HAL
open science

Estimation d'incertitudes d'identification modale avec et sans entrées connues : théorie, validation, application

Philippe Mellinger

To cite this version:

Philippe Mellinger. Estimation d'incertitudes d'identification modale avec et sans entrées connues : théorie, validation, application. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Rennes, 2014. Français. NNT : 2014REN1S102 . tel-01135711

HAL Id: tel-01135711

https://theses.hal.science/tel-01135711

Submitted on 25 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANNÉE 2014

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Traitement du signal et télécommunications

École doctorale Matisse

présentée par

Philippe MELLINGER

préparée à l'unité de recherche Inria
Institut National de Recherche en Informatique et Automatique

---

Estimation d'incertitude d'identification modale avec et sans entrées connues : Théorie, validation et application

Thèse soutenue à Rennes le 16 décembre 2014

devant le jury composé de :

Albert BENVENISTE
Directeur de recherche Inria / *Président*
Joseph MORLIER
Professeur ISAE / *Rapporteur*
Guillaume MERCÈRE
Maitre de conférence Université de Poitiers / *Rapporteur*
Mohammed HJIAJ
Professeur INSA / *Examinateur*
Valérie MONBET
Professeur IRMAR / *Examinatrice*
Claire MEYER
Ingénieur calcul Dassault-Aviation / *Examinatrice*
Laurent MEVEL
Chargé de recherche Inria / *Directeur de thèse*

Qui que tu sois au plus profond de toi-même, tu ne seras jamais jugé que par tes actes
par Rachel Dawes

Remerciements

Durant mes trois années de thèse, de nombreuse personnes m'ont soutenu, aussi bien moralement que scientifiquement. Avant toute chose, je tiens à les remercier.

Laurent Mevel. Plus qu'un directeur de thèse, Laurent est un mentor et un ami. Sa disponibilité, son apport scientifique et son soutien moral m'ont permis de réaliser mes travaux de thèse dans un cadre optimal. Je tiens à te remercier pour tout le temps que tu as passé avec moi et pour tout ce que tu m'as apporté durant cette période que je n'oublierai jamais. Merci.

René Schmitt. Mon ancien responsable à l'EPF. Son écoute et sa compréhension m'ont été d'une grande aide. Je tiens à te remercier pour tout ce que tu as fait pour moi, aussi bien sur un plan professionnel que personnel.

Jean-Michel Nicolle, directeur de l'EPF. Merci pour votre confiance et pour votre soutien précieux sans lequel je n'aurais pas pu effectuer cette thèse.

Emmanuel Ledinot. Je tiens à te remercier pour ta confiance et ton suivi durant mes trois ans de thèse. Merci encore de m'avoir introduit chez Dassault-Aviation et de m'avoir donné les moyens d'effectuer cette thèse dans les meilleures conditions possibles.

Philippe Garnier et Bruno Stoufflet. Vous m'avez fait confiance et vous m'avez soutenu pour me permettre de démarrer la thèse. Merci pour tout ce que vous avez fait pour moi.

Eric Garrigues et Isabelle Barber. Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir accueilli dans votre équipe. Merci pour votre soutien et pour votre suivi.

Gabriel Broux et Claire Meyer. Merci pour tout ce que vous m'avez apporté. Vous m'avez soutenu et guidé durant toute ma thèse. Merci pour tout le temps que vous m'avez consacré et pour tout ce que vous m'avez appris.

Albert Benveniste. Merci infiniment d'avoir accepté le rôle de président lors de ma soutenance de thèse. Je fus extrêmement flatté et honoré de ta présence. Merci pour tout.

Guillaume Mercère et Joseph Morlier, qui ont accepté le rôle de rapporteur. Merci pour le temps que vous avez passé à relire mon manuscrit et pour vos critiques détaillées et constructives.

Mohammed Hjiaj et Valérie Monbet, qui ont accepté le rôle d'examinateur lors de ma soutenance de thèse. Merci pour votre présence et pour vos questions constructives.

Michael Dölher et Mélissande Hamonet. Merci d'avoir rendu mon séjour rennais aussi agréable. Je suis heureux de vous compter maintenant parmi mes amis proches et j'espère qu'on restera toujours aussi proche que durant ces trois années passées.

Sylvain, Pierre, Thibaut, Khaled, Cloé, Florie, Guillaume, Mathieu et tous les autres. Mes collègues et amis de Dassault-Aviation. Merci pour tous ces moments passés ensemble. Je suis heureux de vous connaître et de vous compter maintenant parmi mes amis.

Gautier et Rayann. Mes amis de l'EPF. Merci d'être toujours là pour moi. Votre écoute et vos conseils sont toujours aussi précieux. On s'est soutenu les uns les autres durant toutes ces années, j'espère qu'on le fera encore longtemps.

Karim et Bouzid. Mes frères de cœur, sans qui je ne serais pas l'homme que je suis aujourd'hui. On a grandi ensemble, on s'est construit ensemble. Merci pour tout ce que je vous dois. Merci pour avoir fait grandir notre famille avec ces trois petites merveilles. Je vous aime.

Nanou, Yves, Gwen et Charly. Merci de m'avoir accueillit dans votre famille et d'être toujours présent pour nous. Je vous aime

Patricia et Myriam, mes soeurs. Thierry, mon frère. Maïté et Sandra, mes nièces. Je vous aime.

Papa, Maman. Vous m'avez tout donné. Je vous serai éternellement reconnaissant pour tout ce que vous avez fait et pour tout ce que vous continuez à faire pour moi, pour nous. Vous êtes un exemple de courage et de force. Plus je vous découvre, plus je vous admire. Merci. Je vous aime.

Morgane, je n'ai pas de mot assez juste pour te dire tout ce que je te dois. Sans toi je n'aurais jamais pu surmonter toutes ces étapes. Tu m'a soutenu face à la maladie. Tu m'a redonné du courage dans les moments de doute. Toutes ces années ensemble, tu m'as apporté tant de joie, tant d'amour. Tu seras pour toujours dans mon cœur. Tu es ce que j'ai de plus cher. Je t'aime.

Je finirai par une tendre pensée pour ma grand-mère et pour tout ceux qui nous ont quittés trop tôt. Je vous aime.

Table des matières

Table des matières **3**

Introduction **13**

1 Positionnement des travaux de thèse **17**
1.1 Contexte détaillé de l'étude 17
1.1.1 L'instabilité aéroélastique 18
1.1.1.1 Généralités 18
1.1.1.2 Exemple : étude d'un système aéroélastique simple . . . 19
1.1.2 Modèles pour le calcul du comportement dynamique 23
1.1.3 Types d'essai 24
1.1.4 Processus de certification en flottement 25
1.1.5 Exemple d'utilisation des identifications modales 28
1.2 Description détaillée des thématiques 28
1.2.1 L'identification modale 28
1.2.1.1 Etat de l'art 28
1.2.1.2 Description des chapitres 29
1.2.2 L'estimation des incertitudes 30
1.2.2.1 Etat de l'art 30
1.2.2.2 Description des chapitres 31
1.2.3 Validation et application des méthodes 31
1.2.3.1 Enjeux 31
1.2.3.2 Description des chapitres 32

I L'identification modale **33**

2 Les modélisations paramétriques **35**
2.1 Caractérisation des systèmes 36
2.1.1 Qu'est-ce qu'un système 36
2.1.2 Linéarité et stationnarité d'un système 36

2.1.3 Domaine d'analyse 37
2.1.3.1 Domaine temporel et domaine fréquentiel 37
2.1.3.2 Domaine continu et domaine discret 38
2.1.3.3 Transformations de Laplace, en Z et de Fourier 41
2.1.4 SISO et MIMO 44
2.1.5 Caractéristiques d'un système 44
2.1.5.1 Domaine fréquentiel et fonction de transfert 45
2.1.5.2 Domaine temporel et réponse impulsionnelle 46
2.1.6 Modes d'un système 46
2.1.6.1 Modes propres 46
2.1.6.2 Espaces propres 47
2.1.7 Trois familles de modélisations 47
2.1.7.1 Modélisation ARMAX 47
2.1.7.2 Représentation d'état 47
2.1.7.3 Modélisation modale 47
2.2 Modélisations ARMAX 48
2.2.1 Du modèle ARX SISO à la fonction de transfert 48
2.2.1.1 Temps discret 48
2.2.1.2 Temps continu 50
2.2.2 Extension MIMO 51
2.2.2.1 Fonctions de transfert à dénominateur commun scalaire : modélisation DC 52
2.2.2.2 Fractions de transfert à dénominateur commun matriciel : modélisations DFM à gauche ou à droite 52
2.3 Modélisations d'état 53
2.4 Modélisation modale 56
2.4.1 A partir de la modélisation ARX 57
2.4.2 A partir de la représentation d'état 57
2.4.3 Relation entre les modélisations modales 58
2.5 Application 1 : Modélisation d'un système Masse-Ressort amorti, MCK . 59
2.5.1 Matrice de transfert du système MCK 60
2.5.2 représentation d'état du système MCK 61
2.5.3 Représentation modale du système MCK 62
2.6 Application 2 : Modélisation d'un système aéro-élastique 64
2.7 Bilan du chapitre 65

3 Les méthodes d'identification modale 67
3.1 Identification de modélisations ARX(p,q) 68
3.1.1 Identification modale à partir de l'erreur non-linéaire 76
3.1.1.1 Description du problème 77
3.1.1.2 Calcul de la matrice jacobienne 80
3.1.1.3 Ecriture du problème de Gauss-Newton 84
3.1.1.4 Réduction des équations 86
3.1.2 Recherche de l'estimateur minimisant l'erreur linéaire 88

3.1.2.1 Calcul de la fonction coût 88
3.1.2.2 Dérivation de la fonction coût 92
3.1.2.3 Résolution du problème 95
3.1.2.4 Proposition d'une nouvelle méthode de résolution du problème 97
3.1.3 Application d'un poids 97
3.1.4 Estimation des paramètres modaux 99
3.1.4.1 A partir d'une modélisation à dénominateur scalaire . . 99
3.1.4.2 A partir d'une modélisation à dénominateur matriciel . 99
3.1.4.3 Des pôles aux fréquences et taux d'amortissement modaux 100
3.2 Identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité : méthodes sous-espaces 100
3.2.1 Principe 100
3.2.1.1 Estimation d'une réalisation de l'observabilité 100
3.2.1.2 Estimation des matrices d'une réalisation de la représentation d'état 105
3.2.1.3 Estimation des paramètres modaux 107
3.2.2 Formulation matricielle de la représentation d'état 108
3.2.2.1 Les matrices de données et d'états 109
3.2.2.2 Les représentations d'états sous forme matricielle 109
3.2.3 A chaque méthode sous-espace, sa matrice sous-espace 112
3.2.3.1 Méthodes *Output-Only* 112
3.2.3.2 Méthodes *Input/Output* 113
3.2.3.3 Du *Data-driven* au *Covariance-driven* 115
3.2.3.4 Construction de méthode *Covariance-driven* à partir des méthodes *Data-driven* proposées 116
3.2.3.5 Quelques remarques concernant les méthodes sous-espace proposées 117
3.3 Identification à partir de la modélisation modale, LSFD 118
3.3.1 LSFD basée uniquement sur la connaissance des pôles 118
3.3.2 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des formes modales 119
3.3.3 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des facteurs de participation 119
3.4 Les diagrammes de stabilité 120
3.4.1 Principe 120
3.5 Bilan du chapitre 121

4 Les estimations non paramétriques 125
4.1 Le signal 126
4.1.1 Caractérisation du signal 126
4.1.2 Causalité 126
4.1.3 Signaux stochastique 126
4.2 Processus aléatoire 127
4.2.1 Stationnarité 128

4.2.1.1 Stationnarité au sens strict 128
4.2.1.2 Stationnarité au sens large 129
4.2.2 Ergodicité 129
4.3 Estimations des caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire gaussien 130
4.3.1 Processus aléatoire gaussien 130
4.4 Estimations des densités spectrales de puissance 131
4.4.1 Estimation à partir de la fonction de corrélation 132
4.4.2 Estimation par périodogrammes moyennés 132
4.5 Estimations des fonctions de corrélation 133
4.6 Estimations des matrices de transfert 133
4.7 Estimations des réponses impulsionnelles finies 134
4.8 Bilan du chapitre 134

II L'estimation d'incertitude 135

5 Le principe 137
5.1 La propagation 138
5.1.1 La delta méthode 138
5.1.2 La théorie des perturbations 139
5.2 Les points de départ de la propagation : les variances empiriques 141
5.3 Bilan du chapitre 141

6 Les chaînes de propagation : LSCF et sous-espaces 143
6.1 Incertitude de l'identification LSCF du problème ARX linéarisé 144
6.1.1 Différenciation de D 144
6.1.1.1 Référence-simple 144
6.1.1.2 Références-multiple à droite 145
6.1.1.3 Références-multiple à gauche 145
6.1.2 Simplification de $\Delta D\theta_A$ 145
6.1.2.1 Référence-simple 146
6.1.2.2 Références-multiple à droite 146
6.1.2.3 Références-multiple à gauche 146
6.1.3 Expression de $\Delta\theta_A$ en fonction de ΔH 147
6.1.3.1 Référence-simple 147
6.1.3.2 Références-multiple à droite 148
6.1.3.3 Références-multiple à gauche 148
6.1.4 Expression de $\mathrm{cov}\,(\theta_A)$ en fonction de $\mathrm{cov}\,(H)$ 149
6.1.4.1 Référence-simple 149
6.1.4.2 Références-multiple à droite 150
6.1.4.3 Références-multiple à gauche 150
6.1.5 Discussion concernant la chaîne de propagation LSCF 151
6.1.5.1 Premier problème 151

6.1.5.2 Second problème 151
6.2 Incertitude de l'identification sous-espace des matrices du système d'état 151
6.2.1 De la matrice de sous-espace à la matrice d'observabilité 152
6.2.1.1 Préliminaires 152
6.2.1.2 Première étape de la différenciation de l'observabilité . 154
6.2.1.3 Seconde étape de la différenciation de l'observabilité . . 155
6.2.1.4 Différenciation de l'observabilité 156
6.2.2 De la matrice d'observabilité aux matrices de transition d'état et d'observation 157
6.2.2.1 De la matrice d'observabilité à la matrice de transition d'état 157
6.2.2.2 De la matrice d'observabilité à la matrice d'observation 158
6.2.2.3 De la matrice sous-espace aux matrices de transition d'état et d'observation 158
6.2.3 De la matrice de transition d'état à ses valeurs et vecteurs propres 159
6.2.4 Des valeurs propres de la matrice de transition d'état aux fréquences et amortissements modaux 159
6.2.5 Des vecteur propres de la matrice de transition d'état et de la matrice d'observabilité aux déformées modales normalisées 160
6.3 Bilan du chapitre 161

7 Points de départ des chaînes de propagation 163
7.1 Covariance des matrices de transfert 164
7.1.1 Etat de l'art : Calcul à partir des cohérences 164
7.1.2 Proposition : Calcul par propagation 167
7.2 Covariance des matrices sous-espaces 168
7.2.1 Etat de l'art : Différenciation de la méthode *Output-Only Covariance-driven* 168
7.2.1.1 Output-Only 168
7.2.2 Proposition : Différenciation de 4 méthodes sous-espace 169
7.2.2.1 Output-Only 169
7.2.2.2 Input/Output 170
7.3 Bilan du chapitre 173

III Validation et applications 175

8 Stratégie de validation 177
8.1 Benchmark des méthodes d'identification 178
8.2 Benchmark des simulations 178
8.2.1 La poutre 179
8.2.2 L'avion 181
8.2.2.1 Au sol 182
8.2.2.2 En vol 183

8.2.2.3 Fréquences et taux d'amortissement du modèle avion . . 184
8.3 Critères de validation 186
8.3.1 Principe de Monte Carlo 186
8.3.1.1 Appariement des modes 186
8.3.1.2 Moyenne et variance Monte-Carlo 187
8.3.2 Critère 1 188
8.3.3 Critère 2 188
8.4 Présentation et analyse des résultats de validation 190
8.4.1 Description de la présentation des résultats 190
8.4.1.1 Les valeurs des critères 190
8.4.1.2 Le score S 191
8.4.2 Description de l'analyse des résultats 192
8.5 Bilan du chapitre 192

9 Validation du panel des codes d'identification et d'estimation d'incertitude sous-espace 195
9.1 Validation sur le système poutre 196
9.1.1 Système poutre sans entrée inconnue 196
9.1.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 196
9.1.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 198
9.1.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 200
9.1.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 202
9.1.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 203
9.1.1.6 Comparaison des méthodes sur le cas poutre sans entrée inconnue 206
9.1.2 Système poutre avec entrée inconnue 208
9.1.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 208
9.1.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 210
9.1.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 212
9.1.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 214
9.1.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 216
9.1.2.6 Comparaison des méthodes sur le cas poutre avec entrée inconnue 218
9.1.3 Influence de l'entrée inconnue et bilan sur le système poutre . . . 220
9.2 Validation sur le système avion 221
9.2.1 Système avion au sol 221
9.2.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 221

9.2.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} . . . 223
9.2.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} . . . 225
9.2.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} . . . 226
9.2.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . . . 228
9.2.1.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion au sol . . . 230
9.2.2 Système avion en vol sans turbulence . . . 233
9.2.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} . . . 233
9.2.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} . . . 234
9.2.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} . . . 236
9.2.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} . . . 238
9.2.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . . . 239
9.2.2.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion en vol sans turbulence . . . 241
9.2.3 Système avion en vol avec turbulence . . . 244
9.2.3.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} . . . 244
9.2.3.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} . . . 245
9.2.3.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} . . . 247
9.2.3.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} . . . 249
9.2.3.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . . . 252
9.2.3.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion en vol avec turbulence . . . 253
9.2.4 Influence de l'aérodynamique et des turbulences sur le système avion . . . 256
9.2.4.1 Influence de l'aérodynamique . . . 256
9.2.5 Influence des turbulences . . . 256
9.3 Bilan du chapitre . . . 257

10 Application à des données réelles 259
10.1 Présentation du cas d'application . . . 260
10.2 Application à des données réelles . . . 261
10.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} . . . 261
10.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 262
10.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} . . . 263
10.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 264
10.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 265

10.3 Bilan du chapitre 266

IV Conclusion **267**

V Annexes **275**

A Quelques notions en probabilité et en statistique **277**
A.1 Concepts de base de la théorie des probabilités 277
A.2 Variables aléatoires et leur distribution 279
A.3 Moments 280
A.3.1 Espérance 280
A.3.2 Variance 280
A.4 Exemples de distribution 281
A.4.1 Loi gaussienne (ou loi normale) 281
A.4.2 Loi χ^2 283
A.5 Théorèmes 284
A.5.1 Loi des grands nombre, LGN 284
A.5.2 Théorème central limite, TCL 285
A.6 Estimateurs d'espérance et de variance : statistiques 285
A.7 Vecteurs aléatoires 287
A.7.1 Espérance, covariance et leur estimés 288
A.7.2 Distribution normale pour un vecteur aléatoire 289
A.7.3 Théorème central limite pour un vecteur aléatoire 289

B Quelques notions en algèbre linéaire **291**
B.1 Quelques notions d'algèbre 291
B.2 Quelques notions d'analyse 293

C Résultats de validation du système poutre **295**
C.1 Validation sur le système poutre 296
C.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 296
C.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 298
C.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 300
C.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 302
C.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 304
C.2 Validation sur le système poutre avec une entrée inconnue 306
C.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 306
C.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 307
C.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 310
C.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 312
C.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 314

D Résultats de validation du système avion **317**
D.1 Validation sur le système avion sol 318
D.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 318
D.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 320
D.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 322
D.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 324
D.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 326
D.2 Validation sur le système avion vol 328
D.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 328
D.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 330
D.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 332
D.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 334
D.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 336
D.3 Validation sur le système avion vol avec turbulence 338
D.3.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 338
D.3.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 340
D.3.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 342
D.3.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 344
D.3.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} . 346

Bibliographie **358**

Table des figures **359**

Introduction

Contexte

Ces quinze dernières années, les techniques de modélisation numérique ont considérablement évolué. Les méthodes numériques, les modèles de calcul et l'augmentation de la puissance de calcul permettent de prédire de plus en plus précisément, entre autre, le comportement dynamique des structures physiques (avion, pont, immeuble, véhicule, etc.). Cependant, des essais consistant à identifier le comportement dynamique de la structure restent nécessaire. Ils ont pour principal objectif de recaler et de valider les modèles de calcul, et ainsi, les comportements dynamiques prédits.

Le comportement dynamique d'une structure peut se décomposer en la réponse des modes propres de la structure. Un mode est caractérisé par une déformation dynamique élémentaire de la structure, une fréquence propre et un taux d'amortissement représentant la vitesse à laquelle la déformation s'amortit.

Lorsqu'une structure est soumise, dans son utilisation opérationnelle, à un champ aérodynamique, il est nécessaire de certifier qu'il n'y aura pas d'instabilité aéroélastique. L'instabilité aéroélastique dynamique, aussi appelé phénomène de flottement, résulte d'une association défavorable entre la déformation dynamique de la structure et les efforts aérodynamiques générés par ces déformations en présence d'un champ aérodynamique. Ce phénomène est extrêmement dangereux et conduit à la destruction de la structure car la déformation dynamique n'est plus amortie. Les avions sont conçus pour ne pas présenter d'instabilité dynamique dans leur domaine de vol augmenté d'une marge réglementaire. Lors des premiers essais en vol d'un nouvel avion, on vérifie qu'il n'y a effectivement pas d'instabilité aéroélastique dynamique dans son domaine de vol. Pour la sécurité de ces essais, il est primordial de suivre l'évolution des taux d'amortissement des modes de la structure. Il est tout aussi primordial, pour aider à la prise de décision, de connaître l'incertitude d'observation des modes mesurées. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'un taux d'amortissement se rapproche de 0.

Problématique

Il existe de nombreuses méthodes d'analyse modale. Dans cette thèse nous ne considérerons que des techniques dites "globales". Ces techniques sont des méthodes qui consistent à identifier, à partir des données mesurées, une représentation analytique du système. Dans le cadre de l'analyse modale, les méthodes d'identification de système sont aussi appelées méthodes d'identification modale. A partir du système identifié, on pourra estimer les paramètres modaux de la structure. Selon le cas, les méthodes seront basées, uniquement, sur la connaissance des réponses du système ou sur la connaissance des réponses et des excitations de ce système. Dans le premier cas, on parlera de méthode *Output-Only*. Dans le second cas, on parlera de méthode *Input/Output*.

Nous verrons deux familles de méthodes d'identification modale. La première est basée sur la minimisation moindres carrées de l'erreur entre la représentation analytique et l'estimation à partir des données. La seconde est basée sur la recherche du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité du système. Nous détaillerons ces méthodes plus tard dans le manuscrit. Concernant les techniques basées sur la minimisation moindres carrées, nous nous contenterons d'en décrire certaines et de porter un regard critique sur leur théorie. Ces méthodes sont déjà existantes dans les cadres *Output-Only* et *Input/Output*. Concernant les techniques dites "sous-espace", la propagation d'incertitude n'a été développée, dans la littérature, que pour une seule méthode de type *Output-Only*. Nous étudierons la méthodologie développée pour cette méthode et nous l'appliquerons pour définir les chaînes de propagation d'une autre méthode de type *Output-Only* et de trois méthodes de type *Input/Output*. La motivation pour développer des méthodes de type *Input/Output* est liée à la façon dont sont réalisés les essais de vibration chez les avionneurs. Que ce soit au sol ou en vol, les excitations sont connues. On veut utiliser cette connaissance pour améliorer les résultats d'identification. Il est donc nécessaire de développer les méthodes d'estimation d'incertitude utilisant elles aussi la connaissance des signaux d'excitation.

L'un des enjeux de la thèse est le développement de schémas d'estimation d'incertitude, notamment pour des méthodes d'identification sous-espace de type *Input/Output*. Une part importante des travaux a été consacrée à valider leur utilisation opérationnelle.

Apport de la thèse

L'objectif de cette thèse est de développer et d'étudier des méthodes d'identification modales en y intégrant l'estimation d'incertitude. Le premier apport de cette thèse est un regard critique sur plusieurs méthodes d'identification existantes et une homogénéisation des formulations analytiques. Le second apport de cette thèse est le développement de plusieurs méthodes d'identification modale, de type sous-espace *Input/Ouput*, avec estimation d'incertitude. Enfin, le troisième apport cette thèse consiste en une validation de ces algorithmes dans une optique d'utilisation industrielle opérationnelle.

Description par chapitre

Après une description détaillée du positionnement des travaux (Chapitre 1), ce manuscrit sera divisé en trois parties : l'identification modale, l'estimation d'incertitude et la validation des méthodes.

L'identification modale

L'identification modale consiste à identifier une représentation analytique décrivant le comportement dynamique des structure, et ceci, à partir des données mesurées. Dans le chapitre 2, nous décrirons deux familles de représentations analytiques du comportement dynamique. Dans le Chapitre 3, nous détaillerons deux familles de techniques d'identification des modélisations précédemment décrites dans le Chapitre 2. Enfin, dans le Chapitre 4, nous verrons comment estimer, à partir des données mesurées, les grandeurs nécessaires à l'utilisation des méthodes d'identification modale étudiées.

L'estimation d'incertitude

Les méthodes d'identification modale sont toujours initialisées avec des grandeurs estimées à partir des données mesurées. Par définition, une estimation a une variance. Ainsi, le comportement dynamique identifié sera soumis à des incertitudes. Dans le Chapitre 5, nous décrirons une méthode statistique permettant de propager une variance à travers une chaîne de calcul. Dans le Chapitre 6, nous présenterons les chaînes de propagation associées aux méthodes d'identification modale étudiées. Enfin, dans le Chapitre 7, nous verrons comment estimer les variances des grandeurs de départ de ces méthodes d'identification modale.

La validation des méthodes

Avant d'utiliser les méthodes d'estimation d'incertitude de manière opérationnelle, il est crucial de les valider. Dans le Chapitre 8, nous définirons la stratégie de validation. Dans le Chapitre 9, nous appliquerons cette stratégie à différents systèmes de complexité croissante. Enfin, dans le chapitre 10, nous évaluerons les méthodes validées sur des données réelles obtenues lors d'essais de vibration en vol.

Chapitre 1

Positionnement des travaux de thèse

Sommaire

1.1 Contexte détaillé de l'étude 17
1.1.1 L'instabilité aéroélastique 18
1.1.2 Modèles pour le calcul du comportement dynamique 23
1.1.3 Types d'essai 24
1.1.4 Processus de certification en flottement 25
1.1.5 Exemple d'utilisation des identifications modales 28
1.2 Description détaillée des thématiques 28
1.2.1 L'identification modale 28
1.2.2 L'estimation des incertitudes 30
1.2.3 Validation et application des méthodes 31

1.1 Contexte détaillé de l'étude

Une structure est conçue pour pouvoir respecter un cahier des charges précis. Que ce soit un pont, un immeuble, une voiture ou un avion, il est nécessaire de justifier que la structure est capable de réaliser sa fonction dans des limites d'utilisation prédéfinies. Pour un avion, il existe des limites d'utilisation en termes de vitesses et d'altitudes : ceci s'appelle le domaine de vol. L'un des élément à justifier pour un avion consiste à vérifier qu'il n'y a pas d'instabilité aéroélastique (voir Section 1.1.1), aussi appelée phénomène de flottement, dans le domaine de vol exigé par le cahier des charges. En effet, ce phénomène étant une instabilité, il conduit à la destruction de la structure s'il apparait au cours du vol. La justification requise nécessite d'effectuer des essais en vol. Afin d'assurer un niveau de sécurité important, l'ouverture du domaine de vol doit se faire progressivement, point de vol (i.e. vitesse et altitude constantes) par point de vol (voir [AC06]). Plus le nombre de points vol et plus le temps d'analyse par point de vol est important, plus l'essai est coûteux. Pour minimiser le coût engendré par ces essais, tout en conservant le niveau de sécurité actuel, il est nécessaire de développer des méthodes innovantes pour l'analyse des données.

1.1.1 L'instabilité aéroélastique

1.1.1.1 Généralités

Le phénomène de flottement aéroélastique est un phénomène d'instabilité dynamique qui résulte d'une interaction défavorable entre les forces aérodynamiques et le comportement dynamique de la structure (voir [K$^+$95]). Le comportement dynamique d'une structure correspond à la superposition des différentes déformations dynamiques propres de la structure. Chacune de ces déformations correspond à un mode de la structure. Un mode est défini par une déformation modale (voir Figure 1.1), une fréquence modale, un taux d'amortissement modal et une masse.

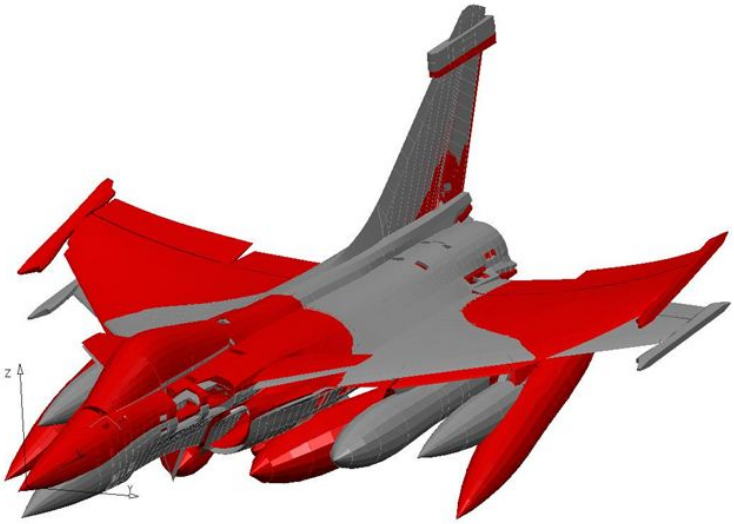


FIGURE 1.1 – Exemple : mode de flexion voilure d'un Rafale

Lorsqu'une structure est placée dans un champ aérodynamique, son comportement dynamique est modifié par les efforts aérodynamiques. Le système étudié n'est plus le système élastique associé à la structure, mais le système aéroélastique défini par le couple structure/champ aérodynamique (voir [Col78]). Ce nouveau système présente une base modale différente (forme des modes, fréquences, amortissement) du système sans aérodynamique. Plus les efforts aérodynamiques sont importants plus le système aéroélastique s'éloigne du système élastique en terme de comportement modal. La pression dynamique associée au point de vol considéré est une mesure de la l'importance des efforts aérodynamiques. Plus cette pression dynamique est importante, plus les efforts aérodynamiques vont avoir un effet sur le comportement dynamique du système aéroélastique. Si, à cause du champ aérodynamique, les fréquences de deux modes se rapprochent, alors il y a un risque de couplage de ces deux modes. Dans ce cas, avec l'augmentation de la pression aérodynamique, un échange d'énergie va se produire. Cet échange d'énergie est lié à une modification particulière de la déformation modale des

deux modes couplés. Par exemple, si un mode de torsion voilure se couple avec un mode de flexion voilure, les modes résultants auront deux composantes : une composante de torsion et une composante de flexion oscillant dans la déformée modale avec un déphasage. On parle de modes "complexes" pour tenir compte de ce déphasage dans l'expression de la déformée modale. A cause des interactions entre les déplacements et les efforts aérodynamiques induits de ces deux composantes, l'un des deux modes va voir son taux d'amortissement augmenter fortement alors que celui de l'autre va chuter. Si le taux d'amortissement de l'un des modes devient négatif, celui-ci devient instable. On parle de point de flottement lorsque le taux d'amortissement de l'un des modes est nul. Ce mode n'étant plus amorti, son mouvement est amplifié jusqu'à ce qu'il y ait rupture de la structure. L'une des observations les plus connues de ce phénomène a été faite sur le pont de Tacoma. Le *Tacoma Narrows Bridge* est tristement célèbre pour s'être effondré le 7 Novembre 1940.

(a) Pont de Tacoma pendant le flottement (b) Pont de Tacoma après destruction

FIGURE 1.2 – Pont du détroit de Tacoma - 7 Novembre 1940

Cette destruction, l'un des plus célèbres accidents de génie civil, est très souvent imputée à tord au phénomène de résonance ([BS91]). Le phénomène de flottement qui a détruit ce pont est détaillé dans [Aga89, MDY+97, MSY+03]. Le même phénomène de couplage peut apparaître entre certains modes d'un avion. L'apparition du phénomène de flottement conduit généralement à la destruction de la structure. Ce phénomène est connu pour avoir été la cause de crash, notamment dans l'aviation militaire ([Ger99]). Une description détaillée des recherches sur le phénomène de flottement est donnée dans [Myk77, Col78, GRI81, Muk03, Zou08].

1.1.1.2 Exemple : étude d'un système aéroélastique simple

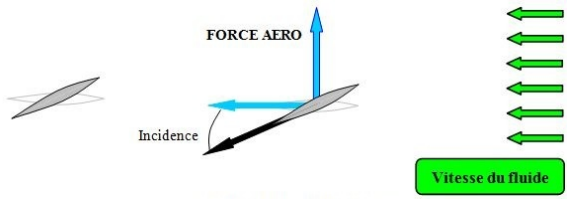
On considère un système (profil de type NACA, voir [Iso81]) à 2 degrés de liberté dans son champ aérodynamique. Les 2 degrés de liberté de ce système aéroélastique sont :

- une rotation autour de son centre de gravité

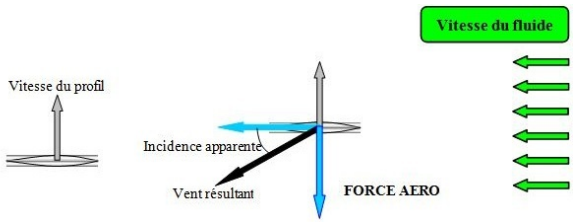
– une translation verticale (pompage)

L'effort aérodynamique généré par le champ aérodynamique dépend à la fois du mouvement de rotation du profil et du mouvement de pompage vertical du profil (voir [ER96]).

Dans l'exemple considéré, on suppose que l'effet dynamique de pompage (voir Figure 1.3(b)) est prépondérant devant les autres effets de vitesse (vitesse de rotation notamment).

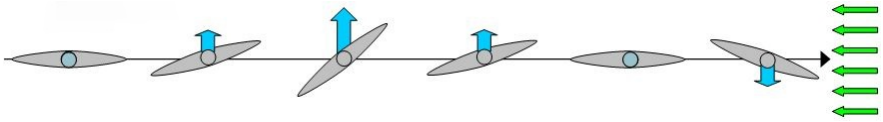


(a) Effet de tangage

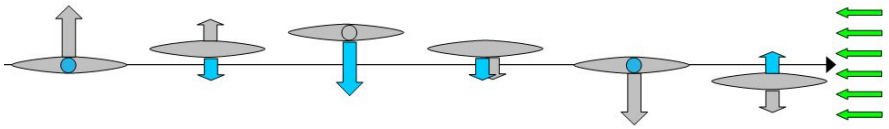


(b) Effet de pompage

FIGURE 1.3 – Sources des efforts aérodynamiques d'un profil à 2 DDL



(a) Evolution de la force aérodynamique due à l'incidence



(b) Evolution de la force aérodynamique due à la translation verticale

FIGURE 1.4 – Evolution des forces aérodynamiques

Dans les figures 1.4(a) et 1.4(b), l'axe correspond au temps, les flèches grises correspondent à la vitesse du centre de gravité du profil, les flèches bleues correspondent aux efforts aérodynamiques (associées à la rotation du profil sur la Figure 1.4(a) et au

pompage sur la Figure 1.4(b)) et les flèches vertes représentent la direction du vent. Si le mode d'oscillation verticale (pompage) et le mode d'oscillation en rotation ont des fréquences proches, il y a un risque de couplage de ces deux modes. Dans ce cas particulier, il faudra étudier le déphasage entre la composante en tangage et la composante en pompage vertical dans chacun des deux modes. On considérera deux cas :

- Cas de pompage et de rotation en phase
- Cas de pompage et de rotation déphasés de $\pi/2$

Pompage et rotation en phase

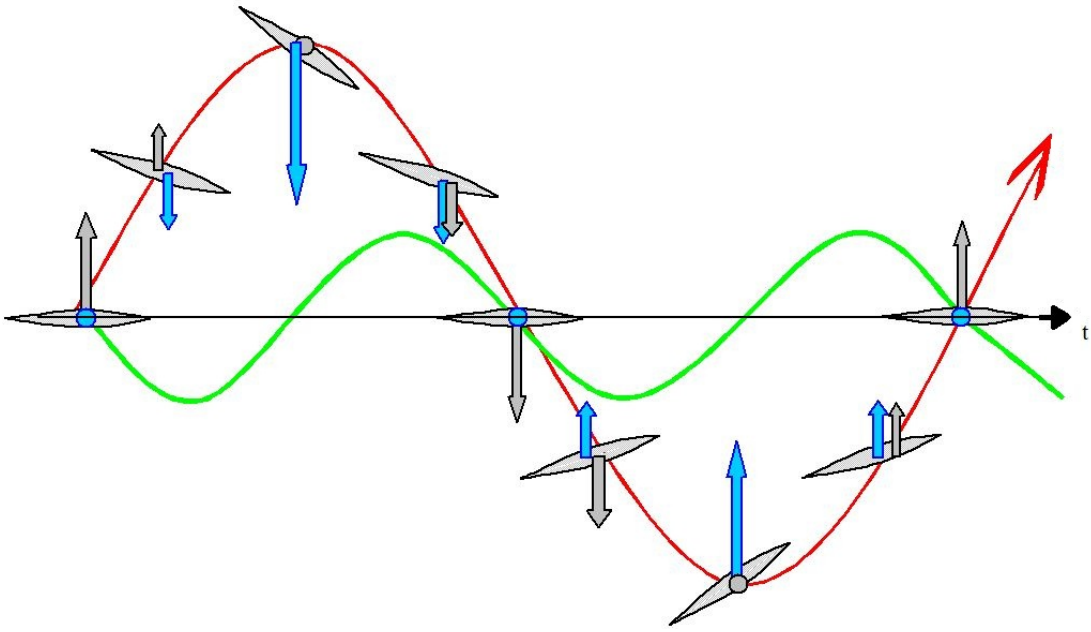


FIGURE 1.5 – Pompage et rotation en phase

Sur la Figure 1.5 :

- la courbe rouge correspond au mouvement du profil,
- les flèches bleues correspondent aux efforts aérodynamiques totaux qui s'exercent sur le profil,
- les flèches grises correspondent à la vitesse de pompage du profil,
- la courbe verte correspond à la puissance aérodynamique, i.e. au produit scalaire entre l'effort aérodynamique et la vitesse au temps t.

Lorsque la rotation est en phase (ou en opposition de phase) par rapport à l'oscillation verticale, la puissance oscille et le travail W donné par

$$W = \int_0^T f_{aero}.vdt$$

est nul sur la période T (avec f_{aero} le vecteur d'effort aérodynamique et v le vecteur

vitesse). L'amortissement de l'oscillation est donc nulle. Le point de flottement est atteint.

Pompage et rotation en quadrature de phase

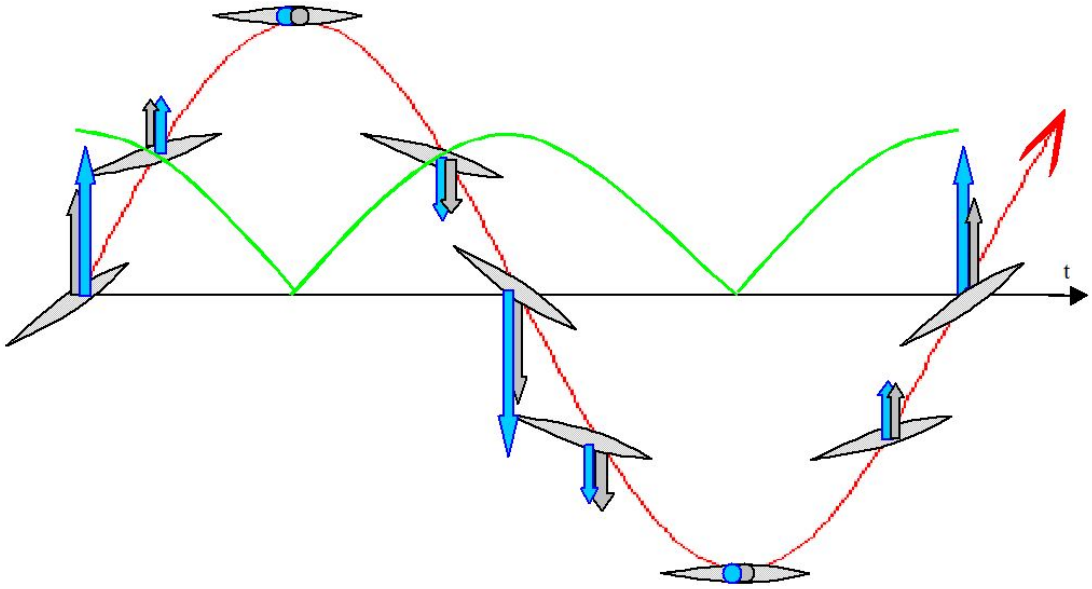


FIGURE 1.6 – Pompage et rotation en déphasage de $\pi/2$

Sur la Figure 1.6 :

- la courbe rouge correspond au mouvement du profil,
- les flèches bleues correspondent aux efforts aérodynamiques totaux qui s'exercent sur le profil,
- les flèches grises correspondent à la vitesse de pompage du profil,
- la courbe verte correspond à la puissance aérodynamique, i.e. au produit scalaire entre l'effort aérodynamique et la vitesse au temps t.

On constate sur la Figure 1.6 qu'un déphasage de $\pi/2$ implique que la force aérodynamique soit toujours dirigée dans le même sens que le mouvement. Ainsi, le travail est toujours positif et le mouvement est excité par les efforts aérodynamiques. Ces efforts sont des forces motrices.

Le mode de pompage (translation verticale) oscille et l'énergie apportée à chaque cycle par le champ aérodynamique va amplifier ces oscillations. Lorsque l'énergie apportée par le champ aérodynamique compense l'amortissement structural, le taux d'amortissement global du système aéroélastique devient nul. Ceci correspond à l'apparition du phénomène de flottement qui conduit généralement à la destruction de la structure.

1.1.2 Modèles pour le calcul du comportement dynamique

Le calcul du comportement dynamique d'un système aéroélastique s'appuit sur deux maillages : un maillage éléments finis (MEF) et un maillage aérodynamique (MA).

Un modèle éléments finis est utilisé pour calculer le comportement d'une structure (voir [Red93, ER96]). Le maillage éléments finis (Figure 1.7) utilisé est une modélisation de la structure 3D réalisée à partir d'éléments 2D (type bars ou plaques). On parle de modélisation 2.5D. Le modèle avion complet est obtenu par l'assemblage des maillages de chaque partie constituant l'appareil (fuselage, voilure, dérive, emports éventuels, etc.).

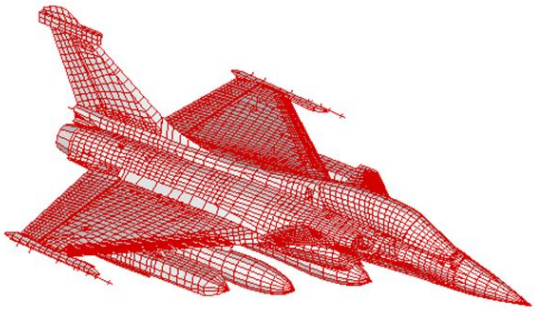
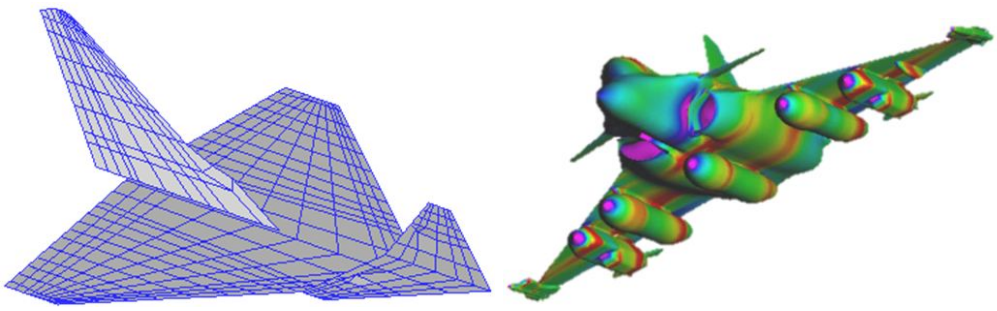


FIGURE 1.7 – Exemple d'un maillage éléments finis d'un Rafale

Un maillage aérodynamique est une discrétisation de la forme externe de l'avion permettant de calculer les efforts aérodynamiques dus à des déplacements imposés. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer ces efforts (voir [HE55, FH63, HW$^+$65, GMD66, HS67, Hes74]). Dans la Figure 1.1.2 un maillage singularités (Figure 1.8(a)) et un maillage CFD (Figure 1.8(b)) sont présentés. Pour plus de détail sur ces types de maillage, voir [Hun98, GP96].



(a) Maillage aérodynamique singularités (b) Maillage aérodynamique CFD

FIGURE 1.8 – Exemples de maillage d'un champ aérodynamique sur Rafale

Un maillage éléments finis permet de calculer le comportement dynamique d'une

structure. Le couplage du maillage éléments finis à un maillage aérodynamique permet le calcul du comportement dynamique de la structure lorsqu'elle est soumise à des efforts aérodynamiques. Les calculs du comportement dynamique du système élastique (sans aérodynamique) et du système aéroléastique (avec aérodynamique) sont des étapes nécessaires à la préparation des essais réels (voir Section 1.1.3) et font partie du processus de certification en flottement (voir Section 1.1.4).

1.1.3 Types d'essai

Le but des essais est de vérifier le comportement réel de la structure. Ils sont préparés en se basant sur les calculs effectués à partir du modèle éléments finis (et aéroélastique pour la partie vol des essais) du système étudié. Les résultats des essais permettent de valider les modèles utilisés ou de les recaler si nécessaire. Les mesures sont obtenues par des capteurs qui mesurent les déplacements, les vitesses ou les accélérations. Un exemple d'accéléromètre piézoélectrique est donné à la Figure 1.9.

FIGURE 1.9 – Accéléromètre piézoélectrique triaxial de la marque Kistler©

Ces capteurs sont placés sur la structure analysée de façon à garantir une observation optimale de sa déformation lors d'une excitation. Les excitations peuvent être maitrisées et connues (e.g. pot vibrant, coup de marteau, gouverne d'avion) ou environnementales (e.g. trafic sur un pont, turbulence en vol).

(a) Pots vibrants STACIS© 2100

(b) Course à pied sur le viaduc de Millau

FIGURE 1.10 – Exemples de moyens d'excitation

Le choix (ou la nécessité) d'appliquer des excitations connues et/ou inconnues définissent le type d'essai :

- EMA, *Experimental Modal Analysis* : Dans ce type d'essai, seules des excitations connues sont appliquées à la structure. Pour ce faire, ces essais sont généralement effectués en laboratoire ou en entrepôt pour éviter toute pollution environnementale. Les essais EMA sont généralement une étude préliminaire pour valider les modèles éléments finis de la structure.
- OMA, *Operational Modal Analysis* : Dans certain cas, les essais EMA ne sont pas réalisables. En effet, il n'est pas possible de réaliser de tels essais sur un pont ou un immeuble. Ces structures sont toujours assujetties aux effets de l'environnement naturel (e.g. même si on bloque le trafic sur un pont, on ne peut pas bloquer les turbulences aérodynamiques). Durant un essai OMA, les excitations sont inconnues et correspondent aux effets de l'environnement auxquels la structure sera naturellement soumise. Cependant, on fait généralement l'hypothèse que ces excitations correspondent à des bruits blancs centrés.
- OMAX, *Operational Modal Analysis with eXogeneous inputs* : Ce type d'essais s'effectue en plaçant la structure dans son environnement naturel et en lui appliquant une ou plusieurs excitations connues et maitrisées. Un exemple serait un pont soumis à du trafic et auquel on appliquerait un coup de marteau.

En pratique, on ne pourra jamais avoir des essais purement EMA. Lorsqu'on utilise des excitations connues, la classification d'un essai repose sur l'hypothèse de prédominance (essais de type EMA) ou non (essais de type OMAX) des excitations connues sur les excitations dues à l'environnement. Dans le cadre d'essais de vibration sur avion, que l'on soit au sol ou en vol, on parlera généralement d'essais de type EMA. Au sol, cette classification est évidente car les essais on maîtrise plus facilement l'environnement de réalisation de ces essais. En vol, cette classification reste correcte, malgré la présence du champ aérodynamique. En effet, ce champ n'est pas considéré comme une excitation de la structure mais comme une composante du système aéroélastique étudié. En vol, les excitations inconnues correspondent à des turbulences. Cependant, les vols sont toujours effectués lorsque les conditions météorologiques sont bonnes. Ainsi, les effets de turbulence sont généralement négligeables face aux excitations connues (appliquées à l'aide de vibrations des gouvernes).

1.1.4 Processus de certification en flottement

Lors de la conception d'un nouvel avion ou de l'établissement d'une nouvelle configuration d'emports (avion militaire), il est nécessaire de vérifier l'absence d'instabilité aéroélastique dans le domaine de vol exigé par le cahier des charges. Cette procédure est la certification en flottement. Elle est constituée de trois grandes composantes : les calculs du comportement dynamique à l'aide de modèles, les essais de vibration au sol et les essais de vibration en vol. Des itérations peuvent être nécessaire dans le cas où les modèles nécessitent un recalage à partir du comportement dynamique réel observé lors des essais.

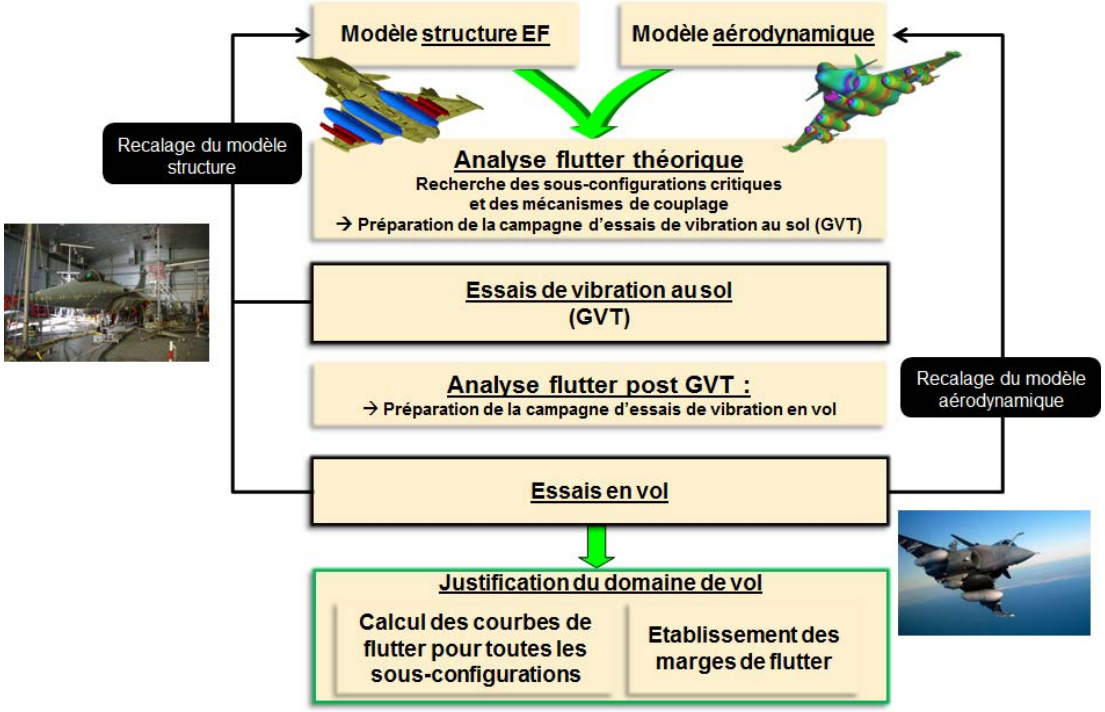


FIGURE 1.11 – Processus d'ouverture de domaine de vol

A partir du modèle éléments finis de la structure de l'avion et du modèle aérodynamique des efforts aérodynamiques, on effectue une analyse de flottement (*flutter*) théorique. Cette analyse correspond à la prédiction du comportement dynamique du système aéroélastique associé à l'avion. Le comportement dynamique au sol est obtenu à partir du système élastique (sans application d'un champ aérodynamique). Une méthode couramment utilisée pour prédire le comportement dynamique en vol est la PK-méthode (voir [Has71]). Cette méthode itérative est initialisée par le comportement dynamique prédit à partir de la résolution dynamique du système élastique.

La prédiction du comportement dynamique de l'avion au sol permet de préparer la campagne d'essais de vibration au sol (GVT, *Ground Vibration Tests*, voir Figure 1.12). L'influence de l'environnement extérieur est supposé négligeable. Ces essais sont classifiés EMA (voir Section 1.1.3).

Les mesures obtenues pendant un GVT permettent d'estimer le comportement dynamique réel de la structure. Si ce comportement dynamique observé diffère trop du comportement dynamique prédit par le modèle, alors on procède au recalage du modèle éléments finis. Le recalage du modèle consiste en la modification des caractéristiques (e.g. la raideur et la répartition de masse) de certains de ses éléments finis. Le modèle éléments finis est considéré recalé lorsque la prédiction obtenue par le modèle correspond au comportement observé en essai.

A partir du modèle éléments finis recalé et du maillage aérodynamique, on effectue

FIGURE 1.12 – Avion Rafale préparé lors d'un essais de vibration au sol (GVT)

une nouvelle analyse de flottement. Cette analyse permet de préparer la campagne d'essais de vibration en vol (voir Figure 1.13). On définit, pour cette campagne, les points

FIGURE 1.13 – Avion Rafale en vol

de vol auxquels devra être analysé le comportement dynamique de l'avion. On adapte l'espacement des points de vol en fonction de la dangerosité supposée du vol. Plus ces points de vol sont proches, plus l'essai est long et coûteux. La détermination des points de vol doit être fait pour avoir un essai le moins coûteux possible, tout en respectant une importante exigence de sécurité. A chaque point de vol, le système aéroélastique est considéré stationnaire. A cause de la consommation de carburant, l'analyse modale effectuée à un point de vol ne doit pas être trop longue pour que l'on puisse considérer que la perte de masse soit négligeable. Durant l'essai, on surveille la stabilité aéroélastique de l'avion. Après l'essai, on vérifie que le comportement dynamique observé (i.e. estimé à partir des mesures) correspond au comportement dynamique prédit (i.e. cal-

culé à partir des modèles). Si le comportement dynamique observé diffère trop de celui prédit, il peut être nécessaire de procéder à un recalage du maillage aérodynamique.

Enfin, lorsque les modèles prédisent correctement la réalité, on peut passer à l'étape de justification du domaine de vol. Pendant cette étape on détermine le comportement dynamique des différentes sous-configurations (différents cas de remplissage pétrole, sous-configurations d'emport, etc.) et on établit les marges de flottement. L'avion pourra être certifié en flottement s'il n'y a pas d'instabilité aéroélastique dans le domaine de vol exigé par le cahier des charges, avec une marge de sécurité suffisante.

1.1.5 Exemple d'utilisation des identifications modales

On a vu, à la Section 1.1.4, plusieurs utilisations possibles des résultats de l'identification modale. Ils peuvent servir au recalage de modèle et au suivi de mode entre différents points de vol. Ils peuvent aussi servir à d'autres utilisation, e.g. la détection de changement de comportement et la localisation de dommage. La détection peut être utilisée comme une alarme prévenant un changement brutal du comportement dynamique d'une structure (voir [MHVdA99, BAB00, Ber02, BMG04, DM+10b, Döh11, DMBM13]). Dans le cadre du processus de certification en flottement, cette alarme peut être un "flutteromètre" qui détecte une chute brusque de l'amortissement d'un mode (voir [Zou08]). L'intérêt de la détection est qu'elle est beaucoup plus rapide qu'une analyse modale. La localisation de dommage consiste à localiser un défaut sur une structure. A partir de l'écart entre le comportement dynamique de la structure saine (sans défaut) et celui de la structure endommagée, les méthodes de localisation de dommage permettent, en s'appuyant sur un modèle, de définir précisément la zone de la structure qui est impactée(voir [BMG04, BBM+08, Ber09, Döh11]).

1.2 Description détaillée des thématiques

1.2.1 L'identification modale

1.2.1.1 Etat de l'art

L'identification modale est une technique d'identification de système adaptée à l'analyse modale. Avant l'émergence des méthodes d'identification modale, l'analyse modale était principalement graphique. On notera par exemple la méthode du décrément logarithmique ou la méthode de largeur de bande à 3db (voir [AB83, PIR01]). L'identification modale est une technique qui permet, à partir de données mesurées, d'estimer les paramètres d'un modèle de comportement dynamique d'une structure. Cette technique a pu se développer grâce à l'évolution des méthodes numériques et des puissances de calcul des ordinateurs. L'identification a de nombreuses applications industrielles, telles que le recalage de modèle, la surveillance de comportement dynamique, etc. (voir [HvdA99, MHVdA99, BBG+01, PV03]).

L'identification modale s'est principalement développée selon deux axes de recherche.

La première famille de techniques consiste à effectuer une minimisation moindres carrées de l'erreur entre une grandeur paramétrique (provenant d'une modélisation de

type ARMAX, voir [Lju98, PS12] et la même grandeur estimée à partir des données. Dans le domaine temporel, une méthode très répandue est la méthode LSCE (*Least Square Complex Exponentials*). La grandeur utilisée pour cette méthode est la réponse impulsionnelle. Le détail de cette méthode est présenté dans [BAZM79, Mer83, AB87]. Dans le domaine fréquentiel, une méthode très répandue est la méthode LSCF (*Least Square Complex Frequencies*). Cette technique et ses variantes sont présentés dans [VDAGVV01, GVV+03, PVdAGL04, CGV+04a, PA04]. L'une de ces variantes est commercialisée dans le logiciel LMS© sous le nom PolyMax. Elle est très utilisée dans le domaine industriel. Un exemple d'application dans le domaine automobile peut être trouvé dans [PGVdA+04].

La seconde famille de techniques consiste à rechercher une base du sous-espace colonne de l'observabilité d'une représentation d'état. Pour ce faire il est nécessaire d'estimer, à partir des données, une matrice qui possède le même sous-espace. De nombreux articles traitent cette technique ([Vib95, VODM96, VWO97a, VWO97b, Bau01, Jan03, Qin06, Chi07]. Cette famille de méthodes a été démocratisée par [VODM96] qui a homogénéisé l'écriture d'un ensemble de méthodes pouvant rentrer dans le cadre d'une théorie unifiée ([VODM95]). Concernant les propriétés des méthodes sous-espaces, on peut trouver de nombreuses études de convergence dans la littérature (voir [LVOW93, DPS95, BDS99, BL02, Pin02, CP04a, CP04b, Bau05]). Les méthodes sous-espace sont très répandues dans le domaine du contrôle et dans le monde industriel ([BNSR98, FDMVO00, JSL01, SPG03, PL08]). Durant les quinze dernières années, les méthodes sous-espace se sont répandues dans le domaine de l'identification du comportement dynamique des structures, particulièrement dans les domaines de l'ingénierie mécanique, civil et aérospatial ([HvdA99, MBG03, MBB+06, MBG03, BMCC10]). Pour répondre au besoin d'identification du comportement modal de grandes structures (ponts, immeubles, etc.) [Döh11] a développé des algorithmes de type *multi-patchs* permettant de fusionner plusieurs sous-identifications modales. Enfin, une dernière variante des méthodes sous-espace, très utilisée pour effectuer de la surveillance en temps réel, consiste à effectuer une identification sous-espace itérative ([LGV00, OK02, MBL08]).

1.2.1.2 Description des chapitres

L'identification modale permet de faire le lien entre les données mesurées et une modélisation paramétrique décrivant le comportement dynamique d'une structure.

Dans le Chapitre 2, nous détaillerons les caractéristiques d'un système, nous présenterons trois familles de modélisations paramétriques et nous donnerons deux exemples d'application.

Concernant la caractérisation d'un système (Section 2.1), nous verrons qu'un système peut être linéaire ou non linéaire, stationnaire ou non stationnaire (Section 2.1.2), décrit dans différents domaines (Section 2.1.3) de manière continue ou discrète (Section 2.1.3.2) et en fonction du nombre d'entrée(s) et de sortie(s) (Section 2.1.4). Les caractéristiques dynamiques du système peuvent être décrites dans le domaine fréquentiel par sa matrice de transfert (Section 2.1.5.1) ou dans le domaine temporel par sa réponse

impulsionnelle (Section 2.1.5.2).

Plusieurs familles de modélisations permettent de décrire le comportement dynamique d'une structure. Nous en verrons trois : les modélisations ARX (Section 2.2), les représentations d'état (Section 2.3) et les modélisations modales (Section 2.4).

Enfin, deux applications sont présentées : un système élastique de type MKC (Section 2.5) et un système aéroélastique (Section 2.6).

Dans le Chapitre 3, nous détaillerons les méthodes d'identification sélectionnées. Nous commencerons par les méthodes d'identification de modélisations ARX (Section 3.1), puis nous décrirons le principe de l'identification sous-espace (Section 3.2) et enfin nous présenterons le concept de l'identification LSFD (Section 3.3).

Dans le Chapitre 4, nous discuterons de l'estimation non paramétrique. Ces estimations sont basées sur l'estimation de grandeurs (densités spectrales, fonctions de corrélations, matrices de transfert, réponses impulsionnelles) directement à partir des données mesurées. Nous décrirons d'abord ce qu'est un signal (Section 4.1), ce qu'est un processus aléatoire (Section 4.2) et les moyens d'estimer les caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire (Section 4.3). Nous proposerons ensuite des méthodes d'estimation des densités spectrales de puissance (Section 4.4), des fonctions de corrélation (Section 4.5), des matrices de transfert (Section 4.6) et des réponses impulsionnelles finies (Section 4.7).

1.2.2 L'estimation des incertitudes

1.2.2.1 Etat de l'art

A cause du bruit de mesure, du bruit environnant et/ou de l'utilisation d'excitations connues stochastiques, les paramètres modaux identifiés ne sont pas déterministes. Pour améliorer la pertinence des résultats d'identification, il est nécessaire d'estimer la variance des paramètres modaux. Cette variance permettra de définir un intervalle de confiance autour des paramètres identifiés.

Les méthodes LSCF et sous-espace ne fournissent pas naturellement l'information concernant la variance des estimées des paramètres modaux. Pour déterminer la variance, et donc l'écart type (aussi appelé incertitude), il est nécessaire d'utiliser une technique de propagation de la variance de la grandeur de départ (e.g. de la matrice de transfert estimée, de la matrice de corrélation estimée, etc.). Cette technique est basée sur des propriétés statistiques et sur la delta méthode ([Cra46, BG89, Oeh92, NKNW96, CB02]).

Une description sur la propagation des incertitudes LSCF peut être trouvée dans [GSP89, PGS07]. Une méthode rapide d'estimation de ces incertitudes a été développée par [DTGPV09, DTGS09].

Une description sur la propagation des incertitudes sous-espace peut être trouvée dans [RPDR08b, DLM13]. Cette propagation a été optimisée par [DM13].

1.2.2.2 Description des chapitres

L'estimation d'incertitude consiste a propager la variance de l'estimation d'une grandeur de départ. Cette propagation est effectuée à l'aide de la théorie des perturbations et de la delta méthode.

Dans le Chapitre 5, nous présenterons le principe de la propagation des variances (Section 5.1). La théorie sur laquelle repose la propagation est basée sur la delta méthode (Section 5.1.1). Cette théorie permet d'approximer l'espérance et la variance d'une fonction d'un processus aléatoire gaussien. Cependant, elle nécessite de pourvoir dériver cette fonction et donc d'en connaître une définition explicite. Ceci n'étant pas toujours possible, nous utiliserons la théorie des perturbations pour approximer la dérivation par différenciation (Section 5.1.2).

Dans le Chapitre 6, nous détaillerons les chaînes de propagation des variances associées à chacune des méthodes d'identification traitées dans ce manuscrit.

Nous commencerons par détailler la chaîne de propagation associée à la méthode d'identification LSCF du problème ARX linéarisé (Section 6.1).

Nous verrons ensuite la chaîne de propagation associée à la méthode d'identification sous-espace de la représentation d'état (Section 6.2).

Dans le Chapitre 7, nous verrons comment sont estimées les grandeurs de départ des méthodes d'identification traitées dans ce manuscrit.

Pour la méthode d'identification LSCF du problème ARX linéarisé, la grandeur de départ estimée est la matrice de transfert. Nous verrons donc comment estimer la variance des éléments de cette matrice. Deux méthodes sont proposées (Section 7.1). La première est basée sur la fonction de cohérence (Section 7.1.1), la seconde utilise la propagation des variances des densités spectrales (Section 7.1.2).

Pour la méthode d'identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité, la grandeurs de départ est la matrice sous-espace. Cette matrice est construite à partir des matrices de corrélation. Les matrices de corrélation utilisées et leur agencement définissent la méthode sous-espace. Pour chacune des cinq méthodes sous-espace considérées dans ce manuscrit, nous détaillerons le calcul de la variance des matrices sous-espace par propagation des variances des matrices de corrélation (Section 7.2).

1.2.3 Validation et application des méthodes

1.2.3.1 Enjeux

Les identifications modales avec estimation d'incertitude seront principalement utilisées, dans le contexte d'étude de cette thèse, pour recaler les modèles et pour suivre les essais en vol. Les ingénieurs pourront utiliser les valeurs d'incertitudes pour pondérer le recalage. Concernant les essais en vol, les incertitudes devront aider à la prise de décision. Le principal paramètre modal surveillé durant un essais en vol est le taux d'amortissement. Lorsqu'il se rapproche de 0, on se rapproche du point de flottement,

ce qui est extrêmement dangereux. Lorsque la valeur du taux d'amortissement estimée se rapproche de 0, l'incertitude pourra être utilisée pour déterminer un intervalle de confiance autour de la valeur estimée. La valeur de l'incertitude étant elle aussi une estimation, il est crucial, d'un point de vu opérationnel, de valider les méthodes d'estimation d'incertitude avant de les utiliser lors d'un essai en vol.

1.2.3.2 Description des chapitres

Pour valider une méthode, il est nécessaire de mettre en place une stratégie de validation. Lorsque cette stratégie est définie, on l'applique à une série de systèmes simulés. Ceci permet de valider le code et sa robustesse à différents éléments (e.g. le bruit). Lorsque le code est validé, on peut le tester sur des données réelles.

Dans le Chapitre 8, nous rappellerons le benchmark des méthodes que l'on cherche à valider (Section 8.1). Nous présenterons ensuite le benchmark des simulations et des différents cas qui serviront à valider les méthodes d'identification avec estimation d'incertitude (Section 8.2). Pour valider, il est nécessaire de définir les critères de validation (Section 8.3). Nous utiliserons deux critères (Section 8.3.2 et Section 8.3.3). Enfin, nous détaillerons comment seront présentés et analysés les résultats (Section 8.4).

Dans le Chapitre 9, nous analyserons les résultats graphiques présentés en Annexe C et en Annexe D. Ces simulations permettront d'étudier les méthodes sur des cas de complexité croissante.

Dans le Chapitre 10, nous appliquerons les méthodes d'identification avec estimation d'incertitude à des données mesurées lors d'un essai réel de vibration en vol d'un avion Rafale. Nous commencerons par décrire le cas (Section 10.1). Nous analyserons ensuite les résultats et nous proposerons une méthode de clarification des diagrammes de stabilité basée sur les valeurs d'incertitude (Section 10.2).

Première partie

L'identification modale

Chapitre 2

Les modélisations paramétriques

L'identification modale est basée sur l'identification des paramètres d'un modèle théorique dont on peut extraire les paramètres modaux. Dans le cadre de l'étude de la dynamique des structures, ces modèles sont construits à partir des équations de la dynamique. Il peuvent décrire soit la réponse temporelle, soit la réponse fréquentielle de la structure. Le choix du modèle théorique à identifier conditionne le choix de la méthode d'identification modale. Ainsi, les méthodes sous-espaces seront utilisées pour identifier les matrices d'une représentation d'état. Les méthodes de types moindres carrés permettront d'identifier les coefficients d'une représentation ARMAX. Le choix de la modélisation théorique fixera aussi les hypothèses sur les excitations du système, sur le bruit environnemental et sur le bruit de capteurs.

Après avoir défini ce qu'est un système (Section 2.1), nous présenterons deux types de modélisations : les modélisations ARMAX (Section 2.2) et les représentations d'état (Section 2.3). Nous verrons ensuite comment obtenir la modélisation modale à partir de ces deux types de modélisations (Section 2.4). Nous finirons par la description de deux types de systèmes : les systèmes structures (Section 2.5) et les systèmes aéro-élastiques (Section 2.6).

Sommaire

2.1 Caractérisation des systèmes 36
2.1.1 Qu'est-ce qu'un système 36
2.1.2 Linéarité et stationnarité d'un système 36
2.1.3 Domaine d'analyse 37
2.1.4 SISO et MIMO 44
2.1.5 Caractéristiques d'un système 44
2.1.6 Modes d'un système 46
2.1.7 Trois familles de modélisations 47
2.2 Modélisations ARMAX 48
2.2.1 Du modèle ARX SISO à la fonction de transfert 48
2.2.2 Extension MIMO 51
2.3 Modélisations d'état 53

2.4 Modélisation modale **56**
2.4.1 A partir de la modélisation ARX 57
2.4.2 A partir de la représentation d'état 57
2.4.3 Relation entre les modélisations modales 58
2.5 Application 1 : Modélisation d'un système Masse-Ressort amorti, MCK **59**
2.5.1 Matrice de transfert du système MCK 60
2.5.2 représentation d'état du système MCK 61
2.5.3 Représentation modale du système MCK 62
2.6 Application 2 : Modélisation d'un système aéro-élastique . **64**
2.7 Bilan du chapitre **65**

2.1 Caractérisation des systèmes

2.1.1 Qu'est-ce qu'un système

Un système est une entité entièrement définie par ses composants et la manière dont ils réagissent entre eux. Ces composants définissent la nature du système. Il peut être mécanique, électrique, aérodynamique, aéro-élastique, biologique, économique, etc. De manière générale, toute entité qui répond à une excitation est un système. Il peut s'agir d'une structure, d'un circuit électrique, d'une cellule vivante, etc.

Les points d'application des excitations sont appelés les "entrées" du système. Une excitation peut être un coup de marteau sur un pont, une intensité dans un circuit électrique, un stimuli sur une cellule, etc. On parle de signaux d'entrée.

Les points d'observation des réponses sont appelés les "sorties" du système. Ces points d'observation sont généralement des capteurs mesurant la réponse du système. Cette réponse peut être un déplacement, une vitesse, une accélération, une pression, une température, une tension, etc. On parle de signaux de sortie.

2.1.2 Linéarité et stationnarité d'un système

La notion de linéarité implique que les réponses du systèmes soient proportionnelles aux excitations appliquées. Un exemple de source de non-linéarités est la présence de jeux dans un système mécanique (e.g. [PPR+96]).

Un système est dit stationnaire lorsque ses caractéristiques n'évoluent pas dans le temps. La non stationnarité peut par exemple être due à la variation de masse du système au cours du temps. C'est le cas de tout système consommant du carburant. Elle peut aussi être due à une variation périodique des efforts aérodynamiques. C'est le cas d'une éolienne et d'un hélicoptère dont les pâles incurvées génèrent des efforts aérodynamiques différents selon leur position (e.g. [HC85]).

Un système peut être considéré linéaire si l'on peut considérer que l'influence des non-linéarités est faible. On peut aussi considérer le système stationnaire à condition que la vitesse d'évolution de ces paramètres soit faible par rapport à la durée d'analyse.

Un système linéaire et stationnaire est qualifié de LTI (Linear and Time Invariant). C'est ce type de système qui sera traité dans ce manuscrit.

2.1.3 Domaine d'analyse

L'analyse d'un système à partir de son observation est basée sur le traitement des signaux de sorties et, s'ils sont connus, des signaux d'entrées. Le domaine utilisé pour exprimer ces signaux conditionne le domaine dans lequel sera exprimée la modélisation du système. Les deux domaines d'études les plus répandus dans le traitement de signal sont le domaine temporel et le domaine fréquentiel. On parlera d'analogie temps/fréquence (Section 2.1.3.1). De plus, ces deux domaines pourront être considérés continus (ou analogiques), discrets, quantifiés ou numériques (Section 2.1.3.2).

2.1.3.1 Domaine temporel et domaine fréquentiel

Les signaux sont généralement exprimés dans le domaine temporel car c'est le domaine naturel de la mesure physique. Une mesure temporelle correspond au suivi de l'évolution d'une grandeur en fonction du temps, comme par exemple une température, une accélération, etc.. Cependant, dans le cadre du traitement du signal, il est souvent nécessaire d'étudier le spectre fréquentiel d'un signal, i.e. d'exprimer ce signal dans le domaine fréquentiel. Une méthode de passage entre domaine temporel et domaine fréquentiel est la transformation de Fourier (Voir [GW99] pour une explication détaillée sur la décomposition spectrale et sur le lien entre série et transformation de Fourier).

Définition 1 *Transformation de Fourier (à temps continu)*
Soit le signal temporel $s(t)$. Sa transformée de Fourier $s(f)$ est définie par

$$s(f) = \int_{-\inf}^{+\inf} s(t)e^{-i2\pi ft}dt \tag{2.1}$$

On notera $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier :

$$s(f) = \mathcal{F}\left[s(t)\right] \tag{2.2}$$

De même, la transformation inverse est définie par :

$$s(t) = \int_{-\inf}^{+\inf} s(f)e^{i2\pi ft}df \tag{2.3}$$

On notera $\mathcal{F}^{-1}$ l'opérateur de transformation de Fourier inverse :

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[s(f)\right] \tag{2.4}$$

La transformation de Fourier possède des propriétés très intéressantes qui seront largement utilisées dans la suite de ce manuscrit.

Définition 2 *Quelques propriétés de la transformée de Fourier*
Soient $s(t)$, $s_1(t)$ et $s_2(t)$ trois signaux temporels. Soit a un scalaire.

- *Linéarité*

$$\mathcal{F}\left[as_1(t) + s_2(t)\right] = a\mathcal{F}\left[s_1(t)\right] + \mathcal{F}\left[s_2(t)\right] = as_1(f) + s_2(f) \tag{2.5}$$

- *Contraction du domaine*

$$\mathcal{F}\left[s(at)\right] = \frac{1}{|a|}s(\frac{f}{a}) \tag{2.6}$$

- *Translation temporelle*

$$\mathcal{F}\left[s(t+t_0)\right] = e^{i2\pi f t_0}s(f) \tag{2.7}$$

- *Produit de convolution dans le domaine temporel*

$$\mathcal{F}\left[s_1(t) * s_2(t)\right] = s_1(f)s_2(f) \tag{2.8}$$

- *Produit de convolution dans le domaine fréquentiel*

$$s_1(t)s_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[s_1(f) * s_2(f)\right] \tag{2.9}$$

- *Dérivation dans le domaine temporel*

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = (i2\pi f)^n s(f) - (i2\pi f)^{n-1}s(t=0^-) - \ldots - i2\pi f\frac{d^{n-1}s(t=0^-)}{dt^{n-1}} \tag{2.10}$$

2.1.3.2 Domaine continu et domaine discret

Un signal correspond souvent à la mesure d'une grandeur (e.g. signal électrique, accélération, etc.) en fonction du temps. Cette mesure temporelle pourra être analogique, discrète, quantifiée ou numérique ([Duv94, Max81]).

Signaux analogiques

Historiquement, le terme analogique provient du fait que la grandeur observée évolue de manière analogue à la source (e.g. le niveau de mercure varie de manière analogue à la température). Par extension, on parle d'évolution analogique pour toute grandeur variant de façon continue à la fois dans le temps et en valeurs mesurées. Un signal analogique peut-être décrit par une fonction à variables et à valeurs continues (voir Figure 2.1(a)).

Signaux discrets

Un signal discret correspond à une mesure effectuée avec un pas de temps (généralement) appelé fréquence d'échantillonnage. L'évolution de la grandeur est continue mais n'est relevée que de manière discrète dans le temps. Un signal discret peut-être représenté par une fonction à variables discrètes et à valeurs continues (voir Figure 2.1(b)).

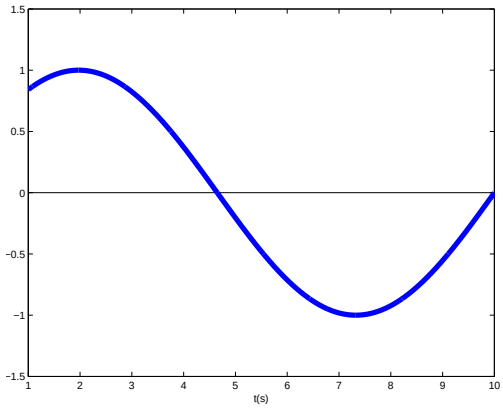
Signaux quantifiés

Un signal quantifié correspond à une mesure effectuée dans le temps continu mais dont la mesure relevée ne peut être que discrète. Un cas simple correspond à un signal suivant l'ouverture et la fermeture d'un interrupteur au cours du temps. La valeur relevée sera soit 0 (interrupteur fermé) soit 1 (interrupteur ouvert). Un signal quantifié peut-être représenté par une fonction à variables continues et à valeurs discrètes (voir Figure 2.1(c)).

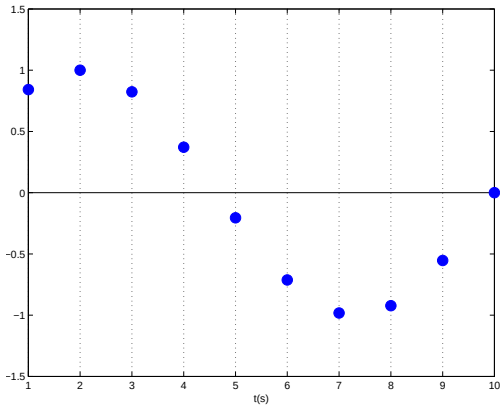
Signaux numériques

Un signal numérique correspond à un signal à la fois discret et quantifié. Il peut être représenté par une fonction à variables et à valeurs discrètes (voir Figure 2.1(d)). Dans la suite on parlera soit de signal analogique (domaine continu), soit de signal discret (domaine discret).

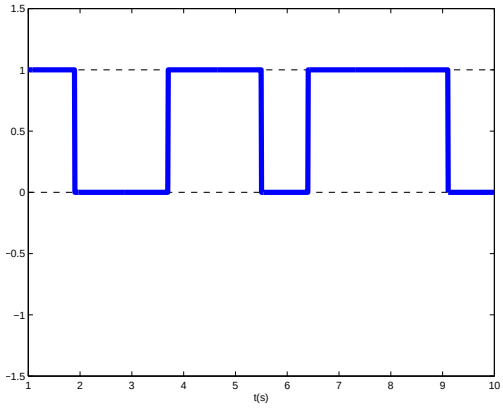
Exemples de signaux



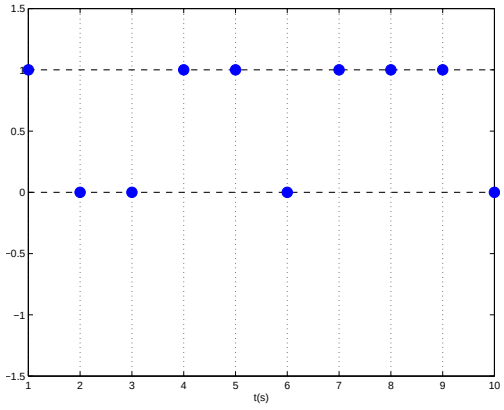
(a) Exemple de signal analogique



(b) Exemple de signal discret



(c) Exemple de signal quantifié



(d) Exemple de signal numérique

FIGURE 2.1 – Exemple de signaux

Discrétisation

De nos jours, les signaux analogiques sont de moins en moins utilisés pour l'analyse et le traitement du signal. Les mesures temporelles sont généralement effectuées de manière discrète et avec une période d'échantillonnage. Et même si la mesure est analogique, le traitement par ordinateur nécessite l'échantillonnage du signal (voir [PdSP89]). L'échantillonnage (ou discrétisation) d'un signal analogique $s(t)$ est une opération qui consiste à ne retenir du signal qu'une série de valeurs extraites à un pas d'échantillonnage. Ce pas d'échantillonnage peut être constant ou non. Dans la suite, nous ne considèrerons que des pas d'échantillonnages constants. Dans le domaine temporel, le pas d'échantillonnage est appelé période d'échantillonnage. On notera cette période T_e. Elle est inversement proportionnelle à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$. Dans le domaine fréquentiel, le pas d'échantillonnage est appelé résolution fréquentielle. On notera cette résolution df.

Définition 3 *Echantillonnage*

On note $s_e(t)$ le signal analogique $s(t)$ échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e :

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e)\delta(t - nT_e) \tag{2.11}$$

avec $\delta(t)$ la fonction de Dirac tel que

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ 1 & \textit{pour } t = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

On construit ainsi la série (ou signal discret) $s_d(n)$ à partir de $s_e(t)$.

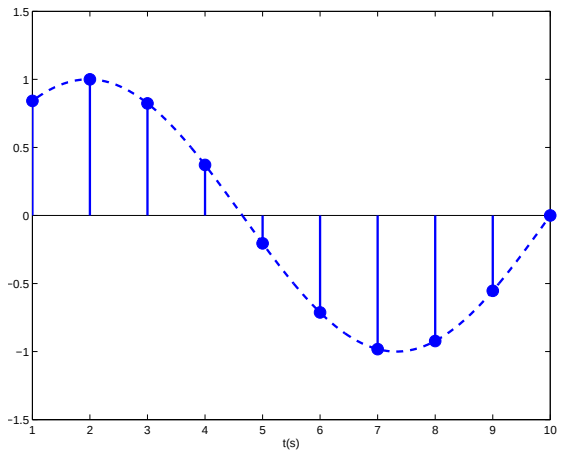


FIGURE 2.2 – Exemple de signal temporel discretisé avec $T_e = 1s$

Remarque 4 *Dans la suite du document, on ne fera plus apparaitre l'indice* $_d$. *La variable utilisée indiquera quel type de signal est considéré.*

- *La variable temps continu t pour les signaux temporels continus*
- *La variable temps discret n (n^{me} échantillon temporel) pour les signaux temporels discrets*
- *La variable fréquence continue f (ou pulsation continue ω, avec $\omega = 2\pi f$) pour les signaux fréquentiels continus*
- *La variable fréquence ou pulsation discrète k (k^{me} raie fréquentielle) pour les signaux fréquentiels discrets*

2.1.3.3 Transformations de Laplace, en Z et de Fourier

Les transformations de Fourier à temps continu et discret sont des cas particuliers des transformations de Laplace et en $\mathcal{Z}$ (voir [Sne95, BB86]).

Transformation de Laplace

Définition 5 *Transformation de Laplace*

Soit le signal temporel $s(t)$. Sa transformée de Laplace est définie par

$$s(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt \tag{2.13}$$

On notera $\mathcal{L}$ l'opérateur de transformation de Laplace :

$$s(p) = \mathcal{L}\left[s(t)\right] \tag{2.14}$$

De même, la transformation inverse est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(p)e^{pt}dp \tag{2.15}$$

On notera $\mathcal{L}^{-1}$ l'opérateur de transformation de Fourier inverse :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[s(f)\right] \tag{2.16}$$

On remarque que la transformation de Fourier à temps continu n'est qu'un cas particulier de la transformation de Laplace, où $p = i2\pi f = i\omega$ (avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation). Les propriétés de Laplace et Fourier sont similaires

Définition 6 *Quelques propriétés de la transformée de Laplace*

Soient $s(t)$, $s_1(t)$ et $s_2(t)$ trois signaux temporels. Soit a un scalaire.

- *Linéarité*

$$\mathcal{L}\left[as_1(t) + s_2(t)\right] = a\mathcal{L}\left[s_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[s_2(t)\right] = as_1(p) + s_2(p) \tag{2.17}$$

- *Contraction du domaine*

$$\mathcal{L}\left[s(at)\right] = \frac{1}{|a|}s(\frac{p}{a}) \tag{2.18}$$

- *Translation temporelle*

$$\mathcal{L}\left[s(t+t_0)\right] = e^{pt_0}s(p) \tag{2.19}$$

- *Produit de convolution dans le domaine temporel*

$$\mathcal{L}\left[s_1(t) * s_2(t)\right] = s_1(p)s_2(p) \tag{2.20}$$

- *Produit de convolution dans le domaine de Laplace*

$$s_1(t)s_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[s_1(p) * s_2(p)\right] \tag{2.21}$$

- *Dérivation dans le domaine temporel*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = p^n s(p) - p^{n-1}s(t=0^-) - \ldots - p\frac{d^{n-1}s(t=0^-)}{dt^{n-1}} \tag{2.22}$$

Transformation en Z

L'application de la transformation de Laplace à un signal échantillonné $s_e(t)$ (voir Définition 3) correspond à la transformation en $\mathcal{Z}$ du signal analogique $s(t)$:

Définition 7 *Transformation en $\mathcal{Z}$*

On note $s_e(t)$ le signal analogique $s(t)$ échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e. La transformation en $\mathcal{Z}$ de la série $s(nT_e)$ correspond à la transformation de Laplace de $s_e(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[s(nT_e)] &= \mathcal{L}[s_e(t)] \\ &= \textstyle\sum_{-\infty}^{n=+\infty} s(nT_e)\mathcal{L}[\delta(t-nT_e)] \\ &= \textstyle\sum_{-\infty}^{n=+\infty} s(nT_e)e^{-nT_e p} \\ &= \textstyle\sum_{-\infty}^{n=+\infty} s(nT_e)z^{-n} \\ &= s(z)\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec p la variable de Laplace et $z = e^{T_e p}$ la variable du domaine en $\mathcal{Z}$.

Définition 8 *Quelques propriétés de la transformé en $\mathcal{Z}$*

Soient $s(n)$, $s_1(n)$ et $s_2(n)$ trois séries temporelles. Soit a un scalaire.

- *Linéarité*

$$\mathcal{Z}\left[as_1(n) + s_2(n)\right] = a\mathcal{Z}\left[s_1(n)\right] + \mathcal{Z}\left[s_2(n)\right] = as_1(z) + s_2(z) \tag{2.24}$$

- *Contraction du domaine*

$$\mathcal{Z}\left[s(an)\right] = \frac{1}{a}s(\frac{z}{a}) \tag{2.25}$$

- *Translation temporelle*

$$\mathcal{Z}\left[s(n+n_0)\right] = z^{n_0}s(z) \tag{2.26}$$

- *Produit de convolution dans le domaine temporel*

$$\mathcal{Z}\left[s_1(n) * s_2(n)\right] = s_1(z)s_2(z) \tag{2.27}$$

– *Produit de convolution dans le domaine en $\mathcal{Z}$*

$$s_1(n)s_2(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[s_1(z) * s_2(z)\right] \tag{2.28}$$

Un cas particulier de la transformation en $\mathcal{Z}$ est la transformation de Fourier à temps discret. On l'obtient en posant $z = \exp i2\pi f$. Comme pour la transformation de Laplace et de Fourier à temps continu, les transformations en $\mathcal{Z}$ et de Fourier à temps discret ont des propriétés similaires.

Transformation de Fourier discrète

Si on discrétise le domaine des fréquences obtenu par une transformation de Fourier à temps discret (cas particulier de la transformation en $\mathcal{Z}$) et qu'on réduit le nombre de points aux N_e échantillons mesurés, on obtient une transformation de Fourier discrète (TFD, [Smi03, Max81]) :

Définition 9 *Transformation de Fourier discrète (TFD)*

Soient N_e échantillons d'un signal à temps discret $s(n)$. La transformée de Fourier discrète de $s(n)$ est donnée par :

$$s(k) = \alpha_{\mathcal{F}_d} \sum_{n=1}^{N_e} s(n) e^{-\frac{i2\pi kn}{N_e}} \tag{2.29}$$

La transformation de Fourier discrète inverse de $s(k)$ est donnée par

$$s(n) = \alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}} \sum_{k=1}^{N_e} s(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N_e}} \tag{2.30}$$

Avec $\alpha_{\mathcal{F}_d}$ et $\alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}}$ les coefficients de normalisation respectifs de la transformation de Fourier à temps discret et de la transformation de Fourier à temps discret inverse. Ces coefficients doivent respecter la condition

$$\alpha_{\mathcal{F}_d}\alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}} = 1/N_e$$

Remarque 10 *$\alpha_{\mathcal{F}_d}$ et $\alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}}$*

Les deux conventions les plus répandues sont :

– *$\alpha_{\mathcal{F}_d} = 1/N_e$ et $\alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}} = 1$*

– *$\alpha_{\mathcal{F}_d} = 1/\sqrt{N_e}$ et $\alpha_{\mathcal{F}_d^{-1}} = 1/\sqrt{N_e}$*

Sauf mention contraire, nous utiliserons la première convention. C'est notamment celle utilisée dans le logiciel de calcul Matlab©.

Les algorithmes de calcul rapide (FFT, *Fast Fourier Transform* [Wal96, CT65] - FFTW, *Fastest Fourier Transform in the West* [FJ98, FJ99]) de cette transformation a permis de démocratiser l'utilisation de la transformation de Fourier dans le monde numérique.

2.1.4 SISO et MIMO

Un système peut être vu comme une boîte noire qui répond à une excitation. En pratique, on n'est jamais capable d'observer l'ensemble du système. Les observations sont ponctuelles. Par exemple, dans un essai de vibration, les points d'observation sont les capteurs positionnés sur la structure étudiée. D'un point de vue théorique, le cas le plus simple est de n'observer qu'une seule sortie. On parle de modélisation SO (*Single-Output*). De même pour les excitations contrôlées et connues. Le plus simple d'un point de vue théorique est de ne considérer qu'un seul point d'excitation. On parle de modélisation SI (*Single-Input*). Cependant, l'observation d'un seul point du système est généralement insuffisant pour pouvoir observer correctement la réponse de ce système. Les modélisations considérant plusieurs points d'observation sont appelés MO (*Multi-Outputs*). Il en va de même pour le nombre de points d'excitation. Il peut parfois être utile d'exciter le système en différents endroits de la structure. On parle de modélisation MI (*Multi-Inputs*).

Au final, quatre combinaisons sont possibles pour caractériser une modélisation en fonction du nombre de points d'observation et d'excitation :

- SISO : *Single-Input Single-Output*
- MISO : *Multi-Inputs Single-Output*
- SIMO : *Single-Input Multi-Outputs*
- MIMO : *Multi-Inputs Multi-Outputs*

Dans ce manuscrit nous traiterons des modélisations MIMO ([Lju98, PS12]), qui sont une généralisation des systèmes SISO. La principale différence entre la théorie associée aux systèmes MIMO et celle associée aux systèmes SISO est l'utilisation de vecteurs et de matrices au lieu de valeurs scalaires. On notera le vecteur signaux d'entrées

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{N_i} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

et le vecteur signaux de sorties

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_o \\ \vdots \\ y_{N_o} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

2.1.5 Caractéristiques d'un système

Un système peut être caractérisé par la manière dont il répond à une ou plusieurs excitations. Le système est alors traité comme un filtre fréquentiel entre les entrées et

les sorties [OSB+89, Duv94, Max81]. Dans le domaine fréquentiel, ce type de filtre est caractérisé par les fonctions de transfert $H_{oi}(i\omega)$ (ou $H_{oi}(k)$ dans le cas discret) entre les entrées "i" et les sorties "o". Dans le domaine temporel, ce type de filtre est caractérisé par les réponses impulsionnelles finies $h_{oi}(t)$ (ou $h_{oi}(n)$ dans le cas discret) entre les entrées "i" et les sorties "o". Comme nous l'avons déjà vu, le lien entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel se fait par la transformation de Fourier dans le cas de signaux analogiques (Section 2.1.3.1) et par la transformation de Fourier discrète dans le cas de signaux échantillonnés (Section 2.1.3.3).

2.1.5.1 Domaine fréquentiel et fonction de transfert

La fonction de transfert peut être considérée dans le domaine de Fourier continu ou discret, dans le domaine de Laplace ou dans le domaine en $\mathcal{Z}$. On distinguera le domaine considéré à partir de la variable utilisée (f pour Fourier continu, k pour Fourier discret, s ou p pour Laplace et z pour $\mathcal{Z}$).

Pour une modélisation SISO (voir Section 2.1.4), la fonction de transfert $H(f)$ est une fonction scalaire reliant l'observation scalaire (un seul point d'observation) $y(f)$ de la réponse du système à l'excitation scalaire $u(f)$.

$$y(f) = H(f)u(f) \tag{2.33}$$

Pour une modélisation MIMO (voir Section 2.1.4), on ne traite plus une fonction de transfert scalaire $H(f)$ mais une matrice de transfert $\mathbf{H}(f)$. Les termes de cette matrice correspondent aux fonctions de transferts H_{oi} reliant chacune des entrées "i" à chacune des sortie "o".

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} H_{11}(f) & \dots & H_{1N_i}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N_o1}(f) & \dots & H_{N_oN_i}(f) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Les vecteurs signaux d'entrées $u(f)$ et de sorties $y(f)$ (Equation (2.31) et Equation (2.32) exprimées dans le domaine fréquentiel) sont reliées par la matrice de transfert $\mathbf{H}(f)$:

$$y(f) = \mathbf{H}(f)u(f) \tag{2.35}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\begin{bmatrix} y_1(f) \\ \vdots \\ y_o(f) \\ \vdots \\ y_{N_o}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_i} H_{1i}(f)u_i(f) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_i} H_{oi}(f)u_i(f) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_i} H_{N_oi}(f)u_i(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_i} y_{1i}(f) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_i} y_{oi}(f) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_i} y_{N_oi}(f) \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

On constate que la réponse du système en chacun des points d'observation "o" correspond à la somme des réponses y_{oi} observées en "o" et dues aux excitations appliquées en chacun des points d'entrée "i". Ceci est appelé le principe de superposition.

2.1.5.2 Domaine temporel et réponse impulsionnelle

Dans le domaine temporel (continu ou discret), le comportement d'un filtre fréquentiel est caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Pour chacune des excitation "i", la réponse temporelle au point d'observation "o" correspond à la convolution (opérateur "$*$") entre la réponse impulsionnelle $h_{oi}(t)$ et cette excitation $u_i(t)$:

$$\begin{aligned} y_{oi}(t) &= h_{oi}(t) * u_i(t) \\ &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} h_{oi}(t-\tau)u_i(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.37}$$

A partir de la propriété donnée par l'Equation (2.8) (Propriété 2) et de l'Equation (2.33), on constate que la fonction de transfert est la transformée de Fourier (ou, selon le domaine de travail, de Laplace ou en $\mathcal{Z}$) de la réponse impulsionnelle donnée par l'Equation (2.37) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y_{oi}(t)] &= \mathcal{F}[h_{oi}(t) * u_i(t)] \\ \mathcal{F}[y_{oi}(t)] &= \mathcal{F}[h_{oi}(t)]\mathcal{F}[u_i(t)] \\ y_{oi}(f) &= H_{oi}(f)u_i(f) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Avec $y_{oi}(f) = \mathcal{F}[y(t)]$, $u_i(f) = \mathcal{F}[y(t)]$, $H_{oi}(f) = \mathcal{F}[h_{oi}(t)]$ et $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation directe de Fourier.

2.1.6 Modes d'un système

2.1.6.1 Modes propres

Un mode propre d'un système oscillatoire correspond à une fréquence à laquelle le système peut osciller après avoir été perturbé au voisinage de son état d'équilibre stable ([Mei75]). On parle de fréquence naturelle de vibration. Le nombre de modes d'un système est égal à son nombre de degrés de liberté. Un mode est caractérisé par ses paramètres modaux. Ces paramètres sont :

- La fréquence modale, exprimé en Hz.
- Le taux d'amortissement modal, généralement exprimé en % ou en $^o/_{oo}$
- La forme modale, qui correspond à la déformation de la structure lorsque le mode est excité. La qualité de l'estimation de la déformation est directement lié au positionnement des capteurs sur la structure (dans le cas de systèmes physiques)
- Le facteur de participation, qui correspond à l'énergie apportée au mode par l'excitation. Cette grandeur est donc directement liée à l'excitation et à son positionnement sur le système. Dans le cas de système physique, le facteur de participation est associé à la masse modale.

Le principe de l'identification modale est d'estimer, à partir de données mesurées lors d'essais, une modélisation du comportement dynamique du système, modélisation à partir de laquelle on sait extraire ces paramètres modaux ([Lju98, PS12, VODM96]).

2.1.6.2 Espaces propres

Un espace propre est associé à un mode propre. La forme modale de ce mode propre est une combinaison linéaire des vecteurs d'une base de cet espace. Généralement, pour une structure réelle, un espace propre est de rang 1, i.e. a une base définie par un seul vecteur. Cependant, dans certains cas expérimentaux, un mode peut avoir un espace propre de rang supérieur à 1. Une poutre à base carrée et parfaitement homogène, aura par exemple, deux modes de flexion de son axe principal correspondant au même pôle. Un tel pôle est dit de multiplicité 2. On ne parle plus d'espace propre de dimension 1 généré par un vecteur propre mais d'espace propre de dimension 2 généré par la matrice des deux vecteurs propres associés à cette valeur propre. Dans le cas général, si une matrice $A \in \mathcal{K}^{(n \times n)}$ est non défective, toute valeur propre λ_j de A de multiplicité algébrique l_j est associée à un espace propre de taille $n \times l_j$ et de rang l_j ([GVL12]).

2.1.7 Trois familles de modélisations

Dans ce manuscrit, on traitera trois familles de modélisations du comportement d'un système ([Lju98, PS12, VODM96]) :

- Les modélisations ARMAX (en particulier les modélisations ARX)
- Les représentations d'état
- Les modélisations modales

2.1.7.1 Modélisation ARMAX

Une modélisation ARMAX relie les entrées aux sorties du système. Ces modélisations correspondent à une étude de filtre. Elles conduisent, entre autre, à une modélisation de la fonction (matrice) de transfert du système sous la forme d'un ratio de polynôme. D'un point de vue mathématique, les modes propres du système (Section 2.1.6) correspondent aux racines du polynôme dénominateur de la fonction (matrice) de transfert. (voir Section 2.2).

2.1.7.2 Représentation d'état

Une représentation d'état fait intervenir, en plus des entrées et des sorties du système, une variable d'état x. Ces modélisations correspondent à une étude de système du point de vue de l'automatique. Elles conduisent, entre autres, à une modélisation de la fonction (matrice) de transfert du système sous la forme d'un produit matriciel. D'un point de vue mathématique, les modes propres du système (Section 2.1.6) correspondent aux valeurs propres d'une des matrices de la représentation d'état (voir Section 2.3).

2.1.7.3 Modélisation modale

D'un point de vue mathématique, les modélisations modales correspondent à une décomposition en éléments simples de la fonction (matrice) de transfert d'un système. Cette modélisation permet d'écrire la fonction (matrice) de transfert du système comme une superposition de fonctions (matrices) de transfert élémentaires à un mode (Section

2.1.6). La modélisation modale d'un système à n degrés de liberté correspond à la somme de n systèmes à un degré de liberté (voir Section 2.4).

2.2 Modélisations ARMAX

2.2.1 Du modèle ARX SISO à la fonction de transfert

A l'instant t, la réponse y(t) du système ne dépend pas toujours que de l'excitation connue injectée u(t). Elle peut aussi dépendre des entrées injectées et des sorties observées à tous les autres instants. D'autre part, tout ou partie des entrées peuvent être inconnues (e.g. turbulence, trafic, etc.). Les entrées inconnues seront généralement considérées comme étant des processus aléatoires gaussiens centrés de type bruit blanc (voir Section 4.2, [Bré93, DR$^+$58]). De plus, on ne considère ici que des systèmes causaux, i.e. des systèmes dont la sortie ne peut pas dépendre d'instants ultérieurs à l'instant t.

On fera aussi la distinction entre la modélisation à temps discret et celle à temps continu.

2.2.1.1 Temps discret

On considère un système causal linéaire invariant dans le temps, et les signaux de sorties et d'entrées échantillonnés (i.e. discrétisés dans le temps). Dans ce cas, si $y(n)$ dépend des sorties $y(n-p)\ \dots\ y(n-1)$, des entrées connues $u(n-q)\ \dots\ u(n)$ et des entrées inconnues $v(n-s)\ \dots\ v(n)$, alors on peut écrire le modèle ARMAX(p,s,q) (Auto-Regressive and Moving Average with eXogeneous inputs,voir [Lju98, PS12]) :

$$y(n)+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j y(n-j)=\sum_{j=0}^{q}\beta_j u(n-j)+\sum_{j=0}^{s}\upsilon_j v(n-j) \tag{2.39}$$

Les coefficients réels $A=\begin{bmatrix}\alpha_0=1 & \dots & \alpha_p\end{bmatrix}, V=\begin{bmatrix}\upsilon_0 & \dots & \upsilon_s\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}\beta_0 & \dots & \beta_q\end{bmatrix}$ constituent respectivement les parties AR (Auto-Regressive) d'ordre p, MA (Moving Average) d'ordre q et X (eXogeneous inputs) d'ordre s du modèle (2.39).

Plusieurs autres modélisations de type *Black Box* peuvent être utilisées, basée sur les mêmes coefficient A, V et B que ceux de la modélisation ARMAX (2.39) (voir [Lju98, PS12]). On distinguera celles sans de celles avec entrées connues.

Définition 11 *Modélisation sans entrée connue*

- *Modélisation ARMA(p,s) (Auto-Regressive and Moving-Average)*

$$y(n)+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j y(n-j)=\sum_{j=0}^{s}\upsilon_j v(n-j) \tag{2.40}$$

- *Modélisation AR(p) (Auto-Regressive)*

$$y(n)+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j y(n-j)=v(n) \tag{2.41}$$

Cette modélisation est strictement équivalente à une modélisation ARMA$(p,0)$

– *Modélisation MA(s) (Moving-Average)*

$$y(n) = \sum_{j=0}^{s} \upsilon_j v(n-j) \tag{2.42}$$

Cette modélisation est strictement équivalente à une modélisation $ARMA(0, s)$

Les modélisations sans entrée connue (Définition 11, voir [Lju98, PS12, Ham94]) sont aussi appelées modélisations purement opérationnelles.

Définition 12 *Modélisation avec entrée connue*
– *Modélisation* $ARMAX(p, s, q)$ *(Equation* (2.39)*)*
– *Modélisation* $ARX(p, q)$ *(Auto-Regressive with eXogeneous inputs)*

$$y(n) + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u(n-j) + v(n) \tag{2.43}$$

Cette modélisation est strictement équivalente à une modélisation $ARMAX(p, 0, q)$
– *Modélisation* $MAX(s, q)$ *(Moving-Average with eXogeneous inputs)*

$$y(n) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u(n-j) + \sum_{j=0}^{s} \upsilon_j v(n-j) \tag{2.44}$$

Cette modélisation est strictement équivalente à une modélisation $ARMA(0, s, q)$

Dans cette thèse, seules les modélisations ARX seront traitées. De plus, dans cette section, on considèrera que le signal $v(n)$ est nul. Le terme $v(n)$ sera le terme d'erreur de modélisation que l'on cherchera à minimiser dans la Section 3.1. Sans ce terme d'erreur, la modélisation ARX(p, q) devient :

$$y(n) + \alpha_1 y(n-1) + \ \dots \ + \alpha_p y(n-p) = \beta_0 u(n) + \beta_1 u(n-1) + \ \dots \ + \beta_q u(n-q) \tag{2.45}$$

Remarque 13 *On peut noter que le modèle* (2.45) *correspond à l'égalité entre les produits de convolution discrets et finis*

$$\begin{cases} A * y(n) = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j y(n-j) \\ B * u(n) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u(n-j) \end{cases} \tag{2.46}$$

Soit un modèle ARX(p, q) tel que défini à l'Equation (2.45), d'après la Définition 7 et l'Equation (2.26) de la Propriété 8, la transformation en $\mathcal{Z}$ de ce modèle donne :

$$\left(1 + \alpha_1 z^{-1} + \ \dots \ + \alpha_p z^{-p}\right) y(z) = \left(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ \dots \ + \beta_q z^{-q}\right) u(n) \tag{2.47}$$

qui mène à l'écriture de la fonction de transfert entre l'entrée u et la sortie y

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} &= \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ \dots \ + \beta_q z^{-q}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \ \dots \ + \alpha_p z^{-p}} \\ &= \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned} \tag{2.48}$$

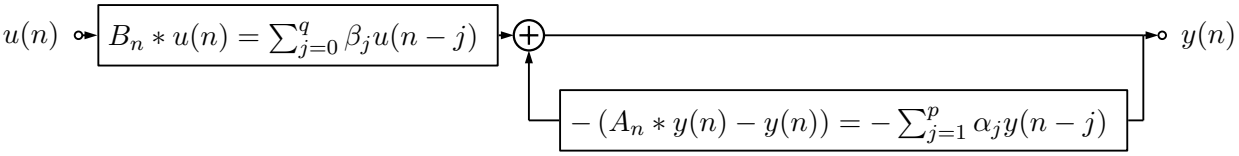


FIGURE 2.3 – Schéma bloc de la représentation temporelle du modèle ARX(p, q) sans entrée inconnue

avec $A(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \ \dots \ + \alpha_p z^{-p}$ le polynôme d'ordre p et $B(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_q z^{-q}$ le polynôme d'ordre q. On peut noter que $A(z)$ et $B(z)$ sont les transformées en $\mathcal{Z}$ des séries composées respectivement de leurs coefficients, ce qui est cohérent avec la Remarque 13.

L'Equation (2.48) s'écrit de manière équivalente, en posant $\mu = z^{-1}$

$$\begin{aligned} H(\mu) = \frac{y(\mu)}{u(\mu)} &= \frac{\beta_0 + \beta_1 \mu + \ \dots \ + \beta_q \mu^q}{1 + \alpha_1 \mu + \ \dots \ + \alpha_p \mu^p} \\ &= \frac{\beta_0 + \beta_1 \mu + \ \dots \ + \beta_q \mu^q}{\alpha_p \prod_{j=1}^{k} (\mu - \mu_j)^{l_j}} \\ &= \frac{B(\mu)}{A(\mu)} \end{aligned} \tag{2.49}$$

avec

- $B(\mu) = \beta_0 + \beta_1 \mu + \ \dots \ + \beta_q \mu^q$
- $A(\mu) = \alpha_p \prod_{j=1}^{k} (\mu - \mu_j)^{l_j}$
- μ_j le pôle j de multiplicité l_j de $A(\mu)$ (voir Section 2.1.6.2)
- $\sum_{j=1}^{k} l_j = p$

Remarque 14 *Dans le cas où tous les pôles sont de multiplicité* 1*, i.e. où la base de l'espace propre qui leur est associé est vectoriel (i.e. où les formes modales sont proportionnelles à un seul vecteur), on pourra écrire :*

$$A(\mu) = \alpha_p \prod_{j=1}^{p} \mu - \mu_j$$

En posant $z = e^{i\omega T_e}$, on obtient la fonction de transfert dans le domaine de Fourier à temps discret (voir Section 2.1.3.3). Si en plus on considère le domaine fréquentiel discrétisé, on obtient la fonction de transfert $H(z_k)$ (ou simplement $H(k)$) dans le domaine de Fourier discret (Définition 9) avec $z_k = e^{\frac{i2\pi}{N_e}}$ et N_e le nombre d'échantillons du signal.

