



**HAL**  
open science

# Principes alternatifs pour la détection de masse ultime via la dynamique non linéaire de capteurs résonants

## M/NEMS

Van-Nghi Nguyen

### ► To cite this version:

Van-Nghi Nguyen. Principes alternatifs pour la détection de masse ultime via la dynamique non linéaire de capteurs résonants M/NEMS. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2013. Français. NNT : 2013ISAL0160 . tel-01135287

**HAL Id: tel-01135287**

**<https://theses.hal.science/tel-01135287>**

Submitted on 25 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

## PRINCIPES ALTERNATIFS POUR LA DÉTECTION DE MASSE ULTIME VIA LA DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DE CAPTEURS RÉSONANTS M/NEMS

Présentée devant

**I'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Van-Nghi NGUYEN**

Thèse soutenue le 11 décembre 2013 devant la Commission d'examen

### Jury

DANIEL BARBIER	Professeur, INSA Lyon	Président
BRUNO COCHELIN	Professeur, Ecole Centrale Marseille	Rapporteur
SÉBASTIEN HENTZ	HDR, CEA - LETI	Rapporteur
RÉGIS DUFOUR	Professeur, INSA Lyon	Directeur de thèse
CLAUDE HENRI LAMARQUE	Professeur, ENTPE	Co-Directeur
SÉBASTIEN BAGUET	Maître de Conférences, INSA Lyon	Co-Directeur

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Remerciements

Les travaux de cette thèse, soutenus par un contrat doctoral du MENRT, ont été accueillis au sein du LaMCoS, UMR CNRS 5259 de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Que son directeur, le Professeur David Dureisseix, en soit remercié

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à mes trois directeurs de thèse, MM. Régis Dufour, Claude-Henri Lamarque et Sébastien Baguet. Cela a été un honneur et un plaisir de travailler sous leur direction, et cette thèse n'aurait pas abouti sans leur patience, leur enthousiasme, leurs encouragements, leurs précieux conseils et le partage de leurs compétences scientifiques pendant 3 ans de thèse, tout spécialement pendant l'écriture du mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma très profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à M. Daniel Barbier pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Merci également à MM. Bruno Cochelin et Sébastien Hentz pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon travail.

Je profite également de cette occasion pour exprimer mes remerciements amicaux à tous les membres du labo : Catherine, Zhen, Jarir, Eric, Claire, Mzaki, Bartolomé, Sophie,...pour leur aide précieuse et leur encouragement tout au long de mon travail de recherche.

Enfin et pour toujours, j'adresse mon amour, ma reconnaissance et mes remerciements qui viennent du fond du cœur à mes parents, à ma femme, à mon fils ainsi qu'à mes amis pour leur compréhension, leur soutien moral et leur encouragement régulier.



# Résumé

Les capteurs résonants de type M/NEMS sont largement utilisés dans l'environnement biologique pour la mesure de masse de biomolécules en raison de leur grande précision combinée à une taille réduite. Classiquement, la détection et la quantification se basent sur le décalage fréquentiel induit par la masse ajoutée. Toutefois, ce décalage devient très faible et difficile à distinguer du bruit de mesure lorsque les masses considérées sont très petites. Il est théoriquement possible de gagner encore un ou plusieurs ordres de grandeur en résolution avec ces méthodes fréquentielles en diminuant encore les tailles et/ou en augmentant le rapport signal sur bruit, c'est-à-dire en actionnant de manière plus importante les résonateurs. Mais, dans ces conditions, les nanorésonateurs ont un comportement très fortement non-linéaire, source d'instabilités et de mixage de bruit basses et hautes fréquences susceptibles de dégrader la fiabilité et la précision des mesures.

C'est pourquoi cette thèse a pour objectif de définir des principes de détection alternatifs basés sur l'exploitation des phénomènes non-linéaires, tels que les comportements hystériques et les bifurcations des courbes de réponse en fréquence.

Pour cela, un modèle réduit de micro/nano-poutre résonante avec actionnement électrostatique est considéré. Les résultats numériques montrent que les brusques sauts d'amplitude à proximité des points de bifurcation permettent la détection de masses très faibles. Contrairement à la détection fréquentielle, ces sauts sont d'autant plus grands que la masse additionnelle est petite, ce qui rend cette technique particulièrement intéressante. De plus, le seuil de détection peut être ajusté avec la valeur de la fréquence de fonctionnement. Un mécanisme de réinitialisation est toutefois indispensable pour rendre la détection à nouveau possible après un saut d'amplitude.

Afin d'automatiser la réinitialisation et ainsi permettre la détection en temps réel, un concept totalement innovant de détection de masse par balayage en fréquence des cycles d'hystérésis est proposé, qui permet de détecter, quantifier et localiser la masse ajoutée sur la poutre résonante.

La mise en réseau de plusieurs poutres résonantes est également traitée et constitue un premier pas vers la mise en œuvre de réseaux de milliers de capteurs. Pour cela, des architectures efficaces sont proposées et les modèles numériques sont adaptés en conséquence. Sur des configurations symétriques, l'exploitation des bifurcations de type brisure de symétrie permet là-encore d'améliorer la détection de masse.

**MOTS CLÉS:** M/NEMS, capteur de masse résonant, dynamique non linéaire, bifurcation, détection, quantification, localisation, réseau de poutres



# Abstract

Resonant M/NEMS mass sensors are widely used in biological environment for measuring the mass of biomolecules due to their high accuracy combined with a reduced size. Usually, the detection and the quantification are based on the frequency shift induced by an added mass. However, this shift becomes very small and difficult to distinguish from the noise of measurement as the considered masses are tiny. It is theoretically possible to increase further one or several orders of magnitude in resolution with these frequency methods by further reducing size and/or by increasing the signal-to-noise ratio, that is to say by operating more importantly the resonators. But in these conditions, the nanoresonators have a strongly nonlinear behavior, a source of instability and noise mix of low and high frequencies likely to degrade the reliability and the accuracy of measurements.

Therefore, the thesis's objective is to define alternative principles of detection based on exploiting the nonlinear phenomena, such as the hysteretic behavior and the bifurcations of frequency-response curves.

To this end, a reduced model of resonant micro/nano-beam with electrostatic actuation is considered. The numerical results show that the sudden jumps in amplitude close to bifurcation points allow the detection of very small masses. Unlike the frequency detection, the smaller the added mass, the larger the increase of the jump, which makes this technique particularly interesting. In addition, the detection threshold can be adjusted with the value of the operating frequency. However, a mechanism of reinitialization is mandatory to make the detection possible again after a jump in amplitude.

In order to automate the reinitialization and allow the detection in real-time, a completely innovative concept of mass detection by the frequency sweep of the hysteretic cycles is proposed to detect, quantify and locate the added mass on the resonant beam.

An array of several resonant beams is also considered and constitutes a first step toward the implementation of arrays of thousands of sensors. Efficient architectures are proposed for this purpose and the numerical models are adapted accordingly. On symmetric configurations, exploiting the bifurcations of symmetry-breaking type allows here again to improve the mass detection.

**KEYWORDS:** M/NEMS, mass sensor, nonlinear dynamics , bifurcation, detection, quantification, localization, beam array



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Bibliographie &amp; état de l'art</b>	<b>7</b>
1.1 M/NEMS . . . . .	8
1.2 De MEMS à NEMS . . . . .	8
1.3 Capteur résonant par l'électrostatique . . . . .	9
1.3.1 Fréquence de résonance . . . . .	10
1.3.2 Facteur de qualité . . . . .	11
1.3.3 Sensibilité et résolution . . . . .	11
1.3.4 Bruit . . . . .	12
1.4 Capteur de masse résonant . . . . .	13
<b>2 Méthodes de calcul des solutions périodiques</b>	<b>17</b>
2.1 Méthode de la moyenne harmonique . . . . .	18
2.2 Méthode des échelles multiples . . . . .	20
2.3 Méthode d'intégration temporelle avec continuation séquentielle. . . . .	22
2.4 Méthode de shooting . . . . .	23
2.4.1 Shooting simple . . . . .	23
2.4.2 Continuation par longueur d'arc : . . . . .	25
2.5 Balance harmonique par Manlab . . . . .	29
2.5.1 Méthode asymptotique numérique (MAN) : . . . . .	30
2.5.2 Application de la HBM + MAN dans Manlab . . . . .	30
2.5.3 Exemple . . . . .	32
<b>3 Micro/nano-résonateur avec poutre encastree-encastree</b>	<b>35</b>
3.1 Modèle de micro/nano-résonateur avec poutre encastree-encastree . . . . .	37
3.1.1 Équation du mouvement . . . . .	37
3.1.2 Analyse de l'équation du mouvement . . . . .	38

3.2	Détermination des modes propres . . . . .	40
3.2.1	Cas 1 : modes propres non contraints . . . . .	40
3.2.2	Cas 2 : modes propres contraints . . . . .	41
3.3	Calcul de la réponse numérique . . . . .	42
3.3.1	Procédure de Galerkin . . . . .	42
3.3.2	Méthode de la Balance Harmonique + Méthode Asymptotique Numérique (HBM+MAN) . . . . .	43
3.4	Calcul de la réponse par méthode de la moyenne harmonique . . . . .	45
3.4.1	Cas 3 : calcul de la réponse avec multiplication par $(1 - w)^2$ . . . . .	45
3.4.2	Cas 4 : calcul de la réponse avec une série de $\frac{1}{(1-w)^2}$ . . . . .	45
3.4.3	Cas 5 : calcul de la réponse du cas particulier $\frac{1}{(1-w)^2} \approx 1$ . . . . .	46
3.5	Confrontation des méthodes . . . . .	47
3.6	Analyse paramétrique . . . . .	48
3.6.1	Influence des modes supérieurs . . . . .	48
3.6.2	Influence des paramètres . . . . .	49
3.7	Micro/nano-poutre avec masse ajoutée . . . . .	51
3.7.1	Équation du mouvement . . . . .	51
3.7.2	Décalage en fréquence . . . . .	53
3.7.3	Changement d'amplitude . . . . .	54
3.8	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Micro/nano-résonateur avec poutre encastree-libre</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1	Équation du mouvement . . . . .	63
4.2	Modes propres . . . . .	64
4.3	Calcul de la réponse avec multiplication par $(1 - w)^2$ . . . . .	66
4.3.1	Procédure de Galerkin . . . . .	66
4.3.2	Méthode d'intégration temporelle . . . . .	69
4.3.3	HBM+MAN . . . . .	69
4.3.4	Méthode de la moyenne harmonique . . . . .	71
4.4	Calcul de la réponse avec une série de $\frac{1}{(1-w)^2}$ . . . . .	72
4.4.1	HBM+MAN . . . . .	72
4.4.2	Méthode de la moyenne harmonique . . . . .	73
4.5	Confrontation des méthodes . . . . .	74
4.6	Analyse paramétrique . . . . .	77
4.6.1	Influence des modes supérieurs . . . . .	77
4.6.2	Influence des paramètres . . . . .	78
4.7	Micro/nano-poutre avec masse ajoutée . . . . .	80
4.7.1	Mise en équation . . . . .	80
4.7.2	Analyse de la réponse par la méthode de la moyenne harmonique . . . . .	81
4.7.3	HBM+MAN . . . . .	83
4.8	Conclusion . . . . .	85

<b>5</b>	<b>Détection de masse ajoutée</b>	<b>87</b>
5.1	Détection . . . . .	90
5.1.1	Principe . . . . .	90
5.1.2	Comportement assouplissant . . . . .	91
5.1.3	Comportement raidissant . . . . .	92
5.1.4	Robustesse et réinitialisation du mécanisme de détection . . . . .	92
5.1.5	Seuil de détection basé sur l'approche de la fréquence de bifurcation	95
5.1.6	Automatisation de la détection par balayage en fréquence . . . . .	96
5.2	Quantification avec une fréquence de fonctionnement fixe . . . . .	101
5.2.1	Comportement raidissant . . . . .	103
5.2.2	Comportement assouplissant . . . . .	103
5.3	Quantification via le balayage en fréquence et les cycles d'hystérésis . . .	104
5.3.1	Influence de la vitesse $\epsilon$ du balayage en fréquence . . . . .	104
5.3.2	Comportement assouplissant . . . . .	104
5.3.3	Comportement raidissant . . . . .	106
5.4	Résolution du problème de réinitialisation par le comportement mixte . .	108
5.4.1	Micro-poutre encastree-encastree . . . . .	108
5.4.2	Micro-poutre encastree-libre . . . . .	110
5.5	Localisation . . . . .	113
5.6	Conclusion . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Réseau de micro/nano-poutres</b>	<b>119</b>
6.1	Équation du mouvement . . . . .	120
6.1.1	Sans masse ajoutée . . . . .	121
6.1.2	Avec masse ajoutée . . . . .	126
6.2	Réseau de 2 nano-poutres . . . . .	126
6.2.1	Vérification de la robustesse du modèle . . . . .	126
6.2.2	Comparaison des résultats obtenus par HBM+MAN et l'intégration temporelle. . . . .	128
6.2.3	Méthode de la moyenne harmonique . . . . .	129
6.2.4	Analyse de la courbe de réponse . . . . .	131
6.2.5	Mécanisme de détection . . . . .	132
6.3	Réseau de 3 nano-poutres . . . . .	133
6.3.1	Tensions d'actionnement asymétriques . . . . .	136
6.3.2	Tensions d'actionnement symétriques . . . . .	138
6.4	Conclusion . . . . .	144
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>147</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>151</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>



# Table des figures

1.1	Réponse fréquentielle : influence du facteur de qualité . . . . .	11
2.1	Solution obtenue par la méthode d'intégration temporelle avec continuation séquentielle : a) solution transitoire pour $\Omega = 1$ ; b) solution périodique pour $\Omega = 1$ ; c) solution transitoire dans l'espace des phases ; d) courbe de réponse . . . . .	24
2.2	Algorithme de la méthode de shooting . . . . .	25
2.3	Algorithme de la méthode de shooting avec continuation par la longueur d'arc . . . . .	26
2.4	Solution d'une équation de Duffing par la méthode de shooting . . . . .	29
2.5	Courbe de réponse d'une équation de l'oscillateur de Duffing par Manlab . . . . .	32
3.1	Modèle de micro/nano-poutre encastree-encastree forcée par une électrode. . . . .	37
3.2	Réponse fréquentielle de la configuration 1 : comparaison entre les cas 1 et 2 avec : $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ , la force axiale $\frac{\tilde{N}}{bh} = 10$ MPa. Cas 1 (trait pointillé "-"), cas 2 (trait plein "-"); $N_m = 1$ (rouge), $N_m = 2$ (bleu), $N_m = 3$ (vert). . . . .	44
3.3	Distinction des cas de calcul . . . . .	47
3.4	Réponse fréquentielle de la configuration 1 : comparaison des cas de calcul avec $N = 0$ . (a) : $V_{dc} = 10V_{ac} = 7V$ , (b) : $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ . Cas 1 (rouge), cas 3 (vert), cas 4 (bleu), cas 5 (rose) . . . . .	48
3.5	Réponse fréquentielle de la configuration 2 : comparaison des cas avec $N = 0$ et $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . Cas 1 (rouge), cas 3 (vert), cas 4 (bleu), cas 5 (rose) . . . . .	48
3.6	Réponse de la configuration 1 avec $N = 0$ : influence des modes supérieurs. (a) : $V_{dc} = 10V_{ac} = 9.127V$ ; (b) : $V_{dc} = 10V_{ac} = 6V$ . . . . .	49
3.7	Réponse de la configuration 1 : influence des modes supérieurs avec $N = 0$ , $V_{dc} = 10V_{ac} = 9.914V$ . . . . .	50
3.8	Réponse de la configuration 1 : influence des modes supérieurs avec $N = 0$ , $V_{dc} = 10V_{ac} = 10V$ . . . . .	50
3.9	Réponse de la configuration 1 : influence de $\alpha_1$ avec $N = 0$ et $\frac{V_{dc}}{V_{ac}} = 10$ . . . . .	51

3.10	Réponse de la configuration 3 : influence des paramètres. $V_{dc} = 10V_{ac} = 1.8V$ et $\sigma = 0$ (rouge); $V_{dc} = 10V_{ac} = 1.8V$ et $\sigma = 50MPa$ (bleu); $V_{dc} = 200V_{ac} = 8V$ et $\sigma = 50MPa$ (vert). . . . .	52
3.11	Modèle d'une micro/nano-poutre encastree-encastree avec une masse ajoutée. . . . .	52
3.12	Réponse de la configuration 1 avec masse ajoutée à $x_0 = 0.5$ , $N = 0$ et $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ : sans masse ajoutée (rouge), $m = 10^{-4}$ (rose), $m = 10^{-3}$ (bleu). . . . .	54
3.13	Décalage en fréquence dû à la masse ajoutée à $x_0 = 0.5$ de la configuration 1 avec $N = 0$ et $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ . . . . .	55
3.14	Configuration 1 avec $N = 0$ et $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) : Réponse fréquentielle avec $m = 0$ (rouge), $m = 10^{-3}$ (bleu). (b) : Portrait de phase des solutions périodiques correspondant aux points $B_1, B_2, B_3$ . . . . .	55
3.15	Bassin d'attraction de la configuration 1 à $\Omega = 22.35$ avec $N = 0$ , $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) : sans masse ajoutée, (b) : $m = 10^{-3}$ . . . . .	56
3.16	Réponses transitoires de $w(t)$ en fonction du temps réel $t$ avec des masses ajoutées différentes au milieu de la poutre, $\Omega = 22.35$ , les deux lignes noires constituent l'enveloppe de la réponse stable du cas sans masse ajoutée (a). Réponses de $w(t)$ à $t \approx 7, 1 \times 10^{-5}s$ (b); à $t \approx 8.13 \times 10^{-3}s$ (c) et à $t \approx 0.04s$ (d). . . . .	57
3.17	Bassin d'attraction de la configuration 1 à $\Omega = 22.38$ avec $N = 0$ , $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) : $m = 0$ , (b) : $m = 10^{-3}$ . . . . .	58
3.18	Différence du bassin d'attraction entre les cas sans et avec masse ajoutée $m = 10^{-3}$ de la configuration 1 à $\Omega = 22.38$ avec $N = 0$ , $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . Le changement de $C_3$ à $C_1$ (bleu), de $C_3$ à $C_4$ (rose), $C_2$ à $C_4$ (vert). . . . .	58
3.19	Réponses transitoires de $w(t)$ en fonction du temps réel $t$ avec des masses ajoutées différentes au milieu de la poutre, à $\Omega = 22.38$ ; les deux lignes noires sont l'enveloppe de la réponse stable du cas sans masse ajoutée (a). Réponses de $w(t)$ à $t = 7, 3 \times 10^{-4}s$ (b); à $t = 0.0128s$ (c) et à $t = 0.0567s$ (d). . . . .	59
4.1	Modèle d'une micro/nano-poutre encastree-libre forcée par une électrode	63
4.2	Déformées modales des 3 premiers modes de la poutre encastree-libre. . . . .	66
4.3	Distinction des cas de calcul de la micro/nano-poutre encastree-libre. . . . .	74
4.4	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison entre les cas 1 et 4 avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 2V$ , $g = 1.6\mu m$ et $N_m = 1$ mode. Le cas 4 utilise le développement en série de Taylor au 5 <sup>ème</sup> degré. . . . .	75
4.5	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison entre les cas 1 et 4 avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ , $g = 1.6\mu m$ et $N_m = 1$ mode. Le cas 4 utilise le développement en série de Taylor au 3 <sup>ème</sup> , 5 <sup>ème</sup> , 7 <sup>ème</sup> , 9 <sup>ème</sup> degré. . . . .	76
4.6	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison des cas avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ , $g = 1.6\mu m$ et $N_m = 1$ mode. Les cas 4 et 5 utilisent le développement en série de Taylor au 5 <sup>ème</sup> degré. . . . .	76

4.7	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison des cas de calcul avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ , $g = 1.4\mu\text{m}$ , $N_m = 1$ mode. Les cas 4 et 5 utilisent le développement en série de Taylor au 5 <sup>ème</sup> degré. . . . .	77
4.8	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : influence des modes supérieurs avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ et $g = 1.6\mu\text{m}$ . . . . .	78
4.9	Réponse fréquentielle de la configuration 4 : influence des modes supérieurs. (a) : $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ et $g = 1.48\mu\text{m}$ . (b) : $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ et $g = 1.55\mu\text{m}$ . . . . .	78
4.10	Réponse de la configuration 4 avec $\frac{g}{l} = \frac{1.6}{12.5}$ fixe, $N_m = 3$ modes. $V_{dc} = 2V_{ac} = 1V$ (rouge), $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ (bleu), $V_{dc} = 300V_{ac} = 12V$ (vert). . . . .	79
4.11	Réponse de la configuration 4 avec $V_{dc} = 50V_{ac}$ et $\delta_3$ fixe, $N_m = 3$ modes. $\frac{g}{l} = \frac{0.4}{12.5}$ (rouge), $\frac{g}{l} = \frac{1.6}{12.5}$ (bleu), $\frac{g}{l} = \frac{4.8}{12.5}$ (vert). . . . .	79
4.12	Modèle d'une micro/nano-poutre encastree-libre avec une masse ajoutée. . . . .	80
4.13	Réponse fréquentielle de la configuration 4 avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ . Sans (rouge) et avec (bleu) particule ajoutée. . . . .	82
4.14	Réponse fréquentielle (a) : $\frac{\partial E}{\partial A}$ ; (b) : $\frac{\partial^2 E}{\partial A^2}$ ; (c) : $\frac{\partial E}{\partial m}$ ; (d) : $\frac{\partial^2 E}{\partial m \partial A}$ . . . . .	83
4.15	Réponse de la configuration 4 dans le cas avec masse ajoutée et $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ . $m = 0$ (rouge), $m = 10^{-4}$ (bleu), $m = 10^{-3}$ (vert). . . . .	84
4.16	Décalage de fréquence due aux masses ajoutées de la configuration 4 avec $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ et $g = 1.6\mu\text{m}$ . . . . .	85
5.1	Réponse de la configuration 2, $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ ; sans masse ajoutée (rouge), avec masse ajoutée $m = 5 \cdot 10^{-5}$ (bleu). . . . .	90
5.2	Réponse de la configuration 2 avec des masses ajoutées différentes et $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ ; sans masse ajoutée (rouge), petite (bleu) et grande (vert) masses ajoutées . . . . .	91
5.3	Réponse de la configuration 1 et $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ ; sans (rouge) et avec (bleu) masse ajoutée. . . . .	92
5.4	Réponse de la configuration 2 avec $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) : $m=0$ (rouge), $m = 10^{-5}$ (bleu), $m = 10^{-4}$ (vert). (b) : orbites des solutions stables $A_1, A_2, A_3$ et $A_4$ . . . . .	93
5.5	Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à $\Omega = 22.3274$ et $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) : $t = \frac{T}{8}$ . (b) : $t = \frac{T}{2}$ . . . . .	94
5.6	Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à $\Omega = 22.3274$ et $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . . . . .	94
5.7	Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à $\Omega = 22.325$ et $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . . . . .	95
5.8	Réponse de la configuration 2 avec $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) : $m = 0$ (rouge); $m = 8 \cdot 10^{-5}$ (bleu); $m = 9 \cdot 10^{-5}$ (vert). (b) : réponse transitoire après l'arrivée au point $P_0$ de la masse $m = 8 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	96
5.9	Seuil de masse ajoutée détectée selon l'approche de la fréquence de bifurcation. . . . .	97

5.10	Détermination de la réponse de balayage en fréquence. (a) : réponse de l'amplitude et de $\Omega$ dans le temps ; (b) : réponse fréquentielle balayée dégageant le phénomène d'hystérésis. . . . .	97
5.11	Réponse fréquentielle : principe du balayage en fréquence du comportement assouplissant avec $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$ . . . . .	98
5.12	Décalage de fréquence dû à la masse ajoutée . . . . .	99
5.13	Réponse du balayage en fréquence de la configuration 2 ; sans masse ajoutée (rouge et bleu) ; $m_1 = 5.10^{-5}$ (rose) ; $m_2 = 5.10^{-4}$ (vert). (a) : réponse de $W_{max}$ en fonction du temps $t$ ; (b) : réponses fréquentielles balayées avec phénomène d'hystérésis. . . . .	100
5.14	Réponse fréquentielle : principe du balayage du comportement raidissant avec $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$ . . . . .	101
5.15	Réponse du balayage en fréquence de la configuration 1 : sans masse ajoutée (rouge) ; $m = 10^{-5}$ (bleu) ; $m = 10^{-4}$ (vert) ; $m = 5.10^{-4}$ (rose). (a) : réponse de $W_{max}$ en fonction du temps ; (b) : réponses fréquentielles balayées montrant le phénomène d'hystérésis. . . . .	102
5.16	Réponse fréquentielle : décalage de fréquence de configuration 2, $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ ; Les masses ajoutées tombent à position $x_0 = 0.5$ . . . . .	102
5.17	Réponse de la configuration 2 : quantification à deux fréquences fixes. (a) : $\Omega = 22.317$ ; (b) : $\Omega = 22.325$ . . . . .	103
5.18	Influence de $\varepsilon$ sur la réponse fréquentielle de la configuration 2 sans masse ajoutée. $\varepsilon = 5.10^{-6}$ (rouge), $\varepsilon = 5.10^{-5}$ (bleu), courbe de référence (vert). . . . .	104
5.19	(a) : réponse fréquentielle, principe du balayage en fréquence avec $\Omega_{max} > \Omega_{bif}$ . (b) et (c) : influence de $\varepsilon = 2.10^{-5}$ et $\varepsilon = 5.10^{-6}$ sur le décalage dû à la masse ajoutée $m = 5.10^{-5}$ ; avec (bleu) et sans (rouge) masse ajoutée. . . . .	105
5.20	Quantification de la masse ajoutée dans le cas assouplissant avec le balayage en fréquence de la configuration 2 et $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$ : sans masse ajoutée (rouge et bleu) ; $m_1 = 5.10^{-5}$ (rose) ; $m_2 = 5.10^{-4}$ (vert). (a) : $W_{max}$ en fonction du temps $t$ . (b) : phénomène d'hystérésis. . . . .	107
5.21	Quantification de la masse ajoutée dans le cas raidissant avec le balayage en fréquence de la configuration 1 et $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$ : sans masse ajoutée (rouge) ; $m = 10^{-5}$ (bleu) ; $m_2 = 10^{-4}$ (vert) ; $m_3 = 5.10^{-4}$ (marron). (a) : réponse de $W_{max}$ en fonction du temps, (b) : phénomène d'hystérésis. . . . .	107
5.22	Réponse de la configuration 5 avec $N_m = 5$ modes, $\sigma = 50MPa$ , $V_{dc} = 10V_{ac} = 0.442V$ (rouge) ; $V_{dc} = 150V_{ac} = 1.71V$ (bleu) et $V_{dc} = 200V_{ac} = 1.97V$ . . . . .	108
5.23	Réponse fréquentielle : principe de détection d'une masse ajoutée à l'aide du comportement mixte de la micro-poutre encastree-encastree, sans masse ajoutée (rouge), $m < m_l$ (bleu), $m \geq m_l$ (vert). . . . .	109
5.24	Réponse de la configuration 5 avec $\sigma = 10MPa$ , $V_{dc} = 170V_{ac} = 1.8V$ , $N_m = 5$ modes et $\Omega = 24.1130$ . (a) : réponse par manlab. (b) : réponses de l'arrivée et du décollage de masse ajoutée ; $m = 0$ (rouge) et $m = 2.9 \times 10^{-5}$ (bleu). . . . .	110

5.25	Réponse de la configuration 5 avec $\sigma = 10MPa$ , $V_{dc} = 180V_{ac} = 1.852V$ , $N_m = 5$ modes, $\Omega = 24.10448$ . (a) : réponse par manlab. (b) : réponses de l'arrivée et du décollage de masse ajoutée ; $m = 0$ (rouge) et $m = 3 \times 10^{-6}$ (bleu). . . . .	110
5.26	Réponse de la configuration 6. $g = 2.5\mu m$ et $V_{dc} = 180V_{ac} = 15V$ (rouge) ; $g = 4\mu m$ et $V_{dc} = 180V_{ac} = 20.5V$ . . . . .	111
5.27	Réponse fréquentielle : principe de détection d'une masse ajoutée à l'aide du comportement mixte de la micro-poutre encastree-libre. Sans (rouge) et avec (bleu) masse ajoutée. . . . .	112
5.28	Réponse de la configuration 6 et $g = 4\mu m$ . (a) : réponse avec $\Omega = 3.495230$ et $V_{dc} = 160V_{ac} = 19.5V$ ; sans particule (rouge), $m = 5.10^{-6}$ (bleu). (b) : réponse avec $\Omega = 3.495453$ et $V_{dc} = 158V_{ac} = 19.4V$ , sans particule (rouge), $m = 2.10^{-6}$ (bleu). . . . .	112
5.29	Réponse de la configuration 1 avec $V_{dc} = 10V_{ac} = 7V$ , $m = 0$ (rouge) et $m = 10^{-3}$ au milieu de la poutre (bleu), avec $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ , $m = 0$ (rose) et $m = 10^{-3}$ au milieu de la poutre (vert). . . . .	113
5.30	Réponse fréquentielle : résonances des premier (a) et troisième modes (b) de la micro-poutre encastree-encastree. . . . .	114
5.31	(a) : ratio entre le troisième et le premier modes propres de la micro-poutre encastree-encastree. (b) : ratio entre le premier et le deuxième modes propres de la micro-poutre encastree-libre. . . . .	115
6.1	Modèle du réseau de micro/nano-poutres encastrees-encastrees. . . . .	121
6.2	Modèle du réseau de deux nano-poutres encastrees-encastrees. . . . .	126
6.3	Réponse de la configuration 1 : vérification de l'utilisation du développement en série de Taylor aux 3 <sup>ème</sup> (rouge), 5 <sup>ème</sup> (bleu) et 7 <sup>ème</sup> (vert) ordres. (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2. Réponse de $A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow D_i \rightarrow E_i$ . . . . .	127
6.4	Réponse de la configuration 1 : réponse avec plusieurs modes de calcul en utilisant le développement en série de Taylor au 3 <sup>ème</sup> ordre avec $N_m = 1$ (rouge), $N_m = 2$ (bleu), $N_m = 3$ (vert). (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2. . . . .	128
6.5	Réponse de la configuration 1 : comparaison entre le Manlab et l'intégration temporelle. (a) : nano-poutre 1 ; b : nano-poutre 2. HBM+MAN (rouge), intégration temporelle : montée (bleu) et descente (vert) en fréquence ; branche stable ("-") et branche instable (" - -"). . . . .	129
6.6	Réponse de la configuration 1 sans masse ajoutée, réponse complète (rouge), réponse sans influence de la nano-poutre voisine (bleu). (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2. . . . .	132
6.7	Réponse de la configuration 1 avec $m = 10^{-4}$ à $x_0 = 0.5$ sur la nano-poutre 2. (a) : nano-poutre 1 ; b : nano-poutre 2. HBM+MAN (rouge), intégration temporelle (bleu et vert) ; branche stable ("-"), branche instable (" . ."). . . . .	134
6.8	Modèle du réseau de trois nano-poutres encastrees-encastrees. . . . .	136

6.9	Réponse de la configuration 2 du réseau de 3 nano-poutres sans masse ajoutée ; réponse complète (rouge), réponse sans influence de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2 (bleu). (a) : nano-poutre 1 ; (b) : nano-poutre 2 ; (c) : nano-poutre 3. . . . .	137
6.10	Réponse de la configuration 3 : avec (bleu) et sans (rouge) masse ajoutée $m = 10^{-3}$ au milieu de la nano-poutre 1. Réponses des nano-poutres 1 (a), 3 (b) et 2 (c). Sans masse ajoutée, l'amplitude de la nano-poutre 2 est nulle (ligne rouge sur la figure c). Branches stable ("-") et instable ("- -") .	140
6.11	(a) : réponse de la nano-poutre 2 de la configuration 3, sans masse ajoutée (rouge) ; avec $m = 10^{-4}$ (vert) ; $m = 10^{-3}$ (bleu), masse ajoutée sur la nano-poutre 1. (b) : position relative entre la nano-poutre 1 et la nano-poutre 3 du cas avec $m = 10^{-3}$ à $\Omega = 22.374$ (bleu) point A, à $\Omega = 22.65$ (rouge) point B, à $\Omega = 22.53$ (vert) point C, à $\Omega = 22.4$ (rose) point D ; la ligne en noir : la position entre deux nano-poutres du cas sans masse ajoutée. . . . .	141
6.12	Réponse de la nano-poutre 2 de la configuration 3 avec masse ajoutée $m = 10^{-3}$ sur la nano-poutre 1. (a) : Manlab (rouge) ; intégration temporelle : montée (bleu) et descente (vert) en fréquence. (b) : Manlab (rouge) ; intégration temporelle : descente en fréquence jusqu'au saut à F et puis montée en fréquence (noir). . . . .	142
6.13	Réponse de la configuration 4, (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2, (c) : nano-poutre 3 ; sans masse ajoutée (rouge), $m = 10^{-8}$ (bleu), $m = 10^{-6}$ (vert), $m = 10^{-4}$ (rose), $m = 5.10^{-4}$ (noir). . . . .	143
6.14	Changement de $\Omega_{re}$ correspondant au pic $W_{max}$ de la nano-poutre 2 selon la masse ajoutée à l'échelle linéaire (a) et à l'échelle logarithmique (b) . Changement de $W_{max}$ selon la masse ajoutée à l'échelle linéaire (c) et à l'échelle logarithmique (d). . . . .	144

# Liste des tableaux

3.1	Trois configurations de micro/nano-poutres encastées-encastées. . . . .	43
3.2	Valeurs de modes propres contraints (cas 2, $\frac{\tilde{N}}{bh} = 10MPa$ ) et non contraints (cas 1) de la configuration 1. . . . .	44
4.1	valeurs $\lambda$ des 3 premiers modes de la poutre encastée-libre . . . . .	65
4.2	Configuration 4 de la poutre encastée-libre. . . . .	75
5.1	Valeurs physiques $m_p$ des masses ajoutées. . . . .	90
5.2	Configuration 1 : Exemples de localisation des masses ajoutées sur la micro-poutre encastée-encastée. . . . .	115
5.3	Configuration 4 : Exemples de localisation des masses ajoutées sur la micro-poutre encastée-libre. . . . .	116
6.1	Tensions du réseau de 2 nano-poutres . . . . .	127
6.2	Tensions d'actionnement asymétriques du réseau de 3 nano-poutres. . . . .	136
6.3	Tensions d'actionnement symétriques du réseau de 3 nano-poutres. . . . .	138



# Liste des abréviations

$\delta$ :	Amplitude du balayage en fréquence (dans le chapitre V).
$\epsilon_0$ :	Constante diélectrique.
$\epsilon$ :	Vitesse du balayage en fréquence (dans le chapitre V).
$\rho$ :	Masse volumique.
$\sigma$ :	Contrainte résiduelle de la poutre encastree-encastree.
$\phi_i(x)$ :	Déformée modale du $i^{\text{ème}}$ mode.
$\phi_0$ :	Déformée modale du premier mode à $x = x_0$ .
$\tilde{\Omega}(\Omega)$ :	Fréquence d'excitation.
$\Omega_{op}$ :	Fréquence de fonctionnement (dans le chapitre V).
$A$ :	Aire de section de la poutre.
$b$ :	Largeur de la poutre.
$\tilde{c}, c$ :	Coefficient d'amortissement.
$C_n$ :	coefficient correctif pour les effets de bord.
$E$ :	Module de Young.
$g$ :	Jeu entre la poutre et l'électrode.
$h$ :	Hauteur de la poutre.
HBM :	Méthode de la Balance Harmonique.
$I$ :	Moment d'inertie de la poutre.
$l(L)$ :	Longueur de la poutre.
MAN :	Méthode Asymptotique Numérique.
$m_p$ :	Masse physique de la particule.
$m$ :	Ratio entre la masse physique $m_p$ et la masse totale de la poutre.
$\tilde{N}, N$ :	Force résiduelle de la poutre encastree-encastree.
$N_m$ :	Nombre de modes de calcul.
$Q$ :	Facteur de qualité.
$V_{dc}$ :	Tension de la polarisation.
$V_{ac}$ :	Amplitude de la tension alternative.
$x_0$ :	Position de la particule (masse ajoutée) sur la poutre.
$w(\tilde{w})$ :	Déplacement transversal de la poutre.



# Introduction

Les importantes avancées réalisées ces dernières décades dans la nano-fabrication des M/NEMS (Micro/Nano Electro-Mechanical Systems) ont permis d'accroître leurs performances, de réduire leur coûts et par voie de conséquence de faciliter leur utilisation dans de nombreux secteurs industriels comme la télécommunication, l'aéronautique, le spatial, le biomédical.

Depuis le milieu des années 80, la majorité de ces systèmes fonctionne grâce à des résonateurs constitués d'une micro-poutre pour servir de capteurs<sup>1</sup>. Compte tenu de sa simplicité et de son rendement, l'actionnement électrostatique est la technique la plus utilisée pour forcer la micro/nano-poutre en flexion. Les dimensions sub-micrométriques confèrent aux micro/nano-résonateurs des caractéristiques remarquables. Leur fréquence fondamentale extrêmement élevée, leurs très faibles amortissement et masse, les dotent d'une très grande sensibilité fort utile dans de multiples applications technologiques comme la mesure des forces ou de masses<sup>2</sup>. Mesurer de très petites masses de l'ordre du nano-gramme à l'atto-gramme est un objectif particulièrement important en médecine et en biologie.

Classiquement une masse ajoutée au résonateur décale sa fréquence fondamentale. Mesurer ce décalage quantifie la masse ajoutée. Mais une masse très petite induit un trop faible décalage pour rendre aisée la détection.

Ainsi, détecter la masse de particules comme une protéine, une enzyme, une biomolécule, nécessite d'améliorer notablement la sensibilité de détection. Pour cela une première voie est de réduire le bruit de mesure et d'augmenter le facteur de qualité  $Q$ , ce qui force à effectuer la mesure sous vide pour atteindre des facteurs de qualité de l'ordre de  $10^3$  à  $10^5$ . La deuxième voie consiste à réduire la géométrie du résonateur pour atteindre des dimensions de quelques centaines de nanomètres, limite des technologies actuelles. La troisième voie porte sur l'exploitation des phénomènes non-linéaires du micro/nano-résonateur. Par exemple, fonctionner à des amplitudes de vibrations forcées proches de la limite du "pull-in" accroît le décalage fréquentiel mais augmente les risques de collage, voire de ruine du résonateur. D'autres travaux ont montré l'augmentation de la sensibilité de la détection apportée par un fonctionnement sur les modes supérieurs<sup>3</sup>, voire sur le

---

1. Elwespoek M. & Wiegerink R., 2001, *Mechanical Microsensors*. Springer, Berlin.

2. Younis M. I. & Alsaleem F., 2009, *Exploration of New Concepts for Mass Detection in Electrostatically-Actuated Structures Based on Nonlinear Phenomena* Journal of Computational and Non-linear Dynamics, Vol. 4 / 021010-1.

3. Dohn S., Sandberg R., Svendsen W. & Boisen A., 2005, *Enhanced functionality of cantilever based*

mode de torsion<sup>4</sup>. La nette transition d'amplitude<sup>5</sup> et l'amélioration du facteur de qualité<sup>6</sup> des résonances paramétriques ont également été analysées.

Cette thèse traite de la détection et de la quantification de très petites masses en utilisant le comportement non linéaire du micro/nano-résonateur. La grande sensibilité visée est recherchée en exploitant les phénomènes non linéaires d'hystérésis, proches des fréquences de bifurcations. Il y est attendu qu'une très faible masse ajoutée induit des sauts significatifs en amplitude du résonateur. Les travaux menés apportent aussi des solutions aux problèmes de réinitialisation du processus pour détecter une nouvelle masse et de localisation de la masse ajoutée. Dans le souci d'augmenter la capacité de détection, voire de trouver d'autres voies d'augmentation de la sensibilité de détection, la thèse se complète par l'analyse du comportement de réseaux de poutres. En effet les nouvelles technologies permettent de fabriquer des réseaux de capteurs M/NEMS actionnés électro-statiquement.

Les deux apports principaux de cette thèse étant la détection alternative via la non linéarité et la détection par le réseau de poutres, ils seront respectivement présentés dans les chapitres V et VI.

Le chapitre I dresse une synthèse bibliographique sur les M/NEMS, sur leurs comportements linéaire et non linéaire ainsi que sur les facteurs influençant leurs performances. L'état de l'art de la détection de masse y est aussi présenté.

Le chapitre II s'approprie les techniques de la dynamique non linéaire d'un système à solutions périodiques. Y sont présentées les méthodes d'une part quasi-analytiques telles que celles de la moyenne harmonique, des échelles multiples et d'autre part numériques : méthodes d'intégration temporelle, de shooting, de la balance harmonique harmonique HBM et techniques de continuation telles que la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Pour comparer leurs performances, elles sont appliquées à l'oscillateur de Duffing. Les méthodes analytiques sont utiles pour simplifier l'équation différentielle et obtenir une formulation où apparaît le rôle des paramètres de l'oscillateur dans le comportement non linéaire. Elles servent donc aux premiers designs. Les méthodes numériques permettent quant à elle de traiter le problème complet et d'obtenir des solutions très précises.

Les chapitres III et IV analysent en détail les comportements non linéaires de résonateurs de type micro/nano-poutre encastree-encastree et encastree-libre, respectivement. L'équation sous forme adimensionnée prend en compte les non linéarités géométrique et électrostatique, cette dernière obligeant deux types de modélisation : un développement en série de Taylor, ou la multiplication. Les équations aux dérivées partielles sont traitées avec la méthode de Galerkin, la solution étant projetée sur un, voire plusieurs modes

---

*mass sensors using higher modes and functionalized particles*, Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, p636-639.

4. Lobontiu N., Lupea I., Ilic R. & Craighead H. G., 2008, *Modeling, design, and characterization of multisegment cantilevers for resonant mass detection*, Journal of Applied Physics, 103, 064306.

5. Zhang, W. & Turner, K. L., 2005, *Application of parametric resonance amplification in a single-crystal silicon micro-oscillator based mass sensor*, Sensors and Actuators A : Physical, Vol 122, 23 - 30.

6. Thomas O., Mathieu F., Mansfield W., Huang C., Trolier-McKinstry S. & Nicu L., 2013, *Efficient parametric amplification in micro-resonators with integrated piezoelectric actuation and sensing capabilities*, Applied Physics Letters, Vol 102, p163504.

analytiques contraints ou non. La réponse forcée est obtenue en résolvant l'équation différentielle avec les méthodes quasi analytiques puis avec les méthodes numériques pour validation. Ce protocole est étendu au cas des poutres avec particule afin d'identifier les changements dans la réponse des oscillateurs non linéaires.

Fort de l'apport des chapitres III et IV, le chapitre V expose les principes de détection d'une particule et propose un protocole original incluant une réinitialisation et une automatisation pour mesurer avec précision et répétition la masse de particules en temps réel. Ce protocole est ensuite enrichi d'un moyen de localisation de la particule où masse et position sont alors les deux inconnues à déterminer.

Enfin dans le chapitre VI, un réseau de micro/nano-poutres encastées-encastées est considéré. L'équation du mouvement de chaque poutre dans le réseau est établie. À la différence du cas d'une seule poutre, chaque poutre est soumise à deux forces électrostatiques non linéaires dues aux deux poutres adjacentes. Ainsi pour simplifier la résolution, ces forces sont calculées par développement en série de Taylor. Les changements de réponse de chaque poutre dû à l'influence des poutres adjacentes et à la particule ajoutée sont analysés et un principe de détection original basé sur les brisures de symétrie est proposé.

De nombreux résultats de cette thèse ont nécessité des développements informatiques longs, lourds et techniques. Ils sont le plus souvent masqués dans ce mémoire.



# Chapitre 1

## Bibliographie & état de l'art

*Ce chapitre est consacré à une synthèse biographique sur les M/NEMS. Certaines pistes de recherche pour améliorer la sensibilité de détection des capteurs de masse résonants sont présentées.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>M/NEMS</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>De MEMS à NEMS</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Capteur résonant par l'électrostatique</b> . . . . .	<b>9</b>
1.3.1	Fréquence de résonance . . . . .	10
1.3.2	Facteur de qualité . . . . .	11
1.3.3	Sensibilité et résolution . . . . .	11
1.3.4	Bruit . . . . .	12
<b>1.4</b>	<b>Capteur de masse résonant</b> . . . . .	<b>13</b>

---

## 1.1 M/NEMS

M/NEMS est l'acronyme pour micro/nano-electro-mechanical-system. Dans ce type de systèmes, des éléments mécaniques, des capteurs, des actionneurs et l'électricités sont intégrés sur un substrat commun de silicium grâce à la technologie de micro-fabrication. Pourquoi le silicium est utilisé dans la plupart de M/NEMS ? Le silicium possède des avantages appréciables : comme c'est un monocristal, il est de grande pureté et la multitude de processus de micro-fabrication bien établis permet de fabriquer des dispositifs avec des précisions largement sub-micrométriques. L'anisotropie du silicium est intéressante pour la micro-fabrication. Il y est possible d'intégrer les fonctions capteurs et actionneurs avec les circuits électroniques associés.

De part leur applications qui intéressent de nombreux secteurs de l'activité industrielle (télécommunication, aéronautique, spatial, biomédical, génétique, automobile, ...) les N/MEMS connaissent un développement considérable et durable . Leur conception et leur mise en œuvre font appel aux concepts les plus fondamentaux de la physique, de l'électronique (composant et circuits), de la micro-électricité,... Les techniques utilisées permettent de mesurer des grandeurs mécaniques (déplacement, vitesse, accélération, microscopie à force atomique,...) [Kim 95], [Lee 02], [Burns 96], [Seshia 02], [Clark 96] ; thermiques (température, radiation, flux de chaleur,...) [Sun 13], [Hedrich 10] ; chimiques (humidité, gaz,...) [Boltshauser 92], [DiMeo-Jr. 06], [Lang 98] ; biologiques (protéine, DNA,...) , [Lavrik 04], [Ilic 01].

Les capteurs de types M/MEMS sont peu encombrants. Ils sont légers et discrets. Leur taille micro ou nano-mécanique est adaptée aux phénomènes à l'échelle de molécules, de cellules. Ils sont peu sensibles aux perturbations dues à l'environnement de la mesure. Ils ont des possibilités accrues de fonctionnement en réseau. Grâce à une fabrication collective, le coût de fabrication diminue. D'autre part ils sont peu énergivores. Ils ont peu d'inerties mécanique et thermique. Certains modes de fonctionnement sont simples à mettre en œuvres (boucle fermée, lévitation,...).

Les capteurs de types N/MEMS se classifient par :

- le type de la mesure : accélération, vitesse de rotation, température, humidité, pression, ...
- le mode de la transduction électro-mécanique : Piézoélectrique, électrostatique, piézorésistive,...

## 1.2 De MEMS à NEMS

Les NEMS ont des tailles de structure mécanique de quelques  $\mu\text{m}$  à quelques dizaines de  $\text{nm}$ . Par rapport aux MEMS, les NEMS ont une surface réduite d'un facteur 100 et une masse d'un facteur par 1000 (de  $\mu\text{g}$  à  $\text{ng}$ ).

La plupart des NEMS sont des dispositifs résonants avec des dimensions submicro-niques. À ce niveau de taille, les NEMS ont une fréquence de résonance fondamentale extrêmement haute pouvant atteindre à 1  $\text{GHz}$ , grâce à leur masse active faible, et ont

des facteurs de qualité très élevés, de l'ordre de 100 à 10000. Grâce à leur faibles masses et rigidité, les capteurs NEMS sont très sensibles aux forces, aux champs, à un ajout de masse, ou à une quantité de charges. Leur faible inertie les dote d'un temps de réponse très court. Cet ensemble d'attributs confère aux résonateurs NEMS une multitude d'applications technologiques telles que les capteurs de force ultra-sensibles, les filtres à très grande bande passante, les capteurs de masse très petite. En général, la sensibilité et la résolution de NEMS sont plus grandes que celles de MEMS. Cependant, ils ont également des inconvénients par rapport aux capteurs MEMS :

- La métrologie des capteurs NEMS est plus complexe : il faut détecter de faible déplacement ( $fm$  ou  $nm$ ), ce qui rend difficile l'intégration de l'actionnement et de la détection.
- Les effets de surface et de contamination sont plus importants. Le facteur de qualité des nanorésonateurs est inférieur à celui des microrésonateurs.
- Le bruit de phase des nanorésonateurs est plus élevé. L'électronique est plus complexe et les effets des composants sont plus grands.
- Les performances des NEMS sont souvent inférieures à celle de MEMS à la température ambiante. Pour les NEMS, il faut fonctionner à de basses températures pour atteindre des performances élevées.

### 1.3 Capteur résonant par l'électrostatique

La conception des capteurs résonants se doit donc d'intégrer sur un même dispositif des parties M/NEMS pour la masse, les pistes des électrodes, les ancrages mécaniques et des parties M/NEMS pour les électrodes et les résonateurs.

Dans un système mécanique, la résonance se caractérise par une grande amplitude de vibration causée par un faible actionnement à une fréquence correspondant à une fréquence propre. Il est particulièrement utile d'exploiter le phénomène de résonance à l'échelle micro-mécanique car l'influence due au petit changement d'environnement est magnifiée, le système y étant plus sensible. Dans une application telle que l'accéléromètre, le gyroscope,... où le grand déplacement est nécessaire, le fonctionnement à la résonance est vraiment souhaité.

Ce fonctionnement a de grands avantages pour la détection. Le capteur comprend des éléments qui fonctionnent à leur résonance caractéristique et l'effet des quantités mesurées est détecté comme un changement dans les caractéristiques de résonance de ces éléments. La caractéristique résonante comme la fréquence résonante  $f$ , l'amplitude de vibration  $A$ , la phase et le facteur de qualité peuvent être affectés par une force axiale, une masse ajoutée, un changement d'amortissement, ou de la propriété du matériau,... La détection à la résonance a été donc mise en œuvre dans de nombreux dispositifs pour la mesure de l'accélération [Burns 96], la force microscopique [Albrecht 91], le gaz spécifique [Hagleitner 02],...

Classiquement, la partie principale du capteur résonant est une micro/nano-poutre. L'actionnement de la micro/nano-poutre peut être thermique, électromagnétique, pié-

zoélectrique, électrostatique... L'actionnement électrostatique donne une grande densité d'énergie, une grande flexibilité mécanique et un bon contrôle de la force d'excitation mais cette dernière reste faible par rapport à l'actionnement piézoélectrique ou thermique. Cependant, sa conception est plus simple que celle de l'actionnement piézoélectrique ou électromagnétique qui demande des éléments mécaniques plus compliqués.

L'actionnement électrostatique repose sur la force d'attraction induite entre la micro/nano-poutre et l'électrode rendues conductives, et dépend de la tension qui leur est appliquée, de la constance diélectrique du milieu, et du jeu. Une tension DC constante influe sur la déflexion statique et par voie de conséquence sur ses caractéristiques dynamiques. Une tension AC alternative force la poutre à vibrer autour de sa déflexion statique. Dans certains, il est pertinent d'augmenter la déflexion au risque de déclencher le collage de la poutre sur l'électrode (pull-in).

La fréquence de résonance, la sensibilité, la résolution, le facteur de qualité et le bruit sont les facteurs les plus influents sur les performances.

### 1.3.1 Fréquence de résonance

Supposons que les termes non-linéaires soient négligés. L'équation du mouvement d'une poutre de Bernoulli en flexion soumise à une force axiale est la suivante [Lalanne 83] :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \xi \frac{\partial w}{\partial t} - F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

où  $w, E, I, \xi, \rho, A$  sont respectivement la déflexion, le module d'Young, le moment d'inertie, le coefficient d'amortissement, la masse volumique et l'aire de la section de la poutre de longueur  $L$ . En utilisant la méthode de séparation de variable,

$$w(x, t) = \phi(x) \times a(t) \quad (1.2)$$

le mode propre fondamental de la poutre est obtenu et peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(x) = C_1 \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_3 \cosh\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C_4 \sinh\left(\frac{\lambda x}{L}\right). \quad (1.3)$$

où les constantes  $C_i$  dépendent des conditions aux limites du résonateur. La constante  $\lambda$  est calculée à partir du mode propre et des conditions aux limites. En utilisant la méthode de Galerkin limitée au mode fondamental, l'équation différentielle du second ordre de  $a(t)$  s'écrit :

$$M_{eff} \ddot{a} + B_{eff} \dot{a} + K_{eff} a = 0 \quad (1.4)$$

où  $M_{eff}, K_{eff}$  sont :

$$M_{eff} = \int_0^L \rho A \phi^2(x) dx, \quad (1.5)$$

$$K_{eff} = EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^2 dx + F \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (1.6)$$

Ainsi, la fréquence propre fondamentale de la poutre non contrainte et conservative s'écrit :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{eff}(F=0)}{M_{eff}}} \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un système forcé est le ratio entre l'énergie totale stockée dans la vibration et la dissipation d'énergie par cycle [Beeby 04] :

$$Q \approx 2\pi \frac{\text{énergie totale stockée par cycle}}{\text{dissipation d'énergie par cycle}} \quad (1.8)$$

Le facteur de qualité ne peut pas être déterminé directement, mais à partir de la réponse caractéristique du résonateur. Il est le rapport entre la fréquence propre  $\omega_0$  et la largeur  $\Delta\omega_{-3db}$  de la largeur de bande du résonateur.

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{-3db}} \quad (1.9)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la largeur de bande est petite, et le pic de ré-

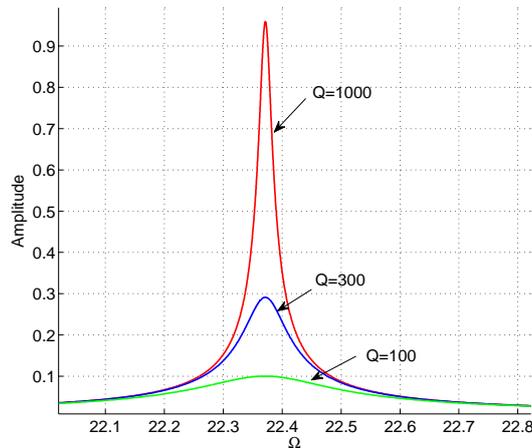


FIGURE 1.1: Réponse fréquentielle : influence du facteur de qualité

sonance étroit. Alors la demande d'énergie pour maintenir la vibration est faible et la sensibilité due à la perturbation mécanique est élevée...

### 1.3.3 Sensibilité et résolution

Le changement de la masse de micro/nano-résonateur cause le décalage de fréquence. La nouvelle fréquence est déterminée par la forme :

$$f_0 + \delta f \approx cte \times \sqrt{\frac{K_{eff}}{M_{eff} + \delta m}} \quad (1.10)$$

Le décalage de fréquence  $\delta f$  et le changement de masse  $\delta m$  sont petits. On détermine donc la sensibilité de masse via la forme suivante :

$$\mathfrak{R} = -\frac{\delta f}{\delta m} = \frac{1}{2M_{eff}} f_0. \quad (1.11)$$

La sensibilité dépend de la masse et de la fréquence de résonance du micro-résonateur. Cependant, perte mécanique, bruit et système de sortie sont aussi importants.

La résolution est écrite sous la forme :

$$\delta m = \frac{M_{eff}}{Q} 10^{\frac{-DR}{20}}. \quad (1.12)$$

où DR est la gamme dynamique, elle est le rapport entre l'amplitude critique  $a_c$  (avant la non linéarité) et la résolution en déplacement liée aux bruits.

### 1.3.4 Bruit

Dans les systèmes mécaniques différents types de bruits parasitent les mesures. Dans les résonateurs M/NEMS, il s'agit du bruit Johnson, du bruit à l'origine de thermo-mécanique, du bruit d'adsorption et de désorption.

#### Bruit Johnson

Le bruit (blanc) Johnson est le bruit électronique généré par l'agitation thermique des porteurs de charge à l'intérieur d'un conducteur électrique à l'équilibre de la résistance  $R$ . Il s'exprime avec la forme :

$$S_j(\omega) = 4Rk_bT \quad (1.13)$$

où  $k_b$  et  $T$  sont respectivement la constante de Boltzmann et la température du résonateur. Ce bruit est réduit dans le cas de matériaux avec une faible résistivité.

#### Bruit thermo-mécanique

En présence de faible bruit électronique, la limite fondamentale de mesure est due au bruit thermo-mécanique, [Ekinci 05]. L'existence de fluctuations thermo-mécaniques est expliquée par le théorème de dissipation de fluctuation qui stipule que l'énergie dissipatrice du système est la source du bruit, [Cleland 02], [Cleland 05]. La densité spectrale de ce bruit s'écrit :

$$S_{th}^f(\omega) = \frac{4k_bTM_{eff}\omega_0}{Q}, \quad N^2Hz^{-1}. \quad (1.14)$$

La densité spectrale du bruit de déplacement autour de résonance est alors :

$$S_{th}^x(\omega) = \frac{4k_bTQ}{M_{eff}\omega_0^3}, \quad m^2Hz^{-1} \quad (1.15)$$

#### Bruit d'adsorption et de désorption

Quand les molécules individuelles sont adsorbées ou désorbées sur la surface, la masse va changer et ainsi, introduit du bruit dans la fréquence de résonance [Yong 89]. La source de ce bruit ne peut pas être décrite en utilisant le modèle de Zener parce que les processus ne sont pas dissipatifs, [Cleland 02]. Il s'avère que ce bruit introduit dans sur un résonateur est assez important [Ekinci 04b], [Yong 90].

## 1.4 Capteur de masse résonant

Une des applications importantes des capteurs résonants de types M/NEMS est la mesure de petites masses à l'ordre de nano à attogramme. Ces capteurs sont largement utilisés dans l'environnement biologique pour la détection de hybridation de l'ADN, de biomolécules, d'enzyme, de protéine [Ilic 04b], [Velanki 06], [Buchapudi 11]; dans l'environnement chimique pour la détection de réactions chimiques [Gimzewski 94], la détection de vapeur de mercure [Thundat 95], [Wachter 95], [Datskos 01] (avec grande sensibilité 1.25 Hz/pg),... Le développement de ces capteurs rencontre des défis pour résoudre les problèmes tels que la stabilité, la sélectivité des matériaux, la gamme de détection, la réduction du temps de réponse de la mesure, l'hystérésis et le coût.

La détection de masse peut être statique et/ou dynamique. Dans le mode de détection statique, la masse ajoutée est déterminée par la mesure soit optique soit piézoélectrique soit piézorésistive de flexion de micro-résonateur en sachant cependant que le système de mesure optique a la meilleure résolution [Dohn 06], [Datskos 99]. Le mode de détection dynamique actuelle mesure le décalage en fréquence dû à la particule ajoutée.

Le principe d'un capteur résonant repose sur le forçage d'un micro/nano-résonateur sollicité sur son mode fondamental, à l'aide d'une électrode qui peut aussi servir de capteur de détection de variation de fréquence. Dans les années récentes, les dimensions de micro/nano-poutres ont été réduites jusqu'au régime sub-micrométrique, ce qui améliore non seulement la sensibilité de détection, de l'ordre du zepto-gramme [Yang 06],... mais aussi augmente l'effet dynamique non-linéaire. La clé essentielle de leur conception est de pouvoir maîtriser d'une part les non linéarités géométrique et électrostatique qui réduisent la gamme dynamique et dégradent la précision de mesure de l'amplitude de résonance critique, et d'autre part les niveaux de sollicitation, cause de pull-in et de risque de ruine du capteur [Nayfeh 07a], [Kacem 12a].

La masse à détecter conditionne les dimensions du micro-résonateur. Par exemple, en considérant une micro-poutre de 150 nm de longueur et de fréquence fondamentale de 2 GHz, la masse minimale de 1.7 yg ( $1\text{yg} = 10^{-24}\text{g}$ ) correspondante à la masse d'un proton ou d'un atome d'hydrogène peut être détectée [Chaste 12]. Mais une micro-poutre de 4  $\mu\text{m}$  de longueur ne détecte qu'une masse minimale 0.4 ag ( $1\text{ag} = 10^{-18}\text{g}$ ) [Ilic 04a]. Pour augmenter la gamme de détection, il faut réduire la dimension de la micro-poutre, ce qui est difficile avec les technologies actuelles.

Hanay et al. ont étudié le potentiel des NEMS-MS basé sur la spectrométrie de masse [Hanay 12]. Le système NEMS-MS peut atteindre des masses de 500kDa ( $1\text{Da} = 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}$ ). Ils présentent une approche qui permet la détermination directe de la masse

de marco-molécules protéiques individuelles arrivées, en temps réel. Dans cette nouvelle approche il s'agit de pister simultanément la fréquence de résonance de multiples modes d'un résonateur individuel. La fréquence de résonance dépend de la masse et de la position de la molécule sur la nano-poutre. Toutefois, la masse peut être déterminée en utilisant le décalage de fréquence de multiples modes. Ekinci et al. ont montré que les NEMS-MS ont une grande gamme dynamique et avec une sensibilité du simple Dalton [Ekinci 04a].

Le résonateur peut fonctionner en régime soit linéaire, soit non-linéaire. En régime linéaire, le modèle de calcul est simple [Ilic 04a], [Dohn 06], [Dohn 05]. Il existe plusieurs types de micro-résonateurs : la micro-poutre encastrée-libre, la micro-poutre bi-encastrée, la micro-poutre avec section discontinue ont été considérées dans le domaine de vibrations linéaires [Ilic 04a]. Les fréquences propres sont déterminées en utilisant la théorie Euler-Bernoulli. En présence d'une particule, des conditions changent ; les fréquences propres sont recalculées, et la masse de la particule est déterminée par le décalage de fréquence. Ilic et al. montrent le bon accord entre les résultats théorique et expérimental et que la position la plus sensible est en tête de la micro-poutre cantilever ou au point milieu de micro-poutre bi-encastrée [Ilic 04a]... là où le niveau vibratoire est le plus élevé. Néanmoins, en régime linéaire, la vibration est limitée par la petite amplitude qui peut rester dans le niveau du bruit thermo-mécanique, ce qui rend la détection difficile.

Ainsi, l'excitation de la micro-poutre en régime non-linéaire apparaît, une bonne solution car peut augmenter la sensibilité de détection [Yurke 06]. La précision des mesures dans le régime non linéaire à nano-échelle est également améliorée. Par exemple, la résonance non-linéaire est utilisée pour supprimer le bruit d'amplificateur dans un circuit d'oscillateur, [Yurke 95]. Le bruit induit par la commutation entre deux états stables dans la résonance non-linéaire permet de mesurer précisément la fréquence, [Aldridge 05]. Buks et Yurke montrent que la sensibilité de masse dans ce régime peut dépasser la sensibilité limite supérieure imposée par le bruit thermo-mécanique lors de l'utilisation dans le régime linéaire [Buks 06].

