



**HAL**  
open science

# Modélisation de la propagation de la houle en présence d'un courant inhomogène et au-dessus d'une topographie variable

Jenna Charland

► **To cite this version:**

Jenna Charland. Modélisation de la propagation de la houle en présence d'un courant inhomogène et au-dessus d'une topographie variable. Autre [cond-mat.other]. Université de Toulon, 2014. Français. NNT : 2014TOUL0010 . tel-01135889

**HAL Id: tel-01135889**

**<https://theses.hal.science/tel-01135889>**

Submitted on 26 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole doctorale Mer et Sciences  
Institut Méditerranéen d'Océanologie

-

**Thèse** présentée par

**Jenna Charland**

soutenue le 20 novembre 2014

pour obtenir le grade de Docteur en Physique

Spécialité : Océanographie Physique

-

**Modélisation de la propagation de la houle en présence  
d'un courant inhomogène et au-dessus d'une  
topographie variable**

-

**Thèse dirigée par**

M. REY Vincent            Professeur des universités, Université de Toulon-Var  
M. TOUBOUL Julien      Maître de Conférences, Université de Toulon-Var

**Jury :**

M. ARDHUIN Fabrice	Rapporteur	Directeur de recherche, CNRS
M. BELIBASSAKIS Kostas	Examineur	Professeur des Universités, Université d'Athènes
M. BENOIT Michel	Examineur	Chercheur EDF, Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant
M. KHARIF Christian	Rapporteur	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Marseille
Mme NAHUM Carole	Invitée	Direction Générale de l'Armement
M. PELINOVSKY Efim	Examineur	Professeur des Universités, Russian Academy of Sciences
M. REY Vincent	Directeur	Professeur des Universités, Université de Toulon-Var
M. TOUBOUL Julien	Co-Directeur	Maître de Conférences, Université de Toulon-Var



---

# Remerciements

Lorsque j'étais enfant, les nombreuses vacances que j'ai passées à la mer m'ont profondément marquées. C'est lors de ces vacances que j'ai commencé à observer l'océan en général et les vagues en particulier. J'ai alors naturellement orienté mes études dans le domaine de la mécanique des fluides, puis dans la recherche en océanographie. Pour cela mes premiers remerciements vont à ma famille et plus particulièrement à mes parents qui m'ont appris à observer mon environnement. Je les remercie pour m'avoir toujours soutenue dans mes choix.

Je remercie profondément Vincent Rey, mon directeur de thèse, qui a permis la construction de cette thèse. Sa disponibilité a été sans faille pendant mes trois ans de doctorat. Son soutien, son écoute et ses conseils avisés m'ont été précieux tout au long de ces trois années.

Merci infiniment à Julien Touboul, chercheur que j'admire, qui a co-encadré cette thèse et avec qui j'ai interagi de très nombreuses fois. Sa remarquable disponibilité a permis des débats scientifiques très enrichissants qui ont largement contribué à l'élaboration de cette thèse.

Je remercie la Direction Générale de l'Armement d'avoir financé ces travaux.

Je remercie Christian Kharif et Fabrice Ardhuin d'avoir accepté de rapporter ces travaux et pour leurs remarques, toujours constructives.

Merci beaucoup à Aimed pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée lors des TP et pour la préparation de la campagne de mesure au BGO First.

Ces trois années ont été l'occasion de rencontrer des personnes aussi différentes qu'exceptionnelles ! Ainsi je remercie profondément Ambre et Gwendoline, mes amies, d'avoir partagé avec moi ces moments si particuliers, de joie et de doute, que l'on peut rencontrer en cours de thèse.

Je remercie très chaleureusement Christiane, Jérémy, Julien M., Fred, Lyuda, Mehmet, Jacques S., Sylvain et Nadège, avec qui j'ai traversé ces trois ans, pour leur bonne humeur et leur gentillesse. Plus généralement, merci à toutes les personnes du labo de m'avoir accueillie. Je souhaite

---

un bon courage aux doctorants qui me suivent, Victor, Thomas, Kévin, Djalal, Cécile, Diogone, Amandine et bien d'autres, à qui je laisse maintenant la place !

Merci à Benjamin, mon ami, pour le soutien qu'il m'a apporté lorsqu'il le fallait. Je remercie Olivier, mon conjoint, pour le regard extérieur qu'il a eu sur mes travaux et dont les remarques m'ont aidée à relativiser !





*Si nous prenons la nature pour guide, nous ne nous égarerons jamais.*

Cicéron





---

# Table des matières

Table des figures	xv
Liste des tableaux	xxi
Avant propos	1
<b>A Etat de l’art</b>	<b>5</b>
<b>I Généralités sur la houle et le milieu marin</b>	<b>9</b>
1 Introduction . . . . .	9
2 Théories de la houle par profondeur infinie et intermédiaire : Houles de Stokes . . . . .	10
2.1 Généralités . . . . .	10
2.2 Les équations fondamentales de la théorie potentielle . . . . .	11
2.3 Les équations fondamentales de la théorie potentielle linéaire . . . . .	12
3 Description physique du milieu littoral . . . . .	14
3.1 Les différents types de courant . . . . .	14
3.1.1 Les grands courants marins . . . . .	14
3.1.2 Les courants régionaux . . . . .	15
3.1.3 Les courants littoraux . . . . .	16
3.2 Les différents types de variations topographiques . . . . .	18
3.2.1 Les variations topographiques naturelles . . . . .	18
3.2.2 Les variations topographiques artificielles . . . . .	19

## Table des matières

---

<b>II Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation</b>	<b>21</b>
1 Introduction . . . . .	21
2 Généralités sur les effets de la topographie et du courant sur la propagation de la houle . . . . .	23
2.1 Effets d'un milieu lentement variable : le shoaling et la réfraction . . . . .	23
2.2 Effets d'un milieu plus fortement variable : la réflexion et la diffraction . . . . .	26
2.2.1 La réflexion . . . . .	26
2.2.2 La diffraction . . . . .	28
3 Vers une représentation unifiée des effets de la topographie sur la propagation de la houle . . . . .	30
3.1 Nécessité de la représentation des phénomènes couplés . . . . .	30
3.2 Modèles de réfraction-diffraction . . . . .	31
3.2.1 Réécriture de l'équation de Berkhoff . . . . .	31
3.2.2 Extensions de l'équation de Berkhoff . . . . .	32
4 Vers une représentation unifiée des processus d'interaction houle-courant-topographie	34
4.1 Etudes et avancées . . . . .	34
4.2 Un modèle unifié : l'équation mild-slope avec courant . . . . .	34
4.2.1 Le principe variationnel . . . . .	34
4.2.2 Equation de Kirby (1984) . . . . .	35
4.3 Influence d'un cisaillement vertical sur le comportement de la houle . . . . .	36
<b>B Dynamique de la houle au-dessus d'une topographie variable en présence d'un courant inhomogène</b>	<b>39</b>

<b>III Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle</b>	<b>43</b>
1 Introduction . . . . .	43
2 Le bassin de Génie Océanique First . . . . .	43
2.1 Le bassin, ses caractéristiques, ses équipements . . . . .	43
2.2 Caractéristiques de la topographie mise en place . . . . .	45
3 Conditions hydrodynamiques lors de la campagne de mesure de 2008 . . . . .	47
4 Evolution de l'amplitude et de la phase de la houle dans le bassin . . . . .	48
4.1 Résultats expérimentaux . . . . .	48

	4.1.1 Evolution de l’amplitude de la houle . . . . .	48
	4.1.2 Evolution de la phase de la houle . . . . .	50
	4.2 Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux issus de la résolution numérique de l’équation de Kirby (1984) . . . . .	51
	4.3 Synthèse . . . . .	52
5	Causes possibles des écarts constatés . . . . .	53
	5.1 Présence d’un gradient de cisaillement vertical dans le courant . . . . .	53
	5.2 Sensibilité de la célérité de la houle à un gradient de cisaillement vertical . . . . .	54
	5.3 Ordre de grandeur de l’influence d’un gradient vertical de cisaillement et d’un gradient horizontal . . . . .	55
6	Discussion sur la notion de vitesse de groupe . . . . .	58
	6.1 Etablissement de la vitesse de groupe . . . . .	58
	6.2 Vitesse de groupe de la houle dans un milieu sans courant . . . . .	59
	6.3 Vitesse de groupe de la houle dans un milieu avec un courant uniforme sur la colonne d’eau . . . . .	59
	6.4 Discussion sur une vitesse de groupe de la houle dans un milieu avec un courant cisailé linéairement sur la colonne d’eau . . . . .	60
7	Synthèse et stratégie . . . . .	62
<b>IV Equation de propagation avec un courant inhomogène</b>		<b>63</b>
1	Des approches variées . . . . .	63
2	Géométrie de l’écoulement . . . . .	65
3	Expression d’un Lagrangien de l’écoulement . . . . .	67
4	Etablissement du terme de pression dans le cas d’un écoulement tridimensionnel présentant une vorticité non nulle . . . . .	68
	4.1 Hypothèse sur le champ de vorticité . . . . .	68
	4.2 Intégration de l’équation d’Euler . . . . .	69
	4.3 Réécriture . . . . .	69
5	Etablissement du Lagrangien . . . . .	72
	5.1 Hypothèses et notations . . . . .	72
	5.2 Expression du Lagrangien . . . . .	73
	5.3 Variations du Lagrangien . . . . .	74
6	Généralisation de l’équation mild slope . . . . .	77
7	Perspectives sur les interactions entre la houle et une topographie abrupte . . . . .	77
	7.1 La prise en compte des modes évanescents . . . . .	77

## Table des matières

---

7.2	Cas d'une plaque plane immergée . . . . .	78
<b>V</b>	<b>Discussion sur la notion d'action de la houle</b>	<b>83</b>
1	Introduction . . . . .	83
2	Rappel des notations . . . . .	83
3	Historique du concept d'action de la houle . . . . .	84
4	Equation d'évolution de l'action dans notre cas d'écoulement . . . . .	86
4.1	Moyenne du Lagrangien . . . . .	86
4.2	Dérivation du Lagrangien par rapport à $a, \omega$ . . . . .	86
4.3	Comparaison de $\mathcal{L}_\omega$ à la densité d'énergie de la houle $\mathcal{E}$ . . . . .	86
4.4	Equation d'évolution pour un courant cisailé linéairement suivant la verticale . . . . .	87
4.5	Discussion sur l'évolution de la pseudo-action . . . . .	88
<b>C</b>	<b>Etude expérimentale sur la propagation de la houle au dessus d'une topographie variable en présence d'un courant inhomogène</b>	<b>91</b>
<b>VI</b>	<b>Présentation des expériences effectuées au Bassin de Génie Océanique First</b>	<b>95</b>
1	Introduction . . . . .	95
2	Les instruments de mesure . . . . .	95
2.1	Le moulinet à hélices . . . . .	95
2.2	Les sondes à houle . . . . .	96
2.3	Les courantomètres acoustiques : les Vectrino . . . . .	97
3	Disposition dans le plan horizontal . . . . .	98
3.1	Le moulinet à hélices . . . . .	98
3.2	Les sondes à houle . . . . .	98
3.3	Les Vectrino . . . . .	99
3.4	Positions successives du chariot 1 . . . . .	100
4	Disposition dans le plan vertical . . . . .	101
5	Les conditions hydrodynamiques . . . . .	103
5.1	Choix des conditions hydrodynamiques . . . . .	103
5.2	Calibration de la houle et du courant . . . . .	104
5.3	Etablissement des différentes conditions hydrodynamiques . . . . .	104
6	Acquisition des données . . . . .	104
7	Méthode d'analyse . . . . .	106

7.1	Champ de courant moyen . . . . .	106
7.2	Analyse du bruit . . . . .	108
7.3	Amplitude . . . . .	110
7.4	Longueur d'onde . . . . .	111
7.5	Phase . . . . .	112
<b>VII Observation des interactions houle-courant-topographie</b>		<b>113</b>
1	Introduction . . . . .	113
2	Champs de courant . . . . .	113
2.1	Champ de courant longitudinal . . . . .	113
2.2	Champs de courant horizontaux . . . . .	115
2.2.1	Courant d'intensité $U_1$ . . . . .	116
2.2.2	Courant d'intensité $U_2$ . . . . .	118
3	Evolution du champ de houle . . . . .	119
3.1	Analyse de l'amplitude de la houle . . . . .	119
3.1.1	Condition $U_1, T_1$ . . . . .	120
3.1.2	Condition $U_2, T_2$ . . . . .	123
3.1.3	Discussion sur l'amplification de la houle en fonction des caractéristiques hydrodynamiques . . . . .	127
3.2	Evolution de la phase de la houle . . . . .	130
3.2.1	Condition $U_1, T_1$ . . . . .	131
3.2.2	Condition $U_2, T_2$ . . . . .	133
3.2.3	Synthèse . . . . .	136
4	Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle . . . . .	137
4.1	Dérive de Stokes . . . . .	137
4.2	Evolution du profil de courant avec et sans houle . . . . .	140
4.2.1	Champ de courant en $(Y, Z) = (-1, -2)m$ . . . . .	140
4.2.2	Profil vertical du courant, condition de courant $U_1$ . . . . .	142
4.2.3	Profil vertical du courant, condition de courant $U_2$ . . . . .	152
4.2.4	Recirculation du courant près des bosses . . . . .	162
4.2.5	Synthèse . . . . .	163
4.3	Profondeur critique d'interaction houle-courant . . . . .	164
4.4	Estimation du cisaillement à une profondeur $Z = 0.34m$ . . . . .	164
4.5	Perspectives . . . . .	168

## Table des matières

---

Conclusion générale et perspectives	171
Références bibliographiques	175
<b>Annexes</b>	<b>183</b>
Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée	187
Annexe B : Expression de la vitesse de groupe	195
Annexe C : Calculs relatifs à l'action de la houle	199
Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino	203
Annexe E : article de <a href="#">Rey et al. (2014)</a>	211

---

## Table des figures

I.1	Les grands courants océaniques. <i>Source : wikipedia, mai 2014</i> . . . . .	15
I.2	Les grands courants océaniques. <i>Extrait de Shom (2005)</i> . . . . .	16
I.3	Fonctionnement d'une baie. <i>Source : <a href="http://www.epoc.u-bordeaux.fr">www.epoc.u-bordeaux.fr</a>, mai 2014</i> . . . . .	17
I.4	Schématisation du courant de retour. <a href="http://www.shom.fr">www.shom.fr</a> . . . . .	18
I.5	A gauche : exemple de côte rocheuse abrupte (Six-Fours les Plages, Var (83)). A droite : exemple de plage à pente plus douce (Vieux-Boucau, Landes (40)) . . . . .	19
I.6	A gauche : digue de Biarritz (Pyrénées-Atlantiques, 64). <a href="http://www.lefigaro.fr">www.lefigaro.fr</a> . A droite : exemple de digue avec enrochement <a href="http://www.cabotage.fr">www.cabotage.fr</a> . . . . .	20
II.1	Propagation de la houle au dessus d'une topographie lentement variable . . . . .	23
II.2	Réfraction sur une plage. <i>Source : <a href="http://fbc-alaligne.blogspot.fr">http://fbc-alaligne.blogspot.fr</a> mai 2014</i> . . . . .	24
II.3	Plaque plane immergée . . . . .	27
II.4	Evolution des coefficients de réflexion (+-) et de transmission (-) en fonction de la fréquence et du nombre de modes évanescents (m.e.) au dessus d'une plaque plane. $L = 1.53m$ , $h_0 = 3m$ , $h_s = 0.5m$ , $h_f = 0.6m$ . . . . .	28
II.5	Diffraction par deux brise-lames. <i>Source : <a href="http://hmf.enseeiht.fr">http://hmf.enseeiht.fr</a>, mai 2014</i> . . . . .	29
III.1	Vue en coupe du Bassin de Génie Océanique FIRST ( <a href="http://Océanide">Océanide</a> (2013)) . . . . .	44
III.2	Chariot mobile 1 . . . . .	45
III.3	Plan de masse de la topographie ( <a href="http://Océanide">Océanide</a> , 2013) . . . . .	46
III.4	Topographie mise en place dans le bassin. Position émergée . . . . .	47
III.5	Evolution de l'amplitude de la houle. En haut, $H = 10cm$ . En bas, $H = 20cm$ . Extrait de <a href="http://Rey et al.">Rey et al.</a> (2014). . . . .	49



## Table des figures

---

III.6	Evolution de la phase de la houle par rapport à sa phase en $Y = 0$ . En haut, $H = 10cm$ . En bas, $H = 20cm$ . Extrait de <a href="#">Rey et al. (2014)</a> . . . . .	50
III.7	Champ de courant $\mathbf{U}_0$ extrapolé à partir des données du courantomètre immergé à $25cm$ de profondeur. Extrait de <a href="#">Rey et al. (2014)</a> . . . . .	51
III.8	Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle. En haut $H = 0.1m$ . En bas $H = 0.2m$ . Extrait de <a href="#">Rey et al. (2014)</a> . . . . .	52
III.9	Influence du cisaillement sur la célérité de la houle pour différentes valeurs du courant de surface. (-) : Célérité de la houle avec un courant de la forme $U(z) = Sz + U_0$ . (*) : Célérité de la houle avec un courant non cisailé pour les différentes valeurs du courant de surface . . . . .	55
III.10	En noir : Profil de la topographie sur une coupe transverse du bassin, en $X = 0$ . En rouge : Profil de $S_x$ , le long de la coupe transverse, pour une valeur du paramètre de sensibilité $a_0 = 1$ . . . . .	56
III.11	Valeur de l'écart relatif $e_r$ dans le bassin lorsque $a_0 = -1$ (à gauche) et lorsque $a_0 = 1$ (à droite) . . . . .	57
III.12	Profil du courant $U(x, y) = U_0(x, y)$ . . . . .	59
III.13	Profil du courant $U(x, y) = S(x, y)z + U_0(x, y)$ . . . . .	60
IV.1	Schématisation de l'écoulement . . . . .	66
IV.2	Plaque plane . . . . .	78
IV.3	Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la profondeur totale $h_0$ varie. Les dimensions de la plaque plane immergée sont $e = 0.1m$ , $L = 1.53m$ . . . . .	80
IV.4	Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque l'épaisseur $e$ varie. Les autres dimensions sont $h_0 = 3m$ , $h_s = 0.5m$ , $L = 1.53m$ . . . . .	80
IV.5	Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la longueur $L$ varie. Les autres dimensions sont $h_0 = 3m$ , $h_s = 0.5m$ , $e = 0.1m$ . . . . .	81
IV.6	Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la profondeur d'immersion $h_s$ varie. Les autres dimensions sont $h_0 = 3m$ , $e = 0.1m$ , $L = 1.53m$ . . . . .	81
VI.1	Moulinet à hélice . . . . .	96
VI.2	Les sondes à houle . . . . .	97
VI.3	Schématisation du fonctionnement des courantomètres ( <a href="#">AS, 2010</a> ) . . . . .	98

VI.4	Disposition des sondes à houles dans le bassin (Océanide, 2013) . . . . .	99
VI.5	Installation des dix Vectrino sur les deux perches (à gauche), et installation des deux perches sur le chariot mobile selon l'axe $Y$ (à droite) . . . . .	100
VI.6	Positions successives du chariot 1 dans la direction longitudinale et dispositions des Vectrino sur l'axe transverse (Océanide, 2013) . . . . .	101
VI.7	Disposition des Vectrino. (Océanide, 2013) . . . . .	102
VI.8	. . . . .	106
VI.9	Exemples de signaux temporels mesurés et filtrés. Condition de courant seul . . .	107
VI.10	Exemples de signaux temporels mesurés et filtrés. En haut : Signal temporel. En bas : Spectre d'amplitude . . . . .	108
VI.11	A gauche : Signal temporel. En bas : Spectre d'amplitude de la vitesse longitudinale. Le point de mesure $(X, Y, Z) = (-8, 0, -0.59)m$ . Condition de courant seul d'intensité nominale $U_1 = 0.125m.s^{-1}$ . . . . .	109
VI.12	Répartition de l'intensité du bruit pour les parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du spectre d'amplitude. Le point de mesure $(X, Y, Z) = (-8, 0, -0.59)m$ . Condition de courant seul d'intensité nominale $U_1$ . . . . .	110
VII.1	Intensité du courant mesurée avec le moulinet à hélice. En haut : $U_1$ . En bas : $U_2$	114
VII.2	Evolution du contre-courant $U_1$ . Colonne de gauche : en $Z = -0.59m$ . Colonne de droite : en $Z = -1.34m$ . Haut : Direction longitudinale . Milieu : Direction transverse. Bas : Direction du courant . . . . .	116
VII.3	Evolution du contre-courant $U_1$ . $Z = -2.59m$ . En haut : composante longitudinale. En bas : composante transverse . . . . .	117
VII.4	Evolution du contre-courant $U_2$ . Colonne de gauche : en $Z = -0.59m$ . Colonne de droite : en $Z = -1.34$ . Haut : Direction longitudinale . Milieu : Direction transverse. Bas : Direction du courant . . . . .	118
VII.5	Evolution du contre-courant $U_2$ . $Z = -2.59m$ . En haut : composante longitudinale. En bas : composante transverse . . . . .	119
VII.6	Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle U1 T1 H1. . . . .	120
VII.7	Photographie illustrant la décroissance de l'amplitude en aval des bosses, loin de l'axe médian du bassin. Condition $U_1 T_1 H_1$ . . . . .	121
VII.8	Evolution de la cambrure de la houle . . . . .	121
VII.9	Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle $U_1 T_1 H_2$ . . . . .	122

## Table des figures

---

VII.10	Evolution de la cambrure de la houle. Condition $U_1 T_1 H_2$ . . . . .	123
VII.11	Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle $U_2 T_2 H_1$ . . . . .	124
VII.12	Evolution de la cambrure de la houle . . . . .	124
VII.13	Photographie illustrant la décroissance de l'amplitude à l'approche des bosses, au niveau de l'axe médian du bassin. Condition $U_2 T_2 H_1$ . . . . .	125
VII.14	Illustration du déferlement de la houle dans le bassin. Condition $U_2 T_2 H_2$ . . . . .	126
VII.15	Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle $U_2 T_2 H_2$ . . . . .	126
VII.16	Evolution de la cambrure de la houle. Condition $U_2 T_2 H_2$ . . . . .	127
VII.17	Amplitude moyenne de la houle normalisée par la valeur moyenne de l'amplitude en $X = -8m$ et écart-types. . . . .	128
VII.18	Amplitude moyenne de la houle normalisée par la valeur moyenne de l'amplitude en $X = -8m$ et écart-types. Campagnes de 2007 et de 2008 . . . . .	130
VII.19	Lignes de crête de la houle pour les conditions $U_1, T_1, H_1$ . . . . .	131
VII.20	Evolution de la phase de la houle. Conditions hydrodynamiques $U_1 T_1 H_1$ . A gauche : Déphasage de la houle en amont des bosses. A droite : Dislocation de la phase en aval des bosses. . . . .	131
VII.21	Lignes de crête de la houle pour les conditions $U_1, T_1, H_2$ . . . . .	132
VII.22	Phase de la houle en amont des bosses (à gauche) et sur les bosses (à droite) pour les conditions hydrodynamiques $U_1, T_1, H_2$ . . . . .	133
VII.23	Lignes de crête de la houle pour les conditions $U_2, T_2, H_1$ . . . . .	134
VII.24	Phase de la houle en amont des bosses (à gauche) et en aval des bosses (à droite) pour les conditions hydrodynamiques $U_2, T_2, H_1$ . . . . .	134
VII.25	Lignes de crête de la houle pour les conditions $U_2, T_2, H_2$ . . . . .	135
VII.26	Phase de la houle au niveau des bosses pour les conditions hydrodynamiques $U_2, T_2, H_2$ . . . . .	136
VII.27	Estimation de la dérive de Stokes en $Y = 0$ . Conditions $U_1, T_1, H_1$ et $U_1, T_1, H_2$ . . . . .	138
VII.28	Estimation de la dérive de Stokes en $Y = 0$ . Conditions $U_2, T_2, H_1$ et $U_2, T_2, H_2$ . . . . .	139
VII.29	Intensité du courant mesurée avec le moulinet à hélice. . . . .	141
VII.30	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = 0m$ . Condition $U_1$ . . . . .	144
VII.31	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = 0m$ . Condition $U_1$ . . . . .	145
VII.32	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -2m$ . Condition $U_1$ . . . . .	146
VII.33	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -2m$ . Condition $U_1$ . . . . .	147
VII.34	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -4m$ . Condition $U_1$ . . . . .	148

VII.35	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -4m$ . Condition $U_1$ . . . . .	149
VII.36	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -6m$ . Condition $U_1$ . . . . .	150
VII.37	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -6m$ . Condition $U_1$ . . . . .	151
VII.38	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = 0m$ . Condition $U_2$ . . . . .	154
VII.39	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = 0m$ . Condition $U_2$ . . . . .	155
VII.40	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -2m$ . Condition $U_2$ . . . . .	156
VII.41	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -2m$ . Condition $U_2$ . . . . .	157
VII.42	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -4m$ . Condition $U_2$ . . . . .	158
VII.43	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -4m$ . Condition $U_2$ . . . . .	159
VII.44	Champ de courant longitudinal, en $X \leq 0m$ et $Y = -6m$ . Condition $U_2$ . . . . .	160
VII.45	Champ de courant longitudinal, en $X > 0m$ et $Y = -6m$ . Condition $U_2$ . . . . .	161
VII.46	Evolution du profil vertical du champ de courant transverse en $(X, Y) = (-4.1, -4)m$	163
VII.47	Estimation du cisaillement. Condition $U_1$ . . . . .	165
VII.48	Estimation du cisaillement. Condition $U_1 T_1 H_1$ . . . . .	166
VII.49	Estimation du cisaillement. En bas : condition $U_1 T_1 H_2$ . . . . .	166
VII.50	Estimation du cisaillement. Condition $U_2$ . . . . .	167
VII.51	Estimation du cisaillement. Condition $U_2 T_2 H_1$ . . . . .	167
VII.52	Estimation du cisaillement. Condition $U_2 T_2 H_2$ . . . . .	168
VII.53	Champ de cisaillement. Condition $U_1$ . . . . .	169
VII.54	Champ de cisaillement. Condition $U_2$ . . . . .	169
VII.55	Champ de cisaillement. En haut : condition de courant $U_1$ . En bas : condition de courant $U_2$ . A gauche : houle de hauteur $H_1$ . A droite : houle de hauteur $H_2$ . . .	170
A.1	Plaque plane immergée . . . . .	188
D.1	Vectrino à tête droite. (AS, 2010) . . . . .	204
D.2	Vectrino "side-loocking". (AS, 2010) . . . . .	205
D.3	Vectrino à tête flexible. (AS, 2010) . . . . .	206
D.4	Schématisation de la connexion entre les divers éléments . . . . .	207
D.5	Exemple de configuration des Vectrino . . . . .	209

## Table des figures

---

---

## Liste des tableaux

III.1	Synthèse des conditions hydrodynamiques étudiées. . . . .	48
VI.1	Disposition des sondes à houle . . . . .	99
VI.2	Lieu des mesures effectuées selon l'axe longitudinal du bassin et profondeur d'eau . . . . .	100
VI.3	Synthèse des mesures effectuées en amont et en aval des bosses immergées . .	103
VI.4	Synthèse des mesures effectuées au dessus des bosses immergées . . . . .	103
VI.5	Ensemble des conditions hydrodynamiques générées . . . . .	104
VII.1	Synthèse de l'amplification de la houle en pourcentage au niveau des lieux remarquables du bassin. En orange : augmentation de l'amplitude de la houle. En bleu : diminution de l'amplitude de la houle . . . . .	129
VII.2	Valeurs extrémales de la profondeur caractéristique pour chaque condition hydrodynamique . . . . .	164

## Liste des tableaux

---

---

# Avant propos

## Contexte socio-économique

Actuellement plus de 60% de la population mondiale vit dans la grande zone côtière. Ainsi 3.8 milliards d'individus sont installés à moins de 150Km d'une côte<sup>1</sup>. Cette forte concentration de population près du littoral est liée à une activité économique considérable dans divers secteurs. Loin d'être exhaustifs nous pouvons citer le secteur alimentaire avec la pêche et l'aquaculture, le secteur énergétique regroupant des activités offshore et onshore ou encore le secteur du bâtiment pour la construction d'infrastructures à terre sans oublier le secteur de l'hydraulique. De plus, les échanges par voies navigables n'ont jamais été aussi importants. Le volume total des échanges a triplé entre 1970 et 2010. Ainsi, chaque année ce sont plus de 50000 navires qui parcourent les mers<sup>2</sup>. Cette forte activité économique est conjuguée à une activité touristique en plein essor. Le tourisme balnéaire représente ainsi la forme de tourisme la plus répandue dans le monde.

Le développement de ces activités a favorisé l'étude des caractéristiques physiques des océans afin d'en comprendre le comportement puis de le prévoir. De nombreuses études ont été réalisées depuis la seconde moitié du *XX<sup>ème</sup>* siècle sur différents aspects physiques des mers et des océans.

Les manifestations physiques de l'océan les plus impressionnantes à l'échelle de l'homme sont peut être les vagues. Tantôt ludiques lors des baignades, tantôt destructrices voire meurtrières lors des périodes de tempête, leur compréhension et leur modélisation sont d'un intérêt majeur pour la nombreuse population vivant près des côtes et travaillant avec la mer.

---

1. L'Observatoire du littoral. Démographie et économie du littoral. Dossier réalisé par l'Insee et le SOeS

2. <http://www.armateursdefrance.org/>



## Des modèles opérationnels

Ces dernières années, de nombreux modèles opérationnels tentant de modéliser l'évolution de la propagation de la houle ont alors vu le jour. L'essor des activités en mer et des missions de courtes durées, comme l'installation de câbles téléphoniques ou de pipe-lines, ont nécessité l'élaboration de modèles de prévision précis. Ces besoins, conjugués aux progrès informatiques de ces dernières années ont rendu possible l'utilisation de différents modèles : les modèles **déterministes**, à résolution de phase, qui sont à l'origine des modèles **spectraux**, à phase moyennée. Ils utilisent des hypothèses et des méthodes de résolution variées et permettent ainsi de représenter différentes caractéristiques propres aux houles.

Les modèles déterministes à résolution de phase, permettent de prévoir la propagation de la houle à la côte en fonction de conditions initiales entrantes. Ils permettent de déterminer les paramètres de chaque houle dans un domaine donné en résolvant des équations modèles dont les plus classiques sont les dérivées des premiers travaux de Berkhoff<sup>3</sup>. A titre d'exemple nous pouvons citer le modèle Ref-Dif<sup>4</sup>. Ces modèles permettent en ingénierie côtière de définir les houles de projet, dont l'étude des caractéristiques permettra de dimensionner correctement les ouvrages côtiers.

Ces modèles, appliqués à des houles régulières, sont à la base des modèles spectraux, à phase moyennée. Ces derniers permettent de déterminer le spectre de la houle se propageant dans une région donnée en incluant des termes sources et puits d'énergie. Ils permettent entre autres de modéliser la mer du vent. Parmi de nombreux modèles développés sur ce principe, nous pouvons citer à titre d'exemple les modèles Ref-Dif S<sup>5</sup>, Swan<sup>6</sup>, WaveWatch III<sup>7</sup>, Vag<sup>8</sup>

Ces modèles, éprouvés, donnent en général une bonne satisfaction dans la modélisation de la propagation de la houle. Cependant les épisodes de tempête récents qui ont ravagé les côtes françaises étaient bien sûr prévus mais leur intensité et notamment la hauteur des houles était largement sous-estimée par les modèles de prévision. Nous nous souvenons des dégâts causés par la tempête Xynthia en février 2010 en Charente-Maritime et en Vendée. Les modèles de prévision ne permettent donc pas actuellement de prédire correctement certains processus

---

3. J. C. W. Berkhoff. Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction. 1976

4. Combined Refraction/Diffraction Model. Documentation and User's Manual. J. T. Kirby and R. A. Dalrymple

5. J. T. Kirby and H. T. Ozkan. Ref/Dif S. Documentation and User's Manual. 1994

6. N. Booij, R. C. Ris, L. H. Holthuijsen. A third-generation wave model for coastal regions 1. Model description and validation 1999

7. H. L. Tolman 2009. User manual and system documentation of Wavewatch III version 3.14. Tech. Note 276, NOAA/NWS/NCEP/MMAB

8. Centre d'Etude Techniques Maritimes et Fluiviales. Vag. Notice théorique

physiques apparaissant à l'approche des côtes.

## Stratégie de la thèse

L'objectif de l'étude présentée dans ce manuscrit est d'améliorer la compréhension des processus physiques d'interaction entre la houle et un milieu inhomogène. A terme l'étude proposée ici posera une pierre à l'édifice pour le développement de modèles déterministes les plus fiables possibles. Dans ce but trois approches, théorique, numérique et expérimentale ont été suivies. Une première partie permet de présenter le contexte. Ainsi le lecteur trouvera dans le **chapitre premier** une description générale de la houle. Nous rappelons les hypothèses et les équations fondamentales de la théorie de houles de Stokes puis celles de houles d'Airy. Le lecteur y trouvera ensuite une description physique du milieu marin, afin d'en présenter les éléments physiques susceptibles d'interagir avec la houle. Le **deuxième chapitre** permet de réunir les divers éléments dissociés du **premier chapitre**. La houle n'est plus considérée comme une onde indifférente de son milieu. Nous considérons les interactions entre la houle et son milieu. Nous présentons ainsi un état de l'art sur les différentes théories qui ont émergé et qui sont à la base des différents modèles opérationnels.

Le **chapitre 3** permet de mettre en évidence des phénomènes d'interactions insuffisamment représentés à ce jour, comme observé lors de campagnes expérimentales menées en 2007 et en 2008 au Bassin de Génie Océanique First dans le cadre de GIS HYDRO. Lors de ces campagnes la houle se propageait à contre-courant en présence d'un champ de courant tri-dimensionnel. Des phénomènes linéaires d'amplification de l'amplitude de la houle ont été observés. Cependant ils ne sont pas représentés correctement par la résolution numérique de l'équation mild-slope<sup>9</sup> pourtant connue pour bien représenter ce type d'interactions. Les causes possibles d'un tel écart sont ainsi recherchées dans ce chapitre. La présence d'un gradient vertical dans le profil vertical semble être à l'origine d'écarts constatés. En effet, l'interaction entre la houle et un tel champ de courant n'est pas représentée par l'équation mild-slope qui ne considère que les variations horizontales de ce dernier et non ses variations verticales.

Le **chapitre 4** présente le développement d'un modèle de propagation de la houle en présence d'un champ de courant cisailé verticalement et linéairement. Il peut être considéré comme une généralisation de la célèbre équation mild-slope. Ce modèle pourrait, à terme être intégré dans les modèles opérationnels déjà existants. Le **chapitre 5** permet de discuter sur la généralisa-

---

9. J. T. Kirby. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. J. Geophys. Res., vol. 89, no. C1, p. 745-747, January 20 1984

tion de la notion d'action de la houle, introduite historiquement par Bretherton & Garrett<sup>10</sup> et Whitham<sup>11</sup>. Nous discutons notamment de sa conservation ou non, la littérature présentant des opinions divergentes.

En vue de la validation de ces modèles par l'expérience, nous présentons dans la partie 3 une campagne expérimentale, réalisée en milieu contrôlé, puis les résultats expérimentaux issus de cette campagne. Dans cette partie, le **chapitre 6** décrit l'ensemble des conditions hydrodynamiques générées, des sondes de mesure déployées ainsi que leur disposition. Dans le **chapitre 7** nous analysons l'ensemble des phénomènes physiques observés. La mesure du profil vertical de cisaillement servira, à terme de cas test pour valider expérimentalement les modèles théoriques développés.

---

10. F. P. Bretherton, C. J. R. Garrett. Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proc. Roy. Soc. A, vol. 302, p. 529-554, 1969

11. G. B. Whitham. Linear and nonlinear waves. John Wiley and Sons, New York, 1974

# Partie A

## Etat de l'art



*Toute connaissance est une réponse à une question.*

Gaston Bachelard

Cette première partie fait l'état des connaissances actuelles sur la propagation de la houle dans un milieu inhomogène.

Le premier chapitre présente le contexte général de la propagation d'une houle. D'une certaine manière il permet de "revenir à la source". Dans ce but le système onde/milieu inhomogène est découplé. Ainsi, nous séparons en éléments distincts la houle et le milieu dans lequel elle se propage afin de mieux comprendre les modèles de propagation qui se sont complexifiés ces dernières années. "*Lorsque tu ne sais pas où tu vas, regarde d'où tu viens*" dit d'ailleurs un proverbe africain. Nous posons les équations de propagation de la houle, en tant qu'onde, puis nous présentons le milieu dans lequel elle se propage. Les variations de ce milieu susceptibles de modifier la propagation de la houle sont présentées.

Le deuxième chapitre présente différentes théories qui ont permis de rendre compte des interactions entre la houle et les variations du milieu qui ont été présentées dans le chapitre 1. Nous nous intéressons principalement à des études s'appuyant sur la théorie linéaire.

---

---

---

# Chapitre I

---

## Généralités sur la houle et le milieu marin

### 1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous attachons à présenter le contexte physique dans lequel la houle se propage tant en pleine mer que près des côtes. Pour cela nous présentons différentes théories décrivant la houle en tant qu'onde, puis nous présentons les caractéristiques du milieu océanique qui peuvent interagir avec la houle et modifier son comportement.

Les premières théories concernant la propagation de la houle, en dehors de toute interaction avec le milieu, ont émergé entre la fin du *XVII<sup>ème</sup>* siècle et la moitié du *XIX<sup>ème</sup>* siècle. Loin de toutes les décrire dans ce manuscrit, nous renvoyons le lecteur vers les études menées par [Darrigol \(2003\)](#) et [Craik \(2004\)](#). Ces auteurs présentent l'évolution chronologique des différentes études théoriques et expérimentales réalisées sur de la propagation de la houle tant dans l'approximation linéaire que dans le cas non linéaire. Ces théories sont à la base des connaissances actuelles dans ce domaine. Plus récemment, [Cavaleri \*et al.\* \(2007\)](#) ont proposé une revue détaillée de résultats plus récents obtenus sur la propagation de la houle. Ils présentent ainsi les théories portant sur la génération de la houle par le vent, les interactions linéaires et non linéaires, la dissipation d'énergie par "white-capping" et par friction avec le fond, ainsi que les méthodes numériques de résolution associées.

La première section de ce chapitre a pour vocation de présenter de manière générale la théorie de Stokes. Nous présenterons ensuite de manière plus détaillée les différentes équations gouvernant la propagation de la houle dans la théorie potentielle linéaire.

Dans une deuxième section nous décrivons les différents types de courants marins qui peuvent interagir avec la houle tant en pleine mer que près du littoral. Ceux-ci ont des origines diverses et peuvent se développer sur des échelles de temps et d'espace très différentes. Nous décrivons aussi les courants qui, réciproquement, sont susceptibles d'être forcés par la propagation des vagues.



Un autre facteur impliqué dans la transformation de la houle est la variation de la topographie, en particulier près des côtes. Nous présentons alors différents profils topographiques classiques, naturels ou bien construits par l'homme, susceptibles de modifier les caractéristiques de la propagation de la houle.

## 2 Théories de la houle par profondeur infinie et intermédiaire : Houles de Stokes

### 2.1 Généralités

Les modèles mathématiques développés depuis le *XVII<sup>ème</sup>* siècle, et en particulier la théorie de Stokes, s'appuient sur différentes hypothèses. Nous considérons ainsi que le fluide est parfait et homogène. Au niveau de la surface libre, la pression atmosphérique est supposée constante. Le fond est supposé imperméable. Nous supposons que la seule force extérieure agissant sur le fluide est le champ de gravité. Les observations montrent que la surface libre présente une suite d'oscillations périodiques. C'est l'évolution de cette surface libre que les différentes théories modélisent avec certaines hypothèses supplémentaires concernant notamment la profondeur d'eau, l'ordre d'approximation de la solution réelle et le caractère rotationnel de la houle.

Le ratio entre longueur d'onde de la houle et la profondeur d'eau est un critère de validité des différentes théories. En notant  $h$  la profondeur d'eau locale et  $\lambda$  la longueur d'onde de la houle, nous distinguons trois conditions de propagation auxquelles correspondent au premier ordre des mouvements bien caractéristiques induits dans le fluide. Si  $h/\lambda < 1/10$  la houle se propage dans des conditions dites "eau peu profonde". Dans ce cas les particules d'eau oscillent dans le plan horizontal. Si  $h/\lambda > 1/2$  la houle se propage en condition de profondeur dite "infinie". La trajectoire des particules d'eau peut être comparée à des cercles. Entre les deux, en profondeur finie, la trajectoire des particules d'eau est elliptique.

La théorie de Stokes est valide en condition de profondeur d'eau infinie ou finie. En plus des hypothèses précédentes l'écoulement est supposé irrotationnel, c'est à dire que les particules fluides ne peuvent subir de rotations. Sous cette hypothèse l'étude des oscillations de la surface libre peut s'effectuer par l'intermédiaire d'un potentiel des vitesses. Un développement en perturbation autour d'un paramètre relatif à la cambrure de la houle, permet, par l'introduction de solutions harmoniques, d'approcher la solution réelle de la houle. La valeur du nombre d'Ursell

## I.2 Théories de la houle par profondeur infinie et intermédiaire : Houles de Stokes

$U_r$  fixe les limites de cette théorie. Celui-ci s'exprime

$$U_r = \frac{2a\lambda^2}{h^3}, \quad (\text{I.1})$$

où  $a$  est l'amplitude de la houle. Elle reste valable en profondeur finie pour de faibles nombres d'Ursell ( $U_r \ll 1$ ). Dans la limite d'une houle très faible amplitude  $a$ , sa solution au premier ordre, appelée houle d'Airy peut être appliquée quelle que soit la profondeur d'eau. Nous présentons dans la section suivante les équations relatives à cette théorie.

### 2.2 Les équations fondamentales de la théorie potentielle

Nous supposons que le milieu fluide est incompressible, non visqueux et que l'écoulement est irrotationnel. Un repère orthonormé  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$  est attribué à ce milieu. Le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est horizontal. La côte  $z = 0$  représente la surface libre au repos. L'axe  $Oz$  est orienté vers le haut. Dans ce repère nous notons  $\mathbf{u}$  le champs de vitesse tridimensionnel de la houle. Les équations qui suivent permettent de décrire l'écoulement avec une approche eulérienne.

L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{I.2})$$

et l'équation d'Euler s'écrit sous forme vectorielle

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{f}$  est une force volumique extérieure.

L'hypothèse d'irrotationalité permet de supposer l'existence d'un potentiel  $\Phi$  tel que

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi. \quad (\text{I.4})$$

L'équation de continuité (I.2) se réécrit alors sous forme d'une équation de Laplace

$$\Delta \Phi = 0. \quad (\text{I.5})$$

En intégrant spatialement l'équation d'Euler (I.3), nous obtenons la condition dynamique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (\text{I.6})$$

Deux conditions cinématiques peuvent être formulées, au niveau de la surface libre ( $z = \eta$ ) et au fond ( $z = -h$ ). Une particule d'eau située au niveau de la surface libre reste à cet endroit. Autrement dit, cette particule d'eau ne traverse pas la surface. Le mouvement vertical de cette particule est ainsi celui de la surface libre. Nous avons donc

$$\frac{d\eta}{dt} = w, \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{I.7})$$

puis

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_i) \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \eta \quad \text{où } i = 1, 2. \quad (\text{I.8})$$

Au niveau du fond, l'hypothèse d'imperméabilité impose que la composante normale au fond s'annule. Pour un fond plat, nous avons directement

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h. \quad (\text{I.9})$$

La condition limite de surface libre est non-linéaire. Elle permet de représenter un profil non-linéaire de la houle en effectuant un développement par rapport à la cambrure  $ak$ . Dans ce cas la solution de houle de Stokes est dite d'ordre supérieur. Nous nous intéressons principalement à une solution au premier ordre de développement. Les précédentes équations sont alors simplifiées dans la section suivante.

### 2.3 Les équations fondamentales de la théorie potentielle linéaire

Pour des houles de faible amplitude, nous négligeons les termes d'ordre supérieurs à 1 dans les équations précédentes. Les conditions de surface sont alors exprimées en  $z = 0$ . La condition cinématique se réécrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{en } z = 0. \quad (\text{I.10})$$

La condition dynamique de surface libre s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (\text{I.11})$$

En combinant ces deux dernières équations nous aboutissons à une seule équation limite de surface libre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{en } z = 0. \quad (\text{I.12})$$

## I.2 Théories de la houle par profondeur infinie et intermédiaire : Houles de Stokes

La périodicité du mouvement, de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  suppose de chercher  $\eta$  sous la forme

$$\eta = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (\text{I.13})$$

L'équation de Laplace (I.5) permet de chercher  $\Phi$  sous forme harmonique. En tenant compte des conditions aux limites (I.12) et (I.9),  $\Phi$  se réécrit sous forme complexe

$$\Phi = \left( A^- \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + A^+ \exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \cosh(k(z + h)) \exp(i\omega t) \quad (\text{I.14})$$

où  $k$ , le module de  $\mathbf{k}$  vérifie la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh). \quad (\text{I.15})$$

En supposant que la houle ne se propage que dans le sens  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\Phi$  se réécrit

$$\Phi = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh(k(z + h))}{\sinh(kh)} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (\text{I.16})$$

Cette expression se réécrit aussi, en utilisant la relation de dispersion (I.15)

$$\Phi = \frac{ag}{\omega} f(z) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (\text{I.17})$$

avec  $f(z) = \frac{\cosh(k(z + h))}{\cosh(kh)}$ . Afin de simplifier les notations, l'étude de l'évolution spatiale horizontale du potentiel  $\Phi$  se fait souvent par l'intermédiaire de son expression réduite  $\phi$ . Dans ce cas, l'équation (I.17) se réécrit

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re} [f(z)\phi(x, y) \exp(i\omega t)] , \quad (\text{I.18})$$

où

$$\phi(x, y) = -i \frac{ag}{\omega} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{I.19})$$

La vitesse de phase de la houle  $C$  correspond à la vitesse de déplacement des crêtes et s'écrit

$$C = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{I.20})$$

La vitesse de groupe  $C_g$  est la vitesse de déplacement de l'énergie d'un train d'onde. Elle peut être facilement déduite à partir de la relation de dispersion (I.15). Elle s'exprime sous forme

vectorielle

$$\mathbf{C}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{1}{2} C \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (\text{I.21})$$

L'énergie moyenne de la houle est la somme de ses énergies cinétique et potentielle. Elle s'écrit par unité de surface.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (\text{I.22})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Le flux d'énergie de la houle traversant un plan orthogonal à sa direction de propagation est

$$F = \mathcal{E} C_g. \quad (\text{I.23})$$

En présence d'un courant homogène colinéaire à la direction de propagation de la houle, ces équations restent valables dans un repère se déplaçant à la même vitesse et dans le même sens que ce courant.

## 3 Description physique du milieu littoral

### 3.1 Les différents types de courant

#### 3.1.1 Les grands courants marins

À l'échelle du globe terrestre diverses manifestations physiques sont susceptibles de mettre en mouvement de grandes quantités d'eau. Un des moteurs principaux de la circulation océanique est l'accélération de Coriolis, conséquence de la rotation de la Terre. Les forces éoliennes peuvent mettre en mouvement des couches d'eau jusqu'à une profondeur de 800 mètres. Parmi les différents déséquilibres physiques moteurs de la circulation océanique, nous pouvons citer les déséquilibres thermiques entre les différentes latitudes. En surface, les variations de densité de l'eau dus aux apports d'eau douce causés par les précipitations, par le déversement des fleuves ou encore par l'évaporation participent à cette circulation océanique. Plus en profondeur le poids de la colonne d'eau, les différences de salinité et de température mettent en mouvement des masses d'eau formant les courants thermo-halins.

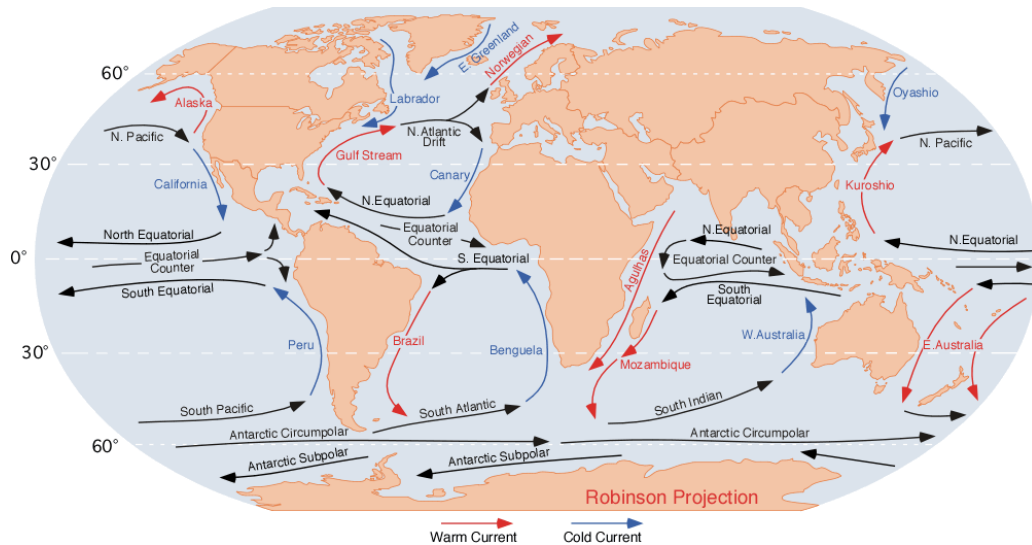
Ainsi de grands courants marins se sont créés à l'échelle des océans souvent depuis des millions d'années. Les principaux sont représentés sur la figure I.1. Le Gulf Stream, que nous prendrons pour exemple dans cette partie s'est formé il y a 4,1 millions d'années. Une description détaillée de ce courant a été réalisée par [Stommel \(1958\)](#).

Ces grands courants s'écoulent dans des bandes de largeur allant de la dizaine jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres. Par exemple, le Gulf Stream s'écoule entre des bandes de 30 à 150

### I.3 Description physique du milieu littoral

km de large et de 300 à 1 200 mètres de profondeur. Sa vitesse moyenne d'écoulement est de  $2,5m.s^{-1}$ .

Ces grands courants, influencés par la rotation de la Terre, forment le plus souvent de larges gyres entre les continents. Ces derniers en bloquent l'expansion et leurs bords orientent la direction de ces courants.



**Figure I.1** – Les grands courants océaniques. *Source : wikipedia, mai 2014*

L'impact de ces grands courants sur le climat local des côtes au large desquelles ils s'écoulent est très fort. Si nous reprenons l'exemple du Gulf Stream, celui-ci est connu pour adoucir considérablement le climat dans l'Europe de l'Ouest dont la température moyenne est environ  $15^{\circ}C$  plus élevée que celle de l'Est canadien pourtant situé à une latitude équivalente.

Ces grands courants marins peuvent être à l'origine de vagues géantes. Nous pouvons citer en particulier le courant des Aiguilles (Smith (1976), Lavrenov & Porubov (2006)), s'écoulant du Nord au Sud entre Madagascar et l'Afrique. Ils sont aussi à l'origine du forçage de courants régionaux moins étendus.

#### 3.1.2 Les courants régionaux

A l'échelle régionale, des courants marins sont forcés par la circulation d'eau à l'échelle océanique et par les variations locales de densité, de température et par les conditions météorologiques locales comme le vent ou les précipitations. A titre d'exemple, le courant Liguro-Provençal, ou courant Nord, est un courant régional méditerranéen dont la vitesse peut atteindre  $0.8m.s^{-1}$  au large de Porquerolles. Une description détaillée de ce courant a été faite par Guihou (2013). Ces courants ont une forte variabilité temporelle et géographique car ils sont sensibles aux tempêtes,

## Chapitre I. Généralités sur la houle et le milieu marin

aux changements de saison, aux variabilités inter-annuelles et à la configuration topographique locale.

D'autres courants régionaux, les courants de marée sont forcés par les interactions entre la Terre la Lune et le Soleil. Deux courants, alternés et de sens contraire, peuvent ainsi être distingués : le flot et le jusant. L'hodographe de la marée sur la côte atlantique, présenté ci-dessous (figure I.2), représente l'alternance de ces courants. Des descriptions complémentaires sur ces courants sont disponibles sur le site internet [www.shom.fr](http://www.shom.fr). Leur intensité dépend localement du marage et de la configuration des fonds sous-marins. Ainsi au large de la Bretagne, les courants de marée peuvent atteindre jusqu'à  $5m.s^{-1}$  dans le raz Blanchard et le raz de Sein.

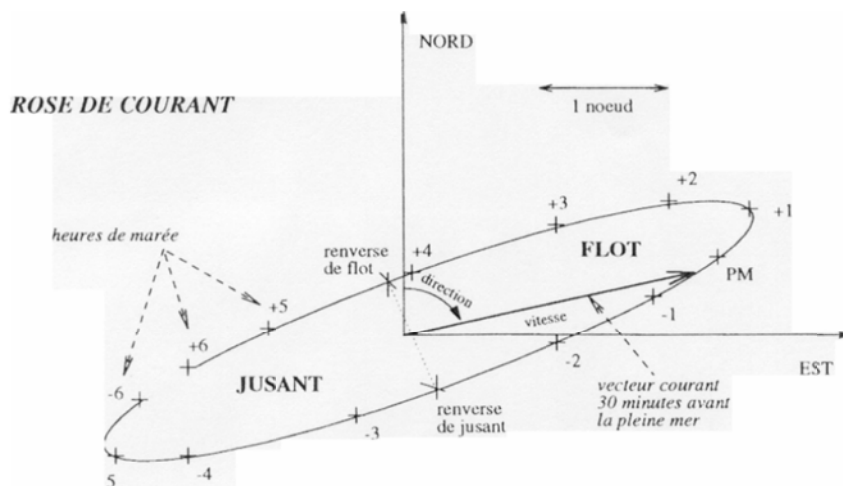


Figure I.2 – Les grands courants océaniques. *Extrait de Shom (2005)*

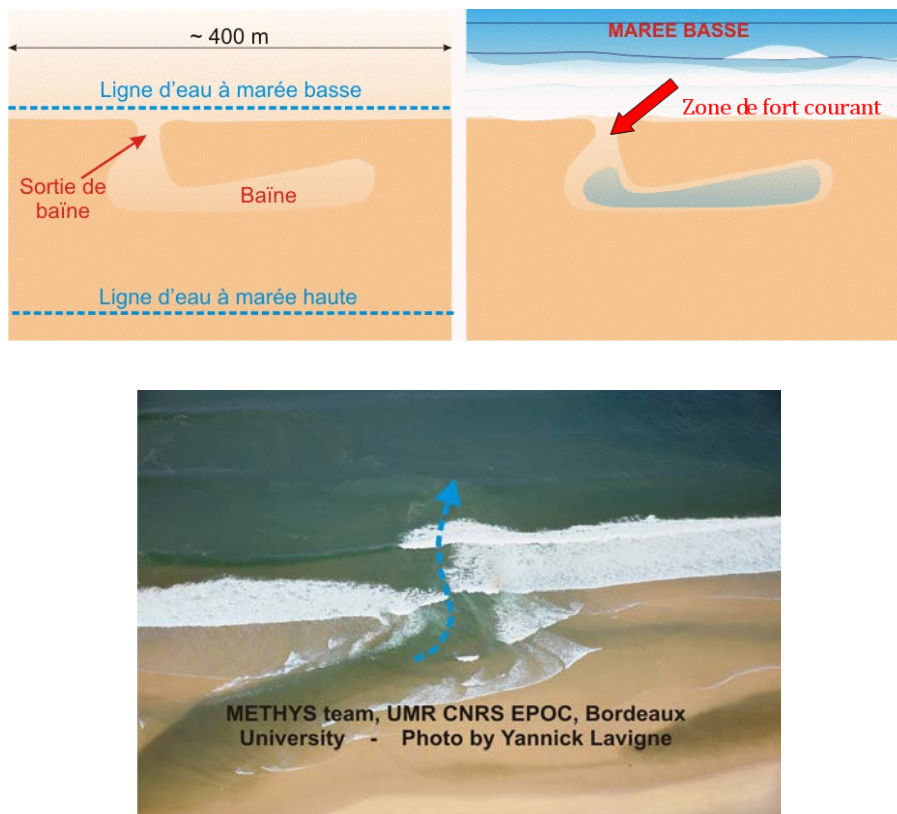
### 3.1.3 Les courants littoraux

Près des côtes, différents types de courant pouvant modifier la propagation de la houle peuvent être dénombrés. Nous pouvons distinguer des courants sagittaux, perpendiculaires à la côte. L'interaction entre une houle et un tel courant a d'ailleurs été décrite par [MacIver et al. \(2006\)](#). D'autres courants parallèles à la côte, appelés courants de dérive s'établissent sur de plus grandes échelles spatiales.

Pour que des courants d'arrachement perpendiculaires à la côte, ou courants de baie en gascon, soient créés, la zone côtière doit rassembler plusieurs caractéristiques. Le fond marin est meuble, le coefficient de marée est suffisamment fort et la topographie locale doit présenter de faibles dénivelés. A titre d'exemple nous pouvons citer le littoral aquitain qui présente toutes ces caractéristiques. Lorsque la houle se déplace sur ces sols meubles, elle déplace de larges quantités de matière vers le rivage. Ainsi des zones de dépression, ou plus simplement des "pe-

### I.3 Description physique du milieu littoral

tites bassines", d'après la traduction littérale du mot occitan "baïne", se créent. Au cours du cycle de la marée, le niveau de la mer monte, pour être maximal à marée haute, et descend jusqu'à atteindre son minimum à marée basse. Ainsi ces petites bassines se remplissent et se vident au rythme des marées, ce qui génère de forts courants perpendiculaires à la côte susceptibles d'interagir avec la houle. Une illustration du fonctionnement des baïnes est présentée sur la figure (I.3). Le fonctionnement de ces courants a fait l'objet de nombreuses observations et recherches qui ont été synthétisées par MacMahan *et al.* (2006).



**Figure I.3** – Fonctionnement d'une baïne. *Source : [www.epoc.u-bordeaux.fr](http://www.epoc.u-bordeaux.fr), mai 2014*

La trajectoire des particules fluides n'étant en réalité pas fermée, un courant de dérive se crée dans le sens de la propagation de la houle. Ce phénomène, la dérive de Stokes, induit un courant de surface en direction du rivage. Cette énergie transportée en direction du rivage est transformée en énergie potentielle près de celui-ci, entraînant localement une élévation du niveau d'eau moyen. Ce phénomène est couramment appelé "set-up". Cet apport de masse d'eau est compensé par un courant de retour localisé plus en profondeur, du rivage vers le large. Quelques centimètres près du fond, les effets de la viscosité induisent à leur tour un courant appelé "streaming" en anglais dirigé vers la plage. L'ensemble de ces courants est schématisé



sur la figure (I.4). Ainsi le phénomène de dérive de Stokes contribue à la présence de courants inhomogènes susceptibles de modifier la propagation de la houle près des côtes.

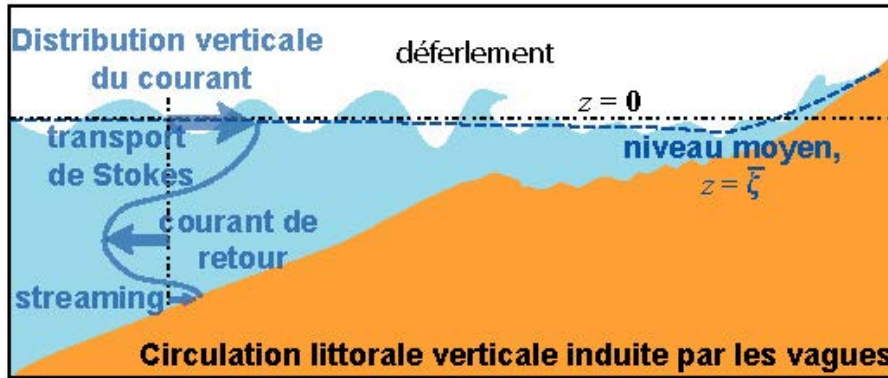


Figure I.4 – Schématisation du courant de retour. [www.shom.fr](http://www.shom.fr)

Si la houle se propage dans une direction oblique par rapport au littoral un courant se crée parallèlement au rivage. Il est nommé courant de dérive littorale. Sur la côte Atlantique son intensité est de l'ordre de  $2.7m.s^{-1}$ . Un tel courant est susceptible de modifier la propagation de la houle ((Kirby *et al.*, 1987)).

Les variations locales de topographie en zone côtière créent localement des surcotes et des disparités dans l'amplitude des houles le long du littoral. Ce gradient de hauteur d'eau est à l'origine d'un courant, forcé des zones où l'amplitude des houles est la plus forte, par exemple un cap, vers celles où elle est plus faible, par exemple une crique abritée.

### 3.2 Les différents types de variations topographiques

Une cause de transformation de la houle est la variation topographique près des rivages. Celle-ci peut être d'origine naturelle ou humaine, abrupte ou douce par rapport aux caractéristiques de la houle.

#### 3.2.1 Les variations topographiques naturelles

Parmi les variations topographiques naturelles abruptes nous pouvons prendre pour exemple les récifs émergents près des côtes, du simple cailloux isolé aux petites îles. Les îles du Frioul au large de Marseille en sont un bon exemple. Sur les côtes elles-mêmes, les caps sont souvent réputés pour être le lieu de vagues dangereuses redoutées par les navigateurs. D'ailleurs au niveau de la presque-île de Giens, dans le Var, la pointe d'Escampo-Barriou signifie "échappe tonneaux" en provençal. Sur des sols plus meubles, la formation de digues de sable ou de tombolo

sont autant de brise-lames naturels.

En ce qui concerne les variations topographiques naturelles plus douces nous pouvons citer par exemple les côtes sablonneuses des rivages landais. La figure (I.5) donne des exemples de ces types de variations.



**Figure I.5** – A gauche : exemple de côte rocheuse abrupte (Six-Fours les Plages, Var (83)). A droite : exemple de plage à pente plus douce (Vieux-Boucau, Landes (40))

### 3.2.2 Les variations topographiques artificielles

Les interactions entre la houle et la topographie sont exploitées par nos civilisations dans des perspectives variées. Des ouvrages peuvent ainsi être construits pour créer des zones maritimes plus calmes, comme les zones portuaires. D'autres ouvrages sont bâtis pour protéger les constructions près des rivages ou encore pour éviter que le trait de côte ne recule sous les actions répétées de la houle.

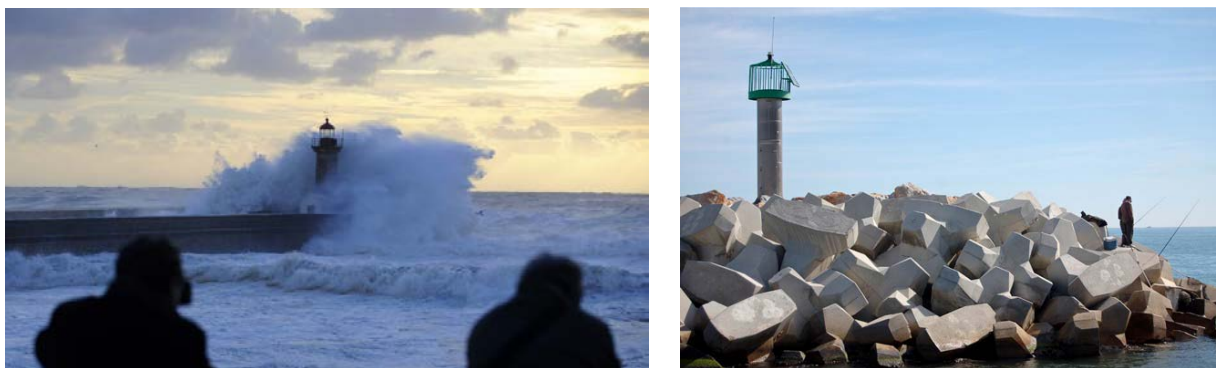
Ainsi des ouvrages fixes ou éphémères sont construits pour absorber l'énergie des vagues ou pour astreindre leur comportement. Leur taille, leur forme et leur disposition sont optimisées en fonction des caractéristiques statistiques des houles et des courants marins existants sur le lieu à protéger (direction dominante, hauteur significative, fréquence). A titre indicatif, ces ouvrages font l'objet de nombreuses recherches et sont à l'origine de nombreux brevets. Leur description détaillée ne fait pas partie des objectifs de ce chapitre. Nous donnerons ici quelques exemples illustratifs afin de présenter différents profils.

Parmi les ouvrages fixes nous pouvons citer les digues. Ces brise-lames peuvent être construits au niveau du rivage, parallèlement ou de manière oblique à celui-ci. Des brise-lames isolés, construits plus au large sont aussi des solutions potentielles.

## Chapitre I. Généralités sur la houle et le milieu marin

---

Parmi les digues fixes, les digues portuaires, constituées de lourds enrochements, sont utilisées comme brise-lame. Elles atténuent les vagues sans pour autant empêcher l'eau de circuler. Des illustrations de telles digues sont présentées sur la figure (I.6).



**Figure I.6** – A gauche : digue de Biarritz (Pyrénées-Atlantiques, 64). [www.lefigaro.fr](http://www.lefigaro.fr). A droite : exemple de digue avec enrochement [www.cabotage.fr](http://www.cabotage.fr)

Toutes ces structures sont susceptibles d'interagir directement avec la houle. Elles peuvent aussi modifier les courants marins et ainsi, de manière indirecte, modifier l'interaction entre la houle et le courant.

---

---

# Chapitre II

---

## Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

### 1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de mettre en évidence le contexte dans lequel la houle se propage. La houle, en tant qu'onde, interagit avec son milieu et peut être sensible aux variations de celui-ci.

Par exemple, des observations de vagues géantes ont été faites au niveau du courant des Aiguilles. L'existence de ces vagues a été expliquée par l'interaction complexe entre la houle et le courant ([Lavrenov & Porubov, 2006](#); [Smith, 1976](#)). Près des côtes Taiwanaises, [Tsai \*et al.\* \(2004\)](#) observent de telles vagues géantes et présentent les différentes interactions potentielles entre la houle le courant et la topographie qui peuvent expliquer leur existence dans cette zone géographique.

La littérature comprend de très nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales représentant ces interactions. Des hypothèses diverses sur la forme du courant et sur la forme de la topographie ont été formulées et les résultats comparés. La diversité de ces études a donné lieu à des travaux de synthèse permettant de faire le bilan sur ces différentes interactions. Ainsi [Peregrine \(1976\)](#), [Jonsson \(1990\)](#), [Soulsby \*et al.\* \(1993\)](#) puis [Cavaleri \*et al.\* \(2007\)](#) présentent l'état de l'art des interactions houle-courant.

Les interactions entre la houle et la topographie sont également susceptibles de modifier les caractéristiques de la houle comme sa direction de propagation, sa longueur d'onde et son amplitude. Parmi de nombreux ouvrages expliquant ces phénomènes, nous pouvons citer ceux de [Horikawa \(1988\)](#) et de [Bonnefille \(1992\)](#).

Ce chapitre a pour vocation de présenter l'état de l'art des connaissances sur la propagation de la houle à travers un milieu inhomogène, c'est-à-dire dans un milieu de profondeur variable

## Chapitre II. Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

---

et en présence de courant uniforme ou non uniforme. Dans un premier temps nous étudions séparément les interactions houle-topographie, houle-courant puis courant-topographie. Nous nous intéresserons ensuite à la modélisation du couplage de ces phénomènes.

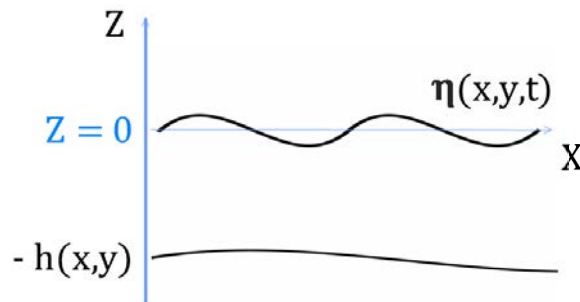
Afin de décrire ces interactions à partir de la théorie potentielle linéaire, nous introduisons deux paramètres :  $\varepsilon$  caractérise la cambrure de la houle et  $\delta$  est relatif aux variations topographiques par rapport à la longueur d'onde de la houle. Ainsi

$$\begin{cases} \varepsilon &= \mathcal{O}(|\mathbf{k}|a) \\ \delta &= \mathcal{O}\left(\frac{|\nabla_h h|}{|\mathbf{k}|h}\right) \end{cases}, \quad (\text{II.1})$$

où  $\nabla_h$  est le gradient horizontal. Dans la théorie linéaire la houle est supposée faiblement cambrée, et l'approximation dite de pente douce, ou mild-slope, suppose des variations topographiques faibles devant la longueur d'onde de la houle. Ainsi

$$\begin{cases} \varepsilon &<< 1 \\ \delta &<< 1 \\ \delta &= \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}. \quad (\text{II.2})$$

La figure (II.1) donne un exemple d'une telle configuration.



**Figure II.1** – Propagation de la houle au-dessus d'une topographie lentement variable

L'intensité du courant est, quant à elle, du même ordre de grandeur que la vitesse de phase de la houle.

De telles variations du milieu sont à l'origine des phénomènes de shoaling et de réfraction. Lorsque les variations du milieu sont plus importantes par rapport aux caractéristiques de la houle, des phénomènes de diffraction et de réflexion peuvent être générés. Ces phénomènes peuvent apparaître lorsque la houle interagit avec le fond variable mais aussi lorsqu'elle rencontre une structure plus abrupte, telle un brise-lame.

## 2 Généralités sur les effets de la topographie et du courant sur la propagation de la houle

### 2.1 Effets d'un milieu lentement variable : le shoaling et la réfraction

Sur des fonds en pente douce devant la longueur d'onde de la houle, le phénomène de shoaling permet d'expliquer, dans la théorie linéaire, l'évolution de la hauteur des vagues et de leur longueur d'onde à l'abord d'une plage.

Lorsque une houle se propage en direction d'une plage avec une incidence normale par rapport à

## Chapitre II. Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

---

celle-ci, le profil de la houle est modifié par la variation de la topographie. Comme la période de la houle reste constante, la longueur d'onde de la houle n'est fonction que de la profondeur d'eau, via la relation de dispersion. Dans ce cas, la hauteur d'une houle linéaire peut être déduite à partir des seules variations de la profondeur d'eau, en partant de l'hypothèse de conservation du flux d'énergie  $F$  (I.23) présentée au chapitre I. Lorsque la condition de profondeur infinie est réalisée,  $C_g = C/2$ . Dans ce cas, le flux d'énergie se réécrit

$$F = \frac{\rho g a^2}{4} C_0, \quad (\text{II.3})$$

où  $C_0$  est la célérité de la houle au large. En égalant les deux expressions du flux d'énergie nous obtenons l'expression du coefficient de shoaling

$$K_s = \frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{C_0}{2nC}} = \sqrt{\frac{1}{2n \tanh(kh)}}. \quad (\text{II.4})$$

avec  $n = 1/2 + kh/\sinh(2kh)$ . Ce coefficient passe successivement par un minimum puis augmente jusqu'à ce que la houle déferle.

Lorsque l'incidence de la houle par rapport à la plage est non nulle, le phénomène décrit précédemment se déroule conjointement à un changement de direction de propagation de la houle, visible sur la figure (II.2). C'est la réfraction. La propagation de la houle est dans ce cas bidimensionnelle.



**Figure II.2** – Réfraction sur une plage. *Source* : <http://fbc-alaligne.blogspot.fr> mai 2014

Dans ce cas la loi de conservation de l'énergie s'écrit

$$\nabla \cdot (EC_g) = 0. \quad (\text{II.5})$$

## II.2 Généralités sur les effets de la topographie et du courant sur la propagation de la houle

---

Ce changement de direction survenant lorsque la profondeur d'eau diminue est souvent étudié de manière similaire à la réfraction d'une onde lumineuse lorsque celle-ci traverse des milieux d'indice différents. La vitesse de groupe de la houle s'écrit  $\mathbf{C}_g = nC\mathbf{k}/k$ . Soient  $(\xi, \beta)$  les coordonnées curvilignes représentant respectivement la direction de propagation de la houle et les lignes de crête. En supposant que la vitesse de groupe de la houle est colinéaire à la direction de propagation de la houle, l'équation (II.5) se réécrit  $\partial(bEnC)/\partial\xi = 0$ , où  $b$  est l'espacement entre deux lignes de crête voisines. L'équation de conservation (II.5) permet de déduire l'évolution de l'amplitude de la houle avec la relation

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \sqrt{\frac{C_0}{2nC}} = K_r K_s, \quad (\text{II.6})$$

où  $K_r$  est ici le coefficient de réfraction et  $K_s$  le coefficient de shoaling introduit précédemment (équation (II.4)). Localement la direction de propagation de la houle peut être déduite de la loi de Snell-Descartes

$$\frac{\sin(\alpha)}{C} = \frac{\sin(\alpha_0)}{C_0}. \quad (\text{II.7})$$

Ici  $\alpha$  et  $\alpha_0$  sont respectivement les angles d'incidence locaux et initiaux de la houle par rapport à la normale à la côte. Par exemple, nous pouvons citer [Arthur \(1946\)](#) qui utilise cette loi pour déterminer la réfraction de la houle autour d'îles ayant différents types de contours.

La présence d'un gradient de courant peut aussi être à l'origine du phénomène de réfraction de la houle. Ce phénomène a été étudié par différents auteurs avec des hypothèses différentes sur le profil de courant. Ainsi [Jonsson & Skovgaard \(1978\)](#) utilisent la loi de Snell décrite précédemment pour prédire numériquement le comportement de la houle sujette au phénomène de réfraction en présence d'un courant constant sur la colonne d'eau présentant un gradient cisaillement horizontal dans son profil. Plus tard, [Dysthe \(2001\)](#) établit les équations qui gouvernent la réfraction d'une houle en profondeur infinie en présence d'un courant horizontal  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (U(x, y), V(x, y), 0)$ , présentant un faible gradient de cisaillement horizontal. Seule la composante verticale  $\zeta$  du vecteur vorticité est non nulle. Ainsi  $\zeta = \partial V/\partial x - \partial U/\partial y$ . Si le courant est très petit devant la vitesse de groupe de la houle, il obtient, en définissant le petit paramètre  $\epsilon = |\mathbf{U}|/|\mathbf{C}_g|$ , l'expression du rayon de courbure  $\kappa$  de la houle

$$\kappa = \frac{\zeta}{|\mathbf{C}_g|} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{II.8})$$



## 2.2 Effets d'un milieu plus fortement variable : la réflexion et la diffraction

### 2.2.1 La réflexion

Lorsque les variations du milieu ne sont plus très petites devant la longueur d'onde de la houle celle-ci peut être réfléchi. La quantité d'énergie réfléchi (respectivement transmise) au niveau d'un obstacle dépend de différents paramètres liés à la nature de l'obstacle, à sa configuration géométrique et aux paramètres de la houle. L'obstacle rencontré peut être aussi bien une variation topographique que la présence d'un courant.