2.2.1.2 Temps continu

Dans le domaine continu le modèle ARX(n, m) est un modèle dérivateur (voir [Lju98, PS12]) défini par :

$$y(t) + \alpha_1 \frac{d^{(1)} y(t)}{dt} + \ \dots \ + \alpha_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt} = \beta_0 u(t) + \beta_1 \frac{d^{(1)} u(t)}{dt} + \ \dots \ + \beta_m \frac{d^{(m)} u(t)}{dt} \tag{2.50}$$

Par la propriété de dérivation de la transformation de Laplace (Equation (2.22) de la Propriété 6), en considérant des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de (2.50) est

$$(1 + \alpha_1 p + \ \dots \ + \alpha_n p^n)\, y(p) = (\beta_0 + \beta_1 p + \ \dots \ + \beta_m p^m)\, u(p) \tag{2.51}$$

Et ainsi la fonction de transfert dans le domaine de Laplace est

$$\begin{aligned} H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} &= \frac{\beta_0 + \beta_1 p + \ \dots \ + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \ \dots \ + \alpha_n p^n} \\ &= \frac{\beta_0 + \beta_1 p + \ \dots \ + \beta_m p^m}{\alpha_n \prod_{j=1}^{k} (p - \lambda_j)^{l_j}} \\ &= \frac{B(p)}{A(p)} \end{aligned} \tag{2.52}$$

avec
- $B(p) = \beta_0 + \beta_1 p + \ \dots \ + \beta_m p^m$
- $A(p) = \alpha_n \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{l_j}$
- λ_j la racine j de multiplicité l_j de $A(p)$ (voir Section 2.1.6.2)
- $\sum_{j=1}^{k} l_j = n$

Remarque 15 *Dans le cas où tous les pôles sont de multiplicité* 1*, i.e. où la base de l'espace propre qui leur est associé est vectoriel (i.e. où les formes modales sont proportionnelles à un seul vecteur), on pourra écrire :*

$$A(\lambda) = \alpha_n \prod_{j=1}^{n} \lambda - \lambda_j$$

En posant $p = i\omega$, on obtient la fonction de transfert dans le domaine de Fourier à temps continu (voir Section 2.1.3.3).

2.2.2 Extension MIMO

Si le système comprend plusieurs entrées et plusieurs sorties (système MIMO, *Multi-Inputs Multi-Outputs*), sa fonction de transfert est matricielle de taille $N_o \times N_i$, avec N_o le nombre de sorties et N_i le nombre d'entrées (Equation (2.34)). On peut alors définir (2.48) (de même pour (2.52)) de trois façons ([PS12, Cau04]) :

1. Le ratio entre un polynôme à coefficients matriciels $\mathbf{B}(z)$ (ou $\mathbf{B}(p)$) $\in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ et un polynôme à coefficients scalaires $A(z)$ (ou $A(p)$) commun à chaque éléments de la matrice $\mathbf{B}(z)$ (ou $\mathbf{B}(p)$). C'est la représentation à dénominateur commun scalaire. Elle est connue sous le nom "CD" (*Common Denominator*, ou encore "DC" (Denominateur Commum). Voir Section 2.2.2.1.

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{A(z)} \text{ ou } \mathbf{H}(p) = \frac{\mathbf{B}(p)}{A(p)} \tag{2.53}$$

2. L'inversion à gauche d'un polynôme à coefficients matriciels $\mathbf{B}(z)$ (ou $\mathbf{B}(p)$) $\in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ par un polynôme à coefficients matriciels $\mathbf{A}(z)$ (ou $\mathbf{A}(p)$) $\in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$. C'est une des deux modélisations à dénominateur commun matricielle, celle dite "à gauche". Elle est connue sous le nom "*Left-DFM*" (DFM, Matrix Fraction Description), ou encore "DFM-Gauche" (DFM, Description à Fraction Matricielle). Voir Section 2.2.2.2.

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{A}(z)^{-1}\mathbf{B}(z) \text{ ou } \mathbf{H}(p) = \mathbf{A}(p)^{-1}\mathbf{B}(p) \tag{2.54}$$

3. L'inversion à droite d'un polynôme à coefficients matriciels $\mathbf{B}(z)$ (ou $\mathbf{B}(p)$) $\in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ par un polynôme à coefficients matriciels $\mathbf{A}(z)$ (ou $\mathbf{A}(p)$) $\in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$. C'est une des deux modélisations à dénominateur commun matricielle, celle dite "à droite". Elle est connue sous le nom "*Right-DFM*", ou encore "DFM Droite". Voir Section 2.2.2.2.

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{B}(z)\mathbf{A}(z)^{-1} \text{ ou } \mathbf{H}(p) = \mathbf{B}(p)\mathbf{A}(p)^{-1} \tag{2.55}$$

2.2.2.1 Fonctions de transfert à dénominateur commun scalaire : modélisation DC

Dans cette représentation, que l'on notera DC (Denominateur Commun), le polynôme dénominateur n'est défini que par les pôles du système. Ils correspondent à ses racines.

On notera, pour cette représentation, le vecteur paramètre $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta^T_{[B]_{11}} & \dots & \theta^T_{[B]_{N_o 1}} & \dots & \theta^T_{[B]_{N_o N_i}} & \theta^T_A \end{bmatrix}^T \tag{2.56}$$

avec, si m est l'ordre du polynôme à coefficient matriciel $\mathbf{B}$ et n celui du polynôme A

$$\begin{aligned} \theta_{[B]_{oi}} &= \begin{bmatrix} [\beta_0]_{oi} & \dots & [\beta_m]_{oi} \end{bmatrix} \\ \theta_A &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Les méthodes d'identification *Single-Reference* de modélisations ARX (voir Section 3.1) visent à identifier $\boldsymbol{\theta}$.

2.2.2.2 Fractions de transfert à dénominateur commun matriciel : modélisations DFM à gauche ou à droite

Que ce soit la représentation à gauche ou à droite, on peut passer par la matrice compagnon (voir Définition 16 ou [GVL12]) du polynôme dénominateur pour déterminer les pôles du système.

Définition 16 *Matrice compagnon Soit le polynôme à coefficients matriciels de taille $N \times N$ et de degré n $\boldsymbol{A}(p) = \sum_{j=0}^{n} A_j p^j$, sa matrice compagnon $\boldsymbol{A}_{com}$ de taille $N.n \times N.n$ et de rang $N.n$ est tel que*

$$\chi_{\boldsymbol{A}_{com}}(p) = A(p) \tag{2.58}$$

Avec $\chi_{\boldsymbol{A}_{com}}(p) = det(I_n p - \boldsymbol{A}_{com})$ *le polynôme caractéristique de* $\boldsymbol{A}_{com}$ *et* det *est l'opérateur "déterminant".*

Parmis les écritures de la matrice compagnon possibles, on choisit :

$$\boldsymbol{A}_{com} = \begin{bmatrix} -A_n^{-1}A_{n-1} & \dots & -A_n^{-1}A_1 & -A_n^{-1}A_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Soient la matrice des valeurs propres Λ *et la matrice de vecteurs propres à droite* Ψ *de* $\boldsymbol{A}_{com}$ *:*

$$\boldsymbol{A}_{com}\Psi = \Psi\Lambda \tag{2.60}$$

avec

$$\Lambda = diag\,(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_{N.n})\,, \quad \Psi = \left[\left(\Phi\Lambda^{n-1}\right)^T \ \dots \ (\Phi\Lambda)^T \ (\Phi)^T\right]^T \tag{2.61}$$

Avec Φ *la matrice de vecteurs propres à droite de la matrice associée au problème aux valeurs propres de degré* n *défini par* $\boldsymbol{A}(p)$.

2.3 Modélisations d'état

Le comportement d'un filtre LTI peut être décrit par une représentation d'état d'un système LTI ([Nag06, Dor95, Son98, ZD76]). Ce système peut être discret (signaux échantillonnées) ou continu (signaux analogiques). Il peut être exprimé dans le domaine temporel ou dans le domaine de Laplace (Figure 2.5).

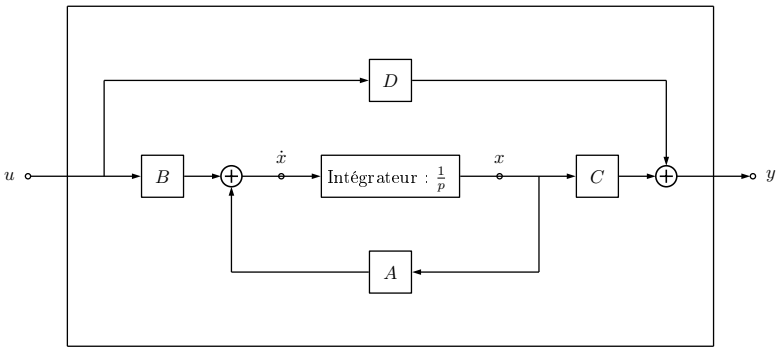


FIGURE 2.4 – Représentation d'état

Dans le domaine continu, une représentation d'état d'ordre n est constituée de quatre matrices reliant les entrées $u \in \mathbb{C}^{N_i \times 1}$, les états $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ et les sorties $y \in \mathbb{C}^{N_o \times 1}$ entre eux :

– La matrice de transition d'état $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui relie un état et sa dérivée

- La matrice de transmission des entrées $B \in \mathbb{R}^{n \times N_i}$ qui relie les entrées aux états du système
- La matrice d'observation $C \in \mathbb{R}^{N_o \times n}$ qui relie les états du système aux sorties observées
- La matrice de transmission directe des entrées $D \in \mathbb{R}^{N_o \times N_i}$ qui relie directement les entrées aux sorties observées

Pour écrire cette représentation d'état dans dans le domaine discret on considère une discrétisation faite par un bloqueur d'ordre zéro (ZOH, *Zero Order Holder* - voir [Max81, Duv94]), caractérisée par une période d'échantillonnage T_e. Cette période d'échantillonnage correspond au temps qui sépare deux échantillons du signal discrétisé. Soit le signal discret $s(n)$ obtenu par discrétisation du signal analogique $s(t)$ (voir Définition 3), on a les relations suivantes entre les matrices A, B, C et D du système à temps continu (indexées par $_c$) et celles à temps discrets (indexées par $_d$) [Son98, ZD76] :

$$A_d = e^{A_c T_e} \tag{2.62}$$

$$B_d = \int_0^{T_e} e^{A_c T_e} B.dt \tag{2.63}$$

$$C_d = C_c \tag{2.64}$$

$$D_d = D_c \tag{2.65}$$

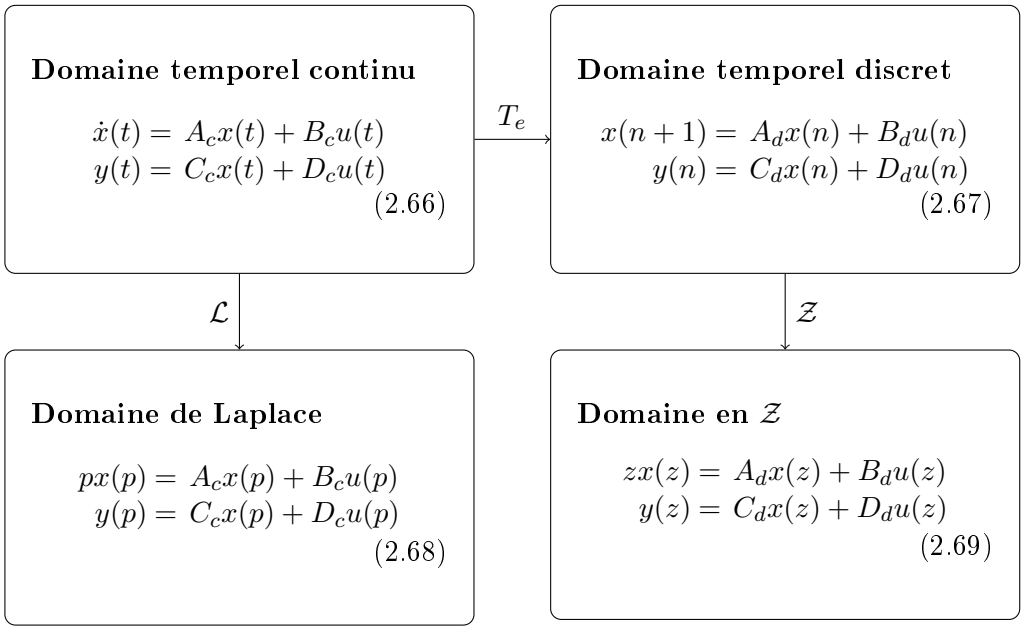


FIGURE 2.5 – Les représentations d'état

Comme pour la modélisation de type ARX, on pourra décrire les matrices de transfert $\mathbf{H}(p) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ et les réponses impulsionnelles matricielles $\mathbf{h}(p) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ du système entre les excitations appliquées et les réponses observées ([Nag06, Dor95, Son98, ZD76, Lju98, PS12]) :

$$\mathbf{H}(p) = C\left(I_n p - A\right)^{-1} B + D = C\frac{\mathrm{com}\left(I_n p - A\right)^T}{\chi_A(p)} B + D \tag{2.70}$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{H}(p)\right] \tag{2.71}$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ est l'opérateur de la transformation de Laplace inverse, $\mathrm{com}\left(I_n p - A\right)$ est la matrice des cofacteurs de $I_n p - A$, $\chi_A(p) = det\left(I_n p - A\right)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A.

Les pôles du système sont donc les n valeurs propres λ_i de A. Les valeurs propres sont obtenues par la résolution aux valeurs propres (voir [GVL12])

$$\left(I_n p - A\right) v = 0 \tag{2.72}$$

dont les solutions sont les couples valeurs propres/matrice de vecteurs propres à droite (λ_j, Ψ_j)

$$\left(I_n \lambda_j - A\right) \Psi_j = 0_{[1 \times l_j]} \tag{2.73}$$

avec $\Psi_j = \begin{bmatrix} \psi_1^{(j)} & \dots & \psi_{l_j}^{(j)} \end{bmatrix}$ de rang l_j et l_j la multiplicité algébrique de λ_j. Ψ_j constitue une base de l'espace propre E_j associé à la valeur propre λ_j.

Ce qui conduit à la diagonalisation de A (si A est diagonalisable) :

$$A \;=\; \Psi \Lambda \Psi^{-1} \tag{2.74}$$

$$\tag{2.75}$$

Définition 17 *Valeurs propres, espaces propres et vecteurs propres*

Soit une matrice A inversible de dimension n et a k valeurs propres de multiplicité l_j ($\sum_{j=1}^{k} l_j = n$). La matrice des valeurs propres est donnée par :

$$\Lambda = diag\left(\begin{bmatrix} I_{l_1}\lambda_1 & \dots & I_{l_k}\lambda_k \end{bmatrix}\right) \tag{2.76}$$

L'espace propre à droite associé à la valeur propre λ_j de multiplicité l_j est de rang l_j. Une base de cette espace est constituée des l_j vecteurs propres à droite associés à λ_j :

$$\Psi_j = \begin{bmatrix} \psi_1^{(j)} & \dots & \psi_{l_j}^{(j)} \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

L'espace propre à gauche associé à la valeur propre λ_j de multiplicité l_j est de rang l_j. Une base de cette espace est constituée des l_j vecteurs propres à gauche associés à λ_j :

$$G_j = \begin{bmatrix} g_1^{(j)} & \dots & g_{l_j}^{(j)} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

Alors une base de l'espace propres à droite A est définie par la matrice :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \dots & \Psi_k \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

et une base de l'espace propres à gauche A est définie par la matrice :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & \dots & G_k \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

Les matrices de vecteurs propres à gauche et à droite sont reliées par

$$G^T = \Psi^{-1}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} G^T A^T &= \Lambda G^T \\ A &= G^{-T} \Lambda G^T \end{aligned}$$

D'où, par identification avec l'Equation (2.74), $G^T = \Psi^{-1}$.

Les représentations d'état permettent aussi de définir des propriétés structurelles du système que l'on ne peut pas définir avec les modèles de type ARX : l'observabilité $\Gamma \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et la commandabilité $\Xi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ du système.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{l-1}B \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

où $n = kN_o = lN_i$.

A partir des matrices d'observabilité et de contrôlabilité on peut vérifier que le système est respectivement observable et contrôlable (voir [Kal63]).

Définition 18 *Critères de Kalman Soit un système d'ordre n dont les matrices d'observabilité et de contrôlabilité sont respectivement Γ et Ξ.*

- *Un système est observable si et seulement si rang* $[\Gamma] = n$
- *Un système est contrôlable si et seulement si rang* $[\Xi] = n$

2.4 Modélisation modale

La modélisation modale consiste en la décomposition d'une fonction de transfert à n pôles en une somme de n fonctions de transfert à 1 pôle. Ceci revient à faire une décomposition en élément simple (de tout ou partie) de la modélisation fraction polynômiale de la matrice de transfert ou du passage en base modale de sa modélisation basée sur la représentation d'état du système.

2.4.1 A partir de la modélisation ARX

On a vu à la Section 2.2 que la modélisation ARX(n, m) d'un système implique que la fonction de transfert H_{oi} entre l'entrée i et la sortie o du système puisse s'écrire sous la forme d'un ratio de deux polynômes $A(p)$ de degré n et $B_{oi}(p)$ de degré m (Equation 2.52). Cette fraction peut être décomposée en éléments simples ([Kun06]) sur le corps $\mathcal{C}$ par :

$$H_{oi}(p) = \frac{\beta_0^{oi} + \beta_1^{oi} p + \ \dots \ + \beta_m^{oi} p^m}{\alpha_n \prod_{j=1}^{k} (p - \lambda_j)^{l_j}} = D_{oi}(p) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{l_j} \frac{R_{oi}^{(j,r)}}{(p - \lambda_j)^r} \tag{2.83}$$

Avec $D_{oi}(p)$ le reste de la division euclidienne de $B_{oi}(p)$ par $A(p)$, nul si m est strictement inférieur à n. Dans le cas de la modélisation de système dynamique, on aura $n = m$. Dans ce cas, le reste D_{oi} ne dépend pas de p et il correspond à la transmission direct des excitations aux observations, sans passer par le système. Il correspond à l'élément (o, i) de la matrice D de la représentation d'état décrite à la Section 2.3. Les valeurs complexes λ_j sont les pôles j du système, ils sont de multiplicité r. On appellera $R_{oi}^{(j,r)}$ le résidu de la multiplicité r du pôle j correspondant aux couples commande/observation (o, i).

Dans le cas où tous les pôles sont de multiplicité 1, l'Equation (2.83) devient :

$$H_{oi}(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{oi}^{(j)}}{p - \lambda_j} + D_{oi}(p) \tag{2.84}$$

2.4.2 A partir de la représentation d'état

On a vu a la Section 2.3 que la fonction de transfert $\mathbf{H}(p)$ entre toutes les excitations et tous les points d'observation du système peut s'écrire en fonction des matrices de la représentation d'état (A, B, C et D). En partant de l'Equation (2.70), la diagonalisation de A (Equation (2.74)) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(p) &= C\,(I_n p - A)^{-1}\,B + D \\
&= C\Psi\,(I_n p - \Lambda)^{-1}\,G^T B + D \\
&= C\begin{bmatrix}\Psi_1 & \dots & \Psi_k\end{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} I_{l_1}\lambda_1 & \dots & I_{l_k}\lambda_{l_k}\end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} G_1^T \\ \dots \\ G_k^T \end{bmatrix} B + D \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{C\Psi_j G_j^T B}{p - \lambda_j} + D
\end{aligned} \tag{2.85}$$

avec $C\Psi_j G_j^T B = C \sum_{r=1}^{l_j} \psi_j^{(r)} {g_j^{(r)}}^T B$

2.4.3 Relation entre les modélisations modales

Dans le cas de pôles à multiplicité 1 et lorsque $n = m$, on peut directement procéder à l'identification des termes entre l'Equation (2.84) et l'Equation (2.85) :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1N_i} \\ \dots & \ddots & \dots \\ D_{N_o1} & \dots & D_{N_oN_i} \end{bmatrix} = D \tag{2.86}$$

$$R^{(j)} = \begin{bmatrix} R^{(j)}_{11} & \dots & R^{(j)}_{1N_i} \\ \dots & \ddots & \dots \\ R^{(j)}_{N_o1} & \dots & R^{(j)}_{N_oN_i} \end{bmatrix} = C\psi_j g_j^T B \tag{2.87}$$

On constate que dans ce cas, $R^{(j)} \in \mathbb{C}^{(N_o \times N_i)}$ est une dyade ([Ari90]) formée par le produit de deux vecteurs de taille respective $(N_o \times 1)$ et $(N_i \times 1)$. Cette matrice est donc de rang 1.

Dans le cas de multiplicités supérieures à 1, la comparaison entre (2.83) et l'Equation (2.85) semble conduire à la conclusion que $R^{(j,r)} = 0 \ \forall r \geq 2$ et que $R^{(j,1)} = C\Psi_j G_j^T B$. La suite de cette section vise à vérifier cette conclusion.

Posons $T = (I_n p - \Lambda)^{-1}$.

$$T = \frac{\mathrm{com}\,(I_n p - \Lambda)}{\chi_\Lambda(p)} \tag{2.88}$$

$$= \frac{\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} I_{l_1}\frac{\chi_\Lambda(p)}{p-\lambda_1} & \dots & I_{l_k}\frac{\chi_\Lambda(p)}{p-\lambda_k} \end{bmatrix}\right)}{\chi_\Lambda(p)} \tag{2.89}$$

Par décomposition en éléments simple de T, on peut réécrire l'Equation (2.85) :

$$\mathbf{H}(p) = C\Psi \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{l_j} \frac{Q^{(j,r)}}{(p-\lambda_j)^r} G^T B + D \tag{2.90}$$

On notera que la décomposition en éléments simples de T ne fait pas apparaître de reste, car par définition, l'ordre des cofacteurs de $I_n p - \Lambda$ est strictement inférieur à celui du polynôme caractéristique de Λ.

En identifiant avec l'Equation (2.83) et en sachant l'Equation (2.86) pour le reste D, on obtient :

$$R^{(j)} = \begin{bmatrix} R^{(j)}_{11} & \dots & R^{(j)}_{1N_i} \\ \dots & \ddots & \dots \\ R^{(j)}_{N_o1} & \dots & R^{(j)}_{N_oN_i} \end{bmatrix} = C\Psi_j Q^{(j,r)} G_j^T B \tag{2.91}$$

On peut déterminer les $Q^{(j,r)}$ par un procédé itératif.

$$\begin{aligned} Q^{(j,l_j)} &= \lim_{p\to\lambda_j} T\,(p-\lambda_j)^{l_j} \\ &= \lim_{p\to\lambda_j} \operatorname{diag}\left(\left[I_{l_1}\tfrac{(p-\lambda_j)^{l_j}}{p-\lambda_1} \quad \dots \quad I_{l_j}\,(p-\lambda_j)^{l_j-1} \quad \dots \quad I_{l_k}\tfrac{(p-\lambda_j)^{l}_{j}}{p-\lambda_k}\right]\right) \\ &= 0_{[n\times n]} \end{aligned}$$

D'où

$$T = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{l_j-1}\frac{Q^{(j,r)}}{(p-\lambda_j)^r} \tag{2.92}$$

avec,

$$\begin{aligned} Q^{(j,l_j-1)} &= \lim_{p\to\lambda_j} T\,(p-\lambda_j)^{l_j-1} \\ &= \lim_{p\to\lambda_j} \operatorname{diag}\left(\left[I_{l_1}\tfrac{(p-\lambda_j)^{l_j-1}}{p-\lambda_1} \quad \dots \quad I_{l_j}\,(p-\lambda_j)^{l_j-2} \quad \dots \quad I_{l_k}\tfrac{(p-\lambda_j)^{l_j-1}}{p-\lambda_k}\right]\right) \\ &= 0_{[n\times n]} \end{aligned}$$

On continu jusqu'à $Q^{(j,2)}$ (si $l_j \geq 2$)

$$\begin{aligned} Q^{(j,2)} &= \lim_{p\to\lambda_j} T\,(p-\lambda_j)^{2} \\ &= \lim_{p\to\lambda_j} \operatorname{diag}\left(\left[I_{l_1}\tfrac{(p-\lambda_j)}{p-\lambda_1} \quad \dots \quad I_{l_j}\,(p-\lambda_j) \quad \dots \quad I_{l_k}\tfrac{(p-\lambda_j)^{2}}{p-\lambda_k}\right]\right) \\ &= 0_{[n\times n]} \end{aligned}$$

Puis

$$Q^{(j,1)} = \operatorname{diag}\left(\left[0_{[\sum_{i=1}^{j-1} l_i\times\sum_{i=1}^{j-1} l_i]} \quad I_{lj} \quad 0_{[\sum_{i=j+1}^{k} l_i\times\sum_{i=j+1}^{k} l_i]}\right]\right) \tag{2.93}$$

D'où, au final :

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{j=1}^{k}\frac{R^{(j,1)}}{p-\lambda_j} + D = \sum_{j=1}^{k}\frac{C\Psi_j G_j^T B}{p-\lambda_j} + D \tag{2.94}$$

Avec $R^{(j,1)} = C\Psi_j G_j^T B = C\sum_{r=1}^{l_j}\psi_j^{(r)} g_j^{(r)^T} B$ est une matrice de taile $(N_o \times N_i)$ et de rang l_j.

2.5 Application 1 : Modélisation d'un système Masse-Ressort amorti, MCK

On considère un système de type Masse-Ressort amorti, ou MCK. Le comportement dynamique d'un tel système peut être modélisé par un système LTI (Linear Time Invariant) basé sur les équations fondamentales de la dynamique. Soit N_d le nombre de degrés de liberté du système, il correspond à un filtre linéaire d'ordre $n = 2N_d$ dont la matrice de transfert entre les entrées $u(t) = \left[u_1(t)^T \quad \dots \quad u_{N_i}(t)^T\right]^T \in \mathbb{R}^{N_i\times 1}$ et les sorties $y(t) = \left[y_1(t)^T \quad \dots \quad y_{N_o}(t)^T\right]^T \in \mathbb{R}^{N_o\times 1}$ est dépendante :

- des matrices de masses $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$, d'amortissements $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$ et de raideurs $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$,
- des matrices de transmission d'efforts générés par les excitations sous forme d'accélérations $\mathcal{F}_a \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$, sous forme de vitesses $\mathcal{F}_v \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$ et sous forme de déplacements $\mathcal{F}_d \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$ appliqués en N_i points de la structure.
- des matrices d'observations des accélérations $\mathcal{L}_a \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$, des vitesses $\mathcal{L}_v \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$ et des déplacements $\mathcal{L}_d \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$ en N_o points d'observation.
- des matrices de transmission directe des excitations sous forme d'accélérations $\mathcal{N}_a \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$, sous forme de vitesses $\mathcal{N}_v \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$ et sous forme de déplacements $\mathcal{N}_d \in \mathbb{R}^{N_o \times N_d}$ aux N_o points d'observation.

Dans le domaine temporel, ce système s'écrit

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{q}(t) + \mathcal{C}\dot{q}(t) + \mathcal{K}q(t) = \mathcal{F}_a\ddot{u}(t) + \mathcal{F}_v\dot{u}(t) + \mathcal{F}_d u(t) \\ y(t) = \mathcal{L}_a\ddot{q}(t) + \mathcal{L}_v\dot{q}(t) + \mathcal{L}_d q(t) + \mathcal{N}_a\ddot{u}(t) + \mathcal{N}_v\dot{u}(t) + \mathcal{N}_d u(t) \end{cases} \tag{2.95}$$

2.5.1 Matrice de transfert du système MCK

En supposant des conditions initiales nulles et les matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ inversibles, l'application de la transformée de Laplace du système (2.95) donne :

$$\begin{cases} \left(\mathcal{M}p^2 + \mathcal{C}p + \mathcal{K}\right) q(p) = \left(\mathcal{F}_a p^2 + \mathcal{F}_v p + \mathcal{F}_d\right) u(p) \\ y(p) = \left(\mathcal{L}_a p^2 + \mathcal{L}_v p + \mathcal{L}_d\right) q(p) + \left(\mathcal{N}_a p^2 + \mathcal{N}_v p + \mathcal{N}_d\right) u(p) \end{cases} \tag{2.96}$$

$$\begin{cases} q(p) = \mathcal{Z}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(p)u(p) \\ y(p) = \mathbf{H}(p)u(p) \end{cases} \tag{2.97}$$

où

$$\mathbf{H}(p) = \left(\mathcal{L}_a p^2 + \mathcal{L}_v p + \mathcal{L}_d\right) \mathcal{Z}(p)^{-1}\mathcal{M}^{-1} \left(\mathcal{F}_a p^2 + \mathcal{F}_v p + \mathcal{F}_d\right) + \left(\mathcal{N}_a p^2 + \mathcal{N}_v p + \mathcal{N}_d\right) \tag{2.98}$$

est la matrice de transfert de taille $(N_o \times N_i)$ du système entre les N_i excitations et les N_o points d'observation avec $\mathcal{Z} = \left(I_n p^2 + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}p + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}\right)$.

Pour simplifier les notations on pose

- $\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}_a p^2 + \mathcal{L}_v p + \mathcal{L}_d$
- $\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}_a p^2 + \mathcal{F}_v p + \mathcal{F}_d$
- $\mathcal{N}(p) = \mathcal{N}_a p^2 + \mathcal{N}_v p + \mathcal{N}_d$

L'Equation (2.98) devient

$$\mathbf{H}(p) = \mathcal{L}(p)\mathcal{Z}(p)^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p) \tag{2.99}$$

La division euclidienne à droite de $\mathcal{L}(p)$ par $\mathcal{Z}(p)$ donne

$$\mathcal{L}(p)\mathcal{Z}(p)^{-1} = \begin{bmatrix} L_v - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & L_d - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI_{N_d} \\ I_{N_d} \end{bmatrix} + \mathcal{L}_a \tag{2.100}$$

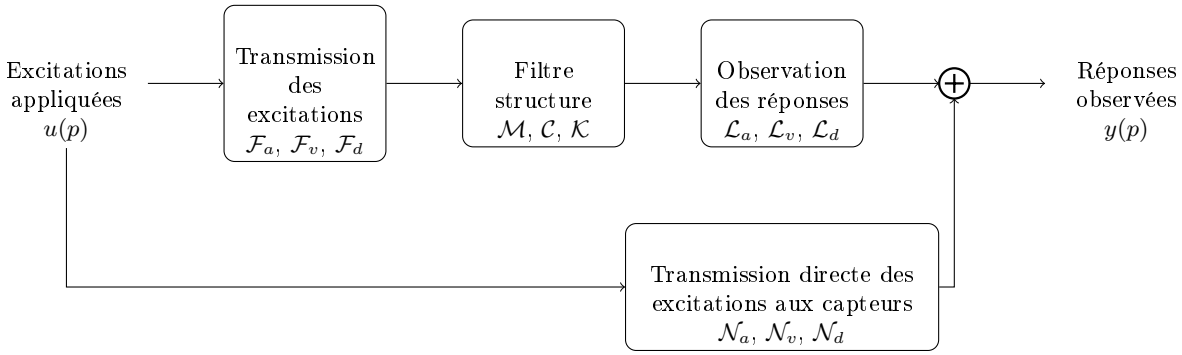


FIGURE 2.6 – Matrice de transfert $\mathbf{H(p)}$ du système $\mathcal{M}$,$\mathcal{K}$,$\mathcal{C}$ observé

Il vient alors,

$$\mathbf{H}(p) = \begin{bmatrix} L_v - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & L_d - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI_{N_d} \\ I_{N_d} \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(p) + \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p) \tag{2.101}$$

La matrice de transfert $\mathbf{H}(p)$ peut être découpée en trois matrices de transfert ayant les mêmes pôles :

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{H}_a(p)p^2 + \mathbf{H}_v(p)p + \mathbf{H}_d(p) \tag{2.102}$$

avec

- $\mathbf{H}_a(p)$ la matrice de transfert entre les excitations appliquées sous forme d'accélérations et les réponses observées à chacun des capteurs (sorties) :

$$\mathbf{H}_a(p) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & \mathcal{L}_d - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI_{N_d} \\ I_{N_d} \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_a + \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_a + \mathcal{N}_a \tag{2.103}$$

- $\mathbf{H}_v(p)$ la matrice de transfert entre les excitations appliquées sous forme de vitesses et les réponses observées à chacun des capteurs (sorties) :

$$\mathbf{H}_v(p) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & \mathcal{L}_d - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI_{N_d} \\ I_{N_d} \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_v + \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_v + \mathcal{N}_v \tag{2.104}$$

- $\mathbf{H}_d(p)$ la matrice de transfert entre les excitations appliquées sous forme de déplacements et les réponses observées à chacun des capteurs (sorties) :

$$\mathbf{H}_d(p) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & \mathcal{L}_d - \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI_{N_d} \\ I_{N_d} \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_d + \mathcal{L}_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_d + \mathcal{N}_d \tag{2.105}$$

2.5.2 représentation d'état du système MCK

En posant

- La variable d'état $x(p) = \begin{bmatrix} pq(p) \\ q(p) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n\times 1)}$

- La matrice de transition d'état $A = \begin{bmatrix} -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \\ I_{N_d} & 0_{[N_d \times N_d]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$
- Les matrices de transmission des excitations sous forme d'accélérations $B_a = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_a \\ 0_{[N_d \times N_i]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \times N_i)}$, de vitesses $B_v = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_v \\ 0_{[N_d \times N_i]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \times N_i)}$ et de déplacements $B_d = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}_d \\ 0_{[N_d \times N_i]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n \times N_i)}$
- La matrice d'observation des réponses $C = \begin{bmatrix} L_v - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} & L_d - L_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_o \times n)}$
- Les matrices de transmission directe des excitations aux capteurs sous forme d'accélérations $D_a = \mathcal{L}_a\mathcal{F}_a + \mathcal{N}_a \in \mathbb{R}^{(N_o \times N_i)}$, de vitesses $D_v = \mathcal{L}_a\mathcal{F}_v + \mathcal{N}_v \in \mathbb{R}^{(N_o \times N_i)}$ et de déplacements $D_d = \mathcal{L}_a\mathcal{F}_d + \mathcal{N}_d \in \mathbb{R}^{(N_o \times N_i)}$

on peut écrire la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} px(p) = Ax(p) + \left(B_a p^2 + B_v p + B_d\right) u(p) \\ y(p) = Cx(p) + \left(D_a p^2 + D_v p + D_d\right) u(p) \end{cases} \tag{2.106}$$

Ce qui conduit à l'écriture de la matrice de transfert :

$$\mathbf{H}(p) = C\left(I_n p - A\right)^{-1}\left(B_a p^2 + B_v p + B_d\right) + \left(D_a p^2 + D_v p + D_d\right) \tag{2.107}$$

$$= \mathbf{H}_a(p)p^2 + \mathbf{H}_v(p)p + \mathbf{H}_d(p) \tag{2.108}$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a(p) &= C\left(I_n p - A\right)^{-1} B_a + D_a \\ \mathbf{H}_v(p) &= C\left(I_n p - A\right)^{-1} B_v + D_v \\ \mathbf{H}_d(p) &= C\left(I_n p - A\right)^{-1} B_d + D_d \end{aligned}$$

‘

Remarque 19 *En appliquant le lemme d'inversion matricielle (voir 85 en Annexe B) on peut facilement faire le lien entre l'Equation* (2.107) *et l'Equation* (2.101)*. En effet, par ce lemme on a*

$$\left(I_n p - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} pZ(p)^{-1} & -Z(p)^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} \\ Z(p)^{-1} & p^{-1}\left(I_{N_d} - Z(p)^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}\right) \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

2.5.3 Représentation modale du système MCK

Quel que soit le système étudié, on peut toujours effectuer le passage en représentation modale décrit à la Section 2.4. Cependant, sous certaines hypothèses, il est possible de simplifier les écritures et les étapes menant à cette représentation pour un système masse-ressort dissipatif.

Pour cela, étudions le système masse-ressort non dissipatif (Equation (2.95) avec $\mathcal{C} = 0_{[N_d \times N_d]}$) :

$$\begin{cases} \left(I_{N_d} p^2 + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}\right) q(p) = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}(p)u(p) \\ y(p) = \mathcal{L}(p)q(p) + \mathcal{N}(p)u(p) \end{cases} \tag{2.110}$$

Les pôles du système sont les racines de l'opposée des valeurs propres de la matrice $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$. Ces k valeurs propres de multiplicité l_k sont de la forme $\lambda_j^{(nd)} = \left(i\omega_j^{(nd)}\right)^2$. "$(nd)$" signifie "non dissipatif". $\omega_j^{(nd)} = \frac{f_j^{(nd)}}{2\pi}$ est la pulsation propre j du système non dissipatif, $f_j^{(nd)}$ en est la j^{me} fréquence propre.

Les matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ sont symétriques définies positives car les interactions entre les éléments du système sont réciproques et positifs. La matrice $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$ est donc elle aussi symétrique définie positive. Par conséquent, ses valeurs propres $\lambda_j^{(nd)}$ et ses vecteurs propres $\Phi_j^{(nd)}$ sont réels. On parle de système à modes "normaux" ou "réels".

Soit $\Phi^{(nd)} = \begin{bmatrix}\Phi_1^{(nd)} & \dots & \Phi_k^{(nd)}\end{bmatrix}$ la matrice des n vecteurs propres générateurs des k espaces propres de dimension l_k associés aux k valeurs propres ($\Phi_j^{(nd)} = \begin{bmatrix}\phi_1^{(nd)^{(j)}} & \dots & \phi_{l_j}^{(nd)^{(j)}}\end{bmatrix}$ et rang $\left(\Phi_j^{(nd)}\right) = l_j$). En utilisant le fait que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ sont symétriques, on peut montrer qu'elles sont diagonalisables à l'aide de la base de vecteurs propres $\Phi^{(nd)}$ de la matrice $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$:

$$[M] \equiv \Phi^{(nd)^T}\mathcal{M}\Phi^{(nd)} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}I_{l_1}m_1 & \dots & I_{l_k}m_k\end{bmatrix}\right)$$

et

$$[K] \equiv \Phi^{(nd)^T}\mathcal{K}\Phi^{(nd)} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}I_{l_1}k_1 & \dots & I_{l_k}k_k\end{bmatrix}\right)$$

avec m_k et k_k les masses et raideurs généralisées (ou modales) du système.

L'amortissement n'est pas calculé directement à partir des éléments de la modélisation éléments finis du système. Il doit être ajouté à la modélisation éléments finis à travers une matrice d'amortissement $\mathcal{C}$ (Equation (2.96)). Cette matrice peut être obtenue soit par des essais, soit par une modélisation d'amortissement. Il existe différentes modélisations, mais la plupart correspondent à des modélisations dites "classiques" de l'amortissement (hypothèse de Basile, modélisation de Rayleigh, de Caughey, etc.). Ce type de modélisation à la particularité de fournir une matrice $\mathcal{C}$ diagonalisable de la même manière que les matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$:

$$[C] \equiv \Phi^{(nd)^T}\mathcal{C}\Phi^{(nd)} = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}I_{l_1}c_1 & \dots & I_{l_k}c_k\end{bmatrix}\right)$$

où c_k correspond aux amortissements généralisés (ou modaux) du système.

En posant $[q(p)] \equiv \Phi^{(nd)^{-1}}q(p)$ les déformations généralisées (ou modales), la première équation du système (2.96), après une multiplication à gauche par $\Phi^{(nd)^T}$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\Phi^{(nd)^T}\left(\mathcal{M}p^2 + \mathcal{C}p + \mathcal{K}\right)\Phi^{(nd)}\,[q(p)] &= \Phi^{(nd)^T}\mathcal{F}(p)u(p)\\
\left([M]\,p^2 + [C]\,p + [K]\right)[q(p)] &= \Phi^{(nd)^T}\mathcal{F}(p)u(p)\\
[q(p)] &= \left([M]\,p^2 + [C]\,p + [K]\right)^{-1}\Phi^{(nd)^T}\mathcal{F}(p)u(p)
\end{aligned}$$

Puis en injectant dans la seconde équation du système (2.96)

$$\begin{aligned} y(p) &= \mathcal{L}(p)\Phi^{(nd)}\left[q(p)\right] + \mathcal{N}(p)u(p) \\ y(p) &= \left[\mathcal{L}(p)\Phi^{(nd)}\left([M]\,p^2 + [C]\,p + [K]\right)^{-1}\Phi^{(nd)^T}\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p)\right]u(p) \end{aligned}$$

Finalement, comme $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont diagonales, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} \left([M]\,p^2 + [C]\,p + [K]\right)\left[q(p)\right] &= \Phi^{(nd)^T}\mathcal{F}(p)u(p) \\ y(p) &= \left[\mathcal{L}(p)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\sum_{r=1}^{l_j}\phi_r^{(nd)^{(j)}}\phi_r^{(nd)^{(j)^T}}}{m_j p^2 + c_j p + k_j}\right)\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p)\right]u(p) \end{aligned}\right. \tag{2.111}$$

Ce qui conduit à la formulation suivante de la matrice de transfert $\mathbf{H}$(p) :

$$\mathbf{H}(p) = \mathcal{L}(p)\left(\sum_{j=1}^{j=k}\frac{\sum_{r=1}^{l_j}\phi_r^{(nd)^{(j)}}\phi_r^{(nd)^{(j)^T}}}{m_j\left(p-\lambda_j\right)\left(p-\lambda_j^*\right)}\right)\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p) \tag{2.112}$$

avec :

- $\lambda_j = -\omega_j\xi_j \pm i\omega_j\sqrt{1-\xi^2}$ la racine j du polynôme à coefficient scalaire $m_j p^2 + k_j p^2 + c_j p^2$ et le pôle j du système dissipatif ($\mathcal{C} \neq [0]_{N_d \times N_d}$), avec $j \in [|1, k[|$
- $\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} = \frac{f_j}{2\pi}$ est la pulsation propre du mode j et f_j est la fréquence propre du mode j
- $\xi = \frac{c_j}{2\sqrt{k_j m_j}} \in [0,1]$ est le taux d'amortissement du mode j
- $\Phi_j^{(nd)} = \left[\phi_1^{(nd)^{(j)}} \quad \dots \quad \phi_{l_j}^{(nd)^{(j)}}\right]$ la matrice des vecteurs propres "normaux" (ou "réels") associés à la valeur propre λ_j de multiplicité l_j

2.6 Application 2 : Modélisation d'un système aéro-élastique

Pour modéliser un système aéro-élastique, il est courant de considérer un modèle MCK respectant les hypothèses de Basile (Voir Section 2.5.3) auquel on ajoute des forces aérodynamiques généralisées (FAG). Un modèle rationnel de FAG est celui de Karpel :

$$FAG = \left\{[A_2]\,\frac{p^2}{v^2} + [A_1]\,\frac{p}{v} + [A_0] + \frac{p}{v}Ew\right\}P_{dyn}\left[q(p)\right] \tag{2.113}$$

avec

- $[A_2]$, $[A_1]$ et $[A_0]$ correspondent aux termes de masse, d'amortissement et raideur provenant du champ aérodynamique.
- $w = \left(\frac{p}{v}I_{N_d} - R\right)^{-1}F\left[q(p)\right]$ correspond aux effets des degrés de libertés "internes" du fluide. On choisit de les négliger pour simplifier les écritures.
- $P_{dyn} = \frac{1}{2}\rho v^2$ est la pression dynamique, v est la vitesse du flux aérodynamique et ρ est la densité de ce flux.

La modélisation (2.111), à laquelle on ajoute les FAG, donne :

$$\begin{cases} \left([T_2]\,p^2 + [T_1]\,p + [T_0]\right)[q(p)] = \mathcal{F}(p)u(p) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y(p) = \left[\mathcal{L}(p)\left([T_2]\,p^2 + [T_1]\,p + [T_0]\right)^{-1}\mathcal{F}(p) + \mathcal{N}(p)\right]u(p) \end{cases} \tag{2.114}$$

avec

- $T_2 = [M] - \frac{1}{2}\rho v^2\,[A_2]$
- $T_1 = [C] - \frac{1}{2}\rho v\,[A_1]$
- $T_0 = [K] - \frac{1}{2}\rho\,[A_0]$

La matrice $T_2^{-1}T_0$ n'est en générale pas symétrique définie positive car les matrices de FAG ne le sont généralement pas. La représentation modale ne peut donc plus être obtenue comme à la Section 2.5.3, elle doit être déterminée comme en Section 2.4. De même, comme cette matrice n'est pas symétrique définie positive, ses vecteurs propres peuvent être complexes. Les formes modales ne sont donc plus réelles en général. On parle de système à modes "complexes". Ces modes peuvent correspondre à un couplage de modes et conduire au phénomène de flottement.

2.7 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons décrit différentes notions nécessaires à la modélisation paramétrique et à la caractérisation du comportement dynamique d'un système. Un système peut être modélisé par une modélisation linéaire ou non linéaire (voir Section 2.1.2), stationnaire ou non stationnaire (voir Section 2.1.2), continue ou discrète (voir Section 2.1.3.2). On peut le considéré dans plusieurs domaines, comme par exemple, le domaine temporelle, le domaine de Laplace, le domaine en $\mathcal{Z}$ ou le domaine fréquentiel. Les transformations reliant ces domaines ont été présentés à la Section 2.1.3.1 et à la Section 2.1.3.3. Enfin, la modélisation utilisée peut être classifiée en fonction du nombre d'entrée(s) et de sortie(s) du système. La modélisation pourra être de type SISO, SIMO, MISO ou MIMO (voir Section 2.1.4).

Concernant les caractéristiques d'un système, nous avons défini :

- la fonction (matrice) de transfert qui s'exprime dans le domaine fréquentiel, de Laplace, ou en $\mathcal{Z}$ (voir Section 2.1.5.1)
- la réponse impulsionnelle qui s'exprime dans le domaine temporel (voir Section 2.1.5.2)

Ensuite nous avons donné une description détaillée de trois familles de modélisations du comportement dynamique d'un système :

- les modélisations ARX (voir Section 2.2)
- les modélisations par représentation d'état (voir Section 2.3)
- les modélisations modales (voir Section 2.4)

Enfin, deux systèmes particuliers ont été modélisés : un système structure (voir Section 2.5) et un système aéro-structure (voir Section 2.6).

Dans le chapitre suivant (Chapitre 3), nous présenterons trois familles de méthodes

d'identification modale qui permettent d'identifier les paramètres de chacune des trois familles de modélisations décrites dans ce chapitre :

- Les méthodes de minimisation d'erreur par moindres carrés adaptées à l'identification d'une modélisation ARX (voir Section 3.1).
- Les méthodes sous-espace adaptées à l'identification de l'espace colonne de la matrice d'observabilité d'une représentation d'état (voir Section 3.2).
- Les méthodes de minimisation d'erreur par moindres carrés adaptées à l'identification d'une modélisation modale (voir Section 3.3).

Chapitre 3

Les méthodes d'identification modale

L'identification modale correspond à l'identification des paramètres d'une modélisation théorique à partir des données mesurées. Le type de système à identifier et les mesures effectuées conditionnent le choix de la modélisation analytique à utiliser (e.g. les données d'excitations sont-elles disponibles, ou n'a-t-on que les réponses du système à une excitation inconnue ?). La modélisation théorique conditionnera à son tour le choix des méthodes d'identification (e.g. une représentation d'état pourra être identifiée à l'aide d'une méthode sous-espace, la description fractionnelle d'une fonction de transfert pourra être identifiée à l'aide d'une méthode moindres carrés, etc.).

Dans ce chapitre nous verrons deux familles de méthodes d'identification modale. La première famille est basée sur l'estimation des coefficients d'une modélisation ARX (voir Section 2.2). Ces méthodes sont basées sur la minimisation de l'erreur entre la matrice de transfert paramétrique (voir Section 2.2.1) et son estimation non paramétrique (voir Section 4.6). Nous verrons un exemple de minimisation moindres carrés de l'erreur non linéaire (3.1.1) et un exemple de minimisation moindres carrés de l'erreur linéaire (Section 3.1.2). La méthode non linéaire, aussi parfois appelée méthode MLE (Maximum Likelihood Estimator), sera écrite sous son formalisme référence-simple (single-reference) comme décrit dans [GHVdA99] ou références-multiple (poly-reference) comme décrit dans [CGV+04a, DT09]. La méthode linéaire, aussi appelée méthode LSCF (Least Square Complex Frequency) sera écrite sous son formalisme référence-simple (single-reference) comme décrit dans [DT09, CGV+04a] ou références-multiple (poly-reference, p-LSCF) comme décrit dans [GVV+03, CGV+04a, DT09, EKG10]. La seconde famille est basée sur l'estimation de la matrice d'observabilité d'une représentation d'état (voir Section 2.3). Plus précisément, ces méthodes sont basées sur l'identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité. Ceci se fera à partir d'une matrice sous-espace qui sera estimée à partir des données. Cette matrice sous-espace a la particularité d'avoir le même espace colonne que la matrice d'observabilité. Cinq matrices sous-espaces, qui correspondent à autant de méthodes sous-espace, sont présentées [VODM95, VODM96, PDR99, PDR01, BBG+01, MBB+06].

Sommaire

3.1 Identification de modélisations ARX(p,q) 68
3.1.1 Identification modale à partir de l'erreur non-linéaire 76
3.1.2 Recherche de l'estimateur minimisant l'erreur linéaire 88
3.1.3 Application d'un poids 97
3.1.4 Estimation des paramètres modaux 99
3.2 Identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité : méthodes sous-espaces 100
3.2.1 Principe 100
3.2.2 Formulation matricielle de la représentation d'état 108
3.2.3 A chaque méthode sous-espace, sa matrice sous-espace 112
3.3 Identification à partir de la modélisation modale, LSFD . . 118
3.3.1 LSFD basée uniquement sur la connaissance des pôles 118
3.3.2 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des formes modales 119
3.3.3 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des facteurs de participation 119
3.4 Les diagrammes de stabilité 120
3.4.1 Principe 120
3.5 Bilan du chapitre 121

3.1 Identification de modélisations ARX(p,q)

On considère le couple entrée/sortie (i,o) et la modélisation ARX(p,q) dans le domaine en Z :

$$A(z)y_o(z) = B_{oi}(z)u_i(z) + \gamma_0 v_{oi}(z) \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{oi}(z,\theta) = H_{oi}(z) - H_{oi}(z,\theta) \tag{3.2}$$

avec,

- $H_{oi}(z) = \frac{y_o(z)}{u_i(z)}$, la fonction de transfert entre l'entrée connue injectée au point d'excitation i et la sortie observée au point d'observation o. Cette fonction de transfert provient des données mesurées.
- $H_{oi}(z,\theta) = \frac{B_{oi}(z)}{A(z)}$, la modélisation paramétrique de $H_{oi}(z)$.
- $A(z)$ le polynôme d'ordre p et de coefficient $\theta_\alpha^T = \begin{bmatrix}\alpha_0^T & \dots & \alpha_p^T\end{bmatrix}^T$ et $B_{oi}(z)$ le polynôme d'ordre q et de coefficient $\theta_{\beta_{oi}}^T = \begin{bmatrix}(\beta_{oi})_0^T & \dots & (\beta_{oi})_q^T\end{bmatrix}^T$.
- θ, l'ensemble des paramètres α et β_{oi} à identifier.
- $\epsilon_{oi}(z,\theta) = \frac{\gamma_0 v_{oi}(z)}{A(z)u_i(z)}$, l'erreur de modélisation due aux entrées inconnues du système, i.e. au bruit environnemental.

Le principe de ce type d'identification est basé sur l'identification de l'ensemble de paramètres θ minimisant l'erreur de modélisation $\epsilon_{oi}(z,\theta)$. On parle alors d'estimateur $\hat{\theta}$. Un estimateur très répandu est l'estimateur par moindres carrés. On le notera $\hat{\theta}^{MC}$.

Il est obtenu par minimisation moindres carrés ordinaires (MCO) ou pondérés (MCP) des erreurs $\epsilon_{oi}(z,\theta)$.

Définition 20 *Méthode des moindres carrés ordinaires et pondérés (MCO et MCP)*
Soit un ensemble de N éléments y_i provenant d'un système dont le comportement est modélisé par une fonction paramétrique $f(x,\theta)$ de paramètres θ. La recherche des paramètres θ par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) se fait en minimisant la somme quadratique $S(\theta)$ des déviations des éléments y_i aux prédictions $f(x_i,\theta)$:

$$S^{(MCO)}(\theta) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(x_i,\theta))^2 = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i(\theta)^2 \tag{3.3}$$

La méthode des moindres carrés pondérés consiste à pondérer les erreurs de modélisation $\epsilon_i(\theta)$ par des poids w_i.

$$S^{(MCP)}(\theta) = \sum_{i=1}^{N} w_i\,(y_i - f(x_i,\theta))^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i\epsilon_i(\theta)^2 \tag{3.4}$$

Dans le cas particulier où les N erreurs de modélisation $\epsilon_i(\theta)^2$ sont indépendantes et suivent une loi normale $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2_{\epsilon_i}\right)$, et où l'on pose $w_i = \sigma^{-2}_{\epsilon_i}$, on montre que $S^{(MCP)}(\theta)$ est une variable aléatoire suivant une loi χ^2 (Khi-deux) à N degrés de liberté. On notera $S^{(MCP)}(\theta)\ \chi^2(N)$. Par définition du χ^2, $S^{(MCP)}(\theta)$ est alors totalement définie par sa variance $\sigma^2_S = 2N$ et son espérance $E[S] = N$.

On se place dans l'espace en Z fini discrétisé en N_e échantillons, avec pour variable z_k (dont l'espace engendré par la transformée de Fourier discrète est le cas particulier où $z_k = e^{i\frac{2\pi k}{N_e}}$). En considérant les N_e échantillons des $N_o \times N_i$ fonctions de transfert $H_{oi}(z_k)$, on peut déterminer l'estimateur par moindres carrés (ordinaires ou pondérés) $\hat{\theta}$ basé sur la fonction coût :

$$S(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} w_{oi}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k,\theta)\epsilon_{oi}(z_k,\theta)^* \tag{3.5}$$

Remarque 21 *Pour simplifier les écritures on notera $\epsilon_{oi}(z_k)$ pour $\epsilon_{oi}(z_k,\theta)$.*

Erreur non-linéaire

De part la forme de $\epsilon_{oi}(z_k)$ (Equation 3.1), le problème moindres carrés décrit par l'Equation (3.5) est non-linéaire selon l'ensemble des paramètres θ (α et β_{oi}).

$$\epsilon_{oi}(z_k) = \frac{B_{oi}(z_k)}{A(z_k)} - H_{oi}(z_k) \tag{3.6}$$

La minimisation d'une telle fonction nécessite un algorithme itératif d'optimisation. On pourra utiliser une optimisation type Gauss-Newton ([GMW81, Bjö96]) ou une alternative telle que l'algorithme de Levenberg-Marquardt ([Dav93, MBT99]) qui permet d'éviter une divergence de l'optimisation.

Définition 22 *Algorithme de Gauss-Newton*

L'algorithme de Gauss-Newton est un algorithme itératif de résolution d'un problème de moindres carrés non-linéaire. Il peut être obtenu à partir d'une approximation au premier degré de l'algorithme de Newton. Il a donc l'avantage de ne pas nécessiter le calcul, parfois compliqué, de la dérivée du second ordre.

Soit m fonctions ϵ_i de n paramètres θ_j, avec $m \geq n$. L'algorithme de Gauss-Newton peut-être utilisé pour trouver le minimum de la fonction $S(\theta)$ définie par

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \epsilon_i^*$$

Une valeur initiale $\theta^{(0)}$ des paramètres θ servira de point de départ de l'algorithme. Les paramètres optimaux sont recherchés de manière itérative :

$$\theta^{s+1} = \theta^s + \delta\theta \tag{3.7}$$

avec l'incrément $\delta\theta$ vérifiant les équations normales

$$\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \mathcal{J}_{\epsilon,\theta} \partial\theta = -\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \epsilon \tag{3.8}$$

obtenue à partir d'une approximation de Taylor au premier degré de $\epsilon(\theta^s)$ et où $\mathcal{J}_{\epsilon,\theta} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est la matrice Jacobienne de ϵ par rapport à θ évaluée en θ^s. Si $\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \mathcal{J}_{\epsilon,\theta}$ est inversible (d'où la condition nécessaire mais non suffisante $m \geq n$), on peut avoir une pseudo-solution de l'incrément $\delta\theta$ et l'Equation (3.7) devient :

$$\begin{aligned} \theta^{s+1} &= \theta^s + \left(\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \mathcal{J}_{\epsilon,\theta}\right)^{-1} \mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \epsilon & (3.9) \\ &= \theta^s + \mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^{\dagger} \epsilon & (3.10) \end{aligned}$$

où $.^{\dagger}$ représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Nous ne rentrerons pas plus dans le détail ici, mais cette algorithme peut-être amélioré de plusieurs façons pour assurer la convergence. Un exemple est l'utilisation d'un facteur d'amortissement positif α à appliquer à l'incrément ($\theta^{s+1} = \theta^s + \alpha\delta\theta$) ou l'application d'un "chargement de la diagonale" lors du calcul de $\delta\theta$:

$$\left(\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \mathcal{J}_{\epsilon,\theta} + \lambda D_m\right) \partial\theta = -\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \epsilon \tag{3.11}$$

où D_m est une matrice diagonale positive et où λ est un facteur d'amortissement positif. La première version de cette variante est de prendre $D_m = I_m$. C'est la méthode de Levenberg. La contribution de Marquardt est d'utiliser $D_m = diag\left(\mathcal{J}_{\epsilon,\theta}^H \mathcal{J}_{\epsilon,\theta}\right)$. On appellera cette évolution de l'algorithme de Gauss-Newton, l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

On voit que, quel que soit l'algorithme utilisé (Newton, Gauss-Newton ou Levenberg-Marquart), il sera nécessaire d'évaluer la matrice Jacobienne de la fonction coût $S(\theta)$ par rapport à θ (i.e. par rapport à α et par rapport à β_{oi}). Cette dérivation est traitée en détail à la Section 3.1.1. Pour démarrer le processus itératif, il sera aussi nécessaire

de définir une valeur initiale du vecteur de paramètres θ. Une technique est de linéariser (selon les paramètres) l'erreur $\epsilon_{oi}(z_k)$ en multipliant l'Equation (3.1) par le polynôme $A(z_k)$ (dans l'espace en Z fini et discrétisé). On obtient l'erreur linéaire de modélisation $\epsilon_{oi}^L(z_k)$.

Erreur linéaire

$$\epsilon_{oi}^L(z_k) = A(z_k)\epsilon_{oi}(z_k) = B_{oi}(z_k) - A(z_k)H_{oi}(z_k) \tag{3.12}$$

La fonction coût devient :

$$S^L(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} w_{oi}(z_k)\epsilon_{oi}^L(z_k)\epsilon_{oi}^L(z_k)^* \tag{3.13}$$

La fonction coût (3.13) est une fonction quadratique positive si $w_{oi}(z_k) > 0 \forall o, i, k$. Son minimum est obtenu au point d'annulation de sa dérivée par rapport à l'ensemble de paramètres θ (α et $\beta_o i$). La recherche de ce minimum conduira à une estimation $\hat{\theta}$ qui pourra être utilisée pour initialiser le processus itératif de la minimisation de l'erreur non-linéaire (3.5). La résolution du problème de minimisation de l'erreur linéaire, dans sa version référence-simple, est appelée LSCF dans la littérature ([Cau04, DT09]) et Polyref-LSCF (ou pLSCF) dans sa version références-multiples ([GVV+03, Cau04, DT09]). Le détail sera donné à la Section 3.1.2.

Référence-simple et Références-multiples

On vient de faire la distinction entre les versions référence-simple et références-multiples de la résolution du problème de minimisation de l'erreur linéaire (3.13). On pourra évidement aussi la faire concernant l'erreur non-linaire (Equation (3.5)). Voyons quelle est l'implication dans l'écriture de ces problèmes moindres carrés.

La vision référence-simple du problème moindres carrés (linéaire ou non-linéaire) consiste à le résoudre en considérant un à un tous les couples entrées/sorties. Ceci se traduit dans l'écriture des fonctions coûts comme somme de produits de scalaires. Les écritures (3.5) et (3.13) sont donc les écritures référence-simple des problèmes respectivement linéaire et non-linéaire.

La vision références-multiples consiste à résoudre le problème moindres carrés (linéaire ou non-linéaire), soit simultanément pour toutes les entrées (on parlera de références-multiples à gauche), soit simultanément pour toutes les sorties (on parlera de références-multiples à droite). Ceci se traduit par une écriture des fonctions coûts comme somme de produit de vecteurs. Cette écriture permettra de considérer le polynôme $A(z)$ non plus à coefficients scalaires, mais matriciels. Dans ce cas, l'identification que l'on fera ne sera plus celle de la modélisation à dénominateur scalaire de la matrice de transfert, mais des modélisations de type description fractionnelle matricielle à gauche (voir Equation (2.54)) ou à droite (voir Equation (2.55)). Le terme références-multiples ne sera en fait utilisé que pour l'identification des modélisations de type DFM. Cependant, pour la compréhension, si on considère la modélisation à dénominateur scalaire, la fonction

coût s'écrira de manières equivalentes :

$$S(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} w_{oi}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)^* \tag{3.14}$$

$$= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_o^{(lig)}(z_k)\mathrm{diag}\left(w_o^{(lig)}(z_k)\right)\epsilon_o^{(lig)}(z_k)^H \tag{3.15}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_i^{(col)}(z_k)^H\mathrm{diag}\left(w_i^{(col)}(z_k)\right)\epsilon_i^{(col)}(z_k) \tag{3.16}$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon}(z_k) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}(z_k) & \dots & \epsilon_{1N_i}(z_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{N_o1}(z_k) & \dots & \epsilon_{N_oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \vdots = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(lig)}(z_k) \\ \dots \\ \epsilon_{N_o}^{(lig)}(z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(col)}(z_k) & \dots & \epsilon_{N_i}^{(col)}(z_k) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

où

$$\epsilon_o^{(lig)}(z_k) = \begin{bmatrix} \epsilon_{o1}(z_k) & \dots & \epsilon_{oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times N_i} \tag{3.18}$$

et

$$\epsilon_i^{(col)}(z_k) = \begin{bmatrix} \epsilon_{1i}(z_k) \\ \dots \\ \epsilon_{N_oi}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o\times 1} \tag{3.19}$$

et avec

$$\mathbf{W}(z_k) = \begin{bmatrix} w_{11}(z_k) & \dots & w_{1N_i}(z_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N_o1}(z_k) & \dots & w_{N_oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \vdots = \begin{bmatrix} w_1^{(lig)}(z_k) \\ \dots \\ w_{N_o}^{(lig)}(z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^{(col)}(z_k) & \dots & w_{N_i}^{(col)}(z_k) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

où

$$w_o^{(lig)}(z_k) = \begin{bmatrix} w_{o1}(z_k) & \dots & w_{oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times N_i} \tag{3.21}$$

et

$$w_i^{(col)}(z_k) = \begin{bmatrix} w_{1i}(z_k) \\ \dots \\ w_{N_oi}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o\times 1} \tag{3.22}$$

En identification référence-simple les équations (3.14), (3.15) et (3.16) sont strictement identiques, avec l'erreur de modélisation ϵ_{oi} définie à partir d'une modélisation à dénominateur polynôme scalaire ((3.1) ou (3.12)).

En identification références-multiples, l'égalité (3.14) n'a plus de sens car les erreurs sont écrites à partir des modélisations de type DFM. Le dénominateur de la matrice de transfert est un polynôme matriciel. On aura :

– **pour DFM à droite :**
cas non-linéaire

$$\epsilon_o^{(lig)}(z_k) = B_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A}(z_k)^{-1} - H_o^{(lig)}(z_k) \tag{3.23}$$

cas linéaire

$$\epsilon_o^{L^{(lig)}}(z_k) = \epsilon_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A} = B_o^{(lig)}(z_k) - H_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A}(z_k) \tag{3.24}$$

avec $\mathbf{A}(z_k) \in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$

– **pour DFM à gauche :**
cas non-linéaire

$$\epsilon_i(z_k)^{(col)} = \mathbf{A}(z_k)^{-1}B_i^{(col)}(z_k) - \mathbf{A}(z_k)^{-1}H_i^{(col)}(z_k) \tag{3.25}$$

cas linéaire

$$\epsilon_i^{L^{(col)}}(z_k) = \mathbf{A}(z_k)\epsilon_i^{(col)}(z_k) = B_i^{(col)}(z_k) - \mathbf{A}(z_k)H_i^{(col)}(z_k) \tag{3.26}$$

avec $\mathbf{A}(z_k) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$

avec

$$\mathbf{H}(z_k) = \begin{bmatrix} H_{11}(z_k) & \dots & H_{1N_i} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{N_o1}(z_k) & \dots & H_{N_oN_i} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(lig)}(z_k) \\ \dots \\ H_{N_o}^{(lig)}(z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(col)}(z_k) & \dots & H_{N_i}^{(col)}(z_k) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

où

$$H_o^{(lig)}(z_k) = \begin{bmatrix} H_{o1}(z_k) & \dots & H_{oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1 \times N_i} \tag{3.28}$$

et

$$H_i^{(col)}(z_k) = \begin{bmatrix} H_{1i}(z_k) \\ \dots \\ H_{N_oi}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o \times 1} \tag{3.29}$$

et avec

$$\mathbf{B}(z_k) = \begin{bmatrix} B_{11}(z_k) & \dots & B_{1N_i} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{N_o1}(z_k) & \dots & B_{N_oN_i} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{(lig)}(z_k) \\ \dots \\ B_{N_o}^{(lig)}(z_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{(col)}(z_k) & \dots & B_{N_i}^{(col)}(z_k) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

où

$$B_o^{(lig)}(z_k) = \begin{bmatrix} B_{o1}(z_k) & \dots & B_{oN_i}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1 \times N_i} \tag{3.31}$$

et

$$B_i^{(col)}(z_k) = \begin{bmatrix} B_{1i}(z_k) \\ \dots \\ B_{N_oi}(z_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o \times 1} \tag{3.32}$$

Une dernière distinction entre les vision référence-simple et références-multiples concerne la pondération. Dans les cas références-multiples, il ne sera plus nécessairement diagonale comme dans les équations des cas simple-référence (3.15) et (3.16). Pour l'identification références-multiples droite (resp. gauche), à chaque sortie o (resp. entrée i) pourra être associée une matrice non purement diagonale de taille $(N_i \times N_i)$ (resp. $(N_o \times N_o)$). On remplacera les poids $\text{diag}\left(w_o^{(lig)}(z_k)\right)$ et $\text{diag}\left(w_i^{(col)}(z_k)\right)$ par $W_o(z_k)$ et $W_i(z_k)$. On aura alors :

- **pour DFM à droite :**
  cas non-linéaire
  $$S(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_o^{(lig)}(z_k) W_o(z_k) \epsilon_o^{(lig)}(z_k)^H \tag{3.33}$$
  cas linéaire
  $$S^L(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_o^{L^{(lig)}}(z_k) W_o(z_k) \epsilon_o^{L^{(lig)}}(z_k)^H \tag{3.34}$$
  avec $W_o(z_k) \in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$
- **pour DFM à gauche :**
  cas non-linéaire
  $$S(\theta) = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_i^{(col)}(z_k)^H W_i(z_k) \epsilon_i^{(col)}(z_k) \tag{3.35}$$
  cas linéaire
  $$S^L(\theta) = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_i^{L^{(col)}}(z_k)^H W_i(z_k) \epsilon_i^{L^{(col)}}(z_k) \tag{3.36}$$
  avec $W_i(z_k) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$

Le poids est utile pour réduire l'influence d'un couple entrée/sortie, d'une entrée ou d'une sortie dans la recherche d'un estimateur $\hat{\theta}$ minimisant les erreurs de modélisations. Cependant, en considérant le problème de minimisation de l'erreur non-linéaire, en faisant l'hypothèse que les erreurs de modélisation suivent des lois gaussiennes et en utilisant des poids très particuliers, l'estimateur obtenu ne sera pas uniquement un estimateur par moindres carrés, il sera un estimateur du maximum de vraisemblance. Ces poids sont les inverses des variances des erreurs de modélisation en identification single-référence et les matrices inverses de covariance en identification références-multiples (à droite $W_i(z_k) = cov\left(\epsilon_{o_i}^{(lig)}, \epsilon_{o_j}^{(lig)}\right)^{-1}$ et à gauche $W_i(z_k) = cov\left(\epsilon_{i_i}^{(col)}, \epsilon_{i_j}^{(col)}\right)^{-1}$).

Moindres carrés et maximum de vraisemblance

Définition 23 *Maximum de vraisemblance*

Soit X une variable aléatoire continue, de loi discrète ou continue, dont on veut estimer un paramètre θ. On note $\mathcal{D}_\theta$ cette famille de lois paramétriques. On définit

la densité de probabilité $f(x|\theta)$. On appelle vraisemblance de θ au vu des observation $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ d'un n-échantillon indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) selon la loi $\mathcal{D}_\theta$, le nombre :

$$\mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n|\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \tag{3.37}$$

On cherche le paramètre θ qui maximise la vraisemblance (3.37) *pour que les probabilités des réalisations observées soient maximales.*

Si $\mathcal{L}$ est dérivable et admet un maximum global $\theta = \hat{\theta}$, alors la dérivée première s'annule en $\theta = \hat{\theta}$ et la dérivé seconde est négative. Réciproquement, la dérivé première s'annule en $\theta = \hat{\theta}$ et si la dérivé seconde est négative, alors $\theta = \hat{\theta}$ est un maximum local de $\mathcal{L}$.

En appliquant la Définition 23 à une série de variables aléatoires i.i.d $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_n)$ de distribution gaussienne $\mathcal{N}\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1\frac{\epsilon_i}{2\sigma_\epsilon^2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\epsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\epsilon_i^*}{2\sigma_\epsilon^2}} \end{aligned}$$

Dans le cas de distributions gaussiennes, au lieu de maximiser la vraisemblance, il est plus évident de maximiser le log de vraisemblance. Il s'agit de prendre le logarithme népérien de la fonction coût. La fonction logarithme népérien étant positive croissante, l'estimateur maximum de vraisemblance est équivalent à celui du log de vraisemblance. On obtient :

$$\mathcal{L}_{log} = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\epsilon^2\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\epsilon_i^*}{2\sigma_\epsilon^2} \tag{3.38}$$

Il est clair, à partir de (3.38), que la solution maximisation du log de vraisemblance (et donc de la vraisemblance) est la même que celle minimisation le problème moindres carrés.

Pour que notre problématique rentre dans le cadre du maximum de vraisemblance, il est nécessaire que les éléments sommés dans la fonction coût des moindres carrés soient gaussiens, indépendants et identiquement distribués. L'indépendance des éléments nécessite l'hypothèse d'indépendance des fonctions de transfert H_{oi} et celle d'indépendance entre les fréquences. La loi de l'erreur $\epsilon_{oi}(z_k)$ est celle de $\frac{\gamma_0 v_{oi}(z_k)}{A(z_k)u_i(z_k)}$ ($\epsilon_{oi}(z_k) = \frac{\gamma_0 v_{oi}(z_k)}{A(z_k)u_i(z_k)}$ dans l'Equation (3.1)). Les coefficients du polynôme $A(z_k)$ et le coefficient du bruit γ_0 sont déterministes par définition. La raie spectrale $u_i(z_k)$ est soit une valeur mesurée directement, soit une estimation fréquentielle (si $z_k = e^{-i\frac{2\pi kn}{N_e}}$) obtenue à partir de données temporelles. Dans les deux cas elle est statistiquement déterministe, même si dans le second elle peut avoir une variance en fonction des paramètres d'estimation. De plus, l'entrée connue du système peut être un bruit blanc généré et injecté dans le système pour exciter toutes les fréquences. Dans ce cas l'entrée a des propriétés stochastiques.

Cependant, sur un essai, l'excitation étant connue, on peut la considérer comme une série de valeurs déterministes. Le type de loi de la variable aléatoire $\epsilon_{oi}(z_k)$ est donc celui de $v_{oi}(z_k)$. Cette variable aléatoire $v_{oi}(z_k)$ correspond à la transformation en Z (fini et discret) du bruit environnemental inconnu. Bien évidement, elle ne peut pas être calculée. En général, on fait l'hypothèse que, dans le domaine temporel, le bruit environnemental est un processus gaussien centré de type bruit blanc, i.e. un processus aléatoire dont les éléments sont des variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) de loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. La transformation de Fourier discrète d'un tel processus est aussi un processus gaussien de type bruit blanc dont les éléments sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}\left(0, N_e\sigma^2\right)$, avec N_e le nombre d'échantillons. On a donc :

$$\epsilon_{oi}(z_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{A(z_k)^2 u_i(z_k)^2}\sigma_v^2\right) \tag{3.39}$$

On constate que, même si tous les éléments $\epsilon_{oi}(z_k)$ suivent une loi gaussienne, ces lois n'ont pas les mêmes propriétés statistiques, plus précisément, les éléments n'ont pas la même variance. Il est donc nécessaire de "standardiser" ces variables aléatoires, i.e. de leur retirer leur moyenne (dans notre cas la moyenne est nulle) et de les diviser par la racine de leur variance. De cette manière, toutes les variables aléatoires suivront une loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Les polynômes $A(z_k)$ et $B(z_k)$ sont déterministes par définition. Donc, à partir de l'Equation (3.1), on obtient l'égalité entre la variance de l'erreur et celle de la fonction de transfert :

$$\sigma_{\epsilon_{oi}(z_k)} = \sigma_{H_{oi}(z_k)} \tag{3.40}$$

donc, si dans l'Equation (3.5) on pose $w_{oi}(z_k) = \sigma^{-2}_{H_{oi}(z_k)}$, l'estimateur obtenu par la minimisation moindres carrés de l'erreur non-linéaire pondérée sera un estimateur de maximum de vraisemblance.

L'ensemble de cette démarche peut être appliquée au problème moindres carrés linéaire, à l'exception de la pondération adéquate. En effet, pour obtenir une somme d'éléments identiquement distribués il est nécessaire de diviser ces éléments, non plus par $\sigma_{H_{oi}(z_k)}$ mais par $A(z_k)^2\sigma_{H_{oi}(z_k)}$. Ceci est impossible car on ne connait pas le polynôme $A(z_k)$, on cherche à l'identifier.

En conclusion, seul la minimisation moindres carrés de l'erreur non-linéaire avec une pondération par l'inverse de la variance des fonctions de transfert conduit à un estimateur du maximum de vraisemblance. Ceci explique que la méthode consistant à rechercher le (un) minimum du problème moindres carrés pondérés non-linéaire est souvent abusivement appelé MLE (Maximum Likelihood Estimator). Il serait plus judicieux d'appeler cette méthode WNL-LSCF (Weighted Non-Linear LSCF) dans le cas référence-simple, et WNL-pLSCF dans le cas références-multiples.

3.1.1 Identification modale à partir de l'erreur non-linéaire

L'identification de la modélisation ARX - que ce soit une identification référence-simple, références-multiples à droite ou références-multiples à gauche - est constituée de quatre étapes principales :

1. Description du problème
   (a) Définition d'un vecteur $E \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1}$ tel que $S(\theta) = E^H E$ (MCO)
   (b) Définition d'un vecteur paramètre θ (dont la taille dépend du type d'identification considéré) contenant les paramètres θ_A du polynôme $A(z_k)$ et θ_B des polynômes $B(z_k)$
2. Calcul de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{E,\theta}$ de E par rapport à θ
   (a) Calcul de matrices jacobiennes intermédiaires
   (b) Regroupement des matrices jacobiennes intermédiaires pour obtenir $\mathcal{J}_{E,\theta}$
3. Ecriture du problème de Gauss-Newton : $\mathcal{J}_{E,\theta}^H \mathcal{J}_{E,\theta} \Delta\theta = -\mathcal{J}_{E,\theta}^H E$
   (a) Calcul de $\mathcal{J}_{E,\theta}^H \mathcal{J}_{E,\theta}$
   (b) Calcul de $-\mathcal{J}_{E,\theta}^H E$
4. Réduction des équations : Gauss-Newton réduit
   (a) A partir du problème de Gauss-Newton : extraction d'une écriture analytique de $\Delta\theta_B$ en fonction de $\Delta\theta_A$
   (b) Problème de Gauss-Newton réduit : $\mathcal{J}^H \mathcal{J} \Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H E$

Dans les sections suivantes (3.1.1.1, 3.1.1.2, 3.1.1.3, 3.1.1.4), ces quatre étapes sont décrites pour les identifications référence-simple, références-multiples à droite et références-multiples à gauche.

3.1.1.1 Description du problème

Quelque soit la méthode, on veut un vecteur $E \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1}$ tel que $S(\theta) = E^H E$ (MCO).

En référence-simple, on cherche à considérer chaque terme d'erreur $\epsilon_{oi}(z_k)$ - entre l'entrée i et la sortie o - séparément (voir Equation (3.6)).

En références-multiples à droite, on cherche à considérer, pour chaque sortie o, simultanément toutes les entrées i (voir Equation (3.25)).

En références-multiples à gauche, on cherche à considérer, pour chaque entrée i, simultanément toutes les sorties o (voir Equation (3.23)).

On fait le choix, selon la méthode, de définir le vecteur E par :

En référence-simple

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{N_o 1} \\ \vdots \\ E_{N_o N_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1} \tag{3.41}$$

avec

$$E_{oi} = \begin{bmatrix} \epsilon_{oi}(z_1) \\ \vdots \\ \epsilon_{oi}(z_{N_e}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e \times 1} \tag{3.42}$$

En références-multiples à droite

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_{N_o} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1} \tag{3.43}$$

avec

$$E_o = \begin{bmatrix} \text{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_1)\right] \\ \vdots \\ \text{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_{N_e})\right] \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_e \times 1} \tag{3.44}$$

En références-multiples à gauche

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_{N_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1} \tag{3.45}$$

avec

$$E_i = \begin{bmatrix} \epsilon_i^{(col)}(z_1) \\ \vdots \\ \epsilon_i^{(col)}(z_{N_e}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_e \times 1} \tag{3.46}$$

Ces choix permettent de fixer l'ordre des lignes de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{E,\theta}$

Concernant le vecteur paramètre θ, quelque soit la méthode d'identification, on choisit de le définir par :

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_A \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

En référence-simple

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p+1) \times 1} \tag{3.48}$$

et

$$\theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{B_{11}} \\ \vdots \\ \theta_{B_{N_o 1}} \\ \vdots \\ \theta_{B_{N_o N_i}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i (q+1) \times 1} \tag{3.49}$$

avec

$$\theta_{B_{oi}} = \begin{bmatrix} (\beta_{oi})_0 \\ \vdots \\ (\beta_{oi})_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(q+1) \times 1} \tag{3.50}$$

En références-multiples à droite

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_p\right\} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i^2 (p+1) \times 1} \tag{3.51}$$

et

$$\theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{B_o} \\ \vdots \\ \theta_{B_{N_o}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i (q+1) \times 1} \tag{3.52}$$

avec

$$\theta_{B_o} = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{\left[\beta_o^{(lig)}\right]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{\left[\beta_o^{(lig)}\right]_q\right\} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i (q+1) \times 1} \tag{3.53}$$

En références-multiples à gauche

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_p\right\} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o^2 (p+1) \times 1} \tag{3.54}$$

et

$$\theta_B = \begin{bmatrix} \theta_{B_1} \\ \vdots \\ \theta_{B_{N_i}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i (q+1) \times 1} \tag{3.55}$$

avec

$$\theta_{B_i} = \begin{bmatrix} \left[\beta_i^{(col)}(z_1)\right]_0 \\ \vdots \\ \left[\beta_i^{(col)}(z_{N_e})\right]_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o(q+1)\times 1} \tag{3.56}$$

Ces choix permettent de fixer l'ordre des colonnes de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{E,\theta}$.

3.1.1.2 Calcul de la matrice jacobienne

Un moyen d'obternir la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{E,\theta}$, pour chacune des trois méthodes d'identification, consiste en la différenciation et en la vectorisation des équations (3.6), (3.25) et (3.23).

En référence-simple

On part de l'équation (3.6)

$$\Delta\epsilon_{oi}(z_k) = \frac{1}{A(z_k)}\Delta B_{oi}(z_k) - \frac{B_{oi}(z_k)}{A(z_k)}\frac{1}{A(z_k)}\Delta A(z_k) \tag{3.57}$$

avec

$$\Delta B_{oi}(z_k) = \sum_{j=0}^{q} z_k^{-j}\Delta\left(\beta_{oi}\right)_j = \begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\left(\beta_{oi}\right)_0 \\ \vdots \\ \Delta\left(\beta_{oi}\right)_q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix}\Delta\theta_{B_{oi}} \tag{3.58}$$

et

$$\Delta A(z_k) = \sum_{j=0}^{p} z_k^{-j}\Delta\alpha_j = \begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha_0 \\ \vdots \\ \Delta\alpha_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix}\Delta\theta_A \tag{3.59}$$

D'où

$$\Delta\epsilon_{oi}(z_k) = \mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_k),\theta_{B_{oi}}}\Delta\theta_{B_{oi}} + \mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_k),\theta_A}\Delta\theta_A \tag{3.60}$$

Avec

$$\mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_k),\theta_{B_{oi}}} = \frac{1}{A(z_k)}\begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times(q+1)} \tag{3.61}$$

et

$$\mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_k),\theta_A} = \frac{B_{oi}(z_k)}{A(z_k)}\frac{1}{A(z_k)}\begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times(p+1)} \tag{3.62}$$

On regroupe ensuite les matrice jacobiennes intermédiaires de chacune des variables z_k :

$$\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}} = \begin{bmatrix}\mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_1),\theta_{B_{oi}}} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_{N_e}),\theta_{B_{oi}}}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e\times(q+1)} \tag{3.63}$$

et

$$\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_1),\theta_A} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\epsilon_{oi}(z_{N_e}),\theta_A} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e \times (p+1)} \tag{3.64}$$

Finalement, à partir de toutes les matrices jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}}$ et $\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A}$, on peut écrire :

$$\Delta E = \mathcal{J}_{E,\theta} \Delta\theta \tag{3.65}$$

avec

$$\mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_{11},\theta_{B_{11}}} & \cdots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \cdots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \mathcal{J}_{E_{11},\theta_A} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_e \times (q+1)} & \cdots & \mathcal{J}_{E_{N_o 1},\theta_{B_{N_o 1}}} & \cdots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \mathcal{J}_{E_{N_o 1},\theta_A} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_e \times (q+1)} & \cdots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \cdots & \mathcal{J}_{E_{N_o N_i},\theta_{B_{N_o N_i}}} & \mathcal{J}_{E_{N_o N_i},\theta_A} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

et avec $\mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times N_o N_i (q+1)+(p+1)}$

En références-multiples à droite

On part de l'équation (3.25)

$$\text{vec}\left[\Delta\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right] = \mathbf{A}^{-1}(z_k)\text{vec}\left[\Delta B_o^{(lig)}(z_k)\right] - \left[\mathbf{A}^{-T}(z_k) \otimes B_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A}^{-1}(z_k)\right] \text{vec}\left[\Delta A(z_k)\right] \tag{3.67}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{vec}\left[\Delta B_o^{(lig)}(z_k)\right] &= \sum_{j=0}^{q} z_k^{-j} \text{vec}\left\{\Delta\left[\beta_o^{(lig)}\right]_j\right\} \\ &= \begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_k^{-q} I_{N_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}\left\{\Delta\left[\beta_o^{(lig)}\right]_0\right\} \\ \vdots \\ \text{vec}\left\{\Delta\left[\beta_o^{(lig)}\right]_q\right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_k^{-q} I_{N_i} \end{bmatrix} \Delta\theta_{B_o} \end{aligned} \tag{3.68}$$

et

$$\begin{aligned} \text{vec}\left[\Delta\mathbf{A}(z_k)\right] &= \sum_{j=0}^{p} z_k^{-j} \text{vec}\left\{\Delta\left[\alpha\right]_j\right\} \\ &= \begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}\left\{\Delta\left[\alpha\right]_0\right\} \\ \vdots \\ \text{vec}\left\{\Delta\left[\alpha\right]_p\right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_i^2} \end{bmatrix} \Delta\theta_{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{3.69}$$

D'où

$$\mathrm{vec}\left[\Delta\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right] = \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right],\theta_{B_o}}\Delta\theta_{B_o} + \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right],\theta_{\mathbf{A}}}\Delta\theta_{\mathbf{A}} \tag{3.70}$$

Avec

$$\mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right],\theta_{B_o}} = \mathbf{A}^{-1}(z_k)\begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_k^{-q}I_{N_i}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i\times N_i(q+1)} \tag{3.71}$$

et

$$\mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right],\theta_{\mathbf{A}}} = -\left[\mathbf{A}^{-T}(z_k)\otimes B_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A}^{-1}(z_k)\right]\begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_k^{-p}I_{N_i^2}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i\times N_i^2(p+1)} \tag{3.72}$$

On regroupe les matrices jacobiennes intermédiaires de chacune des variables z_k :

$$\mathcal{J}_{E_o,\theta_{B_o}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_1)\right],\theta_{B_o}} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_{N_e})\right],\theta_{B_o}}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_iN_e\times N_i(q+1)} \tag{3.73}$$

et

$$\mathcal{J}_{E_o,\theta_{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_1)\right],\theta_{\mathbf{A}}} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_{N_e})\right],\theta_{\mathbf{A}}}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_iN_e\times N_i^2(p+1)} \tag{3.74}$$

Finalement, à partir de toutes les matrices jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}_{E_o,\theta_{B_o}}$ et $\mathcal{J}_{E_o,\theta_{\mathbf{A}}}$,

on peut écrire :

$$\Delta E = \mathcal{J}_{E,\theta}\Delta\theta \tag{3.75}$$

avec

$$\mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}} & \dots & [0]_{N_iN_e\times N_i(q+1)} & \mathcal{J}_{E_1,\theta_{\mathbf{A}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_iN_e\times N_i(q+1)} & \dots & \mathcal{J}_{E_{N_o},\theta_{B_{N_o}}} & \mathcal{J}_{E_{N_o},\theta_{\mathbf{A}}}\end{bmatrix} \tag{3.76}$$

et avec $\mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_oN_iN_e\times N_oN_i(q+1)+N_i^2(p+1)}$

En références-multiples à gauche

On part de l'équation (3.23)

$$\Delta\epsilon_i^{(col)}(z_k) = \mathbf{A}^{-1}(z_k)\Delta B_i^{(col)}(z_k) - \left[B_i^{(col)^T}(z_k)\mathbf{A}^{-T}(z_k)\otimes\mathbf{A}^{-1}(z_k)\right]\mathrm{vec}\left[\Delta A(z_k)\right] \tag{3.77}$$

On notera ici que les vecteurs $\epsilon_i^{(col)}(z_k)$ et $B_i^{(col)}(z_k)$ sont des vecteurs, colonnes. L'opérateur vec [.] n'a pas d'influence. Il est néanmoins utilisé, associé au produit de Kronecker, pour réorganiser l'écriture de la différentiation.

On définit

$$\begin{aligned}
\Delta B_i^{(col)}(z_k) &= \sum_{j=0}^{q} z_k^{-j} \Delta \left[\beta_o^{(col)}\right]_j \\
&= \begin{bmatrix} I_{N_o} & \dots & z_k^{-q} I_{N_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \left[\beta_i^{(col)}\right]_0 \\ \vdots \\ \Delta \left[\beta_i^{(col)}\right]_q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{N_o} & \dots & z_k^{-q} I_{N_o} \end{bmatrix} \Delta\theta_{B_i} \qquad (3.78)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{vec}\left[\Delta \mathbf{A}(z_k)\right] &= \sum_{j=0}^{p} z_k^{-j} \mathrm{vec}\left\{\Delta \left[\alpha\right]_j\right\} \\
&= \begin{bmatrix} I_{N_o^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_o^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{\Delta \left[\alpha\right]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{\Delta \left[\alpha\right]_p\right\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{N_o^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_o^2} \end{bmatrix} \Delta\theta_{\mathbf{A}} \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta\epsilon_i^{(col)}(z_k) = \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_k),\theta_{B_i}} \Delta\theta_{B_i} + \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_k),\theta_{\mathbf{A}}} \Delta\theta_{\mathbf{A}} \qquad (3.80)$$

Avec

$$\mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_k),\theta_{B_i}} = \mathbf{A}^{-1}(z_k) \begin{bmatrix} I_{N_o} & \dots & z_k^{-q} I_{N_o} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o(q+1)} \qquad (3.81)$$

et

$$\mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_k),\theta_{\mathbf{A}}} = -\left[B_i^{(col)^T}(z_k)\mathbf{A}^{-T}(z_k) \otimes \mathbf{A}^{-1}(z_k)\right] \begin{bmatrix} I_{N_o^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_o^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o^2(p+1)} \qquad (3.82)$$

On regroupe les matrices jacobiennes intermédiaires de chacune des variables z_k :

$$\mathcal{J}_{E_i,\theta_{B_i}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_1),\theta_{B_i}} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_{N_e}),\theta_{B_i}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_e \times N_o(q+1)} \qquad (3.83)$$

et

$$\mathcal{J}_{E_i,\theta_{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_1),\theta_{\mathbf{A}}} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{\epsilon_i^{(col)}(z_{N_e}),\theta_{\mathbf{A}}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_e \times N_o^2(p+1)} \qquad (3.84)$$

Finalement, à partir de toutes les matrices jacobiennes intermédiaires $\mathcal{J}_{E_i,\theta_{B_i}}$ et $\mathcal{J}_{E_i,\theta_{\mathbf{A}}}$,

on peut écrire :

$$\Delta E = \mathcal{J}_{E,\theta}\Delta\theta \tag{3.85}$$

avec

$$\mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}} & \cdots & [0]_{N_oN_e\times N_o(q+1)} & \mathcal{J}_{E_1,\theta_{\mathbf{A}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_oN_e\times N_o(q+1)} & \cdots & \mathcal{J}_{E_{N_i},\theta_{B_{N_i}}} & \mathcal{J}_{E_{N_i},\theta_{\mathbf{A}}} \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

et avec $\mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_oN_iN_e\times N_oN_i(q+1)+N_o^2(p+1)}$

3.1.1.3 Ecriture du problème de Gauss-Newton

Maintenant que l'on a les matrices jacobiennes associées à chacune des trois méthodes d'identification, on peut appliquer la méthode de Gauss-Newton pour rechercher un estimateur $\hat{\theta}$ minisant le problème aux moindres carrés non linéaire.

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H\mathcal{J}_{E,\theta}\Delta\theta = \mathcal{J}_{E,\theta}^H E \tag{3.87}$$

On remarquera la forme particulière de $\mathcal{J}_{E,\theta}^H E$ et de $\mathcal{J}_{E,\theta}^H\mathcal{J}_{E,\theta}$ (aussi appelé "équations normales") en fonction de la méthode d'identification.

Référence-simple

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H E = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_{11},\theta_{B_{11}}}^H E_{11} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_o1},\theta_{B_{N_o1}}}^H E_{N_o1} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_oN_i},\theta_{B_{N_oN_i}}}^H E_{N_oN_i} \\ \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A}^H E_{oi} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_oN_i(q+1)+(p+1)\times 1} \tag{3.88}$$

et

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H\mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & S_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & R_{N_o1} & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & S_{N_o1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & R_{N_oN_i} & S_{N_oN_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{11}^H & \cdots & S_{N_o1}^H & \cdots & S_{N_oN_i}^H & \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}T_{oi} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

avec $\mathcal{J}_{E,\theta}^H \mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_o N_i(q+1)+(p+1)\times N_o N_i(q+1)+(p+1)}$ et où

$$\begin{aligned} R_{oi} &= \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}}^H \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}} \in \mathbb{C}^{(q+1)\times(q+1)} && (3.90)\\ S_{oi} &= \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}}^H \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A} \in \mathbb{C}^{(q+1)\times(p+1)} && (3.91)\\ T_{oi} &= \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A}^H \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A} \in \mathbb{C}^{(p+1)\times(p+1)} && (3.92) \end{aligned}$$

Références-multiples à droite

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H E = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}}^H E_1 \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_o},\theta_{B_{N_o}}}^H E_{N_o} \\ \sum_{o=1}^{N_o} \mathcal{J}_{E_o,\theta_A}^H E_o \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i(q+1)+N_i^2(p+1)\times 1} \tag{3.93}$$

et

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H \mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} R_1 & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & S_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & R_{N_o} & S_{N_o} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1^H & \cdots & S_{N_o}^H & \sum_{o=1}^{N_o} T_o \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

avec $\mathcal{J}_{E,\theta}^H \mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_o N_i(q+1)+N_i^2(p+1)\times N_o N_i(q+1)+N_i^2(p+1)}$ et où

$$\begin{aligned} R_o &= \mathcal{J}_{E_o,\theta_{B_o}}^H \mathcal{J}_{E_o,\theta_{B_o}} \in \mathbb{C}^{N_i(q+1)\times N_i(q+1)} && (3.95)\\ S_o &= \mathcal{J}_{E_o,\theta_{B_o}}^H \mathcal{J}_{E_o,\theta_A} \in \mathbb{C}^{N_i(q+1)\times N_i^2(p+1)} && (3.96)\\ T_o &= \mathcal{J}_{E_o,\theta_A}^H \mathcal{J}_{E_o,\theta_A} \in \mathbb{C}^{N_i^2(p+1)\times N_i^2(p+1)} && (3.97) \end{aligned}$$

Références-multiples à gauche

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^H E = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}}^H E_1 \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_i},\theta_{B_{N_i}}}^H E_{N_i} \\ \sum_{i=1}^{N_i} \mathcal{J}_{E_i,\theta_A}^H E_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_o N_i(q+1)+N_o^2(p+1)\times 1} \tag{3.98}$$

et

$$\mathcal{J}_{E,\theta}^{H}\mathcal{J}_{E,\theta} = \begin{bmatrix} R_1 & \cdots & [0]_{(q+1)\times(q+1)} & S_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(q+1)\times(q+1)} & \cdots & R_{N_i} & S_{N_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1^H & \cdots & S_{N_i}^H & \sum_{i=1}^{N_i} T_i \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

avec $\mathcal{J}_{E,\theta}^{H}\mathcal{J}_{E,\theta} \in \mathbb{C}^{N_oN_i(q+1)+N_o^2(p+1)\times N_oN_i(q+1)+N_o^2(p+1)}$ et où

$$R_i = \mathcal{J}_{E_i,\theta_{B_i}}^{H}\mathcal{J}_{E_i,\theta_{B_i}} \in \mathbb{C}^{N_o(q+1)\times N_o(q+1)} \tag{3.100}$$

$$S_i = \mathcal{J}_{E_i,\theta_{B_i}}^{H}\mathcal{J}_{E_i,\theta_A} \in \mathbb{C}^{N_o(q+1)\times N_o^2(p+1)} \tag{3.101}$$

$$T_i = \mathcal{J}_{E_i,\theta_A}^{H}\mathcal{J}_{E_i,\theta_A} \in \mathbb{C}^{N_o^2(p+1)\times N_o^2(p+1)} \tag{3.102}$$

3.1.1.4 Réduction des équations

Compte tenu de la forme particulière de $\mathcal{J}_{E,\theta}^{H}\mathcal{J}_{E,\theta}$ tel que décrit à la Section 3.1.1.3, le problème de Gauss-Newton peut être réduit à un problème réduit de Gauss-Newton fonction de θ_A et à une expression analytique des $\Delta\theta_{B_{oi}}$ en fonction de $\Delta\theta_A$.

Référence-simple

Les équations (3.87), (3.88) et (3.89) conduisent à :

$$R_{oi}\Delta\theta_{B_{oi}} + S_{oi}\Delta\theta_A = -\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}}^{H}E_{oi} \tag{3.103}$$

$$\sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} S_{oi}^H\Delta\theta_{B_{oi}} + T_{oi}\Delta\theta_A = -\sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\mathcal{J}_{E_{oi},\theta_A}^{H}E_{oi} \tag{3.104}$$

L'Equation (3.103) peut être réécrite :

$$\Delta\theta_{B_{oi}} = -R_{oi}^{-1}\left(S_{oi}\Delta\theta_A + \mathcal{J}_{E_{oi},\theta_{B_{oi}}}^{H}E_{oi}\right) \tag{3.105}$$

et en injectant l'Equation (3.105) dans l'Equation (3.104), on obtient :

$$\mathcal{J}^H\mathcal{J}\Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H E \tag{3.106}$$

avec

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_{11},\theta_{B_{11}}}R_{11}^{-1}S_{11} - \mathcal{J}_{E_{11},\theta_A} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_oN_i},\theta_{B_{N_oN_i}}}R_{N_oN_i}^{-1}S_{N_oN_i} - \mathcal{J}_{E_{N_oN_i},\theta_A} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

Références-multiples à droite

Les équations (3.87), (3.93) et (3.94) conduisent à :

$$R_o \Delta\theta_{B_o} + S_o \Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H_{E_o,\theta_{B_o}} E_o \tag{3.108}$$

$$\sum_{o=1}^{N_o} S_o^H \Delta\theta_{B_o} + T_o \Delta\theta_A = -\sum_{o=1}^{N_o} \mathcal{J}^H_{E_o,\theta_A} E_o \tag{3.109}$$

L'Equation (3.108) peut être réécrite :

$$\Delta\theta_{B_o} = -R_o^{-1} \left(S_o \Delta\theta_A + \mathcal{J}^H_{E_o,\theta_{B_o}} E_o \right) \tag{3.110}$$

et en injectant l'Equation (3.110) dans l'Equation (3.109), on obtient :

$$\mathcal{J}^H \mathcal{J} \Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H E \tag{3.111}$$

avec

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}} R_1^{-1} S_1 - \mathcal{J}_{E_1,\theta_A} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_o},\theta_{B_{N_o}}} R_{N_o}^{-1} S_{N_o} - \mathcal{J}_{E_{N_o},\theta_A} \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

Références-multiples à gauche

Les équations (3.87), (3.98) et (3.99) conduisent à :

$$R_i \Delta\theta_{B_i} + S_i \Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H_{E_i,\theta_{B_i}} E_i \tag{3.113}$$

$$\sum_{i=1}^{N_i} S_i^H \Delta\theta_{B_i} + T_i \Delta\theta_A = -\sum_{i=1}^{N_i} \mathcal{J}^H_{E_i,\theta_A} E_i \tag{3.114}$$

L'Equation (3.113) peut être réécrite :

$$\Delta\theta_{B_i} = -R_i^{-1} \left(S_i \Delta\theta_A + \mathcal{J}^H_{E_i,\theta_{B_i}} E_i \right) \tag{3.115}$$

et en injectant l'Equation (3.115) dans l'Equation (3.114), on obtient :

$$\mathcal{J}^H \mathcal{J} \Delta\theta_A = -\mathcal{J}^H E \tag{3.116}$$

avec

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{E_1,\theta_{B_1}} R_1^{-1} S_1 - \mathcal{J}_{E_1,\theta_A} \\ \vdots \\ \mathcal{J}_{E_{N_i},\theta_{B_{N_i}}} R_{N_i}^{-1} S_{N_i} - \mathcal{J}_{E_{N_i},\theta_A} \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

Quelque soit la méthode d'identification, on utilisera une variante de l'algorithme de Gauss-Newton, l'algorithme de Levenberg-Marquardt, pour résoudre la problème réduit de Gauss-Newton. On obtiendra de manière itérative :

$$\begin{cases} \theta_A^{(n+1)} &= \theta_A^{(n)} + \Delta\theta_A^{(n)} \\ \theta_B^{(n+1)} &= \theta_B^{(n)} + \Delta\theta_B^{(n)} \end{cases} \tag{3.118}$$

avec les $\Delta\theta_B^{(n)}$ ($\Delta\theta_{B_{oi}}^{(n)}$ en référence-simple, $\Delta\theta_{B_o}^{(n)}$ en références-multiples à droite et $\Delta\theta_{B_i}^{(n)}$ en références-multiples à gauche) obtenues à partir des $\Delta\theta_A^{(n)}$ tel que décrit par les équations (3.105), (3.110) et (3.115) ; et les $\Delta\theta_A^{(n)}$ obtenus par Levenberg-Marquart appliquée à (3.106), (3.111) ou (3.116) :

$$\left(\mathcal{J}^H\mathcal{J} + \lambda_{LM}\mathrm{diag}\left(\mathcal{J}^H\mathcal{J}\right)\right)\Delta\theta_A = \mathcal{J}^H E \tag{3.119}$$

3.1.2 Recherche de l'estimateur minimisant l'erreur linéaire

Lorsque l'on considère l'erreur linéaire, la minimisation moindres carrés consiste en la recherche du minimum d'un fonction coût $S(\theta)$ quadratique par rapport aux paramètres θ. Cette recherche passe par la dérivation de la fonction coût par rapport aux paramètres, dérivation qui doit s'annuler en son minimum. Quelque soit le type d'identification (référence-simple ou références-multiples), on peut distinguer trois étapes principales :

1. Calcul de la fonction coût $S(\theta)$
2. Dérivation de $S(\theta)$ par rapport aux paramètres θ
3. Résolution d'un problème de type $Mv = 0$ et détermination des paramètres minimisant $S(\theta)$

3.1.2.1 Calcul de la fonction coût

Comme précédemment, nous étudierons successivement les trois type d'identification du modèle ARX linéarisé : référence-simple, références-multiples à droite et références-multiples à gauche.

Référence-simple

On part de l'Equation (3.12)

$$\epsilon_{oi}^L(z_k) = B_{oi}(z_k) - A(z_k)H_{oi}(z_k) \tag{3.120}$$

$$= \left[\begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-q}\end{bmatrix} \quad H_{oi}(z_k)\begin{bmatrix}1 & \dots & z_k^{-p}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\theta_{B_{oi}} \\ \theta_A\end{bmatrix} \tag{3.121}$$

avec $\theta_{B_{oi}}$ et θ_A déjà définis par les équations (3.50) et (3.48). En regroupant les équations d'erreurs associées à chaque variable z_k, on peut écrire :

$$E_{oi} = \begin{bmatrix}X_{oi} & Y_{oi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{B_{oi}} \\ \theta_A\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e \times 1} \tag{3.122}$$

avec

$$X_{oi} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & z_1^{-q} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & z_{N_e}^{-q} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e \times (q+1)} \tag{3.123}$$

et

$$Y_{oi} = \begin{bmatrix} -H_{oi}(z_1) \begin{bmatrix} 1 & \dots & z_1^{-p} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ -H_{oi}(z_{N_e}) \begin{bmatrix} 1 & \dots & z_{N_e}^{-p} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_e \times (p+1)} \tag{3.124}$$

On utilise la même définition qu'à l'Equation (3.41) qui conduit maintenant à :

$$E = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \dots & [0]_{N_e \times (q+1)} & Y_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_e \times (q+1)} & \dots & X_{N_o 1} & \dots & [0]_{N_e \times (q+1)} & Y_{N_o 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_e \times (q+1)} & \dots & [0]_{N_e \times (q+1)} & \dots & X_{N_o N_i} & Y_{N_o N_i} \end{bmatrix} \theta \tag{3.125}$$

avec $E \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1}$, $\theta = \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_A \end{bmatrix}$ (Equation (3.47)) et θ_B défini par l'Equation (3.49).

On a ainsi

$$S(\theta) = E^H E$$

Ce qui donne

$$S(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \left(\theta_{B_{oi}}^H R_{oi} + \theta_A^H S_{oi}^H \right) \theta_{B_{oi}} + \left(\sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \theta_{B_{oi}}^H S_{oi} + \theta_A^H T_{oi} \right) \theta_A \tag{3.126}$$

où

$$R_{oi} = X_{oi}^H X_{oi} \in \mathbb{C}^{(q+1)\times(q+1)} \tag{3.127}$$

$$S_{oi} = X_{oi}^H Y_{oi} \in \mathbb{C}^{(q+1)\times(p+1)} \tag{3.128}$$

$$T_{oi} = Y_{oi}^H Y_{oi} \in \mathbb{C}^{(p+1)\times(p+1)} \tag{3.129}$$

Références-multiples à droite

On part de l'Equation (3.25)

$$\text{vec}\left(\epsilon_o^L(z_k)\right) = B_o^{(lig)}(z_k) - H_o^{(lig)}(z_k)\mathbf{A}(z_k) \tag{3.130}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_k^{-q} I_{N_i} \end{bmatrix} \; - \left(I_{N_i} \otimes H_o^{(lig)}(z_k) \right) \begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_k^{-p} I_{N_i^2} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \theta_{B_{oi}} \\ \theta_A \end{bmatrix} \tag{3.131}$$

avec θ_{B_o} et θ_A déjà définis par les équations (3.53) et (3.51). En regroupant les équations d'erreurs associées à chaque variable z_k, on peut écrire :

$$E_o = \begin{bmatrix} X_o & Y_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{B_o} \\ \theta_A \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_e \times 1} \tag{3.132}$$

avec

$$X_o = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_1^{-q} I_{N_i} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_{N_e}^{-q} I_{N_i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_e \times N_i(q+1)} \tag{3.133}$$

et

$$Y_o = \begin{bmatrix} -\left(I_{N_i} \otimes H_o^{(lig)}(z_1)\right) \begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_1^{-p} I_{N_i^2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ -\left(I_{N_i} \otimes H_o^{(lig)}(z_{N_e})\right) \begin{bmatrix} I_{N_i^2} & \dots & z_{N_e}^{-p} I_{N_i^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_i N_e \times N_i^2(p+1)} \tag{3.134}$$

On utilise la même définition qu'à l'Equation (3.43) qui conduit maintenant à :

$$E = \begin{bmatrix} X_1 & \dots & [0]_{N_e \times N_i(q+1)} & Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_e \times N_i(q+1)} & \dots & X_{N_o} & Y_{N_o} \end{bmatrix} \theta \tag{3.135}$$

avec $E \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_e \times 1}$, $\theta = \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_A \end{bmatrix}$ (Equation (3.47)) et θ_B défini par l'Equation (3.52).

