



**HAL**  
open science

# Contribution à l'analyse du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques

Jing Wang

► **To cite this version:**

Jing Wang. Contribution à l'analyse du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques. Mécanique des solides [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2014. Français. NNT : 2014ISAL0056 . tel-01135286

**HAL Id: tel-01135286**

**<https://theses.hal.science/tel-01135286>**

Submitted on 25 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## CONTRIBUTION A L'ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

Présentée devant  
**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir  
**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par  
**Jing Wang**  
Ingénieur Université de Pékin

Thèse soutenue le 10 juin 2014 devant la Commission d'examen

### Jury

---

|                  |   |
|------------------|---|
| J.L. DION        | MCF HdR (LISMMA, SUPMECA Paris)                 |
| M. GUINGAND      | MCF HdR (LaMCoS, INSA de Lyon)                  |
| M. HADDAR        | Professeur (LMMP, ENIS Sfax) - Rapporteur       |
| E. JACQUELIN     | Professeur (LBMH, Université CB Lyon I)         |
| M. SARTOR        | Professeur (ICA, INSA de Toulouse) - Rapporteur |
| J. P. de VAUJANY | MCF (LaMCoS, INSA de Lyon)                      |
| P. VELEX         | Professeur (LaMCoS, INSA de Lyon)               |

---

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



|                    |  | <b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>   |
|--------------------|--|--|
| <b>Chimie</b>      | <p>○ <b>CHIMIE DE LYON</b><br/> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a></p> <p>Sec. :Renée EL MELHEM<br/>           Bat Blaise Pascal<br/>           3° etage<br/>           Insa : R. GOURDON</p>   | <p><b>M. Jean Marc LANCELIN</b><br/>           Université de Lyon – Collège Doctoral<br/>           Bât ESCPE<br/>           43 bd du 11 novembre 1918<br/>           69622 VILLEURBANNE Cedex<br/>           Tél : 04.72.43 13 95<br/> <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>   |
| <b>E.E.A.</b>      | <p><b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b><br/> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a></p> <p>Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN<br/> <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a></p>  | <p><b>M. Gérard SCORLETTI</b><br/>           Ecole Centrale de Lyon<br/>           36 avenue Guy de Collongue<br/>           69134 ECULLY<br/>           Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17<br/> <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a></p>   |
| <b>E2M2</b>        | <p><b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b><br/> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a></p> <p>Insa : H. CHARLES</p>   | <p><b>Mme Gudrun BORNETTE</b><br/>           CNRS UMR 5023 LEHNA<br/>           Université Claude Bernard Lyon 1<br/>           Bât Forel<br/>           43 bd du 11 novembre 1918<br/>           69622 VILLEURBANNE Cédex<br/>           Tél : 06.07.53.89.13<br/> <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a></p>                                   |
| <b>EDISS</b>       | <p>○ <b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b><br/> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a></p> <p>○</p> <p>Insa : M. LAGARDE</p>   | <p>○ <b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b><br/>           INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1<br/>           Bâtiment IMBL<br/>           11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon<br/>           696621 Villeurbanne<br/>           Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16<br/> <a href="mailto:Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a></p> |
| <b>INFOMATHS</b>   | <p><b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b><br/> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a></p> <p>Sec. :Renée EL MELHEM<br/>           Bat Blaise Pascal<br/>           3° etage<br/> <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a></p>                   | <p><b>Mme Sylvie CALABRETTO</b><br/>           LIRIS – INSA de Lyon<br/>           Bat Blaise Pascal<br/>           7 avenue Jean Capelle<br/>           69622 VILLEURBANNE Cedex<br/>           Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87<br/> <a href="mailto:Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr">Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr</a></p>                              |
| ○ <b>Matériaux</b> | <p>○ <b>MATERIAUX DE LYON</b><br/> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec. : M. LABOUNE<br/>           PM : 71.70 –Fax : 87.12<br/>           Bat. Saint Exupéry<br/> <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a></p>             | <p><b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b><br/>           INSA de Lyon<br/>           MATEIS<br/>           Bâtiment Saint Exupéry<br/>           7 avenue Jean Capelle<br/>           69621 VILLEURBANNE Cedex<br/>           Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28<br/> <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a></p>            |
| ○ <b>ME GA</b>     | <p><b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b><br/> <a href="http://mega.universite-lyon.fr">http://mega.universite-lyon.fr</a></p> <p>Sec. : M. LABOUNE<br/>           PM : 71.70 –Fax : 87.12<br/>           Bat. Saint Exupéry<br/> <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a></p> | <p><b>M. Philippe BOISSE</b><br/>           INSA de Lyon<br/>           Laboratoire LAMCOS<br/>           Bâtiment Jacquard<br/>           25 bis avenue Jean Capelle<br/>           69621 VILLEURBANNE Cedex<br/>           Tél :04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37<br/> <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a></p>       |
| <b>ScSo</b>        | <p><b>ScSo*</b><br/> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a></p> <p>Sec. : Viviane POLSINELLI<br/>           Brigitte DUBOIS<br/>           Insa : J.Y. TOUSSAINT</p>  | <p><b>M. OBADIA Lionel</b><br/>           Université Lyon 2<br/>           86 rue Pasteur<br/>           69365 LYON Cedex 07<br/>           Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48<br/> <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a></p>  |

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

# RESUME

Les engrenages spiro-coniques sont utilisés dans les transmissions de puissance nécessitant un renvoi d'angle, par exemple dans le domaine aéronautique ou automobile. Ces engrenages admettent des puissances et des vitesses importantes.

La fabrication des engrenages spiro-conique est complexe. De nombreuses études ont été réalisées sur son optimisation pour définir les profils des dents en contacts. Des travaux existent également pour le dimensionnement statique des dentures.

L'aspect dynamique est l'objectif du travail de cette thèse. Des approches théoriques et numériques, pour simuler les vibrations d'engrènement dans des couples spiro-coniques, sont présentées et discutées. Plusieurs modèles ont été développés : torsionnel et tridimensionnel, incluant la prise en compte de défauts de position et d'alignement. Un modèle original (tridimensionnel local), est proposé. Il repose sur des analyses quasi-statiques préalables. Il permet de suivre les évolutions des conditions de contact instantanées sur les flancs de denture. Une approche alternative est également présentée, qui conduit à construire des termes d'excitation globaux en termes d'erreurs de transmission et de raideurs d'engrènement, permettant ainsi de s'affranchir d'algorithmes de contact au cours de la résolution dynamique. Des comparaisons ont été menées avec des résultats quasi-statiques et dynamiques issus de la littérature.

# ABSTRACT

Spiral bevel gears are employed in power transmissions which require motion transfer between crossed axes in aerospace and automotive applications for instance. Such gears can transmit large powers and high speeds.

The manufacturing of spiral bevel gears is complex. A number of studies have been conducted in order to optimise the mating tooth flank geometry and the static load distribution on the teeth.

The main objective of this work is to tackle the dynamic behaviour of spiral bevel gears. Several theoretical and numerical approaches aimed at simulating mesh vibrations are presented and commented upon. Several models have been developed which comprise torsional and three-dimensional models including the influence of position errors and misalignments. An original three-dimensional local model is set up which is based on prior quasi-static analyses and makes it possible to follow the instant contact conditions on the tooth flanks. An alternative formulation is also introduced which relies on global forcing terms derived from transmission errors together with mesh stiffness and does not necessitate the use of a contact algorithm when integrating the equations of motion. A number of comparisons with quasi-static and dynamic results from the literature are presented which illustrate the interest of the proposed methodology.

# SOMMAIRE

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCTION GENERALE</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>   | <b>2</b>  |
| 2.1      | Introduction   | 2         |
| 2.2      | Engrenages spiro-coniques  | 2         |
| 2.2.1    | Classement des engrenages  | 2         |
| 2.2.2    | Géométrie des engrenages spiro-coniques  | 3         |
| 2.3      | Comportement quasi-statique des engrenages                                       | 4         |
| 2.3.1    | Modélisations  | 4         |
| 2.3.2    | Exploitation des modèles quasi-statiques   | 7         |
| 2.4      | Comportement dynamique d'engrenage   | 13        |
| 2.4.1    | Principales sources d'excitation   | 13        |
| 2.4.2    | Deux méthodes principales  | 14        |
| 2.4.3    | Engrenages cylindriques  | 16        |
| 2.4.4    | Engrenages spiro-coniques et hypoïdes  | 19        |
| 2.4.5    | Condition de contact dynamique   | 22        |
| 2.4.6    | Exploitation des modèles dynamiques  | 23        |
| 2.5      | Conclusion   | 27        |
| <b>3</b> | <b>MODÈLES DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES</b>             | <b>28</b> |
| 3.1      | Introduction   | 28        |
| 3.2      | Base de modélisation – modèle torsionnel   | 28        |
| 3.3      | Modèle dynamique tridimensionnel local   | 32        |
| 3.3.1    | Modèle dynamique à paramètres concentrés   | 32        |
| 3.3.2    | Modélisation de l'engrenage  | 33        |
| 3.3.3    | Modélisation de l'interface d'engrènement  | 35        |
| 3.3.4    | Modélisation de l'arbre  | 41        |
| 3.3.5    | Modélisation des paliers   | 46        |
| 3.3.6    | Amortissement  | 47        |
| 3.3.7    | Forces d'excitation  | 48        |
| 3.3.8    | Equations du mouvement   | 49        |
| 3.3.9    | Force d'engrènement et coefficient dynamique                                     | 51        |
| 3.4      | Programmation  | 52        |
| 3.4.1    | Fonction 1 – Représentation des résultats de ASLAN                               | 52        |
| 3.4.2    | Fonction 2 – Modèle dynamique tridimensionnel local pour une vitesse de rotation | 53        |
| 3.4.3    | Fonction 3 – Modèle dynamique tridimensionnel local                              | 54        |
| 3.5      | Modèle dynamique tridimensionnel global  | 56        |
| 3.5.1    | Définition d'erreur de transmission dynamique                                    | 56        |
| 3.5.2    | Hypothèses   | 58        |
| 3.5.3    | Equation du mouvement  | 59        |
| 3.5.4    | Schéma de résolution pour les modèles dynamiques tridimensionnels globaux        | 64        |
| 3.6      | Conclusion   | 65        |
| <b>4</b> | <b>ÉLÉMENTS DE VALIDATION</b>  | <b>66</b> |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| <b>4.1</b>                                  | <b>Introduction</b> .....  | <b>66</b>  |
| <b>4.2</b>                                  | <b>Comparaisons et éléments de validation</b> .....                    | <b>66</b>  |
| 4.2.1                                       | Engrenages Gleason Normalisé .....                                     | 66         |
| 4.2.2                                       | Portées .....  | 70         |
| 4.2.3                                       | Raideur d'engrènement .....  | 70         |
| 4.2.4                                       | Erreurs de transmission .....  | 71         |
| 4.2.5                                       | Force dynamique .....  | 73         |
| 4.2.6                                       | Coefficients dynamiques .....  | 73         |
| <b>4.3</b>                                  | <b>Engrenage spiro-conique de la bibliographie</b> .....               | <b>76</b>  |
| 4.3.1                                       | Géométrie d'engrenage .....  | 76         |
| 4.3.2                                       | Portées et erreurs de transmission : .....                             | 76         |
| 4.3.3                                       | Coefficients dynamiques .....  | 80         |
| <b>4.4</b>                                  | <b>Exemple d'engrenage conçu avec le logiciel ASLAN</b> .....          | <b>82</b>  |
| 4.4.1                                       | Géométrie de l'engrenage .....   | 82         |
| 4.4.2                                       | Portée .....   | 83         |
| 4.4.3                                       | Erreurs de transmission .....  | 85         |
| 4.4.4                                       | Coefficients dynamiques .....  | 85         |
| <b>4.5</b>                                  | <b>Conclusion</b> .....  | <b>87</b>  |
| <b>5</b>                                    | <b>EXPLOITATION DES MODÈLES DYNAMIQUES</b> .....                       | <b>89</b>  |
| <b>5.1</b>                                  | <b>Introduction</b> .....  | <b>89</b>  |
| <b>5.2</b>                                  | <b>Engrenages Gleason normalisés et optimisés</b> .....                | <b>89</b>  |
| 5.2.1                                       | Portées sous charge .....  | 89         |
| 5.2.2                                       | Force d'engrènement .....  | 89         |
| 5.2.3                                       | Erreur de transmission .....   | 90         |
| 5.2.4                                       | Coefficients dynamiques .....  | 90         |
| <b>5.3</b>                                  | <b>Engrenage Gleason optimisé avec des arbres</b> .....                | <b>94</b>  |
| 5.3.1                                       | Portée .....   | 96         |
| 5.3.2                                       | Raideur d'engrènement .....  | 97         |
| 5.3.3                                       | Erreur de transmission .....   | 98         |
| 5.3.4                                       | Force d'engrènement .....  | 99         |
| 5.3.5                                       | Coefficients dynamiques .....  | 99         |
| <b>5.4</b>                                  | <b>Influence de l'amortissement</b> .....                              | <b>102</b> |
| <b>5.5</b>                                  | <b>Etude avec défauts de montage</b> .....                             | <b>105</b> |
| 5.5.1                                       | Engrenage Gleason 2 .....  | 106        |
| 5.5.2                                       | Engrenage de la littérature( Simon [98]) avec défauts de montage ..... | 111        |
| <b>5.6</b>                                  | <b>Conclusion</b> .....  | <b>118</b> |
| <b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>          | <b>.....</b>   | <b>121</b> |
| <b>Ouvrages</b>                             | <b>.....</b>   | <b>121</b> |
| <b>Proceedings de Congrès</b>               | <b>.....</b>   | <b>122</b> |
| <b>Articles de Périodiques</b>              | <b>.....</b>   | <b>125</b> |
| <b>Thèses</b>                               | <b>.....</b>   | <b>131</b> |
| <b>Logiciels</b>                            | <b>.....</b>   | <b>132</b> |
| <b>ANNEXE 1 - MÉTHODES NUMÉRIQUES</b>       | <b>.....</b>   | <b>133</b> |
| <b>Annexe 1.1 NewMark</b>                   | <b>.....</b>   | <b>133</b> |
| <b>Annexe 1.2 Transformation de Fourier</b> | <b>.....</b>   | <b>134</b> |



|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| <b>ANNEXE 2 LOGICIEL ASLAN</b>  | <b>135</b> |
| 2.1 Barycentre des efforts..... | 135        |
| 2.2 Direction normale.....      | 136        |
| <b>LISTE DES FIGURES</b>        | <b>137</b> |
| <b>LISTE DES TABLEAUX</b>       | <b>142</b> |

# 1 INTRODUCTION GENERALE

---

Les engrenages occupent une position privilégiée dans le domaine des transmissions de puissance et ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Parmi l'ensemble des architectures possibles, les engrenages cylindriques en développante de cercle sont, sans conteste, les plus utilisés pour le transfert de rotation entre des axes parallèles car ils possèdent des géométries mathématiquement simples dont le contrôle dimensionnel est relativement aisé. Les nombreuses études les concernant ont conduit à des corpus de normes importants (ISO 6336, ANSI / AGMA, par exemple) appliqués dans le monde entier. Les mécanismes avec renvoi d'angle nécessitent l'utilisation de géométries différentes avec, entre autres, des engrenages coniques, spiro-coniques et hypoïdes. Suite aux contraintes environnementales (masses embarquées et performances acoustiques en particulier), les engrenages modernes sont de plus en plus soumis à des exigences strictes en termes de capacité de charge, de rendement, de bruit développé, etc. Ces contraintes sociétales ont ainsi généré, depuis une quarantaine d'années, un nombre important de travaux relatifs à la simulation et la prédiction du comportement dynamique d'engrenages cylindriques et, dans une moindre mesure, d'engrenages coniques.

L'objectif principal de ce mémoire est donc de présenter des approches théoriques et numériques permettant de simuler les vibrations d'engrènement dans des couples spiro-coniques. Le premier chapitre présente une analyse bibliographique sur les simulations du comportement dynamique d'engrenages cylindriques et coniques avec, en particulier, la présentation des modèles de la littérature utilisés pour décrire les différentes sources d'excitations liées à l'engrènement. Le deuxième chapitre expose les principes de modélisation retenus et présente successivement des modèles torsionnels et tridimensionnels de complexité croissante. Un modèle original, dit tridimensionnel local, est proposé qui, à partir de résultats d'analyses quasi-statiques préalables, permet de suivre finement les évolutions des conditions de contact instantanées sur les flancs de denture. Une approche alternative, à notre connaissance relative novatrice, est également présentée qui conduit à construire des termes d'excitation globaux en termes d'erreurs de transmission et de raideurs d'engrènement permettant ainsi de s'affranchir d'algorithmes de contact au cours de la résolution dynamique. Le troisième chapitre est dédié aux éléments de validation par comparaisons avec des résultats quasi-statiques et dynamiques. Enfin, le dernier chapitre traite des applications possibles des modèles mis en place à des architectures réalistes incluant la prise en compte de défauts de position, d'alignement qui, dans les faits, ne peuvent pas être évités.

## 2 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 2.1 INTRODUCTION

Les engrenages spiro-coniques sont utilisés dans de nombreuses applications industrielles. Ils assurent un renvoi d'angle entre un arbre d'entrée et un arbre de sortie et sont présents principalement dans les boîtes de transmission automobiles, ferroviaires ou aéronautiques. Ils sont capables de supporter des charges élevées pour un fonctionnement relativement silencieux. Leur montage est délicat et leur fabrication, complexe, tente de compenser l'influence de défauts de positionnement. Ces engrenages sont souvent utilisés dans des applications avec des charges et des vitesses élevées. L'étude de leur comportement dynamique devient donc incontournable.

Ce chapitre passera donc en revue les principales caractéristiques géométriques de ces engrenages particuliers, puis une rapide description des méthodes de simulation du comportement quasi-statique sera réalisée avant d'aborder, enfin, les différents modèles dynamiques de la littérature.

### 2.2 ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

#### 2.2.1 Classement des engrenages

Les engrenages ont pour fonction principale de transmettre un mouvement de rotation. Trois classes d'engrenages sont définies selon les positionnements relatifs des arbres [3] :

(a) Axes parallèles : engrenages cylindriques à dentures droites, hélicoïdales.

(b) Axes concourants :

(b.1). Les engrenages coniques à dentures droites (Figure 2-1(a)), dont les flancs de dents sont concourantes en un point.

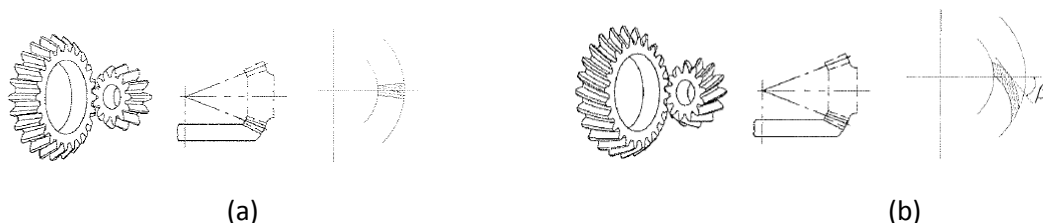


Figure 2-1 : Engrenage conique à denture droite (a) et à denture spirale (b) [1]

(b.2) Les dentures des engrenages spiro-coniques (Figure 2-1(b)) présentent une forme de dent spirale, permettant une transmission du mouvement plus progressive que dans le cas des engrenages coniques droits. Le bruit et les vibrations sont donc réduits, surtout à grande vitesse. Il existe deux types d'engrenages spiro-coniques : Gleason et Klingelnberg, suivant le mode de fabrication choisi.

(b.3) Les engrenages zéro qui, selon la norme [1], correspondent à des engrenages ayant un angle de spirale inférieur à 10 degrés.

(c) Engrenages gauches :

Les engrenages hypoïdes (Figure 2-2) sont des engrenages spiro-coniques possédant un décalage (ou offset : E) entre les axes des engrenages.

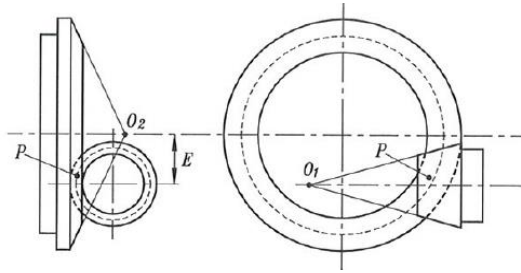


Figure 2-2 : Offset E pour l'engrenage hypoïde [4].

### 2.2.2 Géométrie des engrenages spiro-coniques

La géométrie des engrenages spiro-coniques est caractérisée par les paramètres représentés sur la Figure 2-3. L'angle de renvoi  $\Sigma$  est fixé à  $90^\circ$  dans ce cas. L'angle de spirale n'étant pas constant, une inclinaison moyenne  $\beta_m$  est fréquemment utilisée dans les calculs. Les paramètres utilisés dans les calculs sont listés à droite de la Figure 2-3.

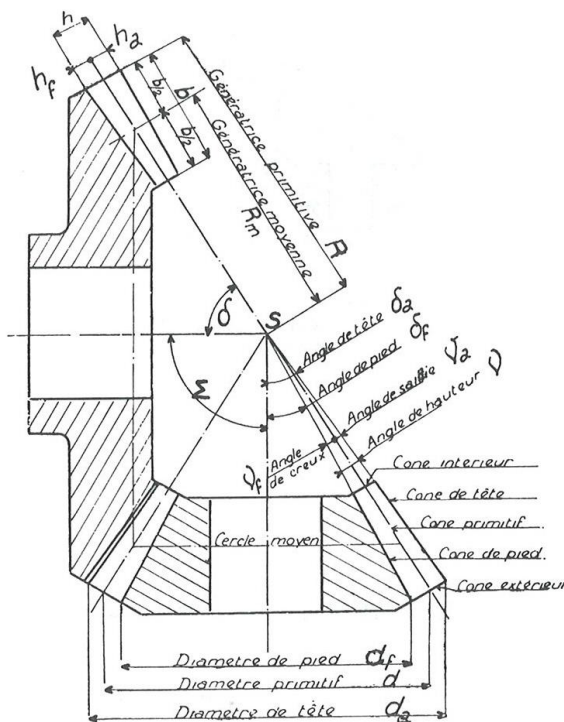


Figure 2-3 : Géométrie de l'engrenage spiro-conique [3].

|            |                                     |
|------------|-------------------------------------|
| $\Sigma$   | Angle de renvoi ( $^\circ$ )        |
| $\delta$   | Angle du pignon ( $^\circ$ )        |
| S          | Centre du repère                    |
| $Z_1$      | Nombre de dents du pignon           |
| $Z_2$      | Nombre de dents de la roue          |
| $\beta_m$  | Angle de spirale moyen ( $^\circ$ ) |
| xhm1       | Déport (mm)                         |
| jn         | Jeu de battement (mm)               |
| h          | Hauteur de denture (mm)             |
| $h_a$      | Hauteur de tête de denture (mm)     |
| $h_f$      | Hauteur de pied de denture (mm)     |
| $\theta_a$ | Angle d'addendum                    |
| $\theta_f$ | Angle de dedendum                   |
| khap       | Coefficient de creux                |
| khaf       | Coefficient de saillie              |
| b          | Largeur de denture (mm)             |

## 2.3 COMPORTEMENT QUASI-STATIQUE DES ENGRENAGES

### 2.3.1 Modélisations

L'analyse du contact élastique des dentures d'engrenage s'effectue très fréquemment à l'aide d'un logiciel Eléments Finis, souvent basé sur la méthode TCA/LTCA développée par Gleason et Litvin couplée avec une méthode d'analyse du contact basée sur les théories de Hertz /Boussinesq.

La méthode TCA/LTCA [4, 47] repose sur le calcul de matrices de flexibilité dans les directions normale, tangentielle et dans les directions croisées pour les points de contact. Fang [19] et Zhang [118] ont utilisé un modèle de contact pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux, coniques et hypoïdes. Litvin et al. [84, 85] ont développé un modèle basé sur la méthode Eléments Finis afin d'améliorer la fabrication des engrenages spiro-coniques. L'engrènement est simulé pour obtenir les distributions de pression. La Figure 2-4 illustre le modèle utilisé pour trois dents en contact.

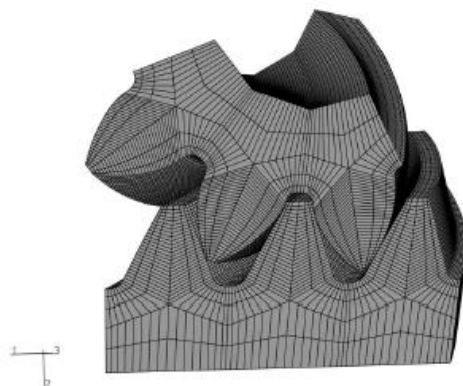


Figure 2-4 : Modèle éléments finis de trois paires de dents par Fuentes [60].

Bibel et al. [51] ont analysé les pressions de contact sur des engrenages spiro-coniques en utilisant la méthode Eléments Finis en 1995 puis en adoptant des éléments finis spécifiques de type 'GAP ELEMENT' (Figure 2-5) [12].

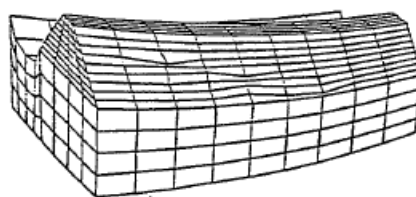


Figure 2-5 : Maillage EF déformé pour une orientation correcte des 'GAP ELEMENT' [12].

Guinand et al. [63], Hiltcher et al. [66], Cheng et Lim [15] et Vijayakar [112] ont utilisé un modèle de contact basé sur la théorie de Boussinesq (Figure 2-7) pour étudier le comportement sous charge d'engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Cette méthodologie a été ensuite étendue par Jacquin [125] et Teixeira [130] à l'analyse du comportement quasi-statique sous charge d'engrenages spiro-coniques.

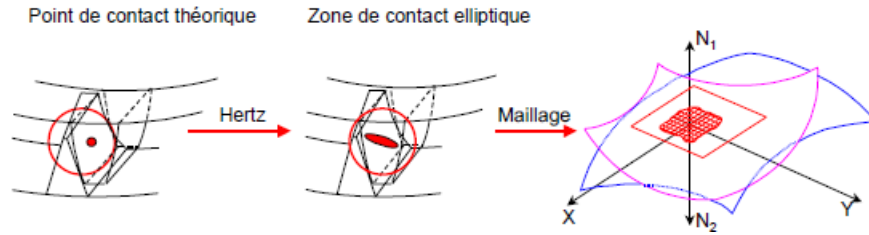


Figure 2-6 : Maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent [125]

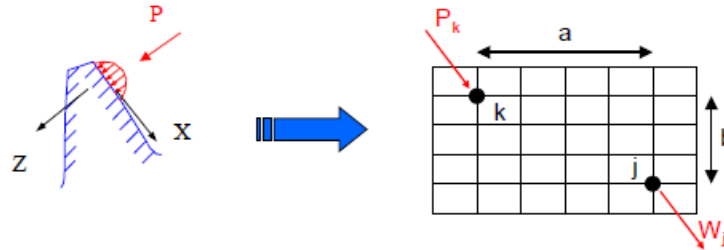


Figure 2-7 : Calcul des coefficients de surface de Boussinesq [125].

Comme présentées dans la Figure 2-6, les surfaces du pignon et de la roue se touchent au(x) point(s) de contact théorique(s). Les zones de contact potentielles sont discrétisées et les coefficients d'influence de contact sont ensuite déterminés par la méthode de Boussinesq (massifs semi-infinis). Les pressions distribuées sur la zone de contact ainsi que les autres paramètres sous charge d'engrenage en sont déduits.

Simon [95-100] a réalisé des études statiques sous charge d'engrenages spiro-coniques de type Gleason en s'appuyant sur la même théorie de Boussinesq. Avec son modèle, l'auteur a obtenu les raideurs d'engrènement, les erreurs de transmission et les distributions de pression sur les dents. Des études paramétriques ont été conduites afin de quantifier les effets d'erreurs de montage (désalignement, offset, erreurs suivant l'axe du pignon et de la roue). Enfin, des optimisations de géométrie ont été réalisées. Sheveleva et al. [101] ont présenté des analyses basées sur plusieurs méthodes de simulation du contact statique entre engrenages spiro-coniques.

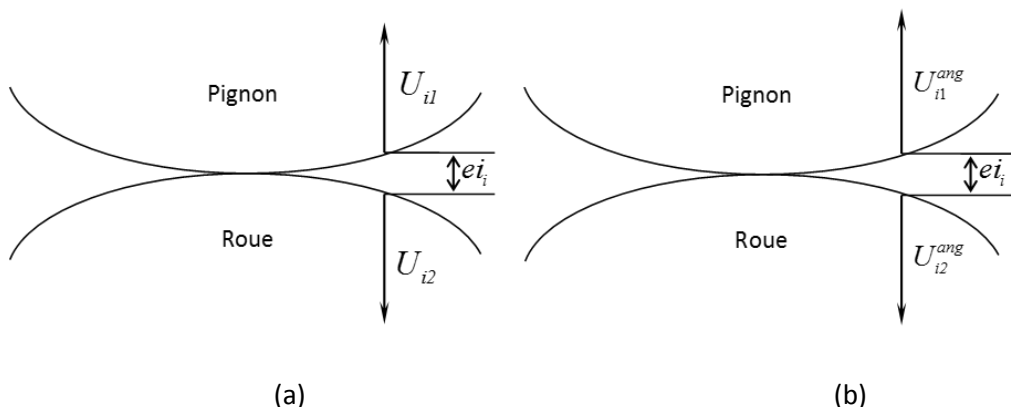


Figure 2-8 : Contact entre deux corps linéaire (a) [125] et angulaire (b) [130].

La condition classique de compatibilité des déplacements permet de définir les conditions de l'équilibre sous charge. Les déplacements peuvent être exprimés sous forme linéaire, c'est-à-dire mesurés suivant la normale au contact [121] ou bien en termes d'angles autour de l'axe du pignon ou de la roue (ce dernier cas étant plus fréquent car il s'agit souvent de l'organe mené) [130].

Les conditions mathématiques correspondantes sont alors :

Condition de contact – Linéaire (A) (Figure 2-8(a)):

$$\begin{cases} U_{i1} + U_{i2} + ei_i = \alpha \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{dans la zone de contact}) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} U_{i1} + U_{i2} + ei_i \geq \alpha \\ P_i = 0 \end{cases} \quad (\text{hors de cette zone de contact}) \quad (1.2)$$

$U_{i1}$ ,  $U_{i2}$  : les déplacements linéaires normaux des corps 1 et 2 au point  $M_i$

$\alpha$  : le rapprochement linéaire global des corps

$ei_i$  : l'écart initial linéaire au point  $M_i$

$P_i$  : la pression au point  $M_i$

Condition de contact (B) – Angulaire (Figure 2-8(b)) :

$$\begin{cases} U_{i1}^{ang} + U_{i2}^{ang} + ei_i^{ang} = \alpha^{ang} \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{dans la zone de contact}) \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} U_{i1}^{ang} + U_{i2}^{ang} + ei_i^{ang} = \alpha^{ang} \\ P_i = 0 \end{cases} \quad (\text{hors de cette zone de contact}) \quad (1.4)$$

$U_{i1}^{ang}$ ,  $U_{i2}^{ang}$  : les déplacements angulaires des corps 1 et 2 au point  $M_i$

$\alpha$  : le rapprochement angulaire global des corps

$ei_i$  : l'écart initial angulaire au point  $M_i$

$P_i$  : la pression au point  $M_i$

La condition de contact (A) en linéaire a été utilisée dans l'analyse statique d'engrenages faces à denture droite et hélicoïdale par Jacquin [125], d'engrenages coniques par Bruyère [121] et de roue et vis sans fin par Hiltcher [66]. La condition de contact (B) exprimée en déplacement angulaire a été proposée par Teixeira [130] lors de l'analyse statique d'engrenage spiro-conique. Selon l'auteur, la condition de contact (B) semble plus adaptée que la condition de contact (A) pour l'engrenage spiro-conique.

### 2.3.2 Exploitation des modèles quasi-statiques

Des résultats issus des modèles quasi-statiques fournissent des résultats intéressants pour dimensionner, ou optimiser les engrenages.

#### 2.3.2.1 Portée

La portée sous charge peut être visualisée au travers des distributions de pressions pendant une période d'engrènement sur la denture. Tous les points entrés en contact sous charge au cours de l'engrènement sont tracés. Plusieurs représentations 2 ou 3 D sont possibles. Les schémas en deux dimensions représentent les points de contact projetés sur la surface de la dent et les figures en trois dimensions suivent les lignes de contact le long de la largeur de denture au cours des différentes positions des contacts au cours de l'engrènement.

En 2005, Abousleiman et Velez [42] ont développé une approche combinant des modèles Eléments Finis et à paramètres concentrés pour simuler le comportement statique et dynamique d'engrenage planétaires. Pour des conditions de fonctionnement quasi-statique (à faible vitesse), un exemple de distribution tridimensionnelle de pressions de contact maximales est présenté sur la Figure 2-9(a) pour un engrenage cylindrique à denture droite.

En 1999, un nouveau modèle a été proposé par Ajmi et Velez [11] pour étudier le comportement d'engrenages hélicoïdaux à dentures larges. Sur l'exemple de distribution de pressions de contact (Figure 2-9(b)), on peut constater que les pressions augmentent brusquement à l'engagement pour ensuite se répartir sur une surface plus importante. Les dentures sont désalignées et on observe clairement des surcharges sur un bord tandis que l'autre extrémité n'est pas en contact.

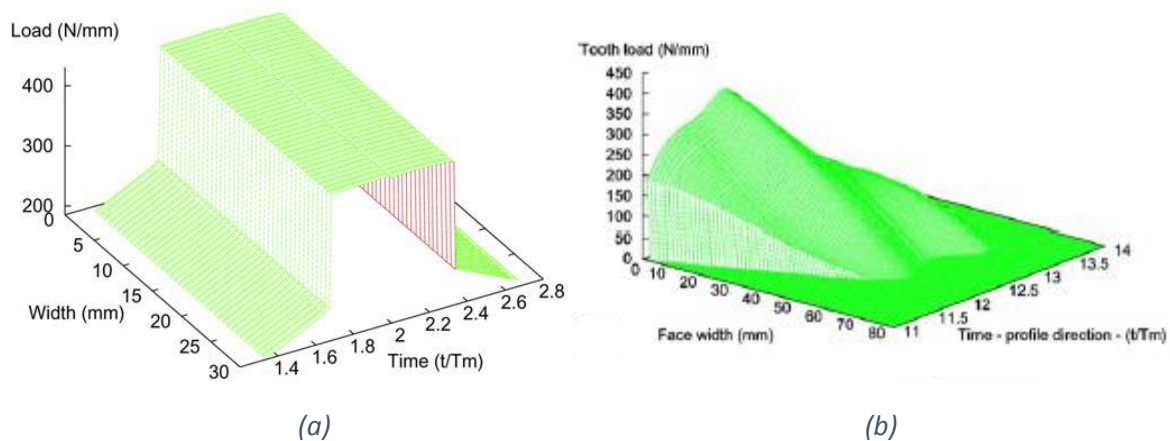


Figure 2-9 : Distributions de charge quasi-statique d'engrenage cylindrique à denture droite (a) par Abousleiman et Velez [42] et à denture hélicoïdale (b) par Ajmi et Velez [11].

En 2007, Hilcher, Guingand et de Vaujany [66] ont présenté des résultats portant sur l'analyse quasi-statique sous charge de roue et vis sans fin, dans le cas d'un contact acier-plastique. Cinq dents avaient été prises en compte dans la modélisation. La Figure 2-10 montre les distributions de pression à une position de contact. A un instant donné, quatre dents du pignon et la roue, conventionnellement référencées dents -1, 0, 1 et 2, sont en contact.



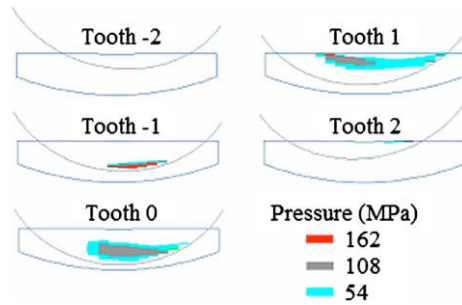


Figure 2-10 : Distributions de charge à une position d'engrènement de roue à vis sans fin par Hiltcher et al. [66].

En 2009, Peng et Lim [34] ont étudié les effets d'erreurs de montage sur le comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques en s'appuyant sur une solution statique fournie par un outil numérique nommé CALYX. Des exemples de distributions de pressions sur les dentures du pignon et de la roue sont portés sur la Figure 2-11. Les portées de la deuxième ligne présentent les distributions de pression sur les dents sans erreur de montage ; les maximums apparaissent au pied et à la tête de denture. Les portées de la première et troisième rangée montrent les distributions de pression sur les dents avec désalignement (-0.02 degré (angle de renvoi  $\Sigma = 89.98^\circ$ ) et +0.02 degré (angle de renvoi  $\Sigma = 90.02^\circ$ )). Les maximums de pression augmentent en présence de désalignements et les valeurs obtenues avec le désalignement de -0.02 degré sont plus importantes que dans le cas à +0.02 degré. Les positions des maximums de pression sur les flancs de denture changent également en fonction des désalignements.

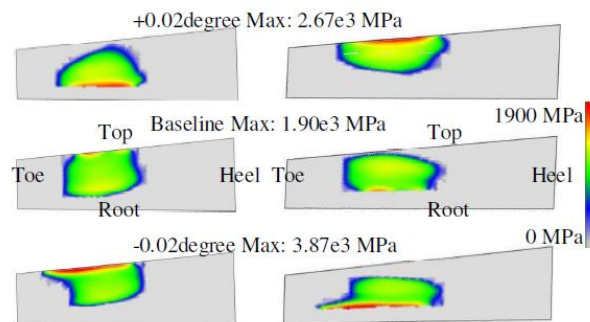


Figure 2-11 : Distributions de charge pour un engrenage spiro-conique sans défaut et avec désalignement -0.02° et +0.02° par Peng et Lim [34].

### 2.3.2.2 Raideur d'engrènement

Lorsqu'un engrenage transmet une charge, des déformations apparaissent : compression, flexion, cisaillement des dentures, mais également des déflexions induites par le corps de l'engrenage. Dans une certaine mesure, la notion de raideur d'engrènement permet de caractériser ces déformations élastiques. La majorité des études considère que cette liaison élastique est établie dans le plan d'action théorique selon la direction normale aux flancs des dentures même si certains auteurs (Duverger et al. [18], Kasuba et Evans [74], Honda [25]) ont tenté des modélisations en tenant compte des contacts non conjugués hors du plan d'action.

Il n'existe pas de méthode précise pour mesurer une rigidité de denture ou d'engrènement, par contre, de nombreuses méthodes analytiques et numériques (éléments finis, primes finis, etc.) ont été développées pour les calculer. Weber [9], Weber et Banaschek [10], Attia [46], et Steward [102] décomposent le calcul global de la raideur d'engrènement en deux parties : (1) une contribution locale : le contact Hertzien entre les dents du pignon et de la roue ; (2) des contributions

globales incluant les raideurs entre la dent et le corps de l'engrenage. Des méthodes de calcul ont ainsi été mises en œuvre par de nombreux auteurs et pour différents types d'engrenages; par exemple, pour les engrenages cylindriques : Kim [126], Velex [131], De Vaujany [124], pour les engrenages spiro-coniques : Peng et Lim [34], pour les engrenages hypoides : Cheng et Lim [55]. Velex [131], Sainsot [129] et Wang et Cheng [115] ont déterminé la raideur d'engrènement à partir de déplacements normaux sous différentes charges au cours d'une étude statique bidimensionnelle. Rémond et al. [8] ont présenté une synthèse de ces différentes méthodes de calcul de raideur d'engrènement.

La rigidité globale d'engrènement est liée à la déformation des dentures. Cette déformation peut être représentée par le rapprochement des corps  $\alpha$  suivant la direction normale au contact. Pour chaque position angulaire du pignon, la raideur d'engrènement peut donc être définie par [122] :

$$K = \frac{F}{\alpha} \text{ ou } K = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \text{ si } F \text{ est non linéaire} \quad (1.5)$$

Dans ce contexte, Ploetz [93] a proposé une formule simplifiée pour la raideur d'engrènement en supposant que le corps de l'engrenage se déforme suivant un modèle sans couplage (fondation élastique de Wrinckler Figure 2-13). La raideur globale d'engrènement est ensuite déterminée en combinant ces raideurs distribuées en série et en parallèle.

$$k_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \quad (1.6)$$

$k_t$  : la raideur totale d'engrènement

$k_i$  : la raideur distribuée

$i = 1, 2, 3, \dots, n$  : points de contact.



Figure 2-12 : (a) Modèle sans couplage, (b) modèle avec couplage [75].

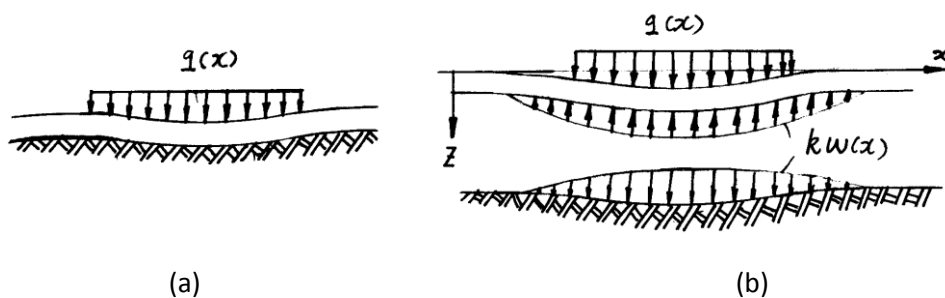


Figure 2-13 : Fondation élastique de Pasternak.

Ajmi [119] a introduit les couplages de contact dans les modélisations du comportement statique et dynamique d'engrenage en utilisant un modèle de fondation élastique de Pasternak (incluant donc les effets de couplage élastique entre points de contact). Maatar et Vexex [87], en 1996, ont développé une expression analytique de la longueur de contact instantanée pour des engrenages droits et hélicoïdaux sous forme de série de Fourier. Sur cette base, une formule a été proposée pour calculer la raideur d'engrènement variable en fonction du temps sous la forme:

$$k(t) = k_0 \cdot L_m \cdot \bar{L}(\tau) \quad (1.7)$$

Où  $\tau$  représente le temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement,  $k_0$  peut être obtenu par une analyse statique ou en utilisant directement les résultats de la Norme ISO/DIS 6336 (1990).  $L_m$  est la longueur moyenne de contact.  $\bar{L}(\tau)$  est une fonction périodique du temps dépendant principalement des rapports de conduite (profil et recouvrement). En première approche, les auteurs postulent que la fonction raideur d'engrènement est directement proportionnelle à la longueur de contact instantanée. La Figure 2-14 représente les évolutions de longueur de contact totale pour un engrenage cylindrique droit et hélicoïdal.

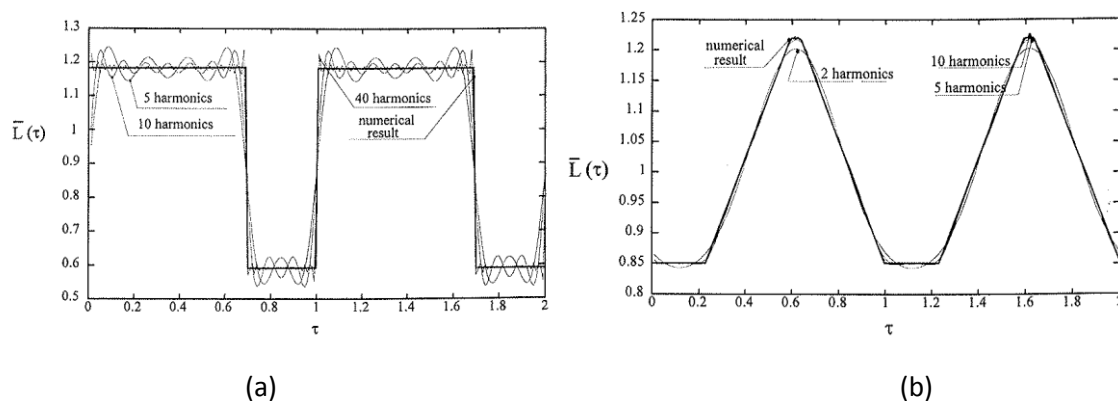


Figure 2-14 : Evolutions de la longueur de ligne de contact pendant deux périodes d'engrènement pour les engrenages cylindriques (a) à dents droites ( $\varepsilon_\alpha=1.691$ ) et (b) à dents hélicoïdales ( $\varepsilon_\alpha=1.639$ ,  $\varepsilon_\beta=0.596$ ) par Maatar et Vexex, 1996 [87].

Lors de la construction de leur modèle dynamique tridimensionnel d'engrenage spiro-conique, Peng et Lim [35] ont utilisé la raideur d'engrènement (Figure 2-15(a)) obtenue par une analyse quasi-statique fournissant les données d'entrée de la simulation numérique. L'image (a) de la Figure 2-15 représente les raideurs d'engrènement obtenues pour trois cas : sans défaut, avec désalignement de  $-0.2^\circ$  et  $+0.2^\circ$ , en fonction de la position de contact. Dans le cas de cette géométrie, la raideur d'engrènement avec le désalignement  $+0.2^\circ$  est inférieure à la raideur d'engrènement sans défaut ; la raideur d'engrènement avec le désalignement  $-0.2^\circ$  est inférieure à la raideur d'engrènement sans défaut au début et à la fin, mais supérieure au milieu de la période de contact. L'image (b) de la Figure 2-15 montre les raideurs d'engrènement dans le cas d'engrenage hypoïde pendant une période d'engrènement, sous différents couples ( $-$ , 125Nm,  $--$ , 200Nm,  $\cdots$ , 500Nm,  $- - -$ , 1000Nm). L'amplitude de la raideur d'engrènement pendant une période de contact diminue quand le couple augmente.

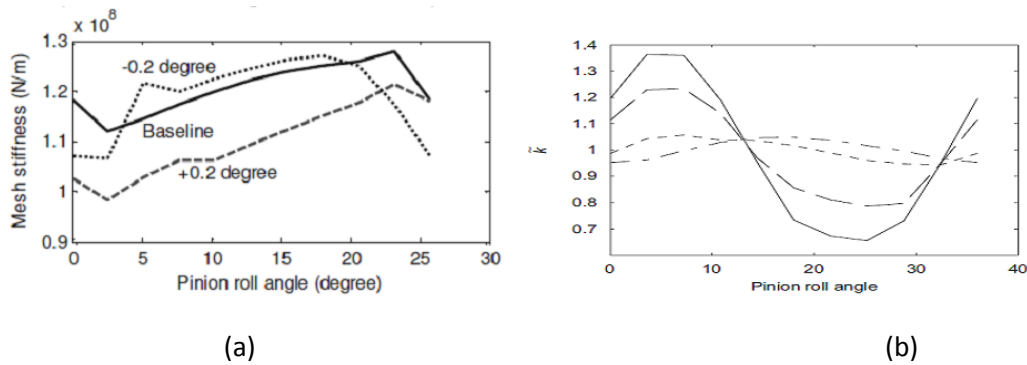


Figure 2-15 : Evolution de la raideur d'engrènement globale pendant une période de contact pour (a) : engrenage spiro-conique par Peng et Lim, 2009 [35] et (b) : engrenage hypoïde par Wang et al, 2007 [116].

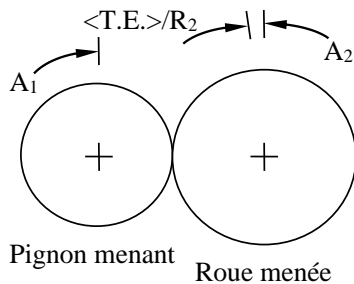
### 2.3.2.3 Erreur de transmission

La notion d'erreur de transmission (T.E.) a été introduite pour la première fois par Harris [24] en 1958. L'erreur de transmission est classiquement définie par l'écart entre la position réelle de la roue menée et sa position théorique (Figure 2-16). Si les profils étaient parfaitement conjugués et les dents indéformables, l'erreur de transmission serait nulle durant l'engrènement. Elle est exprimée de deux façons différentes : soit en déplacement linéaire, soit en position angulaire. La deuxième expression est une définition plus générale. La Figure 2-16 illustre la notion d'erreur de transmission (sans charge ou sous charge) qui peut être exprimée par un écart angulaire mesuré (calculé) sur la roue menée ou par une distance linéaire dans le plan de base.

L'erreur de transmission se présente habituellement sous trois formes : l'erreur de transmission à vide (l'erreur de transmission sans charge ou l'erreur de transmission cinématique) ; l'erreur de transmission quasi-statique sous charge ; l'erreur de transmission dynamique sous charge. La Figure 2-17 expose un exemple de comparaison des erreurs de transmission quasi-statique sous charge mesurées et calculées par Vexlex et Maatar [111] pour un engrenage cylindrique à dents droites. Les courbes indiquent que l'erreur de transmission varie cycliquement en fonction de la fréquence d'engrènement et des basses fréquences associées aux rotations des mobiles.

#### Erreur de transmission à vide

L'erreur de transmission à vide peut être mesurée lorsque que les engrenages ne transmettent aucune puissance et tournent à une vitesse de rotation très basse. Elle est donc représentative des défauts géométriques de denture, des défauts de fabrication mais également de montage.



|                              | Pignon      | Roue                                  |
|------------------------------|-------------|---------------------------------------|
| Nombre de dents              | $Z_1$       | $Z_2$                                 |
| Rayon de base                | $R_1$       | $R_2$                                 |
| Position angulaire théorique | $A_1$       | $A_2 = A_1 * Z_1 / Z_2$               |
| Position angulaire réelle    | $A_1$       | $A_2 + (T.E.) / R_2$                  |
| Position linéaire réelle     | $A_1 * R_1$ | $A_2 R_2 + (T.E.) = A_1 R_1 + (T.E.)$ |

Figure 2-16 : La notion d'erreur de transmission et des expressions possibles selon Munro, 1989 [32].

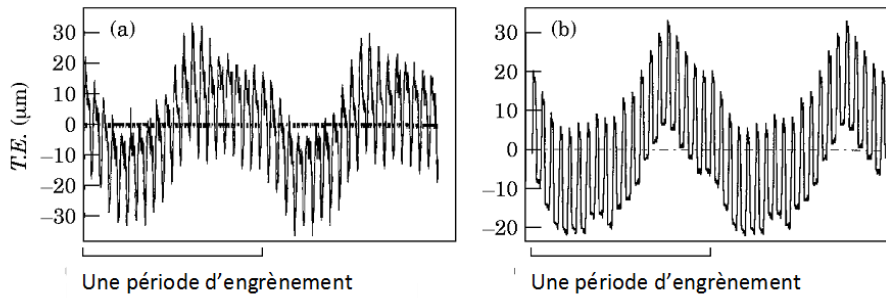


Figure 2-17 : Comparaison des erreurs de transmission quasi-statiques sous charge (a) expérimentale et (b) numérique par Velez et Maatar, 1996 [111].

La Figure 2-18(b) représente l'erreur de transmission à vide pour un engrenage spiro-conique calculée par Litvin et al. [83]. La fonction de l'erreur cinématique a une forme quasi parabolique. Une fonction parabolique (Figure 2-18(a)) est prédéfinie pour simuler la discontinuité de l'erreur cinématique liée au déplacement des axes.

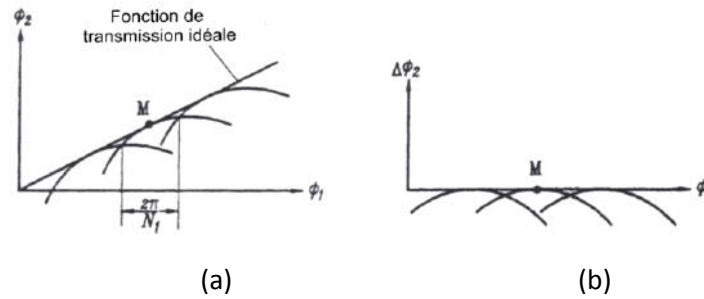


Figure 2-18 : (a) Fonction de transmission, erreurs de transmission à vide paraboliques prédéfinies (b) par Litvin et al. 1996 [83].

