



**HAL**  
open science

# Inversion statique de fibres : de la géométrie de courbes 3D à l'équilibre d'une assemblée de tiges mécaniques en contact frottant

Alexandre Derouet-Jourdan

► **To cite this version:**

Alexandre Derouet-Jourdan. Inversion statique de fibres : de la géométrie de courbes 3D à l'équilibre d'une assemblée de tiges mécaniques en contact frottant. Autre. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM043 . tel-01135185

**HAL Id: tel-01135185**

**<https://theses.hal.science/tel-01135185>**

Submitted on 24 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Informatique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Alexandre Derouet-Jourdan**

Thèse dirigée par **Joëlle Thollot**  
et co-encadrée par **Florence Bertails-Descoubes**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**  
et de l'école doctorale **EDMSTII**

## **Inversion statique de fibres : de la géométrie de courbes 3d à l'équilibre d'une assemblée de tiges mécaniques en contact frottant**

Thèse soutenue publiquement le **7 novembre 2013**,  
devant le jury composé de :

**Jean-Claude Léon**

Professeur, Grenoble INP, Président

**Bruno Lévy**

Directeur de recherche, Inria Nancy, Rapporteur

**Doug James**

Associate Professor, Cornell University, Rapporteur

**Roberto Santoprete**

Chercheur, L'Oréal Recherche, Examineur

**Joëlle Thollot**

Professeur, Grenoble INP, Directrice de thèse

**Florence Bertails-Descoubes**

Chargée de recherche, Inria Rhône-Alpes, Co-Encadrante de thèse





## REMERCIEMENTS

---

À tous ceux qui m'ont soutenu, à tous mes professeurs qui m'ont conduit jusqu'ici, et en particulier mes professeurs de MP, MM. Louboutin et Bouveron qui m'ont permis d'atteindre l'école que je voulais, à mes deux directrices de thèse, Joëlle et Florence, mes modèles qui ont toujours été présentes et auprès desquelles j'ai tant appris, à mes co-bureaux Gilles, Romain et Sofia, qui m'ont supporté toutes ces années, à BiPoP et Maverick, ces deux équipes qui m'ont accueilli et ont subi toutes les répétitions de chacune de mes présentations, à ma famille aussi, et à ma sœur en particulier, parce que c'est eux et à Romain une seconde fois, parce que c'est mon ami, que je lui dois tellement et que la phrase « Romain, je peux te poser une question ? » est très certainement celle que j'ai le plus prononcée pendant ma thèse, merci.

Merci à tous, du fond du cœur.



## RÉSUMÉ

---

Les structures fibreuses, formées d'une assemblée d'objets longilignes flexibles, sont très présentes dans notre environnement quotidien, notamment dans des systèmes biologiques tels que les végétaux ou les cheveux. Ces dernières années ont vu se développer diverses techniques de numérisation de la géométrie de fibres, soit par synthèse manuelle, soit par capture automatique. Parallèlement, de nombreux modèles physiques de simulation dynamique de fibres enchevêtrées ont été créés pour animer automatiquement ces objets complexes.

Le but de cette thèse est d'établir un pont entre ces deux domaines : la géométrie de fibres d'une part, leur simulation dynamique d'autre part. Plus précisément, nous nous intéressons à la mise en correspondance d'une géométrie de fibres donnée en entrée, représentant un système mécanique à l'équilibre stable sous l'action de forces extérieures (gravité, forces de contact), avec les paramètres d'un modèle physique de fibres en contact. Notre objectif est de calculer les paramètres physiques des fibres de manière à garantir l'état d'équilibre de la géométrie donnée. Nous proposons de résoudre ce problème en choisissant comme modèle physique de fibres une assemblée de super-hélices en contact frottant.

Nous proposons deux contributions principales. La première répond au besoin de convertir la géométrie d'une fibre numérisée quelconque, représentée comme une courbe 3d, en la géométrie du modèle des super-hélices, à savoir une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux. Nous proposons pour cela l'algorithme des tangentes flottantes 3d, qui consiste, en s'appuyant sur la condition de co-hélicité récemment énoncée par Ghosh, à interpoler  $N+1$  tangentes réparties sur la courbe d'origine par  $N$  morceaux d'hélice, tout en minimisant l'écart en position. Par ailleurs nous complétons la démonstration partielle de Ghosh pour prouver la validité de notre algorithme dans le cas général. L'efficacité et la précision de notre méthode sont ensuite mises en évidence sur des jeux de données variés, d'abord synthétiques, créés par une artiste, puis issus de la capture de données réelles telles que des cheveux, des fibres musculaires ou des lignes de champ magnétique stellaire.

Notre seconde contribution est le calcul de la géométrie au repos du modèle physique d'une assemblée de super-hélices, de sorte que la configuration de ce système à l'équilibre sous l'action des forces extérieures corresponde à la géométrie d'entrée. D'abord, nous considérons une fibre isolée soumise à des forces dérivant d'un potentiel, et montrons que le calcul est trivial dans ce cas. Nous proposons alors un critère simple permettant de décider si l'état d'équilibre est stable, et dans le cas contraire, de le stabiliser. Ensuite, nous considérons une assemblée de fibres soumises à des forces de contact frottant, modélisées par la loi non-régulière de Signorini-Coulomb. En considérant le matériau homogène, de masse et de raideur connues, et en nous appuyant sur une estimation de la géométrie au repos, nous construisons un problème d'optimisation quadratique convexe avec contraintes du second ordre. Nous montrons que ce problème inverse peut être résolu efficacement en utilisant un solveur conçu initialement pour le problème dynamique direct. Pour une géométrie d'entrée constituée de quelques milliers de fibres soumises à plusieurs dizaines de milliers de contacts frottants, nous calculons en quelques secondes une approximation plausible de la géométrie au repos des fibres, ainsi que des forces de contact en jeu.

Nous appliquons finalement la combinaison de nos deux contributions à la synthèse automatique de coiffures physiques. Notre méthode permet d'initialiser un moteur physique de cheveux avec la géométrie issue des captures de coiffures réelles les plus récentes, et d'animer ensuite ces coiffures.

## ABSTRACT

---

Fibrous structures, which consist of an assembly of flexible slender objects, are ubiquitous in our environment, notably in biological systems such as plants or hair. Over the past few years, various techniques have been developed for digitalizing fibers, either through manual synthesis or with the help of automatic capture. Concurrently, advanced physics based models for the dynamics of entangled fibers have been introduced in order to animate these complex objects automatically.

The goal of this thesis is to bridge the gap between those two areas : on the one hand, the geometric representation of fibers ; on the other hand, their dynamic simulation. More precisely, given an input fiber geometry assumed to represent a mechanical system in stable equilibrium under external forces (gravity, contact forces), we are interested in the mapping of such a geometry onto the static configuration of a physics-based model for a fiber assembly. Our goal thus amounts to computing the parameters of the fibers that ensure the equilibrium of the given geometry. We propose to solve this inverse problem by modeling a fiber assembly physically as a discrete collection of super-helices subject to frictional contact.

We propose two main contributions. The first one deals with the problem of converting the digitalized geometry of fibers, represented as a space curve, into the geometry of the super-helix model, namely a  $G^1$  piecewise helical curve. For this purpose we introduce the 3d floating tangents algorithm, which relies upon the co-helicity condition recently stated by Ghosh. More precisely, our method consists in interpolating  $N+1$  tangents distributed on the initial curve by  $N$  helices, while minimizing points displacement. Furthermore we complete the partial proof of Ghosh for the co-helicity condition to prove the validity of our algorithm in the general case. The efficiency and accuracy of our method are then demonstrated on various data sets, ranging from synthetic data created by an artist to real data captures such as hair, muscle fibers or lines of the magnetic field of a star.

Our second contribution is the computation of the geometry at rest of a super-helix assembly, so that the equilibrium configuration of this system under external forces matches the input



geometry. First, we consider a single fiber subject to forces deriving from a potential, and show that the computation is trivial in this case. We propose a simple criterion for stating whether the equilibrium is stable, and if not, we show how to stabilize it. Next, we consider a fiber assembly subject to dry frictional contact (Signorini-Coulomb law). Considering the material as homogeneous, with known mass and stiffness, and relying on an estimate of the geometry at rest, we build a well-posed convex quadratic optimization problem with second order cone constraints. For an input geometry consisting of a few thousands of fibers subject to tens of thousands frictional contacts, we compute within a few seconds a plausible approximation of both the geometry of the fibers at rest and the contact forces at play.

We finally apply the combination of our two contributions to the automatic synthesis of natural hairstyles. Our method is used to initialize a physics hair engine with the hair geometry taken from the latest captures of real hairstyles, which can be subsequently animated physically.

## TABLE DES MATIÈRES

---

1	INTRODUCTION	11
1.1	Numérisation de fibres	11
1.2	Comment animer une assemblée de fibres numérisée?	13
1.3	Contributions	16
1.4	Organisation du manuscrit	17
2	MODÈLES PHYSIQUES DE FIBRES	19
2.1	Modèles physiques de fibres	19
2.1.1	Super-hélices	21
2.2	Modèle de contacts	23
2.2.1	Notations et cône de Coulomb	23
2.2.2	Modèle de contact frottant de Signorini-Coulomb	24
2.2.3	Modification de la dynamique des super-hélices	26
I	GÉOMÉTRIE	27
3	APPROXIMATION PAR UNE COURBE $G^1$ EN HÉLICES PAR MORCEAUX	29
3.1	Problème de l'approximation par une courbe $G^1$ en hélices par morceaux	29
3.2	Travaux précédents	30
3.2.1	Méthodes par identification des paramètres	30
3.2.2	Méthodes par optimisation	31
3.2.3	Méthodes par interpolation	34
4	ALGORITHME DES TANGENTES FLOTTANTES	39
4.1	Condition de co-hélicité de Ghosh	39
4.2	Algorithme des tangentes flottantes	41
4.3	Découpage de la spline	41
4.4	Relaxation des points	41
4.4.1	Cas de 2 points en 2d	42
4.4.2	Cas de 2 points en 3d	42
4.4.3	Cas de $N + 1$ points en 3d	43
4.5	Interpolation des points et des vecteurs tangents	44
4.6	Résultats	45
4.6.1	Procédure de test	45
4.6.2	Qualité de l'approximation	49

4.6.3	Temps de calcul	50
4.6.4	De plus gros jeux de données	53
4.6.5	Limitations	56
4.7	Conclusion	58
5	DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GHOSH	59
5.0.1	Équation d'une hélice	59
5.1	Démonstration du théorème	61
5.1.1	Analyse	62
5.1.2	Synthèse	65
5.1.3	Étude de H	66
<b>II INVERSION</b>		<b>75</b>
6	CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DES SUPER-HÉLICES	77
6.1	Problème inverse pour les super-hélices	77
6.2	Contributions	79
6.3	Travaux antérieurs	80
6.4	Inversion dans le cas de la gravité	82
6.4.1	Énergie potentielle d'une super-hélice	82
6.4.2	Inversion	82
6.4.3	Problème de la stabilité	83
6.5	Cas des forces de contact frottant	87
6.5.1	Un nouveau problème d'inversion	88
6.5.2	Mise sous forme d'un problème de minimisation	90
6.5.3	Résolution du SOCQP	92
6.5.4	Résultats	94
6.6	Discussion	96
<b>III DE LA NUMÉRISATION À LA SIMULATION</b>		<b>97</b>
7	APPLICATION À DES CHEVELURES	99
7.1	Géométries d'entrées	99
7.2	Des fibres numérisées aux super-hélices	100
7.3	De la géométrie à la simulation	101
7.3.1	Estimation de la géométrie intrinsèque	102
7.3.2	Performance	103
7.4	Résultats	104
7.5	Discussion	106
7.5.1	Limitations	107
7.5.2	Mise en pratique	108
7.5.3	Inversibilité d'autres modèles	109
8	CONCLUSION	113
8.1	Travaux futurs	114

8.1.1	Résultats théoriques	114
8.1.2	Estimation des autres paramètres physiques	115
<b>ANNEXES 117</b>		
A	PROBLÈME LINÉAIRE POUR LA RELAXATION DES POINTS	119
B	GRADIENT ET HESSIENNE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE	123
B.1	Expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'une super-hélice	123
B.2	Gradient de l'énergie potentielle de pesanteur	123
B.3	Hessienne de l'énergie potentielle de pesanteur	124
C	CONTINUITÉ DES POLYHÉLICES	127
D	GÉOMÉTRIE D'UNE SUPER-HÉLICE	129
D.1	Cas d'une hélice unique	129
D.2	Cas des courbes $G^1$ en hélices par morceaux	130
E	NOTIONS DE CÔNE ET DE PROJECTION SUR UN CONVEXE	131
E.1	Cônes	131
E.2	Projection sur un cône	132
E.3	Transformation du SOCQP en problème de complémentarité conique	133
F	DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GHOSH	135
F.1	Préliminaires	135
F.1.1	Repère de Frenet et vecteur de Darboux	135
F.1.2	Équation d'une hélice	137
F.2	Démonstration du théorème	138
F.2.1	Analyse	139
F.2.2	Synthèse	143
F.2.3	Condition équivalente à la co-hélicité	144
F.2.4	Études de H et D	149



## INTRODUCTION

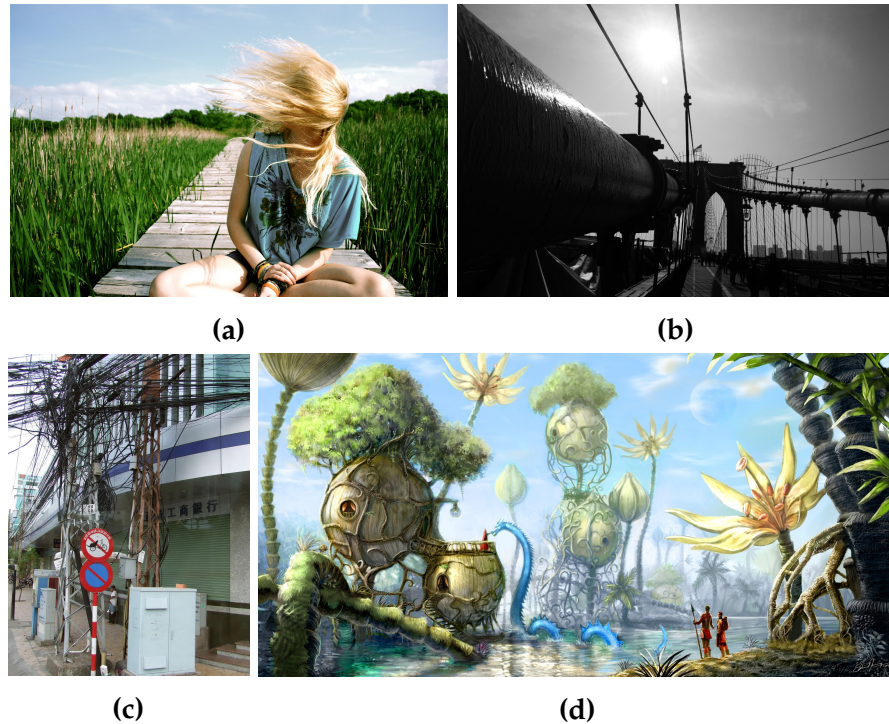
---

Il y a en informatique graphique une réelle quête de réalisme, présentant comme un véritable Graal la création d'images ou d'animations qu'il serait impossible de distinguer du réel. On retrouve cette tendance dans la recherche du photoréalisme en rendu par exemple. Toutefois, cette quête ne saurait s'accomplir sans pouvoir saisir toute la richesse des phénomènes naturels. Dans cette thèse, nous allons nous pencher sur un type d'objets dont la géométrie nous est très familière : les fibres. Essentiellement, ce sont des objets longilignes flexibles dont la section est négligeable devant la longueur. Ce sont des fils en somme, ou des filaments, ou même des tiges. Nous retrouvons ces objets partout dans notre quotidien, que ce soient des tiges de plantes ou les cheveux que nous coiffons chaque jour, voir figure 1. Cette classe d'objets, les fibres, se retrouve aussi à différentes échelles, du plus petit comme les nanotubes au plus grand, comme les câbles de télécommunication sous-marins (voir figure 2). Nous ne sommes bien évidemment pas les premiers à nous intéresser à ces objets. Les cheveux par exemple occupent une place relativement importante dans le monde de l'informatique graphique car ils représentent une part essentielle dans l'apparence d'un personnage. C'est pourquoi nous trouverons de nombreux travaux sur le rendu photoréaliste ou non de cheveux, sur leur animation, qu'elle soit physique ou non, ou encore sur la modélisation et l'acquisition de coiffures.

Dans cette thèse, nous n'allons pas nous intéresser au rendu des fibres. Nous allons plutôt nous pencher sur les deux autres grandes familles de travaux que représentent la modélisation et l'animation.

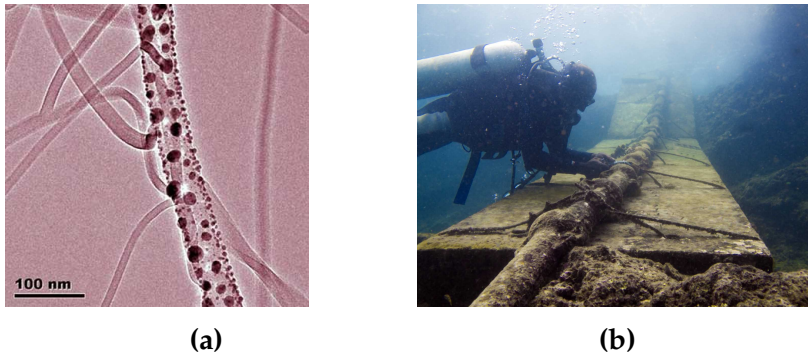
### 1.1 NUMÉRISATION DE FIBRES

Le terme un peu barbare de numérisation de fibres désigne les techniques de création de la géométrie de fibres, c'est-à-dire de la mise à disposition numérique de la représentation de fibres. Ces techniques appartiennent à deux catégories distinctes :



**Figure 1:** Partout où nous regardons, nous pouvons voir des fibres. Elles sont dans le réel, comme en figures (a) où nous apercevons des cheveux ou de longs brins d'herbe, en figure (b) qui montre les câbles du pont de Brooklyn ou encore en figure (c) qui est la photo de câbles électriques attachés à un poteau électrique de Saïgon. Elles sont aussi présentes dans les mondes fantaisistes (il est très difficile d'imaginer un monde sans fibre), comme représenté figure (d). (Crédits : (a) Lora Doerfer, (b) Comrade Roberto, (c) Linda Garrison, (d) David Revoy)

- La synthèse manuelle de fibres (PIUZE, KRY et SIDDIQI, 2011 ; WANG et al., 2009 ; WARD et al., 2007 ; WITHER, BERTAILS et CANI, 2007), qui consiste à modeler des fibres, à la main, par le dessin ou la sculpture virtuelle par exemple. Ces techniques sont destinées essentiellement aux artistes et demandent donc un long investissement personnel pour être maîtrisées. En revanche, elles permettent à l'artiste de créer n'importe quelle géométrie de fibres, aussi fantaisiste soit-elle. Notons en outre qu'une telle approche peut être automatisée, par une technique de génération procédurale ou bien par une technique s'appuyant sur des exemples. Dans ce cas, la liberté de l'artiste se trouve limitée, au profit d'une plus grande facilité d'utilisation.
- La capture automatique de fibres réelles (LUO, LI et RUSINKIEWICZ, 2013 ; HERRERA, ZINKE et WEBER, 2012 ; LUO et al.,



**Figure 2:** Des plus petites fibres, comme un nanofil en figure a aux plus grandes, comme un câble sous-marin en figure b.  
(Crédits : (a) Empa, (b) Jan Messersmith)

2011 ; JAKOB, MOON et MARSCHNER, 2009 ; PARIS et al., 2008) qui consiste à créer un processus automatique capable de numériser un ensemble de fibres matérielles réelles. Ces méthodes ont connu un fort développement récent, en particulier dans le cas de la capture de chevelures complètes qui permet de donner à un personnage virtuel la coiffure d'une personne réelle.

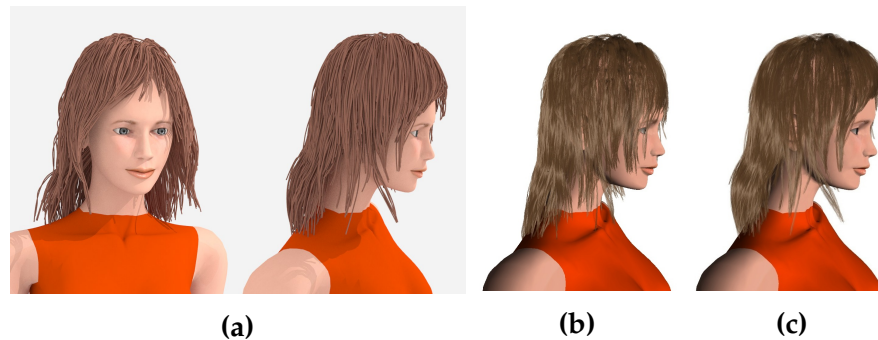
## 1.2 COMMENT ANIMER UNE ASSEMBLÉE DE FIBRES NUMÉRISÉE ?

Après qu'une assemblée de fibres a été numérisée, par synthèse manuelle ou par capture automatique, il est naturel de s'interroger sur la possibilité de l'animer. En reprenant l'exemple des cheveux, cela permettrait de capturer une coiffure réelle pour l'appliquer à un personnage virtuel qui pourrait ensuite se mouvoir. C'est aussi l'étape nécessaire à l'animation d'un personnage virtuel dont la coiffure a été modélisée par un artiste. Dans la suite de cette thèse, nous allons nous intéresser à l'animation par modèles physiques. En effet, l'utilisation de modèles physiques pour l'animation d'assemblées de fibres permet de concevoir simplement (du point de vue de l'animateur) des animations physiquement réalistes, en tirant parti des capacités de calculs et d'automatisation des ordinateurs. Ainsi, ce que nous voulons réaliser, c'est l'animation par modèles physiques d'une assemblée de fibres numérisées.

Le problème est que l'étape de numérisation produit une géométrie sans information particulière sur la physique de l'assemblée de fibres. Pour animer les fibres par un modèle physique,



il faut pouvoir initialiser les paramètres du modèle physique avant l’animation, en faisant un lien avec la géométrie numérisée. Le plus simple pour cela est certainement de choisir ces paramètres de sorte que la géométrie numérisée soit la géométrie du modèle physique à l’équilibre sous l’action d’aucune force extérieure. Toutefois cette technique, bien que simple à mettre en œuvre, produit des résultats de piètre qualité, les fibres ayant tendance à s’affaisser sous l’effet de leur poids lorsque l’animation par modèle physique commence et que la gravité s’applique, comme illustré figure 3. La raison est que la



**Figure 3:** *Affaissement, en b, de la coiffure numérisée, en a. La méthode de calcul des paramètres physiques que nous allons développer dans cette thèse, prend en compte les contacts, ici des cheveux entre eux et avec le crâne et les épaules. Ainsi lorsque la gravité s’applique au démarrage de la simulation, les cheveux restent en place (c).*

géométrie numérisée est généralement celle de fibres à l’équilibre statique sous l’action de forces extérieures telles que la gravité et les forces de contact. Si un artiste dessine les cheveux d’un personnage, il est fort probable que ce personnage se trouve sur Terre, là où la gravité ne peut pas être négligée. Si l’on veut conserver la géométrie numérisée, nous ne pouvons tolérer que les fibres s’affaissent à l’animation. Pour résoudre ce problème, les animateurs peuvent alors entrer dans un jeu d’essai-erreur qui consiste à modifier à la main les paramètres du modèle physique, en itérant jusqu’à ce que l’affaissement des fibres disparaisse au démarrage de la simulation. Un tel procédé peut être long et pénible et l’objet de cette thèse est d’en affranchir les animateurs.

Une approche possible pour répondre à ce problème est de construire une technique de manipulation des modèles de fibres sous simulation physique, comme nous pouvons en trouver décrites dans (BERTAILS et al., 2005; WARD et al., 2007). Ce type de technique consiste donc à manipuler les fibres alors

même qu'elles sont simulées pour construire leurs géométries à l'équilibre statique. C'est le principe d'un salon de coiffure virtuel. Le problème de cette technique, outre le fait qu'elle nécessite un modèle suffisamment simple pour être manipulée en temps réel tout en restant stable, est qu'elle est difficile à maîtriser pour obtenir des géométries simples. Il est de plus quasiment impossible d'obtenir des coiffures complexes à l'aide de cette technique. Plus encore, cette technique ne permet pas simplement de mettre en correspondance la géométrie du modèle physique avec celle de fibres réelles capturées. Cette technique est donc trop limitée pour répondre à notre problème.

Dans cette thèse, nous allons ainsi construire un pont entre la numérisation d'assemblées de fibres et leur animation par modèle physique. Notre but est de dépasser le simple calcul des paramètres du modèle physique qui ne prend pas en compte les forces extérieures s'appliquant aux fibres. Nous nous intéresserons à la force de gravité et aux forces de contacts qui sont très importantes car les fibres à l'équilibre sont presque toujours en contact entre elles ou avec des objets extérieurs. Par exemple, les cheveux sont en contact entre eux et avec la tête de la personne qui les porte. Ce qui nous importe donc, c'est de déterminer les paramètres d'un modèle physique d'assemblée de fibres pour que la forme géométrique obtenue par numérisation soit la forme géométrique du modèle physique à l'équilibre sous l'action des forces extérieures que sont la gravité et les forces de contact.

La mise en correspondance de la géométrie d'objets déformables avec leurs paramètres physiques a été déjà étudiée dans le cas des vêtements, que ce soit en informatique graphique (MIGUEL et al., 2012 ; KUNITOMO, NAKAMURA et MORISHIMA, 2010 ; BHAT et al., 2003 ; JOJIC et HUANG, 1997) ou dans le domaine du textile (voir (HOUSE et BREEN, 2000) à ce propos). Toutefois, en ce qui concerne les fibres, et particulièrement les assemblées de fibres libres, il y a eu peu de travaux. TWIGG et KAČIĆ-ALESIĆ (2011) proposent une méthode pour déterminer les paramètres physiques d'une assemblée de fibres à partir de sa géométrie mais ne parviennent pas à garantir une inversion exacte.

Comme on l'aura compris, la synthèse de cheveux constituera l'application principale de cette thèse. Les cheveux sont des objets très familiers, qui ont une grande importance en informatique graphique pour la création et l'animation de personnages virtuels, et qui se présentent comme un exemple type d'assemblée de fibres.

### 1.3 CONTRIBUTIONS

Dans cette thèse, nous allons utiliser comme modèle de fibres une assemblée de super-hélices en contact frottant. Nous justifierons ce choix dans la partie suivante, dans laquelle nous parlerons des différents modèles physiques de fibres et de contact frottant existants. L'essentiel ici est de souligner que le modèle des super-hélices décrit chaque fibre par une courbe en hélices par morceaux dont le vecteur tangent unitaire à la courbe est continu. Dans la suite, nous parlerons de courbes  $G^1$  en hélices par morceaux pour désigner ces courbes. Le problème que nous allons traiter dans cette thèse comporte deux aspects principaux. Bien évidemment, comme nous l'avons déjà dit, nous devons calculer les paramètres physiques d'une assemblée de super-hélices en contact frottant pour garantir que sa configuration d'équilibre corresponde à la géométrie en entrée. Un tel problème est un problème dit d'identification de paramètres. Mais la géométrie capturée n'est pas généralement identique à celle des super-hélices, c'est-à-dire des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Donc, un autre problème que nous allons résoudre dans cette thèse est celui de passer automatiquement de la géométrie numérisée de fibres à celle du modèle des super-hélices. En d'autres termes, nous devons construire une méthode pour approcher un ensemble de courbes quelconques par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux.

Nous allons ainsi présenter deux contributions. La première, présentée en première partie de ce manuscrit, est un nouvel algorithme pour approcher une courbe spatiale quelconque par une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux. Cet algorithme tire parti de la condition de co-hélicité de deux points et deux vecteurs tangents, introduite par Ghosh (GHOSH, 2010), pour interpoler des vecteurs tangents de la courbe d'origine en minimisant leur déplacement. Cet algorithme est ainsi appelé algorithme des tangentes flottantes. Nous établirons la correction de cet algorithme en complétant la démonstration de la condition de co-hélicité du théorème de Ghosh (GHOSH, 2010). Nous évaluerons alors l'algorithme sur plusieurs jeux de données et le comparerons à un autre algorithme classique, fondé sur la minimisation de la distance entre la courbe d'origine et la courbe  $G^1$  en hélices par morceaux approchante.

La seconde partie de ce manuscrit concernera le calcul des paramètres physiques d'une assemblée de super-hélices pour fixer la géométrie à l'équilibre statique sous l'action de forces

extérieures, ici la gravité et les forces de contact. En considérant le matériau constituant les fibres comme homogène, avec une constante de raideur et une masse connues, les paramètres des super-hélices que nous cherchons à déterminer sont leur géométrie intrinsèque, c'est-à-dire leur géométrie au repos sous l'action d'aucune force extérieure. Dans un premier temps, nous considérerons le cas d'une fibre isolée sur laquelle seule la gravité s'applique et nous verrons qu'alors le problème est assez simple puisqu'il suffit d'étudier l'énergie potentielle du modèle. Nous irons alors plus loin et examinerons la stabilité de l'équilibre obtenu. En effet, en calculant les paramètres du modèle des super-hélices pour en fixer la géométrie à l'équilibre sous l'action de la gravité, il arrive que cette position soit instable, c'est-à-dire que le moindre déplacement précipite la super-hélice dans un autre état d'équilibre. Nous verrons donc, dans le cas de la gravité, comment détecter la stabilité de cette position et dans le cas d'un équilibre instable, comment le stabiliser, grâce à un critère simple mettant en jeu la constante de raideur et la masse des super-hélices. Ensuite, nous considérerons une assemblée de fibres en contact frottant, que nous modéliserons par la loi non-régulière de Signorini-Coulomb. Dans ce cas, il n'est plus possible de s'appuyer sur l'énergie potentielle comme précédemment, les forces de contact étant inconnues a priori. Nous verrons donc une autre approche, qui s'appuie sur une première estimation plausible de la géométrie au repos pour construire un problème d'optimisation quadratique convexe avec contraintes coniques du second ordre, dont la résolution nous permet d'obtenir une valeur plausible des forces de contact. Nous verrons comment transformer simplement ce problème en un problème de complémentarité conique que nous pourrions résoudre efficacement en utilisant un solveur existant conçu initialement pour résoudre le problème dynamique direct d'une assemblée de super-hélices en contact frottant (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011).

#### 1.4 ORGANISATION DU MANUSCRIPT

Le présent manuscrit est organisé en 3 parties. Les deux premières sont indépendantes et correspondent aux deux grandes contributions de cette thèse.

- La première partie concerne l'approximation de courbes 3d quelconques par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Après avoir présenté et précisé le problème, nous

effectuons un bilan des différentes techniques mises au point pour le résoudre dans le chapitre 3. Nous présentons ensuite dans le chapitre 4 l'algorithme des tangentes flottantes que nous proposons pour résoudre le problème et qui s'appuie sur la condition de co-hélicité de Ghosh (GHOSH, 2010) dont nous complétons la démonstration partielle donnée par Ghosh dans le chapitre 5.

- La seconde partie de ce manuscrit concerne le calcul des paramètres physiques d'une assemblée de super-hélices en contact frottant. Après avoir fait un tour d'horizon des méthodes existantes pour effectuer ce calcul, nous présentons nos contributions à la résolution de ce problème d'identification de paramètres, d'abord dans le cas de fibres isolées soumises uniquement à la force de gravité. Ensuite, nous présentons notre méthode de résolution du problème pour une assemblée de fibres en contact.
- En troisième partie, nous combinons les deux grandes contributions de cette thèse pour les appliquer à l'inversion de différentes coiffures, l'une synthétisée par une artiste, les autres obtenues par des techniques de captures de cheveux développées récemment.

Les deux premières parties de cette thèse sont largement indépendantes et peuvent être lues dans l'ordre qui conviendra le mieux au lecteur.

Enfin, notons que la première partie de ce manuscrit a été publiée intégralement dans (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2013). Les seconde et troisième parties (mise à part la condition de stabilité) ont été publiées dans (DEROUET-JOURDAN et al., 2013), tandis que la condition de stabilité pour une fibre isolée soumise à la gravité avait été publiée en 2d dans (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2010) et évoquée en 3d dans (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2011).

## MODÈLES PHYSIQUES DE FIBRES

---

Nous allons discuter dans cette partie de plusieurs modèles physiques de fibre, et présenter le modèle que nous choisissons dans cette thèse pour modéliser une fibre individuelle, le modèle des super-hélices. Nous présenterons aussi le modèle de contact frottant de Signorini-Coulomb dont nous nous servirons pour modéliser les contacts frottants.

### 2.1 MODÈLES PHYSIQUES DE FIBRES

La grande présence des fibres dans notre environnement a conduit la communauté de l'informatique graphique à la construction de modèles physiques pour animer ces fibres de manière réaliste, en prenant en compte leur tendance à se vriller et à se courber, tout en conservant leur inextensibilité.

Le modèle le plus simple et probablement le plus répandu est celui des masses-ressorts, comme présenté dans (ROSENBLUM, CARLSON et TRIPP, 1991). Ce modèle consiste en un ensemble de points, les masses, uniquement reliés par des ressorts. L'avantage d'un tel modèle est d'être simple à implémenter et d'être rapide à simuler. Toutefois, ce type de modèle ne permet pas de prendre en compte les énergies de flexion et de torsion des fibres. Pour tout de même modéliser les déformations en flexion et en torsion, on peut ajouter des ressorts entre des particules non adjacentes ou encore entre des noeuds virtuels (SELLE, LENTINE et FEDKIW, 2008). Le problème ici est qu'il est difficile de relier les propriétés de ces ressorts aux propriétés élastiques des fibres.

Des modèles plus élaborés ont été développés, à la suite de PAI (2002) qui a introduit dans la communauté du graphique le modèle de tige de Cosserat (COSSERAT et COSSERAT, 1909) en s'intéressant à la position statique de fils chirurgicaux. Le but de ces modèles est de coupler de manière intrinsèque la position de la fibre, donnée par sa ligne moyenne, à son orientation. Le modèle de Cosserat consiste à associer à la courbe décrivant la fibre, un repère matériel qui modélise son orientation. Ce repère matériel est en particulier construit avec la vecteur tangent unitaire à la ligne moyenne. En s'appuyant sur cette représen-

tation, SPILLMANN et TESCHNER (2007) ont développé le modèle CoRdE, qui décrit les fibres par des suites de points auxquels sont attachés des quaternions qui représentent le repère matériel. Le problème ici est que l'orientation donnée par le quaternion est découplée de la ligne moyenne. Ainsi, dans ce modèle, il est nécessaire d'ajouter des contraintes pour réaliser ce couplage et s'assurer que le vecteur tangent donné par le quaternion correspond bien au vecteur tangent à la ligne moyenne. Pour intégrer de manière intrinsèque ce couplage, une autre approche consiste à associer à chaque point un angle représentant la rotation du repère matériel par rapport au repère de Bishop (BISHOP, 1975) de la courbe centrale. C'est le principe qui régit le modèle des Discrete Elastic Rods (BERGOU et al., 2008).

Les modèles que nous avons présentés précédemment sont des modèles nodaux à coordonnées maximales, c'est-à-dire qu'ils décrivent les fibres avec comme coordonnées les positions de points pris sur la courbe centrale. Certaines propriétés ne sont donc pas intrinsèquement assurées, en particulier pour les fibres leur inextensibilité. Cette inextensibilité peut être prise en compte en ajoutant des ressorts entre les noeuds, avec une résistance forte à la déformation, ce qui peut conduire à des problèmes de stabilité numérique. Et en modélisant cette inextensibilité par des contraintes externes, on introduit des modifications de l'énergie de la fibre artificielles. Le principal défaut des modèles à coordonnées maximales est qu'ils ont plus de coordonnées que de degrés de liberté réels. Il faut donc trouver des méthodes à la fois physiquement réalistes et numériquement stables pour contraindre ces coordonnées à rester dans l'espace admissible de la cinématique.

À ces modèles s'opposent les modèles en coordonnées minimales, comme le modèle de chaîne articulée de segments rigide (HADAP, 2006) ou encore le modèle des super-hélices (BERTAILS et al., 2006). Le premier s'inspire de la robotique et utilise pour la résolution de la dynamique l'algorithme de Featherstone (FEATHERSTONE, 1987). Il est à noter que HADAP (2006) développe une méthode pour associer la géométrie des fibres aux forces angulaires à chaque jonction de sorte que la forme géométrique est la forme à l'équilibre de la fibre sous l'action de la gravité. Il utilise pour cela une technique de dynamique inverse due à Featherstone (FEATHERSTONE, 1987), développée pour la robotique. Hadap insiste d'ailleurs dans cet article sur le fait que la dynamique inverse ne peut pas s'appliquer aisément à

des modèles en coordonnées maximales. Le second modèle est celui qui va nous intéresser dans cette thèse.

### 2.1.1 Super-hélices

Dans cette thèse, nous allons nous appuyer sur le modèle des super-hélices. Ce modèle est décrit par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux (voir figure 4) dont les courbures et torsions en constituent les coordonnées. Ce modèle a le grand avantage, à l'instar de celui de Hadap, de garantir de manière intrinsèque l'inextensibilité des fibres. De plus, comme il est décrit par des hélices, éléments d'ordre supérieur aux segments, il permet de décrire des fibres bouclées avec moins d'éléments que le modèle des chaînes articulées de segments rigides.

#### *Description*

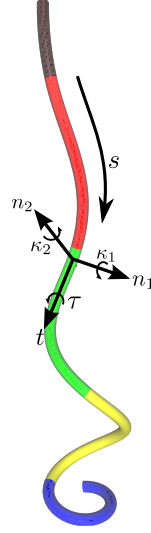
Ce modèle est décrit en détail dans (BERTAILS et al., 2006; BERTAILS, 2006). Nous donnons ici les éléments dont nous avons besoin dans cette thèse, et renvoyons le lecteur aux références citées pour plus de détails. Comme nous l'avons écrit plus haut, le modèle des super-hélices est décrit par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux, avec un bord encastré (par exemple la racine d'un cheveu) et l'autre bord libre. Il est pourvu d'un repère matériel à l'origine  $(t_0, n_{10}, n_{20})$  qui évolue continûment le long de la ligne moyenne. Le modèle est paramétré par deux grandeurs physiques, que nous supposons uniformes le long de la fibre : son élasticité ou module d'Young, noté  $E$  et sa masse volumique, notée  $\rho$ . Chaque élément d'hélice d'indice  $i$  est décrit par sa longueur  $l_i$  qui est constante dans le temps, par deux courbures et une torsion matérielles  $\kappa_{1i}, \kappa_{2i}, \tau_i$  qui sont les coordonnées du modèle et par deux courbures et une torsion naturelles  $\kappa_{1i}^0, \kappa_{2i}^0, \tau_i^0$  qui sont constantes dans le temps et qui représentent la géométrie intrinsèque, ou géométrie au repos sous l'action d'aucune force extérieure, de la fibre (frisure naturelle de la fibre).

#### *Dynamique*

La dynamique d'une super-hélice est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{\kappa}} + \mathbf{K}(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{\kappa}, \dot{\mathbf{\kappa}}),$$





**Figure 4:** Géométrie du modèle des super-hélices. Chaque élément hélicoïdal (il y en a cinq ici) est représenté par une couleur.

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse symétrique définie positive, dense, de taille  $3n$  si  $n$  est le nombre d'éléments constituant la super-hélice.  $\mathbf{K}$  est une matrice diagonale, qui dépend linéairement du module d'Young  $E$  de la super-hélice, et  $\mathbf{F}$  regroupe toutes les autres forces s'appliquant à la super-hélice, et en particulier la force de gravité qui dépend linéairement de la masse volumique  $\rho$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\kappa}$  regroupe les courbures et torsions de chaque élément, et  $\boldsymbol{\kappa}_0$  les courbures et torsions naturelles.

La super-hélice possède une énergie potentielle élastique, qui peut être formulée comme suit :

$$E_{el} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0)$$

et lorsqu'elle subit l'action de la gravité, possède une énergie potentielle de gravité qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_g = \rho S g \int_0^L z(s) ds$$

où  $S$  est la section de la super-hélice,  $g$  la norme du vecteur de pesanteur,  $L$  la longueur de la super-hélice et  $z(s)$  est la hauteur du point d'abscisse curviligne  $s$ . Ces énergies potentielles vont jouer un rôle important dans le calcul de la géométrie intrinsèque des super-hélices dans le cas où la force de gravité s'applique, sans contact, puisque nous déterminerons la valeur de  $\boldsymbol{\kappa}_0$  en annulant le gradient de l'énergie potentielle d'une super-hélice.

## 2.2 MODÈLE DE CONTACTS

Dans cette thèse, nous allons modéliser les contacts frottants à l'aide de contraintes unilatérales, qui sont plus robustes et plus précises que les modèles à base de pénalités. Le modèle de contact que nous allons considérer dans cette thèse est celui des contacts frottants de Signorini-Coulomb. On peut trouver une description complète de ce modèle dans (CADOUX, 2009). C'est un modèle de contact assez riche pour capturer l'effet de seuil propre aux contacts frottants - lorsqu'on pousse une armoire, elle ne se met à bouger que lorsque la force qu'on y applique dépasse un seuil qui dépend de la force de réaction qu'elle subit de la part du sol. Cet effet de seuil est très important dans les assemblées de fibres et il n'est pas possible de la capturer par un modèle régularisé classique.

