par morceaux, à variations très rapides. Nous développons une méthode de discrimination de sources thermiques ayant la particularité de posséder des dynamiques différentes, l'une lisse et l'autre constante par morceaux. La méthode s'inspire d'un outil de traitement d'images permettant de débruiter des images à fort contraste. Elle s'écrit sous la forme d'un problème inverse d'identification de sources dans la zone à partir de la mesure de la température de celle-ci. La prise en compte du caractère régulier de la première source se fait au niveau du choix de l'espace fonctionnel dans lequel nous la reconstruisons. Pour l'autre source, le caractère discontinu est pris en compte en ajoutant une étape de projection à la fin de chaque itération de la descente de gradient. Dans un premier temps, la méthode est appliquée sur un cas d'étude numérique. Nous montrons l'apport de la méthode en comparant les résultats aux approches classiques dans la thermique du bâtiment. L'étape de projection permet de capturer le profil discontinu, tout en préservant la qualité de la reconstruction du profil lisse. Dans un second temps, nous procédons à une validation expérimentale de la méthode. Celle-ci s'est déroulée en cellule test à l'université de La Rochelle. La cellule est constituée d'une pièce reproduisant des conditions d'usage classiques du bâtiment. Nous y installons des mannequins générant des apports internes dans la zone. Les apports de chaleur issus des mannequins sont contrôlés par un système électrique modulant la puissance qui leur est fournie. Nous mesurons la température de la zone, ainsi que le débit et la température de soufflage de la ventilation. Malgré le fait que les données utilisées soient fortement bruitées, nous montrons que notre méthode donne de bons résultats. Le bruit en entrée est complètement réduit et ne perturbe pas trop les profils reconstruits. Dans cette situation, les résultats obtenus par les approches classiques ne sont pas exploitables.

Le modèle thermique utilisé par la méthode d'audit ne prend pas directement en compte les ponts thermiques et repose sur l'hypothèse que les parois étudiées sont homogènes. Dans la réalité ce n'est cependant pas le cas. Pour pallier ce problème, nous proposons une étude exploratoire analysant la possibilité de reconstruire les propriétés thermiques internes d'un domaine tridimensionnel à partir de mesures de température de surface à la frontière obtenues

par caméra thermique. Nous utilisons un protocole actif consistant à exciter la surface observée par un flux thermique. La méthode se formule à nouveau sous forme d'un problème inverse d'estimation de champs de propriétés internes. Nous analysons la possibilité de localiser et de caractériser un défaut présent au sein d'un domaine d'étude. La méthode est soumise à des études paramétriques sur la nature et la forme du défaut. Nous montrons que la méthode est capable de caractériser précisément un défaut dont les propriétés thermiques sont relativement proches de celles du domaine. Dans le cas contraire, les approches 1D permettent de le faire plus simplement. La méthode trouve cependant ses limites lorsque l'épaisseur du défaut augmente.

### **Organisation du manuscrit**

Nous commençons ce manuscrit par un descriptif des méthodes actuelles d'audits énergétiques au chapitre 1, avec notamment les protocoles opératoires permettant le recueil d'informations sur site. Le chapitre 2 se concentre sur une des étapes de l'audit : la modélisation du bâtiment, généralement soumise à de fortes incertitudes. Il permet d'introduire le modèle support à la méthode d'audit développée. Nous présentons ensuite la procédure d'identification de paramètres dans le chapitre 3, puis nous étudions sa robustesse à travers plusieurs études présentées dans le chapitre 4. La méthode de discrimination de sources thermiques est décrite dans le chapitre 5. Nous présentons enfin l'identification de défauts internes par thermographie infrarouge active dans le chapitre 6.

L'ensemble de ces travaux a été réalisé à IFSTTAR Nantes, au sein de l'équipe METHOM du laboratoire SII du département COSYS, ainsi qu'au LaSIE de l'université de La Rochelle. La thèse a été financée par le projet ANR MEMOIRE, inscrit dans le programme HABISOL. La plupart des travaux présentés ici font partie du programme scientifique du projet.



# Chapitre 1

## Audits énergétiques des bâtiments

Ce chapitre décrit les méthodes actuelles d’audit énergétique dans le bâtiment. Elles se décomposent généralement en plusieurs étapes, allant du relevé de données et d’informations *in situ*, à la modélisation thermique du bâtiment sur des logiciels spécifiques. Les audits se concluent alors par des propositions de scénarios de rénovation. Nous présentons les outils et les protocoles opératoires permettant de relever les données dans le bâtiment. Nous évoquons enfin l’insuffisance de ce relevé de données sur le terrain pour mieux motiver les travaux de la thèse exposés dans les chapitres suivants.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les méthodes d’audit</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Techniques d’instrumentation dans le bâtiment</b>	<b>13</b>
<b>1.3</b>	<b>Insuffisance des données et incertitudes</b>	<b>18</b>

---

Les contextes énergétique et économique nous amènent naturellement à étudier les performances des bâtiments existants, [Pérez-Lombard *et al.*, 2008, Coutance, 2014]. Le Grenelle Environnement a d'ailleurs voté des lois en 2009 et 2010 imposant l'amélioration de la performance du parc des bâtiments existants, *i.e.* la réduction des consommations et des émissions de gaz à effet de serre, et l'amélioration du confort thermique. Ces lois ont été récemment appuyées par le gouvernement, avec la mise en place du plan de rénovation énergétique accélérant la transition vers un parc de bâtiments existants moins énergivore.

La rénovation énergétique est le principal outil pour atteindre les objectifs fixés. Avant de proposer un scénario de réhabilitation pour un cas d'étude, il faut commencer par identifier ses faiblesses énergétiques. C'est le but des diagnostics énergétiques. Étymologiquement, le verbe *diagnostiquer* vient du grec *diagnostikós* et signifie être capable de discerner. Il s'agit ici de discerner les caractéristiques du bâtiment dont l'impact sur les consommations observées est important. La réhabilitation visera alors à améliorer ces paramètres. Ces anomalies peuvent avoir plusieurs origines, comme la détérioration des propriétés de certains matériaux avec le temps, ou l'évolution des technologies, [Le, 1992].

La directive pour la performance énergétique de 2009 définit la *performance énergétique* par la quantité d'énergie effectivement consommée, ou estimée, pour répondre aux différents besoins liés à une utilisation standardisée du bâtiment, [PCE, 2002]. Cette quantité s'exprime par des indicateurs numériques prenant en compte plusieurs caractéristiques concernant le bâti, les installations de production de chaleur et de refroidissement, l'éclairage, la situation géographique, l'environnement local (masques et réflexions solaires), ou encore l'auto-production d'énergie. Les calculs utilisent des modèles numériques prenant en compte la physique du bâtiment, les données climatiques et environnementales, les caractéristiques des équipements, et les scénarios d'occupation.

Les outils de modélisation numérique du bâtiment permettent de prédire rapidement l'évolution temporelle de la température intérieure en phase de conception, et peuvent se traduire directement en indices de confort thermique. Ils prennent également en compte l'exigence de maîtrise des consommations. Toutefois, dans le cas des bâtiments existants, la problématique est différente. Les outils de conception, utilisant des données d'entrée normalisées (météo, usages, etc), sont alimentés avec des données sur les caractéristiques physiques incertaines et deviennent inadaptés [Le, 1992]. Les fortes incertitudes sur leurs données d'entrée les rendent incapables de retrouver les consommations observées de manière fiable [Norford *et al.*, 1994, Bordass *et al.*, 2004, Demanuele *et al.*, 2010, Audenaert *et al.*, 2011]. Ce constat, associées aux potentielles réductions de consommations concernant le parc de bâtiments vieillissants, ont fait considérablement progresser la recherche dans le domaine des audits énergétiques, notamment par le développement de procédures de diagnostic et d'outils informatiques [Le, 1992].

## 1.1 Les méthodes d'audit

Les audits énergétiques visent à caractériser les performances énergétiques des bâtiments. Ils s'obtiennent par différentes méthodes, de complexité et de précision variables allant du simple relevé *in situ* à l'étude exhaustive en plusieurs phases.

Dans son rapport sur les audits énergétiques [ADEME, 2011], l'ADEME<sup>1</sup> décrit les différentes étapes constituant le diagnostic. L'audit est un outil d'aide à la décision, qui analyse en profondeur le bâtiment étudié. Cette étude se déroule en plusieurs phases :

1. Pré-analyse : Prise de connaissance du bâtiment et de ses consommations annuelles, expertises quant aux sources classiques de gains de performances, préparation de la visite.
2. Visite du site : Descriptif détaillé de la géométrie, des différentes composantes du bâti, des équipements thermiques, électriques et aérauliques, ainsi que des scénarios d'usage (occupation, températures de consigne, ouverture des baies et allumage des luminaires). Ce listing se veut également quantitatif, puisqu'il doit prendre en compte le moindre détail permettant de comprendre le fonctionnement thermique.
3. Modélisation du bâtiment : Cette étape de numérisation permet de calculer une série d'indices de performance. Elle utilise les relevés obtenus lors de la visite du site pour paramétrer les équations du modèle thermique, décrites au chapitre 2.
4. Confrontation modèle-mesures : Tout modèle n'étant qu'une représentation de la réalité, cette phase consiste à réduire les éventuels écarts entre les consommations réelles et celles prédites par l'outil. Ce calibrage, subjectif, est fondé sur les expertises du professionnel.
5. Propositions d'amélioration : Il s'agit de la phase finale du travail d'audit énergétique, et sert de conclusion au diagnostic. Les propositions d'amélioration concernent l'étude de différentes approches pour améliorer la performance du bâtiment, pouvant être techniques, comportementales, fonctionnelles ou organisationnelles. Ces dernières portent sur le bâti, les équipements (électriques, thermiques, ...), l'usage, ou encore les énergies renouvelables.

Les deux premières phases sont communes à toute méthode d'audit. Les différentes méthodes utilisées aujourd'hui diffèrent selon l'exhaustivité du relevé terrain et le type de modèle retenu dans la phase de modélisation. La confrontation modèle-mesures consiste, lorsqu'elle est réalisée, à comparer les consommations prédites par rapport à des factures mensuelles ou annuelles, et corriger éventuellement certaines données du modèle.

Par exemple, le diagnostic des performances énergétiques (DPE), issu de la Directive pour la performance énergétique des bâtiments<sup>2</sup> et imposé en France pour les biens immobiliers, se fonde sur la méthode de modélisation 3CL-DPE, [RF, 2008]. Le but étant de donner un indicateur des performances intrinsèques du bâtiment, les calculs utilisent des données conventionnelles, et il n'est pas prévu d'étape de confrontation modèle-mesures proprement dite.

Ces différentes étapes sont en accord avec le protocole international IPMVP<sup>3</sup> publié par EVO, donnant un cadre général pour les méthodes de vérification et de contrôle des performances, [EVO, 2012]. L'aide à la décision se concrétise par une étude des différents scénarios de rénovation, évaluant notamment les prévisions d'investissements, les potentiels de réduction des consommations et le retour sur investissement.

Nous décrivons dans un premier temps les outils de mesure et les protocoles opératoires permettant le recueil des données. La modélisation énergétique fera l'objet d'une étude plus consistante au chapitre 2.

## 1.2 Techniques d'instrumentation dans le bâtiment

La performance énergétique des bâtiments est influencée par de nombreux paramètres physiques. La connaissance de ces derniers s'obtient soit par des relevés, soit par des mesures.

---

1. Agence De l'Environnement et de la Maitrise de l'Énergie

2. Directive 2002/91/CE du Parlement européen et du Conseil, en date du 16 décembre 2002.

3. International Performance Measurement and Verification Protocol



Ces paramètres diffèrent par leur nature (constante, évolution temporelle et/ou spatiale) et par l'effort nécessaire à leur connaissance. Si les amplitudes des gains internes individuels issus des appareils électriques s'obtiennent rapidement, leur scénario d'utilisation demande l'utilisation de systèmes de suivi temporel. Par ailleurs, l'accessibilité des différents paramètres n'est pas assurée. C'est par exemple le cas pour la géométrie et la composition des parois. En effet, si la première s'obtient facilement par un relevé terrain, la caractérisation de la seconde ne peut se faire directement et de manière non intrusive. Ces différents points doivent rentrer en compte dans le choix et le déploiement de l'instrumentation nécessaire à l'audit.

### Géométrie

La géométrie du bâtiment s'obtient en général directement à partir de plans, à condition que ceux-ci soient à jour et disponibles. Elle peut ensuite faire l'objet d'une vérification sur place. En cas d'incomplétude, il faut prévoir un relevé sur site avec des appareils mesurant les distances. En cas d'absence de plan, l'opérateur doit relever la totalité de la géométrie.

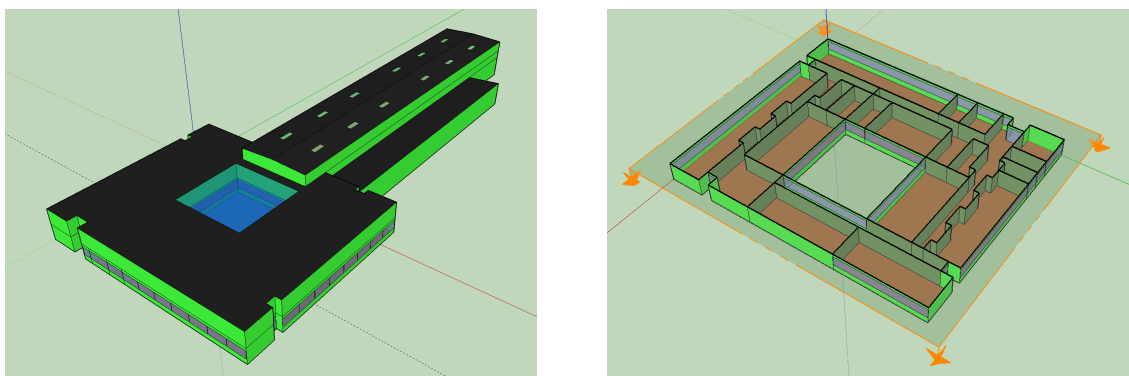


FIGURE 1.1 – Modélisation du bâtiment Darcy de Ifsttar Nantes sous Google SketchUp. Source [Lee, 2014]

Une fois la géométrie relevée, l'opérateur peut créer un modèle géométrique du bâtiment sur un logiciel de CAO <sup>4</sup>, cf. figure 1.1. Notre équipe utilise le standard de fichiers gbXML <sup>5</sup> qui permet la description de la géométrie d'un bâtiment dans un format permettant des échanges entre plusieurs types de logiciels [Roth, 2010].

### État thermique

Le champ de température dans un bâtiment est la grandeur physique la plus directement liée au ressenti de confort, et par là même aux consommations. Nous définissons l'état thermique comme l'ensemble des températures des pièces, des surfaces des parois, et des émetteurs. La mesure de cet état alimentera la procédure d'identification de paramètres présentée au chapitre 3. Les températures sont généralement mesurées par des thermocouples ou par des thermorésistances, mais les technologies, la mise en œuvre et les protocoles opératoires varient selon la nature de la température mesurée.

La température de l'air ambiant est délicate à recueillir. Il faut en effet placer le capteur à un endroit représentatif de la température moyenne, en évitant les perturbations des systèmes

---

4. Conception Assistée par Ordinateur.

5. Les fichiers gbXML utilisent la même structure de balises que les fichiers XML.

et des conditions environnementales, *e.g.* flux solaire.

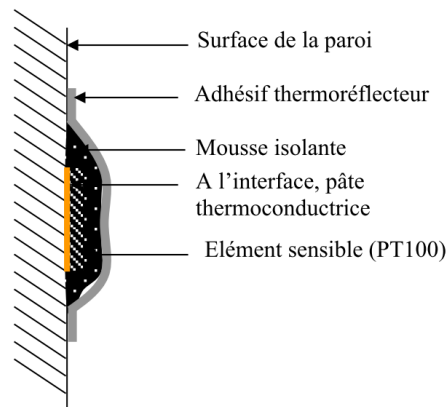


FIGURE 1.2 – Schéma de l'installation d'un capteur de température de surface des parois. Source [Nassiopoulos *et al.*, 2014a].

Les mesures des températures de surface des constituants de l'enveloppe (parois, vitrages, etc) sont courantes mais nécessitent la formation des opérateurs. L'élément sensible doit être complètement isolé des perturbations de l'environnement, sans pour autant fausser la grandeur d'intérêt. Pour cela, l'installation du capteur fait intervenir plusieurs couches de matériaux, à savoir une pâte conductrice contre la paroi, une mousse isolante et enfin un adhésif thermorélecteur, *cf.* figure 1.2. Ici encore, le capteur doit être placé sur une zone représentative de la thermique (centre de la paroi).

La mesure des températures des émetteurs est plus aisée. Il s'agit là encore de capteurs de température de surface, mais les systèmes considérés sont généralement moins exposés aux perturbations. De plus, l'amplitude de la grandeur mesurée est plus importante, donc les erreurs relatives des capteurs sont réduites.

## Consommations

La mesure des consommations se traduit en puissances injectées dans les émetteurs. Celle-ci peut être effectuée globalement, au niveau du compteur, ou de manière individuelle pour chaque émetteur. Le type de capteur varie bien sûr selon le vecteur de l'énergie, fluide ou électrique. Pour les systèmes électriques individuels, nous pouvons utiliser un capteur qui s'insère entre la prise de courant et l'équipement, *cf.* figure 1.3.



FIGURE 1.3 – Photo d'un capteur individuel de puissance appelé pour un système électrique

### Caractéristiques des systèmes et scénarios d'usage

Le recueil des caractéristiques des systèmes concerne les émetteurs, les appareils électriques, et l'éclairage. Cela consiste à relever la puissance thermique fournie par chaque appareil en veille et lors de son utilisation. Sauf pour les émetteurs, les puissances sont ensuite associées à des scénarios d'usage afin de quantifier les gains internes dans chaque pièce.

Si les puissances nominales sont répertoriées en une fois, les scénarios d'utilisation nécessitent des systèmes de suivi dans le temps. Ces derniers peuvent prendre la forme de relevés manuscrits de présence et d'utilisation, de capteurs de puissance à la base des appareils électriques, ou encore de capteurs de luminosité et de présence, *cf.* figure 1.5. On trouve également des capteurs d'ouverture pour les baies, les stores, et les portes, *cf.* figure 1.4.



FIGURE 1.4 – Photo d'un capteur d'ouverture de porte.



FIGURE 1.5 – Photo d'un capteur de présence.

### Données météorologiques

Les sollicitations environnementales ont une forte influence sur la thermique du bâtiment. Elles sont composées de la température ambiante, du rayonnement solaire, du vent et de l'humidité. Ces informations peuvent s'obtenir par le déploiement sur site d'une petite station météo, ou par l'utilisation de données météo issues de différents fournisseurs. Pour cette dernière source d'informations, il convient de rester vigilant par rapport aux incertitudes émanant de la délocalisation de l'appareil de mesure. De plus, l'échantillonnage des données est souvent proposé avec un pas de temps de l'ordre de l'heure.



FIGURE 1.6 – Station météorologique pour audit énergétique. Source Econologie.

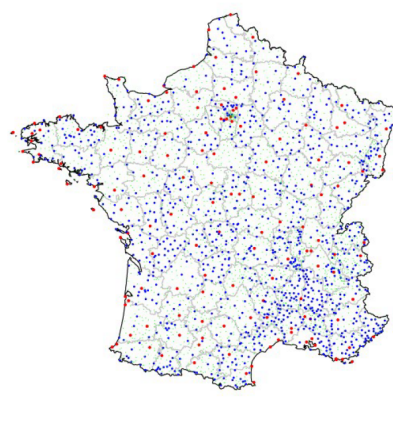


FIGURE 1.7 – Réseau national de stations Météo France. Source Météo France.

## Aéraulique

Les mesures aérauliques concernent les dispositifs de renouvellement d'air ainsi que les infiltrations par le bâti. Les informations sur les débits de renouvellement d'air s'obtiennent soit par une mesure directe en sortie de bouche ou au sein même des conduits à l'aide d'un anémomètre, *cf.* figure 1.8, soit par consultation de la centrale de gestion du circuit de ventilation. Les infiltrations d'air sont plus délicates à quantifier. Elles s'obtiennent généralement par la technique de la porte soufflante<sup>6</sup> pour mesurer l'étanchéité à l'air, *cf.* figure 1.9. Celle-ci consiste à mettre sous pression la pièce étudiée à l'aide d'un ventilateur asservi. Le débit nécessaire au maintien de la sous-pression dans la pièce équivaut au débit d'infiltration. Ce test est relativement complexe à mettre en œuvre et nécessite du matériel approprié.



FIGURE 1.8 – Anémomètre à hélice. Crédits Testo.



FIGURE 1.9 – Test de la porte soufflante pour mesurer le débit d'infiltration

## Ponts thermiques

Les ponts thermiques sont généralement localisés à l'aide d'une caméra thermique, *cf.* figure 1.10. Le relevé est principalement visuel, et donc qualitatif. Il permet de proposer une opération de comblement des défauts d'exécution, ou de rénovation de l'isolation.

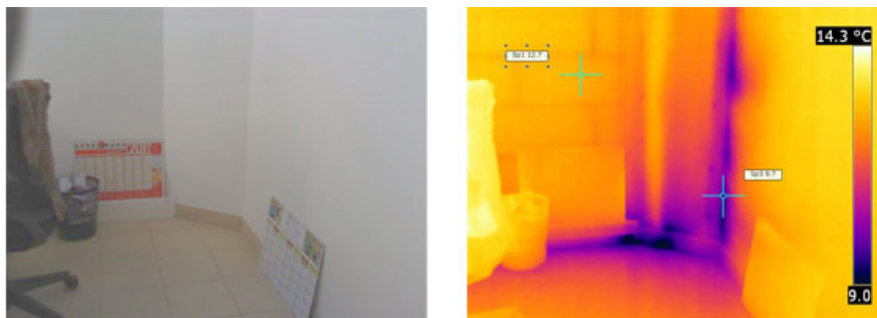


FIGURE 1.10 – Localisation de ponts thermiques par caméra thermique. Source Centre Technique de la Thermographie Appliquée au Bâtiment (CTTA).

---

6. En anglais, *blower-door*.

### 1.3 Insuffisance des données et incertitudes

Nous avons décrit dans la section précédente un ensemble de moyens techniques permettant de mesurer différentes caractéristiques du bâtiment, mais sans évoquer un aspect primordial qu'est le coût. Dans le domaine du bâtiment il est pourtant inenvisageable de déployer l'ensemble de ces outils de mesure. Le recueil des données préalable à toute modélisation se fait sous la contrainte forte d'un protocole opératoire qui doit présenter le plus faible coût possible. Le diagnostic et la modélisation pour concevoir les travaux se fait dans un contexte d'insuffisance de données et de fortes incertitudes.

Les outils réglementaires disponibles permettent de donner une méthodologie concrète et précise aux professionnels du diagnostic énergétique. Malheureusement, ils négligent souvent cette caractéristique fondamentale et inhérente à toute auscultation qu'est l'insuffisance et l'incertitude des données recueillies, [Le, 1992]. Les outils actuels ne sont alors plus pertinents pour la vision réelle et incertaine à laquelle est confronté le diagnostiqueur. En effet, les modèles mathématiques sous-jacents aux outils de simulation nécessitent la connaissance précise des paramètres physiques du bâtiment. Les outils classiques sont bien adaptés à la phase de conception du bâtiment, lorsque les paramètres physiques sont la donnée du problème et que l'on cherche à calculer les températures ambiantes, ou le confort thermique, [Heo *et al.*, 2012]. Cependant, dans le cadre des audits énergétiques, les paramètres sont mal connus, ou entachés d'une forte incertitude, [Macdonald *et al.*, 1999, Macdonald et Clarke, 2007, Clarke et Yaneske, 2009], notamment à cause des variations d'exécution des ouvrages. Qui plus est, les sources d'incertitudes sont nombreuses, *e.g.* les erreurs de mesures (liées aux outils ou à leur utilisation), les imprécisions de recueils visuels, l'accès impossible, ou l'absence de données actualisées.

Néanmoins, certaines méthodes d'audit prennent en considération cette méconnaissance des paramètres physiques. Les agences de conseil en performance énergétique proposent de traiter ce problème dans une phase de calibrage de modèle, *cf.* le quatrième point du guide de l'ADEME dans la section 1.1 et [Reddy, 2005]. La problématique principale apparaît dans le manque de détails sur ce calibrage, nécessitant plusieurs expertises dans différents domaines, [Raftery *et al.*, 2011]. Ce flou vient perturber les résultats de l'audit en apportant de la subjectivité, et aboutit ainsi à de fortes disparités entre les consommations prédites et facturées, [Norford *et al.*, 1994, Bordass *et al.*, 2004, Demanuele *et al.*, 2010, Audenaert *et al.*, 2011].

Des travaux proposent des solutions pour réduire ces fameux écarts entre consommations prédites et facturées. Certaines méthodes utilisent notamment le monitoring long terme des systèmes et l'ajustement des scénarios d'occupation, [Piette *et al.*, 2001, Menezes *et al.*, 2012]. Elles ne prennent toutefois pas suffisamment en compte les incertitudes liées aux paramètres physiques intrinsèques du bâti, principalement dans le cas des bâtiments existants. En effet, la complexité de l'objet d'étude implique généralement une incomplétude des paramètres recueillis, [Le, 1992]. Dans ce contexte, les conclusions des outils d'aide à la décision, *i.e.* les scénarios de rénovation des audits énergétiques, se retrouvent entachées d'erreur, et par conséquent les gains en termes de consommations, et de fait les retours sur investissement, s'avèrent incertains [Zhu, 2006].

Ces différents aspects nous amènent à regarder le problème d'un autre point de vue et à faire appel à la théorie des problèmes inverses, afin de *calculer* indirectement certains paramètres mal connus. C'est ce que nous voyons dans les chapitres suivants. La première étape permettant l'utilisation des problèmes inverses consiste à choisir un modèle thermique, support à l'identification de paramètres.

## Chapitre 2

# Modélisation thermique

Ce chapitre introduit les modèles numériques qui sont utilisés pour modéliser le comportement thermique du bâtiment. Ces modèles servent de support aux procédures d'identification par méthodes inverses. Le point de départ est l'équation de la chaleur écrite sous forme d'équation aux dérivées partielles. Nous présentons ensuite un cadre permettant d'obtenir de manière uniformisée les différentes formes de modélisation connues dans la littérature (modèles CFD, multizones, zonaux, etc) à partir de cette équation de la chaleur. Les différents types de modèles sont obtenus en adoptant les niveaux et les types de discrétisation. Pour le modèle multizone nodal, qui sera retenu par la suite, nous décrivons dans le détail les différents phénomènes physiques intervenant dans le bilan thermique. L'application sur un cas d'étude nous permet de calculer les paramètres les plus influents, qui constitueront le jeu d'inconnues du problème d'identification au chapitre 3.

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Équation de la chaleur</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Discrétisations des zones</b>	<b>21</b>
2.2.1	Modélisation CFD	21
2.2.2	Modélisation multizone nodale	23
2.2.3	Modélisation multizone zonale	25
2.2.4	Modélisation monozone	26
2.2.5	D'autres choix de discrétisations	27
<b>2.3</b>	<b>Modélisation de l'enveloppe</b>	<b>27</b>
2.3.1	Propriétés internes	28
2.3.2	Transferts thermiques aux limites	30
2.3.3	Cas particulier des vitrages	32
<b>2.4</b>	<b>Apports internes dans les zones</b>	<b>33</b>
<b>2.5</b>	<b>Aéraulique</b>	<b>34</b>
<b>2.6</b>	<b>Modèle thermique de la méthode d'audit</b>	<b>35</b>
<b>2.7</b>	<b>Application et influence des paramètres</b>	<b>40</b>
2.7.1	Description du modèle sur le cas d'étude	40
2.7.2	Influence des incertitudes et choix des inconnues	42
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>

Les bâtiments sont des objets très hétérogènes, à géométries relativement complexes, soumis à des sollicitations diverses, [Hagentoft, 2001]. Dans ce contexte, la modélisation est un outil pratique et largement utilisé, [Hien *et al.*, 2000, Hong *et al.*, 2000, Citherlet *et al.*, 2001]. Dans ce qui suit, nous dérivons les modélisations existantes pour bâtiment à partir de l'équation de la chaleur, puis nous introduisons le modèle utilisé dans notre méthode d'audit.

## 2.1 Équation de la chaleur

La conduction thermique au sein d'un domaine  $\Omega$  est décrite par une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique, [Carslaw et Jaeger, 1959, Fourier, 1988] :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) = \psi & (x, t) \in \Omega \times [0; t_a] \\ \nabla u \cdot n = \phi & (x, t) \in \partial\Omega \times [0; t_a] \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $t_a$  un horizon temporel,  $\rho c$  la capacité thermique,  $k$  la conductivité thermique,  $\psi$  une source interne,  $\phi$  un flux de chaleur surfacique,  $n$  la normale sortante sur la frontière  $\partial\Omega$ , et  $u_0$  l'état thermique initial du domaine.

Pour  $(\rho c, k) \in L^\infty(\Omega)^2$ ,  $\psi \in L^2((0; t_a), L^2(\Omega))$ ,  $\phi \in L^2(\partial\Omega)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , nous savons que l'équation (2.1) possède une unique solution  $u \in C^0([0; t_a], L^2(\Omega)) \cup L^2((0; t_a), H^1(\Omega))$ , cf. e.g. [Allaire, 2005]. La formulation variationnelle de (2.1) s'écrit,  $\forall v \in V = H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} v + \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \psi v + \int_{\partial\Omega} \phi v \quad (2.2)$$

La dérivée partielle en temps de l'équation (2.2) se comprend au sens faible. Dans le cas général, la résolution de (2.2) s'effectue numériquement en introduisant un sous-espace  $V^h \subset V$  de dimension finie, puis en projetant l'inconnue  $u$  sur une base de  $V^h$ .

Nous illustrons les choix possibles sur un cas d'étude simple constitué d'une unique pièce, cf. figure 2.1. Le bâtiment est représenté par le domaine  $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_z$ . L'interface entre les deux sous-domaines  $\Omega_p$  et  $\Omega_z$  est notée  $\Gamma = \partial\Omega_z$ , et la frontière du domaine  $\partial\Omega = \partial\Omega_p \setminus \Gamma_z$ .

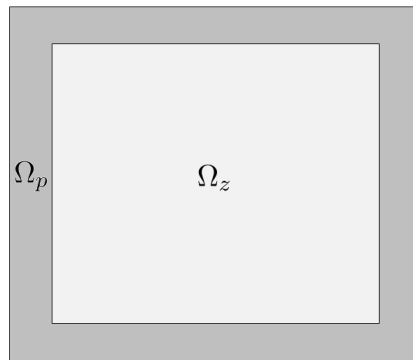


FIGURE 2.1 – Géométrie étudiée  $\Omega$ , constituée d'une pièce  $\Omega_z$  entourée par une paroi  $\Omega_p$

Changeons maintenant de physique, et considérons une équation par domaine avec des conditions de transmission de type Robin à l'interface  $\Gamma$  entre les domaines [Boyer et Hubert, 2014], qui traduisent l'existence d'une couche limite de faible épaisseur autour de  $\Gamma$  où se



développent les phénomènes de convection et de rayonnement. Nous trouvons :

$$\begin{cases} \rho c_z \frac{\partial u_z}{\partial t} - \nabla \cdot (k_z \nabla u_z) = \psi & (x, t) \in \Omega_z \times [0; t_a] \\ k_z \nabla u_z \cdot n_z = h(u_p - u_z) & (x, t) \in \Gamma \times [0; t_a] \\ u_z(x, 0) = u_z^0(x) & x \in \Omega_z \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} - \nabla \cdot (k_p \nabla u_p) = 0 & (x, t) \in \Omega_p \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = h(u_z - u_p) & (x, t) \in \Gamma \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = \phi & (x, t) \in \partial\Omega \times [0; t_a] \\ u_p(x, 0) = u_p^0(x) & x \in \Omega_p \end{cases}$$

avec  $\text{supp}(\psi) \subseteq \Omega_z$ . De manière alternative, la formulation (2.1) est équivalente à la formulation (2.3) lorsque  $h \rightarrow \infty$ , et donc pour  $u_p = u_z$  et  $\nabla u_p \cdot n_p + \nabla u_z \cdot n_z = 0$  sur  $\Gamma$ .

Introduisons l'espace suivant :

$$W = \{(v_p, v_z), v_p \in H^1(\Omega_p), v_z \in H^1(\Omega_z)\} \quad (2.4)$$

La formulation variationnelle de (2.3) s'écrit,  $\forall (v_p, v_z) \in W$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} v_p + \int_{\Omega_p} k_p \nabla u_p \cdot \nabla v_p + \int_{\Omega_z} \rho c_z \frac{\partial u_z}{\partial t} v_z + \int_{\Omega_z} k_z \nabla u_z \cdot \nabla v_z \\ + \int_{\Gamma} h(u_p - u_z)(v_p - v_z) = \int_{\Omega_z} \psi v_z + \int_{\partial\Omega} \phi v_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il ne reste plus qu'à choisir un sous-espace de  $W$ , de dimension finie, pour calculer la solution approchée du modèle thermique (2.3).

Notez que l'équation (2.5) correspond à une approximation de (2.2) d'usage courant en modélisation numérique (méthode de Courant). La suite de solutions de (2.5), paramétrée par  $h$ , converge vers la solution de (2.2) lorsque  $h \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Discrétisations des zones

La plupart des outils de simulation utilisent des modèles dont la finesse de discrétisation spatiale varie, [Clarke, 2001]. La prise en compte des déplacements de masses d'air et de champs de température est un sujet délicat dans le bâtiment. Les phénomènes intervenant dans les sources de ces mouvements sont nombreux et hétéroclites. Cela a donné naissance à plusieurs niveaux de détails dans la discrétisation des équations, [Smith-Schneider *et al.*, 1995, Mora, 2003, Sempey, 2007]. Ces hypothèses de modélisation ont permis le développement de nombreux outils de simulation thermique du bâtiment, [BBD, 2013]. Nous présentons les hypothèses des principales discrétisations, à savoir la monozone, les multizone nodal et zonal, et la CFD<sup>1</sup>, voir figure 2.2. Nous montrons également que ces différentes modélisations ne sont en réalité que des discrétisations différentes d'un même modèle numérique.

Gardons à l'esprit qu'aucune discrétisation n'est parfaite, mais chacune d'entre-elles possède son utilité propre. Le choix dépend toujours de l'objectif de l'étude, [Boyer *et al.*, 1998].

1. Computational Fluid Dynamics. *N.B.* ce terme est impropre ici.



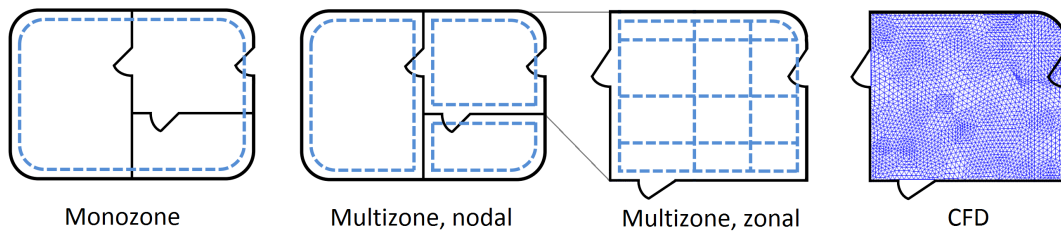


FIGURE 2.2 – Les différentes finesses de discrétisation spatiale d’un bâtiment, de la plus grossière (à gauche) à la plus fine (à droite). Schéma inspiré de [César, 2014].

### 2.2.1 Modélisation CFD

La modélisation de type *CFD* consiste à discrétiser finement le domaine étudié, voir figure 2.3. Le volume est alors approché par une triangulation de l’espace.

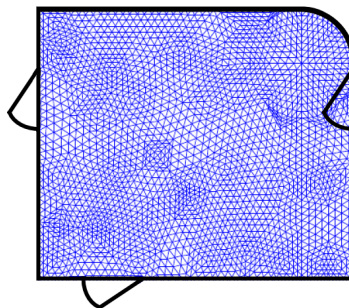


FIGURE 2.3 – Illustration de la discrétisation CFD

Dans ce contexte, nous introduisons des triangulations  $\mathcal{T}_p$  et  $\mathcal{T}_z$  de la parois et de la zone, et considérons un sous-espace  $W^h \subset W$  de dimension finie. Si nous souhaitons une approximation  $P^1$ , nous choisirons un espace de la forme :

$$W^h = \{(v_p^h, v_z^h) / v_p^h \in P_{pm}^1(\mathcal{T}_p), v_z^h \in P_{pm}^1(\mathcal{T}_z)\} \quad (2.6)$$

avec  $P_{pm}^1$  l’espace des fonctions continues linéaires par morceaux (sur chaque élément). Ce choix nous permet de calculer directement le champ thermique dans le bâtiment.

Cette approche est la plus proche de la réalité, dans le sens où il s’agit de la discrétisation utilisée dans le bâtiment qui minimise l’erreur  $\|u - u^h\|$ . En appliquant cette discrétisation à la géométrie présentée en figure 2.1, nous obtenons le champ thermique représenté sur la figure 2.4.

Les modèles CFD de discrétisation des zones utilisent également des équations aérauliques provenant de la mécanique des fluides, comme l’équation de Navier-Stokes ou ses dérivées [César, 2014]. Le couplage thermo-aéraulique sur ce type de discrétisation est assez délicat à mettre en œuvre et augmente la complexité de la résolution du système [Hensen, 1999]. Ces modèles sont adaptés aux cas d’étude relativement petits, *i.e.* à l’échelle de quelques pièces seulement [Bartak *et al.*, 2002]. Ils ne sont que rarement appliqués pour un bâtiment entier, à cause des temps de calcul importants sur des petites machines [Bellivier, 2004].

Pour réduire les temps de calcul, plusieurs voies ont été explorées. Citons par exemple l’utilisation itérative d’un modèle CFD et d’un modèle multizone [Zhai *et al.*, 2002, Zhai et Chen, 2003], ou encore des techniques de réduction de modèle [Druon, 2006].

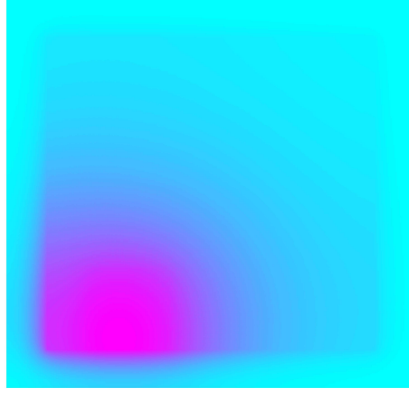


FIGURE 2.4 – Illustration de la discrétisation CFD sur une pièce pour une source  $\psi$  localisée en bas à gauche dans  $\Omega_z$  et une condition de Neumann homogène  $\phi = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ .

### 2.2.2 Modélisation multizone nodale

Une autre discrétisation possible consiste à considérer que la température des zones est homogène en espace. Cela se traduit simplement sur notre géométrie d'étude par l'utilisation du sous-espace semi-discrétisé suivant :

$$W^{h,0} = \{v_p \in H^1(\Omega_p), v_z^h \in \mathbb{R}\} \quad (2.7)$$

qui consiste à choisir une fonction test pour les parois dans  $H^1(\Omega_p)$ , et un scalaire pour les zones. C'est équivalent à ne garder que le premier mode de Neumann de la température de la zone.

Nous trouvons alors que (2.5) se réécrit,  $\forall (v_p, v_z^h) \in W^{h,0}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_p} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} v_p + \int_{\Omega_p} k_p \nabla u_p \cdot \nabla v_p \\ & + \int_{\Omega_z} \rho c_z \frac{du_z^h}{dt} v_z^h + \int_{\Gamma} h(u_p - u_z^h)(v_p - v_z^h) = \int_{\Omega_z} \psi v_z^h + \int_{\partial\Omega} \phi v_p \end{aligned} \quad (2.8)$$

Choisissons à présent une fonction test particulière  $v_z^h = 0$  ; de (2.8) nous obtenons :

$$\int_{\Omega_p} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} v_p + \int_{\Omega_p} k_p \nabla u_p \cdot \nabla v_p + \int_{\Gamma} h(u_p - u_z^h) v_p = \int_{\partial\Omega} \phi v_p \quad (2.9)$$

Ceci étant vrai  $\forall v_p \in H^1(\Omega_p)$ , nous retrouvons bien, après intégration par parties, l'EDP dans les parois :

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} - \nabla \cdot (k_p \nabla u_p) = 0 & (x, t) \in \Omega_p \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = h(u_z^h - u_p) & (x, t) \in \Gamma \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = \phi & (x, t) \in \partial\Omega \times [0; t_a] \\ u_p(x, 0) = u_p^0(x) & x \in \Omega_p \end{cases} \quad (2.10)$$

Prenons maintenant une fonction test particulière  $v_p = 0$  dans (2.8), nous obtenons :

$$\int_{\Omega_z} \rho c_z \frac{du_z^h}{dt} v_z^h = \int_{\Gamma} h(u_p - u_z^h) v_z^h + \int_{\Omega_z} \psi v_z^h \quad (2.11)$$

Ceci étant vrai  $\forall v_z^h \in \mathbb{R}$ , on retrouve bien l'EDO dans les zones :

$$\begin{cases} |\Omega_z| \bar{\rho c}_z \frac{du_z^h}{dt} = |\Gamma| h(\bar{u}_p - u_z^h) + |\Omega_z| \bar{\psi} \\ u_z^h(0) = u_z^{h0} \end{cases} \quad (2.12)$$

avec  $\bar{\rho c}_z$  la moyenne de  $\rho c_z$  dans la zone,  $\bar{\psi}$  la moyenne de  $\psi$  dans la zone, et  $\bar{u}_p$  la moyenne de  $u_p$  sur l'interface  $\Gamma$ .

Nous venons ainsi de faire apparaître le modèle multizone nodal (2.13) comme une discrétisation particulière de l'équation de la chaleur.

$$\begin{cases} \begin{cases} |\Omega_z| \bar{\rho c}_z \frac{du_z^h}{dt} = |\Gamma| h(\bar{u}_p - u_z^h) + |\Omega_z| \bar{\psi}, & t \in [0; t_a] \\ u_z^h(0) = u_z^{h0} \end{cases} \\ \begin{cases} \rho c_p \frac{\partial u_p}{\partial t} - \nabla \cdot (k_p \nabla u_p) = 0, & (x, t) \in \Omega_p \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = h(u_z^h - u_p) & (x, t) \in \Gamma \times [0; t_a] \\ k_p \nabla u_p \cdot n_p = \phi & (x, t) \in \partial\Omega \times [0; t_a] \\ u_p(x, 0) = u_p^0(x) & x \in \Omega_p \end{cases} \end{cases} \quad (2.13)$$

Un code standard aux éléments finis suffit ainsi à implanter le modèle (2.13), et nous pouvons avoir accès à toute la puissance et les connaissances de ces outils. Plus besoin d'un mailleur spécifique du bâtiment.

Pour calculer une solution approchée du modèle (2.13), il suffit d'introduire une triangulation  $\mathcal{T}_p$  sur  $\Omega_p$ . Si l'on souhaite utiliser une approximation  $P^1$ , on se placera dans l'espace discrétisé :

$$W^h = \{v_p^h \in P_{pm}^1(\mathcal{T}_p), v_z^h \in \mathbb{R}\} \quad (2.14)$$

Une fois les conditions initiales choisies, ici identiquement nulles, nous obtenons une répartition de la température semblable à 2.5.

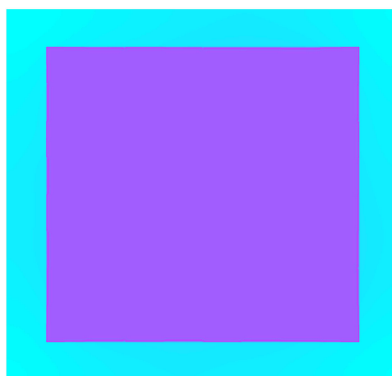


FIGURE 2.5 – Illustration de la discrétisation multizone nodale sur une pièce pour une source  $\psi$  uniforme dans  $\Omega_z$  et une condition de Neumann homogène  $\phi = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ .

La modélisation multizone nodale est donc une discrétisation particulière de l'équation de la chaleur dans laquelle nous supposons que l'air ambiant au sein d'une zone thermique<sup>2</sup> est

2. Classiquement, une pièce fermée.

homogène en température, [Boyer *et al.*, 1996]. Ce niveau de détail permet de prendre en compte les caractéristiques de chaque zone, et les échanges de chaleur interzones sont alors modélisables, voir figure 2.6.

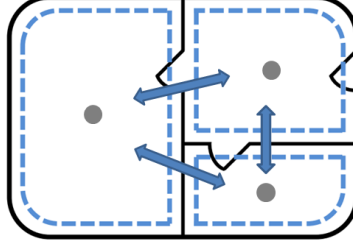


FIGURE 2.6 – Illustration de la discrétisation multizone nodale

Le modèle repose sur des bilans d'échanges thermiques au sein de la zone, [Boland, 1997, Wetter, 2006]. Les équations du modèle font intervenir les couplages entre les zones et les parois, les conditions limites environnementales, les gains internes et les apports des systèmes.

Cette discrétisation est notamment utilisée dans le logiciel de simulation thermique TRN-SYS, [Klein *et al.*, 1975]. De nombreuses études sont basées sur cette modélisation, [Andersen *et al.*, 2000, Antonopoulos et Koronaki, 2000, Bolland, 2002, Antonopoulos *et al.*, 2010]. Elle est également bien adaptée pour développer les supports des régulateurs de température [Bisgambiglia *et al.*, 1997].

Le modèle multizone est relativement populaire puisqu'il est facile à mettre en place, et que les paramètres apparaissant dans les équations ont un sens physique<sup>3</sup>, [Desta *et al.*, 2005]. Il n'est cependant pas capable de décrire les phénomènes apparaissant au sein même du volume, comme la stratification thermique, [Etheridge, 2011].

### 2.2.3 Modélisation multizone zonale

Avec le formalisme introduit, nous pouvons également introduire une discrétisation *intermédiaire* entre les discrétisations CFD et zonale. En utilisant des considérations physiques sur les transferts thermiques au sein de la zone  $\Omega_z$ , nous pouvons procéder comme précédemment à une série de découpages de la zone, afin d'obtenir une décomposition en sous-zones  $\Omega_z^i$ . L'espace correspondant s'écrit :

$$W = \{(v_p, v_z), v_p \in H^1(\Omega_p), \forall i \ v_z^i \in H^1(\Omega_z^i), \Omega_z = \cup_i \Omega_z^i\} \quad (2.15)$$

avec  $v_z^i$  le champ de température dans le domaine  $\Omega_z^i$ . En utilisant de nouveau une approximation des champs  $v_z^i$  par leur valeur moyenne  $v_z^{ih}$  dans les sous-domaines  $\Omega_z^i$ , nous obtenons un espace semi-discrétisé :

$$W^{h,0} = \{v_p \in H^1(\Omega_p), v_z^h = (v_z^{ih})_i \in \mathbb{R}^N\} \quad (2.16)$$

avec  $N$  le nombre de sous-domaines. Cela nous permet de retrouver la modélisation *multizone zonale*, cf. figure 2.7.

La discrétisation zonale permet de calculer rapidement la répartition de chaleur au sein de la pièce. Elle consiste à découper le volume de la zone en sous-volumes couplés, [Inard *et al.*, 1996, Wurtz *et al.*, 1999, Bellivier, 2004], voir figure 2.8. Cette modélisation est également appelée *intermédiaire*, puisqu'elle constitue un compromis entre la finesse de discrétisation spatiale du type CFD et la rapidité de résolution des multizones nodaux.

3. Les paramètres équivalents apparaissant dans le modèle monozone peuvent être plus abstraits.



FIGURE 2.7 – Illustration de la discrétisation multizone zonale sur une pièce pour une source  $\psi$  uniforme dans chaque sous-domaine  $\Omega_z^i$  et une condition de Neumann homogène  $\phi = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ .

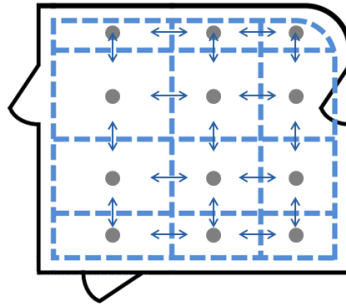


FIGURE 2.8 – Illustration de la discrétisation multizone zonale

L'emplacement et la taille des sous-volumes doivent être choisis en fonction de la configuration de la zone étudiée et des phénomènes à mettre en évidence, [Bouia et Dalicieux, 1991]. Une fois cette étape effectuée, les équations sont issues de bilans de flux dans chaque maille, [Musy *et al.*, 2001, Riederer *et al.*, 2002, Ren et Stewart, 2003].

Dans le contexte contraignant de réduction des consommations, de nouvelles exigences en terme de confort thermique se sont développées, [Le, 1992]. Cette notion de confort nécessite des connaissances fines quant aux mouvements de chaleur et de masses d'air dans la pièce, [Prek, 2006, Wurtz *et al.*, 2006]. La modélisation multizone zonale permet d'apporter des réponses approchées à cette problématique. L'avantage principal de cet outil est qu'il est capable de calculer rapidement une approximation des mouvements d'air au sein de la pièce. Il manque cependant de souplesse dans son utilisation, notamment pour les conditions limites des mailles, [Bellivier, 2004]. De plus, il n'est pas capable de représenter finement les écoulements dans la pièce, comme pour l'étude des techniques de ventilation, [Mora, 2003].

#### 2.2.4 Modélisation monozone

Les premiers outils de simulation thermique ayant vu le jour considèrent le champ de température interne du bâtiment complètement homogène. Cette discrétisation *monozone* ne représente l'objet d'étude que par une unique maille<sup>4</sup>, voir figure 2.9. Techniquement, cela revient à appliquer la discrétisation multizone nodale 2.7 non plus aux pièces, mais au bâtiment tout entier.

4. Maille au sens des éléments finis, [Lucquin, 2004]

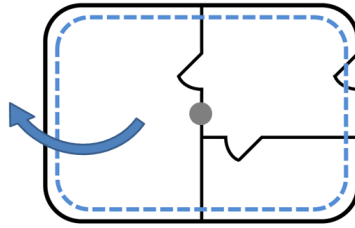


FIGURE 2.9 – Illustration de la discrétisation monozone

Ces outils ne prennent pas en compte les éléments du bâti ou les équipements de manière individuelle, mais globalement. Ces logiciels sont particulièrement adaptés aux bilans d'énergie sur de longues périodes, puisque cela permet de compenser les erreurs de modélisation, [Bauer et Scartezzini, 1998]. Les équations constituant ces modèles prennent la forme de bilan de flux à l'échelle du bâtiment ou de réduction de modèles de transferts thermiques, [Wu et Sun, 2012]. Les expressions des flux font intervenir des paramètres équivalents et des paramètres liés au besoin d'énergie du bâtiment, [Madsen et Holst, 1995, Jebaraj et Iniyan, 2006, Zhao et Magoulès, 2012]. Parmi les logiciels existants, nous pouvons citer DOE-2 [Birdsall *et al.*, 1990] et BLAST [Hittle, 1979]. Le modèle TH-CE de la réglementation thermique RT-2005 est également monozone, [CSTB, 2005].

De nombreuses méthodes utilisent ce formalisme pour calculer des besoins de chauffage ou de refroidissement, ou évaluer les performances du bâtiment. Elles sont souvent appelées méthodes de signature énergétique, [Jebaraj et Iniyan, 2006]. Les paramètres équivalents utilisés par ces méthodes peuvent être, par exemple, les indices de charge thermique et de disposition d'énergie [Botsaris et Prebezanos, 2004], les schémas journaliers de consommation [Räsänen *et al.*, 1995], les coefficients de pertes (ou de gains) thermique et énergétique [Bauer et Scartezzini, 1998, Olofsson et Andersson, 2002, Sjögren *et al.*, 2007, Caldera *et al.*, 2008, Catalina *et al.*, 2008, Andersson *et al.*, 2011, Olofsson et Mahlia, 2012], ou encore le coefficient global de transfert thermique [Chow et Yu, 2000].

Ces outils peuvent être utilisés pour des diagnostics simplifiés, [PBD, 2013], mais raisonnent sur des paramètres globaux équivalents et ne sont donc pas capables de décrire les transferts de chaleur au sein même du bâtiment.

### 2.2.5 D'autres choix de discrétisations

Les choix de l'espace semi-discrétisé dans la zone  $W^{h,0}$  introduits précédemment <sup>5</sup> utilisent tous une approximation par valeur moyenne dans les domaines et les sous-domaines des zones. Cette hypothèse est très forte et engendre une erreur de modélisation. Le formalisme utilisé permet simplement d'adopter des sous-espaces différents, en s'inspirant de la physique des phénomènes modélisés. Par exemple utiliser plusieurs modes du laplacien, ou encore des fonctions linéaires représentant des gradients thermiques. Cela apporterait de la souplesse dans la modélisation, et pourrait même éventuellement améliorer l'identification de paramètres décrite en chapitre 3.

## 2.3 Modélisation de l'enveloppe

Les transferts thermiques dans l'enveloppe sont modélisés par l'équation de la chaleur, cf. équation (2.1). La composition interne des surfaces définit un système 3D multicouche.

5. et représentatifs des modèles thermiques actuels.

La profondeur étant relativement faible par rapport à la hauteur et la largeur, l'utilisation de l'hypothèse que les transferts thermiques au sein des parois sont unidirectionnels, dans le sens de la profondeur, est justifiée, [Hagentoft, 2001].

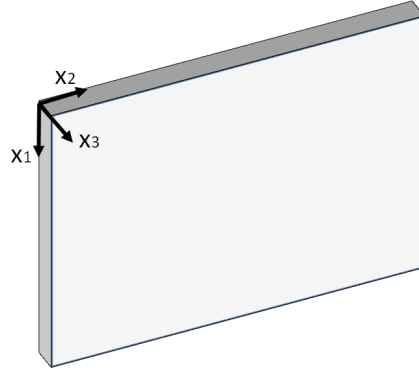


FIGURE 2.10 – Paroi  $\Omega$  et système de coordonnées locales

Soit  $\theta$  la température au sein d'une paroi  $\Omega = [0; L] \times [0; L] \times [0; l]$  avec  $l \ll L$ , cf. figure 2.10. La diffusion dans la paroi, solution de l'équation de Laplace, s'écrit :

$$\Delta\theta = 0 \iff \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} = 0, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (2.17)$$

Maintenant, adimensionnons les longueurs :

$$\tilde{x}_1 = x_1/L, \quad \tilde{x}_2 = x_2/L, \quad \tilde{x}_3 = x_3/L = x_3/l \times l/L \quad (2.18)$$

En posant  $\epsilon = l/L$ , l'équation (2.17) se réécrit :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial \tilde{x}_2^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial \tilde{x}_3^2} = 0, \quad \forall (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in [0; 1]^3 \quad (2.19)$$

Ce problème de perturbation singulière [Lions, 1973] conduit à :

$$\frac{\partial\theta}{\partial \tilde{x}_1}, \frac{\partial\theta}{\partial \tilde{x}_2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (2.20)$$

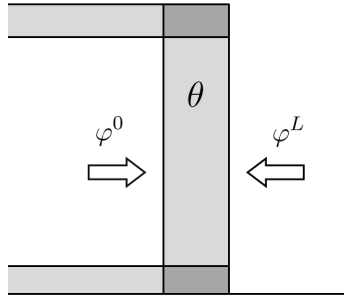
et donc à l'uniformité thermique dans le plan de la paroi.

Nous choisissons d'utiliser cette hypothèse 1D en première approximation, nous reviendrons dessus au chapitre 6 en proposant une approche permettant d'identifier des défauts d'exécution de l'enveloppe.

Soit  $\Omega = [0, L]$  le domaine définissant la profondeur d'une paroi, et  $\theta(x, t)$  le champ de température interne au point  $x \in \Omega$  et au temps  $t \in [0; t_a]$ . L'équation de la chaleur (2.21), modélisant les transferts thermiques, est une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique 1D traduisant le bilan des flux, [Carslaw et Jaeger, 1959, Özisik, 1993]. Les paramètres  $\rho c$  et  $k$  sont la capacité et la conductivité thermiques du domaine, respectivement. Les flux apparaissant dans les conditions aux limites de l'équation de la chaleur (2.21) sont constitués de plusieurs composantes, modélisant les échanges convectifs, radiatifs, ainsi que les flux solaires.

### 2.3.1 Propriétés internes

Comme l'illustre la figure 2.12, Les parois sont en général constituées d'un assemblage de couches de matériaux différents, cf. figure 2.12. Nous notons  $\Omega_i$  le sous-domaine d'épaisseur  $e_i$ ,



$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 & x \in \Omega, t \in [0, t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \varphi^0 & t \in [0, t_a] \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = \varphi^L & t \in [0, t_a] \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

FIGURE 2.11 – Illustration du transfert thermique unidirectionnel au sein d'une paroi, avec flux aux limites

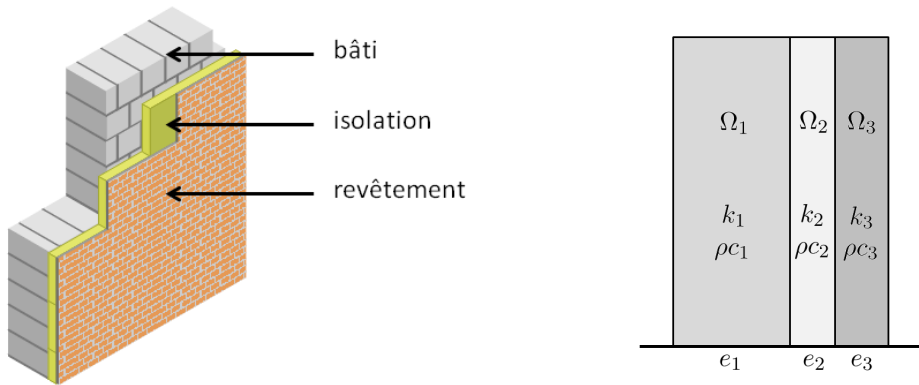


FIGURE 2.12 – Schéma et coupe d'une paroi multicouche. Crédit schéma de gauche : J. Flémal - Architecture et Climat - Faculté d'architecture, d'ingénierie architecturale, d'urbanisme (LOCI) – Université catholique de Louvain (Belgique).

de capacité  $\rho c_i$  et de conductivité thermique  $k_i$ . Dans ce contexte, les paramètres du modèle (2.21) sont des fonctions constantes par morceaux, et l'équation est bien définie puisque ce type de fonctions appartient bien à l'espace  $L^\infty(\Omega)$ , [Raviart et Thomas, 1998].

*Remarque.* Pour des paramètres quelconques, le modèle (2.21) équivaut à considérer une EDP dans chaque couche, avec des paramètres internes constants et des conditions d'égalité des flux normaux<sup>6</sup> et des températures aux interfaces entre couches, [Antonopoulos et Koronaki, 1999, Maillet et al., 2000]. En réalité, les conditions de couplage sont contenues dans la formulation variationnelle du modèle (2.21).  $\square$

Si nous discrétisons directement l'intervalle  $[0; L]$ , les paramètres internes se décomposent naturellement sur le maillage. L'erreur de modèle est alors directement liée au pas de discrétisation de l'espace. Si nous voulons aller plus loin dans l'approximation, deux choix s'offrent à nous :

- l'hypothèse que les transferts thermiques sont instantanés,
- l'hypothèse des propriétés internes équivalentes.

Ces deux solutions sont illustrées dans la figure 2.13.

6. Le flux normal est  $\frac{\partial \theta}{\partial n} = \nabla \theta \cdot \vec{n}$  avec  $\vec{n}$  la normal au domaine, [Lucquin, 2004].



La première solution considère l'EDP stationnaire de Laplace (elliptique) :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.22)$$

avec la conductivité vérifiant :

$$\forall x \in \Omega_i, \quad k(x) = k_i \quad (2.23)$$

En utilisant l'hypothèse (2.23) des propriétés constantes dans chaque couche, l'équation (2.22) définit l'approche par résistances thermiques, voir la figure 2.13 et [Boyer *et al.*, 1996, Hagentoft, 2001], avec  $R = \sum_i R_i$  la résistance thermique de la paroi et :

$$\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, \quad R_i = \frac{e_i}{k_i} \quad (2.24)$$

La seconde possibilité remplace les champs de propriétés internes  $k$  et  $\rho c$  par des paramètres constants équivalents, avec les valeurs suivantes, [Maillet *et al.*, 2000, Tsilingiris, 2002] :

$$k_e = \frac{L}{\sum_i \frac{e_i}{k_i}}, \quad \rho c_e = \sum_i \frac{\rho c_i e_i}{L} \quad (2.25)$$

avec  $i$  l'indice des couches. L'équation instationnaire devient :

$$\rho c_e \frac{\partial \theta}{\partial t} - k_e \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (2.26)$$

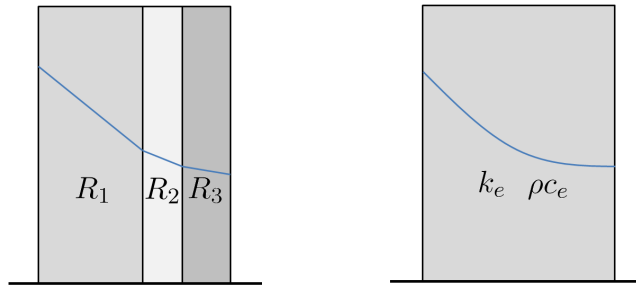


FIGURE 2.13 – Illustration du champ interne de température pour différentes approximations du modèle (2.21). À gauche, l'hypothèse des transferts thermiques stationnaires au sein des couches ; à droite, l'hypothèse des propriétés internes équivalentes.

Nous pouvons encore aller plus loin dans l'approximation, et utiliser simultanément les deux hypothèses précédentes. Le problème se substitue alors en une équation de transfert thermique instantané avec des propriétés internes équivalentes, définissant une résistance thermique équivalente  $R$ . Cette discrétisation est notamment utilisée la réglementation thermique, avec la définition du coefficient de transfert thermique  $U$  de la paroi<sup>7</sup> qui s'exprime par, [CSTB, 2005] :

$$U = \frac{1}{R} = \frac{k_e}{L} \quad (2.27)$$

avec  $L$  la profondeur de la paroi, et  $k_e$  la conductivité équivalente, cf. équation (2.26).

7. Ce coefficient possède la dimension de l'inverse d'une résistance. Attention à ne pas confondre avec la conductance, souvent notée  $UA$ , qui s'obtient en multipliant  $U$  par l'aire de la paroi.

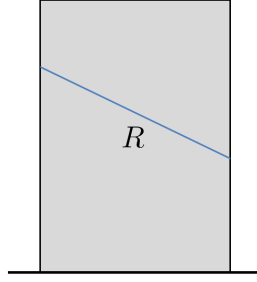


FIGURE 2.14 – Illustration de la discrétisation équivalente stationnaire.

### 2.3.2 Transferts thermiques aux limites

Les conditions aux limites des parois de bâtiments sont des bilans d'échanges thermiques avec l'intérieur du bâtiment et avec l'environnement. Il s'agit principalement de transferts convectifs et radiatifs, voir figure 2.15.

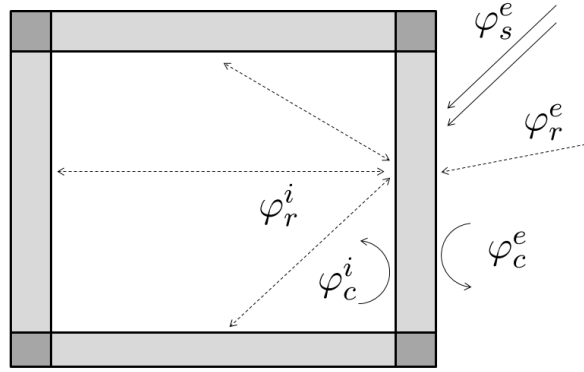


FIGURE 2.15 – Les échanges thermiques aux limites des parois.

Les expressions des flux apparaissant sur la figure 2.15 sont présentées dans le tableau 2.1. Nous notons  $\theta$  la température de surface de la paroi (la face considérée dépend de la nature du flux exprimé : intérieur ou extérieur),  $T_i$  la température de la pièce, et  $\tilde{\theta}$  la température de surface des parois intérieures adjacentes. Les paramètres  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont respectivement l'émissance du matériau et la constante de Stefan-Boltzmann,  $h$  et  $\bar{h}$  sont des coefficients d'échange convectif, tandis que  $\alpha$  représente le facteur d'absorption de la paroi et  $\gamma$  désigne le facteur d'atténuation dépendant de l'orientation par rapport au Soleil, [Duffie et Beckman, 1991, Hagentoft, 2001]. Les flux en question font intervenir la température de la paroi  $\theta$  dans leur expression. Ce type de conditions aux limites est appelé condition mixte, de 3ème espèce ou encore condition de type Fourier ou Robin, [Raviart et Thomas, 1998].

*Remarque.* Les coefficients d'échanges convectifs sont une hypothèse simplificatrice faisant abstraction de la complexité des phénomènes apparaissant dans les couches limites qui entourent les parois, [Beausoleil-Morrison, 2002].  $\square$

Les échanges radiatifs de grande longueur d'onde, *i.e.* les flux  $\varphi_r^i$  et  $\varphi_r^e$ , rendent l'équation (2.21) non linéaire par rapport à l'état thermique. Lorsque  $\theta$  et  $\tilde{\theta}$  sont proches, et pour se ramener à une équation linéaire, il est pratique de définir un coefficient d'échange radiatif comme

Flux		Type	Expression	Description
Intérieurs	$\varphi_c^i$	convectif	$h(T_i - \theta)$	$T_i$ température de la zone
	$\varphi_r^i$	radiatif	$\epsilon\sigma(\tilde{\theta}^4 - \theta^4)$	$\tilde{\theta}$ températures de surface d'autres parois
Extérieurs	$\varphi_c^e$	convectif	$\bar{h}(T_a - \theta)$	$T_a$ température ambiante extérieure
	$\varphi_r^e$	radiatif	$\epsilon\sigma( T^\infty ^4 - \theta^4)$	$T^\infty$ température équivalente du ciel
	$\varphi_s^e$	radiatif	$\alpha(\gamma^b\phi^b + \gamma^d\phi^d)$	flux solaires direct ( $\phi^b$ ) et diffus ( $\phi^d$ )

TABLE 2.1 – Description des flux dans les conditions limites des parois, où  $\theta$  est la température de surface de la paroi considérée

suit, [Athienitis *et al.*, 1985, Duffie et Beckman, 1991] :

$$\varphi_r^i = \epsilon\sigma(\tilde{\theta}^4 - \theta^4) = \left[ 4\epsilon\sigma \left( \frac{\tilde{\theta} + \theta}{2} \right) \left( \frac{\tilde{\theta}^2 + \theta^2}{2} \right) \right] (\tilde{\theta} - \theta) \simeq 4\epsilon\sigma\bar{\theta}^3 (\tilde{\theta} - \theta) \quad (2.28)$$

où  $\bar{\theta}$  désigne la température moyenne entre  $\tilde{\theta}$  et  $\theta$ . Naturellement, l'approximation de la température moyenne  $\bar{\theta}$  est bien adaptée lorsque les températures sont assez proches. Cela nous permet de nous ramener à l'expression suivante :

$$\varphi_r^i \simeq \alpha^0 (\tilde{\theta} - \theta), \quad \alpha^0 = 4\epsilon\sigma\bar{\theta}^3 \quad (2.29)$$

Nous retrouvons le même type de formule pour le rayonnement extérieur avec le ciel. Nous introduisons de nouveau :

$$\bar{T} = \frac{\theta + T^\infty}{2} \quad (2.30)$$

la température moyenne entre la température de surface  $\theta$  et la température du ciel  $T^\infty$ . Nous pouvons ainsi écrire :

$$\varphi_r^e \simeq \beta (T^\infty - \theta), \quad \beta = 4\epsilon\sigma\bar{T}^3 \quad (2.31)$$

### 2.3.3 Cas particulier des vitrages

Le comportement des vitrages est différent de celui des parois opaques, puisque l'absorption du flux solaire traversant le vitrage produit une élévation de température et s'assimile à une source de chaleur interne répartie. Le rayonnement incident se décompose en plusieurs composantes, dépendant des propriétés du vitrage, *cf.* figure 2.17.

Soient  $\alpha$  le facteur d'absorption,  $\rho$  le facteur de réflexion, et  $\tau$  le facteur de transmission, ces paramètres sont reliés par la relation :

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.32)$$

Dans ce contexte, l'équation (2.21) se réécrit avec un terme source (2.34), les conditions limites étant identiques aux précédentes. Le terme  $\varphi_s^e$  s'écrit :

$$\varphi_s^e = \alpha(\gamma^b\phi^b + \gamma^d\phi^d) \quad (2.33)$$

et dépend du coefficient d'absorption du vitrage  $\tau$  ainsi que des flux solaires et des coefficients d'orientation  $\gamma$  de la surface par rapport à la position du Soleil, [Duffie et Beckman, 1991].

La faible épaisseur des vitrages permet de justifier une hypothèse simplificatrice régulièrement adoptée dans les modèles, qui consiste à remplacer le champ de température  $\theta$  au sein de la

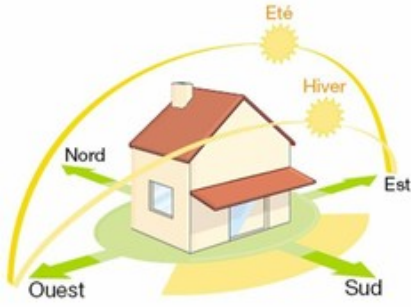


FIGURE 2.16 – Schéma de l'évolution de l'angle solaire. Source Energivie.

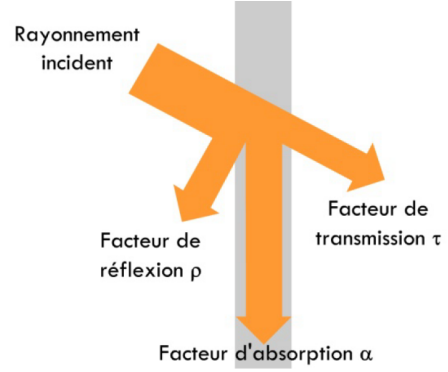
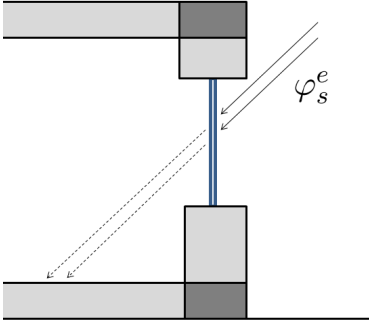


FIGURE 2.17 – Décomposition du rayonnement solaire. Source FFB Pôle Fenêtre.



$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \varphi_s^e & x \in \Omega, t \in [0, t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = \varphi^0 & t \in [0, t_a] \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = \varphi^L & t \in [0, t_a] \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.34)$$

fenêtre par une température équivalente. Techniquement, cela revient à discrétiser l'épaisseur de la baie par une unique maille, ou à chercher une solution uniforme dans le domaine, occultant le terme de diffusion, *cf.* [Lucquin, 2004]. C'est exactement la même manipulation que celle que nous avons utilisée en début de chapitre pour définir la modélisation multizone nodale à partir de l'équation de la chaleur. Le modèle se ramène alors à une équation différentielle ordinaire (EDO), [Guerre-Delabrière et Postel, 2004].