### Erreur de transmission sous charge

L'erreur de transmission quasi-statique peut être mesurée lorsque les engrenages transmettent une charge à très faible vitesse de rotation. Elle est due aux effets des déformations de denture, mais également à celles de l'ensemble du système mécanique. Selon Grégory et al. [21, 22] et Lin et al. [30, 31], l'erreur de transmission sous charge est couramment utilisée afin d'étudier les effets des écarts géométriques tels que les corrections de profils, les défauts de montage, etc. La Figure 2-19 illustre un exemple de signal temporel d'erreur de transmission sous charge calculée par Litvin et al. pour un engrenage spiro-conique. Elle varie périodiquement suivant la période d'engrènement.

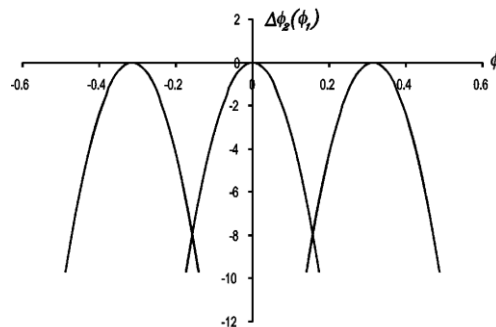


Figure 2-19 : Un exemple de la variation des erreurs de transmission sous charge d'engrenage spiro-conique par Litvin et al. 2002 [84].

Une formule générale a été proposée par Velex et Ajmi [108] pour calculer l'erreur de transmission quasi-statique sous charge pour des engrenages cylindriques. Les auteurs ont en déduit un certain nombre de résultats analytiques pour des engrenages cylindriques à dentures droites et hélicoïdales. Ils ont déterminé, en particulier, les combinaisons de corrections de profil conduisant à des fluctuations minimales d'erreurs de transmission quasi-statiques (Velex et al. [110]).

$$TE = Rb_1 \left[ \int_0^1 \Omega_1(\xi) d\xi + \theta_1 \right] + Rb_2 \left[ \int_0^1 \Omega_2(\xi) d\xi + \theta_2 \right] \quad (1.8)$$

La Figure 2-20 montre les erreurs de transmission sous charge mesurées et calculées numériquement pour un engrenage spiro-conique sous différents couples (65N.m (a) et 130N.m (b)) pendant une période d'engrènement par De Vaujany et al. en 2007 [17, 59]. En comparant les courbes, les erreurs de transmission sous charge augmentent avec le couple. Les résultats simulés à 65 Nm sont plus proches des erreurs de transmission mesurées pour le cas étudié.

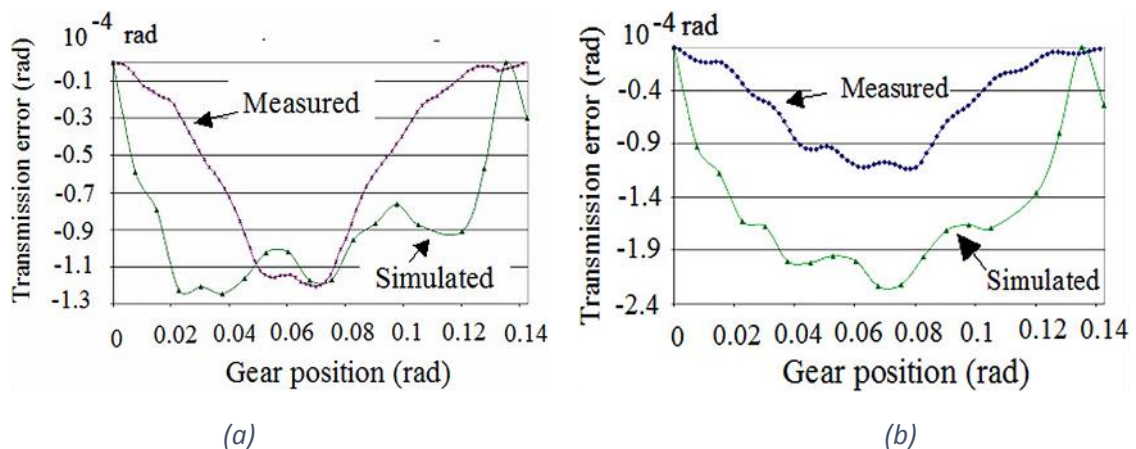


Figure 2-20 : Erreurs de transmission sous charge d'engrenage spiro-conique pour des couples (a) 65 N.m et (b) 130 N.m par De Vaujany et al. 2007 [59].

## 2.4 COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'ENGRENAGE

### 2.4.1 Principales sources d'excitation

Le mouvement d'un engrenage théoriquement parfait et indéformable sera transmis de manière continue et le rapport de réduction restera constant. Il existe des excitations caractéristiques dues aux diverses modifications introduites par le fonctionnement, la fabrication, ou le montage. Remond [8] a résumé toutes les causes importantes.

*Les causes internes :*

- (i) la raideur d'engrènement
- (ii) les défauts géométriques
- (iii) les défauts de montage
- (iv) les déformations élastiques
- (v) les effets des sources aérodynamiques
- (vi) effet de battement

(vii) effet des chocs, résonance d'une dent

*Les causes externes :*

(1) les variations de puissance transmise

(2) fluctuations d'inertie

(3) positionnement et caractéristiques des structures de liaison

### **2.4.2 Deux méthodes principales**

Basés sur différents modèles d'interface d'engrenages, de nombreux modèles globaux ont été construits pour simuler le comportement dynamique d'engrenages cylindriques, spiro-coniques et hypoïdes. Les modèles se classent en deux types : ils utilisent soit la méthode des Eléments Finis (EF), soit des approches de type 'paramètres concentrés'. Ambarisha et Parker [45] ont réalisé des études non linéaires pour un train planétaire avec deux modèles indépendants : un modèle EF et un modèle à paramètres concentrés et vérifié ainsi la pertinence de modèles à paramètres concentrés pour prévoir le comportement dynamique du système d'engrenages planétaires. Abousleiman et Velez [42] ont proposé un modèle hybride combinant des Eléments Finis et des éléments à paramètres concentrés dédiés à l'analyse quasi-statique et dynamique d'engrenages à trains planétaires. Velez [8] a proposé une synthèse des modèles dynamiques existants pour différents types d'engrenages.

#### **2.4.2.1 Méthode Eléments Finis**

En 1988, Özgüven et Houser [91] ont présenté un modèle Eléments Finis, non linéaire, considérant l'erreur de transmission quasi-statique sous charge comme la source d'excitation du système dynamique. Deux cas ont été testés et comparés, reposant soit sur une raideur moyenne ou une raideur variable en fonction du temps. La conclusion a été qu'il était possible d'approximer la contribution d'une raideur d'engrènement dépendante du temps par une fonction raideur moyenne à laquelle est superposé un terme forcé (second membre) déduit de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge. Cette méthode est limitée car les éventuelles instabilités générées par les excitations paramétriques d'engrènement ne peuvent pas être simulées avec cette approximation. Les auteurs soulignent également que l'hypothèse de raideur moyenne est raisonnable pour les engrenages hélicoïdaux ou coniques et sans doute davantage contestable pour des engrenages droits conventionnels pour lesquels les fluctuations de raideurs d'engrènement sont importantes. En 1991, Özgüven [92] a publié un modèle dynamique non linéaire dans le cas d'engrenages cylindriques capable de calculer les forces dynamiques d'engrènement, les coefficients dynamiques et les erreurs de transmission dynamiques. Kahraman et al. [70] ont analysé le comportement dynamique de rotors couplés par des engrenages cylindriques droits en utilisant la méthode Eléments Finis. Le modèle est linéaire (les engrenages sont suffisamment chargés de sorte que des pertes de contact instantanées entre flancs de denture ne peuvent pas se produire) avec une raideur d'engrènement constante et des termes d'excitation déduits de l'erreur de transmission sous charge. Par ailleurs, Maliha et al. [88] ont introduit un modèle d'engrenage non linéaire identique à celui développé dans [91] pour étudier le comportement dynamique d'un ensemble : engrenage-arbre-disque-roulement. Crowther et Zhang [57] ont modélisé les vibrations en torsion non linéaire de transmissions de véhicules par la méthode Eléments Finis. Bettaïeb et al. [50] ont proposé un modèle combinant des EF condensés par sous-structuration afin de simuler le comportement statique et dynamique d'engrenages cylindriques avec des corps de roue amincis. Lin et al. [82] ont également utilisé la méthode Eléments Finis pour mener une étude statique et dynamique d'engrenages cylindriques.



Carmignani et al. [16] ont réalisé une simulation EF en trois dimensions dans l'environnement ANSYS pour une boîte de vitesses avec un engrenage spiro-conique.

#### 2.4.2.2 Méthode à paramètres concentrés

Pour des raisons de simplicité, les modélisations du comportement dynamique des engrenages se sont, à l'origine, orientées vers des méthodes à paramètres concentrés. L'interface d'engrènement est simulée par une raideur d'engrènement (Tuplin [38, 39, 106], Zeman [117], Strauch [103], ...), qui représente les contributions de l'ensemble des parties déformables. Les mouvements instantanés de chaque élément mobile peuvent être décrits par six paramètres au maximum (six degrés de liberté : trois translations et trois rotations). Les modèles de base sont des modélisations en torsion (Figure 2-21).

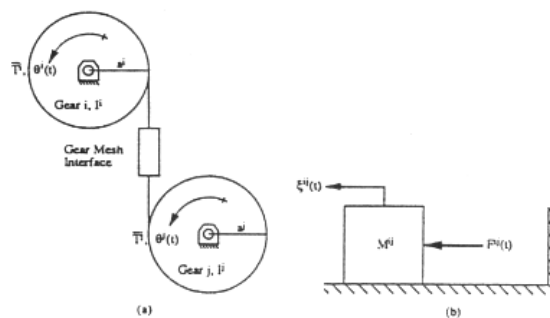


Figure 2-21 : Modèle torsionnel de base [8].

D'un point de vue théorique, les modèles dynamiques à paramètres concentrés ne peuvent représenter que les premiers modes d'un système et ne tiennent compte des contributions des corps des engrenages que d'une manière approximative. Néanmoins, cette approche a été largement validée par l'expérimentation avec en particulier : Gregory et al. [21, 22], Rettig [36], Kubo [76], Küçükay [28], Umezawa et al. [107] pour les trains à axes fixes simple étage, Cunliffe [58, 123], Hidaka et al. [65] pour les trains planétaires.

#### 2.4.2.3 Classement des modèles d'interface d'engrènement

Al-Shyyab et Kahraman [44] ont proposé un classement des modèles d'interface d'engrènement en quatre catégories :

- (1). Les modèles linéaires avec une raideur constante dans le temps.
- (2). Les modèles linéaires avec une raideur variable au cours de l'engrènement.
- (3). Les modèles non linéaires avec une raideur constante dans le temps.
- (4). Les modèles non linéaires avec une raideur variable au cours de l'engrènement.

Les modèles linéaires sont reconnus comme représentatifs du comportement dynamique tant que les dentures restent en contact au cours de l'engrènement (absence de décollements et chocs) et à la condition que la contribution de la non linéarité Hertzienne sur la déflexion de contact puisse être négligée. Les modèles non linéaires, quant à eux, tiennent compte des pertes de contact instantanées (totales ou partielles) qui peuvent apparaître pour des défauts de fortes amplitudes éventuellement couplés à des charges et amortissements faibles.



### 2.4.3 Engrenages cylindriques

#### 2.4.3.1 Modèles linéaires

Les modèles linéaires d'engrenages droits synthétisés par Özgüven et Houser en 1988 [90] utilisent une raideur constante durant l'engrènement et sont particulièrement adaptés à des engrenages à grands rapports de conduite. En 1984, Iida et Tamura [26] ont, par exemple, considéré une raideur d'engrènement constante pour calculer les fréquences propres en flexion-torsion d'un système formé de deux arbres liés par un engrenage. Cai et Hayashi [14] ont montré que le comportement dynamique des engrenages cylindriques droits était linéaire hors des zones de vitesses critiques. En 1993, Kahraman [27, 69] a utilisé un modèle similaire pour quantifier l'influence de l'angle d'hélice sur les fréquences propres de réducteurs simple et double étages. Gu et Velex [20] ont récemment proposé un modèle dynamique à paramètres concentrés pour les engrenages planétaires incluant les contributions d'erreurs de position des satellites et des excentricités des mobiles. Sener et Özgüven [94], Özgüven et Kesan [33] et Vinayak et al. [112] (Figure 2-22) ont introduit les excitations d'engrènement issue des erreurs de transmission quasi-statique sous charge combinée à une raideur constante d'engrènement.

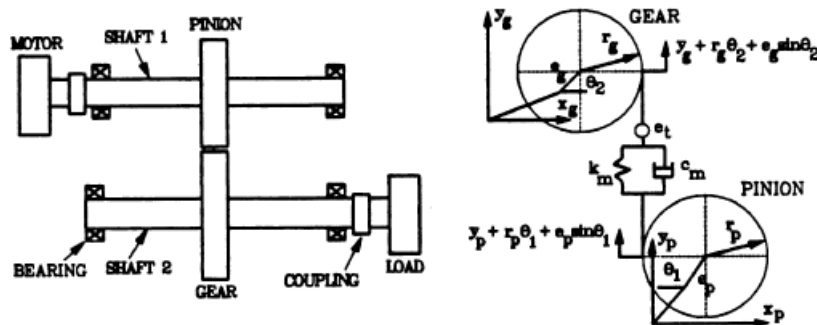


Figure 2-22 : Modèle linéaire de Sener et Özgüven [94].

L'avantage du modèle linéaire avec raideur d'engrènement constante est de pouvoir fournir des solutions analytiques exactes mais, dans sa forme habituelle, il n'est que peu représentatif du comportement de systèmes avec écarts de forme et défauts.

Gregory et al. [21, 22], Benton et Seireg [49] (Figure 2-23), Wang et Cheng [115], Masuda et al. [89] ont développé des modèles avec des raideurs d'engrènement variables en fonction du temps pour déterminer les zones d'instabilités et calculer le chargement dynamique sur les dents. En 2001, Choi et Mau [56] ont proposé un modèle linéaire, mais avec une raideur variable et une excitation par l'erreur cinématique. En 2004, Kubur et al. [77] ont validé un modèle de systèmes multi arbres couplés par des engrenages hélicoïdaux. La raideur d'engrènement était linéaire et placée dans le plan d'action suivant la normale aux dents déterminée par l'angle d'hélice. Dans le même esprit, Bordegaray et al. [13, 120] ont développé des modèles dynamiques en trois dimensions pour simuler le comportement d'engrenages roue et vie sans fin et pignon/crémaillère dans le cas non linéaire et en régime transitoire.

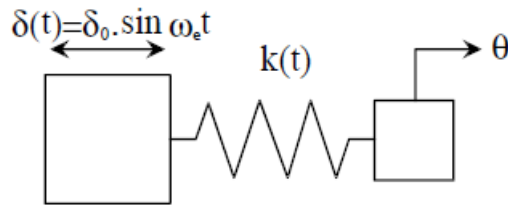


Figure 2-23 : Modèle à excitation paramétrique d'un système pignon – roue par Benton et Seireg [49].

### 2.4.3.2 Modèles non linéaires

Gregory et al. [21, 22] ont été parmi les premiers à observer expérimentalement l'influence de la charge et de l'amortissement sur l'apparition de sauts d'amplitude dans les courbes de réponse aux abords des vitesses critiques (Figure 2-24). D'après des études du comportement dynamique non linéaire, Wang [113, 114] a proposé une valeur minimale du couple d'entrée permettant d'assurer un contact permanent entre les dents d'un engrenage cylindrique à dentures droites, dans le cas d'un modèle torsionnel en présence de défauts d'excentricité.

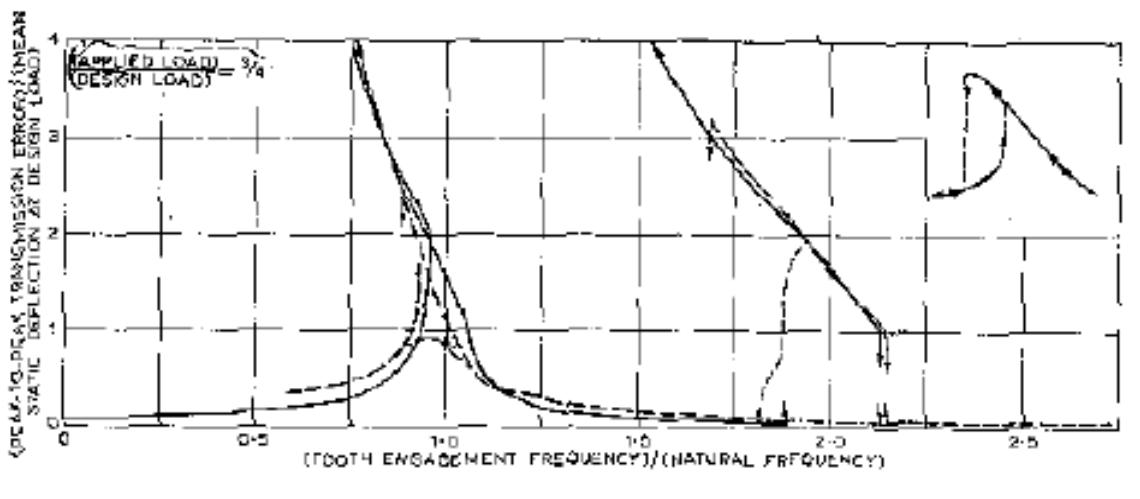


Figure 2-24 : Mise en évidence expérimentale des séparations de denture pour plusieurs amortissements (Gregory et al. [21, 22]).

Les séparations de dentures sont généralement suivies d'impacts, lors de la reprise du contact soit sur le flanc actif « choc direct », soit sur le flanc opposé « choc rétro ». Ce phénomène est plus connu sous le nom de « Backlash », lorsque le choc est direct et de « backstrike » lorsqu'il est rétro. En 1980, Hamad et Seireg [64] ont proposé un modèle non linéaire d'engrenages cylindriques à dentures droites avec une raideur constante dans le temps. Ce modèle tient compte des souplesses des arbres et des roulements ; il comporte trois degrés de liberté, lesquels permettent le couplage entre les degrés de liberté de torsion et les degrés de liberté transversaux. L'excitation du modèle est donnée par l'erreur statique sous charge. Kahraman [73], en 1991, a proposé un modèle dynamique tridimensionnel (Figure 2-25) d'un système couplé par un engrenage cylindrique à dentures droites. Ce modèle est non-linéaire.

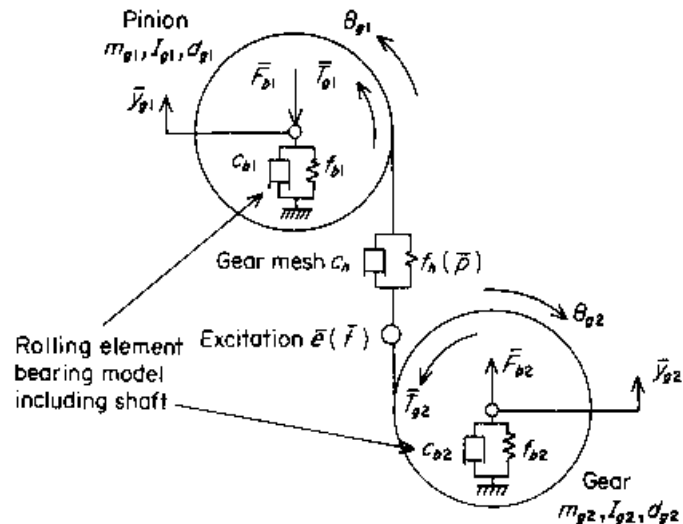


Figure 2-25 : Modèle dynamique non-linéaire d'un système rotor roulement par Kahraman 1991 [73].

Velex et Maatar [111] ont mis au point un modèle dynamique à paramètres concentrés en trois dimensions en 1996, pour modéliser le comportement dynamique d'un système d'engrenages cylindriques (Figure 2-26). La raideur d'engrènement varie en fonction du temps. Contrairement aux autres modèles de la littérature, la raideur d'engrènement dynamique et l'erreur de transmission ne sont pas obtenues par des analyses quasi-statiques préalables, mais sont des résultats du modèle car ces caractéristiques sont calculées au cours de la résolution en couplant un schéma d'intégration pas à pas et un algorithme de contact normal (Figure 2-27). Maatar [127], Maatar et Velex [86] ont ensuite mené des études statiques et dynamiques sur les corrections de forme sur les flancs de dentures à partir de ce même modèle. Ajmi et Velex [11, 43] ont développé une méthodologie permettant d'intégrer les contributions des déformations des corps d'engrenages dans le cas de largeurs de denture importantes. Gu et Wu [62] ont intégré l'influence du frottement sur les dentures dans un modèle avec raideur d'engrènement dépendante du temps. Baud et Velex [48] ont présenté en 2002 un modèle dynamique non-linéaire pour un système de deux arbres reposant sur des paliers fluides couplés par des engrenages cylindriques à dentures droites et à dentures hélicoïdales. Les résultats issus de cette modélisation ont été largement validés en comparant avec des mesures sur un banc d'essai fortement instrumenté.

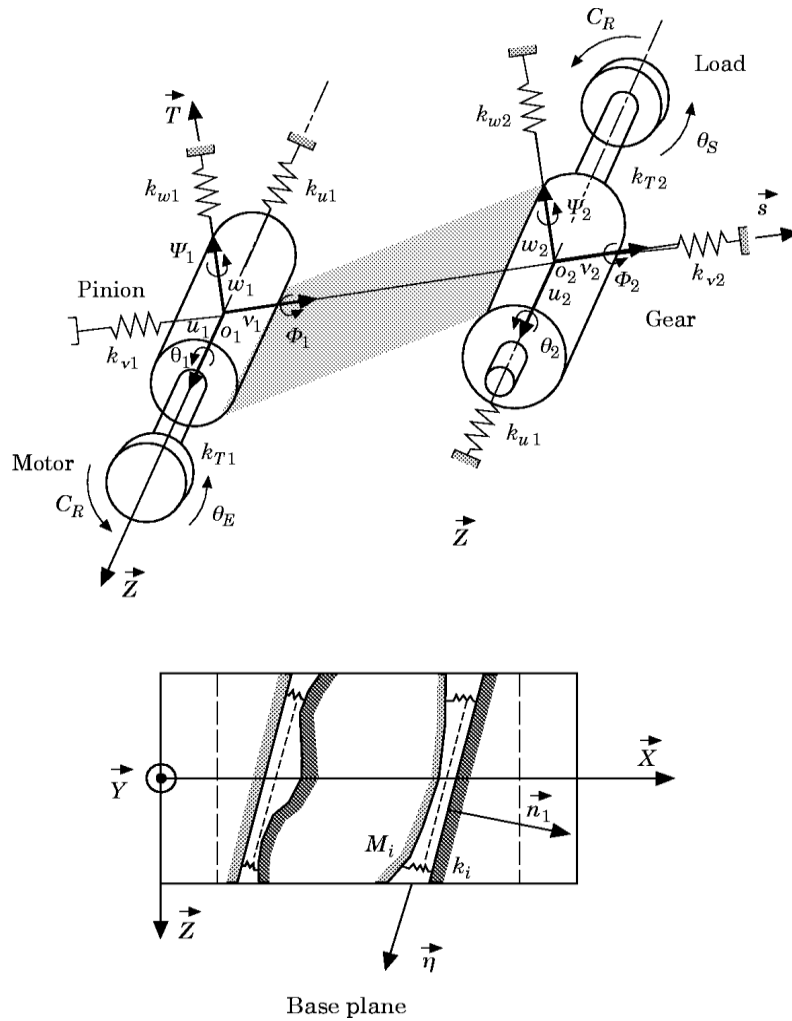


Figure 2-26 : Modèle du système d'engrenage cylindrique à denture droite par Velex & Maatar [111].

#### 2.4.4 Engrenages spiro-coniques et hypoides

En 1999, Lim et Cheng [81] ont construit un modèle dynamique à paramètres concentrés tridimensionnel dédiés aux engrenages hypoides afin d'étudier l'effet de l'offset du pignon sur le comportement dynamique. La Figure 2-28 présente le système de rotors couplés par un engrenage hypéide. Le modèle d'interface d'engrènement mis en place est linéaire. Le point d'engrènement et la normale sont supposés fixes au cours de l'engrènement et l'excitation est donnée par l'erreur cinématique. Avec ce modèle, l'influence de trois offsets (20mm, 30mm, 50mm) a été étudiée sur les amplitudes des efforts d'engrènement, le bruit des engrenages et les couples sur les pignons et les roulements.

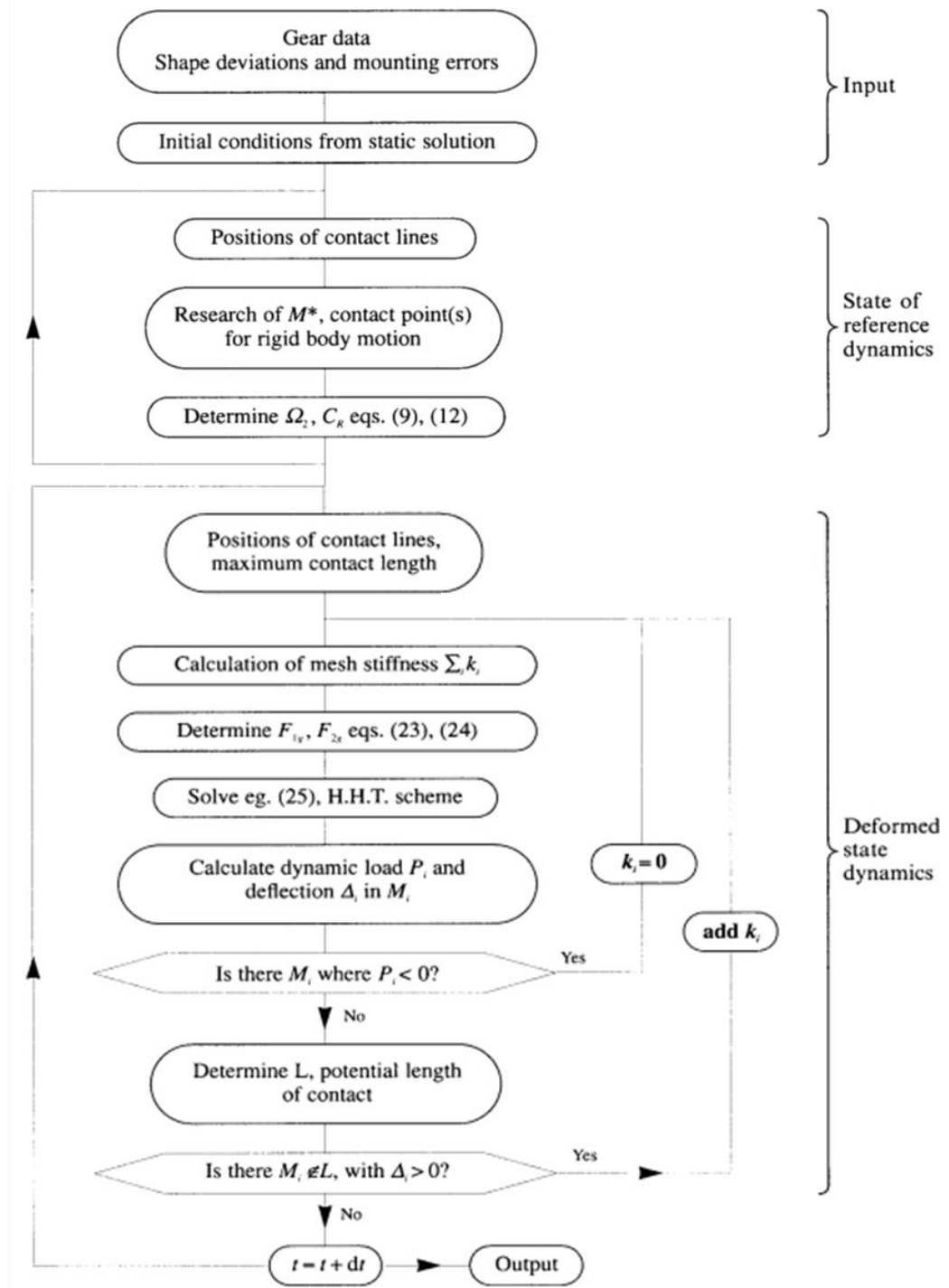


Figure 2-27 : Schéma itératif d'après Velex [111].

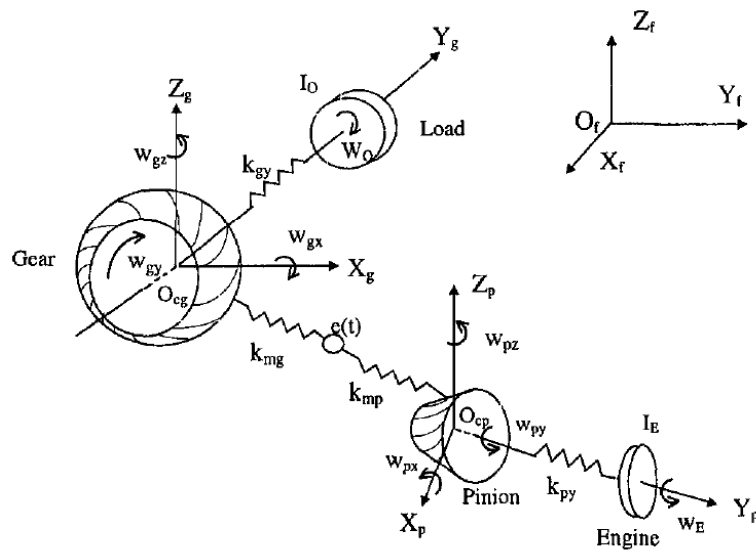


Figure 2-28 : Schéma du modèle dynamique tridimensionnel d'un système de rotors couplé par un engrenage hypoïde par Lim et Cheng [81].

Cheng et Lim [15], [54], Lim [37] ont ensuite modélisé le comportement dynamique non linéaire d'engrenages hypoïdes en prenant en compte une raideur d'engrènement variable en fonction du temps afin de simuler les évolutions des portées au cours du mouvement. En 2003, Cheng et Lim [55] ont étendu leur modèle en intégrant la possibilité de pertes de contact instantanées afin d'étudier les cas de transmissions peu chargées. Ces analyses ont été étendues par Lim et Wang [29], Peng et Lim [35] qui ont étudié les effets d'erreurs de montage (erreur d'angle des axes, erreur d'offset du pignon, erreur de position axiale du pignon et de la roue) pour des engrenages hypoïdes. Sur la base de leur modèle dynamique d'engrenages hypoïdes, Peng et Lim [34] ont développé en 2009 un modèle dynamique adapté à des engrenages spiro-coniques. Les positions et dimensions des portées, la raideur d'engrènement et la normale aux contacts sont variables au cours de l'engrènement. Les effets des erreurs de montage sur les réponses dynamiques en termes des répartitions de charge, les forces dynamiques d'engrènement, les erreurs de transmission, ont été étudiés. En 2012, Hua et al. [68] ont combiné des éléments finis et à paramètres concentrés dans un modèle d'engrenages spiro-coniques. Les résultats obtenus avec cette nouvelle méthode sont en bon accord avec les résultats dynamiques issus d'une modélisation complète par Éléments Finis. Wang et al. [40, 41] ont présenté des études dynamique d'engrenages spiro-conique basées sur les analyses quasi-statique de Teixeira [105]. Li et Hu [79] ont modélisé le comportement dynamique d'un système de rotors couplé par un engrenage spiro-conique. La liaison cinématique était parfaite et la raideur d'engrènement variable en fonction du temps. Les auteurs se sont particulièrement intéressés à l'influence de l'angle de spirale et de la raideur d'engrènement sur le comportement dynamique. Un modèle similaire mais limité aux seuls engrenages coniques droits avait été développé en 2002 [78]. Notons enfin, les travaux de Gao et al. [61] pour étudier le comportement au choc d'un plateau de broyeur électrique comprenant un engrenage spiro-conique avec une raideur d'engrènement constante.

#### 2.4.5 Condition de contact dynamique

Une condition de contact a été proposée par Velex et Maatar [111] pour la modélisation du comportement dynamique d'engrenage. Soit  $M^*$  (Figure 2-29), un point de contact entre deux engrenages dans les conditions de corps rigides, l'écart relatif  $\delta e(M)$  associé à un tout point de contact potentiel  $M$  est défini comme la différence entre l'écart normal en ce point  $e(M)$  et l'écart normal maximum  $e(M^*)$  (Figure 2-29), soit :

$$\delta e(M) = e(M) - e(M^*) \quad (1.9)$$

L'écrasement au point  $M$  dépend à la fois du rapprochement global des corps  $\delta(M)$  et de l'écart relatif  $\delta e(M)$  et s'exprime:

$$\Delta(M) = \delta(M) + \delta e(M) \quad (1.10)$$

Sur la base de cette définition de l'écart relatif  $\delta e(M)$ , la condition de contact sous charge est donnée par :

Si  $\Delta(M) > 0$ , contact au point  $M$

Si  $\Delta(M) < 0$ , il n'y a pas de contact au point  $M$

et s'applique à la fois pour des conditions statiques et dynamiques.

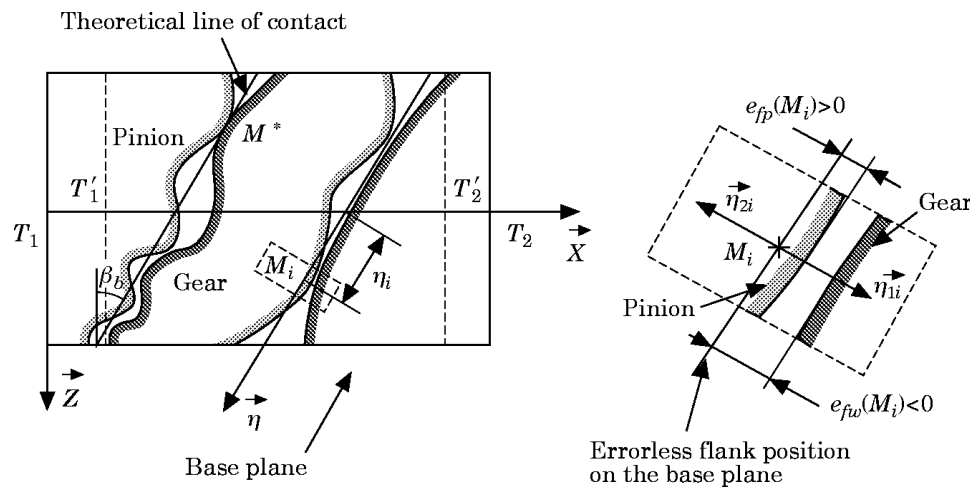


Figure 2-29 : Points de contact dans les conditions de corps rigides [111].

## 2.4.6 Exploitation des modèles dynamiques

### 2.4.6.1 Erreur de transmission sous charge dynamique

L'erreur de transmission sous charge dynamique prend en compte l'effet dynamique du système mécanique. Grégory et al. [21-22] et Munro [128] ont, parmi les premiers, mis en évidence des phénomènes de séparation instantanée de dentures suivies de chocs lors de la reprise de contact. Ces phénomènes ont été observés expérimentalement et puis retrouvés par simulations numériques pour des engrenages à dentures droites (Figure 2-30). Les séparations de dentures sont indiquées par la lettre 'S' sur les courbes et on observe clairement les sauts d'amplitudes caractéristiques de comportements fortement non-linéaires.

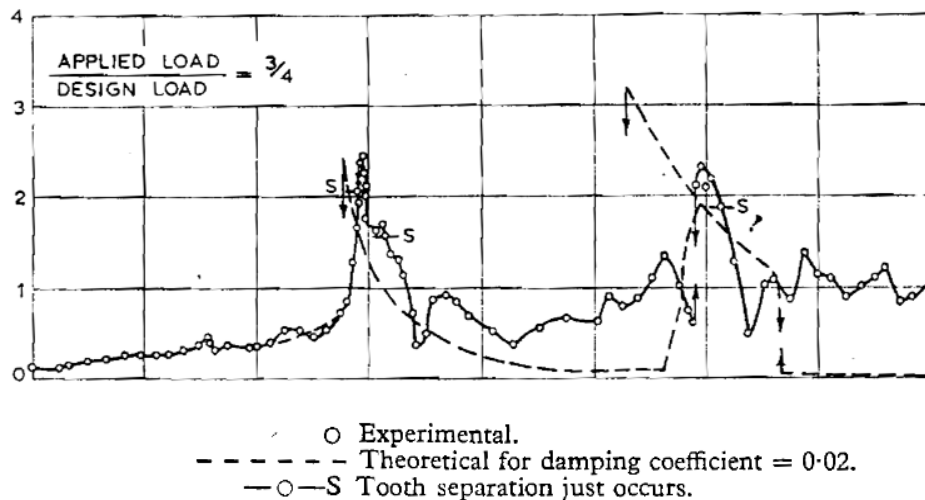


Figure 2-30 : Un exemple des erreurs de transmission sous charge dynamique expérimentale et numérique par Grégory et al. 1963-64 [21-22].

### 2.4.6.2 Force d'engrènement dynamique

Les équations différentielles, associées à des systèmes mécaniques à raideur et amortissement variables, sont les équations dites de Mathieu-Hill qui s'expriment sous la forme :

$$M \cdot \ddot{X} + C(t) \cdot \dot{X} + K(t) \cdot X = F(t) \quad (1.11)$$

Avec :

$M$  : matrice de masse

$C(t)$  : matrice d'amortissement variable en fonction du temps

$K(t)$  : matrice de raideur d'engrènement variable en fonction du temps

$F(t)$  : excitation totale en fonction du temps

La Figure 2-31 montre des solutions possibles de l'équation de Mathieu homogène en régime stable (b) et instable (a).



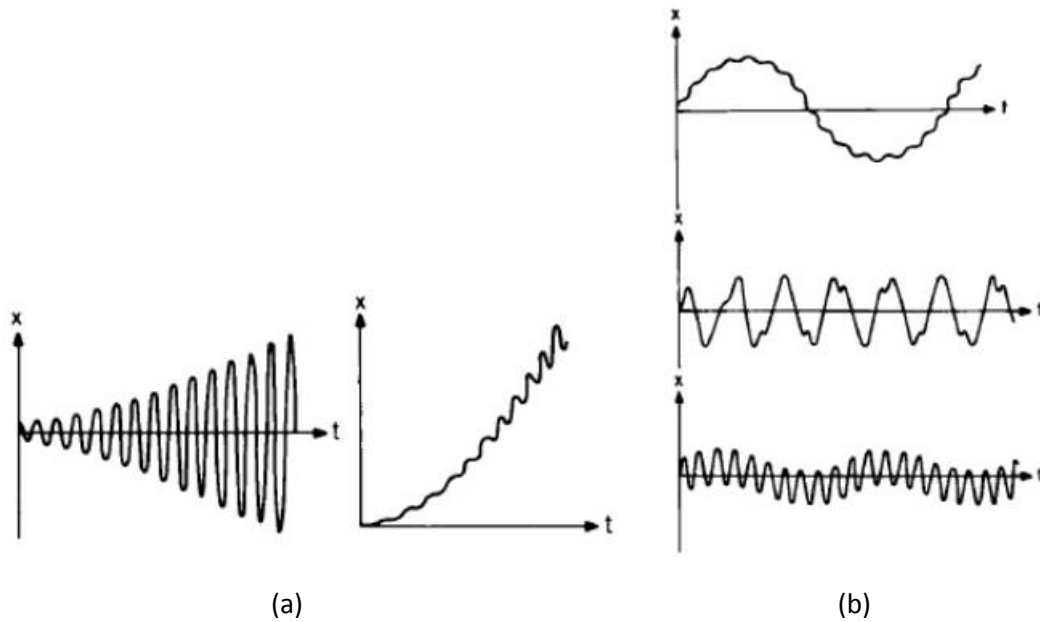


Figure 2-31 : Formes de solutions possibles de l'équation de Mathieu. Régime stable (b) et instable (a) d'après Nayfeh et Mook [7].

Une forme particulière est l'équation de Mathieu, pour laquelle le terme d'amortissement est nul :

$$M \cdot \ddot{X} + K(t) \cdot X = 0 \quad (1.12)$$

Ce type d'équation a fait l'objet de nombreux travaux synthésés dans les ouvrages de Bolotin [2] et de Nayfeh & Mook [7]. Gregory et al. [21-22] ont illustré ce problème mathématique sur leur modèle torsionnel à un seul degré de liberté dans les cas d'engrenages droits et ont confirmé que les instabilités paramétriques se développent au voisinage des fréquences d'engrènement  $\omega_m$  telles que :

$$\omega_m = \frac{2\omega_0}{n}, n = 1, 2, \dots \text{ où } \omega_0 \text{ est la fréquence naturelle du système avec raideur moyenne.}$$

La force d'engrènement dynamique est déduite des solutions de l'équation de mouvement du système  $X_e$  et de la matrice de raideur variable  $K(t)$  sous la forme (en négligeant la composante visqueuse produite par les termes d'amortissement):

$$F_d = K_e(t) \cdot X_e$$

ou dans le cas local :

$$F = \int_{L(t)} P(\eta) d\eta \quad [43]$$

F : force d'engrènement statique ou dynamique

L(t) : longueur de contact variable

P(η) : pression distribuée sur la zone de contact η.

Quand la force d'engrènement dynamique varie en fonction du temps (Figure 2-32(a)), il est intéressant d'étudier la variation du maximum de la force d'engrènement dynamique en fonction de la vitesse de rotation du pignon (Figure 2-32(b)). Velex et Ajmi [108] ont proposé des modèles en torsion mais également tridimensionnels permettant le calcul des efforts dynamiques à partir des erreurs de transmission sous charge (TE) et à vide (NLTE). L'image (a) de la Figure 2-32 montre les forces d'engrènement dynamique pendant quatre périodes d'engrènement à une vitesse de rotation du pignon de 100 rad/s. La Figure 2-32(b) montre l'influence d'erreur de transmission à vide sur les maximums de la force d'engrènement dynamique. Les trois courbes présentent différents cas : référence, NLTE = 0 et NLTE  $\neq$  0.

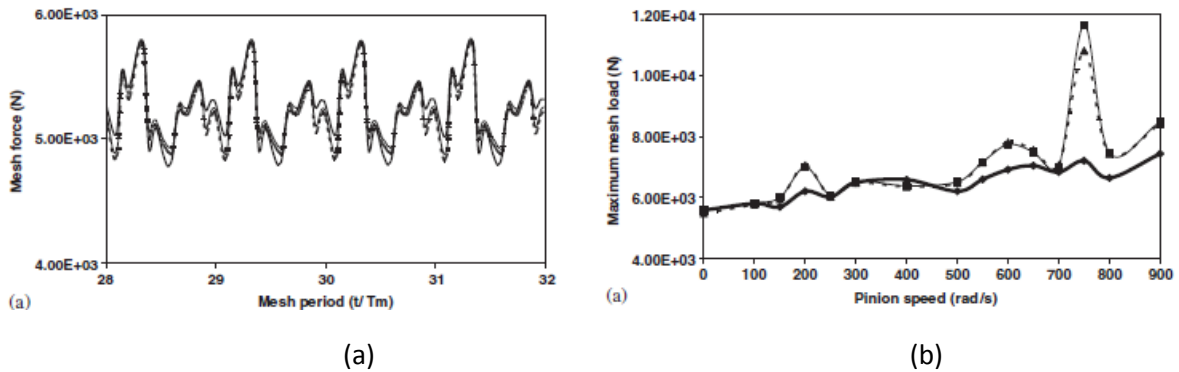


Figure 2-32 : Maximum de la force d'engrènement dynamique en fonction de la vitesse de rotation du pignon, pour un engrenage cylindrique à denture droite, selon Velex et Ajmi [108].

Pour ce qui concerne les engrenages coniques, Lim et Cheng [81] ont construit un modèle dynamique tridimensionnel d'engrenages hypoïdes dont certains résultats sont portés sur la Figure 2-33. Les trois courbes représentent les variations des maxima de la force d'engrènement dynamique en fonction de la vitesse de rotation du pignon (en Hz) pour trois cas : (1) offset du pignon : 20mm ; (2) offset du pignon : 35mm ; (3) offset du pignon : 50 mm. On constate sur cet exemple que le pic maximum de la force d'engrènement dynamique diminue avec l'augmentation de l'offset du pignon.

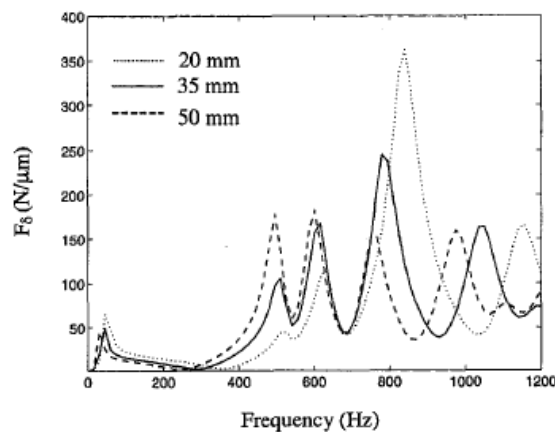


Figure 2-33 : Efforts dynamiques d'engrènement pour un engrenage hypoïde selon Lim et Cheng [81].

### 2.4.6.3 Coefficient dynamique

Le coefficient dynamique (R) est défini comme le rapport entre la charge dynamique maximale ( $F_d$ ) durant l'engrènement et la charge statique ou quasi-statique ( $F_s$ ). Il permet d'évaluer les effets d'inertie et de masse, les surcharges dynamiques et de détecter les éventuelles séparations de dents, notamment à l'approche des vitesses critiques de denture.

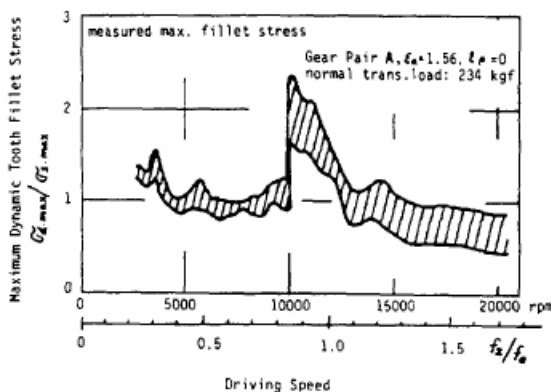
$$R = \frac{F_d(t)}{F_s} \quad (1.13)$$

Initialement, le coefficient dynamique a été évalué uniquement sur des engrenages cylindriques à dentures droites sans perte de contact. Houser et Seireg [67], à partir d'investigations expérimentales et théoriques, ont ensuite introduit les effets des variations temporelles de la raideur d'engrènement, de l'inertie et de la masse, ainsi que les contributions des écarts de géométrie (erreur de pas notamment) pour étendre le champ d'application de la formule de Wellauer [67] (formule ci-dessous) aux engrenages cylindriques à dentures droites et hélicoïdales.

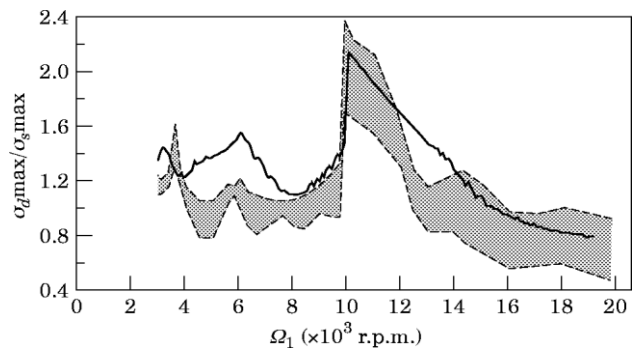
$$R = \max \text{ of } \frac{\text{dynamic load}}{\text{static load}} = \sqrt{\frac{78}{78 + \sqrt{V}}} \quad (1.14)$$

Avec V : vitesse linéaire de défilement en ft/min

Kubo [76] a montré analytiquement et expérimentalement que le couple transmis et les écarts de géométrie influent sur les surcharges dynamiques à l'engrènement. Les courbes de réponse (Figure 2-34(a)) font apparaître un saut d'amplitude, typique de pertes de contact momentanées entre les entures et de chocs lors des reprises du contact. Ces résultats expérimentaux ont été fréquemment utilisés pour valider des modèles numériques non-linéaires (Özgüven & Houser [90-92], Kahraman & Singh [72], Velez & Maatar [111] (Figure 2-34(b))). Tamminana et al. [104] ont recherché les liens entre les coefficients dynamiques R et les erreurs de transmission d'engrenages cylindriques et proposé des formulations semi-empiriques basées sur des mesures de contraintes en pied de dent.



(a)



(b)

Figure 2-34 : (a) Courbe de la réponse dynamique d'après Kubo [76]. (b) Comparaison entre les résultats expérimentaux de Kubo [76] et les résultats dynamiques de Velez & Maatar [111] 1996.

Enfin, Velex et Ajmi [109] ont développé une formule approximative permettant d'estimer le coefficient dynamique à partir de l'erreur de transmission pour des engrenages cylindriques. La Figure 2-35 représente un exemple de comparaison entre des résultats obtenus par intégration numérique pas à pas des équations du mouvement et les résultats issus de la formule approchée. On note un bon accord entre les deux méthodes.

$$R_{\max} = \max\left(\frac{F_t(t)}{F_s}\right) \quad (1.15)$$

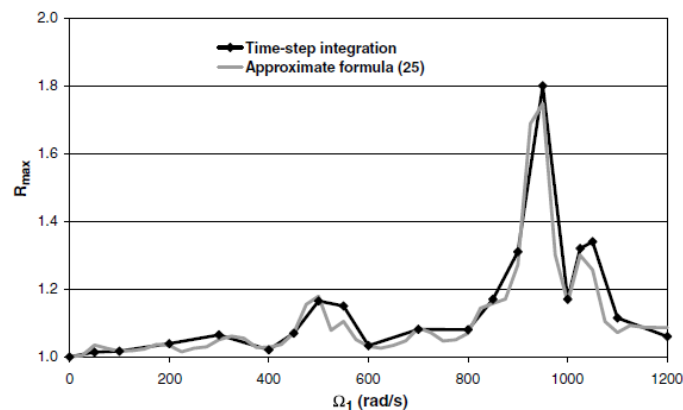


Figure 2-35 : Maximum des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation – comparaison entre l'intégration pas à pas et la formule [109].

## 2.5 CONCLUSION

De nombreux travaux ont été menés au cours de ces trente dernières années pour modéliser les comportements statique et dynamique des engrenages. La plupart concerne l'étude du comportement statique et dynamique d'engrenages cylindriques à dentures droites et hélicoïdales. Peu de publications existent concernant le comportement dynamique d'engrenage spiro-conique.

Deux types de modèles existent pour simuler le comportement dynamique des engrenages : l'un basé sur la méthode des Eléments Finis et l'autre sur des modèles dynamiques à paramètres concentrés. Le modèle par Eléments Finis a souvent été utilisé dans des études quasi-statiques pour obtenir les points de contact, la répartition des charges. Le modèle dynamique à paramètres concentrés est largement utilisé pour modéliser le comportement dynamique d'un système couplé par engrenage.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étendre ces modélisations à la prise en compte du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques tout en intégrant de façon précise leurs micro-géométries. Deux voies seront explorées : a) un modèle tridimensionnel local dans lequel les conditions de contact instantanées et les équations du mouvement sont résolues simultanément et b) un modèle global reposant sur les concepts de raideur d'engrènement et d'erreurs de transmission. Le lien entre les deux approches ainsi que leurs limites respectives seront examinés en détail.

### 3 MODÈLES DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

#### 3.1 INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but de présenter les fondements théoriques et les différents modèles développés dans le cadre de cette thèse pour la mise en équation du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques. Plusieurs approches de complexité croissante ont été développées qui, dans la suite de ce mémoire, seront répertoriées comme: torsionnelle, tridimensionnelle locale et tridimensionnelle globale.

Le premier modèle se limite aux seuls effets de torsion et permet d'introduire les différences principales entre le cas d'engrenages spiro-coniques et celui, plus classique, d'engrenages cylindriques, notamment à travers l'utilisation du barycentre des efforts de contact et l'introduction des résultats d'une analyse statique préalable.

Un modèle tridimensionnel local est présenté en détail avec, en particulier, la construction des équations du mouvement via les matrices de masse, de raideur, d'amortissement et les termes forcés ou d'excitation.