On a ainsi

$$\begin{aligned} S(\theta) &= E^H E \\ &= \theta^H \begin{bmatrix} R_1 & \dots & [0]_{N_i(q+1) \times N_i(q+1)} & S_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0]_{N_i(q+1) \times N_i(q+1)} & \dots & R_{N_o} & S_{N_o} \\ S_1^H & \dots & S_{N_o}^H & \sum_{o=1}^{N_o} T_o \end{bmatrix} \theta \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S(\theta) = \sum_{o=1}^{N_o} \left(\theta_{B_o}^H R_o + \theta_A^H S_o^H\right) \theta_{B_o} + \left(\sum_{o=1}^{N_o} \theta_{B_o}^H S_o + \theta_A^H T_o\right) \theta_A \tag{3.136}$$

où

$$R_o = X_o^H X_o \in \mathbb{C}^{N_i(q+1) \times N_i(q+1)} \tag{3.137}$$

$$S_o = X_o^H Y_o \in \mathbb{C}^{N_i(q+1) \times N_i^2(p+1)} \tag{3.138}$$

$$T_o = Y_o^H Y_o \in \mathbb{C}^{N_i^2(p+1) \times N_i^2(p+1)} \tag{3.139}$$

Références-multiples à gauche

On part de l'Equation (3.23)

$$\begin{aligned}\epsilon_i^L(z_k) &= B_i^{(col)}(z_k) - H_i^{(col)}(z_k)\mathbf{A}(z_k) && (3.140)\\ &= \left[\begin{bmatrix} I_{N_i} & \dots & z_k^{-q} I_{N_i}\end{bmatrix} \quad -\left(H_i^{(col)^T}(z_k)\otimes I_{N_o}\right)\left[I_{N_o^2}\right]\right]\begin{bmatrix}\theta_{B_i}\\ \theta_A\end{bmatrix} && (3.141)\end{aligned}$$

avec θ_{B_i} et θ_A déjà définis par les équations (3.56) et (3.54). En regroupant les équations d'erreur associées à chaque variable z_k, on peut écrire :

$$E_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{B_i}\\ \theta_A\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_oN_e\times 1} \tag{3.142}$$

avec

$$X_i = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{N_o} & \dots & z_1^{-q} I_{N_o}\end{bmatrix}\\ \vdots \\ \begin{bmatrix} I_{N_o} & \dots & z_{N_e}^{-q} I_{N_o}\end{bmatrix}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_oN_e\times N_o(q+1)} \tag{3.143}$$

et

$$Y_i = \begin{bmatrix} -\left(H_i^{(col)^T}(z_1)\otimes I_{N_o}\right)\begin{bmatrix} I_{N_o^2} & \dots & z_1^{-p} I_{N_o^2}\end{bmatrix}\\ \vdots \\ -\left(H_i^{(col)^T}(z_{N_e})\otimes I_{N_o}\right)\begin{bmatrix} I_{N_o^2} & \dots & z_{N_e}^{-p} I_{N_o^2}\end{bmatrix}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N_oN_e\times N_o^2(p+1)} \tag{3.144}$$

On utilise la même définition qu'à l'Equation (3.45) qui conduit maintenant à :

$$E = \begin{bmatrix} X_1 & \dots & [0]_{N_oN_e\times N_o(q+1)} & Y_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ [0]_{N_oN_e\times N_o(q+1)} & \dots & X_{N_i} & Y_{N_i}\end{bmatrix}\theta \tag{3.145}$$

avec $E \in \mathbb{C}^{N_oN_iN_e\times 1}$, $\theta = \begin{bmatrix}\theta_B\\ \theta_A\end{bmatrix}$ (Equation (3.47)) et θ_B défini par l'Equation (3.55).

On a ainsi

$$\begin{aligned} S(\theta) &= E^H E\\ &= \theta^H \begin{bmatrix} R_1 & \dots & [0]_{N_o(q+1)\times N_o(q+1)} & S_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ [0]_{N_o(q+1)\times N_o(q+1)} & \dots & R_{N_i} & S_{N_i}\\ S_1^H & \dots & S_{N_i}^H & \sum_{i=1}^{N_i} T_i\end{bmatrix}\theta\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{N_i} \left(\theta_{B_i}^H R_i + \theta_A^H S_i^H\right) \theta_{B_i} + \left(\sum_{i=1}^{N_i} \theta_{B_i}^H S_i + \theta_A^H T_i\right) \theta_A \tag{3.146}$$

où

$$R_i = X_i^H X_i \in \mathbb{C}^{N_o(q+1)\times N_o(q+1)} \tag{3.147}$$

$$S_i = X_i^H Y_i \in \mathbb{C}^{N_o(q+1)\times N_o^2(p+1)} \tag{3.148}$$

$$T_i = Y_i^H Y_i \in \mathbb{C}^{N_o^2(p+1)\times N_o^2(p+1)} \tag{3.149}$$

3.1.2.2 Dérivation de la fonction coût

Le minimum d'une fonction quadratique positive est obtenu au point d'annulation de ses dérivées partielles, i.e. lorsque sa matrice jacobienne est nulle. On note $J_{S,\theta}$ la matrice jacobienne de la fonction coût $S(\theta)$ par rapport au vecteur des paramètres θ. Quelque soit la méthode utilisée (référence-simple, références-multiples à droite ou références-multiples à gauche), on peut écrire :

$$J_{S,\theta} = \left[J_{S,\theta_B} \quad J_{S,\theta_A}\right] \tag{3.150}$$

$$= [0]_{1\times(N_o N_i(q+1)+d_A)} \tag{3.151}$$

avec,
- En référence-simple,
  - la fonction coût définie par l'Equation (3.126),
  - θ_B et θ_A définis par les équations (3.49) et (3.48)
  - et $d_A = (p+1)$
- En références-multiples à droite,
  - la fonction coût définie par l'Equation (3.136),
  - θ_B et θ_A définis par les équations (3.52) et (3.51)
  - et $d_A = N_i^2(p+1)$
- En références-multiples à gauche,
  - la fonction coût définie par l'Equation (3.146),
  - θ_B et θ_A définis par les équations (3.55) et (3.54)
  - et $d_A = N_o^2(p+1)$

Référence-simple

On a d'une part :

$$J_{S,\theta_B} = \left[J_{S,\theta_{B_{11}}} \quad \dots \quad J_{S,\theta_{B_{N_o 1}}} \quad \dots \quad J_{S,\theta_{B_{N_o N_i}}}\right] \tag{3.152}$$

avec,

$$J_{S,\theta_{B_{oi}}} = \theta_{B_{oi}}^H R_{oi} + \theta_A^H S_{oi}^H \tag{3.153}$$

La condition $J_{S,\theta_{B_{oi}}} = [0]_{1\times N_o N_i(q+1)}$ implique :

$$\theta_{B_{oi}} = -R_{oi}^{-1} S_{oi} \theta_A \tag{3.154}$$

avec R_{oi} une matrice symétrique hermitienne.

On a d'autre part :

$$J_{S,\theta_A} = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \theta_{B_{oi}}^H S_{oi} + \theta_A^H T_{oi} \tag{3.155}$$

La condition $J_{S,\theta_A} = [0]_{1\times d_A}$ et l'Equation (3.154) implique :

$$\left(\sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} S_{oi}^H R_{oi}^{-1} S_{oi} - T_{oi} \right) \theta_A = [0]_{1\times d_A} \tag{3.156}$$

avec T_{oi} une matrice symétrique hermitienne.

Références-multiples à droite

On a d'une part :

$$J_{S,\theta_B} = \begin{bmatrix} J_{S,\theta_{B_1}} & \dots & J_{S,\theta_{B_{N_o}}} \end{bmatrix} \tag{3.157}$$

avec,

$$J_{S,\theta_{B_o}} = \theta_{B_o}^H R_o + \theta_A^H S_o^H \tag{3.158}$$

La condition $J_{S,\theta_{B_o}} = [0]_{1\times N_o N_i(q+1)}$ implique :

$$\theta_{B_o} = -R_o^{-1} S_o \theta_A \tag{3.159}$$

avec R_o une matrice symétrique hermitienne.

On a d'autre part :

$$J_{S,\theta_A} = \sum_{o=1}^{N_o} \theta_{B_o}^H S_o + \theta_A^H T_o \tag{3.160}$$

La condition $J_{S,\theta_A} = [0]_{1\times d_A}$ et l'Equation (3.159) implique :

$$\left(\sum_{o=1}^{N_o} S_o^H R_o^{-1} S_o - T_o \right) \theta_A = [0]_{1\times d_A} \tag{3.161}$$

avec T_o une matrice symétrique hermitienne.

Références-multiples à gauche

On a d'une part :

$$J_{S,\theta_B} = \begin{bmatrix} J_{S,\theta_{B_1}} & \dots & J_{S,\theta_{B_{N_i}}} \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

avec,

$$J_{S,\theta_{B_i}} = \theta_{B_i}^H R_o + \theta_A^H S_i^H \tag{3.163}$$

La condition $J_{S,\theta_{B_i}} = [0]_{1\times N_o N_i(q+1)}$ implique :

$$\theta_{B_i} = -R_i^{-1} S_i \theta_A \tag{3.164}$$

avec R_i une matrice symétrique hermitienne.

On a d'autre part :

$$J_{S,\theta_A} = \sum_{i=1}^{N_i} \theta_{B_i}^H S_i + \theta_A^H T_i \tag{3.165}$$

La condition $J_{S,\theta_A} = [0]_{1\times d_A}$ et l'Equation (3.164) implique :

$$\left(\sum_{i=1}^{N_i} S_i^H R_i^{-1} S_i - T_i \right) \theta_A = [0]_{1\times d_A} \tag{3.166}$$

avec T_i une matrice symétrique hermitienne.

On constate encore une fois que les trois méthodes donnent des expressions très similaires. On pourra écrire, dans les trois cas, que le problème revient à résoudre :

$$D\theta_A = [0]_{1\times d_A} \tag{3.167}$$

avec,

– en référence-simple :

$$D = \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} S_{oi}^H R_{oi}^{-1} S_{oi} - T_{oi} \in \mathbb{C}^{(p+1)\times(p+1)} \tag{3.168}$$

– en références-multiples à droite :

$$D = \sum_{o=1}^{N_o} S_o^H R_o^{-1} S_o - T_o \in \mathbb{C}^{N_i^2(p+1)\times N_i^2(p+1)} \tag{3.169}$$

– en références-multiples à gauche :

$$D = \sum_{i=1}^{N_i} S_i^H R_i^{-1} S_i - T_i \in \mathbb{C}^{N_o^2(p+1)\times N_o^2(p+1)} \tag{3.170}$$

3.1.2.3 Résolution du problème

L'Equation (3.167) représente un système linéaire homogène (second membre nul). L'ensemble des vecteurs θ_A solutions de (3.167) constitue le noyau de la matrice carrée D. Si cette matrice est inversible, alors son noyau est restreint au vecteur nul. Ceci serait évidemment problématique dans notre cas ! Si D n'est pas inversible, i.e. pas de rang plein, alors la dimension du noyau est égale à la dimension de D moins son rang. Dans le cas référence-simple, la dimension de D est $(p+1)$. Cependant, le problème (3.167) est associé au polynôme $A(z_k)$ d'ordre p. Un tel polynôme a p racines. On considérera donc que D sera de rang p. Son noyau sera donc de dimension 1. Il en sera de même dans les cas références-multiples à droite et à gauche. A droite (respectivement à gauche), le polynôme matriciel $\mathbf{A}(z_k)$ de dimension N_o (respectivement N_i) et d'ordre p a pN_o (respectivement pN_i) racines. Ici, nous avons fait le choix de considérer le problème vectorisé. Ceci à pour conséquence d'augmenter le nombre de racines à pN_o^2 (respectivement pN_i^2), et ceci, pour une dimension de D de $(p+1)N_o^2$ (respectivement $(p+1)N_i^2$). Le noyau de D a pour dimension N_o^2 dans le cas références-multiples à droite et N_i^2 dans le cas références-multiples à gauche.

On écrit :

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_j & \dots & D_p \end{bmatrix} \tag{3.171}$$

avec D_j le bloc colonne associé au coefficient j. On aura ainsi $p+1$ façon de réduire le problème :

Référence-simple

$$\begin{aligned} D\theta_A &= [0]_{1\times d_A} \\ \begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_j & \dots & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} &= [0]_{1\times d_A} \end{aligned}$$

où $D_j \in \mathbb{C}^{(p+1)\times 1}$.

Ce qui implique

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}^{\dagger} D_j \alpha_j \tag{3.172}$$

où $\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}$ est plein rang colonne.

On obtient ainsi $-\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}^{\dagger} D_j \alpha_j$, le jeu de solution pour le vecteur paramètre θ_A, à α_j fixé.

Cependant, dans notre écriture du problème ARX(p,q) (Equation 2.43), on a fait le choix de poser $\alpha_0 = 1$. On devra ainsi aussi choisir $j = 0$. Ceci entraîne :

$$\theta_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -\begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_p \end{bmatrix}^{\dagger} D_0 \end{bmatrix} \tag{3.173}$$

Références-multiples à droite et à gauche

$$\begin{aligned} D\theta_A &= [0]_{1\times d_A} \\ \begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_j & \dots & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_j\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_p\right\} \end{bmatrix} &= [0]_{1\times d_A} \end{aligned}$$

où $D_j \in \mathbb{C}^{N_o^2(p+1)\times N_o}$ (respectivement $D_j \in \mathbb{C}^{N_i^2(p+1)\times N_i}$) en références-multiples à droite (respectivement à gauche).

Ce qui implique

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_0\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_{j-1}\right\} \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_{j+1}\right\} \\ \vdots \\ \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_p\right\} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}^{\dagger} D_j \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_j\right\} \tag{3.174}$$

où $\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}$ est plein rang colonne.

On obtient ainsi $-\begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{j-1} & D_{j+1} & \dots & D_p \end{bmatrix}^{\dagger} D_j \mathrm{vec}\left\{[\alpha]_j\right\}$, le jeu de solution pour le vecteur paramètre θ_A, à $\mathrm{vec}\left\{[\alpha]_j\right\}$ fixé.

De même que pour le cas référence-simple, pour le problème ARX sous sa description fraction matricielle, on a fait le choix de poser $[\alpha]_0 = I_{N_o}$ (références-multiples à droite) ou $[\alpha]_0 = I_{N_i}$ (références-multiples à gauche). On devra ainsi aussi choisir $j = 0$. Ceci

entraine en références-multiples à droite :

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left[I_{N_o}\right] \\ -\begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_p \end{bmatrix}^\dagger D_0 \end{bmatrix} \tag{3.175}$$

et en références-multiples à gauche :

$$\theta_A = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left[I_{N_i}\right] \\ -\begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_p \end{bmatrix}^\dagger D_0 \end{bmatrix} \tag{3.176}$$

Que ce soit en référence-simple ou en références-multiples, d'autres contraintes ont été étudiées ([CGV+04b]).

3.1.2.4 Proposition d'une nouvelle méthode de résolution du problème

Le problème $D\theta_A$ que l'on tente de résoudre à la Section 3.1.2.3 est la recherche du noyau de la matrice D. Ce noyau est non réduit à l'espace nul si et seulement si D n'est pas de plein rang. On a fait l'hypothèse à la Section 3.1.2.3 que cette matrice a un noyau de dimension 1. La recherche de ce noyau peut être faite directement à partir de la matrice D, sans choisir de contrainte, par une décomposition en valeur singulière.

$$D = U_D \Sigma_D V_D^H$$

D'après la Définition 24 (voir Section 3.2.1), une base du noyau de D correspond aux vecteurs de U associés aux valeurs singulières nulles. Si la dimension de ce noyau est 1, alors une base du noyau est le dernier vecteur de U (si l'algorithme utilisé classe les valeurs singulières de D de manière décroissante dans Σ_D). On posera donc

$$\theta_A u_n \tag{3.177}$$

avec $U_D = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$. Cette méthode ne peut évidement fonctionner que si D n'est pas de plein rang. Cependant, si la matrice D est de plein rang, le noyau est réduit à l'espace nul et le fait de fixer une contrainte (méthode décrite à la Section 3.1.2.3) implique que l'on obtient une solution biaisée du problème. Dans ce cas, on ne résoud plus exactement le problème initial.

3.1.3 Application d'un poids

Il est souvent utile d'appliquer une pondération (notée w_{oi}, w_i ou w_o) aux éléments statistiques que l'on somme dans la fonction coût ($\epsilon_{oi}(z_k)$ en référence-simple, $\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right]$ en références-multiples à droite et $\epsilon_i^{(col)}(z_k)$ en références-multiples à gauche). On parle alors de minimisation moindres carrés pondérés (MCP, voir Definition 20). D'un point de vue opérationnel, cette pondération est généralement vue comme un moyen de réduire l'influence d'un couple de capteur/excitation, d'un capteur ou d'une excitation dans le calcul de la fonction coût. D'un point de vue statistique,

une pondération particulière permet de standardiser les lois des éléments statistiques lorsque ces éléments suivent des lois gaussiennes centrées non identiquement distribuées (variances différentes). En pondérant les éléments par leur écart type σ, la minimisation moindres carrés fournit un estimateur de maximum de vraisemblance.

Référence-simple On part de l'Equation (3.5) (ou de manière équivalente, dans le cas linéaire, de l'Equation (3.13))

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} w_{oi}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)^*\epsilon_{oi}(z_k) \\ &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \left(w_{oi}^{\frac{1}{2}}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)\right)^* \left(w_{oi}^{\frac{1}{2}}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)\right) \\ &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \widetilde{\epsilon_{oi}}(z_k)^*\widetilde{\epsilon_{oi}}(z_k) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\epsilon_{oi}}(z_k) = w_{oi}^{\frac{1}{2}}(z_k)\epsilon_{oi}(z_k)$ et en considérant $w_{oi}(z_k) \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $w_{oi}^{\frac{1}{2}}(z_k) \in \mathbb{R}$).

Pour prendre en compte la pondération, on utilisera $\epsilon_{oi}\tilde{(z_k)}$ au lieu de $\epsilon_{oi}(z_k)$ dans toutes les étapes de calcul décrites précédemment pour le cas simple référence.

Références-multiples à droite On part de l'Equation (3.33) (ou de manière équivalente, dans le cas linéarisé, de l'Equation (3.34))

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right]^H W_o(z_k)\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right] \\ &= \sum_{i=o}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \left(W_o(z_k)^{\frac{1}{2}}\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right]\right)^H \left(W_o(z_k)^{\frac{1}{2}}\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right]\right) \\ &= \sum_{i=o}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \widetilde{\epsilon_o}^{(lig)}(z_k)^H\widetilde{\epsilon_o}^{(lig)}(z_k) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\epsilon_o}^{(lig)}(z_k) = W_o^{\frac{1}{2}}\mathrm{vec}\left[\epsilon_o^{(lig)}(z_k)\right]$. On a fait ici l'hypothèse que la matrice $W_o(z_k) \in \mathbb{C}^{N_i\times N_i}$ est symétrique hermitienne. Son développement en valeurs singulières est ainsi donné par :

$$W_o(z_k) = U_o(z_k)\Sigma_o(z_k)U_o(z_k)^H \tag{3.178}$$

avec $\Sigma_o(z_k) \in \mathcal{R}_+^{N_i\times N_i}$ la matrice diagonale des valeurs singulières (strictement) positives. On définit la racine carrée de la matrice par :

$$W_o(z_k)^{\frac{1}{2}} = U_o(z_k)\Sigma_o(z_k)^{\frac{1}{2}}U_o(z_k)^H \tag{3.179}$$

Références-multiples à gauche On part de l'Equation (3.35) (ou de manière équivalente, dans le cas linéarisé, de l'Equation (3.36))

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \epsilon_i^{(col)}(z_k)^H W_i(z_k)\epsilon_i^{(col)}(z_k) \\ &= \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \left(W_i(z_k)^{\frac{1}{2}}\epsilon_i^{(col)}(z_k)\right)^H \left(W_i(z_k)^{\frac{1}{2}}\epsilon_i^{(col)}(z_k)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \widetilde{\epsilon}_i^{(col)}(z_k)^H \widetilde{\epsilon}_i^{(col)}(z_k) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\epsilon}_i^{(col)}(z_k) = W_i(z_k)^{\frac{1}{2}}\epsilon_i^{(col)}(z_k)$. On a fait ici l'hypothèse que la matrice $W_i(z_k) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$ est symétrique hermitienne. Son développement en valeurs singulières est ainsi donné par :

$$W_i(z_k)^{\frac{1}{2}} = U_i(z_k)\Sigma_i(z_k)U_i(z_k)^H \tag{3.180}$$

avec $\Sigma_i(z_k) \in \mathcal{R}_+^{N_o \times N_o}$ la matrice diagonale des valeurs singulières (strictement) positives. On définit la racine carrée de la matrice W_i par :

$$W_i(z_k)^{\frac{1}{2}} = U_i(z_k)\Sigma_i(z_k)^{\frac{1}{2}}U_i(z_k)^H \tag{3.181}$$

3.1.4 Estimation des paramètres modaux

Une partie des paramètres modaux peut être obtenue à partir des coefficients de dénominateur. La liste de ces paramètres (et la méthode d'extraction) est directement liée à la modélisation identifiée :

3.1.4.1 A partir d'une modélisation à dénominateur scalaire

Seuls les pôles du système peuvent être extraits à partir du polynôme scalaire. Ils correspondent par définition aux racines de ce polynôme. Les formes modales et les facteurs de participation pourront ensuite être obtenus par une méthode d'identification de type LSFD (*Least Square Frequency Domain*, voir Section 3.3).

3.1.4.2 A partir d'une modélisation à dénominateur matriciel

Que la modélisation soit à gauche ou à droite, les pôles du système correspondent aux valeurs propres de la matrice compagnon associée au polynôme dénominateur matriciel. Avec la description à gauche, on peut obtenir les formes modales à partir des vecteurs propres de la matrice compagnon. Avec la description à droite, ce sont les facteurs de participation que l'on peut extraire de ces vecteurs propres. Une description détaillée est donnée dans [CGV+04a, DT09]. Cette méthode est basée sur l'écriture de

la modélisation ARX sous sa forme canonique, i.e. sous forme de représentation d'état dans la base d'état dans laquelle la matrice de transition d'état correspond à la matrice compagnon du polynôme dénominateur.

On constate que le nombre de pôles détectables du système dépend à la fois du degré du polynôme dénominateur et à la fois, soit du nombre de capteurs (DMF-G), soit du nombre d'excitations (DFM-D). Généralement le nombre de capteurs est très supérieur au nombre d'excitations. Pour un même degré du dénominateur, on observera donc généralement beaucoup plus de pôles avec l'inversion à gauche qu'avec l'inversion à droite (de l'ordre de 10 à 100 fois plus).

3.1.4.3 Des pôles aux fréquences et taux d'amortissement modaux

L'analyse étant faite dans le domaine discret, les pôles μ_j obtenus sont ceux du système discrétisé. Le lien entre ces pôles et les pôles λ_j, ceux du système exprimé dans le domaine continu, est donné par la relation :

$$\lambda_j = \frac{1}{T_e}\left(\ln r_j + i\theta_j\right) \tag{3.182}$$

où $\mu_j = r_j e^{i\theta_j} \in \mathbb{C}$, r_j le module de mu_j et θ_j la phase de mu_j

Les fréquences modales f_m et les taux d'amortissement modaux ξ_m sont liés aux pôles λ_j du système exprimé dans le domaine continu par les relations décrite à la Section 2.5.3.

3.2 Identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité : méthodes sous-espaces

3.2.1 Principe

3.2.1.1 Estimation d'une réalisation de l'observabilité

Les méthodes sous-espace reposent sur la construction d'une matrice $\mathcal{H}$ que l'on nommera "matrice de sous-espace". Par construction, cette matrice devra être de la forme :

$$\mathcal{H} = \Gamma X \tag{3.183}$$

La matrice $\mathcal{H}$ est calculée directement à partir des données mesurées. La matrice Γ est la matrice d'observabilité du système. La matrice X diffère selon la méthode sous-espace utilisée. Il s'agit donc de définir une technique, ainsi que les hypothèses nécessaires à l'utilisation de cette technique, permettant d'extraire l'observabilité Γ à partir de $\mathcal{H}$. La technique proposée ici repose sur six points.

1. Si X est plein rang ligne, alors $\mathcal{H}$ et Γ ont le même espace colonne et on peut écrire $X = TZ$ avec T une matrice inversible qui fixe l'espace d'état.
2. Par définition, pour que le système soit observable, la matrice d'observabilité Γ doit être plein rang colonne.

3. Si Γ est plein rang colonne, elle est une base de son espace colonne, et donc, de l'espace colonne de $\mathcal{H}$.
4. Une base de l'espace colonne de $\mathcal{H}$ peut être obtenue à partir de sa décomposition en valeurs singulières (SVD).
5. Deux bases d'un même espace sont reliées par une matrice inversible. La base obtenue par SVD est donc reliée à l'observabilité par une matrice inversible T.
6. La multiplication à droite de l'observabilité par une matrice inversible T n'a aucun impact sur le système que l'on identifie. Elle correspond simplement à définir la base de l'espace d'état du système.

Le dénomination "sous-espace" provient du fait que ces méthodes d'identification sont basées sur la recherche de l'espace colonne (encore appelé espace image) de $\mathcal{H}$. Cet espace est l'un des quatres sous-espaces fondamentaux de l'algèbre linéaire :

Définition 24 *Les sous-espaces fondamentaux de l'algèbre linéaire*

Soit une matrice $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r. Par décomposition en valeurs singulières on a :

$$M = U\Sigma V^H = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & [0]_{r\times(n-r)} \\ [0]_{(m-r)\times r} & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} \tag{3.184}$$

avec

- $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$,$\Sigma \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ *et* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$
- $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}$,$\Sigma_1 \in \mathbb{R}_+^{r\times r}$ *et* $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$
- $U_2 \in \mathbb{C}^{m\times(m-r)}$,$\Sigma_2 = [0]_{(m-r)\times(n-r)}$ *et* $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}$

Les quatres sous-espaces fondamentaux sont :

- *L'espace colonne (ou image), noté image(M), de dimension r. Une base de ce sous-espace est U_1.*
- *L'espace nul (ou kernel), noté ker(M), de dimension $n-r$. Une base de ce sous-espace est V_2.*
- *L'espace ligne (ou coimage), noté image(M^H), de dimension r. Une base de ce sous-espace est V_1.*
- *L'espace nul gauche (ou cokernel), noté ker(M^H), de dimension $m-r$. Une base de ce sous-espace est U_2.*

Point 1 : $\mathcal{H}$ et Γ ont le même espace colonnes

Ce point nécessite de montrer l'égalité des espace colonnes (i.e. espace image) des matrices Γ et $\mathcal{H} = \Gamma X$, avec $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ une matrice rectangulaire plein rang ligne.

Preuve : Egalité d'espaces colonnes

Soient les matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ une matrice rectangulaire plein rang ligne (i.e. de rang m). On cherche ici à démontrer qu'un vecteur x appartient à l'espace image de la matrice $AB \in \mathbb{C}^{m\times n}$ si et seulement si x appartient à l'espace image de la matrice A :

$$x \in image(AB) \Leftrightarrow x \in image(A) \tag{3.185}$$

– "$\Rightarrow$" : Montrons que si x appartient à l'espace image de AB, alors il appartient à l'espace image de A

$$x \in image(AB) \Leftrightarrow \exists z \backslash (AB)\, z = x$$

On pose $z = B^{\dagger} y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, où $B^{\dagger} = B^H \left(BB^H\right)^{-1}$ car B est plein rang ligne. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} ABz &= x \\ \Rightarrow ABB^H \left(BB^H\right)^{-1} y &= x \\ \Rightarrow Ay &= x \end{aligned}$$

D'où, il existe un vecteur y tel que $Ay = x$ si et seulement si x appartient à l'espace image de A :

$$\exists y \backslash Ay = x \Leftrightarrow x \in image(A)$$

On a donc que si x appartient à l'espace image de AB, alors il appartient à l'image de A :

$$x \in image(AB) \Rightarrow x \in image(A)$$

– "$\Leftarrow$" : Montrons que si x appartient à l'espace image de A, alors il appartient à l'espace image de AB

$$x \in image(A) \Leftrightarrow \exists y \backslash (A)\, y = x$$

On pose $y = Bz \in \mathbb{C}^{m\times 1}$. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} Ay &= x \\ \Rightarrow ABz &= x \end{aligned}$$

D'où, il existe un vecteur z tel que $ABz = x$ si et seulement si x appartient à l'espace image de AB :

$$\exists z \backslash (AB)\, z = x \Leftrightarrow x \in image(AB)$$

On a donc que si x appartient à l'espace image de A, alors il appartient à l'image de AB :

$$x \in image(A) \Rightarrow x \in image(AB)$$

Au final on a bien l'égalité entre $image(AB)$ et $image(A)$, i.e. entre l'espace colonne de AB et celui de A :

$$x \in image(AB) \Leftrightarrow x \in image(A)$$

Donc, de part l'Equation 3.183, on peut dire que $\mathcal{H}$ et Γ ont le même espace colonne, à la seule condition que X soit plein rang ligne.

Point 2 : Un système est observable si l'observabilité est plein rang colonne

Ce point est basé sur la théorie d'observabilité d'un système automatisé ([Son98]). Il nécessite de faire l'hypothèse que le positionnement et le nombre de capteurs permettent d'observer complètement le système, ou tout du moins d'observer les modes de la bande de fréquences considérée.

Point 3 : Observabilité et base de l'espace colonne de $\mathcal{H}$

Si le système est observable, la matrice d'observabilité est une base de l'espace colonne de $\mathcal{H}$. Il s'agit de trouver une base de cet espace (point 4).

Point 4 : Base de l'espace colonne de $\mathcal{H}$

D'après la définition 24, une base de l'espace colonne est la matrice U_1.

Point 5 : Infinité de base pour un même espace

Si une matrice M est une base d'un espace, alors la matrice MT (avec T une matrice inversible) est aussi une base de cet espace ([GVL12]). On choisira dans ce document d'utiliser la base $U_1\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ et de la définir comme étant la matrice d'observabilité Γ.

$$\Gamma = U_1\Sigma_1^{\frac{1}{2}} \tag{3.186}$$

Point 6 : Choix de la base de l'espace d'état

On a choisi de fixer la matrice d'observabilité tel qu'écrit ci-dessus ((3.186)). Cependant, toute matrice $\widetilde{\Gamma} = \Gamma T$ (avec T inversible) convient et permet d'identifier le même système. Le choix de T permet de fixer la base de l'espace d'état (i.e. le vecteur d'état de la représentation d'état). Par exemple, la modélisation d'état dans le domaine en $\mathcal{Z}$ décrite par l'Equation (2.69) est définie à une base x fixée de l'espace d'état :

$$\begin{array}{rcl} zx(z) & = & A_d x(z) + B_d u(z) \\ y(z) & = & C_d x(z) + D_d u(z) \end{array} \tag{3.187}$$

En considérant le changement de base

$$\widetilde{x} = T^{-1}x \tag{3.188}$$

Cette modélisation devient

$$\begin{array}{rcl} z\widetilde{x}(z) & = & \widetilde{A_d}\widetilde{x}(z) + \widetilde{B_d}u(z) \\ y(z) & = & \widetilde{C_d}\widetilde{x}(z) + \widetilde{D_d}u(z) \end{array} \tag{3.189}$$

avec,

- $\widetilde{A_d} = T^{-1}A_dT$
- $\widetilde{B_d} = T^{-1}B_d$
- $\widetilde{C_d} = C_dT$
- $\widetilde{D_d} = D_d$

Quel que soit le domaine de travail (Figure 2.5), le système est décrit de manière équivalente par le quadruplet (A, B, C, D) et par le quadruplet $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}\right)$. Il y donc une infinité de modélisation d'état équivalente, chacune définie par le choix d'une base de l'espace d'état. Cependant, toutes les représentations d'état correspondent à la même fonction (matrice) de transfert :

Preuve : Invariance de la fonction (matrice) de transfert lors du changement de base de l'espace d'état

Soit $\mathbf{H}(z)$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{H}}(z)$) la matrice de transfert associée à la représentation d'état d'ordre n définie par le quadruplet (A, B, C, D) (respectivement $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}\right)$). A partir de l'Equation (2.70) on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbf{H}}(z) & = & \widetilde{C}\left(I_nz - \widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B} + \widetilde{D} \\ & = & CT\left(I_nz - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}B + D \\ & = & C\left(I_nz - A\right)^{-1}B + D \\ & = & \mathbf{H}(z) \end{array}$$

Comme on la déjà dit pour les matrices d'observabilité associées aux représentations d'état définies par les quadruplet (A, B, C, D) et $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}\right)$ sont reliées par la relation :

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma T \tag{3.190}$$

De même, les matrices de contrôlabilités Ξ et$\widetilde{\Xi}$ sont reliées par la relation :

$$\widetilde{\Xi} = T^{-1}\Xi \tag{3.191}$$

Preuve : Impact du changement de base de l'espace d'état sur les matrices d'observabilité et de contrôlabilité

Pour la relation concernant l'observabilité (3.190), on part de l'Equation (2.81) pour une représentation d'ordre n

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \widetilde{C} \\ \widetilde{C}\widetilde{A} \\ \dots \\ \widetilde{C}\widetilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} CT \\ CT\left(T^{-1}AT\right) \\ \dots \\ CT\left(T^{-1}AT\right)^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \dots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} \\
&= \Gamma T
\end{aligned}$$

Pour la relation concernant la contrôlabilité (3.191), on part de l'Equation (2.82) pour une représentation d'ordre n

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Xi} &= \begin{bmatrix} \widetilde{B} & \widetilde{A}\widetilde{B} & \dots & \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T^{-1}B & \left(T^{-1}AT\right)T^{-1}B & \dots & \left(T^{-1}AT\right)^{n-1}T^{-1}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T^{-1}B \\ T^{-1}AB \\ \dots \\ T^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= T^{-1}\Xi
\end{aligned}$$

Comme le choix de la base de l'espace d'état n'influence pas les résultats, on considérera le cas simple où la matrice T est l'identité et où on identifiera Γ (et pour une méthode spécifique, Ξ) à partir de la relation arbitraire (3.186).

3.2.1.2 Estimation des matrices d'une réalisation de la représentation d'état

L'intérêt d'identifier la (une réalisation de la) matrice d'observabilité est qu'elle contient la matrice de transition d'état A et la matrice d'observation C. Ces deux matrices permettent d'obtenir une estimation des pôles du système et des déformations modales. Voyons tout d'abord comment extraire ces deux matrices à partir de la connaissance de Γ.

- **La matrice de transition d'état A**
  Une méthode pour extraire la matrice de transition de la matrice d'observabilité est basée sur les matrices :
  $$\overline{\Gamma} = \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix}$$
  et
  $$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-2}T \end{bmatrix}$$
  On remarque la relation
  $$\overline{\Gamma} = \underline{\Gamma} A \tag{3.192}$$
  L'hypothèse plein rang colonne pour la matrice d'observabilité (voir Point 2), permet de s'assurer que $\underline{\Gamma}$ est aussi plein rang colonne. On peut donc obtenir A par pseudo-inversion à gauche de $\underline{\Gamma}$:
  $$A = \underline{\Gamma}^{\dagger}\overline{\Gamma} \tag{3.193}$$
  avec $\underline{\Gamma}^{\dagger} = \left(\underline{\Gamma}^{H}\underline{\Gamma}\right)^{-1}\underline{\Gamma}^{H}$.
- **La matrice dobservation C**
  L'extraction de la matrice d'observation à partir de la matrice d'observabilité est triviale. De part la structure de Γ, il s'agit simplement de récupérer ses N_o premières lignes.

Si on veut en plus obtenir les matrices B et D, on pourra noter que la matrice de transfert $\mathbf{H}$, pour A et C fixées, est linéaire en B et D :

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} C\left(I_n z - A\right)^{-1} & I_{N_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

Avec l'hypothèse que $\begin{bmatrix} C\left(I_n z - A\right)^{-1} & I_{N_o} \end{bmatrix}$ soit plein rang colonne, on aura :

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\left(I_n z - A\right)^{-1} & I_{N_o} \end{bmatrix}^{\dagger} \mathbf{H}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{3.194}$$

Cette dernière étape ne sera pas traitée dans ce document. La matrice B peut être utilisée pour identifier les masses modales (non étudiées dans ce document). Concernant la matrice D, elle est considérée nulle car il n'y a pas de transmission directe dans les simulations considérées.

De manière similaire, si on a réussi à estimer une réalisation de la matrice de contrôlabilité B, on peut en extraire :

– La matrice A

$$A = |\Xi \; \Xi|^{\dagger} \tag{3.195}$$

où

$$\Xi| = \begin{bmatrix} B & \dots & A^{n-2}B \end{bmatrix}$$

et

$$|\Xi = \begin{bmatrix} AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

avec $\Xi|$ plein rang ligne. Cette hypothèse est directement validée à partir de l'hypothèse que la matrice de contrôlabilité est plein rang ligne. Cette dernière hypothèse est nécessaire pour considérer que le système est complètement contrôlable par les excitations appliquées (tout du moins sur la bande de fréquences considérée).

– La matrice B par extraction des N_i premières colonnes ;

Comme précédemment, avec A et B fixées, la matrice de transfert est linéaire en C et D. On pourra ainsi compléter l'identification de la représentation de la manière suivante :

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_n z - A)^{-1} B \\ I_{N_i} \end{bmatrix}$$

Avec l'hypothèse que $\begin{bmatrix} (I_n z - A)^{-1} B \\ I_{N_i} \end{bmatrix}$ soit plein rang ligne, on aura :

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \mathbf{H}(z) \begin{bmatrix} (I_n z - A)^{-1} B \\ I_{N_i} \end{bmatrix}^{\dagger} \tag{3.196}$$

Encore une fois, cette dernière étape ne sera pas traitée dans ce document. Dans les méthodes étudiées dans ce document, la matrice C est identifiée à partir de la matrice d'observabilité.

3.2.1.3 Estimation des paramètres modaux

Comme déjà évoqué par l'Equation (2.72), les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice de transition d'état. Très souvent, la matrice de transition d'état estimée est celle du système discret. La première étape sera donc de revenir dans le domaine continu à l'aide de la relation donnée à l'Equation (2.62) qui relie les matrices de transition d'état des domaines continus et discrets :

$$A_d = e^{A_c T_e}$$

Les matrices A_d et A_c ont les mêmes vecteurs propres Ψ (voir Définition 17 pour la définition de Ψ). Leur valeurs propres sont reliés par la relation

$$\mu_j = e^{\lambda_j T_e}$$

où μ_j et λ_j correspondent au j^{me} mode exprimé respectivement dans le domaine discret et continu ; et où T_e correspond à la période d'échantillonnage utilisé pour discrétiser (ou mesurer) les signaux mesurées.

Ces relations concernant les valeurs propres et vecteurs propres sont le résultat de la diagonalisation d'une exponentielle de matrice. On rappelle que A_c est diagonalisable dans sa base de vecteur propre (Equation (2.74)).

Les pôles λ_j du domaine de continu (domaine de Laplace) sont donc obtenus par :

$$\lambda_j = \frac{1}{T_e}\left(\ln r_j + i\theta_j\right) \tag{3.197}$$

où $\mu_j = r_j e^{i\theta_j} \in \mathbb{C}$, r_j le module de mu_j et θ_j la phase de mu_j

On se place dans le cas d'un système oscillatoire tel que défini à la Section 2.5.3 où

$$\lambda_j = -\omega_j \xi_j + i\omega_j\sqrt{1-\xi^2} \tag{3.198}$$

où (pour plus de détail voir Section 2.5.3)

- $\omega_j = \frac{f_j}{2\pi}$ est la pulsation propre du mode j et f_j est la fréquence propre du mode j
- ξ_j est le taux d'amortissement du mode j

On en déduit donc

$$f_j = \frac{r_j}{2\pi} \tag{3.199}$$

et

$$\xi_j = -\frac{R\left(\lambda_j\right)}{r_j} \tag{3.200}$$

On notera aussi qu'un système est dit stable si et seulement si ces pôles respectent les conditions équivalentes suivantes : Dans le domaine discret

$$r_j < 1 \tag{3.201}$$

ou dans le domaine continu

$$R\left(\lambda_j\right) < 0 \tag{3.202}$$

A partir de l'estimation de la matrice d'observation C et des vecteurs propres à droite ψ de A on pourra en déduire les formes modales observées φ_j par

$$\varphi_j = C\psi_j \tag{3.203}$$

A partir de l'estimation de la matrice de transmission des entrées aux états B et des vecteurs propres à droite ψ de A on pourra en déduire les facteurs de participation L_j de ses entrées par

$$L_j = \psi_j^{-1} B \tag{3.204}$$

3.2.2 Formulation matricielle de la représentation d'état

Pour pouvoir construire les matrices sous-espaces associée à chacune des méthodes sous-espaces étudiées ici, il est nécessaire de compléter la modélisation par représentation d'état décrite à la Secion 2.3. On introduira les matrices de données et d'états, ainsi que les représentations d'états sous forme matricielle.

3.2.2.1 Les matrices de données et d'états

Définition 25 *Matrices de données*

Soit N_e échantillons s_i d'un signal discret. La matrice de données $\mathcal{S}_{a|b}$ est définie par :

$$\mathcal{S}_{a|b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} S_a \\ \vdots \\ S_b \end{bmatrix} \quad \forall a \leq b \leq N_e - N + 1 \ ,$$

où $S_i = \begin{bmatrix} s_i & s_{i+1} & \dots & s_{i+N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times N} \ \forall i \in [a;b]$

Soit $N+p+q$ le nombre d'échantillons disponibles pour les signaux discrets d'entrées et de sorties u et y. Soit $N+p+q$ le nombre d'états x et le nombre d'échantillons du bruit blanc centré v affectant les sorties (bruit de mesure). A partir de la Définition 25, on définit les matrices "passées" ($^-$) et "futures" ($^+$) par :

Matrices des données d'entrées passées et futures :

$$\mathcal{U}^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{U}_{0|q-1}, \quad \mathcal{U}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{U}_{q|q+p-1} \tag{3.205}$$

Matrices des données de sorties passées et futures :

$$\mathcal{Y}^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{Y}_{0|q-1}, \quad \mathcal{Y}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{Y}_{q|q+p-1} \tag{3.206}$$

Dans le cadre de la modélisation d'état, on définira aussi les matrices des états passées et futures :

$$\mathcal{X}^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{X}_{0|0}, \quad \mathcal{X}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{X}_{q|q} \tag{3.207}$$

et les matrices de bruits blancs centrées affectant les sorties passées et futures :

$$\mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{V}_{0|q-1}, \quad \mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{V}_{q|q+p-1} \tag{3.208}$$

3.2.2.2 Les représentations d'états sous forme matricielle

On considère la représentation d'état dans le domaine temporel continu dont les sorties sont affectées par un bruit blanc centré v

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) & = & C_c x(t) + D_c u(t) + v(t) \end{array} \tag{3.209}$$

On considérera deux types de sources d'excitation : l'une connue $u^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^{N_i\times 1}$ et l'autre inconnue $u^{(2)}(t) \in \mathbb{R}^{N_u i\times 1}$. Le nombre de sources d'excitations inconnues N_{ui} est évidemment inconnu. On aura, par extension, une matrice B de transmission des excitations aux états et une matrice D de transmission directe des excitations aux sorties pour chacun des deux types de sources. On notera $B_c^{(1)} \in \mathbb{R}^{n\times N_i}$ et

$B_c^{(2)} \in \mathbb{R}^{n\times N_{ui}}$ les matrices de transmission des excitations respectivement connues et inconnues. De même, on notera $D_c^{(1)} \in \mathbb{R}^{N_o\times N_i}$ et $D_c^{(2)} \in \mathbb{R}^{N_o\times N_{ui}}$ les matrices de transmission directe des excitations respectivement connues et inconnues. En définissant $u(t) = \begin{bmatrix} u^{(1)^T}(t) & u^{(2)^T}(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(N_i+N_{ui})\times 1}$, $B_c = \begin{bmatrix} B_c^{(1)} & B_c^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(N_i+N_{ui})}$ et $D_c = \begin{bmatrix} D_c^{(1)} & D_c^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_o\times(N_i+N_{ui})}$, le modèle (3.209) reste le même. Comme à la Section (2.3), on considère une discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro à une période d'échantillonnage T_e. On obtient la représentation d'état temporelle discrétisée :

$$\begin{aligned} x(n+1) &= A_d x(n) + B_d u(n) \\ y(n) &= C_d x(n) + D_d u(n) + v(n) \end{aligned} \tag{3.210}$$

Où les relations (2.62), (2.63), (2.64) et (2.65) relient les matrices du système continu à celle du système discrétisé.

Si on considère simultanément les $N_e = N + p + q$ échantillons de chacun des signaux (connus et inconnus) et les N_e états, on peut écrire la représentation d'état (on considèrera la modélisation temporelle discrétisée) sous sa forme matricielle :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^- = \Gamma_q \mathcal{X}^- + H_q \mathcal{U}^- + \mathcal{V}^- = \Gamma_q \mathcal{X}^- + \begin{bmatrix} H_q^{(1)} & H_q^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1^- \\ \mathcal{U}_2^- \end{bmatrix} + \mathcal{V}^- \\ \mathcal{Y}^+ = \Gamma_p \mathcal{X}^+ + H_p \mathcal{U}^+ + \mathcal{V}^+ = \Gamma_p \mathcal{X}^+ + \begin{bmatrix} H_p^{(1)} & H_p^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1^+ \\ \mathcal{U}_2^+ \end{bmatrix} + \mathcal{V}^+ \\ \mathcal{X}^+ = A^q \mathcal{X}^- + \Delta_q \mathcal{U}^- = A^q \mathcal{X}^- + \begin{bmatrix} \Delta_q^{(1)} & \Delta_q^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1^- \\ \mathcal{U}_2^- \end{bmatrix} \end{cases}, \tag{3.211}$$

où

- $\Gamma_i = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i.N_o\times n}$ correspond à une matrice d'observabilité à i blocs lignes. On notera que pour que Γ_i soit plein rang colonne (système observable), une condition nécessaire est que $i.N_o \geq n$.
- $\Delta_i = \begin{bmatrix} A_d^{i-1}B_d & A_d^{i-2}B_d & \dots & A_d B_d & B_d \end{bmatrix} = \Xi_i S \in \mathbb{R}^{n\times i.N_i}$ est une matrice de contrôlabilité "renversée" à i blocs colonnes , avec $S = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On notera que pour que Δ_i (i.e. Ξ) soit plein rang ligne (système contrôlable), une condition nécessaire est que $i.N_i \geq n$.
- $H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \vdots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(i+1)N_o\times(i+1)N_i}$.

L'utilisation des matrices de données "passées" et "futures" apporte d'intéressantes propriétés pour la construction des matrices de sous-espaces $\mathcal{H}$: Soient $\mathcal{Y}^+$ et $\mathcal{U}^-$ construites à partir des échantillons des signaux discret stationnaires y et u. Il vient :

$$\mathcal{U}^+\mathcal{Y}^{-T} = \begin{bmatrix} R_{[u,y]_q} & R_{[u,y]_{q-1}} & \dots & R_{[u,y]_1} \\ R_{[u,y]_{q+1}} & R_{[u,y]_q} & \dots & R_{[u,y]_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{[u,y]_{q+p-1}} & R_{[u,y]_{q+p-2}} & \dots & R_{[u,y]_p} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{U}^-\mathcal{Y}^{-T} = \begin{bmatrix} R_{[u,y]_0} & R_{[u,y]_{-1}} & \dots & R_{[u,y]_{1-q}} \\ R_{[u,y]_1} & R_{[u,y]_0} & \dots & R_{[u,y]_{2-q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{[u,y]_{q-1}} & R_{[u,y]_{q-2}} & \dots & R_{[u,y]_0} \end{bmatrix}, \tag{3.212}$$

$$\mathcal{U}^+\mathcal{Y}^{+T} = \begin{bmatrix} R_{[u,y]_0} & R_{[u,y]_{-1}} & \dots & R_{[u,y]_{1-p}} \\ R_{[u,y]_1} & R_{[u,y]_0} & \dots & R_{[u,y]_{2-p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{[u,y]_{p-1}} & R_{[u,y]_{p-2}} & \dots & R_{[u,y]_0} \end{bmatrix}$$

où $R_{[u,y]}$ est une estimation des fonction de corrélations entre les signaux stationnaires u and y

$$R_{[u,y]_i} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+i}y_n^T$$

De plus, si u et y sont aussi des processus aléatoires ergodiques (voir Section 4.2) et centrés (i.e. d'espérance nulle), alors $R_{[u,y]_i}$ constitue une bonne estimation de la covariance entre u_{n+i} et y_n. Ces propriétés seront nécessaires pour l'estimation des incertitudes (7.2), lors de la dérivation des équations associées aux méthodes sous-espaces.

Donc, sous l'hypothèse que les signaux sont des processus aléatoires gaussiens, stationnaires, ergodiques et centrés, les corrélations et les covariances des signaux sont équivalents. Si en plus on suppose que les entrées inconnues $u^{(2)}(t)$ et que le bruit de mesure $v(t)$ sont des bruits blancs centrés, alors on obtient les propriétés suivantes qui seront très utiles pour la construction des matrices sous-espaces $\mathcal{H}$:

- $\mathcal{U}_2^+\mathcal{Y}^{-T} = 0$ car un bruit blanc "futur" n'est pas corrélé aux sorties "passées"
- $\mathcal{V}_2^+\mathcal{Y}^{-T} = 0$ car un bruit blanc , même affectant les sorties "futures", n'est pas corrélé aux sorties "passées"

Cependant, ces propriétés d'annulation par non corrélation ne sont vraies que pour une infinité de données. En pratique, ces matrices de corrélations ($\mathcal{U}_2^+\mathcal{Y}^{-T}$ et $\mathcal{V}_2^+\mathcal{Y}^{-T}$) sont estimées à partir d'une quantité finie d'échantillons et elles convergent vers la matrice nulle lorsque le nombre d'échantillons augmente. On peut ne pas avoir la nullité si ces estimations n'ont pas convergé, i.e. si le nombre d'échantillons n'est pas suffisant. Dans la Section 3.2.3, pour construire les matrices sous-espaces $\mathcal{H}$ de manière théorique,

on considèrera que la quantité de données est suffisante pour que toutes les estimations de corrélations aient convergé.

Enfin, pour clore cette section, voici quelques définitions énoncées dans [VODM96]. Ces définitions sont la base de la construction des matrices $\mathcal{H}$ basée sur les projections.

Définition 26 *Soient A et B deux espaces. La projection orthogonal de A sur B est définie par :*

$$(A/B) \stackrel{\text{def}}{=} A\pi_B \stackrel{\text{def}}{=} AB^T \left(BB^T\right)^{-1} B \tag{3.213}$$

Définition 27 *Soient A, B et C trois espaces. La projection oblique de A sur B le long de C est définie par :*

$$(A/_C B) \stackrel{\text{def}}{=} A\pi_{C^\perp} \left(B\pi_{C^\perp}\right)^\dagger B \tag{3.214}$$

Lemme 28 *Propriétés d'un projecteur orthogonal*

Soient un espace A et l'espace nul 0 :

1. $\pi_{A^\perp} = I - \pi_A$
2. $\pi_A^T = \pi_A$
3. $\pi_A \pi_A = \pi_A$
4. $A\pi_{A^\perp} = 0$

Ces propriétés sont toujours exactes et, contrairement aux propriétés liées aux corrélations, ne nécessitent aucune hypothèse de convergence. Cependant, la Propriété 3 et la Propriété 4 requièrent que AA^T soit de plein rang.

3.2.3 A chaque méthode sous-espace, sa matrice sous-espace

On rappelle que le but recherché est de définir une matrice $\mathcal{H}$, dite de sous-espace, comme étant le produit de la matrice d'observabilité Γ et d'une matrice X. Dans cette section, cinq matrices sous-espace $\mathcal{H}$ sont présentées. Chacune est associée à une méthode sous-espace et à une matrice X différente. Deux correspondent à des méthodes de type *Output-Only* et trois correspondent à des méthodes de type *Input/Ouput*.

3.2.3.1 Méthodes *Output-Only*

Ces méthodes sont basées sur l'hypothèse que la structure n'est excitée que par du bruit blanc inconnu. Ce type de problématique est aussi appelé OMA (*Operational Modal Analysis*). Cette dénomination est liée au fait qu'un essai est considéré comme purement opérationnel lorsque la structure étudiée n'est soumise qu'à son environnement extérieur (turbulences en vol, trafic sur un pont, etc.). L'excitation est alors inconnue et il est très souvent nécessaire de faire l'hypothèse qu'elle correspond à un bruit blanc centré

pour pouvoir construire les matrices sous-espaces. L'Equation (3.211) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^- = \Gamma_q \mathcal{X}_2^- + H_q^{(2)} \mathcal{U}_2^- + \mathcal{V}^- \\ \mathcal{Y}^+ = \Gamma_p \mathcal{X}_2^+ + H_p^{(2)} \mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+ \\ \mathcal{X}_2^+ = 0 \\ \mathcal{X}_2^+ = A^q \mathcal{X}_2^- + \Delta_q^{(2)} \mathcal{U}_2^- \end{cases} \tag{3.215}$$

Méthode *Output-Only Covariance-driven*

La méthode *Output-Only Covariance-driven* est basée sur le produit des matrices de sorties "futures" et "passées" telle que définies par l'Equation (3.206). Ce produit (3.212) correspond aux lags de corrélations 1 à $p+q-1$ entre les N_o signaux de sorties ([VODM96],[PDR99],[DM12]).

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{OOcov} &= \mathcal{Y}^+ \mathcal{Y}^{-^T} \\ &= (\Gamma_p \mathcal{X}_2^+ + H_p^{(2)} \mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+) \mathcal{Y}^{-^T} \\ &= \Gamma_p \mathcal{X}_2^+ \mathcal{Y}^{-^T} \\ &= \Gamma_p \mathcal{Z}_{OOcov} \end{aligned} \tag{3.216}$$

Méthode *Output-Only Orthogonal Projection Data-driven*

La méthode *Output-Only Orthogonal Projection Data-driven* est aussi connue sous le nom UPC (Unweighted Principal Component). Elle est basée sur la projection de l'espace ligne des sorties "futures" sur l'espace ligne des sorties "passées" ([VODM96],[PDR99],[DM12]).

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{OOort} &= \mathcal{Y}^+ / \mathcal{Y}^- \\ &= \mathcal{Y}^+ \mathcal{Y}^{-^T} \left(\mathcal{Y}^- \mathcal{Y}^{-^T} \right)^{-1} \mathcal{Y}^- \\ &= \Gamma_p \mathcal{Z}_{OOcov} \left(\mathcal{Y}^- \mathcal{Y}^{-^T} \right)^{-1} \mathcal{Y}^- \\ &= \Gamma_p \mathcal{Z}_{OOort} \end{aligned} \tag{3.217}$$

3.2.3.2 Méthodes *Input/Output*

Les méthodes *Input/Output* sont basées sur l'hypothèse que

- le système est excité par une entrée connue ($u^{(1)}(t)$) et une entrée inconnue supposée être un bruit blanc centré ($u^{(2)}(t)$),
- les capteurs sont affectés par un bruit blanc centré ($v(t)$).

On parle aussi d'essai de type OMAX (*Operationnal Modal Analysis with Exogenous inputs*). Il s'agit d'un essai opérationnel, i.e. où la structure est soumise à son environnement naturel, avec un ajout d'excitations connues. Les essais en vol (pour un avion) avec excitation par les gouvernes est un exemple d'essai OMAX.

Remarque 29 *Lorsque toutes les excitations sont connues, i.e. aucune influence de l'environnement, on parle d'essai EMA (Experimental Modal Analysis). Ces essais sont purement expérimentaux.*

L'Equation (3.211) devient :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^- = \Gamma_q(\mathcal{X}_1^- + \mathcal{X}_2^-) + H_q^{(1)}\mathcal{U}_1^- + H_q^{(2)}\mathcal{U}_2^- + \mathcal{V}^- \\ \mathcal{Y}^+ = \Gamma_p(\mathcal{X}_1^+ + \mathcal{X}_2^+) + H_p^{(1)}\mathcal{U}_1^+ + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+ \\ \mathcal{X}_1^+ = A^q\mathcal{X}_1^- + \Delta_q^{(1)}\mathcal{U}_1^- \\ \mathcal{X}_2^+ = A^q\mathcal{X}_2^- + \Delta_q^{(2)}\mathcal{U}_2^- \end{cases} \tag{3.218}$$

Méthode *Input/Output Covariance-driven*

Cette méthode est basée sur la méthode *Data-driven* MOESP ([VODM96]). La matrice MOESP est multipliée à droite par la matrice des sorties "passées" $\mathcal{Y}^{-T}$ dans le but d'obtenir une méthode Covariance-driven. Cette méthode a été proposée par [EAM12].

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{OIcov} &= (\mathcal{Y}^+/\mathcal{U}_1^{+\perp})\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+ + H_p\mathcal{U}^+ + \mathcal{V}^+)/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}]\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+ + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+)/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}]\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}} + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+)]\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= \Gamma_p\mathcal{X}^+/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= \Gamma_p\mathcal{Z}_{OIcov} \end{aligned} \tag{3.219}$$

On notera ici que si le signal connu u_1 est un bruit blanc, alors la projection orthogonal de $\mathcal{X}^+$ sur $\mathcal{U}_1^{+\perp}$ n'a pas d'influence. Dans ce cas on aura :

$$\mathcal{Z}_{OIcov} = \mathcal{X}^+\mathcal{Y}^{-^T}$$

Méthode *Input/Output Orthogonal Projection data-driven*

Cette méthode décrite par [VODM96] est équivalente à la méthode MOESP.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{OIort} &= (\mathcal{Y}^+/\mathcal{U}_1^{+\perp}) \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+ + H_p\mathcal{U}^+ + \mathcal{V}^+)/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}] \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+ + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+)/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}] \\ &= [(\Gamma_p\mathcal{X}^+/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}} + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+)] \end{aligned} \tag{3.220}$$

On notera que cette méthode ne devrait être utilisée que pour des essais de type EMA car elle nécessite que toutes les excitations soient connues et que les capteurs ne soient affectés par aucun bruit. On notera aussi, que si le signal connu u_1 est un bruit blanc, alors la projection orthogonal de $\mathcal{X}^+$ sur $\mathcal{U}_1^{+\perp}$ n'a pas d'influence. Dans ce cas on aura :

$$\mathcal{H}_{OIort} = [(\Gamma_p\mathcal{X}^+ + H_p^{(2)}\mathcal{U}_2^+ + \mathcal{V}^+)]$$

Méthode *Input/Output Oblique Projection data-driven*

Cette méthode est aussi décrite par [VODM96] qui prouve qu'elle est équivalente à la méthode N4SID en termes d'identification.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OIobl} &= \left(\mathcal{Y}^+/_{\mathcal{U}_1^+}\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1^-\\ \mathcal{Y}^-\end{bmatrix}\right)\\ &= \left(\mathcal{Y}^+/\mathcal{U}_1^{+\perp}\right)\left(\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1^-\\ \mathcal{Y}^-\end{bmatrix}/\mathcal{U}_1^{+\perp}\right)^{\dagger}\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1^-\\ \mathcal{Y}^-\end{bmatrix}\\ &= \Gamma_p\mathcal{Z}_{OIobl}\end{aligned} \tag{3.221}$$

La démonstration de cette égalité est donnée dans [VODM96].

3.2.3.3 Du *Data-driven* au *Covariance-driven*

Définition 30 ***Terminologie*** *: On définit le carré d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ par la matrice $A_{sq} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que :*

$$A_{sq} = AA^T \tag{3.222}$$

Soit $\mathcal{H}_{dat}$ une matrice associée à une méthode *Data-driven*. Comme expliqué à la Section 3.2.1.1 (Equation (3.186)), on choisi de définir la matrice d'observabilité par $= U_{dat}\Sigma_{dat}^{\frac{1}{2}}$.

Soit $\mathcal{H}_{cov} = \mathcal{H}_{dat_{sq}} = \mathcal{H}_{dat}\mathcal{H}_{dat}^T$

$$\mathcal{H}_{cov} = \mathcal{H}_{dat}\mathcal{H}_{dat}^T = \left(U_{dat}\Sigma_{dat}V_{dat}^T\right)\left(V_{dat}\Sigma_{dat}U_{dat}^T\right) = U_{dat}\Sigma_{dat}^2U_{dat}^T = U_{cov}\Sigma_{cov}V_{cov}^T\ ,$$

alors

$$U_{cov} = U_{dat},\quad \Sigma_{cov} = \Sigma_{dat}^2,\quad V_{cov} = U_{dat}$$

et

$$\Gamma_{cov} = U_{cov}\Sigma_{cov}^{\frac{1}{2}} = U_{dat}\Sigma_{dat}$$

Pour obtenir la même identification avec la matrice rectangle $\mathcal{H}_{dat}$ et avec la matrice carré $\mathcal{H}_{cov}$, il suffit de redéfinir la construction de Γ par :

$$\Gamma_{dat} = U_{cov}\Sigma_{cov}^{\frac{1}{4}} = U_{dat}\Sigma_{dat}^{\frac{1}{2}} \tag{3.223}$$

Même si les incertitudes associées à la méthode basée sur $\mathcal{H}_{dat}$ ne peuvent pas être estimées (car la dimension des matrices sous-espace associées grandirait lorsque le nombre d'échantillons augmente), on pourra toujours estimer celles associées à la méthode basée sur $\mathcal{H}_{cov}$, méthode conduisant exactement à la même identification.

Remarque 31 *On peut continuer de définir la matrice d'observabilité par $U_{cov}\Sigma_{cov}^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $U_{cov}\Sigma_{cov}^{\frac{1}{4}}$, il est cependant évident que dans ce cas l'identification obtenue sera différente de celle obtenue avec Γ_{dat}.*

3.2.3.4 Construction de méthode *Covariance-driven* à partir des méthodes *Data-driven* proposées

A partir des méthodes décrites aux Sections 3.2.3.1, 3.2.3.2, 3.2.3.2, à partir de la terminologie définie à la Définition 30 et à partir de la méthodologie décrite à la Section 3.2.3.3, trois méthodes Covariance-driven sont proposées ici :

1. La méthode *Output-Only* ***Squared*** *Orthogonal Projection Data-driven* qui est équivalente à la méthode *Output-Only Orthogonal Projection Data-driven* (Section 3.2.3.1) en termes d'identification
2. La méthode *Input/Output* ***Squared*** *Orthogonal Projection Data-driven* qui est équivalente à la méthode *Input/Output Orthogonal Projection Data-driven* (Section 3.2.3.2) en termes d'identification
3. La méthode *Input/Output* ***Squared*** *Oblique Projection Data-driven* qui est équivalente à la méthode *Input/Output Oblique Projection Data-driven* (Section 3.2.3.2) en termes d'identification

Méthode *Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven*

De part sa construction, cette méthode pourrait aussi être nommée *Squared UPC*. Elle est basée sur la méthode décrite à la Section 3.2.3.1 ainsi que sur les propriétés énoncées au Lemme 28.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OOsqort} &= \mathcal{Y}^+/\mathcal{Y}^- \left(\mathcal{Y}^+/\mathcal{Y}^-\right)^T \\ &= \mathcal{Y}^+ \pi_{\mathcal{Y}^-} \mathcal{Y}^{+^T} \\ &= \mathcal{H}_{OOort} \mathcal{Y}^{+^T} \\ &= \mathcal{H}_{OOcov} \left(\mathcal{Y}^- \mathcal{Y}^{-^T}\right)^{-1} \mathcal{H}_{OOcov}^T\end{aligned} \tag{3.224}$$

Méthode *Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven*

Cette méthode est basée sur l'équation (3.220) ainsi que sur les propriétés énoncées au Lemme 28.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OIsqort} &= \mathcal{Y}^+ \pi_{\mathcal{U}_1^{+\perp}} \mathcal{Y}^{+^T} \\ &= \mathcal{H}_{OIort} \mathcal{Y}^{+^T}\end{aligned} \tag{3.225}$$

Méthode *Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven*

Cette méthode est décrite par [VODM96]. Elle est équivalente à utiliser le carré (tel que défini par 30) de la matrice associée à la méthode N4SID, i.e. le carré de la matrice proposée à la Section 3.2.3.2 (Equation (3.221)).

$$\mathcal{H}_{OIsqobl} = \mathcal{H}_{OIobl} \mathcal{H}_{OIobl}^T \tag{3.226}$$

où

$$\mathcal{H}_{OIobl} = \left(\mathcal{Y}^+/\mathcal{U}_1^{+\perp}\right) \left(\mathcal{W}^-/\mathcal{U}_1^{+\perp}\right)^\dagger \mathcal{W}^- \tag{3.227}$$

et $\mathcal{W}^- = \begin{bmatrix}\mathcal{U}_1^- \\ \mathcal{Y}^-\end{bmatrix}$.

Si $\left(\mathcal{W}^{-}/\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}\right)$ est plein rang ligne, l'Equation (3.227) peut s'écrire :

$$\mathcal{H}_{OIobl} = \left(\mathcal{Y}^{+}/\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}\right)\left(\mathcal{W}^{-}/\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}\right)^{T}\left[\left(\mathcal{W}^{-}/\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}\right)\left(\mathcal{W}^{-}/\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}\right)^{T}\right]^{-1}\mathcal{W}^{-} \tag{3.228}$$

En utilisant l'Equation 3.228 et les propriétés énoncées au Lemme 28, l'Equation (3.226) peut s'écrire :

$$\mathcal{H}_{OIsqobl} = \mathcal{Y}^{+}\pi_{\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}}\mathcal{W}^{-^{T}}\left(\mathcal{W}^{-}\pi_{\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}}\mathcal{W}^{-^{T}}\right)^{-1}\mathcal{W}^{-}\mathcal{W}^{-^{T}}\left(\mathcal{W}^{-}\pi_{\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}}\mathcal{W}^{-^{T}}\right)^{-1}\mathcal{W}^{-}\pi_{\mathcal{U}_1^{+^{\perp}}}\mathcal{Y}^{+^{T}} \tag{3.229}$$

3.2.3.5 Quelques remarques concernant les méthodes sous-espace proposées

Conditionnement de $\mathcal{Y}^{-}\mathcal{Y}^{-^{T}}$

On peut constater que dans l'Equation (3.220) et dans l'Equation (3.225), on fait l'hypothèse que $\mathcal{Y}^{-}\mathcal{Y}^{-^{T}}$ est de plein rang. Dans certains cas cette hypothèse peut ne pas être validée, particulièrement lorsque qu'il y a un écart trop important entre les niveaux énergétiques des capteurs. Dans l'industrie on utilise des méthodes pour faire face à ce type de problème, comme par exemple la normalisation des données mesurées aux capteurs ou le retrait de certains capteurs pour l'analyse. Cependant ces solutions ont toujours une contrepartie néfaste. La normalisation peut donner une trop grande importance aux capteurs faiblement excités, augmentant ainsi les effets néfastes du bruit de capteur. Le retrait de capteurs faiblement excités peut engendrer une perte d'information importante pour l'analyse de modes peu excités.

$\mathcal{H}_{OOcov}$ and $\mathcal{H}_{OIcov}$

On note que sous les mêmes conditions d'excitation, les matrices $\mathcal{Z}_{OOcov}$ et $\mathcal{Z}_{OIcov}$ sont identiques. La principale différence entre les méthodes "OO_{cov}" et "OI_{cov}" est la connaissance d'une partie de l'excitation. Concernant la méthode Output-only Covariance-driven, toute l'excitation est considérée inconnue. Le terme d'excitation dans l'Equation (3.216) est annulé par le produit avec $\mathcal{Y}^{-^{T}}$ car les excitations futures ne sont pas corrélées aux observations passées. On doit donc faire l'hypothèse que l'estimation de cette corrélation a bien convergé pour être certain que le produit soit nul. Concernant le terme d'état $\mathcal{X}_2^{+}$ de l'Equation (3.216), il est le même que le terme d'état $\mathcal{X}^{+}$ dans l'Equation (3.219) car ils correspondent tous les deux à l'état engendré par l'excitation totale du système. La seule différence entre ces deux méthodes est donc uniquement liée à la façon dont on annule le terme d'excitation. Là où la méthode "OO_{cov}" nécessite la convergence de la corrélation entre les observations futures et toutes les excitations, la méthode "OI_{cov}" ne nécessite cette convergence qu'entre les observations futures et les excitations inconnues. En effet, pour cette méthode, l'annulation du terme des excitations connues est basée sur la projection orthogonale $\mathcal{U}_1^{+}/_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}$ qui est exactement nulle à l'unique condition que $\mathcal{U}_1^{+}\mathcal{U}_1^{+^{T}}$ soit de plein rang.

$\mathcal{H}_{OIcov}$, $\mathcal{H}_{OIort}$ and $\mathcal{H}_{OIsqort}$

Comme vu à la Section 3.2.3.2, la grandeur $\mathcal{H}_{OIort}$ est en théorie un bon candidat pour l'extraction de la matrice d'observabilité à la condition qu'il n'y ait ni excitations inconnues, ni bruit sur les capteurs. On remarquera que les méthode "OI_{cov}" et "OI_{ort}" sont reliées par la relation $\mathcal{H}_{OIcov} = \mathcal{H}_{OIort}\mathcal{Y}^{-^T}$. Sous les hypothèses énoncées à la Section 3.2.2.2 concernant la nullité de certaines matrices de corrélation, la multiplication à droite par $\mathcal{Y}^{-^T}$ annule les effets de excitations inconnues et du bruit de capteur. Evidement, ceci n'est vrai que si les estimations des fonctions de corrélation ont convergé (i.e. le nombre d'échantillon est suffisamment élevé). Concernant $\mathcal{H}_{OIsqort}$, cette matrice peut être exprimée en fonction de $\mathcal{H}_{OIort}$ et de $\mathcal{Y}^{+^T}$ par $\mathcal{H}_{OIsqort} = \mathcal{H}_{OIort}\mathcal{Y}^{+^T}$. Cette multiplication à droite par $\mathcal{Y}^{+^T}$ n'annule pas, même théoriquement, les effets des excitations inconnues et du bruit de capteur. Comme $\mathcal{H}_{OIort}$, $\mathcal{H}_{OIsqort}$ ne devrait être utilisée que dans le cas d'essais de type EMA. Néanmoins, la robustesse de la méthode Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven sera testée à la Section 9.

3.3 Identification à partir de la modélisation modale, LSFD

Il s'agit ici d'identifier certains paramètres de la modélisation modale (Equation (2.94)) à partir d'une estimation de la matrice de transfert et d'une pré-identification des pôles, de pôles et des formes modales ou des pôles et des facteurs de participation. Le but étant d'identifier les paramètres modaux manquant. On considèrera ici que la matrice de transmission directe des efforts D est nulle pour simplifier les équations. Cependant, dans le cas de système où cette hypothèse n'est pas possible, il sera nécessaire connaître la matrice D pour procéder à une identification LSFD.

3.3.1 LSFD basée uniquement sur la connaissance des pôles

A partir des pôles et des valeurs (généralement estimés, voir Section 3.1.4 et Section 3.2.1.3) de la matrice de transfert $H \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$, on peut identifier les résidus modaux contenant les formes modales et les facteurs de participation modaux.

$$H = \begin{bmatrix} H(i\omega_1) \\ \vdots \\ H(i\omega_{N_e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{N_o}}{i\omega_1 - \lambda_1} & \cdots & \frac{I_{N_o}}{i\omega_1 - \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{I_{N_o}}{i\omega_{N_e} - \lambda_1} & \cdots & \frac{I_{N_o}}{i\omega_{N_e} - \lambda_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir obtenir les résidus $R_j \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$, une condition nécessaire est donc que $N_e > m$, car $\begin{bmatrix} \frac{I_{N_o}}{i\omega_1 - \lambda_1} & \cdots & \frac{I_{N_o}}{i\omega_1 - \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{I_{N_o}}{i\omega_{N_e} - \lambda_1} & \cdots & \frac{I_{N_o}}{i\omega_{N_e} - \lambda_m} \end{bmatrix}$ doit être plein rang colonne pour que l'on puisse calculer sa pseudo-inverse. Chaque résidu R_j est en théorie une dyade ([Ari90]) obtenue par le produit de la forme modale du mode j $\phi_j \in \mathbb{C}^{N_o \times 1}$ et de son facteur de participation $L_j \in \mathbb{C}^{N_i \times 1}$. Ces résidus sont donc des matrices de rang 1. Cependant, en

pratique, rien n'assure que les R_j soient de rang 1. Pour en extraire les formes modales et les facteurs de participation modaux, on procède à leur décomposition en valeurs singulières :

$$R_j = U_j \Sigma_j V_j^H$$

La forme modale du mode j correspond à la première colonne de U_j (base de l'espace image de R_j). Le facteur de participation du mode j correspond à la première colonne de V_j (base de l'espace co-image de R_j).

3.3.2 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des formes modales

En utilisant les pôles, les formes modales et les valeurs de la matrice de transfert, on peut identifier les facteurs de participation modaux par :

$$H = \begin{bmatrix} H(i\omega_1) \\ \vdots \\ H(i\omega_{N_e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_1}{i\omega_1-\lambda_1} & \cdots & \frac{\phi_m}{i\omega_1-\lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_1}{i\omega_{N_e}-\lambda_1} & \cdots & \frac{\phi_m}{i\omega_{N_e}-\lambda_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^H \\ \vdots \\ L_m^H \end{bmatrix}$$

Contrairement à la méthode basée uniquement sur les pôles, la connaissance des formes modales $\phi_j \in \mathbb{C}^{N_o \times 1}$ permet d'identifier directement les facteurs de participation $L_j \in \mathbb{C}^{N_i \times 1}$, sans rechercher une base de la co-image du résidu R_j. La pseudo-inversion de $\begin{bmatrix} \frac{\phi_1}{i\omega_1-\lambda_1} & \cdots & \frac{\phi_m}{i\omega_1-\lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\phi_1}{i\omega_{N_e}-\lambda_1} & \cdots & \frac{\phi_m}{i\omega_{N_e}-\lambda_m} \end{bmatrix}$ nécessite cependant que cette matrice soit plein rang colonne, i.e. il est nécessaire d'avoir $N_e > m$.

3.3.3 LSFD basée sur la connaissance des pôles et des facteurs de participation

En utilisant les pôles, les facteurs de participation modaux et les valeurs de la matrice de transfert, on peut identifier les formes modales par :

$$H = \begin{bmatrix} H(i\omega_1) & \dots & H(i\omega_{N_e}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L_1^H}{i\omega_1-\lambda_1} & \cdots & \frac{L_1^H}{i\omega_{N_e}-\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{L_m^H}{i\omega_1-\lambda_m} & \cdots & \frac{L_m^H}{i\omega_{N_e}-\lambda_m} \end{bmatrix}$$

Contrairement à la méthode basée uniquement sur les pôles, la connaissance des facteurs de participations modaux $L_j \in \mathbb{C}^{N_i \times 1}$ permet d'identifier directement les formes modales $\phi_j \in \mathbb{C}^{N_o \times 1}$, sans rechercher une base de l'image du résidu R_j. La pseudo-inversion de $\begin{bmatrix} \frac{L_1^H}{i\omega_1-\lambda_1} & \cdots & \frac{L_1^H}{i\omega_{N_e}-\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{L_m^H}{i\omega_1-\lambda_m} & \cdots & \frac{L_m^H}{i\omega_{N_e}-\lambda_m} \end{bmatrix}$ nécessite cependant que cette matrice soit plein rang ligne, i.e. il est nécessaire d'avoir $N_e > m$.

3.4 Les diagrammes de stabilité

3.4.1 Principe

Quelque soit la méthode d'identification choisie, il est nécessaire de fixer l'ordre du modèle qu'on souhaite identifier. Malheureusement, cet ordre n'est jamais une donnée connue lorsque l'on étudie des structures réelles (non simulées). De plus, l'ordre du modèle détermine le nombre de pôle du système. Cependant, le système suivi n'est pas composé uniquement de la structure physique étudiée, ce système correspond à cette structure plongée dans un environnement. Les pôles identifiés ne sont pas toujours des modes physiques de la structure. Ils peuvent aussi être des pôles dits *spurious*, i.e. non physiques, qui proviennent d'erreurs de modélisation ou de différents bruits affectant les mesures. Faire la distinction entre modes physiques (i.e. vrai modes de la structure) et poles non-physiques est crucial pour l'analyse modale de la structure. Une méthode très couramment utilisée est basée sur l'observation empirique que seuls les modes physiques sont robustes par rapport à une mauvaise estimation de l'ordre du système. L'idée est de faire varier l'ordre du modèle et de tracer les fréquences (et parfois les amortissements) identifiées en fonction de l'ordre utilisé pour la modélisation. Un mode physique sera reconnaissable visuellement car il sera stable (fréquence plus ou moins constante) en fonction de l'ordre. On distinguera (plus ou moins) facilement les modes physiques qui apparaitront comme des tiges dans un nuage de pôles non-physiques. Ces graphiques sont appelés diagramme de stabilité (voir Figure 3.1). Plus une méthode fournira des diagrammes de stabilité claire, plus elle sera simple à exploiter de manière opérationnelle. Dans ces diagrammes nous n'affichons que les modes ayant un amortissement positif. De plus, pour faciliter l'étude des diagrammes, nous indiquons le type de stabilité du pôle avec un code et une couleur :

- "s" rouge :
  - la fréquence est stable selon l'ordre (moins d'1% d'écart avec la fréquence identifiée à l'ordre précédent)
  - le taux d'amortissement est stable selon l'ordre (moins de 10% d'écart avec le taux d'amortissement identifié à l'ordre précédent)
- "f" bleu :
  - la fréquence est stable selon l'ordre (moins d'1% d'écart avec la fréquence identifiée à l'ordre précédent)
  - le taux d'amortissement est instable selon l'ordre (plus de 10% d'écart avec le taux d'amortissement identifié à l'ordre précédent)
- "d" rose :
  - la fréquence est instable selon l'ordre (plus d'1% d'écart avec la fréquence identifiée à l'ordre précédent)
  - le taux d'amortissement est stable selon l'ordre (moins de 10% d'écart avec le taux d'amortissement identifié à l'ordre précédent)
- "o" noir :
  - la fréquence est instable selon l'ordre (plus d'1% d'écart avec la fréquence identifiée à l'ordre précédent)

– le taux d'amortissement est instable selon l'ordre (plus de 10% d'écart avec le taux d'amortissement identifié à l'ordre précédent)

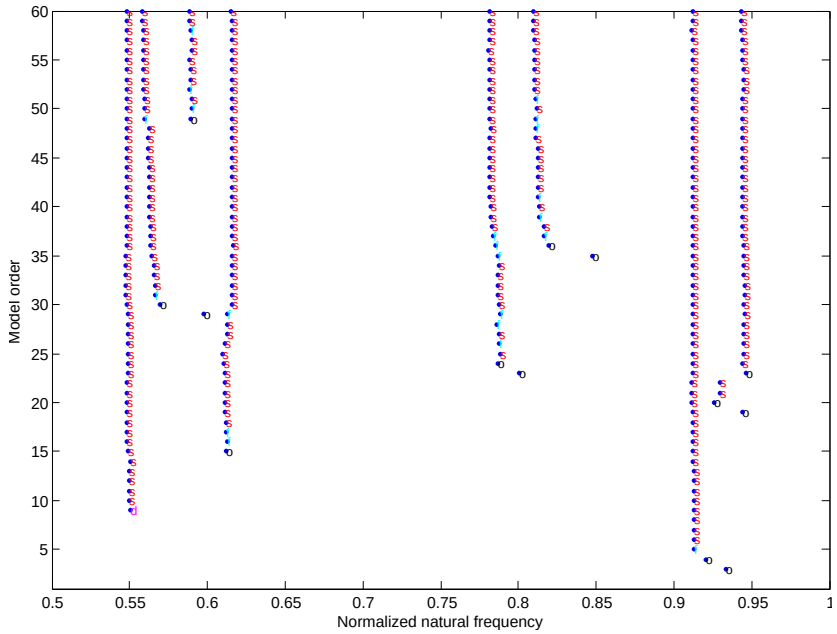


FIGURE 3.1 – Exemple de diagramme de stabilité de fréquences

Bien évidemment, la méthode de construction de ces diagrammes est directement liée au type de méthode d'identification utilisée. Une méthode de construction rapide pour les méthodes d'identification de modèle ARX est décrite dans [VV01, Ver02, DT09]. Pour les méthodes d'identification sous-espaces, une méthode de construction rapide est décrite dans [DM12]. Une méthode pour rendre plus claires les diagrammes obtenus par une méthode sous-espace est décrite dans [DM+10a, GDMA11].

3.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois familles de méthodes d'identification modale qui permettent d'identifier les paramètres de chacune des trois familles de modélisations décrites dans ce chapitre :

– Les méthodes de minimisation d'erreur par moindres carrés adaptées à l'identification d'une modélisation ARX (voir Section 3.1).
– Les méthodes sous-espace adaptées à l'identification de l'espace colonne de la matrice d'observabilité d'une représentation d'état (voir Section 3.2).
– Les méthodes de minimisation d'erreur par moindres carrés adaptées à l'identification d'une modélisation modale (voir Section 3.3).

Concernant l'identification d'une modélisation ARX, nous avons présenté des méthodes basées sur la minimisation par moindres carrés d'erreur non linéaire (voir Section 3.1.1)

et des méthodes basées sur la minimisation par moindre carrés d'erreur linéarisée (méthodes de type LSCF, voir Section 3.1.2). Nous avons vu que, sous certaines conditions de pondération, la minimisation par moindres carrés d'erreur non linéaire correspond à la recherche d'un estimateur du maximum de vraisemblance (MLE, voir Section 3.1). Ces deux méthodes sont décrites sous leur formalisme référence-simple et références-multiple. Finalement, pour la méthode utilisant une erreur linéarisée, nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution du problème $D\theta_\alpha = 0$ basée sur une décomposition en valeurs singulières (voir Section 3.1.2.4). Nous avons aussi sensibilisé le lecteur sur la nécessité d'avoir une matrice D non inversible, sans quoi le vecteur solution θ_α serait réduit au vecteur nul (voir Section 3.1.2.3).

Concernant l'identification sous-espace, nous avons justifié la recherche de l'espace colonne de la matrice d'observabilité d'une représentation d'état en définissant ce qu'est l'espace colonne d'une matrice (voir Définition 3.2.1.1). Après avoir donné la chaîne de calcul commune à toutes les méthodes sous-espace, nous avons présenté cinq matrices sous-espace ayant le même espace colonne que la matrice d'observabilité (voir Section 3.2.3). Chacune de ces matrices correspond à une méthode sous-espace particulière. On peut classifier ces méthodes en fonction de leur utilisation ou non des données d'excitation. Ainsi les méthodes sont qualifiées de *Output-Only* (pas d'utilisation des données d'excitation) ou de *Input-Output* (utilisation des données d'excitation). Nous avons aussi vu deux catégories de matrice sous-espaces : les matrices *covariance-driven* dont le nombre de colonnes ne dépend pas du nombre d'échantillons N_e et les matrices *data-driven* dont le nombre de colonnes dépend du nombre d'échantillons N_e. Les matrices *data-driven* ne pouvant pas être utilisée pour l'estimation d'incertitude, car leur nombre de colonnes augmente lorsque le nombre d'échantillons augmente, nous avons proposée une technique permettant de créer une nouvelle méthode *covariance-driven* à partir d'une méthode *data-driven*. Nous avons démontré à la Section 3.2.3.3 que ces deux méthodes fournissent exactement la même identification des matrices A et C. Les méthodes ainsi créées seront qualifié de *Squared Data-driven*.

Concernant l'identification d'une modélisation modale, nous avons présenté trois méthodes basées sur l'utilisation des paramètres modaux pré-identifiés par une autre méthode d'identification (e.g. une méthode d'identification de modélisation ARX ou une méthode sous-espace) :

- connaissance des pôles (voir Section 3.3.1)
- connaissance des pôles et des formes modales (voir Section 3.3.2)
- connaissance des pôles et des facteurs de participation (voir Section 3.3.3)

Enfin, nous avons décrit la présentation des résultats sous la forme de diagrammes de stabilité (voir Section 3.4).

Dans le chapitre suivant nous détaillerons les méthodes d'estimation, à partir des données mesurées, des grandeurs de départ des méthodes d'identification présentées dans ce chapitre :

- La matrice de transfert pour les méthodes de minimisation par moindres carrés de l'erreur (linéarisée ou non) entre une modélisation ARX de la matrice de transfert et son estimation à partir des données (voir Section 4.6).

– Les matrices de corrélations nécessaires à la construction des matrices sous-espace (voir Section 4.5).

Chapitre 4

Les estimations non paramétriques

L'identification modale permet, à partir de données mesurées, d'estimer les paramètres d'une modélisation analytique. Ces données sont obtenues lors d'essais de vibrations. Elles correspondent aux réponses d'un système observées par des capteurs lorsque la structure est soumise à une ou plusieurs sources d'excitations. Ces excitations peuvent être connues et contrôlables (e.g. pot vibrant, coup de marteau, excitation par des gouvernes, etc.) ou inconnues (e.g. circulation sur un pont ou turbulences traversées par un avion). Le but de ce chapitre est de présenter les grandeurs qui serviront à identifier les modélisations paramétriques théoriques, et de décrire les méthodes pour estimer ces grandeurs à partir des données mesurées par les capteurs.

Nous commencerons par décrire ce qu'est un signal (Section 4.1), ce qu'est un processus aléatoire (Section 4.2) et comment estimer les caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire gaussien (Section 4.3). Nous verrons ensuite des méthodes d'estimation des densités spectrales de puissance (Section 4.4), des fonctions de corrélation (Section 4.5), des matrices de transfert (Section 4.6) et des réponses impulsionnelles (Section 4.7).

Sommaire

4.1 Le signal 126
4.1.1 Caractérisation du signal 126
4.1.2 Causalité 126
4.1.3 Signaux stochastique 126
4.2 Processus aléatoire 127
4.2.1 Stationnarité 128
4.2.2 Ergodicité 129
4.3 Estimations des caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire gaussien 130
4.3.1 Processus aléatoire gaussien 130
4.4 Estimations des densités spectrales de puissance 131
4.4.1 Estimation à partir de la fonction de corrélation 132
4.4.2 Estimation par périodogrammes moyennés 132
4.5 Estimations des fonctions de corrélation 133

4.6 Estimations des matrices de transfert 133
4.7 Estimations des réponses impulsionnelles finies 134
4.8 Bilan du chapitre 134

4.1 Le signal

4.1.1 Caractérisation du signal

Un signal est une grandeur physique, mesurée ou calculée, susceptible de contenir de l'information. Comme pour les systèmes (voir Section 2.1.3), les signaux peuvent être caractérisés selon le domaine d'analyse. Nous nous intéresserons ici aux représentations temporelles et fréquentielles des signaux.

Ces représentations pourront être exprimées, soit dans le domaine continu, soit dans le domaine discret. La variable utilisée définit, dans ce document, le domaine d'étude. On utilise :

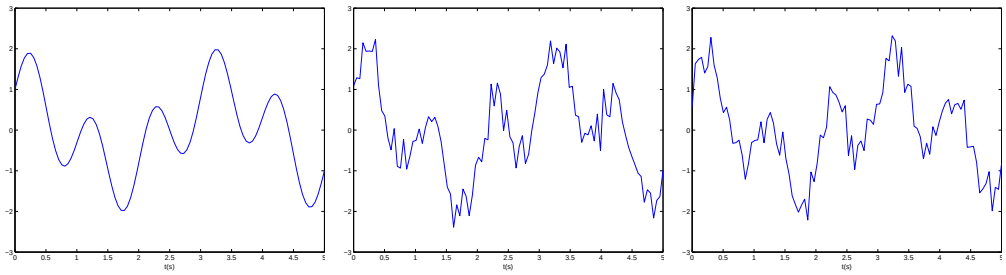
- t, la variable du domaine temporel continu
- n, la variable du domaine temporel discret
- f, la variable du domaine fréquentiel continu
- k, la variable du domaine fréquentiel discret

4.1.2 Causalité

Les signaux peuvent être causaux ou anti-causaux. Un signal causal est un signal qui ne peut dépendre que des évènements passés. Un signal anti-causal ne dépendra que des évènements futurs. En pratique, l'effet ne pouvant précéder la cause, un signal provenant d'un phénomène physique sera toujours causal.

4.1.3 Signaux stochastique

Les fonctions (signaux continus) et distributions (signaux discrets) peuvent être prises au sens classique pour lesquelles on dira que le signal est déterministe. Mais elles peuvent aussi être considérées comme étant des fonctions et distributions de variables aléatoires. On dira alors que le signal est aléatoire ou stochastique. En pratique, un signal provenant d'une mesure d'un phénomène physique (vibration d'une structure, enregistrement d'un son, etc.) est toujours soumis à une source plus ou moins importante de bruit et contient donc par conséquent toujours une composante stochastique (Figure 2-1). Le bruit peut-être dû à l'instrumentation de mesure ou à l'environnement. Dans ce dernier cas la notion de bruit peut-être très subjective et dépendra de la grandeur que l'on veut mesurer. Par exemple, si l'on enregistre un dialogue entre deux personnes durant un concert, la musique est-elle un bruit du signal contenant l'information du dialogue ? ou le contraire ?



(a) Signal déterministe (b) Signal bruité 1 (c) Signal bruité 2

FIGURE 4.1 – Exemple de signaux bruités

4.2 Processus aléatoire

Le signal mesuré en pratique est soit totalement stochastique, on parlera de processus stochastique pur, soit une somme de composantes déterministes et stochastiques. En effet, même si le signal d'excitation est déterministe (e.g. sinus glissant), la sortie mesurée sera toujours entachée d'une composante stochastique due aux bruits de mesure et/ou aux bruits environnementaux. On considèrera dans ce chapitre que les signaux sont des processus stochastiques pur, i.e. sans composante déterministe. Les notions de probabilités et de statistiques nécessaires à la définition de ce type de signal sont données à l'Annexe A.

Si on procède à N_s essais similaires de vibration, on aura N_s jeux de N_o (nombre de capteurs) mesures du comportement dynamique de la structure étudiée. Les signaux étant des processus aléatoires, les mesures seront différentes même si les conditions d'essai sont identiques. Considérons des mesures de durée T effectuées avec une période d'échantillonnage T_e. Chacun des N_o capteurs fournira un signal discret de $N_e = T/T_e$ échantillons temporels. A chaque instant n, la valeur de ces signaux est une valeur aléatoire. Un autre essai, pris au même instant pourra fournir une autre valeur. Les valeurs qui peuvent être prises à chaque instant n dépendent de la loi de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera $X(n)$. Pour chaque instant n, si on considère s essais, on dira que l'on a s réalisations $X_i(n)$ de la variable aléatoire $X(n)$. On pourra aussi considérer simultanément les N_o signaux fournis par les capteurs (cas multi-dimensionnel). On parlera alors du vecteur aléatoire $\mathbf{X}(n)$ composé des N_o variables aléatoires $X^{(o)}(n)$. Une réalisation de ce vecteur aléatoire sera notée $\mathbf{X}_i(n)$. Dans la suite, on ne considèrera plus que le cas multi-dimensionnel.

Remarque 32 *Pour faciliter la compréhension, on a utilisé l'exemple de processus aléatoires mesurés par des capteurs durant des essais de vibration. Cependant, tout ce qui suit peut s'appliquer à n'importe quel type de signal, notamment aux N_i signaux d'entrées, à conditions qu'ils soient aussi des processus aléatoires (e.g. excitation de la structure par un bruit blanc).*

Un processus aléatoire est une grandeur à la fois temporelle et statistique. Si on

effectue s essais de durée T fournissant chacun N_e échantillons pour chacun des N_o capteurs, alors :

- à un instant n fixé, on a s réalisations du vecteur aléatoire (de taille $N_o \times 1$) $\mathbf{X}_i(n)$ que l'on notera $\mathbf{X}_i$
- à une réalisation i fixée, on a un signal temporel $\mathbf{X}_i(n)$ (vecteur de taille $N_o \times 1$) de longueur N_e que l'on notera $x(n)$

On peut donc analyser un processus aléatoire sous deux angles : l'angle statistique et l'angle de suivi temporel.

L'angle statistique correspond à l'étude des propriétés statistiques du processus aléatoire. On cherchera notamment à déterminer les moments qui caractérisent les lois de probabilité des vecteurs aléatoires associés à chaque instant n. Dans le cas d'un processus aléatoire gaussien, l'étude des moments d'ordre 1 (espérance) et d'ordre 2 (variance/covariance) suffiront à caractériser complètement la loi de ces vecteurs aléatoires. Si on considère les N_e échantillons temporels, le processus aléatoire est une collection de vecteurs aléatoires $\mathbf{X}(k)$, i.e. un vecteur aléatoire constitué de N_e vecteurs aléatoires. On notera $\mathbf{X}(n) = \left[\mathbf{X}(1) \dots \mathbf{X}(N_e)\right]$. On note sa fonction de répartition $F_{\mathbf{X}(n)}\left(\mathbf{X}(1) \dots \mathbf{X}(N_e)\right)$ et sa densité de probabilité $f_{\mathbf{X}(n)}\left(\mathbf{X}(1) \dots \mathbf{X}(N_e)\right)$ (voir Section 78 en Annexe A).

L'angle de suivi temporel correspond à l'étude de l'évolution temporel du système. On cherchera notamment à déterminer la moyenne temporelle et la corrélation des signaux. Cette étude permettra aussi de déterminer le spectre fréquentiel des signaux ainsi que la matrice de transfert entre signaux d'entrées et signaux de sorties.

On verra que, sous certaines conditions, les caractéristiques statistiques et temporelles peuvent être liées. L'intérêt de relier caractéristiques statistiques et caractéristiques temporels est que, pour des raisons évidentes de coût, de complexité et de temps d'essai, on n'aura généralement qu'une seule mesure temporelle, i.e. une seule réalisation des processus aléatoires. Il faudra alors pouvoir extraire les propriétés statistiques de ces processus avec une seule réalisation constituée de N_e échantillons temporels. Ceci pourra être fait grâce aux notions de stationnarité et d'ergodicité d'un processus aléatoire.

4.2.1 Stationnarité

Un processus aléatoire est dit stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps. Plusieurs types de stationnarité existent. Nous en verrons deux : celle au sens strict et celle au sens large (SSL). La première concerne l'ensemble des moments d'une loi. La seconde ne concerne que les deux premiers moments d'une loi, et est par conséquent suffisante pour les processus aléatoires gaussiens, qui sont, on le rappelle, totalement définis par leur moment d'ordre 1 (l'espérance) et leur moment d'ordre 2 (la variance/covariance).

4.2.1.1 Stationnarité au sens strict

Un processus $\mathbf{X}(n)$ de longueur N_e est stationnaire au sens strict si, pour chaque réalisation i, on a que, pour tout instant n, ses propriétés probabilistes sont invariantes

par rapport à une translation n_0 de l'axe des temps. Ceci peut se traduire par une invariance de sa densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(n)$ en fonction de l'origine des temps :

$$f_{\mathbf{X}(n)}\left(\mathbf{X}(1)\ldots\mathbf{X}(N_e)\right) = f_{\mathbf{X}(n+n_0)}\left(\mathbf{X}(1+n_0)\ldots\mathbf{X}(N_e+n_0)\right) \tag{4.1}$$

4.2.1.2 Stationnarité au sens large

Il est très courant de considérer des processus aléatoires gaussiens. Par définition de la distribution gaussienne (voir Définition 80 en Annexe A), les propriétés probabilistes d'un tel processus seront entièrement caractérisées par son moment d'ordre 1 (son espérance) et son moment d'ordre 2 (sa variance). Donc dans le cas d'un processus aléatoire, il suffira de vérifier la stationnarité des propriétés probabilistes d'ordre 1 et 2 (moments d'ordre 1 et 2) pour déterminer sa stationnarité. Cette stationnarité d'ordre 1 et 2 est appelée stationnarité au sens large (SSL). Concrètement elle signifie que l'espérance du processus est constante en fonction du temps et que les covariances entre deux instants ne dépendent que de la durée qui les sépare.

Définition 33 *Espérance d'un processus aléatoire SSL*

$$E\left[\boldsymbol{X}(n)\right] = \mu(n) = \mu \tag{4.2}$$

On notera $\mu_{\mathbf{X}}$ l'espérance du processus aléatoire stationnaire $\mathbf{X}(n)$.

Définition 34 *Covariance d'un processus aléatoire SSL*
Pour tout instant k et l

$$\Sigma(k,l) = cov\left(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{X}(l)\right) = cov\left(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{X}(k+\tau)\right) = \Sigma(\tau) \tag{4.3}$$

avec $\tau = k - l$.

On notera $\Sigma_{\mathbf{X}}(\tau)$ la matrice de covariance du processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$.

4.2.2 Ergodicité

Un processus aléatoire est dit ergodique si, pour chacune de ses réalisations i, ses moyennes temporelles sont constantes. On ne considérera que les moyennes temporelles d'ordre 1 et 2, i.e. la moyenne et la fonction de corrélation du signal temporel.

Définition 35 *Moyenne d'un signal temporel à temps discret*
Soit un signal $x(n)$, sa moyenne est donnée par :

$$m_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) \tag{4.4}$$

On notera $m_{\mathbf{X}}$ la moyenne temporel du processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$. Cette valeur est identique pour toutes les réalisations du processus si ce processus est ergodique.

Définition 36 *Fonction de corrélation d'un signal temporel à temps discret*
Soit un signal $x(n)$, sa fonction de corrélation est donnée par :

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)x(k+\tau)^H \tag{4.5}$$

On notera $\mathcal{R}_{\mathbf{X}}$ la fonction de corrélation du processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$. Cette fonction est identique pour toutes les réalisations du processus si ce processus est ergodique.

4.3 Estimations des caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire gaussien

4.3.1 Processus aléatoire gaussien

Un processus aléatoire (vectoriel) $\mathbf{X}(n)$ est dit gaussien si, pour tout instant k, le vecteur aléatoire $\mathbf{X}(k)$ est gaussien.

On considère un processus aléatoire gaussien. Si ce processus est ergodique et stationnaire au sens large, on peut estimer ses caractéristiques probabilistes par des moyennes temporelles (moyenne et fonction de corrélation).

Soit un processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$ ergodique de moyenne $m_{\mathbf{X}}(n)$ et de fonction de corrélation $\mathcal{R}_{\mathbf{X}}(n)(\tau)$. Comme le processus est ergodique, on a $E\left[m_{\mathbf{X}}(n)\right] = m_{\mathbf{X}}(n)$ et $E\left[\mathcal{R}_{\mathbf{X}}(n)(\tau)\right] = \mathcal{R}_{\mathbf{X}}(n)(\tau)$

– <u>Moyenne et espérance</u>

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{X}}(n) &= E\left[m_{\mathbf{X}}(n)\right] \\ &= E\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left[x(k)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_{\mathbf{X}}(n)(k) \end{aligned}$$

Si en plus le processus $\mathbf{X}(n)$ est stationnaire de première ordre, i.e. $\mu_{\mathbf{X}}(k) = \mu_{\mathbf{X}}$, alors :

$$m_{\mathbf{X}} = \mu_{\mathbf{X}} \tag{4.6}$$

– <u>Fonction de corrélation et covariance</u>

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= E\left[\mathcal{R}_x(\tau)\right] \\ &= E\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)x(k+\tau)^H\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left[x(k)x(k+\tau)^H\right] \end{aligned}$$

Si le processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$ est centré (d'espérance nulle) et stationnaire de second ordre, alors sa variance est donnée par $\Sigma_{\mathbf{X}}(\tau) = E\left[x(k)x(k+\tau)^H\right]$, d'où :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{X}}(\tau) = \Sigma_{\mathbf{X}}(\tau) \tag{4.7}$$

Les hypothèses d'ergodicité et de stationnarité au sens large permettent de déterminer les propriétés probabilistes d'un processus aléatoire centré à partir d'une seule réalisation de ce processus. Cependant, on voit aussi que pour que le calcul de la moyenne temporelle et de la fonction de corrélation soit exacte, il est nécessaire de connaître une infinité d'échantillons temporels. Ceci est bien évidement impossible. Les mesures fournissant une quantité finie d'échantillon, on ne pourra qu'estimer ces grandeurs.

L'estimation de l'espérance du processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$, à partir de N_e échantillons temporels, est donnée par :

$$\widehat{m_{\mathbf{X}}} = \widehat{\mu_{\mathbf{X}}} \approx \frac{1}{N_e}\sum_{k=1}^{N_e} x(k) \tag{4.8}$$

L'estimation de la matrice de covariance du processus aléatoire $\mathbf{X}(n)$, à partir de N_e échantillons temporels, est donnée par :

$$\widehat{\mathcal{R}_{\mathbf{X}}}(\tau) = \widehat{\Sigma_{\mathbf{X}}}(\tau) \approx \frac{1}{N_e}\sum_{k=1}^{N_e} x(k)x(k+\tau)^H \tag{4.9}$$

4.4 Estimations des densités spectrales de puissance

La densité spectrale de puissance (DSP) $S(f_k)$ d'un signal correspond à la répartition de la puissance d'un signal en fonction de la fréquence (dans le domaine de Fourier). Mathématiquement, la DSP correspond au produit de la transformée de Fourier du signal temporel avec sa conjuguée (voir Section 2.1) à chacune des fréquences. On se place dans le cas d'un essai de vibration. On considère N_i points d'excitations et N_o capteurs. Le signal vectoriel d'entrées temporelles à temps discret $u(n)^{\in}\mathbb{R}N_i \times 1$ est constitué des N_i signaux scalaires $u_i(n)$. Le signal vectoriel de sorties temporelles à temps discret $y(n)^{\in}\mathbb{R}N_o \times 1$ est constitué des N_o signaux scalaires $y_o(n)$. On note $u(f_k)$ et $y(f_k)$ Les transformées de Fourier discrètes de $u(n)$ et de $y(n)$. La DSP de $u(n)$ et celle de $y(n)$ sont définies par :

$$S_{uu}(f_k) = u(f_k)u^H(f_k) \tag{4.10}$$

et

$$S_{yy}(f_k) = y(f_k)y^H(f_k) \tag{4.11}$$

avec $.^H$ l'opérateur hermitien. On constate que dans le cas multi-dimensionnel, la DSP des signaux $u(n)$ et $y(n)$ seront des matrices carrées à symétrie hermitienne. Les éléments diagonaux sont appelés autospectres de puissance. Les éléments extra-diagonaux sont appelés interspectres de puissance. Par définition de la DSP, les autospectres sont des valeurs réelles et les interspectres sont des valeurs complexes.

On pourra aussi considérer la DSP entre $u(n)$ et $y(n)$.

$$S_{uy}(f_k) = u(f_k)y(f_k)^H \tag{4.12}$$

qui est une matrice rectangle dans le cas de système MIMO. On constate aussi que $S_{uy}(f_k) = S_{yu}(f_k)^H$.

4.4.1 Estimation à partir de la fonction de corrélation

La DSP et la fonction de corrélation d'un signal sont reliés par transformation de Fourier (ou de Laplace). Ceci constitue le théorème de Wiener-Khinchine qui dit que la DSP d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de ce signal. Cette relation peut être prouvée à partir de la définition de la transformation de Fourier (ou de Laplace). L'Equation (4.9) nous donne l'écriture d'une estimation de la fonction de corrélation d'un signal temporel. Comme pour la densité spectrale, cette fonction sera matricielle dans le cas multi-dimensionnel. Pour estimer la DSP des ou entre les signaux $u(n)$ et $y(n)$ on pourra calculer la transformation de Fourier discrète de cette fonction (matrice) de corrélation.

4.4.2 Estimation par périodogrammes moyennés

On considère que les signaux sont des processus aléatoires constitués de N_e échantillons temporels. Un moyen très répandu d'estimer les densités spectrales de puissance de processus aléatoires est l'utilisation de périodogrammes moyennés (ou de Welch, voir [Wel67]). Le principe est simple. Il consiste en un découpage des signaux temporels $u(n)$ et $y(n)$ en n_b blocs. On obtient ainsi n_b signaux $u^{(b)(n)}$ et n_b signaux $y^{(b)(n)}$.

Remarque 37 *Un découpage du signal correspond à un filtrage par une fenêtre rectangle. Il est courant d'adoucir ce filtrage en utilisant des fenêtres d'appodisation (e.g. hanning, haming, exponnetielles, etc.). L'utilisation de telles fenêtres permet de réduire les effets de bords. La contre partie de cet adoucissement des bords est une perte d'information aux bords. Pour contrebalancer cet effet, il est courant de considérer des blocs superposés. La superposition, plus connue sous sa dénomination anglosaxonne d'overlapping, permet ainsi de récupérer l'information perdue par les fenêtres d'appodisation. Pour simplifier les équations, on considèrera que le découpage du signal est fait avec une fenêtre rectangulaire et sans superposition. Dans ce cas, chaque bloc sera constitué de $N_b = N_e/n_b$ échantillons*

On calcul les transformées de Fourier des signaux $u^{(b)}(n)$ et $y^{(b)}(n)$. Généralement, ces transformations sont faites en utilisant l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform, [Max81, Duv94]) ou FFTW (Fastest Fourier Transform in the West, [FJ98, FJ99]). On calcul ensuite les DSP $S_{uu}^{(b)}(f_k)$, $S_{yy}^{(b)}(f_k)$ et $S_{uy}^{(b)}(f_k)$. Ces DSP ne sont que des des estimations car il faudrait une infinité d'échantillons pour calculer leur vraie valeur. D'un point de vue statistique, on considère que, pour chaque signal, les n_b DSP estimées sont autant de réalisations d'une variable aléatoire dont l'espérance est la vraie valeur de la DSP et dont la variance sera liée à la variance du processus. On considère l'estimateur moyenne (voir Section A.6 en Annexe A) pour estimer cette DSP. On aura ainsi :

– pour le signal $u(n)$

$$\widehat{S_{uu}}(f_k) = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} S_{uu}^{(b)(f_k)} \tag{4.13}$$

– pour le signal $y(n)$

$$\widehat{S_{yy}}(f_k) = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} S_{yy}^{(b)(f_k)} \tag{4.14}$$

– pour le signal $u(n)$ et le signal $y(n)$

$$\widehat{S_{uy}}(f_k) = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} S_{uy}^{(b)(f_k)} = \widehat{S_{uy}}(f_k)^H \tag{4.15}$$

Les densités spectrales pourront servir à estimer les fonctions de transferts qui sont, d'un point de vue opérationnel, nécessaire à une analyse spectrale complète.

4.5 Estimations des fonctions de corrélation

Les fonctions de corrélations sont des fonctions temporelles, plus précisément des fonctions ayant pour variable un décalage temporel. Comme nous l'avons déjà évoqué, elles peuvent être estimées directement à partir des données à partir de la formulation discrète finie (Equation (4.9)).

Cependant, une technique plus rapide est d'utiliser le fait que les fonctions de corrélation sont par définition les analogues temporels des densités spectrales de puissance (théorème de Wiener-Khinchine). Une estimation consistante des fonctions de corrélation sera obtenue par transformation de Fourier discrète inverse des DSP estimées par périodogrammes moyennés (voir Section 4.4.2).

4.6 Estimations des matrices de transfert

Dans le domaine fréquentiel, une fonction de transfert d'un système correspond au rapport entre la réponse observée et l'excitation appliquée. On peut obtenir une bonne estimation d'une fonction de transfert à partir des estimations des densités spectrales de puissance estimées à l'aide de la méthode décrite à la Section 4.5. Une technique couramment utilisée est l'estimation H_1. Elle est construite à partir des DSP estimées $\widehat{S_{yu}}$ et $\widehat{S_{uu}}$:

$$H_1 = \widehat{S_{yu}}\widehat{S_{uu}}^{-1} \tag{4.16}$$

Remarque 38 *Conditionnement de $S_{uu}(\tau)$*

L'Equation (4.16) *implique l'inversion de $\widehat{S_{uu}}$. Cette matrice doit donc être de plein rang. Si elle a été estimée par périodogrammes moyennés, on voit qu'une condition nécessaire est que le nombre de bloc n_b soit supérieur au nombre de points d'excitation N_i.*

Cette condition est généralement largement remplie car le nombre de points d'excitation est souvent faible (sur avion, rarement supérieur à 2), alors que le nombre de blocs doit être assez important pour avoir la convergence de l'estimation des DSP (convergence basée sur la loi des grands nombre, voir Section A.6 en Annexe A).