### 2.2.1 Notations et cône de Coulomb

Considérons deux objets  $A$  et  $B$  en contact au point  $P$ , représentés 5. Considérons la normale  $\mathbf{e}_N$  au point de contact, prise dans une direction quelconque. Notons  $\mathbf{u}$  la vitesse de l'objet  $A$  par rapport à l'objet  $B$  au point  $P$ . Notons  $\mathbf{r}$  la force exercée par  $B$  sur  $A$  au point de contact. Le modèle de Signorini-Coulomb relie la force exercée par l'objet  $B$  sur l'objet  $A$  à la vitesse relative de  $A$  par rapport à  $B$  au point de contact. Pour cela, et pour prendre en compte l'effet de seuil que nous avons évoqué précédemment, le modèle de Coulomb s'appuie sur la notion de cône de Coulomb au point de contact. Ce cône de Coulomb au point de contact  $P$  est défini comme suit :

$$\mathcal{K}(\mu, \mathbf{e}_N) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}_T\| \leq \mu x_N\} \quad (1)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement au point de contact, et  $x_N$  et  $\mathbf{x}_T$  sont les composantes respectivement normale et tangentielle de  $\mathbf{x}$  selon  $\mathbf{e}_N$ , c'est-à-dire

$$x_N = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_N \rangle \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{x} - x_N \mathbf{e}_N \quad (3)$$

Notons ici que  $x_N$  est un scalaire et  $\mathbf{x}_T$  un vecteur.

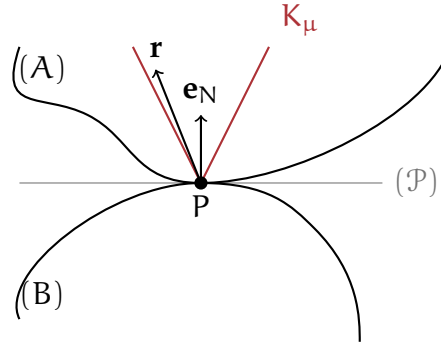


Figure 5: Deux objets A et B en contact au point P.

### 2.2.2 Modèle de contact frottant de Signorini-Coulomb

Le lien que fait le modèle de contact frottant de Coulomb entre la force exercée par B sur A et la vitesse relative de A par rapport à B au point P se sépare en 3 cas, représentés figure 6 :

- **Adhérence** : dans ce cas, l'objet A est immobile par rapport à l'objet B (figure 6 en haut). Il lui est collé. Donc,  $\mathbf{u} = 0$  et dans ce cas, la force  $\mathbf{r}$  est dans le cône de Coulomb, soit

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{r} \in K(\mu, \mathbf{e}_N).$$

- **Glissement** : dans ce cas, l'objet A glisse par rapport à l'objet B, tout en restant en contact (figure 6 au centre). Donc,  $\mathbf{u}_N = 0$  et  $\mathbf{u}_T \neq 0$  et dans ce cas, la force  $\mathbf{r}$  se trouve sur la frontière du cône de Coulomb, soit

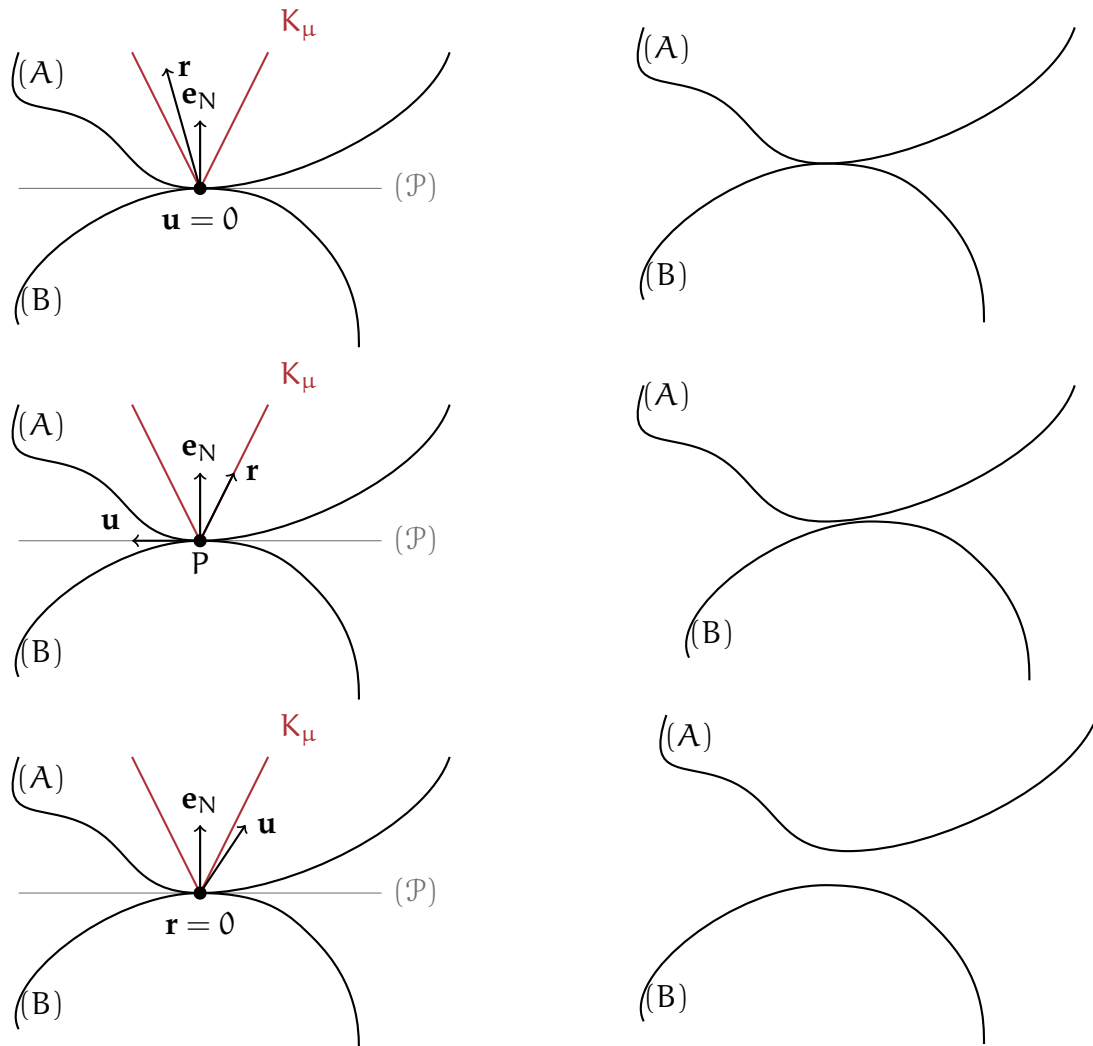
$$\mathbf{u}_N = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_T \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{r} \in \partial K(\mu, \mathbf{e}_N).$$

- **Décollement** : dans ce cas, le contact entre A et B est rompu (figure 6 en bas), et la vitesse relative de A par rapport à B sur la normale au contact est positive, soit

$$\mathbf{u}_N \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = 0.$$

Ces trois cas reliant la vitesse relative entre A et B au point de contact P et la force de contact exercée par B sur A peuvent se résumer dans la condition que nous appellerons condition de Signorini-Coulomb :

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in \mathcal{C}(\mathbf{e}_N, \mu) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathbf{r} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_N > 0 \text{ (décollage)} \\ \mathbf{r} \in K_\mu \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ (adhérence)} \\ \mathbf{r} \in \partial K_\mu, \mathbf{u}_N = 0 \\ \text{et } \exists \alpha > 0, \mathbf{u}_T = -\alpha \mathbf{r}_T \text{ (glissement)} \end{cases}
 \end{aligned}$$



**Figure 6:** Les trois cas du contact frottant de Signorini-Coulomb. En haut, le cas d'adhérence, où l'objet A ne bouge pas par rapport à l'objet B. Au centre, le cas de glissement, où l'objet A glisse sur l'objet B et en bas, le cas du décollement, où le contact est rompu entre A et B.

### 2.2.3 Modification de la dynamique des super-hélices

Les contacts frottants ajoutent donc une force à la dynamique des super-hélices. La nouvelle dynamique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) + \mathbf{J}^T \mathbf{r} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{w} \\ \forall \text{contact } i, (\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) &\in \mathcal{C}(\mathbf{e}_{N,i}, \mu_i), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{r}$  regroupe les forces de contact à chaque point de contact,  $\mathbf{u}$  sont les vitesses de la super-hélice en ces points de contacts, reliées à  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$  par la matrice  $\mathbf{J}$  et la vitesse de l'objet en contact avec la super-hélice  $\mathbf{w}$ .

On trouvera dans (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011) un algorithme pour la résolution robuste et efficace de ce problème. L'idée générale sous-jacente est d'écrire le problème de la dynamique sous une forme de complémentarité équivalente en posant d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{r} + \mathbf{b} &= \mathbf{u} \\ \forall i, (\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) &\in \mathcal{C}(\mathbf{e}_{N,i}, \mu_i), \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{W} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{w} + \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ . En faisant le changement de variable suivant (DE SAXCÉ et FENG, 1998) :

$$\forall i \tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i + \mu_i \|\mathbf{u}_{T,i}\| \mathbf{e}_{N,i},$$

alors la condition de Signorini-Coulomb devient :

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mathbf{e}_{N,i}, \mu_i) \iff \mathcal{K}\left(\frac{1}{\mu_i}, \mathbf{e}_{N,i}\right) \ni \tilde{\mathbf{u}}_i \perp \mathbf{r}_i \in \mathcal{K}(\mu_i, \mathbf{e}_{N,i}). \quad (4)$$

En modifiant la fonction de Fischer-Burmeister (FISCHER, 1992), il est alors possible de construire une fonction  $f$  telle que :

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mathbf{e}_{N,i}, \mu_i) \iff f(\tilde{\mathbf{u}}_i, \mathbf{r}_i) = 0.$$

Le problème de la dynamique est donc rapporté à un problème de recherche de racine, qui peut-être résolu contact par contact, à l'aide de l'algorithme de Gauss-Seidel.

Première partie

GÉOMÉTRIE



## APPROXIMATION PAR UNE COURBE $G^1$ EN HÉLICES PAR MORCEAUX

---

De manière informelle, le problème que nous voulons résoudre est celui d'approcher une courbe de l'espace par une courbe en hélices par morceaux. Ce problème est intéressant au-delà de son utilisation pour transformer des fibres numérisées en super-hélices, puisqu'il trouve des applications en modélisation numérique en biologie ou en chimie. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudierons plusieurs travaux précédents qui ont été menés pour résoudre notre problème ou un problème similaire.

### 3.1 PROBLÈME DE L'APPROXIMATION PAR UNE COURBE $G^1$ EN HÉLICES PAR MORCEAUX

Le problème général que nous souhaitons résoudre est celui d'approcher la géométrie d'une courbe quelconque de l'espace par celle du modèle des super-hélices. Or, nous l'avons vu, les super-hélices sont décrites par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Ainsi, le problème que nous allons étudier dans toute cette partie est celui d'approcher une courbe quelconque de l'espace par une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux. Dans les chapitres suivants, nous allons construire un algorithme pour résoudre ce problème. Précisons un peu les entrées et les sorties de cet algorithme. En sortie, nous voulons donc une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux. Cette courbe devra ensuite être simulée par le modèle des super-hélices. Or, ce modèle est plus précis, mais aussi plus coûteux à mesure que le nombre d'hélices augmente. Donc, il est nécessaire, dès l'approximation géométrique, de contrôler facilement le nombre d'éléments. C'est pourquoi l'algorithme qui va résoudre notre problème prendra en paramètre le nombre  $N$  d'éléments à utiliser pour la courbe en hélices par morceaux. De plus, notre algorithme s'appuie sur certaines propriétés différentielles de la courbe d'entrée, comme la tangente. C'est la raison pour laquelle nous choisissons en entrée de cet algorithme des splines cubiques de Bézier. Ce sont des courbes très répandues en informatique graphique et en conception géométrique, qui ont une



description analytique qui permet de calculer en tout point la le vecteur tangent à la courbe. Enfin, nous disposons d'un algorithme permettant d'approcher aussi près qu'on le souhaite une séquence de points 3d par une spline cubique de Bézier. Cet algorithme a été conçu pour la 2d et présenté dans (SCHNEIDER, 1990) et a été implémenté dans le logiciel libre inkscape (GOULD et al., 2003). Il est très aisé de transformer cet algorithme pour qu'il traite des courbes en 3d.

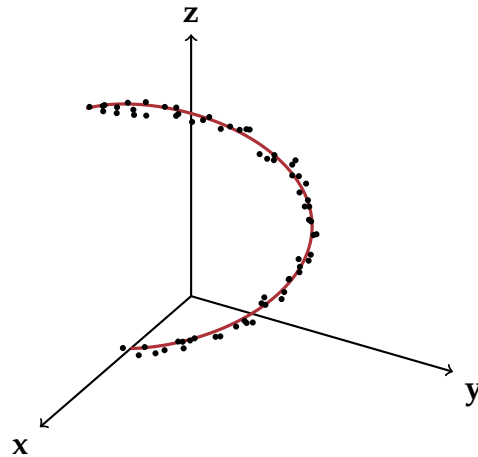
En résumé, nous allons résoudre le problème d'approcher une spline cubique de Bézier 3d par une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux, dont le nombre de morceaux  $N$  est fixé.

### 3.2 TRAVAUX PRÉCÉDENTS

Comme nous l'avons évoqué en introduction, les objets élancés se retrouvent partout dans la nature. Nous pouvons même aller un peu plus loin et avancer que les objets en forme d'hélices sont très présents eux-mêmes (CHOUAIEB, GORIELY et MADDOCKS, 2006) dans les domaines de la chimie et de la biologie. Dans cette section, nous allons voir plusieurs approches qui ont été développées pour répondre au problème d'approcher des structures élancées par des hélices. D'abord, nous regarderons du côté de l'estimation des paramètres d'une hélice, étant donné un nuage de points décrivant cette hélice. Ensuite, nous nous pencherons sur les approches par optimisation qui consistent à minimiser la distance entre une courbe en entrée et une hélice approchante. Enfin, nous nous intéresserons aux méthodes par interpolation, qui consistent à extraire une sous-partie de la courbe d'entrée et à l'interpoler par une courbe en hélices par morceaux.

#### 3.2.1 Méthodes par identification des paramètres

Les méthodes par identification (ENKHBAYAR et al., 2008; NIEVERGELT, 1997; CHRISTOPHER, SWANSON et BALDWIN, 1996) sont utilisées en biologie et en chimie pour retrouver les paramètres géométriques (axe, rayon, pas) d'une hélice à partir d'un nuage de points décrivant cette hélice, comme illustré figure 7. Ces méthodes construisent souvent l'hélice en calculant d'abord son axe. On retrouve dans (CHRISTOPHER, SWANSON et BALDWIN, 1996) plusieurs manières d'effectuer ce calcul, avec une comparaison des performances de chaque approche. Une fois l'axe de l'hélice obtenu, il ne reste plus qu'à déterminer le rayon de l'hé-



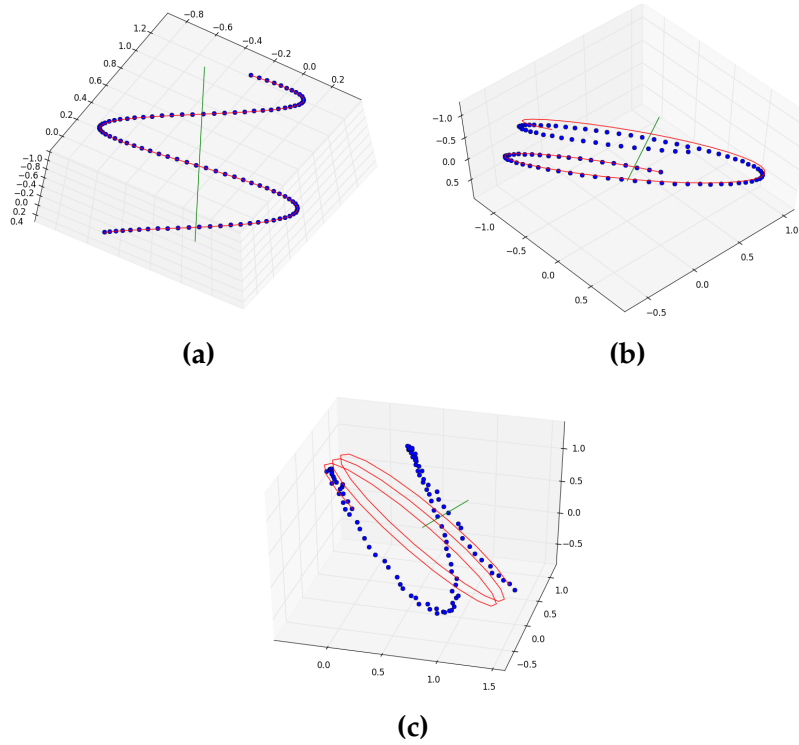
**Figure 7:** Les points noirs sont des points qui reposent sur une hélice (ici avec du bruit). En marron, l'hélice correspondante.

lice ainsi que son pas (NIEVERGELT, 1997). Dans (ENKHBAYAR et al., 2008), les auteurs ajoutent à la fin de ces calculs une phase d'optimisation pour améliorer encore les paramètres estimés.

Ces méthodes ne sont pas vraiment adaptées à notre problème ; elles n'ont pas été construites dans ce but. D'abord, elles supposent des points régulièrement espacés sur l'hélice de départ, en particulier pour calculer son axe. Même sans cette contrainte, ces méthodes peuvent se montrer assez sensibles au bruit, comme illustré figure 8, et c'est d'ailleurs pour cette raison que ENKHBAYAR et al. (2008) ajoute une phase d'optimisation. Toutefois, même en considérant cette phase d'optimisation finale, il reste que ces méthodes sont adaptées à l'estimation d'une hélice étant donnés des points *sur* cette hélice. En d'autres termes, ces méthodes ont pour but d'*identifier* les paramètres d'une hélice. C'est pourquoi ces méthodes échouent lorsqu'il s'agit d'approcher par une hélice une courbe qui n'est pas une hélice.

### 3.2.2 Méthodes par optimisation

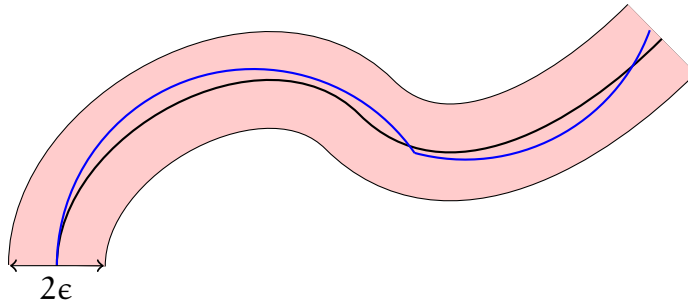
Nous voulons construire une courbe en hélices par morceaux qui soit proche d'une spline de Bézier donnée, si bien que les méthodes par optimisation sont probablement celles qui viennent le plus immédiatement à l'esprit. Ce que nous cherchons à faire, c'est minimiser la distance entre une spline de Bézier et une courbe en hélices par morceaux approchante. Ces approches trouvent une légitimité dans les travaux de Sloss (SLOSS,



**Figure 8:** Effet du bruit sur l'identification des paramètres pour l'algorithme décrit dans (NIEVERGELT, 1997). En (a), sans bruit, l'identification des paramètres produit une hélice précise. En (b), avec un bruit très léger, l'hélice produite est satisfaisante, même si imparfaite. Avec un bruit plus important, en (c), l'identification des paramètres produit une hélice loin de l'hélice originale.

1970), qui a montré qu'on pouvait approcher une courbe quelconque par une courbe en hélice par morceaux, aussi près que voulu. Plus précisément, Sloss montre que toute courbe  $C^3$ , notée  $\Gamma$ , peut être approchée par une courbe en hélices par morceaux, hélas non nécessairement  $G^1$ , mais seulement continue, ou  $G^0$ , de sorte que la courbe en hélices par morceaux soit comprise dans la région cylindrique autour de  $\Gamma$  de rayon  $\epsilon$  choisi à l'avance, voir figure 9.

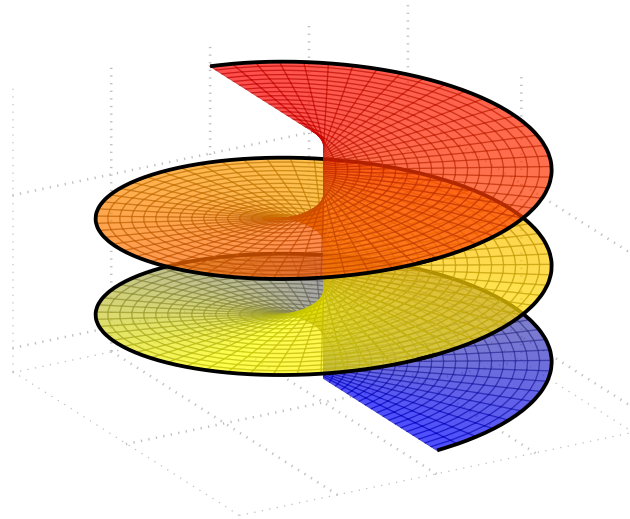
Les méthodes par optimisation procèdent par la minimisation d'une distance. Nous pouvons donc les catégoriser selon la distance considérée entre deux courbes. Dans (BERGBOM, MUSETH et ROBLE, 2007) et dans notre travail préliminaire sur ce sujet (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2011), nous retrouvons deux méthodes semblables qui s'appuient sur une distance construite comme une somme de distances séparant des couples de points, soit une version discrète de la distance  $L_2$ . Plus précisément, ces deux méthodes échantillonnent



**Figure 9:** Illustration du théorème de Sloss, ici dans le plan. En noir, la spline de départ et en rouge le cylindre de rayon  $\epsilon$  autour de cette spline. En bleu, une courbe  $G^0$  en arc de cercles par morceaux comprise dans ce cylindre.

la courbe en entrée, ici la spline de Bézier, et la courbe approchante, ici la courbe en hélices par morceaux, pour obtenir le même nombre de points sur chacune des courbes. Ensuite, chaque point de la courbe en entrée est mis en correspondance avec un point de la courbe approchante et les méthodes de (BERGBOM, MUSETH et ROBLE, 2007) et (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2011) consistent alors à résoudre le problème aux moindres carrés donné par la somme des distances au carré séparant chaque point de la courbe en entrée de son point correspondant sur la courbe approchante.

Dans (PIUZE, KRY et SIDDIQI, 2011), la distance considérée est la distance de Fréchet qui est particulièrement adaptée pour mesurer la différence entre deux courbes. Cette distance est décrite dans (ALT et GODAU, 1995) et correspond grossièrement à la longueur minimale d'une laisse nécessaire à un homme qui suivrait la première courbe pour promener son chien qui suivrait la seconde courbe, pas nécessairement à la même vitesse que son maître, mais toujours en avançant, jamais en reculant. Nous reviendrons plus loin, dans la partie concernant les résultats de notre algorithme, sur cette distance. Pour le moment, notons simplement que cette distance mesure bien la différence entre deux courbes, mais qu'elle est assez difficile à calculer en pratique pour des courbes quelconques. Dans (PIUZE, KRY et SIDDIQI, 2011), les auteurs décrivent un algorithme qui approche une courbe spatiale par une hélicoïde généralisée, ou plus précisément par la trace d'une hélicoïde généralisée. Essentiellement, une hélicoïde généralisée est une surface obtenue par rotation et translation à vitesse constante d'une courbe autour d'un axe donné. La trace produite par cette hélicoïde



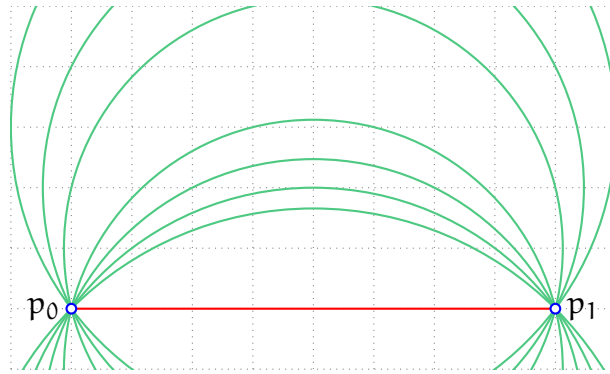
**Figure 10:** Une hélicoïde obtenue en appliquant une rotation et une translation à un segment. La trace obtenue, affichée ici en noir, est une hélice.

généralisée est alors la courbe décrite par un point donné de la courbe qui effectue la rotation et la translation, voir figure 10. Dans (PIUZE, KRY et SIDDIQI, 2011), les auteurs minimisent donc la distance de Fréchet séparant la courbe spatiale en entrée de cette trace, en utilisant l'algorithme de Nelder-Mead, qui est un algorithme de minimisation sans gradient.

Le problème de ces méthodes est qu'il est difficile de converger à cause du caractère non-convexe de la fonction à minimiser. Ces méthodes ont alors de grosses difficultés à produire des résultats proches de ce que l'on visait, particulièrement si la courbe de départ est complexe. Nous renvoyons le lecteur aux sous-sections 4.6.2 et 4.6.3 du chapitre suivant pour des résultats qualitatifs et quantitatifs de l'application d'un algorithme fondé sur l'optimisation à différents jeux de données.

### 3.2.3 Méthodes par interpolation

L'interpolation consiste à reconstruire un objet à partir d'un ensemble fini de valeurs. Par exemple, interpoler deux points par une courbe consiste à construire une courbe partant du premier point et atteignant le second. Donc lorsque l'on souhaite construire une courbe en hélice par morceaux à partir d'une autre courbe  $\Gamma$ , on peut essayer de prendre des points sur  $\Gamma$  pour les interpoler par une courbe en hélices par morceaux, de



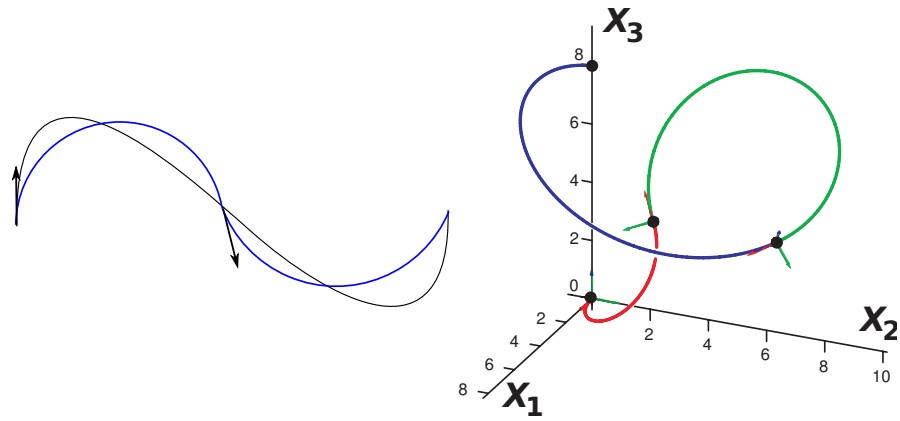
**Figure 11:** Il y a une infinité d'arcs de cercles qui interpolent les points  $p_0$  et  $p_1$ .

sorte que chaque couple de points successifs soit interpolé par exactement 1 hélice.

Comme précisé plus haut, interpoler deux points par 1 hélice consiste à trouver une hélice qui part du premier point et atteint le second point. Le problème ici, c'est que si l'on prend deux points quelconques, il y a une infinité d'hélices qui les interpolent. On peut regarder dans le cas trivial de la 2d avec des arcs de cercles pour en avoir l'intuition, figure 11.

Considérons le cas du plan. Puisqu'il y a une infinité d'arcs de cercle possibles, nous pouvons ajouter une contrainte, par exemple le vecteur tangent au point de départ. Dans ce cas-là, nous souhaitons que l'arc de cercle interpolant parte du premier point avec le vecteur tangent fixé. Dans le plan, cela réduit le problème à une solution unique. Et pour interpoler les points suivants, il ne reste qu'à transmettre le vecteur tangent, comme représenté sur la partie gauche de la figure 12. Qu'en est-il dans l'espace? Nous trouvons dans (GORIELY, NEUKIRCH et HAUSRATH, 2009) l'approche des polyhélices, qui interpole des points 3d par une courbe en hélice par morceaux, en fixant, non seulement le premier vecteur tangent, mais le repère de Frenet tout entier, et en le transmettant ensuite le long des hélices, comme sur la partie droite de la figure 12.

Cette méthode présente deux inconvénients lorsque l'on souhaite approcher une courbe donnée. Le premier, c'est qu'elle reconstruit une courbe pour laquelle le repère de Frenet évolue de manière continue, ce qui est plus fort que  $G^1$  qui est la continuité du vecteur tangent seul et qui restreint donc les possibilités de l'approximation. Nous invitons le lecteur à consulter l'annexe C pour plus de détails.



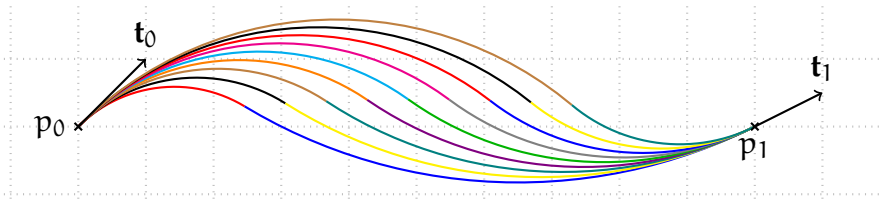
**Figure 12:** À gauche, interpolation de trois points pris sur la spline en noir par la méthode des polyhélices, restreinte à la 2d. Le vecteur tangent au premier point est transmis au second point pour la construction du second arc de cercle. À droite, interpolation de 4 points de l'espace par des hélices, avec transmission du repère de Frenet fixé au premier point (image tirée de (GORIELY, NEUKIRCH et HAUSRATH, 2009)).



**Figure 13:** Oscillations autour de la courbe lorsque nous interpolons le premier vecteur tangent et une séquence de points.

De plus, pour passer par tous les points, la courbe en hélice par morceaux a tendance à osciller autour de la courbe de départ, comme mis en évidence sur la figure 13 dans le cas de la 2d avec des arcs de cercles. Ce phénomène peut s'expliquer par le caractère premier ordre de cette approche, qui fait fi des aspects différentiels de la courbe de départ, pour se concentrer sur sa géométrie simple. En somme, nous restons près de la courbe de départ parce que nous allons passer par des points pris sur cette courbe, quitte à varier beaucoup entre chaque couple de points.

Il semble donc que la position d'un nombre fini de points de la courbe n'est pas suffisante pour décrire correctement cette courbe. Nous devons ajouter plus d'information, d'ordre plus élevé. L'idée que nous avons eue est d'interpoler non seulement les points, mais aussi les vecteurs tangents à ces points. Nous espérons alors mieux conserver l'aspect global de la courbe, et

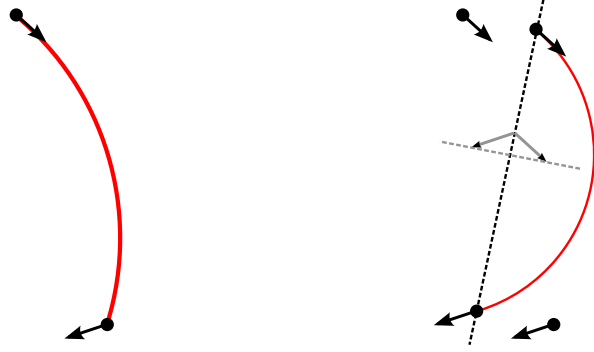


**Figure 14:** Exemples de biarcs interpolant deux points et deux vecteurs tangents donnés. Il est possible de démontrer que le lieu des points de raccord des deux arcs de cercles formant chaque biarc est un cercle. Ainsi, trouver le meilleur biarc interpolant deux points et deux vecteurs tangents revient à trouver le meilleur point de raccord sur ce cercle.

limiter les oscillations. Seulement il y a un problème de taille. Il est impossible, dans le cas général, d'interpoler deux points et deux vecteurs tangents par un unique arc d'hélice. C'est un résultat que nous devons à Ghosh (GHOSH, 2010), qui a développé pour résoudre ce problème une primitive géométrique appelée bihélice, qui consiste en deux hélices raccordées de manière  $G^1$ . Cette primitive géométrique est une extension 3d d'une autre primitive 2d bien connue, les biarcs (BOLTON, 1975), qui sont deux arcs de cercles raccordés de manière  $G^1$ . Ces primitives permettent d'interpoler deux points et deux vecteurs tangents dans le cas général, même si une infinité de biarcs ou de bihélices interpolent deux points et deux vecteurs tangents donnés, comme illustré figure 14.

Puisque interpoler points et vecteurs tangents est un problème sur-contraint, et puisque interpoler seulement les points conduit à des oscillations indésirables, nous allons interpoler seulement les vecteurs tangents, c'est-à-dire que nous allons déplacer les points pour faire en sorte que leurs nouvelles positions rendent possible l'interpolation avec les vecteurs tangents par une unique hélice. Nous avons résolu le problème planaire d'interpolation par des arcs de cercles dans un travail antérieur à cette thèse (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2010). L'algorithme mis au point alors avait été appelé algorithme des tangentes flottantes. Son principe est de s'appuyer sur une condition de co-circularité qui va déterminer la position des points. Dans le cas planaire, la condition de co-circularité de deux points et deux vecteurs tangents avait le bon goût d'être linéaire en les points. Essentiellement, le vecteur donné par la différence des deux points devait se trouver dans un sous-espace vectoriel donné par les deux vecteurs tangents, voir figure 15.





**Figure 15:** À gauche, nous constatons que dans le cas général, il est impossible d'interpoler deux points et deux vecteurs tangents par un unique arc de cercle, sauf si, comme à droite, les deux points sont placés sur une droite dont la direction est donnée par l'orthogonal à la différence des vecteurs tangents.

Le problème est maintenant d'étendre cet algorithme au cas de l'espace et de l'interpolation par des hélices. Dans sa thèse, Ghosh a énoncé et partiellement démontré une condition de co-hélicité (GHOSH, 2010). Nous reviendrons sur ce théorème en détail dans la suite et consacrerons un chapitre à compléter la démonstration de Ghosh. Ce que nous pouvons dire dès maintenant, c'est que la condition de co-hélicité en 3d est la même que la condition de co-circularité en 2d. Par conséquent, nous allons pouvoir construire un algorithme des tangentes flottantes en 3d qui sera similaire à celui en 2d. C'est l'objet du prochain chapitre, dans lequel nous appliquerons aussi à différents jeux de données notre algorithme pour en éprouver la robustesse et l'efficacité.

## ALGORITHME DES TANGENTES FLOTTANTES

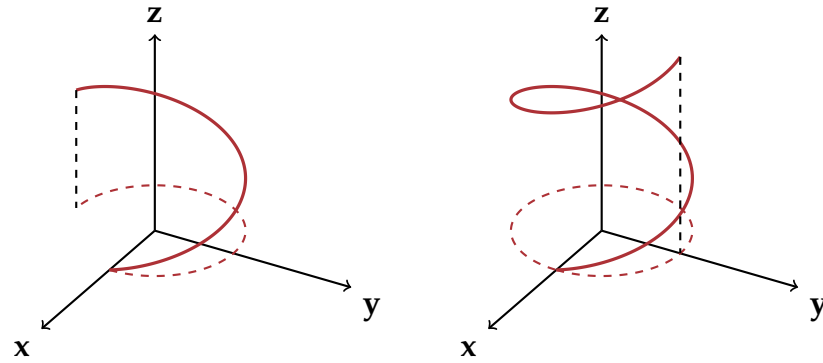
Dans ce chapitre, nous proposons l'algorithme des tangentes flottantes en 3d, pour approcher des splines de Bézier 3d par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Cet algorithme est une extension à la 3d de l'algorithme des tangentes flottantes plane pour l'approximation par des courbes en arcs de cercles par morceaux, que nous avons mis au point avant ce travail de thèse, dans (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2010).

Cet algorithme s'appuie sur la condition de co-hélicité telle qu'elle a été décrite par Ghosh dans sa propre thèse. Dans la suite, nous précisons cette condition, puis verrons comment elle nous conduit au déplacement des points pour l'interpolation. Ensuite, nous poserons le calcul effectif de l'hélice interpolante étant donnés deux points et deux vecteurs tangents. Nous donnerons ainsi l'algorithme des tangentes flottantes tel qu'il peut être utilisé en 3d pour l'approximation par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Pour conclure ce chapitre, nous appliquerons cet algorithme à plusieurs jeux de données pour en étudier la précision et la rapidité, en le comparant notamment à un algorithme d'optimisation.

## 4.1 CONDITION DE CO-HÉLICITÉ DE GHOSH

Dans sa thèse, Ghosh a énoncé un résultat capital pour notre travail, qui donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une hélice interpolant deux points et deux vecteurs tangents. Dans le cas où l'on considère que cette hélice est courte, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas un tour complet autour de son axe (voir figure 16 et définition précise en chapitre 5), alors la condition de Ghosh assure aussi son unicité. Cette condition est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 1** (de Ghosh). *Soit deux points  $p_0$  et  $p_1$  distincts, munis de deux vecteurs tangents respectifs, unitaires et non colinéaires,  $t_0$  et  $t_1$ . Il existe une unique hélice courte partant du point  $p_0$  avec pour*



**Figure 16:** Exemple d'une hélice courte (à gauche) et d'une hélice longue (à droite). Une hélice courte ne fait pas un tour complet autour de son axe (ici  $\mathbf{z}$ ). Notons que projeté dans le plan orthogonal à son axe, une hélice décrit un arc de cercle (en pointillé). Dans le cas d'une hélice courte, cet arc de cercle est strict, c'est à dire un arc de cercle qui ne constitue pas un cercle complet, contrairement au cas d'une hélice longue.

vecteur tangent  $\mathbf{t}_0$  et joignant le point  $p_1$  avec pour vecteur tangent  $\mathbf{t}_1$  si et seulement si

$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle = 0 \quad (5)$$

Il est notable que cette condition soit identique à la condition de co-circularité présente dans (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2010). En effet, nous avons écrit que dans le plan, deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de leurs vecteurs tangents respectifs  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$  étaient co-circulaires si et seulement si il existait un scalaire  $\alpha$  tel que

$$p_1 = p_0 + \alpha d$$

où  $d$  était un vecteur orthogonal à  $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0$ , ce qui revient à écrire que  $p_1 - p_0$  est orthogonal à  $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0$ . Alors, en 2d, deux points et deux vecteurs tangents sont interpolables par un unique arc de cercle si et seulement si les deux points sont sur une droite orthogonale à la différence des vecteurs tangents. En 3d, c'est la même condition, avec pour seule différence que l'orthogonal d'un vecteur dans l'espace est un plan et non une droite. En d'autres termes, deux points et deux vecteurs tangents sont interpolables par une unique hélice si et seulement si  $p_1$  est dans le plan orthogonal à la différence des vecteurs tangents et qui passe par  $p_0$ . Dans le cas le plus général, deux points et deux vecteurs tangents sont interpolables par un arc de cercle en 2d

ou un arc d'hélice en 3d lorsque le point  $p_1$  est dans l'hyperplan orthogonal à la différence des vecteurs tangents passant par le point  $p_0$ .

#### 4.2 ALGORITHME DES TANGENTES FLOTTANTES

Nous construisons maintenant l'algorithme des tangentes flottantes, dans ses grands principes. En entrée, nous avons une spline de Bézier, et un nombre d'hélices pour la courbe approchante  $N$ . L'algorithme des tangentes flottantes suit 3 grandes étapes

1. **Découpage de la spline** pour extraire des points dits de rupture, c'est-à-dire des points munis de leurs vecteurs tangents respectifs à la spline de Bézier et que nous allons chercher à interpoler par une courbe en hélice par morceaux. Nous avons donc besoin d'extraire  $N + 1$  points de rupture.
2. **Relaxation des points de rupture** pour satisfaire la condition de co-hélicité de Ghosh. Cette étape consiste à déplacer les points, en minimisant ce déplacement pour que les nouvelles positions rendent possible l'interpolation des nouveaux points et des vecteurs tangents par des hélices.
3. **Interpolation des points de rupture** pour construire la courbe  $G^1$  en hélices par morceaux.

#### 4.3 DÉCOUPAGE DE LA SPLINE

Notre méthode pour découper la spline est très simple. En effet, elle consiste essentiellement à sur-échantillonner la spline de Bézier pour l'approcher par une ligne brisée et calculer les abscisses curvilignes de chacun des points sur cette ligne brisée. Nous connaissons ainsi une approximation de la longueur de la spline de départ, ce qui nous permet de découper alors cette spline en  $N$  sous-morceaux d'approximativement même longueur.

#### 4.4 RELAXATION DES POINTS

Nous allons maintenant nous appuyer sur la condition de co-hélicité de Ghosh pour relâcher la position des points, en conservant leurs vecteurs tangents respectifs. Notre but est donc de déplacer ces points de sorte qu'ils vérifient avec leurs

vecteurs tangents la condition de co-hélicité. Pour que chacun de ces points reste proche de la courbe de départ, nous allons minimiser ce déplacement en terme de carré de la distance euclidienne. Après avoir examiné le cas de la 2d pour obtenir les intuitions nécessaires, nous traiterons le cas qui nous intéresse ici, celui de la 3d.