D'autres recherches se concentrent sur les modes supérieurs pour améliorer la sensibilité. Narducci et al. ont utilisé des micro-cantilevers de forme T pour évaluer l'influence des modes supérieurs et de dimension sur la sensibilité [Narducci 09]. Ils expérimentent avec le premier et le deuxième modes sur une même micro-poutre et montrent que la sensibilité à la fréquence de résonance du deuxième mode ( $0.3\text{Hz/pg}$ ) est plus élevée que celle du premier mode ( $0.07\text{Hz/pg}$ ). Dans [Dohn 05], la sensibilité de détection augmente de 23, 102, 276 fois quand les 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup> modes sont utilisés par rapport au premier mode. Il a conclu que l'augmentation du facteur de qualité  $Q$  et de la fréquence résonance, ainsi que la réduction de masse effective ont entraîné une sensibilité intrinsèque du micro-cantilever significativement meilleure avec l'augmentation du nombre de mode. Cependant, l'utilisation des modes supérieurs également nécessite plus d'énergie que le mode fondamental pour obtenir la même amplitude de signal de sortie.

Khater et al. ont comparé deux modes d'actionnement basé soit sur la force statique induite par une tension DC, soit sur la force dynamique, combinaison de tensions DC et AC [Khater 11], [Khater 09]. Ils concluent que la sensibilité d'un MEMS actionné électrostatiquement augmente lorsque la tension est proche de la limite pull-in. Dans le mode

statique, la sensibilité augmente 150 fois lorsque  $V_{dc}$  varie de 8V à  $V_{pull-in} = 8.292V$  et la masse détectée minimale est environ de  $3ng$ . Dans le mode dynamique, la masse détectée minimale ( $1pg$ ) en mesurant à travers un point de bifurcation est trois ordres de grandeur supérieurs à celle de la version statique ( $3ng$ ).

Exploiter les phénomènes non-linéaires induits par l'excitation paramétrique est une voie, elle aussi, intéressante. Dans [Zhang 02], [Zhang 05], Zhang et al. considèrent la résonance paramétrique. La capacité de détection du décalage de fréquence dépend en particulier du facteur de qualité  $Q$  qui représente la netteté de courbe de réponse en fréquence de résonance harmonique simple. Disposer d'un facteur  $Q$  de l'ordre de  $10^3$  à  $10^5$  sous vide ou à basse température permet de détecter des masses de femtogrammes à attogrammes. Néanmoins, l'application est très limitée, spécialement dans les environnements chimique et biologique. La sensibilité de la détection de masse est réduite lors de l'utilisation en air ou en eau, où  $Q$  est plus faible. La variation de masse est suivie avec le décalage de fréquence à la limite stable du premier ordre de la résonance paramétrique [Turner 01], [Zhang 04]. La transition de fréquence à cette limite a une grande précision et ne dépend pas du facteur de qualité  $Q$ . Ainsi, la sensibilité est améliorée dans les environnements chimique et biologique. En raison de la nette transition d'amplitude dans la résonance paramétrique, la sensibilité est plus élevée de 1-2 ordres de grandeur que le même oscillateur opérant à la résonance harmonique simple.

Dans [Younis 08], [Younis 09], la structure est sollicitée par la force DC et la force harmonique AC avec une fréquence proche de deux fois de la fréquence fondamentale. Ils concluent que l'excitation sous-harmonique de la micro-poutre à deux fois sa fréquence fondamentale est plus intéressante. Elle fournit la transition nette de l'état sans masse à l'état avec masse ajoutée et elle est peu influencée par le changement d'amortissement. Toutefois, elle peut ne pas être activée dans les conditions d'amortissement élevé.

D'autres recherches comparent la sensibilité entre la torsion et la flexion de la micro-poutre [Lobontiu 08]. Xie et al. ont considéré le premier mode de torsion d'un modèle basé sur la théorie Rayleigh-Ritz [Xie 08]. Les résultats expérimentaux montrent que la sensibilité de masse du premier mode de torsion est d'un ordre de grandeur plus grand que le premier mode de flexion et bien supérieure à celle du second mode de flexion. En plaçant les particules sur la micro-poutre à 4 positions différentes par rapport à l'axe neutre de torsion, ils concluent que la sensibilité de masse est plus élevée lorsque les particules se rapprochent du bord de la micro-poutre.

Le principe de détection de la plupart des capteurs résonants est basé sur la détermination du décalage de fréquence. Cependant, la relation entre la masse détectée et le décalage de fréquence est linéaire. Plus la masse est petite, plus le décalage est petit, en raison de cela, la détection est difficile pour les petites masses. Récemment, Kumar et al. proposent une nouvelle technique basée sur le saut d'amplitude de vibration à proche de la fréquence bifurquée en régime non-linéaire [Kumar 12]. À cette position, le changement d'amplitude de vibration est grand avec une petite masse. Ceci est intéressant à exploiter pour augmenter la sensibilité de détection.



# Chapitre 2

## Méthodes de calcul des solutions périodiques

*Ce second chapitre vise à présenter des méthodes analytiques et numériques pour calculer des solutions périodiques de systèmes dynamiques non-linéaires. On détaille en particulier la méthode de shooting ainsi que le couplage de la Méthode de la Balance Harmonique (HBM) et de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) dans le logiciel Manlab.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Méthode de la moyenne harmonique . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthode des échelles multiples . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.3</b>	<b>Méthode d'intégration temporelle avec continuation séquentielle. . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Méthode de shooting . . . . .</b>	<b>23</b>
2.4.1	Shooting simple . . . . .	23
2.4.2	Continuation par longueur d'arc : . . . . .	25
<b>2.5</b>	<b>Balance harmonique par Manlab . . . . .</b>	<b>29</b>
2.5.1	Méthode asymptotique numérique (MAN) : . . . . .	30
2.5.2	Application de la HBM + MAN dans Manlab . . . . .	30
2.5.3	Exemple . . . . .	32

---

Dans ce chapitre, quelques méthodes quasi analytiques et numériques sont présentées pour chercher la solution périodique d'une équation différentielle en dynamique non linéaire. D'abord, on présente des méthodes quasi analytiques (méthode de la moyenne harmonique, méthode des échelles multiples) peu coûteuses mais limitées aux non-linéarités faibles ; puis des méthodes numériques (intégration temporelle, balance harmonique couplée à la MAN) plus coûteuses mais capables de traiter tout type de non-linéarités.

## 2.1 Méthode de la moyenne harmonique

Soit l'équation suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) + \varepsilon f\left\{y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right\} = f_0 \cos \Omega t, \quad (2.1)$$

où  $f\{y(t), \dot{y}\}$  est une fonction non linéaire et  $\varepsilon \ll 1$  est un petit paramètre. Si  $\varepsilon = 0$ , la solution de cette équation a la forme :

$$y(t) = A \cos(\Omega t + \beta) \quad (2.2)$$

Si l'amplitude  $A$  et le déphasage  $\beta$  sont des paramètres constants, les dérivées successives de  $y(t)$  par rapport à  $t$  sont déterminées par :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \beta). \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta). \quad (2.4)$$

Lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , il est fait l'hypothèse que la nouvelle solution conserve la forme (2.2) mais avec  $A, \beta$  fonctions du temps. À partir de l'équation (2.2), la dérivée de  $y(t)$  devient :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & -A(t)\Omega \sin(\Omega t + \beta(t)) + \frac{dA(t)}{dt} \cos(\Omega t + \beta(t)) \\ & - A(t) \frac{d\beta(t)}{dt} \sin(\Omega t + \beta(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

En remplaçant l'équation (2.3) dans l'équation (2.5), il vient :

$$\frac{dA(t)}{dt} \cos(\Omega t + \beta(t)) - A(t) \frac{d\beta(t)}{dt} \sin(\Omega t + \beta(t)) = 0. \quad (2.6)$$

De même, en dérivant l'équation (2.3), on obtient pour la dérivée seconde de  $y(t)$  :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) - \frac{dA}{dt} \Omega \sin(\Omega t + \beta) - A(t) \Omega \frac{d\beta}{dt} \cos(\Omega t + \beta). \quad (2.7)$$

Posons alors :

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma, \quad (2.8)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation étudiée et  $\sigma$  est appelé paramètre de detuning.

Les équations (2.1), (2.2), (2.7) et (2.8) donnent :

$$-\frac{dA}{dt}\Omega \sin(\Omega t + \beta) - A(t)\Omega \frac{d\beta}{dt} \cos \Omega t - 2A(t)\omega_0 \varepsilon \sigma \cos(\Omega t + \beta) + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = f_0 \cos \Omega t. \quad (2.9)$$

Pour déterminer  $\frac{dA}{dt}$ , il faut multiplier l'équation (2.9) par  $\sin(\Omega t + \beta)$  et l'équation (2.6) par  $\cos(\Omega t + \beta)$  et les combiner :

$$\Omega \frac{dA}{dt} = \varepsilon \left[ f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) - 2A\omega_0 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \right] \sin(\Omega t + \beta) - f_0 \cos \Omega t \sin(\Omega t + \beta). \quad (2.10)$$

Pour déterminer  $\frac{d\beta}{dt}$ , il faut multiplier l'équation (2.9) par  $\cos(\Omega t + \beta)$  et l'équation (2.6) par  $\sin(\Omega t + \beta)$  et les combiner :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\varepsilon}{A\Omega} \left[ f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) - 2A\omega_0 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \right] \cos(\Omega t + \beta) - \frac{f_0}{A\Omega} \cos \Omega t \cos(\Omega t + \beta). \quad (2.11)$$

Si  $A$  est borné alors  $\frac{dA}{dt} = O(\varepsilon)$  et  $\frac{d\beta}{dt} = O(\varepsilon)$  et si  $\varepsilon$  est petit alors les fonctions  $A(t)$  et  $\beta(t)$  varient peu dans le temps. On peut donc les considérer constantes et les approximer par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $[0, T]$  avec  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ , i.e.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\varepsilon}{\Omega} \left[ f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) - 2A\omega_0 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \right] \sin(\Omega t + \beta) - f_0 \cos \Omega t \sin(\Omega t + \beta) \right\} dt, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\varepsilon}{A\Omega} \left[ f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) - 2A\omega_0 \sigma \cos(\Omega t + \beta) \right] \cos(\Omega t + \beta) - \frac{f_0}{A\Omega} \cos \Omega t \cos(\Omega t + \beta) \right\} dt. \quad (2.13)$$

Les solutions en régime permanent vérifient :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

**Exemple :** Considérons l'équation du mouvement d'un oscillateur de Duffing forcé suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{nl}x^3 = \tilde{f} \cos(\Omega t) \quad (2.15)$$

ou encore sous la forme adimensionnée :

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f \cos(\Omega t) \quad (2.16)$$

La solution de  $x(t)$  est cherchée sous la forme :

$$x(t) = A(t) \cos(\Omega t + \beta). \quad (2.17)$$

Dans ce cas, les équations pour  $\dot{A}$ ,  $\dot{\beta}$  sont les suivantes :

$$\dot{A} = -\mu A - \frac{1}{2} \frac{f}{\Omega} \sin \beta. \quad (2.18)$$

$$\dot{\beta} = -\varepsilon \sigma A + \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\Omega} A^3 - \frac{1}{2} \frac{f}{\Omega} \cos \beta. \quad (2.19)$$

avec la condition  $\dot{A} = \dot{\beta} = 0$ , on obtient une équation du troisième degré :

$$\left[ \mu^2 + \left( \varepsilon \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\Omega} A^2 \right)^2 \right] A^2 = \frac{f^2}{4\Omega^2} \quad (2.20)$$

Cette équation algébrique admet une forme du troisième degré, et peut être résolue par la méthode de Ferrari [Tignol 02].

## 2.2 Méthode des échelles multiples

La méthode des échelles multiples est largement utilisée dans [Nayfeh 07b] pour traiter les nombreux exemples. Soit l'équation du mouvement d'un oscillateur faiblement amorti suivante :

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f \cos \Omega t. \quad (2.21)$$

Puisqu'on considère un système faiblement non linéaire et afin d'obtenir un problème linéaire à l'ordre  $\varepsilon^0$ , on pose :

$$\mu = \varepsilon \mu_0, \quad \alpha = \varepsilon \alpha_0, \quad f = \varepsilon f_0. \quad (2.22)$$

Afin de se placer au voisinage de la résonance  $\omega_0$ , on introduit le paramètre  $\sigma$  et la relation suivante entre  $\Omega$  et  $\omega_0$  :

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma \quad (2.23)$$

On introduit les variables  $T_i$ , représentant les différentes échelles de temps, de la manière suivante :

$$T_0 = \varepsilon^0 t, \quad T_1 = \varepsilon^1 t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \quad \dots \quad (2.24)$$

$T_0$  représente une échelle rapide,  $T_1$  une échelle lente et  $T_2$  une échelle plus lente...

Comme les variables  $T_0, T_1, \dots$  sont considérées comme des variables indépendantes, on a les dérivées :

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (2.26)$$

et l'équation(2.21) devient :

$$D_0^2 x + 2\varepsilon D_0 D_1 x + 2\varepsilon \mu_0 D_0 x + \dots + \omega_0^2 x + \varepsilon \alpha_0 x^3 = \varepsilon f_0 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.27)$$

Supposons que la solution  $x(t)$  peut être représentée par un développement en série en fonction du paramètre  $\varepsilon$  :

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (2.28)$$

On introduit l'expression (2.28) dans l'équation (2.27) et identifie les coefficients des termes en  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$  :

$$\text{Ordre } \varepsilon^0 : \quad D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0. \quad (2.29)$$

$$\text{Ordre } \varepsilon^1 : \quad D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu_0 D_0 x_0 - \alpha_0 x_0^3 + f_0 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.30)$$

La solution générale de l'équation (2.29) a la forme :

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}, \quad (2.31)$$

où  $A(T_1)$  est une fonction qui sera déterminée en éliminant les termes séculaires de  $x_1$ .

En remplaçant cette équation dans l'équation (2.30), on obtient la nouvelle équation :

$$D_0^2 x_1 + \omega_0 x_1 = -[2i\omega_0(A' + \mu_0 A) + 3\alpha_0 A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} - \alpha_0 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{2} f_0 e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + cc, \quad (2.32)$$

où  $cc$  représente le complexe conjugué des termes précédents.

L'équation (2.32) contient des termes séculaires sur l'échelle de temps  $T_0$  qu'il faut éliminer. Pour que ces termes séculaires soient nuls, la condition suivante doit être vérifiée :

$$2i\omega_0(A' + \mu_0 A) + 3\alpha_0 A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} f_0 e^{i\sigma T_1} = 0. \quad (2.33)$$

Pour résoudre l'équation (2.33), on cherche  $A$  sous la forme :

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (2.34)$$

En séparant la partie imaginaire et la partie réelle, on obtient deux équations pour l'amplitude  $a$  et la phase  $\beta$  :

$$a' = -\mu_0 a + \frac{1}{2} \frac{f_0}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta). \quad (2.35)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\alpha_0}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{f_0}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.36)$$

La condition  $a' = \beta' = 0$  conduit à équation qui se traite comme une équation du troisième degré :

$$\left[ \mu_0^2 + \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha_0}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{f_0^2}{4\omega_0^2} \quad (2.37)$$

En multipliant cette équation par  $\varepsilon^2$ , il vient :

$$\left[ \mu^2 + \left( \varepsilon \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad (2.38)$$

On a  $\frac{\alpha}{\Omega} \approx \frac{\alpha}{\omega_0}$ , alors le résultat de méthode des échelles multiples à l'ordre  $\varepsilon^1$  est identique à celui de la méthode de la moyenne harmonique. Cette équation est l'équation de réponse en fréquence. Pour chaque valeur de  $\Omega$ , il faut résoudre l'équation (2.38) pour obtenir les valeurs de  $a$  correspondantes.

### 2.3 Méthode d'intégration temporelle avec continuation séquentielle.

Soit l'équation de l'oscillateur de Duffing :

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = f \cos(\Omega t), \quad (2.39)$$

et soit sa forme d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -2\mu y - \omega_0^2 x - \alpha x^3 + f \cos(\Omega t), \end{cases} \quad (2.40)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t). \quad (2.41)$$

où l'expression du second membre  $g(z, t)$  et la valeur de la condition initiale  $z(t = 0)$  sont données et  $z(t) = [x(t), y(t)]^T$ .

On cherche plutôt à suivre l'évolution de  $z(t)$  depuis sa condition initiale  $z(t = 0)$  jusqu'à une valeur de  $t$  donnée. Les principes de bases de cette approche sont simplement de subdiviser le temps  $t$  en instants successifs  $t_i$  (le plus souvent régulièrement espacés, tels que  $t_i = i \times h$ ) et de construire une approximation numérique reliant la solution (encore indéterminée) à l'instant  $t_n : z(t_n)$  à celles des instants précédents connus. Ainsi, connaissant la condition initiale  $z(t_0)$ , on construit  $z(t_1)$ , qui sert ensuite à déterminer  $z(t_2)$ , qui permettra de calculer  $z(t_3)$ ,...

À partir de la condition initiale  $z_0 = z(t = 0)$ , ce système est intégré au cours du temps à l'aide par exemple du schéma de Runge-Kutta (fonction *ode45* dans Matlab) [Butcher 08]. On s'intéresse aux solutions périodiques qui vérifient :

$$z(z_0, t + T) = z(z_0, t) \quad (2.42)$$

et qui sont obtenues après disparition complète du régime transitoire. Le calcul des solutions périodiques permet de tracer la courbe de réponse du système (la courbe amplitude/fréquence ou amplitude/pulsation). Pour obtenir cette courbe, on incrémente  $\Omega$  et pour chaque valeur de  $\Omega$  on initialise les calculs avec la solution obtenue pour la valeur de  $\Omega$  précédente. Cette méthode est très facile à mettre en œuvre. Cependant elle présente plusieurs inconvénients :

- Pour chaque valeur de  $\Omega$  il faut intégrer la solution temporelle jusqu'à disparition complète du régime transitoire, ce qui peut être très long si l'amortissement est faible.
- La courbe de réponse ne peut pas être déterminée complètement, car seules les solutions stables sont obtenues.
- Pour une valeur de  $\Omega$  lorsque plusieurs solutions stables existent, on obtient l'une ou l'autre de ces solutions en fonction des conditions initiales choisies.

**Exemple :** Soit le cas  $\mu = 0.05$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $f = 0.3$ , les résultats sont tracés dans les figures 2.1a-d. La figure 2.1-a montre la réponse  $x(t)$  en fonction du temps. Durant les 50 premières secondes, le régime est transitoire. Ensuite, lorsque le régime est périodique, sur la figure 2.1-c, dans l'espace des phases, on obtient une boucle fermée pour une période  $T$ . La figure 2.1-d montre le module de la réponse fréquentielle. Il faut 365 secondes pour tracer cette courbe de réponse.

## 2.4 Méthode de shooting

### 2.4.1 Shooting simple

Le principe de la méthode de shooting consiste à chercher une solution initiale qui est sur la boucle fermée dans l'espace des phases. Avec cette méthode, l'intégration temporelle n'est effectuée que sur une période, ce qui rend les calculs beaucoup plus rapides. Par contre elle est plus complexe à mettre en œuvre que la méthode d'intégration temporelle. La figure 2.2 récapitule l'algorithme global de la méthode de shooting.

**Mise en œuvre :** On impose la condition de périodicité suivante :

$$H(z_0, T) = z(z_0, T) - z_0 = z(T) - z(0) = 0. \quad (2.43)$$

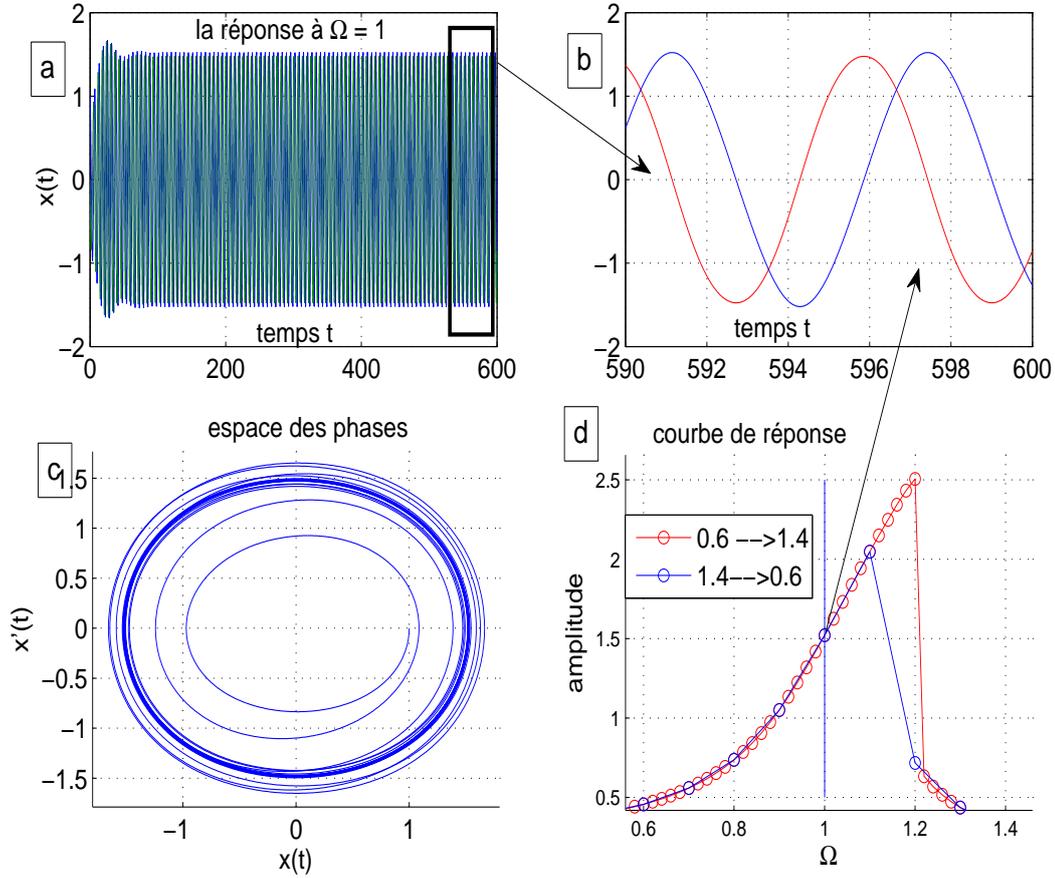
D'où le système à résoudre, constitué des équations du mouvement (2.41) et de l'équation de périodicité (2.43) :

$$\begin{cases} \dot{z} &= g(z, t) \\ H(z_0, T) &= z(z_0, T) - z_0 = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Pour une valeur de  $T$  fixée,  $z_0$  est une solution initiale approchée et ne vérifie pas exactement la deuxième équation de (2.44). Donc on cherche la correction  $\Delta z$  afin que  $z_0 + \Delta z$  vérifie cette équation. La phase de correction à l'itération  $k$  est :

$$z_0^{k+1} = z_0^k + \Delta z \quad (2.45)$$

## 2. Méthodes de calcul des solutions périodiques



**FIGURE 2.1:** Solution obtenue par la méthode d'intégration temporelle avec continuation séquentielle : a) solution transitoire pour  $\Omega = 1$  ; b) solution périodique pour  $\Omega = 1$  ; c) solution transitoire dans l'espace des phases ; d) courbe de réponse

L'incrément  $\Delta z$  est la solution du système linéaire :

$$J_z(z_0^k, T)\Delta z = -H(z_0^k, T). \quad (2.46)$$

où  $J_z$ , la matrice jacobien est déterminée par :

$$J_z(z_0^k, T) = \left. \frac{\partial H}{\partial z_0} \right|_{(z_0^k, T)} = M_k(z_0^k, T) - Id. \quad (2.47)$$

où  $M_k$  est la matrice de Monodromie à l'itération  $k$ .

La correction est effectuée de manière itérative jusqu'à atteindre la précision  $\varepsilon$  souhaitée, avec comme test d'arrêt des itérations :

$$\frac{\|\Delta z\|}{\|z_0^{k+1}\|} \leq \varepsilon. \quad (2.48)$$

## Algorithme

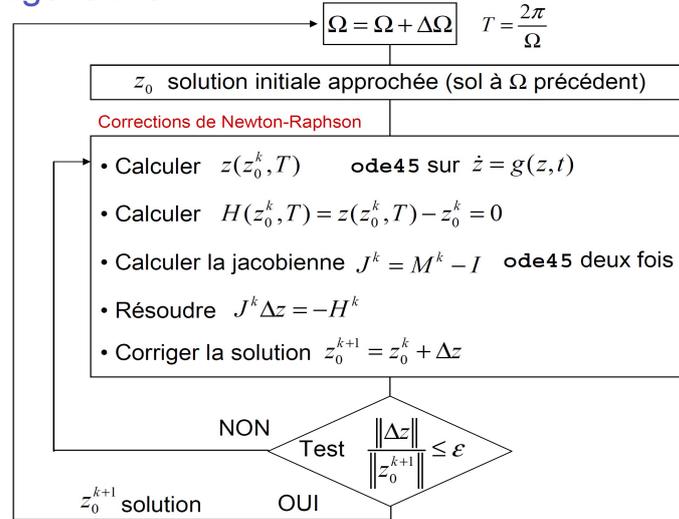


FIGURE 2.2: Algorithme de la méthode de shooting

## 2.4.2 Continuation par longueur d'arc :

Afin d'éviter le phénomène de saut visible sur la courbe de réponse de la figure 2.1-d et pour obtenir aussi bien les solutions stables qu'instables, il est nécessaire d'adopter un pilotage par longueur d'arc. Cette méthode est détaillée, par exemple, dans les références [Peeters 09] et [Kerschen 09] pour le calcul des modes non linéaires.

Le système des équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= g(z, t, \eta). \\ H(z_0, \eta) &= z(z_0, t = T, \eta) - z_0 = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

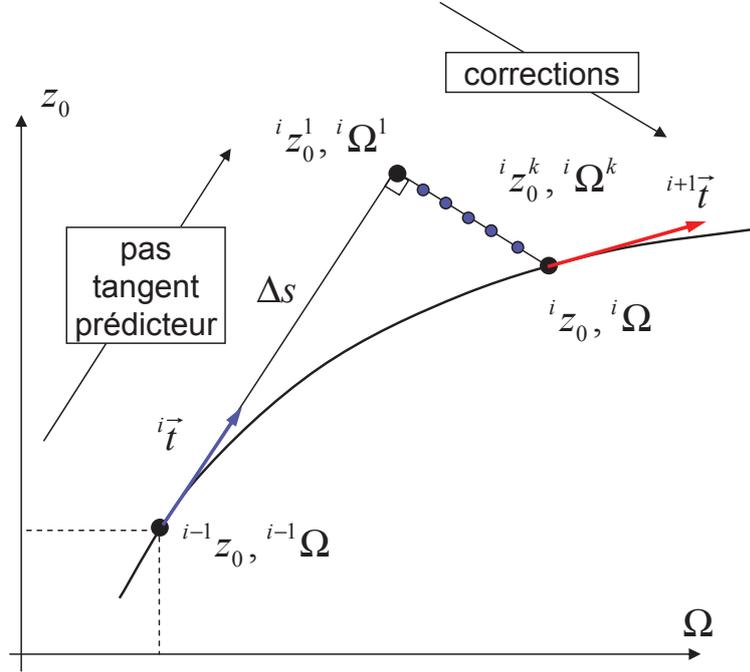
où  $\eta$  est le paramètre de bifurcation (un des paramètres du système). Pour l'exemple de l'équation Duffing :  $\eta = \Omega$ .

Les étapes de calcul sont représentées sur la figure 2.3. Le principe de cette méthode est le suivant :

- À partir d'une solution connue  $z_0^{i-1}$ ,  $\Omega^{i-1}$  sur la courbe de réponse.
- On effectue un pas de prédicteur de longueur fixée  $\Delta s$  selon la direction tangente  $\vec{t}^i$ .
- Puis, on effectue le pas de correction selon la direction orthogonale à  $\vec{t}^i$ .

### 2.4.2.1 Pas prédicteur : calcul du vecteur tangent

Le vecteur tangent  $\vec{t}^i = (\Delta z_0^1 \Delta \Omega^1)^T$  est obtenu par l'expansion au premier ordre de la série de Taylor de la deuxième équation du système (2.49) au voisinage de la solution



**FIGURE 2.3:** Algorithme de la méthode de shooting avec continuation par la longueur d'arc

$i^{-1}z_0, i^{-1}\Omega$  :

$$\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{(i^{-1}z_0, i^{-1}\Omega)} \Delta z_0^1 + \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{(i^{-1}z_0, i^{-1}\Omega)} \Delta \Omega^1 = -H(i^{-1}z_0, i^{-1}\Omega) = 0. \quad (2.50)$$

Afin d'obtenir un problème bien posé, il est nécessaire d'introduire une condition de normalisation du vecteur tangent :

$$\|i\vec{t}\|^2 = \{\Delta z_0^1\}^T \cdot \{\Delta z_0^1\} + (\Delta \Omega^1)^2 = 1. \quad (2.51)$$

Posons :  $a = \Delta \Omega^1$  et  $\Delta z_0^1 = a \Delta \hat{z}$ . L'équation (2.51) devient :

$$a^2 (\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1) = 1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta \hat{z}^T \Delta \hat{z} + 1}}. \quad (2.52)$$

De l'équation (2.50), on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{i^{-1}} \Delta \hat{z} = - \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{i^{-1}}. \quad (2.53)$$

Le vecteur tangent  ${}^i\vec{t}$  devient :

$${}^i\vec{t} = \begin{pmatrix} \Delta z_0^1 \\ \Delta \Omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\Delta\hat{z} \\ a \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Le point  $({}^i z_0^1, {}^i \Omega^1)$  est déterminé par le point initial et le vecteur tangent :

$$\begin{pmatrix} {}^i z_0^1 \\ {}^i \Omega^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{i-1} z_0 \\ {}^{i-1} \Omega \end{pmatrix} + \Delta s \cdot {}^i\vec{t} = \begin{pmatrix} {}^{i-1} z_0 \\ {}^{i-1} \Omega \end{pmatrix} + \Delta s \begin{pmatrix} a\Delta\hat{z} \\ a \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Le sens de parcours est donné par le signe de  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta z_0^T \Delta \hat{z}}}$ . Le signe de  $a$  est choisi de façon à conserver le même sens de parcours lors de deux pas consécutifs. Pour cela on impose que les deux vecteurs tangents consécutifs aient un produit scalaire positif :

$${}^{i-1}\vec{t}^T \cdot {}^i\vec{t} > 0 \rightarrow a({}^{i-1} \Delta z_0^{1T} \Delta \hat{z} + {}^{i-1} \Delta \Omega^1) > 0 \quad (2.56)$$

Le signe de  $a$  est donc donné par :

$$\text{sign}(a) = \text{sign}({}^{i-1} \Delta z_0^{1T} \Delta \hat{z} + {}^{i-1} \Delta \Omega^1) \quad (2.57)$$

#### 2.4.2.2 Pas de correction

Les corrections sont effectuées dans la direction orthogonale pour se ramener sur la courbe solution :

$$\begin{pmatrix} {}^i z_0^{k+1} \\ {}^i \Omega^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^i z_0^k \\ {}^i \Omega^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta z_0^{k+1} \\ \Delta \Omega^{k+1} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

où  $\Delta z_0^{k+1}, \Delta \Omega^{k+1}$  sont les solutions de l'équation suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial z_0} \Big|_{{}^i z_0^k, {}^i \Omega^k} \Delta z_0^{k+1} + \frac{\partial H}{\partial \Omega} \Big|_{{}^i z_0^k, {}^i \Omega^k} \Delta \Omega^{k+1} = -H({}^i z_0^k, {}^i \Omega^k) \quad (2.59)$$

La condition d'orthogonalité de la correction avec le vecteur tangent s'écrit :

$${}^i\vec{t}^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta z_0^{k+1} \\ \Delta \Omega^{k+1} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \Delta z_0^{1T} \Delta z_0^{k+1} + \Delta \Omega^1 \Delta \Omega^{k+1} = 0, \quad (2.60)$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H^k}{\partial z_0} & \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} \\ \Delta z_0^{1T} & \Delta \Omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_0^{k+1} \\ \Delta \Omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Les termes de ce système sont les suivants :

$$H^k = H({}^i z_0^k, {}^i \Omega^k) = z({}^i z_0^k, T, {}^i \Omega^k) - {}^i z_0^k = 0, \quad (2.62)$$

## 2. Méthodes de calcul des solutions périodiques

---

avec  $z(i z_0^k, T, i \Omega^k)$  obtenu en intégrant l'équation  $\dot{z} = g(z, t, \Omega)$  sur la période  $T$  avec comme solution initiale  $i z_0^k$ .

On doit déterminer les différents termes du membre de gauche de l'équation (2.61). La jacobienne  $J_z$  s'exprime de la manière suivante :

$$J_z = \frac{\partial H^k}{\partial z_0} = M^k - Id, \quad (2.63)$$

où  $M^k = \frac{\partial z}{\partial z_0} \Big|_{i z_0^k, T, i \Omega^k}$  est la matrice de monodromie à l'itération  $k$ , et  $Id$  la matrice identité. Le calcul de la matrice de monodromie est quant à lui détaillé dans [Peletan 13].

La jacobienne  $J_\Omega$  peut être obtenue de manière simple par différentiation numérique :

$$J_\Omega = \frac{\partial H^k}{\partial \Omega} = \frac{\partial (z(i z_0^k, T, i \Omega^k) - i z_0^k)}{\partial \Omega} = \frac{z(i z_0^k, T, i \Omega^k + \delta \Omega) - z(i z_0^k, T, i \Omega^k - \delta \Omega)}{2 \delta \Omega}. \quad (2.64)$$

Le critère d'arrêt des itérations est choisi tel que :

$$\frac{\|\Delta z_0^{k+1}\|}{\|i z_0^{k+1}\|} \leq \varepsilon \quad (2.65)$$

Le choix de la longueur  $\Delta s$  du pas tangent prédicteur dépend du type de problème et du paramètre de bifurcation  $\eta$  choisi.

- Si le pas est trop long, beaucoup d'itérations de correction sont nécessaires et la solution risque de ne pas converger.
- Si le pas est trop court, beaucoup de pas sont nécessaires pour décrire la courbe, le temps de calcul est donc inutilement long.
- Les pas longs sont choisis sur les portions peu non-linéaires et les pas courts sont choisis sur les portions fortement non-linéaires.

**Longueur de pas adaptative** : on adapte la longueur du pas tangent en fonction du nombre d'itérations  $i^{-1}N$  du pas précédent :

$$i \Delta s = \left( \frac{N^*}{i^{-1}N} \right)^{i-1} \Delta s \quad (2.66)$$

où :

- $N^*$  : Nombre d'itérations souhaitées (en moyenne).
- $i^{-1}N$  : Nombre d'itérations au pas précédent.
- $i^{-1}\Delta s$  : longueur du pas précédent.

**Application** : Pour l'équation de l'oscillateur de Duffing, la courbe de réponse obtenue par continuation est tracée dans la figure 2.4. L'adaptation automatique de la longueur de pas est clairement visible au sommet de la courbe de réponse où le problème est fortement non linéaire. Le calcul de stabilité permet de distinguer les solutions stables et les solutions instables. Dans cet exemple le temps de calcul est de 30 secondes, soit 12 fois plus faible que pour la méthode d'intégration temporelle (365 secondes).

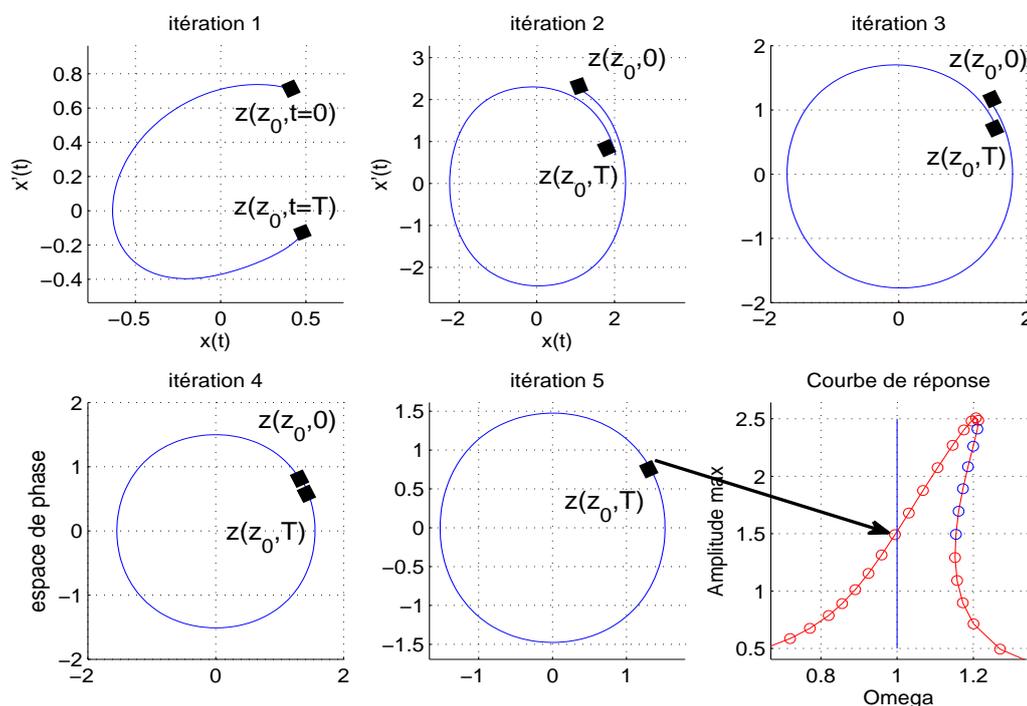


FIGURE 2.4: Solution d'une équation de Duffing par la méthode de shooting

## 2.5 Balance harmonique par Manlab

Manlab est un logiciel développé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) de Marseille basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour analyser des systèmes algébriques non-linéaires de la forme :

$$R(U, \eta) = 0. \quad (2.67)$$

où :

- $\mathbf{R}$  est un vecteur de  $n$  équations,  $\mathbf{U}$  est un vecteur de  $n$  inconnues.
- $\eta$  est un paramètre quelconque utilisé pour la continuation (par exemple la pulsation d'excitation  $\Omega$  dans l'équation de l'oscillateur de Duffing).

Le logiciel et le guide sont présentés sur le site web du LMA ou bien dans [Karkar 10].

Les fonctionnalités proposées dans Manlab sont les suivants [Arquier 07] :

- Affichage du diagramme de réponse (présentation du diagramme, consultation de la base de données, etc...)
- Interfaçage avec l'utilisateur (lancement du calcul de tronçons, ajout de perturbation, etc...)
- Sauvegardes et changements de la base de données de tronçons.

Manlab a récemment été couplé à une Méthode de la Balance Harmonique (HBM) [Cochelin 09] pour permettre la continuation de solutions périodiques. Cette méthode ainsi que la MAN sont décrites dans les deux paragraphes suivants.

### 2.5.1 Méthode asymptotique numérique (MAN) :

C'est une méthode de perturbation-discrétisation-continuation pour résoudre des systèmes algébriques non linéaires dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Le principe consiste à développer les inconnues et les paramètres en séries entières. Ce principe permet de transformer le système initial non linéaire en une série de problèmes linéaires simples à résoudre. Cette méthode est détaillée dans les références [Cochelin 07], [Pérignon 04]. Elle présente plusieurs avantages. Par exemple, elle fournit des solutions continues et la continuation est très robuste. Le choix de la longueur du pas est automatique [Baguet 03], [Cochelin 94].

La solution du système (2.67) est recherchée sous la forme de séries entières tronquées à l'ordre  $N$  en fonction d'un paramètre de chemin  $a$  :

$$U = U_0 + \sum_{k=1}^N a^k U_k; \quad \eta = \eta_0 + \sum_{k=1}^N a^k \eta_k \quad (2.68)$$

où  $U_0, \eta_0$  correspondent à une solution initiale connue.  $U_0$  peut être cherchée par plusieurs méthodes, par exemple, par la méthode classique de Newton-Raphson,...

En remplaçant le développement de (2.68) dans l'équation (2.67), la nouvelle équation est la suivante :

$$R(U, \eta) = aR_1 + a^2R_2 + \dots = 0 \quad (2.69)$$

Ceci étant valable pour tout  $a$ , en identifiant les puissances croissantes de  $a$ , on obtient une succession des problèmes linéaires qu'on peut résoudre de manière récursive :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_0 U_1 + \frac{\partial R}{\partial \eta} \Big|_0 \eta_1 = 0. \\ \dots & \\ R_p &= \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_0 U_p + \frac{\partial R}{\partial \eta} \Big|_0 \eta_p - F_p^{nl} = 0. \\ \dots & \end{aligned} \quad (2.70)$$

À laquelle, on ajoute la définition du paramètre de longueur d'arc classique :

$$a = \mathbf{U}_1^t \mathbf{P} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) + \alpha \eta_1 (\eta - \eta_0), \quad (2.71)$$

où  $P$  est une matrice diagonale et  $\alpha$  un scalaire.

### 2.5.2 Application de la HBM + MAN dans Manlab

On cherche à résoudre un système différentiel non-linéaire de la forme :

$$\dot{Y} = f(Y, \Omega) \quad (2.72)$$

La première étape consiste à réécrire ce système dans un cadre quadratique en introduisant des équations et des variables additionnelles. Avec ces transformations intermédiaires, le système devient :

$$m(\dot{\mathbf{Z}}) = c + l(\mathbf{Z}) + q(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}). \quad (2.73)$$

Le vecteur  $\mathbf{Z}$  a la dimension  $N_e$  et contient les composantes du vecteur  $\mathbf{Y}$  initial et les variables additionnelles.  $c$  est une constante par rapport à l'inconnue  $\mathbf{Z}$ ,  $l(\cdot)$ ,  $m(\cdot)$  sont des opérateurs linéaires et  $q(\cdot, \cdot)$  est un opérateur quadratique par rapport à  $\mathbf{Z}$ .

On applique la méthode de la balance harmonique à l'équation (2.73), le vecteur inconnu  $\mathbf{Z}$  est développé en une série de Fourier avec  $H$  harmoniques :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{Z}_{c,k} \cos(k\Omega t) + \sum_{k=1}^H \mathbf{Z}_{s,k} \sin(k\Omega t) \quad (2.74)$$

Les composantes de la série de Fourier sont groupées dans le vecteur colonne  $\mathbf{U}$  de dimension  $(2H + 1) \times N_e$ ,  $N_e$  étant le nombre d'équations de (2.73).

$$\mathbf{U} = [\mathbf{Z}'_0, \mathbf{Z}'_{c,1}, \mathbf{Z}'_{s,1}, \mathbf{Z}'_{c,2}, \mathbf{Z}'_{s,2}, \dots, \mathbf{Z}'_{c,H}, \mathbf{Z}'_{s,H}]^t \quad (2.75)$$

On introduit le développement (2.74) dans l'équation (2.73). On regroupe les termes de même harmonique et on néglige les termes d'harmoniques supérieures à l'ordre  $H$ . On obtient alors un système algébrique de  $(2H + 1) \times N_e$  équations d'inconnue  $\mathbf{U}$  :

$$\Omega \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}). \quad (2.76)$$

Les nouveaux opérateurs  $\mathbf{M}(\cdot)$ ,  $\mathbf{L}(\cdot)$ ,  $\mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$ ,  $\mathbf{C}$  dépendent seulement des opérateurs  $m(\cdot)$ ,  $l(\cdot)$ ,  $c$ ,  $q(\cdot, \cdot)$ . Ils sont détaillés dans [Cochelin 09]. Enfin, il faut résoudre un système de  $(2H + 1) \times N_e$  équations avec  $(2H + 1) \times N_e$  inconnues et le paramètre de continuation  $\Omega$ .

Pour appliquer la méthode asymptotique numérique, on réécrit le système (2.76) sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \Omega) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \Omega \mathbf{M}(\mathbf{U}) = 0 \quad (2.77)$$

On développe  $\mathbf{U}$  et  $\Omega$  en séries tronquées à l'ordre  $N$ , en supposant le point de départ  $(\mathbf{U}_0, \Omega_0)$  connu (déterminé par Newton-Raphson).

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(a) &= \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + \dots + a^N\mathbf{U}_N \\ \Omega(a) &= \Omega_0 + a\Omega_1 + a^2\Omega_2 + \dots + a^N\Omega_N \end{aligned} \quad (2.78)$$

Le système (2.77) possède une inconnue de trop. On introduit donc une équation supplémentaire définissant le paramètre de longueur d'arc [Cochelin 94] :

$$a = \mathbf{U}_1 \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^T + \Omega_1 (\Omega - \Omega_0) \quad (2.79)$$

où  $(\mathbf{U}_1, \Omega_1)$  est le vecteur tangent au point  $(\mathbf{U}_0, \Omega_0)$ . Avec les expansions semblables à l'équation (2.69), on peut définir le domaine de validité des séries en minimisant l'augmentation du résidu d'une branche à l'autre. Soit  $\mathbf{R}_0$  le résidu initial, on veut :

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = a\mathbf{R}_1 + a^2\mathbf{R}_2 + \dots + a^{N+1}\mathbf{R}_{N+1} \leq \varepsilon \quad (2.80)$$

dont une bonne approximation est donnée par

$$R - R_0 \approx a^{N+1} R_{N+1} \leq \varepsilon \quad (2.81)$$

On obtient ainsi la limite  $a_{max}$  du domaine de validité :

$$a_{max} = \left( \frac{\varepsilon}{R_{N+1}} \right)^{\frac{1}{N+1}} \quad (2.82)$$

### 2.5.3 Exemple

#### Exemple 1

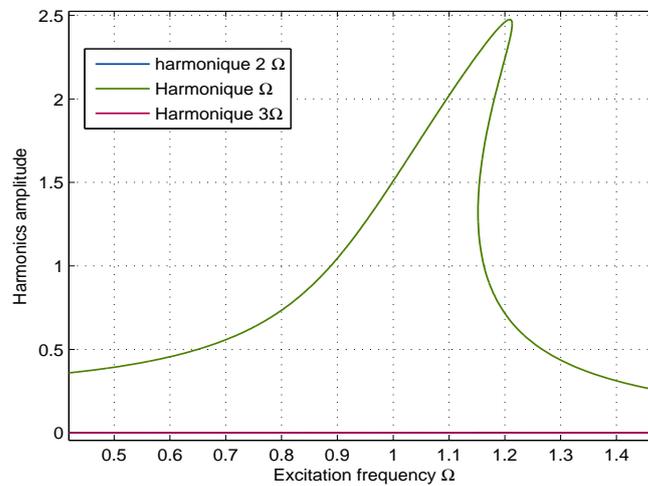


FIGURE 2.5: Courbe de réponse d’une équation de l’oscillateur de Duffing par Manlab

Considérons l’équation de Duffing (2.39). Pour mettre cette équation sous la forme (2.73), les inconnues intermédiaires  $y$  et  $u$  sont introduites :

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y \\ 0 &= & u & -x^2 \\ \dot{y} &= & \underbrace{f \cos(\Omega t)}_c & \underbrace{-2\mu y - \omega_0^2 x}_{l(Z)} & \underbrace{-\alpha ux}_{q(Z,Z)} \\ m(\dot{Z}) & & & & \end{cases} \quad (2.83)$$

Le vecteur des inconnues est donc  $U = [x, y, u]^T$ . En utilisant les mêmes valeurs de  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_0, \dots$  que dans l’exemple de la méthode intégration temporelle (section précédente), on obtient les courbes de réponse de la figure 2.5. On présente trois courbes qui correspondent aux 3 harmoniques  $\Omega, 2\Omega, 3\Omega$  et on trouve que l’influence des harmoniques supérieures ( $2\Omega$  et  $3\Omega$ ) est très petite.

#### Exemple 2

Dans le cas d'une équation différentielle à excitation paramétrique (équation de Mathieu) :

$$u'' + \mu u' + \omega_0^2 u + \alpha u^3 + \delta(u \cos(2\Omega t)) = F \cos(\Omega t) \quad (2.84)$$

On ajoute les variables intermédiaires suivantes :

$$\begin{cases} u' = & y \\ y' = & F \cos(\Omega t) - \omega_0^2 u - \mu y - \alpha u \cdot w - \delta u x \\ 0 = & -w + u^2 \\ 0 = & \underbrace{\cos(2\Omega t)}_c \quad \underbrace{-x}_{l(Z)} \quad \underbrace{\quad}_{q(Z,Z)} \end{cases} \quad (2.85)$$

Ensuite les opérateurs  $c$ ,  $l(Z)$ ,  $q(Z, Z)$  sont introduits dans Manlab avec les inconnues  $Z = [u, y, w, x]^T$ . Si on calcule avec  $H$  harmoniques, on a  $4 \times (2H + 1)$  équations. La composante  $F \cos \Omega t$  apparaît dans la constante  $c$  de la sixième équation,  $\cos 2\Omega t$  apparaît dans la constante  $c$  de la seizième équation.



## Chapitre 3

# Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée

*Dans ce chapitre, le modèle d'un résonateur de type poutre encastrée-encastrée est considéré. On vérifie la validité de quelques méthodes présentées dans le chapitre II pour résoudre l'équation du mouvement de la micro/nano-poutre. On analyse l'influence des paramètres du modèle sur la précision des résultats et sur la nature du comportement observé. Puis l'équation du mouvement de la poutre avec une masse ajoutée est établie et étudie le changement de réponse dû à la masse ajoutée.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle de micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée . . .</b>	<b>37</b>
3.1.1	Équation du mouvement . . . . .	37
3.1.2	Analyse de l'équation du mouvement . . . . .	38
<b>3.2</b>	<b>Détermination des modes propres . . . . .</b>	<b>40</b>
3.2.1	Cas 1 : modes propres non contraints . . . . .	40
3.2.2	Cas 2 : modes propres contraints . . . . .	41
<b>3.3</b>	<b>Calcul de la réponse numérique . . . . .</b>	<b>42</b>
3.3.1	Procédure de Galerkin . . . . .	42

---

3.3.2	Méthode de la Balance Harmonique + Méthode Asymptotique Numérique (HBM+MAN) . . . . .	43
<b>3.4</b>	<b>Calcul de la réponse par méthode de la moyenne harmonique . . . . .</b>	<b>45</b>
3.4.1	Cas 3 : calcul de la réponse avec multiplication par $(1 - w)^2$ . . . . .	45
3.4.2	Cas 4 : calcul de la réponse avec une série de $\frac{1}{(1-w)^2}$ . . . . .	45
3.4.3	Cas 5 : calcul de la réponse du cas particulier $\frac{1}{(1-w)^2} \approx 1$ . . . . .	46
<b>3.5</b>	<b>Confrontation des méthodes . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.6</b>	<b>Analyse paramétrique . . . . .</b>	<b>48</b>
3.6.1	Influence des modes supérieurs . . . . .	48
3.6.2	Influence des paramètres . . . . .	49
<b>3.7</b>	<b>Micro/nano-poutre avec masse ajoutée . . . . .</b>	<b>51</b>
3.7.1	Équation du mouvement . . . . .	51
3.7.2	Décalage en fréquence . . . . .	53
3.7.3	Changement d'amplitude . . . . .	54
<b>3.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>59</b>

---

## 3.1 Modèle de micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée

Le modèle d'un micro/nano-résonateur est décrit sur la figure 3.1 avec deux parties principales : une micro/nano-poutre et une électrode. La micro/nano-poutre est soumise à un amortissement visqueux et actionnée par une force électrostatique due à la tension  $V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t$  où  $V_{dc}$  est la tension de polarisation,  $V_{ac}$  l'amplitude de la tension alternative appliquée et  $\Omega$  la fréquence d'excitation. La poutre encastrée-encastrée est forcée à la fréquence résonante afin d'obtenir de grands déplacements.

### 3.1.1 Équation du mouvement

Pour établir l'équation du mouvement, on considère une petite longueur  $d\tilde{x}$  de la micro/nano-poutre.

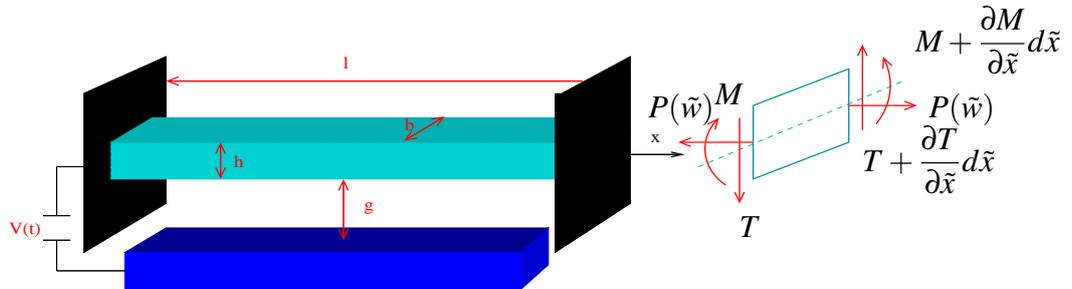


FIGURE 3.1: Modèle de micro/nano-poutre encastrée-encastrée forcée par une électrode.

La poutre est soumise à la force axiale  $P(w)$  qui comprend deux composantes : la force  $\tilde{N}$  due à la contrainte résiduelle de fabrication et la force  $\tilde{N}_{DL}$  due à la déflexion latérale.  $P(w)$  est déterminée par la formule de superposition suivante :

$$P(\tilde{w}) = \tilde{N} + \tilde{N}_{DL} = \tilde{N} + Ebh \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.1)$$

où  $b, h, l$  sont respectivement la largeur, la hauteur et la longueur de la poutre,  $E$  le module de Young. La longueur après la déformation est donnée par :

$$l + \Delta l = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}\right)^2} d\tilde{x}, \quad (3.2)$$

alors en première approximation :

$$P(\tilde{w}) = \tilde{N} + \frac{Ebh}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}\right)^2 d\tilde{x} \quad (3.3)$$

La condition d'équilibre du moment d'une longueur  $d\tilde{x}$  s'écrit sous la forme :

$$M + \frac{\partial M}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} - M + T \cdot d\tilde{x} - P(\tilde{w}) \cdot d\tilde{x} \frac{\partial \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} = 0. \quad (3.4)$$

Dans cette équation, on a négligé les ordres supérieurs de  $d\tilde{x}$  : les moments dûs à la force électrostatique  $\frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{bV^2}{(g-\tilde{w})^2} d\tilde{x}(\frac{1}{2}d\tilde{x})$  et à la force d'amortissement  $\tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{x}(\frac{1}{2}d\tilde{x})$ .

L'équation (3.4) devient :

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{x}} + T - P(\tilde{w}) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

L'équation d'équilibre des forces est écrite en prenant en compte tous les termes sous forme :

$$T + \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} - T + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{b \cdot d\tilde{x} \cdot V^2}{(g - \tilde{w})^2} - \tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{x} = \rho b h d\tilde{x} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2}, \quad (3.6)$$

soit :

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{bV^2}{(g - \tilde{w})^2} - \tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} = \rho b h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} \quad (3.7)$$

En remplaçant  $M = EI \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2}$ , on obtient finalement l'équation du mouvement :

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + \tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} - \left( \tilde{N} + \frac{Ebh}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} \right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \rho b h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{bV^2}{(g - \tilde{w})^2}, \quad (3.8)$$

Les conditions aux limites se traduisent par :

$$\tilde{w}(0, \tilde{t}) = \tilde{w}(l, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}(0, \tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}}(l, \tilde{t}) = 0. \quad (3.9)$$

En introduisant les paramètres adimensionnés,

$$w = \frac{\tilde{w}}{g}, x = \frac{\tilde{x}}{l}, t = \frac{\tilde{t}}{\tau}, \Omega = \tilde{\Omega} \tau, \quad (3.10)$$

l'équation (3.8) devient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - \left[ N + \alpha_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_2 \frac{(V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1 - w)^2}, \quad (3.11)$$

où :

$$N = \frac{\tilde{N} l^2}{EI}, \alpha_1 = 6 \left( \frac{g}{h} \right)^2, \alpha_2 = 6 C_n \frac{\epsilon_0 l^4}{E h^3 g^3}, c = \frac{\tilde{c} l^4}{EI \tau}, \tau = \frac{2l^2}{h} \sqrt{\frac{3\rho}{E}},$$

et les nouvelles conditions aux limites sont :

$$w(0, 1) = w(1, t) = w'(0, t) = w'(1, t) = 0. \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Analyse de l'équation du mouvement

L'équation (3.11) existe les non linéarités dues à la géométrie et à la force électrostatique. La non linéarité géométrique est classique, la difficulté est la non linéarité au dénominateur de la force électrostatique.

Si le déplacement  $w(x,t)$  très petit, on a  $\frac{1}{(1-w)^2} \approx 1$ . Ainsi, la force électrostatique non linéaire peut être remplacée par une force sinusoïdale  $F \cos \Omega t$ , on obtient l'équation de Duffing avec un terme non linéaire cubique. Cette équation est largement étudiée avec des problèmes de la résonance principale, sous-harmonique, surharmonique, les résonances simultanées, l'annulation de la non linéarité,... dans les références [Nayfeh 07b], [Lifshitz 09].

Dans le but de valider un premier design la réduction d'ordre du modèle est mise en œuvre, elle a un faible coût de calcul et permet de comprendre facilement l'influence des différents paramètres de conception. Cette méthode est discutée dans [Nayfeh 07b], [Nayfeh 00]. Nayfeh et al. ont représenté deux types de la réduction d'ordre du modèle non linéaire : la méthode nodale et la méthode de domaine [Nayfeh 05]. Ces méthodes visent une transformation des coordonnées physiques à un ensemble des coordonnées généralisées  $q$  associées à des formes propres correspondants aux valeurs propres de modules  $q$  les plus basses. Les références [Nayfeh 05], [Younis 03] montrent des exemples de la réduction d'ordre d'un modèle MEMS. D'abord, la méthode de Galerkin est utilisée ; le déplacement est exprimé par une combinaison linéaire des fonctions de déplacement de base linéairement indépendantes, et puis la réduction d'ordre est basée sur le calcul des modes propres linéaires et conservatifs.

Pour de petits déplacements, avec une erreur admissible, l'équation (3.11) est simplifiée en considérant  $\frac{1}{(1-w)^2} \approx 1$ . En général, la force électrostatique  $\frac{1}{2} \epsilon b \frac{V^2}{(g-w)^2}$  peut être traitée selon les deux cas suivants :

- Le premier cas utilise le développement en séries de Taylor

$$\frac{1}{(1-w)^2} = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + O(w^4),$$

cette approximation est utilisée dans les références [Chen 04] au 3<sup>ème</sup> degré et [Younis 03] au 5<sup>ème</sup> degré du développement en série de Taylor. Cependant, la réponse n'est pas garantie pour les grands déplacements parce que la contribution des degrés supérieurs est significative.

- Le deuxième cas consiste à multiplier l'équation du mouvement par  $(1-w)^2$ . Le résultat de ce cas est plus précis parce que la force électrostatique dans l'équation discrétisée est représentée complètement [Younis 03], cependant il ne faut pas oublier la contrainte  $w < 1$ .

Le premier cas a l'avantage de négliger des termes non linéaires compliqués  $f(\ddot{w}, \dot{w}, w)$ , et l'inconvénient d'être limité qu'au petit déplacement. Pour les grands déplacements, il est nécessaire d'utiliser la série de Taylor avec les ordres supérieurs, ce qui entraîne une mise en œuvre plus compliquée à cause de nouveaux termes non linéaires. Ce cas est souvent utilisé pour les méthodes quasi analytiques, néanmoins le calcul analytique avec plusieurs modes est très compliqué.

On peut utiliser des méthodes quasi analytiques telles que la méthodes des échelles multiples, la méthode de la moyenne harmonique pour résoudre l'équation (3.11). La méthode des échelles multiples est utilisée pour étudier les résonances principales, sous-harmoniques et sur-harmoniques dans les références [Kacem 11], [Abdel-Rahman 03],

[Younis 05], [Kacem 12b]. Kacem et al. ont utilisé la méthode de la moyenne harmonique pour montrer l'annulation de la non linéarité en réglant des paramètres des configurations de conception [Kacem 10b], [Kacem 10c]. Par conséquent, la performance du capteur peut être améliorée, s'il est forcé de façon optimale à très grande amplitude, lorsque le comportement d'allure linéaire est conservé.

Pour les méthodes numériques, le calcul avec plusieurs modes est plus facile et présente le résultat plus précis. La mise en œuvre du calcul de la méthode d'intégration temporelle est facile, néanmoins avec plus de 2 modes ou avec un amortissement faible, le calcul est difficile à cause du problème de convergence. Cette méthode est finalement très coûteuse. Nayfeh et al. a utilisé la méthode des différences finies pour la discrétisation des orbites, ils obtiennent un ensemble d'équations algébriques non linéaires, les solutions de ces équations sont obtenues en utilisant la méthode de Newton-Raphson [Nayfeh 10]. [Nayfeh 07a] a utilisé la méthode de shooting pour la comparer avec la méthode d'intégration temporelle. Younis et al. a utilisé la méthode de shooting pour étudier l'instabilité [Younis 03].

D'autres recherches [Najar 05], [Najar 06] s'intéressent à une poutre avec une section variable. Il a été montré que pour la distribution symétrique, l'augmentation (ou la diminution) du ratio entre la largeur du point au milieu et la largeur du point à l'encastrement entraîne la diminution (ou l'augmentation) de la tension du "pull-in". De plus, l'augmentation (la diminution) du ratio entre les jeux (entre la poutre et l'électrode) au milieu et à l'encastrement entraîne également l'augmentation (ou la diminution) de la tension du "pull-in". Ces études ont utilisé la méthode de quadrature différentielle ; cependant leur mise en œuvre est très compliquée et moins intéressante pour N/MEMS. Récemment, [Kacem 10a] a utilisé la méthode HBM+MAN qui présente plusieurs avantages, par exemple convergence rapide, possible calcul avec plusieurs modes,...

## 3.2 Détermination des modes propres

Les modes propres sont déterminés à partir de l'équation (3.11) sans amortissement et sans termes non linéaires. Il y a deux cas à distinguer ; cas 1 : les modes propres sans force axiale  $N$  (modes propres non contraints) ; cas 2 : les modes propres avec la force axiale  $N$  (modes propres contraints).