4.7 Estimations des réponses impulsionnelles finies

On a vu à la Section 2.1.5.2 que la réponse impulsionnelle d'un filtre peut être obtenue par transformation inverse de Laplace, de Fourier ou en $\mathcal{Z}$ (en fonction du domaine de travail). On peut donc facilement obtenir une estimation de la réponse impulsionnelle à partir de l'estimation de la fonction de transfert telle que décrite à la Section 4.6. Par exemple, on pourra appliquer la transformation de Fourier discrète inverse (opérateur TFD) :

$$\widehat{h}(n) = TFD^{-1}\left[H_1(f_k)\right] \tag{4.17}$$

4.8 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons d'abord défini ce qu'est un processus aléatoire (voir Section 4.2), et plus particulièrement, ce qu'est un processus aléatoire gaussien (voir Section 4.3). Nous avons ensuite proposé, en considérant que les signaux d'entrée et de sortie du système soient des processus aléatoires gaussiens, deux méthodes d'estimations des densités spectrales de puissance (voir Section 4.4.1 et Section 4.4), deux méthodes d'estimation des fonctions de corrélation (voir Section 4.5), une méthode d'estimation de la matrice de transfert (voir Section 4.6) et une méthode d'estimation de la réponse impulsionnelle (voir Section 4.7).

Les grandeurs de départ des méthodes d'identification sont estimées à partir de donnée mesurées et stochastiques. Ces grandeurs possèdent une variance, i.e., une estimation à partir d'un autre essai fournira un résultat différent. Cette variance sera propagée tout au long de la chaîne de calcul de la méthode d'identification utilisée. Au final, on obtiendra des paramètres modaux (fréquences modales, taux d'amortissement modaux, formes modales) qui sont eux aussi soumis à une variance. L'estimation de ces variances permettra d'avoir une estimation de l'incertitude sur ces paramètres modaux. Dans les trois chapitres suivant, nous présenterons :

- Le principe de propagation de la variance (voir Chapitre 5).
- Le détail de la propagation des variances tout au long de la chaîne de calcul de deux des méthodes d'identification présentées au Chapitre 3 (voir Chapitre 6) :
  - l'identification LSCF (voir Section 6.1)
  - l'identification sous-espace (voir Section 6.2)
- Le détail de l'estimation de la variance des points de départ de ces méthodes d'identification (voir Chapitre 7).
  - la matrice de transfert (voir Section 7.1)
  - les cinq matrices sous-espace de types *Covariance-driven* et *Squared Data-driven* proposées (voir Section 7.2)

Deuxième partie

L'estimation d'incertitude

Chapitre 5

Le principe

Il est très important, lors d'une analyse modale, de garder à l'esprit que, quelle que soit la méthode d'identification modale utilisée, les paramètres modaux identifiés ne sont que des estimations des modes exacts de la structure étudiée. Premièrement, la modélisation théorique peut ne pas refléter exactement les réelles propriétés de la structure (e.g. modélisation LTI pour un système non linéaire et non-stationnaire). Cette erreur de modélisation introduira un biais dans l'analyse. L'estimation ne convergera pas vers la vérité, mais vers une vérité biaisée. Deuxièmement, l'excitation peut-être stochastique (e.g. bruits blancs, bruits roses). Les caractéristiques stochastiques (notamment la variance) de l'excitation vont être propagées jusqu'aux paramètres modaux qui seront eux aussi stochastiques. Le résultat de l'identification modale sera influencé par la variance des données mesurées. Finalement, les grandeurs nécessaires à l'identification sont estimées et non calculées de manière exacte. En effet, que ce soit les fonctions de transfert, les réponses impulsionnelles ou les fonctions de corrélations, elles nécessiteraient une infinité de données pour être déterminée de manière exacte. Le fait que le point de départ de l'identification ne soit lui-même qu'une estimation, entraine l'apparition d'une variance d'estimation.

Le but de ce chapitre est de décrire la notion de confiance que l'on peut attribuer à chaque paramètre modal identifié. Cette confiance est définie à partir de l'écart type de l'estimation de ces paramètres modaux. Cet écart type est aussi appelé incertitude.

La description du principe de propagation (Section 5.1) est divisée en deux sections : la delta méthode (Section 5.1.1) et la théorie des perturbations (Section 5.1.2)

Sommaire

5.1 La propagation 138

5.1.1 La delta méthode 138

5.1.2 La théorie des perturbations 139

5.2 Les points de départ de la propagation : les variances empiriques 141

5.3 Bilan du chapitre 141

5.1 La propagation

Une méthode d'identification modale nécessite d'estimer une ou plusieurs grandeurs de départ (e.g. densités spectrales, fonctions de corrélation). A partir de cette estimation, et à travers la chaîne de calcul associée à la méthode d'identification modale choisie, on arrive à l'estimation des paramètres modaux. L'estimation des incertitudes modales repose sur la propagation, non plus de l'estimation de la grandeur de départ, mais de sa variance.

Considérons une variable aléatoire X d'espérance $E[X] = \mu$ et de variance $\mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$. On souhaiterait pouvoir estimer les propriétés statistiques de $g(X)$, avec g une fonction continue dérivable. Commençons par effectuer une approximation de Taylor au premier ordre de la fonction $g(X)$ en μ (voir Définition 88 en Annexe B).

$$g(X) \approx g(\mu) + g'(\mu)(X-\mu) \tag{5.1}$$

A partir de l'Equation (5.1), et comme $E[X] = \mu$ est par définition déterministe, on peut estimer l'espérance de $g(X)$ par :

$$E[g(X)] \approx g(\mu) \tag{5.2}$$

De même, à partir de l'Equation (5.1) et de l'Equation (5.2), on peut estimer la variance de $g(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(g(X)) &= E\left[(g(X) - E[g(X)])^2\right] \\
&\approx E\left[(g(X) - g(\mu))^2\right] \\
&\approx E\left[\left(g'(\mu)(X-\mu)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

D'où, à partir des propriétés de l'espérance (voir Propriétés 64 en Annexe B) :

$$\mathrm{var}(g(X)) \approx \left(g'(\mu)\right)^2 \sigma^2 \tag{5.3}$$

Considérons maintenant que cette variable aléatoire X est un estimateur de l'espérance μ, par exemple la moyenne empirique $\bar{X}$ d'une série de réalisations X_i i.i.d. où $E[X_i] = \mu$ et $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$. On sait que cet estimateur est gaussien (théorème central limite, 73 en Annexe A) et est donc entièrement caractérisé par son espérance et sa variance. La delta méthode (Section 5.1.1) nous permet d'estimer la loi de probabilité de $g(\bar{X})$. Le choix de la moyenne empirique comme estimateur à propager n'est pas fait sans arrière pensée. En effet, on a vu au Chapitre 4 que les grandeurs à propager sont estimées par des moyennes empiriques.

5.1.1 La delta méthode

Nous considérons le cas de signaux multi-dimensionnels (le cas unidimensionnel n'étant qu'un cas particulier). On rappelle que, concrètement, le cas multi-dimensionnel

correspond, pour l'entrée du système, à considérer plusieurs excitations et pour la sortie du système, à considérer plusieurs capteurs simultanément. Les signaux d'entrées et de sorties sont par conséquent des vecteurs de taille respective $N_i \times 1$ et $N_o \times 1$ (avec N_i le nombre d'excitations et N_o le nombre de capteurs).

Theorème 39 *Delta méthode appliquée à un vecteur aléatoire*

Soit une série $\boldsymbol{\theta}_N$ de N vecteurs aléatoires qui converge vers l'élément vectoriel $\boldsymbol{\theta}$ à estimer lorsque $N \to \infty$, et qui satisfait le théorème central limite (voir Théorème 73 en Annexe A) :

$$\sqrt{N}\left(\boldsymbol{\theta}_N - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left([0]_{N\times 1}, \Sigma\right) \tag{5.4}$$

(e.g la moyenne empirique : $\boldsymbol{\theta}_N = \bar{\boldsymbol{X}}_N$, $\boldsymbol{\theta} = E\left[\bar{\boldsymbol{X}}_N\right] = \boldsymbol{\mu}$)

Soit une fonction continue et dérivable dont le jacobien $\mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\mu})}$ est de plein rang ligne, alors :

$$\sqrt{N}\left(g\left(\boldsymbol{\theta}_N\right) - g\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left([0]_{N\times 1}, \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\mu})}\Sigma\mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\mu})}^T\right) \tag{5.5}$$

Si on considère une application linéaire

$$y = AX + b \tag{5.6}$$

un exemple d'application de la delta méthode est la recherche de la covariance de y, exprimée en fonction de la covariance de X. La dérivée de y par rapport à X est le jacobien $\mathcal{J}_{g(X)} = A$. Ainsi, le théorème central limite nous donne :

$$\mathrm{cov}\left(AX + b\right) = A\mathrm{cov}\left(X\right)A^T \tag{5.7}$$

5.1.2 La théorie des perturbations

On a vu que l'application de la delta méthode permet de déterminer la covariance de la fonction g d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ dont on connait la covariance Σ. Cependant, on a vu aussi qu'il est nécessaire de pouvoir calculer le jacobien $\mathcal{J}_{g(X)}$ de cette fonction... et donc de connaitre une définition explicite de la fonction. Or, dans la pratique, la définition explicite de la fonction peut ne pas être connue (tout du moins pas de manière triviale). Seuls ses effets sont "visible" par une définition implicite. Un exemple est le calcul des valeurs et des vecteurs propres d'une matrice. On utilisera dans ce cas la théorie des perturbations pour obtenir le jacobien $\mathcal{J}_{g(X)}$ à partir d'une relation qui définie implicitement la fonction $g\left(X\right)$ car on ne connait pas sa définition explicite. Dans l'exemple des valeurs et vecteurs propres, la relation implicite de $g\left(X\right)$ est donnée par la relation (2.72) (problème aux valeurs propres).

On peut considérer une estimation comme étant une perturbation de la valeur exacte à estimer. L'estimation peut alors être considérée comme étant une fonction de l'amplitude ϵ de perturbation. On défini ainsi :

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\left(0\right)$$
$$\boldsymbol{\theta}_N = \boldsymbol{\theta}\left(\epsilon\right)$$

avec $\boldsymbol{\theta}$ la vraie valeur, $\boldsymbol{\theta}(0)$ la valeur non perturbée, $\boldsymbol{\theta}_N$ la valeur estimée, $\boldsymbol{\theta}(\epsilon)$ la valeur perturbée.

Si on considère ϵ comme étant une "petite" perturbation, on peut approximer la valeur perturbée $\boldsymbol{\theta}(\epsilon)$ par une approximation de Taylor au premier ordre :

$$\boldsymbol{\theta}(\epsilon) \approx \boldsymbol{\theta}(0) + \epsilon \left.\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \tag{5.8}$$

On obtient la perturbation de premier ordre $\Delta\boldsymbol{\theta}$ de $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}(\epsilon) - \boldsymbol{\theta}(0) \\
&\approx \boldsymbol{\theta}(0) + \epsilon \left.\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} - \boldsymbol{\theta}(0) \\
\Delta\boldsymbol{\theta} &\approx \epsilon \left.\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \epsilon}$ est la direction de la perturbation de $\boldsymbol{\theta}$. En analysant une perturbation de $g(\boldsymbol{\theta})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta g(\boldsymbol{\theta}) &= g(\boldsymbol{\theta}(\epsilon)) - g(\boldsymbol{\theta}(0)) \\
&\approx g(\boldsymbol{\theta}(0)) + \epsilon \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} - g(\boldsymbol{\theta}(0)) \\
&\approx \epsilon \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
&\approx \epsilon \left.\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}(0)=0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\
\Delta g(\boldsymbol{\theta}) &\approx \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})} \Delta\boldsymbol{\theta}
\end{aligned}$$

De plus, comme $\boldsymbol{\theta}(0)$ et $g(\boldsymbol{\theta}(0))$ sont des valeurs exactes, donc non aléatoires, la propriété de constante déterministe de la covariance (Voir Propriétés 79 en Annexe A) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) &= \operatorname{cov}(\boldsymbol{\theta}(\epsilon)) \\
\operatorname{cov}(\Delta g(\boldsymbol{\theta})) &= \operatorname{cov}(g(\boldsymbol{\theta}(\epsilon)))
\end{aligned}$$

or

$$\operatorname{cov}(\Delta g(\boldsymbol{\theta})) \approx \operatorname{cov}\left(\mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})} \Delta\boldsymbol{\theta}\right) = \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})} \operatorname{cov}(\Delta\boldsymbol{\theta}) \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})}^T$$

donc

$$\operatorname{cov}(g(\boldsymbol{\theta}(\epsilon))) \approx \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})} \operatorname{cov}(\boldsymbol{\theta}(\epsilon)) \mathcal{J}_{g(\boldsymbol{\theta})}^T \tag{5.9}$$

qui n'est autre que le résultat de la delta méthode.

Ainsi, les covariances des paramètres modaux seront obtenues par propagation des covariances des données à l'aide de jacobien successifs liés aux différentes étapes des méthodes d'identification modale.

5.2 Les points de départ de la propagation : les variances empiriques

Les grandeurs de départ des méthodes d'identification sont estimées par moyenne empirique (voir Chapitre 4). La moyenne empirique est un estimateur empirique non biaisé et consistant, i.e. qui converge vers la valeur exacte. Cette convergence se fait à la vitesse $\frac{\sigma^2}{N}$ dans le cas uni-dimensionnel (voir les Propriétés 76 en Annexe A) ou $\frac{\Sigma}{N}$ dans le cas multi-dimensionnel. La valeur N correspond au nombre de réalisations de la variable (ou vecteur) aléatoire et σ^2 (respectivement Σ) la variance de cette variable (respectivement la matrice de covariance de ce vecteur) aléatoire. Cependant, la variance σ^2 (ou la matrice covariance Σ) n'est pas connue. Il faut aussi l'estimer. On considèrera l'estimateur variance empirique non biaisé qui est un estimateur consistant de la variance (voir Section A.6 en Annexe A). Le détail de l'estimation de la variance associée aux méthodes d'identification traitées à la Section 3, est donné à la Section 7.

5.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons décrit le principe de la propagation des variances (voir Section 5.1). Ce principe est basée sur la delta-méthode (voir Section 5.1.1) et est appliquée, en pratique, à l'aide de la théorie des perturbations (voir Section 5.1.2).

Au chapitre suivant, nous détaillerons les propagations des variances associés aux méthodes d'identification LSCF du problème ARX linéarisé (voir Section 6.1) et celles associées aux différentes méthodes d'identification sous-espace (voir Section 6.2).

Chapitre 6

Les chaînes de propagation : LSCF et sous-espaces

On a vu que les méthodes d'identification permettent, à partir d'une grandeur de départ issue des données mesurées, d'estimer les paramètres modaux d'un système (Chapitre 3). La chaîne de propagation d'incertitude permet de propager la variance de cette grandeur de départ jusqu'aux variances des paramètres modaux. La chaîne de propagation est obtenue par la delta-méthode et par la théorie des perturbation (Chapitre 5). Il faudra donc différencier les équations contenues dans la chaîne de calcul de la méthode d'identification considérée. On pourra ainsi donner la chaîne de propagation des méthodes LSCF et des méthodes sous-espace.

Nous présenterons deux chaînes de propagation. La première est celle associée à l'identification LSCF du problème ARX linéairisé (Section 6.1). Cette chaîne de propagation est décrite, dans sa version simple-référence par [DTGPV09, DT09], et dans sa version poly-référence par [DTGS09, DT09]. La seconde est celle associée à l'identification du sous-espace colonne de la matrice d'observabilité du système (Section 6.2). Cette chaîne de propagation est basée sur les méthodes décrites par [RPDR08b, DM13, DLM13].

Sommaire

6.1 Incertitude de l'identification LSCF du problème ARX linéarisé . . . 144

6.1.1 Différenciation de D . . . 144

6.1.2 Simplification de $\Delta D\theta_A$ . . . 145

6.1.3 Expression de $\Delta\theta_A$ en fonction de ΔH . . . 147

6.1.4 Expression de $\mathrm{cov}\,(\theta_A)$ en fonction de $\mathrm{cov}\,(H)$ . . . 149

6.1.5 Discussion concernant la chaîne de propagation LSCF . . . 151

6.2 Incertitude de l'identification sous-espace des matrices du système d'état . . . 151

6.2.1 De la matrice de sous-espace à la matrice d'observabilité . . . 152

6.2.2 De la matrice d'observabilité aux matrices de transition d'état et d'observation . . . 157

6.2.3 De la matrice de transition d'état à ses valeurs et vecteurs propres 159
6.2.4 Des valeurs propres de la matrice de transition d'état aux fréquences et amortissements modaux 159
6.2.5 Des vecteur propres de la matrice de transition d'état et de la matrice d'observabilité aux déformées modales normalisées . 160
6.3 Bilan du chapitre 161

6.1 Incertitude de l'identification LSCF du problème ARX linéarisé

La méthode décrite dans cette section consiste à différencier l'Equation (3.167) ($D\theta_A = 0$) :

$$D\Delta\theta_A = -\Delta D\theta_A \tag{6.1}$$

Dans le cas référence-simple, la méthode proposée est similaire à celle décrite dans [DTGPV09]. Dans le cas références-multiple à droite, la méthode proposée est similaire à celle décrite dans [DTGS09]. Cette dernière sera aussi présentée dans le cas références-multiple à gauche. Pour les identification références-multiples, à la différence de [DTGS09], les coefficients des polynômes seront traités sous leur forme vectorisée. Comme à la Section 3.1.2, les descriptions référence-simple et références-multiple seront présentées simultanément pour faciliter la comparaison.

Le but est de déterminer la matrice jacobienne des paramètres polynômiaux par rapport aux perturbations de la matrice de transfert. On divise en quatre étapes :

1. Différenciation de D à partir de l'Equation (3.168) en référence-simple, de l'Equation (3.169) en références-multiples à droite et de l'Equation (3.170) en références-multiples à gauche
2. Simplification de $\Delta D\theta_A$
3. Expression de $\Delta\theta_A$ en fonction de ΔH
4. Expression de $\mathrm{cov}\,(\theta_A)$ en fonction de $\mathrm{cov}\,(H)$

On pourra trouver, dans la littérature (voir []), l'expression de la variance de θ_B. Les paramètres θ_B du numérateur de la fonction de transfert peuvent être utilisés pour retrouver les formes modales. Cependant, chez Dassault-Aviation, une autre méthode est utilisée pour retrouver les formes modales. Nous n'étudierons, pas dans ce document, les variances de θ_B.

6.1.1 Différenciation de D

6.1.1.1 Référence-simple

La différenciation de D nécessite de différencier les équations (3.127). En remarquant que X_{oi} est, par construction, constant par rapport aux perturbations de la matrice de

transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta R_{oi} &= 0 && (6.2)\\
\Delta S_{oi}^H &= \Delta Y_{oi}^H X_{oi} && (6.3)\\
\Delta S_{oi}^H &= X_{oi}^H \Delta Y_{oi} && (6.4)\\
\Delta T_{oi}^H &= \Delta Y_{oi}^H Y_{oi} + Y_{oi}^H \Delta Y_{oi} && (6.5)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\Delta D &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} \Delta Y_{oi}^H X_{oi} R_{oi}^{-1} S_{oi} + S_{oi}^H R_{oi}^{-1} X_{oi}^H \Delta Y_{oi} - \Delta Y_{oi}^H Y_{oi} - Y_{oi}^H \Delta Y_{oi}\\
\Delta D &= \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} \Delta Y_{oi}^H \left(X_{oi} R_{oi}^{-1} S_{oi} - Y_{oi}\right) + \left(S_{oi}^H R_{oi}^{-1} X_{oi}^H - Y_{oi}^H\right) \Delta Y_{oi}
\end{aligned}$$

En posant

$$M_{oi} = X_{oi} R_{oi}^{-1} S_{oi} - Y_{oi} \tag{6.6}$$

on a :

$$\Delta D = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} \Delta Y_{oi}^H M_{oi} - M_{oi}^H \Delta Y_{oi} \tag{6.7}$$

6.1.1.2 Références-multiple à droite

De la même manière, on a :

$$\Delta D = \sum_{o=1}^{N_o} \Delta Y_o^H M_o - M_o^H \Delta Y_o \tag{6.8}$$

avec

$$M_o = X_o R_o^{-1} S_o - Y_o \tag{6.9}$$

6.1.1.3 Références-multiple à gauche

De la même manière, on a :

$$\Delta D = \sum_{i=1}^{N_i} \Delta Y_i^H M_i - M_i^H \Delta Y_i \tag{6.10}$$

avec

$$M_i = X_i R_i^{-1} S_i - Y_i \tag{6.11}$$

6.1.2 Simplification de $\Delta D \theta_A$

Le terme de droite de l'Equation (6.1), $-\Delta D \theta_A$, fait apparaître un terme de la forme $-M_\star \theta_A$ (avec $\star$ correspondant à oi, o ou i selon la méthode). Analysons ce terme.

6.1.2.1 Référence-simple

Un des termes de l'Equation 6.7, M_{oi}, ce simplifie lorsqu'il est multiplié par θ_A :

$$-M_{oi}\theta_A = -X_{oi}R_{oi}^{-1}S_{oi}\theta_A + Y_{oi}\theta_A$$

avec θ_A défini par l'Equation (3.48). En utilisant l'Equation (3.154),

$$\begin{aligned} -M_{oi}\theta &= X_{oi}\theta_{B_{oi}} + Y_{oi}\theta_A \\ &= \begin{bmatrix} X_{oi} & Y_{oi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{B_{oi}} \\ \theta_A \end{bmatrix} \\ &= E_{oi} \end{aligned}$$

avec E_{oi} le vecteur erreur défini par l'Equation (3.122). Or ce vecteur aléatoire est d'espérance nulle car on a fait l'hypothèse que les données sont centrées en zéro.

D'où, par estimation de l'espérance par la moyenne empirique, on a :

$$-\Delta D\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} M_{oi}^H \Delta Y_{oi}\theta_A \tag{6.12}$$

et finalement, à partir de l'Equation (6.1) :

$$D\Delta\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i} M_{oi}^H \Delta Y_{oi}\theta_A \tag{6.13}$$

6.1.2.2 Références-multiple à droite

De la même manière, en se basant sur les équations (3.51), (3.159) et (3.132), on a

$$-\Delta D\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o} M_o^H \Delta Y_o\theta_A \tag{6.14}$$

et finalement, à partir de l'Equation (6.1) :

$$D\Delta\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o} M_o^H \Delta Y_o\theta_A \tag{6.15}$$

6.1.2.3 Références-multiple à gauche

De la même manière, en se basant sur les équations (3.54), (3.164) et (3.142), on a

$$-\Delta D\theta_A \approx \sum_{i=1}^{N_i} M_i^H \Delta Y_i\theta_A \tag{6.16}$$

et finalement, à partir de l'Equation (6.1) :

$$D\Delta\theta_A \approx \sum_{i=1}^{N_i} M_i^H \Delta Y_i\theta_A \tag{6.17}$$

6.1.3 Expression de $\Delta\theta_A$ en fonction de ΔH

A partir des équations (6.6) (6.9) et (6.11), on a :

$$M_\star^H \Delta Y_\star \theta_A = S_\star^H R_\star^{-1} X_\star^H \Delta Y_\star \theta_A - Y_\star^H \Delta Y_\star \theta_A$$

avec $\star$ correspondant à oi, o ou i selon la méthode.

Analysons les termes $X_\star^H \Delta Y_\star \theta_A$ et $Y_\star^H \Delta Y_\star \theta_A$.

6.1.3.1 Référence-simple

A partir des équations (3.48), (3.123) et (3.124), on a

$$\begin{aligned} X_{oi}^H \Delta Y_{oi} \theta_A &= \begin{bmatrix} X_{oi,1}^H & \dots & X_{oi,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta H_{oi}(z_1) A(z_1) \\ \vdots \\ -\Delta H_{oi}(z_{N_e}) A(z_{N_e}) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} X_{oi,k}^H \Delta H_{oi}(z_k) A(z_k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{oi}^H \Delta Y_{oi} \theta_A &= \begin{bmatrix} Y_{oi,1}^H & \dots & Y_{oi,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta H_{oi}(z_1) A(z_1) \\ \vdots \\ -\Delta H_{oi}(z_{N_e}) A(z_{N_e}) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} Y_{oi,k}^H \Delta H_{oi}(z_k) A(z_k) \end{aligned}$$

Ce qui permet de réécrire (6.13) sous la forme

$$D \Delta\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_e} \left(Y_{oi,k}^H - S_{oi}^H R_{oi}^{-1} X_{oi,k}^H \right) \Delta H_{oi}(z_{N_e}) A(z_{N_e})$$

Pour pouvoir continuer avec la méthode décrite dans [DTGPV09] et [DTGS09], il est nécessaire de faire l'hypothèse que la matrice D soit inversible. Ce point sera discuté à la Section 6.1.5. Dans le cas où D est inversible, on peut écrire une expression de $\Delta\theta_A$:

$$\Delta\theta_A \approx= \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A, H_{oi}(z_k)} \Delta H_{oi}(z_k) \tag{6.18}$$

avec $H_{oi}(z_k)$ et $A(z_k)$ scalaires, et

$$\mathcal{J}_{\theta_A, H_{oi}(z_k)} = D^{-1} \left(Y_{oi,k}^H - S_{oi}^H R_{oi}^{-1} X_{oi,k}^H \right) A(z_{N_e}) \tag{6.19}$$

6.1.3.2 Références-multiple à droite

A partir des équations (3.51), (3.133) et (3.134), on a

$$\begin{aligned} X_o^H \Delta Y_o \theta_A &= \begin{bmatrix} X_{o,1}^H & \dots & X_{o,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_1)\right) \mathrm{vec}\left(A(z_1)\right) \\ \vdots \\ -\left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_{N_e})\right) \mathrm{vec}\left(A(z_{N_e})\right) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} X_{o,k}^H \left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_k)\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{oi}^H \Delta Y_{oi} \theta_A &= \begin{bmatrix} Y_{oi,1}^H & \dots & Y_{oi,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_1)\right) \mathrm{vec}\left(A(z_1)\right) \\ \vdots \\ -\left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_{N_e})\right) \mathrm{vec}\left(A(z_{N_e})\right) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} Y_{o,k}^H \left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_k)\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les relations des Propriétés 84, on a :

$$\left(I_{N_i} \otimes \Delta H_o^{(lig)}(z_k)\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) = A^T(z_k) \mathrm{vec}\left(\Delta H_o^{(lig)}(z_k)\right)$$

D'où, en considérant D inversible :

$$\Delta\theta_A \approx \sum_{o=1}^{N_o} \sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A, H_o(z_k)} \mathrm{vec}\left(\Delta H_o^{(lig)}(z_k)\right) \tag{6.20}$$

avec

$$\mathcal{J}_{\theta_A, H_o(z_k)} = D^{-1}\left(Y_{o,k}^H - S_o^H R_o^{-1} X_{o,k}^H\right) A^T(z_{N_e}) \tag{6.21}$$

6.1.3.3 Références-multiple à gauche

A partir des équations (3.54), (3.143) et (3.144), on a

$$\begin{aligned} X_i^H \Delta Y_i \theta_A &= \begin{bmatrix} X_{i,1}^H & \dots & X_{i,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(\Delta H_i^{(col)}(z_1) \otimes I_{N_o}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_1)\right) \\ \vdots \\ -\left(\Delta H_i^{(col)}(z_{N_e}) \otimes I_{N_o}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_{N_e})\right) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} X_{i,k}^H \left(\Delta H_i^{(col)}(z_1) \otimes I_{N_o}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_i^H \Delta Y_i \theta_A &= \begin{bmatrix} Y_{i,1}^H & \dots & Y_{i,N_e}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(\Delta H_i^{(col)}(z_1) \otimes I_{N_o}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_1)\right) \\ \vdots \\ -\left(\Delta H_i^{(col)}(z_{N_e}) \otimes I_{N_o})\right) \mathrm{vec}\left(A(z_{N_e})\right) \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{k=1}^{N_e} Y_{i,k}^H \left(\Delta H_i^{(col)}(z_k) \otimes I_{N_o}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les relations des Propriétés 84, on a :

$$\left(\Delta H_i^{(col)}(z_1) \otimes I_{N_i}\right) \mathrm{vec}\left(A(z_k)\right) = A(z_k) \Delta H_i^{(col)}(z_k)$$

D'où, en considérant D inversible :

$$\Delta\theta_A \approx \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A, H_i(z_k)} \Delta H_i^{(col)}(z_k) \tag{6.22}$$

avec

$$\mathcal{J}_{\theta_A, H_i(z_k)} = D^{-1} \left(Y_{i,k}^H - S_i^H R_i^{-1} X_{i,k}^H\right) A(z_{N_e}) \tag{6.23}$$

6.1.4 Expression de cov (θ_A) en fonction de cov (H)

Comme décrit au Chapitre (5),

$$\mathrm{cov}\left(\theta_A\right) = E\left[\Delta\theta_A \Delta\theta_A^H\right] \tag{6.24}$$

6.1.4.1 Référence-simple

A partir de l'Equation (6.18) et de l'Equation (6.24), on a :

$$\mathrm{cov}\left(\theta_A\right) = \sum_{o_1=1}^{N_o} \sum_{o_2=1}^{N_o} \sum_{i_1=1}^{N_i} \sum_{i_2=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A, H_{o_1,i_1}(z_k)} \mathrm{cov}\left(H_{o_1,i_1}(z_k), H_{o_2,i_2}(z_k)\right) \mathcal{J}_{\theta_A, H_{o_2,i_2}(z_k)}^H \tag{6.25}$$

avec l'hypothèse que les échantillons sont décorrélés en fonction des fréquences.

De plus, si les entrées sont décorrélées, toutes les covariances entre 2 entrées distinctes sont nulles. Cette hypothèse est facilement maîtrisable car les entrées sont appliquées au système par l'expérimentateur. Dans ce cas :

$$\mathrm{cov}\left(\theta_A\right) = \sum_{o_1=1}^{N_o} \sum_{o_2=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A, H_{o_1,i}(z_k)} \mathrm{cov}\left(H_{o_1,i}(z_k), H_{o_2,i}(z_k)\right) \mathcal{J}_{\theta_A, H_{o_2,i}(z_k)}^H \tag{6.26}$$

Enfin, dans le cas où les observations sont elles aussi décorrélées, e.g. si les mesures ne sont pas obtenues simultanément, alors l'Equation (6.26) est réduite à :

$$\operatorname{cov}(\theta_A) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A,H_{o,i}(z_k)} \operatorname{cov}(H_{o,i,k}, H_{o,i,k})\, \mathcal{J}^H_{\theta_A,H_{o,i}(z_k)}$$

Cette hypothèse est plus délicate que les deux précédentes. Il sera fortement conseillé de la vérifier empiriquement à partir de l'estimation des covariances de la matrice de transfert.

6.1.4.2 Références-multiple à droite

A partir de l'Equation (6.20) et de l'Equation (6.24), on a :

$$\operatorname{cov}(\theta_A) = \sum_{i1=1}^{N_i}\sum_{i2=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A,H_{i_1}(z_k)} \operatorname{cov}\left(H^{(col)}_{i_1}(z_k), H^{(col)}_{i_2}(z_k)\right) \mathcal{J}^H_{\theta_A,H_{i_2}(z_k)}$$

avec l'hypothèse que les échantillons sont décorrélés en fonction des fréquences.

De plus, si les entrées sont décorrélées :

$$\operatorname{cov}(\theta_A) = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A,H_i(z_k)} \operatorname{cov}\left(H^{(col)}_{i}(z_k), H^{(col)}_{i}(z_k)\right) \mathcal{J}^H_{\theta_A,H_i(z_k)}$$

Cette hypothèse est facilement réalisable. En effet, les entrées connues sont celles qu'on applique au système. On devra faire le choix d'appliquer des entrées décorrélées. Ce choix est évident car il n'y a pas d'utilité à considérer deux entrées corrélées.

6.1.4.3 Références-multiple à gauche

A partir de l'Equation (6.22) et de l'Equation (6.24), on a :

$$\operatorname{cov}(\theta_A) = \sum_{o1=1}^{N_i}\sum_{o2=1}^{N_i}\sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A,H_{o_1}(z_k)} \operatorname{cov}\left(H^{(lig)}_{o_1}(z_k), H^{(lig)}_{o_2}(z_k)\right) \mathcal{J}^H_{\theta_A,H_{o_2}(z_k)}$$

avec l'hypothèse que les échantillons sont décorrélés en fonction des fréquences.

De plus, si les observations sont décorrélées :

$$\operatorname{cov}(\theta_A) = \sum_{o=1}^{N_o}\sum_{k=1}^{N_e} \mathcal{J}_{\theta_A,H_o(z_k)} \operatorname{cov}\left(H^{(lig)}_{o}(z_k), H^{(lig)}_{o}(z_k)\right) \mathcal{J}^H_{\theta_A,H_o(z_k)}$$

Cette hypothèse est plus délicate que celle des entrées décorrélées. Si cette méthode est utilisée, il faudra nécessairement vérifier empiriquement la décorrélation des sorties.

6.1.5 Discussion concernant la chaîne de propagation LSCF

La méthode décrite dans [DTGPV09, DTGS09, DT09] semble avoir deux problèmes important. Le premier est lié à la matrice D, le second est lié à l'équation que l'on différencie (Equation (3.167)).

6.1.5.1 Premier problème

Nous avons vu à la Section 3.1.2.4 que la résolution du problème $D\theta_\alpha = 0$ correspond à la recherche du noyau de D. Pour que la solution de ce problème ne soit pas réduit au vecteur nul, il est nécessaire que la matrice D ne soit pas inversible ([GVL12]). Cependant, à la Section 6.1.3 on doit faire l'hypothèse que D est inversible à l'Equation (6.18) pour le cas référence-simple, à l'Equation (6.20) pour le cas références-multiple à droite et à l'Equation (6.22) pour le cas références-multiple à gauche. On a alors deux cas de figure :

- la matrice D est inversible : dans ce cas le problème résolu à la Section 3.1.2.3 n'est pas le problème exact (le choix de la contrainte modifie la résolution) mais l'inversion de D effectuée pour l'estimation d'incertitude est licite.
- la matrice D est dégénérée (non inversible) : dans ce cas le problème résolu à la Section 3.1.2.3 est le problème exact (le choix de la contrainte ne modifie pas la résolution) mais l'inversion de D effectuée pour l'estimation d'incertitude n'est pas licite.

Les différences observées dans la résolution de ce du problème $D\theta_\alpha = 0$ en fonction du choix de la contrainte par [CGV+04b] semblent indiquer que l'on est dans le premier cas de figure.

6.1.5.2 Second problème

La première équation différenciée pour établir la chaîne de propagation est l'Equation (3.167). Cependant, si D est inversible alors le choix de la contrainte modifie le problème résolu. Dans ce cas l'Equation (3.167) ne correspond plus à celle réellement utilisée dans la chaîne d'identification. En effet, dans les méthodes d'identification proposées par [VV01, Ver02, GVV+03, Cau04, CGV+04b, DT09, EKG10], les équations utilisées sont celles où l'on a fixé une contrainte (Equation (3.172) dans le cas référence-simple et Equation (3.174) dans le cas références-multiple). Une évolution de cette méthode d'estimation d'incertitude serait de différencier l'équation avec la contrainte fixée et non l'équation $D\theta_\alpha$ générique. Une autre méthode serait de différencier la décomposition en valeurs singulière proposée à la Section 3.1.2.4.

6.2 Incertitude de l'identification sous-espace des matrices du système d'état

On considère une matrice sous-espace $\mathcal{H}$ calculée, à partir des données dont on dispose, par l'une des méthodes décrites à la Section 3.2.3. On souhaite estimer les in-

certitudes des paramètres modaux identifiés par la méthode d'identification sous-espace associée à cette matrice $\mathcal{H}$. La chaîne de propagation est basée sur la delta méthode définie à la Section 5.1.1. Cette chaîne de propagation repose donc sur la différenciation des expressions analytiques de chacune des étapes de la chaîne d'identification :

1. Calcul d'une réalisation de la matrice d'observabilité à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice sous-espace $\mathcal{H}$ (Section 3.2.1.1)
2. Extraction de la matrice d'observation à partir des N_o première ligne de la matrice d'observation (Section 3.2.1.2)
3. Extraction de la matrice de transition d'état à partir de sous-matrices de la matrice d'observation (Section 3.2.1.2)
4. Extraction des pôles du système à partir de la recherche des valeurs propres de la matrice de transition d'état (Section 3.2.1.3)
5. Calcul des fréquences et amortissement modaux à partir des pôles du système (Section 3.2.1.3)
6. Calcul des formes modales à partir de la matrice d'observation et des vecteurs propres de la matrice de transition d'état (Section 3.2.1.3)

6.2.1 De la matrice de sous-espace à la matrice d'observabilité

6.2.1.1 Préliminaires

On considère connue l'estimation de la covariance de $\mathcal{H}$ que l'on note $\mathrm{Cov}\,(\mathcal{H})$. Le calcul de cette estimation sera décrit à la Section 7.2 en fonction de la méthode d'identification sous-espace choisie. Comme expliqué à la Section 3.2.1.1, une réalisation de la matrice d'observabilité Γ peut être obtenue par la décomposition en valeurs singulières de la matrice de sous-espace $\mathcal{H}$. Cette décomposition est donnée par (voir Définition 24) :

$$\mathcal{H} = U_1 \Sigma_1 V_1^H$$

On considère que $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{n_l \times n_c}$ est de rang n et on pose :

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_l \times n} \tag{6.27}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_c \times n} \tag{6.28}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{6.29}$$

où $u_j \in \mathbb{C}^{n_l \times 1}$ et $v_j \in \mathbb{C}^{n_c \times 1}$ sont respectivement les j^{me} vecteurs de U_1 (base de l'espace colonne, aussi appelé image) et de V_1 (base de l'espace ligne, aussi appelé co-image) associés à la valeur singulière σ_j (réelle et strictement positive).

On peut ainsi écrire :

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} u_j \sigma_j v_j^H \tag{6.30}$$

Les vecteurs de U_1, de même que ceux de V_1, sont orthonormaux entre eux par définition de la décomposition en valeurs singulières. Il vient donc :

$$u_i^H u_j = v_i^H v_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \tag{6.31}$$

d'où, à partir des équations 6.30 et 6.31 :

$$\begin{cases} \mathcal{H} v_j = u_j \sigma_j \\ u_j^H \mathcal{H} = \sigma_j v_j^H \end{cases} \tag{6.32}$$

Par différenciation des équations contenues dans le système (6.32) on obtient :

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{H} v_j + \mathcal{H}\Delta v_j = \Delta u_j \sigma_j + u_j \Delta\sigma_j \\ \Delta u_j^H \mathcal{H} + u_j^H \Delta\mathcal{H} = \Delta\sigma_j v_j^H + \sigma_j \Delta v_j^H \end{cases} \tag{6.33}$$

En multipliant la première équation de (6.33) à gauche par u_j^H et la seconde à droite par v_j, il vient :

$$\begin{cases} u_j^H \Delta\mathcal{H} v_j + u_j^H \mathcal{H}\Delta v_j = u_j^H \Delta u_j \sigma_j + u_j^H u_j \Delta\sigma_j \\ \Delta u_j^H \mathcal{H} v_j + u_j^H \Delta\mathcal{H} v_j = \Delta\sigma_j v_j^H v_j + \sigma_j \Delta v_j^H v_j \end{cases} \tag{6.34}$$

Qui se simplifie en utilisant les équations (6.31) et (6.32) :

$$\begin{cases} u_j^H \Delta\mathcal{H} v_j + \sigma_j v_j^H \Delta v_j = u_j^H \Delta u_j \sigma_j + \Delta\sigma_j \\ \Delta u_j^H \sigma_j v_j^H + u_j^H \Delta\mathcal{H} v_j = \Delta\sigma_j + \sigma_j \Delta v_j^H v_j \end{cases} \tag{6.35}$$

De plus, la différenciation engendre (entre autre) :

$$u_j^H \Delta u_j = \Delta v_j^H v_j = 0 \tag{6.36}$$

Il vient ainsi :

$$\Delta\sigma_j = u_j^H \Delta\mathcal{H} v_j \tag{6.37}$$

A la Section 3.2.1.1, on a choisi d'utiliser la réalisation de la matrice d'observabilité définie par :

$$\Gamma = U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$$

Par différenciation on obtient :

$$\Delta\Gamma = \Delta U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} U_1 \Sigma_1^{\frac{-1}{2}} \Delta\Sigma_1 \tag{6.38}$$

On cherche à écrire l'Equation (6.38) sous la forme :

$$\text{vec}\,(\Delta\Gamma) = \mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} \text{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) \tag{6.39}$$

Pour ce faire on doit pouvoir exprimer, après vectorisation de l'Equation (6.38), chacun de ses deux termes de droite en fonction de $\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H})$. Considérons ces deux termes séparément. Nous commencerons par traiter le terme $\frac{1}{2}U_1\Sigma_1^{\frac{-1}{2}}\Delta\Sigma_1$. Nous traiterons ensuite le terme $\Delta U_1\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$.

6.2.1.2 Première étape de la différenciation de l'observabilité

Il s'agit ici de réécrire l'égalité

$$\mathrm{vec}\left(\frac{1}{2}U_1\Sigma_1^{\frac{-1}{2}}\Delta\Sigma_1\right) = \frac{1}{2}\left(I_n \otimes U_1\Sigma_1^{\frac{-1}{2}}\right)\mathrm{vec}\,(\Delta\Sigma_1) \tag{6.40}$$

en fonction de $\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H})$. Ceci revient à déterminer la forme de $\mathrm{vec}\,(\Delta\Sigma_1)$ en fonction de $\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H})$.

La seconde équation du système (6.37) est scalaire. L'opération de vectorisation n'a donc aucun impact sur $\Delta\sigma_i$. On peut cependant l'utiliser pour modifier sa formulation. Il vient :

$$\Delta\sigma_j = \left(v_j^H \otimes u_j^H\right)\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) = (v_j \otimes u_j)^H\,\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) \tag{6.41}$$

Si on considère les n valeurs singulières rangées sous forme vectorielle et différenciées tel qu'exprimé par l'Equation (6.41), il vient :

$$\begin{bmatrix}\Delta\sigma_1\\ \dots\\ \Delta\sigma_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(v_1 \otimes u_1)^H\\ \dots\\ (v_n \otimes u_n)^H\end{bmatrix}\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) \tag{6.42}$$

Pour pouvoir relier l'Equation (6.42) à $\mathrm{vec}\,(\Delta\Sigma_1)$, on utilise une matrice de sélection S définie par

$$S = \sum_{k=1}^{n} E^{n^2,n}_{(k-1)n+k,k} \tag{6.43}$$

avec la matrice $E^{a,b}_{k,l}$ définie dans la Définition 83 en Annexe B.

On peut ainsi écrire :

$$\mathrm{vec}\,(\Delta\Sigma_1) = S\begin{bmatrix}(v_1 \otimes u_1)^H\\ \dots\\ (v_n \otimes u_n)^H\end{bmatrix}\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) \tag{6.44}$$

Ce qui donne finalement,

$$\mathrm{vec}\left(\frac{1}{2}U_1\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Delta\Sigma_1\right) = \frac{1}{2}\left(I_n \otimes U_1\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right)S\begin{bmatrix}(v_1 \otimes u_1)^H\\ \dots\\ (v_n \otimes u_n)^H\end{bmatrix}\mathrm{vec}\,(\Delta\mathcal{H}) \tag{6.45}$$

6.2.1.3 Seconde étape de la différenciation de l'observabilité

Il s'agit ici de réécrire l'égalité

$$\mathrm{vec}\left(\Delta U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\Sigma_1^{\frac{1}{2}} \otimes I_{n_l}\right) \mathrm{vec}\left(\Delta U_1\right) \tag{6.46}$$

en fonction de $\mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}\right)$.

En injectant l'Equation (6.37) dans (6.33) on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta\mathcal{H} v_j + \mathcal{H}\Delta v_j = \Delta u_j \sigma_j + u_j \Delta\sigma_j \\ \Delta u_j^H \mathcal{H} + u_j^H \Delta\mathcal{H} = \Delta\sigma_j v_j^H + \sigma_j \Delta v_j^H \end{array}\right. \tag{6.47}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \Delta u_j - \frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H}\Delta v_j = \frac{1}{\sigma_j}\left(I_{n_l} - u_j u_j^H\right)\Delta\mathcal{H} v_j \\ \Delta v_j - \frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H}^H \Delta u_j = \frac{1}{\sigma_j}\left(I_{n_c} - v_j v_j^H\right)\Delta\mathcal{H}^H u_j \end{array}\right. \tag{6.48}$$

Les deux équations du système (6.48) étant déjà vectorielles, l'utilisation de l'opérateur de vectorisation n'a aucun impact. On peut cependant l'utiliser pour réorganiser la formulation. On choisit de ne modifier que les termes de droite. Le système (6.48) devient :

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \Delta u_j - \frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H}\Delta v_j = \frac{1}{\sigma_j}\left[v_j^T \otimes \left(I_{n_l} - u_j u_j^H\right)\right] \mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}\right) \\ \Delta v_j - \frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H}^H \Delta u_j = \frac{1}{\sigma_j}\left[u_j^T \otimes \left(I_{n_c} - v_j v_j^H\right)\right] \mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}^H\right) \end{array}\right. \tag{6.49}$$

On arrive ici à un point important qui nécessite de faire l'hypothèse que $\mathcal{H}$ soit une matrice à valeur réelle, i.e. $\mathcal{H}^H = \mathcal{H}^T$, pour pouvoir utiliser la propriété de permutation de l'opérateur de vectorisation (Définition 84 en Annexe B). Cette hypothèse impose que les signaux temporels utilisés soient des signaux réels. Cette hypothèse est toujours validée sur les données mesurées. A partir de la Définition 83 (Annexe B) on défini la matrice de permutation $\mathcal{P}_{n_l,n_c}$ par :

$$\mathcal{P}_{n_l,n_c} = \sum_{k=1}^{n_l}\sum_{l=1}^{n_c} E_{k,l}^{n_l,n_c} \otimes E_{l,k}^{n_c,n_l}$$

qui permet d'écrire :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}^T\right) = \mathcal{P}_{n_l,n_c}\mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}\right)$$

Remarque 40 *Si $\mathcal{H}$ est une matrice à valeurs réelles, alors les matrices U et V obtenues par décomposition en valeurs singulières de $\mathcal{H}$ sont aussi à valeurs réelles. On aura donc aussi $u_j^H = u_j^T$ et $v_j^H = v_j^T$.*

Ainsi, en regroupant les équations du système (6.49) sous forme matricielle, on a :

$$B_j \begin{bmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{bmatrix} = C_j \mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right) \tag{6.50}$$

où,

$$B_j = \begin{bmatrix} I_{n_l} & -\frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H} \\ -\frac{1}{\sigma_j}\mathcal{H}^T & I_{n_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_l+n_c \times n_l+n_c}$$

et

$$C_j = \frac{1}{\sigma_j} \begin{bmatrix} v_j^T \otimes \left(I_{n_l} - u_j u_j^T\right) \\ \left[u_j^T \otimes \left(I_{n_c} - v_j v_j^T\right)\right] \mathcal{P}_{n_l,n_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_l+n_c \times n_l.n_c}$$

En considérant tous les vecteurs u_j et v_j :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\dagger C_1 \\ \dots \\ B_n^\dagger C_n \end{bmatrix} \mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right) \tag{6.51}$$

Enfin, pour ne conserver que les éléments Δu_j de l'Equation (6.51), on écrit :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\Sigma_1^{\frac{1}{2}} \otimes \begin{bmatrix} I_{n_l} & [0]_{n_l \times n_c} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} B_1^\dagger C_1 \\ \dots \\ B_n^\dagger C_n \end{bmatrix} \mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right) \tag{6.52}$$

Cette équation conclut la recherche de l'expression de $\mathrm{vec}\left(\Delta U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}\right)$ en fonction de $\mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right)$.

6.2.1.4 Différenciation de l'observabilité

A partir de l'Equation (6.45) et de l'Equation (6.52), on peut finalement écrire $\mathrm{vec}\left(\Delta \Gamma\right)$ en fonction de $\mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right)$:

$$\mathrm{vec}\left(\Delta \Gamma\right) = \mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} \mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right) \tag{6.53}$$

avec

$$\mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} = \left(\Sigma_1^{\frac{1}{2}} \otimes \begin{bmatrix} I_{n_l} & [0]_{n_l \times n_c} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} B_1^\dagger C_1 \\ \dots \\ B_n^\dagger C_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(I_n \otimes U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right) S \begin{bmatrix} \left(v_1 \otimes u_1\right)^H \\ \dots \\ \left(v_n \otimes u_n\right)^H \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

Finalement, par la delta méthode (voir Section 5.1.1), il vient :

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta \Gamma\right)\right) = \mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} \mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta \mathcal{H}\right)\right) \mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}}^T \tag{6.55}$$

6.2.2 De la matrice d'observabilité aux matrices de transition d'état et d'observation

On recherche ici les matrices jacobiennes :
- $\mathcal{J}_{A,\Gamma}$ telle que $\text{cov}\left(\text{vec}\left(\Delta A\right)\right) = \mathcal{J}_{A,\Gamma}\text{cov}\left(\text{vec}\left(\Delta\Gamma\right)\right)\mathcal{J}_{A,\Gamma}^T$
- $\mathcal{J}_{C,\Gamma}$ telle que $\text{cov}\left(\text{vec}\left(\Delta C\right)\right) = \mathcal{J}_{C,\Gamma}\text{cov}\left(\text{vec}\left(\Delta\Gamma\right)\right)\mathcal{J}_{C,\Gamma}^T$

6.2.2.1 De la matrice d'observabilité à la matrice de transition d'état

On a vu à la Section 3.2.1.2 et à travers l'Equation (3.193) que la matrice de transition d'état A peut être obtenue à partir de sous-matrice de l'observabilité :

$$A = \underline{\Gamma}^{\dagger}\overline{\Gamma} = \left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\underline{\Gamma}^T\overline{\Gamma}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\underline{\Gamma} &= \underline{S}\Gamma \\
\overline{\Gamma} &= \overline{S}\Gamma \\
\underline{S} &= \begin{bmatrix} I_{(p-1)N_o} & [0]_{(p-1)N_o,N_o} \end{bmatrix} \\
\overline{S} &= \begin{bmatrix} [0]_{(p-1)N_o,N_o} & I_{(p-1)N_o} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Par différenciation ΔA s'écrit :

$$\Delta A = -\left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\Delta\left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)\left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma} + \left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\Delta\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma} + \left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\underline{\Gamma}^T\Delta\underline{\Gamma} \quad (6.56)$$

Remarque 41 *Les matrices de sélection $\underline{S}$ et $\overline{S}$ sont déterministes. Leur différenciation est donc nulle.*

D'où

$$\Delta\left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right) = \Delta\Gamma^T\underline{S}^T\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}^T\underline{S}\Delta\Gamma$$

$$\Delta\underline{\Gamma}^T = \Delta\Gamma^T\underline{S}^T$$

$$\Delta\overline{\Gamma} = \overline{S}\Delta\Gamma$$

et en remarquant qu'en injectant ces trois équations dans l'Equation (6.56) , on fait apparaître le terme

$$\left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\underline{\Gamma}^T\overline{S}\Gamma = \underline{\Gamma}^{\dagger}\overline{\Gamma} = A$$

l'Equation (6.56) s'écrit :

$$\Delta A = \underline{\Gamma}^{\dagger}\overline{S}\Delta\Gamma - \underline{\Gamma}^{\dagger}\underline{S}\Delta\Gamma A + \left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\Delta\underline{\Gamma}^T\left(\underline{S}^T\overline{\Gamma} - \underline{S}^T\underline{\Gamma}A\right) \quad (6.57)$$

En vectorisant l'Equation (6.57), il vient :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta A\right) = \mathcal{J}_{A,\Gamma}\mathrm{vec}\left(\Delta\Gamma\right) \tag{6.58}$$

avec

$$\mathcal{J}_{A,\Gamma} = \left(I_n \otimes \underline{\Gamma}^{\dagger}\overline{S}\right) - \left(A^T \otimes \underline{\Gamma}^{\dagger}\underline{S}\right) + \left[\left(\overline{\Gamma}^T\underline{S} - A^T\underline{\Gamma}^T\underline{S}\right) \otimes \left(\underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma}\right)^{-1}\right]\mathcal{P}_{pN_o,n} \tag{6.59}$$

Finalement, par la delta méthode :

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta A\right)\right) = \mathcal{J}_{A,\Gamma}\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta\Gamma\right)\right)\mathcal{J}_{A,\Gamma}^T \tag{6.60}$$

6.2.2.2 De la matrice d'observabilité à la matrice d'observation

Comme nous l'avons vu à la Section 3.2.1.2, et de par la forme de la matrice d'observation, la matrice d'observabilité correspond aux N_o (nombre de capteurs) première ligne de la matrice d'observabilité.

$$C = S_C\Gamma \tag{6.61}$$

avec

$$S_C = \begin{bmatrix} I_{N_o} & [0]_{N_o\times(p-1)N_o} \end{bmatrix}$$

Par différenciation, et vectorisation S_C étant déterministe, on a :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta C\right) = \mathcal{J}_{C,\Gamma}\mathrm{vec}\left(\Delta\Gamma\right) \tag{6.62}$$

avec

$$\mathcal{J}_{C,\Gamma} = \left(I_n \otimes S_C\right) \tag{6.63}$$

Finalement, par la delta méthode :

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta C\right)\right) = \mathcal{J}_{C,\Gamma}\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta\Gamma\right)\right)\mathcal{J}_{C,\Gamma}^T \tag{6.64}$$

6.2.2.3 De la matrice sous-espace aux matrices de transition d'état et d'observation

A partir de la formulation des matrices jacobiennes $\mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}}$, $\mathcal{J}_{A,\Gamma}$ et $\mathcal{J}_{C,\Gamma}$, ainsi que d'une estimation de la covariance de $\mathcal{H}$, on peut directement estimer les covariances de A et de C grâce à la matrice jacobienne entre le couple (A, C) et $\mathcal{H}$.

$$\mathcal{J}_{AC,\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{A,\Gamma}\mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} \\ \mathcal{J}_{C,\Gamma}\mathcal{J}_{\Gamma,\mathcal{H}} \end{bmatrix} \tag{6.65}$$

Par propagation, on a :

$$\mathrm{cov}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{vec}\left(\Delta A\right) \\ \mathrm{vec}\left(\Delta C\right) \end{bmatrix}\right) = \mathcal{J}_{AC,\mathcal{H}}\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta\mathcal{H}\right)\right)\mathcal{J}_{AC,\mathcal{H}}^T \tag{6.66}$$

6.2.3 De la matrice de transition d'état à ses valeurs et vecteurs propres

La formulation des matrices jacobiennes reliant une matrice à ses valeurs et vecteurs propres est définie dans [RPDR08b, DLM13].

Soient λ_j, Ψ_j et g_j respectivement la j^{me} valeur propre, le j^{me} vecteur propre à droite et le j^{me} vecteur propre à gauche de A, alors :

$$A\Psi_j = \lambda_j \Psi_j \tag{6.67}$$

$$g_j^H A = \lambda_j g_j^H \tag{6.68}$$

On peut écrire,

$$\mathrm{vec}\left(\Delta\lambda_j\right) = \Delta\lambda_j = \mathcal{J}_{\lambda_j,A}\mathrm{vec}\left(\Delta A\right) \tag{6.69}$$

$$\mathrm{vec}\left(\Delta\Psi_j\right) = \Delta\Psi_j = \mathcal{J}_{\Psi_j,A}\mathrm{vec}\left(\Delta A\right) \tag{6.70}$$

avec

$$\mathcal{J}_{\lambda_j,A} = \frac{1}{g_j^H \Psi_j}\left(\Psi_j^T \otimes g_j^H\right) \tag{6.71}$$

et

$$\mathcal{J}_{\Psi_j,A} = \left(\lambda_j I_n - A\right)\left[\Psi_j^T \otimes \left(I_n - \frac{\Psi_j^H g_j}{g_j^H \Psi_j} g_j^H\right)\right] \tag{6.72}$$

Finalement, par la delta méthode :

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta\lambda_j\right)\right) = \mathcal{J}_{\lambda_j,A}\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta A\right)\right)\mathcal{J}_{\lambda_j,A}^T \tag{6.73}$$

et

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta\Psi_j\right)\right) = \mathcal{J}_{\Psi_j,A}\mathrm{cov}\left(\mathrm{vec}\left(\Delta A\right)\right)\mathcal{J}_{\Psi_j,A}^T \tag{6.74}$$

6.2.4 Des valeurs propres de la matrice de transition d'état aux fréquences et amortissements modaux

On rappelle que la matrice de transition d'état identifiée est celle du système discrétisé (car le signal utilisé est un signal discret) avec une fréquence d'échantillonnage f_e. Les pôles λ_j sont donc ceux du système discret identifié. L'Equation (3.197) donne l'expression des pôles discrets λ_j en fonction des pôles continus μ_j. A partir des pôles continus μ_j, l'Equation (3.199) et l'Equation (3.200) permettent respectivement d'obtenir les fréquences modales f_j et les amortissements modaux ξ_j. On a ainsi :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta f_j\right) = \Delta f_j = \mathcal{J}_{f_j,A}\mathrm{vec}\left(\Delta A\right) \tag{6.75}$$

$$\mathrm{vec}\left(\Delta\xi_j\right) = \Delta\xi_j = \mathcal{J}_{\xi_j,A}\mathrm{vec}\left(\Delta A\right) \tag{6.76}$$

avec

$$\begin{bmatrix}\mathcal{J}_{f_j,A}\\ \mathcal{J}_{\xi_j,A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{J}_{f_j,\lambda_j}\\ \mathcal{J}_{\xi_j,\lambda_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Re\mathcal{J}_{\lambda_j,A}\\ \Im\mathcal{J}_{\lambda_j,A}\end{bmatrix} \tag{6.77}$$

où $\mathcal{J}_{f_j,A}$, $\mathcal{J}_{\xi_j,A} \in \mathbb{R}^{1\times n^2}$ et où

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{f_j,\lambda_j} \\ \mathcal{J}_{\xi_j,\lambda_j} \end{bmatrix} = \frac{f_e}{|\lambda_j|^2 |\mu_j|} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & \frac{100}{|\mu_j|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re\mu_j & \Im\mu_j \\ -\Im\mu_j & \Re\mu_j\Im\mu_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re\lambda_j & \Im\lambda_j \\ -\Im\lambda_j & \Re\lambda_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{6.78}$$

Remarque 42 *Ici, on a considéré l'amortissement en pourcentage. C'est le terme* $\frac{100}{|\mu_j|^2}$ *qui nous l'indique. Pour l'avoir sans unite il faut remplacer ce terme par* $\frac{1}{|\mu_j|^2}$.

Finalement, par la delta méthode :

$$\mathrm{cov}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{vec}\,(\Delta f_j) \\ \mathrm{vec}\,(\Delta \xi_j) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{f_j,A} \\ \mathcal{J}_{\xi_j,A} \end{bmatrix} \mathrm{cov}\,(\mathrm{vec}\,(\Delta A)) \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{f_j,A} \\ \mathcal{J}_{\xi_j,A} \end{bmatrix}^T \tag{6.79}$$

6.2.5 Des vecteur propres de la matrice de transition d'état et de la matrice d'observabilité aux déformées modales normalisées

On rappelle que les vecteurs propres à droite Ψ_j du système discrétisé sont identiques à ceux du système continu (voir Définition 17 et Section 3.2.1.3). L'Equation (3.203) relie les formes modales φ_j à ses vecteurs propres Ψ_j et à la matrice d'observabilité. Cependant, les formes modales sont définies à une base près. En effet, on a vu que la matrice d'observation a été définie à une base près (voir Section 3.2.1.1). Il en va donc de même pour la matrice de transition d'état A. Ce qui par définition, implique que la base de vecteurs propres est directement influencée par la base choisie pour définir la matrice d'observation. On choisit de normaliser chaque vecteur par le déplacement modal observé par le capteur k. On note ce déplacement par le scalaire $\varphi_j^{(k)}$ (k^{me} élément du vecteur $\varphi_j = C\Psi_j$).

$$\varphi_j^{(norm)} = \frac{\varphi_j}{\varphi_j^{(k)}} \tag{6.80}$$

On a ainsi :

$$\mathrm{vec}\,(\Delta\varphi_j) = \Delta\varphi_j = \mathcal{J}_{\varphi_j,AC} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}\,(\Delta A) \\ \mathrm{vec}\,(\Delta C) \end{bmatrix} \tag{6.81}$$

où $\mathcal{J}_{\varphi_j,AC} \in \mathbb{R}^{N_o\times\left(n^2+nN_o\right)}$ s'écrit :

$$\mathcal{J}_{\varphi_j,AC} = \frac{1}{\varphi_j^{(k)}} \left(I_{N_o} - \begin{bmatrix} [0]_{N_o\times(k-1)} & \varphi_j & [0]_{N_o\times(N_o-k)} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} C\mathcal{J}_{\Psi_j,A} & \Psi^T \otimes I_{N_o} \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

Finalement, par la delta méthode :

$$\mathrm{cov}\,(\mathrm{vec}\,(\Delta\varphi_j)) = \mathcal{J}_{\varphi_j,AC}\mathrm{cov}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{vec}\,(\Delta A) \\ \mathrm{vec}\,(\Delta C) \end{bmatrix}\right) \mathcal{J}_{\varphi_j,AC}^T \tag{6.83}$$

Remarque 43 *De manière opérationnelle, pour faciliter la comparaison des déformations modales, on choisira souvent de normaliser les formes modales φ_j par leur plus grand déplacement. Chaque vecteur ne sera donc pas toujours normalisé par le déplacement modal observé par le même capteur k. Autrement dit, chaque vecteur propre Ψ_j sera exprimé dans une base différente, celle où la déformée modale vaut* 1 *au capteur observant la plus grande déformation lors de la réponse du j^{me} mode de la structure.*

6.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons détaillé les propagations d'incertitude associées aux méthodes d'identification LSCF du problème ARX linéarisé (voir Section 6.1) et celles associées aux différentes méthodes d'identification sous-espace (voir Section 6.2).

S'agissant des méthodes LSCF, nous avons soulevé deux problèmes probables concernant la chaîne de propagation d'incertitude proposée par [DTGPV09, DTGS09, DT09] (Section 6.1.5) et nous avons proposés deux solutions pour le second problème (Section 6.1.5.2).

Le chapitre suivant est dédié à l'estimation des variances des grandeurs de départ : les matrices de transfert pour la méthode LSCF (Section 7.1) et les matrices sous-espace pour les méthodes sous-espaces (Section 7.2).

Chapitre 7

Points de départ des chaînes de propagation

On a vu que les méthodes d'identification nécessitent d'estimer la grandeur de départ (Chapitre 4). Ces estimations on une variance que l'on va propager à travers les chaînes de propagation (Chapitre 6). Mais avant de les propager il faut estimer ces variances. La chaîne de propagation associée aux méthodes LSCF référence-simple et références-multiple nécessite de connaître une estimation de la variance des matrices de transfert. Celle associée aux méthodes d'identification sous-espace nécessite de connaître une estimation de la variance des matrices sous-espaces (et donc des fonctions de corrélations).

On a vu au chapitre 4 (Section 4.6), une méthode d'estimation des matrices de transfert, l'estimation H_1. L'estimation de la variance de l'estimation H_1 nécessite de la différencier. Selon les hypothèses sur les données, nous verrons dans ce chapitre deux façons d'estimer la variance des fonctions de transfert. La première est basée sur la fonction de cohérence (Section 7.1.1), la seconde utilise la propagation des variances des densités spectrales (Section 7.1.2). Concernant la variance des matrices de sous-espace, on les estimera par propagation des variances des fonctions de corrélation qui les composent. Chacune des matrices sous-espaces ayant une formulation différente, on aura autant de matrice à différencier que de méthodes considérées (Section 7.2). Deux de ces méthodes sont de type Output-Only. La différenciation de la première méthode, appelée Output-Only Covariance-driven (Section 7.2.1.1), est décrite dans [RPDR08b, DM13, DLM13]. Les différenciations des quatre autres matrices sous-espace (dont une est associée à une méthode de type Output-Only et trois sont associées à des méthodes de type Input/Output) correspondent à un apport de cette thèse (Section 7.2.2).

Sommaire

7.1 Covariance des matrices de transfert 164

7.1.1 Etat de l'art : Calcul à partir des cohérences 164

7.1.2 Proposition : Calcul par propagation 167

7.2 Covariance des matrices sous-espaces 168

7.2.1 Etat de l'art : Différenciation de la méthode *Output-Only Covariance-driven* 168
7.2.2 Proposition : Différenciation de 4 méthodes sous-espace . . . 169
7.3 Bilan du chapitre 173

7.1 Covariance des matrices de transfert

7.1.1 Etat de l'art : Calcul à partir des cohérences

L'estimation $H_1(k) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$ des fonctions de transfert est donnée par la relation (Equation (4.16))

$$H_1(k) = S_{YU}(k) S_{UU}(k)^{-1}$$

Avec S_{yu} et S_{uu} les densités de puissance estimées par périodogrammes moyennés (voir Section 4.4.2). Plus particulièrement (Equation (4.15))

$$S_{YU}(k) = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} Y_b(k) U_b(k)^H$$

En faisant l'hypothèse que les transformées de Fourier des signaux d'excitation sont calculées de manière exacte et qu'elles ne sont pas soumises aux perturbations sur les données, on peut considérer que $\Delta U_b(k) = 0 \quad \forall k \in [1, N_e]$ et montrer que la variance d'une fonction de transfert du couple observation/excitation (o, i) est une fonction de la cohérence entre l'excitation i et l'observation o. Cette méthode est utilisée dans [Cau04, DT09, DTGPV09, DTGS09].

Remarque 44 *Pour simplifier les écritures, on notera l'estimation H_1 de la matrice de transfert : $\widehat{H}$*

Par différentiation de $\widehat{H}$, on obtient :

$$\Delta \widehat{H}(k) = \frac{1}{n_b} \left(\sum_{b=1}^{n_b} \Delta Y_b(k) U_b(k)^H \right) S_{UU}^{-1}$$

Puis par vectorisation, il vient :

$$\mathrm{vec}\left(\Delta \widehat{H}(k)\right) = \frac{1}{n_b} \sum_{b=1}^{n_b} \left[S_{UU}(k)^{-T} U_b(k)^* \otimes I_{N_o} \right] \Delta Y_b(k)$$

La covariance des termes de $\widehat{H}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\widehat{H}(k)} &= E\left[\mathrm{vec}\left(\Delta \widehat{H}(k)\right) \mathrm{vec}\left(\Delta \widehat{H}(k)\right)^H \right] \\
&= \frac{1}{n_b^2} \sum_{b_1=1}^{n_b} \sum_{b_2=1}^{n_b} \left(S_{UU}(k)^{-T} U_{b_1}(k)^* \otimes I_{N_o} \right) E\left[\Delta Y_{b_1}(k) \Delta Y_{b_2}(k)^H \right] \left(U_{b_2}(k)^T S_{UU}(k)^{-*} \otimes I_{N_o} \right)
\end{aligned}$$

Or, on a vu à la Section 4.4.2 que les données mesurées sur les n_b blocs sont considérées comme étant n_b réalisations de processus aléatoires indépendants et identiquement distribués. L'indépendance entre les blocs implique que :

$$\operatorname{cov}\left(Y_{b_1}(k), Y_{b_2}(k)\right) = E\left[\Delta Y_{b_1}(k)\Delta Y_{b_2}(k)^H\right] = \begin{cases} [0]_{N_o\times N_o} & \text{si } b_1 \neq b_2 \\ \Sigma_{Y_b(k)} & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases} \tag{7.1}$$

D'où, en utilisant la propriété de distribution du produit de Kronecker (voir Propriété 84 en Annexe B) :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\widehat{H}(k)} &= \frac{1}{n_b^2}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-T}U_b(k)^*\otimes I_{N_o}\right)\Sigma_{Y_b(k)}\left(U_b(k)^T S_{UU}(k)^{-*}\otimes I_{N_o}\right)\\
&= \frac{1}{n_b^2}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-T}U_b(k)^*\otimes I_{N_o}\right)\left(1\otimes\Sigma_{Y_b(k)}\right)\left(U_b(k)^T S_{UU}(k)^{-*}\otimes I_{N_o}\right)\\
&= \frac{1}{n_b^2}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-T}U_b(k)^*U_b(k)^T S_{UU}(k)^{-*}\otimes\Sigma_{Y_b(k)}\right)
\end{aligned}$$

La propriété de distribution identique des processus aléatoires sur les n_b bloc (i.i.d.) donne :

$$\Sigma_{Y_b(k)} = \Sigma_{Y(k)}$$

D'où :

$$\Sigma_{\widehat{H}(k)} = \frac{1}{n_b^2}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-T}U_b(k)^*U_b(k)^T S_{UU}(k)^{-*}\otimes\Sigma_{Y(k)}\right)$$

Puis, par associativité du produit de Kronecker (voir Propriété 84 en Annexe B) :

$$\Sigma_{\widehat{H}(k)} = \frac{1}{n_b^2}\left(S_{UU}(k)^{-T}\sum_{b=1}^{n_b}U_b(k)^*U_b(k)^T S_{UU}(k)^{-*}\otimes\Sigma_{Y(k)}\right)$$

En remarquant que

$$\sum_{b=1}^{n_b}U_b(k)^*U_b(k)^T = n_b S_{UU}k^T$$

on peut écrire

$$\Sigma_{\widehat{H}(k)} = \frac{1}{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-*}\otimes\Sigma_{Y(k)}\right)$$

de plus, si on fait l'hypothèse que les N_i entrées sont décorrélées, la matrice de densité spectrale de puissance $S_{UU}(k)$ est diagonale à valeurs réelles pour tout k. D'où :

$$\Sigma_{\widehat{H}(k)} = \frac{1}{n_b}\left(S_{UU}(k)^{-1}\otimes\Sigma_{Y(k)}\right)$$

En utilisant les matrices de permutation $\mathcal{P}_{N_o,N_i}$ (voir Propriété 84 et Propriété 83 en Annexe B) :

$$\Sigma_{\widehat{H}(k)} = \frac{1}{n_b}\mathcal{P}_{N_o,N_i}\left(\Sigma_{Y(k)} \otimes S_{UU}(k)^{-1}\right)\mathcal{P}_{N_o,N_i}^T \tag{7.2}$$

La grandeur $\Delta Y_b(k)$ est la perturbation sur la sortie $Y_b(k)$, on peut l'obtenir par différenciation de cette sortie, mais on peut aussi l'écrire comme étant :

$$\Delta Y_b(k) = \widehat{H}(k)U_b(k) - Y_b(k)$$

Alors, avec $S_{YY}(k) = E\left[Y_b(k)Y_b(k)\right]$ et $S_{YU}(k)^H = S_{UY}(k) = E\left[U_b(k)Y_b(k)\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Y(k)} &= E\left[\Delta Y_b(k)\Delta Y_b(k)^H\right] \\
&= E\left[\left(\widehat{H}(k)U_b(k) - Y_b(k)\right)\left(\widehat{H}(k)U_b(k) - Y_b(k)\right)^H\right] \\
&= S_{YY}(k) - \widehat{H}(k)S_{UY}(k) \\
&= \begin{bmatrix} S_{Y_1Y_1}(k) & \dots & S_{Y_1Y_{N_o}}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{Y_{N_o}Y_1}(k) & \dots & S_{Y_{N_o}Y_{N_o}}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{H}_1(k) \\ \vdots \\ \widehat{H}_{N_o}(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{UY_1}(k) & \dots & S_{UY_{N_o}}(k)(k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_{Y_1Y_1}(k) & \dots & S_{Y_1Y_{N_o}}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{Y_{N_o}Y_1}(k) & \dots & S_{Y_{N_o}Y_{N_o}}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widehat{H}_{N_o}(k)S_{UY_1}(k) & \dots & \widehat{H}_{N_o}(k)S_{UY_{N_o}}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{H}_{N_o}(k)S_{UY_1}(k) & \dots & \widehat{H}_{N_o}(k)S_{UY_{N_o}}(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

avec

$$\widehat{H}_o(k) = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{o,1}(k) & \dots & \widehat{H}_{o,N_i}(k) \end{bmatrix}$$

et

$$S_{UY_{N_o}}(k) = \begin{bmatrix} S_{U_1Y_o}(k) \\ \vdots \\ S_{U_{N_i}Y_o}(k) \end{bmatrix}$$

Si on fait l'hypothèse que les N_o sorties sont décorrélées entre elles, e.g. si les mesures ne sont pas effectuées simultanément, alors la matrice de covariance $\Sigma_{Y(k)}$ est diagonale :

$$\Sigma_{Y(k)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{Y_1(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Sigma_{Y_{N_o}(k)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\Sigma_{Y_o(k)} = S_{Y_oY_o}(k) - \widehat{H}_o(k)S_{UY_o}(k)$$

Ceci permet de réécrire l'Equation 7.2 :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\widehat{H}(k)} &= \frac{1}{n_b}\mathcal{P}_{N_o,N_i}\left(\begin{bmatrix}\Sigma_{Y_1(k)} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \Sigma_{Y_{N_o}(k)}\end{bmatrix}\otimes S_{UU}(k)^{-1}\right)\mathcal{P}^T_{N_o,N_i}\\ &= \frac{1}{n_b}\mathcal{P}_{N_o,N_i}T\mathcal{P}^T_{N_o,N_i}\end{aligned}$$

avec

$$T=\begin{bmatrix}\left(1-m\gamma_1^2(k)\right)S_{Y_1Y_1}(k)S_{UU}(k)^{-1} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \left(1-m\gamma_{N_o}^2(k)\right)S_{Y_{N_o}Y_{N_o}}(k)S_{UU}(k)^{-1}\end{bmatrix}$$

et $m\gamma_o^2(k)=\frac{\widehat{H}_o(k)S_{UY_o}(k)}{S_{Y_oY_o}(k)}$ la fonction de cohérence à entrées multiples [HS06, Ver02, Cau04] qui décrit la quantité d'énergie de corrélation de la sortie o avec les N_i entrées.

7.1.2 Proposition : Calcul par propagation

La technique proposée ici est de propager les variances des densités spectrales estimées à l'estimation H_1. Il s'agit de différencier la relation (4.16) sans scinder la matrice de densité spectrale entre l'entrée Y et la sortie U comme nous l'avons fait à la Section 7.1.1.

$$\Delta H_1(k)=\Delta S_{YU}(k)S_{UU}(k)^{-1}-S_{YU}(k)S_{UU}(k)^{-1}\Delta S_{UU}(k)S_{UU}(k)^{-1}$$

$$\mathrm{vec}\left(\Delta H_1(k)\right)=J_{H_1,S(k)}\begin{bmatrix}\mathrm{vec}\left(\Delta S_{YU}(k)\right)\\ \mathrm{vec}\left(\Delta S_{UU}(k)\right)\end{bmatrix}$$

avec

$$J_{H_1,S(k)}\begin{bmatrix}J_{H_1,S_{YU}(k)} & J_{H_1,S_{UU}(k)}\end{bmatrix}$$

$$J_{H_1,S_{YU}(k)}=I_{N_i}$$

$$J_{H_1,S_{UU}(k)}=S_{UU}(k)^{-T}\otimes S_{YU}(k)S_{UU}(k)^{-1}$$

D'où, au final,

$$\mathrm{cov}\left(H_1(k)\right)=J_{H_1,S(k)}\begin{bmatrix}\mathrm{cov}\left(S_{YU}(k)\right) & \mathrm{cov}\left(S_{YU}(k),S_{UU}(k)\right)\\ \mathrm{cov}\left(S_{UU}(k),S_{YU}(k)\right) & \mathrm{cov}\left(S_{UU}(k)\right)\end{bmatrix}J^H_{H_1,S(k)}$$

avec les covariances estimées par l'estimateur de variance empirique non biaisé :

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(S_{YU}(k)\right) = \frac{1}{n_b - 1}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{YU}^{(b)}(k) - S_{YU}(k)\right)\left(S_{YU}^{(b)}(k) - S_{YU}(k)\right)^H$$

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(S_{YU}(k), S_{UU}(k)\right) = \frac{1}{n_b - 1}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{YU}^{(b)}(k) - S_{YU}(k)\right)\left(S_{UU}^{(b)}(k) - S_{UU}(k)\right)^H$$

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(S_{UU}(k)\right) = \frac{1}{n_b - 1}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}^{(b)}(k) - S_{UU}(k)\right)\left(S_{UU}^{(b)}(k) - S_{UU}(k)\right)^H$$

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(S_{UU}(k), S_{YU}(k)\right) = \frac{1}{n_b - 1}\sum_{b=1}^{n_b}\left(S_{UU}^{(b)}(k) - S_{UU}(k)\right)\left(S_{YU}^{(b)}(k) - S_{YU}(k)\right)^H$$

7.2 Covariance des matrices sous-espaces

Dans cette section, les matrices de sous-espace $\mathcal{H}$ sont différenciées et vectorisées dans le but d'estimer leur covariance. Les matrices de sous-espace considérées sont les matrices *Covariance-driven* présentées au Chapitre 3.

Dans le but de simplifier les équations, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathcal{R}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^+\mathcal{Y}^{+^T} \in \mathbb{R}^{pN_o \times pN_o}, \quad \mathcal{R}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^+\mathcal{Y}^{-^T} \in \mathbb{R}^{pN_o \times qN_o}$$

$$\mathcal{R}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^-\mathcal{Y}^{-^T} \in \mathbb{R}^{qN_o \times qN_o}, \quad \mathcal{R}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^+\mathcal{U}_1^{+^T} \in \mathbb{R}^{pN_o \times pN_i}$$

$$\mathcal{R}_5 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^-\mathcal{U}_1^{+^T} \in \mathbb{R}^{qN_o \times pN_i}, \quad \mathcal{R}_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^+\mathcal{U}_1^{-^T} \in \mathbb{R}^{pN_o \times qN_i}$$

$$\mathcal{R}_7 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Y}^-\mathcal{U}_1^{-^T} \in \mathbb{R}^{qN_o \times qN_i} \quad \mathcal{R}_8 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_1^+\mathcal{U}_1^{+^T} \in \mathbb{R}^{pN_i \times pN_i}$$

$$\mathcal{R}_9 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_1^-\mathcal{U}_1^{+^T} \in \mathbb{R}^{qN_i \times pN_i}, \quad \mathcal{R}_{10} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_1^-\mathcal{U}_1^{-^T} \in \mathbb{R}^{qN_i \times qN_i}$$

7.2.1 Etat de l'art : Différenciation de la méthode *Output-Only Covariance-driven*

7.2.1.1 Output-Only

Covariance-driven

La matrice sous-espace associée à la méthode *Output-Only Covariance-driven* (voir Section 3.2.3.1) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OOcov} &= \mathcal{Y}^+\mathcal{Y}^{-^T} \\ &= \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

Cette matrice dépend uniquement de la matrice de corrélation $\mathcal{R}_2$. Sa différenciation donne :

$$\Delta\mathcal{H}_{OOcov} = \Delta\mathcal{R}_2 \tag{7.3}$$

La vectorisation de (7.3) donne :

$$vec(\Delta\mathcal{H}_{OOcov}) = vec(\Delta\mathcal{R}_2)$$

Finalement, les covariances des éléments de la matrice $\mathcal{H}_{OOcov}$ sont données par :

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{OOcov}} \stackrel{\text{def}}{=} Cov(\mathcal{H}_{OOcov}) = E\left[vec(\Delta\mathcal{R}_2)vec(\Delta\mathcal{R}_2)^T\right] = Cov(\mathcal{R}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_{\mathcal{R}_2}$$

7.2.2 Proposition : Différenciation de 4 méthodes sous-espace

7.2.2.1 Output-Only

Squared Data-driven

La matrice sous-espace associée à la méthode *Output-Only Squared Orthogonal projection Data-driven* (voir Section 3.2.3.4) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OOsqort} &= \mathcal{Y}^{+}\pi_{\mathcal{Y}^{-}}\mathcal{Y}^{+^T}\\ &= \mathcal{Y}^{+}\mathcal{Y}^{-^T}\left(\mathcal{Y}^{-}\mathcal{Y}^{-^T}\right)^{-1}\mathcal{Y}^{-}\mathcal{Y}^{+^T}\\ &= \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\mathcal{R}_2^T\end{aligned}$$

Cette matrice dépend des matrices de corrélations $\mathcal{R}_2$ et R_3. Sa différenciation donne :

$$\Delta\mathcal{H}_{OOsqort} = \Delta\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\mathcal{R}_2^T - \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\Delta\mathcal{R}_3\mathcal{R}_3^{-1}\mathcal{R}_2^T + \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\Delta\mathcal{R}_2^T \tag{7.4}$$

La vectorisation de (7.4) donne :

$$vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OOsqort}\right) = \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}\begin{bmatrix}vec\left(\Delta\mathcal{R}_2\right)\\ vec\left(\Delta\mathcal{R}_3\right)\end{bmatrix}$$

avec,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix}\mathcal{J}^{(1)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} & \mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}\end{bmatrix}\\ \mathcal{J}^{(1)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \left(\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-T}\otimes I_{pN_o}\right) + \left(I_{pN_o}\otimes\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\right)\mathcal{P}_{pN_o,qN_o}\\ \mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= -\left(\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-T}\otimes\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3^{-1}\right)\end{aligned}$$

où $\mathcal{J}^{(1)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{pN_o.pN_o\times pN_o.qN_o}$ et $\mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{pN_o.pN_o\times qN_o.qN_o}$.

Finalement, les covariances des éléments de la matrice $\mathcal{H}_{OOsqort}$ sont données par :

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{OOsqort}} \stackrel{\text{def}}{=} Cov(\mathcal{H}_{OOsqort}) = E\left[vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OOsqort}\right)vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OOsqort}\right)^T\right]$$

7.2.2.2 Input/Output

Covariance-driven

La matrice sous-espace associée à la méthode *Input/Output Covariance-driven* (voir Section 3.2.3.2) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OIcov} &= \mathcal{Y}^{+}\pi_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}\mathcal{Y}^{-^T}\\ &= \mathcal{Y}^{+}\mathcal{Y}^{-^T} - \mathcal{Y}^{+}\mathcal{U}_1^{+^T}\left(\mathcal{U}_1^{+}\mathcal{U}_1^{+^T}\right)^{-1}\mathcal{U}_1^{+}\mathcal{Y}^{-^T}\\ &= \mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T\end{aligned}$$

Cette matrice dépend des matrices de corrélations $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$ et $\mathcal{R}_8$. Sa différenciation donne :

$$\Delta\mathcal{H}_{OIcov} = \Delta(\mathcal{R}_2) - \Delta(\mathcal{R}_4)\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T + \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\Delta(\mathcal{R}_8)\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\Delta(\mathcal{R}_5^T) \quad (7.5)$$

La vectorisation de (7.5) donne :

$$vec(\Delta\mathcal{H}_{OIcov}) = \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}\begin{bmatrix}vec(\Delta\mathcal{R}_2)\\ vec(\Delta\mathcal{R}_4)\\ vec(\Delta\mathcal{R}_8)\\ vec(\Delta\mathcal{R}_5)\end{bmatrix}$$

avec,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix}\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} & \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} & \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} & \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(4)}\end{bmatrix}\\ \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} &= I_{pN_o.qN_o}\\ \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} &= -(\mathcal{R}_5\mathcal{R}_8^{-T}\otimes I_{pN_o})\\ \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} &= (\mathcal{R}_5\mathcal{R}_8^{-T}\otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1})\\ \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(4)} &= -(I_{qN_o}\otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1})\mathcal{P}_{qN_o,pN_i}\end{aligned}$$

où $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{pN_o.qN_o\times pN_o.qN_o}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{pN_o.qN_o\times pN_o.pN_i}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} \in \mathbb{R}^{pN_o.qN_o\times pN_i.pN_i}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(4)} \in \mathbb{R}^{pN_o.qN_o\times qN_o.pN_i}$.

Finalement, les covariances des éléments de la matrice $\mathcal{H}_{OIcov}$ sont données par :

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{OIcov}} \stackrel{\text{def}}{=} Cov(\mathcal{H}_{OIcov}) = E\left[vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIcov}\right)vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIcov}\right)^T\right]$$

Squared Orthogonal projection Data-driven

La matrice sous-espace associée à la méthode *Input/Output Squared Orthogonal projection Data-driven* (voir Section 3.2.3.4) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{OIsqort} &= \mathcal{Y}^{+}\pi_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}\mathcal{Y}^{+^T}\\ &= \mathcal{Y}^{+}\mathcal{Y}^{+^T} - \mathcal{Y}^{+}\mathcal{U}^{+^T}\left(\mathcal{U}_1^{+}\mathcal{U}_1^{+^T}\right)^{-1}\mathcal{U}_1^{+}\mathcal{Y}^{+^T}\\ &= \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_4^T\end{aligned}$$

Cette matrice dépend des matrices de corrélations $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_8$. Sa différenciation donne :

$$\Delta\mathcal{H}_{OIsqort} = \Delta(\mathcal{R}_1) - \Delta(\mathcal{R}_4)\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_4^T + \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\Delta(\mathcal{R}_8)\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_4^T - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\Delta(\mathcal{R}_4^T) \quad (7.6)$$

La vectorisation de (7.6) donne :

$$vec(\Delta\mathcal{H}_{OIsqort}) = \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} \begin{bmatrix} vec(\Delta\mathcal{R}_1) \\ vec(\Delta\mathcal{R}_4) \\ vec(\Delta\mathcal{R}_8) \end{bmatrix}$$

avec,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} & \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} & \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} \end{bmatrix} \\
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} &= I_{pN_o.pN_o} \\
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} &= -(\mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-T} \otimes I_{pN_o}) - (I_{pN_o} \otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1})\mathcal{P}_{pN_o,pN_i} \\
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} &= (\mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-T} \otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1})
\end{aligned}$$

où $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{pN_o.pN_o \times pN_o.pN_o}$, $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{pN_o.pN_o \times pN_i.pN_i}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}^{(3)} \in \mathbb{R}^{pN_o.pN_o \times pN_i.pN_i}$.

Finalement, les covariances des éléments de la matrice $\mathcal{H}_{OIsqort}$ sont données par :

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{OIsqort}} \stackrel{\text{def}}{=} Cov(\mathcal{H}_{OIsqort}) = E\left[vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIsqort}\right) vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIsqort}\right)^T\right]$$

Squared Oblique projection Data-driven

La matrice sous-espace associée à la méthode *Input/Output Squared Oblique projection Data-driven* (voir Section 3.2.3.4) est :

$$\mathcal{H}_{OIsqort} = \Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_3\Omega_2^{-1}\Omega_1^T$$

avec,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \mathcal{Y}^+\pi_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}\mathcal{W}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_6 - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_9^T & \mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T \end{bmatrix} \\
\Omega_2 &= \mathcal{W}^-\pi_{\mathcal{U}_1^{+\perp}}\mathcal{W}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_7^T \\ \mathcal{R}_7 & \mathcal{R}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{R}_9\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_9^T & \mathcal{R}_9\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T \\ \mathcal{R}_5\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_9^T & \mathcal{R}_5\mathcal{R}_8^{-1}\mathcal{R}_5^T \end{bmatrix} \\
\Omega_3 &= \mathcal{W}^-\mathcal{W}^{-T} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{10} & \mathcal{R}_7^T \\ \mathcal{R}_7 & \mathcal{R}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{pN_o \times q(N_o+N_i)}$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{q(N_o+N_i) \times q(N_o+N_i)}$ et $\Omega_3 \in \mathbb{R}^{q(N_o+N_i) \times q(N_o+N_i)}$.

Cette matrice dépend des matrices de corrélations $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$, $\mathcal{R}_5$, $\mathcal{R}_6$, $\mathcal{R}_7$, $\mathcal{R}_8$, $\mathcal{R}_9$ et $\mathcal{R}_{10}$. Par différenciation, puis vectorisation, on obtient :

$$vec(\Delta\mathcal{H}_{OIsqobl}) = \mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} \begin{bmatrix} vec\left(\begin{bmatrix}\Delta\mathcal{R}_6 & \Delta\mathcal{R}_2\end{bmatrix}\right) \\ vec\left(\Delta\mathcal{R}_4\right) \\ vec\left(\Delta\mathcal{R}_8\right) \\ vec\left(\begin{bmatrix}\Delta\mathcal{R}_9 \\ \Delta\mathcal{R}_5\end{bmatrix}\right) \\ vec\left(\begin{bmatrix}\Delta\mathcal{R}_{10} & \Delta\mathcal{R}_7^T \\ \Delta\mathcal{R}_7 & \Delta\mathcal{R}_3\end{bmatrix}\right) \end{bmatrix},$$

avec,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix}\mathcal{J}^{(1)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} & \mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} & \mathcal{J}^{(3)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} & \mathcal{J}^{(4)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} & \mathcal{J}^{(5)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}}\end{bmatrix} \\
\mathcal{J}^{(1)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_1}\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} \\
\mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_1}\mathcal{J}^{(2)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} \\
\mathcal{J}^{(3)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_1}\mathcal{J}^{(3)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} + \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_2}\mathcal{J}^{(3)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} \\
\mathcal{J}^{(4)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_1}\mathcal{J}^{(4)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} + \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_2}\mathcal{J}^{(2)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} \\
\mathcal{J}^{(5)}_{\mathcal{H},\mathcal{R}} &= \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_2}\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} + \mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_3}\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_3,\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_1} &= \left(\Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_3^T\Omega_2^{-1} \otimes I_{pN_o}\right)\right) + \left(I_{pN_o} \otimes \Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_3\Omega_2^{-1}\right)\right)\mathcal{P}_{pN_o,q(N_o+N_i)} \\
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_2} &= -\left(\Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_3^T\Omega_2^{-1} \otimes \Omega_1\Omega_2^{-1}\right)\right) - \left(\Omega_1\Omega_2^{-1} \otimes \Omega_1\Omega_2^{-1}\Omega_3\Omega_2^{-1}\right)\right) \\
\mathcal{J}_{\mathcal{H},\Omega_3} &= \left(\Omega_1\Omega_2^{-1} \otimes \Omega_1\Omega_2^{-1}\right) \\
\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} &= I_{pN_o.q(N_o+N_i)} \\
\mathcal{J}^{(2)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} &= -\left(\begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-T} \otimes I_{pN_o}\right) \\
\mathcal{J}^{(3)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} &= \left(\begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-T} \otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\right) \\
\mathcal{J}^{(4)}_{\Omega_1,\mathcal{R}} &= -\left(I_{q(N_o+N_i)} \otimes \mathcal{R}_4\mathcal{R}_8^{-1}\right)\mathcal{P}_{q(N_o+N_i),pN_i} \\
\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} &= I_{q(N_o+N_i).q(N_o+N_i)} \\
\mathcal{J}^{(2)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} &= -\left(\begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-T} \otimes I_{q(N_o+N_i)}\right) - \left(I_{q(N_o+N_i)} \otimes \begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-1}\right)\mathcal{P}_{q(N_o+N_i),pN_i} \\
\mathcal{J}^{(3)}_{\Omega_2,\mathcal{R}} &= \left(\begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-T} \otimes \begin{bmatrix}\mathcal{R}_9 \\ \mathcal{R}_5\end{bmatrix}\mathcal{R}_8^{-1}\right) \\
\mathcal{J}^{(1)}_{\Omega_3,\mathcal{R}} &= I_{q(N_o+N_i).q(N_o+N_i)}
\end{aligned}$$

Finalement, les covariances des éléments de la matrice $\mathcal{H}_{OIsqobl}$ sont données par :

$$\Sigma_{\mathcal{H}_{OIsqobl}} \stackrel{\text{def}}{=} Cov(\mathcal{H}_{OIsqobl}) = E\left[vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIsqobl}\right)vec\left(\Delta\mathcal{H}_{OIsqobl}\right)^T\right]$$

7.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons détaillé deux méthodes d'estimations de la variance de la matrice de transfert (Section 7.1). La première est celle proposée par [Cau04, DT09] (Section 7.1.1). Elle est basée sur l'hypothèse que les spectres des signaux d'entrées sont estimés de façon exacte (pas de variance) et que les signaux de sorties sont décorrélés. La seconde méthode proposée est basée sur la propagation des variances des densités spectrales de puissance (Section 7.1.2). Elle ne nécessite pas de faire les hypothèses requises pour la première méthode. En effet, même si les entrées sont connues, elles ne sont pas pour autant forcement déterministes (si on applique un bruit blanc par exemple). La première hypothèse n'est donc pas toujours valide. La seconde hypothèse n'est vraie que si les signaux ne sont pas mesurées simultanément (e.g. mesure LDV, *Laser Doppler Vibrometer* ou avec un unique capteur que l'on déplace au cour de l'essai). Cependant, dans le cas considéré dans le contexte de cette thèse, les signaux de sorties sont mesurées simultanément par des accéléromètres (Section 1.1.3). Ils ne sont donc pas forcement décorrélés. Dans ce cas, la seconde hypothèse n'est plus valide. Ces deux raisons nous ont poussé à faire une proposition ne nécessitant pas de faire ces deux hypothèses.

Concernant les méthodes sous-espaces, nous avons détaillé la différenciation de cinq matrices sous-espace (Section 7.2). Exceptée la première méthode (*Output-Only Covariance-driven*, Section 7.2.1.1), elles constituent toutes un apport de cette thèse (Section 7.2.2.

Dans la partie suivante, nous verrons la stratégie de validation des méthodes (Chapitre 8), la validation des méthodes (Chapitre 9) et l'application à des données réelles (Chapitre 10)

Troisième partie

Validation et applications

Chapitre 8

Stratégie de validation

Pour valider une méthode, il est nécessaire de mettre en place une stratégie de validation. Lorsque cette stratégie est définie, on l'applique des systèmes simulés ayant une complexité croissante. Ceci permet de valider le code et sa robustesse à différents éléments (e.g. le bruit). Lorsque le code est validé, on peut le tester sur des données réelles.

Nous rappellerons le benchmark des méthodes que l'on cherche à valider (Section 8.1). Nous présenterons ensuite le benchmark des simulations et des différents cas qui serviront à valider les méthodes d'identification avec estimation d'incertitude (Section 8.2). Pour valider, il est nécessaire de définir les critères de validation (Section 8.3). Nous utiliserons deux critères (Section 8.3.2 et Section 8.3.3). Enfin, nous détaillerons comment seront présentés et analysés les résultats (Section 8.4).

Sommaire

8.1 Benchmark des méthodes d'identification 178
8.2 Benchmark des simulations 178
8.2.1 La poutre 179
8.2.2 L'avion 181
8.3 Critères de validation 186
8.3.1 Principe de Monte Carlo 186
8.3.2 Critère 1 188
8.3.3 Critère 2 188
8.4 Présentation et analyse des résultats de validation 190
8.4.1 Description de la présentation des résultats 190
8.4.2 Description de l'analyse des résultats 192
8.5 Bilan du chapitre 192

8.1 Benchmark des méthodes d'identification

Les validations portent sur les cinq méthodes d'identification sous-espaces avec estimation d'incertitudes présentées aux Sections 3.2.3.1, 3.2.3.2 et 3.2.3.4 (pour l'identification) et à la Section 7.2 (pour l'estimation d'incertitudes) :

- Sans utilisation des signaux d'excitations
  - OO_{cov} : *Output-Only Covariance-driven*
  - OO_{sqort} : *Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven*
- Avec utilisation des signaux d'excitations
  - OI_{cov} : *Input/Output Covariance-driven*
  - OI_{sqort} : *Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven*
  - OI_{sqobl} : *Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven*

8.2 Benchmark des simulations

Dans le but de valider les cinq méthodes d'identification sous-espaces avec estimation d'incertitude proposées à la Section 3.2.3, des données ont été générées à partir de simulations d'essais de de vibration sur deux type de modèle éléments finis : une poutre et un avion de combat. Deux catégories de simulations sont effectuées sur le modèle poutre. La première catégorie correspond à la poutre excitée uniquement par des entrées connues. La seconde correspond à la poutre excitée à la fois par des entrées connues et inconnues. Les simulations avec entrées connues et inconnues permettent de valider les méthodes d'identification *Input/Output*. Trois catégories de simulations sont effectuées à partir du modèle avion. La première correspond à l'avion au sol, i.e. sans présence de champ aérodynamique. La seconde correspond à un point de vol proche du point de flottement. La troisième catégorie correspond à la seconde catégorie avec un ajout de turbulences.

De plus, pour valider la robustesse des méthodes face au bruit de capteurs, un bruit blanc centré gaussien est additionné aux signaux observées aux points de suivi (représentant les capteurs). Pour chaque capteur, le bruit appliqué a un écart type de 5% de l'écart type du signal observée au capteur considéré.

Finalement, on considèrera

- deux cas poutre (avec et sans entrée inconnue) avec et sans bruit de capteur
- trois cas avion (au sol, en vol et en vol avec turbulences) avec et sans bruit de capteur

Les cas de simulations sont synthétisés dans le Tableau 8.1.

Pour chaque cas, les données sont obtenues par une simulation temporelle dont la résolution est estimée par un schéma numérique de type Newmark. La durée de simulation est de $T = 128s$ et l'échantillonnage est de $F_e = 2048hz$. Empiriquement, cette haute fréquence d'échantillonnage a été nécessaire pour obtenir la convergence du schéma numérique pour une fréquence d'analyse maximale d'environ $F_{max} = 40hz$.

On estimera les densités spectrales de puissance, les fonctions de transfert et les fonctions de corrélation à partir des méthodes décrites à la Section 4.

	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Poutre sans entrée inconnue	Cas 1	Case 2
Poutre avec entrée inconnue	Cas 3	Case 4
Avion au sol	Cas 1	Cas 2
Avion en vol	Cas 1	Cas 2
Avion en vol avec turbulence	Cas 3	Cas 4

TABLE 8.1 – Cas de simulation

Pour l'estimation des DSP par périodogrammes moyennés on divisera les $N_e = 262.144$ échantillons de chaque signaux en $N_b = 10$ blocs de données consécutifs. Les densités spectrales de puissance seront estimées sur la bande de fréquence allant de $F_{min} = 0hz$ à $F_{max} = 40hz$. Ceci implique donc que chaque fonction de corrélation sera estimée à partir de $N_b = 10$ blocs de 512 échantillons. Les fonctions de corrélations sont ensuite obtenues par transformation de Fourier discrète inverse des densités spectrales de puissance. Ces corrélations seront utilisées pour construire les matrices sous-espaces associées aux cinq méthodes à valider comme décrit à la Section 3.2.3 pour l'identification et à la Section 7.2 pour l'estimation des incertitudes.

8.2.1 La poutre

La poutre est un modèle simple qui permet d'effectuer une première série de validations. Le modèle élément fini utilisé est un modèle de poutre encastrée-libre. Sa base modale a été tronquée à ses deux premiers modes. La troncation a pour objectif d'avoir une faible densité modale et de faciliter l'analyse des résultats. Les deux modes conservés sont :

- Mode 1 : $f_1 = 2.955hz$
- Mode 2 : $f_2 = 9.836hz$

On rappelle que, contrairement à la fréquence modale, le taux d'amortissement des modes est une donnée qui ne provient pas du modèle éléments finis. Il est nécessaire de le fixer pour compléter la modélisation modale. On choisit de fixer ce taux à $15\,^o/_{oo}$. Ce taux est représentatif des amortissement couramment observés à ces fréquences.

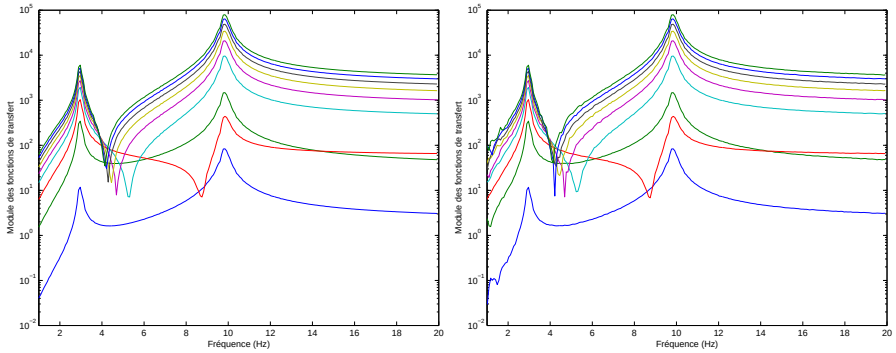
L'excitation que l'on considérera connue est simulée par un effort dynamique imposé à l'extrémité libre de la poutre encastrée-libre. Celle qui sera considérée inconnue (dans les cas poutre avec entrée inconnue) est simulée par une vibration placée au milieu de la poutre. L'excitation connue et l'excitation inconnue sont des bruits blancs centrés.

Les observations sont faites en 9 points de suivi placés le long de la poutre et correspondent à des noeuds du modèle éléments finis équidistants.

Les estimations des fonctions de transfert avec les paramètres décrits sont présentées dans la Figure 8.1 pour les cas :

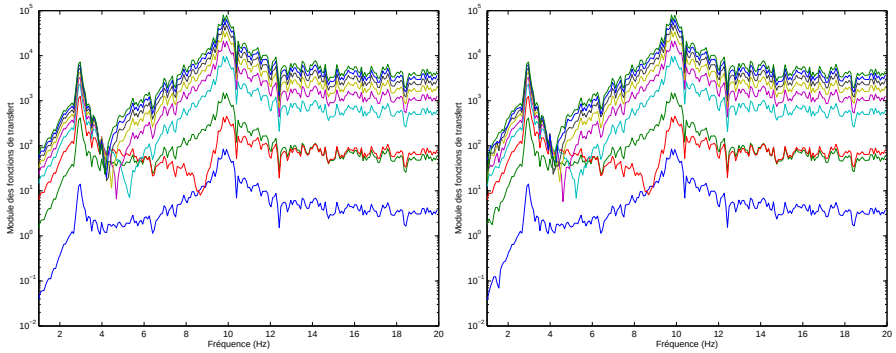
- sans entrée inconnue et sans bruit sur les capteurs : Figure 8.1(a)
- sans entrée inconnue et avec bruit sur les capteurs : Figure 8.1(b)

– avec entrée inconnue et sans bruit sur les capteurs : Figure 8.1(c)
– avec entrée inconnue et avec bruit sur les capteurs : Figure 8.1(d)



(a) Sans entrée inconnue - Sans bruit sur les capteurs

(b) Sans entrée inconnue - Avec bruit sur les capteurs



(c) Avec entrée inconnue - Sans bruit sur les capteurs

(d) Avec entrée inconnue - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE 8.1 – Fonctions de transfert du système poutre

On constate que le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'aspect des fonctions de transfert. Ceci est cohérent avec l'utilisation de la méthode d'estimation des fonctions de transfert. D'après la loi des grands nombres (voir Théorème 72 en Annexe A), l'utilisation de périodogrammes moyennés pour l'estimation des densités spectrales à pour effet de faire converger chaque composante du signal vers son espérance lorsque le nombre de bloc augmente. Le bruit ajouté sur chaque capteur est un bruit blanc centré, i.e. de moyenne nulle. Ainsi l'influence du bruit converge vers 0 lorsque le nombre de bloc augmente.

Concernant l'influence de l'entrée inconnu, on voit que, malgré l'utilisation de périodogrammes moyennés, elle n'est pas négligeable.

Bilan : Lorsque le système est soumis à une entrée inconnue, l'utilisation de périodogrammes moyennés pour l'estimation des fonctions de transfert de type H_1 (voir

Section 4.6) ne permet pas d'obtenir des courbes "lisses". Les fonctions de transfert ainsi estimées sont bruitées. Ce bruit sera répercutée sur la chaîne de calcul de la méthode d'identification modale utilisée. Il faudra que cette méthode d'identification soit capable de réduire l'influence de cette entrée inconnue pour pouvoir fournir une bonne estimation des paramètres modaux.

Lorsque le système est soumis à du bruit sur les mesures, l'utilisation de périodogrammes moyennés pour l'estimation des fonctions de transfert de type H_1 (voir Section 4.6) permet réduire significativement l'influence de ce bruit et d'obtenir des courbes "lisses". Les fonctions de transfert ainsi estimées sont très peu bruitées et le bruit ne sera que très peu répercuté sur la chaine d'identification modale. L'estimation des paramètres modaux ne sera donc que très peu dégradée par un bruit de mesure (à condition que le nombre de périodogrammes, i.e. de blocs temporels, soit suffisant).

8.2.2 L'avion

Le passage à un modèle avion permet de valider les méthodes sur un modèle plus complexe que le modèle poutre. On notera cinq motivations principales à cette complexification du modèle :

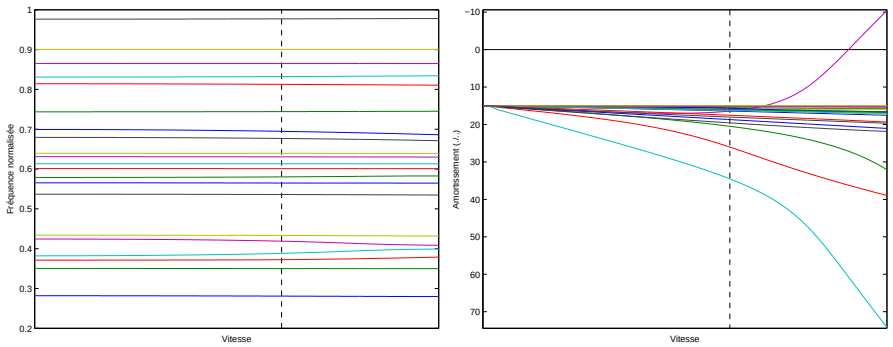
- On augmente la densité modale.
- On pourra mettre en évidence les problèmes de localisations des excitations. Par exemple, il pourra être difficile d'identifier un mode d'emport ventral avec une excitation par les gouvernes.
- On applique les méthodes à des cas réalistes de dimension industrielle.
- On peut appliquer des modèles de champ aérodynamique au modèle.
- On pourra justifier l'application des méthodes à des données réelles.

Le modèle utilisé est un modèle élément fini d'un avion de combat. Comme pour la poutre, on a fixé le taux d'amortissement des modes à $15\,^{o}/_{oo}$. Ce taux est appliqué sur les modes de l'avion au sol.

L'excitation du système est réalisée en imposant un déplacement aux gouvernes de l'avion (condition d'essais en vol réel). On applique un bruit blanc centré identique aux gouvernes gauches et droites. On obtient ainsi une excitation dite "symétrique". Une excitation symétrique est optimale pour identifier les modes symétriques (i.e. ayant une déformation symétrique par rapport au plan de symétrie de l'avion). A contrario, il sera plus difficile d'identifier les modes anti-symétriques avec ce type d'excitation.

La réponse du système est observée en 46 points de suivi placés en certains noeuds du modèle élément fini de l'avion. La position de ces noeuds correspondent à la position des capteurs utilisés lors d'essai réels. Par abus de langage, ces points de suivi pourront être appelés capteurs.