Le potentiel des vitesses de la houle s'écrit alors comme la somme entre la contribution de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchi au niveau de l'obstacle. Nous écrivons ainsi

$$\Phi = (a_i \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) + a_r \exp(i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi))) \frac{i\omega \cosh(k(z+h))}{k \cosh(kh)}. \quad (\text{II.9})$$

$\varphi$  correspond ici au déphasage entre la houle incidente et la houle réfléchi. Les coefficients  $a_i$  et  $a_r$ , sont les amplitudes des ondes incidente et réfléchi. Le coefficient de réflexion d'un obstacle est alors défini comme le rapport entre l'amplitude de la houle réfléchi et de la houle incidente

$$K = \frac{a_r}{a_i} \quad (\text{II.10})$$

Dans le cas de variations topographiques, l'inclinaison de l'obstacle, son immersion, ses dimensions géométriques, la matière qui le compose définissent la quantité d'énergie réfléchi et dissipée en fonction des paramètres de la houle. Ces paramètres permettent de distinguer deux modélisations distinctes du phénomène de réflexion par la topographie.

Lorsque la variation du fond n'est plus petite devant la longueur d'onde mais reste comparable à celle-ci, la réflexion de la houle peut être décrite par une perturbation de la solution sinusoïdale au premier ordre. C'est le cas pour la réflexion de Bragg ([Guazzelli et al. \(1992\)](#)) qui apparaît lorsque la longueur caractéristique des variations topographiques est égale à la moitié de la longueur d'onde de la houle.

Lorsque les variations topographiques présentent une discontinuité, [Patarapanich \(1984\)](#) décrit le caractère oscillatoire de la réflexion en fonction de la longueur d'onde de la houle. Il montre ainsi que les caractéristiques de la houle sont aussi un facteur déterminant dans le caractère réflexif d'un obstacle. Ce phénomène est bien décrit en tenant compte de modes locaux, appelés modes évanescents, qui se développent au niveau des variations topographiques. Dans ce cas, le

## II.2 Généralités sur les effets de la topographie et du courant sur la propagation de la houle

potentiel de la houle s'écrit comme la somme des modes propagatifs et des modes évanescents, oscillatoires et non propagatifs. Ainsi, [Guazzelli et al. \(1992\)](#) décrivent le comportement de la houle au dessus d'obstacles sinusoidaux, puis [Rey \(1995\)](#) le modélise au dessus d'obstacles abruptes à partir de la méthode numérique de résolution développée par [Takano \(1960\)](#). Cette méthode est présentée dans l'annexe A où la variation topographique que nous considérons est une plaque plane immergée (figure [II.3](#)).

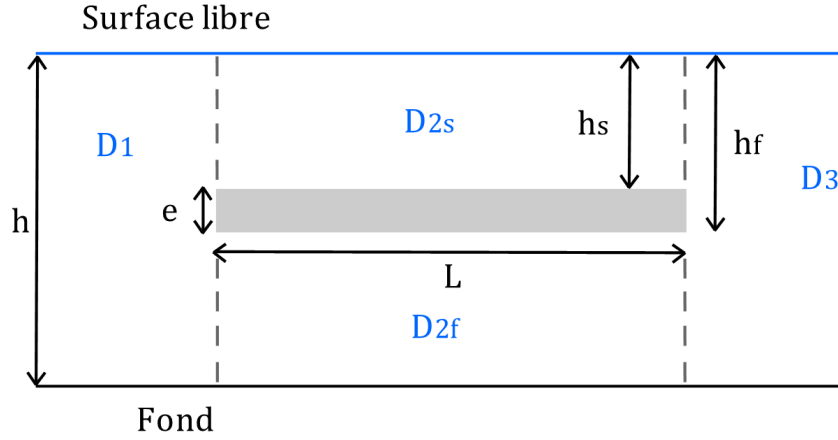


Figure II.3 – Plaque plane immergée

Dans les domaines  $D_i$  où  $i = \{1, 2s, 3\}$  le potentiel  $\Phi_i$  de la houle s'écrit

$$\Phi_i(x, z, t) = \phi_i(x, z) \exp(i\omega t) = \left[ \underbrace{A_i^\pm \exp(\pm ik_0 x) \Psi_{i,0}(z)}_{\text{Modes propagatifs}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} B_{i,n}^\pm \exp(\pm k_n x) \Psi_{i,n}(z)}_{\text{Modes évanescents}} \right] \exp(i\omega t) \quad (\text{II.11})$$

avec  $\Psi_{i,0} = \cosh(k_i(z+h))/\cosh(k_i h)$ ,  $\Psi_{i,n} = \cos(k_{i,n}(z+h))/\cos(k_{i,n} h)$ .  $k_{i,0}$  et  $k_{i,n}$  sont calculés à partir des relations de dispersion  $\omega^2 = gk_{i,0} \tanh(k_{i,0} h)$  et  $\omega^2 = gk_{i,n} \tanh(k_{i,n} h)$ .

Dans le domaine  $D_{2f}$ , le potentiel  $\Phi_{2f}$  de la houle s'écrit

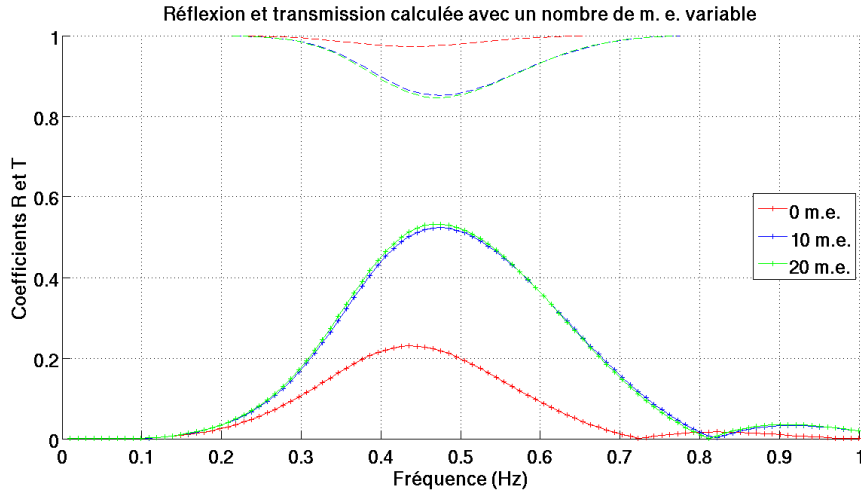
$$\Phi_{2f}(x, z, t) = \left[ \underbrace{(A_{2f}^+ x + A_{2f}^-) \Psi_0(z)}_{\text{Oscillation de la colonne d'eau}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} B_{2f,n}^\pm \exp(\pm k_{2f,n} x) \Psi_{2f,n}(z)}_{\text{Modes évanescents}} \right] \exp(i\omega t) \quad (\text{II.12})$$

avec  $\Psi_{2f,0} = 1$ ,  $\Psi_{2f,n} = \cos(k_{2f,n}(z+h))$  et  $k_{2f,n} = n\pi/(h-h_f)$ . L'ensemble des coefficients

## Chapitre II. Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

$A_i$  et  $B_i$  est calculé numériquement.

L'évolution des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence et du nombre de modes évanescents calculés est représentée sur la figure (II.4).



**Figure II.4** – Evolution des coefficients de réflexion (+) et de transmission (-) en fonction de la fréquence et du nombre de modes évanescents (m.e.) au dessus d'une plaque plane.  $L = 1.53m$ ,  $h_0 = 3m$ ,  $h_s = 0.5m$ ,  $h_f = 0.6m$

Lorsque la houle se propage en présence d'un courant adverse, colinéaire ou oblique par rapport à sa direction de propagation, elle peut être bloquée ou réfléchi. [Shyu & Tung \(1999\)](#) déterminent les solutions analytiques d'une telle réflexion de la houle en présence d'un courant supposé stationnaire, unidirectionnel et irrotationnel en résolvant l'équation de Laplace et les conditions aux limites à partir de la théorie potentielle linéaire. [Suh et al. \(2001\)](#) quant à eux développent une méthode numérique pour déterminer les paramètres des houles incidente et réfléchi par un courant connu à partir de mesures effectuées dans un canal à houle.

### 2.2.2 La diffraction

Lorsque les variations de la topographie ne sont plus faibles devant les caractéristiques de la houle, par exemple lorsqu'elle rencontre un obstacle émergent naturel ou artificiel ou bien un courant inhomogène dans le plan horizontal, nous pouvons observer un phénomène de diffusion de l'onde dans les deux directions de la surface. Ce phénomène, plutôt appelé diffraction pour les houles, peut être décrit par la théorie linéaire. Il conduit à un élargissement de la répartition angulaire des directions de propagation de la houle. Un tel phénomène est représenté sur la figure (II.5).

## II.2 Généralités sur les effets de la topographie et du courant sur la propagation de la houle

---



**Figure II.5** – Diffraction par deux brise-lames. *Source* : <http://hmf.enseeiht.fr>, mai 2014

Historiquement ce phénomène a été décrit de manière analogue à la diffraction de la lumière (Penney & Price, 1952). Comme le potentiel  $\Phi$  de la houle vérifiant l'équation de Laplace, le potentiel réduit  $\phi(x, y)$  vérifie l'équation d'Helmholtz

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (\text{II.13})$$

La résolution de cette équation permet, en utilisant les conditions aux limites au niveau de l'obstacle considéré de déduire le comportement de la houle autour de celui-ci. De cette manière Penney & Price (1952) établissent les solutions de cette équation pour différents types de brise-lame en utilisant les intégrales de Fresnel. Cette méthode a été réutilisée bien plus tard par Kim & Lee (2009) pour des analyses numériques de la diffraction. Dans ce but les intégrales de Fresnel sont approchées par des polynômes.

Plus tard, Kirby & Dalrymple (1983) établissent dans la théorie potentielle linéaire les équations gouvernant la propagation de la houle d'incidence non nulle au dessus d'une fosse abrupte, de type tranchée. Ils découpent le domaine d'études en trois régions dans lesquelles la profondeur d'eau est constante et trouvent les solutions particulières dans chaque domaine en écrivant les conditions de continuité de flux et de pression aux frontières des régions. Ils étendent ainsi la méthode de Takano (1960) (cf. Annexe A) à des houles d'incidence oblique. Une méthode similaire a été utilisée par Kim (2010) pour des houles se propageant dans des conditions de profondeur infinie.

La diffraction de la houle peut aussi être décrite par la théorie potentielle linéaire en tenant compte des modes évanescents générés autour des structures abruptes (Rey, 1995).

La présence d'obstacles peut engendrer des non-linéarités dans le profil de la houle. Dans le but de comprendre la focalisation de la houle observée derrière des brise-lames immergés, Stannes *et al.* (1983) comparent l'évolution du champ de houle représenté dans la théorie linéaire et

soumis au phénomène de diffraction par rapport au même champ de houle représenté cette fois-ci dans la théorie non-linéaire. Ils quantifient ainsi les effets non-linéaires apparaissant lors du phénomène de diffraction. Les mêmes conditions aux limites autour de l'obstacle immergés sont considérées. Les résultats numériques sont comparés à des résultats d'expériences. Il apparaît que les deux théories permettent bien de représenter la focalisation. Toutefois la théorie non-linéaire semble mieux prédire la hauteur des vagues au niveau du point de focalisation. D'autres études plus récentes ont alors cherché à représenter le phénomène de diffraction dans la théorie non-linéaire. Nous citerons à titre indicatif [Arduin & Herbers \(2002\)](#), qui étudient la réflexion de Bragg pour des houles faiblement non linéaires, [Brossard & Chagdali \(2001\)](#) étudient expérimentalement les interactions non linéaires avec un brise-lame, [Constantin \(2014\)](#) qui étudie la pertinence de la description de la houle sous forme d'une houle de Stokes pour les interactions entre les vagues et la topographie.

### 3 Vers une représentation unifiée des effets de la topographie sur la propagation de la houle

#### 3.1 Nécessité de la représentation des phénomènes couplés

La section précédente a permis de mettre en évidence les différents processus d'interactions qui peuvent être décrits dans la théorie linéaire. Les études citées précédemment ont permis de considérer séparément les interactions complexes entre la houle et son milieu. Elles servent de base dans la compréhension et la description des phénomènes d'interaction combinés que nous allons décrire dans la suite de ce chapitre. En effet, l'existence conjointe des effets de la réfraction et de la diffraction sont observables ([Berkhoff \*et al.\*, 1982](#); [Jarry \*et al.\*, 2011](#); [Vincent & Briggs, 1989](#)). D'ailleurs [Berkhoff \(1972\)](#) puis [Booij \(1983\)](#) montrent numériquement l'efficacité d'un modèle permettant de combiner ces deux phénomènes par rapport à un modèle de réfraction simple.

Dans le but de combiner les effets de la réfraction et de la diffraction dans un seul modèle, [Berkhoff \(1976\)](#) intègre sur la colonne d'eau les conditions aux limites classiques dans la théorie potentielle linéaire présentées dans le chapitre (I).

## 3.2 Modèles de réfraction-diffraction

Sous l’hypothèse de houles de faibles amplitudes et sous l’approximation mild-slope (système II.2), Berkhoff (1976) est le premier auteur à établir, dans la théorie potentielle linéaire, une équation de propagation de la houle couplant les effets de la diffraction et de la réfraction induits par les variations topographiques. Cette équation elliptique, dont la démonstration détaillée est aussi proposée par Gouaud (2007), s’écrit

$$\nabla_h (CC_g \nabla_h \Phi) + k^2 CC_g \Phi = 0 . \quad (\text{II.14})$$

Cette équation, traditionnellement appelée équation mild-slope, est à l’origine de très nombreuses études. Certaines portent sur sa réécriture pour simplifier sa résolution numérique. D’autres études modifient son expression afin d’améliorer la représentation des processus d’interaction entre la houle linéaire ou non linéaire et une topographie plus abrupte.

### 3.2.1 Réécriture de l’équation de Berkhoff

La résolution numérique de cette équation elliptique a été source de différentes difficultés. La première difficulté qui a été rencontrée est relative au choix de la condition limite en sortie de domaine. A cet endroit, la houle doit être totalement transmise. Cependant, un choix de condition aux limites trop simple pourrait être à l’origine d’une réflexion de la houle sur les bords du domaine lorsque l’incidence de la houle est non nulle, même faible. Ce phénomène rendrait invalide toute exploitation d’une telle résolution numérique. Afin de s’affranchir de cette difficulté, Kirby (1989) met en place les conditions aux limites qui permettent de limiter une telle réflexion en sortie de domaine.

La seconde difficulté rencontrée est relative au coût important de la résolution numérique d’une équation elliptique. En effet, la nécessité de discrétiser le domaine d’étude et celle d’utiliser des conditions aux limites ouvertes augmentent considérablement le nombre de calcul à réaliser. Dans l’objectif de réduire le coût de la résolution numérique de cette équation, Radder (1979) propose une méthode pour la paraboliser. Dans ce but, l’équation de Berkhoff (II.14) est projetée sur une direction de propagation privilégiée. L’équation parabolique obtenue est plus facile à résoudre numériquement. Cependant, elle ne représente pas la réflexion de la houle. De plus, elle ne supporte que des angles d’incidence de la houle faibles. Un changement de direction de plus de 30° par rapport à la direction principale de la houle semble être un maximum (Chagdali *et al.* (2000)). Afin de s’affranchir de cette contrainte, des méthodes basées sur l’utilisation des approximants de Padé permettent, quant à elles, des changements de direction plus importantes

## Chapitre II. Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

---

de l'ordre de  $50^\circ$  (Kirby, 1986b), voire  $77^\circ$  (Mordane *et al.*, 2004).

Une toute autre méthode consiste à appliquer une transformée de Fourier à l'équation de Berkhoff afin de pouvoir considérer des angles de rotation des crêtes de la houle beaucoup plus grands, jusqu'à  $90^\circ$  (Dalrymple & Kirby, 1988). Le modèle obtenu, qui tient aussi compte des modes évanescents, permet de représenter une forte diffraction apparaissant par exemple derrière des brise-lames. Il est valide tant que la diffraction peut être considérée grande devant les non-linéarités de la houle. Le principal désavantage de cette méthode est la nécessité de calculer les solutions analytiques du potentiel de la houle autour des variations topographiques avant de résoudre numériquement les équations.

### 3.2.2 Extensions de l'équation de Berkhoff

L'équation mild-slope est à l'origine de nombreuses études visant à élargir son champ d'application à des houles non nécessairement linéaires ou stationnaires se propageant au dessus de topographies plus abruptes.

Kirby (1986a) considère la propagation d'une houle se propageant au dessus d'une topographie pouvant être décomposée en deux parties. La première partie varie dans l'approximation mild-slope. La seconde, composée de rides, est superposée à la première. Ces rides ont une amplitude  $\delta_r$  faible et une longueur d'onde de l'ordre de celle de la houle. Le potentiel de la houle dépend du temps et les modes évanescents sont pris en compte. Cette équation s'écrit, en négligeant les termes d'ordre  $\mathcal{O}(k\delta_r)^2$ , d'ordre  $\mathcal{O}(|\nabla_{\mathbf{h}}h|^2)$  et d'ordre  $\mathcal{O}(\nabla_{\mathbf{h}}^2h)$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla_{\mathbf{h}} \cdot (CC_g \nabla_{\mathbf{h}} \phi) + (\omega^2 - k^2 CC_g) \phi + \frac{g}{\cosh^2(kh)} \nabla_{\mathbf{h}} \cdot (\delta_r \nabla_{\mathbf{h}} \phi) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Cette équation est connue sous le nom de mild-slope étendue. Si nous négligeons l'existence des rides, elle représente une version instationnaire de l'équation de Berkhoff (II.14).

Sous les mêmes hypothèses de variations du fond, Chamberlain & Porter (1995) présentent l'équation mild slope sous une nouvelle forme en conservant les termes d'ordre  $\mathcal{O}(|\nabla_{\mathbf{h}}h|^2)$  et  $\mathcal{O}(\nabla_{\mathbf{h}}^2h)$ . Ils permettent de considérer des variations topographiques plus grandes et plus rapides. Cette équation connue sous le nom de mild-slope modifiée est donnée par

$$\nabla_{\mathbf{h}} \cdot (CC_g \nabla_{\mathbf{h}} \phi) + \left( k^2 CC_g + \frac{r}{g} \right) \phi = 0 \quad (\text{II.16})$$

avec

$$r = \int_{-h}^0 f(z) \nabla_{\mathbf{h}}^2 f(z) dz + \nabla_{\mathbf{h}} h [f(z) \nabla_{\mathbf{h}} f(z)]_{z=-h} \quad (\text{II.17})$$

### II.3 Vers une représentation unifiée des effets de la topographie sur la propagation de la houle

---

Ici  $r = \mathcal{O}(|\nabla_h h|^2, \nabla_h^2 h)$ . Lorsque ce terme est négligé, dans l'approximation mild-slope, l'équation (II.16) se réduit à l'équation (II.14). Cette équation s'avère mieux représenter la diffraction de la houle par une telle topographie que l'équation (II.15). Sous ces mêmes hypothèses, Chandrasekera & Cheung (1997) suivent une approche différente et obtiennent une formulation équivalente à Chamberlain & Porter (1995). Massel (1993) propose une équation similaire en tenant compte des modes évanescents dans la solution.

Suh *et al.* (1997) étendent l'étude de Chamberlain & Porter (1995) en prenant en compte les variations temporelles de la houle. Dans ce cas, l'équation (II.16) se réécrit

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \phi) + \left( \omega^2 - k^2 CC_g - \frac{r}{g} \right) \phi = 0. \quad (\text{II.18})$$

Athanassoulis & Belibassakis (1999) améliorent la solution proposée par Massel (1993) en posant correctement la condition de fond que doit satisfaire le potentiel de la houle. En effet la condition de fond proposée par Massel (1993) est seulement valable lorsque le fond est constant par morceaux. Cette condition de fond ne permet donc pas de représenter correctement le potentiel de la houle près du fond et d'autre part, la solution ne vérifie pas l'équation de conservation de l'énergie. Afin d'y palier, Athanassoulis & Belibassakis (1999) développent à partir d'un principe variationnel un modèle permettant de vérifier la condition de fond lorsque le fond oscille rapidement en y incluant les modes évanescents et un mode permettant de vérifier la condition d'imperméabilité sur un fond en pente. Ce modèle sera ensuite généralisé pour des cas d'écoulement dans les trois dimensions de l'espace. Magne *et al.* (2007) utilisent ce modèle dans un cas de propagation de houle au dessus d'un canyon sous-marin.

Une méthode alternative à celle proposée par Athanassoulis & Belibassakis (1999) a été développée par Kim & Bai (2004). Ces auteurs proposent à partir d'une formulation variationnelle des solutions exprimées en terme de fonction de courant. Comme dans l'étude menée par Athanassoulis & Belibassakis (1999) la solution proposée vérifie bien la condition de fond et l'équation de conservation de l'énergie.



## 4 Vers une représentation unifiée des processus d'interaction houle-courant-topographie

### 4.1 Etudes et avancées

Comme nous l'avons décrit dans la deuxième section de ce chapitre, la présence d'un champ de courant peut être à l'origine de phénomènes d'interaction de même nature que les variations topographiques. Afin de représenter les interactions triples entre la houle, le courant et la topographie, les modèles de propagation de la houle en présence de topographies variables ont été étendus à des cas de propagation en présence de courant.

Historiquement, [Longuet-Higgins & Stewart \(1961\)](#) sont les premiers à étudier théoriquement l'influence d'un courant lentement variable sur la propagation de la houle. Cependant, pour de plus fortes variations de courant, leur approche n'est plus valable ([Evans, 1975](#)).

En s'appuyant sur le modèle de réfraction pure de [Skovgaard \*et al.\* \(1975\)](#), [Jonsson & Christoffersen \(1984\)](#) considèrent la réfraction au dessus d'un fond lentement variable en ajoutant les effets d'un courant constant sur la verticale, les frictions au fond et la dissipation d'énergie au fond. Ils considèrent des houles régulières et de faible amplitude. Ils considèrent que la dispersion angulaire est faible : la diffraction n'est pas prise en compte. Peu après, [Grue & Palm \(1985\)](#) étudient la réfraction et la diffraction de la houle autour d'un cylindre immergé en présence d'un courant constant, puis [Rey \*et al.\* \(2002\)](#) étudient l'évolution du coefficient de réflexion d'une plaque immergée en présence d'un courant colinéaire constant sur la verticale. [Booij \(1981\)](#) puis [Liu \(1983\)](#) cherchent à représenter dans une seule équation de propagation l'ensemble des processus d'interaction linéaire couplés. Ainsi ils obtiennent deux formulations différentes d'une équation permettant de représenter la réfraction, la diffraction, la réflexion de la houle au dessus d'une topographie lente, sous l'hypothèse mild-slope, en présence d'un champ de courant constant sur la colonne d'eau  $\mathbf{U}_0(x, y) = (U_0(x, y), V_0(x, y), 0)$ . C'est [Kirby \(1984\)](#) qui obtient la formulation finale de cette équation. Cette équation est une extension supplémentaire de l'équation mild-slope de Berkhoff. Nous présentons cette équation et la démarche suivie par cet auteur dans la section suivante.

### 4.2 Un modèle unifié : l'équation mild-slope avec courant

#### 4.2.1 Le principe variationnel

[Luke \(1967\)](#) puis [Whitham \(1974, 1970\)](#) sont les premiers auteurs à formuler l'expression d'un Lagrangien  $\mathcal{L}$  pour des problèmes de propagation de houle. Le Lagrangien d'un système

## II.4 Vers une représentation unifiée des processus d'interaction houle-courant-topographie

---

isolé représente la différence entre les énergies cinétique et potentielle acquises par le système. Cette quantité est nulle lorsque le système est à l'équilibre. Le principe variationnel s'écrit alors, pour de faibles variations autour de la position d'équilibre

$$\delta J = \delta \int_t \int_x \mathcal{L} d\mathbf{x} dt = 0 . \quad (\text{II.19})$$

Ce principe variationnel peut être utilisé pour décrire l'évolution d'une houle de faible amplitude. En effet, sous l'hypothèse d'une faible amplitude, l'élévation de la surface libre peut alors être vue comme une petite fluctuation autour de sa position au repos. Suivant cette méthode, [Luke \(1967\)](#) démontre, dans la théorie potentielle linéaire, l'égalité entre le Lagrangien de l'écoulement  $\mathcal{L}$  et l'intégrale sur la hauteur d'eau locale du terme de pression. Ainsi

$$\mathcal{L} = \int_{-h(\mathbf{x},t)}^{\eta(\mathbf{x},t)} -\frac{p}{\rho} dz . \quad (\text{II.20})$$

Une telle expression permet bien de retrouver les conditions aux limites habituelles dans le cadre de cette théorie, présentées dans le chapitre I.

### 4.2.2 Equation de [Kirby \(1984\)](#)

Le champ total de l'écoulement que [Kirby \(1984\)](#) considère s'écrit

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \nabla \Phi + \mathbf{U}_0(x, y) . \quad (\text{II.21})$$

La relation de dispersion de la houle s'écrit dans ce cas

$$\sigma^2 = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)^2 = gk \tanh(kh) . \quad (\text{II.22})$$

$\sigma = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)$  est la pulsation dite "intrinsèque" de la houle. C'est sa pulsation dans un référentiel en translation rectiligne à la vitesse  $U_0$  par rapport à un référentiel absolu. Ce phénomène est d'ailleurs couramment et abusivement appelé "effet Doppler" ([\(Gerkema et al., 2012\)](#)).

[Kirby \(1984\)](#) calcule dans l'approximation mild-slope et dans la théorie potentielle linéaire le Lagrangien  $\mathcal{L}$  de l'écoulement à partir de l'expression [\(II.20\)](#). En faisant varier l'expression  $\mathcal{L}$  obtenue par rapport au potentiel réduit  $\phi$  et par rapport à l'élévation de la surface libre  $\eta$ ,

l'équation mild-slope (II.14) se réécrit alors

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \frac{D\phi}{Dt} - \nabla (CC_g \nabla \phi) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \phi = 0. \quad (\text{II.23})$$

D'autre part, cette équation permet bien de retrouver l'équation de conservation de l'action  $\mathcal{A} = E/\sigma$  où  $E$  est la densité d'énergie de la houle. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{h}} \cdot [\mathcal{A} (\mathbf{C}_g + \mathbf{U}_0)] = 0. \quad (\text{II.24})$$

Les équations (II.23) et (II.24) sont connues pour bien représenter les interactions entre la houle, la topographie et le courant. Elle sont en effet à l'origine de différents modèles opérationnels présentés dans l'avant-propos de ce manuscrit.

Bien que ces équations puissent représenter l'interaction entre la houle et un faible gradient de cisaillement horizontal, le profil du champ de courant sur la colonne d'eau est supposé constant. Cependant la question concernant le profil du courant qu'il convient de considérer pour représenter correctement les interactions physiques s'est très vite posée. En effet les gradients de cisaillement verticaux dans le profil de courant ont une influence non négligeable sur la propagation de la houle comme l'ont montré [MacIver et al. \(2006\)](#) lors d'expériences menées en bassin.

### 4.3 Influence d'un cisaillement vertical sur le comportement de la houle

Le choix du profil de cisaillement permettant de représenter correctement les interactions houle-courant est la principale difficulté.

L'influence d'un cisaillement dans le profil du courant sur le comportement de la houle est directement remarquable à partir du calcul de célérité de la houle via la relation de dispersion ([Burns \(1953\)](#)). Différents auteurs, comme [Skop \(1987\)](#), [Kirby & Chen \(1989\)](#), [Margaretha \(2005\)](#), établissent pour des profils variés de courant les relations de dispersion de la houle à partir de l'équation de Rayleigh pour des fluides non visqueux. Ces expressions diffèrent selon le profil de courant considéré. Ainsi, lorsque le courant est supposé cisailé linéairement sur la colonne d'eau, il s'exprime

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{S}(x, y) z + \mathbf{U}_0(x, y). \quad (\text{II.25})$$

## II.4 Vers une représentation unifiée des processus d'interaction houle-courant-topographie

---

Avec un tel champ de courant la relation de dispersion linéaire de la houle s'écrit (Thompson (1949), Biesel (1950), Kirby & Chen (1989))

$$\left( \omega - \mathbf{k} \cdot \left[ \mathbf{U}_0 - \frac{\tanh(kh)}{2k} \mathbf{S} \right] \right)^2 - \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\tanh(kh)}{2k} \mathbf{S} \right)^2 = gk \tanh(kh) . \quad (\text{II.26})$$

Lorsque le champ de cisaillement  $\mathbf{S}$  est nul, l'expression (II.26) se réduit bien à l'expression (II.22).

Lorsque le cisaillement est faible, le dernier terme du membre de gauche de l'équation (II.26) peut être négligé devant le premier. La relation de dispersion se réécrit alors

$$\sigma = (\omega - \mathbf{k} \cdot [\mathbf{U}_0 - d_c \mathbf{S}])^2 = gk \tanh(kh) . \quad (\text{II.27})$$

où

$$d_c = \frac{\tanh(kh)}{2k} . \quad (\text{II.28})$$

Dans ce cas,  $\sigma$  est la pulsation de la houle si elle se propageait dans un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel fixe de l'observateur, à la vitesse  $\mathbf{U}_0 - d_c \mathbf{S}$ . La profondeur  $d_c$  est donc une profondeur critique de l'écoulement, comme l'avaient suggéré TelesDaSilva & Peregrine (1988). En profondeur infinie,

$$d_c \longrightarrow \frac{\lambda}{4\pi} . \quad (\text{II.29})$$

Le courant établi à la profondeur  $\lambda/4\pi$  est appelé courant équivalent par Stewart & Joy (1974). La houle se propage alors comme si elle était en présence d'un courant constant sur la colonne d'eau ayant la même intensité que le courant équivalent. Cette analyse permet de simplifier un problème initialement rotationnel en un problème irrotationnel. Cependant cette simplification ne permet pas toujours de représenter correctement la dynamique de la houle. Elle n'est valable que lorsque le champ de cisaillement est faible, comme le soulignent Hedges & Lee (1992).

Plus récemment, MacIver *et al.* (2006) étudient les interactions entre une houle faiblement non linéaire et un jet de courant, afin de rapprocher les conditions expérimentales à celles qui peuvent exister sur le littoral. Le courant est orthogonal à la propagation de la houle. Ces auteurs montrent que les structures tourbillonnantes qui se créent dans le champ de courant affectent en effet la dynamique de la houle.

Afin de comparer les représentations de la houle sous ces différentes hypothèses de vorticité de l'écoulement, Thomas (1981) mène une campagne expérimentale en canal à houle. La houle se propage en présence d'un champ de courant connu. L'auteur calcule les longueurs d'onde à par-

## Chapitre II. Les mécanismes physiques de transformation de la houle et leur représentation

---

tir de modélisations du champ de courant expérimentale différentes et compare les résultats aux valeurs expérimentales. Deux modèles ont été retenus. Dans le premier il considère un courant équivalent dont l'intensité est la valeur moyennée du courant sur la colonne d'eau. Dans le second il considère un courant cisailé linéairement sur la colonne d'eau. Il observe que le modèle irrotationnel avec le courant moyenné donne de meilleurs résultats que le modèle rotationnel avec un courant cisailé. Cependant la forme du profil de courant généré est discutable. En effet le courant n'est fortement cisailé que sur des couches de fluides minces, en surface et près du fond. Entre les deux le courant peut être considéré constant. Le courant est donc globalement irrotationnel sur la colonne d'eau.

D'autres campagnes expérimentales donnent en effet des résultats contraires. [Cummins & Swan \(1994\)](#) comparent des résultats expérimentaux des solutions numériques issus de modèles rotationnels et irrotationnels. Ainsi une solution de houle irrotationnelle donne de moins bons résultats qu'une solution issue d'un modèle multi-couche, permettant de représenter un champ de vorticité. Ces résultats sont appuyés par ceux de [Swan \*et al.\* \(2001\)](#). Ces derniers montrent expérimentalement que la propagation de la houle avec un courant variant avec la profondeur et une distribution non uniforme de vorticité affecte considérablement la dynamique du fluide sur toute la colonne d'eau, confirmant ainsi les résultats numériques de [Dalrymple \(1977\)](#).

Le choix de profil de courant qu'il convient de considérer n'a donc pas de réponse figée. Cette question est d'autant plus difficile que la propagation d'un champ de houle en présence d'un courant modifie le profil de celui-ci par rapport à son profil initial, sans perturbation de la surface libre ([Fredsoe \*et al.\*, 1999](#); [Kemp & Simons, 1982, 1983](#); [Klopman, 1994](#); [Margaretha, 2005](#)). L'intensité du courant joue s r ment un rôle sur le choix de sa représentation.

Afin de mieux comprendre les interactions entre la houle, le courant et la topographie, plusieurs campagnes de mesure ont été organisées en milieu contrôlé, au Bassin de Génie Océanique First   La Seyne-Sur-Mer en 2007 et en 2008. Les principaux résultats issus de ces expériences sont présentés dans le chapitre suivant.

## Partie B

Dynamique de la houle au-dessus d'une  
topographie variable en présence d'un  
courant inhomogène



*La science doit s'accommoder à la nature. La nature ne peut s'accommoder à la science.*

Ferdinand Bruno

Nous nous intéressons dans le chapitre [III](#) aux résultats issus des campagnes expérimentales menées au Bassin de Génie Océanique First en 2007 et en 2008. Pendant ces campagnes, une houle régulière se propageait en présence d'un contre-courant au dessus d'une topographie 3D. Différentes conditions hydrodynamiques concernant la houle et le courant ont été générées. Certains phénomènes d'interaction concernant l'évolution de l'amplitude de la houle n'ont pas pu être interprétés par le modèle mild-slope pourtant connu pour représenter correctement ces types d'interaction. La principale piste d'investigation concerne la forme du profil vertical du courant qui n'a pas pu être mesurée précisément lors de ces expériences ([Rey et al., 2014](#)). Ce développement est l'objet du chapitre [III](#).

Les chapitres suivants présentent le développement de modèles mathématiques de propagation de la houle tenant compte des gradients verticaux du courant. Une nouvelle formulation de l'équation mild-slope établie pour un courant cisailé linéairement sur la verticale fait l'objet du chapitre [IV](#). Les perspectives d'un tel modèle sont également présentées. En particulier, la prise en compte des modes évanescents permettra de représenter la propagation de la houle au dessus d'une topographie discontinue dans la théorie linéaire. A la suite de ce développement nous généralisons dans le chapitre [V](#) le concept d'action de la houle dans notre cas de propagation.



---

---

---

# Chapitre III

---

## Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

### 1 Introduction

Afin d'illustrer le comportement de la houle en présence d'un courant et d'une topographie fortement accidentée, plusieurs campagnes expérimentales ont été menées au Bassin de Génie Océanique First, à la Seyne sur Mer, en 2007 et en 2008. Les différentes expériences ont été menées pour différentes conditions de houle et de courant (Guinot (2010), Rey *et al.* (2011)). En particulier, lorsque la période de la houle correspond à une condition de propagation en profondeur infinie, une zone d'amplification de l'amplitude de la houle a été observée à contre courant. Ces résultats ont été présentés par Rey *et al.* (2014).

Nous présentons dans un premier temps le bassin de Génie Océanique First puis l'instrumentation déployée au cours de ces expériences et les conditions hydrodynamiques étudiées. Les mesures issues de la campagne de 2008 sont comparées aux résultats issus de la résolution numérique de l'équation mild-slope. L'effet du profil vertical du courant sur la propagation de la houle est en particulier discuté.

### 2 Le bassin de Génie Océanique First

#### 2.1 Le bassin, ses caractéristiques, ses équipements

Le Bassin de Génie Océanique First (BGO) est situé à La Seyne sur Mer, dans le Var (France). Il est opéré par l'entreprise Océanide. Le BGO a une longueur totale de 40m. Sa

### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

longueur utile est  $24m$ . Il mesure  $16m$  de largeur. Sa profondeur, ajustable grâce à un plancher mobile, est comprise entre  $0$  et  $4,8m$ . Il possède un puits de  $5m$  de diamètre et de  $10m$  de profondeur. Il est équipé d'un générateur de houle permettant la propagation de houles régulières et irrégulières de période comprise entre  $0,6s$  à  $4s$ . La hauteur des vagues générées peut atteindre  $0,6m$  de hauteur. Sur le côté opposé au générateur de houle, le bassin est équipé de pompes permettant la génération d'un courant dans le sens de propagation de la houle ou opposé à celle-ci. La vitesse maximale du courant généré est égale à  $0,4m.s^{-1}$  lorsque la profondeur d'eau est fixée à  $3m$ . Elle est de  $1,2m.s^{-1}$  pour une profondeur d'eau de  $1m$ . Sur le côté opposé au générateur de houle, le BGO First est équipé d'une plage d'amortissement parabolique perforée permettant de limiter la réflexion de la houle tout en laissant passer le courant. La figure (III.1) représente le bassin et ses équipements.

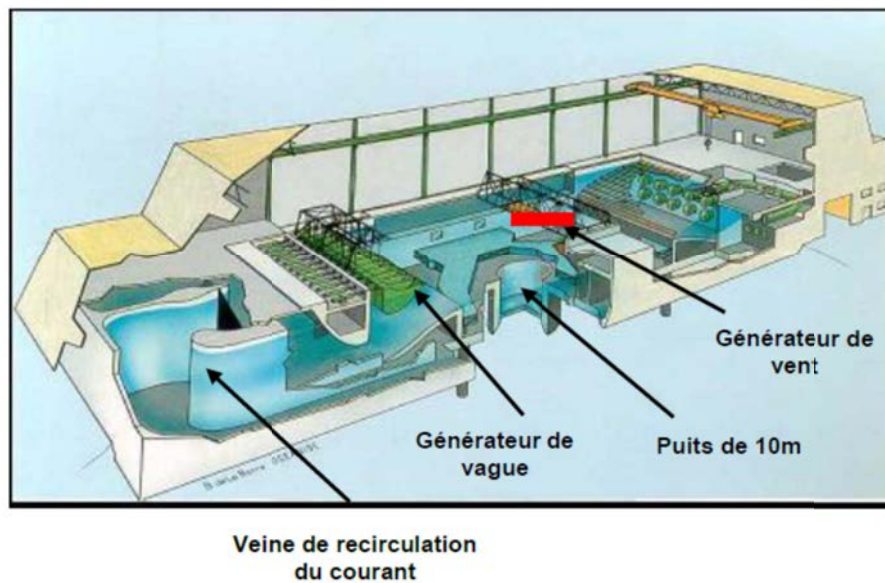


Figure III.1 – Vue en coupe du Bassin de Génie Océanique FIRST (Océanide (2013))

Afin de nous repérer dans le bassin nous lui attribuons un repère cartésien orthonormé direct  $(O, X, Y, Z)$ , ayant pour origine  $O$  le centre du bassin au niveau de la surface libre. L'axe  $X$  est orienté vers la plage. Le bassin est équipé d'un chariot mobile pouvant accueillir tout type de matériel de mesure. Un premier chariot mobile, appelé dans la suite du manuscrit chariot 1, enjambe le bassin sur toute sa largeur, le long de l'axe transverse  $(OY)$ . De cette manière, il peut se déplacer suivant l'axe  $(OX)$  du bassin, en le couvrant sur toute sa largeur. Ce chariot est observable sur la figure (III.2).



Figure III.2 – Chariot mobile 1

### 2.2 Caractéristiques de la topographie mise en place

Toutes les expériences ont été menées avec une profondeur d'eau égale à  $3m$ . Sur le plancher mobile, deux bosses identiques ont été installées symétriquement par rapport à l'axe ( $OX$ ), le long de l'axe transverse ( $OY$ ). Le plan de symétrie des deux bosses est situé en  $X = 0$ . Ces bosses ont une longueur maximale égale à  $8,5m$  et une largeur maximale égale à  $7,3m$ . Leur hauteur maximale est égale à  $1,5m$ . Le plan de masse du bassin est schématisé sur la figure (III.3).

### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisailment horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

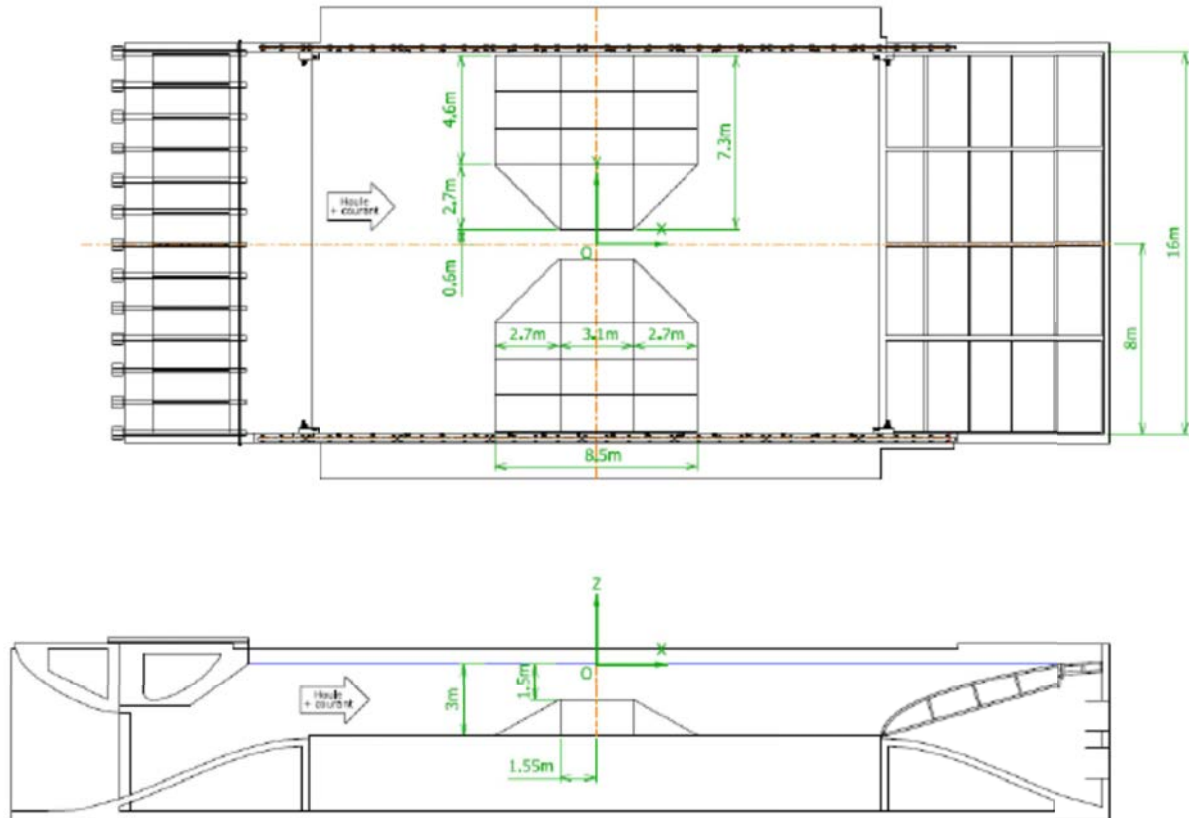


Figure III.3 – Plan de masse de la topographie (Océanide, 2013)

La photo (III.4) ci-dessous représente les bosses en position émergée. En condition d'expérience les bosses sont immergées. La profondeur d'eau minimale au niveau du sommet de ces bosses est égale à 1,5m.



**Figure III.4** – Topographie mise en place dans le bassin. Position émergée

## 3 Conditions hydrodynamiques lors de la campagne de mesure de 2008

La description complète du dispositif expérimental et des conditions hydrodynamiques étudiées lors de la campagne de mesure de 2007 a été réalisée par [Guinot \(2010\)](#). Pour la campagne de 2008 cette description est réalisée par [Rey et al. \(2011\)](#). La campagne de 2007 ne donnant que des informations peu précises sur l'évolution de la hauteur et de la célérité de la houle, nous ne discuterons ici que des résultats issus de la campagne de 2008.

Nous nous intéressons dans le cadre de ce travail aux tests réalisés dans des conditions de contre-courant, au cours desquels ce dernier a induit une focalisation de la houle. L'intensité du courant est alors égale à  $-0.25m.s^{-1}$  et la période des houles est égale à  $1.48s$ . Cette focalisation a été observée pour des hauteurs de houle égales à  $10cm$  et à  $20cm$  ([Rey et al. \(2014\)](#), présenté en annexe).

La longueur d'onde de la houle peut être calculée à partir de la relation de dispersion

$$(\omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})^2 = gk \tanh(kh) , \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathbf{U}$  est l'intensité du courant supposée homogène verticalement. Le tableau (III.1) synthétise les résultats obtenus en fonction des profondeurs d'eau  $h$  minimale et maximale rencontrées

## Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

---

$h$ (m)	$\lambda$ (m)	$h/\lambda$
1.5	2.6	0.6
3	2.6	1.2

**Tableau III.1** – Synthèse des conditions hydrodynamiques étudiées.

dans le bassin. En considérant que la condition de profondeur infinie est réalisée lorsque  $h \geq \lambda/2$ , cette condition de propagation est réalisée partout dans le bassin. Ainsi, la houle n'est susceptible d'interagir qu'avec le champ de courant. Seul ce dernier peut interagir avec la topographie.

Nous présentons ici les résultats les plus significatifs issus de [Rey et al. \(2014\)](#), présenté en annexe.

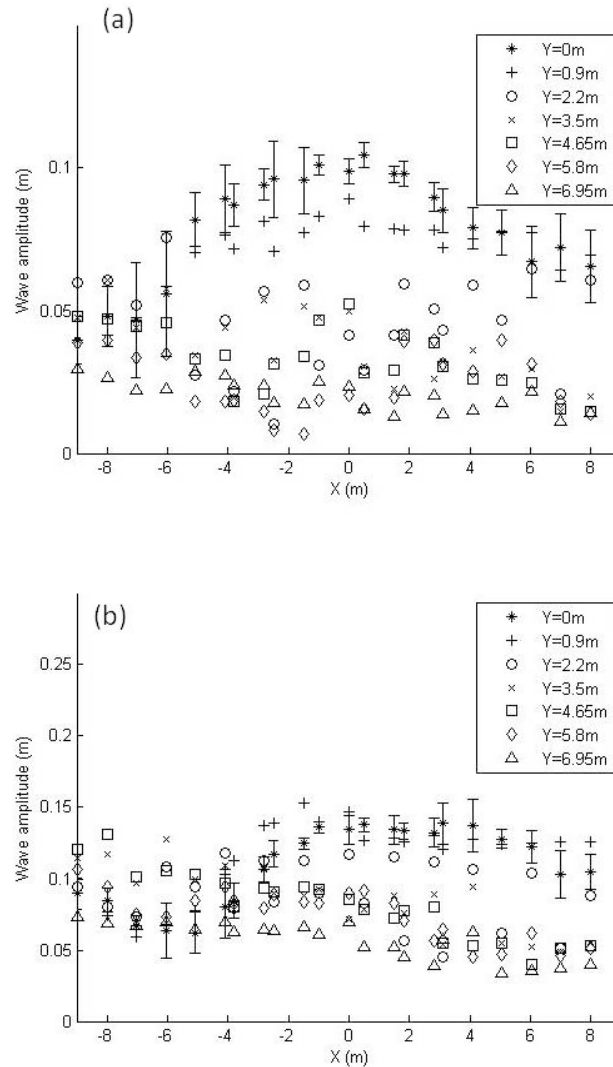
## 4 Evolution de l'amplitude et de la phase de la houle dans le bassin

### 4.1 Résultats expérimentaux

#### 4.1.1 Evolution de l'amplitude de la houle

Nous observons que l'amplitude de la houle présente une forte amplification au milieu du bassin, au niveau des bosses, en  $Y = 0$ , suivie d'une forte décroissance de part et d'autre des bosses. Cette amplification est de l'ordre de 100% lorsque  $H = 10cm$ . Elle atteint 50% lorsque  $H = 20cm$ , cependant pour cette hauteur de houle le déferlement observé limite le phénomène d'amplification. Ces résultats sont représentés sur la figure [\(III.5\)](#).

### III.4 Evolution de l'amplitude et de la phase de la houle dans le bassin



**Figure III.5** – Evolution de l'amplitude de la houle. En haut,  $H = 10\text{cm}$ . En bas,  $H = 20\text{cm}$ . Extrait de [Rey et al. \(2014\)](#).

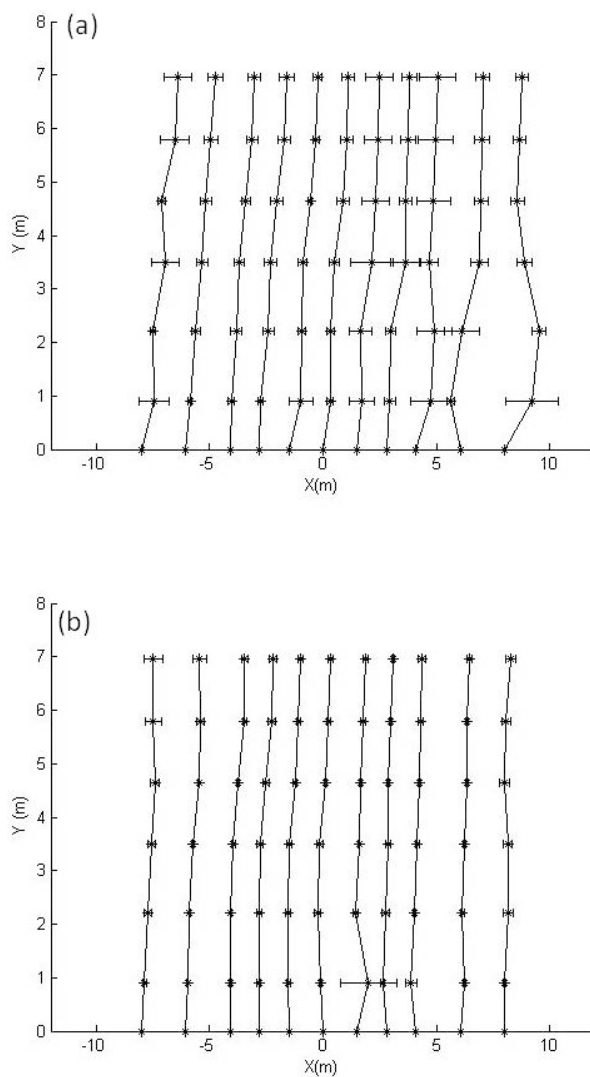
Cette focalisation, apparaissant pour deux hauteurs de houle différentes, laisse penser à un processus d'interaction *a priori* linéaire entre la houle et le courant. Elle pourrait être corrélée à l'augmentation de l'intensité du courant inverse, entre les deux bosses. Cependant cette augmentation n'est que de l'ordre de 20%. Elle ne permet donc pas d'expliquer complètement l'amplification de l'amplitude que nous avons observée. Elle n'est pas non plus expliquée par l'existence d'un courant transverse ni pas la réflexion de la houle sur la plage.



### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

#### 4.1.2 Evolution de la phase de la houle

La figure (III.6) présente l'évolution de la phase de la houle.

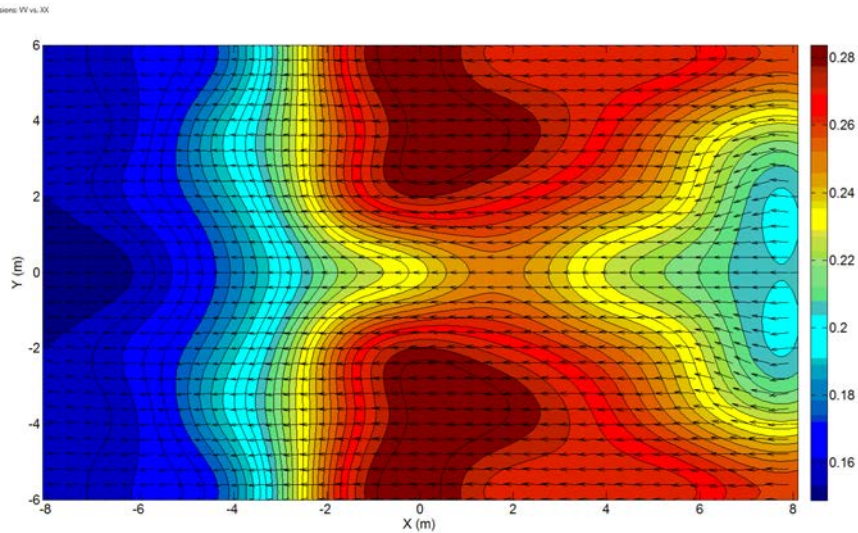


**Figure III.6** – Evolution de la phase de la houle par rapport à sa phase en  $Y = 0$ . En haut,  $H = 10cm$ . En bas,  $H = 20cm$ . Extrait de [Rey et al. \(2014\)](#).

Ces résultats semblent aussi montrer l'influence de la hauteur initiale de la houle sur son déphasage. En effet, le déphasage de la houle par rapport à sa phase en  $Y = 0$  est plus important lorsque  $H = 10cm$ . Nous observons en effet un retard de phase près des batteurs en  $X = -8m$  qui se répercute le long du bassin.

## 4.2 Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux issus de la résolution numérique de l'équation de Kirby (1984)

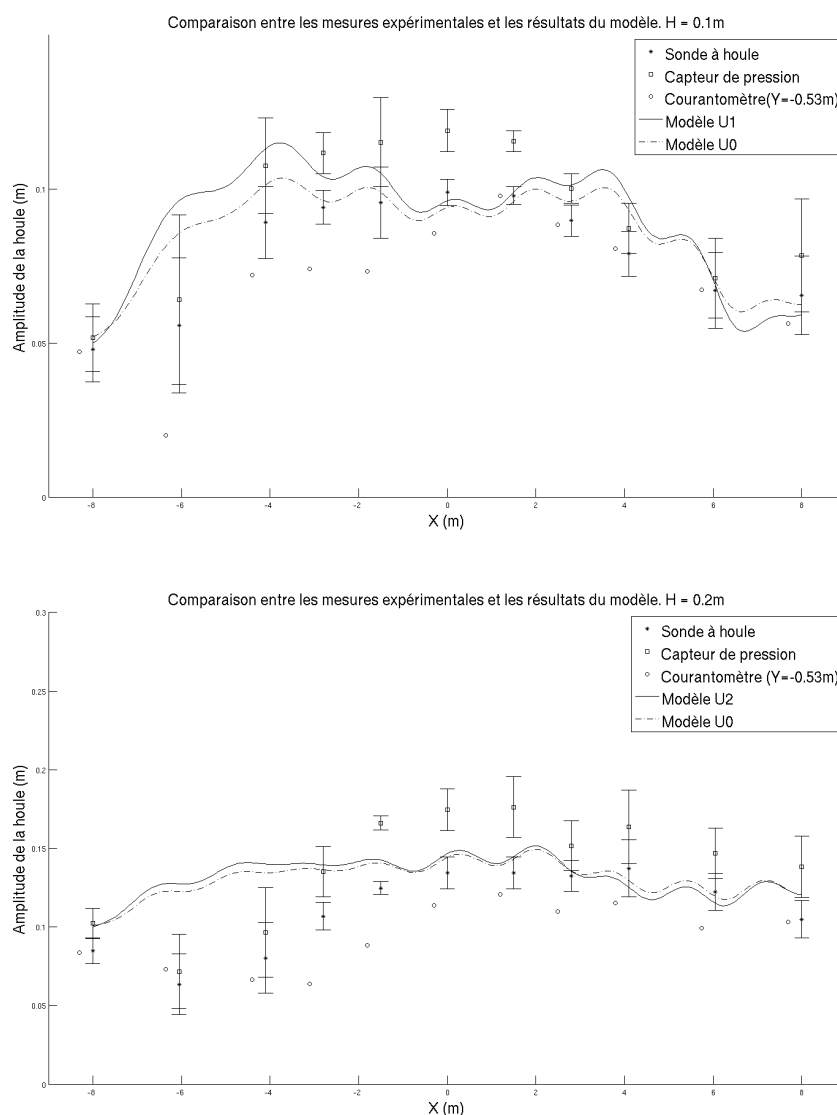
Les résultats expérimentaux issus de la campagne de 2008 ont été comparés à la résolution numérique de l'équation mild-slope (Kirby, 1984). Les détails relatifs à cette résolution sont décrits dans Rey *et al.* (2014). La comparaison a été effectuée en considérant différentes conditions initiales de déphasage de la houle. De plus, l'intensité du courant considérée lors de la résolution numérique est celle mesurée 25cm sous la surface libre au repos. Ce champ de courant, extrapolé à partir de données du courantomètre, est représenté sur la figure (III.7).



**Figure III.7** – Champ de courant  $U_0$  extrapolé à partir des données du courantomètre immergé à 25cm de profondeur. Extrait de Rey *et al.* (2014).

Dans un premier cas, la phase de la houle au niveau des batteurs est considérée nulle. Les résultats numériques ne représentent pas l'amplification observée expérimentalement. En revanche, lorsque la phase initiale de la houle est prise égale à celle représentée sur la figure (III.6), le modèle mild-slope représente mieux cette amplification. Cependant la forte décroissance de l'amplitude en aval des bosses n'est pas représentée, et ce, quelle que soit la hauteur de houle initiale (voir figure 11 dans Rey *et al.* (2014)). La figure (III.8)) montre que l'évolution de l'amplitude de la houle n'est pas non plus correctement représentée en considérant le champ de courant calculé en présence de la houle ( $U_1$  pour une houle de hauteur  $H_1$  et  $U_2$  pour une houle de hauteur  $H_2$ ).

## Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle



**Figure III.8** – Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle. En haut  $H = 0.1m$ . En bas  $H = 0.2m$ . Extrait de [Rey et al. \(2014\)](#).

### 4.3 Synthèse

La campagne expérimentale menée au BGO First en 2008 a permis de constater une forte croissance de l'amplitude de la houle au milieu du bassin, couplée à une forte décroissance en aval de la topographie, près de la plage d'amortissement. Cette amplification apparaît alors que la houle se propage en profondeur infinie. La houle interagit alors seulement avec le contre-courant établi. Cette amplification apparaît pour les deux hauteurs de houle générées suggérant

l'existence d'une interaction linéaire entre la houle et le courant. Ces résultats expérimentaux ont alors été comparés à des résultats issus de la résolution numérique de l'équation mild slope, connue pour représenter correctement les interactions linéaires entre la houle et le courant. Lors de la résolution nous avons tenu compte du champ de courant dans le plan horizontal, mesuré à une profondeur de  $25\text{cm}$  sous la surface libre, ainsi que plusieurs conditions initiales de phase de la houle. Il apparaît que les résultats issus de la résolution numérique ne représentent pas correctement l'évolution de l'amplitude de la houle observée lors de la campagne de mesure. On note également que la présence de la houle modifie sensiblement le courant, comme le montrent les résultats numériques (figure III.8) considérant le champ de courant seul ( $\mathbf{U}_0$ ) ou en présence de la houle ( $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$ ).

En recherchant les causes possibles de tels écarts, nous avons pu écarter certains phénomènes physiques d'interaction. En particulier, la réflexion de la houle au niveau de la plage d'amortissement ne justifie pas complètement le taux d'amplification observé. De plus l'accélération du contre-courant entre les deux bosses est trop faible pour justifier de tels différences.

Cette focalisation n'étant pas complètement décrite, il est nécessaire d'investiguer l'existence d'autres phénomènes d'interaction dans le bassin qui pourraient justifier son l'existence, voire de décrire complètement la dynamique de la houle observée dans le bassin.

## 5 Causes possibles des écarts constatés

### 5.1 Présence d'un gradient de cisaillement vertical dans le courant

Les mesures expérimentales suggèrent la présence d'un gradient dans le profil vertical du courant (voir la figure 9 dans Rey *et al.* (2014)). L'impact éventuel d'un tel gradient de cisaillement vertical dans le profil du courant sur la propagation de la houle n'a pas encore été analysé dans les précédentes études. Nous nous intéressons ici à son influence potentielle sur la dynamique de la houle.

Une première approche consiste à calculer la célérité de la houle pour un profil de courant cisailé donné. La principale difficulté réside dans le choix du profil de cisaillement qu'il conviendrait d'adopter. Cette difficulté est d'autant plus importante que les données expérimentales présentées ici n'ont ni une résolution spatiale ni une précision suffisantes pour pouvoir le déterminer précisément.

## 5.2 Sensibilité de la célérité de la houle à un gradient de cisaillement vertical

Afin de quantifier l'influence d'un gradient de cisaillement vertical du courant sur le comportement de la houle nous considérons ici que celui-ci dépend linéairement de la profondeur d'eau. Le champ de courant horizontal s'écrit dans ce cas

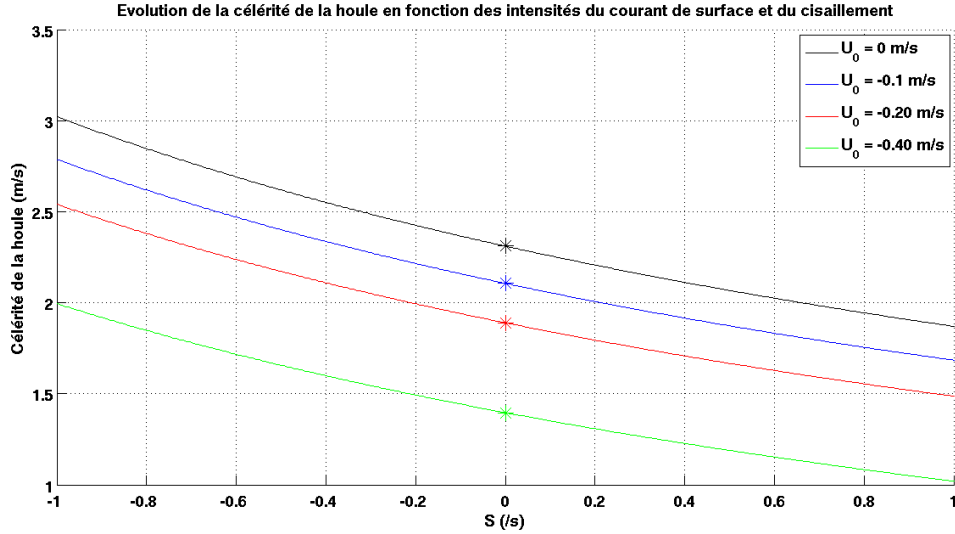
$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{S}(x, y) * z + \mathbf{U}_0(x, y) . \quad (\text{III.2})$$

$\mathbf{S}$  est le paramètre de cisaillement et  $\mathbf{U}_0 = (U_0, V_0)$  est le champ du courant au niveau de la surface libre.

La relation de dispersion relative à un champ de courant unidirectionnel présentant le même profil de cisaillement a été établie par Kirby & Chen (1989). L'expression obtenue peut facilement être généralisée à un cas de propagation bidirectionnelle. La relation de dispersion s'écrit alors

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0) \left[ \omega - \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{U}_0 - \frac{\tanh(kh)}{k} \mathbf{S} \right) \right] = gk \tanh(kh) . \quad (\text{III.3})$$

En faisant varier les paramètres  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}_0$ , nous pouvons calculer à partir d'une méthode de Newton la célérité de la houle en présence d'un tel courant. L'abaque ci-après illustre alors leur influence dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, lorsque leur variation respective sont du même ordre de grandeur. Les calculs sont effectués pour une profondeur d'eau  $h = 3m$ .



**Figure III.9** – Influence du cisaillement sur la célérité de la houle pour différentes valeurs du courant de surface. (-) : Célérité de la houle avec un courant de la forme  $U(z) = Sz + U_0$ . (\*) : Célérité de la houle avec un courant non cisailé pour les différentes valeurs du courant de surface

Lorsque le cisaillement est nul ( $S = 0$ ) une variation  $\Delta U_0 = 0.4m.s^{-1}$  entraîne une variation de célérité  $\Delta c = 0.9m.s^{-1}$ . D'autre part, si le courant de surface est nul ( $U_0 = 0$ ), une variation  $\Delta S = 0.4s^{-1}$  entraîne une variation de célérité  $\Delta c = 0.2m.s^{-1}$ . Pour un même ordre de grandeur de variation dans les paramètres  $U_0$  et  $S$ , la différence de célérité induite par une variation du courant de surface est deux fois plus grande que celle induite par une variation du paramètre  $S$ . Cependant l'ordre de grandeur de la variation de célérité induite montre que l'influence du cisaillement a une influence non négligeable sur la célérité de la houle.

### 5.3 Ordre de grandeur de l'influence d'un gradient vertical de cisaillement et d'un gradient horizontal

Les résultats précédents invitent à penser qu'un éventuel gradient de cisaillement vertical dans le profil de courant pourrait influencer sur la propagation de la houle. Afin de compléter cette première étude nous avons calculé la célérité qu'aurait la houle dans le BGO First lorsqu'elle se propage avec un courant cisailé verticalement (Charland *et al.*, 2012).

Nous poursuivons l'analyse précédente en tenant compte des mesures du champ de courant horizontal mesuré lors de la campagne expérimentale (voir figure (III.7)). La vitesse minimale mesurée est  $U_0 = 0.15m.s^{-1}$  et la vitesse maximale est  $U_0 = 0.30m.s^{-1}$ . Le gradient de célérité est alors  $\Delta c = 0.3m.s^{-1}$  entre les régions du bassin où le courant est le plus rapide et celles où il est le plus lent. D'autre part, si nous considérons une vitesse moyenne du courant

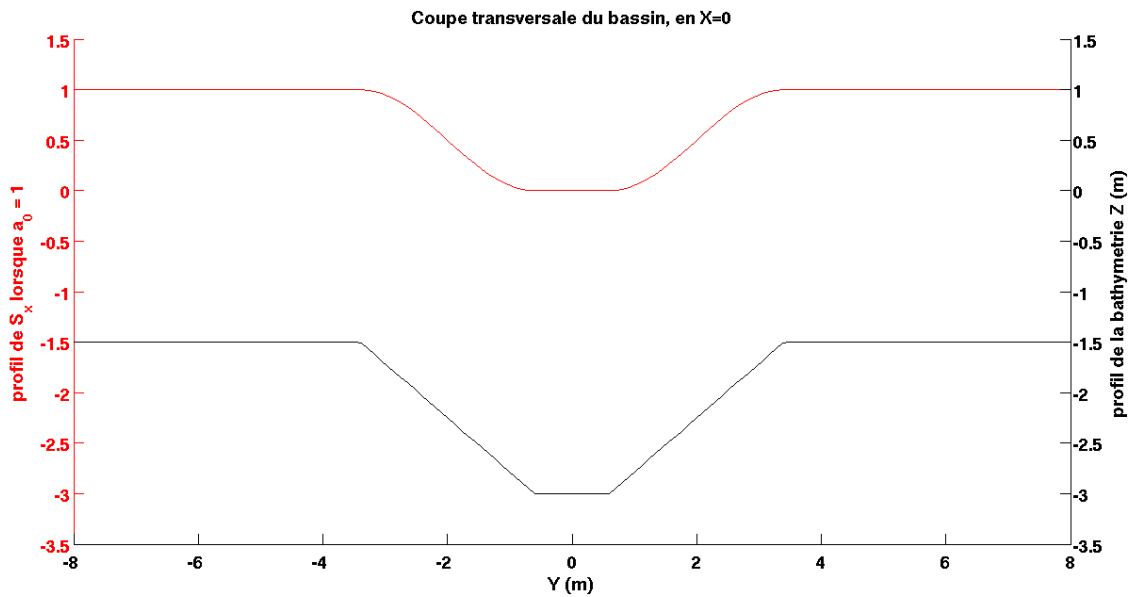
### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

horizontal  $U = -0.25m.s^{-1}$ , une fluctuation  $\Delta S = 0.15s^{-1}$ , du même ordre de grandeur que le gradient de cisaillement horizontal, entraîne un gradient de célérité  $\Delta c = 0.1m.s^{-1}$ . Le gradient de cisaillement horizontal du courant entraîne une différence de célérité comparable à celle induite par un gradient horizontal de courant.

L'analyse de champ de courant horizontal présenté sur la figure (III.7) montre que le courant est accéléré au dessus de la topographie immergée. Ce constat invite à supposer l'existence d'un gradient de cisaillement vertical au niveau de ces variations topographiques. Nous considérons qu'un tel gradient n'existe que sur la composante longitudinale du vecteur courant. Sous ces hypothèses, le champs de courant que nous considérons s'écrit

$$\mathbf{U}(\mathbf{z}) = \begin{cases} S_x z + U_0 \\ V_0 \end{cases} = \begin{cases} a_0 \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi h}{h_{min}} \right) \right) z + U_0 \\ V_0 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

où  $h_{min} = 1,5m$  est la profondeur d'eau minimale, au dessus des bosses.  $a_0$  est un paramètre de sensibilité. Un tel profil permet de considérer que le courant est cisailé sur la colonne d'eau au dessus des bosses. Ailleurs le courant est supposé constant sur la colonne d'eau. La coupe transversale du bassin, en  $X = 0$ , ainsi que le profil de courant à ce niveau est représenté sur la figure (III.10).



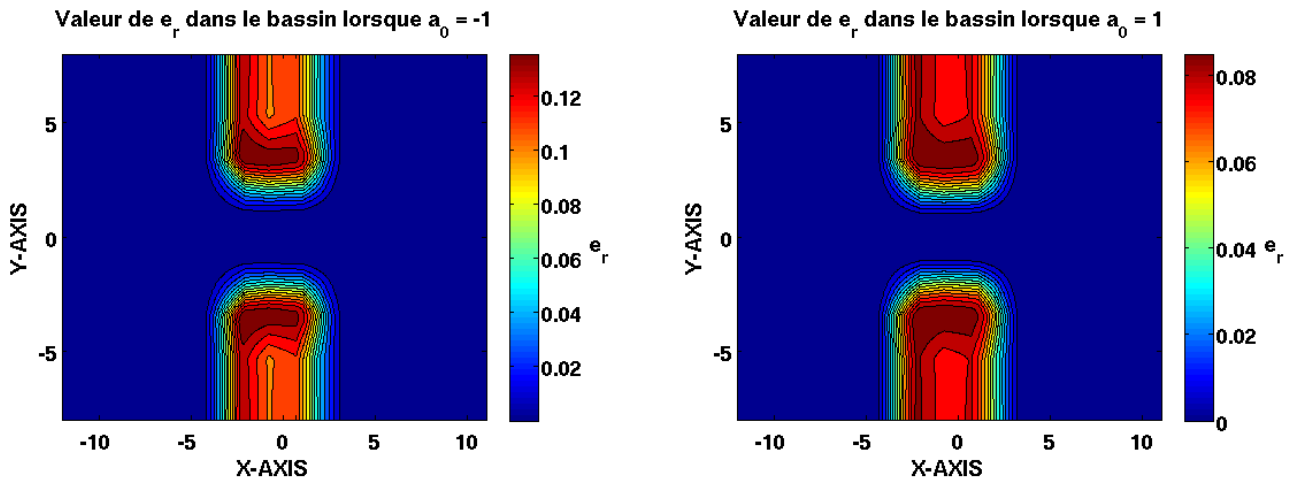
**Figure III.10** – En noir : Profil de la topographie sur une coupe transversale du bassin, en  $X = 0$ . En rouge : Profil de  $S_x$ , le long de la coupe transversale, pour une valeur du paramètre de sensibilité  $a_0 = 1$ .

### III.5 Causes possibles des écarts constatés

$U_0$  et  $V_0$  sont les intensités longitudinale et transverse du courant de surface. Nous définissons leurs valeurs telles que le champ de courant  $\mathbf{U}$  soit égal, à une profondeur de  $25\text{cm}$  sous la surface libre, au champ de courant mesuré. L'objectif est de quantifier l'écart relatif entre la célérité qu'aurait la houle si elle se propageait en présence du champ de courant (III.4) et celle qu'elle aurait si elle se propageait en présence d'un courant constant sur la verticale, dont l'intensité serait, dans le plan horizontal, celle mesurée à la profondeur de  $25\text{cm}$  sous la surface libre. Cet écart relatif s'écrit

$$e_r(x, y) = \frac{c_{cisaille}(x, y) - c_{uniforme}(x, y)}{c_{uniforme}(x, y)}. \quad (\text{III.5})$$

Pour des valeurs du paramètre de cisaillement  $a_0 = -1$  et  $a_0 = 1$  nous obtenons les graphes suivants



**Figure III.11** – Valeur de l'écart relatif  $e_r$  dans le bassin lorsque  $a_0 = -1$  (à gauche) et lorsque  $a_0 = 1$  (à droite)

Cet écart relatif atteint 8% au niveau des bosses dans le cas où  $a_0 = 1$ , et 14% lorsque  $a_0 = -1$ . Ces valeurs sont à comparer à l'écart relatif de 3,5% entre la célérité de la houle au dessus des bosses et celle au milieu du bassin, calculées pour un courant constant sur la verticale, à partir des mesures expérimentales effectuées à la profondeur de  $25\text{cm}$  sous la surface libre. Ce résultat montre que le gradient de cisaillement vertical a une influence non négligeable sur la célérité de la houle par rapport à un gradient de cisaillement horizontal. L'existence de ce gradient de cisaillement vertical dans le profil de courant joue donc peut-être un rôle sur la focalisation observée lors des campagnes de mesure de 2007 et 2008.



## 6 Discussion sur la notion de vitesse de groupe

### 6.1 Etablissement de la vitesse de groupe

Dans un cas simple de propagation de la houle dans un milieu homogène, la vitesse de groupe de la houle est usuellement décrite comme la vitesse de déplacement de l'énergie de la houle. Afin de généraliser ce concept à notre cas d'écoulement, nous reprenons le raisonnement de [Whitham \(1974\)](#) qui propose une démonstration de son expression lorsque le milieu est invariant.

Nous reprenons ici les étapes de son raisonnement en l'adaptant à un cas de propagation en deux dimensions.

Lorsqu'une fonction de phase  $\theta(\mathbf{x}, t)$  de la houle existe, le vecteur d'onde et la pulsation de la houle peuvent être définis localement à partir des variations spatiales et temporelle de celle-ci. Nous avons les relations suivantes

$$k_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad k_y = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{et} \quad \omega = - \frac{\partial \theta}{\partial t} . \quad (\text{III.6})$$

Nous obtenons alors, en combinant les équations précédentes dans le but d'éliminer  $\theta$ , les équations

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_y}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 . \quad (\text{III.7})$$

La relation de dispersion de la houle permet d'établir une relation entre  $\omega$  et  $k$ . Afin d'exprimer une telle relation nous notons  $W$  la fonction telle que  $\omega = W(k)$ . Cette fonction nous permet d'écrire les variations spatiales de  $\omega$  sous la forme

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial k_x} \frac{\partial k_x}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial k_y} \frac{\partial k_y}{\partial y} \quad (\text{III.8})$$

Avec ces relations supplémentaires, le système [\(III.7\)](#) se réécrit

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k_x} \frac{\partial k_x}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_y}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k_y} \frac{\partial k_y}{\partial y} = 0 . \quad (\text{III.9})$$

Formulée ainsi, la quantité  $\partial W / \partial k_i$ , avec  $i = (x, y)$ , n'est autre que la vitesse de propagation du nombre d'onde  $k_i$  dans la direction  $i$ . C'est cette quantité qui est usuellement nommée vitesse de groupe.