Enfin, une approche plus globale est présentée. Elle repose sur l'utilisation de fonctions raideurs d'engrènement et erreurs de transmission comme sources excitations. Les avantages de type d'approches sont i) de pouvoir utiliser des résultats de modèles quasi-statiques sophistiqués mais aussi des résultats expérimentaux ou des combinaisons de résultats numériques/expérimentaux comme des données du problème dynamique et ii) d'être plus adaptées à des modèles avec plusieurs étages de réduction avec des engrenages de natures différentes.

#### 3.2 BASE DE MODÉLISATION – MODÈLE TORSIONNEL

En s'inspirant des travaux conduits pour les engrenages cylindriques (Figure 3-1(a)), le modèle dynamique d'un engrenage spiro-conique le plus simple à mettre en œuvre est torsionnel (Figure 3-1(b)). Il comporte un seul degré de liberté en rotation pour le pignon  $\theta_p$  et la roue  $\theta_R$ .

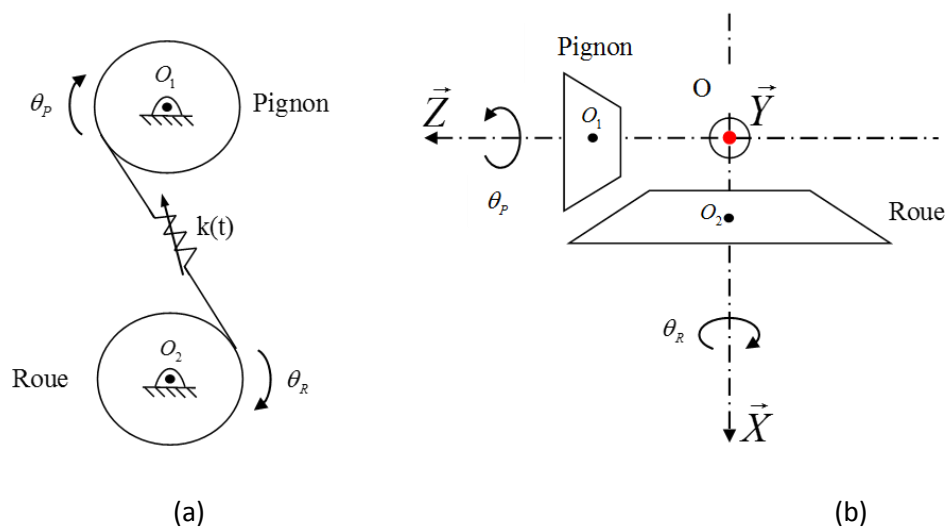


Figure 3-1 : Modèle torsionnel

L'origine  $O$  du repère  $R(O, X, Y, Z)$  du système se trouve au sommet des cônes primitifs.  $O_1$  est le centre de gravité du pignon et  $O_2$  celui de la roue. L'axe  $Z$  est orienté suivant l'axe du pignon et passe par  $O$  et  $O_1$ . L'axe  $X$  est dans le plan où est défini l'angle de renvoi et passe par  $O$  et  $O_2$ .

Dans ce qui suit, le pignon et la roue sont considérés comme des corps rigides et l'influence de la flexibilité des dentures et des corps des engrenages est reportée au niveau des contacts et simulée par une raideur. Pour un tel système de type masses-ressorts, le déplacement en tout de point de contact potentiel  $M$  lié au pignon dans la direction de la normale sortante par rapport aux flancs de denture dans le repère  $R(O, X, Y, Z)$ , est donné par la formule du moment associé au torseur des degrés de liberté (Figure 3-1(b)). En ne considérant que les perturbations de torsion, l'expression prend la forme d'un produit mixte:

$$d_p(M) = \theta_p \vec{z} \times \{\overline{O_1M}\} \cdot \vec{n}_1 = \rho_{1m} \theta_p \quad (2.1)$$

avec :

$\rho_{1m} = (\vec{n}_1, \vec{z}, \{\overline{O_1M}\})$ , rayon équivalent pour le pignon (quantité dépendante du temps)

$\theta_p$  : degré de liberté de torsion associé au pignon

$\vec{n}_1$  : normale unitaire sortante par rapport aux flancs des dentures du pignon au point  $M$  supposée constante

Un raisonnement similaire conduit au déplacement du point  $M$  lié à la roue dans le repère  $R(O, X, Y, Z)$  (Figure 3-1(b)) sous la forme :

$$d_R(M) = \theta_R \vec{x} \times \{\overline{O_2M}\} \cdot (-\vec{n}_1) = -\rho_{2m} \theta_R \quad (2.2)$$

avec :

$\rho_{2m} = (\vec{n}_1, \vec{x}, \{\overline{O_2M}\})$ , rayon équivalent pour la roue (instantané)

$\theta_R$  : degré de liberté de torsion associé à la roue

Le rapprochement normal au point  $M$  entre le pignon et la roue sous l'effet des degrés de liberté s'exprime alors:

$$d(M) = d_p(M) + d_R(M) = \rho_{1m} \theta_p - \rho_{2m} \theta_R \quad (2.3)$$

soit sous forme matricielle :

$$d(M) = \{V(M)\}^T \cdot \{X\}$$

Avec :  $\{V\} = \begin{bmatrix} \rho_{1m} \\ -\rho_{2m} \end{bmatrix}$ , vecteur de structure

$\{X\} = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_R \end{bmatrix}$ , vecteur des degrés de liberté pour le couple pignon-roue.

En introduisant l'écart initial (avant déformation)  $\delta e(M)$  au point de contact courant  $M$ , l'écrasement s'exprime comme la différence entre le rapprochement normal et l'écart initial:

$$\Delta(M) = d(M) - \delta e(M) \quad (2.4)$$

En négligeant les efforts de frottement et en supposant un comportement élastique, l'effort de contact local au point courant  $M$  peut s'exprimer en introduisant une raideur normale par unité d'aire de contact  $k(M)$  :

$$dF(M) = k(M) \Delta(M) dS \quad (2.5)$$

L'effort local de contact n'existe que lorsqu'il y a effectivement écrasement au point  $M$  ce qui impose :

$$dF(M) = k(M) \Delta(M) dS \quad \text{si } \Delta(M) > 0$$

$$dF(M) = 0 \quad \text{sinon.}$$

L'effort total d'engrènement est alors déduit par intégration sur les aires de contacts de contact instantanées, soit :

$$F_m = \int_{(A)} k(M) \left[ \{V(M)\}^T \{X\} - \delta e(M) \right] dS \quad (2.6)$$

Les moments par rapport aux axes de rotation du pignon et de la roue induits par l'effort d'engrènement s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} M_p &= \int_{(A)} O_1 \vec{M} \times -dF(M) \vec{n}_1 \cdot \vec{z} = - \int_{(A)} \rho_{1m} dF(M) \\ M_R &= \int_{(A)} O_2 \vec{M} \times dF(M) \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = \int_{(A)} \rho_{2m} dF(M) \end{aligned} \quad (2.7)$$

et le théorème du moment dynamique appliqué à chacun des mobiles conduit à :

$$\begin{cases} I_1 (\dot{\Omega}_1 + \ddot{\theta}_1) = M_p + C_m \\ I_2 (\dot{\Omega}_2 + \ddot{\theta}_2) = M_R + C_r \end{cases} \quad (2.8)$$

avec :

$I_1$  : inertie du pignon ( $\text{Kg.m}^2$ ).

$I_2$  : inertie de la roue ( $\text{Kg.m}^2$ ).

$\Omega_1$  : vitesse de rotation du pignon (tr/min).

$\Omega_2$  : vitesse de rotation de la roue (tr/min).

Dans ce qui suit, la vitesse de rotation du pignon  $\Omega_1$  est supposée constante. Sachant qu'en présence d'écarts de forme et/ou de défauts l'erreur cinématique à vide peut être non nulle, la vitesse de rotation de la roue  $\Omega_2$  peut alors être variable en fonction du temps conduisant ainsi à une accélération de corps rigide sur la roue  $\dot{\Omega}_2 \neq 0$ .

En réécrivant les équations d'équilibre sous forme matricielle, on obtient alors:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \int_{(A)} k(M) \begin{bmatrix} \rho_{1m}^2 & \rho_{1m}\rho_{2m} \\ \rho_{1m}\rho_{2m} & \rho_{2m}^2 \end{bmatrix} dS \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m \\ C_r \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Omega}_2 \end{bmatrix} + \int_{(A)} k(M) \delta e(M) \begin{bmatrix} \rho_{1m} \\ \rho_{2m} \end{bmatrix} dS \end{aligned} \quad (2.9)$$

Soit encore:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K(t)]\{X\} = \{F\} + \{F_{1/E}\} - \{F_{2/E}\} \quad (2.10)$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} : \text{matrice de masse.}$$

$$[K(t)] = k(t) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T : \text{matrice de raideur variable en fonction du temps.}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} C_m \\ C_r \end{Bmatrix} : \text{vecteur des efforts extérieurs.}$$

$$\{F_{2/E}\} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\Omega}_2(t) \end{Bmatrix} : \text{force d'excitation due à l'erreur cinématique.}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \{\ddot{X}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} : \text{vecteur des déplacements et des accélérations.}$$



### 3.3 MODÈLE DYNAMIQUE TRIDIMENSIONNEL LOCAL

#### 3.3.1 Modèle dynamique à paramètres concentrés

Les développements théoriques associés aux modèles dynamiques tridimensionnels sont des extensions de ceux mis en place pour le modèle dynamique torsionnel. Un exemple de système couplé par un engrenage spiro-conique est présenté sur la Figure 3-2. Il est composé d'un pignon, d'une roue, des deux arbres et de leurs paliers, un moteur et un frein de masse négligeable. Le modèle dynamique tridimensionnel local à paramètres concentrés (Figure 3-2) comporte six nœuds (PE, P, PS, RE, R, RS) et six degrés de liberté par nœud soit 36 degrés de liberté au total (Figure 3-3) :

- Traction compression:  $u_{PE}, u_P, u_{PS}, u_{RE}, u_R, u_{RS}$
- Flexion:  $v_{PE}, w_{PE}, \Phi_{PE}, \psi_{PE}, v_P, w_P, \Phi_P, \psi_P, v_{PS}, w_{PS}, \Phi_{PS}, \psi_{PS}, v_{RE}, w_{RE}, \Phi_{RE}, \psi_{RE}, v_R, w_R, \Phi_R, \psi_R, v_{RS}, w_{RS}, \Phi_{RS}, \psi_{RS}$
- Torsion:  $\theta_{PE}, \theta_P, \theta_{PS}, \theta_{RE}, \theta_R, \theta_{RS}$

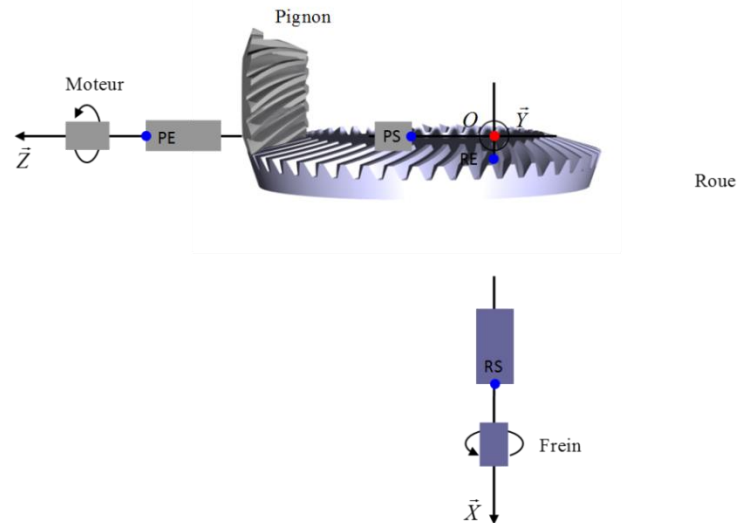


Figure 3-2 : Système couplé par un engrenage spiro-conique.

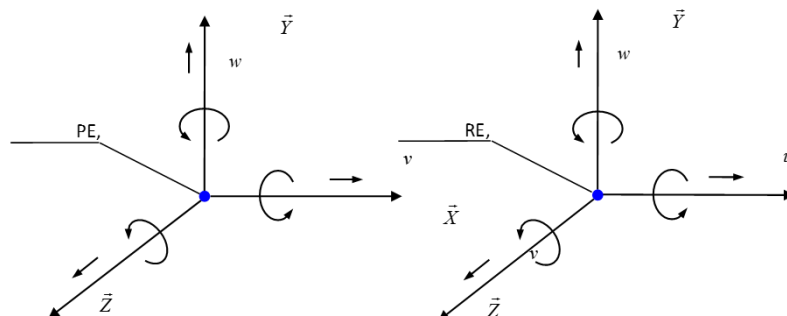


Figure 3-3 : Degrés de liberté à chaque nœud du système.

La définition du repère global du système est identique au repère R (O, X, Y, Z) du modèle torsionnel (Figure 3-1(b)).

### 3.3.2 Modélisation de l'engrenage

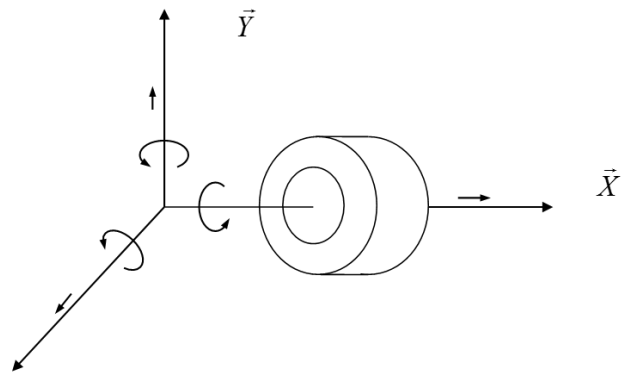


Figure 3-4 : Elément disque

Considérant le pignon et la roue comme des corps rigides, un élément de cône rigide est utilisé pour modéliser le pignon et la roue (Figure 3-4). Dans le repère global du système R(O, X, Y, Z) (Figure 3-2), le centre de l'élément pignon est situé au nœud  $O_p$  (Figure 3-5) tandis que le centre de l'élément roue est au nœud  $O_R$ . Chaque nœud possède six degrés de liberté : traction-compression :  $u_p, u_R$ , flexion :  $v_p, w_p, \phi_p, \psi_p, v_R, w_R, \phi_R, \psi_R$ , torsion :  $\theta_p, \theta_R$ . Le vecteur des degrés de liberté au nœud  $O_p$  (centre du pignon) peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{d}_p^T = \{v_p \quad w_p \quad u_p \quad \phi_p \quad \psi_p \quad \theta_p\}^T \quad (2.11)$$

Et de même au nœud  $O_R$  (centre de la roue) :

$$\vec{d}_R^T = \{u_R \quad w_R \quad v_R \quad \theta_R \quad \psi_R \quad \phi_R\}^T \quad (2.12)$$

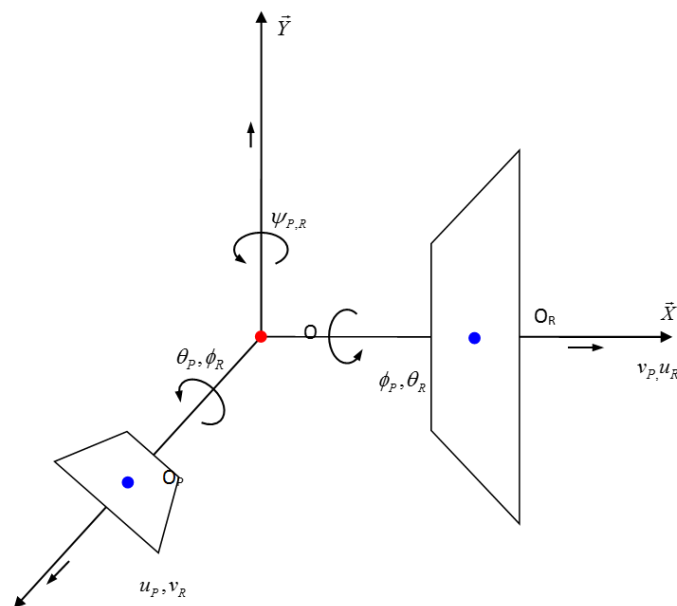


Figure 3-5 : Elément d'engrenage spiro-conique

L'énergie cinétique Galiléenne associée au pignon et à la roue s'écrit alors:

$$T_E = \frac{1}{2} m_P (\dot{v}_P^2 + \dot{w}_P^2 + \dot{u}_P^2) + \frac{1}{2} I_P (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + \frac{1}{2} J_P (\dot{\theta}_P^2 + \Omega_P^2) \\ + \frac{1}{2} m_R (\dot{v}_R^2 + \dot{w}_R^2 + \dot{u}_R^2) + \frac{1}{2} I_R (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\psi}_R^2) + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_R^2 + \Omega_R^2) \quad (2.13)$$

$m_P$ : masse du pignon (Kg)

$m_R$ : masse de la roue (Kg)

$I_P$ : inertie diamétrale du pignon (Kg.m<sup>2</sup>)

$I_R$ : inertie diamétrale de la roue (Kg.m<sup>2</sup>)

$J_P$ : inertie polaire du pignon (Kg.m<sup>2</sup>)

$J_R$ : inertie polaire de la roue (Kg.m<sup>2</sup>)

$\Omega_P$ : vitesse de rotation du pignon en fonction du temps (rad/s)

$\Omega_R$ : vitesse de rotation de la roue en fonction du temps (rad/s)

L'application des équations de Lagrange conduit alors à la matrice masse et au vecteur second membre suivants:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T_E}{\partial \dot{q}_E} \right] - \frac{\partial T_E}{\partial q_E} = [M_E] \{\ddot{q}_E\} + \{F_{2/E}\} \quad (2.14)$$

$$\text{Avec : } [M_E] = \begin{bmatrix} [M_P] & 0 \\ 0 & [M_R] \end{bmatrix}$$

$$[M_P] = \begin{bmatrix} m_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_P \end{bmatrix}, \quad [M_R] = \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_R \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{q}_E\} = \begin{Bmatrix} \dot{d}_P \\ \dot{d}_R \end{Bmatrix} = \{\ddot{v}_P \quad \ddot{w}_P \quad \ddot{u}_P \quad \ddot{\phi}_P \quad \ddot{\psi}_P \quad \ddot{\theta}_P \quad \ddot{u}_R \quad \ddot{w}_R \quad \ddot{v}_R \quad \ddot{\theta}_R \quad \ddot{\psi}_R \quad \ddot{\phi}_R\}^T$$

$$\{F_{2/E}\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad J_R \dot{\Omega}_R \quad 0 \quad 0\}^T$$

La force d'excitation  $\{F_{2/E}\}$  est l'extension de la force  $\{F_{2/E}\}$  du modèle torsionnel à un nombre de degrés de liberté plus élevé.

### 3.3.3 Modélisation de l'interface d'engrènement

D'un point de vue formel, les développements relatifs à l'interface d'engrènement sont similaires à ceux réalisés pour le modèle torsionnel. Nous détaillerons plus particulièrement les liens avec les résultats d'analyses quasi-statiques sophistiquées et leur introduction dans des modèles du comportement dynamique.

L'analyse quasi-statique de l'interface d'engrènement se décompose généralement en deux parties : a) l'analyse à vide qui permet de caractériser l'influence des écarts géométriques et l'erreur cinématique et b) l'analyse sous charge qui repose sur la notion de coefficients d'influence et la formulation classique d'un problème de contact normal.

L'analyse à vide suppose la simulation des opérations de taillage afin d'avoir une géométrie la plus représentative possible et s'appuie sur les travaux de Teixeira [130]. La mise en correspondance des géométries du pignon et de la roue permet de définir les points de contact et ainsi l'ensemble des écarts normaux à vide. L'application du principe fondamental de la cinématique des corps rigides (ou à vide) permet de définir le rapport des vitesses de rotation, soit l'erreur de transmission à vide (erreur cinématique).

Les points de contact potentiels sont repérés à l'aide de maillages des flancs des dentures du pignon et de la roue comme représenté sur la Figure 3-6. En l'absence de chargement, chaque point est susceptible de présenter un écart initial noté  $e_{i_i}^{ang}$  pour le  $i$ ème point du maillage (qui tend vers zéro pour les points en contact). Sous charge, les positions relatives des surfaces de denture évoluent et localement un point du pignon se déplace dans la direction normale au contact d'une quantité  $U_{1i}^{ang}$  tandis qu'un point antagoniste sur la roue verra un déplacement normal  $U_{2i}^{ang}$ . L'écart sous charge  $ef_i^{ang}$  s'exprime alors comme :

$$ef_i^{ang} = U_{1i}^{ang} + U_{2i}^{ang} + e_{i_i}^{ang} \quad (2.15)$$

Sous charge, le pignon et la roue sont en contact comme représenté sur la 1-7(c).

$$y_i^{ang} = ef_i^{ang} - \alpha^{ang} \quad (2.16)$$

avec

$ef_i^{ang}$  : écart final angulaire (rad).

$\alpha^{ang}$  : rapprochement des corps angulaire (rad).

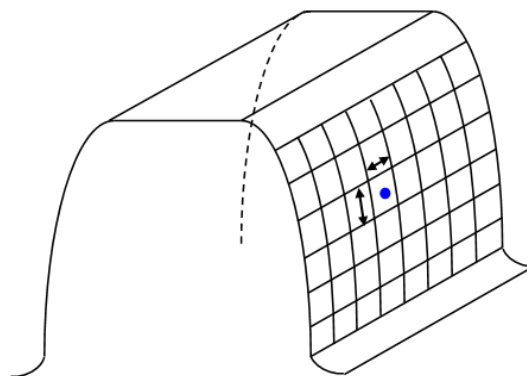


Figure 3-6 : Maillage d'un flanc de denture [130].

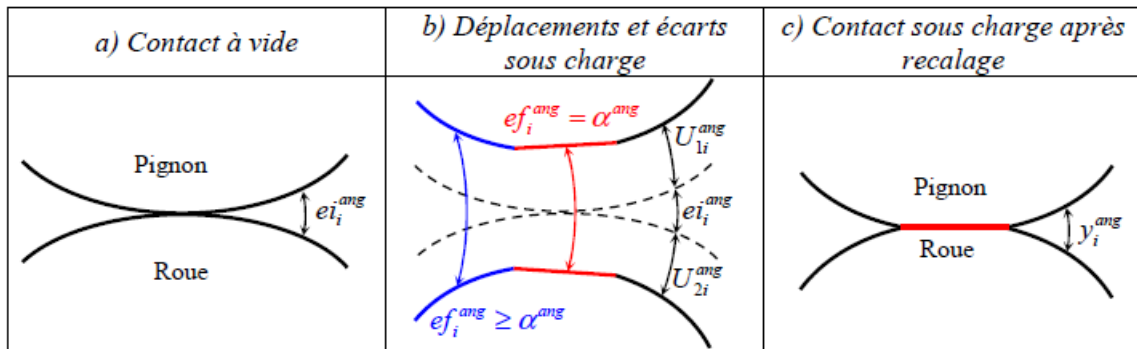


Figure 3-7 : Définition des écarts et des déplacements [130].

Suivant l'étude quasi-statique réalisée par Joël Teixeira [130], si le point  $M_i$  est dans la zone de contact, alors :

$$\begin{aligned} y_i^{ang} &= 0 \\ p_i &\neq 0 \end{aligned}$$

Si le point  $M_i$  est hors de la zone de contact, alors :

$$\begin{aligned} y_i^{ang} &\geq 0 \\ p_i &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $p_i$ , la pression au point  $M_i$  (MPa), l'effort sur la cellule  $i$  en est déduit par :

$$F_i = p_i \cdot A_i = p_i \cdot (x_i \cdot y_i) \quad (2.17)$$

avec :  $F_i$  : la force distribuée sur le  $i^{\text{ème}}$  élément (ou au point  $M_i$ ) suivant la direction normale sortante du pignon ou de la roue (N).

$A_i$  : aire de carreau  $i$  ( $\text{m}^2$ ).

La raideur instantanée d'engrènement au  $i^{\text{ème}}$  élément est calculée avec la force distribuée, l'écart initial et final comme :

$$k_i = \frac{F_i}{e_f^{ang} - e_i^{ang}} \quad (2.18)$$

avec :  $e_f^{ang}$  : écart final au  $i^{\text{ème}}$  élément (m).

$e_i^{ang}$  : écart initial au  $i^{\text{ème}}$  élément (m).

L'énergie de déformation associée au  $i^{\text{ème}}$  élément de la discrétisation à l'instant  $t$  est donnée par :

$$U_{Ei} = \frac{1}{2} \cdot k_i \cdot \Delta_i^2 \quad (2.19)$$

avec :  $k_i$  : raideur distribuée d'engrènement au  $i^{\text{ème}}$  élément.

$\Delta_i$  : écrasement au  $i^{\text{ème}}$  élément.

Dans le modèle dynamique, l'écrasement au  $i^{\text{ème}}$  élément s'exprime par :

$$\Delta_i = d_i - \delta e_i \quad (2.20)$$

avec :

$d_i$  : déplacement au  $i^{\text{ème}}$  élément.

$\delta e_i$  : écart relatif au  $i^{\text{ème}}$  élément.

$$d_i = \{V\}_i^T \cdot \{q_E\}$$

En supposant que la direction normale de chaque point de contact est identique à la direction normale globale, l'approximation suivante peut être utilisée pour le vecteur de structure :

$$\{V_i\} = \begin{Bmatrix} \vec{n}_i \\ \vec{n}_i \times \{\overline{O_1 M_i}\} \\ -\vec{n}_i \\ -\vec{n}_i \times \{\overline{O_2 M_i}\} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\vec{n}_i = \vec{n}} \begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{n} \times \{\overline{O_1 M_i}\} \\ -\vec{n} \\ -\vec{n} \times \{\overline{O_2 M_i}\} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\{V_i\}^T = \left\{ n_x, n_y, n_z, n_y z_{iP} - n_z y_{iP}, -n_x z_{iP} + n_z x_{iP}, n_x y_{iP} - n_y x_{iP}, \right. \\ \left. -n_x, -n_y, -n_z, -n_y z_{iR} + n_z y_{iR}, n_x z_{iR} - n_z x_{iR}, -n_x y_{iR} + n_y x_{iR} \right\}$$

$$\{q_E\} = \begin{Bmatrix} \vec{d}_P \\ \vec{d}_R \end{Bmatrix}^T = \{v_P \quad w_P \quad u_P \quad \phi_P \quad \psi_P \quad \theta_P \quad u_R \quad w_R \quad v_R \quad \theta_R \quad \psi_R \quad \phi_R\}^T$$

$\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$  : normale unitaire sortante par rapport aux flancs de dentures du pignon.

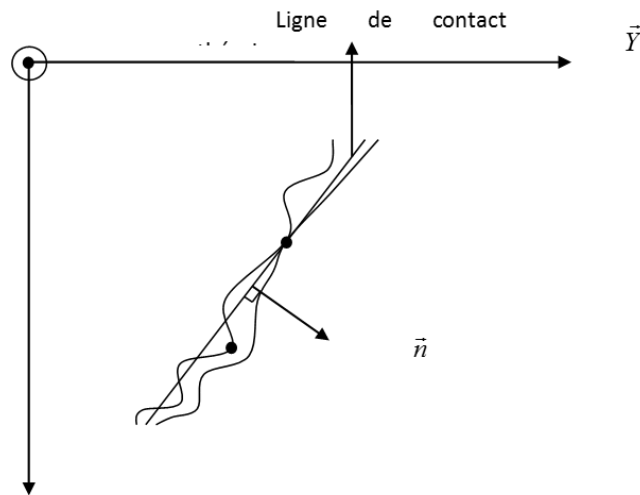


Figure 3-8 : Point de contact dans les conditions de corps rigides d'engrenage spiro-conique

La définition du point de contact, dans des conditions de corps rigides d'engrenage cylindrique proposée par Velez et Maatar [111], a été appliquée au cas de l'engrenage spiro-conique (Figure 3-8). Les dents du pignon et de la roue sont en contact au(x) point(s)  $M^*$  caractérisé(s) par un écart initial à vide  $e(M^*)$  minimal (en théorie nul), soit :

$$e(M^*) = \min(e_i) \quad (2.22)$$

où  $e(M_i)$  représente l'écart dans la direction normale au point  $M_i$  (Figure 3-6 et Figure 3-7) :

$$e(M_i) = e_i$$

L'écart relatif  $\delta e_i$  en tout point de contact potentiel  $M_i$  est défini comme la différence entre le maximum de l'écart normal au point  $M^*$  et l'écart normal au point courant  $M_i$ , et s'exprime donc par :

$$\delta e_i = e(M^*) - e(M_i) \quad (2.23)$$

On notera que, selon cette définition, on a :  $\delta e_i \geq 0$

Dans ce qui suit, deux expressions différentes du minimum des écarts initiaux ont été considérées :

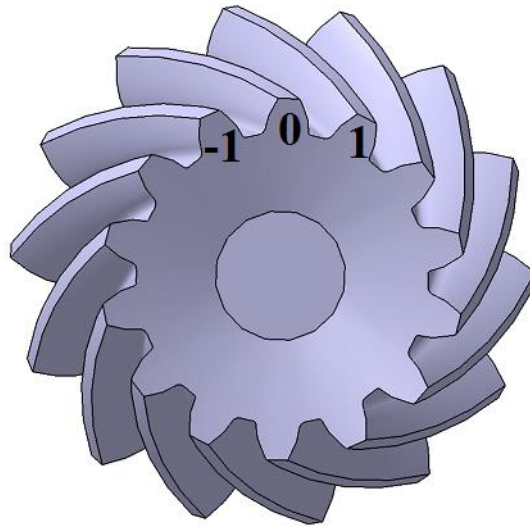


Figure 3-9: Trois dents en contact à l'instant  $t$ .

(1) Le minimum des écarts initiaux  $\min(e_i)$  est calculé sur l'ensemble des dents en prise à un instant donné (Figure 3-9) .

$$\delta e_i = \min(e_i) - e_i \quad (2.24)$$

(2) Le minimum des écarts initiaux est recherché pour chacune des paires de dents en prise et l'écart relatif est calculé pour chaque paire de dents également, soit, pour la  $j^{\text{ème}}$  dent :

$$(\delta e_i)_{i \in \text{dent} \# j} = \min(e_i)_{\# j} - (e_i)_{i \in \text{dent} \# j} \quad (2.25)$$

Suite aux différents tests numériques conduits, il ressort que la deuxième méthode s'avère plus performante lorsque des défauts de montage sont introduits.

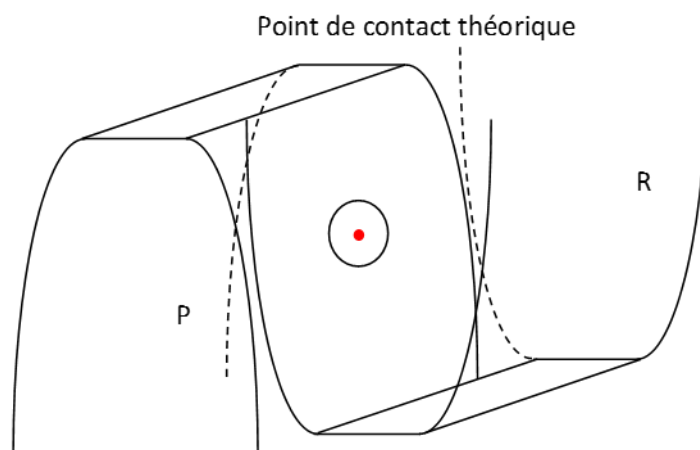


Figure 3-10 : Point de contact théorique à vide sans défaut de montage.



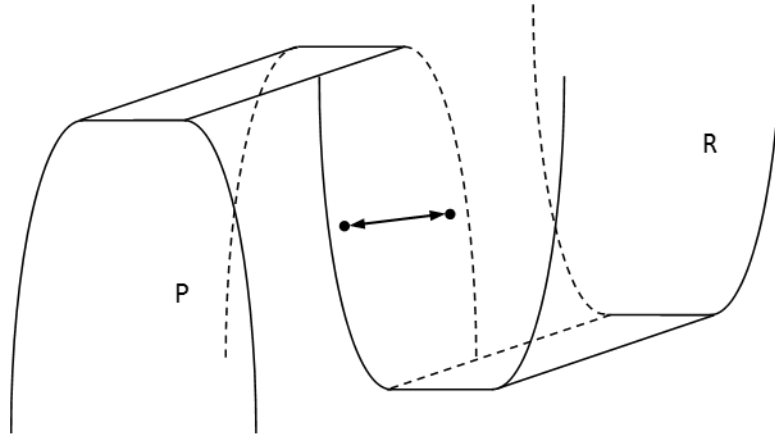


Figure 3-11 : Distance dans la direction normale au point  $M_i$  entre le pignon et la roue à vide avec défaut de montage.

D'après la condition de contact du modèle dynamique [111], si le point  $M_i$  est dans la zone de contact, on a :

$$\Delta_i > 0$$

Tandis que pour un point  $M_i$  situé hors de la zone de contact, il vient :

$$\Delta_i < 0$$

L'énergie de déformation totale associée à l'engrenage est donnée par :

$$\begin{aligned}
 U_E &= \sum_{i \in (A)} U_{Ei} = \frac{1}{2} \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \left( \{V\}_i^T \cdot \{q_E\} - \delta e_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{q_E\}^T \cdot \{V_i\} \cdot \{V_i\}^T \cdot \{q_E\} - \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \{q_E\} \cdot \delta e_i + \frac{1}{2} \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \delta e_i^2 \\
 &= \frac{1}{2} q_E^T \cdot \left( \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\} \cdot \{V_i\}^T \right) \cdot \{q_E\} - \left( \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \delta e_i \right) \cdot \{q_E\} + \frac{1}{2} \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \delta e_i^2
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

(A) : ensemble de tous les points de contact à l'instant t.

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient :

$$\frac{\partial U_E}{\partial q_E} = \left( \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\} \cdot \{V_i\}^T \right) \cdot \{q_E\} - \left( \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \delta e_i \right) \tag{2.27}$$

La matrice de raideur de l'engrenage est déduite sous la forme :

$$K_E(t, X) = \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V_i\} \cdot \{V_i\}^T \tag{2.28}$$

et les vecteurs du second membre, générés par les écarts de forme, s'expriment par :

$$\{F_{1/E}\} = \sum_{i \in (A)} k_i \cdot \{V\}_i^T \cdot \delta e_i \quad (\text{méthode 1}) \quad (2.29)$$

ou bien :

$$\{F_{1/E}\} = \sum_{i \in \text{dent}-1} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \delta e_i + \sum_{i \in \text{dent}0} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \delta e_i + \sum_{i \in \text{dent}+1} k_i \cdot \{V_i\}^T \cdot \delta e_i \quad (\text{méthode 2}) \quad (2.30)$$

### 3.3.4 Modélisation de l'arbre

Les arbres sont considérés comme des poutres de Timoshenko. Ils sont modélisés par la méthode des Eléments Finis tridimensionnels à deux nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. L'élément sur la Figure 3-12 entre le moteur et le pignon (arbre PE-P) est un exemple de modélisation d'arbre dans un système d'engrenages coniques. Il vient, en décomposant en mouvements élémentaires :

#### a) Traction compression

$$u = N(z) \cdot \begin{Bmatrix} u_{PE} \\ u_P \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$N(z) = \left\{ 1 - \frac{z}{L}, \frac{z}{L} \right\}$$

où L est la longueur de l'arbre PE-P (m).

Le déplacement de la poutre PE-P dans la direction de la traction-compression est donné par :

$$\vec{d}_{T-C/PE-P}^T = \{u_{PE} \quad u_P\} \quad (2.32)$$

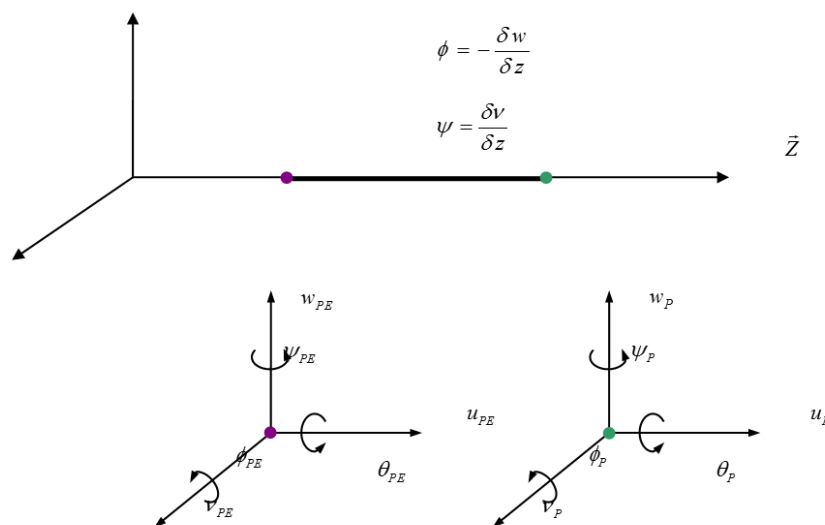


Figure 3-12 : La méthode des Eléments Finis à deux nœuds - Poutre de Timoshenko [120].

L'énergie de déformation de la poutre PE-P dans la direction de traction compression est :

$$U_{T-C/PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[ E \cdot S \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}_{T-C/PE-P}^T \cdot K_{T-C/PE-P} \cdot \vec{d}_{T-C/PE-P} \quad (2.33)$$

avec : E : module d'Young du matériau (Pa).

S : section de la poutre (m<sup>2</sup>).

La matrice de raideur de la poutre PE-P dans la direction de traction compression est donnée par :

$$K_{T-C/PE-P} = \frac{E \cdot S}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

L'énergie cinétique de la poutre PE-P dans la direction de la traction compression est :

$$T_{T-C/PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \rho \cdot S \cdot \dot{u}(z)^2 dz = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}_{T-C/PE-P}^T \cdot M_{T-C/PE-P} \cdot \vec{d}_{T-C/PE-P} \quad (2.35)$$

$\rho$  : masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)

La matrice de masse de la poutre PE-P dans la direction de traction compression est :

$$M_{T-C/PE-P} = \frac{\rho \cdot S \cdot L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

## b) Flexion

$$v = M_1(z) \cdot \begin{bmatrix} v_{PE} \\ \psi_{PE} \\ v_P \\ \psi_P \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$w = M_2(z) \cdot \begin{bmatrix} w_{PE} \\ \phi_{PE} \\ w_P \\ \phi_P \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$M_1(z) = \left\{ 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} \quad -z + \frac{2z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \quad \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \quad \frac{z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \right\} \quad (2.39)$$

$$M_2(z) = \left\{ 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} \quad z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \quad \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \quad -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right\} \quad (2.40)$$

Le déplacement de la poutre PE-P dans la direction de la flexion est donné par :

$$\vec{d}_{F/PE-P}^T = \{v_{PE} \quad w_{PE} \quad \phi_{PE} \quad \psi_{PE} \quad v_P \quad w_P \quad \phi_P \quad \psi_P\} \quad (2.41)$$

L'énergie de déformation de la poutre PE-P dans la direction de la flexion est :

$$U_{F/PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot J \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}_{F/PE-P}^T \cdot K_{F/PE-P} \cdot \vec{d}_{F/PE-P} \quad (2.42)$$

Avec :  $J = \frac{\pi R^4}{4}$

R : rayon de l'arbre (m).

La matrice de raideur de la poutre PE-P dans la direction de flexion est :

$$K_{F/PE-P} = \frac{E \cdot J}{(1+a)L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & & -6L & -12 & & -6L \\ & 12 & 6L & & -12 & 6L \\ & 6L & (4+a) \cdot L^2 & & -6L & (2-a) \cdot L^2 \\ -6L & & (4+a) \cdot L^2 & 6L & & (2-a) \cdot L^2 \\ -12 & & 6L & 12 & & 6L \\ & -12 & -6L & & 12 & -6L \\ & 6L & (2-a) \cdot L^2 & & -6L & (4+a) \cdot L^2 \\ -6L & & (2-a) \cdot L^2 & 6L & & (4+a) \cdot L^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec :  $a = \frac{12E \cdot I}{G \cdot k \cdot S \cdot L^2}$

'a' traduit les effets du cisaillement sur la déformation de flexion. Il a été considéré comme nul [120].

L'énergie cinétique de la poutre PE-P dans la direction de flexion est donné par :

$$T_{F/PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \rho \cdot S \cdot (\dot{v} + \dot{w})^2 dz + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L I \cdot (\ddot{\phi} + \ddot{\psi})^2 dz \quad (2.44)$$

La matrice de masse de la poutre PE-P dans la direction de flexion est :

$$M_{F/PE-P} = \begin{bmatrix} M_{F/PE-P/1} & M_{F/PE-P/3} \\ M_{F/PE-P/2} & M_{F/PE-P/4} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Avec :

$$M_{F/PE-P/1} = \begin{bmatrix} 156a + 36b & & & -L(22a + 3b) \\ & 156a + 36b & L(22a + 3b) & \\ & L(22a + 3b) & 4L^2(a + b) & \\ -L(22a + 3b) & & & 4L^2(a + b) \end{bmatrix}$$

$$M_{F/PE-P/2} = \begin{bmatrix} 54a - 36b & & & L(3b - 13a) \\ & 54a - 36b & L(13a - 3b) & \\ & L(3b - 13a) & -L^2(3a + b) & \\ L(13a - 3b) & & & -L^2(3a + b) \end{bmatrix}$$

$$M_{F/PE-P/3} = \begin{bmatrix} 54a - 36b & & & L(13a - 3b) \\ & 54a - 36b & L(3b - 13a) & \\ & L(13a - 3b) & -L^2(3a + b) & \\ L(3b - 13a) & & & -L^2(3a + b) \end{bmatrix}$$

$$M_{F/PE-P/4} = \begin{bmatrix} 156a + 36b & & & L(22a + 3b) \\ & 156a + 36b & -L(22a + 3b) & \\ & -L(22a + 3b) & 4L^2(a + b) & \\ L(22a + 3b) & & & 4L^2(a + b) \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\rho \cdot S \cdot L}{420}$$

$$b = \frac{I}{30L}$$

$$I = \frac{\rho \cdot S \cdot R^4}{4}$$

c) Torsion

$$\theta = N(z) \cdot \begin{vmatrix} \theta_{PE} \\ \theta_P \end{vmatrix} \quad (2.46)$$

Le déplacement de la poutre PE-P en torsion est :

$$\vec{d}_{Tors/PE-P}^T = \{\theta_{PE} \quad \theta_P\} \quad (2.47)$$

L'énergie de déformation de la poutre PE-P en torsion est :

$$U_{Tors/PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[ G \cdot J_0 \cdot \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}_{Tors/PE-P}^T \cdot \mathbf{K}_{Tors/PE-P} \cdot \vec{d}_{Tors/PE-P} \quad (2.48)$$

avec :  $G$  : module de coulomb

$$J_0 = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

La matrice de raideur de la poutre PE-P en torsion est :

$$K_{Tors / PE-P} = \frac{G \cdot J_0}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

L'énergie cinétique de la poutre PE-P en torsion est :

$$T_{Tors / PE-P} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L I_0 \cdot \ddot{\theta}(z)^2 dz = \frac{1}{2} \ddot{d}_{Tors / PE-P}^T \cdot M_{Tors / PE-P} \cdot \ddot{d}_{Tors / PE-P} \quad (2.50)$$

avec : 
$$I_0 = \frac{\rho \cdot S \cdot R^4}{2}$$

La matrice de masse de la poutre PE-P en torsion est :

Figure 3-13 illustre un exemple de positionnement des arbres supportant le pignon et la roue. Suivant l'axe du pignon, les arbres sont nommés PE-P et P-PS, et RE-R et R-RS suivant l'axe de la roue.

Les notations des matrices de masse utilisées sont les suivantes :  $M_{PE-P}$  pour l'arbre PE-P;  $M_{P-PS}$  pour P-PS;  $M_{RE-R}$  pour RE-R et  $M_{R-RS}$  pour R-RS.

$K_{PE-P}$  représente la matrice de raideur pour l'arbre PE-P,  $K_{P-PS}$  pour l'arbre P-PS;  $K_{RE-R}$  pour RE-R et  $K_{R-RS}$  pour R-RS.

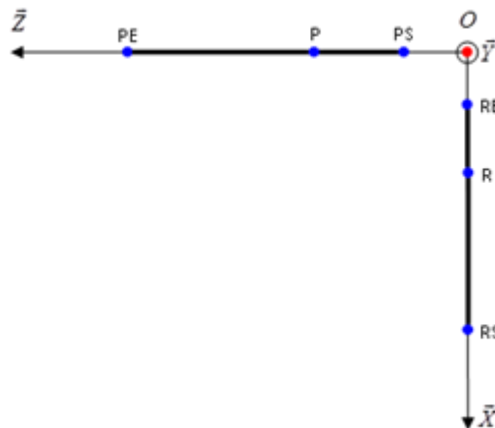


Figure 3-13 : Exemple de positionnement des arbres.

### 3.3.5 Modélisation des paliers

Dans ce qui suit, les paliers sont assimilés à des supports élastiques linéaires caractérisés par des raideurs directes constantes (Figure 3-14), conduisant à des matrices raideurs additionnelles  $K_a$ . Les raideurs  $k_{PEv}$ ,  $k_{PEw}$ ,  $k_{PEu}$ ,  $k_{PSv}$ ,  $k_{PSw}$ ,  $k_{PSu}$ ,  $k_{REv}$ ,  $k_{REw}$ ,  $k_{REu}$ ,  $k_{RSv}$ ,  $k_{RSw}$  et  $k_{RSu}$  agissent sur les déplacements de traction et de compression ; les raideurs  $k_{PE\phi}$ ,  $k_{PE\psi}$ ,  $k_{PS\phi}$ ,  $k_{PS\psi}$ ,  $k_{RE\phi}$ ,  $k_{RE\psi}$ ,  $k_{RS\phi}$  et  $k_{RS\psi}$ , sur les déplacements de flexion enfin, la raideur de torsion  $k_{PS\theta}$  est utilisée afin de simuler un couple résistant.

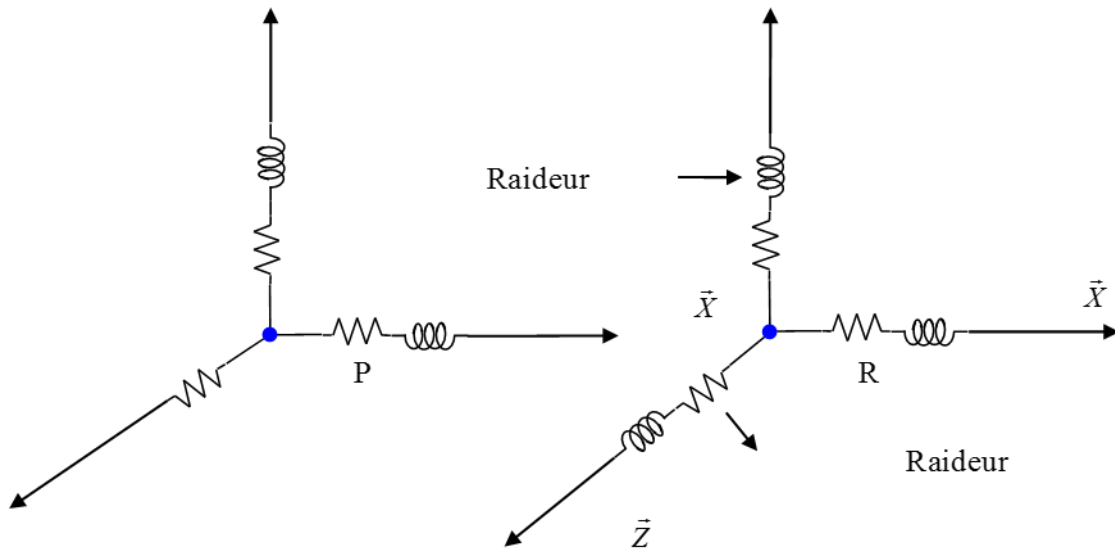


Figure 3-14 : Raideurs modélisant les paliers

$$K_{PE} = \text{diag}(k_{PEv}, k_{PEw}, k_{PEu}, k_{PE\phi}, k_{PE\psi}, 0) \quad (2.52)$$

$$K_{PS} = \text{diag}(k_{PSv}, k_{PSw}, k_{PSu}, k_{PS\phi}, k_{PS\psi}, 0) \quad (2.53)$$

$$K_{RE} = \text{diag}(k_{REu}, k_{REw}, k_{REv}, 0, k_{RE\psi}, k_{RE\phi}) \quad (2.54)$$

$$K_{RS} = \text{diag}(k_{RSu}, k_{RSw}, k_{RSv}, k_{RS\theta}, k_{RS\psi}, k_{RS\phi}) \quad (2.55)$$

La Figure 3-15 illustre un exemple de conditions limites utilisées dans l'analyse quasi-statique sous charge avec les extrémités des arbres fixées par rapport au repère fixe.

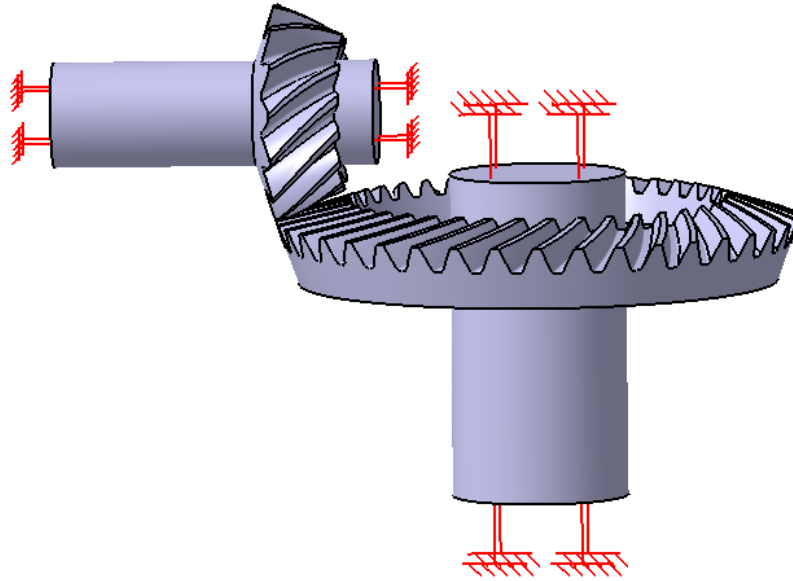


Figure 3-15 : Un exemple de conditions aux limites dans l'analyse quasi-statique.

### 3.3.6 Amortissement

L'introduction d'amortissement est toujours délicate et un modèle simple de Rayleigh a été choisi, c'est-à-dire une matrice constante s'exprimant comme une combinaison linéaire des matrices masse et raideur moyenne, soit :

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (2.56)$$

a et b sont deux coefficients constants, qu'il est possible d'ajuster afin d'obtenir les facteurs d'amortissement modaux  $\varepsilon_{\phi_i}$  désirés pour deux modes donnés.