#### 4.4.1 Cas de 2 points en 2d

Prenons deux points du plan  $p_0$  et  $p_1$  munis de leurs vecteurs tangents respectifs  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ . Pour qu'ils satisfassent la condition de co-circularité, nous avons besoin que les deux points soient sur une droite dont la direction est donnée par la différence des deux vecteurs tangents. Notons  $\mathbf{d}$  le vecteur directeur de cette droite. Si nous notons  $p'_0$  et  $p'_1$  les points déplacés, le problème que nous avons ici est de minimiser les distances séparant  $p'_0$  de  $p_0$  et  $p'_1$  de  $p_1$ . Or, la relation qui lie  $p'_1$  à  $p'_0$  est connue. Nous pouvons écrire  $p'_1$  comme une translation de  $p'_0$  selon un vecteur colinéaire à  $\mathbf{d}$ , que nous noterons donc  $\alpha\mathbf{d}$ . Ainsi, ce que nous voulons minimiser devient la distance séparant  $p'_0$  à  $p_0$  et  $p_1$  à  $p'_0 + \alpha\mathbf{d}$ . En d'autres termes, nous cherchons donc à résoudre le problème suivant :

$$\min_{p'_0, \alpha} \|p'_0 - p_0\|^2 + \|p'_0 + \alpha\mathbf{d} - p_1\|^2.$$

La fonction objectif  $f(p'_0, \alpha) = \|p'_0 - p_0\|^2 + \|p'_0 + \alpha\mathbf{d} - p_1\|^2$  est quadratique convexe. Donc  $f$  trouve son minimum en un point qui annule son gradient. Comme  $f$  est quadratique, son gradient est affine. Ainsi, le problème de minimisation que nous avons à résoudre se ramène à la résolution d'un système linéaire.

#### 4.4.2 Cas de 2 points en 3d

Dans le cas de l'espace, posons deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de leurs vecteurs tangents  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ . La condition de co-hélicité de Ghosh nous dit que pour que ces deux points soient interpolables par une hélice, il faut et il suffit que les deux points soient dans le plan orthogonal à la différence des vecteurs tangents. Donc pour satisfaire cette condition, notons  $p'_0$  et  $p'_1$  les deux points déplacés de sorte qu'ils satisfassent la condition de Ghosh. Nous pouvons donc écrire que  $p'_1$  est l'image de  $p'_0$  par une translation de vecteur contenu dans le plan vectoriel ortho-

gonal à  $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0$ . Si nous notons  $(\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1)$  une base de ce plan, nous pouvons écrire alors

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_0 + \alpha_0 \mathbf{d}_0 + \alpha_1 \mathbf{d}_1$$

avec  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  deux scalaires. Si nous notons  $D$  la matrice

$$\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{d}_0 & \mathbf{d}_1 \\ | & | \end{pmatrix}$$

et  $\mathbf{a}$  le vecteur  $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ , alors nous pouvons écrire

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_0 + D\mathbf{a}.$$

On retrouve une profonde similarité avec le cas du plan, et en effet, nous obtenons un problème de minimisation en 3d qui est du même type que celui en 2d, et que nous pouvons alors résoudre là aussi à l'aide d'un système linéaire.

#### 4.4.3 Cas de $N + 1$ points en 3d

Nous considérons maintenant  $N + 1$  points  $p_0, \dots, p_N$ , munis de leurs vecteurs tangents respectifs  $\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_N$ . Notons  $p'_0, \dots, p'_N$  les points déplacés de sorte que chaque couple de points successifs satisfasse la condition de Ghosh. Ainsi, d'après ce que nous avons vu précédemment, nous pourrions écrire, pour chaque couple de points successifs  $p'_i$  et  $p'_{i+1}$ ,

$$\mathbf{p}'_{i+1} = \mathbf{p}'_i + D_i \mathbf{a}_i$$

avec  $D_i$  la matrice construite à partir d'une base  $(\mathbf{d}_{i,0}, \mathbf{d}_{i,1})$  du plan orthogonal à  $\mathbf{t}_{i+1} - \mathbf{t}_i$  telle que

$$D_i = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{d}_{i,0} & \mathbf{d}_{i,1} \\ | & | \end{pmatrix}$$

et  $\mathbf{a}_i$  un vecteur  $\begin{pmatrix} \alpha_{i,0} \\ \alpha_{i,1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On peut alors remplacer dans cette équation  $\mathbf{p}'_i$  par son expression, en fonction de  $p_{i-1}$ , et

remonter par récurrence jusqu'au point  $p'_0$ , ce qui nous donne, pour tout point  $p'_i$

$$p'_i = p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} D_j \mathbf{a}_j.$$

Le problème de minimisation devient alors

$$\min_{p'_0, \mathcal{A}} \sum_{i=0}^N \|p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} D_j \mathbf{a}_j - p_0\|^2,$$

avec  $\mathcal{A}$  l'ensemble des coefficients  $\alpha_{i,0}$  et  $\alpha_{i,1}$ . Comme dans le cas d'une unique hélice, la fonction objectif

$$f(p'_0, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^N \|p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} D_j \mathbf{a}_j - p_0\|^2$$

est une fonction quadratique convexe. Donc, résoudre ce problème revient à chercher la racine de son gradient qui est une fonction affine. Il s'agit donc d'un problème trivial de résolution d'un système linéaire de rang plein. La construction de ce système est détaillée en annexe [A](#).

#### 4.5 INTERPOLATION DES POINTS ET DES VECTEURS TANGENTS

Nous supposons maintenant que nous avons deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de leurs vecteurs tangents respectifs et qui satisfont la condition de co-hélicité de Ghosh. Nous savons qu'il est donc possible d'interpoler les deux points et les deux vecteurs tangents par une unique hélice. Mais comment pouvons-nous déterminer cette hélice ? Plus précisément, nous connaissons de cette hélice son point de départ avec son vecteur tangent, et un point d'arrivée, avec son vecteur tangent. Comment alors calculer le repère de Frenet au point de départ, la courbure et la torsion de l'hélice ainsi que sa longueur ? Nous verrons dans la démonstration constructive du théorème de Ghosh du chapitre suivant une méthode pour calculer l'hélice interpolante. Dans le but de construire complètement l'algorithme des tangentes flottantes dès ce chapitre, nous résumons ici cette méthode :

1. Poser  $\mathbf{t}_0 = \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \rangle$ .
2. Poser  $\chi = \frac{(1-\mathbf{t}_0)\langle p_1-p_0, \mathbf{t}_1+\mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle p_1-p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}$ .

3. Résoudre  $H(\varphi_*) = -\chi$  sur  $\overset{\circ}{I}_0 = ]\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0[$ , avec

$$H(\varphi) = \frac{(1 - t_0) \sin \varphi + \varphi(t_0 - \cos \varphi)}{(\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2}) \sqrt{t_0 - \cos \varphi}}.$$

4. Calculer  $\bar{\tau} = \text{sign}\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}}$ .
5. Calculer  $\omega = \frac{\sqrt{2(1-t_0)(\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|p_1 - p_0\|}$ .
6. Calculer  $\bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0}(\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + \cot \frac{\varphi_*}{2}(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0))$ .
7. Calculer  $\Omega = \omega \bar{\Omega}$ ,  $\tau = \omega \bar{\tau}$  et  $\kappa = \sqrt{\omega^2 + \tau^2}$ .
8. Calculer  $\mathbf{b}_0 = \frac{1}{\kappa}(\Omega - \tau \mathbf{t}_0)$ .
9. Calculer  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{b}_0 \wedge \mathbf{t}_0$ .
10. Calculer  $l = \frac{\varphi_*}{\omega}$ .
11. Renvoyer l'hélice de courbure  $\kappa$ , de torsion  $\tau$ , partant du point  $p_0$  avec le repère de Frenet  $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$  et de longueur  $l$ .

Il est important de donner quelques précisions. D'abord, nous supposons que  $t_0 \in ]-1, 1[$  et que les points  $p_0$  et  $p_1$  sont distincts. Ainsi, toutes les constantes posées ici sont bien formées. De plus, nous verrons dans la démonstration du théorème de Ghosh que l'équation posée au point 3 admet une unique solution, car  $H$  est une bijection strictement croissante de  $\overset{\circ}{I}_0$  sur  $\mathbb{R}$ . Dans la pratique, nous résolvons cette équation avec une simple dichotomie.

## 4.6 RÉSULTATS

Dans cette section, nous allons tester notre algorithme des tangentes flottantes sur plusieurs jeux de données. Dans un premier temps, nous allons l'appliquer à de petits ensembles de courbes synthétiques, et allons le comparer alors à un algorithme d'optimisation. Après avoir introduit la procédure de comparaison, nous donnerons les résultats dans les sous-sections 4.6.2 et 4.6.3. Ensuite, nous appliquerons les tangentes flottantes à de plus gros jeux de données, issus de données réelles capturées automatiquement 4.6.4.

### 4.6.1 Procédure de test

Pour tester notre algorithme et le comparer à une méthode d'optimisation, nous allons mesurer les temps de calcul pour



approcher une spline par chaque algorithme, ce qui nous donnera une comparaison de la rapidité de chaque méthode. De plus, nous allons évaluer la qualité de l'approximation en nous appuyant sur la distance de Fréchet que nous avons déjà évoquée précédemment.

### *Algorithme d'optimisation*

L'algorithme auquel nous allons comparer l'algorithme des tangentes flottantes est un algorithme s'appuyant sur l'optimisation, comme nous pouvons en trouver dans (BERGBOM, MUSETH et ROBLE, 2007) ou dans notre travail préliminaire sur le sujet (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2011). Cet algorithme prend en entrée une spline de Bézier et un nombre  $N$  d'éléments hélicaux pour la courbe approchante. En sortie, il produit une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux constituée de  $N$  hélices. Il procède comme suit

1. Calculer la longueur  $l$  de la spline passée en entrée.
2. Découper la spline en  $N$  morceaux de même longueur pour lesquels on calcule les courbures et torsions moyennes  $\kappa_0 \dots \kappa_{N-1}$  et  $\tau_0 \dots \tau_{N-1}$ .
3. Construire une courbe en hélices par morceaux telle que :
  - chaque élément d'hélice  $h_i$  a pour longueur  $\frac{l}{N}$ , pour courbure  $\kappa_i$  et pour torsion  $\tau_i$ ,
  - le repère de Frenet au point de départ coïncide avec le repère de Frenet au premier point de la spline.
4. Échantillonner régulièrement la spline de Bézier pour obtenir un ensemble de points  $S_0, \dots, S_m$ .
5. Échantillonner régulièrement la courbe en hélices par morceaux pour obtenir un ensemble de points  $H_0, \dots, H_m$ .
6. Minimiser la fonction

$$f(\kappa_0, \dots, \kappa_{N-1}, \tau_0, \dots, \tau_{N-1}) = \sum_{i=0}^m \|H_i - S_i\|^2$$

grâce à l'algorithme classique de Levenberg-Marquardt, très utilisé pour la résolution de problèmes de régression.

### *Distance de Fréchet*

D'un point de vue formel, ALT et GODAU (1995) définissent la distance de Fréchet comme suit : étant donné deux courbes spatiales

$$A : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ et } B : J \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

la distance de Fréchet entre  $A$  et  $B$  est donnée par

$$\delta_F(A, B) = \inf_{\substack{\alpha: [0,1] \rightarrow I \\ \beta: [0,1] \rightarrow J}} \max_{t \in [0,1]} \|A(\alpha(t)) - B(\beta(t))\|$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont continues, strictement croissantes et bijectives. L'avantage de cette mesure de distance entre deux courbes par rapport à une distance couramment utilisée comme la distance de Hausdorff est que la distance de Fréchet prend en compte le sens de parcours des deux courbes. La distance de Hausdorff ne considère les courbes que comme des ensembles de points, ce qui conduit à obtenir des courbes proches pour cette distance alors que les courbes sont visuellement dissemblables (ALT et GODAU, 1995).

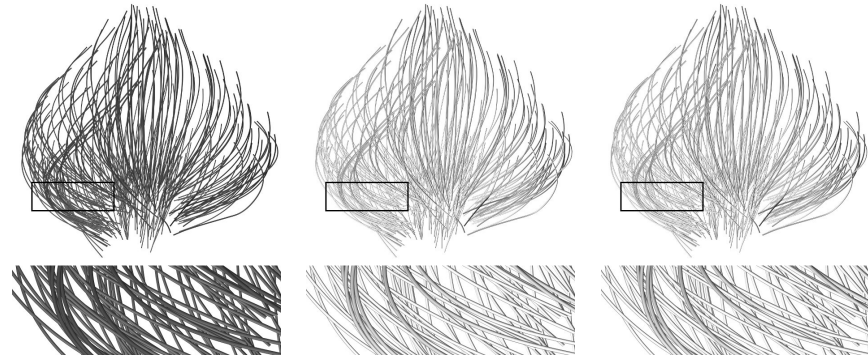
En pratique, nous allons utiliser une variante discrète de la distance de Fréchet, présentée dans (EITER et MANNILA, 1994). Le calcul de cette distance de Fréchet discrète est plus simple que celui de la distance de Fréchet générale et nous apparaît comme une bonne approximation.

### *Jeux de données*

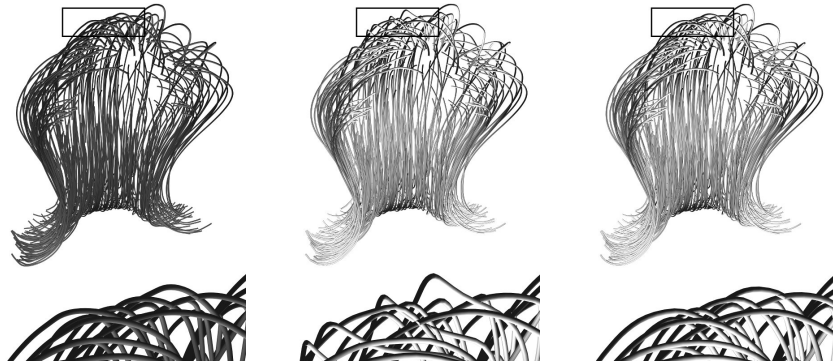
Pour la comparaison, nous allons utiliser trois jeux de données synthétiques. Ces courbes ont été modélées par une artiste, Laurence Boissieux, et représentent des chevelures peu fournies. Ces jeux de données contiennent chacun environ 240 splines qui mesurent toutes environ 30 cm et sont représentés figure 17. Ces jeux de données ont l'avantage de présenter chacun des courbes dont la complexité visuelle s'accroît. Ainsi, nous voyons que les courbes du jeu A sont assez simples, c'est-à-dire qu'elles paraissent presque droites et semblent varier peu. Les courbes du jeu B quant-à-elles semblent un peu plus complexes et présentent des variations un peu plus importantes que celles du jeu A. Enfin, les courbes du jeu C apparaissent plus complexes que celles de deux autres jeux et varient plus. Nous allons maintenant introduire une mesure quantitative qui nous paraît adéquate à la mesure de cette complexité.

### *Complexité d'une courbe*

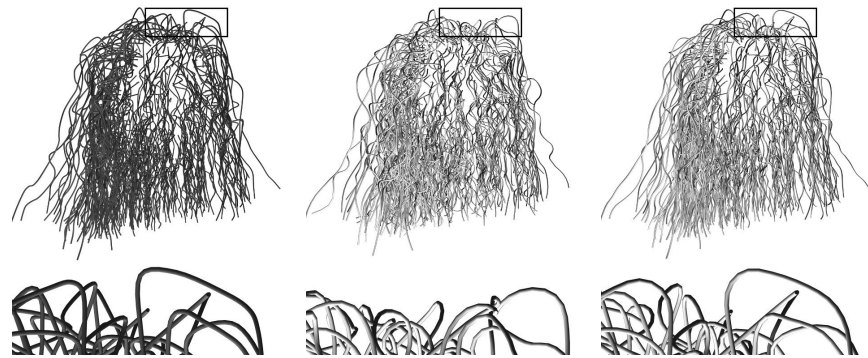
Pour la comparaison entre notre algorithme des tangentes flottantes et l'algorithme d'optimisation présenté plus haut, nous allons introduire la notion de complexité d'une courbe. Il est en effet naturel de poser qu'une courbe présentant de nombreuses boucles est plus complexe qu'une courbe droite. Et dès



(a) Jeu de données A

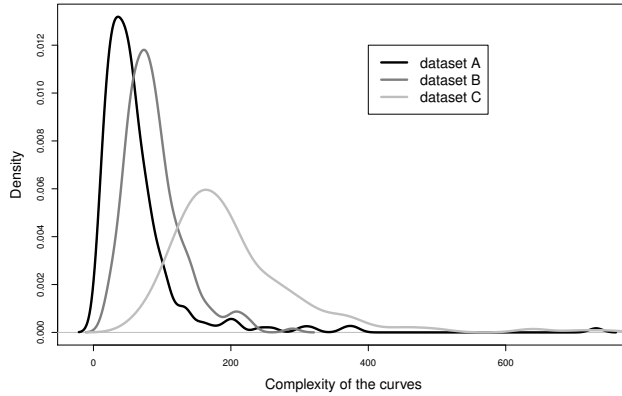


(b) Jeu de données B



(c) Jeu de données C

**Figure 17:** En noir, à gauche les 3 jeux de données A, B et C. En gris, les résultats de l'approximation par, au milieu l'algorithme d'optimisation et à gauche par notre algorithme des tangentes flottantes. Ces résultats sont obtenus pour un nombre d'éléments hélicaux  $N = 15$ .



**Figure 18:** *Distribution de la complexité des courbes des trois jeux de données synthétiques.*

lors, il paraît raisonnable de supposer que plus une courbe est complexe, plus elle est difficile à approcher. Nous proposons comme première mesure de la complexité d’une courbe  $\Gamma$  la quantité suivante, issue de (LEVIEN, 2008) :

$$C(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Ainsi, munis de cette mesure de la complexité, nous voyons que plus une courbe est incurvée et entortillée, plus sa complexité est grande, ce qui correspond à notre intuition. En utilisant cette mesure, nous pouvons classer les trois jeux de données synthétiques que nous avons présentés précédemment. Figure 18, nous représentons les distributions des complexités de chaque courbe pour les trois jeux de données. Nous constatons alors ce que l’intuition nous laissait voir : plus les courbes semblent visuellement complexes, plus cette mesure de complexité est élevée. Nous en concluons que cette mesure de complexité est en adéquation avec l’aspect visuel de la complexité d’une courbe.

#### 4.6.2 Qualité de l’approximation

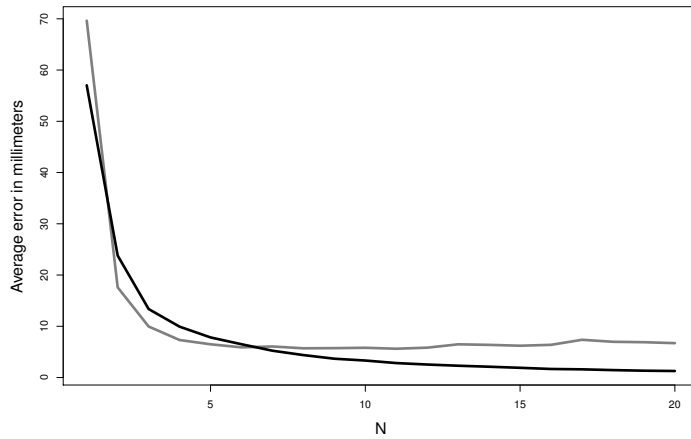
Nous pouvons voir figure 17 les résultats de l’application de notre algorithme des tangentes flottantes et de l’algorithme d’optimisation sur les trois jeux de données. Nous avons passé comme argument aux deux algorithmes un nombre  $N = 15$  d’éléments hélicaux par courbe approchante. Visuellement, nous constatons que la précision de l’algorithme des tangentes

flottantes est meilleure que celle de l'algorithme fondé sur l'optimisation, particulièrement lorsque la complexité des courbes augmente.

Nous avons représenté en figure 19 l'évolution de l'erreur moyenne commise par les deux algorithmes sur l'ensemble des trois jeux de données lorsque le nombre d'éléments hélicaux par courbe approchante augmente. Ce que nous constatons alors, c'est que pour les deux algorithmes, l'erreur moyenne décroît à mesure que le nombre d'arcs augmente, ce qui rend l'approximation consistante. En effet, le seul paramètre permettant de contrôler l'approximation est le nombre d'éléments hélicaux constituant la courbe en hélices par morceaux approchante. Il est donc important que ce paramètre permette de contrôler la précision de l'approximation. De plus, intuitivement, il est raisonnable d'attendre d'une approximation qu'elle soit plus précise lorsque le nombre de degrés de libertés de cette approximation augmente. La figure 19 nous permet en outre de constater que pour ces trois jeux de données, l'algorithme des tangentes flottantes est en effet plus précis que l'algorithme d'optimisation dès que le nombre d'éléments hélicaux dépasse 6.

#### 4.6.3 Temps de calcul

Nous avons représenté figure 20 les temps de calcul en secondes des deux algorithmes pour chaque courbe des trois jeux de données par rapport à la complexité de la courbe, pour  $N = 10$  et  $N = 15$  éléments hélicaux. Ces mesures ont été réalisées sur un ordinateur de bureau muni d'un processeur Intel Xeon W3520 cadencé à 2.67 GHz, dont nous n'avons utilisé qu'un seul cœur. Nous constatons immédiatement les comportements différents des deux algorithmes. En effet, notre algorithme des tangentes flottantes produit toutes les approximations avec le même temps de calcul, quelle que soit la complexité de la spline de Bézier en entrée. Ainsi, nous concluons que la complexité de la spline de départ n'a pas d'influence sur le temps de calcul de l'algorithme des tangentes flottantes. Dans le cas de l'algorithme fondé sur l'optimisation, les résultats sont tout autres. Il apparaît que le comportement de cet algorithme est de plus en plus difficile à prévoir à mesure que la complexité de la courbe en entrée augmente. Nous voyons que plus cette complexité augmente, plus cet algorithme risque de demander un temps important pour approcher la courbe comme nous pouvons le constater Table 1 où nous donnons

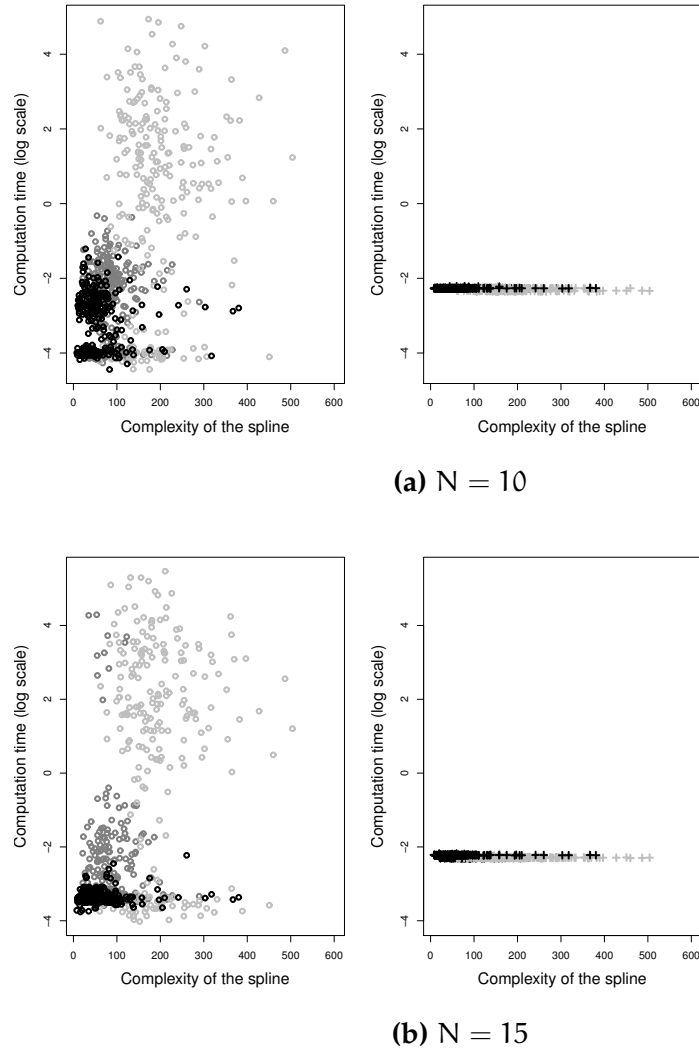


(a) Comparaison entre la précision de notre algorithme des tangentes flottantes (en noir) et celle de l'algorithme d'optimisation (en gris) mesurée à l'aide de la distance de Fréchet entre la spline en entrée et la courbe en hélice par morceaux approchante en fonction du nombre d'éléments.

		Optimisation	Tangentes flottantes
N = 10	dist. moy.	5.8	<b>3.3</b>
	dist. max.	44	<b>31</b>
N = 15	dist. moy.	6.2	<b>1.9</b>
	dist. max.	74	<b>12</b>

(b) Distance de Fréchet moyenne et maximale, mesurée en millimètres pour chaque algorithme appliqué sur les trois jeux de données, avec  $N = 10$  et  $N = 15$  éléments.

**Figure 19:** Mesure de la précision de chaque algorithme appliqué aux trois jeux de données A, B et C représentés figure 17.



**Figure 20:** Temps de calcul (exprimés ici en secondes) de l'algorithme fondé sur l'optimisation (à gauche) comparé à notre algorithme des tangentes flottantes (à droite), appliqués au trois jeux de données, A en noir, B en gris foncé et C en gris clair, en fonction de la complexité de la courbe en entrée. Il est notable que notre algorithme des tangentes flottantes ne soit pas sensible à la complexité de la courbe en entrée, contrairement à l'algorithme d'optimisation.

		Jeu A	Jeu B	Jeu C
N = 10	Optimisation	13	27.8	2246
	<b>Tangentes flottantes</b>	<b>24.9</b>	<b>24.9</b>	<b>23.6</b>
N = 15	Optimisation	8.7	370	4358
	<b>Tangentes flottantes</b>	<b>26</b>	<b>24.3</b>	<b>24</b>

**Table 1:** Temps de calcul total (en secondes) pour notre algorithme des tangentes flottantes comparé à l'algorithme d'optimisation appliqués aux trois jeux de données A, B et C avec  $N = 10$  et  $N = 15$  éléments hélicaux par courbe approchante.

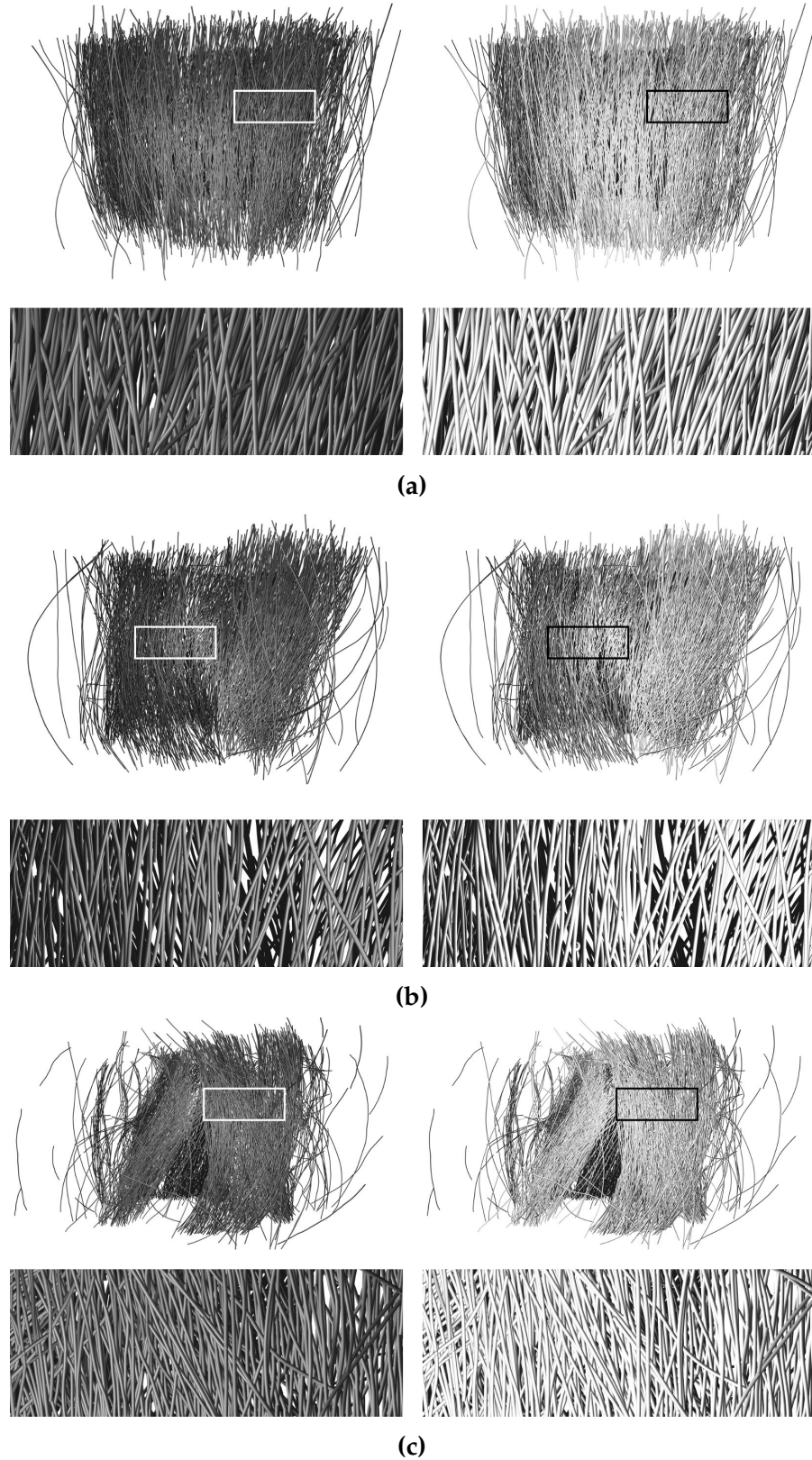
les temps de calcul totaux pour chaque algorithme appliqué à chaque jeu de données.

#### 4.6.4 De plus gros jeux de données

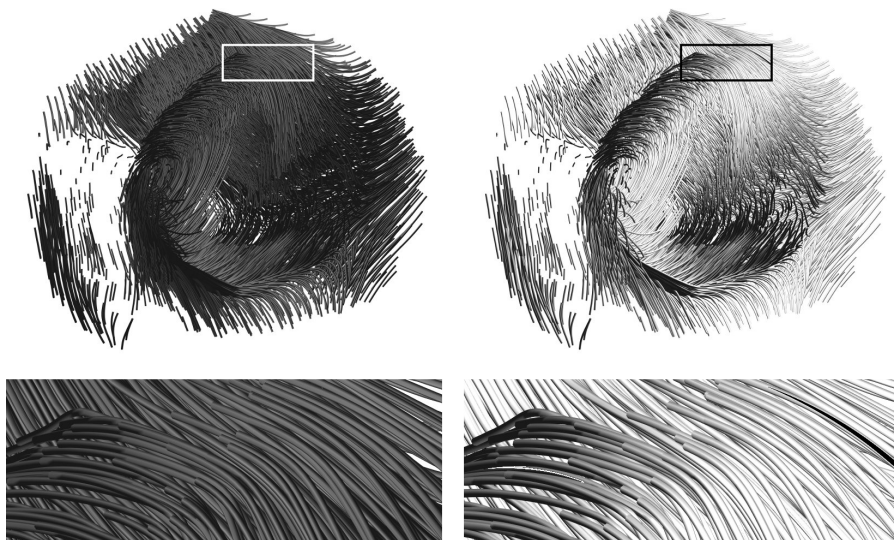
Nous allons maintenant appliquer l'algorithme des tangentes flottantes à d'autres jeux de données, plus complexes et plus volumineux que les trois précédents. Nous n'allons pas ici nous comparer à l'algorithme d'optimisation, car les jeux de données utilisés ici sont trop gros et demanderaient un temps de calcul à l'algorithme d'optimisation trop grand. Nous allons donc nous contenter de mesurer la qualité de notre algorithme appliqué ici à des jeux de données issus d'applications réelles. Nous allons utiliser des données issues de la capture de tranches de mèches de cheveux, 3 jeux de données représentés figure 21, tirées de (JAKOB, MOON et MARSCHNER, 2009), des courbes représentant les fibres musculaires du cœur, jeu de données représenté figure 22, tirées de (ROHMER, SITEK et GULLBERG, 2007) et enfin les lignes du champ magnétique d'une étoile, jeu de données représenté figure 23, obtenue par simulation dans (BROWN et al., 2011).

Les courbes contenues dans ces trois jeux de données sont représentées par des suites de points 3d. Nous utilisons donc l'algorithme de conversion de telles suites de points par des splines de Bézier, adaptation à la 3d d'un algorithme présenté dans (SCHNEIDER, 1990) et utilisé dans le logiciel de dessin vectoriel Inkscape (GOULD et al., 2003). De plus, à cause de la grande variation en longueur des courbes de chaque jeu de données, nous avons décidé pour chaque spline d'adapter le nombre d'éléments hélicaux utilisés par chaque courbe approchante en fonction de la longueur de la courbe d'entrée. Nous

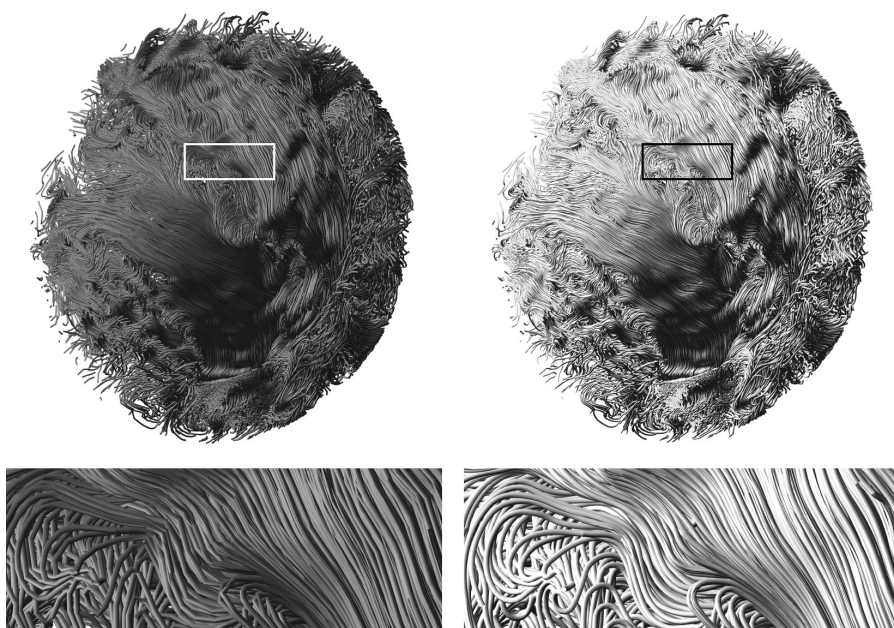




**Figure 21:** Notre algorithme des tangentes flottantes (à droite) appliqué à des captures de cheveux (environ 2000 courbes) tirées de (JAKOB, MOON et MARSCHNER, 2009) (à gauche).



**Figure 22:** Notre algorithme des tangentes flottantes (à droite) appliqué à des fibres musculaires du cœur (environ 3000 courbes) tirées de (ROHMER, SITEK et GULLBERG, 2007).



**Figure 23:** Notre algorithme des tangentes flottantes appliqué au résultat de la simulation du champ magnétique d'une étoile (environ 9000 courbes) tiré de (BROWN et al., 2011).

	Jeu 21a	Jeu 21b	Jeu 21c	Jeu 22	Jeu 23
erreur moyenne	0.03%	0.03%	0.03%	0.15%	0.34%
erreur maximale	1.3%	1.3%	3.5%	3%	3.8%
temps calcul moyen	0.39	0.45	0.31	0.03	0.35
temps calcul max.	1.71	1.71	0.57	1.28	13.28
temps calcul total	950	690	630	160	3080

**Table 2:** Erreurs moyenne et maximale (rapporté à la taille de la scène) de notre algorithme des tangentes flottantes et temps de calcul moyen, maximal et total en secondes, pour les 5 jeux de données présentés figures 21a, 21b, 21c, 22, et 23.

	Jeu 21a	Jeu 21b	Jeu 21c	Jeu 22	Jeu 23
Lissage	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 2 \times 10^{-3}$	$\approx 3 \times 10^{-3}$
Échantillonnage	1.71	1.71	0.57	1.27	13.22
Relaxation des points	$\approx 2 \times 10^{-4}$	$\approx 10^{-4}$	$\approx 10^{-4}$	$\approx 8 \times 10^{-3}$	0.064
Interpolation	$\approx 3 \times 10^{-4}$	$\approx 3 \times 10^{-4}$	$\approx 3 \times 10^{-4}$	0.096	0.02

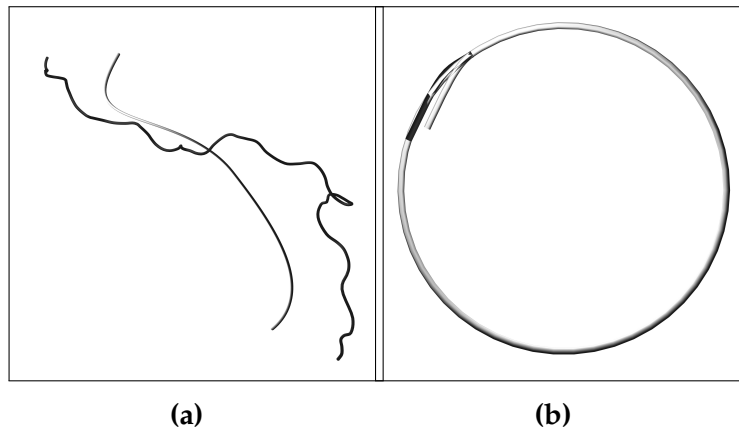
**Table 3:** Temps de calcul maximal en secondes pour chaque étape de notre algorithme appliqué aux 5 jeux de données des figures 21a, 21b, 21c, 22, et 23.

avons choisi de 5 à 20 éléments pour les 3 captures de cheveux de la figure 21, de 2 à 100 éléments pour les fibres musculaires du cœur de la figure 22 et enfin de 2 à 200 éléments pour le champ magnétique représenté figure 23.

Les résultats de notre algorithme sont reportés Table 2. Comme nous pouvons le constater, la qualité de l'approximation est très satisfaisante, la courbe approchante en sortie étant toujours assez proche de la spline en entrée. En ce qui concerne le temps de calcul, nous constatons qu'il reste tout à fait raisonnable, même pour le jeu de données correspondant au champ magnétique, qui contient environ 9000 courbes pour certaines longues et complexes, et qui ne requiert environ qu'une heure de calcul pour être complètement approché. Nous pouvons donc en conclure que notre algorithme des tangentes flottantes passe très bien à l'échelle de grands jeux de données issus de données réelles.

#### 4.6.5 Limitations

Table 3, nous reportons les temps de calculs de chaque grande étape de l'algorithme des tangentes flottantes appliqué à chaque grand jeu de données, de l'approximation de la sé-



**Figure 24:** Cas dégénérés, résultats d'un mauvais choix du nombre d'éléments. À gauche, la courbe approchante (en gris) a trop peu d'éléments pour approcher la spline en entrée (en noir). À droite, la courbe approchante (en gris) a trop d'éléments alors que la courbe en entrée (en noir) est très courte.

quence de points par une spline de Bézier à l'interpolation des points de rupture pour reconstruire les hélices. Nous constatons que l'étape la plus coûteuse en temps de calcul est l'étape de découpage de la spline pour obtenir les points de rupture. Tout ce qui concerne le cœur des tangentes flottantes, le déplacement des points et l'interpolation des points déplacés avec leurs vecteurs tangents respectifs est très rapide par rapport à cette étape. Nous n'avons pas cherché à optimiser le temps de calcul de notre algorithme, et en particulier du découpage de la spline. Nous pensons donc qu'il reste du travail à accomplir pour rendre l'algorithme des tangentes flottantes encore plus rapide.

De plus, lorsque le nombre d'éléments d'hélice est mal choisi, s'il est trop petit ou trop grand, nous rencontrons des cas où l'approximation est dégénérée. Ces cas sont représentés figure 24. Dans le cas où la courbe est longue et complexe, un trop petit nombre d'éléments d'hélice empêche de capturer la géométrie globale de la courbe en entrée, voir figure 24a. Dans le cas où la courbe en entrée est courte et que le nombre d'éléments d'hélice est trop grand, il arrive qu'un phénomène d'inversion des points par rapport à leur vecteur tangent arrive et conduise à l'apparition de longues boucles à la place d'arcs courts, voir figure 24b.

#### 4.7 CONCLUSION

En dépit de ces cas dégénérés d'approximation, nous pouvons conclure que l'algorithme des tangentes flottantes est robuste et rapide pour approcher des splines de Bézier par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux et pouvait être appliqué à de grands jeux de données.

Il reste néanmoins des points que nous pensons être améliorables. Par exemple, nous avons vu que l'étape de découpage de la spline était la plus coûteuse. Il y a là nous pensons un point à étudier. Par exemple, nous sur-échantillons la spline pour pouvoir la découper. Il est possible qu'il faille trouver ici un nombre de points plus adapté à la spline pour limiter le temps d'évaluation de ces points. Il est aussi possible qu'il faille adopter une autre approche, en paramétrant la spline par son abscisse curviligne par exemple.