Dans la suite du texte nous notons le vecteur vitesse de groupe  $\mathcal{C}_g = (\partial W / \partial k_x, \partial W / \partial k_y)$ . Cette quantité se réécrit  $\mathcal{C}_g = (\partial \omega / \partial k_x, \partial \omega / \partial k_y)$  ou encore  $\mathcal{C}_g = (\partial \omega / \partial k) \mathbf{k} / k$ .

Nous pouvons ainsi formuler le vecteur vitesse de groupe dans les différents cas de propagation de la houle, avec et sans courant.

## 6.2 Vitesse de groupe de la houle dans un milieu sans courant

Si la houle se propage dans un milieu homogène, dont l'écoulement moyen est nul, c'est-à-dire un milieu en l'absence de courant, la relation de dispersion s'écrit  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ . La vitesse de groupe s'écrit

$$\mathcal{C}_g = \frac{1}{2}C \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (\text{III.10})$$

Dans ce cas,

$$\mathcal{C}_g = \mathbf{C}_g, \quad (\text{III.11})$$

où  $\mathbf{C}_g$  est définie dans le chapitre I (I.21).

## 6.3 Vitesse de groupe de la houle dans un milieu avec un courant uniforme sur la colonne d'eau

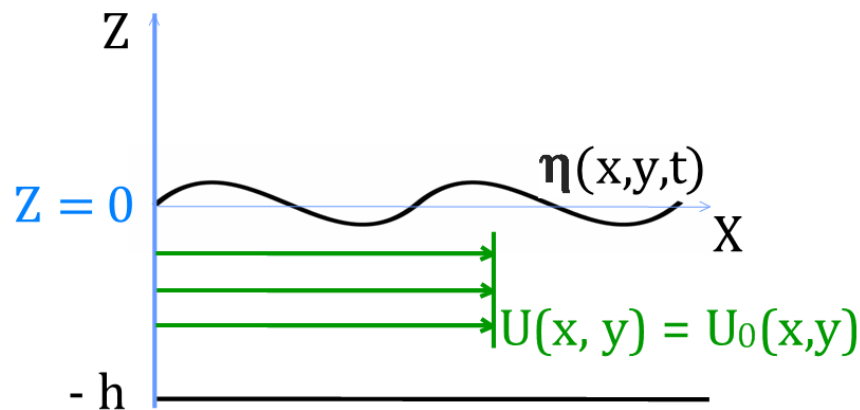


Figure III.12 – Profil du courant  $U(x, y) = U_0(x, y)$ .

### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

Si la houle se propage en présence d'un champ de courant  $\mathbf{U}_0$  constant sur la verticale, la relation de dispersion se réécrit  $(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)^2 = gk \tanh(kh)$ . Dans ce cas

$$\mathcal{C}_g = \frac{1}{2}C \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{U}_0, \quad (\text{III.12})$$

puis

$$\mathcal{C}_g = \mathbf{C}_g + \mathbf{U}_0. \quad (\text{III.13})$$

La vitesse de groupe s'interprète ici comme la somme entre le champ de courant et la vitesse de groupe que la houle aurait si elle se propageait sans courant.

#### 6.4 Discussion sur une vitesse de groupe de la houle dans un milieu avec un courant cisailé linéairement sur la colonne d'eau

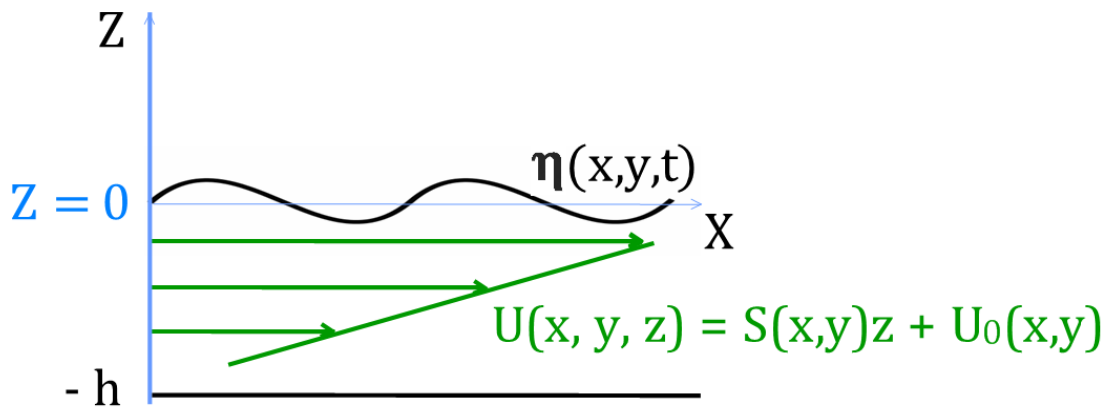


Figure III.13 – Profil du courant  $U(x, y) = S(x, y)z + U_0(x, y)$ .

La relation de dispersion de dispersion valable pour un tel écoulement s'écrivant (relation (III.3))

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0) \left[ \omega - \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{U}_0 - \frac{\tanh(kh)}{k} \mathbf{S} \right) \right] = gk \tanh(kh). \quad (\text{III.14})$$

### III.6 Discussion sur la notion de vitesse de groupe

---

nous pouvons à la lecture de cette expression faire apparaître deux pulsations de la houle caractéristiques de l'écoulement. Ainsi nous adoptons les notations suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}(d_c) \\ \sigma_1 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}(2d_c) \\ \sigma_2 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_2 \end{array} \right. . \quad (\text{III.15})$$

où  $d_c = \tanh(kh)/2k$  est la distance caractéristique introduite dans le chapitre (II). Sous ces notations il est clair que la relation de dispersion (III.3) se réécrit

$$\sigma_0 \sigma_2 = gk \tanh(kh) . \quad (\text{III.16})$$

En dérivant cette expression par rapport à  $k$ , nous obtenons directement

$$\mathcal{C}_g = \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} \mathbf{U}_0 + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \mathbf{U}_2 + \frac{\sigma}{\sigma_1} \mathbf{C}_g + \frac{\sigma_0 k}{2\sigma_1} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial k} . \quad (\text{III.17})$$

Cette expression est identique à celle proposée par [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) écrite, pour une direction de propagation de la houle, sous la forme suivante un peu différente

$$\mathcal{C}_g = U_0 + \frac{g(1+G) - S c_{rs} G}{2g - S c_{rs}} c_{rs} \quad (\text{III.18})$$

où  $G = 2kh/\sinh(2kh)$  et  $c_{rs} = (\omega - kU_0)/k$ . Le détail des calculs montrant la similitude des deux résultats est fourni en annexe.

Afin d'interpréter plus simplement les différents termes de l'expression précédente nous obtenons, après réécriture

$$\mathcal{C}_g = \frac{\sigma}{\sigma_1} \left[ \mathbf{C}_g + \frac{1}{2\sigma} (\sigma_2 \mathbf{U}_0 + \sigma_0 \mathbf{U}_2) \right] + \frac{\sigma_0 k}{2\sigma_1} \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial k} . \quad (\text{III.19})$$

Le terme entre crochet peut être interprété comme la somme entre la vitesse de groupe de la houle sans courant et d'une moyenne entre les vitesses et fréquences remarquables de la houle

### Chapitre III. Quantification de l'influence de gradients de cisaillement horizontaux et verticaux dans le profil de courant sur la propagation de la houle

---

$U_0$ ,  $U_2$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$ .

En revanche, l'interprétation physique du dernier terme du membre de droite n'est pas aisée.  $U_2$  est une vitesse caractéristique faisant intervenir le champ de cisaillement  $\mathbf{S}$  du courant et le nombre d'onde  $k$  de la houle. Ainsi, deux composantes spectrales différentes de la houle n'interagissent pas de la même manière avec le courant cisailé et en perçoivent une intensité différente. L'existence de ce terme remet en question l'expression d'une vitesse de groupe de la houle issue du calcul littéral de " $\partial\omega/\partial k$ ". En effet, la notion de vitesse de groupe est associée à la propagation d'un groupe d'onde dans un milieu homogène. Le fait que le courant soit cisailé verticalement fait que chaque composante spectrale de la houle ne perçoit pas le même courant, ce qui contredit cette notion.

## 7 Synthèse et stratégie

Cette première analyse de sensibilité a montré l'influence non négligeable d'un gradient de cisaillement vertical du courant tant sur la célérité de la houle que sur sa vitesse de groupe et la définition de cette dernière. L'existence d'un tel gradient de cisaillement dans le champ de courant généré lors de la campagne expérimentale pourrait contribuer à expliquer les phénomènes physiques observés. Cependant cette première étude numérique ne permet pas de prédire l'évolution de la phase de la houle lors de sa propagation. D'autre part le profil de cisaillement considéré ici est arbitraire bien qu'il nous ait permis de mettre en évidence son influence sur la dynamique de la houle.

Dans le but de modéliser mathématiquement les processus d'interaction observés, nous développons dans les chapitres IV et V un modèle de propagation de houle permettant de représenter dans la théorie linéaire les interactions entre la houle et un champ de courant cisailé linéairement sur la colonne d'eau, de forme  $\mathbf{U}(z) = \mathbf{S}z + \mathbf{U}_0$ .

En parallèle, une nouvelle campagne expérimentale visant à mesurer précisément le champ de courant tant dans le plan horizontal que vertical a été réalisée. Les chapitres VI et VII décrivent la campagne de mesure, les méthodes instrumentales et les résultats obtenus.

---

---

# Chapitre IV

---

## Equation de propagation avec un courant inhomogène

### 1 Des approches variées

L'étude de l'influence d'un courant inhomogène sur la dynamique de la houle a été réalisée en suivant différentes approches théoriques, et différentes hypothèses sur la forme et l'intensité du courant.

Un milieu présentant une distribution variable de vorticité peut-être découpé en couches dans lesquelles la vorticité est supposée constante. Cette méthode a pour principal intérêt de permettre l'adaptation des modèles de propagation irrotationnels à des cas plus compliqués en ajoutant les effets d'une variation topographique. Les études menées par ([Belibassakis, 2007](#); [Belibassakis et al., 2011](#); [Kirby et al., 1987](#); [Ko & Strauss, 2008](#); [Smith, 1983a,b](#)) ont été réalisées suivant cette approche. Bien qu'elles permettent la résolution numérique de cas de propagation en présence de champs de courant variés mais homogènes sur la verticale, elles ne permettent pas d'analyser théoriquement les interactions entre la houle et le courant.

L'interaction entre une houle irrotationnelle et un courant non colinéaire, s'écoulant dans les trois directions de l'espace a été étudiée par [Zaman & Baddour \(2011\)](#). Ils expriment à partir des équations de conservations de la masse, du moment et de la masse et de la relation de dispersion un modèle pour des écoulements en 3D.

Lorsque le courant est faiblement cisailé, [Shrira \(1993\)](#) obtient les solutions exactes de la houle grâce à un développement perturbatif à partir de l'équation de Rayleigh et des conditions de surface libre linéarisées. [Dong & Kirby \(2012\)](#) considèrent des courants plus fortement cisailés, à la fois horizontalement et verticalement. Le champ de houle est considéré lentement variable. Ils obtiennent des solutions numériques de l'équation de Rayleigh en prenant en considération un champ de courant expérimental.

## Chapitre IV. Equation de propagation avec un courant inhomogène

---

L'interaction entre un courant et une houle non colinéaires a été le sujet de plusieurs études. [McKee \(1987\)](#) étudie le cas de propagation en présence d'un courant lentement variable transverse par rapport à la direction de propagation de la houle. Ce champ de courant est noté  $\mathbf{U}(x, y) = (0, 0, W(x, y))$ . L'auteur obtient une équation de propagation, connue sous le nom de "équation mild-shear". Cette équation généralise l'équation mild-slope de [Kirby \(1984\)](#). [McKee \(1996\)](#) étend ensuite cette étude lorsque le courant varie plus rapidement devant la longueur d'onde de la houle.

Lorsque le champ de vorticité est général, [Constantin & Strauss \(2002\)](#), [Constantin & Strauss \(2004\)](#) obtiennent les solutions analytiques de houles de Stokes à un certain ordre lorsque la profondeur d'eau est constante. D'autres études théoriques ([Constantin & Varvaruca, 2011](#); [Wahlen, 2009](#)) montrent l'existence de points de stagnation pour certaines valeurs de la vorticité. [Swan & James \(2001\)](#)  tudient le cas d'une houle régulière qui se propage en présence d'un faible gradient de courant mais dont la vorticité est non négligeable et la distribution de vorticité est arbitraire. A partir d'un développement perturbatif de la houle, ils obtiennent les solutions de la fonction de courant de la houle. Ils peuvent ainsi quantifier les interactions non-linéaires entre la houle et le courant. Plus tard, [Nwogu \(2009\)](#)  tudie numériquement en profondeur finie l'influence d'une distribution arbitraire de vorticité sur la stabilité de la houle. Le modèle développé, non linéaire, permet l'étude de l'instabilité modulationnelle des houles de gravité soumises à un tel champ de vorticité.

Les études concernant spécifiquement l'évolution d'un champ de houle en présence d'un courant cisailé sur la colonne d'eau ont nécessité la formulation de différentes hypothèses pour leur résolution. L'hypothèse commune suppose que le champ de courant est stationnaire et indépendant des composantes horizontales  $x$  et  $y$ .

[Dalrymple \(1974\)](#) considère un champ de courant unidirectionnel  $U(z) = Sz + U_0$  colinéaire à la propagation de la houle, de vorticité constante  $\omega_0$ . En introduisant la fonction de courant de la houle  $\psi$ , il obtient l'équation de propagation bidimensionnelle de la houle au dessus d'un fond de profondeur constante

$$\nabla^2 \psi = -\omega_0 . \tag{IV.1}$$

[Simmen \(1984\)](#); [Simmen & Saffman \(1985\)](#) considèrent le même champ de courant que [Dalrymple \(1974\)](#) mais cherchent à décrire l'évolution de la houle dans la théorie potentielle. Pour cela ils supposent que le champ de vorticité de l'écoulement total  $\mathbf{u}$  est généré uniquement par la présence du courant  $U(z)$ . Dans ce cas

$$\mathbf{u} \wedge [U(z), 0] = \mathbf{0} . \tag{IV.2}$$

Il existe ainsi un potentiel  $\Phi$  tel que  $\mathbf{u} - [U(z), 0] = \nabla\Phi$ . En superposant un tel courant à un champ de houle irrotationnel et stationnaire décrit dans la théorie potentielle, ils expriment à partir de la formulation du Lagrangien de Luke (1967), les différentes conditions aux limites vérifiées par le champ de houle. Sous ces mêmes hypothèses, la question de la conservation de l'action a été posée par Bretherton & Garrett (1969).

Afin de quantifier précisément les interactions linéaires entre la houle et un courant cisailé au dessus d'une topographie lentement variable, nous généralisons l'équation mild-slope développée par Kirby (1984) en nous inspirant de la méthode proposée par ce même auteur et par Simmen (1984). Pour cela nous devons dans un premier temps formuler un Lagrangien sous nos hypothèses d'écoulement, puis faire varier ce Lagrangien par rapport à ses variables canoniques. L'expression d'un tel Lagrangien dépend du terme de pression dont l'établissement présente une première difficulté. L'objectif de ce chapitre est donc de présenter en détail les différentes étapes de la généralisation de l'équation mild slope dans le cas d'une houle se propageant en présence d'un courant tridimensionnel, cisailé linéairement dans la direction verticale, et au dessus d'une topographie lentement variable.

## 2 Géométrie de l'écoulement

Nous considérons dans notre étude un champ de courant bidimensionnel, cisailé linéairement dans la direction verticale. L'intensité de ce champ de courant au niveau de la surface libre est non nulle. Afin de décrire cet écoulement, nous nous plaçons dans un repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , où  $\mathbf{z}$  est orienté vers le haut. La droite d'équation  $z = 0$  représente le niveau de la surface libre au repos. Le champ de courant, bidimensionnel suivant les composantes horizontales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  s'écrit

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{S}(x, y) z + \mathbf{U}_0(x, y) = \begin{cases} S_x(x, y) z + U_{0x} \\ S_y(x, y) z + U_{0y} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

La figure (IV.1) schématise cet écoulement.



$$U(x, y, z) = S(x, y)z + U_0(x, y)$$

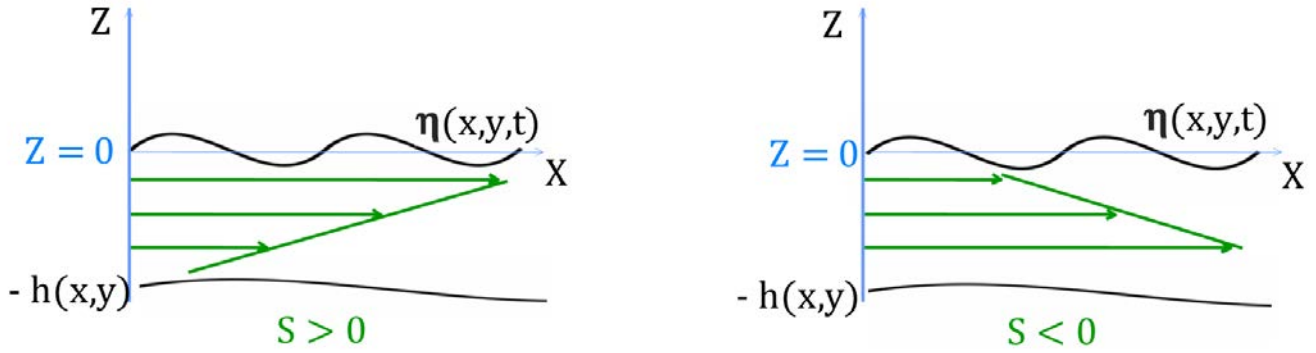


Figure IV.1 – Schématisation de l'écoulement

Le champ de vorticité de ce champ de courant s'écrit

$$\Omega = \nabla \wedge U = \begin{pmatrix} -S_y \\ S_x \\ \left( \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) z + \left( \frac{\partial U_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial U_{0x}}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Nous notons  $\mathbf{u}_{total}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$  le champ total de l'écoulement, comprenant les champs de vitesse de la houle et du courant. Le courant étant décrit ci-dessus, il nous reste à représenter le champ de houle. Pour cela, en s'inspirant de la méthode exposée par Simmen (1984), nous supposons que l'existence d'un champ de vorticité non nul est uniquement due à la présence du courant décrit précédemment. Dans ce cas

$$\nabla \wedge [\mathbf{u}_{total}(x, y, z, t) - \mathbf{U}(x, y, z)] = \mathbf{0}. \quad (\text{IV.5})$$

Ainsi il existe un potentiel  $\Phi$ , décrivant la déformation de la surface libre par la houle, tel que

$$\mathbf{u}_{total}(x, y, z, t) - \mathbf{U}(x, y, z) = \nabla \Phi \quad (\text{IV.6})$$

Pour simplifier l'écriture, le champ de vitesse horizontal est noté  $\mathbf{u} = (u, v)$  et le gradient  $\nabla$  représente maintenant le gradient horizontal. Sous ces notations le champ total de l'écoulement se réécrit

$$\mathbf{u}_{total}(x, y, z, t) = \begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{S}(x, y) * z + \mathbf{U}_0(x, y) + \nabla\Phi \\ w(x, y, z, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

### 3 Expression d'un Lagrangien de l'écoulement

L'utilisation d'une formulation variationnelle à partir de l'expression d'un Lagrangien a fait l'objet de nombreuses études pour établir les équations gouvernant la propagation d'un champ de houle, en présence d'un écoulement tant irrotationnel que rotationnel.

Dans le contexte d'un écoulement irrotationnel, [Luke \(1967\)](#) compare l'expression de l'hamiltonien, qui est l'intégrale sur la verticale de l'énergie cinétique de la houle minorée par son énergie potentielle, avec l'intégrale sur la verticale du terme de pression associé. Les deux expressions sont égales dès lors que l'équation de la conservation de la masse est vérifiée. Ainsi lorsque l'écoulement est irrotationnel, le Lagrangien de l'écoulement s'écrit

$$\mathcal{L} = \int_{-h(x,y)}^{\eta(x,y,t)} -\frac{p}{\rho} dz. \quad (\text{IV.8})$$

En calculant cette expression pour un écoulement irrotationnel de la forme  $\mathbf{u}_{total} = \nabla\Phi + \mathbf{U}_0$  où  $\mathbf{U}_0$  est le champ de courant uniforme sur la verticale, [Kirby \(1984\)](#) obtient dans l'approximation pente douce pour les variations de la topographie, la célèbre équation mild-slope

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \frac{D\varphi}{Dt} - \nabla (CC_g \nabla \varphi) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \varphi = 0. \quad (\text{IV.9})$$

Dans notre cas d'étude, l'écoulement présente un champ de vorticité non nul. La méthode de [Kirby \(1984\)](#) n'est pas directement généralisable. Historiquement, l'expression d'un Lagrangien pour un écoulement avec une vorticité non nulle a été formulée par [Bateman \(1929\)](#) grâce à l'utilisation de potentiels de Clebsch. Plus tard, [Luke \(1967\)](#)  tend la formulation proposée par [Bateman \(1929\)](#)   un écoulement avec surface libre. Ainsi, en notant  $\mathbf{u} = \nabla\phi + \alpha\nabla\beta$ , où  $\phi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des potentiels de Clebsch et où ici la notation  $\nabla$  représente le gradient

tridimensionnel, l'expression proposée par Luke (1967) est

$$\mathcal{L} = \int_z \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + gz \right) dz . \quad (\text{IV.10})$$

Peu après, Seliger & Whitham (1968) démontrent que cette expression n'est autre que l'intégrale du terme de pression sur la verticale, généralisant ainsi le résultat de Luke (1967) établi pour un écoulement irrotationnel à un courant avec une vorticité non nulle. D'autre part il montre que cette grandeur est conservative. Ce résultat a aussi été démontré plus tard par Longuet-Higgins (1983).

Cependant, si l'établissement du terme de pression pour un écoulement tridimensionnel irrotationnel est bien connu, l'obtenir dans le cadre d'un écoulement avec vorticité est bien moins évident. Récemment Stepanyants & Yakubovich (2011) ont proposé une méthode permettant de l'obtenir. Leur approche est uniquement valide lorsque l'une des trois composantes du vecteur vorticité est nulle. Nous décrivons cette méthode dans la section suivante.

## 4 Etablissement du terme de pression dans le cas d'un écoulement tridimensionnel présentant une vorticité non nulle

### 4.1 Hypothèse sur le champ de vorticité

La méthode proposée par Stepanyants & Yakubovich (2011) suppose que l'une des trois composantes du vecteur vorticité doit être nulle. Etant donné le champ de vorticité (IV.4), il est naturel de supposer que la troisième composante de ce champ est nulle. En effet si l'une des composantes horizontales était supposée nulle le courant ne présenterait pas de cisaillement dans son profil, ce qui serait contraire à notre hypothèse d'écoulement.

Suite à cette hypothèse, les champs de cisaillement et de courant à la surface vérifient les relations  $\nabla \wedge \mathbf{S} = \mathbf{0}$  et  $\nabla \wedge \mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$ . Ces deux relations permettent alors de supposer l'existence de deux potentiels, notés  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , tels que  $\mathbf{S} = \nabla \Phi_1$  et  $\mathbf{U}_0 = \nabla \Phi_2$ .

## 4.2 Intégration de l'équation d'Euler

Sous ces notations, l'équation d'Euler projetée sur le plan horizontal  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  s'écrit sous forme vectorielle

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{total}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{total} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{total} = - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\text{IV.11})$$

puis en développant,

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\nabla \Phi_1 z + \nabla \Phi_2) \cdot \nabla \Phi + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \underbrace{\nabla \Phi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}}_{\alpha} = \nabla \left( -\frac{p}{\rho} \right) + \nabla (\mathbf{F}(\mathbf{x}, z)). \quad (\text{IV.12})$$

Dans cette équation,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, z)$  est le potentiel d'une force volumique. En l'occurrence, dans notre cas d'étude,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, z) = (0, 0, -gz)$  où  $g$  est le terme de gravité. Le dernier terme du membre de gauche de l'équation précédente, noté  $\alpha$ , n'est pas intégrable directement. Il représente la principale difficulté pour exprimer le terme de pression sous nos hypothèses.

## 4.3 Réécriture

Afin de surmonter cette difficulté, rappelons l'expression de l'équation de transport de la vorticité écrite sous forme vectorielle

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u}_{total} \cdot \nabla) \Omega = (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u}_{total}. \quad (\text{IV.13})$$

Comme la troisième composante du vecteur vorticité est nulle par hypothèse, la projection de l'équation (IV.13) sur l'axe vertical s'écrit

$$\nabla \Phi_1 \wedge \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (\text{IV.14})$$

$\Phi$  étant le potentiel de la houle, ses solutions sont ondulatoires. Ainsi, en notant  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde de la houle, nous pouvons écrire que  $\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = i\mathbf{k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$ . Avec cette relation, l'égalité (IV.14) se r ecrit

$$\nabla \Phi_1 \wedge i\mathbf{k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{IV.15})$$

De l'équation (IV.15) surgit une première remarque importante sur l'interaction entre la houle et un champ de courant cisailé. En effet, cette relation traduit que la houle se propage de manière colinéaire au champ de cisaillement. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec ceux de

## Chapitre IV. Equation de propagation avec un courant inhomogène

---

Constantin (2011). De plus, sa direction de propagation est indépendante du champ de courant au niveau de la surface  $\mathbf{U}_0$ .

La projection de l'égalité (IV.15) sur l'axe vertical est, après simplification par  $i$  et  $\partial\Phi/\partial z$ ,

$$k_y \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = k_x \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}. \quad (\text{IV.16})$$

D'autre part, il est possible d'introduire, de manière similaire à un écoulement bidimensionnel, un vecteur fonction de courant. Un tel vecteur a été proposé par Toledo & Agnon (2011) et s'écrit

$$\Psi(\mathbf{x}, z, t) = (\Psi^{(1)}(\mathbf{x}, z, t), \Psi^{(2)}(\mathbf{x}, z, t)) = \int_{-h(x,y)}^z \nabla\Phi \, d\xi. \quad (\text{IV.17})$$

Dans cette définition la borne inférieure de l'intégrale  $-h$  est la valeur telle que  $h = h_0 + \eta_0$ .  $h_0$  est la distance locale entre la surface libre au repos et la topographie locale, tandis que  $\eta_0$  est la déviation de la surface engendrée par la présence du courant. Ainsi, nous pouvons établir les relations entre les dérivées partielles spatiales du vecteur courant et du potentiel de la houle, de manière similaire aux relations existantes dans le cas d'un écoulement bidimensionnel,  $\partial\Psi/\partial z = \nabla\Phi$ , et  $\nabla \cdot \Psi = -\partial\Phi/\partial z$ . Si  $\Psi^{(1)}$  (respectivement  $\Psi^{(2)}$ ) est la projection du vecteur  $\Psi$  sur l'axe  $x$  (respectivement  $y$ ), la définition (IV.17) permet d'écrire

$$\Psi^{(1)} = \int_{-h(x,y)}^z \frac{\partial\Phi}{\partial x} \, d\xi \quad \text{et} \quad \Psi^{(2)} = \int_{-h(x,y)}^z \frac{\partial\Phi}{\partial y} \, d\xi. \quad (\text{IV.18})$$

Puis, en utilisant la forme ondulatoire de la solution de  $\Phi$ , il est clair que

$$\Psi^{(1)} = ik_x \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi \quad \text{et} \quad \Psi^{(2)} = ik_y \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi. \quad (\text{IV.19})$$

En multipliant l'égalité précédente par  $\partial\Phi_1/\partial y$  et en se servant de l'égalité (IV.16), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right) \Psi^{(1)} = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right) ik_y \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi \quad (\text{IV.20})$$

puis,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \Psi^{(1)} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \Psi^{(2)}. \quad (\text{IV.21})$$

#### IV.4 Etablissement du terme de pression dans le cas d'un écoulement tridimensionnel présentant une vorticité non nulle

---

En utilisant la règle de Leibnitz et en supposant de faibles variations topographiques par rapport à la longueur d'onde de la houle, nous obtenons

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} = -k_x^2 \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} = -k_y^2 \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi . \quad (\text{IV.22})$$

En multipliant l'égalité de gauche par  $(\partial \Phi_1 / \partial y)^2$  nous pouvons écrire

$$\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} = - \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 k_x^2 \int_{-h(x,y)}^z \Phi \, d\xi \quad (\text{IV.23})$$

puis,

$$\left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} . \quad (\text{IV.24})$$

En récrivant le terme  $\alpha$  avec le vecteur courant nous obtenons

$$\alpha = - (\nabla \cdot \Psi) \nabla \Phi_1 = - \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} \right) \nabla \Phi_1 . \quad (\text{IV.25})$$

Puis,

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \left[ \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.26})$$

En utilisant l'équation (IV.24), l'équation précédente se récrit

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \left[ \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} + \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial y} \right] \quad (\text{IV.27})$$

En supposant que les variations spatiales de  $\nabla \Phi_1$  sont négligeables devant celles de la houle, l'équation IV.27 se récrit au premier ordre

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \Psi^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \right) \Psi^{(2)} \right) \right] \quad (\text{IV.28})$$

En utilisant l'équation IV.21, l'équation précédente se réécrit

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 \Psi^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Psi^{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) \Psi^{(1)} + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 \Psi^{(2)} \right) \right] \quad (\text{IV.29})$$

En supposant de nouveau que les variations spatiales de  $\nabla \Phi_1$  sont négligeables devant celles de la houle, l'équation IV.29 se réécrit au premier ordre

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Psi^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Psi^{(2)} \right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Psi^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Psi^{(2)} \right) \right], \quad (\text{IV.30})$$

puis,

$$\alpha \cdot \nabla \Phi_1 = - \nabla (\nabla \Phi_1 \cdot \Psi) \cdot \nabla \Phi_1. \quad (\text{IV.31})$$

Ainsi,

$$\alpha = - \nabla (\nabla \Phi_1 \cdot \Psi). \quad (\text{IV.32})$$

Cette réécriture du terme  $\alpha$  a été faite en supposant que seules les variations du terme de cisaillement sont faibles devant les variations de la longueur d'onde de la houle. Nous n'avons pas formulé d'hypothèses sur l'intensité du cisaillement lui-même. Ainsi, sous cette seule hypothèse, il est maintenant possible d'intégrer l'expression du gradient de pression (IV.12) dans le plan horizontal. Ce terme de pression s'écrit alors, en reprenant les notations initiales pour décrire l'intensité du courant

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{S} z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \Phi + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + gz - \mathbf{S} \cdot \Psi. \quad (\text{IV.33})$$

Il est important de rappeler ici que le terme de pression est obtenu en faisant les hypothèses de faible variation du champ de courant dans les directions horizontales. Toutefois, aucune hypothèse sur l'intensité de la vorticité n'a été formulée.

## 5 Etablissement du Lagrangien

### 5.1 Hypothèses et notations

Nous établissons à présent le lagrangien de l'écoulement décrit dans la section précédente à partir du terme de pression associé (IV.33). Nous considérons que le champ de houle est une petite perturbation de l'écoulement. L'amplitude de la houle, notée  $a$  est ainsi faible devant sa

longueur d'onde  $|\mathbf{k}|$ . Sous cette hypothèse, il est possible d'introduire le petit paramètre  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon = \mathcal{O}(|\mathbf{k}|a)$ . Dans ce contexte nous introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z, t) &= \varepsilon \phi(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \Psi(x, y, z, t) &= \varepsilon \psi(x, y, z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \eta_T(x, y, t) &= \eta_0(x, y) + \varepsilon \eta(x, y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{IV.34}$$

où  $\eta_T$  représente la déformation totale de la surface libre. Il est important de remarquer que dans ce chapitre  $\phi$  n'est pas le potentiel réduit défini dans le chapitre I.

## 5.2 Expression du Lagrangien

Le Lagrangien de l'écoulement s'écrit ainsi, à partir du terme de pression (IV.33),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, \eta) = \int_{-h(x,y)}^{\varepsilon\eta(x,y,t)} \left\{ \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \varepsilon (\mathbf{S}z + \mathbf{U}_0) \cdot \nabla \phi \right. \\ \left. - \varepsilon \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\psi} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + gz \right\} dz + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{IV.35}$$

Si nous cherchons des solutions ondulatoires de la houle sous la forme  $\phi(\mathbf{x}, z, t) = f(z)\varphi(\mathbf{x}, t)$  avec  $f(z) = \cosh(k(z+h))/\cosh(kh)$  (voir Kirby (1984)) et si nous considérons seulement les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  qui décrivent la perturbation de la surface libre due à la propagation du champ de houle en présence du courant et au dessus de la topographie lentement variable, l'équation (IV.35) se réécrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\eta, \varphi, \mathcal{O}(\varepsilon^2)) &= \eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \frac{\eta^2}{2} + \mathbf{U}_0 \eta \cdot \nabla \varphi \\ &- \mathbf{S} \eta \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \varepsilon \eta) + \frac{CC_g}{2g} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{2g} \varphi^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_{-h(x,y)}^0 \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 dz \right) (\nabla h)^2 \varphi^2 + \left( \int_{-h(x,y)}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \right) \nabla h \cdot \varphi \nabla \varphi.\end{aligned}\tag{IV.36}$$



## Chapitre IV. Equation de propagation avec un courant inhomogène

---

Dans cette équation nous avons adopté les notations  $C = \sigma/k$  et  $C_g = \partial\sigma/\partial k$ , avec  $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$ .

### 5.3 Variations du Lagrangien

Le Lagrangien  $\mathcal{L}$  étant une grandeur conservative de l'écoulement, le principe variationnel associé s'écrit, en fonction des variables canoniques de  $\mathcal{L}$ , sous la forme

$$\iint_{(x,y,t)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi dt d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{(x,y,t)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta dt d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{IV.37})$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_t \int_x \frac{\partial \mathcal{L}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi} \delta \varphi dt d\mathbf{x} &= \int_t \int_x \left\{ \eta \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \eta \cdot \nabla \delta \varphi + \frac{CC_g}{g} \nabla \varphi \cdot \nabla (\delta \varphi) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \varphi \delta \varphi + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{-h}^0 \left( \frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 dz \right) (\nabla h)^2 \varphi \delta \varphi + \left( \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \right) \nabla h \cdot \nabla \varphi \delta \varphi + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\left( \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \right) \nabla h \cdot \nabla (\delta \varphi) \varphi}_{\text{Terme (1)}} \right\} dt d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Le terme (1) peut se réécrire

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_{\mathbf{x}} \left( \int_{-h}^0 \frac{\partial f}{\partial h} dz \right) \nabla h \cdot \nabla (\delta\varphi) \varphi dt d\mathbf{x} = \\
 & \underbrace{\int_t \int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot \left[ \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \nabla h \delta\varphi \varphi \right] d\mathbf{x} dt}_{=0} - \int_t \int_{\mathbf{x}} \nabla \cdot \left[ \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \nabla h \varphi \right] \delta\varphi dt d\mathbf{x} = \\
 & - \int_t \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial h} \left[ \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \nabla h \varphi \right] \cdot \nabla h \delta\varphi dt d\mathbf{x} = \\
 & - \int_t \int_{\mathbf{x}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial h} \left[ \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \right]}_{\approx \vartheta(\varepsilon)} (\nabla h)^2 \varphi \delta\varphi dt d\mathbf{x} - \int_t \int_{\mathbf{x}} \left( \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \right) \nabla h \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial h} \nabla h}_{= \nabla \varphi} \delta\varphi dt d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{IV.39}$$

donc l'équation (IV.38) devient

$$\begin{aligned}
 & \int_t \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{L}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi} \delta\varphi dt d\mathbf{x} = \\
 & \int_t \int_{\mathbf{x}} \left\{ \eta \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \eta \cdot \nabla \delta\varphi + \frac{CC_g}{g} \nabla \varphi \cdot \nabla (\delta\varphi) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \varphi \delta\varphi \right\} dt d\mathbf{x} = \\
 & \underbrace{\int_t \int_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial (\eta \delta\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}_0 \eta \delta\varphi) + \nabla \cdot \left( \frac{CC_g}{g} \nabla \varphi \delta\varphi \right) \right\} dt d\mathbf{x}}_{=0} +
 \end{aligned} \tag{IV.40}$$

$$\int_t \int_{\mathbf{x}} \left\{ - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{U}_0 \eta) - \nabla \cdot \left( \frac{CC_g}{g} \nabla \varphi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \varphi \right\} \delta\varphi dt d\mathbf{x}$$

puis,

$$- \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{U}_0 \eta) - \nabla \cdot \left( \frac{CC_g}{g} \nabla \varphi \right) + \frac{\sigma^2 - k^2 CC_g}{g} \varphi = 0. \tag{IV.41}$$

C'est la condition cinématique linéarisée de la houle.

D'autre part,

$$\int_t \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{L}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} \delta\eta dt d\mathbf{x} = \int_t \int_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \eta + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \varphi - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) \right\} \delta\eta dt d\mathbf{x} \tag{IV.42}$$

puis,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \eta + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \varphi - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\text{IV.43})$$

et,

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \varphi - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) \right) \quad (\text{IV.44})$$

Nous pouvons exprimer  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0)$  grâce à la définition (IV.17), et en utilisant la règle de Leibnitz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0) &= \int_{-h}^0 \nabla \Phi dz + \mathcal{O}(1) \\ &= \nabla \int_{-h}^0 \Phi dz - \nabla h \Phi|_{z=-h} \\ &= \nabla \left[ \frac{1}{k} \frac{\sinh(k(\varepsilon\eta + h))}{\cosh(kh)} \varphi \right] - \frac{1}{\cosh(kh)} \varphi \nabla h \\ &= \nabla \left[ \frac{1}{k} \tanh(kh) \varphi \right] - \frac{1}{\cosh(kh)} \varphi \nabla h \\ &= \frac{1}{k} \tanh(kh) \nabla \varphi + \frac{1 - \cosh(kh)}{\cosh^2(kh)} \nabla h \varphi . \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

Le dernier terme du membre de droite met en jeu les variations topographiques supposées faibles par rapport à la longueur d'onde de la houle dans notre cas d'étude. Au regard de cette hypothèse, nous pouvons négliger ce terme. Ainsi, en notant  $\boldsymbol{\psi}_0$  le développement limité à l'ordre  $\mathcal{O}(1)$  de  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, 0)$ , nous avons

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \frac{1}{k} \tanh(kh) \nabla \varphi . \quad (\text{IV.46})$$

Ainsi

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{k} \tanh(kh) \mathbf{S} \cdot \nabla \varphi \right) . \quad (\text{IV.47})$$

Cette équation n'est autre que la condition dynamique linéarisée de la houle.

Nous introduisons la profondeur critique  $d_c = \tanh(kh)/(2k)$  et la dérivée particulière  $\tilde{D}/\tilde{D}t = \partial/\partial t + [(\mathbf{U}_0 - 2d_c \mathbf{S}) \cdot \nabla]$ .

Sous ces notations la condition dynamique linéaire de la houle se réécrit plus simplement

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\tilde{D}\varphi}{\tilde{D}t} \right) . \quad (\text{IV.48})$$

## 6 Généralisation de l'équation mild slope

Si nous introduisons la dérivée particulière  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla$  et que nous substituons la condition dynamique de la houle (IV.48) dans l'expression de la condition cinématique de la houle (IV.41), nous obtenons l'équation

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\tilde{D}\varphi}{\tilde{D}t} \right) + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \frac{\tilde{D}\varphi}{\tilde{D}t} - \nabla (CC_g \nabla \varphi) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \varphi = 0. \quad (\text{IV.49})$$

Cette équation gouverne la propagation de la houle en présence d'un courant cisailé linéairement sur la verticale, au dessus d'une topographie lentement variable devant la longueur d'onde de la houle. Il est important de rappeler qu'aucune hypothèse portant sur l'intensité du cisaillement n'a été formulée. Seules les variations de l'intensité du courant sont supposées faibles devant la grandeur caractéristique de la houle.

Il est aisé de remarquer que lorsque le champ de cisaillement est nul ( $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ), cette équation se réduit à

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \frac{D\varphi}{Dt} - \nabla (CC_g \nabla \varphi) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \varphi = 0, \quad (\text{IV.50})$$

l'équation mild slope développée par Kirby (1984).

## 7 Perspectives sur les interactions entre la houle et une topographie abrupte

### 7.1 La prise en compte des modes évanescents

L'équation mild-slope que nous avons généralisée n'est valable que pour les faibles variations topographiques, de l'ordre de  $\varepsilon$ . La propagation de la houle au dessus de topographies plus abruptes telles des récifs immergés ou encore des structures artificielles immergées telles des brise-lames ne pourra donc pas être représentée correctement par la résolution de cette équation.

Dans la théorie potentielle linéaire, la considération des modes évanescents créés au niveau des discontinuités topographiques a permis de mieux représenter la réflexion et la transmission de la houle au dessus de telles discontinuités. Dans ce sens des études ont été menées par Takano (1960), Patarapanich (1984), Rey (1992), Rey (1995). Elles ont permis de montrer le caractère ondulatoire de la quantité d'énergie réfléchi par une topographie abrupte. Ces études ont été

présentées au Chapitre 2.

Afin d'illustrer l'évolution de la propagation de la houle au dessus d'une topographie abrupte, nous étudions la sensibilité de la quantité d'énergie piégée par les modes évanescents aux paramètres géométriques d'une plaque plane immergée. Pour cela nous utilisons le modèle numérique développé par Takano (1960), Rey (1992) et Rey (1995). Les détails de cette méthode sont expliqués dans l'annexe A.

Les expériences numériques sont réalisées dans une dimension de propagation de la houle. Dans chaque expérience nous comparons le flux d'énergie incident de la houle sur une période à l'énergie piégée par les modes évanescents. Cette comparaison nous permettra de déduire un ordre de grandeur sur le temps d'établissement de ces modes.

Le flux d'énergie incident de la houle sur une période  $T$  est

$$E = \frac{\rho g a^2 \omega}{4k} \left( 1 + \frac{2kh}{\sin(2kh)} \right) T . \quad (\text{IV.51})$$

## 7.2 Cas d'une plaque plane immergée

Nous exprimons l'énergie cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  de la houle emmagasinée par les modes évanescents, incidents et réfléchis, de part et d'autre de la plaque plane (figure IV.2).

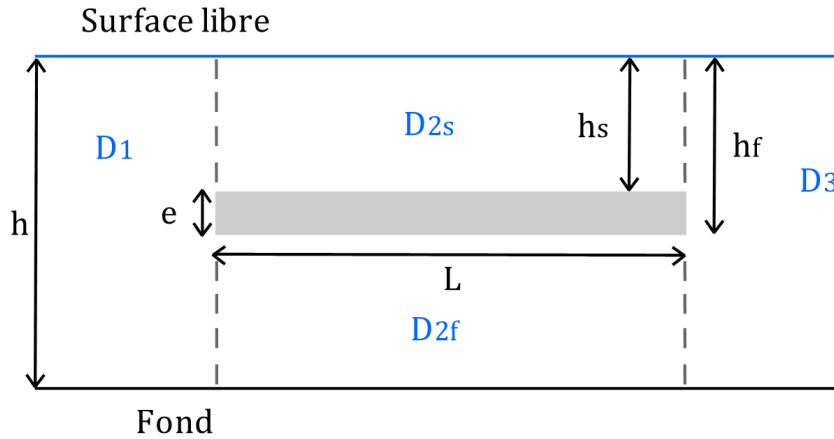


Figure IV.2 – Plaque plane

En amont et en aval de la plaque plane, l'énergie totale piégée par les modes évanescents est

$$E_c + E_p = \sum_{n=1}^p \frac{\rho g a_n^2}{8k_n} \left( 1 - \frac{2k_n h_0}{\sin(2k_n h_0)} \right) . \quad (\text{IV.52})$$

## IV.7 Perspectives sur les interactions entre la houle et une topographie abrupte

Au dessus de celle-ci elle s'exprime selon

$$E_c + E_p = \sum_{n=1}^p \frac{\rho g a_n^2}{4k_{s,n}} (1 - \exp(-2k_{s,n}L)) \left(1 - \frac{2k_{s,n}h_s}{\sin(2k_{s,n}h_s)}\right). \quad (\text{IV.53})$$

En dessous de celle-ci elle s'écrit

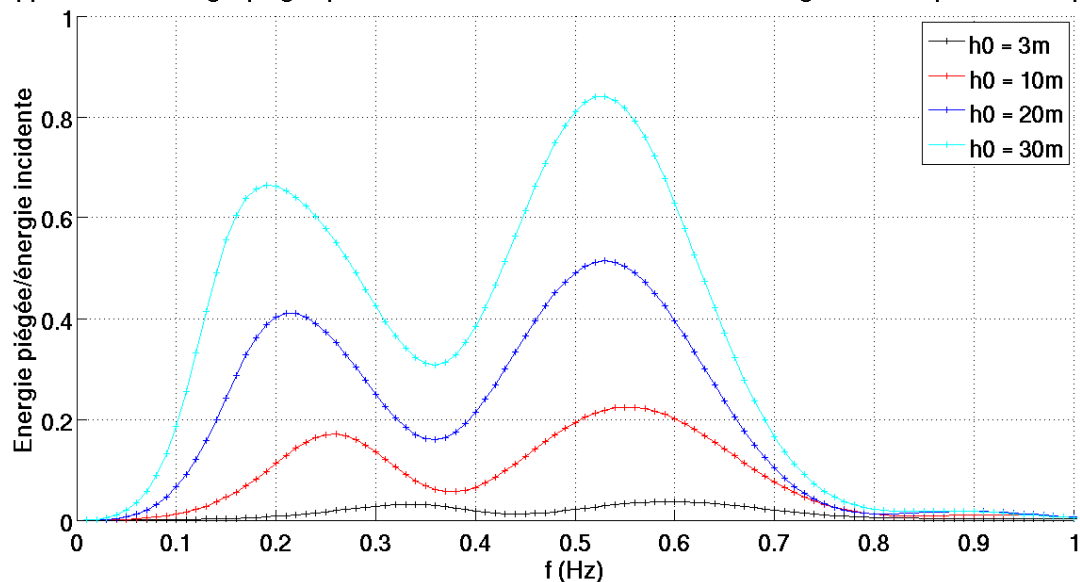
$$E_c = \sum_{n=1}^p \frac{\rho k_{ss,n}}{8} (B_{ss,n}^{-2} + B_{ss,n}^{+2}) (1 - \exp(-2k_{ss,n}L)) (h_0 - h_f) \quad (\text{IV.54})$$

Les résultats qui suivent ont été obtenus en considérant 20 modes évanescents. Les figures (IV.3) à (IV.6) ont été réalisées en faisant varier à chaque fois un paramètre géométrique de l'écoulement, les autres étant fixés. Ces résultats montrent deux phénomènes.

Les paramètres géométriques influent sur la quantité d'énergie piégée. Ainsi le taux d'énergie piégé peut être faible, inférieur à 10% ou bien atteindre des valeurs très importantes, de l'ordre de 90% pour certaines valeurs de fréquence de la houle. La variation des paramètres géométriques influe aussi sur le caractère oscillant de cette énergie piégée, notamment sur les figures (IV.5) et (IV.6), lorsque la longueur  $L$  de la plaque plane et sa profondeur d'immersion  $h_s$  varient.

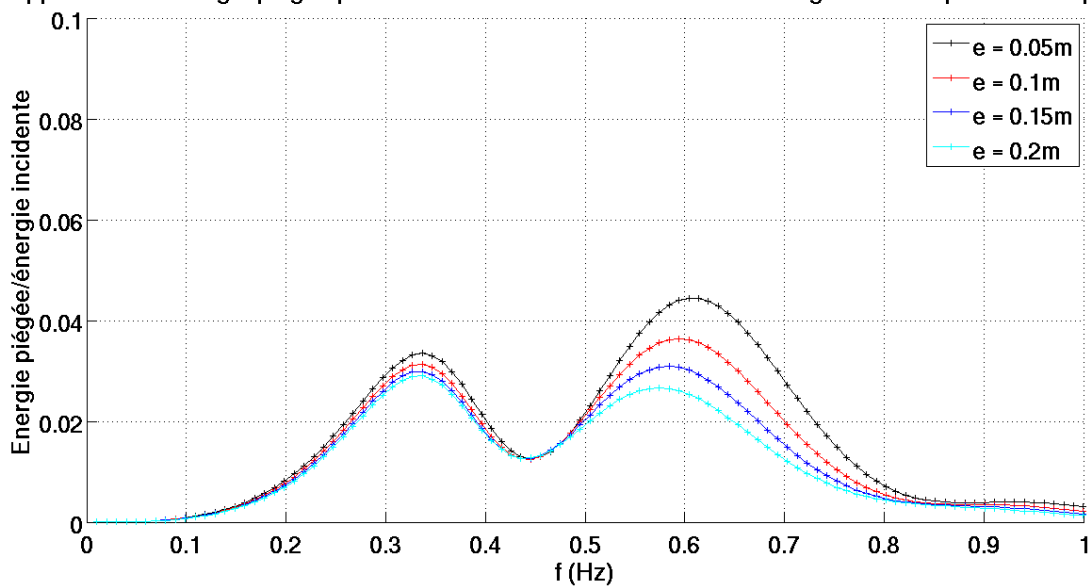
La prise en compte des modes évanescents dans le modèle développé dans ce chapitre permettra d'étendre son champ d'application à des cas de propagation sur des topographies accidentées, tant que les interactions non-linéaires entre la houle et le milieu restent faibles devant les phénomènes de réfraction, de diffraction, de réflexion sur la topographie et le courant décrits dans la théorie linéaire.

Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période.



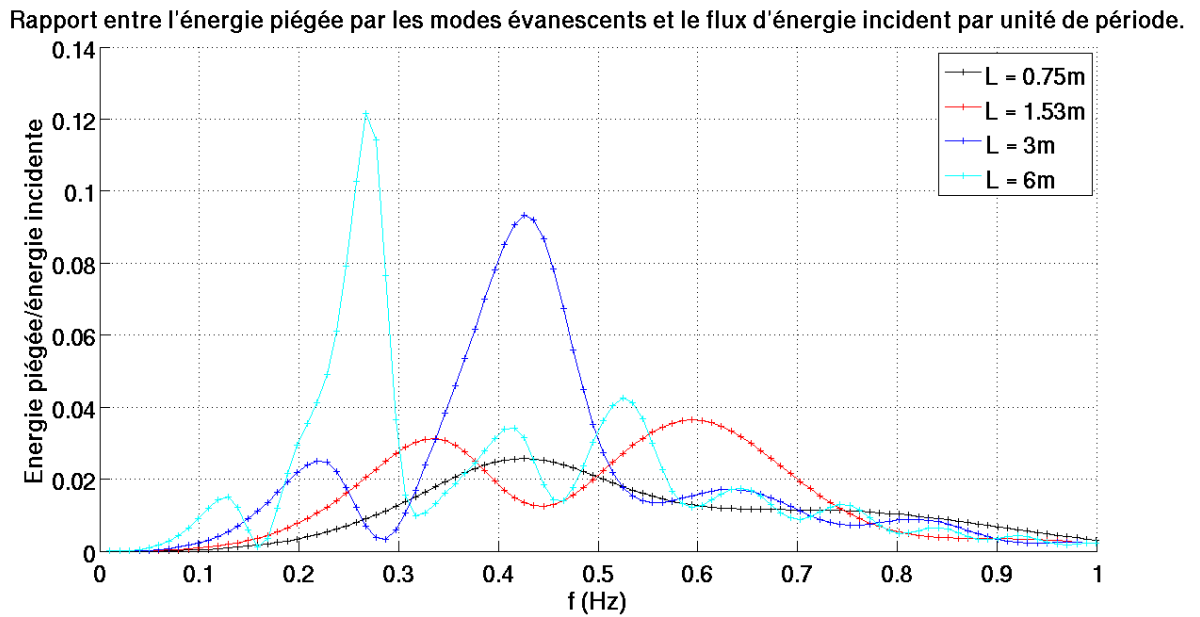
**Figure IV.3** – Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la profondeur totale  $h_0$  varie. Les dimensions de la plaque plane immergée sont  $e = 0.1m$ ,  $L = 1.53m$

Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période.

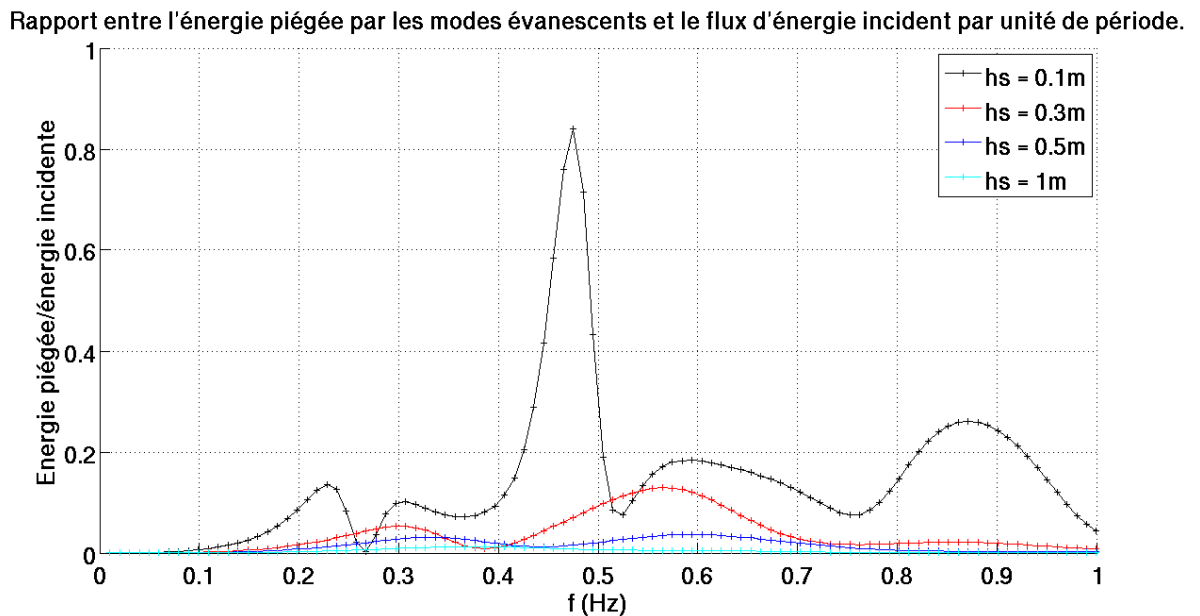


**Figure IV.4** – Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque l'épaisseur  $e$  varie. Les autres dimensions sont  $h_0 = 3m$ ,  $h_s = 0.5m$ ,  $L = 1.53m$

## IV.7 Perspectives sur les interactions entre la houle et une topographie abrupte



**Figure IV.5** – Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la longueur  $L$  varie. Les autres dimensions sont  $h_0 = 3m$ ,  $h_s = 0.5m$  et  $e = 0.1m$



**Figure IV.6** – Rapport entre l'énergie piégée par les modes évanescents et le flux d'énergie incident par unité de période lorsque la profondeur d'immersion  $h_s$  varie. Les autres dimensions sont  $h_0 = 3m$ ,  $e = 0.1m$  et  $L = 1.53m$





---

---

# Chapitre V

---

## Discussion sur la notion d'action de la houle

### 1 Introduction

Une autre équation utilisée dans les modèles opérationnels de propagation de la houle est l'équation de conservation de l'action. Cette équation peut être ré-établie rapidement à partir de l'équation mild-slope (Kirby (1984)). Sachant que le modèle développé dans le chapitre IV est une extension de l'équation mild-slope, nous cherchons dans ce chapitre à établir l'équation d'évolution de l'action de la houle à partir de notre équation mild-slope généralisée. Ce chapitre nous donne aussi l'occasion de présenter l'historique de l'établissement de la notion d'action de la houle afin de mieux cerner la signification physique de cette grandeur. L'équation d'évolution obtenue contrarie les résultats habituellement admis. Elle est l'objet d'une discussion en fin de chapitre pour présenter différents arguments expliquant les raisons de cette différence.

### 2 Rappel des notations

Afin de simplifier les expressions à venir, nous rappelons les notations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \mathbf{U}(0) & \text{et } \sigma_0 &= \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0, \\ \mathbf{U}_1 &= \mathbf{U}(-d_c) & \text{et } \sigma_1 &= \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1, \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{U}(-2d_c) & \text{et } \sigma_2 &= \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_2. \end{aligned} \tag{V.1}$$

$c_{rs}$  la vitesse de phase de la houle dans un référentiel lié au courant de surface. Ainsi,

$$c_{rs} = \frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0}{k}. \tag{V.2}$$

D'autre part,  $\sigma$  est la pulsation telle que  $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$ .

### 3 Historique du concept d'action de la houle

Historiquement, la notion d'action de la houle a été introduite par [Bretherton & Garrett \(1969\)](#) et [Whitham \(1974\)](#). Lorsque la propagation de la houle peut être décrite par un Lagrangien  $\mathcal{L}$ , la valeur moyenne  $\bar{\mathcal{L}}$  de ce Lagrangien présente des propriétés particulières. En particulier,  $\bar{\mathcal{L}}$  et  $\partial\bar{\mathcal{L}}/\partial a$  sont proportionnels à la relation de dispersion. D'autre part, en l'absence de source extérieure d'énergie et de dissipation d'énergie, ces deux mêmes auteurs montrent que  $\bar{\mathcal{L}}$  est solution de l'équation de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k_y} \right) = 0, \quad (\text{V.3})$$

Or

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial k_i} = - \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) = - \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \right) \mathcal{C}_{gi} \quad \text{avec } i = x, y. \quad (\text{V.4})$$

Dans ce cas l'équation (V.3) se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \right) + \nabla \cdot \left( \mathcal{C}_g \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \omega} \right) = 0. \quad (\text{V.5})$$

Cette équation représente la conservation de la quantité  $\partial\bar{\mathcal{L}}/\partial\omega$ , définie par [Whitham \(1974\)](#) comme un invariant adiabatique de l'écoulement.

[Bretherton & Garrett \(1969\)](#) identifient cette quantité à l'action de la houle, notée  $\mathcal{A}$ , habituellement définie comme la densité d'énergie  $\mathcal{E}$  de la houle normalisée par sa fréquence intrinsèque. Dans les cas de propagation sans courant ou en présence d'un courant uniforme sur la colonne d'eau, la fréquence intrinsèque de la houle est clairement identifiée. C'est  $\sigma$ . Dans ces cas de propagation nous pouvons donc définir l'action de la houle par l'égalité

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma}. \quad (\text{V.6})$$

Sous les hypothèses de propagation de la houle précédemment citées il est aisé de montrer que

$$\bar{\mathcal{L}}_\omega = \frac{\mathcal{E}}{\sigma}. \quad (\text{V.7})$$

### V.3 Historique du concept d'action de la houle

Ainsi l'invariant adiabatique  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  n'est autre que l'action de la houle  $\mathcal{A}$ . L'équation de conservation de l'invariant adiabatique  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  (relation (V.5)) se réécrit sous la forme d'une équation de conservation de l'action

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{E}}{\sigma} \right) + \nabla \cdot \left( \mathcal{C}_g \frac{\mathcal{E}}{\sigma} \right) = 0. \quad (\text{V.8})$$

En revanche, lorsque la houle se propage en présence d'un courant cisailé linéairement sur la verticale, il n'existe pas de fréquence intrinsèque de la houle, mais une moyenne géométrique entre les deux fréquences remarquables de la houle,  $\sigma_0$  et  $\sigma_2$ , comme le montre la relation de dispersion de la houle (III.16). La notion d'action ne peut plus être définie comme précédemment.

D'autre part, l'existence d'un champ de cisaillement dans le profil vertical du courant remet en question la conservation de l'invariant adiabatique  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$ , comme l'ont affirmé Bretherton & Garrett (1969) et Andrews & McIntyre (1978). Ces auteurs suggèrent que l'invariant adiabatique de l'écoulement  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  se conserve uniquement lorsque le cisaillement du courant reste faible devant la longueur caractéristique de la houle. Rappelons que nos hypothèses d'écoulement supposent que le champ de cisaillement vertical est d'intensité arbitraire. Nous n'avons émis aucune hypothèse sur son intensité. Nos hypothèses d'écoulement semblent donc suggérer que la quantité  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  n'est pas une grandeur conservative de l'écoulement.

Cependant Jonsson *et al.* (1978) montrent, dans un cas de propagation unidirectionnel de la houle, de fréquence stationnaire, au dessus d'une topographie lentement variable et en présence d'un courant cisailé verticalement sur la verticale de vorticité constante, que l'action de la houle se conserve. Sa démonstration, discutée dans l'étude de Charland *et al.* (2014), remet donc en question les prédictions de Bretherton & Garrett (1969) et de Andrews & McIntyre (1978).

A partir de l'expression du lagrangien établie pour une houle se propageant en présence d'un courant cisailé linéairement sur la verticale (chapitre IV) la question de l'existence d'une éventuelle relation de proportionnalité entre  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  et la densité d'énergie de la houle  $\mathcal{E}$  est donc posée.

## 4 Equation d'évolution de l'action dans notre cas d'écoulement

### 4.1 Moyenne du Lagrangien

En moyennant sur une période l'expression du Lagrangien obtenue au chapitre précédent, nous obtenons

$$\overline{\mathcal{L}} = -\frac{ga^2}{4} \left( \frac{\sigma_0 \sigma_2}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (\text{V.9})$$

En nous rappelant que la relation de dispersion s'écrit  $\sigma_0 \sigma_2 = \sigma^2$  (III.16), le terme entre parenthèses est nul. La valeur moyenne du Lagrangien est bien nulle.

### 4.2 Dérivation du Lagrangien par rapport à $a, \omega$

A partir de la relation (V.9) il est évident que

$$\overline{\mathcal{L}_a} = 0. \quad (\text{V.10})$$

D'autre part, nous pouvons aisément établir que

$$\overline{\mathcal{L}_\omega} = ga^2 \frac{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1)}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_2)}. \quad (\text{V.11})$$

### 4.3 Comparaison de $\mathcal{L}_\omega$ à la densité d'énergie de la houle $\mathcal{E}$

En regard des définitions données précédemment, il est naturel de comparer  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  à la densité d'énergie de la houle  $\mathcal{E}$ . Afin de simplifier les calculs, ceux-ci ont été menés dans un cas de propagation unidirectionnel. La densité d'énergie de la houle s'écrit comme la somme entre l'énergie potentielle moyenne de la houle et son énergie cinétique moyenne ((Jonsson *et al.*, 1978)). Elle s'écrit

$$\mathcal{E} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho g z \, dz} - \int_{-h}^0 \rho g z \, dz + \frac{\rho}{2} \overline{\int_{-h}^{\eta} (u^2 + w^2) \, dz} - \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 (S z + U_0)^2 \, dz \quad (\text{V.12})$$

Après calcul, dont les différentes étapes sont présentées en annexe, nous obtenons

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho a^2 \left[ g + \frac{S}{2} (c_{rs} + U_0) \right]. \quad (\text{V.13})$$

## V.4 Equation d'évolution de l'action dans notre cas d'écoulement

---

Dans notre cas d'étude, la densité d'énergie de la houle n'est pas identifiable simplement à  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$ .  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  n'est donc pas l'action de la houle, selon la définition donnée par Bretherton & Garrett (1969), mais une quantité que nous appellerons dans la suite la "pseudo-action" et que nous noterons  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Il est aisé de vérifier qu'en l'absence de courant ou en présence d'un courant uniforme sur la verticale que la pseudo action se réduit bien à l'action de la houle.

### 4.4 Equation d'évolution pour un courant cisailé linéairement suivant la verticale

Lorsque la houle se propage avec un courant uniforme sur la verticale, Kirby (1984) vérifie que l'équation mild-slope permet, après transformation, d'aboutir à l'équation de conservation de l'action (V.5). A partir de l'équation mild-slope généralisée nous établissons l'équation d'évolution de  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  afin de vérifier son caractère conservatif.

Dans le plan complexe, le potentiel de la houle s'écrit

$$\varphi = -igR \exp(i\theta), \quad (\text{V.14})$$

où  $R = a/\sigma_2$ , and  $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ . En introduisant ces notations dans l'équation mild-slope généralisée les parties réelle et imaginaire de l'équation sont nulles. Nous ne présentons ici que les principales étapes de calcul. En ne considérant que la partie réelle nous avons

$$\frac{D(\sigma_2 R)}{Dt} + \sigma_0 \frac{\tilde{D}R}{\tilde{D}t} + (\nabla \cdot \mathbf{U}_0) \sigma_2 R + \nabla \cdot (\mathbf{k} C C_g R) + \mathbf{k} C C_g \nabla R = 0. \quad (\text{V.15})$$

En multipliant par  $\sigma_2 R / \sigma_0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_0} R^2 \right) - \sigma_2^2 R^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} (\sigma_2 \mathbf{U}_0 + \sigma_0 \mathbf{U}_2) \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \nabla (R^2) \\ + \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \nabla \cdot (\sigma C_g R^2) + \nabla \cdot (\mathbf{U}_0 \sigma_2) \frac{\sigma_2 R^2}{\sigma_0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Après transformation l'équation précédente peut être réécrite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} \mathbf{U}_0 + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \mathbf{U}_2 + \frac{\sigma}{\sigma_1} \mathbf{C}_g \right) \tilde{\mathcal{A}} \right) = \\ \tilde{\mathcal{A}} \frac{\sigma^2}{2\sigma_1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma^2} \right) - \frac{\tilde{\mathcal{A}}}{2\sigma_1} \left( \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} \mathbf{U}_0 + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \mathbf{U}_2 + \frac{\sigma}{\sigma_1} \mathbf{C}_g \right) \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_0} \nabla \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_2} \right) \\ - \frac{\tilde{\mathcal{A}}}{2\sigma_1} \nabla (\sigma_2 \mathbf{U}_0 - \sigma_0 \mathbf{U}_2). \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

## 4.5 Discussion sur l'évolution de la pseudo-action

Cette équation d'évolution, non conservative, contrarie le résultat de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#). Ce constat invite à reconsidérer l'étude menée par ces auteurs afin de déterminer les raisons de cette différence.

Dans leur étude, [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) donnent une interprétation précise à la quantité  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$ , proche de la définition donnée par [Bretherton & Garrett \(1969\)](#) et [Whitham \(1974\)](#). Ils obtiennent pour une propagation unidirectionnelle de la houle la relation

$$\overline{\mathcal{L}_\omega} = \frac{\mathcal{E}}{\omega_{rm}}, \quad (\text{V.18})$$

où  $\mathcal{E}$  est la densité d'énergie de la houle et  $\omega_{rm}$  est la pulsation de la houle dans un référentiel lié à un courant moyenné sur la colonne d'eau, par profondeur finie. Ainsi,  $\omega_{rm} = \omega - kU_m$  avec  $U_m = U_0 - Sh/2$ . L'équation de conservation de la quantité  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  s'écrit alors, dans un milieu stationnaire

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathcal{E}}{\omega_{rm}} \mathcal{C}_g \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{V.19})$$

Cette équation de conservation fait surgir plusieurs remarques.

En revisitant les calculs menés par ces auteurs, dont les détails sont fournis en annexe, il apparaît que la comparaison entre la quantité  $\overline{\mathcal{L}_\omega}$  et la quantité  $E/\omega_{rm}$  n'est valide que dans l'approximation d'eau peu profonde. Cette remarque importante remet en cause la validité de la notion de conservation de l'action dans un cas général de propagation en profondeur finie. Ces remarques sont des arguments pouvant être à l'origine des résultats différents entre nos deux études.

D'autre part, [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) ont formulé des hypothèses supplémentaires relatives à l'évolution du milieu par rapport à notre cas d'étude. Si nous nous plaçons dans un milieu

## V.4 Equation d'évolution de l'action dans notre cas d'écoulement

---

invariant dans le temps, selon les hypothèses de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) la dérivée temporelle du membre de droite de l'équation (V.17) s'annule. Cependant les termes sous le gradient restent. Ils sont relatifs aux variations spatiales du milieu et de la houle. En reprenant l'étude très détaillée menée par [Whitham \(1974\)](#) concernant l'existence d'une quantité invariante de l'écoulement, il apparaît que la houle est supposée pouvoir varier dans le temps et l'espace mais se propage cependant dans un milieu stationnaire, figé. Cette hypothèse exclue la prise en compte de l'influence de la houle sur le courant équivalent. Cependant la relation de dispersion et la vitesse de groupe de la houle ont déjà permis de démontrer l'interaction forte et réciproque entre la houle et le milieu dans lequel elle se propage. La vitesse caractéristique  $U_2$  dépendant de la longueur d'onde de la houle, il est évident que si les paramètres de la houle évoluent dans le temps, l'intensité du courant sera lui aussi amené à évoluer. Ces arguments sont autant de raisons donnant crédit à l'existence des termes supplémentaires dans l'équation d'évolution de l'action.

Ces questions soulevées, pour le moment sans réponse définitive, sont des pistes pour des études ultérieures sur ce sujet.





## Partie C

Etude expérimentale sur la  
propagation de la houle au dessus  
d'une topographie variable en présence  
d'un courant inhomogène



*Vous arrivez devant la nature avec des théories, la nature flanque tout par terre.*

Pierre Auguste Renoir

Afin de valider les modèles développés précédemment une nouvelle campagne expérimentale a été programmée au début de l'année 2013. L'objectif est de mesurer avec une haute résolution spatio-temporelle les différents paramètres hydrodynamiques, tels les profils horizontaux et verticaux de courant qui jusqu'alors n'avaient pu être mesurés avec une précision suffisante. Pour cela notre équipe s'est dotée de 10 courantomètres, de type Vectrino, développés et manufacturés par la société Nortek. Ces courantomètres sont présentés en annexe. Dans le chapitre [VI](#) nous présentons les conditions expérimentales dans lesquelles la campagne d'essai a été menée début 2013 au BGO First. Puis, le chapitre [VII](#) présente l'ensemble des résultats obtenus et leur analyse.

---

---

# Chapitre VI

---

## Présentation des expériences effectuées au Bassin de Génie Océanique First

### 1 Introduction

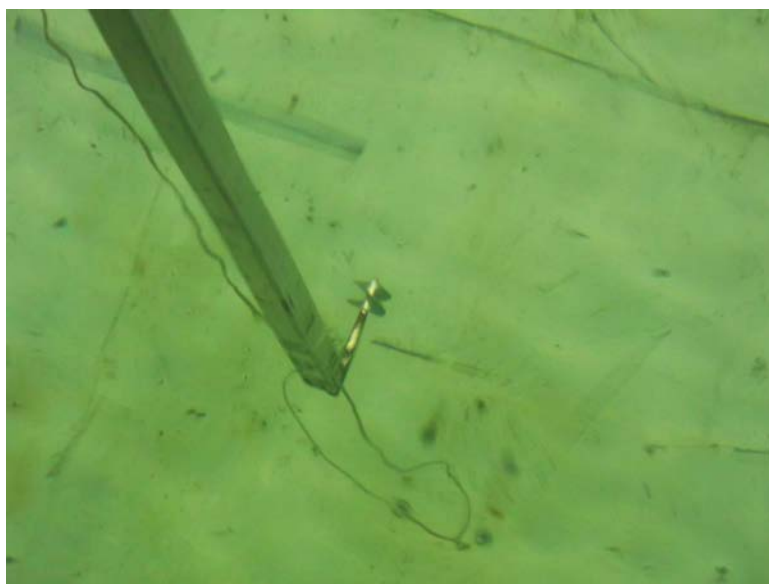
Une nouvelle campagne de mesure a été menée en janvier 2013, avec plusieurs objectifs. Le premier est la description fine du champ de courant qui s'établit en présence de la même topographie que celle de la campagne de 2008. Nous nous sommes intéressés en particulier à son profil vertical, dans le but d'analyser précisément l'influence de l'intensité du courant et de l'amplitude de l'onde sur le phénomène de focalisation observé lors de la campagne de 2008 (Rey *et al.*, 2014).

Ce chapitre se décompose en trois parties dans lesquelles nous décrivons les différents instruments de mesure utilisés et leur disposition dans le bassin. Nous décrivons ensuite les différentes conditions hydrodynamiques générées aux cours de ces séries d'expériences.

### 2 Les instruments de mesure

#### 2.1 Le moulinet à hélices

Nous disposons d'un moulinet à hélices, représenté sur la photo (VI.1), calibré par Océanide. Sa présence permet de contrôler l'intensité du courant moyen en temps réel pendant toute la durée des expériences. Sa fréquence d'échantillonnage est  $500\text{Hz}$ , même si son temps de réponse est sans doute inférieur.



**Figure VI.1** – Moulinet à hélice

## 2.2 Les sondes à houle

Nous disposons de quatorze sondes à houle résistives de précision  $10^{-3}m$ . Elles nous permettront de mesurer les paramètres locaux de la houle comme son amplitude et sa fréquence avec une fréquence d'échantillonnage de  $50Hz$ . La calibration de ces sondes est réalisée par Océanide. Elles sont réparties sur le long du chariot mobile 1 par paires, dans la région du chariot ayant des côtes  $Y$  positives (voir figure (VI.2)). Cette disposition par paire, déjà réalisée lors de la campagne de 2008 (Rey *et al.*, 2014), nous permet de déterminer l'évolution de la vitesse de phase de la houle le long de l'axe longitudinal ( $OX$ ).