Pour simuler le comportement de l'avion en vol, on couple le modèle éléments finis à un modèle aérodynamique. Ce modèle est un modèle singularités *quasi-steady*. Le calcul est effectué à une iso-altitude de $10.000ft$. Pour des raisons de confidentialité, la vitesse considérée n'est pas indiquée et les fréquences sont normalisées par la borne maximale de la bande de fréquences étudiée. Les figures 8.2(a) et 8.2(b) représentent l'évolution des fréquences modales et des taux d'amortissement modaux lorsque la vitesse de l'avion



(a) Fréquences modales (b) Taux d'amortissement modaux

FIGURE 8.2 – Courbes de flottement

augmente. Ces courbes sont des courbes de flottement. Elles sont appelées ainsi car elles peuvent permettre de mettre en évidence un ou plusieurs points de flottement, i.e. un point de vol où l'un des modes à un taux d'amortissement qui s'annule (Figure 8.2(b)). On parle de mode de flottement. Le point de vol utilisé pour le cas avion en vol est représenté par la ligne pointillée noire.

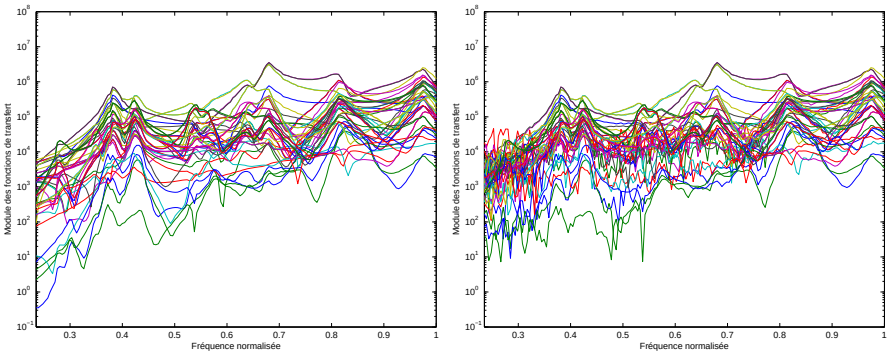
Remarque 45 *Sur les figures 8.2(a) et 8.2(b), les valeurs à l'origine correspondent aux valeurs des modes de l'avion au sol.*

8.2.2.1 Au sol

L'estimation des fonctions de transfert, avec les paramètres décrits dans l'introduction de la Section 8.2, sont présentés dans la Figure 8.3 pour les cas :

- sans entrée inconnue et sans bruit sur les capteur : Figure 8.3(a)
- sans entrée inconnue et avec bruit sur les capteur : Figure 8.3(b)

Excepté pour certains capteurs, on constate que le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'aspect des fonctions de transfert. Le nombre de bloc est suffisant pour faire converger la moyenne du bruit vers son espérance, i.e. vers 0 car le bruit est centré.



(a) Sans entrée inconnue - Sans bruit sur les capteurs

(b) Sans entrée inconnue - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE 8.3 – Fonctions de transfert du système avion au sol

8.2.2.2 En vol

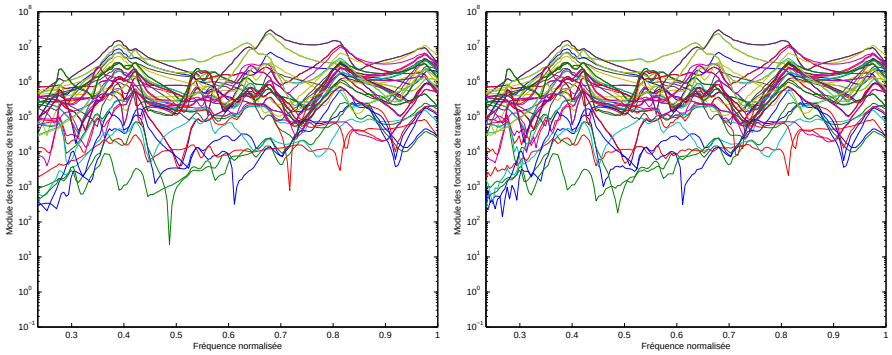
Les turbulences sont simulées par un effet d'incidence. L'effet d'incidence est un mouvement de tangage rigide de l'avion. Associées au champ aérodynamique, les effets d'incidence de l'appareil produisent des efforts aérodynamiques. Le mouvement d'incidence simulé est un bruit blanc gaussien centré. L'effort ainsi généré est un bruit coloré gaussien car la fonction de transfert entre le mouvement d'incidence et l'effort aérodynamique induit n'est pas constante.

L'estimation des fonctions de transfert avec les paramètres décrits sont présentés dans la Figure 8.4 pour les cas :

- sans entrée inconnue et sans bruit sur les capteur : Figure 8.4(a)
- sans entrée inconnue et avec bruit sur les capteur : Figure 8.4(b)
- avec turbulence et sans bruit sur les capteur : Figure 8.4(c)
- avec turbulence et avec bruit sur les capteur : Figure 8.4(d)

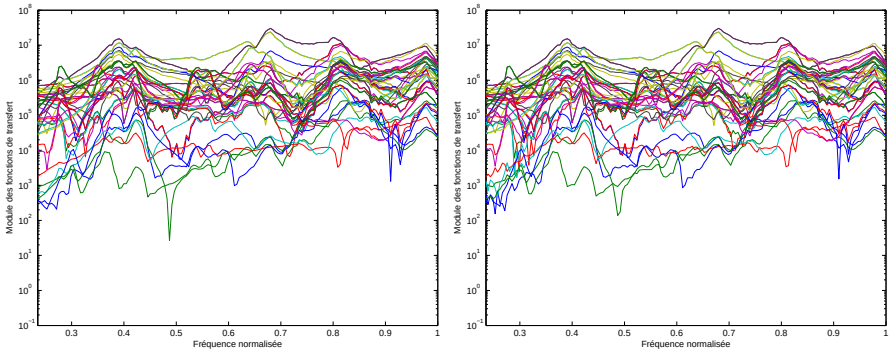
L'influence du bruit de mesure sur les capteurs est réduit grâce à l'utilisation de périodogrammes moyennées pour estimer les densités spectrales de puissance.

En ce qui concerne l'influence des turbulences, on voit sur la Figure 8.4(c) et sur la Figure 8.4(d) que les courbes sont relativement "lisses". Cependant, les efforts générés par ces turbulances sont des bruits colorés, i.e. les fréquences ne sont pas toutes perturbées de manière similaire. Les méthodes d'identification devront être robustes à ce type de bruit.



(a) Sans entrée inconnue - Sans bruit sur les capteurs

(b) Sans entrée inconnue - Avec bruit sur les capteurs



(c) Avec turbulence - Sans bruit sur les capteurs

(d) Avec turbulence - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE 8.4 – Fonctions de transfert du système avion en vol

8.2.2.3 Fréquences et taux d'amortissement du modèle avion

Les valeurs des fréquences et des amortissements des systèmes avion au sol et avion en vol sont données dans le Tableau 8.2. L'avion a une forme symétrique. Ses modes ont par conséquent des formes modales soit symétriques soit anti-symétriques par rapport à son plan de symétrie. Le type de forme (symétrique ou anti-symétrique) est aussi indiqué dans le Tableau 8.2. Cette information permettra d'expliquer pourquoi certains modes sont plus difficiles que d'autre à identifier lors des validations (Section 9). En effet, l'excitation considérée est symétrique. Les modes ayant une déformée anti-symétrique sont par conséquent plus difficile à identifier. De même, l'excitation étant placée sur la voilure, les modes d'emport peuvent être difficilement identifiable.

Avec

- f_j la fréquence modale normalisée du mode numéro j
- ξ_j le taux d'amortissement modal du mode numéro j

Modes avion au sol				Modes avion en vol			
j	$f_j(\%)$	ξ_j ($^o/_{oo}$)	ϕ_j	j	$f_j(\%)$	ξ_j ($^o/_{oo}$)	ϕ_j
1	28.19	15.0	S	1	28.06	16.4	S
2	35.04	15.0	S	2	35.00	15.5	S
3	37.13	15.0	A	3	37.24	26.1	A
4	38.21	15.0	S	4	38.82	34.6	S
5	42.42	15.0	S	5	41.88	16.4	S
6	43.39	15.0	A	6	43.29	15.8	A
7	53.68	15.0	S	7	53.59	16.1	S
8	56.55	15.0	S	8	56.47	15.7	A
9	57.89	15.0	A	9	58.06	20.5	A
10	60.11	15.0	S	10	60.00	15.1	S
11	61.34	15.0	A	11	61.18	15.1	A
12	63.11	15.0	S	12	62.94	15.2	S
13	63.95	15.0	S	13	64.12	16.2	S
14	67.95	15.0	S	14	67.65	19.6	S
15	69.95	15.0	A	15	69.41	18.7	A
16	74.38	15.0	A	16	74.71	16.1	A
17	81.43	15.0	S	17	81.18	17.5	S
18	83.11	15.0	A	18	82.94	16.2	A
19	86.52	15.0	A	19	86.47	15.2	A
20	90.07	15.0	S	20	89.99	15.0	S
21	97.65	15.0	S	21	97.65	18.0	S

TABLE 8.2 – Informations sur les modes avion (au sol et en vol)

- ϕ_j la forme modale du mode numéro j. Ici, on indique si la forme est :
  - Symétrique : S
  - Anti-symétrique : A

8.3 Critères de validation

8.3.1 Principe de Monte Carlo

Le principe de Monte Carlo est basé sur la répétition d'une expérience. Considérons un système LTI à 1 degré de liberté (sans bruit). Ce système est excité avec une entrée stochastique. A l'aide d'une méthode d'identification, on pourra identifier les paramètres modaux du mode de ce système (fréquence, amortissement, forme). Si on répète l'expérience avec une autre réalisation de la même entrée stochastique (i.e. tirage différent mais même propriétés stochastiques), alors l'identification sera différente. Faire un Monte Carlo consiste ici à procéder à plusieurs identifications et à estimer, statistiquement, les propriétés stochastiques des paramètres modaux. Dans le cas où l'excitation stochastique est gaussienne, les paramètres modaux identifiés seront eux aussi, par linéarité du système, des variables aléatoires gaussiennes. Pour évaluer statistiquement leurs propriétés stochastiques (espérance et variance), on évaluera la moyenne empirique et la variance empirique (voir Section A.6 en Annexe A) de ces paramètres modaux à partir de N_s expériences. Cette méthode n'est évidemment pas réalisable de manière opérationnelle car, pour une question évidente de coût et de délai, on n'effectue en général qu'un seul essai. Elle ne sera utilisée, dans le cas d'un système aussi complexe qu'un avion, que pour la validation des méthodes, à l'aide de simulations informatiques.

Ici, après une étude de convergence, on a fixé le nombre d'expériences à $N_s = 200$. On rappelle que pour palier la méconnaissance de l'ordre du système, les identifications modales sont effectuées à plusieurs ordres différents (Diagramme de stabilité : voir Section 3.4). Pour chaque ordre considéré, une identification modale avec estimation d'incertitude fournit un jeu d'estimations de paramètres modaux ($\hat{f}_s$, $\hat{\xi}_s$ et $\hat{\phi}_s$) ainsi qu'une estimation de leur écart type ($\hat{\sigma}_{f_s}$, $\hat{\sigma}_{\xi_s}$ et $\hat{\sigma}_{\phi_s}$). Pour chacun des ordres, à partir des $N_s = 200$ jeux de paramètres, on effectue une validation Monte-Carlo.

Remarque 46 *Dans le cadre de cette thèse, l'estimation des incertitudes concernant les déformées modales a été codée mais pas validée.*

8.3.1.1 Appariement des modes

La validation Monte Carlo implique de moyenner, pour chacun des ordres, les valeurs des paramètres modaux (fréquences et taux d'amortissement) obtenues, pour chaque mode, lors des 200 identifications. Il est donc nécessaire, pour chacun des ordres, d'apparier les 200 identifications d'un même mode. Compte tenu du nombre d'identifications (200), de modes (2 pour le système poutre - 21 pour le système avion), d'ordres considérés (10 pour le système poutre - 100 pour le système avion), de méthodes à valider (5) et de cas étudiés (4 cas poutre - 6 cas avion), l'appariement des modes a été automatisé. La technique développée consiste à définir une identification de référence (ref), et d'apparier, ordre par ordre, les modes de cette identification à ceux des 199 autres identifications s. L'appariement se fait mode par mode, en recherchant la plus forte valeur du critère suivant :

$$C^{(ref,s)}(i,j) = C_f^{(s)}(i,j) * C_\xi^{(s)}(i,j) * C_\phi^{(s)}(i,j) \tag{8.1}$$

avec,

- $C_f^{(s)}(i,j) = \left(\frac{\min\left(f_i^{(ref)}, f_j^{(s)}\right)}{\max\left(f_i^{(ref)}, f_j^{(s)}\right)}\right)^{\alpha}$ est le critère de similarité entre la fréquence du mode i de l'identification de référence et la fréquence du mode j de l'identification s. Le paramètre α permet de régler l'importance du coefficient $C_f^{(s)}(i,j)$ dans le calcul du critère $C^{(ref,s)}(i,j)$.
- $C_\xi^{(s)}(i,j) = \left(\frac{\min\left(\xi_i^{(ref)}, \xi_j^{(s)}\right)}{\max\left(\xi_i^{(ref)}, \xi_j^{(s)}\right)}\right)^{\beta}$ est le critère de similarité entre le taux d'amortissement du mode i de l'identification de référence et le taux d'amortissement du mode j de l'identification s. Le paramètre β permet de régler l'importance du coefficient $C_\xi^{(s)}(i,j)$ dans le calcul du critère $C^{(ref,s)}(i,j)$.
- $C_\phi^{(s)}(i,j) = MAC(\phi_i^{(ref)}, \phi_j^{(s)})^{\gamma}$. Le MAC (*Modal Assurance Criterion*, voir [All03]) permet de quantifier le niveau d'orthogonalité entre deux formes modales. Le paramètre γ permet de régler l'importance du coefficient $C_\phi^{(s)}(i,j)$ dans le calcul du critère $C^{(ref,s)}(i,j)$.

Empiriquement, on a choisit $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = 1$.

8.3.1.2 Moyenne et variance Monte-Carlo

Lemme 47 *Soient N_s réalisations s d'une variable aléatoire i.i.d. $x_{m,s}$ d'espérance μ_{x_m} et de variance $\sigma_{x_m}^2$. Soit $\overline{x}_m = \frac{1}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s} x_{m,s}$ la moyenne empirique des N_s valeurs $x_{m,s}$. Soit $\overline{\sigma}_{x_m}^2 = \frac{1}{N_s-1}\sum_{s=1}^{N_s}(x_{m,s} - \overline{x}_m)^2$ la variance empirique non biaisée de $x_{m,s}$. Alors :*

$$x_{m,s} \sim \mathcal{N}\left(\overline{x}_m, \overline{\sigma}_{x_m}^2\right) \tag{8.2}$$

où, $\overline{x}_m \overset{a.s.}{\to} \mu_{x_m}$ and $\overline{\sigma}_{x_m}^2 \overset{a.s.}{\to} \sigma_{x_m}^2$. ($\overset{a.s.}{\to}$ signifie "Almost Sure convergence").

On définit la moyenne Monte-Carlo d'un paramètre x_m (f_m ou ξ_m) par la moyenne empirique des $N_s = 200$ tirages de ce paramètre.

$$\mu_{x_m}^{(MC)} = \frac{1}{N_s}\sum_{s=1}^{N_s} x_{m,s} \tag{8.3}$$

On définit la variance Monte-Carlo d'un paramètre x_m (f_m ou ξ_m) par la variance empirique non biaisée des $N_s = 200$ tirages de ce paramètres.

$$\sigma_{x_m}^{(MC)^2} = \frac{1}{N_s - 1}\sum_{s=1}^{N_s}\left(x_{m,s} - \mu_{x_m}\right)\left(x_{m,s} - \mu_{x_m}\right)^* \tag{8.4}$$

Les estimateurs $\mu_{x_m}^{(MC)}$ et $\sigma_{x_m}^{(MC)^2}$ sont non biaisés. Ils doivent donc converger vers leur espérance lorsque N_s augmente (Voir Propriété 76 en Annexe A).

Il faut aussi vérifier que les N_s réalisation $x_{m,s}$ du paramètre x_m suivent une distribution gaussienne. En effet, les paramètres $x_{m,s}$ proviennent de la propagation des

processus aléatoires gaussiens à travers les chaines de calcul des méthodes d'identification. On a vu que, selon la Delta méthode (voir Section 5.1.1), les résultats de la propagation de processus gaussiens sont aussi gaussiens.

L'étude de convergence et la vérification statistique de la "gaussiannité" des réalisation $x_{m,s}$, qui ne sont pas présentées dans ce manuscrit, ont permis de vérifier que les 200 identifications suffisent :

1. pour atteindre la convergence des estimateurs Monte-Carlo $\mu_{x_m}^{(MC)}$ et $\sigma_{x_m}^{(MC)^2}$
2. pour vérifier que $x_{m,s} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{x_m}^{(MC)}, \sigma_{x_m}^{(MC)^2}\right)$

Ces critères ne permettent pas de valider les valeurs des variances estimées lors de chaque identification. Pour ce faire, on utilise deux critères définis à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

8.3.2 Critère 1

Le premier critère de validation des codes d'incertitudes a pour but de valider que, pour chaque paramètre modal, la moyenne des variances $\hat{\sigma}_{x_{m,s}}^2$ estimée lors des $Ns = 200$ identifications s converge vers sa variances Monte-Carlo $\sigma_{x_m}^{(MC)^2}$. Ce critère de validation des codes d'incertitudes est donc basé sur la comparaison entre les variances Monte-Carlo $\sigma_{x_m}^{(MC)^2}$ et les variances $\hat{\sigma}_{x_{m,s}}^2$ estimées lors des $Ns = 200$ identifications s.

On introduit $\overline{\hat{\sigma}_{x_m}^2}$ la moyenne des variances estimées $\hat{\sigma}_{x_{m,s}}^2$ qui converge presque sûrement, selon la loi des grands nombres, vers la vraie valeur de la variance $\sigma_{x_m}^2$. Dans notre cas, cette vraie valeur correspond à la valeur convergée de la variance Monte-Carlo ($\sigma_{x_m}^{(MC)^2}$).

Ainsi, le critère 1 est définit par :

$$C1_m = \frac{Min\left(\sigma_{x_m}^{(MC)^2}, \overline{\hat{\sigma}_{x_m}^2}\right)}{Max\left(\sigma_{x_m}^{(MC)^2}, \overline{\hat{\sigma}_{x_m}^2}\right)} \in [0;1] \tag{8.5}$$

Ce critère est le critère le plus répandu pour la validation d'un code d'estimation d'incertitude. Empiriquement, on considérera le test réussi lorsque $C1_m \geq 0.7$.

8.3.3 Critère 2

Le second critère permet de valider une utilisation opérationnelle des incertitudes. Lorsqu'on identifie un paramètre, on veut utiliser la valeur d'incertitude pour déterminer un intervalle de confiance autour de la valeur de ce paramètre identifié. Ce critère a pour but de valider que la taille des intervalles de confiance est cohérente avec la valeur identifiée.

On sait que $x_{m,s} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{x_m}^{(MC)}, \sigma_{x_m}^{(MC)^2}\right)$. Par standardisation de cette variable aléatoire gaussienne, on peut écrire :

$$\frac{x_{m,s} - \mu_{x_m}^{(MC)}}{\sigma_{x_m}^{(MC)}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{8.6}$$

Ceci signifie que les valeurs $x_{m,s}$ sont comprises dans un intervalle $\mu_{x_m}^{(MC)} \pm n\sigma_{x_m}^{(MC)}$ avec une probabilité dépendant de la valeur n et de la fonction de probabilité d'une loi gaussienne. On écrira :

$$\mathcal{P}\left[\mu_{x_m}^{(MC)} - n\sigma_{x_m}^{(MC)} < x_{m,s} < \mu_{x_m}^{(MC)} + n\sigma_{x_m}^{(MC)}\right] \tag{8.7}$$

La figure 8.5 donne l'évolution de la probabilité que $x_{m,s}$ soit dans un l'intervalle de confiance $\mu_{x_m}^{(MC)} \pm n\sigma_{x_m}^{(MC)}$ en fonction de sa taille $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$.

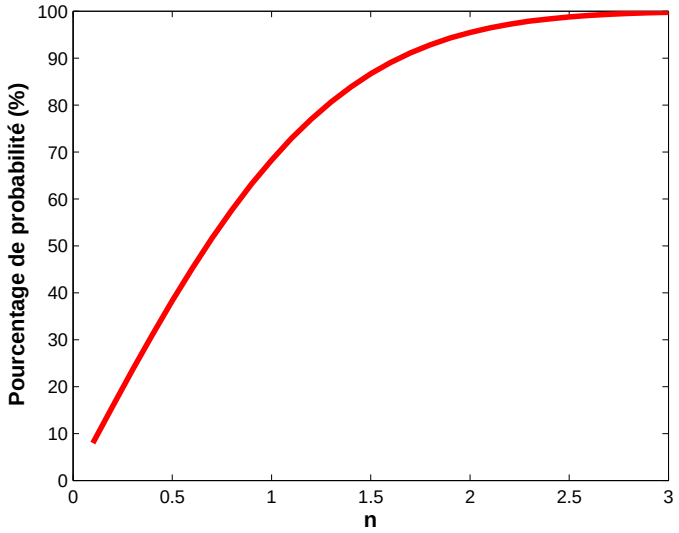


FIGURE 8.5 – Probabilité d'être dans l'intervalle de confiance de taille $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$

La loi gaussienne est très répandue. Il est courant d'utiliser :
- soit $n = 1$: probabilité d'environ 68% d'être dans un intervalle de taille $2n\sigma$
- soit $n = 2$: probabilité d'environ 95% d'être dans un intervalle de taille $2n\sigma$
- soit $n = 3$: probabilité d'environ 99% d'être dans un intervalle de taille $2n\sigma$

Le second critère est basé sur le même principe. Cependant, l'utilisation opérationnelle des méthodes d'identification avec estimation d'incertitude implique que l'on n'aura qu'une seule réalisation des paramètres. En effet, il n'est pas envisageable d'effectuer 200 essais pour estimer la variance des paramètres ! Les intervalles de confiance devront être centrés autour de la valeur du paramètre identifié $x_{m,s}$ et non plus autour de $\mu_{x_m}^{(MC)}$. De plus, ces intervalles seront de taille $2n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}$ et non plus $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$. Le critère proposé permet de valider que la taille des intervalles de confiance est cohérente avec une loi gaussienne et que l'on peut utiliser ces intervalles de confiance pour estimer la probabilité que la vraie valeur du paramètre soit dans ces intervalles $x_{m,s} \pm n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}$. On écrira :

$$\mathcal{P}\left[x_{m,s} - n\hat{\sigma}_{x_{m,s}} < \mu_{x_m}^{(MC)} < x_{m,s} + n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}\right] = \mathcal{P}\left[-n < \frac{\mu_{x_m}^{(MC)} - x_{m,s}}{n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}} < +n\right] \tag{8.8}$$

Concrètement, on vérifiera par un test ki^2 (voir Section A.4.2 en Annexe A) que la variable aléatoire $\frac{\mu_{x_m}^{(MC)} - x_{m,s}}{n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}}$ suit une loi gaussienne standard, i.e. :

$$\frac{\mu_{x_m}^{(MC)} - x_{m,s}}{n\hat{\sigma}_{x_{m,s}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{8.9}$$

La valeur du critère $C2_m$ est le résultat du test :
- $C2_m = 0$ si le test est réussi
- $C2_m = 1$ si le test n'est pas réussi

8.4 Présentation et analyse des résultats de validation

8.4.1 Description de la présentation des résultats

8.4.1.1 Les valeurs des critères

Le tracé des fréquences (ou des taux d'amortissement) obtenues à chacun des ordres considérés constitue ce que l'on appelle un diagramme de stabilité en fréquence (ou en amortissement). Plus de détail à la Section 3.4 et dans [VV01, DM12]. Dans le cadre de la validation des codes d'incertitudes, les résultats sont présentés sous la forme de diagramme de stabilité particulier : au lieu de tracer les valeurs identifiées, on trace, pour chaque pôle et chaque ordre, les moyennes des $N_s = 200$ valeurs identifiées. De plus, si un pôle n'est pas trouvé à toutes les identifications, il est retiré de l'analyse. On parlera de diagramme de stabilité MC (Monte-Carlo). Un exemple est donné à la Figure 8.6.

Sur ce type de diagramme (exemple à la Figure 8.6),
- les cercles vides correspondent aux valeurs non validées, i.e. ayant un critère
  - $C1_m < 0.7$ pour les diagrammes associés au premier critère de validation
  - $C2_m = 1$ pour les diagrammes associés au second critère de validation.
- les cercles remplis avec une étoile correspondent aux valeurs validées, i.e. ayant un critère
  - $C1_m \geq 0.7$ pour les diagrammes associés au premier critère de validation
  - $C2_m = 0$ pour les diagrammes associés au second critère de validation.

Enfin, dans le but de vérifier l'identification, les valeurs exactes provenant du modèle sont tracées sous forme de ligne dans ces diagrammes.

Les valeurs sont tracées pour des ordres allant de $O_{min} = 1$ à $O_{max} = 10$ pour le système poutre et de $O_{min} = 1$ à $O_{max} = 100$ pour les systèmes avion au sol et avion en vol.

Les cinq méthodes d'identification (voir Section 8.1) sont appliquées sur chacun des cinq cas étudiés (voir Section 8.2), sans et avec bruit sur les capteurs. A chaque fois, on présentera les résultats du premier (voir 8.3.3) et du second (voir 8.3.2) critère de validation.

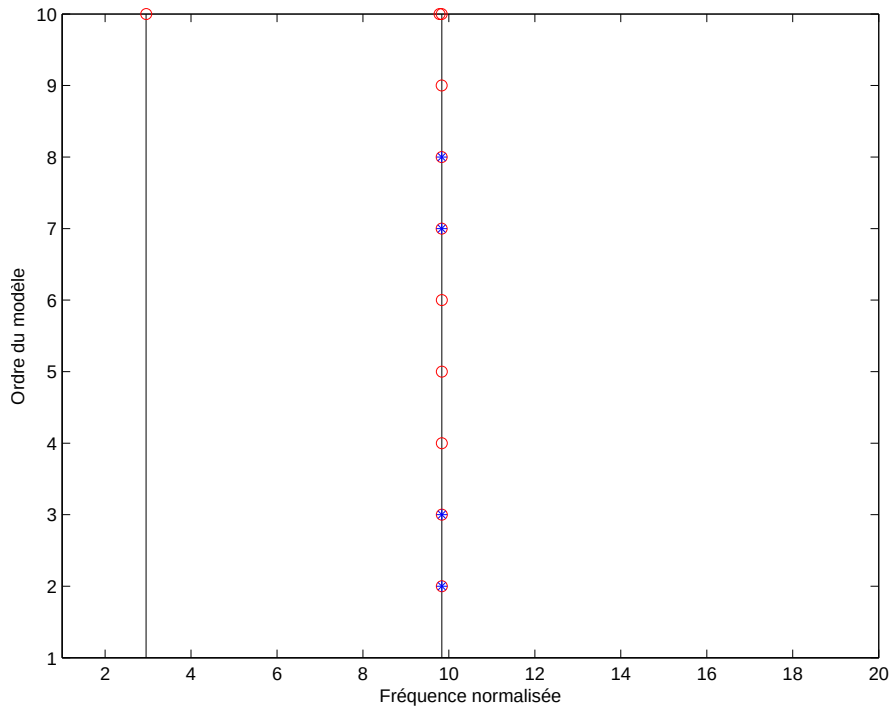


FIGURE 8.6 – Probabilité d'être dans l'intervalle de confiance de taille $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$

Remarque 48 *Normalisation des fréquences avions*

Dans un souci de confidentialité des résultats avion, les fréquences sont normalisées par la borne maximale de la bande de fréquence affichée. Ainsi chaque point du diagramme de stabilité en fréquence (normalisée) sera compris entre 0 et 1.

8.4.1.2 Le score S

Les résultats à analyser sont divisés de la manière suivante :

- Système poutre
  - cas sans entrée inconnue
  - cas avec une entrée inconnue
- Système avion
  - cas au sol
  - cas en vol sans turbulence
  - cas en vol avec turbulences

Pour conclure l'analyse d'un cas, on présentera, pour chacune des méthodes étudiées, un score S de succès de validation par les critères 1 et 2. Ce score correspond au ratio du nombre de pôle validés sur le nombre total de paramètre de pôles identifiés.

$$S = \frac{\text{Nombre de pôles validés}}{\text{Nombre de pôles identifiés}} \tag{8.10}$$

8.4.2 Description de l'analyse des résultats

Remarque 49 *Le type de pôle*

Pour fixer la terminologie, on parlera de pôles stables pour les pôles stables selon l'ordre (voir Section 3.4). Les pôles stables selon l'ordre sont considérés comme étant les pôles physiques du système, ce sont les modes de la structure. Les pôles instables selon l'ordre sont les pôles spurious. Il s'agit des pôles provenant du bruit ou d'une surestimation de l'ordre du modèle. On pourra aussi parler de pôles non physiques.

L'analyse d'une méthode, appliquée à un cas, est divisée de la manière suivante :
- Validation de l'identification
- Validation de l'incertitude
  - Critère 1 (voir Section 8.3.2)
  - Critère 2 (voir Section 8.3.3)

A chaque fois on comparera les résultats obtenus sans et avec bruit sur les capteurs.

Les analyses concernant la validation de l'identification des pôles physiques porteront sur trois points :
- Leur nombre.
- Leur ordre d'apparition.
- Leur niveau de stabilité (selon l'ordre).

Une bonne identification doit faire apparaître le maximum de modes du système. Ces modes doivent arriver le plus tôt possible (ordre le moins élevé possible) et rester stable lorsque l'ordre augmente.

Les analyses concernant la validation de l'estimation d'incertitude, selon chacun des deux critères, porteront sur :
- La quantité de pôles dont l'incertitude est validée
- Le type de pôles validées (physiques ou non physiques)

8.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté :
- Le benchmark des cinq méthodes d'identification sous-espace que l'on cherche à valider (voir Section 8.1). Ce benchmark est constitué des cinqs méthodes sous-espace de type *Covariance-driven* présenté dans ce document (voir Section 3.2 pour l'aspect identification modale - voir Section 7.2 pour l'aspect estimation d'incertitude).
- Le benchmark des cas sur lesquels nous allons appliquer les méthodes d'identification à valider (voir Section 8.2). Un tel benchmark permet de tester les méthodes sur des cas de complexité croissante. La poutre est un cas classique de test à faible densité modale. Le passage sur un cas avion permet d'augmenter considérablement la densité modale. Pour être utilisable de manière opérationnelle, une méthode doit être capable d'identifier un grand nombre de modes même s'ils sont proches en fréquence. De plus, le passage sur modèle avion permet de coupler un modèle aérodynamique au modèle éléments finis. On peut ainsi tester la validité

des méthodes sur un système aéroélastique. Enfin, le passage au cas avion est la dernière étape avant de tester les méthodes sur un cas réel.

- Les critères de validation (voir Section 8.3). Le premier critère permet de vérifier que la moyenne des variances estimées (par méthodes d'identification avec estimation d'incertitude) converge vers la variance Monte-Carlo (dispersion des paramètres identifiés). Le second critère permet de vérifier que la taille des intervalles de confiance est cohérente avec la valeur du paramètre identifié. Ce critère permet de valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance.
- La façon dont on présentera et analysera les résultats de validation (voir Section 8.4).

Le chapitre suivant, le Chapitre 9, sera consacré à la présentation et à l'analyse des résultats de validation des estimations d'incertitude.

Chapitre 9

Validation du panel des codes d'identification et d'estimation d'incertitude sous-espace

La stratégie de validation et le benchmark des méthodes et des cas sont présentés au Chapitre 8. Nous procédons maintenant à l'analyse des résultats. Ces résultats sont présentés en Annexe C pour les deux cas poutre et en Annexe D pour les trois cas avion.

On traitera d'abord les simulations sur le modèle de poutre (Section 9.1), sans (Section 9.1.1) et avec (Section 9.1.2) entrée inconnue. Nous analyserons ensuite les résultats obtenus à partir du modèle avion (Section 9.2), au sol (Section 9.2.1), en vol (Section 9.2.2) et en vol avec turbulence (Section 9.2.3). Tous les cas seront considérés sans et avec bruit sur les capteurs.

On rappelle que les valeurs affichées sur les diagrammes de stabilité Monte-Carlo correspondent à la moyenne des valeurs identifiées à chacune des 200 identifications. Les pôles qui ne sont pas retrouvés par les 200 identifications ne sont pas affichés. Ces pôles sont généralement des pôles non physiques qui sont très sensibles aux erreurs numériques. Cependant, on verra que certain pôle, qui ne semble pas être des modes de système, sont tout de même communs à toutes les identifications. Ils sont donc affichés sur les diagrammes. Leur nombre et leur ordre d'apparition sera pris en compte pour juger de la qualité des méthodes d'identification. On ne pourra cependant juger que de la qualité "en moyenne" des méthodes. C'est pourquoi, on parlera ici, de validation de l'identification "Monte-Carlo" et non pas de validation de l'identification.

Sommaire

9.1 Validation sur le système poutre 196

9.1.1 Système poutre sans entrée inconnue 196

9.1.2 Système poutre avec entrée inconnue 208

9.1.3 Influence de l'entrée inconnue et bilan sur le système poutre . 220

9.2 Validation sur le système avion 221

9.2.1 Système avion au sol 221

9.2.2 Système avion en vol sans turbulence 233
9.2.3 Système avion en vol avec turbulence 244
9.2.4 Influence de l'aérodynamique et des turbulences sur le système avion 256
9.2.5 Influence des turbulences 256
9.3 Bilan du chapitre 257

9.1 Validation sur le système poutre

La fréquences et le taux d'amortissement des modes à identifier sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Modes du système poutre		
j	$f_j(hz)$	ξ_j ($^o/_{oo}$)
1	2.955	15.00
2	9.836	15.00

TABLE 9.1 – Informations sur les modes poutre

9.1.1 Système poutre sans entrée inconnue

9.1.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures C.1(a), C.1(b), C.1(c), C.1(d), C.2(a), C.2(b), C.2(c) et C.2(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.1(a) ou Figure C.1(c)	Figure C.1(b) ou Figure C.1(d)
Amortissement	Figure C.2(a) ou Figure C.2(c)	Figure C.2(b) ou Figure C.2(d)

TABLE 9.2 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.1(a)	Figure C.1(c)	Figure C.1(b)	Figure C.1(d)
Amortissement	Figure C.2(a)	Figure C.2(c)	Figure C.2(b)	Figure C.2(d)

TABLE 9.3 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Sur les deux modes de la poutre, seul le second est clairement identifié sur l'intervalle d'ordres considéré. Il apparaît dès l'identification d'un modèle d'ordre 2. Il reste très stable jusqu'à l'ordre maximal considéré. Ceci est vrai à la fois pour la valeur de sa fréquence et celle de son taux d'amortissement. Sa fréquence est bien identifiée (9.833hz, soit environ 0.03% d'erreur). Son taux d'amortissement est identifié avec un léger biais ($15.8\,^0/_{00}$, soit environ 5% d'erreur). Le premier mode n'apparaît qu'à l'ordre 10. On ne peut donc pas se prononcer sur sa stabilité selon l'ordre, mais sa fréquence est bien identifiée (2.959hz, soit environ 1.14% d'erreur). Son taux d'amortissement est identifié avec un biais ($17\,^0/_{00}$, soit environ 13% d'erreur). Cependant, il est possible que ce mode ne soit pas encore stabilisé et qu'il nécessiterait un ordre plus élevé pour que son taux d'amortissement soit correctement identifié.

Sur l'ensemble du diagramme, on n'observe qu'un seul pôle non physique commun à toutes les identifications. Il apparaît à l'ordre 10. Aussi bien sa fréquence que son taux d'amortissement sont très proches de ceux du second pôle physique. De plus, lorsque ce pôle apparaît, l'identification du taux d'amortissement du second mode est un peu détérioré (l'erreur d'identification passe d'environ 5% à environ 6.5%). Ceci est généralement un signe de dédoublement d'un mode, ici le second mode, dû à une surestimation de l'ordre du système.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'identification des deux modes de la poutre, que se soit en terme de fréquence ou en terme de taux d'amortissement. La méthode est robuste au bruit de capteur pour l'identification des modes du système. On constate, cependant, l'apparition d'un pôle non physique (commun au 200 identifications) supplémentaire par rapport au cas non bruité. Ce mode apparaît lui aussi à l'ordre 10. Son apparition est très certainement lié à une surestimation de l'ordre du système.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère n'est pas bien validé. Concernant le premier mode, il est difficile de se prononcer car il n'apparaît qu'au dernier ordre du diagramme. Concernant le second mode, qui apparaît de l'ordre 2 à l'ordre 10, le critère est validé pour 4 ordres (non consécutifs) sur 9 pour l'incertitude sur sa fréquence, et 3 sur 9 pour celle sur son taux d'amortissement.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne détériore pas la validation du premier critère.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Comme avec le premier critère, l'estimation d'incertitude sur la fréquence et l'amortissement du premier mode n'est pas validé. Pour le second mode, ce critère valide bien mieux l'estimation d'incertitude sur sa fréquence (6 ordres sur 9, dont 5 consécutifs) que le premier critère. Cependant, ce second critère ne valide pas correctement l'estimation d'incertitude sur son taux

d'amortissement. En effet cette estimation n'est validée que pour 3 ordres sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Comme pour le premier critère, l'ajout de bruit sur les capteurs n'a pas d'influence sur le nombre d'ordres pour lesquels le second critère est validé, aussi bien en terme de fréquences que de taux d'amortissement.

Bilan de la méthode OO_{cov} sur le système poutre sans entrée inconnue :

Malgré un biais d'identification des taux d'amortissement, la méthode OO_{cov} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Le premier mode nécessiterait peut-être un ordre plus élevé pour l'identification de son taux d'amortissement. Cependant, lorsque l'on augmente l'ordre, cette méthode a l'inconvénient d'identifier (à chaque fois) un mode qui ne correspond pas à un mode de la structure. D'autre part, cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification des modes de la structure.

L'utilisation opérationnelle de l'estimation des incertitudes avec la méthode OO_{cov} est validée pour les fréquences mais pas pour les taux d'amortissement, avec ou sans bruit sur les capteurs.

9.1.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures C.3(a), C.3(b), C.3(c), C.3(d), C.4(a), C.4(b), C.4(c) et C.4(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.3(a) ou Figure C.3(c)	Figure C.3(b) ou Figure C.3(d)
Amortissement	Figure C.4(a) ou Figure C.4(c)	Figure C.4(b) ou Figure C.4(d)

TABLE 9.4 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.3(a)	Figure C.3(c)	Figure C.3(b)	Figure C.3(d)
Amortissement	Figure C.4(a)	Figure C.4(c)	Figure C.4(b)	Figure C.4(d)

TABLE 9.5 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 8. Sa fréquence est stable et est correctement identifiée (2.962hz au lieu de 2.955hz, soit environ 0.2% d'erreur). Son taux d'amortissement semble converger vers la valeur théorique lorsque l'ordre augmente. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence est parfaitement stable et bien identifiée (9.833hz au lieu de 9.836hz, soit environ 0.03%

d'erreur). Son taux d'amortissement est stable mais moins que sa fréquence. Il oscille entre 14.6 $^0/_{00}$(2.7% d'erreur) et 15.6 $^0/_{00}$(4% d'erreur).

On constate l'apparition d'un pôle non physique commun à toute les identifications à partir de l'ordre 6. Ceci est certainement dû à une surestimation de l'ordre du système, même si cette surestimation est nécessaire pour identifier le premier mode.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit n'a quasiment pas d'influence sur la qualité de l'identification des modes de ma structure. On constate cependant que le premier mode apparaît à l'ordre 7, soit un ordre plus tôt que dans le cas sans bruit sur les capteurs. La stabilité en termes de fréquences et de taux d'amortissement est identique, à part une très légère amélioration de celle du taux d'amortissement du second mode de la structure.

Encore une fois, l'influence du bruit sur les capteurs est relativement faible sur l'apparition de pôles non physiques communs aux 200 identifications. Un seul pôle non physique est identifié. Ce pôle a le même comportement que celui identifié dans le cas sans bruit sur les capteurs. On constate aussi que, comme le premier mode de la structure, le bruit sur les capteurs a pour effet de le faire apparaître un ordre plus tôt, à l'ordre 7.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : L'estimation des incertitudes sur la fréquence du premier mode est toujours validé au regard de ce critère (3 ordres sur 3 sont validés). Le résultat concernant le taux d'amortissement de ce mode est nettement moins bon. En effet, ces valeurs ne sont jamais validées avec ce critère. En ce qui concerne le second mode, les estimations d'incertitude sur sa fréquence et sur son taux d'amortissement sont quasiment toujours validées par ce critère (8 ordres sur 9 pour la fréquence, 9 ordres sur 9 pour le taux d'amortissement).
- Avec bruit sur les capteurs : On constate que le bruit sur les capteurs dégrade légèrement les estimations d'incertitude selon le premier critère. En effet, les estimations d'incertitude sur la fréquence du premier ordre ne sont plus validées qu'au dernier ordre, et ce, même si ce mode apparaît un ordre plus tôt que lorsqu'il n'y a pas de bruit sur les capteurs. Les estimations d'incertitude sur son taux d'amortissement ne sont, comme pour le cas non bruité, jamais validés. Concernant le second mode de la structure, le bruit ne dégrade pas les résultats de validation d'estimation d'incertitude sur sa fréquence. Cependant il dégrade légèrement l'estimation d'incertitude sur son taux d'amortissement. Elle n'est validée plus que 7 fois sur 9 au lieu de 9 fois sur 9. Les résultats de validation des estimations d'incertitude de ce mode restent tout de même très bons.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Au regard du second critère, l'incertitude sur la fréquence du premier mode est validée 1 fois sur 3, celle sur son taux d'amortissement ne l'est jamais. Concernant le second mode, l'incertitude sur sa fréquence est validée 7 fois sur 9 et celle sur son taux d'amortissement est toujours validée.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne change pas le nombre de

valeurs d'incertitudes validées, excepté pour l'incertitude du taux d'amortissement du second mode. En effet, au regard de ce critère, on passe de 9 à 7 validations réussies sur 9.

Bilan de la méthode OO_{sqort} sur le système poutre sans entrée inconnue :

La méthode OO_{sqort} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Le premier mode nécessiterait peut-être un ordre plus élevé pour stabiliser l'identification de son taux d'amortissement. On note aussi que l'identification du taux d'amortissement du second mode est moins stable qu'avec la méthode OO_{cov}. D'autre part, cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification des modes de la structure.

L'utilisation opérationnelle de l'estimation des incertitudes par la méthode OO_{sqort} est validée, avec et sans bruit sur les capteurs.

9.1.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures C.5(a), C.5(b), C.5(c), C.5(d), C.6(a), C.6(b), C.6(c) et C.6(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.5(a) ou Figure C.5(c)	Figure C.5(b) ou Figure C.5(d)
Amortissement	Figure C.6(a) ou Figure C.6(c)	Figure C.6(b) ou Figure C.6(d)

TABLE 9.6 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.5(a)	Figure C.5(c)	Figure C.5(b)	Figure C.5(d)
Amortissement	Figure C.6(a)	Figure C.6(c)	Figure C.6(b)	Figure C.6(d)

TABLE 9.7 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 4. Sa fréquence est stable et est parfaitement identifiée (2.955hz). Son taux d'amortissement converge vers la valeur théorique lorsque l'ordre augmente. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence (9.835hz au lieu de 9.836hz) et son taux d'amortissement (14.9 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$) sont correctement identifiés et sont parfaitement stables jusqu'à l'ordre 6. L'identification de sa fréquence est ensuite légèrement biaisée sur le reste du diagramme Monte-Carlo (fréquence de 9.790hz au lieu de 9.836hz). Son taux

d'amortissement est légèrement déstabilisé (environ 14.6 $^0/_{00}$aux ordres 6 à 8) mais redevient correctement identifié (14.9 $^0/_{00}$) à partir de l'ordre 9. Cette dégradation semble être due à un dédoublement.

On constate l'apparition d'un pôle non physique à partir de l'ordre 6. Ce pôle semble être un dédoublement du second pôle physique. Il a quasiment la même valeur de fréquence et d'amortissement que ce dernier. Ce dédoublement est certainement dû à une surestimation de l'ordre du modèle.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit n'a aucune influence sur la qualité de l'identification des modes de la structure. Les diagrammes de stabilité Monte-Carlo en fréquence et en taux d'amortissement sont strictement identiques avec que sans bruit sur les capteurs.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide l'estimation d'incertitude de la fréquence du premier mode pour 4 ordres sur 7. Il en est de même pour son taux d'amortissement. L'estimation de l'incertitude sur son taux d'amortissement est validée aux mêmes ordres que celle de l'incertitude de sa fréquence. Concernant le second mode, les estimations d'incertitude sur sa fréquence et sur son taux d'amortissement sont toujours validées (9 ordres sur 9).
- Avec bruit sur les capteurs : Quelque soit le pôle (physique ou non), le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère valide l'estimation de l'incertitude de la fréquence du premier mode pour 3 ordres (consécutifs) sur 7. L'estimation de l'incertitude sur son taux d'amortissement est validée 4 fois sur 7 (comme pour le premier critère). Concernant le second mode, l'estimation de l'incertitude de sa fréquence est toujours validée. Celle sur son taux d'amortissement est validée pour les 7 derniers ordres (i.e. pour 7 ordres consécutifs sur 9).
- Avec bruit sur les capteurs : Quelque soit le pôle (physique ou non), le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude.

Bilan de la méthode OI_{cov} sur le système poutre sans entrée inconnue :

La méthode OI_{cov} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Le premier mode nécessiterait peut-être un ordre plus élevé pour stabiliser l'identification de son taux d'amortissement. Cependant, l'augmentation de l'ordre a pour effet de faire apparaître un pôle non physique commun aux 200 identifications (un possible dédoublement du second mode). On note que cette méthode fait apparaître le premier mode plus rapidement (ordre 4) que les méthodes de type *Output-Only* (ordre 10 pour la méthode OO_{cov} et ordre 8 pour la méthode OO_{sqort}. D'autre part, cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

L'utilisation opérationnelle de l'estimation des incertitudes par la méthode OI_{cov} est validée, avec et sans bruit sur les capteurs.

9.1.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures C.7(a), C.7(b), C.7(c), C.7(d), C.8(a), C.8(b), C.8(c) et C.8(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.7(a) ou Figure C.7(c)	Figure C.7(b) ou Figure C.7(d)
Amortissement	Figure C.8(a) ou Figure C.8(c)	Figure C.8(b) ou Figure C.8(d)

TABLE 9.8 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.7(a)	Figure C.7(c)	Figure C.7(b)	Figure C.7(d)
Amortissement	Figure C.8(a)	Figure C.8(c)	Figure C.8(b)	Figure C.8(d)

TABLE 9.9 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 4. Sa fréquence est parfaitement stable et est parfaitement identifiée (2.955hz). Son taux d'amortissement n'est correctement identifié (15.2 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$, soit environ 1.3% d'erreur) que pour le premier ordre où le mode apparaît (i.e. l'ordre 4). Il devient ensuite très instable sur le reste du diagramme Monte-Carlo. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence est parfaitement identifiée (9.836hz) de son apparition jusqu'à l'ordre 7. Son identification est ensuite légèrement biaisée sur le reste du diagramme Monte-Carlo (9.790hz au lieu de 9.836). Cette dégradation semble être due à un dédoublement. Son taux d'amortissement est moins stable que sa fréquence, mais reste beaucoup plus stable et mieux identifié que celui du premier mode. Il oscille entre 14.7 $^0/_{00}$(environ 2% d'erreur) et 15.7 $^0/_{00}$(environ 4.7% d'erreur).

On constate l'apparition d'un pôle non physique à partir de l'ordre 7. Ce pôle semble être un dédoublement du second pôle physique. Quelque soit l'ordre, il a quasiment la même valeur de fréquence que ce dernier. Cependant, son amortissement est beaucoup moins stable. Ce dédoublement est certainement dû à une surestimation de l'ordre du modèle.

Avec bruit sur les capteurs :

Quelque soit l'ordre, le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la fréquence et le taux d'amortissement des modes identifiés. Il en est de même concernant les pôles non physiques communs aux 200 identifications.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide parfaitement l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode (7 ordres sur 7). L'estimation de l'incertitude sur son taux d'amortissement est validée pour 5 ordres sur 7. Concernant le second mode, l'estimation de l'incertitude sur sa fréquence est validée 8 fois sur 9. Celle sur son taux d'amortissement l'est 8 fois sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'estimation d'incertitude. L'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier est encore une fois toujours validée. L'estimation d'incertitude sur son taux d'amortissement est similaire. Il en est de même concernant le second mode, avec une très légère amélioration de l'estimation d'incertitude sur sa fréquence qui est maintenant validée pour tous les ordres où il apparaît (9 ordres sur 9).

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère valide l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode pour 6 ordres consécutifs (tous sauf le dernier). L'estimation de l'incertitude sur son taux d'amortissement est validée pour 4 ordres sur 7 (i.e. un fois de moins qu'avec le premier critère). Concernant le second mode, l'estimation de l'incertitude sur sa fréquence est validée 7 fois sur 9 (i.e. un fois de moins qu'avec le premier critère). Celle sur son taux d'amortissement l'est 8 fois sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Encore une fois, le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'estimation d'incertitude.

Bilan de la méthode OI_{sqort} sur le système poutre sans entrée inconnue :

La méthode OI_{sqort} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Le taux d'amortissement du premier mode est cependant assez mal identifié. L'augmentation de l'ordre a pour effet de faire apparaître un pôle non physique commun aux 200 identifications (probablement un dédoublement du second mode). Comme la méthode OI_{cov}, on note que cette méthode fait apparaître le premier mode plus rapidement (ordre 4) que les méthodes de type *Output-Only* (ordre 10 pour la méthode OO_{cov} et ordre 8 pour la méthode OO_{sqort}. Cependant, la méthode OI_{cov} fournit une meilleur identification que la méthode OI_{sqort}, notamment en ce qui concerne les taux d'amortissement. Concernant le bruit sur les capteurs, il n'affecte pas les résultats d'identification. Cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

L'utilisation opérationnelle de l'estimation des incertitudes par la méthode OI_{sqort} est validée, avec et sans bruit sur les capteurs.

9.1.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

Les résultats sont présentés dans les figures C.9(a), C.9(b), C.9(c), C.9(d), C.10(a), C.10(b), C.10(c) et C.10(d) de l'Annexe C.

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.9(a) ou Figure C.9(c)	Figure C.9(b) ou Figure C.9(d)
Amortissement	Figure C.10(a) ou Figure C.10(c)	Figure C.10(b) ou Figure C.10(d)

TABLE 9.10 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.9(a)	Figure C.9(c)	Figure C.9(b)	Figure C.9(d)
Amortissement	Figure C.10(a)	Figure C.10(c)	Figure C.10(b)	Figure C.10(d)

TABLE 9.11 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 4. Sa fréquence est parfaitement stable et est correctement identifiée (2.955hz). Son taux d'amortissement est correctement identifié mais n'est pas stable sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo. Il oscille entre 14.6 $^0/_{00}$(environ 2.7% d'erreur) et 16 $^0/_{00}$(environ 6.7% d'erreur). On constate notamment une importante erreur d'identification à l'ordre 5 (25.32 $^0/_{00}$). Cependant, il semble que son taux d'amortissement converge lorsque l'ordre augmente. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence est correctement identifiée (9.835hz au lieu de 9.836hz) et est stable jusqu'à l'ordre 7. Sa fréquence est ensuite identifiée avec un léger biais sur le reste du diagramme (environ 9.790hz au lieu de 9.836hz). Son taux d'amortissement est moins stable que sa fréquence, mais reste correcte. La dégradation des résultats d'identification du second mode semble due à son dédoublement.

On constate l'apparition d'un pôle non physique à partir de l'ordre 7. Ce pôle semble être un dédoublement du second pôle physique. Quelque soit l'ordre, il a quasiment la même valeur de fréquence et d'amortissement que ce dernier. Ce dédoublement est certainement dû à une surestimation de l'ordre du modèle.

Avec bruit sur les capteurs :

Quelque soit l'ordre, le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la fréquence et le taux d'amortissement des modes identifiés. Le seul point remarquable est le taux d'amortissement du premier mode qui devient très mal identifié à l'ordre 6 lorsqu'il y a présence de bruit sur les capteurs.

Pour tous les ordres, excepté le 6eme, le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la fréquence et le taux d'amortissement du pôle non physique identifié.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

– Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide l'estimation d'incertitude

sur la fréquence du premier mode pour 4 ordres (consécutifs) sur 7. L'estimation de l'incertitude sur son taux d'amortissement est validée pour 5 ordres sur 7. Concernant le second mode, l'estimation de l'incertitude sur sa fréquence est parfaitement validée (9 ordres sur 9). Il en est de même pour son taux d'amortissement.

– Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'estimation d'incertitude. On constatera cependant une légère dégradation des résultats concernant la fréquence du second mode. Son estimation d'incertitude n'est plus validée que 7 fois sur 9.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

– Sans bruit sur les capteurs : Le second critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude. Seuls deux points sont validés sur le diagramme de stabilité Monte-Carlo en fréquence (fréquence du second mode et de son dédoublement à l'ordre 10) et seul un point est validé sur celui en taux d'amortissement (le taux d'amortissement du second mode à l'ordre 5).

– Avec bruit sur les capteurs : Même si les résultats restent extrêmement mauvais, le bruit sur les capteurs permet de valider l'estimation d'incertitude sur la fréquence du second mode une fois de plus (2 ordres sur 9 au lieu de 1 sur 9) que dans le cas non bruité. Concernant les taux d'amortissement, c'est maintenant l'estimation d'incertitude sur celui du premier mode qui est validé à l'ordre 5, même si cette valeur est mal identifiée.

Bilan de la méthode OI_{sqobl} sur le système poutre sans entrée inconnue :

La méthode OI_{sqobl} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Cependant, l'augmentation de l'ordre a pour effet de faire apparaître un pôle non physique commun aux 200 identifications (probablement un dédoublement du second mode). Les résultats d'identification obtenus avec la méthode OI_{sqobl} sont très proches de ceux obtenus avec la méthode OI_{cov}. De plus, comme la méthode OI_{cov} et la méthode OI_{sqort}, on note que cette méthode fait apparaître le premier mode plus rapidement (ordre 4) que les méthodes de type *Output-Only* (ordre 10 pour la méthode OO_{cov} et ordre 8 pour la méthode OO_{sqort}. Concernant le bruit sur les capteurs, il n'affecte pas les résultats d'identification. Cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

Au regard des mauvais résultats de validation par le critère 2, l'utilisation opérationnelle de l'estimation des incertitudes par la méthode OI_{sqobl} n'est pas validée sur ce cas, avec ou sans bruit sur les capteurs. On peut noter que, si on n'avait eu que le critère 1 à notre disposition (critère habituellement utilisé), cette méthode aurait été validée. Ce cas montre que la convergence en moyenne des estimations d'incertitude ne suffit pas pour valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance.

9.1.1.6 Comparaison des méthodes sur le cas poutre sans entrée inconnue

En terme d'identification

- **Qualité de l'identification**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, on constate que la méthode *Covariance-driven* (OO_{cov}) identifie légèrement moins bien les fréquences et les taux d'amortissement du second mode que la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). Cependant le taux d'amortissement est légèrement plus stable avec la méthode OO_{cov} qu'avec la méthode OO_{sqort}. Un classement des méthodes donnerait :

  $$OO_{cov} \sim OO_{sqort}$$

  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, elles identifient les fréquences de manière similaire. Cependant, on notera que l'identification des taux d'amortissement devient rapidement très instable avec la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OI_{sqort}). Un classement des méthodes donnerait :

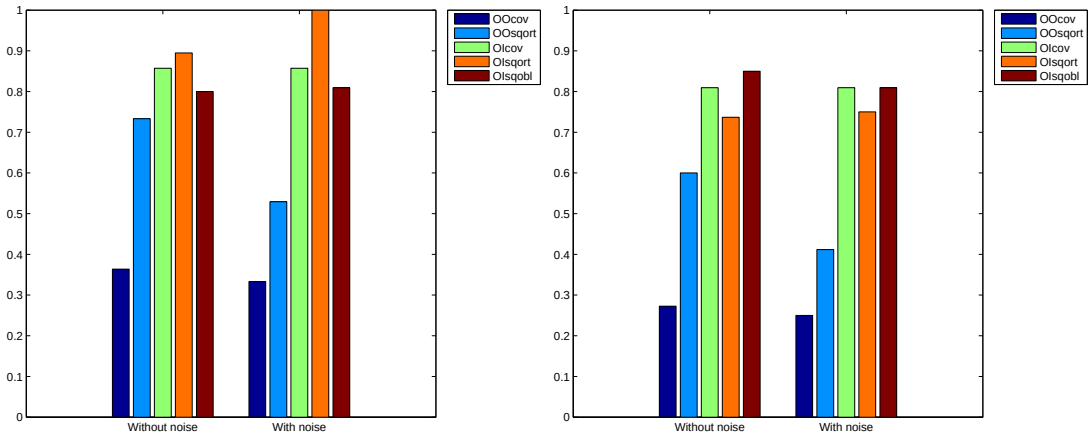
  $$OI_{cov} \sim OI_{sqobl} > OI_{sqort}$$

  On note clairement que l'utilisation des signaux d'entrées facilite l'identification des modes. Ceci n'est pas visible concernant le second mode car toutes les méthodes l'identifient dès l'ordre 2. Mais si on considère le premier mode, on constate qu'il apparait respectivement aux ordres 10 et 8 pour les méthodes OO_{cov} et OO_{sqort}, alors qu'il apparait dès l'ordre 4 pour les trois méthodes de type *Input/Output*.
- **Robustesse au bruit sur les capteurs**
  Quelque soit la méthode, le bruit sur les capteurs n'a pas d'influence sur la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo (on rappelle que les modes qui ne sont pas trouvés à chacune des 200 identifications ne sont pas affichés sur ce type de diagramme). On notera cependant que, concernant les modes conservés dans ces diagrammes, leur identification obtenue avec la méthode OI_{cov} est strictement identique avec ou sans bruit sur les capteurs.

En terme d'estimation d'incertitude

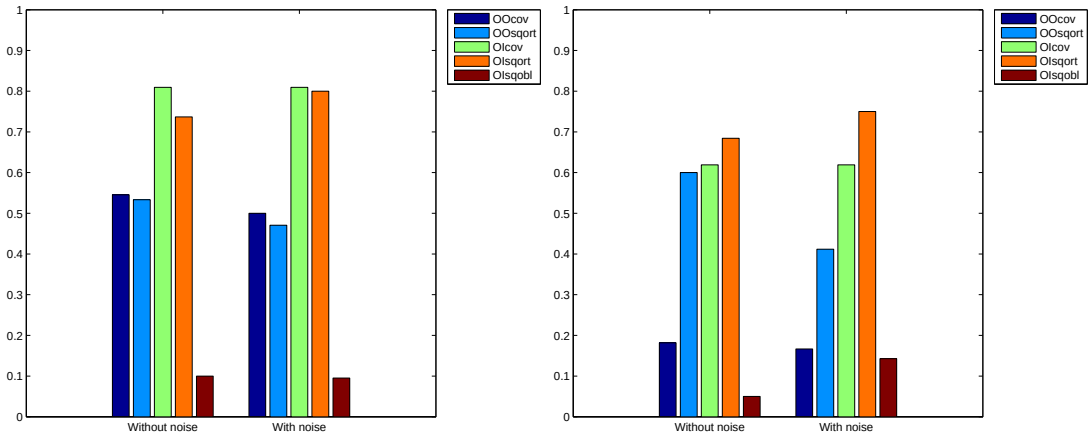
La Figure 9.1 présente le score de succès des deux critères de validation, dans les cas bruité et non bruité, pour chacune des cinq méthodes. Ce score correspond au ratio entre le nombre de pôles dont le critère est validé et le nombre pôles du diagramme (voir Equation (8.10) à la Section 8.4.1.2).

On observe que le premier critère valide mieux les estimations d'incertitude sur les fréquences et sur les taux d'amortissement pour les méthodes de type *Input/Output* que pour les méthodes de type *Output-Only*. On observe aussi que, d'après ce critère, l'estimation d'incertitude est robuste aux bruits sur les capteurs. Cependant, on notera une dégradation des résultats concernant les incertitudes sur les fréquences et sur les taux d'amortissement obtenus avec la méthode OO_{sqort} quand on ajoute du bruit



(a) Critère 1 - Fréquences

(b) Critère 1 - Taux d'amortissement



(c) Critère 2 - Fréquences

(d) Critère 2 - Taux d'amortissement

FIGURE 9.1 – Score S

sur les capteurs. On observe aussi une légère amélioration des résultats concernant les incertitudes sur les fréquences obtenues avec la méthode OI_{sqort} dans le cas bruité.

La validation des incertitudes par le second critère est plus sévère que celle par le premier critère. Cependant, le classement des méthodes est quasiment identique avec les deux critères, excepté pour la méthode OI_{sqobl} qui est très mal validée par le critère 2. Encore une fois on notera une bonne robustesse des méthodes face au bruit sur les capteurs, excepté pour l'estimation d'incertitude sur les taux d'amortissement obtenus avec la méthode OO_{cov}.

L'étude du cas poutre sans excitation inconnue permet de valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance pour les méthodes OO_{sqort}, OI_{cov} et OI_{sqort}. Concernant la méthode OO_{cov}, l'utilisation des intervalles de confiance pour les taux d'amortissement n'est pas recommandée. Concernant la méthode OI_{sqobl}, l'utilisation

des intervalles de confiance n'est recommandée, ni pour les fréquences, ni pour les amortissements.

Bilan global sur le cas poutre sans entrée inconnue

Sur le cas poutre sans excitation inconnue, les cinq méthodes sont robustes au bruit sur les capteurs, aussi bien concernant la qualité des identifications que celle des estimations d'incertitude.

Concernant l'utilisation des signaux d'entrées, elle est fortement recommandée. En effet, les méthodes de type *Input/Output* fournissent de meilleurs identifications que les méthodes de type *Output-Only*.

S'agissant d'une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{sqort} dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponible, et la méthode OI_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées sont disponibles.

9.1.2 Système poutre avec entrée inconnue

9.1.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures C.11(a), C.11(b), C.11(c), C.11(d), C.12(a), C.12(b), C.12(c) et C.12(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.11(a) ou Figure C.11(c)	Figure C.11(b) ou Figure C.11(d)
Amortissement	Figure C.12(a) ou Figure C.12(c)	Figure C.12(b) ou Figure C.12(d)

TABLE 9.12 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.11(a)	Figure C.11(c)	Figure C.11(b)	Figure C.11(d)
Amortissement	Figure C.12(a)	Figure C.12(c)	Figure C.12(b)	Figure C.12(d)

TABLE 9.13 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Sur les deux modes de la poutre, seul le second est clairement identifié sur l'intervalle d'ordres considéré. Il apparaît dès l'identification d'un modèle d'ordre 2. Il reste très stable jusqu'à l'ordre maximal considéré. Ceci est vrai à la fois pour la valeur de sa fréquence et celle de son taux d'amortissement. Cependant, ces valeurs sont identifiées avec un léger biais. Sa fréquence est identifiée à 9.857hz au lieu de 9.836hz. Son taux

d'amortissement est identifié à 16 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$(soit une erreur d'environ 6.6%). Le premier mode n'apparaît qu'à l'ordre 10. On ne peut pas se prononcer sur sa stabilité mais sa fréquence est bien identifiée (2.957hz au lieu de 2.955hz). Il en est de même concernant l'identification de son taux d'amortissement (15.16 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$).

La méthode ne fait apparaître qu'un seul pôle non physique commun aux 200 identifications, à l'ordre 10. Ce pôle semble être un dédoublement du second mode.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'identification des deux modes de la poutre, que se soit en terme de fréquence ou en terme de taux d'amortissement. La méthode est robuste au bruit de capteur pour l'identification des modes du système.

Le bruit sur les capteurs ne modifie pas le pôle non physique déjà présent dans le cas non bruité. Il apparaît à l'ordre 10 et semble être un dédoublement du second mode.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide l'estimation de l'incertitude sur les fréquences que pour le second mode, et ce, uniquement pour les 4 premiers ordres de son apparition (de l'ordre 2 à l'ordre 5, soit 4 ordres sur 9). Il en est de même concernant la validation des estimations d'incertitude des taux d'amortissement. Elles ne sont validées que pour le second mode et uniquement pour 3 ordres sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence. On notera seulement une légère dégradation des résultats concernant le taux d'amortissement du second ordre. L'estimation d'incertitude sur son taux d'amortissement n'est plus validée que pour 3 ordres sur 9 (les 3 premiers ordres de son apparition).

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Comme pour le premier critère, le second critère ne valide l'estimation de l'incertitude sur les fréquences que pour le second mode, et ce, uniquement pour les 4 ordres sur 9 (le premier ordre de son apparition puis de l'ordre 4 à l'ordre 6). Il en est de même concernant la validation des estimations d'incertitude des taux d'amortissement. Elles ne sont validées que pour le second mode, mais cette fois pour 6 ordres sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Concernant la validation basée sur le second critère, les estimations d'incertitude sur la fréquence et sur le taux d'amortissement du premier mode ne sont pas validées. Celles sur la fréquence du second mode ne sont pas influencées par le bruit de capteur, elles sont toujours validées pour 4 ordres sur 9. Concernant celles sur son taux d'amortissement, les résultats sont dégradés par le bruit, elles ne sont plus validées que pour les 3 premiers ordres de son apparition (i.e. pour 3 ordres sur 9).

Bilan de la méthode OO_{cov} sur le système poutre avec entrée inconnue :

La méthode OO_{cov} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Le premier mode, qui n'apparaît qu'à l'ordre 10, nécessiterait un ordre plus élevé pour que l'on puisse

vérifier sa stabilité. Cependant, l'augmentation de l'ordre a pour effet de faire apparaître un pôle non physique commun aux 200 identifications (probablement un dédoublement du second mode). On notera aussi que cette méthode identifie le second mode avec un léger biais, aussi bien sur sa fréquence que sur son taux d'amortissement. Concernant le bruit sur les capteurs, il n'affecte pas les résultats d'identification. Cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

L'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance n'est validée que si l'ordre n'est pas trop élevé. En effet, aucune estimation d'incertitude sur les fréquences n'est validée par le critère 2 après l'ordre 6. On notera que, concernant la validation des estimations sur les fréquences, les résultats de validation sont identiques qu'il y ait du bruit ou non sur les capteurs. Concernant les estimations d'incertitude sur les taux d'amortissement, dans le cas non bruité, les résultats de validation sont meilleures que ceux des estimations d'incertitude sur les fréquences. Cependant, l'ajout de bruit sur les capteurs dégrade les résultats de validation pour des ordres trop élevés.

9.1.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures C.13(a), C.13(b), C.13(c), C.13(d), C.14(a), C.14(b), C.14(c) et C.14(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.13(a) ou Figure C.13(c)	Figure C.13(b) ou Figure C.13(d)
Amortissement	Figure C.14(a) ou Figure C.14(c)	Figure C.14(b) ou Figure C.14(d)

TABLE 9.14 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.13(a)	Figure C.13(c)	Figure C.13(b)	Figure C.13(d)
Amortissement	Figure C.14(a)	Figure C.14(c)	Figure C.14(b)	Figure C.14(d)

TABLE 9.15 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 8. Sa fréquence est relativement stable et est parfaitement identifiée à l'ordre 10 (2.96hz au lieu de 2.955hz, soit environ 0.17% d'erreur). Son taux d'amortissement oscille entre 15.9 $^0/_{00}$(environ 6% d'erreur) et 17.9 $^0/_{00}$(19% d'erreur). Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Malgré un léger biais (9.86hz au lieu de 9.836hz) sa fréquence est parfaitement

stable sur tout le diagramme Monte-Carlo. On remarque que ce biais est comparable à celui obtenu avec la méthode OO_{cov}. Excepté au dernier ordre, son taux d'amortissement est relativement stable et correctement identifié. Il oscille entre 14.64 $^0/_{00}$(2.4% d'erreur) et 16.24 $^0/_{00}$(environ 8.3% d'erreur). Au dernier ordre, ce taux d'amortissement est mal identifié (13.37 $^0/_{00}$, soit environ 11% d'erreur) .

A partir de l'ordre 6, on constate l'apparition d'un pôle non physique commun aux 200 identifications. Ceci est certainement dû à une surestimation de l'ordre du système, même si cette surestimation est nécessaire pour identifier le premier mode.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit n'a quasiment pas d'influence sur l'identification des pôles physiques. On constate cependant que le premier mode apparaît à l'ordre 7, soit un ordre plus tôt que dans le cas sans bruit sur les capteurs. La stabilité en termes de fréquences et de taux d'amortissement est similaire, mis à part une dégradation de l'identification du taux d'amortissement du premier mode de la structure.

Le pôle non physique identifié dans le cas non bruité est aussi identifié dans le cas bruité. Cependant, il l'est un ordre plus tôt, à l'ordre 7. Aussi bien en termes de fréquences qu'en termes de taux d'amortissement, sont comportement est le même que dans le cas non bruité. On voit aussi qu'un deuxième pôle apparaît, mais uniquement à l'ordre 9. Encore une fois ceci peut être dû à une surestimation de l'ordre du système.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide parfaitement l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode (3 ordres sur 3). Cependant, il ne valide jamais celle sur son taux d'amortissement. L'estimation de l'incertitude sur la fréquence du second mode est presque toujours validée (8 fois sur 9). Il en est de même concernant celle sur son taux d'amortissement (8 fois sur 9).
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit dégrade un peu l'estimation d'incertitude de la fréquence du premier mode. Même si cette fréquence apparaît pour un ordre plus tôt que dans le cas bruité, l'estimation de son incertitude n'est validée que 2 fois sur 4. Celle sur son taux d'amortissement n'est toujours validée à aucun ordre. Concernant le second mode, le bruit sur les capteurs n'a pas d'influence sur la qualité de l'estimation d'incertitude sur sa fréquence. Elle est encore validée 8 fois sur 9. On observe cependant une dégradation de l'estimation d'incertitude de son taux d'amortissement. Il n'est plus validé que 6 fois sur 9 (au lieu de 8 fois sur 9).

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère ne valide l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode que pour 1 ordre sur 3. Ce critère ne valide jamais celle sur son taux d'amortissement. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est validée 8 fois sur 9. Celle sur son taux d'amortissement l'est 6 fois sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs dégrade légèrement les résultats. L'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode n'est validée

que pour 1 ordre sur 4 (contre 1 sur 3 dans le cas non bruité). Celle sur son amortissement n'est toujours validée pour aucun ordre. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est validé pour un ordre de moins que dans le cas non bruité, soit pour 7 ordres sur 8. Il en est de même concernant celle de son taux d'amortissement, il n'est plus validé que pour 4 ordres sur 9 (contre 6 sur 9 dans le cas non bruité).

Bilan de la méthode OO_{sqort} sur le système poutre avec entrée inconnue :

La méthode OO_{sqort} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Les fréquences sont stables et correctement identifiées. Les taux d'amortissement sont moins bien identifiés qu'avec la méthode OO_{cov}. D'autre part, l'augmentation de l'ordre nécessaire pour faire apparaître le premier mode a pour effet de faire apparaître un pôle non physique commun aux 200 identifications. Concernant le bruit sur les capteurs, il n'affecte pas notablement les résultats d'identification des deux modes de la structure. Cependant, le bruit a pour effet de faire apparaître le pôle non physique un ordre plus tôt (ordre 8 dans le cas non bruité - ordre 7 dans le cas bruité). On peut considérer que cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

L'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance est validée dans le cas non bruité pour les fréquences. Pour les taux d'amortissement, l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance n'est plus validée si l'ordre est trop élevé. L'ajout de bruit sur les capteur dégrade les résultats de validation, notamment pour les taux d'amortissement.

9.1.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures C.15(a), C.15(b), C.15(c), C.15(d), C.16(a), C.16(b), C.16(c) et C.16(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.15(a) ou Figure C.15(c)	Figure C.15(b) ou Figure C.15(d)
Amortissement	Figure C.16(a) ou Figure C.16(c)	Figure C.16(b) ou Figure C.16(d)

TABLE 9.16 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.15(a)	Figure C.15(c)	Figure C.15(b)	Figure C.15(d)
Amortissement	Figure C.16(a)	Figure C.16(c)	Figure C.16(b)	Figure C.16(d)

TABLE 9.17 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 6. Sa fréquence est stable et est correctement identifiée . Son taux d'amortissement converge vers la valeur théorique avec un léger biais (16 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$lorsque, soit environ 6.7% d'erreur) l'ordre augmente. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence est correctement identifiée et est parfaitement stable sur tout le diagramme Monte Carlo (9.835hz au lieur de 9.836hz). Il en est de même concernant son taux d'amortissement, excepté une petite erreur constante (15.45 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$, soit environ 3% d'erreur) sur l'ensemble du diagramme Monte Carlo et une légère divergence aux deux derniers ordres (environ 15.7 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$, soit environ 4.7% d'erreur).

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit n'a aucune influence sur l'identification des fréquences. Les diagrammes de stabilité Monte Carlo avec et sans bruit sur les capteurs sont identiques. Il en est de même pour les diagrammes de stabilité Monte Carlo des taux d'amortissement, excepté pour les 3 derniers ordres qui sont très légèrement différents.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide jamais l'estimation de l'incertitude sur la fréquence du premier mode. Il en est de même pour celle sur son taux d'amortissement. Concernant le second mode, le critère ne valide l'estimation d'incertitude de sa fréquence que pour les 5 premiers ordres suivant son apparition (soit 5 ordres sur 9). Et seulement 4 estimations sur 9 sont validées concernant l'incertitude sur son taux d'amortissement : celles effectuées aux 4 premiers ordres suivant l'apparition de ce mode.
- Avec bruit sur les capteurs : Quelque soit le mode, le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide jamais l'estimation de l'incertitude sur la fréquence du premier mode. Il en est de même pour celle sur son taux d'amortissement. Concernant le second mode, le critère valide l'estimation d'incertitude de sa fréquence pour les 7 premiers ordres suivant son apparition (soit 7 ordres sur 9). Cependant, comme avec le premier critère, seules 4 estimations sur 9 sont validées concernant l'incertitude sur son taux d'amortissement. Et encore une fois, il s'agit de celles effectuées aux 4 premiers ordres suivant l'apparition de ce mode.
- Avec bruit sur les capteurs : Comme avec le premier critère, le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude par le second critère.

Bilan de la méthode OI_{cov} sur le système poutre avec entrée inconnue :

La méthode OI_{cov} permet d'identifier les 2 modes de la structure. On note que cette méthode fait apparaître le premier mode plus rapidement (ordre 4) que les méthodes

de type *Output-Only* (ordre 10 pour la méthode OO_{cov} et ordre 8 pour la méthode OO_{sqort}. De plus, les fréquences et les amortissement sont plus stables et mieux identifiées avec la méthode OI_{cov} qu'avec les deux méthodes de types *Output-Only*. D'autre part, l'augmentation de l'ordre ne fait apparaître aucun pôle non physique commun aux 200 identifications. Enfin, on peut considérer que cette méthode est très robuste au bruit sur les capteurs en ce qui concerne l'identification.

L'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance est validée pour la fréquence du second mode. Malgré l'apparition rapide du premier mode, le critère 2 ne valide jamais l'utilisation des intervalles de confiance sur sa fréquence. Pour les taux d'amortissement, l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance n'est validée que si l'ordre n'est pas trop élevé (inférieur à 6), et uniquement pour le second mode. L'ajout de bruit sur les capteur ne modifie pas les résultats de validation.

9.1.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures C.17(a), C.17(b), C.17(c), C.17(d), C.18(a), C.18(b), C.18(c) et C.18(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.17(a) ou Figure C.17(c)	Figure C.17(b) ou Figure C.17(d)
Amortissement	Figure C.18(a) ou Figure C.18(c)	Figure C.18(b) ou Figure C.18(d)

TABLE 9.18 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.17(a)	Figure C.17(c)	Figure C.17(b)	Figure C.17(d)
Amortissement	Figure C.18(a)	Figure C.18(c)	Figure C.18(b)	Figure C.18(d)

TABLE 9.19 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Seule la fréquence du second mode est correctement identifiée et de manière stable (9.8hz au lieu de 9.836hz). Même si son taux d'amortissement est relativement stable, son identification est cependant très biaisée. Il oscille entre $6\,^0/_{00}$(60% d'erreur) et $8\,^0/_{00}$(environ 47% d'erreur). On observe aussi que plus l'ordre augmente, moins son taux d'amortissement est stable. En ce qui concerne le premier mode, il n'apparaît qu'aux deux derniers ordres. Sa fréquence n'est correcte qu'au dernier ordre (3hz au

lieu de 2.955hz). Il en est de même pour son taux d'amortissement. Il est bien identifiée au dernier ordre (14.98 $^0/_{00}$au lieu de 15 $^0/_{00}$).

L'identification fait apparaître jusqu'à trois pôles non physiques communs aux 200 identifications. Le premier de ces pôles apparaît très tôt, dès l'ordre 4.

Avec bruit sur les capteurs :

L'ajout de bruit sur les capteurs n'a aucune influence visible sur l'identification obtenue avec cette méthode. Elle reste très mauvaise concernant les amortissements du second mode, l'apparition tardive du premier mode pour une méthode de type Input/Only et le nombre important de pôles non physiques identifiés.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Malgré la très mauvaise identification fournie par cette méthode, les résultats de validation des estimations d'incertitudes sont étonnement bons. L'estimation de l'incertitude sur la fréquence du premier mode est toujours validée (2 ordres sur 2). Celle sur son taux d'amortissement n'est validée qu'à l'ordre 10, le seul ordre où ce taux est correctement identifié. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est elle aussi toujours validée (9 ordres sur 9). Il en est de même concernant l'estimation d'incertitude de son taux d'amortissement. On peut aussi noter qu'une grande partie des estimations d'incertitude sur les fréquences des pôles non physiques sont elles aussi validées. Ce n'est pas le cas de celles de leur taux d'amortissement.
- Avec bruit sur les capteurs : L'ajout de bruit n'a quasiment aucun effet sur la validation des estimations d'incertitude. On notera uniquement la validation de l'estimation d'incertitude sur une fréquence supplémentaire pour l'un des deux pôles non physiques (à l'ordre 5).

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : L'estimation de l'incertitude sur la fréquence du premier mode est toujours validée (2 ordres sur 2). Celle sur son taux d'amortissement n'est validée qu'à l'ordre 10, le seul ordre où ce taux est correctement identifié. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est elle aussi toujours validée (9 ordres sur 9). Celle sur son taux d'amortissement est validée 6 fois sur 9. On notera que ce critère valide un peu moins bien les estimations d'incertitudes des pôles non physiques que le premier critère.
- Avec bruit sur les capteurs : L'ajout de bruit n'a quasiment aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude.

Bilan de la méthode OI_{sqort} sur le système poutre avec entrée inconnue :

La méthode OI_{sqort} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Cependant, le taux d'amortissement du second mode est très mal identifié et le premier mode apparaît tard pour une méthode de type *Input/Only*. En effet, dans le cas sans entrée inconnue (Section 9.1.1), on a vu que l'utilisation des signaux d'entrées permet d'identifier plus rapidement le premier mode que lorsqu'on utilise une méthode de type *Output-Only*. On note aussi que cette méthode fait apparaître trois pôles non physiques communs aux 200 identifications. C'est le plus grand nombre de pôle non physique observée sur le

système poutre (tout cas et toute méthode confondue). Cette méthode n'est pas robuste à la présence d'excitation inconnue. Ceci a été prévu à la Section 3.2.3.2, à partir de la forme de la matrice sous-espace H_{OIort} (voir Equation (3.220)), et donc de la forme de la matrice $H_{OIsqort} = H_{OIort}H_{OIort}^T$ (voir Equation (3.225)). Analytiquement, cette méthode ne permet pas de retirer l'influence des excitations inconnues.

L'utilisation des intervalles de confiance est validée par les critères pour les fréquences sur presque tout le diagramme Monte-Carlo et pour les amortissements lorsque l'ordre n'est pas trop élevé (inférieur à l'ordre 6 dans le cas non bruité et inférieur à l'ordre 5 dans le cas bruité). Cependant, une étude des diagrammes de stabilité (non présentée ici), montre que l'erreur d'identification du taux d'amortissement du second mode est un biais. Les intervalles de confiance ne contiennent jamais la vrai valeur d'amortissement. Le biais d'identification est très certainement due à l'excitation inconnue. Cette méthode n'est pas recommandée pour les essais de vibration durant lesquels les entrées ne sont pas bien maîtrisées.

9.1.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

Les résultats sont présentés dans les figures C.19(a), C.19(b), C.19(c), C.19(d), C.20(a), C.20(b), C.20(c) et C.20(d) de l'Annexe C.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure C.19(a) ou Figure C.19(c)	Figure C.19(b) ou Figure C.19(d)
Amortissement	Figure C.20(a) ou Figure C.20(c)	Figure C.20(b) ou Figure C.20(d)

TABLE 9.20 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure C.19(a)	Figure C.19(c)	Figure C.19(b)	Figure C.19(d)
Amortissement	Figure C.20(a)	Figure C.20(c)	Figure C.20(b)	Figure C.20(d)

TABLE 9.21 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les deux modes de la poutre sont identifiés. Le premier mode apparaît à l'ordre 5. Sa fréquence est stable et est correctement identifiée (2.955hz). Son taux d'amortissement semble converger, avec un léger biais ($16\,^0/_{00}$au lieu de $15\,^0/_{00}$), vers la valeur théorique lorsque l'ordre augmente. Le second mode apparaît dès l'ordre 2. Sa fréquence (9.385hz au lieu de 9.836hz) et son taux d'amortissement ($15\,^0/_{00}$) sont correctement identifiés et

sont stables sur tout le diagramme Monte-Carlo, excepté au dernier ordre. Au dernier ordre, ce pôle semble se dédoubler. Sa fréquence est légèrement détériorée (9.816hz au lieu de 9.836hz). Il en est de même pour son taux d'amortissement ($16\,^0/_{00}$au lieu de $15\,^0/_{00}$).

Avec bruit sur les capteurs :

L'ajout de bruit sur les capteurs n'a quasiment aucun effet sur l'identification des modes. Cependant, on notera la perte de l'identification du premier mode à l'ordre 6.

L'ajout du bruit sur les capteurs ne modifie pas la fréquence de l'unique pôle non physique identifié (probablement un dédoublement du second mode de la structure). On voit cependant apparaître un écart de valeur plus important entre son taux d'amortissement et celui du second mode dans le cas bruité.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode pour 4 ordres (consécutifs) sur 6. Il ne valide cependant jamais celle sur le taux d'amortissement de ce mode. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est toujours validée (9 ordres sur 9). Celle sur son taux d'amortissement est validée 8 fois sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : L'ajout de bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la validation des estimations d'incertitude. L'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode est maintenant validée 5 fois sur 5 (on a une identification en moins). Celle sur son taux d'amortissement n'est validée que pour 1 ordre sur 5. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude sur sa fréquence est validée 8 fois sur 9. Celle sur son taux d'amortissement est maintenant toujours validée (9 fois sur 9).

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère ne valide jamais l'estimation d'incertitude sur la fréquence du premier mode. Il en est de même pour celle sur son taux d'amortissement. Concernant l'estimation d'incertitude sur la fréquence du second mode, elle n'est validée que 3 fois sur 9. Celle sur son taux d'amortissement ne l'est que 2 fois sur 9.
- Avec bruit sur les capteurs : L'ajout de bruit sur les capteurs améliore les estimations d'incertitude. Pour le premier mode, l'estimation d'incertitude de sa fréquence est validée 3 fois sur 5. Celle sur son taux d'amortissement ne l'est que pour 1 ordre sur 5. Concernant le second mode, l'estimation d'incertitude de sa fréquence est validée 8 fois sur 9. Celle de son taux d'amortissement l'est 7 fois sur 9.

Bilan de la méthode OI_{sqobl} sur le système poutre avec entrée inconnue :

La méthode OI_{sqobl} permet d'identifier les 2 modes de la structure. Comme dans le cas sans entrée inconnue, les résultats d'identifications obtenus avec la méthode OI_{sqobl} sont très proches des résultats d'identification obtenus avec la méthode OI_{cov}. Malgré un léger biais d'identification de l'amortissement du premier mode, cette méthode est validée en terme d'identification. De plus, elle est robuste au bruit sur les capteurs.

Comme dans le cas sans entrée inconnue, la méthode OI_{sqobl} requiert l'ajout de bruit sur les capteurs pour que l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance soit validée.

9.1.2.6 Comparaison des méthodes sur le cas poutre avec entrée inconnue

En terme d'identification

- **Qualité de l'identification**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, on constate que la méthode *Covariance-driven* (OO_{cov}) identifie légèrement moins bien les taux d'amortissement du second mode que la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). Cependant le taux d'amortissement est légèrement plus stable avec la méthode OO_{cov} qu'avec la méthode OO_{sqort}. Un classement des méthodes donnerait :

  $$OO_{cov} \sim OO_{sqort}$$

  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, les méthodes OI_{cov} et OI_{sqobl} fournissent des identifications similaires, aussi bien en termes de fréquences qu'en termes de taux d'amortissement. L'identification obtenue par la méthode OI_{sqort}, particulièrement en termes de taux d'amortissement, est très mauvaise. Un classement des méthodes donnerait :

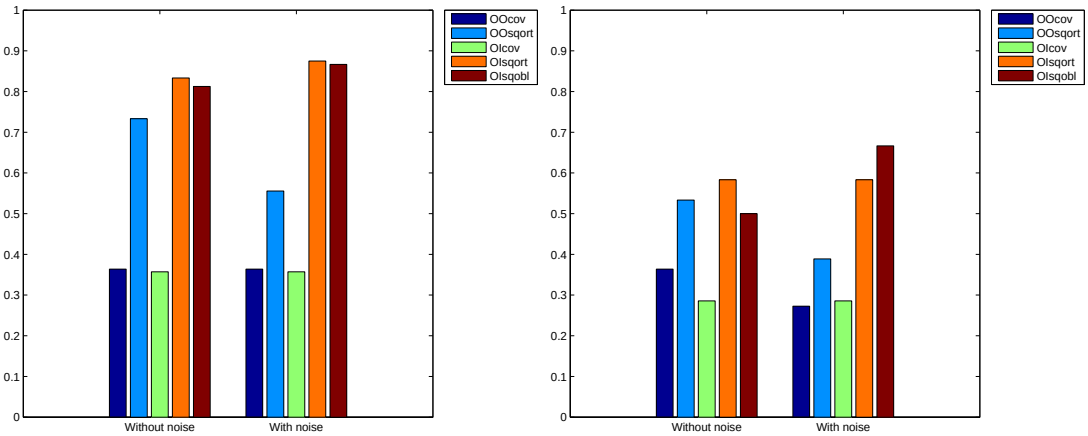
  $$OI_{cov} \sim OI_{sqobl} > OI_{sqort}$$

- **Robustesse au bruit sur les capteurs**
  Quelque soit la méthode, le bruit sur les capteurs n'a pas d'influence sur la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo (on rappelle que les modes qui ne sont pas trouvés à chacune des 200 identifications ne sont pas affichés sur ce type de diagramme).
  La supériorité observée, en terme d'identification, des méthodes de type *Input/Ouput* sur les méthodes de type *Output-Only* dans le cas sans entrée inconnue est moins nette dans le cas avec entrée inconnue. Ceci n'est pas visible concernant le second mode car toutes les méthodes l'identifient dès l'ordre 2. Mais si on considère le premier mode, on constate qu'il apparait respectivement aux ordres 10 et 8 pour les méthodes OO_{cov} et OO_{sqort}, alors qu'il apparait respectivement aux ordres 6, 9 et 5 pour les méthodes OI_{cov}, OI_{sqort} et OI_{sqobl}.

En terme d'estimation d'incertitude

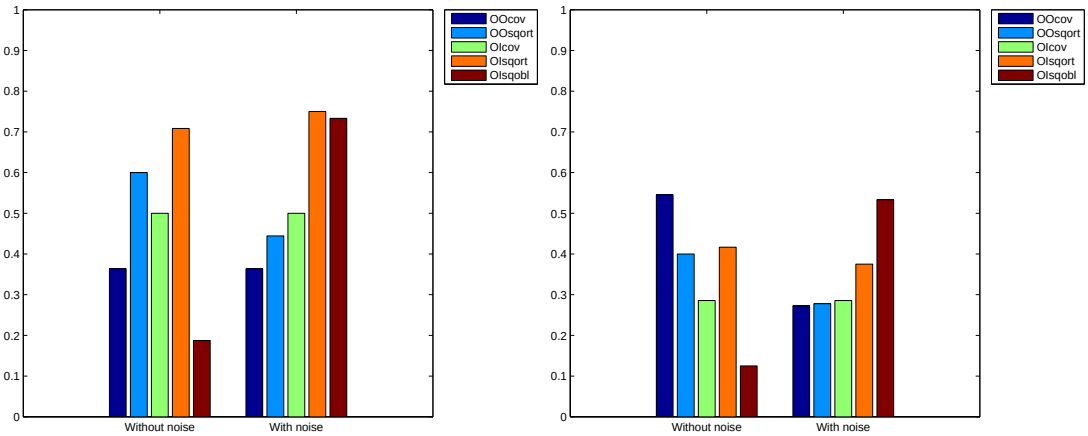
La Figure 9.2 présente le score de succès des deux critères de validation, dans les cas bruité et non bruité, pour chacune des cinq méthodes. Ce score correspond au ratio entre le nombre de pôles dont le critère est validé et le nombre pôles du diagramme (voir Equation (8.10) à la Section 8.4.1.2).

On observe que le premier critère valide mieux les estimations d'incertitude sur les fréquences et sur les taux d'amortissement pour les méthodes de type *Squared Data-driven* que pour les méthodes de type *Covariance-driven*, et ceci, pour les méthodes de type *Output-Only* et de type *Input/Output*. Dans le cas non bruité, les résultats obtenus



(a) Critère 1 - Fréquences

(b) Critère 1 - Taux d'amortissement



(c) Critère 2 - Fréquences

(d) Critère 2 - Taux d'amortissement

FIGURE 9.2 – Score S

avec la méthode OO_{sqort} sont même de qualité équivalente aux résultats obtenus avec les méthodes OI_{cov} et OI_{sqobl}. On observe aussi que, d'après ce critère, l'estimation d'incertitude est robuste aux bruits sur les capteurs. Cependant, on notera une dégradation des résultats concernant les incertitudes sur les fréquences et sur les taux d'amortissement obtenus avec la méthode OO_{sqort} quand on ajoute du bruit sur les capteurs. On observe aussi une légère amélioration des résultats concernant les incertitudes sur les fréquences obtenues avec les méthodes OI_{sqort} et OI_{sqobl} dans le cas bruité.

La validation des incertitudes par le second critère est plus sévère que celle par le premier critère. Cependant, le classement des méthodes est quasiment identique avec les deux critères, excepté pour la méthode OI_{sqobl} qui est très mal validée, par le second critère, dans le cas non bruité. Encore une fois on notera une bonne robustesse des méthodes face au bruit sur les capteurs, excepté pour l'estimation d'incertitude sur les

fréquences obtenues avec la méthode OO_{sqort} et sur les taux d'amortissement obtenus avec les méthodes de type *Output-Only*. On observera aussi une très nette amélioration des résultats obtenus avec la méthode OI_{sqobl} lorsqu'il y présence de bruit sur les capteurs.

9.1.3 Influence de l'entrée inconnue et bilan sur le système poutre

En terme d'identification, concernant les méthodes de type *Output-Only*, on n'observe pas d'influence claire de l'entrée inconnue sur les résultats. Ceci est cohérent, car pour ces méthodes, les entrées sont toujours considérées comme inconnues. La seule différence entre les deux cas est le nombre d'excitations inconnues. Concernant les méthodes de type *Input/Output*, l'entrée inconnue a une influence. Cependant cette influence n'est pas toujours négative. Même si, globalement, cette entrée inconnue retarde l'apparition du premier mode, elle améliore aussi la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo obtenus avec les méthodes OI_{cov} et OI_{sqobl}. Par contre, on observe aussi une très nette dégradation des résultats obtenus avec la méthode OI_{sqort} due à cette entrée inconnue. Ce comportement a été prédit à la Section 3.2.3.5.

En terme d'estimation d'incertitude, les validations sur les taux d'amortissement sont plus impactées par l'entrée inconnue que les validations sur les fréquences. On notera aussi que la méthode OI_{cov} est la moins robuste à l'effet d'une entrée inconnue.

Sur le cas poutre avec excitation inconnue, l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance :

- est validée pour les fréquences et les taux d'amortissement, à condition de ne pas trop surestimer l'ordre du système, pour les méthodes OO_{cov} et OI_{cov}.
- est validée pour les fréquences et les taux d'amortissement identifiés par la méthode OO_{sqort} si les capteurs ne sont pas bruités. Dans le cas où les capteurs sont bruités, l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance pour les taux d'amortissement n'est plus validée.
- n'est pas validée pour la méthode OI_{sqort} à cause d'un important biais d'identification.
- est validée pour les fréquences et les taux d'amortissement identifiés par la méthode OI_{sqobl}, à condition que les capteurs soient bruités.

9.2 Validation sur le système avion

La fréquences, le taux d'amortissement et le type de forme modale (symétrique (S) ou anti-symétrique (A)) des modes à identifier sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Modes avion au sol				Modes avion en vol			
j	$f_j(\%)$	ξ_j ($^o/_{oo}$)	ϕ_j	j	$f_j(\%)$	ξ_j ($^o/_{oo}$)	ϕ_j
1	28.19	15.0	S	1	28.06	16.4	S
2	35.04	15.0	S	2	35.00	15.5	S
3	37.13	15.0	A	3	37.24	26.1	A
4	38.21	15.0	S	4	38.82	34.6	S
5	42.42	15.0	S	5	41.88	16.4	S
6	43.39	15.0	A	6	43.29	15.8	A
7	53.68	15.0	S	7	53.59	16.1	S
8	56.55	15.0	S	8	56.47	15.7	A
9	57.89	15.0	A	9	58.06	20.5	A
10	60.11	15.0	S	10	60.00	15.1	S
11	61.34	15.0	A	11	61.18	15.1	A
12	63.11	15.0	S	12	62.94	15.2	S
13	63.95	15.0	S	13	64.12	16.2	S
14	67.95	15.0	S	14	67.65	19.6	S
15	69.95	15.0	A	15	69.41	18.7	A
16	74.38	15.0	A	16	74.71	16.1	A
17	81.43	15.0	S	17	81.18	17.5	S
18	83.11	15.0	A	18	82.94	16.2	A
19	86.52	15.0	A	19	86.47	15.2	A
20	90.07	15.0	S	20	89.99	15.0	S
21	97.65	15.0	S	21	97.65	18.0	S

TABLE 9.22 – Informations sur les modes avion (au sol et en vol)

9.2.1 Système avion au sol

9.2.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.1(a), D.1(b), D.1(c), D.1(d), D.2(a), D.2(b), D.2(c) et D.2(d) de l'Annexe D.

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Sept fréquences modales de l'avion sont correctement identifiées. Ces modes sont les modes numéros 4, 5, 7, 13, 14, 17 et 21. Ils se stabilisent rapidement après leur

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.1(a) ou Figure D.1(c)	Figure D.1(b) ou Figure D.1(d)
Amortissement	Figure D.2(a) ou Figure D.2(c)	Figure D.2(b) ou Figure D.2(d)

TABLE 9.23 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.1(a)	Figure D.1(c)	Figure D.1(b)	Figure D.1(d)
Amortissement	Figure D.2(a)	Figure D.2(c)	Figure D.2(b)	Figure D.2(d)

TABLE 9.24 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

apparition. A partir du Tableau 9.22, on constate que tous ces modes ont une déformée modale symétrique. L'excitation étant symétrique, il n'est pas étonnant que les modes anti-symétriques ne soient pas bien identifiés. Cependant, tous les modes symétriques ne sont pas identifiés. Il manque les modes 1, 2, 8, 10, 12 et 20. Ces modes sont des modes d'emport. Leur forme n'implique que très peu de déplacement de la voilure. L'excitation étant placée sur la voilure (gouvernes), ils sont moins excités que les autres modes symétriques. Ils sont par conséquent plus difficiles à identifier que les autres modes.

On observe que de nombreux pôles non physiques communs aux 200 identifications apparaissent à partir de l'ordre 80. Parmi ces pôles, trois pourraient correspondre aux modes numéro 12, 15 et 16. Le mode 12 est un mode d'emport ventral. Il est difficile à exciter avec une excitation placée sur la voilure. Les modes 15 et 16 ont une forme modale anti-symétrique (voir Tableau 9.22). L'excitation utilisée étant symétrique, ces modes sont plus difficilement identifiés que les modes symétriques.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur le nombre de modes identifiés et sur l'ordre auquel ils apparaissent. Cependant on peut observer que les modes numéro 13, 14 et 17 sont moins stables dans le cas bruité que dans le cas non bruité.

Le bruit sur les capteurs réduit le nombre de pôles non physiques communs aux 200 identifications. Concernant les modes 15 et 16, qui n'apparaissent plus, il se peut que le bruit augmente leur instabilité en termes de fréquences identifiées durant les 200 identifications. Ainsi, ils ne respectent plus le critère utilisé pour l'appariement de mode (voir Section 8.3.1.1) et sont retirés de l'analyse.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide très bien l'estimation d'incertitude pour les modes 4, 5, 7 et 14 (4 des 7 modes correctement identifiés). L'estimation d'incertitude sur leur fréquence est presque toujours validée. Concernant

les modes 17 et 21 ces estimations sont validées environ 1 fois sur 2. L'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode 13 n'est presque jamais validée.

- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs dégrade les estimations d'incertitude. Seul l'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode 5 reste correctement validée pour la majorité des ordres.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Les résultats obtenus avec le second critère sont très similaires à ceux obtenus avec le premier critère. Les estimations d'incertitude sur les fréquences des modes 4, 5, 7 et 14 sont correctement validées. Celles sur la fréquence du mode 21 sont légèrement mieux validées avec ce critère qu'avec le premier.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs dégrade nettement les résultats de validation des estimations d'incertitude par le second critère.

Bilan de la méthode OO_{cov} sur le système avion au sol :

La méthode OO_{cov} permet d'identifier les modes symétriques de la structure qui ne sont pas des modes d'emport. De plus, cette méthode est robuste au bruit sur les capteurs.

L'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance est validée, à condition qu'il n'y ait pas de bruit sur les capteurs.

9.2.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.3(a), D.3(b), D.3(c), D.3(d), D.4(a), D.4(b), D.4(c) et D.4(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.3(a) ou Figure D.3(c)	Figure D.3(b) ou Figure D.3(d)
Amortissement	Figure D.4(a) ou Figure D.4(c)	Figure D.4(b) ou Figure D.4(d)

TABLE 9.25 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.3(a)	Figure D.3(c)	Figure D.3(b)	Figure D.3(d)
Amortissement	Figure D.4(a)	Figure D.4(c)	Figure D.4(b)	Figure D.4(d)

TABLE 9.26 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les modes 4, 5 et 7 sont relativement stables. Les autres modes identifiés (modes 13, 14, 17 et 21) sont très instables. Comme avec la méthode OO_{cov}, on constate que tous ces modes ont une déformée modale symétrique. L'excitation étant symétrique, il n'est pas étonnant que les modes anti-symétriques ne soient pas bien identifiés. Cependant, tous les modes symétriques ne sont pas identifiés. Il manque les modes 1, 2, 8, 10, 12 et 20. Ces modes sont des modes d'emport. Leur forme n'implique que très peu de déplacement de la voilure. L'excitation étant placée sur la voilure (gouvernes), ils sont moins excités que les autres modes symétriques. Ils sont par conséquent plus difficiles à identifier que les autres modes.

Cette méthode identifie plusieurs pôles, communs aux 200 identifications, qui semblent non-physiques. Cependant, la plupart pourraient correspondre à de très mauvaises identifications de modes de la structure. Plus précisément, les modes 11, 12, 15, 16, 18 et 20 pourraient être (très mal) identifiés. Les modes 12 et 20 sont des modes d'emport difficiles à identifier avec une excitation placée sur la voilure. Les modes 11, 15, 16 et 18 sont des modes anti-symétriques difficiles à identifier avec une excitation symétrique.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs a pour effet de réduire le nombre de pôles communs aux 200 identifications (selon le critère d'appariement de modes décrit à la Section 8.3.1.1). La raison est que, dans ce cas, le bruit sur les capteurs augmente fortement l'instabilité des modes selon les différentes identifications. L'appariement de mode automatique rejette un grand nombre de modes difficilement identifiables.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Malgré une identification très instable, les estimations d'incertitude sont très bien validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore les résultats de validation.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Encore une fois, malgré une très mauvaise identification, cette méthode fournit une relativement bonne estimation des incertitudes.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore l'estimation d'incertitude.

Bilan de la méthode OO_{sqort} sur le système avion au sol :

La méthode OO_{sqort} permet d'identifier les modes symétriques de la structure qui ne sont pas des modes d'emport. Cependant, seul les modes 4, 5 et 7 sont relativement stables. Les modes 13, 14, 17 et 21 sont identifiés de manière très instable. L'ajout de bruit sur les capteurs n'a pas d'influence notable sur la (mauvaise) qualité des résultats d'identification.

La très mauvaise qualité de l'identification ne permet pas, malgré de relativement bons résultats obtenus avec le second critère, de valider l'utilisation opérationnelle des

intervalles de confiance obtenus avec la méthode OO_{sqort}. Dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponibles, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} qui fournit des résultats plus simples à interpréter.

9.2.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.5(a), D.5(b), D.5(c), D.5(d), D.6(a), D.6(b), D.6(c) et D.6(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.5(a) ou Figure D.5(c)	Figure D.5(b) ou Figure D.5(d)
Amortissement	Figure D.6(a) ou Figure D.6(c)	Figure D.6(b) ou Figure D.6(d)

TABLE 9.27 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.5(a)	Figure D.5(c)	Figure D.5(b)	Figure D.5(d)
Amortissement	Figure D.6(a)	Figure D.6(c)	Figure D.6(b)	Figure D.6(d)

TABLE 9.28 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie rapidement, correctement et de manière stable 8 des modes de la structure. Ces modes sont les modes numéro 4, 5, 7, 8, 13, 14, 17 et 21. Ces modes ont tous une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). On constate aussi une apparition tardive (aux alentours de l'ordre 80) des modes numéros 1 et 2. Cependant le mode numéro 2 n'est pas identifié pour tous les ordres suivant son apparition. Encore une fois, il s'agit de modes à forme symétrique. Les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes symétriques à ne pas être identifiés. Ce sont des modes d'emport difficile à identifier avec une excitation placée sur la voilure.

Très peu de pôles non physiques communs aux 200 identifications sont identifiés. On observe ce qui pourrait être un dédoublement du mode numéro 14 qui commence aux alentours de l'ordre 60 et un dédoublement du mode numéro 21 qui commence aux alentours de l'ordre 70. Enfin, deux des *spurious* modes pourraient correspondre à une très mauvaise identification des modes numéro 18 et 19. Les modes 18 et 19 sont tous les deux des modes anti-symétriques. Ils sont par conséquent difficile à identifier avec une excitation anti-symétrique

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit n'a aucune influence visible sur l'identification moyenne des pôles communs aux 200 identifications.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide quasiment toutes les estimations d'incertitude des fréquences des modes identifiés. Seules les estimations d'incertitudes de ce qui pourrait être les fréquences des modes numéro 18 et 19 ne sont jamais validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Comme pour l'identification, le bruit n'a aucune influence sur la qualité des estimations. Le diagramme obtenu dans le cas bruité est strictement identique à celui obtenu dans le cas non bruité.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Les résultats de validation obtenus avec le second critère sont moins bons que ceux obtenus avec le premier critère. Ils restent cependant très bons, notamment pour les modes numéros 4, 5 et 21.
- Avec bruit sur les capteurs : Encore une fois, avec cette méthode, le bruit n'a aucune influence sur la qualité des estimations. Le diagramme obtenu dans le cas bruité est strictement identique à celui obtenu dans le cas non bruité.

Bilan de la méthode OI_{cov} sur le système avion au sol :

La méthode OI_{cov} permet d'identifier correctement et de manière stable 10 des 13 modes symétriques de la structure, soit 3 de plus que les méthodes de type *Output-Only*. De plus, bien que l'excitation appliquée à la structure soit symétrique, on observe une possible (mauvaise) identification de deux modes anti-symétriques. L'utilisation des données d'entrée permet d'identifier des modes peu excités. Enfin, l'ajout de bruit sur les capteurs n'a pas d'influence visible sur la qualité des résultats d'identification.

L'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OI_{cov} est pas validée. Cette validation n'est pas dégradée par l'ajout de bruit sur les capteurs. Cette méthode est recommandée si les données d'entrée sont disponibles.

9.2.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.7(a), D.7(b), D.7(c), D.7(d), D.8(a), D.8(b), D.8(c) et D.8(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.7(a) ou Figure D.7(c)	Figure D.7(b) ou Figure D.7(d)
Amortissement	Figure D.8(a) ou Figure D.8(c)	Figure D.8(b) ou Figure D.8(d)

TABLE 9.29 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.7(a)	Figure D.7(c)	Figure D.7(b)	Figure D.7(d)
Amortissement	Figure D.8(a)	Figure D.8(c)	Figure D.8(b)	Figure D.8(d)

TABLE 9.30 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie clairement 11 des 21 modes, dont 8 le sont rapidement, correctement et de manière stable. Ces modes sont les modes numéros 4, 5, 7, 8, 13, 14, 17 et 21. Le mode numéro 2, lui aussi, est correctement identifié et manière stable. Cependant, il l'est un peu plus tardivement (aux alentours de l'ordre 70). Enfin les modes numéro 1 et 16 sont identifiés correctement très tard (aux alentours de l'ordre 90) et ne se stabilisent qu'aux alentours de l'ordre 95. Le mode numéro 16 est le seul mode identifié qui a une forme modale anti-symétrique (voir Tableau 9.22). Comme avec la méthode OI_{cov}, les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes symétriques à ne pas être identifiés. Ce sont des modes d'emport difficiles à identifier lorsque l'excitation est située sur la voilure.

Peu de pôles non physiques communs aux 200 identifications sont identifiés. De plus, ces pôles semblent plus correspondre à des modes très mal identifiés qu'à des pôles non physiques. On notera les modes numéro 9 (ou 10), 18 et 20. Les modes 9 et 18 sont des modes anti-symétriques difficiles à identifier lorsque l'excitation est symétrique. Les modes 10 et 20 sont des modes d'emport difficiles à identifier lorsque l'excitation est située sur la voilure. Enfin, on peut observer ce qui pourrait être un dédoublement du mode numéro 21.