De plus, comme notre algorithme prend en entrée, en plus de la spline à approcher, le nombre d'éléments hélicaux à utiliser, il est difficile de contrôler l'erreur commise. Or il nous semble important de permettre à l'utilisateur d'avoir un minimum de contrôle cette erreur. Un développement possible de l'algorithme des tangentes flottantes serait donc de fournir une méthode pour déterminer le nombre d'éléments hélicaux nécessaires pour approcher la courbe en entrée en restant sous une erreur fixée. Nous avons constaté expérimentalement (voir figure 19(a)) que l'erreur décroissait à mesure que le nombre d'éléments hélicaux grandissait. Malheureusement, nous n'avons pas à l'heure actuelle de résultats théoriques pour garantir cette monotonie dans les cas non dégénérés.

## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GHOSH

---

Dans ce chapitre, nous allons donner les étapes importantes permettant la démonstration du théorème de Ghosh. En particulier, nous allons insister sur les points qui comblent les lacunes de la propre démonstration de Ghosh et qui assurent le bon fonctionnement de l'algorithme d'interpolation dans tous les cas possibles. Nous invitons le lecteur à consulter l'annexe F pour la démonstration complète du théorème de Ghosh.

Cette démonstration, comme nous allons le voir, est constructive, c'est-à-dire qu'elle ne se contente pas de démontrer l'existence et l'unicité de l'hélice courte interpolante, mais donne aussi un algorithme permettant de calculer les paramètres de cette hélice. Dans ce chapitre, nous laissons volontairement de côté le caractère nécessaire de la condition de Ghosh, qui est assez trivial et démontré en annexe.

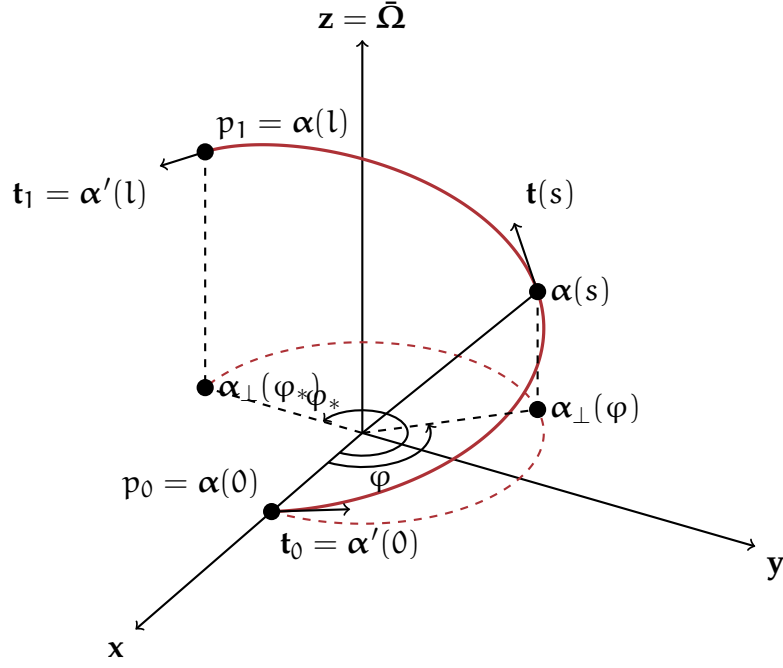
Nous démontrons donc ici le caractère suffisant de cette condition et procédons pour cela à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, grâce à un lemme équivalent au théorème de Ghosh qui nous permet d'assurer les deux phases d'analyse et de synthèse.

### 5.0.1 Équation d'une hélice

À la manière de Ghosh, nous commençons par écrire l'équation d'une hélice et de son vecteur tangent dans un repère adapté, construit à partir de du vecteur tangent au point de départ et du vecteur de Darboux  $\mathbf{\Omega}$ , qui est uniforme et parallèle à l'axe de l'hélice. Contrairement à Ghosh, nous nous appuyons sur la définition traditionnelle du vecteur de Darboux, ce qui nous conduit aux équations  $\alpha$  de l'hélice et  $\mathbf{t}$  de son vecteur tangent :

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= p_0 + \bar{\tau}s\bar{\mathbf{\Omega}} + C(s)(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\mathbf{\Omega}}) - S(s)(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}) \\ \mathbf{t}(s) &= \mathbf{t}_0 + (\cos \omega s - 1)(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\mathbf{\Omega}}) - \sin \omega s(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}),\end{aligned}$$

où  $p_0$  et  $\mathbf{t}_0$  sont respectivement le point et le vecteur tangent de départ de l'hélice,  $\mathbf{\Omega}$  son vecteur de Darboux, dont la norme est notée  $\omega$ , et  $\tau$  sa torsion, avec  $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\omega}$ . Notons que la courbure



**Figure 25:** Hélice courte interpolant les points  $p_0$  et  $p_1$  avec les vecteurs tangents  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ . Notons que l'hélice est courte car la projection dans le plan orthogonal à son axe est un arc de cercle qui ne décrit pas un cercle complet.

de l'hélice, toujours positive par convention, peut être obtenue par  $\kappa = \sqrt{\omega^2 - \tau^2}$ . Enfin, les deux fonctions C et S sont définies, comme dans (GHOSH, 2010), par :

$$C(s) = \int_0^s \cos \varphi(u) \, du = \frac{\sin \omega s}{\omega} = \frac{\sin \varphi}{\omega}$$

$$S(s) = \int_0^s \sin \varphi(u) \, du = \frac{1 - \cos \omega s}{\omega} = \frac{1 - \cos \varphi}{\omega}.$$

Grâce au changement de variable  $\varphi = \omega s$ ,  $\varphi$  étant l'angle azimutal, comme représenté figure 25, nous pouvons enfin écrire :

$$\alpha(\varphi) = p_0 + \tau \frac{\varphi}{\omega} \bar{\Omega} + \frac{\sin \varphi}{\omega} (\mathbf{t}_0 - \tau \bar{\Omega}) - \frac{1 - \cos \varphi}{\omega} (\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega})$$

$$\mathbf{t}(\varphi) = \mathbf{t}_0 + (\cos \varphi - 1)(\mathbf{t}_0 - \tau \bar{\Omega}) - \sin \varphi (\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}),$$

Nous pouvons maintenant, grâce à ces informations donner la définition formelle d'une hélice courte, telle qu'elle se trouvait dans (GHOSH, 2010).

**Définition 1.** Une hélice  $\Gamma$  d'axe normalisé  $\bar{\Omega}$  est une hélice courte lorsque son projeté dans le plan orthogonal à  $\bar{\Omega}$  est un arc de cercle

strict, c'est-à-dire qui ne décrit pas un cercle complet. En considérant l'équation de l'hélice, nous pouvons écrire l'équation de sa projection dans le plan orthogonal à  $\bar{\Omega}$  et nous obtenons

$$\alpha_{\perp}(\varphi) = p_0 + \frac{\sin \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) - \frac{1 - \cos \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega})$$

qui est l'équation d'un cercle (voir figure 25). Il apparait alors que cet arc de cercle est strict lorsque  $\varphi_*$ , l'angle azimutal maximal, défini par  $\varphi_* = \omega l$  où  $l$  est la longueur de l'hélice, vérifie

$$\varphi_* \in [0, 2\pi[.$$

### 5.1 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Maintenant, nous allons utiliser les équations établies auparavant pour démontrer la condition suffisante du théorème de Ghosh. Ce que nous allons donc démontrer est que si deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de leurs vecteurs tangents respectifs  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$  vérifient  $\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle = 0$ , alors il existe une unique hélice courte interpolant les deux points avec les deux vecteurs tangents.

Nous allons procéder par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Nous supposons l'existence de l'hélice courte et caractérisons ses paramètres finement de manière à conclure à son unicité. Ghosh a effectué cette première étape dans sa démonstration, avec néanmoins une caractérisation partielle et erronée du paramètre  $\varphi_*$ .
- **Synthèse** : Nous construisons une hélice à partir de la caractérisation des paramètres obtenue en analyse pour montrer que l'hélice interpole bien les deux points et les deux vecteurs tangents. Cette étape, qui est importante et qui démontre l'existence de l'hélice interpolante, est absente de la thèse de Ghosh.

L'étape de synthèse est indispensable dans un raisonnement par analyse-synthèse. Considérons l'exemple suivant, volontairement simpliste afin d'expliquer la démarche : Soit  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ . Nous allons chercher tous les vecteurs  $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{e}_0 + \alpha\mathbf{e}_1$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{e}_1$ .

- **Analyse** Supposons l'existence d'un vecteur  $\mathbf{v}_{\alpha}$  tel que  $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{e}_1$ . Alors on a  $\|\mathbf{v}_{\alpha}\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2$ , soit  $1 + \alpha^2 = 1$  d'où nous déduisons immédiatement  $\alpha = 0$ . L'analyse nous montre qu'un seul vecteur peut vérifier  $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{e}_1$ . Il est donné par  $\alpha = 0$ .



- **Synthèse** Soit  $\alpha = 0$ . Alors, par définition,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_0$  et comme  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{e}_1$ . Par conséquent,  $\mathbf{v}_0$  ne peut pas être égal à  $\mathbf{e}_1$  et donc la synthèse nous permet de conclure qu'il n'existe aucun vecteur  $\mathbf{v}_\alpha$  tel que  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{e}_1$ .

Sans l'étape de la synthèse, nous aurions prouvé que  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1$  ce qui est impossible. Bien sûr, l'exemple choisi est grossier et il aurait été évident pour le lecteur qu'aucun  $\alpha$  vérifiait l'égalité. Dans le cas du théorème de Ghosh, le résultat est bien moins évident et il est nécessaire de suivre scrupuleusement le raisonnement par analyse-synthèse afin de ne pas commettre d'erreur de raisonnement. Avant d'effectuer ces deux étapes, posons le lemme suivant, absent de la démonstration de Ghosh, et qui joue un rôle important dans notre raisonnement :

**Lemme 1.** *Soit deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de deux vecteurs tangents unitaires  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ . Il existe une unique hélice courte interpolant les deux points et les deux vecteurs tangents si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega |\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = -\frac{\sqrt{2}(1-t_0)}{1-\cos \varphi_*} D(\varphi_*) \\ \omega \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2}{1-\cos \varphi_*} N(\varphi_*) \\ \bar{\tau} = \text{sign} \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1-\cos \varphi_*}} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2}) (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)) \\ \varphi_* \in I_0, \end{array} \right. \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} t_0 &= \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \rangle \\ N(\varphi) &= (1 - t_0) \sin \varphi + \varphi (t_0 - \cos \varphi) \\ D(\varphi) &= (\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2}) \sqrt{t_0 - \cos \varphi} \\ I_0 &= [\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0]. \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme.* La démonstration du lemme suit les pas de l'analyse présente dans la démonstration de Ghosh, en prenant bien soin de conserver l'équivalence. Nous donnons les détails en annexe F.  $\square$

### 5.1.1 Analyse

Pour la phase d'analyse, prenons deux points  $p_0$  et  $p_1$  ainsi que deux vecteurs tangents  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$  satisfaisant la condition de Ghosh, c'est-à-dire tels que :

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle = 0.$$

Supposons qu'une hélice courte interpole les deux points et les vecteurs tangents. D'après le lemme 1, les paramètres de cette hélice vérifient donc la condition (6) du lemme 1.

D'ici, nous allons développer et calculer la valeur nécessaire de  $\omega$  puis obtenir une condition plus précise sur  $\varphi_*$ . Pour calculer  $\omega$ , considérons

$$\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0 \rangle = \langle \gamma(\varphi_*), \gamma(\varphi_*) \rangle,$$

où  $\gamma(\varphi_*) = \alpha(\varphi_*) - \alpha(0) = p_1 - p_0$ . Il nous paraît important de signaler ici que nous ne pouvons plus raisonner en termes d'équivalence, comme semble le faire Ghosh par erreur dans sa démonstration. En effet, le fait que  $\gamma(\varphi_*)$  soit égal à  $p_1 - p_0$  implique mais n'est pas équivalent à l'égalité de leurs normes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi un raisonnement par analyse-synthèse.

En remplaçant  $\gamma(\varphi_*)$  par son expression, nous obtenons

$$\|p_1 - p_0\|^2 = \frac{1}{\omega^2} \left[ 2(1 - t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2 \right]$$

et puisque  $\omega$  est positif,

$$\omega = \frac{\sqrt{2(1 - t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|p_1 - p_0\|}.$$

Dans le but de caractériser précisément  $\varphi_*$ , considérons les deux premières équations de la condition (6).

Laissons en annexe le cas

$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = 0,$$

qui signifie que  $D(\varphi_*)$  est nul. Le second cas est donné par

$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \neq 0.$$

Dans ce cas, nous pouvons calculer le quotient des deux premières lignes et nous obtenons

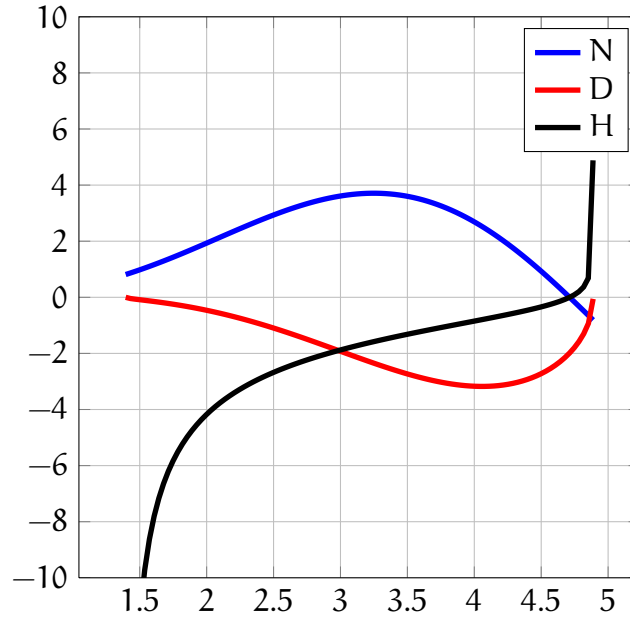
$$\frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\frac{(1 - t_0)\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}.$$

Introduisons sans plus attendre la fonction  $H$  telle que

$$H(\varphi_*) = \frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\chi$$

avec

$$\chi = \frac{(1 - t_0)\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}$$



**Figure 26:** Représentation des fonctions  $N$ ,  $D$  et  $H$  pour  $t_0 = 0.175$ . On remarque que  $D$  ne semble s'annuler qu'aux bornes de  $I_0$ .

qui est une constante bien définie et qui ne dépend que des données initiales du problème, c'est-à-dire de  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $t_0$  et  $t_1$ . Cette fonction est l'inverse de la fonction  $H$  introduite par Ghosh dans sa démonstration (GHOSH, 2010). L'avantage de choisir  $H$  telle que nous l'avons fait est qu'elle est continue et dérivable sur l'intérieur de  $I_0$ . Nous démontrons en section 5.1.3, dans le corollaire 1 au lemme 2, que l'équation

$$H(\varphi_*) = -\chi$$

admet une unique solution. Comme illustré figure 26 pour  $t_0 = 0.175$ ,  $H$  est en effet strictement croissante et est une surjection sur  $\mathbb{R}$ . Ghosh a restreint le domaine d'étude de sa fonction  $H$  à l'intervalle

$$I_G = [\arccos t_0, \pi] \subsetneq I_0$$

et a commis de surcroît une erreur de signe. Notre démonstration est plus générale et donne le résultat d'existence et d'unicité sur l'intervalle  $I_0$ . Elle permet d'affirmer que  $\varphi_*$  est unique, et donc que les autres paramètres de l'hélice le sont aussi. Ainsi, nous avons montré que l'hélice interpolante est unique.

## 5.1.2 Synthèse

L'analyse ayant conclu à l'unicité de l'hélice courte, nous allons maintenant utiliser la caractérisation des paramètres pour conclure à son existence. Prenons donc deux points et deux vecteurs tangents vérifiant la condition de Ghosh. Laissons en annexe le cas

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = 0$$

et posons l'hélice courte dont les paramètres vérifient

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \text{sign}\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \omega = \frac{\sqrt{2(1-t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2})(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)) \\ H(\varphi_*) = -\chi \end{cases}$$

Ce que nous devons faire maintenant, c'est montrer que cette hélice interpole les deux points et les deux vecteurs tangents. Pour cela, nous allons montrer que cette hélice satisfait le lemme 1, ce qui nous permettra de conclure.

D'après l'égalité  $H(\varphi_*) = -\chi$ , nous avons

$$\frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\frac{(1-t_0)\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}$$

que nous réécrivons

$$\frac{\frac{2}{1-\cos \varphi_*} N(\varphi_*)}{\frac{\sqrt{2}(1-t_0)}{1-\cos \varphi_*} D(\varphi_*)} = -\frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}.$$

Nous en déduisons alors immédiatement qu'il existe un réel strictement positif  $\mu$  tel que

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2\mu}{1 - \cos \varphi_*} N(\varphi_*)$$

et

$$|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = -\mu \frac{\sqrt{2}(1-t_0)}{1 - \cos \varphi_*} D(\varphi_*).$$

En exprimant  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$  dans une base bien choisie proposée initialement par Ghosh (GHOSH, 2010) et donnée en annexe, nous avons

$$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|^2 = \frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle^2}{1 - t_0^2} + \frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle^2}{2(1 + t_0)}.$$

En développant, et en remplaçant  $\bar{\tau}^2$  par son expression, nous obtenons

$$\|p_1 - p_0\|^2 = \mu^2(2(1 - t_0) + \varphi_*^2 \bar{\tau}^2),$$

et puisque  $\mu$  est positif,

$$\mu = \frac{1}{\omega}.$$

Ainsi, puisque l'hélice satisfait les conditions du lemme, nous pouvons affirmer qu'elle interpole les points  $p_0$  et  $p_1$  avec pour vecteurs tangents respectifs  $t_0$  et  $t_1$ .

### 5.1.3 Étude de H

Dans cette sous-section, nous allons étudier les variations sur l'intervalle  $I_0$  de la fonction H définie précédemment. Cette étude est initiée dans la thèse de Ghosh, mais restreinte à un intervalle plus petit et avec de surcroît une erreur de signe. L'étude que nous proposons ci-dessous est nouvelle (nous étudions l'inverse de la fonction étudiée par Ghosh) et complète.

**Lemme 2** (Variations de H). *La fonction H définie sur l'intérieur de  $I_0$  par*

$$H(\varphi) = \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)}$$

*est strictement croissante et telle que*

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) &= -\infty \\ \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) &= +\infty. \end{aligned}$$

**Corollaire 1.** *Pour tout  $\chi \in \mathbb{R}$ , l'équation*

$$H(\varphi) = \chi$$

*admet une unique solution sur l'intérieur de  $I_0$ .*

*Démonstration du corollaire.* La fonction H est continue, et le lemme précédent associé au théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que  $H(\overset{\circ}{I}_0) = \mathbb{R}$ . De plus, la fonction H étant strictement croissante, elle est une injection de  $\overset{\circ}{I}_0$  dans  $\mathbb{R}$ . □

*Démonstration du lemme.* Ce que nous devons démontrer, c'est que pour chaque valeur de  $t_0$ , la fonction  $H$  est strictement croissante et que

$$\lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) = -\infty$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) = +\infty.$$

Soit donc  $t_0 \in ]-1, 1[$ . Nous avons alors

$$N(\arccos t_0) = (1 - t_0)\sqrt{1 - t_0^2} > 0$$

$$N(2\pi - \arccos t_0) = -(1 - t_0)\sqrt{1 - t_0^2} < 0,$$

et (voir annexe F)

$$D(\arccos t_0) = 0$$

$$D(2\pi - \arccos t_0) = 0$$

$$D(\varphi) < 0 \quad \forall \varphi \in ]\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0[$$

d'où nous déduisons

$$\lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)} = -\infty$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)} = +\infty.$$

Pour prouver que  $H$  est strictement croissante, comme  $H$  est dérivable sur l'intérieur de  $I_0$ , nous allons montrer que le signe de sa dérivée est strictement positif sur l'intérieur de  $I_0$  comme illustré figure 27 pour  $t_0 = 0.175$ .

Par le calcul, et en factorisant à la manière de Ghosh, nous pouvons écrire pour tout  $\varphi \in \overset{\circ}{I}_0$ ,

$$H'(\varphi) = -\frac{(1 + t_0) \sin \frac{\varphi}{2}}{2D^2(\varphi)\sqrt{t_0 - \cos \varphi}} (h_0(\varphi)t_0 + h_1(\varphi))$$

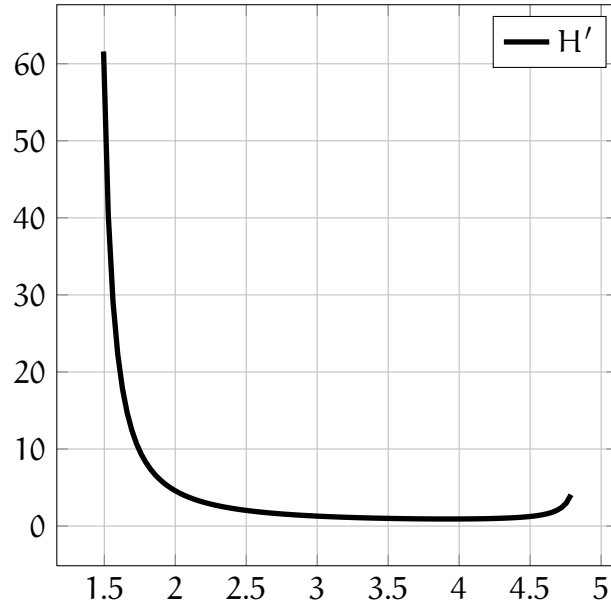
avec

$$h_0(\varphi) = 4 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi$$

$$h_1(\varphi) = -1 + \cos 2\varphi + \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi.$$

Il est facile de voir que nous avons

$$-\frac{(1 + t_0) \sin \frac{\varphi}{2}}{2D^2(\varphi)\sqrt{t_0 - \cos \varphi}} < 0,$$



**Figure 27:** Représentation de la fonction  $H'$  pour  $t_0 = 0.175$ . On remarque que cette fonction est positive sur  $I_0$ .

donc l'étude du signe de  $H'$  pour toute valeur de  $t_0$  se ramène à l'étude du signe de la fonction de deux variables définie par :

$$F(t, \varphi) = h_0(\varphi)t + h_1(\varphi),$$

sur le domaine

$$\mathcal{E} = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi \in [\arccos t, 2\pi - \arccos t] \end{array} \right\}.$$

Nous allons démontrer que  $F$  est négative sur l'espace  $\mathcal{E}$ , comme illustré figure 28. L'espace  $\mathcal{E}$  est fermé et borné car

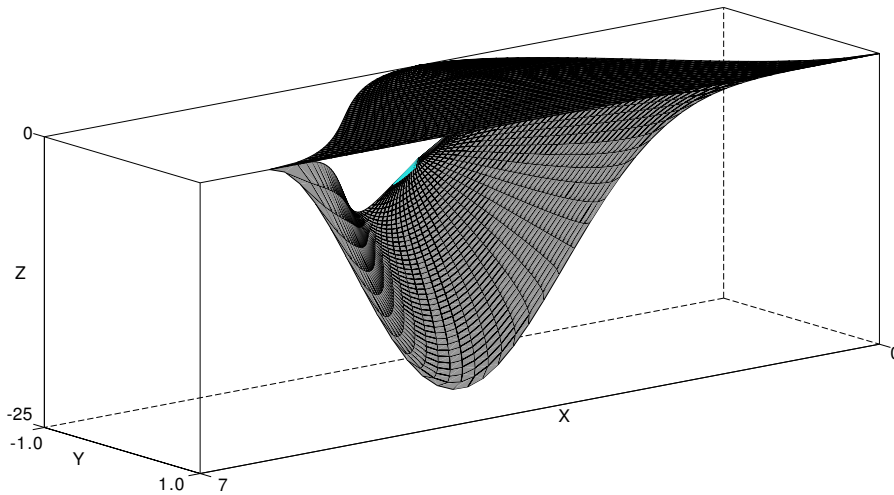
$$\mathcal{E} = f^{-1}([-\infty, 0]) \cap ([-1, 1] \times [0, 2\pi])$$

où  $f$ , définie par

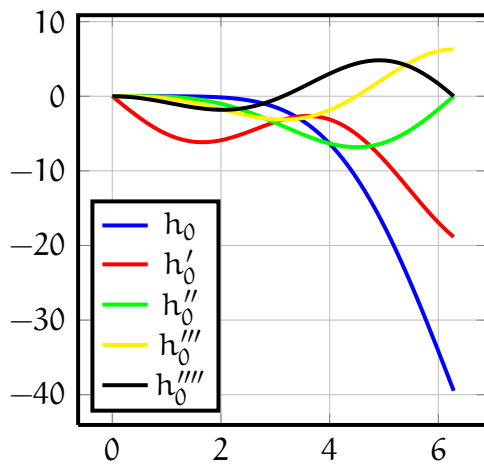
$$f(t, \varphi) = \cos \varphi - t,$$

est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $F$  est une fonction continue sur le compact  $\mathcal{E}$ ,  $F(\mathcal{E})$  est un compact. En particulier,  $F$  atteint son maximum. Dès lors, si  $F$  atteint son maximum sur l'intérieur de  $\mathcal{E}$ , c'est nécessairement en un point critique, puisque son maximum global est alors un maximum local. Calculons le gradient de  $F$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= h_0(\varphi) \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= h'_0(\varphi)t + h'_1(\varphi). \end{aligned}$$



**Figure 28:** Représentation de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et de la fonction  $F$



**Figure 29:** Représentation de  $h_0$  et de ses 4 premières dérivées sur sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

Or,

$$h_0(\varphi) = 4 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi$$

$$h'_0(\varphi) = -2\varphi - \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi$$

$$h''_0(\varphi) = -2 + 2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi$$

$$h'''_0(\varphi) = \varphi \cos \varphi - \sin \varphi$$

$$h''''_0(\varphi) = -\varphi \sin \varphi,$$

et nous pouvons résumer les variations de  $h_0$  dans le tableau 4, où  $\varphi_{\#}$  est tel que  $h'''_0(\varphi_{\#}) = 0$ . Ainsi  $h_0$  est strictement décroissante sur  $[0, 2\pi]$  et nulle en 0 (voir figure 29) d'où nous déduisons que  $h_0$  est strictement négative sur  $]0, 2\pi[$ . Par consé-



$x$	0	$\pi$	$\varphi_{\#}$	$2\pi$
$h_0''''(x)$	-	+	+	
$h_0''''$	0	$-\pi$	0	$2\pi$
$h_0'''$	0			0
$h_0''$	0			$-6\pi$
$h_0'$	0			$-4\pi^2$
$h_0$	0			

**Table 4:** Tableau de variation de la fonction  $h_0$ .  $\varphi_{\#}$  est la racine de  $h_0''''$  comprise entre  $\pi$  et  $2\pi$ .

quent, le gradient de  $F$  ne peut pas s'annuler sur l'intérieur de  $\mathcal{E}$ .

Ainsi,  $F$  atteint son maximum sur le bord de  $\mathcal{E}$  que nous notons

$$\partial\mathcal{E} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$$

où

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi = \arccos t \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi = 2\pi - \arccos t \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t = -1 \\ \varphi \in [\pi, \pi] \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t = 1 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}.$$

Dans la suite de cette démonstration, nous allons étudier  $F$  sur chacun des sous-ensembles  $\mathcal{F}_i$ . Commençons par  $\mathcal{F}_1$ . En remplaçant  $\varphi$  par  $\arccos t$  dans  $F$ , nous avons

$$F_1(t) = (1-t)(-2+2t+\sqrt{1-t^2}\arccos t).$$

Soit

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -2+2t+\sqrt{1-t^2}\arccos t \\ g_1(x) &= -2+2\cos x+x\sin x. \end{aligned}$$

Nous avons

$$f_1(t) = g_1(\arccos t)$$

et nous identifions

$$g_1(x) = h_0''(x).$$

Puisque  $h_0''$  est strictement négative sur  $]0, \pi]$  et nulle en  $0$ , nous pouvons affirmer que  $f_1$  est strictement négative sur  $[-1, 1[$  et s'annule en  $1$  tout comme  $F_1$ .

Étudions maintenant  $F$  sur  $\mathcal{F}_2$ . En remplaçant  $\varphi$  par  $2\pi - \arccos t$  dans  $F$ , nous avons

$$F_2(t) = (1-t)(-2+2t-\sqrt{1-t^2}(2\pi - \arccos t)).$$

Notons

$$\begin{aligned} f_2(t) &= -2+2t-\sqrt{1-t^2}(2\pi - \arccos t) \\ g_2(x) &= -2+2\cos x+x\sin x. \end{aligned}$$

Nous avons

$$f_2(t) = g_2(2\pi - \arccos t)$$

et comme dans le cas précédent, nous pouvons conclure que  $F_2$  est strictement négative sur  $[-1, 1[$  et nulle en  $1$ .

Étudions  $F$  sur  $\mathcal{F}_3$  qui est un singleton. Nous avons trivialement

$$\begin{aligned} F(-1, \pi) &= -4 + \pi^2 + 4\cos \pi + \pi \sin \pi \\ &\quad - 1 + \cos 2\pi + \pi \sin \pi + \pi^2 \cos \pi \\ &= -8 \end{aligned}$$

Enfin, le dernier cas qui nous intéresse est l'étude de  $F$  sur  $\mathcal{F}_4$ . En remplaçant  $t$  par 1 dans  $F$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F_4(\varphi) &= 3 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi + \varphi^2 \cos \varphi \\ &= (\cos 2\varphi - 1) + (4 - \varphi^2)(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi - 1 &= -2 \sin^2 \varphi = -4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= -8 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\cos \varphi + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

et

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

nous écrivons

$$F_4(\varphi) = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (2 - \varphi^2 - 2 \cos \varphi).$$

Soit

$$g_4(\varphi) = 2 - \varphi^2 - 2 \cos \varphi,$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} g_4'(\varphi) &= -2\varphi + 2 \sin(\varphi) = 0 \text{ en } 0 \\ g_4''(\varphi) &= -2 + 2 \cos \varphi < 0 \text{ sur } ]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Donc  $g_4'$  est strictement décroissante sur  $[0, 2\pi]$  et donc négative sur  $]0, 2\pi]$ . Puisque nous avons  $g_4(0) = 0$ ,  $g_4$  est strictement négative sur  $]0, 2\pi]$  et égale à 0 en 0. Il en va de même pour  $F_4$ .

En conclusion, nous avons montré que  $F$  était négative sur  $\partial\mathcal{E}$  et strictement négative sur  $\mathcal{E}$ , d'où nous déduisons

$$\forall t \in ]-1, 1[, \forall \varphi \in \overset{\circ}{I}_0, h_0(\varphi)t_0 + h_1(\varphi) < 0.$$

Dès lors, nous avons

$$\forall t \in ]-1, 1[, \forall \varphi \in \overset{\circ}{I}_0, H'(\varphi) > 0,$$

ce qui permet de conclure que  $H$  est strictement croissante sur  $\overset{\circ}{I}_0$ . □

Voilà qui conclut la démonstration du théorème de Ghosh. Cette démonstration est constructive, dans le sens où elle nous permet de déterminer tous les paramètres de l'hélice interpolante. Notons que nous n'avons pas traité les deux cas particuliers  $\mathbf{t}_0 = \pm \mathbf{t}_1$ . Dans le cas où les deux vecteurs tangents sont égaux, la seule hélice courte possible est ramenée à un point et  $p_0$  et  $p_1$  sont confondus. Dans le cas où  $\mathbf{t}_0 = -\mathbf{t}_1$ , alors nous sommes dans un cas planaire et les deux points et les deux vecteurs tangents peuvent être interpolés trivialement par un arc de cercle.



Deuxième partie

INVERSION



## CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DES SUPER-HÉLICES

---

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au calcul des paramètres du modèle des super-hélices pour une assemblée de fibres en contact frottant dont nous connaissons la géométrie, obtenue grâce à notre algorithme des tangentes flottantes présenté précédemment.

### 6.1 PROBLÈME INVERSE POUR LES SUPER-HÉLICES

Le problème que nous nous posons est la détermination des paramètres physiques d'une assemblée de super-hélices en contact frottant. Plus précisément, nous connaissons la géométrie précise de l'assemblée de fibres, qui sont les coordonnées du modèle, c'est-à-dire les courbures et torsions de chaque hélice formant les super-hélices. Nous considérons que l'assemblée de fibres numérisée, qu'elle ait été obtenue par modelage géométrique ou par capture, l'a été à l'équilibre sous l'action de forces extérieures telles que la gravité ou les forces de contacts. Nous faisons donc l'hypothèse que la géométrie de l'assemblée de fibres est une pose statique sous l'action de forces extérieures et nous nous proposons de déterminer les paramètres physiques des super-hélices pour assurer cette pose statique.

Nous allons considérer dans un premier temps que tous les paramètres physiques sont fixés, à l'exception de la géométrie intrinsèque du modèle, caractérisée par les courbures et torsions naturelles qui sont les courbures et torsion au repos du modèle sous l'action d'aucune force extérieure. Cette hypothèse est justifiée par le caractère "matériel" de la plupart des paramètres du modèle. En effet, dans notre cas, nous connaissons le type de matériaux que nous souhaitons simuler, que ce soient des cheveux, des cordes, ou autre. Dès lors, le module d'Young, la masse volumique ou la section des fibres peuvent être considérés comme connus. Nous supposerons également que les coefficients de frottement entre les fibres ou avec les objets extérieurs sont connus. Il ne reste donc que la géométrie intrinsèque du modèle à déterminer.



Nous allons donc établir un lien entre la géométrie pure d'une assemblée de super-hélices en contact frottant (les courbures de chaque élément) et ses paramètres physiques, ici essentiellement la géométrie intrinsèque de chaque super-hélice. En d'autres termes, nous allons déduire les paramètres du modèle des super-hélices à partir de l'observation de leur géométrie à l'équilibre statique sous l'action de forces extérieures (gravité et contacts frottants). Ce que nous allons résoudre s'apparente à un problème inverse (BONNET, 2008 ; ASTER, BORCHERS et THURBER, 2005), de type identification de paramètres.

Un problème inverse consiste à évaluer une grandeur à partir d'observations ou de mesure indirectes. Par exemple, en imagerie médicale, la tomographie constitue le cœur de la méthode d'Imagerie par Résonance Magnétique, IRM, qui reconstruit l'intérieur du corps humain en mesurant la réponse des atomes d'hydrogène à des ondes électromagnétiques. Nous avons vu un autre exemple précédemment, géométrique, qui consistait à retrouver les paramètres géométriques d'une hélice (son pas, son rayon et son axe) à partir d'un nuage de points décrivant cette hélice. Nous trouverons dans (BONNET, 2008) en français et dans (ASTER, BORCHERS et THURBER, 2005) en anglais deux introductions aux problèmes inverses, avec d'autres exemples de tels problèmes.

Le problème inverse qui nous intéresse ici est plus simple que de nombreux problèmes d'inversion. D'abord, dans le cas des super-hélices, la géométrie intrinsèque correspond aux courbures et torsions naturelles de chaque élément d'hélice du modèle. Ainsi, nous devons retrouver un nombre fini de valeurs. Ce type de problème inverse est un problème d'estimation de paramètres. Si nous avons considéré un modèle de tige de Cosserat continu, alors la géométrie intrinsèque serait une fonction de l'abscisse curviligne et le problème n'aurait plus un nombre fini d'inconnues. De plus, les problèmes inverses peuvent avoir en entrée des observations bruitées et non exactes. Dans notre cas, notre observation est la géométrie à l'équilibre statique du modèle des super-hélices et nous considérons que l'information est non bruitée. Cette géométrie a été obtenue par l'algorithme des tangentes flottantes et est supposée non bruitée puisque nous connaissons précisément les coordonnées du modèle, les courbures et torsions de chaque élément.

## 6.2 CONTRIBUTIONS

Dans un premier temps, nous allons nous pencher sur le cas simple d'une fibre isolée, soumise seulement à la gravité, force connue a priori et qui dérive d'un potentiel. Dans ce cas là, nous allons déterminer la géométrie intrinsèque du modèle permettant d'assurer l'état d'équilibre. Nous irons plus loin en proposant une méthode pour déterminer la stabilité de cet équilibre et même pour assurer cette stabilité, en « modifiant » le matériau à travers le module d'Young ou la masse volumique. Cela se traduira par un critère simple impliquant ce module d'Young et cette masse volumique et qui sera suffisant pour assurer la stabilité. C'est un travail que nous avons effectué en master (DEROUET-JOURDAN, BERTAILS-DESCOUBES et THOLLOT, 2010) dans le cas de la version planaire des super-hélices, appelée super-cercles.

Ne pas considérer comme force extérieure d'autre force que la gravité nous contraint à considérer les fibres une à une, sans contact avec des objets extérieurs ou entre elles. Pourtant, les fibres sont rarement dans cette configuration et les contacts frottants jouent un rôle important dans la géométrie à l'équilibre d'une assemblée de fibres. Par exemple, les cheveux d'une personne sont en contact frottant avec son corps et entre eux, ce qui leur donnent leur volume et leur forme. Ainsi, après avoir considéré comme force extérieure la gravité seule, nous allons lui ajouter les forces de contact frottant entre fibres et avec des objets extérieurs. Malheureusement, ces forces de contact ne sont pas connues a priori et ne dérivent pas d'un potentiel. Nous développerons néanmoins une méthode pour évaluer ces forces de contact, sous certaines contraintes, ce qui nous permettra alors de déterminer la géométrie intrinsèque des super-hélices assurant l'état d'équilibre.

Pour résumer, dans ce chapitre, connaissant la géométrie d'une assemblée de fibres représentée par un ensemble de courbes  $G^1$  en hélices par morceaux, et connaissant les matériaux constituant ces fibres, nous proposons une méthode pour déterminer la géométrie intrinsèque de chaque super-hélice correspondante afin d'en assurer l'état d'équilibre, d'abord pour une fibre isolée sous l'action unique de la gravité puis pour une assemblée de fibres soumise à la gravité et aux contacts frottants. Dans le cas d'une fibre isolée nous verrons en outre comment modifier le matériau de la fibre en changeant le mo-

dule d'Young ou la masse volumique pour assurer la stabilité de l'état d'équilibre.

### 6.3 TRAVAUX ANTÉRIEURS

Le problème de mettre en correspondance la géométrie à l'équilibre d'objets déformables avec leurs paramètres physiques a été étudié dans le cas de vêtements. JOJIC et HUANG (1997) proposent une méthode pour déterminer les paramètres physiques de pièces de tissus à partir de la géométrie du tissu posé sur un objet quelconque. Les auteurs proposent même une méthode pour reconstruire à partir de là la géométrie de l'objet. Dans le cas de tissus, la connaissance de la position à l'équilibre permet de calculer la géométrie intrinsèque du tissu. Si l'on souhaite ensuite l'animer, il faut en déterminer les autres paramètres physiques comme le module d'Young. Par exemple, on peut les déterminer en optimisant les paramètres du modèle physique choisi pour approcher au plus près des mesures des déformations de tissus réels (MIGUEL et al., 2012). On peut les obtenir en soumettant ces mesures au système d'estimation Kawabata (BREEN, HOUSE et WOZNY, 1994) ou à une base de données (WANG, O'BRIEN et RAMAMOORTHI, 2011) pour identifier les paramètres du tissu. On peut encore les obtenir à partir de vidéos (BHAT et al., 2003) ou de séquences de géométries obtenue par une technique de capture de mouvement (KUNITOMO, NAKAMURA et MORISHIMA, 2010). Dans cette thèse, nous nous préoccupons principalement du calcul de la géométrie intrinsèque et supposons les autres paramètres physiques, comme le module d'Young ou les coefficients de frottement entre les fibres ou avec des objets extérieurs, connus. Par ailleurs, nous considérons que la seule information disponible est une configuration géométrique de l'objet considéré à l'équilibre et que cette donnée est exacte (i. e. non bruitée).

En ce qui concerne les fibres, nous trouvons dans (R.S. MANNING, 1996) l'étude d'un problème proche du nôtre. Dans cet article, les auteurs proposent une méthode pour obtenir la géométrie intrinsèque et la raideur d'un modèle de tige de Cosserat continu adapté à l'ADN à partir d'un modèle discret s'appuyant sur les paires de bases de l'ADN. Pour ce problème, les observations qui sont faites ne sont pas seulement la géométrie à l'équilibre du brin d'ADN, mais aussi la géométrie intrinsèque et la raideur du modèle discret.

Plus récemment, nous trouvons dans (HADAP, 2006) une méthode pour initialiser la simulation de fibres à partir de la forme géométrique à l'équilibre. Dans cet article, Hadap développe un modèle récursif de chaînes articulées de segments rigides en s'appuyant sur les travaux en robotique de Featherstone (FEATHERSTONE, 1987). Dans ce modèle, les coordonnées sont les angles associés à chaque lien entre deux segments rigides. Toujours en s'appuyant sur les travaux de Featherstone, il est alors possible de s'appuyer sur une technique de dynamique inverse très utilisée en robotique pour calculer les forces nécessaires à l'obtention d'une accélération particulière, ici nulle. Le modèle de Hadap a l'inconvénient de représenter les fibres par des courbes d'ordre faible, des segments, ce qui contraint à l'utilisation de nombreux segments pour décrire des courbes complexes et régulières.