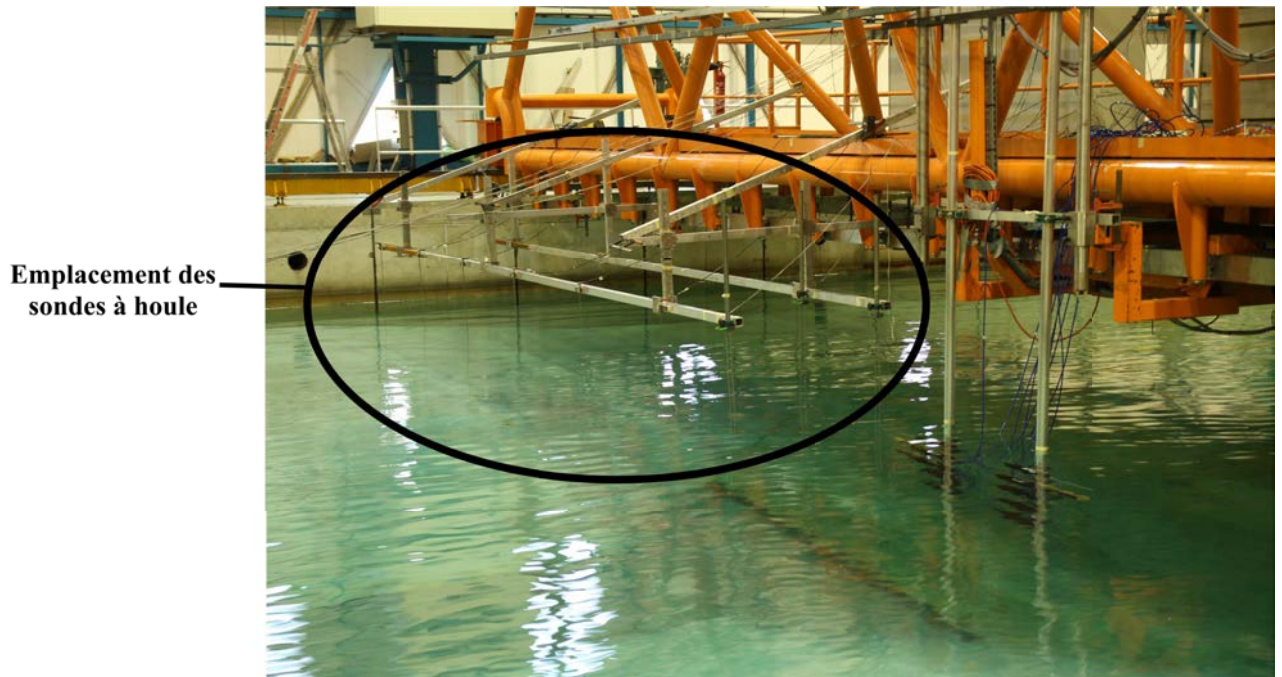
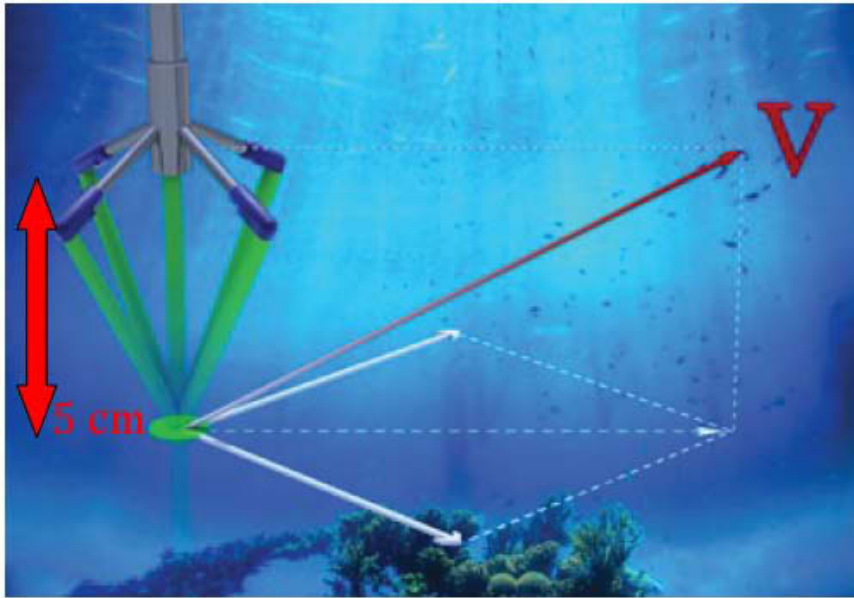


Figure VI.2 – Les sondes à houle

### 2.3 Les courantomètres acoustiques : les Vectrino

Les Vectrino, fabriqués par la société Nortek, sont des courantomètres acoustiques tridimensionnels fonctionnant sur le principe de l'effet Doppler. Ainsi, immergés, ils mesurent la vitesse des particules en suspension dans l'eau, assimilées à celle du courant, et ce, dans les trois directions de l'espace. La mesure est effectuée dans un volume variable de l'ordre de  $0.01\text{cm}^3$ . Leur taille permet une utilisation en laboratoire, dans un canal à houle, un bassin, ou bien sur site naturel.





**Figure VI.3** – Schématisation du fonctionnement des courantomètres (AS, 2010)

Une description de leurs caractéristiques géométriques et de leur utilisation est présentée en annexe.

### 3 Disposition dans le plan horizontal

Afin de simplifier la description de la disposition des instruments, nous donnons leur position par rapport au chariot mobile 1 dans sa position de repos, en  $(X, Y) = (0, 0)$ , puis nous indiquerons les positions successives occupées par ce dernier lors des séries de mesures.

#### 3.1 Le moulinet à hélices

Il est placé sous le chariot mobile 1 en  $Y = 1m$ , immergé à la profondeur  $Z = -2m$ .

#### 3.2 Les sondes à houle

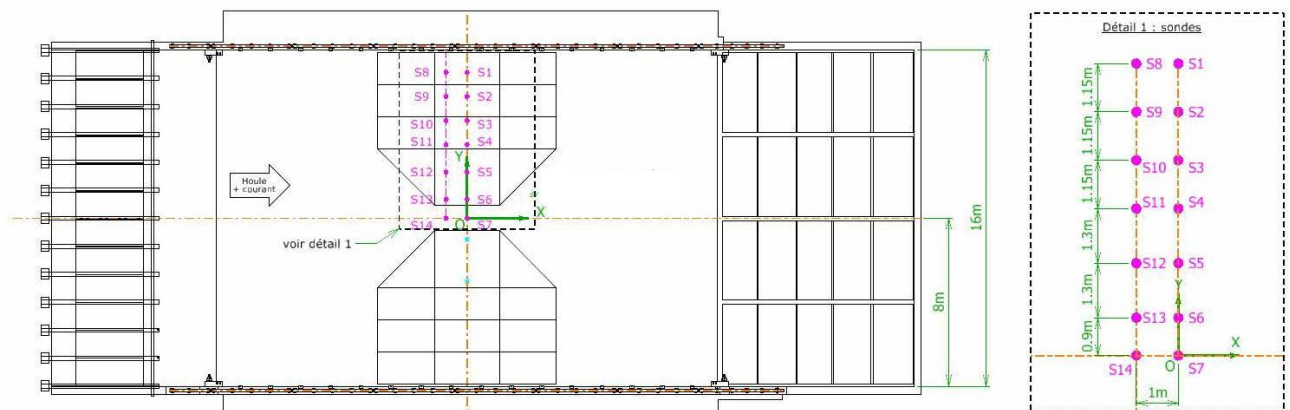
En considérant le chariot mobile 1 dans sa position au repos. Une première rangée de sondes est positionnée en  $X = 0$ , la seconde en  $X = -1m$ . Le tableau ci-après répertorie la position de chacune des sondes dans le plan horizontal du bassin.

## VI.3 Disposition dans le plan horizontal

n° sonde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X(m)	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Y(m)	6.95	5.8	4.65	3.5	2.2	0.9	0	6.95	5.8	4.65	3.5	2.2	0.9	0

**Tableau VI.1** – Disposition des sondes à houle

Cette disposition peut être visualisée sur le plan de masse ( VI.4).

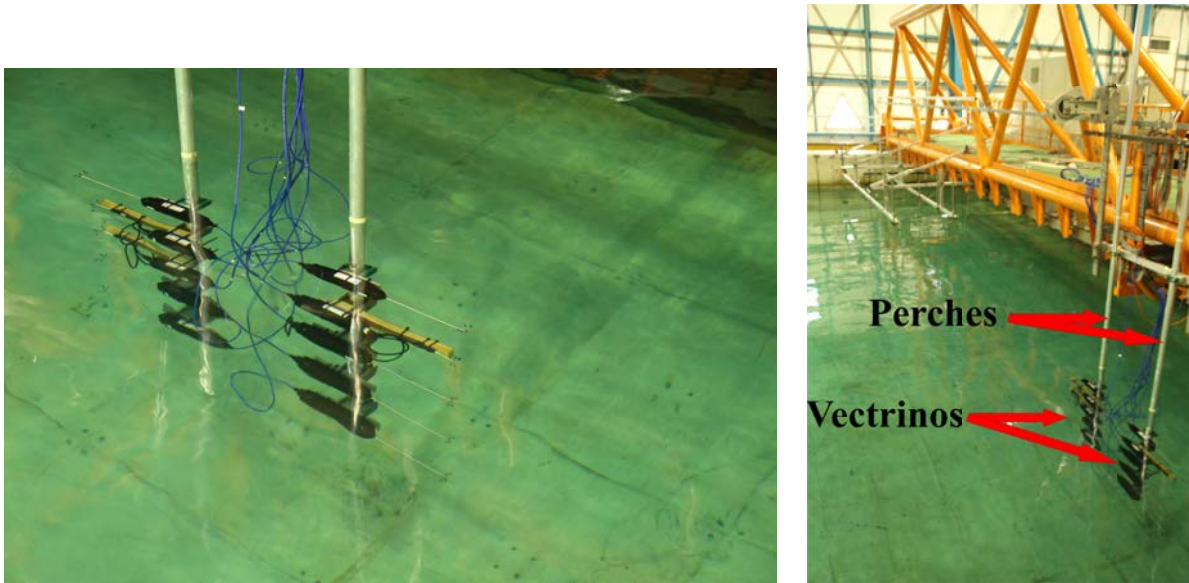


**Figure VI.4** – Disposition des sondes à houles dans le bassin (Océanide, 2013)

### 3.3 Les Vectrino

Les dix Vectrino sont installés verticalement cinq par cinq sur deux perches, nommées perche 1 et perche 2. Ces deux perches sont placées sur un chariot mobile, nommé dans la suite chariot mobile 2, lui même fixé sur le chariot mobile 1. Lorsque le chariot mobile 1 est dans sa position initiale, les deux perches se trouvent en  $X = 0$ .

Le chariot mobile 2 peut se déplacer selon l'axe  $Y$  le long du chariot 1, ce qui permet la réalisation de mesures en  $Y = \{0m, -2m, -4m, -6m\}$ . Cette installation est visible sur la photo (VI.5).



**Figure VI.5** – Installation des dix Vectrino sur les deux perches (à gauche), et installation des deux perches sur le chariot mobile selon l’axe Y (à droite)

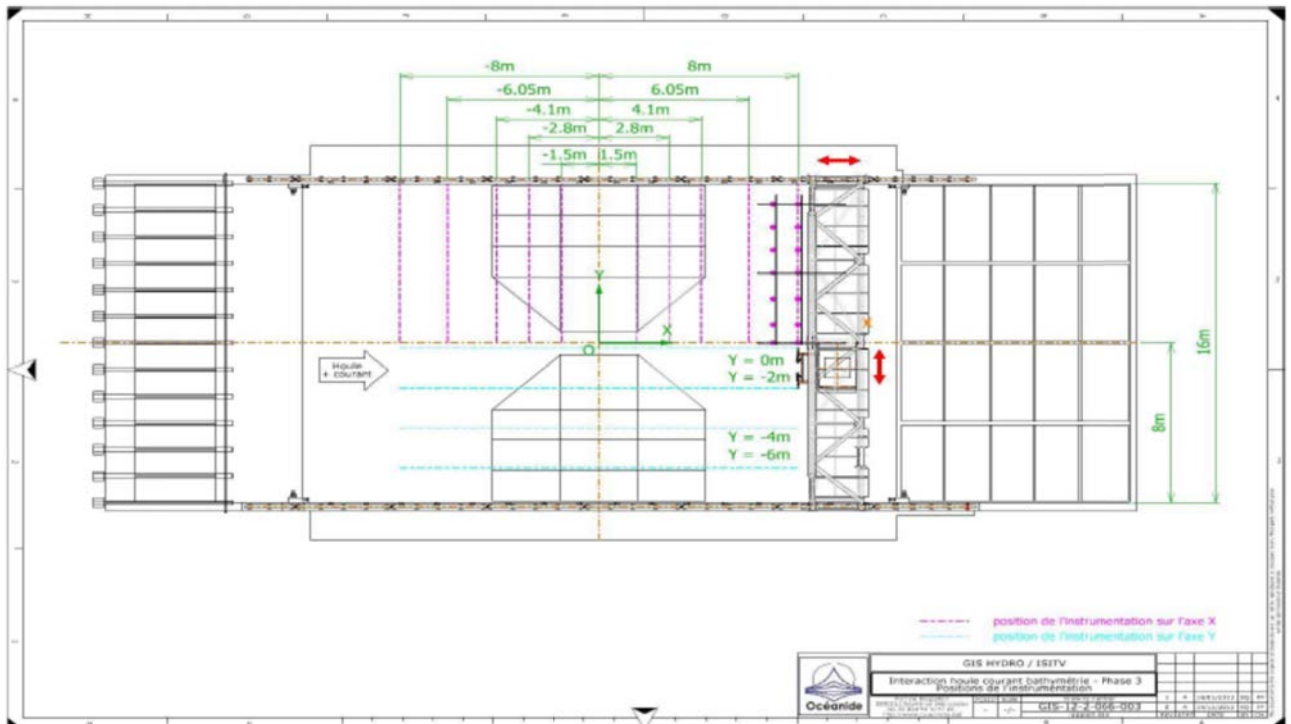
### 3.4 Positions successives du chariot 1

Le chariot mobile 1 peut se déplacer le long de l’axe longitudinal ( $OX$ ) du bassin. Sa mobilité permet de déplacer l’ensemble des instruments de mesure le long du bassin au dessus des bosses immergées et de part et d’autre de celles-ci. Les positions successives selon l’axe ( $Ox$ ) et la profondeur d’eau locale sont présentées dans le tableau (VI.2) et visibles sur le plan (VI.6).

$X(m)$	-8	-6.05	-4.1	-2.8	-1.5	0	1.5	2.8	4.1	6.05	8
$h(m)$	3			$1.5 \leq h \leq 3$				3			

**Tableau VI.2** – Lieu des mesures effectuées selon l’axe longitudinal du bassin et profondeur d’eau

Les données indiquées en bleu correspondent à des points de mesure effectués en amont ou en aval des bosses immergées. Les mesures indiquées en gris sont réalisées au dessus ou entre les deux bosses .



**Figure VI.6** – Positions successives du chariot 1 dans la direction longitudinale et dispositions des Vectrino sur l’axe transverse (Océanide, 2013)

## 4 Disposition dans le plan vertical

Les perches, supports des Vectrino, sont réglables en hauteur. Elles peuvent ainsi être ajustées pour permettre la mesure du courant sur toute la colonne d’eau.

Lorsque la profondeur d’eau est égale à trois mètres, de part et d’autre des bosses, nous mesurons l’intensité du courant aux profondeurs  $Z_s = (0.34m, 0.59m, 0.84m, 1.09m, 1.34m)$  et  $Z_p = (1.84m, 2.09m, 2.34m, 2.59m, 2.84m)$ . La profondeur d’eau étant limitée à  $1.5m$  au dessus des bosses, les mesures sont alors seulement effectuées aux profondeurs  $Z_s$ .

Près du milieu du bassin en  $Y = 0$  et  $Y = -2$ , la géométrie des bosses immergées permet tout de même la mesure le courant à des profondeurs plus importantes. Ainsi, la perche 1, placée en  $Y = 0m$ , permet la mesure du courant aux mêmes profondeurs que celles effectuées de part et d’autre des bosses, aux côtes  $Z_p$ . La perche 2, en  $Y = -2m$  a dû être légèrement remontée, en position dite "intermédiaire" afin de ne pas heurter le pan incliné de la structure. Les mesures du courant sont alors effectuées aux profondeurs  $Z_i = (1m, 1.25m, 1.5m, 1.75m, 2m)$ . La figure (VI.7) représente les différentes positions des perches selon l’axe vertical.

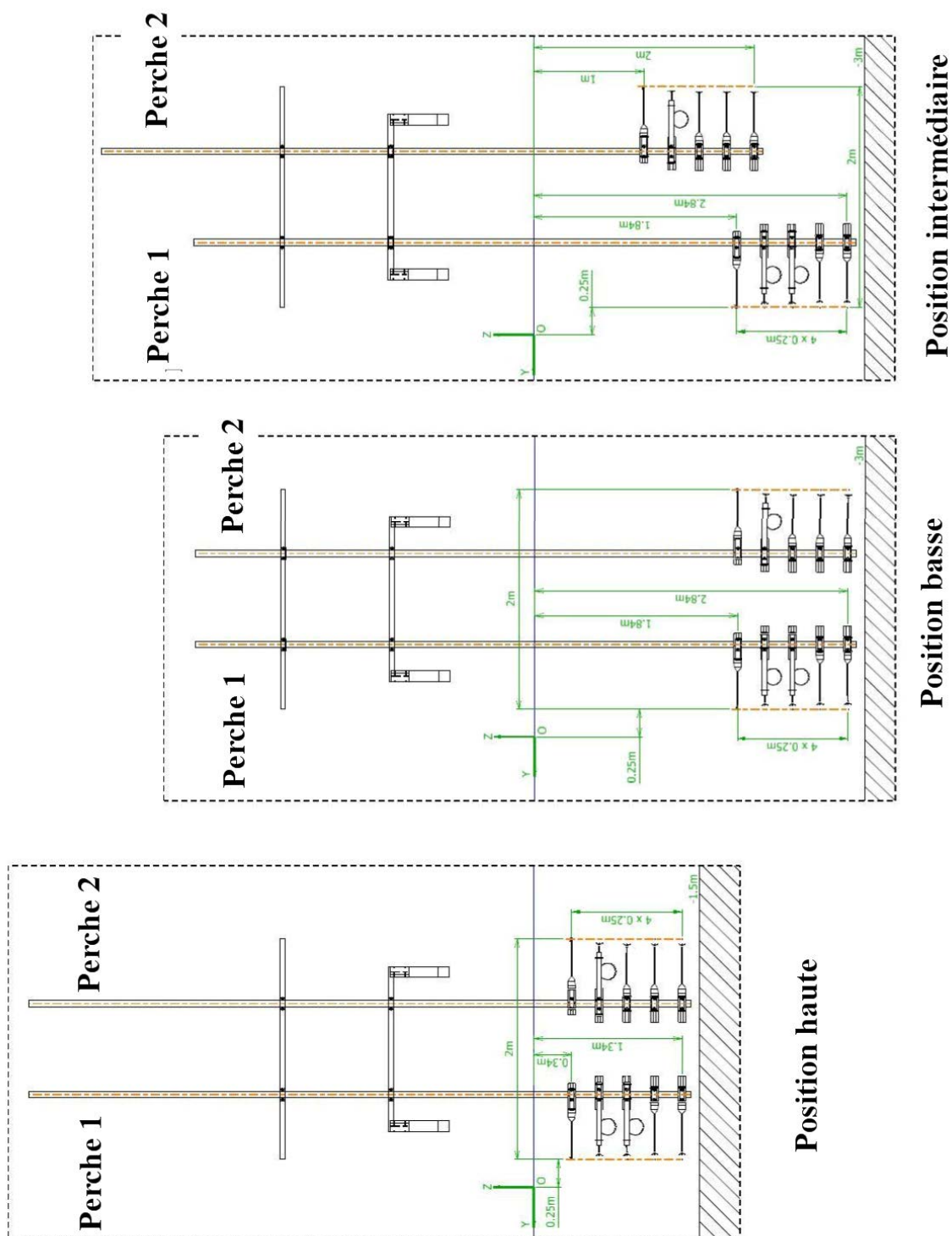


Figure VI.7 – Disposition des Vectrino. (Océamide, 2013)

Le tableau (VI.3) synthétise les points de mesure en amont et en aval des bosses.

$\mathbf{X}(m)$	$\pm 4.1$				$\pm 6.05$				$\pm 8$			
$\mathbf{Y}(m)$	0	-2	-4	-6	0	-2	-4	-6	0	-2	-4	-6
$\mathbf{Z}(m)$	$Z_s$ et $Z_p$				$Z_s$ et $Z_p$				$Z_s$ et $Z_p$			

**Tableau VI.3** – Synthèse des mesures effectuées en amont et en aval des bosses immergées

Le tableau (VI.4) synthétise les points de mesure au dessus des bosses.

$\mathbf{X}(m)$	0				$\pm 1.5$				$\pm 2.8$			
$\mathbf{Y}(m)$	0	-2	-4	-6	0	-2	-4	-6	0	-2	-4	-6
$\mathbf{Z}(m)$	$Z_s$ ; $Z_p$	$Z_s$ ; $Z_i$	$Z_s$		$Z_s$ ; $Z_p$	$Z_s$ ; $Z_i$	$Z_s$		$Z_s$ ; $Z_p$	$Z_s$ ; $Z_i$	$Z_s$	

**Tableau VI.4** – Synthèse des mesures effectuées au dessus des bosses immergées

## 5 Les conditions hydrodynamiques

### 5.1 Choix des conditions hydrodynamiques

Deux conditions de contre-courant ont été générées,  $U_1 = -0,125m.s^{-1}$  et  $U_2 = -0,25m.s^{-1}$ . La période de la houle a été choisie avec l'objectif de conserver le rapport  $h/\lambda$  constant pour chacune des conditions de courant. Ainsi, lorsque le contre-courant est  $U_1$ , la période de la houle est  $T_1 = 1,38s$ . Lorsque le contre-courant est d'intensité  $U_2$ , la période de la houle est  $T_2 = 1,48s$ . Pour chaque condition de contre-courant et de période, deux hauteurs de houle ont été considérées,  $H_1 = 10cm$  et  $H_2 = 20cm$ . Le tableau ci-dessous (tableau VI.5) synthétise les conditions hydrodynamiques générées. Les longueurs d'onde ont été calculées en considérant que le courant garde la même intensité sur toute la colonne d'eau et est de plus colinéaire à la direction de propagation de la houle. Nous résolvons donc la relation de dispersion

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)^2 = gk \tanh(kh) . \tag{VI.1}$$

$\mathbf{T}(s)$	1.38		1.48	
$\mathbf{U}(m.s^{-1})$	-0.125		-0.25	
$\mathbf{h}(m)$	1.5	3	1.5	3
$\mathbf{\lambda}(m)$	2.61	2.62	2.62	2.63
$\mathbf{h}/\mathbf{\lambda}$	0.6	1.1	0.6	1.1

**Tableau VI.5** – Ensemble des conditions hydrodynamiques générées

La houle se propage donc ici dans des conditions de profondeur infinie. Si nous poursuivons ce raisonnement et en nous rappelant que seul le courant peut interagir avec la topographie, un éventuel comportement différent de la houle serait dû à une distribution différente du champ de courant. D'autre part, le fait de considérer un rapport  $h/\lambda$  constant invite à suggérer qu'un comportement similaire de la houle devrait être observé.

## 5.2 Calibration de la houle et du courant

Les houles et les courants générés ont été calibrés par Océanide. Les hauteurs et périodes des houles régulières ont été calibrées près des batteurs, en  $X = -8m$ , à partir d'un montage à 5 sondes. La calibration est réalisée sans présence de courant.

Le moulinet a permis de calibrer l'intensité du contre-courant sans houle, près de la plage d'absorption.

## 5.3 Etablissement des différentes conditions hydrodynamiques

Des essais en condition de contre courant seul, et courant/houle ont été réalisés successivement. Afin de travailler en régime établi, les mesures aux différents lieux choisis ont commencé 150s après la génération du courant, dans les conditions de courant seul. Dans les conditions courant/houle, la houle est générée 120s après initiation du courant. La houle a ensuite été générée et s'est établie pendant une durée de 60s au minimum avant que les mesures au niveau de la première position de la rampe ne soient réalisées.

## 6 Acquisition des données

Dès que les conditions hydrodynamiques sont établies, l'acquisition des mesures est effectuée. Une acquisition comprend les mesures effectuées aux différents points de mesure, décrits précédemment. Le stationnement en chaque position dure 40s, permettant la mesure d'une

trentaine de période. Passé ce délai les chariots sont déplacés afin d'atteindre le lieu de mesure suivant. Une acquisition comprend donc une succession de mesures réalisées aux différents endroits du bassin choisis, entrecoupées par les phases de déplacement des chariots.

L'enregistrement des mesures des sondes à houle et du moulinet est synchrone et piloté par le système d'asservissement et d'acquisition du bassin. Les enregistrements des Vectrino se font de manière indépendante, ceux-ci n'ayant pas pu être pilotés par l'opérateur du bassin.

Le protocole, relatif à l'enregistrement, que nous avons suivi est le suivant. Océanide lance l'acquisition des mesures, puis nous lançons les nôtres, ainsi, pour chaque essai effectué, les acquisitions relatives aux Vectrino débutent peu après celles relatives aux sondes à houle et au courantomètre à hélice.

La première étape de dépouillement des données consiste à resynchroniser temporellement les mesures relatives aux Vectrino avec celles relatives au courantomètre à hélice et aux sondes à houle afin de considérer les mêmes paliers temporels relatifs aux différents points de mesure. Pour cela nous utilisons les phases de déplacement du chariot qui entrecoupent les moments de stationnement de ceux-ci aux différents points de stationnement. Pendant le déplacement du chariot, les mesures enregistrées contiennent donc, dans la direction longitudinale du bassin, la donnée de la vitesse de déplacement du chariot ajoutée à la mesure de la vitesse du fluide dans le repère du bassin. Ces phases de déplacement sont donc bien visibles sur les enregistrements temporels des Vectrino et du moulinet.

Un filtrage de la composante moyenne du courant par fft glissante sur une fenêtre de cinq secondes, permet de déterminer les instants de mise en mouvement du chariot ainsi que la rampe d'établissement du courant, lorsque celle-ci a été enregistrée. Il suffit ensuite de repérer sur les signaux temporels des Vectrino et du courantomètre à hélice un point remarquable et de faire coïncider les dates relatives à chaque signaux temporels. La figure ci-après donne un exemple d'une telle analyse.



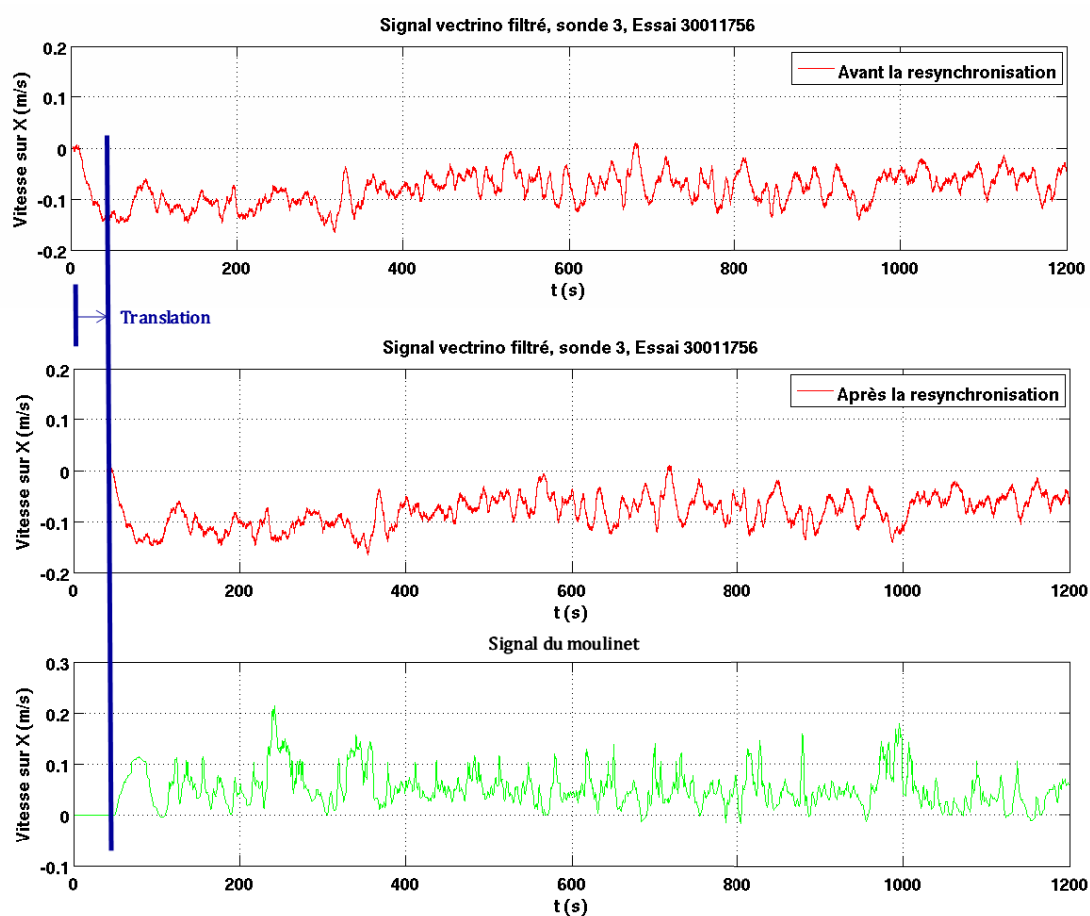


Figure VI.8

## 7 Méthode d'analyse

### 7.1 Champ de courant moyen

La valeur moyenne du champ de courant peut être obtenue simplement à partir d'une transformée de Fourier discrète sur le signal temporel enregistré. La composante principale du spectre d'amplitude du signal représente l'intensité du courant moyen. Cette méthode a été suivie pour l'analyse des mesures du moulinet et des Vectrino. Aucune difficulté particulière n'a été rencontrée pour l'analyse des mesures du courantomètre. Pour les mesures des Vectrino acquises pour des conditions de courant seul, l'intensité moyenne du courant a été calculée à partir d'une transformée de Fourier discrète sur une fenêtre de 5s, pour représenter des éventuelles structures tourbillonnaires. La valeur considérée sera la moyenne des intensités calculées sur chaque fenêtre. Un exemple de ce filtrage est représenté sur la figure (VI.9). En présence de houle, l'intensité

du courant moyen est calculée de la même manière qu'en condition de courant seul. La vitesse orbitale de la houle est l'intensité représentée par le spectre d'amplitude à la fréquence de la houle (figure VI.10).

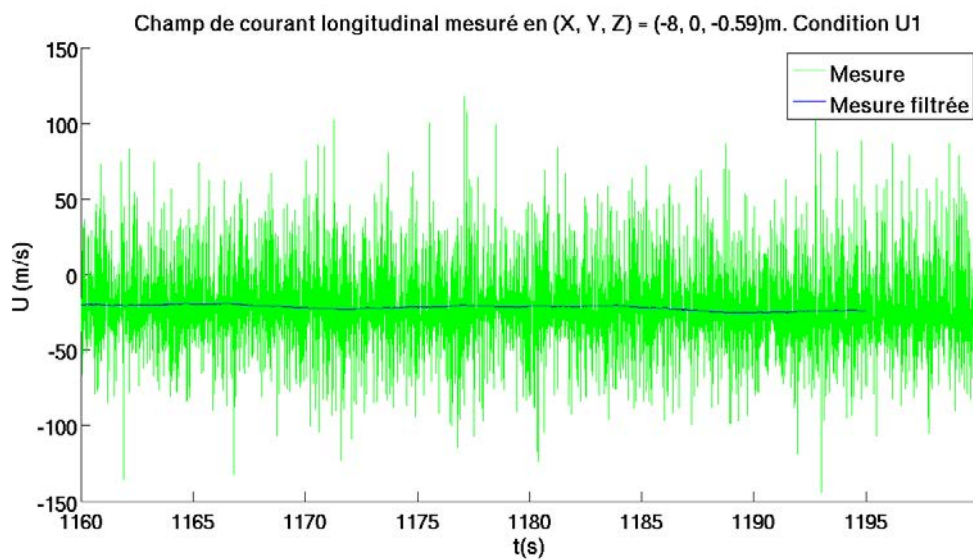
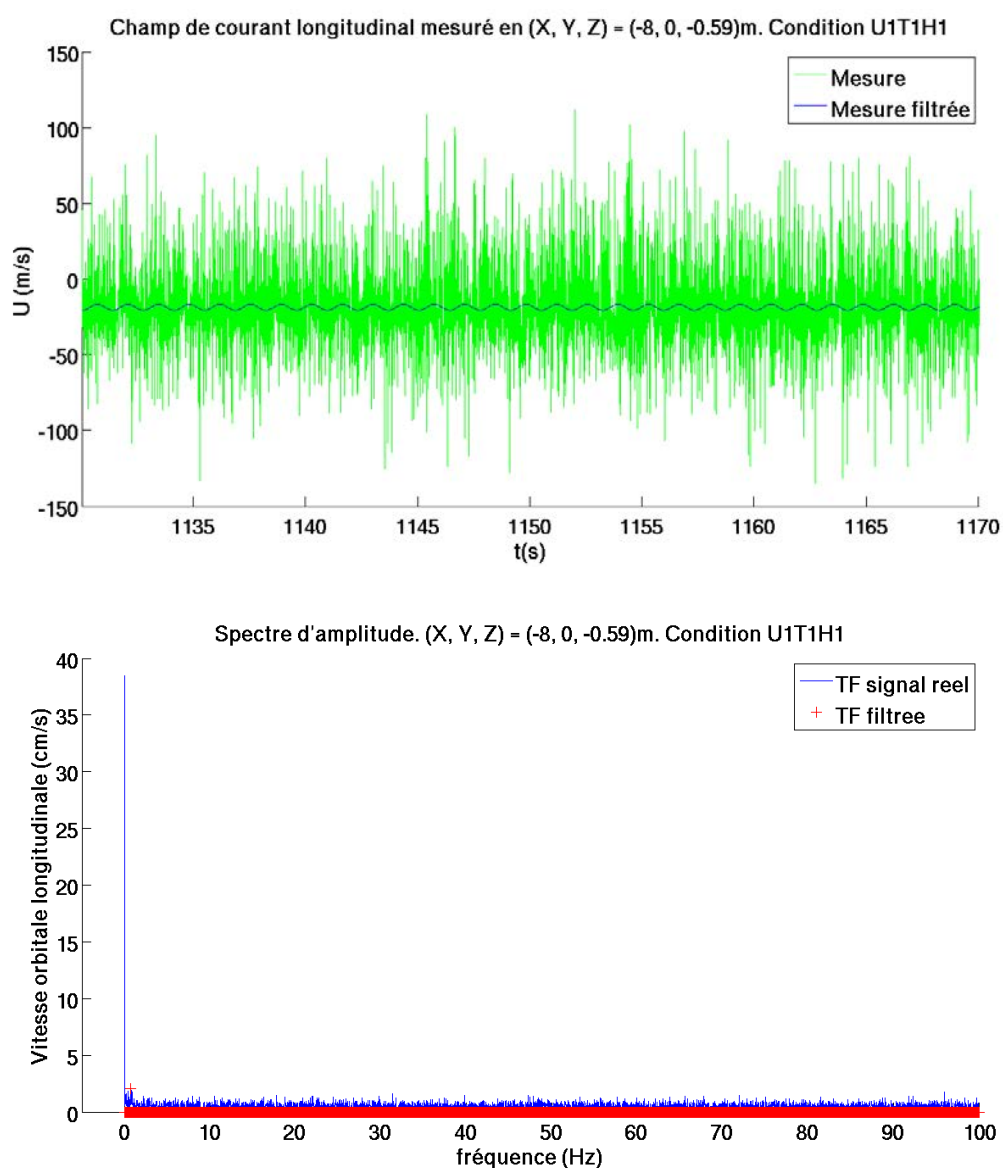


Figure VI.9 – Exemples de signaux temporels mesurés et filtrés. Condition de courant seul

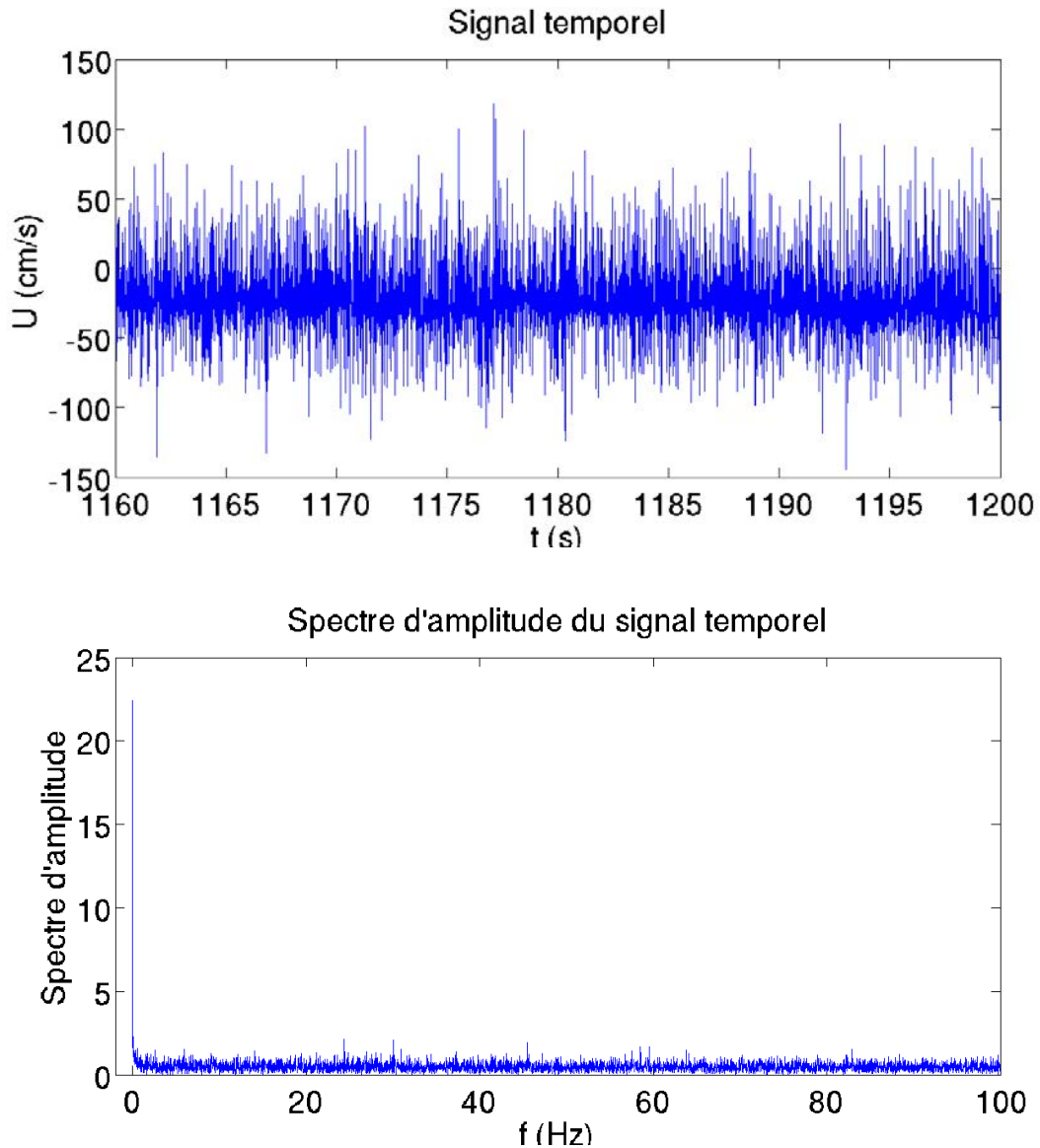


**Figure VI.10** – Exemples de signaux temporels mesurés et filtrés. En haut : Signal temporel. En bas : Spectre d'amplitude

## 7.2 Analyse du bruit

Les signaux temporels des Vectrino sont bruités. Nous caractérisons ce bruit afin de déduire les éventuelles conséquences de la superposition de celui-ci au signal ayant un sens physique. L'analyse du bruit présentée dans ce paragraphe a été réalisée pour l'ensemble des Vectrino sur tous les points  $(X, Y, Z)$  de mesure. Le nombre d'analyse effectuée étant très important nous présentons la méthode suivie sur un exemple précis. Dans l'exemple considéré, le courant

d'intensité  $U_1$  a été généré au niveau du point de mesure  $(X, Y, Z) = (-8, 0, -0.59)m$  dans la direction longitudinale  $X$ . En condition de courant seul, le spectre d'amplitude nous permet d'accéder à la valeur moyenne du signal en  $f = 0Hz$ . Les mesures sont effectuées avec une fréquence d'échantillonnage de  $200Hz$ .

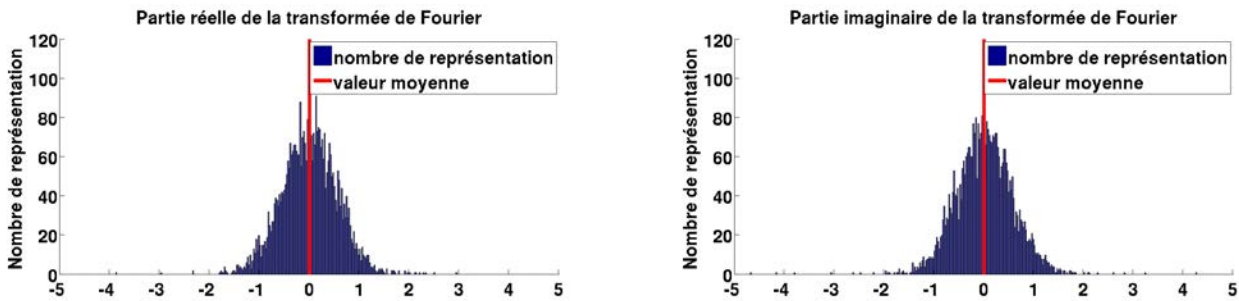


**Figure VI.11** – A gauche : Signal temporel. En bas : Spectre d'amplitude de la vitesse longitudinale. Le point de mesure  $(X, Y, Z) = (-8, 0, -0.59)m$ . Condition de courant seul d'intensité nominale  $U_1 = 0.125m.s^{-1}$

Le signal temporel apparaît noyé dans du bruit, traduit par une intensité non nulle sur l'ensemble des fréquences représentées. Ce bruit mesuré est relatif au fonctionnement de l'ensem-

ble Vectrino/interface d'acquisition. Dans une première analyse de ce spectre nous remarquons qu'il ne semble pas montrer de fréquence de bruit privilégiée dans la mesure où toutes les fréquences semblent être représentées avec la même intensité. Le bruit mesuré peut donc être considéré blanc.

Cependant le spectre d'amplitude ne nous permet pas ici de conclure sur l'intensité moyenne du bruit, or un bruit d'intensité moyenne non nulle fausserait la mesure de l'intensité du courant moyen. Afin de quantifier cette valeur moyenne, nous pouvons représenter sur un histogramme le nombre de représentation obtenues pour une intensité donnée, à partir des parties réelle et imaginaire du spectre d'amplitude. Ces répartitions sont représentées sur la figure(VI.12).



**Figure VI.12** – Répartition de l'intensité du bruit pour les parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) du spectre d'amplitude. Le point de mesure  $(X, Y, Z) = (-8, 0, -0.59)m$ . Condition de courant seul d'intensité nominale  $U_1$

Le bruit suit une loi normale de moyenne nulle. La présence du bruit, superposé à la mesure du courant, n'affecte donc pas la lecture de celle-ci. La valeur moyenne du signal est donc bien l'intensité calculée en  $f = 0Hz$  par transformée de Fourier.

### 7.3 Amplitude

La fréquence d'échantillonnage d'acquisition des sondes à houle est  $50Hz$ . Les spectres d'amplitude associés aux signaux temporels sont obtenus à partir d'une analyse de Fourier. A partir du spectre nous déterminons la fréquence pic correspondant à la fréquence de la houle, l'amplitude moyenne relative à la fréquence pic, ainsi que la fréquence de la première harmonique et l'amplitude moyenne associée. Le filtrage effectué consiste à attribuer une amplitude nulle au niveau des autres fréquences du spectre autour de la fréquence pic et de celle de la première harmonique. Nous conservons en revanche l'amplitude moyenne du signal temporel dans le spectre (fréquence nulle). Le signal temporel filtré est calculé en effectuant la transformée de Fourier inverse grâce à la fonction "ifft" (Inverse Fast Fourier Transform) appliquée au spectre

précédemment filtré.

Nous déterminons, pour toutes les séries de mesure effectuées, l'amplitude moyenne de la houle en chaque point de mesure  $(X, Y)$  à partir des signaux filtrés. Ainsi, pour chaque condition de houle nous disposons de trois jeux complets de données sur l'axe longitudinal  $X$  et de deux jeux de données incomplets en amont des bosses au niveau des positions  $X = [-8m; -6.05m; -4.1m]$  et en aval des bosses au niveau des positions  $X = [4.1m; 6.05; 8m]$ . Ainsi nous disposons pour chaque condition de houle d'un jeu de cinq acquisitions temporelles au niveau des positions  $X = [-8m; -6.05m; -4.1m; 4.1m; 6.05; 8m]$  et de trois acquisitions temporelles au niveau des bosses en  $X = [-2.8m; -1.5m; 0m; 1.5m; 2.8m]$ . Ces différents jeux de données sont relatifs au positionnement des perches supportant les Vectrino afin d'effectuer les mesures du courant en surface et en profondeur, de part et d'autre des bosses et entre celles-ci. Ces différents jeux de données nous permettent de vérifier la reproductibilité des essais et de calculer statistiquement l'amplitude moyenne de la houle et l'écart type au niveau des différents points de mesure du bassin.

## 7.4 Longueur d'onde

La disposition par paire des sondes à houle selon l'axe longitudinal, permet de calculer la célérité de phase de la houle. Afin de simplifier leur désignation nous nommons "sonde amont" la sonde la plus proche du batteur qui mesure donc le signal de houle en premier et "sonde aval" la sonde la plus proche de la plage d'absorption qui détecte la houle en second. La distance en chaque paire de sonde sur l'axe  $X$  est 1 mètre.

Pour déterminer la célérité de phase de la houle nous disposons des signaux temporels filtrés à partir desquels nous calculons dans un premier temps la phase du signal. Pour cela nous déterminons pour les sondes amont et aval la phase du signal au niveau de sa fréquence pic. La différence de phase entre les deux signaux enregistrés par les deux sondes permet, en la divisant par la pulsation de la houle, de déterminer le décalage temporel  $Dt$  entre les deux signaux enregistrés. Sachant que les deux sondes sont espacées de un mètre, la célérité de phase est  $c = 1/Dt$ . Connaissant la fréquence pic de la houle et donc sa période  $T$ , nous pouvons calculer la longueur d'onde de la houle  $\lambda$  à partir de la relation  $\lambda = T * c$ .

Cette méthode simple est valide tant que la longueur d'onde de la houle dépasse la distance séparant les deux sondes. Dans le cas contraire cette méthode nécessite quelques ajustements. Il peut arriver que cette méthode donne des célérités anormalement élevées et des longueurs d'onde démesurément grandes, non observées durant les séries d'expériences. Pour cela nous imposons une valeur seuil de la célérité au delà de laquelle nous considérons que décalage

temporel entre les signaux doit être recalculé. Cela arrive quand la longueur d'onde de la houle est inférieure à un mètre et qu'il y a donc plus d'une longueur d'onde présente entre les deux sondes. Dans ce cas nous corrigeons la différence de phase de  $2\pi$ . La célérité de phase et la longueur d'onde de la houle ainsi recalculées concordent mieux avec les observations. La valeur seuil de célérité est fixée arbitrairement à  $2.3m/s$  pour toutes les conditions hydrodynamiques.

### 7.5 Phase

L'analyse précédente peut être utilisée pour calculer en chaque point  $X$  le déphasage de la houle le long de l'axe transverse par rapport à sa phase en  $Y = 0$  à la côte  $X$  considérée. Nous calculons ainsi la différence de phase  $\Delta\varphi$  entre la houle à une cote  $Y$  particulière et la houle à la côte  $Y = 0$ , pour une abscisse  $X$  donnée. La différence de phase est ensuite convertie en décalage temporel  $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$ , puis en décalage spatial  $\Delta x$  avec la relation  $\Delta x = c * \Delta t$  où  $c$  est la célérité de la houle au niveau de la côte  $Y$  considérée. A cette étape le seul moyen de valider la procédure est de vérifier le caractère continu de la crête le long de l'axe transverse  $Y$ .

---

---

# Chapitre VII

---

## Observation des interactions houle-courant-topographie

### 1 Introduction

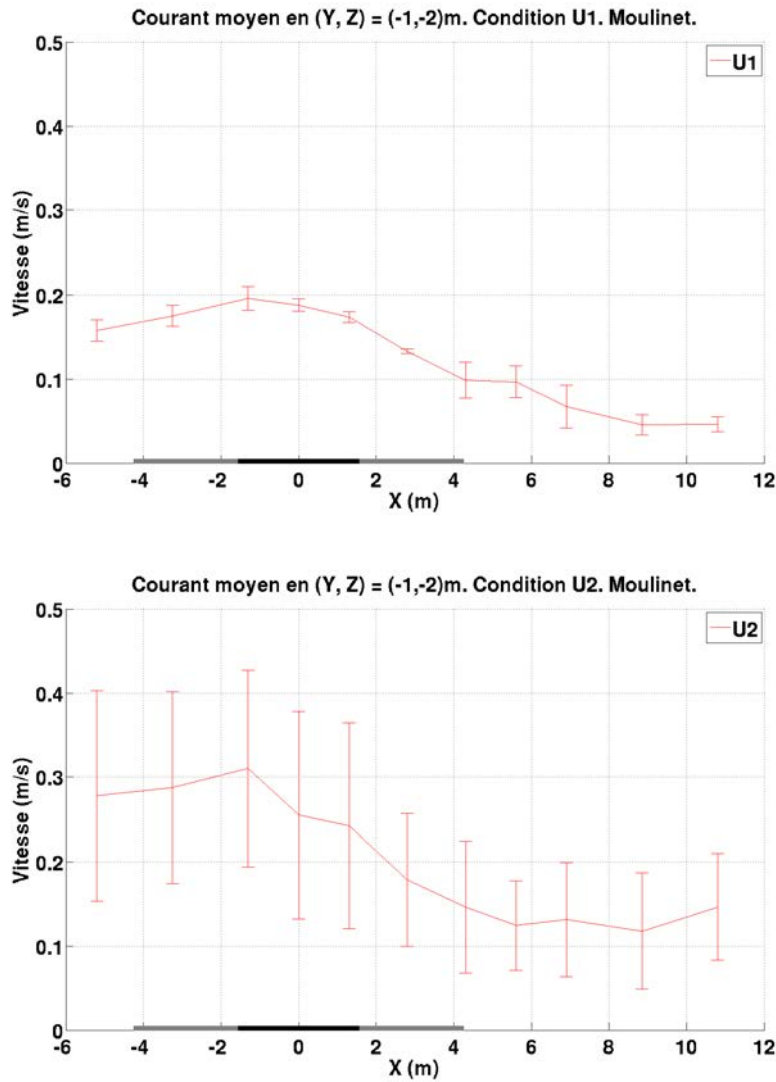
Nous présentons les résultats issus de la campagne expérimentale décrite dans le chapitre précédent. Dans une première section nous décrivons séparément les caractéristiques générales du champ de courant, puis celles du champ de houle. Nous analysons ensuite, en fonction des différentes conditions initiales choisies, la variabilité spatiale de chacun de ces champs. Suite à ces analyses nous nous intéressons à l'évolution spatiale du profil vertical du courant.

### 2 Champs de courant

#### 2.1 Champ de courant longitudinal

La figure (VII.1) représente l'évolution de l'intensité du courant, en valeur absolue, mesurée par le moulinet pour deux conditions de courant seul. Ces mesures sont effectuées en  $(Y, Z) = (-1, -2)m$ . Le déplacement successif des perches portant les Vectrino a induit la réalisation de plusieurs séries d'expériences avec les mêmes conditions hydrodynamiques. Dans la suite de ce manuscrit, les valeurs indiquées sur les figures sont des moyennes associées à ces différentes séries temporelles. Les écart-types représentés sont relatifs au calcul de ces moyennes.





**Figure VII.1** – Intensité du courant mesurée avec le moulinet à hélice. En haut :  $U_1$ . En bas :  $U_2$

L’observation de cette figure amène plusieurs remarques. Nous pouvons observer tout d’abord que l’intensité du courant mesurée est inférieure à la valeur de consigne du côté plage ( $X \geq 0$ ). Cependant ces mesures étant réalisées en profondeur ( $Z = -2m$ ), l’intensité du courant est peut-être plus grande près de la surface.

D’autre part, l’intensité du contre-courant est plus élevée en amont des bosses (par rapport au sens du courant) que près de la plage d’absorption où sont placées les pompes. Ainsi, disposées de cette manière, les deux bosses ainsi disposées jouent le rôle de Venturi pour le courant.

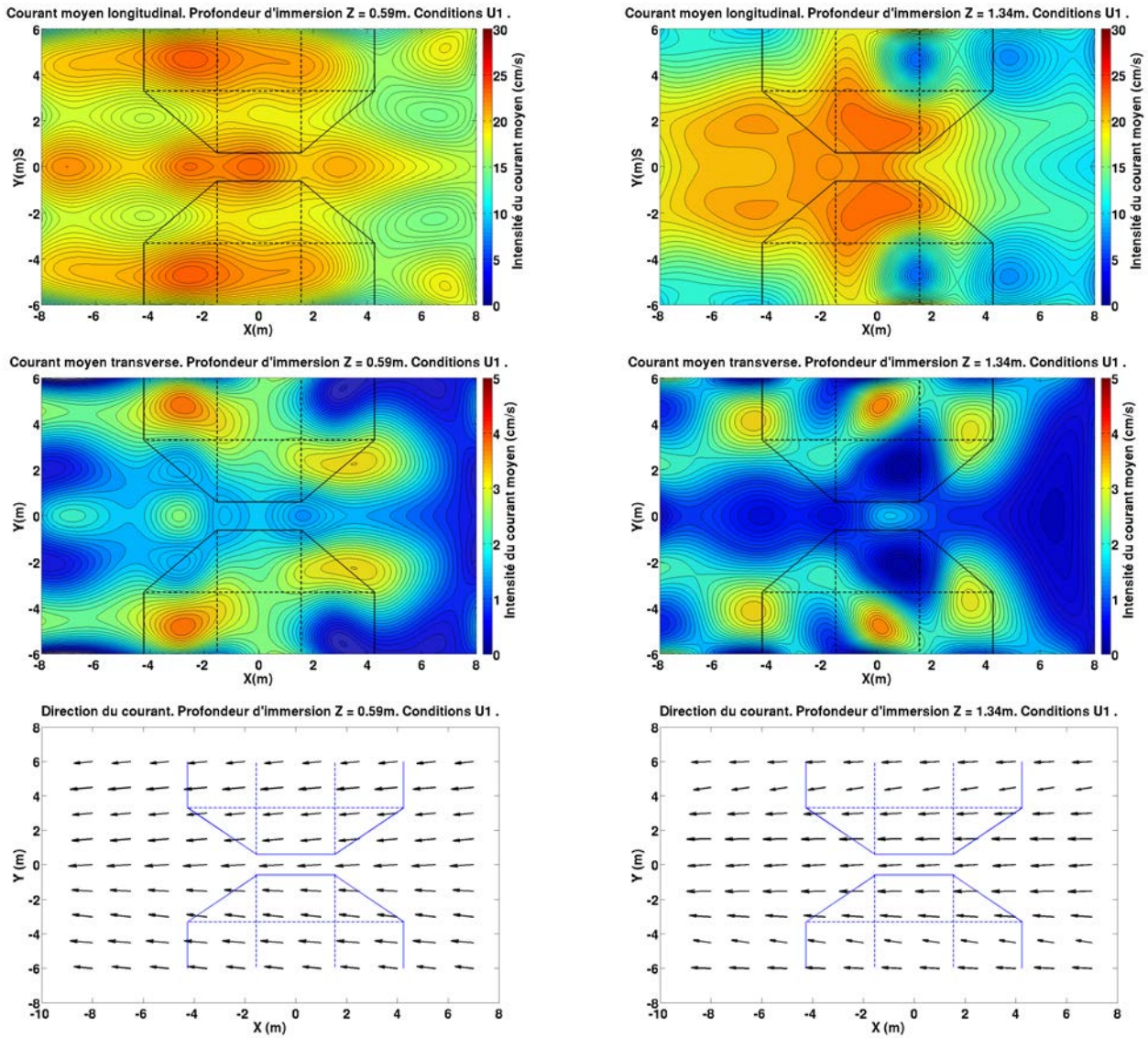
Nous pouvons remarquer, sur la figure de dessous, un écart-type important notamment entre les bosses et en aval de celles-ci, en  $X < -2m$ . Ces écart-types sont d’autant plus importants que l’intensité du contre-courant est grande. Ce phénomène est peut-être du à des tourbillons

généralisés au passage de la topographie immergée, ou encore à des éventuels tourbillons qui se créent au niveau de la perche, support du moulinet.

### 2.2 Champs de courant horizontaux

Nous nous intéressons aux champs horizontaux du courant, généré seul, pour les deux conditions initiales  $U_1$  et  $U_2$ . Les résultats présentés, relatifs aux Vectrino, sont issus d'une interpolation polynomiale. Ces représentations nous permettent d'en analyser les caractéristiques générales.

2.2.1 Courant d'intensité  $U_1$



**Figure VII.2** – Evolution du contre-courant  $U_1$ . Colonne de gauche : en  $Z = -0.59m$ . Colonne de droite : en  $Z = -1.34m$ . Haut : Direction longitudinale. Milieu : Direction transverse. Bas : Direction du courant

La comparaison des champs horizontaux de courant aux profondeurs  $Z = -0.59m$  et  $Z = -1.34m$  fait apparaître deux comportements sensiblement différents. En  $Z = -0.59m$  le courant longitudinal est accéléré au passage des bosses et entre celles-ci. Plus en profondeur, en  $Z = -1.34m$ , le courant est principalement accéléré entre les bosses. Cette différence dans le profil horizontal du courant à deux profondeurs différentes suggère l'existence d'un gradient

de cisaillement vertical du courant d'autant plus grand au dessus de celles-ci. Ces profils seront étudiés dans la suite de ce chapitre.

L'intensité du courant transverse étant cinq fois plus petite que celle du courant longitudinal à ces profondeurs, nous pouvons considérer que le champ de courant est principalement longitudinal. Cette remarque est d'ailleurs confirmée par les deux figures du bas dans (VII.2) montrant une direction privilégiée du courant selon l'axe ( $OX$ ). La figure (VII.3) présente l'évolution longitudinale des courants longitudinal et transverse à la profondeur  $Z = -2.59m$ , de part et d'autre des bosses. A cette profondeur, la présence des bosses ralentit considérablement le courant. En effet, s'il est à peu près constant le long de la partie centrale du bassin ( $Y = 0$ ), une recirculation du courant est observée le long de l'axe  $Y = -6m$ .

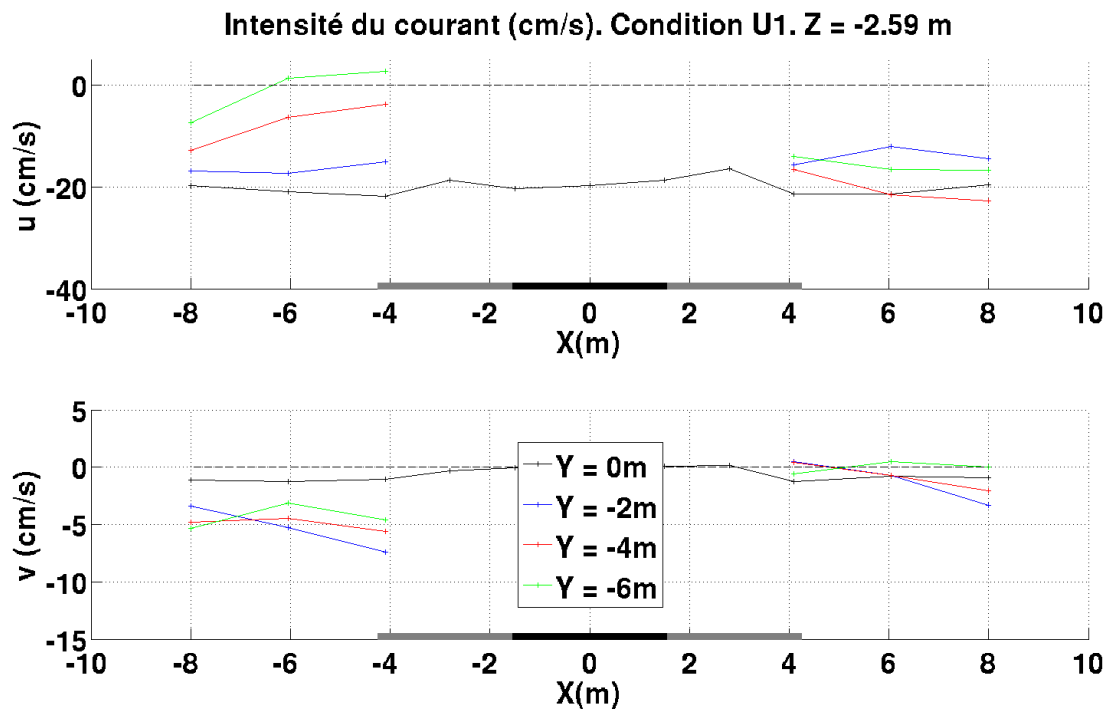
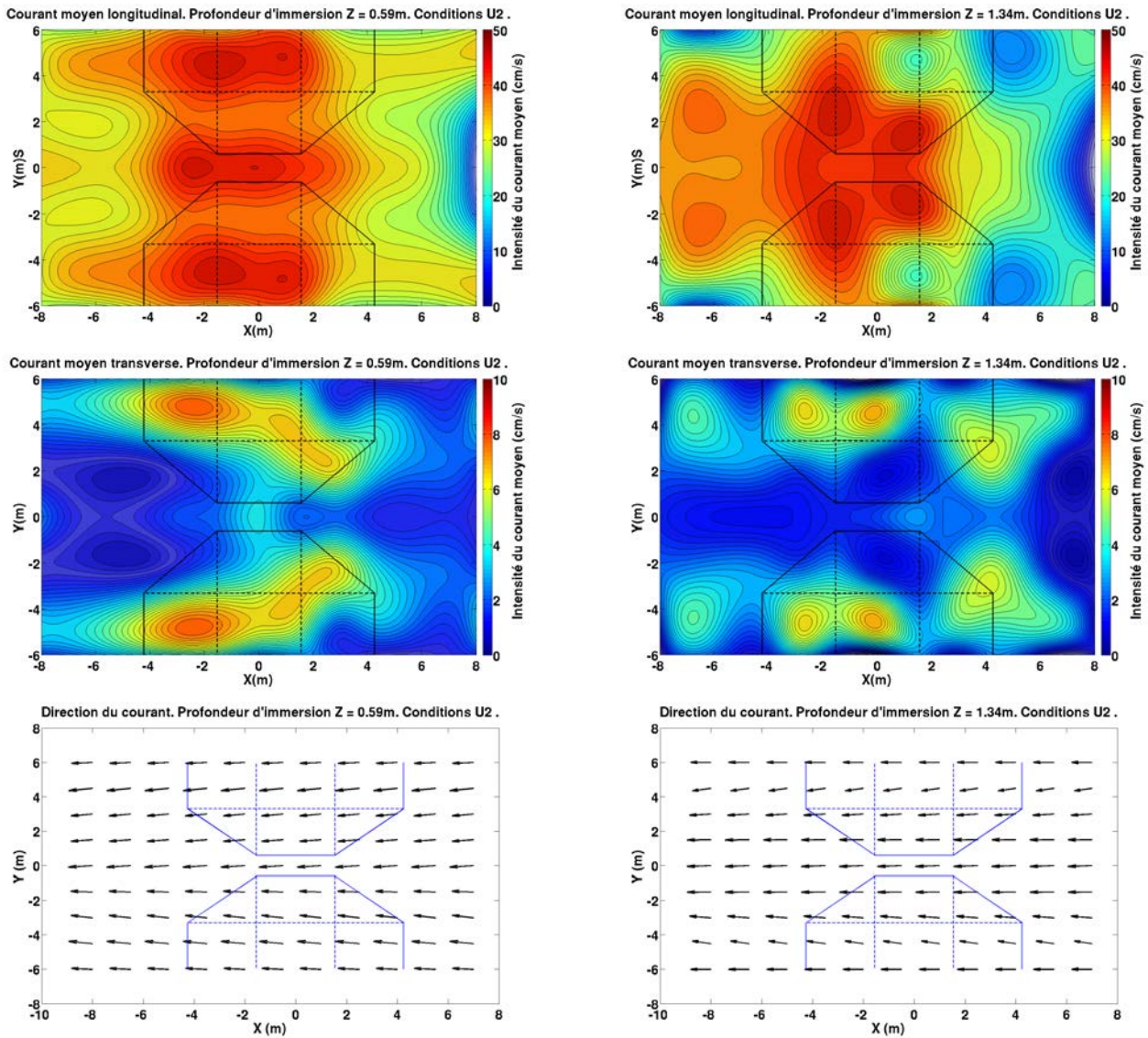


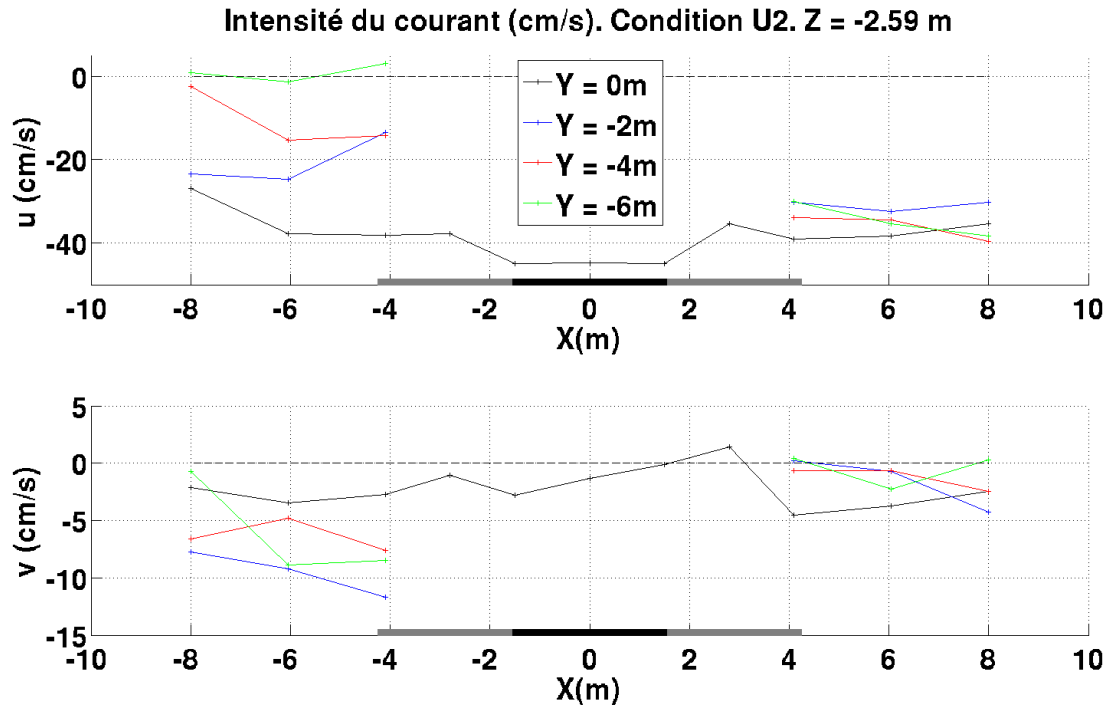
Figure VII.3 – Evolution du contre-courant  $U_1$  .  $Z = -2.59m$ . En haut : composante longitudinale. En bas : composante transverse

2.2.2 Courant d'intensité  $U_2$



**Figure VII.4** – Evolution du contre-courant  $U_2$  . Colonne de gauche : en  $Z = -0.59\text{m}$ . Colonne de droite : en  $Z = -1.34$ . Haut : Direction longitudinale . Milieu : Direction transverse. Bas : Direction du courant

Un comportement similaire au cas  $U_1$  est globalement observé pour cette condition de contre-courant.



**Figure VII.5** – Evolution du contre-courant  $U_2$ .  $Z = -2.59m$ . En haut : composante longitudinale.  
En bas : composante transverse

### 3 Evolution du champ de houle

#### 3.1 Analyse de l'amplitude de la houle

Les sondes à houle nous ont permis de mesurer les caractéristiques de la houle dans le bassin, dans la zone  $Y \geq 0$ . L'axe  $Y = 0$  étant un axe de symétrie de notre écoulement nous connaissons donc, par symétrie, l'évolution du champ de houle sur l'axe transverse  $Y$  dans son intégralité.

Les figures de cette section présentent l'évolution des paramètres de la houle le long de l'axe longitudinal pour chaque côte  $Y$ . Cette représentation est efficace pour représenter un éventuel phénomène de focalisation de la houle au centre du bassin, le long de l'axe  $Y = 0$  ainsi que l'évolution de son amplitude sur des coupes longitudinales s'écartant de cet axe. Ces informations sur le profil de la houle sont complétées par le tracé, suivant les mêmes directions, de la cambrure de la houle.

3.1.1 Condition  $U_1, T_1$

a)  $H_1$

Nous représentons sur la figure (VII.6) l'évolution de l'amplitude de la houle normalisée par son amplitude en  $(X, Y) = (-8, 0)m$ .

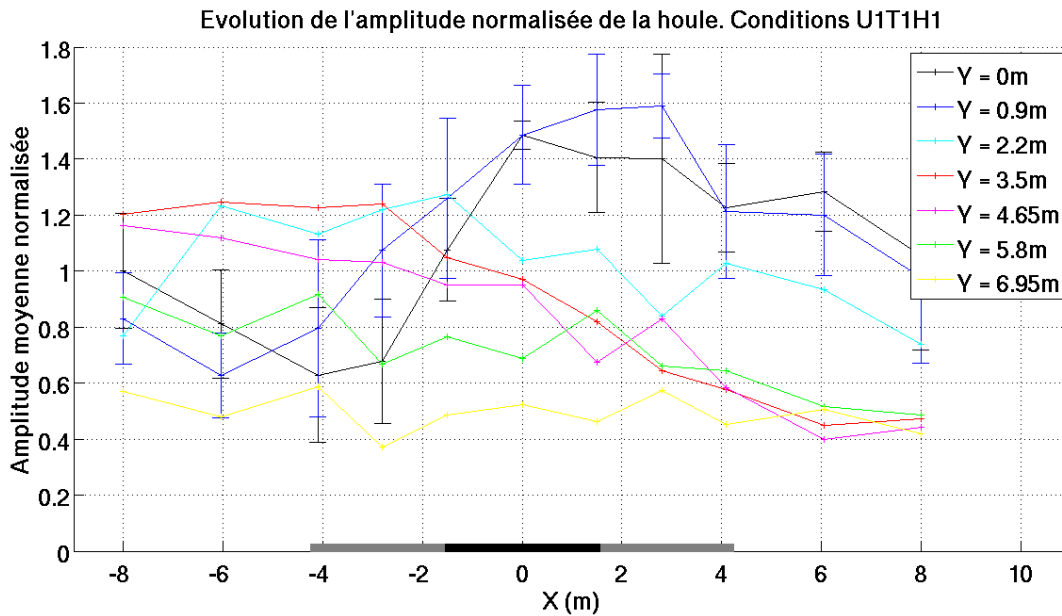
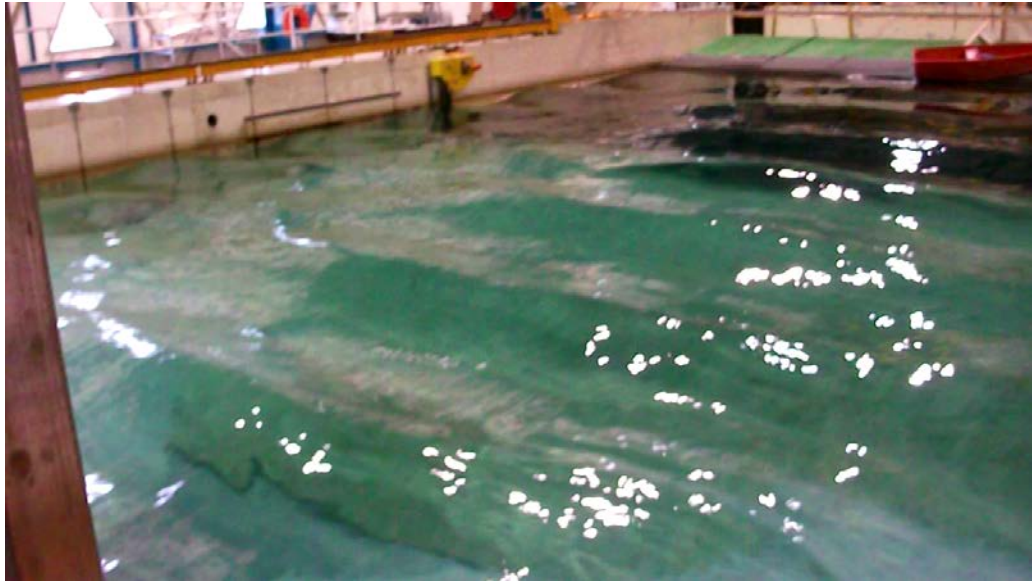


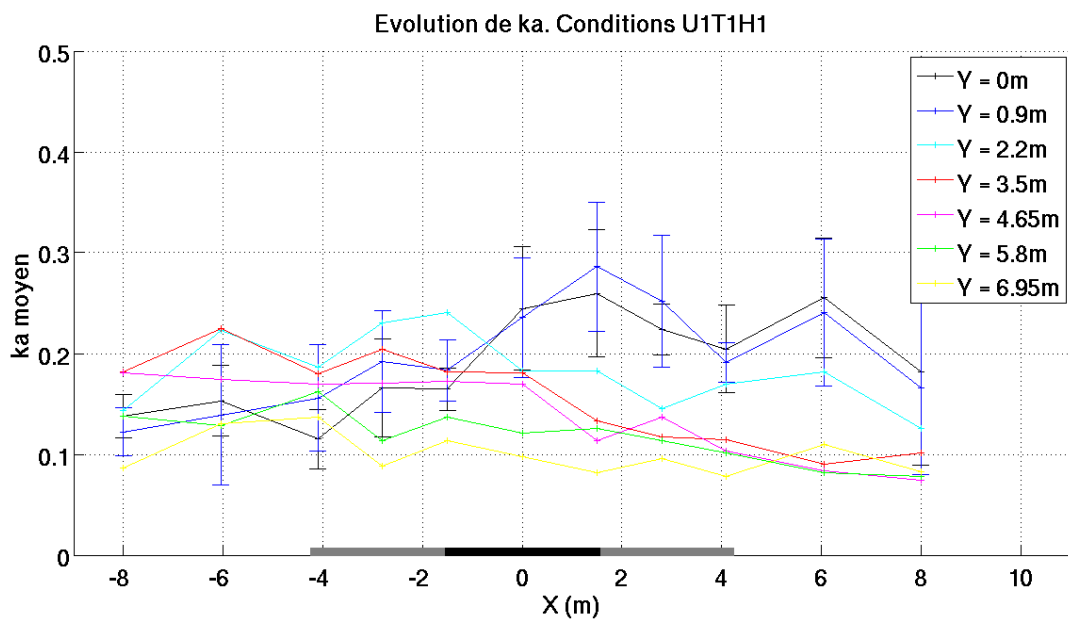
Figure VII.6 – Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point  $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle U1 T1 H1.