Avec bruit sur les capteurs :

Cette méthode est très peu robuste aux bruits sur les capteurs. Le nombre de modes clairement identifiés, communs aux 200 identifications, passe de 11 à 6. Seuls les modes numéro 4, 5, 13, 14, 17 et 21 restent stable sur tout le diagramme à partir de leur ordre d'apparition. Ces modes sont tous des modes ayant une forme modale symétrique. On peut noter que l'évolution de ces modes n'est pas influencée par le bruit sur les capteurs. Que ce soit dans le cas bruité ou non bruité, ils apparaissent et se stabilisent de la même manière. On remarquera aussi que deux autres modes sont identifiés, mais pas sur l'ensemble des ordres suivant leur apparition. Ces modes sont les modes numéro 7 et 8, ils ont tous les deux une forme modale symétrique.

On note aussi que le bruit sur les capteurs a pour effet de retirer l'ensemble des pôles non physiques (ou difficilement identifiables) du diagramme Monte-Carlo. Ceci est très certainement dû à une plus forte instabilité de ces pôles (sur les 200 identifications) dans le cas bruité que dans le cas non bruité. Ils sont alors retirés de l'analyse par la méthode d'appariement automatique des modes obtenus aux 200 identifications (voir Section 8.3.1.1).

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : La validation des estimations d'incertitude sur les fréquences est relativement bonne. Ces estimations sont validées pour plus d'un ordre sur deux en ce qui concerne les modes clairement identifiés. La validation est très bonne pour les modes 2 et 13. L'estimation de l'incertitude sur leur fréquence est presque toujours validée.
- Avec bruit sur les capteurs : En moyenne, la qualité des résultats de la validation n'est quasiment pas influencée par le bruit sur les capteurs.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Les résultats de la validation basée sur le second critère sont bien moins bons que ceux de la validation basée sur le premier critère. Les estimations ne sont validées qu'environ 1 fois sur 4.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore sensiblement les résultats de validation, notamment pour l'estimation d'incertitude de la fréquence des modes numéro 4, 5 et 14.

Bilan de la méthode OI_{sqort} sur le système avion au sol :

La méthode OI_{sqort} permet d'identifier correctement, et de manière stable, 10 des 13 modes symétriques de la structure, soit 3 de plus que les méthodes de type *Output-Only*. De plus, bien que l'excitation appliquée à la structure soit symétrique, le mode numéro 16, un mode anti-symétrique, est identifié. On observe aussi une possible (mauvaise) identification de deux autres modes anti-symétriques et de deux modes symétriques d'emport faiblement excités. L'utilisation des données d'entrée permet donc d'identifier des modes peu excités. Enfin, l'ajout de bruit sur les capteurs a une forte influence sur la qualité des résultats d'identification. La méthode n'est pas robuste aux bruits sur les capteurs. Les résultats d'identification deviennent équivalent à ceux obtenus avec la méthode *Output-Only* OO_{cov}.

La validation de l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OI_{sqort} est moins bonne qu'avec la méthode OI_{cov}. Les résultats de validation semblent être améliorés lorsqu'on ajoute du bruit sur les capteurs, à condition de ne pas trop surestimer l'ordre du système. Cependant, dans le cas bruité, la méthode identifie moins de modes que dans le cas non bruité. Au final, cette méthode, même si elle fournit des résultats satisfaisants, est moins recommandée que la méthode OI_{cov}.

9.2.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

Les résultats sont présentés dans les figures D.9(a), D.9(b), D.9(c), D.9(d), D.10(a), D.10(b), D.10(c) et D.10(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.9(a) ou Figure D.9(c)	Figure D.9(b) ou Figure D.9(d)
Amortissement	Figure D.10(a) ou Figure D.10(c)	Figure D.10(b) ou Figure D.10(d)

TABLE 9.31 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.9(a)	Figure D.9(c)	Figure D.9(b)	Figure D.9(d)
Amortissement	Figure D.10(a)	Figure D.10(c)	Figure D.10(b)	Figure D.10(d)

TABLE 9.32 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie rapidement, correctement et de manière stable, 8 des 21 modes de la structure. Ces modes sont les modes numéro 4, 5, 7, 8, 13, 14, 17 et 21. Ces modes ont tous une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Deux autres modes symétriques sont identifiés (les modes 1 et 2). Le mode numéro 1 apparaît tardivement, aux alentours de l'ordre 80, mais semble se stabiliser vers l'ordre 90. Le mode numéro 2, qui apparaît aux alentours de l'ordre 70, est instable et n'est pas identifié à tous les ordres suivant son apparition. Ces deux modes sont des modes d'emport faiblement excités par la vibration des gouvernes.

Cette méthode génère un nombre important de pôles non physiques. Ces pôles semblent être des dédoublements des modes 14, 17 et 21.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs a très peu d'influence sur l'identification des 8 modes clairement identifiés. Cependant, les modes plus difficilement identifiables, notamment les modes numéro 1 et 2, ne sont plus présents sur le diagramme Monte-Carlo.

Le bruit sur les capteurs a pour effet de nettement clarifier le diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence. Ceci est certainement le résultat d'une augmentation de l'instabilité des pôles non physiques dans le cas bruité. L'appariement automatique des pôles des 200 identification semble les rejeter de l'analyse (voir Section 8.3.1.1).

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : La validation des estimations d'incertitude sur les fréquences est relativement bonne. Ces estimations sont validées pour plus d'un ordre sur deux en ce qui concerne les modes clairement identifiés. La validation est légèrement meilleure pour les modes 4 et 14 que pour les autres.

- Avec bruit sur les capteurs : L'influence du bruit sur les capteurs est très positive sur la validation de l'estimation des incertitudes par le premier critère. Ces estimations, pour les 8 modes clairement identifiés, sont presque toujours validées.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Ce critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude. Le résultat de validation est très mauvais.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne modifie pas la qualité de l'estimation d'incertitude. Encore une fois, ce critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude. Le résultat de validation est très mauvais.

Bilan de la méthode OI_{sqobl} sur le système avion au sol :

La méthode OI_{sqobl} fournit des résultats d'identification similaires à ceux obtenus avec les méthode OI_sqort. Cette méthode permet d'identifier correctement, et de manière stable, 10 des 13 modes symétriques de la structure, soit 3 de plus que les méthodes de type *Output-Only*. On observe aussi une possible (mauvaise) identification de deux autres modes anti-symétriques et de deux modes symétriques d'emport faiblement excités (les modes 9 et 18). L'utilisation des données d'entrée permet donc d'identifier des modes peu excités. Enfin, l'ajout de bruit sur les capteurs a une forte influence sur la qualité des résultats d'identification. La méthode n'est pas robuste aux bruits sur les capteurs. L'ajout de bruit sur les capteurs a pour effet de rejeter les modes mal excités du diagramme Monte-Carlo (car ils deviennent instables par rapport aux 200 identifications). Les résultats d'identification deviennent équivalent à ceux obtenus avec la méthode *Output-Only* OO_{cov}.

Que ce soit avec ou sans bruit sur les capteurs, le critère 2 invalide l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OI_{sqobl}. Cette méthode n'est pas recommandée.

9.2.1.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion au sol

En terme d'identification

- **Qualité de l'identification**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, on constate que la méthode *Covariance-driven* (OO_{cov}) identifie nettement mieux les modes, aussi bien terme de fréquence que de taux d'amortissement, que la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). En effet, l'identification obtenue avec la méthode OO_{sqort} est extrêmement instable dans ce cas. Un classement des méthodes donnerait :

  $$OO_{cov} >> OO_{sqort}$$

  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, les méthodes OI_{cov}, OI_{sqort} et OI_{sqobl} fournissent des identifications similaires, aussi bien en termes de fréquences qu'en termes de taux d'amortissement. Cependant, on pourra noter que les méthodes de type *Squared Data-driven* identifient plus de pôles *spurious* que la méthode OI_{cov}. Une partie de ces pôles *spurious* semble être des modes de la structure

mal identifiés et instables. Un classement des méthodes donnerait :

$$OI_{cov} \sim OI_{sqobl} \sim OI_{sqort}$$

Globalement, les méthodes de type *Input/Ouput* identifient un peu plus de modes que les méthodes de type *Output-Only*. Sept modes sont clairement identifiés avec les méthodes OO_{cov} et OO_{sqort}. Dix modes sont clairement identifiés avec les méthodes OI_{cov}, OI_{sqort} et OI_{sqobl}.

– **Robustesse au bruit sur les capteurs**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, le bruit sur les capteurs n'a pas d'influence sur la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo (on rappelle que les modes qui ne sont pas trouvés à chacune des 200 identifications ne sont pas affichés sur ce type de diagramme).
  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, on observe plusieurs comportements. La méthode OI_{cov} est totalement robuste au bruit sur les capteurs concernant les modes identifiés aux 200 identifications. Les méthode OI_{sqort} et OI_{sqobl} perdent en nombre de pôles identifiés mais gagnent en stabilité et en clarté de diagramme Monte-Carlo. Les résultats de ces deux méthodes deviennent même similaires à ceux obtenus avec les méthode de type *Output-Only*, excepté qu'elles identifient bien mieux les taux d'amortissement.

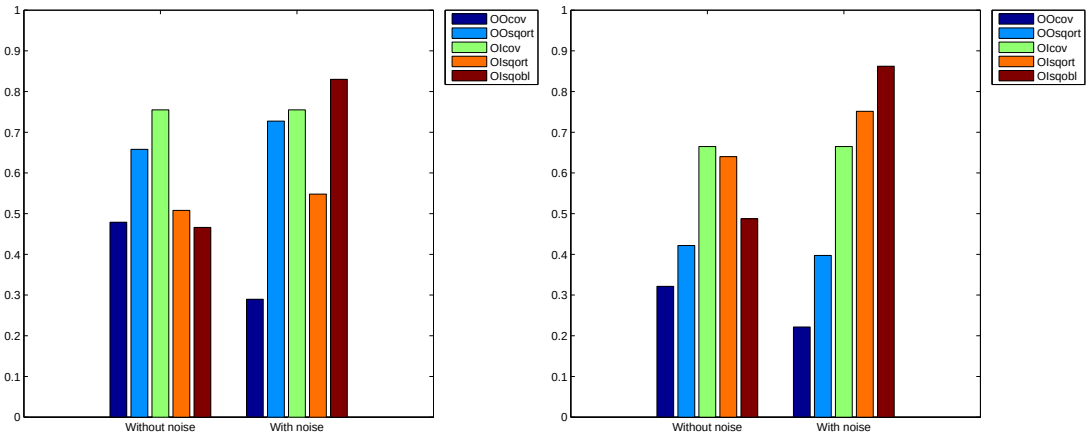
En terme d'estimation d'incertitude

La Figure 9.3 présente le score de succès des deux critères de validation, dans les cas bruité et non bruité, pour chacune des cinq méthodes. Ce score correspond au ratio entre le nombre de pôles dont le critère est validé et le nombre pôles du diagramme (voir Equation (8.10) à la Section 8.4.1.2).

Excepté pour la méthode OI_{sqobl}, dont les estimations d'incertitude sont toujours très mal validées par le second critère, les classements obtenus avec le premier et le second critère sont identiques. Concernant l'influence du bruit sur les capteurs, on constate qu'elle dépend fortement de la méthode.

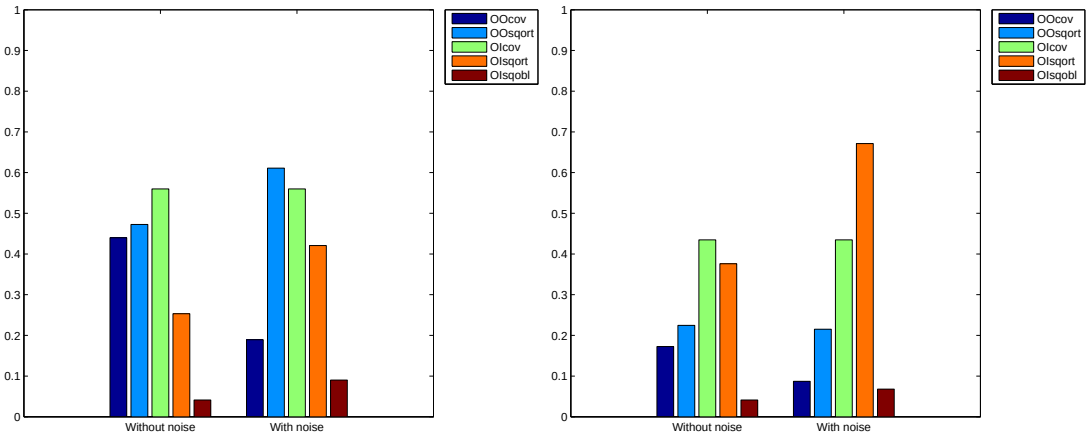
Concernant le premier critère, le bruit dégrade les résultats de validation pour la méthode OO_{cov}. Il n'a quasiment aucune influence sur la méthode OI_{cov}. Il améliore légèrement les méthodes OO_{sqort} et OI_{sqort}. Il améliore nettement la méthode OI_{sqobl}.

Concernant le second critère, le bruit dégrade les résultats de validation pour la méthode OO_{cov}. Il n'a quasiment aucune influence sur la méthode OI_{cov}. Il améliore légèrement les méthodes OO_{sqort} et OI_{sqobl}. Il améliore nettement la méthode OI_{sqort}.



(a) Critère 1 - Fréquences

(b) Critère 1 - Taux d'amortissement



(c) Critère 2 - Fréquences

(d) Critère 2 - Taux d'amortissement

FIGURE 9.3 – Score S

Bilan global sur le cas avion au sol

Concernant l'utilisation des signaux d'entrées, elle est fortement recommandée. En effet, les méthodes de type *Input/Output* fournissent de meilleurs identifications que les méthodes de type *Output-Only*.

S'agissant d'une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponible, et la méthode OI_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées sont disponibles.

9.2.2 Système avion en vol sans turbulence

9.2.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.11(a), D.11(b), D.11(c), D.11(d), D.12(a), D.12(b), D.12(c) et D.12(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.11(a) ou Figure D.11(c)	Figure D.11(b) ou Figure D.11(d)
Amortissement	Figure D.12(a) ou Figure D.12(c)	Figure D.12(b) ou Figure D.12(d)

TABLE 9.33 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.11(a)	Figure D.11(c)	Figure D.11(b)	Figure D.11(d)
Amortissement	Figure D.12(a)	Figure D.12(c)	Figure D.12(b)	Figure D.12(d)

TABLE 9.34 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie 5 modes rapidement, correctement et de manière stable. Ces modes sont les modes numéro 1, 4, 14, 17 et 21. Les modes 12 et 13 sont eux aussi correctement identifiés, cependant ils ne sont pas très stables et ne sont pas identifiés à tous les ordres suivant leur ordre d'apparition. Ces modes ont tous une déformée modale symétrique (voir Tableau 9.22). On observe l'apparition du mode numéro 3 dont la fréquence converge vers sa vraie valeur aux alentours de l'ordre 90. Enfin, le mode numéro 16 est correctement identifié mais apparaît lui aussi relativement tard, aux alentours de l'ordre 90. Les modes 3 et 16 ont une déformée modale anti-symétrique difficile à identifier lorsque l'excitation est placée sur la voilure (gouvernes).

Plusieurs pôles semblent correspondre à de mauvaises identifications de modes physiques. On notera principalement la probable identification des modes numéros 5, 7, 8, 10, 18 et 20. Seul le mode 18 a une déformée anti-symétrique. Les modes 5, 7, 8, 10 et 20 ont une forme symétrique. On observe aussi un dédoublement des modes numéro 14 et 21.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a qu'une faible influence sur la qualité des identifications. On notera, principalement, une dégradation de la stabilité des modes numéro 4 et 17 à partir de l'ordre 70. De plus, le mode numéro 3, qui apparaît aux alentours de l'ordre 70, ne converge plus vers sa vraie valeur et est très instable dans le cas bruité.

Le bruit n'augmente pas significativement le nombre de pôles non physiques communs aux 200 identifications. Cependant il dégrade la stabilité de certains modes de la structure (e.g. les modes numéros 3 et 4). On notera aussi une probable (très mauvaise) identification des modes 5, 7, 8, 10, 12, 18, 19 et 20.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide les estimations d'incertitude sur les fréquences des modes clairement identifiés, que pour les premiers ordres suivant leur apparition. Comme pour l'identification, on constate que l'estimations d'incertitude, au regard du premier critère, n'est pas robuste à la surestimation de l'ordre du modèle.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit de capteur n'a quasiment aucune influence sur les estimations d'incertitude. Comme dans le cas non bruité, ces estimations ne sont majoritairement validées que pour les premier ordres.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Les résultats de validation des estimations d'incertitude par le second critère sont similaires à ceux obtenus par le premier critère. Cependant, on notera une très nette amélioration pour le premier mode. L'estimation d'incertitude sur sa fréquence est presque toujours validée.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'estimation d'incertitude.

Bilan de la méthode OO_{cov} sur le système avion en vol :

La méthode OO_{cov} permet d'identifier clairement 9 des 21 modes, dont 7 des 13 modes à forme symétrique. Malgré une excitation symétrique, cette méthode permet d'identifier clairement, lorsque l'ordre est assez élevé (supérieur à 85), deux modes antisymétriques. Enfin, l'ajout de bruit sur les capteurs ne dégrade la qualité des résultats d'identification que lorsque l'ordre est trop élevé (supérieur à 70).

Que ce soit avec ou sans bruit sur les capteurs, le critère 2 valide l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OO_{cov} si l'ordre n'est pas trop élevé (dans ce cas, l'ordre ne doit pas dépasser 50). Si les données d'entrée ne sont pas disponibles, cette méthode est recommandée mais ne devra pas être utilisée pour des ordres trop élevés.

9.2.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.13(a), D.13(b), D.13(c), D.13(d), D.14(a), D.14(b), D.14(c) et D.14(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.13(a) ou Figure D.13(c)	Figure D.13(b) ou Figure D.13(d)
Amortissement	Figure D.14(a) ou Figure D.14(c)	Figure D.14(b) ou Figure D.14(d)

TABLE 9.35 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.13(a)	Figure D.13(c)	Figure D.13(b)	Figure D.13(d)
Amortissement	Figure D.14(a)	Figure D.14(c)	Figure D.14(b)	Figure D.14(d)

TABLE 9.36 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les modes identifiés par cette méthode sont très instables. Excepté le mode numéro 1, aucun n'est clairement identifié, même si on peut noter l'identification (approximative) des modes numéro 3, 4, 6, 13, 14, 15, 16, 17 et 21.

Malgré la très forte instabilité de l'identification, peu de pôles non physiques (communs aux 200 identifications) sont présents sur le diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence. La majorité des pôles semble en fait correspondre à de très mauvaises identifications des modes de la structure.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a pas d'effet notable. L'identification n'est ni dégradée ni améliorée.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Compte tenu de la très mauvaise identification, les estimations d'incertitude sont étonnement bonnes. Sur l'ensemble du diagramme, près de la moitié des estimations sont validées. On notera même le très bon résultat concernant l'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode numéro 1.
- Avec bruit sur les capteurs : Au regard du premier critère, le bruit sur les capteurs n'a pas d'effet notable sur la qualité des estimations.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère valide moins bien les estimations d'incertitude sur les fréquences que le premier critère. Seul environ un tiers des estimations sont validées selon ce critère. Cependant, on peut observer le très bon résultat concernant l'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode numéro

1. Cette estimation est validée pour presque tous les ordres auxquels ce mode est identifié.

– Avec bruit sur les capteurs : Encore une fois, le bruit sur les capteurs n'a pas d'effet notable. Au regard de ce critère, la qualité des estimations dans le cas bruité est similaire à celles obtenues dans le cas non bruité.

Bilan de la méthode OO_{sqort} sur le système avion en vol :

La méthode OO_{sqort} ne permet d'identifier correctement que le premier mode de la structure. Tous les autre modes identifiés sont très instables. L'ajout de bruit sur les capteurs n'a pas d'influence notable sur la (mauvaise) qualité des résultats d'identification.

La très mauvaise qualité de l'identification ne permet pas, malgré de relativement bons résultats obtenus avec le critère 2 (à condition que l'ordre ne soit pas trop élevé (inférieur à 60)), de valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OO_{sqort}. Dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponibles, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} qui fournit des résultats plus simples à interpréter.

9.2.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.15(a), D.15(b), D.15(c), D.15(d), D.16(a), D.16(b), D.16(c) et D.16(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.15(a) ou Figure D.15(c)	Figure D.15(b) ou Figure D.15(d)
Amortissement	Figure D.16(a) ou Figure D.16(c)	Figure D.16(b) ou Figure D.16(d)

TABLE 9.37 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.15(a)	Figure D.15(c)	Figure D.15(b)	Figure D.15(d)
Amortissement	Figure D.16(a)	Figure D.16(c)	Figure D.16(b)	Figure D.16(d)

TABLE 9.38 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie 9 modes rapidement, correctement et de manière stable. Ces modes sont les modes numéro 1, 2, 5, 7, 8, 13, 14 et 21. On notera aussi une très bonne

identification des modes numéro 4 et 17 jusqu'à leur dédoublement qui intervient aux alentours de l'ordre 60. Enfin, le mode 12 apparait vers l'ordre 80. Tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Excepté les modes 10 et 20, tous les modes symétriques de la bande de fréquence considérée sont identifiés. Ces modes (10 et 20), l'un ayant une forme modale localisée sur un emport et l'autre étant une flexion du fuselage, sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure. La méthode OI_{cov}, semble aussi identifier 2 modes anti-symétriques, le mode 3 et le mode 18.

On observe plusieurs identifications de pôles qui semblent correspondre à des dédoublements de modes de la structure. Plus précisément, le mode numéro 14 se dédouble aux alentours de l'ordre 50, les modes numéro 1 et 17 se dédoublent aux alentours de l'ordre 60, les modes numéro 13 et 21 se dédoublent aux alentours de l'ordre 80.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur l'allure du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Les résultats d'estimation d'incertitude sur les fréquences sont très bons au regard du premier critère. En effet, ce critère valide presque toujours les estimations d'incertitude sur les fréquences des modes correctement identifiés.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne modifie pas la qualité des estimations d'incertitude. Les résultats dans le cas bruité et dans le cas non bruité sont identiques.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Comme pour le premier critère, les résultats obtenus avec le second critère sont très bons. La majorité des estimations d'incertitude sur les fréquences sont validées par ce second critère.
- Avec bruit sur les capteurs : Encore une fois, le bruit sur les capteurs ne modifie pas la qualité des estimations d'incertitude. Les résultats dans le cas bruité et dans le cas non bruité sont identiques.

Bilan de la méthode OI_{cov} sur le système avion en vol :

La méthode OI_{cov} permet d'identifier clairement 11 des 13 modes à forme symétrique. Malgré une excitation symétrique, cette méthode semble aussi permettre d'identifier, lorsque l'ordre est assez élevé (supérieur à 80), deux modes anti-symétriques. Enfin, l'ajout de bruit n'a pas d'influence (en moyenne sur les 200 identifications) sur la qualité de l'identification des modes de la structure.

Que ce soit avec ou sans bruit sur les capteurs, le critère 2 valide l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OI_{cov}. Si les données d'entrée sont disponibles, cette méthode est recommandée.

9.2.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.17(a), D.17(b), D.17(c), D.17(d), D.18(a), D.18(b), D.18(c) et D.18(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.17(a) ou Figure D.17(c)	Figure D.17(b) ou Figure D.17(d)
Amortissement	Figure D.18(a) ou Figure D.18(c)	Figure D.18(b) ou Figure D.18(d)

TABLE 9.39 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.17(a)	Figure D.17(c)	Figure D.17(b)	Figure D.17(d)
Amortissement	Figure D.18(a)	Figure D.18(c)	Figure D.18(b)	Figure D.18(d)

TABLE 9.40 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie rapidement 10 des 21 modes de la structure. Cependant, seulement 5 d'entre eux sont stables sur tous les ordres suivant leur apparition. Il s'agit des modes numéro 1, 2, 5, 7 et 8. Le modes numéro 4, 13, 14, 17 et 21 sont correctement identifiés mais ne sont pas stables sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo. Tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme symétrique non clairement identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

On observe de nombreux pôles non physiques communs aux 200 identifications. Ils apparaissent majoritairement à partir de l'ordre 60. Leur apparition semble corrélée avec la déstabilisation des modes numéro 4, 13, 14, 17 et 21 de la structure. On observe aussi ce qui pourrait être de très mauvaises identifications des modes numéro 10, 12, 15, 16 et 18.

Avec bruit sur les capteurs :

L'identification Monte-Carlo, dans le cas bruité, est similaire à celle obtenue dans le cas non bruité. On notera cependant une légère amélioration de la stabilité de la fréquence des modes.

Le bruit sur les capteurs réduit le nombre de pôles non-physiques communs aux 200 identifications. Seuls les modes numéro 4, 14 et 17 semblent être déstabilisés par

l'apparition de ces pôles non physiques, pôles qui pourraient correspondre à leur dédoublement. On observe en plus ce qui pourrait être une très mauvaise identification des modes numéro 12, 15 et 18.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère valide très bien les estimations d'incertitude sur les fréquences des premier modes identifiés, i.e. de modes numéro 1, 2, 4, 5, 7, 8 et 13. Concernant les modes numéro 14, 17 et 21, ce critère valide les estimations dans environ 1 cas sur 2. Enfin, on observera que les estimations d'incertitude sur la fréquence de nombreux pôles *spurious* sont aussi validées par ce critère.
- Avec bruit sur les capteurs : On constate que le bruit sur les capteurs dégrade la validation des estimations d'incertitude obtenue par le premier critère. Cependant, la classification observée dans le cas bruité reste similaire à celle observée dans le cas non bruité : les estimations d'incertitude sur les fréquences des modes numéro 1, 2, 4, 5, 7, 8 et 13 sont plus souvent validées que celles sur les fréquences des modes numéro 14, 17 et 21.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Il est clair que le second critère valide moins bien les estimations d'incertitude que le premier critère. Cependant, ces estimations sont bien validées pour les modes numéro 1, 2, 5, 7 et 8. Elles le sont un peu moins bien pour les modes numéro 4, 13, 14, 17 et 21. Les estimation d'incertitude sur la fréquence de ces modes sont validées dans environ 1 cas sur 2.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs dégrade la validation des estimations d'incertitude obtenue par le second critère, surtout en ce qui concerne les modes numéro 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13 et 14. Les estimations d'incertitude sur les fréquences des modes 17 et 21 ne sont toujours validées que dans environ 1 cas sur 2.

Bilan de la méthode OI_{sqort} sur le système avion en vol :

La méthode OI_{sqort} est assez similaire à la méthode OI_{cov} en termes de modes identifiés. L'identification obtenue avec la méthode OI_{sqort} est cependant moins stable que l'identification obtenue avec la méthode OI_{cov}.

La validation de l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance obtenus avec la méthode OI_{sqort} est moins bonne qu'avec la méthode OI_{cov}. La méthode OI_{sqort} est aussi moins robuste au bruit sur les capteurs, en terme d'estimation d'incertitude, que la méthode OI_{cov}. Au final, cette méthode, même si elle fournit des résultats satisfaisants, est moins recommandée que la méthode OI_{cov}.

9.2.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

Les résultats sont présentés dans les figures D.19(a), D.19(b), D.19(c), D.19(d), D.20(a), D.20(b), D.20(c) et D.20(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.19(a) ou Figure D.19(c)	Figure D.19(b) ou Figure D.19(d)
Amortissement	Figure D.20(a) ou Figure D.20(c)	Figure D.20(b) ou Figure D.20(d)

TABLE 9.41 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.19(a)	Figure D.19(c)	Figure D.19(b)	Figure D.19(d)
Amortissement	Figure D.20(a)	Figure D.20(c)	Figure D.20(b)	Figure D.20(d)

TABLE 9.42 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie rapidement 11 des 21 modes de la structure. Cependant, seulement 6 d'entre eux sont stables sur tous les ordres suivant leur apparition. Il s'agit des modes numéro 1, 2, 5, 7, 8 et 21. Le modes numéro 4, 13, 14, et 17 sont correctement identifiés mais ne sont pas stables sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo. Tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme symétrique non clairement identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

On observe de nombreux pôles non physiques. Ils apparaissent majoritairement à partir de l'ordre 60. Leur apparition semble corrélée avec la déstabilisation des modes numéro 4, 13, 14, et 17 de la structure. On observe aussi ce qui pourrait être de très mauvaises identifications des modes numéro 10, 12, 16 et 18.

Avec bruit sur les capteurs :

L'identification dans le cas bruité est similaire à celle obtenue dans le cas non bruité. On notera cependant une légère amélioration de la stabilité de la fréquence des modes.

Le bruit sur les capteurs réduit le nombre de pôles non physiques communs aux 200 identifications. Seuls les modes numéro 4, 14 et 17 semblent déstabilisés par l'apparition de pôles non physiques, pôles qui pourraient correspondre à leur dédoublement. On observe en plus ce qui pourrait être une très mauvaise identification des modes numéro 12, 15 et 18.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Seulement environ 6% de ces estimations sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore de manière impressionnante la qualité des estimations d'incertitude sur les fréquences. Elles sont presque toujours validées dans le cas bruité.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Seulement environ 10% de ces estimations sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Les résultats de validation, déjà très mauvais dans le cas non bruité, sont dégradés par l'ajout de bruit sur les capteurs. Seulement environ 7% des estimations d'incertitude sur les fréquences sont validées.

Bilan de la méthode OI_{sqobl} sur le système avion en vol :

La méthode OI_{sqobl} est assez similaire au méthode OI_{cov} en termes de modes identifiés. L'identification obtenue avec la méthode OI_{sqobl} est plus stable que l'identification obtenue avec la méthode OI_{sqort}. De plus, l'ajout de bruit sur les capteurs ne dégrade pas la qualité de l'identification des modes de la structure.

Malgré la qualité de l'identification, la méthode OI_{sqobl} n'est pas validée pour une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. En effet, que ce soit sans ou avec bruit sur les capteurs, le second critère ne valide quasiment jamais l'estimation des incertitudes sur les paramètres modaux identifiés avec cette méthode. Cette méthode peut être recommandée pour l'identification, mais pas pour l'estimation d'incertitude. Si les données d'entrée sont disponibles, on préférera utiliser la méthode OI_{cov}.

9.2.2.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion en vol sans turbulence

En terme d'identification

- **Qualité de l'identification**
  Globalement, les méthodes de type *Input/Ouput* identifient plus de modes que les méthodes de type *Output-Only*.
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, on constate que la méthode *Covariance-driven* (OO_{cov}) identifie nettement mieux les modes, aussi bien terme de fréquence que de taux d'amortissement, que la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). En effet, l'identification obtenue avec la méthode OO_{sqort} est extrêmement instable dans ce cas. Un classement des méthodes donnerait :

$$OO_{cov} >> OO_{sqort}$$

  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, les méthodes OI_{cov}, OI_{sqort} et OI_{sqobl} fournissent des identifications similaires, aussi bien en termes de fréquences

qu'en termes de taux d'amortissement. Cependant, on pourra noter que les méthodes de type *Squared Data-driven* identifient plus de pôles *spurious* que la méthode OI_{cov}. Une partie de ces pôles *spurious* semble être des modes de la structure mal identifiés et instables. On observe aussi que la méthode OI_{sqort} fournit une identification des modes un peu moins stables que les deux autres méthodes de type *Input/Output*. Un classement des méthodes donnerait :

$$OI_{cov} \sim OI_{sqobl} \sim OI_{sqort}$$

– **Robustesse au bruit sur les capteurs**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, le bruit sur les capteurs n'a que très peu d'influence sur la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo (on rappelle que les modes qui ne sont pas trouvés à chacune des 200 identifications ne sont pas affichés sur ce type de diagramme).
  Concernant les méthodes de type *Input/Output*, on observe plusieurs comportements. La méthode OI_{cov} est totalement robuste au bruit sur les capteurs concernant les modes identifiés aux 200 identifications. Les méthode OI_{sqort} et OI_{sqobl} perdent en nombre de pôles identifiés mais l'identification des pôles restants n'est quasiment pas influencé par le bruit sur les capteurs.

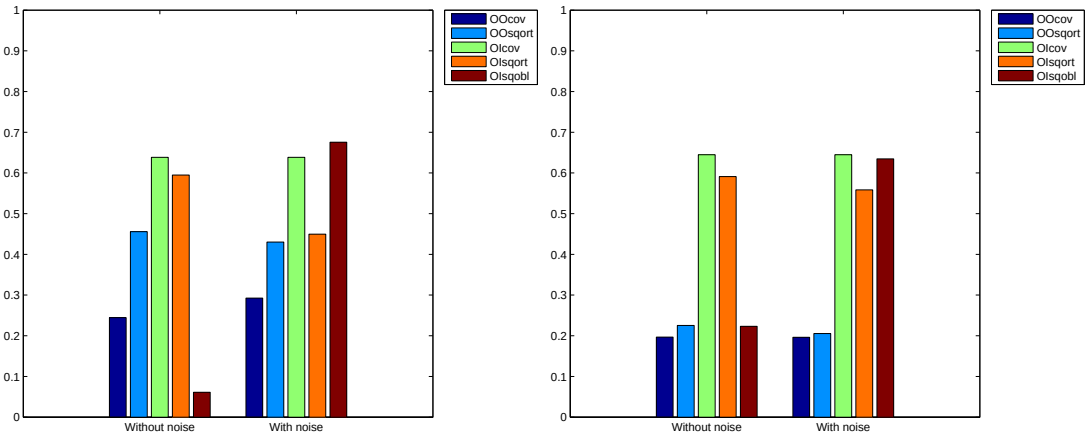
En terme d'estimation d'incertitude

La Figure 9.4 présente le score de succès des deux critères de validation, dans les cas bruité et non bruité, pour chacune des cinq méthodes. Ce score correspond au ratio entre le nombre de pôles dont le critère est validé et le nombre pôles du diagramme (voir Equation (8.10) à la Section 8.4.1.2).

Excepté pour la méthode OI_{sqobl}, dont les estimations d'incertitude sont toujours très mal validées par le second critère, les classements obtenus avec le premier et le second critère sont identiques. Concernant l'influence du bruit sur les capteurs, on constate qu'elle dépend fortement de la méthode.

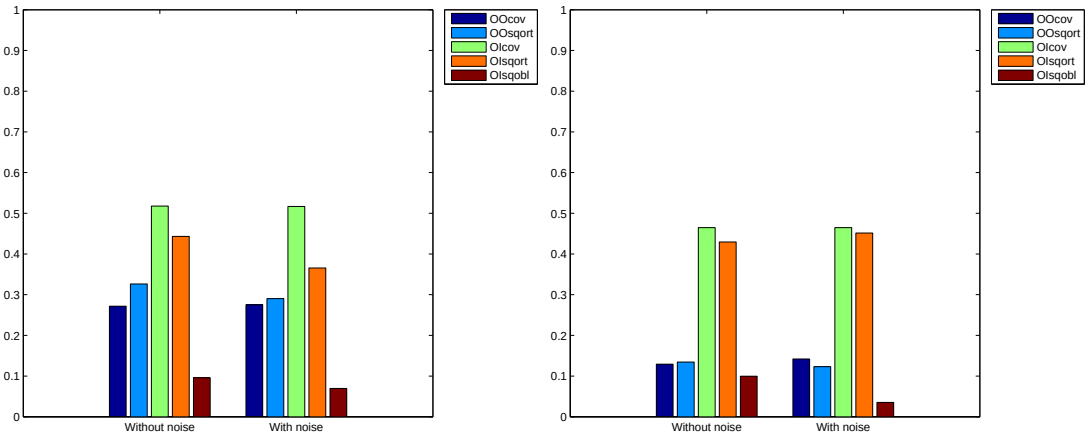
Concernant le premier critère, le bruit dégrade les résultats de validation pour la méthode OI_{sqort}. Il n'a quasiment aucune influence sur les méthodes OO_{cov}, OO_{sqort} et OI_{cov}. Il améliore nettement la méthode OI_{sqobl}.

Concernant le second critère, le bruit dégrade les résultats de validation pour les méthodes OI_{sqort} et OI_{sqobl}. Il n'a quasiment aucune influence sur les autres méthodes.



(a) Critère 1 - Fréquences

(b) Critère 1 - Taux d'amortissement



(c) Critère 2 - Fréquences

(d) Critère 2 - Taux d'amortissement

FIGURE 9.4 – Score S

Bilan global sur le cas avion en vol sans turbulence

Concernant l'utilisation des signaux d'entrées, elle est fortement recommandée. En effet, les méthodes de type *Input/Output* fournissent de meilleurs identifications que les méthodes de type *Output-Only*.

S'agissant d'une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance, compte tenu de la qualité des identifications, de la qualité des estimations d'incertitude et de la robustesse au bruit, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponible, et la méthode OI_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées sont disponibles.

9.2.3 Système avion en vol avec turbulence

9.2.3.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.21(a), D.21(b), D.21(c), D.21(d), D.22(a), D.22(b), D.22(c) et D.22(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.21(a) ou Figure D.21(c)	Figure D.21(b) ou Figure D.21(d)
Amortissement	Figure D.22(a) ou Figure D.22(c)	Figure D.22(b) ou Figure D.22(d)

TABLE 9.43 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.21(a)	Figure D.21(c)	Figure D.21(b)	Figure D.21(d)
Amortissement	Figure D.22(a)	Figure D.22(c)	Figure D.22(b)	Figure D.22(d)

TABLE 9.44 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

On peut classer les modes identifiés en fonction de leur stabilité.

- Les modes numéros 1, 5 et 21 sont correctement identifiés, de manière stable, pour tous les ordres suivant leur apparition.
- Le mode numéro 2 est correctement identifié et de manière stable, excepté pour l'ordre 92.
- Le mode numéro 13 est correctement identifié et de manière stable, excepté aux alentours de l'ordre 60.
- Les modes numéro 4, 14 et 17 sont correctement identifiés et de manière stable. Cependant, ces trois modes se dédoublent aux alentours de l'ordre 80. Pour le mode numéro 4, le dédoublement semble pouvoir être une identification du mode numéro 3. Pour le mode numéro 17, le dédoublement semble pouvoir être une identification du mode numéro 18.
- Les modes numéro 7, 8 et 12 sont correctement identifiés et de manière stable. Ils sont cependant non identifiés pour de nombreux ordres suivant leur apparition.

On notera que, excepté le mode numéro 3 (et le mode 18), tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). De plus, les modes 10 et 20 sont les seuls modes à forme modale symétrique non identifiés. Ces modes, l'un ayant une forme modale localisée sur un emport et l'autre étant une flexion du fuselage, sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

Cette méthode n'identifie que très peu de mode non physiques communs aux 200 identifications.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur l'allure du diagramme Monte-Carlo de stabilité sur les fréquences. La méthode OO_{cov} est robuste au bruit sur les capteurs en terme d'identification des modes de la structure.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide aucune estimation d'incertitude sur les fréquences.
- Avec bruit sur les capteurs : Comme dans le cas non bruité, le premier critère ne valide aucune estimation d'incertitude sur les fréquences.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 2 ordres du mode numéro 14 sont validés.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a aucune influence sur la qualité des estimations. Comme dans le cas non bruité, le second critère ne valide l'estimation d'incertitude sur les fréquences que pour 2 ordres du mode numéro 14.

Bilan de la méthode OO_{cov} sur le système avion en vol avec turbulence :

En termes de nombre de modes identifiés, l'identification Monte-Carlo obtenue avec la méthode OO_{cov}, dans le cas avec turbulence, est plus proches des identifications obtenues, dans le cas sans turbulence, avec les méthodes de type *Input/Output* que des identifications obtenues avec les méthodes de type *Output-Only*. La turbulence a pour effet de mieux exciter certains modes qui ne pouvaient pas être identifiés sans utiliser les données d'entrée. Cependant, même si la méthode identifie plus de modes dans le cas avec turbulence que dans le cas sans turbulence, l'ajout de turbulence dégrade les identification en terme de stabilité. Concernant l'ajout de bruit sur les capteurs, il ne dégrade pas la qualité de l'identification des modes de la structure.

Malgré la qualité de l'identification, la méthode OI_{sqobl} n'est pas validée pour une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. En effet, que ce soit sans ou avec bruit sur les capteurs, les critères ne valident quasiment jamais l'estimation des incertitudes sur les paramètres modaux identifiés avec cette méthode. Cette méthode peut être recommandée pour l'identification, mais pas pour l'estimation d'incertitude.

9.2.3.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.23(a), D.23(b), D.23(c), D.23(d), D.24(a), D.24(b), D.24(c) et D.24(d) de l'Annexe D.

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.23(a) ou Figure D.23(c)	Figure D.23(b) ou Figure D.23(d)
Amortissement	Figure D.24(a) ou Figure D.24(c)	Figure D.24(b) ou Figure D.24(d)

TABLE 9.45 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.23(a)	Figure D.23(c)	Figure D.23(b)	Figure D.23(d)
Amortissement	Figure D.24(a)	Figure D.24(c)	Figure D.24(b)	Figure D.24(d)

TABLE 9.46 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Comme pour le cas avion au sol, l'identification obtenue par cette méthode est relativement mauvaise. Dans l'ordre de qualité d'identification on notera que

- le mode numéro 1 est identifié de manière relativement stable.
- Viennent ensuite les modes numéro 14 et 21. Ils sont assez bien identifiés mais ne sont pas très stables.
- Le mode numéro 17 est relativement stable jusqu'environ l'ordre 70. Il devient ensuite très instable.
- Les modes numéro 2, 5 et 13 sont relativement stables, mais sont absents du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence pour de nombreux ordres suivant leur apparition.
- Le mode numéro 4 est relativement instable jusqu'environ l'ordre 70. On observe ensuite soit son dédoublement, soit une mauvaise identification des modes numéro 3 et 4.
- Enfin, les mode 7 et 8 sont à la limite d'être classifiés en tant que pôles *spurious*.

On notera que, excepté le mode numéro 3, aucun de ces modes n'a une forme modale anti-symétrique (voir Tableau 9.22). De plus, les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme modale symétrique non identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

On observe de nombreux pôles non physiques (communs aux 200 identifications) qui apparaissent aux alentours de l'ordre 80. On notera aussi que ces pôles sont principalement localisés dans la seconde moitié de la bande de fréquences considérée.

Avec bruit sur les capteurs :

Le diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence obtenu dans le cas bruité est très similaire à celui obtenu dans le cas non bruité. Cependant, on notera :

- une nette dégradation de la stabilité du mode numéro 21 à partir de l'ordre 80,
- une probable (mauvaise) identification des modes numéro 18 et 20 à partir de

l'ordre 90 (environ),
- une légère amélioration de la stabilité de ce qui pourrait être l'identification des modes numéro 3 et 4 (à partir, environ, de l'ordre 80).

Le bruit sur les capteurs n'a pas d'influence significative sur le nombre de pôles non physiques communs aux 200 identifications.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)
- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 6 points sont validés... points qui ne correspondent même pas à des identifications stables de modes de la structure.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne modifie pas la (très mauvaise) qualité des estimations qui ne sont quasiment jamais validées. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 8 points sont validés.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)
- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 7 points sont validés... dont seulement 2 correspondent à une identification (relativement) stable d'un mode de la structure. Il s'agit du mode numéro 5 à l'ordre 97 et du mode numéro 14 à l'ordre 32.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne modifie pas la (très mauvaise) qualité des estimations qui ne sont quasiment jamais validées. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 6 points sont validés... points qui ne correspondent même pas à des identifications stables de modes de la structure.

Bilan de la méthode OO_{sqort} sur le système avion en vol avec turbulence :

La méthode OO_{sqort} ne permet d'identifier correctement et de manière stable que le premier mode de la structure. Tous les autre modes identifiés sont instables.

La très mauvaise qualité de l'identification et le fait que les critères ne valident quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les paramètres modaux, impliquent que l'utilisation de la méthode OO_{sqort} n'est pas recommandée dans un cadre opérationnelle. Ceci vaut aussi bien pour l'identification que pour l'utilisation des intervalles de confiance. Dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponibles, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov}, mais uniquement pour l'identification. On rappelle que la méthode OO_cov est, elle aussi, déconseillée en ce qui concerne l'utilisation des intervalles de confiance dans le cas avion en vol avec turbulence.

9.2.3.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

Les résultats sont présentés dans les figures D.25(a), D.25(b), D.25(c), D.25(d), D.26(a), D.26(b), D.26(c) et D.26(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.25(a) ou Figure D.25(c)	Figure D.25(b) ou Figure D.25(d)
Amortissement	Figure D.26(a) ou Figure D.26(c)	Figure D.26(b) ou Figure D.26(d)

TABLE 9.47 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.25(a)	Figure D.25(c)	Figure D.25(b)	Figure D.25(d)
Amortissement	Figure D.26(a)	Figure D.26(c)	Figure D.26(b)	Figure D.26(d)

TABLE 9.48 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie correctement et de manière très stable les modes numéro 1, 2, 7, 8, 13 et 21. Les modes numéro 4, 14 et 17 sont identifiés correctement et de manière stable jusqu'aux alentours de l'ordre 70. Le mode numéro 4 semble ensuite se dédoubler. Cependant, il se peut que se dédoublement corresponde en fait à l'identification des modes numéro 3 et 4. De même pour le mode 17, dont la stabilité semble dégradée à cause de la (très mauvaise) identification du mode numéro 18. Enfin, le mode numéro 5 est correctement identifié et de manière stable pour tous les ordres suivant son apparition, excepté entre les ordres 82 et 94. On notera que, exceptés les modes numéro 3 et 18, aucun de ces modes n'a une forme modale anti-symétrique (voir Tableau 9.22). De plus, les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme symétrique non clairement identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

La majorité des pôles non physiques communs aux 200 identifications semble être des dédoublements de mode. On notera un probable dédoublement des modes 4, 13, 14, 17 et 21. On observe aussi ce qui peut être une (mauvaise) identification du mode numéro 12.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur l'allure du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence. Cependant, on notera une légère amélioration de la stabilité de ce qui semble être le mode numéro 18.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Les estimations d'incertitude sur les fréquences ne sont que rarement validées par le premier critère. Concernant les modes numéro 1 et 17, elles le sont environ 1 fois sur 2. Concernant les modes numéro 4 et 5, elles le sont environ 1 fois sur 3. Concernant les modes numéro 14 et 21 elles le sont environ 1 fois sur 6. Concernant les autres modes, elle ne sont (quasiment) jamais validées. En tout, c'est environ 15% des estimations qui sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la qualité des estimations d'incertitude sur les fréquences. Les points validés sont presque les mêmes que dans le cas non bruité. Environ 14% des estimations sont validées.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Les estimations d'incertitude sur les fréquences ne sont que rarement validées par le premier critère. Concernant le mode numéro 1, elles le sont environ 1 fois sur 2. Concernant les modes numéro 1, 4 et 5, elles le sont environ 1 fois sur 3. Concernant les modes numéro 14 et 21, elles le sont environ 1 fois sur 6. Concernant les autres modes, elle ne sont (quasiment) jamais validées. En tout, c'est environ 10% des estimations qui sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur la qualité des estimations d'incertitude sur les fréquences. Les points validés sont presque les mêmes que dans le cas non bruité. Comme dans le cas non bruité, environ 10% des estimations sont validées.

Bilan de la méthode OI_{cov} sur le système avion en vol avec turbulence :

Si on ne considère pas un ordre trop élevé (inférieur à 75), la méthode OI_{cov} permet d'identifier correctement et de manière stable 10 des 21 mode de la structure. Ces modes ont tous une forme modale symétrique. Seuls 3 des 13 modes symétriques ne sont pas identifiés. Contrairement aux autres cas (poutre avec et sans entrée inconnue, avion au sol et avion en vol sans turbulence), la méthode de type *Input/Ouput* OI_{cov}, ne permet pas d'identifier plus de modes que les méthodes de type *Output-Only*. Cependant, les modes identifiés sont beaucoup plus stables avec la méthode OI_{cov} qu'avec les méthodes OO_{cov} et OO_{sqort}. Enfin, la méthode OI_{cov} est robuste au bruit sur les capteurs en terme d'identification des modes de la structure.

Malgré la qualité de l'identification, les estimations d'incertitude que fournit la méthode OI_{cov} ne sont pas validées. Dans le cas d'un vol avec turbulence, on ne peut recommander la méthode OI_{cov} que pour l'utilisation opérationnelle de l'identification, pas pour l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance.

9.2.3.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

Les résultats sont présentés dans les figures D.27(a), D.27(b), D.27(c), D.27(d), D.28(a), D.28(b), D.28(c) et D.28(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.27(a) ou Figure D.27(c)	Figure D.27(b) ou Figure D.27(d)
Amortissement	Figure D.28(a) ou Figure D.28(c)	Figure D.28(b) ou Figure D.28(d)

TABLE 9.49 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.27(a)	Figure D.27(c)	Figure D.27(b)	Figure D.27(d)
Amortissement	Figure D.28(a)	Figure D.28(c)	Figure D.28(b)	Figure D.28(d)

TABLE 9.50 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Les modes identifiés par cette méthode sont relativement instables, en particulier dans la seconde moitié de la bande de fréquences considérée. Seul le mode numéro 1 est correctement identifié et de manière stable pour tous les ordres suivant son apparition. Les modes numéro 2, 5, 7 et 8 sont correctement identifiés et de manière stable. Cependant, ils ne sont pas identifiés à tous les ordres suivant leur apparition. Le mode numéro 4 est bien identifié jusqu'à l'ordre 76, ordre auquel il se dédouble et devient très instable. Enfin, les modes numéro 13, 14, 17 et 21 sont identifiés mais sont relativement instables. On notera que, tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme symétrique non clairement identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

Cette méthode fait apparaître un grand nombre de pôles non physiques (communs aux 200 identifications) et de modes très mal identifiés. Parmi les pôles pouvant correspondre à des modes très mal identifiés, on notera les probable modes numéro 3, 12, 16 et 20. Les modes 3 et 16 sont des modes à forme anti-symétrique. Les modes 12 et 20 sont des modes d'emport à forme symétrique.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs a pour effet d'améliorer la stabilité des modes identifiés. Les modes numéro 1, 2, 5, 7 et 8 sont correctement identifiés et de manière très stable. Les modes 4, 13 et 14 sont eux aussi bien identifiés mais le sont de manière un peu moins stable. Le mode numéro 21 apparait aux alentours de l'ordre 20 mais ne se stabilise que vers l'ordre 50, après la fin de son dédoublement. Le mode 17 est identifié mais est très instable.

Le bruit sur les capteurs réduit le nombre de pôles non physiques communs aux

200 identifications. Cependant, on notera encore une fois la probable très mauvaise identification des modes numéro 12 et 20.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Malgré la très mauvaise identification obtenue avec cette méthode, les estimations d'incertitude sur les fréquences sont un peu moins mauvaises avec la méthode OI_{sqort} qu'avec les méthodes OO_{cov}, OO_{sqort} et OI_{cov}. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, environ 31% des estimations sont validées par le premier critère. De plus, on notera la bien meilleure qualité d'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode numéro 1 que pour les autres modes.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs ne dégrade les estimations qu'à partir, environ, de l'ordre 80. Ce critère ne valide quasiment aucune estimation faite pour les ordres supérieurs à 84. Cependant, le nombre de pôles identifiés, notamment de pôles non physiques, est plus faible dans le cas bruité que dans le cas non bruité. Ainsi, le pourcentage globale d'estimations validées par le premier critère reste à environ 30%.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le second critère valide moins bien les estimations d'incertitude sur les fréquences que le premier. Seulement 1 estimation sur 5 est validée sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence. Cependant, comme avec le premier critère, on notera la bien meilleure qualité d'estimation d'incertitude sur la fréquence du mode numéro 1 que pour les autres modes. En tout, c'est environ 21% des estimations qui sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Comme avec le premier critère, le bruit sur les capteurs ne dégrade les estimations qu'à partir, environ, de l'ordre 80. Ce critère ne valide quasiment aucune estimation faite pour les ordres supérieurs à 84. Encore une fois, le nombre de pôles identifiés, notamment de pôles non physiques, est plus faible dans le cas bruité que dans le cas non bruité. Ainsi, le pourcentage globale d'estimations validées par le second critère n'est pas trop influencé par le bruit sur les capteurs et reste à environ 20%.

Bilan de la méthode OI_{sqort} sur le système avion en vol avec turbulence :

L'identification obtenue avec la méthode OI_{sqort} est beaucoup moins stable que celle obtenue avec la méthode OI_{cov}, notamment en ce qui concerne les pôles de la seconde moitié de la bande de fréquence considérée. Cependant, la méthode OI_{sqort} fournit une meilleure qualité d'identification que les méthodes de type *Output-Only*.

Les résultats de validation des incertitudes estimées avec la méthode OI_{sqort} sont moins mauvais que les résultats obtenus avec la méthode OI_{cov}. Cependant, ces résultats ne sont pas suffisamment bons pour valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. En termes d'identification, on conseillera la méthode OI_{cov} plutôt que la méthode OI_{sqort} dans le cas d'un vol avec turbulence. Mais, quelque soit la méthode, il n'est pas conseillé d'utiliser les intervalles de confiance.

9.2.3.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

Les résultats sont présentés dans les figures D.29(a), D.29(b), D.29(c), D.29(d), D.30(a), D.30(b), D.30(c) et D.30(d) de l'Annexe D.

Identification	Sans bruit sur les capteurs	Avec bruit sur les capteurs
Fréquences	Figure D.29(a) ou Figure D.29(c)	Figure D.29(b) ou Figure D.29(d)
Amortissement	Figure D.30(a) ou Figure D.30(c)	Figure D.30(b) ou Figure D.30(d)

TABLE 9.51 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'identification

Incertitudes	Sans bruit sur les capteurs		Avec bruit sur les capteurs	
	Critère 1	Critère 2	Critère 1	Critère 2
Fréquences	Figure D.29(a)	Figure D.29(c)	Figure D.29(b)	Figure D.29(d)
Amortissement	Figure D.30(a)	Figure D.30(c)	Figure D.30(b)	Figure D.30(d)

TABLE 9.52 – Figures utilisées pour l'évaluation de l'estimation des incertitudes

Les définitions des critères 1 et 2 sont présentées à la Section 8.3.2 et à la Section 8.3.3.

Validation de l'identification "Monte-Carlo" :

Sans bruit sur les capteurs :

Cette méthode identifie clairement 10 des 21 modes de la structure. Les modes numéro 1, 5, 7, 8 et 21 sont très stables et sont identifiés pour tous les ordres suivant leur apparition. Le mode numéro 2 est très stable jusqu'à l'ordre 95. Les modes 4, 13, 14 et 17 sont bien identifiés mais ne sont pas parfaitement stables. On notera que tous ces modes ont une forme modale symétrique (voir Tableau 9.22). Les modes 10, 12 et 20 sont les seuls modes à forme symétrique non clairement identifiés. Deux de ces modes sont des modes d'emport qui ont une forme modale très localisée. Un de ces modes est une flexion du fuselage. Ces modes sont difficiles à exciter avec une excitation placée sur la voilure.

La majorité des pôles non physiques communs aux 200 identification semble être des dédoublements de mode. On notera un probable dédoublement des modes 4, 13, 14, 17 et 21. On observe aussi ce qui peut être une (mauvaise) identification du mode numéro 12.

Avec bruit sur les capteurs :

Le bruit sur les capteurs n'a quasiment pas d'influence sur l'identification des modes de la structure. Cependant, on pourra noter une légère amélioration de la stabilité du mode numéro 2 et une légère détérioration de celle du mode numéro 17.

Validation de l'estimation d'incertitude :

Critère 1 (voir Section 8.3.2)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide aucune estimation d'incertitude sur les fréquences.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore la qualité des estimations d'incertitude sur les fréquences. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, environ 37% des estimations sont validées dans le cas bruité.

Critère 2 (voir Section 8.3.3)

- Sans bruit sur les capteurs : Le premier critère ne valide quasiment jamais les estimations d'incertitude sur les fréquences. Sur l'ensemble du diagramme Monte-Carlo de stabilité en fréquence, seuls 9% des estimations sont validées.
- Avec bruit sur les capteurs : Le bruit sur les capteurs améliore la qualité des estimations d'incertitude sur les fréquences. Le pourcentage d'estimations validées passe à environ 25% dans le cas bruité.

Bilan de la méthode OI_{sqobl} sur le système avion en vol avec turbulence :

L'identification obtenue avec la méthode OI_{sqobl} est très similaire à celle obtenue avec la méthode OI_{cov}. Elle identifie les mêmes modes (10 des 21 modes de la structure). Seuls 3 des 13 modes à forme symétrique ne sont pas clairement identifiés. beaucoup moins stable que celle obtenue avec la méthode OI_{cov}, notamment en ce qui concerne les pôles de la seconde moitié de la bande de fréquence considérée. Cependant, la méthode OI_{sqobl} fournit une meilleure qualité d'identification que les méthodes de type *Output-Only*.

Les résultats de validation des incertitudes estimées avec la méthode OI_{sqobl} sont améliorés lorsqu'on ajoute du bruit sur les capteurs. Dans le cas bruité, ces résultats sont un peu moins mauvais que les résultats obtenus avec la méthode OI_{cov}. Cependant, ils ne sont pas suffisamment bons pour valider l'utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. Quelque soit la méthode, il n'est pas conseillé d'utiliser les intervalles de confiance dans le cas d'un vol avec turbulence. En termes d'identification, on conseillera la méthode OI_{cov} plutôt que la méthode OI_{sqobl} dans le cas d'un vol avec turbulence. En effet, pour un résultat équivalent, l'implémentation de la méthode OI_{cov} est plus simple que l'implémentation de la méthode OI_{sqobl}.

9.2.3.6 Comparaison des méthodes sur le cas avion en vol avec turbulence

En terme d'identification

- **Qualité de l'identification**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, la méthode *Covariance-driven* (OO_{cov}) identifie nettement mieux les modes, aussi bien terme de fréquence que de taux d'amortissement, que la méthode *Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). Cependant, l'identification obtenue avec la méthode OO_{cov} n'est pas extrêmement stable dans ce cas. Certains modes qui semblent identifiables grâce à l'apport d'énergie due aux turbulences ne sont pas identifiés à tous les ordres

suivant leur apparition. Un classement des méthodes donnerait :

$$OO_{cov} >> OO_{sqort}$$

Concernant les méthodes de type *Input/Output*, les méthodes OI_{cov} et OI_{sqobl}, dans le cas non bruité, fournissent des identifications similaires, aussi bien en terme de fréquence qu'en terme de taux d'amortissement. Ces deux méthodes identifient les modes de manière bien plus stable que la méthode OI_{sqort}. Cependant, on pourra noter que cette méthode identifie plus de pôles *spurious* que les deux autres. Une partie de ces pôles *spurious* semble être des modes de la structure mal identifiés et instables. Un classement des méthodes donnerait :

$$OI_{cov} \sim OI_{sqobl} > OI_{sqort}$$

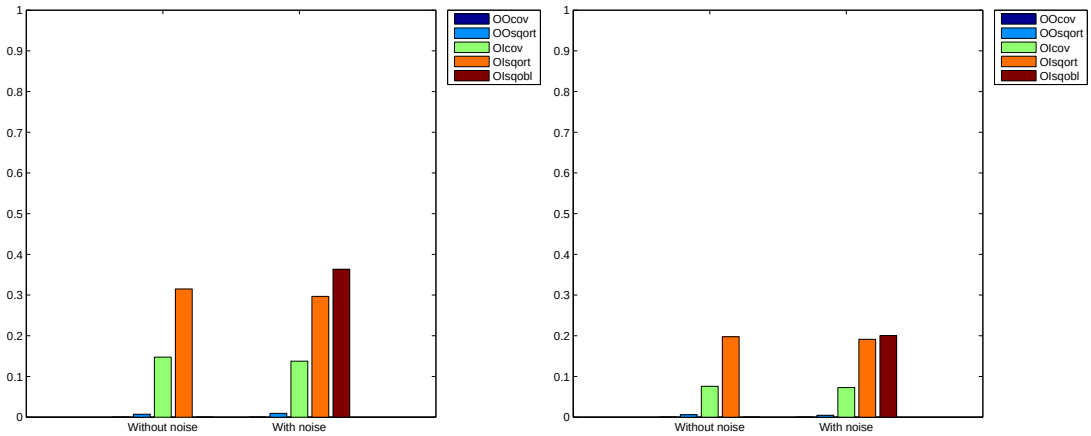
La supériorité observée, en terme de nombre de modes identifiés, des méthodes de type *Input/Ouput* sur les méthodes de type *Output-Only* dans le cas sans turbulence est moins nette dans le cas avec turbulence. Il est possible que l'ajout de turbulence permette de mieux exciter certains modes qui sont maintenant identifiables uniquement à partir des données de sortie. Cependant, les méthodes de type *Input/Output* fournissent des identifications plus stables que les méthodes de type *Output-Only*.

– **Robustesse au bruit sur les capteurs**
  Concernant les méthodes de type *Output-Only*, le bruit sur les capteurs n'a que très peu d'influence sur la qualité des diagrammes de stabilité Monte-Carlo (on rappelle que les modes qui ne sont pas trouvés à chacune des 200 identifications ne sont pas affichés sur ce type de diagramme).
  Il en est de même concernant les méthodes de type *Input/Output*. Cependant, on pourra noter une légère clarification du diagramme de stabilité Monte-Carlo en fréquence fournit par la méthode OI_{sqort} dans le cas bruité.

En terme d'estimation d'incertitude

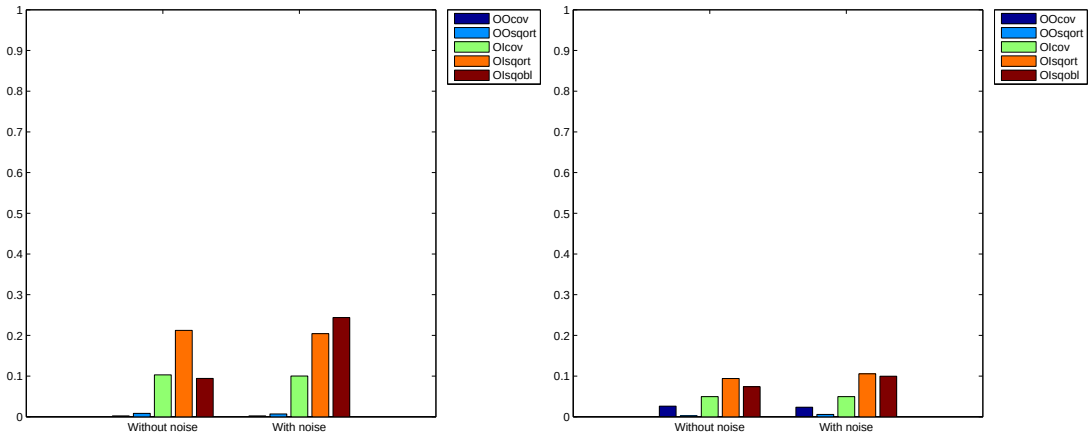
La Figure 9.5 présente le score de succès des deux critères de validation, dans les cas bruité et non bruité, pour chacune des cinq méthodes. Ce score correspond au ratio entre le nombre de pôles dont le critère est validé et le nombre pôles du diagramme (voir Equation (8.10) à la Section 8.4.1.2).

Les estimations d'incertitudes sont très mal validées dans le cas avec turbulence. Pour les méthodes *Output-Only*, elles ne sont quasiment jamais validées, aussi bien au regard du premier que du second critère. Les résultats sont meilleurs pour les méthodes *Input/Output*, sans pour autant obtenir un niveau de validation suffisant. Cependant, concernant la méthode OI_{sqobl}, on notera l'influence très positive du bruit de capteurs sur les résultats de validation. On observera aussi que le bruit sur les capteurs n'a quasiment aucune influence sur les résultats de validation des estimations d'incertitude fournis par les autres méthodes.



(a) Critère 1 - Fréquences

(b) Critère 1 - Taux d'amortissement



(c) Critère 2 - Fréquences

(d) Critère 2 - Taux d'amortissement

FIGURE 9.5 – Score S

Bilan global sur le cas avion en vol avec turbulence

Concernant l'utilisation des signaux d'entrées, elle est fortement recommandée. En effet, les méthodes de type *Input/Output* fournissent de meilleurs identifications que les méthodes de type *Output-Only*.

S'agissant d'une utilisation opérationnelle, elle n'est recommandée que pour l'identification modale sans estimation d'incertitude. Il est fortement déconseiller d'utiliser les intervalles de confiance de manière opérationnelle dans le cas d'un vol avec turbulence. Concernant l'identification modale et compte tenu de la qualité des diagrammes et de la robustesse au bruit, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées ne sont pas disponible, et la méthode OI_{cov} dans le cas où les signaux d'entrées sont disponibles. En effet, bien que les méthodes OI_{cov} et OI_{sqobl} sont équivalentes en termes de qualité d'identification, la méthode OI_{cov} est plus simple à

implémenter que la méthode OI_{sqobl}.

9.2.4 Influence de l'aérodynamique et des turbulences sur le système avion

9.2.4.1 Influence de l'aérodynamique

Lorsqu'une structure est placée dans un champ aérodynamique, son comportement dynamique est modifié par les efforts aérodynamiques. Le système étudié n'est plus le système élastique associé à la structure, mais le système aéroélastique défini par le couple structure/champ aérodynamique. La qualité des identification reste bonne dans le cas en vol. Concernant la qualité des estimations d'incertitude, ce n'est pas toujours le cas. On constate plusieurs tendances. Globalement, les méthodes de type *Output-Only* sont moins bien validées dans le cas en vol que dans le cas au sol. Globalement, la méthode OI_{cov} est validée de manière équivalente dans le cas au sol et dans le en vol. Pour les méthodes OI_{sqort} et OI_{sqobl}, cela dépend du cas (sans ou avec bruit sur les capteurs) et du critère. Mais globalement les résultats sont relativement proches entre le cas au sol et le cas en vol.

9.2.5 Influence des turbulences

L'application de turbulences ne dégrade pas la qualité des identifications, excepté pour la méthode OI_{sqort}. Cette dégradation des résultats est cohérente avec la remarque faite à la Section 3.2.3.5. On notera aussi que les turbulences semblent augmenter la réponse dynamique du système et permettre aux méthodes de type *Output-Only* d'identifier plus de modes, même si ces modes sont peu stables.

Concernant l'effet des turbulences sur les estimations d'incertitude, il est extrêmement mauvais. La qualité des estimations est très dégradée. Ces méthodes d'estimation d'incertitude ne sont pas robustes aux turbulences utilisées. Ce comportement pourrait être dû à la méthode de simulation des turbulences. Les turbulences sont simulées par un effet d'incidence. L'effet d'incidence est un mouvement de tangage rigide de l'avion. Associées au champ aérodynamique, les effets d'incidence de l'appareil produisent des efforts aérodynamiques. Le mouvement d'incidence simulé est un bruit blanc gaussien centré. L'effort ainsi généré est un bruit coloré gaussien car la fonction de transfert entre le mouvement d'incidence et l'effort aérodynamique induit n'est pas constante. Les mauvais résultats obtenus avec les turbulences pourraient donc n'être dus qu'à la non robustesse de la théorie face au non respect de l'hypothèse d'entrées inconnues blanches.

9.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, à partir des diagrammes présentés en Annexe C et en Annexe D, nous avons analysé les résultats d'identification et d'estimation d'incertitude de cinq méthodes :

- Deux sans utilisation des signaux d'excitations
  - OO_{cov} : *Output-Only Covariance-driven*
  - OO_{sqort} : *Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven*
- Trois avec utilisation des signaux d'excitations
  - OI_{cov} : *Input/Output Covariance-driven*
  - OI_{sqort} : *Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven*
  - OI_{sqobl} : *Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven*

et ceci, sur cinq cas répartis sur deux structures :

- un modèle de poutre (voir Section 9.1)
  - sans entrée inconnue (voir Section 9.1.1)
  - avec une entrée inconnue (voir Section 9.1.2)
- un modèle d'avion de combat (voir Section 9.2)
  - au sol (voir Section 9.2.1)
  - en vol (voir Section 9.2.2)
  - en vol avec turbulence (voir Section 9.2.3)

L'intérêt de ce benchmark de systèmes de complexité croissante est d'évaluer les méthodes en termes de robustesse à une forte densité modale, de robustesse au bruit et de robustesse aux entrées inconnues dans le but d'une utilisation opérationnelle.

Pour les cas où les données d'entrée ne sont pas disponibles, nous avons évalué deux méthodes de type *Output-Only* : la méthode *Output-Only Covariance-driven* (OO_{cov}) et la méthode *Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OO_{sqort}). Sur l'ensemble des systèmes, ces deux méthodes identifient les mêmes modes et sont robustes à l'ajout de bruit sur les capteurs. Cependant, la méthode OO_{cov} fournit toujours une identification plus stable que la méthode OO_{sqort}. Si les données d'entrée ne sont pas disponibles, il est recommandé d'utiliser la méthode OO_{cov} pour une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. Cependant, aucune des deux méthodes n'est recommandées dans le cas de vol avec turbulence.

Pour les cas où les données d'entrée sont disponibles, nous avons évalué trois méthodes de type *Input/Output* : la méthode *Input/Output Covariance-driven* (OI_{cov}), la méthode *Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven* (OI_{sqort}) et la méthode *Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven* (OI_{sqobl}). Sur l'ensemble des systèmes, ces trois méthodes identifient, à peu de chose près, les mêmes modes. La méthode OI_{cov} est très robuste à l'ajout de bruit sur les capteurs et fournit les identifications les plus stables. La méthode OI_{sqort} fournit les diagrammes les plus instables et l'ajout de bruit sur les capteurs n'a pas d'influence notable sur l'identification des modes de la structure. La méthode OI_{sqobl} fournit des identifications qui sont généralement améliorées, en terme de stabilité, lorsque l'on ajoute du bruit sur les capteurs. Cette amélioration peut être due à une amélioration du conditionnement des matrices à inverser (voir Section 3.2.3.4) lorsque l'on ajoute du bruit sur les données de sortie.

Si les données d'entrée sont disponibles, il est recommandé d'utiliser la méthode OI_{cov} pour une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance. De plus, même si les méthodes *Input/Output* sont plus fiables que les méthodes de type *Output-Only*, aucune des trois méthodes de type *Input/Output* n'est recommandée dans le cas de vol avec turbulence.

Au chapitre suivant, le Chapitre 10, nous appliquerons ces cinq méthodes sous-espace sur un cas d'essai réel de vibration en vol d'un avion de combat.

Chapitre 10

Application à des données réelles

Après avoir validé les méthodes d'identification avec estimation d'incertitude (Chapitre 9), nous pouvons les appliquer à des données obtenues lors d'un essai réel de vibration en vol Rafale. On cherche ici à tester les méthodes dans le cadre d'une utilisation opérationnelle.

Nous commencerons par décrire le cas (Section 10.1). Nous analyserons ensuite les résultats et nous proposerons une méthode de clarification des diagrammes de stabilité basée sur les valeurs d'incertitude (Section 10.2).

Sommaire

10.1 Présentation du cas d'application 260

10.2 Application à des données réelles 261

10.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 261

10.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 262

10.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 263

10.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 264

10.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 265

10.3 Bilan du chapitre 266

10.1 Présentation du cas d'application

Après la validation sur $N_s = 200$ simulations, les cinq méthodes proposées sont utilisées pour procéder à l'identification modale avec estimation d'incertitude d'une structure réelle. Les identifications seront effectuées à partir de données mesurées lors d'essai en vol d'un avion de combat Rafale. Ces essais ont été effectués dans le cadre d'une ouverture de domaine de vol, pour certifier la non présence du phénomène de flottement (voir Section 1.1.1).

Les excitations sont effectuées à un point de vol défini (pression aérodynamique constante) pour assurer la stationnarité du système. Ces excitations sont des bruits blancs gaussiens appliqués de manière identique et symétrique par les gouvernes des voilures gauche et droite. La durée d'excitation est de $T = 180s$ et la fréquence d'échantillonnage est de $F_e = 250hz$. La réponse du système est observée par $N_o = 50$ capteurs disposés le long de l'avion, de manière à pouvoir observer l'ensemble des modes de la bande de fréquences considérée.

Pour estimer les corrélations (voir Section 4.5), les $N_e = 44.828$ échantillons temporels de chaque signal sont divisés en $n_b = 10$ blocs.

Seules les fréquences seront étudiées. Les résultats seront présentés sous la forme de diagrammes de stabilités en fréquence sur lesquels on aura ajouté les intervalles de confiance. Pour chaque mode m, les intervalles de confiance seront affichés sous forme de "moustaches" de taille $2\sigma_{f_m}$ centrées sur f_m. De cette manière, la vraie valeur a 95% de chance d'être dans l'intervalle de confiance. Les fréquences seront normalisées par la borne maximale de la bande de fréquence étudiée. Ainsi, les valeurs affichées seront comprises entre 0 et 1. Les identifications seront effectuées de l'ordre $O_{min} = 0$ à l'ordre $O_{max} = 60$.

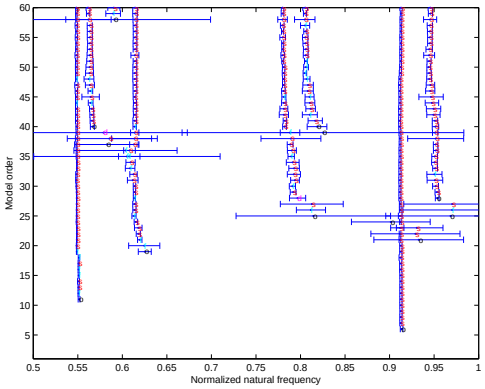
Il a été observé empiriquement ([DLM13]) que les pôles non physiques ont généralement une plus forte valeur d'incertitude (i.e. plus grande variance, i.e. plus large intervalle de confiance) que les modes physiques. Les intervalles de confiance peuvent donc être utilisés pour clarifier les diagrammes de stabilité en appliquant un seuil basé sur l'incertitude des pôles. Les résultats seront présentés sur deux colonnes. La colonne de gauche représentera les diagrammes de stabilité en fréquence (normalisée) non clarifiés. Celle de droite représentera les diagrammes de stabilité en fréquence (normalisée) clarifiés. Le seuil appliqué sera fixé à $\sigma_{f_m} = 0.25hz$ pour les fréquences et $\sigma_{\xi_m} = 100\,{}^{o}/_{oo}$ pour les taux d'amortissement.

Remarque 50 *Même si seuls les diagrammes de stabilité en fréquence seront présentés, les taux d'amortissement seront aussi utilisés pour la clarification de ces diagrammes.*

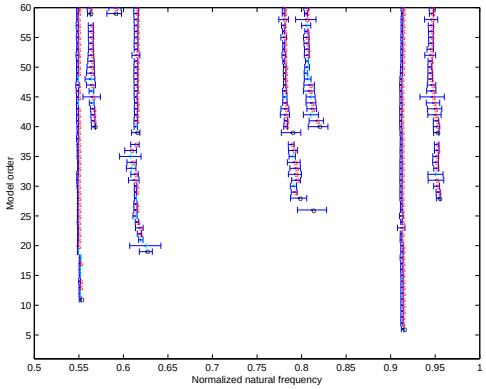
10.2 Application à des données réelles

10.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}

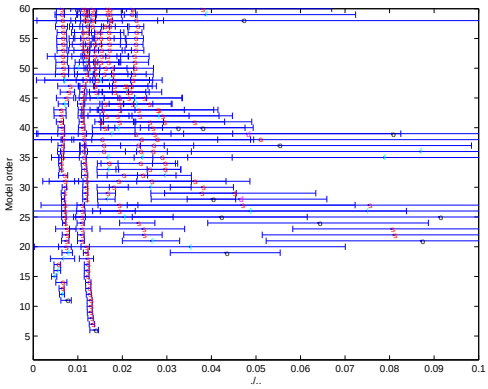
Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de stabilité, clarifiés et non clarifiés, des fréquences et des taux d'amortissement identifiés avec la méthode OO_{cov} :



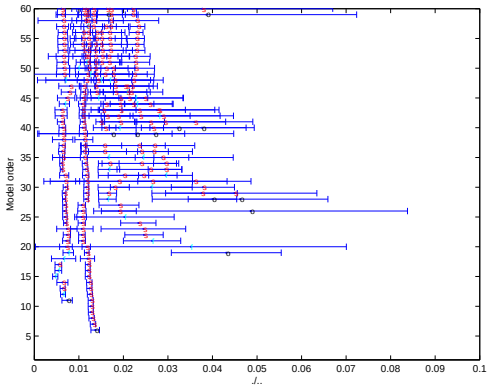
(a) Diagramme de stabilité des fréquences



(b) Diagramme de stabilité clarifié des fréquences



(c) Diagramme de stabilité des taux d'amortissement



(d) Diagramme de stabilité clarifié des taux d'amortissement

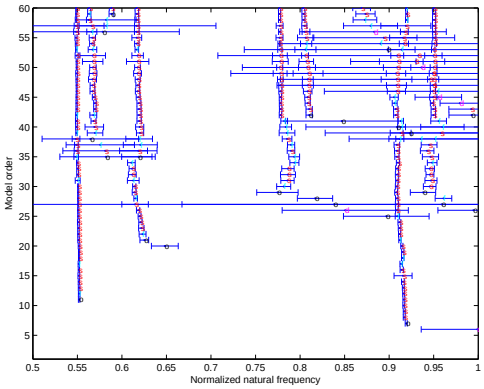
FIGURE 10.1 – Output-Only Covariance-driven (OO_{cov}) - Sans bruit ajouté aux capteurs

On constate à partir de la Figure 10.1 que sept modes sont clairement identifiés. Un huitième semble apparaître à partir de l'ordre 58. On constate aussi qu'il n'y a que peu de pôles non physiques identifiés. La clarification du diagramme de stabilité basée sur l'incertitude (Uncertainty-based clean up) est efficace. Il ne retire du diagramme que des pôles non physiques. On observe aussi que plus un mode est stable selon les ordres, plus petite est son incertitude estimée. De plus, les valeurs d'incertitude sont cohérentes avec les ordres de grandeurs des dispersions opérationnellement observées. Cette dernière remarque est basée sur l'expérience opérationnelle d'ingénieurs d'essai

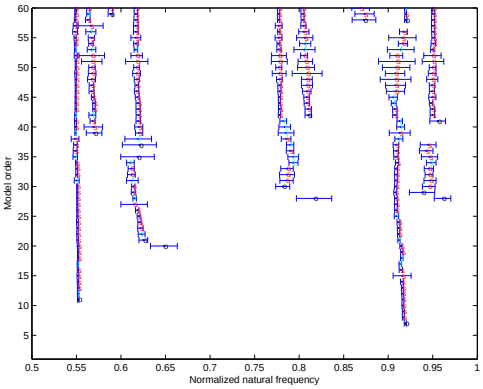
travaillant chez Dassault-Aviation.

10.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}

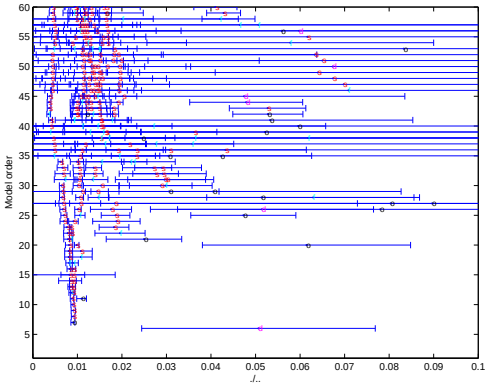
Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de stabilité, clarifiés et non clarifiés, des fréquences et des taux d'amortissement identifiés avec la méthode OO_{sqort} :



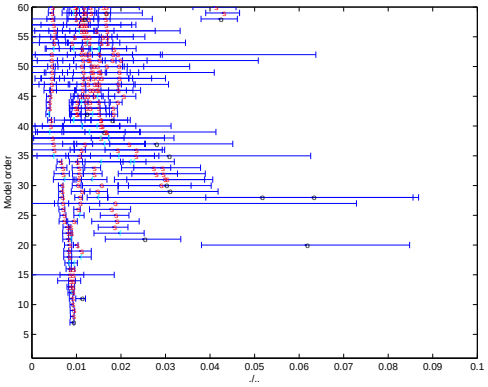
(a) Diagramme de stabilité des fréquences



(b) Diagramme de stabilité clarifié des fréquences



(c) Diagramme de stabilité des taux d'amortissement



(d) Diagramme de stabilité clarifié des taux d'amortissement

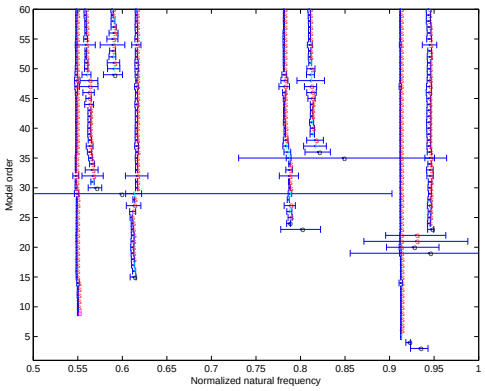
FIGURE 10.2 – Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven (OO_{sqort}) - Sans bruit ajouté aux capteurs

Comme avec la méthode OO_{cov}, sept modes sont clairement identifiés avec la méthode OO_{sqort} (voir Figure 10.2). L'identification de ces modes est cependant bien moins stable avec la méthode OO_{sqort} qu'avec la méthode OO_{cov}. De plus, cette identification est polluée par beaucoup plus de pôles non physiques que l'identification obtenue avec la méthode OO_{cov}. On constate aussi une corrélation entre la mauvaise stabilité des modes et leur niveau d'incertitude plus élevé qu'avec la méthode OO_{cov}. Néanmoins,

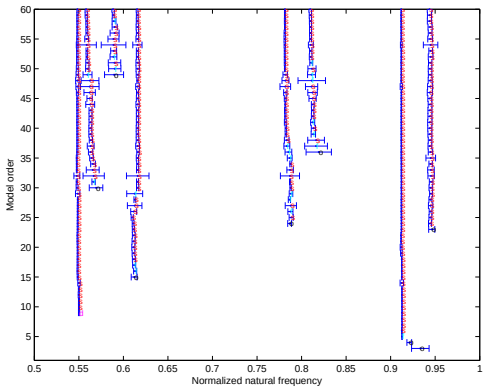
ceci permet de montrer encore plus clairement l'efficacité d'un nettoyage de diagramme basé sur les valeurs d'incertitudes.

10.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}

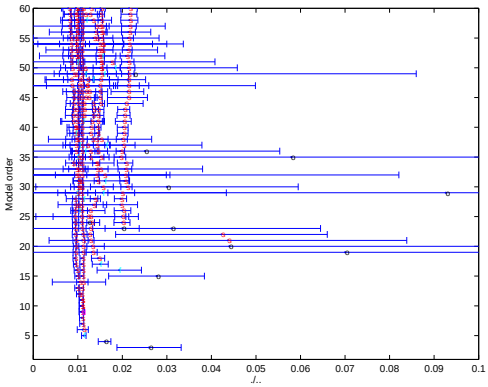
Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de stabilité, clarifiés et non clarifiés, des fréquences et des taux d'amortissement identifiés avec la méthode OI_{cov} :



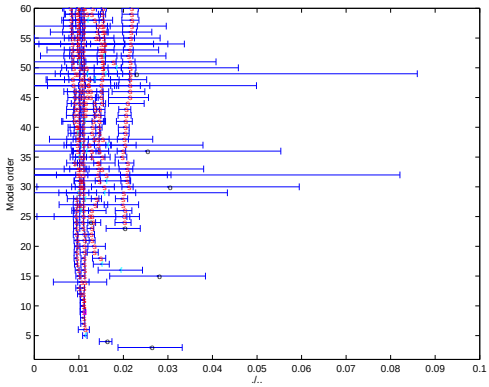
(a) Diagramme de stabilité des fréquences



(b) Diagramme de stabilité clarifié des fréquences



(c) Diagramme de stabilité des taux d'amortissement



(d) Diagramme de stabilité clarifié des taux d'amortissement

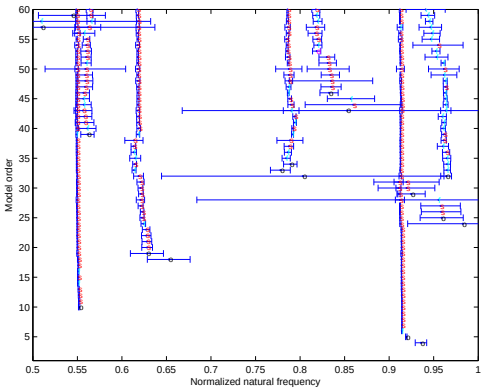
FIGURE 10.3 – Input/Output Covariance-driven (OI_{cov}) - Sans bruit ajouté aux capteurs

La méthode OI_{cov} est la première méthode présentée utilisant les données d'excitation. A partir de la Figure 10.3 on constate aussi une apparition plus rapide des modes identifiés (i.e. pour de plus faibles ordres) lorsque les données d'excitation sont disponibles et utilisées. Dans le cas considéré, on constate aussi que ces modes sont plus stables selon les ordres et ont des valeurs d'incertitude plus faibles. De plus, peu de pôles non physiques sont identifiés (seulement sept points sur l'ensemble du digramme).

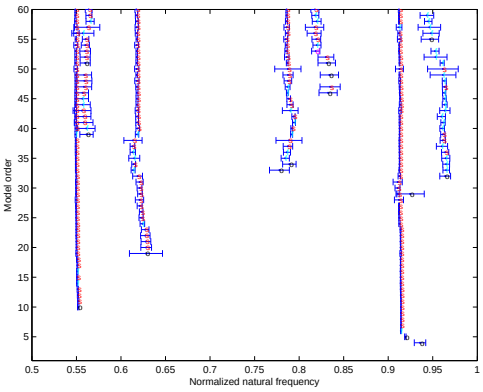
Enfin, comme pour les précédentes méthodes, on peut observer que plus un mode est stable selon les ordres, plus faible est son incertitude estimée.

10.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}

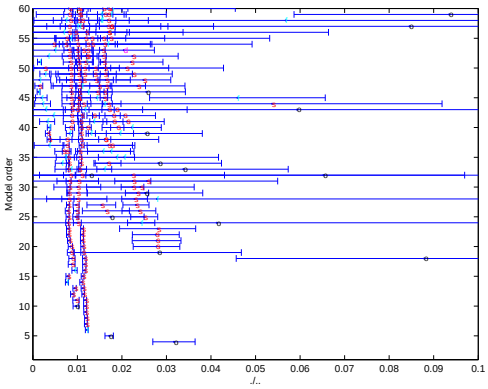
Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de stabilité, clarifiés et non clarifiés, des fréquences et des taux d'amortissement identifiés avec la méthode OI_{sqort} :



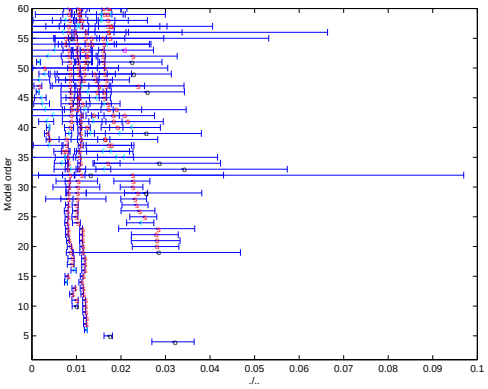
(a) Diagramme de stabilité des fréquences



(b) Diagramme de stabilité clarifié des fréquences



(c) Diagramme de stabilité des taux d'amortissement



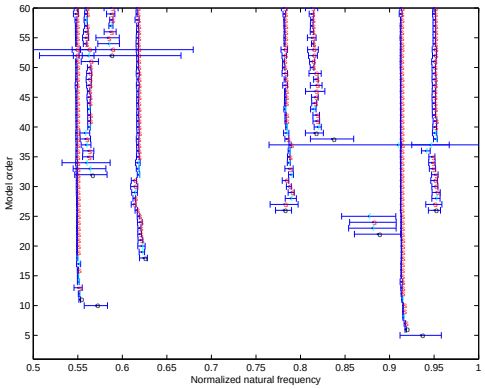
(d) Diagramme de stabilité clarifié des taux d'amortissement

FIGURE 10.4 – Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven (OI_{sqort}) - Sans bruit ajouté aux capteurs

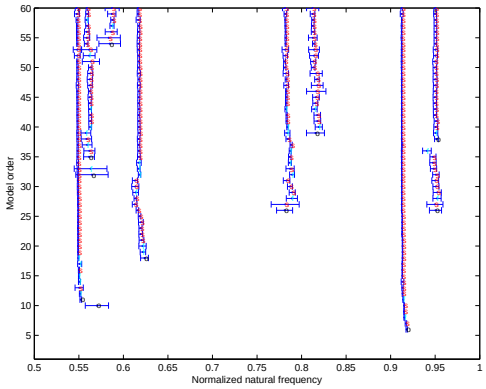
Dans ce cas particulier, la méthode OI_{sqort} fournit la plus mauvaise identification comparativement aux autres méthodes proposées. Les valeurs d'incertitudes sont aussi les plus importantes (voir Figure 10.4). Cependant, encore une fois, plus un mode est stable selon les ordres, plus faible est son incertitude estimée.

10.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}

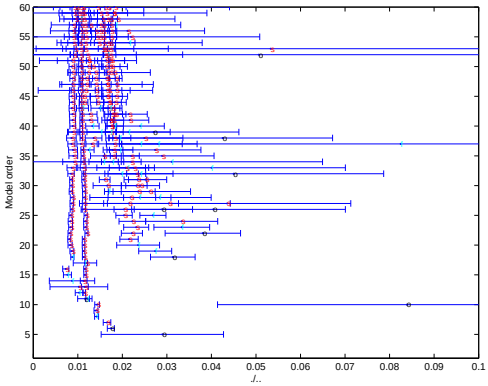
Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de stabilité, clarifiés et non clarifiés, des fréquences et des taux d'amortissement identifiés avec la méthode OI_{sqobl} :



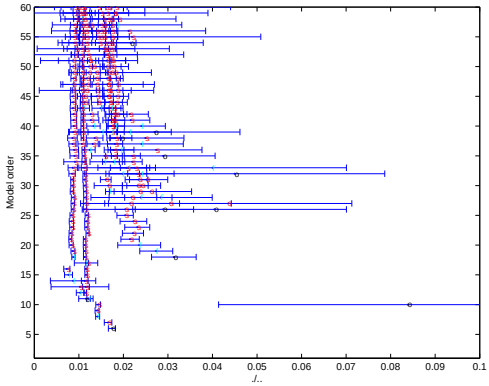
(a) Diagramme de stabilité des fréquences



(b) Diagramme de stabilité clarifié des fréquences



(c) Diagramme de stabilité des taux d'amortissement



(d) Diagramme de stabilité clarifié des taux d'amortissement

FIGURE 10.5 – Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven (OI_{sqobl}) - Sans bruit ajouté aux capteurs

L'identification obtenue avec la méthode OI_{sqobl} (voir Figure 10.5) est équivalente à celle obtenue avec la méthode OI_{cov} en terme de fréquence. Dans ce particulier, ces deux méthodes sont celles qui fournissent les meilleures identifications et les valeurs d'incertitude les plus faibles. Concernant l'identification des amortissements, la méthode OI_{cov} fournit des résultats plus stables que la méthode OI_{sqobl}.

10.3 Bilan du chapitre

Dans ce dernier chapitre, nous avons appliqué cinq méthodes d'identification avec estimation d'incertitude à des données mesurées lors d'un essais réel en vol de Rafale.

On constate que les résultats sont cohérents avec la conclusion faite au Chapitre 9 : la méthode OO_{cov} fournit une identification plus stable et des estimations d'incertitude plus faibles que la méthode OO_{sqort} ; la méthode OI_{cov} fournit une identification plus stable et des estimations d'incertitude plus faibles que les deux autres méthodes de type *Input/Output* étudiées. Toujours en accord avec la conclusion du Chapitre 9, l'utilisation des données d'entrée est fortement recommandée. En effet, la méthode OI_{cov} fournit de meilleurs résultats (identification plus stable et incertitudes plus faibles) que la méthode OO_{cov}. On notera aussi que les valeurs d'incertitudes sont cohérentes avec les dispersions observées par les ingénieurs de Dassault-Aviation.

Enfin, nous avons observé que les incertitudes des pôles non physiques sont plus importantes que celles des modes de la structure. Ceci nous a permis de présenter un technique de clarification des diagrammes de stabilité basée sur les valeurs d'incertitudes.

Quatrième partie

Conclusion

Conclusion

Pour répondre à l'objectif de cette thèse, l'estimation des incertitudes associées à différentes méthodes d'identification modale, nous avons étudié trois familles de méthodes d'identification modale et développé les techniques d'estimation d'incertitude associées aux méthodes de deux de ces familles. Ces deux familles de méthodes d'identification modale, la minimisation moindres carrés de l'erreur d'estimation d'une modélisation ARX (voir Section 3.1) et la recherche de l'espace colonne de la matrice d'observabilité d'une représentation d'état (voir Section 3.2), ont été précisément présentées, avec un souci d'homogénéisation des écritures.

La méthode d'identification connue dans l'industrie sous le nom PolyMax et dans le monde de la recherche sous le nom *poly-reference* LSCF (voir Section 3.1.2), nécessite d'imposer une contrainte arbitraire dont la valeur influe sur les résultats. Une variante à la solution élaborée par [GVV$^+$03] (voir Section 3.1.2.3) a été proposée à la Section 3.1.2.4. Elle consiste en une recherche de noyau par une décomposition en valeurs singulières. Cette méthode, qui reste à valider, peut apporter une simplification de la chaîne de calcul de la méthode PolyMax. De plus, cette nouvelle méthode devrait permettre que le résultat soit indépendant de la contrainte arbitraire sur les paramètres de la modélisation.

Le calcul d'incertitude des méthodes LSCF nécessite d'estimer la variance de la matrice de transfert (voir Section 6.1). Une méthode décrite dans la littérature ([Ver02, Cau04]) est d'utiliser une expression analytique entre la fonction de cohérence et la variance de la matrice de transfert. Cependant, cette écriture analytique nécessite deux hypothèses fortes. La première est que la variance du processus qui génère les entrées est supposée nulle. Ceci est vrai si ce processus est déterministe. Cependant, dans le cadre d'essais de vibration chez les avionneurs, il est courant d'utiliser des processus stochastiques de type bruits blancs pour générer les entrées. Dans ce cas, même si les entrées sont connues, on ne peut pas faire l'hypothèse que la variance du processus est nulle. La seconde hypothèse consiste à supposer que les sorties mesurées sont décorrélées entre elles. Ceci n'est vrai qu'à condition que les sorties n'ont pas été mesurées simultanément. Cette hypothèse n'est pas compatible avec les essais effectués chez les avionneurs. En effet, les mesures sont généralement effectuées simultanément avec un grand nombre de capteurs (environ 100 capteurs pour les essais en vol et environ 500 capteurs pour les

essais au sol). De ce fait, la méthode de calcul de la variance de la matrice de transfert, basée sur la fonction de cohérence, ne peut pas être utilisée dans le contexte industriel considéré dans cette thèse. Nous avons proposé une autre méthode, basée sur la propagation de la variance des densités spectrales, pour estimer la variance de la matrice de transfert (voir Section 7.1.2). Cette méthode ne nécessite aucune hypothèse sur les signaux mesurés en entrée et en sortie.

Les méthodes d'identification de modèle d'état étudiées dans ce document sont des méthodes sous-espace (voir Section 3.2). Trois des cinq méthodes sous-espace étudiées (voir Section 3.2.3), provenant de la littérature ([VODM96]), ne sont pas adaptées, de par leur formulation, à l'estimation d'incertitude par la propagation de variance décrite au Chapitre 5. Ainsi, nous avons proposé trois nouvelles méthodes (voir Section 3.2.3.4), compatibles avec le calcul d'estimation d'incertitude, qui mènent strictement aux mêmes identifications de fréquences modales, de taux d'amortissement modaux et de formes modales (Section 3.2.3.3) que ces trois méthodes inadaptées à l'estimation d'incertitude.

Un apport essentiel de cette thèse, concernant les méthodes sous-espace, est le développement de la chaîne de propagation des incertitudes pour trois méthodes de type *Input/Output*. La motivation pour développer des méthodes prenant en compte les signaux d'entrée est liée à la façon dont sont réalisés les essais chez les avionneurs. En effet, contrairement à la majorité des essais effectués dans le génie civil, les essais de vibration sur avions sont généralement réalisés en appliquant une excitation connue à la structure (e.g. pot vibrant, vibration gouverne).

On a comparé ces méthodes d'identification modales sous-espace avec estimation d'incertitude et procédé à leur validation dans le but d'une utilisation opérationnelle (voir Section 9). Cette validation s'appuie sur une stratégie innovante utilisant des méthodes statistiques.

A partir de cette étude, on a pu préconiser la méthode *Output-Only Covariance-driven* (OO_{cov}), si les signaux d'entrée ne sont pas disponibles, et la méthode *Input/Ouput Covariance-driven* (OI_{cov}), si les signaux d'entrée sont disponibles. Cependant, il est ressorti de cette étude que les méthodes de type *Input/Output* sont bien plus fiables que les méthodes de type *Output-Only*.

Les travaux permettant de parvenir à ces conclusions ont été réalisés sur un benchmark de systèmes de complexité croissante, allant du cas simple de poutre (faible densité modale) jusqu'au système avion au sol (forte densité modale) puis en vol (avec ajout de turbulence comme entrée inconnue). Nous avons conclu que la majorité des méthodes est robuste aux bruits sur les capteurs, que ces méthodes permettent d'identifier des modèles à forte densité modale mais que l'utilisation des estimations d'incertitude n'est pas recommandée lors de vols avec turbulence.

Dans le but de valider les estimations d'incertitude pour une utilisation opérationnelle des intervalles de confiance, nous avons dû développer un critère plus sévère (voir Section 8.3.3) que le critère habituellement utilisé (voir Section 8.3.2). Ce critère est basé sur un test Khi2 d'une variable aléatoire représentant la taille de l'intervalle de confiance.

Le but de cette stratégie de validation est de permettre l'utilisation opérationnelle des méthodes. Ces méthodes ont ensuite été appliquées sur un cas réel d'essai en vol

(voir Chapitre 10). On a pu observer que les incertitudes obtenues sont cohérentes avec la dispersion qu'observent habituellement les ingénieurs. Nous avons aussi constaté que le niveau d'incertitude associé aux pôles non physiques est supérieur à celui des modes de la structure. Nous avons ainsi pu proposer une méthode de clarification des diagrammes de stabilité basée sur la valeur des incertitudes. Il est à noter que les méthodes d'estimation d'incertitude étudiées et développés dans cette thèse ont un temps d'exécution du même ordre de grandeur que les méthodes d'identification modale. Les temps de calcul engendrés par l'utilisation de ces méthodes sont adaptés à une utilisation opérationnelle.

Perspectives

Développement théorique

Incertitude sur les masses modales par les méthodes sous-espaces

Dans cette thèse, nous avons détaillé les chaînes de propagation des variances des données jusqu'aux fréquences, taux d'amortissement et formes modales. Il serait intéressant de compléter les méthodes sous-espaces présentées, avec l'estimation d'incertitude sur les masses modales. Ce complément peut être trouvé dans la littérature, à partir de l'estimation d'incertitude de la matrice de transmission des entrées d'un modèle d'état. Plusieurs méthodes existent pour identifier cette matrice.

Une première méthode possible est d'effectuer la minimisation moindres carrés proposée à l'Equation (3.194).

Une seconde méthode possible est d'utiliser la matrice de réponse impulsionnelle. Cette matrice a la particularité d'être le produit de la matrice d'observabilité (Equation (2.81)) et de la matrice de contrôlabilité (Equation (2.82)) (voir [RPDR08a]). Par une décomposition en valeurs singulières, on peut obtenir la matrice de contrôlabilité du modèle d'état. Il suffit ensuite d'en extraire la matrice de transmission des entrées par une méthode similaire à celle décrite par l'Equation (3.193).

Méthodes d'identification d'une modélisation ARX

A la Section 3.1.2.4, nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution du problème d'identification modale. Il serait intéressant de déterminer la chaîne de propagation de variance associée à cette nouvelle méthode.

Méthodes LSFD

Les méthodes simple-référence basées sur la modélisation ARX ne permettent pas d'identifier directement les formes modales et les masses modales. Une méthode pour obtenir ces paramètres modaux est d'utiliser la méthode LSFD (voir Section 3.3). Pour compléter les outils développés durant cette thèse, il est nécessaire de déterminer la chaîne de propagation de variances LSFD. Cette chaîne pourra être basée sur l'estimation de la covariance des résidus décrite par [PGS07].

Validation

Il serait intéressant de valider les estimations d'incertitude sur les formes modales et sur les masses modales par le même processus de validation utilisé pour valider les estimations d'incertitude sur les fréquences et sur les taux d'amortissement.

Concernant le processus de validation, on pourrait étudier un moyen de fixer le seuil du premier critère (voir Section 8.3.3) de manière moins arbitraire, e.g. à partir de la variance empirique des estimations d'incertitude obtenues lors des simulations Monte-Carlo.

Il serait aussi intéressant d'étudier la robustesse des méthodes d'estimation d'incertitude à l'utilisation d'un *overlap* et d'une fenêtre d'apodisation lors de l'estimation des densités spectrales (voir Section 4.4.2). En effet, l'*overlap* pourrait être un problème car le principe de propagation utilisé fait l'hypothèse de l'indépendance des blocs (voir Chapitre 5).

Enfin, il serait intéressant d'étudier plus en détail la forte dégradation des résultats de validation observée dans le cas avion en vol avec turbulence (voir Section 9.2.3). L'hypothèse avancée dans cette thèse est que le champ d'effort appliqué à l'avion, résultant de la turbulence, n'est pas un bruit blanc (voir Section 9.2.5). Il faudrait vérifier cette hypothèse en testant la robustesse des méthodes à un bruit qui n'est pas blanc.

Utilisation des incertitudes

Les incertitudes sur les paramètres modaux ont un grand intérêt pour les applications industrielles. Nous avons vu que les incertitudes peuvent être utilisées pour faciliter l'interprétation des diagrammes de stabilité (voir Chapitre 10). Les incertitudes peuvent aussi être utilisées pour faciliter le suivi de l'évolution des modes durant un essais en vol et pour aider au recalage de modèle.

Dans le cadre du processus de certification en flottement, l'utilisation des incertitudes pour le suivi de l'évolution des paramètres permettrait de tracer, non plus des courbes de flottement, mais des peignes de flottement.

Dans le cadre du recalage des modèles de calcul, on pourrait chercher à recaler les modèles de calcul en ayant un écart entre la mesure et le modèle qui prendrait en compte le niveau d'incertitude des paramètres modaux identifiés. Un moyen serait d'effectuer le recalage de modèle avec une pondération des paramètres modaux en fonction de leur niveau d'incertitude.

Il serait intéressant d'étudier ces deux thématiques pour aider au processus de certification décrit à la Section 1.1.4.

Application à d'autres types de système

Dans cette thèse, nous avons considéré un système avion. Ce système nous à permis d'étudier un panel de méthodes d'identification sur des cas de complexité croissante (ajout de bruit sur les capteurs, d'un champ aérodynamique et de turbulence). Il serait intéressant d'appliquer ces méthodes à d'autres types de système, pour prendre en compte la complexité qu'ils génèrent.

- Sur des lanceurs : les lanceurs sont des systèmes qui consomment du carburant très rapidement. Ils sont donc soumis à une perte rapide de masse. Pour suivre leur évolution, il peut être utile d'utiliser des méthodes adaptées à des systèmes non stationnaires. Il serait intéressant d'adapter les méthodes de propagation d'incertitude à ces méthodes.
- Sur des systèmes rotatifs type rotor d'hélicoptère ou pale d'éolienne : ces systèmes sont périodiques. Des méthodes d'identifications sous-espace type *Output-Only* avec estimation d'incertitude adaptées aux systèmes rotatifs ont été développées ces dernières années (voir [JMM+13]). Il serait intéressant de les adapter aux méthodes de type *Input/Ouput* présentées dans ce manuscrit.
- Surveillance en temps réel : certains systèmes nécessitent une surveillance en temps réel (avion lors d'essai en vol). Dans la littérature, des méthodes récursives ont été développées pour réaliser des identifications en temps réel (voir [MBL08]). Il serait intéressant d'adapter la méthode de propagation présentée dans ce manuscrit à une identification récursive.

Cinquième partie

Annexes

Annexe $\mathcal{A}$

Quelques notions en probabilité et en statistique

Sommaire

A.1 Concepts de base de la théorie des probabilités 277
A.2 Variables aléatoires et leur distribution 279
A.3 Moments 280
A.3.1 Espérance 280
A.3.2 Variance 280
A.4 Exemples de distribution 281
A.4.1 Loi gaussienne (ou loi normale) 281
A.4.2 Loi χ^2 283
A.5 Théorèmes 284
A.5.1 Loi des grands nombre, LGN 284
A.5.2 Théorème central limite, TCL 285
A.6 Estimateurs d'espérance et de variance : statistiques 285
A.7 Vecteurs aléatoires 287
A.7.1 Espérance, covariance et leur estimés 288
A.7.2 Distribution normale pour un vecteur aléatoire 289
A.7.3 Théorème central limite pour un vecteur aléatoire 289

A.1 Concepts de base de la théorie des probabilités

Définition 51 *L'ensemble des réalisations*

Soit Ω l'ensemble de toutes les valeurs possibles d'une expérience. Cet ensemble est appelé l'ensemble des réalisations.

Définition 52 *Un évènement*

Un évènement A est une collection de réalisation possible d'une expérience. Un évènement est par conséquent un sous-ensemble de l'ensemble des réalisations.

Définition 53 *Définition classique d'une probabilité*

Par définition, la probabilité de l'événement $A \subset \Omega$ est le ratio :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \tag{A.1}$$

Cette définition ne peut cependant être utilisée que si toutes les valeurs possibles de l'ensemble des réalisations Ω et de l'évènement A peuvent être dénombrées.

Définition 54 *Probabilité*

Soit un ensemble de réalisations Ω. Une fonction de probabilité est une fonction $\mathbb{P}$ qui satisfait :

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ *for all* $A \subset \Omega$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. *Si* A_1, A_2, $\ldots \subset \Omega$ *sont disjoints 2 à 2, i.e.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *for* $i \neq j$ *(avec* $\emptyset$ *l'ensemble vide), alors* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$

Theorème 55 *Fonction de probabilité*

Soit $\Omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ un ensemble fini et soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres positifs ou nuls tel que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Pour tout $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{P}(A)$, définie par :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:S_i \in A} p_i \tag{A.2}$$

est une fonction de probabilité.