### 3.2.1 Cas 1 : modes propres non contraints

Sans terme non linéaire et sans amortissement, l'équation (3.11) devient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.13)$$

$w(x,t)$  est décomposé par la fonction du temps  $a_k(t)$  et le mode propre  $\phi_k(x)$ , solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^4 \phi_k(x)}{\partial x^4} - \lambda_k^4 \phi_k(x) = 0. \quad (3.14)$$

Dans [Kacem 10a],  $\phi_k$  est déterminé par :

$$\phi_k(x) = A_k \left( \cos \lambda_k x - \cosh \lambda_k x + \left[ \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sin \lambda_k - \sinh \lambda_k} \right] [\sin \lambda_k x - \sinh \lambda_k x] \right), \quad (3.15)$$

où  $\lambda_k$  est la solution de l'équation :

$$1 - \cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 0. \quad (3.16)$$

$A_k$  est déterminé à partir de la condition normalisée :

$$A_k = \left( \int_0^1 \left[ \frac{\phi_k(x)}{A_k} \right]^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Cas 2 : modes propres contraints

Si on tient compte de l'effort axial  $N$  dans l'équation de définition des modes propres, on a :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.18)$$

Posons :

$$w(x, t) = \phi(x) a(t) \quad (3.19)$$

La séparation de la fonction de la variable d'espace et de la fonction de la variable du temps conduit à :

$$-\frac{1}{\phi(x)} \left( \frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{a(t)} \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} = \text{constante} = -\omega^2 \quad (3.20)$$

La constante est prise égale à  $-\omega^2$  afin que les solutions soient bornées selon le temps. Il s'ensuit que :

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \omega^2 a(t) = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - N \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \omega^2 \phi(x) = 0. \quad (3.22)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0. \quad (3.23)$$

L'équation (3.22) a comme solution :

$$\phi(x) = A \cos \gamma_1 x + B \sin \gamma_1 x + C \cosh \gamma_2 x + D \sinh \gamma_2 x, \quad (3.24)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont déterminés par :

$$\gamma_1 = \left( -\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \gamma_2 = \left( \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Les constantes  $A, B, C, D$  sont déterminées à partir des équations des conditions aux limites, qui donnent :

$$A + C = 0 \quad (3.26)$$

$$B\gamma_1 + D\gamma_2 = 0 \quad (3.27)$$

$$A \cos \gamma_1 + B \sin \gamma_1 + C \cosh \gamma_2 + D \sinh \gamma_2 \quad (3.28)$$

$$-A\gamma_1 \sin \gamma_1 + B\gamma_1 \cos \gamma_1 + C\gamma_2 \sinh \gamma_2 + D\gamma_2 \cosh \gamma_2 \quad (3.29)$$

Une solution non triviale de ces équations est obtenue si :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ \cos \gamma_1 & \sin \gamma_2 & \cosh \gamma_2 & \sinh \gamma_2 \\ -\gamma_1 \sin \gamma_1 & \gamma_1 \cos \gamma_1 & \gamma_2 \sinh \gamma_2 & \gamma_2 \cosh \gamma_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.30)$$

qui aboutit à l'équation suivante :

$$2\gamma_1\gamma_2(1 - \cos\gamma_1 \cosh\gamma_2) - (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \sin\gamma_1 \sinh\gamma_2 = 0. \quad (3.31)$$

et dont la résolution donne  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et donc  $\omega$  à l'aide des relations (3.25).

Le mode propre  $\phi_k(x)$  est donc donné par :

$$\phi_k(x) = A_k \left( \cos \gamma_1 x - \cosh \gamma_2 x - \frac{\cos \gamma_1 - \cosh \gamma_2}{\gamma_2 \sin \gamma_1 - \gamma_1 \sinh \gamma_2} \left[ \gamma_2 \sin \gamma_1 x - \gamma_1 \sinh \gamma_2 x \right] \right). \quad (3.32)$$

$A_k$  est déterminé par la condition normalisée comme l'équation (3.17).

## 3.3 Calcul de la réponse numérique

### 3.3.1 Procédure de Galerkin

Le déplacement  $w(x, t)$  est exprimé sous la forme tronquée suivante :

$$w(x, t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} a_k(t) \phi_k(x). \quad (3.33)$$

$N_m$  est le nombre de mode calculé. La force électrostatique est déterminée complètement, sans approximation en multipliant l'équation (3.17) par  $\phi_i(1 - w)^2$ , avec  $i = 1..N_m$ . On obtient  $N_m$  équations différentielles du second ordre. Le terme  $\frac{\partial^4 \phi_k(x)}{\partial x^4}$  est remplacé par l'équation (3.14) pour le cas 1 ou l'équation (3.22) pour le cas 2. Ensuite chaque nouvelle équation est intégrée de  $x = 0$  à  $x = 1$ . L'ensemble de  $N_m$  équations détermine une équation matricielle. Pour le cas 1, cette équation matricielle est déterminée dans la thèse [Kacem 10a], (voir aussi l'annexe A). Elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a})] \ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a})] \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a})] \mathbf{a} \\ & - [\mathbf{N} + \alpha_1 \mathbf{T}_2(\mathbf{a})] [\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{a})] \mathbf{a} = \alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2 \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pour le cas 2, l'équation matricielle est la suivante :

$$[\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a})]\ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a})]\dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a})]\mathbf{a} - \alpha_1 T_2(\mathbf{a})[\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{a})]\mathbf{a} = \alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2 \mathbf{F}. \quad (3.35)$$

Les composantes des matrices de l'équation (3.34) sont déterminées à partir des modes propres  $\phi_k$  non contraints et celles de l'équation (3.35), à partir des modes propres  $\phi_k$  contraints.

À cause de la symétrie, on a pour les modes pairs :

$$\int_0^1 \phi_{2k} dx = 0. \quad (3.36)$$

Donc,  $F_{2k} = 0$ , seuls les modes impairs sont calculés. Alors si  $N_m = 2$ , c'est-à-dire que le calcul est réalisé avec les premier et troisième modes.

### 3.3.2 Méthode de la Balance Harmonique + Méthode Asymptotique Numérique (HBM+MAN)

La Méthode de la Balance Harmonique (HBM) est utilisée pour calculer des solutions périodiques des équations (3.34) et (3.35). Avec cette méthode, une équation différentielle en temps est transformée en un système d'équations algébriques non linéaires dépendant de variables d'espace. Le code de calcul Manlab est basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour analyser des systèmes algébriques non-linéaires. Les résultats numériques sont calculés par le logiciel Manlab.

On considère les configurations dans le tableau 3.1. La configuration 1 présente un comportement raidissant, la configuration 2 un comportement assouplissant et la configuration 3 est utilisée pour montrer l'influence des paramètres.

**TABLE 3.1:** Trois configurations de micro/nano-poutres encastées-encastées.

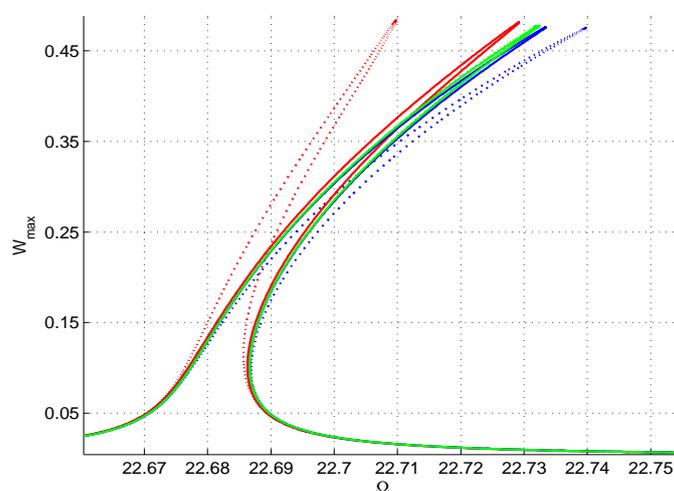
Micro/nano-poutre	$l(\mu\text{m})$	$b(\mu\text{m})$	$h(\mu\text{m})$	$g(\mu\text{m})$	Q
Configuration 1	400	10	10	2	10000
Configuration 2	40	1.5	1.5	0.1	10000
Configuration 3	40	1	1	0.25	5000

Le tableau 3.2 présente quelques valeurs des premiers modes propres non contraints et contraints. Les valeurs de  $\omega_k$  du cas 2 sont plus grandes que celles du cas 1 ; ceci est raisonnable car le cas 2 compte de l'influence de  $N$  dans les modes propres.

Les réponses de deux cas sont montrées sur la figure 3.2. La fréquence adimensionnée est l'abscisse, la valeur maximale du déplacement  $W_{max}$  correspondant à chaque valeur de  $\Omega$  est l'ordonnée ;  $w(x, t)$  est déterminé par l'équation (3.33). Avec  $N_m = 1$  mode, les

**TABLE 3.2:** Valeurs de modes propres contraints (cas 2,  $\frac{\tilde{N}}{bh} = 10MPa$ ) et non contraints (cas 1) de la configuration 1.

Modes	cas 1	cas 2		
	$\omega_k$	$\omega_k$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1	22.3720	22.6833	4.703	4.823
2	61.673	62.095	7.844	7.9162
3	120.903	121.367	10.99	11.042
4	199.859	200.347	14.134	14.174



**FIGURE 3.2:** Réponse fréquentielle de la configuration 1 : comparaison entre les cas 1 et 2 avec :  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ , la force axiale  $\frac{\tilde{N}}{bh} = 10 MPa$ . Cas 1 (trait pointillé "-"), cas 2 (trait plein "-");  $N_m = 1$  (rouge),  $N_m = 2$  (bleu),  $N_m = 3$  (vert).

résultats des deux cas sont différents ; cette différence est plus faible avec  $N_m = 2$  modes. Les courbes sont quasiment convergentes avec  $N_m = 3$  modes. Pour un petit déplacement, la convergence entre deux cas est possible avec  $N_m = 1$  ou 2 modes. Ainsi, le calcul selon le cas 1 ou le cas 2 n'influence pas la réponse de la poutre. Pour les sections suivantes, le cas 1 est utilisé à cause de sa mise en œuvre plus facile. Pour le cas 2, il est nécessaire de recalculer les fréquences  $\omega_k$ , les modes propres et les termes dans l'équation matricielle avec chaque changement de la force axiale  $N$ .

La différence d'amplitude de vibration entre  $N_m = 1, 2$  et 3 modes est très petite. Ceci constate que les modes supérieurs influencent également sur la réponse, mais cette influence est faible par rapport à celle du mode fondamental. Les amplitudes de vibration des modes supérieurs sont petites, ainsi la position  $W_{max}$  coïncide quasiment au point où  $\phi_1(x)$  est maximal, le point au milieu de la micro/nano-poutre encastrée-encastrée.

### 3.4 Calcul de la réponse par méthode de la moyenne harmonique

Dans cette section, le calcul est effectué avec le mode fondamental. L'influence des modes supérieurs est négligée.  $\phi(x)$  est déterminé sans force axiale selon le cas 1. En utilisant la méthode de la moyenne harmonique,  $a_1(t)$  est cherché sous forme :

$$a_1 = A(t) \cos(\Omega t + \beta(t)), \quad (3.37)$$

$$\dot{a}_1 = -\Omega A(t) \sin(\Omega t + \beta(t)), \quad (3.38)$$

$$\ddot{a}_1 = -\Omega^2 A(t) \cos(\Omega t + \beta(t)). \quad (3.39)$$

La relation entre  $\Omega$  et  $\omega_1$  est donnée par :

$$\Omega = \omega_1 + \sigma\varepsilon. \quad (3.40)$$

Il y a trois cas correspondant au trois types de traitement de  $\frac{1}{(1-w)^2}$ .

#### 3.4.1 Cas 3 : calcul de la réponse avec multiplication par $(1-w)^2$

Ce cas a été étudié dans la référence [Kacem 10a]. Les deux équations de l'amplitude  $A$  et la phase  $\beta$  sont les suivantes, :

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{1}{2}\xi_0 A - \frac{1}{8}\xi_2 A^3 - \frac{1}{2}\frac{\kappa}{\omega_1} \sin\beta, \\ A\dot{\beta} = A\sigma\varepsilon - \frac{3}{8}\frac{\chi_3}{\omega_1} A^3 - \frac{5}{16}\frac{\chi_5}{\omega_1} A^5 + \frac{7}{10}\omega_1 A^3 + \frac{1}{2}\frac{\kappa}{\omega_1} \cos\beta, \end{cases} \quad (3.41)$$

où :  $\omega_1 = \sqrt{500.564 + 12.3N}$ ,  $\xi_0 = c_1$ ,  $\xi_2 = 1.85c_1$ ,  $\chi_3 = 927 + 28N + 151\alpha_1$ ,  $\chi_5 = 347\alpha_1$  et  $\kappa = \frac{16}{3\pi}\alpha_2 V_{dc} V_{ac}$ .

La condition des solutions en régime permanent  $\dot{A} = \dot{\beta} = 0$  conduit à :

$$\left(\frac{3\chi_3}{4\omega_1} A^2 + \frac{5\chi_5}{8\omega_1} A^4 - \frac{7\omega_1}{5} A^2 - 2\varepsilon\sigma\right)^2 + \left(\xi_0 + \frac{\xi_2}{4} A^2\right)^2 = \left(\frac{\kappa}{A\omega_1}\right)^2. \quad (3.42)$$

En remplaçant  $\varepsilon\sigma = \Omega - \omega_1$ , on obtient une équation algébrique du 5<sup>ème</sup> degré avec deux inconnues  $\Omega$  et  $A$  ;  $A$  est déterminé à partir de chaque valeur de  $\Omega$  correspondante.

#### 3.4.2 Cas 4 : calcul de la réponse avec une série de $\frac{1}{(1-w)^2}$

Le développement en série de Taylor de  $\frac{1}{(1-w)^2}$  est utilisé :

$$\frac{1}{(1-w)^2} = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + O(w^4). \quad (3.43)$$

La décomposition (3.33) du déplacement  $w(x,t)$  avec  $N_m = 1$  donne :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + c_1 \dot{a}_1 + (500.564 + 12.3N - 2\alpha_2 V_{dc}^2 - 4\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \cos \Omega t - \alpha_2 V_{ac}^2 - \\ \alpha_2 V_{ac}^2 \cos 2\Omega t) a_1 - (2\alpha_2 V_{ac}^2 + 2\alpha_2 V_{ac}^2 \cos 2\Omega t + 4\alpha_2 V_{dc}^2 + 8\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \cos \Omega t) a_1^2 + \\ (151.35\alpha_1 - 7.408\alpha_2 V_{dc}^2 - 14.81\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \cos \Omega t - 3.704\alpha_2 V_{ac}^2 - 3.704\alpha_2 V_{ac}^2 \cos 2\Omega t) a_1^3 \\ + 0.83\alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En utilisant la méthode de la moyenne harmonique, les équations de l'amplitude et de la phase sont les suivantes :

$$\Omega \dot{A} = -\frac{1}{2} c_1 \omega_1 A + \alpha_2 V_{dc} V_{ac} A^2 \sin \beta + 0.83\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \sin \beta, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Omega A \dot{\beta} = (56.76\alpha_1 - 2.78\alpha_2 V_{dc}^2 - 0.46\alpha_2 V_{ac}^2) A^3 + 3\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \cos \beta A^2 + \\ (0.25\alpha_2 V_{ac}^2 - \omega_1 \varepsilon \sigma) A + 0.83\alpha_2 V_{dc} V_{ac} \cos \beta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

où  $\omega_1$  est déterminée par :

$$\omega_1 = \sqrt{500.564 + 12.3N - 2\alpha_2 V_{dc}^2 - \alpha_2 V_{ac}^2} \quad (3.47)$$

La condition  $\dot{A} = \dot{\beta} = 0$  donne l'équation de  $A$  sous forme :

$$\begin{aligned} \left( \frac{(56.76\alpha_1 - 2.78\alpha_2 V_{dc}^2 - 0.46\alpha_2 V_{ac}^2) A^3 + (0.25\alpha_2 V_{ac}^2 - \omega_1 \varepsilon \sigma) A}{(3A^2 + 0.83)} \right)^2 \\ + \left( \frac{0.5c_1 \omega_1 A}{(A^2 + 0.83)} \right)^2 = (\alpha_2 V_{dc} V_{ac})^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Si on pose  $X = A^2$ , l'équation (3.48) devient également une équation du 5<sup>ème</sup> degré.

#### 3.4.3 Cas 5 : calcul de la réponse du cas particulier $\frac{1}{(1-w)^2} \approx 1$

L'équation du mouvement (3.11) devient :

$$\ddot{a}_1 + c_1 \dot{a}_1 + (500.564 + 12.3N) a_1 + 151.35\alpha_1 a_1^3 + 0.83\alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2. \quad (3.49)$$

L'équation de l'amplitude  $A$  s'écrit :

$$\left( \frac{1}{2} c_1 \omega_1 A \right)^2 + \left( \left[ \frac{1}{2} \alpha_2 V_{ac}^2 + \alpha_2 V_{dc}^2 - \varepsilon \sigma \omega_1 \right] A + 56.76\alpha_1 A^3 \right)^2 = (0.83\alpha_2 V_{dc} V_{ac})^2. \quad (3.50)$$

où  $\omega_1 = \sqrt{500.564 + 12.3N}$ . En posant  $X = A^2$ , l'équation (3.50) devient une équation du troisième degré.

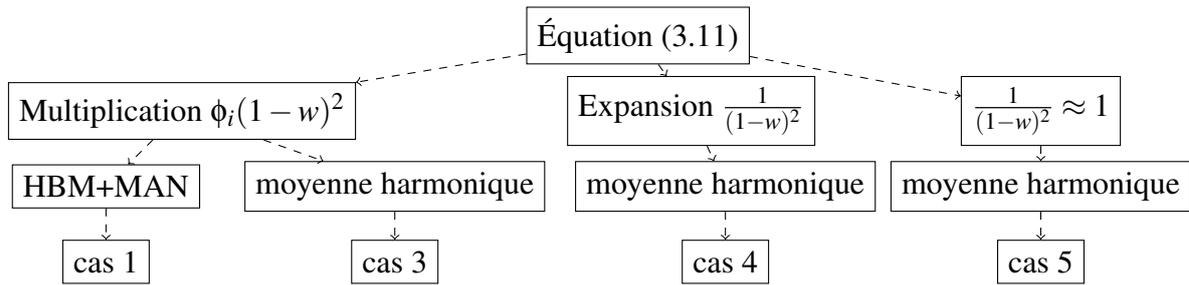


FIGURE 3.3: Distinction des cas de calcul

### 3.5 Confrontation des méthodes

L'objectif est de vérifier la validité des méthodes analytiques et numériques ainsi que de l'utilisation des approximations. La figure 3.3 définit les cas de calcul.

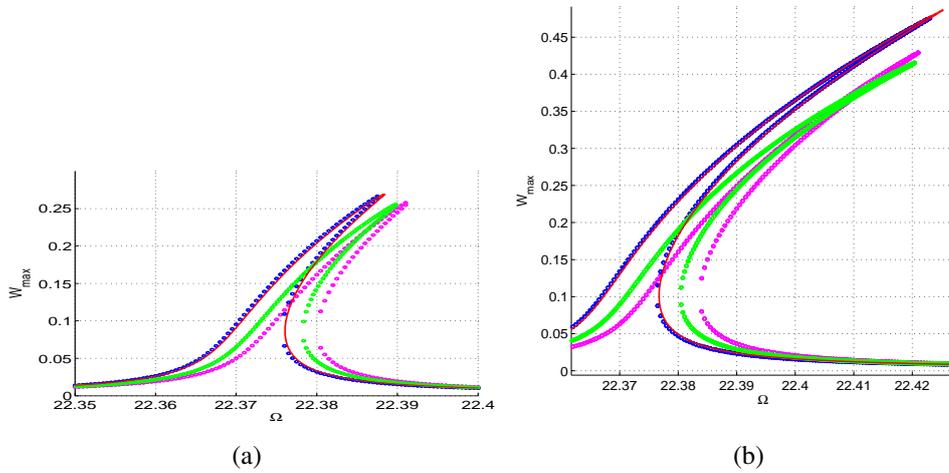
Les figures 3.4 et 3.5 montrent les résultats des cas 1 (rouge), cas 3 (vert), cas 4 (bleu), cas 5 (rose) avec  $N = 0$  (le cas 2 n'est pas représenté, comme  $N = 0$  le cas 1 et le cas 2 sont les mêmes).

Pour le cas 1, l'influence de la force électrostatique est calculée complètement en multipliant par  $(1-w)^2$  et la réponse est déterminée par HBM+MAN : c'est le cas de référence, les autres cas sont comparés avec le cas 1. La figure 3.4-a représente la réponse avec  $V_{dc} = V_{ac} = 7V$ . Dans ce cas le déplacement de la poutre est petit, la différence d'amplitude entre les cas est alors très petite ; il n'y a qu'un petit décalage des courbes. Malgré que dans ce cas  $W_{max} = 0.25$ , l'approximation de  $\frac{1}{(1-w)^2} = 1$  est donc inexacte.

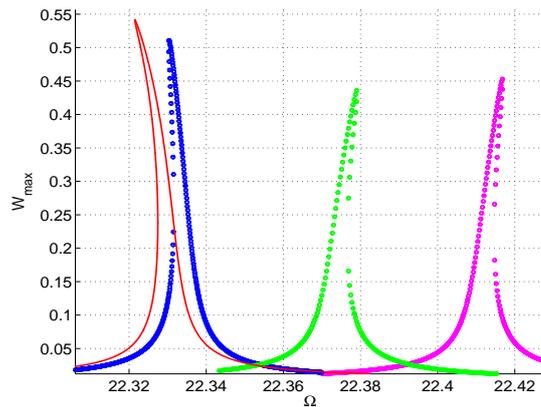
Sur la figure 3.4-b,  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ , le déplacement est plus grand. La différence entre les cas 3, 4, 5 et le cas 1 devient plus grande parce que les cas 3, 4, 5 sont calculés par une méthode de perturbation (méthode de la moyenne harmonique). De plus, la précision du développement en série de Taylor diminue avec un grand déplacement. La validité des cas 3, 4, 5 est différente. Parmi eux, le cas 4 a le meilleur accord avec le cas de référence 1. Les amplitudes des cas 3, 5 sont plus petites que celle du cas 4 bien que dans le cas 3, la force électrostatique soit calculée complètement (en multipliant par  $(1-w)^2$ ). Ceci s'avère que la multiplication de la force électrostatique combinée à la méthode de la moyenne harmonique ne représente pas un résultat meilleur que l'approximation de cette force combinée à la méthode de la moyenne harmonique.

La figure 3.5 présente la réponse de la configuration 2 avec  $N = 0$  et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . Pour cette figuration, encore une fois, le cas 4 représente un résultat meilleur que les autres méthodes analytiques (cas 3 et cas 5). Malgré une petite différence entre le cas 4 (courbe bleu) et le cas 1 (courbe rouge), le comportement assouplissant est bien représenté par les 2 cas, tandis que les cas 3 et 5 présentent un comportement raidissant avec les amplitudes plus petites que le cas 1. Avec un grand déplacement  $W_{max}$ , l'approximation de Taylor au troisième degré n'est pas précise, ce qui induit une différence d'amplitude entre les cas 1 et 4.

En conclusion, l'utilisation du cas 5 est encore valide pour les petites vibrations. Ce cas donne une méthode de calcul plus simple avec moins de termes non linéaires. Pour



**FIGURE 3.4:** Réponse fréquentielle de la configuration 1 : comparaison des cas de calcul avec  $N = 0$ . (a) :  $V_{dc} = 10V_{ac} = 7V$ , (b) :  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ . Cas 1 (rouge), cas 3 (vert), cas 4 (bleu), cas 5 (rose)



**FIGURE 3.5:** Réponse fréquentielle de la configuration 2 : comparaison des cas avec  $N = 0$  et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . Cas 1 (rouge), cas 3 (vert), cas 4 (bleu), cas 5 (rose)

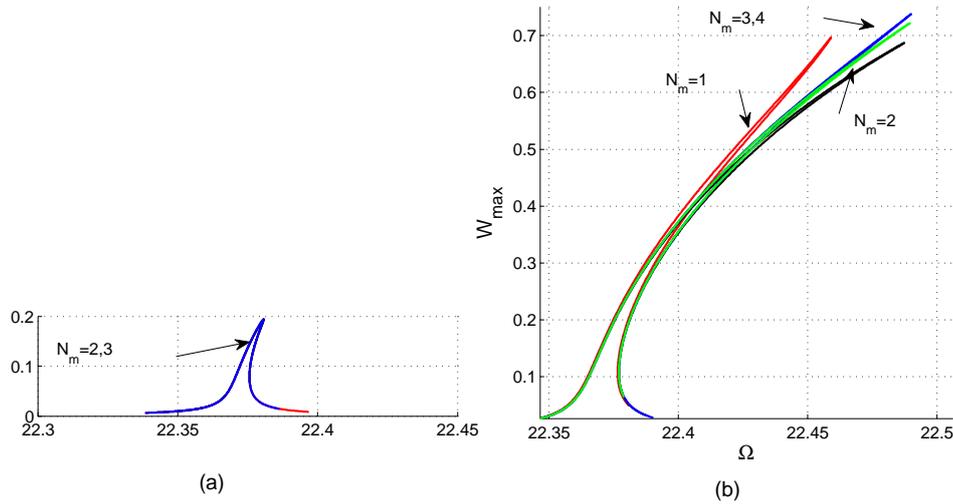
les grands déplacements, les cas 1 et 4 sont à préférer. Néanmoins la précision du cas 4 diminue selon l'augmentation d'amplitude de vibration.

## 3.6 Analyse paramétrique

### 3.6.1 Influence des modes supérieurs

La réponse de la poutre déterminée selon le cas 1 montre que l'influence des modes supérieurs est différente selon l'amplitude de vibration. Sur la figure 3.6-a, avec une petite

amplitude, le calcul avec un mode est déjà convergent. Pour une amplitude plus grande (voir figure 3.6-b), l'influence des modes supérieurs est plus importante ; le calcul avec 1 ou 2 modes ne change pas le comportement de la poutre mais il ne représente pas une réponse précise ; la réponse est convergente à partir de  $N_m \geq 3$  modes de calcul.



**FIGURE 3.6:** Réponse de la configuration 1 avec  $N = 0$  : influence des modes supérieurs. (a) :  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9.127V$  ; (b) :  $V_{dc} = 10V_{ac} = 6V$ .

Sur la figure 3.7, avec  $V_{dc} = V_{ac} = 9.914V$  et  $N_m = 1$  ou 2 modes, l'amplitude de vibration  $W_{max}$  vaut 0.7. Mais avec  $N_m = 3$  modes, la réponse a changé fortement,  $W_{max} \geq 1$ , le modèle dépassant alors ses limites de validité. Le calcul convergé avec  $N_m = 5$  modes a montré que l'amplitude  $W_{max}$  ne dépasse pas la limite du collage et que  $W_{max} \approx 0.7$ .

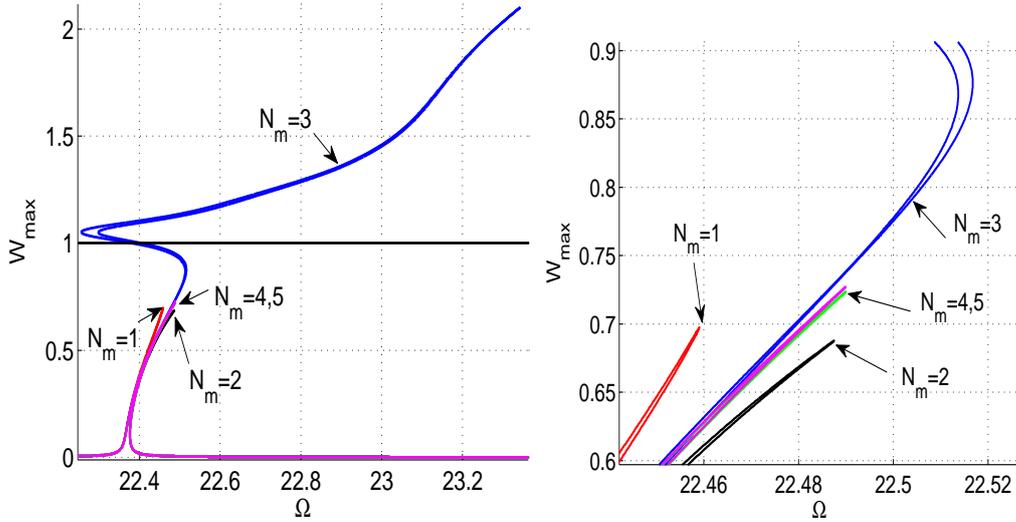
Un autre cas est présenté sur la figure 3.8 : les tensions  $V_{dc} = V_{ac} = 10V$  sont grandes. Avec  $N_m = 1$ , le résultat montre l'amplitude  $W_{max} \approx 0.7$  ; mais avec plus de deux modes, il présente une amplitude  $W_{max}$  la aussi plus grande que 1 et rend le modèle invalide. La réponse n'a pas encore convergé avec  $N_m = 5$  modes de calcul ; le calcul avec  $N_m > 6$  modes est limité en raison des moyens de calcul disponibles.

En résumé, avec ces deux exemples, bien que l'amplitude de vibration des modes supérieurs soit très petite par rapport à celle du premier mode, la réponse de la micro/nano-poutre peut changer beaucoup selon le nombre de modes de calcul. Ceci peut s'expliquer par le fait que la vibration de la poutre est dans la limite du pull-in dynamique ; un petit changement peut causer un saut d'amplitude et alors la réponse change fortement [Nayfeh 07a]. Pour la configuration 1, lorsque  $W_{max} \approx 0.7$ , avec un petit changement de la tension, l'amplitude dépasse la limite du collage.

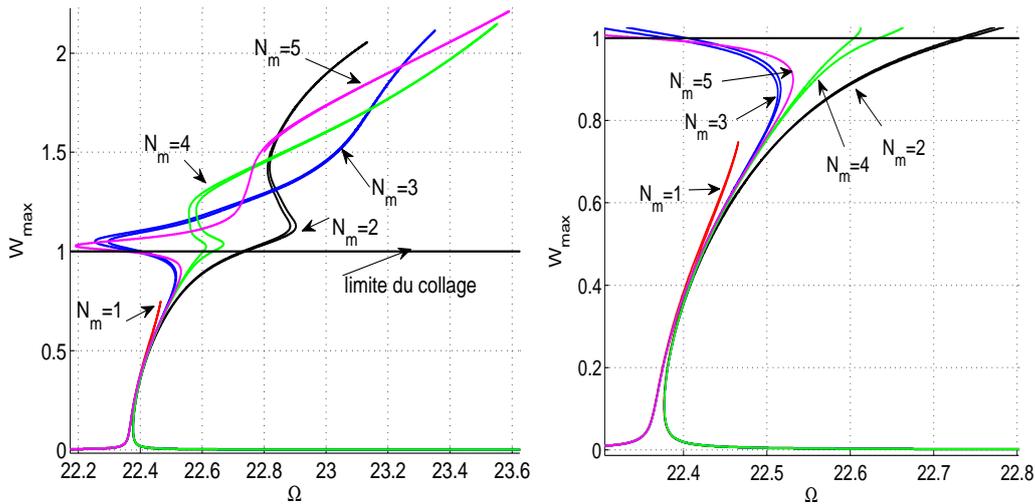
### 3.6.2 Influence des paramètres

De l'équation (3.11), le comportement d'une micro/nano-poutre encastree-encastree dépend du ratio géométrique jeu/hauteur, de la force axiale adimensionnée  $N$  et du ratio

### 3. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée



**FIGURE 3.7:** Réponse de la configuration 1 : influence des modes supérieurs avec  $N = 0$ ,  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9.914V$ .



**FIGURE 3.8:** Réponse de la configuration 1 : influence des modes supérieurs avec  $N = 0$ ,  $V_{dc} = 10V_{ac} = 10V$ .

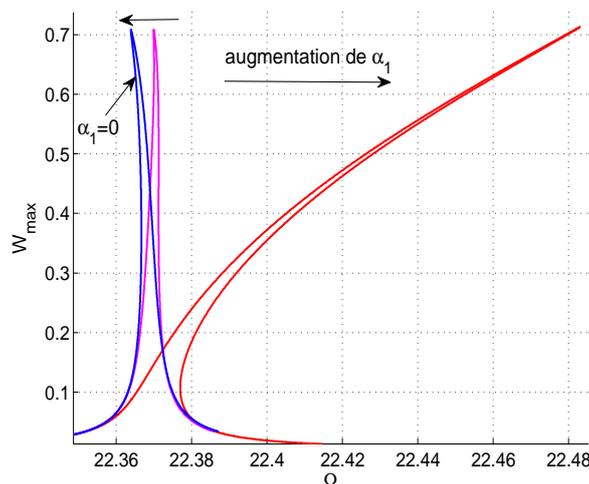
de tension  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$ . D'abord,  $N$  est exprimé suivant :

$$N = \frac{\tilde{N}l^2}{EI} = \frac{\sigma bhl^2}{EI} = 12 \frac{\sigma}{E} \left( \frac{l^2}{h^2} \right) \quad (3.51)$$

où  $\sigma$  est la contrainte résiduelle dans la poutre.

Ainsi le comportement de la poutre dépend des paramètres  $\alpha_1 = 6 \left( \frac{g}{h} \right)^2$ ,  $\sigma$ ,  $\frac{l}{h}$ ,  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$ . Pour évaluer l'influence de  $\alpha_1$ , on considère la configuration 1.  $\alpha_1$  varie tandis que  $N$  et le ratio de tension  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  sont fixés, voir figure 3.9.  $\alpha_1$  diminue, c'est-à-dire que la poutre est

plus proche de l'électrode, la force électrostatique augmente, induisant un comportement assouplissant et vice versa. Ainsi, le comportement de la poutre a tendance assouplissante (raidissante) avec une diminution (augmentation) de  $\alpha_1$ .



**FIGURE 3.9:** Réponse de la configuration 1 : influence de  $\alpha_1$  avec  $N = 0$  et  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}} = 10$ .

La figure 3.10 montre l'influence d'autres paramètres. D'abord  $N$  augmente (correspondant l'augmentation de  $\sigma$  ou  $\frac{l}{h}$ ) et les autres paramètres sont fixés, le comportement assouplissant devient assouplissant (le changement de la courbe rouge à la courbe bleue). Ensuite,  $N$  est fixé ( $\sigma$  et  $\frac{l}{h}$  fixes) et le ratio  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  augmente de  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}} = 10$  à  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}} = 200$ , le comportement assouplissant devient fortement assouplissant (de la courbe bleue à la courbe verte).

En résumé, l'augmentation de  $\sigma$ ,  $\frac{l}{h}$ ,  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  et la diminution de  $\alpha_1$  produisent un comportement assouplissant et vice versa. Combiner les valeurs raisonnables de ces paramètres contrôle le comportement dynamique de la micro/nano-poutre.

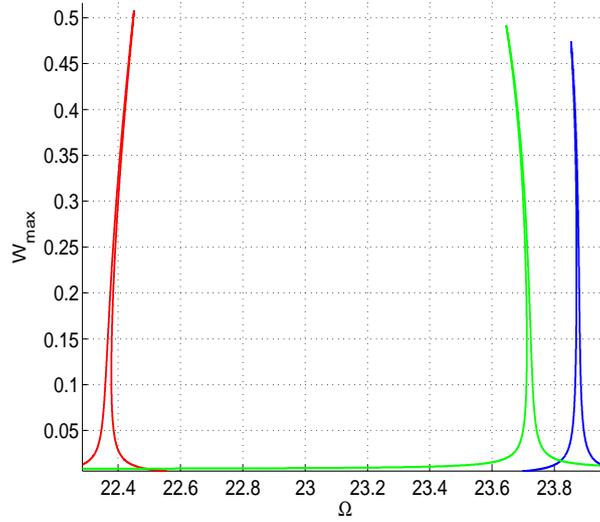
## 3.7 Micro/nano-poutre avec masse ajoutée

La figure 3.11 schématise le modèle d'une micro-poutre encastree-encastree avec une petite masse ajoutée. Par hypothèse, la dimension de la masse ajoutée est très petite et de plus la micro/nano-poutre et la masse constituent un continuum.

### 3.7.1 Équation du mouvement

La modélisation du cas de la micro/nano-poutre sans masse ajoutée est reprise, l'équation du mouvement  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})$  avec une masse ajoutée sur un volume infinitésimal de lon-

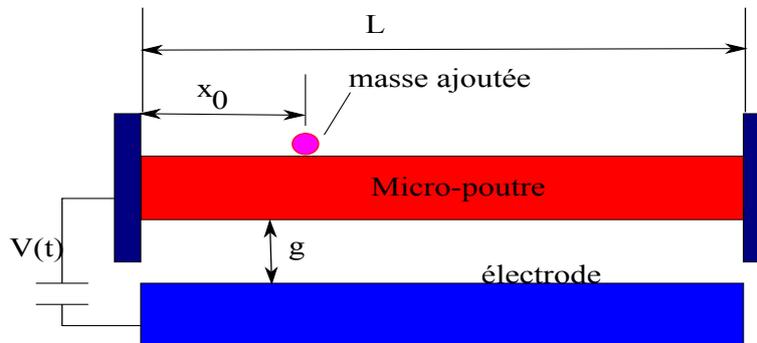
### 3. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée



**FIGURE 3.10:** Réponse de la configuration 3 : influence des paramètres.  $V_{dc} = 10V_{ac} = 1.8V$  et  $\sigma = 0$  (rouge);  $V_{dc} = 10V_{ac} = 1.8V$  et  $\sigma = 50MPa$  (bleu);  $V_{dc} = 200V_{ac} = 8V$  et  $\sigma = 50MPa$  (vert).

gueur  $d\tilde{x}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho b h \frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} dx + \delta_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) m_p \frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} + EI \frac{\partial^4 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^4} dx - \left( \tilde{N} + \frac{E b h}{2l} \int_0^l \left[ \frac{\partial \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} \right]^2 dx \right) \\ \times \frac{\partial^2 \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} dx + \tilde{c} \frac{\partial \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{b C_n [V_{dc} + V_{ac} \cos(\tilde{\Omega} \tilde{t})]^2}{(g - \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}))^2} dx \end{aligned} \quad (3.52)$$



**FIGURE 3.11:** Modèle d'une micro/nano-poutre encastrée-encastrée avec une masse ajoutée.

En ajoutant les paramètres adimensionnés (3.10), l'équation (3.52) a la forme suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + \delta_{x_0}(x) m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} dx - \left( N + \alpha_1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx = \alpha_2 \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega t)]^2}{(1-w)^2} dx, \quad (3.53)$$

avec :

- $x_0$ , la position de la masse ajoutée sur la poutre.
- $\delta_{x_0}(x)$  la distribution de Dirac,  $\delta = 1$  avec  $x = x_0$  et  $\delta = 0$  avec  $x \neq x_0$ .
- $m$  le ratio de la masse ajoutée sur la masse de la poutre,  $m = \frac{m_p}{\rho b h l}$ .

En utilisant la procédure de Galerkin, l'équation (3.53) est multipliée par  $\phi_i(x)(1-w)^2$  et intégrée de  $x = 0$  à  $x = 1$ . On obtient une équation sous la forme d'une équation matricielle :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a}) + \mu_0 + \mu_1(\mathbf{a}) + \mu_2(\mathbf{a})] \ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a})] \dot{\mathbf{a}} + \\ & [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a})] \mathbf{a} - [N + \alpha_1 T_2(\mathbf{a})] [\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{a})] \mathbf{a} \\ & = \alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega t))^2 \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les matrices  $\mathbf{M}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$ ,  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_{Ti}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $T_2$  sont représentées comme dans la section concernant la poutre sans masse ajoutée. Les nouvelles matrices  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  sont déterminées à partir de leurs composantes  $1 \leq i, j, k, l \leq N_m$  selon :

$$\mu_{0ij} = m \phi_i(x_0) \phi_j(x_0), \quad (3.55)$$

$$\mu_{1ij} = -2m \sum_{k=1}^{N_m} \left( \phi_i(x_0) \phi_j(x_0) \phi_k(x_0) \right) a_k(t), \quad (3.56)$$

$$\mu_{2ij} = m \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \phi_i(x_0) \phi_j(x_0) \phi_k(x_0) \phi_l(x_0) \right) a_k(t) a_l(t). \quad (3.57)$$

À cause de l'exigence de précision, la méthode HBM+MAN est utilisé pour déterminer tout changement de la courbe de réponse avec masse ajoutée.

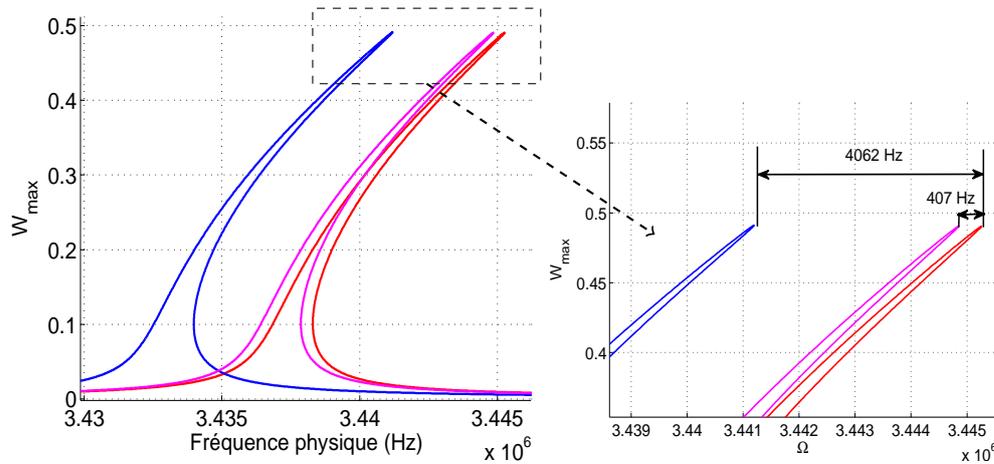
Par hypothèse, la masse est ajoutée à  $x_0 = 0.5$  pour les sections suivantes ; le ratio de masse  $m = \frac{m_p}{\rho b h l}$  est utilisé pour remplacer la masse physique  $m_p$ .

### 3.7.2 Décalage en fréquence

Le décalage en fréquence dû à la masse ajoutée à la résonance du  $i^{\text{ème}}$  mode est le suivant, voir l'annexe B :

$$\Delta_{fi} = \frac{\omega_{i0} - \omega_i}{\omega_{i0}} = \frac{1}{2} m \phi_i^2(x_0), \quad (3.58)$$

où  $\omega_{i0}$  et  $\omega_i$  sont respectivement les fréquences de résonance des cas sans et avec masse ajoutée.



**FIGURE 3.12:** Réponse de la configuration 1 avec masse ajoutée à  $x_0 = 0.5$ ,  $N = 0$  et  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$  : sans masse ajoutée (rouge),  $m = 10^{-4}$  (rose),  $m = 10^{-3}$  (bleu).

Le décalage en fréquence dépend du carré du mode. Cependant, avec une section constante, la valeur maximale de  $\phi_1(x)$  égale à 1.588. Le décalage  $\Delta f_i$  dépend également du ratio  $m$ , ainsi la réduction des dimensions de la poutre est nécessaire pour améliorer la sensibilité de la poutre.

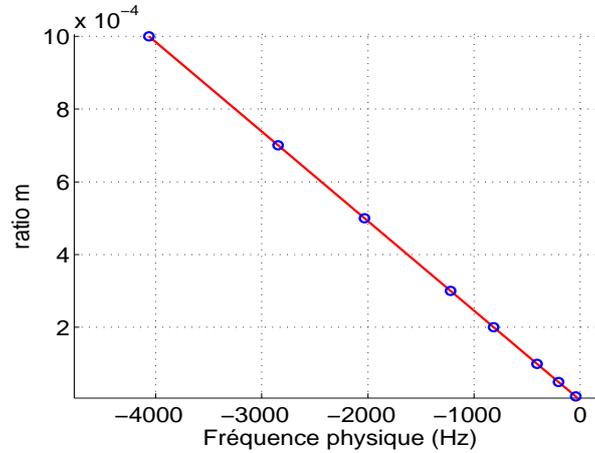
Le décalage en fréquence dû à la masse ajoutée est représenté sur la figure 3.12. Avec une masse ajoutée, la courbe de réponse (courbe bleue ou rose) se décale à gauche de la courbe sans masse ajoutée (courbe rouge). Avec des masses ajoutées différentes, ce décalage est différent,  $\Delta f = 407Hz$  pour la masse ajoutée  $m = 10^{-4}$ , et  $\Delta f = 4062Hz$  pour la masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ . Ainsi pour de grandes masses, il est possible de les quantifier par le décalage fréquentiel.

La relation entre la masse ajoutée et le décalage en fréquence est montrée sur la figure 3.13. Cette relation est linéaire, ceci est en bon accord avec l'équation analytique (3.58). Ainsi plus la masse ajoutée est petite, plus le décalage de fréquence est petit, ce qui limite la précision de détection par décalage en fréquence.

Ce constat motive l'analyse d'autres types de changements tels que l'amplitude  $W_{max}$  à une fréquence fixe, le bassin d'attraction,... afin d'atteindre une meilleure méthode de détection.

#### 3.7.3 Changement d'amplitude

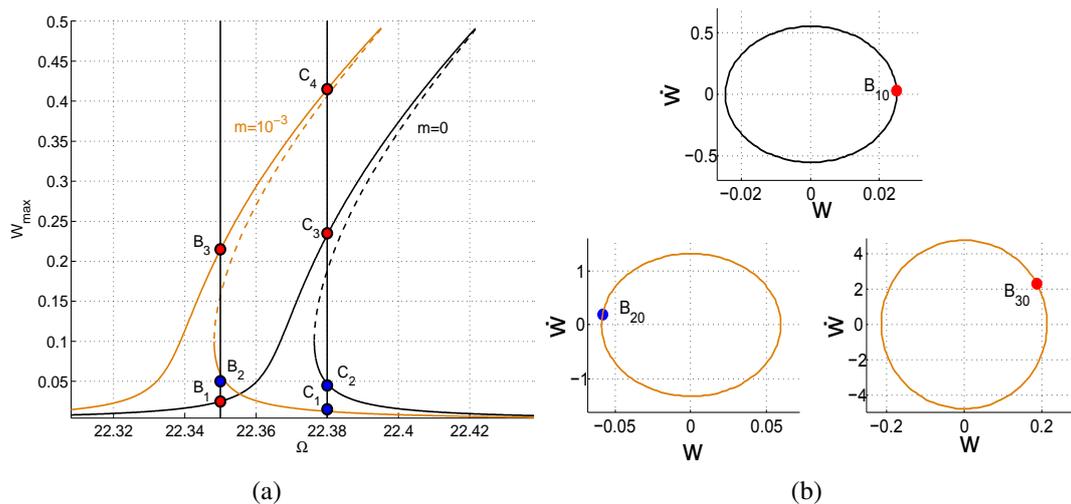
On s'intéresse à la courbe de réponse d'un comportement non linéaire raidissant (ou bien assouplissant). La courbe de réponse possède des branches stables et instables, voir figure 3.14. Le point stable ou bien point attractif correspond au point dans l'espace de déplacement et de vitesse où le système converge à ce point selon le temps. Pour chaque point stable, l'ensemble des points initiaux convergeant asymptotiquement vers ce point forme le bassin d'attraction de ce point. Ces bassins sont séparés par des courbes de



**FIGURE 3.13:** Décalage en fréquence dû à la masse ajoutée à  $x_0 = 0.5$  de la configuration 1 avec  $N = 0$  et  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ .

transition ; ces courbes passent aux points instables. Pour les positions de  $\Omega$  où existe deux points stables, l'étude du bassin d'attraction est nécessaire pour connaître le point d'arrivée de la réponse.

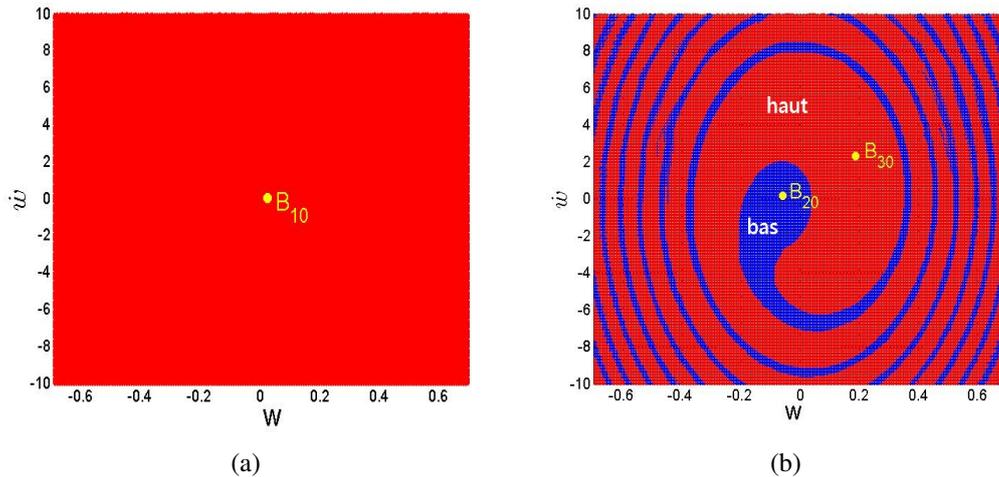
Kozinsky et al. ont étudié l'évolution des bassins d'attraction quand on change des paramètres géométriques ou des paramètres de tension, et montré avec un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux [Kozinsky 07]. La séparation des bassins d'attraction, la région relative des bassins et le changement des points stables entre deux cas, avec et sans masse ajoutée sont observés.



**FIGURE 3.14:** Configuration 1 avec  $N = 0$  et  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) : Réponse fréquentielle avec  $m = 0$  (rouge),  $m = 10^{-3}$  (bleu). (b) : Portrait de phase des solutions périodiques correspondant aux points  $B_1, B_2, B_3$ .

### 3. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée

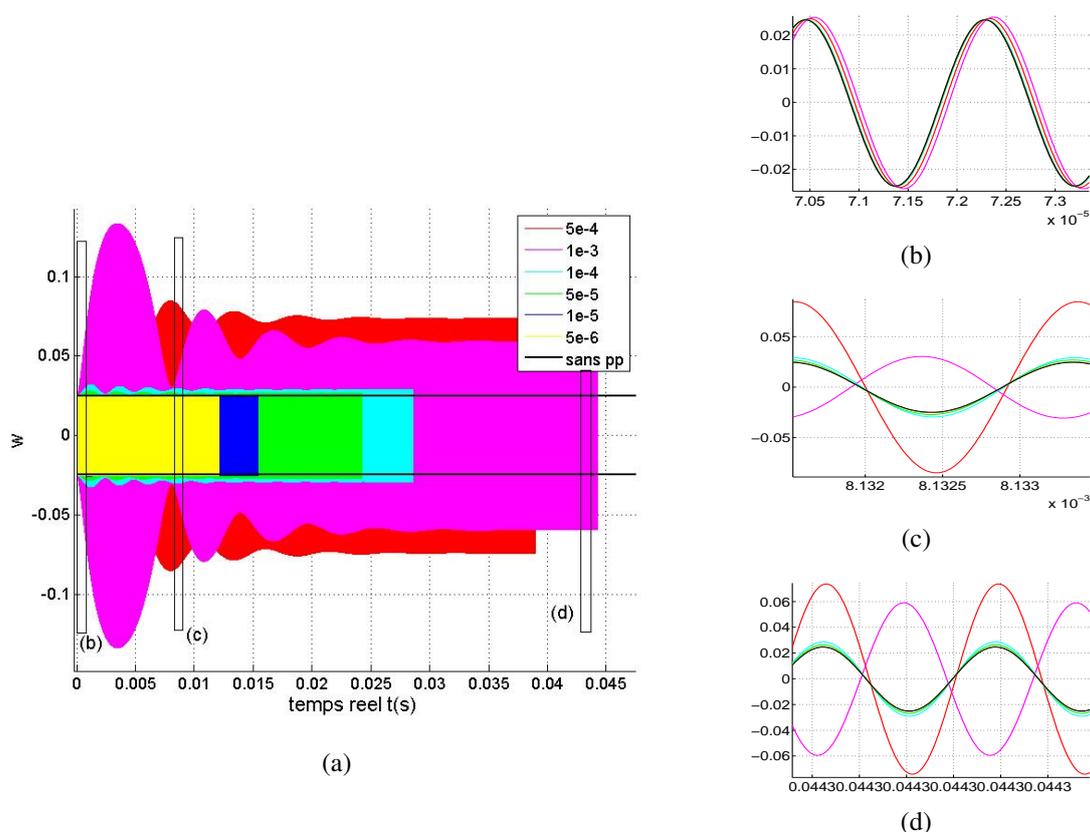
La figure 3.14 présente le changement de réponse de la configuration 1 avec masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  à  $x_0 = 0.5$ . On considère le changement à deux valeurs  $\Omega = 22.35$  correspondant à 3 points stables  $B_1, B_2, B_3$  et  $\Omega = 22.38$ , 4 points stables  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Chaque point correspondant à une solution périodique, les trois solutions périodiques de  $B_1, B_2, B_3$  sont montrées sur la figure 3.14-b.



**FIGURE 3.15:** Bassin d'attraction de la configuration 1 à  $\Omega = 22.35$  avec  $N = 0$ ,  $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) : sans masse ajoutée, (b) :  $m = 10^{-3}$ .

À  $\Omega = 22.35$ , selon la condition initiale, la réponse avec masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  peut être le point  $B_2$  ou  $B_3$ . Pour déterminer le point d'arrivée, on étudie le bassin d'attraction à  $\Omega = 22.35$ . La figure 3.15-a montre le bassin d'attraction du cas sans masse ajoutée, un seul point stable correspondant à une seule région rouge,  $B_{10}$  est le point convergent dans l'espace et il coïncide avec le point  $B_{10}$  sur la figure 3.14-b. Avec la masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ , il y a deux régions distinctes sur la figure 3.15-b. La région rouge correspond au point stable  $B_3$ , la région bleu au point stable  $B_2$ . Autrement dit, au moment de l'arrivée de la masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ , si la condition initiale est située dans la région bleu, le point d'arrivée est en  $B_2$ ; si elle est dans la région rouge, la solution obtenue est en  $B_3$ . Ainsi, pour les points dans la région rouge de la figure 3.15-b, sans masse ajoutée l'amplitude maximale à  $\Omega = 22.35$  est  $w = W_{B_1} = 0.025$  et avec masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  l'amplitude maximale à  $\Omega = 22.35$   $w = W_{B_3} = 0.220$ . Cette différence de  $W_{max}$  est grande pour distinguer les cas sans et avec masse ajoutée.

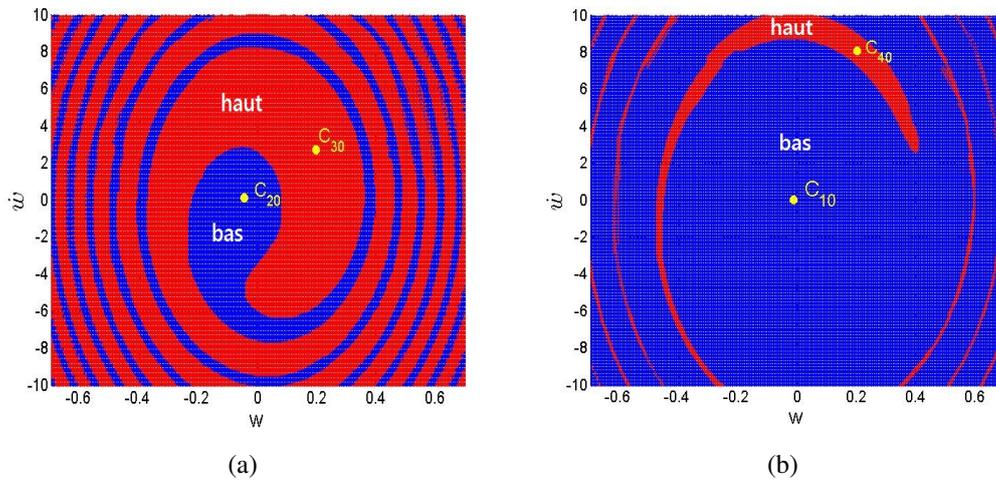
La figure 3.16 représente les réponses au régime transitoire de la transition de l'état stable du cas sans masse ajoutée à l'état stable du cas avec masse ajoutée. L'axe horizontal présente le temps réel. Avant l'arrivée de la masse ajoutée, la poutre vibre de façon stable au point  $B_1$ , correspondant à la condition initiale  $B_{10}$ . Deux lignes noires constituent l'enveloppe de la réponse stable du cas sans masse ajoutée. Parce que le point  $B_{10}$  est situé dans la région bleu du cas avec  $m = 10^{-3}$  (figure 3.15-b); ainsi après l'arrivée de la masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ , la réponse se stabilise au point en bas  $B_{20}$ . Ceci est



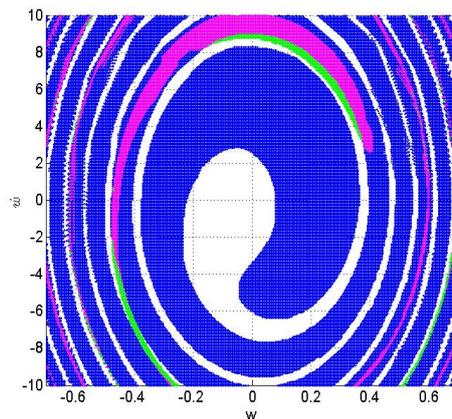
**FIGURE 3.16:** Réponses transitoires de  $w(t)$  en fonction du temps réel  $t$  avec des masses ajoutées différentes au milieu de la poutre,  $\Omega = 22.35$ , les deux lignes noires constituent l'enveloppe de la réponse stable du cas sans masse ajoutée (a). Réponses de  $w(t)$  à  $t \approx 7,1 \times 10^{-5} s$  (b) ; à  $t \approx 8.13 \times 10^{-3} s$  (c) et à  $t \approx 0.04 s$  (d).

représenté par la couleur rose sur la figure 3.16 et  $W = 0.06$ . La figure 3.16-d montre le déphasage des courbes de réponses en régime stable, pour la masse  $m = 10^{-3}$ , le déphasage est supérieur à  $\pi$  ; pour les masses plus petites, le déphasage est également petit. Car avec  $m = 10^{-3}$ , le point stabilisé se trouve dans la branche stable en bas ; tandis qu'avec des masses ajoutées plus petites, le point se stabilise dans la branche stable en haut. À cette valeur de  $\Omega$ , la différence d'amplitude entre les cas avec et sans masse ajoutée est petite, ainsi il est difficile de détecter la masse ajoutée.

Ensuite, la réponse à  $\Omega = 22.38$  est considérée. Les bassins d'attraction de deux cas sont montrés sur la figure 3.17. Chaque cas a 2 points stables ; la région d'attraction correspondant à l'amplitude  $W_{max}$  réduit selon l'augmentation d'amplitude  $W_{max}$ . Il y a plusieurs possibilités de réponse avec masse ajoutée ; la réponse peut changer de  $C_2$  à  $C_1$ ,  $C_4$  ou de  $C_3$  à  $C_4, C_1$ . Ces possibilités sont montrées sur la figure 3.18. De  $C_2$  à  $C_1$ , la différence d'amplitude est petite, donc moins intéressante, elle n'est pas représentée. La figure 3.18 s'explique ainsi : pour les mêmes conditions aux limites se trouvant dans la région bleue, la solution tend vers  $C_3$  correspondant au cas sans masse ajoutée et vers  $C_1$  pour le



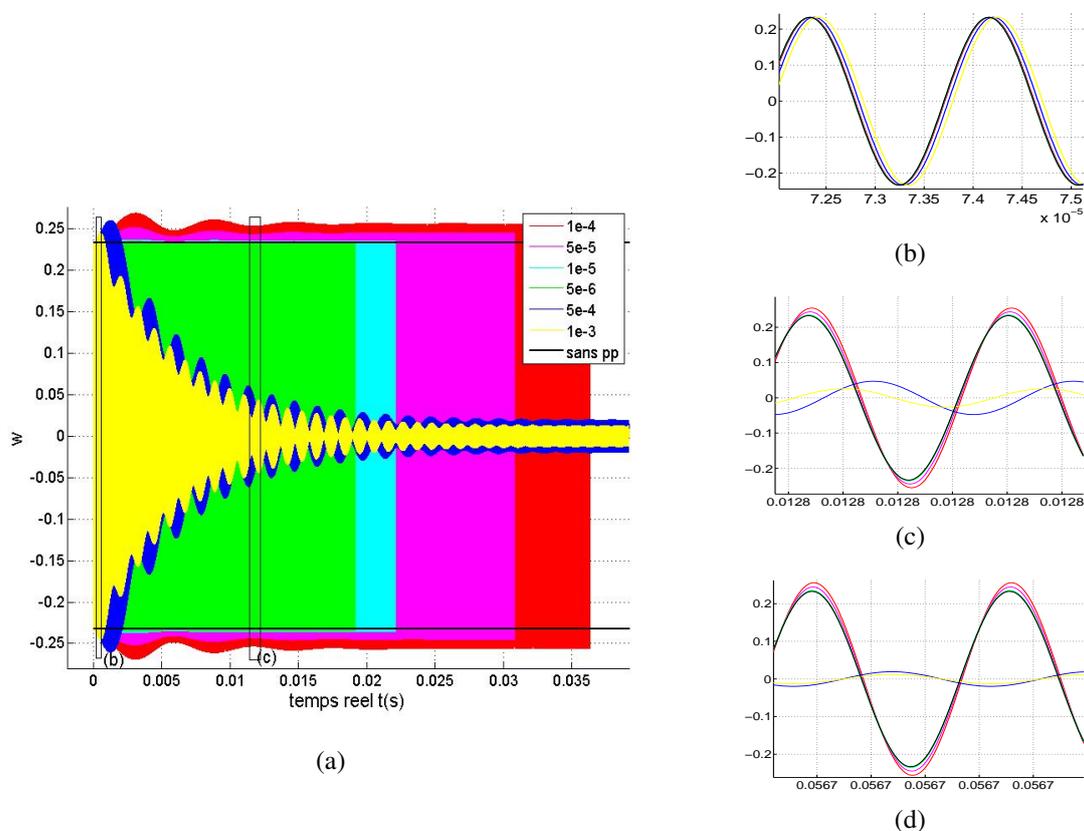
**FIGURE 3.17:** Bassin d'attraction de la configuration 1 à  $\Omega = 22.38$  avec  $N = 0$ ,  $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . (a) :  $m = 0$ , (b) :  $m = 10^{-3}$ .