Nous observons une amplification de la houle au dessus de la topographie. Ce comportement est similaire à celui qui avait été observé lors des précédentes campagnes de mesure, en 2007 et 2008. L'amplification mesurée est de l'ordre de 60% en  $(X, Y) = (0, 2.8)m$  et  $(X, Y) = (0, 0.9)m$ . Nous observons de plus une décroissance de l'amplitude en aval des bosses lorsqu'on s'éloigne de l'axe médian  $Y = 0$ . Cette décroissance en aval des bosses est d'ailleurs bien visible sur la photographie (VII.7).



**Figure VII.7** – Photographie illustrant la décroissance de l'amplitude en aval des bosses, loin de l'axe médian du bassin. Condition  $U_1 T_1 H_1$ .

Cette amplification est corrélée à une plus forte cambrure du profil de la houle, visible sur la figure (VII.8).



**Figure VII.8** – Evolution de la cambrure de la houle

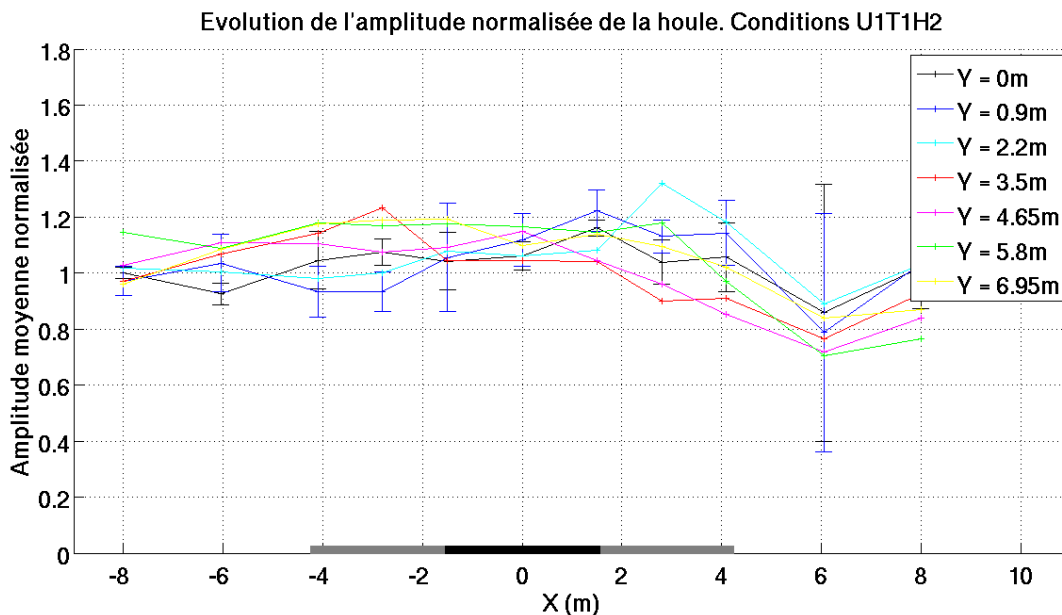
Nous n'avons toutefois pas observé de déferlement à ce niveau lors des essais effectués avec ces conditions hydrodynamiques. L'ordre de grandeur du paramètre  $ka$  étant petit de-



vant 1, la houle reste faiblement cambrée lors de sa propagation. Nous pouvons considérer que le phénomène de focalisation d'amplitude que nous observons peut être décrit dans la théorie linéaire. Ce cas pourra donc être considéré comme un cas test de validation des théories développées précédemment.

### b) $H_2$

En conservant la même période de la houle  $T_1$  et la même intensité de contre-courant  $U_1$  nous générons des houles de hauteur  $H_2$ . L'évolution de l'amplitude normalisée est représentée sur la figure (VII.9).



**Figure VII.9** – Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point  $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle  $U_1 T_1 H_2$ .

Sur la figure (VII.9) l'amplification de l'amplitude de la houle précédemment observée près de l'axe médian  $Y = 0$  n'est plus aussi visible. En effet, l'amplification moyenne reste en dessous de 20%, sauf en  $(X, Y) = (4.1, 2.2)m$  où elle atteint près de 35%. D'autre part l'évolution de l'amplitude semble présenter la même tendance le long des différentes coupes longitudinales.

La figure (VII.10) présente l'évolution de la cambrure moyenne de la houle. Cette figure fait apparaître un phénomène non observé pour une hauteur de houle  $H_1$ . En effet, la houle est davantage cambrée en amont des bosses, en  $X = -4m$ . Ce phénomène ne se traduit pourtant

pas par une augmentation de l'amplitude. Ainsi, à cet endroit là, la longueur d'onde de la houle diminue puis augmente de nouveau lors du passage de la houle au dessus des bosses immergées.

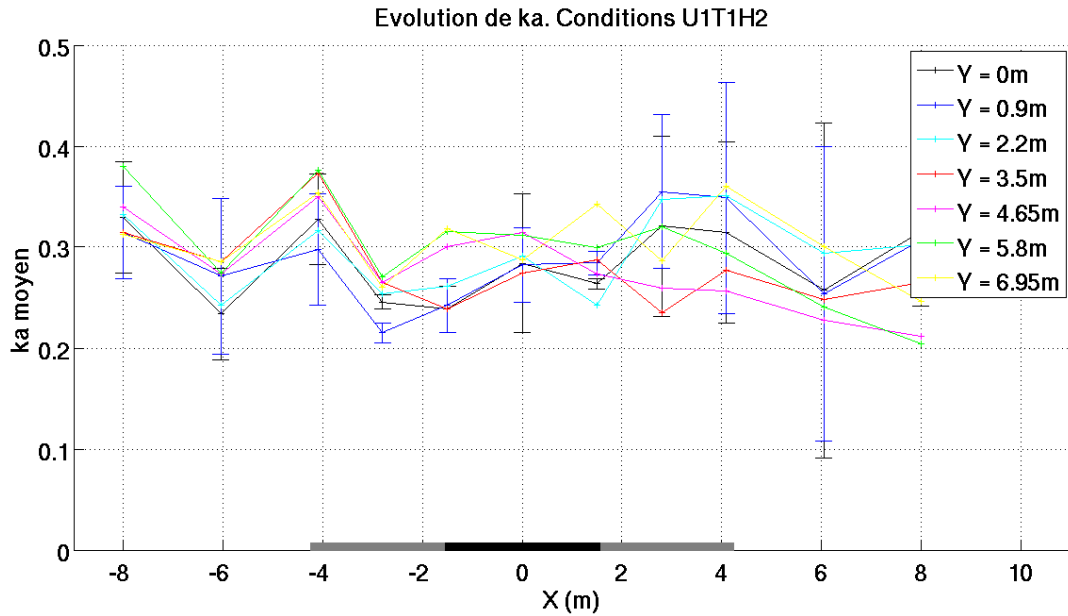


Figure VII.10 – Evolution de la cambrure de la houle. Condition  $U_1 T_1 H_2$ .

Cette analyse de l'amplitude de la houle pour les conditions  $U_1 T_1$  fait apparaître un phénomène d'amplification de la houle au centre du bassin bien marqué pour une hauteur  $H_1$  mais moindre pour une hauteur  $H_2$ . Cette remarque remet en question la linéarité du processus de focalisation que nous observons.

### 3.1.2 Condition $U_2, T_2$

#### a) $H_1$

Les résultats présentés ici ont été obtenus pour les conditions hydrodynamiques  $U_2 T_2 H_1$ . La figure (VII.11) présente l'évolution de l'amplitude de la houle.

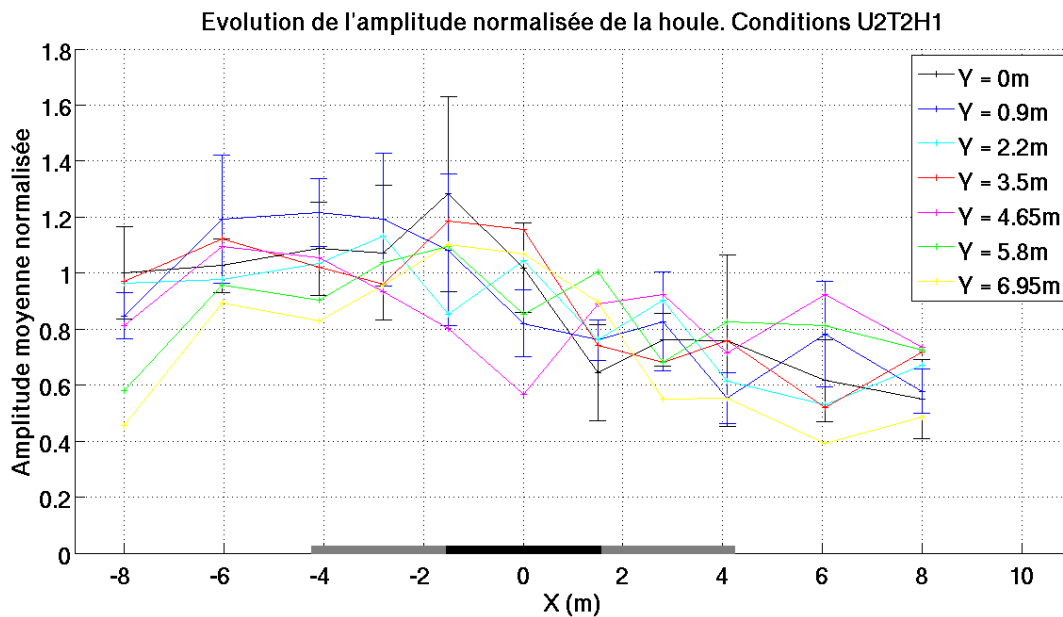


Figure VII.11 – Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point  $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle  $U_2 T_2 H_1$ .

Pour les conditions  $U_2 T_2 H_1$ , l'amplitude normalisée de la houle le long de l'axe  $Y = 0$  semble croître en amont des bosses jusqu'à une valeur de 1.3. Cette amplification est corrélée avec une cambrure plus importante, visible sur la figure (VII.12).

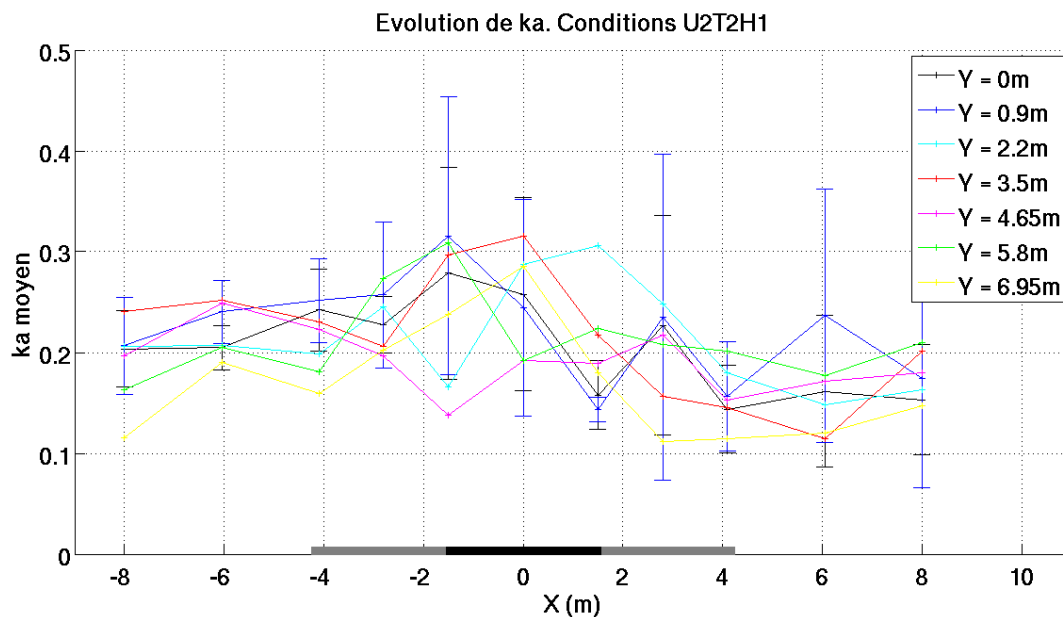
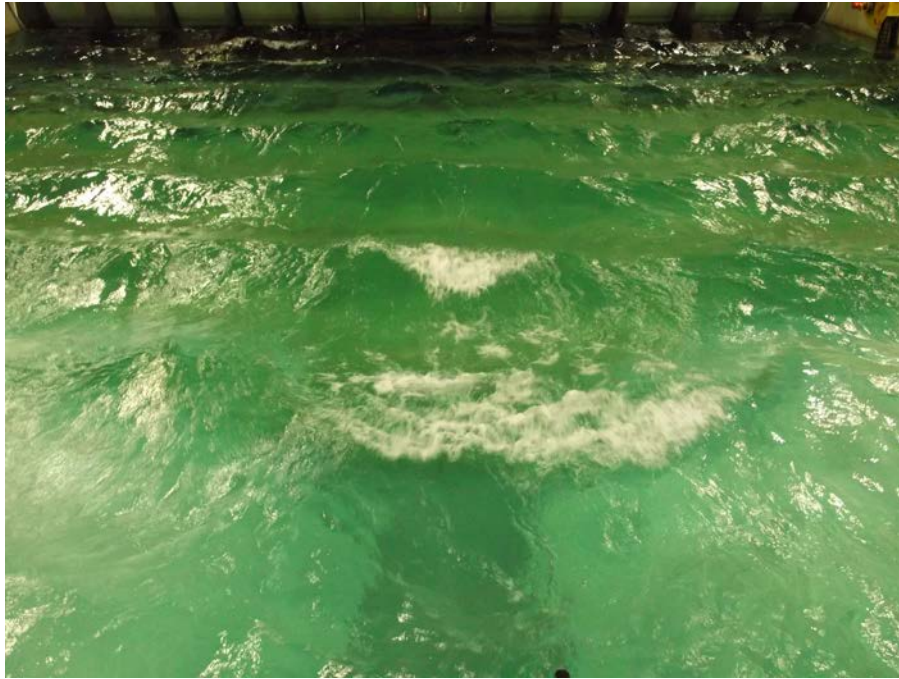


Figure VII.12 – Evolution de la cambrure de la houle

L'amplification chute ensuite brutalement jusqu'à la valeur de 0.6 environ, au dessus des bosses. La confrontation des deux figures précédentes nous montre que l'amplitude de la houle diminue au passage des bosses, en  $Y = 0m$  et  $Y = 0.9m$  alors que sa cambrure augmente. Ce phénomène est expliqué par le déferlement de la houle au milieu du bassin, comme le représente la figure (VII.13).



**Figure VII.13** – Photographie illustrant la décroissance de l'amplitude à l'approche des bosses, au niveau de l'axe médian du bassin. Condition U2 T2 H1.

L'amplification de l'amplitude de la houle existe donc bien entre les deux bosses mais est masquée par le déferlement. Ces conditions hydrodynamiques représentent un cas de propagation pour lequel l'approche linéaire devient discutable.

#### b) $H_2$

Nous présentons ici les résultats obtenus pour les conditions hydrodynamiques  $U_2 T_2 H_2$ . Avec de telles conditions hydrodynamiques la houle déferlait dans le bassin, rendant l'exploitation des résultats concernant l'évolution de l'amplitude plus difficile. D'ailleurs le déferlement de la houle est bien visible sur la figure (VII.14).



Figure VII.14 – Illustration du déferlement de la houle dans le bassin. Condition U2 T2 H2.

Nous observons en effet sur la figure (VII.15), montrant l'évolution de l'amplitude de la houle, que celle-ci diminue au cours de sa propagation. La cambrure de la houle présentée sur la figure (VII.16) montre elle aussi cette même tendance.

La figure (VII.15) représente l'évolution de l'amplitude de la houle.

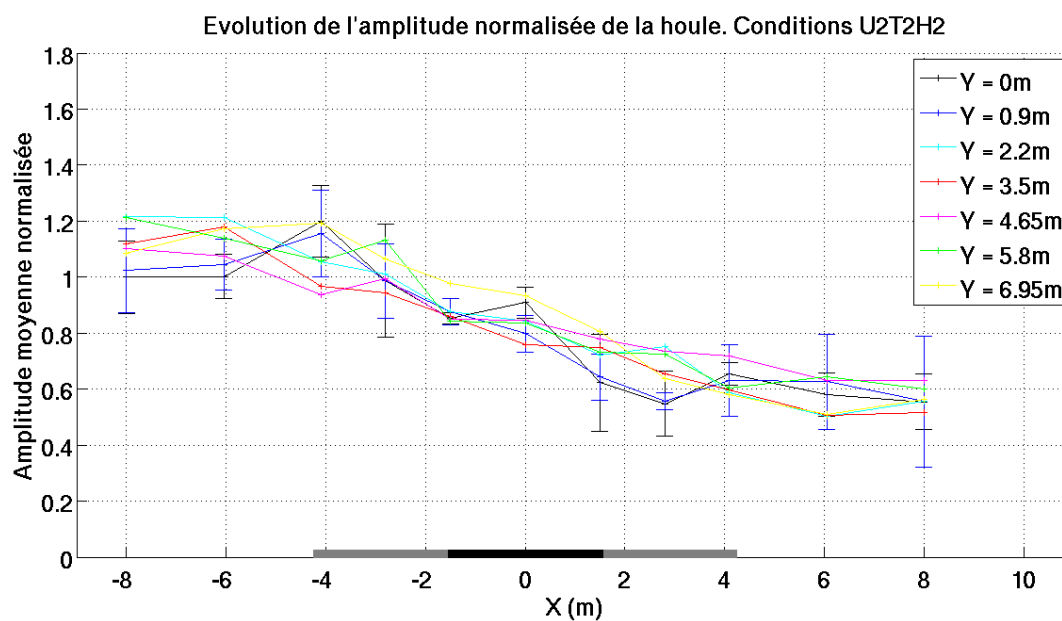


Figure VII.15 – Evolution de l'amplitude de la houle normalisée par l'amplitude mesurée au point  $(-8, 0)m$ , pour la condition de houle U2 T2 H2.

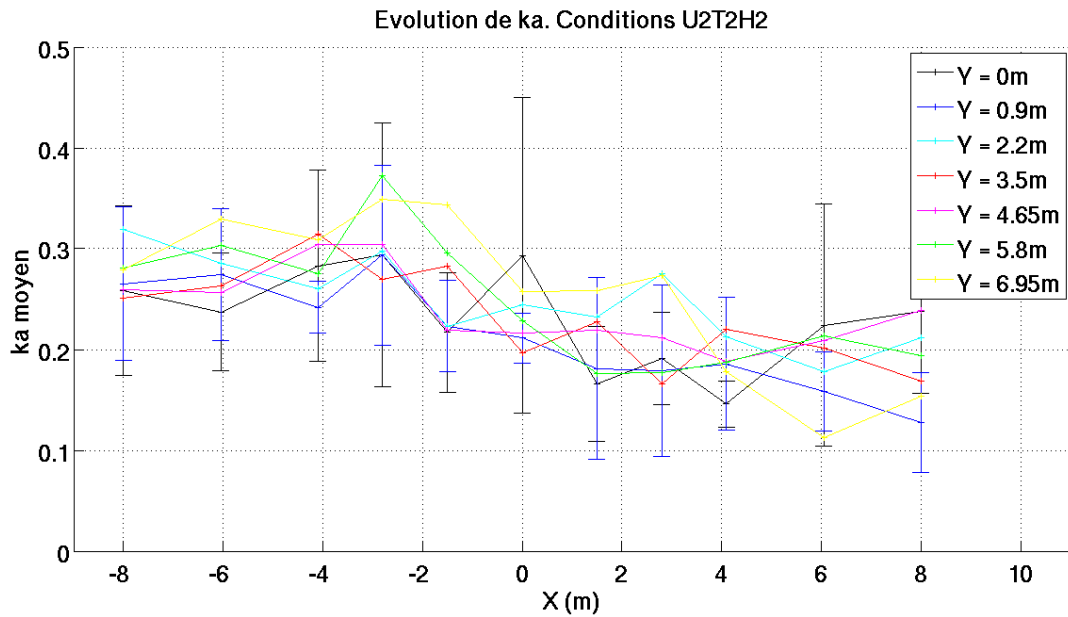


Figure VII.16 – Evolution de la cambrure de la houle. Condition U2 T2 H2.

La condition hydrodynamique  $U_2 T_2$  a fait apparaître une faible amplification lorsque la hauteur de la houle est  $H_1$ . En revanche, le déferlement pour la condition  $H_2$  occulte complètement un éventuel phénomène de focalisation.

### 3.1.3 Discussion sur l'amplification de la houle en fonction des caractéristiques hydrodynamiques

Nous représentons sur la figure (VII.17) pour chaque condition hydrodynamique l'amplitude moyenne de la houle le long de l'axe  $Y = 0$  normalisée par l'amplitude moyenne de la houle près des batteurs, en  $(X, Y) = (-8, 0)m$ .

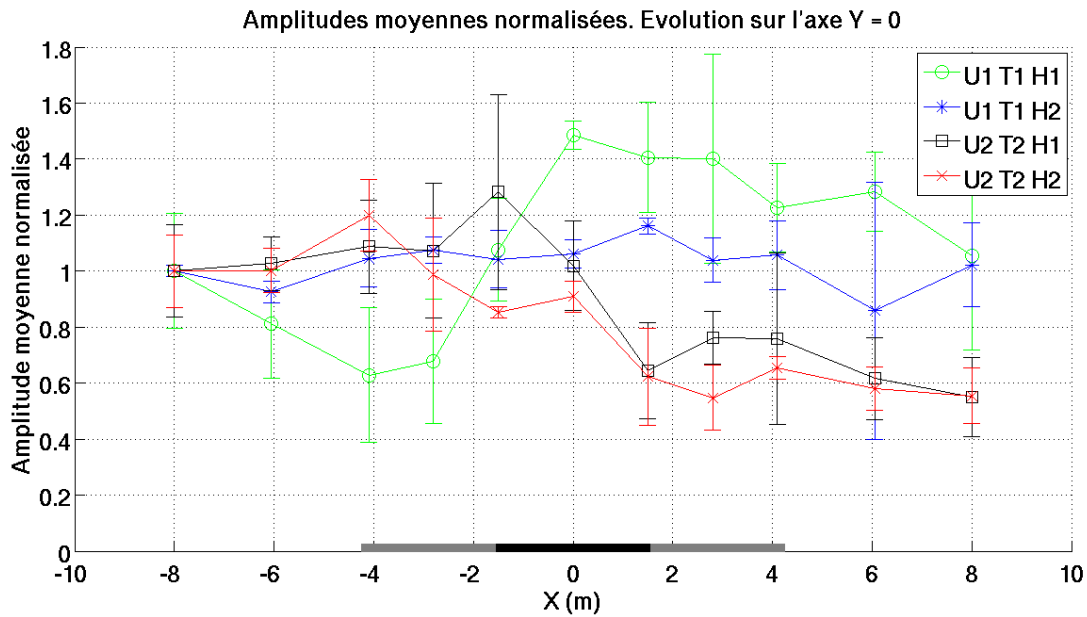


Figure VII.17 – Amplitude moyenne de la houle normalisée par la valeur moyenne de l’amplitude en  $X = -8m$  et écart-types.

Nous observons que la focalisation au centre du bassin, entre les deux bosses, est plus importante lorsque les conditions hydrodynamiques générées sont  $U_1 T_1 H_1$ . De plus, nous observons une décroissance de cette amplitude en aval des bosses. Ce comportement remet en question la linéarité du phénomène de focalisation au milieu du bassin, comme pour l’expérience de 2008 (Rey *et al.*, 2014). En effet si ce phénomène était linéaire, nous aurions observé, à courant établi identique et même fréquence de houle, le même taux d’amplification pour les deux hauteurs de houle.

Avec les conditions  $U_2 T_2 H_1$  et  $U_2 T_2 H_2$ , nous observons une augmentation de l’amplitude de plus de 20% en amont des bosses avant que la houle ne déferle. Toutes ces observations sont quantifiées dans le tableau (VII.1).

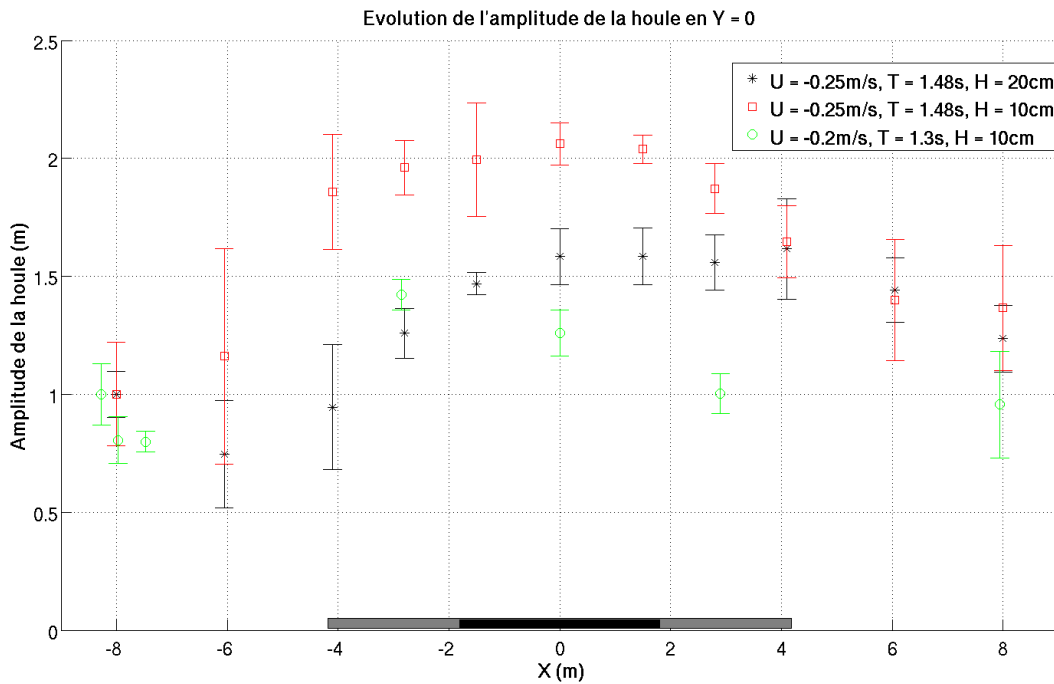
Amplification de la houle (%) par rapport à l'amplitude en $(X, Y) = (-8, 0)$						
Cond. hydro.	$X (m)$		-6	0	6	Remarques
	$Y (m)$					
$U_1 T_1 H_1$	0		-20	49	28	×
	6.95		-52	-48	-58	×
$U_1 T_1 H_2$	0		-7	6	-14	×
	6.95		8	9	-16	×
$U_2 T_2 H_1$	0		3	2	-4	Déferlement
	6.95		-10	7	-60	×
$U_2 T_2 H_2$	0		0	-9	-45	Déferlement
	6.95		17	-7	-44	Déferlement

**Tableau VII.1** – Synthèse de l'amplification de la houle en pourcentage au niveau des lieux remarquables du bassin. En orange : augmentation de l'amplitude de la houle. En bleu : diminution de l'amplitude de la houle

A la variabilité remarquée dans le taux d'amplification de la houle au milieu du bassin, s'ajoute celle au dessus des bosses, le long de l'axe  $Y = 6.95m$ .

Dans le cas  $U_1, T_1, H_1$ , le phénomène d'amplification observé au milieu du bassin atteint près de 50%. Ce phénomène est comparable à celui observé lors des précédentes campagnes de mesure menées en 2007 (Guinot, 2010) et en 2008 (Rey et al., 2014). La figure (VII.18) représente l'amplitude normalisée de la houle mesurée lors de ces deux campagnes, pour des conditions de propagation comparables, c'est-à-dire pour des houles se propageant à contre-courant en profondeur infinie. Ces résultats montrent en effet un taux d'amplification de 50% pour les conditions de type  $U_2, T_2, H_2$  et lorsque  $U = -0.2m.s^{-1}$ ,  $T = 1.3s$  et  $H = 10cm$ . Pour les conditions de type  $U_2, T_2, H_1$  cette amplification atteint même 100%.





**Figure VII.18** – Amplitude moyenne de la houle normalisée par la valeur moyenne de l’amplitude en  $X = -8m$  et écart-types. Campagnes de 2007 et de 2008

Les résultats différents observés pour les conditions hydrodynamiques de type  $U_2$ ,  $T_2$ ,  $H_1$  et  $U_2$ ,  $T_2$ ,  $H_2$  générées lors des campagnes de 2008 et de 2013 proviennent de la méthode de calibration de la houle en présence de courant, contrairement aux expériences de 2013. Lors de ces dernières expériences, cette différence a conduit à la génération de houles plus cambrées. L’ensemble de ces expériences montrent que quelle que soit l’intensité du courant et la période de la houle, un phénomène d’amplification plus ou moins marqué est observé. Cependant, à ce stade de notre étude, le taux d’amplification n’est pas prévisible. Afin de poursuivre cette analyse, l’étude de l’évolution du champ de phase est menée.

### 3.2 Evolution de la phase de la houle

Afin de compléter l’analyse réalisée sur l’évolution de l’amplitude de la houle nous représentons ici le long de chaque axe transverse le déphasage de la houle par rapport à sa phase en  $Y = 0$ .

3.2.1 Condition  $U_1, T_1$

a)  $H_1$

Avec ces conditions hydrodynamiques, nous observons sur les figures (VII.19) et (VII.20) un retard de phase de la houle à l'approche des bosses sur l'axe médian du bassin.

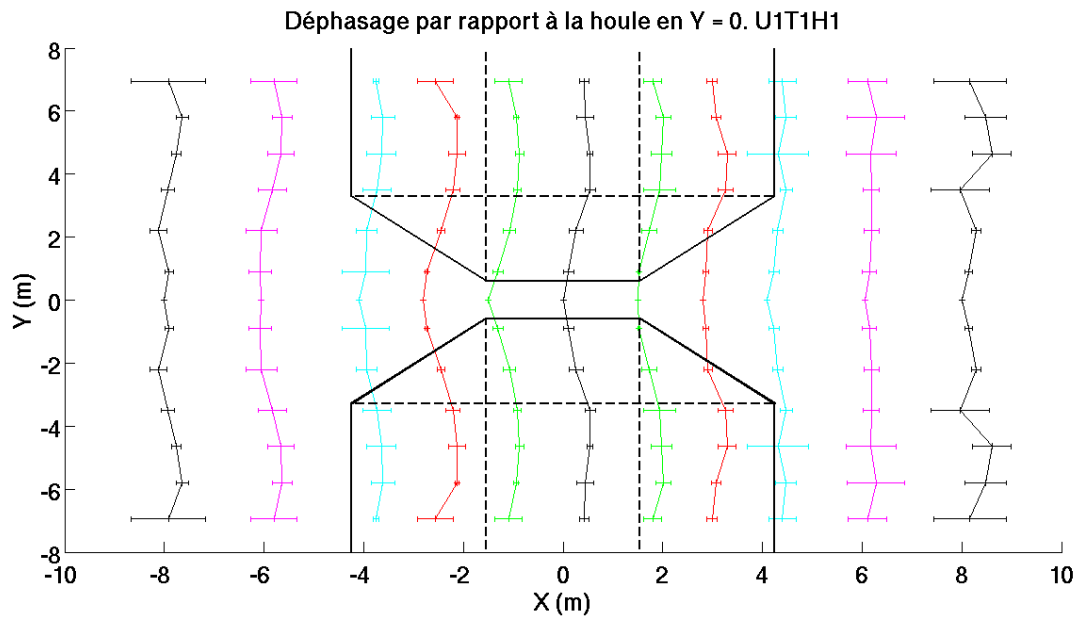


Figure VII.19 – Lignes de crête de la houle pour les conditions  $U_1, T_1, H_1$ .

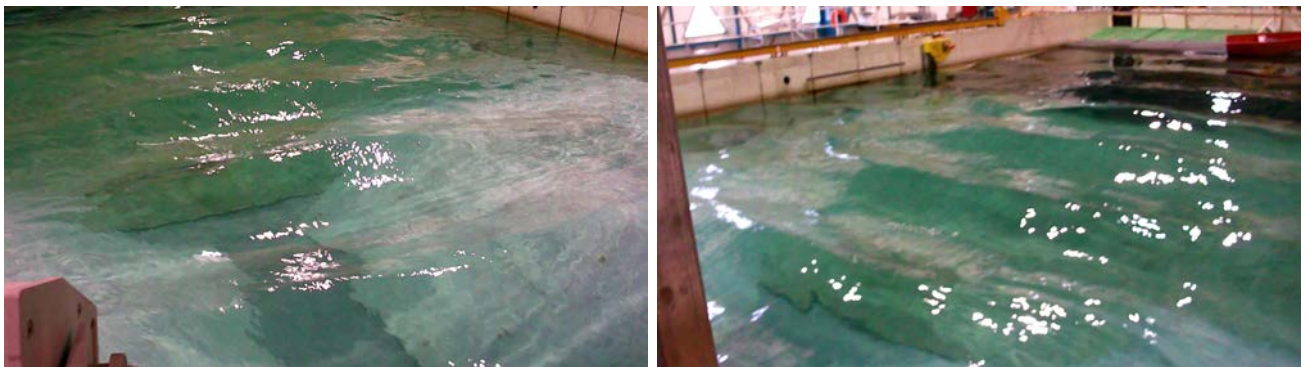


Figure VII.20 – Evolution de la phase de la houle. Conditions hydrodynamiques  $U_1 T_1 H_1$ .  
 A gauche : Déphasage de la houle en amont des bosses.  
 A droite : Dislocation de la phase en aval des bosses.

En revanche, en s'éloignant de cet axe nous observons une avance de phase de la houle. La houle semble donc en retard de phase entre les bosses et en avance de phase au dessus

## Chapitre VII. Observation des interactions houle-courant-topographie

de celles-ci. La figure (VII.20), photographie de gauche, permet d'observer ce phénomène. Un phénomène analogue à celui-ci avait été observé lors de la campagne de 2008 (Rey *et al.*, 2014). En aval des bosses, l'analyse des données montre des écart-types au niveau des positions  $Y = \{4.65m, 5.8m, 6.95m\}$ . En observant la figure (VII.20), photographie de droite, nous pouvons voir que la houle se disloque au niveau des parois du bassin. A cet endroit, la houle est gaufrée, ce qui explique la valeur des écart-types mesurés à ces endroits.

### b) $H_2$

Nous représentons ici l'évolution des lignes de crête lorsque la hauteur d'eau est  $H_2$

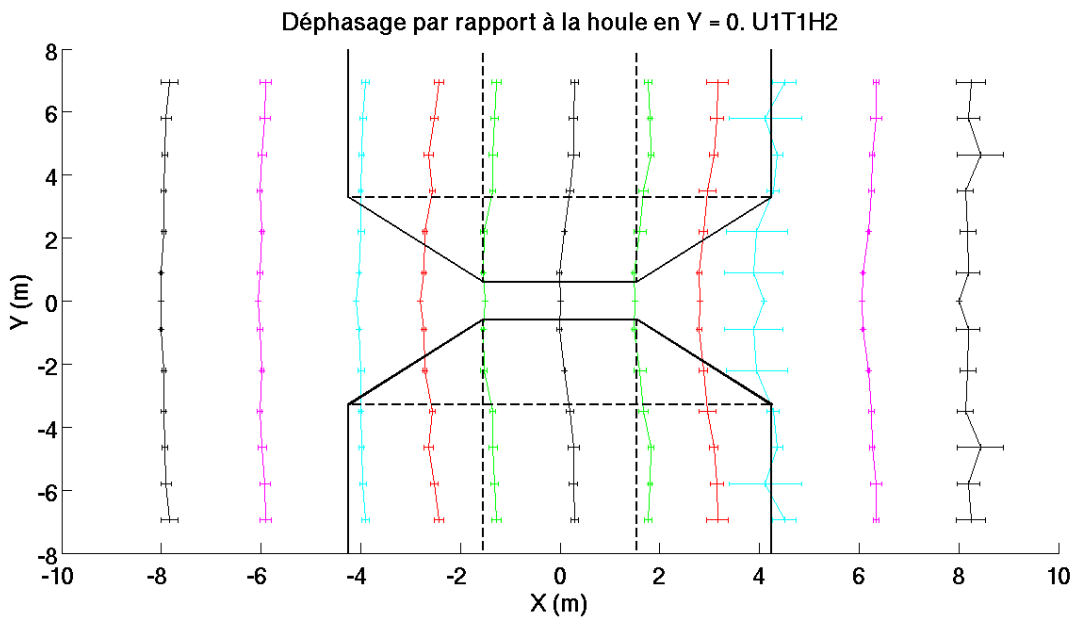


Figure VII.21 – Lignes de crête de la houle pour les conditions  $U_1, T_1, H_2$

Avec une même période et une même intensité de contre-courant, la phase de la houle varie très peu selon l'axe transversal ( $OY$ ). En effet, nous n'observons ni d'avance de phase ni de retard de phase significatifs pour ces conditions hydrodynamiques. D'ailleurs la figure (VII.22) le confirme.



**Figure VII.22** – Phase de la houle en amont des bosses (à gauche) et sur les bosses (à droite) pour les conditions hydrodynamiques  $U_1, T_1, H_2$ .

La hauteur de la houle a ici une influence considérable sur les interactions entre la houle le courant, puisque la phase d'une houle de plus grande hauteur sera d'autant moins perturbée que celle d'une houle de plus faible hauteur. On retrouve ici un comportement similaire à celui observé lors de la campagne de 2008 (Rey *et al.*, 2014).

### 3.2.2 Condition $U_2, T_2$

#### a) $H_1$

Pour les conditions de contre-courant  $U_2$ , avec une houle de hauteur  $H_1$ , les lignes de crête sont représentées sur la figure (VII.23).

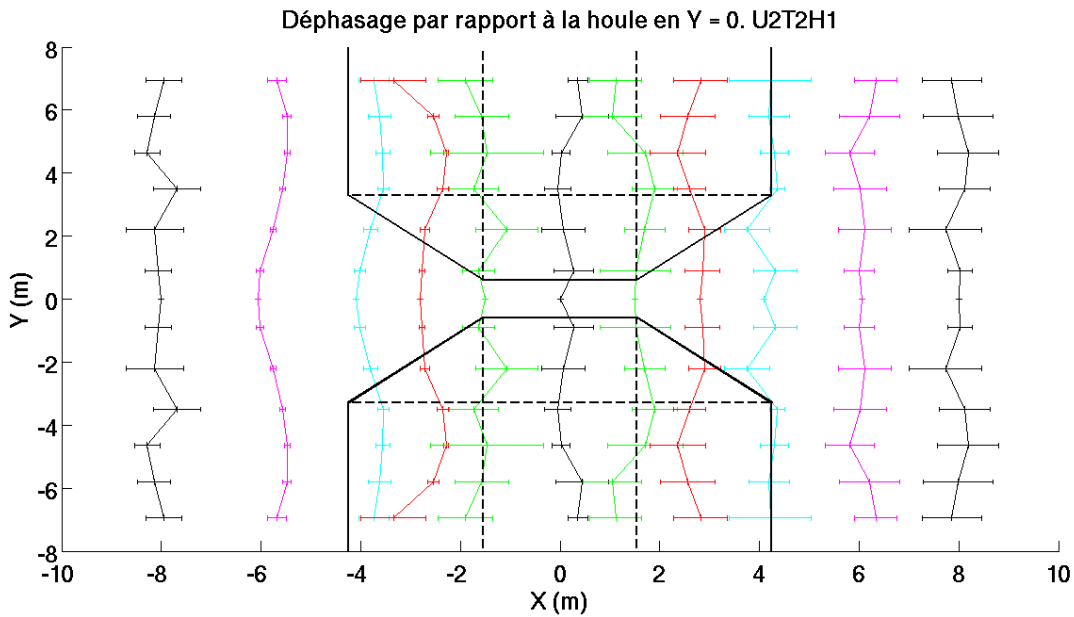


Figure VII.23 – Lignes de crête de la houle pour les conditions  $U_2, T_2, H_1$ .

En aval des bosses, c'est-à-dire en  $X < 2.8m$  nous pouvons observer le même phénomène d'avance de phase loin de l'axe médian du bassin et un retard de phase plus près de l'axe  $Y = 0$  que nous avons observé avec les conditions hydrodynamiques  $U_1, T_1, H_1$ , et en 2008. En aval des bosses, nous pouvons observer sur la figure (VII.24), photographie de droite, que la houle est gauffrée. Nous ne pouvons plus conclure sur une éventuelle avance ou retard de phase, ce qui explique l'amplitude des écart-types calculés.

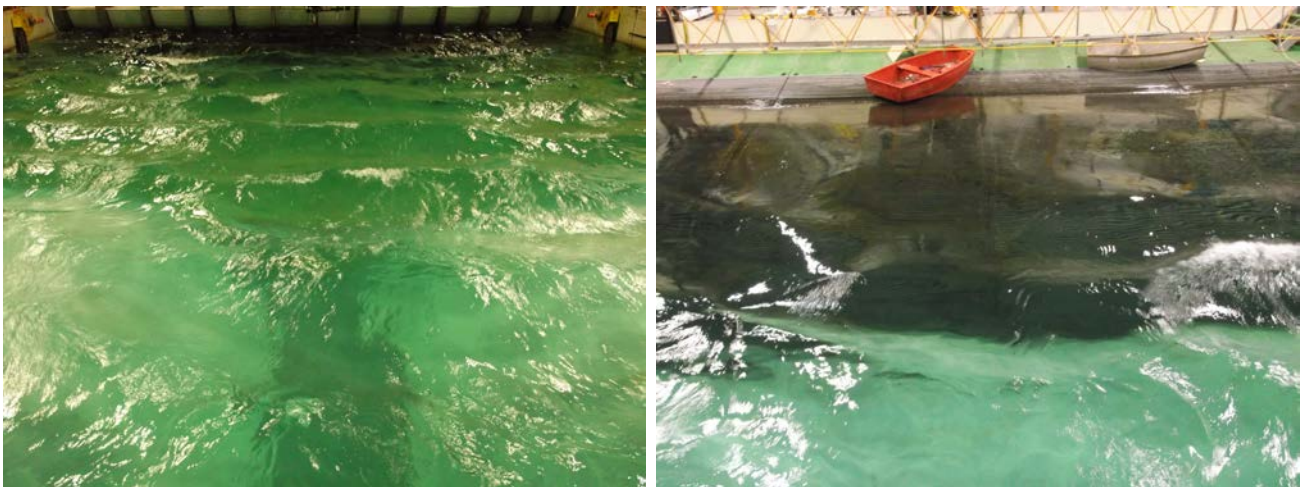


Figure VII.24 – Phase de la houle en amont des bosses (à gauche) et en aval des bosses (à droite) pour les conditions hydrodynamiques  $U_2, T_2, H_1$ .

b)  $H_2$

Lorsque le contre-courant est  $U_2$  et que la hauteur de houle est  $H_2$  les lignes de crête sont représentées sur la figure (VII.25).

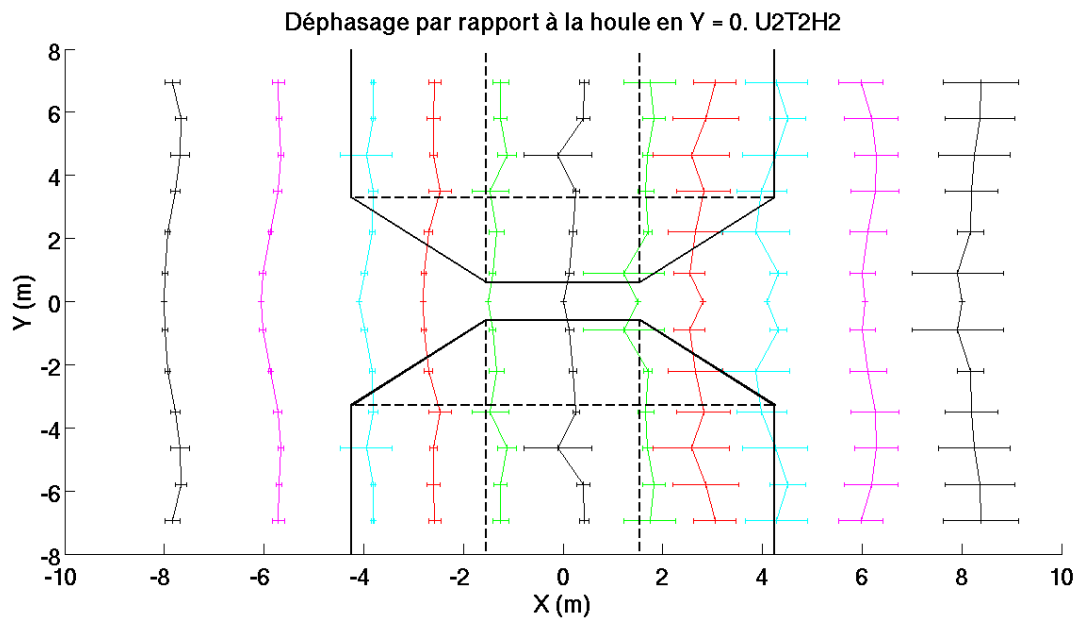


Figure VII.25 – Lignes de crête de la houle pour les conditions  $U_2, T_2, H_2$ .

A l'image des résultats issus pour les conditions  $U_1, T_1, H_2$  la phase de la houle, lorsque sa hauteur est  $H_2$ , est bien moins perturbée que lorsque sa hauteur est  $H_1$ . Les écart-types importants que nous pouvons observer en aval des bosses sont représentatifs de la présence de dislocations des crêtes, visibles sur la figure (VII.26).



**Figure VII.26** – Phase de la houle au niveau des bosses pour les conditions hydrodynamiques  $U_2$ ,  $T_2$ ,  $H_2$ .

### 3.2.3 Synthèse

En comparant les résultats précédents, nous avons pu remarquer que, en amont des bosses, la phase des houles de hauteur  $H_1$  est davantage affectée que celle des houles de hauteur  $H_2$ . Nous observons en effet un phénomène de défocalisation de la houle lorsque la hauteur initiale est  $H_2$ . Ce phénomène est visible quelle que soit l'intensité du contre-courant généré. En amont des bosses les houles de plus forte amplitude semblent donc être moins sensibles, ou dans une plus faible mesure, aux variations du milieu que les houles de plus faible amplitude.

La houle se propageant en profondeur infinie, elle n'est pas sensible aux variations de la topographie. Seul le courant établi, présentant de fortes variations d'intensité dans le plan horizontal, (figures (VII.2) et (VII.4)) est susceptible d'interférer avec la houle. Nous ne nous sommes pas encore intéressés à l'évolution de ce champ de courant lorsque la hauteur de houle générée varie. En effet, les résultats précédents suggèrent que l'interaction entre la houle et le courant dépend, à courant établi et période fixée, de la hauteur de la houle. Une houle de hauteur  $H_2$ , transportant plus d'énergie qu'une houle de hauteur  $H_1$  interfère peut être davantage sur le champ de courant en homogénéisant son profil vertical sur une plus grande profondeur. Une première étude des interactions entre la houle et le courant consiste en l'analyse de la dérive de Stokes induite par la houle. La dérive de Stokes dont la formulation est basée sur une représentation lagrangienne de l'écoulement n'est pas mesurable directement par les vélocimètres utilisés lors de la campagne de mesure. Cependant son estimation nous donnera des informations sur une éventuelle profondeur caractéristique des interactions entre la houle et le courant. Nous analyserons ensuite une éventuelle homogénéisation du courant en comparant son profil vertical dans

différents lieux du bassin pour les différentes conditions hydrodynamiques.

# 4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

## 4.1 Dérive de Stokes

Nous avons mis en évidence dans le chapitre 1 que la dérive de Stokes est une cause de cisaillement du profil vertical du courant. En considérant que le courant seul est constant sur la colonne d'eau, la dérive de Stokes  $U_s$  s'écrit, dans une représentation lagrangienne de l'écoulement (Stokes (1849), Rascle (2007))

$$U_s = \sigma k a^2 \frac{\cosh(2k(z+h))}{2 \sinh(kh)^2} \quad (\text{VII.1})$$

avec  $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$ . Nous estimons sur la figure (VII.27) sa valeur pour les différentes conditions hydrodynamiques à différentes profondeurs. Pour cela nous tenons compte de l'intensité du courant mesurée par les Vectrino aux profondeurs considérées.



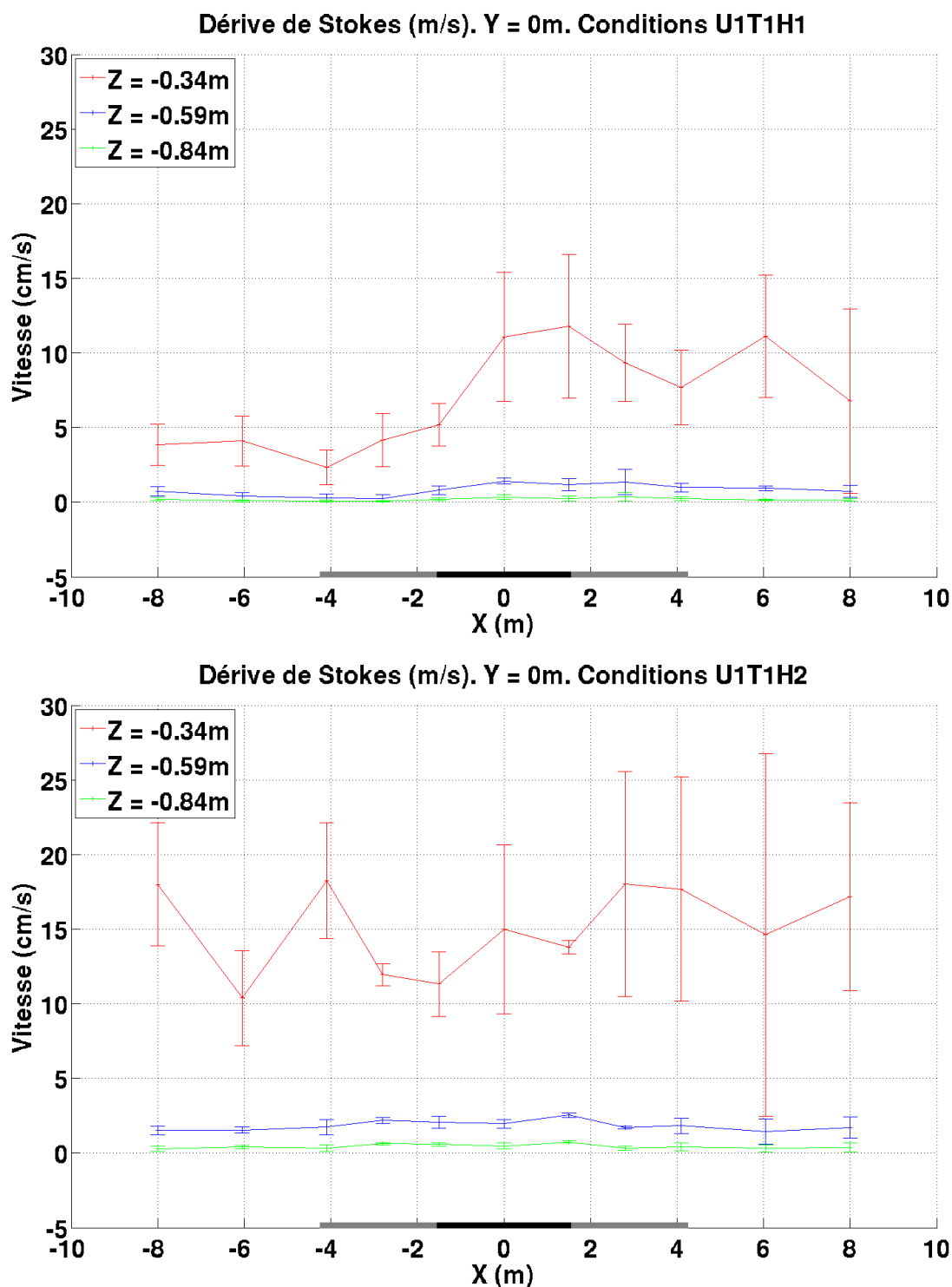


Figure VII.27 – Estimation de la dérive de Stokes en  $Y = 0$ . Conditions  $U_1, T_1, H_1$  et  $U_1, T_1, H_2$

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

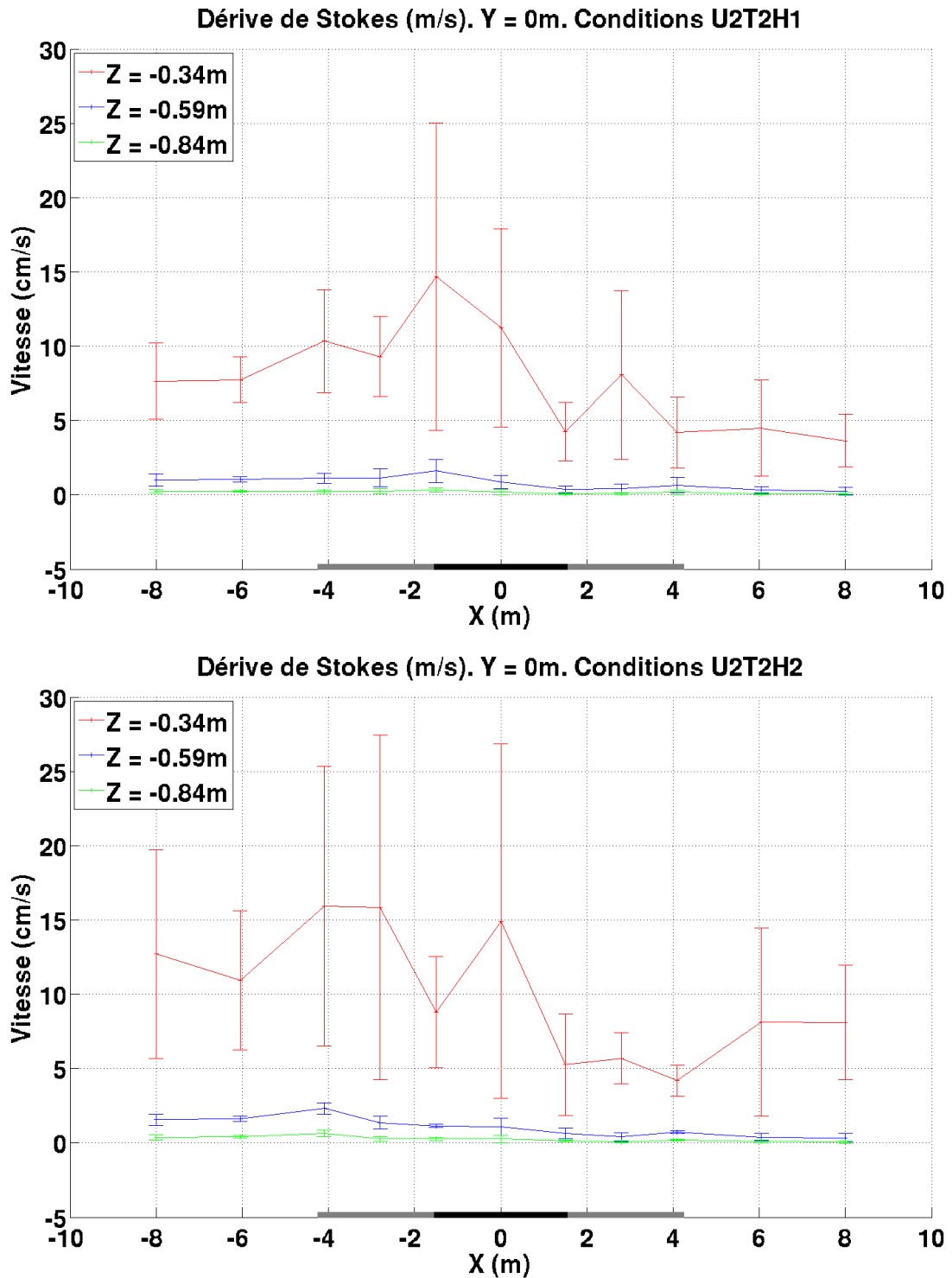


Figure VII.28 – Estimation de la dérive de Stokes en  $Y = 0$ . Conditions  $U_2, T_2, H_1$  et  $U_2, T_2, H_2$

D'après les figures (VII.2) et (VII.4), l'ordre de grandeur de l'intensité du courant  $U_1$  est, en

$Z = -0.59m$ ,  $0.2m.s^{-1}$ . Celle du courant  $U_2$  est  $0.3m.s^{-1}$ . Or sur les figures (VII.27) et (VII.28), la dérive de Stokes est de l'ordre de  $1cm.s^{-1}$  pour des profondeurs d'eau supérieures à  $0.59m$ . A ces profondeurs, la dérive de Stokes est donc négligeable devant l'intensité du courant moyen. En revanche, plus près de la surface, en  $Z = -0.34m$ , elle est de l'ordre de  $0.1m.s^{-1}$  pour la condition  $U_1$ . Elle est de l'ordre de  $0.2m.s^{-1}$  pour la condition  $U_2$ . Ces valeurs sont comparables à l'intensité du courant mesurée en  $Z = 0.59m.s^{-1}$ . La dérive de Stokes a donc un ordre de grandeur comparable à l'intensité du courant près de la surface libre. Cette vitesse, issue d'une description lagrangienne de l'écoulement ne peut pas être mesurée par des vélocimètres fixes tels que nous avons déployés dans le bassin. En effet ceux-ci nous permettent seulement de mesurer le courant moyen dans une description eulérienne. Toutefois les ordres de grandeurs similaires de ces vitesses semblent suggérer une interaction forte entre la houle et le courant près de la surface en  $Z \geq -0.59m$ , d'autant plus importante lorsque l'amplitude de la houle est la plus grande.

### 4.2 Evolution du profil de courant avec et sans houle

Le moulinet à hélice et les Vectrino nous ont permis d'acquérir les mesures du champ de courant moyen longitudinal, pour le moulinet, et dans les trois directions de l'espace pour les Vectrino. Nous présentons dans un premier temps les mesures acquises par le moulinet. Nous rappelons ici que le moulinet était positionné à une profondeur fixée ( $Z = -2m$ ) et à une côte  $Y = 1m$  fixée. Ces résultats nous donnerons une première tendance sur l'évolution du courant au niveau de ces points de mesure. Ces résultats seront complétés ensuite par l'analyse des mesures des Vectrino qui nous ont permis de mesurer le courant en quadrillant finement l'ensemble du bassin.

#### 4.2.1 Champ de courant en $(Y, Z) = (-1, -2)m$

Le moulinet à hélice nous permet de comparer, sur la figure (VII.29) le champ de vitesse longitudinal en  $(Y, Z) = (-1, -2)m$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

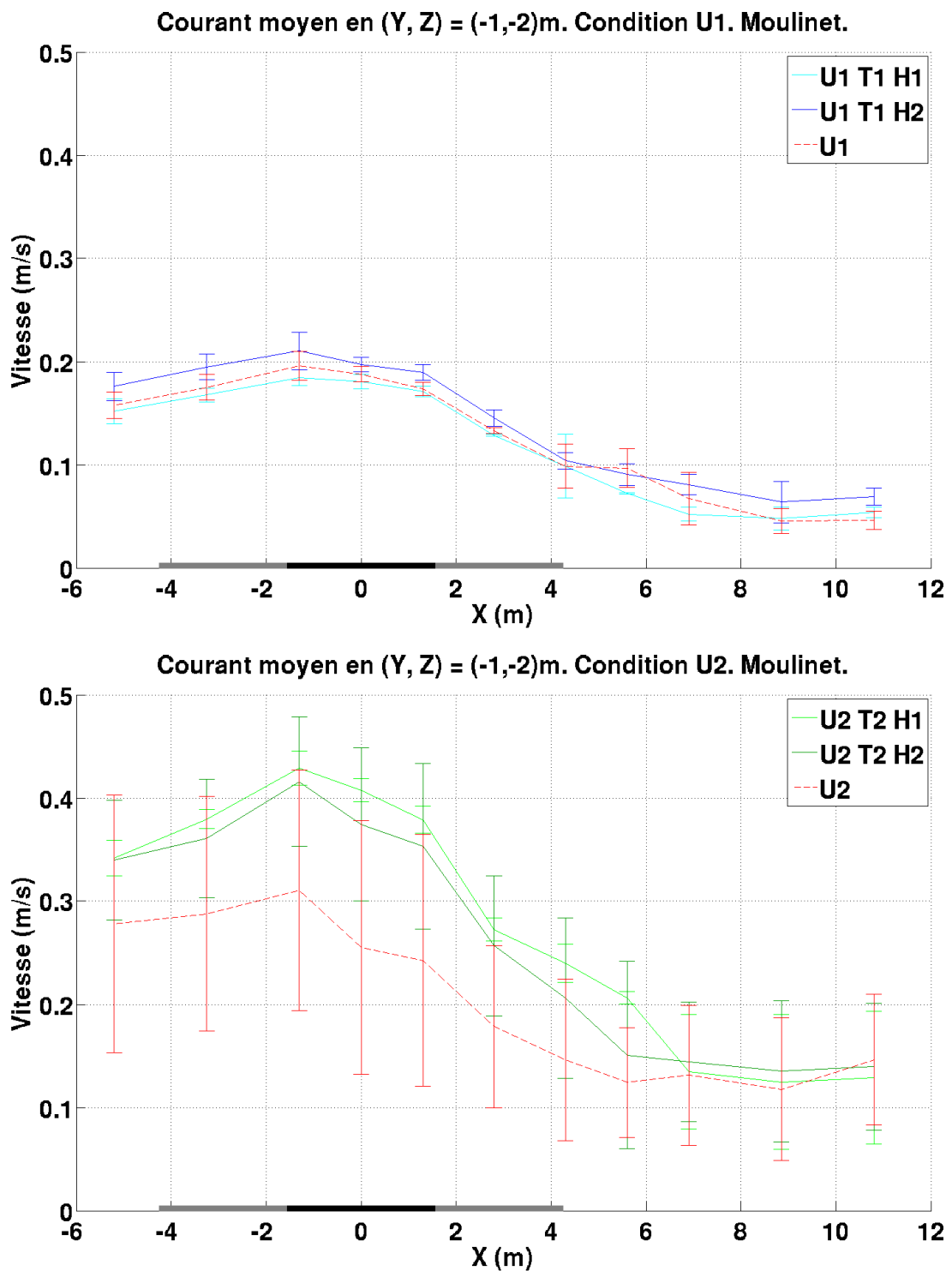


Figure VII.29 – Intensité du courant mesurée avec le moulinet à hélice.

Sur le graphe du haut, nous observons que le profil du courant semble peu perturbé par

la présence de la houle. Au niveau de ces points de mesure les interactions houle-courant sont donc négligeables.

En revanche, un tout autre comportement est observé pour les conditions de houle  $(U_2, T_2)$ . Nous pouvons observer, en amont des bosses et au dessus de celles-ci, que l'intensité moyenne du contre-courant est plus élevée, de l'ordre de 33%, par rapport à l'intensité du contre-courant seul. Cela est observé pour les deux hauteurs de houle générées. Ce résultat fait survenir plusieurs commentaires. Dans la mesure où la houle ralentit le contre-courant en surface, ce dernier est accéléré plus en profondeur, par conservation de la masse. La hauteur de la houle est ainsi, pour les conditions hydrodynamiques  $(U_2, T_2)$  et contrairement aux conditions  $(U_1, T_1)$ , un paramètre influant sur l'intensité du courant moyen à cette profondeur notamment en amont des bosses, là où l'écart le plus important se produit. D'autre part, les écart-types beaucoup plus grands pour les conditions de courant  $U_2$  que pour  $U_1$  suggèrent la présence de structures tourbillonnaires, générées par la présence d'un courant plus fort.

### 4.2.2 Profil vertical du courant, condition de courant $U_1$

Nous représentons le profil vertical du courant au niveau des différents lieux de mesure décrits dans le chapitre VI pour les essais réalisés avec une condition de courant  $U_1$ . Nous comparons le profil du courant établi seul avec celui établi en présence de la houle.

L'intensité du champ de courant seul représenté sur les figures suivantes est la moyenne des intensités du courant seul calculées à partir d'une transformée de Fourier à fenêtre glissante, de largeur 5s. Les écart-types représentés sont associés à cette moyenne. Pour les essais réalisés avec la houle, l'intensité moyenne du courant est calculée par transformée de Fourier sur l'ensemble du signal temporel.

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

---

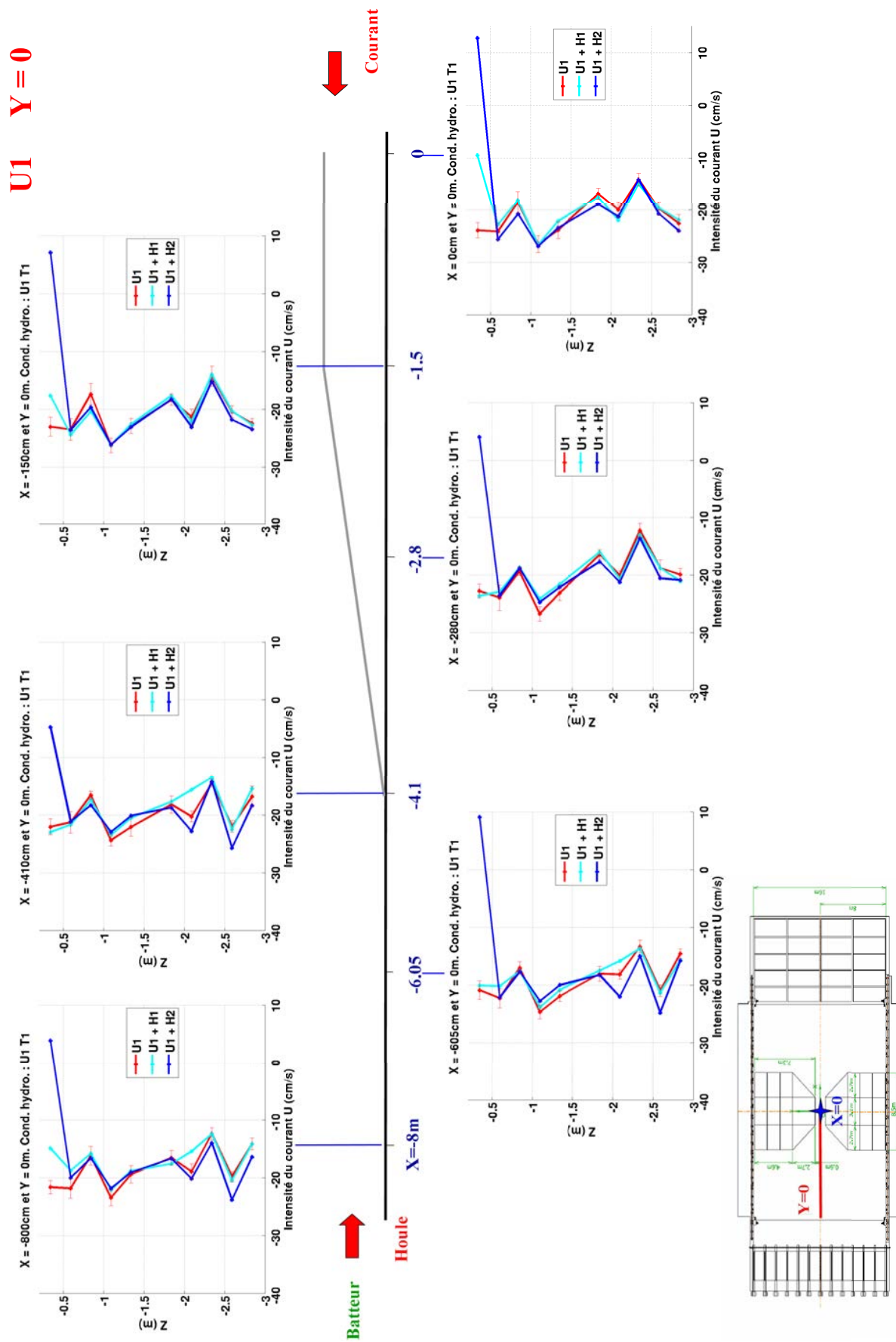


Figure VII.30 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0m$  et  $Y = 0m$ . Condition  $U_1$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

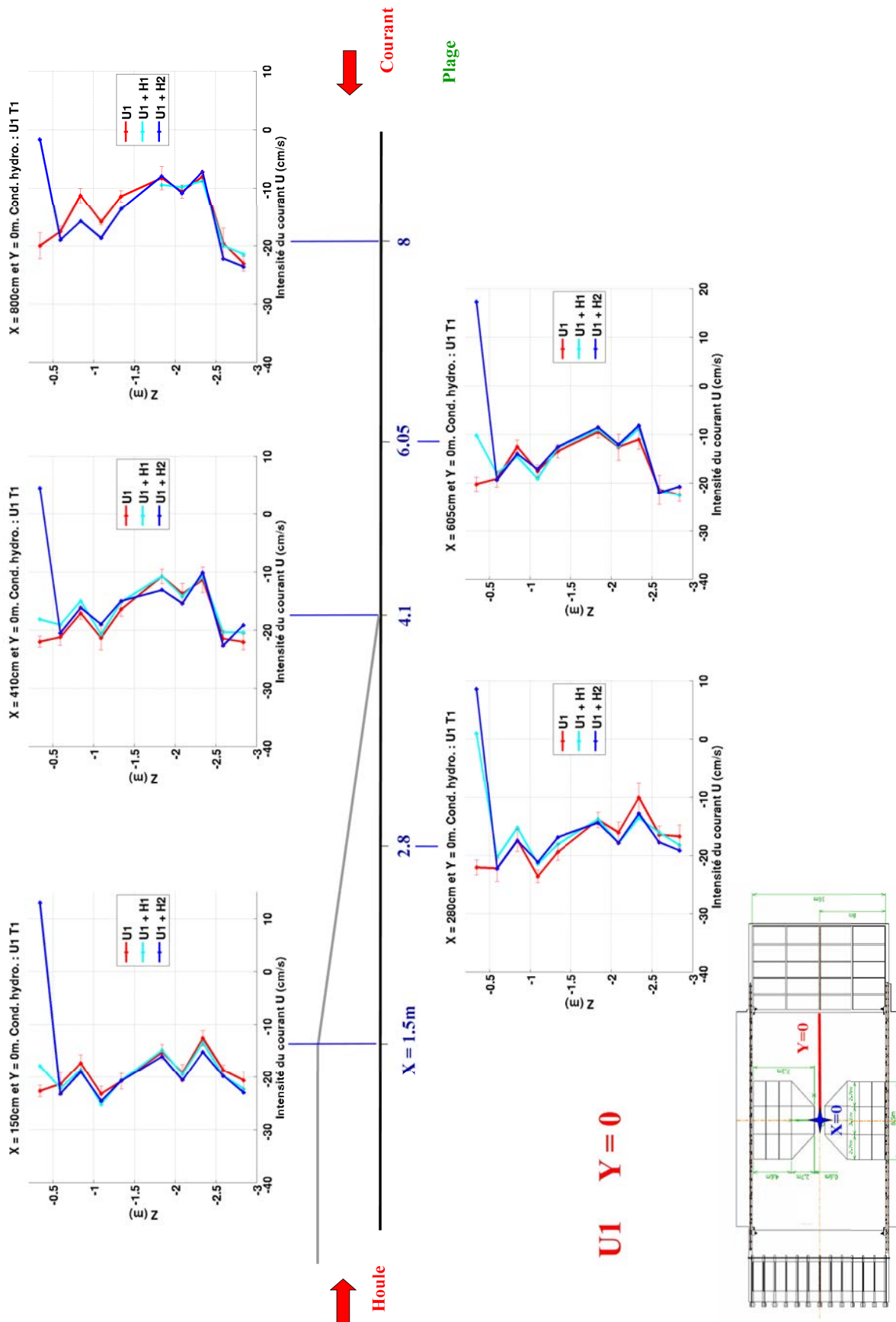


Figure VII.31 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0m$  et  $Y = 0m$ . Condition  $U_1$ .