Propriété 56 *Propriétés de $\mathbb{P}$*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, *avec $\emptyset$ l'ensemble vide*
2. $\mathbb{P}(A) \leq 1$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, *où A^c est l'évènement complémentaire de A*
   (a) $A \cup A^c = \Omega$
   (b) $A \cap A^c = \emptyset$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Définition 57 *Indépendance statistique*

Deux évènements A et B sont indépendants statistiquement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{A.3}$$

La Définition 57 signifie que l'apparition d'un évènement n'a aucun effet sur la probabilité d'un autre évènement , et vice-versa, si ces évènements sont indépendants. Cette définition peut être obtenue en considérant la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B)$, i.e. la

probabilité de A sachant B. C'est la probabilité de l'évènement A lorsque l'espace des possibles est réduit à B. Elle est définie par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{A.4}$$

On a alors, car $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) \tag{A.5}$$

On voit ainsi, grâce à la Définition 57, que si A et B sont deux évènements indépendants, alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \tag{A.6}$$

et

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \tag{A.7}$$

A.2 Variables aléatoires et leur distribution

Définition 58 *Variable aléatoire*
Une variable aléatoire (que abrègera par v.a.) X est une fonction de l'ensemble des réalisations Ω vers l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Exemple 59 *Soit l'expérience consistant à lancer 2 dés. Une variable aléatoire reliée à cette expérience peut être "$X =$**somme des valeurs obtenues sur chacun des 2 dés**".*

Définition 60 *Fonction de répartition et densité de probabilité d'une variable aléatoire*
La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \tag{A.8}$$

et sa densité de probabilité f_X est définie telle que :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \tag{A.9}$$

Les caractéristiques d'une fonction aléatoire X sont entièrement définis par sa fonction de répartition F_X ou sa densité de probabilité f_X.

Propriété 61 *Quelques propriétés de F_X et de f_X*

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$
2. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$
3. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u)\,du]$

La Définition 57 a introduit l'indépendance statistique de deux évènements. Cette définition peut être étendue aux variables aléatoires.

Définition 62 *Variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée (I.I.D.)*
Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) si et seulement si elles ont la même densité de probabilité (i.e. $f_X = f_Y$) et sont indépendantes, i.e. :

$$\mathbb{P}(\{X \leq a\} \cup \{Y \leq b\}) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) \cup \mathbb{P}(\{Y \leq b\}) \tag{A.10}$$

A.3 Moments

A.3.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à la moyenne des ses valeurs possibles x (si X est une v.a. continue) ou x_k (si X est une v.a. discrète) pondérées par sa densité de probabilité en x, i.e. $f_X(x)$ (si X est une v.a. continue) ou par sa fonction de probabilité en $X = x_k$, i.e. $\mathbb{P}(X = x_k)$ (si X est une v.a. discrète).

Définition 63 *Moment d'ordre 1 : L'espérance*
Soit X une variable aléatoire à valeur dans Ω. Les valeurs possibles de X sont notées x si Ω est un ensemble continu et x_k si Ω est un ensemble discret. Soit f_X la densité de probabilité de X dans le cas où X est une v.a. continu. Soit $\mathbb{P}(X)$ la fonction de probabilité de X dans le cas où X est une v.a. discrète. L'espérance de X est définie, selon que la variable aléatoire soit continue ou discrète, par :
- *Cas continu : $\mu \equiv E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$*
- *Cas discret : $\mu \equiv E[X] = \sum_{k \in S} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$*

Propriété 64 *Propriétés de l'espérance*
Soient $a\mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires.

1. *Constante déterministe : $E[X + a] = E[X] + a$*
2. *Linéarité : $E[aX + Y] = aE[X] + E[Y]$*
3. *Si X et Y sont indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$*

A.3.2 Variance

La variance d'une variable aléatoire X mesure la dispersion des ses valeurs possibles à la moyenne. Elle est définie comme étant la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des valeurs possibles de X, pondérées, comme pour l'espérance, par la densité de probabilité (si X est une v.a. continue) ou par la fonction de probabilité (si X est une v.a. discrète).

Définition 65 *Moment d'ordre 2 : La variance, la covariance et l'écart type*
Si X est une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f_X(x)$, alors sa variance est définie par :

$$\sigma_X^2 \equiv var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \tag{A.11}$$

Si X est une variable aléatoire discrète de fonction de probabilité $\mathbb{P}(X = x_k)$, alors sa variance est définie par :

$$\sigma_X^2 \equiv var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum_{k \in S} (x_k - E[X])^2 \mathbb{P}(X = x_k) \tag{A.12}$$

L'écart type (standard deviation en anglais) de X est définie par :

$$\sigma_X = \sqrt{E\left[(X - E[X])^2\right]} \tag{A.13}$$

La covariance entre deux variables aléatoire X et Y est définie par :

$$\sigma_{X,Y} cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \tag{A.14}$$

Remarque 66 *On remarquera que, par définition, $cov(X, X) = var(X)$. On écrit donc les propriétés de la covariance, qui sont valables aussi pour la variance.*

Propriété 67 *Propriétés de la covariance*
Soient $a \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires

1. *Formule de Koenig : $cov(X, Y) = E[XY] + E[X]E[Y]$*
2. *Constante déterministe : $cov(X + a, Y) = cov(X, Y)$*
3. *Facteur déterministe : $var(aX) = a^2 var(X)$*
4. *Somme de v.a. : $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2var(X, Y)$*
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X, Y) = 0$*

A.4 Exemples de distribution

A.4.1 Loi gaussienne (ou loi normale)

La loi (ou distribution) normale est une des loi les plus utilisées pour les modélisations. C'est aussi une des lois qui apparaît naturellement dans de nombreuses situations. Voici quelques exemples :

- les modèles de population,
- les mesures d'erreurs,
- les vitesses de molécules dans gaz idéal,
- la position d'une particule.

Définition 68 *La distribution normale*
La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{A.15}$$

et donc sa fonction de répartition par :

$$F_X(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \tag{A.16}$$

On note $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Par définition :

- $E[X] = \mu$
- $var(X) = \sigma^2$

Une loi normale est entièrement caractérisée par son moment d'ordre 1 (Espérance) et son moment d'ordre 2 (Variance).

La densité de probabilité de la distribution normale est bien connue pour sa forme de cloche centrée autour de son espérance et dont l'étalement est fonction de sa variance. Toute variable aléatoire suivant une loi normale $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ peut être transformée

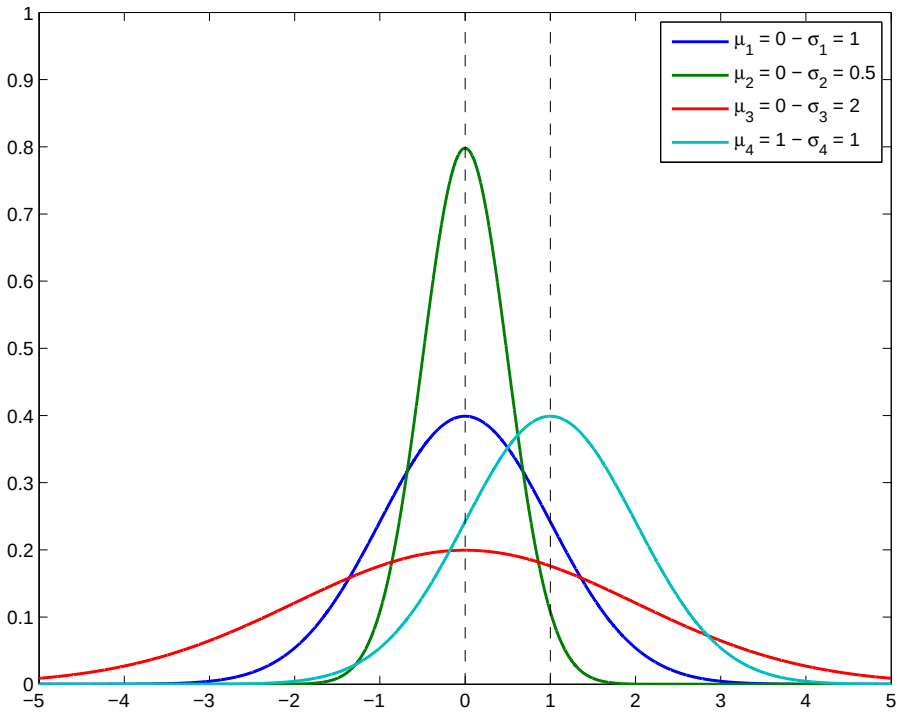


FIGURE A.1 – Exemples de lois normales d'espérances μ et de variances σ différentes

en un variable aléatoire suivant une loi normale standard, i.e. normalisé, $\widetilde{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette transformation est obtenue en posant :

$$\widetilde{X} = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{A.17}$$

avec $\mu = E[X]$

A.4.2 Loi χ^2

La distribution χ^2 à k degrés de liberté est la distribution de la somme des carrés de k variables aléatoires indépendantes qui suivent une distribution normale standard.

Définition 69 *Distribution χ^2*
On note $Z \sim \chi^2(k)$ si la variable aléatoire Z suit une loi χ^2 à k degrés de liberté de densité de probabilité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} \tag{A.18}$$

Avec Γ la fonction gamma [AS72] dont l'une des définitions est, pour tout nombre complexe z tel que $\Re z > 0$:

$$\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{A.19}$$

La fonction Γ prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points)

L'espérance et la variance de $Z \sim \chi^2(k)$ sont par définition :
- $E[Z] = k$
- $\mathrm{var}(Z) = 2k$

La Définition 69 est théorique. En pratique, la variable aléatoire Z est construite à partir de la somme des carrés de variables aléatoires suivant une loi normale standard.

Theorème 70 *Distribution χ^2 écrite en tant que somme de distribution $\mathcal{N}(0,1)$*
Si $X_1, \ldots, X_N$ sont N variables indépendantes et suivant une loi normal standard, i.e. $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. La somme de leur carrés

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \tag{A.20}$$

suit une loi χ^2 à k degrés de liberté, i.e. $Z \sim \chi^2(k)$.

Dans le cas où les v.a. $X_1, \ldots, X_N$ suivent une loi normale, mais non standard, i.e. $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, elles peuvent être normalisées et la variable Z est alors donnée par :

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \tag{A.21}$$

et $Z \sim \chi^2(k)$.

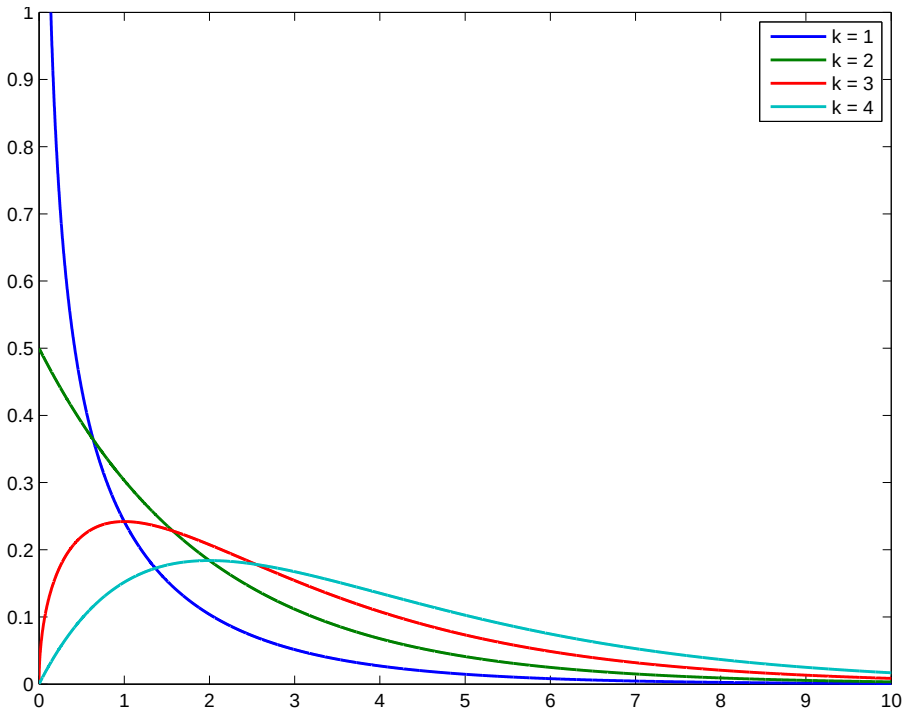


FIGURE A.2 – Exemples de lois $\chi^2(k)$ avec différentes valeurs de k

A.5 Théorèmes

A.5.1 Loi des grands nombre, LGN

La loi des grands nombres, LGN (ou LLN en anglais pour *Law of Large Number*) et le théorème de la limite centrale (voir Définition 73) sont les deux théorèmes principaux permettant de caractériser la moyenne empirique. Pour comprendre la loi des grands nombres, qui stipule que la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance, il est utile d'introduire l'inégalité de Chebyshev.

Theorème 71 *Inégalité de Chebyshev*
Soit X une variable aléatoire. Soient μ son espérance et σ^2 sa variance.

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad \mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2} \tag{A.22}$$

Cette inégalité garantie que pour toute distribution, les valeurs sont "proches" de la valeur moyenne : La probabilité que l'écart entre une valeur d'une distribution quelconque et son espérance soit supérieure ou égale à k fois son écart type est inférieure ou égale à $\frac{1}{k^2}$

Theorème 72 *La loi des grands nombres (LGN)*
Soient :

- *N variables aléatoires X_i i.i.d.*
- $E[X_i] = \mu$
- $var(X_i) = \sigma^2$
- $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$

On a, $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_N - \mu\right| < \epsilon\right) = 1 \tag{A.23}$$

Ce théorème signifie que quel que soit la distribution, la moyenne empirique et l'espérance deviennent arbitrairement proches ($\forall \epsilon > 0$) avec une probabilité de 1 lorsque N est assez grand. On a donc que $\bar{X}_N$, la moyenne empirique, converge en probabilité vers la constante μ qui est l'espérance de la distribution.

A.5.2 Théorème central limite, TCL

On a vu que la loi des grands nombres permet de s'assurer de la convergence en probabilité de la moyenne empirique. On s'intéresse maintenant à la convergence en distribution de cette estimation. C'est le théorème de la limite centrale qui donne la distribution de cette statistique très importante qu'est la moyenne empirique.

Theorème 73 *Théorème central limite, TCL*

Soient :

- *N variables aléatoires X_i i.i.d.*
- $E[X_i] = \mu$
- $var(X_i) = \sigma^2$
- $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$

On a alors :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_N - \mu\right)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \tag{A.24}$$

On constate que la moyenne empirique $\bar{X}_N$ est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne d'espérance μ et de variance $\frac{\sigma^2}{N}$. La puissance de théorème central limite est que ceci est vrai quelque soit la distribution des variables aléatoires X_i, à l'unique condition que ces variables soient indépendantes et identiquement distribuées. Plus de précisions sur la moyenne empirique sont données à la Section A.6.

A.6 Estimateurs d'espérance et de variance : statistiques

Lorsqu'on effectue des mesures d'un processus, comme par exemple l'âge d'un échantillon de la population d'un pays ou le déplacement d'un capteur placé sur une structure lors de différents essais de vibration et à un temps $t_0 + \Delta t$ identique pour chaque essai (t_0 étant le début de l'essai), on peut avoir besoin de connaître les paramètres de la distribution des variables aléatoires associées à ces mesures. Ces paramètres sont les moments statistiques (voir Section A.3). Dans le cadre de cette thèse nous supposerons que les variables aléatoires suivent des lois gaussiennes (voir Section A.4.1). Ces lois sont

entièrement caractérisées par leur moment d'ordre 1 et leur moment d'ordre 2. Cependant, les échantillons d'observation ne peuvent représenter l'ensemble de la population de manière exacte. Il est donc nécessaire d'estimer les paramètres de la distribution en utilisant les valeurs mesurées. Pour ce faire, nous utiliserons des estimateurs d'espérance et de variance.

Les données acquises durant une expérience correspondent à plusieurs observations d'une même variable aléatoire. Par exemple, on jette un dé dix fois et on conserve le nombre obtenu lors de chaque jet. Chaque jet est indépendant et est associé à une même loi de distribution. On peut donc considérer que les données acquises correspondent à l'observation de dix variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Il est nécessaire de définir ce type d'échantillon, les échantillons aléatoires.

Définition 74 *Echantillon aléatoire*

Soit $\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_N \end{bmatrix}$ *un jeu de variables aléatoires. Si ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de densité de probabilité* $f_X(x)$*, alors* $\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_N \end{bmatrix}$ *est un échantillon aléatoire de densité de probabilité* $f_X(x)$*.*

Une fois qu'un échantillon aléatoire est obtenu (e.g. par la mesure), on peut effectuer des opérations combinant les valeurs qu'ils contient. Ces opérations sont appelées des statistiques.

Définition 75 *Statistique et densité empirique*

Soit T *une fonction dont le domaine inclus l'espace des réalisations des variables aléatoires* $X_1, \dots, X_N$*.*

La variable aléatoire $Y = T(X_1, \dots, X_N)$ *est appelée une statistique. La densité de probabilité de* Y *est appelée densité empirique de* Y*.*

Trois exemples de statistiques sont très souvent utilisés :

- La moyenne (ou espérance) empirique :

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{A.25}$$

- La variance empirique :

$$S_{N-1}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \bar{X}_N\right)^2 \tag{A.26}$$

- L'écart type empirique non biaisé :

$$S_{N-1} = \sqrt{S_{N-1}^2} \tag{A.27}$$

Propriété 76 *Propriétés statistiques de la moyenne et de la variance empirique*

Soient $X_1, \dots, X_N$ *des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont l'espérance et la variance sont données par :*

$$E[X_i] = \mu$$
$$var(X_i) = \sigma^2$$

On a alors :

1. $E\left[\bar{X}_N\right] = \mu$ *(loi des grands nombre, voir Définition 72)*
2. $var\left(\bar{X}_N\right) = \frac{\sigma^2}{N}$ *(Théorème central limite, voir Définition 73)*
3. $E\left[S_{N-1}^2\right] = \sigma^2$
4. $var\left(S_{N-1}^2\right) = \frac{\mu_4}{N} + \left(\frac{2}{N-1} - \frac{3}{N}\right)\sigma^4$, *avec* $\mu_4 = E\left[(X_i - \mu)^4\right]$

Ces propriétés (76) établissent des relations entre statistiques (moyenne empirique $\bar{X}_N$, variance empirique S_{N-1}^2) et paramètres d'une population (espérance μ, variance σ). Les points 1 et 3 signifie que $\bar{X}_N$ est un estimateur non biasé de μ et que S_{N-1}^2 est un estimateur non biaisé de la variance. Les points 2 et 4 montrent que lorsque $N \to \infty$, les variances de la moyenne empirique et de la variance empirique tendent vers 0. De cette manière, l'estimation de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_i est de plus en plus fiable avec l'augmentation du nombre d'échantillon. Cette propriété correspond à la consistance des estimateurs.

Remarque 77 *Un autre estimateur de la variance est couramment utilisé :*

$$S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}_N\right)^2 \tag{A.28}$$

Cet estimateur est consistant. On peut facilement montrer que $var(S_N)$ *tend vers* 0 *quand* N *tend vers l'infini. Cet estimateur est cependant biaisé car* $E\left[S_N^2\right] = \frac{N-1}{N}\sigma^2 \neq \sigma^2$.

A.7 Vecteurs aléatoires

Au lieu de s'intéresser à une variable aléatoire à une dimension, on peut être amené à considérer plusieurs variables aléatoires simultanément. Ces v.a., qui peuvent être dépendantes ou non les unes entre elles (donc ayant des distributions pouvant être jointes), sont stockées dans ce que l'on appelle un vecteur aléatoire. On défini un vecteur aléatoire de k variables aléatoires par :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k \tag{A.29}$$

Définition 78 *Fonction de répartition et densité de probabilité d'un vecteur aléatoire*

La fonction de répartition $F_{\boldsymbol{X}}$ *d'un vecteur aléatoire* $\boldsymbol{X}$ *de* k *variables aléatoires* X_i *est définie par :*

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_k) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k\right) \tag{A.30}$$

et sa densité de probabilité $f_{\boldsymbol{X}}$ *est définie telle que :*

$$\mathbb{P}\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k\right) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_{\boldsymbol{X}}(u_1, \ldots, u_k)\, du_1 \ldots du_k \tag{A.31}$$

A.7.1 Espérance, covariance et leur estimés

Comme pour le cas à une dimension, on défini :
- L'espérance :

$$E\left[\mathbf{X}\right] = \begin{bmatrix} E\left[X^{(1)}\right] \\ \vdots \\ E\left[X^{(k)}\right] \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\mu} \tag{A.32}$$

- La variance/covariance : l'utilisation de vecteurs aléatoires au lieu de variables aléatoires nécessite d'utiliser la notion de covariance. La variance en est un cas particulier, où $i = j$ dans :

$$\operatorname{cov}\left(X^{(i)}, X^{(j)}\right) = E\left[\left(X^{(i)} - E\left[X^{(i)}\right]\right)\left(X^{(j)} - E\left[X^{(j)}\right]\right)\right] \tag{A.33}$$

On considèrera dorénavant la matrice de covariance, dont la diagonale correspond aux variances des variables aléatoires $X^{(i)}$ et les termes (i, j) correspondent aux covariances entre les v.a. $x^{(i)}$ et $x^{(j)}$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(\mathbf{X}\right) &= E\left[\left(\mathbf{X} - [\mathbf{X}]\right)\left(\mathbf{X} - [\mathbf{X}]\right)^H\right] \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{cov}\left(X^{(1)}, X^{(1)}\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(X^{(1)}, X^{(k)}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}\left(X^{(k)}, X^{(1)}\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(X^{(k)}, X^{(k)}\right) \end{bmatrix} \\ &\equiv \Sigma \end{aligned}$$

Propriété 79 *Propriétés covariance d'un vecteur aléatoire*
- *Constante déterministe :* $cov\left(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\right) = cov\left(\boldsymbol{X}\right)$
- *Facteur déterministe :* $cov\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{A}\, cov\left(\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{A}^H$

Concernant les statistique, comme pour le cas à une dimension, on défini :
- La moyenne empirique (estimateur non biaisé de l'espérance) :

$$\bar{\mathbf{X}}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i \tag{A.34}$$

- La variance empirique (estimateur non biaisé de la variance) :

$$\Sigma_{N-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_N\right)\left(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_N\right)^H \tag{A.35}$$

avec $\mathbf{X}_i$ des vecteurs aléatoires i.i.d. entre eux.

A.7.2 Distribution normale pour un vecteur aléatoire

Définition 80 *Distribution normale pour un vecteur aléatoire*
Le vecteur aléatoire

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

a une distribution à k dimension $\boldsymbol{X} \sim (\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ si sa densité de probabilité, qui est une fonction à k variables, est définie par :

$$f_X\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^H \Sigma (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})} \tag{A.36}$$

avec

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(k)} \end{bmatrix}$, *une réalisation de* $\boldsymbol{X}$
- $\boldsymbol{\mu}$, *l'espérance définie par l'Equation*(A.32)
- Σ, *la matrice de covariance définie par l'Equation*(A.33)
- $|\Sigma|$, *le déterminant de la matrice de covariance* Σ
- $f_X\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right) : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}$

A.7.3 Théorème central limite pour un vecteur aléatoire

Soit $\mathbf{X}_i$ un échantillon de N vecteurs aléatoires i.i.d de dimension k ayant une distribution quelconque d'espéreance $E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ et de covariance $\operatorname{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma$. Comme pour le cas à une dimension, le théorème central limite peut être écrit pour la moyenne empirique $\bar{\mathbf{X}}_N$:

$$\sqrt{N}\left(\bar{\mathbf{X}}_N - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left([0]_{N\times 1}, \Sigma\right) \tag{A.37}$$

ou, de façon équivalente :

$$\sqrt{N}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\left(\bar{\mathbf{X}}_N - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left([0]_{N\times 1}, I_N\right) \tag{A.38}$$

Annexe $\mathcal{B}$

Quelques notions en algèbre linéaire

Sommaire

B.1 Quelques notions d'algèbre 291
B.2 Quelques notions d'analyse 293

B.1 Quelques notions d'algèbre

Définition 81 *Produit de Kronecker*

Soient les matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Le produit de Kronecker de A et B est la matrice block $A \otimes B \in \mathbb{C}^{mp\times nq}$ définie par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Définition 82 *Opérateur de vectorisation*

Soit la matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. L'opération de vectorisation est l'opération qui concatène les colonnes de A dans un vecteur $vec\,(A) \in \mathbb{C}^{mn\times 1}$ donné par :

$$vec\,(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m2} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Définition 83 *Matrice de permutation*

Soit $E_{k,l}^{a,b}$ la matrice de taille $a \times b$ nulle partout sauf en (k,l) où elle vaut 1. On défini une matrice de permutation $\mathcal{P}_{a,b}$ de taille $(ab \times ab)$ par :

$$\mathcal{P}_{a,b} = \sum_{k=1}^{a} \sum_{l=1}^{b} E_{k,l}^{a,b} \otimes E_{l,k}^{b,a} = \mathcal{P}_{a,b}^{T} \tag{B.3}$$

On remarquera qu'une matrice de permutation est orthonormale. Par conséquence on aura la propriété $\mathcal{P}_{a,b}^{-1} = \mathcal{P}_{a,b}^{T}$

Propriété 84 *Propriétés du produit de Kronecker*
Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{C}^{r \times s}$ et le scalaire k.

- *Bilinéarité et associativité :*

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \\ (kA) \otimes B &= A \otimes (kB) = k\,(A \otimes B) \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C) \end{aligned}$$

- *Non commutativité : En général $A \otimes B$ et différent de $B \otimes A$. Cependant si $A \otimes B$ et $B \otimes A$ peuvent être reliées à partir de matrices de permutation (Définition 83) $\mathcal{P}_{m,p}$ et $\mathcal{P}_{n,q}$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m,p}\,(A \otimes B)\,\mathcal{P}_{n,q}^{T} &= B \otimes A \\ \mathcal{P}_{m,p}\,(A \otimes B) &= (B \otimes A)\,\mathcal{P}_{n,q} \end{aligned}$$

- *Produit*

$$(A \otimes B)\,(C \otimes D) \neq (AC) \otimes (BD)$$

- *Inversion*

$$(A \otimes B)^{-1} \neq A^{-1} \otimes B^{-1}$$

- *Transposition*

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^{T} &= A^{T} \otimes B^{T} \\ (A \otimes B)^{H} &= A^{H} \otimes B^{H} \end{aligned}$$

- *Opérateur vectorisation : Avec les conditions $n = p$ et $q = r$ sur les dimensions des matrices A, B et C, on a par vectorisation :*

$$vec\,(ABC) = \left(C^{T} B^{T} \otimes I_m\right)(vec\,(A) = \left(C^{T} \otimes A\right)(vec\,(B) = (I_s \otimes AB)\,(vec\,(C)$$

- *Opérateur vectorisation et transposition :*

$$vec\left(\Delta A^{T}\right) = \mathcal{P}_{m,n} vec\,(\Delta A)$$

Lemme 85 *Inversion Matricielle*
Soit une matrice bloc $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *inversible avec* A *et* D *inversibles. Si* $\left(A - BD^{-1}C\right)$ *et* $\left(D - CA^{-1}B\right)$ *sont inversibles, alors*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

où
- $K = \left(A - BD^{-1}C\right)^{-}1 = A^{-1} + A{-}1BNCA^{-1}$
- $L = -KBD^{-1} = -A^{-1}BN$
- $M = -D{-}1CK = -NCA^{-}1$
- $N = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-}1 = D^{-1} + D{-}1CKBD^{-1}$

B.2 Quelques notions d'analyse

Définition 86 *factoriel* n
soit n *un entier positif. On défini le factoriel* n *par :*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \tag{B.5}$$

Définition 87 *Développement en série de Taylor*
Soit f *une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle ou complexe et* a *un point au voisinage duquel la fonction est définie. La série de Taylor de* f *en* a *est la série de fonctions :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{B.6}$$

avec $f^{(n)}(a)$ *la dérivée* n^{me} *de* f *au point* a.

Définition 88 *Approximation de taylor au premier ordre*
Soit f *une fonction dérivable d'une variable réelle ou complexe et* a *un point au voisinage duquel la fonction est définie. L'approximation de Taylor au premier ordre de* f *en* a *est :*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \tag{B.7}$$

avec $f'(a)$ *la dérivé première de* f *au point* a.

Annexe C

Résultats de validation du système poutre

Sommaire

C.1 Validation sur le système poutre 296

C.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 296

C.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 298

C.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 300

C.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 302

C.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 304

C.2 Validation sur le système poutre avec une entrée inconnue 306

C.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 306

C.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 307

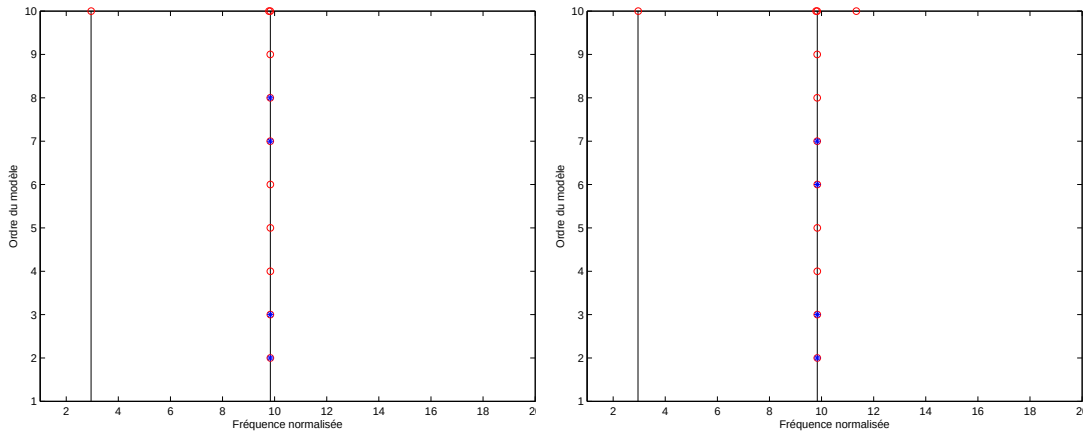
C.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 310

C.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 312

C.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 314

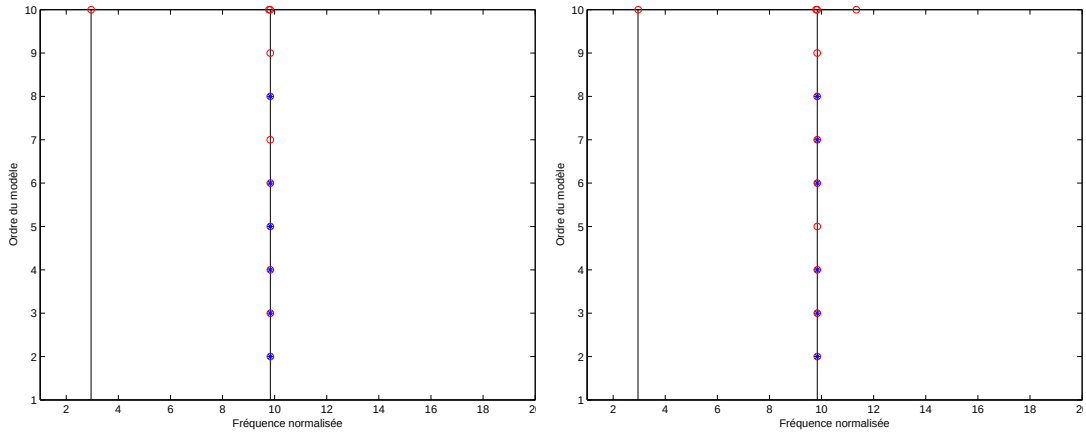
C.1 Validation sur le système poutre

C.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

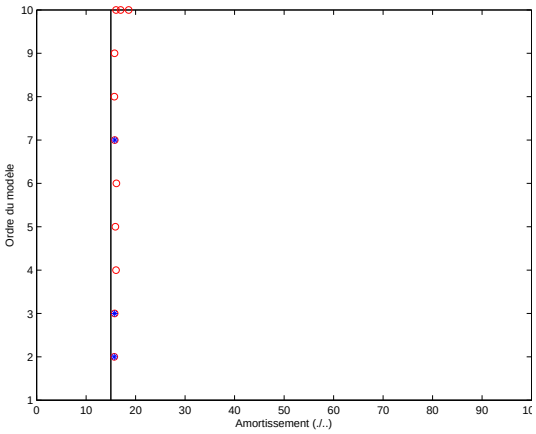
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



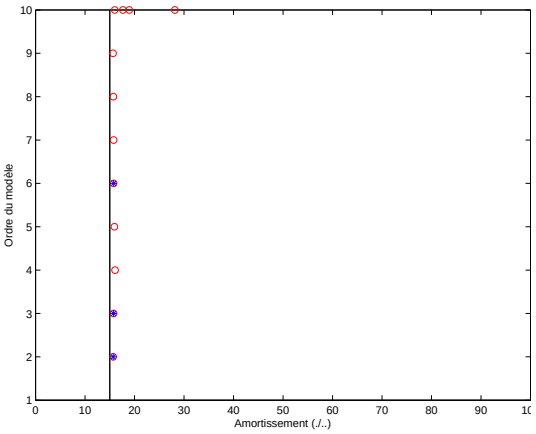
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

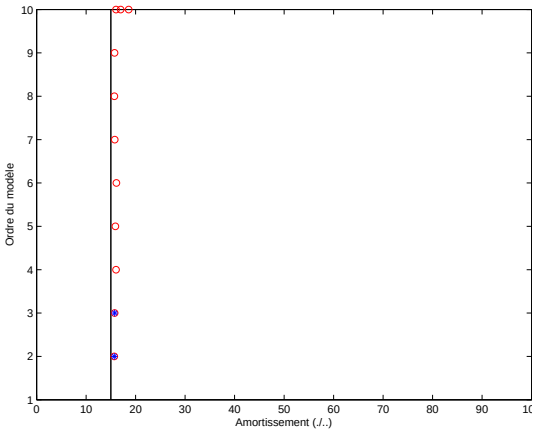
FIGURE C.1 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



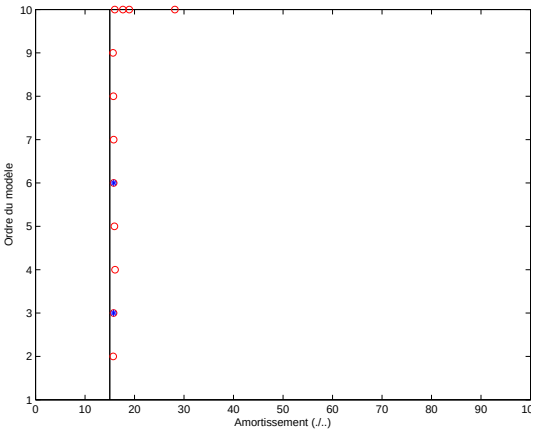
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



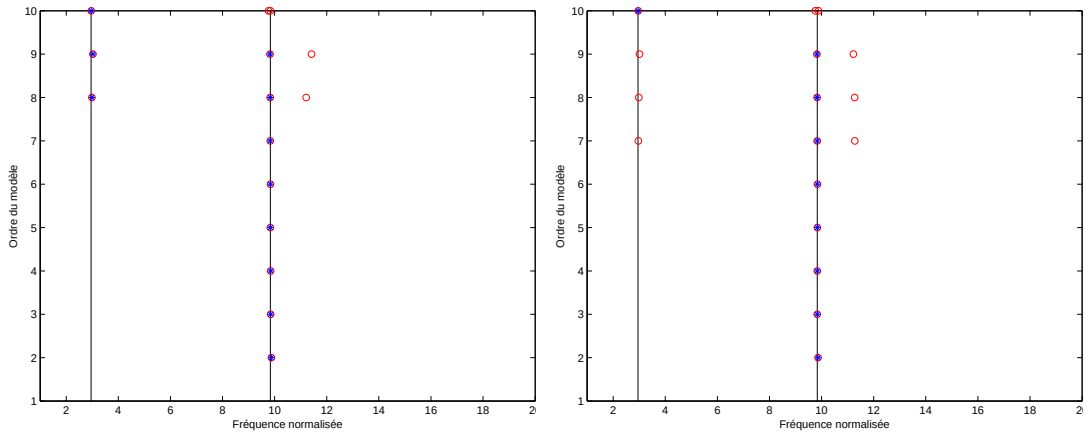
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

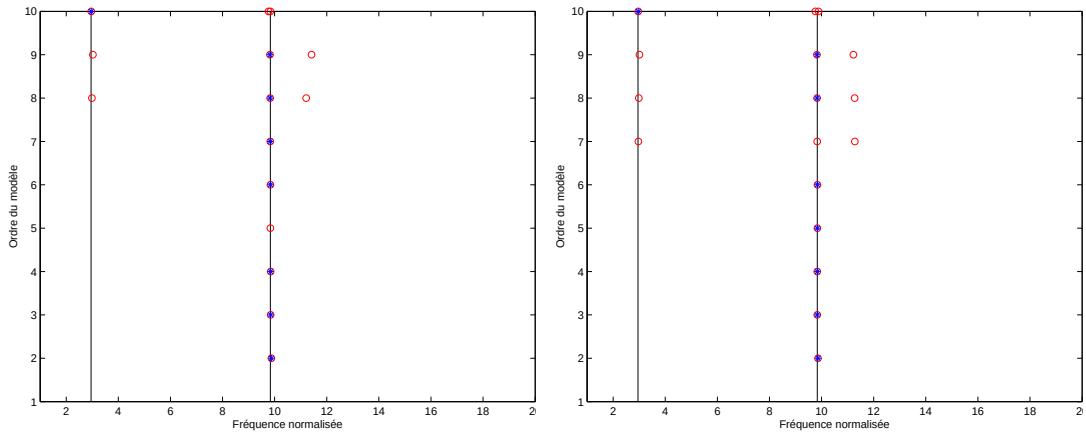
FIGURE C.2 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

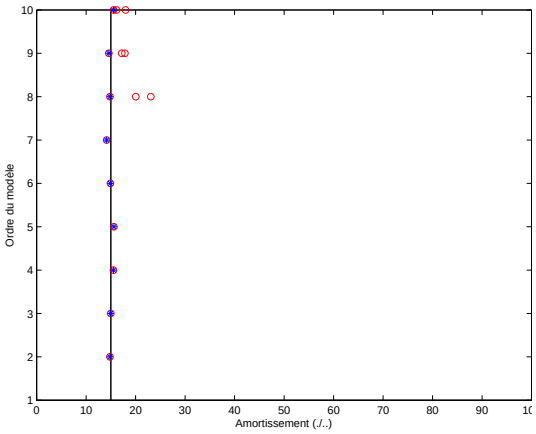
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



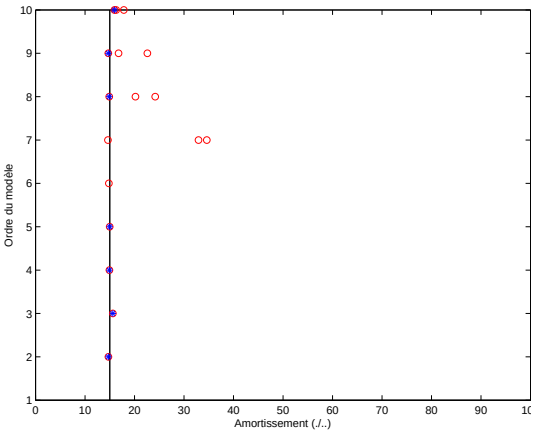
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

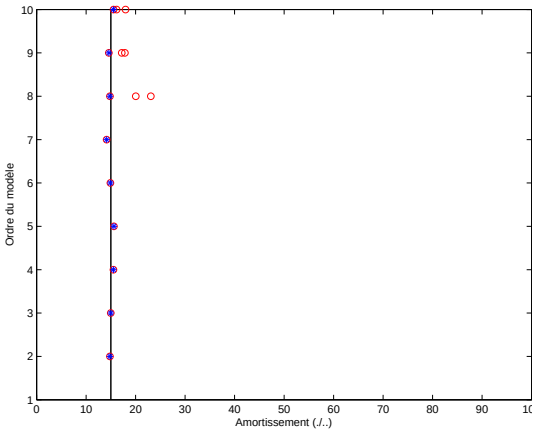
FIGURE C.3 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



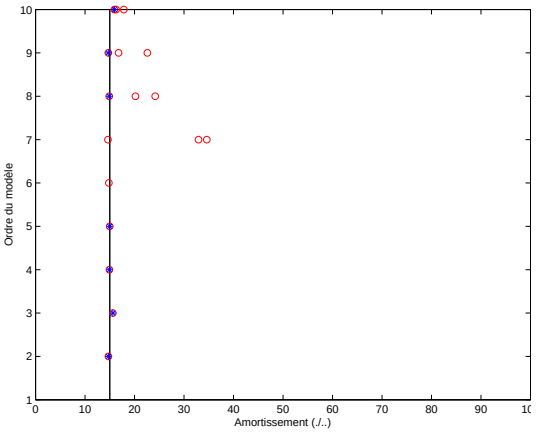
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



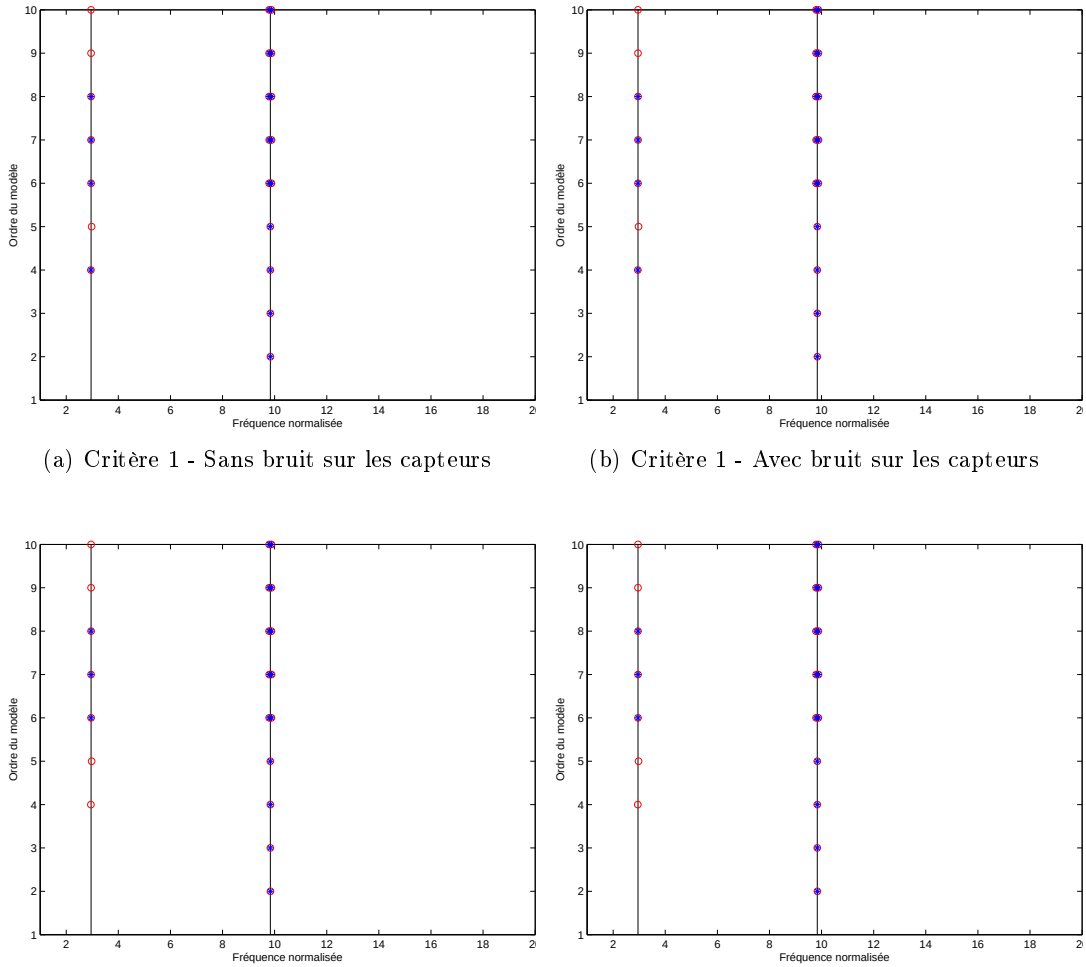
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.4 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}



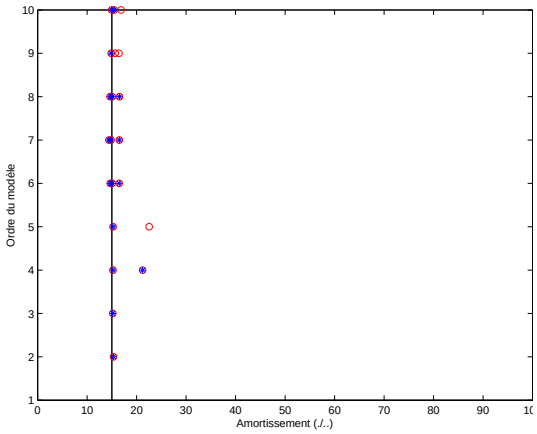
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

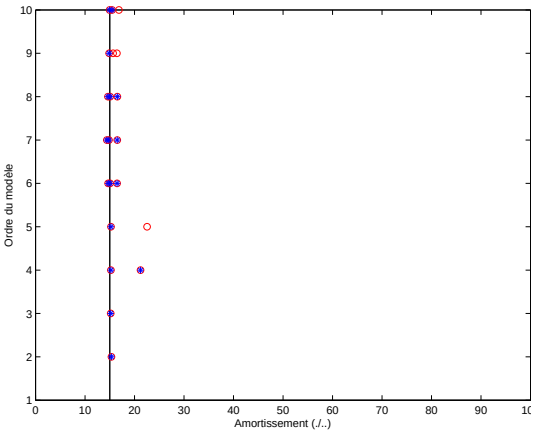
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

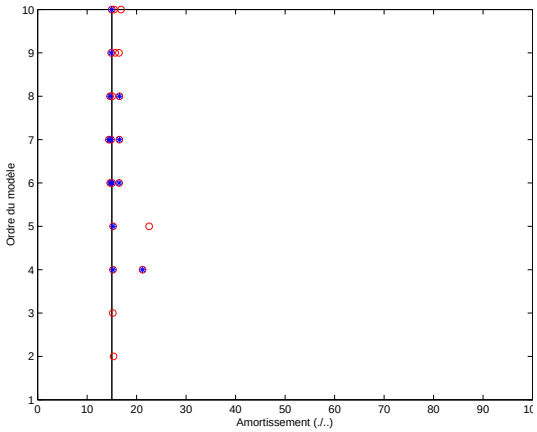
FIGURE C.5 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



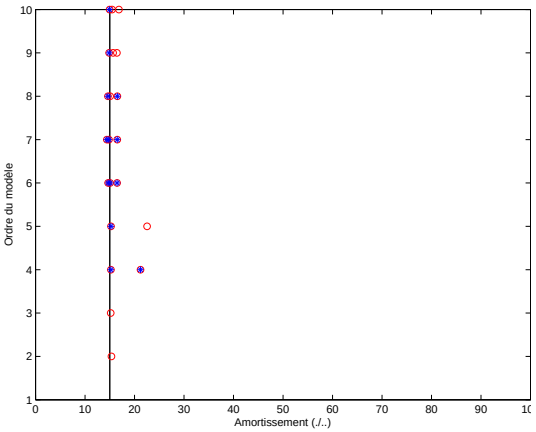
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



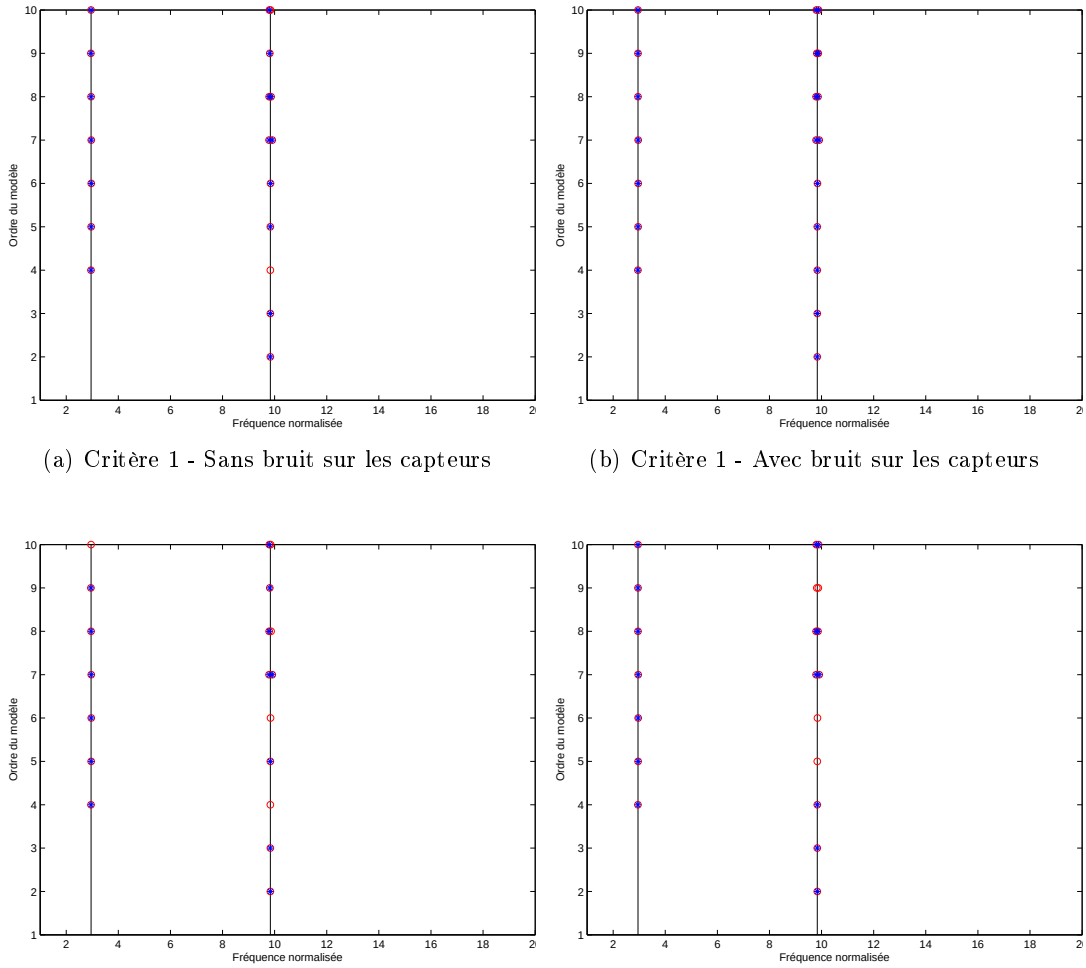
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.6 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}



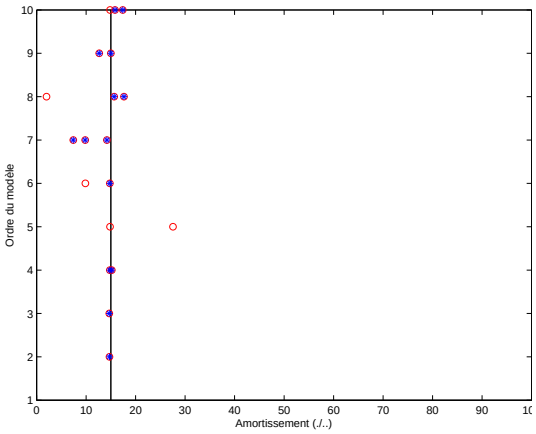
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

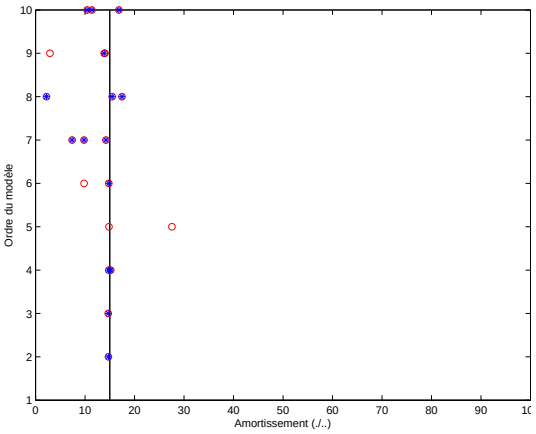
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

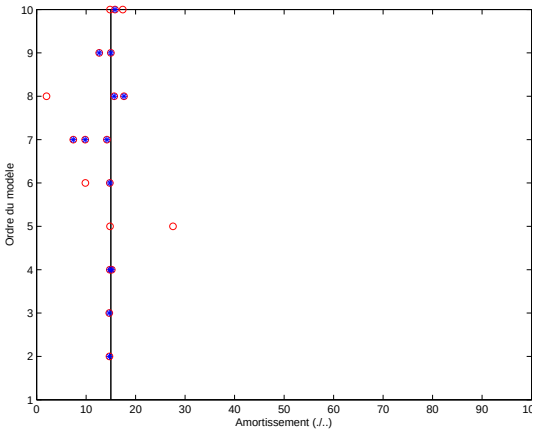
FIGURE C.7 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



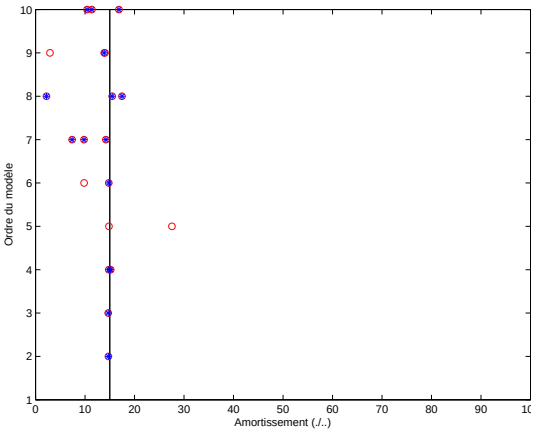
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



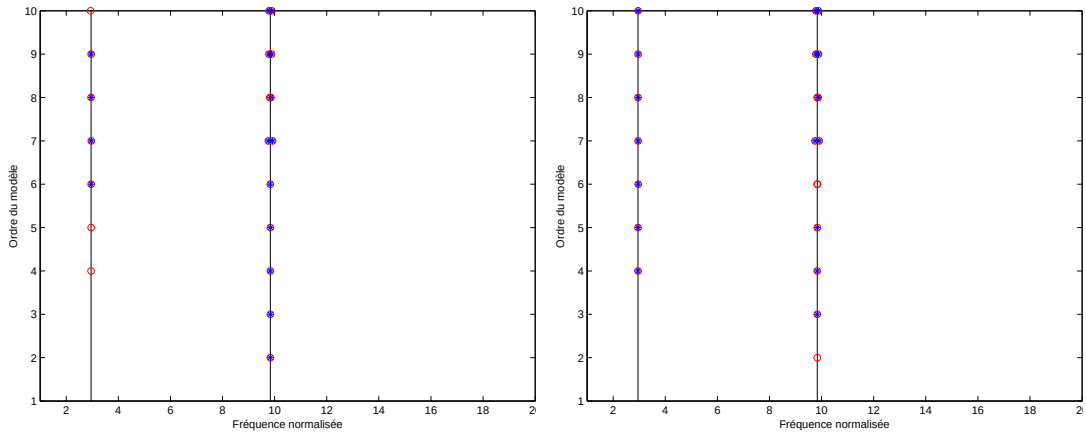
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

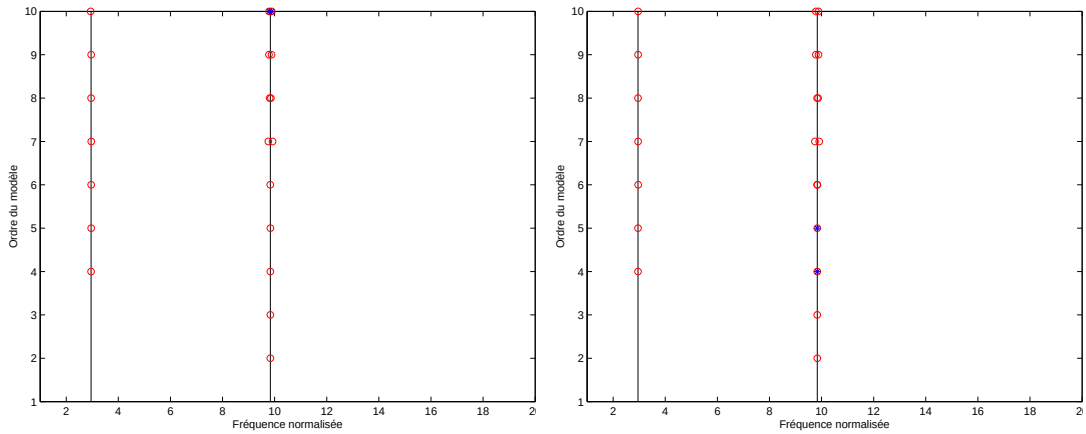
FIGURE C.8 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

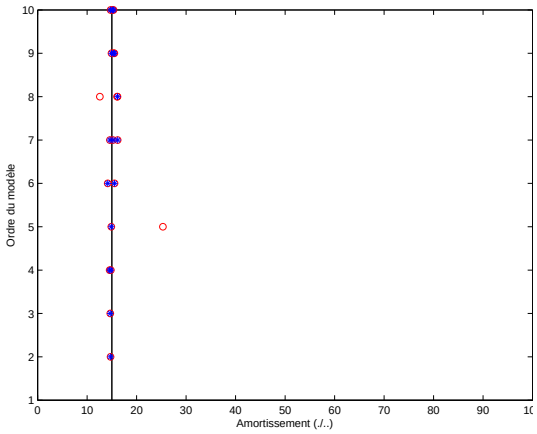
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



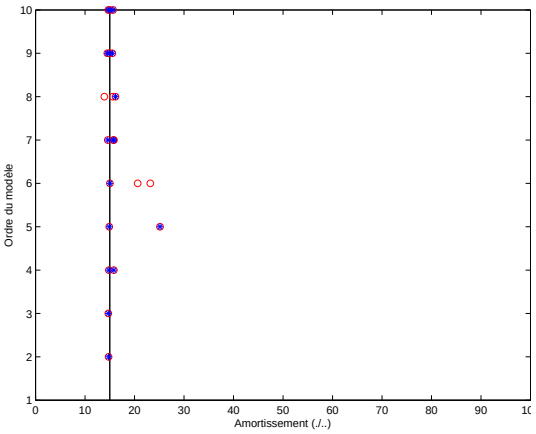
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

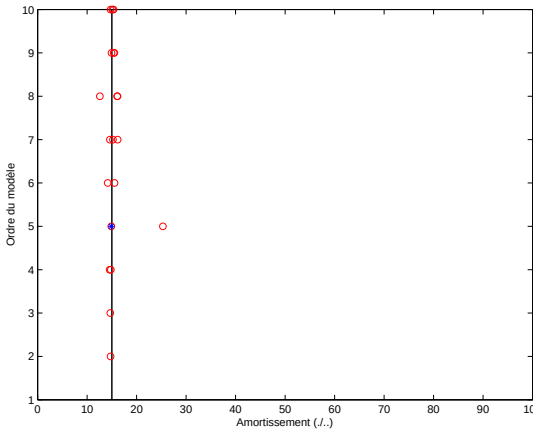
FIGURE C.9 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



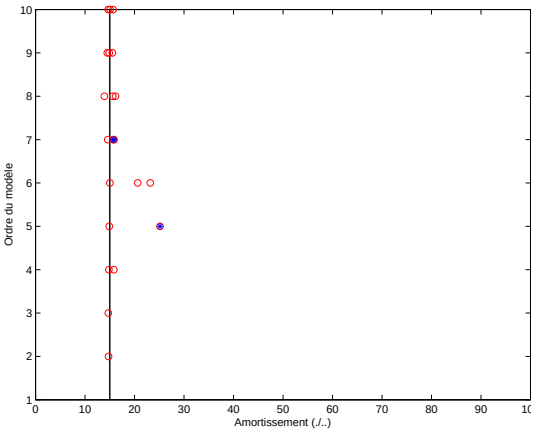
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

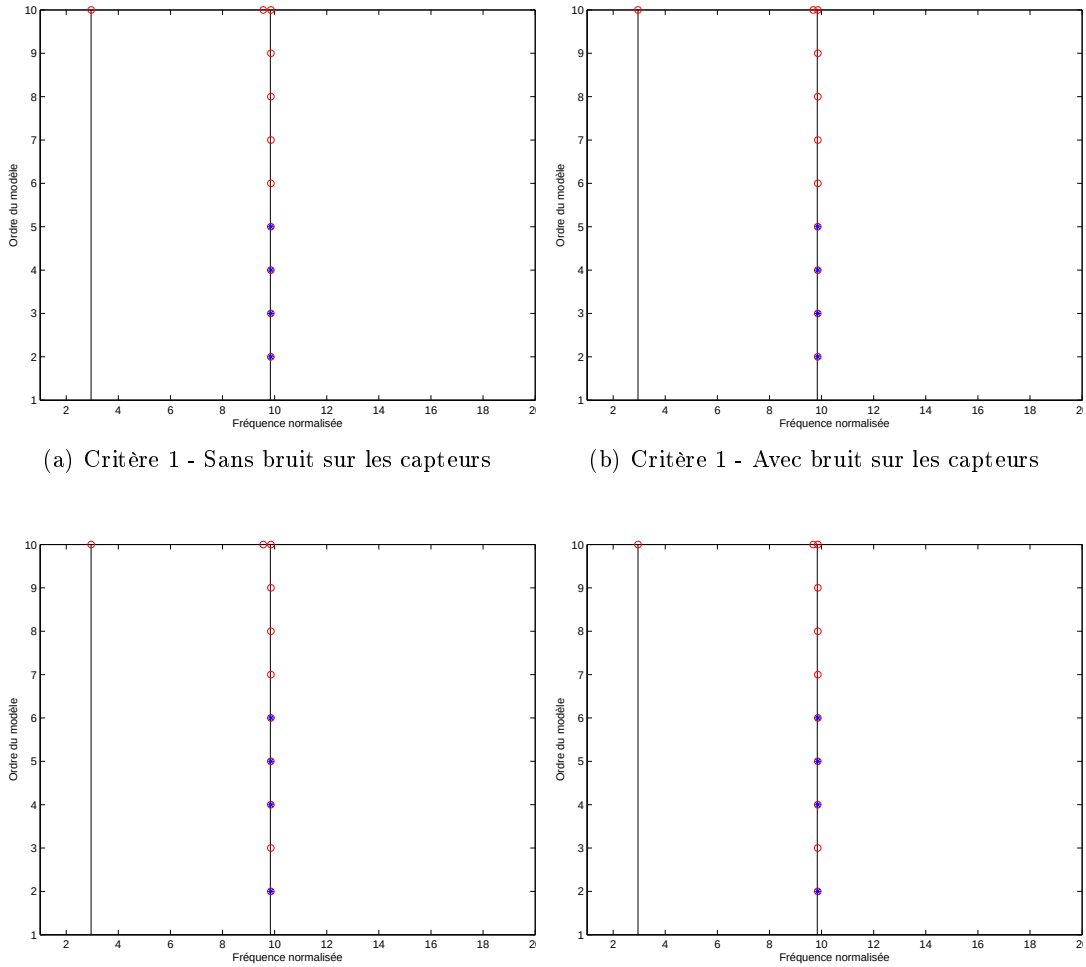


(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.10 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.2 Validation sur le système poutre avec une entrée inconnue

C.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}



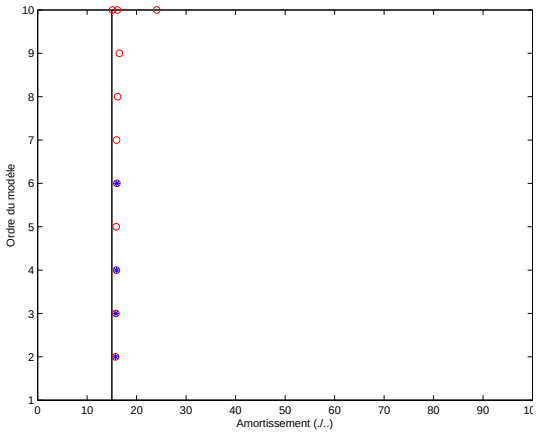
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

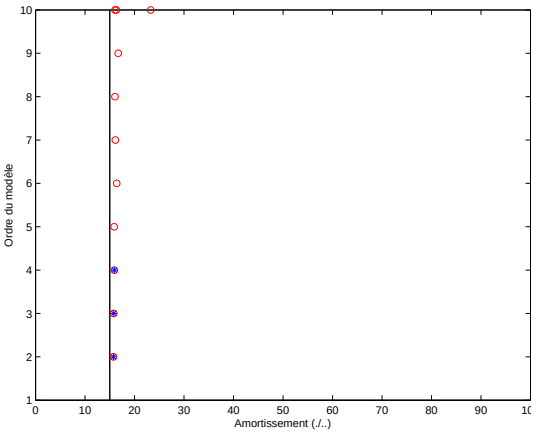
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

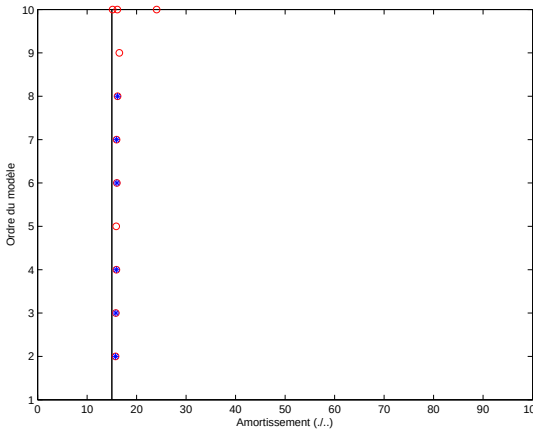
FIGURE C.11 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



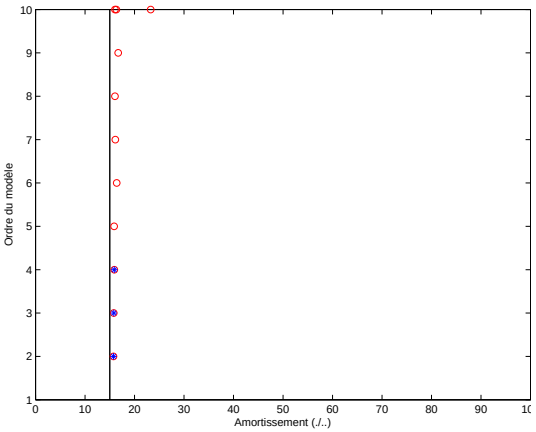
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



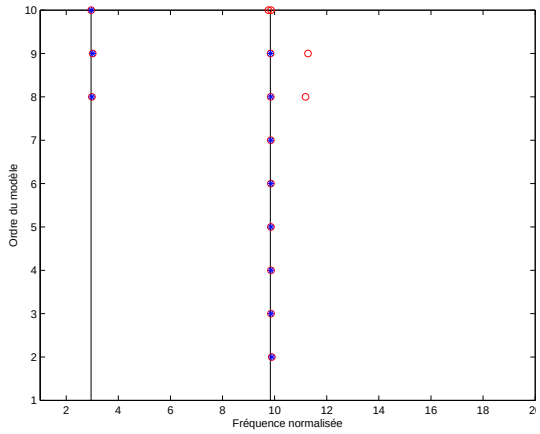
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



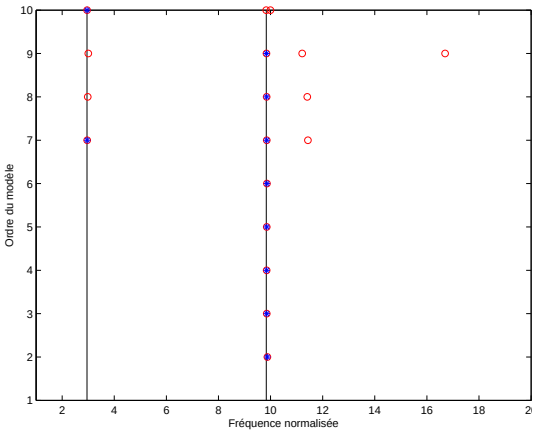
(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.12 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

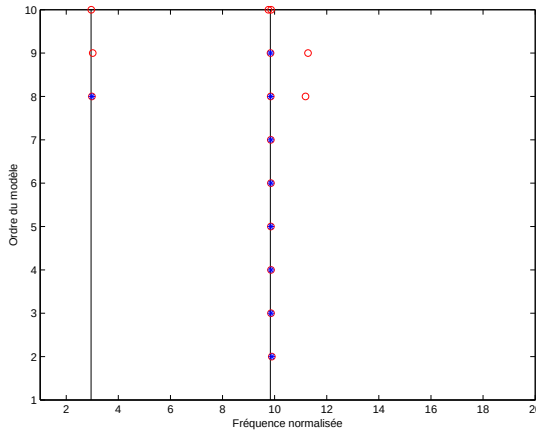
C.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}



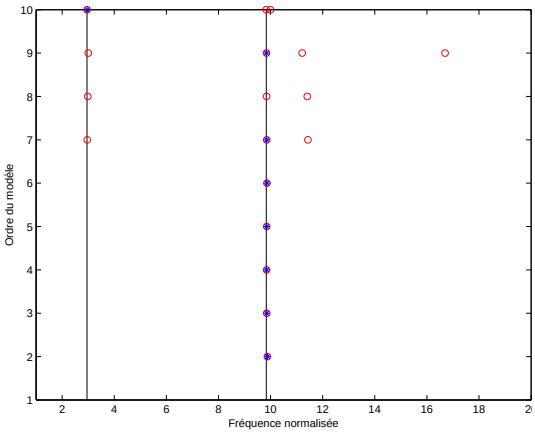
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

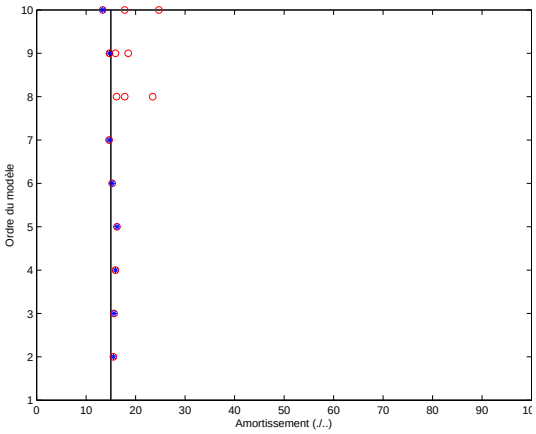


(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

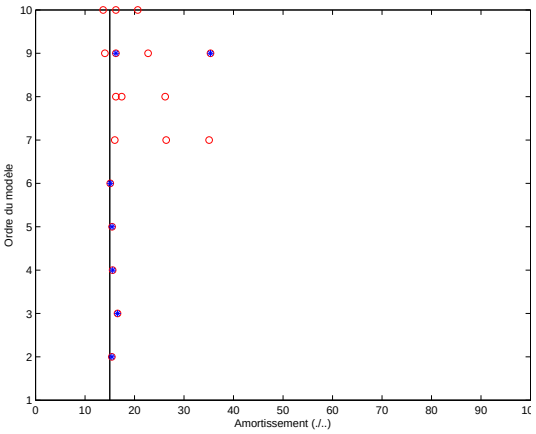


(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

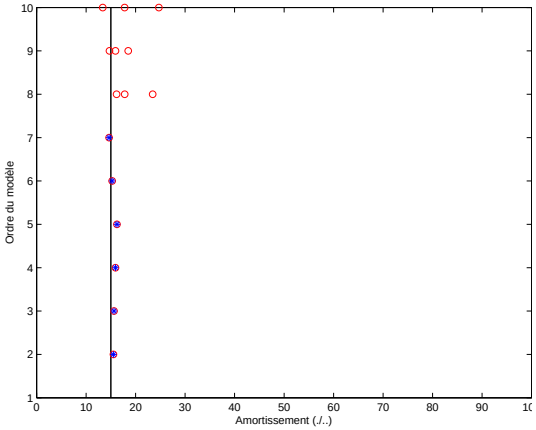
FIGURE C.13 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



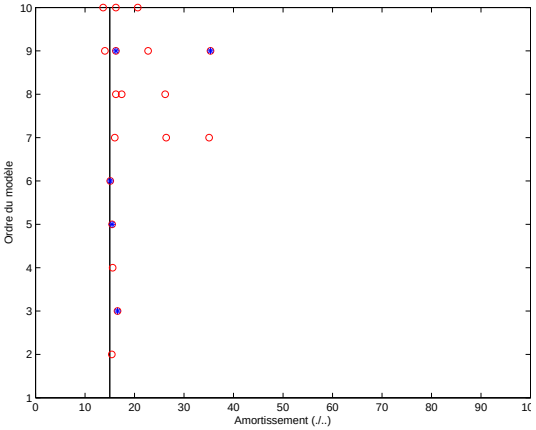
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



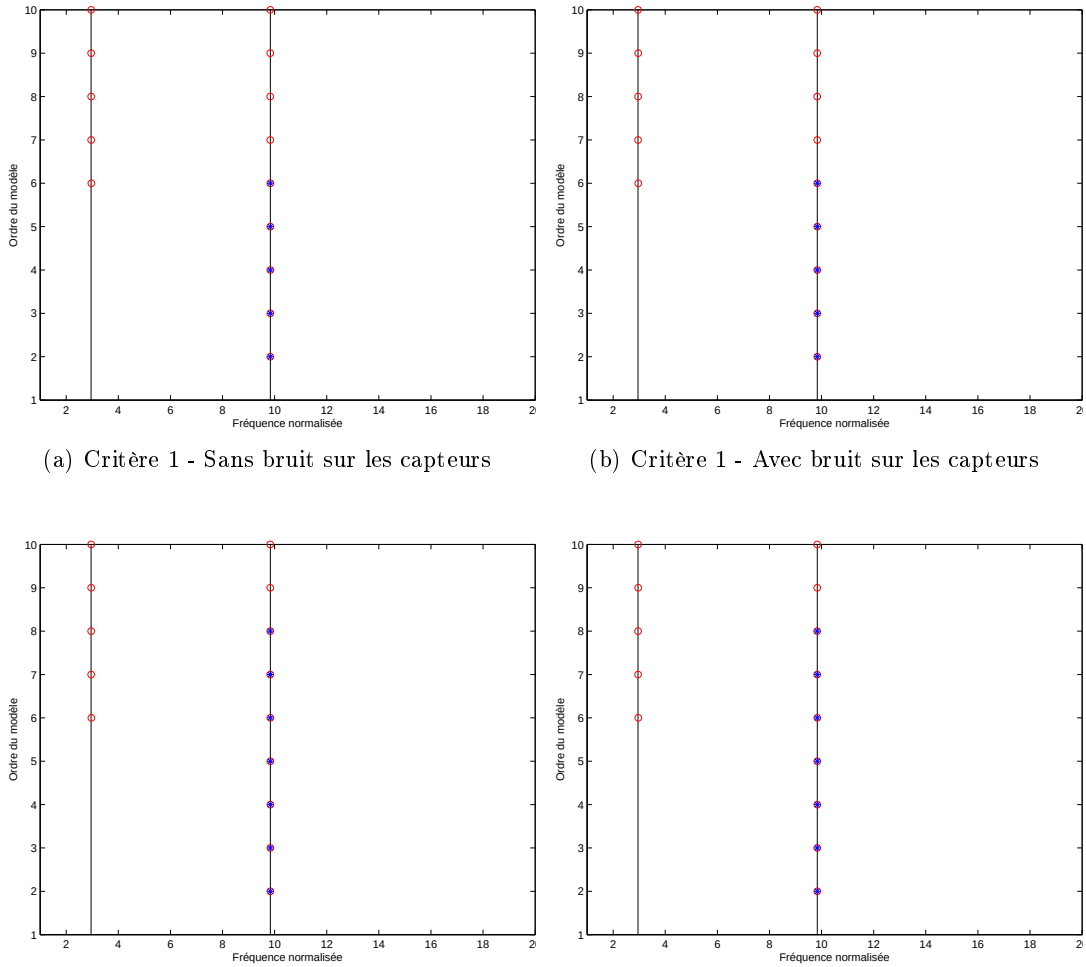
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.14 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}



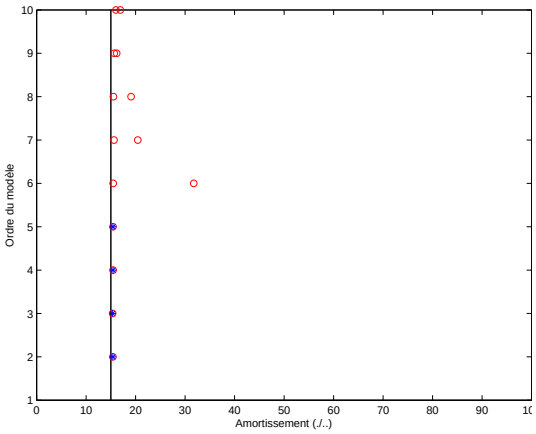
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

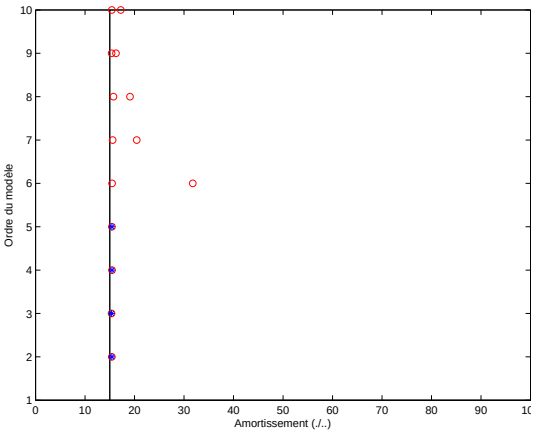
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

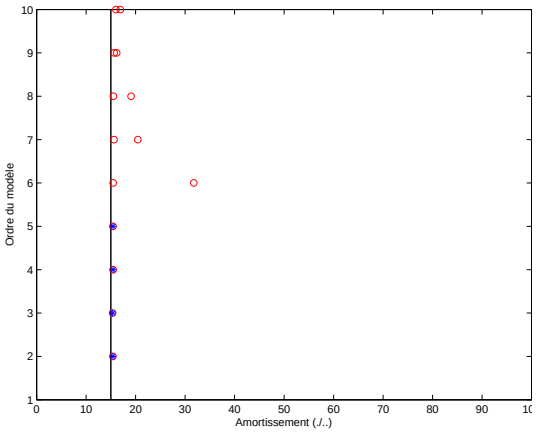
FIGURE C.15 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



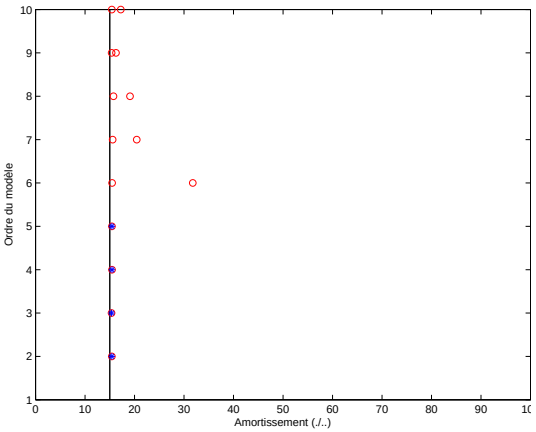
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



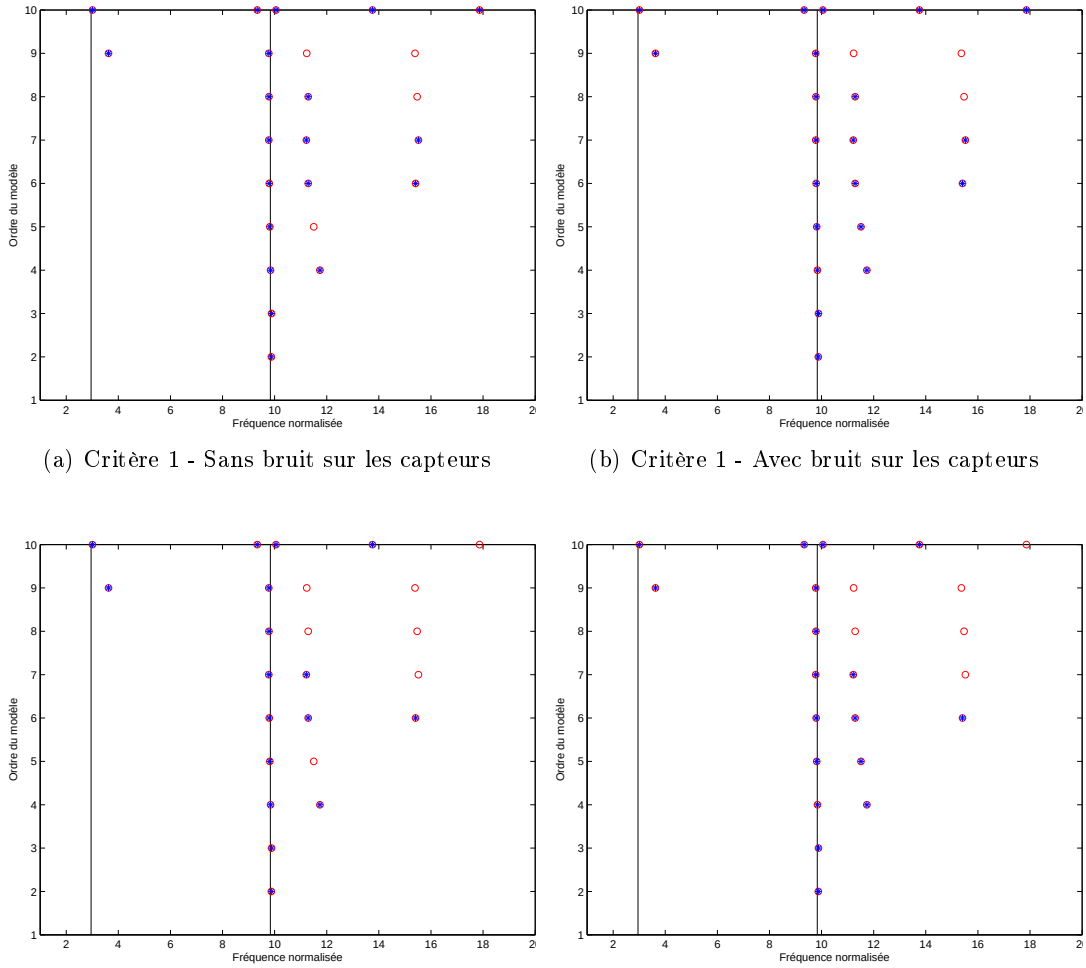
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.16 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}



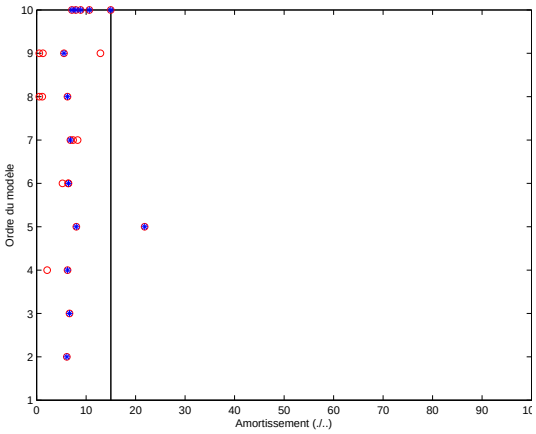
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

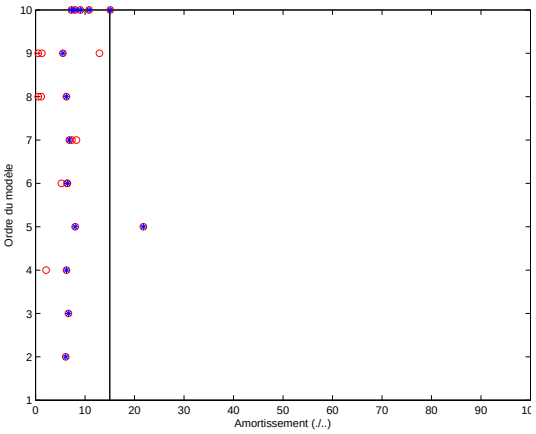
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

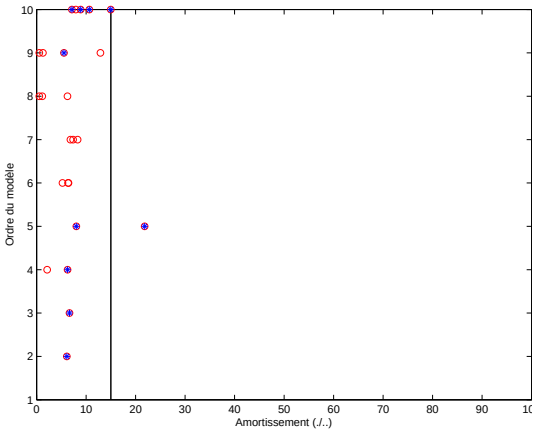
FIGURE C.17 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



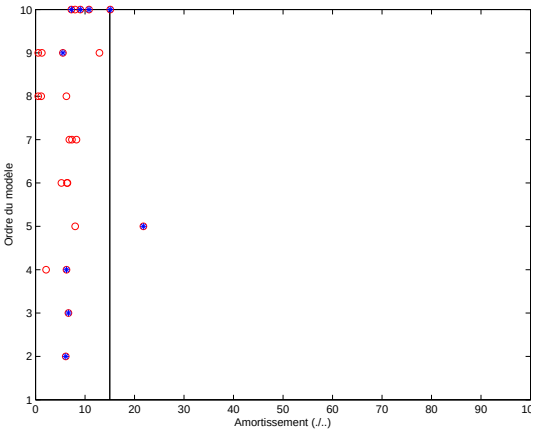
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



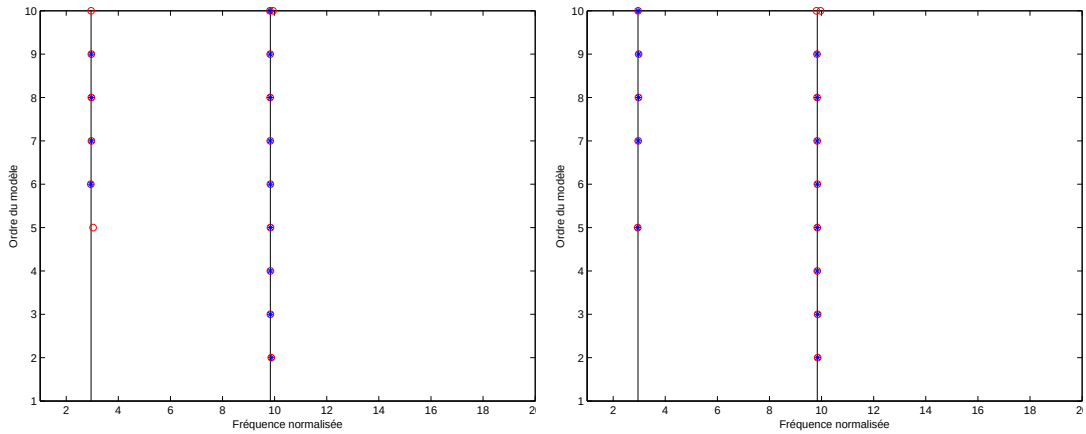
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

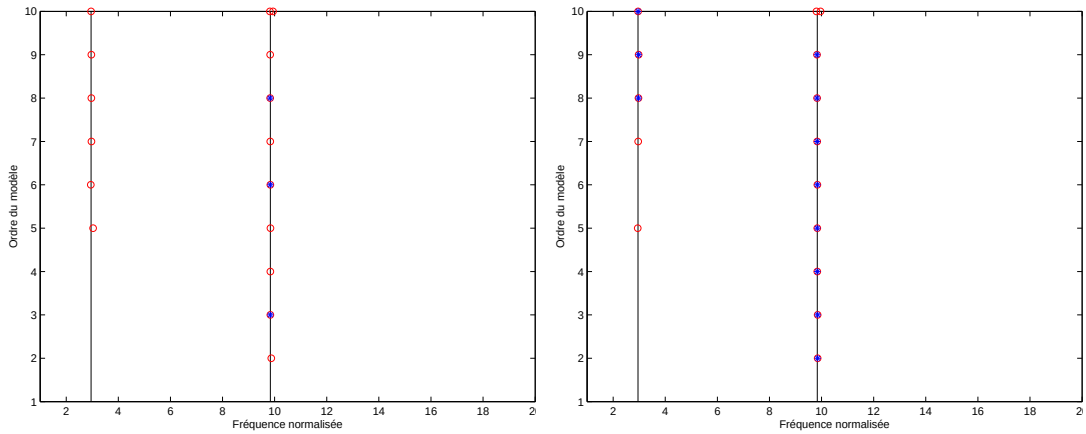
FIGURE C.18 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

C.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

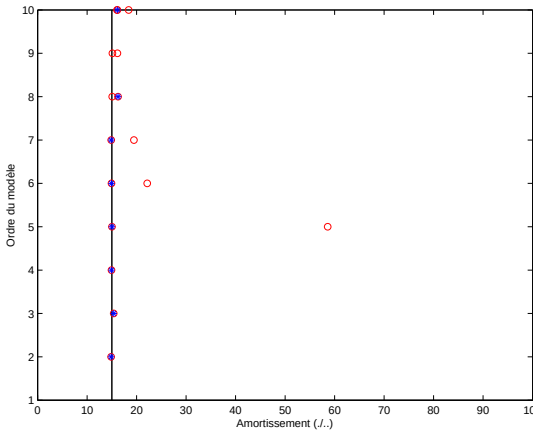
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



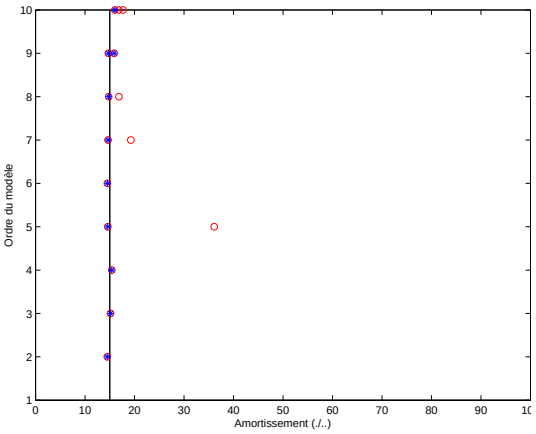
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

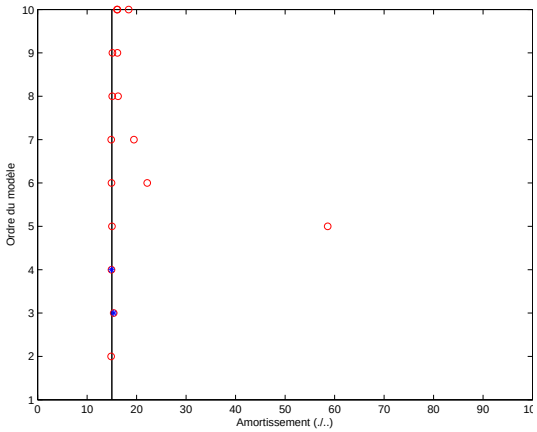
FIGURE C.19 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10



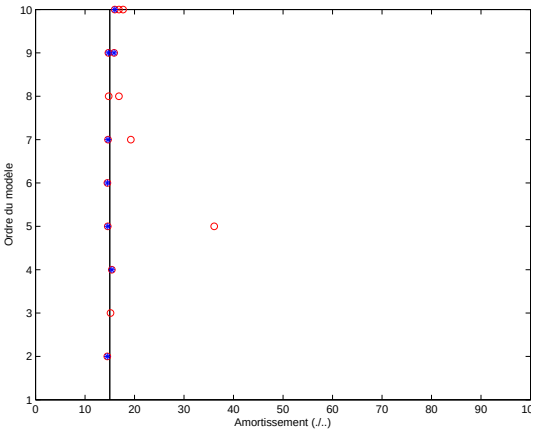
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE C.20 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10

Annexe $\mathcal{D}$

Résultats de validation du système avion

Sommaire

D.1 Validation sur le système avion sol 318

D.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 318

D.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 320

D.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 322

D.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 324

D.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 326

D.2 Validation sur le système avion vol 328

D.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 328

D.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 330

D.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 332

D.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 334

D.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 336

D.3 Validation sur le système avion vol avec turbulence 338

D.3.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov} 338

D.3.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort} 340

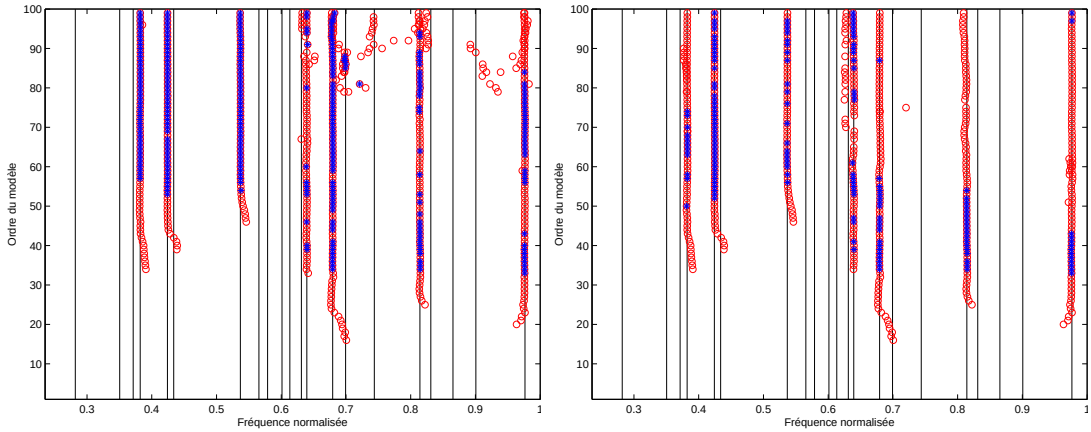
D.3.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov} 342

D.3.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort} 344

D.3.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl} 346

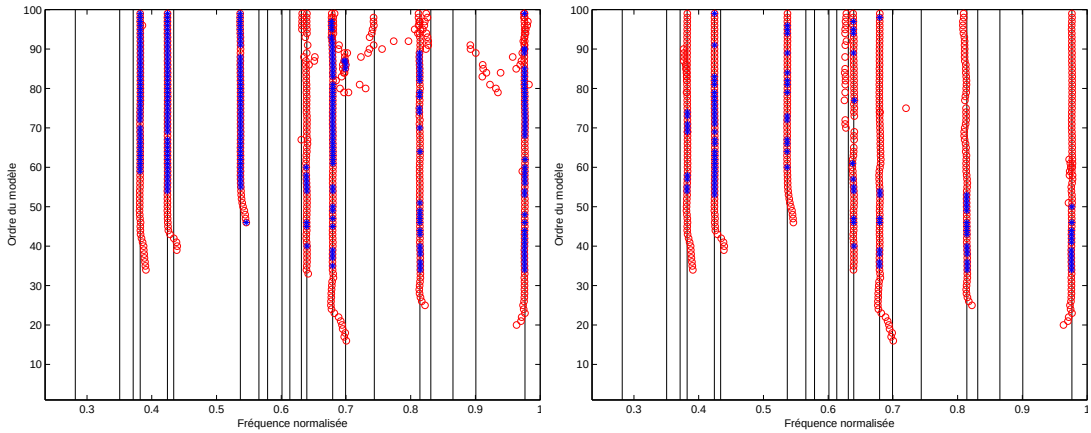
D.1 Validation sur le système avion sol

D.1.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

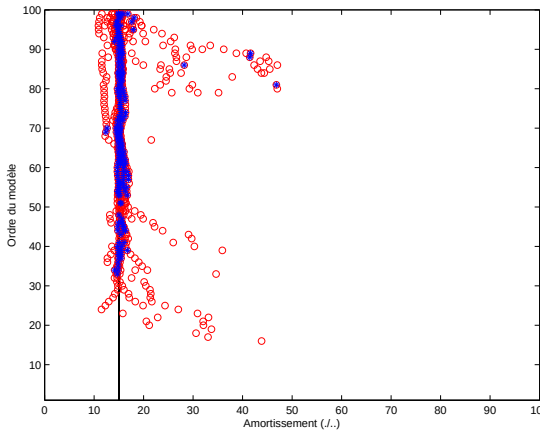
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



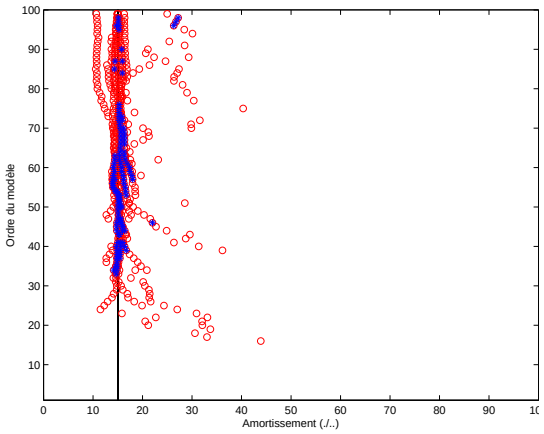
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

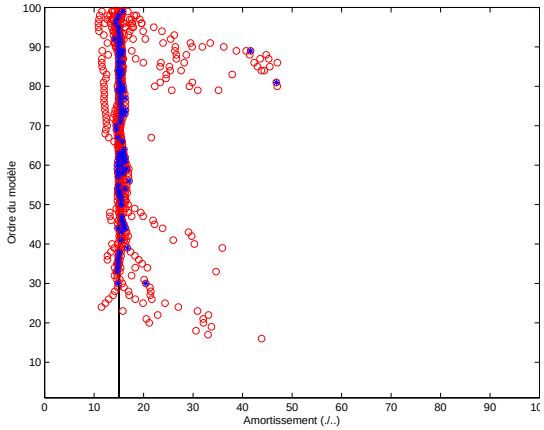
FIGURE D.1 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



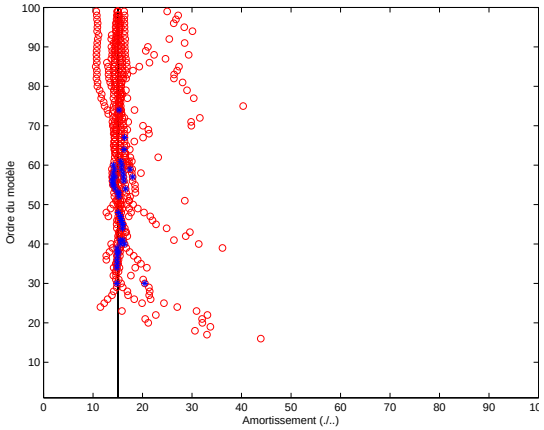
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



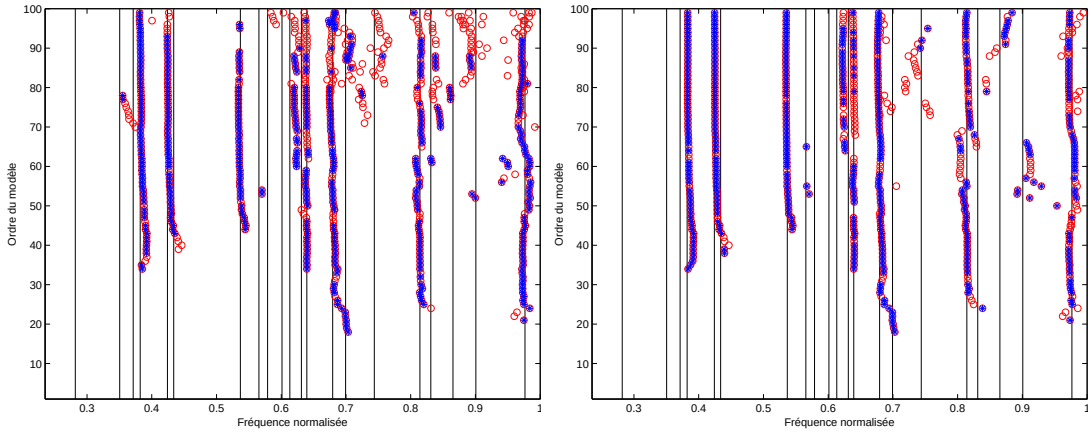
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

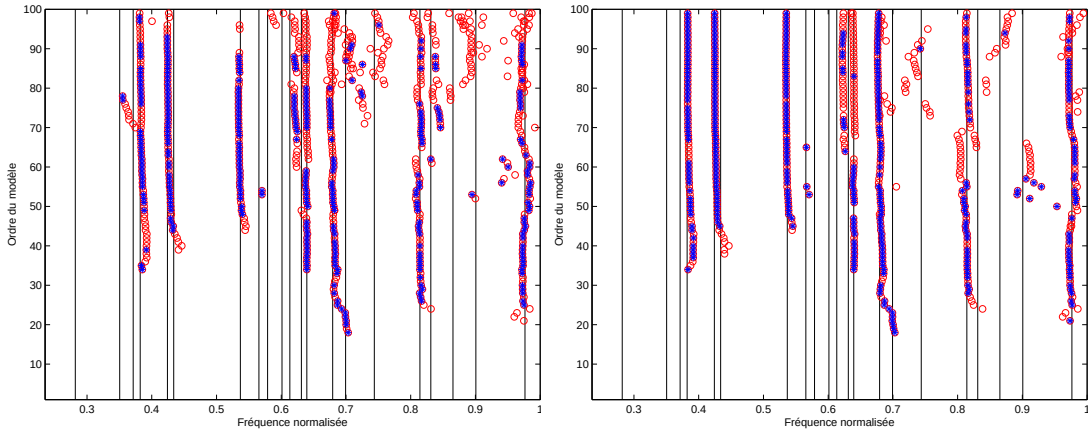
FIGURE D.2 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.1.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

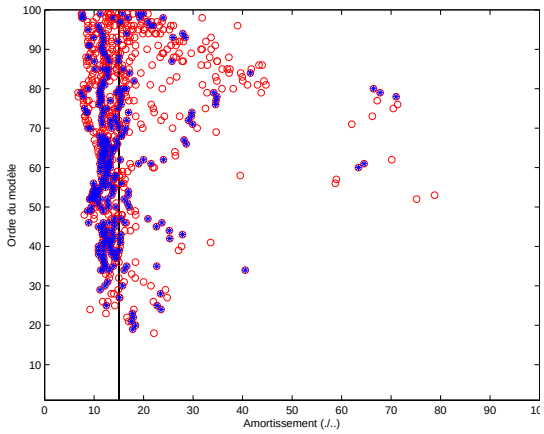
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



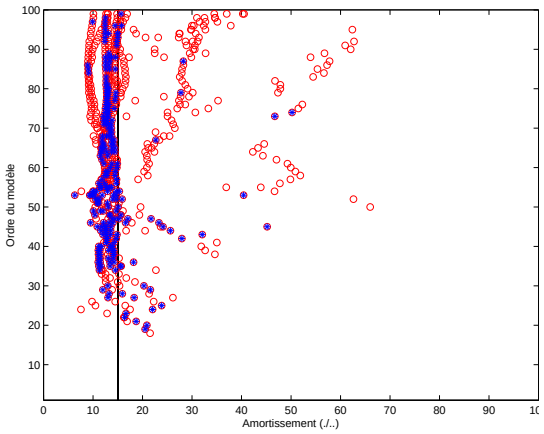
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

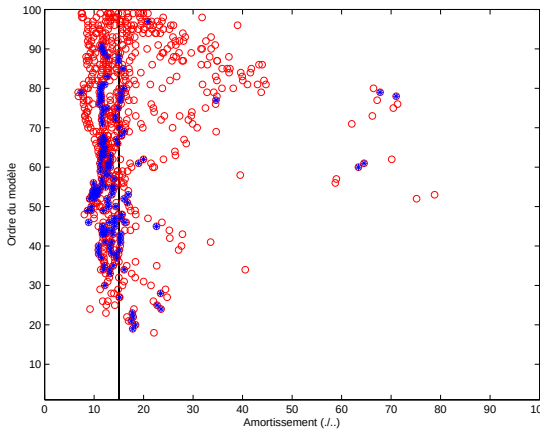
FIGURE D.3 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



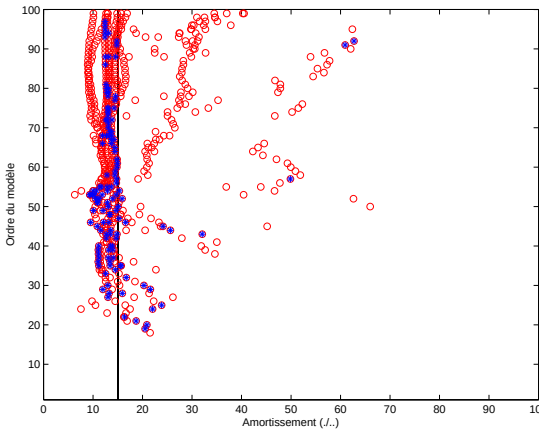
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



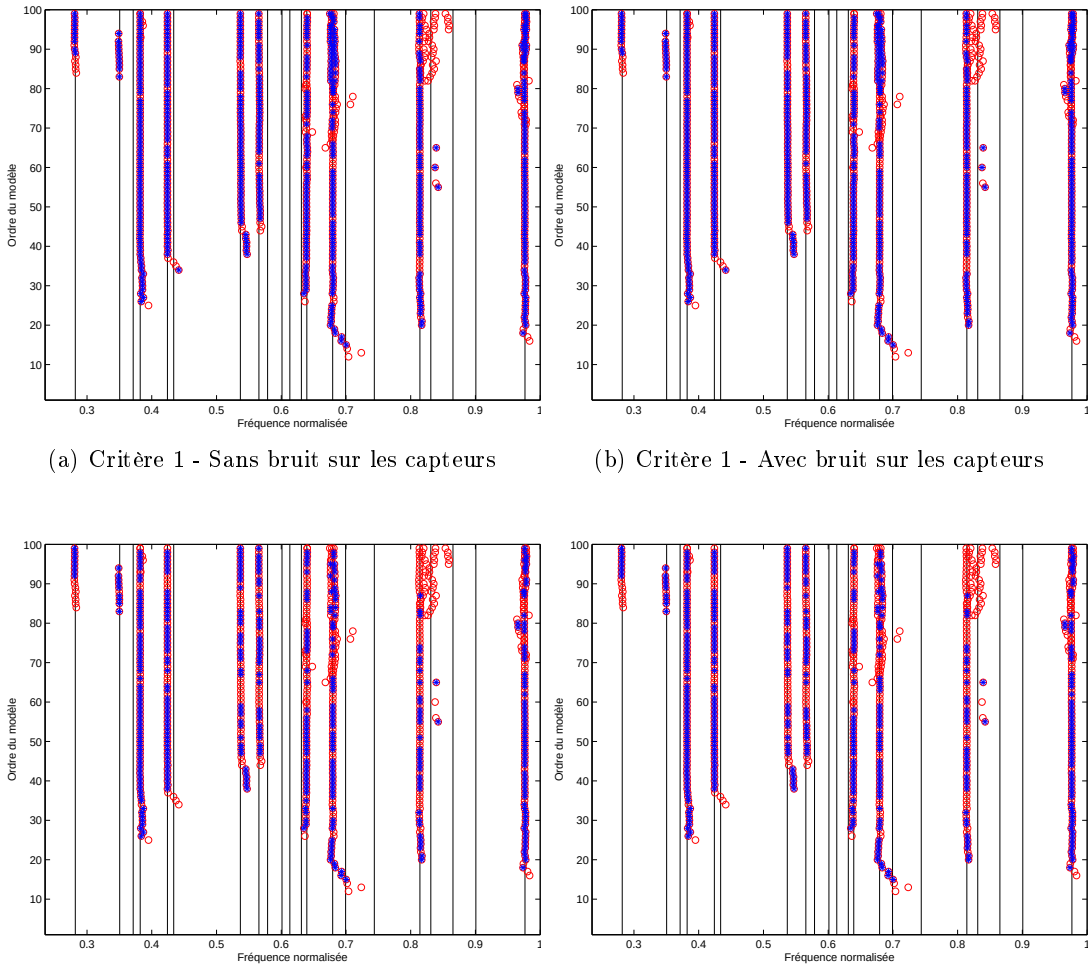
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.4 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.1.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}