Enfin, TWIGG et KAČIĆ-ALESIĆ (2011) vont plus loin et proposent d'initialiser la simulation d'une assemblée de fibres en prenant en compte les contacts. Le modèle utilisé est un modèle classique de masse-ressort, avec à chaque particule un ressort angulaire. La géométrie au repos de ce modèle est donnée par les longueurs et angles au repos de chaque ressort. De manière classique, leur technique consiste à poser que l'équilibre est obtenu lorsque la somme des forces est nulle. Le problème rencontré en utilisant des ressorts est que, si l'on souhaite rester physiquement plausible, les longueurs au repos des ressorts doivent être positives. Pour contourner ce problème, les auteurs proposent de minimiser la somme des forces élevées au carré, en contraignant les longueurs à vide à être positives. Par conséquent, il n'est pas garanti de trouver une géométrie au repos assurant l'équilibre du modèle. De plus, l'utilisation de forces de répulsion capture difficilement les frottements dus aux contacts et rend le système difficilement stable lors de la simulation par rapport à l'utilisation de contraintes pour satisfaire les contacts.

Dans la suite, nous proposons une méthode pour déterminer la géométrie intrinsèque du modèle des super-hélices à partir d'une configuration à l'équilibre, d'abord dans le cas d'une fibre isolée soumise seulement à des forces extérieures connues et dérivant d'un potentiel, comme la gravité et ensuite dans le cas d'une assemblée de fibres en contacts frottants, les forces de contact frottant étant inconnues a priori.

## 6.4 INVERSION DANS LE CAS DE LA GRAVITÉ

Dans le cas où une force dérivant d'un potentiel s'applique, à la manière de la gravité, une solution possible pour déterminer la géométrie intrinsèque de la super-hélice est de s'appuyer sur son énergie potentielle. En effet, à l'équilibre, l'énergie potentielle est à un point critique. Dès lors, il suffit d'en calculer le gradient. Or ce gradient est une fonction affine de la géométrie intrinsèque, donc le problème est réduit à un problème linéaire à résoudre.

## 6.4.1 Énergie potentielle d'une super-hélice

L'énergie potentielle  $E_p$  d'une super-hélice sous la gravité s'écrit comme la somme de deux composantes, l'énergie potentielle élastique  $E_{el}$  et l'énergie potentielle de pesanteur  $E_g$ . Nous trouvons dans (BERTAILS, 2006) les expressions de ces deux énergies :

$$E_{el} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0)^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0)$$

$$E_g = \rho S \int_0^L (L - s')(\mathbf{t}(s') \cdot \mathbf{g}) ds',$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice diagonale, linéaire en  $E$ , le module d'Young de la super-hélice et où  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\boldsymbol{\kappa}_0$  regroupent respectivement les courbures et torsions instantanées et naturelles de chaque élément de la super-hélice.  $S$  représente la section de la super-hélice et  $\mathbf{g}$  le vecteur de pesanteur.

Calculer le gradient de cette énergie potentielle est possible de manière analytique, quoique long et pénible. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour les détails des calculs. À la fin, le gradient de l'énergie potentielle prend la forme suivante :

$$\nabla E_p = \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) + \nabla E_g.$$

$\nabla E_g$  peut être obtenu analytiquement et son expression est donnée en annexe B.

## 6.4.2 Inversion

Il apparaît donc que le gradient de l'énergie potentielle est une fonction affine de la géométrie intrinsèque de la super-hélice. Ainsi, déterminer les courbures naturelles assurant

l'équilibre de la super-hélice dans la géométrie donnée se fait en résolvant un simple système linéaire :

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{K}^{-1} \nabla E_g.$$

Dans le cas des super-hélices, la matrice  $\mathbf{K}$  est même diagonale, ce qui conduit à un système linéaire trivial à résoudre. Il est donc très simple de déterminer la géométrie intrinsèque des super-hélices pour assurer de manière exacte leur équilibre sous l'action de forces extérieures dérivant d'un potentiel. Cependant, il est possible que l'équilibre soit instable et que lors d'un déplacement de la fibre hors de sa position d'équilibre, le retour à la position d'équilibre ne soit pas assuré par l'inversion. Dans un tel cas, au démarrage, la fibre reste bien à l'équilibre, mais une petite perturbation la précipite dans une autre position d'équilibre.

Dans la partie suivante, nous allons voir comment caractériser la stabilité de l'équilibre et comment modifier les paramètres de la super-hélice considérés jusqu'ici comme imposés pour assurer la stabilité de l'équilibre obtenu par l'inversion.

#### 6.4.3 Problème de la stabilité

L'équilibre de la super-hélice obtenu par l'inversion est stable lorsque l'énergie potentielle est non seulement en un point critique mais en un minimum local. Donc, pour étudier la stabilité de l'équilibre, il nous faut étudier la nature du point critique obtenu par l'inversion. Pour que ce soit un minimum local, il suffit qu'en ce point la hessienne de l'énergie potentielle soit une matrice définie positive.

##### *Hessienne de l'énergie potentielle*

Comme dans le cas du calcul du gradient de l'énergie potentielle, les détails du calcul de la hessienne sont donnés en annexe B. Nous ne conserverons que le résultat final. La hessienne de l'énergie potentielle d'une super-hélice s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{H}_{E_p} = E\mathbb{D} + \rho\mathbb{S}, \quad (7)$$

où  $\mathbb{D}$  est une matrice diagonale et  $\mathbb{S}$  une matrice symétrique. Il suffit donc maintenant de déterminer les valeurs propres de cette matrice pour décider si l'équilibre est stable ou non. Mais nous pouvons aller plus loin. La structure de la hessienne nous

amène à penser que le module d'Young et la masse volumique de la super-hélice ont une influence sur les valeurs propres de cette hessienne, et en particulier sur la plus petite. Le petit théorème suivant nous donne une information capitale :

**Théorème 2.** *Si  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont deux matrices symétriques réelles et si  $\mathbf{M} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$  alors la plus petite valeur propre  $\lambda_{\mathbf{M},\min}$  de  $\mathbf{M}$  est plus grande que la plus petite valeur propre  $\lambda_{\mathbf{P},\min}$  de  $\mathbf{P}$  ajoutée à la plus petite valeur propre  $\lambda_{\mathbf{Q},\min}$  de  $\mathbf{Q}$ , soit*

$$\lambda_{\mathbf{M},\min} \geq \lambda_{\mathbf{P},\min} + \lambda_{\mathbf{Q},\min}.$$

*Démonstration.* Ce théorème est probablement un résultat assez classique, bien que nous n'ayons trouvé aucune référence particulière à son sujet. Nous en donnons donc une démonstration, dans le but de convaincre le lecteur de sa validité. Pour commencer, introduisons un lemme utile qui donne une expression de la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle.

**Lemme 3.** *Si  $\mathbf{M}$  est une matrice réelle symétrique, alors la plus petite valeur propre  $\lambda_{\min}$  de  $\mathbf{M}$  est égale au minimum pour  $\mathbf{x}$  de norme 1 de  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{x}$  de norme 1. Puisque  $\mathbf{M}$  est symétrique, nous pouvons écrire  $\mathbf{x}$  dans une base orthonormale  $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$  dans laquelle  $\mathbf{M}$  est diagonale. Alors, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{M} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \lambda_i \\ \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} &\geq \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \lambda_{\min} \geq \lambda_{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \geq \lambda_{\min}. \end{aligned}$$

Si on prends  $\mathbf{v}_{\min}$  un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $\lambda_{\min}$ , alors on a

$$\mathbf{v}_{\min}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{\min} = \lambda_{\min} \|\mathbf{v}_{\min}\|^2 = \lambda_{\min}.$$

□

En s'appuyant sur le lemme précédent, la plus petite valeur propre de  $\mathbf{M}$  est la valeur minimale de  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$  lorsque  $\mathbf{x}$  est de norme 1, donc de  $\mathbf{x}^T (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \mathbf{x}$  donc de  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  qui est plus grand que la somme des valeurs minimales respectives de  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  lorsque  $\mathbf{x}$  est de norme 1 soit des plus petites valeurs propre de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ .  $\square$

### *Critère de stabilité*

Ainsi, en s'appuyant sur ce théorème, nous pouvons écrire :

$$\lambda_{H_{E_p}, \min} \geq E \lambda_{D, \min} + \rho \lambda_{S, \min},$$

où  $\lambda_{H_{E_p}, \min}$ ,  $\lambda_{D, \min}$  et  $\lambda_{S, \min}$  sont les plus petites valeurs propres respectives de  $H_{E_p}$ ,  $D$  et  $S$ . Ainsi, la hessienne est définie positive si  $E \lambda_{D, \min} + \rho \lambda_{S, \min}$  est plus grand que 0. Et comme  $\lambda_{D, \min}$  est strictement positive, comme  $\rho$ , nous pouvons écrire que la hessienne est définie positive si

$$\frac{E}{\rho} > \frac{\lambda_{S, \min}}{\lambda_{D, \min}}. \quad (8)$$

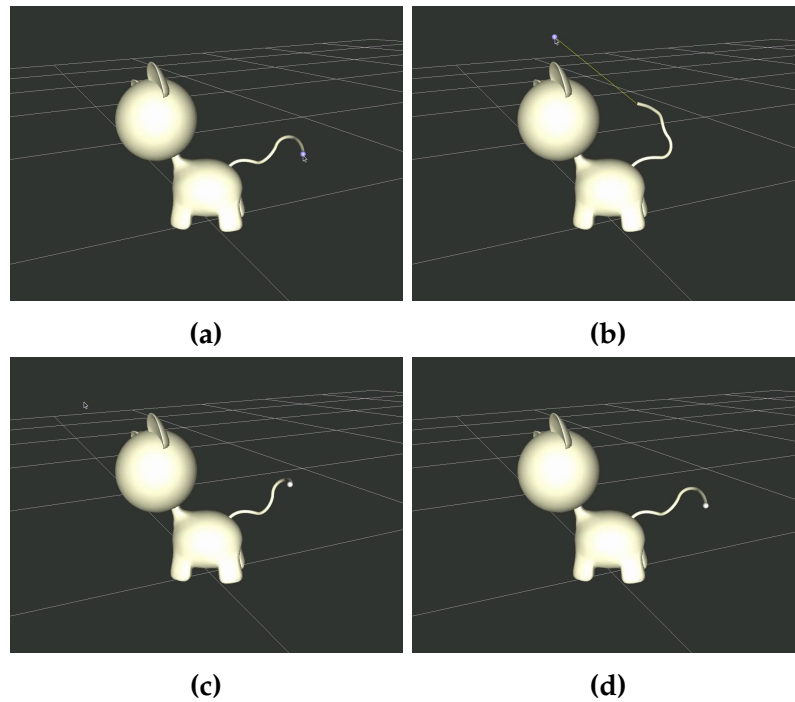
Il est donc possible, de manière automatique, de décider si l'équilibre risque d'être instable et le cas échéant, de modifier ce rapport pour stabiliser l'équilibre, par exemple en choisissant un module d'Young suffisamment grand pour que le critère de stabilité soit vérifié.

### *Résultats*

Nous utilisons notre méthode complète d'inversion avec stabilisation pour déterminer les paramètres physiques de la super-hélice présentée en figure 30. L'inversion a permis d'assurer que la géométrie de la super-hélice était bien une position d'équilibre et que cette position était stable. Comme nous le montrons sur ces instantanés de la simulation, après déformation, la super-hélice retrouve sa configuration initiale.

L'importance de la stabilisation et l'utilisation de notre critère de stabilisation sont mises en évidence sur la figure 31. Ici, nous nous restreignons à la projection planaire des super-hélices, les super-cercles. Dans ce cas, les fibres sont décrites par des courbes planes, constituées d'arcs de cercles recollés de manière  $G^1$ . Les coordonnées des super-cercles sont les courbures de chaque arc de cercle. Sur la figure 31, nous représentons le bout de la queue d'un personnage virtuel à l'aide de deux arcs de cercles. Dans ce cas, l'énergie potentielle du super-cercle est

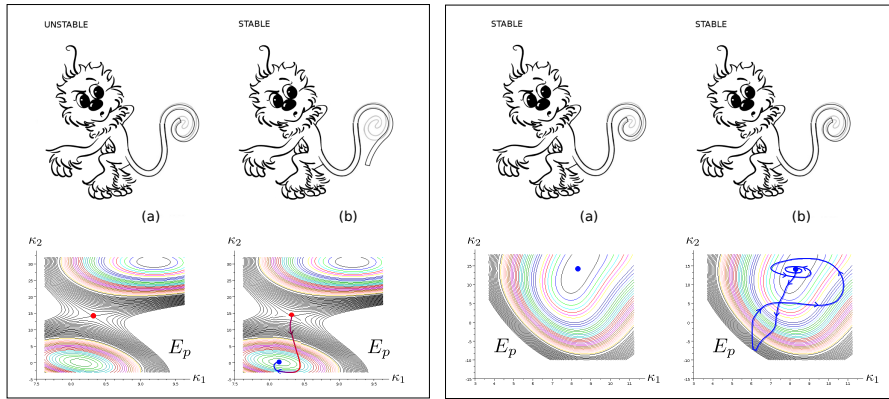




**Figure 30:** *Inversion de la queue d'un chat (a). Les paramètres physiques sont calculés de manière à garantir une configuration d'équilibre stable et la queue est simulée ensuite. Les paramètres physiques ont été calculés de sorte que, si la courbe est légèrement déformée, avec une amplitude raisonnable (b), elle retrouve sa position initiale (c,d).*

une fonction réelle de deux variables que nous représentons sur la ligne inférieure de la figure 31. En appliquant une force sur la queue du personnage, nous la déplaçons hors de sa position d'équilibre initiale. À gauche, nous n'avons pas stabilisé cet équilibre, et nous voyons que la position d'équilibre instable initiale est perdue pour une nouvelle position d'équilibre stable. Au-dessous, nous traçons la trajectoire de l'énergie potentielle. Nous constatons alors dans ce cas que l'énergie potentielle part d'un point-selle pour atteindre un minimum local qui correspond à la nouvelle position d'équilibre stable. À droite, nous avons stabilisé la position d'équilibre initiale, et nous voyons que cette position est retrouvée après déformation. Dans ce cas là, l'énergie potentielle représentée au-dessous suit une trajectoire qui part d'un minimum local et qui y revient ensuite.

Figure 32, nous appliquons notre méthode complète, inversion et stabilisation à la coiffure d'un personnage virtuel, synthétisée par une artiste. Au cours du mouvement, la coiffure est raide et peu réaliste. La raison est que l'élasticité prend en



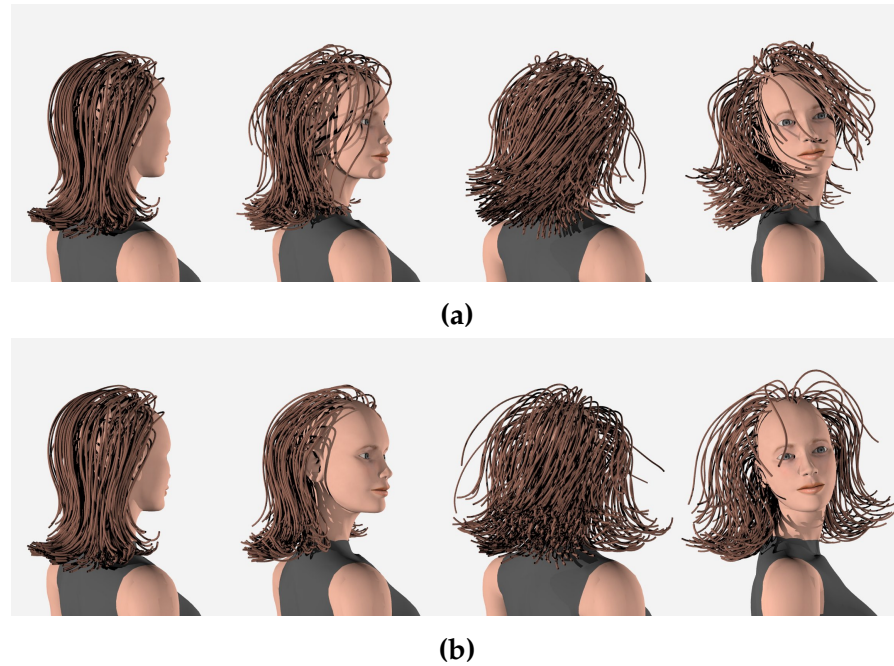
**Figure 31:** Utilisation de notre critère de stabilisation sur l'équilibre initial de la fibre sur le cas particulier des super-cercles avec 2 éléments. À gauche, nous n'avons pas stabilisé l'équilibre initial de la fibre et après déformation, le super-cercle trouve une nouvelle position d'équilibre. Au dessous, l'énergie potentielle initiale est à un point selle et « tombe » dans un minimum local qui caractérise la nouvelle position d'équilibre. À droite, nous avons stabilisé l'équilibre et nous constatons alors que l'énergie potentielle initiale est dans un minimum local. La déformation éloigne l'énergie potentielle de ce minimum local auquel elle revient finalement.

charge toute la forme des cheveux pour compenser la gravité. Et donc, pour que l'équilibre soit stable, il faut rendre les cheveux plus raides. Or, dans le cas des cheveux, comme souvent pour une assemblée de fibres, il y a aussi de nombreux contacts fibre à fibre ou avec des objets extérieurs, comme le corps du personnage, qui jouent un rôle dans la position à l'équilibre. La prise en compte de ces contacts est l'objet de la partie suivante.

## 6.5 CAS DES FORCES DE CONTACT FROTTANT

Les travaux effectués dans le cas des contacts frottants ont été réalisés en collaboration avec Gilles Daviet.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les fibres une à une, sans auto-contact ni contact avec des objets extérieurs. Cette hypothèse est trop restrictive lorsqu'on s'intéresse à une assemblée de fibres, où les contacts sont très présents et jouent un rôle essentiel dans la forme que prennent les fibres à l'équilibre. Dans cette partie, nous allons donc nous intéresser au calcul de la géométrie intrinsèque des super-hélices dans le cas où



**Figure 32:** Instantanés de la simulation d'une chevelure de personnage virtuel, après inversion prenant seulement en compte la force de gravité. Sur la ligne du haut (a), nous n'avons pas stabilisé l'état d'équilibre et avons utilisé une valeur raisonnable du module d'Young ( $E = 4 \text{ GPa}$ ). Nous constatons alors que la position est instable et que le travail de l'artiste est perdu dès le début du mouvement de la tête du personnage. Sur la ligne du bas (b), nous avons utilisé notre critère de stabilité pour stabiliser la position d'équilibre. Le module d'Young requis alors est élevé ( $E = 60 \text{ GPa}$ ), et les cheveux sont particulièrement raides (à titre de comparaison,  $E = 60 \text{ GPa}$  correspond au module d'Young du marbre).

les fibres subissent des forces de contact en plus des forces extérieures dérivant d'un potentiel comme étudié précédemment.

### 6.5.1 Un nouveau problème d'inversion

Comme nous l'avons écrit précédemment, la modélisation des contacts frottants de Coulomb par des contraintes introduit dans la dynamique des super-hélices des forces inconnues a priori et qui ne dérivent pas d'un potentiel. Par conséquent, la méthode développée pour la force de gravité ne peut plus s'appliquer ici.

Or, une assemblée de fibres est à l'équilibre lorsque la somme des forces qui s'y appliquent est nulle. Par conséquent, nous

allons maintenant nous intéresser à la géométrie intrinsèque des super-hélices annulant la somme des forces. Le problème auquel nous sommes alors confrontés est que la force de contact frottant est inconnue a priori. Nous allons devoir la déterminer pour pouvoir calculer la géométrie intrinsèque de l'assemblée de super-hélices.

Nous avons exposé précédemment la formulation des contacts frottants de Coulomb par des contraintes ajoutées à la dynamique. Permettons-nous de réécrire ici l'équation de la dynamique des super-hélices, contrainte par des contacts frottants de Coulomb :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} &= \mathbf{J}\mathbf{u} + \mathbf{q} \\ (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) &\in \mathcal{C}(\mu). \end{aligned}$$

Nous invitons le lecteur à se reporter au chapitre 2 pour le détail de ces notations.

Dans le cas des assemblées de fibres à l'équilibre, nous pouvons écrire que les vitesses et accélérations sont nulles; nous sommes dans un cas statique. Ainsi, nous pouvons écrire l'équation de la statique que doivent vérifier les forces appliquées aux fibres pour assurer la position d'équilibre. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, 0) + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} &\in \mathbf{K}^*(\mu) \end{aligned}$$

Si nous connaissons la force  $\boldsymbol{\tau}$ , alors nous pourrions écrire

$$\boldsymbol{\kappa}_0 = \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, 0) + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}),$$

et le calcul de la géométrie intrinsèque deviendrait alors aussi simple qu'en l'absence de contacts et se ramènerait à la résolution d'un système linéaire diagonal. Malheureusement, la force de contact frottant  $\boldsymbol{\tau}$  est inconnue et reste à déterminer.

Pour résumer, le problème que nous devons résoudre maintenant est de trouver  $\boldsymbol{\kappa}_0$  et  $\boldsymbol{\tau}$  tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_0 &= \mathbf{K}^{-1}(-\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{F} + \mathbf{K}) \\ \boldsymbol{\tau} &\in \mathbf{K}^*(\mu). \end{aligned}$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\kappa}_0$  est l'inconnue principale de notre problème et la force de contact  $\boldsymbol{\tau}$  est l'inconnue secondaire, dont dépend la géométrie intrinsèque. Dans la suite, nous allons considérer

que notre assemblée de fibres est constituée d'un matériau homogène et connu (par exemple le matériau cheveu). Nous faisons alors l'hypothèse forte de considérer les paramètres physiques des super-hélices ainsi que les coefficients de frottements comme connus, à l'exception de la géométrie intrinsèque bien évidemment.

### 6.5.2 Mise sous forme d'un problème de minimisation

Dans le but de déterminer la géométrie intrinsèque des super-hélices, il est nécessaire de connaître les forces de contact qui s'appliquent sur le modèle. Or ces forces étant inconnues à l'avance, le problème est mal posé et ne peut pas être résolu directement. Nous proposons ici une approche permettant de déterminer une valeur plausible des forces de contact. Cette approche s'appuie sur une estimation plausible de la géométrie intrinsèque. Ainsi, la première étape de notre approche consiste à estimer la géométrie intrinsèque initiale des super-hélices, celle qu'il est raisonnable d'attendre étant donnée la géométrie des super-hélices. Prenons l'exemple de la coiffure représentée figure 34. Ici, les cheveux sont lisses et droits, et il est donc raisonnable de choisir une géométrie intrinsèque droite, soit  $\kappa_{0,est} = 0$ . Nous reviendrons plus loin sur cette estimation. Pour le moment, supposons que nous ayons une estimation de la géométrie intrinsèque.

Seulement, cette géométrie intrinsèque estimée peut ne pas être atteignable, c'est-à-dire qu'il est possible qu'il n'existe aucun  $\mathbf{r}_*$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \kappa_{0,est} &= \mathbf{K}^{-1}(-\mathbf{J}^T \mathbf{r}_* - \mathbf{F} + \mathbf{K}\kappa) \\ \mathbf{r}_* &\in \mathcal{K}^*(\mu). \end{aligned}$$

Dans ce cas, cela signifie que la géométrie intrinsèque estimée ne permet pas l'inversion. Pourtant, si cette estimation est plausible, c'est qu'elle est proche d'une géométrie intrinsèque permettant l'inversion. Il est alors tout à fait naturel de chercher la géométrie intrinsèque la plus proche de notre estimation et telle qu'elle permette l'inversion. La seconde étape de notre approche est ainsi la résolution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\kappa_0 \text{ atteignable}} \|\kappa_0 - \kappa_{0,est}\|^2.$$

Or, si  $\kappa_0$  est atteignable, c'est qu'une force  $\mathbf{r}$  vérifie l'équation de la statique. En remplaçant alors  $\kappa_0$  par son expression en  $\mathbf{r}$ , le problème précédent devient :

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{K}^{-1}(-\mathbf{J}^T \mathbf{r} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\kappa) - \kappa_{0,\text{est}}\|^2$$

$$\mathbf{r} \in \mathcal{K}^*(\mu).$$

Le cône de Coulomb n'étant pas borné dans l'espace, il est possible que les forces de contact soient arbitrairement grandes. Dans le but d'empêcher la force  $\mathbf{r}$  de prendre des valeurs trop grandes, nous introduisons une pénalisation sur la norme de cette force dans la minimisation. Ainsi, le problème de minimisation devient :

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{K}^{-1}(-\mathbf{J}^T \mathbf{r} - \mathbf{F} + \mathbf{K}\kappa) - \kappa_{0,\text{est}}\|^2 + \gamma \|\mathbf{r}\|^2$$

$$\mathbf{r} \in \mathcal{K}^*(\mu).$$

En posant

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K}^{-1T} + \gamma \mathbf{I}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{J} \mathbf{K}^{-1T} (\mathbf{F} + \mathbf{K}(\kappa - \kappa_{0,\text{est}})),$$

nous pouvons écrire plus simplement le problème sous la forme :

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathbf{q}$$

$$\mathbf{r} \in \mathcal{K}^*(\mu).$$

Ce problème est un problème quadratique sous contraintes coniques du second ordre, ou SOCQP pour Second Order Cone Quadratic Program. C'est un problème convexe et bien posé, qui admet donc une solution unique. Cependant, il s'agit d'un problème potentiellement très gros (pour quelques milliers de fibres, on s'attend à plusieurs dizaines de milliers de contacts) et donc difficile à résoudre par les techniques standard d'optimisation non-lisse, généralement calibrées pour des systèmes plus petits. Nous avons testé l'inversion d'une chevelure constituée de 240 cheveux avec environ 9000 contacts en utilisant l'implémentation libre de l'algorithme de points intérieurs IPOPT (WÄCHTER et BIEGLER, 2006) : ce test a nécessité plusieurs heures pour converger. La méthode de résolution que nous proposons dans la suite et qui s'appuie sur l'algorithme existant de (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011), converge quant à elle en quelques secondes.

### 6.5.3 Résolution du SOCQP

La méthode que nous proposons consiste à transformer le problème de minimisation pour le ramener à un problème de complémentarité conique. Ensuite, en utilisant l'algorithme de (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011), conçu pour la résolution du problème dynamique direct, nous allons résoudre le problème inverse de manière efficace.

Pour transformer notre problème inverse en un problème de complémentarité conique, nous allons nous appuyer sur une propriété classique de l'optimisation convexe (BOYD et VANDENBERGHE, 2004) :

**Propriété 1.** *Si  $f$  est une fonction convexe et si  $L$  est un ensemble convexe, alors*

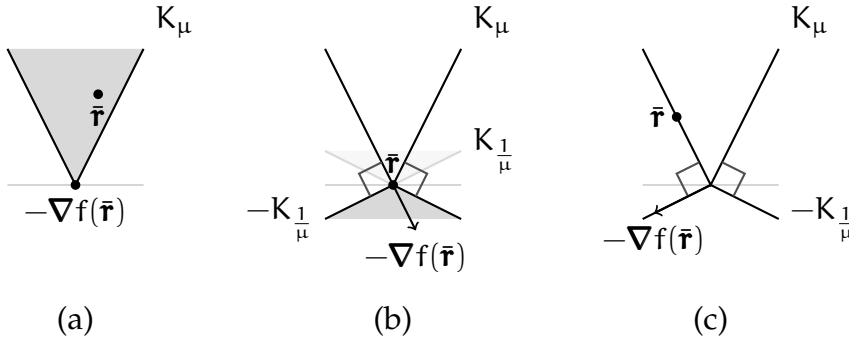
$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in L} f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in L, -\nabla f(\bar{\mathbf{r}})^\top (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{r}}) \leq 0. \quad (9)$$

pour tout  $t > 0$ .

Dans le cas où  $L$  est un cône  $K_\mu$  d'ouverture  $\mu$ , ce résultat peut-être interprété intuitivement. Supposons d'abord que le minimum de  $f$  est atteint à l'intérieur du cône. Dans ce cas,  $\bar{\mathbf{r}}$  qui appartient au cône est un minimum local de  $f$  et donc un point où le gradient de  $f$  s'annule soit  $\nabla f(\bar{\mathbf{r}}) = 0$ . C'est le cas représenté figure 33 en (a).

Supposons maintenant que le minimum de  $f$  est atteint à l'extérieur du cône. Dans ce cas,  $\bar{\mathbf{r}}$  ne peut pas se trouver à l'intérieur du cône mais sur sa frontière. Il est alors aisé de constater que si  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  ne fait pas un angle obtus avec tout vecteur de  $K_\mu$  pris à partir de  $\bar{\mathbf{r}}$ , alors nous pourrions trouver une direction, la projection de  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  sur le cône, qui permettrait de trouver dans le cône une valeur plus petite à  $f$  que  $f(\bar{\mathbf{r}})$ . Lorsque  $\bar{\mathbf{r}}$  est nul, cela signifie que  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  se trouve dans l'opposé du cône dual, le cône polaire  $K^\circ = -K_{\frac{1}{\mu}}$ , comme représenté figure 33 en (b). Dans le cas où  $\bar{\mathbf{r}}$  est non nul et donc sur la frontière du cône, il apparaît que  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  est nécessairement normal à  $\bar{\mathbf{r}}$ , ce qui l'amène à se trouver sur la frontière du cône polaire, comme représenté figure 33 en (c).

Il est possible d'écrire tous ces cas plus simplement, en remarquant que soit  $\bar{\mathbf{r}}$  est nul, soit  $\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  est nul, soit ils sont orthogonaux et que  $\bar{\mathbf{r}}$  est dans le cône  $K_\mu$  tandis que  $\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  est dans le cône dual  $K_{\frac{1}{\mu}}$ . Et donc, la condition de minimalité peut



**Figure 33:** Les 3 cas des conditions d'optimalité pour le problème de minimisation d'une fonction convexe  $f$  sous contraintes coniques : (a)  $\bar{\mathbf{r}}$  est à l'intérieur du cône et  $\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  est nul ; (b)  $\bar{\mathbf{r}}$  est nul et  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  se trouve dans le cône dual ; (c)  $\bar{\mathbf{r}}$  est non nul et se trouve sur la frontière du cône et  $-\nabla f(\bar{\mathbf{r}})$  est sur la frontière du cône dual et est normal à  $\bar{\mathbf{r}}$ .

se réécrire sous la forme d'une condition de complémentarité soit :

$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in K_\mu} f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow K_{\frac{1}{\mu}} \ni \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) \perp \bar{\mathbf{r}} \in K_\mu.$$

Nous donnons en annexe E une démonstration plus formelle de ce résultat qui s'appuie sur les projections. Cette condition de complémentarité obtenue dans le cas d'un cône peut se généraliser très aisément à un produit de cônes. En reprenant la fonction  $f$  que nous souhaitons minimiser, nous écrivons alors

$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in K^*} \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathbf{q} \Leftrightarrow \forall i, \quad K_{\frac{1}{\mu^i}} \ni (\mathbf{W} \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{q})^i \perp \bar{\mathbf{r}}^i \in K_{\mu^i}.$$

Il est remarquable que cette condition de complémentarité conique soit si similaire à celle de la dynamique que nous avons présentée précédemment (équation 4 du chapitre 2). Grâce à cette similarité, nous allons pouvoir utiliser l'algorithme proposé pour la dynamique dans (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011) et qui résout de manière robuste et rapide ce type de problème de complémentarité conique.

L'algorithme résolvant le problème de complémentarité conique présenté dans (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011) résout en effet des problèmes du type

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad K_{\frac{1}{\mu^i}} \ni (\mathbf{W} \mathbf{r} + \mathbf{q})^i \perp \mathbf{r}^i \in K_{\mu^i}$$



où  $\mathbf{r}$  est l'inconnue et où  $\mathbf{q}$  est un vecteur de taille  $3n$  et  $\mathbf{W}$  une matrice creuse par bloc, symétrique positive, mais non nécessairement définie positive, de taille  $(3n, 3n)$ .

Dans notre cas,  $\mathbf{W}$  est une matrice creuse par bloc, symétrique définie positive, rendant la fonction à minimiser strictement convexe, ce qui nous garantit l'unicité de la solution. Cela nous permet aussi d'espérer une bonne convergence de l'algorithme de résolution.

Le paramètre de régularisation  $\gamma$  a été fixé expérimentalement à la valeur de  $1.10^{-3} \text{ N}^{-2} \text{ m}^{-2}$ . Nous avons constaté empiriquement qu'une telle valeur permettait d'obtenir des forces de frottement jouant un rôle non négligeable sur la position d'équilibre tout en restant de norme raisonnable, et donc menant à des simulations numériques relativement stables.

#### 6.5.4 Résultats

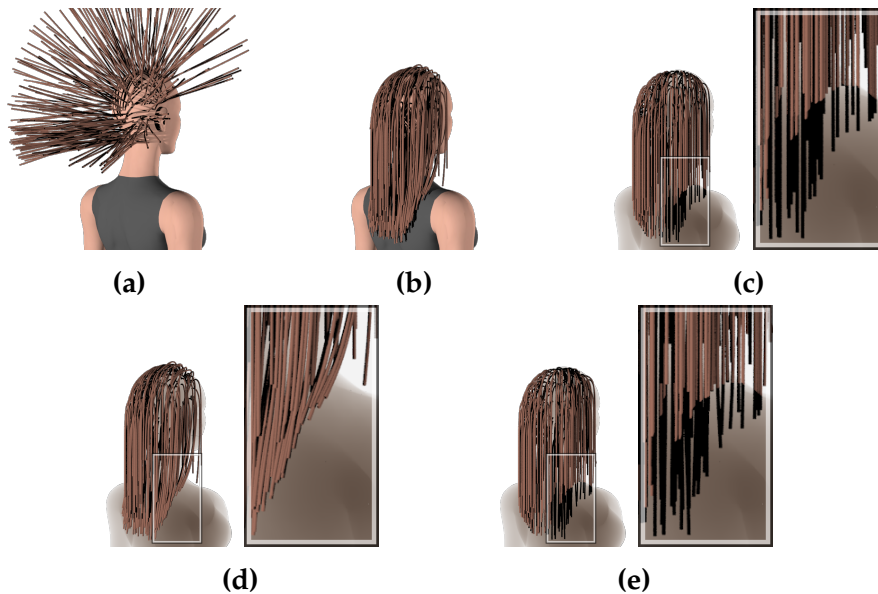
Nous allons étudier notre technique d'inversion en l'appliquant à un jeu de données synthétique représentant une coiffure lisse, **SynthSimu**, obtenu par simulation et représenté en figure 34.

##### *Validation*

Dans le but de valider notre méthode d'inversion, pour montrer qu'elle produit une géométrie intrinsèque plausible, faisons une expérience très simple.

Nous avons obtenu le jeu de données **SynthSimu** représenté en figure 34 par la simulation d'une chevelure lisse (240 cheveux; nous avons choisi  $\kappa_0 = 0.1 \text{ m}^{-1}$  comme géométrie intrinsèque) jusqu'à ce qu'elle trouve une position d'équilibre sur les épaules d'un personnage virtuel. Appelons cette phase *SimuDirecte*. Nous appliquons alors notre algorithme d'inversion à la géométrie à l'équilibre de cette chevelure et initialisons ainsi une nouvelle simulation, *SimuInversion*. Nous avons choisi  $\kappa_{0,\text{est}} = 0 \text{ m}^{-1}$  comme estimation de la géométrie intrinsèque. Nous avons fait ce choix à cause de l'apparence lisse des cheveux. En effet, lorsque les cheveux sont lisses, la forme des cheveux apparaît comme étant due aux contacts uniquement (dans ce cas là, l'œil parvient à faire la différence entre ce qui est dû à la géométrie intrinsèque et ce qui est dû aux contacts). La phase d'inversion a nécessité 2,6 secondes de calcul pour 2353 contacts détectés.

L'expérience que nous proposons est de laisser les deux simulations avancer, en ne prenant plus en compte les contacts. Alors, nous nous attendons à ce que les deux chevelures tombent à l'intérieur du corps, puisqu'en l'absence de contact, il ne peut plus les porter.



**Figure 34:** *Creation d'une coiffure (240 cheveux) à l'équilibre statique par simulation. La forme initiale (a) est simulée sous l'action de la gravité jusqu'à obtenir la configuration géométrique à l'équilibre SynthSimu (b). Après inversion avec contacts frottant, et en simulant ensuite avec l'action de la gravité mais sans contact, nous produisons alors une nouvelle forme à l'équilibre (e) similaire à la forme de référence (c). Si l'on inverse sans prendre en compte les contacts frottants mais seulement la gravité, la forme courbée due à la tête et aux épaules est conservée, même lorsque les contacts ne sont plus présents.*

Nous représentons en figure 34 le résultat de cette expérience. Ce que nous constatons, c'est que les deux nouvelles positions d'équilibre sont identiques pour *SimuDirecte* et pour *SimuInversion*. Ainsi, notre méthode d'inversion a produit pour **SynthSimu** une géométrie intrinsèque plausible et proche de celle utilisée lors de la création de ce jeu de données. Par comparaison, si nous inversons sans prendre en compte les contacts, la forme courbée des cheveux, caractéristique du contact avec les épaules est artificiellement conservée lors de la simulation sans contacts.

## 6.6 DISCUSSION

Nous avons présenté deux approches pour l'inversion de la position d'équilibre de fibres. La première suppose que toutes les forces extérieures qui s'appliquent aux fibres dérivent d'un potentiel. Dans ce cas, nous avons vu que le problème de l'inversion se ramenait à un système linéaire diagonal trivial à résoudre. L'utilisation de l'énergie potentielle pour l'inversion nous a permis d'aller plus loin que d'assurer la position d'équilibre en nous fournissant un critère simple pour la stabilité de cet équilibre.

La seconde approche pour l'inversion prend en compte les forces de contacts frottants qui ne peuvent être négligés dans le cas d'assemblées de fibres comme les chevelures. Ces forces étant inconnues a priori, il faut les évaluer avant de pouvoir réaliser l'inversion. Nous avons pour cela mis au point un algorithme de minimisation qui approche au plus près la géométrie intrinsèque d'une estimation préliminaire.

Une limitation importante de la seconde approche est que si elle assure bien la position d'équilibre, elle ne permet pas d'en assurer la stabilité. Ainsi, à la simulation, bien que les fibres soient dans une configuration d'équilibre, que la somme des forces qui s'appliquent à elles soit nulle, un petit déplacement peut entraîner les fibres dans une nouvelle position d'équilibre. Le problème est que le critère que nous avons établi dans le cas de l'inversion sous des forces dérivant d'un potentiel ne peut s'appliquer ici. Pour compléter l'inversion prenant en compte les contacts frottants, il faudrait donc aller plus loin et étudier la stabilité de l'équilibre obtenu, en prenant soin de bien la définir.

Une seconde limitation de la seconde approche est qu'elle requiert une estimation de la géométrie intrinsèque des super-hélices. Or, bien estimer cette géométrie intrinsèque est difficile, notamment dans le cas de cheveux naturellement bouclés. Il faut donc trouver une méthode simple et automatique pour estimer cette géométrie intrinsèque. Dans le chapitre suivant, nous proposons et justifions comme estimation de la géométrie intrinsèque la géométrie courante de la super-hélice, soit  $\kappa_{0,\text{est}} = \kappa$ .

Troisième partie

DE LA NUMÉRISATION À LA  
SIMULATION



## APPLICATION À DES CHEVELURES

---

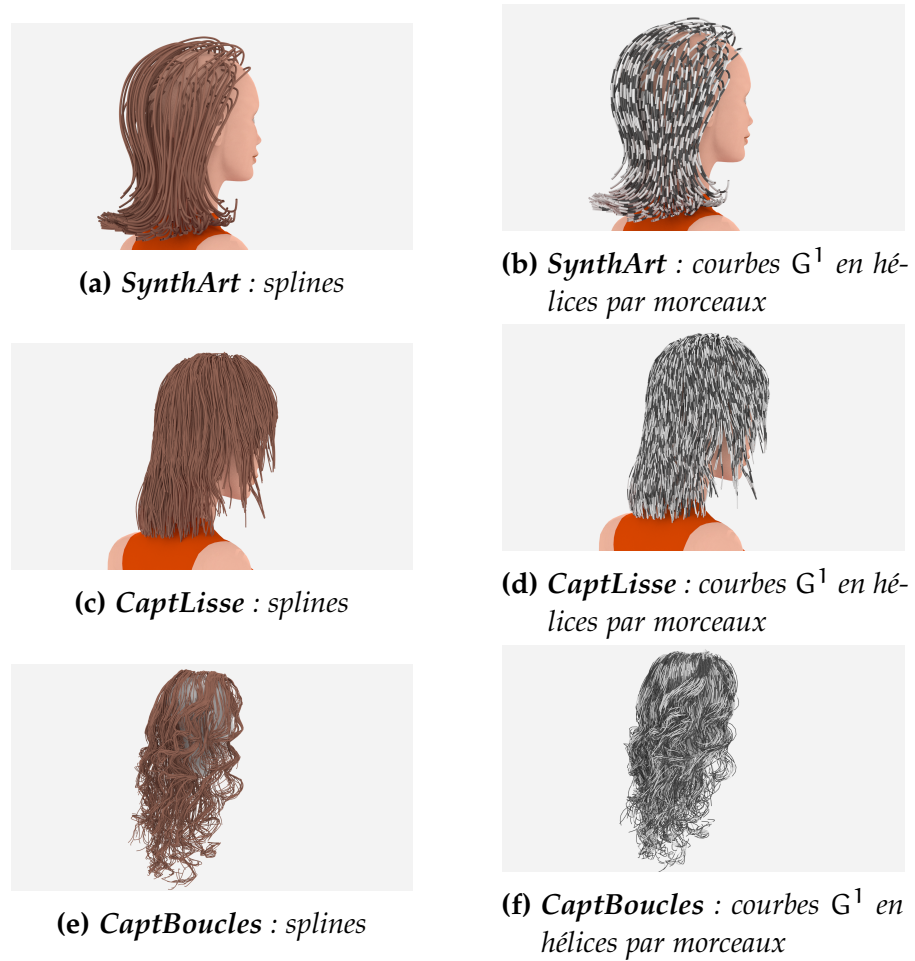
Dans ce chapitre, nous allons mettre en pratique les deux algorithmes développés dans cette thèse : les tangentes flottantes pour l'approximation par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux et notre technique d'inversion prenant en compte les contacts frottants pour le calcul des paramètres physiques des super-hélices. Cette combinaison va nous permettre de prendre en entrée des géométries de chevelures à l'équilibre statique pour produire en sortie des simulations physiques plausibles de ces chevelures.