L'amortissement de Rayleigh dans le domaine modal est donné par :

$$c_{\phi_i} = a \cdot m_{\phi_i} + b \cdot k_{\phi_i} \quad (2.57)$$

$c_{\phi_i} = \phi_i^T \cdot [C] \cdot \phi_i$ , est l'amortissement modal

$$\left. \begin{aligned} c_{\phi_i} &= 2\varepsilon_{\phi_i} \cdot \sqrt{k_{\phi_i} m_{\phi_i}} \\ w_i &= \sqrt{\frac{k_{\phi_i}}{m_{\phi_i}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_{\phi_i} = 2\varepsilon_{\phi_i} \cdot m_{\phi_i} \cdot w_i$$

$k_{\phi_i} = \phi_i^T \cdot [K] \cdot \phi_i$ , est la raideur modale

$m_{\phi_i} = \phi_i^T \cdot [M] \cdot \phi_i$ , est la masse modale



$\omega_i$  : fréquence propre en Hz

Les facteurs modaux  $\varepsilon_{\phi_i}$  sont donnés par :

$$2\varepsilon_{\phi_i} \cdot m_{\phi_i} \cdot \omega_i = a \cdot m_{\phi_i} + b \cdot k_{\phi_i} \Rightarrow 2\varepsilon_{\phi_i} \cdot m_{\phi_i} \cdot \omega_i = m_{\phi_i} \cdot (a + \omega_i^2 \cdot b)$$

Finalement :

$$\varepsilon_{\phi_i} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a}{\omega_i} + b \cdot \omega_i \right) \quad (2.58)$$

Cette dernière relation permet de calculer les coefficients a et b moyennant la connaissance de deux facteurs d'amortissement modaux, autrement dit, il est possible de déterminer une matrice d'amortissement représentative à l'aide de deux fréquences propres du système. La fonction de dissipation du système s'écrit:

$$D = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot [C] \cdot \dot{q} \quad (2.59)$$

et conduit à la matrice d'amortissement visqueux :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = [C] \cdot \dot{q} \quad (2.60)$$

### 3.3.7 Forces d'excitation

Les vecteurs seconds membres générés par l'engrenage sont de trois types : a) les couples d'entrée et/ou sortie imposés, b) les vecteurs comprenant les termes inertiels associés aux variations de vitesse de rotation sur l'organe récepteur (conséquence de l'erreur de transmission à vide) et c) les effets élastiques induits par les conditions de contact normal entre profils avec écarts de forme. Il vient alors :

a)

$$\begin{aligned} \{F_0\} &= \{0 \quad 0 \quad \dots \quad C_m \quad \dots \quad 0 \quad 0\} \\ F_0(i) &= 0, i = 1, 2, \dots, 36, i \neq 18 \\ F_0(18) &= C_m \end{aligned} \quad (2.61)$$

b) Si le couple moteur est imposé.

$$\{F_{VE}\} = J_2 \dot{\Omega}_2 \{R\} \quad (2.62)$$

avec  $J_2$  : moment d'inertie polaire de la roue.

$\dot{\Omega}_2$  : accélération de la roue,

qui tient compte des accélérations angulaires au niveau de l'élément présentant l'inertie polaire la plus importante (ici la roue).  $\{R\}$  est donc un vecteur de positionnement remplis de zéros sauf au degré de liberté de torsion de la roue où la composante correspondante prend la valeur 1.

c)

$$\{F_{2/E}\} = \sum_{i \in (A)} k_i \cdot V_i^T \cdot \delta e_i \quad (2.63)$$

Avec :  $k_i$  : raideur distribuée au point de contact  $M_i$ .

$\{V_i^T\}$  : vecteur de structure du point de contact  $M_i$ .

$\delta e_i$  : écart initial à vide,

qui représente les contributions des écarts de forme à l'énergie de déformation de l'engrenage.

### 3.3.8 Equations du mouvement

Les équations du mouvement sont développées à partir des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{W}{\partial q_i} \quad (2.64)$$

Avec :

T : Energie cinétique du système

U : Energie de déformation du système

D : Fonction de dissipation

W : Forces extérieures généralisées

$q_i$  : Coordonnées généralisées du système

Les coordonnées généralisées  $q_i$  du système sont les degrés de liberté des modèles dynamiques tridimensionnels et s'expriment comme suit :

$$X = \left\{ v_{PS}, w_{PS}, u_{PS}, \phi_{PS}, \psi_{PS}, \theta_{PS}, v_P, w_P, u_P, \phi_P, \psi_P, \theta_P, v_{PE}, w_{PE}, u_{PE}, \phi_{PE}, \psi_{PE}, \theta_{PE}, \right. \\ \left. u_{RE}, w_{RE}, v_{RE}, \theta_{RE}, \psi_{RE}, \phi_{RE}, u_R, w_R, v_R, \theta_R, \psi_R, \phi_R, u_{RS}, w_{RS}, v_{RS}, \theta_{RS}, \psi_{RS}, \phi_{RS} \right\}^T \quad (2.65)$$

En fonction des coordonnées généralisées  $X$ , l'assemblage des matrices de masse et de raideur de l'engrenage, des arbres, des paliers conduit à la structure matricielle ci-dessous (Figure 3-16) :



$$F_{2/P} = \sum_i k_i \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{n} \\ \vec{n} \times \overrightarrow{O_1 M_i} \end{array} \right\}^T \cdot \delta e i_i \quad (2.68)$$

$F_{2/R}$  : la partie de la roue de  $F_{2/E}$ .

$$F_{2/R} = \sum_i k_i \cdot \left\{ \begin{array}{c} -\vec{n} \\ -\vec{n} \times \overrightarrow{O_2 M_i} \end{array} \right\}^T \cdot \delta e i_i \quad (2.69)$$

Les équations du mouvement pour l'ensemble du système mécanique s'écrivent finalement :

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{F_0\} - \{F_{1/E}\} - \{F_{2/E}\} \quad (2.70)$$

Avec : [M] : matrice de masse totale constante, comme indiqué dans la Figure 3-16,

[C] : matrice d'amortissement constante,

[K] : matrice de raideur totale variant en fonction du temps et des coordonnées généralisées du système,

{X} : vecteur constitué des coordonnées généralisées du système,

{F<sub>0</sub>} : vecteur de force d'excitation extérieure,

{F<sub>1/E</sub>} : vecteur de force d'excitation supplémentaire, qui introduit l'effet de la cinématique, dépendant du temps,

{F<sub>2/E</sub>} : vecteur de force d'excitation supplémentaire, qui introduit l'effet des écarts géométrique, dépendant du temps.

Le système différentiel est résolu par le schéma d'intégration numérique pas à pas dans le temps de Newmark.

### 3.3.9 Force d'engrènement et coefficient dynamique

La résolution de l'équation du mouvement conduit à la force d'engrènement :

$$\vec{F}_d = \sum_i k_i \cdot \{V\}_i^T \cdot \{q_E\} \vec{n} \quad (2.71)$$

Afin de représenter les variations temporelles sur une même échelle, le temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement  $\tau = \frac{t}{T_m}$  est introduit ( $T_m$  est la période d'engrènement).

On définit, par ailleurs le coefficient dynamique comme le rapport entre l'effort dynamique et l'effort statique lors de l'engrènement, soit:

$$R = \frac{F_d}{F_s} \quad (2.72)$$

$$F_s \text{ est la force d'engrènement statique : } F_s = \sum_i p_i \cdot S_i \quad (2.73)$$

avec :  $p_i$  : pression du  $i^{\text{ème}}$  élément

$S_i$  : section du  $i^{\text{ème}}$  élément

Le maximum du coefficient dynamique pour chaque vitesse de rotation sera utilisé pour étudier les réponses dynamiques lors d'un balayage en vitesse:

$$R_m = \max(R)$$

### 3.4 PROGRAMMATION

Les modèles dynamiques ont été programmés avec le langage MATLAB. Le programme se compose de quatre fonctions.

#### 3.4.1 Fonction 1 – Représentation des résultats de ASLAN

La fonction 1 représente les résultats de l'analyse quasi-statique, par exemple la distribution de pressions sur la denture (Figure 3-18), l'erreur cinématique et l'erreur de transmission sous charge (Figure 3-19). Les résultats sont représentés soit pour les comparer avec les résultats dynamiques à basse vitesse de rotation du pignon, soit pour voir l'évolution de paramètres en fonction du temps. La procédure de la fonction 1 comporte seulement deux étapes (Figure 3-17).

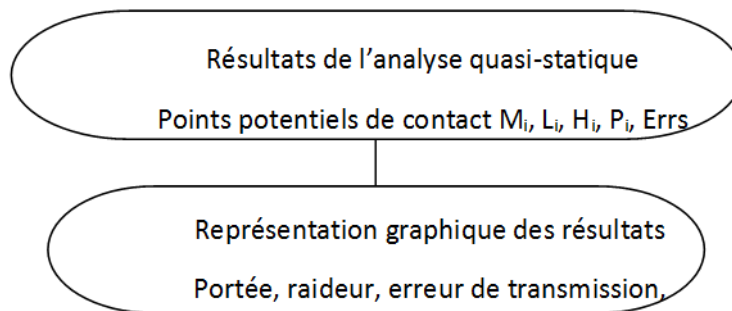


Figure 3-17 : Procédure pour la fonction 1.

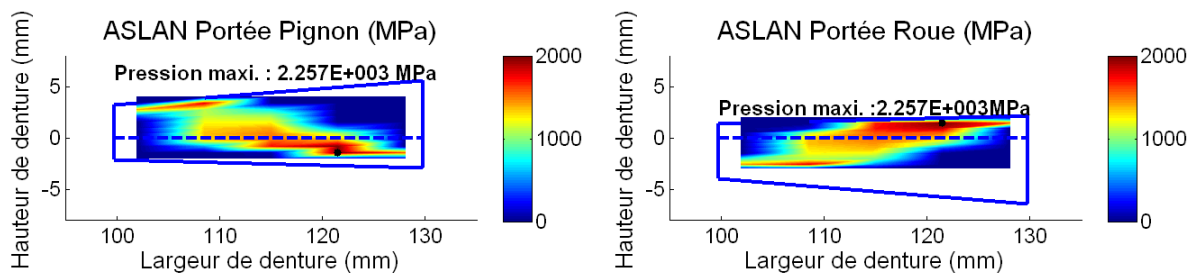


Figure 3-18 : Distribution de pression suivant la hauteur et la largeur de la denture.

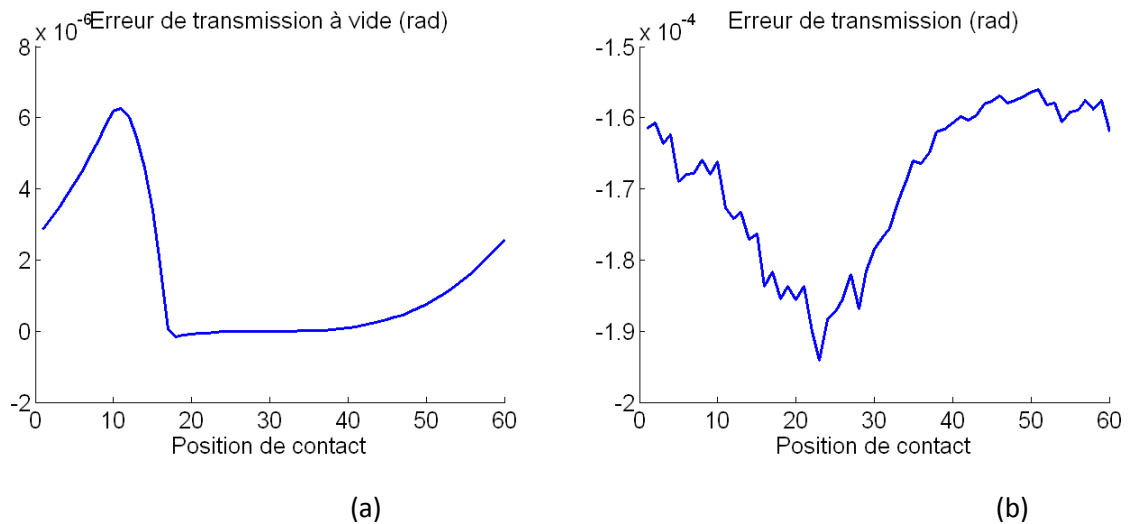


Figure 3-19 : Erreur de transmission (en radian) à vide (a) et sous charge (b).

### 3.4.2 Fonction 2 – Modèle dynamique tridimensionnel local pour une vitesse de rotation

La fonction 2 a pour but de fournir les résultats dynamiques du modèle dynamique tridimensionnel local à une vitesse de rotation donnée du pignon. La procédure inclue trois étapes principales similaires à celles du modèle tridimensionnel à l'exception de l'étape en rouge: (1) Données en entrée, y compris les résultats de l'analyse quasi-statique et les paramètres pour construire l'équation de mouvement (par exemple, les masses du pignon et de la roue, ainsi que les raideurs de paliers ; (2) Construction des équations du mouvement ; (3) Résolution des équations du mouvement. Cette étape inclue un algorithme de contact normal itératif afin d'enlever les contributions des points où le contact est perdu suite à des effets dynamiques à certaines vitesses de rotation. Cette fonction a été fréquemment utilisée pour calculer des résultats du modèle dynamique (Figure 3-20 et Figure 3-21) à basse vitesse (1 tr/min) à des fins de validations en comparant avec les résultats issus de l'analyse statique (distributions de pression, erreurs de transmissions).

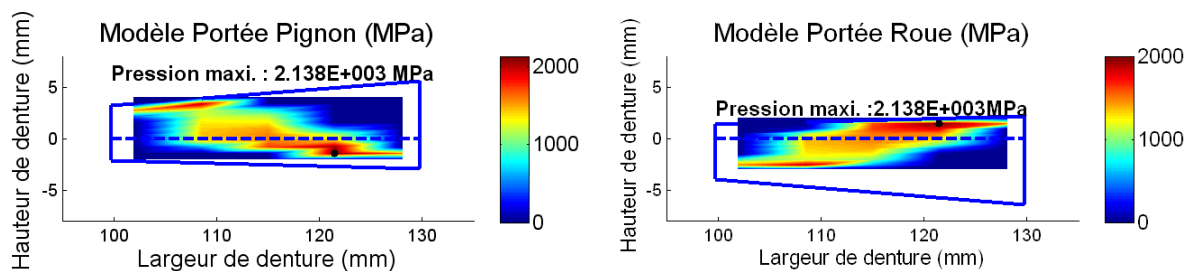


Figure 3-20 : Distributions de pression suivant la hauteur et la largeur de denture, vitesse de 1 tr/min.

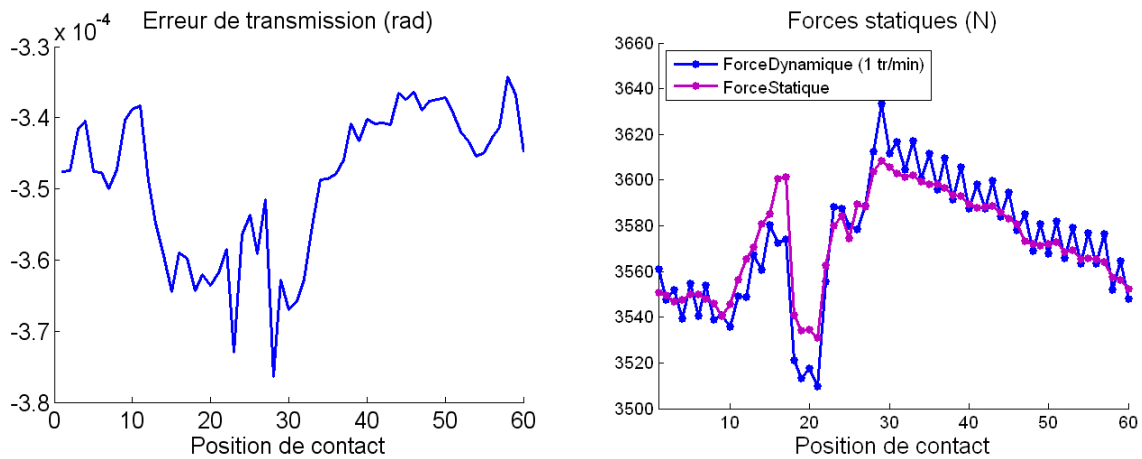


Figure 3-21 : Erreur de transmission sous charge du modèle dynamique et force dynamique à faible vitesse (1 tr/min sur le pignon).

### 3.4.3 Fonction 3 – Modèle dynamique tridimensionnel local

La fonction 3 permet de fournir les coefficients dynamiques (Figure 3-22) à différentes vitesses de rotation du pignon. Une étape itérative (Figure 3-23) permet d'accéder au calcul de la vitesse de rotation du pignon. Le calcul est basé sur la procédure de la fonction 2.

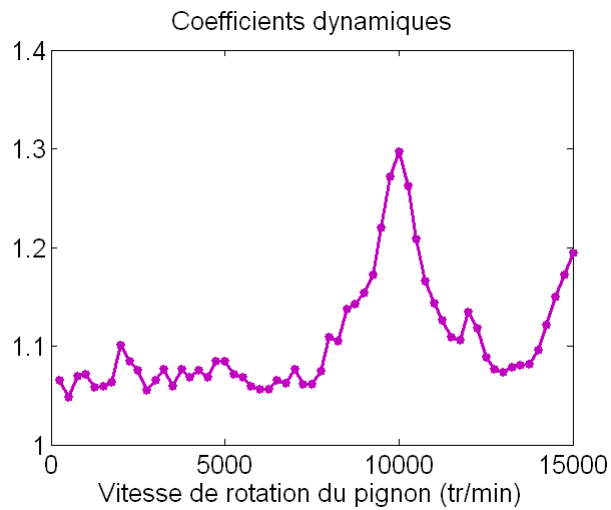


Figure 3-22 : Coefficients dynamique à différentes de vitesses de rotation du pignon (250~15000 tr/min)

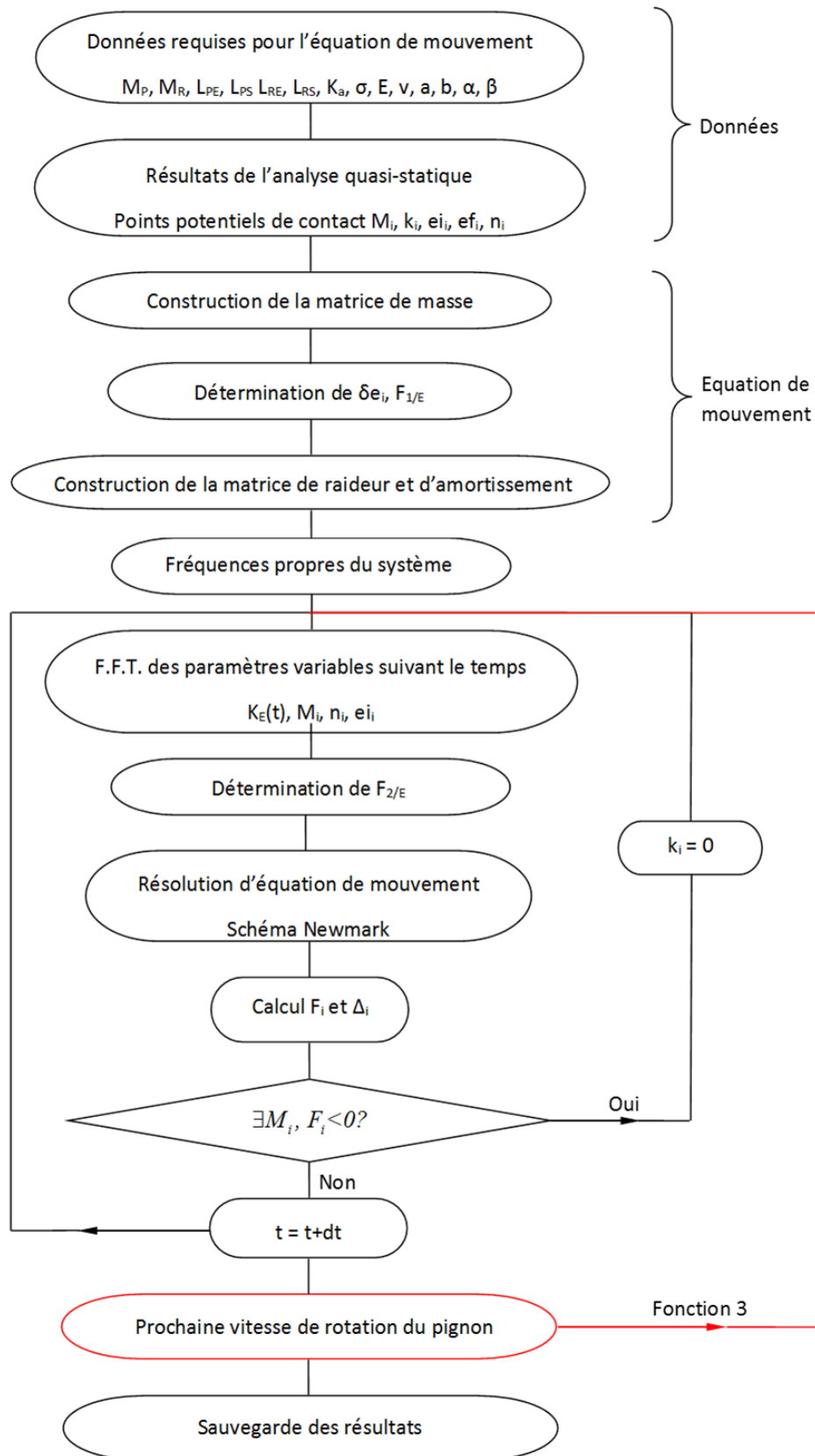


Figure 3-23 : Itératif numérique de la fonction 3.



### 3.5 MODÈLE DYNAMIQUE TRIDIMENSIONNEL GLOBAL

La méthode proposée par Velex et Ajmi en 2006 [108] pour les engrenages cylindriques permettant de lier les excitations définies pour un modèle 3D local aux quantités globales comme les erreurs de transmission et raideurs d'engrènement fournies par des études quasi-statiques a été étendue au cas d'engrenages spiro-coniques.

#### 3.5.1 Définition d'erreur de transmission dynamique

Selon la définition de l'erreur de transmission en angulaire dans l'analyse quasi-statique :

$$ETS^{ang} = ETV^{ang} + \alpha^{ang} \quad (2.74)$$

$ETS^{ang}$  : erreur de transmission angulaire (rad).

$ETV^{ang}$  : erreur cinématique angulaire (rad).

$\alpha^{ang}$  : rapprochement des corps en composante angulaire (rad).

Par rapport à la position du barycentre des efforts d'engrènement, l'erreur de transmission linéaire définie lors de l'analyse quasi-statique s'exprime par :

$$\begin{aligned} ETS^{liné} &= ETV^{liné} + \alpha^{liné} \\ &= \frac{R_{G-R}}{R_{t-\vec{n}}} \cdot (ETV^{ang} + \alpha^{ang}) \\ &= \frac{R_{G-R}}{R_{t-\vec{n}}} \cdot ETV^{ang} + \frac{R_{G-R}}{R_{t-\vec{n}}} \cdot \alpha^{ang} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Avec :  $ETS^{liné}$  : erreur de transmission linéaire (m).

$ETV^{liné}$  : erreur cinématique linéaire (m).

$\alpha^{liné}$  : rapprochement des corps linéaire (m).

$R_{G-R}$  : Rayon tangentiel du barycentre par rapport à la roue (Figure 3-24)

$$R_{G-R} = \sqrt{y^2 + z^2} \Big|_{R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$R_{t-\vec{n}}$  : Rayon de barycentre transfert du sens tangentiel ( $\vec{n}_{rotat}$ ) au sens normale ( $\vec{n}$ ) par rapport à la roue

$$R_{t-\vec{n}} = n_z \cdot y - n_y \cdot z$$

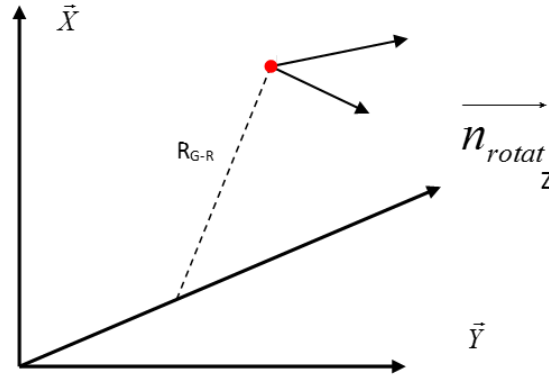


Figure 3-24 : Définition de rayon de transfert par rapport au barycentre.

En faisant le lien avec les modèles dynamiques, le rapprochement linéaire des corps est calculé en fonction de la géométrie des engrenages et des degrés de liberté sous la forme:

$$\alpha^{liné} = \frac{R_{G-R}}{R_{t-\vec{n}}} \cdot \alpha^{ang} = \{V\}^T \cdot \{X\} \quad (2.76)$$

Où  $\{V\}$  représente un vecteur de structure ou de projection par rapport au point  $B_m$  dont les composantes sont :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} \vec{n} \\ \vec{n} \times \overrightarrow{O_1 B_m} \\ -\vec{n} \\ -\vec{n} \times \overrightarrow{O_2 B_m} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Les degrés de liberté, quant à eux, s'écrivent :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} v_{PS}, w_{PS}, u_{PS}, \phi_{PS}, \psi_{PS}, \theta_{PS}, v_P, w_P, u_P, \phi_P, \psi_P, \theta_P, v_{PE}, w_{PE}, u_{PE}, \phi_{PE}, \psi_{PE}, \theta_{PE} \\ u_{RE}, w_{RE}, v_{RE}, \theta_{RE}, \psi_{RE}, \phi_{RE}, u_R, w_R, v_R, \theta_R, \psi_R, \phi_R, u_{RS}, w_{RS}, v_{RS}, \theta_{RS}, \psi_{RS}, \phi_{RS} \end{Bmatrix}^T \quad (2.78)$$

Basé sur la définition d'erreur de transmission dans l'analyse quasi-statique d'ASLAN, l'erreur de transmission dynamique est définie comme :

$$ETD^{liné} = ETV^{liné} + V^T \cdot \{X\} \quad (2.79)$$

ETD : erreur de transmission sous charge dynamique (m).

Au-delà des aspects théoriques, les erreurs de transmission sont classiquement mesurées sur des bancs d'essais par l'intermédiaire de codeurs optiques, qui permettent d'accéder aux angles de rotation instantanés (mouvements de corps rigides et torsion combinés). Les erreurs de transmission expérimentales sont alors définies comme :



Pour un pignon tournant à très faible vitesse, c'est-à-dire à une vitesse angulaire  $\Omega_1$  très proche de zéro, l'équation du mouvement correspond alors au cas quasi-statique (caractérisé par l'indice S) :

$$\left[ [K_{SE}] + \left[ \sum_i k_i \cdot \{V\}_i \cdot \{V_i\}^T \right] \right]^S \cdot \{X_S\} = \{F_0\} + \left( \sum_i k_i \cdot \delta e_i \cdot \{V_i\} \right)^S \quad (2.85)$$

En supposant que les conditions d'engrènement quasi-statiques et dynamiques sont proches, soit :

$$\begin{aligned} \left( \sum_i k_i \right)^S &\cong \sum_i k_i \\ \left( \sum_i k_i \cdot \delta e_i \right)^S &\cong \sum_i k_i \cdot \delta e_i \end{aligned} \quad (2.86)$$

les équations du mouvement du modèle dynamique peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 \cdot [M] \cdot \{X''\} + \Omega_1 \cdot [C] \cdot \{X'\} + \left[ [K_{SE}] + \left[ \sum_i k_i \cdot \{V\}_i \cdot \{V_i\}^T \right] \right] \cdot \{X\} \\ = \left[ \left[ [K_{SE}] + \left[ \sum_i k_i \cdot \{V\}_i \cdot \{V_i\}^T \right] \right]^S \right] \cdot \{X_S\} - \{F_{2/E}\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

En approximant le vecteur de structure (qui varie en fonction de la position du point de contact) par sa valeur moyennée au barycentre des efforts d'engrènement, il est possible de remplacer  $V_i$  par un vecteur constant  $V$ , ce qui conduit à l'expression de la raideur d'engrènement :

$$\sum_i k_i = k_m (1 + \alpha g(\mathcal{G}))$$

et par la suite :

$$\left[ [K_{SE}] + \left[ \sum_i k_i \cdot \{V_i\} \cdot \{V_i\}^T \right] \right] \cdot \{X_S\} = \left[ [K_{SE}] + k_m (1 + \alpha g(\mathcal{G})) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X_S\} \quad (2.88)$$

avec :  $k_m$  : raideur d'engrènement moyenne correspondant au point  $B_m$ .

$\alpha$  : coefficient de fluctuation généralement très inférieur à l'unité.

### 3.5.3 **Equation du mouvement**

Après simplification de l'équation du mouvement par les paramètres moyens, on obtient pour le cas statique :

$$\begin{aligned} \left[ [K_{SE}] + k_m (1 + \alpha \cdot g(\mathcal{G})) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X_S\} = \{F_0\} + \sum_i k_i \cdot \delta e_i \cdot \{V\} \\ \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X_S\} = \{F_0\} + \sum_i k_i \cdot \delta e_i \cdot \{V\} - k_m \cdot \alpha \cdot g(\mathcal{G}) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \cdot \{X_S\} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Notons :

$$[\bar{K}] = [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T$$

$$\{X_0\} = [\bar{K}]^{-1} \cdot \{F_0\}$$

$$\{C_v\} = [\bar{K}]^{-1} \cdot \{V\}$$

Le déplacement statique est alors :

$$\{X_S\} = \{X_0\} + \left[ \sum_i k_i \cdot \delta e_i - k_m \cdot \alpha \cdot g(\mathcal{G}) \cdot \{V\}^T \cdot \{X_S\} \right] \cdot \{C_v\} \quad (2.90)$$

$$\varphi(\mathcal{G}) = \sum_i k_i \cdot \delta e_i - k_m \cdot \alpha \cdot g(\mathcal{G}) \cdot \{V\}^T \cdot \{X_S\}$$

Avec :

Le déplacement statique devient :

$$\{X_S\} = \{X_0\} + \varphi(\mathcal{G}) \cdot \{C_v\}$$

Selon la définition retenue, l'erreur de transmission sous charge statique peut s'exprimer sous trois formes différentes:

$$a) \quad ETD_S^{liné} = ETV + \{V\}^T \cdot \{X_0\} + \{V\}^T \cdot \varphi(\mathcal{G}) \cdot \{C_v\} \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \varphi(\mathcal{G}) = \frac{ETD_S - ETV - \{V\}^T \cdot \{X_0\}}{C_{vv}}$$

$$C_{vv} = \{V\}^T \cdot \{C_v\}$$

$$ETD_S^{ang} = ETV + \{W^{ang}\}^T \cdot \{X_0\} + \{W^{ang}\}^T \cdot \varphi(\mathcal{G}) \cdot \{C_v\}$$

$$b) \quad \Rightarrow \varphi(\mathcal{G}) = \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \cdot \{X_0\}}{C_{vv}^{ang}} \quad (2.92)$$

$$C_{vv}^{ang} = \{W^{ang}\}^T \cdot \{C_v\}$$

$$ETD_S = ETV + \{W^{liné}\}^T \cdot \{X_0\} + \{W^{liné}\}^T \cdot \varphi(\mathcal{G}) \cdot \{C_v\}$$

$$c) \quad \Rightarrow \varphi(\mathcal{G}) = \frac{ETD_S - ETV - \{W^{liné}\}^T \cdot \{X_0\}}{C_{vv}^{liné}} \quad (2.93)$$

$$C_{vv}^{liné} = \{W^{liné}\}^T \cdot \{C_v\}$$

En conséquence, le vecteur des déplacements en régime quasi-statique pourra également prendre 3 formes différentes, soit :

$$\begin{aligned}
\{X_S\} &= \{X_0\} + \frac{ETD_S - ETV - \{V\}^T \{X_S\}}{C_{vv}} \cdot \{C_v\} \\
\text{ou} &= \{X_0\} + \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{ang}} \cdot \{C_v\} \\
\text{ou} &= \{X_0\} + \frac{ETD_S^{liné} - ETV - \{W^{liné}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{liné}} \cdot \{C_v\}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Et les forces d'excitation extérieures sont déduites sous la forme :

$$\begin{aligned}
\{F_0\} + \sum_i k_i \cdot \delta e_i \cdot \{V\} &= \left[ [\bar{K}] + \alpha \cdot k_m \cdot g(\vartheta) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \\
&\left( \{X_0\} + \frac{ETD_S - ETV - \{V\}^T \{X_S\}}{C_{vv}} \cdot \{C_v\} \right) \\
&\text{ou} \left[ [\bar{K}] + \alpha \cdot k_m \cdot g(\vartheta) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \\
&\left( \{X_0\} + \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{ang}} \cdot \{C_v\} \right) \\
&\text{ou} \left[ [\bar{K}] + \alpha \cdot k_m \cdot g(\vartheta) \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \\
&\left( \{X_0\} + \frac{ETD_S^{liné} - ETV - \{W^{liné}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{liné}} \cdot \{C_v\} \right)
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Conduisant ainsi aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^2 \cdot [M] \cdot \{\ddot{X}\} + \Omega_1 \cdot [C] \cdot \{\dot{X}\} + \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X\} \\
= \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \left( \{X_0\} + \frac{ETD_S - ETV - \{V\}^T \{X_S\}}{C_{vv}} \cdot \{C_v\} \right) - \{F_{2/E}\} \\
\text{ou} \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \left( \{X_0\} + \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{ang}} \cdot \{C_v\} \right) - \{F_{2/E}\} \\
\text{ou} \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \left( \{X_0\} + \frac{ETD_S^{liné} - ETV - \{W^{liné}\}^T \{X_S\}}{C_{vv}^{liné}} \cdot \{C_v\} \right) - \{F_{2/E}\}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

soit:

$$\begin{aligned}
& [M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X\} \\
&= \{F_0\} + \frac{ETD_S - ETV - \{V\}^T \{X_0\}}{C_{vv}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
&\text{ou} \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_0\}}{C_{vv}^{ang}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
&\text{ou} \frac{ETD_S^{liné} - ETV - \{W^{liné}\}^T \{X_0\}}{C_{vv}^{liné}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Parce que :

$$\begin{aligned}
\{\widehat{X}_0\} &\approx \{X_0\} \\
\{\widehat{X}_0\} &= F_s \cdot [\bar{K}]^{-1} \cdot \{V\}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& [M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X\} \\
&= \{F_0\} + \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_0\}}{C_{vv}^{ang}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
&= \{F_0\} + F_s \cdot \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_0\}}{F_s \cdot \{W^{ang}\}^T \cdot [\bar{K}]^{-1} \cdot \{V\}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
&= \{F_0\} + F_s \cdot \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_0\}}{\underbrace{\{W^{ang}\}^T \cdot F_s \cdot [\bar{K}]^{-1} \cdot \{V\}}_{\{\widehat{X}_0\}}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
&= \{F_0\} + F_s \cdot \frac{ETD_S^{ang} - ETV - \{W^{ang}\}^T \{X_0\}}{\underbrace{\{W^{ang}\}^T \cdot F_s \cdot [\bar{K}]^{-1} \cdot \{V\}}_{\{\widehat{X}_0\}}} \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
& [M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + \left[ [K_{SE}] + k_m \cdot \{V\} \cdot \{V\}^T \right] \cdot \{X\} \\
& = \{F_0\} + \left( \frac{ETD_s - ETV}{\{V\}^T \cdot \{X_0\}} - 1 \right) \cdot F_s \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
& \text{ou} \left( \frac{\{W^{ang}\}^T \cdot \{X_s\}}{\{W^{ang}\}^T \cdot \{X_0\}} - 1 \right) \cdot F_s \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\} \\
& \text{ou} \left( \frac{\{W^{liné}\}^T \cdot \{X_s\}}{\{W^{liné}\}^T \cdot \{X_0\}} - 1 \right) \cdot F_s \cdot \{V\} - \{F_{2/E}\}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Sur la base des trois formulations retenues pour la définition de l'erreur de transmission, trois modèles dynamiques globaux ont été développés conduisant aux trois expressions différentes d'efforts dynamiques d'engrènement ci-dessous :

a)

$$F_d = k_m \cdot \{V\}^T \cdot \{X\} - \frac{ETD_s - ETV - \{V\}^T \{X_0\}}{C_{vv}} \tag{2.100}$$

avec :  $ETD_s$  : erreur de transmission statique sous charge linéaire par rapport au barycentre des efforts donné par ASLAN

$ETV$  : erreur de transmission cinématique linéaire par rapport au barycentre des efforts donné par ASLAN

b)

$$F_d = F_s + \left( k_m \cdot \{V\}^T \cdot \{X\} - \{V\}^T \{X_0\} \frac{\{W^{ang}\}^T \{X_s\}}{\{W^{ang}\}^T \{X_0\}} \right) \tag{2.101}$$

$\{X_s\}$  est la solution du modèle local à basse vitesse de rotation du pignon.

Et c)

$$F_d = F_s + \left( k_m \cdot \{V\}^T \cdot \{X\} - \{V\}^T \{X_0\} \frac{\{W^{liné}\}^T \{X_s\}}{\{W^{liné}\}^T \{X_0\}} \right) \tag{2.102}$$



### 3.5.4 Schéma de résolution pour les modèles dynamiques tridimensionnels globaux

La Figure 3-25 synthétise les différentes étapes de la résolution des équations du mouvement pour les modèles globaux mis en œuvre. Comme précédemment, un schéma d'intégration numérique pas à pas dans le temps de Newmark a été retenu. Les données d'entrée sont différentes puisqu'un calcul quasi-statique préalable est nécessaire afin d'obtenir les erreurs de transmission sous charge. A partir de ces informations, les modèles globaux permettent d'accéder aux caractéristiques dynamiques du système d'engrenages comme le coefficient de charge dynamique sur les dentures dont les évolutions en fonction de la vitesse de rotation du pignon sont portées sur la Figure 2-26 à titre d'illustration.

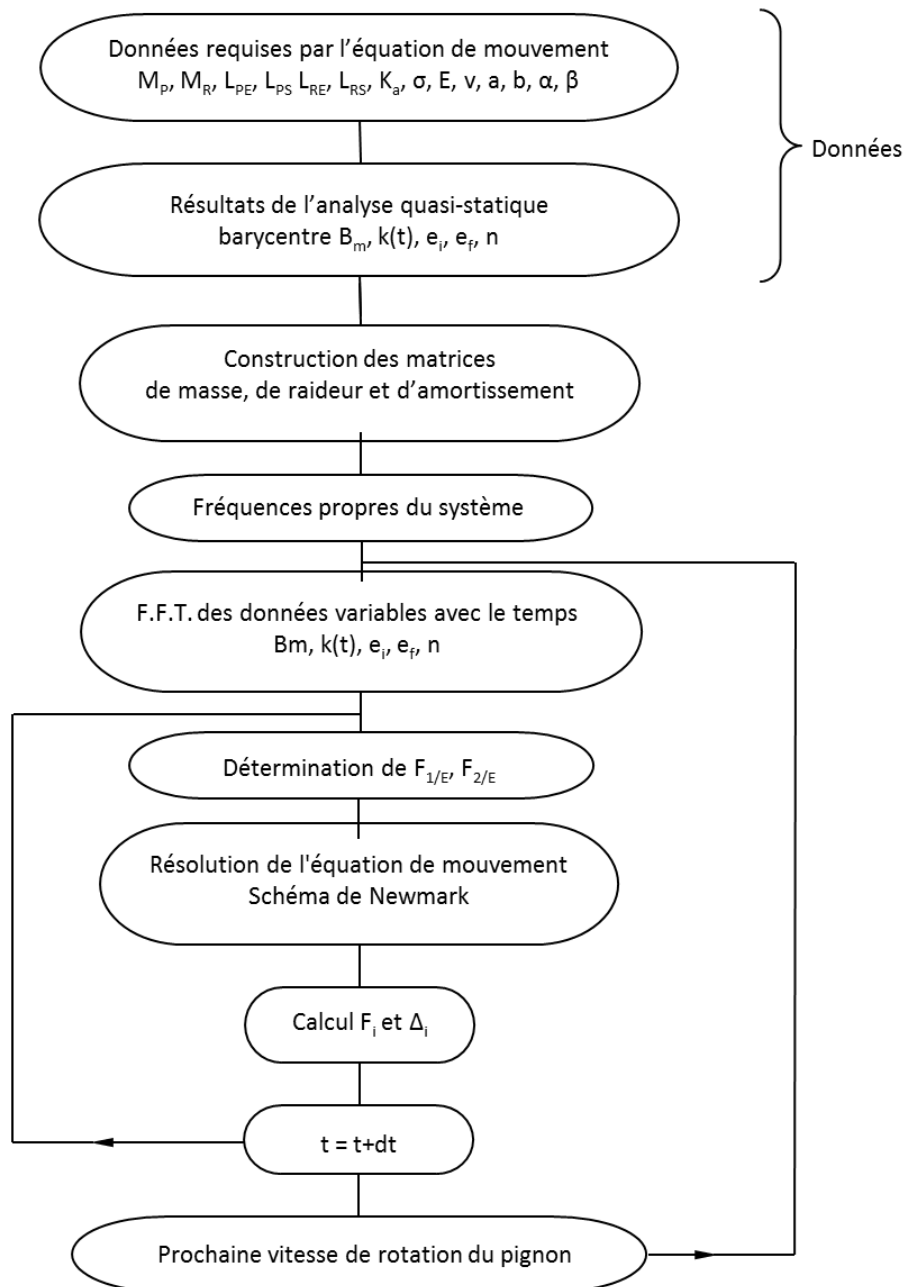


Figure 3-25 : Interactif numérique de la fonction 4.

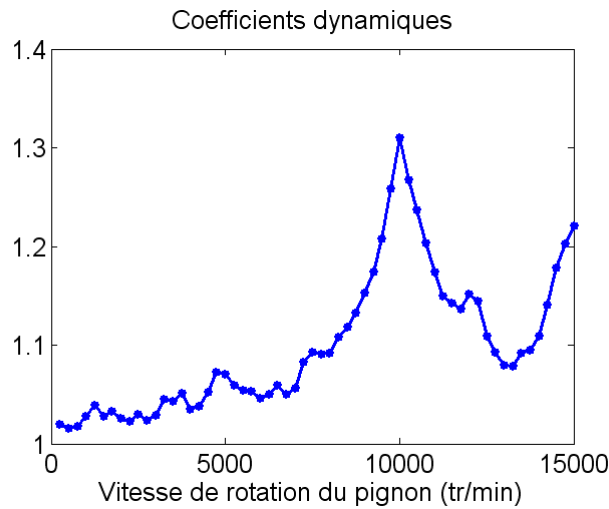


Figure 3-26 : Coefficients dynamiques à différentes vitesses de rotation du pignon

### 3.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté des modèles du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques de complexité croissante et nous avons établi les bases théoriques permettant de relier des modèles quasi-statiques (généralement très précis en termes de description des élasticités) et des modèles dynamiques. Deux modèles tridimensionnels ont été proposé : a) l'un local suit au mieux les évolutions des conditions de contact instantanées sur les flancs actifs de denture, b) le second, plus global, utilise des résultats en termes de raideur d'engrènement et d'erreurs de transmission comme données. Dans le chapitre suivant, nous nous attacherons à examiner la validité de ces différentes approches en comparant les modèles dynamiques entre eux mais également en confrontant les raideurs, portées et erreurs de transmission fournies par les modèles dynamiques pour de faibles vitesses de rotation avec celles issus d'un modèle statique sophistiqué.

## 4 ELÉMENTS DE VALIDATION

---

### 4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente des éléments de comparaison et validation des modèles mis en place au chapitre 2 pour trois géométries d'engrenage différentes :

- 1) un engrenage spiro-conique, généré selon la norme Gleason. Cet engrenage a été optimisé et les calculs ont été menés dans la configuration sans arbre et sans défaut de montage,
- 2) un engrenage spiro-conique décrit dans les articles de Simon [95-100] ,
- 3) un exemple d'engrenage spiro-conique conçu avec le logiciel ASLAN [130].

### 4.2 COMPARAISONS ET ÉLÉMENTS DE VALIDATION

#### 4.2.1 Engrenages Gleason Normalisé

Trois géométries d'engrenages spiro-coniques produits selon le procédé Gleason sont considérées. Elles sont respectivement référencées comme 'normal' pour la géométrie standard, 'optimisé 1' et 'optimisé 2' pour des évolutions destinées à améliorer les distributions de charge sur les flancs des dentures. Leurs caractéristiques géométriques sont portées dans le Tableau 4-2.

A partir des modèles CAO construits avec CATIA, les masses et moments d'inertie suivants ont été obtenus (Tableau 4-1) et introduits comme paramètres d'entrée dans les modèles dynamiques. Les épaisseurs sont données dans la Figure 4-1.

Tableau 4-1 : Caractéristiques inertielles des engrenages Gleason.

| Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )                     | 7860      |           |           |
|--|-----------|-----------|-----------|
| Moment polaire d'inertie du pignon (kg*m <sup>2</sup> )  | 0.0002514 | 0.0002134 | 0.0002179 |
| Moment d'inertie du pignon (kg*m <sup>2</sup> )          | 0.000156  | 0.0001342 | 0.0001368 |
| Moment polaire d'inertie de la roue (kg*m <sup>2</sup> ) | 0.012     | 0.013     | 0.013     |
| Moment d'inertie de la roue (kg*m <sup>2</sup> )         | 0.006     | 0.007     | 0.007     |
| Masse du pignon (kg)                                     | 0.557     | 0.51      | 0.516     |
| Masse de la roue (kg)                                    | 3.139     | 3.271     | 3.255     |

Tableau 4-2 : Paramètres complets des engrenages et des outils de logiciel ASLAN

| Paramètres                                   | Gleason              | Gleason optimisé 1 | Gleason optimisé 2 |
|--|----------------------|--------------------|--------------------|
| Nombre de dents du pignon                    | 14                   | 14                 | 14                 |
| Nombre de dents de la roue                   | 39                   | 39                 | 39                 |
| Module (mm)                                  | 3.213                | 3.213              | 3.213              |
| Diamètre extérieur de la roue (mm)           | 176.893              | 176.893            | 176.893            |
| Largeur de dent (mm)                         | 25.4                 | 25.4               | 25.4               |
| Angle de la spirale (°)                      | -35                  | -35                | -35                |
| Offset (mm)                                  | 0                    | 0                  | 0                  |
| Jeu de battement (mm)                        | 0.127                | 0.127              | 0.127              |
| Coefficient de saillie                       | 1                    | 1                  | 1                  |
| Coefficient de creux                         | 1.25                 | 1.25               | 1.25               |
| Angle d'addendum (°)                         | 2.1342               | 2.1342             | 2.1342             |
| Angle de dedendum (°)                        | 6.4934               | 6.4934             | 6.4934             |
| Profondeur du cône sous dent de la roue (mm) | 19.2                 | 19.2               | 19.2               |
| Profondeur du cône sous dent du pignon (mm)  | 6.9                  | 6.9                | 6.9                |
| Déport (mm)                                  | 0.406                | 0.2                | 0.2                |
| Correction d'épaisseur (mm)                  | 0.505                | 0                  | 0                  |
| Sens de la spirale                           | LH                   | LH                 | LH                 |
| Sens de rotation                             | Trigo                | Trigo              | Trigo              |
| Rayon d'outil du pignon (mm)                 | 114.3                | 120                | 130                |
| Rayon d'outil de la roue (mm)                | 114.3                | 120                | 130                |
| Rayon de tête du pignon (mm)                 | 0.5                  | 0.2                | 0.2                |
| Rayon de tête de la roue (mm)                | 0.5                  | 0.2                | 0.2                |
| Angle de pression du pignon (°)              | 20                   | 20                 | 20                 |
| Angle de pression de la roue (°)             | 20                   | 20                 | 20                 |
| Module d'Young (Pa)                          | $2.1 \times 10^{11}$ |                    |                    |
| Coefficient de Poisson                       | 0.3                  |                    |                    |

Tableau 4-3 : Epaisseurs du pignon et de la roue.

|                           |      |
|---------------------------|------|
| Epaisseur du pignon (mm)  | ≈ 26 |
| Epaisseur de la roue (mm) | ≈ 14 |

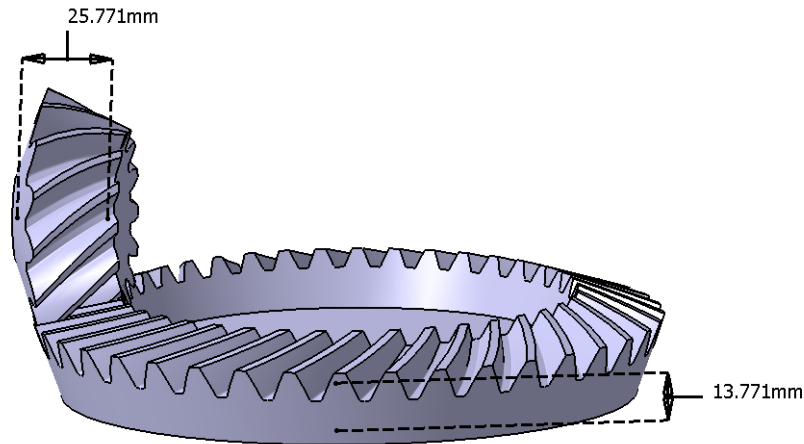


Figure 4-1 : Epaisseurs du pignon et de la roue.

Enfin, les données relatives aux arbres sont répertoriées dans le Tableau 4-3 : Epaisseurs du pignon et de la roue. On constate ici que les arbres sont très courts afin de se rapprocher du modèle torsionnel.

Tableau 4-4 : Géométries des arbres dans les modèles dynamiques pour la situation sans arbre et sans défaut de montage (A).

| Arbres                |            | Longueur (mm) | Diamètre (mm) |
|-----------------------|------------|---------------|---------------|
| Arbres liés au pignon | Arbre PE-P | 13            | 30            |
|                       | Arbre P-PS | 13            |               |
| Arbres liés à la roue | Arbre RE-R | 7             | 60            |
|                       | Arbre R-RS | 7             |               |

L'analyse quasi-statique sous charge est réalisée en utilisant la méthode des Eléments Finis dans l'environnement CATIA. Dans la situation (A), pour des arbres très courts et sans défaut de montage, la surface d'entrée du pignon et la surface de sortie de la roue sont bloquées comme schématisé sur la Figure 4-2. Les raideurs utilisées sont répertoriées dans le Tableau 4-5 : Raideurs aux paliers des arbres dans les modèles dynamiques dans la situation sans arbre et sans défaut de montage (A).

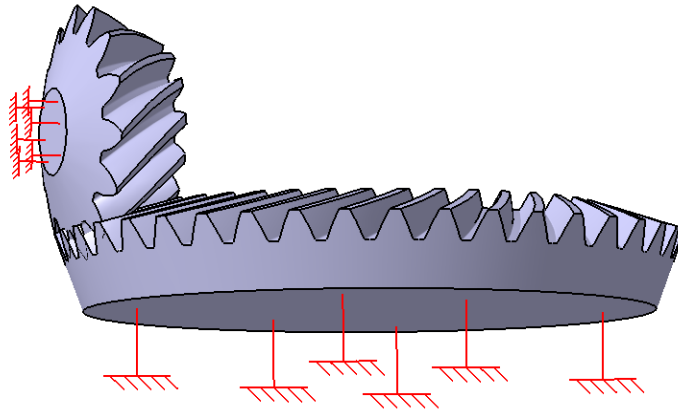


Figure 4-2 : Conditions limites dans ASLAN

Tableau 4-5 : Raideurs aux paliers des arbres dans les modèles dynamiques dans la situation sans arbre et sans défaut de montage (A).

|    | Nœuds de paliers du pignon     | Raideurs                   |        |        |                 |                 |                 |
|----|--------------------------------|----------------------------|--------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|
|    |                                | Traction compression (N/m) |        |        | Flexion (N/rad) |                 | Torsion (N/rad) |
| Ka | Nœud PE                        | $10^9$                     | $10^9$ | $10^9$ | $10^4$          | $10^4$          | 0               |
|    | Nœud PS                        | $10^9$                     | $10^9$ | $10^9$ | $10^4$          | $10^4$          | 0               |
|    | Nœuds de paliers du de la roue | Traction compression (N/m) |        |        | Torsion (N/rad) | Flexion (N/rad) |                 |
|    | Nœud RE                        | $10^9$                     | $10^9$ | $10^9$ | 0               | $10^4$          | $10^4$          |
|    | Nœud RS                        | $10^9$                     | $10^9$ | $10^9$ | $10^{15}$       | $10^4$          | $10^4$          |

Dans ce qui suit, un modèle d'amortissement de Rayleigh est utilisé en considérant la matrice de raideur moyennée sur une période d'engrènement. La matrice d'amortissement est donc constante au cours du temps et s'exprime comme une combinaison linéaire des matrices masses (coefficient a) et raideur moyenne (coefficient b). Les deux coefficients de proportionnalité a et b sont donnés dans le Tableau 4-6 et sont identiques quelle que soit la géométrie considérée.

Tableau 4-6 : Coefficients d'amortissement.

| Coefficients | a    | b |
|--------------|------|---|
|              | 1500 | 0 |

#### 4.2.2 Portées

La fonction 2, présentée dans le chapitre II, a été utilisée pour modéliser le comportement dynamique d'engrenage spiro-conique à faible vitesse de rotation du pignon (1 t/mn). Les résultats obtenus sont comparables avec ceux issus des calculs statiques du logiciel ASLAN. A gauche de la Figure 4-4, les portées statiques fournies par le logiciel ASLAN sont représentées par la fonction 1 et à droite de cette figure, se trouvent les portées calculées par le modèle local à faible vitesse de rotation du pignon (fonction 2).