**FIGURE 3.18:** Différence du bassin d'attraction entre les cas sans et avec masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  de la configuration 1 à  $\Omega = 22.38$  avec  $N = 0$ ,  $V_{Dc} = 10V_{ac} = 9V$ . Le changement de  $C_3$  à  $C_1$  (bleu), de  $C_3$  à  $C_4$  (rose),  $C_2$  à  $C_4$  (vert).

cas avec  $m = 10^{-3}$  ; pour la région rose, la solution se stabilise en  $C_3$  sans masse ajoutée et en  $C_4$  avec  $m = 10^{-3}$  ; pour la région verte, la solution va en  $C_2$  (sans masse ajoutée) et en  $C_4$  (avec  $m = 10^{-3}$ ). On montre un exemple de ce changement sur la figure 3.19 ; sans masse ajoutée, la poutre vibre (état stable) au point  $C_3$  ; deux lignes noires montrent l'enveloppe (valeur maximum de  $w$ ) de ce cas,  $W_{max} = 0.23$ . Avec la masse  $m = 10^{-3}$  ou  $m = 5 \times 10^{-4}$ , la réponse diminue,  $w = 0.015$  correspondant au point  $C_1$ . Pour les valeurs de masses plus petites, la réponse ne change pas beaucoup. Comme dans le cas  $\Omega = 22.35$ , pour les grandes masses, le déphasage entre les cas avec et sans masse ajoutée est supérieur à  $\pi$  à cause des points stables se trouvant sur des branches différentes (voir

figure 3.19-d).



**FIGURE 3.19:** Réponses transitoires de  $w(t)$  en fonction du temps réel  $t$  avec des masses ajoutées différentes au milieu de la poutre, à  $\Omega = 22.38$ ; les deux lignes noires sont l'enveloppe de la réponse stable du cas sans masse ajoutée (a). Réponses de  $w(t)$  à  $t = 7,3 \times 10^{-4}s$  (b); à  $t = 0.0128s$  (c) et à  $t = 0.0567s$  (d).

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre a considéré en premier lieu la dynamique non linéaire d'une micro/nano-poutre encastée-encastée. Des méthodes analytiques sont comparées avec des méthodes numériques. En utilisant la méthode de la moyenne harmonique (MMH), il est montré que le calcul de la réponse est plus précis avec le traitement de la force électrostatique par décomposition que par multiplication; cette dernière n'étant compatible qu'avec de petites déflexions et ne représentant souvent qu'un comportement raidissant.

Par la suite, l'analyse du rôle des modes supérieurs a montré que pour les petites amplitudes, leur influence est petite; une masse ajoutée ne conduit qu'à un petit décalage de fréquence. Cependant pour une amplitude proche de la limite du pull-in, les modes supérieurs sont significatifs: ils peuvent faire évoluer le comportement calculé de raidissant à mixte,... bien que l'amplitude de vibration des modes supérieurs soit petite. Puis,

### 3. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-encastrée

---

l'influence des paramètres a été étudiée. La poutre a tendance à avoir un comportement assouplissant avec l'augmentation de  $\sigma$ ,  $\frac{l}{h}$ ,  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  ou la diminution de  $\alpha_1$  et vice versa, ce qui aide à choisir une configuration raisonnable pour avoir un comportement assouplissant ou raidissant.

Enfin, pour le cas avec masse ajoutée, la courbe de réponse est décalée à gauche par rapport au cas sans masse ajoutée et la différence d'amplitude entre deux cas très faible. L'étude du bassin d'attraction a montré que théoriquement maîtriser la condition initiale (ce qui demeure difficile) rend aisée la détection de masse grâce aux grands sauts en amplitude.

# Chapitre 4

## Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-libre

*Ce quatrième chapitre est consacré à l'étude d'un résonateur de type poutre encastrée-libre sans et avec masse ajoutée. L'organisation de ce chapitre est similaire à celle du chapitre précédent. Cependant, le modèle considéré est plus complexe, ce qui impose une résolution numérique.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Équation du mouvement</b>	<b>63</b>
<b>4.2</b>	<b>Modes propres</b>	<b>64</b>
<b>4.3</b>	<b>Calcul de la réponse avec multiplication par <math>(1-w)^2</math></b>	<b>66</b>
4.3.1	Procédure de Galerkin	66
4.3.2	Méthode d'intégration temporelle	69
4.3.3	HBM+MAN	69
4.3.4	Méthode de la moyenne harmonique	71
<b>4.4</b>	<b>Calcul de la réponse avec une série de <math>\frac{1}{(1-w)^2}</math></b>	<b>72</b>
4.4.1	HBM+MAN	72
4.4.2	Méthode de la moyenne harmonique	73
<b>4.5</b>	<b>Confrontation des méthodes</b>	<b>74</b>
<b>4.6</b>	<b>Analyse paramétrique</b>	<b>77</b>

---

4.6.1	Influence des modes supérieurs . . . . .	77
4.6.2	Influence des paramètres . . . . .	78
<b>4.7</b>	<b>Micro/nano-poutre avec masse ajoutée . . . . .</b>	<b>80</b>
4.7.1	Mise en équation . . . . .	80
4.7.2	Analyse de la réponse par la méthode de la moyenne harmonique .	81
4.7.3	HBM+MAN . . . . .	83
<b>4.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>85</b>

---

Le modèle d'un micro/nano-résonateur est schématisé sur la figure 4.1. La partie principale est une micro/nano-poutre encastrée-libre actionnée à la fréquence fondamentale par une électrode qui impose une force électrostatique due à la tension  $V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t$  appliquée. Par hypothèse, l'électrode est non déformable.

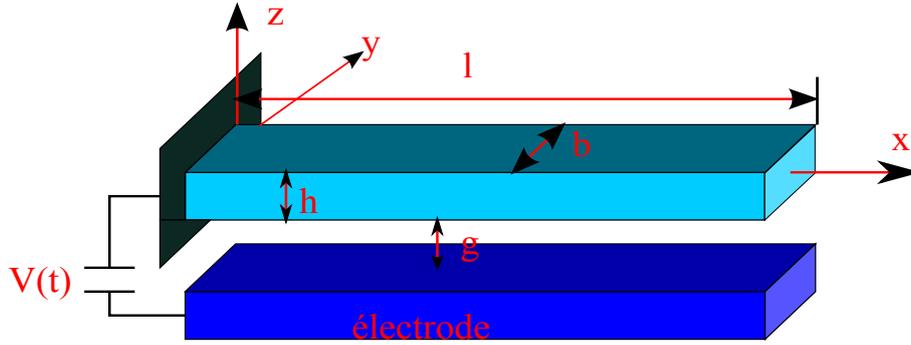


FIGURE 4.1: Modèle d'une micro/nano-poutre encastrée-libre forcée par une électrode

## 4.1 Équation du mouvement

Les notations dans ce chapitre sont celles du chapitre précédent. En se basant sur le principe de Hamilton et la théorie d'une poutre Euler-Bernoulli. [Silva 88], [Crespo da Silva 78] et [Malatkar 03] ont établi l'équation du mouvement non linéaire de flexion de la micro/nano-poutre encastrée-libre. Dans la direction  $Oz$ , elle est la suivante :

$$\begin{aligned}
 m\ddot{w} + c_w\dot{w} + D_\zeta \tilde{w}^{iv} = & \left\{ (D_\eta - D_\zeta) \left[ \tilde{v}'' \int_l^s \tilde{v}'' \tilde{w}'' ds - \tilde{v}''' \int_0^s \tilde{w}'' \tilde{v}' ds \right] - \right. \\
 & \left. \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_\xi} \left( \tilde{v}'' \int_0^s \int_l^s \tilde{v}'' \tilde{w}'' ds ds \right)' \right\}' - D_\zeta \{ \tilde{w}' (\tilde{w}' \tilde{w}'' + \tilde{v}' \tilde{v}'') \}' \\
 & - \frac{1}{2} m \left\{ \tilde{w}' \int_l^s \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \left[ \int_0^s (\tilde{w}'^2 + \tilde{v}'^2) ds \right] ds \right\}' + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{C_n b V(\tilde{t})^2}{(g - \tilde{w}(s, \tilde{t}))^2}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

où  $D_\xi$  est la rigidité de torsion et  $D_\eta$ ,  $D_\zeta$  respectivement les rigidités de flexion dans les deux directions  $Oy$  et  $Oz$ . Les conditions aux limites sont exprimées sous la forme suivante :

$$\tilde{w}(0, \tilde{t}) = \tilde{w}'(0, \tilde{t}) = \tilde{w}''(l, \tilde{t}) = \tilde{w}'''(l, \tilde{t}) = 0. \quad (4.2)$$

Pour ce modèle, la déflexion  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t})$  est négligeable et seule la déflexion  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})$  est considérée, le déplacement réel est désigné par  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t})$ . L'équation du mouvement (4.1) devient :

$$EI\left(\tilde{w}^{iv} + [\tilde{w}'(\tilde{w}'\tilde{w}'')]'\right) + \rho b h \ddot{\tilde{w}} + \tilde{c}\dot{\tilde{w}} = -\frac{1}{2}\rho b h \left(\tilde{w}' \int_l^s \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \int_0^s (\tilde{w}')^2 ds\right] ds\right)' - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{C_n b (V_{dc} + V_{ac} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t})^2}{(g - \tilde{w})^2} \quad (4.3)$$

En introduisant les variables adimensionnées suivantes :

$$w = \frac{\tilde{w}}{g}; x = \frac{s}{l}; t = \frac{\tilde{t}}{\tau}, \quad (4.4)$$

l'équation (4.3) est réécrite sous la forme :

$$w^{iv} + \ddot{w} + c\dot{w} + \delta_1 \left(w' [w' w'']'\right)' + \delta_2 \left(w' \int_1^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t^2} \int_0^{x_1} (w')^2 dx_1\right] dx_2\right)' = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \frac{\left[1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t\right]^2}{(1 - w)^2}, \quad (4.5)$$

où les paramètres sont :

$$\Omega = \tilde{\Omega} \tau, \tau = \frac{2l^2}{h} \sqrt{\frac{3\rho}{E}}, c = \frac{\tilde{c} l^4}{EI \tau}, \delta_1 = \left[\frac{g}{l}\right]^2, \delta_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{l}\right]^2, \delta_3 = 6V_{dc} V_{ac} \frac{C_n \varepsilon_0 l^4}{E h^3 g^3}. \quad (4.6)$$

Les nouvelles conditions aux limites sont les suivantes :

$$w(0, t) = w'(0, t) = w''(1, t) = w'''(1, t) = 0. \quad (4.7)$$

## 4.2 Modes propres

Les modes propres sont déterminés à partir de l'équation linéaire du mouvement conservatif homogène ;  $\phi(x)$ , la solution de l'équation suivante,

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = \lambda^4 \phi(x), \quad (4.8)$$

s'écrit sous la forme :

$$\phi(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \cosh \lambda x + D \sinh \lambda x. \quad (4.9)$$

Les coefficients  $A, B, C, D$  sont déterminés à partir des conditions aux limites (4.7), imposant :

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B\lambda + D\lambda &= 0 \\ A \cos \lambda + B \sin \lambda - C \cosh \lambda - D \sinh \lambda &= 0 \\ A \sin \lambda - B \cos \lambda + C \sinh \lambda + D \cosh \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pour avoir des solutions non triviales, il faut :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \sin \lambda & -\cos \lambda & \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

Ainsi,  $\lambda$  est la solution de l'équation suivante :

$$1 + \cosh \lambda \cos \lambda = 0. \quad (4.12)$$

La déformée modale  $\phi_k(x)$  est alors :

$$\phi_k(x) = A_k \left( \cos \lambda_k x - \cosh \lambda_k x - \frac{\cosh \lambda_k + \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k + \sin \lambda_k} [\sin \lambda_k x - \sinh \lambda_k x] \right). \quad (4.13)$$

où  $A_k$  est déterminé par la condition normalisée :

$$A_k = \left( \int_0^1 \left[ \frac{\phi_k(x)}{A_k} \right]^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

Le tableau 4.1 et la figure 4.2 affichent respectivement les 3 premières valeurs de  $\lambda$  et les déformées modales des trois premiers modes.

**TABLE 4.1:** valeurs  $\lambda$  des 3 premiers modes de la poutre encastree-libre

mode	$\lambda_k$
1	1.875
2	4.694
3	7.8548

La déflexion  $w(x,t)$  décomposée par la combinaison linéaire des fonctions des modes propres et des fonctions dépendant seulement du temps prend alors la forme tronquée suivante :

$$w(x,t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} a_k(t) \phi_k(x), \quad (4.15)$$

où  $N_m$  est le nombre des modes de calcul.

L'orthogonalité des modes impose :

$$\int_0^1 \phi_k \phi_j dx = \delta_{kj}, \quad (4.16)$$

où  $\delta_{kj} = 1$  avec  $k = j$  et  $\delta_{kj} = 0$  avec  $k \neq j$ .

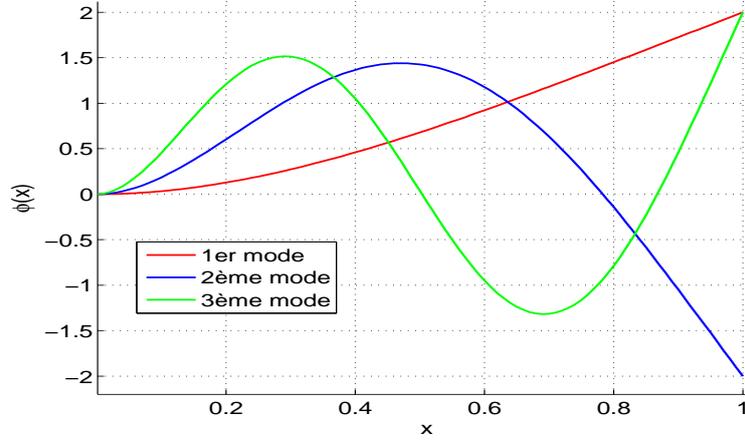


FIGURE 4.2: Déformées modales des 3 premiers modes de la poutre encastrée-libre.

### 4.3 Calcul de la réponse avec multiplication par $(1 - w)^2$

Comme précédemment, la force électrostatique non linéaire peut être traitée par la multiplication ou le développement en série de Taylor. On considère d'abord le cas où la force électrostatique est calculée complètement par la multiplication.

#### 4.3.1 Procédure de Galerkin

On multiplie l'équation (4.5) par  $\phi_i(x)(1 - w)^2$  et le terme  $\frac{d^4 \phi_k(x)}{dx^4}$  est remplacé en utilisant l'équation (4.8). La nouvelle équation est intégrée de  $x = 0$  à  $x = 1$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_i - 2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k \ddot{a}_j + \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_l \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l \ddot{a}_j \\ + 2\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_i dx \right) a_k a_l \ddot{a}_j - 4\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_m \phi_i dx \right) a_k a_l a_m \ddot{a}_j \\ + 2\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_m \phi_n \phi_i dx \right) a_k a_l a_m a_n \ddot{a}_j + c_i \dot{a}_i - \\ 2c_j \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k \dot{a}_j + c_j \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_l \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l \dot{a}_j + \\ 2\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_i dx \right) \dot{a}_k a_l \dot{a}_j - 4\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_m \phi_i dx \right) \dot{a}_k a_l a_m \dot{a}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\delta_2 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl}(x) \phi_m \phi_n \phi_l dx \right) \dot{a}_k a_l a_m a_n \dot{a}_j + \\
 & \lambda_i^4 a_i - 2\lambda_j^4 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_j \phi_l dx \right) a_k a_j + \lambda_j^4 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_l \phi_k \phi_j \phi_l dx \right) a_k a_l a_j + \\
 & \delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_m dx \right) a_k a_l a_j - 2\delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_m \phi_m dx \right) a_k a_l a_m a_j \\
 & + \delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_m \phi_n \phi_l dx \right) a_k a_l a_m a_n a_j + \\
 & 4\delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_m dx \right) a_k a_l a_j - 8\delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_m \phi_m dx \right) a_k a_l a_m a_j \\
 & + 4\delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_m \phi_n \phi_l dx \right) a_k a_l a_m a_n a_j + \\
 & \delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_m dx \right) a_k a_l a_j - 2\delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_m \phi_m dx \right) a_k a_l a_m a_j \\
 & + \delta_1 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_m \phi_n \phi_l dx \right) a_k a_l a_m a_n a_j \\
 & = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left( 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right)^2 \int_0^1 \phi_l dx, \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

où :

$$B_{jkl}(x) = \phi_l'' \int_1^x \left( \int_0^x \phi_k' \phi_j' dx \right) dx + \phi_l' \int_0^x \phi_k' \phi_j' dx. \tag{4.18}$$

L'équation (4.17) est réécrite sous la forme d'une équation matricielle :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{a}) \right] \ddot{\mathbf{a}} + \left[ \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \right. \\
 & \left. + \mathbf{H}_2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \right] \dot{\mathbf{a}} + \left[ \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_3(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{T1}(\mathbf{a}) + \right. \\
 & \left. \mathbf{R}_{T2}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{T3}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q1}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q2}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q3}(\mathbf{a}) \right] \mathbf{a} = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left( 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right)^2 \mathbf{F} \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

où :  $\mathbf{a} = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_{N_m}]^T$ . Les autres matrices  $\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{K}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_{Ti}, \mathbf{R}_{Qi}$  sont déterminées à partir de leurs composantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_{0ij} &= \delta_{ij} \\
 M_{1ij} &= -2 \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2ij} &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_l \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l \\
 C_{0ij} &= c_i \delta_{ij}; \quad C_{1ij} = c_j M_{1ij}; \quad C_{2ij} = c_j M_{2ij} \\
 K_{0ij} &= \lambda_i \delta_{ij}; \quad K_{1ij} = \lambda_j^4 M_{1ij}; \quad K_{2ij} = \lambda_j^4 M_{2ij} \\
 R_{1ij} &= \delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_i dx \right) a_k a_l \\
 R_{T1ij} &= -2\delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_i \phi_m dx \right) a_k a_l a_m \\
 R_{Q1ij} &= \delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k'' \phi_l'' \phi_j'' \phi_i \phi_m \phi_n dx \right) a_k a_l a_m a_n \\
 R_{2ij} &= 4\delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_i dx \right) a_k a_l \\
 R_{T2ij} &= -8\delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_i \phi_m dx \right) a_k a_l a_m \\
 R_{Q2ij} &= 4\delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(3)} \phi_j'' \phi_i \phi_m \phi_n dx \right) a_k a_l a_m a_n \\
 R_{3ij} &= \delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_i dx \right) a_k a_l \\
 R_{T3ij} &= -2\delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_i \phi_m dx \right) a_k a_l a_m \\
 R_{Q3ij} &= \delta_1 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k' \phi_l^{(4)} \phi_j' \phi_i \phi_m \phi_n dx \right) a_k a_l a_m a_n \\
 B_{jkl} &= \phi_l'' \int_1^x \int_0^x \phi_k' \phi_j' dx dx + \phi_l' \int_0^x \phi_k' \phi_j' dx dx \\
 H_{1ij} &= 2\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl} \phi_i dx \right) \dot{a}_k a_l \\
 H_{2ij} &= -4\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl} \phi_i \phi_m dx \right) a_m \dot{a}_k a_l \\
 H_{3ij} &= 2\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl} \phi_i \phi_m \phi_n dx \right) a_m a_n \dot{a}_k a_l \\
 Q_{1ij} &= 2\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl} \phi_i dx \right) a_k a_l \\
 Q_{2ij} &= -4\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{jkl} \phi_i \phi_m dx \right) a_m a_k a_l
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$Q_{3ij} = 2\delta_2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 B_{ijkl} \phi_i \phi_m \phi_n dx \right) a_m a_n a_k a_l$$

et le vecteur  $F_i$  a l'expression :

$$F_i = \int_0^1 \phi_i dx \quad (4.21)$$

Pour résoudre l'équation (4.19), il est fait appel à la méthode d'intégration temporelle, à la méthode asymptotique numérique + l'équilibrage harmonique programmée dans le logiciel Manlab et à la moyenne harmonique. La méthode quasi-analytique prouve un modèle de pré-dimensionnement, la méthode asymptotique numérique un modèle plus complet, et la méthode d'intégration temporelle une validation.

### 4.3.2 Méthode d'intégration temporelle

Pour utiliser la méthode numérique d'intégration temporelle, l'équation (4.19) est réécrite sous forme :

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t). \quad (4.22)$$

Alors, en posant :  $\mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{a}}(t)$  et  $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{y}(t))^T$ , l'équation (4.19) devient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = -[M]^{-1} \left\{ \left[ \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_1(\mathbf{a}, \mathbf{y}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{a}, \mathbf{y}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \right] \mathbf{y} + \right. \\ \left. \left[ \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_3(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{T1}(a) + \mathbf{R}_{T2}(a) + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{R}_{T3}(a) + \mathbf{R}_{Q1}(a) + \mathbf{R}_{Q2}(a) + \mathbf{R}_{Q3}(a) \right] \mathbf{a} - \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left( 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right)^2 \mathbf{F} \right\} \end{cases} \quad (4.23)$$

où la matrice  $M$  est déterminée de la manière suivante :

$$M = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{a}). \quad (4.24)$$

Le système (4.23) est résolu par la méthode de Runge-Kutta en utilisant la fonction *ode45* dans Matlab. Le pas d'intégration  $\Delta t$  est choisi tel que  $\Delta t = \frac{2\pi}{64\Omega}$ .

### 4.3.3 HBM+MAN

Le code de calcul Manlab utilise la Méthode Asymptotique Numérique. Pour utiliser Manlab, il faut réécrire l'équation (4.19) sous la forme :

$$m(\dot{\mathbf{X}}) = c(\Omega) + l(X) + q(X, X). \quad (4.25)$$

#### 4. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-libre

Pour cela, on introduit les variables auxiliaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= \dot{\mathbf{a}} & \text{taille } N_m \\
 \mathbf{z} &= \dot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{a}}, & N_m \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{a}^2, & N_m^2 \\
 \mathbf{du} &= \mathbf{a}\dot{\mathbf{a}}, & N_m^2 \\
 \mathbf{M}_{tot} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, & N_m^2 \\
 \mathbf{Q}_{tot} &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, & N_m^2 \\
 \mathbf{H}_{tot} &= \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3, & N_m^2 \\
 \mathbf{R}_{tot} &= \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{T1} + \mathbf{R}_{T2} + \mathbf{R}_{T3} \\
 &\quad + \mathbf{R}_{Q1} + \mathbf{R}_{Q2} + \mathbf{R}_{Q3}, & N_m^2
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

L'équation matricielle (4.19) est réécrite comme un système d'équations sous forme :

$\dot{\mathbf{a}} =$		$\mathbf{y}$		$N_m$
$\dot{\mathbf{y}} =$		$\mathbf{z}$		$N_m$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{u}$	$-\mathbf{a}^2$	$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{du}$	$-\mathbf{a}\dot{\mathbf{y}}$	$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{M}_{tot} - \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) - \mathbf{M}_2(\mathbf{a})$		$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{H}_{tot} - \mathbf{H}_1(\mathbf{a})$	$-\mathbf{H}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{H}_3(\mathbf{a})$	$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{Q}_{tot} - \mathbf{Q}_1(\mathbf{a})$	$-\mathbf{Q}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{Q}_3(\mathbf{a})$	$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$\mathbf{R}_{tot} - \mathbf{R}_1(\mathbf{a}) - \mathbf{R}_2(\mathbf{a})$	$-\mathbf{R}_{T1}(\mathbf{a}) - \mathbf{R}_{T2}(\mathbf{a}) - \mathbf{R}_{T3}(\mathbf{a})$	$N_m^2$
$\mathbf{0} =$		$-\mathbf{R}_3(\mathbf{a})$	$-\mathbf{R}_{Q1}(\mathbf{a}) - \mathbf{R}_{Q2}(\mathbf{a}) - \mathbf{R}_{Q3}(\mathbf{a})$	
$\mathbf{0} =$	$\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{gc}} \times$ $(1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}})^2 F$	$\mathbf{M}_0 \mathbf{z} + \mathbf{C}_0 \mathbf{y} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}$	$\mathbf{M}_{tot}(\mathbf{z} + \mathbf{C}_0 \mathbf{y} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a})$ $+ \mathbf{H}_{tot} \mathbf{y} + \mathbf{R}_{tot} \mathbf{a} + \mathbf{Q}_{tot} \mathbf{z}$	$N_m$
$m(\dot{\mathbf{X}})$	$c(\Omega)$	$l(\mathbf{X})$	$q(\mathbf{X}, \mathbf{X})$	

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur des variables :

$$\mathbf{X} = \left( a, y, z, u, du, \mathbf{M}_{tot}, \mathbf{H}_{tot}, \mathbf{Q}_{tot}, \mathbf{R}_{tot} \right)^T, \quad \text{taille } 3N_m + 6N_m^2, \tag{4.28}$$

le système (4.27) a  $3N_m + 6N_m^2$  équations. L'étape suivante consiste à programmer les opérateurs  $m(\dot{\mathbf{X}})$ ,  $c(\Omega)$ ,  $l(\mathbf{X})$ ,  $q(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ .

#### 4.3.4 Méthode de la moyenne harmonique

Par hypothèse, le mouvement est prédominé par le mode fondamental. L'étude se limite donc à  $N_m = 1$ , autrement dit,  $w(x, t)$  est représenté par :

$$w(x, t) = \phi_1(x)a_1(t). \quad (4.29)$$

L'équation (4.17) devient :

$$\begin{aligned} & \left( \ddot{a}_1 + 2.956a_1\ddot{a}_1 + 2.348a_1^2\ddot{a}_1 + 9.194\delta_2a_1^2\ddot{a}_1 + 32.227\delta_2a_1^3\ddot{a}_1 + 27.203\delta_2a_1^4\ddot{a}_1 \right) + \\ & \left( c_1\dot{a}_1 + 2.956c_1a_1\dot{a}_1 + 2.348c_1a_1^2\dot{a}_1 + 9.194\delta_2a_1\dot{a}_1^2 + 32.227\delta_2a_1^2\dot{a}_1^2 + 27.203\delta_2a_1^3\dot{a}_1^2 \right) \\ & + \left( 12.3623a_1 + 36.539a_1^2 + 29.035a_1^3 + 40.441\delta_1a_1^3 + 194.673\delta_1a_1^4 + 181.616\delta_1a_1^5 \right) \\ & + 0.783\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

La solution de l'équation (4.30) est recherchée sous la forme :

$$a_1(t) = A(t) \cos \left[ \Omega t + \beta(t) \right]. \quad (4.31)$$

Les pulsations du forçage  $\Omega$  et fondamentale  $\omega_1$  sont liées par :

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma \quad (4.32)$$

avec  $\varepsilon \ll 1$ .

L'amplitude  $A$  et la phase  $\beta$  sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -0.294c_1A^3 - \frac{1}{2}c_1A + \frac{0.783\delta_3}{\omega_1} \cos \beta, \\ \frac{d\beta}{dt} = -0.881\omega_1A^3 + \frac{10.888}{\omega_1}A^3 - 2.298\delta_2\omega_1A^3 - 6.800\delta_2\omega_1A^5 \\ \quad + \frac{56.755}{\omega_1}\delta_1A^5 + \frac{15.165}{\omega_1}\delta_1A^3 - A\varepsilon\sigma + \frac{0.783\delta_3}{\omega_1} \sin \beta. \end{cases} \quad (4.33)$$

La condition des solutions en régime permanent est :  $\dot{A} = \dot{\beta} = 0$ . Ainsi du système (4.33), il vient la nouvelle équation de  $A$  :

$$\begin{aligned} & \left( 0.294c_1A^3 + \frac{1}{2}c_1A \right)^2 + \left( -0.881\omega_1A^3 + \frac{10.888}{\omega_1}A^3 - 2.298\delta_2\omega_1A^3 - \right. \\ & \left. 6.800\delta_2\omega_1A^5 + \frac{56.755}{\omega_1}\delta_1A^5 + \frac{15.165}{\omega_1}\delta_1A^3 - A\varepsilon\sigma \right)^2 = \left( \frac{0.783\delta_3}{\omega_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

On pose  $X = A^2$ , l'équation (4.34) devient alors une équation algébrique du cinquième degré.

#### 4.4 Calcul de la réponse avec une série de $\frac{1}{(1-w)^2}$

Le développement en série de Taylor est utilisé pour exprimer  $\frac{1}{(1-w)^2}$ , avec une approximation effectuée jusqu'à cinquième degré pour assurer la précision.

$$\frac{1}{(1-w)^2} = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + 5w^4 + 6w^5 + O(w^6). \quad (4.35)$$

L'équation (4.5) devient :

$$\begin{aligned} w^{iv} + \ddot{w} + c\dot{w} + \delta_1 \left( w' [w' w'']' \right)' + \delta_2 \left( w' \int_1^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t^2} \int_0^{x_1} (w')^2 dx_1 \right] dx_2 \right)' \\ = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left( 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right)^2 \left( 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + 5w^4 + 6w^5 \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

##### 4.4.1 HBM+MAN

En utilisant l'expansion (4.15), l'équation (4.36) est multipliée par  $\phi_i(x)$  et puis intégrée de  $x = 0$  à  $x = 1$ . Enfin on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_0 + \mathbf{Q}_1) \ddot{\mathbf{a}} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{H}_1) \dot{\mathbf{a}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \mathbf{a} = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right]^2 \mathbf{F} + \\ \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right]^2 \left( 2\mathbf{M}_0 - \frac{3}{2}\mathbf{M}_1 + 4\mathbf{M}_2 + 5\mathbf{M}_3 + 6\mathbf{M}_4 \right) \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les composantes de deux nouvelles matrices  $\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$  sont :

$$M_{3ij} = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_l \phi_m \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l a_m \quad (4.38)$$

$$M_{4ij} = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l a_m a_n \quad (4.39)$$

Les autres matrices de l'équation (4.37) sont déterminées comme dans l'équation (4.20). Afin d'utiliser le logiciel Manlab, l'équation (4.37) est réécrite sous forme :

$\mathbf{a} =$		$\mathbf{y}$		$N_m$
$\mathbf{y} =$		$\mathbf{z}$		$N_m$
$0 =$		$\mathbf{u}$	$-\mathbf{a} \times \mathbf{a}$	$N_m^2$
$0 =$	$-\mathbf{C}_0$	$\mathbf{C}_{tot}$	$-\mathbf{H}_1$	$N_m^2$
$0 =$	$-2\mathbf{M}_0$	$+\mathbf{m}_{tot} + \frac{3}{2}\mathbf{M}_1 - 4\mathbf{M}_2$	$-5\mathbf{M}_3 - 6\mathbf{M}_4$	$N_m^2$
$0 =$		$\mathbf{M}_{tot}$	$\mathbf{m}_{tot} \mathbf{a}$	$N_m^2$
$0 =$	$\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right]^2$	$-\Delta$		1
$0 =$		$\mathbf{M}_0 \mathbf{z} - \Delta \mathbf{F} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}$	$+\mathbf{Q}_1 \mathbf{z} + \mathbf{C}_{tot} \mathbf{y}$	$N_m$
			$+(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \mathbf{a} - \mathbf{M}_{tot} \Delta$	
			$3N_m + 4N_m^2 + 1 \text{ équations}$	

Si on utilise la série de Taylor jusqu'au troisième degré, l'équation (4.37) s'allège des matrices  $M_3, M_4$ . Le nombre des équations intermédiaires diminue également. À l'inverse, l'augmentation de l'ordre de la série de Taylor induit un nombre plus élevé d'équations à traiter dans Manlab ; au 7<sup>ème</sup> degré, il y a  $4N_m + 3N_m^2 + 1 + N_m^3$  équations (ajout de  $N_m^3$  équations pour poser  $\mathbf{v} = \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^2 \mathbf{a}$ ) ; au 9<sup>ème</sup> degré,  $4N_m + 3N_m^2 + 1 + N_m^3 + N_m^4$  équations.

#### 4.4.2 Méthode de la moyenne harmonique

Comme le cas de la multiplication, l'hypothèse est que le premier mode est dominant dans le mouvement et le calcul est limité à  $N_m = 1$ . L'équation (4.37) devient :

$$\begin{aligned} & \left(1 + 9.194\delta_2 a_1^2\right) \ddot{a}_1 + \left(c_1 + 9.194\delta_2 a_1 \dot{a}_1\right) \dot{a}_1 + \left(12.362a_1 - 2\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 a_1 - 9.395\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 a_1^3 \right. \\ & - 40.038\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 a_1^5 + 40.441\delta_1 a_1^3 - 19.503\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 a_1^4 - 4.433\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 a_1^2 \left. \right) + \delta_3 \left(-8.867 \cos \Omega t a_1^2 \right. \\ & - 39.006 \cos \Omega t a_1^4 - 40.038\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 a_1^5 - 2\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 a_1 - 9.395\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 a_1^3 \\ & - 4.433\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 a_1^2 - 19.503\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 a_1^4 - 1.566 \cos \Omega t - 18.789 \cos \Omega t a_1^3 \\ & \left. - 80.075 \cos \Omega t a_1^5 - 4 \cos \Omega t a_1 - 0.783\frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t^2 - 0.783\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

La solution  $a(t)$  est également cherchée sous la forme :

$$a_1(t) = A(t) \cos \left[ \Omega t + \beta(t) \right] \quad (4.41)$$

Dans ce cas,  $\omega_1$  est déterminé par :

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1^4 - 2\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_2 - \frac{V_{ac}}{V_{dc}}\delta_3}, \quad (4.42)$$

et la relation entre  $\Omega$  et  $\omega_1$  est :  $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma$ .

Les équations de l'amplitude et de la phase sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2}c_1 A - \left(0.783 + 1.108A^2 + 2.438A^4\right) \frac{\delta_3}{\omega_1} \sin \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -\left(2.298\delta_2 \omega_1 - 15.165\frac{\delta_1}{\omega_1} + 1.761\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\frac{\delta_3}{\omega_1} + 3.523\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\frac{\delta_3}{\omega_1}\right) A^3 \\ \quad - \varepsilon\sigma A s - \left(6.256\frac{V_{ac}}{V_{dc}} + 12.512\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\right) \frac{\delta_3}{\omega_1} A^5 \\ \quad - \left(0.783 + 3.325A^2 + 12.189A^4\right) \frac{\delta_3}{\omega_1} \cos \beta \end{array} \right. \quad (4.43)$$

De la condition des solutions en régime permanent  $\frac{dA}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = 0$ , on obtient une équation

de l'amplitude  $A$  :

$$\left[ \frac{0.5c_1A}{0.783 + 1.108A^2 + 2.438A^4} \right]^2 + \left[ \frac{-\varepsilon\sigma A - \left(6.256\frac{V_{ac}}{V_{dc}} + 12.512\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\right)\frac{\delta_3}{\omega_1}A^5}{0.783 + 3.325A^2 + 12.189A^4} + \frac{-\left(2.298\delta_2\omega_1 - 15.165\frac{\delta_1}{\omega_1} + 1.761\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\frac{\delta_3}{\omega_1} + 3.523\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\frac{\delta_3}{\omega_1}\right)A^3}{0.783 + 3.325A^2 + 12.189A^4} \right]^2 = \left(\frac{\delta_3}{\omega_1}\right)^2 \quad (4.44)$$

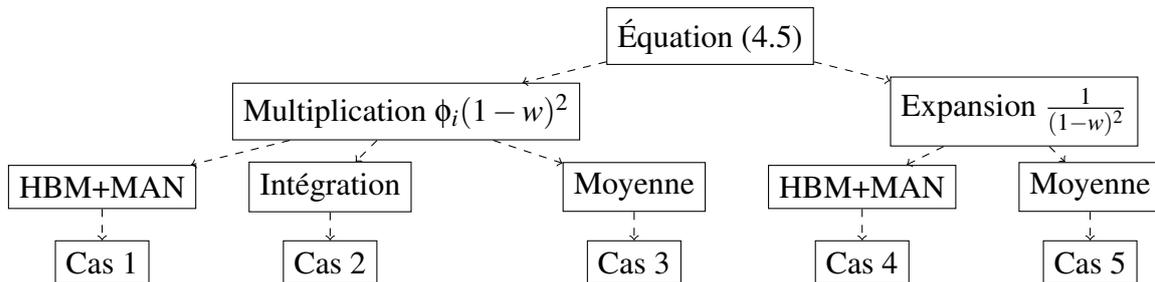
Posons :  $X = A^2$ , on obtient une équation algébrique du 9<sup>ème</sup> degré, elle est résolue par une méthode numérique itérative.

## 4.5 Confrontation des méthodes

Les réponses calculées avec les méthodes présentées précédemment sont ici comparées. Ces méthodes sont désignées par les cas suivants :

- Cas 1 : l'équation (4.5) est multipliée par  $\phi_i(1-w)^2$  et l'équation matricielle (4.19) est résolue par HBM+MAN.
- Cas 2 : la méthode d'intégration temporelle est mise en œuvre pour chercher la solution de (4.19), ce cas va vérifier la validité du cas 1.
- Cas 3 : la méthode quasi-analytique, de la moyenne harmonique appliquée à l'équation (4.19) et donne une équation algébrique du cinquième degré, dont la solution est facilement cherchée par une méthode numérique.
- Cas 4 : à partir de l'équation (4.5), le terme  $\frac{1}{(1-w)^2}$  est calculé par le développement en série de Taylor, qui intervient dans l'équation (4.37), résolue par Manlab.
- Cas 5 : la méthode de la moyenne harmonique est utilisée pour résoudre l'équation (4.37).

Ces cas sont résumés sur la figure 4.3.



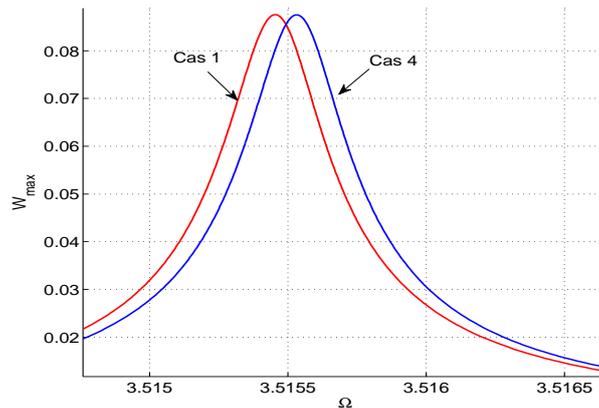
**FIGURE 4.3:** Distinction des cas de calcul de la micro/nano-poutre encastrée-libre.

La méthode de la moyenne harmonique est une méthode de perturbation et donc limitée. Cependant, sa mise en œuvre est facile, l'équation des solutions est représentée sous la forme d'une équation algébrique. Les cas 1 et 2 sont les cas de référence. Par exemple, la configuration 4 possède les paramètres donnés dans le tableau 4.2.

**TABLE 4.2:** Configuration 4 de la poutre encastrée-libre.

Poutre	L( $\mu\text{m}$ )	b(nm)	h(nm)	g( $\mu\text{m}$ )	Q
Configuration 4	12.5	500	300	1.6	10000

Les réponses obtenues par les traitements avec multiplication et avec expansion de Taylor sont comparées en s'appuyant sur les résolutions effectuées avec le logiciel Manlab, voir les figures 4.4 et 4.5, qui montrent les différences entre deux cas lorsque l'amplitude de vibration est petite ou grande et  $N_m = 1$ . La déflexion maximale  $W_{max}$  est relevée à l'extrémité libre de la poutre et normalisée par le jeu  $g$ . Pour de faibles déflexions, la différence fréquentielle est très petite. Pour de plus grandes amplitudes, cette différence augmente. Néanmoins, la propriété de courbe de réponse ne change pas : les deux cas ont le même comportement assouplissant.

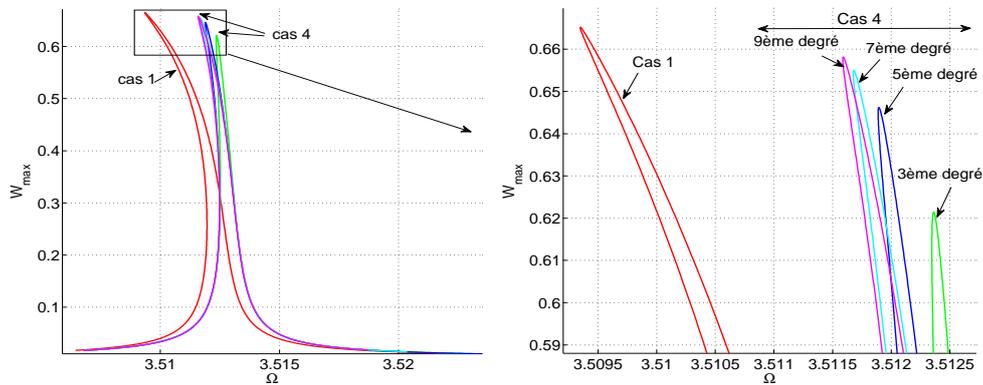


**FIGURE 4.4:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison entre les cas 1 et 4 avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 2V$ ,  $g = 1.6\mu\text{m}$  et  $N_m = 1$  mode. Le cas 4 utilise le développement en série de Taylor au 5<sup>ème</sup> degré.

Pour de grandes déflexions, la différence fréquentielle dépend de la précision du développement en série de Taylor, voir la figure 4.5. Pour des expansions au 3<sup>ème</sup> ou au 5<sup>ème</sup> degré, l'utilisation du cas 4 est plus pratique que le cas 1 : il met en jeu moins d'équations intermédiaires dans Manlab ( $4N_m + 3N_m^2 + 1$  au lieu de  $3N_m + 6N_m^2$  équations dans le cas 1). Mais pour des expansions au 7<sup>ème</sup> ou au 9<sup>ème</sup> degré, le nombre des équations intermédiaires du cas 4 est à l'ordre de  $N_m^3$  ou  $N_m^4$ , ce qui induit un nombre d'équations plus grand que le cas 1. De plus, la convergence à ces degrés supérieurs est très lente. Les courbes du cas 4 se rapprochent lentement de la courbe du cas 1 avec l'augmentation des degrés de la série de Taylor.

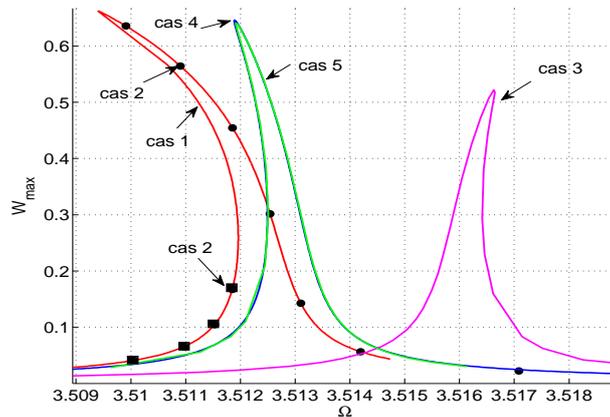
Les autres cas de calcul sont comparés sur la figure 4.6. Dans le cas 2, comme la méthode d'intégration temporelle est fortement chronophage, seuls que quelques réponses sont calculées. Les points ronds et les carrés noirs sont obtenus respectivement avec un algorithme de descente en fréquence (les conditions initiales à  $\Omega_n$  sont les conditions

#### 4. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-libre



**FIGURE 4.5:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison entre les cas 1 et 4 avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ ,  $g = 1.6\mu\text{m}$  et  $N_m = 1$  mode. Le cas 4 utilise le développement en série de Taylor au 3<sup>ème</sup>, 5<sup>ème</sup>, 7<sup>ème</sup>, 9<sup>ème</sup> degré.

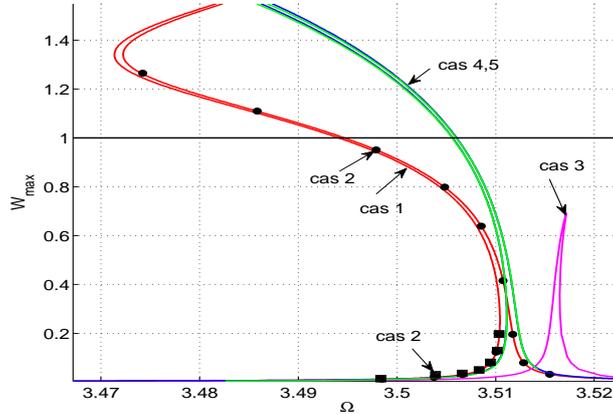
finales à  $\Omega_{n+1}$ ) et de montée en fréquence (les conditions initiales à  $\Omega_{n+1}$  sont les conditions finales de  $\Omega_n$ ). La coïncidence des points noirs avec la courbe rouge (cas 1) démontre la précision de Manlab. La différence entre les cas 1 et 4 est expliquée par la figure 4.5. Contrairement aux autres cas, le cas 3 fournit un comportement raidissant même si la force électrostatique y soit déterminée complètement en utilisant la multiplication par  $(1 - w)^2$ . Ceci peut être dû à la suppression de termes importants lors de l'utilisation de la méthode de la moyenne harmonique.



**FIGURE 4.6:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison des cas avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ ,  $g = 1.6\mu\text{m}$  et  $N_m = 1$  mode. Les cas 4 et 5 utilisent le développement en série de Taylor au 5<sup>ème</sup> degré.

Dans le cas d'un jeu plus petit ( $g = 1.4\mu\text{m}$ ), voir figure 4.7, l'influence de la force électrostatique est donc plus forte, le comportement devient fortement non linéaire. Avec les cas 1, 2, 4, 5 les réponses sont assouplissantes jusqu'au "pull-in" ( $W_{max} = 1$ ), quand

la poutre colle à l'électrode. Il existe aussi un écart significatif entre les cas 1, 2 et les cas 4, 5.



**FIGURE 4.7:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : comparaison des cas de calcul avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ ,  $g = 1.4\mu\text{m}$ ,  $N_m = 1$  mode. Les cas 4 et 5 utilisent le développement en série de Taylor au 5<sup>ème</sup> degré.

## 4.6 Analyse paramétrique

### 4.6.1 Influence des modes supérieurs

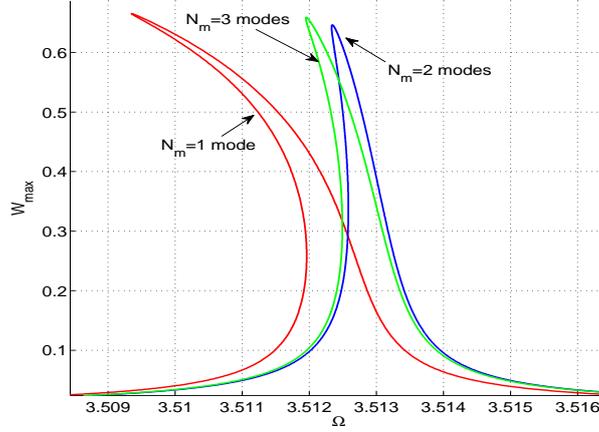
Les calculs sont effectués avec le cas de référence 1. Comme le degré de la déflexion  $w(x,t)$  s'élève à 5 dans le cas de la micro/nano-poutre encastree-libre (3 dans le cas d'un bi-encastrement), le coût de calcul s'alourdit. Le calcul se limite à 3 modes car la détermination du terme non linéaire suivant en calcul formel est difficile pour plus de modes.

$$\left\{ w' \int_1^x \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x (w')^2 dx \right] dx \right\}'$$

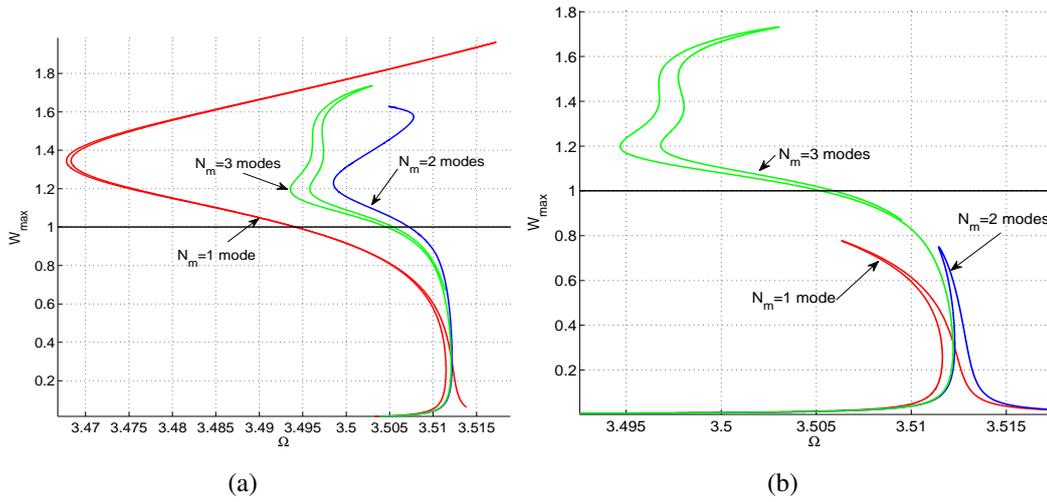
. Quand l'amplitude de vibration est petite, l'influence des modes supérieurs est peu significative, voir la figure 4.8. Avec 1, 2 ou 3 modes, le comportement des réponses ne change pas, les amplitudes ont la même valeur, il n'y a qu'un peu décalage de fréquence. La réponse a presque convergé avec  $N_m = 3$  modes.

Pour une amplitude de vibration plus grande, les modes supérieurs sont plus importants, voir la figure 4.9-a. Quand  $W_{max} \leq 1$ , la différence dans décalage entre des courbes est grande. Avec  $W_{max} > 1$ , la limite de déflexion possible est dépassée (pull-in).

La figure 4.9-b montre un cas particulier. La réponse avec  $N_m = 1$  ou  $N_m = 2$  modes est vraiment différente par rapport à la réponse avec  $N_m = 3$  modes. Malgré que l'amplitude du troisième mode est petite, elle influe fortement sur la réponse, spécialement la réponse du premier mode. Comme la micro/nano-poutre encastree-encastree, ce cas n'a lieu qu'avec une grande déflexion, proche de la limite du pull-in.



**FIGURE 4.8:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : influence des modes supérieurs avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$  et  $g = 1.6\mu m$ .



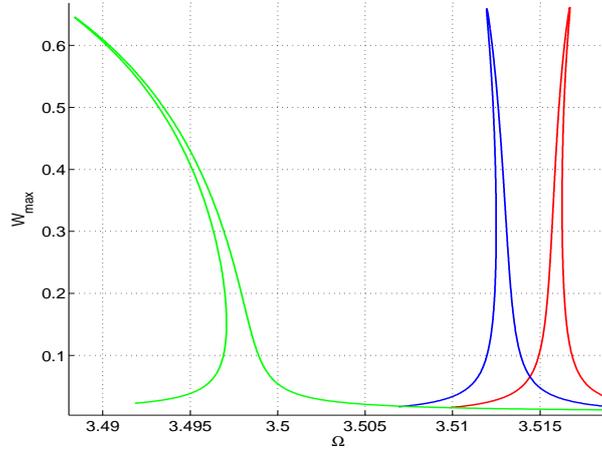
**FIGURE 4.9:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 : influence des modes supérieurs. (a) :  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$  et  $g = 1.48\mu m$ . (b) :  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$  et  $g = 1.55\mu m$ .

#### 4.6.2 Influence des paramètres

$\delta_1$  et  $\delta_2$  sont déterminés par la relation entre  $g$  et  $l$  :  $\delta_1 = 2\delta_2 = \left(\frac{g}{l}\right)^2$ , ainsi le comportement de la poutre ne dépend que les ratios  $\frac{g}{l}$  et  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$ .

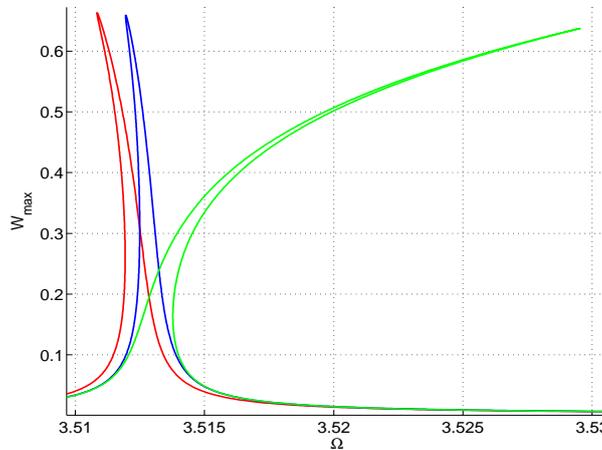
Lorsque le ratio  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  augmente et  $\frac{g}{l}$  reste fixe, le comportement raidissant évolue vers un comportement assouplissant, voir figure 4.10.

Quand  $\frac{g}{l}$  est petit, l'électrode est plus proche de la poutre, l'influence de la force électrostatique est plus grande que la rigidité de la poutre, ce qui induit un comportement



**FIGURE 4.10:** Réponse de la configuration 4 avec  $\frac{g}{l} = \frac{1.6}{12.5}$  fixe,  $N_m = 3$  modes.  $V_{dc} = 2V_{ac} = 1V$  (rouge),  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$  (bleu),  $V_{dc} = 300V_{ac} = 12V$  (vert).

assouplissant et vice versa. Sur la figure 4.11, le comportement assouplissant évolue vers un comportement raidissant, avec l'augmentation du ratio  $\frac{g}{l}$ .



**FIGURE 4.11:** Réponse de la configuration 4 avec  $V_{dc} = 50V_{ac}$  et  $\delta_3$  fixe,  $N_m = 3$  modes.  $\frac{g}{l} = \frac{0.4}{12.5}$  (rouge),  $\frac{g}{l} = \frac{1.6}{12.5}$  (bleu),  $\frac{g}{l} = \frac{4.8}{12.5}$  (vert).

Ainsi jouer sur la combinaison  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$  et  $\frac{g}{l}$  est un moyen pour contrôler la réponse du micro/nano-résonateur et en particulier son type de comportement.

## 4.7 Micro/nano-poutre avec masse ajoutée

### 4.7.1 Mise en équation

La figure 4.12 schématise la micro/nano-poutre encastrée-libre avec une particule ajoutée.

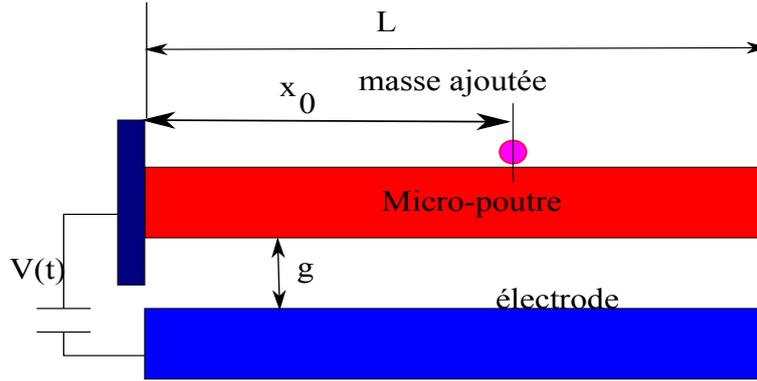


FIGURE 4.12: Modèle d'une micro/nano-poutre encastrée-libre avec une masse ajoutée.

Avec les mêmes hypothèses que dans le cas de la micro/nano-poutre encastrée-encastree, la dimension de la masse ajoutée est petite et constitue avec la poutre un continuum.

L'équation du mouvement d'un volume infinitésimal de longueur  $ds$  est :

$$\begin{aligned}
 EI \left\{ \tilde{w}'''' + \left[ \tilde{w}' (\tilde{w}' \tilde{w}'')' \right]' \right\} ds + \rho b h \ddot{w} ds + \delta_{x_0}(x) m_p \ddot{w} + c \dot{w} ds = \\
 \frac{1}{2} \rho b h \left\{ \tilde{w}' \int_1^s \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \int_0^s (\tilde{w}')^2 ds \right] ds \right\}' ds + \delta_{x_0}(x) m_p \left\{ \tilde{w}' \int_1^s \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} \int_0^s (\tilde{w}')^2 ds \right] ds \right\}' \\
 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{C_n b [V_{dc} + V_{ac} \cos(\tilde{\Omega} \tilde{t})]^2}{(g - \tilde{w})^2} ds
 \end{aligned} \quad (4.45)$$

où  $m_p$  est la masse physique de la particule ajoutée. Utiliser les paramètres adimensionnés (4.4) conduit à l'équation :

$$\begin{aligned}
 w^{(iv)} dx + \ddot{w} dx + \delta_{x_0}(x) m \ddot{w} + c \dot{w} dx + \delta_1 \left[ w' (w' w'')' \right]' dx = \\
 - \delta_2 \left\{ w' \int_1^x \left[ \int_1^x \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x (w')^2 dx \right] dx \right\}' dx - \delta_{x_0}(x) m \left\{ w' \int_1^x \left[ \int_1^x \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x (w')^2 dx \right] dx \right\}' \right. \\
 \left. + \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \frac{\left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos(\Omega t) \right]^2}{(1 - w)^2} dx.
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

## 4.7.2 Analyse de la réponse par la méthode de la moyenne harmonique

La section de la poutre sans particule ajoutée a montré que pour deux cas quasi-analytiques, le cas 5 apporte un meilleur résultat que celui du cas 1, aussi il est choisit pour le calcul avec masse ajoutée. En utilisant le développement en série de Taylor de  $\frac{1}{(1-w)^2}$ , l'équation (4.46) devient :

$$\begin{aligned}
 & (1 + m\phi_1(x_0)^2)\ddot{a}_1 + 2\delta_2 m\phi_1(x_0)B_{ijk}(x_0)(a_1^2\ddot{a}_1 + a_1\dot{a}_1^2) + c_1\dot{a}_1 + \lambda_1^4 a_1 + 40.44\delta_1 a_1^3 + \\
 & 9.19\delta_2 a_1 \dot{a}_1^2 + 9.19\delta_2 a_1^2 \ddot{a}_1 - 0.39\delta_3 \frac{V_{ac}}{V_{dc}} - 2\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} a_1 - 9.39\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} a_1^3 - 4.70\delta_3 \frac{V_{ac}}{V_{dc}} a_1^3 - \\
 & 20.02\delta_3 \frac{V_{ac}}{V_{dc}} a_1^5 - 1.57\delta_3 \cos \Omega t - 4\delta_3 a_1 \cos \Omega t - 18.79\delta_3 a_1^3 \cos \Omega t - 80.08\delta_3 a_1^5 \cos \Omega t \\
 & - 8.87\delta_3 a_1^2 \cos(\Omega t) - 39.01\delta_3 a_1^4 \cos(\Omega t) - \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \delta_3 a_1 - 0.783\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} - 2.22\delta_3 \frac{V_{ac}}{V_{dc}} a_1^2 - \\
 & 40.04\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} a_1^5 - 4.43\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} a_1^2 - 19.50\delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} a_1^4 - 9.75\delta_3 \frac{V_{ac}}{V_{dc}} a_1^4 = 0. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

L'équation de l'amplitude  $A$  selon  $\Omega$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2}c_1\omega_1 A\right)^2 \left[-0.783\delta_3 - 3.325\delta_3 A^2 - 12.189\delta_3 A^4\right]^2 + \left[-A\omega_1 \varepsilon\sigma - 3.523\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 A^3 - \right. \\
 & 1.761\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\delta_3 A^3 - 12.511\frac{V_{dc}}{V_{ac}}\delta_3 A^5 - 2.298\omega_1^2\delta_2 A^3 + 15.165\delta_1 A^3 - 6.256\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\delta_3 A^5 - \\
 & \left.\frac{1}{2}\omega_1^2\delta_2 m\phi_0 B_0 A^3 - \frac{1}{2}\omega_1^2 m\phi_0^2 A\right]^2 \left[-0.783\delta_3 - 1.108\delta_3 A^2 - 2.438\delta_3 A^4\right]^2 - \\
 & \left[-0.78\delta_3 - 1.11\delta_3 A^2 - 2.44\delta_3 A^4\right]^2 \left[-0.78\delta_3 - 3.33\delta_3 A^2 - 12.19\delta_3 A^4\right]^2 = 0, \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

où  $\phi_0 = \phi_1(x_0)$  et  $B_0 = B(x_0)$ ,  $x_0$  est la position de masse ajoutée sur la poutre. On pose :  $\varepsilon\sigma = \Omega - \omega_1$ , l'équation (4.48) est une équation algébrique qui a la forme :

$$E(A, \Omega, m) = 0 \tag{4.49}$$

Soit  $(A_0, m_0 = 0)$  et  $(A = A_0 + \Delta A, m = m_0 + \Delta m)$  les solutions de l'équation (4.48) à  $\Omega = \Omega_0$ , correspondant respectivement soit à l'absence soit à la présence de la particule de masse  $\Delta m$ . Avec un développement de Taylor au voisinage de  $(A_0, \Omega_0, m_0)$  à l'ordre 2, l'équation (4.49) devient :

$$\begin{aligned}
 & E(A_0 + \Delta A, \Omega_0, m_0 + \Delta m) = E(A_0, \Omega_0, m_0) + \frac{\partial E}{\partial A} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta A + \frac{\partial E}{\partial m} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta m + \\
 & \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \frac{\Delta A^2}{2} + \frac{\partial^2 E}{\partial A \partial m} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta m \Delta A + \frac{\partial^2 E}{\partial m^2} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \frac{\Delta m^2}{2} = 0 \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

#### 4. Micro/nano-résonateur avec poutre encastrée-libre

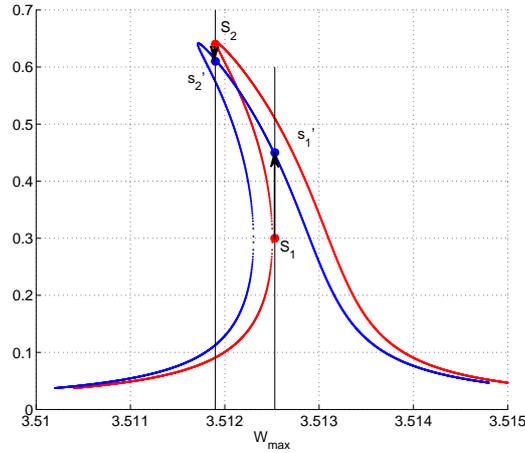
Dans cette équation, le terme  $\frac{\partial^2 E}{\partial m^2} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \frac{m^2}{2}$  est à négliger car  $\Delta m$  est très petit. L'équation (4.50) devient :

$$\frac{\partial E}{\partial A} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta A + \frac{\partial E}{\partial m} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta m + \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \frac{\Delta A^2}{2} + \frac{\partial^2 E}{\partial A \partial m} \Big|_{(A_0, \Omega_0, 0)} \Delta m \Delta A = 0 \quad (4.51)$$

Soit les points de bifurcation  $S_1$  et  $S_2$  de la figure 4.13. Au point  $S_1$ , il vient  $\frac{\partial E}{\partial A}(S_1) \approx 0$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial A^2}(S_1) \approx 0$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial A \partial m}(S_1) \approx 0$  et  $\frac{\partial E}{\partial m}(S_1) \neq 0$ , voir la figure 4.14. Ainsi l'équation (4.51) devient :

$$\left( \frac{\partial E}{\partial m} \Big|_{S_1} + \frac{\partial^2 E}{\partial A \partial m} \Big|_{S_1} \Delta A \right) \Delta m = 0. \quad (4.52)$$

Comme  $\Delta m \neq 0$ , cela impose que  $\Delta A$  doit être grand au voisinage de  $S_1$ . Cette variation est montrée par le saut  $S_1 s'_1$ .