### 7.1 GÉOMÉTRIES D'ENTRÉES

Nous allons considérer comme données d'entrées trois coiffures numérisées. Nous utiliserons une coiffure obtenue synthétiquement, par la main d'une artiste et deux coiffures obtenues par la capture de fibres réelles. Ces trois coiffures, représentées figure 35 sont :

- **SynthArt**, coiffure synthétique, obtenue par le travail d'une artiste, Laurence Boissieux. Ce jeu de données contient 240 cheveux.
- **CaptLisse**, coiffure issue de la capture d'une coiffure réelle par HERRERA, ZINKE et WEBER (2012). Ce jeu de données contient 1980 cheveux peu ondulés.
- **CaptBoucles**, jeu de données issu de la capture d'une perruque bouclée par LUO, LI et RUSINKIEWICZ (2013). Il contient 1105 fibres bouclées.

**REMARQUES SUR LA CHEVELURE CAPTLISSE** Il est important de noter ici que la chevelure capturée par HERRERA, ZINKE et WEBER (2012) est complète, c'est-à-dire qu'elle contient environ autant de cheveux que ce que l'on peut trouver sur une personne, soit près de 100000. Aucune méthode ne permet de simuler une chevelure contenant autant de cheveux à l'heure actuelle. Nous avons donc dû limiter le nombre de cheveux pris en compte dans cette coiffure, et avons décidé d'en sélectionner uniformément 2000, choisis au hasard.



**Figure 35:** L'algorithme des tangentes flottantes (à droite) appliqué aux coiffures (à gauche) *SynthArt* (en haut), *CaptLisse* (au centre) et *CaptBoucles* (en bas).

De plus, il est à noter que nous ne disposons pas du maillage du buste correspondant à la coiffure *CaptLisse*, contrairement aux deux autres coiffures. Afin de déterminer les contacts, nous avons alors utilisé un maillage conçu par une artiste. Cela nous a conduit à retirer du jeu de données quelques cheveux qui pénétraient à l'intérieur du maillage.

## 7.2 DES FIBRES NUMÉRISÉES AUX SUPER-HÉLICES

Les fibres numérisées contenues dans ces trois jeux de données sont représentées sous la forme de suites de points pour *CaptLisse* et *CaptBoucles* ou de splines de Bézier pour *SynthArt*. Nous appliquons donc l'algorithme des tangentes flot-

tantes pour obtenir des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux approchantes afin d'utiliser les super-hélices.

Coiffure	Nombre de cheveux	Temps (s) d'approximation	Erreur maximale (%)	Nombre d'éléments maximal
<b>SynthArt</b>	240	26	0.6	8
<b>CaptLisse</b>	1980	21	0.9	10
<b>CaptBoucles</b>	1105	95	3.1	40

**Table 5:** Performance et précision de l'algorithme des tangentes flottantes appliqué aux trois coiffures *SynthArt*, *CaptLisse* et *CaptBoucles*.

Nous présentons en table 5 le temps de calcul total et moyen par fibre pour l'approximation de chacune des coiffures. De plus, nous ajoutons les erreurs moyennes et maximales commises, ainsi que les nombres d'éléments hélicaux moyens et maximaux utilisés. Le jeu de données **SynthArt**, qui ne contient que 240 splines, a requis un temps de calcul relativement élevé par rapport aux deux autres jeux de données à cause du nombre important (30) de courbes de Bézier par splines. En effet, dans l'algorithme des tangentes flottantes, l'extraction des points de rupture de la spline est d'autant plus longue que le nombre de morceaux de la spline est élevé.

Enfin, la coiffure **CaptBoucle** comportant des courbes complexes, l'algorithme des tangentes flottantes nécessitait un nombre important d'éléments hélicaux par courbe approchante pour coller au plus près aux données d'entrée. Malheureusement, l'utilisation d'un grand nombre d'éléments hélicaux par super-hélices est rédhibitoire pour la simulation. C'est pourquoi nous avons choisi de limiter le nombre d'éléments hélicaux, quitte à perdre en précision lors de l'utilisation des tangentes flottantes, ce qui explique l'erreur relativement élevée que nous avons commise sur ce jeu de données.

### 7.3 DE LA GÉOMÉTRIE À LA SIMULATION

Nous connaissons grâce à l'algorithme des tangentes flottantes la géométrie sous forme de courbes  $G^1$  en hélices par morceaux de chaque cheveu pour chacune des coiffures. L'algorithme des tangentes flottantes produit des courbes représentées grâce au repère de Frenet. Le passage de cette représentation à celle des super-hélices, représentées par un repère matériel est présenté en annexe D. De plus, comme nous consi-



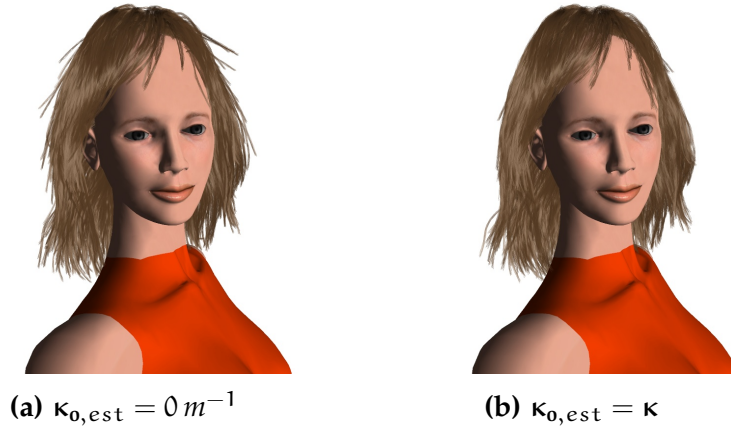
dérons des chevelures, il nous est possible de choisir à l'avance la plupart des paramètres physiques. Nous allons maintenant utiliser notre algorithme d'inversion pour déterminer la géométrie intrinsèque de chaque cheveu. Dans ce but, nous devons d'abord l'estimer.

### 7.3.1 Estimation de la géométrie intrinsèque

L'estimation de la géométrie intrinsèque des super-hélice n'est pas simple. En effet, bien estimer cette géométrie intrinsèque, c'est déjà presque résoudre le problème d'inversion.

Dans le cas de fibres subissant l'action de la gravité seule, la théorie des tiges élastiques stipule que la courbure instantanée correspond à la courbure naturelle à l'extrémité libre de la fibre. Si nous faisons l'hypothèse restrictive que la courbure naturelle est uniforme le long de chaque cheveu, nous pouvons estimer la géométrie de chacun d'entre eux en mesurant leur courbure à l'extrémité libre, dans le cas où aucun contact n'a lieu à cette extrémité.

Dans le cas de nos 3 coiffures, nous avons choisi une autre voie. Expérimentalement, nous avons remarqué que choisir pour estimation de la géométrie intrinsèque la géométrie même de la super-hélice, ou en d'autres termes  $\kappa_{0,est} = \kappa$ , produisait de meilleurs résultats lors de la simulation. Ce choix nous permet d'assurer l'équilibre de chaque cheveu, tout en minimisant son énergie potentielle élastique, ce qui rend la simulation plus stable. D'un point de vue mécanique, ce choix revient à chercher la force de contact qui compense au mieux la force de gravité. Comme cette valeur de  $\kappa_0$  est faible devant celle obtenue par l'inversion sans contact frottant, la géométrie à l'équilibre est bien assurée par la combinaison de la force élastique et des contacts. En figure 36, nous comparons deux estimations de  $\kappa_0$  pour la coiffure **capTLisse**. La coiffure étant plutôt lisse, le choix de  $\kappa_{0,est} = 0 \text{ m}^{-1}$  est raisonnable. Toutefois, nous voyons alors la formation d'épis : en effet, dès que les contacts sont rompus, les cheveux rejoignent une position d'équilibre proche de leur position de repos, en l'occurrence dans ce cas des positions rectilignes. Lorsque nous choisissons  $\kappa_{0,est} = \kappa$ , une partie des petites déformations est prise en compte par la force élastique, d'où l'absence d'épis.



**Figure 36:** Comparaison du résultat de deux estimations différentes de  $\kappa_0$ . En (a), nous choisissons  $\kappa_{0,est} = 0 \text{ m}^{-1}$ . Dans ce cas, les cheveux ont une position de repos droite et lorsque certains contacts sont rompus, des épis se forment. En (b), la position de repos est plus proche de la géométrie, et peu d'épis se forment.

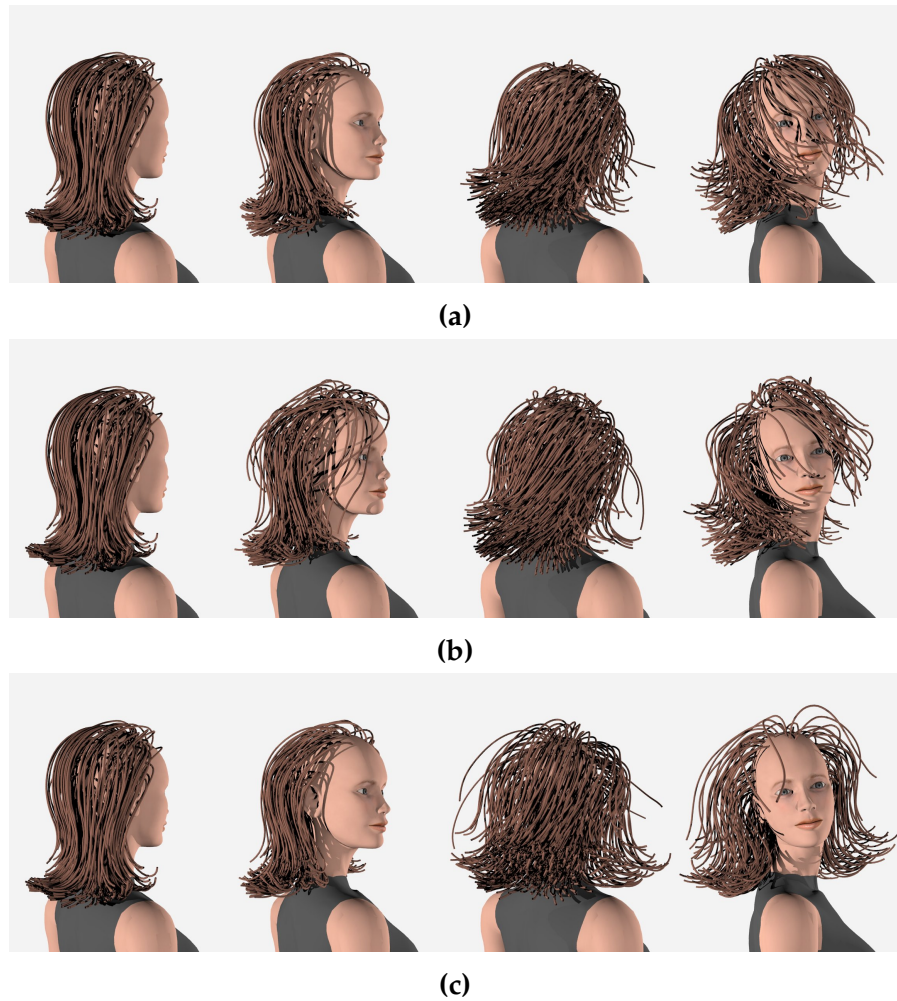
### 7.3.2 Performance

Coiffure	Nombre de cheveux	Nombre de contacts	Temps (s) d'inversion
<b>SynthArt</b>	240	8922	5
<b>CaptLisse</b>	1980	30381	19
<b>CaptBoucles</b>	1105	14358	15

**Table 6:** Temps de calcul de l'inversion des trois coiffures **SynthArt**, **CaptLisse** et **CaptBoucles**.

Nous reportons en table 6 le temps de calcul de notre algorithme d'inversion appliqué à chaque jeu de données. Nous avons en outre ajouté le nombre de contacts détectés pour chaque jeu de données. Nous constatons que l'utilisation de l'algorithme de résolution du problème de complémentarité pour la dynamique permet à notre algorithme d'inversion d'être rapide, même dans le cas d'une coiffure complexe contenant 1100 cheveux enchevêtrés (**CaptBoucles**) pour laquelle l'inversion a nécessité environ 15 secondes. Ainsi, en ajoutant le temps de calcul de l'algorithme des tangentes flottantes, le processus complet qui prend en entrée des courbes quelconques représentant une coiffure et en calcule les paramètres physiques pour la

simulation a pris dans le cas de cette coiffure moins de deux minutes.

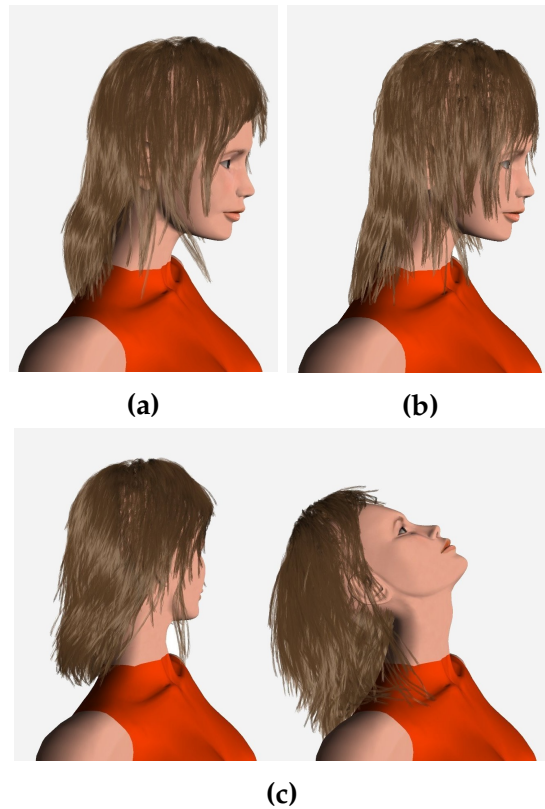


**Figure 37:** En haut, instantanés de la simulation d'une chevelure (*SynthArt*, 240 cheveux) modélisée par une artiste, après inversion prenant en compte les contacts (a). Au-dessous est reproduite à titre de comparaison la figure 32 (b) et (c). Nous constatons que l'aspect général de la coiffure est mieux conservé en (a) qu'après inversion sans contact et sans stabilisation (b) (particulièrement sur la seconde image en partant de la gauche). Nous constatons aussi que le mouvement est plus naturel et moins rigide en (a) que celui obtenu après stabilisation (c).

#### 7.4 RÉSULTATS

Notre technique d'inversion nous permet de déterminer une géométrie intrinsèque plausible des cheveux de chaque jeu de données, qui assure que la position à l'équilibre des super-

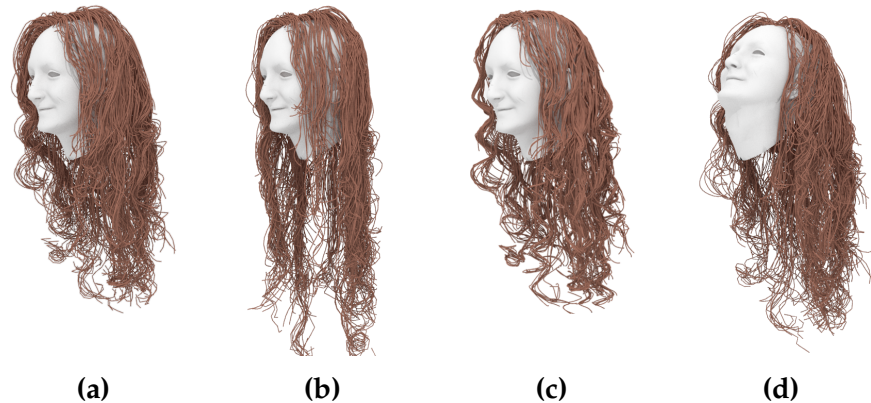
hélices est exactement la géométrie passée en entrée. Ainsi, nous connaissons tous les paramètres physiques nécessaires à la simulation dynamique de chacun de ces jeux de données. Il nous est donc possible maintenant d’animer ces coiffures.



**Figure 38:** Instantanés de la simulation de la capture de la chevelure réelle *CaptLisse* capturée automatiquement (ici, après pré-traitement, 1980 cheveux) après inversion prenant en compte les contacts (a), produisant un mouvement naturel des cheveux (c). À titre de comparaison, nous trouvons en (b) la chevelure après simulation, sans inversion en choisissant  $\kappa_0 = \kappa$ . Dans ce cas, la géométrie n’est pas conservée à l’équilibre et les cheveux s’affaissent.

**SIMULATION DES JEUX DE DONNÉES** Nous présentons en figures 37, 38 et 39 des instantanés de la simulation des jeux **SynthArt**, **CaptLisse** et **CaptBoucles** avec en particulier un mouvement de tête. Comme dans le cas de l’inversion avec l’énergie potentielle que nous avons présentée précédemment, notre technique d’inversion avec contact frottant assure que la position de départ des super-hélices est bien une position d’équilibre, au moins jusqu’à ce que la tête entre en mouvement. Alors, le mouvement des cheveux est souple et plausible,

à la différence de celui obtenu par la stabilisation de l'inversion sans contacts, comme montré figure 34.

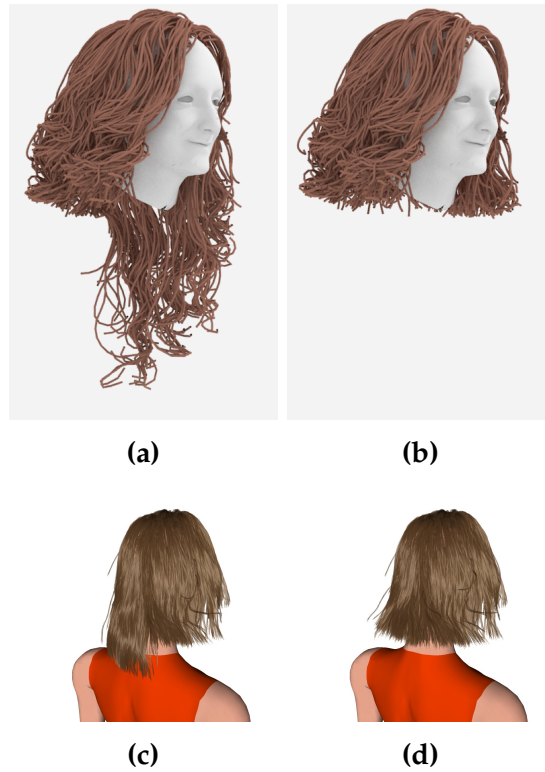


**Figure 39:** Capture d'une chevelure réelle (a) à partir d'une perruque par (LUO, LI et RUSINKIEWICZ, 2013), approchée par les tangentes flottantes. Sans inversion (b), à la simulation, la chevelure s'affaisse et perd sa configuration initiale. Grâce à notre méthode d'inversion, nous simulons la chevelure (c) et (d) en conservant sa configuration d'équilibre et donc son aspect général.

Enfin, nous nous sommes mis dans la peau d'un coiffeur et avons coupé les cheveux des deux jeux de données capturés que nous simulons, figure 40. Contrairement à une méthode purement géométrique qui se contenterait de réduire la longueur des cheveux, le calcul des paramètres physiques par notre méthode d'inversion et la simulation qui a suivi permettent de prendre en compte la perte subite de masse de la chevelure. Nous avons alors observé comme attendu un effet de ressort des cheveux qui sont remontés et ont pris du volume.

## 7.5 DISCUSSION

La combinaison de nos deux algorithmes, les tangentes flottantes pour convertir la géométrie initiale des cheveux en celle des super-hélices, puis l'inversion avec contacts frottants pour le calcul de la géométrie intrinsèque de chaque cheveu, nous a permis de prendre en entrée des coiffures numérisées pour ensuite les animer de manière plausible par une simulation physique.



**Figure 40:** La simulation utilisant les paramètres physiques obtenus par l'inversion permet de manipuler physiquement les cheveux, par exemple en les coupant.

### 7.5.1 Limitations

Bien que nos deux algorithmes produisent des résultats encourageants, ils sont dépendants de la qualité des données d'entrées. D'abord, si les données d'entrée sont des courbes complexes comme dans **CaptBoucles**, la méthode des tangentes flottantes risque de nécessiter un nombre d'éléments hélicaux élevé pour approcher correctement les données d'entrée. Or, avoir des super-hélices contenant beaucoup d'éléments est rédhibitoire pour l'inversion et pour la simulation. Dès lors, nous sommes contraints de diminuer la précision des tangentes flottantes en forçant un nombre d'éléments hélicaux restreint, ce qui nous conduit alors à une approximation moins précise.

De plus, lors de l'approximation par les tangentes flottantes, la courbe  $G^1$  en hélices par morceaux peut contenir des éléments hélicaux dont la courbure ou la torsion sont très élevées. En effet, nous ne mettons aucune contrainte sur ces grandeurs lors de la relaxation des points. Or, de trop grandes courbures ou torsions peut produire des instabilités lors de la simulation

des super-hélices. Il serait donc important désormais d'assurer que l'algorithme des tangentes flottantes produit des courbes en hélices par morceaux de courbures et de torsions raisonnables.

Ensuite, notre méthode d'inversion fait des hypothèses très fortes sur les matériaux considérés. En effet, elle s'appuie sur la connaissance exacte de la plupart des paramètres physiques (module d'Young, masse volumique, coefficients de frottement, etc.) et sur une estimation de la géométrie intrinsèque. Il faut donc avoir une connaissance très précise des matériaux mis en jeu pour déterminer la géométrie intrinsèque de l'assemblée de fibres considérée. Cette contrainte est très forte et il faudrait pouvoir s'en affranchir afin de déterminer d'autres paramètres physiques que la géométrie intrinsèque.

Enfin, si visuellement les résultats obtenus lors de l'inversion répondent au problème posé, celui d'assurer la géométrie à l'équilibre statique sous l'action de forces extérieures, il reste que nous n'avons aucune validation de la géométrie intrinsèque calculée. Ainsi, la géométrie au repos déterminée par notre méthode d'inversion appliquée à une chevelure réelle pourrait être très différente de la véritable géométrie au repos. Ce problème de validation nous paraît un point particulièrement important à développer à la suite de ce travail de thèse.

### 7.5.2 *Mise en pratique*

Si nos deux algorithmes sont capables de manipuler des assemblées de fibres contenant de l'ordre de 1000 à 10000 fibres, nous restons encore loin de chevelures complètes qui contiennent de l'ordre de 100000 cheveux, comme c'est le cas pour les données initiales de **CaptLisse**. Dans ce cas, nous sommes contraints de pré-traiter les données d'entrée pour limiter le nombre de fibres, par exemple en sélectionnant aléatoirement de manière uniforme un sous-ensemble de ces fibres, comme nous l'avons fait pour **CaptLisse**.

Une autre limite géométrique liée aux entrées de notre méthode, plus importante à nos yeux que la précédente, tient à la géométrie des contacts. En effet, pour que notre méthode soit pleinement efficace, elle doit pouvoir s'appuyer sur une géométrie des fibres ainsi que des objets avec lesquels elles sont en contact la plus précise possible. La précision de la détection des contacts baisse avec celle de la géométrie. Une géométrie mal capturée peut alors conduire à des cas où des fibres se re-

trouvent libres, sans aucun contact. Le problème ici est qu'il faut donc connaître aussi précisément que possible l'environnement des fibres, par exemple le buste de la personne dont nous capturons les cheveux. Dans le cas de **CaptLisse**, nous avons la chevelure capturée, mais pas le maillage du buste. Et si nous disposions du maillage correspondant à **CaptBoucles**, encore faudrait-il que la capture et l'approximation géométrique par les tangentes flottantes soient assez précises pour conserver la géométrie des contacts réels. Enfin, dans le cas où les fibres représentent non pas des fibres seules comme des cheveux isolés mais plutôt les lignes directrices d'agrégats comme des mèches, à la manière de **CaptBoucles**, il nous faut encore connaître très précisément l'épaisseur de chaque mèche pour détecter correctement les contacts.

### 7.5.3 Inversibilité d'autres modèles

Cette thèse est construite autour du modèle des super-hélices, mais d'autres modèles de fibres sont couramment utilisés. Il est nécessaire de s'interroger sur la possibilité et la simplicité de l'inversion d'autres modèles. En effet, l'utilisation de modèles nodaux nous permettrait de nous affranchir de l'étape d'approximation géométrique.

**MODÈLE DE MASSE-RESSORT** Les modèles de type masses-ressorts, comme décrit dans (ROSENBLUM, CARLSON et TRIPP, 1991) par exemple, sont essentiellement construits à partir de ressorts attachant ensemble des masses. Dans ce cas, la géométrie intrinsèque est donnée par les longueurs à vide de ces ressorts. Considérons le cas le plus simple, une unique masse, attachée à un point d'ancrage inamovible par un ressort (voir figure 41). Si nous notons  $l_0$  la longueur à vide du ressort, ce qui correspond à la géométrie intrinsèque du modèle, un bilan de force nous donne qu'à l'équilibre

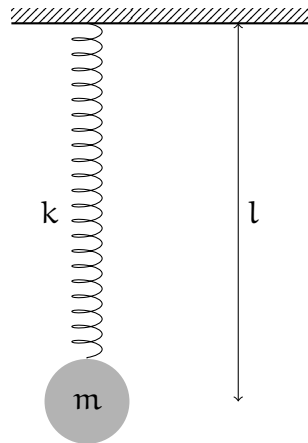
$$k(l - l_0) = mg,$$

où  $g$  est la constante de pesanteur. L'inversion nous donne alors trivialement

$$l_0 = l - \frac{mg}{k}.$$

Il est alors évident qu'en fonction des valeurs de  $m$  et  $k$ ,  $l_0$  peut prendre des valeurs négatives, qui n'ont pas de sens mécanique. Les modèles de type masse-ressort ne sont donc pas





**Figure 41:** Exemple minimal de masse-ressort.

toujours inversibles. Dans (TWIGG et KAČIĆ-ALESIĆ, 2011), les auteurs utilisent néanmoins un tel modèle, et proposent pour résoudre l'inversion de ne pas calculer la géométrie intrinsèque exacte annulant la somme des forces, mais de minimiser cette somme en contraignant les longueurs à vide de chaque ressort à être positives. Dans ce cas, le problème de l'inversion n'est pas résolu de manière exacte et la configuration de l'assemblée de fibres à l'équilibre n'est pas garantie. Au démarrage de la simulation, sous l'action de son propre poids, elle aura tendance à s'affaisser.

**CORDE** Les coordonnées du modèle CoRdE (SPILLMANN et TESCHNER, 2007) contiennent les quaternions unitaires associés à chaque noeud du modèle. Pour les mêmes raisons que pour le modèle des masses-ressorts, l'inversion peut produire des quaternions invalides.

**DISCRETE ELASTIC RODS** Le modèle des Discrete Elastic Rods (BERGOU et al., 2008; BERGOU et al., 2010) décrit la géométrie intrinsèque des fibres par un ensemble de courbures, qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble des réels. Il est aisé de voir que la dynamique des Discrete Elastic Rods est très semblable à celle des super-hélices. Par conséquent, et contrairement aux modèles des masses-ressort ou CoRdE, il est possible d'inverser la statique des Discrete Elastic Rods. On trouve d'ailleurs que la matrice  $\mathbf{K}$  est ici non plus diagonale comme dans le cas des super-hélices, mais est à bande, c'est-à-dire que tous ses coefficients non nuls sont réunis autour de sa diagonale.

La méthode d'inversion que nous avons construite pour les super-hélices peut donc être appliquée au modèle des Discrete Elastic Rods. Finalement, nous pouvons conclure que l'inversibilité d'un modèle physique de fibre tient essentiellement à l'espace de sa géométrie intrinsèque. Si la géométrie intrinsèque n'est contrainte que par le choix de coordonnées du modèle (et non pas par des contraintes externes comme c'est le cas pour les masses-ressorts où les longueurs à vide des ressorts doivent être positives), alors il est probable que le modèle soit inversible.



## CONCLUSION

---

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème d'assurer l'équilibre pour une assemblée de fibres soumises à des forces extérieures et dont la configuration géométrique était imposée : le but était d'identifier la géométrie intrinsèque du modèle satisfaisant une telle condition. Nous avons apporté une solution à ce problème en nous appuyant sur le modèle des super-hélices. Pour cela, nous avons construit un algorithme, les *tangentes flottantes* et une méthode d'inversion.

L'algorithme des tangentes flottantes permet d'approcher une courbe en entrée, dans notre cas une fibre numérisée, par une courbe  $G^1$  en hélices par morceaux, qui représente la géométrie d'une super-hélice. L'essence de cet algorithme est l'interpolation de vecteurs tangents, qui s'appuie ici sur la condition de co-hélicité de deux points et deux vecteurs tangents introduite par Ghosh (GHOSH, 2010). Nous avons proposé une démonstration complète de cette condition, prouvant ainsi le bon fonctionnement de notre algorithme. Nous avons ensuite montré que l'algorithme des tangentes flottantes était rapide, précis et pouvait traiter de nombreuses courbes en l'appliquant à différents jeux de données, plus ou moins complexes, et en le comparant à un algorithme d'optimisation classique.

La méthode d'inversion que nous avons proposée comporte deux volets distincts. D'abord, si seules des forces dérivant d'un potentiel s'appliquent, alors nous avons montré que le modèle des super-hélices était trivial à inverser. En effet, que ce soit en annulant le gradient de l'énergie potentielle ou la somme des forces s'appliquant au système, déterminer la géométrie intrinsèque se ramenait à la résolution d'un système diagonal. Nous avons alors proposé d'aller plus loin en évaluant la stabilité de l'état d'équilibre. Nous avons pour cela dégagé un critère suffisant à l'équilibre, reliant le module d'Young et la masse volumique à une constante donnée par la géométrie. Ce critère nous a alors permis d'étudier la stabilité de l'équilibre et même de stabiliser les équilibres instables. Le second volet de l'inversion que nous avons proposé prend en compte les contacts frottants entre fibres et avec des objets extérieurs. Le principe de cette inversion est de s'approcher au plus près

d'une géométrie intrinsèque estimée, tout en respectant les contraintes de Signorini-Coulomb qui modélisent les contacts frottants. Cela nous conduit à un problème SOCQP qui peut être résolu grâce à un algorithme efficace utilisé pour la dynamique sous contraintes de Signorini-Coulomb.

Nous avons enfin testé nos deux algorithmes sur trois coiffures différentes, une synthétique créée par une artiste et deux autres capturées récemment à partir de données réelles. Nous avons montré que la combinaison de nos deux algorithmes était efficace et permettait de produire des simulations plausibles d'assemblées de fibres à partir de leurs géométries à l'équilibre sous l'action de la gravité et de contacts extérieurs et entre fibres.

## 8.1 TRAVAUX FUTURS

Il s'ouvre devant nous maintenant un large éventail de travaux possibles. Nous manquons d'abord de résultats théoriques sur nos algorithmes, qui nous permettrait de valider théoriquement leur bon fonctionnement que nous avons montré expérimentalement. Ensuite, notre méthode d'inversion nous permet de déterminer la géométrie intrinsèque des fibres, tous les autres paramètres physiques étant fixés. Une extension de ce travail de thèse serait donc de se pencher sur l'estimation de ces autres paramètres physiques.

### 8.1.1 Résultats théoriques

En ce qui concerne la géométrie, il nous apparaît maintenant important de travailler sur la caractérisation de l'erreur commise par l'algorithme des tangentes flottantes. Actuellement, nous ne disposons d'aucun résultat théorique nous permettant de borner l'erreur commise en fonction du nombre d'éléments hélicaux choisis. Nous avons montré par l'expérience que l'erreur semblait décroître lorsque le nombre d'éléments augmentait, mais nous n'avons aucune garantie que c'est toujours le cas.

Nous manquons aussi de garanties théoriques pour l'algorithme d'inversion, particulièrement sur la convergence du solveur utilisé. Toute notre technique d'inversion repose sur l'algorithme de minimisation présenté dans (DAVIET, BERTAILS-DESCOUBES et BOISSIEUX, 2011), qui se montre performant, mais

pour lequel aucun résultat théorique de convergence n'a été démontré.

### 8.1.2 *Estimation des autres paramètres physiques*

D'un point de vue mécanique, notre méthode d'inversion fait l'hypothèse que nous connaissons par avance le matériau dont chaque fibre est constituée. Cette hypothèse est raisonnable dans le cas des cheveux et nous permet de fixer par avance les paramètres physiques du modèle des super-hélices, ainsi que les coefficients de frottement. Toutefois, cette hypothèse est trop restrictive dans le cas général et nous conduit maintenant aux travaux futurs.

Si nous voulons estimer plus que la géométrie intrinsèque de chaque fibre lors de l'inversion, par exemple si nous voulons estimer en plus leur module d'Young, nous allons avoir besoin de données supplémentaires : nous ne pouvons plus nous contenter de connaître la géométrie à l'équilibre. Dans le cas où seules les forces dérivant d'un paramètre s'appliquaient, nous avons fait en plus l'hypothèse que la position d'équilibre était stable, ce qui nous avait permis de donner une borne inférieure au module d'Young. Dans (BHAT et al., 2003), Bhat et collègues proposent une méthode pour estimer tous les paramètres physiques de tissus, en minimisant la différence entre la simulation et une vidéo de référence du tissu. S'appuyer sur une vidéo leur est nécessaire pour estimer aussi bien les paramètres statiques comme la géométrie intrinsèque que les paramètres dynamiques comme le module d'Young. Nous pensons qu'il en va de même pour les fibres. Ainsi, un développement du travail de cette thèse serait pour nous d'inverser, non plus une position d'équilibre, statique, mais tout un mouvement dynamique, représenté par une vidéo ou par une séquence de géométries numérisées.

Dans ce second cas, si nous partons de géométries capturées, nous risquons toutefois d'être limités par la qualité de la capture, comme nous l'avons déjà été dans le cas statique. Un autre développement possible serait donc d'affiner les outils et les techniques de capture de fibres pour les rendre plus précis et plus sensibles à la géométrie des contacts qui est essentielle à une bonne inversion.

Enfin, il nous apparaît très important de pouvoir valider la méthode d'inversion en comparant les paramètres physiques obtenus à des valeurs réelles mesurées sur des assemblées de

fibres. Cette validation nécessite un protocole expérimental capable de mesurer la géométrie intrinsèque des fibres, ou encore les forces de contact mises en jeu dans leur forme géométrique. Les possibilités d'applications sont nombreuses, aussi bien en informatique graphique qu'en cosmétologie, et nous n'avons aucun doute sur l'intérêt de cette extension à ce travail de thèse.

## ANNEXES





## RELAXATION DES POINTS POUR LES TANGENTES FLOTTANTES

---

Dans cette annexe, nous allons détailler la construction du problème linéaire à résoudre lors de la relaxation des points de l'algorithme des tangentes flottantes, présenté au chapitre 4.

Le problème que nous souhaitons résoudre est le problème aux moindres carrés suivant :

$$\arg \min_{p'_0, \mathcal{A}} = \sum_{i=0}^n \|p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1}) - p_i\|^2$$

où  $\mathcal{A}$  est l'ensemble  $\{\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1} \quad \forall i \in [0, n]\}$ .

En posant

$$F(p'_0, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^n \|p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1}) - p_i\|^2,$$

la solution au problème de minimisation est celle qui annule le gradient de  $F$ . Nous devons donc calculer  $p'_0$  et  $\mathcal{A}$  tels que  $\nabla F(p'_0, \mathcal{A}) = 0$ . À cette fin, posons

$$g_i(p'_0, \mathcal{A}) = \|p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1}) - p_i\|^2$$

de sorte que  $F = \sum_{i=0}^n g_i$ . Il est aisé de montrer que l'on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial p'_{0x}} = 2(p'_{0x} + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0x} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1x}) - p_{ix}) \\ \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{k,0}} = 0 \text{ si } i \leq k \\ \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_{k,0}} = 2 \langle \mathbf{v}_{k,0}, (p'_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1}) - p_i) \rangle \text{ si } i > k. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial p'_{0x}} &= \sum_{i=0}^n 2(p'_{0x} + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0x} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1x}) - p_{ix}) \\
&= 2(n+1)p'_{0x} + \sum_{i=0}^n 2 \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0x} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1x}) \\
&\quad - 2(n+1)p_{ix} \\
&= 2(n+1)p'_{0x} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n 2(\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0x} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1x}) \\
&\quad - 2(n+1)p_{ix} \\
&= 2(n+1)p'_{0x} + \sum_{j=0}^{n-1} 2(n-j) \mathbf{v}_{j,0x} \alpha_{j,0} + 2(n-j) \mathbf{v}_{j,1x} \alpha_{j,1} \\
&\quad - 2(n+1)p_{ix}.
\end{aligned}$$

Il en va de même pour  $p'_{0y}$  et  $p'_{0z}$ . En ce qui concerne  $\alpha_{k,0}$  et  $\alpha_{k,1}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \alpha_{k,0}} &= \sum_{i=k+1}^n 2 \langle \mathbf{v}_{k,0}, p'_0 \rangle + \sum_{i=k+1}^n 2 \langle \mathbf{v}_{k,0}, \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{j,0} \mathbf{v}_{j,0} + \alpha_{j,1} \mathbf{v}_{j,1}) \rangle \\
&\quad - \sum_{i=k+1}^n 2 \langle \mathbf{v}_{k,0}, p_i \rangle \\
&= \langle 2(n-k) \mathbf{v}_{k,0}, p'_0 \rangle + \sum_{j=0}^{n-1} 2(n - \max(j, k)) \langle \mathbf{v}_{k,0}, \mathbf{v}_{j,0} \rangle \alpha_{j,0} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} 2(n - \max(j, k)) \langle \mathbf{v}_{k,0}, \mathbf{v}_{j,1} \rangle \alpha_{j,1} \\
&\quad - \langle 2(n-k) \mathbf{v}_{k,0}, p_i \rangle,
\end{aligned}$$

avec un résultat similaire pour  $\alpha_{k,1}$ .

Le gradient  $\nabla F$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\nabla F = \mathbf{M} \mathbf{v}_{p'_{0,A}} - \mathbf{q}$$

où  $\mathbf{v}_{p'_0, \mathcal{A}}$  et  $\mathbf{q}$  sont deux vecteurs de taille  $2 * n + 3$  tels que

$$\mathbf{v}_{p'_0, \mathcal{A}} = \begin{pmatrix} p_{0,x} \\ p_{0,y} \\ p_{0,z} \\ \alpha_{0,0} \\ \alpha_{0,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1,0} \\ \alpha_{n-1,1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 2(n+1)p_{ix} \\ \sum_{i=0}^n 2(n+1)p_{iy} \\ \sum_{i=0}^n 2(n+1)p_{iz} \\ 2n\langle \mathbf{v}_{0,0}, p_0 \rangle \\ 2n\langle \mathbf{v}_{0,1}, p_0 \rangle \\ \vdots \\ 2\langle \mathbf{v}_{n-1,0}, p_{n-1} \rangle \\ 2\langle \mathbf{v}_{n-1,1}, p_{n-1} \rangle \end{pmatrix}$$

et  $\mathbf{M}$  une matrice carrée de taille  $(2n+3, 2n+3)$  telle que ses trois premières lignes sont

$$\begin{pmatrix} 2(n+1) & 0 & 0 & 2n\mathbf{v}_{0,0x} & 2n\mathbf{v}_{0,1x} & \dots & 2\mathbf{v}_{n-1,0x} & 2\mathbf{v}_{n-1,1x} \\ 0 & 2(n+1) & 0 & 2n\mathbf{v}_{0,0y} & 2n\mathbf{v}_{0,1y} & \dots & 2\mathbf{v}_{n-1,0y} & 2\mathbf{v}_{n-1,1y} \\ 0 & 0 & 2(n+1) & 2n\mathbf{v}_{0,0z} & 2n\mathbf{v}_{0,1z} & \dots & 2\mathbf{v}_{n-1,0z} & 2\mathbf{v}_{n-1,1z} \end{pmatrix}$$

et qu'on a pour tout  $k$  et  $j$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$ ,  $d_0$  et  $d_1$  dans  $\{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{2k+3+d_0,0} &= 2(n-k)\mathbf{v}_{k,d_0x}p'_{0x} \\ \mathbf{M}_{2k+3+d_0,1} &= 2(n-k)\mathbf{v}_{k,d_0y}p'_{0y} \\ \mathbf{M}_{2k+3+d_0,2} &= 2(n-k)\mathbf{v}_{k,d_0z}p'_{0z} \\ \mathbf{M}_{2k+3+d_0,2j+3+d_1} &= 2(n-\max(j,k))\langle \mathbf{v}_{k,d_0}, \mathbf{v}_{j,d_1} \rangle \\ \mathbf{M}_{2k+3+d_0,2j+3+d_1} &= 2(n-\max(j,k))\langle \mathbf{v}_{k,d_0}, \mathbf{v}_{j,d_1} \rangle. \end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre l'équation linéaire

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_{p'_0, \mathcal{A}} = \mathbf{q}$$

pour conclure la relaxation des points.