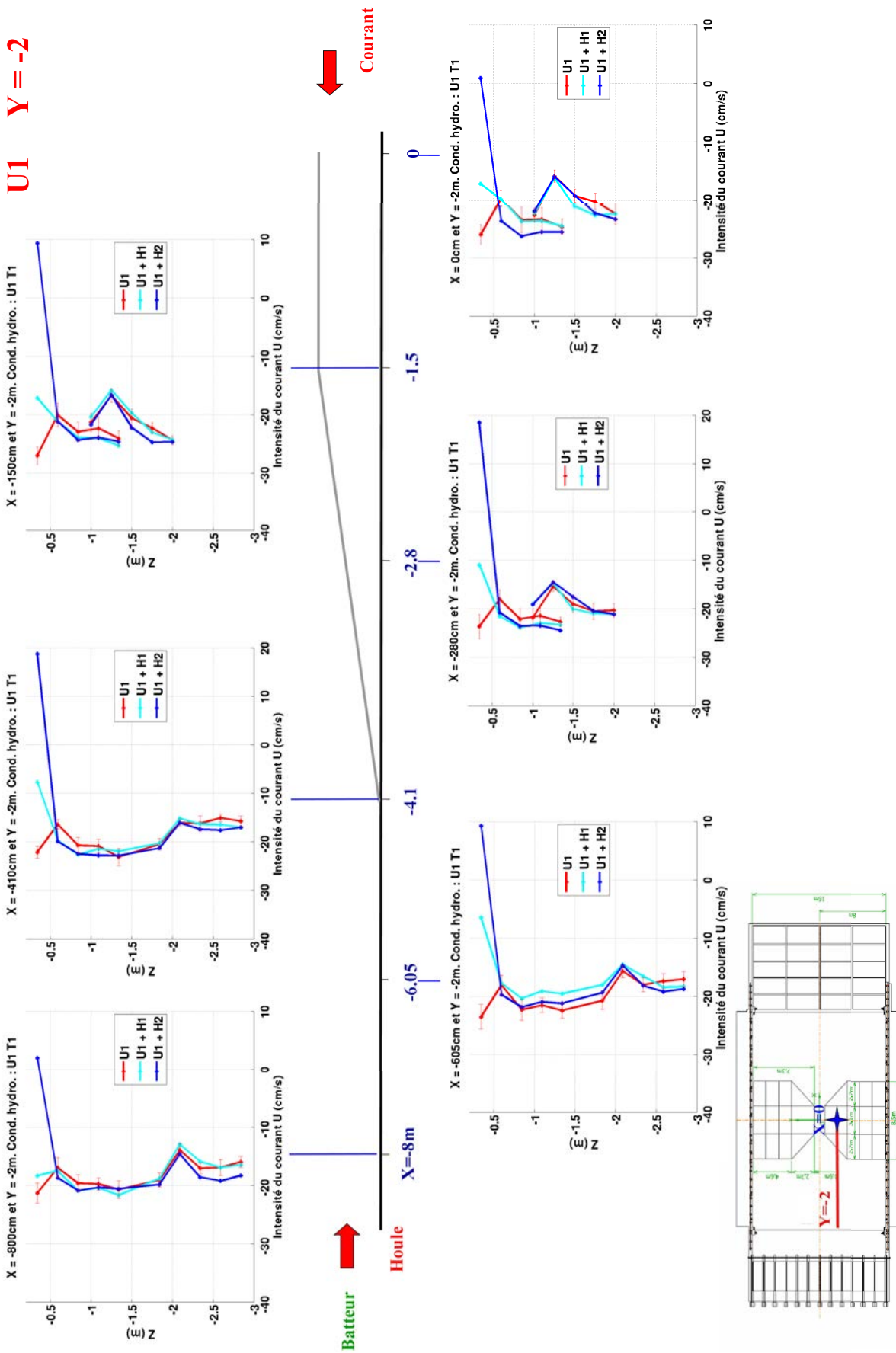


Figure VII.32 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0\text{m}$  et  $Y = -2\text{m}$ . Condition  $U_1$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

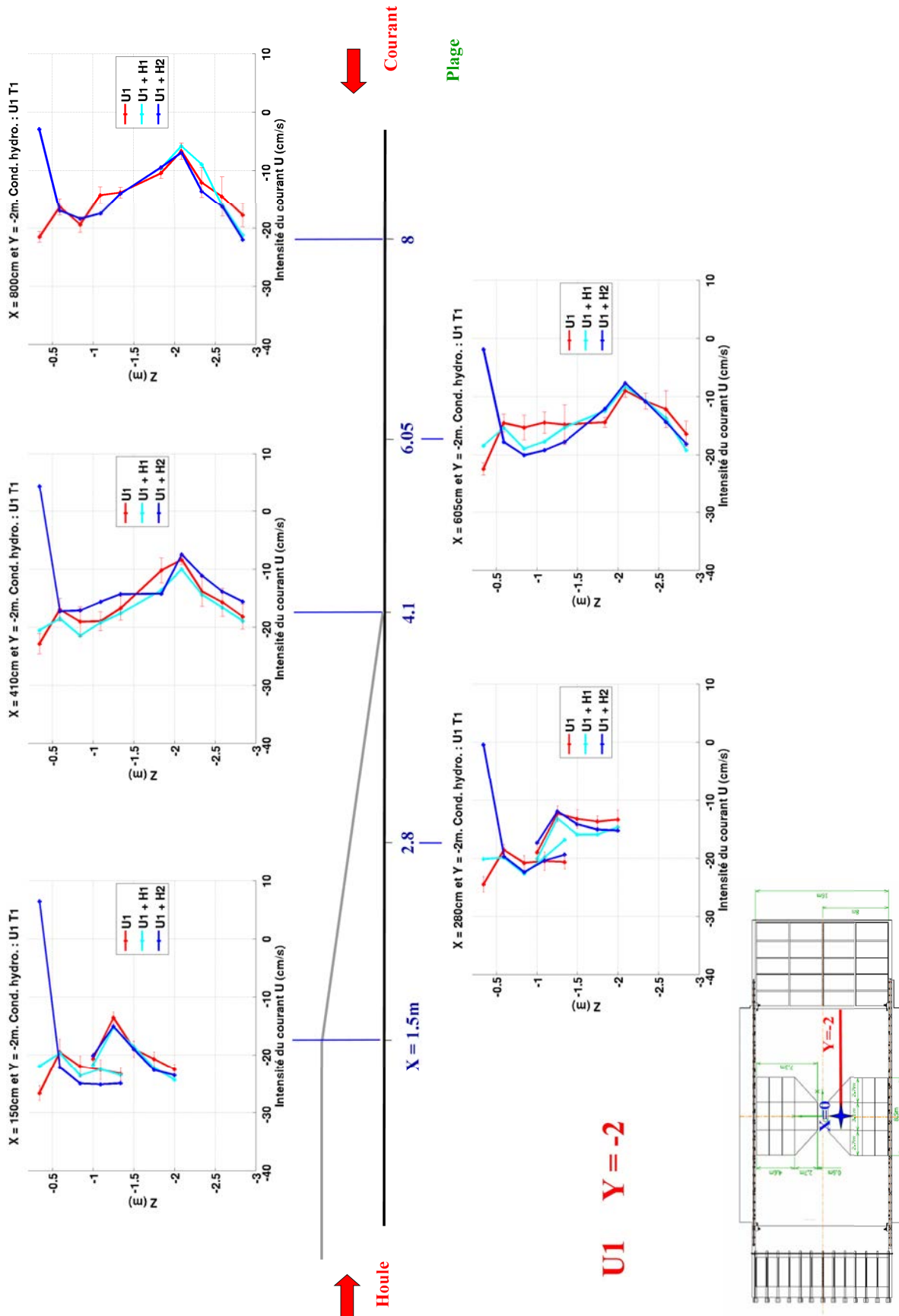


Figure VII.33 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0m$  et  $Y = -2m$ . Condition  $U_1$ .

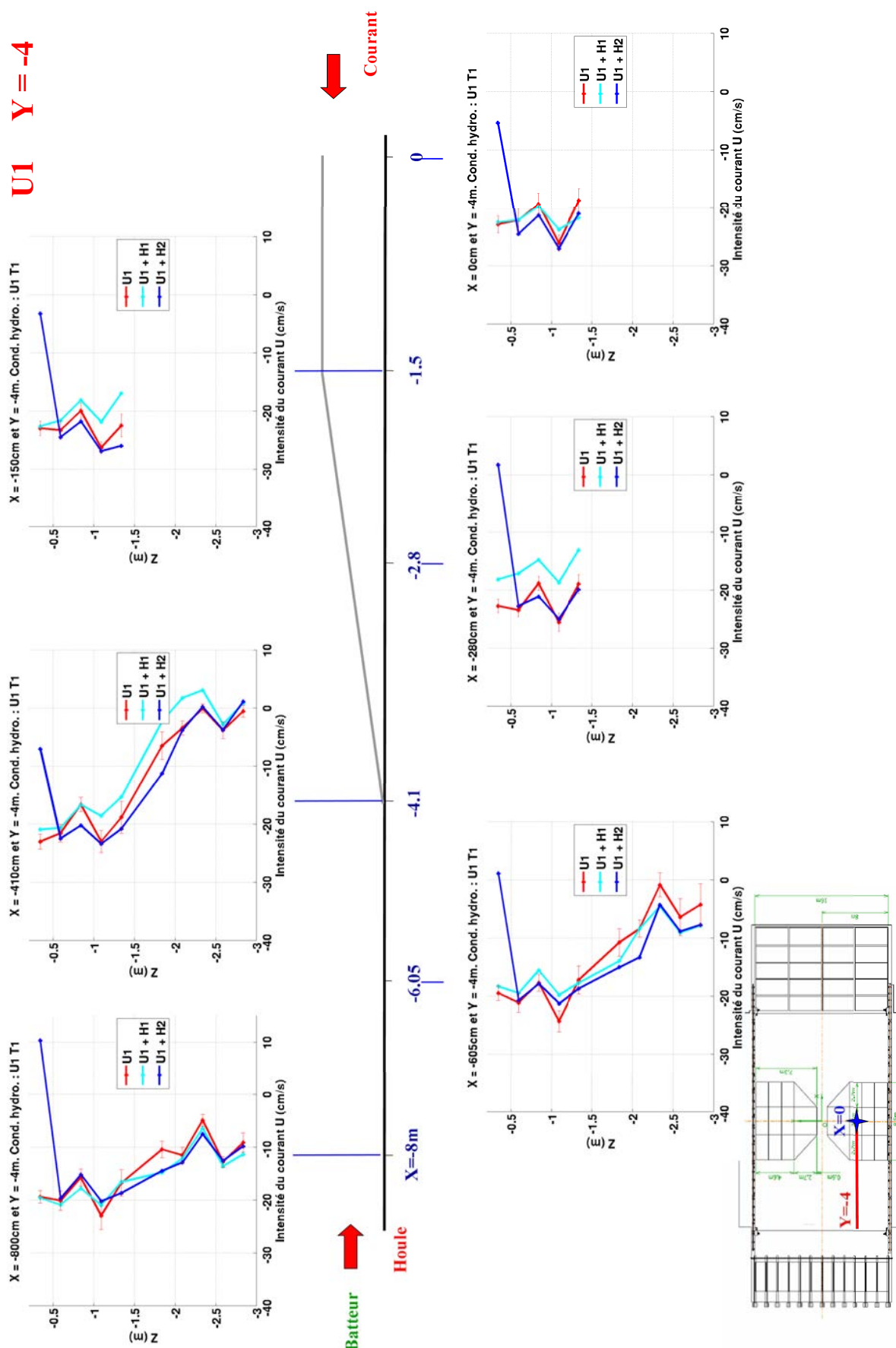


Figure VII.34 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0m$  et  $Y = -4m$ . Condition  $U_1$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

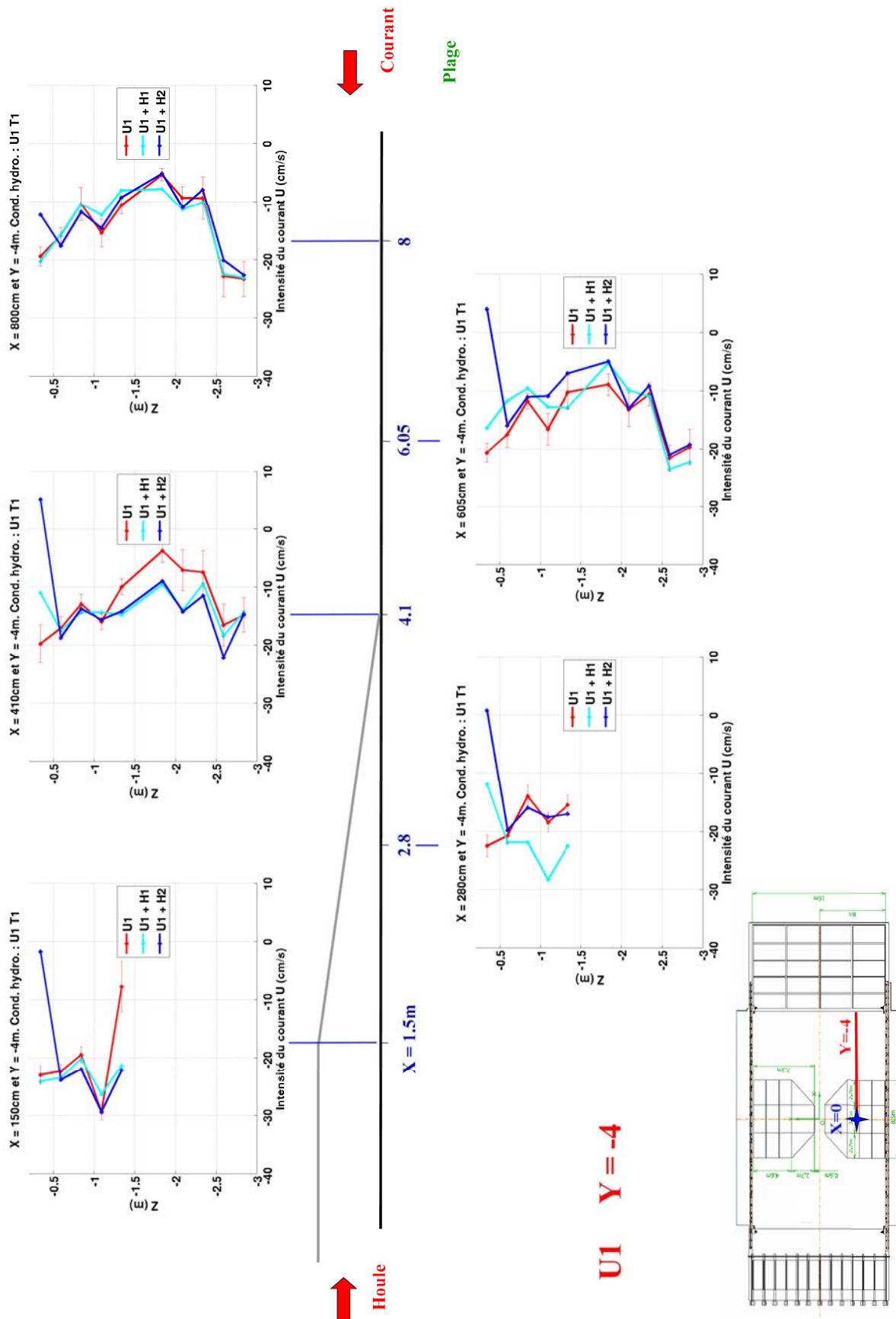


Figure VII.35 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0$ m et  $Y = -4$ m. Condition  $U_1$ .

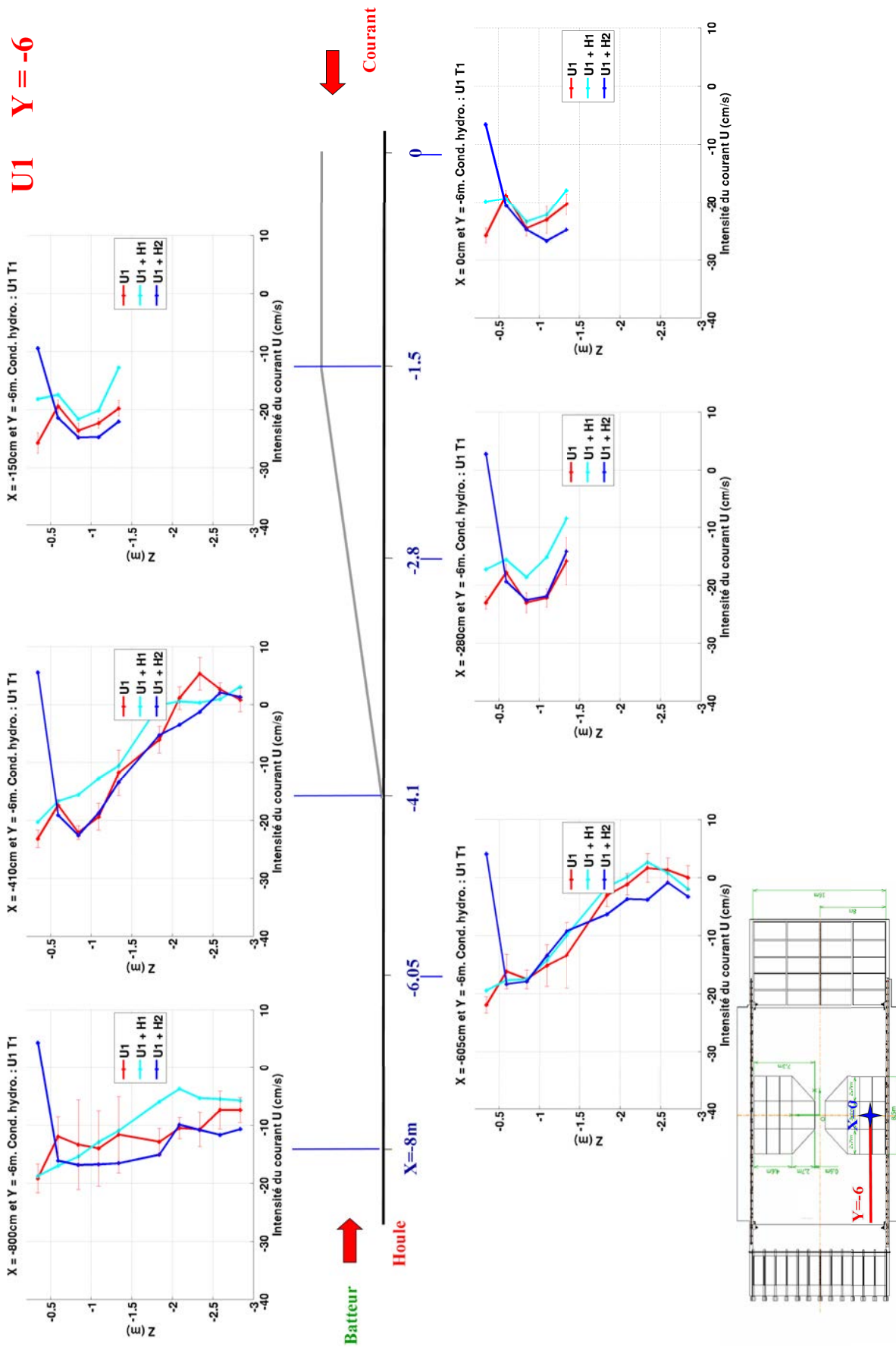


Figure VII.36 – Champ de courant longitudinal, en  $X = 0\text{m}$  et  $Y = -6\text{m}$ . Condition  $U_1$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

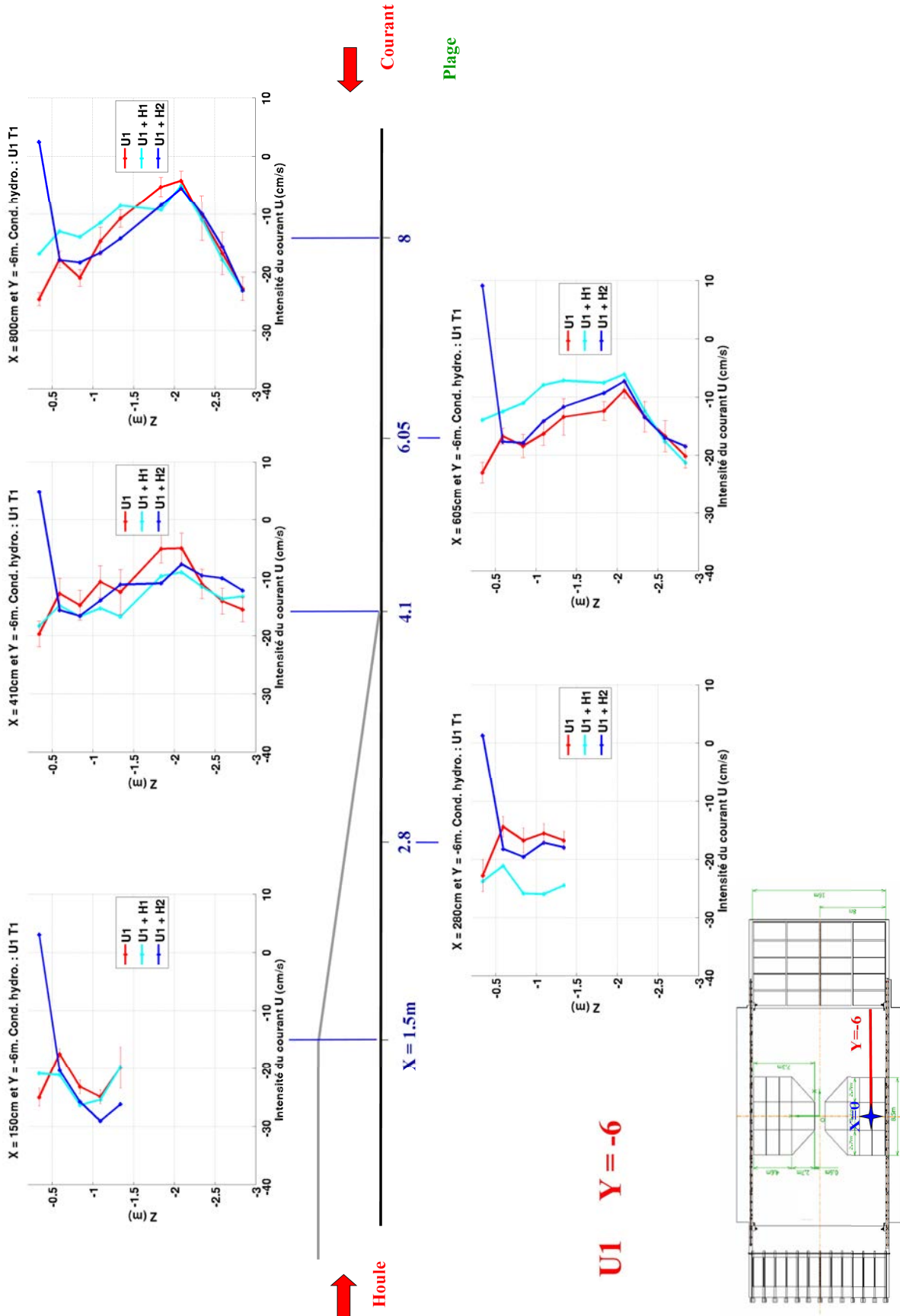


Figure VII.37 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0m$  et  $Y = -6m$ . Condition  $U_1$ .

Le profil de courant montre un fort gradient de cisaillement vertical entre  $Z = -0.34m$  et  $Z = -0.59m$ , pour les houles de hauteur  $H_2$ . Ce gradient est si important que le sens du courant est inversé en certains endroits. Un comportement similaire a d'ailleurs été observé par [Groeneweg & Klopman \(1998\)](#). Pour les houles de hauteur  $H_1$ , l'intensité du courant est souvent comparable en  $Z = -0.34m$  à celle du courant seul. L'influence d'une houle de cette hauteur sur le champ de courant est donc bien moindre qu'une houle de hauteur  $H_2$ . A des profondeurs plus importantes ( $Z \leq -0.59m$ ), les profils verticaux pour les conditions de courant seul et courant plus houle sont similaires. L'influence de la houle n'est donc visible que sur une couche de fluide comprise entre  $Z = 0m$  et  $Z = -0.59m$ .

### 4.2.3 Profil vertical du courant, condition de courant $U_2$

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

---



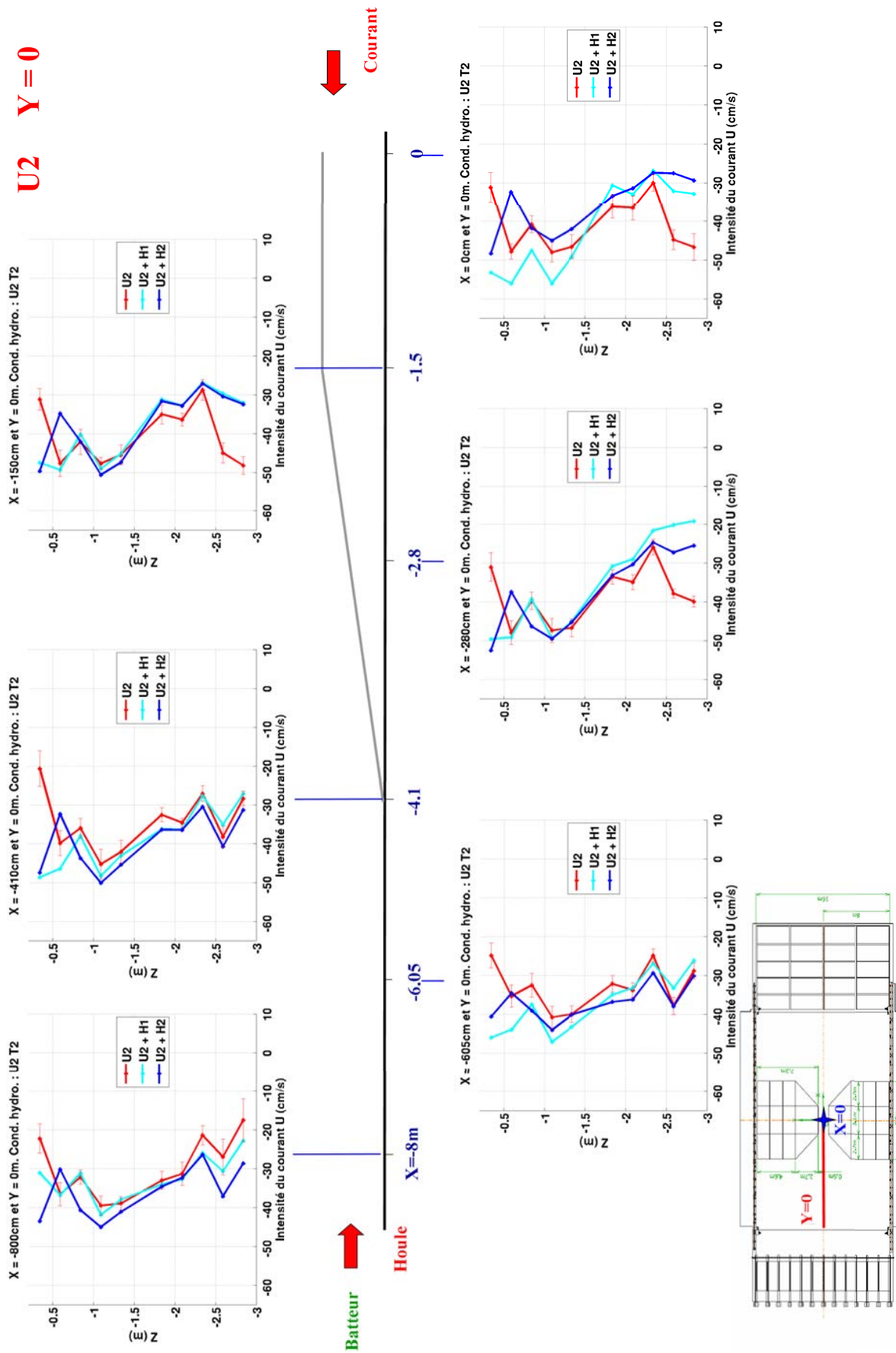


Figure VII.38 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0m$  et  $Y = 0m$ . Condition  $U_2$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

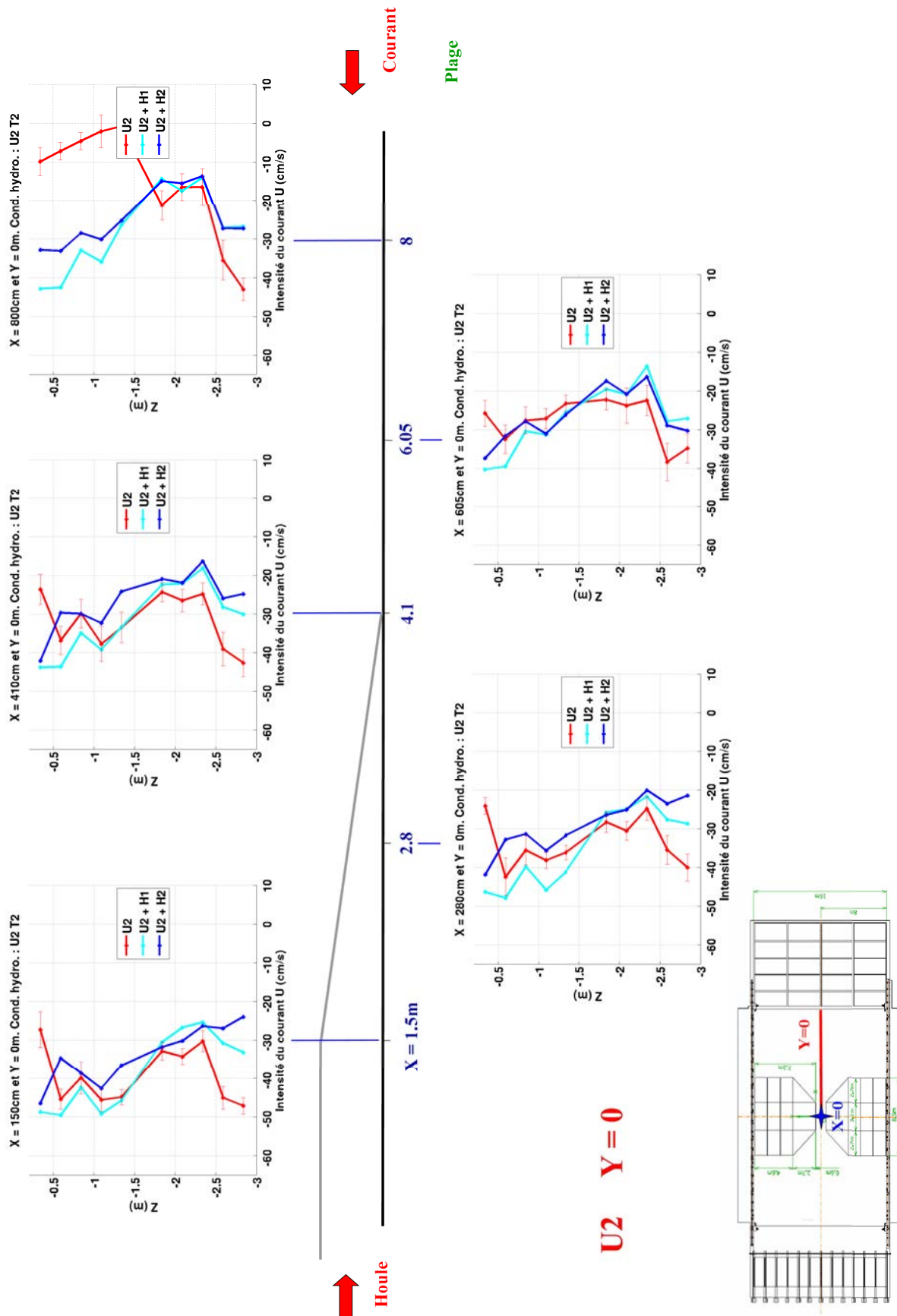


Figure VII.39 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0m$  et  $Y = 0m$ . Condition  $U_2$ .

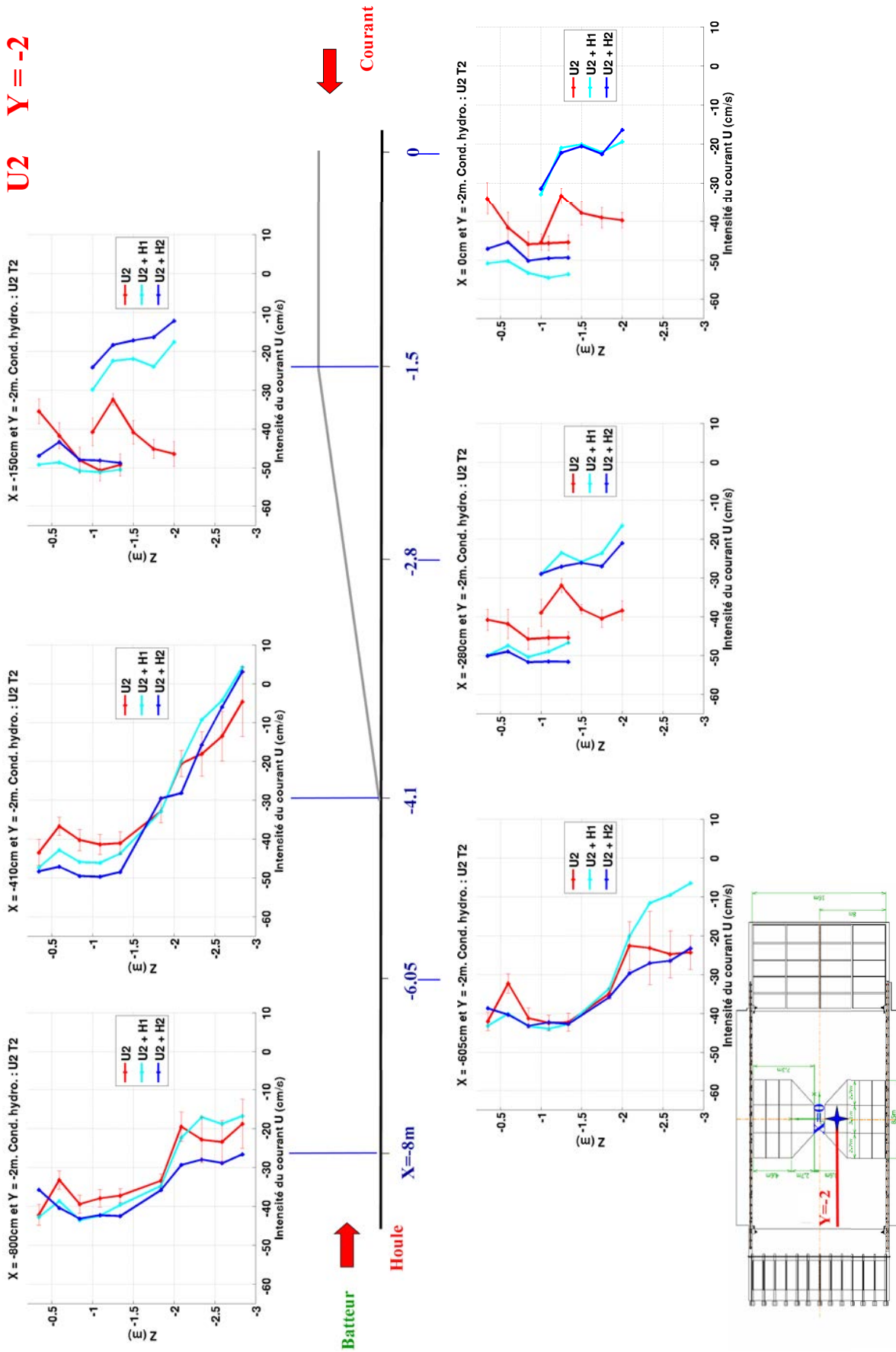


Figure VII.40 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0$  m et  $Y = -2$  m. Condition  $U_2$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

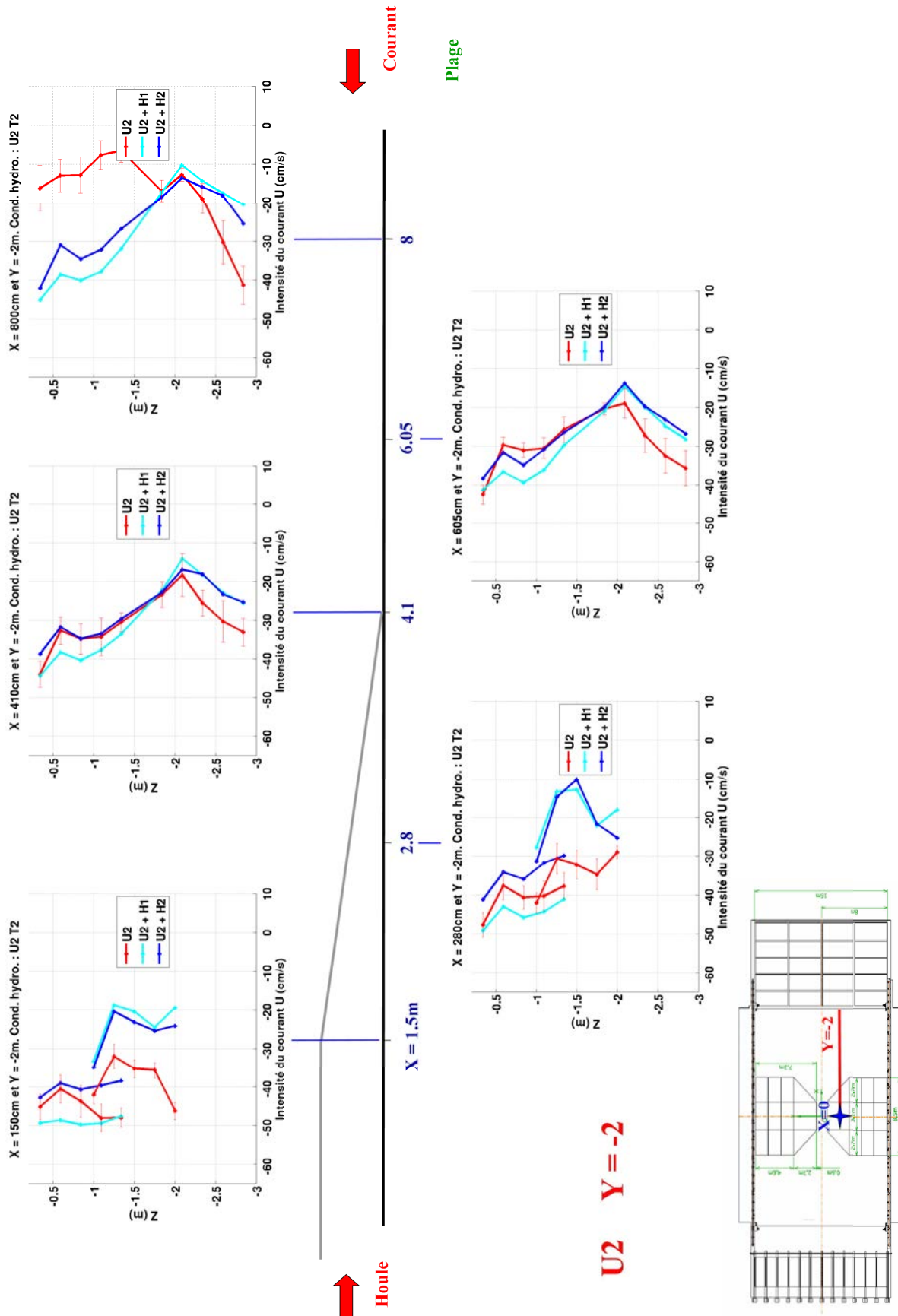


Figure VII.41 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0\text{m}$  et  $Y = -2\text{m}$ . Condition  $U_2$ .

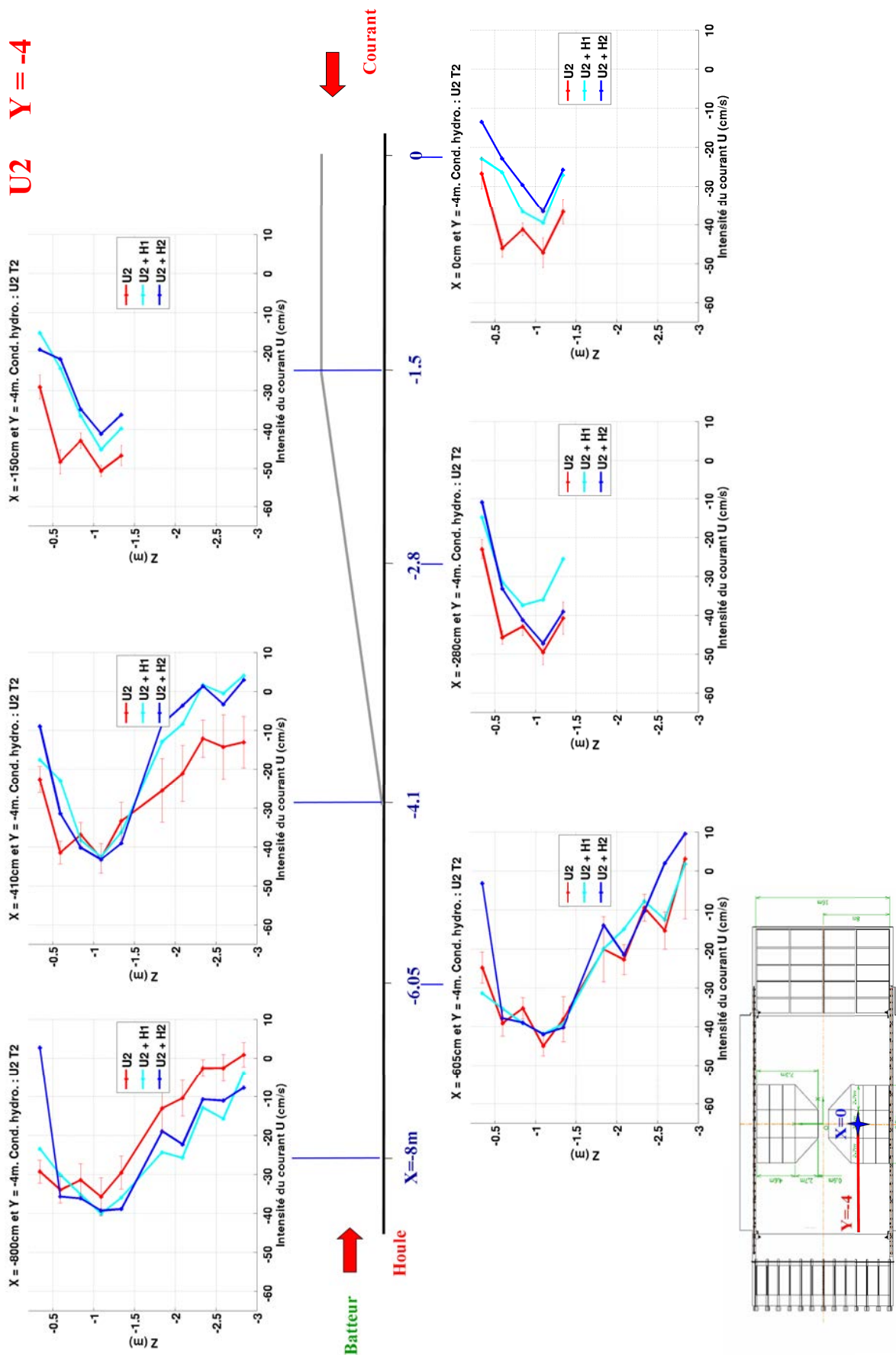


Figure VII.42 – Champ de courant longitudinal, en  $X \leq 0m$  et  $Y = -4m$ . Condition  $U_2$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

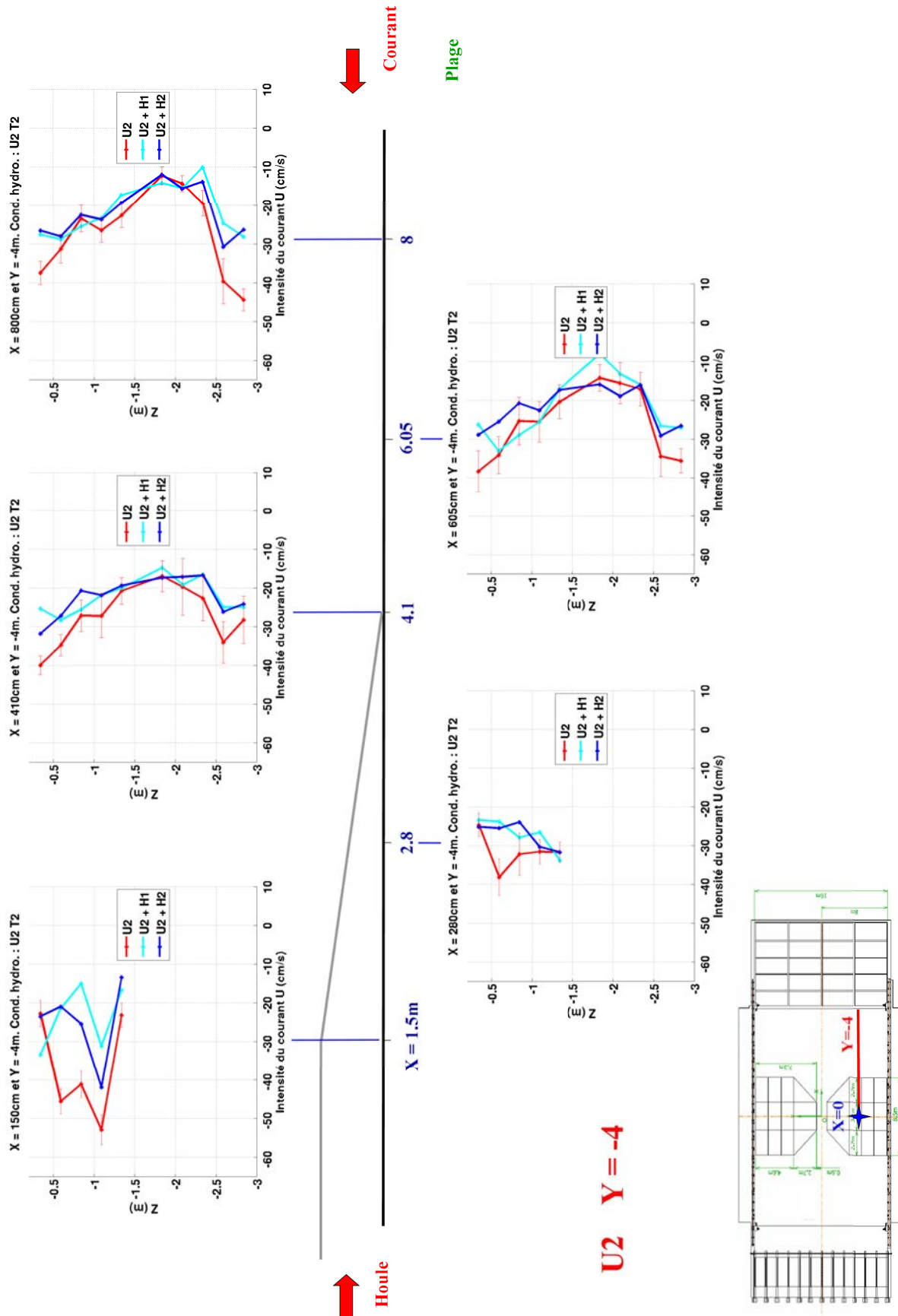


Figure VII.43 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0m$  et  $Y = -4m$ . Condition  $U_2$ .

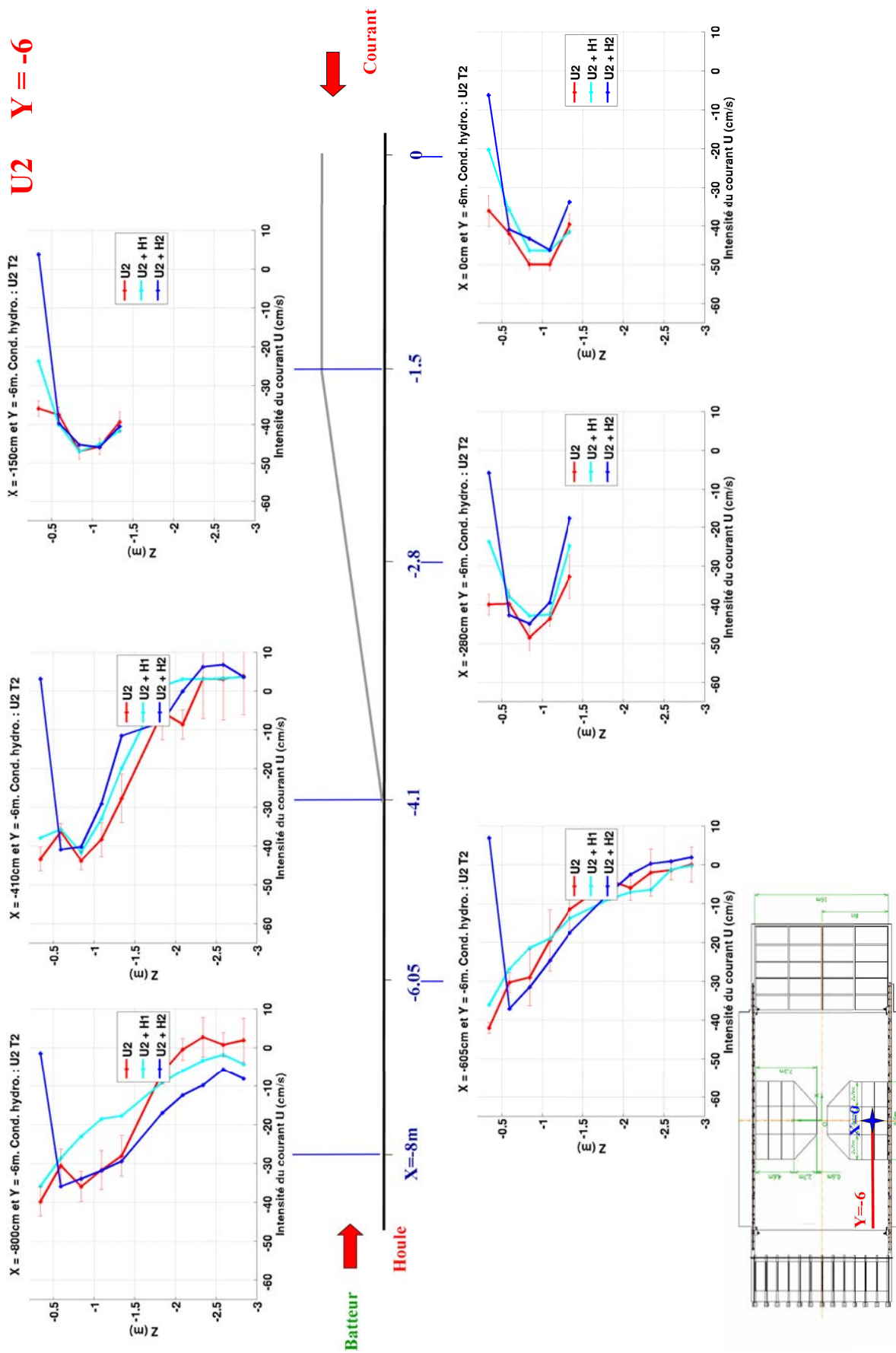


Figure VII.44 – Champ de courant longitudinal, en  $X = 0m$  et  $Y = -6m$ . Condition  $U_2$ .

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

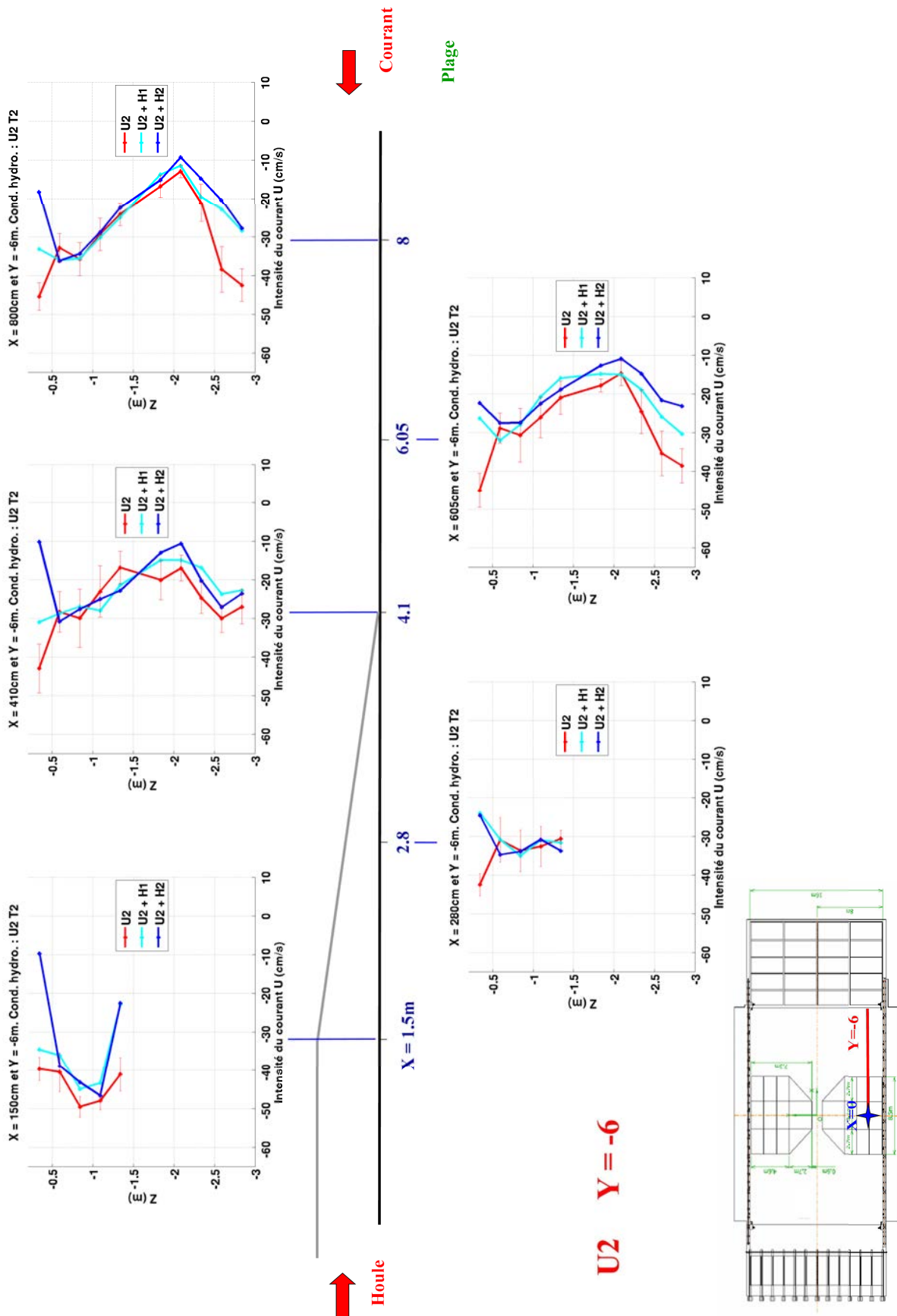


Figure VII.45 – Champ de courant longitudinal, en  $X > 0\text{m}$  et  $Y = -6\text{m}$ . Condition  $U_2$ .



Pour la condition de courant  $U_2$ , un tout autre comportement est observé. Le courant seul présente un fort gradient de cisaillement entre  $Z = -0.34m$  et  $Z = -0.59m$ , dont le signe est inversé lorsque la houle se propage. Ce phénomène est visible le long de l'axe  $Y = 0$  et au dessus des bosses en  $(X, Y) = (1.5, -4)m$ . Il est très surprenant, dans la mesure où présence de la houle aurait du contribuer à ralentir le courant à cette profondeur, et son intensité aurait donc été inférieure à celle du courant seul. Des éventuels tourbillons sont peut-être à l'origine d'un tel phénomène. Toutefois un comportement similaire a été observé en canal à houle par [Kemp & Simons \(1983\)](#).

D'autre part, nous pouvons observer comme précédemment que l'intensité des champs de courant pour les conditions de courant seul et de courant plus houle est similaire à des profondeurs  $Z \leq -0.59m$ , sauf au dessus des bosses. En effet, au dessus des bosses, le champ de houle semble contribuer à accélérer le courant à des profondeurs  $Z \geq -1m$ , en  $Y = -2m$  et en  $Y = -4m$ , alors que celui-ci est ralenti à des profondeurs plus importantes ( $Z \leq -1m$ ). En dehors de ces lieux, l'interaction entre la houle et le courant semble donc être la plus importante entre la surface  $Z = 0$  et  $Z = -0.59m$ .

### 4.2.4 Recirculation du courant près des bosses

Nous pouvons observer sur les figures [\(VII.34\)](#), [\(VII.36\)](#), [\(VII.42\)](#) et [\(VII.44\)](#) la quasi absence de courant longitudinal en  $(X, Y) = (-4.1, -4)m$  pour les deux conditions de courant. Ce phénomène apparaît en aval de la bosse, pour le courant. Il est corrélé à un changement de sens du champ de courant transverse, comme le montre la figure [\(VII.46\)](#). En effet, l'apport de masse d'eau à cet endroit du bassin diminue lorsque le champ de courant longitudinal diminue. Il est alors compensé par un apport sur les côtés, se traduisant par des vitesses transverses négatives.

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

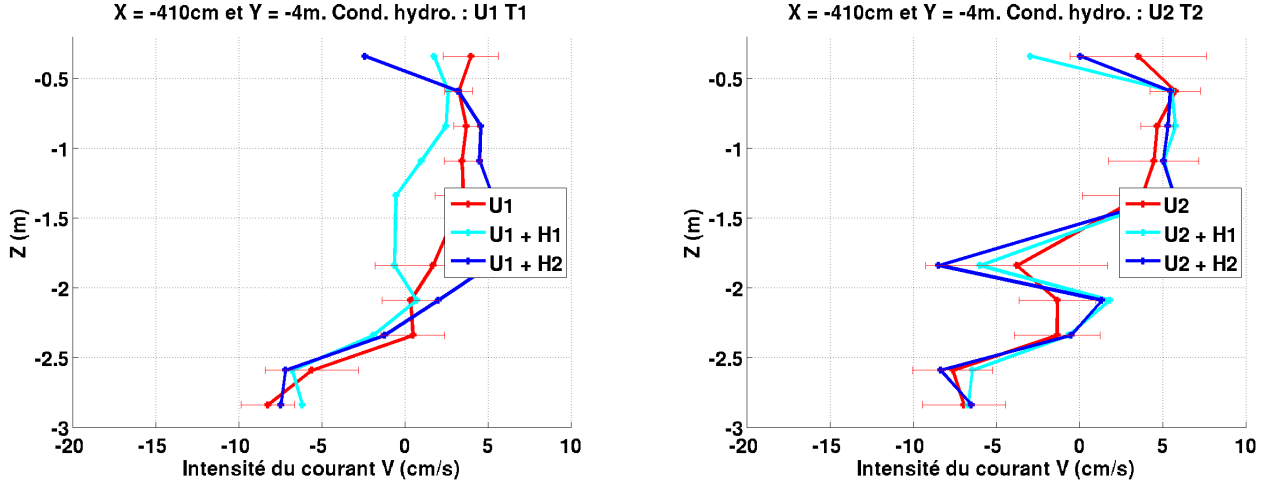


Figure VII.46 – Evolution du profil vertical du champ de courant transverse en  $(X, Y) = (-4.1, -4)m$

### 4.2.5 Synthèse

La forme de ces profils amène plusieurs remarques. Pour les conditions de courant  $U_1$  et une houle de hauteur  $H_2$ , l'intensité du courant en  $Z = -0.34m$  est plus faible que celle du courant seul. L'existence de forts gradients de cisaillement vertical en surface est corrélée à une dérive de Stokes de même ordre de grandeur que le courant à cette profondeur.

Lorsque le courant est  $U_2$ , l'existence de tourbillons suite au déferlement peut expliquer les valeurs inattendues que nous observons.

L'intensité du cisaillement n'est pas constante sur la colonne d'eau en un lieu donné. Nous pouvons donc nous demander jusqu'à quelle profondeur le champ de cisaillement vertical influe dans les interactions houle courant et quel est le profil à considérer pour représenter ces interactions. Les analyses précédentes ont montré qu'à courant établi et période fixée, la hauteur de houle semble peu influencer le profil vertical du courant au niveau des côtes  $Z \leq -0.59m$  considérées durant cette campagne de mesure. Une profondeur critique inférieure à la profondeur d'immersion  $Z = -0.59m$  sur laquelle le champ de cisaillement et la houle interfèrent existe donc sûrement. En effet, la relation de dispersion établie pour une houle se propageant en présence d'un courant cisailé fait intervenir deux profondeurs caractéristiques auxquelles l'intensité du courant détermine les caractéristiques de la houle. La première est  $Z = 0m$ . La deuxième est  $Z_c = -2d_c$  où  $d_c = \tanh(kh)/(2k)$ . C'est cette profondeur que nous estimons dans la section suivante.

### 4.3 Profondeur critique d'interaction houle-courant

En connaissant  $h$  et  $k$  nous calculons cette profondeur caractéristique pour chaque condition de houle.

Cond. hydro.	$Z_c(m)$
$U_1T_1H_1$	$-0.4 \leq Z_c \leq -0.2$
$U_1T_1H_2$	$-0.4 \leq Z_c \leq -0.2$
$U_2T_2H_1$	$-0.4 \leq Z_c \leq -0.2$
$U_2T_2H_2$	$-0.4 \leq Z_c \leq -0.2$

**Tableau VII.2** – Valeurs extrémales de la profondeur caractéristique pour chaque condition hydrodynamique

Ces résultats montrent que la profondeur caractéristique est inférieure à  $Z = -0.4m.s^{-1}$ . La couche de fluide à l'intérieur de laquelle l'interaction houle courant est déterminante est donc comprise entre  $Z = 0m$  et  $Z = -0.4m$ . Les mesures effectuées en  $Z = -0.34m$  sont donc représentatives des interactions houle-courant, et cette profondeur est comparable à la profondeur critique  $Z_c$ .

Nous pouvons rapprocher ces résultats expérimentaux des travaux de [TelesDaSilva & Peregrine \(1988\)](#) réalisés pour une houle unidirectionnelle en présence d'un champ de vorticité constante, linéaire et colinéaire à la direction de propagation de la houle. Lorsque la houle se propage à contre-courant, ces auteurs montrent l'existence d'une profondeur critique  $h_c$  définie comme la profondeur à laquelle la vitesse de phase  $c$  de la houle vérifie  $c = -Sh_c$ . Dans le cas de forts cisaillement, la profondeur critique  $h_c$  tend vers  $2d_c = Z_c$ . Ce résultat théorique est bien en accord avec les observations présentées ici.

### 4.4 Estimation du cisaillement à une profondeur $Z = 0.34m$

Suite aux résultats précédents, nous calculons le cisaillement du courant à partir des mesures réalisées en  $Z = -0.34m$  et  $Z = -0.59m$    partir de la relation

$$S_{estimé} = -\frac{U(Z = -0.59) - U(Z = -0.34)}{0.59 - 0.34}. \quad (\text{VII.2})$$

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

Les figures (VII.47) à (VII.49) représentent la valeur estimée du cisaillement lorsque le courant est  $U_1$ . Ces figures montrent que le cisaillement est d'autant plus fort que la hauteur de houle est grande. En effet, le cisaillement est environ dix fois supérieur à celui mesuré pour une condition de courant seul. D'autre part, la présence de la houle semble contraindre un gradient de cisaillement de même signe dans tout le bassin, ce qui n'est pas le cas en l'absence de houle ou pour une houle de hauteur  $H_1$ , où le cisaillement oscille autour de 0 en changeant de signe.

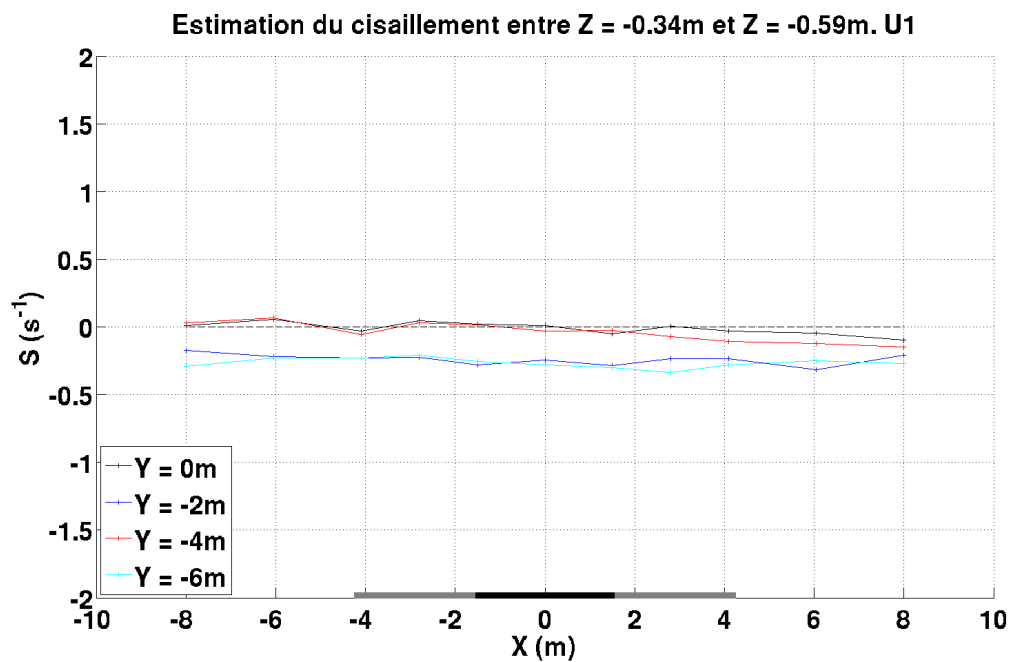


Figure VII.47 – Estimation du cisaillement. Condition  $U_1$

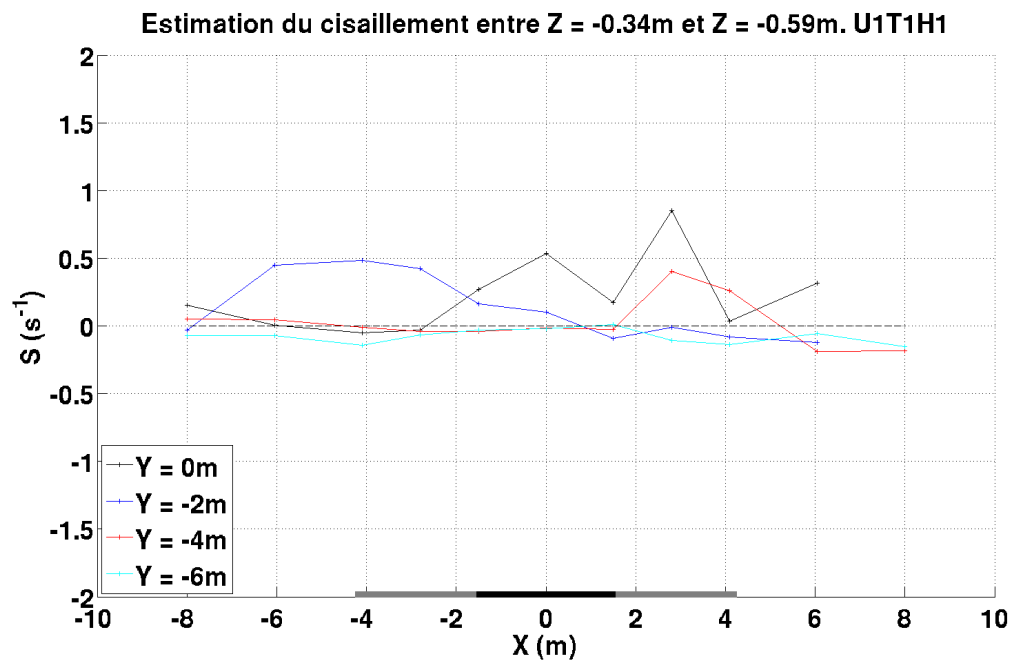


Figure VII.48 – Estimation du cisaillement. Condition  $U_1 T_1 H_1$ .

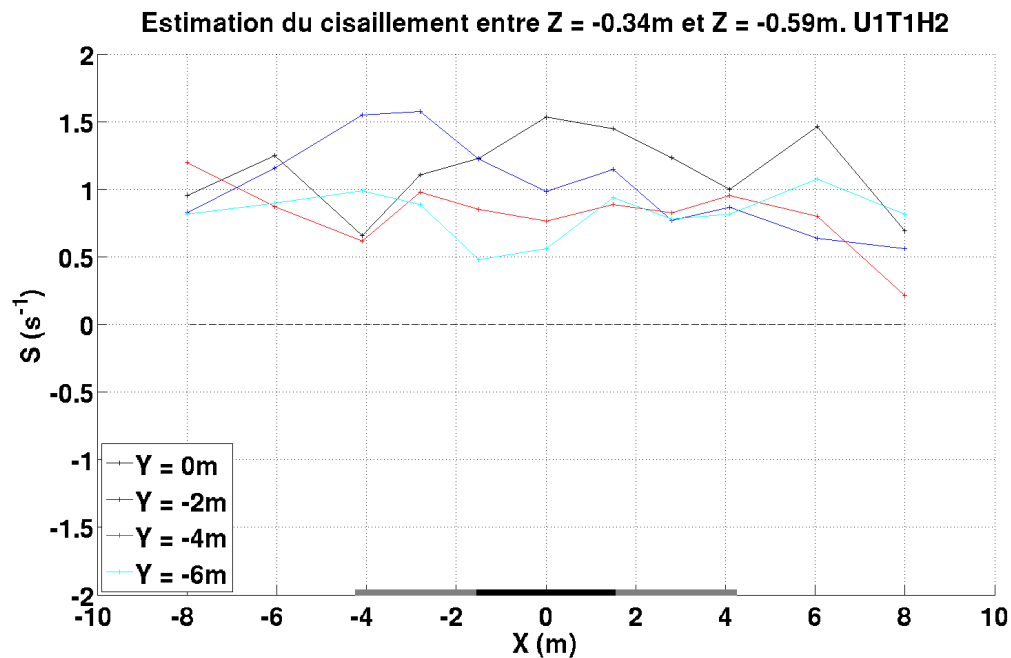


Figure VII.49 – Estimation du cisaillement. En bas : condition  $U_1 T_1 H_2$

Les figures (VII.50) à (VII.52) représentent la valeur estimée du cisaillement lorsque la condition de courant est  $U_2$ . Ici, un tout autre comportement est observé. En effet le gradient de

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

le cisaillement est non négligeable pour une condition de courant seul. Alors que la hauteur de houle  $H_2$  tend à l'augmenter, une houle de hauteur  $H_1$  tend à le diminuer et à l'homogénéiser.

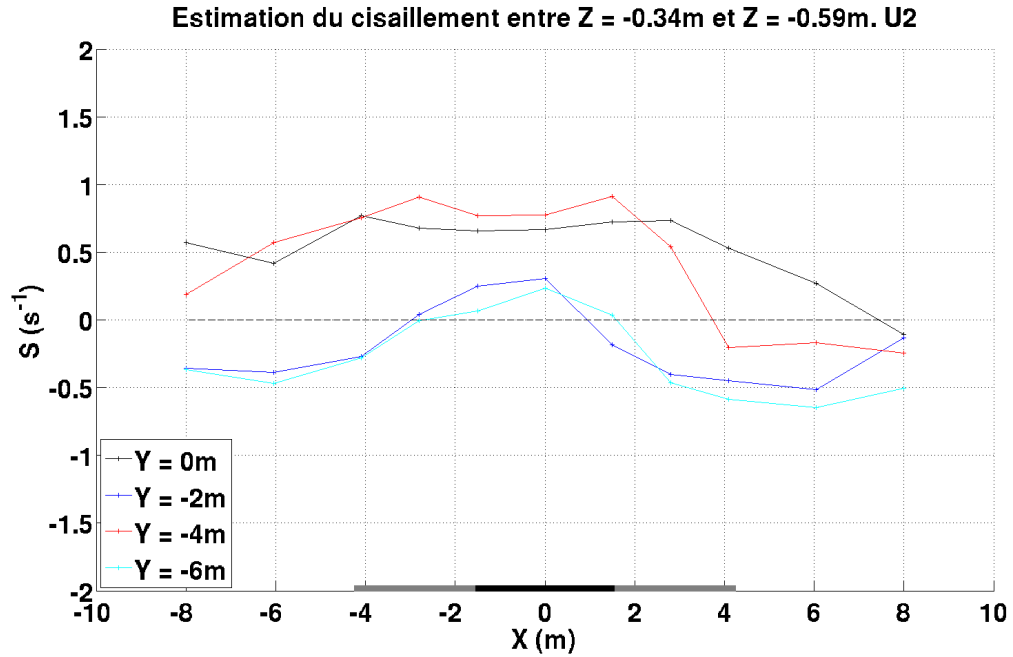


Figure VII.50 – Estimation du cisaillement. Condition  $U_2$

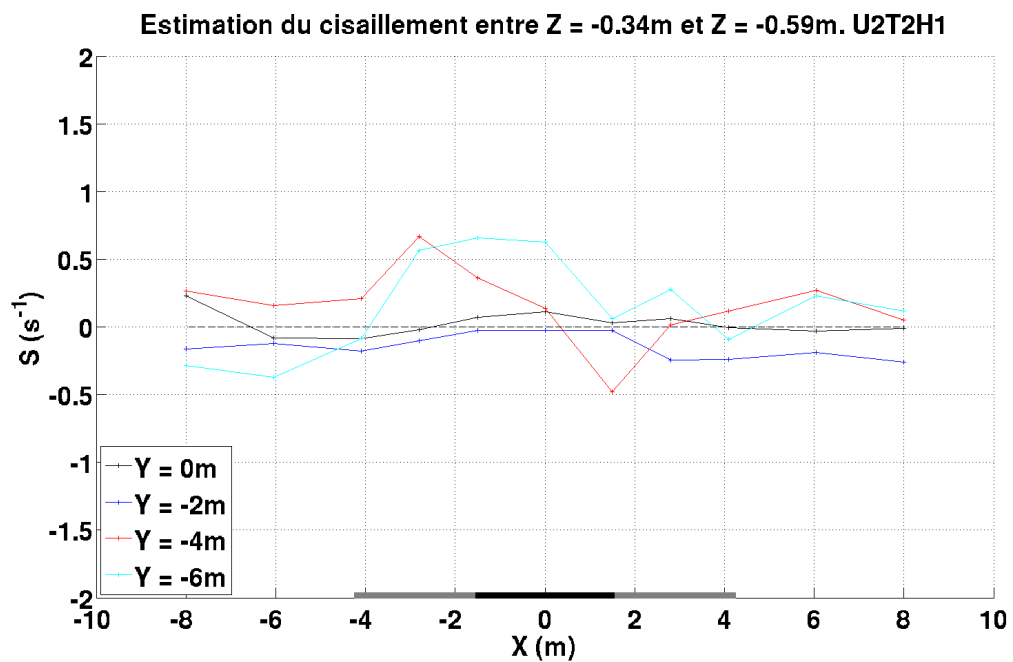


Figure VII.51 – Estimation du cisaillement. Condition  $U_2 T_2 H_1$

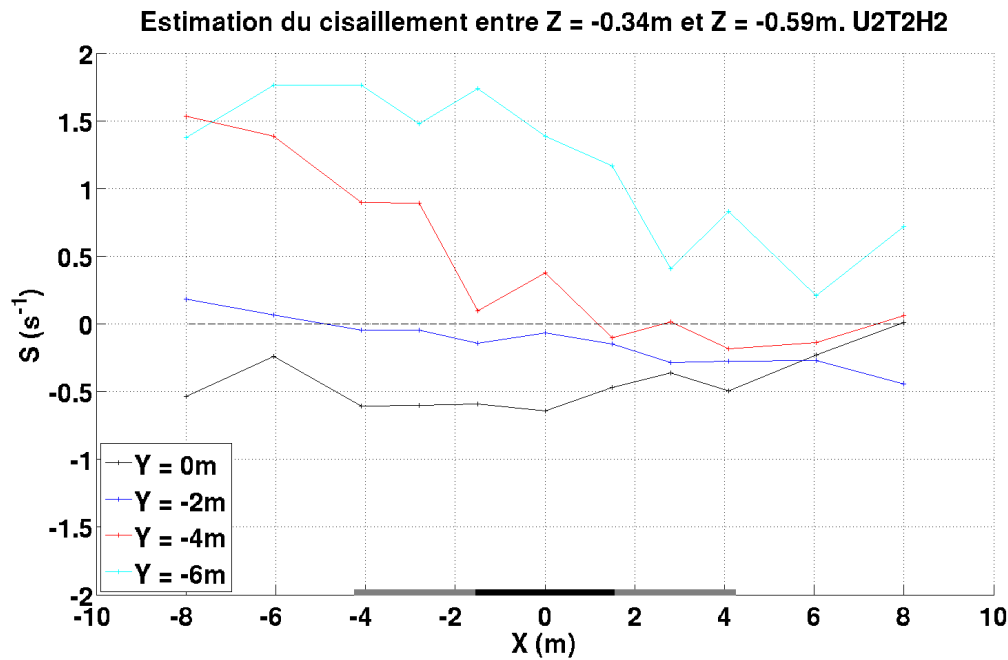


Figure VII.52 – Estimation du cisaillement. Condition  $U_2 T_2 H_2$

## 4.5 Perspectives

Suite à la campagne de mesure menée en 2013, nous avons acquis les données précises du cisaillement pour résoudre le modèle mild-slope généralisé développé dans le chapitre IV. Les profils de cisaillement précédents sont modifiés par la présence de la houle, traduisant le couplage important entre la houle et le champ de courant. Cependant le modèle mild-slope que nous avons développé permet de représenter l'influence d'un courant sur le champ de houle mais pas le couplage des deux. La résolution numérique de ce modèle devrait donc être réalisée en considérant le champ de cisaillement pour des conditions de courant seul. Dans ce cas, le champ de cisaillement vertical du courant, calculé entre les profondeurs  $Z = -0.34m.s^{-1}$  et  $Z = -0.59m.s^{-1}$  est représenté sur les figures (VII.53) et (VII.54) pour les deux conditions de courant

## VII.4 Evolution du champ de courant moyen en présence de la houle

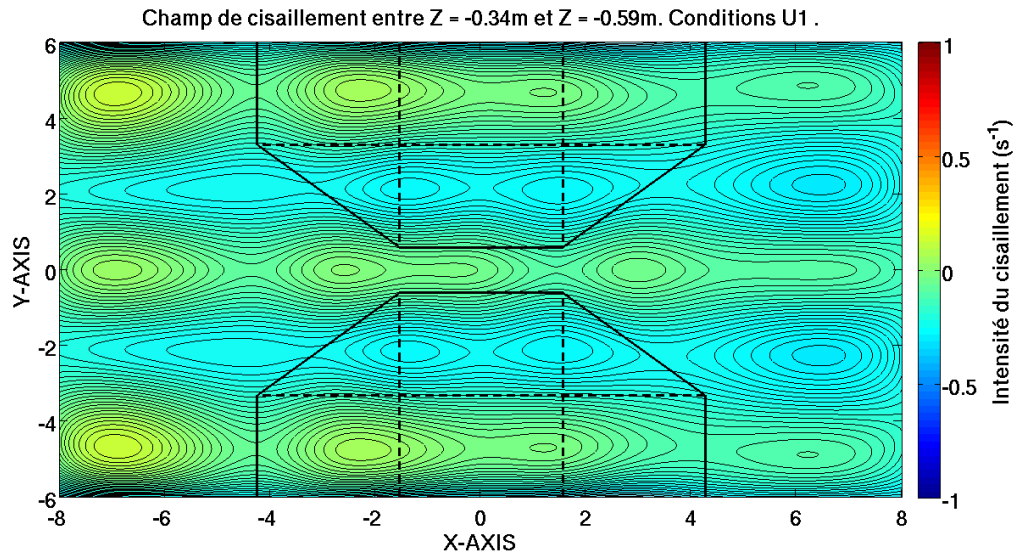


Figure VII.53 – Champ de cisaillement. Condition  $U_1$

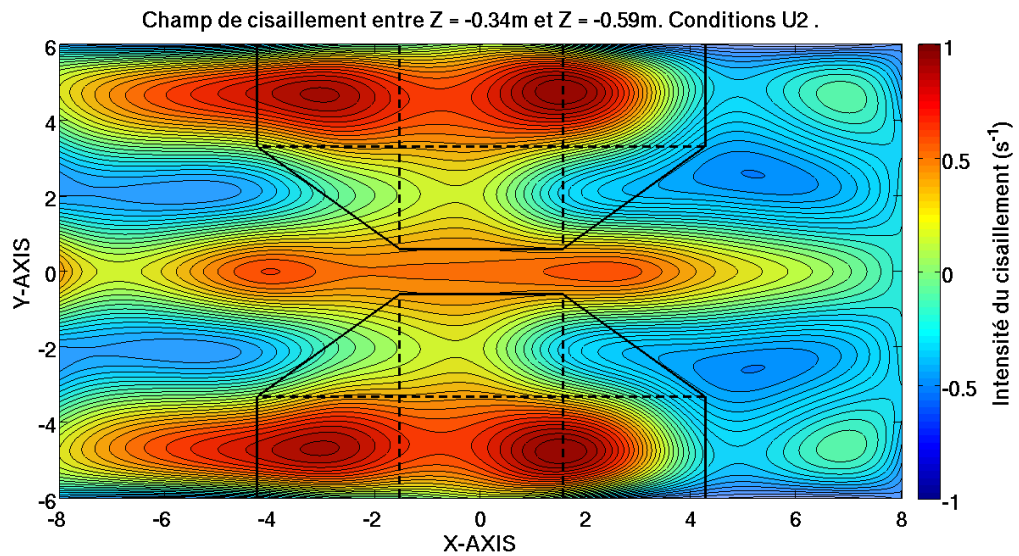
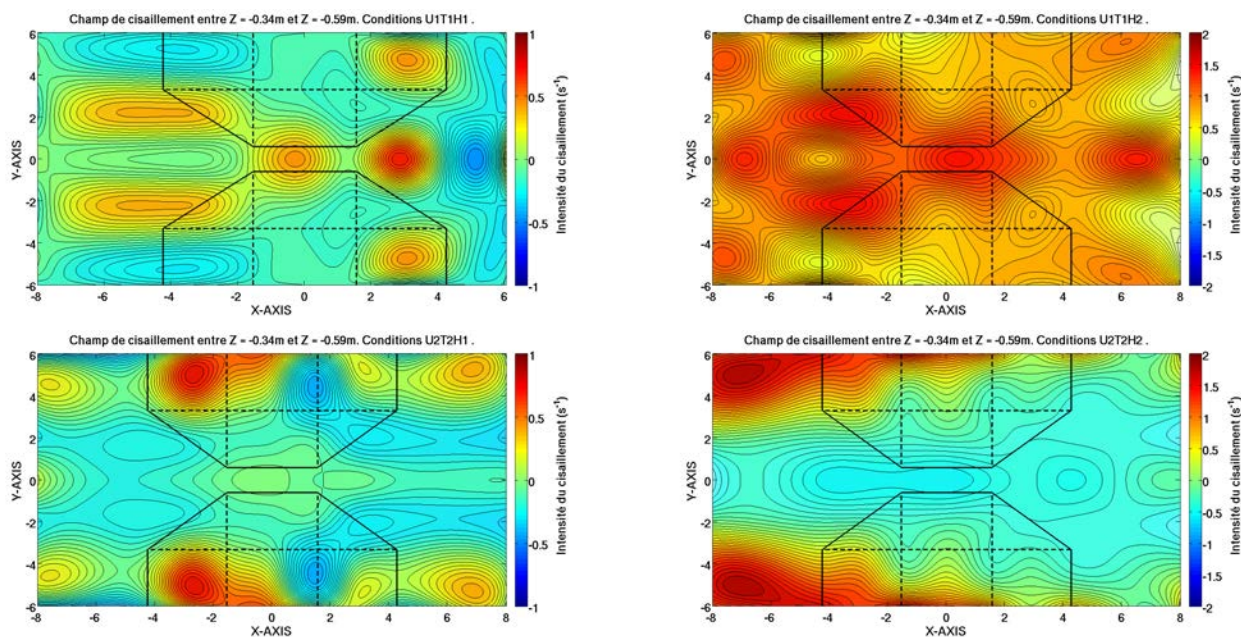


Figure VII.54 – Champ de cisaillement. Condition  $U_2$

Un modèle représentant le couplage houle-courant devrait considérer au contraire le champ de cisaillement mesuré en présence de houle. Dans ce cas les champs de cisaillement sont représentés sur la figure (VII.55).