Pendant une période d'engrènement, la ligne de contact se déplace sur la denture. Sur chaque carreau du maillage du flanc de denture, est porté le maximum de la pression durant tout l'engrènement afin de visualiser « les portées sous charge ». Elles sont représentées pour les résultats du logiciel ASLAN et dans le cas du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon.

Les lignes continues en bleu sur la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**3 représentent les ords de la denture du pignon et de la roue tandis que la ligne en pointillé correspond à la ligne primitive. L'abscisse se rapporte à la largeur de denture et l'ordonnée à sa hauteur. Le point noir indique la position du maximum de la pression. La pression est faible au bord de denture et le maximum de pression se situe au milieu de portée.

Comparées aux portées statiques du logiciel ASLAN, les variations de pression calculées par le modèle dynamique local montrent la même tendance et le point du maximum de pression est identique. Le maximum de pression du modèle dynamique local est de 1992 MPa, alors qu'il est de 2023 MPa avec ASLAN (soit 1.5% d'écart).

#### 4.2.3 Raideur d'engrènement

La Figure 4-3 montre les variations de la raideur d'engrènement en fonction du temps pendant une période d'engrènement. L'abscisse varie de zéro à un avec  $\tau$  : le temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement. La courbe bleue correspond à la somme des raideurs distribuées utilisées dans les modèles dynamiques tandis que la courbe en rose montre l'évolution de la raideur d'engrènement calculée par le logiciel ASLAN. Cette raideur globale est calculée à partir du rapprochement des corps. Il existe donc un décalage entre ces deux raideurs d'engrènement qui se situe entre  $1.4 \times 10^8$  N/m et  $2.1 \times 10^8$  N/m.

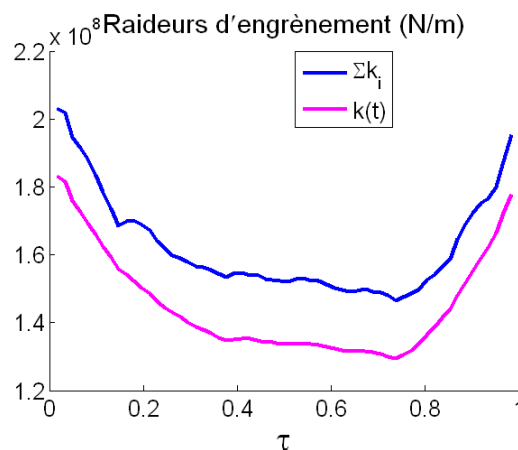


Figure 4-3: Raideur d'engrènement d'engrenage Gleason optimisé 2

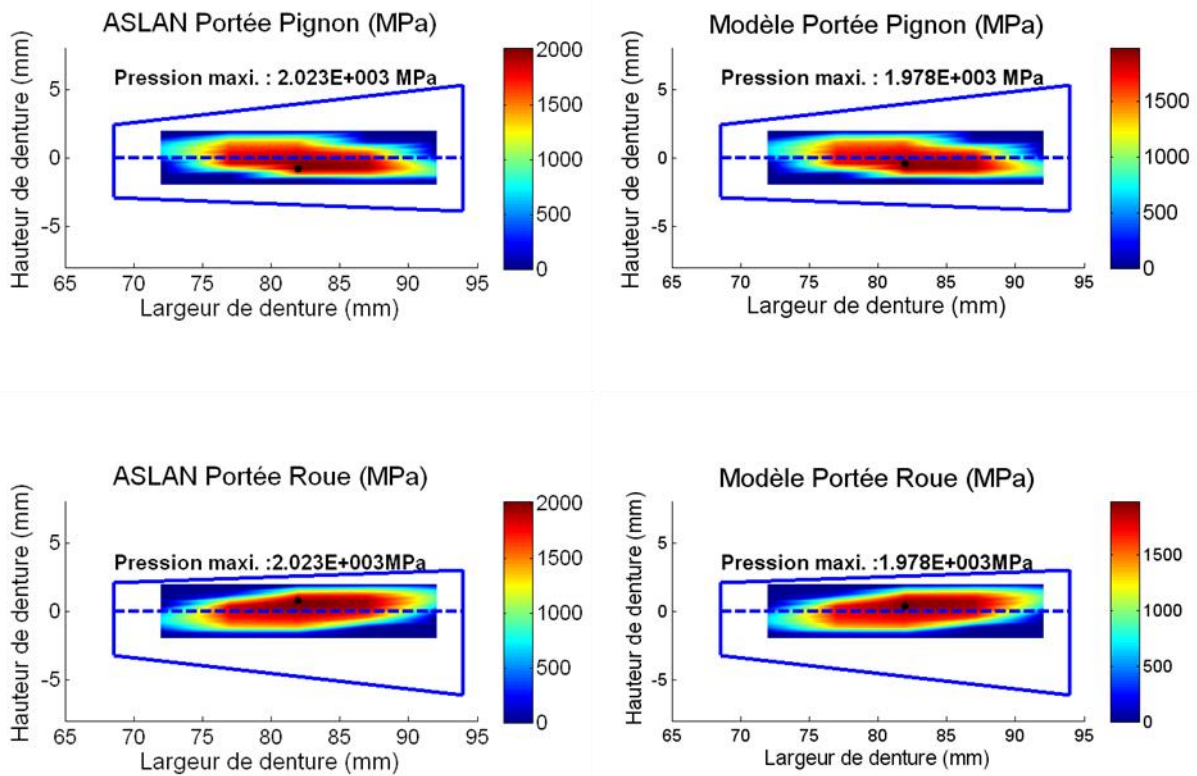


Figure 4-4 : Portées ASLAN et du modèle dynamique à la faible vitesse pour l'engrenage Gleason 2.

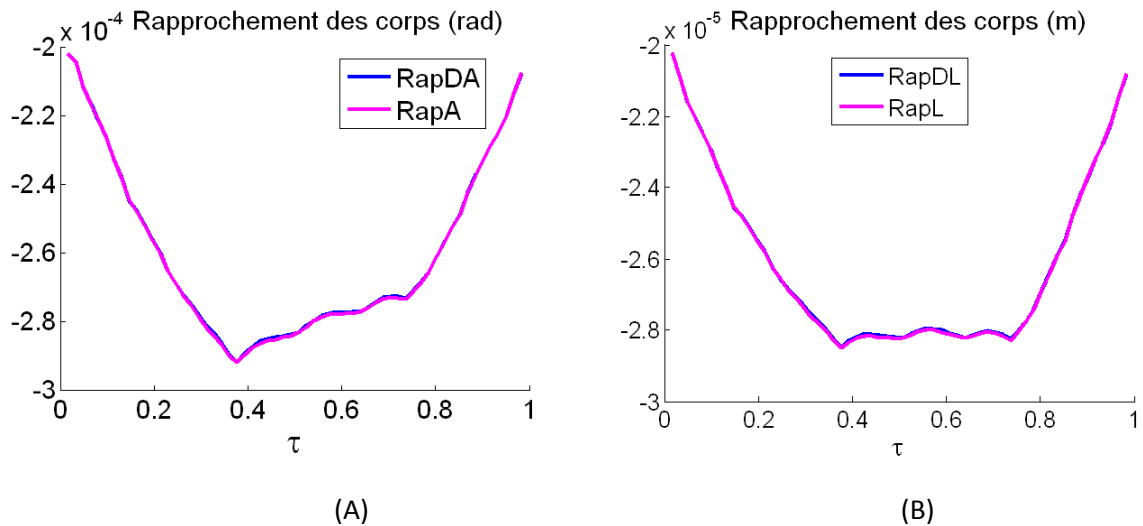
#### 4.2.4 Erreurs de transmission

Dans la Figure 4-5, la première ligne montre les rapprochements des corps pendant une période d'engrènement et la deuxième ligne représente les erreurs de transmission. Les images A et C sont respectivement le rapprochement des corps et l'erreur de transmission en radians, tandis que dans les images B et D ces quantités sont exprimées en mètres.

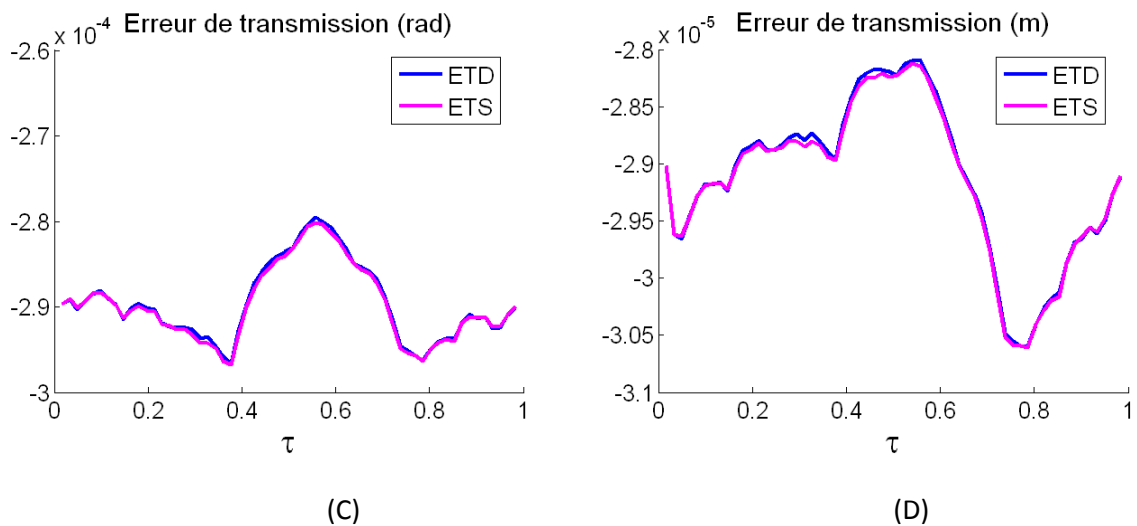
Les courbes bleues sont les résultats du modèle dynamique local et les courbes roses représentent ceux du logiciel ASLAN. Les rapprochements des corps en valeurs angulaires et linéaires ainsi que les erreurs de transmission angulaire et linéaire du modèle dynamique local sont pratiquement identiques aux valeurs obtenues par le logiciel ASLAN.

Les erreurs de transmission Figure 4-5(C) varient autour  $2.9 \times 10^{-4}$  radians et  $2.9 \times 10^{-5}$  mètres dans le cas de l'engrenage Gleason 2, dans le cas sans arbre et sans défaut de montage.





- RapDA : rapprochements des corps angulaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapA : rapprochements des corps angulaire de ASLAN.
- RapDL : rapprochements des corps linéaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapL : rapprochements des corps linéaires de ASLAN.



- ETD : erreurs de transmission angulaire et linéaire du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- ETS : erreurs de transmission angulaire et linéaire de ASLAN.

Figure 4-5 : Erreur de transmission sous charge quasi-statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason 2

#### 4.2.5 Force dynamique

La Figure 4-6 illustre les forces d'engrènement globales pendant une période d'engrènement. La courbe bleue présente les forces d'engrènement calculées par le modèle dynamique local à faible vitesse de rotation du pignon. La courbe rose montre les forces d'engrènement du logiciel ASLAN. Les deux courbes sont très proches. Elles varient entre 3650N et 3850N et la moyenne est d'environ 3750N.

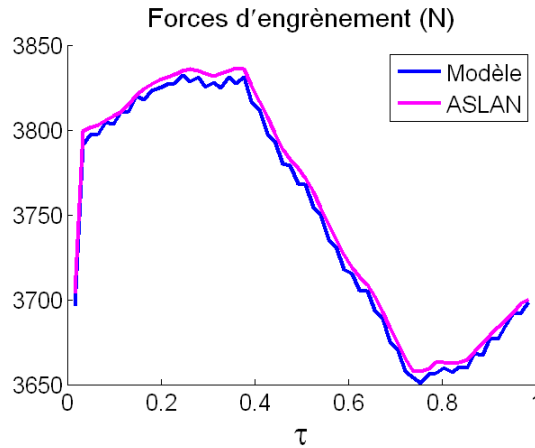


Figure 4-6 : Force d'engrènement statique d'ASLAN et du modèle dynamique à la faible vitesse de rotation du pignon d'engrènement Gleason optimisé 2.

#### 4.2.6 Coefficients dynamiques

Le Tableau 4-7 montre les fréquences propres exprimées en tr/min sur le pignon et en Hz, pour lesquelles les pourcentages d'énergie de déformation stocké dans les dentures (paramètre  $\chi_i$ ) sont les plus importants pour le modèle local et le modèle global dans la situation sans arbre et sans défaut de montage.

Tableau 4-7 : Fréquences propres et rapports  $\chi_i$  des modèles dans la situation A

| Modèles       | Fréquences propres (tr/min) | Fréquences propres (Hz) | Rapports $\chi_i$ |
|---------------|-----------------------------|-------------------------|-------------------|
| Modèle local  | 10752                       | 2509                    | 67%               |
|               | 43267                       | 10096                   | 14%               |
|               | 17712                       | 4133                    | 11%               |
| Modèle global | 10761                       | 2511                    | 67%               |
|               | 43270                       | 10096                   | 14%               |
|               | 17714                       | 4133                    | 11%               |

En se basant sur les fréquences du Tableau 4-7 avec le maximum d'énergie de déformation modale dans les dentures, il est possible d'obtenir un diagramme de Campbell comme représenté sur la Figure 4-7. Deux valeurs propres seulement sont conservées, les effets gyroscopiques n'étant pas

considérés, elles n'évoluent pas en fonction de la vitesse de rotation. En terme d'excitation, nous ne considérons à ce stade que la fondamentale et la première harmonique de la fréquence d'engrènement. Les intersections entre les courbes représentant les excitations d'une part et les valeurs propres d'autre part, conduisent aux vitesses critiques de dentures potentielles. D'après cette analyse, les vitesses de rotation potentiellement dangereuses pour l'engrènement se situent vers 11 000, 9000 et 5500 tr/mn. En parallèle, les coefficients dynamiques obtenus par intégration numérique pour les modèles locaux et globaux sont portés sur la Figure 4-8. On constate que les pics de réponse dynamique correspondent bien aux fréquences mises en évidence par le diagramme de Campbell. Par ailleurs, les deux modèles dynamiques locaux et globaux donnent des résultats très proches dans ce cas avec quelques légers décalages d'amplitude en fonction du type de termes forcés (basés sur les erreurs de transmission) retenu.

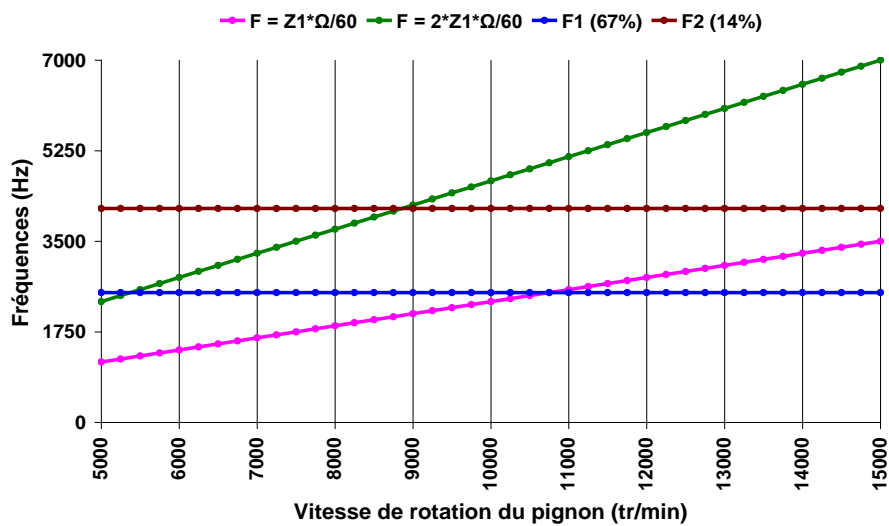
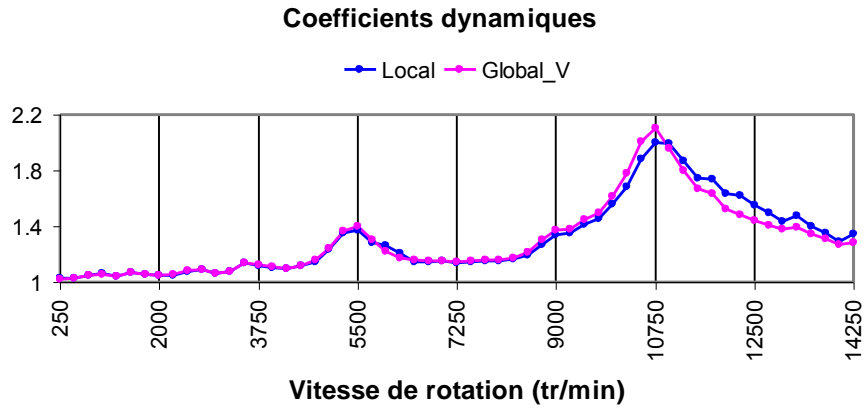
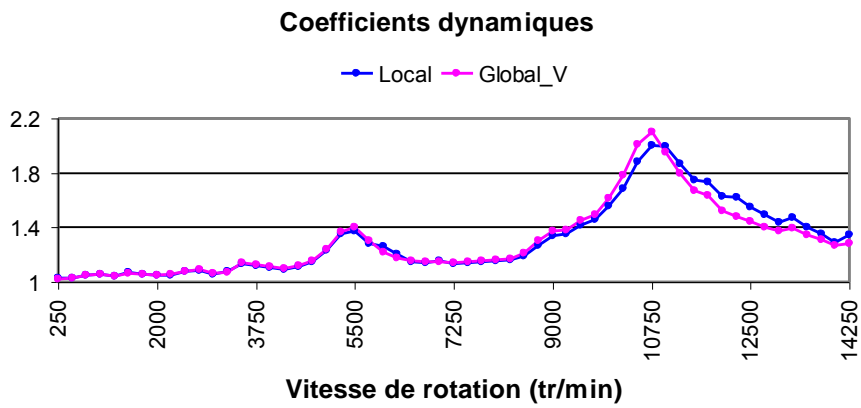


Figure 4-7 : Schéma Campbell pour l'engrènement Gleason 2.

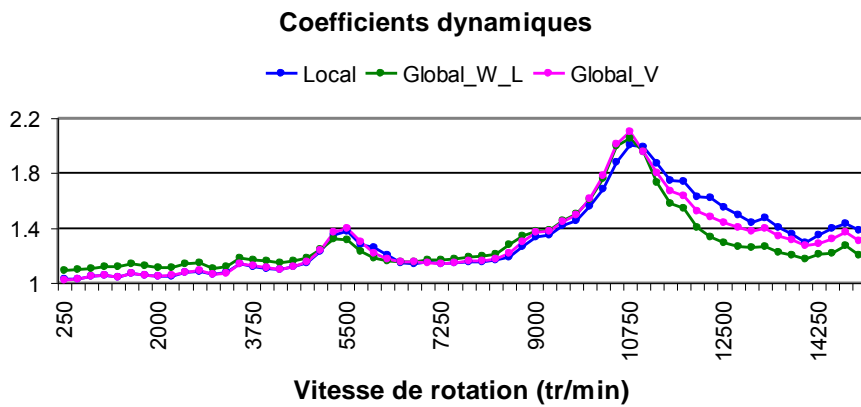


(A) - Global\_V : le premier modèle global.

(A)



(B)



(C)

Global\_W\_A : le deuxième modèle global ; Global\_W\_L : le troisième modèle global.

Figure 4-8 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique local et du modèle dynamique global d'engrenage Gleason 2.

## 4.3 ENGRENAGE SPIRO-CONIQUE DE LA BIBLIOGRAPHIE

### 4.3.1 Géométrie d'engrenage

Les modèles dynamiques sont ensuite testés sur un exemple d'engrenage spiro-conique étudié par Simon [95-100]. Cet engrenage est de type Gleason et ses paramètres sont listés dans le Tableau 4-8. Le jeu de battement n'étant pas fourni dans les références, une valeur raisonnable de 0.1mm a été retenue. De même, les profondeurs du cône sous la dent ont été directement calculées par le logiciel ASLAN.

Les calculs n'ont été menés que dans le cas d'arbres très courts. Les conditions limites sont exactement les mêmes que pour le cas de l'engrenage Gleason 2 précédent. Le Tableau 4-8 ci-dessous recense les caractéristiques massiques et inertielles du système étudié.

Tableau 4-8 : Paramètres entrés dans les modèles dynamiques.

|  |           |
|--|-----------|
| Moment polaire d'inertie du pignon ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )  | 0.0002225 |
| Moment polaire d'inertie de la roue ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ) | 0.049     |
| Moment d'inertie du pignon ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )          | 0.0003424 |
| Moment d'inertie de la roue ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )         | 0.025     |
| Masse du pignon (kg)   | 0.7       |
| Masse de la roue (kg)  | 5.783     |

### 4.3.2 Portées et erreurs de transmission :

La distribution des pressions obtenues par Simon [98] est représentée sur la Figure 4-9 tandis que les résultats correspondant issus de l'analyse quasi-statique par le code ASLAN sont donnés dans la Figure 4-10. Les comparaisons entre les résultats montrent que les maxima de pression obtenus par Simon et ASLAN sont différents (le maximum calculé par Simon est inférieur) ce qui pourrait s'expliquer par des approches divergentes en ce qui concerne la prise en compte des effets de bord. Toutefois, les distributions de pressions (à l'exception des points de pression maximale) sont voisines. Le modèle dynamique local à basse vitesse de rotation reproduit fidèlement les tendances fournies par ASLAN avec des maxima de pression très proches  $2.257^E+3$  MPa et  $2.138^E+3$  MPa respectivement. Le bon accord entre le code ASLAN et le modèle dynamique se retrouve dans les courbes d'erreurs de transmission de la Figure 4-11.

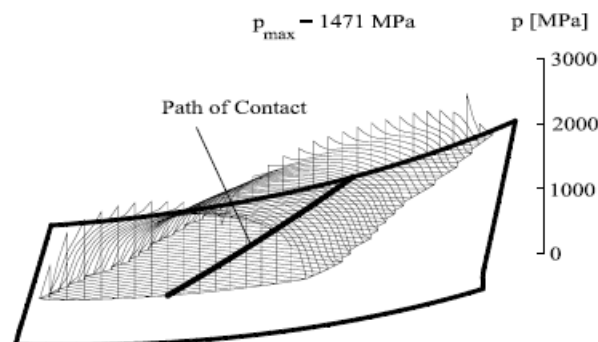


Figure 4-9 : Portées de la modélisation de Simon [98].

Tableau 4-9 : Paramètres dans les articles de V. Simon [95-100].

|  | Paramètres dans les articles de Simon [95-100] | Paramètres dans ASLAN |
|--|--|-----------------------|
| Nombre de dents du pignon                    | 13   | 13                    |
| Nombre de dents de la roue                   | 50   | 50                    |
| Module (mm)                                  | 5  | 5                     |
| Diamètre extérieur de la roue (mm)           | 251.224  | 251.224               |
| Largeur de dent (mm)                         | 30   | 30                    |
| Angle de la spirale (°)                      | 35   | 35                    |
| Offset (mm)                                  | 0  | 0                     |
| Jeu de battement (mm)                        | ?  | 0.1                   |
| Coefficient de saillie                       | 0.8526   | 0.8526                |
| Coefficient de creux                         | 1.0526   | 1.0526                |
| Angle d'addendum (°)                         | 1.522  | 1.522                 |
| Angle de dedendum (°)                        | 4.6545   | 4.6545                |
| Profondeur du cône sous dent de la roue (mm) | ?  | 18.5                  |
| Profondeur du cône sous dent du pignon (mm)  | ?  | 4.8                   |
| Déport (mm)                                  | 0.361  | 0.361                 |
| Correction d'épaisseur (mm)                  | ?  | 0.0646                |
| Sens de la spirale                           | LH   | LH                    |
| Sens de rotation                             | Trigo  | Trigo                 |
| Module d'Young (Pa)                          | $2.1 \times 10^{11}$                           |                       |
| Poisson                                      | 0.3  |                       |
| Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )         | 7860   |                       |

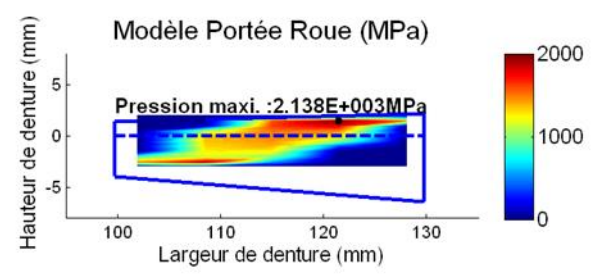
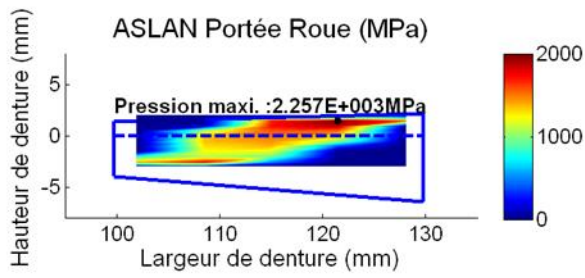
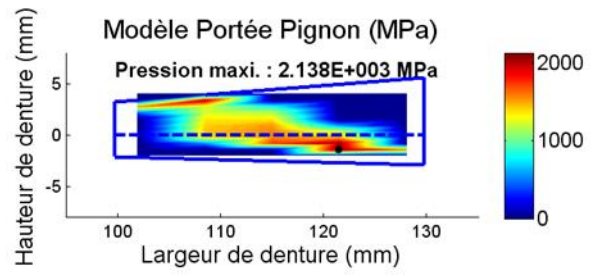
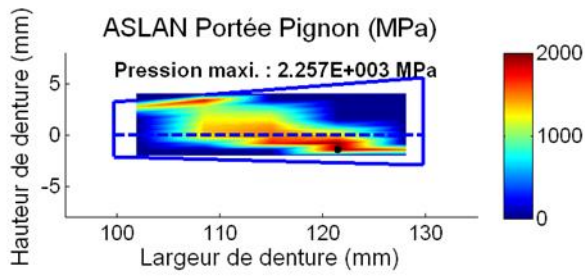
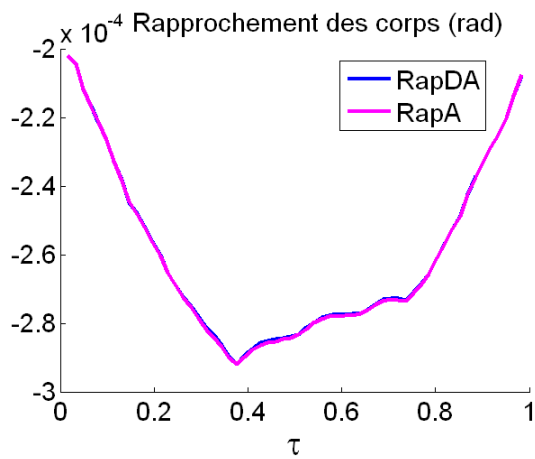
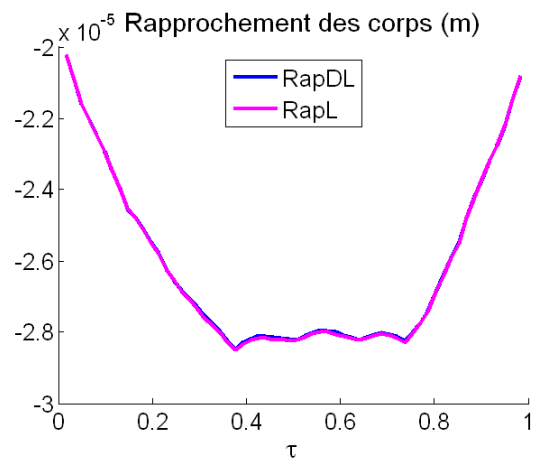


Figure 4-10 : Portées d'ASLAN et du modèle dynamique local à basse vitesse de rotation du pignon.

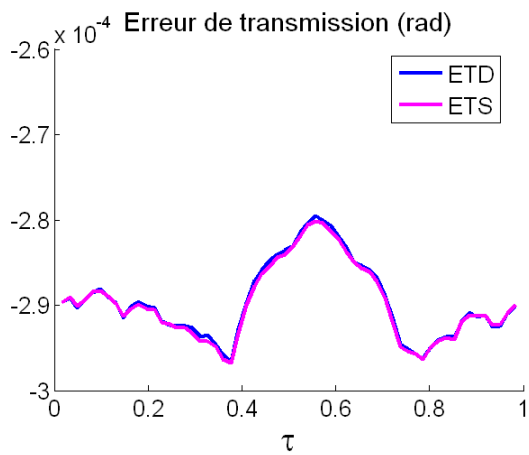


(A)

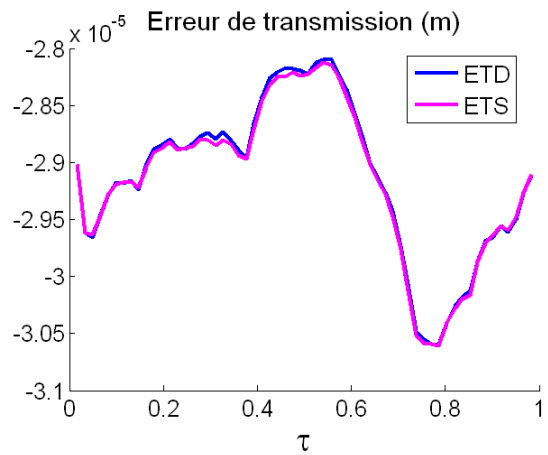


(B)

- RapDA : rapprochements des corps angulaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapA : rapprochements des corps angulaire d'ASLAN.
- RapDL : rapprochements des corps linéaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapL : rapprochements des corps linéaires d'ASLAN.



(C)



(D)

- ETD : erreurs de transmission angulaire et linéaire du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- ETS : erreurs de transmission angulaire et linéaire d'ASLAN.

Figure 4-11 : Rapprochements des corps angulaires et linéaires et erreurs de transmission sous charge angulaire et linéaires.



### 4.3.3 Coefficients dynamiques

Le schéma de Campbell (Erreur ! Source du renvoi introuvable.) conduit pour ce cas aux vitesses potentiellement critiques sur le pignon de: 5 000 tr/min, 7 000 tr/min, 7 250 tr/min, 9 500 tr/min, 9 750 tr/min, 10 000 tr/min, 14 250 tr/min, 14 500 tr/min, 14 750 tr/min... Sur la Figure 4-13 sont portées les courbes de coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation du pignon issues du modèle dynamique local et des trois types de modèle global. Les figures A et C montrent les maxima des coefficients dynamiques localisés à 9 750 tr/min (modèle local) et 10 000 tr/min (modèle global V, modèle global W\_L, modèle global W\_A). Selon la figure B, les amplitudes maximales des coefficients dynamiques se situent entre 1.6 et 1.7 pour le modèle local et le modèle global V conduisant donc à deux courbes dynamiques très proches. Enfin la figure D montre que les coefficients dynamiques du modèle global W\_L et du modèle global W\_A sont inférieurs aux coefficients dynamiques du modèle local à proximité de la vitesse critique (10 000 tr/min).

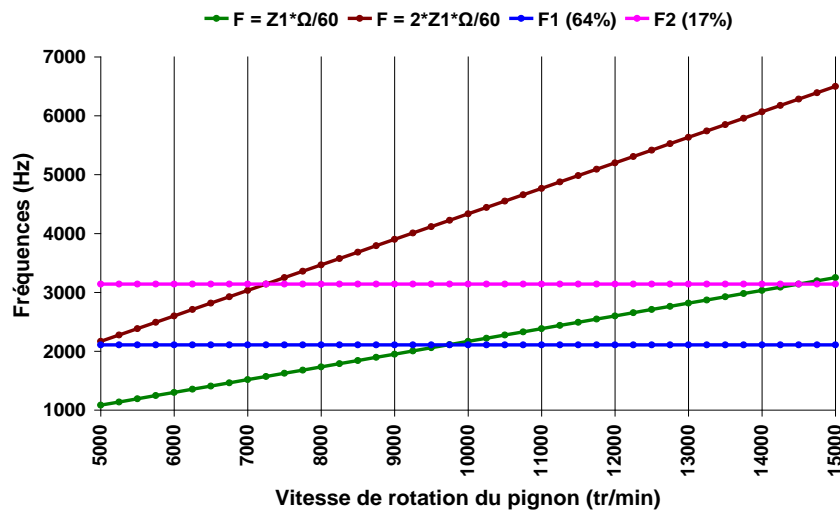
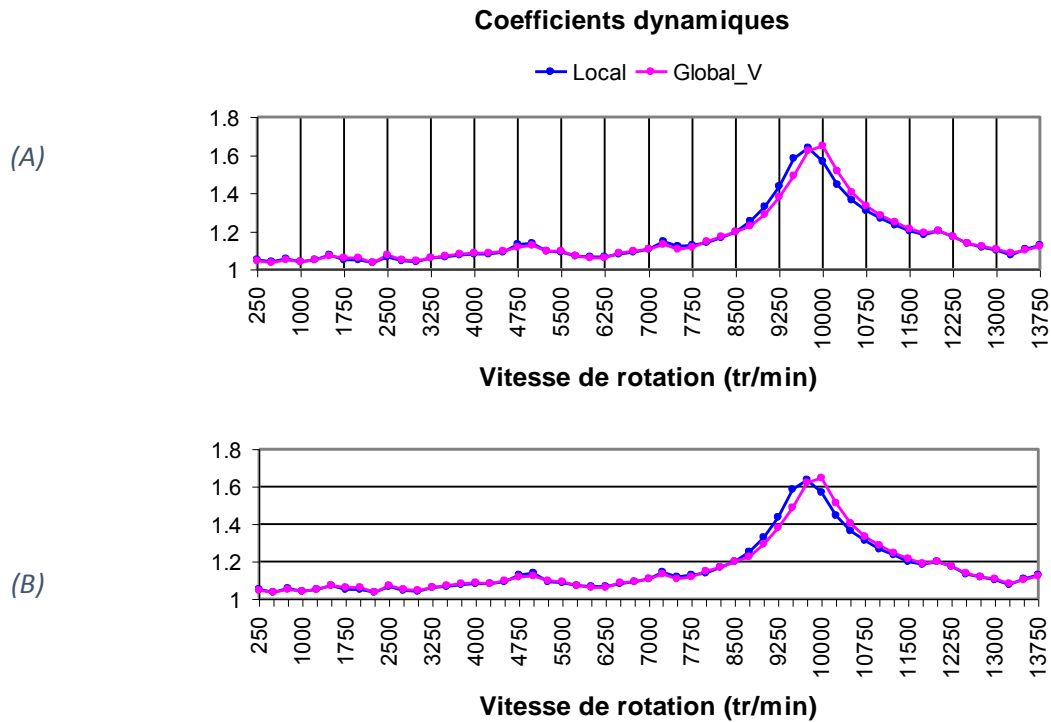
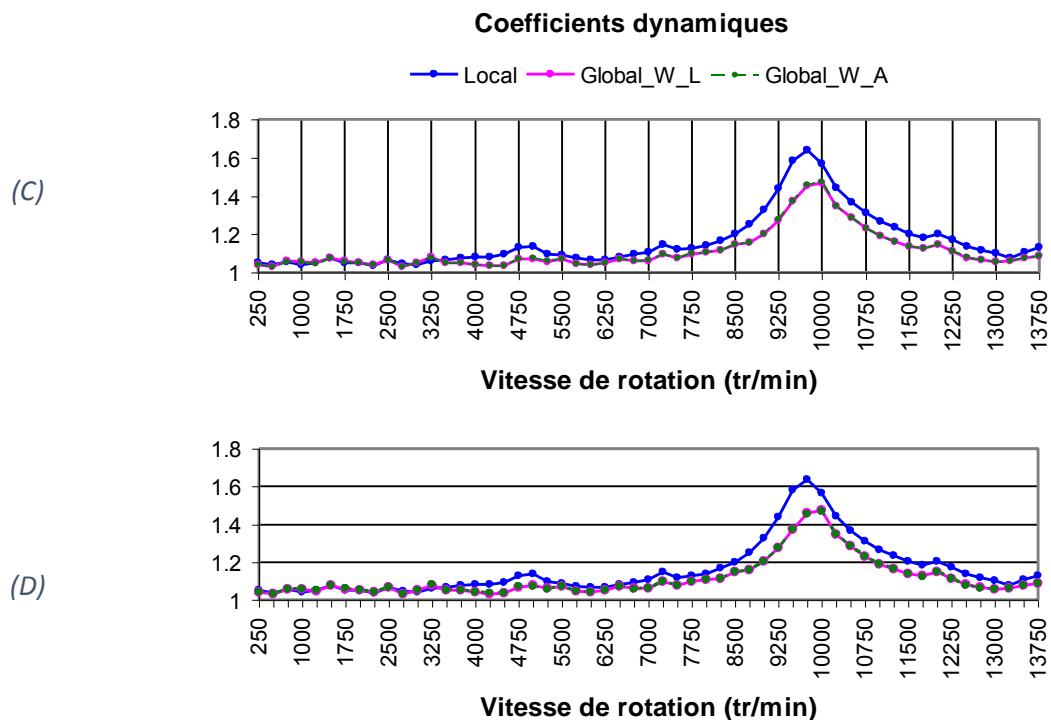


Figure 4-12 : Schéma de Campbell pour l'engrenage spiro-conique de Simon.



Global\_V : le premier modèle global.



Global\_W\_A : deuxième modèle global ; Global\_W\_L : troisième modèle global.

Figure 4-13 : Coefficient dynamique d'engrenage spiro-conique de Simon.

## **4.4 EXEMPLE D'ENGRENAGE CONCU AVEC LE LOGICIEL ASLAN**

### **4.4.1 Géométrie de l'engrenage**

Le

Tableau 4-11 recense l'ensemble des paramètres nécessaires à l'analyse quasi-statique pour un cas d'engrenage spiro-conique conçu grâce au logiciel ASLAN. Les paramètres d'entrée pour les modèles dynamiques sont listés dans le

Tableau 4-10. L'étude a été réalisée dans le cas sans défaut de montage et sans arbre. Les conditions aux limites sont identiques au cas de l'engrenage Gleason 2 (sans arbre) avec, toutefois, des raideurs de paliers selon les angles de flexion plus importantes afin de réduire les effets de porte à faux.

#### 4.4.2 Portée

Comme pour les deux autres géométries précédentes, les portées (Figure 4-14 à droite) du modèle dynamique local pour une vitesse de rotation du pignon très faible sont similaires aux portées de l'analyse quasi-statique d'ASLAN (Figure 4-14 à gauche) les maximums de pression sont également comparables :  $2.289^E+3$  MPa et  $2.385^E+3$  MPa.

Tableau 4-10 : Paramètres entrées d'engrenage dans les modèles dynamiques.

|  |          |
|--|----------|
| Moment polaire d'inertie du pignon ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )  | 0.001    |
| Moment polaire d'inertie de la roue ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ) | 0.074    |
| Moment d'inertie du pignon ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )          | 0.000861 |
| Moment d'inertie de la roue ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )         | 0.037    |
| Masse du pignon (kg)   | 1.589    |
| Masse de la roue (kg)  | 9.278    |

Tableau 4-11 : Paramètres de l'engrenage spiro-conique étudié.

|  | Géométrie étudiée par ASLAN |
|--|-----------------------------|
| Nombre de dents du pignon                    | 13                          |
| Nombre de dents de la roue                   | 50                          |
| Module                                       | 5                           |
| Diamètre extérieur de la roue (mm)           | 251.224                     |
| Largeur de dent (mm)                         | 30                          |
| Angle de la spirale (°)                      | 35                          |
| Offset (mm)                                  | 0                           |
| Jeu de battement (mm)                        | 0.1                         |
| Coefficient de saillie                       | 0.8526                      |
| Coefficient de creux                         | 1.0526                      |
| Angle d'addendum (°)                         | 1.522                       |
| Angle de dedendum (°)                        | 4.6545                      |
| Profondeur du cône sous dent de la roue (mm) | 18.5                        |
| Profondeur du cône sous dent du pignon (mm)  | 4.8                         |
| Déport (mm)                                  | 0.361                       |
| Correction d'épaisseur (mm)                  | 0.0646                      |
| Sens de la spirale                           | LH                          |
| Sens de rotation                             | Trigo                       |
| Module d'Young $E$ (Pa)                      | $2.1 \times 10^{11}$        |
| Coefficient de Poisson                       | 0.3                         |
| Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )  | 7860                        |

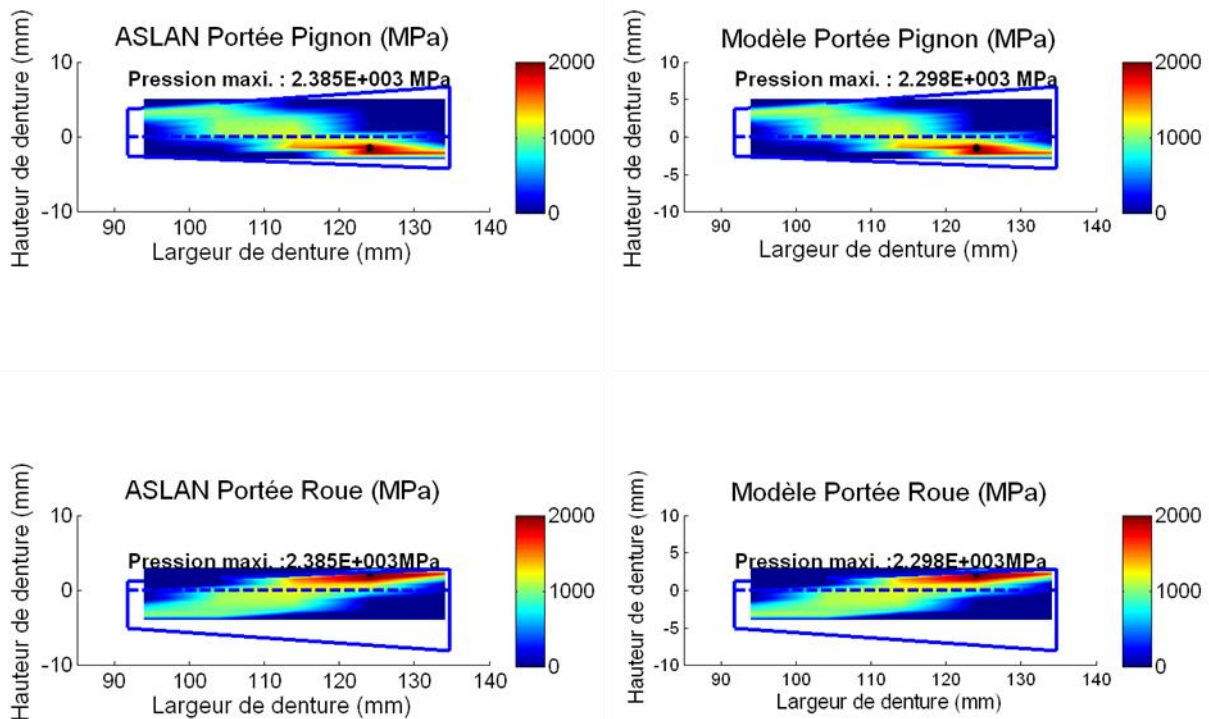


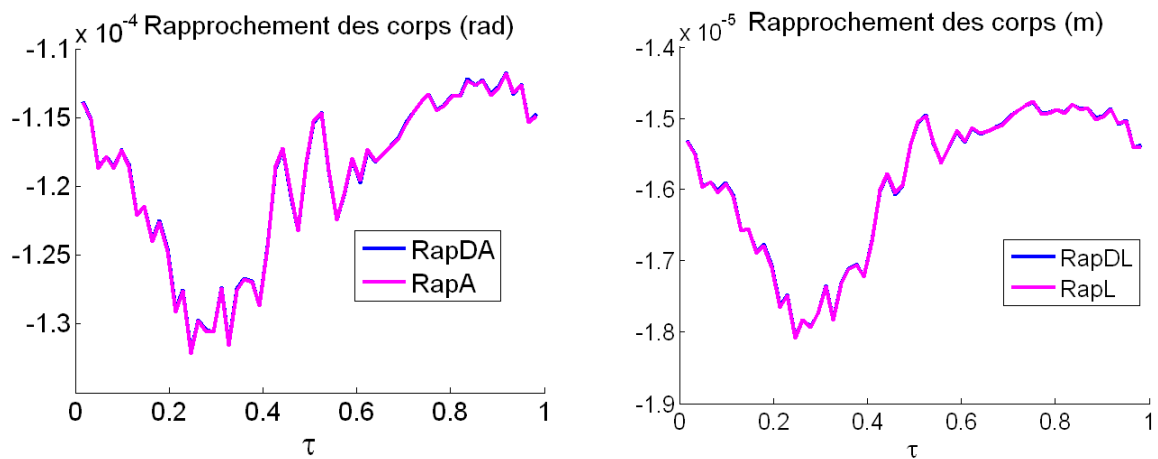
Figure 4-14: Portées pour un exemple d'engrenage.

#### 4.4.3 Erreurs de transmission

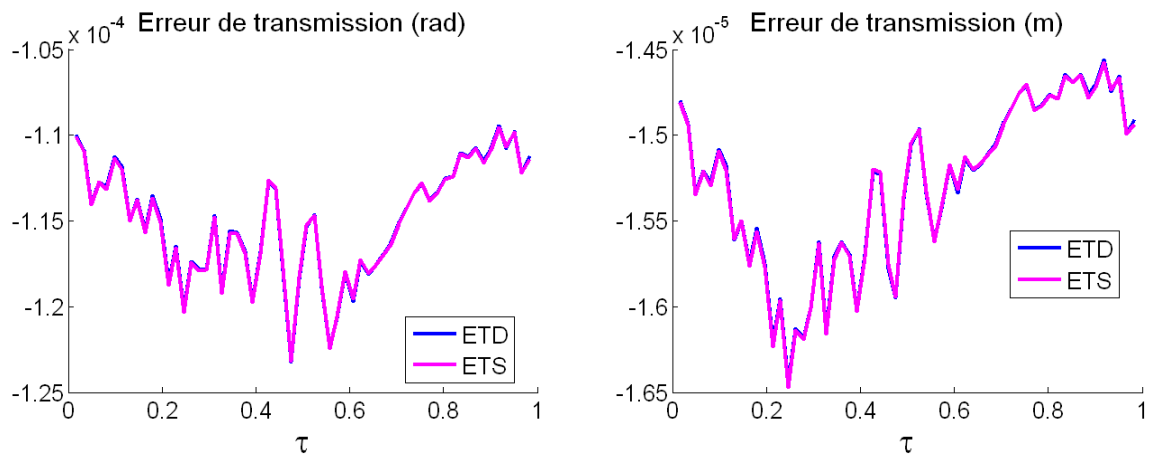
En comparant les rapprochements des corps angulaire et linéaire et les erreurs de transmission angulaire et linéaire (Figure 4-15) du modèle dynamique local à basse vitesse de rotation du pignon et de l'analyse quasi-statique de ASLAN, les résultats sont pratiquement identiques, comme les deux autres géométries.

#### 4.4.4 Coefficients dynamiques

Sur le schéma de Campbell (Figure 4-16), les principales fréquences potentielles sont retrouvées pour l'engrenage exemple : 5 250 tr/min, 5 500 tr/min, 7 500 tr/min, 7 750 tr/min, 8 000 tr/min, 10 500 tr/min, 10 750 tr/min, 11 000 tr/min, 12 750 tr/min etc. La Figure 4-17 présente les coefficients dynamiques du modèle dynamique local et des trois types de modèle global. Les figures A et C montrent les maximums des coefficients dynamiques localisés à 10 750 tr/min (modèle local) et 11 000 tr/min (modèle global V, modèle global W\_L, modèle global W\_A). Sur la figure B, les maximums des coefficients dynamiques sont d'environ 1.6 pour le modèle local et le modèle global V. Les deux courbes sont très proches. La courbe D montre que les coefficients dynamiques du modèle global W\_L et du modèle global W\_A sont un peu inférieurs aux coefficients dynamiques du modèle local, à proximité de la vitesse critique (11 000 tr/min), comme dans le cas de l'engrenage spiro-conique de Simon. Comme dans le cas de l'engrenage spiro-conique Gleason 2, les différences entre les coefficients dynamiques du modèle local et ceux des modèles globaux (deuxième et troisième modèle global) sont raisonnables. En effet, le comportement dynamique de l'engrenage spiro-conique à des vitesses plus hautes que la vitesse critique est compliqué : les erreurs de transmission statique sous charge en angulaire et en linéaire dans le sens tangentiel ne comprennent pas complètement la première force d'excitation.



- RapDA : rapprochements des corps angulaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapA : rapprochements des corps angulaire de ASLAN.
- RapDL : rapprochements des corps linéaires du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- RapL : rapprochements des corps linéaires de ASLAN.



- ETD : erreurs de transmission angulaire et linéaire du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.
- ETS : erreurs de transmission angulaire et linéaire de ASLAN.

Figure 4-15 : Erreur de transmission pour l'engrenage exemple.

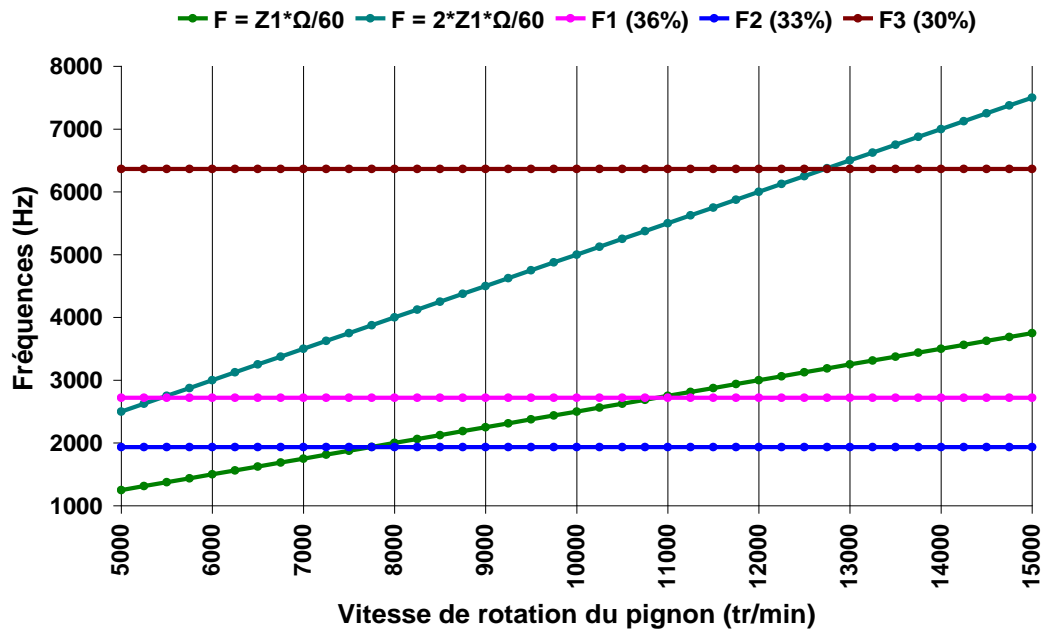
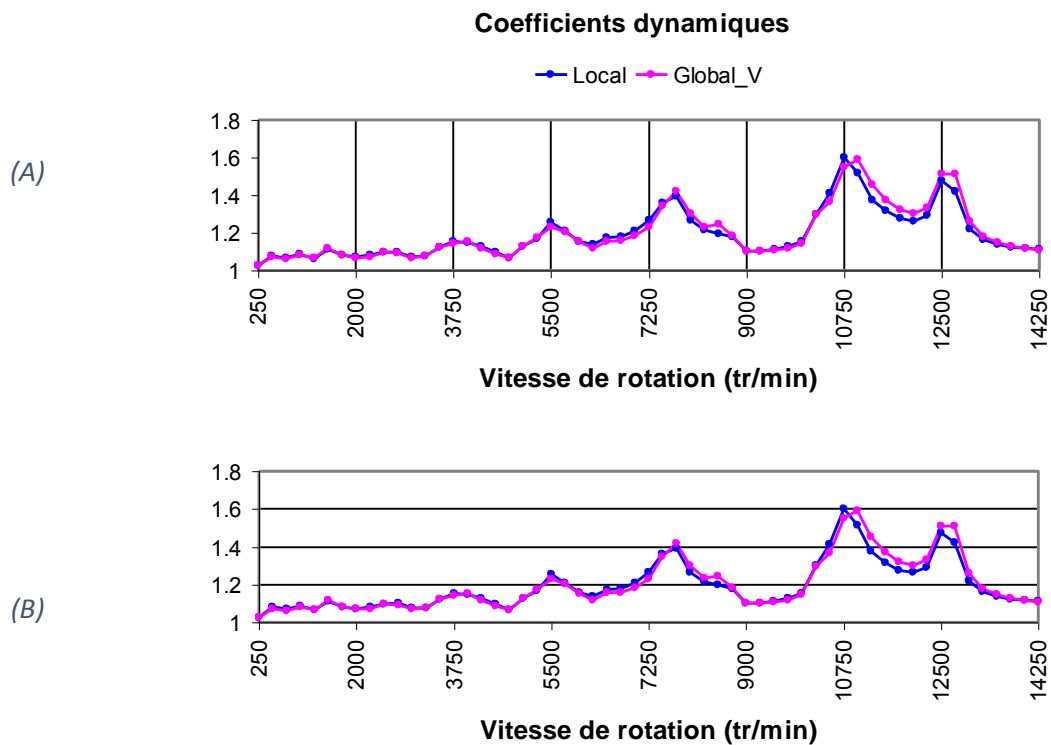


Figure 4-16 : Schéma de Campbell pour l'engrenage exemple.