## GRADIENT ET HESSIENNE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

---

L'objet de cette annexe est de calculer analytiquement le gradient et la hessienne de l'énergie potentielle d'une super-hélice soumise à la gravité. Ce calcul est nécessaire pour l'inversion et la stabilisation présentée au chapitre 6.

Dans cette annexe, nous n'allons considérer que le cas de l'énergie potentielle de pesanteur, celui du gradient de l'énergie potentielle élastique étant trivial.

### B.1 EXPRESSION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESAN- TEUR D'UNE SUPER-HÉLICE

L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime ainsi :

$$E_g = \rho S g \int_0^L z(s) ds,$$

où  $z(s)$  désigne la hauteur du point d'abscisse curviligne  $s$ . D'après (BERTAILS, 2006), nous pouvons réécrire cette énergie sous la forme :

$$E_g = \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \int_0^L (L - s') \mathbf{t}(s') ds',$$

où  $\mathbf{t}(s)$  désigne le vecteur tangent à la super-hélice au point d'abscisse  $s$ . En découpant l'intégrale selon les éléments de la super-hélice, nous écrivons :

$$\begin{aligned} E_g &= \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \sum_{Q=1}^N \int_{s_{Q-1}}^{s_Q} (L - s') \mathbf{t}(s') ds' \\ &= \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \sum_{Q=1}^N \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \mathbf{t}_Q(u) du \\ &= \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \sum_{Q=1}^N \mathbf{I}_Q \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{I}_Q = \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \mathbf{t}_Q(u) du$  et  $\mathbf{t}_Q$  le vecteur tangent à l'élément  $Q$  de la super-hélice.

### B.2 GRADIENT DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESAN- TEUR

Pour calculer le gradient de l'énergie potentielle de pesanteur de la tige, nous allons étudier la dérivée de l'intégrale  $\mathbf{I}_Q$  sans

calculer explicitement celle-ci. En d'autres termes, nous allons calculer, pour  $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,  $Q \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $P \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{i,P}} &= \frac{\partial}{\partial \kappa_{i,P}} \left( \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \mathbf{t}_Q(u) du \right) \\ &= \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \frac{\partial \mathbf{t}_Q(u)}{\partial \kappa_{i,P}} du. \end{aligned}$$

BERTAILS-DESCOUBES (2009) introduit la fonction  $\boldsymbol{\varphi}_{i,Q}$  telle que :

$$\boldsymbol{\varphi}_{i,Q}(u) = \int_0^u \mathbf{n}_{i,Q}(u) du$$

où  $\mathbf{n}_{0,Q} = \mathbf{t}_Q$  et montre qu'on a

$$\forall i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \forall Q \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall P \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{i,Q}(u)}{\partial \kappa_{j,P}} = \begin{cases} 0 & \text{si } P > Q \\ \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(u) \wedge \mathbf{n}_{i,Q}(u) & \text{si } P = Q \\ \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge \mathbf{n}_{i,Q}(u) & \text{si } P < Q. \end{cases}$$

On écrit alors, pour  $\mathbf{I}_Q$ ,

$$\begin{aligned} \text{si } P < Q, \frac{\partial \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{j,P}} &= \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge \mathbf{t}_Q(u) du \\ &= \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \mathbf{t}_Q(u) du \\ &= \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge \mathbf{I}_Q \end{aligned}$$

et

$$\text{si } P = Q, \frac{\partial \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{j,Q}} = \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \boldsymbol{\varphi}_{j,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u) du.$$

Finalement, on obtient le résultat suivant,

$$\forall j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \forall P \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_g}{\partial \kappa_{j,P}} &= \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \left[ \sum_{Q=P+1}^N \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge \mathbf{I}_Q \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \boldsymbol{\varphi}_{j,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u) du \right]. \end{aligned}$$

### B.3 HESSIENNE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESAN-TEUR

Remarquons d'abord que pour  $Q \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ ,  $P \in \llbracket Q+1, N \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ , on a

$$\frac{\partial \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{i,P}} = 0.$$

Ainsi, nous allons nous intéresser à la hessienne de  $I_Q$  pour  $Q \in \llbracket 1, N \rrbracket$  en considérant les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 I_Q}{\partial \kappa_{i,P} \partial \kappa_{j,R}}$  avec  $i, j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et  $P, Q, R \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Examinons d'abord les dérivées de  $\varphi_{i,P}$  par rapport à  $\kappa_{j,R}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{i,P}(u)}{\partial \kappa_{j,R}} &= \int_0^u \frac{\partial \mathbf{n}_{i,P}(u')}{\partial \kappa_{j,R}} du' \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } R > P \\ \int_0^u \boldsymbol{\varphi}_{j,R}(u') \wedge \mathbf{n}_{i,P}(u') du' & \text{si } R = P \\ \int_0^u \boldsymbol{\varphi}_{j,R}(l_R) \wedge \mathbf{n}_{i,P}(u') du' & \text{si } R < P \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } R > P \\ \int_0^u \boldsymbol{\varphi}_{j,P}(u') \wedge \mathbf{n}_{i,P}(u') du' & \text{si } R = P \\ \boldsymbol{\varphi}_{j,R}(l_R) \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(u) & \text{si } R < P. \end{cases} \end{aligned}$$

On pose

$$\forall i, j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \forall Q \in \llbracket 1, N \rrbracket, \boldsymbol{\psi}_{i,j,Q}(u) = \int_0^u \boldsymbol{\varphi}_{i,Q}(u') \wedge \mathbf{n}_{j,Q}(u') du'.$$

On a donc

$$\frac{\partial \varphi_{i,P}(u)}{\partial \kappa_{j,R}} = \begin{cases} 0 & \text{si } R > P \\ \boldsymbol{\psi}_{j,i,P}(u) & \text{si } R = P \\ \boldsymbol{\varphi}_{j,R}(l_R) \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) & \text{si } R < P. \end{cases}$$

Dès lors, si  $P < R \leq Q$  (le cas  $R < P \leq Q$  s'obtenant par permutation et avec le théorème de Schwarz)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_Q}{\partial \kappa_{i,P} \partial \kappa_{j,R}} &= \frac{\partial}{\partial \kappa_{j,R}} (\boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge I_Q) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P)}{\partial \kappa_{j,R}} \wedge I_Q + \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge \frac{\partial I_Q}{\partial \kappa_{j,R}} \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge (\boldsymbol{\varphi}_{j,R}(l_R) \wedge I_Q) & \text{si } R < Q \\ \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge \frac{\partial I_Q}{\partial \kappa_{j,Q}} & \text{si } R = Q. \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, si  $P = R$ , avec  $P < Q$  et  $R < Q$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_Q}{\partial \kappa_{i,P} \partial \kappa_{j,P}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P)}{\partial \kappa_{j,P}} \wedge I_Q + \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge (\boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge I_Q) \\ &= \boldsymbol{\psi}_{j,i,P}(l_P) \wedge I_Q + \boldsymbol{\varphi}_{i,P}(l_P) \wedge (\boldsymbol{\varphi}_{j,P}(l_P) \wedge I_Q). \end{aligned}$$

Il reste le dernier cas, celui de  $P = R = Q$ . Nous avons

$$\frac{\partial I_Q}{\partial \kappa_{i,Q}} = \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \boldsymbol{\varphi}_{i,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u) du.$$

Dès lors, on a

$$\frac{\partial^2 I_Q}{\partial \kappa_{i,Q} \partial \kappa_{j,Q}} = \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \frac{\partial}{\partial \kappa_{j,Q}} (\boldsymbol{\varphi}_{i,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u)) du,$$



soit,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{i,Q} \partial \kappa_{j,Q}} = \int_0^{l_Q} (L - s_{Q-1} - u) \left[ \boldsymbol{\psi}_{j,i,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u) + \boldsymbol{\varphi}_{i,Q}(u) \wedge (\boldsymbol{\varphi}_{j,Q}(u) \wedge \mathbf{t}_Q(u)) \right] du.$$

Finalement, la hessienne de l'énergie potentielle de pesanteur de la tige s'écrit

$$\frac{\partial^2 E_g}{\partial \kappa_{i,P} \partial \kappa_{j,R}} = \rho S g \mathbf{e}_z \cdot \left( \sum_{Q \geq \max(P,R)} \frac{\partial^2 \mathbf{I}_Q}{\partial \kappa_{i,P} \partial \kappa_{j,R}} \right).$$

## CONTINUITÉ DES POLYHÉLICES

Cette annexe a été réalisée en collaboration avec Romain Casati.

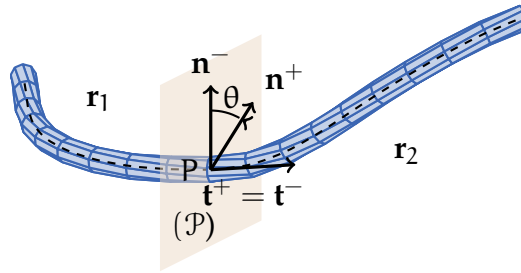
Dans le chapitre 3, nous avons présenté l'algorithme des polyhélices (GORIELY, NEUKIRCH et HAUSRATH, 2009) pour interpoler une séquence de points avec des hélices, le repère de Frenet au premier point étant fixé. Nous avons remarqué que cet algorithme construit une courbe  $G^1$  dont le repère de Frenet est continu. Nous allons montrer dans cette annexe que cette dernière hypothèse est en fait restrictive.

Il y a plusieurs manières de représenter une courbe mais la plus simple et la plus utilisée est la représentation paramétrique. Elle a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et à utiliser mais possède l'inconvénient de contenir « trop » d'information : une courbe possède en général plusieurs paramétrisations. En effet, donner une courbe paramétrique c'est donner à la fois une trajectoire mais aussi la vitesse à laquelle celle-ci est décrite. Cependant, une fois la courbe tracée, c'est-à-dire prise comme un ensemble de points, l'information de vitesse disparaît. C'est pourquoi, la qualité « visuelle » du raccordement de deux courbes doit être définie indépendamment de la paramétrisation de celles-ci.

Considérons deux courbes paramétriques  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ ,  $C^\infty$ , reliées en un point  $P$ , comme représenté figure 42. (BARSKY et DEROSE, 1984) utilisent la continuité analytique (C) pour définir la continuité géométrique (G) comme suit :

**Définition 2.** *Deux courbes sont reliées en un point  $P$  avec la continuité géométrique  $G^n$  si et seulement si chacune d'elle peut être reparamétrisée de telle sorte que le raccordement en  $P$  soit de continuité  $C^n$ .*

Il est possible de montrer que lorsque les deux courbes sont paramétrées par l'abscisse curviligne ( $\|\mathbf{r}'_1\| = \|\mathbf{r}'_2\| = 1$ ), les deux définitions de continuité sont équivalentes (BARSKY et DEROSE, 1988). Dans la suite, on suppose que les deux courbes  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont paramétrées par l'abscisse curviligne (ceci requiert que la norme du vecteur tangent ne s'annule pas).



**Figure 42:** Deux courbes  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  reliées en un point  $P = \mathbf{r}_1(t_{end}) = \mathbf{r}_2(0)$ , de manière  $G^1$ . Les quantités concernant la courbe  $\mathbf{r}_1$  (resp.  $\mathbf{r}_2$ ) et évaluées en  $t_{end}$  (resp.  $0$ ) étant dénotées «  $-$  » (resp. «  $+$  »). La continuité  $G^1$  impose l'égalité des vecteurs tangents,  $\mathbf{t}^- = \mathbf{t}^+$ , mais pas celle des repères de Frenet. Ces derniers diffèrent d'une rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur tangent commun ( $\theta$  est l'angle entre les deux normales  $\mathbf{n}^-$  et  $\mathbf{n}^+$  dans le plan  $(\mathcal{P})$  normal au vecteur tangent). Lorsque  $\theta$  est nul, les repères de Frenet coïncident.

Avec ces hypothèses, il est aisé de voir que la continuité  $G^1$  impose l'égalité des vecteurs tangents au point de raccord et que la continuité  $G^2$  signifie que les repères de Frenet ainsi que les courbures et les torsions sont égaux.

La continuité de la courbe en hélices par morceaux reconstruite par l'algorithme des polyhélices (GORIELY, NEUKIRCH et HAUSRATH, 2009) semble donc se situer entre les continuités  $G^1$  et  $G^2$ , puisqu'au point de raccord, il y a continuité du repère de Frenet mais pas du couple courbure-torsion. Il est d'ailleurs à noter qu'imposer une continuité  $G^2$  pour recoller deux hélices est une contrainte trop forte car cela revient à imposer d'obtenir une seule et même hélice après recollement.

Cependant la continuité du repère de Frenet n'est pas requise pour une continuité  $G^1$ , seuls les vecteurs tangents doivent être égaux. Ainsi, comme représenté figure 42, les normales  $\mathbf{n}^-$  et  $\mathbf{n}^+$  forment un angle quelconque  $\theta \in [0, 2\pi[$  dans le plan normal au vecteur tangent commun  $\mathbf{t}^+ = \mathbf{t}^-$ , le repère de Frenet étant continu dans le cas particulier où  $\theta = 0$ . C'est précisément ce degré de liberté  $\theta$  qui est « perdu » par l'algorithme des polyhélices en imposant la continuité du repère de Frenet.

## D'UNE COURBE $G^1$ EN HÉLICES PAR MORCEAUX À LA GÉOMÉTRIE D'UNE SUPER-HÉLICE

---

L'algorithme des tangentes flottantes approche des courbes 3d quelconques par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Les courbes que cet algorithme produit sont décrites grâce au repère de Frenet, c'est-à-dire que chaque élément hélical de la courbe est décrit par le repère de Frenet à son premier point ainsi que par une courbure et une torsion géométriques.

D'un autre côté, le modèle des super-hélice représente les fibres par des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux. Dans ce modèle, la géométrie est décrite par un repère matériel qui évolue de manière continue le long de toute la courbe, ainsi que par deux courbures et une torsion matérielles pour chaque élément.

L'objet de cette annexe est de présenter comment passer de la représentation des courbes  $G^1$  en hélices par morceaux par le repère de Frenet à la représentation par le repère matériel, pour permettre d'utiliser les résultats de l'algorithme des tangentes flottantes en entrée de notre méthode d'inversion, comme au chapitre 7.

### D.1 CAS D'UNE HÉLICE UNIQUE

Considérons le cas d'une hélice unique, de longueur  $l$ . Notons  $(\mathbf{t}_F(s), \mathbf{n}_F(s), \mathbf{b}_F(s))$  le repère de Frenet associé au point d'abscisse curviligne  $s$  de cette courbe. Si l'hélice a une courbure uniforme  $\kappa$  et une torsion uniforme  $\tau$ , alors le vecteur de Darboux de cette hélice (vecteur de rotation instantané de la courbe) est uniforme également et s'écrit :

$$\mathbf{\Omega} = \tau \mathbf{t}_F + \kappa \mathbf{b}_F.$$

Associons maintenant à l'hélice un repère matériel  $(\mathbf{t}_M, \mathbf{n}_{1M}, \mathbf{n}_{2M})$  ainsi que deux courbures  $\kappa_{1M}$  et  $\kappa_{2M}$  et une torsion  $\tau_M$  matérielles. Le lecteur intéressé par le repère matériel pourra consulter (BERTAILS, 2006) pour plus de détails. Retenons ici que le repère matériel évolue continûment le long de la courbe et sur-

tout que le vecteur de Darboux, exprimé dans ce repère est constant et s'écrit :

$$\mathbf{\Omega} = \tau \mathbf{t}_F + \kappa_{1M} \mathbf{n}_{1M} + \kappa_{2M} \mathbf{n}_{2M}.$$

Les deux repères étant construit autour du vecteur tangent à la courbe, nous avons  $\mathbf{t}_F = \mathbf{t}_M$ . Les deux repères étant de plus orthonormés, nous déduisons immédiatement les valeurs des courbures et torsions matérielles à partir de la courbure et de la torsion de Frenet :

$$\begin{cases} \tau_M = \tau \\ \kappa_{1M} = \kappa \langle \mathbf{b}_F, \mathbf{n}_{1M} \rangle \\ \kappa_{2M} = \kappa \langle \mathbf{b}_F, \mathbf{n}_{2M} \rangle. \end{cases} \quad (10)$$

## D.2 CAS DES COURBES $G^1$ EN HÉLICES PAR MORCEAUX

Dans le cas des courbes  $G^1$  en hélice par morceaux, le repère de Frenet subit des discontinuités aux points de raccord entre les hélices (voir annexe C), tandis que le repère matériel évolue de manière continue.

Pour passer de la représentation avec le repère de Frenet à la représentation avec le repère matériel, nous procédons comme suit :

1. Nous fixons le repère matériel au premier point de la courbe en hélices par morceaux. Comme nous considérons la section des super-hélices circulaire, nous pouvons fixer ce repère matériel arbitrairement. Dans la pratique, nous choisissons de le faire coïncider avec le repère de Frenet.
2. Nous déterminons les courbures et torsions matérielles du premier élément à l'aide de l'équation (10).
3. Nous transmettons le repère matériel au point de raccord avec l'hélice suivante et nous recommençons le processus à l'étape 2.

## NOTIONS DE CÔNE ET DE PROJECTION SUR UN CONVEXE

---

Au chapitre 6, nous avons vu comment transformer le problème de minimisation SOCQP en un problème de complémentarité technique. L'objet de cette annexe est de donner une autre démonstration, plus formelle de ce résultat, qui s'appuie sur les projections sur les cônes.

Dans cette annexe, nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous allons présenter rapidement quelques notions sur les cônes convexes et sur les projections. Nous nous appuyerons sur la décomposition de Moreau pour donner une autre démonstration de la transformation du SOCQP en un problème de complémentarité conique. Les notions présentées ici se retrouvent détaillées dans le contexte plus général de l'analyse convexe dans (HIRIART-URRUTY et LEMARÉCHAL, 2001).

### E.1 CÔNES

Un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  est convexe lorsque pour tout  $x, x'$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\alpha x + (1 - \alpha)x'$  appartient à  $\mathcal{C}$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

Un exemple important d'ensemble convexe est le cône de  $\mathbb{R}^3$ , type « cornet de glace », que nous avons présenté lorsque nous avons introduit le cône de Coulomb au chapitre 2 :

$$K(\mu, \mathbf{e}_N) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}_T\| \leq \mu x_N\},$$

où  $\mathbf{e}_N$  est l'axe du cône et  $\mu$  un réel lié à l'ouverture du cône. Dans la suite, nous noterons  $K_\mu$  pour désigner le cône  $K(\mu, \mathbf{e}_N)$ .

Parallèlement au cône  $K_\mu$ , on définit son cône polaire comme l'ensemble convexe suivant :

$$K_\mu^\circ = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3, \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \forall \mathbf{x} \in K_\mu\},$$

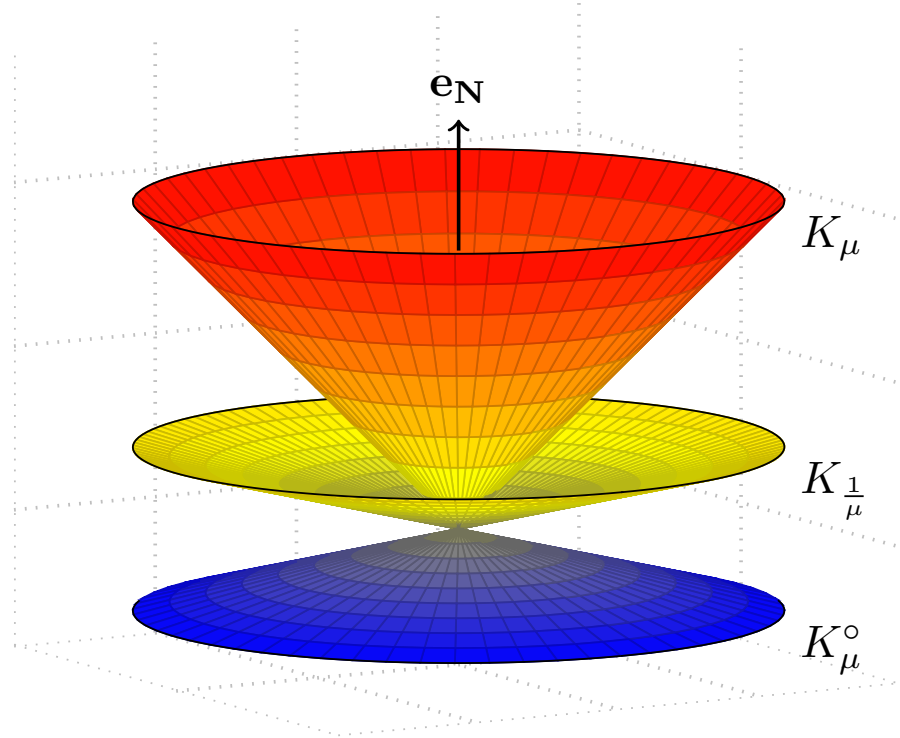
ainsi que son cône dual comme le cône :

$$K_{\frac{1}{\mu}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}_T\| \leq \frac{1}{\mu} x_N\}.$$

On peut montrer aisément que  $K_\mu^\circ = -K_{\frac{1}{\mu}}$  dans le sens où

$$x \in -K_{\frac{1}{\mu}} \iff -x \in K_{\frac{1}{\mu}}.$$

Nous avons représenté figure 43 un exemple de ces trois cônes.



**Figure 43:** Exemple de cône  $K_\mu$  (en rouge) avec son cône polaire  $K_\mu^\circ$  (en bleu) et son cône dual  $K_{\frac{1}{\mu}}$  (en jaune).

## E.2 PROJECTION SUR UN CÔNE

Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . On définit la projection de  $\mathbf{x}$  sur un cône  $K_\mu$  comme le vecteur de  $K_\mu$  le plus « proche » de  $\mathbf{x}$ , soit

$$P_{K_\mu}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{y} \in K_\mu} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2.$$

On peut démontrer (HIRIART-URRUTY et LEMARÉCHAL, 2001) que  $\mathbf{y}_x \in K_\mu$  est la projection de  $\mathbf{x}$  si et seulement si

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}_x, \mathbf{y} - \mathbf{y}_x \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in K_\mu.$$

Enfin, le théorème de décomposition de Moreau relie un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$  avec ses projections sur  $K_\mu$  et sur  $K_\mu^\circ$  :

**Théorème 3** (J.-J. Moreau). *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \text{ avec } \mathbf{x}_1 \in K_\mu, \mathbf{x}_2 \in K_\mu^\circ \text{ et } \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{x}_1 = P_{K_\mu}(\mathbf{x}) \text{ et } \mathbf{x}_2 = P_{K_\mu^\circ}(\mathbf{x}). \quad (12)$$

### E.3 TRANSFORMATION DU SOCQP EN PROBLÈME DE COMPLÉMENTARITÉ CONIQUE

Nous avons écrit au chapitre 6 que si  $f$  est une fonction convexe et si  $L$  est un ensemble convexe, alors

$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in L} f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in L, -\nabla f(\bar{\mathbf{r}})^\top (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{r}}) \leq 0 \quad (13)$$

pour tout  $t > 0$ . Nous pouvons réécrire l'équivalence (13) en termes de projection et nous obtenons

$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in L} f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \bar{\mathbf{r}} = P_{K_\mu}(\bar{\mathbf{r}} - t \nabla f(\bar{\mathbf{r}})) \quad \forall t > 0.$$

Dans le cas où  $L$  est un cône  $K_\mu$ , si nous posons

$$\mathbf{y} = P_{K_\mu^\circ}(\bar{\mathbf{r}} - t \nabla f(\bar{\mathbf{r}})),$$

alors le théorème de décomposition de Moreau présenté ci-dessus nous permet d'écrire

$$\bar{\mathbf{r}} \in K_\mu, \mathbf{y} \in -K_{\frac{1}{\mu}}, \bar{\mathbf{r}} - t \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{y} \text{ et } \langle \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

soit, immédiatement,

$$\bar{\mathbf{r}} \in K_\mu, \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) \in K_{\frac{1}{\mu}} \text{ et } \langle \bar{\mathbf{r}}, \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) \rangle = 0$$

d'où le problème de complémentarité conique :

$$\bar{\mathbf{r}} = \arg \min_{\mathbf{r} \in K_\mu} f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow K_{\frac{1}{\mu}} \ni \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) \perp \bar{\mathbf{r}} \in K_\mu.$$





## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GHOSH

---

Dans ce chapitre, nous allons donner la longue démonstration du théorème de Ghosh. Cette démonstration s'appuie en grande partie sur la propre démonstration de Ghosh, et vient en combler certaines lacunes, pour permettre notamment d'assurer le bon fonctionnement de l'algorithme d'interpolation dans tous les cas possibles. Cette démonstration, comme nous allons le voir, est constructive, c'est-à-dire qu'elle ne se contente pas de démontrer l'existence et l'unicité de l'hélice courte interpolante, mais elle donne aussi un algorithme permettant de calculer les paramètres de cette hélice. Cette démonstration se fera en plusieurs étapes. Après avoir démontré le caractère suffisant de la condition de Ghosh, ce qui comme nous le verrons est assez trivial, nous démontrerons la nécessité de cette condition à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, grâce à un lemme équivalent au théorème de Ghosh qui nous permettra d'assurer les deux phases d'analyse et de synthèse.

### F.1 PRÉLIMINAIRES

Avant de démarrer la démonstration du théorème de Ghosh, nous allons établir, à la manière de Ghosh, les équations d'une hélice et de son vecteur tangent en tout point dans un repère bien choisi, en nous appuyant sur le repère de Frenet et sur un vecteur très connu en géométrie différentielle et qui est uniforme pour les hélices, le vecteur de Darboux.

#### F.1.1 *Repère de Frenet et vecteur de Darboux*

Dans sa thèse, Ghosh introduit le repère de Frenet avec une convention qui n'est pas celle la plus usuelle. Dans cette section, c'est cette convention usuelle que nous allons utiliser.

Soit une courbe dans l'espace  $\Gamma : \rightarrow \mathbb{R}^3$ , paramétrée par abscisse curviligne. Si l'on note  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  son repère de Frenet, alors on a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

avec  $\kappa(s)$  et  $\tau(s)$  respectivement la courbure et la torsion le long de la courbe  $\Gamma$ . Notons  $\mathbf{\Omega}$  le vecteur de Darboux, tel que

$$\mathbf{\Omega} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}.$$

Le vecteur de Darboux est tel que

$$\mathbf{t}' = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{t} \quad \mathbf{n}' = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{n} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{b}'.$$

Définissons  $\omega$  la norme du vecteur de Darboux, c'est-à-dire  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  et posons alors  $\bar{\mathbf{\Omega}}$  le vecteur de Darboux normalisé  $\frac{1}{\omega} \mathbf{\Omega}$ . Puisque  $\mathbf{n}$  et  $\bar{\mathbf{\Omega}}$  sont orthonormaux, nous pouvons introduire le repère orthonormal  $\mathbf{n}, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{\Omega}}$  avec

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{n} = -\bar{\kappa} \mathbf{t} + \bar{\tau} \mathbf{b}.$$

Dans ce repère, nous pouvons écrire les équations

$$\mathbf{t} = \bar{\tau} \bar{\mathbf{\Omega}} - \bar{\kappa} \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \bar{\kappa} \bar{\mathbf{\Omega}} + \bar{\tau} \mathbf{w}.$$

et, par l'intermédiaire des identités suivantes

$$\bar{\tau} \kappa - \bar{\kappa} \tau = \frac{\tau \kappa}{\omega} - \frac{\kappa \tau}{\omega} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\tau}' \bar{\tau} + \bar{\kappa}' \bar{\kappa} = \frac{1}{2} (\bar{\tau}^2 + \bar{\kappa}^2)' = 0,$$

nous obtenons une simplification du vecteur  $\bar{\mathbf{\Omega}}'$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Omega}}' &= (\bar{\kappa}' \bar{\tau} - \bar{\tau}' \bar{\kappa}) \mathbf{w} \\ &= \gamma \mathbf{w} \end{aligned}$$

avec  $\gamma = \bar{\kappa}' \bar{\tau} - \bar{\tau}' \bar{\kappa}$  et enfin, nous pouvons écrire pour le vecteur  $\mathbf{w}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= \bar{\mathbf{\Omega}}' \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{n}' \\ &= \gamma (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) + \omega (\bar{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{w}) \\ &= -\gamma \bar{\mathbf{\Omega}} - \omega \mathbf{n}, \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons écrire ces équations en utilisant une notation pseudo-matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}' \\ \mathbf{w}' \\ \bar{\mathbf{\Omega}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & -\gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{w} \\ \bar{\mathbf{\Omega}} \end{pmatrix}.$$

## F.1.2 Équation d'une hélice

À la manière de Ghosh, nous allons maintenant utiliser le repère de Frenet et le nouveau repère introduit ici pour écrire l'équation d'une hélice et de son vecteur tangent. Dans le cas des hélices, la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  sont constantes. Il en va donc de même pour le vecteur de Darboux, sa norme et son normalisé. Pour simplifier les futures notations, introduisons en préliminaire les fonctions suivantes

$$\varphi(s) = \int_0^s \omega \, du = \omega s$$

et

$$C(s) = \int_0^s \cos \varphi(u) \, du = \frac{\sin \omega s}{\omega} = \frac{\sin \varphi}{\omega}$$

$$S(s) = \int_0^s \sin \varphi(u) \, du = \frac{1 - \cos \omega s}{\omega} = \frac{1 - \cos \varphi}{\omega}.$$

Notons maintenant  $\Gamma$  une hélice partant du point  $p_0$  avec le repère de Frenet  $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ . De ce repère de Frenet nous pouvons calculer le repère  $\mathbf{n}_0, \mathbf{w}_0, \bar{\mathbf{\Omega}}$  comme précédemment. Au point d'abscisse  $s$ , nous avons

$$\boldsymbol{\alpha}'(s) = \mathbf{t}(s) = \bar{\tau} \bar{\mathbf{\Omega}} - \bar{\kappa} \mathbf{w}.$$

En utilisant l'équation différentielle, puisque  $\gamma = 0$  dans le cas d'une hélice, alors nous avons

$$\begin{cases} \mathbf{w}' &= -\omega \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \omega \mathbf{w} \end{cases}$$

qui se résout en

$$\begin{cases} \mathbf{w} &= \cos \omega s \mathbf{w}_0 - \sin \omega s \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n} &= \sin \omega s \mathbf{w}_0 + \cos \omega s \mathbf{n}_0. \end{cases}$$

et nous obtenons alors l'équation du vecteur tangent de l'hélice dans le nouveau repère

$$\boldsymbol{\alpha}'(s) = \mathbf{t}(s) = \bar{\tau} \bar{\mathbf{\Omega}} - \bar{\kappa} (\cos \omega s \mathbf{w}_0 - \sin \omega s \mathbf{n}_0)$$

En intégrant, nous pouvons alors calculer l'équation de l'hélice dans le nouveau repère et nous obtenons

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = p_0 + \bar{\tau} s \bar{\mathbf{\Omega}} - \bar{\kappa} (C(s) \mathbf{w}_0 - S(s) \mathbf{n}_0)$$

En posant maintenant  $\{\bar{\Omega}, \mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}, \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}\}$  le repère orthogonal constant pour une hélice, qui a été introduit par Ghosh dans sa thèse, nous pouvons réécrire les équations de l'hélice et de son vecteur tangent grâce aux identités suivantes

$$\bar{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0 = \bar{\tau}\bar{\Omega} - \mathbf{t}_0 \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{k}}\mathbf{n}_0 = -\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}$$

et nous obtenons donc dans ce cas

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= p_0 + \bar{\tau}s\bar{\Omega} + C(s)(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) - S(s)(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}) \\ \mathbf{t}(s) &= \mathbf{t}_0 + (\cos \omega s - 1)(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) - \sin \omega s(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Grâce au changement de variable  $\varphi = \omega s$ , nous pouvons enfin écrire

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= p_0 + \bar{\tau}\frac{\varphi}{\omega}\bar{\Omega} + \frac{\sin \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) \\ &\quad - \frac{1 - \cos \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}) \\ \mathbf{t}(\varphi) &= \mathbf{t}_0 + (\cos \varphi - 1)(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) - \sin \varphi(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega}), \end{aligned}$$

Ces équations nous permettent de conclure que le vecteur  $\Omega$  est l'axe normalisé de l'hélice. Nous pouvons maintenant, grâce à ces informations donner la définition d'une hélice courte, telle qu'elle se trouvait dans (GHOSH, 2010).

**Définition 3.** Une hélice  $\Gamma$  d'axe normalisé  $\Omega$  est une hélice courte lorsque son projeté dans le plan orthogonal à  $\Omega$  est un arc de cercle strict. En considérant l'équation de l'hélice, nous pouvons écrire l'équation de l'hélice dans le plan orthogonal à  $\Omega$  et nous obtenons

$$\alpha_{\perp}(\varphi) = p_0 + \frac{\sin \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}) - \frac{1 - \cos \varphi}{\omega}(\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\Omega})$$

qui est l'équation d'un cercle. Il apparaît alors que cet arc de cercle est strict lorsque  $\varphi$  vérifie

$$\varphi \in [0, \varphi_*] \quad \text{et} \quad \varphi_* \in [0, 2\pi[.$$

## F.2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Maintenant, nous allons utiliser les équations établies auparavant pour démontrer le théorème de Ghosh. Dans un premier temps, nous allons démontrer le cas de la nécessité de la condition de Ghosh, ce qui est assez trivial. En effet, si l'on suppose

que les deux points  $p_0$  et  $p_1$  sont interpolés par une hélice  $\Gamma$  avec leurs vecteurs tangents, de sorte que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} p_1 - p_0 &= \alpha(l) - \alpha(0) = \bar{\tau}\bar{\Omega} - \bar{\kappa}(C(l)\mathbf{w}_0 - S(l)\mathbf{n}_0) \\ \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 &= \mathbf{t}(l) - \mathbf{t}_0 = -\bar{\kappa}((\cos \omega l - 1)\mathbf{w}_0 - \sin \omega l \mathbf{n}_0), \end{aligned}$$

alors nous pouvons vérifier que

$$\begin{aligned} \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle &= \bar{\kappa}^2(C(l)(\cos \omega l - 1) - S(l) \sin \omega l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Démontrer que la condition de Ghosh est suffisante va demander un peu plus de travail. Nous allons procéder par analyse-synthèse, c'est-à-dire que nous allons dans un premier temps supposer l'existence de l'hélice courte et caractériser ses paramètres si finement que nous pourrions conclure à son unicité. C'est la phase d'analyse. Ensuite, considérant deux points et deux vecteurs tangents satisfaisant la condition de Ghosh, nous allons définir l'hélice dont les paramètres sont donnés par l'analyse et montrer que cette hélice interpole bien les deux points avec les deux vecteurs tangents. Alors, nous montrons ainsi que l'hélice existe bien.

### F.2.1 Analyse

Pour la phase d'analyse, prenons deux points et deux vecteurs tangents satisfaisant la condition de Ghosh. Supposons qu'une hélice courte interpole les deux points et les deux vecteurs tangents. D'après le lemme 4, que nous énonçons et démontrons dans la sous-section F.2.3, les paramètres de cette hélice vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega |\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = \\ \quad - \frac{\sqrt{2}(1 - t_0)(\varphi_* \cos \frac{\varphi_*}{2} - 2 \sin \frac{\varphi_*}{2})}{1 - \cos \varphi_*} \sqrt{t_0 - \cos \varphi_*} \\ \omega \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \\ \quad \frac{2}{1 - \cos \varphi_*} [(1 - t_0) \sin \varphi_* + \varphi_*(t_0 - \cos \varphi_*)] \\ \bar{\tau} = \text{sign} \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1 + t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2})(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)). \end{array} \right. ,$$

avec  $t_0 = \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \rangle$ . D'ici, nous allons développer et calculer la valeur nécessaire de  $\omega$  puis obtenir une condition plus précise sur  $\varphi_*$ . Pour calculer  $\omega$ , considérons

$$\langle p_1 - p_0, p_1 - p_0 \rangle = \langle \gamma(\varphi_*), \gamma(\varphi_*) \rangle.$$

Il nous paraît important de signaler ici que nous ne pouvons plus raisonner en termes d'équivalence. En effet, le fait que  $\gamma(\varphi_*)$  soit égal à  $p_1 - p_0$  n'est pas équivalent à l'égalité des produits scalaires précédents. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi un raisonnement par analyse-synthèse.

En remplaçant  $\gamma(\varphi_*)$  par son expression, nous obtenons

$$\|p_1 - p_0\|^2 = \frac{1}{\omega^2} \left[ 2(1 - t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2 \right]$$

et puisque  $\omega$  est positif,

$$\omega = \frac{\sqrt{2(1 - t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|p_1 - p_0\|}.$$

Maintenant, dans le but de caractériser  $\varphi_*$ , posons,

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= (1 - t_0) \sin \varphi + \varphi(t_0 - \cos \varphi) \\ D(\varphi) &= \left( \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sqrt{t_0 - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Dès lors, le résultat du lemme devient

$$\begin{cases} \omega |\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = -\frac{\sqrt{2(1-t_0)}}{1-\cos \varphi_*} D(\varphi_*) \\ \omega \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2}{1-\cos \varphi_*} N(\varphi_*) \\ \bar{\tau} = \text{sign} \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2}) (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)). \end{cases}$$

Considérons alors les deux premières équations, et en particulier, pour la première, deux cas possibles. Considérons le cas

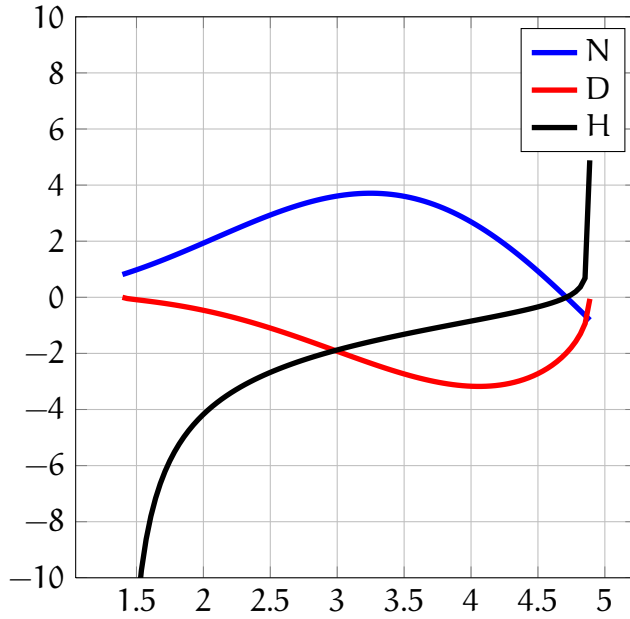
$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = 0. \quad (14)$$

Il signifie que  $D(\varphi_*)$  est nul. Nous montrerons plus loin que les deux seules racines de  $D$  sont les extrémités de  $I_0$ ,

$$D(\arccos t_0) = 0 \quad \text{ou} \quad D(2\pi - \arccos t_0) = 0,$$

comme illustré figure 44 pour  $t_0 = 0.175$ . Ainsi,  $\varphi_*$  vaut soit  $\arccos t_0$ , soit  $2\pi - \arccos t_0$ . La valeur de  $N$  est alors

$$\begin{aligned} N(\arccos t_0) &= (1 - t_0) \sqrt{1 - t_0^2} \\ N(2\pi - \arccos t_0) &= -(1 - t_0) \sqrt{1 - t_0^2}, \end{aligned}$$



**Figure 44:** Représentation des fonctions  $N$ ,  $D$  et  $H$  pour  $t_0 = 0.175$ . On remarque que  $D$  ne semble s'annuler qu'aux bornes de  $I_0$ .

d'où nous déduisons que la valeur de  $\varphi_*$  est déterminée par le signe de

$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle.$$

Ainsi, pour ce cas, nous pouvons écrire

$$\varphi_* = \begin{cases} \arccos t_0 & \text{si } \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle < 0 \\ 2\pi - \arccos t_0 & \text{si } \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle > 0. \end{cases}$$

**Remarque 1.** Ce cas est en fait le cas 2d, c'est-à-dire le cas où les deux points sont dans le plan défini par les deux vecteurs tangents. D'ailleurs, dans ce cas, le calcul de  $\bar{\tau}$  montre que la torsion de l'hélice est nulle et donc que c'est un arc de cercle.

**Remarque 2.** Le cas où les deux produits scalaires sont nuls en même temps ne peut advenir que lorsque les deux points sont confondus. Comme nous supposons que les deux points sont distincts, ce cas ne nécessite pas d'étude.

Le second cas est donné par

$$\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \neq 0.$$

Dans ce cas, nous pouvons calculer le quotient des deux premières lignes et nous obtenons

$$\frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\frac{(1 - t_0)\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}.$$



Introduisons sans plus attendre la fonction  $H$  telle que

$$H(\varphi_*) = \frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\chi$$

avec

$$\chi = \frac{(1 - t_0)\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}$$

qui est une constante bien définie et qui ne dépend que des données initiales du problème, c'est-à-dire de  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $t_0$  et  $t_1$ . Dans la section suivante, nous démontrons le lemme qui stipule que l'équation

$$H(\varphi_*) = -\chi$$

admet une unique solution. Comme illustré figure 44 pour  $t_0 = 0.175$ ,  $H$  est en effet strictement croissante et est une surjection sur  $\mathbb{R}$ . Ghosh a restreint le domaine d'étude de  $H$  à l'intervalle

$$I_G = [\arccos t_0, \pi] \subsetneq I_0.$$

Le lemme est plus général et donne le résultat d'existence et d'unicité sur l'intervalle  $I_0$ .