## Chapitre VII. Observation des interactions houle-courant-topographie



**Figure VII.55** – Champ de cisaillement. En haut : condition de courant  $U_1$ . En bas : condition de courant  $U_2$ . A gauche : houle de hauteur  $H_1$ . A droite : houle de hauteur  $H_2$ .

Il est d'autre part nécessaire d'ajouter dans le modèle un terme de déferlement afin de représenter la dynamique de la houle que nous avons pu observer pour la condition de courant  $U_2$ .

---

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette étude, nous nous sommes attachés à améliorer la compréhension et la description de la propagation de la houle dans un milieu inhomogène. Les inhomogénéités du milieu que nous avons considérées sont un courant tridimensionnel non-uniforme variant linéairement sur la colonne d'eau et une topographie lentement variable.

Pour mener à bien cette étude, nous nous sommes appuyés sur les résultats issus de campagnes expérimentales antérieures à cette thèse (Guinot (2010), Rey *et al.* (2011), Rey *et al.* (2014)), qui ont été menées au Bassin de Génie Océanique First en 2007 et en 2008. Au cours de ces expériences la houle se propageait à contre-courant au dessus d'une topographie tridimensionnelle. La houle se propageant en condition de profondeur infinie, seul le courant était susceptible d'interagir avec la topographie. Ainsi le champ de courant généré variait dans les trois directions de l'espace. Les différentes expériences menées avec différentes conditions hydrodynamiques ont permis de mettre en évidence un phénomène de focalisation de la houle se traduisant par une augmentation de l'amplitude de la houle en un lieu précis du bassin.

Suite à ces observations, les résultats issus de la campagne de 2008 ont été comparés à ceux issus de la résolution numérique de l'équation mild-slope (Kirby, 1984) connue pour bien représenter les interactions entre la houle et le courant. Cependant, la comparaison montre que le modèle ne permet pas de représenter correctement l'évolution de l'amplitude de la houle dans le bassin. En recherchant les causes possibles d'un tel écart, nous nous sommes aperçus que la forme du profil vertical du courant semblait jouer un rôle. En effet les mesures expérimentales suggèraient l'existence d'un gradient de cisaillement vertical dans le champ de courant alors que le modèle mild-slope considère un profil constant sur la colonne d'eau et ne prend en compte que ses variations dans le plan horizontal. Une étude de sensibilité du comportement de la houle à un gradient de cisaillement linéaire sur la colonne d'eau a alors été menée. Les résultats montrent, en effet, qu'un tel gradient a une influence non négligeable sur la cinématique de la houle.

Suite à cette analyse, nous avons mené en parallèle une étude théorique visant à représenter

dans un modèle de propagation de houle les interactions entre la houle, le courant et la topographie, et une campagne expérimentale comparable à celles menées en 2007 et en 2008 pour mesurer précisément le champ de courant tridimensionnel.

Le modèle théorique développé est un modèle de propagation bidimensionnel de la houle au dessus d'une topographie lentement variable en présence d'un champ de courant s'écoulant dans le plan horizontal et variant linéairement sur l'axe vertical (Charland *et al.* (2014), soumis). Aucune approximation n'est réalisée sur l'intensité du cisaillement. Seules ses variations spatiales sont supposées faibles devant les caractéristiques de la houle. Ce nouveau modèle est donc une généralisation de l'équation mild-slope développée par Kirby (1984). Une évolution possible de ce nouveau modèle serait de tenir compte des modes locaux, dont nous avons montré l'importance pour mieux représenter le comportement de la houle au dessus de discontinuités topographiques.

Cette nouvelle équation, réécrite sous la forme d'une équation de conservation, est à l'origine d'une discussion sur la notion d'action de la houle initialement introduite par Whitham (1974) et Bretherton & Garrett (1969), définie comme la variation du Lagrangien moyen de l'écoulement par rapport à la pulsation de la houle. En particulier, l'équation développée ne permet pas d'obtenir une équation conservative de l'action de la houle, remettant en question le résultat de Jonsson *et al.* (1978). Toutefois Bretherton & Garrett (1969) et Andrews & McIntyre (1978) suggèrent que cette grandeur est conservative pour une houle instationnaire se propageant dans un milieu homogène et stationnaire, mais ne l'est plus dès lors que le gradient de cisaillement vertical du courant n'est plus faible. En effet la relation de dispersion de la houle montre que l'interaction entre le courant et la houle dépend directement du nombre d'onde de celle-ci. Ainsi deux ondes de pulsation différente ne réagiront pas de la même manière avec le courant ce qui transgresse l'hypothèse de stationnarité du milieu. Ce développement théorique sur l'évolution de l'action fait l'objet d'une discussion encore en cours.

L'objectif de la nouvelle campagne expérimentale au Bassin de Génie Océanique First début 2013 était de mesurer avec une haute résolution spatiale le champ de courant s'établissant dans le bassin dans des conditions expérimentales comparables à celles des campagnes de 2007 et de 2008. Au cours de ces expériences nous avons reproduit un phénomène de focalisation de la houle au milieu du bassin pour de faibles hauteurs de houle. Nous avons en revanche observé un phénomène de défocalisation lorsque la hauteur de houle est plus grande, suggérant un comportement non-linéaire de la houle. Ce phénomène de focalisation et de défocalisation a été observé à la fois lorsque la houle déferle, en présence d'un courant fort, et lorsqu'elle présente un profil linéaire, lorsque le courant est plus faible.

La mesure précise du champ de courant dans les trois directions de l'espace a montré que le

champ de courant est modifié par la présence de la houle dans une couche de fluide près de la surface. Cette couche de fluide semble s'établir sous la surface libre jusqu'à une profondeur comparable à  $2d_c$ , caractéristique des interactions houle/courant lorsque le courant est cisailé linéairement sur la colonne d'eau. Au delà de cette profondeur le champ de courant semble être peu influencé par la présence de la houle et essentiellement forcé par la topographie. Le champ de cisaillement existant dans cette couche de surface semble donc être à l'origine du comportement de la houle observé. Des tests numériques résolvant l'équation mild-slope généralisée en considérant ces différents champs de cisaillement pourront sûrement apporter des éléments de réponse. Suite à cette campagne de mesure nous disposons donc de toutes les données nécessaires pour résoudre numériquement l'équation mild-slope généralisée et comparer les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux lorsque la houle ne déferle pas.

Dans cette même couche de fluide, nous avons observé l'existence de forts gradients de cisaillements verticaux pour certaines conditions hydrodynamiques, notamment lorsque la hauteur de houle est la plus grande. Ce phénomène est amplifié lorsque la houle déferle. De tels gradients de cisaillement verticaux sont observés dans une moindre mesure lorsque le courant s'établit seul, sans houle, et pour les conditions de courant et houle de faible amplitude.

Ces remarques suggèrent l'existence d'un couplage fort entre la houle et le courant, surtout lorsque la houle déferle. Ces interactions ne sont pas représentées par le modèle. En effet, celui-ci permet de représenter uniquement l'influence du courant sur la houle, mais pas le couplage des deux. Il serait alors nécessaire de développer un nouveau modèle permettant de coupler l'ensemble de ces phénomènes. Un tel modèle pourrait aider la compréhension et la modélisation de l'effet des vagues fortement cambrées sur le profil vertical du courant. Un tel modèle pourrait aider au dimensionnement des hydroliennes par exemple. Afin de représenter correctement ces interactions il serait aussi pertinent d'inclure un terme de dissipation, représentant la dissipation d'énergie de la houle par déferlement.



---

## Références bibliographiques

- ANDREWS, D. G. & MCINTYRE, M. E. 1978 On wave action and its relatives. *J. Fluid Mech.* **89** (4), 647–664. [85](#), [172](#)
- ARDHUIN, F. & HERBERS, T. H. C. 2002 Bragg scattering of random surface gravity waves by irregular seabed topography. *J. Fluid Mech.* **451**, 1–33. [30](#)
- ARTHUR, R. S. 1946 Refraction of waves by islands and shoals with circular bottom contours. *Trans. Amer. Geophys. Union* **27** (2), 168. [25](#)
- AS, NORTEK 2010 Documentation technique sur les vectrino. *Tech. Rep.*. Nortek AS. [xvi](#), [xix](#), [98](#), [204](#), [205](#), [206](#)
- ATHANASSOULIS, G. A. & BELIBASSAKIS, K. A. 1999 A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.* **389**, 275–301. [33](#)
- BATEMAN, H. 1929 Notes on a differential equation which occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problems. *Proc. R. Soc. Lond. A* **125**, 598–618. [67](#)
- BELIBASSAKIS, K. A. 2007 A coupled-mode model for the scattering of water waves by shearing currents in variable bathymetry. *J. Fluid Mech.* **578**, 413–434. [63](#)
- BELIBASSAKIS, K. A., GEROSTATHIS, T. P. & ATHANASSOULIS, G. A. 2011 A coupled-mode model for water wave scattering by horizontal, non-homogeneous current in general bottom topography. *Appl. Ocean Res.* **33**, 384–397. [63](#)
- BERKHOFF, J. C. W. 1972 Computation of combined refraction-diffraction. pp. 471–490. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., New York. [30](#)
- BERKHOFF, J. C. W. 1976 Mathematical models for simple harmonic linear water waves. wave diffraction and refraction. PhD thesis, De Voorst Laboratory of the Delft Hydraulics Laboratory. [30](#), [31](#)

- BERKHOFF, J. C. W., BOOY, N. & RADDER, A. C. 1982 Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coast. Eng.* **6** (3), 255–279. [30](#)
- BIESEL, F. 1950 Etude théorique de la houle en eau courante. *La houille blanche numéro spécial A*, 279–285. [37](#)
- BONNEFILLE, R. 1992 *Cours d'hydraulique maritime*, 3rd edn. Masson. [21](#)
- BOUIJ, N. 1981 Gravity waves on water with non-uniform depth and current. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands. [34](#)
- BOUIJ, N. 1983 A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coast. Eng.* **7**, 191–203. [30](#)
- BRETHERTON, F. P. & GARRETT, C. J. R. 1969 Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proc. Roy. Soc. A* **302**, 529–554. [65](#), [84](#), [85](#), [87](#), [88](#), [172](#)
- BROSSARD, J. & CHAGDALI, M. 2001 Experimental investigation of the harmonic generation by waves over a submerged plate. *Coast. Eng.* **42**, 277–290. [30](#)
- BURNS, J. C. 1953 Long waves in running water. *PCPS-P CAMB PHILOL S* **9**, 695–706. [36](#)
- CAVALERI, L., ALVES, J.H.G.M., ARDHUIN, F., BABANIN, A., BANNER, M., BELIBASAKIS, K., BENOIT, M., DONELAN, M., GROENEWEG, J., HERBERS, T.H.C., HWANG, P., JANSSEN, P.A.E.M., JANSSEN, T., LAVRENOV, I.V., MAGNE, R., MONBALIU, J., ONORATO, M., POLNIKOV, V., RESIO, D., ROGERS, W.E., SHEREMET, A., SMITH, J. MCKEE, TOLMAN, H.L., VAN VLEDDER, G., WOLF, J. & YOUNG, I. 2007 Wave-modelling - the state of the art. *Progr Oceanogr* **75**, 603–674. [9](#), [21](#)
- CHAGDALI, M., MORDANE, S. & MAROIH, K. L. 2000 Une formulation parabolique des équations de propagation des ondes de gravité en surface. In *VI èmes Journées Nationales Génie Civil-Génie Côtier*. Caen, France. [31](#)
- CHAMBERLAIN, P. G. & PORTER, D. 1995 The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* **291**, 393–407. [32](#), [33](#)
- CHANDRASEKERA, C. N. & CHEUNG, K. F. 1997 Extended linear refraction-diffraction model. *J. Waterw. Port C.-ASCE* . [33](#)
- CHARLAND, J., TOUBOUL, J. & REY, V. 2012 Wave propagation against the current : a study of the effets of horizontal and vertical shears of the mean current on the geometrical focusing of water waves. In *13èmes Journées de l'Hydrodynamique*. 13èmes Journées de l'Hydrodynamique, Châtou, France. [55](#)
- CHARLAND, J., TOUBOUL, J. & REY, V. 2014 Linear surface waves interacting with a vertically sheared current over a slowly varying topography. *J. Fluid Mech.* Soumis. [85](#), [172](#)
- CONSTANTIN, A. 2011 Two-dimensionality of gravity water flows of constant nonzero vorticity beneath a surface wave train. *Eur. J. Mech. B-Fluid* **30**, 12–16. [70](#)

- CONSTANTIN, A. 2014 Stokes waves in water with a non-flat bed. *J. Fluid Mech.* **740**, 17–27. [30](#)
- CONSTANTIN, A. & STRAUSS, W. 2002 Exact periodic traveling water waves with vorticity. In *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, , vol. 335, pp. 797–800. [64](#)
- CONSTANTIN, A. & STRAUSS, W. 2004 Exact steady periodic water waves with vorticity. *Pure Appl. Math.* **57**, 481–527. [64](#)
- CONSTANTIN, A. & VARVARUCA, E. 2011 Steady periodic water waves with constant vorticity : regularity and local bifurcation. *Arch. Rational Mech. Anal.* **199**, 33–67. [64](#)
- CRAIK, A. D. D 2004 The origins of water wave theory. *Annu Rev Fluid Mech* **36**, 1–28. [9](#)
- CUMMINS, I. & SWAN, C. 1994 Vorticity effects in combined waves and currents. *Coast. Eng.* . [38](#)
- DALRYMPLE, R. A. 1974 A finite amplitude wave on linear shear current. *J. Geophys. Res.* **79** (30). [64](#)
- DALRYMPLE, R. A. 1977 A numerical model for periodic finite amplitude waves on a rotational fluid. *J. Comput. Phys.* **24**, 29–42. [38](#)
- DALRYMPLE, R. A. & KIRBY, J. T. 1988 Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. *J. Fluid Mech.* **192**, 33–50. [32](#)
- DARRIGOL, O. 2003 The spirited horse, the engineer, and the mathematician : Water waves in nineteenth-century hydrodynamics. *Arch. Hist. Exact Sci.* **58**, 21–95. [9](#)
- DONG, Z. & KIRBY, J. T. 2012 Theoretical and numerical study of wave-current interaction in strongly-sheared flows. *Coast. Eng.* . [63](#)
- DYSTHE, K. 2001 Refraction of gravity waves by weak current gradients. *J. Fluid Mech.* **442**, 157–159. [25](#)
- EVANS, D. V. 1975 The transmission of deep-water waves across a vortex sheet. *J. Fluid Mech.* **68**, 389–401. [34](#)
- FREDSOE, J., ANDERSEN, K. H. & SUMER, B. MUTLU 1999 Wave plus current over a rippled-covered bed. *Coast. Eng.* **38**, 177–221. [38](#)
- GERKEMA, T., MAAS, L. R. M. & VANHAREN, H. 2012 A note on the role of mean flows in doppler-shifted frequencies. *J. Phys. Oceanogr.* **43**, 432–441. [35](#)
- GOUAUD, F. 2007 Etude de l'évolution du trait de côte à long terme : modélisation physique et numérique. PhD thesis, Université du Sud Toulon-Var. [31](#)
- GROENEWEG, J. & KLOPMAN, G. 1998 Changes in the mean velocity profiles in the combined wave-current motion described in glm formulation. *J. Fluid Mech.* **370**, 271–296. [152](#)



- GRUE, J. & PALM, E. 1985 Wave radiation and wave diffraction from submerged body in a uniform current. *J. Fluid Mech.* **151**, 257–278. [34](#)
- GUAZZELLI, E., REY, V. & BELZONS, M. 1992 Higher-order bragg reflection of gravity surface waves by periodic bed. *J. Fluid Mech.* **245**, 301–317. [26](#), [27](#)
- GUIHOU, K. 2013 Etude de la dynamique du courant nord au large de toulon, à l’aide de simulations numériques, observations in-situ et données satellites. PhD thesis, Institut Méditerranéen d’Océanologie. [15](#)
- GUINOT, F. 2010 Interactions houle-courant en bathymétrie variable : approches numériques et expérimentales. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale. [43](#), [47](#), [129](#), [171](#)
- HEDGES, T. S. & LEE, B. W. 1992 The equivalent uniform current in wave-current computation. *Coastal Eng.* **16**, 301–311. [37](#)
- HORIKAWA, K. 1988 *Nearshore dynamics and coastal processes*. University of Tokyo Press. [21](#)
- JARRY, N., REY, V., GOUAUD, F. & LAJOIE, D. 2011 Gravity wave amplification and phase crest re-organization over a shoal. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11**, 789–796. [30](#)
- JONSSON, I. G. 1990 Wave-current interactions. In *The Sea* (ed. B. LeMehaute & D. M. Hanes), , vol. 9, pp. 65–120. John Wiley, New York. [21](#)
- JONSSON, I. G., BRINK-KJAER, O. & THOMAS, G. P. 1978 Wave action and set down for waves on a shear current. *J. Fluid Mech.* **87** (3), 401–416. [61](#), [85](#), [86](#), [88](#), [89](#), [172](#), [195](#), [197](#), [200](#)
- JONSSON, I. G. & CHRISTOFFERSEN, J. B. 1984 Current depth refraction of regular waves. *Coast Eng.* **34**
- JONSSON, I. G. & SKOVGAARD, O. 1978 Wave refraction across a shearing current. *Coast Eng.* **25**
- KEMP, P. H. & SIMONS, R. R. 1982 The interaction between waves and a turbulent current : waves propagating with the current. *J. Fluid. Mech.* **116**, 227–250. [38](#)
- KEMP, P. H. & SIMONS, R. R. 1983 The interaction between waves and a turbulent current : waves propagating against the current. *J. Fluid. Mech.* **130**, 73–89. [38](#), [162](#)
- KIM, J. W. & BAI, K. J. 2004 A new complementary mild-slope equation. *J. Fluid Mech.* **511**, 25–40. [33](#)
- KIM, S. D. 2010 The analysis of long wave diffractions due to offshore breakwater and seawall. *Scientific research ans essays* **5** (4), 378–388. [29](#)
- KIM, S. D. & LEE, H. J. 2009 Diffraction analysis by gap type breakwater using polynomial approximation for fresnel integrals. *Eur J Scientific Research* **37** (1), 80–88. [29](#)

- KIRBY, J. T. 1984 A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *J. Geophys. Res.* **89** (C1), 745–747. [x](#), [xi](#), [34](#), [35](#), [51](#), [64](#), [65](#), [67](#), [73](#), [77](#), [83](#), [87](#), [171](#), [172](#)
- KIRBY, J. T. 1986*a* A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.* **162**, 171–186. [32](#)
- KIRBY, J. T. 1986*b* Higher-order approximations in parabolic equation method for water-waves. *J. Geophys. Res.* **91**, 933–952. [32](#)
- KIRBY, J. T. 1989 A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations. *Coast. Eng.* **13**, 211–218. [31](#)
- KIRBY, J. T. & CHEN, T. 1989 Surface waves on vertically sheared flows : Approximate dispersion relations. *J. Geophys. Res.* **94** (C1), 1013–1027. [36](#), [37](#), [54](#)
- KIRBY, J. T. & DALRYMPLE, R. A. 1983 Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.* **133**, 47–63. [29](#)
- KIRBY, J. T., DALRYMPLE, R. A. & SEO, S. N. 1987 Propagation of obliquely incident water waves over a trench. part 2. currents flowing along the trench. *J. Fluid Mech.* **176**, 95–116. [18](#), [63](#)
- KLOPMAN, G. 1994 Vertical structure of the flow due to waves and currents. Progress Report H840.30, Part II. Delft Hydraulics. [38](#)
- KO, J. & STRAUSS, W. 2008 Effect of vorticity on steady water waves. *J. Fluid Mech.* **608**, 197–215. [63](#)
- LAVRENOV, I. V. & PORUBOV, A. V. 2006 Three reasons for freak wave generation in the non-uniform current. *Eur. J. Mech. B-Fluid* **25**, 574–585. [15](#), [21](#)
- LIU, P. L. F. 1983 Wave-current interactions on a slowly varying topography. *J. Geophys. Res.* **88** (C7) (4421–4426). [34](#)
- LONGUET-HIGGINS, M. S. 1983 On integrals and invariants for inviscid, irrotational flow under gravity. *J. Fluid Mech.* **134**, 155–159. [68](#)
- LONGUET-HIGGINS, M. S. & STEWART, R. W. 1961 The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.* **10** (4), 529–549. [34](#)
- LUKE, J. C. 1967 A variational principle for a fluid with a free surface. *J. Fluid Mech.* **27** (part 2), 395–397. [34](#), [35](#), [65](#), [67](#), [68](#)
- MACIVER, R. D., SIMONS, R. R. & THOMAS, G. P. 2006 Gravity waves interacting with a narrow jet-like current. *J. Geophys. Res.* **111**. [16](#), [36](#), [37](#)

- MACMAHAN, J. H., THORNTON, ED B. & RENIERS, AD J.H.M. 2006 Rip current review. *Coast Eng* **53**, 191–208. [17](#)
- MAGNE, R., BELIBASSAKIS, K. A., HERBERS, T. H. C., ARDHUIN, F., O'REILLY, W. C. & REY, V. 2007 Evolution of surface gravity waves over a submarine canyon. *J. Geophys. Res.* **112**. [33](#)
- MARGARETHA, H. 2005 Mathematical modelling of wave-current interaction in a hydrodynamic laboratory basin. PhD thesis, University of Twente, Department of Applied Mathematics, 132 pp. [36](#), [38](#)
- MASSEL, S .R. 1993 Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coast. Eng.* pp. 97–126. [33](#)
- McKEE, W. D. 1987 Water wave propagation across a shearing current. *Wave Motion* **9**, 209–215. [64](#)
- McKEE, W. D. 1996 A model for surface wave propagation across a shearing current. *J. Phys. Oceanogr.* **26**, 276–278. [64](#)
- MORDANE, S., MANGOUB, G., MAROIH, K. L. & CHAGDALI, M. 2004 A parabolic equation based on rational quadratic approximation for surface gravity wave propagation. *Coast. Eng.* **50**, 85–95. [32](#)
- NWOGU, O. G. 2009 Interaction of finite-amplitude waves with vertically sheared current fields. *J. Fluid Mech.* **627**, 179–213. [64](#)
- OCÉANIDE 2013 Interactions houle-courant-bathymétrie phase 3. rapport des essais en bassin. *Tech. Rep.*. Océanide, Zone portuaire de Brégaillon. B. P. 63. 83502 La Seyne sur Mer-France. [xv](#), [xvii](#), [44](#), [46](#), [99](#), [101](#), [102](#)
- PATARAPANICH, M. 1984 Maximum and zero reflection from submerged plate. *J. Waterw. Port C.-ASCE* **110** (2), 171–181. [26](#), [77](#)
- PENNEY, W. G. & PRICE, A. T. 1952 Part i. the diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **224**, 236–253. [29](#)
- PEREGRINE, D. H. 1976 Interactions of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.* **16**, 9–117. [21](#)
- RADDER, A. C. 1979 On the parabolic equation method for water-wave propagation. *J. Fluid Mech.* (part 1), 159–176. [31](#)
- RASCLE, N. 2007 Impact des vagues sur la circulation océanique. PhD thesis, SHOM, Brest. [137](#)
- REY, V. 1992 Propagation and local behavior of normally incident gravity waves over varying topography. *Eur. J. Mech. B-Fluid* **11** (2), 213–232. [77](#), [78](#)

- REY, V. 1995 A note on the scattering of obliquely incident surface gravity waves by cylindrical obstacles in waters of finite depth. *Eur. J. Mech. B-Fluid* **14** (1), 207–216. [27](#), [29](#), [77](#), [78](#)
- REY, V., CAPOBIANCO, R. & DULOU, C. 2002 Wave scattering by a submerged plate in presence of a steady uniform current. *Coast. Eng.* **47**, 27–34. [34](#)
- REY, V., CHARLAND, J. & TOUBOUL, J. 2014 Wave – current interaction in the presence of a 3d bathymetry : deep water wave focusing in opposite current conditions. *Phys. Fluids* **accepted**. [xiv](#), [xv](#), [xvi](#), [41](#), [43](#), [47](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [52](#), [53](#), [95](#), [96](#), [128](#), [129](#), [132](#), [133](#), [171](#), [211](#)
- REY, V., GUINOT, F. & TOUBOUL, J. 2011 Large scale experimental study of wave current interactions in presence of a 3d bathymetry. International Maritime Association of the Mediterranean, Genoa : s.n. [43](#), [47](#), [171](#)
- SELIGER, R. L. & WHITHAM, G. B. 1968 Variational principles in continuum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A.* **305**, 1–25. [68](#)
- SHOM 2005 Courant de marée des côtes de France (manche/atlantique). *Tech. Rep.*. Service hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM). [xv](#), [16](#)
- SHRIRA, V. I. 1993 Surface waves on shear currents : solution of the boundary value problem. *J. Fluid Mech.* **252**, 565–584. [63](#)
- SHYU, J. & TUNG, C. 1999 Reflection of oblique waves by currents : analytical solutions and their application to numerical computations. *J. Fluid Mech.* **396**, 143–182. [28](#)
- SIMMEN, J. A. 1984 Steady deep-water waves on a linear shear current. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Californie. [64](#), [65](#), [66](#)
- SIMMEN, J. A. & SAFFMAN, P. G. 1985 Steady deep-water waves on a linear shear current. *Stud. Appl. Math.* **73**, 35–57. [64](#)
- SKOP, R. A. 1987 An approximate dispersion relation for wave-current interactions. *J. Waterw. Port C-ASCE* **113**, 187–195. [36](#)
- SKOVGAARD, O., JONSSON, I. G. & BERTELSEN, J. A. 1975 Computation of wave heights due to refraction and friction. *J. Waterways, Harbors and Coastal Eng.* **101**, 15–32. [34](#)
- SMITH, J. 1983a On surface gravity waves crossing weak current jets. *J. Fluid Mech.* **134** (277–299). [63](#)
- SMITH, J. 1983b On surface waves crossing a step with horizontal shear. *J. Fluid Mech.* **175** (395–412). [63](#)
- SMITH, R. 1976 Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417–431. [15](#), [21](#)
- SOULSBY, R. L., HAMM, L., KLOPMAN, G., MYRHAUG, D., SIMONS, R. R. & THOMAS, G. P. 1993 Wave-current interaction within and outside the bottom boundary layer. *Coast. Eng.* **21**, 41–69. [21](#)

- STAMNES, J. J., LOVHAUGEN, O., SPJELKAVIK, B., MEI, C. C., LO, E. & YUE, D. K. P. 1983 Nonlinear focusing of surface waves by a lens-theory and experiment. *J. Fluid Mech.* **135**, 71–94. [29](#)
- STEPANYANTS, Y. A. & YAKUBOVICH, E. I. 2011 Scalar description of three-dimensional vortex flows of an incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk* **436** (6), 764–767. [68](#)
- STEWART, R. H. & JOY, J. W. 1974 Hf radio measurements of surface currents. *Deep-Sea Res.* **21**, 1039–1049. [37](#)
- STOKES, G. G. 1849 On the oscillatory waves. *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8**, 441–455. [137](#)
- STOMMEL, H. 1958 The gulf stream : A physical and dynamical description. *Berkeley : University of California Press* . [14](#)
- SUH, K. D., LEE, C. & PARK, W. S. 1997 Time-dependant equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coast. Eng.* **32**, 91–117. [33](#)
- SUH, K. G., PARK, W. S. & PARK, B. S. 2001 Separation of incident and reflected waves in wave-current flumes. *Coast Eng* **149–159** (43). [28](#)
- SWAN, C., CUMMINS, I. P. & JAMES, R. L. 2001 An experimental study of two-dimensional surface water waves propagating on depth-varying currents. part 1. regular waves. *J. Fluid Mech.* **428**, 273–304. [38](#)
- SWAN, C. & JAMES, R. L. 2001 A simple analytical model for surface water waves on a depth varying current. *Appl. Ocean Res.* **22**, 331–347. [64](#)
- TAKANO, K. 1960 Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle. *Houille Blanche* **15**, 247–267. [27](#), [29](#), [77](#), [78](#), [191](#)
- TELESASILVA, A. F. & PEREGRINE, D. H. 1988 Steep, steady surface waves on water on finite depth with constant vorticity. *J. Fluid Mech.* **195**, 281–302. [37](#), [164](#)
- THOMAS, G. P. 1981 Wave-current interactions : an experimental and numerical study. part 1. linear waves. *J. Fluid Mech.* **10**, 467–474. [37](#)
- THOMPSON, P. D. 1949 The propagation of small surface disturbances through rotational flow. *Annals N. Y. Acad. Sci.* **51**, 463–474. [37](#)
- TOLEDO, Y. & AGNON, Y. 2011 Three dimensional application of the complementary mild-slope equation. *Coast. Eng.* **58**, 1–8. [70](#)
- TSAI, C., SU, M. & HUANG, S 2004 Observations and conditions for occurrence of dangerous coastal waves. *Ocean Eng* **31**, 745–760. [21](#)
- VINCENT, C. L. & BRIGGS, M. J. 1989 Refraction-diffraction of irregular waves over a mound. *J. Waterw. Div.-ASCE* **115**, 269–284. [30](#)

- WAHLEN, E. 2009 Steady water waves with a critical layer. *J. Differ. Eq.* **246**, 2468–2483. [64](#)
- WHITHAM, G.B. 1974 *Linear and nonlinear waves*. New York : John Wiley & Sons. [34](#), [58](#), [84](#), [88](#), [89](#), [172](#)
- WHITHAM, G. B. 1970 Two-timing, variational principles and waves. *J. Fluid Mech.* **44** (part 2), 373–395. [34](#)
- ZAMAN, M. H. & BADDOUR, E. 2011 Interaction of waves with non-colinear currents. *Ocean Eng.* **38**, 541–549. [63](#)



# Annexes





---

# Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée

## Introduction

Afin de modéliser la propagation de la houle au dessus d'une plaque plane, nous décomposons le milieu en plusieurs domaines, visibles sur la figure (A.1). Les domaines  $D_1$  et  $D_3$  correspondent au milieu en amont et en aval de la plaque plane. Le domaine  $D_{2s}$  est le milieu au dessus de celle-ci. Le domaine  $D_{2f}$  est le milieu en dessous de la plaque plane. La configuration de ces domaines nécessite de formuler différentes hypothèses de conditions aux limites. Pour les domaines  $D_1$ ,  $D_{2s}$  et  $D_3$  nous formulons des hypothèses de surface libre. Le domaine  $D_{2f}$  est, quant à lui, limité par un toit rigide. Nous formulerons donc l'hypothèse d'une frontière solide.

## Conditions aux limites

### Domaine avec condition de surface libre

#### Expression générale des potentiels

Dans les domaines  $D_i$  où  $i = \{1, 2s, 3\}$  le potentiel  $\Phi_i$  de la houle s'écrit

$$\Phi_i(x, z, t) = \phi_i(x, z) \exp(i\omega t) = \left[ \underbrace{A_i^\pm \exp(\pm ik_0 x) \Psi_{i,0}(z)}_{\text{Modes propagatifs}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} B_{i,n}^\pm \exp(\pm k_n x) \Psi_{i,n}(z)}_{\text{Modes évanescents}} \right] \exp(i\omega t) \quad (1)$$

avec  $\Psi_{i,0} = \cosh(k_i(z+h))/\cosh(k_i h)$ ,  $\Psi_{i,n} = \cos(k_{i,n}(z+h))/\cos(k_{i,n} h)$ .  $k_{i,0}$  et  $k_{i,n}$  sont calculés à partir des relations de dispersion  $\omega^2 = gk_{i,0} \tanh(k_{i,0} h)$  et  $\omega^2 = gk_{i,n} \tan(k_{i,n} h)$ .

Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée

---

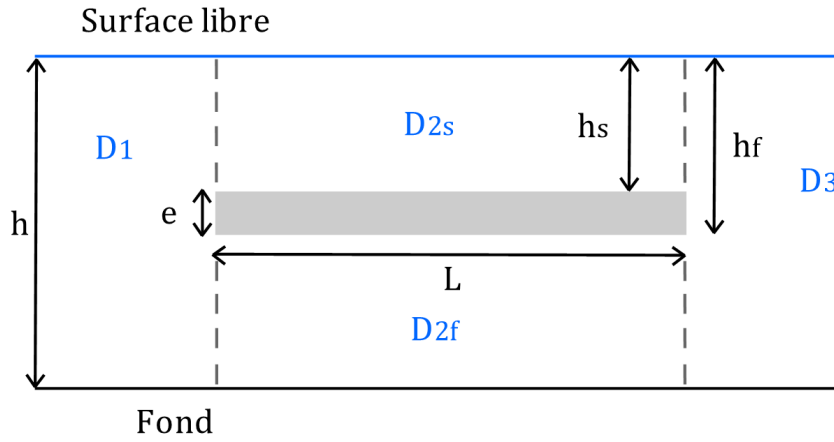


Figure A.1 – Plaque plane immergée

Expression du potentiel  $\phi_1$

Dans le domaine  $D_1$ , le potentiel  $\phi_1$  s'écrit

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x, z) &= \phi_1^-(x, z) + \phi_1^+(x, z) \\
 &= \left( A_1^- e^{-ik_1 x} + A_1^+ e^{ik_1 x} \right) \Psi_{1,0}(z) + \sum_{n=1}^p B_{1,n}^+ e^{k_{1,n} x} \Psi_{1,n}(z) \\
 &= A_1^- e^{-ik_1 x} \Psi_{1,0}(z) + \sum_{n=0}^p B_{1,n}^+ e^{k_{1,n} x} \Psi_{1,n}(z)
 \end{aligned} \tag{2}$$

avec  $k_{1,0} = ik_1$ .

---

### Expression du potentiel $\phi_{2s}$

Dans le domaine  $D_{2s}$ , le potentiel  $\phi_{2s}$  s'écrit

$$\begin{aligned}
\phi_{2s}(x, z) &= \phi_{2s}^-(x, z) + \phi_{2s}^+(x, z) \\
&= \left( A_{2s}^- e^{-ik_{2s}x} + A_{2s}^+ e^{ik_{2s}(x-L)} \right) \Psi_{2s,0}(z) + \\
&\quad \sum_{n=1}^p \left( B_{2s,n}^- e^{-k_{2s,n}x} + B_{2s,n}^+ e^{k_{2s,n}(x-L)} \right) \Psi_{2s,n}(z) \\
&= \sum_{n=0}^p \left( B_{2s,n}^- e^{-k_{2s,n}x} + B_{2s,n}^+ e^{k_{2s,n}(x-L)} \right) \Psi_{2s,n}(z)
\end{aligned} \tag{3}$$

### Expression du potentiel $\phi_3$

Dans le domaine  $D_3$ , le potentiel  $\phi_3$  se note

$$\begin{aligned}
\phi_3(x, z) &= \phi_3^-(x, z) + \phi_3^+(x, z) \\
&= A_3^- e^{-ik_3(x-L)} \Psi_{3,0}(z) + \sum_{n=1}^p B_{1,n}^- e^{-k_{3,n}(x-L)} \Psi_{3,n}(z) \\
&= \sum_{n=0}^p B_{1,n}^- e^{-k_{3,n}(x-L)} \Psi_{3,n}(z)
\end{aligned} \tag{4}$$

## Domaine avec condition de toit rigide

### Expression générale des potentiels

Dans le domaine  $D_{2f}$ , le potentiel  $\Phi_{2f}$  de la houle se note

$$\Phi_{2f}(x, z, t) = \left[ \underbrace{\left( A_{2f}^+ x + A_{2f}^- \right) \Psi_0(z)}_{\text{Oscillation de la colonne d'eau}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} B_{2f,n}^{\pm} \exp(\pm k_{2f,n}x) \Psi_{2f,n}(z)}_{\text{Modes évanescents}} \right] \exp(i\omega t) \tag{5}$$

avec  $\Psi_{2f,0} = 1$ ,  $\Psi_{2f,n} = \cos(k_{2f,n}(z+h))$  et  $k_{2f,n} = n\pi/(h-h_f)$ .

## Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée

---

### Expression du potentiel $\phi_{2f}$

Dans le domaine  $D_{2f}$ , le potentiel  $\phi_{2f}$  se note

$$\begin{aligned}\phi_{2f}(x, z) &= \phi_{2f}^-(x, z) + \phi_{2f}^+(x, z) \\ &= (A_{2f}^- + A_{2f}^+ x) \Psi_{2f,0}(z) + \sum_{n=1}^p (B_{2f,n}^- e^{-k_{2f,n} x} + B_{2f,n}^+ e^{k_{2f,n}(x-L)}) \Psi_{2f,n}(z)\end{aligned}\quad (6)$$

### Continuité des champs de pression et de vitesse aux interface de deux domaines successifs

A l'interface des domaines  $D_1$ ,  $D_{2f}$  et  $D_1$ ,  $D_{2s}$  la continuité des champs de vitesse et de pression se note

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} & \text{pour } -h \leq z \leq -h_f \\ \phi_1 = \phi_{2f} & \text{pour } -h \leq z \leq -h_f \text{ et } x = 0 \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{2s}}{\partial x} & \text{pour } -h_s \leq z \leq 0 \text{ et } x = 0 \\ \phi_1 = \phi_{2s} & \text{pour } -h_s \leq z \leq 0 \text{ et } x = 0 \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0 & \text{pour } -h_f \leq z \leq -h_s \text{ et } x = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

A l'interface des domaines  $D_{2f}$ ,  $D_3$  et  $D_{2s}$ ,  $D_3$  la continuité des champs de vitesse et de pression se note

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \text{pour } -h \leq z \leq -h_f \text{ et } x = L \\ \phi_{2f} = \phi_3 & \text{pour } -h \leq z \leq -h_f \text{ et } x = L \\ \\ \frac{\partial \phi_{2s}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \text{pour } -h_s \leq z \leq 0 \text{ et } x = L \\ \phi_{2s} = \phi_3 & \text{pour } -h_s \leq z \leq 0 \text{ et } x = L \\ \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = 0 & \text{pour } -h_f \leq z \leq -h_s \text{ et } x = L \end{array} \right. \quad (8)$$

---

## Principe de la méthode intégrale aux frontières

Cette méthode développée par [Takano \(1960\)](#) permettra de calculer numériquement les coefficients A et B indexés dans les expressions des potentiels des vitesses.

Les conditions aux limites précédentes sont exprimées par une formulation intégrale. Cette formulation se base sur le fait que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  formant une base orthogonale, le produit scalaire  $f.g$  entre ces deux fonctions est nul. Ici le produit scalaire de deux fonctions est défini comme l'intégrale sur la colonne d'eau du produit des deux fonctions

$$f.g = \int_{-h}^0 f.g dz \quad (9)$$

Nous pouvons remarquer que quel que soit  $n > 1$  avec  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  fixé, les fonctions  $\Psi_{i,n}$  sont orthogonales entre elles et forment une base. En réécrivant les conditions de continuité des champs de vitesse et de pression à l'interface des domaines successifs sous forme de produit scalaire en faisant intervenir ces bases, le système (7) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} dz = \int_{-h}^{-h_f} \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} dz + \int_{-h_s}^0 \frac{\partial \phi_{2s}}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} dz \quad \text{en } x = 0 \\ \int_{-h}^{-h_f} \phi_1 \cdot \Psi_{2f,n} dz = \int_{-h}^{-h_f} \phi_{2f} \cdot \Psi_{2f,n} dz \quad \text{en } x = 0 \\ \int_{-h_s}^0 \phi_1 \cdot \Psi_{2s,n} dz = \int_{-h_s}^0 \phi_{2s} \cdot \Psi_{2s,n} dz \quad \text{en } x = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

Puis, le système (8) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-h}^{-h_f} \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} dz + \int_{-h_s}^0 \frac{\partial \phi_{2s}}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} dz = \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} dz \quad \text{en } x = L \\ \int_{-h}^{-h_f} \phi_{2f} \cdot \Psi_{2f,n} dz = \int_{-h}^{-h_f} \phi_3 \cdot \Psi_{2f,n} dz \quad \text{en } x = L \\ \int_{-h_s}^0 \phi_{2s} \cdot \Psi_{2s,n} dz = \int_{-h_s}^0 \phi_3 \cdot \Psi_{2s,n} dz \quad \text{en } x = L \end{array} \right. \quad (11)$$

En injectant l'expression des différents potentiels (2), (4), (6), (3) dans les systèmes (10) et (11) nous obtenons le système suivant :

Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1^+}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} dz - \int_{-h}^{h_f} \frac{\partial \phi_{2f}^-}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} - \int_{-h}^{h_f} \frac{\partial \phi_{2f}^+}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} - \int_{-h_s}^0 \frac{\partial \phi_{2s}^-}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} - \int_{-h_s}^0 \frac{\partial \phi_{2s}^+}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} + 0 = - \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1^-}{\partial x} \cdot \Psi_{1,n} \\
 & \int_{-h}^{-h_f} \phi_1^+ \cdot \Psi_{2f,n} - \int_{-h}^{-h_f} \phi_{2f}^- \cdot \Psi_{2f,n} - \int_{-h}^{-h_f} \phi_{2f}^+ \cdot \Psi_{2f,n} + 0 + 0 = - \int_{-h}^{-h_f} \phi_1^- \cdot \Psi_{2f,n} \\
 & \int_{-h_s}^0 \phi_1^+ \cdot \Psi_{2s,n} + 0 + 0 + 0 - \int_{-h_s}^0 \phi_{2s}^- \cdot \Psi_{2s,n} - \int_{-h_s}^0 \phi_{2s}^+ \cdot \Psi_{2s,n} + 0 = - \int_{-h_s}^0 \phi_1^- \cdot \Psi_{2s,n} \\
 & 0 + \int_{-h}^{h_f} \frac{\partial \phi_{2f}^-}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} + \int_{-h}^{h_f} \frac{\partial \phi_{2f}^+}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} + \int_{-h}^{h_s} \frac{\partial \phi_{2s}^-}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} + \int_{-h}^{h_s} \frac{\partial \phi_{2s}^+}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} - \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_3^-}{\partial x} \cdot \Psi_{3,n} = 0 \\
 & 0 + \int_{-h_s}^{h_f} \phi_{2f}^- \cdot \Psi_{2f,n} + \int_{-h}^{-h_f} \phi_{2f}^+ \cdot \Psi_{2f,n} + 0 - \int_{-h}^{-h_f} \phi_3^- \cdot \Psi_{2f,n} = 0 \\
 & 0 + 0 + 0 + \int_{-h_s}^0 \phi_{2s}^- \cdot \Psi_{2s,n} + \int_{-h_s}^0 \phi_{2s}^+ \cdot \Psi_{2s,n} - \int_{-h_s}^0 \phi_3^- \cdot \Psi_{2s,n} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Les trois premières lignes sont relatives au système (10) et les trois suivantes sont relatives au système (11). Chaque élément du système (12) forme une matrice carrée de taille  $p + 1$ . Ce système se réécrit sous forme matriciel  $M.X = B$ .

M est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Les matrices  $M_{16}, M_{24}, M_{25}, M_{26}, M_{32}, M_{33}, M_{36}, M_{41}, M_{51}, M_{54}, M_{55}, M_{61}, M_{62}, M_{63}$  sont nulles. Les matrices  $M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{34}, M_{35}, M_{46}, M_{52}, M_{53}, M_{64}, M_{65}$  sont diagonales. Nous pouvons exprimer en guise d'exemple la matrice  $M_{21}$  dont tous les éléments sont à priori non nuls

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \int_{-h}^{-h_f} \Psi_{1,0} \Psi_{2f,0} & \dots & \int_{-h}^{-h_f} \Psi_{1,p} \Psi_{2f,0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{-h}^{-h_f} \Psi_{1,p} \Psi_{2f,0} & \dots & \int_{-h}^{-h_f} \Psi_{1,p} \Psi_{2f,p} \end{bmatrix} \quad (14)$$

La transposée de la matrice  $X$  se note

$$X^t = [B_{1,0}^+, \dots, B_{1,p}^+, A_{2f}^-, B_{2f,1}^-, \dots, B_{2f,p}^-, B_{2f,1}^+, \dots, B_{2f,p}^+, B_{2s,0}^-, \dots, B_{2s,p}^-, B_{2s,0}^+, \dots, B_{2s,p}^+, B_{3,0}^-, \dots, B_{3,p}^-].$$

La matrice  $B$  est une matrice colonne composée de six blocs

$$B = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6,] . \quad (15)$$

Les six matrices colonne  $N_i$  contiennent chacune  $p + 1$  lignes. A titre d'exemple nous exprimons la matrice  $N_1$ . Nous avons  $N_1 = \left[ -\int_{-h}^0 -k_{1,0}, 0 \dots 0 \right]$ . Les matrices  $N_4, N_5$  et  $N_6$  sont nulles. La résolution en  $X$  de l'équation matricielle  $M.X = B$  nous permet d'obtenir les différents coefficients  $A$  et  $B$  indexés.



## Annexe A : Méthode intégrales aux frontières dans le cas d'une plaque plane immergée

---

---

# Annexe B : Expression de la vitesse de groupe

## Introduction

Nous présentons dans cette annexe le détail du calcul permettant d'établir la vitesse de groupe de la houle lorsqu'elle se propage en présence d'un courant cisailé linéairement le long de la colonne d'eau. Nous présentons ensuite les différentes étapes de calcul permettant d'établir la similitude entre l'expression de la vitesse de groupe de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) et celle que nous avons formulée.

## Calcul de la vitesse de groupe

La relation de dispersion s'écrit dans notre cas de propagation

$$\sigma_0 \sigma_2 = \sigma^2 \quad (1)$$

Afin de faciliter les calculs nous les effectuons dans le cas d'une propagation unidirectionnelle. Dans ce cas, en dérivant l'expression précédente par rapport à  $k$  nous obtenons

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - U_2 - k \frac{\partial U_2}{\partial k} \right) \sigma_0 + \sigma_2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - U_0 \right) = 2\sigma C_g. \quad (2)$$

Cette équation se réécrit

$$(\sigma_0 + \sigma_2) \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sigma_0 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_0 k \frac{\partial U_2}{\partial k} + 2\sigma C_g. \quad (3)$$

En se rappelant que  $\sigma_0 + \sigma_2 = 2\sigma_1$  l'expression précédente se réécrit

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} U_0 + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} U_2 + \frac{\sigma}{\sigma_1} C_g + \frac{\sigma_0 k}{2\sigma_1} \frac{\partial U_2}{\partial k}. \quad (4)$$

## Annexe B : Expression de la vitesse de groupe

---

D'autre part, nous pouvons remarquer que

$$\frac{\sigma_0}{2\sigma_1}U_2 + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}k\frac{\partial U_2}{\partial k} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}\frac{\partial(kU_2)}{\partial k}. \quad (5)$$

Or, comme  $kU_2 = kU_0 - 2kd_cS$ , nous pouvons écrire

$$\frac{\partial(kU_2)}{\partial k} = U_0 - 2d_cS - 2Sk\frac{\partial d_c}{\partial k}. \quad (6)$$

Comme  $d_c = \tanh(kh)/(2k)$ , nous avons

$$\begin{aligned} 2Sk\frac{\partial d_c}{\partial k} &= Sk\left[\frac{1}{k^2}\left(kh - kh\tanh(kh)^2 - \tanh(kh)\right)\right] \\ &= 2S\left[\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\tanh(kh)^2 - \frac{\tanh(kh)}{2k}\right] \\ &= 2Sd_c\left[-1 + \frac{kh}{\tanh(kh)} - kh\tanh(kh)\right] \\ &= 2Sd_c\left[-1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right] \\ &= -2Sd_c(1 - G). \end{aligned} \quad (7)$$

Dans ce cas, en reprenant l'expression (5) nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}\frac{\partial(kU_2)}{\partial k} &= \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}(U_0 - 2d_cS + 2Sd_c(1 - G)) \\ &= \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}U_0 - \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}2Sd_cG. \end{aligned} \quad (8)$$

L'expression (4.5) se réécrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial k} &= \frac{\sigma_2}{2\sigma_1}U_0 + \frac{\sigma}{\sigma_1}C_g + \frac{\sigma_0}{2\sigma_1}U_0 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}Sd_cG \\ &= U_0 + \frac{\sigma}{\sigma_1}C_g - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}d_cSG \end{aligned} \quad (9)$$

---

## Comparaison avec l'expression de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#)

Dans un cas de propagation unidirectionnel, [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) expriment la vitesse de groupe sous la forme

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = U_0 + \frac{g(1 + G) - SG\frac{\sigma_0}{k}}{2gk - S\sigma_0}\sigma_0 \quad (10)$$

où  $G = 2kh/\sinh(2kh)$ . La relation de dispersion (1) se réécrit directement sous la forme de celle de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#)

$$\sigma_0^2 = (gk - S\sigma_0)\tanh(kh). \quad (11)$$

En utilisant cette expression, le dénominateur de l'équation (10) se réécrit

$$2gk - S\sigma_0 = gk + \frac{\sigma_0^2}{\tanh(kh)} = \frac{gk\tanh(kh) + \sigma_0^2}{\tanh(kh)} = \frac{\sigma^2 + \sigma_0^2}{\tanh(kh)}. \quad (12)$$

De plus,

$$\sigma^2 + \sigma_0^2 = \sigma_0\sigma_2 + \sigma_0^2 = \sigma_0(\sigma_0 + \sigma_2) = 2\sigma_0\sigma_1, \quad (13)$$

et d'autre part

$$g(1 + G) = \frac{2\sigma C_g}{\tanh(kh)}. \quad (14)$$

En substituant les expressions (12), (13) et (14) dans (10) nous obtenons directement

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial k} &= U_0 + \frac{\tanh(kh)}{2\sigma_0\sigma_1} \left( \frac{2\sigma C_g}{\tanh(kh)} - SG\frac{\sigma_0}{k} \right) \sigma_0 \\ &= U_0 + \frac{\sigma}{\sigma_1} C_g - \frac{\sigma_0}{\sigma_1} d_c SG \end{aligned} \quad (15)$$

Cette expression est bien identique à (9). L'expression de la vitesse de groupe établie par [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) est bien identique à notre expression dans le cas d'une propagation unidirectionnelle.

## Annexe B : Expression de la vitesse de groupe

---

---

## Annexe C : Calculs relatifs à l'action de la houle

### Densité d'énergie de la houle

La densité d'énergie de la houle s'écrit

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int_{-h}^{\eta} \rho g z \, dz}_{\text{Terme 1}} - \underbrace{\int_{-h}^{\eta} \rho g z \, dz}_{\text{Terme 2}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\eta} (u^2 + w^2) \, dz}_{\text{Terme 3}} - \underbrace{\frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 (S z + U_0)^2 \, dz}_{\text{Terme 4}} \quad (1)$$

Le calcul des termes 1, 2 et 4 est aisé. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Terme 1} &= \frac{1}{2} \rho g \left( \frac{a^2}{2} - h^2 \right), \\ \text{Terme 2} &= -\frac{1}{2} \rho g h^2, \\ \text{Terme 4} &= \frac{1}{2} \rho g \left( \frac{S^2}{3} z^3 - S U_0 z^2 + U_0^2 h \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Après intégration par partie et simplification de l'expression, le terme 3 se réécrit

$$\text{Terme 3} = \frac{1}{2} \rho \left[ \frac{\alpha^2 k}{4 \cosh(kh)^2} \sinh(2kh) + \alpha a S \tanh(kh) + \frac{1}{3} S^2 h^3 + U_0 S \left( \frac{a^2}{2} - h^2 \right) + U_0^2 h \right]. \quad (3)$$

avec  $\alpha = g a (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0) / \sigma^2$ . La densité d'énergie de la houle se note alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho a^2 \left[ g + \frac{S}{2} (c_{rs} + U_0) \right]. \quad (4)$$

Sur ce point nos résultats diffèrent de ceux de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#). Cependant cet écart n'a pas de conséquence dans la suite du développement mené dans cette thèse.

## Remarques sur l'équation d'évolution de l'action de la houle établie par [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#)

[Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) établissent l'égalité suivante

$$\overline{\mathcal{L}_\omega} = \frac{E}{\omega_{rm}} \quad (5)$$

et affirment que la densité d'énergie de la houle se réécrit

$$E = \frac{\rho a^2}{4(\omega - kU_0)} (2g - Sc_{rs}) \left( \omega - k \left( U_0 - \frac{Sh}{2} \right) \right). \quad (6)$$

L'objectif de cette section est de vérifier les conditions de validité de cette égalité.

La relation de dispersion pour une houle en présence d'un courant  $U(z) = Sz + U_0$  se réécrit

$$c_{rs}^2 = \frac{\tanh(kh)}{k} (g - Sc_{rs}) \quad (7)$$

avec  $c_{rs} = \frac{1}{k}(\omega - kU_0)$ .

La densité d'énergie moyenne de la houle s'écrit dans l'étude de [Jonsson \*et al.\* \(1978\)](#) (leur équation (10))

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\rho a^2 \left[ 2g + \frac{1}{2}S^2h + Sc_{rs} \left( -1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} + kh \tanh kh \right) \right]. \quad (8)$$

Cette équation peut se réécrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{4(\omega - kU_0)} \rho a^2 \left[ \left( 2gkc_{rs} + gSkh - Skc_{rs}^2 - \frac{1}{2}S^2khc_{rs} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( S^2khc_{rs} - gSkh + \frac{2Sc_{rs}^2k^2h}{\sinh(2kh)} + Sc_{rs}^2k^2h \tanh(kh) \right) \right] \\
&= \underbrace{\frac{\rho a^2}{4(\omega - kU_0)} \left[ (2g - Sc_{rs}) \left( \omega - k \left( U_0 - \frac{Sh}{2} \right) \right) \right]}_{\alpha} + \\
&\quad \underbrace{\frac{\rho a^2}{4(\omega - kU_0)} \left[ \left( S^2khc_{rs} - gSkh + \frac{2Sc_{rs}^2k^2h}{\sinh(2kh)} + Sc_{rs}^2k^2h \tanh(kh) \right) \right]}_{\beta}
\end{aligned} \tag{9}$$

Les relations (9) et (6) diffèrent du terme  $\beta$ . Nous cherchons donc dans quelle mesure ce terme s'annule. Dans le cas limite de propagation en eau peu profonde, le terme  $\beta$  se réécrit

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\rho a^2}{4(\omega - kU_0)} \left[ S^2khc_{rs} - gSkh + Skc_{rs}^2 + Sc_{rs}^2k^3h^2 \right] \\
&= \frac{\rho a^2}{4(\omega - kU_0)} \left[ S^2khc_{rs} - gSkh + Skh(g - Sc_{rs}) + \underbrace{Sc_{rs}^2k^2h^2}_{\mathcal{O}(kh)} \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

En négligeant les termes d'ordre  $\mathcal{O}(kh)$ ,  $\beta = 0$ . L'équation (5) n'est donc vraie qu'en eau peu profonde.





---

# Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino

## Les Vectrino et leur utilisation

### Les différents types de Vectrino

Les Vectrino sont constitués d'un corps cylindrique. Un côté de ce corps est relié, grâce à une connexion étanche, à l'interface d'acquisition qui sera décrite ultérieurement. Sur le côté opposé, une tige permet de relier la tête de mesure au corps cylindrique. La tête est constituée de quatre branches au milieu desquelles se trouve une cellule de mesure. Le point de mesure de la cellule est situé à *5cm* de la cellule.

Il existe trois sortes de tête de mesure différentes, la tête droite, la tête flexible et la tête type "side-locking" dont les caractéristiques géométriques sont présentées sur les schémas ci-après.

## Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino

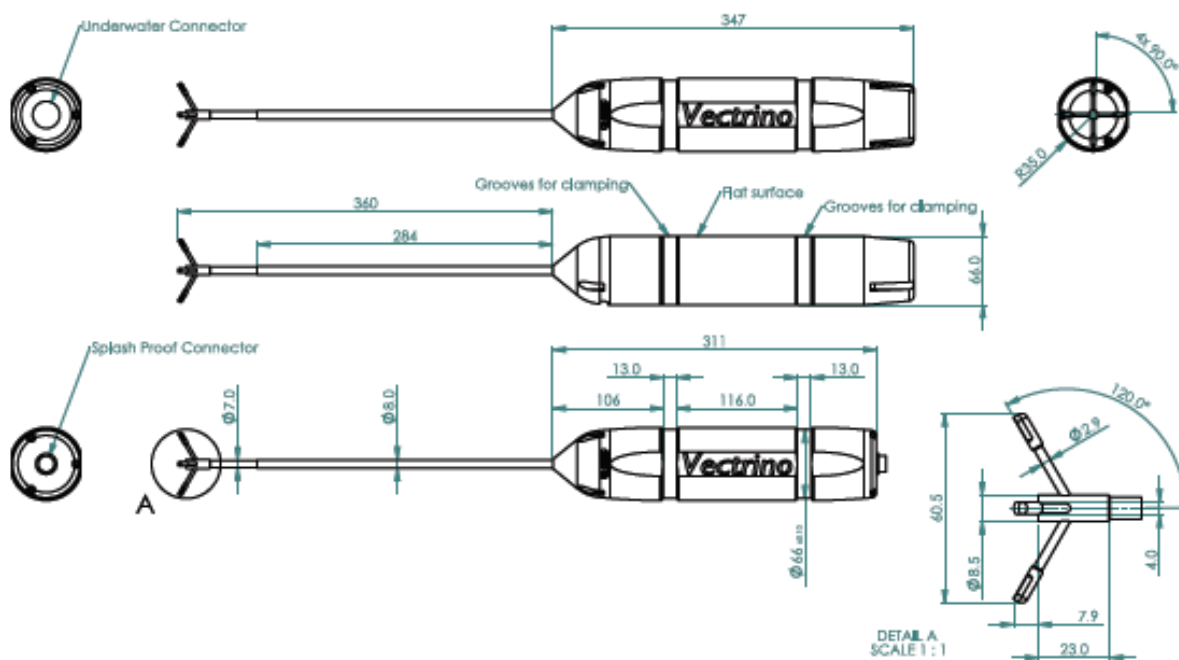


Figure D.1 – Vectrino à tête droite. (AS, 2010)

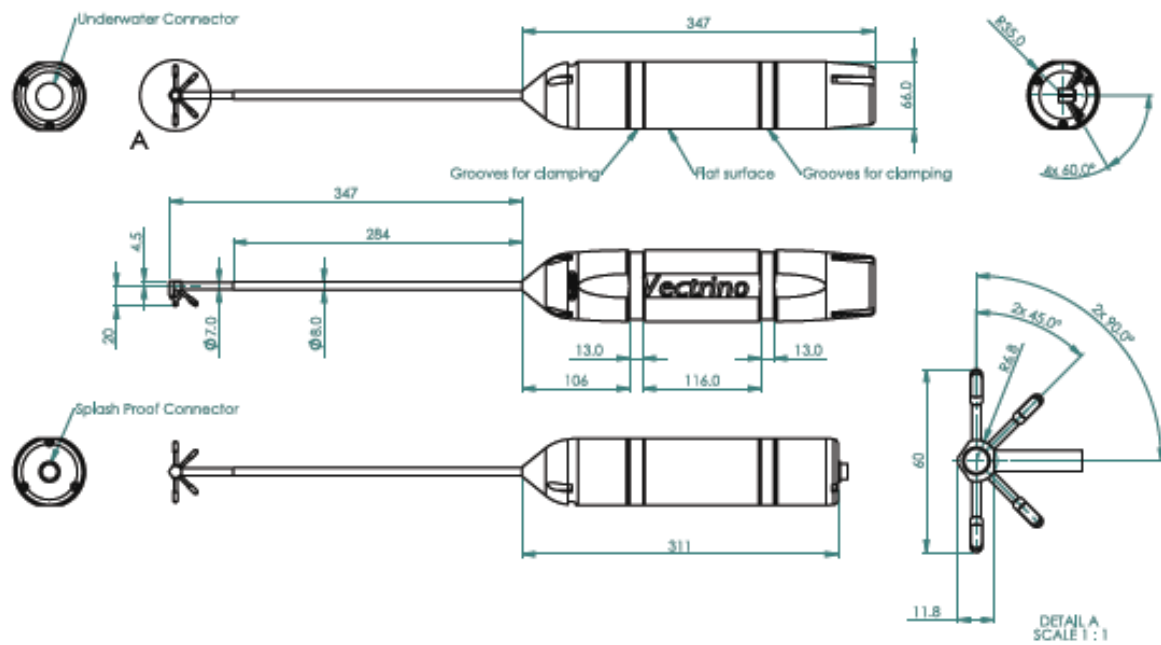


Figure D.2 – Vectrino "side-locking". (AS, 2010)

## Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino

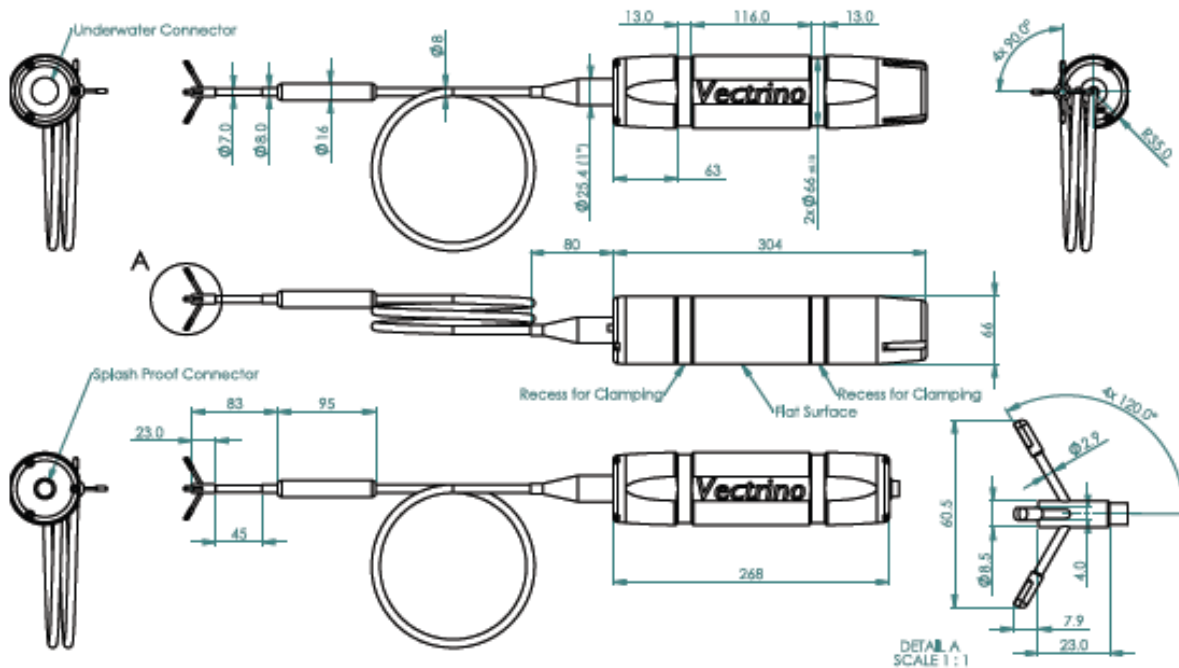


Figure D.3 – Vectrino à tête flexible. (AS, 2010)

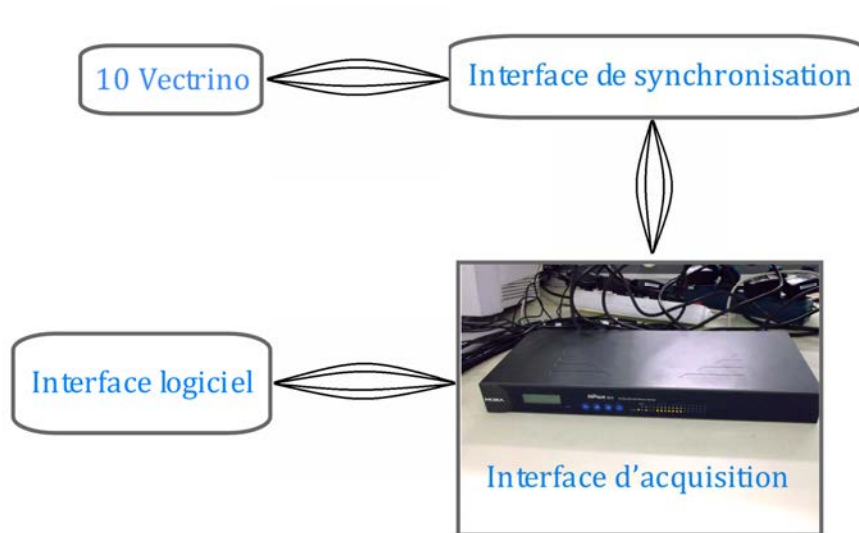
Durant nos expériences nous disposons de dix Vectrino dont deux avec des tête type "side-locking", deux de type "tête flexible" et six de type "têtes droite". Les branches de mesure permettent d'acquérir des mesures dans les trois directions de l'espace dans un repère cartésien orthonormé  $(x, y, z)$ . Afin de se repérer une bague rouge est disposée sur une des quatre branches d'un Vectrino. Cette bague rouge indique la direction  $x$ . L'axe  $z$  est dirigé le long de la tige des Vectrino. La direction de l'axe  $y$  peut ensuite être déduite.

### Connexion à l'interface d'acquisition

Tous les Vectrino ont une alimentation électrique indépendante. Chaque Vectrino est connecté à un port d'une même interface. Cette interface est elle même reliée à un ordinateur de terrain. L'interface permet de nous indiquer les ports en cours de fonctionnement et donc les Vectrino en cours de mesure. Afin de réaliser des mesures synchrones du champs de vitesse, tous les Vectrino sont reliés entre eux, via un branchement en parallèle. Ainsi un des Vectrino

---

sera désigné comme "maître", les autres seront "esclaves".



**Figure D.4** – Schématisation de la connexion entre les divers éléments

## Présentation du logiciel d'acquisition et paramétrisation

### Présentation du logiciel PolySync

Le logiciel PolySync, que nous utiliserons pendant toutes nos expériences, permet de configurer les Vectrino, de lancer et d'arrêter les acquisitions, de les enregistrer, de convertir les fichiers obtenus en fichiers textes lisibles et d'utiliser facilement les 10 Vectrino de manière synchronisée. Il offre de plus la possibilité de réaliser une seule configuration pour l'ensemble des Vectrino utilisés et surtout de pouvoir lancer une seule acquisition et un seul enregistrement pour l'ensemble des Vectrino déployés. Pour acquérir des mesures il est d'abord nécessaire de configurer les Vectrino.

### Configuration des Vectrino

La configuration doit être effectuée à l'ouverture du logiciel ou bien quand le nombre de Vectrino utilisés change, ou encore si un paramètre relatif à un ou plusieurs Vectrino doit être

## Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino

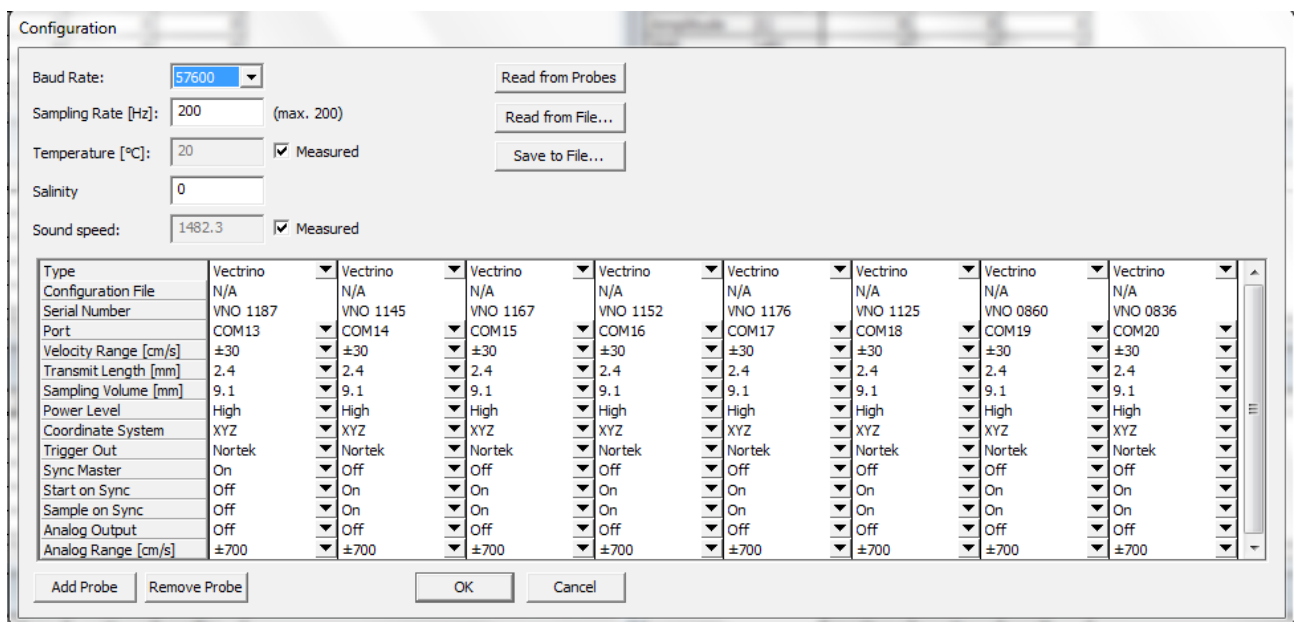
---

modifié. Sous cette fenêtre il est nécessaire d'indiquer différentes informations.