Les flux solaires traversant la fenêtre viennent ensuite réchauffer la zone. Leur modélisation peut être réalisée de deux manières distinctes. Une fois l'angle solaire de la fenêtre calculé en fonction de la position du soleil et de la géométrie, nous pouvons soit faire des calculs de projection des rayons solaires incidents sur les différentes parois et ajouter un terme aux conditions limites dans l'équation (2.21), soit considérer ces flux solaires comme un terme de gain interne dans la zone. Nous optons pour cette dernière solution, utilisant directement le facteur de transmission  $\tau$  du vitrage, *cf.* tableau 2.2.

## 2.4 Apports internes dans les zones

Les apports internes sont constitués des flux convectifs provenant des systèmes (appareils électriques, systèmes de production de chaleur ou de froid), des personnes présentes dans la zone, des échanges avec les parois, des infiltrations d'air par le bâti, des échanges d'air avec les autres pièces et du rayonnement solaire [Santamouris, 2005]. La figure 2.18 illustre le bilan des flux au sein d'un volume.

Les différents termes apparaissant dans la figure sont décrits dans le tableau 2.2. Les paramètres  $c_a$  et  $R$  sont respectivement la capacité thermique de l'air et le débit d'air entre

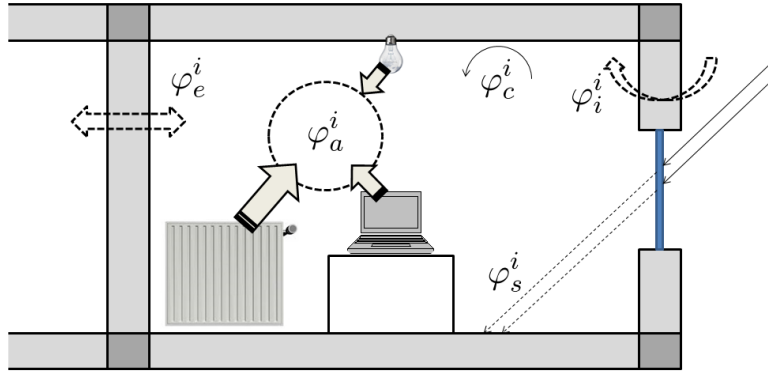


FIGURE 2.18 – Bilan des flux thermiques dans les zones

les zones,  $h$  est un coefficient d'échange convectif,  $q$  le débit de renouvellement d'air, tandis que  $\tau$  représente la transmittance de l'éventuelle fenêtre de la zone et les  $\gamma$  sont des facteurs d'atténuation dépendant de la position du soleil, [Duffie et Beckman, 1991, Hagentoft, 2001].

Flux	Type	Expression	Description
$\varphi_a^i$	convectif	$\sum_i Q_i$	$Q_i$ les composantes des apports internes
$\varphi_c^i$	convectif	$h(\theta - T)$	$\theta$ la température de surface des parois
$\varphi_e^i$	convectif	$c_a R(\tilde{T} - T)$	$\tilde{T}$ la température des autres zones
$\varphi_i^i$	convectif	$c_a q(T_a - T)$	$T_a$ la température ambiante extérieure
$\varphi_s^i$	radiatif	$\tau A(\gamma^b \phi^b + \gamma^d \phi^d)$	flux solaires direct ( $\phi^b$ ) et diffus ( $\phi^d$ )

 TABLE 2.2 – Description des flux dans les conditions limites des zones, où  $T$  désigne la température de la zone

Le flux décrivant les apports solaires, *cf.* tableau 2.2, s'écrit :

$$\varphi_s^i = \tau A (\gamma^b \phi^b + \gamma^d \phi^d) \quad (2.35)$$

avec  $A$  l'aire de la fenêtre. Il permet notamment de modéliser l'augmentation de température due à l'effet de serre dans la pièce.

## 2.5 Aéraulique

L'approche adoptée dans nos travaux n'utilise pas de modèle d'état aéraulique global comme c'est le cas pour la thermique. L'aéraulique est tout de même prise en compte dans le calcul des coefficients d'échange convectif des parois avec l'extérieur et dans le renouvellement d'air des zones.

Les infiltrations à travers le bâti sont modélisées par un terme d'advection, *cf.* figure 2.19. Soit  $\vec{V} = V\vec{x}$  le vecteur vitesse dans la section, l'apport thermique  $\varphi_i^i$  dans la zone est défini par :

$$\varphi_i^i = c_a |\Omega_z| \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = c_a |\Omega_z| V \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.36)$$

avec  $|\Omega_z|$  le volume de la pièce, et  $\theta$  la température à l'intérieur du conduit d'infiltration.

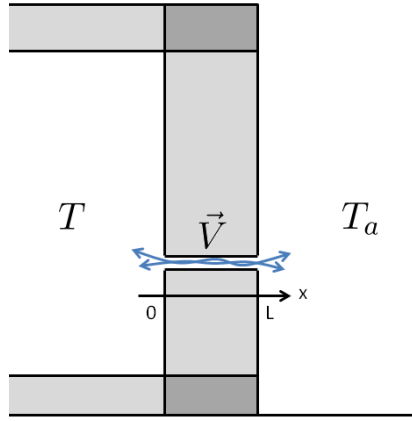


FIGURE 2.19 – Infiltrations d'air ambiant extérieur dans les zones

Les bouches d'infiltration d'air par le bâti sont généralement fines. Leur capacité thermique est donc négligeable, et la répartition interne de température suit l'équation de Laplace :

$$\Delta\theta = 0 \implies \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \implies \theta(x) = \frac{T_a - T}{L}x + T \quad (2.37)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du terme d'infiltration, cf. tableau 2.2 :

$$\varphi_i^i = c_a |\Omega_z| \frac{V}{L} (T_a - T) \quad (2.38)$$

avec  $V$  la vitesse de renouvellement d'air et  $L$  l'épaisseur de la paroi.

Le terme d'échange aéraulique entre zones  $\varphi_e^i$  s'obtient de la même manière :

$$\varphi_e^i = c_a |\Omega_z| \frac{R}{L} (\tilde{T} - T) \quad (2.39)$$

avec  $R$  la vitesse d'échange aéraulique.

La présence de bouches de circulation d'air au sein des parois crée naturellement des sources internes non homogènes, pas forcément positives, autour des conduits. En l'absence d'information précise sur leur localisation, nous choisissons de ne pas modéliser ce phénomène. L'approche présentée au chapitre 6 sur la caractérisation de défauts internes pourrait permettre d'apprécier les emplacements et les dimensions de ces défauts d'exécution du bâti.

Le coefficient  $\bar{h}$  d'échanges convectifs entre les parois et l'air ambiant extérieur dépend de l'aéraulique à la frontière, cf. tableau 2.1. Dans notre modèle, nous utilisons une formulation de corrélation avec la vitesse du vent, cf. [Hagentoft, 2001] :

$$\begin{cases} \bar{h} = 6 + 4v & v \leq 5 \\ \bar{h} = 7,41 v^{0,78} & v > 5 \end{cases} \quad (2.40)$$

avec  $v$  la vitesse du vent en m/s.

## 2.6 Modèle thermique de la méthode d'audit

Nous décrivons à présent le modèle thermique retenu sous sa forme générique. Il permet de modéliser les différents phénomènes physiques impactant le bâtiment.

Le modèle d'évolution de la température des pièces vérifie les hypothèses multizones nodales, comme présenté dans la section 2.2. Soit  $(0; t_a)$  l'intervalle de temps considéré,  $N_z$  le nombre de zones,  $N_s$  le nombre de surfaces, et  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  l'indice de la zone, la température  $T_z$  suit l'équation suivante :

$$\begin{cases} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz} + \bar{\mathcal{A}}_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^0 + \mathcal{C}_{sz}^L) + \mathcal{Q}_z + \mathcal{W}_z + \Phi_z^b + \Phi_z^d \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Les termes du membre de droite de l'équation permettent de modéliser les phénomènes physiques au sein de la zone : les couplages aérauliques avec d'autres zones, les échanges convectifs avec les parois, la perméabilité à l'air, les scénarios de gains internes convectifs, et les apports solaires à travers les fenêtres. Chacun de ces phénomènes possède un rôle propre sur la thermique de la pièce, [Hagentoft, 2001]. Ils sont décrits dans le tableau 2.3.

Termes	Définition
$\mathcal{A}_{rz} = c_a R_{zr} (T_r - T_z)$	Échanges aérauliques interzones
$\bar{\mathcal{A}}_z = c_a q_z (T_a - T_z)$	Infiltrations d'air extérieur
$\mathcal{C}_{sz}^0 = h_{sz}^0 (\theta_s(0; t) - T_z)$	Convection entre les surfaces et l'air intérieur
$\mathcal{C}_{sz}^L = h_{sz}^L (\theta_s(L_s; t) - T_z)$	
$\mathcal{Q}_z = \sum_i Q_z^i$	Apports internes relatif à l'usage
$\mathcal{W}_z = \lambda_z (\Theta_z - T_z)$	Gains convectifs des émetteurs
$\Phi_z^b = A_z \tau_z \gamma_z^b \phi^b$	Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil à travers la fenêtre
$\Phi_z^d = A_z \tau_z \gamma_z^d \phi^d$	

TABLE 2.3 – Définition des flux dans les zones

Les paramètres apparaissant dans le modèle (2.41) et dans le tableau 2.3 sont détaillés dans la nomenclature du tableau 2.4.

*Remarque.* Le capacité thermique  $C_z$  de la zone  $z$  est le produit de son volume  $V_z$  par la capacité calorifique  $c_a$  de l'air ambiant, auquel il faut ajouter les capacités thermiques des objets dans la zone.  $\square$

Les surfaces sont modélisées par des EDP paraboliques, cf. section 2.3. Soit  $s \in \llbracket 1; N_s \rrbracket$  l'indice de la surface en cours et  $L_s$  son épaisseur, le champ de température  $\theta_s$  est gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, & (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00} + \mathcal{R}_{sp}^{0L}) + \mathcal{R}_s^{0\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^0 + \bar{\mathcal{C}}_s^0 + \underline{\mathcal{C}}_s^0 + \Phi_s^{b0} + \Phi_s^{d0} \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0} + \mathcal{R}_{sp}^{LL}) + \mathcal{R}_s^{L\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^L + \bar{\mathcal{C}}_s^L + \underline{\mathcal{C}}_s^L + \Phi_s^{bL} + \Phi_s^{dL} \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{cases} \quad (2.42)$$

Paramètre	Unité	Définition
$A_z$	$\text{m}^2$	Aire de la fenêtre
$c_a$	$\text{J/K.m}^3$	Capacité calorifique de l'air
$C_z$	$\text{J/K}$	Capacité thermique de la zone $z$
$\gamma_z^b$ et $\gamma_z^d$	-	Coefficients d'exposition solaire direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ )
$h_{sz}$	$\text{J/K.m}^2.\text{s}$	Coefficient d'échange convectif entre la surface $s$ et la zone $z$
$\lambda_z$	$\text{J/K.s}$	Coefficient de couplage convectif entre la température de l'émetteur $z$ et de la zone $z$
$\phi^b$ et $\phi^d$	$\text{J/m}^2.\text{s}$	Flux solaires direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ )
$Q_z^i$	$\text{J/s}$	Gains internes convectifs, hormis les émetteurs
$q_z$	$\text{m}^3/\text{s}$	Débit de renouvellement d'air dans la zone $z$
$R_{zr}$	$\text{m}^3/\text{s}$	Échanges aérauliques entre les zones $z$ et $r$
$S_s$	$\text{m}^2$	Superficie de la surface $s$
$\tau_z$	-	Coefficient de transmittance de la fenêtre
$T_a$	$\text{K}$	Température ambiante extérieure
$T_z^0$	$\text{K}$	Température initiale de la zone $z$

TABLE 2.4 – Définition des paramètres du modèle thermique des zones

Les termes des conditions aux limites du modèle permettent de modéliser différents couplages physiques aux frontières de la surface : les couplages radiatifs avec d'autre surfaces, les échanges radiatifs avec le ciel, les couplages convectifs avec les zones, les échanges convectifs avec l'air extérieur, la conduction avec le sol, et les apports solaires. Ils sont décrits dans le tableau 2.5.

La nomenclature associée au modèle (2.42) et au tableau 2.5 est décrite dans le tableau 2.6.

*Remarque.* Le capacité thermique  $\rho c_s$  de la surface  $s$  est le produit de sa masse volumique  $\rho_s$  par sa capacité thermique massique  $c_s$ .  $\square$

Les planchers possèdent une condition limite de type Dirichlet traduisant une valeur imposée avec le sol à température  $T_g$ , [Raviart et Thomas, 1998]. Lorsque le plancher  $s$  est orienté avec la face ( $x = L_s$ ) vers l'extérieur (coté sol), celle-ci s'écrit simplement :

$$\theta_s(L_s; t) = T_g \quad (2.43)$$

Dans notre modèle, nous imposons cette condition limite de manière approchée. Pour cela, nous avons introduit les termes de conduction  $\underline{\mathcal{C}}_s^0$  et  $\underline{\mathcal{C}}_s^L$  utilisant les coefficients d'échange  $\underline{h}_s^0$  et  $\underline{h}_s^L$ , respectivement. En choisissant une valeur très grande pour ces coefficients, de l'ordre de  $10^6$ , nous imposons la conditions limite (2.43).

Afin de caractériser les performances des émetteurs, nous ajoutons un modèle pour les représenter. Le modèle retenu pour la température de surface du système de chauffage  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  est le suivant :

$$\begin{cases} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \mathcal{P}_z - \mathcal{W}_z \\ \Theta_z(t = 0) = \Theta_z^0 \end{cases} \quad (2.44)$$



Termes	Définition
$\mathcal{R}_{sp}^{00} = \alpha_{sp}^{00} (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{0L} = \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{L0} = \alpha_{sp}^{L0} (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{LL} = \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces adjacentes
$\mathcal{R}_s^{0\infty} = \beta_s^0 (T^\infty - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_s^{L\infty} = \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre les surfaces et le ciel
$\bar{\mathcal{C}}_s^0 = \bar{h}_s^0 (T_a - \theta_s(0; t))$ $\bar{\mathcal{C}}_s^L = \bar{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t))$	Convection entre les surfaces et l'air ambiant extérieur
$\underline{\mathcal{C}}_s^0 = \underline{h}_s^0 (T_g - \theta_s(0; t))$ $\underline{\mathcal{C}}_s^L = \underline{h}_s^L (T_g - \theta_s(L_s; t))$	Conduction entre les surfaces et le sol
$\Phi_s^{b0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0b} \phi^b$ $\Phi_s^{d0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0d} \phi^d$ $\Phi_s^{bL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Lb} \phi^b$ $\Phi_s^{dL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Ld} \phi^d$	Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil

TABLE 2.5 – Définition des flux aux frontières des parois

Paramètre	Unité	Définition
$\alpha_s$	-	Facteur d'absorption de la surface $s$
$\alpha_{sp}$	J/K.m <sup>2</sup> .s	Coefficient d'échange radiatif entre les surfaces $s$ et $p$
$\beta_s$	J/K.m <sup>2</sup> .s	Coefficient d'échange radiatif entre la surface $s$ et le ciel
$\gamma_s^b$ et $\gamma_s^d$	-	Coefficients d'exposition solaire direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ )
$h_{sz}$	J/K.m <sup>2</sup> .s	Coefficient d'échange convectif avec la zone $z$
$\bar{h}_s$	J/K.m <sup>2</sup> .s	Coefficient d'échange convectif avec l'air extérieur
$\underline{h}_s$	J/K.m <sup>2</sup> .s	Coefficient d'échange diffusif avec le sol
$k_s$	J/K.m.s	Conductivité thermique
$\phi^b$ et $\phi^d$	J/m <sup>2</sup> .s	Flux solaires direct ( $b$ ) et diffus ( $d$ )
$\rho c_s$	J/K.m <sup>3</sup>	Capacité thermique
$S_s$	m <sup>2</sup>	Aire de la surface $s$
$T_a$	K	Température ambiante extérieure
$T_g$	K	Température du sol
$T^\infty$	K	Température équivalente du ciel
$\theta_s^0$	K	Température initiale au sein de la surface $s$

TABLE 2.6 – Définition des paramètres du modèle thermique des surfaces

Ce modèle est couplé à la température de la pièce par des échanges convectifs, *cf.* tableau 2.3, et reçoit une puissance nominale  $\mathcal{P}_z = \eta_z P_z$ . Les paramètres sont détaillés dans le tableau 2.7.

Paramètre	Unité	Définition
$d_z$	J/K	Dynamique de la réponse du système $z$
$\lambda_z$	J/K.s	Couplage convectif avec la zone
$\eta_z$	-	Rendement du système
$P_z$	J/s	Puissance envoyée dans le système
$\Theta_z^0$	K	Condition initiale du modèle

TABLE 2.7 – Définition des paramètres du modèle thermique des systèmes

Finalement, le modèle (2.41)-(2.44) retenu pour notre méthode d'audit énergétique dans les bâtiments est présenté dans l'équation (2.45), avec  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  et  $s \in \llbracket 1; N_s \rrbracket$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz} + \overline{\mathcal{A}}_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^0 + \mathcal{C}_{sz}^L) + \mathcal{Q}_z + \mathcal{W}_z + \Phi_z^b + \Phi_z^d \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \mathcal{P}_z - \mathcal{W}_z \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00} + \mathcal{R}_{sp}^{0L}) + \mathcal{R}_s^{0\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^0 + \overline{\mathcal{C}}_s^0 + \underline{\mathcal{C}}_s^0 + \Phi_s^{b0} + \Phi_s^{d0} \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0} + \mathcal{R}_{sp}^{LL}) + \mathcal{R}_s^{L\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^L + \overline{\mathcal{C}}_s^L + \underline{\mathcal{C}}_s^L + \Phi_s^{bL} + \Phi_s^{dL} \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Les différents phénomènes physiques pris en compte sont schématisés sur la figure 2.20. Le modèle (2.45) est écrit sous forme générique. Bien entendu, lorsqu'il est appliqué à un cas d'étude, les différents coefficients permettent de paramétrer le modèle pour la géométrie considérée. En effet, si le bâtiment modélisé possède plusieurs zones, elles ne sont pas toutes en contact avec la totalité des surfaces. Par exemple, en imposant  $h_{sz}^0 = 0 = h_{sz}^L$ , nous définissons que la surface  $s$  n'est pas adjacente à la zone  $z$ . Notre équipe a développé une boîte à outils numériques permettant d'appliquer automatiquement le modèle (2.45) à une géométrie donnée décrite dans un fichier gbXML, cf. section 1.2 et [Nassiopoulos *et al.*, 2014b].

La relative simplicité de ces équations nous permet de résoudre facilement le système en assemblant explicitement les matrices. Les EDP sont discrétisées en espace par les éléments finis  $P^1$  de Lagrange, puis nous résolvons le système dynamique obtenu par le schéma numérique d'Euler implicite, cf. e.g. [Allaire, 2007].

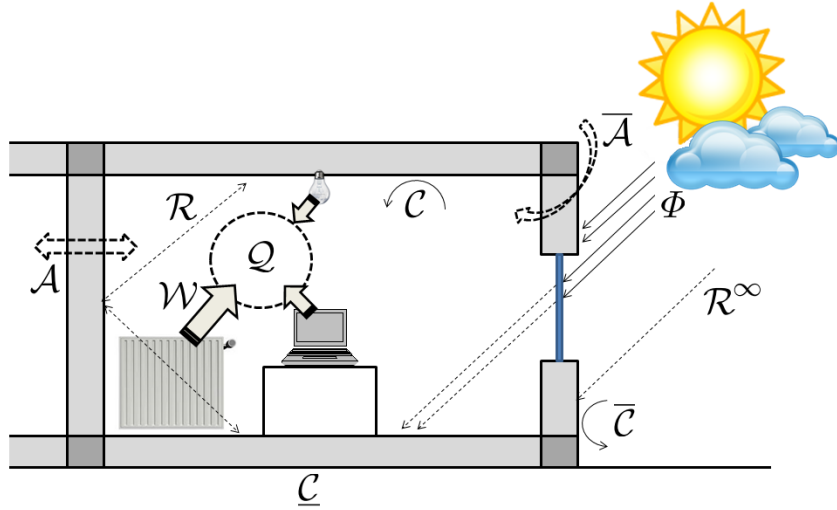


FIGURE 2.20 – Schéma des différents phénomènes physiques pris en compte dans le modèle

## 2.7 Application et influence des paramètres

Cette étude consiste à mettre en avant les paramètres dont l'incertitude est relativement influente dans la thermique des bâtiments existants. Pour cela, nous appliquons le modèle retenu (2.45) sur un cas d'étude relativement simple. Celui-ci est constitué de 2 zones thermiques, chacune contenant une fenêtre dont l'orientation varie, ainsi qu'un émetteur de chaleur, cf. figure 2.21. Ce cas d'étude sera repris à plusieurs reprises tout au long de l'exposé.

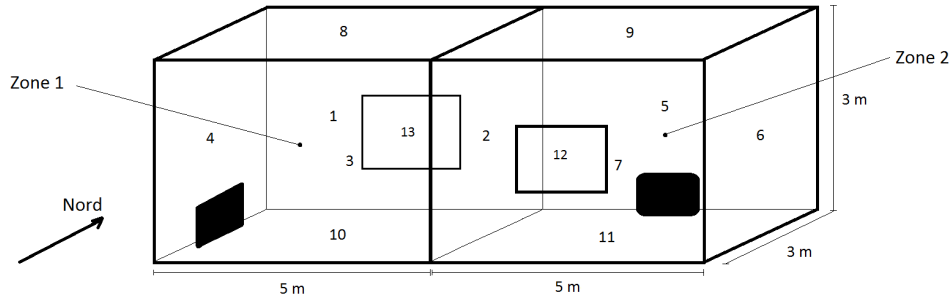


FIGURE 2.21 – Plan du cas d'étude constitué de deux zones

### 2.7.1 Description du modèle sur le cas d'étude

Nous appliquons le modèle thermique (2.45) à la géométrie étudiée. Soit  $(0; t_a)$  l'intervalle de temps considéré,  $N_z = 2$  le nombre de zones,  $N_s = 13$  le nombre de parois, et  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  l'indice de la zone en cours, la température  $T_z$  suit l'équation suivante :

$$\begin{cases} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} c_a R_{zr} (T_r - T_z) + \sum_{s=1}^{N_s} S_s h_{sz}^a (\theta_s^a - T_z) + c_a q_z (T_a - T_z) \\ \quad + \lambda_z (\Theta_z - T_z) + Q_z + A_z \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{cases} \quad (2.46)$$

avec  $\theta_s^a$  la face de la surface  $s$  étant adjacente à la zone  $z$ . Nous retrouvons ici le stockage d'énergie, les échanges aérauliques entre zones, la convection entre zones et surfaces, l'infiltration par le bâti, les apports convectifs des émetteurs, les gains internes, et les apports solaires par la fenêtre. La nomenclature de ce modèle a déjà été introduite dans le tableau 2.4.

Pour faire l'étude paramétrique, nous choisissons de modéliser les surfaces de manière homogène par des EDP paraboliques composées de paramètres physiques équivalents, cf. section 2.3.1. Soit  $s \in \llbracket 1; N_s \rrbracket$  l'indice de la surface en cours et  $L_s$  son épaisseur, le champ de température  $\theta_s$  est gouverné par l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s k_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a) \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} \alpha_{sp}^{0a} (\theta_p^a - \theta_s(0; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^0 (T_z - \theta_s(0; t)) \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \bar{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t)) + \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t)) + \alpha_s^L (\gamma_s^{Lb} \phi^b + \gamma_s^{Ld} \phi^d) \\ \theta_s(x, t = 0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \quad (2.47)$$

avec  $\theta_p^a$  la face de la surface  $p$  étant adjacente à la face  $(x = 0)$  de la surface  $s$ . Nous retrouvons ici l'inertie thermique, les échanges radiatifs entre surfaces, la convection entre zones et surfaces, la convection avec l'air extérieur, les échanges radiatifs avec le ciel, et les apports solaires. La nomenclature de ce modèle a déjà été introduite dans le tableau 2.6.

Le modèle (2.47) est écrit avec la convention que la face  $(x = 0)$  de la surface modélisée est orientée vers l'intérieur du bâtiment, tandis que la face  $(x = L_s)$  est orientée vers l'extérieur. Dans le cas d'étude considéré, cf. figure 2.21, seule la paroi centrale ne peut pas vérifier cette convention, puisque ses deux faces donnent sur une zone intérieure. Il faut donc adapter ses conditions aux limites comme présenté dans l'équation 2.48, sous-entendant que la face  $(x = 0)$  de la paroi centrale est adjacente à la zone 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 \rho c_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - S_2 k_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = 0, \quad (x; t) \in [0; L_2] \times (0; t_a) \\ -k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} \alpha_{2p}^{0a} (\theta_p^a - \theta_2(0; t)) + h_{21}^0 (T_1 - \theta_2(0; t)) \\ k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(L_2; t) = \sum_{p=1}^{N_s} \alpha_{2p}^{La} (\theta_p^a - \theta_2(L_2; t)) + h_{22}^L (T_2 - \theta_2(L_2; t)) \\ \theta_2(x, t = 0) = \theta_2^0(x) \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Le modèle thermique des émetteurs s'écrit, pour  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\theta_z}{dt} = \lambda_z (T_z - \theta_z) + \eta_z P_z \\ \theta_z(t = 0) = \theta_z^0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Finalement, le modèle (2.46)-(2.49) du cas d'étude est présenté dans l'équation (2.50), avec  $N_z = 2$ ,  $N_s = 13$ ,  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  et  $s \in \llbracket 1; N_s \rrbracket$ , et avec des conditions aux limites différentes pour la paroi centrale, cf. équations (2.48). Pour notre cas d'étude, le système d'équations est constitué de 13 EDP et 4 EDO. Le pas de temps du schéma numérique d'Euler implicite est fixé à  $\Delta t = 10$  minutes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} c_a R_{zr} (T_r - T_z) + \sum_{s=1}^{N_s} S_s h_{sz}^a (\theta_s^a - T_z) + c_a q_z (T_a - T_z) \\ \quad + \lambda_z (\Theta_z - T_z) + Q_z + A_z \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \lambda_z (T_z - \Theta_z) + \eta_z P_z \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s k_s \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a) \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} \alpha_{sp}^{0a} (\theta_p^a - \theta_s(0; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^0 (T_z - \theta_s(0; t)) \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \bar{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t)) + \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t)) + \alpha_s^L (\gamma_s^{Lb} \phi^b + \gamma_s^{Ld} \phi^d) \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

### 2.7.2 Influence des incertitudes sur l'état thermique et choix des inconnues

Comme expliqué en section 1.3, les incertitudes présentes sur les paramètres du modèle sont particulièrement fortes dans le cas des bâtiments existants. Afin de choisir les paramètres qu'il serait important d'identifier par la méthode inverse, nous étudions d'abord l'influence de chacun des paramètres, associé à son incertitude, sur les températures des zones. En effet, plus l'incertitude d'un paramètre influe sur la température des pièces, et plus celui-ci doit faire l'objet d'un contrôle particulier pour limiter la propagation d'incertitudes. Cela s'appelle la *sensibilité* du modèle aux paramètres.

De nombreux travaux ont étudié les incertitudes dans le bâtiment, *e.g.* [Madsen et Holst, 1995, Lam et Hui, 1996, Macdonald *et al.*, 1999, Macdonald et Clarke, 2007, Demanuele *et al.*, 2010, Hopfe et Hensen, 2011, Heo *et al.*, 2012, Gautier et Charles, 2012, Spitz, 2012]. La plupart d'entre-eux partagent certaines conclusions sur les paramètres les plus sensibles. Il faut néanmoins retenir que ces résultats dépendent du contexte de l'étude.

Nous reprenons les incertitudes sur les paramètres du bâtiment proposées dans les études [Macdonald, 2002, Gautier et Charles, 2012, Spitz, 2012]. Celles-ci sont décrites dans le tableau 2.8. L'incertitude en pourcentage correspond à un écart-type.

Maintenant que nous avons recueilli ces informations, nous étudions l'impact de ces incertitudes sur la température des zones. Pour cela, nous reprenons le cas test 2.21, et simulons un contrôle de la température des pièces à la température de consigne de 20°C. La simulation se déroule sur une période  $(0; t_a)$  d'une année, avec un pas de temps de 10 minutes, et reprend les scénarios d'usage classiques de bureaux. Les données météorologiques sont importées des bases de données du logiciel EnergyPlus pour la ville de Lyon<sup>8</sup>. Nous présentons un échantillon des données météo en figure 2.22. Afin de faciliter la mise en place de la simulation, l'état thermique est initialisé à la valeur de la consigne. Après avoir récupéré les paramètres et la réponse thermique (ici constante et égale à la température de consigne), nous désactivons le contrôleur et perturbons les paramètres en fonction de leur incertitude.

8. Nantes n'était pas disponible

Paramètre	Incertitude (%)	Explication
$\alpha_s$	20	Revêtement extérieur des surfaces (matériau, couleur, etc)
$\alpha_{sp}$	20	Revêtement intérieur des surfaces en vis-à-vis
$\beta_s$	20	Revêtement extérieur des surfaces (matériau, couleur, etc)
$C_z$	30	Inertie des meubles et des composants des pièces
$d_z$	40	Type et caractéristiques des émetteurs
$k_s$	50	Composition interne des surfaces (bâti, isolant, etc)
$\lambda_z$	30	Type, caractéristiques et positionnement des émetteurs
$h_{sz}$	30	Revêtement intérieur des surfaces (rugosité)
$\bar{h}_s$	30	Revêtement extérieur des surfaces et conditions climatiques (rugosité, vent, etc)
$\eta_z$	10	Type et caractéristiques des émetteurs
$q_z$	50	Perméabilité du bâti et conditions climatiques
$Q_z$	20	Scénarios d'usage des équipements
$R_{zr}$	30	Perméabilité du bâti
$\rho c_z$	50	Composition interne des surfaces (bâti, isolant, etc)
$\tau_z$	40	Type de vitrage

TABLE 2.8 – Incertitudes classiques sur les paramètres du bâtiment

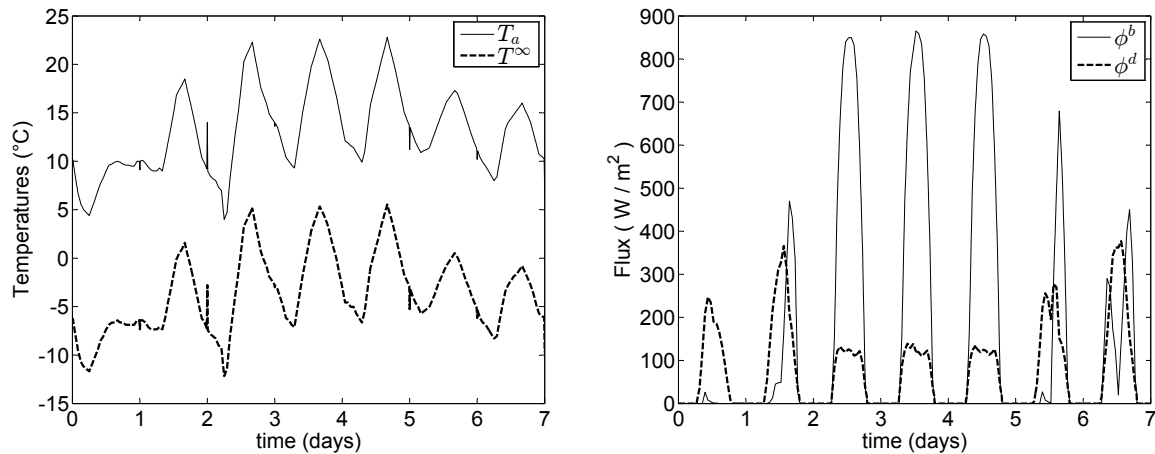


FIGURE 2.22 – Données météorologiques d'EnergyPlus pour la première semaine d'avril

Chacun des paramètres  $p$  présents dans le tableau des incertitudes 2.8 possède une incertitude caractéristique  $\delta p$ . Le modèle de bâtiment (2.45) étant clairement non linéaire par rapport à certains paramètres apparaissant dans ce tableau, nous choisissons de perturber ces paramètres par  $p + \delta p$ , puis par  $p - \delta p$ . Le critère d'influence CI porte sur la variation de la température

autour de la température de consigne  $T_c = 20^\circ\text{C}$  :

$$\text{CI} = \sum_z \frac{1}{2} \|T_z(p + \delta p) - T_c\|_{L^2(0;t_a)} + \sum_z \frac{1}{2} \|T_z(p - \delta p) - T_c\|_{L^2(0;t_a)} \quad (2.51)$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 2.9. Le critère d'influence CI possède la dimension  $\text{K}\sqrt{\text{s}}$ , qui est une dimension classique en thermique, utilisée notamment pour analyser l'énergie ou le temps de diffusion, cf. e.g. [Carslaw et Jaeger, 1959, Taine *et al.*, 2008].

Paramètre	Critère d'influence ( $\text{K}\sqrt{\text{s}}$ )
$\bar{h}_s$	12447,4
$k_s$	8433,1
$h_{sz}$	6694,8
$\rho c_s$	6365,8
$\alpha_s$	5291,6
$\eta_z$	4935,2
$q_z$	2931,5
$\tau_z$	2212,0
$\beta_s$	1487,3
$Q_z$	352,5
$d_z$	69,4
$\lambda_z$	64,9
$C_z$	58,9
$R_{zr}$	58,9
$\alpha_{sp}$	56,6

TABLE 2.9 – Influence décroissante des différents paramètres avec leur incertitude

Nous choisissons de découper ce tableau en deux parties : la première regroupe les paramètres les plus influents, et la seconde les autres. Les huit paramètres les plus influents  $\{\bar{h}_s, k_s, h_{sz}, \rho c_s, \alpha_s, \eta_z, q_z, \tau_z\}$  concernent les propriétés internes des surfaces ainsi que leur coefficients d'échanges, le rendement des émetteurs, le facteur de transmission des vitrages, et les infiltrations dans les pièces.

Les paramètres relatifs aux parois  $\{\bar{h}_s, k_s, h_{sz}, \rho c_s, \alpha_s\}$  sont les plus critiques. Ils ne peuvent cependant pas être tous identifiés simultanément. En effet, l'étude [Nassiopoulos et Bourquin, 2013] a mis en évidence que ce choix de paramètres inconnus n'était pas identifiable. En revanche, elle conclut également que, si nous identifions uniquement les propriétés internes  $\{k_s, \rho c_s\}$ , le flux thermique issu de la conduction par le bâti est correctement identifié. En d'autres termes, la résistance thermique équivalente globale<sup>9</sup> de la paroi est identifiable par ce choix d'inconnues. Le but de notre méthode étant de reconstruire précisément les flux par famille afin de guider les scénarios de rénovation, nous choisissons donc les inconnues  $\{k_s, \rho c_s\}$  pour les parois.

9. incluant les résistances thermiques de convection

*Remarque.* Le capacité thermique  $\rho c_s$  de la surface  $s$  est le produit de sa masse volumique  $\rho_s$  par sa capacité thermique massique  $c_s$ . Ces derniers ne peuvent être considérés indépendamment l'un de l'autre pour des raisons d'identifiabilité du produit, cf. section 3.1.5.  $\square$

Les autres paramètres influents, à savoir  $\{\eta_z, q_z, \tau_z\}$ , sont également choisis comme inconnues. Par soucis d'identifiabilité, nous sommes amenés à travailler avec un débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$  constant dans le temps. Par ailleurs, la notion d'identifiabilité relative au modèle des systèmes (2.44) avec comme seule inconnue  $\eta_z$  est largement suffisante. Nous testons donc l'ajout des paramètres  $\lambda_z$  et  $d_z$  dans la liste d'inconnues. Les autres paramètres ne seront pas identifiés, mais leur incertitudes sera prise en compte pour évaluer la robustesse de l'identification au chapitre 4.

La liste des paramètres influents sélectionnés par cette étude afin d'être identifiés dans notre méthode d'audit énergétique est donc la suivante :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z\}_{s;z}, \quad s \in \mathcal{I}_p, z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket \quad (2.52)$$

avec  $\mathcal{I}_p$  l'ensemble des indices des parois. Cette liste est notamment en accord avec les travaux [Hopfe et Hensen, 2011, Gautier et Charles, 2012] sur les paramètres influents et incertains dans le bâtiment.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différents phénomènes physiques intervenant dans le bilan thermique du bâtiment, ainsi que les hypothèses de modélisation. Nous avons introduit un cadre général permettant de décrire différents types de modélisation de manière unifiée : nous avons montré que les modélisations de type CFD, multizones ou intermédiaires découlent de l'équation de la chaleur 3D en adaptant le type et le niveau de discrétisation. Ceci ouvre la voie pour l'utilisation de codes éléments finis standards pour la simulation de la thermique des bâtiments, et offre des perspectives intéressantes d'utilisation des méthodes d'estimation d'erreur classiques des éléments finis.

Bien que peu répandue dans le domaine du bâtiment, l'utilisation d'EDP, notamment dans les parois, rend directement accessibles les techniques et les outils issus de la théorie du contrôle. Cette dernière constitue d'ailleurs le cœur de notre méthode d'audit énergétique. Elle donne notamment accès aux approches rapides de descente de gradient, ce dernier étant obtenu par l'état adjoint. Ce chapitre nous a ainsi permis de proposer un modèle thermique générique, support de notre méthode d'audit énergétique.

La modélisation des phénomènes aérauliques pourrait être étoffée. En effet, nous ne considérons ces phénomènes qu'à travers leur impact sur la thermique. L'utilisation d'un modèle thermo-aéraulique, couplé ou non, pourrait apporter de nouvelles perspectives à la méthode d'audit.





## Chapitre 3

# Problèmes inverses et application à l'audit énergétique

Les problèmes inverses consistent à chercher les causes d'un phénomène connaissant une partie de ses effets. Ces problèmes sont souvent mal posés et nécessitent des techniques de régularisation pour être traités numériquement. Nous examinons le problème d'audit sous l'angle d'un problème inverse : nous disposons de mesures de l'évolution de l'état thermique du bâtiment, et nous les utilisons pour déterminer les propriétés thermiques inconnues. Nous proposons ainsi une méthode d'audit avec deux variantes principales, caractérisées par le niveau d'instrumentation que leur mise en œuvre nécessite. Nous décrivons leur résolution grâce à un algorithme de type Levenberg-Marquardt couplé au gradient conjugué et utilisant l'état adjoint, afin de calculer les gradients de notre fonctionnelle avec un coût de calcul identique à celui de la résolution du problème direct. Les résultats numériques montrent que l'approche proposée réduit fortement les incertitudes sur les paramètres inconnus et sur l'état thermique identifié.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction aux problèmes inverses</b>	<b>48</b>
3.1.1	Principe et caractère mal posé	48
3.1.2	Formulation dans le cas linéaire	50
3.1.3	Régularisation	52
3.1.4	Extension au cas non linéaire	54
3.1.5	Identifiabilité	56
3.1.6	Problèmes inverses et erreurs	57
<b>3.2</b>	<b>Identification de modèles thermiques</b>	<b>58</b>
3.2.1	Problème inverse d'identification de paramètres	60
3.2.2	Adimensionnement	60
3.2.3	Formulation du problème d'optimisation	62
3.2.4	Résolution par la méthode de Levenberg-Marquardt	64
3.2.5	Calcul du gradient par l'état adjoint	67
<b>3.3</b>	<b>Méthode d'audit énergétique instrumenté</b>	<b>71</b>
3.3.1	Identification de paramètres pour le cas d'étude	71
3.3.2	Application de la méthode d'audit : Variante 1	75
3.3.3	Application de la méthode d'audit : Variante 2	83
3.3.4	Incertitudes plus importantes	90
<b>3.4</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>91</b>

---

Le terme *méthodes inverses* est utilisé par opposition à la démarche usuelle en modélisation qui consiste à calculer la réponse d'un modèle à partir d'un certain nombre de données d'entrée, [Beck et Arnold, 1977, Isakov, 2006, Burger, 2007]. Les modèles de simulation usuels reproduisent les relations physiques entre certaines causes (les entrées) et certains effets (les sorties) ; ils respectent le principe de causalité. Ce type de problème est appelé *direct* parce que le flux d'information est dans le sens de la causalité. Les principaux codes de simulation énergétique de bâtiment traitent ce type de problèmes, de nature bien posés.

Par méthodes inverses, on cherche à déterminer les données d'entrées, ou, le plus souvent, un sous-ensemble de ces données, à partir de mesures reflétant une observation partielle de l'état d'un système, [Beck et Arnold, 1977]. En d'autres termes, le problème direct consiste à calculer les effets à partir d'un ensemble de causes, alors que le problème inverse consiste à déterminer les causes à partir des effets. Les problèmes inverses sont souvent formulés comme des problèmes d'optimisation, dans lesquels l'ensemble des inconnues est recherché de sorte à minimiser une fonction coût qui quantifie l'écart entre les mesures et la réponse du modèle, [Beck et Arnold, 1977]. La théorie du contrôle optimal fournit des outils théoriques et pratiques pour résoudre ce type de problème dans un cadre déterministe, [Lions, 1968, Beck et al., 1985]. Dans un cadre stochastique, les outils s'appuient sur des concepts de la théorie de l'information, de l'estimation Bayésienne et des probabilités [Tarantola, 2005, Colaço et al., 2006].

Une caractéristique générale des problèmes inverses est leur caractère mal posé, [Tikhonov et Arsenin, 1977]. En ce qui concerne les problèmes inverses, une ou plusieurs conditions de la définition du caractère bien posé de Hadamard peuvent ne pas être vérifiées, notamment puisque la causalité physique n'est souvent pas respectée. Ce constat renvoie à la notion d'identifiabilité d'une part, et au besoin de régularisation d'autre part. Un système est identifiable si les mesures disponibles, *i.e.* la quantité d'information recueillie sur l'état du système bâtiment, sont suffisantes pour déterminer les inconnues de manière unique. Lorsque la solution ne dépend pas continûment des données, la résolution numérique du problème est instable, *cf.* section 3.1.2 (avec, notamment, une illustration numérique). Les techniques de régularisation doivent être mises en œuvre pour déterminer une solution approchée de manière stable [Engl et al., 1996].

## 3.1 Introduction aux problèmes inverses

### 3.1.1 Principe et caractère mal posé

Les phénomènes physiques sont mis en équation dans des modèles mathématiques faisant correspondre un jeu de paramètres à un état physique. Une fois cette application définie, se pose alors la question de l'existence d'une application inverse, permettant d'associer un jeu de paramètres à un état physique donné, voir figure 3.1.

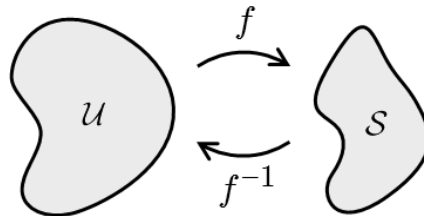


FIGURE 3.1 – Illustration d'une application  $f$  entre l'espace des paramètres  $\mathcal{U}$  et celui des états physiques  $\mathcal{S}$ , et d'une application réciproque  $f^{-1}$ . Source Wikimedia Commons.

Étudier cette fonction inverse consiste souvent à déterminer les causes d'un phénomène physique à partir d'observations partielles de ses effets. Cette approche s'oppose aux problèmes

classiques, qualifiés de *directs*, qui relient, en vertu du principe de causalité, des causes à leurs conséquences ; d'où leur dénomination de problèmes *inverses*. L'existence de l'application réciproque  $f^{-1}$  nécessite cependant des hypothèses supplémentaires sur l'application directe  $f$ , [Dieudonné, 1984].

Ces problèmes apparaissent dans de nombreux domaines, dès lors que l'on souhaite identifier les propriétés internes ou les conditions limites d'un système sans y avoir directement accès. Les examens médicaux comme l'échographie, l'IRM, ou le scanner, permettent de visualiser l'intérieur du corps humain sans faire d'incision, [Fenwick, 1987, Celorrio et Hofinger, 2008, Leblond, 2013]. L'hydrogéologie et la géophysique déterminent les propriétés du sous-sol depuis la surface, [Tarantola et Valette, 1982a, Lamm, 1987, Ismail-Zadeh et al., 2009, Papadopoulos et al., 2011]. Les astrophysiciens sont capables d'identifier la composition d'étoiles et de planètes à distance et tentent de modéliser l'univers à travers leurs télescopes, [Charbonneau, 1995, Nakamura et Chiba, 1999, Kokkotas et al., 2001]. La météorologie, l'océanographie et la glaciologie étudient les paramètres des fluides des océans et de l'atmosphère pour comprendre et prédire les variations climatiques, [Derber et Rosati, 1989, Kalnay, 2003, Nodet, 2008].

En l'absence de moyens simples permettant la connaissance d'un paramètre, les problèmes inverses la retranscrivent à travers l'observation d'une grandeur physique du système et son équation d'état. Tout se joue sur le fait que l'observation d'état est, par définition, plus accessible que celle du paramètre recherché. Le but étant alors d'utiliser *indirectement* l'équation d'état, à travers une procédure d'optimisation, pour retrouver le paramètre inconnu à partir des observations, voir figure 3.2.

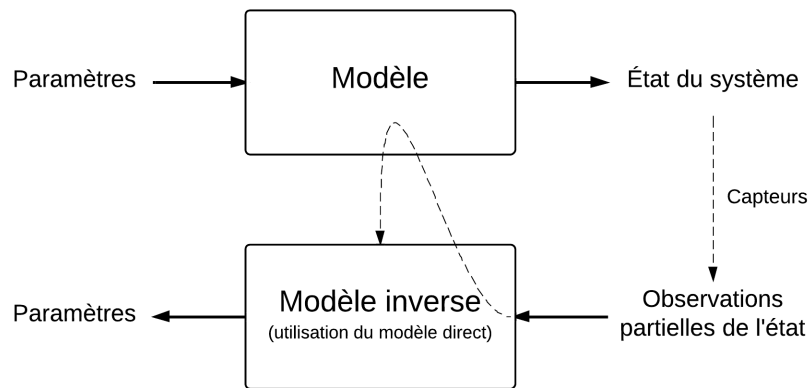


FIGURE 3.2 – Mise en œuvre des problèmes inverses

Un problème mathématique décrivant un phénomène physique est *bien posé* au sens de Hadamard lorsqu'il vérifie, [Hadamard, 1902, Samarskii et Vabishchevich, 2007] :

- l'existence de la solution,
- l'unicité de la solution,
- la continuité de la solution par rapport aux paramètres.

L'existence se rapporte principalement au choix du modèle, et au fait que les observations appartiennent bien au domaine de validité du modèle, [Kaltenbacher, 2005]. L'unicité se déduit de la quantité et de la nature des données disponibles, tandis que la continuité représente la stabilité du paramètre identifié par rapport aux données<sup>1</sup>. Les problèmes (directs) classiques de la physique mathématique sont en général bien posés, tandis que les problèmes inverses ne vérifient généralement pas ces propriétés, et sont qualifiés de *mal posés*, [Tikhonov et Arsenin, 1977, Demoment et al., 2001].

1. Le bruit de mesure est vu comme une perturbation des données.

La résolution de problèmes inverses mal posés nécessite des outils spécifiques, consistant à changer le problème ou à imposer des hypothèses supplémentaires sur les inconnues. Il s'agit d'ajouter des critères de sélection permettant de choisir une solution parmi une famille de candidates (critère lié à l'unicité), ou d'améliorer la stabilité de l'algorithme (critère lié à la stabilité). De nombreux ouvrages proposent un état de l'art détaillé de différentes méthodes de résolution, [Beck et Arnold, 1977, Tikhonov et Arsenin, 1977, Ljung, 1987, Banks et Kunisch, 1989, Morozov, 1993, Engl *et al.*, 1996, Özisik et Orlande, 2000, Tarantola, 2005, Chavent, 2009].

Dans la grande famille des méthodes de résolution des problèmes inverses, il existe deux approches : déterministe et probabiliste. L'approche déterministe utilise la structure géométrique sous-jacente du problème, tandis que, d'un autre point de vue, l'approche probabiliste utilise les propriétés de l'aléa. Au sein de cette dernière, on distingue les algorithmes qui parcourent l'ensemble des solutions admissibles, et les algorithmes évolutionnistes utilisant le principe de la théorie de l'évolution pour faire progresser itérativement la solution suivant des processus stochastiques. Chaque approche possède avantages et inconvénients. Les méthodes déterministes sont rapides en terme de temps de calcul, mais reposent sur des algorithmes locaux et donc sensibles à l'initialisation, [Bonnans *et al.*, 1997]. Les méthodes probabilistes sont globales, mais gourmandes en temps de calcul. Il y a par ailleurs équivalence entre la formulation déterministe des moindres carrés et la formulation stochastique munie d'une probabilité de vraisemblance gaussienne, [Moireau, 2008]. Pour plus de détails sur les méthodes stochastiques, le lecteur pourra consulter *e.g.* [Colaço *et al.*, 2006, Bauer et Lukas, 2011].

Le but de ce travail est d'utiliser les problèmes inverses pour proposer une méthode d'audit énergétique des bâtiments. Les incertitudes des paramètres que nous recherchons ne sont pas assez importantes pour motiver l'utilisation de l'approche probabiliste, et les problèmes auxquels nous sommes confrontés sont généralement assez bien initialisés pour ne pas tomber dans des minimums locaux. C'est pourquoi nous choisissons d'utiliser l'approche déterministe, pour sa formulation efficace et son cadre théorique bien connu.

### 3.1.2 Formulation dans le cas linéaire

Les problèmes inverses consistent à extraire l'information contenue dans des mesures (partielles) de l'état d'un système, [Tarantola et Valette, 1982b]. Pour décrire les outils mathématiques utiles à la résolution d'un problème inverse, nous choisissons d'étudier l'opérateur linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$  suivant :

$$f : \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ u & \longmapsto & fu = m \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $u \in \mathcal{U}$  les paramètres du modèle, et  $m \in \mathcal{M}$  la donnée partielle de l'état.

Ici le but est de remonter des mesures  $m$  disponibles aux paramètres  $u$  à l'origine de ces observations. Formellement, ce problème inverse s'écrit :

$$u = f^{-1}(m) \quad (3.2)$$

L'existence d'une solution à (3.2) équivaut à  $m \in \text{Im}(f)$ , l'unicité est liée à l'injectivité  $\ker(f) = 0$ , et la continuité<sup>2</sup> se rapporte à la compacité de  $f$  et à la fermeture de l'image  $\text{Im}(f) = \overline{\text{Im}(f)}$ , [Engl *et al.*, 1996, Demoment *et al.*, 2001]. Dans le cas où  $f$  est un opérateur continu compact en dimension infinie, l'inverse  $f^{-1}$  n'est pas continu. Le problème (3.2) est donc généralement mal posé.

---

2. Lorsque l'existence et l'unicité sont vérifiées et par conséquent que l'inverse existe.

La notion d'existence, plutôt liée au choix du modèle, se contourne en définissant le problème inverse approché par le problème des moindres carrés suivant, [Kunisch, 1988] :

$$\arg \min_{u \in \mathcal{U}} \|fu - m\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (3.3)$$

Dans le cas où l'unicité n'est pas vérifiée, l'idée est alors de définir une notion de *solution généralisée* au problème inverse approché. Il existe en effet une (unique) solution particulière  $u^\dagger$ , de norme minimale, au problème (3.3). Il s'agit de la pseudo-inverse de Moore-Penrose<sup>3</sup> [Groetsch, 1977], qui se traduit par la projection de l'origine sur l'ensemble des solutions, [Kern, 2002]. Le problème des moindres carrés (3.3) étant équivalent à son équation normale, [Engl et al., 1996] :

$$f^*fu = f^*m \quad (3.4)$$

avec  $f^*$  l'adjoint de  $f$ , [Brezis, 2008], nous obtenons naturellement :

$$u^\dagger = (f^*f)^{-1} f^*m \quad (3.5)$$

L'opérateur  $f^\dagger = (f^*f)^{-1} f^*$  est appelé *inverse généralisée*, et le problème inverse (3.3) se réécrit :

$$f^\dagger m = u^\dagger \quad (3.6)$$

Il reste alors à étudier la stabilité de  $f^\dagger$ . Pour les opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert, il est pratique d'utiliser la théorie spectrale, et notamment la décomposition en valeurs singulières, [Engl et al., 1996] : il existe une suite  $(\sigma_n)_n \searrow 0$  positive décroissante convergente vers 0, et deux familles orthonormales  $\{v_n\}_n$  et  $\{w_n\}_n$  telles que :

$$fu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \langle u; v_n \rangle w_n, \quad f^*m = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \langle m; w_n \rangle v_n \quad (3.7)$$

Dans le cas de l'opérateur auto-adjoint  $f^*f$ , le *système singulier*  $(\sigma_n; v_n, w_n)$  se reformule en un *système propre*  $(\sigma_n^2; v_n)$  de valeurs propres positives  $(\sigma_n^2)_n$  et d'une famille orthonormale de vecteurs propres  $\{v_n\}_n$ <sup>4</sup> sur lequel  $f^*f$  peut se diagonaliser<sup>5</sup>, [Brezis, 2008]. On montre alors, [Engl et al., 1996] :

$$f^\dagger m = (f^*f)^{-1} f^*m = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\langle f^*m; v_n \rangle}{\sigma_n^2} v_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\langle m; w_n \rangle}{\sigma_n} v_n \quad (3.8)$$

*Remarque.* L'équation (3.8) implique un critère d'existence supplémentaire aux solutions du problème (3.6), lié à la convergence de la série présente dans le membre de droite. Supposons que  $\text{Im}(f)$  est fermée, *i.e.* que le problème (3.4) (et donc (3.3)) possède une solution. On obtient la propriété suivante :

$$m \in \mathcal{D}(f^\dagger) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle m; w_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty$$

avec  $\mathcal{D}(f^\dagger)$  le domaine de définition de  $f^\dagger$ . La condition de convergence de la série s'appelle le *critère de Picard*.  $\square$

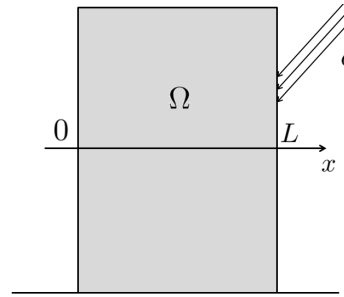
3. Introduite indépendamment par Moore et Penrose, [Moore, 1920, Penrose, 1955].

4. La famille  $\{w_n\}_n$ , définie par la normalisation des vecteurs  $fv_n$ , forme une famille orthonormale de vecteurs propres pour l'opérateur auto-adjoint  $ff^*$ .

5.  $f^*fu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n^2 \langle u; v_n \rangle v_n$

L'équation (3.8) nous renseigne sur la stabilité de l'inverse généralisée. La décomposition en valeurs singulières met clairement en évidence que le bruit  $\delta m$  de la  $n$ -ième composante des mesures  $\langle \delta m; w_n \rangle$  sera amplifié par un facteur  $\sigma_n^{-1}$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$ , [Kern, 2002]. L'opérateur  $f^\dagger$  n'est donc pas stable.

**Exemple 3.1.1.** Soit  $\theta$  la solution de l'équation de la chaleur dans le domaine  $\Omega = [0; L]$  avec une température initiale identiquement nulle et un horizon temporel  $t_a$  :



$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 & x \in \Omega, t \in [0, t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 & t \in [0, t_a] \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = \phi & t \in [0, t_a] \\ \theta(x, 0) = 0 & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Le problème inverse linéaire d'estimation de source extérieure à partir de la mesure de température de frontière consiste à reconstruire  $\phi$  à partir de la connaissance de  $\theta(L; t)$  pour tout  $t \in [0; t_a]$ . Soit  $f : \phi \mapsto \theta_\phi(L; t)$ , et  $m = \theta(L; t) + \delta$  les mesures engendrées par le modèle avec  $\delta$  un bruit blanc gaussien. Nous cherchons :

$$\phi^* = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2} \|f\phi - m\|_{L^2(0; t_a)}^2 \quad (3.10)$$

Nous résolvons le problème (3.10) par le gradient conjugué, et présentons sur la figure 3.3 les résultats de cette identification de paramètre. Comme prévu en l'absence de régularisation, nous remarquons que le bruit de mesure est grandement amplifié.  $\diamond$

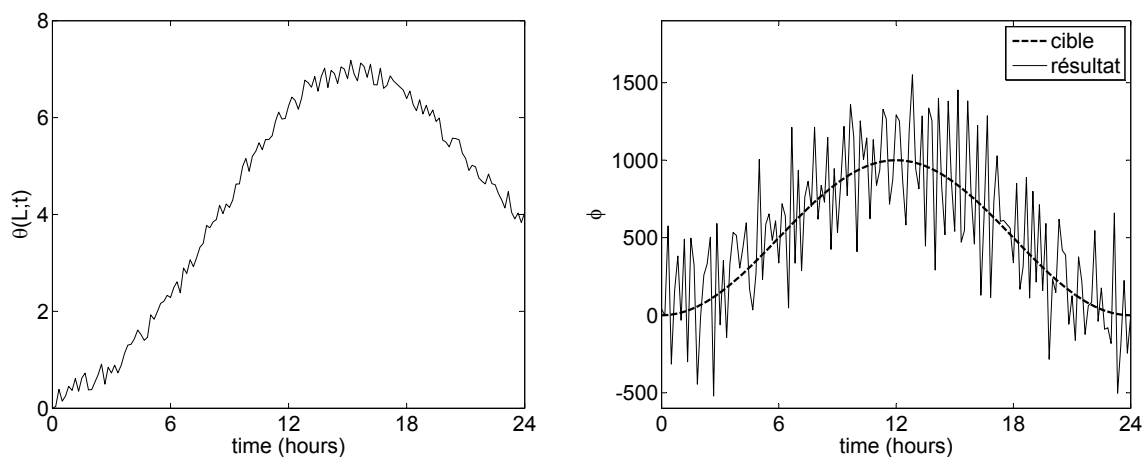


FIGURE 3.3 – Illustration du caractère mal posé de l'identification de source en présence de bruit. À gauche, la mesure bruitée de température de surface ; à droite, la solution de (3.10).

### 3.1.3 Régularisation

L'instabilité de l'inverse généralisée  $f^\dagger$  apparait distinctement dans l'équation (3.8). Mais on y voit également comment approcher ce problème par un nouveau problème bien posé, [Engl et al., 1996]. Cette procédure s'appelle la *régularisation* du problème inverse.

La première idée consiste à tronquer la série (3.8) et à calculer :

$$u_N = \sum_{n=1}^N \frac{\langle m; w_n \rangle}{\sigma_n} v_n \quad (3.11)$$

Cela permet facilement d'occulter les hautes fréquences et ainsi de contenir l'instabilité. On appelle cette méthode la *troncature spectrale*, de paramètre  $N$ . Cette méthode est intéressante, mais ne peut pas être généralisée au cas non linéaire. Pour cela, nous allons étudier une autre méthode de régularisation.

Reprenons la décomposition en valeurs singulière (3.8) :

$$u^\dagger = f^\dagger m = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma_n^2} \langle f^* m; v_n \rangle v_n \quad (3.12)$$

Comme nous l'avons vu, le problème vient du terme  $\sigma_n^{-2}$ . L'idée consiste à remplacer ce terme par une version filtrée  $g_\epsilon(\sigma_n)$ , avec  $\epsilon > 0$ , qui ne présente plus de pôle à l'origine, et telle que, [Engl et al., 1996] :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_\epsilon(\sigma_n) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(\sigma_n) = \sigma_n^{-2} \quad (3.13)$$

L'une des premières approches fut proposée par Tikhonov, [Tikhonov, 1963]. Le filtre de la régularisation portant son nom s'écrit comme suit :

$$g_\epsilon(\sigma_n) = \frac{1}{\epsilon + \sigma_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\epsilon} > 0 \quad (3.14)$$

et les équations (3.8) et (3.5) se réécrivent :

$$u_\epsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma_n}{\epsilon + \sigma_n^2} \langle m; w_n \rangle v_n \iff u_\epsilon = (f^* f + \epsilon I)^{-1} f^* m \quad (3.15)$$

On appelle  $u_\epsilon$  la *solution régularisée* du problème inverse, et  $\epsilon$  le *paramètre de régularisation*.

Cette méthode peut également se comprendre à travers sa forme variationnelle équivalente, qui s'énonce :

$$u_\epsilon = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \|fu - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \epsilon \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (3.16)$$

Elle consiste donc à chercher la solution au problème des moindres carrés (3.3) en ajoutant par pénalisation une contrainte de norme minimale sur les paramètres  $u$ . Le paramètre de régularisation  $\epsilon$  permet d'ajuster le problème entre la fidélité aux mesures et la stabilité de l'inversion.

**Exemple 3.1.2.** Reprenons l'exemple 3.1.1 du problème inverse linéaire d'identification de source. Cette fois-ci, nous ajoutons la régularisation de Tikhonov. Le problème se réécrit :

$$\phi^* = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2} \|f\phi - m\|_{L^2(0;t_a)}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|\phi\|_{L^2(0;t_a)}^2 \quad (3.17)$$

Nous résolvons le problème (3.17) par le gradient conjugué, et présentons sur la figure 3.5 les résultats de cette identification de paramètre. Le caractère mal posé est fortement réduit.  $\diamond$



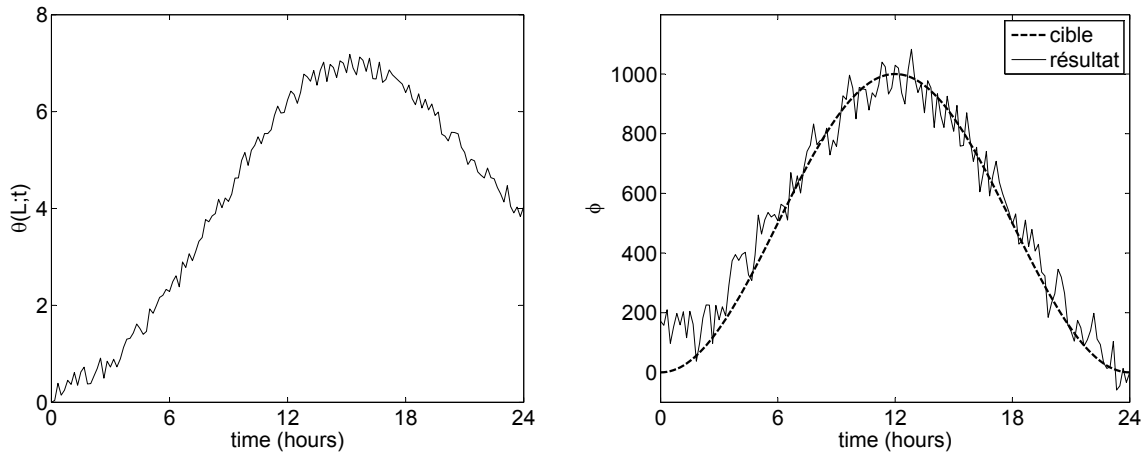


FIGURE 3.4 – Illustration de la régularisation de Tikhonov pour l'identification de source en présence de bruit. À gauche, la mesure bruitée de température de surface ; à droite, la solution de (3.17) avec  $\epsilon = 10^{-6}$ .

La régularisation de Tikhonov est populaire et simple à mettre en œuvre. Il existe d'autres méthodes de régularisation, motivées entre autres par la volonté d'ajouter de l'information *a priori* sur la solution, [Engl *et al.*, 1996]. Nous adoptons cependant la méthode de Tikhonov en première approche. Nous reviendrons sur d'autres méthodes de régularisation au chapitre 5.

Le choix du paramètre de régularisation  $\epsilon$  est un sujet actif dans la communauté scientifique des problèmes inverses, [Gfrerer, 1987, Honerkamp et Weese, 1990, Santos, 1996, Kilmer et O'Leary, 2001, Rodriguez et Theis, 2005, Bauer et Lukas, 2011]. Il impacte notamment la vitesse de convergence des algorithmes d'inversion. Les principaux critères de choix restent le principe de discordance<sup>6</sup> de Morozov, [Morozov, 1993], la Generalized Cross-Validation (GCV), [Golub *et al.*, 1979], et la méthode de la L-curve introduite par Lawson et popularisée par Hansen, [Lawson et Hanson, 1987, Hansen, 1992]. Nous n'avons pas traité ce sujet de choix du paramètre. Une approche heuristique nous a permis de sélectionner une valeur fournissant des résultats satisfaisants.

Il peut être intéressant de remarquer que le critère d'arrêt de Morozov, [Morozov, 1993], appliqué à l'algorithme du gradient conjugué, [Hestenes et Stiefel, 1952], pour le problème inverse approché des moindres carrés (3.3), se comporte comme une méthode de régularisation, [Hanke, 1995a, Hanke, 1995b, Calvetti *et al.*, 2002]. En effet, le gradient conjugué appliqué aux moindres carrés calcule de manière itérative les modes croissants de la solution. En l'arrêtant lorsqu'il atteint les hautes fréquences du bruit (critère de Morozov), il agit comme une troncature spectrale.

**Exemple 3.1.3.** Nous illustrons le caractère régularisant du gradient conjugué avec le critère d'arrêt de Morozov en reprenant l'exemple 3.1.1. De nouveau, nous cherchons la solution :

$$\phi^* = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2} \|f\phi - m\|_{L^2(0;t_a)}^2 \quad (3.18)$$

Nous résolvons le problème (3.18) par le gradient conjugué, et présentons les résultats sur la figure 3.5. De nouveau, le caractère mal posé est fortement réduit.  $\diamond$

6. En anglais, *discrepancy principle*.

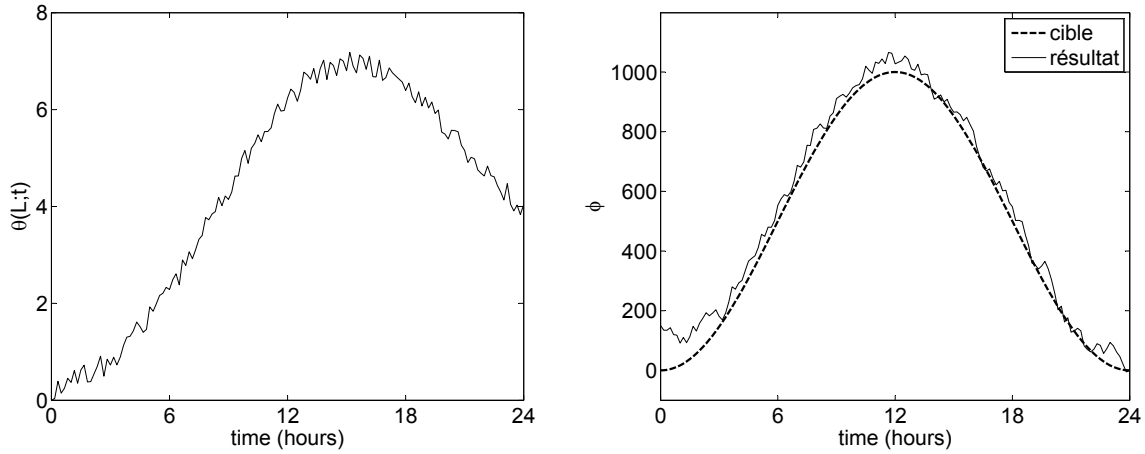


FIGURE 3.5 – Illustration de la régularisation du critère de Morozov sur le gradient conjugué pour l'identification de source en présence de bruit. À gauche, la mesure bruitée de température de surface ; à droite, la solution de (3.18) après 3 itérations du gradient conjugué.

### 3.1.4 Extension au cas non linéaire

Dans le cas non linéaire, l'équation de droite de (3.15) n'a plus de sens. En revanche, l'interprétation variationnelle décrite dans l'équation (3.16) s'étend naturellement au cas d'un opérateur  $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{M}$  non linéaire :

$$u_\epsilon = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \|f(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \epsilon \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (3.19)$$

avec  $u^0 \in \mathcal{U}$  une estimation *a priori* des inconnues. Le terme  $u^0$  est absent de la formulation pour le cas linéaire (3.16), puisqu'il est équivalent à un changement de variable par translation. Dans le cas non linéaire, cette information *a priori* est cependant primordiale pour obtenir des résultats *locaux* de convergence, [Engl et al., 1996].

**Exemple 3.1.4.** Soit  $\theta$  la solution de l'équation de la chaleur dans le domaine  $\Omega = [0; L]$  avec une température initiale identiquement nulle et un horizon temporel  $t_a$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 & x \in \Omega, t \in [0, t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 & t \in [0, t_a] \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = \phi & t \in [0, t_a] \\ \theta(x, 0) = 0 & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Nous illustrons le problème inverse non linéaire d'estimation de paramètres internes à partir de la mesure de température de frontière en identifiant  $k$  à partir de la connaissance de  $\theta(L; t)$  pour tout  $t \in [0; t_a]$ . Soit  $f : k \mapsto \theta_k(L; t)$ , et  $m = \theta(L; t) + \delta$  avec  $\delta$  un bruit blanc gaussien. Soit  $k^0$  une estimation *a priori* de la solution, nous cherchons :

$$k^* = \arg \min_k \frac{1}{2} \|f(k) - m\|_{L^2(0; t_a)}^2 + \frac{\epsilon}{2} (k - k^0)^2 \quad (3.21)$$

La valeur cible est  $k = 1,2$ , et nous partons de la moitié  $k^0 = 0,6$  avec  $\epsilon = 10^{-6}$ . Nous résolvons le problème (3.21) par l'algorithme de Levenberg-Marquardt sur lequel nous reviendrons en détails plus tard. La valeur de conductivité identifiée est  $k^* = 1,183$ . Nous présentons les résultats de cette identification de paramètre sur la figure 3.6.  $\diamond$

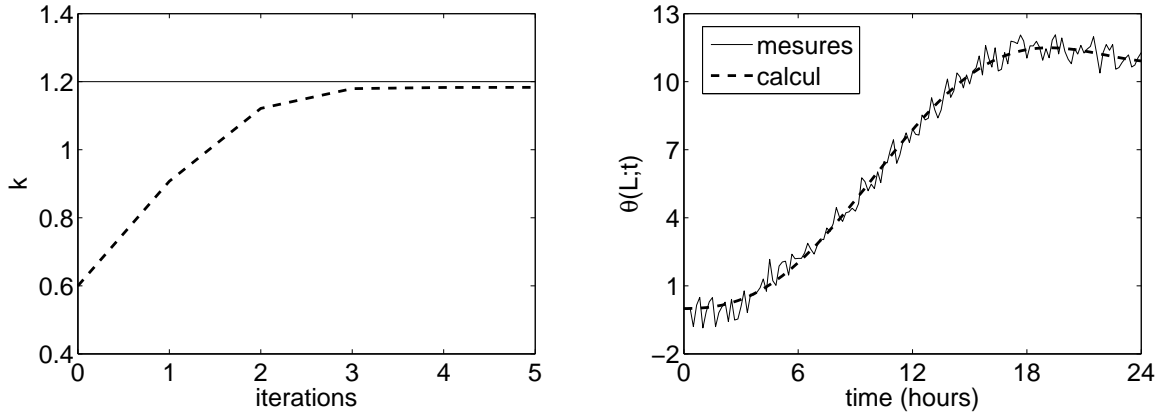


FIGURE 3.6 – Résultats de l'identification du paramètre  $k$  à partir de mesures de température de surface en présence de bruit. À gauche, en pointillés l'évolution du paramètre au cours des itérations, et en trait continu la valeur cible ; à droite, la température reconstruite en pointillés, et les mesures bruitées en trait continu.