**FIGURE 4.13:** Réponse fréquentielle de la configuration 4 avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ . Sans (rouge) et avec (bleu) particule ajoutée.

Au point  $S_2$ , les dérivées  $\frac{\partial E}{\partial A}(S_2) \approx 0$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial A^2}(S_2) \approx 0$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial A \partial m}(S_2) \approx 0$ ,  $\frac{\partial E}{\partial m}(S_2) \approx 0$ . Ainsi satisfaire l'équation (4.51) impose que  $\Delta A$  soit petit. Cette variation est montrée par le petit saut  $S_2 s'_2$ , voir la figure 4.13.

Le point de bifurcation  $S_1$  induisant une grande amplitude de saut est intéressant pour la détection de particule ajoutée.

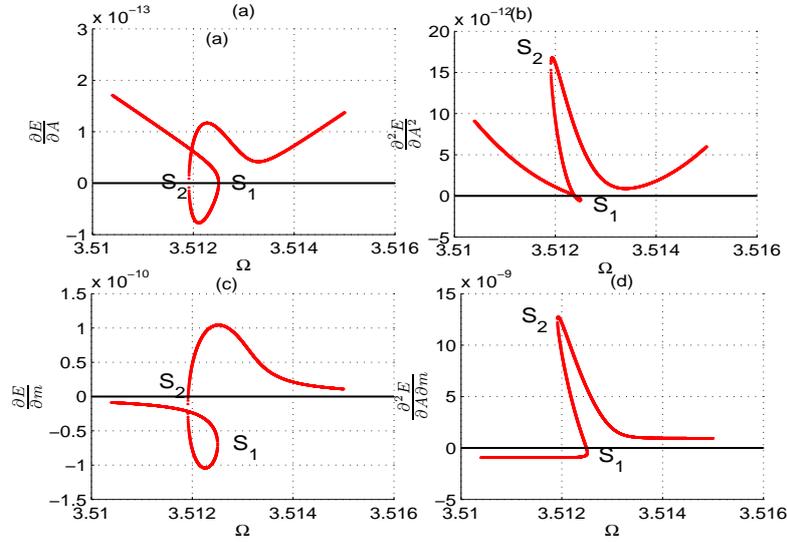


FIGURE 4.14: Réponse fréquentielle (a) :  $\frac{\partial E}{\partial A}$  ; (b) :  $\frac{\partial^2 E}{\partial A^2}$  ; (c) :  $\frac{\partial E}{\partial m}$  ; (d) :  $\frac{\partial^2 E}{\partial m \partial A}$ .

### 4.7.3 HBM+MAN

Il convient d'effectuer des étapes similaires au cas 1 de la poutre sans particule ajoutée. La nouvelle équation matricielle est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a}) + \mu_0(\mathbf{a}) + \mu_1(\mathbf{a}) + \mu_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{a}) + \mathbf{p}\mathbf{q}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{p}\mathbf{q}_2(\mathbf{a}) \right. \\
 & \left. + \mathbf{p}\mathbf{q}_3(\mathbf{a}) \right] \ddot{\mathbf{a}} + \left[ \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{H}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{p}\mathbf{h}_1(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) + \mathbf{p}\mathbf{h}_2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \right. \\
 & \left. + \mathbf{p}\mathbf{h}_3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \right] \dot{\mathbf{a}} + \left[ \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_3(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{T2}(\mathbf{a}) \right. \\
 & \left. + \mathbf{R}_{T3}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q1}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q2}(\mathbf{a}) + \mathbf{R}_{Q3}(\mathbf{a}) \right] \mathbf{a} = \delta_3 \frac{V_{dc}}{V_{ac}} \left[ 1 + \frac{V_{ac}}{V_{dc}} \cos \Omega t \right]^2 \mathbf{F}. \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

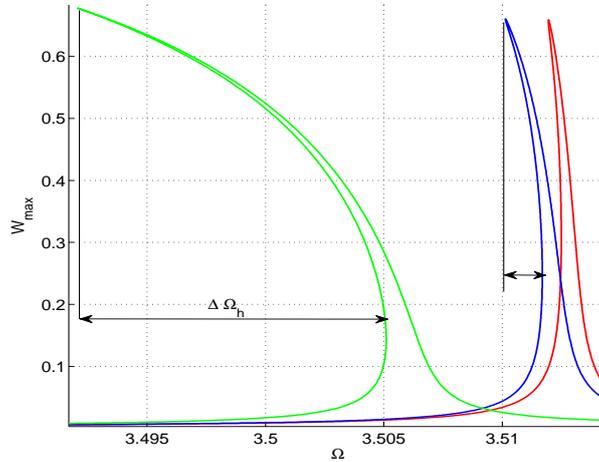
Les nouvelles matrices  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{q}_3$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{h}_3$  sont obtenues à partir de leurs composantes  $1 \leq i, j, k, l, m, n \leq N$  selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mu_{0ij} &= m\phi_i(x_0)\phi_j(x_0), \\
 \mu_{1ij} &= -2m \sum_{k=1}^N \int_0^1 \delta_{x_0}(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\phi_k(x) dx = -2m \sum_{k=1}^N \phi_i(x_0)\phi_j(x_0)\phi_k(x_0)a_k(t), \\
 \mu_{2ij} &= m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_i(x_0)\phi_j(x_0)\phi_k(x_0)\phi_l(x_0)a_k(t)a_l(t), \\
 \mathbf{p}\mathbf{q}_{1ij} &= 2\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_i(x_0)B_{jkl}(x_0)a_k(t)a_l(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{pq}_{2ij} &= -4\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_i(x_0) \phi_m(x_0) B_{jkl}(x_0) a_k(t) a_l(t) a_m(t), \\
 \mathbf{pq}_{3ij} &= 2\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \phi_i(x_0) \phi_m(x_0) \phi_n(x_0) B_{jkl}(x_0) a_k(t) a_l(t) a_m(t) a_n(t), \\
 \mathbf{ph}_{1ij} &= 2\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \phi_i(x_0) B_{jkl}(x_0) \dot{a}_k(t) a_l(t), \\
 \mathbf{ph}_{2ij} &= -4\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \phi_i(x_0) \phi_m(x_0) B_{jkl}(x_0) \dot{a}_k(t) a_m(t) a_l(t), \\
 \mathbf{ph}_{3ij} &= 2\delta_2 m \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \phi_i(x_0) \phi_m(x_0) \phi_n(x_0) B_{jkl}(x_0) \dot{a}_k(t) a_m(t) a_l(t) a_n(t).
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

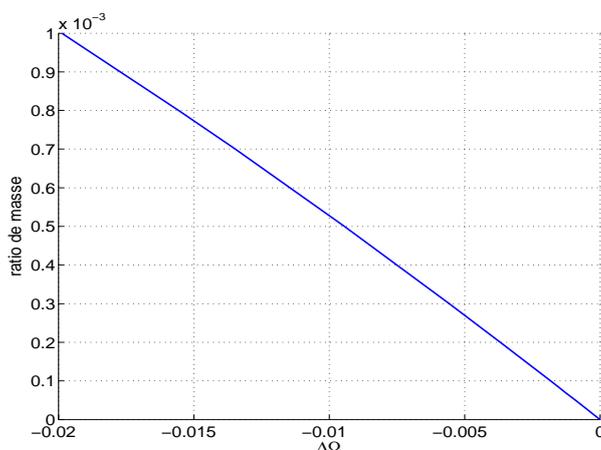
Les autres matrices sont déjà déterminées dans la section 4.3.1.

L'évolution de la réponse avec la particule ajoutée est montrée par la figure 4.15. Le décalage fréquentiel et la largeur  $\Delta\Omega_h$  du cycle d'hystérésis augmentent avec la masse de la particule. Comme pour la micro/nano-poutre encastrée-encastrée, le décalage fréquentiel est linéaire, voir la figure 4.16. Contrairement au cas de la micro/nano-poutre encastrée-encastrée, les réponses ne restent pas parallèles, voir la figure 4.15.



**FIGURE 4.15:** Réponse de la configuration 4 dans le cas avec masse ajoutée et  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$ .  $m = 0$  (rouge),  $m = 10^{-4}$  (bleu),  $m = 10^{-3}$  (vert).

La différence d'amplitude est tenue avec une petite particule ajoutée. Dans la mesure, où les calculs sont réalisés de telle manière que la réponse reste en deçà du seuil de collage avec l'électrode. Une autre voie consiste à explorer les bassins d'attraction pour différencier les solutions propres à la dynamique forcée de la poutre avec ou sans particule. Cependant, le contrôle des conditions initiales demeure problématique.



**FIGURE 4.16:** Décalage de fréquence due aux masses ajoutées de la configuration 4 avec  $V_{dc} = 50V_{ac} = 5V$  et  $g = 1.6\mu m$ .

## 4.8 Conclusion

Le chapitre de la micro/nano-poutre encastree-libre a tout d'abord présenté la mise en œuvre pour résoudre l'équation du mouvement avec un ou plusieurs modes en utilisant la MAN et HBM. Cette méthode numérique validée avec une méthode d'intégration temporelle considère la réponse avec précision ainsi que l'influence des modes supérieurs. Comme la micro/nano-poutre encastree-encastree, la méthode de la moyenne harmonique ne représente pas le bon comportement. L'utilisation du développement en série de Taylor avec  $\frac{1}{(1-w)^2}$  est valide avec de petites amplitudes de vibration mais pour de grandes amplitudes, il faut augmenter son ordre ce qui complique et rallonge le calcul.

L'analyse paramétrique a montré que, plus l'amplitude de vibration est grande, plus les modes supérieurs ont une contribution importante. Le comportement raidissant ou assouplissant de la poutre encastree-libre dépend des ratios  $\frac{g}{l}$  et  $\frac{V_{dc}}{V_{ac}}$ . Contrairement à la poutre encastree-encastree, le comportement ne dépend pas de la hauteur de la poutre.

Avec une particule, la micro/nano-poutre voit sa réponse fréquentielle chuter. Pour de faible déflexion, l'amplitude de la réponse évolue peu avec ou sans particule. Pour de forte déflexion, la courbe de réponse peut changer beaucoup malgré la petite masse ajoutée, cependant ce changement peut induire un collage de la poutre. À la différence de la poutre encastree-encastree, la largeur du cycle d'hystérésis augmente linéairement avec la masse ajoutée. Analytiquement, il a été montré que l'amplitude de vibration change fortement à une fréquence de forçage proche d'un point de bifurcation ce qui est fort intéressant pour la détection de la particule ajoutée.



# Chapitre 5

## Détection de masse ajoutée

*Sur la base des modèles présentés dans les chapitres III et IV, ce cinquième chapitre présente des principes de détection alternatifs originaux de masse ajoutée, basés sur l'exploitation des non-linéarités de la réponse dynamique et permettant la détection en temps réel. Les problématiques de quantification et de localisation de la masse ajoutée sont traitées également.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Détection</b>	<b>90</b>
5.1.1	Principe	90
5.1.2	Comportement assouplissant	91
5.1.3	Comportement raidissant	92
5.1.4	Robustesse et réinitialisation du mécanisme de détection	92
5.1.5	Seuil de détection basé sur l'approche de la fréquence de bifurcation	95
5.1.6	Automatisation de la détection par balayage en fréquence	96
<b>5.2</b>	<b>Quantification avec une fréquence de fonctionnement fixe</b>	<b>101</b>
5.2.1	Comportement raidissant	103
5.2.2	Comportement assouplissant	103
<b>5.3</b>	<b>Quantification via le balayage en fréquence et les cycles d'hystérésis</b>	<b>104</b>
5.3.1	Influence de la vitesse $\epsilon$ du balayage en fréquence	104

5.3.2	Comportement assouplissant . . . . .	104
5.3.3	Comportement raidissant . . . . .	106
<b>5.4</b>	<b>Résolution du problème de réinitialisation par le comportement mixte .</b>	<b>108</b>
5.4.1	Micro-poutre encastrée-encastrée . . . . .	108
5.4.2	Micro-poutre encastrée-libre . . . . .	110
<b>5.5</b>	<b>Localisation . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>116</b>

---

La masse à détecter conditionne les dimensions du nano-résonateur. Un nano-résonateur de  $150nm$  de longueur et de fréquence fondamentale de  $2\text{ GHz}$  peut détecter la masse minimale de  $1.7\text{ yg}$  ( $1\text{ yg} = 10^{-24}\text{ g}$ ) correspondant à la masse d'un proton, [Chaste 12]. Mais pour un micro-résonateur de  $4\text{ }\mu\text{m}$  de longueur, la masse détectée minimale est  $0.4\text{ ag}$  ( $1\text{ ag} = 10^{-18}\text{ g}$ ) [Ilic 04a].

L'analyse de la sensibilité d'un micro-résonateur est réalisée en régime soit linéaire, soit non linéaire.

En régime linéaire, le modèle est simple mais comporte les inconvénients suivants :

- Le micro-résonateur a donc de petites amplitudes de vibration. Le bruit rend alors difficile la détermination de fréquence de résonance. Il existe des cas où l'amplitude peut ne pas dépasser le bruit thermo-mécanique.
- Pour détecter de faibles masses il faut réduire la dimension du micro-résonateur, ce qui est difficile avec les technologies actuelles.

Le régime non linéaire permet d'améliorer la sensibilité de détection. Le principe de la quasi-totalité des capteurs de masse est basé sur la détection du décalage de fréquence dû à la masse ajoutée. Néanmoins, dans les deux chapitres précédents, on a montré que la relation entre la masse ajoutée et le décalage de fréquence est linéaire. Plus la masse ajoutée est petite, plus le décalage est petit : ceci entraîne une difficulté de détection de petites masses. Récemment, Kumar et al. [Kumar 12] ont proposé une nouvelle technique basée sur le saut d'amplitude proche d'un point de bifurcation de la réponse non linéaire. À ce point, le saut d'amplitude a lieu avec une très petite masse ajoutée.

Ce chapitre présente d'abord comment détecter la masse ajoutée, puis comment quantifier et localiser la masse ajoutée.

Pour décrire les principes de détection d'une petite masse ajoutée, un modèle de micro-poutre encastrée-encastrée est considéré avec ou sans masse ajoutée, voir la figure 3.11. Ces développements peuvent s'appliquer à d'autres modèles. Avec une masse ajoutée, l'équation du mouvement de la micro-poutre encastrée-encastrée est la suivante :

$$[\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a}) + \mu_0 + \mu_1(\mathbf{a}) + \mu_2(\mathbf{a})]\ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a})] + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a})]\mathbf{a} - [N + \alpha_1 T_2(\mathbf{a})][\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{a})]\mathbf{a} = \alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega t))^2 \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Les composantes des matrices dans cette équation sont définies dans le chapitre 3. Les courbes de réponse des cas avec et sans masse ajoutée sont déterminées à partir de cette équation en utilisant la HBM+MAN. Pour les exemples, les deux configurations 1 et 2 dans le tableau 3.1 sont réutilisées. La configuration 1 conduit à un comportement raidissant et la configuration 2 à un comportement assouplissant. Pour améliorer la sensibilité de détection, il est envisageable de diminuer les dimensions  $b, h, l, g$  dans une même proportion sans changer le comportement.

Le ratio de masse ajoutée  $m$  est utilisé pour les sections suivantes. La masse physique de la particule ajoutée dépend du ratio  $m$  et de la configuration. Pour faciliter la traduction physique, quelques valeurs physiques  $m_p$  des masses ajoutées sont calculées dans le tableau 5.1.

**TABLE 5.1:** Valeurs physiques  $m_p$  des masses ajoutées.

ratio $m$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$
$m_p(\text{kg})$ de configuration 1	$9,3 \cdot 10^{-15}$	$4,6 \cdot 10^{-15}$	$9,3 \cdot 10^{-16}$
$m_p(\text{kg})$ de configuration 2	$2,1 \cdot 10^{-17}$	$1,05 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-18}$

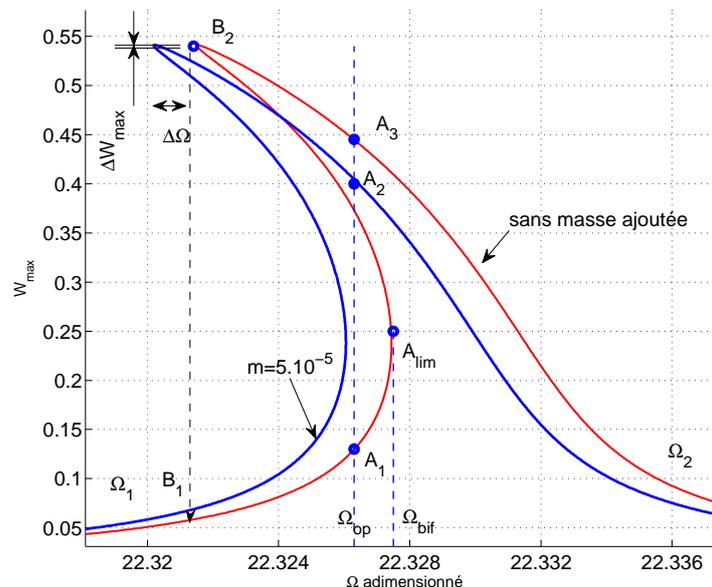
Pour les sections de détection et de quantification, l'hypothèse est que la position  $x_0$  de la masse ajoutée est située à  $x_0 = 0.5$  dans le cas de la micro-poutre encastree-encastree.

## 5.1 Détection

### 5.1.1 Principe

Le principe de détection d'une masse ajoutée est fondé sur le changement de la courbe de réponse de la micro-poutre dû à la masse ajoutée. Deux méthodes de détection sont possibles :

- Décalage en fréquence : dans le cas sans masse ajoutée, on détermine la courbe de réponse amplitude-fréquence. Si une masse ajoutée tombe sur la micro/nano-poutre, la courbe de réponse chute en fréquence, comme le montre la figure (5.1). La détection d'une masse ajoutée revient donc à détecter ce décalage en fréquence.



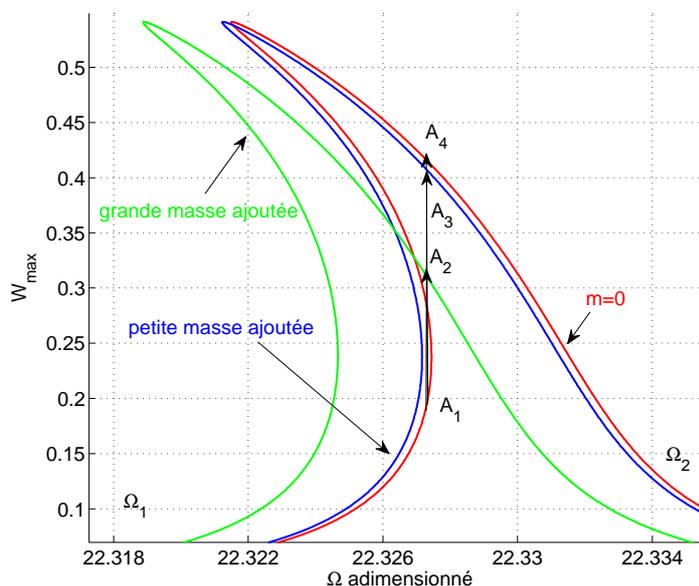
**FIGURE 5.1:** Réponse de la configuration 2,  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$  ; sans masse ajoutée (rouge), avec masse ajoutée  $m = 5 \cdot 10^{-5}$  (bleu).

- Décalage en amplitude : la masse ajoutée est très petite, mais il y a aussi un changement de l'amplitude maximale de vibration. Ce changement est très difficile à reconnaître ; c'est la valeur  $\Delta W_{max}$  montrée sur la figure (5.1). Dans la référence [Kumar 12], les auteurs ont utilisé le changement d'amplitude engendré par la masse ajoutée dans le voisinage du point limite  $A_{lim}$  (bifurcation de type nœud-col). À cette position, la différence des amplitudes est très significative. On utilise donc ce saut d'amplitude pour détecter la présence d'une masse ajoutée.

Ensuite, le saut d'amplitude est considéré avec deux comportements assouplissant et raidissant.

### 5.1.2 Comportement assouplissant

Soit la configuration 2 qui a un comportement assouplissant. Afin d'identifier la présence de la masse ajoutée, la micro-poutre est forcée à une fréquence de fonctionnement  $\Omega_{op}$  proche de la fréquence de bifurcation  $\Omega_{bif}$  (voir figure 5.1). En pratique, la fréquence de forçage est d'abord augmentée de  $\Omega_1$  petit à  $\Omega_2$  grand et elle est fixée à  $\Omega_{op}$ . Puis, comme le montre la figure 5.1, la présence soudaine de la masse ajoutée induit un saut du point  $A_1$  sur la courbe rouge (sans masse ajoutée) au point  $A_2$  sur la courbe bleue (avec masse ajoutée).



**FIGURE 5.2:** Réponse de la configuration 2 avec des masses ajoutées différentes et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$  ; sans masse ajoutée (rouge), petite (bleu) et grande (vert) masses ajoutées

La figure 5.2 montre les réponses en fréquence dues à deux masses ajoutées différentes. Pour une petite masse ajoutée, le décalage en fréquence à gauche est faible, il

provoque donc un grand saut du point  $A_1$  au point  $A_3$  et vice-versa, pour une masse ajoutée plus grande, un petit saut du point  $A_1$  au point  $A_2$ . Plus la masse ajoutée est grande, plus le saut d'amplitude est petit. Étant donné qu'on cherche à détecter de petites masses ajoutées, la détection de masse en utilisant le saut d'amplitude est donc plus intéressante que l'utilisation du décalage en fréquence.

### 5.1.3 Comportement raidissant

Soit la configuration 1 qui présente le comportement raidissant, voir figure 5.3. En présence d'une particule, quand la fréquence de forçage s'approche de la fréquence de bifurcation  $\Omega_{bif}$ , la réponse saute du point  $A_1$  (courbe rouge) au point  $B$  (courbe bleue). La masse est détectée par le grand saut  $W_{max}(A_1)$  à  $W_{max}(B)$ .

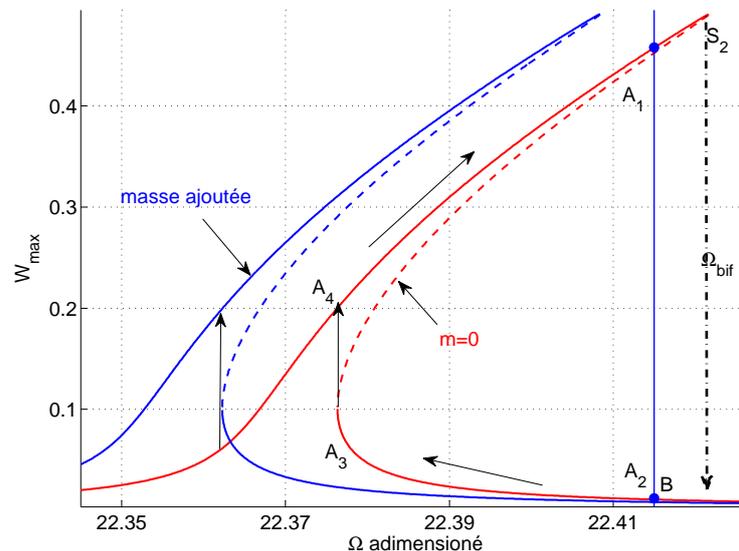


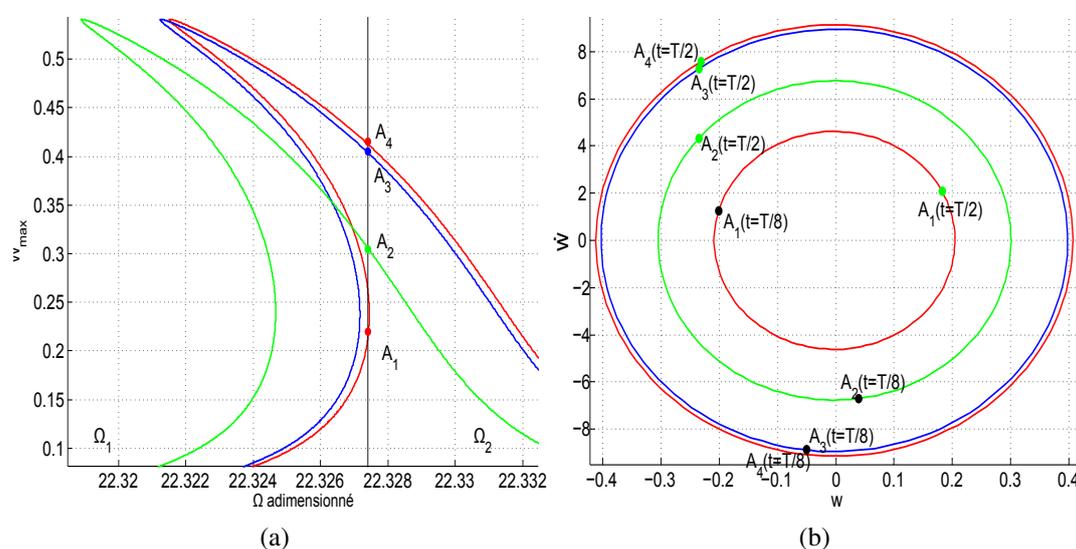
FIGURE 5.3: Réponse de la configuration 1 et  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$  ; sans (rouge) et avec (bleu) masse ajoutée.

### 5.1.4 Robustesse et réinitialisation du mécanisme de détection

Pour le comportement assouplissant, la réponse se stabilise en  $A_2$  avec la masse ajoutée ; après son décollage, soit la réponse revient à  $A_1$ , soit elle saute en  $A_3$ , voir figure 5.1. Si elle revient à  $A_1$ , la prochaine masse ajoutée est facilement détectée. À l'inverse, si la réponse saute au point plus haut  $A_3$ , la prochaine masse ajoutée n'entraîne qu'un petit saut, de  $A_3$  à  $A_2$ , ce qui est difficile à détecter. La valeur de la masse ajoutée et l'instant de son décollage fournissent la condition initiale de stabilisation au point  $A_2$ . La masse ajou-

tée peut décoller à un instant imprévu, chaque instant correspond à une condition initiale différente, ainsi il faut tracer le bassin d'attraction pour chaque instant dans une période.

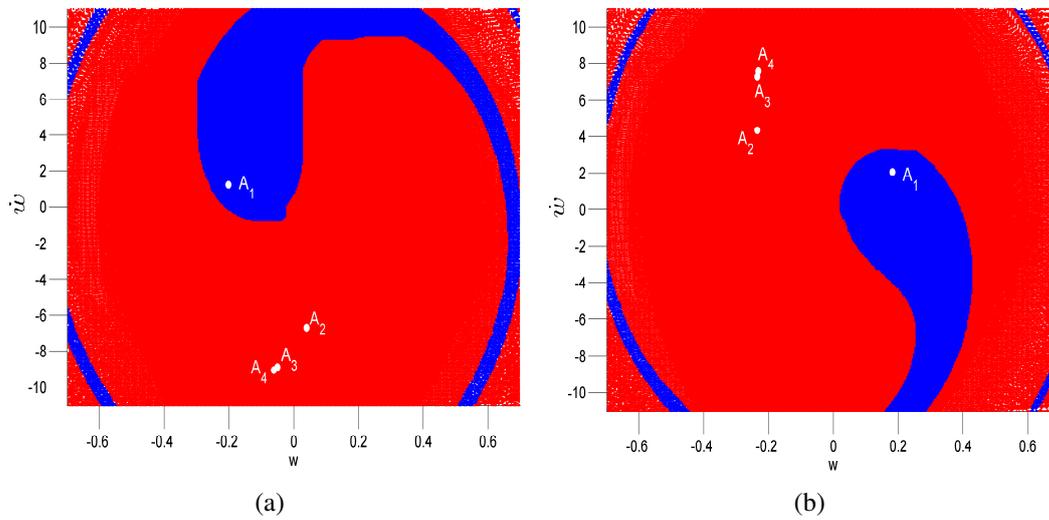
La figure 5.4-a montre la détection à  $\Omega = 22.3274$ ;  $A_2$  et  $A_3$  sont les deux points correspondant aux deux masses ajoutées  $m = 10^{-5}$  et  $m = 10^{-4}$ . Chaque point stable sur la courbe de réponse  $W_{max} - \Omega$  correspond à une orbite, voir figure 5.4-b. Soient deux instants imprévus où les masses ajoutées quittent la micro-poutre :  $t = T/8$  (points noirs) et  $t = T/2$  (points verts). La figure 5.5 représente les bassins d'attractions correspondant à ces instants, elle montre que le bassin d'attraction et la condition initiale tournent au fur et à mesure que le temps change. Les points  $A_2, A_3$  se trouvent toujours dans la région rouge correspondant au point stabilisé en haut  $A_4$ . Autrement dit, le point d'arrivée en haut ou en bas ne dépend pas du moment où la masse ajoutée quitte la micro-poutre.



**FIGURE 5.4:** Réponse de la configuration 2 avec  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) :  $m=0$  (rouge),  $m = 10^{-5}$  (bleu),  $m = 10^{-4}$  (vert). (b) : orbites des solutions stables  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ .

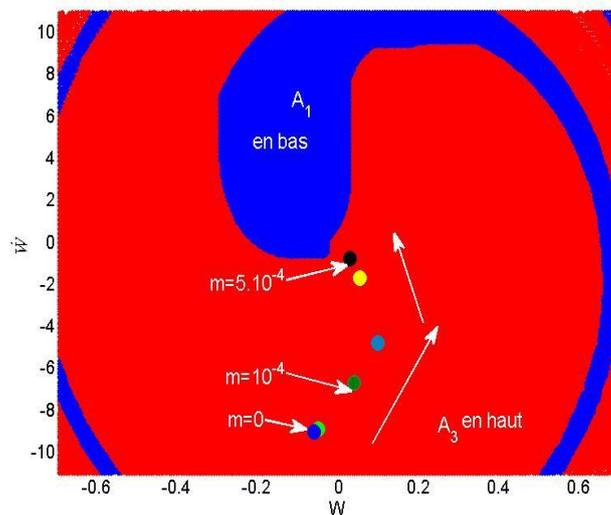
Ensuite, on détermine les bassins d'attraction de la micro-poutre sans masse ajoutée et on y place les réponses pour plusieurs masses ajoutées (points de couleur) afin de vérifier le point d'arrivée de la réponse après le décollage des masses ajoutées, voir figure 5.6. D'après les calculs à  $\Omega = 22.3274$ , on constate que pour les ratios de masse  $m < 5 \times 10^{-4}$  correspondant aux masses physiques  $m_p \leq 10^{-16}kg$ , le saut est toujours vers la solution en haut  $A_3$  et par conséquent la détection basée sur la bifurcation ne fonctionne plus, voir figure 5.6.

Sur la figure 5.7, la fréquence d'excitation étant  $\Omega = 22.325$ , le bassin d'attraction de la solution stable en bas est plus large ; pour les ratios de masse  $m \geq 1.5 \times 10^{-4}$  (correspondant aux masses physiques  $m_p \geq 3.10^{-17}kg$ ), la réponse retourne en  $A_1$  après le départ de la masse. Les masses d'intérêt pratique sont plus petites que ces valeurs, on peut conclure que le système ne revient à sa position stable initiale, c'est-à-dire que le mécanisme de dé-



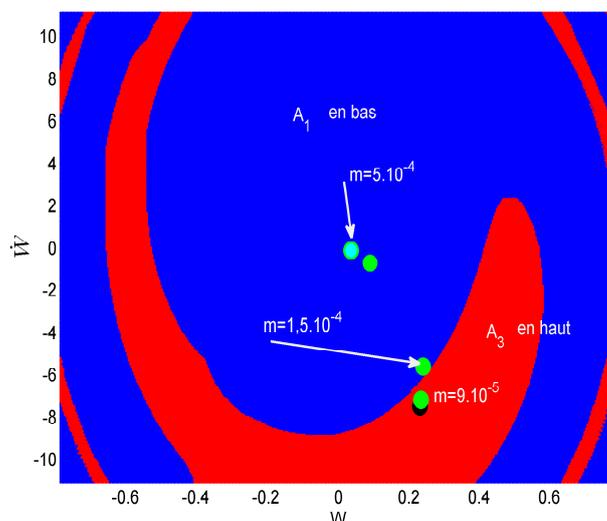
**FIGURE 5.5:** Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à  $\Omega = 22.3274$  et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) :  $t = \frac{T}{8}$ . (b) :  $t = \frac{T}{2}$ .

tection n'est pas réinitialisé, et que donc la détection basée sur la bifurcation ne fonctionne qu'une fois.



**FIGURE 5.6:** Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à  $\Omega = 22.3274$  et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ .

Pour détecter la nouvelle masse ajoutée, il faut donc réinitialiser le mécanisme de détection. Une solution consiste à diminuer d'abord la fréquence de fonctionnement jus-



**FIGURE 5.7:** Bassin d'attraction de la configuration 2 sans masse ajoutée à  $\Omega = 22.325$  et  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$

qu'au point  $B_2$ , voir figure 5.1. La réponse saute alors en bas vers le point  $B_1$ . Enfin, la fréquence est augmentée jusqu'au point initial  $A_1$  afin d'attendre la nouvelle masse ajoutée. Pour le comportement raidissant, le principe de réinitialisation est représenté sur la figure 5.3. Après le décollage de la masse ajoutée, la réponse arrive en  $A_2$  et ne peut pas revenir en  $A_1$ . Ainsi, la réinitialisation est nécessaire pour revenir au point de fonctionnement  $A_1$ . Tout d'abord, la fréquence est diminuée de  $\Omega_{A_2}$  à  $\Omega_{A_3}$ . La réponse saute du point  $A_3$  au point  $A_4$ , puis la fréquence est augmentée jusqu'à la fréquence de fonctionnement  $\Omega_{A_1}$  pour détecter la nouvelle masse ajoutée.

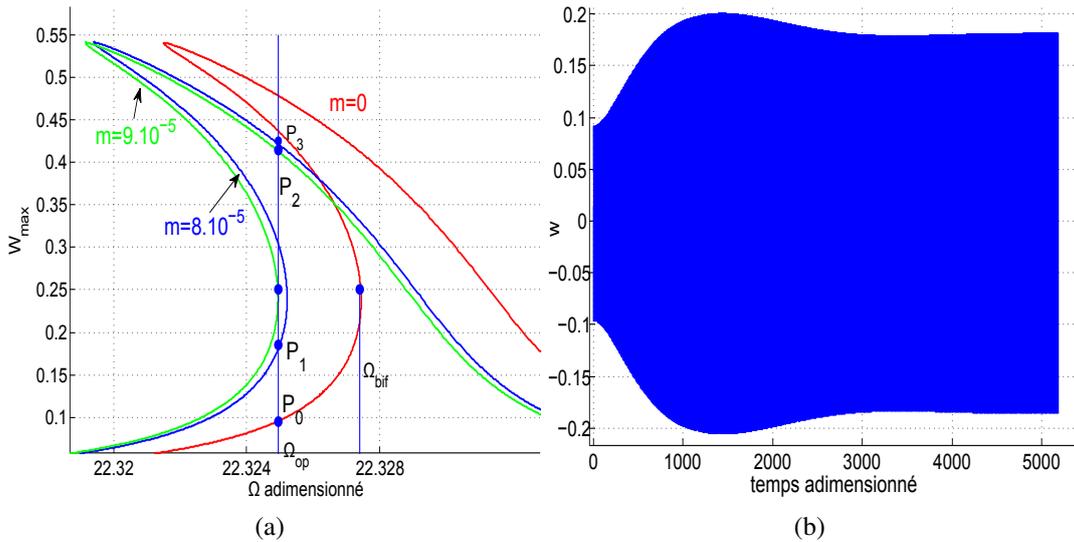
Cependant, pour ce type de réinitialisation, certains inconvénients se posent. Par exemple, la différence des amplitudes avant et après le décollage de la particule est petite. Ainsi, comme le décollage de la particule n'est pas confirmé, la réinitialisation du mécanisme ne peut pas être opérée. D'autre part le processus de détection n'est pas automatique.

Ces limitations peuvent être surmontées avec l'utilisation du balayage en fréquence, présentée dans la section 5.1.6.

### 5.1.5 Seuil de détection basé sur l'approche de la fréquence de bifurcation

Théoriquement, si la fréquence de bifurcation est exactement approchée ( $\Omega_{op} = \Omega_{bif}$ ), le saut d'amplitude de vibration peut avoir lieu avec une masse ajoutée infinitésimale. En pratique, si la fréquence de forçage  $\Omega_{op}$  ne s'approche que de la fréquence de bifurcation  $\Omega_{bif}$  telle que  $\Omega_{op} < \Omega_{bif}$ , seules les masses ajoutées telles que  $m \geq m_l$  sont détectées par

de grands sauts. Pour  $m < m_l$ , la détection est difficile en raison du petit saut. Par exemple, sur la figure 5.8, à  $\Omega = 22.325$ , la présence de la masse  $m \geq 9 \times 10^{-5}$  est détectée par le grand saut de  $P_0$  ( $W_{max} = 0.09$ ) sur la courbe rouge à  $P_2$  ( $W_{max} = 0.42$ ) sur la courbe verte. Pour les masses  $m < 9 \cdot 10^{-5}$ , par exemple,  $m = 8 \cdot 10^{-5}$ , le saut est faible, de  $P_0$  à  $P_1$  sur la courbe bleue, la réponse ne saute pas de  $P_0$  à  $P_2$  (courbe bleue) ; ceci est montré sur la figure 5.8-b qui présente le changement de la réponse après l'arrivée de masse  $m = 8 \cdot 10^{-5}$ .



**FIGURE 5.8:** Réponse de la configuration 2 avec  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$ . (a) :  $m = 0$  (rouge) ;  $m = 8 \cdot 10^{-5}$  (bleu) ;  $m = 9 \cdot 10^{-5}$  (vert). (b) : réponse transitoire après l'arrivée au point  $P_0$  de la masse  $m = 8 \cdot 10^{-5}$ .

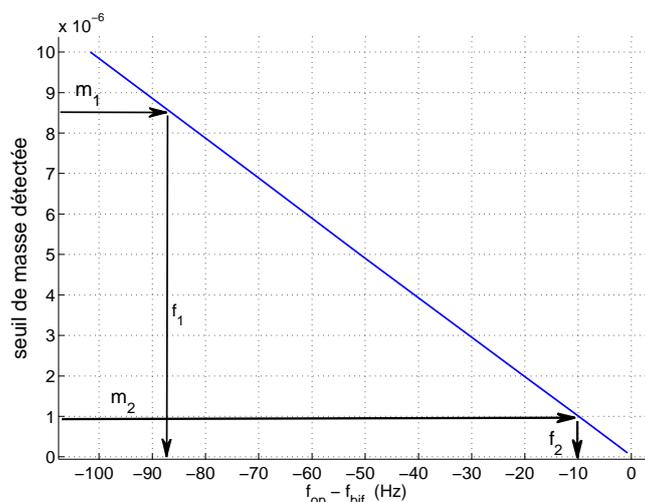
Une approche simple pour la quantification de la masse ajoutée peut être basée sur l'utilisation de plusieurs fréquences de fonctionnement. Par exemple, la première fréquence de fonctionnement  $f_1$  est loin de la fréquence de bifurcation pour détecter de grandes masses ajoutées  $m \geq m_1$ , voir figure 5.9 ; la deuxième fréquence de fonctionnement  $f_2$  est plus proche de la fréquence de bifurcation pour détecter des masses plus petites  $m \geq m_2$ .

### 5.1.6 Automatisation de la détection par balayage en fréquence

Le problème de réinitialisation présenté dans la section 5.1.4 peut être résolu en utilisant un balayage en fréquence, ce qui rend possible la détection de masses ajoutées en temps réel.

Pour cela, il s'agit de faire varier lentement la fréquence selon la loi sinusoïdale suivante :

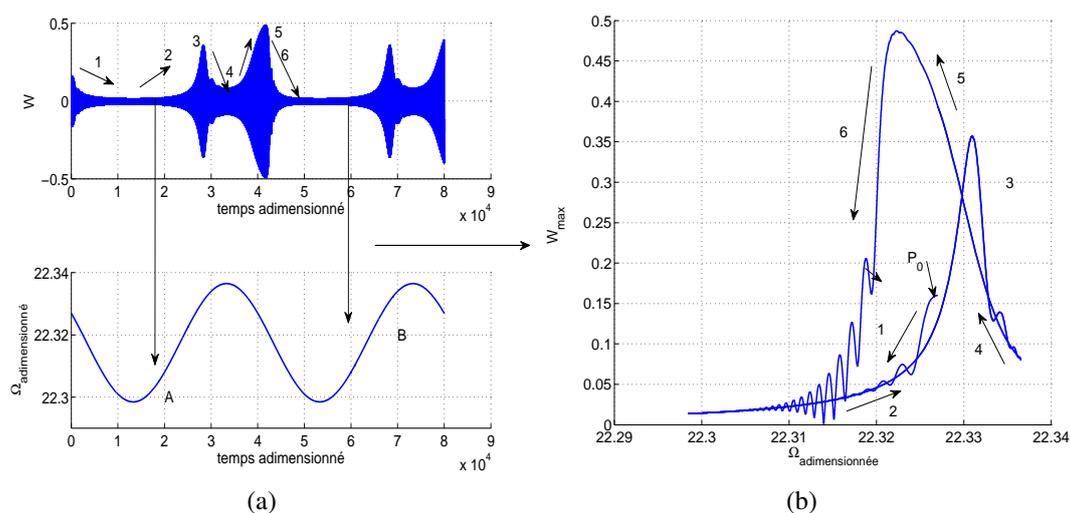
$$\Omega(t) = \Omega_{op} + \delta \cos(\varepsilon \pi t + \Phi), \tag{5.2}$$



**FIGURE 5.9:** Seuil de masse ajoutée détectée selon l'approche de la fréquence de bifurcation.

où  $\varepsilon$  est la vitesse de balayage qui doit être suffisamment faible (voir section 5.3.1). On pose :  $\Omega_{max} = \Omega_{op} + \delta$  et  $\Omega_{min} = \Omega_{op} - \delta$  les bornes du balayage en fréquence.

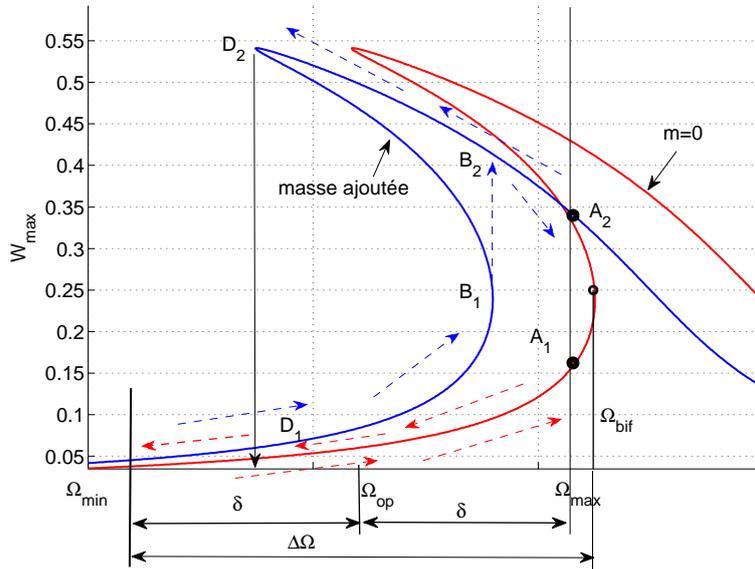
La fréquence  $\Omega(t)$  déterminée au cours du temps à l'aide de (5.2) est introduite dans les équations du mouvement (5.1) résolues par intégration temporelle qui donne ainsi les 2 courbes de la figure 5.10-a. Les courbes de réponses balayées sont ensuite déterminées par la valeur d'enveloppe de  $W$  et la valeur correspondante de  $\Omega$  pour une valeur de  $t$  donnée.



**FIGURE 5.10:** Détermination de la réponse de balayage en fréquence. (a) : réponse de l'amplitude et de  $\Omega$  dans le temps ; (b) : réponse fréquentielle balayée dégageant le phénomène d'hystérésis.

### 5.1.6.1 Comportement assouplissant

Le principe du balayage en fréquence est présenté sur la figure 5.11 où les réponses avec et sans masse ajoutée ont été calculées par HBM+MAN. La fréquence maximale du balayage est inférieure à la fréquence de bifurcation :  $\Omega_{max} = \Omega_{op} + \delta \leq \Omega_{bif}$  et  $\Delta\Omega$  est le décalage en fréquence induit par la masse ajoutée maximale à détecter. Lorsque la fréquence effectue le cycle de  $\Omega_{min} \rightarrow \Omega_{max} \rightarrow \Omega_{min}$ , la réponse avec la masse ajoutée effectue la séquence  $\Omega_{min} \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow D_2 \rightarrow D_1 \rightarrow \Omega_{min}$ , et atteint  $W_{max} > 0.5$ . Sans masse ajoutée,  $\Omega_{min} \rightarrow A_1 \rightarrow \Omega_{min}$  et par conséquent  $W_{max} < 0.2$ . La détection est basée sur cette différence.



**FIGURE 5.11:** Réponse fréquentielle : principe du balayage en fréquence du comportement assouplissant avec  $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$ .

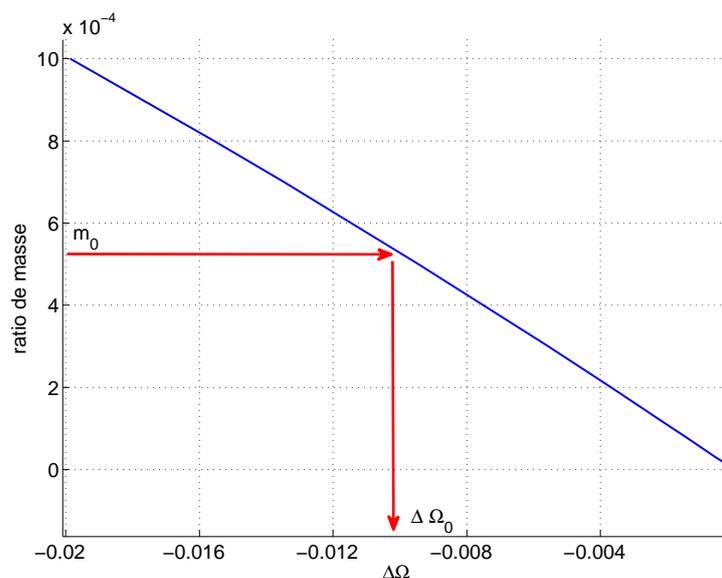
Pour détecter des masses ajoutées telles que  $m \geq m_0$ , il convient de mesurer  $\Delta\Omega$  à partir de la courbe de la relation entre la masse ajoutée et le décalage fréquentiel, voir figure 5.12 et  $\Delta\Omega = \Delta\Omega_0$ . La fréquence de bifurcation  $\Omega_{bif}$  est définie avec la micro-poutre sans masse ajoutée. À partir de  $\Omega_{bif}$  et  $\Delta\Omega$ , la fréquence  $\Omega_{min}$  puis la fréquence de fonctionnement  $\Omega_{op}$  et  $\delta$  sont déterminés.

En supposant que la masse ajoutée peut rester sur la micro-poutre pendant 2 périodes de balayage et qu'en cours de détection il n'y a qu'une masse ajoutée sur la micro-poutre, la forme suivante du balayage en fréquence est considérée :

$$\Omega(t) = 22.317 + 0.01 \sin 10^{-5} \pi t, \quad (5.3)$$

correspondant à la loi physique ( $\Omega_{op} = 8.187$  MHz,  $\varepsilon = 23$  Hz,  $\delta = 3.67$  kHz) :

$$\tilde{\Omega}(\tilde{t}) = 8.1866 \times 10^6 + 3.67 \times 10^3 \sin(23\pi\tilde{t}) \text{ (Hz)}. \quad (5.4)$$



**FIGURE 5.12:** Décalage de fréquence dû à la masse ajoutée

La figure 5.13 montre l'évolution de  $W_{max}$  au cours du temps pendant quelques périodes de balayage en fréquence. Sur cette figure, le scénario suivant est étudié : à partir d'une position initiale quelconque, la micro-poutre vibre d'abord sans masse ajoutée.  $P_0$  ne correspondant pas forcément à une solution périodique, alors dans les premiers temps la réponse  $P_0P_1$  correspond à un régime transitoire qui tend vers le régime permanent  $P_1$  et ne se trouve pas sur la courbe de référence (courbe d'hystérésis), voir figure 5.13-b ; la courbe  $P_0P_1$  est comme une réponse "bruitée". Puis à l'instant  $B$ , la masse ajoutée  $m_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  qu'il s'agit de détecter (courbe rose) tombe sur la micro-poutre. Après 2 périodes de balayage, cette masse ajoutée quitte la micro-poutre à l'instant du point  $F$ , la micro-poutre continue à vibrer sans masse ajoutée. Finalement une autre masse ajoutée  $m_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  (courbe verte) arrive sur la poutre à l'instant du point  $H$ .

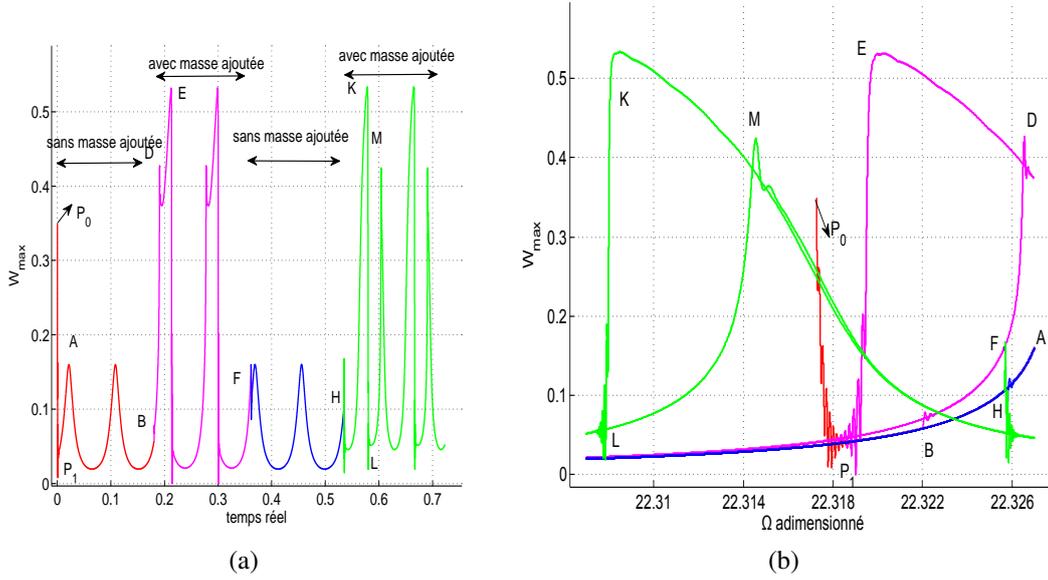
Dans les premiers temps de l'arrivée ou du décollage de la masse ajoutée, les réponses ne sont pas encore stabilisées ; alors les réponses ne se situent pas exactement sur la courbe d'hystérésis, elles sont comme "bruitées".

On constate sur la figure 5.13-a que, grâce aux sauts lors des boucles d'hystérésis, les pics d'amplitudes sont beaucoup plus élevés en présence d'une masse ajoutée. Ainsi le cas avec masse ajoutée est bien détecté si, dans deux périodes successives,  $W_{max} > 0.5$  et vice versa, s'il existe  $W_{max} < 0.2$  dans une période, alors il n'y a pas de masse ajoutée.

### 5.1.6.2 Comportement raidissant

On considère le balayage en fréquence avec les fréquences maximale et minimale respectivement inférieures aux fréquences de bifurcation  $\Omega_{bif}$  et  $\Omega_{S1}$ , i.e  $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$  et  $\Omega_{min} < \Omega_{S1}$ . On a alors  $\Delta\Omega > \Delta\Omega_{bif}$ , voir figure 5.14, où  $\Delta\Omega$  est le décalage en fréquence induit par la masse ajoutée maximale que l'on souhaite détecter.

## 5. Détection de masse ajoutée



**FIGURE 5.13:** Réponse du balayage en fréquence de la configuration 2 ; sans masse ajoutée (rouge et bleu) ;  $m_1 = 5.10^{-5}$  (rose) ;  $m_2 = 5.10^{-4}$  (vert). (a) : réponse de  $W_{max}$  en fonction du temps  $t$  ; (b) : réponses fréquentielles balayées avec phénomène d'hystérésis.

Les deux fréquences de bifurcation  $\Omega_{S_1}, \Omega_{S_2}$  sont d'abord déterminées avec la micro-poutre sans masse ajoutée et  $\Delta\Omega_{bif} = \Omega_{S_2} - \Omega_{S_1}$ . Puis, on choisit  $\Delta\Omega$  supérieur à  $\Delta\Omega_{bif}$ . Plus  $\Omega_{max}$  est proche de la fréquence de bifurcation  $\Omega_{bif}$ , plus la masse détectée peut être petite. En résumé, tous les paramètres du balayage en fréquence sont déterminés.

Pour illustrer ce principe, la loi de variation de balayage en fréquence suivante est imposée à la configuration 1 :

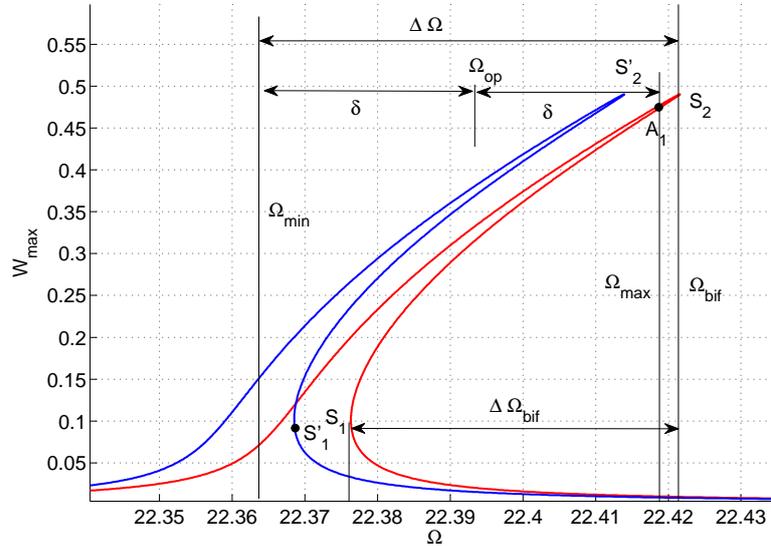
$$\Omega(t) = 22.3956 + 0.0256 \sin 5.10^{-5} \pi t, \quad (5.5)$$

correspondant à la loi physique :

$$\tilde{\Omega}(\tilde{t}) = 5.477 \times 10^5 + 620 \sin(7.68 \pi \tilde{t}) \text{ (Hz)}. \quad (5.6)$$

La figure 5.15 détaille le scénario de détection. D'abord la micro-poutre vibre sans masse ajoutée ; à l'instant  $P_1$ , une masse  $m_1$  arrive sur la micro-poutre. Après un temps supérieur à deux périodes du balayage, (point  $P_2$ ), la masse décolle. La micro-poutre continue à vibrer sans masse ajoutée sur un temps supérieur à 2 périodes, et puis une autre masse ajoutée  $m_2$  arrive sur la micro-poutre (point  $P_3$ ).

On peut détecter la masse ajoutée soit par le saut abrupt de la réponse dû à la masse ajoutée, soit par le changement d'amplitude minimale de la réponse. En effet, avec la masse ajoutée, la réponse  $DE$  est "verticale" alors que sans masse ajoutée, la réponse est "inclinée" selon  $AB$ . De plus, pour la réponse de  $A$  à  $B$ ,  $W_{max}$  change de  $W_{max}(A) = 0.49$  à  $W_{max}(B) = 0.13$  ; tandis qu'avec une masse ajoutée  $m_1 = 10^{-5}$  (courbe bleue) ou  $m_2 = 10^{-4}$  (courbe verte), pour la réponse de  $D$  à  $E$ ,  $W_{max}$  change de 0.49 à 0.01. Il convient



**FIGURE 5.14:** Réponse fréquentielle : principe du balayage du comportement raidissant avec  $\Omega_{\max} \leq \Omega_{\text{bif}}$ .

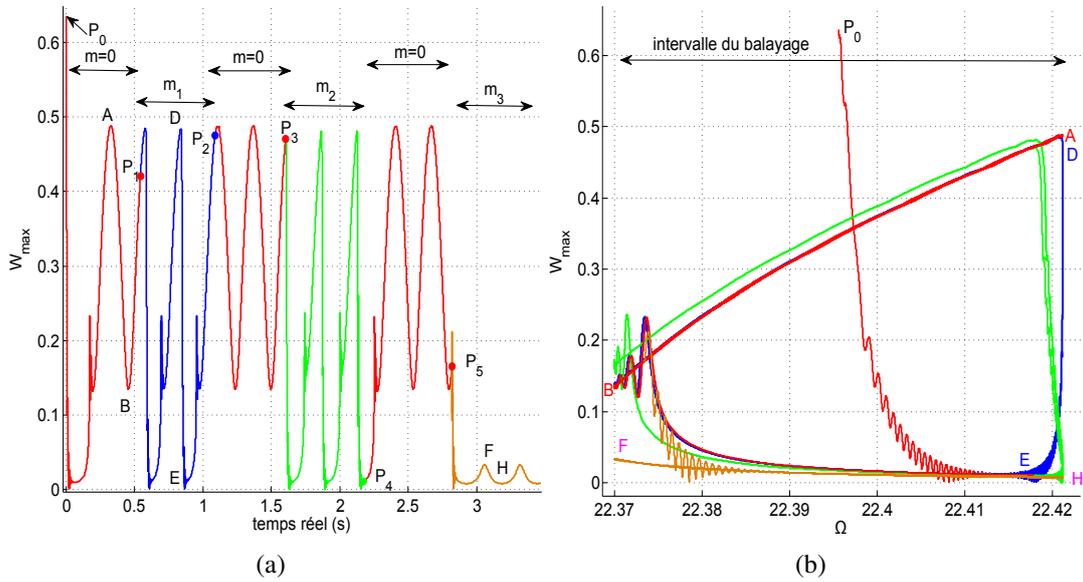
de noter, toutefois, qu'avec une masse plus importante  $m_3 = 5 \cdot 10^{-4}$  (courbe marron), la réponse a une amplitude très faible et le principe de détection proposé ne peut s'appliquer. Cela est dû au fait que cette masse ajoutée induit un décalage tel que  $\Omega(S'_1) < \Omega_{\min}$  et par conséquent le balayage opère sur des fréquences supérieures à celles du pic de résonance.

En résumé, le balayage en fréquence conduit à une détection alternative en temps réel. La masse ajoutée est soit détectée par la différence d'amplitude dans le cas du comportement assouplissant soit par la différente inclinaison de la courbe de réponse dans le cas du comportement raidissant.

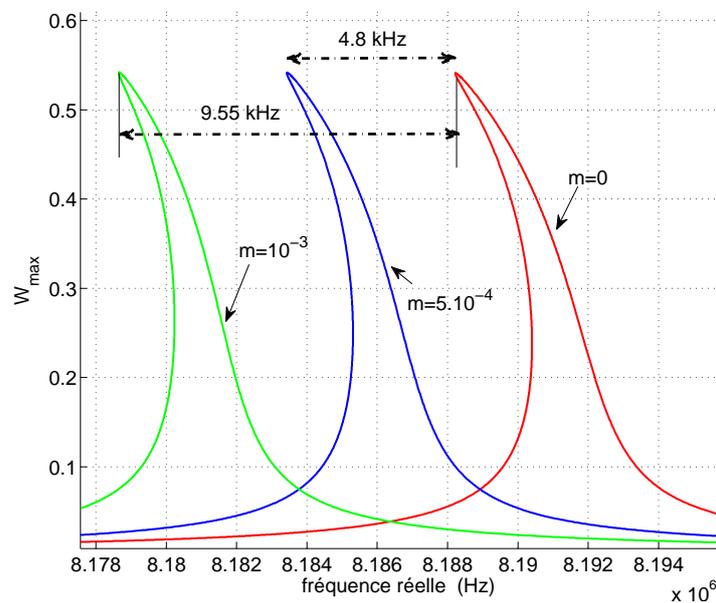
## 5.2 Quantification avec une fréquence de fonctionnement fixe

Soit  $x_0 \in [0, 1]$ , la position de la masse ajoutée sur la micro-poutre. Si la masse ajoutée ne tombe pas à la position pour laquelle  $\phi(x_0) = 0$  ( $\phi$  étant le mode propre considéré), la courbe de réponse va changer, soit en  $\Delta\Omega$ , soit en  $\Delta W$ . Classiquement, le décalage en fréquence  $\Delta\Omega$  est mesuré pour quantifier la masse ajoutée. Pour une même position sur la micro-poutre, des masses ajoutées différentes introduisent des décalages différents, voir figure 5.16. La mesure en régime non linéaire est plus intéressante qu'en régime linéaire car les amplitudes sont plus grandes et bien repérables même en présence de bruit. Néanmoins, comme la relation entre  $\Delta\Omega$  et  $m$  est linéaire, la quantification d'une masse très petite est difficile car le décalage est très faible.

## 5. Détection de masse ajoutée



**FIGURE 5.15:** Réponse du balayage en fréquence de la configuration 1 : sans masse ajoutée (rouge) ;  $m = 10^{-5}$  (bleu) ;  $m = 10^{-4}$  (vert) ;  $m = 5.10^{-4}$  (rose). (a) : réponse de  $W_{max}$  en fonction du temps ; (b) : réponses fréquentielles balayées montrant le phénomène d'hystérésis.



**FIGURE 5.16:** Réponse fréquentielle : décalage de fréquence de configuration 2,  $V_{dc} = 100V_{ac} = 1.9V$  ; Les masses ajoutées tombent à position  $x_0 = 0.5$ .