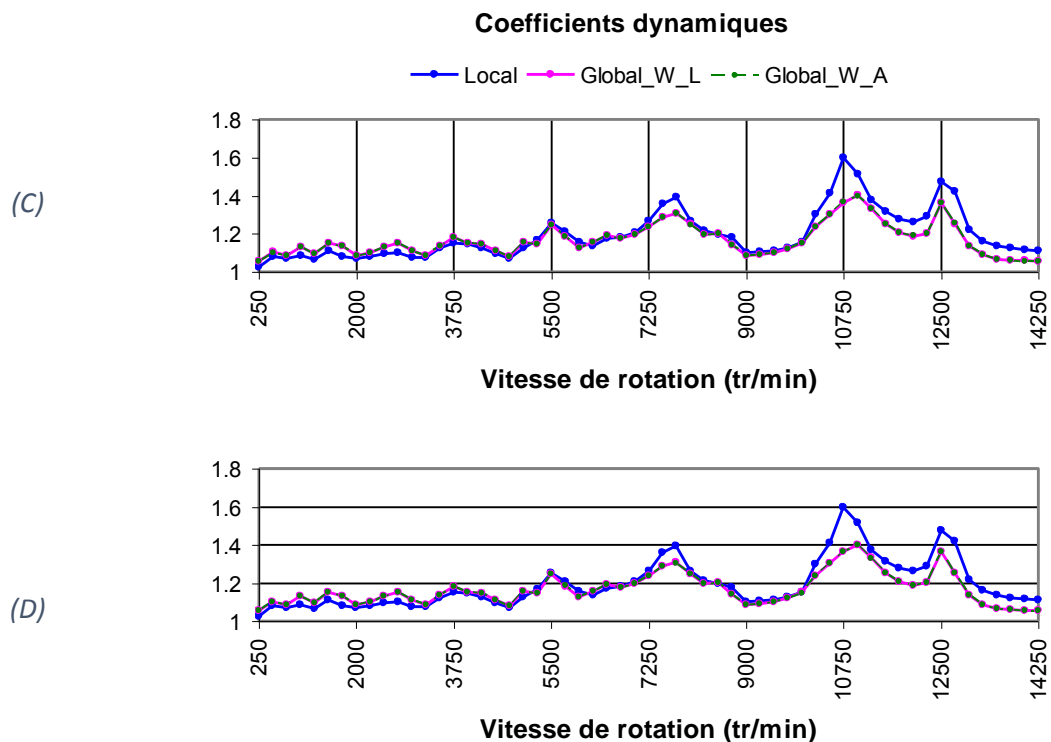
## 4.5 CONCLUSION

Deux variantes de modèles du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques ont été proposées : a) un modèle local décrivant les conditions de contact pour tous les points de discrétisation utilisés pour représenter les zones de contact instantanées sur les flancs de denture. Et b) un modèle s'appuyant sur des caractéristiques globales telles que les raideurs d'engrènement et erreurs de transmission quasi-statiques. Le modèle dynamique local a été validé en comparant ses résultats à faibles vitesses de rotation avec les résultats d'analyses quasi-statiques issus du logiciel ASLAN. Les portées, les forces d'engrènement et les erreurs de transmission du modèle dynamique local à basse vitesse de rotation sont en très bon accord. Le modèle global conduit à des courbes de réponse proches de celles obtenues par le modèle local avec quelques légères variations selon le modèle d'erreur de transmission retenu dans la formulation théorique. Les comparaisons avec les résultats de la littérature ne sont pas aisées car les résultats découlent de modèles dont certaines caractéristiques ne sont pas précisées (influence des effets de bords) ou bien s'appuient sur des géométries d'engrenages dont certains paramètres ne sont pas définis. Des comparaisons directes avec l'expérimentation s'avèrent donc nécessaires.





Global\_V : le premier modèle global.



Global\_W\_A : deuxième modèle global ; Global\_W\_L : troisième modèle global.

Figure 4-17 : Coefficients dynamiques pour l'engrenage exemple sans arbre sans défaut.

## 5 EXPLOITATION DES MODÈLES DYNAMIQUES

---

### 5.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'exploitation des modèles mis en place dans les chapitres précédents à des exemples de couples spiro-coniques représentatifs d'applications réelles. On s'attachera, en particulier, à l'analyse de l'influence des géométries d'engrenages et au rôle d'erreurs de montage inévitables en pratique. Dans un premier temps, un engrenage spiro-conique Gleason normalisé puis optimisé selon deux variantes (notées 1 et 2 par la suite) sera considéré. Les contributions des arbres seront ensuite analysées et une troisième géométrie d'engrenage sera étudiée. Enfin, l'influence de l'amortissement sera également abordée.

### 5.2 ENGRENAGES GLEASON NORMALISÉS ET OPTIMISÉS

Le but de l'optimisation conduite sur la géométrie Gleason standard était d'améliorer les caractéristiques statiques et dynamiques avec, en particulier, l'amélioration des portées sous charge sur les flancs de denture. Cette opération s'est concrétisée par des modifications de paramètres de taillage sensés conduire à des portées mieux centrées sur les flancs de denture que la géométrie standard.

#### 5.2.1 Portées sous charge

Les principaux paramètres géométriques des trois engrenages Gleason normalisés et optimisés sont donnés dans le chapitre III. La Figure 5-1 montre les portées obtenues pour les trois géométries considérées. Les deux figures en colonne A sont les portées pour l'engrenage Gleason normalisé. Les champs de pression selon la largeur et la hauteur de denture apparaissent comme clairement localisés aux bords des flancs sur le pignon et la roue avec des concentrations de charge très proches du pied du pignon et de la tête de la roue. En modifiant le déport, le coefficient de correction d'épaisseur de denture, le rayon d'outil et le rayon de tête du pignon (Tableau 5-1), une première modification dite 'optimisée version 1' a été proposée. Les résultats correspondants sont portés en colonne B, il en ressort que les portées sont davantage centrées sur les flancs de denture mais que les zones de contact demeurent limitées. Dans l'optique d'étendre cette zone de contact, les rayons d'outil du pignon et de la roue ont été modifiés afin de produire une portée plus allongée, conduisant ainsi à une version 2 de la denture Gleason. Les zones de chargement sont représentées dans la colonne C et l'on constate effectivement une amélioration des conditions de contact (portées centrées et zones de contact plus allongées avec un maximum de pression centré par rapport aux dentures).

#### 5.2.2 Force d'engrènement

Pour un régime de fonctionnement à très faible vitesse, les évolutions de l'effort d'engrènement calculé par le modèle dynamique local au cours d'une période d'engrènement sont représentées sur la Figure 5-2 (A : Gleason standard, B : optimisé version 1 et C : optimisé version 2) et comparées aux résultats fournis par le logiciel ASLAN. On constate que les évolutions de l'effort sont en excellent accord avec celles données par ASLAN et que la géométrie standard fait apparaître des oscillations à hautes fréquences qui sont l'image de conditions d'engrènement non optimales. Les deux autres versions présentent des efforts d'engrènement dont les variations sont beaucoup plus douces laissant à penser que les conditions de contact ont été effectivement améliorées, y compris pour un fonctionnement à hautes vitesses.

### 5.2.3 Erreur de transmission

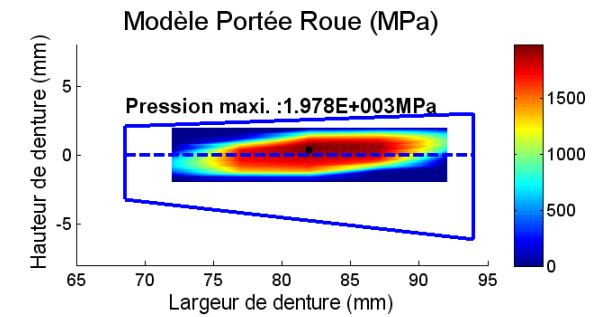
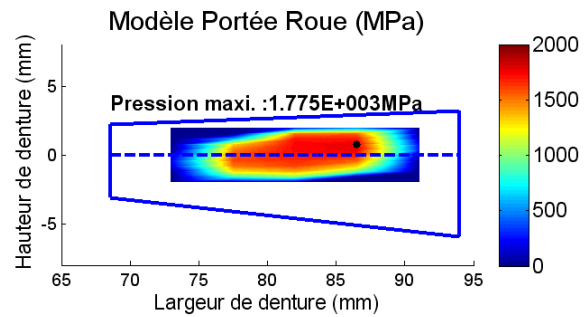
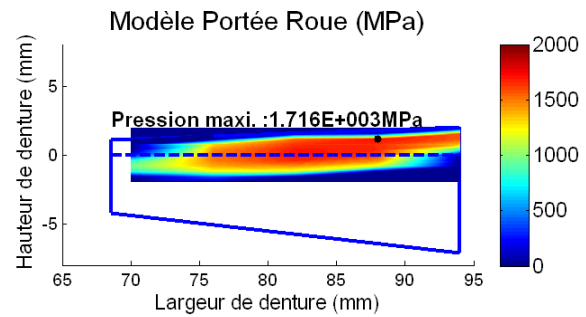
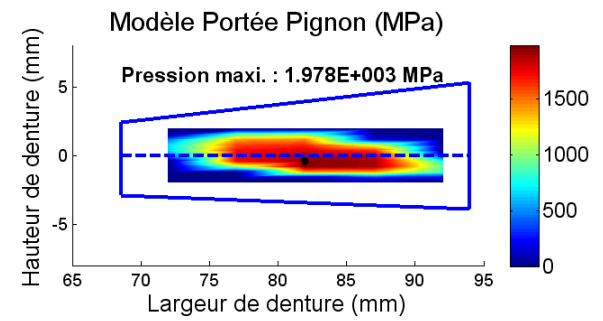
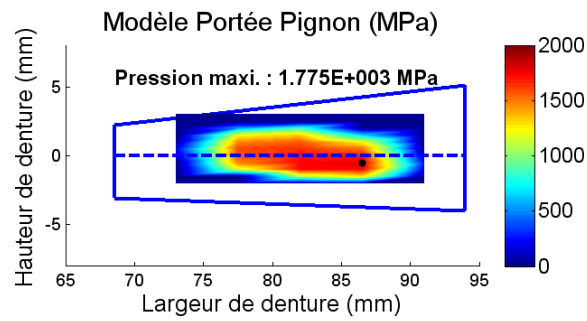
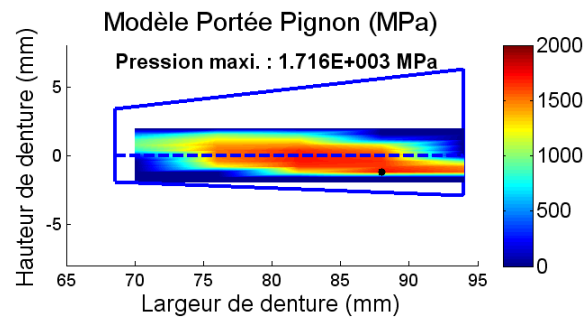
Les fluctuations d'erreurs de transmission sous charge sont portées sur la Figure 5-3 pour les trois géométries et présentent des évolutions temporelles similaires à celles des efforts d'engrènement. La comparaison avec ASLAN est excellente et l'engrenage Gleason standard apparaît effectivement comme moins performant en termes de qualité de transmission.

Tableau 5-1 : Paramètres différents pour les trois géométries d'engrenage Gleason Normalisé

| Paramètres                    | Gleason Normalisé | Gleason optimisé 1 | Gleason optimisé 2 |
|-------------------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Déport (mm)                   | 0.406             | 0.2                | 0.2                |
| Correction d'épaisseur (mm)   | 0.505             | 0                  | 0                  |
| Rayon d'outil du pignon (mm)  | 114.3             | 120                | 130                |
| Rayon d'outil de la roue (mm) | 114.3             | 120                | 130                |
| Rayon de tête du pignon (mm)  | 0.5               | 0.2                | 0.2                |
| Rayon de tête de la roue (mm) | 0.5               | 0.2                | 0.2                |

### 5.2.4 Coefficients dynamiques

Le coefficient dynamique est défini, dans ce qui suit, comme le rapport entre l'effort dynamique d'engrènement maximal et l'effort statique d'engrènement. La Figure 5-4 représente les évolutions des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation du pignon pour les trois variantes d'engrenage Gleason. L'engrenage normalisé présente une vitesse critique principale aux environs de 7500 t/mn avec quelques pics secondaires de faibles amplitudes vers 3750 et 10000 t/mn. La courbe de réponse pour la version optimisée 1 montre plusieurs pics avec un léger décalage vers les vitesses de rotation plus élevées. Enfin, la version optimisée 2 présente une vitesse critique principale très élevée (vers 11000 t/mn) et un pic secondaire à 5500 t/mn. Ce décalage des fréquences illustre la plus grande rigidité de contact obtenue avec des portées plus étendues sur les flancs actifs de dentures pour une géométrie globale relativement proche des deux autres configurations. D'une manière générale, les engrenages spiro-coniques considérés ne sont pas amenés à travailler à des vitesses aussi élevées et la version optimisée 2 paraît la meilleure sur l'ensemble de la plage de vitesses.



A

B

C

Figure 5-1 : Portées pour les trois géométries d'engrenage Gleason Normalisé

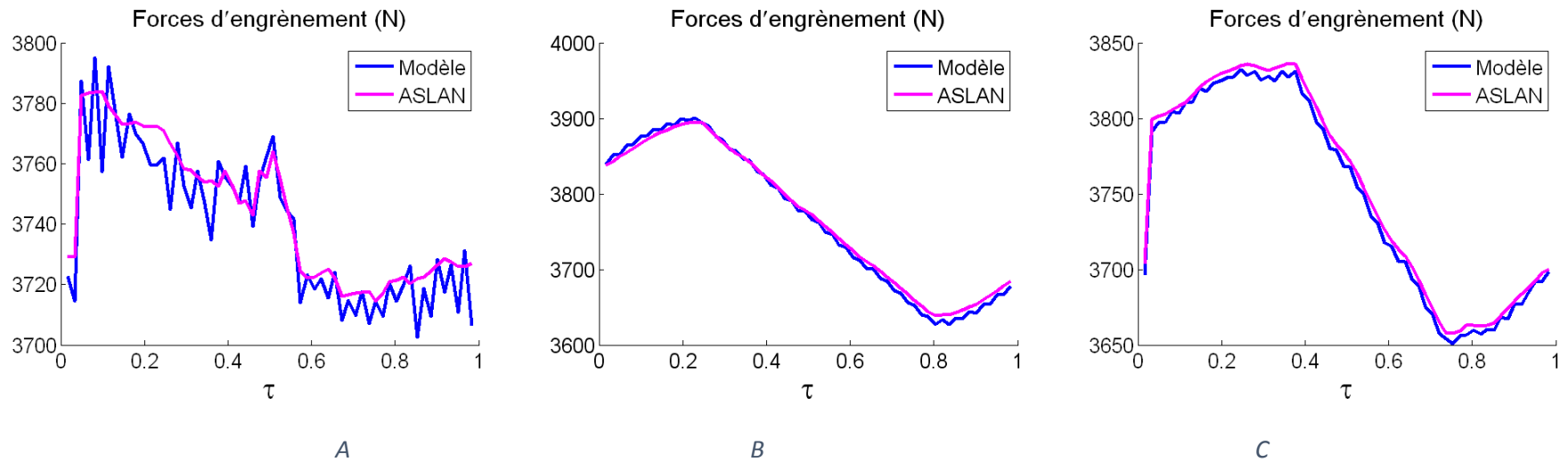


Figure 5-2 : Force statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon pour l'engrenage Gleason normalisé (A) et optimisé version 1 (B) et version 2 (C).

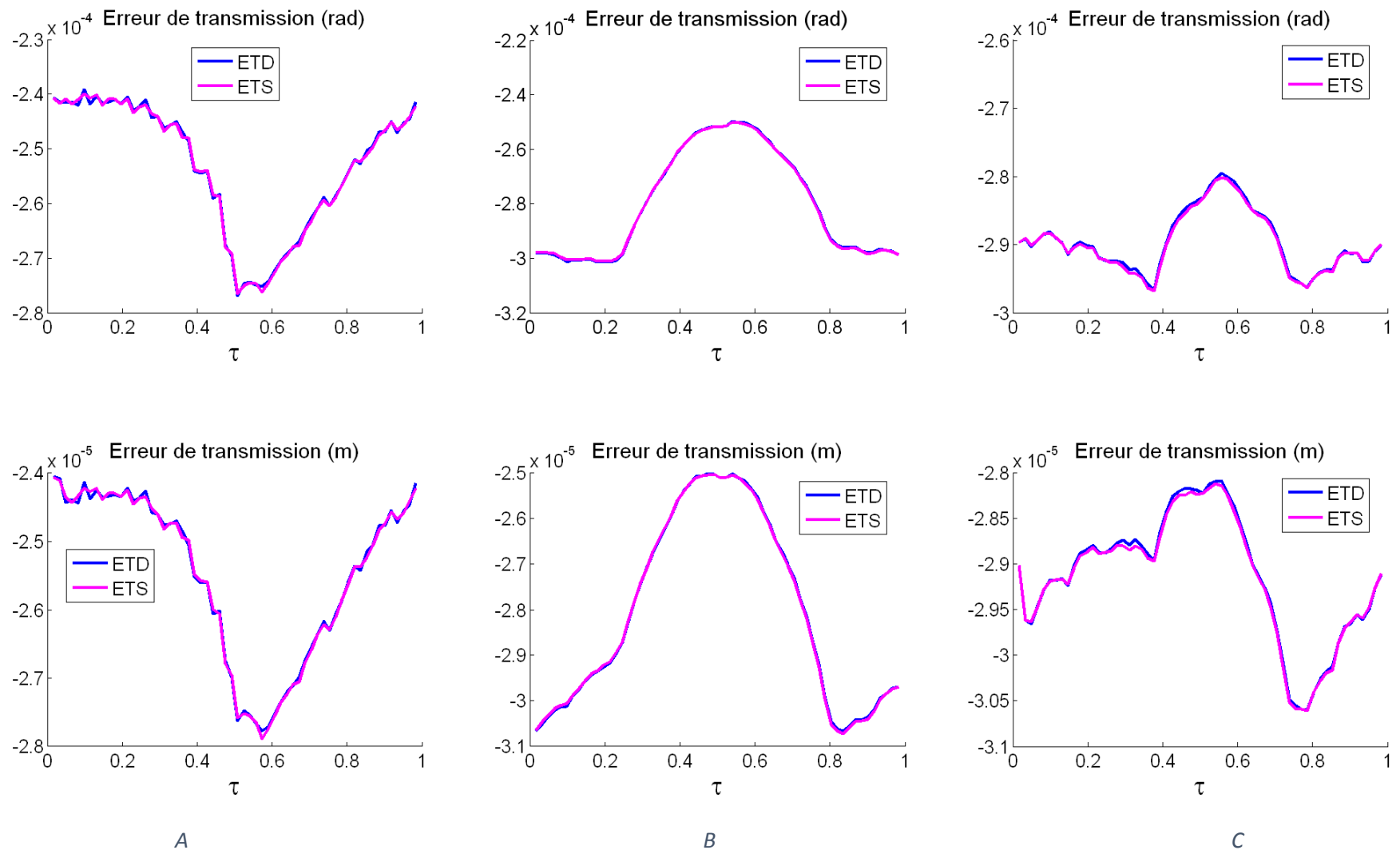


Figure 5-3 : Erreurs de transmission sous charge quasi-statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon pour l'engrenage Gleason normalisé (A) et optimisé version 1 (B) et version 2 (C).

## Coefficients dynamiques

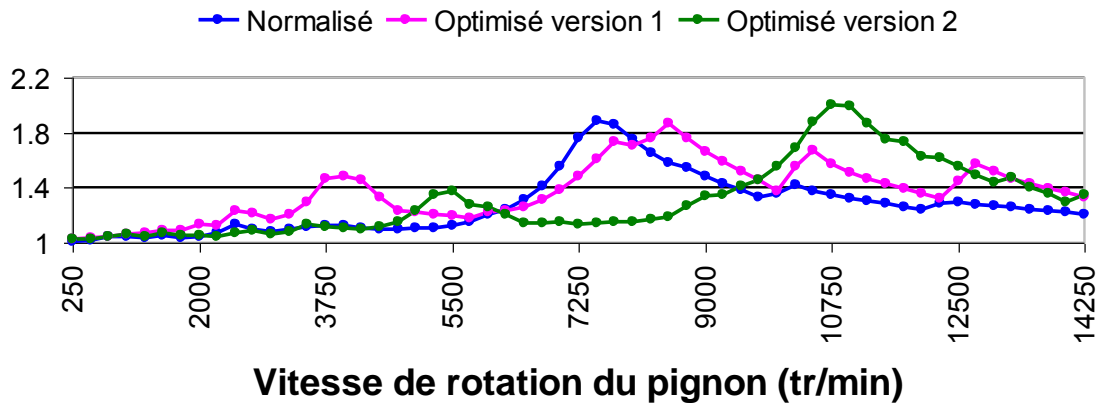


Figure 5-4 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique global d'engrenage Gleason normalisé, optimisé version 1 et optimisé 2.

### 5.3 ENGRENAGE GLEASON OPTIMISÉ AVEC DES ARBRES

La modélisation précédente est étendue à la prise en compte des arbres et paliers supportant les engrenages. Il a été montré dans le cas d'engrenages cylindriques que les effets de flexion-torsion des lignes d'arbres étaient susceptibles de modifier de manière significative les positions des vitesses critiques ainsi que les formes de réponses dynamiques. Dans ce paragraphe, seul l'engrenage Gleason optimisé version 2 est considéré. Comme représenté dans la Figure 5-5 et défini dans le Tableau 5-2, l'arbre du pignon possède un rayon de 15mm tandis que le rayon de l'arbre de roue est de 30 mm. Les longueurs sont égales à 110mm pour les deux axes ; les faces du pignon et de la roue sont respectivement positionnées à 80 et 30 mm des bords libres (côté sommet du cône) comme représenté Figure 5-5.

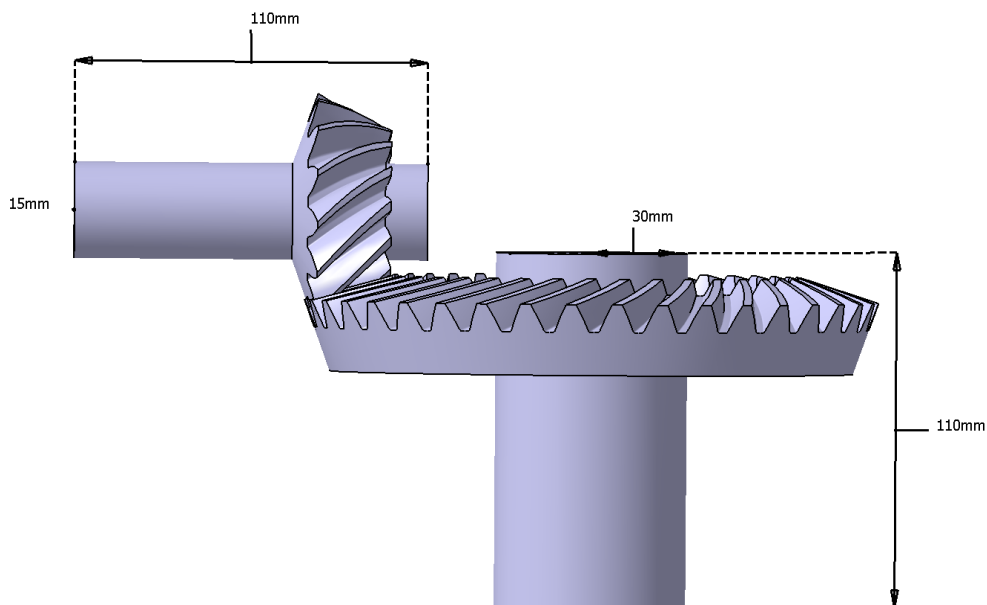


Figure 5-5 : Géométries des arbres dans la situation avec arbres.

Tableau 5-2 : Géométries des arbres entrées dans les modèles dynamiques.

| Arbres                |            | Longueur (mm) | Diamètre (mm) |
|-----------------------|------------|---------------|---------------|
| Arbres liés au pignon | Arbre PE-P | 80            | 30            |
|                       | Arbre P-PS | 30            |               |
| Arbres liés à la roue | Arbre RE-R | 80            | 60            |
|                       | Arbre R-RS | 30            |               |

Les conditions limites dans la configuration avec arbres sont précisées sur la Figure 5-6. Dans l'environnement CATIA, quatre points fixes sont posés en regard des extrémités d'arbres. Entre ces points fixes et les arbres, des raideurs concentrées sont introduites afin de simuler la présence de paliers ou d'un ensemble carter-paliers déformables (les valeurs de raideurs correspondantes sont précisées dans le Tableau 5-3).

Pour les simulations en régime quasi-statique avec le logiciel ASLAN, une raideur de torsion additionnelle a été ajoutée en sortie afin d'éviter les mouvements de corps rigides en cours d'analyse.

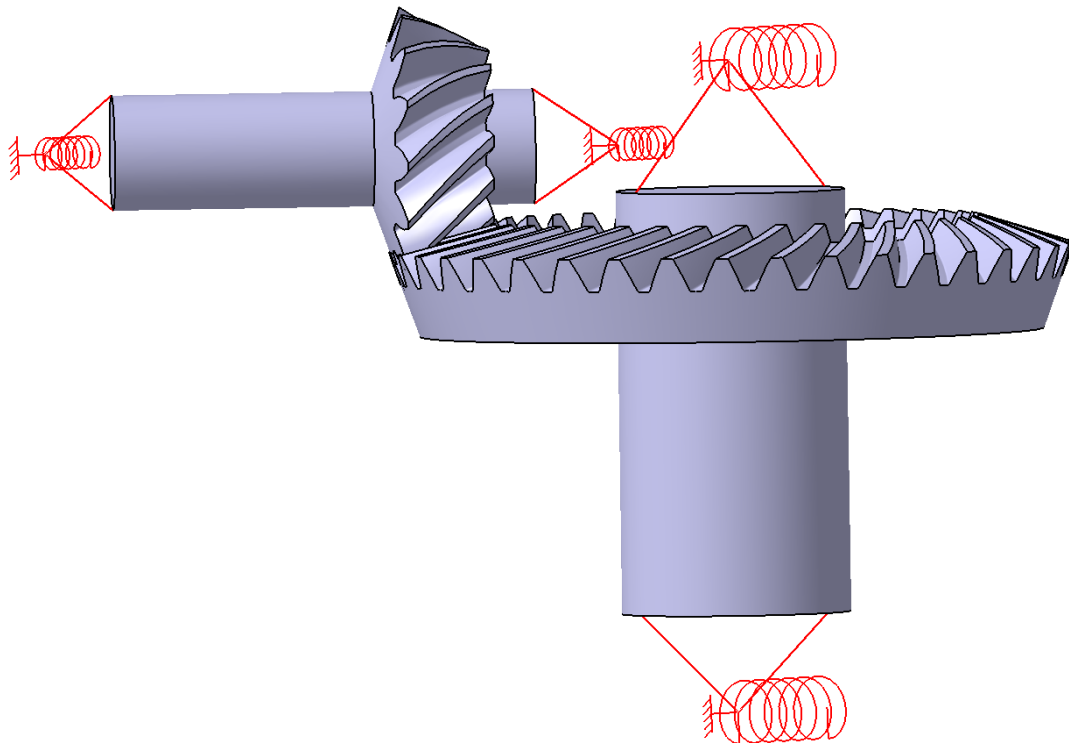


Figure 5-6 : Conditions limites dans ASLAN pour la configuration avec arbres.



Tableau 5-3 : Raideurs aux paliers des arbres.

|    | Nœuds de paliers du pignon     | Raideurs                   |        |        |                 |                 |                 |
|----|--------------------------------|----------------------------|--------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|
|    |                                | Traction compression (N/m) |        |        | Flexion (N/rad) |                 | Torsion (N/rad) |
| Ka | Nœud PE                        | $10^8$                     | $10^8$ | $10^8$ | $10^4$          | $10^4$          | 0               |
|    | Nœud PS                        | $10^8$                     | $10^8$ | $10^8$ | $10^4$          | $10^4$          | 0               |
|    | Nœuds de paliers du de la roue | Traction compression (N/m) |        |        | Torsion (N/rad) | Flexion (N/rad) |                 |
|    | Nœud RE                        | $10^8$                     | $10^8$ | $10^8$ | 0               | $10^4$          | $10^4$          |
|    | Nœud RS                        | $10^8$                     | $10^8$ | $10^8$ | $10^{15}$       | $10^4$          | $10^4$          |

### 5.3.1 Portée

La Figure 5-7 représente les portées obtenues en quasi-statique avec ASLAN et par le modèle dynamique local pour de faibles vitesses de rotation. Les distributions de pression sont très proches avec un écart de l'ordre de 0.6% sur la valeur maximale entre les deux modélisations.

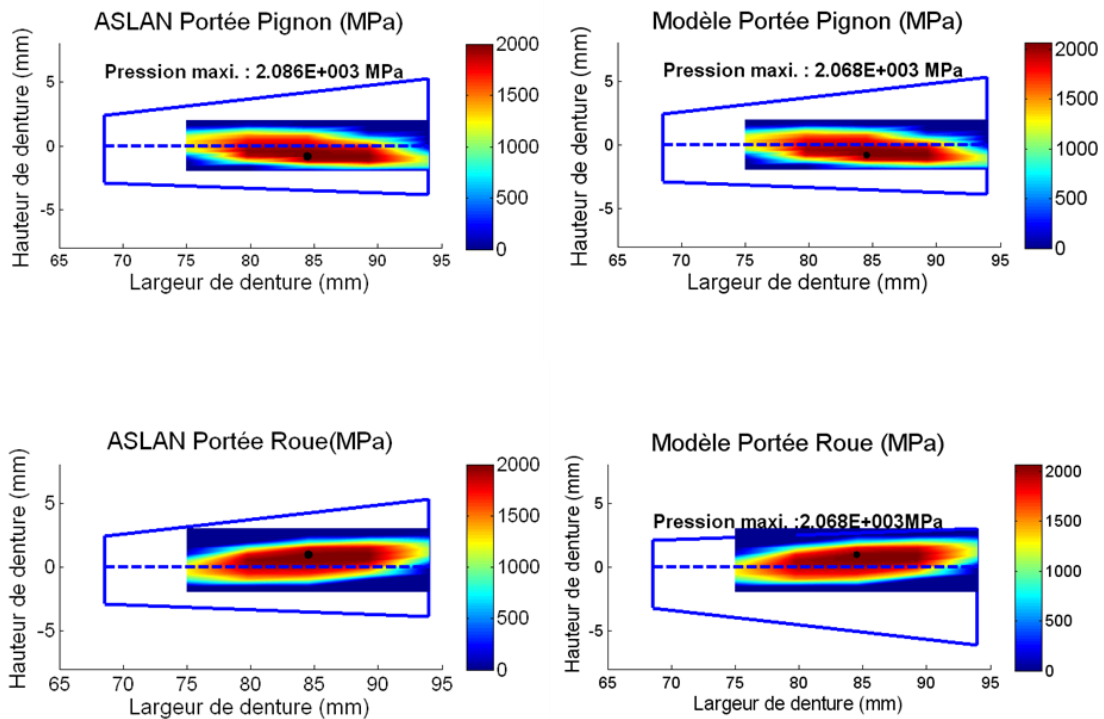


Figure 5-7 : Portées d'ASLAN et du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé 2

En comparant les portées ci-dessus avec celles obtenues en l'absence d'arbres et de paliers (Figure 5-8), on constate un déplacement de la zone chargée vers le gros bout de pignon conique et une légère élévation de la pression maximale.

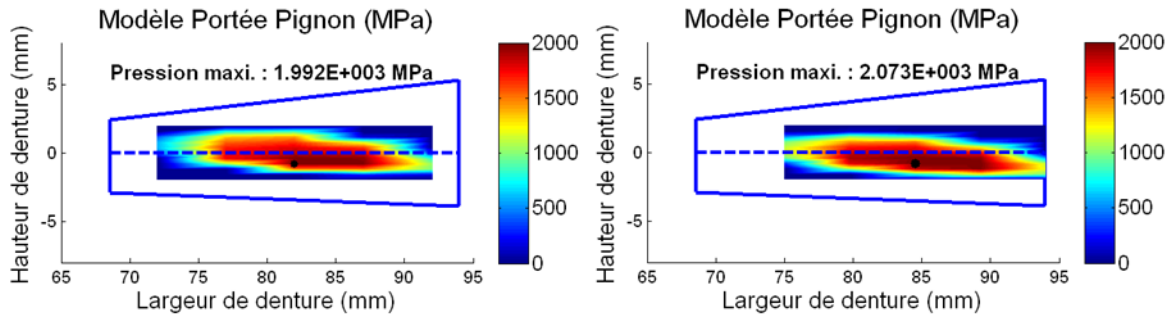


Figure 5-8 : Portées d'engrenage Gleason optimisé 2 du modèle en cas sans arbre (gauche) et en cas avec arbres (droit).

### 5.3.2 Raideur d'engrènement

Les variations de raideur d'engrènement calculées par ASLAN et celles obtenues en sommant l'ensemble des raideurs élémentaires du modèle dynamique pour une faible vitesse de rotation sont représentées sur la Figure 5-9. La figure (A) correspond au cas sans arbres tandis que (B) a été calculées avec les arbres et paliers définis plus haut. On observe toujours un léger décalage en valeur moyenne entre les deux approches (ASLAN/modèle dynamique) mais les évolutions sont tout à fait similaires. En ce qui concerne l'influence spécifique de l'ajout d'arbres, on note des changements significatifs entre les deux configurations à la fois en termes de valeur moyenne mais également de variations temporelles. Le déplacement des portées vers le gros bout des engrenages conduit à une rigidité d'engrènement accrue et des fluctuations relativement différentes susceptibles d'engendrer des excitations paramétriques et donc des réponses dynamiques avec des contenus fréquentiels assez éloignés.

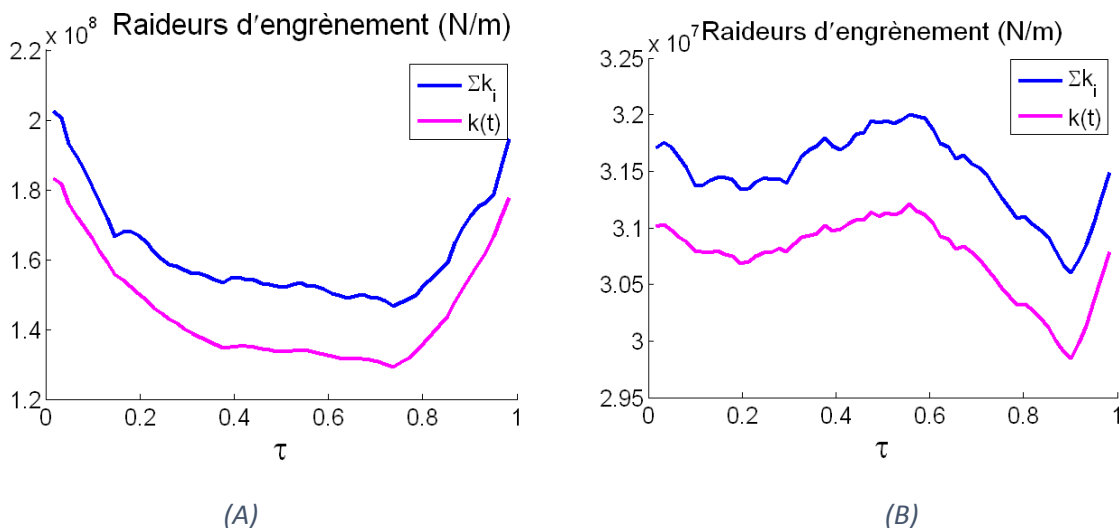
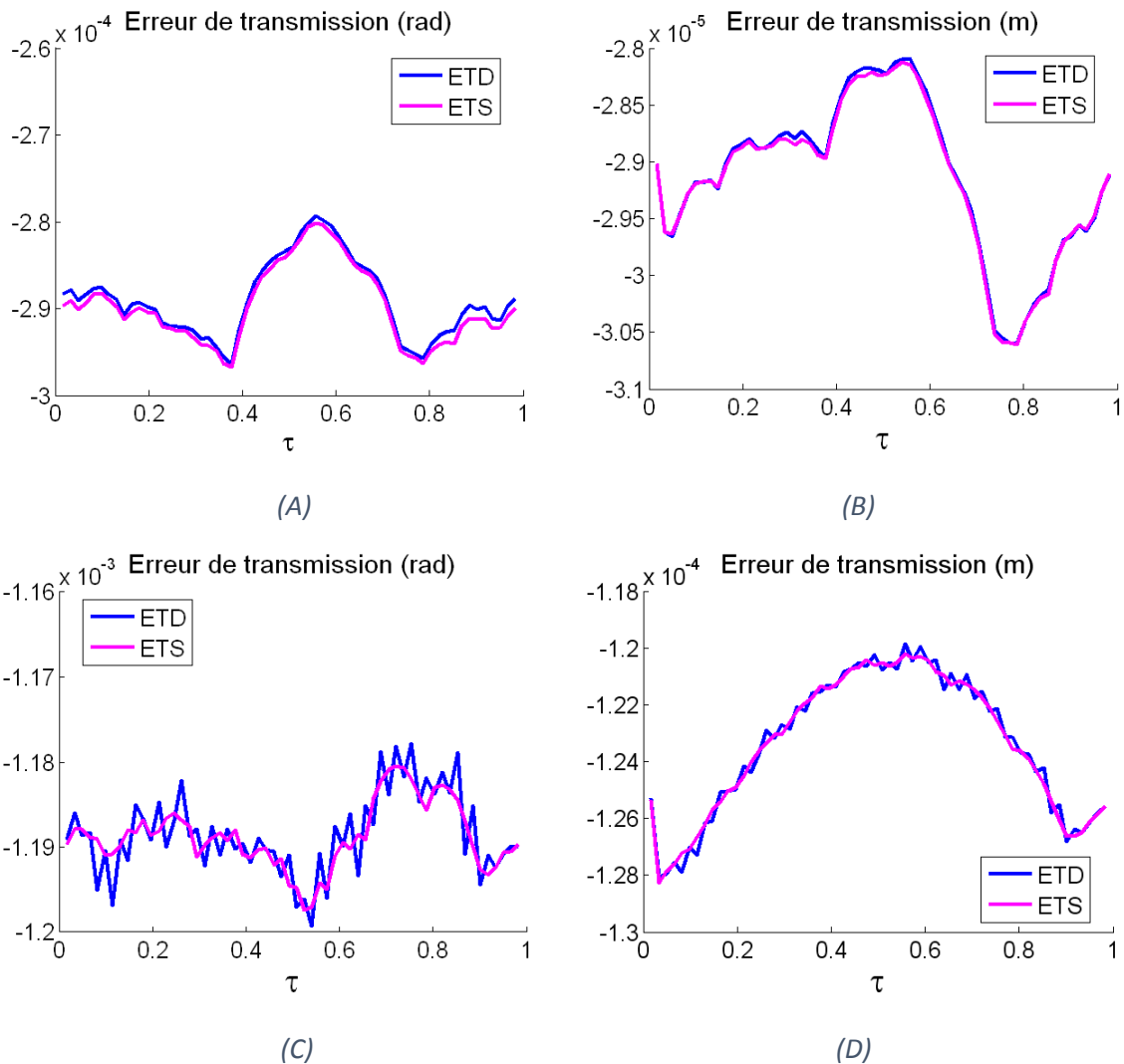


Figure 5-9: Raideur d'engrènement d'engrenage Gleason 2 sans arbre (A) et avec arbres (B).

### 5.3.3 Erreur de transmission

Des constats similaires peuvent être établis au vu des résultats relatifs aux erreurs de transmission. Sur la Figure 5-10, la première ligne (A (sans arbre) et B (avec arbres)) représente les variations temporelles des erreurs de transmission angulaires sous charge fournies par ASLAN et le modèle dynamique local à faible vitesse de rotation. La deuxième ligne (C (sans arbre) et D (avec arbres)) montre les évolutions des erreurs de transmission sous charge linéaires dans les mêmes conditions. Les courbes sont très proches pour ce qui concerne ASLAN et le modèle dynamique et l'on constate, là également, une influence sensible des arbres/paliers.



— ETD : erreurs de transmission angulaire et linéaire du modèle dynamique à basse vitesse de rotation du pignon.

— ETS : erreurs de transmission angulaire et linéaire de ASLAN.

Figure 5-10 : Erreur de transmission sous charge statique d'ASLAN et du modèle dynamique local à une faible vitesse de rotation du pignon.

### 5.3.4 Force d'engrènement

Contrairement à ce qui est observé dans le cas d'engrenages cylindriques, l'effort total d'engrènement évolue avec des changements de micro-géométries sur les dentures. Ceci s'explique par le changement de position du barycentre des efforts d'engrènement, qui est repoussé vers le gros bout des pignons coniques et dont la distance à l'axe de rotation du pignon est modifiée. Le couple imposé étant maintenu constant au cours de l'engrènement, les fluctuations relevées sont donc l'image des variations temporelles du bras de levier. L'ajout d'arbre conduit, dans notre cas, à une diminution de la valeur moyenne de l'effort d'engrènement sur une période (Figure 5-11).

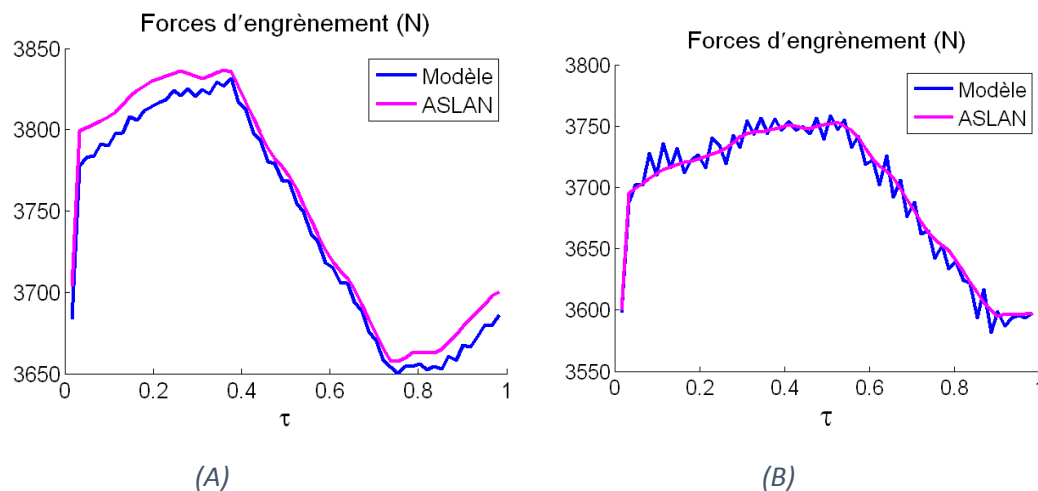


Figure 5-11 : Force d'engrènement statique d'ASLAN et du modèle dynamique local à la faible vitesse sans arbre (A) et avec arbres (B).

### 5.3.5 Coefficients dynamiques

En ce qui concerne les fréquences potentiellement critiques vis-à-vis de l'engrènement, l'ajout d'arbres fait logiquement décroître les pourcentages d'énergie de déformation dans les contacts entre dents et conduit à davantage de dispersion du paramètre  $\chi_i$ , (comparaisons entre les Tableau 4-6 et Tableau 5-4).

Le diagramme de Campbell de la Figure 5-12 a été établi en ne conservant que les trois fréquences propres (calculées avec une raideur d'engrènement moyenne) présentant les pourcentages d'énergie de déformation dans la denture les plus élevés. Les excitations sont limitées à la fondamentale et à la première harmonique de la fréquence d'engrènement. Les intersections conduisent aux vitesses potentiellement critiques (la dangerosité réelle étant également fonction de l'amortissement modal) pour des vitesses de rotation du pignon de 2 250 tr/min, 4 000 tr/min, 4 250 tr/min, 4 500 tr/min, 4 750 tr/min, 5 000 tr/min, 8 000 tr/min, 8 250 tr/min, 8 500 tr/min, 9 500 tr/min, 9 750 tr/min, 10 000 tr/min.

Tableau 5-4 : Fréquences propres en tours par minute et rapports  $\chi_i$  des modèles torsionnels et tridimensionnels dans la situation B.

| Modèles       | Fréquences propres (tr/min) | Fréquences propres (Hz) | Rapports $\chi_i$ |
|---------------|-----------------------------|-------------------------|-------------------|
| Modèle local  | 4517                        | 1054                    | 35%               |
|               | 9676                        | 2258                    | 23%               |
|               | 3315                        | 774                     | 21%               |
|               | 8353                        | 1949                    | 10%               |
| Modèle global | 4517                        | 1054                    | 35%               |
|               | 9674                        | 2257                    | 23%               |
|               | 3315                        | 774                     | 21%               |
|               | 8353                        | 1949                    | 10%               |

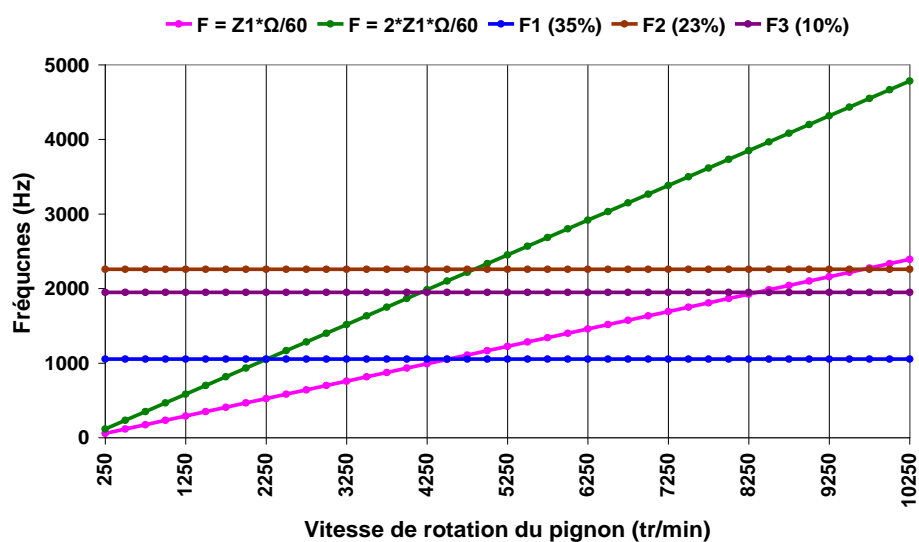
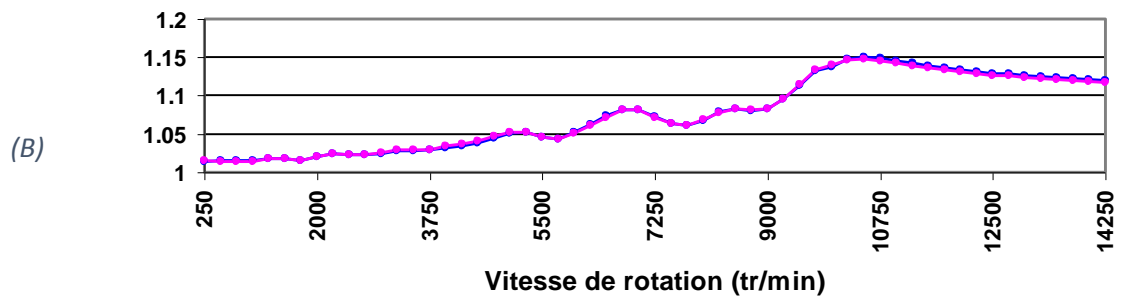
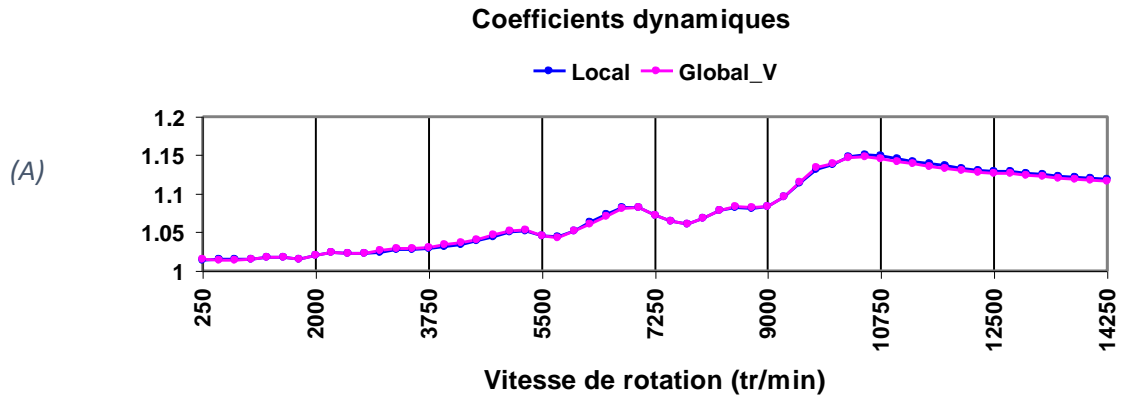
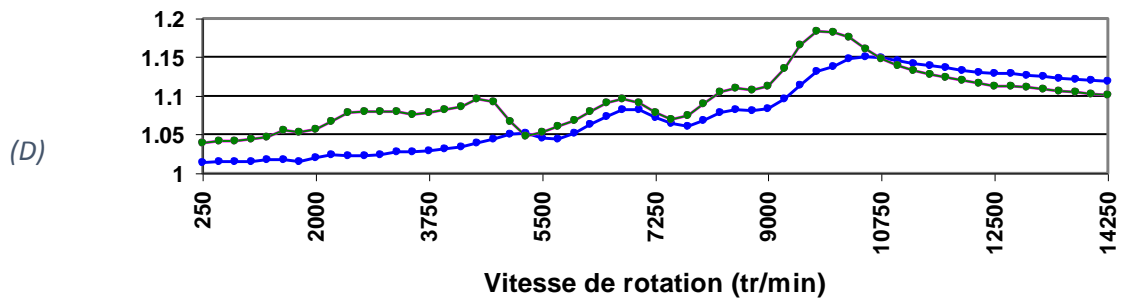
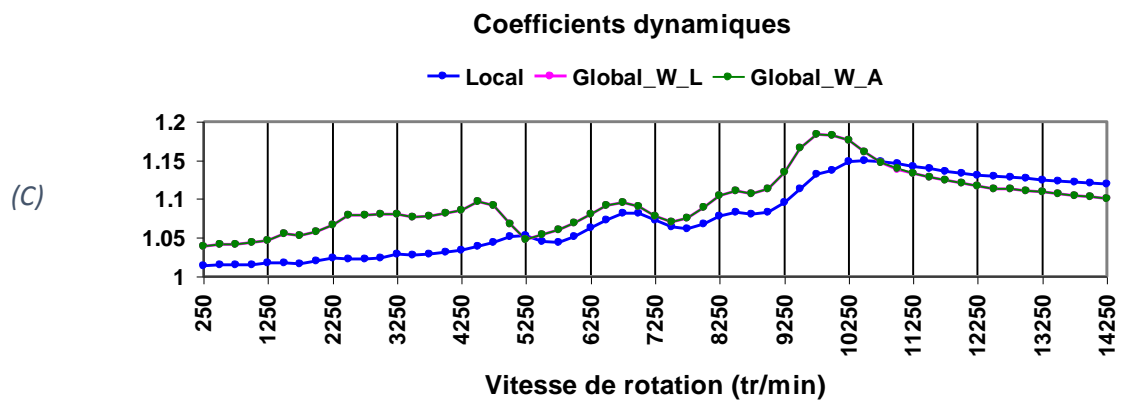


Figure 5-12 : Schéma de Campbell pour l'engrenage Gleason 2 avec arbres.