L'étude du caractère mal posé des problèmes inverses non linéaires (3.19) est moins évidente que dans le cas linéaire. Des résultats ont cependant été démontrées, [Burger, 2007]. L'existence ainsi que la stabilité de solution(s) régularisée(s) à ce problème des moindres carrés sont vérifiées dans le cas général des opérateurs non linéaires compacts<sup>7</sup>. En revanche, la non linéarité de l'opérateur ne permet pas de statuer sur la convexité de la fonctionnelle, et donc sur l'unicité de la solution.

L'approche naturelle est alors d'étudier, s'il existe, le linéarisé de l'opérateur  $f$  en un point donné, comme c'est le cas dans la théorie du contrôle optimal, [Coron, 2007]. C'est l'idée sous-jacente aux méthodes de type Levenberg-Marquardt, [Moré, 1977, Madsen *et al.*, 2004]. Nous obtenons alors un nouveau problème inverse défini sur la différentielle de Fréchet  $f'$  au point de linéarisation. Si l'opérateur  $f$  est compact et Fréchet-différentiable, on sait que la différentielle de Fréchet  $f'$  est également compacte, [Lions, 1971]. Cela signifie que le caractère mal posé du problème inverse non linéaire se transmet au nouveau problème inverse linéaire. De plus, dans le cas général, il n'est pas possible de savoir *a priori* si la suite générée par les solutions régularisées de ces problèmes inverses linéaires sera bel et bien une suite minimisante du problème initial non linéaire. En effet, aucune hypothèse n'empêche la fonctionnelle du problème inverse non linéaire de croître au long de ces itérations de linéarisation.

Il faut malgré tout nuancer ces propos, puisque les problèmes d'identification traités dans nos travaux ne sont que faiblement non linéaires, et les nombreux cas tests étudiés jusqu'à présent n'ont jamais mis en défaut cette approche. Les éventuels problèmes d'identifiabilité sont notamment réduits du fait que les paramètres non linéaires recherchés sont toujours des scalaires.

7. Les hypothèses minimales sont moins fortes que la compacité, [Binder *et al.*, 1994].

### 3.1.5 Identifiabilité

La question de l'*identifiabilité* est primordiale, puisqu'elle statue sur la faisabilité du problème inverse. Elle revêt une double interprétation.

Pour le problème inverse initial (3.2), l'identifiabilité correspond aux propriétés de l'opérateur direct  $f$ . La première propriété est l'injectivité, qui signifie que l'on est capable de différencier les images de deux éléments différents :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad u \neq v \implies f(u) \neq f(v) \quad (3.22)$$

La seconde est la surjectivité, qui concerne les domaines de définition de  $f$ , afin de savoir si la donnée est dans l'image de l'opérateur direct et donc si elle est atteignable :

$$\text{Im } f = \mathcal{M} \implies \forall m \in \mathcal{M}, \exists u \in \mathcal{U} / m = f(u) \quad (3.23)$$

C'est d'ailleurs ce dernier point qui a motivé l'introduction d'un problème approché (3.3), cf. section 3.1.2. Étant donné que tout modèle est, par définition, une vision approximative de la réalité, il est peu probable que cette dernière propriété soit vérifiée pour les problèmes inverses venant des sciences naturelles.

*Remarque.* L'association de ces deux notions nous permet d'écrire la bijectivité, *i.e.* l'existence et l'unicité :

$$\forall m \in \mathcal{M}, \exists ! u \in \mathcal{U} / m = f(u) \quad (3.24)$$

□

L'autre interprétation se prête aussi bien au problème inverse initial (3.2) qu'aux problèmes approché (3.3) et régularisé (3.16). Elle consiste à savoir si la *quantité* et le *type* de données sont *suffisants* et *adaptés* pour déterminer une solution. Cela renvoie alors à la notion d'observabilité d'un système empruntée à la théorie du contrôle, [Jacquez et Grief, 1985, Coron, 2007, Zuazua, 2009]

Cette question d'identifiabilité est donc liée à la structure du modèle support à l'identification, [Beck et Arnold, 1977]. Il existe des modèles pour lesquels il n'est pas possible d'identifier simultanément certains ensembles de paramètres. Le choix des paramètres inconnus  $u$  doit donc être motivé par les données disponibles  $m$  et par l'identifiabilité de  $u$  par rapport à  $f$ . La troncature modale et les méthodes de réduction de modèles sont des exemples éloquent de ce compromis, [Palomo Del Barrio *et al.*, 2000, Palomo Del Barrio, 2003, Girault et Petit, 2005]. D'un côté, l'identifiabilité du problème inverse initial (3.2) disparaît car  $\text{Im } f \subsetneq \mathcal{M}$ , et nous devons introduire un problème approché (3.3). Mais de l'autre côté, le nombre d'inconnues diminue, et donc l'identifiabilité (du problème approché) par rapport aux données augmente.

### 3.1.6 Problèmes inverses et erreurs

Mêlant instrumentation, modélisation, régularisation et optimisation, l'univers des problèmes inverses constitue sans aucun doute un domaine pluridisciplinaire riche. Il en agrège cependant les sources d'erreurs et d'incertitudes, si bien qu'il convient de rester vigilant lors de leur formulation et leur résolution, cf. figure 3.7, [Linz, 1984, Schock, 1986, Robert-Nicoud *et al.*, 2005].

L'instrumentation fait apparaître des perturbations sur les données disponibles, comme le bruit et le biais de mesure. La modélisation peut nécessiter la projection dans un espace de dimension finie, des schémas d'intégration numérique ou de discrétisation des opérateurs différentiels, et l'ajout d'incertitudes sur des paramètres supposés connus. La régularisation se

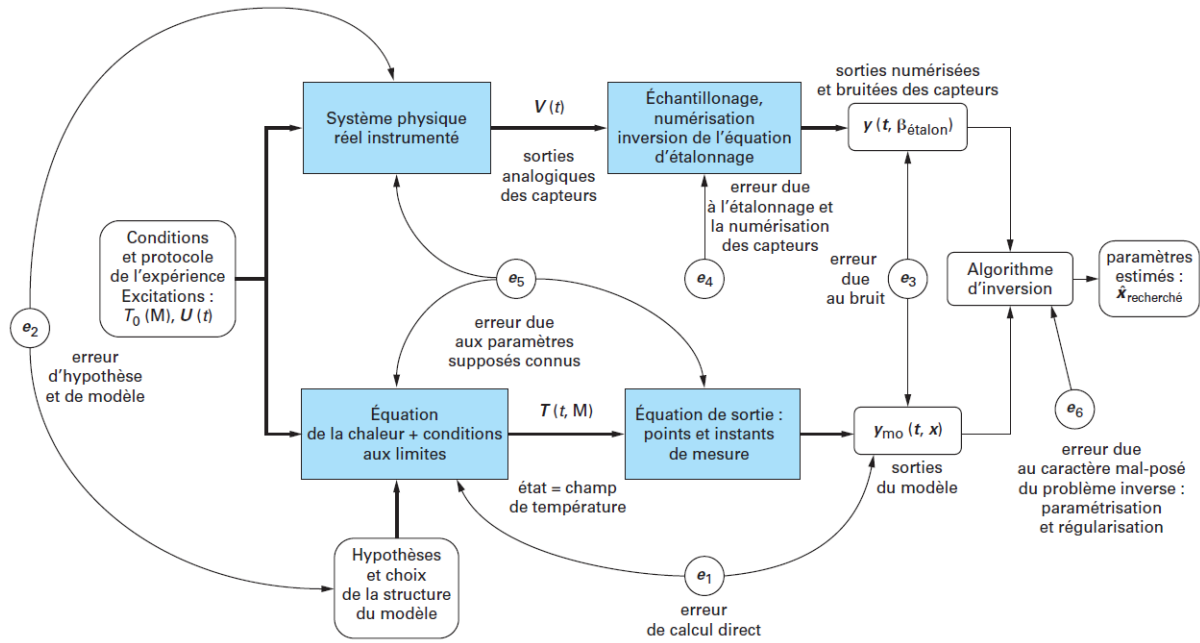


FIGURE 3.7 – Les différentes sources d'erreur dans la résolution d'un problème inverse. Crédits Techniques de l'ingénieur.

traduit par un compromis entre modélisation et identifiabilité. Enfin les méthodes d'optimisation résolvent souvent le problème de minimisation de manière approchée. L'utilisateur doit toujours garder à l'esprit ces différentes sources d'erreur tout au long du processus de formulation et de résolution d'un problème inverse.

### 3.2 Problèmes inverses d'identification de modèles appliqués à la thermique du bâtiment

Les modèles numériques et la simulation fournissent des outils pour appréhender le comportement énergétique complexe d'un bâtiment. Or, on constate un écart important, ou, du moins, non maîtrisé, entre les performances énergétiques prévues par simulation et les consommations réelles, les écarts étant souvent le résultat des incertitudes importantes au niveau des données d'entrée, [Norford *et al.*, 1994, Bordass *et al.*, 2004, Demanuele *et al.*, 2010, Audenaert *et al.*, 2011]. Les méthodes inverses et l'identification de modèles permettent dans certains cas d'améliorer la connaissance de ces données d'entrée en combinant un modèle numérique et des mesures recueillies *in situ*, [Abushakra, 1997, Güçyeter et Günaydin, 2012, Peuportier, 2013].

Dans le domaine de la thermique du bâtiment, ces méthodes peuvent être mises à contribution pour calibrer les modèles de simulation numérique en déterminant, à partir de mesures sur le terrain, des données d'entrée de ces modèles, [Pedrini *et al.*, 2002, Pan *et al.*, 2007]. Parmi ces données d'entrée, on peut distinguer les paramètres intrinsèques du modèle, liés à des caractéristiques thermiques ou géométriques du bâtiment, et les excitations ou sources, liées aux conditions d'usage ou météorologiques. Du point de vue du formalisme mathématique, les deux peuvent être traités conjointement.

L'identification de modèles est un cas particulier, dans lequel les paramètres intrinsèques d'un modèle sont recherchés alors que les sources sont connues. A l'échelle du composant, l'identification de paramètres a par exemple été employée pour la caractérisation des propriétés des enveloppes

par des techniques non destructives, *e.g.* [Åkerblom, 2008, Ribarić *et al.*, 2009, Luo *et al.*, 2011]. À l'échelle du bâtiment dans son ensemble, une série de travaux ont porté sur la construction de modèles simples pour la surveillance des performance au cours du temps [Westergen *et al.*, 1999, O'Sullivan *et al.*, 2004, Salsbury et Diamond, 2005, Salsbury, 2007].

La théorie du contrôle optimal, introduite par Lions dans les années 60, fournit un cadre mathématique général pour aborder cette classe de problèmes, [Lions, 1968]. L'estimation d'état ou de paramètres se traduit par un problème de minimisation d'une fonction coût mesurant l'écart entre les mesures issues des capteurs et la réponse du modèle, [Beck et Arnold, 1977, Tarantola, 2005]. La méthode adjointe issue de cette théorie permet de déterminer le gradient d'une fonctionnelle de coût comme solution d'un problème annexe : le problème adjoint. L'étude [Jarny *et al.*, 1991] montre comment la méthode de l'état adjoint permet d'aborder différents types de problèmes d'estimation d'état ou de paramètres en thermique. L'attrait de la méthode adjointe est lié à sa facilité de mise en œuvre : l'équation adjointe possède en général une structure similaire à l'équation d'état. Le problème inverse se ramène donc à un certain nombre de résolutions de problèmes bien posés implémentables avec les mêmes outils.

L'estimation de paramètres conduit en général à des problèmes non linéaires. Des algorithmes de minimisation *ad hoc* doivent être mis en œuvre pour garantir une bonne convergence et stabilité. Une démonstration de l'identifiabilité de la conductivité à partir d'observations en surface est fournie par [Kügler, 2003] dans le cas elliptique. L'article [Jia et Wang, 2004] donne une démonstration de l'existence d'une solution unique du problème d'identification de la conductivité dans l'équation de chaleur parabolique et propose un schéma d'approximation. Les travaux [Ito et Kunisch, 1990, Ito et Kunisch, 1996] introduisent une méthode de lagrangien augmenté pour résoudre des problèmes d'estimation de paramètres dans les systèmes elliptiques. La méthode combine les moindres carrés à une approche par fonction d'erreur<sup>8</sup>. Les publications [Keung et Zou, 1998b, Chen et Zou, 1999] généralisent la méthode dans le cas de paramètres discontinus. Dans leur article [Keung et Zou, 1998a], les auteurs traitent du problème de détermination de la conductivité dans le cas parabolique en utilisant une méthode de pénalisation pour la prise en compte des contraintes. La synthèse proposée par [Ben-yu et Zou, 2001] reprend ces travaux en introduisant des formulations lagrangiennes augmentées pour la résolution du problème dans le cas parabolique. Les travaux cités ne sont cependant pas directement transposables au cas qui nous intéresse ici, car ils supposent des observations distribuées dans la structure.

L'estimation simultanée de la conductivité et de la capacité thermique a fait l'objet d'un certain nombre de travaux dans le passé, *e.g.* [Alifanov et Artyukhin, 1975, Huang et Özisik, 1990, Li, 1999, Coles et Murio, 2001, Nilssen et Tai, 2005]. Dans [Sawaf et Özisik, 1995], les algorithmes du gradient conjugué et de Levenberg-Marquardt appliqués à la détermination de la conductivité et de la capacité thermique d'un matériau orthotrope sont comparés. Les travaux décrits dans [Huang et Özisik, 1991, Jarny *et al.*, 1991, Huang et Yan, 1995, Antonopoulos et Vrachopoulos, 1996] concernent la détermination de la capacité et de la conductivité dans une paroi unidimensionnelle en se fondant sur des mesures de température réparties à l'intérieur de la paroi. Les méthodes décrites sont donc par essence intrusives, puisqu'elles nécessiteraient de percer la paroi. D'autre part, les études [Kim *et al.*, 2003, Kim *et al.*, 2004] décrivent une méthode de détermination de la conductivité et de la capacité thermique d'une paroi, supposées dépendre de la température, à partir de mesures surfaciques uniquement. La méthode suppose que la paroi soit isolée sur une des faces<sup>9</sup> et reçoive un flux constant sur l'autre. Enfin, l'approche de [Yang, 1999] concerne l'identification d'une conductivité dépendante de la température à partir d'une mesure de température sur une des faces. L'ensemble de ces travaux suppose connu le chargement

8. En anglais, *equation error method*.

9. *i.e.* avec une condition de Neumann homogène (flux sortant nul).

thermique de la structure. Les travaux décrits dans [Lebedev *et al.*, 2006] présentent l'intérêt de ne pas supposer connus les chargements. Cependant, ils font l'hypothèse de chargements convectifs uniquement et supposent connus les coefficients d'échange associés.

En parallèle, une littérature très vaste concerne les problèmes inverses de détermination de sources inconnues, *e.g.* [Alifanov, 1974, Artyukhin et Rumyantsev, 1980, Murio, 1988, Özisik et Orlande, 2000, Palomo Del Barrio, 2003, Narayanan et Zabaras, 2004]. Là aussi, le formalisme issu du contrôle optimal et l'utilisation de la méthode adjointe permettent de construire des algorithmes de résolution efficaces et faciles à mettre en œuvre. Elle a été appliquée avec succès dans [Bourquin et Nassiopoulos, 2006] et [Bourquin et Nassiopoulos, 2011] à la détermination simultanée de sources surfaciques inconnues et de la condition initiale. Ces travaux montrent que la minimisation de la fonctionnelle quadratique dans un espace fonctionnel de Sobolev permet de résoudre le problème de convergence à l'instant final de la période d'observation que présente la méthode adjointe usuelle. L'approche présentée se généralise au cas tridimensionnel moyennant quelques adaptations des calculs numériques [Nassiopoulos, 2008].

L'application de cette approche inverse au secteur du bâtiment remonte aux années 1980, [Rabl, 1988]. Des travaux de réduction de modèle ont permis de mettre en évidence l'importance de certains coefficients, comme les indices de performance du bâtiment, dans l'évaluation des consommations énergétiques, [Ghiaus, 2006, Karatasou *et al.*, 2006, Mejri *et al.*, 2011]. Dans le contexte de l'identification de paramètres physiques, nous pouvons citer les études [Jiménez *et al.*, 2008, Jiménez *et al.*, 2009] qui concernent l'identification des coefficients de transferts thermiques, [Güçyeter et Günaydin, 2012] qui analyse les différents scénarios de rénovation en termes de gains d'énergie, ou encore [Park et Lee, 1998, Park et Jung, 2001] qui proposent une méthode pour identifier les conditions aux limites des échanges convectifs dans une pièce. La reconstruction simultanée de flux et de paramètres physiques du bâtiment est étudiée dans les travaux [Li, 1999, Coles et Murio, 2001, Larbi Youcef *et al.*, 2008, Nassiopoulos et Bourquin, 2013]. Enfin, dans une démarche différente, [Madsen et Holst, 1995, Bacher et Madsen, 2011] proposent d'identifier, parmi une famille de modèles de bâtiment, celui qui représente le mieux les données mesurées.

Dans le cadre des audits énergétiques pour la réhabilitation de bâtiments existants, la communauté scientifique s'accorde sur le fait que l'identification de paramètres, et donc les problèmes inverses, est un outil indispensable permettant de choisir un scénario de rénovation adapté au bien étudié, [Abushakra, 1997, Pedrini *et al.*, 2002, Pan *et al.*, 2007, Güçyeter et Günaydin, 2012, Nassiopoulos *et al.*, 2014c]. Notre approche consiste à identifier un nombre important de variables, dont la majorité sont des paramètres physiques intrinsèques, afin de caractériser la performance énergétique du bâtiment, et plus encore de discriminer la répartition des flux thermiques par famille.

### 3.2.1 Problème inverse d'identification de paramètres

L'application au cas d'étude en section 2.7 nous a permis de sélectionner un jeu de paramètres influents devant faire l'objet d'une identification afin de réduire leur incertitude. Nous décrivons maintenant le cœur de notre méthode d'audit, *i.e.* la procédure d'identification. Pour cela, nous reprenons la forme générique (3.25) du modèle thermique. Les différents termes du modèle ont déjà été introduits dans la section 2.6. Nous les rappelons dans le tableau 3.1.



$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz} + \bar{\mathcal{A}}_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^0 + \mathcal{C}_{sz}^L) + \mathcal{Q}_z + \mathcal{W}_z + \Phi_z^b + \Phi_z^d \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \mathcal{P}_z - \mathcal{W}_z \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a) \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00} + \mathcal{R}_{sp}^{0L}) + \mathcal{R}_s^{0\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^0 + \bar{\mathcal{C}}_s^0 + \underline{\mathcal{C}}_s^0 + \Phi_s^{b0} + \Phi_s^{d0} \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0} + \mathcal{R}_{sp}^{LL}) + \mathcal{R}_s^{L\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^L + \bar{\mathcal{C}}_s^L + \underline{\mathcal{C}}_s^L + \Phi_s^{bL} + \Phi_s^{dL} \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Notre problème d'identification de paramètres consiste à chercher :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z, P_z\}_{s;z} \quad (3.26)$$

qui minimise l'écart entre la réponse du modèle et les données fournies par les capteurs. Nous supposons que le système d'instrumentation fournit les mesures des températures ambiantes, des températures des émetteurs, des températures des surfaces de certaines parois, et des puissances des émetteurs et/ou du système central de génération de chaleur.

Notez que nous nous choisissons l'inconnue  $\bar{q}_z$ , qui est le débit de renouvellement d'air moyen :

$$\bar{q}_z = \frac{1}{t_a} \int_0^{t_a} q_z dt \quad (3.27)$$

En effet, nos études d'identifiabilité du modèle ont montré que seul le débit moyen pouvait être identifié avec l'approche adoptée ici. Nous revenons néanmoins sur ce point au chapitre 5, avec l'introduction d'un formalisme amélioré qui permettrait de mieux identifier cette inconnue.

### 3.2.2 Adimensionnement

Les paramètres physiques apparaissant dans les modèles de bâtiment sont hétérogènes. Leur ordre de grandeur peut varier de  $10^{-3}$  à  $10^6$ . Cela pose des problèmes numériques lorsque nous souhaitons faire de l'identification de paramètres. Le processus d'inversion est alors perturbé par un mauvais conditionnement des matrices des systèmes linéaires et donc une amplification de l'erreur numérique, [Ciarlet, 2006]. Ces problèmes se manifestent par le fait que certains paramètres ne sont pas identifiables malgré leur sensibilité *a priori* importante. Par ailleurs, avec de telles variations d'ordre de grandeur, même les méthodes prévues à cet effet échouent, comme le gradient conjugué à pas vectoriel, [Kuate et al., 2012].

Les techniques d'adimensionnement ont déjà été appliquées aux modèles thermiques de bâtiments, cf. [Kuate et al., 2012, Nassiopoulos et Bourquin, 2013, Nassiopoulos et al., 2014c]. Ici, nous simplifions cette approche en n'appliquant l'adimensionnement uniquement sur les paramètres inconnus<sup>10</sup> et non pas sur le modèle et les variables d'état. En effet, l'ordre de

10. Dans le contexte considéré, cette technique c'est avérée bien plus efficace que l'adimensionnement classique.



Termes	Définition
$\mathcal{A}_{rz} = c_a R_{zr} (T_r - T_z)$	Échanges aérauliques interzones
$\overline{\mathcal{A}}_z = c_a q_z (T_a - T_z)$	Infiltrations d'air extérieur
$\mathcal{C}_{sz}^0 = h_{sz}^0 (\theta_s(0; t) - T_z)$ $\mathcal{C}_{sz}^L = h_{sz}^L (\theta_s(L_s; t) - T_z)$	Convection entre les surfaces et l'air intérieur
$\overline{\mathcal{C}}_s^0 = \overline{h}_s^0 (T_a - \theta_s(0; t))$ $\overline{\mathcal{C}}_s^L = \overline{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t))$	Convection entre les surfaces et l'air ambiant extérieur
$\mathcal{C}_s^0 = \underline{h}_s^0 (T_g - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{C}_s^L = \underline{h}_s^L (T_g - \theta_s(L_s; t))$	Conduction entre les surfaces et le sol
$\mathcal{Q}_z = \sum_i \mathcal{Q}_z^i$	Apports internes relatif à l'usage
$\mathcal{R}_{sp}^{00} = \alpha_{sp}^{00} (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{0L} = \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{L0} = \alpha_{sp}^{L0} (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{LL} = \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces adjacentes
$\mathcal{R}_s^{0\infty} = \beta_s^0 (T^\infty - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_s^{L\infty} = \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre les surfaces et le ciel
$\mathcal{W}_z = \lambda_z (\Theta_z - T_z)$	Gains convectifs des émetteurs
$\Phi_z^b = A_z \tau_z \gamma_z^b \phi^b$ $\Phi_z^d = A_z \tau_z \gamma_z^d \phi^d$ $\Phi_s^{b0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0b} \phi^b$ $\Phi_s^{d0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0d} \phi^d$ $\Phi_s^{bL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Lb} \phi^b$ $\Phi_s^{dL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Ld} \phi^d$	Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil à travers la fenêtre Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil

TABLE 3.1 – Rappel des flux du modèle

grandeur des paramètres rencontrés dans le modèle (3.25) est connu *a priori*. Nous savons par exemple que les capacités thermiques des parois  $\rho c_s$  sont de l'ordre de  $10^6$ , tandis que les conductivités thermiques des parois  $k_s$  sont de l'ordre de  $10^{-1}$ . Nous choisissons alors d'utiliser un *changement d'échelle*, non pas dans le modèle, mais sur le vecteur d'inconnues  $u$ . Pour cela, nous écrivons chaque paramètre  $p$  comme :

$$p = \overset{\bullet}{p} \overset{\circ}{p} \quad (3.28)$$

avec  $\overset{\bullet}{p}$  l'ordre de grandeur du paramètre, et  $\overset{\circ}{p}$  le quotient de la division  $p/\overset{\bullet}{p}$ . De cette manière, l'ordre de grandeur  $\overset{\bullet}{p}$  est une connaissance *a priori*, et nous cherchons à identifier  $\overset{\circ}{p}$  qui est de l'ordre de l'unité. Cela nous permet d'avoir un jeu de paramètres inconnus dont toutes les composantes sont de l'ordre de l'unité. Par exemple, pour  $\rho c = 2,03 \cdot 10^6$ , nous posons  $\overset{\bullet}{\rho c} = 10^6$ , et nous cherchons à calculer  $\overset{\circ}{\rho c} = 2,03$ .

Afin de ne pas surcharger cet exposé en notations, nous décrivons la formulation ainsi que la méthode de résolution du problème inverse avec les notations classiques. Les résultats sont obtenus sur  $\overset{\circ}{p}$  la partie unitaire des paramètres en utilisant ce changement d'échelle, et donc en connaissant  $\overset{\bullet}{p}$ , mais les résultats affichés concernent toujours le paramètre physique  $p = \overset{\circ}{p} \overset{\bullet}{p}$ .

Dans nos travaux, nous utilisons les ordres de grandeur décrits dans le tableau 3.2.

Paramètre $p$	Unité	Ordre de grandeur $\dot{p}$
$d_z$	J/K	$10^3$
$\eta_z$	-	1
$k_s$	J/K.m.s	$10^{-1}$
$\lambda_z$	J/K.s	10
$q_z$	m <sup>3</sup> /s	$10^{-3}$
$\rho c_z$	J/K.m <sup>3</sup>	$10^6$
$\tau_z$	-	1

TABLE 3.2 – Ordres de grandeur utilisés pour les paramètres à identifier.

### 3.2.3 Formulation du problème d'optimisation

Nous commençons par introduire quelques notations. Les espaces  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{U}$  désignent respectivement les espaces des paramètres connus et inconnus, et  $\mathcal{C}$  l'espace des contraintes sur les inconnues. Nous notons  $\mathcal{S}$  l'espace des états thermiques vérifiant le modèle (2.45), et  $\mathcal{M}$  l'espace des observations partielles de l'état thermique, issues de l'instrumentation.

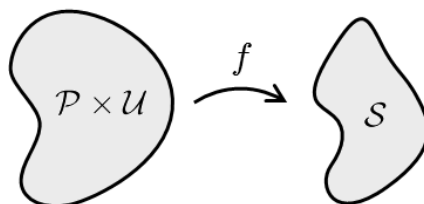


FIGURE 3.8 – Illustration de l'action de l'opérateur  $f$ .

Nous introduisons l'opérateur  $f$  qui évalue l'état thermique, en tout point de l'espace-temps, pour un couple de paramètres  $(p, u)$  donné, cf. figure 3.8 :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P} \times \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (p, u) & \longmapsto & f(p, u) = \{\theta_s(x, t), T_z(t), W_z(t)\}_{s,z}(p, u), \quad \forall (x, t) \end{cases} \quad (3.29)$$

*Remarque.* Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous ne faisons pas apparaître la dépendance de l'opérateur  $f$  par rapport aux paramètres connus  $p$ . Nous utilisons alors l'abus de notation  $f(u)$  pour désigner l'évaluation de l'état thermique. La notation  $f(p, u)$  sera principalement utile au chapitre 4.  $\square$

Soient  $O \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$  l'opérateur linéaire d'observation, qui nous permet de passer de l'espace des états thermiques à celui des observations, et  $\hat{f} = O \circ f$  l'application composée de l'évaluation de l'état thermique  $f$  par l'opérateur d'observation  $O$  :

$$\hat{f} : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{S} \xrightarrow{O} \mathcal{M} \quad (3.30)$$

Cet opérateur d'observation modélise le processus de mesure de l'état thermique tel que défini par le système d'instrumentation installé. Si par exemple ce dernier est composé de capteurs

de température de surface des parois, l'évaluation de  $\hat{f}$  sera l'ensemble des fonctions du temps correspondant à l'évolution de la température aux points ( $x = 0$ ) et/ou ( $x = L_s$ ) des parois instrumentées. Dans la méthode d'audit que nous décrivons ensuite, nous considérerons en général une instrumentation fournissant comme données les températures des zones  $T_z$ , les températures des émetteurs  $\Theta_z$ , et les températures des surfaces  $\theta_s$  aux frontières du domaine (de part et d'autre), cf. figure 3.9.

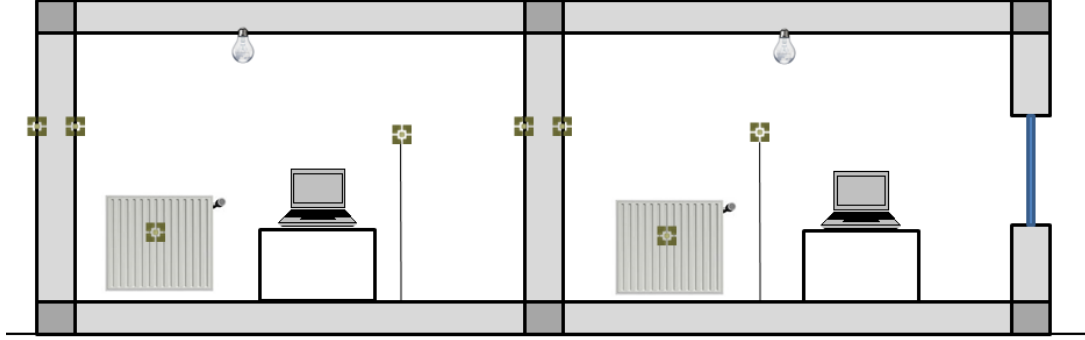


FIGURE 3.9 – Exemple d'instrumentation d'un cas d'étude composé de 2 pièces. La paroi centrale ainsi qu'une paroi donnant sur l'extérieur sont instrumentées. Chaque zone et chaque émetteur sont également instrumentés.

Pour prendre en compte les connaissances *a priori*, nous ajoutons des contraintes sur les inconnues par pénalisation. De manière générale, le type de contraintes que nous considérons s'écrit :

$$Gu = c \quad (3.31)$$

avec  $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$  un opérateur linéaire et  $c \in \mathcal{C}$  une contrainte dans l'espace des contraintes. Ce terme va notamment nous permettre de réduire le nombre de capteurs nécessaires. *A minima*, cela concerne les propriétés thermiques des parois similaires, comme c'est le cas pour les parois donnant sur l'extérieur.

Maintenant que les différents espaces sont introduits<sup>11</sup>, nous pouvons formuler le problème inverse. Soit  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu - c\|_{\mathcal{C}}^2 \quad (3.32)$$

avec  $u^0$  une estimation *a priori*. Le premier terme est le terme de fidélité, et le second est celui de la régularisation de Tikhonov de paramètre  $\epsilon > 0$ , qui rend le problème bien posé, cf. section 3.1.4. Le dernier terme permet la pénalisation des contraintes, avec  $\mu$  un coefficient ajustant la sévérité des contraintes. Le problème inverse consiste à trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \quad (3.33)$$

Le problème (3.33) est un problème d'optimisation non linéaire. Pour le résoudre, nous choisissons d'utiliser l'algorithme itératif de Levenberg-Marquardt, [Moré, 1977].

### 3.2.4 Résolution par la méthode de Levenberg-Marquardt

Les méthodes de type Levenberg-Marquardt utilisent une technique de linéarisations successives dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation non linéaires, [Hanke, 2010].

11. De manière générale, nous pouvons définir une norme sur chacun de ces espaces.

Elles proposent une démarche située entre les méthodes de descente de gradient et de Gauss-Newton (*i.e.* Newton approché), [Björck, 1996, Madsen *et al.*, 2004]. Ces outils remontent aux travaux de Levenberg, popularisés plus tard par Marquardt [Levenberg, 1944, Marquardt, 1963]. De nombreuses études utilisent ces méthodes pour résoudre des problèmes inverses non linéaires, *e.g.* [Jarny *et al.*, 1991, Huang et Yan, 1995, Özisik et Orlande, 2000, Jin, 2010, Liu, 2011, Ghazizadeh *et al.*, 2012, Bal *et al.*, 2013, Nassiopoulou et Bourquin, 2013].

Défini par (3.29), l'opérateur  $f$  est Fréchet-différentiable, avec  $f' : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathcal{P} \times \mathcal{U}; \mathcal{M})$  la différentielle de  $f$ , qui s'écrit, [Cartan, 1967] :

$$f'(p, u)(\delta p, \delta u) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p, u) \delta p_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(p, u) \delta u_i \quad (3.34)$$

avec  $\delta p \in \mathcal{P}$  et  $\delta u = \{\delta \rho c_s, \dots, \delta d_z\} \in \mathcal{U}$ .

*Remarque.* De la même manière que pour l'opérateur direct  $f$ , et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous ne faisons pas apparaître la dépendance de la différentielle  $f'(p, u)$  par rapport aux paramètres connus  $p$ , et nous écrivons  $f'(u)$ . De plus, dans ce chapitre, les paramètres connus  $p \in \mathcal{P}$  ne changent pas, ce qui signifie que  $\delta p \equiv 0$ . Pour alléger les équations, nous nous autorisons l'abus de notation :

$$f'(u) = f'(u)(0, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{M})$$

La notation complète  $f'(p, u)(\delta p, \delta u)$  sera principalement utile au chapitre 4. □

L'opérateur linéaire  $f'(u)$  s'obtient en calculant la dérivée de Gâteaux de  $f$  en  $u$  dans la direction  $\delta u$ . Dans le cas étudié en section 3.3, les inconnues du problème inverse sont :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z, P_z\}_{s;z} \in \mathcal{U} \quad (3.35)$$

L'opérateur  $f'(u)$  est alors la solution du modèle (3.36) d'inconnues  $\{\delta \theta_s, \delta T_z, \delta W_z\}_{s;z}$ , appelé *modèle de sensibilité*, ou encore *modèle linéaire tangent* par rapport à  $u$ . Les différents flux apparaissant dans le modèle (3.36) sont décrits dans le tableau 3.3.

Par linéarité de l'opérateur d'observation  $O$ , la différentielle de  $\hat{f}$  en  $u$  s'écrit simplement :

$$\hat{f}'(u) = O \circ f'(u) \quad (3.37)$$

Le développement de Taylor au premier ordre nous donne donc :

$$\hat{f}(u + \delta u) = \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u + o(\|\delta u\|_{\mathcal{U}}) \quad (3.38)$$

Maintenant que le modèle linéarisé est défini, nous pouvons, conformément à la méthode de Levenberg-Marquardt, introduire une nouvelle fonctionnelle autour du point de linéarisation  $u$  :

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u + \delta u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu + G\delta u - c\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (3.39)$$

avec  $\nu$  le paramètre d'amortissement<sup>12</sup> de Marquardt, qui permet de définir un voisinage de confiance, [Nielsen, 1999, Hanke, 2010].

Le problème inverse linéaire sur le modèle linéarisé consiste à trouver  $\delta u \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\delta u = \arg \min_{\delta v \in \mathcal{U}} \tilde{J}_u(\delta v) \quad (3.40)$$

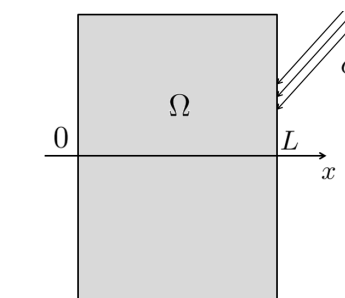
12. En anglais, *damping parameter*.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 C_z \frac{d\delta T_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \delta \mathcal{A}_{rz} - c_a q_z \delta T_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\delta \mathcal{C}_{sz}^0 + \delta \mathcal{C}_{sz}^L) + \delta \mathcal{W}_z + c_a \delta q_z (T_a - T_z) \\
 \quad + \delta \lambda_z (\Theta_z - T_z) + A_z \delta \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) \\
 \delta T_z(t=0) = 0 \\
 d_z \frac{d\delta \Theta_z}{dt} = -\delta \mathcal{W}_z + \delta \lambda_z (T_z - \Theta_z) + \delta \eta_z P_z + \eta_z \delta P_z - \delta d_z \frac{d\Theta_z}{dt} \\
 \delta \Theta_z(t=0) = 0 \\
 S_s \rho c_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x} \right) = -S_s \delta \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) \\
 -k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \mathcal{R}_{sp}^{00} + \delta \mathcal{R}_{sp}^{0L}) - \sum_{z=1}^{N_z} \delta \mathcal{C}_{sz}^0 - (\beta_s^0 + \bar{h}_s^0 + \underline{h}_s^0) \delta \theta_s(0; t) \\
 \quad + \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) \\
 k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \mathcal{R}_{sp}^{L0} + \delta \mathcal{R}_{sp}^{LL}) - \sum_{z=1}^{N_z} \delta \mathcal{C}_{sz}^L - (\beta_s^L + \bar{h}_s^L + \underline{h}_s^L) \delta \theta_s(L_s; t) \\
 \quad - \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) \\
 \delta \theta_s(x, t=0) \equiv 0
 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Terme	Définition
$\delta \mathcal{A}_{rz} = c_a R_{zr} (\delta T_r - \delta T_z)$	Échanges aérauliques interzones
$\delta \mathcal{C}_{sz}^0 = h_{sz}^0 (\delta \theta_s(0; t) - \delta T_z)$ $\delta \mathcal{C}_{sz}^L = h_{sz}^L (\delta \theta_s(L_s; t) - \delta T_z)$	Convection entre les surfaces et l'air intérieur
$\delta \mathcal{R}_{sp}^{00} = \alpha_{sp}^{00} (\delta \theta_p(0; t) - \delta \theta_s(0; t))$ $\delta \mathcal{R}_{sp}^{0L} = \alpha_{sp}^{0L} (\delta \theta_p(L_p; t) - \delta \theta_s(0; t))$ $\delta \mathcal{R}_{sp}^{L0} = \alpha_{sp}^{L0} (\delta \theta_p(0; t) - \delta \theta_s(L_s; t))$ $\delta \mathcal{R}_{sp}^{LL} = \alpha_{sp}^{LL} (\delta \theta_p(L_p; t) - \delta \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces adjacentes
$\delta \mathcal{W}_z = \lambda_z (\delta \Theta_z - \delta T_z)$	Gains convectifs des émetteurs

TABLE 3.3 – Définition des flux du modèle de sensibilité

**Exemple 3.2.1.** Illustrons l'approche des méthodes de type Levenberg-Marquardt sur un cas d'étude. Soit  $\theta$  la solution de l'équation de la chaleur dans le domaine  $\Omega = [0; L]$  avec une température initiale identiquement nulle et un horizon temporel  $t_a$  :



$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 & x \in \Omega, t \in [0, t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 & t \in [0, t_a] \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L, t) = \phi & t \in [0, t_a] \\ \theta(x, 0) = 0 & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Nous étudions le problème inverse non linéaire d'identification de la capacité thermique  $\rho c$  à partir de la mesure de la température de surface  $\theta(0; t)$ . Soit  $f : \rho c \mapsto \theta_{\rho c}(0; t)$ , et  $m = \theta^d(0; t)$  les mesures engendrées par le modèle. Nous cherchons :

$$\rho c^* = \arg \min_{\rho c} \frac{1}{2} \|f(\rho c) - m\|_{L^2(0; t_a)}^2 + \frac{\epsilon}{2} (\rho c - \rho c^0)^2 \quad (3.42)$$

Pour résoudre le problème de minimisation (3.42), nous utilisons l'approche itérative de Levenberg-Marquardt qui consiste donc à introduire, à chaque itération, un problème inverse linéaire :

$$\delta \rho c^* = \arg \min_{\delta \rho c} \tilde{J}_{\rho c}(\delta \rho c) \quad (3.43)$$

avec  $\tilde{J}_{\rho c}(\delta \rho c)$  une nouvelle fonctionnelle définie au point de linéarisation  $\rho c$  par :

$$\tilde{J}_{\rho c}(\delta \rho c) = \frac{1}{2} \|f(\rho c) + f'(\rho c)\delta \rho c - m\|_{L^2(0; t_a)}^2 + \frac{\epsilon}{2} (\rho c + \delta \rho c - \rho c^0)^2 + \frac{\nu}{2} \delta \rho c^2 \quad (3.44)$$

Nous résolvons le problème (3.43) par le gradient conjugué. La valeur cible est  $\rho c = 2,07.10^6$ , et nous initialisons l'algorithme à  $\rho c^0 = 1,3.10^6$ . Le calcul nous donne le résultat  $\rho c^* = 2,07.10^6$ . Il a nécessité la résolution de deux problèmes inverses linéaires. Sur la figure 3.10 à gauche, nous traçons la première étape. Le point de linéarisation est l'initialisation de l'algorithme  $\rho c^0$ , et nous calculons le minimum  $\delta \rho c^*$  de la fonctionnelle quadratique affine  $\tilde{J}_{\rho c^0}$  définissant le premier problème inverse linéaire :  $\rho c^1 = \rho c^0 + \delta \rho c^*$ . Nous pouvons remarquer que la fonctionnelle  $\tilde{J}_{\rho c^0}$  est bien tangente à  $J$  au point  $\rho c^0$ . Le point  $\rho c^1$  sert ensuite de point de linéarisation pour la seconde étape, présentée sur la figure 3.10 à droite. Cette fois-ci nous calculons le minimum  $\delta \rho c^*$  de la fonctionnelle quadratique affine  $\tilde{J}_{\rho c^1}$  définissant le second problème inverse linéaire :  $\rho c^2 = \rho c^1 + \delta \rho c^*$ . Ici encore,  $\tilde{J}_{\rho c^1}$  est tangente à  $J$  en  $\rho c^1$ . L'algorithme s'arrête sur un critère d'arrêt, et  $\rho c^* = \rho c^2$ .  $\diamond$

### 3.2.5 Calcul du gradient par l'état adjoint

Il existe différentes méthodes pour résoudre le problème de minimisation (3.40). Nous choisissons l'algorithme du *gradient conjugué*, [Hestenes et Stiefel, 1952, Ciarlet, 2006]. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une méthode de descente qui nécessite le calcul du gradient de la fonctionnelle (3.39).

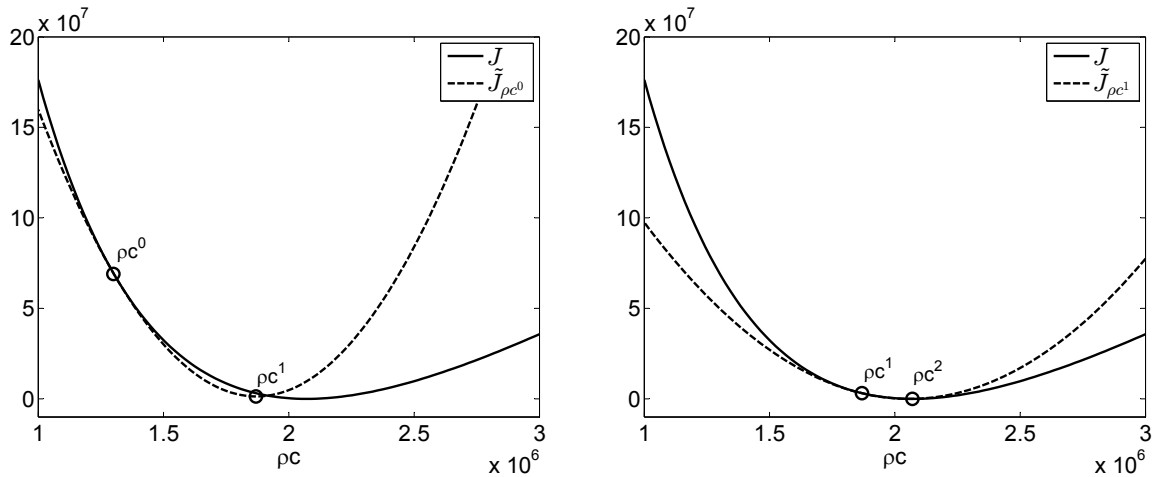


FIGURE 3.10 – Méthode de Levenberg-Marquardt pour un problème inverse non linéaire d'identification de la capacité thermique  $\rho c$ . Les courbes sont calculées à chaque itération.

La fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  est une forme quadratique affine<sup>13</sup> et Fréchet-différentiable, de différentielle  $\tilde{J}'_u(\delta u) \in \mathcal{U}'$  :

$$\tilde{J}_u(\delta u + \delta \tilde{u}) = \tilde{J}_u(\delta u) + \tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} + o(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}) \quad (3.45)$$

$$= \tilde{J}_u(\delta u) + \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} + o(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}) \quad (3.46)$$

avec  $\delta \tilde{u} \in \mathcal{U}$ . Remarquez que le membre de droite de (3.46) n'a de sens que si  $\mathcal{U}$  est un espace de Hilbert, donc possédant un produit scalaire. Par ailleurs, la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  est strictement convexe et coercive, elle possède donc un unique minimum caractérisé par la condition nécessaire du premier ordre<sup>14</sup>, [Ekeland et Témam, 1999] :

$$\tilde{J}'_u(\delta u) = 0 \iff \forall \delta \tilde{u} \in \mathcal{U}, \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} = 0 \quad (3.47)$$

Le calcul du gradient  $\nabla \tilde{J}_u(\delta u)$ , défini par (3.46), est trivial pour la plupart des termes de la fonctionnelle (3.39), excepté le terme de fidélité :

$$\frac{1}{2} \|\hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - m\|_{\mathcal{M}}^2$$

Pour calculer ce gradient, nous allons utiliser la méthode de l'état adjoint. Initialement développée dans le domaine du contrôle, elle consiste à introduire et calculer l'opérateur adjoint de  $f'(u)$ , [Lions, 1968, Plessix, 2006, Brezis, 2008].

La littérature concernant cette méthode est très riche, et ne se limite pas aux problèmes inverses. En effet, de nombreuses études se rapportant à un problème d'optimisation sur un modèle physique utilisent l'approche de l'état adjoint, *e.g.* [Norton, 1999, Prud'homme et Jasmin, 2003, Haghighi et al., 2009, Hào et al., 2009, Hasanov, 2011, Ma et al., 2012]. Les études [Aude et al., 2000, Nassiopoulou et al., 2014b, Nassiopoulou et al., 2014c], entre autres, l'appliquent au domaine de la modélisation du bâtiment.

La méthode de l'état adjoint devient intéressante dès que le nombre d'inconnues est important, [Dorai et Tortorelli, 1997, Chavent, 2009]. Contrairement aux méthodes de type différences finies,

13. *i.e.* une application affine composée par une forme quadratique.

14. Système d'optimalité d'Euler.

elle calcule le gradient en ne résolvant que trois modèles, le modèle direct (3.25), le linéaire tangent (3.36) et l'adjoint (3.48), tous les trois de nature et de structure comparables.

Reprenons l'équation (3.45) ; des manipulations élémentaires nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} &= \tilde{J}_u(\delta u + \delta \tilde{u}) - \tilde{J}_u(\delta u) + o(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}) \\
 &= \langle \hat{f}'(u) \delta \tilde{u}; \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m \rangle_{\mathcal{M}} + \epsilon \langle \delta \tilde{u}; u + \delta u - u^0 \rangle_{\mathcal{U}} \\
 &\quad + \mu \langle G \delta \tilde{u}; G(u + \delta u) - c \rangle_{\mathcal{C}} + \nu \langle \delta \tilde{u}; \delta u \rangle_{\mathcal{U}} \\
 &= \langle \delta \tilde{u}; \hat{f}'(u)^* (\hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m) \rangle_{\mathcal{U}} + \epsilon \langle \delta \tilde{u}; u + \delta u - u^0 \rangle_{\mathcal{U}} \\
 &\quad + \mu \langle \delta \tilde{u}; G^T (Gu + G\delta u - c) \rangle_{\mathcal{U}} + \nu \langle \delta \tilde{u}; \delta u \rangle_{\mathcal{U}}
 \end{aligned}$$

avec  $\hat{f}'(u)^*$  l'adjoint de  $\hat{f}'(u)$  et  $G^T$  la transposée de  $G$ , [Brezis, 2008]. La méthode de l'état adjoint nous fournit alors une expression pour l'adjoint  $\hat{f}'(u)^*$  du terme de fidélité. Cet opérateur est la solution du *modèle adjoint* au modèle thermique linéaire<sup>15</sup> (3.36), écrit en (3.48).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 -C_z \frac{d\delta T_z^*}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \delta \mathcal{A}_{rz}^* - c_a q_z \delta T_z^* + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\delta \mathcal{C}_{sz}^{0*} + \delta \mathcal{C}_{sz}^{L*}) + \delta \mathcal{W}_z^* + (T_z + \delta T_z - T_z^d) \\
 \delta T_z^*(t = t_a) = 0
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 -d_z \frac{d\delta \Theta_z^*}{dt} = -\delta \mathcal{W}_z^* + (\Theta_z + \delta \Theta_z - \Theta_z^d) \\
 \delta \Theta_z^*(t = t_a) = 0
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 -S_s \rho c_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\
 -k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \mathcal{R}_{sp}^{00*} + \delta \mathcal{R}_{sp}^{0L*}) - \sum_{z=1}^{N_z} \delta \mathcal{C}_{sz}^{0*} - (\beta_s^0 + \bar{h}_s^0 + \underline{h}_s^0) \delta \theta_s^*(0; t) + \varpi_s^0 \\
 k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \mathcal{R}_{sp}^{L0*} + \delta \mathcal{R}_{sp}^{LL*}) - \sum_{z=1}^{N_z} \delta \mathcal{C}_{sz}^{L*} - (\beta_s^L + \bar{h}_s^L + \underline{h}_s^L) \delta \theta_s^*(L_s; t) + \varpi_s^{L_s} \\
 \delta \theta_s^*(x, t = t_a) \equiv 0
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (3.48)$$

avec  $\varpi_s^x$  la fonction définie pour  $x \in \{0; L_s\}$  par :

$$\varpi_s^x = \begin{cases} \theta_s(x; t) + \delta \theta_s(x; t) - \theta_s^d(x; t), & \text{si la paroi } s \text{ est instrumentée} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.49)$$

Les différents flux apparaissant dans le modèle (3.48) sont décrits dans le tableau 3.4. Le modèle (3.48) a la particularité d'être *rétrograde* en temps, puisqu'il est équipé d'une condition finale. De plus, les seules sources des équations sont les écarts entre la réponse du modèle aux points de mesure et les observations.

Finalement, le gradient de la fonctionnelle (3.39) par rapport aux différentes composantes

15. L'opérateur adjoint n'est défini que pour les opérateurs linéaires.



Terme	Définition
$\delta\mathcal{A}_{rz}^* = c_a R_{zr} (\delta T_r^* - \delta T_z^*)$	Échanges aérauliques interzones
$\delta\mathcal{C}_{sz}^{0*} = h_{sz}^0 (\delta\theta_s^*(0; t) - \delta T_z^*)$ $\delta\mathcal{C}_{sz}^{L*} = h_{sz}^L (\delta\theta_s^*(L_s; t) - \delta T_z^*)$	Convection entre les surfaces et l'air intérieur
$\delta\mathcal{R}_{sp}^{00*} = \alpha_{sp}^{00} (\delta\theta_p^*(0; t) - \delta\theta_s^*(0; t))$ $\delta\mathcal{R}_{sp}^{0L*} = \alpha_{sp}^{0L} (\delta\theta_p^*(L_p; t) - \delta\theta_s^*(0; t))$ $\delta\mathcal{R}_{sp}^{L0*} = \alpha_{sp}^{L0} (\delta\theta_p^*(0; t) - \delta\theta_s^*(L_s; t))$ $\delta\mathcal{R}_{sp}^{LL*} = \alpha_{sp}^{LL} (\delta\theta_p^*(L_p; t) - \delta\theta_s^*(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces adjacentes
$\delta\mathcal{W}_z^* = \lambda_z (\delta\Theta_z^* - \delta T_z^*)$	Gains convectifs des émetteurs

TABLE 3.4 – Définition des flux du modèle adjoint

du vecteur  $u$  s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{\rho} c_s \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{\rho} c_s \left[ - \iint_{Q_s} S_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \delta \theta_s^* + \epsilon (\rho c_s + \delta \rho c_s - \rho c_s^0) + \mu \delta \rho c_s^C + \nu \delta \rho c_s \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{k}_s \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{k}_s \left[ - \iint_{Q_s} S_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x} + \epsilon (k_s + \delta k_s - k_s^0) + \mu \delta k_s^C + \nu \delta k_s \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{\eta}_z \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{\eta}_z \left[ \int_0^{t_a} P_z \delta \Theta_z^* + \epsilon (\eta_z + \delta \eta_z - \eta_z^0) + \nu \delta \eta_z \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{q}_z \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{q}_z \left[ \int_0^{t_a} c_a (T_a - T_z) \delta T_z^* + \epsilon (\bar{q}_z + \delta \bar{q}_z - \bar{q}_z^0) + \nu \delta \bar{q}_z \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{\tau}_z \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{\tau}_z \left[ \int_0^{t_a} A_z (\gamma_z^b \phi_z^b + \gamma_z^d \phi_z^d) \delta T_z^* + \epsilon (\tau_z + \delta \tau_z - \tau_z^0) + \nu \delta \tau_z \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{\lambda}_z \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{\lambda}_z \left[ \int_0^{t_a} (\Theta_z - T_z) (\delta T_z^* - \delta \Theta_z^*) + \epsilon (\lambda_z + \delta \lambda_z - \lambda_z^0) + \nu \delta \lambda_z \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{d}_z \rangle_{\mathbb{R}} &= \delta \tilde{d}_z \left[ - \int_0^{t_a} \frac{d\Theta_z}{dt} \delta \Theta_z^* + \epsilon (d_z + \delta d_z - d_z^0) + \nu \delta d_z \right] \\
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{P}_z \rangle_{L^2(0; t_a)} &= \int_0^{t_a} \delta \tilde{P}_z [\eta_z \delta \Theta_z^* + \epsilon (P_z + \delta P_z - P_z^0) + \mu \delta P_z^C + \nu \delta P_z]
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

avec  $Q_s = [0; t_a] \times [0; L_s]$ . L'exposant  $C$  représente le résultat du calcul du gradient pour le terme de contrainte :

$$\mu \langle \delta \tilde{u}; G^T (Gu + G\delta u - c) \rangle_{\mathcal{U}} \tag{3.51}$$

Nous reviendrons plus en détails sur ce point avec un exemple en section 3.3.

*Remarque.* Nous détaillons en annexe A les différentes étapes nous menant aux équations du modèle adjoint ainsi qu'aux composantes du gradient de la fonctionnelle pour le terme de fidélité.  $\square$

Toutes les expressions présentées dans (3.50) peuvent être calculées numériquement, vu qu'elles n'impliquent que des intégrations en temps ou en espace, triviales lorsque les matrices

des discrétisations spatiale et temporelle sont disponibles, comme c'est le cas ici. Notons que toutes les composantes du gradient sont obtenues avec un coût de calcul correspondant à trois évaluations du modèle. Comparativement, une méthode de différences finies aurait nécessité autant d'évaluations que de variables scalaires, et autant d'évaluations que de nœuds de discrétisation pour les variables dépendant du temps ou de l'espace.

Maintenant que le gradient est défini, nous pouvons utiliser les algorithmes classiques de gradient conjugué, [Ciarlet, 2006].

*Remarque.* Les expressions des différentes composantes du gradient  $\nabla \tilde{J}_u(\delta u)$  décrites ci-dessus mettent en évidence les problèmes d'identifiabilité naturellement liés au modèle. Nous voyons par exemple qu'il ne sera pas possible d'estimer le renouvellement d'air lorsque  $T_a \simeq T_z$ . Cela se comprend physiquement, puisque la signature thermique de ce phénomène devient nulle. Le contexte environnemental de l'étude joue donc également un rôle sur l'identifiabilité du modèle.  $\square$

### 3.3 Proposition d'une méthode d'audit énergétique instrumenté

L'application de la démarche d'identification des paramètres du modèle thermique, décrite dans la section 3.2, nous conduit à proposer dans cette section une méthode d'audit énergétique instrumenté pour les bâtiments. Nous décrivons deux variantes, reposant sur des niveaux d'instrumentation différents.

#### 3.3.1 Identification de paramètres pour le cas d'étude

Nous reprenons les cas d'étude de la section 2.7. Celui-ci est constitué de 2 zones thermiques et de 13 surfaces, cf. figure 3.11.

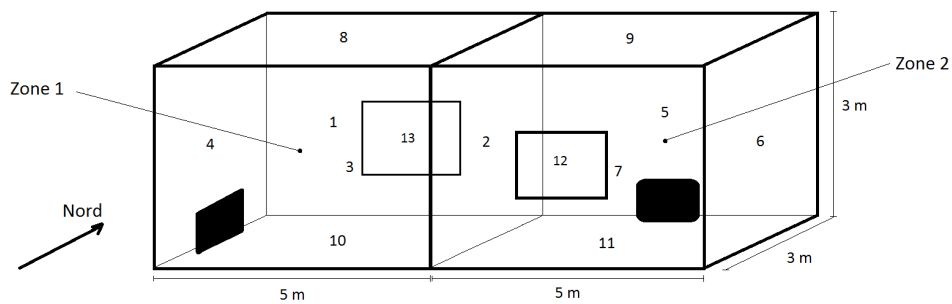


FIGURE 3.11 – Plan du cas d'étude constitué de deux zones.

Pour introduire de la souplesse à notre méthode, nous présentons deux variantes qui associent des choix d'inconnues différents à des niveaux d'instrumentation différents. Afin d'utiliser le formalisme introduit en section 3.2.3, nous devons définir l'espace des paramètres inconnus  $\mathcal{U}$ , l'espace des états thermiques  $\mathcal{S}$ , l'espace des mesures  $\mathcal{M}$ , ainsi que l'opérateur  $G$  et l'espace des contraintes  $\mathcal{C}$ . Nous ne détaillons pas l'espace  $\mathcal{P}$  constitué des paramètres supposés connus dans le modèle.

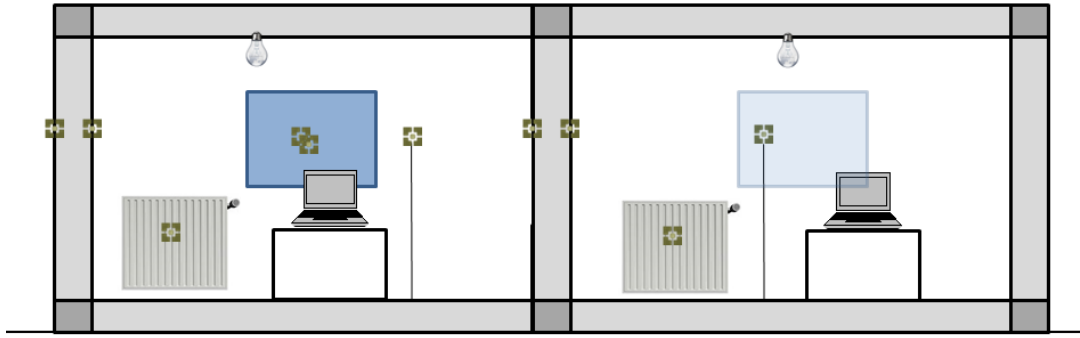


FIGURE 3.12 – Illustration de l'instrumentation du cas d'étude. La fenêtre nord, la paroi centrale, ainsi qu'une paroi donnant sur l'extérieur sont instrumentées. Chaque zone et chaque émetteur sont également instrumentés.

### Variante 1

Détaillons à présent les écritures pour la première variante. D'après le choix des inconnues, justifié en section 2.7.2 et explicité dans l'équation (2.52), l'espace  $\mathcal{U}$  est décrit par :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z\}_{s;z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{2N_s^i + 5N_z} \quad (3.52)$$

Cette première variante repose sur une instrumentation et un protocole opératoire permettant d'obtenir les informations suivantes :

- géométrie du bâtiment audité (*e.g.* fichier gbXML),
- données météorologiques locales (température ambiante, rayonnement solaire direct et diffus),
- scénarios d'usage (gains internes),
- puissance fournie à chaque émetteur,
- mesures de l'état thermique  $m \in \mathcal{M}$ .

Comme précisé dans la description de la méthode, *cf.* section 3.2.3, l'instrumentation disponible pour l'état thermique concerne les températures de zones  $T_z$ , les températures des émetteurs  $\theta_z$ , et les températures des surfaces  $\theta_s$  aux frontières du domaine (de part et d'autre). Nous ne mesurons pas les températures de surface pour toutes les parois, mais nous limitons le nombre de capteurs en n'instrumentant qu'une seule paroi par type (paroi lourde donnant sur l'extérieur, paroi légère intérieure, fenêtre, etc), *cf.* figure 3.12. Nous définissons ainsi  $\mathcal{I}_s$  la liste des indices des surfaces de paroi instrumentées, et  $N_s^i = |\mathcal{I}_s|$ <sup>16</sup>. Les mesures de météo, d'usage, de puissance et de température doivent être disponibles pour toute la période de mesure (de quelques jours, à une semaine), et avec un pas de temps fin (de l'ordre de 5 à 15 minutes).

### Variante 2

La nécessité de mesurer la puissance fournie pour les émetteurs au niveau de chaque zone peut rendre le protocole de mesure difficile à mettre en œuvre. En effet, ce genre de mesure nécessite la mise en place de capteurs (calorimètres) relativement onéreux et, surtout, difficiles à installer. Nous proposons ici une deuxième variante qui allège ce protocole opératoire en ne nécessitant qu'une mesure de puissance centralisée. Dans cette seconde variante, nous considérons que l'instrumentation et le protocole opératoire permet d'obtenir les données suivantes :

- géométrie du bâtiment audité (*e.g.* fichier gbXML),

16.  $|\mathcal{I}_s| = \#\mathcal{I}_s$  représente le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{I}_s$ .

- données météorologiques locales (températures, rayonnement, etc),
- scénarios d'usage (gains internes),
- puissance totale fournie pour le chauffage (relevée au niveau du tableau central ou du générateur),
- mesures de l'état thermique  $m \in \mathcal{M}$ .

Les mesures de météo, d'usage, de puissance et de température doivent être disponibles pour toute la période de mesure (de quelques jours, à une semaine), et avec un pas de temps fin (de l'ordre de 5 à 15 minutes).

La différence avec la première variante se situe au niveau de la mesure des puissances. Ici, une seule mesure est nécessaire au niveau de la production de chaleur. Les résultats présentés sont là aussi obtenus par simulation, avec la méthode décrite dans la section 3.3.2.

Dans cette variante, nous considérons que la puissance individuelle fournie à chacun des émetteurs est inconnue, et nous proposons d'essayer de les estimer à partir de la mesure de la puissance totale. Dans ce cas, l'espace  $\mathcal{U}$  prend une autre forme<sup>17</sup> pour devenir :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z, P_z\}_{s;z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{2N_s^i + 5N_z} \times [L_{0,P_z^+}^2(0; t_a)]^{N_z} \quad (3.53)$$

avec  $P_z^+$  la puissance maximale de l'émetteur  $z$ , et  $L_{0,P_z^+}^2(0; t_a)$  le sous-espace de  $L^2(0; t_a)$  défini par, [Briane et Pagès, 2006] :

$$L_{0,M}^2(0; t_a) = \{v \in L^2(0; t_a), 0 \leq v \leq M \text{ p.p.}\} \quad (3.54)$$

### Formulation du problème inverse

L'espace des états thermiques  $\mathcal{S}$  se décompose, en respectant l'équation (3.29), comme suit, [Raviart et Thomas, 1998] :

$$f(u) \in \mathcal{S} = \prod_{s=1}^{N_s} [L^2((0; t_a); H^1(0; L_s)) \cap \mathcal{C}^0([0; t_a]; L^2(0; L_s))] \times [C^1([0; t_a])]^{2N_z} \quad (3.55)$$

Nous proposons de déployer des capteurs de température surfacique de part et d'autre d'une paroi représentative d'un type de paroi. Nous ajoutons également un capteur de température de surface sur chacun des émetteurs, et un capteur de température d'air dans chaque pièce. Par conséquent, l'espace des mesures  $\mathcal{M}$  s'écrit :

$$m = \{\theta_s^d(0; t), \theta_s^d(L_s; t), T_z^d, \Theta_z^d\}_{s,z} \in \mathcal{M} = [L^2(0; t_a)]^{2N_s^i + 2N_z} \quad (3.56)$$

avec  $\mathcal{I}_s$  la liste des surfaces instrumentées,  $s \in \mathcal{I}_s$  l'indice de la surface,  $N_s^i = |\mathcal{I}_s|$  le nombre de surfaces instrumentées, et  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$ . L'exposant  $d$  signifie *données*.

*Remarque.* Les choix précédents pour les espaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  sont incompatibles en dimension supérieure, [Nassiopoulos et Bourquin, 2010]. Dans notre cas, c'est la régularité de l'état thermique 1D qui nous permet de justifier ce choix.  $\square$

Pour prendre en compte les connaissances *a priori*, nous ajoutons des contraintes sur les inconnues par pénalisation. De manière générale, le type de contraintes que nous considérons s'écrit :

$$Gu = c \quad (3.57)$$

17. Bien entendu, l'espace  $\mathcal{P}$  aussi change de forme.

avec  $G \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{C})$  un opérateur linéaire et  $c \in \mathcal{C}$  une contrainte dans l'espace des contraintes. Ce terme va notamment nous permettre de réduire le nombre de capteurs nécessaires. *A minima*, cela concerne les propriétés des surfaces similaires, comme c'est le cas pour les surfaces donnant sur l'extérieur ou les fenêtres.

Soit  $\mathcal{I}_t$  la liste des types des surfaces. Pour les inconnues des surfaces de type  $i \in \mathcal{I}_t$ , la contrainte s'écrit :

$$G_k^i u = c_k^i \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^i \\ k_2^i \\ \vdots \\ k_{N_t^i}^i \end{pmatrix} = 0 \quad (3.58)$$

avec  $N_t^i$  le nombre de surfaces de type  $i$ , et  $k_j^i$  la conductivité de la  $j$ -ème surface de type  $i$ , pour  $j \in \llbracket 1, N_t^i \rrbracket$ . Nous obtenons les mêmes contraintes pour les capacités thermiques  $\rho c$ .

Pour la variante 2, pour laquelle nous ne disposons que de la puissance totale  $P_t$  au niveau du système central de production de chaleur, ou du tableau électrique dans le cas d'une installation de chauffage électrique, la contrainte supplémentaire sur les puissances individuelles des émetteurs est définie par :

$$G_P u = c_P \iff \sum_z P_z = P_t \quad (3.59)$$

Finalement, nous définissons l'espace des contraintes  $\mathcal{C}$  comme suit :

$$Gu \in \mathcal{C} = \mathbb{R}^{N_t^T} \times L_+^2(0; t_a) \quad (3.60)$$

avec  $N_t^T$  le nombre total d'indices de surfaces contraintes et  $L_+^2(0; t_a)$  le sous-espace de  $L^2(0; t_a)$ , définis par, [Briane et Pagès, 2006] :

$$N_t^T = \sum_{i \in \mathcal{I}_t} N_t^i, \quad L_+^2(0; t_a) = \{v \in L^2(0; t_a), v \geq 0 \text{ p.p.}\} \quad (3.61)$$

Maintenant que les différents espaces sont définis, le formalisme introduit en section 3.2.3 s'utilise naturellement. Soit  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu - c\|_{\mathcal{C}}^2 \quad (3.62)$$

avec  $u^0$  une estimation *a priori*. Le premier terme est le terme de fidélité, et le second est celui de la régularisation de Tikhonov de paramètre  $\epsilon > 0$ , qui rend le problème bien posé, cf. section 3.1.4. Le dernier terme permet la pénalisation des contraintes, avec  $\mu$  un coefficient qui permet d'ajuster la sévérité des contraintes. Le problème inverse consiste à trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \quad (3.63)$$

Le problème (3.63) est un problème d'optimisation non linéaire, cf. section 3.2.3. Pour le résoudre, nous utilisons un algorithme itératif de type Levenberg-Marquardt (cf. section 3.2.4), associé au gradient conjugué et à l'état adjoint (cf. section 3.2.5).

*Remarque.* Explicitons le calcul du gradient (3.50) pour le terme de contrainte (3.51) dans le cas considéré. Pour les réels (scalaires) comme  $k$  et  $\rho c$ , cf. équation (3.58), il suffit de calculer :

$$G^T G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour les fonctions comme  $P_z$ , cf. équation (3.59), le modèle adjoint est très simple, et le gradient s'obtient par :

$$\delta P_z^C = \sum_z (P_z + \delta P_z) - P_t$$

□

Nous illustrons les deux variantes de la méthode sur le cas d'étude en section 3.3.2 et 3.3.3.

### 3.3.2 Application de la méthode d'audit : Variante 1

Nous présentons ici l'application numérique de la première variante de la méthode d'audit sur le cas d'étude utilisé pour l'étude des paramètres influents en section 2.7.2, cf. figure 3.13.

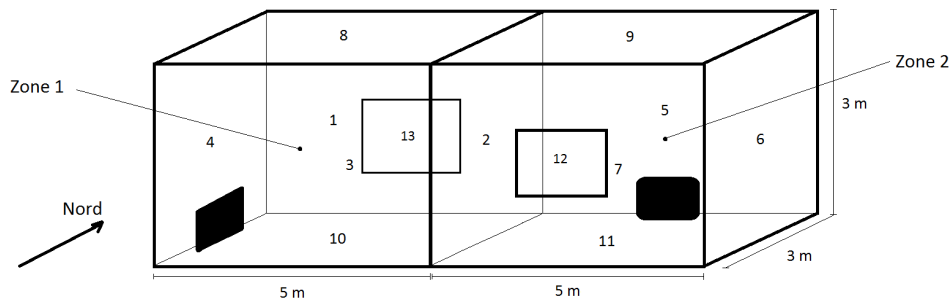


FIGURE 3.13 – Plan du cas d'étude constitué de deux zones.

Les résultats numériques présentés ci-dessous sont obtenus de la manière suivante : nous générons les mesures de l'état thermique à partir de notre modèle de référence, puis nous perturbons les paramètres du vecteur  $u$  que nous allons identifier à partir des mesures. Cette démarche s'appelle *crime inverse*, puisqu'elle consiste à utiliser le même modèle pour engendrer les mesures et pour identifier les paramètres. Ce type d'approche permet d'étudier l'identifiabilité relative au choix des inconnues par rapport à la quantité et au type de mesures disponibles.

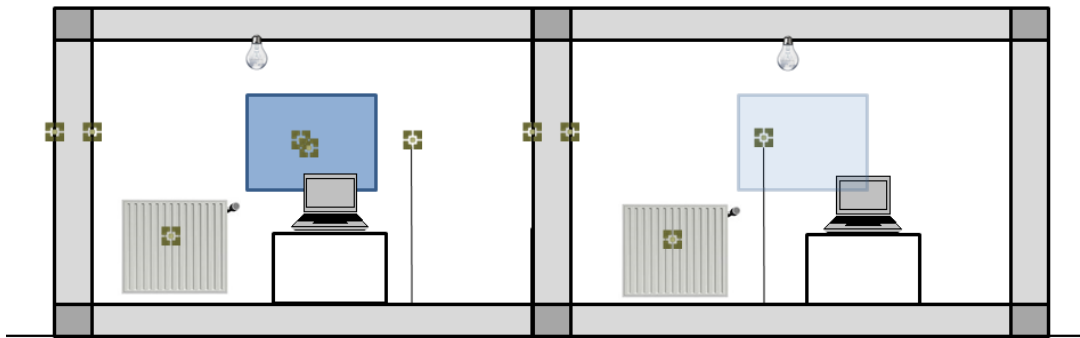


FIGURE 3.14 – Schéma de l'instrumentation du cas d'étude. Une des fenêtres, la paroi centrale, ainsi qu'une paroi donnant sur l'extérieur sont instrumentées. Chaque zone et chaque émetteur sont également instrumentés.