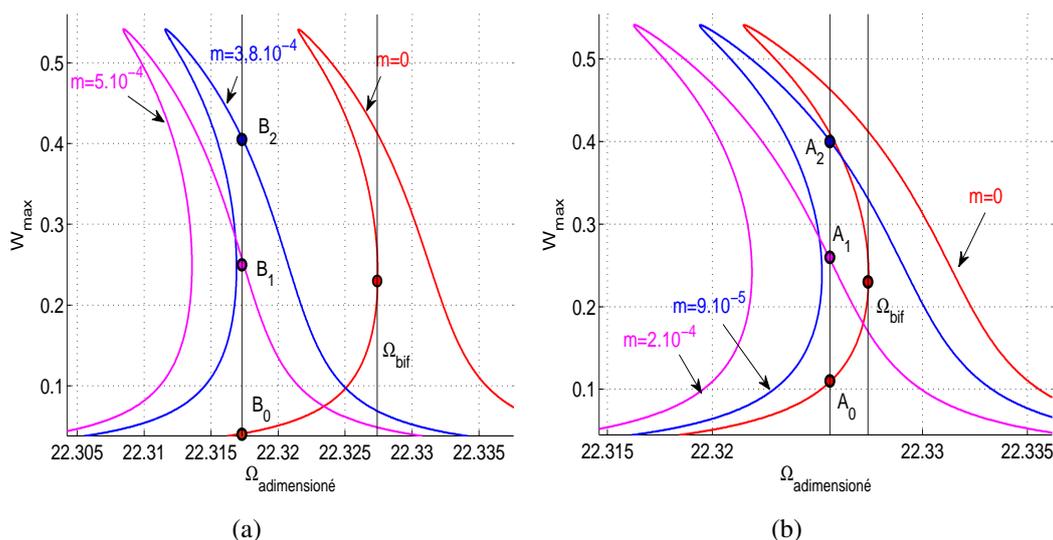
La quantification peut également être effectuée en se basant sur le saut d'amplitude à une fréquence fixe.

### 5.2.1 Comportement raidissant

Pour ce comportement, s'il y a une masse ajoutée tombée sur la micro-poutre, la réponse saute vers le bas (de  $W_{max} = 0.48$  à  $W_{max} \approx 0$ ), voir figure 5.3, ce saut est sensiblement le même quelle que soit la valeur de la masse ajoutée. Le comportement raidissant détecte la présence de la masse mais ne peut pas la quantifier précisément.

### 5.2.2 Comportement assouplissant

Pour le comportement assouplissant, à une fréquence fixe, le saut dépend de la masse ajoutée : une petite masse induit un grand saut et vice versa. Sur la figure 5.17-a, à  $\Omega = 22.317$ , les masses telles que  $3.8 \times 10^{-4} \leq m \leq 5 \times 10^{-4}$  sont quantifiées par un grand saut de  $W_{max} = 0.02$  (point  $B_0$ ) à  $W_{max} = 0.25$  (point  $B_1$ ) ou  $W_{max} = 0.4$  (point  $B_2$ ). Cependant, l'utilisation d'une fréquence fixe n'est pas suffisante pour quantifier un large intervalle de valeurs des masses ajoutées. Ce problème peut être résolu en utilisant plusieurs fréquences fixes. Par exemple, si on quantifie encore à  $\Omega = 22.325$ , d'autres masses ajoutées sont détectées, telles que  $9 \cdot 10^{-5} \leq m \leq 2 \cdot 10^{-4}$ , par le saut de  $W_{max} = 0.1$  à  $W_{max} = 0.25$  ou  $W_{max} = 0.4$  (points  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  de la figure 5.17-b).

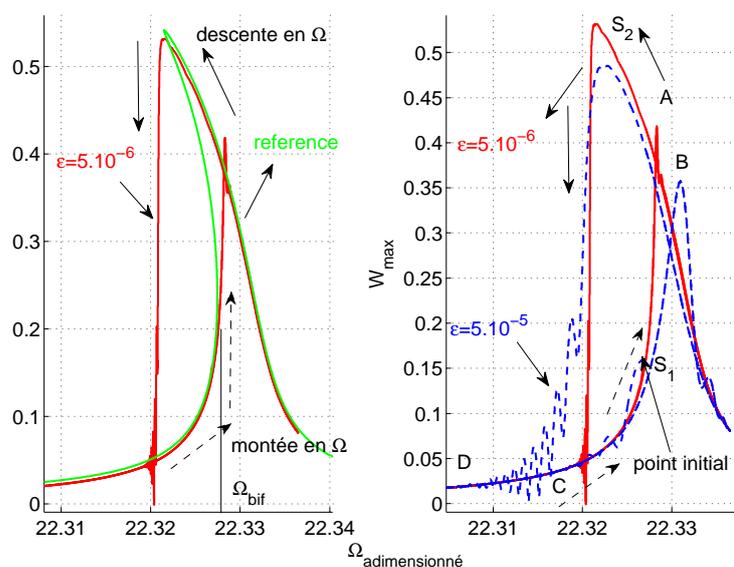


**FIGURE 5.17:** Réponse de la configuration 2 : quantification à deux fréquences fixes. (a) :  $\Omega = 22.317$  ; (b) :  $\Omega = 22.325$ .

## 5.3 Quantification via le balayage en fréquence et les cycles d'hystérésis

### 5.3.1 Influence de la vitesse $\varepsilon$ du balayage en fréquence

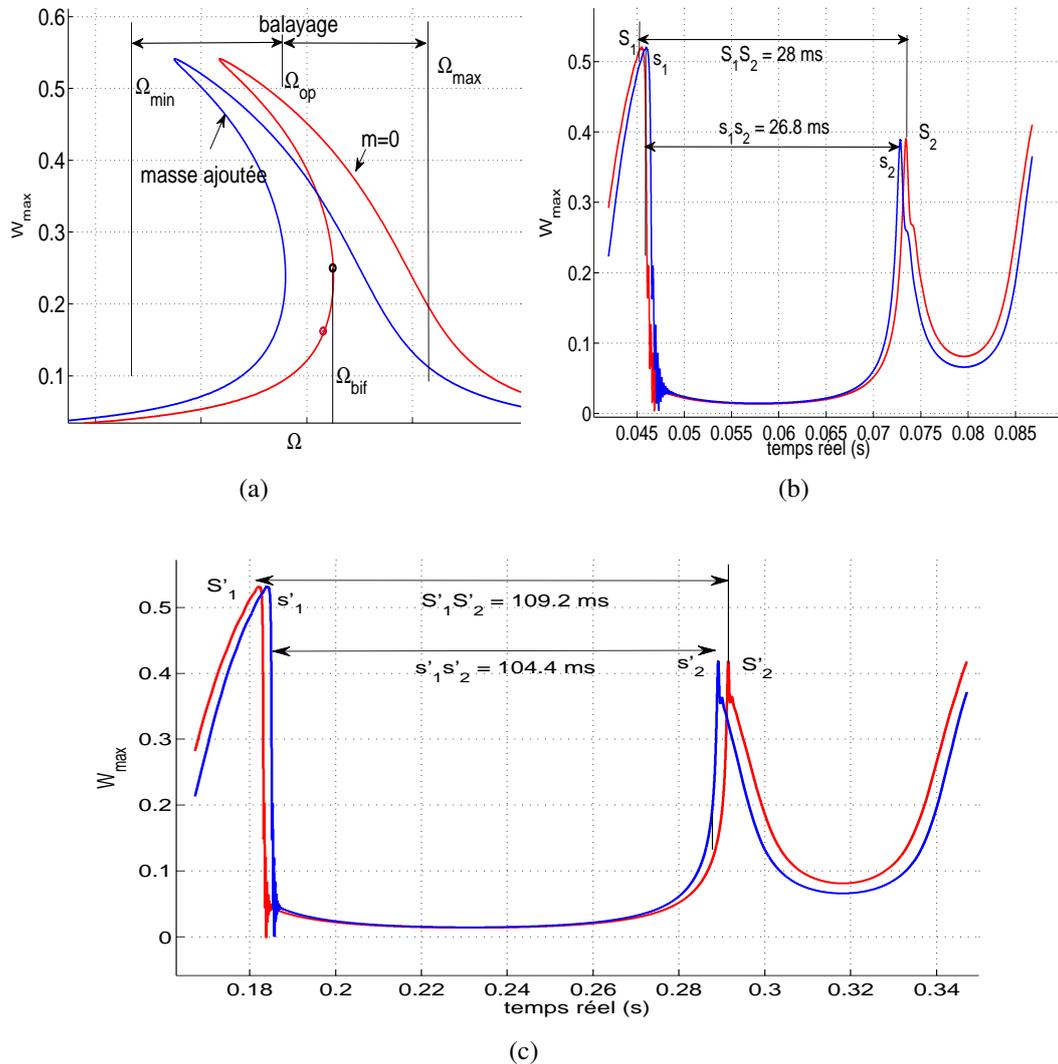
Pour pouvoir quantifier la masse d'une particule ajoutée, il est nécessaire de déterminer la courbe de réponse avec précision qui dépend de la vitesse du balayage  $\varepsilon$ , voir figure 5.18. Sur la figure 5.18-a, deux cas de balayage en fréquence calculés par intégration temporelle avec  $\varepsilon = 5.10^{-6}$  (courbe rouge) et  $\varepsilon = 5.10^{-5}$  (courbe bleue) sont comparés avec la courbe de réponse de référence calculée par HBM+MAN (courbe verte). La réponse avec  $\varepsilon = 5.10^{-6}$  est similaire à la réponse de référence. Néanmoins avec  $\varepsilon$  plus grand, la réponse évolue, voir figure 5.18-b. Théoriquement, le saut au point de bifurcation est vertical mais avec  $\varepsilon = 5.10^{-5}$ , ce saut est incliné et la position du saut n'est pas exacte. Ainsi  $\varepsilon$  décide de la précision de la courbe de réponse ; plus  $\varepsilon$  est petit, plus la réponse correspond à la courbe obtenue en régime permanent. Cependant avec  $\varepsilon$  si petit, le temps de balayage est long, au risque que la particule décolle avant la fin du balayage.



**FIGURE 5.18:** Influence de  $\varepsilon$  sur la réponse fréquentielle de la configuration 2 sans masse ajoutée.  $\varepsilon = 5.10^{-6}$  (rouge),  $\varepsilon = 5.10^{-5}$  (bleu), courbe de référence (vert).

### 5.3.2 Comportement assouplissant

On considère deux cas de balayage :  $\Omega_{max} > \Omega_{bif}$  et  $\Omega_{max} < \Omega_{bif}$ .



**FIGURE 5.19:** (a) : réponse fréquentielle, principe du balayage en fréquence avec  $\Omega_{max} > \Omega_{bif}$ . (b) et (c) : influence de  $\epsilon = 2.10^{-5}$  et  $\epsilon = 5.10^{-6}$  sur le décalage dû à la masse ajoutée  $m = 5.10^{-5}$ ; avec (bleu) et sans (rouge) masse ajoutée.

### 5.3.2.1 Cas du balayage avec $\Omega_{max} > \Omega_{bif}$ , figure 5.19

La fréquence maximale de balayage dépasse la fréquence de bifurcation. Ainsi, il n'y a pas de différence d'amplitude entre les cas sans et avec masse ajoutée. Les résultats des cas de balayage avec une vitesse  $\epsilon = 2.10^{-5}$  et  $\epsilon = 5.10^{-6}$  pour une même masse ajoutée  $m = 5.10^{-5}$  sont comparés. D'abord, avec  $\epsilon = 2.10^{-5}$ , la réponse  $W_{max}(t)$  est déterminée avec (courbe bleu) et sans masse ajoutée (courbe rouge), voir figure 5.19-b. Les pics  $S_1, S_2$  et  $s_1, s_2$  correspondent respectivement aux sauts au niveau des deux bifurcations des cas sans et avec masse ajoutée (voir figure 5.19-a). L'intervalle en temps réel mesuré

est  $S_1 S_2 = 28 \text{ ms}$  dans le cas sans masse ajoutée et  $s_1 s_2 = 26.8 \text{ ms}$  dans le cas avec masse ajoutée. Le décalage en temps est donc  $\Delta t = S_1 S_2 - s_1 s_2 = 1.2 \text{ ms}$  ; identiquement, avec  $\varepsilon = 5.10^{-6}$ , le décalage en temps  $\Delta t' = S'_1 S'_2 - s'_1 s'_2 = 4.8 \text{ ms}$ , voir figure 5.19-c.

Ainsi, le décalage en temps des pics de grande amplitude ( $S_1, S_2, \dots$ ) entre les cas avec et sans masse ajoutée dépend de la vitesse du balayage  $\varepsilon$ . En fait, la relation entre  $\varepsilon$  et le décalage en temps  $\Delta t$  est linéaire. Si  $\varepsilon$  diminue  $n$  fois, le décalage en temps augmente également  $n$  fois. L'utilisation de faibles valeurs de  $\varepsilon$  améliore la sensibilité de détection. Néanmoins trop baisser la valeur de  $\varepsilon$  augmente la période du cycle de balayage au risque de perdre la masse ajoutée avant la fin de la mesure.

### 5.3.2.2 Cas du balayage avec $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$

Ce cas a été abordé dans la section 5.1.6.1, et l'exemple du balayage en fréquence est repris. Sur la figure 5.20-a, on constate tout d'abord que les deux masses ajoutées  $m_1 = 5.10^{-5}$  et  $m_2 = 5.10^{-4}$  sont bien détectées grâce aux grandes différences d'amplitude maximale par rapport au cas sans masse ajoutée. La figure 5.20 montre également comment quantifier la masse ajoutée. La quantification s'effectue par la différence d'amplitude  $\Delta W_1$  et  $\Delta W_2$ . Par exemple, pour une masse  $m = 5.10^{-5}$ ,  $W_{max}(F)$  est l'amplitude maximale correspondant à un point de bifurcation,  $W_{max}(E)$  est l'amplitude à la valeur maximale de la fréquence de balayage. La différence d'amplitude  $\Delta W_1 = W_{max}(F) - W_{max}(E)$  permet de caractériser la masse ajoutée  $m_1 = 5.10^{-5}$ . Pour une masse ajoutée plus grande, la différence d'amplitude est plus grande et  $\Delta W_2 = W_{max}(K) - W_{max}(N)$  caractérise la masse ajoutée  $m_2 = 5.10^{-4}$ .

De plus, utiliser le phénomène d'hystérésis quantifie la masse ajoutée à l'aide des décalages fréquentiels  $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2$ , voir figure 5.20-b.

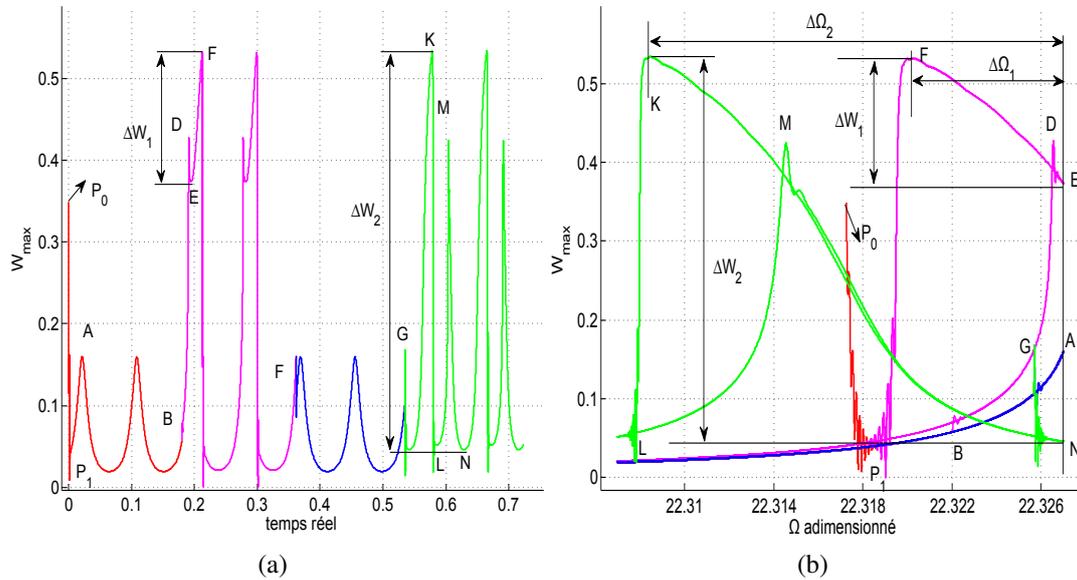
### 5.3.3 Comportement raidissant

Pour le cas  $\Omega_{max} > \Omega_{bif}$ , la quantification est similaire au cas du comportement assouplissant. Pour le cas  $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$  on considère le même exemple de balayage en fréquence que dans la section 5.1.6.2.

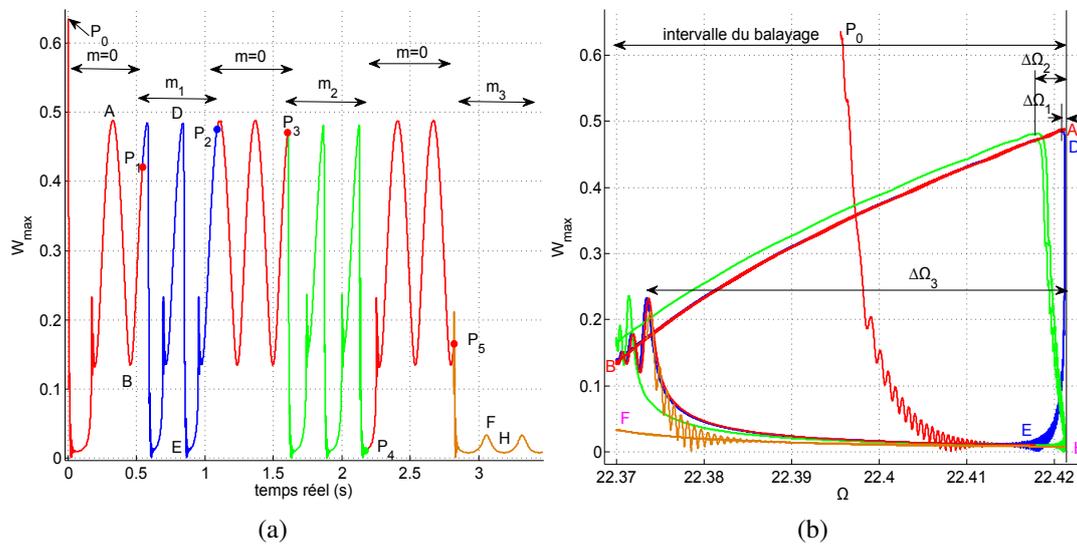
La particule ajoutée est détectée par la différence d'inclinaison de la courbe de réponse. La quantification par la différence d'amplitude  $\Delta W$  est plus difficile que dans le cas du comportement assouplissant. La masse limite est désignée par  $m_l$  telle qu'avec des masses ajoutées  $m \geq m_l$ , la réponse a la forme du cas  $m = 5.10^{-4}$  ( $W_{max} < 0.2$ ), voir figure 5.21. Les masses supérieures (avec  $W_{max} < 0.2$ ) ou inférieures (avec  $W_{max} \approx 0.5$ ) à la masse limite  $m_l$  sont nettement quantifiées.

En utilisant la courbe d'hystérésis, les décalages fréquentiels  $\Delta\Omega_1$  et  $\Delta\Omega_2$ , voir figure 5.21-b sont aussi une voie de quantification.

Ainsi, la quantification des masses ajoutées en utilisant le balayage en fréquence est automatique. De plus, il est possible de combiner la détection par le saut d'amplitude et la quantification par le décalage en fréquence ou la différence d'amplitude  $\Delta W_1, \Delta W_2$ .



**FIGURE 5.20:** Quantification de la masse ajoutée dans le cas assouplissant avec le balayage en fréquence de la configuration 2 et  $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$  : sans masse ajoutée (rouge et bleu) ;  $m_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  (rose) ;  $m_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  (vert). (a) :  $W_{max}$  en fonction du temps  $t$ . (b) : phénomène d'hystérésis.



**FIGURE 5.21:** Quantification de la masse ajoutée dans le cas raidissant avec le balayage en fréquence de la configuration 1 et  $\Omega_{max} \leq \Omega_{bif}$  : sans masse ajoutée (rouge) ;  $m_1 = 10^{-5}$  (bleu) ;  $m_2 = 10^{-4}$  (vert) ;  $m_3 = 5 \cdot 10^{-4}$  (marron). (a) : réponse de  $W_{max}$  en fonction du temps, (b) : phénomène d'hystérésis.

Une autre méthode utilisée pour résoudre le problème de réinitialisation est la détection avec le comportement dit mixte.

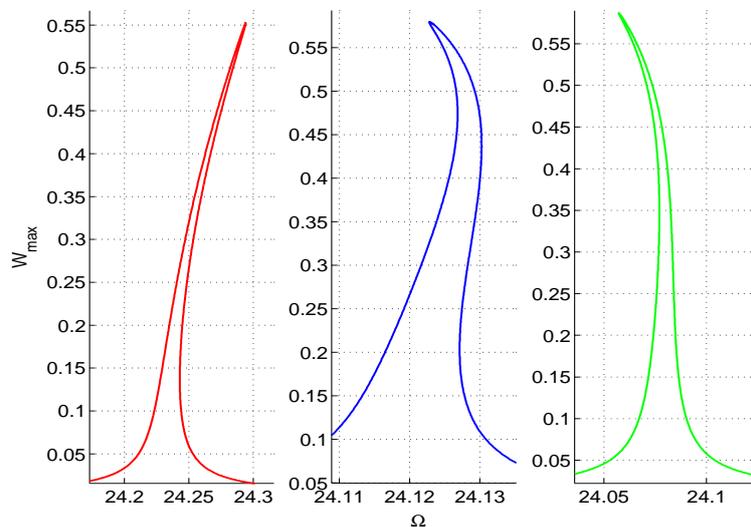
## 5.4 Résolution du problème de réinitialisation par le comportement mixte

Étant donné que le comportement mixte est différent pour les micro-poutres encastree-encastree et encastree-libre, il est nécessaire de traiter séparément.

### 5.4.1 Micro-poutre encastree-encastree

Soit la configuration 5 avec les caractéristiques suivantes :  $g = 0.4\mu\text{m}$ ,  $h = 2\mu\text{m}$ ,  $b = 2\mu\text{m}$ ,  $l = 200\mu\text{m}$  et  $Q = 5000$ .

Dans le chapitre 3, l'influence des paramètres  $V_{dc}/V_{ac}$ ,  $\sigma$ ,  $l/h$ ,  $g/h$  sur la micro-poutre encastree-encastree a été étudiée. Par exemple quand le ratio  $V_{dc}/V_{ac}$  augmente, la micro-poutre a tendance à passer du comportement raidissant au comportement assouplissant. Cependant, avec un déplacement plus grand, la micro-poutre peut avoir un comportement mixte avec le changement de  $V_{dc}/V_{ac}$ , voir figure 5.22. Pour des ratios compris entre 10 et 200, il existe des valeurs qui produisent un comportement mixte, voir figure 5.22 où les réponses sont calculées avec 5 modes pour assurer la précision.



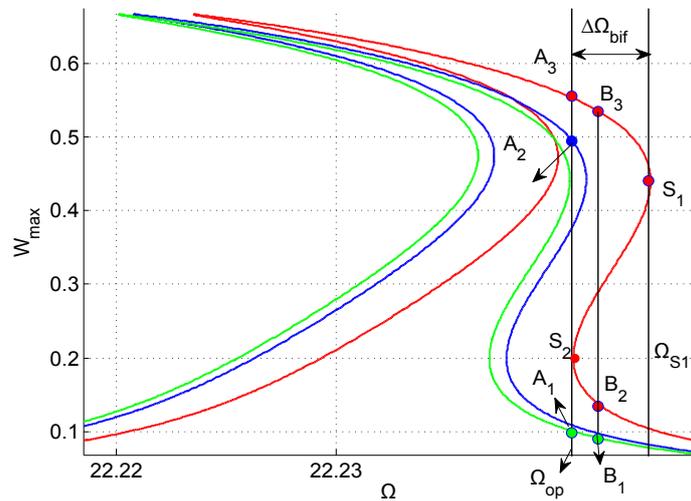
**FIGURE 5.22:** Réponse de la configuration 5 avec  $N_m = 5$  modes,  $\sigma = 50\text{MPa}$ ,  $V_{dc} = 10V_{ac} = 0.442\text{V}$  (rouge);  $V_{dc} = 150V_{ac} = 1.71\text{V}$  (bleu) et  $V_{dc} = 200V_{ac} = 1.97\text{V}$ .

Le comportement mixte de la micro-poutre encastree-encastree est d'abord raidissant et puis assouplissant. Le principe de détection d'une masse ajoutée est représenté sur la figure 5.23. La détection est effectuée à proximité de la fréquence de bifurcation  $\Omega_{S_2}$ . On utilise une fréquence de fonctionnement  $\Omega_{op}$  légèrement inférieure à la fréquence de

bifurcation  $\Omega_{S_2}$  ; sur cette figure,  $\Omega_{op} = \Omega_A$ . Sans masse ajoutée, la réponse est en  $A_3$ . Soit  $m_l$  une masse causant le décalage de fréquence égal à  $\Delta\Omega_{S_1S_2} = \Delta\Omega_{bif}$ . Avec une masse ajoutée supérieure à la masse limite  $m_l$ , la réponse saute de  $A_3$  (courbe rouge) à  $A_1$  (courbe verte) ; ce saut est grand. Après le départ de cette masse, la réponse va revenir au point  $A_3$ . Ainsi le mécanisme a été réinitialisé automatiquement. Pour les masses plus petites  $m \leq m_l$ , la réponse saute de  $A_3$  à  $A_2$ , le petit saut  $A_3A_2$  conduit une détection difficile.

Si la détection est effectuée à la fréquence  $\Omega_{B_3}$ . Pour les masses supérieures à  $m_l$ , lors de l'arrivée des masses, la réponse saute de  $B_3$  à  $B_1$ , néanmoins après son décollage, elle retourne au point  $B_2$ . Ainsi le mécanisme ne réinitialise pas, comme dans le cas du comportement assouplissant.

Pour détecter des masses plus petites, il faut diminuer la valeur de  $\Delta\Omega_{bif}$  qui peut s'effectuer facilement en jouant sur les paramètres  $V_{dc}/V_{ac}$ ,  $\sigma$ ,  $l/h$ ,  $g/h$ . Parmi ces paramètres, le ratio des tensions est plus facile à modifier.

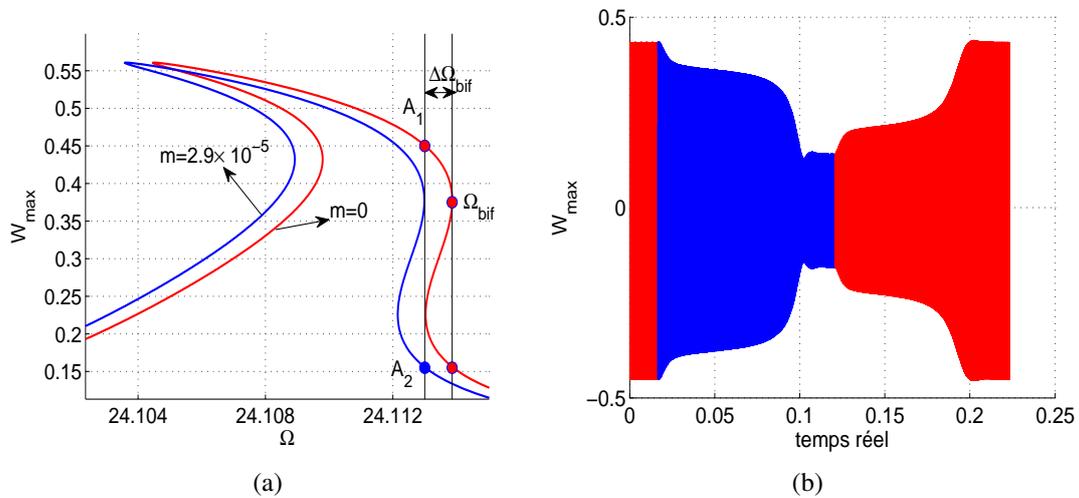


**FIGURE 5.23:** Réponse fréquentielle : principe de détection d'une masse ajoutée à l'aide du comportement mixte de la micro-poutre encastree-encastree, sans masse ajoutée (rouge),  $m < m_l$  (bleu),  $m \geq m_l$  (vert).

Soit la configuration 5 avec  $\sigma = 10MPa$  et  $V_{dc} = 170V_{ac} = 1.8V$  ; les masses ajoutées supérieures à  $m_l = 2.9 \times 10^{-5}$  peuvent alors être détectées par un grand saut d'amplitude, voir figure 5.24. Sans masse ajoutée, l'amplitude de vibration est  $W_{max} = 0.45$  ; quand la masse  $m = 2.9 \times 10^{-5}$  arrive, l'amplitude de vibration diminue et  $W_{max} = 0.15$ . Après son décollage, la réponse augmente jusqu'à la valeur initiale  $W_{max} = 0.45$ .

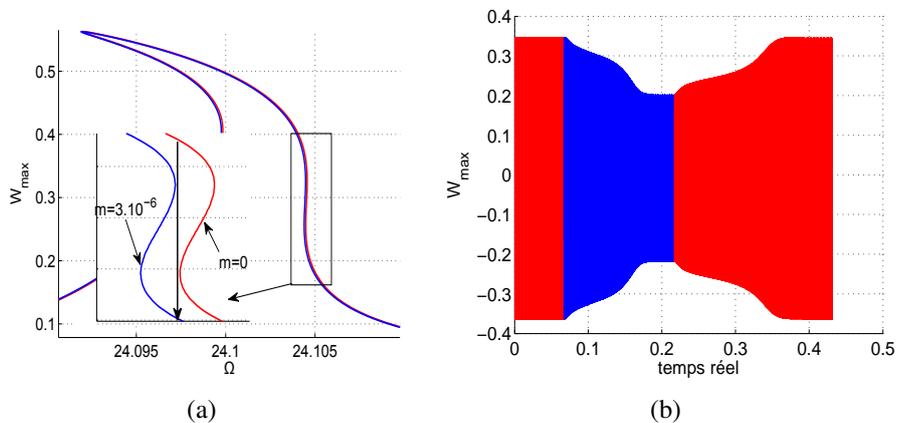
Un autre exemple est présenté sur la figure 5.25, avec la même configuration, mais avec un ratio de tensions ajusté à  $V_{dc} = 180V_{ac} = 1.852V$ . Dans ce cas, la masse ajoutée minimale détectée vaut  $m = 3.10^{-6}$ , voir figure 5.25 ; néanmoins dans ce cas le saut est également plus petit, de  $W_{max} = 0.35$  à  $W_{max} = 0.2$ .

En résumé, pour le comportement mixte, la détection des masses ajoutées est possible, cependant la quantification des masses est difficile. On peut toutefois imaginer construire un "tamis" de micro-poutre en cascade avec des dimensions différentes et donc



**FIGURE 5.24:** Réponse de la configuration 5 avec  $\sigma = 10\text{MPa}$ ,  $V_{dc} = 170V_{ac} = 1.8\text{V}$ ,  $N_m = 5$  modes et  $\Omega = 24.1130$ . (a) : réponse par manlab. (b) : réponses de l'arrivée et du décollage de masse ajoutée ;  $m = 0$  (rouge) et  $m = 2.9 \times 10^{-5}$  (bleu).

des masses limites détectables différentes. En fonction du déclenchement ou non des différentes poutres, il serait alors possible d'encadrer la valeur de la masse ajoutée.

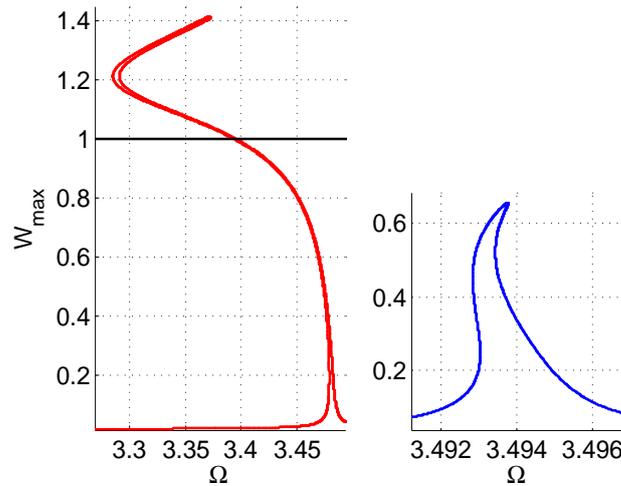


**FIGURE 5.25:** Réponse de la configuration 5 avec  $\sigma = 10\text{MPa}$ ,  $V_{dc} = 180V_{ac} = 1.852\text{V}$ ,  $N_m = 5$  modes,  $\Omega = 24.10448$ . (a) : réponse par manlab. (b) : réponses de l'arrivée et du décollage de masse ajoutée ;  $m = 0$  (rouge) et  $m = 3 \times 10^{-6}$  (bleu).

### 5.4.2 Micro-poutre encastrée-libre

Soit la configuration 6 avec les caractéristiques :  $Q = 5000$ ,  $l = 12.5\mu\text{m}$ ,  $b = 500\text{nm}$ ,  $h = 200\text{nm}$ . Le type de comportement peut être réglé par le ratio des tensions  $V_{dc}/V_{ac}$  ou

bien par le ratio  $g/l$ . Lors de l'augmentation du ratio  $V_{dc}/V_{ac}$  ou la diminution du ratio  $V_{dc}/V_{ac}$ , le comportement évolue de raidissant à assouplissant. Pour obtenir le comportement mixte, il faut régler les deux ratios  $V_{dc}/V_{ac}$  et  $g/l$ . Si  $g/l$  est petit, le comportement mixte n'a lieu qu'à grande amplitude et la réponse dépasse alors la limite du collage (courbe rouge de la figure 5.26). Il faut augmenter  $g/l$  sans que ce ratio ne soit trop grand. Le comportement mixte de la micro-poutre encastree-libre a une forme d'abord assouplissante et puis raidissante (courbe bleue).



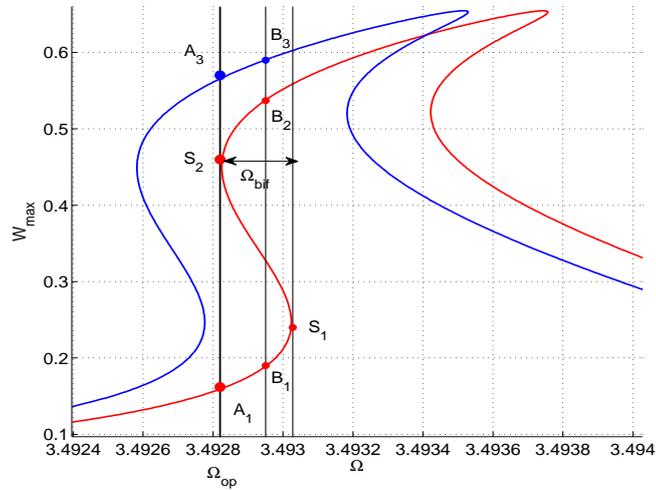
**FIGURE 5.26:** Réponse de la configuration 6.  $g = 2.5\mu\text{m}$  et  $V_{dc} = 180V_{ac} = 15V$  (rouge);  $g = 4\mu\text{m}$  et  $V_{dc} = 180V_{ac} = 20.5V$ .

Le principe de détection est montré sur la figure 5.27;  $m_l$  est également la valeur d'une masse limite ajoutée causant le décalage  $\Delta\Omega_{bif}$ . En opérant à une fréquence légèrement inférieure à  $\Omega_{S_2}$  sans masse ajoutée, la réponse est en  $A_1$  ( $\Omega_{A_1} \leq \Omega_{S_2}$ ). Avec masse ajoutée  $m \geq m_l$ , elle saute de  $A_1$  (petite amplitude) à  $A_3$  (grande amplitude). Après le décollage de masse ajoutée, la réponse retourne à  $A_1$ . Contrairement à la micro-poutre encastree-encastree, le saut dû à la masse ajoutée a maintenant lieu des petites vers les grandes amplitudes.

Si le régime est au point  $B_1$ , le saut peut avoir lieu de  $B_1$  à  $B_3$  même avec une masse ajoutée inférieure à  $m_l$ . Cependant après le départ de la masse, la réponse saute de  $B_3$  à  $B_2$  et donc le mécanisme n'est pas réinitialisé.

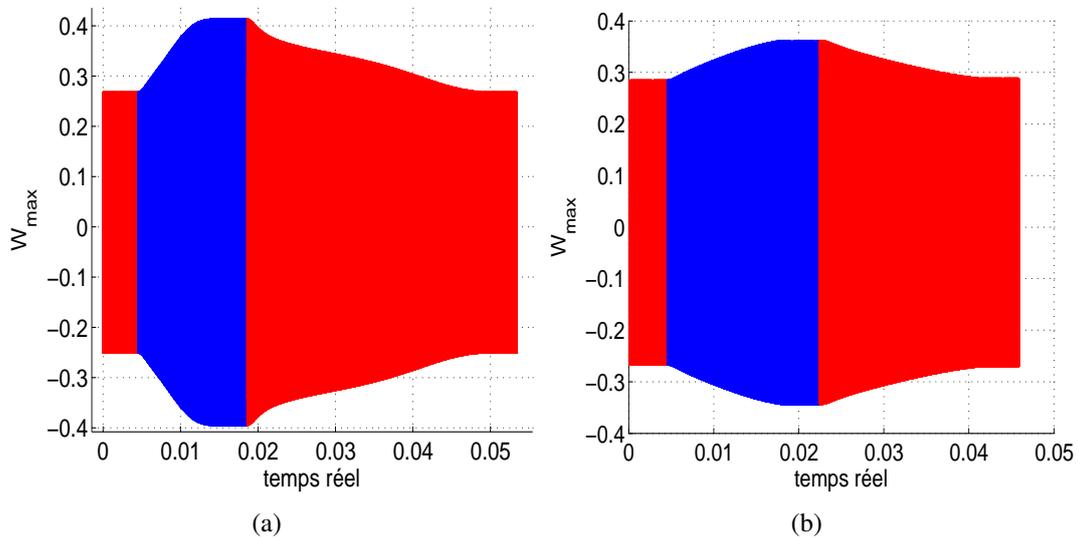
Comme pour la micro-poutre encastree-encastree, il faut diminuer  $\Delta\Omega_{bif}$  pour détecter des masses plus petites. Par exemple, avec  $V_{dc} = 160V_{ac} = 19.5V$ , on peut détecter des masses  $m \geq 5 \cdot 10^{-6}$ . Sans particule, on a  $W_{max} = 0.27$  et quand la masse ajoutée arrive sur la micro-poutre,  $W_{max}$  augmente jusqu'à  $W_{max} = 0.42$ . Après son décollage,  $W_{max}$  retourne à la valeur initiale  $W_{max} = 0.27$ . Le saut d'amplitude vaut alors  $\Delta W_{max} = 0.15$ . Quand on ajuste le ratio  $V_{dc}/V_{ac}$ , on peut détecter des masses plus petites. Par exemple, avec  $V_{dc} = 158V_{ac} = 19.4V$ , on détecte des masses  $m \geq 2 \cdot 10^{-6}$ . Cependant, le saut d'amplitude entre les cas sans et avec particule et vaut  $\Delta W_{max} = 0.07$ . Ainsi, la diminution de  $\Delta\Omega_{bif}$

## 5. Détection de masse ajoutée



**FIGURE 5.27:** Réponse fréquentielle : principe de détection d'une masse ajoutée à l'aide du comportement mixte de la micro-poutre encadrée-libre. Sans (rouge) et avec (bleu) masse ajoutée.

permet de détecter des masses plus faibles mais entraîne également la diminution du saut, ce qui peut rendre la détection moins aisée.



**FIGURE 5.28:** Réponse de la configuration 6 et  $g = 4\mu\text{m}$ . (a) : réponse avec  $\Omega = 3.495230$  et  $V_{dc} = 160V_{ac} = 19.5V$  ; sans particule (rouge),  $m = 5.10^{-6}$  (bleu). (b) : réponse avec  $\Omega = 3.495453$  et  $V_{dc} = 158V_{ac} = 19.4V$ , sans particule (rouge),  $m = 2.10^{-6}$  (bleu).

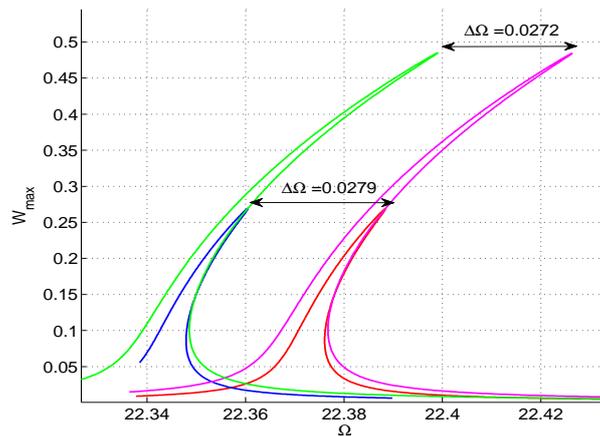
## 5.5 Localisation

Avec une masse ajoutée, la réponse est décalée vers les fréquences plus faibles. Ce décalage est donné par (voir l'annexe B) :

$$\Delta f_i = \frac{\omega_{i0} - \omega_i}{\omega_{i0}} \approx \frac{1}{2} m \phi_i^2(x_0), \quad (5.7)$$

où  $\Delta\omega_i = \omega_{i0} - \omega_i$  est le décalage en fréquence et  $\Delta f_i$  le décalage relatif.

Ce ratio est indépendant des tensions  $V_{dc}, V_{ac}$  ; il ne dépend que du mode de vibration et de la masse ajoutée. La figure 5.29 montre un exemple avec des tensions différentes et même masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  à  $x_0 = 0.5$ . Avec  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$  ou  $V_{dc} = 10V_{ac} = 7V$ , le décalage de fréquence ne change pratiquement pas et vaut respectivement  $\Delta\Omega = 0.0279$  et  $\Delta\Omega = 0.0272$ .



**FIGURE 5.29:** Réponse de la configuration 1 avec  $V_{dc} = 10V_{ac} = 7V$ ,  $m = 0$  (rouge) et  $m = 10^{-3}$  au milieu de la poutre (bleu), avec  $V_{dc} = 10V_{ac} = 9V$ ,  $m = 0$  (rose) et  $m = 10^{-3}$  au milieu de la poutre (vert).

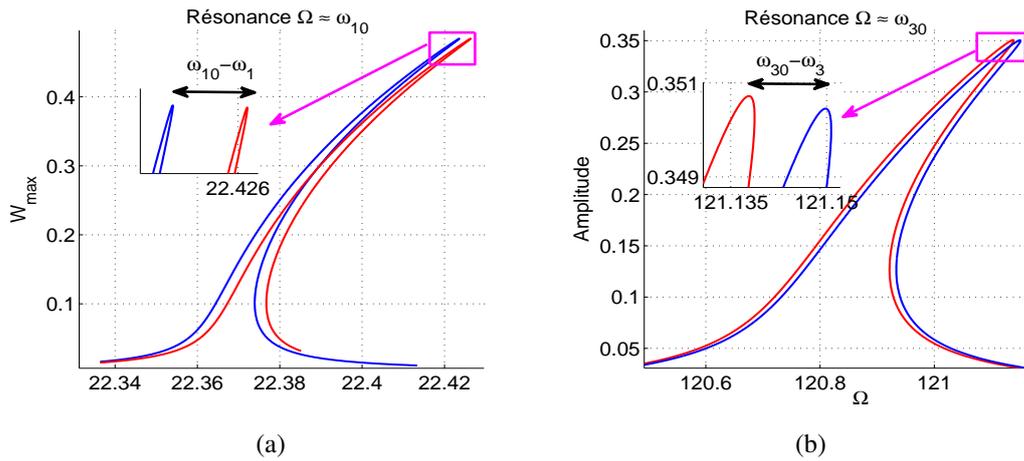
Dans la formule (5.7), pour une valeur de  $i$  donnée, il y a une équation mais 2 inconnues  $x_0$  et  $m$ . Ainsi, il faut considérer en plus le décalage fréquentiel d'un mode supérieur. À cause de la symétrie géométrique, pour la micro-poutre encastree-encastree, le second mode a une amplitude nulle et la mesure expérimentale du décalage fréquentiel est impossible. Par conséquent, il faut considérer les résonances des premier et troisième modes. Toutefois, la résonance du troisième mode demande une grande énergie. L'électrode peut être disposée excentriquement à une tête encastree de la micro-poutre encastree-encastree pour utiliser la résonance du deuxième mode. Pour la micro-poutre encastree-libre, on peut utiliser sans difficulté les résonances aux premier et deuxième modes.

Pour la micro-poutre encastree-encastree, si les résonances aux premier et troisième

modes sont utilisées, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta_{f1} = \frac{1}{2}m\phi_1^2(x_0) \\ \frac{\phi_3(x_0)}{\phi_1(x_0)} = \sqrt{\frac{\Delta_{f3}}{\Delta_{f1}}} \end{cases} \quad (5.8)$$

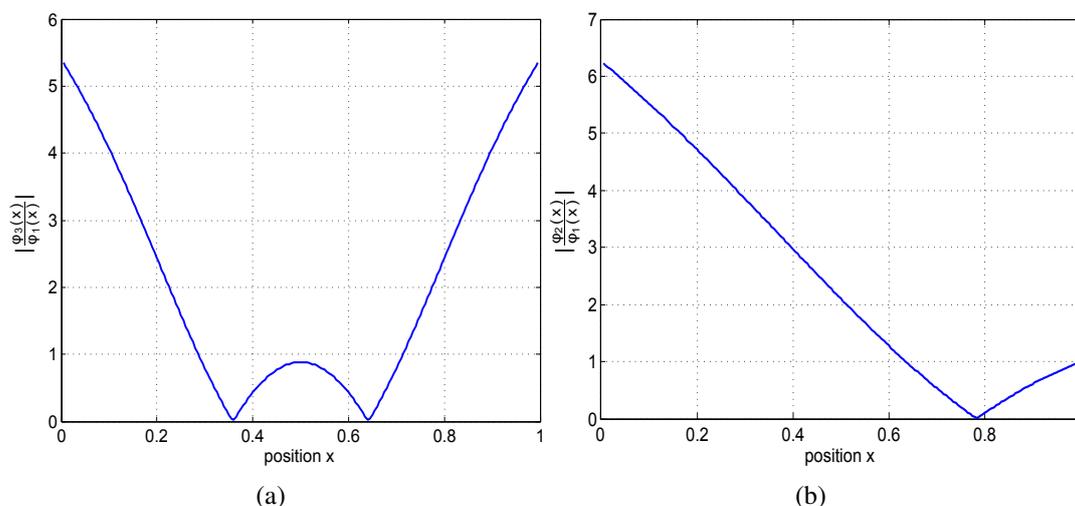
Le principe de localisation est montré sur la figure 5.30. D'abord le décalage en fréquence  $\Delta\omega_1$  à la résonance au premier mode est déterminé avec les tensions  $V_{dc1}, V_{ac1}$  et puis avec la même masse ajoutée, on détermine le décalage  $\Delta\omega_3$  à la résonance du troisième mode avec  $V_{dc2}, V_{ac2}$ . Pour la résonance au troisième mode, il faut augmenter d'abord  $\Omega$ , ensuite augmenter les tensions car le troisième mode nécessite un actionnement plus important. Ainsi, la micro-poutre serait collée avec les tensions  $V_{dc2}, V_{ac2}$  à la résonance au premier mode. À partir des décalages  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_3$ , le ratio  $\phi_3(x_0)/\phi_1(x_0)$  est calculé à l'aide de (5.8) puis la position  $x_0$  est déterminée en reportant ce ratio sur la courbe de la figure 5.31, puis la masse est obtenue avec la première équation du système (5.8).



**FIGURE 5.30:** Réponse fréquentielle : résonances des premier (a) et troisièmes modes (b) de la micro-poutre encastree-encastree.

Néanmoins, pour la micro-poutre encastree-encastree avec  $|\phi_3(x_0)/\phi_1(x_0)| \leq 0.95$  ou pour la micro-poutre encastree-libre avec  $|\phi_2(x_0)/\phi_1(x_0)| \leq 1$ , il existe deux positions  $x_0$  possibles. Dans ce cas, il faut utiliser la résonance d'un mode supérieur pour éliminer une position.

Soit les exemples utilisant la configuration 1 avec les tensions d'actionnement suivantes : la résonance  $\Omega = \omega_{10}$ ,  $V_{dc1} = 10V_{ac1} = 9V$  ; la résonance  $\Omega = \omega_{30}$ ,  $V_{ac2} = 1.5V_{dc2} = 67.5V$ .  $m_0, x_0$  sont les valeurs théoriques exactes.  $\Delta_{f1}, \Delta_{f3}$  sont mesurés à partir des courbes de réponse calculées numériquement avec  $m_0$  et  $x_0$ .  $m_t, x_t$  sont les valeurs identifiées par la démarche détaillée précédemment. À cause de la géométrie symétrique, une moitié seulement de la micro-poutre encastree-encastree  $0 \leq x \leq 0.5$  est étudiée. Les



**FIGURE 5.31:** (a) : ratio entre le troisième et le premier modes propres de la micro-poutre encastree-encastree. (b) : ratio entre le premier et le deuxieme modes propres de la micro-poutre encastree-libre.

résultats sont détaillés dans le tableau (5.2).

**TABLE 5.2:** Configuration 1 : Exemples de localisation des masses ajoutées sur la micro-poutre encastree-encastree.

$m_0$	$x_0$	$\Delta_{f1} \cdot 10^4$	$\Delta_{f3} \cdot 10^4$	$ \phi_3/\phi_1 $	$x_{t1}; m_{t1}$	$\frac{x_{t1} - x_0}{x_0}; \frac{m_{t1} - m_0}{m_0}$
$5 \cdot 10^{-4}$	0.5	6.089	4.987	0.9051	0.5; $4.83 \times 10^{-4}$	- - ; 3.4 %
$10^{-4}$	0.5	1.2182	0.997	0.904	0.5; $9.6 \times 10^{-5}$	- - ; 4%
$10^{-4}$	0.35	0.86	0.0132	0.1239	0.348; $1.03 \times 10^{-4}$	0.5%; 3 %
$10^{-4}$	0.2	0.185	1.141	2.484	0.197; $1.009 \times 10^{-4}$	1.45%; 0.9%
$5 \cdot 10^{-5}$	0.2	0.0928	0.574	2.488	0.1969; $5.078 \cdot 10^{-5}$	1.55%; 1.56 %
$10^{-3}$	0.1	0.133	3.101	4.823	0.0472; 0.0125	grand

Pour la micro-poutre encastree-libre, la configuration 4 est consideree. Quelques exemples de localisation sont traités dans le tableau (5.3). La localisation est très satisfaisante. Les écarts relatifs entre les valeurs identifiées et les valeurs théoriques sont de l'ordre de quelques pour-cents seulement. Pour les positions proches de l'encastrement, toutefois, la localisation n'est pas précise parce que, pour ces positions, la valeur de  $\phi_i(x_0)$  ainsi que le décalage sont petits, ce qui conduit à des erreurs importantes.

**TABLE 5.3:** Configuration 4 : Exemples de localisation des masses ajoutées sur la micro-poutre encastree-libre.

$m_0$	$x_0$	$\Delta_{f1} \cdot 10^4$	$\Delta_{f2} \cdot 10^4$	$ \phi_2/\phi_1 $	$x_{t1}; m_{t1}$	$\frac{x_{t1} - x_0}{x_0}, \frac{m_{t1} - m_0}{m_0}$
$10^{-4}$	0.95	1.6718	1.3173	0.8877	0.9685 ; $9.134 \times 10^{-5}$	1.85% ; 8.66 %
$10^{-5}$	0.95	0.166	0.1286	0.8804	0.967 ; $9.12 \times 10^{-6}$	1.79% ; 8.8%
$5 \cdot 10^{-4}$	0.8	5.48	0.0761	0.118	0.804 ; $5.14 \times 10^{-4}$	0.5% ; 2.8 %
$10^{-4}$	0.5	0.2235	1.017	2.134	0.496 ; $9.942 \times 10^{-5}$	0.8% ; 0.58%
$5 \cdot 10^{-4}$	0.35	0.2482	4.14	4.084	0.274 ; $9.4 \times 10^{-4}$	grand
$10^{-4}$	0.0037	0.199	7.33	-	- -	grand

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des principes de détection de masse ajoutée basés sur la non linéarité du résonateur sont étudiés. Classiquement, la masse ajoutée est déterminée par le décalage en fréquence. Cependant la relation linéaire entre la masse ajoutée et le décalage limite la détection de petites masses ajoutées. La détection à proximité d'un point de bifurcation a plus d'avantages : plus la masse ajoutée est petite, plus le saut est grand et la détection est possible avec une masse très faible si on peut opérer suffisamment près du point de bifurcation.

La détection basée sur le saut en amplitude est étudiée pour les comportements assouplissant et raidissant. L'arrivée des masses ajoutées est reconnue par un saut en amplitude, mais après leur décollage, le mécanisme ne se réinitialise pas forcément. Dans le cas du comportement assouplissant, on peut quantifier des masses ajoutées à une fréquence fixe. Le saut en amplitude varie avec la masse ajoutée mais dans le cas du comportement raidissant, la quantification à une fréquence fixe est difficile car l'amplitude des sauts varie très peu en fonction de la masse ajoutée.

Le problème de réinitialisation peut être résolu en utilisant un balayage en fréquence de forme sinusoïdale, et la détection de masses ajoutées est automatique et peut s'effectuer en temps réel. La précision de la réponse dépend de la vitesse du balayage. Elle est d'autant meilleure que la vitesse du balayage  $\epsilon$  est petite. De plus, le décalage de réponse en temps avec  $\epsilon$  petit est plus grand qu'avec  $\epsilon$  grand, ainsi la sensibilité de détection peut être améliorée.

L'utilisation du comportement mixte peut résoudre également le problème de réinitialisation. Pour ce comportement, avec une masse ajoutée la réponse peut sauter vers le haut ou vers le bas et ce saut est grand. Après le départ de la masse ajoutée, la réponse retourne à sa position initiale. Régler le ratio des tensions  $V_{dc}/V_{ac}$  pour diminuer la distance entre deux points de bifurcation  $\Delta\Omega_{bif}$  permet d'améliorer la sensibilité de détection.

Enfin, On a traité le problème de la localisation de la masse ajoutée sur la micro-poutre. Il faut pour cela considérer les résonances de deux modes différents : les résonances des premier et deuxième modes pour la poutre encastree-libre, les premier et troisième modes pour la poutre encastree-encastree. La localisation n'est pas précise pour les points

proches des encastresments qui ont une déformée modale  $\phi_i(x_0)$  très faible.



# Chapitre 6

## Réseau de micro/nano-poutres

*Ce chapitre est consacré à la détection d'une masse ajoutée par réseau de micro/nano-poutres. La mise en réseau de plusieurs poutres résonantes constitue un premier pas vers la mise en œuvre de réseaux de milliers de capteurs.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Équation du mouvement</b>	<b>120</b>
6.1.1	Sans masse ajoutée	121
6.1.2	Avec masse ajoutée	126
<b>6.2</b>	<b>Réseau de 2 nano-poutres</b>	<b>126</b>
6.2.1	Vérification de la robustesse du modèle	126
6.2.2	Comparaison des résultats obtenus par HBM+MAN et l'intégration temporelle.	128
6.2.3	Méthode de la moyenne harmonique	129
6.2.4	Analyse de la courbe de réponse	131
6.2.5	Mécanisme de détection	132
<b>6.3</b>	<b>Réseau de 3 nano-poutres</b>	<b>133</b>
6.3.1	Tensions d'actionnement asymétriques	136
6.3.2	Tensions d'actionnement symétriques	138
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>144</b>

---

La technologie actuelle permet de fabriquer de grands réseaux composés de plusieurs MEMS et NEMS dont la dynamique résulte de couplages électriques, magnétiques, de couplages de la force élastique, de la force d'amortissement... Le comportement dynamique de tels réseaux est étudié par l'expérimentation ou par la théorie dans plusieurs références, parmi lesquelles [Buks 02], [Lifshitz 03], [Cross 04],...

Karabalin et al. ont considéré un réseau avec deux nano-résonateurs couplés par la force élastique et excités indépendamment autour de leurs fréquences résonantes [Karabalin 09]. Ils ont montré que les réponses linéaires et non linéaires faibles d'un nano-résonateur peuvent être modifiées par l'excitation du deuxième nano-résonateur. La vibration d'un oscillateur peut être utilisée pour changer l'effet non linéaire d'un autre oscillateur, et ainsi augmenter sa gamme dynamique. Lorsque deux résonateurs sont fortement excités de manière non linéaire, la courbe de réponse devient plus complexe.

Dans la littérature Lifshitz et al. ont étudié la réponse d'un réseau d'oscillateurs couplés non linéaires à une excitation paramétrique dans la limite non linéaire faible en utilisant une méthode de perturbation [Lifshitz 03]. Ils ont montré que l'augmentation du nombre des oscillateurs entraîne l'augmentation de nombre des solutions ainsi que l'augmentation de branches de la réponse des oscillateurs. De plus, l'effet d'hystérésis devient plus compliqué et diffère de l'hystérésis de Duffing d'un seul oscillateur.

Gutschmidt et al. a considéré un réseau de  $N$  poutres encastées-encastées identiques. Ce réseau est couplé par la force électrostatique et la force d'amortissement électrodynamique [Gutschmidt 12]. Cette référence se concentre sur le comportement dynamique dans la région des résonances internes 1 :1, paramétriques et internes 3 :1 correspondant à des tensions DC faibles, moyennes et grandes.

Ce chapitre présente également le modèle du réseau de micro/nano-poutres encastées-encastées identiques, mais couplées uniquement par la force électrostatique pour étudier le changement de la réponse avec une masse ajoutée. D'abord un réseau de 2 poutres avec et sans masse ajoutée est préalablement analysé. Puis un réseau de 3 poutres permet de distinguer deux cas : actionnement asymétrique ou symétrique. Pour le cas symétrique, sans masse ajoutée, la poutre 2 du milieu ne vibre pas ; avec une masse ajoutée, la symétrie est cassée, la poutre 2 vibre avec une grande amplitude. Ce principe aide à détecter une très petite masse ajoutée.

### 6.1 Équation du mouvement

La figure 6.1 schématise le réseau de  $N$  micro/nano-poutres encastées-encastées. Les dimensions  $b, h, l$  et les propriétés des matériaux des micro/nano-poutres sont identiques. Chaque poutre est soumise à la force électrostatique des deux poutres adjacentes. Les deux poutres aux extrémités sont encastées et non déformables.

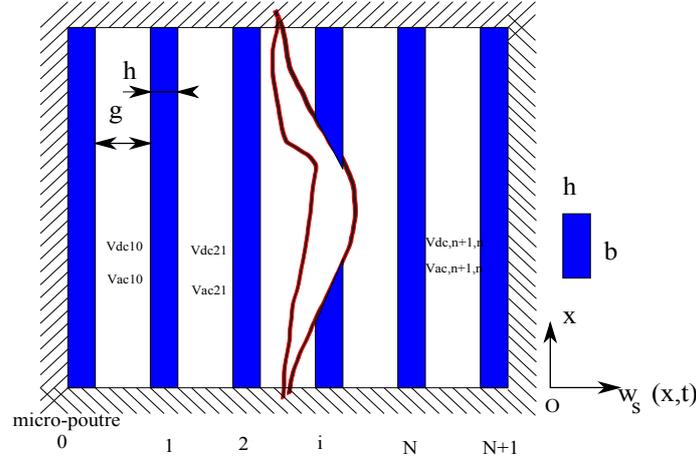


FIGURE 6.1: Modèle du réseau de micro/nano-poutres encastées-encastées.