Nous avons donc montré que si l'hélice interpolait les deux points et les deux vecteurs tangents, alors elle vérifierait nécessairement

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \text{sign}\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \omega = \frac{\sqrt{2(1-t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2})(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H(\varphi_*) = -\chi & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \neq 0, \\ \varphi_* = \arccos t_0 & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle < 0, \\ \varphi_* = 2\pi - \arccos t_0 & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle > 0. \end{cases}$$

Le lemme nous permet d'affirmer que  $\varphi_*$  est donc unique, et donc que les autres paramètres de l'hélice aussi. Ainsi, nous avons montré que l'hélice interpolante est unique.

## F.2.2 Synthèse

L'analyse ayant conclu à l'unicité de l'hélice courte, nous allons maintenant utiliser la caractérisation des paramètres pour conclure à son existence. Prenons donc deux points et deux vecteurs tangents vérifiant la condition de Ghosh. Posons l'hélice dont les paramètres vérifient

$$\begin{cases} \bar{\tau} = \text{sign}\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \omega = \frac{\sqrt{2(1-t_0) + (\bar{\tau}\varphi_*)^2}}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} (\bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2})(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H(\varphi_*) = -\chi & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \neq 0, \\ \varphi_* = \arccos t_0 & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle < 0, \\ \varphi_* = 2\pi - \arccos t_0 & \text{if } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle > 0. \end{cases}$$

Ce que nous devons faire maintenant, c'est montrer que cette hélice interpole les deux points et les deux vecteurs tangents. Pour cela, nous allons montrer que cette hélice satisfait le lemme 4, ce qui nous permettra de conclure.

Commençons par le cas

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = 0.$$

Nous avons alors

$$\varphi_* = \begin{cases} \arccos t_0 & \text{si } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle < 0 \\ 2\pi - \arccos t_0 & \text{si } \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle > 0. \end{cases}$$

Il est très aisé de vérifier alors que

$$\begin{cases} \omega |\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = -\frac{\sqrt{2(1-t_0)}}{1-\cos \varphi_*} D(\varphi_*) \\ \omega \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2}{1-\cos \varphi_*} N(\varphi_*) \end{cases}$$

et donc que l'hélice satisfait les conditions du lemme et donc qu'elle interpole bien les deux points  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_1$  avec pour vecteurs tangents respectives  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ .

Dans le second cas, nous avons

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \neq 0.$$

D'après l'égalité  $H(\varphi_*) = -\chi$ , nous avons

$$\frac{N(\varphi_*)}{D(\varphi_*)} = -\frac{(1-t_0)\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{\sqrt{2}|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}$$

que nous réécrivons

$$\frac{\frac{2}{1-\cos \varphi_*} N(\varphi_*)}{\frac{\sqrt{2}(1-t_0)}{1-\cos \varphi_*} D(\varphi_*)} = -\frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle}{|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle|}.$$

Nous en déduisons alors immédiatement qu'il existe un réel strictement positif  $\mu$  tel que

$$\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2\mu}{1 - \cos \varphi_*} N(\varphi_*)$$

et

$$|\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle| = -\mu \frac{\sqrt{2}(1-t_0)}{1 - \cos \varphi_*} D(\varphi_*).$$

En exprimant  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$  dans la base  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|^2 &= \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{e}_1 \rangle^2 + \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{e}_2 \rangle^2 \\ &= \frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle^2}{1-t_0^2} + \frac{\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle^2}{2(1+t_0)}. \end{aligned}$$

En développant, et en remplaçant  $\bar{\tau}^2$  par son expression, nous obtenons

$$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|^2 = \mu^2(2(1-t_0) + \varphi_*^2 \bar{\tau}^2),$$

et puisque  $\mu$  est positif,

$$\mu = \frac{1}{\omega}.$$

Ainsi, puisque l'hélice satisfait les conditions du lemme, nous pouvons affirmer qu'elle interpole les points  $\mathbf{p}_0$  et  $\mathbf{p}_1$  avec pour vecteurs tangents respectifs  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$ .

### F.2.3 Condition équivalente à la co-hélicité

Nous allons établir ici un lemme équivalent au théorème de Ghosh qui donne une nouvelle condition équivalente à la co-hélicité de deux points et deux vecteurs tangents. De la même manière que Ghosh, introduisons le scalaire  $t_0$  par

$$t_0 = \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \rangle$$

Puisque nous supposons que les deux vecteurs tangents ne sont pas colinéaires, nous pouvons écrire

$$t_0 \in ]-1, 1[.$$

**Lemme 4.** *Soit deux points  $p_0$  et  $p_1$  munis de deux vecteurs tangents unitaires  $t_0$  et  $t_1$ . Il existe une unique hélice courte passant par les deux points avec les deux vecteurs tangents si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega |\langle p_1 - p_0, t_1 \wedge t_0 \rangle| = \\ \quad - \frac{\sqrt{2}(1 - t_0)(\varphi_* \cos \frac{\varphi_*}{2} - 2 \sin \frac{\varphi_*}{2})}{1 - \cos \varphi_*} \sqrt{t_0 - \cos \varphi_*} \\ \omega \langle p_1 - p_0, t_1 + t_0 \rangle = \\ \quad \frac{2}{1 - \cos \varphi_*} [(1 - t_0) \sin \varphi_* + \varphi_* (t_0 - \cos \varphi_*)] \\ \bar{\tau} = \text{sign} \langle p_1 - p_0, t_1 \wedge t_0 \rangle \sqrt{\frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}} \\ \bar{\Omega} = \frac{1}{1 + t_0} (\bar{\tau}(t_1 + t_0) + (\cot \frac{\varphi_*}{2})(t_1 \wedge t_0)). \end{array} \right.$$

*Démonstration du lemme.* Considérons deux points  $p_0$  et  $p_1$ , munis chacun de leur vecteur tangent unitaire respective  $t_0$  et  $t_1$ . Supposons l'existence d'une hélice interpolant les deux points et les deux vecteurs tangents. L'existence de cette hélice est équivalente à

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_*) &= p_1 - p_0 + \bar{\tau} \frac{\varphi_*}{\omega} \bar{\Omega} + \frac{\sin \varphi_*}{\omega} (t_0 - \bar{\tau} \bar{\Omega}) \\ &\quad - \frac{1 - \cos \varphi_*}{\omega} (t_0 \wedge \bar{\Omega}) \\ \mathbf{t}(\varphi_*) &= t_1 - t_0 + (\cos \varphi_* - 1)(t_0 - \bar{\tau} \bar{\Omega}) - \sin \varphi_* (t_0 \wedge \bar{\Omega}) \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} p_1 - p_0 &= \gamma(\varphi_*) = \frac{1}{\omega} (\bar{\tau} \varphi_* \bar{\Omega} + \sin \varphi_* (t_0 - \bar{\tau} \bar{\Omega}) \\ &\quad - (1 - \cos \varphi_*) (t_0 \wedge \bar{\Omega})) \\ t_1 - t_0 &= \theta(\varphi_*) = (\cos \varphi_* - 1)(t_0 - \bar{\tau} \bar{\Omega}) - \sin \varphi_* (t_0 \wedge \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

La démonstration du lemme est construite entièrement à partir de l'idée de Ghosh qui consiste à écrire ces deux équations dans une base bien choisie, construite à partir des vecteurs tangents.

En effet, puisque  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{t}_1$  ne sont pas colinéaires, nous pouvons définir la base orthonormale  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  de la façon suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2(1+t_0)}}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0), \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}}(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0), \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2(1-t_0)}}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0).\end{aligned}$$

On obtient donc, dans cette base, les égalités suivantes, qui sont équivalentes aux deux équations de l'hélice et de son vecteur tangent

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0 + \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \\ = \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0 + \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \\ \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0 + \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \\ = \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0 + \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

ce qui, comme la base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  est orthogonale, est équivalent à la conjonction de ces 6 équations

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \gamma(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \theta(\varphi_*) , \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Maintenant, pour démontrer le lemme, nous n'avons plus qu'à nous retrousser les manches et évaluer ces 6 égalités. Pour ça, à la manière de Ghosh, nous allons commencer par évaluer quelques produits scalaires qui vont nous être utiles. Un premier résultat trivial est le suivant

$$\langle \mathbf{t}_0, \bar{\Omega} \rangle = \langle \mathbf{t}_1, \bar{\Omega} \rangle = \bar{\tau}.$$

Grâce à ce résultat, nous avons aisément

$$\begin{aligned}\langle \bar{\Omega}, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= 2\bar{\tau} \\ \langle \bar{\Omega}, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= 1 + t_0 - 2\bar{\tau}^2 \\ \langle \mathbf{t}_0 - \bar{\tau}\bar{\Omega}, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle &= t_0 - 1.\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les produits scalaires

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle \\ &\langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle \\ &\langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}$  est orthogonal à  $\mathbf{t}_0$ , les deux derniers produits scalaires sont égaux. Pour en calculer la valeur, nous écrivons,

$$\langle \theta(\varphi_*), \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0 \rangle = \|\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0\|^2 = 2 - 2t_0,$$

qui est équivalent à

$$2(1 - t_0) = (\cos \varphi_* - 1)(t_0 - 1) - \sin \varphi_* \langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 \rangle.$$

Nous en déduisons

$$\langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 \rangle = -(1 - t_0) \frac{1 + \cos \varphi_*}{\sin \varphi_*} = -(1 - t_0) \cot \frac{\varphi_*}{2}.$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_0 \wedge (\mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{t}_1, \langle \mathbf{t}_0, \bar{\mathbf{\Omega}} \rangle \mathbf{t}_0 - \langle \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_0 \rangle \bar{\mathbf{\Omega}} \rangle \\ &= -\bar{\tau}(1 - t_0). \end{aligned}$$

Un dernier résultat se montrera utile plus loin

$$\langle \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_0 \wedge \bar{\mathbf{\Omega}} \rangle.$$

Maintenant que nous avons tous les outils nécessaire au calcul des produits scalaires, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \langle \gamma(\varphi_*), \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= \frac{1}{\omega} \left( 2\bar{\tau}^2(\varphi_* - \sin \varphi_*) + (1 + t_0) \sin \varphi_* \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos \varphi_*) \left( -(1 - t_0) \frac{1 + \cos \varphi_*}{\sin \varphi_*} \right) \right), \end{aligned}$$

que nous pouvons simplifier

$$\langle \gamma(\varphi_*), \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{2}{\omega} \left[ \bar{\tau}^2(\varphi_* - \sin \varphi_*) + \sin \varphi_* \right].$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \gamma(\varphi_*), \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle &= \frac{1}{\omega} \left( \bar{\tau}(\varphi_* - \sin \varphi_*) + \left( -(1 - t_0) \frac{1 + \cos \varphi_*}{\sin \varphi_*} \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\tau}(1 - \cos \varphi_*)(1 - t_0) \right), \end{aligned}$$

qui peut lui-même être simplifié en

$$\langle \gamma(\varphi_*), \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle = \frac{1}{\omega} \left[ -\bar{\tau}(1 - t_0) \left( \varphi_* \cot \frac{\varphi_*}{2} - 2 \right) \right].$$

Enfin, nous avons

$$\langle \theta(\varphi_*), \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle = 2\bar{\tau}^2(1 - \cos \varphi_*) - 2(t_0 - \cos \varphi_*).$$

Comme nous avons

$$\begin{aligned} \langle \theta(\varphi_*), \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle &= \langle \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0 \rangle \\ &= 1 + t_0 - t_0 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

nous déduisons

$$\bar{\tau}^2 = \frac{t_0 - \cos \varphi_*}{1 - \cos \varphi_*}.$$

Ce dernier résultat nous donne deux informations importantes. Tout d'abord, nous pouvons affirmer que la valeur de  $\varphi_*$  est nécessairement dans l'intervalle

$$I_0 = [\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0].$$

Nous connaissons de plus la valeur du carré de la torsion de l'hélice. En examinant  $\langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle$ , nous pouvons de plus en connaître aisément le signe, en utilisant ce résultat qui sera démontré un peu plus tard

$$\forall \varphi_* \in I_0, \varphi_* \cot \frac{\varphi_*}{2} - 2 < 0,$$

nous concluons alors

$$\text{sign } \bar{\tau} = \text{sign} \langle p_1 - p_0, \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0 \rangle.$$

Enfin, nous écrivons  $\bar{\Omega}$  dans la base  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ,

$$\bar{\Omega} = \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_0 \rangle \mathbf{e}_0 + \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$$

et, à l'aide de

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_0 \rangle &= \frac{2\bar{\tau}}{\sqrt{2(1+t_0)}} \\ \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_1 \rangle &= -\frac{(1-t_0) \cot \frac{\varphi_*}{2}}{\sqrt{(1-t_0^2)}} \\ \langle \bar{\Omega}, \mathbf{e}_2 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

nous pouvons enfin écrire

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{1+t_0} \left( \bar{\tau}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_0) + \left( \cot \frac{\varphi_*}{2} \right) (\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_0) \right).$$

□

## F.2.4 Études de H et D

**Lemme 5** (Signe de D). *La fonction D définie sur*

$$I_0 = [\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0]$$

par

$$D(\varphi) = (\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2}) \sqrt{t_0 - \cos \varphi}.$$

est strictement négative sur l'intérieur de  $I_0$  et nulle aux bords.

*Démonstration.* Puisque  $\sqrt{t_0 - \cos \varphi}$  est strictement positif sur l'intérieur de  $I_0$  et nul aux bords, considérons la fonction  $f$  suivante, que nous définissons sur l'intérieur de  $I_0$  par

$$f(\varphi) = \frac{D(\varphi)}{\sqrt{t_0 - \cos \varphi} \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\varphi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = (\varphi \cot \frac{\varphi}{2} - 2).$$

Nous avons alors

$$f'(\varphi) = \frac{\varphi - \sin \varphi}{-1 + \cos \varphi}$$

qui est clairement strictement négative sur l'intervalle  $]0, 2\pi[$ . Ainsi, la fonction  $f$  est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme de plus nous avons

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} f(\varphi) = 0$$

nous en déduisons que  $f$  est strictement négative sur  $]0, 2\pi[$  et donc sur  $I_0$ . Pour conclure, comme nous avons

$$\sin \frac{\varphi}{2} > 0$$

sur l'intérieur de  $I_0$ , nous déduisons que  $D$  est strictement négative sur l'intérieur de  $I_0$  et nulle aux bords.  $\square$

**Lemme 6** (Variations de H). *La fonction H définie sur l'intérieur de  $I_0$  par*

$$H(\varphi) = \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)}$$

est strictement croissante et telle que

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) &= -\infty \\ \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) &= +\infty. \end{aligned}$$



**Corollaire 2.** *Pour tout  $\chi \in \mathbb{R}$ , l'équation*

$$H(\varphi) = \chi$$

*admet une unique solution sur l'intérieur de  $I_0$ .*

*Démonstration du corollaire.* La fonction  $H$  est continue, et le lemme précédent associé au théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que  $H(\overset{\circ}{I}_0) = \mathbb{R}$ . De plus, la fonction  $H$  étant strictement croissante, elle est une injection de  $\overset{\circ}{I}_0$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\square$

*Démonstration du lemme.* L'étude des variations de  $H$  est plus difficile que l'étude du signe de  $D$  car  $H$  dépend du paramètre  $t_0$  compris entre  $-1$  et  $1$  exclus. Ce que nous devons démontrer, c'est que pour chaque valeur de  $t_0$ , la fonction  $H$  est strictement croissante et que

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) &= -\infty \\ \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) &= +\infty. \end{aligned}$$

Soit donc  $t_0 \in ]-1, 1[$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} N(\arccos t_0) &= (1 - t_0)\sqrt{1 - t_0^2} > 0 \\ N(2\pi - \arccos t_0) &= -(1 - t_0)\sqrt{1 - t_0^2} < 0, \end{aligned}$$

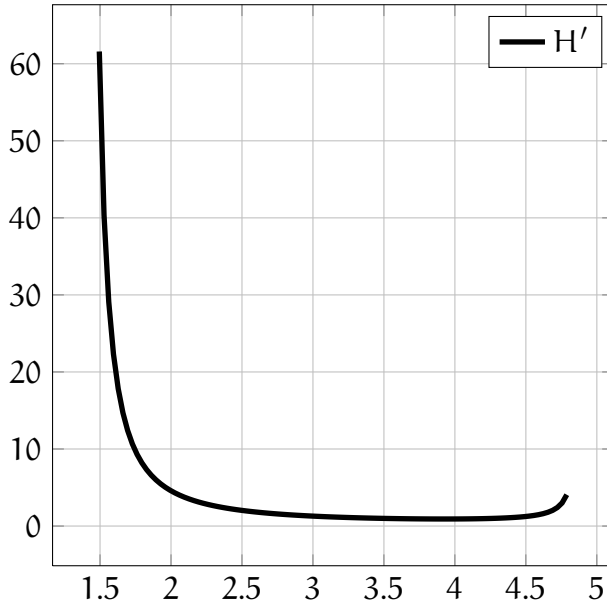
et

$$\begin{aligned} D(\arccos t_0) &= 0 \\ D(2\pi - \arccos t_0) &= 0 \\ D(\varphi) &< 0 \quad \forall \varphi \in ]\arccos t_0, 2\pi - \arccos t_0[ \end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} H(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \arccos t_0^+} \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)} = -\infty \\ \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} H(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi - \arccos t_0^-} \frac{N(\varphi)}{D(\varphi)} = +\infty. \end{aligned}$$

Pour prouver que  $H$  est strictement croissante, comme  $H$  est dérivable sur l'intérieur de  $I_0$ , nous allons montrer que le signe de sa dérivée est strictement positif sur l'intérieur de  $I_0$  comme illustré figure 45 pour  $t_0 = 0.175$ .



**Figure 45:** Représentation de la fonctions  $H'$  pour  $t_0 = 0.175$ . On remarque que cette fonction est positive sur  $I_0$ .

Par le calcul, nous avons, pour tout  $\varphi \in \overset{\circ}{I}_0$ ,

$$H'(\varphi) = -\frac{(1 + t_0) \sin \frac{\varphi}{2}}{2D^2(\varphi)\sqrt{t_0 - \cos \varphi}}(h_0(\varphi)t_0 + h_1(\varphi))$$

avec

$$h_0(\varphi) = 4 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi$$

$$h_1(\varphi) = -1 + \cos 2\varphi + \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi.$$

Il est facile de voir que nous avons

$$-\frac{(1 + t_0) \sin \frac{\varphi}{2}}{2D^2(\varphi)\sqrt{t_0 - \cos \varphi}} < 0,$$

donc l'étude du signe de  $H'$  pour toute valeur de  $t_0$  se ramène à l'étude du signe de la fonction de deux variables

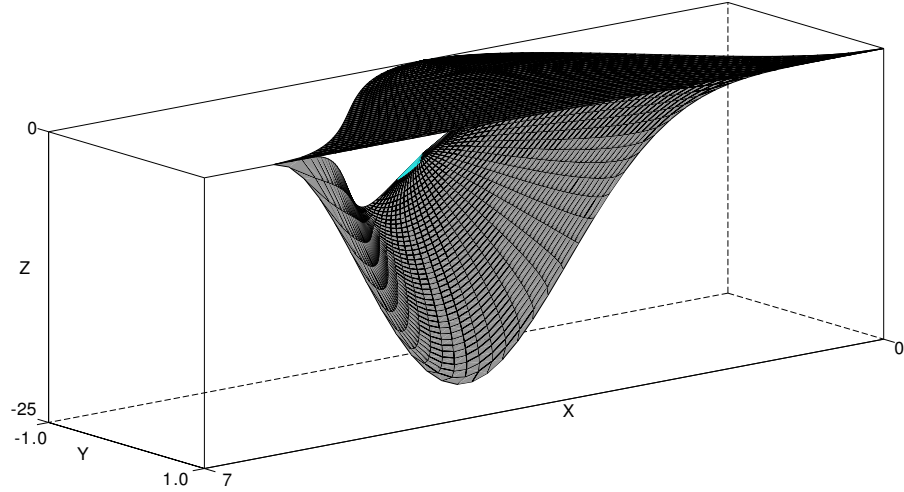
$$F(t, \varphi) = h_0(\varphi)t + h_1(\varphi)$$

sur le domaine

$$\mathcal{E} = \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi \in [\arccos t, 2\pi - \arccos t] \end{array} \right\}.$$

$$h_0(\varphi) = 4 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi$$

$$h_1(\varphi) = -1 + \cos 2\varphi + \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \cos \varphi.$$



**Figure 46:** Représentation de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et de la fonction  $F$

Nous allons démontrer que  $F$  est négative sur l'espace  $\mathcal{E}$ , comme illustré figure 46. L'espace  $\mathcal{E}$  est fermé et borné car

$$\mathcal{E} = f^{-1}(]-\infty, 0]) \cap ([-1, 1] \times [0, 2\pi])$$

où  $f$ , définie par

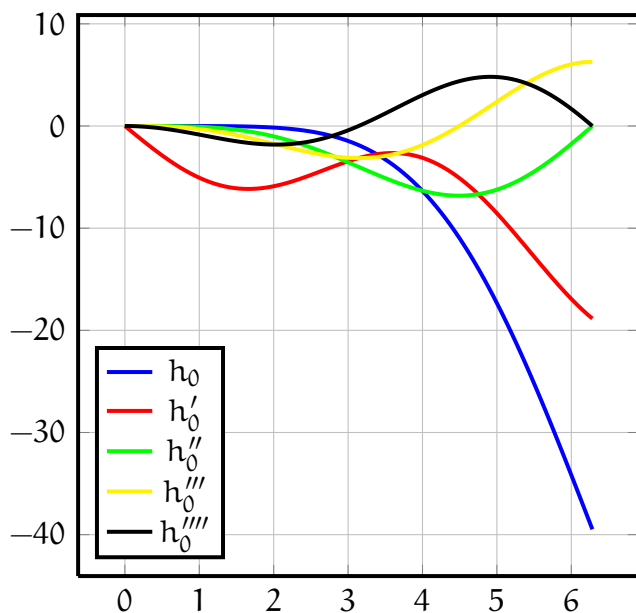
$$f(t, \varphi) = \cos \varphi - t,$$

est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Puisque  $F$  est une fonction continue sur le compact  $\mathcal{E}$ ,  $F(\mathcal{E})$  est un compact. Particulièrement,  $F$  atteint son maximum. Dès lors, si  $F$  atteint son maximum sur l'intérieur de  $\mathcal{E}$ , ce sera en un point critique, puisque son maximum global sera alors un maximum local. Calculons le gradient de  $F$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= h_0(\varphi) \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= h'_0(\varphi)t + h'_1(\varphi). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} h_0(\varphi) &= 4 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \\ h'_0(\varphi) &= -2\varphi - \varphi \cos \varphi - 3 \sin \varphi \\ h''_0(\varphi) &= -2 + 2 \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \\ h'''_0(\varphi) &= \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \\ h''''_0(\varphi) &= -\varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$



**Figure 47:** Représentation de  $h_0$  et de ses 4 premières dérivées sur sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

et nous pouvons résumer les variations de  $h_0$  dans le tableau

$x$	0	$\pi$	$\varphi_{\#}$	$2\pi$
$h_0''''(x)$	-	+	+	
$h_0'''$	0	$-\pi$	0	$2\pi$
$h_0''$	0			0
$h_0'$	0			$-6\pi$
$h_0$	0			$-4\pi^2$

où  $\varphi_{\#}$  est tel que  $h_0'''(\varphi_{\#}) = 0$ . Ainsi  $h_0$  est strictement décroissante sur  $[0, 2\pi]$  et nulle en 0 (voir figure 47) d'où nous déduisons que  $h_0$  est strictement négative sur  $]0, 2\pi[$ . Par conséquent, le gradient de  $F$  ne peut pas s'annuler sur l'intérieur de  $\mathcal{E}$ .

Ainsi,  $F$  atteint son maximum sur le bord de  $\mathcal{E}$  que nous notons

$$\partial\mathcal{E} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi = \arccos t \end{array} \right\} \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t \in [-1, 1] \\ \varphi = 2\pi - \arccos t \end{array} \right\} \\ \mathcal{F}_3 &= \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t = -1 \\ \varphi \in [\pi, \pi] \end{array} \right\} \\ \mathcal{F}_4 &= \left\{ (t, \varphi), \begin{array}{l} t = 1 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Dans la suite de cette démonstration, nous allons étudier  $F$  sur chacun des sous-ensembles  $\mathcal{F}_i$ . Commençons par  $\mathcal{F}_1$ . En remplaçant  $\varphi$  par  $\arccos t$  dans  $F$ , nous avons

$$F_1(t) = (1-t)(-2 + 2t + \sqrt{1-t^2} \arccos t).$$

Soit

$$\begin{aligned}f_1(t) &= -2 + 2t + \sqrt{1-t^2} \arccos t \\ g_1(x) &= -2 + 2 \cos x + x \sin x.\end{aligned}$$

Nous avons

$$f_1(t) = g_1(\arccos t)$$

et nous identifions

$$g_1(x) = h_0''(x).$$

Puisque  $h_0''$  est strictement négative sur  $]0, \pi]$  et nulle en  $0$ , nous pouvons affirmer que  $f_1$  est strictement négative sur  $[-1, 1[$  et s'annule en  $1$  tout comme  $F_1$ .

Étudions maintenant  $F$  sur  $\mathcal{F}_2$ . En remplaçant  $\varphi$  par  $2\pi - \arccos t$  dans  $F$ , nous avons

$$F_2(t) = (1-t)(-2 + 2t - \sqrt{1-t^2}(2\pi - \arccos t)).$$

Notons

$$\begin{aligned}f_2(t) &= -2 + 2t - \sqrt{1-t^2}(2\pi - \arccos t) \\ g_2(x) &= -2 + 2 \cos x + x \sin x.\end{aligned}$$

Nous avons

$$f_2(t) = g_2(2\pi - \arccos t)$$

et comme dans le cas précédent, nous pouvons conclure que  $F_2$  est strictement négative sur  $[-1, 1[$  et nulle en 1.

Étudions  $F$  sur  $\mathcal{F}_3$  qui est un singleton. Nous avons trivialement

$$\begin{aligned} F(-1, \pi) &= -4 + \pi^2 + 4 \cos \pi + \pi \sin \pi \\ &\quad - 1 + \cos 2\pi + \pi \sin \pi + \pi^2 \cos \pi \\ &= -8 \end{aligned}$$

Enfin, le dernier cas qui nous intéresse est l'étude de  $F$  sur  $\mathcal{F}_4$ . En remplaçant  $t$  par 1 dans  $F$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F_4(\varphi) &= 3 - \varphi^2 - 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi + \varphi^2 \cos \varphi \\ &= (\cos 2\varphi - 1) + (4 - \varphi^2)(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi - 1 &= -2 \sin^2 \varphi = -4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= -8 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left( \frac{\cos \varphi + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

et

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

nous écrivons

$$F_4(\varphi) = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (2 - \varphi^2 - 2 \cos \varphi).$$

Soit

$$g_4(\varphi) = 2 - \varphi^2 - 2 \cos \varphi,$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} g_4'(\varphi) &= -2\varphi + 2 \sin(\varphi) = 0 \text{ en } 0 \\ g_4''(\varphi) &= -2 + 2 \cos \varphi < 0 \text{ sur } ]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Donc  $g_4'$  est strictement décroissante sur  $[0, 2\pi]$  et donc négative sur  $]0, 2\pi]$ . Puisque nous avons  $g_4(0) = 0$ ,  $g_4$  est strictement négative sur  $]0, 2\pi]$  et égale à 0 en 0. Il en va de même pour  $F_4$ .

En conclusion, nous avons montré que  $F$  était négative sur  $\partial\mathcal{E}$  et strictement négative sur  $\mathcal{E}$ , d'où nous déduisons

$$\forall t \in ]-1, 1[, \forall \varphi \in \overset{\circ}{I}_0, h_0(\varphi)t_0 + h_1(\varphi) < 0.$$

Dès lors, nous avons

$$\forall t \in ]-1, 1[, \forall \varphi \in \overset{\circ}{I}_0, H'(\varphi) > 0,$$

ce qui permet de conclure que  $H$  est strictement croissante sur  $\overset{\circ}{I}_0$ . □

## BIBLIOGRAPHIE

---

- ALT, H. et M. GODAU (1995). « Computing the Fréchet distance between two polygonal curves ». In : *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 5, p. 75–91.
- ASTER, Richard, Brian BORCHERS et Clifford THURBER (jan. 2005). *Parameter Estimation and Inverse Problems (International Geophysics)*. Har/Cdr. Academic Press. ISBN : 0120656043.
- BARSKY, Brian A. et Anthony D. DE ROSE (1984). *Geometric Continuity of Parametric Curves*. Rapp. tech. UCB/CSD-84-205. EECS Department, University of California, Berkeley.
- (1988). *Three Characterizations of Geometric Continuity for Parametric Curves*. Rapp. tech. UCB/CSD-88-417. EECS Department, University of California, Berkeley.
- BERGBOM, Mattias, Ken MUSETH et Doug ROBLE (2007). « Robust fitting of super-helices to parametric curves ». In : *ACM SIGGRAPH 2007 posters*. SIGGRAPH '07. San Diego, California : ACM.
- BERGOU, M., M. WARDETZKY, S. ROBINSON, B. AUDOLY et E. GRINSPUN (2008). « Discrete elastic rods ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH'08)* 27, p. 1.
- BERGOU, M., B. AUDOLY, E. VOUGA, M. WARDETZKY et E. GRINSPUN (2010). « Discrete Viscous Threads ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH'10)* 29.
- BERTAILS, F. (2006). « Simulation of Virtual Hair ». Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Grenoble.
- BERTAILS, F., B. AUDOLY, B. QUERLEUX, F. LEROY, J.-L. LÉVÊQUE et M.-P. CANI (2005). « Predicting Natural Hair Shapes by Solving the Statics of Flexible Rods ». In : *Eurographics'05 (short papers)*. Sous la dir. de J. DINGLIANA et F. GANOVELLI. Eurographics'05 (short papers). Eurographics.
- BERTAILS, F., B. AUDOLY, M.-P. CANI, B. QUERLEUX, F. LEROY et J.-L. LÉVÊQUE (2006). « Super-Helices for Predicting the Dynamics of Natural Hair ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH'06)* 25, p. 1180–1187.
- BERTAILS-DESCOUBES, F (2009). *Simulating contacts between Super-Helices*. Notice technique interne.
- BHAT, Kiran S., Christopher D. TWIGG, Jessica K. HODGINS, Pradeep K. KHOSLA, Zoran POPOVIĆ et Steven M. SEITZ (2003). « Estimating cloth simulation parameters from video ». In :



- Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. SCA '03. San Diego, California : Eurographics Association, p. 37–51. ISBN : 1-58113-659-5.
- BISHOP, Richard L. (1975). « There is More than One Way to Frame a Curve ». English. In : *The American Mathematical Monthly* 82.3, pp. 246–251. ISSN : 00029890.
- BOLTON, K. (1975). « Biarc curves ». In : *Journal of Computer Aided Design* 7 (2), p. 89–92.
- BONNET, Marc (2008). *Problèmes inverses*.
- BOYD, S. et L. VANDENBERGHE (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- BREEN, David E., Donald H. HOUSE et Michael J. WOZNY (1994). « Predicting the drape of woven cloth using interacting particles ». In : *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. SIGGRAPH '94. New York, NY, USA : ACM, p. 365–372. ISBN : 0-89791-667-0.
- BROWN, Benjamin P., Mark S. MIESCH, Matthew K. BROWNING, Allan Sacha BRUN et Juri TOOMRE (2011). « Magnetic Cycles in a Convective Dynamo Simulation of a Young Solar-type Star ». In : *The Astrophysical Journal* 731.1, p. 69.
- CADOUX, F. (2009). « Méthodes d'optimisation pour la dynamique non-régulière ». Thèse de doct. Université Joseph-Fourier - Grenoble I.
- CHOUAIEB, Nadia, Alain GORIELY et John H MADDOKS (2006). « Helices. » In : *Proc Natl Acad Sci U S A* 103.25, p. 9398–403. ISSN : 0027-8424.
- CHRISTOPHER, Jon A., Rosemarie SWANSON et Thomas O. BALDWIN (1996). « Algorithms for finding the axis of a helix : Fast rotational and parametric least-squares methods ». In : *Computers Chemistry* 20.3, p. 339–345. ISSN : 0097-8485.
- COSSERAT, E. et F. COSSERAT (1909). *Théorie des corps déformables*.
- DAVIET, G., F. BERTAILS-DESCOUBES et L. BOISSIEUX (2011). « A hybrid iterative solver for robustly capturing Coulomb friction in hair dynamics ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH Asia'11)* 30, p. 139–131.
- DE SAXCÉ, G. et Z.-Q. FENG (1998). « The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. » In : *Math. Comput. Modelling* 28, p. 225–245.
- DEROUET-JOURDAN, A., F. BERTAILS-DESCOUBES et J. THOLLOT (2013). « Floating tangents for approximating spatial curves with piecewise helices ». In : *Computer Aided Geometric Design* 30.5, p. 490–520. ISSN : 0167-8396.

- DEROUET-JOURDAN, Alexandre, Florence BERTAILS-DESCOUBES et Joëlle THOLLOT (2010). « Stable inverse dynamic curves ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH Asia'10)* 29, p. 1.
- DEROUET-JOURDAN, Alexandre, Florence BERTAILS-DESCOUBES et Joëlle THOLLOT (2011). « 3D inverse dynamic modeling of strands ». In : *ACM SIGGRAPH 2011 Posters. SIGGRAPH '11*. Vancouver, British Columbia, Canada : ACM, 55 :1–55 :1. ISBN : 978-1-4503-0971-4.
- DEROUET-JOURDAN, Alexandre, Florence BERTAILS-DESCOUBES, Gilles DAVIET et Joëlle THOLLOT (2013). « Inverse Dynamic Hair Modeling with Frictional Contact ». Anglais. In : *ACM Transactions on Graphics*.
- EITER, T. et H. MANNILA (1994). *Computing Discrete Fréchet Distance*. Rapp. tech. Technische Universität Wien.
- ENKHBAYAR, Purejav, Sodov DAMDINSUREN, Mitsuru OSAKI et Norio MATSUSHIMA (2008). « HELFIT : Helix fitting by a total least squares method ». In : *Computational Biology and Chemistry* 32.4, p. 307–310. ISSN : 1476-9271.
- FEATHERSTONE, R. (1987). *Robot Dynamics Algorithms*.
- FISCHER, A. (1992). « A special Newton-type optimization method ». In : *Optimization : A Journal of Mathematical Programming and Operations Research* 24, p. 269–284.
- GHOSH, S. (2010). « Geometric Approximation of Curves and Singularities of Secant Maps. A Differential Geometric Approach ». Advisors : G. Vegter and J. Rieger, 185 pages. PhD Dissertation. Johann Bernoulli Institute for Mathematics et Computer Science : University of Groningen.
- GORIELY, Alain, Sebastien NEUKIRCH et Andrew HAUSRATH (2009). « Polyhelicés through  $n$  points ». In : *IJBRA* 5.2, p. 118–132.
- GOULD, Ted, Bryce HARRINGTON, Nathan HURST et MENTALGUY (2003). *Inkscape*.
- HADAP, S. (2006). « Oriented strands - dynamics of stiff multi-body system ». In : p. 91.
- HERRERA, T. Lay, A. ZINKE et A. WEBER (2012). « Lighting Hair From The Inside : A Thermal Approach To Hair Reconstruction ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH Asia'12)* 31.
- HIRIART-URRUTY, J.-B. et C. LEMARÉCHAL (2001). *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer Verlag, Heidelberg.
- HOUSE, D. et D.E. BREEN (2000). *Cloth modeling and animation*. Ak Peters Series. A K Peters. ISBN : 9781568810904.

- JAKOB, Wenzel, Jonathan T. MOON et Steve MARSCHNER (2009). « Capturing hair assemblies fiber by fiber ». In : *ACM Trans. Graph.* 28 (5), 164 :1–164 :9. ISSN : 0730-0301.
- JOJIC, Nebojsa et Thomas S. HUANG (1997). « Estimating Cloth Draping Parameters from Range Data ». In : *In International Workshop on Synthetic-Natural Hybrid Coding and 3-D Imaging*, p. 73–76.
- KUNITOMO, Shoji, Shinsuke NAKAMURA et Shigeo MORISHIMA (2010). « Optimization of cloth simulation parameters by considering static and dynamic features ». In : *ACM SIGGRAPH 2010 Posters*. SIGGRAPH '10. Los Angeles, California : ACM, 15 :1–15 :1. ISBN : 978-1-4503-0393-4.
- LEVIEN, R. (2008). *The Euler spiral : a mathematical history*. Rapp. tech.
- LUO, L., H. LI et S. RUSINKIEWICZ (2013). « Structure-Aware Hair Capture ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proceedings of ACM SIGGRAPH'13)*.
- LUO, L., H. LI, T. WEISE, S. PARIS, M. PAULY et S. RUSINKIEWICZ (2011). *Dynamic Hair Capture*. Rapp. tech. Princeton University.
- MIGUEL, E., D. BRADLEY, B. THOMASZEWSKI, B. BICKEL, W. MATUSIK, M. A. OTADUY et S. MARSCHNER (mai 2012). « Data-Driven Estimation of Cloth Simulation Models ». In : *Comp. Graph. Forum* 31.2pt2, p. 519–528. ISSN : 0167-7055.
- NIEVERGELT, Yves (1997). « Fitting helices to data by total least squares ». In : *Computer Aided Geometric Design* 14.8, p. 707–718.
- PAI, D. (2002). « Strands : Interactive Simulation of Thin Solids using Cosserat Models ». In : *Computer Graphics Forum (Proc. Eurographics'02)* 21, p. 347–352.
- PARIS, S., W. CHANG, O. KOZHUSHNYAN, W. JAROSZ, W. MATUSIK, M. ZWICKER et F. DURAND (2008). « Hair photobooth : geometric and photometric acquisition of real hairstyles ». In : *ACM SIGGRAPH 2008 papers*. SIGGRAPH '08. Los Angeles, California : ACM, p. 1–9. ISBN : 978-1-4503-0112-1.
- PIUZE, Emmanuel, Paul G. KRY et Kaleem SIDDIQI (2011). « Generalized Helicoids for Modeling Hair Geometry ». In : *Comput. Graph. Forum* 30.2, p. 247–256.
- ROHMER, Damien, Arkadiusz SITEK et Grant T GULLBERG (2007). « Reconstruction and visualization of fiber and laminar structure in the normal human heart from ex vivo diffusion tensor magnetic resonance imaging (DTMRI) data. » In : *Investigative Radiology* 42.11, p. 777–789.

- ROSENBLUM, R., W. CARLSON et E. TRIPP (1991). « Simulating the Structure and Dynamics of Human Hair : Modeling, Rendering, and Animation ». In : *The Journal of Visualization and Computer Animation* 2, p. 141–148.
- R.S. MANNING J.H. Maddocks, J.D. Kahn (1996). « A Continuum Rod Model of Sequence-Dependent DNA Structure ». In : *J. Chem. Phys.* 105, p. 5626–5646.
- SCHNEIDER, Philip J. (1990). « Graphics gems ». In : sous la dir. d'Andrew GLASSNER. San Diego, CA, USA : Academic Press Professional, Inc. Chap. An algorithm for automatically fitting digitized curves, p. 612–626. ISBN : 0-12-286169-5.
- SELLE, A., M. LENTINE et R. FEDKIW (2008). « A mass spring model for hair simulation ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH'08)* 27, p. 1.
- SLOSS, James M. (1970). « The bending of space curves into piecewise helical curves ». In : *Pacific Journal of Mathematics.* 32 (1), p. 231–239.
- SPILLMANN, J. et M. TESCHNER (2007). « CoRdE : Cosserat rod elements for the dynamic simulation of one-dimensional elastic objects ». In : p. 63–72.
- TWIGG, C. et Z. KAČIĆ-ALESIĆ (2011). « Optimization for sag-free simulations ». In : *Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. SCA '11.* Vancouver, British Columbia, Canada : ACM, p. 225–236. ISBN : 978-1-4503-0923-3.
- WÄCHTER, A. et L. BIEGLER (2006). « On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming ». In : *Math. Program.* 106, p. 25–57.
- WANG, Huamin, James F. O'BRIEN et Ravi RAMAMOORTHI (2011). « Data-driven elastic models for cloth : modeling and measurement ». In : *ACM SIGGRAPH 2011 papers. SIGGRAPH '11.* Vancouver, British Columbia, Canada : ACM, 71 :1–71 :12. ISBN : 978-1-4503-0943-1.
- WANG, L., Y. YU, K. ZHOU et B. GUO (2009). « Example-based hair geometry synthesis ». In : *ACM Transactions on Graphics (Proc. ACM SIGGRAPH'09)* 28, p. 56–51.
- WARD, K., F. BERTAILS, T.-Y. KIM, S. MARSCHNER, M.-P. CANI et M. LIN (2007). « A Survey on Hair Modeling : Styling, Simulation, and Rendering ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (TVCG)* 13.2, p. 213–34.

WITHER, J., F. BERTAILS et M.-P. CANI (2007). « Realistic Hair from a Sketch ». In : *Shape Modeling International*. ACM, p. 33-42.