Pour cette étude, nous disposons de 6 jours de mesures pour les zones, les émetteurs, la fenêtre nord (numéro 13), ainsi que les parois centrale (numéro 2) et ouest (numéro 4), cf. figure 3.13. Ces 6 jours vont du 1<sup>er</sup> février à minuit au 7 février à minuit, les données sont présentées dans la figure 3.15. Le pas de temps utilisé est de 10 minutes. Les mesures de l'état thermiques

sont schématisées sur la figure 3.14. Elles sont définies par :

$$m = \{\theta_s^d(0;t), \theta_s^d(L_s;t), T_z^d, \theta_z^d\}_{s,z} \in \mathcal{M} = [L^2(0;t_a)]^{10} \quad (3.64)$$

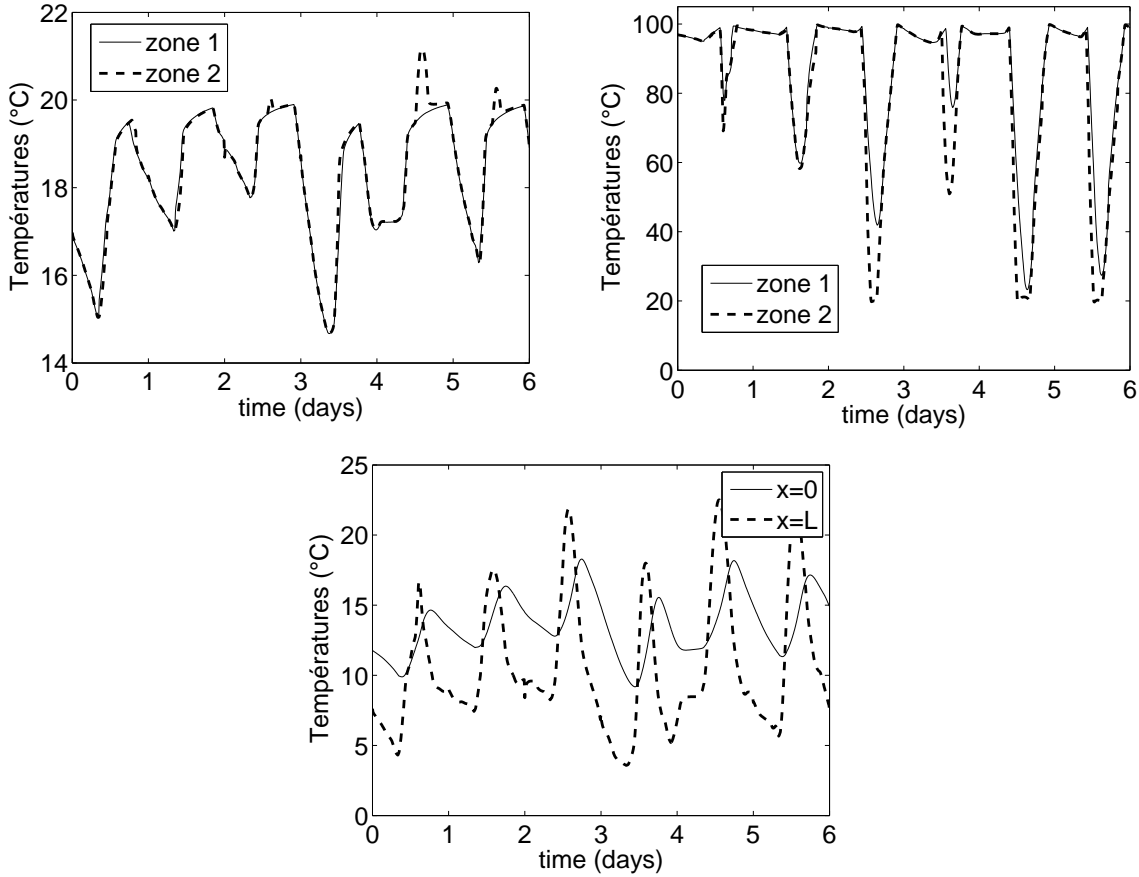


FIGURE 3.15 – Mesures de l'état thermique. En haut à gauche, les températures des zones ; en haut à droite, les températures des émetteurs ; en bas, les températures de surface de la paroi 4.

Les données de synthèse sont obtenues avec des fichiers météo d'EnergyPlus pour simuler les conditions environnementales. Dans le cas d'un audit réel, celles-ci seraient obtenues soit par le déploiement sur site d'une station météorologique, soit par l'import de données provenant d'une station météo à proximité. Notons qu'en général, les stations météo fournissent la mesure du flux solaire total. La décomposition en flux solaire direct et diffus peut s'obtenir par calcul en utilisant par exemple des modèles empiriques, *cf. e.g.* [Duffie et Beckman, 1991]. Nous présentons les données environnementales sur la figure 3.16. Les gains internes et les puissances fournies aux émetteurs sont présentés sur la figure 3.17.

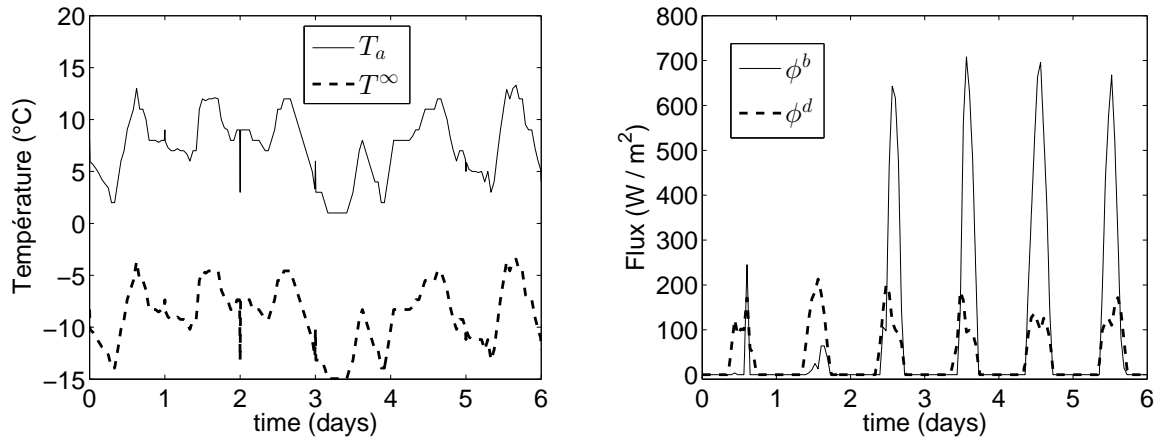


FIGURE 3.16 – Données météo d’EnergyPlus pour les 6 premiers jours de février. À gauche, les températures ; à droite, les flux solaires.

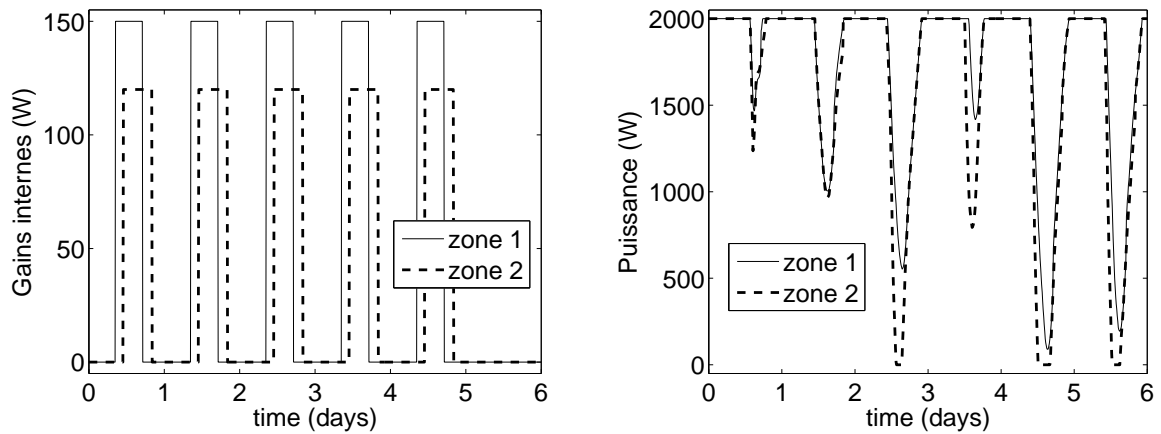


FIGURE 3.17 – À gauche, les scénarios d’usage ; à droite, les puissances fournies aux émetteurs.



### Résultat sur un cas unitaire

Commençons par tester notre méthode sur un cas unitaire. Le vecteur d'inconnues  $u$ , défini par

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z\}_{s,z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{28} \quad (3.65)$$

est initialisé par une perturbation de la valeur de référence, obtenue par un tirage aléatoire suivant les incertitudes standards des composantes, décrites dans le tableau 2.8. Nous utilisons ensuite les mesures et les données recueillies pour identifier  $u$  suivant la procédure établie en section 3.3. Le tableau 3.5 présente les paramètres perturbés, puis le résultat de l'identification.

Paramètre	Cible	Perturbé	$\bar{E}_\%$	Identifié	$\bar{E}_\%$
$\rho c_s$	$1,8 \cdot 10^6$	$1,134 \cdot 10^6$	37	$1,801 \cdot 10^6$	0
$k_s$	0,96	0,578	39,8	0,960	0
$\eta_z$	0,8	0,864	8	0,804	0,4
$\bar{q}_z$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	1	$9,8 \cdot 10^{-3}$	5,4
$\tau_z$	0,6	0,639	6,6	0,603	0,5
$\lambda_z$	20	22,81	14	20,09	0,4
$d_z$	1000	1172,3	17,2	984,2	1,5

TABLE 3.5 – Paramètres perturbés et résultats de l'identification, avec  $\bar{E}_\%$  l'erreur relative en pourcentage.

Nous remarquons que certains paramètres ont été améliorés (*i.e.* se rapprochent de la valeur de référence), tandis que d'autres sont moins bons. Les propriétés internes des parois,  $k_s$  et  $\rho c_s$ , ont parfaitement convergé, avec des erreurs relatives nulles, contre près de 40% initialement. L'identification des paramètres des émetteurs ( $d_z$ ,  $\eta_z$  et  $\lambda_z$ ) permet de réduire fortement l'erreur initiale sur ces systèmes. Le coefficient de transmission des fenêtres se précise également, avec une erreur passant de 6,6% avec l'approche classique à seulement 0,5%. Seul le débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$  perd en précision, avec une erreur passant de 1% à 5,4%. Dans cette situation (données météo, protocole opératoire de l'audit), la méthode ne semble pas être capable d'identifier ce paramètre.

Comparons maintenant les réponses thermiques cible, perturbée et identifiée. Ces trois courbes sont présentées sur la figure 3.18 pour la température de la première zone. La figure contient également le graphe des erreurs entre la réponse de référence et les autres réponses. Nous remarquons premièrement que les erreurs initiales dans le vecteur de paramètres  $u$  sont assez importantes, puisque l'écart entre la réponse de référence et la réponse perturbée avoisine les 2°C. Ensuite, les réponses cible et identifiée sont presque superposables, avec une très faible erreur. Le vecteur de paramètres inconnus  $u$  étant constitué de paramètres intrinsèques du bâtiment, nous pouvons, une fois le modèle calibré, étendre les scénarios d'usage et la météo pour comparer la réponse de référence avec celles des jeux de paramètres perturbés et identifiés sur une nouvelle plage temporelle, différente de celle utilisée pour l'identification. Nous choisissons la semaine suivant l'audit, du 7 au 14 février, *cf.* figure 3.18. La réponse thermique du modèle pour la première zone avec le jeu de paramètres identifié correspond bien avec la réponse de référence. Comme pour la période d'instrumentation, nous retrouvons les mêmes niveaux d'écarts entre la référence et la réponse perturbée (de l'ordre de  $\pm 2^\circ\text{C}$ ), et entre la référence et la réponse identifiée (inférieur à  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ ).

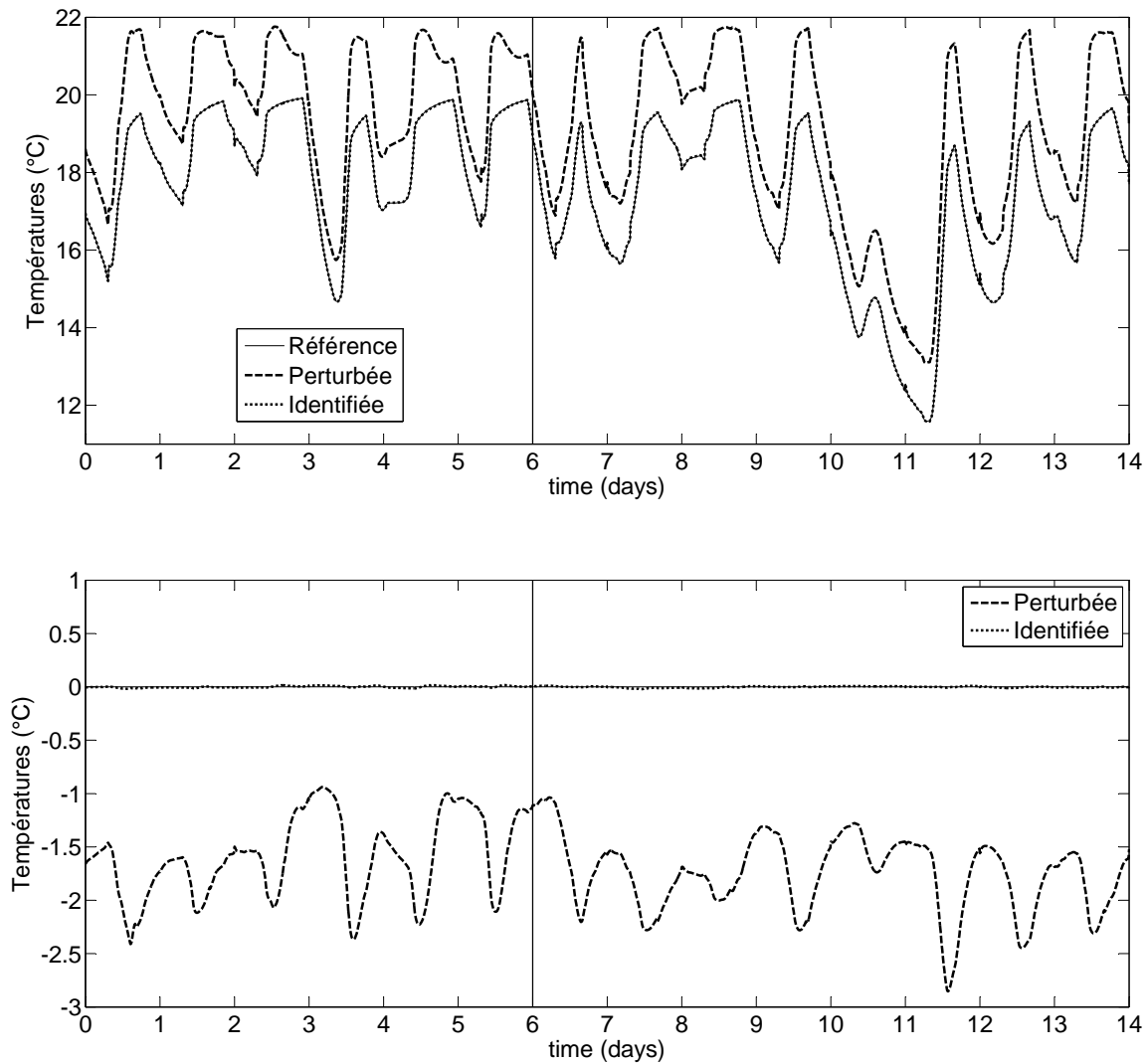


FIGURE 3.18 – Comparaison de la réponse du modèle pour la température de la zone 1 entre la réponse cible de référence (ici, les mesures), la réponse perturbée (initialisation de  $u$ ), et la réponse identifiée (résultats de l'identification  $u$ ). En haut, sur toute la période d'instrumentation et la semaine suivante ; en bas, graphe des erreurs : (cible - perturbée) et (cible - identifiée).

### Incertitudes de la méthode sur un échantillon de Monte-Carlo

Pour évaluer plus en détail la performance de l'identification, nous réalisons un échantillon de Monte-Carlo de 50 tirages aléatoires des paramètres du vecteur d'inconnues :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z\}_{s,z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{28} \quad (3.66)$$

suivant les incertitudes classiques décrites dans le tableau 2.8. Ces tirages nous permettent de simuler autant d'audits classiques, avec les incertitudes qui leur sont propres, *cf.* section 2.7. Nous utilisons ces tirages comme autant d'initialisations pour notre méthode d'audit, décrite pour le cas d'étude en section 3.3.1.

La famille de jeux de paramètres identifiés est analysée dans les tableaux en termes de moyenne, d'erreur moyenne relative en pourcentage, et d'écart-type en pourcentage. La colonne  $u_{cib}$  affiche les valeurs de référence des paramètres inconnus. Pour chaque paramètre, nous disposons d'un vecteur contenant les valeurs des paramètres identifiés pour chaque tirage, nous pouvons donc utiliser des outils d'analyse statistique. Le paramètre  $\bar{u}_{rec}$  est la moyenne du vecteur  $u_{rec}$  des paramètres identifiés. L'erreur moyenne en pourcentage  $\bar{E}_\%$  se calcule à partir du paramètre  $\bar{E}$ , qui est l'erreur relative de la moyenne  $\bar{u}_{rec}$ , par :

$$\bar{E}_\% = \bar{E} \times 100 = \frac{|\bar{u}_{rec} - u_{cib}|}{u_{cib}} \times 100 \quad (3.67)$$

Enfin, l'écart-type en pourcentage  $\sigma_\%$  n'est autre que l'écart-type des estimations normalisées par leur moyenne :

$$\sigma_\% = \sigma \left( \frac{u_{rec}}{\bar{u}_{rec}} \right) \times 100 \quad (3.68)$$

Les paramètres de traitement statistique des résultats sont résumés dans le tableau 3.6.

Paramètre	Définition	Calcul
$u_{cib}$ et $u_{rec}$	Valeurs de référence et reconstructions	
$\bar{u}_{rec}$	Valeurs moyennes des reconstructions	
$\bar{E}$	Erreur relative de la moyenne $\bar{u}_{rec}$	$\frac{ \bar{u}_{rec} - u_{cib} }{u_{cib}}$
$\bar{E}_\%$	Erreur relative de la moyenne en pourcentage	$\bar{E} \times 100$
$\sigma_\%$	Écart-type des reconstructions en pourcentage	$\sigma \left( \frac{u_{rec}}{\bar{u}_{rec}} \right) \times 100$

TABLE 3.6 – Paramètres d'analyse statistique.

Les résultats de l'identification de paramètres sont affichés dans le tableau 3.7. Celui-ci présente les résultats de la procédure pour le premier niveau d'instrumentation (variante 1), *i.e.* lorsque les puissances individuelles des émetteurs sont connues. Nous remarquons que l'algorithme a globalement convergé à chaque initialisation, puisque les erreurs moyennes  $\bar{E}_\%$  sont inférieures aux approches classiques. Les propriétés thermophysiques des parois sont parfaitement identifiées, avec des erreurs moyennes nulles et des écarts-types inférieurs à 0,3%. Les caractéristiques des émetteurs sont largement moins incertaines qu'avec l'approche classique. De même, le facteur de transmission des fenêtres est précisé, avec une incertitude réduite à 6,6%. Seul le débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$  perd en précision, avec une erreur passant de 26,9% à 30,7%. Le problème d'identification du débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$  pourrait alors être dû au manque de sensibilité de la fonctionnelle pour ce paramètre, puisque dans cette

Paramètre	Référence	audits classiques			audits instrumentés		
	$u_{cib}$	$\bar{u}$	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$	$\bar{u}_{rec}$	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
$\rho c_s$	$1,8.10^6$	$1,713.10^6$	4,8	21,2	$1,8.10^6$	0	0,3
$k_s$	0,96	0,91	5,2	24,3	0,96	0	0,2
$\eta_z$	0,8	0,798	0,3	6	0,801	0,1	2,7
$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,2.10^{-3}$	0,9	30,4	$9,4.10^{-3}$	1,2	31
$\tau_z$	0,6	0,593	1,2	11,3	0,6	0	6,4
$\lambda_z$	20	19,56	2,2	29,4	20	0,1	2,7
$d_z$	1000	1005,2	0,5	41,2	991,3	0,9	11,3

TABLE 3.7 – Moyennes et écart-types des identifications sur l'échantillon de Monte-Carlo.

situation (données météo, protocole opératoire de l'audit), la méthode ne semble pas être capable d'identifier ce paramètre.

La famille des paramètres identifiés  $u$ , obtenues pour chaque tirage de l'échantillon de Monte-Carlo, fournit autant de réponses thermiques du modèle. Nous présentons dans la figure 3.19 les enveloppes extrêmes encadrant les dispersions de la température de la première zone autour de la valeur de référence. Les réponses thermiques du modèle avec les paramètres identifiés réduisent fortement l'incertitude sur la température (ici, la zone 1). Cela se confirme sur le graphe des écarts à la référence, puisque nous divisons par dix l'incertitude en passant d'une incertitude de  $\pm 2^\circ\text{C}$  à une incertitude de  $\pm 0,2^\circ\text{C}$ . De la même manière que dans le test unitaire précédent, nous pouvons étendre les scénarios d'usage et la météo pour comparer la réponse de référence avec celles des jeux de paramètres perturbés et identifiés sur une nouvelle plage temporelle. Nous choisissons ici encore la semaine suivant l'audit, du 7 au 14 février, cf. figure 3.19. De nouveau, Les réponses thermiques du modèle pour la première zone avec les jeux de paramètres identifiés correspondent bien avec la réponse de référence. Cela se confirme sur le graphe des écarts à la référence, puisque nous divisons par dix l'incertitude en passant d'une incertitude de  $\pm 2^\circ\text{C}$  à une incertitude de  $\pm 0,2^\circ\text{C}$ . L'identification de paramètres intrinsèques du modèle permet donc d'obtenir un modèle valable sur une grande plage d'utilisation.

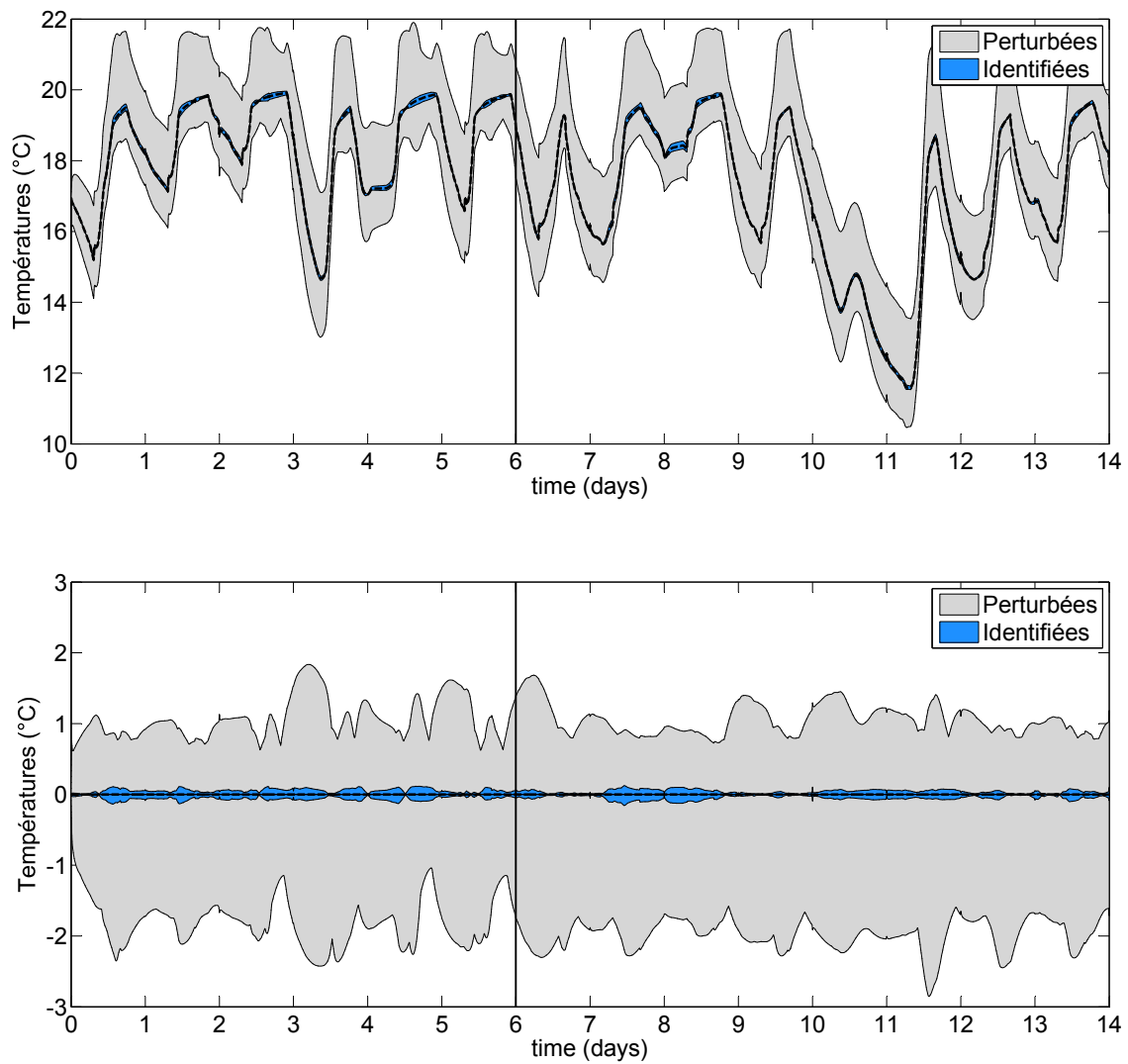


FIGURE 3.19 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées (initialisations de  $u$ ) en gris, et les réponses identifiées (résultats des identifications  $u$ ) en bleu. En haut, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; en bas, le graphe des erreurs : (cible - perturbées) et (cible - identifiées).

## 3.3.3 Application de la méthode d'audit : Variante 2

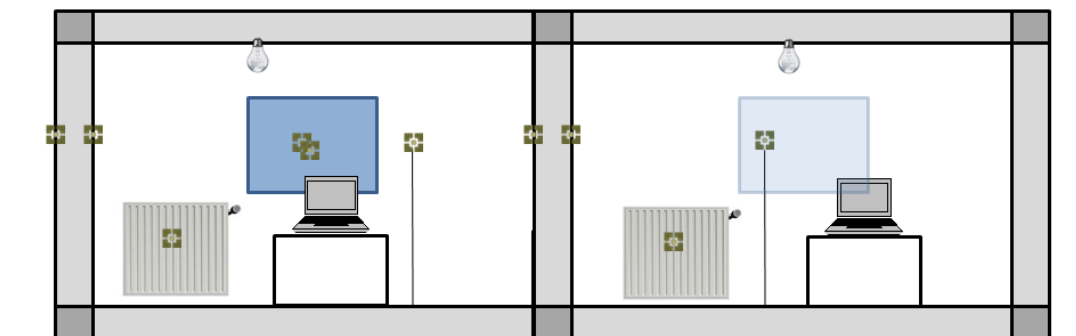


FIGURE 3.20 – Schéma de l'instrumentation du cas d'étude. Une des fenêtres, la paroi centrale, ainsi qu'une paroi donnant sur l'extérieur sont instrumentées. Chaque zone et chaque émetteur sont également instrumentés.

Reprenons de nouveau le cas d'étude, *cf.* figure 3.13. Nous disposons là aussi de 6 jours de mesures thermiques pour les zones, les émetteurs, la fenêtre nord (numéro 13), ainsi que les parois centrale (numéro 2) et ouest (numéro 4). Ces 6 jours vont du 1<sup>er</sup> février à minuit au 7 février à minuit, les données sont présentées dans la figure 3.21. Les mesures de l'état thermique sont schématisées sur la figure 3.20.

De nouveau, nous utilisons les fichiers météo d'EnergyPlus pour simuler les conditions environnementales. Dans le cas d'un audit réel, celles-ci seraient obtenues soit par le déploiement sur site d'une station météorologique, soit par l'import de données provenant de stations météo à proximité. Nous présentons les données environnementales sur la figure 3.22. Les gains internes et la puissance totale fournie aux émetteurs sont présentés sur la figure 3.23.

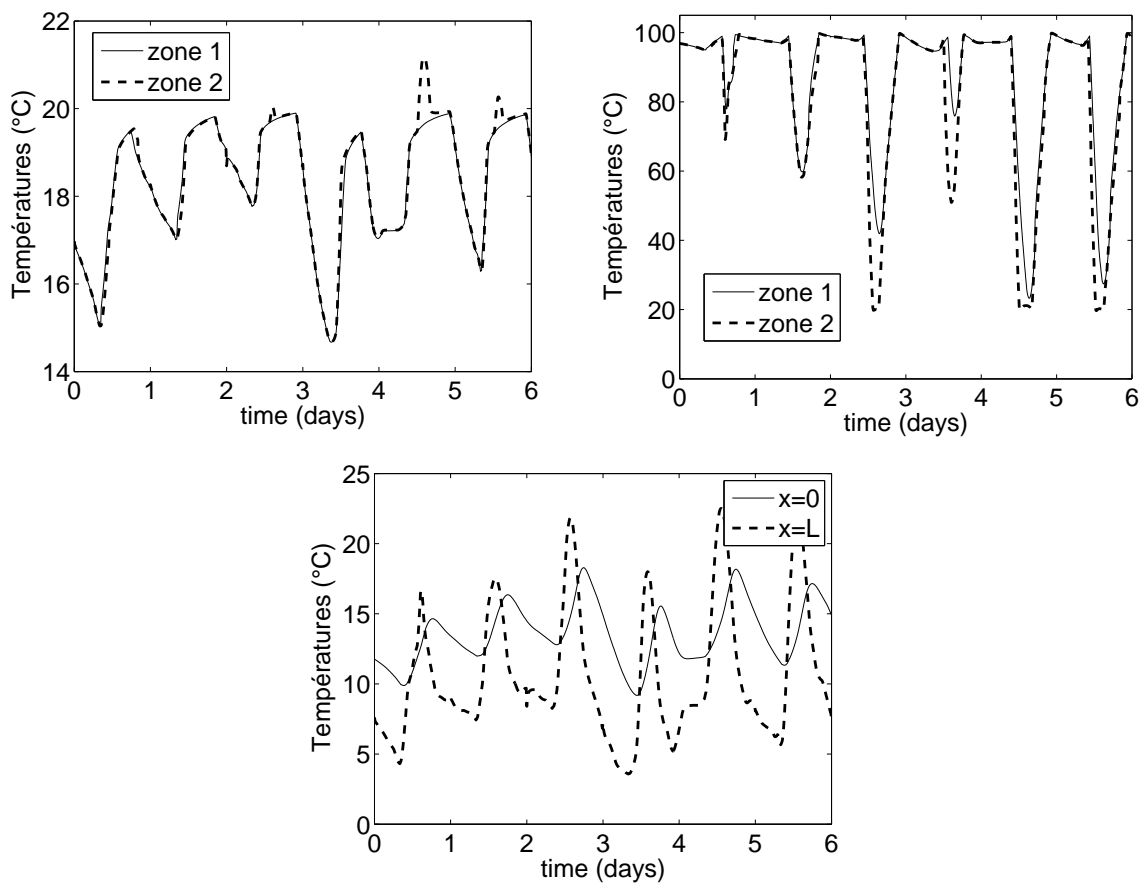


FIGURE 3.21 – Mesures de l'état thermique. En haut à gauche, les températures des zones ; en haut à droite, les températures des émetteurs ; en bas, les températures de surface de la paroi 4.

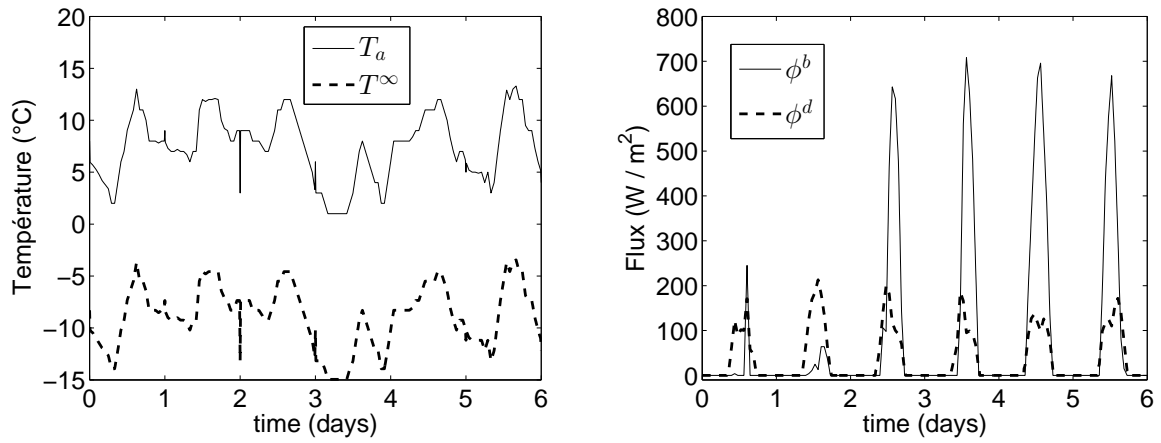


FIGURE 3.22 – Données météo d'EnergyPlus pour les 6 premiers jours de février. À gauche, les températures ; à droite, les flux solaires.

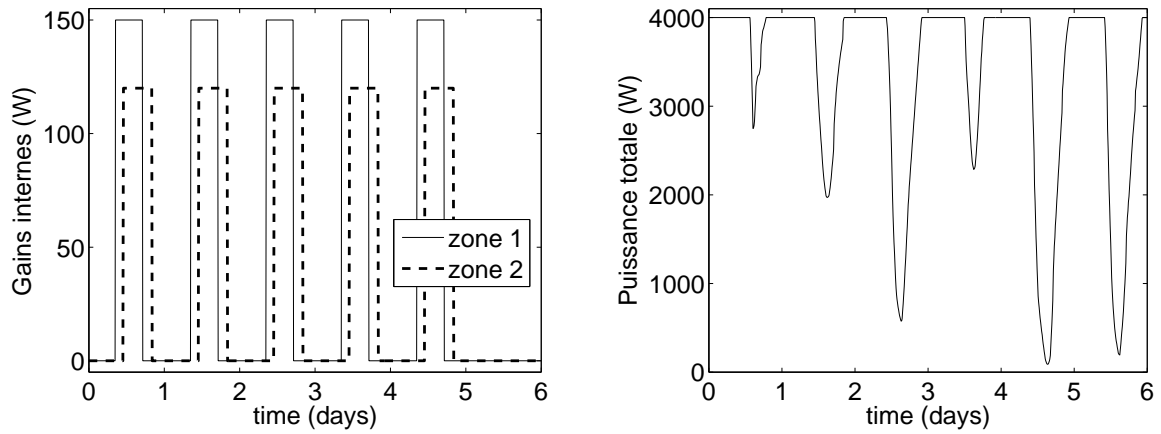


FIGURE 3.23 – À gauche, les scénarios d'usage ; à droite, la puissance totale fournie pour le chauffage.



### Résultat sur un cas unitaire

Comme pour la variante 1, commençons par tester notre méthode sur un cas unitaire. Le vecteur d'inconnues  $u$ , défini par

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z, P_z\}_{s,z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{28} \times \left[ L_{0,P_z^+}^2(0; t_a) \right]^2 \quad (3.69)$$

est initialisé par une perturbation de la valeur de référence, obtenue par un tirage aléatoire suivant les incertitudes standards des composantes, décrites dans le tableau 2.8. Nous utilisons ensuite les mesures et les données recueillies pour identifier  $u$  suivant la procédure établie en section 3.3. Le tableau 3.8 présente les paramètres perturbés, puis le résultat de l'identification.

Paramètre	Cible	Perturbé	$\bar{E}_\%$	Identifié	$\bar{E}_\%$
$\rho c_s$	$1,8 \cdot 10^6$	$1,134 \cdot 10^6$	37	$1,792 \cdot 10^6$	0,5
$k_s$	0,96	0,578	39,8	0,987	2,8
$\eta_z$	0,8	0,864	8	0,743	7,1
$\bar{q}_z$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	1	$0,02 \cdot 10^{-3}$	99,8
$\tau_z$	0,6	0,639	6,6	0,500	16,7
$\lambda_z$	20	22,81	14	18,64	6,8
$d_z$	1000	1172,3	17,2	1005	0,5

TABLE 3.8 – Paramètres perturbés et résultats de l'identification, avec  $\bar{E}_\%$  l'erreur relative en pourcentage.

Comme pour la première variante, nous remarquons que certains paramètres ont été améliorés (*i.e.* se rapprochent de la valeur de référence), tandis que d'autres sont moins bons. Les propriétés internes des parois,  $k_s$  et  $\rho c_s$ , ont bien convergé, avec des erreurs relatives réduites à moins de 3%, contre près de 40% initialement. L'identification des paramètres des émetteurs ( $d_z$ ,  $\eta_z$  et  $\lambda_z$ ) permet de réduire l'erreur sur les émetteurs. Néanmoins, la méthode se comporte moins bien sur l'identification du coefficient de transmission des fenêtres  $\tau_z$ , puisque l'erreur initiale augmente. De plus, le débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$  n'est pas identifiable par cette méthode.

Comparons maintenant les réponses thermiques cible, perturbée et identifiée. Ces trois courbes sont présentées sur la figure 3.24 pour la température de la première zone. Pour la courbe identifiée, les données affichées utilisent les paramètres intrinsèques identifiés, mais les puissances sont celles de référence (comme c'est le cas pour la courbe perturbée). La figure contient également le graphe des erreurs entre la réponse de référence et les autres réponses. Nous remarquons premièrement que les erreurs initiales dans le vecteur de paramètres  $u$  sont assez importantes, puisque l'écart entre la réponse de référence et la réponse perturbée avoisine les 2,5°C. Les résultats de la variante 2 permettent de réduire cet écart sous la barre de 1°C, mais l'amplitude de l'erreur de la réponse thermique reste importante. Le vecteur de paramètres inconnus  $u$  étant constitué de paramètres intrinsèques du bâtiment, nous pouvons, une fois le modèle calibré, étendre les scénarios d'usage et la météo pour comparer la réponse de référence avec celles des jeux de paramètres perturbés et identifiés sur une nouvelle plage temporelle. Nous choisissons la semaine suivant l'audit, du 7 au 14 février, *cf.* figure 3.24. Ici encore, pour la courbe identifiée, les données affichées utilisent les paramètres intrinsèques identifiés, mais les puissances utilisées sont celles de référence (comme c'est le cas pour la courbe perturbée). La réponse thermique du modèle pour la première zone avec le jeu de paramètres identifié est fidèle

à la valeur cible, mais sa dynamique est erronée. Cela se confirme sur le graphe des erreurs. Bien que les écarts aient été réduits en moyenne à moins de  $1^{\circ}\text{C}$ , et donc que l'état thermique ait bien été reconstruit, il semblerait que l'estimation des paramètres de la variante 2 soit biaisée.

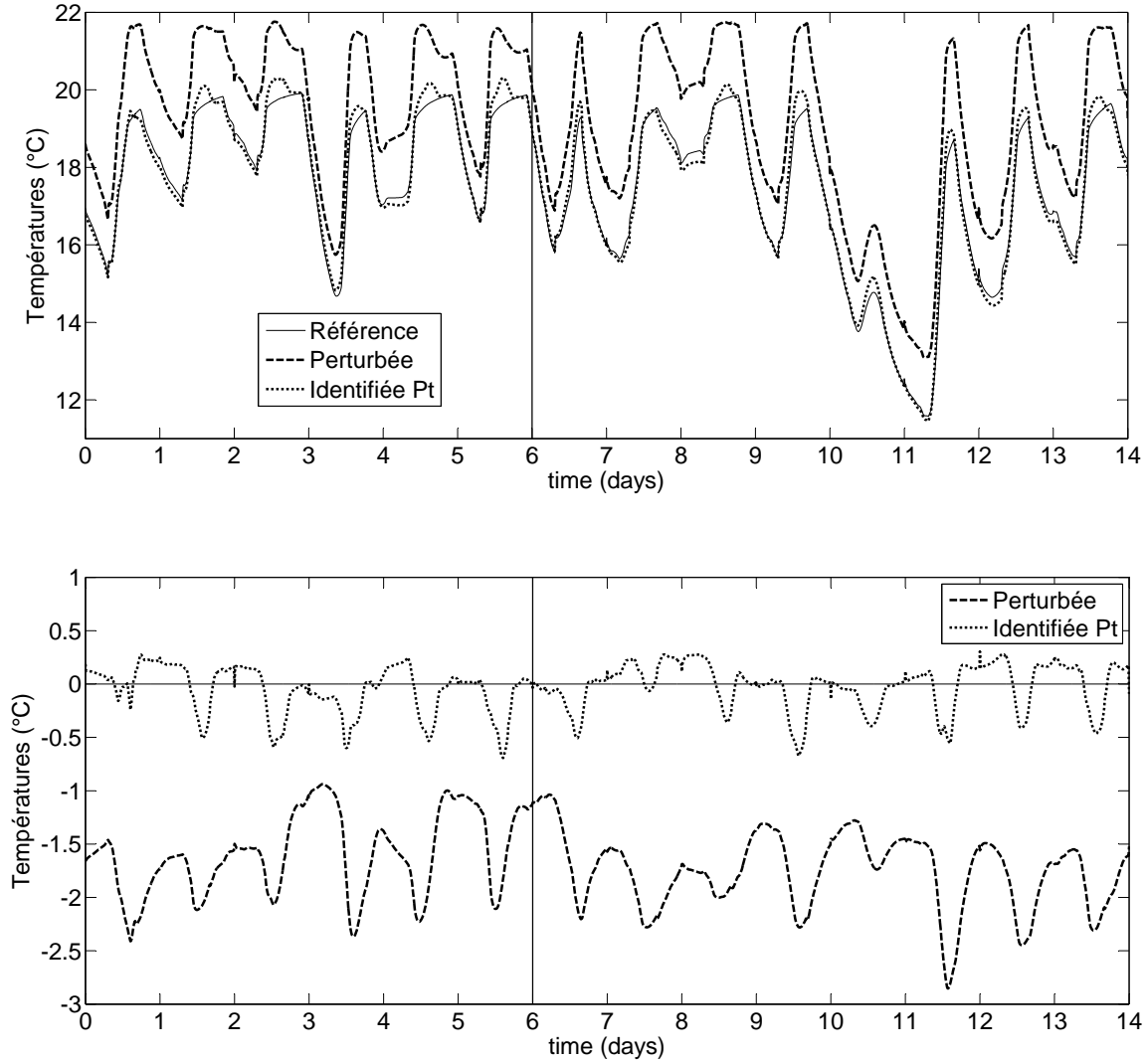


FIGURE 3.24 – Comparaison de la réponse du modèle pour la température de la zone 1 entre la réponse cible de référence (ici, les mesures), la réponse perturbée (initialisation de  $u$ ), et la réponse identifiée (résultats de l'identification  $u$ ). En haut, sur toute la période d'instrumentation ainsi que la semaine suivante ; en bas, graphe des erreurs : (cible - perturbée) et (cible - identifiée).

### Incertitudes de la méthode sur un échantillon de Monte-Carlo

Pour évaluer plus en détail la performance de l'identification, nous réalisons un échantillon de Monte-Carlo de 50 tirages aléatoires des paramètres du vecteur d'inconnues :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z, P_z\}_{s,z} \in \mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^{28} \times \left[ L_{0, P_z^+}^2(0; t_a) \right]^2 \quad (3.70)$$

suivant les incertitudes classiques décrites dans le tableau 2.8. Ces tirages nous permettent de simuler autant d'audits classiques, avec les incertitudes qui leur sont propres, *cf.* section 2.7. Nous utilisons ces tirages comme autant d'initialisations pour notre méthode d'audit, décrite pour le cas d'étude en section 3.3.1.

La famille de jeux de paramètres identifiés est analysée dans les tableaux en termes de moyenne, d'erreur moyenne relative en pourcentage, et d'écart-type en pourcentage, *cf.* tableau 3.6 pour plus de détails sur ces outils d'analyse.

Les résultats de l'identification de paramètres sont affichés dans le tableau 3.9. Celui-ci présente les résultats de la procédure pour le second niveau d'instrumentation (variante 2), *i.e.* lorsque les puissances individuelles des émetteurs ne sont pas connues et que nous les identifions à partir de la puissance totale fournie  $P_t$ . Les incertitudes des propriétés thermiques des parois sont fortement réduites, mais le biais d'estimation est du même ordre que celui des audits classiques. Bien que les incertitudes sur les caractéristiques des émetteurs soient réduites, l'estimation de la capacité thermique présente un biais. Nous savons toutefois que ce paramètre est peu influent (thermiquement) par rapport aux autres. Le débit de renouvellement d'air n'est pas identifiable dans ce contexte, puisque les estimations de ce paramètre présentent une moyenne très fautive et l'écart-type explose. Dans une moindre mesure, les résultats d'identification du coefficient de transmission des fenêtres perd en précision.

Paramètre	Référence	audits classiques			audits instrumentés		
	$u_{cib}$	$\bar{u}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$	$\bar{u}_{rec}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$
$\rho c_s$	$1,8 \cdot 10^6$	$1,713 \cdot 10^6$	4,8	21,2	$1,710 \cdot 10^6$	5	3,9
$k_s$	0,96	0,91	5,2	24,3	1,01	4,8	2,8
$\eta_z$	0,8	0,798	0,3	6	0,783	2,2	1,7
$\bar{q}_z$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-3}$	0,9	30,4	$1,5 \cdot 10^{-3}$	84,2	216,4
$\tau_z$	0,6	0,593	1,2	11,3	0,502	16,7	33,4
$\lambda_z$	20	19,56	2,2	29,4	19,62	1,9	1,7
$d_z$	1000	1005,2	0,5	41,2	1856	88,6	5,4

TABLE 3.9 – Moyennes et écart-types des identifications sur l'échantillon de Monte-Carlo.

La famille des paramètres identifiés  $u$ , obtenues pour chaque tirage de l'échantillon de Monte-Carlo, fournit autant de réponses thermiques du modèle. Nous présentons dans la figure 3.25 les enveloppes extrêmes encadrant les dispersions de la température de la première zone autour de la valeur de référence pour les 6 jours de mesures ainsi que la semaine suivante. Les réponses thermiques du modèle avec les paramètres identifiés réduisent fortement l'incertitude sur la température (ici, la zone 1). Malgré tout, nous retrouvons le biais de l'estimation de certains paramètres puisque l'enveloppe des réponses identifiées n'est pas toujours centrée.

Le prix à payer pour la simplification du protocole opératoire et la réduction du coût de l'instrumentation est donc une réduction de la précision du modèle identifié.

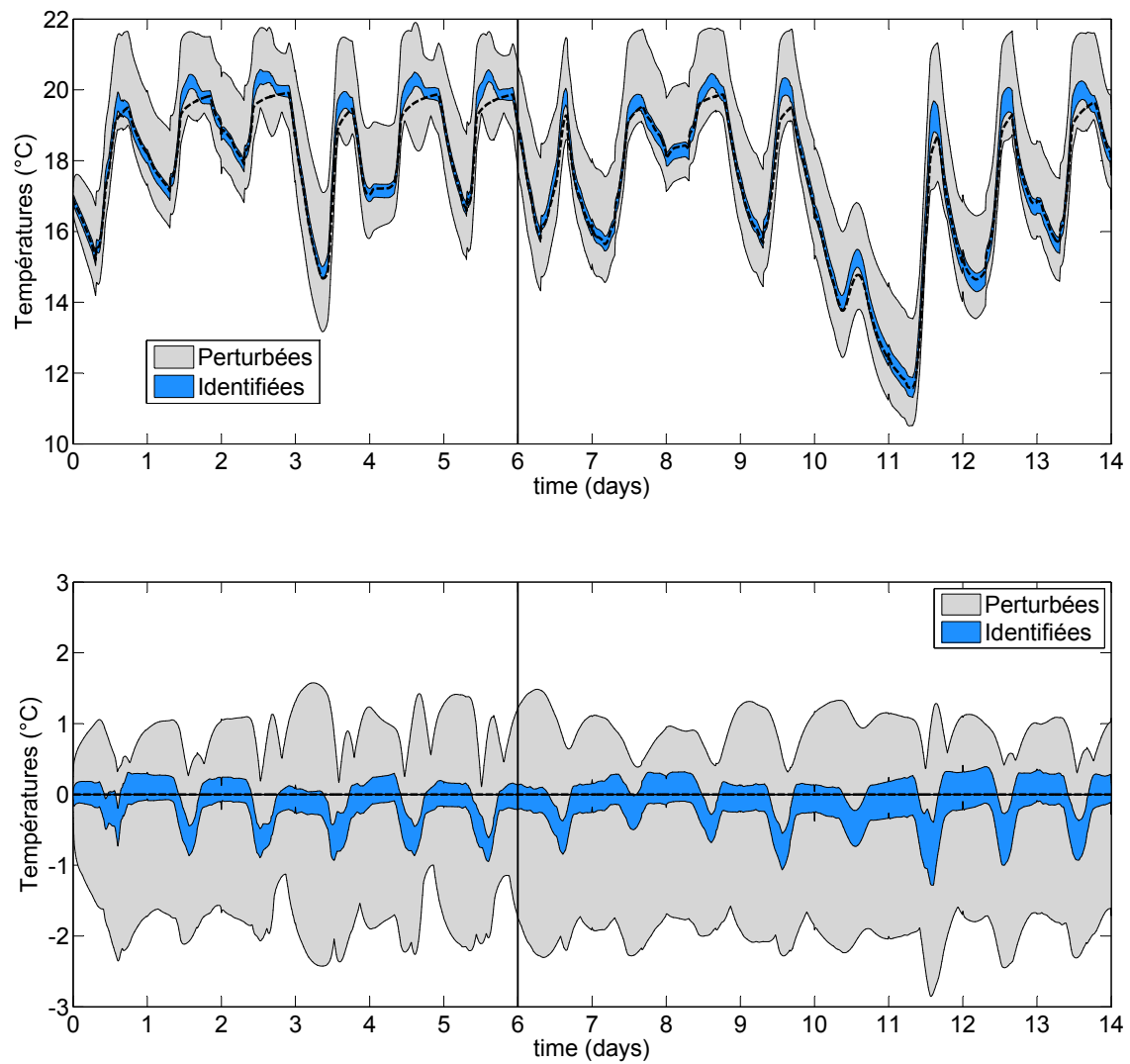


FIGURE 3.25 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées (initialisations de  $u$ ) en gris, et les réponses identifiées (résultats des identifications  $u$ ) en bleu. En haut, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; en bas, le graphe des erreurs : (cible - perturbées) et (cible - identifiées).

### 3.3.4 Incertitudes plus importantes

Maintenant que nous avons démontré la convergence de notre méthode, nous proposons une étude avec des incertitudes plus importantes. Cette analyse est motivée par le fait que les incertitudes utilisées sont des données issues de la modélisation du bâtiment. Dans le cadre des audits énergétiques, celles-ci sont généralement plus importantes. De plus, nous pouvons raisonnablement estimer que la méthode d'audit instrumenté pousse à tenter d'alléger la procédure de recueil de données sur place, afin de réduire les coûts de l'opération. Les incertitudes sur les valeurs d'initialisation des paramètres seront alors beaucoup plus élevées que celles envisagées plus haut. Nous cherchons donc ici à tester la robustesse de l'identification avec des niveaux d'incertitudes sur les paramètres élevés, donnés dans le tableau 3.10.

De nouveau, nous utilisons un échantillon de 50 tirages aléatoires de type Monte-Carlo. Les incertitudes utilisées sont directement lisibles sur le tableau 3.10, dans la colonne des audits classiques. Nous utilisons ces tirages comme autant d'initialisations pour notre méthode d'audit, décrite pour le cas d'étude en section 3.3.1. Nous n'analysons ici que la variante 1 de notre méthode.

Paramètre	Référence	audits classiques			audits instrumentés		
	$u_{cib}$	$\bar{u}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$	$\bar{u}_{rec}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$
$\rho c_s$	$1,8 \cdot 10^6$	$1,909 \cdot 10^6$	6	52,6	$1,803 \cdot 10^6$	0,2	0,6
$k_s$	0,96	0,977	1,7	56,4	0,961	0,1	0,3
$\eta_z$	0,8	0,896	12	49,6	0,817	2,2	5
$\bar{q}_z$	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$10,2 \cdot 10^{-3}$	9,5	45,1	$11,6 \cdot 10^{-3}$	25	47,3
$\tau_z$	0,6	0,692	15,3	46,9	0,63	5	11
$\lambda_z$	20	21,62	8,1	51,6	20,43	2,2	5
$d_z$	1000	1085,7	8,6	35,2	919	8,1	29,4

TABLE 3.10 – Moyennes et écart-types des identifications de la variante 1 sur l'échantillon de Monte-Carlo.

Le tableau 3.10 présente les résultats de l'identification de paramètres pour la variante 1 de notre méthode d'audit en cas de fortes incertitudes sur les paramètres inconnus. Nous constatons que la méthode converge encore de manière satisfaisante. Les incertitudes des estimations des propriétés internes des parois sont très fortement réduites, puisque les écarts-types passent de plus de 50% à moins de 0,6% (facteur 100), et sans biais. Le rendement des émetteurs et le coefficient de couplage convectif entre les émetteurs et les zones sont également très bien identifiés, puisque les incertitudes sont divisées par 10. Le coefficient de transmission des fenêtres gagne lui un facteur 5 en précision, puisque son écart-type moyen passe de 50% à 10%. Toutefois, nous retrouvons le problème d'identifiabilité du débit de renouvellement d'air.

Comme précédemment, nous traçons l'évolution de la température de la zone 1 sur la période des mesures ainsi que sur la semaine suivant l'audit, cf. figure 3.26. Cette figure illustre parfaitement la robustesse de la variante 1 de notre méthode à l'initialisation. Dans ce contexte, l'incertitude classique sur les réponse thermiques est de l'ordre de  $\pm 15^\circ\text{C}$ . Après identification, nous passons à une incertitude inférieure au degré.

Cette étude met en avant le fait que l'initialisation des paramètres identifiés n'influence pas énormément les résultats sur la précision des paramètres  $\rho c_s$ ,  $k_s$ ,  $\eta_z$ ,  $\tau_z$  et  $\lambda_z$ . Concrètement,

cela permet de simplifier le protocole expérimental, puisque l'étape de relevé *in situ* peut être écourtée pour ces paramètres.

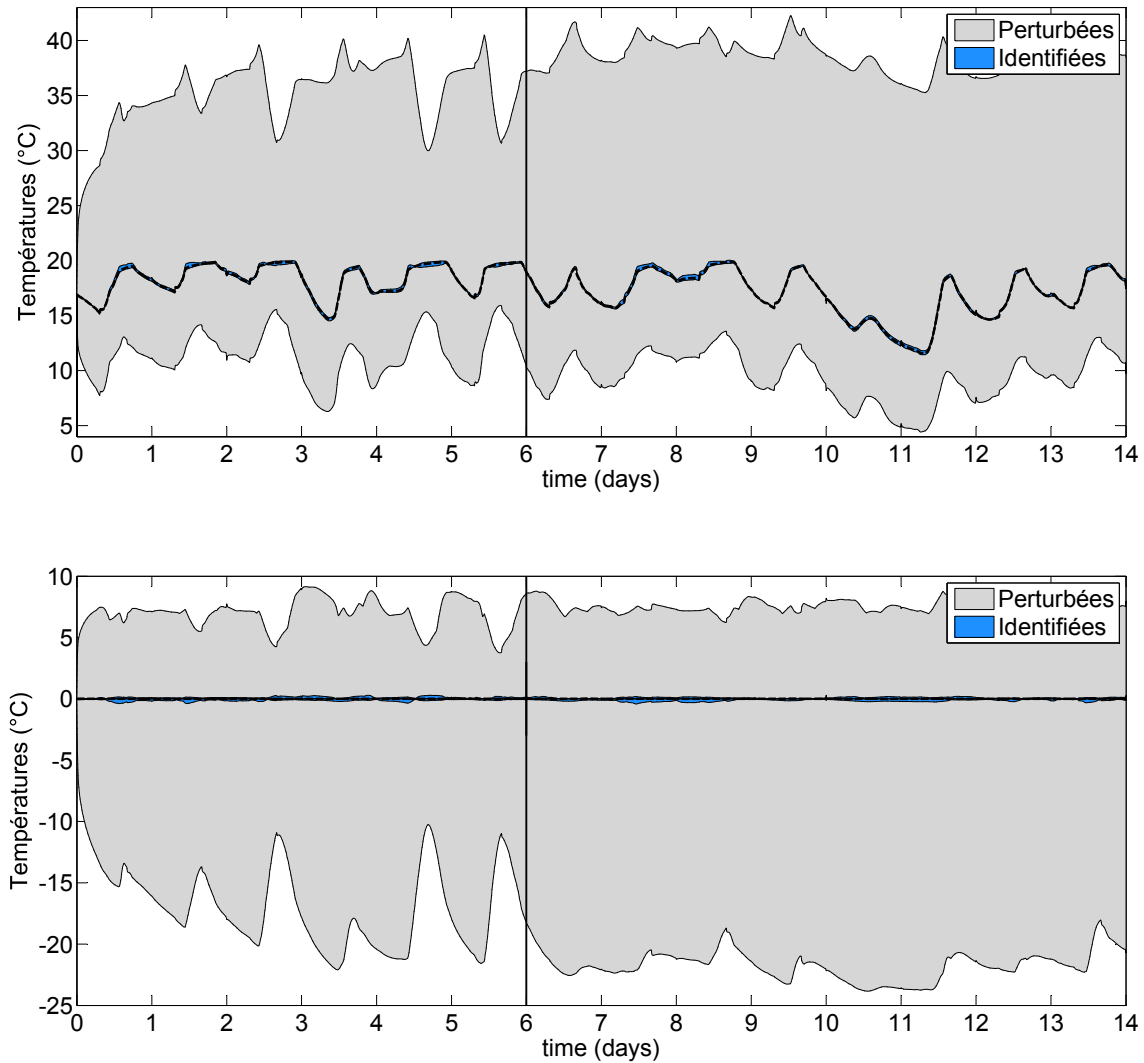


FIGURE 3.26 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées (initialisations de  $u$ ) en gris, et les réponses identifiées (résultats des identifications  $u$ ) en bleu. En haut, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; en bas, le graphe des erreurs : (cible - perturbées) et (cible - identifiées).

### 3.4 Conclusions et perspectives

Nous présentons dans ce chapitre notre méthode d'audit énergétique instrumenté, fondée sur la théorie des problèmes inverses, qui permet de réduire fortement les incertitudes des audits classiques. L'innovation est contenue dans la méthodologie, puisqu'ici nous mesurons l'état thermique pour calculer les paramètres thermophysiques intrinsèques du bâtiment. Après l'introduction des

concepts nécessaires à la résolution de problèmes d'identification de paramètres, nous décrivons le protocole opératoire ainsi que la technique utilisée pour notre outil d'audit énergétique des bâtiments. La méthode consiste à identifier un jeu de paramètres influents (thermiquement) afin de réduire les incertitudes sur les résultats de l'audit. L'utilisation d'un formalisme mathématique technique nous permet de proposer une méthode efficace, non intrusive, et facile à mettre en œuvre. L'outil se décline en deux protocoles opératoires différents, qui se différencient par le nombre de capteurs de consommations déployés et les scénarios d'instrumentation, et qui aboutissent à des précisions différentes. Nous appliquons ces niveaux d'instrumentation sur un cas d'étude, et les résultats sont comparés aux incertitudes classiques dans le domaine de la modélisation du bâtiment. Cette étude démontre le potentiel de l'outil, puisque les incertitudes sur les paramètres inconnus sont fortement réduites.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. Nous présentons dans ce qui suit les différentes idées qui pourraient faire l'objet de développement plus approfondis.

### Validation expérimentale

Naturellement, la première étape devrait être d'effectuer une validation expérimentale des outils développés, afin de vérifier la faisabilité technique et procédurale de la démarche.

### Plages temporelles pour l'identification et scénarios d'instrumentation

Des études mettent en évidence le fait que l'identifiabilité d'un jeu de paramètres peut augmenter lorsque l'identification se déroule sur plusieurs plages temporelles courtes. Cette remarque peut sembler contre-intuitive de prime abord, puisque les données contiennent les informations, donc on pourrait croire que plus nous avons d'information et plus l'algorithme sera efficace. La conclusion de ces études est que l'utilisation de trop d'informations non pertinentes peuvent réduire l'efficacité de la procédure. L'idée serait alors de concentrer l'inversion sur des intervalles temporels maximisant l'identifiabilité du jeu de paramètres inconnus.

Nous savons également que l'utilisation de scénarios de mesure (forçages, etc) et d'identification (différents jeux d'inconnues suivant le scénario) peuvent améliorer les résultats de l'audit, cf. [Subbarao *et al.*, 1988, Kuate *et al.*, 2012]. Nous pouvons également trouver des informations supplémentaires sur l'identifiabilité d'un jeu de paramètres dans la hessienne (dérivée à l'ordre 2) de la fonctionnelle. Ces différents aspects pourraient permettre d'augmenter le nombre de paramètres identifiés à moindre coût.

### Placement des capteurs

L'un des principaux inconvénients des modèles multizones nodaux tient dans la considération d'une température moyenne dans les zones. Cela signifie que, lors de la mesure de l'état thermique, il faut placer le capteur de température de zone en un point représentatif de la thermique moyenne. Pour diminuer les éventuelles erreurs pouvant apparaître dans cette étape de mesure, nous avons pensé à une calibration des propriétés du capteur en fonction de sa localisation. L'idée serait d'étudier des configurations de zones avec un grand nombre de capteurs. La température moyenne mesurée  $\bar{T}^d$  s'obtient alors facilement, et nous devrions pouvoir calibrer l'information d'un capteur quelconque  $T^d$  dans la pièce en identifiant les paramètres  $(\rho, \tau, \Delta)$ , liés par la relation :

$$\bar{T}^d = \rho T^d(t + \tau) + \Delta \quad (3.71)$$

On retrouve alors  $\rho$  l'amplitude,  $\tau$  le délai, et  $\Delta$  l'offset dus au placement du capteur.

L'autre solution serait de faire une analyse de placement optimal de capteurs, [Wouwer *et al.*, 2000, Lee *et Diwekar*, 2012, Waeytens *et al.*, 2013], notamment par méthode adjointe. Formellement, ces études utilisent une technique qui reviendrait à étudier les configurations

maximisant la métrique d'information de Fisher lors du passage de l'espace des observations à celui des paramètres, liée à la *géométrie* de l'information, [Amari *et al.*, 1987, Frieden, 2004].

### **Maitrise des scénarios d'usage**

Dans le domaine du bâtiment, l'usage représente une part importante de bilan thermique, [Haas *et al.*, 1998, Roulet *et al.*, 1999, Hoes *et al.*, 2009, Santin *et al.*, 2009]. On sait également que la maitrise des scénarios d'usage est contraignante et incertaine, [Guernouti, 2014]. Notre méthode d'audit nécessite toutefois la connaissance précise de ces informations. Une solution possible pour éclipser ce problème serait d'utiliser des plages temporelles pendant lesquelles l'usage est annulé, comme la nuit ou les weekend pour les bureaux.

Pour alléger cette partie du protocole opératoire, nous proposons au chapitre 5 une étude exploratoire qui pourrait permettre de s'affranchir de cette contrainte. Ces travaux sont encore au stade de l'étude, et nécessiteraient des développement supplémentaire pour valider leur utilisation pratique. L'ambition est de reconstruire les scénarios d'usage à partir des mesures de température des zones, en discriminant deux sources thermiques en fonction de leur dynamiques temporelles.





## Chapitre 4

# Étude de la performance de la méthode d'audit

La qualité d'un modèle doit être jugée sur sa capacité à servir les fins pour lesquelles il est conçu. L'audit énergétique a pour but de fournir au professionnel un outil de prévision et d'évaluation des scénarios de rénovation. Le modèle numérique doit donc ici pouvoir décrire les performances énergétiques d'un bâtiment sur différents postes de consommations, ce qui deviendra un guide de choix lors de la conception des travaux. Nous cherchons dans ce chapitre à évaluer la capacité du modèle calibré à prédire ces différents postes de consommations, que nous appellerons *variables d'intérêt*. Nous évaluons également la performance de ce même modèle lorsque les données de mesure sont bruitées, lorsque les conditions environnementales de l'audit varient, et lorsque les données d'entrée du modèle sont fortement dégradées.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Variables d'intérêt</b>	<b>96</b>
4.1.1	Consommations minimales intrinsèques	96
4.1.2	Décomposition des flux thermiques	99
<b>4.2</b>	<b>Calcul des variables d'intérêt sur l'identification de paramètres</b>	<b>100</b>
<b>4.3</b>	<b>Étude paramétrique de la procédure d'identification</b>	<b>102</b>
4.3.1	Saison de l'audit	102
4.3.2	Bruit de mesure	109
<b>4.4</b>	<b>Propagation d'incertitude et sensibilité du contrôle</b>	<b>114</b>
4.4.1	Identification dans un contexte d'incertitudes	114
4.4.2	Sensibilité du contrôle	116
<b>4.5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>118</b>

---

Après avoir précisément défini les variables d'intérêt, nous présentons des résultats numériques permettant d'évaluer la capacité du modèle calibré à prédire ces variables. Nous présentons ensuite une série de tests paramétriques pour évaluer la procédure d'audit lorsque les mesures sont bruitées, les conditions d'identification changent, ou dans un contexte d'incertitudes de modélisation généralisées. Enfin, nous présentons une approche de calcul de sensibilités des inconnues identifiées vis-à-vis des incertitudes de modélisation, faisant appel à la méthode de l'état adjoint.

## 4.1 Variables d'intérêt

Nous définissons comme variables d'intérêt des grandeurs calculées à partir du modèle calibré, et qui permettent d'analyser la performance énergétique du bâtiment modélisé avant et après travaux. Ces grandeurs concernent les quantités de chaleur échangées pour différents postes de consommations, permettant d'établir un bilan global. Commençons par définir les consommations globales, comme des consommations minimales intrinsèques.

### 4.1.1 Consommations minimales intrinsèques

Nous avons mis en avant au chapitre 1 que le principal reproche aux outils de diagnostic concerne le mauvais calcul des consommations, [Bordass *et al.*, 2004, Demanuele *et al.*, 2010, Macdonald *et al.*, 1999]. Ces dernières font naturellement partie de variables d'intérêt que nous étudions. Nous choisissons d'introduire des consommations ne dépendant que des propriétés intrinsèques du bâtiment, et qui ne prennent pas en compte la stratégie de pilotage du chauffage adopté, afin de cerner plus précisément les performances dues au bâti et aux systèmes. Nous définissons ainsi les *consommations minimales intrinsèques* par la solution d'un problème d'optimisation dont l'objectif est d'imposer une température de consigne dans les zones.

Commençons par rappeler le modèle thermique (4.1) utilisé, avec  $N_z$  le nombre de zones,  $N_s$  le nombre de surfaces,  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$  et  $s \in \llbracket 1; N_s \rrbracket$ . Les différents termes constituant ce modèle ont été introduits en section 2.6, et sont rappelés dans le tableau 4.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz} + \overline{\mathcal{A}}_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^0 + \mathcal{C}_{sz}^L) + \mathcal{Q}_z + \mathcal{W}_z + \Phi_z^b + \Phi_z^d \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \mathcal{P}_z - \mathcal{W}_z \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00} + \mathcal{R}_{sp}^{0L}) + \mathcal{R}_s^{0\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^0 + \overline{\mathcal{C}}_s^0 + \underline{\mathcal{C}}_s^0 + \Phi_s^{b0} + \Phi_s^{d0} \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0} + \mathcal{R}_{sp}^{LL}) + \mathcal{R}_s^{L\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^L + \overline{\mathcal{C}}_s^L + \underline{\mathcal{C}}_s^L + \Phi_s^{bL} + \Phi_s^{dL} \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Les consommations minimales intrinsèques étant la solution d'un problème d'optimisation, elles partagent le formalisme introduit pour notre méthode d'identification de paramètres,

Termes	Définition
$\mathcal{A}_{rz} = c_a R_{zr} (T_r - T_z)$	Échanges aérauliques interzones
$\overline{\mathcal{A}}_z = c_a q_z (T_a - T_z)$	Infiltrations d'air extérieur
$\mathcal{C}_{sz}^0 = h_{sz}^0 (\theta_s(0; t) - T_z)$ $\mathcal{C}_{sz}^L = h_{sz}^L (\theta_s(L_s; t) - T_z)$	Convection entre les surfaces et l'air intérieur
$\overline{\mathcal{C}}_s^0 = \overline{h}_s^0 (T_a - \theta_s(0; t))$ $\overline{\mathcal{C}}_s^L = \overline{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t))$	Convection entre les surfaces et l'air ambiant extérieur
$\underline{\mathcal{C}}_s^0 = \underline{h}_s^0 (T_g - \theta_s(0; t))$ $\underline{\mathcal{C}}_s^L = \underline{h}_s^L (T_g - \theta_s(L_s; t))$	Conduction entre les surfaces et le sol
$\mathcal{Q}_z = \sum_i \mathcal{Q}_z^i$	Apports internes relatif à l'usage
$\mathcal{R}_{sp}^{00} = \alpha_{sp}^{00} (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{0L} = \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{L0} = \alpha_{sp}^{L0} (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{LL} = \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces adjacentes
$\mathcal{R}_s^{0\infty} = \beta_s^0 (T^\infty - \theta_s(0; t))$ $\mathcal{R}_s^{L\infty} = \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre les surfaces et le ciel
$\mathcal{W}_z = \lambda_z (\Theta_z - T_z)$	Gains convectifs des émetteurs
$\Phi_z^b = A_z \tau_z \gamma_z^b \phi^b$ $\Phi_z^d = A_z \tau_z \gamma_z^d \phi^d$ $\Phi_s^{b0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0b} \phi^b$ $\Phi_s^{d0} = \alpha_s^0 \gamma_s^{0d} \phi^d$ $\Phi_s^{bL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Lb} \phi^b$ $\Phi_s^{dL} = \alpha_s^L \gamma_s^{Ld} \phi^d$	Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil à travers la fenêtre Rayonnement de courte longueur d'onde du Soleil

TABLE 4.1 – Rappel des flux du modèle

cf. section 3.2.1, et notamment 3.2.3. Nous réutilisons la notation  $f(p, u)$ , introduite dans l'équation (3.29), pour désigner la réponse thermique du modèle (4.1) pour les paramètres connus  $p$  et les paramètres à identifier  $u$ .