Global\_V : le premier modèle global.



Global\_W\_A : deuxième modèle global ; Global\_W\_L : troisième modèle global.

Figure 5-13 : Coefficient dynamique du modèle local et global d'engrenage avec arbres.

Comparés aux coefficients dynamiques de l'architecture sans arbre (Figure 5-14), les coefficients dynamiques dans le cas avec arbre sont notablement plus faibles et les vitesses critiques sont déplacées.

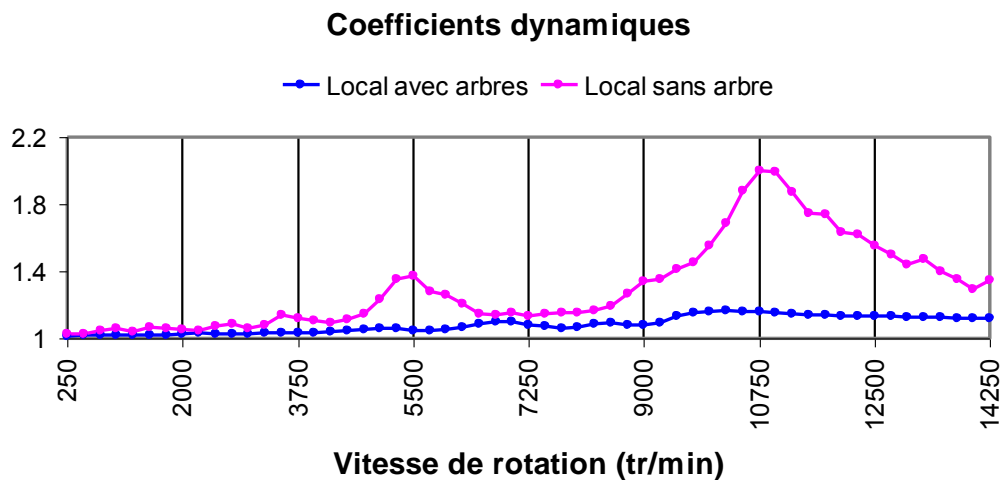


Figure 5-14 : Comparaison des coefficients dynamiques de l'engrenage Gleason sans arbre et avec arbres pour le modèle local.

#### 5.4 INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT

L'amortissement est reconnu comme un paramètre clef en dynamique des engrenages dont la détermination précise pose toutefois toujours problème. Dans ce paragraphe, un amortissement de Rayleigh simplifié est considéré, de sorte que la matrice d'amortissement soit directement proportionnelle à la matrice masse. Les résultats obtenus pour trois niveaux d'amortissement sont portés sur les Figure 5-15, les constats principaux sont les suivants :

- a) De manière classique, la diminution de l'amortissement conduit à une augmentation nette des amplifications d'efforts aux vitesses critiques tandis que les niveaux de réponse loin de ces vitesses demeurent inchangés,
- b) Les modèles locaux (incluant la prise en compte des conditions de contact instantanées entre les dentures) et globaux (basés sur les erreurs de transmission quasi-statique sous charge) donnent des résultats proches pour des amortissements relativement élevés. Par contre, en dessous d'un certain seuil d'amortissement, les résultats issus de ces deux approches divergent fortement. Le modèle local conduit à des courbes de réponse avec des sauts d'amplitudes caractéristiques de pertes de contact instantanées entre les flancs actifs de denture. Les modèles globaux ne permettent pas de simuler ces conditions particulières et conduisent à des courbes typiques de comportements linéaires.

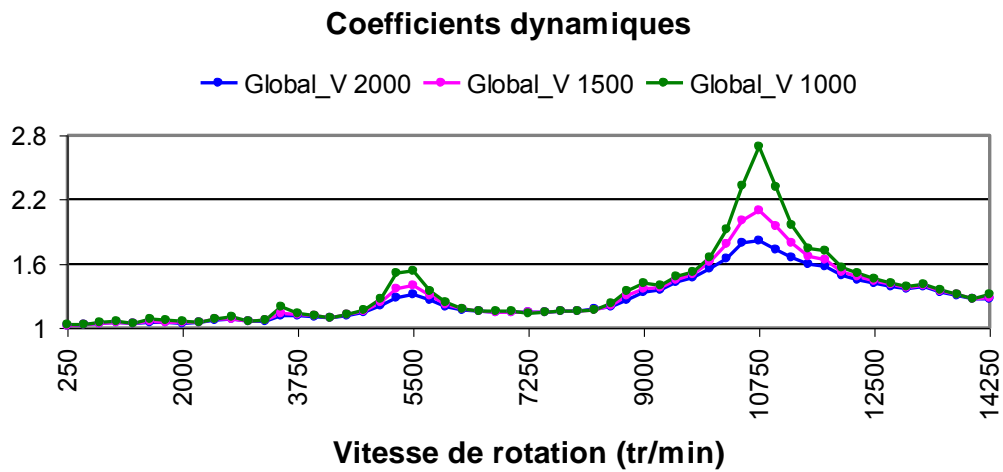
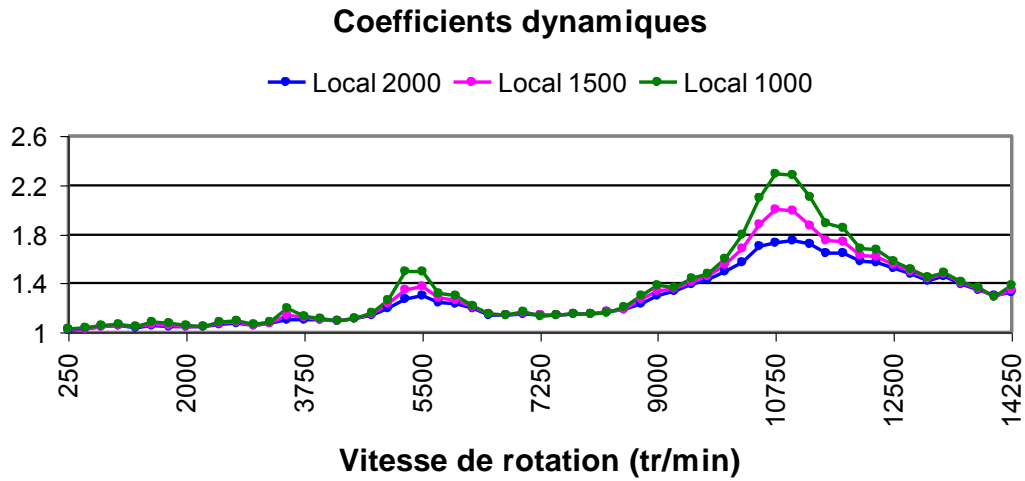
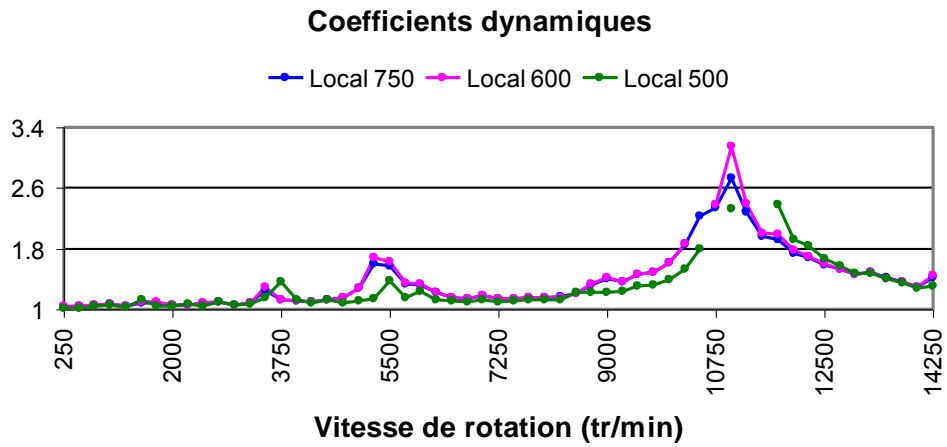
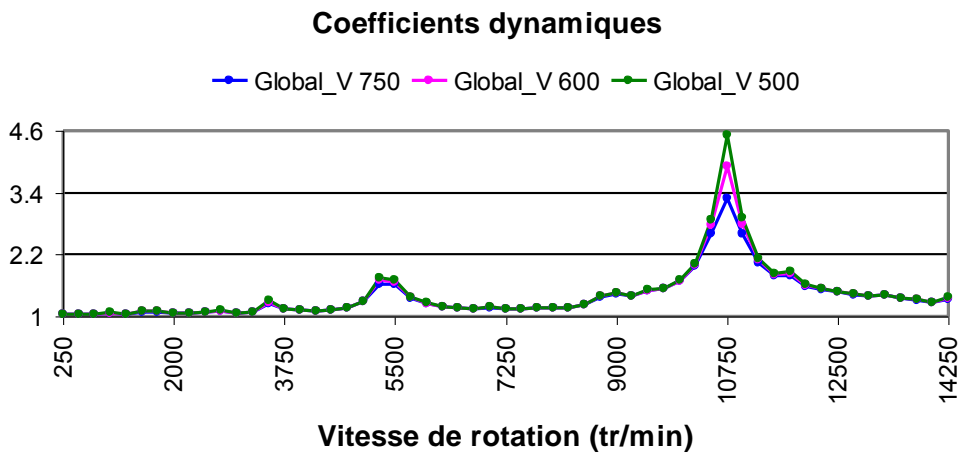


Figure 5-15 : Coefficients dynamiques du modèle local  $a = 2000$ ,  $a=1500$  et  $a=1000$ .





(A)



(B)

*Figure 5-16 : Coefficients dynamiques du modèle local,  $\alpha=750$ ,  $\alpha=600$  et  $\alpha=500$*

## 5.5 ETUDE AVEC DÉFAUTS DE MONTAGE

La présence de défauts de position et/ou de montage est inévitable en pratique et nous nous proposons d'analyser leurs influences éventuelles. La Figure 5-17 représente les défauts de type offset qui correspondent à des erreurs de position des centres du pignon et de la roue. Ce type de défaut n'a que peu d'influence sur des dentures cylindriques hormis une légère variation d'entraxe et donc de rapport de conduite généralement négligée. La situation est différente pour les couples coniques pour lesquels l'offset peut conduire à des conditions de contact sur les dentures sensiblement différentes et, par-là, une rigidité d'engrènement et des propriétés dynamiques modifiées par rapport à une géométrie parfaite. A ces défauts de type translation, nous avons ajouté la possibilité d'introduire des erreurs d'alignement des mobiles qui se traduisent par des erreurs angulaires. Les erreurs prises en considération dans ce paragraphe sont répertoriées dans le *Tableau 5-5*.

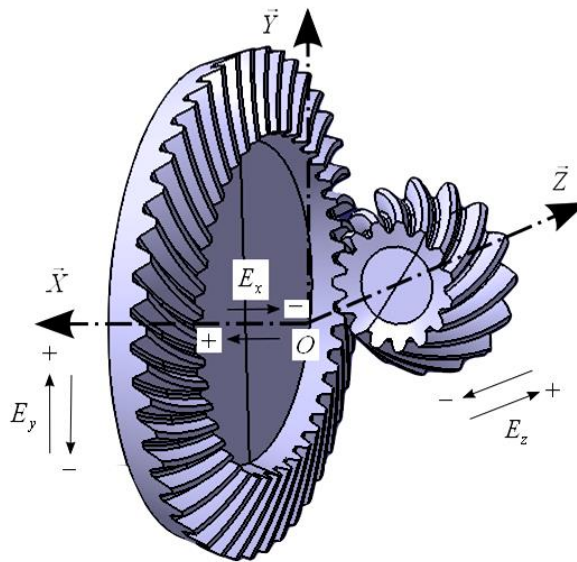


Figure 5-17 : Définition de défauts de montage dans le repère général  $R(O, X, Y, Z)$ .

Tableau 5-5 : Erreurs de montage.

| Erreurs de montage |                   |                                    |                                     |
|--------------------|-------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Désalignement (°)  | Offset (mm) $E_y$ | Erreur axiale du pignon $E_z$ (mm) | Erreur axiale de la roue $E_x$ (mm) |
| -0.1               | -0.25             | -0.25                              | -0.25                               |
| +0.1               | +0.25             | +0.25                              | +0.25                               |

### 5.5.1 Engrenage Gleason 2

#### 5.5.1.1 Angle de renvoi de 89.9°

Comme illustré dans la Figure 5-18, pour un angle de renvoi égal 89.9° sur la roue, l'axe de la roue ne coïncide plus l'axe X du repère général et se déplace de 0.1°.

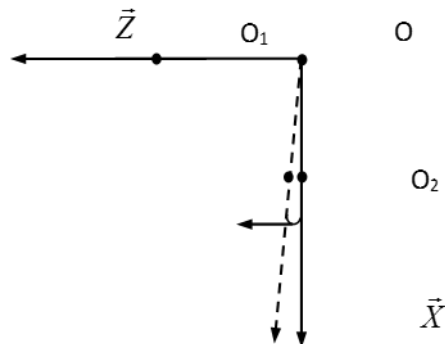


Figure 5-18 : Définition de cas avec désalignement -0.1°.

On constate, Figure 5-20 (colonnes A et B), que les portées pour l'engrenage avec ce désalignement négatif ne varient que très peu par rapport au cas de référence sans erreur.

#### 5.5.1.2 Angle de renvoi de 90.1°

Un défaut d'alignement de même amplitude 0.1° mais de direction opposée est introduit sur la roue (Figure 5-19).

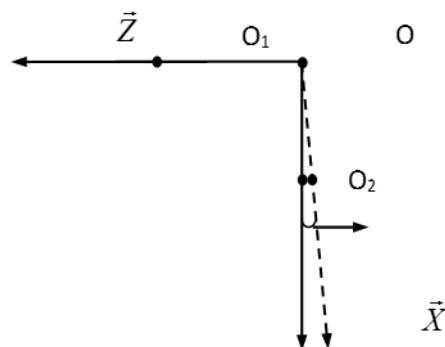


Figure 5-19 : Définition de cas 90.1°.

Dans la Figure 5-20, colonnes B et C, les portées obtenues pour l'engrenage avec un désalignement positif ne varie pratiquement pas par rapport aux portées sans défaut de montage, on note toutefois un léger déplacement de la position du maximum de pression.

### **5.5.1.3 Comparaison des cas avec défauts et sans défaut**

La Figure 5-22 présente les coefficients dynamiques calculés sans défaut et avec les désalignements définis ci-dessus. Les constats faits en statique sur les évolutions de portées peuvent être étendus au comportement dynamique puisque les trois courbes de réponse sont pratiquement superposées, confirmant ainsi que cet engrenage particulier n'est pas sensible aux désalignements.

En ce qui concerne l'influence de l'offset, les portées représentées dans la colonne A de la Figure 5-21 indiquent une plus grande sensibilité. Ainsi, pour un offset de la roue de  $-0.25$  mm, la zone de contact se déplace vers le gros bout du couple conique tandis que pour une valeur positive de  $+0.25$  mm, la portée se déplace vers le petit bout.

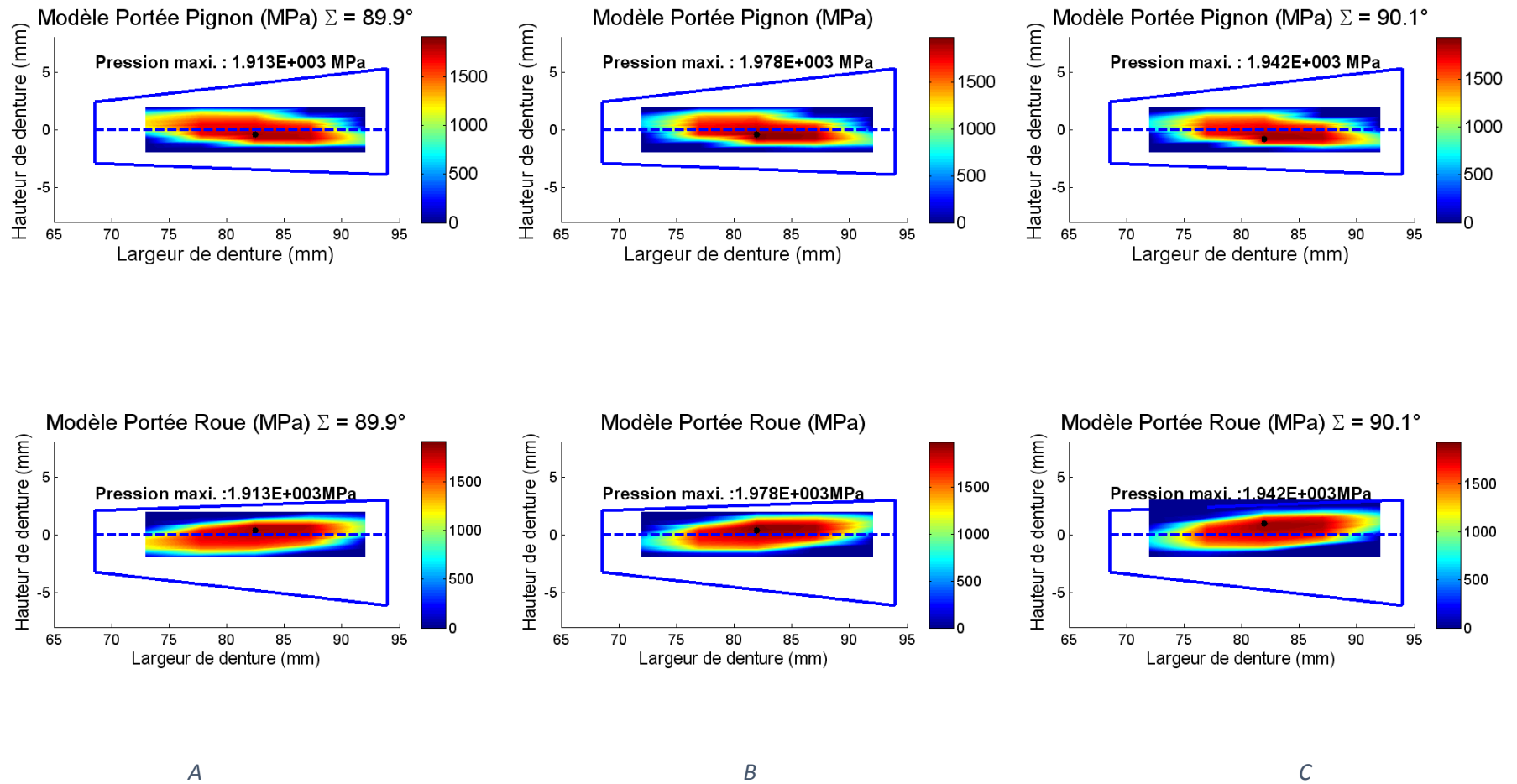
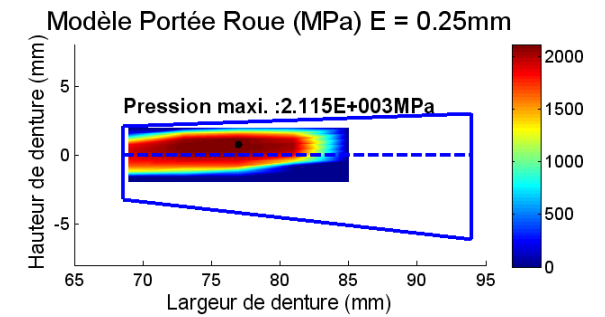
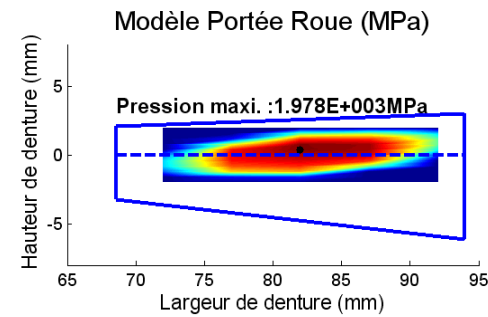
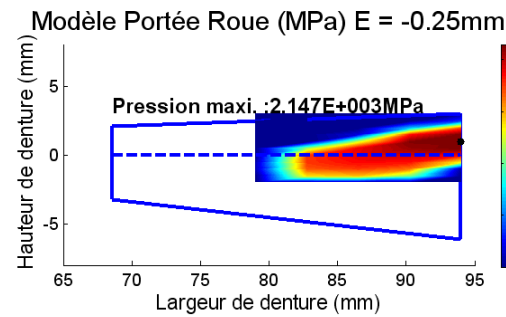
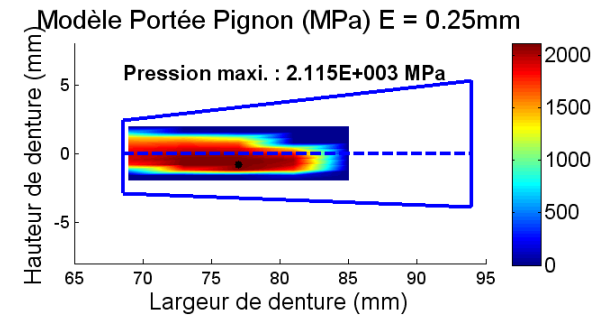
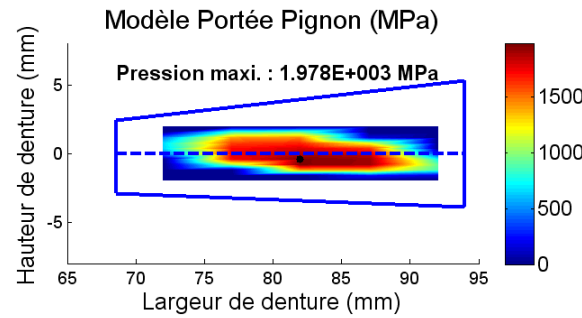
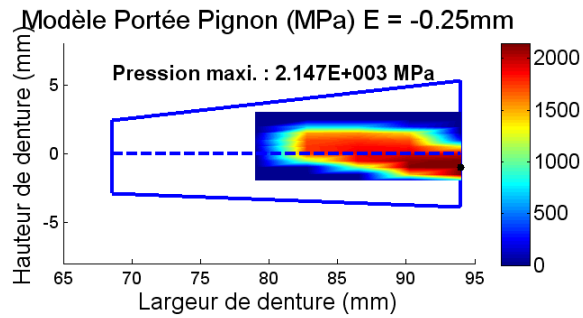


Figure 5-20 : Portées du modèle dynamiques local à une faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé version 2 en cas sans défaut de montage (B) et avec désalignement  $-0.1^\circ$  (A) et  $+0.1^\circ$  (C).



A

B

C

Figure 5-21 : Portées du modèle dynamiques local à une faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé version 2 en cas sans défaut de montage (B) et avec l'offset -0.25mm (A) et l'offset +0.25mm (C).

Les courbes de réponse dynamique en présence d'offsets sont représentées sur la Figure 5-23. Les résultats ont été obtenus en utilisant le modèle local, plus à même de décrire les conditions de contact instantanées. On constate :

- a- que les positions des vitesses critiques sont modifiées par la présence d'offset, plus particulièrement pour un offset positif dans ce cas. Ce constat est à mettre en parallèle avec les observations sur les portées statiques qui indiquaient un déplacement des contacts vers des zones de plus grande flexibilité (petits bouts). La raideur globale d'engrènement est donc plus faible que dans le cas sans défaut ce qui explique vraisemblablement ce glissement des pics de réponse vers les plus basses vitesses de rotation,
- b- que les niveaux d'amplifications aux vitesses critiques ne sont que faiblement affectés.

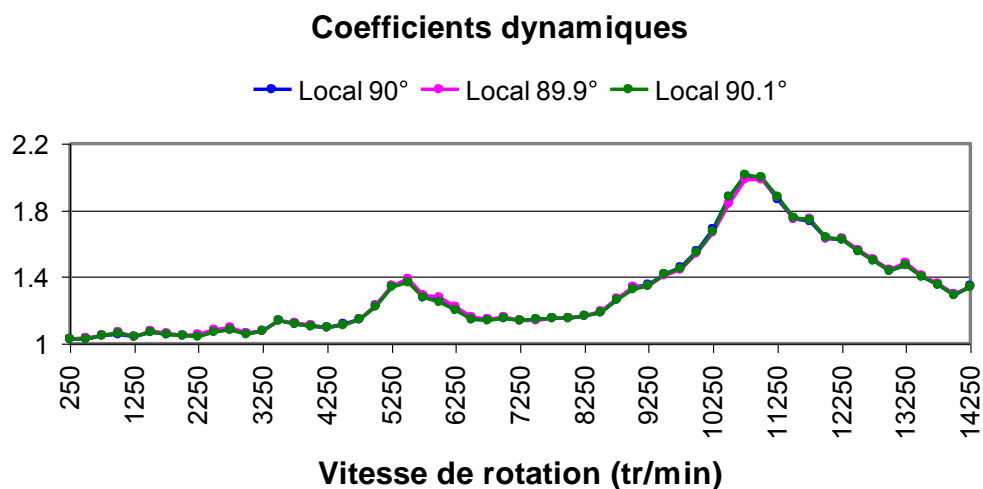


Figure 5-22 : Coefficients dynamiques sans défaut et avec désalignement du modèle global.

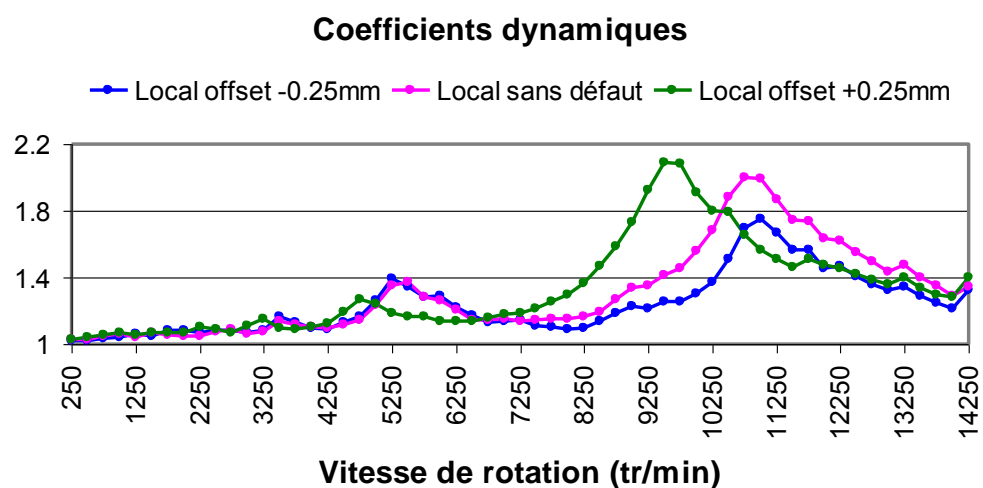


Figure 5-23 : Coefficients dynamiques sans défaut et avec désalignement du modèle global.

### 5.5.2 Engrenage de la littérature ( Simon [98]) avec défauts de montage

Une géométrie différente d'engrenage spiro-conique de type Gleason norme non optimisée est abordée dans ce paragraphe (Simon [98]). Les caractéristiques dimensionnelles ont été données dans le chapitre III et les erreurs de montage analysées sont portées dans le Tableau 5-5.

#### 5.5.2.1 Angle de renvoi

En commençant par l'influence des désalignements (ou de variations de l'angle de renvoi), la Figure 5-25 montre les portées obtenues avec et sans défaut. Pour un désalignement de  $-0.1^\circ$ , la zone de contact se déplace vers le gros bout de la denture et le maximum de pression diminue pour passer de 2138 MPa (sans défaut) à 1 653 MPa en présence de ce désalignement. Considérant une erreur angulaire positive de  $+0.1^\circ$ , la zone de contact se translate vers le petit bout de la denture avec un maximum de pression qui augmente pour atteindre la valeur de 2 650 MPa. Pour ce qui concerne le comportement dynamique, les courbes de coefficients dynamiques de la Figure 5-24 soulignent des tendances très contrastées en fonction du signe du défaut d'alignement : un défaut positif n'a que peu d'influence dans ce cas tandis qu'une erreur d'alignement négative modifie profondément la réponse dynamique sur les dentures. Ce constat est lié aux observations faites sur les évolutions de portées quasi-statiques qui montrent une sensibilité plus grande de l'engrenage pour un désalignement négatif. La Figure 5-26 représente les courbes de réponse déterminée par le modèle global (pour lequel les excitations sont déduites de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge) et le modèle local (intégrant directement les conditions de contact instantanées dans le processus de résolution des équations du mouvement). En dehors de la vitesse critique principale, les courbes se superposent alors que dans la zone d'amplification maximale, le modèle local indique des pertes de contact et des chocs qui ne peuvent pas être simulés par un modèle global (par définition linéaire).

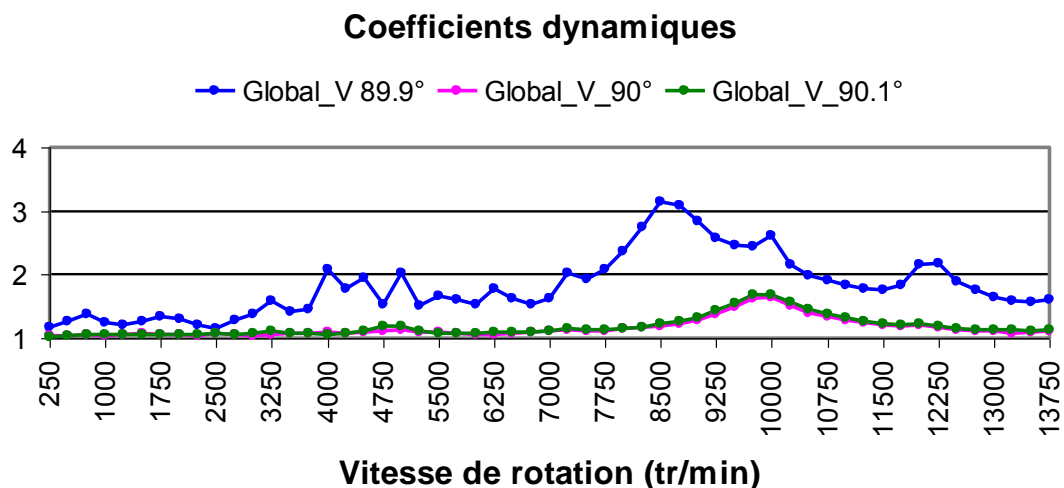


Figure 5-24 : Coefficients dynamiques d'engrenage de Simon en cas sans désalignement et avec désalignement  $0.1^\circ$  ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et  $+0.1^\circ$  ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ).



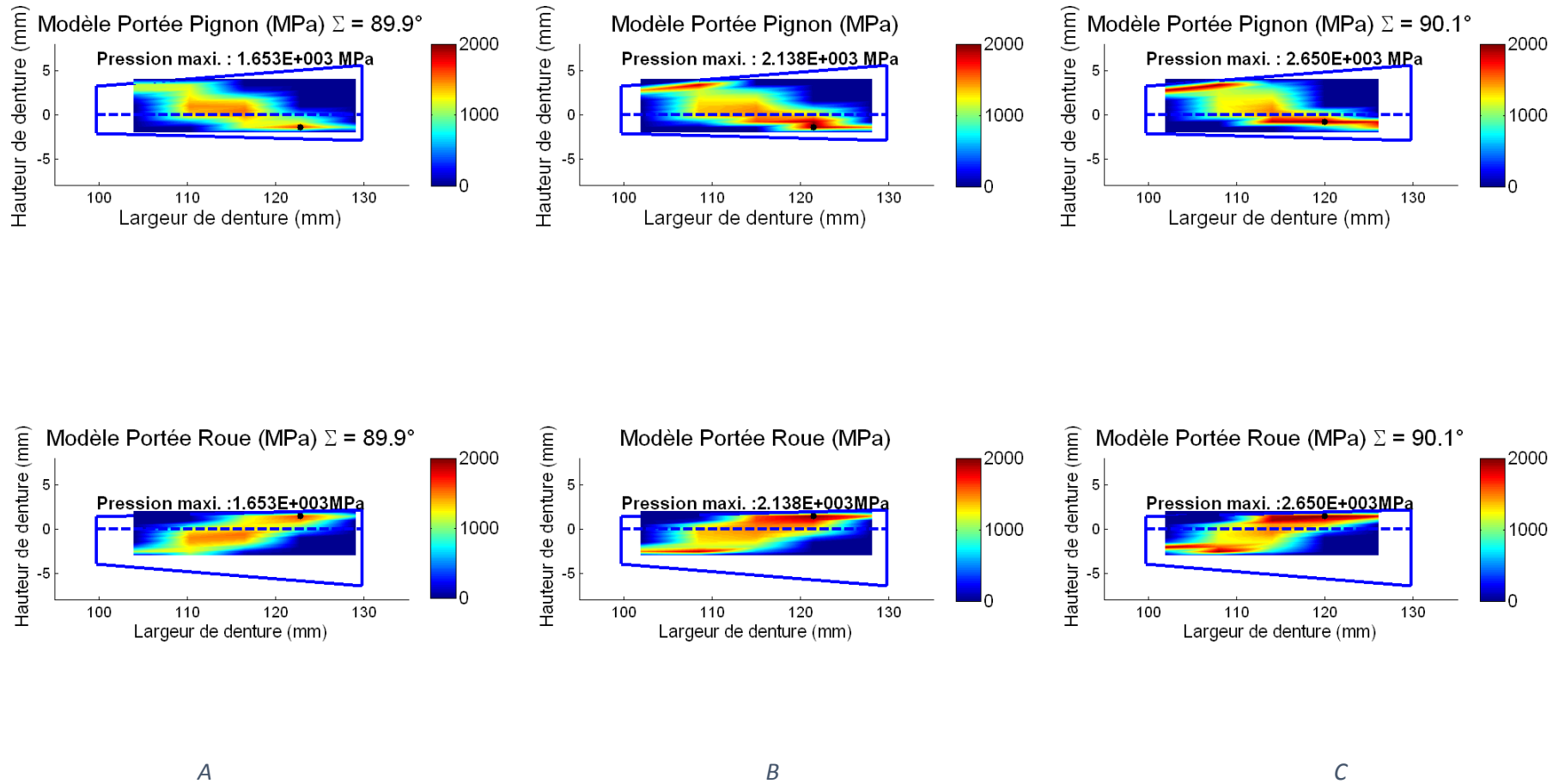


Figure 5-25 : Portées d'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec désalignement -  $0.1^\circ$  ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et  $+0.1^\circ$  ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ).

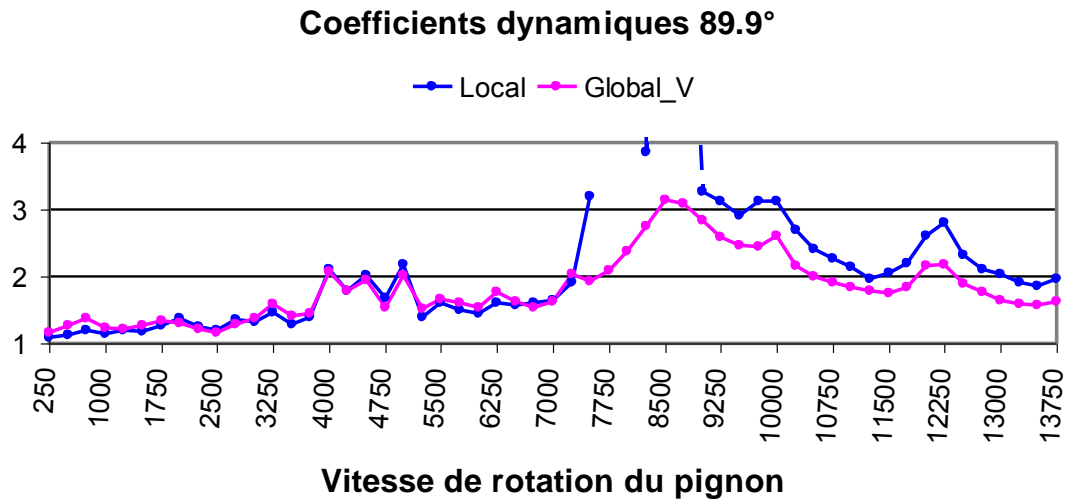
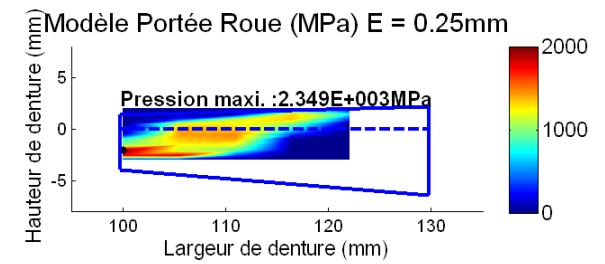
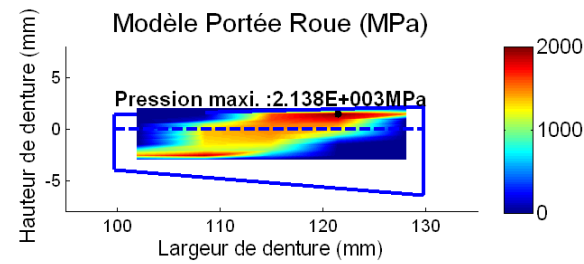
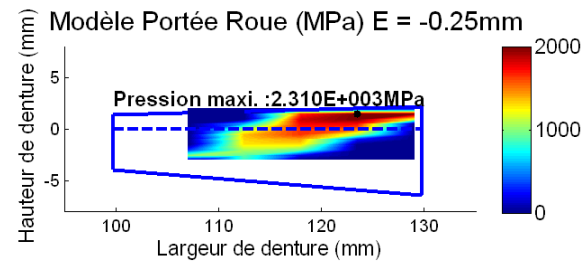
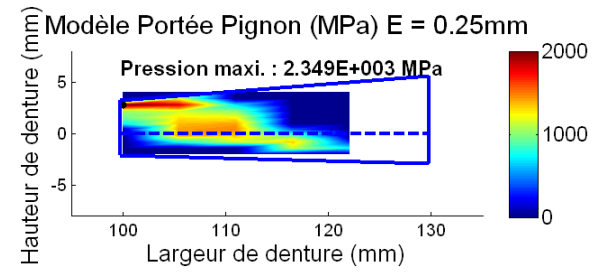
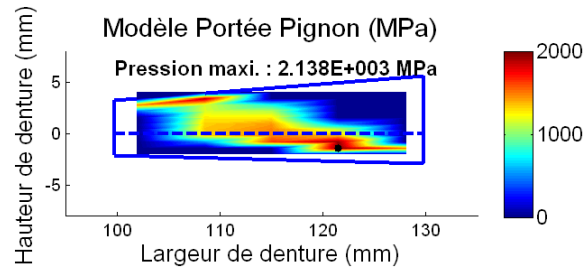
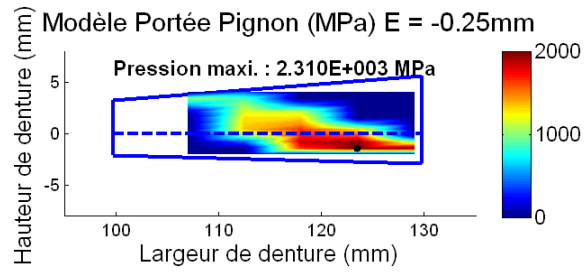


Figure 5-26 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique local d'engrenage de Simon en cas sans désalignement et avec désalignement  $0.1^\circ$  ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et  $+0.1^\circ$  ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ).

#### 5.5.2.2 Offset

Les constats sont relativement proches de ceux de la denture précédente en ce qui concerne l'influence de l'offset : une valeur négative de  $-0.25\text{mm}$  (Figure 5-27) déplace la zone de contact vers le gros bout de la denture tandis qu'un défaut de même amplitude, mais de signe différent, conduit à une translation de la portée vers le petit bout de la denture. Les maxima de pression pour cet engrenage sont peu affectés et demeurent voisins du cas sans défaut. En étendant les comparaisons aux vitesses de rotation plus élevées, la Figure 5-28 présente les coefficients dynamiques du modèle dynamique global. On note un influence modérée (en particulier lorsque l'on compare avec le rôle de désalignements) avec toutefois des changements plus marqués dans le cas d'offset négatif.



A

B

C

Figure 5-27 : Portées (engrenage de Simon) obtenues par le modèle dynamique local pour une faible vitesse de rotation du pignon - Cas sans défaut et avec offsets de -0.25mm et +0.25mm.

### Coefficients dynamiques

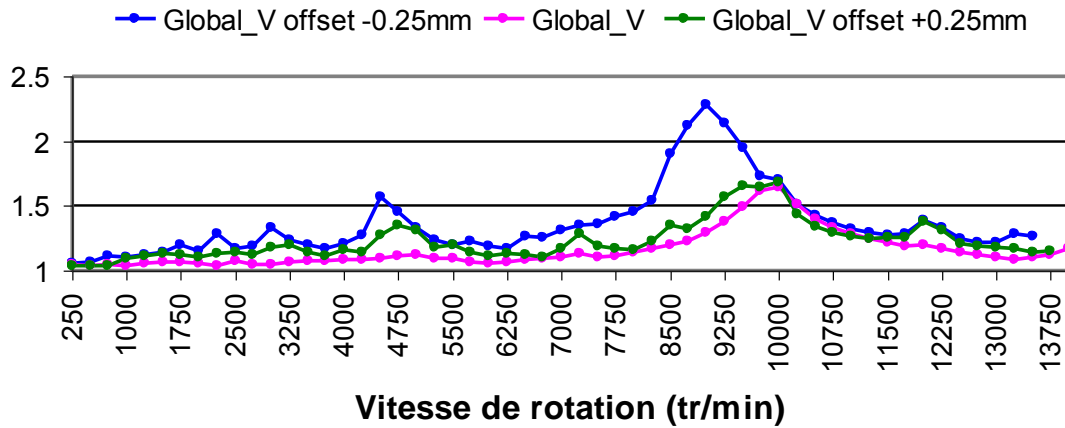


Figure 5-28 : Coefficients dynamiques (engrenage de Simon) sans défaut et avec offsets de 0.25mm et +0.25mm.

#### 5.5.2.3 Erreurs axiales du pignon

La Figure 5-30 montre les portées avec des erreurs de positionnement axial sur le pignon. Pour une erreur négative de -0.25mm, les dentures du pignon et de la roue sont en contact plutôt au voisinage du petit bout alors qu'une erreur positive de +0.25mm génère des portées près du gros bout. Les courbes de coefficients dynamiques correspondantes sont représentées sur la Figure 5-29. Dans le cas d'une erreur négative, la réponse dynamique est pratiquement confondue avec celle obtenue en l'absence de défaut. A l'inverse, une erreur positive sur le pignon semble améliorer le chargement dynamique sur les dentures. Des résultats similaires (non présentés ici) ont été obtenus en considérant l'influence d'une erreur axiale sur la roue.

### Coefficients dynamiques

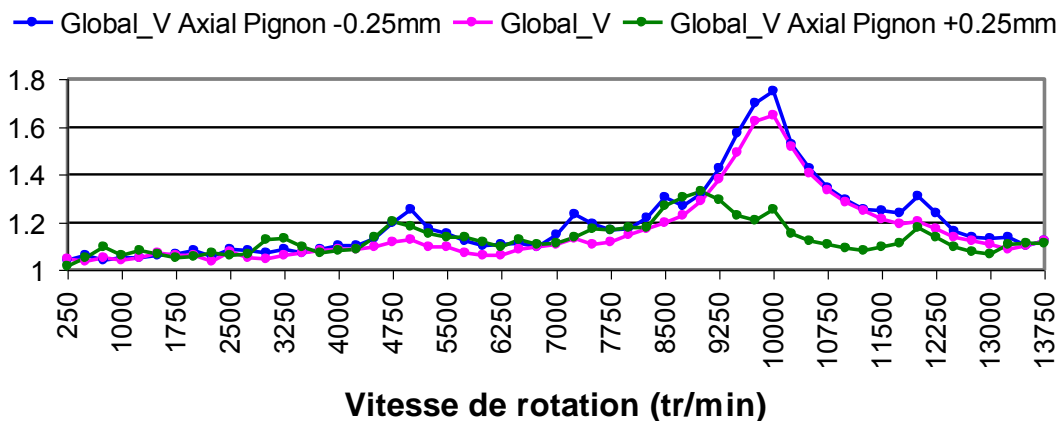
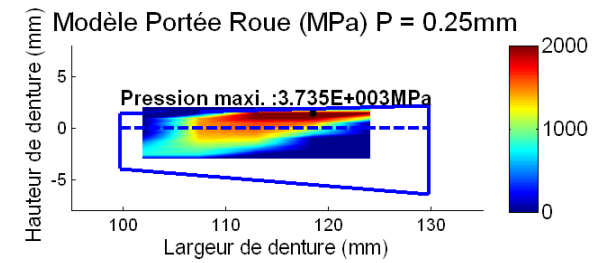
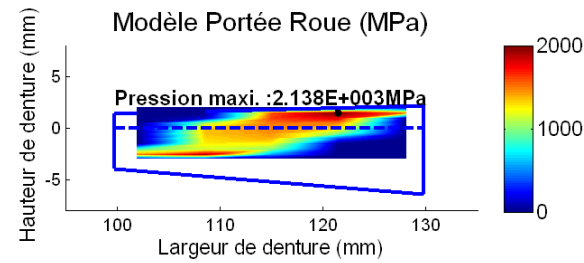
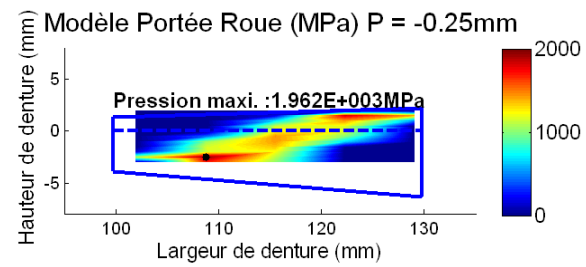
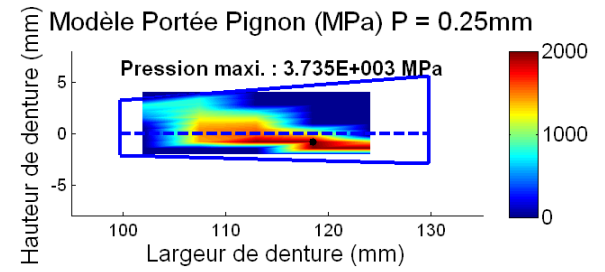
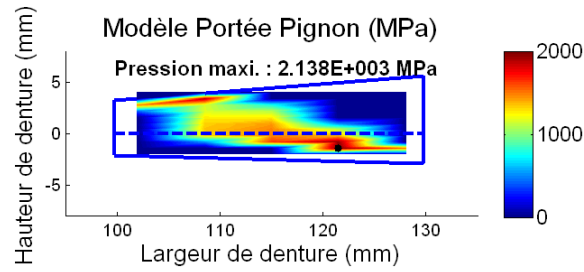
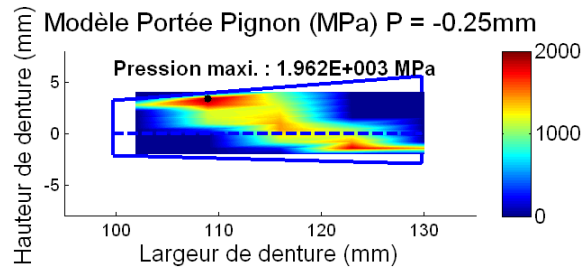


Figure 5-29 : Coefficients dynamiques pour l'engrenage de Simon sans défaut et avec défauts suivants l'axe du pignon -0.25mm et +0.25mm.

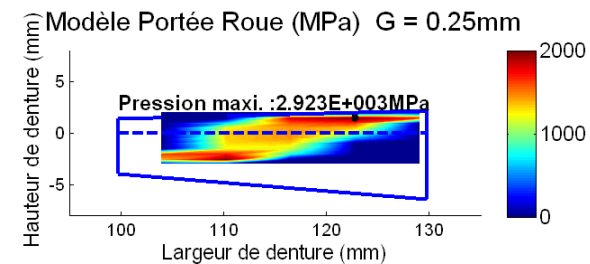
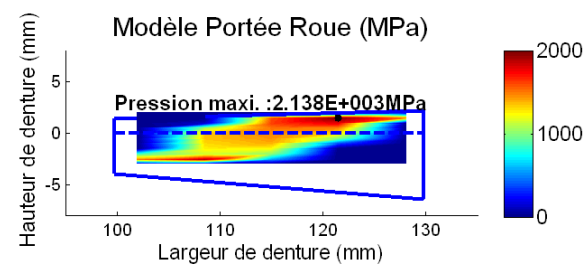
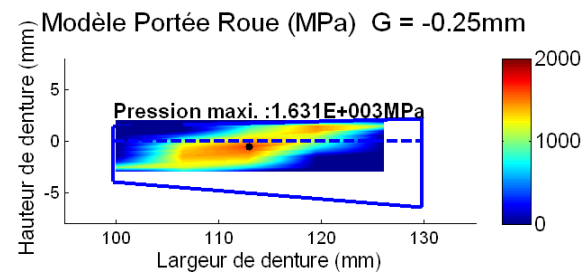
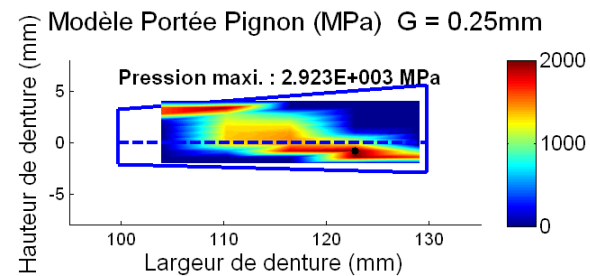
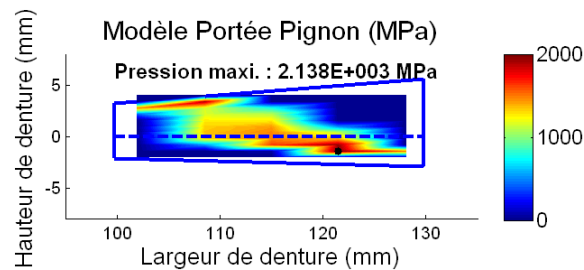
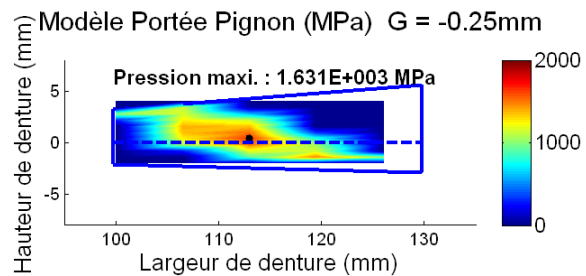


A

B

C

Figure 5-30 : Portées de l'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec défauts axiaux du pignon -0.25mm et +0.25mm.



A

B

C

Figure 5-31 : Portées d'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec défauts axiaux de la roue  $-0.25\text{mm}$  et  $+0.25\text{mm}$ .

## 5.6 CONCLUSION

Un certain nombre de possibilités d'application des modèles développés dans les chapitres précédents ont été présentées pour trois géométries d'engrenages spiro-coniques différentes. Les résultats illustrent la versatilité des modélisations mises en place et leur capacité à rendre compte de situations réalistes. Les différents modèles : ASLAN (statique avec une grande finesse de modélisation), dynamique global et local ont été également testés et leurs limites respectives ont été mises en évidence : le modèle dynamique local reproduit fidèlement les portées obtenues par ASLAN (sur lequel il s'appuie largement), les modèles dynamiques local et global donne des courbes d'efforts dynamiques similaires à l'exception du voisinage des vitesses de rotation critique où les contacts entre dentures peuvent être momentanément interrompus (fonctionnement non linéaire).