### 6.1.1 Sans masse ajoutée

$\tilde{w}_s$  est le déplacement de la micro/nano-poutre numéro  $s$ . La tension  $V_{s,s+1}$  entre les micro/nano-poutres  $s$  et  $s+1$  est  $V_{dc,s,s+1} + V_{ac,s,s+1} \cos \Omega t$ . La force électrostatique appliquée à la poutre  $s$  a deux composantes :

- l'une due à la poutre  $s+1$  :

$$f_{s,s+1}^e = \frac{1}{2} b \epsilon_0 C_n \frac{V_{s,s+1}^2}{(g + \tilde{w}_{s+1} - \tilde{w}_s)^2}. \quad (6.1)$$

- l'autre due à la poutre  $s-1$  :

$$f_{s-1,s}^e = -\frac{1}{2} b \epsilon_0 C_n \frac{V_{s-1,s}^2}{(g + \tilde{w}_s - \tilde{w}_{s-1})^2}. \quad (6.2)$$

L'équation du mouvement de la poutre  $s$  est :

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 \tilde{w}_s(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^4} + \rho b h \frac{\partial^2 \tilde{w}_s(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} - \left[ \tilde{N} + \frac{E b h}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial \tilde{w}_s(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} \right] \frac{\partial^2 \tilde{w}_s(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} = \\ \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{b C_n V_{s,s+1}^2}{(g + \tilde{w}_{s+1} - \tilde{w}_s)^2} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{b C_n V_{s-1,s}^2}{(g + \tilde{w}_s - \tilde{w}_{s-1})^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

où  $s = 1, \dots, N$ . Les deux poutres aux extrémités sont totalement encastées, d'où :

$$\tilde{w}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{w}_{N+1}(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0. \quad (6.4)$$

En utilisant les paramètres adimensionnés :

$$w_s = \frac{\tilde{w}_s}{g}; \quad x = \frac{\tilde{x}}{L}; \quad t = \frac{\tilde{t}}{\tau}, \quad (6.5)$$

l'équation (6.3) devient :

$$\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_s}{\partial t} - \left[ N + \alpha_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \alpha_2 \frac{V_{s,s+1}^2}{(1 + w_{s+1} - w_s)^2} - \alpha_2 \frac{V_{s-1,s}^2}{(1 + w_s - w_{s-1})^2}, \quad (6.6)$$

avec pour conditions aux limites :

$$w_s(0,t) = w_s(1,t) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(1,t) = 0. \quad (6.7)$$

$$w_0(x,t) = w_{N+1}(x,t) = 0. \quad (6.8)$$

Les paramètres dans l'équation (6.6) sont déterminés par :

$$c = \frac{\tilde{c}l^4}{EI\tau}; \quad N = \frac{\tilde{N}l^2}{EI}; \quad \alpha_1 = 6\left(\frac{g}{h}\right)^2; \quad \alpha_2 = 6C_n \frac{\varepsilon_0 l^4}{Eh^3 g^3}; \quad \Omega = \tilde{\Omega}\tau. \quad (6.9)$$

On suppose que les déformées modales des micro/nano-poutres sont identiques. En utilisant la méthode de Galerkin, le déplacement de la micro/nano-poutre  $s$  est exprimé avec  $N_m$  modes :

$$w_s(x,t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} a_k^s(t) \phi_k(x). \quad (6.10)$$

Soit les expressions suivantes :

$$1 + w_{s+1} - w_s = 1 + \sum_{k=1}^{N_m} \phi_k(x) (a_k^{s+1}(t) - a_k^s(t)) = 1 + \sum_{k=1}^{N_m} \phi_k(x) b_k^s(t) = 1 + X_s, \quad (6.11)$$

$$1 + w_s - w_{s-1} = 1 + \sum_{k=1}^{N_m} \phi_k(x) (a_k^s(t) - a_k^{s-1}(t)) = 1 + \sum_{k=1}^{N_m} \phi_k(x) b_k^{s-1}(t) = 1 + X_{s-1}. \quad (6.12)$$

où :

$$b_k^s(t) = a_k^{s+1}(t) - a_k^s(t); \quad X_s(x,t) = w_{s+1}(x,t) - w_s(x,t). \quad (6.13)$$

$$a_k^{N+1}(t) = a_k^0(t) = 0. \quad (6.14)$$

Les dénominateurs dans l'équation (6.6) sont exprimés via les séries de Taylor au 7ème ordre :

$$\frac{1}{(1 + w_{s+1} - w_s)^2} = 1 - 2X_s + 3X_s^2 - 4X_s^3 + 5X_s^4 - 6X_s^5 + 7X_s^6 - 8X_s^7, \quad (6.15)$$

$$\frac{1}{(1 + w_s - w_{s-1})^2} = 1 - 2X_{s-1} + 3X_{s-1}^2 - 4X_{s-1}^3 + 5X_{s-1}^4 - 6X_{s-1}^5 + 7X_{s-1}^6 - 8X_{s-1}^7. \quad (6.16)$$

L'équation (6.6) est multipliée par  $\phi_i$  et est intégrée de 0 à 1. Enfin, il vient :

$$\begin{aligned}
& \ddot{a}_i^s + c_i \dot{a}_i^s + \lambda_i^4 a_i^s - \left[ N + \alpha_1 \left( \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi'_k \phi'_l dx \right) a_k^s a_l^s \right) \right] \sum_{j=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi''_j \phi_x dx \right) a_j^s = \\
& \alpha_2 V_{s,s+1}^2 \left\{ \int_0^1 \phi dx - 2 \sum_{j=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j dx \right) b_j^s + 3 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k dx \right) b_k^s b_j^s - \right. \\
& 4 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l dx \right) b_l^s b_k^s b_j^s + 5 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m dx \right) b_m^s b_l^s b_k^s b_j^s - \\
& 6 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) b_n^s b_m^s b_l^s b_k^s b_j^s + 7 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \right. \\
& \left. \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \phi_o dx \right) b_o^s b_n^s b_m^s b_l^s b_k^s b_j^s - 8 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \right. \\
& \left. \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \phi_o \phi_p dx \right) b_p^s b_o^s b_n^s b_m^s b_l^s b_k^s b_j^s \left. \right] - \alpha_2 V_{s-1,s}^2 \left[ \int_0^1 \phi dx - 2 \sum_{j=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j dx \right) b_j^{s-1} \right. \\
& \quad + 3 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k dx \right) b_k^{s-1} b_j^{s-1} - 4 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l dx \right) b_l^{s-1} b_k^{s-1} b_j^{s-1} \\
& \quad + 5 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m dx \right) b_m^{s-1} b_l^{s-1} b_k^{s-1} b_j^{s-1} - 6 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \right. \\
& \quad \left. \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \right) b_n^{s-1} b_m^{s-1} b_l^{s-1} b_k^{s-1} b_j^{s-1} + 7 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \phi_o dx \right) \times \\
& \quad b_o^{s-1} b_n^{s-1} b_m^{s-1} b_l^{s-1} b_k^{s-1} b_j^{s-1} - 8 \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n \phi_o \phi_p dx \right) \times \\
& \quad \left. b_p^{s-1} b_o^{s-1} b_n^{s-1} b_m^{s-1} b_l^{s-1} b_k^{s-1} b_j^{s-1} \right\}. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Dont la forme matricielle est :

$$\begin{aligned}
& \ddot{\mathbf{a}}^s + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{a}}^s + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}^s - (N + \alpha_1 T_2^s(\mathbf{a}^s)) \mathbf{K}_T \mathbf{a}^s = \alpha_2 V_{s,s+1}^2 \mathbf{Q}_0 + \alpha_2 V_{s,s+1}^2 \left[ \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2^s(\mathbf{b}^s) + \right. \\
& \left. \mathbf{Q}_3^s(\mathbf{b}^s) + \mathbf{Q}_4^s(\mathbf{b}^s) + \mathbf{Q}_5^s(\mathbf{b}^s) + \mathbf{Q}_6^s(\mathbf{b}^s) + \mathbf{Q}_7^s(\mathbf{b}^s) \right] \mathbf{b}^s - \alpha_2 V_{s-1,s} V_{s-1,s}^2 \mathbf{P}_0 - \alpha_2 V_{s-1,s}^2 \left[ \mathbf{P}_1 + \right. \\
& \quad \left. \mathbf{P}_2^s(\mathbf{b}^{s-1}) + \mathbf{P}_3^s(\mathbf{b}^{s-1}) + \mathbf{P}_4^s(\mathbf{b}^{s-1}) + \mathbf{P}_5^s(\mathbf{b}^{s-1}) + \mathbf{P}_6^s(\mathbf{b}^{s-1}) + \mathbf{P}_7^s(\mathbf{b}^{s-1}) \mathbf{b}^{s-1} \right] \tag{6.18}
\end{aligned}$$

## 6. Réseau de micro/nano-poutres

où :  $s = 1..N$ ;  $a^{N+1} = a^0 = 0$ ;  $\mathbf{a}^s = [\mathbf{a}_1^s, \mathbf{a}_2^s, \dots, \mathbf{a}_{N_m}^s]$ . Les matrices sont déterminées par les composantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_0 &= c_i \delta_{ij}, \mathbf{K}_0 = \lambda_i^4 \delta_{ij}, T_2^s(\mathbf{a}^s) = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi'_k \phi'_l \right) \mathbf{a}_k^s \mathbf{a}_l^s, \\
 \mathbf{K}_{Tij} &= \int_0^1 \phi_j'' \phi_i dx, \\
 \mathbf{Q}_{0i}^s &= \int_0^1 \phi_i dx, \mathbf{Q}_{1ij}^s = -2 \int_0^1 \phi_i \phi_j dx, \\
 \mathbf{Q}_{2ij}^s &= 3 \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k dx \right) \mathbf{b}_k^s, \\
 \mathbf{Q}_{3ij}^s &= -4 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l dx \right) \mathbf{b}_k^s \mathbf{b}_l^s, \\
 \mathbf{Q}_{4ij}^s &= 5 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m dx \right) \mathbf{b}_k^s \mathbf{b}_l^s \mathbf{b}_m^s, \\
 \mathbf{Q}_{5ij}^s &= -6 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^s \mathbf{b}_l^s \mathbf{b}_m^s \mathbf{b}_n^s, \\
 \mathbf{Q}_{6ij}^s &= 7 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^s \mathbf{b}_l^s \mathbf{b}_m^s \mathbf{b}_n^s \mathbf{b}_o^s, \\
 \mathbf{Q}_{7ij}^s &= -8 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^s \mathbf{b}_l^s \mathbf{b}_m^s \mathbf{b}_n^s \mathbf{b}_o^s \mathbf{b}_p^s, \\
 \mathbf{P}_{0i} &= \int_0^1 \phi_i dx, \mathbf{P}_{1ij} = -2 \int_0^1 \phi_i \phi_j dx, \mathbf{P}_{2ij}^s = 3 \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1}, \\
 \mathbf{P}_{3ij}^s &= -4 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1} \mathbf{b}_l^{s-1}, \\
 \mathbf{P}_{4ij}^s &= 5 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1} \mathbf{b}_l^{s-1} \mathbf{b}_m^{s-1}, \\
 \mathbf{P}_{5ij}^s &= -6 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1} \mathbf{b}_l^{s-1} \mathbf{b}_m^{s-1} \mathbf{b}_n^{s-1}, \\
 \mathbf{P}_{6ij}^s &= 7 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1} \mathbf{b}_l^{s-1} \mathbf{b}_m^{s-1} \mathbf{b}_n^{s-1} \mathbf{b}_o^{s-1}, \\
 \mathbf{P}_{7ij}^s &= -8 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \sum_{o=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \phi_m \phi_n dx \right) \mathbf{b}_k^{s-1} \mathbf{b}_l^{s-1} \mathbf{b}_m^{s-1} \mathbf{b}_n^{s-1} \mathbf{b}_o^{s-1} \mathbf{b}_p^{s-1},
 \end{aligned}$$

Comme dans les chapitres précédents, l'équation (6.17) est résolue par la méthode HBM+MAN à l'aide du logiciel Manlab. Pour cela, on ajoute les variables intermédiaires

suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^s &= \dot{\mathbf{a}}^s && \text{taille } N_m \\
\mathbf{z}^s &= \dot{\mathbf{y}}^s && \text{taille } N_m \\
\mathbf{nu}^s &= \mathbf{b}^s = \mathbf{a}^{s+1} - \mathbf{a}^s && \text{taille } N_m \\
\mathbf{bu}^s &= \mathbf{b}^{s-1} = \mathbf{a}^s - \mathbf{a}^{s-1} && \text{taille } N_m \\
\mathbf{nu}2^s &= \mathbf{nu}^s \times \mathbf{nu}^s && \text{taille } N_m^2 \\
\mathbf{nu}3^s &= \mathbf{nu}2^s \times \mathbf{nu}^s && \text{taille } N_m^3 \\
\mathbf{bu}2^s &= \mathbf{bu}^s \times \mathbf{bu}^s && \text{taille } N_m^2 \\
\mathbf{bu}3^s &= \mathbf{bu}2^s \times \mathbf{bu}^s && \text{taille } N_m^3 \\
\mathbf{AAQ}^s &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2^s + \mathbf{Q}_3^s + \mathbf{Q}_4^s + \mathbf{Q}_5^s + \mathbf{Q}_6^s + \mathbf{Q}_7^s && \text{taille } N_m^2 \\
\mathbf{BBP}^s &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2^s + \mathbf{P}_3^s + \mathbf{P}_4^s + \mathbf{P}_5^s + \mathbf{P}_6^s + \mathbf{P}_7^s && \text{taille } N_m^2 \\
v1^s &= \alpha_2 V_{s,s+1}^2 && \text{taille } 1 \\
v2^s &= \alpha_2 V_{s-1,s}^2 && \text{taille } 1 \\
t2^s &= T_2^s(a^s) && \text{taille } 1 \\
\mathbf{AAQ}^s &= v1^s \mathbf{AQ}^s && \text{taille } N_m^2 \\
\mathbf{BBP}^s &= v2^s \mathbf{BP}^s && \text{taille } N_m^2
\end{aligned} \tag{6.19}$$

L'équation (6.18) est réécrite dans le formalisme adapté à Manlab :

$\dot{\mathbf{a}}^s =$		$\mathbf{y}^s$		taille
$\dot{\mathbf{y}}^s =$		$\mathbf{z}^s$		$N_m$
$0 =$		$\mathbf{nu}^s - (\mathbf{a}^{s+1} - \mathbf{a}^s)$		$N_m$
$0 =$		$\mathbf{bu}^s - (\mathbf{a}^s - \mathbf{a}^{s-1})$		$N_m$
$0 =$		$\mathbf{nu}2^s -$	$\mathbf{nu}^s \times \mathbf{nu}^s$	$N_m^2$
$0 =$		$\mathbf{nu}3^s -$	$\mathbf{nu}2^s \times \mathbf{nu}^s$	$N_m^3$
$0 =$		$\mathbf{bu}2^s -$	$\mathbf{bu}^s \times \mathbf{bu}^s$	$N_m^2$
$0 =$		$\mathbf{bu}3^s -$	$\mathbf{bu}2^s \times \mathbf{bu}^s$	$N_m^3$
$0 =$	$-\mathbf{Q}_1$	$+\mathbf{AQ}^s - \mathbf{Q}_2^s - \mathbf{Q}_3^s - \mathbf{Q}_4^s$	$-\mathbf{Q}_5^s - \mathbf{Q}_6^s - \mathbf{Q}_7^s$	$N_m^2$
$0 =$	$-\mathbf{P}_1$	$+\mathbf{BP}^s - \mathbf{P}_2^s - \mathbf{P}_3^s - \mathbf{P}_4^s$	$-\mathbf{P}_5^s - \mathbf{P}_6^s - \mathbf{P}_7^s$	$N_m^2$
$0 =$	$\alpha_2 V_{s,s+1}^2$	$-v1^s$		1
$0 =$	$\alpha_2 V_{s-1,s}^2$	$-v2^s$		1
$0 =$		$t2^s$	$-T_2^s(a^s)$	1
$0 =$		$\mathbf{AAQ} -$	$v1^s \times \mathbf{AQ}^s$	$N_m^2$
$0 =$		$\mathbf{BBP} -$	$v2^s \times \mathbf{BP}^s$	$N_m^2$
$0 =$		$\mathbf{z}^s + \mathbf{C}_0 \mathbf{y}^s + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}^s$	$-\mathbf{AAQ} \times \mathbf{nu} + \mathbf{BBP} \times \mathbf{bu}$	$N_m$
		$-\mathbf{v}1^s \mathbf{Q}_0 + \mathbf{v}2^s \mathbf{P}_0 - \mathbf{NK}_T \mathbf{a}^s$	$-\alpha_1 t2^s \mathbf{K}_T \mathbf{a}^s$	$N_m$

Dans l'équation (6.20),  $s$  varie de  $s = 1$  à  $s = N$ . Ainsi, il y a au total  $N_{eq} = N \times (5N_m + 3 + 6N_m^2 + 2N_m^3)$  équations.

Le vecteur  $\mathbf{X}^s = (a^s, y^s, z^s, nu^s, bu^s, nu2^s, nu3^s, bu2^s, bu3^s, \mathbf{A}Q^s, \mathbf{B}P^s, \mathbf{A}A\mathbf{Q}^s, \mathbf{B}B\mathbf{P}^s, v1^s, v2^s, t2^s)$  a la dimension  $5N_m + 3 + 6N_m^s + 2N_m^3$ . Le vecteur de tous les variables  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3, \dots, \mathbf{X}^N, \Omega)^T$  a la dimension :  $N \times (5N_m + 3 + 6N_m^s + 2N_m^3) + 1$ .

### 6.1.2 Avec masse ajoutée

S'il y a une masse ajoutée sur une micro/nano-poutre  $s$ , l'équation du mouvement de la poutre  $s$  a la forme de l'équation (6.18) avec un terme supplémentaire  $\mu_0 \ddot{a}^s$ , avec la matrice  $\mu_0$  déterminée à partir des composantes suivantes :

$$\mu_{0ij} = \delta_{s_0}(s) m \phi_i(x_0) \phi_j(x_0). \quad (6.21)$$

Si la masse ajoutée est située sur la poutre  $s_0$ , alors  $\delta = 1$  et  $\delta = 0$  dans le cas contraire. La position de la masse ajoutée sur la poutre est  $x_0$ .

## 6.2 Réseau de 2 nano-poutres

Les jeux entre les poutres sont identiques  $g = 200\text{nm}$ , voir figure 6.2. Les poutres ont les caractéristiques suivantes :  $h = 300\text{nm}$ ,  $b = 160\text{nm}$ ,  $l = 10\mu\text{m}$ ,  $Q = 5000$ .

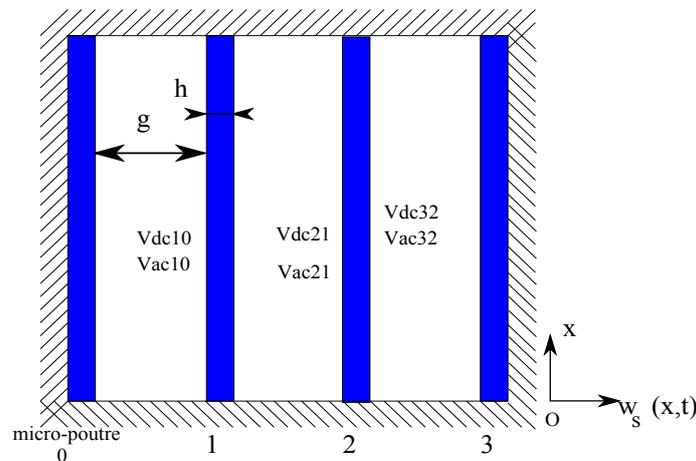


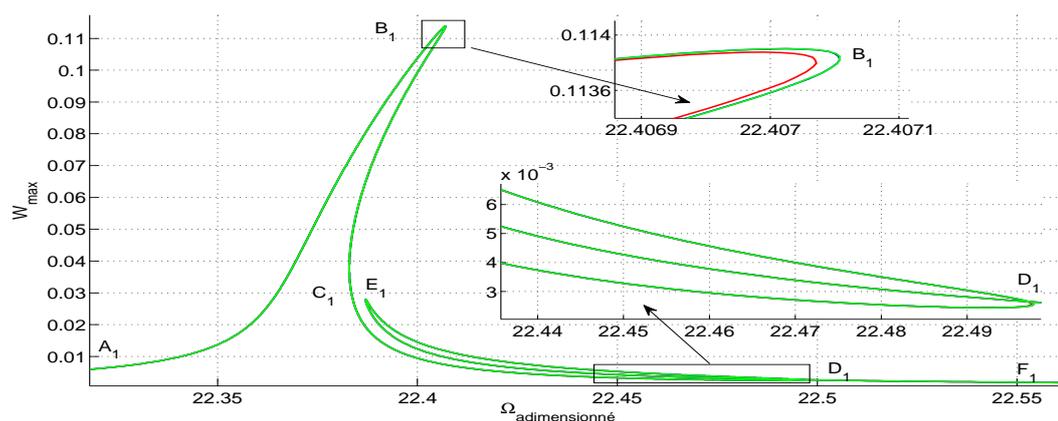
FIGURE 6.2: Modèle du réseau de deux nano-poutres encastées-encastées.

### 6.2.1 Vérification de la robustesse du modèle

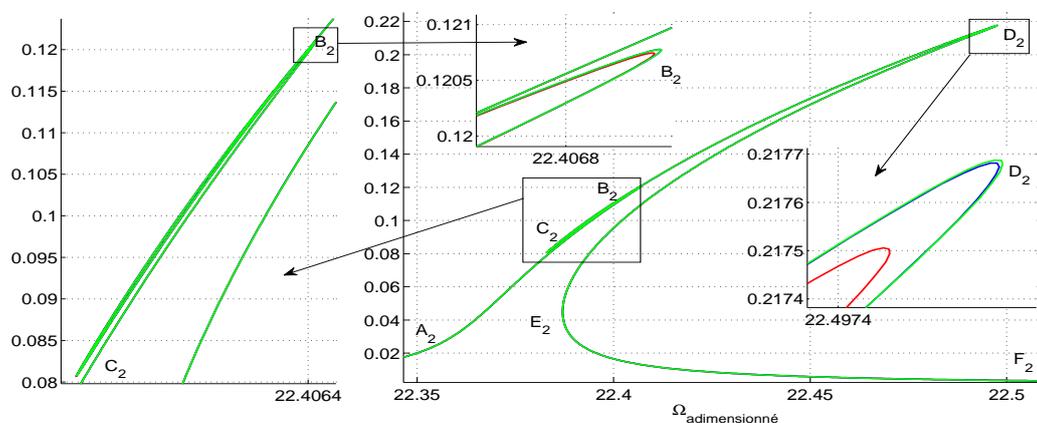
Tout d'abord il s'agit de vérifier les réponses des poutres avec plusieurs modes et avec des développements en série de Taylor avec des ordres différents. La figure 6.3 compare les résultats avec des développements en série de Taylor aux 3<sup>ème</sup> (courbe rouge), 5<sup>ème</sup> (courbe bleue) et 7<sup>ème</sup> (courbe verte) ordres. Les tensions entre les poutres sont indiquées dans le tableau 6.1.

**TABLE 6.1:** Tensions du réseau de 2 nano-poutres

Configuration	$V_{dc10}$	$V_{dc21}$	$V_{dc32}$
	$V_{ac10}$	$V_{ac21}$	$V_{ac32}$
1	0.3	0.45	0.6
	0.3	0.45	0.6



(a)

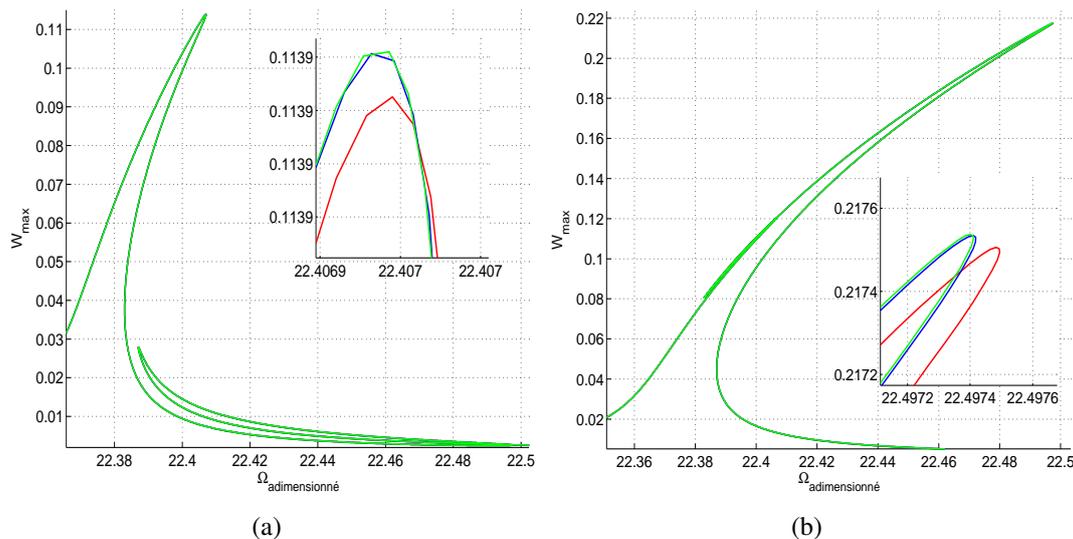


(b)

**FIGURE 6.3:** Réponse de la configuration 1 : vérification de l'utilisation du développement en série de Taylor aux 3<sup>ème</sup> (rouge), 5<sup>ème</sup> (bleu) et 7<sup>ème</sup> (vert) ordres. (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2. Réponse de  $A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow D_i \rightarrow E_i$ .

Pour la nano-poutre 1, la différence entre les différents ordres est très faible car l'amplitude de vibration est petite. Pour la nano-poutre 2, à cause du déplacement plus grand, la différence entre l'ordre 3 et les ordres supérieurs devient plus grande mais reste toutefois modérée (environ 0.1%).

À la différence du cas d'une seule poutre, les réponses sont plus complexes qu'une simple courbe de réponse de l'oscillateur de Duffing et possèdent des branches supplémentaires :  $D_1 - E_1 - F_1$  (nano-poutre 1) et  $B_2 - C_2 - D_2$  (nano-poutre 2). Pour tous les ordres des développements en série de Taylor, ces branches sont coïncidentes. Ainsi, l'utilisation du développement en série de Taylor au 3<sup>ème</sup> ordre peut représenter le résultat avec précision. L'apparition des branches (comme les boucles) sera expliquée dans la sous-section 6.2.4.



**FIGURE 6.4:** Réponse de la configuration 1 : réponse avec plusieurs modes de calcul en utilisant le développement en série de Taylor au 3<sup>ème</sup> ordre avec  $N_m = 1$  (rouge),  $N_m = 2$  (bleu),  $N_m = 3$  (vert). (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2.

L'influence des modes supérieurs est montrée sur la figure 6.4, où les courbes de réponse sont calculées avec des séries de Taylor au 3<sup>ème</sup> ordre. Les amplitudes de vibration n'étant pas grandes, l'influence des modes supérieurs est petite, ce qui est démontré par la faible différence entre des courbes.

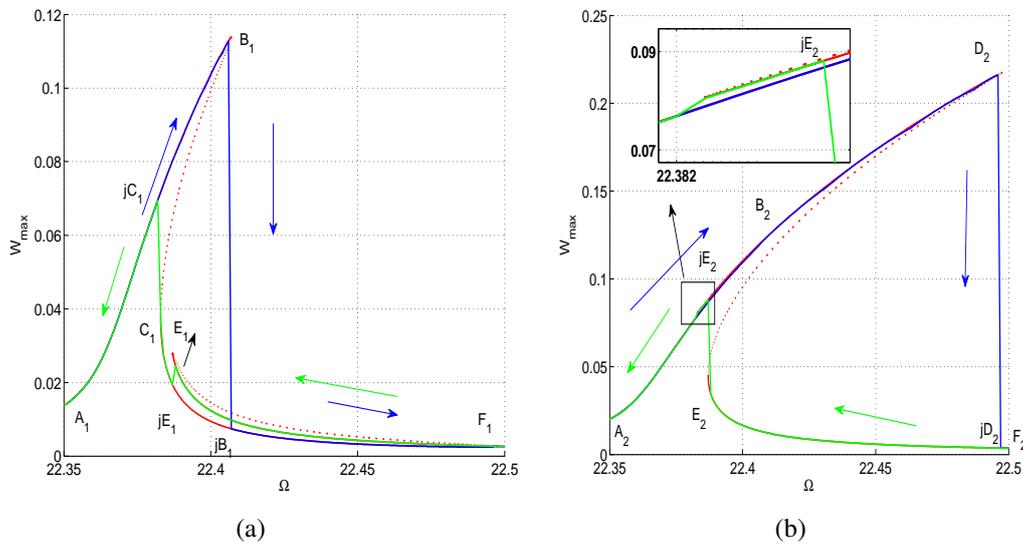
En résumé, le calcul avec 1 mode et l'utilisation de développements de Taylor au 3<sup>ème</sup> ordre fournit un résultat acceptable avec les petites amplitudes de vibration. Dans ce cas,  $W_{max} < 0.25$ , et l'influence des modes supérieurs ainsi que des degrés supérieurs de la série de Taylor est petite.

## 6.2.2 Comparaison des résultats obtenus par HBM+MAN et l'intégration temporelle.

Les résultats obtenus avec ces deux méthodes pour la configuration 1 sont présentés dans la figure 6.5. On constate le bon accord entre les deux méthodes. Cependant, en raison de la plus grande complexité de la courbe de réponse que dans le cas d'une seule

poutre, il n'est pas possible d'obtenir toutes les branches stables avec une simple montée et descente en fréquence par intégration temporelle.

Par exemple, la branche stable  $jE_1 - jB_1$  n'est pas obtenue. Pour la nano-poutre 1, dans la direction de descente en fréquence, la réponse part de  $F_1 - E_1 - jE_1 - C_1 - jC_1 - A_1$  ; il y a deux sauts à  $E_1$  et à  $C_1$  ; pour la nano-poutre 2, de  $F_2 - E_2 - jE_2 - A_2$ , le point  $jE_2$  ne se situe pas sur la branche de montée en fréquence (branche bleue). La méthode de continuation par longueur d'arc utilisée dans la méthode HBM+MAN s'avère ici indispensable car elle permet d'obtenir la totalité de la courbe de réponse.



**FIGURE 6.5:** Réponse de la configuration 1 : comparaison entre le Manlab et l'intégration temporelle. (a) : nano-poutre 1 ; b : nano-poutre 2. HBM+MAN (rouge), intégration temporelle : montée (bleu) et descente (vert) en fréquence ; branche stable ("-") et branche instable ("--").

### 6.2.3 Méthode de la moyenne harmonique

Pour expliquer les petites boucles sur les courbes de réponses, on utilise la méthode de la moyenne.

Les deux nano-poutres sont identiques, leurs modes propres sont également identiques. En s'appuyant sur les développements de la section 6.2.1, le mode fondamental suffit à décrire la dynamique. Les déplacements des nano-poutres 1 et 2 sont exprimés par :

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= a_{11}(t)\phi_1(x) \\ w_2(x,t) &= a_{21}(t)\phi_1(x) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Pour simplifier les calculs analytiques, on utilise le développement en série de Taylor au

1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{1}{(1 + w_{s+1} - w_s)^2} = 1 - 2(w_{s+1} - w_s),$$

$$\frac{1}{(1 + w_s - w_{s-1})^2} = 1 - 2(w_s - w_{s-1}). \quad (6.23)$$

En utilisant la procédure de Galerkin, l'équation (6.18) devient :

$$\ddot{a}_{11} + c\dot{a}_{11} + \omega_1 a_{11} + \beta_{11} a_{11}^3 + (\beta_{12} \cos \Omega t + \beta_{13} \cos^2 \Omega t) a_{11} +$$

$$(\delta_{11} + \delta_{12} \cos \Omega t + \delta_{13} \cos^2 \Omega t) a_{21} + (\gamma_{11} + \gamma_{12} \cos \Omega t + \gamma_{13} \cos^2 \Omega t) = 0 \quad (6.24)$$

$$\ddot{a}_{21} + c\dot{a}_{21} + \omega_2 a_{21} + \beta_{21} a_{21}^3 + (\beta_{22} \cos \Omega t + \beta_{23} \cos^2 \Omega t) a_{21} +$$

$$(\delta_{21} + \delta_{22} \cos \Omega t + \delta_{23} \cos^2 \Omega t) a_{11} + (\gamma_{21} + \gamma_{22} \cos \Omega t + \gamma_{23} \cos^2 \Omega t) = 0 \quad (6.25)$$

où :

$$\beta_{s1} = 151.35\alpha_1; \beta_{s2} = -4\alpha_2(V_{dc_{s,s+1}}V_{ac_{s,s+1}} + V_{dc_{s-1,s}}V_{ac_{s-1,s}}); \beta_{s3} = -2\alpha_2(V_{ac_{s-1,s}}^2 + V_{ac_{s,s+1}}^2);$$

$$\delta_{s1} = 2\alpha_2V_{dc_{12}}^2; \delta_{s2} = 4\alpha_2V_{dc_{12}}V_{ac_{12}}; \delta_{s3} = 2\alpha_2V_{ac_{12}}^2$$

$$\gamma_{s1} = 0.83\alpha_2(V_{dc_{s,s+1}}^2 - V_{dc_{s-1,s}}^2); \gamma_{s2} = 1.66\alpha_2(V_{dc_{s,s+1}}V_{ac_{s,s+1}} - V_{dc_{s-1,s}}V_{ac_{s-1,s}});$$

$$\gamma_{s3} = 0.83\alpha_2(V_{ac_{s,s+1}}^2 - V_{ac_{s-1,s}}^2)$$

avec  $s = 1, 2$ .

On introduit le paramètre  $\sigma_s$  pour exprimer  $\Omega$  au voisinage de la résonance  $\omega_s$  :

$$\Omega = \omega_s + \varepsilon\sigma_s \quad (6.26)$$

$\omega_s$  est déterminé selon :

$$\omega_s = \frac{\lambda_s^4 - 2\alpha_2(V_{dc_{s,s+1}}^2 + V_{dc_{s-1,s}}^2)}{1 + \delta_{s0}(s)m\phi_1(x_0)^2}. \quad (6.27)$$

Les solutions sont cherchées via la forme :

$$a_{11} = A_1(t) \cos(\Omega t) + B_1(t) \sin(\Omega t) \quad (6.28)$$

$$a_{21} = A_2(t) \cos(\Omega t) + B_2(t) \sin(\Omega t) \quad (6.29)$$

La méthode de la moyenne harmonique donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega\dot{A}_1 = & -B_1\omega_1\varepsilon\sigma_1 - \frac{1}{2}cA_1\Omega + \frac{3}{8}\beta_{11}A_1^2B_1 + \frac{3}{8}\beta_{11}B_1^3 + \frac{1}{8}\beta_{13}B_1 \\ & + \frac{1}{2}\delta_{11}B_2 + \frac{1}{8}\delta_{13}B_2\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}\Omega\dot{B}_1 = & \frac{1}{2}cB_1\Omega + \frac{3}{8}\beta_{11}A_1^3 + \frac{3}{8}\beta_{13}A_1 + \frac{1}{2}\gamma_{12} + \frac{3}{8}\beta_{11}A_1B_1^2 - A_1\omega_1\varepsilon\sigma_1 \\ & + \frac{1}{2}\delta_{11}A_2 + \frac{3}{8}\delta_{13}A_2\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\Omega\dot{A}_2 = & -B_2\omega_2\varepsilon\sigma_2 - \frac{1}{2}cA_2\Omega + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2^2B_2 + \frac{3}{8}\beta_{21}B_2^3 + \frac{1}{8}\beta_{23}B_2 + \\ & \frac{1}{2}\delta_{21}B_1 + \frac{1}{8}\delta_{23}B_1\end{aligned}\quad (6.32)$$

$$\begin{aligned}\Omega\dot{B}_2 = & \frac{1}{2}cB_2\Omega + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2^3 + \frac{3}{8}\beta_{23}A_2 + \frac{1}{2}\gamma_{22} + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2B_2^2 - A_2\omega_2\varepsilon\sigma_2 \\ & + \frac{1}{2}\delta_{21}A_1 + \frac{3}{8}\delta_{23}A_1\end{aligned}\quad (6.33)$$

Les solutions en régime permanent vérifient :  $\dot{A}_1 = \dot{B}_1 = \dot{A}_2 = \dot{B}_2 = 0$ . Dans le cas avec masse ajoutée, si celle-ci tombe sur la nano-poutre 2, les équations (6.30) et (6.31) ne changent pas, les équations (6.32,6.33) deviennent :

$$\begin{aligned}0 = & -B_2\omega_2\varepsilon\sigma_2 - \frac{1}{2}cA_2\Omega + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2^2B_2 + \frac{3}{8}\beta_{21}B_2^3 + \frac{1}{8}\beta_{23}B_2 + \frac{1}{2}\delta_{21}B_1 + \frac{1}{8}\delta_{23}B_1 \\ & - \frac{1}{2}m\phi(x_0)^2\omega_2B_2\end{aligned}\quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}0 = & \frac{1}{2}cB_2\Omega + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2^3 + \frac{3}{8}\beta_{23}A_2 + \frac{1}{2}\gamma_{22} + \frac{3}{8}\beta_{21}A_2B_2^2 - A_2\omega_2\varepsilon\sigma_2 + \frac{1}{2}\delta_{21}A_1 + \frac{3}{8}\delta_{23}A_1 \\ & - \frac{1}{2}m\phi(x_0)^2\omega_2A_2\end{aligned}\quad (6.35)$$

Avec la condition  $\dot{A}_1 = \dot{B}_1 = \dot{A}_2 = \dot{B}_2 = 0$ , les équations (6.30-6.33) constituent un système d'équations algébriques non linéaires dont les solutions peuvent être obtenues par une méthode numérique. Avec ou sans masse ajoutée, la réponse obtenue par cette méthode est similaire aux méthodes numériques de la section 6.2.1.

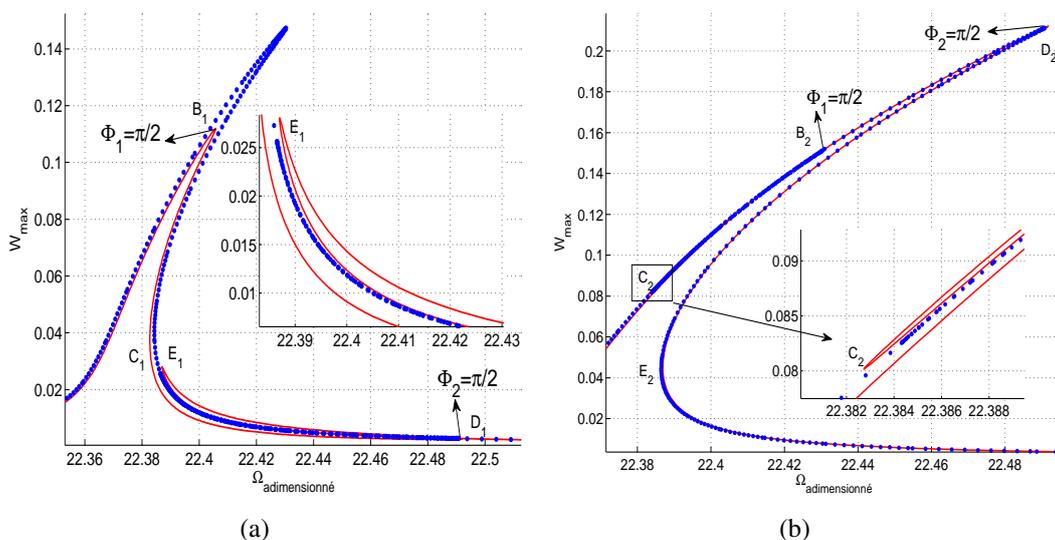
## 6.2.4 Analyse de la courbe de réponse

Afin de déterminer précisément les points limites des courbes de réponse, une attention particulière est apportée sur les déphasages  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  du déplacement des nano-poutres 1 et 2 par rapport à l'excitation. À la résonance de la nano-poutre 1, le déphasage  $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$  au point  $B_1$  (courbe rouge) correspondant au point  $B_2$  (courbe rouge) de la petite boucle  $B_2 - C_2$  sur la réponse de la nano-poutre 2, voir figure 6.6. Identiquement, à la résonance de la nano-poutre 2,  $\Phi_2 = \frac{\pi}{2}$  au point  $D_2$  (courbe rouge) correspondant au point

$D_1$  (courbe rouge) sur la réponse de la nano-poutre 1. Ainsi, les petites boucles sont dues à l'influence de la résonance de la poutre voisine.

On peut analyser ces influences par la méthode de la moyenne harmonique. Les équations (6.30) et (6.31) correspondent au déplacement de la nano-poutre 1 et les équations (6.32) et (6.33) au déplacement de la nano-poutre 2. Dans ces équations, les termes de couplage  $(\frac{1}{2}\delta_{11} + \frac{1}{8}\delta_{13})B_2$  et  $(\frac{1}{2}\delta_{11} + \frac{1}{8}\delta_{13})A_2$  représentent l'influence de la nano-poutre 2 sur la nano-poutre 1 et les termes  $(\frac{1}{2}\delta_{21} + \frac{1}{8}\delta_{23})B_1$  et  $(\frac{1}{2}\delta_{21} + \frac{3}{8}\delta_{23})A_1$ , l'influence de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2. On détermine la réponse de chaque poutre sans ces termes d'influence, comme le montre la figure 6.6. Les courbes bleues sans termes d'influence de la poutre voisine sont similaires à la réponse d'une seule poutre, les petites boucles  $D_1 - E_1 - F_1$  et  $B_2 - C_2 - D_2$  ont disparu, voir figure 6.6.

Sans influence des poutres voisines, l'amplitude de la nano-poutre 1 change de  $W_{max} = 0.11$  à  $W_{max} = 0.15$ , tandis que l'amplitude de la nano-poutre 2 ne change pas. Cela est dû au fait que la vibration de la nano-poutre 2 est grande ( $W_{max} \approx 0.22$ ). Ainsi son influence sur la nano-poutre 1 est plus grande que l'influence de la nano-poutre 1 avec  $W_{max} = 0.11$  sur la nano-poutre 2. Ceci induit un changement d'amplitude de la nano-poutre 1 plus grand que celui de la nano-poutre 2 lors du calcul des réponses sans termes d'influence.



**FIGURE 6.6:** Réponse de la configuration 1 sans masse ajoutée, réponse complète (rouge), réponse sans influence de la nano-poutre voisine (bleu). (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2.

### 6.2.5 Mécanisme de détection

L'influence de la poutre voisine est très importante et conduit à l'apparition des boucles sur la courbe de réponse qui peut changer beaucoup en présence d'une petite

masse ajoutée. Sur la figure 6.7, avec  $m = 10^{-4}$  sur la nano-poutre 2 ( $W_{max} = 0.22$ ), la courbe de réponse (courbe rouge) devient plus compliquée avec plus de branches de solution. Si cette masse ajoutée est tombée sur la nano-poutre 1 ( $W_{max} = 0.11$ ), les réponses des nano-poutres 1 et 2 ne changent pas, il n'y a qu'un petit décalage en fréquence de la réponse de la nano-poutre 1. Ainsi, le grand ou petit changement de réponse avec masse ajoutée dépend de l'amplitude de vibration de la poutre où la masse est tombée.

Avec  $m = 10^{-4}$  sur la nano-poutre 2, la réponse de la nano-poutre 2 n'enregistre qu'un faible décalage en fréquence, tandis que la réponse de la nano-poutre 1 change beaucoup. Sur sa courbe de réponse, il y a trois niveaux d'amplitude correspondant aux points  $B_1, H_1, F_1$ ; son amplitude maximale change de  $W_{max} = 0.115$  à  $W_{max} = 0.17$  et la courbe de réponse a plus de branches. Pour obtenir les différentes branches stables par intégration temporelle, il est nécessaire de combiner judicieusement plusieurs montées et descentes en fréquence.

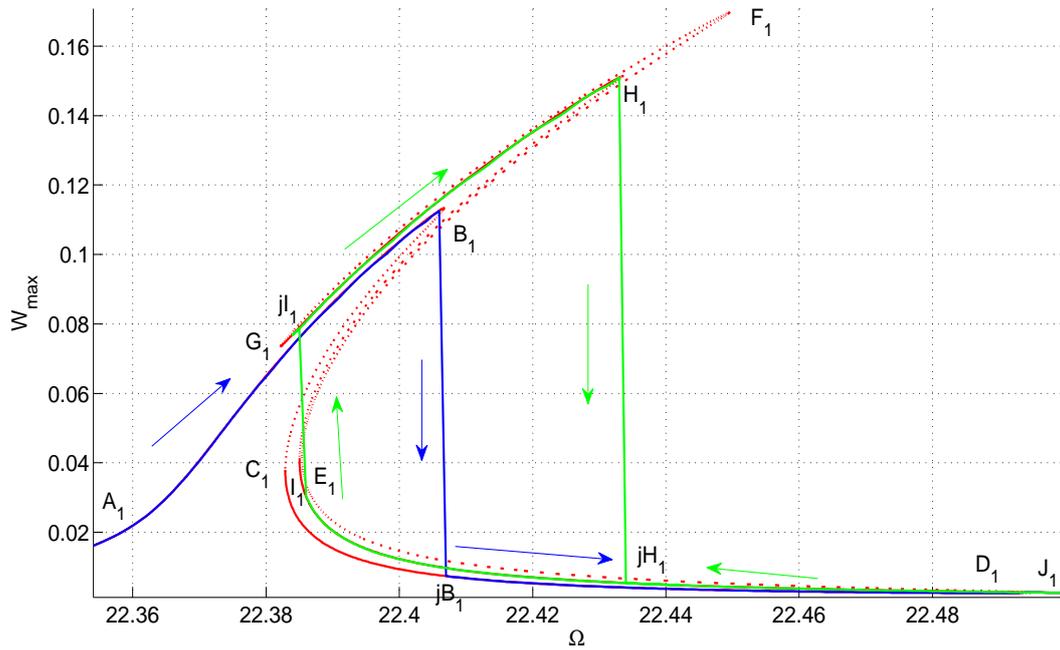
Sur la figure 6.7, la réponse avec une montée en fréquence  $\Omega$  classique est la courbe bleue; pour la nano-poutre 1, c'est  $A_1 - B_1 - jB_1 - D_1 - J_1$  et pour la nano-poutre 2,  $A_2 - B_2 - D_2 - jD_2 - J_2$ . Avec une descente en fréquence  $\Omega$ , les réponses parcourues sont les branches  $J_1 - D_1 - I_1 - jI_1 - G_1 - A_1$  (nano-poutre 1) et  $J_2 - jD_2 - I_2 - jI_2 - G_2 - jG_2 - A_2$  (nano-poutre 2). Ces réponses sont similaires au cas sans masse ajoutée, la différence est très petite ce qui induit une détection difficile.

Pour détecter la masse ajoutée, il faut démarrer par une descente en fréquence  $\Omega$  à partir de  $J_1$ . Puis, lorsqu'il y a le saut de la réponse de  $I_1$  à  $jI_1$  sur la nano-poutre 1 correspondant au saut de  $I_2$  à  $jI_2$  pour la nano-poutre 2, la fréquence  $\Omega$  est re-augmentée. Ainsi on obtient les courbes  $J_1 - D_1 - I_1 - jI_1 - H_1 - jH_1 - J_1$  (nano-poutre 1) et  $J_2 - jD_2 - I_2 - jI_2 - J_2$  (nano-poutre 2). Dans ce cas, l'amplitude maximale de la nano-poutre 1 est  $W_{max}(H_1) = 0.15$  (pour le cas sans masse ajoutée,  $W_{max}(B_1) = 0.11$ ); l'amplitude maximale de la nano-poutre 2 est  $W_{max}(I_2) = 0.03$  (pour le cas sans masse ajoutée,  $W_{max}(D_2) = 0.22$ ). Ainsi, le cas avec masse ajoutée est bien détecté par rapport au cas sans masse ajoutée en utilisant la descente en fréquence jusqu'au point  $I_1$ , puis la montée en fréquence.

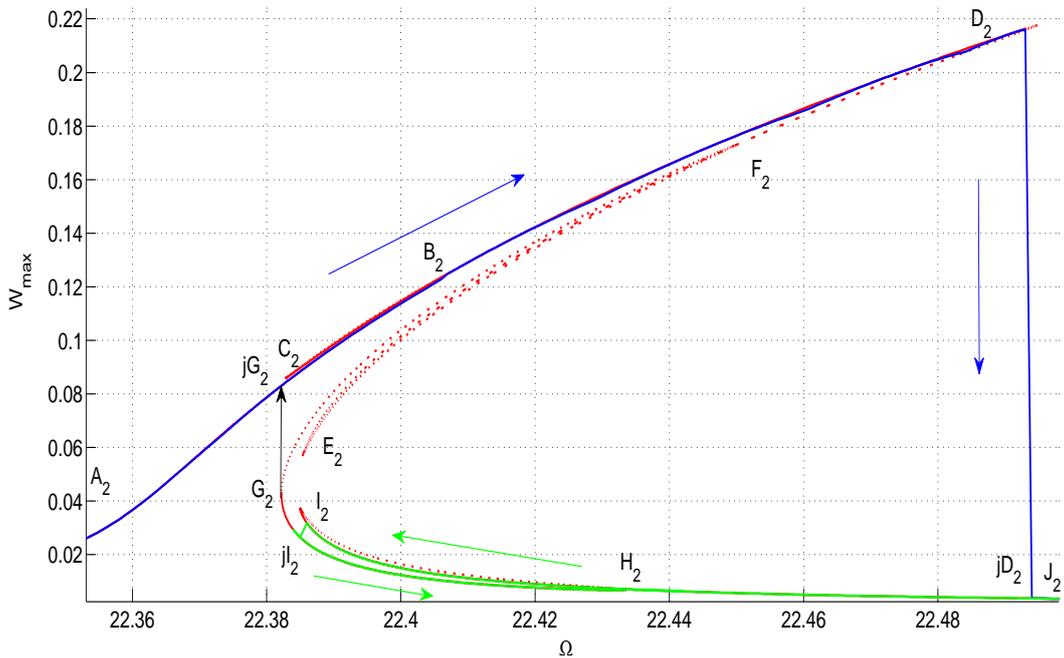
Si on ajuste les tensions, le grand changement d'amplitude de la nano-poutre 1 a lieu avec une masse ajoutée plus petite, par exemple, si  $V_{dc32} = V_{ac32} = 0.575V$  et si les autres tensions sont inchangées, on peut détecter des masses ajoutées supérieures à  $m_0 = 10^{-5}$ . Cependant, pour des masses ajoutées différentes et plus petites, la différence des réponses est très faible, ce qui rend la quantification difficile.

### 6.3 Réseau de 3 nano-poutres

Le modèle du réseau de trois nano-poutres identiques est montré sur la figure 6.8. Comme pour le réseau de 2 poutres, le déplacement de chaque nano-poutre est cherché



(a)



(b)

**FIGURE 6.7:** Réponse de la configuration 1 avec  $m = 10^{-4}$  à  $x_0 = 0.5$  sur la nano-poutre 2. (a) : nano-poutre 1 ; b : nano-poutre 2. HBM+MAN (rouge), intégration temporelle (bleu et vert); branche stable ("-"), branche instable (" . ").

sous la forme :

$$a_{11} = A_1(t) \cos(\Omega t) + B_1(t) \sin(\Omega t) \quad (6.36)$$

$$a_{21} = A_2(t) \cos(\Omega t) + B_2(t) \sin(\Omega t) \quad (6.37)$$

$$a_{31} = A_3(t) \cos(\Omega t) + B_3(t) \sin(\Omega t) \quad (6.38)$$

La méthode de la moyenne harmonique donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega \dot{A}_1 = & -B_1 \omega_1 \varepsilon \sigma_1 - \frac{1}{2} c A_1 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{11} A_1^2 B_1 + \frac{3}{8} \beta_{11} B_1^3 + \frac{1}{8} \beta_{13} B_1 \\ & + \left( \frac{1}{2} \delta_{11} + \frac{1}{8} \delta_{13} \right) B_2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \Omega \dot{B}_1 = & \frac{1}{2} c B_1 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{11} A_1^3 + \frac{3}{8} \beta_{13} A_1 + \frac{1}{2} \gamma_{12} + \frac{3}{8} \beta_{11} A_1 B_1^2 - A_1 \omega_1 \varepsilon \sigma_1 \\ & + \left( \frac{1}{2} \delta_{11} + \frac{3}{8} \delta_{13} \right) A_2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \Omega \dot{A}_2 = & -B_2 \omega_2 \varepsilon \sigma_2 - \frac{1}{2} c A_2 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{21} A_2^2 B_2 + \frac{3}{8} \beta_{21} B_2^3 + \frac{1}{8} \beta_{23} B_2 + \\ & \left( \frac{1}{2} \delta_{21} + \frac{1}{8} \delta_{23} \right) B_3 + \left( \frac{1}{2} \delta_{24} + \frac{1}{8} \delta_{26} \right) B_1 \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \Omega \dot{B}_2 = & \frac{1}{2} c B_2 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{21} A_2^3 + \frac{3}{8} \beta_{23} A_2 + \frac{1}{2} \gamma_{22} + \frac{3}{8} \beta_{21} A_2 B_2^2 - A_2 \omega_2 \varepsilon \sigma_2 \\ & + \left( \frac{1}{2} \delta_{21} + \frac{3}{8} \delta_{23} \right) A_3 + \left( \frac{1}{2} \delta_{24} + \frac{3}{8} \delta_{26} \right) A_1 \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \Omega \dot{A}_3 = & -B_3 \omega_3 \varepsilon \sigma_3 - \frac{1}{2} c A_3 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{31} A_3^2 B_3 + \frac{3}{8} \beta_{31} B_3^3 + \frac{1}{8} \beta_{33} B_3 + \\ & \left( \frac{1}{2} \delta_{34} + \frac{1}{8} \delta_{36} \right) B_2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \Omega \dot{B}_3 = & \frac{1}{2} c B_3 \Omega + \frac{3}{8} \beta_{31} A_3^3 + \frac{3}{8} \beta_{33} A_3 + \frac{1}{2} \gamma_{32} + \frac{3}{8} \beta_{31} A_3 B_3^2 - A_3 \omega_3 \varepsilon \sigma_3 \\ & + \left( \frac{1}{2} \delta_{34} + \frac{3}{8} \delta_{36} \right) A_2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

où :

$$\beta_{s1} = 151.35 \alpha_1; \beta_{s2} = -4 \alpha_2 (V_{dc_{s,s+1}} V_{ac_{s,s+1}} + V_{dc_{s-1,s}} V_{ac_{s-1,s}}); \beta_{s3} = -2 \alpha_2 (V_{ac_{s-1,s}}^2 + V_{ac_{s,s+1}}^2);$$

$$\delta_{s1} = 2 \alpha_2 V_{dc_{s,s+1}}^2; \delta_{s2} = 4 \alpha_2 V_{dc_{s,s+1}} V_{ac_{s,s+1}}; \delta_{s3} = 2 \alpha_2 V_{ac_{s,s+1}}^2$$

$$\delta_{s4} = 2 \alpha_2 V_{dc_{s-1,s}}^2; \delta_{s5} = 4 \alpha_2 V_{dc_{s-1,s}} V_{ac_{s-1,s}}; \delta_{s6} = 2 \alpha_2 V_{ac_{s-1,s}}^2$$

$$\gamma_{s1} = 0.83 \alpha_2 (V_{dc_{s,s+1}}^2 - V_{dc_{s-1,s}}^2); \gamma_{s2} = 1.66 \alpha_2 (V_{dc_{s,s+1}} V_{ac_{s,s+1}} - V_{dc_{s-1,s}} V_{ac_{s-1,s}});$$

$$\gamma_{s3} = 0.83 \alpha_2 (V_{ac_{s,s+1}}^2 - V_{ac_{s-1,s}}^2)$$

Soit les deux cas suivants où les tensions d'actionnement électrostatique sont asymétriques ou symétriques.

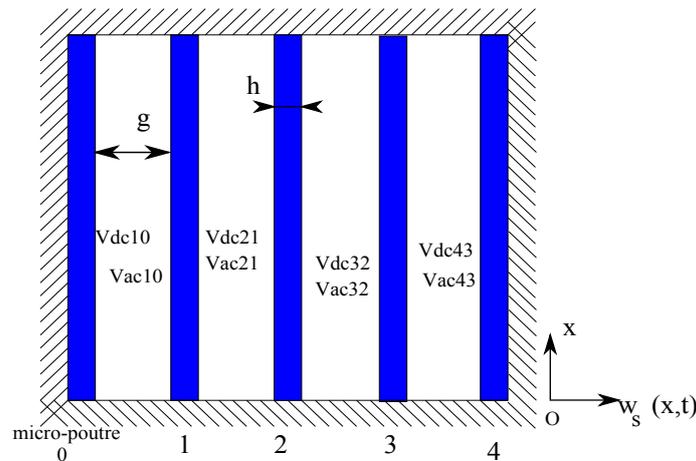


FIGURE 6.8: Modèle du réseau de trois nano-poutres encastées-encastées.

### 6.3.1 Tensions d'actionnement asymétriques

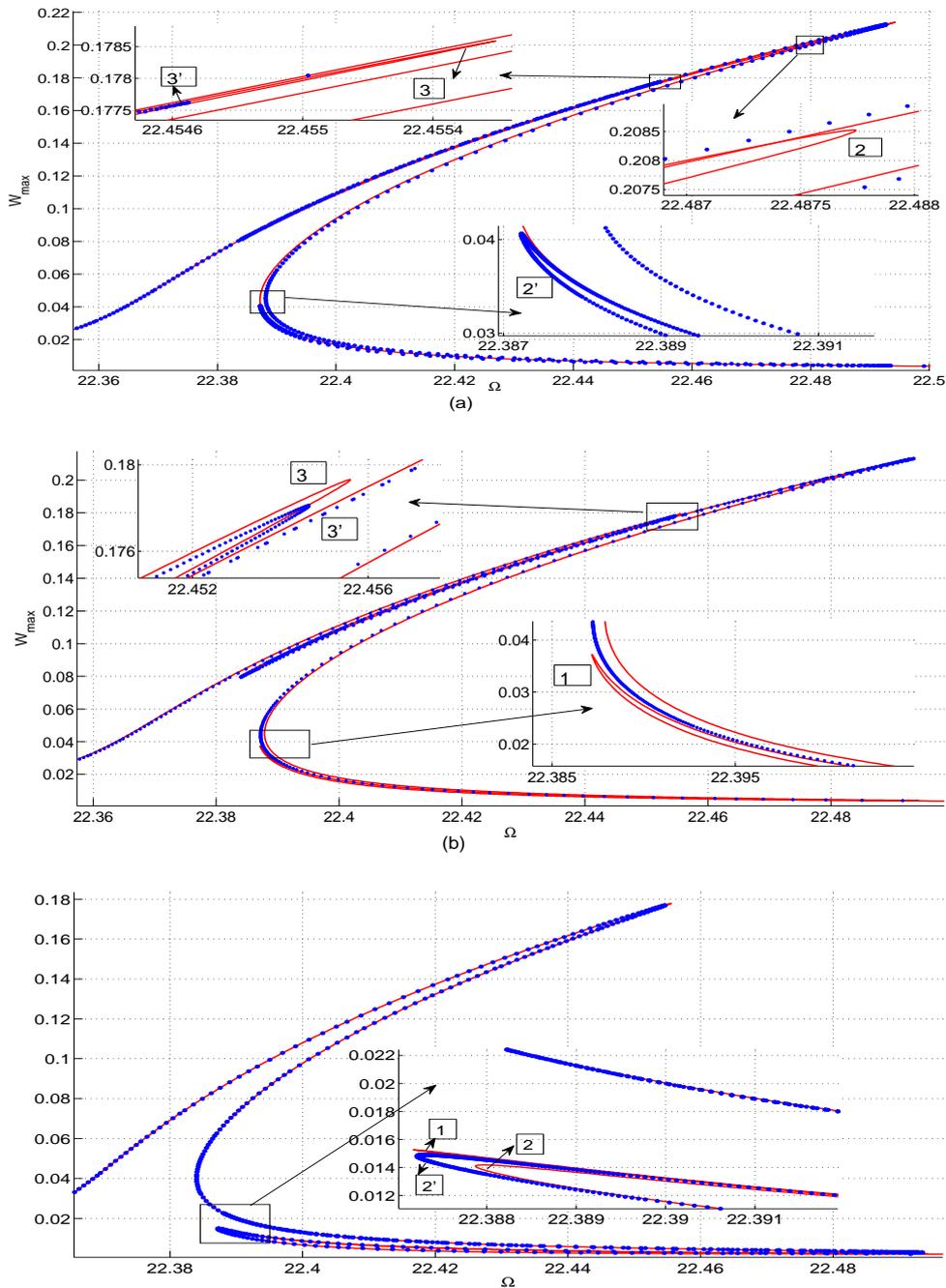
On considère la configuration 2 avec les tensions indiquées dans le tableau 6.2.

TABLE 6.2: Tensions d'actionnement asymétriques du réseau de 3 nano-poutres.

Configuration	$Vdc_{10}$	$Vdc_{21}$	$Vdc_{32}$	$Vdc_{n3}$
	$Vac_{10}$	$Vac_{21}$	$Vac_{32}$	$Vac_{n3}$
2	0.5	0.3	0.5	0.4
	0.5	0.3	0.5	0.4

Les courbes de réponse du réseau de trois nano-poutres ont plus de branches de solution que le réseau de deux nano-poutres, voir figure 6.9. Cela vient du fait que chaque nano-poutre est influencée par les déplacements de plus de nano-poutres voisines que dans le cas du réseau à deux nano-poutres. Dans l'équation du déplacement de la nano-poutre 1 (ou nano-poutre 3), seule la micro-poutre 2 a une influence ; a contrario, la réponse de la nano-poutre 2 dépend des déplacements des nano-poutres 1 et 3. Par conséquent, l'influence de la nano-poutre 3 (respectivement la nano-poutre 1) sur la nano-poutre 1 (respectivement la nano-poutre 3) est cachée via le déplacement de la nano-poutre 2. Évidemment, cette influence est plus faible que l'influence directe de la nano-poutre 2 sur les nano-poutres 1 ou 3. Ainsi, chaque poutre est toujours influencée par les déplacements de deux poutres, ce qui explique l'existence de deux petites boucles sur sa réponse.

Soit, tout d'abord, la nano-poutre 2, dont la réponse est représentée par la courbe rouge sur la figure 6.9-b. Les deux boucles 1 et 3 sur la courbe correspondent respectivement aux influences des nano-poutres 1 et 3. On peut le démontrer en annulant dans les équations (6.41) et (6.42) les termes relatifs à l'influence de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2 soient  $(\frac{1}{2}\delta_{24} + \frac{1}{8}\delta_{26})B_1$  et  $(\frac{1}{2}\delta_{24} + \frac{3}{8}\delta_{26})A_1$ . La réponse est alors la courbe bleue qui ne



**FIGURE 6.9:** Réponse de la configuration 2 du réseau de 3 nano-poutres sans masse ajoutée ; réponse complète (rouge), réponse sans influence de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2 (bleu). (a) : nano-poutre 1 ; (b) : nano-poutre 2 ; (c) : nano-poutre 3.

possède que la boucle 3', la boucle 1 ayant disparu. Par conséquent la boucle 1 est bien due à l'influence de la nano-poutre 1.

Ensuite, la figure 6.9-c montre la réponse de la nano-poutre 3 ; la boucle 1 correspondant à l'influence de la nano-poutre 1, est très petite. En cas d'annulation de l'effet de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2, la nano-poutre 3 n'est plus influencée par la nano-poutre 1 via la nano-poutre 2 ; ainsi la boucle 1 a disparu (courbe bleue) et dans la réponse de la nano-poutre 3 ne reste que la boucle 2'.

Pour la nano-poutre 1, si l'influence de la nano-poutre 1 sur la nano-poutre 2 est annulée mais pas celle de la nano-poutre 2 sur la nano-poutre 1. Alors la nano-poutre 1 est influencée encore par les deux nano-poutres 3 et 2 ; ainsi sur la figure 6.9-a, la courbe bleue a 2 boucles. Évidemment, les positions des boucles ont changé.

Comme le cas du réseau de deux nano-poutres, la courbe de réponse avec masse ajoutée change avec plusieurs boucles. L'amplitude d'une nano-poutre évolue beaucoup selon la valeur des tensions et la masse ajoutée tombant sur l'une ou l'autre nano-poutres.

Là encore, la détection d'une masse ajoutée peut s'effectuer via des montées et des descentes en fréquence judicieusement choisies, mais cela est rendu difficile par la complexité des courbes.

### 6.3.2 Tensions d'actionnement symétriques

Dans le cas de 3 nano-poutres (et plus généralement d'un nombre impair de poutres), la détection peut être grandement facilitée en considérant une configuration symétrique. Les tensions sont disposées symétriquement par rapport à la nano-poutre 2, voir le tableau 6.3. Avec les tensions de la configuration 3, les déplacements des nano-poutres ne dépassent pas la limite du pull-in. Pour la configuration 4, les tensions sont très grandes, ainsi la déflexion de nano-poutres est très grande et à la résonance, les nano-poutres sont collées aux électrodes d'actionnement.