*Remarque.* Comme dans la section 3.2.3, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous ne faisons pas apparaître la dépendance de l'opérateur  $f$  par rapport aux paramètres connus  $p$ . Nous utilisons alors l'abus de notation  $f(u)$  pour désigner l'évaluation de l'état thermique.  $\square$

Commençons par introduire les observations. Nous souhaitons imposer une température de consigne dans les zones, les observations sont donc simplement constituées des températures des pièces. Soit  $\mathcal{M}_c$  l'espace des mesures pour le calcul des consommations, et  $O_c \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{M}_c)$  l'opérateur d'observation des températures des zones :

$$O_c(f) = \{T_z\}_z \in \mathcal{M}_c = [L^2(0; t_a)]^{N_z} \quad (4.2)$$

avec  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$ . Dans ce problème, les données sont les températures de consigne, et nous

avons :

$$m_c = \{T_z^c\}_z \in \mathcal{M}_c \quad (4.3)$$

avec  $T_z^c$  la température de consigne pour la zone  $z \in \llbracket 1; N_z \rrbracket$ .

Introduisons à présent les notations pour le problème d'optimisation. Soit  $\mathcal{U}_c$  l'espace des consommations inconnues défini par :

$$u = \{P_z\}_z \in \mathcal{U}_c = \left[ L_{0,P_z^+}^2(0; t_a) \right]^{N_z} \quad (4.4)$$

avec  $P_z^+$  la puissance maximale de l'émetteur  $z$ , et  $L_{0,P_z^+}^2(0; t_a)$  le sous-espace de  $L^2(0; t_a)$  défini par, [Briane et Pagès, 2006] :

$$L_{0,M}^2(0; t_a) = \{v \in L^2(0; t_a), 0 \leq v \leq M \text{ p.p.}\} \quad (4.5)$$

Ce choix d'inconnues rend l'opérateur  $f$  linéaire en  $u$ . Nous introduisons l'opérateur  $\hat{f} = O_c \circ f$  composé de l'évaluation de l'état thermique  $f$  par l'opérateur d'observation  $O_c$  :

$$\hat{f} : \mathcal{P}_c \times \mathcal{U}_c \xrightarrow{f} \mathcal{S} \xrightarrow{O_c} \mathcal{M}_c \quad (4.6)$$

Ici  $\mathcal{P}_c$  représente l'ensemble des paramètres supposés connus dans ce problème de calcul des consommations, et est constitué de l'ensemble des paramètres du modèle hormis les puissances.

Nous souhaitons calculer les consommations minimales  $\{P_z\}_z$  qui nous permettent d'obtenir les températures de consigne  $\{T_z^c\}_z$ . Pour cela, nous introduisons  $u \in \mathcal{U}_c$  le couple des puissances inconnues, ainsi que la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}u - m_c\|_{\mathcal{M}_c}^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|_{\mathcal{U}_c}^2 \quad (4.7)$$

avec  $p \in \mathcal{P}_c$  et  $\omega > 0$  un paramètre permettant d'ajuster le problème entre faibles consommations et fidélité à la consigne. L'opérateur  $f$  étant linéaire par rapport à  $u$ , le terme de pénalisation joue un rôle similaire au terme de régularisation de Tikhonov dans la résolution d'un problème inverse linéaire ; à ceci près qu'ici les mesures (les températures de consignes) ne sont généralement pas bruitées.

Les consommations minimales intrinsèques s'obtiennent en résolvant le problème d'optimisation qui consiste à trouver  $u \in \mathcal{U}_c$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}_c} \mathcal{J}(v) \quad (4.8)$$

De la même manière que dans la section 3.2.5, nous résolvons le problème linéaire d'optimisation (4.8) en utilisant le gradient conjugué. De nouveau, nous utilisons la méthode de l'état adjoint pour calculer le gradient de la fonctionnelle (4.7). La fonctionnelle  $\mathcal{J}$  est une forme quadratique affine et Fréchet-différentiable, de différentielle  $\mathcal{J}'(u) \in \mathcal{U}_c'$  :

$$\mathcal{J}(u + \delta u) = \mathcal{J}(u) + \mathcal{J}'(u)\delta u + o(\|\delta u\|_{\mathcal{U}_c}) \quad (4.9)$$

avec  $\delta u \in \mathcal{U}_c$ . Étant strictement convexe et coercive,  $\mathcal{J}$  possède un unique minimum caractérisé par la condition nécessaire du premier ordre, [Ekeland et Témam, 1999] :

$$\mathcal{J}'(u) = 0 \iff \forall \delta u \in \mathcal{U}_c, \langle \nabla \mathcal{J}(u); \delta u \rangle_{\mathcal{U}_c} = 0 \quad (4.10)$$

Nous souhaitons à présent utiliser l'état adjoint. Pour cela, reprenons l'équation (4.9) :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \mathcal{J}(u); \delta u \rangle_{\mathcal{U}_c} &= \mathcal{J}(u + \delta u) - \mathcal{J}(u) + o(\|\delta u\|_{\mathcal{U}_c}) \\
 &= \langle \widehat{f} \delta u; \widehat{f} u - m_c \rangle_{\mathcal{M}_c} + \omega \langle \delta u; u \rangle_{\mathcal{U}_c} \\
 &= \langle \delta u; \widehat{f}^* (\widehat{f} u - m_c) \rangle_{\mathcal{U}_c} + \omega \langle \delta u; u \rangle_{\mathcal{U}_c}
 \end{aligned}$$

L'opérateur  $\widehat{f}^*$ , adjoint de  $\widehat{f}$ , est solution du modèle adjoint (4.11). Dans ce dernier, la seule source,  $(T_z - T_z^c)$ , apparait dans l'équation des zones, puisque l'opérateur  $O_c$  n'observe que cette partie de l'état thermique, cf. modèle (3.48) et annexe A.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -C_z \frac{dT_z^*}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz}^* - c_a q_z T_z^* + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^{0*} + \mathcal{C}_{sz}^{L*}) + \mathcal{W}_z^* + (T_z - T_z^c) \\ T_z^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -d_z \frac{d\Theta_z^*}{dt} = -\mathcal{W}_z^* \\ \Theta_z^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s^*}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s^*}{\partial x} \right) = 0 \\ -k_s \frac{\partial \theta_s^*}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00*} + \mathcal{R}_{sp}^{0L*}) - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^{0*} - (\beta_s^0 + \bar{h}_s^0 + \underline{h}_s^0) \theta_s^*(0; t) \\ k_s \frac{\partial \theta_s^*}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0*} + \mathcal{R}_{sp}^{LL*}) - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^{L*} - (\beta_s^L + \bar{h}_s^L + \underline{h}_s^L) \theta_s^*(L_s; t) \\ \theta_s^*(x, t = t_a) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les différents termes apparaissant dans le modèle (4.11) sont décrits dans le tableau 4.2.

Termes	Définition
$\mathcal{A}_{rz}^* = c_a R_{zr} (T_r^* - T_z^*)$	Échanges aérauliques interzones
$\mathcal{C}_{sz}^{0*} = h_{sz}^0 (\theta_s^*(0; t) - T_z^*)$ $\mathcal{C}_{sz}^{L*} = h_{sz}^L (\theta_s^*(L_s; t) - T_z^*)$	Convection entre les surfaces des parois et l'air intérieur
$\mathcal{R}_{sp}^{00*} = \alpha_{sp}^{00} (\theta_p^*(0; t) - \theta_s^*(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{0L*} = \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p^*(L_p; t) - \theta_s^*(0; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{L0*} = \alpha_{sp}^{L0} (\theta_p^*(0; t) - \theta_s^*(L_s; t))$ $\mathcal{R}_{sp}^{LL*} = \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p^*(L_p; t) - \theta_s^*(L_s; t))$	Rayonnement de grande longueur d'onde entre surfaces opposées
$\mathcal{W}_z^* = \lambda_z (\Theta_z^* - T_z^*)$	Gains convectifs des émetteurs

TABLE 4.2 – Définition des flux du modèle adjoint (4.11).

De nouveau, nous obtenons le gradient de la fonctionnelle par :

$$\langle \nabla \mathcal{J}(u); \delta P_z \rangle_{L^2(0; t_a)} = \int_0^{t_a} \delta P_z [\eta_z \Theta_z^* + \omega P_z] \quad (4.12)$$

### 4.1.2 Décomposition des flux thermiques

L'autre variable d'intérêt concerne directement les paramètres du bâtiment. Les diagnostics énergétiques ont pour ambition de caractériser les postes de gains et de pertes thermiques. Pour cela, nous calculons les différents flux d'énergie apparaissant dans les équations de l'état thermique (4.1), et décrits dans le tableau 4.3. Nous obtenons ainsi l'impact des flux sur le bilan total. Les illustrations comme les diagrammes de Sankey permettent de mettre en forme ces calculs. Le bilan de flux, associé à l'expertise du professionnel, permet ensuite de guider les scénarios de rénovation.

Flux	Description
$\mathcal{A} = \sum_{z,r} c_a R_{zr} (T_r - T_z)$	Couplage thermo-aéraulique interzones
$\bar{\mathcal{A}} = \sum_z c_a q_z (T_a - T_z)$	Infiltrations d'air extérieur
$\mathcal{C}^s = \sum_{s,z} S_s h_{sz}^0 (\theta_s(0;t) - T_z)$ $+ \sum_{s,z} S_s h_{sz}^L (\theta_s(L_s;t) - T_z)$	Couplages convectifs avec les surfaces des parois
$\mathcal{Q} = \sum_{i,z} Q_z^i$	Apports internes
$\mathcal{W} = \sum_z \lambda_z (\theta_z - T_z)$	Couplage convectif avec les émetteurs
$\Phi = \sum_z A_z \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d)$	Apports solaires
$\mathcal{N} = \sum_z (\eta_z - 1) P_z$	Pertes dues au rendement des émetteurs

TABLE 4.3 – Description des flux thermiques dans la zone

Pour gagner en lisibilité dans l'étude des résultats, nous intégrerons ces flux dans le temps afin de travailler avec des énergies. Ainsi, les résultats porteront sur des scalaires. Notez que le dernier flux de la liste 4.3 n'est pas directement issu de l'équation de l'état thermique. Son importance apparait lorsque nous raisonnons en statique pour calculer un bilan de flux.

Cette seconde variable d'intérêt va plus loin que la première, puisqu'elle permet de vérifier si la méthode de diagnostic est capable de faire la part des choses parmi les différents postes énergétiques.

## 4.2 Calcul des variables d'intérêt sur les résultats de l'identification de paramètres

Reprenons à présent le cas d'étude, cf. figure 4.1, pour calculer les variables d'intérêt introduites section 4.1 sur les résultats de l'identification de paramètres obtenus en section 3.3.

Pour rappel, cette étude analyse l'identification de paramètres à partir de données de température des zones, des émetteurs, ainsi que des surfaces 2, 4 et 13, cf. figure 4.1. L'approche proposée est constituée de deux variantes, la première mesurant chacune des puissances fournies

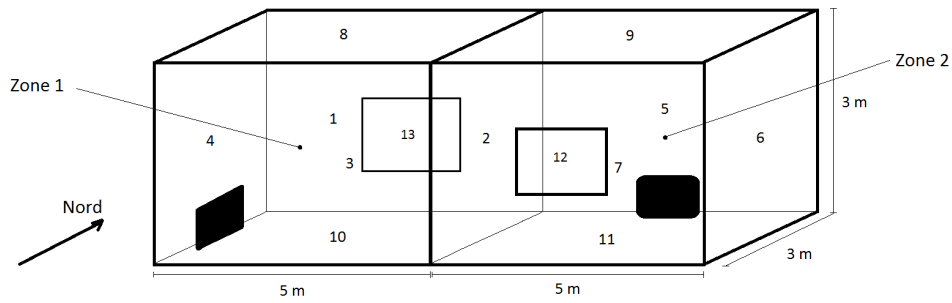


FIGURE 4.1 – Plan du cas d'étude constitué de deux zones

aux émetteurs, et la seconde mesurant une puissance totale fournie aux émetteurs. Nous étudions ici la première variante de la méthode, pour laquelle les résultats sont présentés en section 3.3.2. Le vecteur des inconnues s'écrit :

$$u = \{\rho c_s, k_s, \eta_z, \bar{q}_z, \tau_z, \lambda_z, d_z\}_{s;z} \quad (4.13)$$

Commençons par reprendre les résultats de l'identification de paramètres dans le tableau 4.4.

Paramètre	Référence	Audits classiques			Variante 1		
	$u_{cib}$	$\bar{u}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$	$\bar{u}_{rec}$	$\bar{E}\%$	$\sigma\%$
$\rho c_s$	$1,8.10^6$	$1,713.10^6$	4,8	21,2	$1,8.10^6$	0	0,3
$k_s$	0,96	0,91	5,2	24,3	0,96	0	0,2
$\eta_z$	0,8	0,798	0,3	6	0,801	0,1	2,7
$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,2.10^{-3}$	0,9	30,4	$9,4.10^{-3}$	1,2	31
$\tau_z$	0,6	0,593	1,2	11,3	0,6	0	6,4
$\lambda_z$	20	19,56	2,2	29,4	20	0,1	2,7
$d_z$	1000	1005,2	0,5	41,2	991,3	0,9	11,3

TABLE 4.4 – Moyennes et écart-types des identifications de la variante 1 sur l'échantillon de Monte-Carlo.

Les consommations minimales intrinsèques sont calculées sur une période d'un an, en utilisant les conditions environnementales importées des fichiers météo d'EnergyPlus. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5. Les audits classiques permettent de conclure à une incertitude de près de 10% sur ces consommations. L'incertitude disparaît presque totalement pour les résultats de la variante 1 de notre méthode. Cela se comprend bien, puisque ces consommations sont obtenues en observant les températures des zones, et nous avons montré en section 3.3.2 que notre méthode permettait de retrouver précisément ces températures.

Calculons à présent la décomposition de flux thermiques, cf. tableau 4.3. Les températures des pièces sont proches de la température de consigne  $T_z^c = 20^\circ\text{C}$ , ce qui signifie que le flux thermique d'échanges aérauliques interzones  $\mathcal{A}$  est quasiment nul. Nous ne le faisons pas apparaître dans la décomposition des flux. De même, le flux concernant les gains internes  $\mathcal{Q}_z$  est constitué des scénarios d'usage qui sont supposés connus. Dans cette analyse, il n'y a donc pas d'incertitude sur ce flux, et nous ne le faisons pas apparaître. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6.



Paramètre	Valeur (kWh/m <sup>2</sup> .an)	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
Consommations de référence	802,85	-	-
Consommations incertaines	799,24	0,4	9,7
Consommations reconstruites	802,88	0	0,3

TABLE 4.5 – Consommations minimales intrinsèques.

Flux intégrés (kWh/m <sup>2</sup> .an)	Cible	Perturbés	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$	Variante 1	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
$\int \bar{A}$	-71,15	-70,58	0,8	30,1	-71,35	0,3	28,6
$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-319,07	0,7	11,6	-231,28	0	0,2
$\int \mathcal{N}$	-160,57	-164,79	2,6	22	-160,38	0,1	9,5
$\int \Phi$	703,36	698,72	0,7	5,3	703,77	0,1	2,7
$\int \mathcal{W}$	642,28	638,05	0,7	5,7	642,47	0	2,4

TABLE 4.6 – Analyse de la décomposition de flux de la variante 1 de notre méthode appliquée au cas d'étude.

Nous remarquons naturellement que les incertitudes des paramètres se propagent sur la décomposition des flux. Sur le cas d'étude considéré, notre méthode n'était pas à même de déterminer le débit de renouvellement d'air dans les zones, et les incertitudes de notre méthodes étaient du même ordre de grandeur que les audits classiques. Cela se retrouve sur le flux de renouvellement d'air  $\bar{A}$ , aussi incertain que pour les audits classiques. Les autres paramètres ayant mieux été identifiés, c'est normal que les incertitudes sur les autres flux soient moins importantes. Les flux des pertes par les parois est parfaitement reconstruit. Les apports solaires et des émetteurs sont également précisés, à la fois en termes d'erreur relative et d'incertitudes. Enfin, les pertes relatives aux rendement des émetteurs passent de 25% d'erreur à 10% d'erreur.

### 4.3 Étude paramétrique de la procédure d'identification

Nous proposons dans cette section un certain nombre d'études paramétriques afin d'évaluer la robustesse de la procédure d'identification de paramètres de la méthode d'audit. Ces études concernent la saison de l'audit et le bruit de mesure des capteurs de température. Pour cela, nous reprenons l'application de la variante 1 sur le cas d'étude, *cf.* figure 4.2. Pour plus de détails sur cette application, le lecteur pourra se reporter aux sections 3.3.1 et 3.3.2.

#### 4.3.1 Saison de l'audit

Dans cette première étude, nous analysons les résultats de la méthode en fonction de la saison de l'audit. Cela permet de tester la sensibilité de l'outil aux conditions environnementales. En effet, comme précisé dans la remarque concluant la section 3.2.5, les conditions environnementales jouent un rôle sur l'identifiabilité du problème inverse.

L'application de la variante 1, effectuée en section 3.3.2, étudiait les résultats d'un audit effectué durant la première semaine du mois de février. Nous reprenons les caractéristiques de la mise en œuvre de l'audit, mais changeons la date afin de simuler des audits effectués durant la

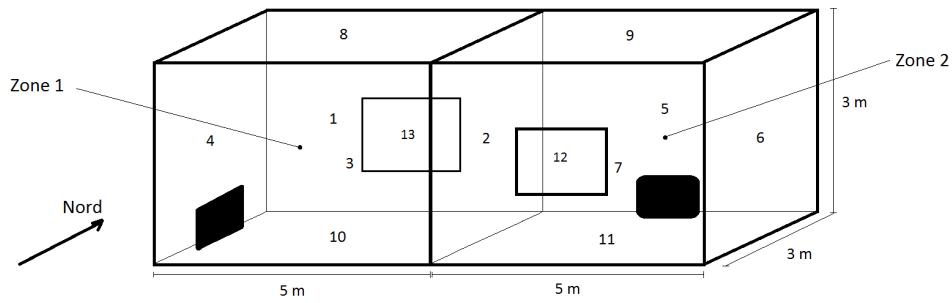


FIGURE 4.2 – Plan du cas d'étude constitué de deux zones

première semaine des mois de mai, août et novembre. Les conditions environnementales durant ces semaines sont résumées dans le tableau 4.7 en termes de flux solaires moyens par jour et de Degrés-Jour Unifiés<sup>1</sup> (DJU), [Météo France, 2005].

Mois de l'audit	DJU moyen (°C)	Flux solaires moyens par jour (kWh)	
		Direct	Diffus
Février	12,38	2,01	0,95
Mai	6,15	1,88	3,08
Août	-2,48	4,73	2,78
Novembre	9,56	1,15	1,13

TABLE 4.7 – Degrés-Jour Unifiés (DJU) et flux solaires moyens journaliers pour les différentes saisons de l'audit. Les DJU positifs correspondent à des DJU de chauffe, et ceux négatifs à des DJU de réfrigération. La référence utilisée pour le calcul des DJU est fixée à 20°C.

Comme précédemment, les résultats numériques présentés ci-dessous sont obtenus dans une démarche de crime inverse : nous engendrons des mesures de synthèse de l'état thermique à partir de notre modèle de référence, puis nous perturbons les paramètres du vecteur  $u$  que nous allons identifier à partir des mesures.

Les résultats de l'identification sont présentés dans le tableau 4.8. Nous proposons une illustration de ces résultats sur la figure 4.3, avec l'évolution des incertitudes sur les paramètres en fonction de la saison de l'audit. Le mois d'août semble être le plus propice à réduire les incertitudes classiques des audits, puisque la plupart des écarts-types y est minimale. L'estimation des propriétés des parois  $\rho c_s$  et  $k_s$ , du rendement des émetteurs  $\eta_z$  et du coefficient de couplage convectif entre les émetteurs et les zones  $\lambda_z$  ne semblent pas être affectée par la saison de l'audit, puisque l'incertitude identifiée pour chaque paramètre reste constante. Le mois d'août est particulièrement intéressant pour le débit de renouvellement d'air  $\bar{q}_z$ , la capacité des émetteurs  $d_z$  et le facteur de transmission des fenêtres  $\tau_z$ .

1. La référence utilisée pour le calcul des DJU est fixée 20°C.

Mois	Paramètre	Cible	Reconstruction	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
Février	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,3
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,2
	$\eta_z$	0,800	0,801	0,1	2,7
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,4.10^{-3}$	1,2	31
	$\tau_z$	0,600	0,600	0	6,3
	$\lambda_z$	20	20,03	0,1	2,7
	$d_z$	1000	990,2	1	11,3
Mai	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,2
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,2
	$\eta_z$	0,800	0,801	0,2	2,7
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,5.10^{-3}$	1,5	29,7
	$\tau_z$	0,600	0,602	0,3	6,6
	$\lambda_z$	20	20,03	0,2	2,7
	$d_z$	1000	987,8	1,2	13,5
Août	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,801.10^6$	0,1	0,2
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,1
	$\eta_z$	0,800	0,800	0	2,3
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,2.10^{-3}$	0,9	19,8
	$\tau_z$	0,600	0,603	0,4	2,6
	$\lambda_z$	20	20,01	0,1	2,3
	$d_z$	1000	995,3	0,5	1,8
Novembre	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,2
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,1
	$\eta_z$	0,800	0,801	0,2	2,5
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,4.10^{-3}$	1,3	31,4
	$\tau_z$	0,600	0,600	0	8,6
	$\lambda_z$	20	20,03	0,2	2,5
	$d_z$	1000	1001,5	0,2	11,3

TABLE 4.8 – Résultats de l'identification de paramètres avec la variante 1 de notre méthode pour l'étude paramétrique sur la saison de l'audit. Valeurs cibles, reconstruites moyennes, erreurs relatives et écart-types des identifications sur l'échantillon de Monte-Carlo.

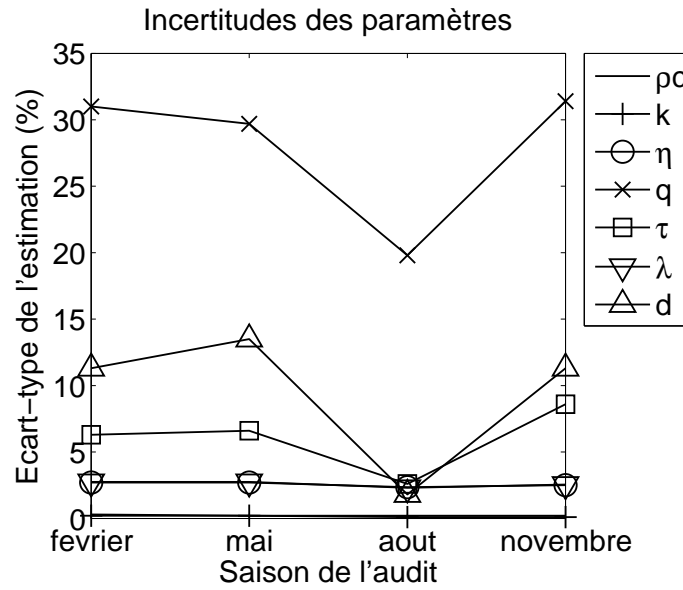


FIGURE 4.3 – Variations des incertitudes sur les paramètres estimés en fonction de la saison de l'audit.

Comme lors de l'étude de la variante 1 de la méthode, en section 3.3.2, nous présentons sur la figure 4.4 les incertitudes sur les réponses thermiques de la zone 1 dans les cas incertains et dans les cas identifiés par la variante 1 de notre méthode. Cette figure contient également un graphe des erreurs par rapport à la référence. Nous remarquons que dans tous les cas, les incertitudes sur la réponse thermique de la zone 1 sont fortement réduites. Pour aller plus loin dans l'analyse, nous utilisons ensuite les variables d'intérêt introduites en section 4.1.

Le tableau 4.9 présente les résultats des estimations des consommations minimales intrinsèques sur l'année en fonction des mois de l'audit. Nous remarquons que la saison n'impacte pas énormément les prédictions de ces consommations, puisque les écarts-types sont dans tous les cas fortement réduits. Ces résultats sont cohérents avec ceux présentés sur la figure 4.4, puisque dans tous les cas la température de la zone (*i.e.* l'observation de l'état thermique pour le calcul des consommations minimales intrinsèques) est bien identifiée.

Paramètre	Valeur (kWh/m <sup>2</sup> .an)	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
Consommations de référence	802,85	-	-
Consommations incertaines	799,24	0,4	9,7
Consommations calibrées en février	802,87	0	0,3
Consommations calibrées en mai	802,77	0	0,4
Consommations calibrées en août	802,44	0,1	0,5
Consommations calibrées en novembre	802,83	0	0,3

TABLE 4.9 – Consommations minimales intrinsèques de la variante 1 pour l'étude paramétrique sur la saison de l'audit.

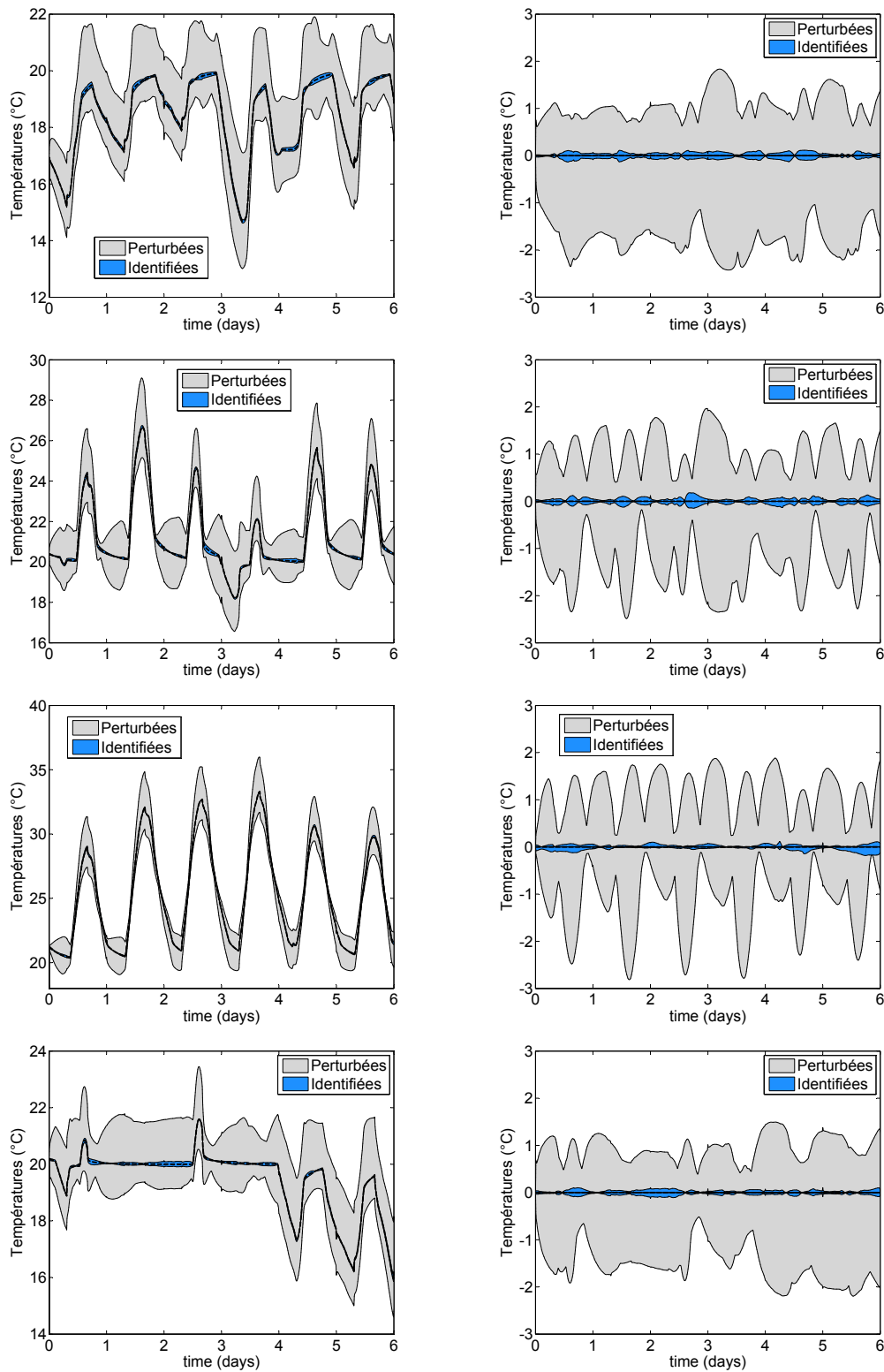


FIGURE 4.4 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées (initialisations de  $u$ ) en gris, et les réponses identifiées (résultats des identifications  $u$ ) en bleu, et suivant la saison de l'audit. À gauche, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; à droite, le graphe des erreurs : (cible - perturbées) et (cible - identifiées). De haut en bas, la première semaine des mois de février, mai, août puis novembre.

Nous étudions maintenant la décomposition de flux pour cette étude paramétrique sur la saison de l'audit. Les résultats sont affichés dans le tableau 4.10. Pour faciliter la lecture de ce tableau, nous proposons une illustration de l'évolution des incertitudes de l'estimation en fonction de la saison, cf. figure 4.5. Nous remarquons que la plupart des incertitudes sur le calcul des flux est indépendante de la saison. La seule incertitude qui varie fortement en fonction de la la saison est celle de l'identification du flux de renouvellement d'air. Ces résultats sont bien entendu en adéquation avec ceux obtenus sur les paramètres du vecteur  $u$ . En effet, les paramètres les plus incertains sont le débit de renouvellement d'air  $q_z$  et la capacité des émetteurs  $d_z$ . Le dernier n'ayant qu'une faible influence sur la thermique du bâtiment, nous retrouvons naturellement que le flux du débit de renouvellement d'air est le plus incertain. De même, la variabilité de l'incertitude de  $q_z$  par rapport à la saison de l'audit se retrouve sur le flux du débit de renouvellement d'air.

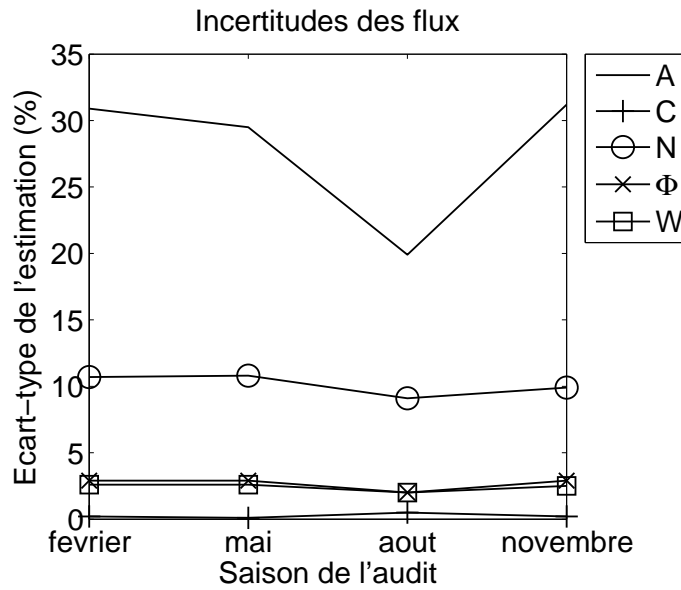


FIGURE 4.5 – Variations des incertitudes sur la décomposition de flux à partir des paramètres estimés par la variante 1 de notre méthode d'audit en fonction de la saison de l'audit.

Mois de l'audit	Flux (kWh/m <sup>2</sup> .an)	Cible	Reconstruction	$\overline{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
Février	$\int \overline{\mathcal{A}}$	-71,15	-71,99	1,2	30,9
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,21	0	0,4
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-159,67	0,6	10,7
	$\int \Phi$	703,36	704,28	0,1	2,9
	$\int \mathcal{W}$	642,28	643,20	0,1	2,6
Mai	$\int \overline{\mathcal{A}}$	-71,15	-72,20	1,5	29,5
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,24	0	0,2
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-159,52	0,7	10,8
	$\int \Phi$	703,36	704,50	0,2	2,9
	$\int \mathcal{W}$	642,28	643,26	0,2	2,6
Août	$\int \overline{\mathcal{A}}$	-71,15	-70,56	0,8	19,9
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,61	0,2	1
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-160,18	0,2	9,1
	$\int \Phi$	703,36	703,61	0	2
	$\int \mathcal{W}$	642,28	642,26	0	2
Novembre	$\int \overline{\mathcal{A}}$	-71,15	-72,02	1,2	31,2
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,24	0	0,4
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-159,57	0,6	9,9
	$\int \Phi$	703,36	704,34	0,1	2,9
	$\int \mathcal{W}$	642,28	643,26	0,2	2,5

TABLE 4.10 – Analyse de la décomposition de flux de notre méthode d'audit pour l'étude paramétrique sur la saison de l'audit.

### 4.3.2 Bruit de mesure

L'étude paramétrique porte ici sur le bruit de mesure introduit par les capteurs. De nouveau, nous reprenons le cas d'étude décrit sur la figure 4.2. L'audit se déroule durant la première semaine du mois de février, comme dans l'application de la variante 1 en section 3.3.2. Les observations partielles de l'état thermique sont perturbées numériquement par un bruit blanc gaussien dont l'amplitude, *i.e.* l'écart-type, varie dans l'ensemble  $\{0; 0,1; 0,5; 1\}$ . Comme précédemment, les résultats numériques présentés ci-dessous sont obtenus dans une démarche de crime inverse : nous engendrons des mesures de synthèse de l'état thermique à partir de notre modèle de référence, nous leur ajoutons un bruit blanc gaussien, puis nous perturbons les paramètres du vecteur  $u$  que nous allons identifier à partir des mesures perturbées.

Nous commençons par afficher sur la figure 4.6 les mesures utilisées avec les différents niveaux de bruit, afin d'illustrer l'amplitude du bruit considéré. Ce bruit blanc gaussien est appliqué sur chaque capteur mesurant l'état thermique : capteurs de température de surface sur la fenêtre 13 et sur les parois 2 et 4, capteurs de température de surface sur les émetteurs, et capteurs de température de l'air des zones.

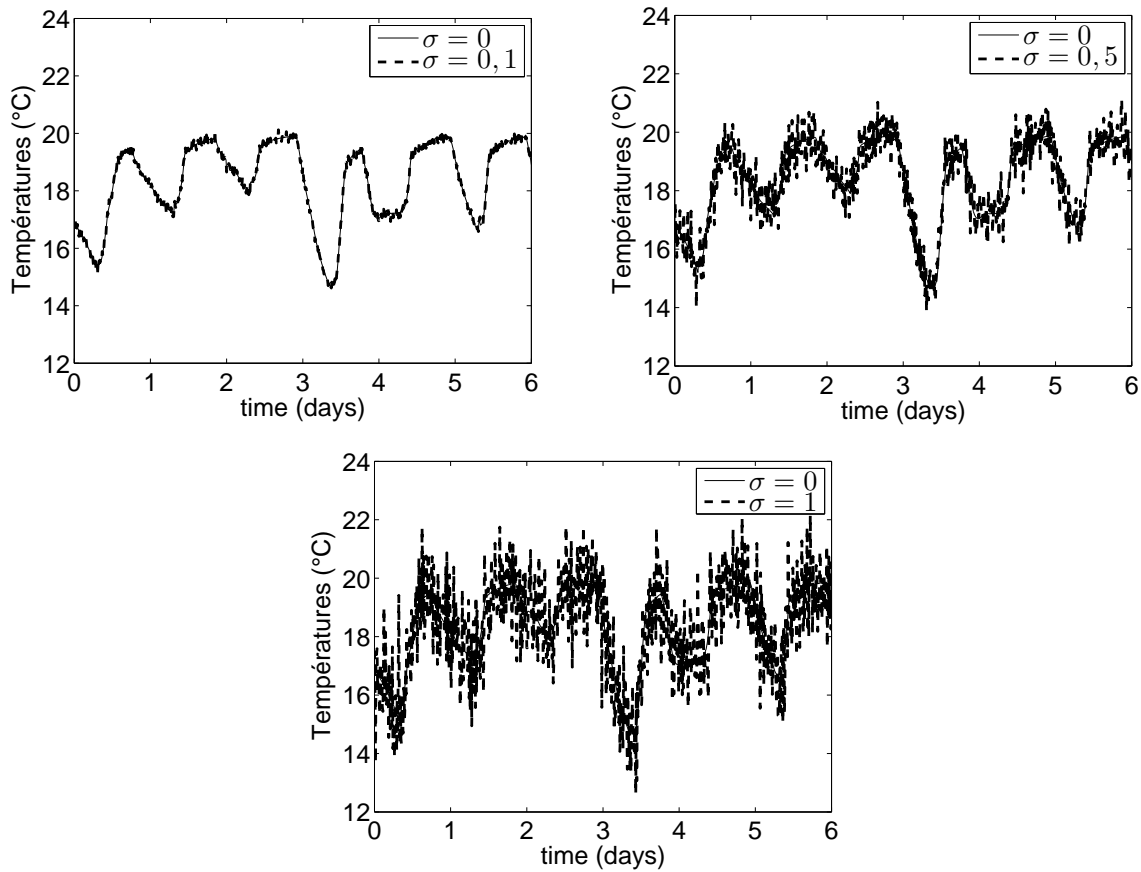


FIGURE 4.6 – Mesures thermiques de la zone 1 pour différents niveaux de bruits blanc gaussien. En haut à gauche, écart-type  $\sigma = 0,1$  ; à droite,  $\sigma = 0,5$  ; en bas,  $\sigma = 1$ .

La tendance attendue est une augmentation des écarts-types de l'identification en fonction de l'augmentation de l'écart-type du bruit des mesures. Les résultats de l'identification sont présentés dans le tableau 4.11. Pour simplifier la lecture du tableau de résultats, nous présentons sur la figure 4.7 l'évolution des écarts-types des reconstructions  $\sigma_{\%}$  pour chacune des variables en



fonction de l'écart-type du bruit. Nous remarquons que le niveau de bruit n'affecte pas tous les écarts-types des inconnues de la même manière. L'incertitude sur l'identification de la capacité des émetteurs  $d_z$  croît rapidement avec le bruit, avant de stagner à 35%. Pour le facteur de transmission des fenêtres  $\tau_z$ , l'incertitude semble évoluer presque linéairement par rapport au niveau de bruit, et culmine à 20,3% lorsque le bruit est maximal. Pour les autres paramètres, à savoir les propriétés des parois  $\rho c_s$  et  $k_s$ , le rendement des émetteurs  $\eta_z$  et le coefficient de couplage avec les zones  $\lambda_z$ , ainsi que le débit de renouvellement d'air moyen  $\bar{q}_z$ , le niveau de bruit n'affecte que peu l'incertitude de l'estimation, puisque cette dernière augmente d'à peine 2% (dans le pire des cas) lorsque l'écart-type du bruit passe de 0 à 1. La croissance importante de l'incertitude de la capacité des émetteurs  $d_z$  avec le niveau de bruit est cependant à mettre en perspective de son influence sur la thermique de la zone, cf. section 2.7.2. En effet, ce paramètre faisait partie des moins influents parmi ceux étudiés.

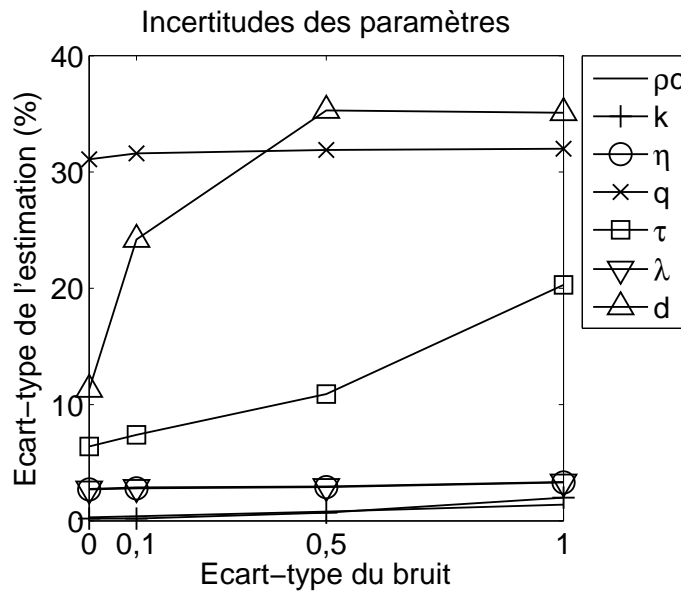


FIGURE 4.7 – Variations des incertitudes sur les paramètres estimés par la variante 1 en fonction de l'écart-type du bruit blanc gaussien des mesures.

Écart-type du bruit	Paramètre	Cible	Reconstruction	$\overline{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
$\sigma = 0$	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,3
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,2
	$\eta_z$	0,800	0,801	0,1	2,7
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,4.10^{-3}$	1,2	31,1
	$\tau_z$	0,600	0,600	0	6,4
	$\lambda_z$	20	20,03	0,1	2,7
	$d_z$	1000	991	0,9	11,3
$\sigma = 0,1$	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,4
	$k_s$	0,960	0,960	0	0,2
	$\eta_z$	0,800	0,801	0,1	2,8
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,4.10^{-3}$	1,3	31,6
	$\tau_z$	0,600	0,600	0	7,4
	$\lambda_z$	20	20,03	0,1	2,8
	$d_z$	1000	967,2	3,3	24,2
$\sigma = 0,5$	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	0,8
	$k_s$	0,960	0,960	0,1	0,7
	$\eta_z$	0,800	0,799	0,2	2,9
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,5.10^{-3}$	1,5	31,9
	$\tau_z$	0,600	0,630	5	10,9
	$\lambda_z$	20	19,97	0,2	2,9
	$d_z$	1000	1000,5	0	35,3
$\sigma = 1$	$\rho c_s$	$1,800.10^6$	$1,800.10^6$	0	1,4
	$k_s$	0,960	0,952	0,8	2
	$\eta_z$	0,800	0,792	0,9	3,3
	$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,5.10^{-3}$	1,7	32
	$\tau_z$	0,600	0,660	10	20,3
	$\lambda_z$	20	19,81	1	3,3
	$d_z$	1000	943,5	5,7	35,1

TABLE 4.11 – Résultats de l'identification de paramètres avec la variante 1 de notre méthode pour l'étude paramétrique sur le bruit des capteurs mesurant l'état thermique. Valeurs cibles, reconstruites moyennes, erreurs relatives et écart-types des identifications sur l'échantillon de Monte-Carlo.

Tout comme la conclusion de l'application de la variante 1 au cas d'étude, *cf.* section 3.3.2, nous calculons les différentes réponses du modèle thermique avec la famille de jeu de paramètres identifiés. Cela nous permet d'obtenir une plage d'incertitude sur la réponse thermique. Nous effectuons ce calcul sur la température de la zone 1, *cf.* figure 4.8. Nous remarquons que, même lorsque le bruit de mesure est important, la prédiction de température des zones est relativement fiable. Cela signifie que la variante 1 de notre méthode est stable par rapport au bruit de mesure.

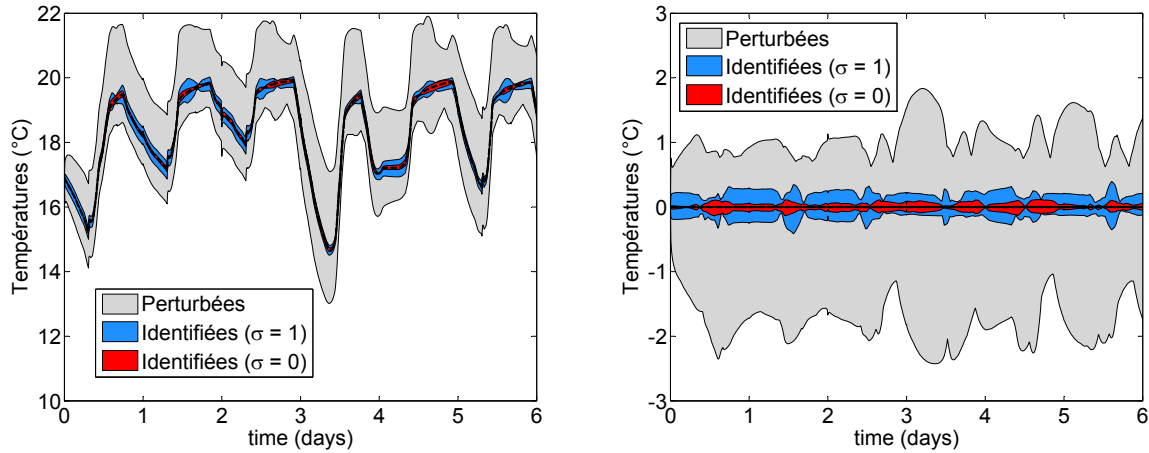


FIGURE 4.8 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées en gris, les réponses identifiées pour un écart-type de 1 en bleu, et les réponses identifiées pour un écart-type nul en rouge. À gauche, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; à droite, le graphe des erreurs entre la cible et les réponses.

Nous utilisons ensuite les variables d'intérêt introduites en section 4.1 pour analyser plus précisément les résultats. Le tableau 4.12 présente le calcul des consommations intrinsèques minimales obtenu à l'issu des audits avec différents niveaux de bruit. L'incertitude initiale sur ces consommations intrinsèques est proche des 10%. Pour tous les écarts-types, cette variable d'intérêt est correctement évaluée, avec des erreurs moyennes quasiment nulles (inférieures à 0,1%), et des incertitudes fortement réduites (inférieures à 0,8%). Nous pouvons en conclure que les consommations intrinsèques minimales d'un bâtiment sont correctement évaluées par la variante 1 de notre méthode, même lorsque les mesures de l'état thermique sont entachées d'un bruit.

L'analyse des décompositions de flux appliquées à la famille des résultats de l'identification est présentée dans le tableau 4.9. La figure 4.9 propose une visualisation des incertitudes sur les flux en fonction du niveau de bruit des mesures, afin d'aider à la lecture du tableau 4.13. Nous remarquons que l'écart-type du bruit des mesures n'influence que très peu les incertitudes sur la décomposition de flux, puisqu'elles varient au plus de 1,1% lorsque l'on passe d'un bruit nul à un bruit maximal (écart-type de 1). Nous pouvons donc en conclure que la variante 1 de la méthode donne des résultats très stables par rapport au bruit de mesure en ce qui concerne les variables d'intérêt. Toutefois, les fortes incertitudes sur certains paramètres se répercutent sur la décomposition de flux, avec l'introduction de légers biais, même si les résultats avec notre méthode sont plus précis que pour les audits classiques.

### 4.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE LA PROCÉDURE D'IDENTIFICATION

Paramètre	Valeur (kWh/m <sup>2</sup> .an)	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
Consommations de référence	802,85	-	-
Consommations incertaines	799,24	0,4	9,7
Consommations calibrées ( $\sigma = 0$ )	802,88	0	0,2
Consommations calibrées ( $\sigma = 0,1$ )	802,97	0	0,4
Consommations calibrées ( $\sigma = 0,5$ )	803,14	0	0,8
Consommations calibrées ( $\sigma = 1$ )	803,57	0,1	0,8

TABLE 4.12 – Consommations minimales intrinsèques pour l'étude paramétrique sur le bruit de mesure de l'audit.

Écart-type du bruit	Flux (kWh/m <sup>2</sup> .an)	Cible	Reconstruction	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
$\sigma = 0$	$\int \bar{\mathcal{A}}$	-71,15	-71,99	1,2	30,9
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,21	0	0,4
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-159,70	0,5	10,7
	$\int \Phi$	703,36	704,27	0,1	2,9
	$\int \mathcal{W}$	642,28	643,20	0,1	2,6
$\sigma = 0,1$	$\int \bar{\mathcal{A}}$	-71,15	-72,04	1,3	31,5
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,24	0	0,4
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-159,68	0,6	11
	$\int \Phi$	703,36	704,38	0,1	3
	$\int \mathcal{W}$	642,28	643,29	0,2	2,7
$\sigma = 0,5$	$\int \bar{\mathcal{A}}$	-71,15	-72,17	1,4	31,8
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-321,82	0,3	0,6
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-161,69	0,7	10,9
	$\int \Phi$	703,36	705,60	0,3	3
	$\int \mathcal{W}$	642,28	641,45	0,1	2,7
$\sigma = 1$	$\int \bar{\mathcal{A}}$	-71,15	-72,29	1,6	31,8
	$\int \mathcal{C}^s$	-321,16	-320,66	0,2	1
	$\int \mathcal{N}$	-160,57	-166,79	3,9	11,8
	$\int \Phi$	703,36	704,97	0,1	3
	$\int \mathcal{W}$	642,28	636,78	0,9	3,1

TABLE 4.13 – Analyse de la décomposition de flux avec la variante 1 de notre méthode d'audit pour l'étude paramétrique sur le bruit de mesure de l'audit.

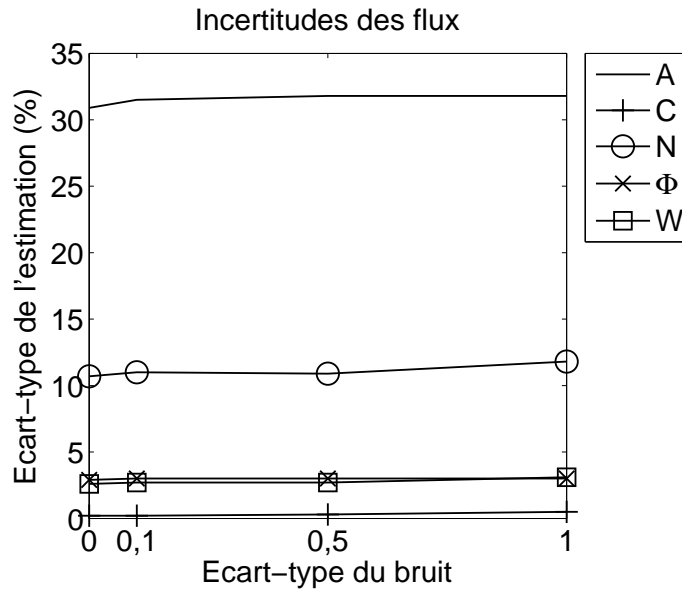


FIGURE 4.9 – Variations des incertitudes sur la décomposition de flux à partir des paramètres estimés par la variante 1 de notre méthode d'audit en fonction de l'écart-type du bruit blanc gaussien des mesures.

## 4.4 Propagation d'incertitude et sensibilité du contrôle

Les études effectuées dans la section 4.3 se concentrent sur l'analyse de la précision de la reconstruction des paramètres sélectionnés par rapport à différents contextes (niveau de bruit des capteurs, saison de l'audit). Elles restent cependant dans le périmètre du crime inverse, puisque seuls les paramètres du vecteur d'inconnues  $u$  ont été perturbés. Dans cette section, nous poussons plus loin l'analyse en se rapprochant de la réalité, pour laquelle il n'existe pas de paramètre certain.

Nous proposons plusieurs approches. La première reprend l'idée utilisée jusqu'à maintenant qui utilise un échantillon de tirages aléatoires suivant les incertitudes classiques des paramètres du bâtiment, cf. tableau 2.8. Cette fois-ci, les tirages ne concernent plus uniquement les paramètres du vecteur d'inconnues  $u$ , mais tous les paramètres du modèle  $(p, u)$ . Cette approche est *exacte*, puisqu'elle perturbe réellement la totalité des paramètres. La seconde approche consiste à calculer une plage d'incertitudes sur le vecteur des paramètres  $u$  après l'identification. Pour cela, nous utilisons la théorie de la perturbation du contrôle pour obtenir une incertitude *approchée* par propagation d'incertitudes.

### 4.4.1 Identification dans un contexte d'incertitudes

Dans cette section, nous proposons une étude qui reprend et approfondit l'approche utilisée dans la section 3.3. Nous générons ici encore un échantillon de 50 tirages aléatoires suivant les incertitudes classiques dans le bâtiment, cf. tableau 2.8. Cette fois-ci, nous perturbons à la fois les paramètres  $p$  supposés connus, et les paramètres  $u$  que nous identifions. Nous perturbons également les données météo, avec une incertitudes de  $\pm 3^\circ\text{C}$  sur les températures ( $T_a$ ,  $T^\infty$  et  $T_g$ ), et de  $\pm 100$  W sur les flux solaires ( $\phi^b$  et  $\phi^d$ ). Ce type d'approche a déjà été étudié dans le domaine des problèmes inverses, cf. e.g. [Emery *et al.*, 2000, Pires et Miranda, 2003]. Nous l'appliquons à la variante 1 de notre méthode d'audit.

Les paramètres identifiés par la variante 1 de la méthode sont présentés dans le tableau 4.14. Les fortes incertitudes des paramètres supposés connus faussent naturellement les résultats des paramètres identifiés. Par rapport aux incertitudes classiques sur ces paramètres, celles obtenues par la méthode d'audit instrumenté sont plus importantes, et les estimations sont biaisées (moyennes non nulles).

Paramètre	Référence	Audits classiques			Variante 1		
	$u_{cib}$	$\bar{u}$	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$	$\bar{u}_{rec}$	$\bar{E}_{\%}$	$\sigma_{\%}$
$\rho c_s$	$1,8.10^6$	$1,713.10^6$	4,8	21,2	$2,142.10^6$	19	55
$k_s$	0,96	0,91	5,2	24,3	1,09	13,7	40
$\eta_z$	0,8	0,798	0,3	6	0,732	8,5	28,3
$\bar{q}_z$	$9,3.10^{-3}$	$9,2.10^{-3}$	0,9	30,4	$10.10^{-3}$	6,8	39,7
$\tau_z$	0,6	0,593	1,2	11,3	0,562	6,4	82
$\lambda_z$	20	19,56	2,2	29,4	18,44	7,8	29,8
$d_z$	1000	1005,2	0,5	41,2	884,3	11,6	90,7

TABLE 4.14 – Moyennes et écart-types des identifications de la variante 1 sur l'échantillon de Monte-Carlo.

Regardons maintenant les reconstructions de la réponse thermique. Nous calculons les différentes réponses du modèle thermique avec la famille de jeu de paramètres identifiés. Cela nous permet d'obtenir une plage d'incertitude sur la réponse thermique. Nous effectuons ce calcul sur la température de la zone 1, cf. figure 4.10. Bien que les paramètres identifiés soient plus erronés que ceux des audits classiques, nous remarquons que la réponse thermique de la variante 1 est mieux reconstruite et donc moins incertaine que celle dans le cas classique. Nous passons en effet d'une erreur classique de l'ordre de  $10^{\circ}\text{C}$  à une erreur de  $5^{\circ}\text{C}$ . Cela pourrait être dû à la fonctionnelle utilisée dans le problème inverse, définie par l'écart entre la réponse thermique du modèle et les mesures.

L'ajout de connaissances *a priori* et/ou de capteurs devrait permettre un enrichissement du modèles et des mesures, et donc améliorer les résultats. Nous pensons notamment au protocole opératoire actif, ou à l'ajout de nouveaux termes dans l'expression de la fonctionnelle du problème inverse pour prendre en compte de nouvelles informations.

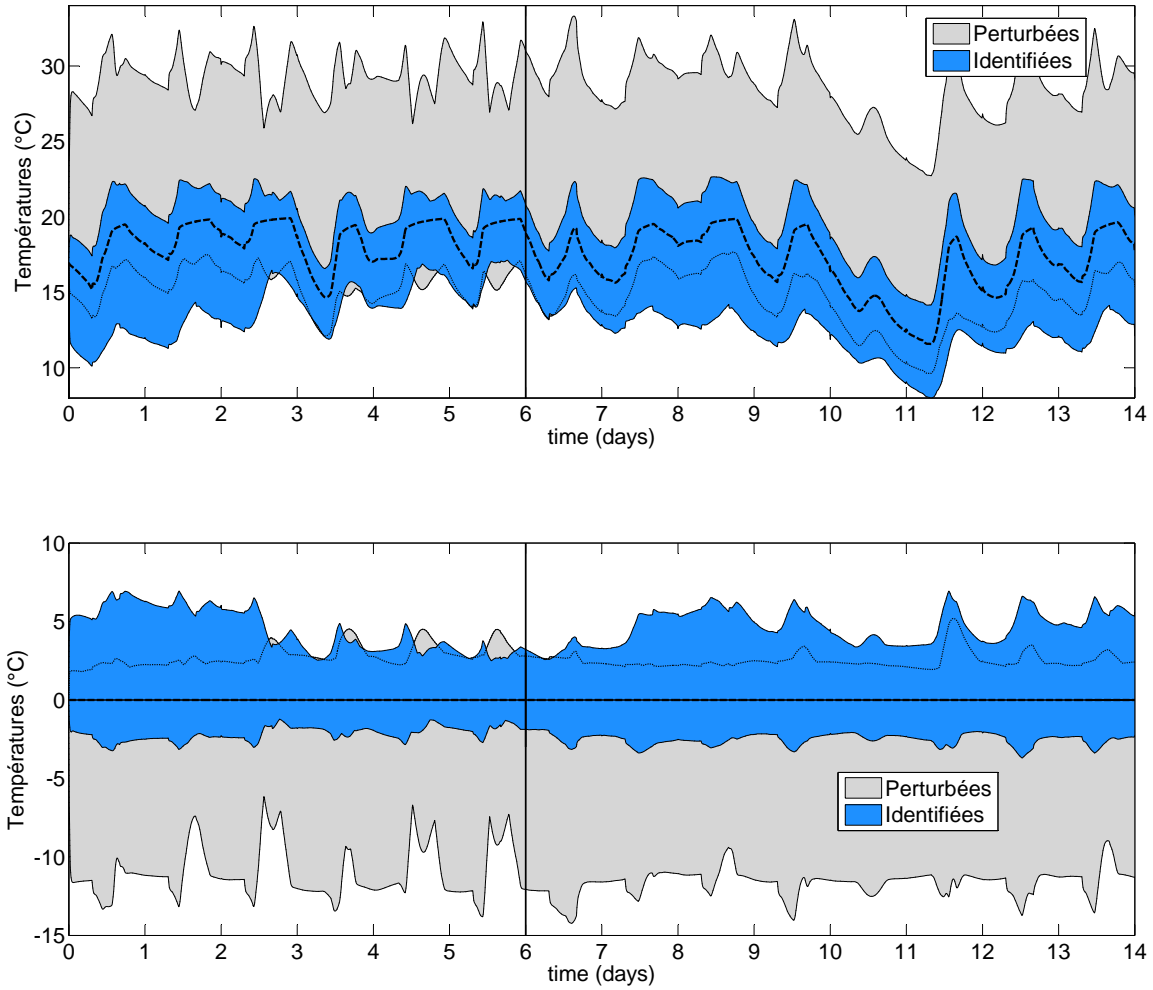


FIGURE 4.10 – Comparaison des enveloppes extrêmes des incertitudes sur la réponse du modèle pour la température de la zone 1, entre les réponses perturbées en gris, les réponses identifiées par la variante 1 en bleu. En haut, les valeurs de température, avec la cible en pointillés au milieu ; en bas, le graphe des erreurs entre la cible et les réponses.

#### 4.4.2 Sensibilité du contrôle

Nous décrivons ici une méthode permettant de calculer une plage d'incertitudes sur le jeu de paramètres identifié  $u$ , [Aude *et al.*, 2000, Brouns *et al.*, 2013b]. Dans la théorie du contrôle, cette technique est connue sous le nom de *stabilité du contrôle à une perturbation*, cf. [Malanowski, 2002, Griesse *et al.*, 2005, Griesse, 2007, Chernousko *et al.*, 2008].

Commençons par rappeler le modèle thermique dans l'équation (4.15), avec  $f$  l'opérateur direct qui évalue l'état thermique, en tout point de l'espace-temps, pour un couple de paramètres  $(p, u)$  donné :

$$f : \begin{pmatrix} \mathcal{P} \times \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (p, u) & \longmapsto & f(p, u) = \{\theta_s(x, t), T_z(t), W_z(t)\}_{s,z}(p, u), \quad \forall (x, t) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} \mathcal{A}_{rz} + \bar{\mathcal{A}}_z + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\mathcal{C}_{sz}^0 + \mathcal{C}_{sz}^L) + \mathcal{Q}_z + \mathcal{W}_z + \Phi_z^b + \Phi_z^d \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \mathcal{P}_z - \mathcal{W}_z \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{00} + \mathcal{R}_{sp}^{0L}) + \mathcal{R}_s^{0\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^0 + \bar{\mathcal{C}}_s^0 + \underline{\mathcal{C}}_s^0 + \Phi_s^{b0} + \Phi_s^{d0} \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\mathcal{R}_{sp}^{L0} + \mathcal{R}_{sp}^{LL}) + \mathcal{R}_s^{L\infty} - \sum_{z=1}^{N_z} \mathcal{C}_{sz}^L + \bar{\mathcal{C}}_s^L + \underline{\mathcal{C}}_s^L + \Phi_s^{bL} + \Phi_s^{dL} \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Les notations sont identiques à celles utilisées pour décrire notre méthode d'audit instrumenté, cf. section 3.3. Nous cherchons un jeu de paramètres  $u \in \mathcal{U}$  en connaissant les paramètres  $p \in \mathcal{P}$ , et à partir des mesures  $m \in \mathcal{M}$ . Pour cela, nous considérons la fonctionnelle  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(p, u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu - c\|_{\mathcal{C}}^2 \quad (4.16)$$

avec  $\hat{f} = O \circ f$  l'application composée de l'évaluation de l'état thermique  $f$  par l'opérateur linéaire d'observation  $O$ , associant à un couple de jeux de paramètres  $(p, u)$  la réponse du modèle aux points de mesures :

$$\hat{f} : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{S} \xrightarrow{O} \mathcal{M} \quad (4.17)$$

Dans l'équation (4.16), le dernier terme est un terme de pénalisation de contraintes dans l'espace des contraintes  $\mathcal{C}$ , cf. section 3.3 pour plus de détails. Le problème inverse que nous résolvons consiste à trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \quad (4.18)$$

Dans le cas où le paramètre  $p$  est entaché d'une erreur  $\delta p$ , nous devons de nouveau résoudre (4.18) en prenant  $\hat{f}(p + \delta p, u)$  dans la fonctionnelle (4.16). C'est exactement ce que nous avons fait dans la première approche, cf. section 4.4.1. Lorsque le nombre de paramètres non linéaires augmente, cette démarche devient rapidement chronophage. Nous proposons alors une méthode approchée pour calculer la propagation d'incertitudes. L'approximation se traduit par la localité du résultat obtenu.

Nous souhaitons calculer la variation du contrôle  $u^*$  lorsque les paramètres supposés connus  $p$  se décalent de  $\delta p$ . Formellement, l'identification nous a fourni  $u^*(p)$ , et nous cherchons à calculer  $u^*(p + \delta p)$ , sans relancer toute la procédure d'identification. Dans ce contexte, nous pouvons utiliser l'approche des études de stabilité des problèmes d'optimisation. Celle-ci se déroule sur le modèle linéaire tangent  $f'(p, u^*)$  en  $u^*$ . Pour rappel, l'opérateur  $f'(p, u) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{P} \times \mathcal{U}; \mathcal{M})$  est la différentielle de  $f$  en  $(p, u)$  qui se note, [Cartan, 1967] :

$$f'(p, u)(\delta p, \delta u) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p, u) \delta p_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(p, u) \delta u_i \quad (4.19)$$



avec  $\delta p \in \mathcal{P}$  et  $\delta u \in \mathcal{U}$ . Il s'obtient en calculant la dérivée de Gâteaux de  $f$  en  $(p, u)$  dans la direction  $(\delta p, \delta u)$ , cf. section 3.3 pour plus de détails lorsque  $\delta p = 0$ , et l'annexe A pour le cas général. En étudiant le système d'optimalité du problème d'optimisation (4.18) autour du point optimal  $u^*$ , nous montrons que ce calcul revient à résoudre un nouveau problème d'optimisation sur la fonctionnelle suivante, cf. [Griesse, 2007] :

$$\tilde{J}_{u^*}^{\delta p}(\delta u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}'(p, u^*)(\delta p, \delta u)\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u^* + \delta u - u^0\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{\mu}{2} \|Gu^* + G\delta u - c\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{U}}^2 \quad (4.20)$$

La perturbation locale du contrôle  $u^*$  par rapport aux incertitudes  $\delta p$  s'obtient alors par :

$$\delta u_{\delta p}^* = \arg \min_{\delta v \in \mathcal{U}} \tilde{J}_{u^*}^{\delta p}(\delta v) \quad (4.21)$$

Finalement, ce calcul nous permet d'obtenir les incertitudes du contrôle  $u^*$  par<sup>2</sup> :

$$u^*(p + \delta p) \simeq u^*(p) + \delta u_{\delta p}^* \quad (4.22)$$

L'avantage de cette méthode tient dans le fait que le problème (4.21) est linéaire, et l'approximation (4.22) se calcule donc rapidement. Cette propagation d'incertitudes, obtenue en résolvant (4.21), reste cependant *locale*, puisqu'elle utilise le modèle linéaire tangent.

*Remarque.* Le système d'optimalité est constitué de trois équations : le modèle direct linéaire, l'adjoint, et l'équation d'Euler (condition de premier ordre sur la différentielle). Ce système peut notamment s'obtenir à partir du lagrangien associé au problème d'optimisation, cf. e.g. [Kern, 2002, Palomo Del Barrio, 2003, Allaire, 2007, Auroux, 2010].  $\square$

## Note sur l'application de cette méthode

Les premières applications de cet outil ont concerné le calcul de la variation des consommations minimales intrinsèques correspondant à une perturbation des paramètres du modèle. Cette approche évalua l'impact d'un changement de paramètres sur ces consommations, afin d'aider le professionnel dans l'évaluation des scénarios de rénovation. Cependant, l'utilité de ce calcul comparée à une approche plus naturelle qui consiste à perturber directement les paramètres avant de calculer les consommations minimales intrinsèques correspondantes est très limitée. Pire, cet outil ne considère que l'approximation au premier ordre de la perturbation. L'outil présenté est aussi rapide que l'approche traditionnelle (ce calcul des consommations est déjà linéaire), mais moins précis. En revanche, l'utilisation de cette méthode pour calculer une incertitude sur des paramètres *non linéaires* identifiés par approche inverse est beaucoup plus intéressante, et fera l'objet d'une publication.

## 4.5 Conclusions et perspectives

Ce chapitre analyse la robustesse de la variante 1 de la méthode d'audit. Nous avons étudié les différentes sources d'erreur pouvant perturber la résolution de l'identification de paramètres, cf. section 3.1.6 et figure 3.7. L'introduction de variables d'intérêt a permis d'approfondir les

---

2. Les notations sont formelles.

conclusions réalisées sur les résultats des identifications. Celles-ci concernent les consommations minimales intrinsèques, représentant le besoin énergétique du bâti et calculées comme solutions d'un problème d'optimisation, ainsi que la décomposition des flux thermiques, calculant la part de chaque poste énergétique dans le bilan thermique. Des études paramétriques sur les conditions environnementales de l'audit et sur le bruit de mesure montrent que la saison n'impacte pas la précision des résultats, et que la méthode est robuste au bruit de mesure sur l'état thermique. De plus, dans un contexte fortement incertain, la méthode permet de réduire l'incertitude des audits classiques sur la réponse thermique.

Pour améliorer la méthode dans le contexte incertain, nous pourrions ajouter des termes à la fonctionnelle du problème inverse de la méthode d'audit afin de prendre en compte de nouvelles contraintes et augmenter l'identifiabilité du problème. Il existe en effet des approches dans lesquelles la fonctionnelle est définie sur les variables d'intérêt [Chamoin *et al.*, 2014].

La décomposition des flux thermiques sert d'outil d'expert pour aider le professionnel dans le choix de scénarios de rénovation. Nous illustrons cette affirmation sur un exemple numérique. Plaçons-nous dans un cas où les audits classiques nous mènent à une indétermination quant au scénario de rénovation à adopter. La méthode d'audit instrumenté permet de lever cette indétermination lorsque la rénovation porte sur l'enveloppe ou sur les systèmes. Comme le montre le tableau 4.15, obtenu en moyennant les résultats sur un échantillon de cas test différents, l'incertitude sur le poids de l'enveloppe dans le bilan de consommations global est réduite à zéro, et l'incertitude sur le poids des systèmes d'un facteur 2.

	Valeur réelle	Incertainitude classique	Incertainitude identifiée
Pertes par conduction dans l'enveloppe	320	11,6%	0,2%
Pertes de rendement	160	22,0%	9,5%

TABLE 4.15 – Réduction des incertitudes classiques par l'utilisation de la méthode d'audit instrumenté.

Dans une situation réelle, cette réduction des incertitudes change radicalement le contexte dans lequel se fait la prise de décision initiale avant travaux comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Supposons que le concepteur des travaux envisage soit une rénovation de l'enveloppe, soit des systèmes. Les pertes par l'enveloppe sont de 320 kWh/m<sup>2</sup>.an, alors que les pertes dues aux mauvais rendements des systèmes sont de 160 kWh/m<sup>2</sup>.an. Supposons aussi que pour les deux options, les technologies disponibles permettent de réduire d'un facteur 2 ces pertes. Cela conduit à l'alternative suivante :

- soit une réduction de 160 kWh/m<sup>2</sup>.an, avec une incertitude de  $\pm 11\%$ , soit  $\pm 18$  kWh/m<sup>2</sup>.an, en faisant les travaux sur l'enveloppe
- soit une réduction de 80 kWh/m<sup>2</sup>.an, avec une incertitude de  $\pm 22\%$ , soit  $\pm 18$  kWh/m<sup>2</sup>.an, en faisant les travaux sur les systèmes

Ramenées en termes de temps de retour sur investissement, ces incertitudes peuvent, suivant le coût respectif des travaux, conduire à des situations d'indétermination sur le meilleur investissement. Supposons par exemple que les travaux sur l'enveloppe ont un coût 1,5 fois plus élevé que la rénovation des systèmes et que, pour simplifier, le coût de l'énergie et des travaux conduit à un temps de retour sur investissement de 10 ans pour l'option rénovation des systèmes, avec une incertitude de  $\pm 1$  an compte tenu des incertitudes sur les économies. Avec un coût 1,5 fois plus élevé et des économies d'énergie deux fois plus importantes, le retour sur investissement des travaux sur l'enveloppe serait de 7,5 ans, avec une incertitude de 1,5 an. Il est difficile à l'expert

de choisir parmi les deux options car il y a recouvrement des enveloppes d'incertitudes. Par contre, avec les mêmes chiffres, l'utilisation de la méthode d'audit instrumenté réduit ces incertitudes sur le temps de retour sur investissement et fait disparaître la période de recouvrement : l'option sur les travaux d'enveloppe apparaît avec certitude être la meilleure.