Dans un deuxième temps, certains défauts classiques (erreur d'alignement, offsets, erreurs axiales) ont été simulés et leur influence sur les comportements statique et dynamique a été analysée. En fonction de la micro-géométrie des dentures, des tendances relativement différentes peuvent être notées soulignant ainsi la capacité de corrections de formes, via des réglages machines différents, à améliorer le comportement de la transmission. Le signe ou sens du défaut est également très influent car en fonction du déplacement des portées vers les zones de plus ou moins grande raideur (gros bout ou petit bout), les positions des vitesses critiques et les amplitudes de réponse peuvent varier de façon significative. Enfin, l'influence classique de l'amortissement sur les niveaux d'amplifications aux vitesses critiques de dentures a été rappelée. Des travaux sont actuellement en cours afin de tenter de caractériser la partie visqueuse provenant des films lubrifiants séparant les dentures.

# Conclusion générale

Dans ce manuscrit, différentes modélisations du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques ont été proposées. Un modèle, dit local, permet de simuler la majorité des interactions entre les vibrations et le comportement des contacts entre dentures. Les aires de contact potentielles sont discrétisées en cellules élémentaires auxquelles sont affectés une raideur et un écart de forme dans la direction normale au contact. Le couplage entre les conditions de contact instantanées et les équations du mouvement sont assurés par un algorithme de contact normal unilatéral qui vérifie simultanément que les efforts de contact sont compressifs et qu'il n'y a pas d'interpénétration des dentures à l'extérieures des zones de contact. Le traitement numérique peut s'avérer fastidieux et, dans un contexte industriel, il peut s'avérer intéressant de disposer d'une approche plus rapide. A partir du concept d'erreur de transmission quasi-statique sous charge, il est possible d'exprimer les termes d'excitation dans les équations du mouvement en fonction de paramètres globaux qui peuvent être, soit calculés au préalable par des modèles élastiques sophistiqués, ou bien mesuré sur banc d'essai (erreur de transmission). En supposant que les conditions de contact dynamiques sont proches des conditions quasi-statiques, plusieurs formulations ont été proposées selon la définition retenue pour l'erreur de transmission. Les deux modèles donnent des résultats très voisins sauf dans le cas particulier de comportements non-linéaires prononcés, en particulier, lorsque les effets dynamiques sont suffisamment importants pour entraîner des pertes de contact momentanées entre les dents et des chocs en reprise.

Les différents modèles ont été exploités afin d'analyser la sensibilité du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques aux paramètres de taillage (engrenages Gleason standard ou optimisés) et à un certain nombre de défauts de montage qui, en pratique, sont inévitables (désalignements, offsets). Les résultats montrent que, contrairement aux engrenages cylindriques, les réponses statique et dynamique de couples spiro-conique peuvent être très sensibles aux réglages des machines de taillage même si les géométries sont supposées sans défaut. Parallèlement, il est montré que des modifications appropriées de ces paramètres permettent des gains substantiels en termes de qualité de portée, de raideur et charge dynamique. Certaines géométries s'avèrent ainsi être très peu affectées par des erreurs d'alignement relativement importantes.

Une des difficultés rencontrées dans cette étude a trait aux comparaisons avec les résultats théoriques et expérimentaux de la littérature. Il n'existe pratiquement aucun résultat expérimental publié pour des fonctionnements à grandes vitesses qui soit exploitable en dynamique. Les résultats théoriques sont plus nombreux mais, compte tenu d'une part de la sensibilité importante du comportement aux paramètres de taillage et d'autre part, du nombre important de paramètres, il est très difficile de pouvoir recalculer nos résultats de simulation avec ceux d'autres auteurs. Quelques comparaisons ont pu être effectuées mais des incertitudes demeurent quant au modèle d'élasticité utilisé avec, en particulier, la prise en compte des effets de bord. L'ensemble de ces constatations



milite pour des campagnes d'essais sur banc implanté en laboratoire qui permettraient ainsi des comparaisons mieux contrôlées et des validations plus fiables.

Au-delà de ces aspects expérimentaux à développer, les modèles proposés peuvent être étendus afin de simuler la présence de défauts d'écaillage ou de fissures en pied dent et réaliser des études paramétriques relatives à la sensibilité de détection et à la surveillance de machines par analyses vibratoires. Une autre voie de développement concerne le développement de modèles pour plusieurs engrènements combinant des engrenages cylindriques et coniques et incluant les contributions de lignes d'arbre déformables, de paliers et de carter. Enfin, des recherches plus précises sur l'amortissement dans un engrènement semblent nécessaires au vu de l'influence prédominante de ce paramètre sur les amplifications de charge sur les contacts.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

### OUVRAGES

1. **AMERICAN NATIONAL STANDARD**, Design Manual for Bevel Gears, ANSI/AGMA 2005—D03 [Revision of ANSI/AGMA 2005—C96].
2. **BOLOTIN V. V.**, The dynamic stability of elastic systems. San Francisco, CA: Holden-Day, 1964, 451p.
3. **HENRIOT G.**, Engrenages conception fabrication mise en œuvre. 7<sup>ème</sup> édition, Paris : Dunod, 1999, 875p.
4. **LITVIN F. L., FUENTES A.**, Gear geometry and applied theory. 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge: Cambridge university press, 2004, 800p.
5. **ISO / DIS 6336/1** Calculation of load capacity of spur and helical gears. 1983, pp.74-80
6. **LALANNE M., FERRARIS G.**, Rotor dynamics prediction in engineering. New York: John Wiley. 1998, 254p.
7. **NAYFEH A. H., MOOK D. T.**, Nonlinear oscillations. New York: John Wiley, 1979, 704p.
8. **REMOND D., VELEX P., SABOT J.** Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages, synthèse bibliographique, Senlis : CETIM.
9. **WEBER C.**, The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 1. London: Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), 1949, Report n° 3.
10. **WEBER C., BANASCHEK K.**, The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. Part 5. London: Department of Scientific and Industrial Research (Sponsored Research (Germany)), 1950, report n° 6.

## **PROCEEDINGS DE CONGRÈS**

11. **AJMI M., VELEX P.,** Un modèle pour la simulation du comportement dynamique d'engrenages à dentures larges. Paris: Proc. of the 4<sup>th</sup> World Congress on Gearing and Power Transmission, 16-18 march 1999, pp. 1991-2002.
12. **BIBEL G. D., HANDSCHUH R.,** Meshing of a spiral bevel gear set with 3D finite element analysis. San Diego, CA: Proc. of the 7<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, 6-9 October 1996.
13. **BORDEGARAY C., FERRARIS G., GUINGAND M., DE VAUJANY J.-P.,** Dynamic behaviour simulation of a worm gear. Long Beach, CA: Proc. of IDETC/CIE 2005, ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 24-28 September 2005.
14. **CAI Y., HAYASHI T.,** The linear approximated equation of vibration for a pair of spur gears: theory and experiment. Phoenix, AZ: Proc. of the 6<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, 1992, Vol. 2, pp. 521-528.
15. **CHENG Y., LIM T. C.,** Dynamics of hypoid gear transmission with nonlinear time-varying mesh. Baltimore, MD: 8<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, DETC2000/PTG-14432, 2000.
16. **CARMIGNANI C., FORTE P., MELANI G., DI CARLO G.,** Numerical investigation on traveling wave vibration of bevel gears. Las Vegas, NV: 10<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference, September 4-7 2007, Vol. 7, pp. 385-393.
17. **DE VAUJANY J.-P., GUINGAND M., REMOND D., ICARD Y.,** Numerical and experimental study of the loaded transmission error of a spiral bevel gear. Proc. Int. Des. Eng. Tech. Conf. Comput. Inf. Eng. Conf., Vol. 5(2005), 2005, pp. 909-915.
18. **DUVERGER O., VELEX P., VEDMAR L. AND SAINSOT P.,** A model of the dynamic behaviour of spur gears with consideration of off-line-of-action contacts. Proc. of the ASME Des. Eng., Tech. Conf., Vol. 4, 2003, pp. 417-424.
19. **FANG Z., YANG H.,** Loaded tooth contact analysis with friction on hypoid gears. Porceeding of 4<sup>th</sup> World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18 1999. Paris. MCI, 1999, Vol. 1, pp.703-709.
20. **GU X., VELEX P.,** A lumped parameter model to analyse the dynamic load sharing in planetary gears with planet errors. Conference on Power Transmissions. Xi'an, China, 25-29, october, 2011.

21. **GREGORY R. W., HARRIS S. L., MUNRO R. G.,** Dynamic behaviour of spur gears. Proc. of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 178, Part 1, n° 8, 1963-64, pp. 207- 226.
22. **GREGORY R. W., HARRIS S. L., MUNRO R. G.,** Torsional motion of a pair of spur gears. Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 178, Part 3, 1963-64, pp. 166-173.
23. **HAGER P., KLINGELNBERG S. G.,** Bevel gears for thrusters. Dynamic positioning conference: thruster's session, 2001.
24. **HARRIS S. L.,** Dynamic loads on the teeth of spur gears. Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 172, 1958, pp.87-112.
25. **HONDA S.,** Rotational vibration of a helical gear pair with modified tooth surfaces. Hiroshima: Proc. of the 3<sup>rd</sup> JSME International Conference on Motion and Power transmissions, 1991, pp. 78-84.
26. **IIDA H., TAMURA A.,** Coupled torsional-flexural vibration of a shaft in a geared system. Proc. of the 3<sup>rd</sup> Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, paper C272/84, 1984, pp. 67-69.
27. **KAHRAMAN A.** Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train. Phoenix: Proc. of the 6<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Vol. 1, 1992, pp. 365-373.
28. **KÜÇÜKAY F.,** Dynamic behaviour of High Speed gears. Proc. Inst. Mech. Engrs, Paper C317/84, 1984, pp. 81-90.
29. **LIM T. C., WANG J.,** Effects of Assembly Errors on Hypoid Gear Mesh and Dynamic Response. Long Beach, CA: Proc. of IDETC/CIE 2005, ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 24-28 September 2005.
30. **LIN H. H., TOWNSEND D. P., OSWALD F. B.,** Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications. Chicago: Proc. of the 5<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Vol. 1, 1989, pp. 409-419.
31. **LIN H. H., TOWNSEND D. P., OSWALD F. B.,** Profile modification to minimize spur gear dynamic loading. Chicago: Proc. of the 5<sup>th</sup> ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Vol. 1, 1989, pp. 455-465.
32. **MUNRO R. G.,** The D. C. component of gear transmission error. Proc. 5<sup>th</sup> ASME, Int. Conf. Gearing and Power Transmission, Vol. 1, 1989, pp. 467-470.

33. **ÖZGÜVEN H. N., KESAN M.** Dynamic of geared rotors to internal excitation by using a finite element modal. Paris: Proc. of the 3<sup>rd</sup> World Congress on Gearing and Power Transmissions, 1992, Vol. 2, pp. 921-930.
34. **PENG T., LIM T. C.,** Effects of assembly errors on spiral bevel gear mesh characteristics and dynamic response. Matsushima Isles Resort: Proc. of MPT2009, JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, 13-15 May 2009.
35. **PENG T., LIM T. C.,** Dynamics of hypoid gears with emphasis on effect of shaft rotation on vibratory response. Las Vegas, NV: Proc. of IDETC/CIE 2007, ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and information in Engineering Conference, 4-7 September 2007.
36. **RETTIG H.,** Vibrations in gear drives: test results and calculation method for dynamic tooth forces. Newcastle/ Proc. 4<sup>th</sup> IFToMM Word Congress, 1975.
37. **LIM T. C.,** Advanced simulation models for geared rotor system dynamics. The 1<sup>st</sup> International Conference on Power Transmissions. Xi'an, China, 25-29, october, 2011.
38. **TUPLIN W. A.,** Dynamic loads on gear teeth. London: Proc. of Institution of Mechanical Engineers, International Conference on Gearing, 1958, pp. 24-30.
39. **TUPLIN, W. A.,** Gear tooth stress at high speed. Proc. Inst. Mech. Engrs, 1950, Vol. 163, 162p.
40. **WANG J., TEIXEIRA ALVES J., GUINGAND M., DE VAUJANY J.-P, VELEX P.,** Modèles statique et dynamique d'engrenages spiro-coniques. Le Mont Dore : 12<sup>ème</sup> Colloque National AIP PRIMECA, 29 mars-1 avril, 2011.
41. **WANG J., TEIXEIRA ALVES J., GUINGAND M., DE VAUJANY J.-P, VELEX P.,** A Static and Dynamic Model of Spiral Bevel Gears. The 1<sup>st</sup> International Conference on Power Transmissions. Xi'an, China, 25-29, october, 2011.

## **ARTICLES DE PÉRIODIQUES**

42. **ABOUSLEIMAN V., VELEX P.,** A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets. *Mech Mach Theory*, Vol. 41(6), 2006, pp. 725-748.
43. **AJMI M., VELEX P.,** A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 40 (2), 2005, pp. 173-190.
44. **AL-SHYAB A., KAHRAMAN A.,** Non-linear dynamic analysis of a multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: sub-harmonic motions. *J Sound Vib*, Vol. 279(1-2), 2005, pp. 417-451.
45. **AMBARISHA V. K., PARKER R. G.,** Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models. *J Sound Vib*, Vol. 302 (3), 2007, pp. 577-595.
46. **ATTIA A. Y.,** Defection of spur gear teeth cut in this rims. *J Eng Ind Trans ASME*, Vol. 86(4), 1964, pp. 333-342.
47. **ARGYRIS J., FUENTES A., LITVIN F. L.,** Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 191(11-12), 2002, pp. 1057-1095.
48. **BAUD S., VELEX P.,** Static and dynamic tooth loading in spur and helical geared systems-experiments and model validation. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 124(2), 2002, pp. 334-346.
49. **BENTON M., SEIREG A.** Simulation of resonances and instability conditions in pinion-gear systems. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 100(1), 1978, pp. 26-32.
50. **BETTAÏEB M. N., VELEX P., AJMI M.,** A static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations-applications to thin-rimmed gears. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 129(2), 2007, pp. 184-194.
51. **BIBEL G. D., KUMAR A., REDDY S., HANDSCHUH R.,** Contact stress analysis of spiral bevel gears using finite element analysis. *J Mech Des*, Vol. 117(2A), 1995, pp. 235-240.
52. **BLANKENSHIP G. W., SINGH R.,** Dynamic force transmissibility in helical gear pairs. *Mech Mach Theory*, Vol. 30(3), No. 3, 1995, pp. 323-339.
53. **CHEN S. Y., TANG J. Y., LUO C. W., WANG Q. B.,** Nonlinear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction. *Mech mach theory*, Vol. 46(4), 2011, pp. 466-478.

54. **CHENG Y., LIM T. C.,** Vibration analysis of hypoid transmission applying an exact geometry-based gear meshes theory. *J Sound Vib*, Vol. 240(3), 2001, pp. 519-543.
55. **CHENG Y., LIM T. C.,** Dynamics of hypoid gear transmission with nonlinear time-varying mesh characteristics. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 125(2), 2003, pp. 373-p382.
56. **CHOI S. T., MAU S. Y.,** Dynamic analysis of geared rotor-bearing systems by the transfer matrix method, *J Mech Des*, Vol. 123(4), 2001, pp. 562-568.
57. **CROWTHER A. R., ZHANG N.,** Torsional finite elements and nonlinear numerical modelling in vehicle power train dynamics. *J Sound Vib*, Vol. 284(3-5), 2005, pp. 825-849.
58. **CUNLIFFE F., SMITH J. D., WELBOURN D. B.,** Dynamic tooth loads in epicyclic gears. *J Eng Ind Trans ASME*, Vol. 96 Ser B (2), 1974, pp. 578-584.
59. **DE VAUJANY J.-P., GUINGAND M., REMOND D., ICARD Y.,** Numerical and experimental study of the loaded transmission error of a spiral bevel gear. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 129(2), 2007, pp. 195-200.
60. **FUENTES A., LITVIN F. L., BAXTER R. M., WOODS R., HANDSCHUH R. F.,** Design and stress analysis of low-noise adjusted bearing contact spiral bevel gears. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 124 (3), 2002, pp. 524-532.
61. **GAO Q., TANABE M., NISHIHARA K.,** Contact-impact analysis of geared rotor systems. *J Sound Vib*, Vol. 319(1-2), 2009, pp. 463-475.
62. **GU C. ZH., WU X. Y.,** Study of the modelling of the gear dynamics considering mesh stiffness and sliding friction. *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 29-32, 2001, pp. 618-623.
63. **GUINGAND M., DE VAUJANY J. P., ICARD Y.,** Fast Three-Dimensional Quasi-Static Analysis of Helical Gears Using the Finite Prism Method. *J. Mech. Des., Transactions of the ASME*, Vol. 126,2004, pp.1082-1088.
64. **HAMAD B. M., SEIREG A.,** Simulation of whirl interaction in pinion gear systems supported on oil film bearing. *J Eng Power Trans ASME*, Vol. 102(2), 1980, pp. 508-510.
65. **HIDAKA T., TERAUCHI Y., NAGAMURA K.,** Dynamic behaviour of planetary Gear (1st report, load distribution in planetary gear). *Bull JSME*, Vol. 19(132), 1976, pp. 690-698.

66. **HILTCHER Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J.-P.**, Load sharing of worm gear with a plastic wheel. *J. Mech. Des.*, Vol. 129, 2007, pp. 23-30.
67. **HOUSER D. R., SEIREG A.**, An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears. *J Eng Ind Trans ASME*, Vol. 92(2), 1970, pp. 495-503.
68. **HUA X., LIM T. C., PENG T., WALI W. E.**, Dynamic analysis of spiral bevel geared rotor systems applying finite elements and enhanced lumped parameters. *Inter. J. Auto. Tech.*, Vol. 13(1), 2012, pp. 97-107.
69. **KAHRAMAN A.**, Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair. *J Vib Acoust Stress Reliab Des*, Vol. 115(1), 1993, pp. 33-39.
70. **KAHRAMAN A., ÖZGUVEN H. N., HOUSER D. R., ZAKRAJSEK J. J.**, Dynamic analysis of geared rotors by Finite Elements. *J Mech Des*, Vol. 114, 1992, pp. 507-514.
71. **KAHRAMAN A., SINGH R.**, Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system. *J Sound Vib*, Vol. 146(1), 1991, pp. 135-156.
72. **KAHRAMAN A., SINGH R.**, Non-linear dynamics of a spur gear pair. *J Sound Vib*, Vol. 142(1), 1990, pp. 49-75.
73. **KAHRAMAN A., SINGH R.**, Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *J Sound Vib*, Vol. 144(3), 1991, pp. 469-506.
74. **KASUBA R., EVANS J. W.**, An extended model for determining dynamic loads in spur gearing. *J Mech Des Trans ASME.*, Vol. 103(2), 1981, pp. 398-409.
75. **KERR A. D.**, Elastic and viscoelastic foundation models. *J Appl Mech Trans ASME*, Vol. 31, 1964, pp. 491-498.
76. **KUBO A.**, Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 100(1), 1978, pp. 77-84.
77. **KUBUR M., KAHRAMAN A., ZINI D. M., KIENZLE K.**, Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment. *J Vib Acoust Trans ASME*, Vol. 126(3), 2004, pp. 398-406.
78. **LI M., HU H.Y.**, Coupled axial-lateral dynamics of a rotor-bearing system geared by spur bevel gears, *J Sound Vib*, Vol. 254(3), 2002, pp. 427-446.
79. **LI M., HU H.Y.**, Dynamic analysis of a spiral bevel-gear rotor-bearing system, *J Sound Vib*, Vol. 259 (3), 2003, pp. 605-624.



80. **LI R. F., YANG C. Y., LIN T. J.**, Finite element simulation of the dynamical behaviour of a speed-increase gearbox. *J. Materials Processing Tech.* Vol. (150), 2004, pp. 170-174.
81. **LIM T.C., CHENG Y.**, A theoretical study of the effect of pinion offset on the dynamics of hypoid geared rotor system, *J Mech Des*, Vol. 121(4), 1999, pp. 594-601.
82. **LIN T. J., OU H., LI R. F.**, A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives. *Comput Methods Appl Mech Eng*, Vol. 196(9-12), 2007, pp. 1716-1728.
83. **LITVIN F. L., WANG J. G., HANDSCHUH R. F.**, Computerized design and analysis of face-milled, uniform tooth height spiral bevel gears drives. *J Mech Des, Trans ASME*, Vol. 118(4), 1996, pp. 573-585.
84. **LITVIN F. L., FUENTES A., FAN Q., HANDSCHUH R. F.**, Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled format generated spiral bevel gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 37(5), 2002, pp. 441-459.
85. **LITVIN F. L., FUENTES A., HAYASAKA K.**, Design, manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 41(1), 2006, pp. 83-118.
86. **MAATAR M., VELEX P.**, Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 119(4), 1997, pp. 474-480.
87. **MAATAR M., VELEX P.**, Analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears: Some possible applications in gear dynamics. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 118(4), 1996, pp. 586-589.
88. **MALIHA R., DOĞRUER C. U., ÖZGÜVEN H. N.**, Nonlinear dynamic modeling of gear-shaft-disk-bearing systems using finite elements and describing functions. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 126(3), 2004, pp. 534-541.
89. **MASUDA T. ABE T., HATTORI K.**, Prediction method of gear noise considering the influence of the tooth flank finishing method. *J Vib Acoust Stress Reliab Des*, Vol. 108(1), 1986, pp. 95-100.
90. **ÖZGÜVEN H. N., HOUSER, D. R.**, Mathematical models used in gear dynamics – A review. *J Sound Vib*, Vol. 121(3), 1988, pp. 383-411.
91. **ÖZGÜVEN H. N., HOUSER, D. R.**, Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. *J Sound Vib*, Vol. 125(1), 1988, pp. 71-83.

92. **ÖZGÜVEN H. N.**, A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics. *J Sound Vib*, Vol. 145(2), 1991, pp. 239-260.
93. **PLOETZ F. W.**, Computing gear set stiffness. *Mach Des*, Vol. 52(2), 1980, pp. 92-94.
94. **SENER O. S., ÖZGÜVEN H. N.**, Dynamic analysis of geared shaft systems by using continuous system model. *J Sound Vib*, Vol. 166(3), 1993, pp. 539-556.
95. **SIMON V.**, The influence of misalignments on mesh performances of hypoid gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 33(8), 1998, pp. 1277-1291.
96. **SIMON V.**, Load distribution in spiral bevel gear. *J Mech Des*, Vol. 129(2), 2007, pp. 201-209.
97. **SIMON V.**, Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears, *Mech Mach Theory*, Vol. 42 (3), 2007, pp. 365-381.
98. **SIMON V.**, Influence of tooth errors and misalignments on tooth contact in spiral bevel gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 43(10), 2008, pp. 1253-1267.
99. **SIMON V.**, Machine-Tool Settings to Reduce the Sensitivity of Spiral bevel gears to Tooth Errors and Misalignment. *J. Mech. Des.*, Vol. 130(8), 2008.
100. **SIMON V.**, Head-cutter for optimal tooth modifications in spiral bevel gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 44(7), 2009, pp. 1420-1435.
101. **SHEVELEVA G. I., VOLKOV A. E., MEDVEDEV V. I.**, Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears. *Mech Mach Theory*, Vol. 42(2), 2007, pp. 198-215.
102. **STEWART J. H.**, The compliance of solid, wide-faced spur gears. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 112(4), 1990, pp. 590-595.
103. **STRAUCH, H.**, Zahnrad schwingungen. *Z Ver dtsch Ing*, Vol. 95, 1953, pp. 159-163.
104. **TAMMINANA V. K., KAHRAMAN A., VIJAYAKAR S.**, A study of the relationship between the dynamic factors and the dynamic transmission error of spur gear pairs. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 129(1), 2007, p75-84.
105. **TEIXEIRA J., WANG J., GUINGAND M., DE VAUJANY J.-P., VELEX P.**, Static and dynamic models for spiro-bevel gears. *Mechanics & Industry*, Cambridge University Press, DOI 10.1051/meca/2012031.

106. **TUPLIN W. A.**, Dynamic loads on gear teeth. *Mach Des*, Vol. 25, 1953, pp. 203-211.
107. **UMEZAWA, K., SATO, T., ISHIKAWA, J.** Simulation of rotational vibration of spur gears. *Bull JSME*, Vol. 27(223), 1984, pp. 102-109.
108. **VELEX P., AJMI M.**, On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors. *J Sound Vib*, Vol. 290(3-5), 2006, pp. 882-909.
109. **VELEX P., AJMI M.**, Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears-approximate dynamic factor formulae. *Mech Mach Theory*, Vol. 42(11), 2007, pp. 1512-1526.
110. **VELEX P., BRUYER J., HOUSER D. R.**, Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears: influence of profile modifications. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 133(3), 2011, pp. 031010(11 pages).
111. **VELEX P., MAATAR M.**, A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour, *J Sound Vib*, Vol. 191 (5), 1995, pp. 629-660.
112. **VINAYAK H., SINGH R., PADMANABHAN C.**, Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external, rigid gears. *J Sound Vib*, Vol. 185(1), 1995, pp. 1-32.
113. **WANG C. C.**, Rotational vibration with backlash: part II. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 103, 1981, pp. 387-397.
114. **WANG C. C.**, Calculating natural frequencies with extended Tuplin's method. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 103, 1981, pp. 379-386.
115. **WANG K. L., CHENG H. S.**, Numerical solution to the dynamic load, film thickness and surface temperatures in spur gears, part 1 analysis, part 2 results. *J Mech Des Trans ASME*, Vol. 103(4), 1981, pp. 177-194.
116. **WANG J. LIM T.C., LI M. F.**, Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity, *J Sound Vib*, Vol. 308(1-2), 2007, pp. 302-329.
117. **ZEMAN J.** Dynamische Zusatzkrafte in Zahnradgetrieben. *Z Ver dtsch Ing*, Vol. 99, 1957, pp. 244-254.
118. **ZHANG Y., FANG Z.**, Analysis of tooth contact and load distribution of helical gears with crossed axes. *Mech. and Mach. Theory*, Vol. 34(1), 1999, pp.41-57

## **THÈSES**

119. **AJMI M.**, Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2000, 151p.
120. **BORDEGARAY C.**, Comportement dynamique des directions assistées électriques automobiles : théorie et expérimentation, Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007, 219p.
121. **BRUYERE J.**, Contribution à l'optimisation de la conception des engrenages coniques à denture droite analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances. Thèse, L'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2006, 232p.
122. **BARD C.**, Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenage, Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1995, 296p.
123. **CUNLIFFE F.**, Epicyclic gear vibrations. PhD. Thesis, Cambridge, 1973, 104p.
124. **DE VAUJANY J.-P.**, Comportement d'engrenage cylindrique intérieur effets de jante et de voile. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996, 178p.
125. **JACQUIN C.-Y.**, Modélisation et optimisation du comportement sous charge des engrenages face. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002, 262p.
126. **KIM I. S.**, Distribution des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des prismes finis. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996, 152p.
127. **MAATAR M.**, Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage, Thèse de Doctorat, Lyon : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1995, 192p.
128. **MUNRO, R. G.**, The dynamic behaviour of spur gears. PhD, University of Cambridge, Cambridge, 1962, 95p.
129. **SAINOT P.**, Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteurs. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989, 205p.

130. **TEIXEIRA J.**, Définition analytique des surfaces de denture et comportement sous charge des engrenages spiro-coniques. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012, 226p.
131. **VELEX P.** Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles. Thèse de Doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1988, 188p.

### **LOGICIELS**

132. **MATLAB**, Version 7.1.0.246 (R14) Service Pack 3, August 02, 2005
133. **ASLAN**, Version 1.5 R17.

# ANNEXE 1 - MÉTHODES NUMÉRIQUES

## ANNEXE 1.1 NEWMARK

Les déplacements et les vitesses sont écrits en série de Taylor à l'instant  $t + \Delta t$

$$\begin{cases} q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^3}{6} (6\beta) \ddot{q}(t) + o(t^4) \\ \dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} (2\alpha) \ddot{q}(t) + o(\Delta t^3) \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

Comme :

$$\ddot{q}(t) = \frac{\dot{q}(t + \Delta t) - \dot{q}(t)}{\Delta t}$$

On a donc :

$$\begin{cases} q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}(t) + \beta \Delta t \dot{q}(t) + \beta \Delta t^2 \ddot{q}(t + \Delta t) \\ \dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{q}(t) + \alpha \Delta t \dot{q}(t + \Delta t) \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

Et à l'instant  $t + \Delta t$ , la vitesse et l'accélération sont :

$$\begin{cases} \ddot{q}(t + \Delta t) = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [q(t + \Delta t) - q(t) - \Delta t \dot{q}(t) - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}(t)] \\ \dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{q}(t) + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} [q(t + \Delta t) - q(t) - \Delta t \dot{q}(t) - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}(t)] \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

Finalement, les déplacements à l'instant  $t + \Delta t$  valent:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} C + K\right) q(t + \Delta t) &= F(t + \Delta t) + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M [q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}(t)] \\ &\quad - C [\dot{q}(t) + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{q}(t) + \frac{\alpha}{\beta \Delta t}] \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{\beta \Delta t}\right) C [q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}(t)] \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

On en déduit les vitesses et les accélérations à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$\begin{cases} \dot{q}(t + \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} q(t + \Delta t) - \frac{2}{\Delta t} q(t) - \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t + \Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2} [q(t + \Delta t) - q(t) - \Delta t \dot{q}(t) - \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{q}(t)] \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

Quand  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$ , la méthode Newmark est stable sans condition.

## **ANNEXE 1.2 TRANSFORMATION DE FOURIER**

Selon le théorème d'échantillonnage, il faut que la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  soit plus ou autant que deux fois de la fréquence de la raideur  $f_0$ .

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (\text{A1.6})$$

Avec : T : période de la fonction (s)

$$f_s = \frac{1}{dt} \quad (\text{A1.7})$$

Avec : dt : décalage du temps entre deux points pris (s)

Si  $f_s \geq 2f_0$ , dans une période de la fonction, il faut que l'on prenne au moins 2 points. Avec la transformée de Fourier, on peut obtenir les coefficients : amplitudes  $A_n$  et les phases  $\varphi_n$  ( $n=0,1,2,3,\dots,N$ ) pour former la série de Fourier de la fonction.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=N/2-1} A_n \cdot \cos(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_n) \quad (\text{A1.8})$$

Avec :

$N$  : Nombre de points pris à faire la transformée de Fourier.

## ANNEXE 2 LOGICIEL ASLAN

### 2.1 BARYCENTRE DES EFFORTS

Cinq dents sont choisies pour analyser l'action quasi-statique dans Aslan. Entre les deux positions limites de contact, c'est-à-dire, du premier point de contact au dernier point de contact d'une paire de dents, les résultats sont calculés pour un nombre choisi de positions.

À chaque position cinématique, ASLAN fournit les coordonnées du barycentre des efforts  $B_m$  dans le repère du pignon  $R_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1)$  et dans le repère de la roue  $R_2(\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2)$  :

$$\left\{ \overrightarrow{OB_m} \right\}_{/R_1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}_{/R_1} = \begin{Bmatrix} \frac{\sum(x_i \cdot F_{xi})}{F_{xtotal}} \\ \frac{\sum(y_i \cdot F_{yi})}{F_{ytotal}} \\ \frac{\sum(z_i \cdot F_{zi})}{F_{ztotal}} \end{Bmatrix}_{/R_1} \quad \text{et} \quad \left\{ \overrightarrow{OB_m} \right\}_{/R_2} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}_{/R_2} = \begin{Bmatrix} \frac{\sum(x_i \cdot F_{xi})}{F_{xtotal}} \\ \frac{\sum(y_i \cdot F_{yi})}{F_{ytotal}} \\ \frac{\sum(z_i \cdot F_{zi})}{F_{ztotal}} \end{Bmatrix}_{/R_2} \quad (\text{A2.1})$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{/R_1}, \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{/R_2} \text{ Coordonnées de point de contact dans les repères } R_1 \text{ et } R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{Bmatrix}_{/R_1}, \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{Bmatrix}_{/R_2} \text{ Coordonnées de l'effort sur le point de contact dans les repères } R_1 \text{ et } R_2$$

$R_2$

$$\begin{Bmatrix} F_{xtotal} \\ F_{ytotal} \\ F_{ztotal} \end{Bmatrix}_{/R_1}, \begin{Bmatrix} F_{xtotal} \\ F_{ytotal} \\ F_{ztotal} \end{Bmatrix}_{/R_2} \text{ Coordonnées de l'effort total suivant les axes x, y et z dans les repères } R_1 \text{ et } R_2$$

Les coordonnées du barycentre des efforts sur le pignon à chaque position cinématique sont données par :

$$\left\{ \overrightarrow{OB_m} \right\}_{/R} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{/R} \quad (\text{A2.2})$$



Avec les coordonnées du barycentre des efforts, du centre du pignon et du centre de la roue, on peut obtenir les coordonnées de vecteur  $\overrightarrow{O_1B_m}$  et  $\overrightarrow{O_2B_m}$  :

$$\left\{ \overrightarrow{O_1B_m} \right\}_{/R} = \left\{ \overrightarrow{OB_m} \right\}_{/R} - \left\{ \overrightarrow{OO_1} \right\}_{/R} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{/R} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}_{/R} \quad (\text{A2.3})$$

$$\left\{ \overrightarrow{O_2B_m} \right\}_{/R} = \left\{ \overrightarrow{OB_m} \right\}_{/R} - \left\{ \overrightarrow{OO_2} \right\}_{/R} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{/R} - \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}_{/R} \quad (\text{A2.4})$$

## **2.2 DIRECTION NORMALE**

La normale de référence du pignon et de la roue à chaque position est donnée par :

$$\vec{n} = -\vec{n}_2 = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}_{/R} \quad (\text{A2.5})$$

## LISTE DES FIGURES

|   |    |
|---|----|
| Figure 2-1 : Engrenage conique à denture droite (a) et à denture spirale (b) [1].....   | 2  |
| Figure 2-2 : Offset E pour l'engrenage hypoïde [4]. .....   | 3  |
| Figure 2-3 : Géométrie de l'engrenage spiro-conique [3]. .....  | 3  |
| Figure 2-4 : Modèle éléments finis de trois paires de dents par Fuentes [60]. .....   | 4  |
| Figure 2-5 : Maillage EF déformé pour une orientation correcte des 'GAP ELEMENT' [12]. .....  | 4  |
| Figure 2-6 : Maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent [125].....   | 5  |
| Figure 2-7 : Calcul des coefficients de surface de Boussinesq [125]. .....  | 5  |
| Figure 2-8 : Contact entre deux corps linéaire (a) [125] et angulaire (b) [130]. .....  | 5  |
| Figure 2-9 : Distributions de charge quasi-statique d'engrenage cylindrique à denture droite (a) par Abousleiman et Velez [42] et à denture hélicoïdale (b) par Ajmi et Velez [11]. .....   | 7  |
| Figure 2-10 : Distributions de charge à une position d'engrènement de roue à vis sans fin par Hiltcher et al. [66]. .....   | 8  |
| Figure 2-11 : Distributions de charge pour un engrenage spiro-conique sans défaut et avec désalignement $-0.02^\circ$ et $+0.02^\circ$ par Peng et Lim [34]. .....  | 8  |
| Figure 2-12 : (a) Modèle sans couplage, (b) modèle avec couplage [75]. .....  | 9  |
| Figure 2-13 : Fondation élastique de Pasternak.....   | 9  |
| Figure 2-14 : Evolutions de la longueur de ligne de contact pendant deux périodes d'engrènement pour les engrenages cylindriques (a) à dentures droites ( $\epsilon_\alpha=1.691$ ) et (b) à dentures hélicoïdales ( $\epsilon_\alpha=1.639$ , $\epsilon_\beta=0.596$ ) par Maatar et Velez, 1996 [87]. ..... | 10 |
| Figure 2-15 : Evolution de la raideur d'engrènement globale pendant une période de contact pour (a) : engrenage spiro-conique par Peng et Lim, 2009 [35] et (b) : engrenage hypoïde par Wang et al, 2007 [116]. .....   | 11 |
| Figure 2-16 : La notion d'erreur de transmission et des expressions possibles selon Munro, 1989 [32]. .....   | 11 |
| Figure 2-17 : Comparaison des erreurs de transmission quasi-statiques sous charge (a) expérimentale et (b) numérique par Velez et Maatar, 1996 [111]. .....   | 12 |
| Figure 2-18 : (a) Fonction de transmission, erreurs de transmission à vide paraboliques prédéfinies (b) par Litvin et al. 1996 [83]. .....  | 12 |
| Figure 2-19 : Un exemple de la variation des erreurs de transmission sous charge d'engrenage spiro-conique par Litvin et al. 2002 [84]. .....   | 12 |
| Figure 2-20 : Erreurs de transmission sous charge d'engrenage spiro-conique pour des couples (a) 65 N.m et (b) 130 N.m par De Vaujany et al. 2007 [59]. .....   | 13 |
| Figure 2-21 : Modèle torsionnel de base [8]. .....  | 15 |

|   |    |
|---|----|
| Figure 2-22 : Modèle linéaire de Sener et Özgüven [94].....   | 16 |
| Figure 2-23 : Modèle à excitation paramétrique d'un système pignon – roue par Benton et Seireg [49]. .....  | 17 |
| Figure 2-24 : Mise en évidence expérimentale des séparations de denture pour plusieurs amortissements (Gregory et al. [21, 22]). .....  | 17 |
| Figure 2-25 : Modèle dynamique non-linéaire d'un système rotor roulement par Kahraman 1991 [73]. .....  | 18 |
| Figure 2-26 : Modèle du système d'engrenage cylindrique à denture droite par Velez & Maatar [111]. .....  | 19 |
| Figure 2-27 : Schéma itératif d'après Velez [111]. .....  | 20 |
| Figure 2-28 : Schéma du modèle dynamique tridimensionnel d'un système de rotors couplé par un engrenage hypoïde par Lim et Cheng [81]. .....  | 21 |
| Figure 2-29 : Points de contact dans les conditions de corps rigides [111]. .....   | 22 |
| Figure 2-30 : Un exemple des erreurs de transmission sous charge dynamique expérimentale et numérique par Grégory et al. 1963-64 [21-22]. .....   | 23 |
| Figure 2-31 : Formes de solutions possibles de l'équation de Mathieu. Régime stable (b) et instable (a) d'après Nayfeh et Mook [7]. .....   | 24 |
| Figure 2-32 : Maximum de la force d'engrènement dynamique en fonction de la vitesse de rotation du pignon, pour un engrenage cylindrique à denture droite, selon Velez et Ajmi [108]. .....     | 25 |
| Figure 2-33 : Efforts dynamiques d'engrènement pour un engrenage hypoïde selon Lim et Cheng [81]. .....   | 25 |
| Figure 2-34 : (a) Courbe de la réponse dynamique d'après Kubo [76]. (b) Comparaison entre les résultats expérimentaux de Kubo [76] et les résultats dynamiques de Velez&Maatar [111] 1996. .... | 26 |
| Figure 2-35 : Maximum des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation – comparaison entre l'intégration pas à pas et la formule [109]. .....                                  | 27 |
| Figure 3-1 : Modèle torsionnel.....   | 28 |
| Figure 3-2 : Système couplé par un engrenage spiro-conique.....   | 32 |
| Figure 3-3 : Degrés de liberté à chaque nœud du système. ....   | 32 |
| Figure 3-4 : Élément disque.....  | 33 |
| Figure 3-5 : Élément d'engrenage spiro-conique .....  | 33 |
| Figure 3-6 : Maillage d'un flanc de denture [130]. .....  | 35 |
| Figure 3-7 : Définition des écarts et des déplacements [130]. .....   | 36 |
| Figure 3-8 : Point de contact dans les conditions de corps rigides d'engrenage spiro-conique.....   | 38 |
| Figure 3-9: Trois dents en contact à l'instant t.....   | 39 |
| Figure 3-10 : Point de contact théorique à vide sans défaut de montage. ....  | 39 |

|  |    |
|--|----|
| Figure 3-11 : Distance dans la direction normale au point $M_i$ entre le pignon et la roue à vide avec défaut de montage.....                                    | 40 |
| Figure 3-12 : La méthode des Eléments Finis à deux nœuds - Poutre de Timoshenko [120]. .....   | 41 |
| Figure 3-13 : Exemple de positionnement des arbres. ....   | 45 |
| Figure 3-14 : Raideurs modélisant les paliers.....   | 46 |
| Figure 3-15 : Un exemple de conditions aux limites dans l'analyse quasi-statique.....  | 47 |
| Figure 3-16: Assemblage des matrices.....  | 50 |
| Figure 3-17 : Procédure pour la fonction 1. ....   | 52 |
| Figure 3-18 : Distribution de pression suivant la hauteur et la largeur de la denture.....   | 52 |
| Figure 3-19 : Erreur de transmission (en radian) à vide (a) et sous charge (b). .....  | 53 |
| Figure 3-20 : Distributions de pression suivant la hauteur et la largeur de denture, vitesse de 1 tr/min. ....   | 53 |
| Figure 3-21 : Erreur de transmission sous charge du modèle dynamique et force dynamique à faible vitesse (1 tr/min sur le pignon). ....                          | 54 |
| Figure 3-22 : Coefficients dynamique à différentes de vitesses de rotation du pignon (250~15000 tr/min) .....  | 54 |
| Figure 3-23 : Itératif numérique de la fonction 3.....   | 55 |
| Figure 3-24 : Définition de rayon de transfert par rapport au barycentre. ....   | 57 |
| Figure 3-25 : Interactif numérique de la fonction 4. ....  | 64 |
| Figure 3-26 : Coefficients dynamiques à différentes vitesses de rotation du pignon.....  | 65 |
| Figure 4-1 : Epaisseurs du pignon et de la roue. ....  | 68 |
| Figure 4-2 : Conditions limites dans ASLAN.....  | 69 |
| Figure 4-3: Raideur d'engrènement d'engrenage Gleason optimisé 2 .....   | 70 |
| Figure 4-4 : Portées ASLAN et du modèle dynamique à la faible vitesse pour l'engrenage Gleason 2. 71   |    |
| Figure 4-5 : Erreur de transmission sous charge quasi-statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason 2 ..... | 72 |
| Figure 4-6 : Force d'engrènement statique d'ASLAN et du modèle dynamique à la faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé 2. ....          | 73 |
| Figure 4-7 : Schéma Campbell pour l'engrenage Gleason 2. ....  | 74 |
| Figure 4-8 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique local et du modèle dynamique global d'engrenage Gleason 2.....  | 75 |
| Figure 4-9 : Portées de la modélisation de Simon [98]. ....  | 76 |
| Figure 4-10 : Portées d'ASLAN et du modèle dynamique local à basse vitesse de rotation du pignon.78  |    |

|   |     |
|---|-----|
| Figure 4-11 : Rapprochements des corps angulaires et linéaires et erreurs de transmission sous charge angulaire et linéaires. ....  | 79  |
| Figure 4-12 : Schéma de Campbell pour l'engrenage spiro-conique de Simon. ....  | 80  |
| Figure 4-13 : Coefficient dynamique d'engrenage spiro-conique de Simon.....   | 81  |
| Figure 4-14: Portées pour un exemple d'engrenage.....   | 85  |
| Figure 4-15 : Erreur de transmission pour l'engrenage exemple.....  | 86  |
| Figure 4-16 : Schéma de Campbell pour l'engrenage exemple.....  | 87  |
| Figure 4-17 : Coefficients dynamiques pour l'engrenage exemple sans arbre sans défaut. ....   | 88  |
| Figure 5-1 : Portées pour les trois géométries d'engrenage Gleason Normalisé .....  | 91  |
| Figure 5-2 : Force statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon pour l'engrenage Gleason normalisé (A) et optimisé version 1 (B) et version 2 (C). ....                                     | 92  |
| Figure 5-3 : Erreurs de transmission sous charge quasi-statique d'ASLAN et du modèle dynamique à faible vitesse de rotation du pignon pour l'engrenage Gleason normalisé (A) et optimisé version 1 (B) et version 2 (C). .... | 93  |
| Figure 5-4 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique global d'engrenage Gleason normalisé, optimisé version 1 et optimisé 2. ....   | 94  |
| Figure 5-5 : Géométries des arbres dans la situation avec arbres. ....  | 94  |
| Figure 5-6 : Conditions limites dans ASLAN pour la configuration avec arbres. ....  | 95  |
| Figure 5-7 : Portées d'ASLAN et du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé 2.....   | 96  |
| Figure 5-8 : Portées d'engrenage Gleason optimisé 2 du modèle en cas sans arbre (gauche) et en cas avec arbres (droit). ....  | 97  |
| Figure 5-9: Raideur d'engrènement d'engrenage Gleason 2 sans arbre (A) et avec arbres (B). ....   | 97  |
| Figure 5-10 : Erreur de transmission sous charge statique d'ASLAN et du modèle dynamique local à une faible vitesse de rotation du pignon.....  | 98  |
| Figure 5-11 : Force d'engrènement statique d'ASLAN et du modèle dynamique local à la faible vitesse sans arbre (A) et avec arbres (B). ....   | 99  |
| Figure 5-12 : Schéma de Campbell pour l'engrenage Gleason 2 avec arbres. ....   | 100 |
| Figure 5-13 : Coefficient dynamique du modèle local et global d'engrenage avec arbres. ....   | 101 |
| Figure 5-14 : Comparaison des coefficients dynamiques de l'engrenage Gleason sans arbre et avec arbres pour le modèle local.....  | 102 |
| Figure 5-15 : Coefficients dynamiques du modèle local $a = 2000$ , $a=1500$ et $a=1000$ .....   | 103 |
| Figure 5-16 : Coefficients dynamiques du modèle local, $a=750$ , $a=600$ et $a=500$ .....   | 104 |
| Figure 5-17 : Définition de défauts de montage dans le repère général R (O, X, Y, Z).....   | 105 |
| Figure 5-18 : Définition de cas avec désalignement $-0.1^\circ$ . ....  | 106 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure 5-19 : Définition de cas 90.1° .   | 106 |
| Figure 5-20 : Portées du modèle dynamiques local à une faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé version 2 en cas sans défaut de montage (B) et avec désalignement - 0.1° (A) et +0.1° (C).         | 108 |
| Figure 5-21 : Portées du modèle dynamiques local à une faible vitesse de rotation du pignon d'engrenage Gleason optimisé version 2 en cas sans défaut de montage (B) et avec l'offset -0.25mm (A) et l'offset +0.25mm (C).  | 109 |
| Figure 5-22 : Coefficients dynamiques sans défaut et avec desalignement du modèle global.   | 110 |
| Figure 5-23 : Coefficients dynamiques sans défaut et avec désalignement du modèle global.   | 110 |
| Figure 5-24 : Coefficients dynamiques d'engrenage de Simon en cas sans désalignement et avec désalignement 0.1° ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et +0.1° ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ).   | 111 |
| Figure 5-25 : Portées d'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec désalignement -0.1° ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et +0.1° ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ). | 112 |
| Figure 5-26 : Coefficients dynamiques du modèle dynamique local d'engrenage de Simon en cas sans désalignement et avec désalignement 0.1° ( $\Sigma = 89.9^\circ$ ) et +0.1° ( $\Sigma = 90.1^\circ$ ).                     | 113 |
| Figure 5-27 : Portées (engrenage de Simon) obtenues par le modèle dynamique local pour une faible vitesse de rotation du pignon - Cas sans défaut et avec offsets de -0.25mm et +0.25mm.                                    | 114 |
| Figure 5-28 : Coefficients dynamiques (engrenage de Simon) sans défaut et avec offsets de 0.25mm et +0.25mm.  | 115 |
| Figure 5-29 : Coefficients dynamiques pour l'engrenage de Simon sans défaut et avec défauts suivants l'axe du pignon -0.25mm et +0.25mm.  | 115 |
| Figure 5-30 : Portées de l'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec défauts axiaux du pignon -0.25mm et +0.25mm. ....                              | 116 |
| Figure 5-31 : Portées d'engrenage de Simon du modèle dynamique local à la faible vitesse de rotation du pignon en cas sans défaut et avec défauts axiaux de la roue -0.25mm et +0.25mm. ....                                | 117 |

## LISTE DES TABLEAUX

---

|   |           |
|---|-----------|
| Tableau 4-1 : Caractéristiques inertielles des engrenages Gleason.....  | 66        |
| Tableau 4-2 : Paramètres complets des engrenages et des outils de logiciel ASLAN .....  | 67        |
| Tableau 4-3 : Epaisseurs du pignon et de la roue. ....  | 68        |
| Tableau 4-4 : Géométries des arbres dans les modèles dynamiques pour la situation sans arbre et sans défaut de montage (A). ....                  | 68        |
| <i>Tableau 4-5 : Raideurs aux paliers des arbres dans les modèles dynamiques dans la situation sans arbre et sans défaut de montage (A). ....</i> | <i>69</i> |
| Tableau 4-6 : Coefficients d’amortissement. ....  | 69        |
| Tableau 4-7 : Fréquences propres et rapports $\chi_i$ des modèles dans la situation A .....   | 73        |
| Tableau 4-8 : Paramètres entrés dans les modèles dynamiques.....  | 76        |
| Tableau 4-9 : Paramètres dans les articles de V. Simon [95-100]. ....   | 77        |
| Tableau 4-10 : Paramètres entrées d’engrenage dans les modèles dynamiques.....  | 83        |
| Tableau 4-11 : Paramètres de l’engrenage spiro-conique étudié.....  | 84        |
| Tableau 5-1 : Paramètres différents pour les trois géométries d’engrenage Gleason Normalisé.....  | 90        |
| Tableau 5-2 : Géométries des arbres entrées dans les modèles dynamiques.....  | 95        |
| Tableau 5-3 : Raideurs aux paliers des arbres.....  | 96        |
| Tableau 5-4 : Fréquences propres en tours par minute et rapports $\chi_i$ des modèles torsionnels et tridimensionnels dans la situation B. ....   | 100       |
| Tableau 5-5 : Erreurs de montage.....   | 105       |

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE  
LYON

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| NOM : WANG  | DATE de SOUTENANCE : 10.06.2014 |
| Prénoms : Jing  |                                 |
| TITRE :<br>Contribution à l'analyse du comportement dynamique d'engrenages spiro-coniques.  |                                 |
| NATURE : Doctorat<br>Ecole doctorale : MEGA (mécanique, énergétique, génie civil et acoustique)   |                                 |
| Spécialité : Mécanique  |                                 |
| RESUME :<br><p>Les engrenages spiro-coniques sont utilisés dans les transmissions de puissance nécessitant un renvoi d'angle, par exemple dans le domaine aéronautique ou automobile. Ces engrenages admettent des puissances et des vitesses importantes.</p> <p>La fabrication des engrenages spiro-conique est complexe. De nombreuses études ont été réalisées sur son optimisation pour définir les profils des dents en contacts. Des travaux existent également pour le dimensionnement statique des dentures.</p> <p>L'aspect dynamique est l'objectif du travail de cette thèse. Des approches théoriques et numériques, pour simuler les vibrations d'engrènement dans des couples spiro-coniques, sont présentées et discutées. Plusieurs modèles ont été développés : torsionnel et tridimensionnel, incluant la prise en compte de défauts de position et d'alignement. Un modèle original (tridimensionnel local), est proposé. Il repose sur des analyses quasi-statiques préalables. Il permet de suivre les évolutions des conditions de contact instantanées sur les flancs de denture. Une approche alternative est également présentée, qui conduit à construire des termes d'excitation globaux en termes d'erreurs de transmission et de raideurs d'engrènement, permettant ainsi de s'affranchir d'algorithmes de contact au cours de la résolution dynamique. Des comparaisons ont été menées avec des résultats quasi-statiques et dynamiques issus de la littérature.</p> |                                 |
| MOTS CLES :<br>Engrenages, dynamique, partage des charges,  |                                 |
| Laboratoire(s) de recherches : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)<br>UMR CNRS-INSA n°5259   |                                 |
| Directeur de thèse : Maître de conférences HDR Michèle GUINGAND et professeur des universités<br>Philippe VELEX   |                                 |
| Président du jury :   |                                 |
| Composition du jury : M. HADDAR, M. SARTOR, JL. DION, M. GUINGAND, E. JACQUELIN, JP.<br>DE VAUJANY, P. VELEX  |                                 |