**TABLE 6.3:** Tensions d'actionnement symétriques du réseau de 3 nano-poutres.

Configurations	$Vdc_{10}$	$Vdc_{21}$	$Vdc_{32}$	$Vdc_{n3}$
	$Vac_{10}$	$Vac_{21}$	$Vac_{32}$	$Vac_{n3}$
3	0	0.28	0.28	0
	0	0.88	0.88	0
4	0	6.5	6.5	0
	0	1	1	0

#### 6.3.2.1 Configuration 3

Les tensions étant symétriques, les forces électrostatiques qui s'appliquent sur la nano-poutre 2 s'annulent ; ainsi la nano-poutre 2 ne bouge pas. Dans le cas d'une masse ajoutée sur la nano-poutre 2, le réseau reste symétrique, la réponse du réseau ne change pas. Si la masse ajoutée tombe sur la nano-poutre 1 ou 3, le système perd sa symétrie et la réponse

de la nano-poutre 1 ou 3 change, mais avec un petit décalage en fréquence, difficile à détecter. C'est pourquoi on se base plutôt sur la réponse de la nano-poutre 2 pour détecter la masse ajoutée.

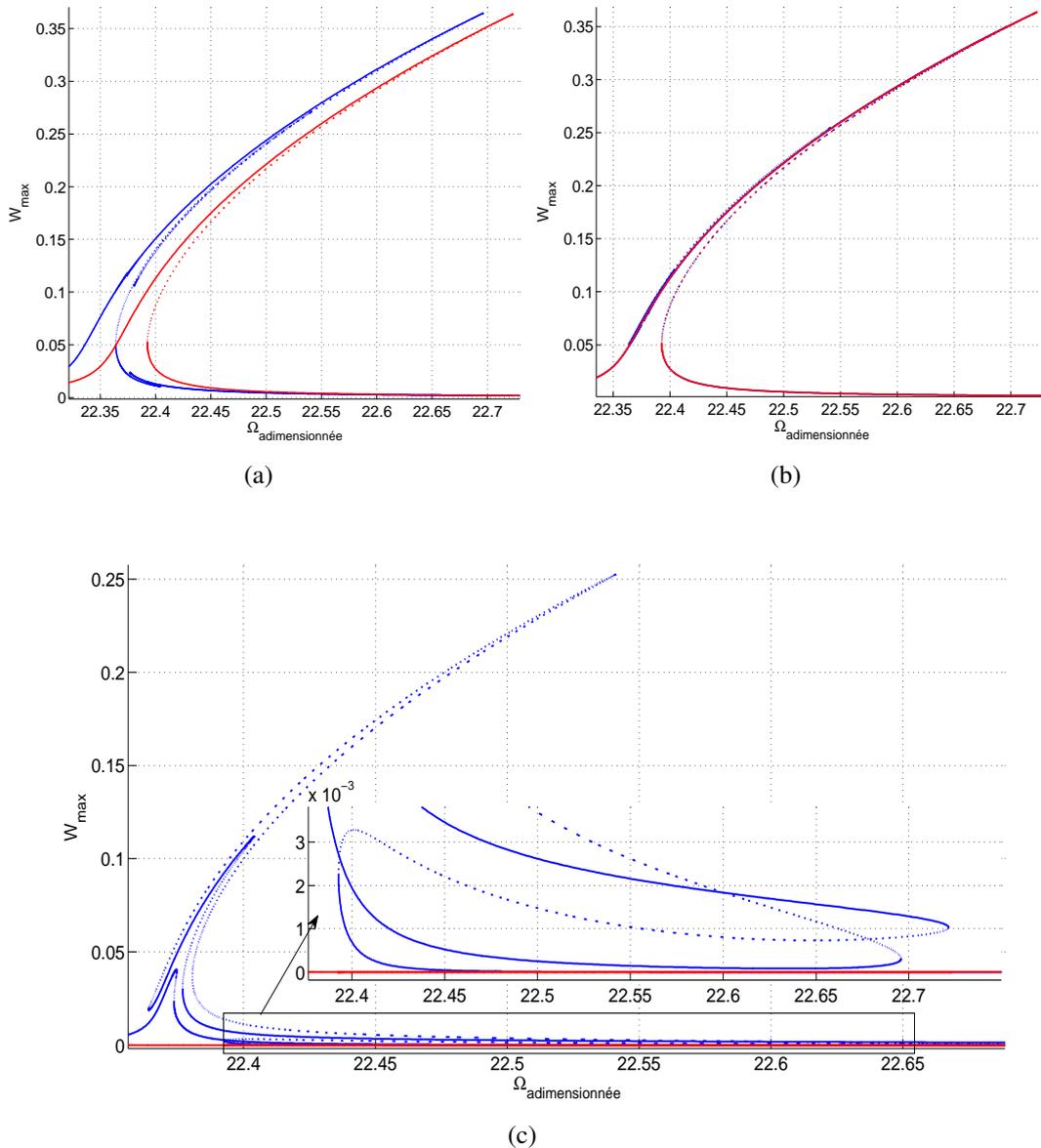
Dans le cas d'une masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  tombant à la position  $x_0 = 0.5$  de la nano-poutre 1, la réponse du réseau est montrée sur la figure 6.10. La réponse de la nano-poutre 1 est décalée à gauche. Les courbes de réponse des nano-poutres 1 et 3 présentent des boucles, cependant leurs amplitudes ne changent pas par rapport au cas sans masse ajoutée. Par conséquent la détection se basant sur les réponses de ces nano-poutres est difficile. Par contre, pour la nano-poutre 2, l'amplitude est nulle ( $W_{max} = 0$ ) sans masse ajoutée (courbe rouge) alors qu'avec  $m = 10^{-3}$ ,  $W_{max}$  est différent de 0 et grand (courbe bleue).

La figure 6.11 explique la réponse de la nano-poutre 2 avec masse ajoutée. Les tensions  $V_{dc32}$  et  $V_{ac32}$  sont identiques aux tensions  $V_{dc21}$  et  $V_{ac21}$ , le déplacement de la nano-poutre 2 ne dépend que de la différence des déplacements des nano-poutres 1 et 3. Sur la figure 6.11-b, on représente la position relative entre deux nano-poutres 1 et 3. Sans masse ajoutée, le système est symétrique, les déplacements des nano-poutres 1 et 3 sont les mêmes, ils correspondent à la ligne noire avec l'angle  $45^\circ$ , voir figure 6.11-b; les poutres 1 et 3 vibrent en opposition de phase alors que la nano-poutre 2 ne vibre pas ( $W_{max} = 0$ ).

Avec la masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ , les déplacements des nano-poutres 1 et 3 ont une différence qui dépend de la valeur de  $\Omega$ . Par exemple, au point A sur la courbe bleue de la figure 6.11-a,  $\Omega = 22.374$ ; les déplacements des nano-poutres 1 et 3 correspondent à la courbe bleue sur la figure 6.11-b. Par rapport au cas sans masse ajoutée, la différence des déplacements de ces deux nano-poutres est caractérisée par la distance maximale de la courbe bleue à la ligne noire; c'est la distance  $A_1A_2$ ; pour les autres valeurs de  $\Omega$  à B,C,D, ce sont les distances  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ ,  $D_1D_2$ . Il apparaît que  $C_1C_2 > D_1D_2 > A_1A_2 > B_1B_2$ , et les niveaux d'amplitude sont :  $W_C > W_D > W_A > W_B$ . Plus les déplacements des nano-poutres 1 et 3 sont différents, plus le déplacement de la nano-poutre 2 est grand.

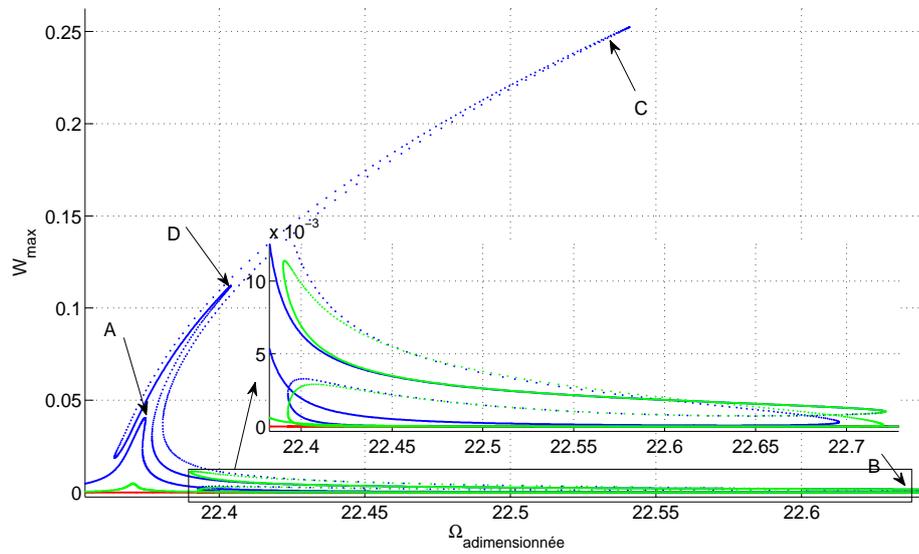
Avec  $m = 10^{-3}$ , l'amplitude  $W_{max}$  de la nano-poutre 2 est grande; par exemple, au point C,  $W_{max} = 0.25$ ; mais cette branche est instable, donc non observable expérimentalement. Les branches obtenues par la méthode d'intégration temporelle selon une descente ou une montée en fréquence de  $\Omega$  sont représentées sur la figure 6.12. Comme pour le réseau de deux nano-poutres, la réponse a plusieurs branches; les branches correspondants aux montée et descente en fréquence  $\Omega$  ne coïncident pas. Selon la montée en fréquence (courbe verte, figure 6.12-a),  $W_{max} = 0.05$ ; selon la descente en fréquence (courbe bleue),  $W_{max} = 0.04$ . Si on combine une descente jusqu'au saut en amplitude en F, puis une montée en fréquence, on obtient une autre branche avec une amplitude plus grande ( $W_{max} = 0.11$ ) que dans le cas d'une montée ou descente pure (courbe noire sur la figure 6.12-b).

Pour la configuration 3, avec une grande masse ajoutée  $m = 10^{-3}$ , l'amplitude de la nano-poutre 2 est grande; rendant aisée la détection. Cependant avec une masse plus petite,  $m = 10^{-4}$ , la différence des déplacements des nano-poutres 1 et 3 est petite; le déplacement de la nano-poutre 2 est également petit ce qui conduit à une détection plus

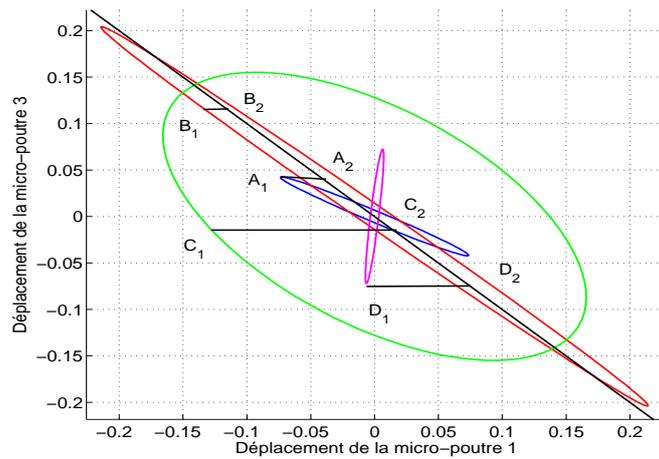


**FIGURE 6.10:** Réponse de la configuration 3 : avec (bleu) et sans (rouge) masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  au milieu de la nano-poutre 1. Réponses des nano-poutres 1 (a), 3 (b) et 2 (c). Sans masse ajoutée, l'amplitude de la nano-poutre 2 est nulle (ligne rouge sur la figure c). Branches stable (" - ") et instable (" - - ")

difficile. Il existe donc un seuil pour la masse ajoutée, à partir duquel la brisure de symétrie est suffisamment nette pour générer une amplitude de la poutre 2 importante. Pour détecter des masses ajoutées plus petites, on étudie la configuration 4.

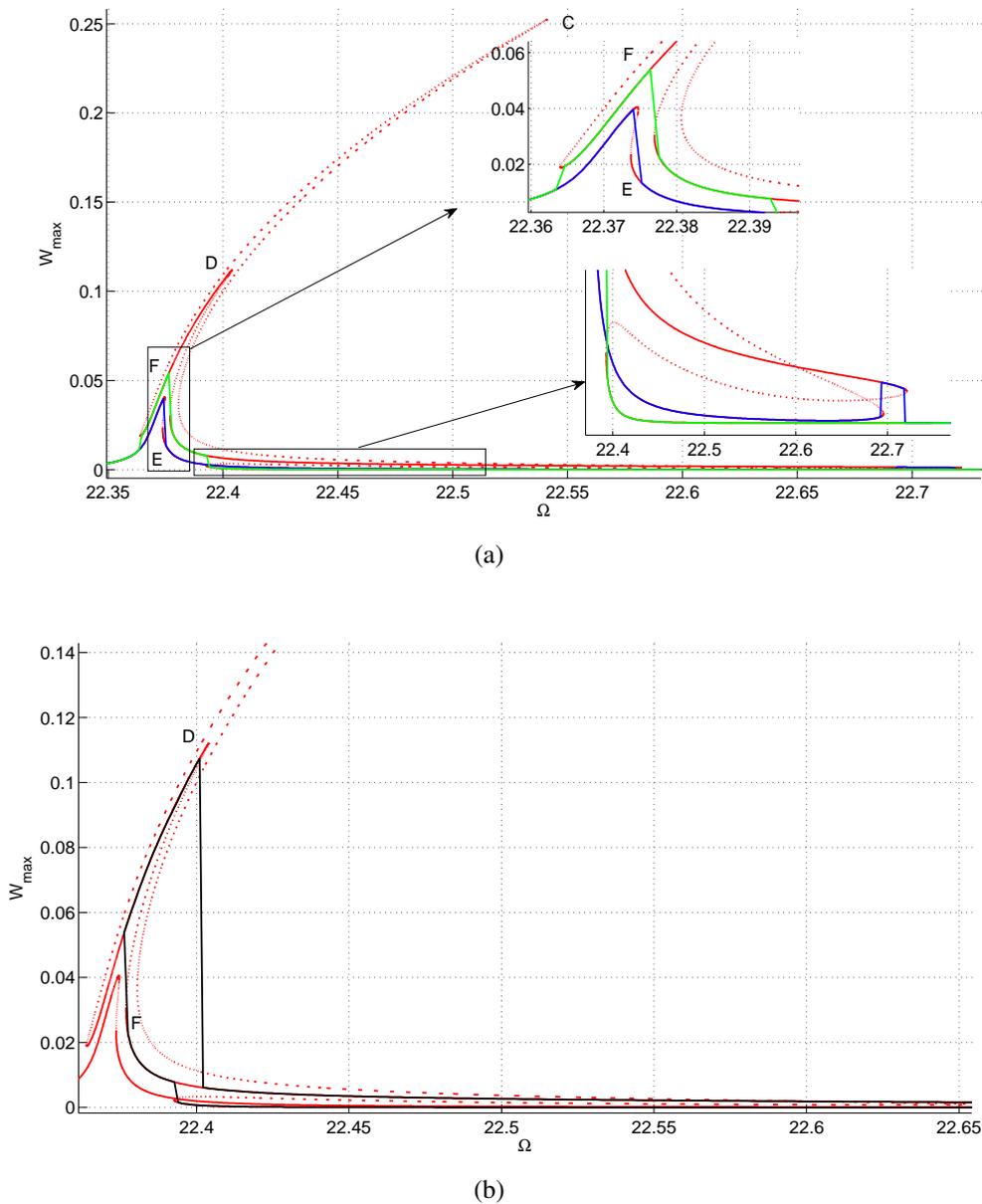


(a)



(b)

**FIGURE 6.11:** (a) : réponse de la nano-poutre 2 de la configuration 3, sans masse ajoutée (rouge); avec  $m = 10^{-4}$  (vert);  $m = 10^{-3}$  (bleu), masse ajoutée sur la nano-poutre 1. (b) : position relative entre la nano-poutre 1 et la nano-poutre 3 du cas avec  $m = 10^{-3}$  à  $\Omega = 22.374$ (bleu) point A, à  $\Omega = 22.65$ (rouge) point B, à  $\Omega = 22.53$ (vert) point C, à  $\Omega = 22.4$ (rose) point D; la ligne en noir : la position entre deux nano-poutres du cas sans masse ajoutée.



**FIGURE 6.12:** Réponse de la nano-poutre 2 de la configuration 3 avec masse ajoutée  $m = 10^{-3}$  sur la nano-poutre 1. (a) : Manlab (rouge) ; intégration temporelle : montée (bleu) et descente (vert) en fréquence. (b) : Manlab (rouge) ; intégration temporelle : descente en fréquence jusqu'au saut à F et puis montée en fréquence (noir).

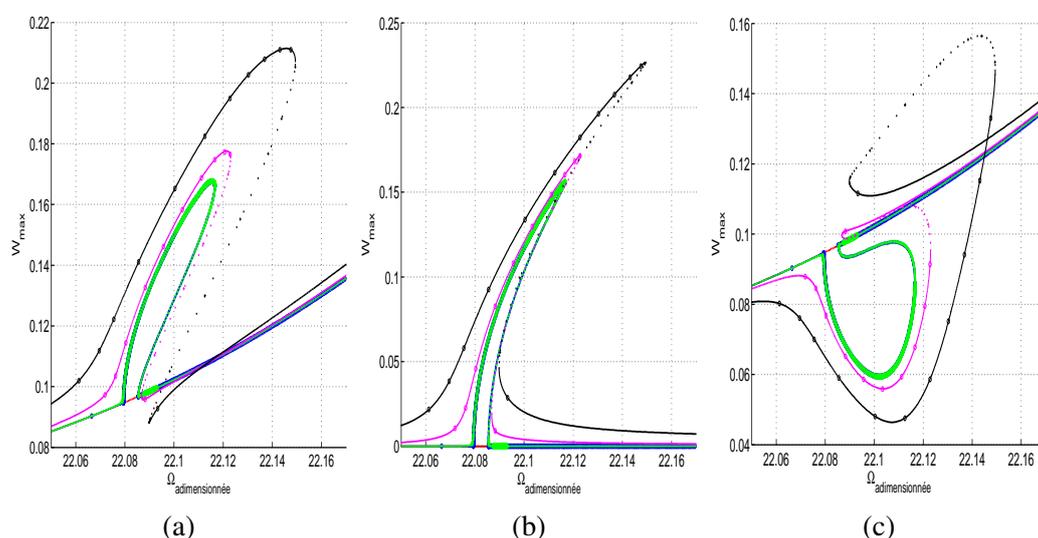
### 6.3.2.2 Configuration 4

Pour cette configuration, les tensions sont grandes. Ainsi, la montée en fréquence de  $\Omega = 22$  à  $\Omega = 23$  fait coller le réseau ( $W_{\max} > 1$ ). Par conséquent, n'est considéré que

l'intervalle  $\Omega = [22.05 - 22.17]$  lorsque le réseau n'est pas encore collé.

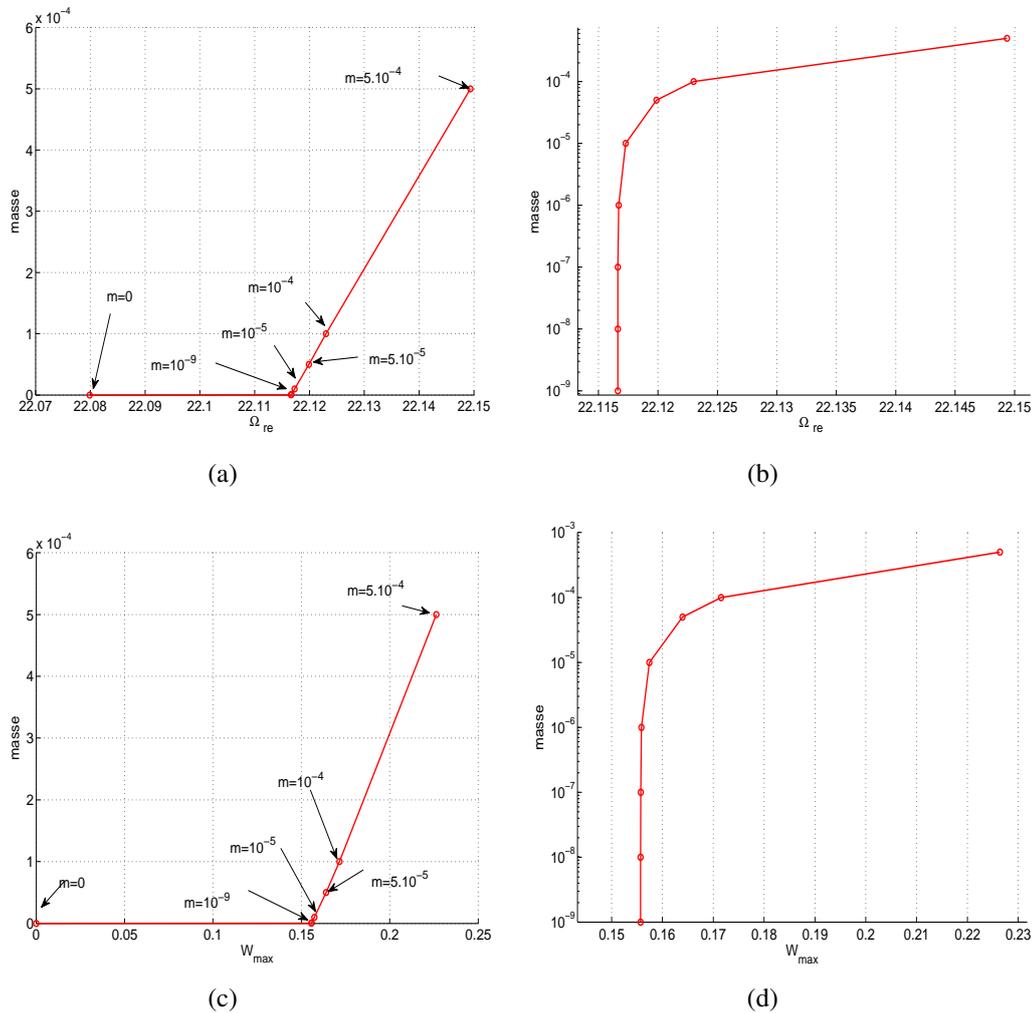
Les figures 6.13-a,b,c montrent les réponses des nano-poutres avec différentes masses ajoutées sur la nano-poutre 1. Sans masse ajoutée, la nano-poutre 2 ne vibre pas,  $W_{max} = 0$  (courbe rouge). Avec une très petite masse ajoutée  $m = 10^{-8}$ , le déplacement de la nano-poutre 2 augmente jusqu'à  $W_{max} = 0.16$ . Les tensions d'actionnement plus élevées de la configuration 4 permettent donc d'abaisser le seuil de détection des masses ajoutées.

Il est également possible de baser la détection sur le déplacement de la poutre 1. Si  $\Omega$  augmente de 22.05 à 22.17 ; pour le cas sans masse ajoutée, l'amplitude maximale de la nano-poutre 1 vaut  $W_{max} = 0.14$  ; avec masse ajoutée, son amplitude maximale varie de  $W_{max} = 0.165$  à 0.21 selon la masse ajoutée.



**FIGURE 6.13:** Réponse de la configuration 4, (a) : nano-poutre 1, (b) : nano-poutre 2, (c) : nano-poutre 3 ; sans masse ajoutée (rouge),  $m = 10^{-8}$  (bleu),  $m = 10^{-6}$  (vert),  $m = 10^{-4}$  (rose),  $m = 5.10^{-4}$  (noir).

On désigne par  $\Omega_{re}$  la fréquence correspondant à la valeur maximale de  $W_{max}$ . Les figures 6.14-a et 6.14-c montrent respectivement la valeur de  $\Omega_{re}$  et  $W_{max}$  selon la masse ajoutée avec l'axe vertical à l'échelle linéaire ; les figures 6.14-b et 6.14-d avec l'axe vertical à l'échelle logarithmique. Sans masse ajoutée,  $\Omega_{re} = 22.08$  (figure a) et  $W_{max} = 0$  (figure c). Avec la masse  $m = 10^{-9}$ ,  $\Omega_{re} = 22.12$  et  $W_{max} = 0.16$  ; donc la masse ajoutée est bien détectée. Néanmoins, pour les masses ajoutées de  $m = 10^{-9}$  à  $m = 10^{-5}$ , la détection est possible, mais la quantification est difficile parce que les courbes sont quasiment verticales (voir figures c et d). Lorsque  $m \geq 10^{-5}$ , dans les figures c et d, l'inclinaison des courbes est grande, ainsi la masse ajoutée peut être déterminée.



**FIGURE 6.14:** Changement de  $\Omega_{re}$  correspondant au pic  $W_{max}$  de la nano-poutre 2 selon la masse ajoutée à l'échelle linéaire (a) et à l'échelle logarithmique (b) . Changement de  $W_{max}$  selon la masse ajoutée à l'échelle linéaire (c) et à l'échelle logarithmique (d).

## 6.4 Conclusion

Ce chapitre a établi l'équation du mouvement d'un réseau de 2 ou 3 nano-poutres de mêmes dimensions. Les méthodes numériques sont confrontées avec les méthodes analytiques pour calculer la réponse forcée de chacune des poutres.

Contrairement au cas de vibration d'une seule nano-poutre, les réponses des nano-poutres du réseau sont très compliquées car possèdent plus de branches de solution (comme les boucles) dues à l'influence des nano-poutres voisines. Cette influence est faible si la nano-poutre voisine est éloignée de la nano-poutre considérée ou bien si son amplitude est petite. D'autre part dans le cas de montée ou de descente en fréquence ou d'une combinaison montée-descente le calcul par intégration temporelle peut conduire à

des branches de solutions stables différentes. Ceci est différent du cas d'une seule poutre. Grâce à l'influence des poutres voisines, la réponse d'une poutre peut fortement changer rendant aisée la détection d'une masse ajoutée, même faible.

Le réseau de trois nano-poutres donne la possibilité d'une configuration symétrique. Sans masse ajoutée, le système est symétrique, la nano-poutre du milieu ne vibre pas. Avec une masse ajoutée, la symétrie est cassée, la différence des déplacements des nano-poutres 1 et 3 conduit à une grande amplitude de la nano-poutre 2. Le réseau symétrique rend aisée la détection de petites masses ajoutées en utilisant le principe de brisure de symétrie. Toutefois, ce phénomène n'est visible qu'à partir d'un certain seuil de masse ajoutée qui peut être modifié avec les valeurs des tensions d'actionnement.

Cependant, il reste des questions non traitées comme l'influence d'une petite dissymétrie. De plus, la réalisation technologique du réseau parfaitement symétrique reste délicate.



## Conclusions et perspectives

Le travail et les résultats présentés dans ce mémoire est une contribution à l'étude des capteurs M/NEMS résonants pour la détection de masse très faibles (biomolécules, protéine, enzyme,...). Le principal objectif concernait la définition des principes de détection alternatifs basés sur l'exploitation des phénomènes non linéaires tels que les comportements hystérétiques et les bifurcations des courbes de réponse en fréquence.

Tout d'abord a été considéré le comportement dynamique d'une mono-poutre encastrée-encastrée ou encastrée-libre. L'équation du mouvement de la micro-poutre a été établie, cette équation peut être résolue par les méthodes numériques (méthode d'intégration temporelle, méthode asymptotique numérique + méthode d'équilibrage harmonique) et analytiques (méthode de la moyenne harmonique). Dans l'équation du mouvement de la micro-poutre, la force électrostatique a été traitée en utilisant soit le développement en série de Taylor, soit la multiplication de l'équation du mouvement par le dénominateur  $(1 - w)^2$ . Les méthodes présentées y ont été testées et leurs résultats comparés. La force électrostatique est calculée de manière exacte en multipliant l'équation du mouvement par  $(1 - w)^2$ . Néanmoins l'utilisation de la méthode de la moyenne harmonique dans ce cas ne donne pas un bon résultat contrairement au cas avec le développement en série de Taylor. Pour les grandes amplitudes, la différence entre la multiplication  $(1 - w)^2$  et la série est plus grande parce que les degrés supérieurs négligés de la série de ont une influence significative.

La Méthode de la Balance Harmonique et la Méthode Asymptotique Numérique dans Manlab nécessitent un temps de calcul nettement moindre que l'intégration temporelle classique, ce qui permet de mener les calculs avec plusieurs modes de vibration. À petite amplitude, l'influence des modes supérieurs est faible ; le premier mode est le mode dominant. Ainsi le calcul avec ce mode est suffisant. À grande amplitude (spécialement à proximité du pull-in), la contribution des modes supérieurs est plus importante et il est nécessaire de les prendre en compte.

Ensuite, une masse ponctuelle très faible est ajoutée sur la micro-poutre pour simuler l'arrivée d'une particule de type biomolécule par exemple. La présence de la masse additionnelle cause un changement de la force d'inertie dans l'équation du mouvement de la micro-poutre. Le changement de réponse non linéaire en fréquence est utilisé pour détecter la masse ajoutée. Classiquement, la particule est détectée par le décalage de fréquence induit par la particule et sa position sur la micro-poutre. Ainsi, la sensibilité de détection peut être améliorée par l'augmentation de  $\phi_0$  (la déformée modale à la position  $x = x_0$ ), cependant pour la micro-poutre avec section constante,  $\phi_0 \leq 1.588$  (micro-poutre

encastrée-encastrée) et  $\phi_0 \leq 2$  (micro-poutre encastrée-libre). Par ailleurs, le décalage fréquentiel devient très faible et très difficile à distinguer du bruit de mesure lorsque les masses considérées sont très petites.

Pour détecter des masses ajoutée plus petites, il est plus avantageux d'utiliser un principe de détection alternatif basé sur l'exploitation des phénomènes non linéaires tel que le saut d'amplitude à proximité de la fréquence de bifurcation. À cette fréquence, avec l'ajout d'une petite masse, la réponse saute vers le haut (comportement assouplissant) ou vers le bas (comportement raidissant). Contrairement à la détection par le décalage en fréquence, plus la masse ajoutée est petite, plus le saut est grand ; ainsi cette méthode est plus intéressante pour la détection. Théoriquement, si la fréquence de bifurcation est approchée avec précision, la détection d'une masse ajoutée très petite est possible. En étudiant les bassins d'attraction, on a montré que le point d'arrivée du saut d'amplitude (en haut ou en bas) ne dépend pas de l'instant de l'arrivée ou du décollage de la masse ajoutée, il ne dépend que de la valeur de la masse ajoutée. Pour les petites masses, le mécanisme ne peut pas se réinitialiser automatiquement après le départ de la masse ajoutée. La réinitialisation est réalisée en forçant un cycle d'hystérésis. Cependant il existe des difficultés : par exemple, cette réinitialisation n'est pas automatique ; l'instant du décollage de la masse n'est pas certain, ce qui conduit à une incertitude de l'instant du démarrage de la réinitialisation.

La réinitialisation automatique du mécanisme est obtenue en utilisant un balayage en fréquence plutôt que de travailler à fréquence fixe. Pour cela, la fréquence d'excitation varie lentement dans le temps sous forme sinusoïdale et la fréquence maximale ne dépasse pas la fréquence de bifurcation. Plus la vitesse de balayage est petite, plus la réponse obtenue est précise. Avec cette méthode, la détection est automatisée et peut se faire en temps réel. La distinction entre les cas avec et sans masse ajoutée se fait par la variation d'amplitude de réponse au cours du temps (les différences d'amplitude maximale, d'inclinaison de la réponse,...). Le problème de réinitialisation peut également être traité par le comportement mixte. Pour cela, les tensions d'actionnement et les caractéristiques géométriques de la poutre sont modifiées afin d'obtenir le comportement mixte souhaité. Pour augmenter la sensibilité, il faut diminuer la distance entre deux points de bifurcations sur la réponse.

La problématique de la localisation de la masse ajoutée est également traitée. La position de la masse ajoutée est déterminée en considérant les fréquences de résonance de deux modes de vibration. Pour la micro-poutre encastrée-libre, ce sont les résonances du premier et du deuxième modes ; pour la micro-poutre encastrée-encastrée, à cause de la symétrie, ce sont les résonances du premier et du troisième modes. Pour les positions situées loin de l'encastrement, la localisation est meilleure.

Enfin, on considère un réseau de 2 ou 3 micro-poutres encastrées-encastrées identiques. On a montré que pour un réseau avec plusieurs micro-poutres, la courbe de réponse est très compliquée avec plus de branches de solution, qui forment des boucles. Ces boucles sont dues à l'influence des micro-poutres voisines et dépendent de l'amplitude et de la position des micro-poutres voisines. À cause de l'influence des micro-poutres voisines, le cycle d'hystérésis d'une micro-poutre dans le réseau n'est

pas similaire à celui d'une seule micro-poutre. Pour le réseau de deux micro-poutres, le changement de la réponse avec masse ajoutée peut être détecté via le cycle d'hystérésis ; néanmoins, la détection des masses ajoutées très petites est difficile. Pour le réseau de trois micro-poutres, c'est la symétrie du réseau qui est exploitée. Sans masse ajoutée, la micro-poutre du milieu ne vibre pas à cause de la symétrie ; avec la masse ajoutée, la symétrie est cassée, la réponse de la micro-poutre du milieu change beaucoup. La brisure de symétrie est très sensible, surtout avec des actionnements électrostatiques importants, ce qui permet la détection de masses très faibles.

Ce travail ouvre la porte à de nombreuses perspectives. La première d'entre elles et la plus importante concerne la confrontation avec des résultats expérimentaux afin de valider les modélisations et principes de détection alternatifs présentés dans ce mémoire de thèse. Il est envisageable de faire des expérimentations avec la détection par le balayage de fréquence ou bien fabriquer les configurations pour obtenir les comportements mixtes décrits dans cette thèse ou encore tester la brisure de symétrie sur les réseaux de poutres.

Pour détecter une petite masse ajoutée, il faut approcher de la fréquence de bifurcation avec précision. Le saut a lieu après l'arrivée de la masse ajoutée. Cependant, il existe des problèmes non étudiés : par exemple, le bruit, peut-il entraîner un saut également dans le cas sans masse ajoutée ? Si oui, comment distinguer le saut dû à la masse ajoutée et le saut dû au bruit ? Se pose alors la question de l'identification de la maîtrise et de la diminution du bruit. Le niveau de bruit peut sans doute en l'état de nos développements quantifier la valeur minimale de la masse détectable.



## Annexe A

### Procédure de Galerkin avec l'équation du mouvement d'une poutre encastree-encastree [Kacem 10a]

L'équation adimensionnée de la poutre encastree-encastree s'écrit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - \left[ N + \alpha_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_2 \frac{(V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2}{(1-w)^2}. \quad (6.45)$$

Les conditions aux limites sont :

$$w(0,t) = w(1,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(1,t) = 0. \quad (6.46)$$

La solution  $w(x,t)$  est cherchée sous la forme :

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \phi_k(x) a_k(t). \quad (6.47)$$

Pour le cas sans N dans l'équation de détermination des modes propres,  $\phi_k(x)$  est le suivant :

$$\phi_k(x) = \cos \lambda_k x - \cosh \lambda_k x + \left[ \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sin \lambda_k - \sinh \lambda_k} \right] [\sin \lambda_k x - \sinh \lambda_k x]. \quad (6.48)$$

Pour le cas avec N dans l'équation de détermination des modes propres,  $\phi_k$  a la forme :

$$\phi_k(x) = A_k \left( \cos \gamma_1 x - \cosh \gamma_2 x - \frac{\cos \gamma_1 - \cosh \gamma_2}{\gamma_2 \sin \gamma_1 - \gamma_1 \sinh \gamma_2} [\gamma_2 \sin \gamma_1 x - \gamma_1 \sinh \gamma_2 x] \right). \quad (6.49)$$

L'équation 6.45 est multipliée par  $\phi_i(1-w)^2$  et intégrée de  $x=0$  à  $x=1$ , on obtient une équation matricielle. Pour le cas sans N dans l'équation des modes propres, cette équation est la suivante :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{a})] \ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{a})] \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{a})] \mathbf{a} \\ & - [N + \alpha_1 T_2(\mathbf{a})] [\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_{T1}(\mathbf{a}) + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{a})] \mathbf{a} = \alpha_2 (V_{dc} + V_{ac} \cos \Omega t)^2 \mathbf{F} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Pour le cas avec  $N$  dans l'équation des modes propres, l'équation matricielle est comme l'équation (6.50) mais sans  $N$ .

Les composantes des matrices sont déterminées suivant  $(\phi_k(x))$  est déterminé comme l'équation (6.49) ou (6.48) :

$$\begin{aligned}
M_{0ij} &= \delta_{ij}, \\
M_{1ij} &= -2 \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^2 \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k, \\
M_{2ij} &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_l \phi_k \phi_j \phi_i dx \right) a_k a_l, \\
C_{0ij} &= c_i \delta_{ij}, \quad C_{1ij} = c_j M_{1ij}, \quad C_{2ij} = c_j M_{2ij}, \\
K_{0ij} &= \lambda_i^4 \delta_{ij}, \quad K_{1ij} = \lambda_j^4 M_{1ij}, \quad K_{2ij} = \lambda_j^4 M_{2ij}, \\
K_{Tij} &= \int_0^1 \phi_j'' \phi_i dx \\
K_{T1ij} &= -2 \sum_{k=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_k \phi_j'' \phi_i dx \right) a_k, \\
K_{T2ij} &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{l=1}^{N_m} \left( \int_0^2 \phi_l \phi_k \phi_j'' \phi_i dx \right) a_l a_k.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

La valeur de  $T_2$  et le vecteur  $F$  sont les suivants :

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \left( \int_0^1 \phi_n' \phi_m' dx \right) a_n a_m, \\
F_i &= \int_0^1 \phi_i dx.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

# Annexe B

## Modification de structure [Lalanne 83]

$\omega_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\phi_i^t \mathbf{M} \phi_i$ ,  $\phi_i^t \mathbf{K} \phi_i$  sont la fréquence, le mode propre du  $i^{\text{ème}}$  mode, la masse modale et la rigidité modale de la micro-poutre sans masse ajoutée. on a :

$$\omega_i^2 \phi_i^t \mathbf{M} \phi_i = \phi_i^t \mathbf{K} \phi_i. \quad (6.53)$$

Dans le cas avec masse ajoutée, la matrice de masse devient  $\mathbf{M} + \mathbf{m}$  et la matrice de rigidité maintient  $\mathbf{K}$ . Ainsi l'équation (6.53) s'écrit sous la forme :

$$(\omega_i + \Delta\omega_i)^2 (\phi_i + \Delta\phi_i)^t (\mathbf{M} + \mathbf{m}) (\phi_i + \Delta\phi_i) = (\phi_i + \Delta\phi_i)^t \mathbf{K} (\phi_i + \Delta\phi_i) \quad (6.54)$$

L'expansion de l'équation (6.54) et la conservation seulement du premier ordre nous donnent :

$$\frac{\Delta\omega_i}{\omega_i} = -\frac{1}{2} \frac{\phi_i^t \mathbf{m} \phi_i}{\phi_i^t \mathbf{M} \phi_i} = -\frac{1}{2} \phi_i^t \mathbf{m} \phi_i(x_0) \quad (6.55)$$



# Bibliographie

- [Abdel-Rahman 03] Eihab M Abdel-Rahman & Ali H Nayfeh. *Secondary resonances of electrically actuated resonant microsensors*. Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 13, no. 3, page 491, 2003.
- [Albrecht 91] T.R. Albrecht, P. Grutter, D. Horne & D. Rugar. *Frequency modulation detection using high-Q cantilevers for enhanced force microscope sensitivity*. Journal of Applied Physics, vol. 69, no. 2, pages 668–673, 1991.
- [Aldridge 05] J. S. Aldridge & A. N. Cleland. *Noise-Enabled Precision Measurements of a Duffing Nanomechanical Resonator*. Phys. Rev. Lett., vol. 94, page 156403, Apr 2005.
- [Arquier 07] Rémi Arquier. *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures*. PhD thesis, Université de la Méditerranée (AIX-MARSEILLE II), 2007.
- [Baguet 03] Sébastien Baguet & Bruno Cochelin. *On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations*. Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 19, pages 459–471, 2003.
- [Beeby 04] S. Beeby, Ensell G., Kraft M. & N. White. *Mems mechanical sensors*. Artech House MEMS Library. ARTECH HOUSE Incorporated, 2004.
- [Boltshauser 92] T Boltshauser, M Schonholzer, O Brand & H Baltes. *Resonant humidity sensors using industrial CMOS-technology combined with postprocessing*. Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 2, no. 3, page 205, 1992.
- [Buchapudi 11] K. R. Buchapudi, X. Huang, X. Yang, H. F. Ji & T. Thundat. *Microcantilever biosensors for chemicals and bioorganisms*. Analyst, vol. 136, pages 1539–1556, 2011.
- [Buks 02] Eyal Buks & Michael L. Roukes. *Electrically tunable collective response in a coupled micromechanical array*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 11, no. 6, pages 802–807, 2002.
- [Buks 06] E. Buks & B. Yurke. *Mass detection with a nonlinear nanomechanical resonator*. Phys. Rev. E, vol. 74, page 046619, 2006.

- [Burns 96] D.W Burns, R.D Horning, W.R Herb, J.D Zook & H Guckel. *Sealed-cavity resonant microbeam accelerometer*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 53, no. 1-3, pages 249–255, 1996. Proceedings of The 8th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators.
- [Butcher 08] John C. Butcher. Numerical methods for ordinary differential equations. Wiley, 2 edition, June 9, 2008.
- [Chaste 12] J. Chaste, A. Eichler, J. Moser, G. Ceballos, R. Rurali & A. Bach-told. *A nanomechanical mass sensor with yoctogram resolution*. Nature Nanotechnology, vol. 7, no. 5, pages 301–304, 2012.
- [Chen 04] Jinghong Chen, Sung-Mo Steve Kang, Jun Zou, Chang Liu & J.E. Schutt-Aine. *Reduced-order modeling of weakly nonlinear MEMS devices with Taylor-series expansion and Arnoldi approach*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 13, no. 3, pages 441–451, 2004.
- [Clark 96] W. A. Clark, R.T. Howe & R. Horowitz. *Surface micromachined Z-axis vibratory rate gyroscope*. vol. 21, 158, pages 283–287, 1996.
- [Cleland 02] A. N. Cleland & M.L. Roukes. *Noise processes in nanomechanical resonators*. Journal of Applied Physics, vol. 92, no. 5, pages 2758–2769, 2002.
- [Cleland 05] A N Cleland. *Thermomechanical noise limits on parametric sensing with nanomechanical resonators*. New Journal of Physics, vol. 7, no. 1, page 235, 2005.
- [Cochelin 94] B. Cochelin. *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*. Computers & Structures, vol. 53, no. 5, pages 1181 – 1192, 1994.
- [Cochelin 07] B. Cochelin, D. Damil & M. Potier-Ferry. Méthode asymptotique numérique, collection méthodes numériques. Hermes Sciences La-voisier, 2007.
- [Cochelin 09] Bruno Cochelin & Christophe Vergez. *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*. Journal of Sound and Vibration, vol. 324, no. 1-2, pages 243 – 262, 2009.
- [Crespo da Silva 78] M. R. M. Crespo da Silva & C. C. Glynn. *Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion*. Journal of Structural Mechanics, vol. 6, no. 4, pages 437–448, 1978.
- [Cross 04] M. C. Cross, A. Zumdieck, Ron Lifshitz & J. L. Rogers. *Synchronization by Nonlinear Frequency Pulling*. Phys. Rev. Lett., vol. 93, page 224101, Nov 2004.

- 
- [Datskos 99] Panos G Datskos & Isidor Sauers. *Detection of 2-mercaptoethanol using gold-coated micromachined cantilevers*. Sensors and Actuators B : Chemical, vol. 61, no. 1-3, pages 75 – 82, 1999.
- [Datskos 01] P. G. Datskos, S. Rajic, M. J. Sepaniak, N. Lavrik, C. A. Tipple, L. R. Senesac & I. Datskou. *Chemical detection based on adsorption-induced and photoinduced stresses in microelectromechanical systems devices*. Journal of Vacuum Science Technology B : Microelectronics and Nanometer Structures, vol. 19, no. 4, pages 1173 –1179, 2001.
- [DiMeo-Jr. 06] F. DiMeo-Jr., Ing-Shin Chen, Philip Chen, Jeffrey Neuner, Andreas Roerhl & James Welch. *MEMS-based hydrogen gas sensors*. Sensors and Actuators B : Chemical, vol. 117, no. 1, pages 10 – 16, 2006.
- [Dohn 05] S. Dohn, R. Sandberg, W. Svendsen & A. Boisen. *Enhanced functionality of cantilever based mass sensors using higher modes and functionalized particles*. vol. 1, pages 636 – 639, 2005.
- [Dohn 06] Soren Dohn. *Cantilever Based Mass Sensing Alternative Readout and Operation Schemes*. PhD thesis, Department of Micro and Nanotechnology, Technical University of Denmark, 9-2006.
- [Ekinci 04a] K. L. Ekinci, X. M. H. Huang & M. L. Roukes. *Ultrasensitive nanoelectromechanical mass detection*. Applied Physics Letters, vol. 84, no. 22, pages 4469 –4471, 2004.
- [Ekinci 04b] K. L. Ekinci, Y. T. Yang & M. L. Roukes. *Ultimate limits to inertial mass sensing based upon nanoelectromechanical systems*. Journal of Applied Physics, vol. 95, no. 5, pages 2682–2689, 2004.
- [Ekinci 05] K. L. Ekinci & M. L. Roukes. *Nanoelectromechanical systems*. Review of Scientific Instruments, vol. 76, no. 6, page 061101, 2005.
- [Gimzewski 94] J.K. Gimzewski, Ch. Gerber, E. Meyer & R.R. Schlittler. *Observation of a chemical reaction using a micromechanical sensor*. Chemical Physics Letters, vol. 217, no. 5-6, pages 589 – 594, 1994.
- [Gutschmidt 12] S. Gutschmidt & O. Gottlieb. *Nonlinear dynamic behavior of a microbeam array subject to parametric actuation at low, medium and large DC-voltages*. Nonlinear Dynamics, vol. 67, no. 1, pages 1–36, 2012.
- [Hagleitner 02] C. Hagleitner, D. Lange, A. Hierlemann, O. Brand & H. Baltes. *CMOS single-chip gas detection system comprising capacitive, calorimetric and mass-sensitive microsensors*. Solid-State Circuits, IEEE Journal, vol. 37, no. 12, pages 1867–1878, 2002.
- [Hanay 12] M. S. Hanay, S. Kelber, A. K. Naik, D. Chi, S. Hentz, E. C. Bullard, E. Colinet, L. Duraffourg & M. L. Roukes. *Single-protein nanome-*
-

- chanical mass spectrometry in real time.* Nature Nanotechnology, vol. 7, pages 602–608, 2012.
- [Hedrich 10] F. Hedrich, K. Kliche, M. Storz, S. Billat, M. Ashauer & R. Zengerle. *Thermal flow sensors for MEMS spirometric devices.* Sensors and Actuators A : Physical, vol. 162, no. 2, pages 373 – 378, 2010. Eurosensors XXIII, 2009.
- [Ilic 01] B. Ilic, D. Czaplewski, M. Zalalutdinov, H. G. Craighead, P. Neuzil, C. Campagnolo & C. Batt. *Single cell detection with micromechanical oscillators.* Journal of Vacuum Science Technology B : Microelectronics and Nanometer Structures, vol. 19, no. 6, pages 2825–2828, nov 2001.
- [Ilic 04a] B. Ilic, H.G. Craighead, S. Krylov, W. Senaratne, C. Ober & P. Neuzil. *Attogram detection using nanoelectromechanical oscillators.* Journal of Applied Physics, vol. 95, no. 7, pages 3694–3703, 2004.
- [Ilic 04b] B. Ilic, Y. Yang & H.G. Craighead. *Virus detection using nanoelectromechanical devices.* Applied Physics Letters, vol. 85, no. 13, pages 2604–2606, 2004.
- [Kacem 10a] N. Kacem. *Nonlinear dynamics of M&NEMS resonant sensors : design strategies for performance enhancement.* PhD thesis, INSA Lyon, 2010.
- [Kacem 10b] N Kacem, J Arcamone, F Perez-Murano & S Hentz. *Dynamic range enhancement of nonlinear nanomechanical resonant cantilevers for highly sensitive NEMS gas/mass sensor applications.* Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 20, no. 4, page 045023, 2010.
- [Kacem 10c] Najib Kacem, Sébastien Baguet, Sebastien Hentz & Régis Dufour. *Nonlinear phenomena in nanomechanical resonators : mechanical behaviors and physical limitations.* Mécanique & Industries, vol. 11, no. 6, pages 521–529, 2010.
- [Kacem 11] N. Kacem, S. Baguet, R. Dufour & S. Hentz. *Stability control of nonlinear micromechanical resonators under simultaneous primary and superharmonic resonances.* Applied Physics Letters, vol. 98, no. 19, page 193507, 2011.
- [Kacem 12a] Najib Kacem, Sébastien Baguet, Sebastien Hentz & Régis Dufour. *Pull-In Retarding in Nonlinear Nanoelectromechanical Resonators Under Superharmonic Excitation.* Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 7, no. 2, page 021011, 2012. CEA LETI and I@L Carnot institutes (NEMS Project).
- [Kacem 12b] Najib Kacem, Sébastien Baguet, Sebastien Hentz & Régis Dufour. *Pull-In Retarding in Nonlinear Nanoelectromechanical Resonators*

- 
- Under Superharmonic Excitation*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 7, no. 2, page 021011, 2012. CEA LETI and I@L Carnot institutes (NEMS Project).
- [Karabalin 09] R. B. Karabalin, M. C. Cross & M. L. Roukes. *Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators*. Phys. Rev. B, vol. 79, page 165309, Apr 2009.
- [Karkar 10] S. Karkar, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas & A. Lazarus. *User Guide Manlab 2.0*. Rapport technique, 8 Novembre, 2010.
- [Kerschen 09] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval & A.F. Vakakis. *Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 23, no. 1, pages 170 – 194, 2009. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- [Khater 09] M. E. Khater, E. M. Abdel-Rahman & A. H. Nayfeh. *A Mass Sensing Technique for Electrostatically-Actuated MEMS*. ASME Conference Proceedings, no. 49033, pages 655–661, 2009.
- [Khater 11] M. E. Khater, Eihab M. Abdel-Rahman & A. H. Nayfeh. *Nonlinear Phenomena in MEMS and NEMS A Micro Sensor for Measuring Minute Gas and Biological Masses*. In ENOC. Rome Italy, 24-29 July 2011.
- [Kim 95] Kyu Hyun Kim, Jong Soo Ko, Young-Ho Cho, Kwiro Lee, Byung Man Kwak & Kwanhum Park. *A skew-symmetric cantilever accelerometer for automotive airbag applications*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 50, no. 1-2, pages 121 – 126, 1995.
- [Kozinsky 07] I. Kozinsky, H. W. Ch. Postma, O. Kogan, A. Husain & M. L. Roukes. *Basins of Attraction of a Nonlinear Nanomechanical Resonator*. Phys. Rev. Lett., vol. 99, page 207201, Nov 2007.
- [Kumar 12] V. Kumar, Y. Yang, J.W. Boley, G.T.-C. Chiu & J.F. Rhoads. *Modeling, Analysis, and Experimental Validation of a Bifurcation-Based Microsensor*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 21, no. 3, pages 549 –558, 2012.
- [Lalanne 83] M. Lalanne, P. Berthier & J. Der Hagopian. *Mechanical vibrations for engineers*. John Wiley & Sons, 1983.
- [Lang 98] H.P. Lang, R. Berger, F. Battiston, J.-P. Ramseyer, E. Meyer, C. Andreoli, J. Brugger, P. Vettiger, M. Despont, T. Mezzacasa, L. Scandella, H.-J. Güntherodt, C. Gerber & J.K. Gimzewski. *A chemical sensor based on a micromechanical cantilever array for the identification of gases and vapors*. Applied Physics A, vol. 66, pages S61–S64, 1998.
-

- [Lavrik 04] Nickolay V. Lavrik, Michael J. Sepaniak & Panos G. Datskos. *Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors*. Review of Scientific Instruments, vol. 75, no. 7, pages 2229–2253, jul 2004.
- [Lee 02] S. I. Lee, S. W. Howell, A. Raman & R. Reifenberger. *Nonlinear dynamics of microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy : A comparison between theory and experiment*. Phys. Rev. B, vol. 66, page 115409, Sep 2002.
- [Lifshitz 03] Ron Lifshitz & M. C. Cross. *Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays*. Phys. Rev. B, vol. 67, page 134302, Apr 2003.
- [Lifshitz 09] Ron Lifshitz & M. C. Cross. *Nonlinear dynamics of nanomechanical and micromechanical resonators*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2009.
- [Lobontiu 08] N. Lobontiu, I. Lupea, R. Ilic & H. G. Craighead. *Modeling, design, and characterization of multisegment cantilevers for resonant mass detection*. Journal of Applied Physics, vol. 103, no. 6, page 064306, 2008.
- [Malatkar 03] Pramod Malatkar. *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- [Najar 05] F Najar, S Choura, S El-Borgi, E M Abdel-Rahman & A H Nayfeh. *Modeling and design of variable-geometry electrostatic microactuators*. Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 15, no. 3, page 419, 2005.
- [Najar 06] F Najar, S Choura, E M Abdel-Rahman, S El-Borgi & A Nayfeh. *Dynamic analysis of variable-geometry electrostatic microactuators*. Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 16, no. 11, page 2449, 2006.
- [Narducci 09] M. Narducci, E. Figueras, M. J. Lopez, I. Gracia, J. Santander, P. Ivanov, L. Fonseca & C. Cané. *Sensitivity improvement of a microcantilever based mass sensor*. Microelectronic Engineering, vol. 86, no. 4-6, pages 1187 – 1189, 2009.
- [Nayfeh 00] Ali Hasan Nayfeh. *Nonlinear interactions*. John Wiley & Sons Inc, 2000.
- [Nayfeh 05] Ali H. Nayfeh, Mohammad I. Younis & Eihab M. Abdel-Rahman. *Reduced-Order Models for MEMS Applications*. Nonlinear Dynamics, vol. 41, pages 211–236, 2005.

- 
- [Nayfeh 07a] Ali Nayfeh, Mohammad Younis & Eihab Abdel-Rahman. *Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators*. Nonlinear Dynamics, vol. 48, pages 153–163, 2007.
- [Nayfeh 07b] Ali H. Nayfeh & Dean T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007.
- [Nayfeh 10] A.H. Nayfeh, H.M. Ouakad, F. Najjar, S. Choura & E.M. Abdel-Rahman. *Nonlinear dynamics of a resonant gas sensor*. Nonlinear Dynamics, vol. 59, no. 4, pages 607–618, 2010.
- [Peeters 09] M. Peeters, R. Vigué, G. Sérandour, G. Kerschen & J.-C. Golinval. *Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 23, no. 1, pages 195 – 216, 2009. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- [Peletan 13] Loïc Peletan, Sébastien Baguet, Mohamed Torkhani & Georges Jacquet-Richardet. *A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics*. Nonlinear Dynamics, vol. 72, no. 3, pages 671–682, 2013.
- [Pérignon 04] Frank Pérignon. *Vibrations Forcées de Structures Minces, Élastiques, Non Linéaires*. PhD thesis, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 2004.
- [Seshia 02] A.A. Seshia, M. Palaniapan, T.A. Roessig, R.T. Howe, R.W. Gooch, T.R. Schimert & S. Montague. *A vacuum packaged surface micro-machined resonant accelerometer*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 11, no. 6, pages 784 – 793, dec 2002.
- [Silva 88] M.R.M.Crespo Da Silva. *Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams - I. Formulation*. International Journal of Solids and Structures, vol. 24, no. 12, pages 1225 – 1234, 1988.
- [Sun 13] Jianhai Sun, Dafu Cui, Lulu Zhang, Xing Chen, Haoyuan Cai & Hui Li. *Fabrication and characterization of a double-heater based {MEMS} thermal flow sensor*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 193, no. 0, pages 25 – 29, 2013.
- [Thundat 95] T. Thundat, E. A. Wachter, S. L. Sharp & R. J. Warmack. *Detection of mercury vapor using resonating microcantilevers*. Applied Physics Letters, vol. 66, no. 13, pages 1695–1697, 1995.
- [Tignol 02] Jean-Pierre Tignol. *Galois’s theory of algebraic equations*. World Scientific, 2002.
- [Turner 01] K.L. Turner & Wenhua Zhang. *Design and analysis of a dynamic MEM chemical sensor*. In American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001, volume 2, pages 1214–1218 vol.2, 2001.
-

- [Velanki 06] S. Velanki & H.-F. Ji. *Detection of feline coronavirus using micro-cantilever sensors*. Measurement Science and Technology, vol. 17, no. 11, pages 2964–2968, 2006.
- [Wachter 95] E. A. Wachter & T. Thundat. *Micromechanical sensors for chemical and physical measurements*. Review of Scientific Instruments, vol. 66, no. 6, pages 3662–3667, 1995.
- [Xie 08] H. Xie, J. Vitard, S. Haliyo & S. Régnier. *Enhanced sensitivity of mass detection using the first torsional mode of microcantilevers*. Measurement Science and Technology, vol. 19, no. 5, page 055207, 2008.
- [Yang 06] Y. T. Yang, C. Callegari, X. L. Feng, K. L. Ekinici & M. L. Roukes. *Zeptogram-Scale Nanomechanical Mass Sensing*. Nano Letters, vol. 6, no. 4, pages 583–586, 2006.
- [Yong 89] Y-K Yong & John R. Vig. *Resonator surface contamination-a cause of frequency fluctuations ?* Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on, vol. 36, no. 4, pages 452–458, 1989.
- [Yong 90] Y-K Yong & John R. Vig. *Modeling resonator frequency fluctuations induced by adsorbing and desorbing surface molecules*. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 6, pages 543–550, 1990.
- [Younis 03] M.I. Younis, E.M. Abdel-Rahman & A. Nayfeh. *A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS*. Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 12, no. 5, pages 672 – 680, oct. 2003.
- [Younis 05] M.I. Younis & A.H. Nayfeh. *Dynamic analysis of MEMS resonators under primary-resonance excitation*. In ASME 20th biennial conference on mechanical vibration and noise, DETC2005-84146, Long Beach, CA, September 2005.
- [Younis 08] Mohammad I Younis & Fadi M. Al Saleem. *New Concepts of Mass Sensors Based on Nonlinear Dynamic Principles*. In Proceeding of the XIth International Congress and Exposition, Orlando, Florida USA, 2-5 June 2008.
- [Younis 09] M. I. Younis & F. Alsaleem. *Exploration of New Concepts for Mass Detection in Electrostatically-Actuated Structures Based on Nonlinear Phenomena*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 4, no. 2, page 021010, 2009.
- [Yurke 95] B. Yurke, D. S. Greywall, A. N. Pargellis & P. A. Busch. *Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator*. Phys. Rev. A, vol. 51, pages 4211–4229, May 1995.

- [Yurke 06] Bernard Yurke & Eyal Buks. *Performance of Cavity-Parametric Amplifiers, Employing Kerr Nonlinearities, in the Presence of Two-Photon Loss*. J. Lightwave Technol., vol. 24, no. 12, pages 5054–5066, Dec 2006.
- [Zhang 02] W. Zhang, R. Baskaran & K.L. Turner. *Effect of cubic nonlinearity on auto-parametrically amplified resonant MEMS mass sensor*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 102, no. 1, pages 139–150, 2002.
- [Zhang 04] Wenhua Zhang & Kimberly L. Turner. *A mass sensor based on parametric resonance*. In Solid-State Sensor, Actuator and Microsystems Workshop, 6-10June, 2004.
- [Zhang 05] W. Zhang & K. L. Turner. *Application of parametric resonance amplification in a single-crystal silicon micro-oscillator based mass sensor*. Sensors and Actuators A : Physical, vol. 122, no. 1, pages 23 – 30, 2005.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : NGUYEN

DATE de SOUTENANCE : 11 Décembre 2013

Prénoms : Van-Nghi

TITRE : PRINCIPES ALTERNATIFS POUR LA DÉTECTION DE MASSE ULTIME VIA LA DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DE CAPTEURS RÉSONANTS M/NEMS.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2013-ISAL-0160

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

#### RÉSUMÉ :

Les capteurs résonants de type M/NEMS sont largement utilisés dans l'environnement biologique pour la mesure de masse de biomolécules en raison de leur grande précision combinée à une taille réduite. Classiquement, la détection et la quantification se basent sur le décalage fréquentiel induit par la masse ajoutée. Toutefois, ce décalage devient très faible et difficile à distinguer du bruit de mesure lorsque les masses considérées sont très petites. Il est théoriquement possible de gagner encore un ou plusieurs ordres de grandeur en résolution avec ces méthodes fréquentielles en diminuant encore les tailles et/ou en augmentant le rapport signal sur bruit, c'est-à-dire en actionnant de manière plus importante les résonateurs. Mais, dans ces conditions, les nanorésonateurs ont un comportement très fortement non-linéaire, source d'instabilités et de mixage de bruit basses et hautes fréquences susceptibles de dégrader la fiabilité et la précision des mesures.

C'est pourquoi cette thèse a pour objectif de définir des principes de détection alternatifs basés sur l'exploitation des phénomènes non-linéaires, tels que les comportements hystérétiques et les bifurcations des courbes de réponse en fréquence.

Pour cela, un modèle réduit de micro/nano-poutre résonante avec actionnement électro-statique est considéré. Les résultats numériques montrent que les brusques sauts d'amplitude à proximité des points de bifurcation permettent la détection de masses très faibles. Contrairement à la détection fréquentielle, ces sauts sont d'autant plus grands que la masse additionnelle est petite, ce qui rend cette technique particulièrement intéressante. De plus, le seuil de détection peut être ajusté avec la valeur de la fréquence de fonctionnement. Un mécanisme de réinitialisation est toutefois indispensable pour rendre la détection à nouveau possible après un saut d'amplitude.

Afin d'automatiser la réinitialisation et ainsi permettre la détection en temps réel, un concept totalement innovant de détection de masse par balayage en fréquence des cycles d'hystérésis est proposé, qui permet de détecter, quantifier et localiser la masse ajoutée sur la poutre résonante.

La mise en réseau de plusieurs poutres résonantes est également traitée et constitue un premier pas vers la mise en œuvre de réseaux de milliers de capteurs. Pour cela, des architectures efficaces sont proposées et les modèles numériques sont adaptés en conséquence. Sur des configurations symétriques, l'exploitation des bifurcations de type brisure de symétrie permet là-encore d'améliorer la détection de masse.

**MOTS-CLÉS :** M/NEMS, capteur de masse résonant, dynamique non linéaire, bifurcation, détection, quantification, localisation, réseau de poutres.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Régis Dufour

Président du jury : Daniel Barbier

Composition du jury : D. Barbier  
S. Hentz  
C.-H. Lamarque

R. Dufour  
B. Cochelin  
S. Baguet