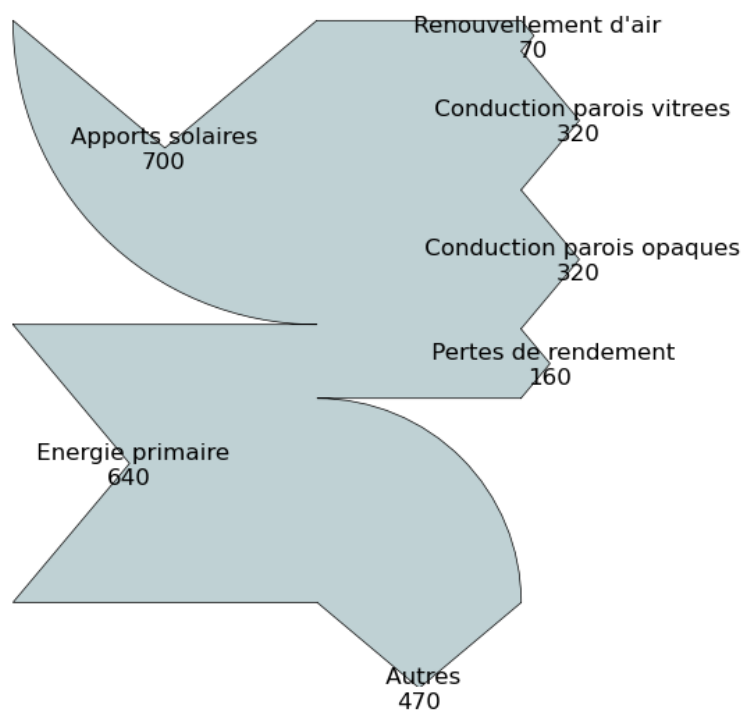


FIGURE 4.11 – Diagramme de Sankey issu de l'analyse de la réponse du modèle calibré : ce diagramme devient l'outil expert pour l'étude des solutions de rénovation.

## Chapitre 5

# Discrimination de sources

Deux composantes additives d'une source thermique ne sont généralement pas simultanément discernables à partir de la seule observation de leur effet sur l'état thermique, *cf.* [Beck et Arnold, 1977]. Pourtant, il existe des cas où l'information sur l'amplitude des sources est inconnue, mais leur régularité temporelle l'est. C'est typiquement le cas des gains internes convectifs dans le bâtiment, puisque les scénarios d'usage créent des apports dont les variations temporelles sont brusques, alors que les apports de chaleur relatifs au renouvellement d'air varient de façon lisse. Nous présentons dans ce chapitre une méthode ayant pour ambition de discriminer des sources de chaleur en utilisant cette information *a priori* sur leur dynamique temporelle. En effet, le formalisme général introduit dans la thèse permet de prendre en considération des connaissances *a priori* sur les grandeurs inconnues, y compris leur vitesse de variation temporelle. L'approche s'inspire des méthodes introduites en traitement d'images pour débruiter des images ou identifier des motifs. Cette méthode pourrait être appliquée, entre autres, à la reconstruction de scénarios d'usage dans le bâtiment, [Brouns *et al.*, 2013a], en s'affranchissant de la contrainte de maîtrise des gains internes imposée par le protocole opératoire de la méthode d'audit décrite dans la section 3.2.1.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Cas d'étude et modélisation thermique</b>	<b>122</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulation du problème inverse</b>	<b>123</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthode de résolution</b>	<b>125</b>
5.3.1	Reconstruction de la source $Q$ dans $H^1(0; t_a)$	126
5.3.2	Méthode de point fixe	127
5.3.3	Algorithme du gradient avec projection	128
<b>5.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>128</b>
<b>5.5</b>	<b>Validation expérimentale</b>	<b>130</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>135</b>

---

Dans le domaine du bâtiment, les gains internes, et notamment ceux dus à l'usage, sont particulièrement difficiles à déterminer de manière directe. Ces apports de chaleur peuvent être estimés à l'aide de relevés manuscrits de présence et d'utilisation des appareils électriques, des capteurs de consommation énergétique en entrée de chaque appareil, ou encore par des capteurs de présence dans la pièce, *cf.* chapitre 1. Des modèles statistiques utilisant des probabilités de présence permettent dans certains cas d'obtenir une estimation des apports internes, [Guernouti, 2014]. Ces derniers nécessitent une quantité importante de données afin d'être calibrés. Nous avons vu également que la mesure des températures des zones permettrait d'identifier les gains internes de manière indirecte, à condition que toutes les autres sources et paramètres soient connus. Dès lors que les débits de renouvellement d'air sont inconnus, le modèle n'est plus identifiable avec la seule mesure de la température ambiante, car les apports de chaleur dus au renouvellement d'air ont le même effet sur la température ambiante que les gains internes.

Nous savons par contre que les apports de chaleur dus au renouvellement d'air évoluent de manière lisse dans le temps. *A contrario*, les gains internes sont liés à des événements brusques (marche/arrêt des appareils électriques, présence/absence de personnes), et leur amplitude évolue par paliers. D'un point de vue fonctionnel, ces deux types de sources sont représentés par des fonctions n'appartenant pas aux mêmes espaces fonctionnels. Nous cherchons ici à tirer profit de cette propriété pour discriminer les deux types de sources, lorsque nous ne connaissons que l'évolution de la température ambiante résultant de l'association de ces deux sources. Pour ce faire, nous supposons que le premier type de source appartient à un espace  $H^1$ , tandis que le second appartient à un espace de fonctions à variations bornées  $BV$ .

De nombreux travaux ont étudié la reconstruction de sources discontinues. La plupart d'entre-eux utilise une régularisation particulière, la *variation totale*. La première approche fut proposée par [Rudin *et al.*, 1992] dans le domaine de la restauration d'images à variation brutale de contraste. Depuis, de nombreuses études sont apparues, citons par exemple [Bertete-Aguirre *et al.*, 2002, Osher *et al.*, 2005, Johansson et Lesnic, 2007, Na et Kallivokas, 2008, Hasanov, 2011, Dou et Han, 2011, Dou et Han, 2012]. Le principal problème vient du fait que les discontinuités reconstruites sont généralement lissées, [Khachfe et Jarny, 2001].

Notre approche s'inspire de l'étude [Vogel et Oman, 1996], dans laquelle les auteurs introduisent une fonctionnelle régularisée par la variation totale et proposent une méthode de point fixe dans le but de débruiter une image. De notre côté, nous développons une méthode particulière de type gradient avec projection pour satisfaire une contrainte de variations bornées sur les inconnues, [Brouns *et al.*, 2013a]. L'étape de projection utilise l'algorithme du point fixe de [Vogel et Oman, 1996] à la fin de l'itération de la méthode de gradient.

## 5.1 Cas d'étude et modélisation thermique

Pour illustrer la méthode, nous considérons un cas d'étude constitué d'une zone et d'une paroi, *cf.* figure 5.1. Cette zone possède des équipements qui génèrent des gains internes.

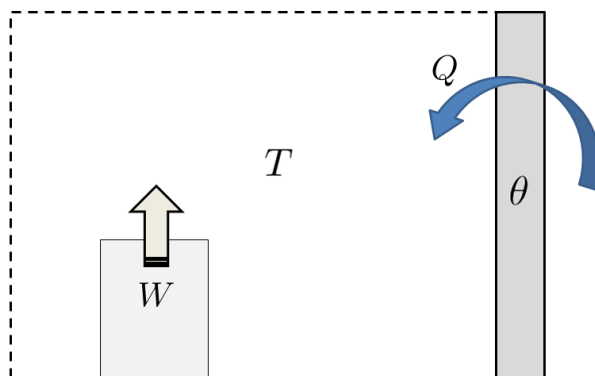


FIGURE 5.1 – Schéma du cas d'étude

Nous appliquons le modèle multizone nodal (2.45) à la géométrie étudiée. Soit  $(0; t_a)$  l'intervalle de temps considéré, le modèle est réécrit dans l'équation (5.1). Nous retrouvons les échanges convectifs avec la paroi, le renouvellement d'air avec une température insufflée  $T^i$  et un débit de soufflage  $R$ , et les sources  $Q$  et  $W$ . Les parois sont exposées aux conditions environnementales, et échangent par convection avec l'air ambiant extérieur, comme décrit plus haut. Nous supposons que les variations des apports de chaleur par renouvellement d'air  $Q$  sont lentes, tandis que  $W$ , représentant les apports internes, est constant par morceaux (variations brutales). Les deux termes  $Q$  et  $W$  jouent le rôle de sources dans la zone. Ils se distinguent par leur variations temporelles.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C \frac{dT}{dt} = Sh^0 (\theta(0;t) - T) + c_a R (T^i - T) + Q + W \\ T(t=0) = T^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad (x;t) \in [0;L] \times (0;t_a] \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0;t) = h^0 (T - \theta(0;t)) \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L;t) = \bar{h}^L (T_a - \theta(L;t)) \\ \theta(x,t=0) = \theta^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

## 5.2 Formulation du problème inverse

Nous souhaitons identifier les sources  $Q$  et  $W$  à partir de la mesure de la température de la pièce, que nous notons  $T^d$ . Cela se ramène à un problème inverse, comme pour l'identification de paramètres développée en section 3.2.1. Soit  $\mathcal{U}_g$  l'espace des inconnues, le couple d'inconnues  $u = \{Q, W\}$  est composé des gains internes. Afin de prendre en compte la dynamique de  $Q$ , nous choisissons l'espace  $\mathcal{U}_g$  tel que :

$$u = \{Q, W\} \in \mathcal{U}_g = H_{\varrho\xi}^1(0; t_a) \times (L^2(0; t_a) \cap BV(0; t_a)) \quad (5.2)$$

L'espace  $H_{\varrho\xi}^1(0; t_a)$  est un sous-espace de  $L^2(0; t_a)$  qui impose une condition de régularité supplémentaire sur les variations des fonctions, [Brezis, 2008]. Les paramètres  $\varrho$  et  $\xi$  en indice sont des coefficients de pondération sur les termes de la norme, permettant d'ajuster la régularité des fonctions du classique espace  $H^1(0; t_a)$ , cf. [Bourquin et Nassiopoulos, 2011]. L'espace  $BV$  est l'espace des fonctions à variations bornées, c'est un sous-espace de  $L^1(0; t_a)$  qui impose lui

aussi une condition supplémentaire sur les variations de la fonction, [Vogel, 2002]. Les fonctions appartenant à l'espace  $H_{\rho\xi}^1(0; t_a)$  sont des fonctions régulières dans le temps, à variations lentes. Celles appartenant à  $BV(0; t_a)$  peuvent présenter des sauts. Une fonction constante par morceaux appartient à  $BV(0; t_a)$ , mais n'est pas dans  $H_{\rho\xi}^1(0; t_a)$ , cf. figure 5.2.

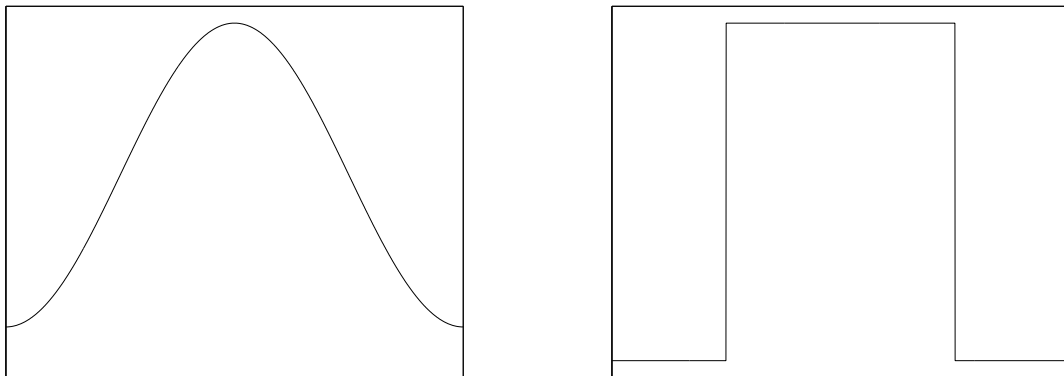


FIGURE 5.2 – À gauche, un exemple de fonction appartenant à  $H^1$  ; à droite, un exemple de fonction présentant des sauts et appartenant à  $BV$  mais pas à  $H^1$ .

Ce choix nous permet d'utiliser la méthode de projection décrite en section 5.3.2. Nous introduisons l'opérateur  $f_g$  qui évalue l'état thermique, en tout point de l'espace-temps, pour un couple de paramètres  $(p, u)$  donné :

$$f_g : \begin{cases} \mathcal{P}_g \times \mathcal{U}_g & \longrightarrow \mathcal{S}_g \\ (p, u) & \longmapsto f_g(p, u) = \{\theta(x, t), T(t)\} (p, u), \quad \forall (x, t) \end{cases} \quad (5.3)$$

avec  $p \in \mathcal{P}_g$  les paramètres connus, et  $\mathcal{S}_g$  l'espace des états thermiques.

*Remarque.* Le choix d'inconnues  $u \in \mathcal{U}_g$  rend l'opérateur  $f_g$  linéaire en  $u$ . De nouveau, nous ne faisons pas apparaître la dépendance de  $f_g$  par rapport aux paramètres connus  $p \in \mathcal{P}_g$ , et nous notons  $f_g u$  la réponse thermique.  $\square$

L'espace des états thermiques  $\mathcal{S}_g$  est défini par, [Raviart et Thomas, 1998] :

$$f_g(u) \in \mathcal{S}_g = \left[ L^2\left((0; t_a); H^1(0; L)\right) \cap C^0\left([0; t_a]; L^2(0; L)\right) \right] \times C^1([0; t_a]) \quad (5.4)$$

Soit  $O_g \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_g, \mathcal{M}_g)$  l'opérateur d'observation de la température de la zone :

$$O_g(f_g) = T \in \mathcal{M}_g = L^2(0; t_a) \quad (5.5)$$

avec  $\mathcal{M}_g$  l'espace des mesures. La mesure de température de la pièce  $T^d$  est donc un élément de l'espace des mesures :

$$T^d \in \mathcal{M}_g \quad (5.6)$$

Nous introduisons ensuite l'opérateur  $\check{f}_g = O_g \circ f_g$  composé de l'évaluation de l'état thermique  $f_g$  par l'opérateur d'observation  $O_g$  :

$$\check{f}_g : \mathcal{P}_g \times \mathcal{U}_g \xrightarrow{f_g} \mathcal{S}_g \xrightarrow{O_g} \mathcal{M}_g \quad (5.7)$$

Soit maintenant  $J_g : \mathcal{U}_g \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par :

$$J_g(u) = \frac{1}{2} \|\check{f}_g u - T^d\|_{\mathcal{M}_g}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{U}_g}^2 \quad (5.8)$$

Le premier terme est celui de la fidélité aux mesures et mesure l'écart entre la reconstruction et les données, tandis que le second est le terme de régularisation de Tikhonov de paramètre  $\epsilon > 0$  qui rend le problème bien posé, *cf.* chapitre 3. Le problème inverse consiste à trouver  $u \in \mathcal{U}_g$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}_g} J_g(v) \quad (5.9)$$

### 5.3 Méthode de résolution

Le problème inverse (5.9) est linéaire par rapport aux inconnues  $u$ . Nous choisissons d'utiliser l'algorithme du gradient conjugué pour le résoudre. Nous devons donc calculer le gradient de la fonctionnelle (5.8).

La fonctionnelle (5.8) est une forme quadratique affine et Fréchet-différentiable, de différentielle  $J'_g(u) \in \mathcal{U}'_g$  définie par :

$$J_g(u + \delta u) = J_g(u) + J'_g(u) \delta u + o(\|\delta u\|_{\mathcal{U}_g}) \quad (5.10)$$

avec  $\delta u \in \mathcal{U}_g$ . Étant strictement convexe et coercive,  $J_g$  possède un unique minimum caractérisé par la condition nécessaire du premier ordre, [Ekeland et Témam, 1999] :

$$J'_g(u) = 0 \iff \forall \delta u \in \mathcal{U}_g, \langle \nabla J_g(u); \delta u \rangle_{\mathcal{U}_g} = 0 \quad (5.11)$$

Nous souhaitons à présent utiliser l'état adjoint pour calculer le gradient de  $J_g$ . Pour cela, reprenons l'équation (5.10) :

$$\begin{aligned} \langle \nabla J_g(u); \delta u \rangle_{\mathcal{U}_g} &= J_g(u + \delta u) - J_g(u) + o(\|\delta u\|_{\mathcal{U}_g}) \\ &= \langle \check{f}_g \delta u; \check{f}_g u - T^d \rangle_{\mathcal{M}_g} + \epsilon \langle \delta u; u \rangle_{\mathcal{U}_g} \\ &= \langle \delta u; \check{f}_g^* (\check{f}_g u - T^d) \rangle_{\mathcal{U}_g} + \epsilon \langle \delta u; u \rangle_{\mathcal{U}_g} \end{aligned}$$

avec  $\check{f}_g^*$  l'adjoint de  $\check{f}_g$ , [Brezis, 2008]. La méthode de l'état adjoint nous fournit une expression pour  $\check{f}_g^*$  ainsi que pour le gradient  $\nabla J_g(u)$ , *cf.* annexe A. L'opérateur  $\check{f}_g^*$  est solution du modèle adjoint (5.12).

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -C \frac{dT^*}{dt} = Sh^0 (\theta^*(0; t) - T^*) - c_a R T^* \\ T^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -S \rho c \frac{\partial \theta^*}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} = 0, \quad (x; t) \in [0; L] \times (0; t_a] \\ -k \frac{\partial \theta^*}{\partial x}(0; t) = h^0 (T^* - \theta^*(0; t)) \\ k \frac{\partial \theta^*}{\partial x}(L; t) = -\bar{h}^L \theta^*(L; t) \\ \theta^*(x, t = t_a) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.12)$$



Nous obtenons alors les expressions suivantes :

$$\langle \nabla J_g(u); \delta Q \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} = \langle T^*; \delta Q \rangle_{L^2(0;t_a)} + \epsilon \langle Q - Q^0; \delta Q \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} \quad (5.13)$$

$$\langle \nabla J_g(u); \delta W \rangle_{L^2(0;t_a)} = \langle T^*; \delta W \rangle_{L^2(0;t_a)} + \epsilon \langle W - W^0; \delta W \rangle_{L^2(0;t_a)} \quad (5.14)$$

avec les produits scalaires dans  $L^2(0;t_a)$  et  $H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)$  définies par, cf. [Brezis, 2008, Bourquin et Nassiopoulou, 2011] :

$$\langle f; g \rangle_{L^2(0;t_a)} = \int_0^{t_a} f g \, dt \quad (5.15)$$

$$\langle f; g \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} = \int_0^{t_a} \xi \frac{df}{dt} \frac{dg}{dt} \, dt + \int_0^{t_a} \varrho f g \, dt \quad (5.16)$$

### 5.3.1 Reconstruction de la source $Q$ dans $H^1(0;t_a)$

Le choix  $Q \in H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)$  nous permet de chercher une fonction  $Q$  lisse dans le temps. Pour obtenir l'expression du gradient, il faut récrire (5.13) pour ne faire apparaître que des produits scalaires dans  $H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)$  dans le membre de droite, cf. équation (5.16). Le calcul du gradient de  $J_g$  par rapport à  $Q$  nécessite donc une étape supplémentaire, cf. [Bourquin et Nassiopoulou, 2011]. En effet, il faut calculer l'élément de  $H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)$  correspondant au premier terme du membre de droite de (5.13). Notons  $G_Q^1$  cet élément, il vient :

$$\langle G_Q^1; \delta Q \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} = \langle T^*; \delta Q \rangle_{L^2(0;t_a)} \quad (5.17)$$

En explicitant les normes, le calcul se réécrit :

$$\int_0^{t_a} \xi \frac{dG_Q^1}{dt} \frac{d\delta Q}{dt} \, dt + \int_0^{t_a} \varrho G_Q^1 \delta Q \, dt = \int_0^{t_a} T^* \delta Q \, dt \quad (5.18)$$

Nous pouvons remarquer, cf. [Bourquin et Nassiopoulou, 2011], que l'équation (5.18) est la formulation variationnelle du problème suivant :

$$\begin{cases} -\xi \frac{d^2 G_Q^1}{dt^2} + \varrho G_Q^1 = T^*, & t \in (0;t_a) \\ \frac{dG_Q^1}{dt}(0) = 0 = \frac{dG_Q^1}{dt}(t_a) \end{cases} \quad (5.19)$$

Finalement, avec  $G_Q^1$  la solution de (5.19), le gradient  $\nabla J_g(u)$  s'obtient par :

$$\langle \nabla J_g(u); \delta Q \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} = \langle G_Q^1 + \epsilon (Q - Q^0); \delta Q \rangle_{H_{\varrho\xi}^1(0;t_a)} \quad (5.20)$$

$$\langle \nabla J_g(u); \delta W \rangle_{L^2(0;t_a)} = \langle T^* + \epsilon (W - W^0); \delta W \rangle_{L^2(0;t_a)} \quad (5.21)$$

Nous souhaitons maintenant appliquer la contrainte d'appartenance à l'espace  $BV(0;t_a)$  pour l'inconnue  $W$ . Pour cela, nous appliquons une méthode de type gradient avec projection, cf. [Ciarlet, 2006]. Avant de décrire cette méthode, nous introduisons la technique proposée par [Vogel et Oman, 1996] pour débruiter un signal à l'aide d'une régularisation par la variation totale.

### 5.3.2 Méthode de point fixe

Dans leur étude [Vogel et Oman, 1996], les auteurs proposent une méthode de point fixe pour résoudre un problème de débruitage de signal. L'idée est d'utiliser l'information de la régularité du signal, puisqu'il possède la particularité d'être constant par morceaux<sup>1</sup>.

Soit  $v \in \mathcal{V} = L^2(0; t_a) \cap BV(0; t_a)$  un signal perturbé par un bruit  $\delta$ , nous disposons de l'observation :

$$z = (v + \delta) \in L^2(0; t_a) \quad (5.22)$$

Pour retrouver le signal source, nous utilisons ici encore la théorie des problèmes inverses. Commençons par introduire la fonctionnelle  $\mathcal{J}_g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\mathcal{J}_g(v) = \frac{1}{2} \|v - z\|_{L^2(0; t_a)}^2 + \alpha \int_0^{t_a} \sqrt{|\nabla v|^2 + \beta^2} \quad (5.23)$$

Le premier terme de cette fonctionnelle est le terme classique de fidélité aux données. Le second est un terme de régularisation particulier, de paramètre  $\alpha > 0$ . En effet, lorsque  $\beta = 0$ , ce terme définit la semi-norme de la *variation totale*, [Vogel, 2002]. Typiquement, il est faible lorsque les variations temporelles sont soit inexistantes, soit peu fréquentes mais brutales. L'important pour ce terme est que, lorsqu'il y doit y avoir des variations, celles-ci adviennent brusquement. Malheureusement, la variation totale n'est pas différentiable à l'origine, et cela peut poser des problèmes numériques. C'est pour cela que le paramètre  $\beta > 0$  a été introduit, il lisse l'opérateur à l'origine, [Vogel, 2002]. Ce paramètre réalise donc un compromis entre stabilité numérique et variations brutales de la reconstruction.

Nous cherchons  $v$  comme étant la solution du problème suivant :

$$v = \arg \min_{w \in \mathcal{V}} \mathcal{J}_g(w) \quad (5.24)$$

D'après [Vogel, 2002], nous savons que (5.24) possède un unique minimum.

Les auteurs proposent de résoudre (5.24) en utilisant une méthode de point fixe. Pour cela, commençons par écrire l'équation d'Euler sur la fonctionnelle (5.23) :

$$\left\langle v - z - \alpha \nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{|\nabla v|^2 + \beta^2}} \nabla v \right) ; w \right\rangle_{L^2(0; t_a)} = 0 \quad (5.25)$$

L'algorithme du point fixe proposé dans [Vogel et Oman, 1996] consiste alors à résoudre (5.25) de manière itérative par :

$$(1 + \alpha L(v^k)) v^{k+1} = z \quad (5.26)$$

avec  $L(v)$  l'opérateur défini par :

$$L(v^k) v^{k+1} = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{|\nabla v^k|^2 + \beta^2}} \nabla v^{k+1} \right) \quad (5.27)$$

Nous notons  $\mathcal{H}_\alpha^\beta : L^2(0; t_a) \rightarrow \mathcal{V}$  l'opérateur qui associe aux données  $z \in L^2(0; t_a)$  la solution du problème (5.24), pour un certain choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

---

1. Bien entendu, cela n'est en aucune manière restrictif, et la méthode reste utilisable sur des signaux de type différent.

### 5.3.3 Algorithme du gradient avec projection

Nous appliquons une méthode de gradient avec projection. L'itération s'écrit :

$$u^{n+1} = P(u^n + \rho d^n) \quad (5.28)$$

avec  $\rho$  le pas de la méthode, et  $d$  la direction de descente liée aux gradients (5.20)-(5.21). L'opérateur  $P$  est l'opérateur de projection, défini par :

$$P(u) = (I(Q); \mathcal{H}_\alpha^\beta(W)) = (Q; \mathcal{H}_\alpha^\beta(W)) \quad (5.29)$$

avec  $I$  l'identité, et pour un choix donné des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

## 5.4 Résultats numériques

Nous appliquons cette méthode au cas d'étude présenté sur la figure 5.1. Pour cela, nous choisissons des paramètres correspondant à une enceinte de béton de 10 cm d'épaisseur. Pour simplifier l'étude, nous choisissons la donnée météo  $T_a$  et la température de soufflage  $T^i$  constantes égales à 18 °C, et un débit de soufflage  $R$  d'un volume par heure. L'état thermique est initialisé à 18 °C.

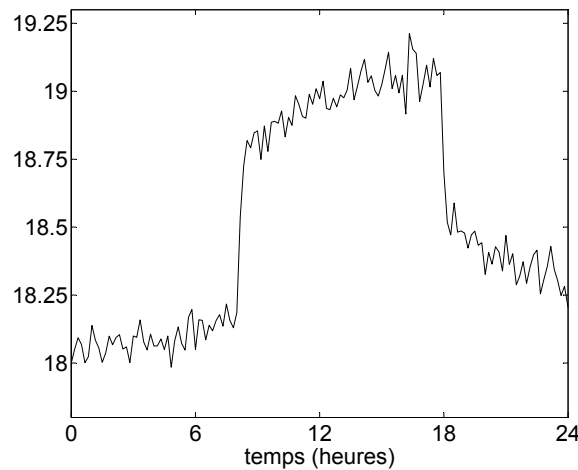


FIGURE 5.3 – Mesures bruitées de la température de la pièce

Les mesures sont constituées de la température de la pièce. Elles sont engendrées numériquement, puis perturbées par un bruit blanc gaussien d'écart-type 0,05, cf. figure 5.3. Nous utilisons la méthode du gradient conjugué pour résoudre le problème d'optimisation (5.9), en appliquant, comme expliqué, la méthode du point fixe (5.26) pour résoudre le second problème d'optimisation (5.24) à chaque itération. Les résultats sont présentés sur la figure 5.4. La première ligne correspond aux résultats de reconstruction de ces paramètres sans prise en compte de la contrainte d'appartenance à  $BV(0; t_a)$  (pas d'étape de projection). La seconde ligne présente les résultats avec prise en compte de la contrainte (5.28)-(5.29).

Ces résultats sont encourageants, puisque les sources internes ont bien été discriminées, et que la forme et l'amplitude de  $W$  sont bien retrouvées. En l'absence de notre méthode de projection, et même avec l'utilisation de la régularisation de Tikhonov, le bruit reste largement amplifié. Le revers de la médaille se retrouve dans les paramètres à renseigner, qui sont à présent au nombre de 3. Pour l'heure, nous ne disposons pas de méthode automatique pour choisir ces paramètres, et la procédure d'identification y est sensible.

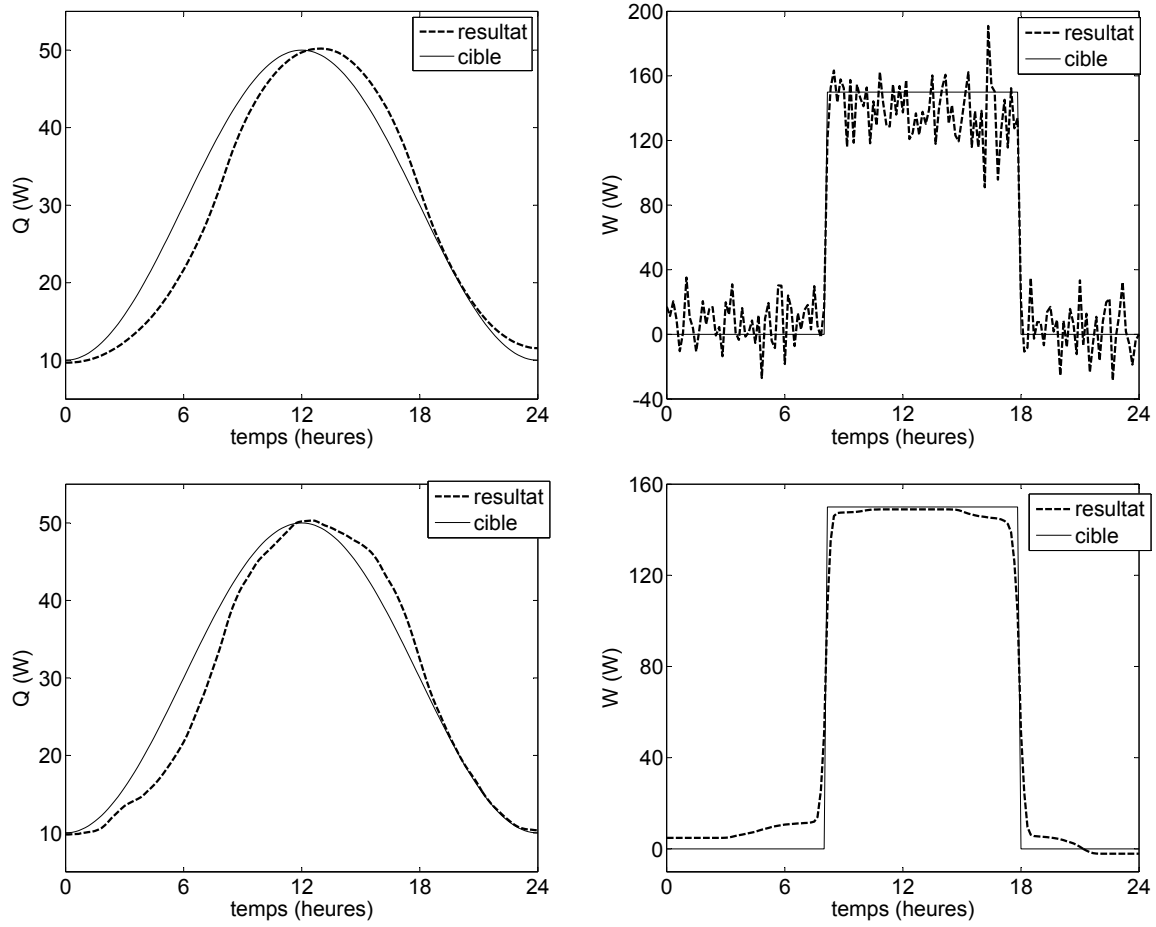


FIGURE 5.4 – Résultats de la séparation de sources. En haut, sans étape de projection, avec le paramètre  $\epsilon = 3.10^{-6}$  et au plus 7 itérations. En bas, avec notre méthode de projection, avec les paramètres  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 10$  et  $\beta = 10^{-8}$ .

## 5.5 Validation expérimentale

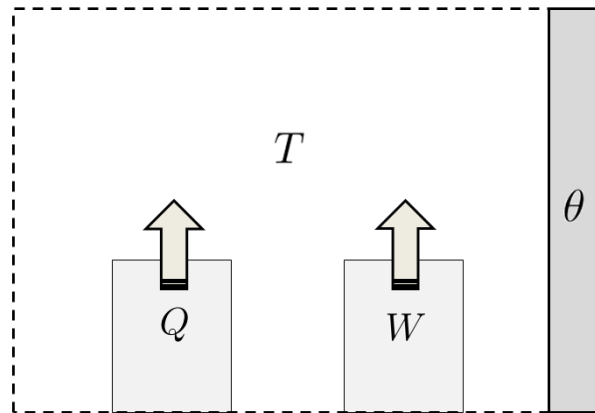


FIGURE 5.5 – Schéma du cas d'étude

Notre méthode de séparation de sources internes en fonction de leur dynamique a fait l'objet d'une validation expérimentale dans les locaux du LaSIE, à l'université de La Rochelle. Le cas d'étude considéré est constitué d'une pièce contenue dans une garde thermique afin de maîtriser les conditions environnementales, cf. figure 5.5 et photographies des figures 5.6 et 5.7. La cellule test utilisée a été conçue et donc dimensionnée pour le contrôle des flux aérauliques dans l'enceinte, cf. [Limam *et al.*, 2013]. Nous avons remarqué lors des premiers essais que l'asservissement de la température est peu précis et soumis à de fortes inerties. On considère donc que cet essai se rapproche plus du contexte expérimental de terrain que de la validation contrôlée de laboratoire.



FIGURE 5.6 – Intérieur de la cellule.



FIGURE 5.7 – Garde thermique de la cellule.

Nous équipons la pièce d'un capteur de température d'air ambiant, et installons deux spots à l'intérieur de cylindres afin d'engendrer des sources, cf. figure 5.8. Les variations de ces sources sont contrôlées par un système électronique modulant la puissance injectée dans les spots, cf. figure 5.9. Nous imposons ainsi des dynamiques différentes pour chacun de ces spots : l'un évoluant de façon lisse dans le temps, et l'autre constant par morceaux.

Lors de nos essais, nous ne disposons pas du matériel suffisant pour connaître l'amplitude des apports de chaleur générés. Par conséquent, seules les dynamiques sont connues. Les scénarios de variation des sources imposés sont similaires à ceux étudiés dans l'essai numérique présenté en

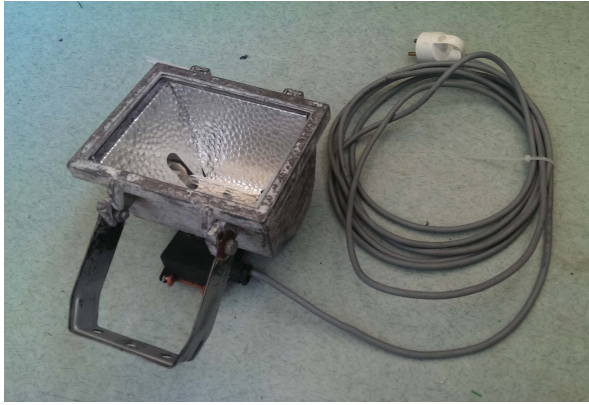


FIGURE 5.8 – Spot engendrant les sources ther-

miques.

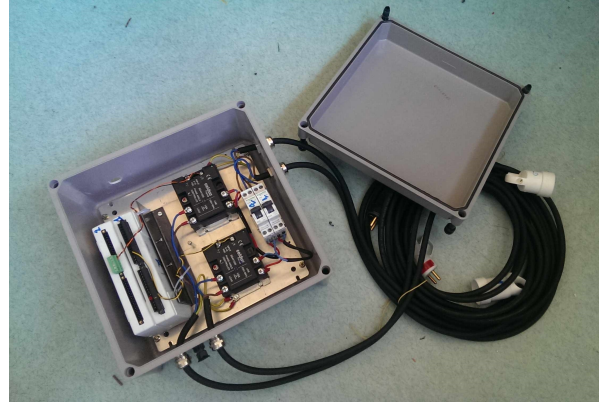


FIGURE 5.9 – Système de contrôle des spots.

section 5.4. L'un d'entre-eux est défini par une sinusoïde, et l'autre par un créneau, *i.e.* l'indicatrice d'un sous-intervalle, *cf.* figure 5.10.

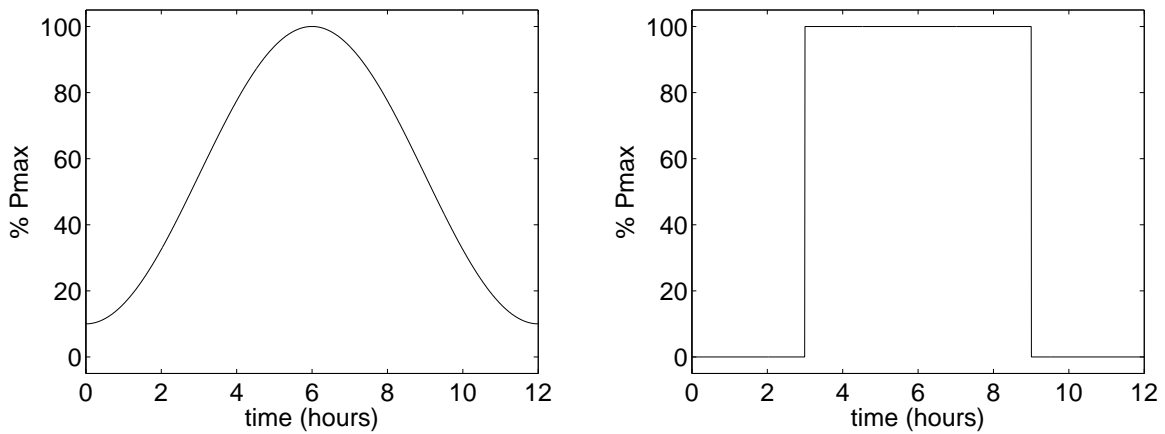


FIGURE 5.10 – Dynamiques des sources. Pourcentage de la puissance fournie aux spots par rapport à la puissance maximale disponible.

L'étude se déroule sur 12 heures, avec les sources générées selon les dynamiques décrites en figure 5.10. Notre méthode nécessite la mesure de la température de la pièce. Les données sont présentées sur la figure 5.11. Bien que la cellule soit asservie en débit et température de l'air insufflé, nous plaçons des capteurs de vitesse de déplacement d'air et de température à la sortie de la bouche de soufflage. Les données correspondantes sont présentées sur les figures 5.12 et 5.13. Ces dernières, notamment la mesure de débit de soufflage  $R$ , sont particulièrement bruitées. Le pas de temps de la centrale d'acquisition des données est fixé à 30 secondes.

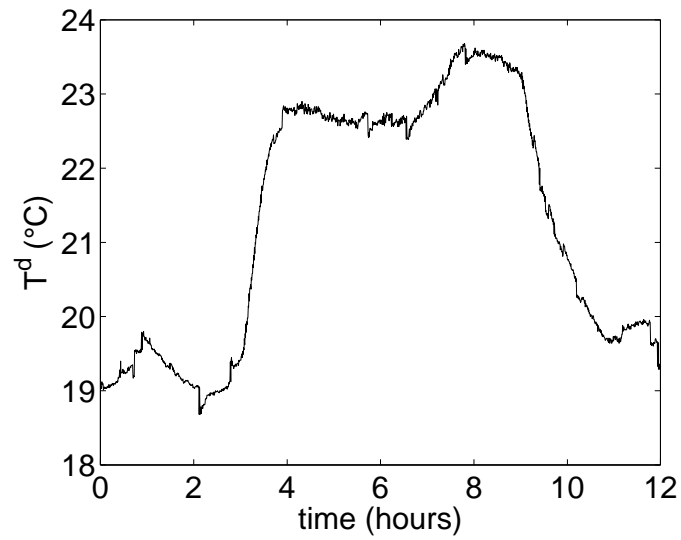


FIGURE 5.11 – Mesure de la température de la pièce utilisée pour la séparation de sources.

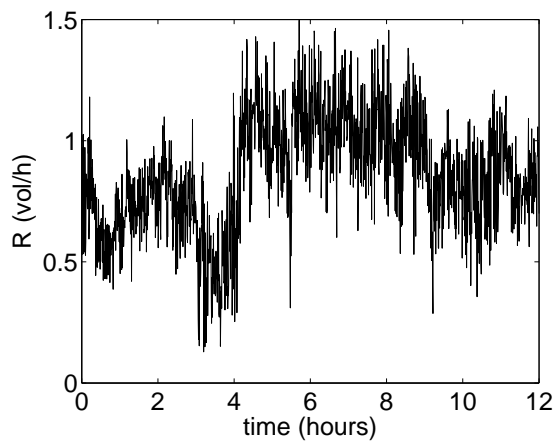


FIGURE 5.12 – Débit mesuré de soufflage dans la cellule.

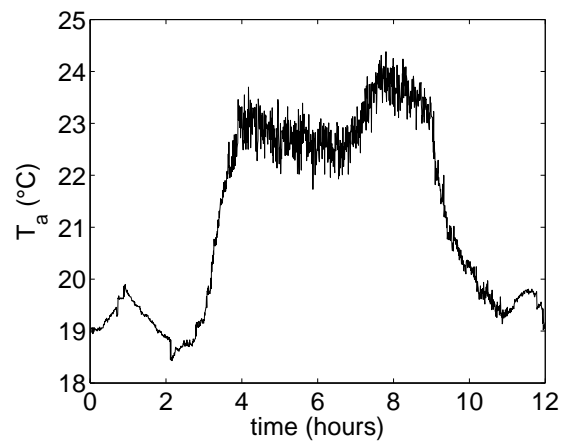


FIGURE 5.13 – Température mesurée de l'air insufflé dans la cellule.

Comme pour l'étude numérique, proposée en section 5.4, nous commençons par calculer les résultats de cette séparation de sources sans utiliser l'étape de projection. Nous testons deux paramétrisations différentes, en jouant sur les paramètres de régularisation. Les résultats sont présentés dans les figures 5.14 et 5.15. Bien que les reconstructions de la source lisse  $Q$  sont exploitables, les résultats pour  $W$  sont inutilisables. Le bruit des données et des mesures se retrouve largement sur  $W$ . Le fait de chercher  $Q$  dans  $H_{\varrho\xi}^1$  lui permet d'éviter les hautes fréquences du bruit, mais celles-ci se retrouvent automatiquement sur les reconstructions de  $W$ . Par conséquent, l'approche classique échoue à discriminer les deux composantes des sources thermiques.

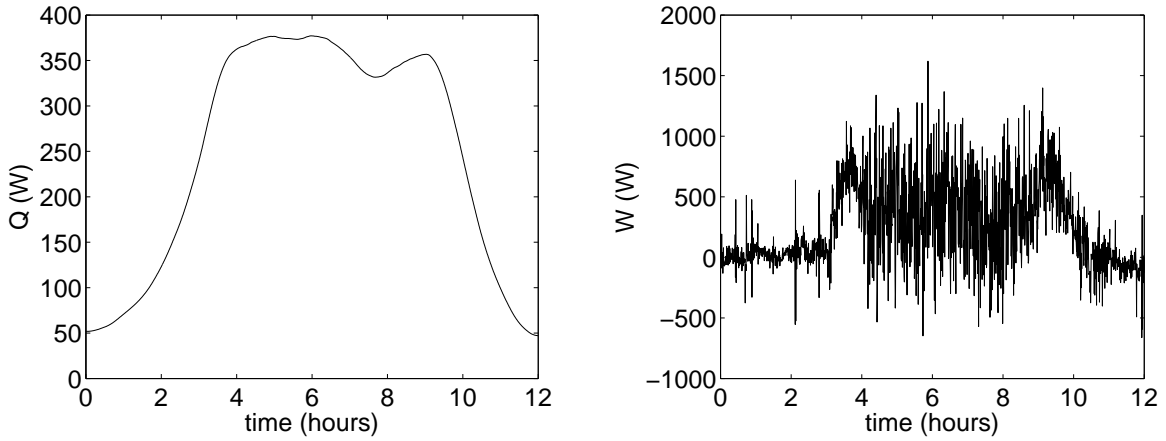


FIGURE 5.14 – Résultats de la reconstruction sans l'étape de projection. Les paramètres sont  $\epsilon = 0$ ,  $\varrho = 1$ , et  $\xi = 10^{-2}$ .

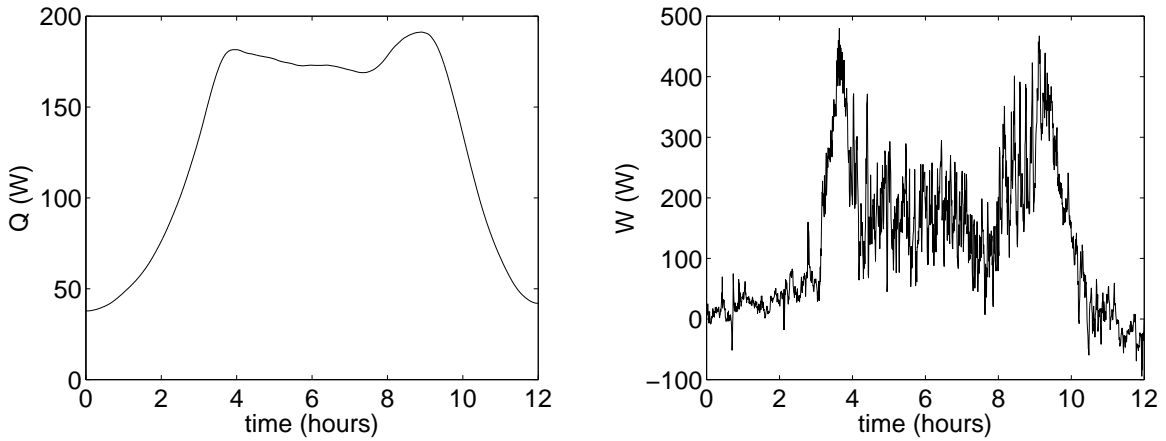


FIGURE 5.15 – Résultats de la reconstruction sans l'étape de projection. Les paramètres sont  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $\varrho = 1$ , et  $\xi = 10^{-2}$ .

Les résultats de notre méthode, prenant en compte la contrainte sur la dynamique temporelle par projection, sont présentés dans la figure 5.16. Malgré le bruit présent dans les données et les mesures, les profils reconstruits n'en sont pas visiblement affectés. Ces résultats nous amènent à penser que l'amplitude maximale des sources, inconnue lors de l'essai, devrait se



situer vers 400 W, puisqu'il s'agit environ de la valeur attendue par chacune des sources lorsque la puissance fournie est maximale (100% au voisinage de 6 h). Nous remarquons d'ailleurs que les amplitudes des profils identifiés correspondent aux scénarios imposés, *cf.* figure 5.10. Lors de la validation du matériel, nous avons repéré une saturation du profil sinusoïdal. Celui-ci atteint l'amplitude maximale de 100% dès 4 h, et y reste jusqu'à 8 h. Cela semble se confirmer sur le profil reconstruit. La localisation du premier saut de  $W$  est correcte, autour de 3 h. En revanche, le second saut devait se trouver autour de 9 h, et celui-ci a été identifié vers 10 h. Il y a donc un problème d'estimation. Cela semble cependant être dû à un phénomène non pris en compte dans le modèle, puisque la température reconstruite correspond aux mesures utilisées, *cf.* figure 5.17.

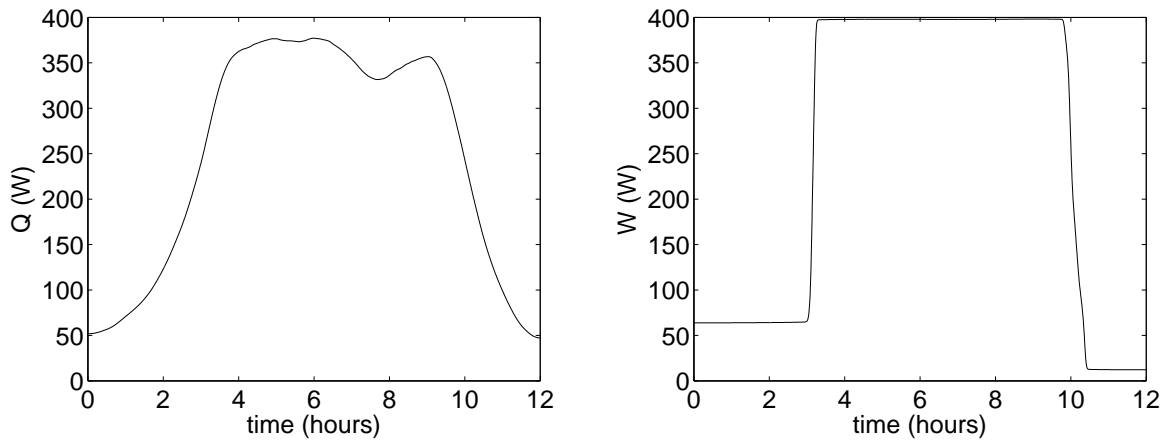


FIGURE 5.16 – Résultats de la reconstruction avec l'étape de projection. Les paramètres sont  $\epsilon = 0$ ,  $\varrho = 1$ ,  $\xi = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^3$  et  $\beta = 10^{-4}$ .

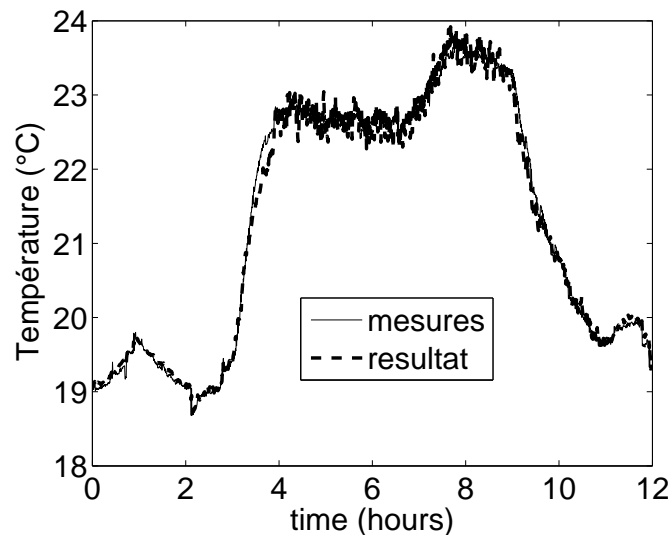


FIGURE 5.17 – Comparaison entre la température mesurée et calculée.

*Remarque.* Malgré l'apparente sensibilité des résultats des études numériques par rapport aux paramètres de contrôle de l'algorithme ( $\epsilon$ ,  $\varrho$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ ), un choix relativement rapide pour ces derniers a été suffisant afin d'obtenir des résultats satisfaisants dans le cadre de l'essai expérimental. Ce constat nous permet de rester optimistes quant à la généralisation de l'outil.  $\square$

## 5.6 Conclusions et perspectives

Le formalisme développé dans ce chapitre introduit l'identification de sources thermiques en prenant en compte des informations sur leur dynamique temporelle. Cela nous permet de faire la part des choses entre deux composantes additives lorsque l'une est lisse et l'autre est discontinue. La prise en compte de la contrainte de discontinuité se fait par projection en utilisant une méthode inspirée du domaine du traitement d'images. Cette dernière consiste à débruiter un signal, ou identifier des motifs de contraste, en résolvant un problème d'optimisation régularisé par la semi-norme de la variation totale. Cette étude constitue un jalon vers l'objectif de réduction de la contrainte de maîtrise des gains internes dans le protocole opératoire de notre méthode de diagnostic énergétique, *cf.* section 3.3. L'idée serait *in fine* d'utiliser des mesures de température pour reconstruire les gains internes dans les zones.

L'outil développé permet de discriminer deux sources thermiques possédant des dynamiques différentes et impactant une zone, à partir de la température de cette zone. Il a fait l'objet de validations numériques et expérimentales. Les études numériques ont mis en avant la faisabilité algorithmique, en comparant la méthode aux méthodes classiques. Les essais expérimentaux se sont déroulés dans une cellule test grandeur nature à l'université de La Rochelle. Ils ont permis de conclure sur la faisabilité technique et opérationnelle de la méthode, avec des résultats exploitables même avec de forts niveaux de bruit dans les données.

Des approfondissements pourraient être réalisés quant à la durée optimale d'utilisation. Nous savons par exemple que les résultats se dégradent lorsque nous essayons de discriminer des sources sur plusieurs jours. Par ailleurs, une étude de propagations d'incertitudes semblable à celles proposées dans la section 4.4 permettrait de fournir un intervalle de confiance à cette estimation.



## Chapitre 6

# Identification d'un défaut par thermographie infrarouge active

Nous présentons dans ce chapitre des travaux portant sur une méthode de détection de défauts par thermographie infrarouge (IR) active. Il s'agit d'essayer d'identifier des champs de propriétés thermiques dans un domaine tridimensionnel à partir de mesures partielles de température de surface. L'objet étudié est d'abord thermiquement excité par un flux thermique connu. Une caméra thermique enregistre l'évolution du champ de températures en surface, et ces données sont utilisées pour résoudre un problème inverse dans lequel les inconnues sont les champs de conductivité et de capacité thermiques du solide considéré. Initialement, ce travail a été appliqué au domaine du génie civil pour le contrôle de santé des structures (SHM), [Brouns *et al.*, 2014], mais la méthode trouve des débouchés dans le diagnostic thermique des bâtiments pour la caractérisation de défauts d'isolation ou de ponts thermiques.

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Description de l'étude et modélisation</b>	<b>139</b>
<b>6.2</b>	<b>Formulation du problème inverse</b>	<b>141</b>
<b>6.3</b>	<b>Méthode de résolution</b>	<b>141</b>
<b>6.4</b>	<b>Résultats</b>	<b>143</b>
<b>6.5</b>	<b>Méthode alternative</b>	<b>145</b>
<b>6.6</b>	<b>Résultats avec la méthode alternative</b>	<b>146</b>
<b>6.7</b>	<b>Étude sur d'autres formes de défaut</b>	<b>148</b>
<b>6.8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>152</b>

---

La maîtrise et l'entretien des structures de génie civil sont des domaines de recherche motivés par l'augmentation du trafic routier et le vieillissement des structures, [IFSTTAR, 2010]. Des techniques de réparation et de renforcement permettent d'augmenter la durabilité et la capacité des infrastructures, comme la projection de béton et le collage de matériaux composites. Cette dernière consiste à alterner les couches de matériaux composites et de colle industrielle à la surface de la zone défectueuse, [Tang et Podolony, 1998]. Néanmoins, la mise en œuvre du collage nécessite une procédure rigoureuse, [FTG, 2001, ACI, 2008, AFGC, 2011], si bien que les caractéristiques mécaniques et la longévité de cette réparation dépendent de la procédure de mise en place, [Ehrhart *et al.*, 2010, Houhou *et al.*, 2014]. Le contrôle et le suivi des réparations deviennent alors nécessaires.

Il existe plusieurs techniques de contrôle de santé des structures de béton réparées par collage composite, *e.g.* l'auscultation acoustique, le contraste thermique ou le traitement d'images infrarouges, [Maldague, 2001, Rajic, 2002, Manjunath, 2007, Ibarra-Castanedo *et al.*, 2009]. Ces méthodes permettent notamment d'identifier une zone défectueuse, sans toutefois la localiser et la caractériser. Par ailleurs, le contrôle non destructif par thermographie infrarouge est une méthode de diagnostic non intrusive qui peut être utilisée dans ce contexte, [Rhazi et Naar, 2005, Büyüköztürk et Tzu-Yang, 2006, Maierhofer *et al.*, 2006]. De nombreux travaux ont étudié l'application de cette méthode au contrôle de structures réparées [Valluzzi *et al.*, 2009, Dumoulin *et al.*, 2010, Dumoulin *et al.*, 2011, Taillade *et al.*, 2012].

Les techniques de réparation créent des systèmes multicouches épais nécessitant des méthodes d'investigation fiables et robustes [ACI, 2008, AFGC, 2011]. Parmi les différents outils de diagnostic non destructif, nous étudions particulièrement les méthodes thermiques [Maldague, 2001, Balageas et Roche, 2012]. La thermographie infrarouge, couplée à l'utilisation d'une procédure d'estimation de paramètres utilisant un modèle inverse, permet de remonter aux propriétés intrinsèques du système étudié de manière non intrusive, [Beck et Arnold, 1977, Özisik et Orlande, 2000]. De précédentes études en génie civil ont montré que l'utilisation de la thermographie infrarouge permet le contrôle non destructif de domaines multicouches épais de manière quantitative, [Taillade *et al.*, 2011]. Dans le cadre du contrôle non destructif de structures réparées par collage composite, l'étude [Crinière *et al.*, 2012] se base sur une modélisation multicouche 1D pour montrer que le ratio d'effusivités est un facteur déterminant pour la qualité d'estimation des paramètres, à l'instar de la quantité de connaissances *a priori* sur le système. Ainsi, des matériaux présentant un ratio d'effusivités inférieur à l'unité (par rapport à la résine époxy) sont difficilement caractérisables.

De façon analogue, la détection des ponts thermiques ou des défauts d'isolation s'avère précieuse en complément de la calibration globale des modèles de bâtiments présentée en section 3.2.1. Nous cherchons ici un procédé local et rapide capable d'effectuer ce diagnostic. En poursuivant l'analogie entre contrôle de santé des structures et thermique du bâtiment, le calcul des consommations minimales intrinsèques pour atteindre une consigne, introduit en section 4.1.1, s'apparente au calcul de la charge maximale d'une structure pour ne pas dépasser un déplacement limite<sup>1</sup>. De même, la localisation des ponts thermiques ou des irrégularités dans l'isolation devient équivalente à la détection de défauts au sein d'une infrastructure. Le procédé envisagé ici est un procédé de thermographie infrarouge (IR) active. L'objet étudié est d'abord thermiquement excité par un flux thermique connu. Une caméra thermique enregistre l'évolution du champ de température en surface, et ces données sont utilisées pour résoudre un problème inverse dans lequel les inconnues sont les champs de conductivité et de capacité thermiques du solide considéré. Notre méthode utilise une approche tridimensionnelle avec une modélisation aux éléments finis. Partant des conclusions précédentes, nous étudions ici l'utilisation de la méthode

---

1. *i.e.* la capacité portante

d'identification présentée en section 3.2.1 pour permettre l'estimation de grandeurs fonctionnelles au sein d'une matrice isotrope à l'aide de la méthode de l'état adjoint, [Lions, 1968]. L'enjeu est d'étudier si le modèle numérique est à même de s'affranchir de la corrélation entre épaisseur et propriétés, et donc de permettre la caractérisation de la taille du défaut considéré.

## 6.1 Description de l'étude et modélisation

Le domaine d'étude  $\Omega$  décrit un cube de 100 mm de côté, appelé *matrice*, cf. figure 6.1, présentant un défaut cylindrique  $\Delta$  en son sein, situé à 5 mm de profondeur. Le défaut possède des caractéristiques thermiques différentes de celles de la matrice. L'objet d'étude est thermiquement excité par un flux  $\phi_0$  sur  $\Gamma_{IR}$  une des faces du cube. Les données sont obtenues en filmant par caméra infrarouge la face excitée  $\Gamma_{IR}$  afin de déterminer la température de surface.

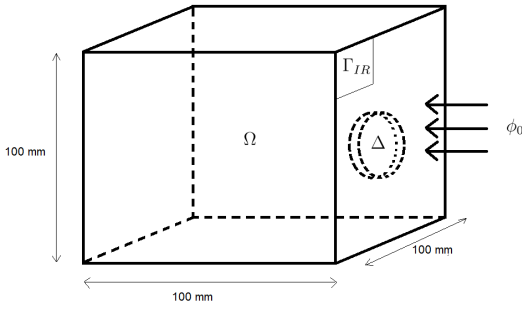


FIGURE 6.1 – Objet d'étude 3D

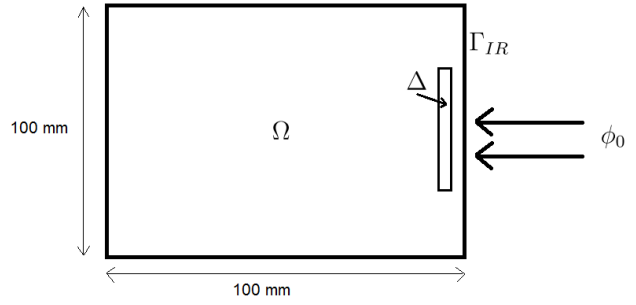


FIGURE 6.2 – Détails de la symétrie 2D

Pour simplifier l'analyse, nous utilisons la symétrie du problème pour étudier le cas bidimensionnel présenté en figure 6.2. Par souci de simplicité, et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous réutilisons les notations  $\Omega$  et  $\Delta$  pour le cas 2D. Dans ce contexte, la taille du défaut est de 50 mm de hauteur pour 5 mm de profondeur.

Une densité de flux  $\phi_0 = 1000 \text{ W.m}^{-2}$  est appliquée durant un temps  $t_0 = 450 \text{ s}$  sur la frontière  $\Gamma_{IR}$ , tandis que le temps total d'observation vaut  $t_a = 1000 \text{ s}$ . La frontière restante est notée  $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_{IR}$  et soumise à une condition de flux nul. L'évolution de la température  $\theta$  est exprimée en termes de propriétés spatiales et modélisée à l'aide de l'équation aux dérivées partielles parabolique (6.1), avec  $\rho c$  la capacité thermique,  $k$  la conductivité,  $\theta^0$  le champ initial de température dans le domaine, et  $\mathbf{1}_{t \leq t_0}$  la fonction indicatrice de  $\{t \leq t_0\}$ .

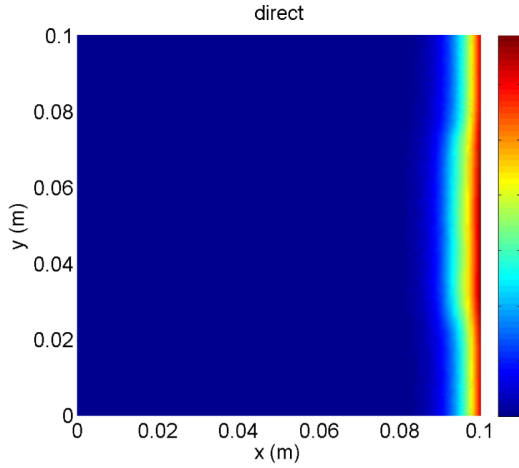
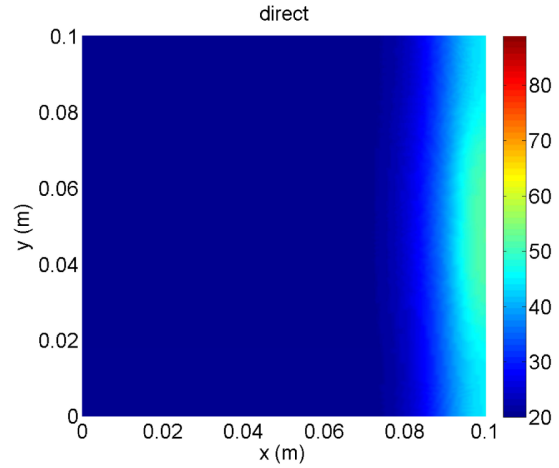
$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\ k \nabla \theta \cdot n = \phi_0 \mathbf{1}_{t \leq t_0} & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_{IR} \\ k \nabla \theta \cdot n = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_0 \\ \theta(x; 0) = \theta^0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

Le tableau 6.1 recense les propriétés thermiques de la matrice ainsi que des différents défauts étudiés. Le paramètre  $b$  est l'effusivité, et  $b_m/b$  est le ratio d'effusivités entre la matrice et le défaut considéré.

Nous avons choisi de résoudre le modèle (6.1) par la méthode des éléments finis [Ciarlet, 2006]. L'assemblage des matrices s'effectue à l'aide du solveur d'éléments finis  $P^1$  pdetool disponible sous MATLAB ©R2011b, sur un maillage de triangles  $\mathcal{T}^h$ . L'approximation de l'opérateur différentiel temporel est effectuée par un schéma d'Euler implicite à pas constant  $\Delta t = 5 \text{ s}$ .

Matériau	$k$	$\rho c$	$b$	$b_m/b$
Matrice	0,2	$1200 \times 1220$	542,5	1
Liège	0,039	$120 \times 1800$	91,8	5,91
Bois	0,15	$600 \times 1900$	431,5	1,31
Acier	15,1	$8055 \times 480$	7640,9	0,07

TABLE 6.1 – Propriétés utilisées dans l'étude


 FIGURE 6.3 – État du système à  $t_0 = 450$  s

 FIGURE 6.4 – État du système à  $t_a = 1000$  s

Les figures 6.3 et 6.4 présentent, pour un défaut de bois au sein de la matrice, l'état du système en fin de chauffe  $t = 450$  s et en fin de période d'observation  $t = 1000$  s, respectivement. Dans nos simulations, nous initialisons l'état thermique par un champ constant d'une valeur de  $20^\circ\text{C}$ . Nous présentons sur la figure 6.5 les thermogrammes en un point au dessus du défaut (au milieu de l'arête  $\Gamma_{\text{IR}}$ ) pour chaque type de défaut, et pour le cas sans défaut. Nous observons une forte corrélation entre la température maximale de chaque thermogramme et le ratio d'effusivités des matériaux concernés.

## 6.2 Formulation du problème inverse

La reconstruction de paramètres est un problème inverse dans lequel nous cherchons à identifier les paramètres d'un modèle à l'origine d'observations, *cf.* chapitre 3. L'estimation de propriétés thermiques a fait l'objet de nombreux travaux de recherche, notamment dans le cas discontinu, [Lamm, 1987, Banks et Kunisch, 1989, Gutman, 1990, Keung et Zou, 1998b, Keung et Zou, 1998c, Luce et Perez, 1999, Coles et Murio, 2001, Tber et Talibi, 2007]

Dans notre problématique, nous utilisons des mesures de températures de surface obtenues par thermographie infrarouge. Nous ne détaillons pas ici les étapes permettant de passer des images de la caméra infrarouge à la température de surface. Nous notons  $t_a = 1000$  s la durée de l'observation, et nous supposons que nous disposons de mesures allant de l'instant initial au temps final  $t_a : t \in [0; t_a]$ . Soit  $\mathcal{U}$  l'espace des inconnues, [Briane et Pagès, 2006] :

$$\mathcal{U} = (L_+^\infty(\Omega))^2, \quad L_+^\infty(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega), v \geq 0 \text{ p.p.}\} \quad (6.2)$$

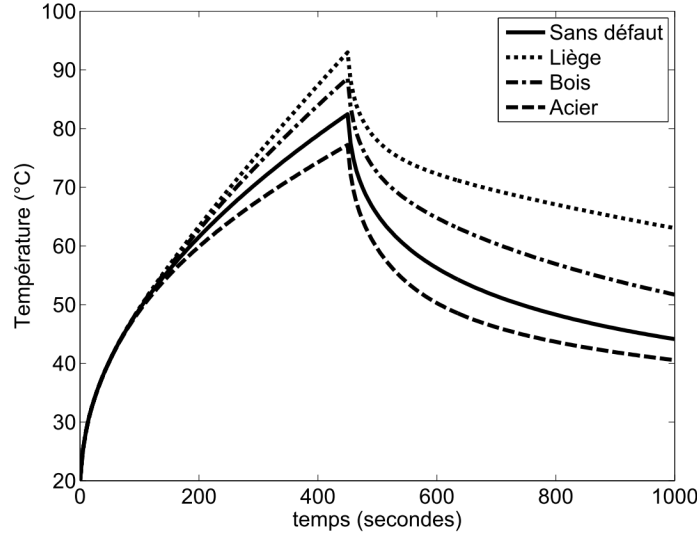


FIGURE 6.5 – Thermogrammes de surface

Les inconnues s'écrivent alors  $u = (k, \rho c) \in \mathcal{U}$ . Nous surchargeons la notation  $\theta$  en définissant  $\theta(u)$  la solution du modèle (6.1) avec les paramètres  $u$ . De plus, nous notons  $\theta^d(x; t)$  les mesures au temps  $t$  des températures de surface en  $x \in \Gamma_{\text{IR}}$ , et introduisons  $\mathcal{M}$ , l'espace des mesures, comme suit :

$$\mathcal{M} = L^2(\Gamma_{\text{IR}}; L^2(0; t_a)), \quad \|f\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^{t_a} \int_{\Gamma_{\text{IR}}} f^2(x; t) d\sigma dt \quad (6.3)$$

avec  $d\sigma$  la mesure de frontière sur  $\partial\Omega$ .

Nous nous intéressons ici à la caractérisation de la zone défectueuse. Pour cela, nous étudions la possibilité de reconstruire les champs de conductivité et de capacité thermiques  $u = (k, \rho c) \in \mathcal{U}$  à partir de mesures des températures de surface, engendrées numériquement, sur la frontière  $\Gamma_{\text{IR}}$ . Conformément à la procédure de Tikhonov [Tikhonov et Arsenin, 1977], nous introduisons la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|\theta(u) - \theta^d\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u - u^0\|_{\mathcal{R}}^2 \quad (6.4)$$

avec  $\epsilon$  le paramètre de régularisation de Tikhonov,  $u^0$  une ébauche des paramètres inconnus définis par les propriétés de la matrice, et  $\mathcal{R} = (L^2(\Omega))^2$  l'espace de régularisation. Le premier terme de cette fonctionnelle est le terme de fidélité et mesure l'écart entre les données et la réponse du modèle aux paramètres  $u$ , tandis que le dernier est le terme de régularisation qui rend le problème bien posé au sens de Hadamard, cf. section 3.1 et [Beck et Arnold, 1977]. Le problème inverse consiste alors à trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que :

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \quad (6.5)$$

### 6.3 Méthode de résolution

Le modèle (6.1) est non linéaire par rapport aux inconnues. Pour résoudre ce problème, nous choisissons d'utiliser un algorithme de type Levenberg-Marquardt, cf. chapitre 3 et notamment la section 3.2.4 pour plus de détails. Il s'agit d'un algorithme itératif qui permet de minimiser une fonctionnelle définie sur un modèle non linéaire, [Moré, 1977]. Cet algorithme consiste à résoudre un problème inverse linéaire défini sur la différentielle du modèle direct.



Soit  $\delta u \in \mathcal{U}$  une petite variation des paramètres recherchés, l'approximation consiste à écrire :

$$\theta(u + \delta u) \simeq \theta(u) + \delta\theta(u)\delta u \quad (6.6)$$

avec  $\delta\theta(u)\delta u$  la dérivée de Gâteaux de  $\theta$  en  $u$  dans la direction  $\delta u$ , solution du modèle linéaire tangent autour de  $u$  décrit par (6.7).

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta\theta) = -\delta\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta k \nabla \theta) & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\ k \nabla \delta\theta \cdot n = -\delta k \nabla \theta \cdot n & t \in [0; t_a], x \in \partial\Omega \\ \delta\theta(x; 0) = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.7)$$

Nous introduisons, en chaque point de linéarisation  $u$ , une nouvelle fonctionnelle :

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|\theta(u) + \delta\theta(u)\delta u - \theta^d\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|u + \delta u - u^0\|_{\mathcal{R}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\delta u\|_{\mathcal{R}}^2 \quad (6.8)$$

avec  $\nu$  le paramètre d'amortissement<sup>2</sup> de Marquardt, qui permet de définir un voisinage de confiance, [Nielsen, 1999, Hanke, 2010]. Nous ne cherchons plus directement le jeu de paramètres  $u$  optimal, mais plutôt l'accroissement local  $\delta u$  optimal qui nous permettra de calculer la linéarisation à l'itération suivante  $u + \delta u$ .

La minimisation de la fonctionnelle (6.8) est bien définie puisque  $\tilde{J}_u$  est strictement convexe et coercive [Ekeland et Témam, 1999]. D'après l'équation d'Euler, le minimum est caractérisé par :

$$\delta u = \arg \min_{\delta v \in \mathcal{U}} \tilde{J}_u(\delta v) \iff \tilde{J}'_u(\delta u) = 0 \quad (6.9)$$

avec  $\tilde{J}'_u(\delta u) \in \mathcal{U}'$  la différentielle de  $\tilde{J}_u$  en  $(\delta u)$  définie par :

$$\tilde{J}_u(\delta u + \delta \tilde{u}) = \tilde{J}_u(\delta u) + \tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} + o(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}) \quad (6.10)$$

Pour résoudre le problème (6.9), nous utilisons la méthode du gradient conjugué. L'algorithme a donc besoin de calculer la différentielle de la fonctionnelle (6.8). Pour cela, nous choisissons d'utiliser la méthode de l'état adjoint, cf. [Lions, 1968]. Cette méthode, issue de la théorie du contrôle optimal, propose une expression exacte de la différentielle  $\tilde{J}'_u(\delta u)$ .