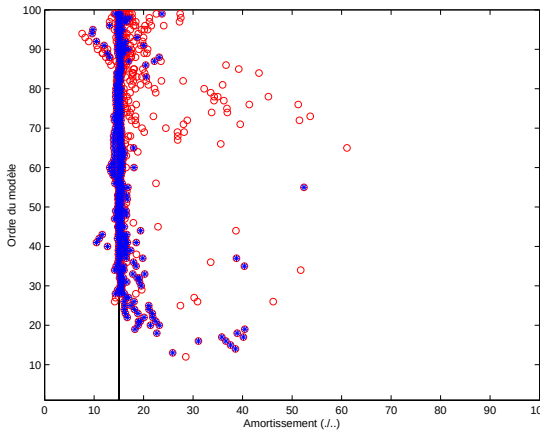
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

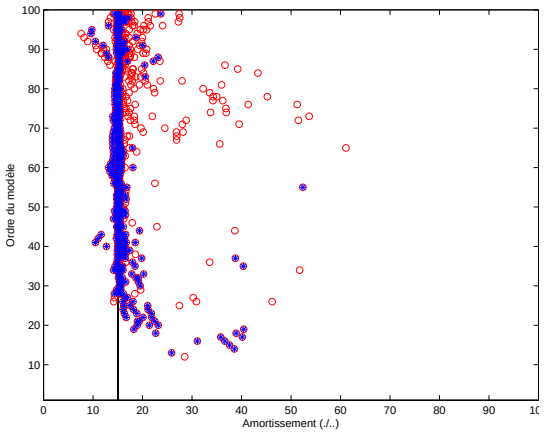
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

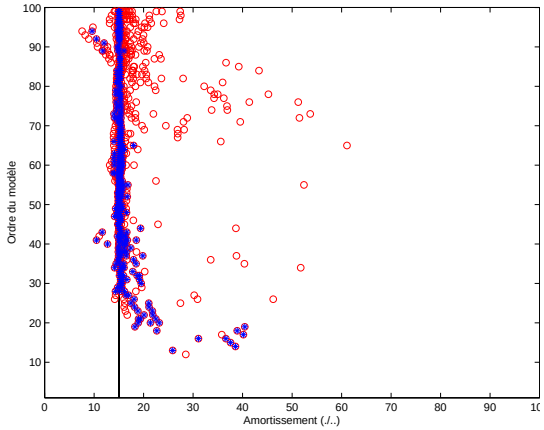
FIGURE D.5 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



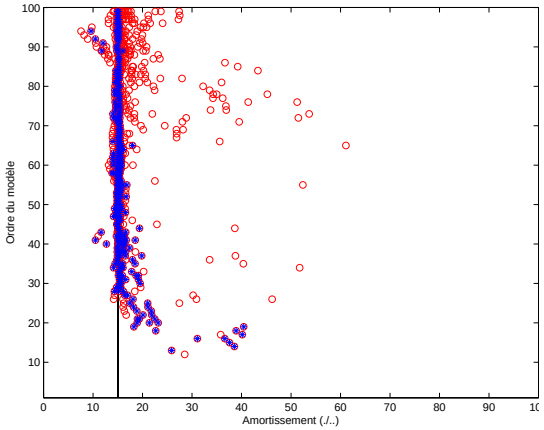
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



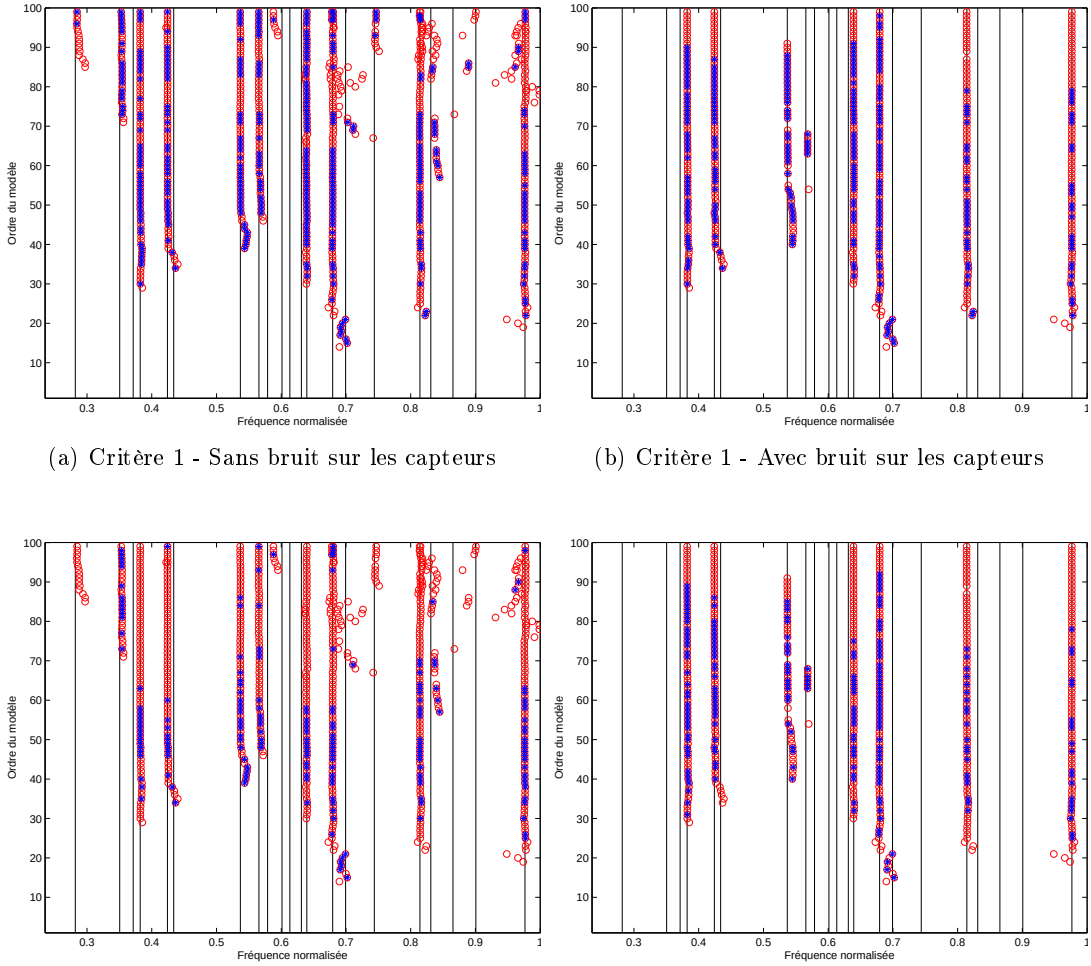
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.6 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.1.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}



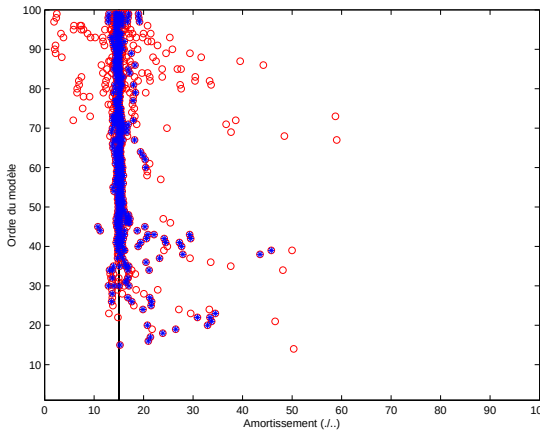
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

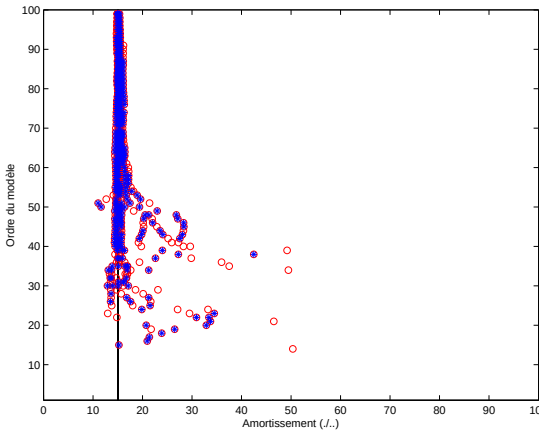
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

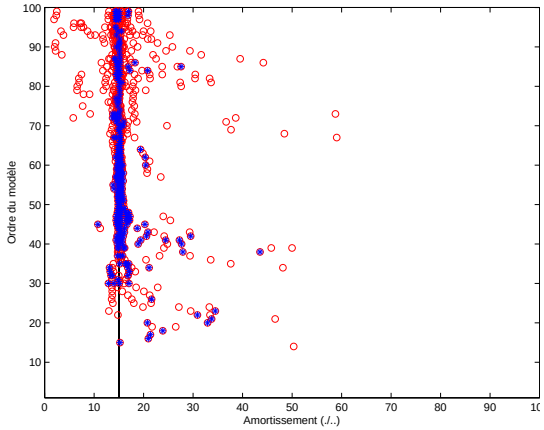
FIGURE D.7 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



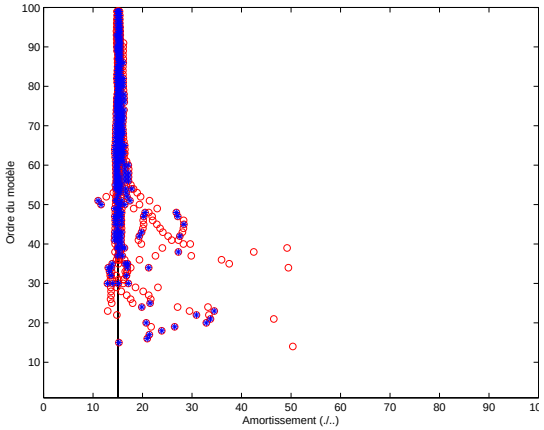
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



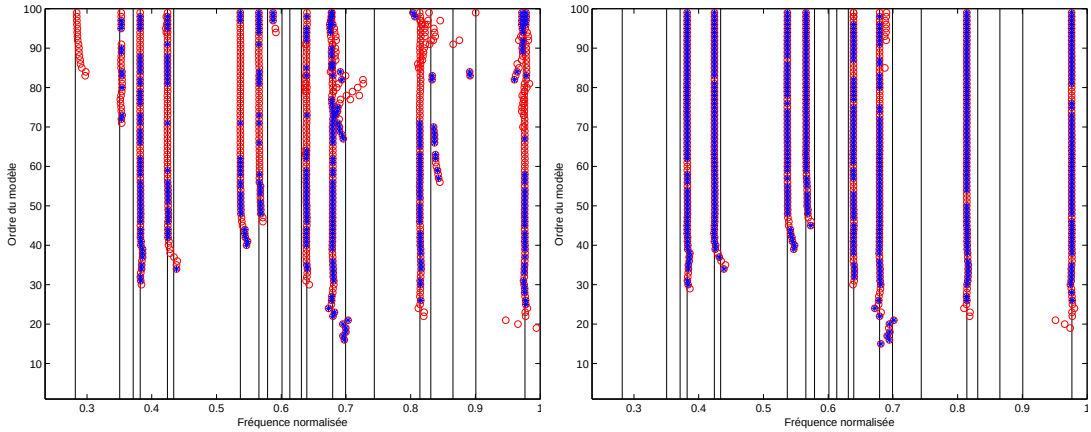
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

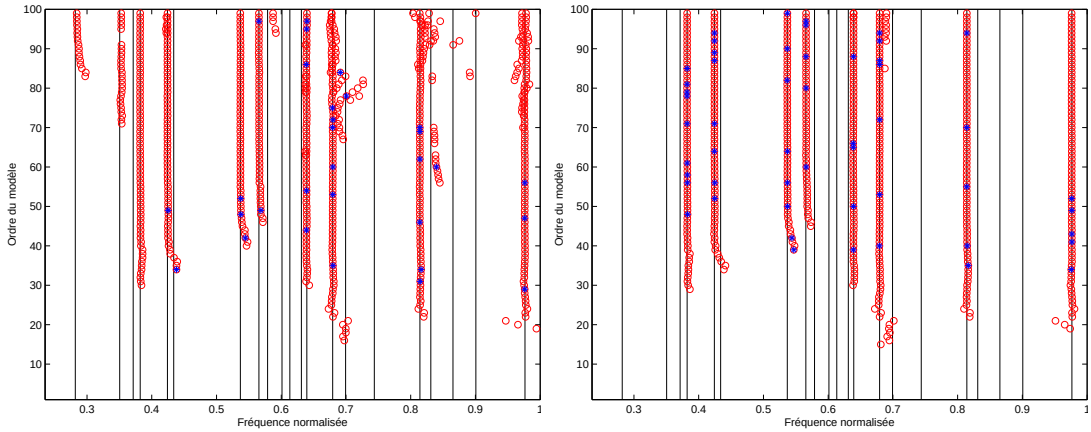
FIGURE D.8 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.1.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

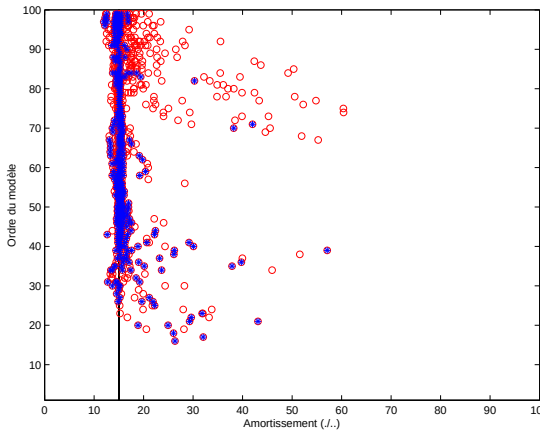
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



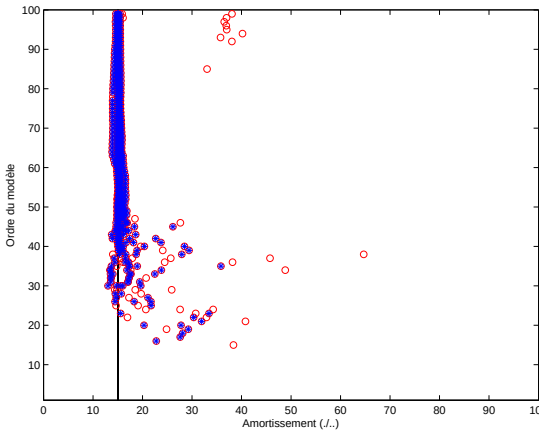
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

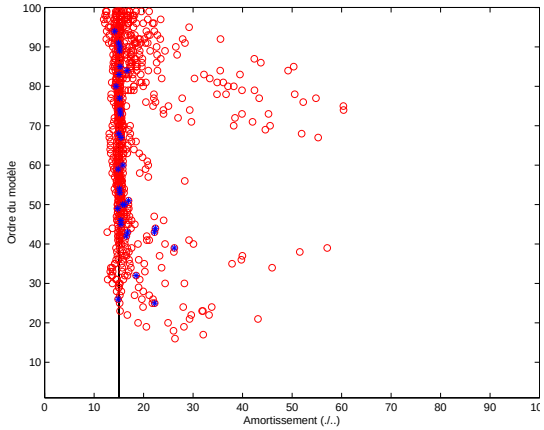
FIGURE D.9 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



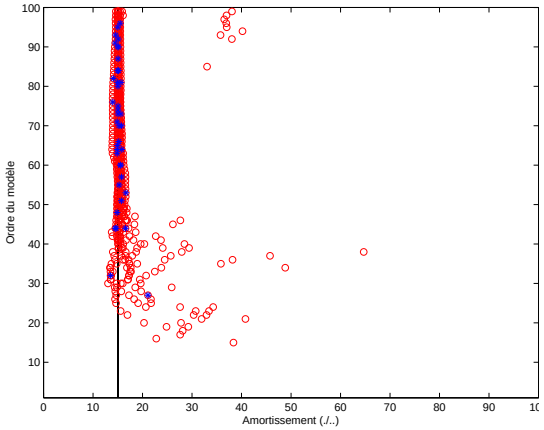
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

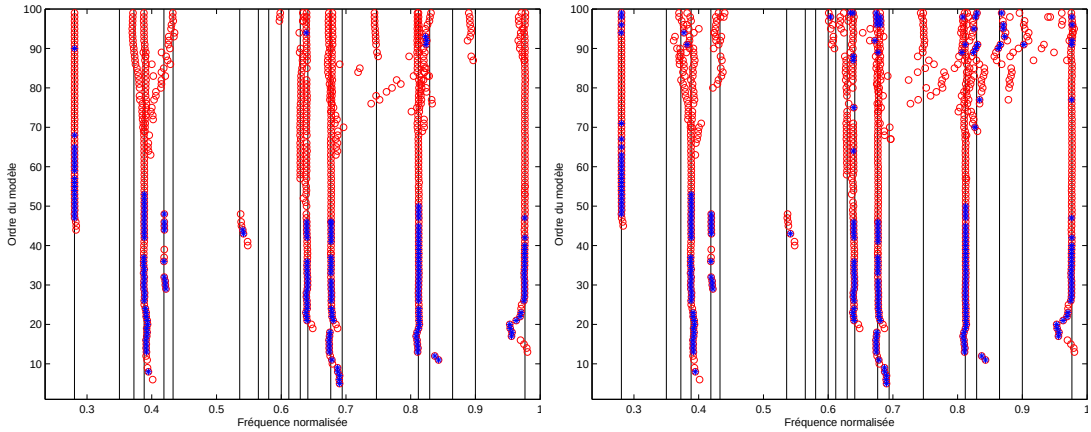


(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.10 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

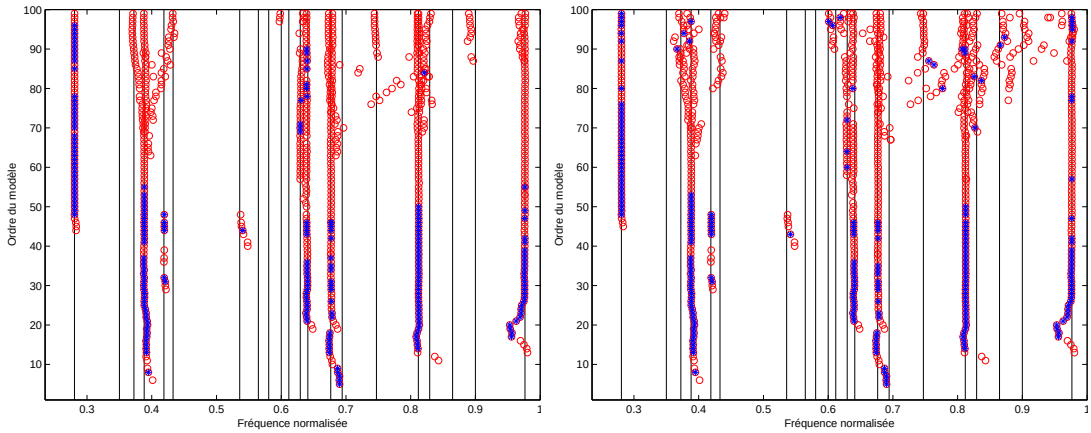
D.2 Validation sur le système avion vol

D.2.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

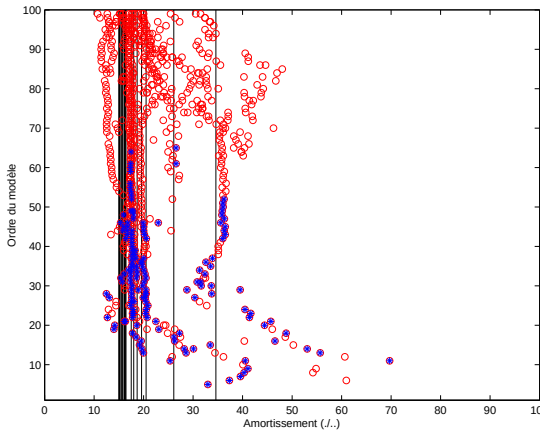
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



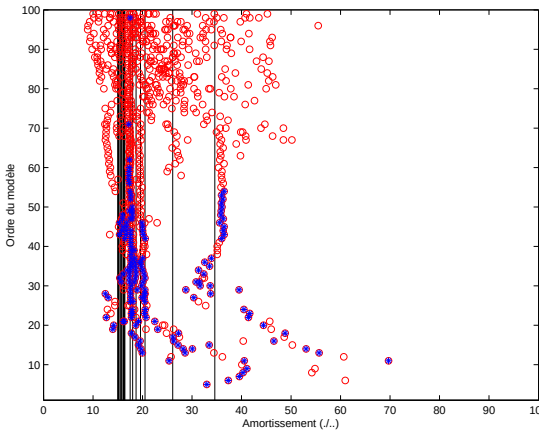
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

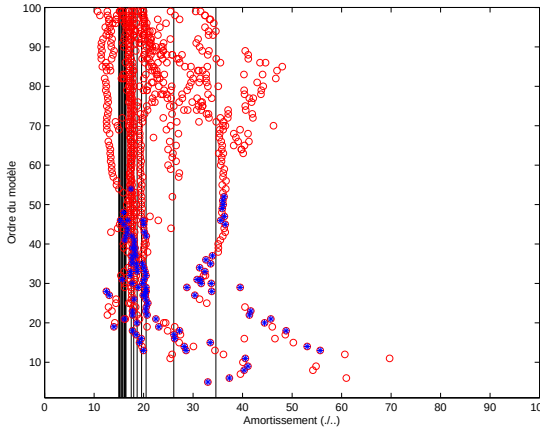
FIGURE D.11 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



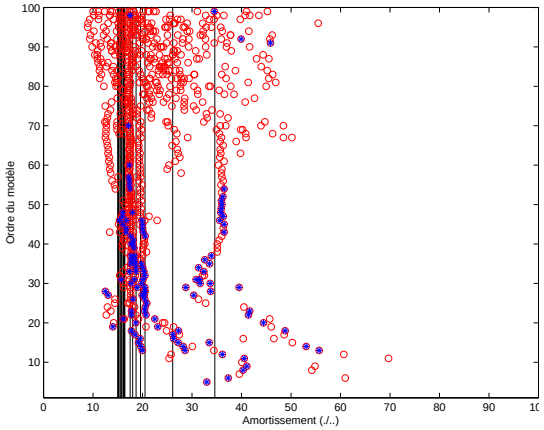
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



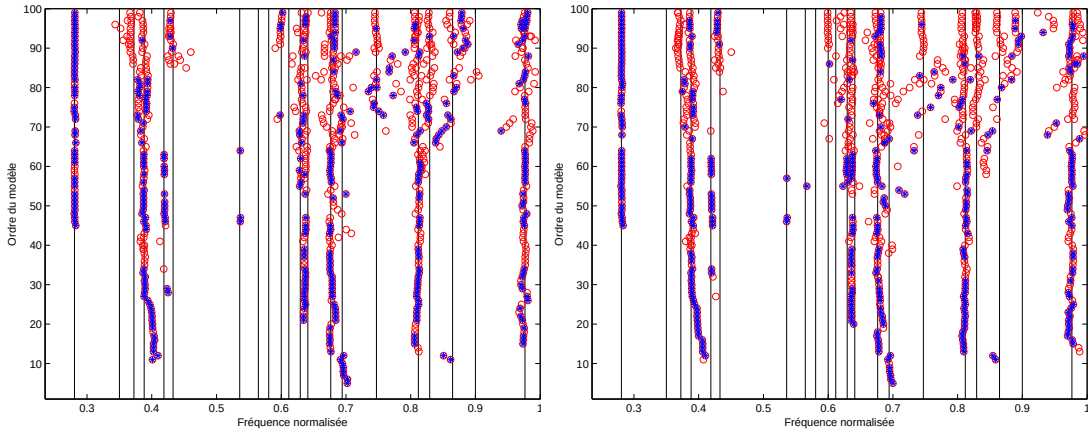
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

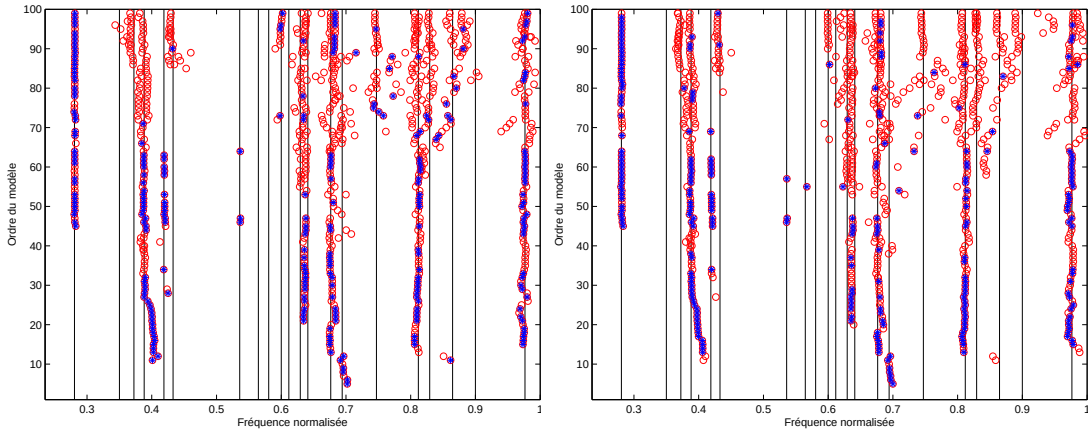
FIGURE D.12 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.2.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

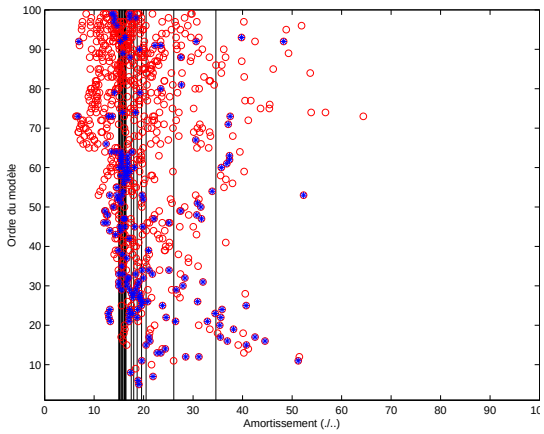
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



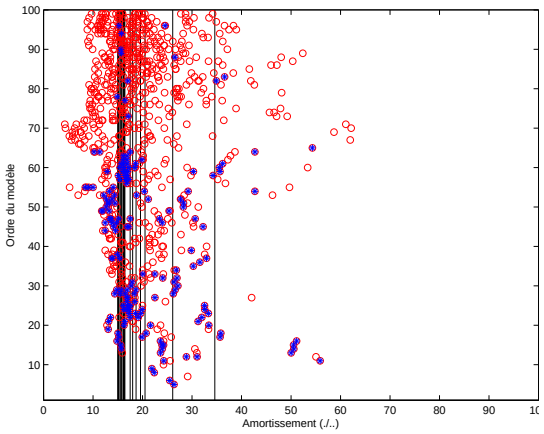
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

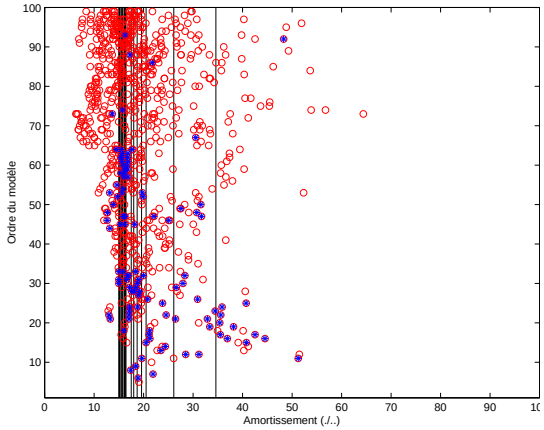
FIGURE D.13 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



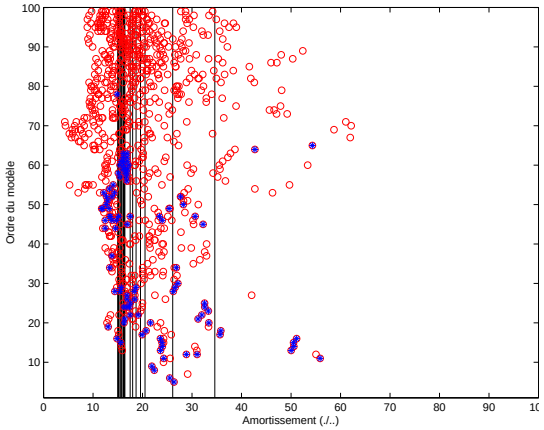
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



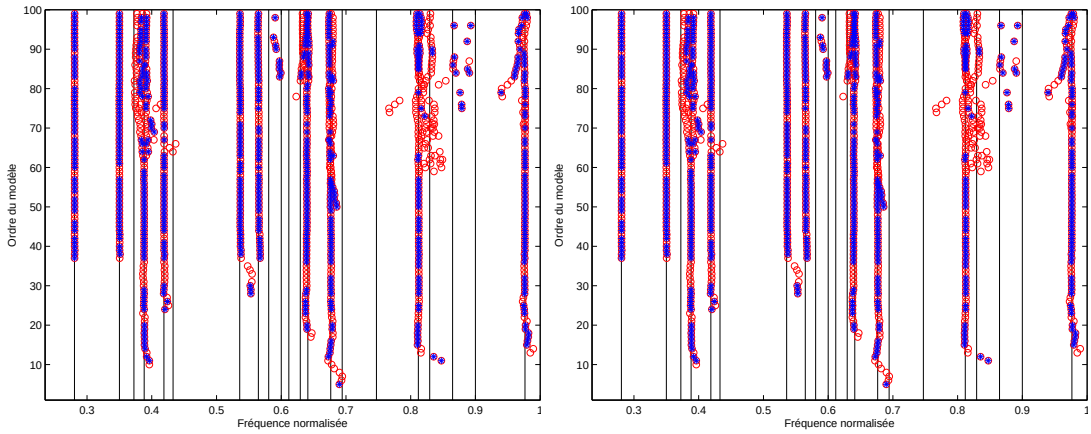
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

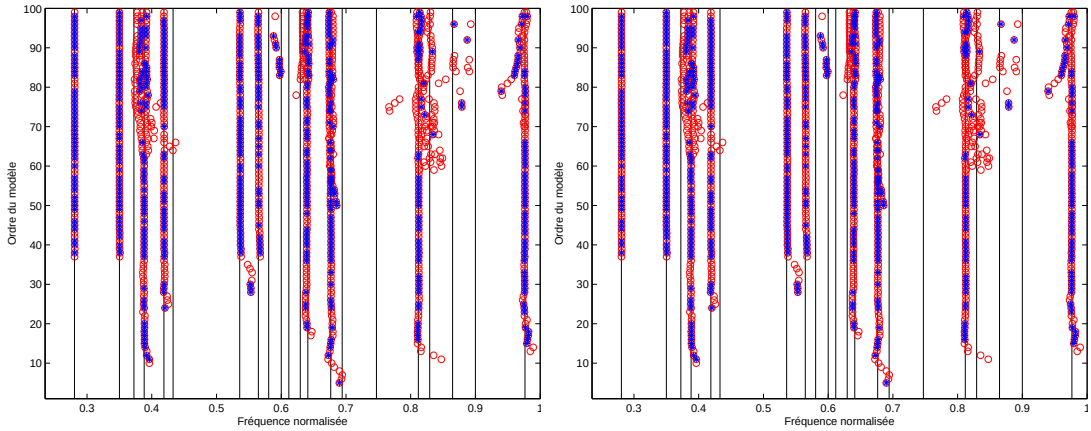
FIGURE D.14 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.2.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

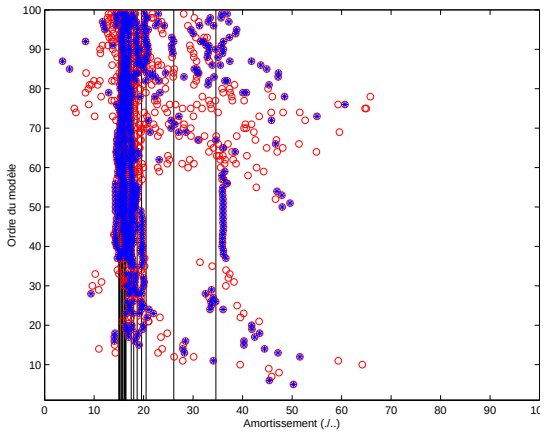
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



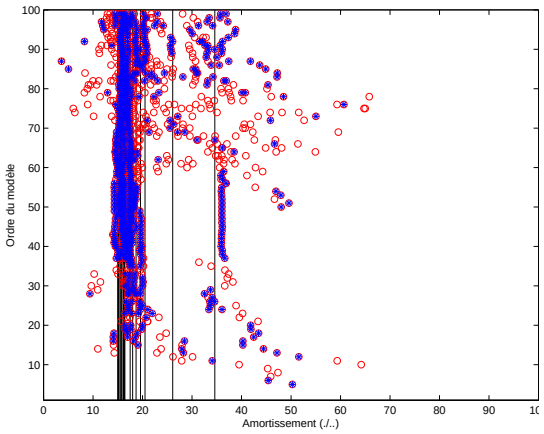
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

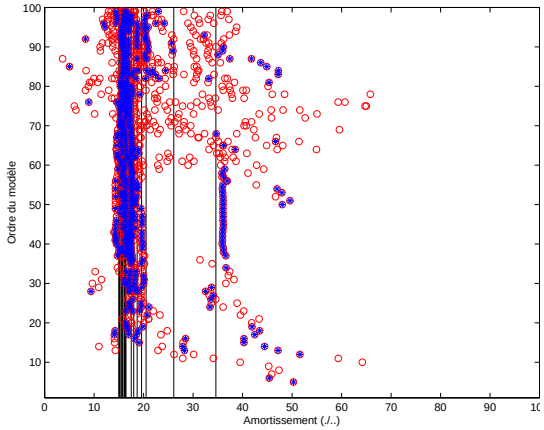
FIGURE D.15 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



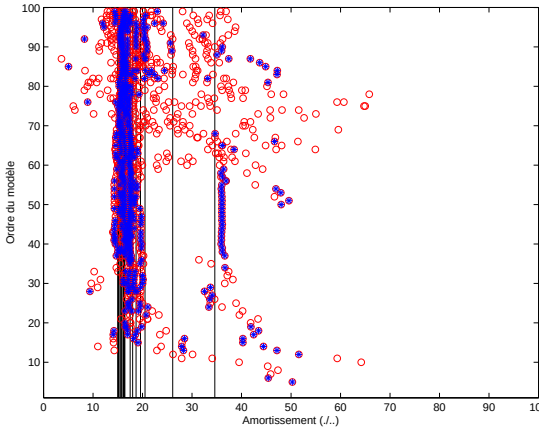
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



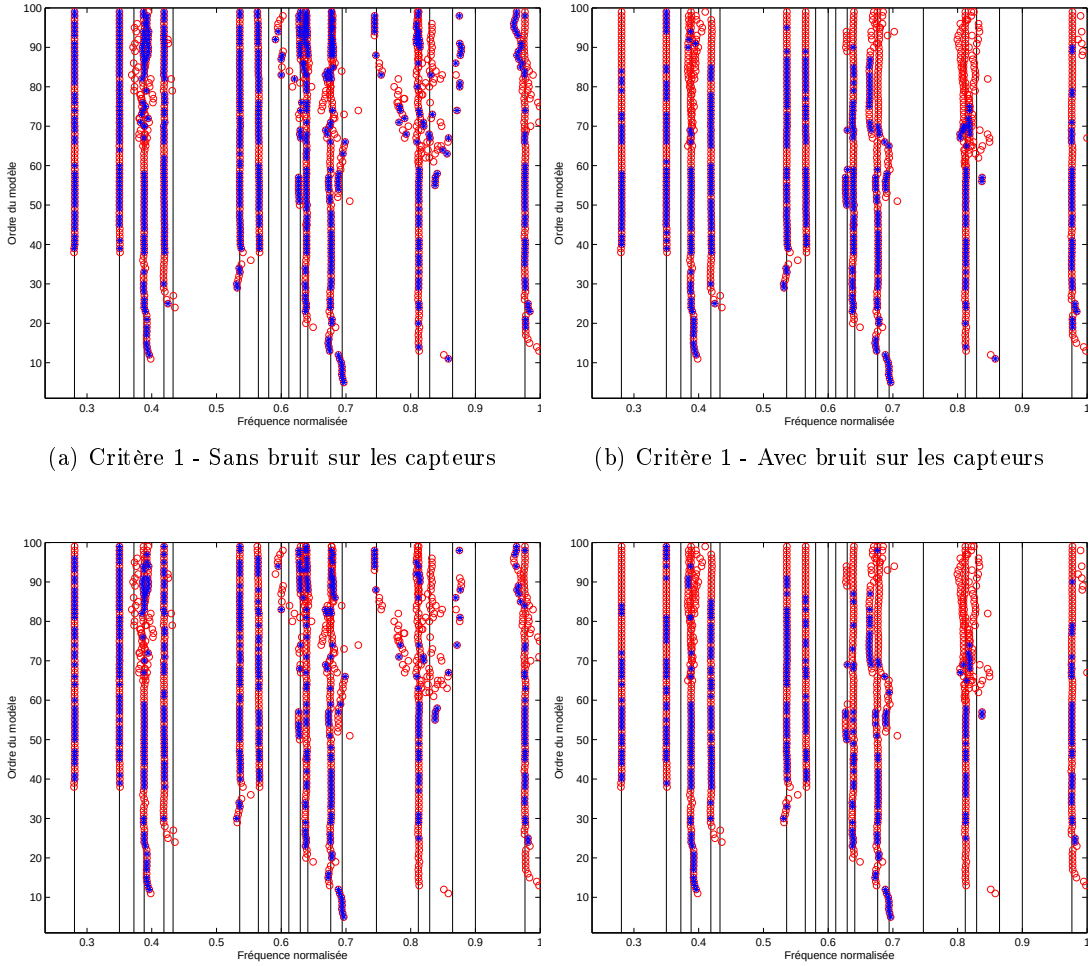
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.16 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.2.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}



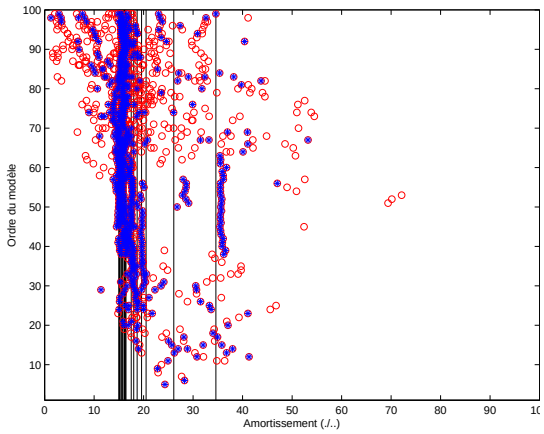
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

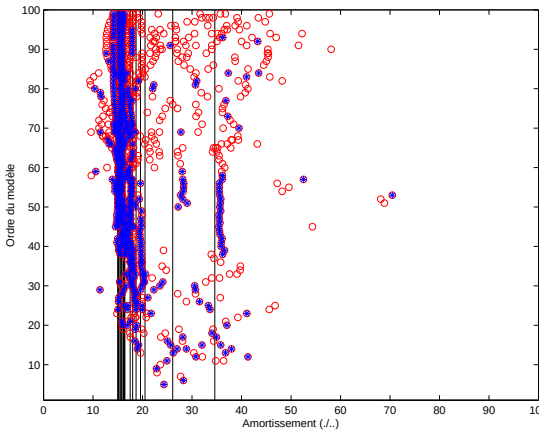
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

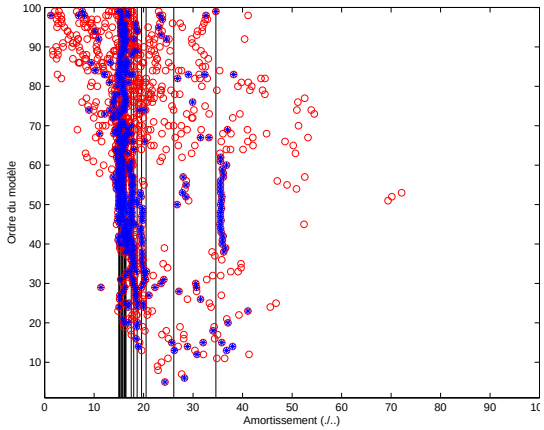
FIGURE D.17 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



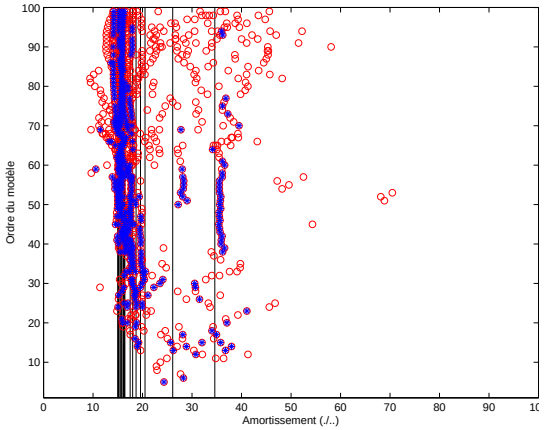
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



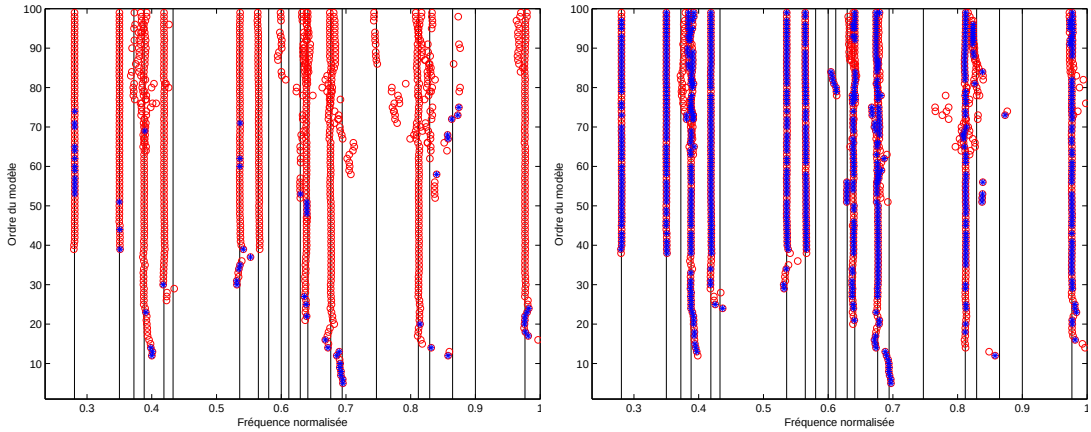
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

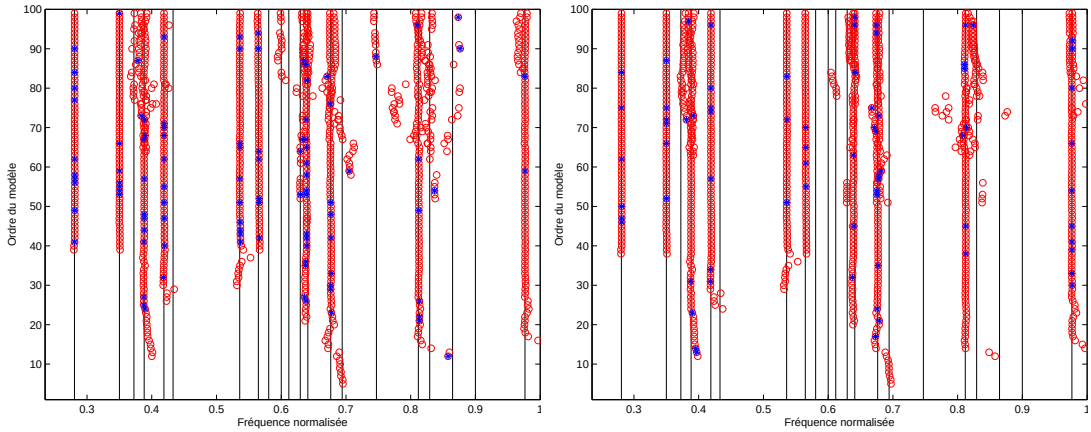
FIGURE D.18 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.2.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

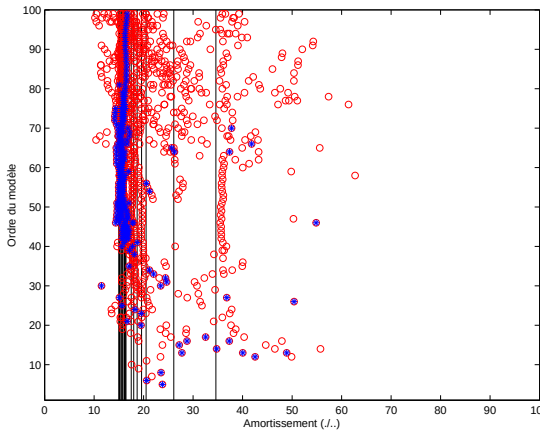
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



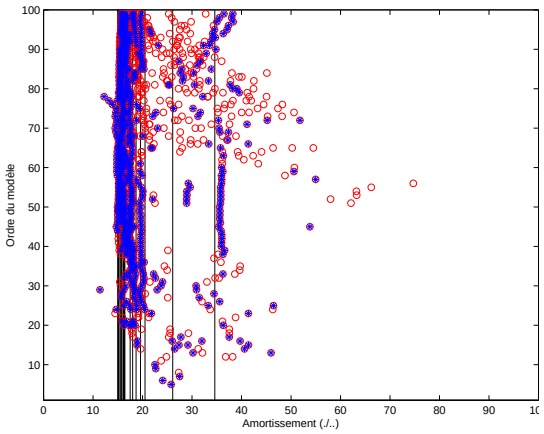
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

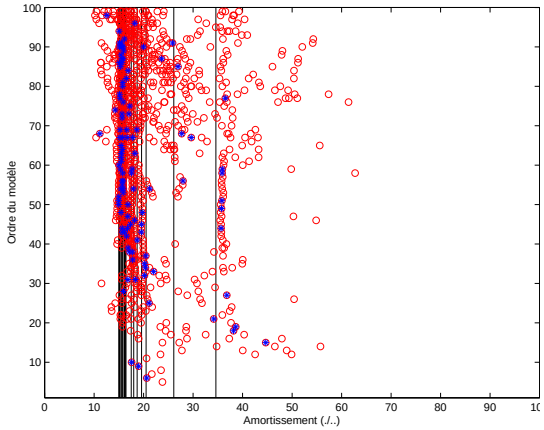
FIGURE D.19 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



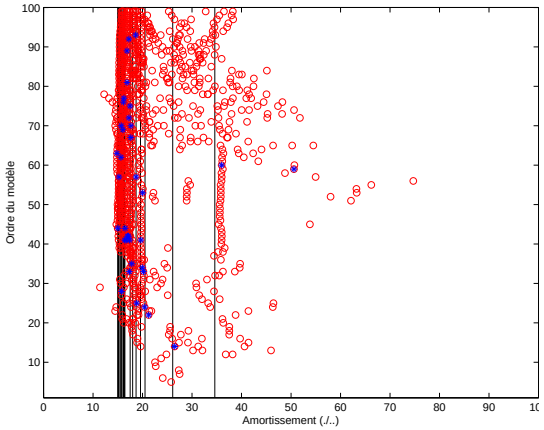
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

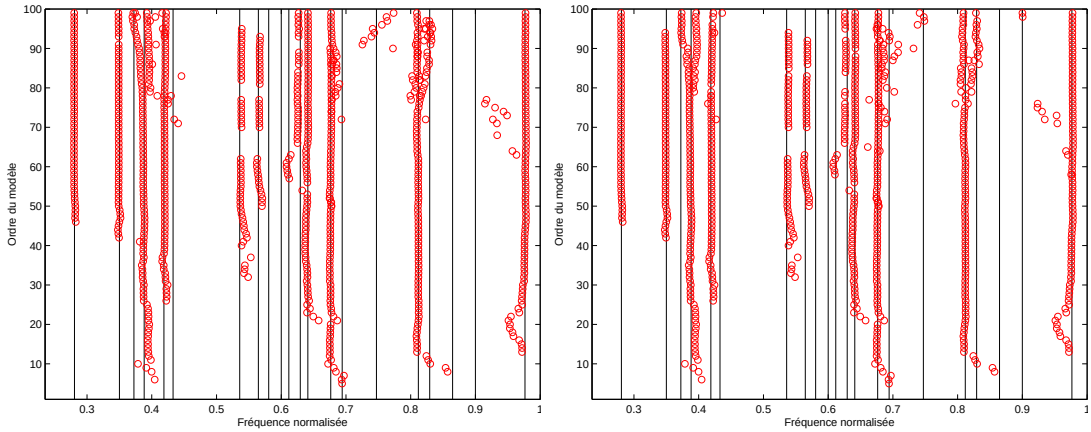


(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.20 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

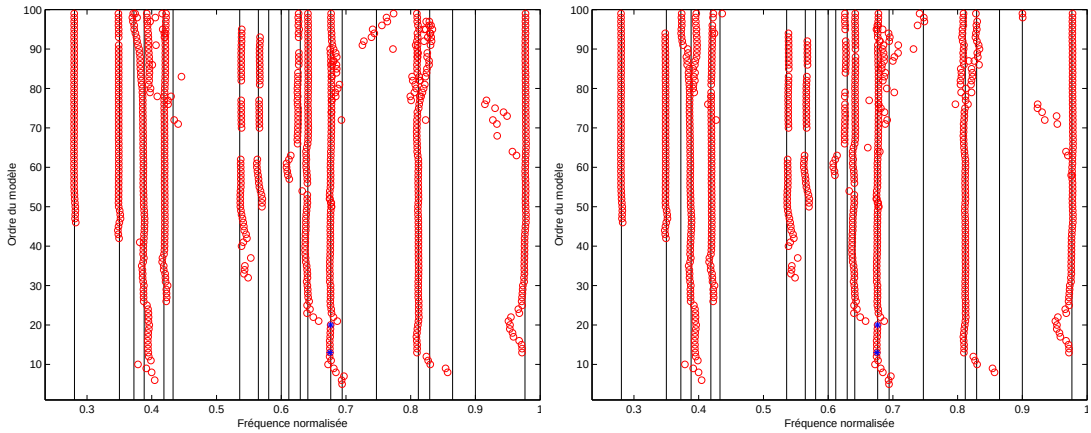
D.3 Validation sur le système avion vol avec turbulence

D.3.1 Output-Only Covariance-driven : OO_{cov}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

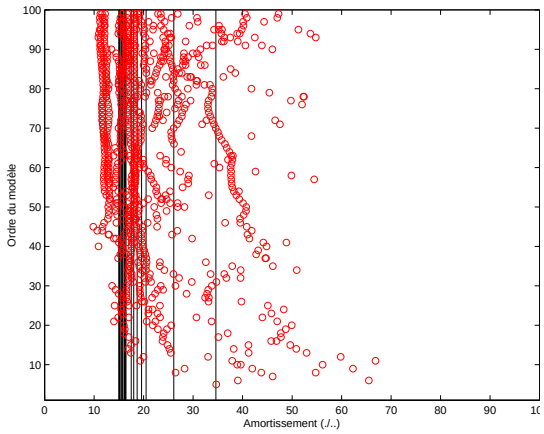
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



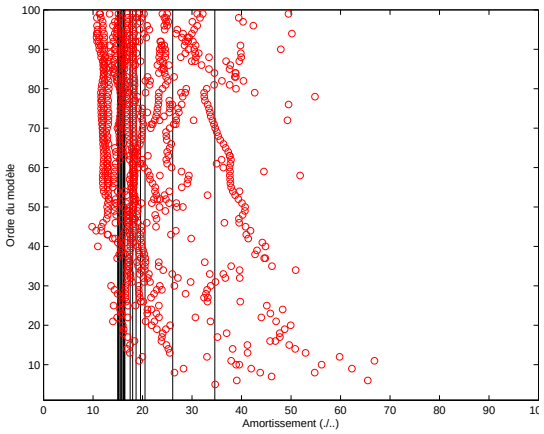
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

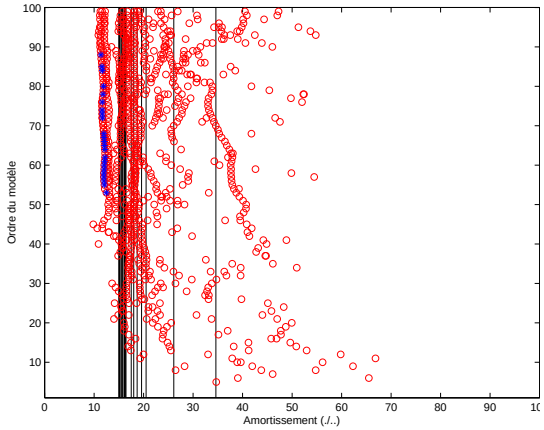
FIGURE D.21 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



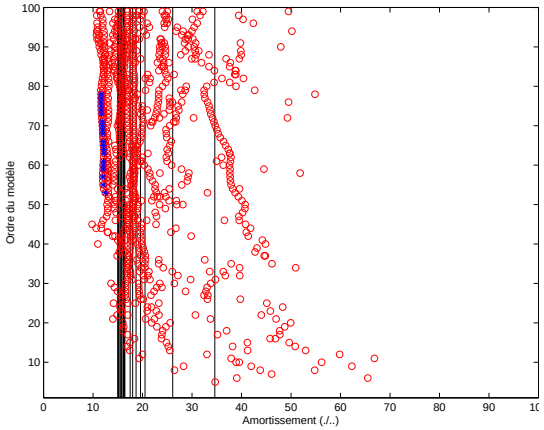
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



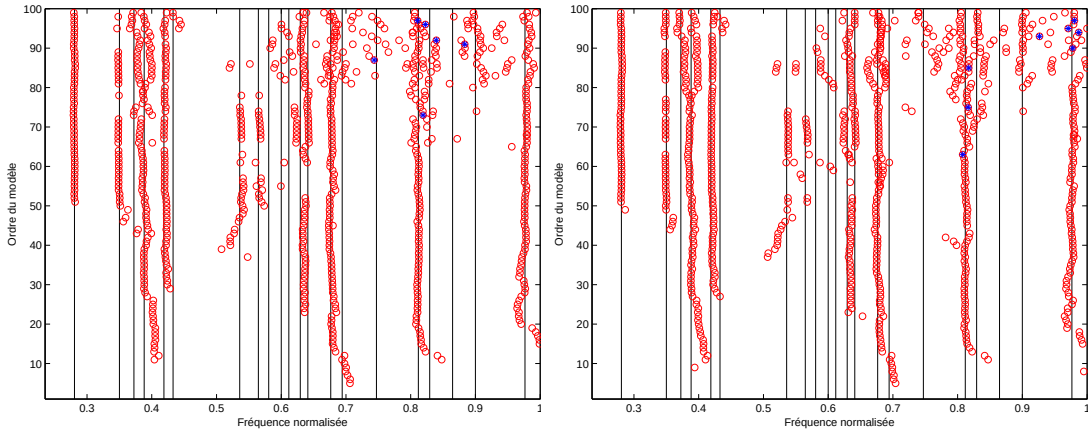
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

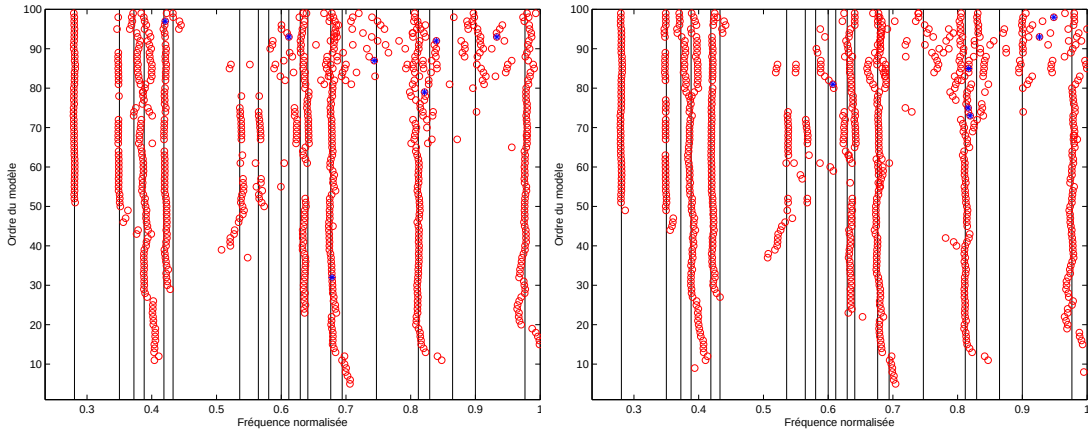
FIGURE D.22 – OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.3.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven : OO_{sqort}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

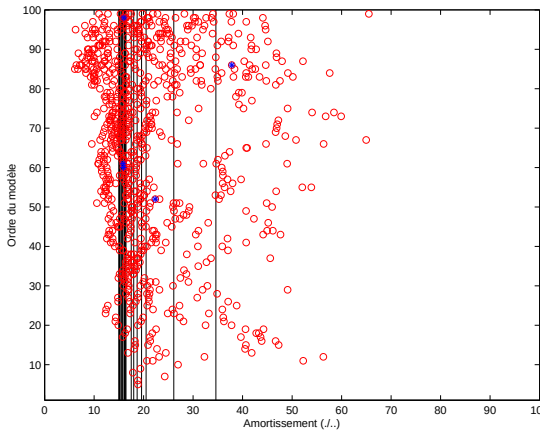
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



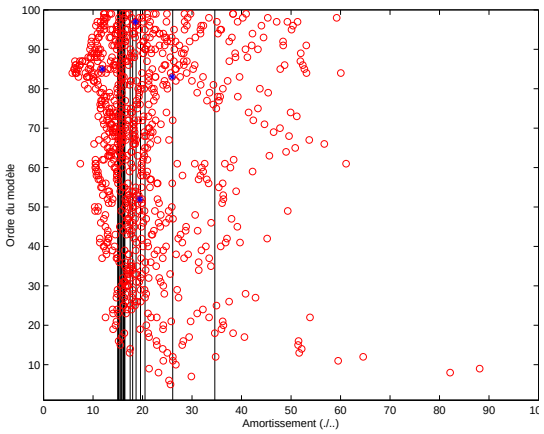
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

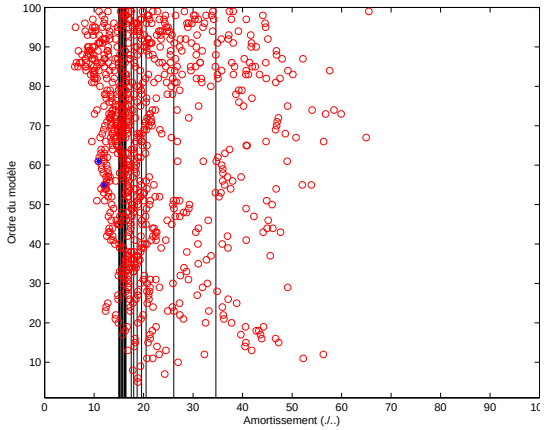
FIGURE D.23 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



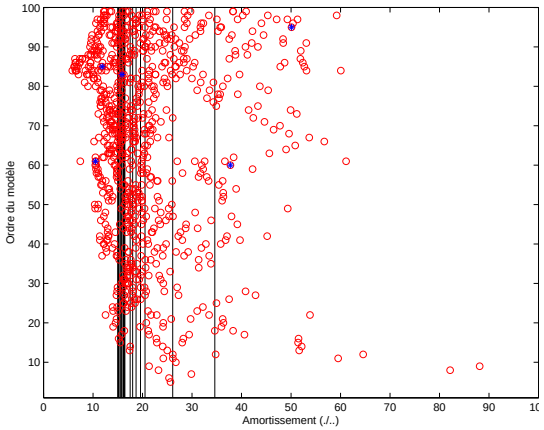
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



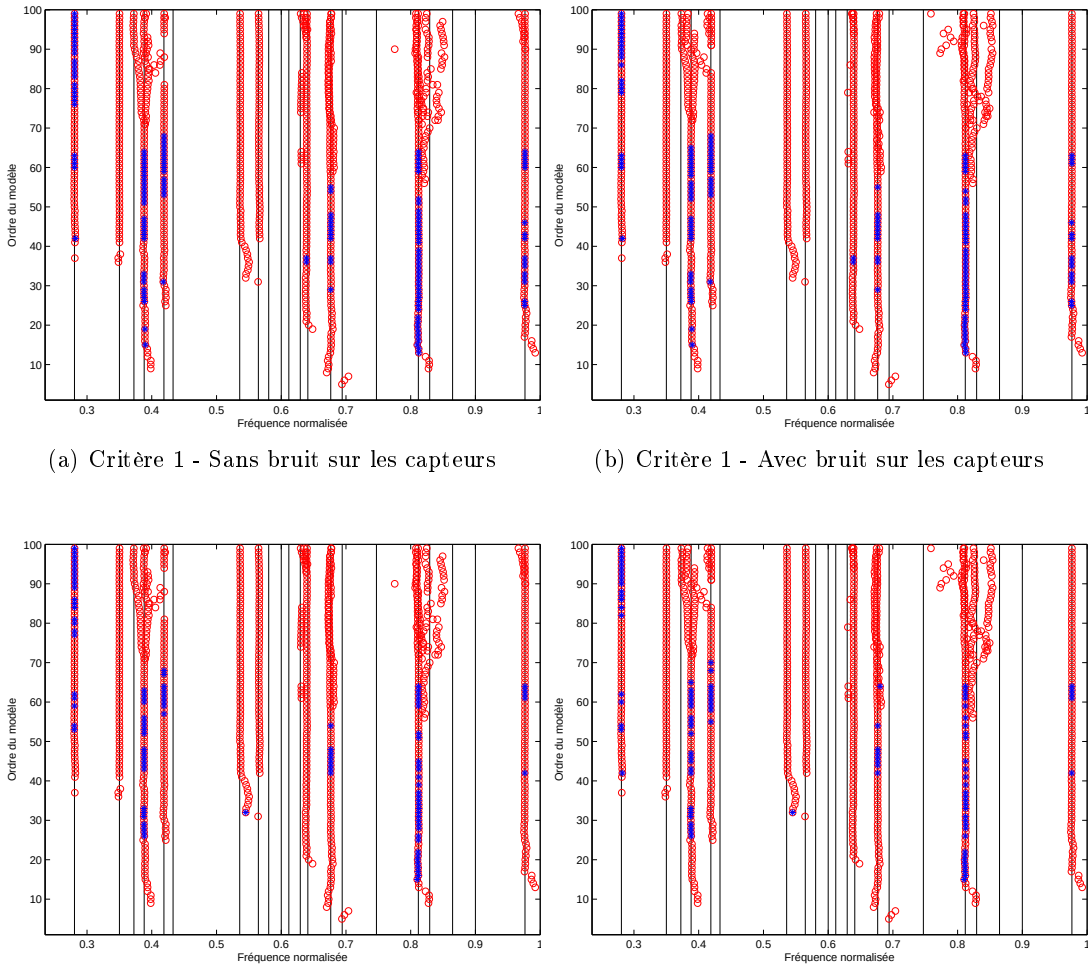
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.24 – OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.3.3 Input/Output Covariance-driven : OI_{cov}



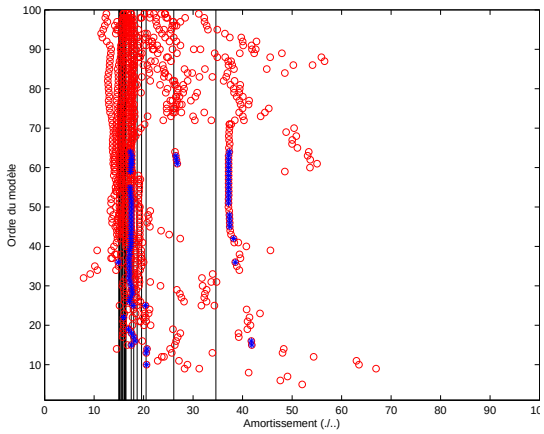
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

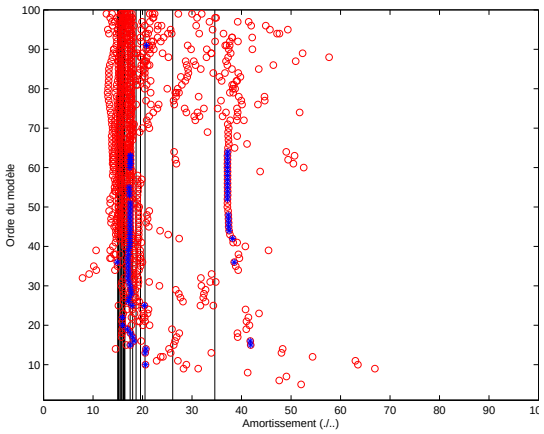
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

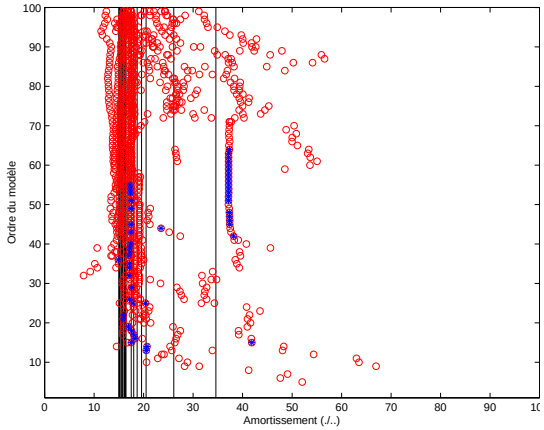
FIGURE D.25 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



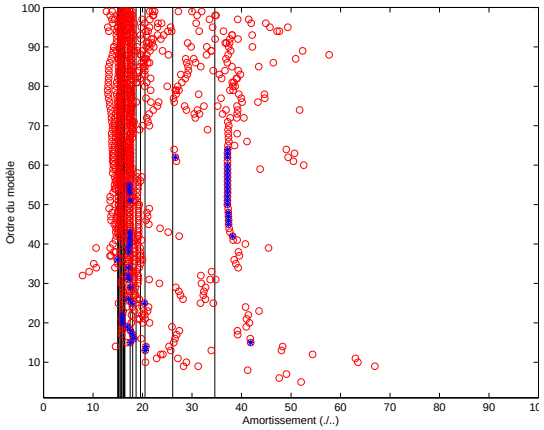
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



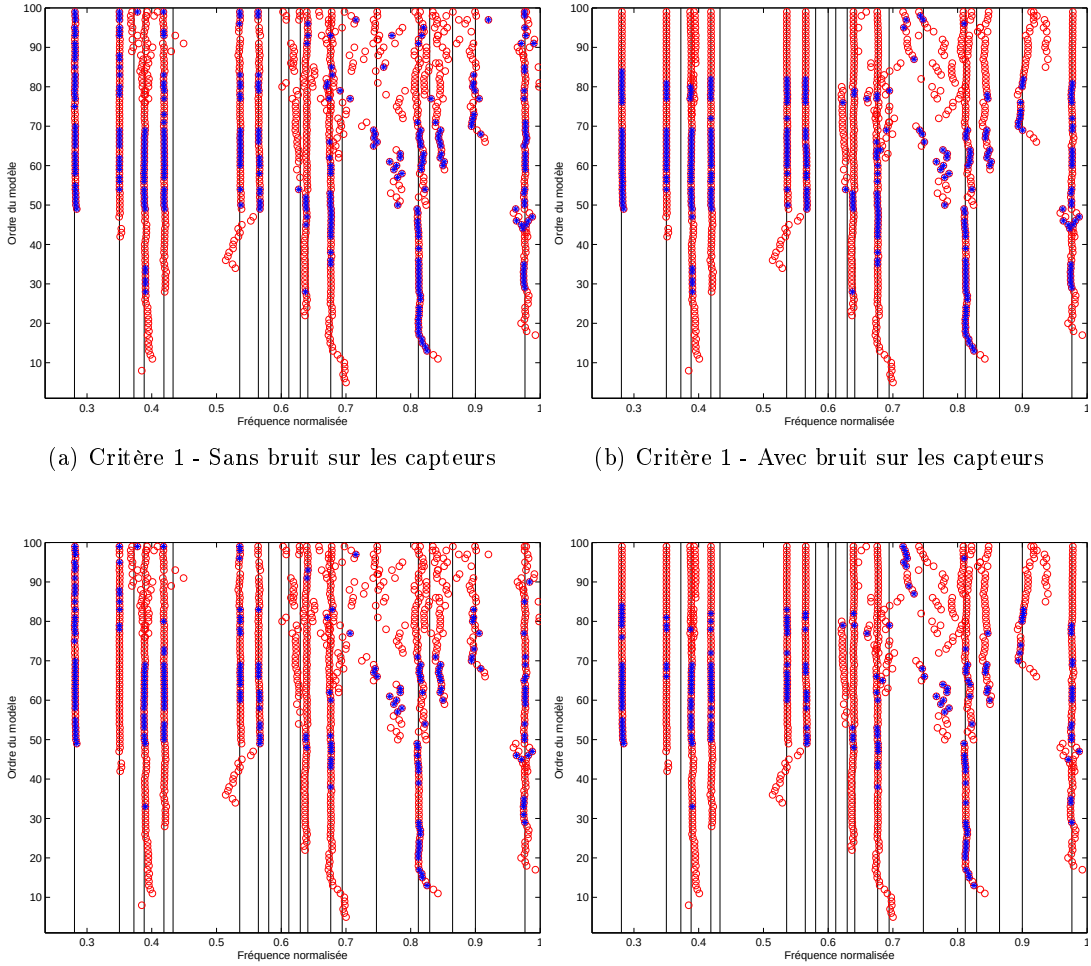
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.26 – OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.3.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven : OI_{sqort}



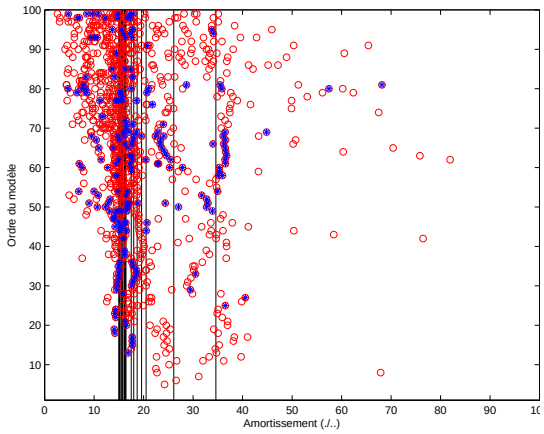
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs

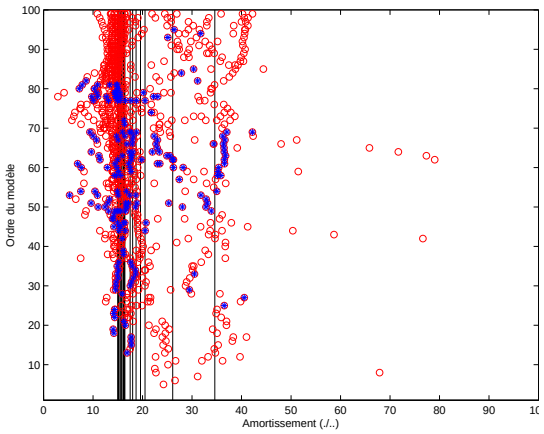
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

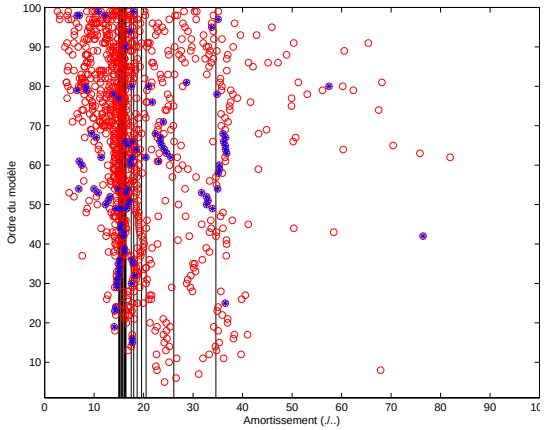
FIGURE D.27 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



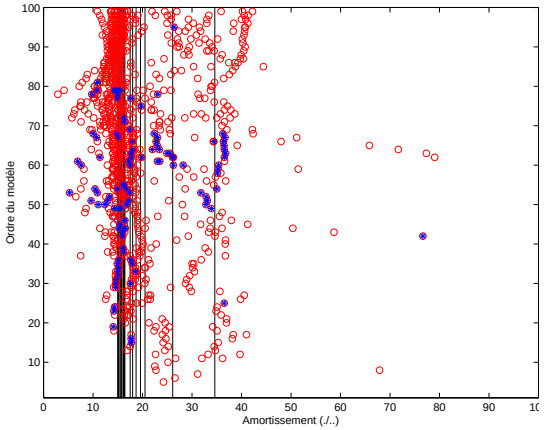
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



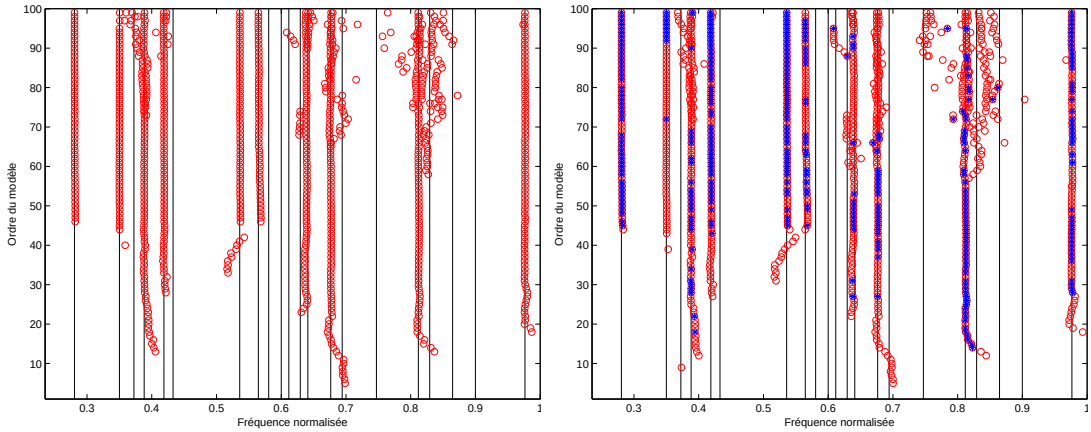
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

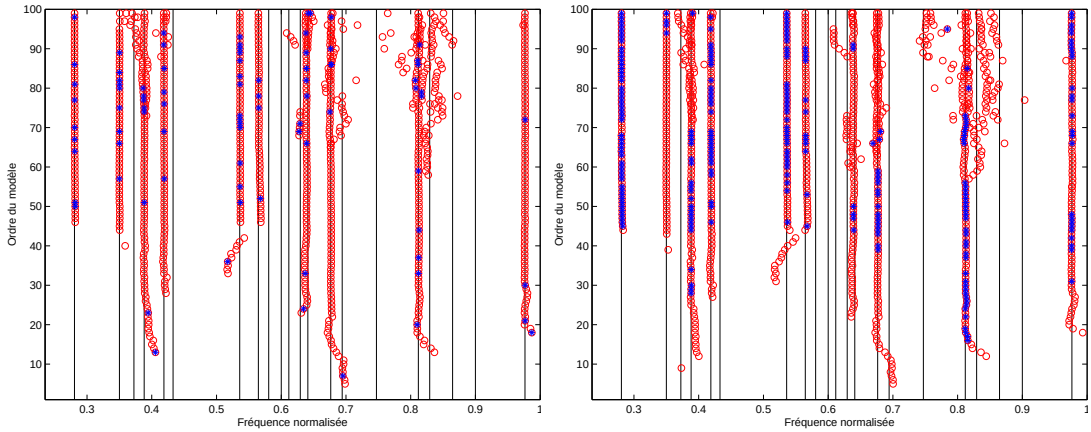
FIGURE D.28 – OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

D.3.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven : OI_{sqobl}



(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs

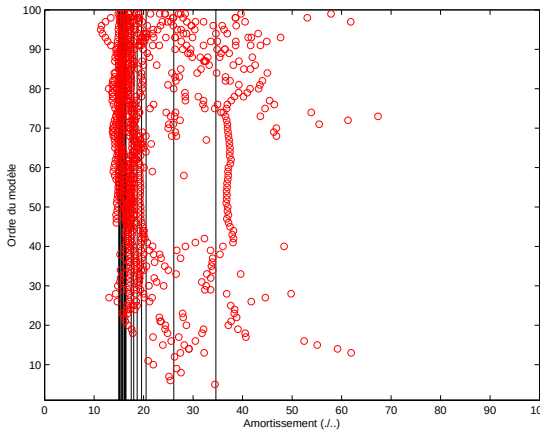
(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



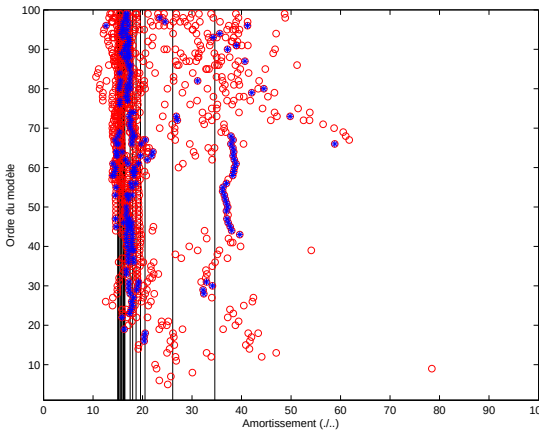
(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs

(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

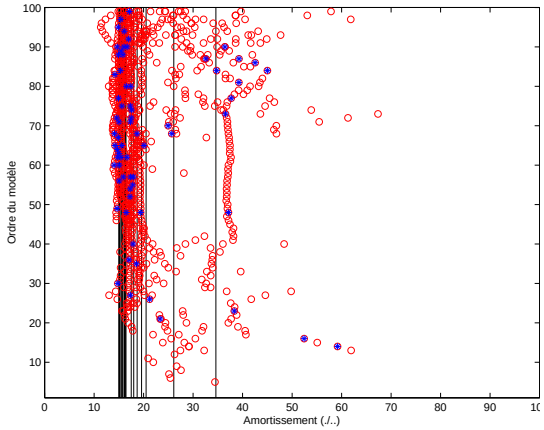
FIGURE D.29 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100



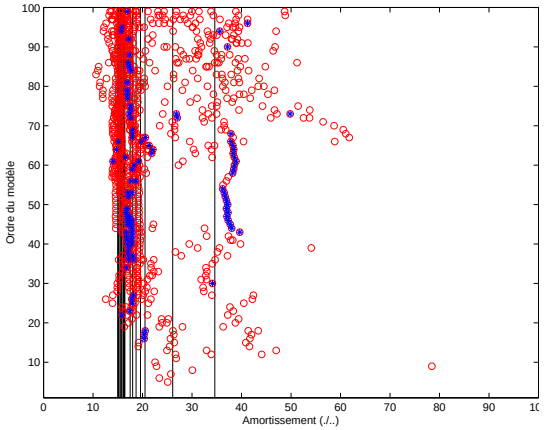
(a) Critère 1 - Sans bruit sur les capteurs



(b) Critère 1 - Avec bruit sur les capteurs



(c) Critère 2 - Sans bruit sur les capteurs



(d) Critère 2 - Avec bruit sur les capteurs

FIGURE D.30 – OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100

Bibliographie

[AB83] Randall J Allemang and David L Brown. Experimental modal analysis. *Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, Ohio*, 1983.

[AB87] Randall J Allemang and David L Brown. Experimental modal analysis and dynamic component synthesis. volume 1. summary of technical work. Technical report, DTIC Document, 1987.

[AC06] AA Abbasi and JE Cooper. Current status and challenges for flight flutter testing. In *Proceedings of ISMA 2006 Conference, Leuven*, pages 1523–1546, 2006.

[Aga89] TJA Agar. Aerodynamic flutter analysis of suspension bridges by a modal technique. *Engineering Structures*, 11(2) :75–82, 1989.

[All03] Randall J Allemang. The modal assurance criterion–twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37(8) :14–23, 2003.

[Ari90] Rutherford Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Courier Dover Publications, 1990.

[AS72] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Number 55. Courier Dover Publications, 1972.

[BAB00] Michele Basseville, Maher Abdelghani, and Albert Benveniste. Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica*, 36(1) :101–109, 2000.

[Bau01] Dietmar Bauer. Order estimation for subspace methods. *Automatica*, 37(10) :1561–1573, 2001.

[Bau05] Dietmar Bauer. Asymptotic properties of subspace estimators. *Automatica*, 41(3) :359–376, 2005.

[BAZM79] DL Brown, RJ Allemang, Ray Zimmerman, and M Mergeay. Parameter estimation techniques for modal analysis. Technical report, SAE Technical paper, 1979.

[BB86] Ronald Newbold Bracewell and RN Bracewell. *The Fourier transform and its applications*, volume 31999. McGraw-Hill New York, 1986.

[BBG+01] Miche ?le Basseville, Albert Benveniste, Maurice Goursat, Luc Hermans, Laurent Mevel, and Herman Van der Auweraer. Output-only subspace-based structural identification : from theory to industrial testing practice. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4) :668–676, 2001.

[BBM+08] Étienne Balmes, Michele Basseville, Laurent Mevel, Houssein Nasser, and Wensong Zhou. Statistical model-based damage localization : A combined subspace-based and substructuring approach. *Structural Control and Health Monitoring*, 15(6) :857–875, 2008.

[BDS99] Dietmar Bauer, Manfred Deistler, and Wolfgang Scherrer. Consistency and asymptotic normality of some subspace algorithms for systems without observed inputs. *Automatica*, 35(7) :1243–1254, 1999.

[Ber02] Dionisio Bernal. Load vectors for damage localization. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(1) :7–14, 2002.

[Ber09] Dionisio Bernal. Load vectors for damage location in systems identified from operational loads. *Journal of engineering mechanics*, 136(1) :31–39, 2009.

[BG89] Jacques Benichou and Mitchell H Gail. A delta method for implicitly defined random variables. *The American Statistician*, 43(1) :41–44, 1989.

[Bjö96] Ake Björck. *Numerical methods for least squares problems.* Siam, 1996.

[BL02] Dietmar Bauer and Lennart Ljung. Some facts about the choice of the weighting matrices in larimore type of subspace algorithms. *Automatica*, 38(5) :763–773, 2002.

[BMCC10] JMW Brownjohn, Filipe Magalhaes, Elsa Caetano, and Alvaro Cunha. Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the humber bridge. *Engineering Structures*, 32(8) :2003–2018, 2010.

[BMG04] Michèle Basseville, Laurent Mevel, and Maurice Goursat. Statistical model-based damage detection and localization : subspace-based residuals and damage-to-noise sensitivity ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3) :769–794, 2004.

[BNSR98] T Bastogne, H Noura, P Sibille, and A Richard. Multivariable identification of a winding process by subspace methods for tension control. *Control Engineering Practice*, 6(9) :1077–1088, 1998.

[Bré93] Pierre Brémaud. *Signaux aléatoires : pour le traitement du signal et les communications.* Ellipses, 1993.

[BS91] K Yusuf Billah and Robert H Scanlan. Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys*, 59(2) :118–124, 1991.

[Cau04] Bart Cauberghe. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis. *Mechanical Engineering Department, Vrije Universiteit Brussel, Brussels*, 2004.

[CB02] George Casella and Roger L Berger. *Statistical inference*, volume 2. Duxbury Pacific Grove, CA, 2002.

[CGV+04a] Bart Cauberghe, Patrick Guillaume, Peter Verboven, Eli Parloo, and Steve Vanlanduit. A poly-reference implementation of the maximum likelihood complex frequency-domain estimator and some industrial applications. In *Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference*, 2004.

[CGV+04b] Bart Cauberghe, Patrick Guillaume, Peter Verboven, Eli Parloo, and Steve Vanlanduit. The secret behind clear stabilization diagrams : the influence of the parameter constraint on the stability of the poles. In *Proceedings of the 10th SEM International Congress & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, pages 7–10, 2004.

[Chi07] Alessandro Chiuso. The role of vector autoregressive modeling in predictor-based subspace identification. *Automatica*, 43(6) :1034–1048, 2007.

[Col78] AR Collar. The first fifty years of aeroelasticity. *Aerospace*, 5(2) :12–20, 1978.

[CP04a] Alessandro Chiuso and Giorgio Picci. The asymptotic variance of subspace estimates. *Journal of Econometrics*, 118(1) :257–291, 2004.

[CP04b] Alessandro Chiuso and Giorgio Picci. Asymptotic variance of subspace methods by data orthogonalization and model decoupling : a comparative analysis. *Automatica*, 40(10) :1705–1717, 2004.

[Cra46] Harald Cramer. Mathematical models of statistics. *Princeton Math. Series*, (9), 1946.

[CT65] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90) :297–301, 1965.

[Dav93] Paul Davis. Levenberg-marquart methods and nonlinear estimation. *Siam News*, 26(6) :1–12, 1993.

[DLM13] Michael Döhler, Xuan-Binh Lam, and Laurent Mevel. Uncertainty quantification for modal parameters from stochastic subspace identification on multi-setup measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(2) :562–581, 2013.

[DM+10a] Michael Döhler, Laurent Mevel, et al. Crystal clear data fusion in subspace system identification and damage detection. In *5th International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, 2010.

[DM+10b] Michael Döhler, Laurent Mevel, et al. Robust subspace based fault detection. 2010.

[DM12] Michael Döhler and Laurent Mevel. Fast multi-order computation of system matrices in subspace-based system identification. *Control Engineering Practice*, 20(9) :882–894, 2012.

[DM13] Michael Döhler and Laurent Mevel. Efficient multi-order uncertainty computation for stochastic subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2) :346–366, 2013.

[DMBM13] Michael Döhler, Luciano Marin, Dionisio Bernal, and Laurent Mevel. Statistical decision making for damage localization with stochastic load vectors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1) :426–440, 2013.

[Döh11] Michael Döhler. *Subspace-based system identification and fault detection : Algorithms for large systems and application to structural vibration analysis.* PhD thesis, Université Rennes 1, 2011.

[Dor95] Richard C Dorf. *Modern control systems.* Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.

[DPS95] Manfred Deistler, K Peternell, and Wolfgang Scherrer. Consistency and relative efficiency of subspace methods. *Automatica*, 31(12) :1865–1875, 1995.

[DR+58] Wilbur B Davenport, William L Root, et al. *An introduction to the theory of random signals and noise*, volume 159. McGraw-Hill New York, 1958.

[DT09] T De Troyer. Frequency-domain modal analysis with aeroelastic applications. *Mechanical Engineering Department, Vrije universiteit Brussel (VUB), Brussels*, 2009.

[DTGPV09] T De Troyer, P Guillaume, R Pintelon, and S Vanlanduit. Fast calculation of confidence intervals on parameter estimates of least-squares frequency-domain estimators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(2) :261–273, 2009.

[DTGS09] T De Troyer, P Guillaume, and G Steenackers. Fast variance calculation of polyreference least-squares frequency-domain estimates. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(5) :1423–1433, 2009.

[Duv94] Patrick Duvaut. *Traitement du signal : concepts et applications.* Hermes, 1994.

[EAM12] Alireza Esna Ashari and Laurent Mevel. Input-output subspace-based fault detection. In *Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, volume 8, pages 204–209, 2012.

[EKG10] Mahmoud El-Kafafy and Patrick Guillaume. Model parameter estimation of structures with over-damped poles. 2010.

[ER96] Bernard Etkin and Lloyd Duff Reid. *Dynamics of flight : stability and control.* Wiley New York, 1996.

[FDMVO00] Wouter Favoreel, Bart De Moor, and Peter Van Overschee. Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 10(2) :149–155, 2000.

[FH63] Jacob E Fromm and Francis H Harlow. Numerical solution of the problem of vortex street development. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 6(7) :975–982, 1963.

[FJ98] Matteo Frigo and Steven G Johnson. Fftw : An adaptive software architecture for the fft. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1381–1384. IEEE, 1998.

[FJ99] Matteo Frigo and Steven G Johnson. Fftw user's manual. *Massachusetts Institute of Technology*, 1999.

[GDMA11] Maurice Goursat, Michael Döhler, Laurent Mevel, and Palle Andersen. Crystal clear ssi for operational modal analysis of aerospace vehicles. In *Structural Dynamics, Volume 3*, pages 1421–1430. Springer, 2011.

[Ger99] David Gero. *Military Aviation Disasters : Significant Losses Since 1908*. Patrick Stephens Limited, 1999.

[GHVdA99] P Guillaume, L Hermans, and H Van der Auweraer. Maximum likelihood identification of modal parameters from operational data. In *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference (IMAC17)*, pages 1887–1893, 1999.

[GMD66] Richard A Gentry, Robert E Martin, and Bart J Daly. An eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. *Journal of Computational Physics*, 1(1) :87–118, 1966.

[GMW81] Philip E Gill, Walter Murray, and Margaret H Wright. Practical optimization. 1981.

[GP96] S Granger and MP Paidoussis. An improvement to the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, 320 :163–184, 1996.

[GRI81] IE Garrick and Wilmer H Reed III. Historical development of aircraft flutter. *Journal of Aircraft*, 18(11) :897–912, 1981.

[GSP89] PATRICK Guillaume, Joannes Schoukens, and R Pintelon. Sensitivity of roots to errors in the coefficient of polynomials obtained by frequency-domain estimation methods. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 38(6) :1050–1056, 1989.

[GVL12] Gene H Golub and Charles F Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. JHU Press, 2012.

[GVV+03] Patrick Guillaume, Peter Verboven, Steve Vanlanduit, Herman Van Der Auweraer, and Bart Peeters. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. In *Proceedings of IMAC*, volume 21, pages 183–192, 2003.

[GW99] Claude Gasquet and Patrick Witomski. *Fourier analysis and applications : filtering, numerical computation, wavelets*, volume 30. Springer, 1999.

[Ham94] James Douglas Hamilton. *Time series analysis*, volume 2. Princeton university press Princeton, 1994.

[Has71] Hermann J Hassig. An approximate true damping solution of the flutter equation by determinant iteration. *Journal of Aircraft*, 8(11) :885–889, 1971.

[HC85] Chang-Ho Hong and Inderjit Chopra. Aeroelastic stability analysis of a composite rotor blade. *Journal of the American Helicopter Society*, 30(2) :57–67, 1985.

[HE55] Francis H Harlow and MW Evans. A machine calculation method for hydrodynamic problems. *LAMS-1956*, 1955.

[Hes74] John L Hess. The problem of three-dimensional lifting potential flow and its solution by means of surface singularity distribution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4(3) :283–319, 1974.

[HS67] John L Hess and AMO Smith. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Progress in Aerospace Sciences*, 8 :1–138, 1967.

[HS06] Ward Heylen and Paul Sas. *Modal analysis theory and testing*. Katholieke Universteit Leuven, Departement Werktuigkunde, 2006.

[Hun98] Julian CR Hunt. Lewis fry richardson and his contributions to mathematics, meteorology, and models of conflict. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 30(1) :xiii–xxxvi, 1998.

[HvdA99] Luc Hermans and Herman van der Auweraer. Modal testing and analysis of structures under operational conditions : industrial applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(2) :193–216, 1999.

[HW+65] Francis H Harlow, J Eddie Welch, et al. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of fluids*, 8(12) :2182, 1965.

[Iso81] K Isogai. Transonic dip mechanism of flutter of a sweptback wing. ii. *AIAA Journal*, 19(9) :1240–1242, 1981.

[Jan03] Magnus Jansson. Subspace identification and arx modeling. In *IFAC Symp on System Identification*, 2003.

[JMM+13] Ahmed Jhinaoui, Laurent Mevel, Joseph Morlier, et al. Uncertainties quantification for subspace identification of rotating systems. In *5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO'2013)*, 2013.

[JSL01] Ben C Juricek, Dale E Seborg, and Wallace E Larimore. Identification of the tennessee eastman challenge process with subspace methods. *Control Engineering Practice*, 9(12) :1337–1351, 2001.

[K+95] Michael W Kehoe et al. *A historical overview of flight flutter testing*, volume 4720. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management, Scientific and Technical Information Program, 1995.

[Kal63] Rudolf Emil Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics, Series A : Control*, 1(2) :152–192, 1963.

[Kun06] Sidney H Kung. Partial fraction decomposition by division. *The College Mathematics Journal*, pages 132–134, 2006.

[LGV00] Marco Lovera, Tony Gustafsson, and Michel Verhaegen. Recursive subspace identification of linear and non-linear wiener state-space models. *Automatica*, 36(11) :1639–1650, 2000.

[Lju98] Lennart Ljung. *System identification.* Springer, 1998.

[LVOW93] Lennart Ljung, Mats Viberg, Björn Ottersten, and Bo Wahlberg. Performance of subspace based state-space system identification methods. In *Proceedings of the 12th IFAC world congress*, page 369, 1993.

[Max81] Jacques Max. *Methodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques. Tome 2.* Masson, 1981.

[MBB+06] Laurent Mevel, Albert Benveniste, Michèle Basseville, Maurice Goursat, Bart Peeters, Herman Van der Auweraer, and Antonio Vecchio. Input/output versus output-only data processing for structural identification - application to in-flight data analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3) :531–552, 2006.

[MBG03] L Mevel, M Basseville, and M Goursat. Stochastic subspace-based structural identification and damage detectionŮapplication to the steel-quake benchmark. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1) :91–101, 2003.

[MBL08] Guillaume Mercère, Laurent Bako, and Stéphane Lecœuche. Propagator-based methods for recursive subspace model identification. *Signal Processing*, 88(3) :468–491, 2008.

[MBT99] Kaj Madsen, Hans Bruun, and Ole Tingleff. Methods for non-linear least squares problems. 1999.

[MDY+97] Masaru Matsumoto, Yoshiyuki Daito, Fumitaka Yoshizumi, Yasuo Ichikawa, and Tadahiro Yabutani. Torsional flutter of bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 69 :871–882, 1997.

[Mei75] Leonard Meirovitch. *Elements of vibration analysis.* McGraw-Hill, 1975.

[Mer83] M Mergeay. Least squares complex exponential method and global system parameter estimation used by modal analysis. In *Proceedings of the 8th International Seminar on Modal Analysis*, volume 3, pages 15–17, 1983.

[MHVdA99] L Mevel, L Hermans, and H Van der Auweraer. Application of a subspace-based fault detection method to industrial structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6) :823–838, 1999.

[MSY+03] Masaru Matsumoto, Hiromichi Shirato, Tomomi Yagi, Rikuma Shijo, Akitoshi Eguchi, and Hitoshi Tamaki. Effects of aerodynamic interferences between heaving and torsional vibration of bridge decks : the case of tacoma narrows bridge. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 91(12) :1547–1557, 2003.

[Muk03] Vivek Mukhopadhyay. Historical perspective on analysis and control of aeroelastic responses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(5) :673–684, 2003.

[Myk77] WALTER J Mykytow. A brief overview of transonic flutter problems. *Unsteady Airloads in Separated and Transonic Flow, AGARD-CP-226*, 1977.

[Nag06] IJ Nagrath. *Control systems engineering*. New Age International, 2006.

[NKNW96] John Neter, Michael H Kutner, Christopher J Nachtsheim, and William Wasserman. *Applied linear statistical models*, volume 4. Irwin Chicago, 1996.

[Oeh92] Gary W Oehlert. A note on the delta method. *The American Statistician*, 46(1) :27–29, 1992.

[OK02] Hiroshi Oku and Hidenori Kimura. Recursive 4sid algorithms using gradient type subspace tracking. *Automatica*, 38(6) :1035–1043, 2002.

[OSB+89] Alan V Oppenheim, Ronald W Schafer, John R Buck, et al. *Discrete-time signal processing*, volume 2. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1989.

[PA04] AW Phillips and RJ Allemang. A low order implementation of the polyreference least squares complex frequency (lscf) algorithm. In *Proceedings of ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium*, 2004.

[PDR99] Bart Peeters and Guido De Roeck. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical systems and signal processing*, 13(6) :855–878, 1999.

[PDR01] Bart Peeters and Guido De Roeck. Stochastic system identification for operational modal analysis : a review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4) :659–667, 2001.

[PdSP89] Armando Da Silva Passos and Armando da Silva Passos. *Méthodes mathématiques du traitement numérique du signal*. Eyrolles, 1989.

[PGS07] R Pintelon, P Guillaume, and Joannes Schoukens. Uncertainty calculation in (operational) modal analysis. *Mechanical systems and signal processing*, 21(6) :2359–2373, 2007.

[PGVdA+04] Bart Peeters, Patrick Guillaume, Herman Van der Auweraer, Bart Cauberghe, Peter Verboven, and Jan Leuridan. Automotive and aerospace applications of the polymax modal parameter estimation method. In *Proceedings of IMAC*, volume 22, pages 26–29, 2004.

[Pin02] Rik Pintelon. Frequency-domain subspace system identification using non-parametric noise models. *Automatica*, 38(8) :1295–1311, 2002.

[PIR01] Jean PIRANDA. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur. Bruit et vibrations*, (R6180), 2001.

[PL08] Yangdong Pan and Jay H Lee. Modified subspace identification for long-range prediction model for inferential control. *Control Engineering Practice*, 16(12) :1487–1500, 2008.

[PPR+96] JL Peng, AD Pan, DV Rosowsky, WF Chen, T Yen, and SL Chan. High clearance scaffold systems during construction-i. structural modelling and modes of failure. *Engineering Structures*, 18(3) :247–257, 1996.

[PS12] Rik Pintelon and Johan Schoukens. *System identification : a frequency domain approach.* John Wiley & Sons, 2012.

[PV03] Bart Peeters and CE Ventura. Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(5) :965–988, 2003.

[PVdAGL04] Bart Peeters, Herman Van der Auweraer, Patrick Guillaume, and Jan Leuridan. The polymax frequency-domain method : a new standard for modal parameter estimation ? *Shock and Vibration*, 11(3-4) :395–409, 2004.

[Qin06] S Joe Qin. An overview of subspace identification. *Computers & chemical engineering*, 30(10) :1502–1513, 2006.

[Red93] Junuthula Narasimha Reddy. *An introduction to the finite element method*, volume 2. McGraw-Hill New York, 1993.

[RPDR08a] Edwin Reynders, Rik Pintelon, and Guido De Roeck. Consistent impulse-response estimation and system realization from noisy data. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(7) :2696–2705, 2008.

[RPDR08b] Edwin Reynders, Rik Pintelon, and Guido De Roeck. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4) :948–969, 2008.

[Smi03] Steven W Smith. *Digital signal processing : a practical guide for engineers and scientists.* Newnes, 2003.

[Sne95] Ian Naismith Sneddon. *Fourier transforms.* Courier Dover Publications, 1995.

[Son98] Eduardo D Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, volume 6. Springer, 1998.

[SPG03] Oscar AZ Sotomayor, Song Won Park, and Claudio Garcia. Multivariable identification of an activated sludge process with subspace-based algorithms. *Control engineering practice*, 11(8) :961–969, 2003.

[VDAGVV01] Herman Van Der Auweraer, P Guillaume, Peter Verboven, and S Vanlanduit. Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 123(4) :651–658, 2001.

[Ver02] Peter Verboven. Frequency-domain system identification for modal analysis. *Vrije Universiteit Brussel, Brussels*, 2002.

[Vib95] Mats Viberg. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, 31(12) :1835–1851, 1995.

[VODM95] Peter Van Overschee and Bart De Moor. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica*, 31(12) :1853–1864, 1995.

[VODM96] Peter Van Overschee and B De Moor. Subspace identification for linear systems : Theory, implementation. *Methods*, 1996.

[VV01] P Verboven and S Vanlanduit. Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method. 2001.

[VWO97a] Mats Viberg, Bo Wahlberg, and Björn Ottersten. Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting. *Automatica*, 33(9) :1603–1616, 1997.

[VWO97b] Mats Viberg, Bo Wahlberg, and Björn Ottersten. Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting. *Automatica*, 33(9) :1603–1616, 1997.

[Wal96] James S Walker. *Fast fourier transforms*, volume 24. CRC press, 1996.

[Wel67] Peter D Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, 15(2) :70–73, 1967.

[ZD76] Lotfi Asker Zadeh and Charles A Deoser. *Linear system theory.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1976.

[Zou08] Rafik Zouari. *Détection précoce dŠinstabilité aérolélastique des structures aéronautiques.* PhD thesis, Rennes 1, 2008.

Table des figures

1.1 Exemple : mode de flexion voilure d'un Rafale 18
1.2 Pont du détroit de Tacoma - 7 Novembre 1940 19
1.3 Sources des efforts aérodynamiques d'un profil à 2 DDL 20
1.4 Evolution des forces aérodynamiques 20
1.5 Pompage et rotation en phase 21
1.6 Pompage et rotation en déphasage de $\pi/2$ 22
1.7 Exemple d'un maillage éléments finis d'un Rafale 23
1.8 Exemples de maillage d'un champ aérodynamique sur Rafale 23
1.9 Accéléromètre piézoélectrique triaxial de la marque Kistler© 24
1.10 Exemples de moyens d'excitation 24
1.11 Processus d'ouverture de domaine de vol 26
1.12 Avion Rafale préparé lors d'un essais de vibration au sol (GVT) 27
1.13 Avion Rafale en vol 27

2.1 Exemple de signaux 39
2.2 Exemple de signal temporel discretisé avec $T_e = 1s$ 40
2.3 Schéma bloc de la représentation temporelle du modèle ARX(p, q) sans entrée inconnue 50
2.4 Représentation d'état 53
2.5 Les représentations d'état 54
2.6 Matrice de transfert $\mathbf{H(p)}$ du système $\mathcal{M}$,$\mathcal{K}$,$\mathcal{C}$ observé 61

3.1 Exemple de diagramme de stabilité de fréquences 121

4.1 Exemple de signaux bruités 127

8.1 Fonctions de transfert du système poutre 180
8.2 Courbes de flottement 182
8.3 Fonctions de transfert du système avion au sol 183
8.4 Fonctions de transfert du système avion en vol 184
8.5 Probabilité d'être dans l'intervalle de confiance de taille $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$ 189

8.6 Probabilité d'être dans l'intervalle de confiance de taille $2n\sigma_{x_m}^{(MC)}$ 191

9.1 Score S 207
9.2 Score S 219
9.3 Score S 232
9.4 Score S 243
9.5 Score S 255

10.1 Output-Only Covariance-driven (OO_{cov}) - Sans bruit ajouté aux capteurs 261
10.2 Output-Only Squared Orthogonal Projection Data-driven (OO_{sqort}) - Sans bruit ajouté aux capteurs 262
10.3 Input/Output Covariance-driven (OI_{cov}) - Sans bruit ajouté aux capteurs 263
10.4 Input/Output Squared Orthogonal Projection Data-driven (OI_{sqort}) - Sans bruit ajouté aux capteurs 264
10.5 Input/Output Squared Oblique Projection Data-driven (OI_{sqobl}) - Sans bruit ajouté aux capteurs 265

A.1 Exemples de lois normales d'espérances μ et de variances σ différentes . 282
A.2 Exemples de lois $\chi^2(k)$ avec différentes valeurs de k 284

C.1 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 296
C.2 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 297
C.3 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 298
C.4 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 299
C.5 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 300
C.6 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 301
C.7 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 302
C.8 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 303
C.9 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 304
C.10 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 305
C.11 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 306
C.12 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 307

C.13 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 308
C.14 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 309
C.15 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 310
C.16 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 311
C.17 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 312
C.18 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 313
C.19 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 314
C.20 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 10 315

D.1 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 318
D.2 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 319
D.3 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 320
D.4 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 321
D.5 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 322
D.6 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 323
D.7 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 324
D.8 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 325
D.9 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 326
D.10 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 327
D.11 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 328
D.12 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 329
D.13 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 330

D.14 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 331
D.15 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 332
D.16 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 333
D.17 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 334
D.18 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 335
D.19 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 336
D.20 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 337
D.21 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 338
D.22 OO_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 339
D.23 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 340
D.24 OO_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 341
D.25 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 342
D.26 OI_{cov} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 343
D.27 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 344
D.28 OI_{sqort} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 345
D.29 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des fréquences avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 346
D.30 OI_{sqobl} - Diagrammes de stabilité des taux d'amortissement avec test de succès du critère pour les ordres de 1 à 100 347

Résumé

La détermination des caractéristiques vibratoires est une étape cruciale lors du processus de certification d'une structure ou lors de l'évaluation de sa détérioration. L'identification des modes d'une structure nécessite d'effectuer des essais de vibration qui permettent d'observer la réponse du système à une excitation pour déterminer les modes de la structure. Certaines techniques d'identification modale, telles que les méthodes basées sur la minimisation d'erreur de modélisation ARX ou les méthodes sous-espaces, se sont fortement répandues dans le monde industriel ces quinze dernières années. Cependant, à cause de nombreuses sources d'erreurs (e.g. bruits sur les capteurs, bruits environnementaux), ces méthodes ne peuvent fournir que des estimations des paramètres modaux. Une estimation est par définition entachée d'une erreur statistique, la variance. Le but de cette thèse est l'étude approfondie de l'estimation de cette erreur statistique. Le manuscrit est découpé en trois parties. La première concerne la description détaillée de deux familles d'identification modale (minimisation d'erreur de modélisation ARX et méthodes sous-espace). La seconde partie décrit le principe de l'estimation des incertitudes et fournit les chaînes de propagation des variances pour chacune des méthodes. La troisième partie présente une validation poussée de ces méthodes dans le but d'une utilisation opérationnelle.

Abstract

Determinination of vibration characteristics is a crucial step for structure certification or health monitoring. Whatever the method, modes identification of a structure requires vibration tests. During these tests, measurements are made in order to observe responses of the system to known, partially known or unknown excitations. Modal identification methods are global methods. They allow the determination of modes from data post-treatment. Some modal identification methods, such as those based on ARX modelisation error minimisation or subspace methods, have been largely spread into the industry for about fifteen years. Despite this succes, these methods will never provide exact results. Indeed, due to numerous error sources (e.g. sensor noises, environmental noises), modal identifications based on measured data can only lead to modal parameters estimations. By definition, an estimation is subject to statistical errors, also called variances. The purpose of this thesis is to give an in-depth study of these statistical errors estimation. This document is divided in three parts. Firstly, a description of two kind of modal identification methods (ARX modelisation error minimisation and subspace methods) is given. Secondly, the uncertainty estimation principle is explained and propagation schemes of variances are given. Finally, the third part provides an in-depth validation of these methods in order to proceed to industrial utilisations.