Nous introduisons  $\delta\theta^*$  l'opérateur adjoint de  $\delta\theta$ , [Brezis, 2008]. Cet opérateur est solution du problème adjoint défini par :

$$\begin{cases} -\rho c \frac{\partial \delta\theta^*}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \delta\theta^*) = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Omega \\ k \nabla \delta\theta^* \cdot n = \theta + \delta\theta - \theta^d & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_{\text{IR}} \\ k \nabla \delta\theta^* \cdot n = 0 & t \in [0; t_a], x \in \Gamma_0 \\ \delta\theta^*(x; t_a) = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.11)$$

Soit  $\delta \tilde{u} = (\delta \tilde{k}, \delta \tilde{\rho} c) \in \mathcal{U}$  une petite perturbation de  $\delta u$ . La théorie du contrôle optimal nous permet d'obtenir la différentielle de  $\tilde{J}'_u(\delta u)$  en calculant :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} = & - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \nabla \theta \cdot \nabla \delta\theta^* dx dt + \epsilon \int_{\Omega} \delta \tilde{k} (k + \delta k - k^0) + \nu \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \delta k \\ & - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta^* dx dt + \epsilon \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c (\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) + \nu \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho} c \delta \rho c \end{aligned} \quad (6.12)$$

2. En anglais, *damping parameter*.

Les états thermiques direct  $\theta$  et adjoint du linéarisé  $\delta\theta^*$  sont calculés à l'aide d'un solveur d'éléments finis  $P^1$ , cf. section 6.1. Cela signifie que les gradients en espace apparaissant dans le premier terme du membre de droite de l'équation (6.12) sont constants sur chaque triangle. Afin de réduire les éventuelles erreurs numériques, nous choisissons d'utiliser cette propriété et de chercher les paramètres  $k$  et  $\rho c$  comme des éléments de  $P_{pm}^0(\mathcal{T}^h)$ , i.e. constants par élément, et reconstruisons des fonctions discontinues :

$$k^h(x) = \sum_{i=1}^{N_t} k_i \mathbf{1}_{T_i}(x), \quad \rho c^h(x) = \sum_{i=1}^{N_t} \rho c_i \mathbf{1}_{T_i}(x) \quad (6.13)$$

avec  $\mathcal{T}^h = \{T_i\}_i$  la triangulation du domaine et  $N_t$  le nombre de triangles. Les paramètres  $k^0$ ,  $\rho c^0$ ,  $\delta k$ ,  $\delta \rho c$ ,  $\delta \tilde{k}$  et  $\delta \tilde{\rho c}$  se décomposent de la même manière. Ceci nous permet d'écrire la différentielle  $\tilde{J}'_u$  comme suit,  $\forall i \in \llbracket 1; N_t \rrbracket$  :

$$\tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{k}_i = \delta \tilde{k}_i |T_i| \left[ - \int_0^{t_a} (\nabla \theta_h \cdot \nabla \delta \theta_h^*)_i dt + \epsilon(k_i + \delta k_i - k_i^0) + \nu \delta k_i \right] \quad (6.14)$$

$$\tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{\rho c}_i = \delta \tilde{\rho c}_i \left[ - \int_0^{t_a} \int_{T_i} \frac{\partial \theta_h}{\partial t} \delta \theta_h^* dx dt + \epsilon |T_i| (\rho c_i + \delta \rho c_i - \rho c_i^0) + \nu |T_i| \delta \rho c_i \right] \quad (6.15)$$

où  $\theta_h$  et  $\delta \theta_h^*$  sont les états approchés par éléments finis.

*Remarque.* Le choix des éléments finis  $P^1$  implique que les gradients en espace  $\nabla \theta_h$  et  $\nabla \delta \theta_h^*$  sont constants sur chaque triangle. De plus, l'état adjoint est utilisé avec le produit scalaire dans  $L^2(0; t_a)$ .  $\square$

## 6.4 Résultats

La méthode de résolution consiste à chercher des paramètres constants par élément du maillage. Dans ce contexte, les méthodes des moindres carrés présentent deux inconvénients majeurs : elles lissent les discontinuités, et des oscillations de Gibbs apparaissent aux voisinages des discontinuités, [Kunisch, 1988, Chavent, 2009]. Les champs de propriétés reconstruits possèdent donc une forme semblable à celle présentée dans la figure 6.6. Pour statuer sur l'appartenance d'une maille au défaut, nous devons donc définir un seuil. Pour cela, nous caractérisons les oscillations de Gibbs (localisations et amplitudes) de part et d'autre du défaut, bien entendu sans aucune information *a priori* sur le défaut, puis nous sélectionnons tous les points dont l'amplitude dépasse celle des oscillations de Gibbs, cf. figure 6.6. Cette définition du seuil d'appartenance au défaut est indépendante du maillage, du type de défaut, et de la localisation de ce dernier. Puisque nous reconstruisons deux champs de propriétés thermophysiques,  $k$  et  $\rho c$ , nous pouvons calculer une zone défectueuse à partir de chacun de ces champs, ce qui nous donne deux zones (différentes) reconstruites. Nous calculons ensuite la reconstruction de la zone défectueuse du défaut en choisissant l'intersection de ces deux zones identifiées.

Nous nous sommes aperçus que la méthode de résolution (6.13) générerait de fortes instabilités numériques pour les défauts de liège et d'acier, dont le ratio d'effusivités est soit très fort, soit très faible. Le problème vient principalement du calcul de la différentielle de la fonctionnelle (6.14)-(6.15). Nous présentons tout de même les résultats pour le défaut de bois (ratio d'effusivités proche de l'unité), puis nous proposons une méthode alternative pour pallier cette difficulté.

Les figures 6.7 et 6.8 présentent les champs thermophysiques reconstruits. Nous analysons les résultats suivant deux critères : la reconstruction de la zone défectueuse, et des paramètres physiques de celle-ci. La figure 6.9 présente la reconstruction de la zone défectueuse pour le défaut de bois. Nous analysons ensuite les résultats dans le tableau 6.2.

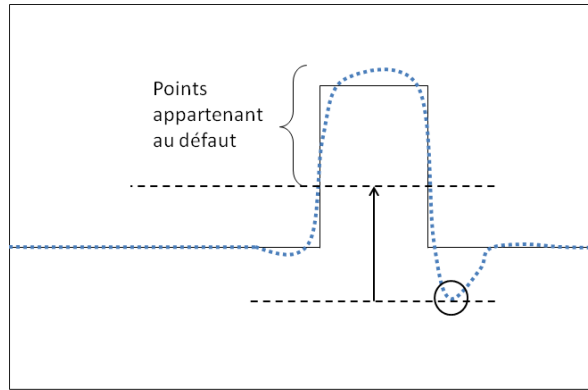


FIGURE 6.6 – Illustration du profil type des champs de propriétés reconstruits. En ligne continue noire, une vue en coupe du champ cible ; en pointillés bleus, une vue en coupe du champ reconstruit avec l'oscillation de Gibbs encerclée.

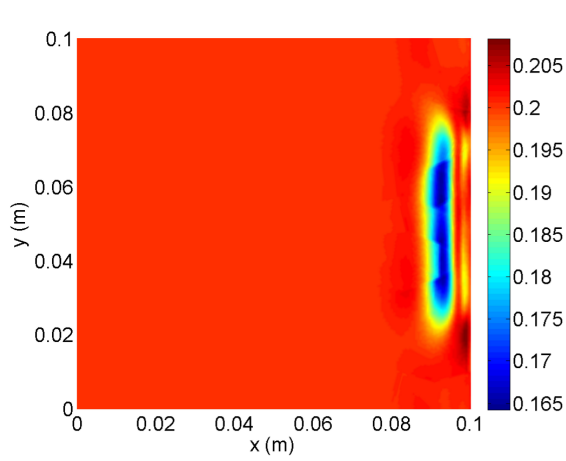


FIGURE 6.7 – Champ de conductivité  $k$  reconstruit pour le défaut de bois.

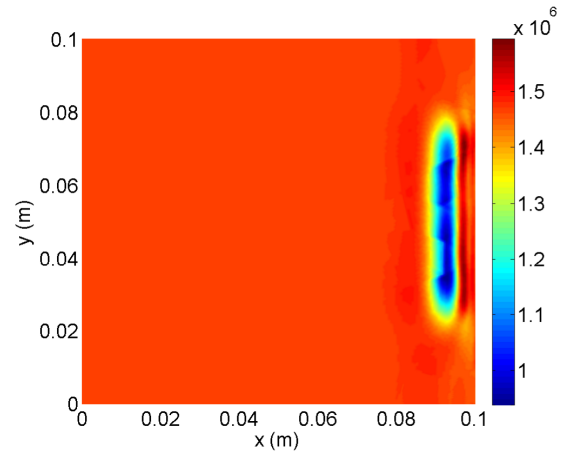


FIGURE 6.8 – Champ de capacité  $\rho c$  reconstruit pour le défaut de bois.

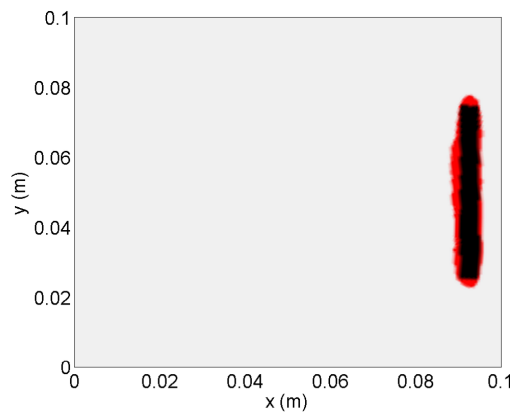


FIGURE 6.9 – Aire reconstruite pour le défaut de bois. En noir, la zone défectueuse correctement identifiée ; en rouge, la zone identifiée à tort comme étant défectueuse.

Défaut	Aire	$\bar{E}_{\%}$
Cible	$2,178.10^{-4}$	-
Bois	$3,216.10^{-4}$	47,7

TABLE 6.2 – Résultats de la reconstruction de l'aire de la zone défectueuse pour le défaut de bois. Le paramètre  $\bar{E}_{\%}$  représente l'erreur relative en pourcentage.

Les tableaux 6.3 et 6.4 analysent les résultats de l'identification de la conductivité et de la capacité du défaut. Le paramètre  $\bar{E}_{\%}$  calcule l'erreur moyenne en pourcentage de la reconstruction, tandis que  $\sigma_{\%}$  calcule l'écart-type spatial relatif en pourcentage de la dispersion au sein de l'aire défectueuse reconstruite.

Défaut	Cible	$k$	$\bar{E}_{\%}^k$	$\sigma_{\%}^k$	Défaut	Cible	$\rho c$	$\bar{E}_{\%}^{\rho c}$	$\sigma_{\%}^{\rho c}$
Bois	0,15	0,178	18,7	4,5	Bois	$1,1400.10^6$	$1,1405.10^6$	0	8,6

TABLE 6.3 – Résultats de l'identification de la conductivité du défaut de bois.

TABLE 6.4 – Résultats de l'identification de la capacité du défaut de bois.

Premièrement, nous remarquons que cette méthode surestime l'aire défectueuse de près de 50%, cf. figure 6.9 et tableau 6.2. Toutefois, le défaut est bien localisé, la forme est cohérente, et la profondeur est respectée. La conductivité thermique  $k$  est identifiée avec une erreur relative moyenne de 18,7%, mais avec une très faible dispersion spatiale. L'autre paramètre  $\rho c$  est identifié avec un erreur relative quasiment nulle, et un écart-type spatial de 8,6%. Bien que la zone défectueuse soit surévaluée, les résultats nous permettent de statuer sur la nature du défaut interne.

Nous proposons à présent une méthode alternative pour outrepasser les instabilités numériques apparaissant lors de l'étude de défaut dont les ratios d'effusivités sont éloignés de l'unité.

## 6.5 Méthode alternative

Le problème numérique constaté lors de l'identification de défauts présentant un ratio d'effusivités éloigné de l'unité apparait lors du calcul de la différentielle de la fonctionnelle. Reprenons son expression : soit  $\delta \tilde{u} = (\delta \tilde{k}, \delta \tilde{\rho c}) \in \mathcal{U}$  une petite perturbation de  $\delta u$ , la différentielle de  $\tilde{J}'_u(\delta u)$  s'obtient en calculant :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{u} = & - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \nabla \theta \cdot \nabla \delta \theta^* dx dt + \epsilon \int_{\Omega} \delta \tilde{k} (k + \delta k - k^0) + \nu \int_{\Omega} \delta \tilde{k} \delta k \\ & - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho c} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta^* dx dt + \epsilon \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho c} (\rho c + \delta \rho c - \rho c^0) + \nu \int_{\Omega} \delta \tilde{\rho c} \delta \rho c \end{aligned} \quad (6.16)$$

Nous choisissons ici de reconstruire des paramètres continus linéaires sur chaque élément, i.e. appartenant à  $P_{pm}^1(\mathcal{T}^h)$ . Pour cela, nous projetons les inconnues sur le sous-espace des éléments finis utilisé lors du calcul direct, [Hinestroza et al., 1999]. Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$k^h(x) = \sum_{i=1}^N k'_i \psi_i(x), \quad \rho c^h(x) = \sum_{i=1}^N \rho c'_i \psi_i(x) \quad (6.17)$$

avec  $\{\psi_i\}_i$  les fonctions de base des éléments finis, et  $N$  la dimension du sous-espace. Les paramètres  $k^0$ ,  $\rho c^0$ ,  $\delta k$ ,  $\delta \rho c$ ,  $\delta \tilde{k}$  et  $\delta \tilde{\rho c}$  se décomposent de la même manière. Ceci nous permet

de récrire la différentielle  $\tilde{J}'_u$  comme suit,  $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$  :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{k}'_i = \delta \tilde{k}'_i \left[ - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \psi_i \nabla \theta_h \cdot \nabla \delta \theta_h^* + \sum_{j=1}^N (\epsilon(k'_j + \delta k'_j - k'^0_j) + \nu \delta k'_j) \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \right] \quad (6.18)$$

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{\rho}c'_i = \delta \tilde{\rho}c'_i \left[ - \int_0^{t_a} \int_{\Omega} \psi_i \frac{\partial \theta_h}{\partial t} \delta \theta_h^* + \sum_{j=1}^N (\epsilon(\rho c'_j + \delta \rho c'_j - \rho c'^0_j) + \nu \delta \rho c'_j) \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \right] \quad (6.19)$$

où  $\theta_h$  et  $\delta \theta_h^*$  sont les états approchés par éléments finis.

La méthode nécessite donc, en chaque nœud du maillage, d'assembler des matrices creuses de masse et de raideur avec les capacité et conductivité thermiques définies par la fonction de base des éléments finis associée à ce point, puis d'effectuer un produit scalaire<sup>3</sup>. Ces assemblages sont de nouveau effectués par le solveur pdetool disponible sous MATLAB ©R2011b, contenant des outils d'interpolation pour passer des points aux triangles. L'approche semble moins sensible aux instabilités numériques. Malheureusement, les outils de discrétisation que nous avons utilisés pour ces simulations ne permettaient pas d'optimiser cette variante d'un point de vue informatique, nous avons donc été amené à utiliser un maillage légèrement plus grossier.

## 6.6 Résultats avec la méthode alternative

La méthode alternative, décrite en section 6.5, fonctionne avec les trois types de défaut considérés, cf. tableau 6.1. Nous présentons sur la figure 6.10 les résultats de la reconstruction des champs de propriétés pour les différents types de défaut. Les critères d'arrêt portent principalement sur le nombre d'itérations. Nous avons choisi de limiter à 40 le nombre d'itérations du gradient conjugué, et à 25 le nombre de linéarisations dans l'approche de Levenberg-Marquardt.

De nouveau, nous analysons les résultats en utilisant la méthode décrite sur la figure 6.6 pour déterminer si un point appartient au défaut. Les zones défectueuses reconstruites sont présentées sur la figure 6.11. Les résultats sont ensuite analysés dans le tableau 6.5.

Défaut	Aire	$\overline{E}_{\%}$
Cible	$3,084.10^{-4}$	-
Liège	$4,946.10^{-4}$	60,4
Bois	$3,844.10^{-4}$	24,6
Acier	$4,370.10^{-4}$	41,7

TABLE 6.5 – Résultats de la reconstruction de l'aire de la zone défectueuse pour différents types de défaut. Le paramètre  $\overline{E}_{\%}$  représente l'erreur relative en pourcentage.

Dans le cas du bois, l'erreur sur la localisation et la précision de la zone défectueuse se répartissent tout autour du défaut. Si bien que la reconstruction est assez fidèle en termes de localisation, de profondeur, et d'aire du défaut. Pour les défauts de liège et d'acier, la zone défectueuse est surestimée. Pour l'acier, la reconstruction de la zone est assez fidèle sauf pour les extrémités du défaut, mais la profondeur de la zone défectueuse est mal identifiée. Pour le liège c'est l'inverse, la profondeur du défaut est correctement reconstruite, mais la zone défectueuse est surestimée à l'arrière du défaut. Cette étude met donc en avant le comportement de l'algorithme

3. i.e. un calcul du type  $v^T M v$  avec  $v$  un vecteur et  $M$  une matrice.

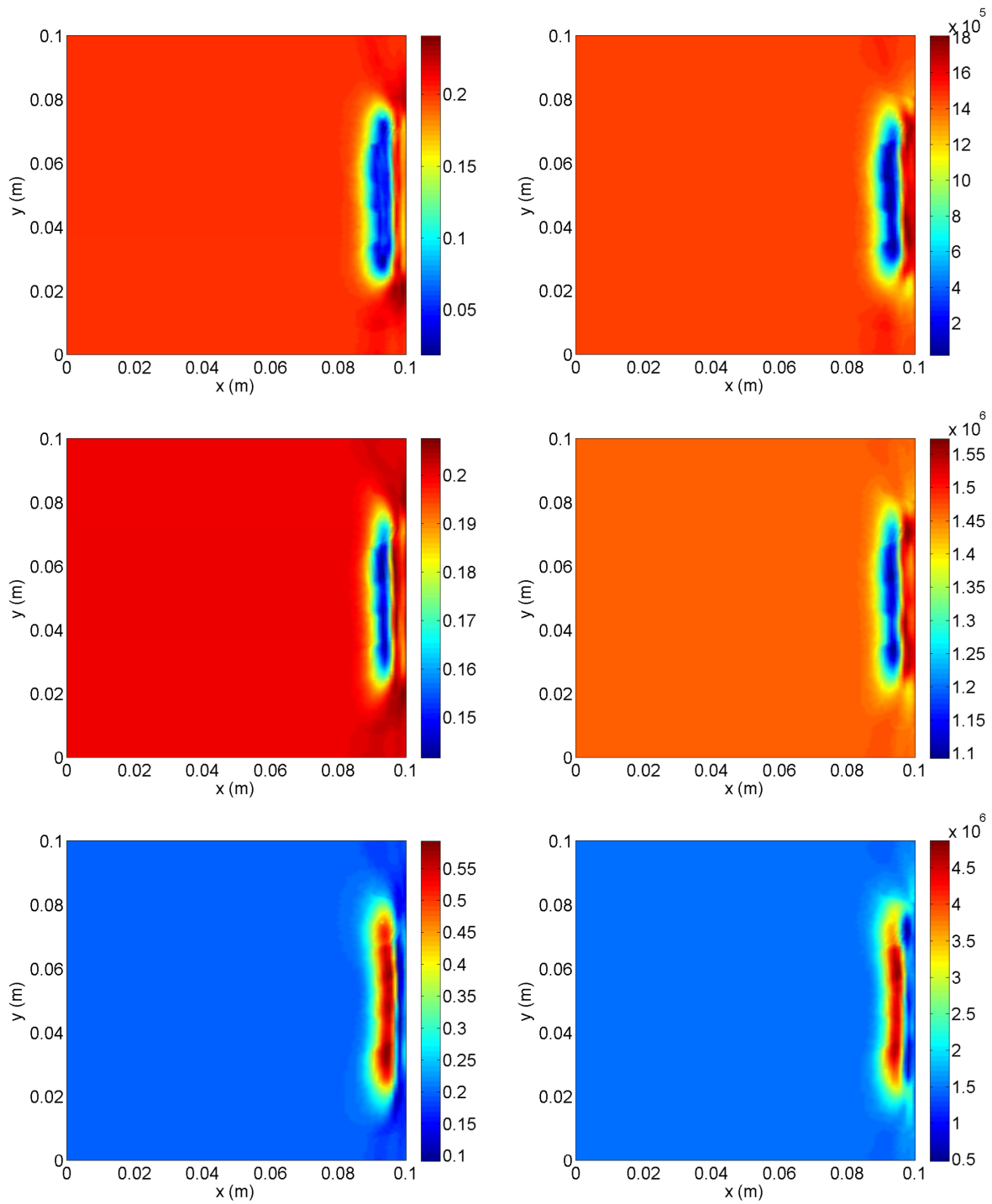


FIGURE 6.10 – Champs de propriétés thermophysiques reconstruits : à gauche la conductivité thermique, à droite la capacité thermique. En haut, défaut de liège ; au milieu, défaut de bois ; en bas, défaut d’acier.

étudié, puisque nous pouvons suivre l’évolution de la zone défectueuse reconstruite en fonction des ratios d’effusivités considérés.

Nous étudions ensuite la nature du défaut reconstruit, afin de déterminer si la méthode est capable d’identifier le type du défaut. Les tableaux 6.6 et 6.7 analysent les résultats de l’identification de la conductivité et de la capacité du défaut. Le paramètre  $\overline{E}_{\%}$  calcule l’erreur

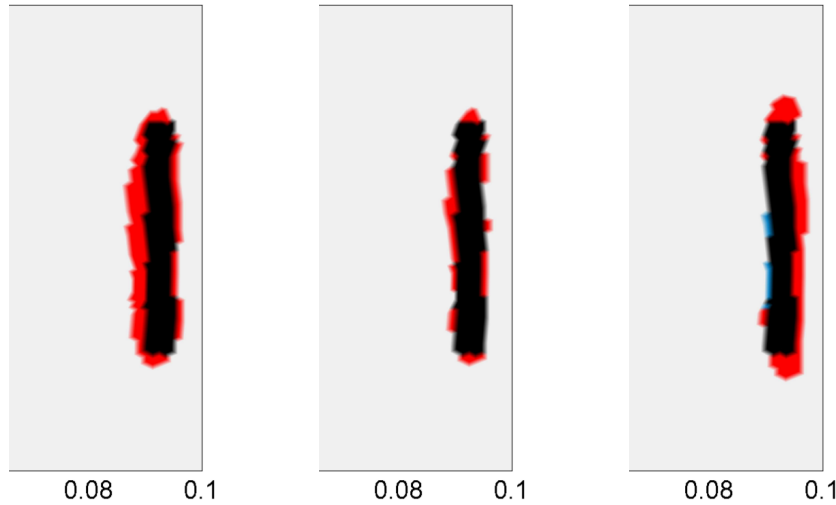


FIGURE 6.11 – Comparaison des zones défectueuses reconstruites pour les différents types de défaut, avec zoom au voisinage du défaut. En noir, la zone défectueuse correctement identifiée ; en bleu, la zone cible non identifiée ; en rouge, la zone identifiée à tort comme étant défectueuse.

moyenne en pourcentage de la reconstruction, tandis que  $\sigma_{\%}$  calcule l'écart-type spatial relatif en pourcentage de la dispersion au sein de l'aire défectueuse reconstruite.

Défaut	Cible	Résultat	$\overline{E}_{\%}^k$	$\sigma_{\%}^k$
Liège	0,039	0,084	114	32,7
Bois	0,15	0,164	9,6	7,6
Acier	15,1	0,460	97	0,8

TABLE 6.6 – Résultats de l'identification de la conductivité pour les différents défauts.

Défaut	Cible	Résultat	$\overline{E}_{\%}^{\rho c}$	$\sigma_{\%}^{\rho c}$
Liège	$2,1600 \cdot 10^5$	$6,1205 \cdot 10^5$	183,4	46,4
Bois	$1,1400 \cdot 10^6$	$1,2340 \cdot 10^6$	8,8	6,2
Acier	$3,8664 \cdot 10^6$	$3,5038 \cdot 10^6$	9,4	21,5

TABLE 6.7 – Résultats de l'identification de la capacité pour les différents types de défaut.

Nous remarquons premièrement que les résultats pour le défaut de bois sont plus intéressants qu'avec la première méthode, malgré une distribution spatiale légèrement supérieure. Dans le cas des défauts de liège et d'acier, la méthode n'est pas capable d'identifier précisément la nature du défaut interne. Malgré tout, l'ordre de grandeur du défaut de liège identifié est correct, ce qui nous permet de conclure quant à la présence d'un défaut isolant. Pour l'acier, la capacité thermique, proche de celle de la matrice, est correctement identifiée. C'est principalement le champ de conductivité qui pose problème. Nous sommes face aux inconvénients de la méthode utilisée. En effet, notre régularisation pénalise l'écart aux valeurs initiales (celles de la matrice), empêchant ainsi d'atteindre des valeurs de conductivité trop éloignées (dans le cas de l'acier, nous cherchons une conductivité près de cent fois supérieure à celle de la matrice).

## 6.7 Étude sur d'autres formes de défaut

Nous testons à présent notre méthode sur d'autres formes de défaut (forme elliptique, triangulaire entrant, et triangulaire sortant), cf. figure 6.13. Pour cette étude, nous focalisons l'analyse sur le défaut de bois, dont le ratio d'effusivités est proche de l'unité, cf. tableau 6.1.

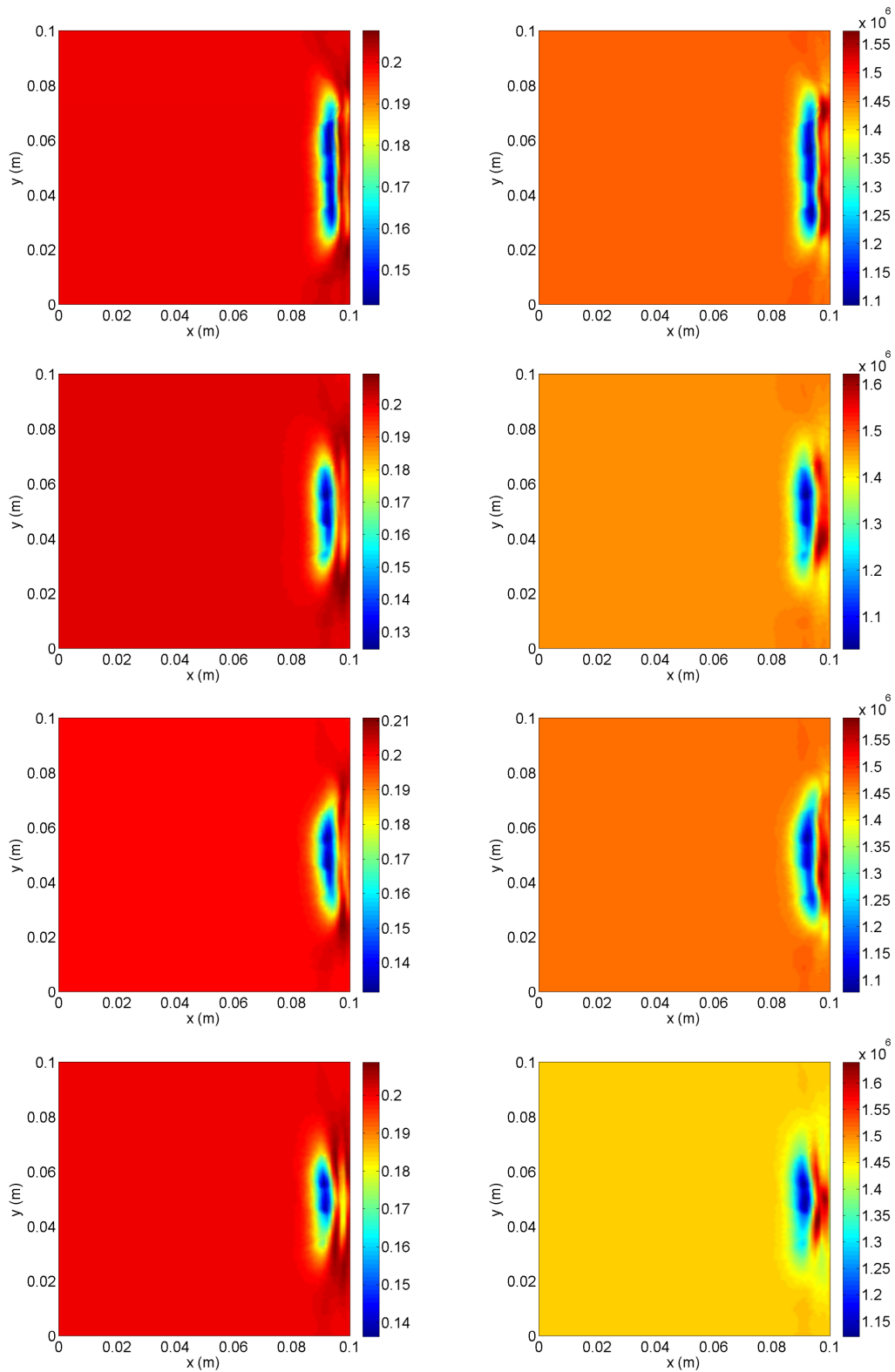


FIGURE 6.12 – Champs de propriétés thermophysiques reconstruits : à gauche la conductivité thermique, à droite la capacité thermique. De haut en bas, pour un défaut de forme rectangulaire, elliptique, triangulaire entrant, triangulaire sortant.



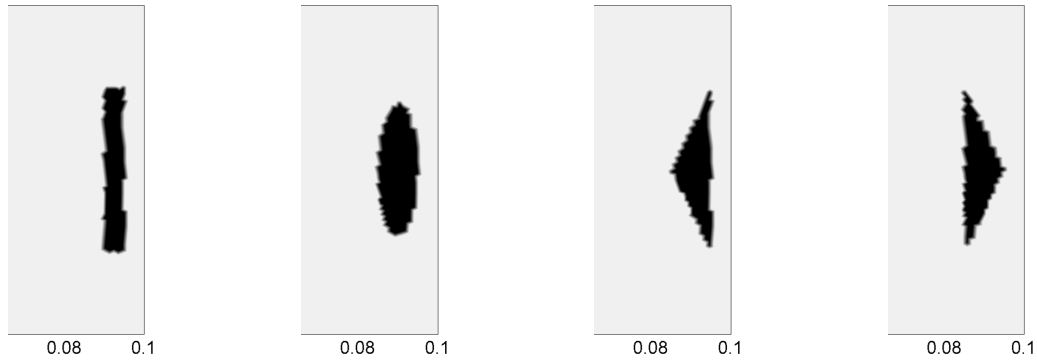


FIGURE 6.13 – Les différentes formes de défaut étudiées, zoom au voisinage du défaut.

Les champs de propriétés thermophysiques reconstruits sont présentés dans la figure 6.12. Les critères d'arrêt portent principalement sur le nombre d'itérations. Nous avons choisi de limiter à 40 le nombre d'itérations du gradient conjugué, et à 25 le nombre de linéarisations dans l'approche de Levenberg-Marquardt. Nous présentons la reconstruction de la zone dans la figure 6.14. Nous rappelons que nous utilisons le critère précédemment introduit pour déterminer l'appartenance d'un point au défaut, *cf.* figure 6.6.

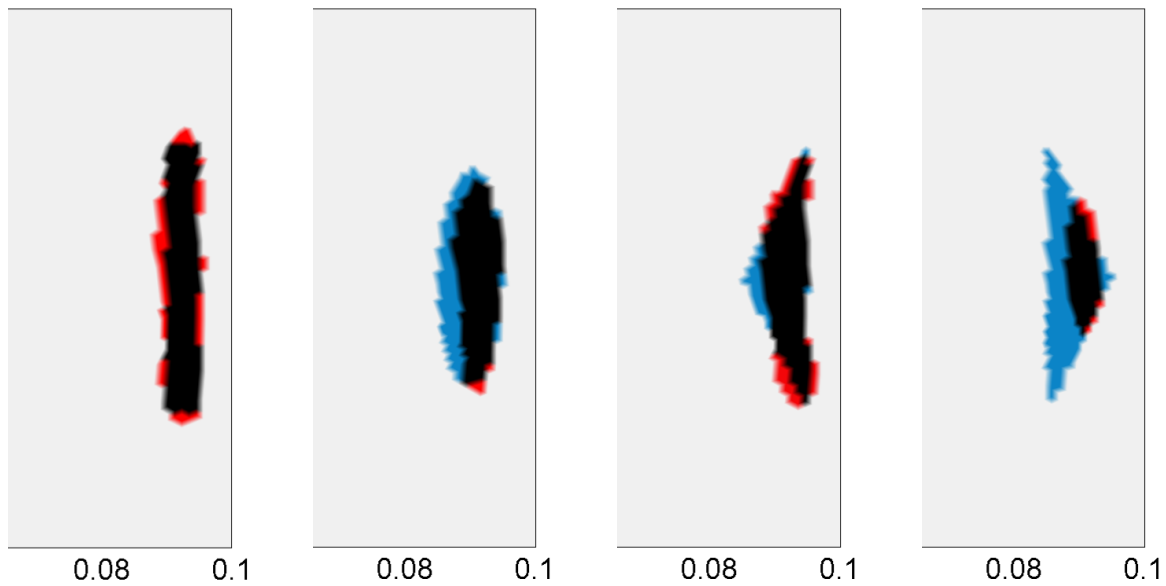


FIGURE 6.14 – Résultats de la reconstruction de la zone défectueuse du défaut de bois pour les différentes formes de défaut. En noir, la zone défectueuse correctement identifiée ; en bleu, la zone cible non identifiée ; en rouge, la zone identifiée à tort comme étant défectueuse.

Nous remarquons premièrement que la forme du défaut influence notablement la reconstruction de la zone défectueuse. Il semblerait que la forme du défaut face au bord excité du domaine  $\Gamma_{IR}$  soit importante, puisque la reconstruction du défaut triangulaire sortant est assez mauvaise. Nous remarquons ensuite que les trois nouveaux défauts considérés (ellipse, triangles entrant et sortant) sont plus épais que le rectangle initialement étudié. Nous soupçonnons le temps de chauffe de ne pas être suffisant pour des défauts aussi épais, ce qui se traduirait en un manque

d'information dans les mesures de surfaces. Par ailleurs, dans le cas du triangle entrant, les angles aigus à ses extrémités ne sont pas bien reconstruits. Nous supposons que ces résultats sont dus au caractère lissant de la méthode des moindres carrés avec une régularisation  $L^2$ .

Les résultats sont analysés dans le tableau 6.8. La zone défectueuse reconstruite est légèrement surestimée pour le rectangle, et sous-estimée pour l'ellipse. Dans le cas du triangle entrant, la difficulté des extrémités aiguës se traduit par des surestimations locales. Celles-ci tendent à compenser la sous-estimation de l'arrière du défaut, expliquant le résultat. Il semblerait que la méthode manque d'information pour reconstruire l'arrière des zones défectueuses dans le cas des formes plus épaisses. Ce phénomène pourrait être dû au temps de chauffe inadapté. La méthode trouve également ses limites dans l'orientation de la forme du défaut par rapport au bord excité  $\Gamma_{IR}$ , comme c'est le cas avec le triangle entrant pour lequel la méthode ne fonctionne pas.

Forme du défaut	Aire cible	Aire reconstruite	$\bar{E}_{\%}$
Rectangle	$3,084.10^{-4}$	$3,844.10^{-4}$	24,6
Ellipse	$3,670.10^{-4}$	$2,643.10^{-4}$	30,0
Triangle entrant	$3,005.10^{-4}$	$3,181.10^{-4}$	5,9
Triangle sortant	$3,067.10^{-4}$	$1,330.10^{-4}$	56,6

TABLE 6.8 – Résultats de la reconstruction de l'aire de la zone défectueuse du défaut de bois pour différentes formes de défaut. Le paramètre  $\bar{E}_{\%}$  représente l'erreur relative en pourcentage.

Nous étudions ensuite la nature du défaut reconstruit, afin de déterminer si la forme influence la caractérisation du type de défaut. Les tableaux 6.9 et 6.10 analysent les résultats de l'identification de la conductivité et de la capacité du défaut. Le paramètre  $\bar{E}_{\%}$  calcule l'erreur moyenne en pourcentage de la reconstruction, tandis que  $\sigma_{\%}$  calcule l'écart-type spatial relatif en pourcentage de la dispersion au sein de l'aire défectueuse reconstruite.

Forme	Cible	Résultat	$\bar{E}_{\%}^k$	$\sigma_{\%}^k$	Forme	Cible	Résultat	$\bar{E}_{\%}^{pc}$	$\sigma_{\%}^{pc}$
Rectangle	0,15	0,1644	9,6	7,7	Rect.	$1,140.10^6$	$1,240.10^6$	8,8	6,2
Ellipse	0,15	0,1525	1,7	9	Ellipse	$1,140.10^6$	$1,198.10^6$	5,1	6,5
Tri. entrant	0,15	0,1618	7,8	9,7	Tri. ent.	$1,140.10^6$	$1,232.10^6$	8	5,6
Tri. sortant	0,15	0,1553	3,5	6	Tri. sor.	$1,140.10^6$	$1,216.10^6$	6,7	4,2

TABLE 6.9 – Résultats de l'identification de la conductivité du défaut de bois pour les différentes formes de défaut.

TABLE 6.10 – Résultats de l'identification de la capacité du défaut de bois pour les différentes formes de défaut.

Malgré les erreurs importantes sur la définition spatiale du défaut pour les différentes formes, nous remarquons que les propriétés thermophysiques sont globalement bien identifiées. En effet, les erreurs relatives sont toutes inférieures à 10%, tout comme les dispersions spatiales. Nous sommes donc en mesure de statuer sur la nature du défaut pour toutes les formes. Dans le cas des sous-estimations de la zone défectueuse, *i.e.* pour l'ellipse et le triangle sortant, il est intéressant de remarquer que les erreurs relatives sont plus faibles que pour les surestimations.

## 6.8 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a présenté le développement d'une méthode d'estimation de champs de propriétés thermophysiques à l'intérieur d'un domaine à partir de mesures de température de surface. La résolution du modèle thermique utilisé est fondée sur les éléments finis  $P^1$  pour  $\theta$  et  $P^0$  pour les coefficients. L'approche intuitive sur cette discrétisation nous a menés à des instabilités numériques lorsque les champs de propriétés physiques cibles sont trop éloignés du champ initial. Pour pallier cette difficulté, nous avons développé une approche alternative qui consiste à chercher des paramètres  $P^1$  continus. Cette nouvelle méthode ne présente plus d'instabilité et a été appliquée à plusieurs natures de défaut. Elle est particulièrement efficace pour la caractérisation des défauts dont les ratios d'effusivités avec la matrice sont de l'ordre de l'unité. Dans le cas des autres ratios d'effusivités, la forme et l'aire de la zone défectueuse reconstruite peuvent fournir des informations intéressantes sur l'état interne du domaine étudié.

Dans la suite, une première étude paramétrique a été menée sur la forme du défaut interne inconnu. Celle-ci a mis en évidence les inconvénients de la méthode utilisée, à savoir les moindres carrés régularisés par une norme  $L^2$ . Ces inconvénients sont bien connus dans le domaine du traitement d'image, où l'on utilise des fonctionnelles plus complexes lorsque l'on cherche des formes qui contrastent avec la texture, [Mumford et Shah, 1989]. Dans ce contexte, les formes étroites sont difficiles à reconstruire. De plus, nous avons remarqué sur l'étude de formes plus épaisses que l'information contenue dans les mesures est insuffisante pour identifier l'arrière des défauts. Des travaux supplémentaires sur les temps et les types de chauffe, ainsi que sur de nouvelles fonctions coûts, pourraient permettre d'obtenir des reconstructions plus précises.

Néanmoins, les résultats présentés ici donnent un véritable crédit à cette méthode de thermographie IR active. Bien entendu, des études de robustesse plus approfondies et une validation expérimentale sont nécessaires pour conforter ces résultats. La méthode semble présenter un réel intérêt pour le contrôle de santé des ouvrages. Appliquée au bâtiment, nous espérons que cette méthode sera en mesure de localiser et de caractériser des défauts d'isolation et des ponts thermiques. L'application sur un cas d'étude contrôlé constitué d'un bâtiment possédant des défauts d'exécution pourrait permettre d'en apprécier la faisabilité technique.

## Chapitre 7

# Conclusion générale de la thèse

Cette thèse agrège les développements et les résultats de trois années de recherche dans le domaine des audits énergétiques des bâtiments. Les travaux réalisés concernent plusieurs aspects relatifs aux audits.

Nous commençons par décrire les méthodes actuelles d’audit énergétique, ainsi que les protocoles opératoires permettant d’obtenir les données *in situ*. L’une des étapes des audits consiste à effectuer une modélisation du bâtiment. Nous montrons que les différents modèles thermiques utilisés dans les outils usuels de modélisation du bâtiment se regroupent dans un formalisme unique et générique, puisqu’ils ne sont que des discrétisations différentes d’une équation globale de transferts thermiques. Cela signifie que tout outil capable de résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique peut être utilisé pour modéliser la thermique des bâtiments. Ce bilan aboutit au choix d’un modèle thermique générique, qui sert de support à notre méthode d’audit. L’utilisation d’EDP est motivée par l’accès aux outils issus de la théorie du contrôle. En effet, un large spectre de problèmes d’optimisation utilise cette théorie et propose ainsi des approches rapides de descente de gradient, ce dernier étant obtenu grâce au calcul de l’état adjoint. Cette thèse a par ailleurs fortement contribué au développement du logiciel ReTrofiT, spécialisé dans la résolution de problèmes d’optimisation appliqués à la thermique du bâtiment par la méthode de l’état adjoint.

Nous avons développé une méthode d’audit énergétique instrumentée fondée sur la théorie des problèmes inverses. Après avoir introduit les notions et les outils classiques des problèmes inverses, en illustrant les propos sur des exemples relatifs au domaine de la thermique du bâtiment, nous décrivons le protocole opératoire ainsi que le formalisme mathématique sous-jacent. La méthode consiste à identifier certains paramètres intrinsèques du bâtiment à partir de la connaissance des conditions environnementales, des scénarios d’usage et de la mesure de l’état thermique. Pour cela, nous résolvons un problème d’optimisation non linéaire à l’aide d’un algorithme de type Levenberg-Marquardt, associé au gradient conjugué et à l’état adjoint. L’innovation est contenue dans l’application du problème d’identification de paramètres à l’échelle du bâtiment entier, en estimant un nombre important de paramètres intrinsèques. La méthode se décline en deux variantes, aux protocoles opératoires différents, aboutissant à des précisions différentes. En l’appliquant sur un cas d’étude, l’approche est analysée et comparée aux incertitudes classiques dans le bâtiment. Nous montrons que la procédure réduit fortement les incertitudes sur l’état thermique du bâtiment. Finalement, la méthode développée est en apparence compliquée, mais permet d’alléger les protocoles opératoires et augmente fortement la précision des audits classiques.

L’introduction de nouvelles variables, dites d’intérêt, permet d’approfondir l’analyse des résultats de l’identification de paramètres. Elles fournissent un outil quantitatif au concepteur de la campagne de rénovation, et aident à cibler précisément les travaux. Les consommations

minimales intrinsèques calculent les besoins énergétiques du bâti, tandis que la décomposition de flux étudie l'impact de chaque flux sur le bilan thermique. Ces quantités sont calculées sur les résultats de l'application au cas d'étude. Nous montrons que la méthode d'audit réduit les incertitudes sur la décomposition de flux thermiques, information essentielle permettant de guider le professionnel dans le choix d'un scénario de rénovation adapté au bâtiment étudié. De plus, la fidélité de l'état thermique identifié par notre méthode d'audit se retranscrit sur le calcul des consommations minimales intrinsèques, pour lesquelles l'incertitude est également fortement réduite et passe de près de 10% à moins de 1%. Des études paramétriques par rapport au bruit des capteurs de l'état thermique et à la saison de l'audit démontrent la robustesse de la méthode par rapport à ces perturbations, notamment vis-à-vis des variables d'intérêt. Ces analyses se poursuivent par une étude de propagation d'incertitudes affectant les paramètres supposés connus lors de l'audit. Nous proposons une méthode approchée permettant d'obtenir l'influence au premier ordre des incertitudes sur les paramètres identifiés.

Notre méthode d'audit soulève deux difficultés. La première est qu'elle ne parvient pas à identifier de manière satisfaisante les débits moyens de renouvellement d'air, et la seconde est qu'elle suppose connus les apports internes gratuits, ce qui peut rendre le protocole opératoire relativement lourd à mettre en place et crée des incertitudes. Une des pistes d'amélioration en ce qui concerne l'identification des débits de renouvellement d'air consisterait à améliorer le modèle en ajoutant des équations représentant l'aéraulique. Des capteurs mesurant des concentrations de polluants, comme des capteurs de  $\text{CO}_2$ , pourraient être utilisés pour déterminer les taux de renouvellement d'air.

Une approche qui a été explorée dans cette thèse consiste à tirer profit de la connaissance sur la régularité (vitesse de variation) de ces débits de renouvellement d'air, comparée à celle des gains internes. La méthode développée permet d'estimer des sources thermiques dans une pièce en discriminant deux composantes additives ayant la particularité d'avoir des dynamiques différentes. Cette méthode constitue un jalon vers un outil qui permettrait d'améliorer l'identification des débits de renouvellement d'air tout en allégeant le protocole opératoire de notre méthode d'audit, qui nécessite la connaissance précise des scénarios d'usage dans les zones. Notre approche utilise une technique issue du domaine du traitement d'images, et notamment le débruitage d'images à fort contraste ou l'identification de motifs. Elle se formule par un problème d'optimisation linéaire régularisé par la semi-norme de la variation totale. La méthode est éprouvée par une validation numérique puis expérimentale. Nous démontrons sa robustesse par rapport au bruit de mesure, et la comparons aux méthodes classiques d'estimation de sources.

Pour la maîtrise des scénarios d'usage, nous pourrions, outre un effort supplémentaire pour préciser ces apports, proposer de focaliser l'identification sur des périodes d'inoccupation. Cela devrait améliorer la précision des résultats de l'identification de paramètres. Dans la littérature, des travaux ont montré que l'identification utilisant des plages temporelles courtes et successives permettrait d'améliorer la reconstruction des paramètres inconnus. Appliquée à notre cas, nous obtiendrions ainsi, pour chaque cas d'étude, une famille de paramètres identifiés sur différentes plages temporelles. Nous songeons également au placement des capteurs de température de l'air ambiant, toujours pour alléger le protocole opératoire. Nous pensons que l'étude du placement d'un nombre important de capteurs, dans des pièces représentatives, pourrait permettre de proposer des tables de correction pour l'offset, le délai et l'amplitude d'un capteur isolé dans un endroit précis de la pièce. Nous avons par ailleurs démontré, sur un cas particulier avec un nombre réduit d'inconnues, que l'utilisation de scénarios simples de forçage, conduisant à un protocole opératoire actif, augmentait l'identifiabilité du système. Cette étude pourrait se généraliser à la méthode d'audit, en proposant un protocole opératoire adapté.

Pour améliorer la précision des scénarios de rénovation proposés par le diagnostiqueur en fin de méthode, nous pourrions envisager d'étudier un autre problème d'optimisation. Celui-ci

aurait la particularité de faire intervenir des variables d'intérêt directement dans la fonctionnelle que l'on minimise.

En complément, nous avons développé une procédure d'identification de défauts internes d'une structure à partir de mesures thermiques à la frontière par une méthode de thermographie infrarouge active. Bien que l'application initiale de ces recherches ait été orientée vers le domaine du génie civil, la méthode décrite trouve des applications directes pour la détection de défauts d'isolation ou la caractérisation de ponts thermiques dans le bâtiment. Cette dernière reprend le formalisme introduit par l'identification de paramètres intrinsèques de notre méthode d'audit énergétique, et l'étend à l'étude d'un domaine 3D par caméra thermique. Nous étudions la localisation et la caractérisation d'une zone défectueuse au sein du domaine, à partir de mesures de température de surface d'une partie de sa frontière. La méthode est analysée dans deux études paramétriques portant sur la nature et la forme du défaut. Nous montrons notamment la faisabilité algorithmique de l'approche. Ces outils permettraient la localisation de défauts d'exécution dans le bâti, comme des défauts d'isolation ou des ponts thermiques, venant compléter et préciser les résultats de l'audit.

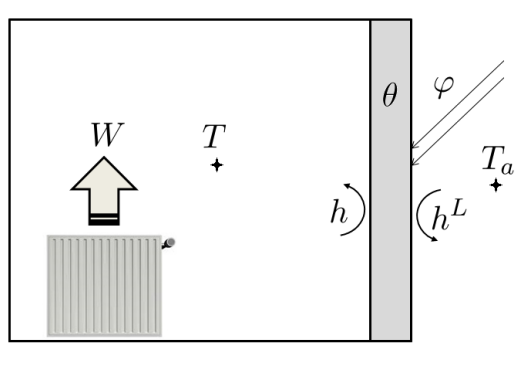
Ces différentes recherches s'articulent autour du développement d'une méthode d'audit énergétique fiable, peu onéreuse, et facile à mettre en œuvre. Nous espérons que cette thèse aura contribué au développement d'un outil d'audit générique et complet, largement diffusable auprès des professionnels.



## Annexe A

# Expression du modèle adjoint

Les opérations mathématiques menant du modèle direct au modèle adjoint sont souvent éclipsées par les auteurs de publications scientifiques. Bien que relativement simples dans le cas d'un modèle classique, celles-ci peuvent vite se complexifier lorsque nous considérons un modèle à plusieurs équations couplées, comme c'est le cas pour notre modèle multizone nodal.



$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C \frac{dT}{dt} = Sh(\theta(0;t) - T) + Q \\ T(t=0) = T^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0;t) = h(T - \theta(0;t)) \\ k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L;t) = h^L(T_a - \theta(L;t)) + \varphi \\ \theta(x,t=0) = \theta^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

FIGURE A.1 – Modèle couplé simplifié d'une zone et d'une paroi.

Afin de présenter les étapes menant à l'expression de l'adjoint, nous considérons le modèle réduit présenté figure A.1. Il reprend la structure du modèle multizone nodal considéré dans nos travaux, avec un couplage entre la température de la pièce  $T$  et celle de la face ( $x=0$ ) de la paroi  $\theta(0;t)$ , cf. équation (2.45).

Les paramètres inconnus sont rangés dans le vecteur  $u$  suivant :  $u = \{C, h, T^0, k, \varphi\}$ . Nous souhaitons les estimer par la méthode de Levenberg-Marquardt, décrite à la section 3.2.4. Le problème inverse est le suivant : trouver  $u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^4 \times L^2(0; t_a)$  qui minimise

$$J(u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(u) - m\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{A.2})$$

avec  $\hat{f}$  la réponse du modèle thermique (A.1) aux points de mesures, et  $\mathcal{M}$  l'espace des mesures<sup>1</sup>. Nous choisissons ici d'utiliser deux capteurs de température, un pour la zone et un pour la face ( $x=0$ ) de la paroi, et des données  $m \in \mathcal{M}$  allant de l'instant initial  $t=0$  à l'instant final  $t=t_a$ .

---

1. Typiquement,  $\mathcal{M} = L^2(0; t_a)^N$



Reprenant la notation de l'exposant  $d$  pour les mesures, cela nous donne :

$$\hat{f}(u) = \begin{pmatrix} T(t) \\ \theta(0; t) \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} T^d(t) \\ \theta^d(0; t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M} = L^2(0; t_a)^2 \quad (\text{A.3})$$

Afin de simplifier les expressions, nous omettons volontairement les autres termes comme la régularisation ou la pénalisation, car les expressions de leur adjoint sont triviales. Nous mettons donc de côté l'éventuel caractère mal posé et la régularisation.

Conformément à la méthode de linéarisations successives de type Levenberg-Marquardt, nous introduisons à chaque itération une nouvelle fonctionnelle  $\tilde{J}$  autour du point  $u$  comme suit :

$$\tilde{J}_u(\delta u) = \frac{1}{2} \|\hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - m\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (\text{A.4})$$

avec  $\hat{f}'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{M})$  la dérivée de Gâteaux du modèle (A.1) en  $u$  dans la direction  $\delta u = \{\delta C, \delta h, \delta T^0, \delta k, \delta \varphi\} \in \mathcal{U}$ , réponse du modèle (A.5) aux points de mesure.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C \frac{d\delta T}{dt} = Sh(\delta\theta(0; t) - \delta T) + S\delta h(\theta(0; t) - T) - \delta C \frac{dT}{dt} \\ \delta T(t=0) = \delta T^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S\rho c \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} = S\delta k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ -k \frac{\partial \delta \theta}{\partial x}(0; t) = h(\delta T - \delta\theta(0; t)) + \delta h(T - \theta(0; t)) + \delta k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0; t) \\ k \frac{\partial \delta \theta}{\partial x}(L; t) = -h^L \delta\theta(L; t) + \delta\varphi - \delta k \frac{\partial \theta}{\partial x}(L; t) \\ \delta\theta(x, t=0) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Le problème consiste alors à minimiser la fonctionnelle quadratique affine (A.4). Pour cela, nous choisissons d'utiliser une méthode de gradient. Commençons par exprimer la différentielle pour  $\delta \tilde{u} = \{\delta \tilde{C}, \delta \tilde{h}, \delta \tilde{T}^0, \delta \tilde{k}, \delta \tilde{\varphi}\} \in \mathcal{U}$  :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} = \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} = \tilde{J}_u(\delta u + \delta \tilde{u}) - \tilde{J}_u(\delta u) + \mathcal{O}(\|\delta \tilde{u}\|_{\mathcal{U}}^2) \quad (\text{A.6})$$

En développant la norme  $\mathcal{M}$  induite par le produit scalaire dans l'espace de Hilbert  $L^2(0; t_a)$ , l'équation (A.6) se réécrit naturellement par :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} = \langle \hat{f}'(u)\delta \tilde{u}; \hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - m \rangle_{\mathcal{M}} \quad (\text{A.7})$$

L'idée est alors d'utiliser l'opérateur adjoint<sup>2</sup> de  $\hat{f}'(u)$  afin d'obtenir une expression explicite de la différentielle par rapport aux paramètres  $\delta \tilde{u}$ , comme dans l'équation (A.6) :

$$\tilde{J}'_u(\delta u)\delta \tilde{u} = \langle \delta \tilde{u}; \hat{f}'(u)^* (\hat{f}(u) + \hat{f}'(u)\delta u - m) \rangle_{\mathcal{U}} \quad (\text{A.8})$$

Il nous faut à présent calculer l'adjoint de l'opérateur  $\hat{f}'(u)$ . Pour cela, commençons par écrire la formulation variationnelle de (A.5), suite à quoi nous effectuerons des intégrations par parties afin de passer de  $\hat{f}'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{M})$  à son adjoint  $\hat{f}'(u)^* \in \mathcal{L}(\mathcal{M}; \mathcal{U})$ . Soit  $V$  une fonction test, la formulation variationnelle de la première équation de (A.5) s'écrit :

$$\int_0^{t_a} C \frac{d\delta T}{dt} V = \int_0^{t_a} Sh(\delta\theta(0; t) - \delta T) V + \int_0^{t_a} S\delta h(\theta(0; t) - T) V - \int_0^{t_a} \delta C \frac{dT}{dt} V \quad (\text{A.9})$$

2. Nous utilisons la notation  $*$  pour l'adjoint, [Brezis, 2008]

Effectuons à présent une intégration par parties sur le terme de gauche ; après factorisation du terme  $\delta T$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_a} \delta T \left( -C \frac{dV}{dt} + ShV \right) &= -\delta T(t_a)V(t_a) + \delta \tilde{T}^0 V(0) - \int_0^{t_a} \delta \tilde{C} \frac{dT}{dt} V \\ &+ \int_0^{t_a} Sh\delta\theta(0;t)V + \int_0^{t_a} S\delta\tilde{h}(\theta(0;t) - T)V \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Passons maintenant à l'équation de la paroi dans (A.5). Soit  $A$  une fonction test, la formulation variationnelle de cette EDP s'écrit :

$$\int_0^{t_a} \int_0^L S\rho c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} A - \int_0^{t_a} \int_0^L Sk \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial x^2} A = \int_0^{t_a} \int_0^L S\delta\tilde{k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} A \quad (\text{A.11})$$

Après une intégration par parties en temps sur le premier terme, deux intégrations par parties successives en espace sur le second, et une intégration par parties en espace sur le dernier, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_a} \int_0^L \delta\theta \left( -S\rho c \frac{\partial A}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) &= - \int_0^{t_a} \int_0^L S\delta\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \int_0^L S\rho c \delta\theta(x; t_a) A(x; t_a) \\ &+ \int_0^{t_a} S \left[ h(\delta T - \delta\theta(0;t)) + \delta\tilde{h}(T - \theta(0;t)) \right] A(0;t) \\ &+ \int_0^{t_a} S \left( -h^L \delta\theta(L;t) + \delta\tilde{\varphi} \right) A(L;t) \\ &+ \int_0^{t_a} Sk\delta\theta(0;t) \frac{\partial A}{\partial x}(0;t) - \int_0^{t_a} Sk\delta\theta(L;t) \frac{\partial A}{\partial x}(L;t) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Après quelques manipulations, l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_a} \int_0^L \delta\theta \left( -S\rho c \frac{\partial A}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) &= - \int_0^{t_a} \int_0^L S\delta\tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} - \int_0^L S\rho c \delta\theta(x; t_a) A(x; t_a) \\ &+ \int_0^{t_a} Sh\delta TA(0;t) + \int_0^{t_a} S\delta\tilde{\varphi} A(L;t) \\ &+ \int_0^{t_a} S\delta\tilde{h}(T - \theta(0;t)) A(0;t) \\ &+ \int_0^{t_a} S\delta\theta(0;t) \left( k \frac{\partial A}{\partial x}(0;t) - hA(0;t) \right) \\ &- \int_0^{t_a} S\delta\theta(0;t) \left( k \frac{\partial A}{\partial x}(L;t) + h^L A(L;t) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Utilisons la définition de la norme sur l'espace des mesures :

$$\|m\|_{\mathcal{M}}^2 = \sum_i \|m_i\|_{L^2(0;t_a)}^2 = \|T^d\|_{L^2(0;t_a)}^2 + \|\theta^d(0;t)\|_{L^2(0;t_a)}^2 \quad (\text{A.14})$$

pour les données  $m$ . Pour se ramener à une expression similaire à (A.7), nous devons sommer les formulations variationnelles (A.10) et (A.13), déjà écrites sous la forme d'une factorisation

de l'état linéaire tangent. Cela nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_a} \delta T \left( -C \frac{dV}{dt} - Sh(A(0;t) - V) \right) + \int_0^{t_a} \int_0^L \delta \theta \left( -S\rho c \frac{\partial A}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \\
 & - \int_0^{t_a} S\delta\theta(0;t) \left( k \frac{\partial A}{\partial x}(0;t) + h(V - A(0;t)) \right) \\
 & + \int_0^{t_a} S\delta\theta(0;t) \left( k \frac{\partial A}{\partial x}(L;t) + h^L A(L;t) \right) \\
 & + \int_0^L S\rho c \delta\theta(x;t_a) A(x;t_a) + \delta T(t_a) V(t_a) \\
 & = \delta \tilde{T}^0 V(0) - \int_0^{t_a} \delta \tilde{C} \frac{dT}{dt} V - \int_0^{t_a} \int_0^L S\delta \tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \int_0^{t_a} S\delta \tilde{\varphi} A(L;t) \\
 & + \int_0^{t_a} S\delta \tilde{h} (T - \theta(0;t)) (A(0;t) - V)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Les quatre derniers termes du membre de gauche de l'équation (A.15) font apparaître les conditions aux limites naturelles des adjoints  $\delta T^*$  et  $\delta \theta^*$ , tandis que les termes du membre de droite sont les composantes du gradient. Il suffit alors d'identifier le membre de gauche (et notamment les deux premiers termes) de l'équation (A.15) avec l'équation (A.7). Cela nous permet de faire directement le lien entre la différentielle, écrite dans le membre de gauche de (A.7), et les composantes du gradient, écrites dans le membre de droite de (A.15). Le modèle adjoint s'obtient donc à partir de l'équation (A.15) en prenant des fonctions tests  $A$  et  $V$  particulières, décrites par la formulation variationnelle (A.15) (membre de gauche de (A.15)). Les solutions des équations adjointes  $\delta T^*$  et  $\delta \theta^*$  sont alors définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -C \frac{d\delta T^*}{dt} = Sh(\delta\theta^*(0;t) - \delta T^*) + (T + \delta T - T^d) \\ \delta T^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -S\rho c \frac{\partial \delta \theta^*}{\partial t} - Sk \frac{\partial^2 \delta \theta^*}{\partial x^2} = 0 \\ -k \frac{\partial \delta \theta^*}{\partial x}(0;t) = h(\delta T^* - \delta \theta^*(0;t)) + (\theta(0;t) + \delta \theta(0;t) - \theta^d(0;t)) \\ k \frac{\partial \delta \theta^*}{\partial x}(L;t) = -h^L \delta \theta^*(L;t) \\ \delta \theta^*(x, t = t_a) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{A.16}$$

Nous obtenons finalement les composantes du gradient comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} &= \langle \hat{f}'(u) \delta \tilde{u}; \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m \rangle_{\mathcal{M}} \\
 &= \langle \delta \tilde{u}; \hat{f}'(u)^* (\hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m) \rangle_{\mathcal{U}} \\
 &= \delta \tilde{T}^0 \delta T^*(0) - \int_0^{t_a} \delta \tilde{C} \frac{dT}{dt} \delta T^* - \iint \delta \tilde{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta^*}{\partial x} \\
 &\quad + \int_0^{t_a} S\delta \tilde{\varphi} \delta \theta^*(L;t) + \int_0^{t_a} S\delta \tilde{h} (T - \theta(0;t)) (\delta \theta^*(0;t) - \delta T^*)
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

### Gradient de la fonctionnelle définie sur le modèle générique

Nous pouvons faire les mêmes calculs pour le modèle thermique générique décrit en section 2.6, il faut juste faire attention de ne pas oublier de termes. Reprenons ce modèle, en détaillant les différents termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} c_a R_{zr} (T_r - T_z) + c_a q_z (T_a - T_z) + Q_z + \lambda_z (\Theta_z - T_z) + A_z \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) \\ \quad + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (h_{sz}^0 (\theta_s(0; t) - T_z) + h_{sz}^L (\theta_s(L_s; t) - T_z)) \\ T_z(t=0) = T_z^0 \\ \left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{d\Theta_z}{dt} = \eta_z P_z + \lambda_z (T_z - \Theta_z) \\ \Theta_z(t=0) = \Theta_z^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} S_s \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{00} (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t)) + \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t))) \\ \quad + \beta_s^0 (T^\infty - \theta_s(0; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^0 (T_z - \theta_s(0; t)) \\ \quad + \bar{h}_s^0 (T_a - \theta_s(0; t)) + \underline{h}_s^0 (T_g - \theta_s(0; t)) + \alpha_s^0 (\gamma_s^{0b} \phi^b + \gamma_s^{0d} \phi^d) \\ k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{L0} (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t)) + \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t))) \\ \quad + \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^L (T_z - \theta_s(L_s; t)) \\ \quad + \bar{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t)) + \underline{h}_s^L (T_g - \theta_s(L_s; t)) + \alpha_s^L (\gamma_s^{Lb} \phi^b + \gamma_s^{Ld} \phi^d) \\ \theta_s(x, t=0) = \theta_s^0(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

Pour illustrer, nous supposons que nous avons à disposition des mesures de certaines températures de zones, de certaines températures de surface des parois et des émetteurs. Pour faire apparaître les expressions du gradient par rapport à chacun des termes du modèle, nous exprimons le modèle linéaire tangent au point de linéarisation, cf. section 3.2.4. Pour cela, le vecteur des inconnues  $u$  contient la totalité des paramètres du modèle. Le modèle linéaire tangent global, particulièrement indigeste, est présenté dans l'équation (A.19). Comme expliqué précédemment, et en section 3.2.4, l'état adjoint est défini par la manipulation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_u(\delta u) \delta \tilde{u} &= \langle \nabla \tilde{J}_u(\delta u); \delta \tilde{u} \rangle_{\mathcal{U}} = \langle \hat{f}'(u) \delta \tilde{u}; \hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m \rangle_{\mathcal{M}} \\ &= \langle \delta \tilde{u}; \hat{f}'(u)^* (\hat{f}(u) + \hat{f}'(u) \delta u - m) \rangle_{\mathcal{U}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Remarquez que nous ne considérons ici que le terme de fidélité de la fonctionnelle (pas de terme de régularisation, de contraintes par pénalisation, ou de voisinage de confiance). Pour ce modèle global, nous ne détaillons pas les formulations variationnelles ainsi que les intégrations par parties permettant d'obtenir les conditions limites de l'adjoint. Ces manipulations sont identiques à

$$\left\{ \begin{array}{l}
 C_z \frac{d\delta T_z}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} c_a R_{zr} (\delta T_r - \delta T_z) + c_a q_z (\delta T_a - \delta T_z) + \delta Q_z + \lambda_z (\delta \Theta_z - \delta T_z) \\
 \quad + \sum_{r=1}^{N_z} c_a \delta R_{zr} (T_r - T_z) + c_a \delta q_z (T_a - T_z) + \delta \lambda_z (\Theta_z - T_z) \\
 \quad + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (h_{sz}^0 (\delta \theta_s(0; t) - \delta T_z) + h_{sz}^L (\delta \theta_s(L_s; t) - \delta T_z)) \\
 \quad + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (\delta h_{sz}^0 (\theta_s(0; t) - T_z) + \delta h_{sz}^L (\theta_s(L_s; t) - T_z)) \\
 \quad + A_z \delta \tau_z (\gamma_z^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) + A_z \tau_z (\delta \gamma_z^b \phi^b + \delta \gamma_z^d \phi^d + \gamma_z^b \delta \phi^b + \gamma_z^d \delta \phi^d) \\
 T_z(t=0) = \delta T_z^0 \\
 \\
 d_z \frac{d\delta \Theta_z}{dt} = \delta \eta_z \delta P_z + \eta_z P_z + \delta \lambda_z (T_z - \Theta_z) + \lambda_z (\delta T_z - \delta \Theta_z) \\
 \delta \Theta_z(t=0) = \delta \Theta_z^0 \\
 \\
 S_s \rho c_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x} \right) = -S_s \delta \rho c_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) \\
 -k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{00} (\delta \theta_p(0; t) - \delta \theta_s(0; t)) + \alpha_{sp}^{0L} (\delta \theta_p(L_p; t) - \delta \theta_s(0; t))) \\
 \quad + \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \alpha_{sp}^{00} (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t)) + \delta \alpha_{sp}^{0L} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t))) \\
 \quad + \beta_s^0 (\delta T^\infty - \delta \theta_s(0; t)) + \bar{h}_s^0 (\delta T_a - \delta \theta_s(0; t)) + \underline{h}_s^0 (\delta T_g - \delta \theta_s(0; t)) \\
 \quad + \delta \beta_s^0 (T^\infty - \theta_s(0; t)) + \delta \bar{h}_s^0 (T_a - \theta_s(0; t)) + \delta \underline{h}_s^0 (T_g - \theta_s(0; t)) \\
 \quad + \delta \alpha_s^0 (\gamma_s^{0b} \phi^b + \gamma_s^{0d} \phi^d) + \alpha_s^0 (\delta \gamma_s^{0b} \phi^b + \delta \gamma_s^{0d} \phi^d + \gamma_s^{0b} \delta \phi^b + \gamma_s^{0d} \delta \phi^d) \\
 \quad + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^0 (\delta T_z - \delta \theta_s(0; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} \delta h_{sz}^0 (T_z - \theta_s(0; t)) + \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(0; t) \\
 \\
 k_s \frac{\partial \delta \theta_s}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{L0} (\delta \theta_p(0; t) - \delta \theta_s(L_s; t)) + \alpha_{sp}^{LL} (\delta \theta_p(L_p; t) - \delta \theta_s(L_s; t))) \\
 \quad + \sum_{p=1}^{N_s} (\delta \alpha_{sp}^{L0} (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t)) + \delta \alpha_{sp}^{LL} (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t))) \\
 \quad + \beta_s^L (\delta T^\infty - \delta \theta_s(L_s; t)) + \bar{h}_s^L (\delta T_a - \delta \theta_s(L_s; t)) + \underline{h}_s^L (\delta T_g - \delta \theta_s(L_s; t)) \\
 \quad + \delta \beta_s^L (T^\infty - \theta_s(L_s; t)) + \delta \bar{h}_s^L (T_a - \theta_s(L_s; t)) + \delta \underline{h}_s^L (T_g - \theta_s(L_s; t)) \\
 \quad + \delta \alpha_s^L (\gamma_s^{Lb} \phi^b + \gamma_s^{Ld} \phi^d) + \alpha_s^L (\delta \gamma_s^{Lb} \phi^b + \delta \gamma_s^{Ld} \phi^d + \gamma_s^{Lb} \delta \phi^b + \gamma_s^{Ld} \delta \phi^d) \\
 \quad + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^L (\delta T_z - \delta \theta_s(L_s; t)) + \sum_{z=1}^{N_z} \delta h_{sz}^L (T_z - \theta_s(L_s; t)) - \delta k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x}(L_s; t) \\
 \\
 \delta \theta_s(x, t=0) = \delta \theta_s^0(x)
 \end{array} \right. \tag{A.19}$$

celles présentées en première partie de l'annexe, faisant apparaître des sommes dans lesquelles une partie des termes se télescopent. Le modèle adjoint du modèle linéaire tangent<sup>3</sup> s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -C_z \frac{d\delta T_z^*}{dt} = \sum_{r=1}^{N_z} c_a R_{zr} (\delta T_r^* - \delta T_z^*) + \sum_{s=1}^{N_s} S_s (h_{sz}^0 (\delta \theta_s^*(0; t) - \delta T_z^*) + h_{sz}^L (\delta \theta_s^*(L_s; t) - \delta T_z^*)) \\ \quad - c_a q_z \delta T_z^* + \lambda_z (\delta \Theta_z^* - \delta T_z^*) + \varpi_r^z \\ \delta T_z^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -d_z \frac{d\delta \Theta_z^*}{dt} = \lambda_z (\delta T_z^* - \delta \Theta_z^*) + \varpi_h^z \\ \delta \Theta_z^*(t = t_a) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -S_s \rho c_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial t} - S_s \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x} \right) = 0, \quad (x; t) \in [0; L_s] \times (0; t_a] \\ -k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x}(0; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{00} (\delta \theta_p^*(0; t) - \delta \theta_s^*(0; t)) + \alpha_{sp}^{0L} (\delta \theta_p^*(L_p; t) - \delta \theta_s^*(0; t))) \\ \quad + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^0 (\delta T_z^* - \delta \theta_s^*(0; t)) - (\beta_s^0 + \bar{h}_s^0 + \underline{h}_s^0) \delta \theta_s^*(0; t) + \varpi_s^0 \\ k_s \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x}(L_s; t) = \sum_{p=1}^{N_s} (\alpha_{sp}^{L0} (\delta \theta_p^*(0; t) - \delta \theta_s^*(L_s; t)) + \alpha_{sp}^{LL} (\delta \theta_p^*(L_p; t) - \delta \theta_s^*(L_s; t))) \\ \quad + \sum_{z=1}^{N_z} h_{sz}^L (\delta T_z^* - \delta \theta_s^*(L_s; t)) - (\beta_s^L + \bar{h}_s^L + \underline{h}_s^L) \delta \theta_s^*(L_s; t) + \varpi_s^L \\ \delta \theta_s^*(x, t = t_a) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

avec  $\varpi_r^z$ ,  $\varpi_h^z$  et  $\varpi_s^x$  des termes sources relatifs aux points de mesure, et définis par :

$$\begin{aligned} \varpi_r^z &= \begin{cases} T_z(t) + \delta T_z(t) - T_z^d(t), & \text{si la zone } z \text{ est instrumentée} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ \varpi_h^z &= \begin{cases} \Theta_z(t) + \delta \Theta_z(t) - \Theta_z^d(t), & \text{si l'émetteur } z \text{ est instrumenté} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ \varpi_s^x &= \begin{cases} \theta_s(x; t) + \delta \theta_s(x; t) - \theta_s^d(x; t), & \text{si la paroi } s \text{ est instrumentée} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Les composantes du gradient de la fonctionnelle  $\tilde{J}_u$  (définie ici uniquement par un terme de fidélité) sont décrites dans les équations (A.22)-(A.60).

*Remarque.* Nous avons choisi d'utiliser le modèle adjoint des équations continues, [Lods, 1992, Blayo et Nodet, 2010]. Il faut savoir que ce choix ne garantit pas la conservation de la consistance dont la discrétisation du modèle direct fait généralement l'objet, [Sei et Symes, 1995, Guerre-Delabrière et Postel, 2004]. Il y a donc une erreur numérique qui apparaît, puisque nous calculons l'adjoint du modèle direct continu exact, alors que numériquement nous travaillons avec le modèle direct approché par discrétisation. Il existe des outils de différentiation automatique de code permettant d'engendrer un code adjoint consistant avec le modèle numérique, mais ils sont moins intéressants en termes de temps de calcul.  $\square$

3. L'opérateur adjoint n'est défini que pour les opérateurs linéaires, cf. [Brezis, 2008].

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_s^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_s^0 S_s (\gamma_s^{0b} \phi^b + \gamma_s^{0d} \phi^d) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.22})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_s^L \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_s^L S_s (\gamma_s^{Lb} \phi^b + \gamma_s^{Ld} \phi^d) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.23})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{00} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{00} S_s (\theta_p(0; t) - \theta_s(0; t)) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.24})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{0L} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{0L} S_s (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(0; t)) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.25})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{L0} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{L0} S_s (\theta_p(0; t) - \theta_s(L_s; t)) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.26})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{LL} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\alpha}_{sp}^{LL} S_s (\theta_p(L_p; t) - \theta_s(L_s; t)) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.27})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\beta}_s^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\beta}_s^0 S_s (T^\infty - \theta_s(0; t)) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.28})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\beta}_s^L \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\beta}_s^L S_s (T^\infty - \theta_s(L_s; t)) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.29})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{C}_z \rangle_{\mathcal{U}} = - \int_0^{t_a} \delta \tilde{C}_z \frac{dT_z}{dt} \delta T_z^* \quad (\text{A.30})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{d}_z \rangle_{\mathcal{U}} = - \int_0^{t_a} \delta \tilde{d}_z \frac{d\Theta_z}{dt} \delta \Theta_z^* \quad (\text{A.31})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_s^{0b} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \alpha_s^0 \delta \tilde{\gamma}_s^{0b} S_s \phi^b \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.32})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_s^{0d} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \alpha_s^0 \delta \tilde{\gamma}_s^{0d} S_s \phi^d \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.33})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_s^{Lb} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \alpha_s^L \delta \tilde{\gamma}_s^{Lb} S_s \phi^b \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.34})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_s^{Ld} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \alpha_s^L \delta \tilde{\gamma}_s^{Ld} S_s \phi^d \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.35})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_z^d \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} A_z \tau_z \delta \tilde{\gamma}_z^d \phi^d \delta T_z^* \quad (\text{A.36})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\gamma}_z^f \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} A_z \tau_z \delta \tilde{\gamma}_z^f \phi^f \delta T_z^* \quad (\text{A.37})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_{sz}^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_{sz}^0 S_s (T_z - \theta_s(0; t)) (\delta \theta_s^*(0; t) - \delta T_z^*) \quad (\text{A.38})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_{sz}^L \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_{sz}^L S_s (T_z - \theta_s(L_s; t)) (\delta \theta_s^*(L_s; t) - \delta T_z^*) \quad (\text{A.39})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_s^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_s^0 S_s (T_a - \theta_s(0; t)) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.40})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_s^L \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_s^L S_s (T_a - \theta_s(L_s; t)) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.41})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_s^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_s^0 S_s (T_g - \theta_s(0; t)) \delta \theta_s^*(0; t) \quad (\text{A.42})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{h}_s^L \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{h}_s^L S_s (T_g - \theta_s(L_s; t)) \delta \theta_s^*(L_s; t) \quad (\text{A.43})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{k}_s \rangle_{\mathcal{U}} = - \iint \delta \tilde{k}_s S_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta_s^*}{\partial x} \quad (\text{A.44})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\lambda}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\lambda}_z (\Theta_z - T_z) (\delta T_z^* - \delta \Theta_z^*) \quad (\text{A.45})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\eta}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\eta}_z P_z \delta \Theta_z^* \quad (\text{A.46})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{P}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \eta_z \delta \tilde{P}_z \delta \Theta_z^* \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\phi}^b \rangle_{\mathcal{U}} &= \sum_{s=1}^{N_s} \int_0^{t_a} \delta \tilde{\phi}^b S_s (\alpha_s^0 \gamma_s^{0b} \delta \theta_s^*(0; t) + \alpha_s^L \gamma_s^{Lb} \delta \theta_s^*(L_s; t)) \\ &\quad + \sum_{z=1}^{N_z} \int_0^{t_a} \delta \tilde{\phi}^b A_z \tau_z \gamma_z^b \delta T_z^* \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\phi}^d \rangle_{\mathcal{U}} &= \sum_{s=1}^{N_s} \int_0^{t_a} \delta \tilde{\phi}^d S_s (\alpha_s^0 \gamma_s^{0d} \delta \theta_s^*(0; t) + \alpha_s^L \gamma_s^{Ld} \delta \theta_s^*(L_s; t)) \\ &\quad + \sum_{z=1}^{N_z} \int_0^{t_a} \delta \tilde{\phi}^d A_z \tau_z \gamma_z^d \delta T_z^* \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{q}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} c_a \delta \tilde{q}_z (T_a - T_z) \delta T_z^* \quad (\text{A.50})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{Q}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{Q}_z \delta T_z^* \quad (\text{A.51})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{R}_{zr} \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} c_a \delta \tilde{R}_{zr} (T_r - T_z) \delta T_z^* \quad (\text{A.52})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\rho} c_s \rangle_{\mathcal{U}} = - \iint \delta \tilde{\rho} c_s S_s \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \delta \theta_s^* \quad (\text{A.53})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\tau}_z \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{t_a} \delta \tilde{\tau}_z A_z (\gamma_s^b \phi^b + \gamma_z^d \phi^d) \delta T_z^* \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{T}_a \rangle_{\mathcal{U}} &= \sum_{s=1}^{N_s} \int_0^{t_a} \delta \tilde{T}_a S_s (\bar{h}_s^0 \delta \theta_s^*(0; t) + \bar{h}_s^L \delta \theta_s^*(L_s; t)) \\ &\quad + \sum_{z=1}^{N_z} \int_0^{t_a} c_a q_z \delta \tilde{T}_a \delta T_z^* \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{T}_g \rangle_{\mathcal{U}} = \sum_{s=1}^{N_s} \int_0^{t_a} \delta \tilde{T}_g S_s (\underline{h}_s^0 \delta \theta_s^*(0; t) + \underline{h}_s^L \delta \theta_s^*(L_s; t)) \quad (\text{A.56})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{T}^\infty \rangle_{\mathcal{U}} = \sum_{s=1}^{N_s} \int_0^{t_a} \delta \tilde{T}^\infty S_s (\beta_s^0 \delta \theta_s^*(0; t) + \beta_s^L \delta \theta_s^*(L_s; t)) \quad (\text{A.57})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\theta}_s^0 \rangle_{\mathcal{U}} = \int_0^{L_s} \rho c_s S_s \delta \tilde{\theta}_s^0 \delta \theta_s^*(x; 0) \quad (\text{A.58})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{T}_z^0 \rangle_{\mathcal{U}} = C_z \delta \tilde{T}_z^0 \delta T_z^*(0) \quad (\text{A.59})$$

$$\langle \nabla \tilde{J}_u; \delta \tilde{\Theta}_z^0 \rangle_{\mathcal{U}} = d_z \delta \tilde{\Theta}_z^0 \delta \Theta_z^*(0) \quad (\text{A.60})$$





# Bibliographie

- [Abushakra, 1997] ABUSHAKRA, B. (1997). An inverse model to predict and evaluate the energy performance of large commercial and institutional buildings. *In Building Simulation*.
- [ACI, 2008] ACI (2008). Guide for the design and construction of externally bonded systems for strengthening concrete structures. Rapport technique 440.2R02-08, American Concrete Institute, Michigan, US.
- [ADEME, 2010] ADEME (2010). *Histoire de la recherche sur l'enveloppe du bâtiment*.
- [ADEME, 2011] ADEME (2011). Audits énergétique bâtiment. Rapport type, Agence De l'Environnement et de la Maitrise de l'Energie.
- [ADEME, 2012] ADEME (2012). *ADEME et vous. C'est le moment d'agir : objectif bâtiments positifs*.
- [ADEME, 2014] ADEME (2014). *Chiffres clés du bâtiment*.
- [AFGC, 2011] AFGC (2011). Réparation et renforcement des structures en béton au moyen des matériaux composites. Recommandations provisoires. Rapport technique, Bulletin scientifique et technique de l'AFGC.
- [Åkerblom, 2008] ÅKERBLOM, L. W. (2008). International standards pertaining to thermography practices, training and certification. *In Thermosense XXX, Proc. of SPIE*, volume 6939.
- [Alifanov, 1974] ALIFANOV, O. M. (1974). Solution of an inverse problem of heat conduction by iteration methods. *Engineering Physics*, 26(4):471–476.
- [Alifanov et Artyukhin, 1975] ALIFANOV, O. M. et ARTYUKHIN, E. A. (1975). Regularized numerical solution of nonlinear inverse heat-conduction problem. *Engineering Physics*, 29(1): 934–938.
- [Allaire, 2005] ALLAIRE, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation*. École polytechnique.
- [Allaire, 2007] ALLAIRE, G. (2007). *Numerical analysis and optimization*. Oxford Science.
- [Amari et al., 1987] AMARI, S.-i., BARNDORFF-NIELSEN, O. E., KASS, R. E., LAURITZEN, S. L. et RAO, C. R. (1987). *Differential Geometry in Statistical Inference*. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California.
- [Andersen et al., 2000] ANDERSEN, K. K., MADSEN, H. et HANSEN, L. H. (2000). Modelling the heat dynamics of a building using stochastic differential equations. *Energy and Buildings*, 31:13–24.
- [Andersson et al., 2011] ANDERSSON, S., SJÖGREN, J.-U., ÖSTIN, R. et T.OLOFSSON (2011). Building performance based on measured data. *In World Renewable Energy Congress*.
- [Antonopoulos et al., 2010] ANTONOPOULOS, K., GIOTI, F. et TZIVANIDIS, C. (2010). A transient model for the energy analysis of indoor spaces. *Applied Energy*, 87:3084–3091.
- [Antonopoulos et Koronaki, 1999] ANTONOPOULOS, K. et KORONAKI, E. (1999). Envelope and indoor thermal capacitance of buildings. *Applied Thermal Engineering*, 19:743–756.

- [Antonopoulos et Koronaki, 2000] ANTONOPOULOS, K. et KORONAKI, E. (2000). Thermal parameter components of building envelope. *Applied Thermal Engineering*, 20:1193–1211.
- [Antonopoulos et Vrachopoulos, 1996] ANTONOPOULOS, K. A. et VRACHOPOULOS, M. (1996). On-site experimental estimation of thermal conductivities and heat capacities in multilayer walls under arbitrary transient conditions using explicit and implicit finite element difference schemes. 20:17–23.
- [Artyukhin et Rumyantsev, 1980] ARTYUKHIN, E. A. et RUMYANTSEV, S. V. (1980). A gradient method of defining smooth solutions to inverse boundary value problems in thermal conduction. *Translate from Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, 39(2):259–263.
- [Athienitis *et al.*, 1985] ATHIENITIS, A. K., CHANDRASHEKAR, M. et SULLIVAN, H. F. (1985). Modelling and analysis of thermal networks through subnetworks for multizone passive solar buildings. *Applied Mathematics Modelling*, 9:109–116.
- [Aude *et al.*, 2000] AUDE, P., TABARY, L. et DEPECKER, P. (2000). Sensitivity analysis and validation of buildings’ thermal models using adjoint-code method. *Energy and Buildings*, 31:267–283.
- [Audenaert *et al.*, 2011] AUDENAERT, A., BRIFFAERTS, K. et ENGELS, L. (2011). Practical versus theoretical domestic energy consumption for space heating. *Energy Policy*, 39:5219–5227.
- [Auroux, 2010] AUROUX, D. (2010). Problèmes inverses pour l’environnement.
- [Bacher et Madsen, 2011] BACHER, P. et MADSEN, H. (2011). Identifying suitable models for the heat dynamics of buildings. *Energy and Buildings*, 43:1511–1522.
- [Bal *et al.*, 2013] BAL, G., NAETAR, W., SCHERZER, O. et SCHOTLAND, J. (2013). The Levenberg-Marquardt iteration for numerical inversion of the power density operator. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(2):265–280.
- [Balageas et Roche, 2012] BALAGEAS, D. et ROCHE, J. (2012). Détection précoce et caractérisation de défauts par thermographie stimulée par échelon de flux et comparaison à la méthode impulsionnelle. *In SFT*.
- [Banks et Kunisch, 1989] BANKS, H. T. et KUNISCH, K. (1989). *Estimation techniques for distributed parameter systems*. Birkhauser Boston.
- [Bartak *et al.*, 2002] BARTAK, M., BEAUSOLEIL-MORRISON, I., CLARKE, J., DENEV, J., DRKAL, F., LAIN, M., MACDONALD, I., MELIKOV, A., POPIOLEK, Z. et STANKOV, P. (2002). Integrating CFD and building simulation. *Building and Environment*, 37:865–871.
- [Bauer et Lukas, 2011] BAUER, F. et LUKAS, M. A. (2011). Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(9):1795–1841.
- [Bauer et Scartezzini, 1998] BAUER, M. et SCARTEZZINI, J.-L. (1998). A simplified correlation method accounting for heating and cooling loads in energy-efficient buildings. *Energy and Buildings*, 27:147–154.
- [BBD, 2013] BBD (2013). Outils et logiciels, Construction et aménagement durables. Rapport technique, Bourgogne - Bâtiment durable.
- [Beausoleil-Morrison, 2002] BEAUSOLEIL-MORRISON, I. (2002). The adaptive simulation of convective heat transfer at internal building surfaces. *Building and Environment*, 37:791–806.
- [Beck et Arnold, 1977] BECK, J. V. et ARNOLD, K. J. (1977). *Parameter estimation in engineering and science*. John Wiley and sons.

- [Beck *et al.*, 1985] BECK, J. V., BLACKWELL, B. et ST. CLAIR, C. R. J. (1985). *Inverse heat conduction, ill-posed problems*. Wiley - Interscience.
- [Bellivier, 2004] BELLIVIER, A. (2004). *Modélisation numérique de la thermo-aéraulique du bâtiment : des modèles CFD à une approche hybride volumes finis / zonale*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle.
- [Ben-yu et Zou, 2001] BEN-YU, G. et ZOU, J. (2001). An augmented lagrangian method for parameter identifications in parabolic systems. 263:49–68.
- [Bertete-Aguirre *et al.*, 2002] BERTETE-AGUIRRE, H., CHERKAEV, E. et ORISTAGLIO, M. (2002). Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional. *Geophysical Journal International*, 149:499–507.
- [Binder *et al.*, 1994] BINDER, A., ENGL, H. W., GROETSCH, C. W., NEUBAUER, A. et SCHERZER, O. (1994). Weakly closed nonlinear operators and parameter identification in parabolic equations by Tikhonov regularization. *Applicable Analysis*, 55:215–234.
- [Birdsall *et al.*, 1990] BIRDSALL, B., BUHL, W. F., ELLINGTON, K. L., ERDEM, A. E. et WINKELMANN, F. (1990). Overview of the DOE-2 building energy analysis program. Rapport technique, University of California, Berkeley, California.
- [Bisgambiglia *et al.*, 1997] BISGAMBIGLIA, P., RIOLACCI, C., ORENGA, P., BALBI, J.-H. et BLABI, N. (1997). Modélisation dynamique en thermique du bâtiment. *Revue Générale de Thermique*, 36:59–64.
- [Björck, 1996] BJÖRCK, A. (1996). *Numerical methods for least squares problems*. SIAM.
- [Blayo et Nodet, 2010] BLAYO, E. et NODET, M. (2010). Introduction à l’assimilation de données variationnelles.
- [Boland, 1997] BOLAND, J. (1997). Simplifying the solution of the differential equations which describe heat flows in domestic dwellings. *Building and Environment*, 32:479–484.
- [Boland, 2002] BOLAND, J. (2002). The analytic solution of the differential equations describing heat flow in houses. *Building and Environment*, 37:1027–1035.
- [Bonnans *et al.*, 1997] BONNANS, J. F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C. et SAGASTIZÁBAL, C. A. (1997). *Numerical optimization*. Springer.
- [Bordass *et al.*, 2004] BORDASS, B., COHEN, R. et FIELD, J. (2004). Energy performance of non-domestic buidings. Closing the credibility gap. In *Building Performance Congress*.
- [Botsaris et Prebezanos, 2004] BOTSARIS, P. N. et PREBEZANOS, S. (2004). A methodology for a thermal energy building audit. *Building and Environment*, 39:195–199.
- [Bouia et Dalicieux, 1991] BOUIA, H. et DALICIEUX, P. (1991). Simplified modelling of air movements inside dwelling room. In *IBPSA Conference*.
- [Bourquin et Nassiopoulos, 2006] BOURQUIN, F. et NASSIOPOULOS, A. (2006). A step towards model-based temperature elimination in structural health monitoring. In *Proceedings of the 4th IASC World Conference on Structural Control and Monitoring*, San Diego, CA.
- [Bourquin et Nassiopoulos, 2011] BOURQUIN, F. et NASSIOPOULOS, A. (2011). Inverse reconstruction of initial and boundary conditions of a heat transfer problem with accurate final state. *Heat and Mass Transfer*, 54:3749–3760.
- [Boyer et Hubert, 2014] BOYER, F. et HUBERT, F. (2014). Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz.
- [Boyer *et al.*, 1996] BOYER, H., CHABRIAT, J., GRONDIN-PEREZ, B., TOURRAND, C. et BRAU, J. (1996). Thermal building simulation and computer generation of nodal models. *Building and Environment*, 31:207–214.

- [Boyer *et al.*, 1998] BOYER, H., GARDE, F., GATINA, J. et BRAU, J. (1998). A multimodel approach to buiding thermal simulation for design and research purposes. *Energy and Buildings*, 27:71–78.
- [Brezis, 2008] BREZIS, H. (2008). *Analyse fonctionnelle*. Dunod.
- [Briane et Pagès, 2006] BRIANE, M. et PAGÈS, G. (2006). *Théorie de l'intégration*. Vuibert.
- [Brouns *et al.*, 2014] BROUNS, J., CRINIÈRE, A., DUMOULIN, J., NASSIOPOULOS, A. et BOURQUIN, F. (2014). Diagnostic de structures de génie civil : Identification des propriétés spatiales et de la surface d'un défaut. *In SFT*.
- [Brouns *et al.*, 2013a] BROUNS, J., NASSIOPOULOS, A., BOURQUIN, F. et LIMAM, K. (2013a). Identification de paramètres et séparation de sources thermiques à dynamiques différentes en utilisant la variation totale. *In SFT*.
- [Brouns *et al.*, 2013b] BROUNS, J., NASSIOPOULOS, A., BOURQUIN, F. et LIMAM, K. (2013b). State-parameter identification problems for accurate building energy audits. *In IBPSA - Building Simulation*.
- [Brundtland, 1987] BRUNDTLAND, G. H. (1987). Notre avenir à tous. *In Organisation des Nations Unies*.
- [Burger, 2007] BURGER, M. (2007). Inverse problems.
- [Büyükoztürk et Tzu-Yang, 2006] BÜYÜKÖZTÜRK, O. et TZU-YANG, Y. (2006). Understanding and assessment of debonding failures in FRP-concrete systems. *In Seventh International Congress on Advances in Civil Engineering, Istanbul, Turkey*.
- [Caldera *et al.*, 2008] CALDERA, M., CORGNATI, S. P. et FILIPPI, M. (2008). Energy demand for space heating through a statistical approach : application to residential buildings. *Energy and Buildings*, 40:1972–1983.
- [Calvetti *et al.*, 2002] CALVETTI, D., LEWIS, B. et REICHEL, L. (2002). On the regularizing properties of the GMRES method. *Numerische Mathematik*, 91:605–625.
- [Carslaw et Jaeger, 1959] CARSLAW, H. S. et JAEGER, J. C. (1959). *Conduction of heat in solids*. Oxford.
- [Cartan, 1967] CARTAN, H. (1967). *Calcul différentiel*. Hermann Paris.
- [Catalina *et al.*, 2008] CATALINA, T., VIRGONE, J. et BLANCO, E. (2008). Development and validation of regression models to predict monthly heating demand for residential buildings. *Energy and Buildings*, 40:1825–1832.
- [Celorrioa et Hofinger, 2008] CELORRIOA, R. et HOFINGER, A. (2008). A real-time solution for an inverse Cauchy problem in cardiology. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 16(3):281–301.
- [César, 2014] CÉSAR, W. (2014). *Outils numériques et technologiques pour l'analyse de la qualité de l'air intérieur*. Thèse de doctorat, ESIEE - IFSTTAR.
- [Chamoin *et al.*, 2014] CHAMOIN, L., LADEVÈZE, P. et WAEYTENS, J. (2014). Goal-oriented updating of mechanical models using the adjoint framework. *Computational Mechanics*.
- [Charbonneau, 1995] CHARBONNEAU, P. (1995). Genetic algorithms in astronomy and astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 101:309–334.
- [Chavent, 2009] CHAVENT, G. (2009). *Nonlinear least squares for inverse problems. Theoretical foundations and step-by-step guide for applications*. Springer-Verlag.
- [Chen et Zou, 1999] CHEN, Z. et ZOU, J. (1999). An augmented lagrangian method for identifying discontinuous parameters in elliptic systems. *Control and Optimization*, 37(3):892–910.

- 
- [Chernousko *et al.*, 2008] CHERNOUSKO, F. L., ANANIEVSKI, I. M. et RESHMIN, S. A. (2008). *Control of nonlinear dynamical systems, methods and applications*. Springer.
- [Chow et Yu, 2000] CHOW, W. et YU, P. C. (2000). Controlling building energy use by Overall Thermal Transfer Value. *Energy*, 25:463–478.
- [Ciarlet, 2006] CIARLET, P. G. (2006). *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod.
- [Citherlet *et al.*, 2001] CITHERLET, S., CLARKE, J. et HAND, J. (2001). Integration in building physics simulation. *Energy and Buildings*, 33:451–461.
- [Clarke et Yaneske, 2009] CLARKE, J. et YANESKE, P. (2009). A rational approach to the harmonisation of the thermal properties of building materials. *Building and Environment*, 44:2046–2055.
- [Clarke, 2001] CLARKE, J. A. (2001). *Energy simulation in building design*. Butterworth-Heinemann.
- [Colaço *et al.*, 2006] COLAÇO, M. J., ORLANDE, H. R. B. et DULIKRAVICH, G. S. (2006). Inverse and optimization problems in heat transfer. In *Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*.
- [Coles et Murio, 2001] COLES, C. et MURIO, D. A. (2001). Simultaneous space diffusivity and source term reconstruction in 2D IHCP. *International Journal of Computers and Mathematics with Applications*, 42:1549–1564.
- [Coron, 2007] CORON, J.-M. (2007). *Control and nonlinearity*. American Mathematical Society.
- [Coutance, 2014] COUTANCE, P. (2014). Efficacité énergétique, un levier pour accroître sa compétitivité. *Mesures*, 862 (Février):26–30.
- [Crinière *et al.*, 2012] CRINIÈRE, A., DUMOULIN, J., IBARRA-CASTANEDO, C., THÉROUX, L.-D. et MALDAGUE, X. (2012). Comparison between SPT and PT for defect characterization of CFRP plates glued on concrete or wood structures using optical active infrared thermography. In *QIRT*.
- [CSTB, 2005] CSTB (2005). Méthode de calcul TH-C-E ex. Rapport technique, CSTB.
- [Demanuele *et al.*, 2010] DEMANUELE, C., TWEDDELL, T. et DAVIES, M. (2010). Bridging the gap between predicted and actual energy performance in schools. In *World Renewable Energy Congress XI*.
- [Demoment *et al.*, 2001] DEMOMENT, G., IDIER, J., GIOVANNELLI, J.-F. et MOHAMMAD-DJAFARI, A. (2001). Problèmes inverses en traitement du signal et de l'image.
- [Derber et Rosati, 1989] DERBER, J. et ROSATI, A. (1989). A global oceanic data assimilation system. *Journal of Physical Oceanography*, 19:1333–1347.
- [Desta *et al.*, 2005] DESTA, T. Z., BRECHT, A. V., QUANTEN, S., BUGGENHOUT, S. V., MEYERS, J., BAELEMAN, M. et BERCKMANS, D. (2005). Modelling and control of heat transfer phenomena inside a ventilated air space. *Energy and Buildings*, 37:777–786.
- [Dieudonné, 1984] DIEUDONNÉ, J. (1984). *Éléments d'analyse*, volume 1. Gauthier-Villars.
- [Dorai et Tortorelli, 1997] DORAI, G. A. et TORTORELLI, D. A. (1997). Transient inverse heat conduction problem solutions via Newton's method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(17):4115–4127.
- [Dou et Han, 2011] DOU, Y.-X. et HAN, B. (2011). Reconstruction of a velocity field for a 3D advection-diffusion equation. *Thermal Sciences*, 50:2340–2354.
- [Dou et Han, 2012] DOU, Y.-X. et HAN, B. (2012). Total variation regularization for the reconstruction of a mountain topography. *Applied Numerical Mathematics*, 62:1–20.

- [Druon, 2006] DRUON, M. (2006). *Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [Duffie et Beckman, 1991] DUFFIE, J. A. et BECKMAN, W. A. (1991). *Solar engineering of thermal processes*. John Wiley and sons.
- [Dumoulin et al., 2010] DUMOULIN, J., IBARRA-CASTANEDO, C., QUIERTANT, M., TAILLADE, F., BENDADA, A. et MALDAGUE, X. (2010). Evaluation of FRP gluing on concrete structures by active infrared thermography. *In QIRT*.
- [Dumoulin et al., 2011] DUMOULIN, J., TAILLADE, F., AUBAGNAC, C., BENAZARTI, K. et QUIERTANT, M. (2011). Infrared thermography for the nondestructive inspection of CFRP strengthening. *Concrete international*, 33:55–58.
- [Ehrhart et al., 2010] EHRHART, B., VALESKE, B., VULLER, C. E. et VOCKENHEIMER, C. (2010). Methods for the quality assessment of adhesive bonded CFRP structures - A resumé. *In 2nd International Symposium on NDT in Aerospace*.
- [Ekeland et Témam, 1999] EKELAND, I. et TÉMAM, R. (1999). *Convex analysis and variational problems*. SIAM.
- [Emery et al., 2000] EMERY, A. F., NENAROKOMOV, A. V. et FADALE, T. D. (2000). Uncertainties in parameter estimation : the optimal experiment design. *Heat and Mass Transfer*, 43:3331–3339.
- [Engl et al., 1996] ENGL, H. W., HANKE, M. et NEUBAUER, A. (1996). *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic.
- [Etheridge, 2011] ETHERIDGE, D. (2011). *Natural ventilation of buildings : Theory, measurement and design*. Wiley.
- [EVO, 2012] EVO (2012). International performance measurement and verification protocol, volume 1. Rapport technique, Efficiency Valuation Organization.
- [Farman et al., 1985] FARMAN, J. C., GARDINER, B. G. et SHANKLIN, J. (1985). Large losses of total ozone in Antarctica reveal seasonal ClOx/NOx interaction. *Nature*, 315:207–210.
- [Fenwick, 1987] FENWICK, P. (1987). The inverse problem : A medical perspective. *Physics in Medicine and Biology*, 32(1):5–9.
- [Fourier, 1988] FOURIER, J. (1988). *Théorie analytique de la chaleur*. Jacques Gabay.
- [Frieden, 2004] FRIEDEN, B. R. (2004). *Science from Fisher information : A unification*. Broché.
- [FTG, 2001] FTG (2001). Externally bonded FRP reinforcement for RC structures. Rapport technique, International Federation for Structural Concrete.
- [Gautier et Charles, 2012] GAUTIER, A. et CHARLES, T. (2012). Analyse de sensibilité et d'incertitudes. Rapport technique, SOLAMEN, projet MEMOIRE.
- [Gfrerer, 1987] GFRENER, H. (1987). An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *Mathematics of Computation*, 49(180):507–522.
- [Ghazizadeh et al., 2012] GHAZIZADEH, H. R., AZIMI, A. et MAEREFAT, M. (2012). An inverse problem to estimate relaxation parameter and order of fractionality in fractional single-phase-lag heat equation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(7-8):2095–2101.
- [Ghiaus, 2006] GHIAUS, C. (2006). Experimental estimation of building energy performance by robust regression. *Energy and Buildings*, 38:582–587.
- [Girault et Petit, 2005] GIRAULT, M. et PETIT, D. (2005). Identification methods in nonlinear heat conduction. Part II : inverse problem using a reduced model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48:119–133.

- 
- [Golub *et al.*, 1979] GOLUB, G. H., HEATH, M. et WAHBA, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223.
- [Griesse, 2007] GRIESSE, R. (2007). *Stability and sensitivity analysis in optimal control of partial differential equations*. Thèse de doctorat, Faculty of natural sciences Karl-Francens University Graz.
- [Griesse *et al.*, 2005] GRIESSE, R., HINTERMÜLLER, M. et HINZE, M. (2005). Differential stability of control-constrained optimal control problems for the Navier-Stokes equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 26(7-8):829–850.
- [Groetsch, 1977] GROETSCH, C. W. (1977). *Generalized inverses of linear operators : Representation and approximation*. Marcel Dekker.
- [Güçyeter et Günaydin, 2012] GÜÇYETER, B. et GÜNAYDIN, H. M. (2012). Optimization of an envelope retrofit strategy for an existing office building. *Energy and Buildings*, 55:647–659.
- [Guernouti, 2014] GUERNOUTI, S. (2014). Les modèles d’usage dans le bâtiment : Développements, tests et validation. Rapport technique, Cerema.
- [Guerre-Delabrière et Postel, 2004] GUERRE-DELABRIÈRE, S. et POSTEL, M. (2004). *Méthodes d’approximation - Équations différentielles - Applications Scilab*. Ellipses.
- [Gutman, 1990] GUTMAN, S. (1990). Identification of discontinuous parameters in flow equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(5):1049–1060.
- [Haas *et al.*, 1998] HAAS, R., AUER, H. et BIERMAYR, P. (1998). The impact of consumer behavior on residential energy demand for space heating. *Energy and Buildings*, 27:195–205.
- [Hadamard, 1902] HADAMARD, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13:49–52.
- [Hagentoft, 2001] HAGENTOFT, C. E. (2001). *Introduction to building physics*. Studentlitteratur.
- [Haghighi *et al.*, 2009] HAGHIGHI, M. R. G., EGHTEHAD, M., MALEKZADEH, P. et NECSULESCU, D. S. (2009). Three-dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates. *Energy Conversion and Management*, 50:450–457.
- [Hanke, 1995a] HANKE, M. (1995a). *Conjugate gradient type methods for ill-posed problems*. Longman Scientific and Technical.
- [Hanke, 1995b] HANKE, M. (1995b). The minimal error conjugate gradient method is a regularization method. *American Mathematical Society*, 123(11):3487–3497.
- [Hanke, 2010] HANKE, M. (2010). The regularizing Levenberg-Marquardt scheme is of optimal order. *Journal of Integral Equations and Applications*, 22(2):259–283.
- [Hansen, 1992] HANSEN, C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 34(4):561–580.
- [Hasanov, 2011] HASANOV, A. (2011). Identification of spacewise and time dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurement at a final time. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(7-8):2069–2080.
- [Hensen, 1999] HENSEN, J. (1999). A comparison of coupled and decoupled solutions for temperature and air flow in a building. *ASHRAE Transactions*, 105.
- [Heo *et al.*, 2012] HEO, Y., CHOUDHARY, R. et AUGENBROE, G. A. (2012). Calibration of building energy models for retrofit analysis under uncertainty. *Energy and Buildings*, 47:550–560.
- [Hestenes et Stiefel, 1952] HESTENES, M. R. et STIEFEL, E. (1952). Methods of conjugate gradient for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436.



- [Hien *et al.*, 2000] HIEN, W. N., POH, L. K. et FERIADI, H. (2000). The use of performance-based simulation tools for building design and evaluation - A Singapore perspective. *Building and Environment*, 35:709–736.
- [Hinestroza *et al.*, 1999] HINESTROZA, D., MURIO, D. A. et ZHAN, S. (1999). Regularization techniques for nonlinear problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 37:145–159.
- [Hittle, 1979] HITTLE, D. C. (1979). The Building Loads Analysis and System Thermodynamics (BLAST) program, version 2.0. Users manual. Rapport technique, Army Construction Engineering Research Lab, Champaign, Illinois.
- [Hào *et al.*, 2009] HÀO, D. N., THÀNH, N. T. et SAHLI, H. (2009). Splitting-based conjugate gradient method for a multi-dimensional linear inverse heat conduction problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 232:361–377.
- [Hoes *et al.*, 2009] HOES, P., HENSEN, J., LOOMANS, M., de VRIES, B. et BOURGEOIS, D. (2009). User behavior in whole building simulation. *Energy and Buildings*, 41:295–302.
- [Honerkamp et Weese, 1990] HONERKAMP, J. et WEESE, J. (1990). Tikhonovs regularization method for ill-posed problems. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2:17–30.
- [Hong *et al.*, 2000] HONG, T., CHOU, S. et BONG, T. (2000). Building simulation : an overview of developments and information sources. *Building and Environment*, 35:347–361.
- [Hopfe et Hensen, 2011] HOPFE, C. J. et HENSEN, J. L. (2011). Uncertainty analysis in building performance simulation for design support. *Energy and Buildings*, 43:2798–2805.
- [Houhou *et al.*, 2014] HOUHO, N., BENZARTI, K., QUIERTANT, M., CHATAIGNER, S., RABASSE, M., AUBAGNAC, C., GAGNON, A. et FLETY, A. (2014). Durability of concrete-FRP bonded assemblies subjected to coupled hydrothermal and creep ageing mechanisms : Experimental and analytical investigations. In *Transport Research Arena 2014, Paris*.
- [Huang et Özisik, 1990] HUANG, C. H. et ÖZISIK, M. N. (1990). A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity. *Journal of Heat and Fluid Flow*, 11(3):262–268.
- [Huang et Özisik, 1991] HUANG, C.-H. et ÖZISIK, M. N. (1991). Direct integration approach for simultaneously estimating temperature dependent thermal conductivity and heat capacity. 20:95–110.
- [Huang et Yan, 1995] HUANG, C.-H. et YAN, J.-Y. (1995). An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(18):3433–3441.
- [Ibarra-Castanedo *et al.*, 2009] IBARRA-CASTANEDO, C., PIAU, J.-M., GUILBERT, S., AVDELIDIS, N. P., GENEST, M., BENDADA, A. et MALDAGUE, X. P. V. (2009). Comparative study of active thermography techniques for the nondestructive evaluation of honeycomb structures. *Research in Nondestructive Evaluation*, 20:1–31.
- [IFSTTAR, 2010] IFSTTAR (2010). Rapport annuel. Rapport technique, IFSTTAR.
- [Inard *et al.*, 1996] INARD, C., BOUIA, H. et DALICIEUX, P. (1996). Prediction of air temperature distribution in buildings with a zonal model. *Energy and Buildings*, 24:125–132.
- [Isakov, 2006] ISAKOV, V. (2006). *Inverse problems for partial differential equations*. Springer.
- [Ismail-Zadeh *et al.*, 2009] ISMAIL-ZADEH, A., KOROTKII, A., SCHUBERT, G. et TSEPELEV, I. (2009). Numerical techniques for solving the inverse retrospective problem of thermal evolution of the earth interior. *Computers and Structures*, 87:802–811.
- [Ito et Kunisch, 1990] ITO, K. et KUNISCH, K. (1990). The augmented lagrangian method for parameter estimation in elliptic systems. 28:113–136.

- 
- [Ito et Kunisch, 1996] ITO, K. et KUNISCH, K. (1996). Augmented lagrangian-SQR-methods in hilbert spaces and applications to control in the coefficients problems. 6:96–125.
- [Jacquez et Grief, 1985] JACQUEZ, J. A. et GRIEF, P. (1985). Numerical parameter identifiability and estimability : Integrating identifiability, estimability, and optimal design. *Mathematical Biosciences*, 77:201–227.
- [Jarny *et al.*, 1991] JARNY, Y., OZISIK, M. N. et BARDON, J. P. (1991). A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(11):2911–2919.
- [Jebaraj et Iniyar, 2006] JEBARAJ, S. et INIYAN, S. (2006). A review of energy models. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 10:281–311.
- [Jia et Wang, 2004] JIA, C. et WANG, G. (2004). Identifications of parameters in ill-posed linear parabolic equations. 57:677–686.
- [Jiménez *et al.*, 2008] JIMÉNEZ, M., PORCAR, B. et HERAS, M. (2008). Estimation of building component UA and gA from outdoor tests in warm and moderate weather conditions. *Solar Energy*, 82:573–587.
- [Jiménez *et al.*, 2009] JIMÉNEZ, M., PORCAR, B. et HERAS, M. (2009). Application of different dynamic analysis approaches to the estimation of the building component U-value. *Building and Environment*, 44:361–367.
- [Jin, 2010] JIN, Q. (2010). On a regularized Levenberg-Marquardt method for solving nonlinear inverse problems. *Numerische Mathematik*, 115:229–259.
- [Johansson et Lesnic, 2007] JOHANSSON, T. et LESNIC, D. (2007). Determination of a spacewise dependent heat source. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209:66–80.
- [Kalnay, 2003] KALNAY, E. (2003). *Atmospheric modeling, data assimilation, and predictability*. Cambridge University Press.
- [Kaltenbacher, 2005] KALTENBACHER, B. (2005). Parameter identification in partial differential equations.
- [Karatasou *et al.*, 2006] KARATASOU, S., SANTAMOURIS, M. et GEROS, V. (2006). Modeling and predicting building’s energy use with artificial neural networks : Methods and results. 38:949–958.
- [Kern, 2002] KERN, M. (2002). Problèmes inverses.
- [Keung et Zou, 1998a] KEUNG, Y. L. et ZOU, J. (1998a). An efficient linear solver for nonlinear parameter identification problems. *Scientific Computing*, 22:1511–1526.
- [Keung et Zou, 1998b] KEUNG, Y. L. et ZOU, J. (1998b). Numerical identifications of parameters in parabolic systems. *Inverse Problems*, 14:83–100.
- [Keung et Zou, 1998c] KEUNG, Y. L. et ZOU, J. (1998c). Numerical identifications of parameters in parabolic systems. *Inverse Problems*, 14:83–100.
- [Khachfe et Jarny, 2001] KHACHFE, R. A. et JARNY, Y. (2001). Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow - numerical and experimental study. *Heat and Mass Transfer*, 44:1309–1322.
- [Kilmer et O’Leary, 2001] KILMER, M. E. et O’LEARY, D. P. (2001). Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 22(4):1204–1221.
- [Kim *et al.*, 2003] KIM, S., CHUNG, B.-J., CHAN KIM, M. et YOUN KIM, K. (2003). Inverse estimation if temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity per unit volume with the direct integration approach. 44:521–535.

- [Kim *et al.*, 2004] KIM, S., JIN LEE, K., JOO KO, Y., CHAN KIM, M. et YOUN KIM, K. (2004). Estimation of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity per unit volume with a simple integral approach. 31(7):981–990.
- [Klein *et al.*, 1975] KLEIN, S. A., DUFFIE, J. A. et BECKMAN, W. A. (1975). TRNSYS a transient system simulation program, user’s manual. Rapport technique, Solar Energy Laboratory University of Wisconsin, Madison.
- [Kokkotas *et al.*, 2001] KOKKOTAS, K. D., APOSTOLATOS, T. A. et ANDERSSON, N. (2001). The inverse problem for pulsating neutron stars : A fingerprint analysis for the supranuclear equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 320:307–315.
- [Kuate *et al.*, 2012] KUATE, R., NASSIOPOULOS, A. et BOURQUIN, F. (2012). A vectorial descent stepsize for parameter identification of a coupled parabolic PDE-ODE. *Inverse Problems in Science and Engineering*.
- [Kügler, 2003] KÜGLER, P. (2003). Identification of a temperature dependent heat conductivity from single boundary measurements. *Numerical Analysis*, 41(4):1543–1563.
- [Kunisch, 1988] KUNISCH, K. (1988). A review of some recent results on the output least squares formulation of parameter estimation problems. *Automatica*, 24(4):531–539.
- [Lam et Hui, 1996] LAM, J. C. et HUI, S. C. M. (1996). Sensitivity analysis of energy performance of office buidings. *Building and Environment*, 31(1):27–39.
- [Lamm, 1987] LAMM, P. K. (1987). Estimation of discontinuous coefficients in parabolic systems : applications to reservoir simulation. *Journal on Control and Optimization*, 25(1):18–37.
- [Larbi Youcef *et al.*, 2008] LARBI YUCEF, M. H. A., MAZIOUD, A., BREMOND, P., IBOS, L., CANDAU, Y., PIRO, M. et FILLOUX, A. (2008). A non destructive method for diagnosis of insulated building walls using infrared thermography in real situation. *In Thermosense XXX, Proceedings of SPIE*.
- [Lawson et Hanson, 1987] LAWSON, C. L. et HANSON, R. J. (1987). *Solving least squares problems*. SIAM Classics in Applied Mathematics.
- [Le, 1992] LE, X. (1992). *Implémentation d’un modèle d’acteur, Application au traitement de données partielles en audit thermique du bâtiment*. Thèse de doctorat, ENPC - École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Lebedev *et al.*, 2006] LEBEDEV, O., KIRZHANOV, D., AVRAMENKO, V. et BUDADIN, O. (2006). Thermal testing of building envelopes. *In Thermosense XXVIII, Proc. of SPIE*, volume 6205.
- [Leblond, 2013] LEBLOND, J. (2013). Identifiability properties for inverse problems in medical engineering with observability and optimization issues. Rapport technique, INRIA.
- [Lee et Diwekar, 2012] LEE, A. J. et DIWEKAR, U. M. (2012). Optimal sensor placement in integrated gasification combined cycle power systems. *Applied Energy*, 99:255–264.
- [Lee, 2014] LEE, J. (2014). Instrumentation des bâtiments et diagnostic des performances énergétiques. Rapport technique, École des Mines de Nantes.
- [Levenberg, 1944] LEVENBERG, K. (1944). A method for the solution of certain problems in least squares. *Applied Mathematics*, 2:164–168.
- [Li, 1999] LI, H. Y. (1999). Estimation of thermal properties in combined conduction and radiation. *Heat and Mass Transfer*, 42:565–572.
- [Likens et Bormann, 1974] LIKENS, G. E. et BORMANN, F. H. (1974). Acid rain : A serious regional environmental problem. *Science*, 184(4142):1176–1179.
- [Limam *et al.*, 2013] LIMAM, K., BOUACHE, T. et CABLE, A. (2013). Identification du débit d’infiltration d’un bâtiment : Expérimentation et support numérique. *In CIGOS*.

- 
- [Linz, 1984] LINZ, P. (1984). Uncertainty in the solution of linear operator equations. *BIT Numerical Mathematics*, 24:92–101.
- [Lions, 1968] LIONS, J.-L. (1968). *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- [Lions, 1971] LIONS, J. L. (1971). *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag.
- [Lions, 1973] LIONS, J.-L. (1973). *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*. Springer-Verlag.
- [Liu, 2011] LIU, F.-B. (2011). A hybrid method for the inverse heat transfer of estimating fluid thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Thermal Sciences*, 50:718–724.
- [Ljung, 1987] LJUNG, L. (1987). *System identification. Theory for the user*. PTR Prentice Hall.
- [Lods, 1992] LODS, V. (1992). *Gradient discret et gradient continu discrétisé en contrôle optimal à paramètres distribués*. Thèse de doctorat, Université de Nice.
- [Luce et Perez, 1999] LUCE, R. et PEREZ, S. (1999). Parameter identification for an elliptic partial differential equation with distributed noisy data. *Inverse Problems*, 15:291–307.
- [Lucquin, 2004] LUCQUIN, B. (2004). *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Ellipses.
- [Luo et al., 2011] LUO, C., MOGHTADERI, B., HANDS, S. et PAGE, A. (2011). Determining the thermal capacitance, conductivity and the convective heat transfer coefficient of a brick wall by annually monitored temperatures and total heat fluxes. 43:379–385.
- [Ma et al., 2012] MA, Y.-J., FU, C.-L. et ZHANG, Y.-X. (2012). Identification of an unknown source depending on both time and space variables by a variational method. *Applied Mathematical Modelling*, 36(10):5080–5090.
- [Macdonald et Clarke, 2007] MACDONALD, I. et CLARKE, J. (2007). Applying uncertainty considerations to energy conservation equations. *Energy and Buildings*, 39:1019–1026.
- [Macdonald, 2002] MACDONALD, I. A. (2002). *Quantifying the effect of uncertainty in building simulation*. Thèse de doctorat, University of Strathclyde, UK.
- [Macdonald et al., 1999] MACDONALD, I. A., CLARKE, J. A. et STRACHAN, P. A. (1999). Assessing uncertainty in buiding simulation. *In IBPSA Conference*.
- [Madsen et Holst, 1995] MADSEN, H. et HOLST, J. (1995). Estimation of continuous-time models for the heat dynamics of a building. *Energy and Buildings*, 22:67–79.
- [Madsen et al., 2004] MADSEN, K., NIELSEN, H. B. et TINGLEFF, O. (2004). Methods for non-linear least squares problems. Rapport technique, Technical University of Denmark.
- [Maierhofer et al., 2006] MAIERHOFER, C., ARNDT, R., RÖLLIG, M., RIECK, C., WALTHER, A., SCHEEL, H. et HILLEMEIER, B. (2006). Application of impulse-thermography for non-destructive assessment of concrete structures. *Journal of Cement and Concrete Composite*, 401:28–393.
- [Maillet et al., 2000] MAILLET, D., ANDRÉ, S., BATSALE, J. C., DEGIOVANNI, A. et MOYNE, C. (2000). *Thermal Quadrupoles : Solving the heat equation through integral transforms*. Wiley.
- [Malanowski, 2002] MALANOWSKI, K. (2002). Sensitivity analysis for parametric optimal control of semilinear parabolic equations. *Journal of convex analysis*, 9(2):543–561.
- [Maldague, 2001] MALDAGUE, X. (2001). *Theory and practice of infrared technology for non-destructive testing*. Wiley and Sons.

- [Manjunath, 2007] MANJUNATH, R. (2007). Review of nondestructive evaluation techniques for FRP composite structural components. Rapport technique, Department of Civil and Environmental Engineering Morgantown, West Virginia, US.
- [Marquardt, 1963] MARQUARDT, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441.
- [Meadows *et al.*, 1972] MEADOWS, D. H., RANDERS, J., MEADOWS, D. et BEHRENS, W. W. (1972). *The limits to growth*. Universe Books.
- [MEDDE, 2011] MEDDE (2011). Règlementation thermique 2012. Rapport technique, France : Ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie.
- [MEDDE, 2014] MEDDE (2014). Chiffres clés de l'énergie. Rapport technique, France : Ministère de l'Écologie, du Développement durable et de l'Énergie.
- [Mejri *et al.*, 2011] MEJRI, O., PALOMO DEL BARRIO, E. et GHRAB-MORCOS, N. (2011). Energy performance assessment of occupied buildings using model identification techniques. *Energy and Buildings*, 43:285–299.
- [Menezes *et al.*, 2012] MENEZES, A. C., CRIPPS, A., BOUCHLAGHEM, D. et BUSWELL, R. (2012). Predicted vs actual energy performance of non-domestic buildings. Using post-occupancy evaluation data to reduce the performance gap. *Applied Energy*, 97:355–364.
- [Météo France, 2005] MÉTÉO FRANCE (2005). Fiche méthode des degrés jours. Rapport technique, Météo France.
- [Moireau, 2008] MOIREAU, P. (2008). *Assimilation de données par filtrage pour les systèmes hyperboliques du second ordre. Application à la mécanique cardiaque*. Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- [Moore, 1920] MOORE, E. H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the american mathematical society*, 26:385–396.
- [Mora, 2003] MORA, L. (2003). *Prédiction des performances thermo-aérauliques des bâtiments par association de modèles de différents niveaux de finesse au sein d'un environnement orienté objet*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle.
- [Moré, 1977] MORÉ, J. J. (1977). The Levenberg-Marquardt algorithm. Implementation and theory. In *Conference on Numerical Analysis*.
- [Morozov, 1993] MOROZOV, V. A. (1993). *Regularization methods for ill-posed problems*. CRC Press.
- [Mumford et Shah, 1989] MUMFORD, D. et SHAH, J. (1989). Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5):577–685.
- [Murio, 1988] MURIO, D. A. (1988). Parameter selection by discrete mollification and the numerical solution of the inverse heat conduction problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 22:25–34.
- [Musy *et al.*, 2001] MUSY, M., WURTZ, E., WINKELMANN, F. et ALLARD, F. (2001). Generation of a zonal model to simulate natural convection in a room with a radiative/convective heater. *Building and Environment*, 36:589–596.
- [Na et Kallivokas, 2008] NA, S.-W. et KALLIVOKAS, L. F. (2008). On the inverse problem of soil profile reconstruction. A comparison of time-domain approaches. *Computational Mechanics*, 42:921–942.
- [Nakamura et Chiba, 1999] NAKAMURA, T. et CHIBA, T. (1999). Determining the equation of state of the expanding Univers : Inverse problem in cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 306:696–700.

- [Narayanan et Zabaras, 2004] NARAYANAN, V. A. B. et ZABARAS, N. (2004). Stochastic inverse heat conduction using a spectral approach. *International Journal for Numerical Methods in engineering*, 60:1569–1593.
- [Nassiopoulos, 2008] NASSIOPOULOS, A. (2008). *Identification rapide de la température dans les structures du génie civil*. Thèse de doctorat, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Nassiopoulos et al., 2014a] NASSIOPOULOS, A., AZEROU, B., CAILLET, J., LENARD, J.-D. et MAGNET, D. (2014a). Garantie de performance énergétique, définition du dispositif de M et V. Rapport technique, Fondation Bâtiment Énergie.
- [Nassiopoulos et Bourquin, 2010] NASSIOPOULOS, A. et BOURQUIN, F. (2010). Fast three-dimensional temperature reconstruction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:3169–3178.
- [Nassiopoulos et Bourquin, 2013] NASSIOPOULOS, A. et BOURQUIN, F. (2013). On-site building walls characterization. *Numerical Heat Transfer*, 63:1–22.
- [Nassiopoulos et al., 2014b] NASSIOPOULOS, A., BROUNS, J., ARTIGES, N., SMAIL, M.-K. et AZEROU, B. (2014b). ReTrofiT : A software to solve optimization and identification problems applied to building energy management. *In EWSHM*.
- [Nassiopoulos et al., 2014c] NASSIOPOULOS, A., KUATE, R. et BOURQUIN, F. (2014c). Calibrating of building thermal models based on short time measurements. *Energy and Buildings*.
- [National Research Council, 1979] NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1979). Carbon dioxide and climate : A scientific assessment. Rapport technique, US.
- [Nielsen, 1999] NIELSEN, H. B. (1999). Damping parameter in Marquardt’s method. Rapport technique, Technical University of Denmark.
- [Nilssen et Tai, 2005] NILSSEN, T. K. et TAI, X. C. (2005). Parameter estimation with the augmented lagrangian method for a parabolic equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 124(2):435–453.
- [Nodet, 2008] NODET, M. (2008). Optimal control of the primitive equations of the ocean with lagrangian observations. Rapport technique, INRIA.
- [Norford et al., 1994] NORFORD, L. K., SOCOLOW, R. H., HSIEH, E. S. et SPADARO, G. V. (1994). Two-to-one discrepancy between measured and predicted performance of a low-energy office building. Insights from a reconciliation based on the DOE-2 model. *Energy and Buildings*, 21:121–131.
- [Norton, 1999] NORTON, S. J. (1999). Iterative inverse scattering algorithms : Methods of computing Fréchet derivatives. *Acoustical Society of America*, 106(5):2653–2660.
- [Olofsson et Andersson, 2002] OLOFSSON, T. et ANDERSSON, S. (2002). Overall heat loss coefficient and domestic energy gain factor for single-family buildings. *Building and Environment*, 37:1017–1026.
- [Olofsson et Mahlia, 2012] OLOFSSON, T. et MAHLIA, T. (2012). Modeling and simulation of the energy use in an occupied residential building in cold climate. *Applied Energy*, 91:432–438.
- [Osher et al., 2005] OSHER, S., BURGER, M., GOLDFARB, D., XU, J. et YIN, W. (2005). An iterative regularization method for total variation-based image restoration. *Multiscale modeling and simulation*, 4(2):460–489.
- [O’Sullivan et al., 2004] O’SULLIVAN, D. T. J., KEANE, M. M., KELLIHER, D. et HITCHCOCK, R. J. (2004). Improving building operation by tracking performance metrics throughout the building lifecycle (BLC). 36(11):1075–1090.

- [Özisik, 1993] ÖZISIK, M. N. (1993). *Heat conduction*. John Wiley and sons.
- [Özisik et Orlande, 2000] ÖZISIK, M. N. et ORLANDE, H. R. B. (2000). *Inverse heat transfer*. Taylor and Francis.
- [Palomo Del Barrio, 2003] PALOMO DEL BARRIO, E. (2003). Multidimensional inverse heat conduction problems solution via Lagrange theory and model size reduction techniques. *Inverse Problems in Engineering*, 11(6):515–539.
- [Palomo Del Barrio *et al.*, 2000] PALOMO DEL BARRIO, E., LEFEBVRE, G., BEHAR, P. et BAILLY, N. (2000). Using model size reduction techniques for thermal control applications in buildings. *Energy and Buildings*, 33:1–14.
- [Pan *et al.*, 2007] PAN, Y., HUANG, Z. et WU, G. (2007). Calibrated building energy simulation and its application in a high-rise commercial building in Shanghai. *Energy and Buildings*, 39:651–657.
- [Papadopoulos *et al.*, 2011] PAPADOPOULOS, D., HERTY, M., RATH, V. et BEHR, M. (2011). Identification of uncertainties in the shape of geophysical objects with level sets and the adjoint method. *Computational Geosciences*, 15:737–753.
- [Park et Jung, 2001] PARK, H. M. et JUNG, W. S. (2001). The Karhunen-Loève Galerkin method for the inverse natural convection problems. *Heat and Mass Transfer*, 44:155–167.
- [Park et Lee, 1998] PARK, H. M. et LEE, J. H. (1998). A method of solving inverse convection problems by means of mode reduction. *Chemical Engineering Science*, 53(9):1731–1744.
- [PBD, 2013] PBD (2013). Grand dossier : DPE et audit énergétique. Rapport technique, Plan du Bâtiment Durable, Ministère de l’Écologie, du Développement durable et de l’Énergie.
- [PCE, 2002] PCE (2002). Directive sur la performance énergétique des bâtiments. Rapport technique, Journal officiel des Communautés européennes, Parlement et Conseil européens.
- [Pedrini *et al.*, 2002] PEDRINI, A., WESTPHAL, F. S. et LAMBERTS, R. (2002). A methodology for building energy modelling and calibration in warm climates. *Building and Environment*, 37:903–912.
- [Penrose, 1955] PENROSE, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51:406–413.
- [Pérez-Lombard *et al.*, 2008] PÉREZ-LOMBARD, L., ORTIZ, J. et POUT, C. (2008). A review on buildings energy consumption information. *Energy and Buildings*, 40:394–398.
- [Peuportier, 2013] PEUPORTIER, B. (2013). *Livre blanc sur les recherches en énergétique des bâtiments*. Presses des MINES.
- [Piette *et al.*, 2001] PIETTE, M. A., KINNEY, S. K. et HAVES, P. (2001). Analysis of an information monitoring and diagnostic system to improve building operations. *Energy and Buildings*, 33:783–791.
- [Pires et Miranda, 2003] PIRES, C. et MIRANDA, P. M. A. (2003). Sensitivity of the adjoint method in the inversion of tsunami source parameters. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 3:341–351.
- [Plessix, 2006] PLESSIX, R.-E. (2006). A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167:495–503.
- [PREBAT, 2008] PREBAT (2008). Programme de travail. Rapport technique, Gouvernement français.
- [Prek, 2006] PREK, M. (2006). Thermodynamical analysis of human thermal comfort. *Energy*, 31:732–743.

- [Prud'homme et Jasmin, 2003] PRUD'HOMME, M. et JASMIN, S. (2003). Determination of a heat source in porous medium with convective mass diffusion by an inverse method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:2065–2075.
- [Rabl, 1988] RABL, A. (1988). Parameter estimation in buidings. Methods for dynamic analysis of measured energy use. *Solar Energy Engineering*, 110:52–56.
- [Raftery *et al.*, 2011] RAFTERY, P., KEANE, M. et O'DONNELL, J. (2011). Calibrating whole building energy models : An evidence-based methodology. *Energy and Buildings*, 43:2356–2364.
- [Rajic, 2002] RAJIC, N. (2002). Principal component thermography for flaw contrast enhancement and flaw depth characterization in composite structures. *Composite Structures*, 58:512–528.
- [Räsänen *et al.*, 1995] RÄSÄNEN, M., RUUSUNEN, J. et HÄMÄLÄINEN, R. P. (1995). Customer level analysis of dynamic pricing experiments using consumption-pattern models. *Energy*, 20(9):897–906.
- [Raviart et Thomas, 1998] RAVIART, P.-A. et THOMAS, J.-M. (1998). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- [Reddy, 2005] REDDY, T. A. (2005). Literature review on calibration of building energy simulation programs : Uses, problems, procedures, uncertainty, and tools. *ASHRAE Transactions*, 112:226–240.
- [Ren et Stewart, 2003] REN, Z. et STEWART, J. (2003). Simulating air flow and temperature distribution inside buildings using a modified version of comis with sub-zonal divisions. *Energy and Buildings*, 35:257–271.
- [RF, 2008] RF (2008). Arrêté portant approbation de diverses méthodes de calcul pour le diagnostic de performance énergétique en France métropolitaine. Rapport technique, Ministère de l'emploi, de la cohésion sociale et du logement.
- [Rhazi et Naar, 2005] RHAZI, J. et NAAR, S. (2005). Aptitude de la thermographie infrarouge à détecter les fissures et nids d'abeille dans le béton. Rapport technique, Université de Sherbrooke, Canada.
- [Ribarić *et al.*, 2009] RIBARIĆ, S., MARČETIĆ, D. et VERDRINA, D. S. (2009). A knowledge-based system for the non-destructive diagnostics of façade isolation using the information fusion of visual and IR images. 36:3812–3823.
- [Riederer *et al.*, 2002] RIEDERER, P., MARCHIO, D., VISIER, J., HUSAUNDEE, A. et LAHRECH, R. (2002). Room thermal modelling adapted to the test of HVAC control systems. *Building and Environment*, 37:777–790.
- [Robert-Nicoud *et al.*, 2005] ROBERT-NICOUD, Y., RAPHAEL, B. et SMITH, I. F. C. (2005). System identification through model composition and stochastic search. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 19(3):239–247.
- [Rodriguez et Theis, 2005] RODRIGUEZ, G. et THEIS, D. (2005). An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the L-curve. *Rendiconti di Matematica*, 25:69–84.
- [Roth, 2010] ROTH, S. (2010). Green Building XML (gbXML).
- [Roulet *et al.*, 1999] ROULET, C.-A., FURBRINGER, J.-M. et CRETTON, P. (1999). The influence of the user on the results of multizone air flow simulations with COMIS. *Energy and Buildings*, 30:73–86.
- [Rudin *et al.*, 1992] RUDIN, L. I., OSHER, S. et FATEMI, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268.



- [Salsbury et Diamond, 2005] SALSURY, T. et DIAMOND, R. (2005). Performance validation and energy analysis of HVAC systems using simulation. 32(1):5–17.
- [Salsbury, 2007] SALSURY, T. I. (2007). Continuous-time model identification for closed loop control performance assessment. *Control Engineering Practice*, 15(1):109 – 121.
- [Samarskii et Vabishchevich, 2007] SAMARSKII, A. A. et VABISHCHEVICH, P. N. (2007). *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*. Walter de Gruyter.
- [Santamouris, 2005] SANTAMOURIS, M. (2005). *Energy performance of residential buildings : A practical guide for energy rating and efficiency*. BEST (Buildings, Energy and Solar Technology) Series. James & James / Earthscan.
- [Santin et al., 2009] SANTIN, O. G., ITARD, L. et VISSCHER, H. (2009). The effect of occupancy and building characteristics on energy use for space and water heating in dutch residential stock. *Energy and Buildings*, 41:1223–1232.
- [Santos, 1996] SANTOS, R. J. (1996). Equivalence of regularization and truncated iteration for general ill-posed problems. *Linear Algebra and its Applications*, 236:25–33.
- [Sawaf et Özisik, 1995] SAWAF, B. et ÖZISIK, M. N. (1995). Determining the constant thermal conductivities of orthotropic materials by inverse analysis. 22(2):201–211.
- [Schock, 1986] SCHOCK, E. (1986). What are the proper condition numbers of discretized ill-posed problems? *Linear Algebra and its Applications*, 81:129–136.
- [Sei et Symes, 1995] SEI, A. et SYMES, W. (1995). A note on consistency and adjointness for numerical schemes. Rapport technique, California Institute of Technology, US.
- [Sempey, 2007] SEMPEY, A. (2007). *Prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des espaces habitables*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle.
- [Sjögren et al., 2007] SJÖGREN, J.-U., ANDERSSON, S. et OLOFSSON, T. (2007). An approach to evaluate the energy performance of buildings based on incomplete monthly data. *Energy and Buildings*, 39:945–953.
- [Smith-Schneider et al., 1995] SMITH-SCHNEIDER, P., ROUX, J.-J. et BRAU, J. (1995). Strategies for solving the air flow-thermal problem in multiroom buildings. *Building and Environment*, 30:277–286.
- [Spitz, 2012] SPITZ, C. (2012). *Analyse de la fiabilité des outils de simulation et des incertitudes de métrologie appliquée à l’efficacité énergétique des bâtiments*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- [Subbarao et al., 1988] SUBBARAO, K., BURCH, J. D., HANCOCK, C. E., LEKOV, A. et BALCOMB, J. D. (1988). Short-term energy monitoring (STEM) : application of the PSTAR method to a residence in Fredericksbourg, Virginia. Rapport technique, Solar Energy Research Institute.
- [Taillade et al., 2011] TAILLADE, F., QUIERTANT, M., BENZARTI, K. et AUBAGNAC, C. (2011). Shaerography and pulsed stimulated infrared thermography applied to a nondestructive evaluation of FRP strengthening system bonded on concrete structures. *Construction and Building Materials*, 25:568–574.
- [Taillade et al., 2012] TAILLADE, F., QUIERTANT, M., BENZARTI, K., DUMOULIN, J. et AUBAGNAC, C. (2012). Nondestructive evaluation of FRP strengthening systems bonded on RC structures using pulsed stimulated infrared thermography. *Infrared Thermography*, 9:193–208.
- [Taine et al., 2008] TAINE, J., IACONA, E. et PETIT, J.-P. (2008). *Transferts thermiques*. Dunod.
- [Tang et Podolony, 1998] TANG, B. et PODOLONY, W. (1998). A successful beginning for fiber reinforced polymer (FRP) composite materials in bridge applications. In *FHWA Proceedings, International Conference on Corrosion and Rehabilitation of Reinforced Concrete Structures*.

- 
- [Tarantola, 2005] TARANTOLA, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- [Tarantola et Valette, 1982a] TARANTOLA, A. et VALETTE, B. (1982a). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Geophysics and Space Physics*, 20(2):219–232.
- [Tarantola et Valette, 1982b] TARANTOLA, A. et VALETTE, B. (1982b). Inverse problems = Quest for information. *Journal of Geophysics*, 50:159–170.
- [Tber et Talibi, 2007] TBER, M. H. et TALIBI, M. E. A. (2007). A finite element method for hydraulic conductivity identification in a seawater intrusion problem. *Computers and Geosciences*, 33:860–874.
- [Tikhonov, 1963] TIKHONOV, A. N. (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Doklady Mathematics*, 4:501–504.
- [Tikhonov et Arsenin, 1977] TIKHONOV, A. N. et ARSENIN, V. Y. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Winston.
- [Tsilingiris, 2002] TSILINGIRIS, P. (2002). On the transient thermal behaviour of structural walls - the combined effect of time varying solar radiation and ambient temperature. *Renewable Energy*, 27:319–336.
- [Valluzzi et al., 2009] VALLUZZI, M. R., GRINZATO, E., PELLEGRINO, C. et MODENA, C. (2009). IR thermography for interface of FRP laminates externaly boned on RC beam. *Materials and Structures*, 42:25–34.
- [Vogel, 2002] VOGEL, C. R. (2002). *Computational methods for inverse problems*. SIAM - Frontiers in Applied Mathematics Series.
- [Vogel et Oman, 1996] VOGEL, C. R. et OMAN, M. E. (1996). Iterative methods for total variation denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1):227–238.
- [Waeytens et al., 2013] WAEYTENS, J., CHATELLIER, P. et BOURQUIN, F. (2013). Sensitivity of inverse advection-diffusion-reaction to sensor and control : A low computational cost tool. *Computers and Mathematics with Applications*, 66:1082–1103.
- [Westergen et al., 1999] WESTERGEN, K.-E., HÖGBERG, H. et NORLEÉN, U. (1999). Monitoring energy consumption in single-family houses. 29:247–257.
- [Wetter, 2006] WETTER, M. (2006). Multizone building model for thermal building simulation in Modelica. In *The Modelica Association*.
- [Wouwer et al., 2000] WOUWER, A. V., POINT, N., PORTEMAN, S. et REMY, M. (2000). An approach to the selection of optimal sensor locations in distributed parameter systems. *Process Control*, 10:291–300.
- [Wu et Sun, 2012] WU, S. et SUN, J.-Q. (2012). A physics-based linear parametric model of room temperature in office buildings. *Building and Environment*, 50:1–9.
- [Wurtz et al., 2006] WURTZ, E., MORA, L. et INARD, C. (2006). An equation-based simulation environment to investigate fast building simulation. *Building and Environment*, 41:1571–1583.
- [Wurtz et al., 1999] WURTZ, E., NATAF, J.-M. et WINKELMANN, F. (1999). Two- and three-dimensional naturel and mixed convection simulation using modular zonal models in buildings. *Journal of Heat and Mass Transfer*, 42:923–940.
- [Yang, 1999] YANG, C.-Y. (1999). Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. 23:469–478.
- [Zhai et al., 2002] ZHAI, Z., CHEN, Q., HAVES, P. et KLEMS, J. H. (2002). On approaches to couple energy simulation and computational fluid dynamics programs. *Building and Environment*, 37:857–864.

- [Zhai et Chen, 2003] ZHAI, Z. et CHEN, Q. Y. (2003). Solution characters of iterative coupling between energy simulation and CFD programs. *Energy and Buildings*, 35:493–505.
- [Zhao et Magoulès, 2012] ZHAO, H.-X. et MAGOULÈS, F. (2012). A review on the prediction of building energy consumption. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16:3586–3592.
- [Zhu, 2006] ZHU, Y. (2006). Applying computer-based simulation to energy auditing : A case study. *Energy and Buildings*, 38:421–428.
- [Zuazua, 2009] ZUAZUA, E. (2009). Controllability of partial differential equations.



# THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Présentée par **Jordan BROUNS**

---

## Titre

Développement d'outils numériques pour l'audit énergétique des bâtiments

## Résumé

Les audits énergétiques actuels ne parviennent pas à saisir les propriétés thermiques des bâtiments existants, qui représentent près de 45% de la facture énergétique nationale. Nous proposons une méthode innovante d'audit fondée sur la théorie des problèmes inverses qui permet de remonter aux paramètres thermiques les plus influents du bâtiment complet. L'utilisation d'un modèle formulé avec des EDP donne accès aux outils du contrôle optimal, comme l'état adjoint. La méthode utilise des mesures de l'état thermique (températures des pièces et des surfaces de certaines parois et des émetteurs) et résout un problème d'optimisation non linéaire pour calibrer ce modèle. Nous approfondissons la méthode par le développement d'outils spécifiques. Le premier permet de discriminer deux sources thermiques à dynamiques différentes, faisant la part des choses entre renouvellement d'air et gains internes. L'autre identifie des défauts internes à un domaine 3D pour détecter les défauts d'exécution du bâti.

## Mots-clés

Modélisation thermique du bâtiment / audits énergétiques / problèmes inverses / optimisation / identification de paramètres

---

## Title

Development of numerical tools for building energy audit

## Abstract

Current building energy audits often fail to understand the thermal properties of existing buildings, which account for nearly 45% of the national energy bill. We propose an innovative energy audit method based upon the inverse problem theory that allows the knowledge of the most influential intrinsic thermal parameters of the complete building. The use of a thermal model composed by PDE provides us a direct access to the tools coming from the optimal control theory, like the adjoint state. The method uses thermal state measurements (room and heating device temperatures, and wall surface temperatures) and solves a nonlinear optimization problem to calibrate this model. We improve the method by developing specific tools. The first one allows the discrimination of two different thermal sources, staking a balance between air mass exchange and internal gains. The second one identifies internal defects in a 3D domain in order to detect local built execution defects.

## Keywords

Building thermal modeling / energy audits / inverse problems / optimization / parameters identification