- **Baud-rate** : caractérise le temps de communication entre l'ordinateur et les Vectrino. Pour les essais 2013 au BGO et dans le bassin de l'ISITV, la valeur utilisée est 57600.
- **Sampling rate** : C'est la fréquence d'échantillonnage des mesures acquises et enregistrées. Dans notre cas les dix Vectrino acquièrent les mesures à une fréquence de 200 Hz.
- **La température** : La température de l'eau. L'option « Measured » peut être sélectionnée. La température de l'eau sera dans ce cas automatiquement mesurée par la sonde.
- **La salinité** : Les mesures sont effectuées dans notre cas en eau douce.
- **La vitesse du son** : « Measured » peut être sélectionnée.
- **Le champ "velocity range"**. Il permet de sélectionner la plage de vitesse orbitale de la houle. Il est important de sélectionner convenablement la plage de mesure "velocity range". Lorsque "velocity range" a une valeur de 30 cm/s, les composantes longitudinale verticale et transverse de la vitesse des particules ne devront pas dépasser 45 cm/s, sous peine de saturer. En revanche le choix d'une plage de vitesse "velocity range" trop grande devant les vitesses sur les composantes x, y et z engendrera davantage de bruit dans les mesures. Des essais sont utiles pour déterminer la plage de vitesse optimale.
- **Le champs "Transmit length"** permet de choisir la distance entre le point de mesure et la cellule de la tête du Vectrino.
- **"Sampling volume"** correspond au volume d'eau que le Vectrino utilise pour les mesures.
- **"Power level"**. Ce champs est laissé avec la valeur maximale autorisée par le logiciel.

Durant les expériences menées dans le bassin à houle de Seatech et au BGO First, l'eau était claire, c'est-à-dire qu'elle contenait relativement peu de particules en suspension susceptibles de rétro-diffuser les signaux acoustiques des Vectrino. Afin que les Vectrino puissent acquérir des mesures exploitables, les champs "Transmit Length", "Sampling Volume" et "Power Level" ont été configurés avec les valeurs maximales proposées par le logiciel PolySync.

Lorsque ces champs sont remplis des colonnes résumant la configuration de chaque Vectrino déployé apparaissent. La figure ci-dessous montre un exemple de configuration. Une vérification de ces champs est nécessaire afin de s'assurer que tous les Vectrino soient bien configurés avec les mêmes paramètres de mesure.



**Figure D.5** – Exemple de configuration des Vectrino



## Annexe D : Présentation des courantomètres haute précision : les Vectrino

---

---

Annexe E : article de *Rey et al.* (2014)

## Wave–current interaction in the presence of a three-dimensional bathymetry: Deep water wave focusing in opposing current conditions

V. Rey,<sup>1,2,a)</sup> J. Charland,<sup>1,2,b)</sup> and J. Touboul<sup>1,2,c)</sup>

<sup>1</sup>Université de Toulon, CNRS/INSU, IRD, Mediterranean Institute of Oceanography (MIO), UM 110, F-83957 La Garde, France

<sup>2</sup>Aix Marseille Université, CNRS/INSU, IRD, Mediterranean Institute of Oceanography (MIO), UM 110, 13288 Marseille, Cedex, France

(Received 26 March 2014; accepted 18 August 2014; published online 9 September 2014)

Large scale experiments were carried out in the Ocean Engineering Basin FIRST, France. A tri-dimensional bathymetry consisting of two symmetrical submerged mounds was displayed on the flat bed on both sides of the basin. Regular waves of frequency corresponding to deep water conditions above the bathymetry were generated in opposing current conditions. A strong tri-dimensional behaviour is observed for the wave amplitude, leading to a strong focusing (up to twice the incident amplitude) of the wave energy towards the central deeper zone. This amplification cannot be ascribed to the increase of the current intensity in the main wave direction, nor to a current gradient normally to the wave direction. A wave phase gradient, normal to its main direction, is observed up-wave (or downstream) the mounds. This phase lag depends on the wave amplitude, it is the higher for the moderate amplitude case. The experimental data are compared with calculations of a refraction-diffraction model assuming a depth-averaged current. If the model qualitatively predicts the wave amplification in the centerline of the basin, discrepancies are observed in the vicinity of the depth changes. The observed mean current vertical profile shape is then supposed to play a significant role in the wave focusing, especially near the steep slopes down-stream the mounds. In addition, the waves are found to modify substantially both horizontal and vertical current fields. © 2014 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4894740>]

### I. INTRODUCTION

During the last decades, a huge effort has been made for a better understanding and modelling of water wave propagation. Estimate of the wave characteristics near the shore has been one of the major issues in coastal engineering and for nearshore dynamics studies. In the purpose of the maritime navigation, local increase of wave steepness may become dramatic when huge waves are generated. For regular waves, the steepening may be due to combined effects of shoaling, refraction, and diffraction. Wave amplification is often observed over a shoal, due to a decrease of the wave celerity and an increase of the wave steepness above the shoal, combined to a convergency of the wave rays above or behind the shoal. A number of experiments on different shoal configurations with various shapes were realized (Arthur,<sup>1</sup> Berkhoff, Booy, and Radder,<sup>2</sup> Vincent and Briggs,<sup>3</sup> Jarry *et al.*<sup>4</sup>) in order to determine the wave transformation behind the shoal. Such an energy focusing was also considered for increasing energy capture by wave energy converters (see, e.g., Wang, Katory, and Li,<sup>5</sup> and Gouaud *et al.*<sup>6</sup>). Wave steepening may also be due to reverse currents,

---

a)Electronic mail: [rey@univ-tln.fr](mailto:rey@univ-tln.fr)

b)Electronic mail: [jenna.charland@univ-tln.fr](mailto:jenna.charland@univ-tln.fr)

c)Electronic mail: [julien.touboul@univ-tln.fr](mailto:julien.touboul@univ-tln.fr)

which may, as the shoal, increase the wave steepness in its direction of propagation, and focus the wave rays for some space dependent current conditions. Such a phenomenon was proposed as a possible process leading to the formation of huge waves in ocean regions characterized by a strong circulation (Lavrenov<sup>7</sup> and Lavrenov and Porubov<sup>8</sup>). For either changing sea-bed topography or in the presence of current, wave propagation numerical models, that are either spectral (Booij, Ris, and Holthuijsen,<sup>9</sup> Benoit, Marcos, and Becq<sup>10</sup>), or phase resolving (Berkhoff,<sup>11</sup> Radder,<sup>12</sup> Kirby,<sup>13</sup> Li and Zhan,<sup>14</sup> Chen, Panchang, and Demirbilek,<sup>15</sup> Zhang *et al.*,<sup>16</sup> Griffiths and Porter<sup>17</sup>) have been developed. Even if not only refraction but also diffraction of the waves is taken into account, mild slopes are often assumed in such models. The current when present is assumed not to depend on the vertical direction, the conservation of the action is then verified in the propagation equations. Wave focusing is thus explained by spatial evolution of the progressive wave phase due to either bathymetric changes or depth-averaged spatially horizontally varying currents.

For varying topographies, local or evanescent modes may have a significant impact on the wave phase evolution during propagation. Such a fact was demonstrated through the interference process in one-directional wave propagation as observed for either varying topographies (see, e.g., Guazzelli, Rey, and Belzons<sup>18</sup>) or abrupt bathymetries including coastal structures (see, e.g., Rey and<sup>19</sup> Touboul and Rey<sup>20</sup>). Modified Berkhoff equations have included the evanescent modes in the 2D case (Massel<sup>21</sup>) and more recently in the 3D case (Belibassakis, Athanassoulis, and Gerostathis<sup>22</sup>). The evolution of the current intensity along the wave direction of propagation may act as a bathymetric change. Local modes are then also expected to exist in such a configuration, as proposed recently by Belibassakis, Gerostathis, and Athanassoulis.<sup>23</sup> Vertically sheared currents, often observed in the field, may also have a significant impact on the wave phase evolution during propagation. Indeed, analytical models demonstrate an influence of the vertical shear value on the wave celerity and on the water particles kinematics (Swan and James<sup>24</sup>). Swan, Cummins, and James<sup>25</sup> investigated two-dimensional surface water waves propagating on a depth-varying current with a non-uniform vorticity distribution. They observed for wave-opposing current conditions an increase of the mean velocity near the surface and a decrease near the bottom for either smooth or rough beds although opposite behaviour were observed in following wave conditions. Since wave celerity depends on the current vertical shear intensity, one may thus expect further effects on the wave propagation in addition to the classical bathymetric and/or depth integrated current effects in 3D cases.

Quantitative experimental studies of three-dimensional wave-current interactions remain rare. For physically realistic scale approaches, three-dimensional large scale facilities were constructed during the last decades. However, established steady currents are more difficult to obtain than in a flume as observed by Margaretha<sup>26</sup> in the large scale offshore wave-current basin of Marin (NL), which is designed to be able to generate controlled vertically sheared two-dimensional currents. The interaction between gravity waves and horizontally sheared currents was studied by MacIver, Simons, and Thomas<sup>27</sup> in the UK Coastal Research Facility. Such a basin is designed to generate horizontally sheared currents which depth-integrated current profile is controlled by four independent variable-speed reversible pumps. The facility is suitable to create shore-parallel flows. A system of independent piston-type wavemakers which are displayed on one side of the basin allow the generation of gravity wave with either normally or obliquely direction with respect to the current. Experiments on wave propagation across a narrow jet-like current were then carried out by MacIver, Simons, and Thomas<sup>27</sup> for both normal and oblique incidence in both wave-following and wave-opposing current conditions. As the generated current is vertically sheared as measured across the jet, a discussion of the influence of both the horizontal and vertical shears is given on the basis of detailed measurements of the hydrodynamics. A substantial influence of the presence of wave was also observed for both vertical and horizontal profiles. The present experiments were carried out in the large scale ocean basin BGO FIRST (La Seyne/Mer, France), designed for the study of wave-structure or wave-bottom interactions in the presence of currents (Rey, Capobianco, and Dulou,<sup>28</sup> Magne, Rey, and Ardhuin,<sup>29</sup> and Rey and Touboul<sup>30</sup>). The generated mean current is two-dimensional for both wave following and opposing conditions. For wave-opposite current conditions, higher turbulence together with large scale vortices are generated due to incoming flow through the perforated beach. In the presence of bathymetry, the current within the basin is tri-dimensional. The

wave-induced fluid oscillation was found to strongly limit the development of instabilities, observed in the absence of waves (Magne, Rey, and Arduin<sup>29</sup>).

The aim of the present experimental study is the focusing of gravity waves in wave-opposing current conditions. Thanks to the shape of the bathymetry, a three-dimensional mean flow including both horizontal and vertical gradients for the mean current is generated. The depth of immersion of the bathymetry corresponds to deep water conditions for the wave conditions, the wave propagation is then only influenced by the current properties. In Sec. II, the wave basin, the experimental setup, and the instrumentation are presented. Results for both the mean field and the wave induced hydrodynamics in the presence of current are reported in Sec. III. The respective roles of the lateral and vertical shears on the observed wave focusing are discussed in Sec. IV, with the help of numerical calculations based on a refraction-diffraction model assuming a depth-averaged current. Concluding remarks are given in Sec. V.

## II. EXPERIMENTAL SETUP

### A. The BGO FIRST wave basin

The Ocean Engineering Basin (BGO) FIRST has a useful length of 24 m, an effective width of 16 m and a maximum water depth of about 5 m. The BGO is equipped with a current generator, a wave-maker over the entire width. A monitored  $X$ -carriage can be moved along the  $X$ -axis, which corresponds to the incoming wave direction. Within the  $X$  carriage, a platform can be moved along the  $Y$ -axis, corresponding to the cross direction. The  $Z$ -axis is vertical upwards,  $Z = 0$  corresponding to the still water level. A permeable wave absorber with a parabolic shape is located at the end of the tank. The water depth can be set at the desired value thanks to a mobile bottom, which in turn allows a quick installation of bottom-fixed models and instrumentation. The wavemaker consists of horizontally oscillating cylinders and allows generation of regular and irregular waves with a maximum height – peak to trough – of 0.8 m. Current generation is provided by pumps, calibrated by means of velocity measurements of the water. In the present, the three-dimensional bathymetry consisted of a underwater tri-dimensional mound (UTDM) of symmetric shape with respect to axes  $X = 0$  and  $Y = 0$ . It was fixed on the mobile bottom on both sides of the central axis of the basin (Fig. 1). The mobile bottom was immersed at 3 m under the water surface. Various experiments including wave-following and wave-opposite current conditions were tested in the presence of the UTDM (Rey, Guinot, Touboul).<sup>31</sup> The present paper deals with the deep water case for wave-opposite current conditions, for which a strong wave focusing is observed in the central part of the basin.

### B. Instrumentation

The wave probes are resistive sensors, manufactured by HR Wallingford. They deliver a 10 V signal, allowing a precision of  $10^{-3}$  m. The pressure sensors are piezo-resistive sensors, manufactured by STS. The full scale of measurement ranges from 0 to 400 mbar. Resolution of the pressure sensors is 0.2 mbar. An electromagnetic current meter (model 802, company Valeport) was used for the measurement of the two horizontal components of the velocity. A velocity propeller ( $VP$ ) was used for the measurement of the mean velocity along the  $X$ -axis in the central part of the basin, of deeper immersion than the surface wave induced motion thickness ( $X = 0$  m,  $Y = -0.2$  m,  $Z = -2.5$  m). The 14 wave gauges ( $WG$ ) were displayed on the  $X$ -carriage. The pressure sensors ( $PS$ ) were displayed either within the basin at fixed position ( $PS$  1–11) or on the  $X$ -carriage, under  $WG$  1–7, at a vertical position  $Z = -0.75$  m ( $PS$  12–18). The electromagnetic current meter ( $CM$ ) was fixed on the  $Y$ -carriage, itself moving along the  $Y$ -axis on the  $X$ -carriage. The depth of immersion of the current meter corresponded to  $Z = -0.25$  m. The positions of  $WG$  1–14 and  $PS$  12–18 are given in Table I, the positions of  $PS$  1–11 in Table II and the locations of the  $CM$  in Table III. A top view and a side view of the instrumentation are presented in Fig. 2, when the  $X$ -carriage is at the position  $X_C = 0$ .

When the  $X$ -carriage positioning is  $X_C = 0$ ,  $WG$  1 to  $WG$  7 are located on the section  $X = 0$ ,  $WG$  8 to  $WG$  14 on the section  $X = -1$  m. Their positioning by pairs is motivated by the calculation

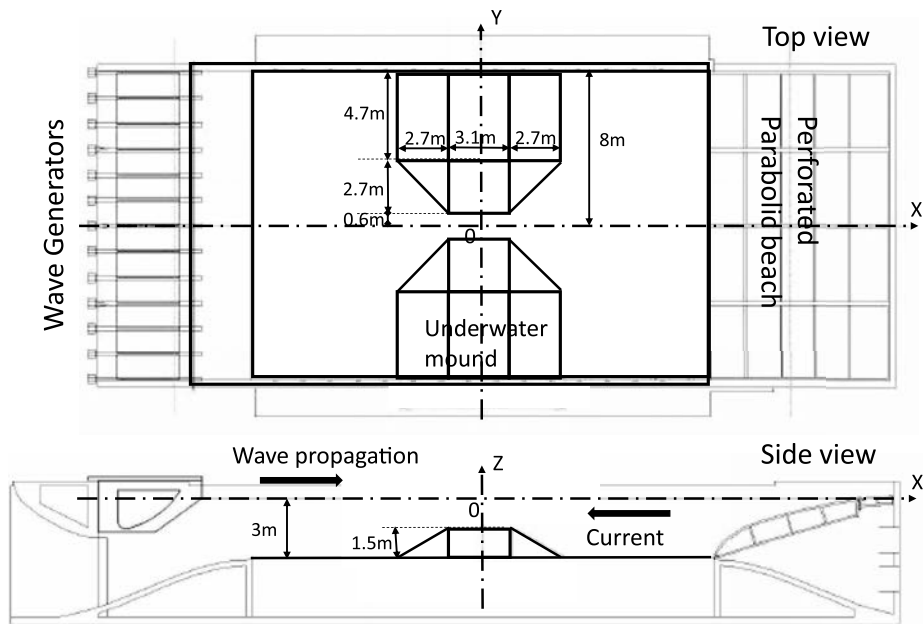


FIG. 1. Sketch of the ocean wave basin and of the underwater mounds.

TABLE I. Location of the WG and of PS 12–18.  $Z = -0.75$  m for the PS. The position  $X$  is given with respect to the carriage location  $X_C$ .

WG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PS	12	13	14	15	16	17	18							
$X(\text{m})$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
$Y(\text{m})$	6.95	5.80	4.65	3.50	2.20	0.90	0.00	6.95	5.80	4.65	3.50	2.20	0.90	0.00

TABLE II. Location of PS 1–11.

PS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$X(\text{m})$	-8.00	-2.80	0.00	2.80	-8.00	-8.00	-2.80	0.00	2.80	-8.00	0.00
$Y(\text{m})$	0.00	0.00	-0.20	0.00	0.00	5.75	5.75	5.75	5.75	5.75	-0.20
$Z(\text{m})$	-1.50	-1.50	-1.54	-1.50	-1.50	-1.50	-1.50	-1.50	-1.50	-1.50	-2.94

TABLE III. Locations of the CM. The position  $X$  is given with respect to the carriage location  $X_C$ .

CM	Postion 1 (CM1)	Postion 2 (CM2)	Postion 3 (CM3)	Postion 4 (CM4)
$X(\text{m})$		-0.30	-0.30	-0.30
$Y(\text{m})$		-0.53	-2.23	-3.93
$Z(\text{m})$		-0.25	-0.25	-0.25

of the wave phase and rate of standing wave along the incoming wave direction. The measurements were carried out for the 11 following positions of the carriage along the  $X$ -axis,  $X_{Cn} = -8, -6.05, -4.1, -2.8, -1.5, 0, 1.5, 2.8, 4.1, 6.05, \text{ and } 8$  m. The steadiness of the flow along the successive locations of the  $X$  carriage was checked thanks to the data of the fixed pressure sensors. Each of the two hydrodynamic conditions was carried out for the four locations along the  $Y$ -axis of the  $CM$  which are given in Table III. The reproducibility of each test was also checked over these four successive

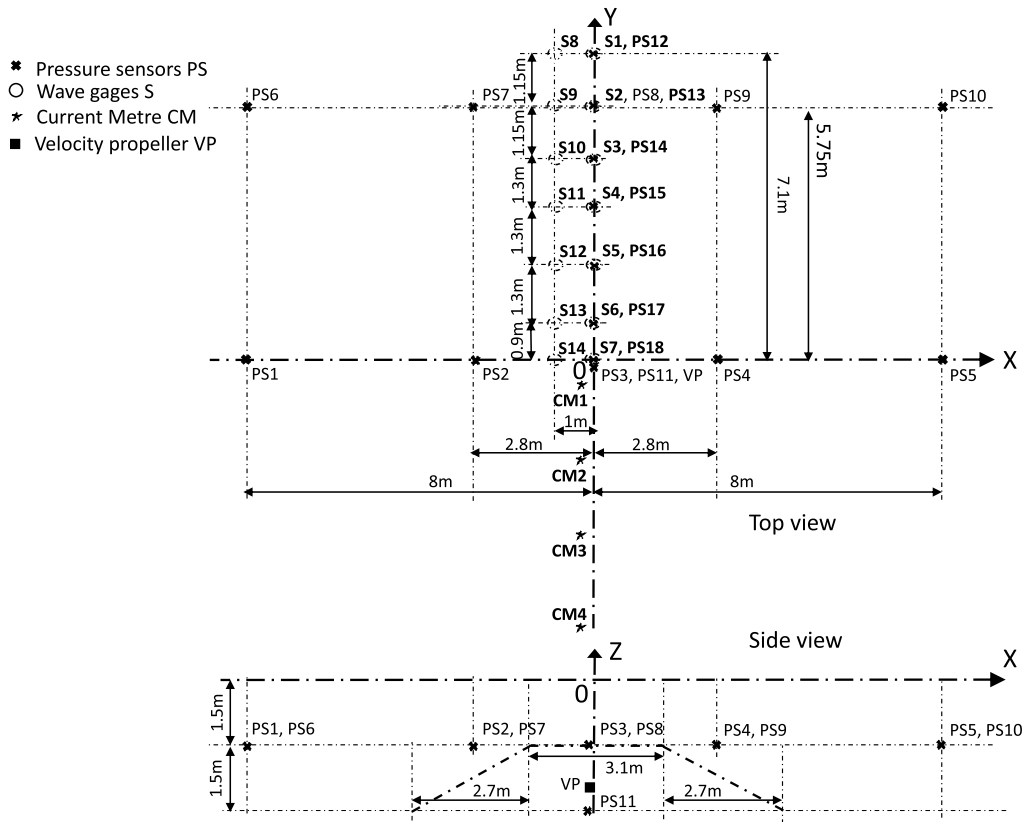


FIG. 2. Location of the probes, sensors, and velocimeters.

measurements. The corresponding standard deviation is indicated in the results. The sampling rate of the synchronized instruments (*WG*, *PS*, and *CM*) was 32 Hz. Data analysis was achieved through Fourier analysis for both the mean field and the wave induced dynamics.

### C. Hydrodynamic conditions

During the tests, the wave generation was initiated 120 s after the current. The opposing current nominal intensity, which corresponds to the flow discharge divided by the section of the wave basin in the absence of the UTDM, was  $U = -0.25$  m/s. The wave period was  $T = 1.48$  s. Each hydrodynamic condition was repeated four times, each test corresponding to a given location of the *CM* along the *Y*-axis of the carriage. The duration of the measurement at each carriage location  $X_{Ci}$ ,  $i = 1, \dots, 11$  along the *X*-axis was 40 s.

Two wave amplitudes were considered in order to check the influence of the wave steepness on the wave propagation. Their heights  $H$ , measured upwave the UTDM were, respectively,  $H = 2a = 10$  cm and  $H = 2a = 20$  cm,  $a$  denoting the wave amplitude.

Assuming progressive waves and a uniform current  $U$  along the vertical coordinate, the surface elevation  $\eta(x, t)$  for a wave of frequency  $f = \omega/2\pi$  travelling along the  $x$ -axis is given by

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left[ a_i e^{i(\omega t - k^- x)} \right], \quad (1)$$

where  $a_i$  is a complex amplitude ( $a = |a_i|$ ).  $\text{Re}[\ ]$  indicates the real part of the complex number. In the following, complex notation is used for the surface wave characteristic calculations, the physical data corresponding to the real part of the complex values.  $k^-$  is the wavenumber of the progressing

wave, it verifies the dispersion relation

$$(\omega + |U|k^-)^2 = \sigma^- = gk^- \tanh(k^-h), \quad (2)$$

where  $h$  is the water depth and  $\sigma^-$  is the relative frequency in a coordinate system travelling at velocity  $U$ . The corresponding wave length for  $h = 3$  m and a mean current intensity  $U_m = 0.25$  m/s is  $\lambda^- = 2.64$  m. Deep water conditions are considered to be verified when water depth exceeds half the wavelength. Since the water depth above the UTDM is 1.5 m, deep water conditions are then verified in the whole basin. The wave propagation is then expected to be influenced only by the current field, itself influenced by the underwater mounds. Let us note that for the steeper waves, spilling breaker is observed near the wavemakers. It may be explained by a higher relative velocity, and consequently surface deformation, in the current-opposing direction due to the horizontally oscillation of the wavemaker in the fixed reference frame.

### III. RESULTS

#### A. Mean surface level and mean current

##### 1. Horizontal current field

The current field in the  $xOy$  horizontal plane was measured thanks to the  $CM$  at the vertical location  $Z = -0.25$  m. Analysis of the mean velocities is presented in Fig. 3, respectively, for the cross-sections  $Y = -0.53, -2.23, -3.93,$  and  $-5.58$  m, for the three hydrodynamic conditions, the current alone and wave opposing current conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. Standard deviation

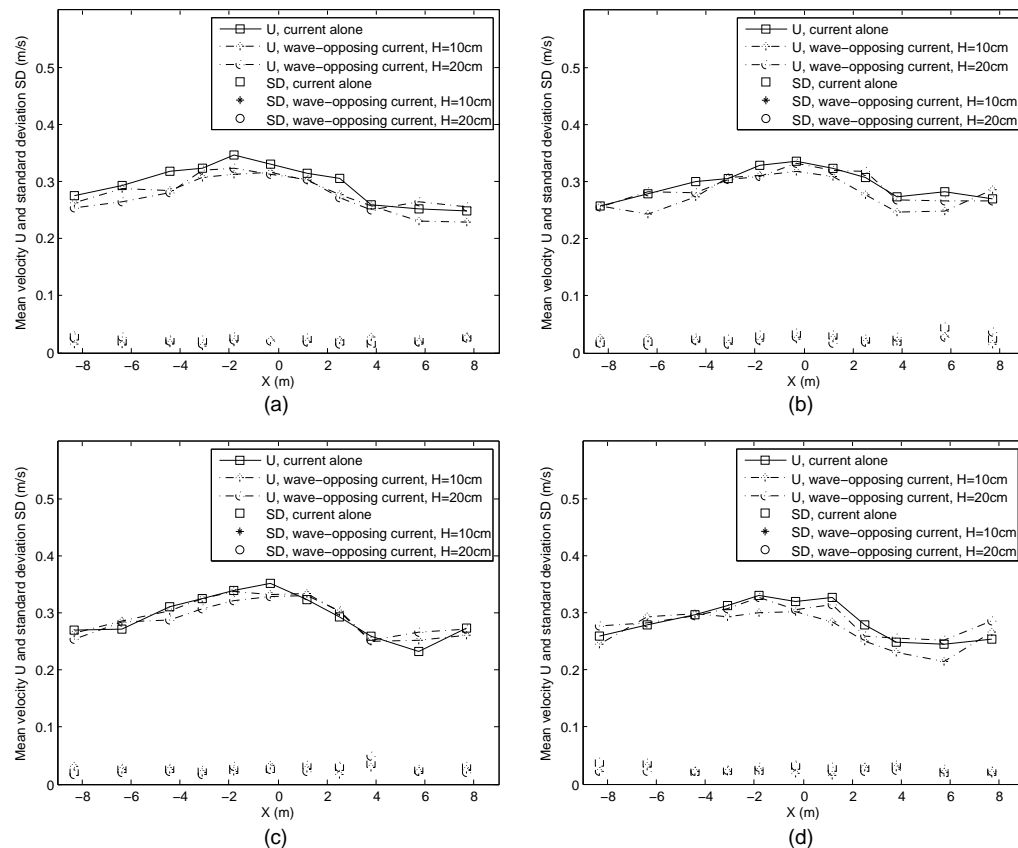


FIG. 3. Mean velocity and standard deviation for various locations ( $\square$ ) current alone, ( $*$ )  $H = 10$  cm, ( $\circ$ )  $H = 20$  cm. (a)  $Y = -0.53, Z = -0.25$ . (b)  $Y = -2.23, Z = -0.25$ . (c)  $Y = -3.93, Z = -0.25$ . (d)  $Y = -5.58, Z = -0.25$ .



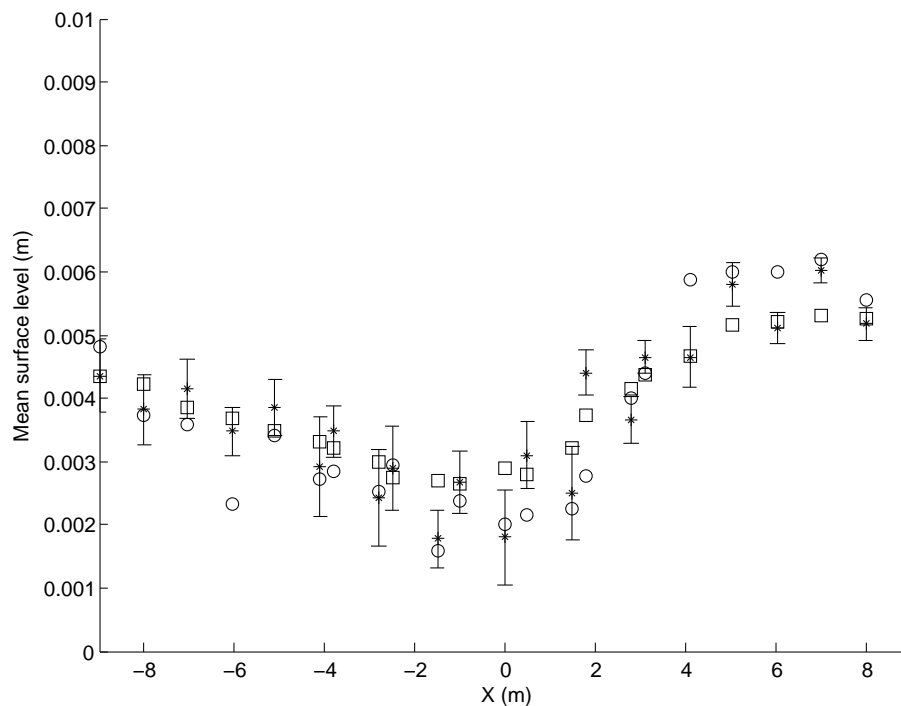


FIG. 4. Mean water level for  $Y = 0$ , (□) current alone, (\*)  $H = 10$  cm, (o)  $H = 20$  cm.

calculated from the time series averaged on a wave period  $T$  is also presented. It is found to be weak and not significantly depending on the three hydrodynamic conditions. We can observe that for a given  $X$ , the near surface current intensity weakly depends on the cross section  $Y$ , either without or in the presence of the waves. It is however slightly higher on the side part of the basin, above the swallower region. The flow is accelerated at the location of the UTDM and a decrease is observed down wave the mounds (current flow towards the left side). The current intensity is up to about 0.35 m/s at the UTDM location, and decrease down to 0.25 m/s downstream ( $X = -8$  m). This mild decrease is not significantly influenced by the wave, it is also less rapid than the increase observed upstream the UTDM.

## 2. Mean water level

The mean sea level measured by the  $WG$  is presented in Fig. 4 at the central axis of the basin ( $Y = 0$ ) for both current alone and for wave-current conditions. The standard deviation is presented for the case  $H = 10$  cm, the standard deviation was found to be under 1 mm for the current alone and of about 2 mm for  $H = 20$  cm. We can first notice that the mean water level changes (a few millimeters) have a negligible influence on the water depth. We can observe a higher level at the right side (upstream), a minimum at the centre part and a relative maximum at the left part. The minimum is explained by an increase of the mean current at the level of the UTDM (see Fig. 3). In the absence of vorticity, to a decrease of the current from 0.35 m/s to 0.25 m/s corresponds a surface elevation of about 0.002 m according to the Bernoulli law as roughly observed downstream the UTDM (left side). However, the difference of water level upstream is somewhat higher for similar current differences (current of about 0.25 m/s at  $X = +8$  m) which corresponds to a breakdown of the Bernoulli law applied to perfect fluids. It may be explained by a vertical shearing of the current.

## 3. Vertical current fields

Depth dependance of the mean velocity is estimated by use of the  $PS$  data in addition to the  $CM$  measurements. The current field in the  $xOy$  horizontal plane was measured thanks to the  $CM$  at

the vertical location  $Z = -0.25$  m. By use of the mean surface elevation given by the wave gauges above the pressure sensors, at the beginning of the test ( $h_{m0}$ ) and in the presence of current ( $h_m$ ), the mean current  $U_m$  was also estimated at the vertical locations  $Z = -0.75$  m (pressure sensors on the carriage) and  $Z = -1.50$  m or  $Z = -2.94$  m for the fixed pressure sensors

$$U_m = \left( \frac{-2}{\rho} (\Delta P + \rho g \Delta h) \right)^{0.5} \quad (3)$$

with  $\rho$  the fluid density,  $g$  the acceleration due to gravity,  $\Delta h = h_m - h_{m0}$  and  $\Delta P = P_m - P_{m0}$ ,  $P_{m0}$  corresponding to the pressure at rest at the beginning of the test,  $P_m$  to its mean value in the presence of current. As mentioned above, the Bernoulli law is not strictly quantitatively applicable. However, the higher uncertainty source in the velocity intensity calculation may be due to the water level term  $\Delta h$  of Eq. (3). Indeed, for a current intensity  $U = 0.25$  m/s, an error on  $\Delta h$  of 1 mm leads to an error of about 15% for the velocity. However, this method allows, at a given  $Y$ , a relative comparison of the current intensities along the  $X$ -axis at given water depth or between values at water depths corresponding to the pressure sensor locations  $Z = -0.75$  m,  $Z = -1.50$  m, or  $Z = -2.94$  m. Data from the velocity propeller  $VP$  are also given at location ( $X = 0$ ,  $Y = -2.5$ ) which confirm the consistency of the indirect velocity measurements thanks to Eq. (3) in spite of its above discussed level of uncertainty.

The vertical mean velocity profiles along the basin are presented in Figs. 5(a) and 5(b), respectively, for  $Y = 0$  m for the  $PS$  ( $-0.53$  m for the  $CM$ ) and  $Y = 5.8$  m for the  $PS$  ( $-5.58$  m for the  $CM$ ), for the cases (1) current alone, (2) wave with opposing current,  $H = 10$  cm, (3) wave with opposing current,  $H = 20$  cm. The standard deviation is indicated for the pressure data, registered at a given hydrodynamic condition for experiments corresponding to the four locations of the  $CM$ . For  $Y = 0$  m, the mean velocity current is sheared in the absence of waves. The shear is maximum far from the UTDM location, it is minimum at the central location ( $X = 0$  m). In the presence of waves, the shear is of almost identical shape along the basin. It weakly depends on the wave conditions. The standard deviation appears to be significant in some locations. It may be explained by the presence of large vortices, due to either to the flow entrance condition at the perforated beach, with possibly water level changes along the  $Y$ -axis behind the perforated beach on the right side of the basin ( $X = +8$  m) or to the UTDM within the basin. In the presence of waves, the vertical profile exhibits higher velocities in the near-surface layer. For  $Y = 5.8$  m, in the absence of waves, the current profile shape is rather different. It is observed downstream the mound ( $X = -2.2$  m) a strong decrease of the current for  $Z = -1.5$  m. In the presence of waves, the velocity profile is no more uniform over the UTDM ( $X = 0$  m). As for  $Y = 0$  m, the surface velocity intensity is the higher. Downstream the UTDM ( $X = -2.2$  m), the mean velocity at depth  $Z = -1.5$  m is still smaller than in the near-surface layer, but its intensity, higher than observed for currents only, increases as the wave amplitude increases. This may be explained by a vertical mixing due to the wave. The standard deviation of the velocity is rather high for most of the  $PS$  displayed at  $Z = -1.5$  m, probably due to large vortices. A noticeable point, not observed in the central part ( $Y = 0$  m) is the inversion of the velocity gradient of the vertical velocity profile from the right part of the mound to the left part ( $X = -8.0$  m). This phenomenon is observed for both wave amplitudes. If the current seems established for  $Y = 0$  m, for which the water depth remains constant along the basin, the presence of the steep slopes bathymetries on both sides due to the UTDM have a significant impact on current. If the mixing seems to be enhanced by the presence of the waves within the near-surface water layer, unstationary currents remain at higher depth ( $Z \sim -1.5$  m), the velocity not being directly influenced by the surface wave induced fluid motion in the present deep water wave conditions.

## B. Wave characteristics

### 1. Wave amplitude

The field of wave amplitude is presented in Fig. 6 for, respectively,  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. The standard deviation is presented for the probes displayed along the centre of the basin ( $Y = 0$  m).

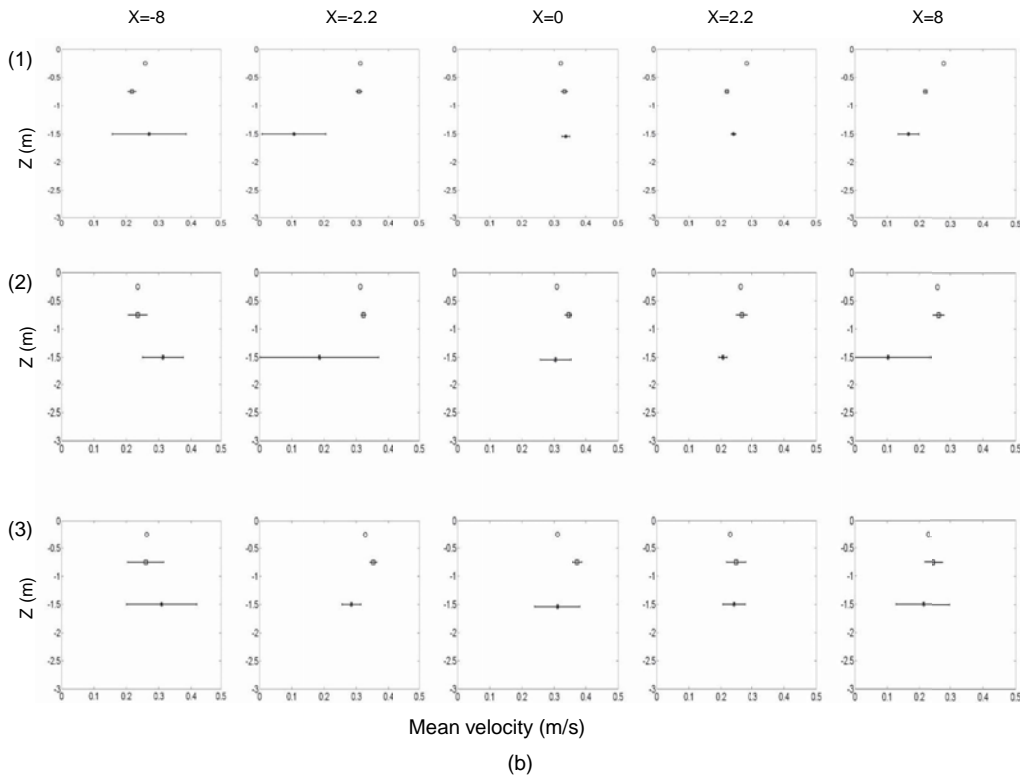
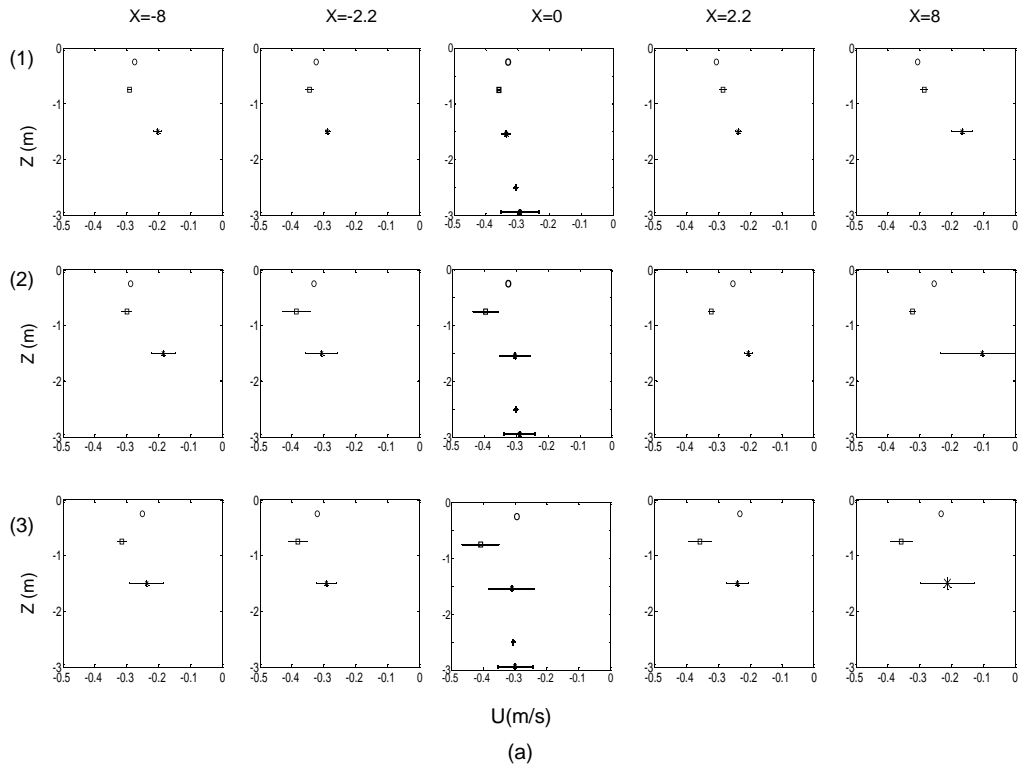
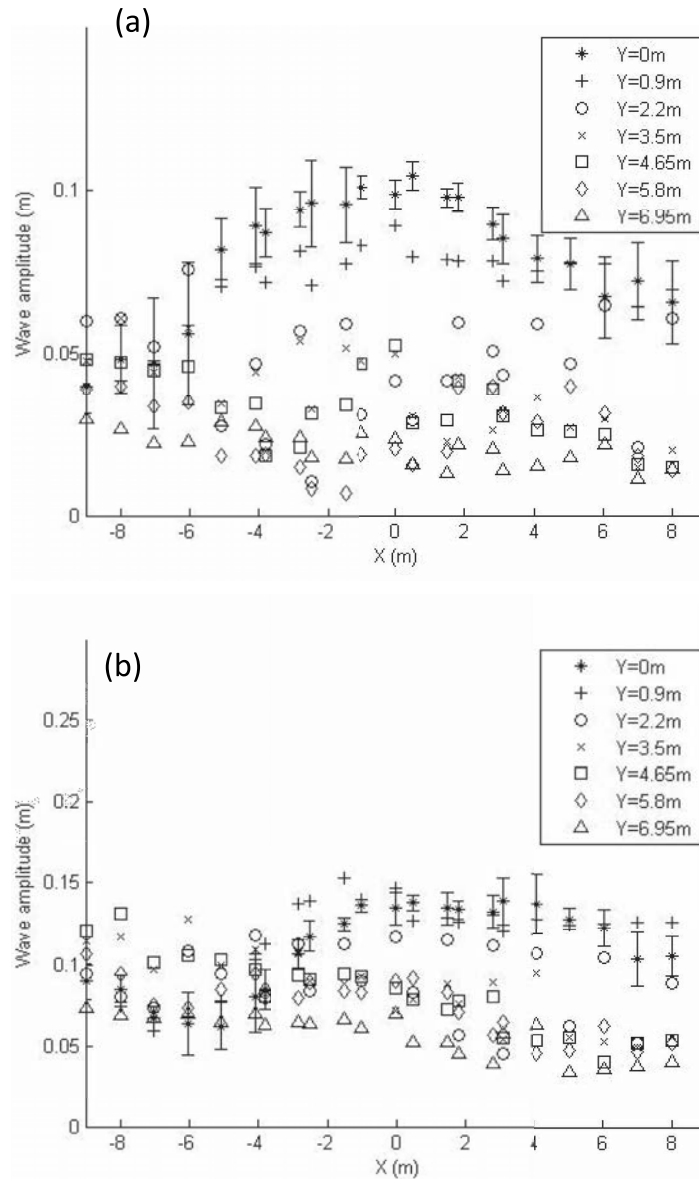


FIG. 5. Velocity profiles for various locations; (1) current alone, (2) wave with opposite current,  $H = 10$  cm, (3) wave with opposing current,  $H = 20$  cm. (a)  $Y = 0$ , WG and PS (\*),  $Y = -0.53$ , CM (o),  $Y = -0.20$ , VP (+). (b)  $Y = 5.8$ , WG and PS (\*),  $Y = -6.03$ , CM (o).

FIG. 6. Wave amplitude, (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm.

For the case  $H = 10$  cm, a huge wave amplification up to twice the incoming wave amplitude is observed in the central part of the basin ( $Y = 0$  m and  $Y = 0.9$  m), although a strong damping appears on both parts ( $Y > 3.5$  m). For  $H = 20$  cm (Fig. 6(b)), a decrease of the wave amplitude is observed in a first stage in the longitudinal axis of the basin ( $Y = 0 - 2.2$  m), followed by an increase of the amplitude up to 1.5 times the incoming wave amplitude at the location of the UTD. A decrease of the wave amplitude is observed on both parts of the longitudinal axis ( $Y > 3.5$  m), but less pronounced than for the case  $H = 10$  cm. It is noticeable that this amplification is observed for both  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm even if for the latter case, a decrease of the wave amplitude in a first stage due to breaking limitates this phenomenon.

## 2. Wave reflection

The goal of the section is to check the importance of reflection, before further calculations on the wave characteristics. On the basis on synchronized measurements in the presence of current

(Déborah, Vincent, Philippe<sup>32</sup>), a two-wave gauge method is used to calculate the rate of standing wave in the direction  $Ox$ . The surface elevation  $\eta(x, t)$  for a wave of frequency  $f = \omega/2\pi$  resulting from two plane waves, traveling in opposite directions along the  $x$ -axis is of the form

$$\eta(x, t) = \left\{ a^- e^{-ik^-x} + a^+ e^{+ik^+x} \right\} e^{i\omega t}, \quad (4)$$

where  $a^-$  and  $a^+$  are complex amplitudes.  $k^\mp$  are the wavenumbers of the incident and reversed running waves, given by

$$(\omega \pm Uk^\pm)^2 = (\sigma^\pm)^2 = gk^\pm \tanh(k^\pm h), \quad (5)$$

where  $h$  is the water depth, and  $\sigma^\pm$  are the relative frequencies in a coordinate system, traveling with velocity  $U$ . Labelling for simplicity 1 and 2 two successive probes, located at  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2$ , the theoretical expression for the free surface at the position of probe  $WG_n$  based on Airy waves is given for an arbitrary choice of time zero by

$$\eta_n = \left\{ a_i e^{-i(k^-x_1 + \Delta^-)} + a_r e^{+i(k^+x_1 + \Delta^+ + \varphi)} \right\} e^{i\omega t} \quad (6)$$

with  $\Delta^- = k^-(x_2 - x_1)$  and  $\Delta^+ = k^+(x_2 - x_1)$ ,  $a_i$  and  $a_r$  the amplitudes of the incident and reflected wave and  $\varphi$  the phase lag of the reflected wave. The component of frequency  $f$  of the elevation of the free surface as measured by probe  $WG_n$  ( $n = 1, 2$ ) is of the form

$$\eta_n^{(m)} = A_n e^{i(\omega t - \varphi_n)}, \quad (7)$$

where superscript  $(m)$  indicates the measured values. The amplitude and phase  $A_n$  and  $\varphi_n$  are determined from a Fourier analysis of the signal measured by probe  $WG_n$ . After writing  $\eta_1 = \eta_1^{(m)}$  and  $\eta_2 = \eta_2^{(m)}$ , one obtains the moduli of the amplitudes of the incident and reflected waves components  $a_i$  and  $a_r$ .

$$|a_i| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\Delta^- + \Delta^+}{2})} [A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\delta + \Delta^+)]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

$$|a_r| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\Delta^- - \Delta^+}{2})} [A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\delta - \Delta^-)]^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

where  $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ .

The reflection coefficient  $R$  is defined as the ratio between the incident and reflected amplitudes,  $R = |a_r|/|a_i|$ . In order to include the current effects, the rate of reflected energy  $E_R$ , is calculated

$$E_R = R^2 \frac{C_g^+ - U \sigma^-}{C_g^- + U \sigma^+}, \quad (10)$$

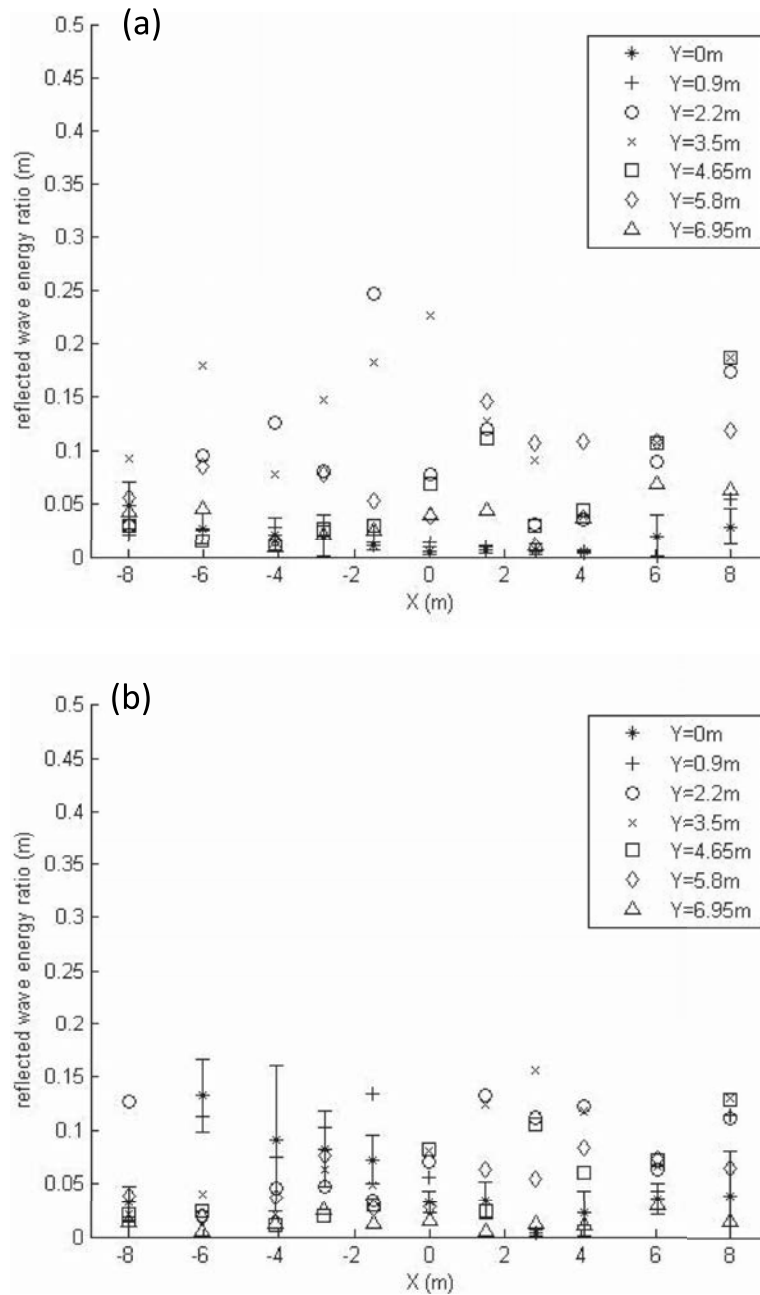
where

$$C^\pm = \frac{\sigma^\pm}{k^\pm}; C_g^\pm = \frac{1}{2} C^\pm \left[ 1 + \frac{2k^\pm h}{\sinh 2k^\pm h} \right]. \quad (11)$$

The rate of reflected energy within the basin is presented in Fig. 7 in terms rate of energy reflected  $E_R$ . It remains under about 10% for both wave amplitude conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm.

### 3. Wave celerity

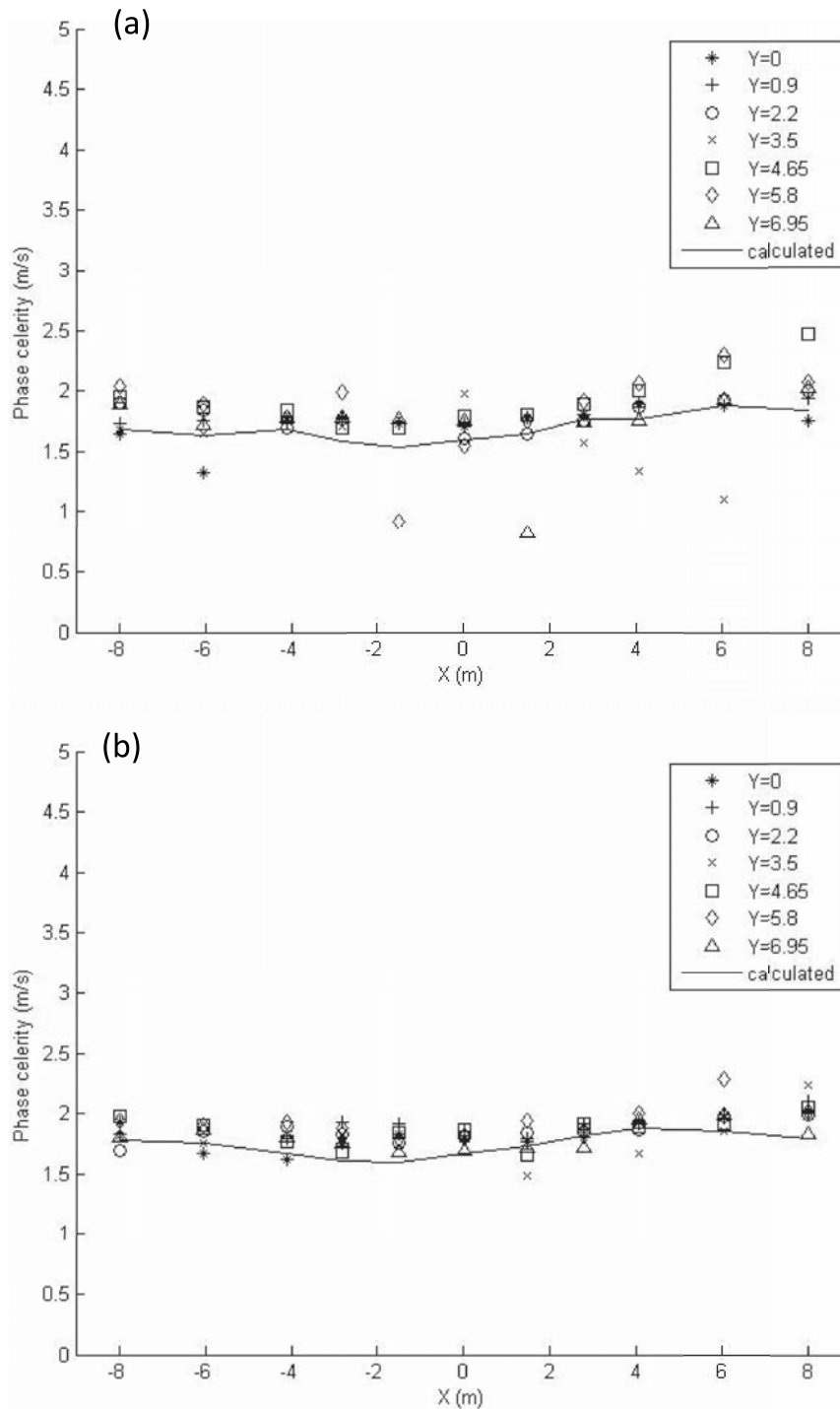
The phase celerity field of the wave in the fixed frame along the  $X$ -axis was calculated from the phase lag between the two successive wave gauges on the ramp  $WG_{i+7}$  and  $WG_i$ . The calculation assumes a progressive wave since it was observed in Sec. III B 2 that the reflection remained weak. Results are presented in Fig. 8, for respectively  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. Both graphs show rather uniform wave celerity in the basin: a slight decrease of the velocity from  $X = -8$  m to  $X = -1.7$  m, followed by a slight increase in the vicinity of the UTDM especially for the case  $H = 10$  cm. A

FIG. 7. Wave energy reflection, (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm.

weak influence of the transverse position  $Y$  is also observed. The calculation of the celerity through the  $CM$  mean velocity data are also presented in Fig. 8 for the  $CM$  location  $Y = -0.53$  m. Results confirm the trend observed along the  $X$ -axis through the  $WG$  analysis.

#### 4. Wave phases

In order to better understand the effect on the current on the wave propagation, the wave phase was calculated along the transverse  $y$ -axis for each location  $X_C$  of the carriage. More conveniently, the phase lag  $\Delta\varphi$  between any position  $Y > 0$  and  $Y = 0$  is presented in terms of distance  $\Delta x = \Delta\varphi/k^-$  with respect to the location  $X_i$  of the measurement in Fig. 9. Results hence represent

FIG. 8. Wave phase celerity, (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm.

the wave crest shapes at locations  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 11$ . The standard deviations are also presented. As a general trend, we can observe a good reproducibility of the experiments through the calculated values of the standard deviation. Some significant differences are however observed down-wave the UTDM, and upwave ( $X = -8$ ) m for the smaller wave amplitude ( $H = 10$  cm). These behaviors may be due to either the vortices discussed in Sec. III A, or to wave crest separations, which were

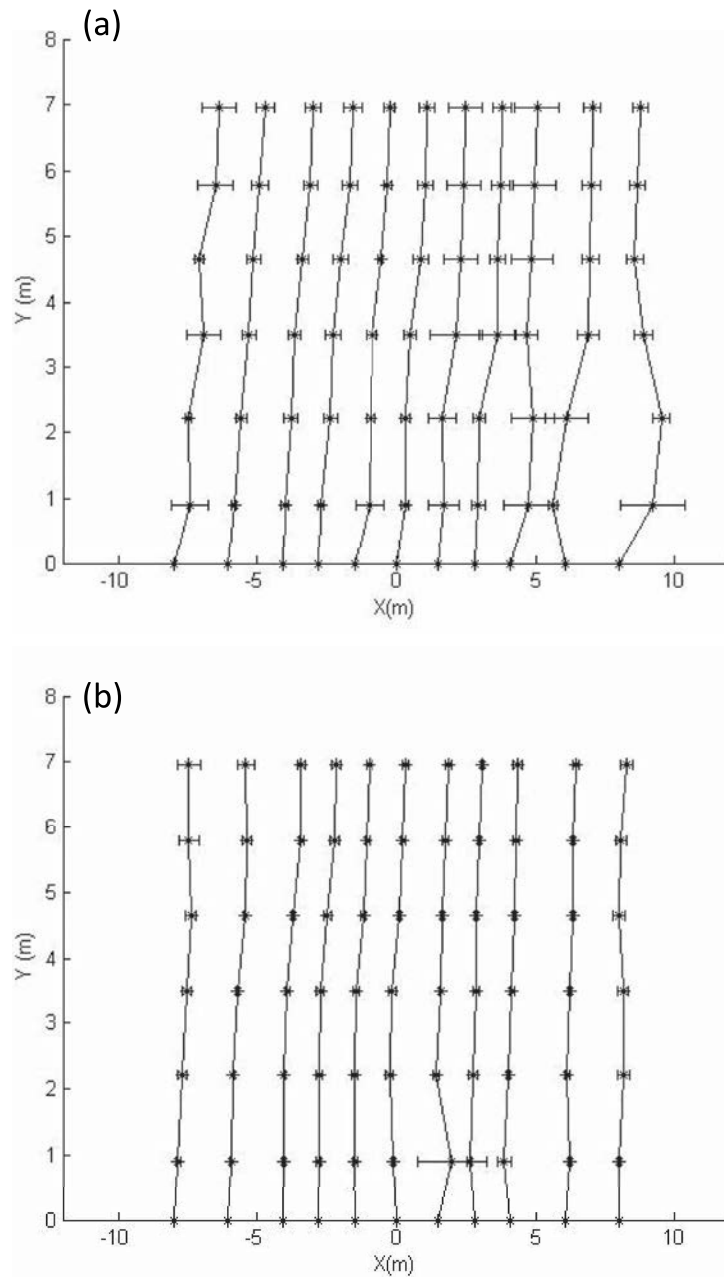


FIG. 9. Wave crest shape at locations  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 11$ , (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm.

observed in some locations, and also may explain the few unexpected values of the celerity in Fig. 8. If the phase is constant along the transverse axis at the wave generation, we can observe that it has already evolved at location  $X = -8$  m. Indeed, we can observe a regular phase shift from the center  $Y = 0$  to the side part ( $Y = 6.95$ ), for both wave amplitudes conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. This phase lag is somewhat more important for the case  $H = 10$  cm, with a standard deviation the higher at  $X = -8$  m at some locations along the  $Y$ -axis. The standard deviation for the wave phase remains weak for the higher wave amplitude condition  $H = 20$  cm, the spiller breaker observed in the vicinity of the wave generators seems not to have significant influence on the wave propagation. Up to the UTDM location, the wave crest is of quasi-linear shape for the condition  $H = 10$  cm, it is slightly curved for  $H = 20$  cm. This corresponds to a mean wave angle of propagation with respect



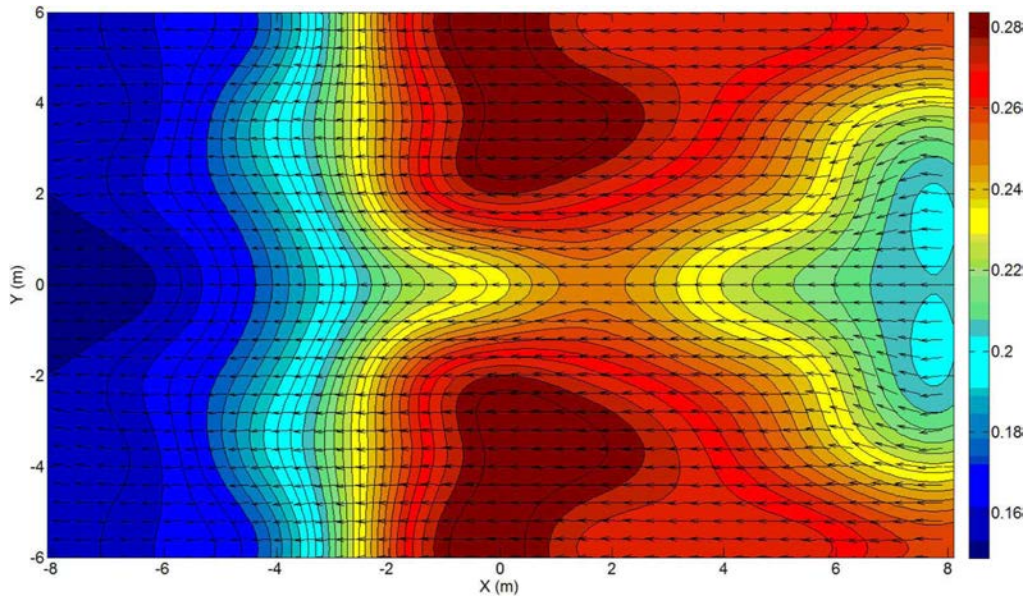


FIG. 10. Mean velocity fields for the current alone interpolated from the CM data assuming a symmetry with respect to the plane  $Y = 0$ . The current intensity (in m/s) is given by the color bar. The arrows indicate the direction of the current.

to the  $X$  – axis of, respectively,  $14^\circ$  and  $7^\circ$  for the conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm for  $X = -8$  m. Excepted in some locations for which wave crest separations may occur, the wave direction of propagation remains close to the  $X$  – axis.

#### IV. DISCUSSION ON THE WAVE FOCUSING

##### A. Comparison with an elliptic refraction-diffraction model

Results have evidenced huge wave amplification in the central part of the basin, whatever the wave amplitude. This amplification cannot be explained by an increase of the current intensity against the wave propagation along  $X$ -axis as observed in Sec. III. Data concerning both the mean current field and the wave amplitude and phase along the transverse direction at  $X = -8$  m are available for both wave conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. We present here wave propagation computed by use of a refraction-diffraction model assuming currents that depend only on the horizontal coordinates. The model is based on the elliptic “mild slope” equation, as it was introduced by Kirby,<sup>33</sup> which reads

$$\begin{aligned} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + \nabla \cdot U \frac{D\phi}{Dt} - \nabla \cdot (C^- C_g^- \nabla \phi) \\ + (\sigma^{-2} - k^{-2} C^- C_g^-) \phi = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

for a velocity potential of the form  $\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) \cosh(k^-(z+h)) e^{i\omega t}$ . The equation is solved by means of a finite difference scheme, and an iterative method, very similar to the one described by Chen Panchang, and Demirbilek (2005).<sup>15</sup> Vertical walls are modeled through a classical Neumann conditions. The wave generator is modeled by means of a robin boundary condition, as described by Panchang *et al.*,<sup>34</sup> and the free boundary corresponds to the second order parabolic approximation boundary introduced by Kirby.<sup>35</sup> The calculation domain is  $-8 \text{ m} < X < +8 \text{ m}$  and  $-8 \text{ m} < Y < +8 \text{ m}$  (lateral boundaries of the basin). The numerical results presented here are obtained by the use of a rectangular grid of  $N_x * N_y$  elements with  $(N_x, N_y) = (400, 200)$ . The vertically averaged current values for the numerical procedure are interpolated from the experimental data, given by the CM. In the following,  $U_0$  refers to the mean current field without any wave,  $U_{10}$  refers to the mean current

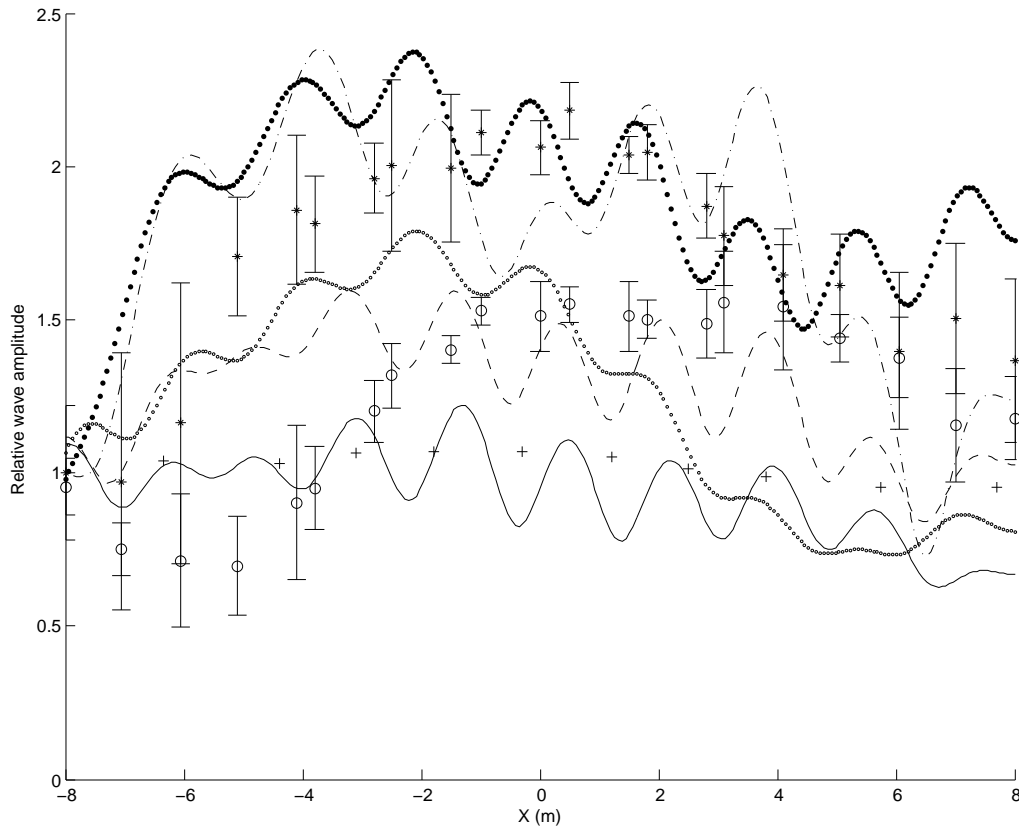


FIG. 11. Normalized wave amplitude for  $Y = 0$ , (\*) experiments,  $H = 10$  cm; (o) experiments,  $H = 20$  cm; (+) amplification due to current along  $x$ -axis; (---) calculation,  $\varphi = 0$ , mean current  $U_0$ ; (-.-) calculation,  $\varphi$  extrapolated from experiment  $H = 10$  cm, mean current  $U_0$ ; (•••) calculation,  $\varphi$  extrapolated from experiment  $H = 10$  cm, mean current  $U_{10}$ ; (- -) calculation,  $\varphi$  extrapolated from experiment  $H = 20$  cm, mean current  $U_0$ ; (ooo) calculation,  $\varphi$  extrapolated from experiment  $H = 20$  cm, mean current  $U_{20}$ .

field for the wave conditions  $H = 10$  cm,  $U_{20}$  refers to the mean current field for the wave conditions  $H = 20$  cm. As an example, the interpolated mean current field  $U_0$  in the horizontal plane  $XOY$  is presented in Fig. 10. The wave amplitude and phase along the  $Y$ -axis for  $X = -8$  m are interpolated from the experimental data from  $WG$  1–8 (see respectively Figs. 6 and 9).

Results concerning the wave amplitude along the  $x$ -axis ( $Y = 0$ ) are presented in Fig. 11 for both wave conditions  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm. Both experimental data for the wave amplitude and relative phase  $\varphi$  along the  $Y$ -axis with respect to the phase at  $Y = 0$  for section  $X = -8$  m are used for the numerical calculations. Numerical results are given for both  $\varphi = 0$  and  $\varphi$  interpolated from the experimental results for  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm (see Fig. 9), for either  $U_0$  or  $U_{10}$  or  $U_{20}$ , for respectively  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm (see Table IV). The effect of the current along the  $X$ -axis on

TABLE IV. Numerical test cases.

Case	Mean velocity field	Wave phase for $Y = -8$ m
1	$U_0$ , without any wave	$\varphi = 0$
2	$U_0$ , without any wave	$\varphi$ interpolated from experiments $H = 10$ cm
3	$U_0$ , without any wave	$\varphi$ interpolated from experiments $H = 20$ cm
4	$U_{10}$ , wave conditions $H = 10$ cm	$\varphi$ interpolated from experiments $H = 10$ cm
5	$U_{20}$ , wave conditions $H = 20$ cm	$\varphi$ interpolated from experiments $H = 20$ cm

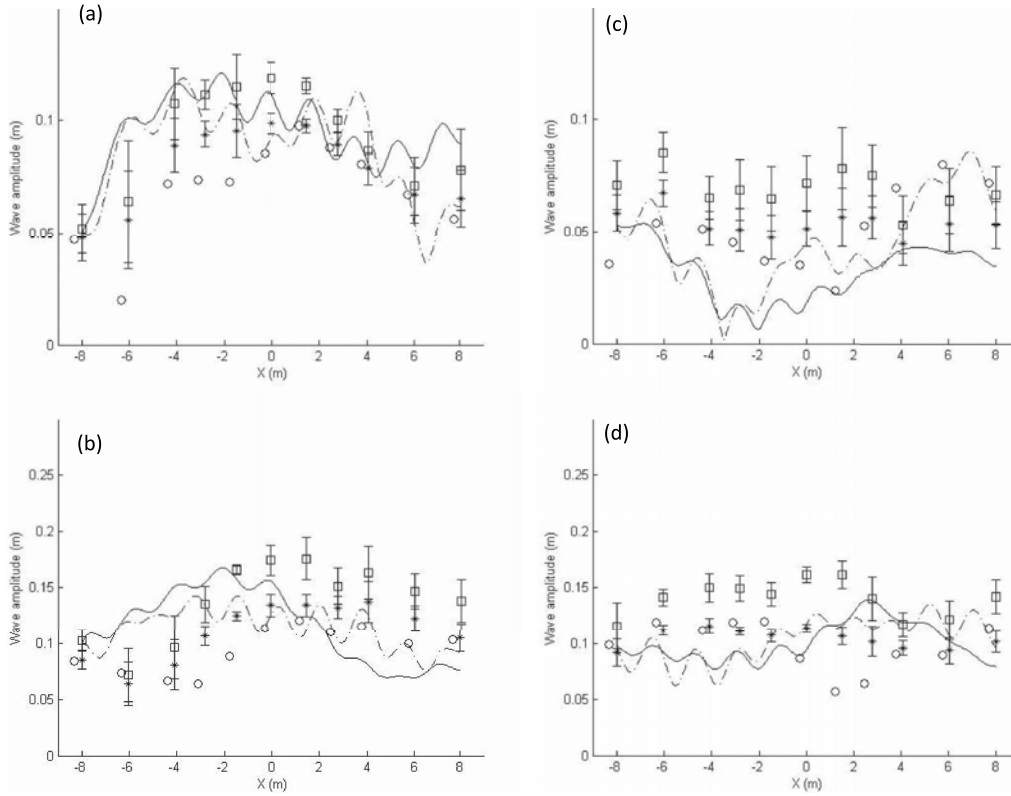


FIG. 12. Wave amplitude for  $Y = 0$  (left) and  $Y = 2.2$  (right), (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm : (\*) WG, (□) PS, (---) model, mean current  $U_0$ , (—) model, (c) mean current  $U_{10}$ , (d) mean current  $U_{20}$ ; (o) CM ( $Y = -0.53$ ).

the wave amplitude is also presented. From the experiments, we can observe a huge amplification up to 100% of the wave amplitude for the wave condition  $H = 10$  cm and a lighter increase up to 50% of the incident condition for the case  $H = 20$  cm, after a decrease of the amplitude in a first stage. This decrease is due to a spilling breaker of the wave as already mentioned above. The amplification calculated numerically for the phase  $\varphi = 0$  is of about 17%, of same order as the amplification while increasing the mean velocity intensity from 0.25 m/s to 0.35 m/s calculated in the 2D case by writing the energy flux conservation along the  $x$ -axis

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E(U + C_g^-)}{\sigma^-} \right] = 0, \quad (13)$$

where  $E = \frac{1}{2} \rho g a_i^2$  is the wave energy. The numerical results for the measured phase  $\varphi$  give amplification of same order as observed experimentally for both wave amplitudes. However, results depend on the current field  $U$ , confirming the wave effect on the mean current field. Whatever the wave amplitude and phase, an oscillating behavior of spatial periodicity of about 1.6 m is observed for the numerical calculations. It may correspond to a reflection effect of the waves due to the non-homogeneous fluid, the wave wavenumber depending on the local mean current. Indeed, the corresponding distance between two successive relative maxima (or minima) corresponding to two successive antinodes (or nodes) is  $\Delta X = \frac{\lambda^- \lambda^+}{\lambda^- + \lambda^+}$ ,  $\lambda^+$  being the wavelength of the reflected wave, with  $\Delta X = 1.6$  m for  $U = 0.25$  m/s. The corresponding reflection coefficient calculated from these maxima and minima is of about 10% in the central part of the basin for  $H = 10$  cm. The corresponding reflected energy, according to Eq. (10) is of about 4%, of order of the calculated values in Sec. III B 2. For  $H = 10$  cm, two maxima of amplitudes are observed either up-wave ( $X = -3.8$  m) or down-wave ( $X = +3.9$  m) the mound location while using the current field

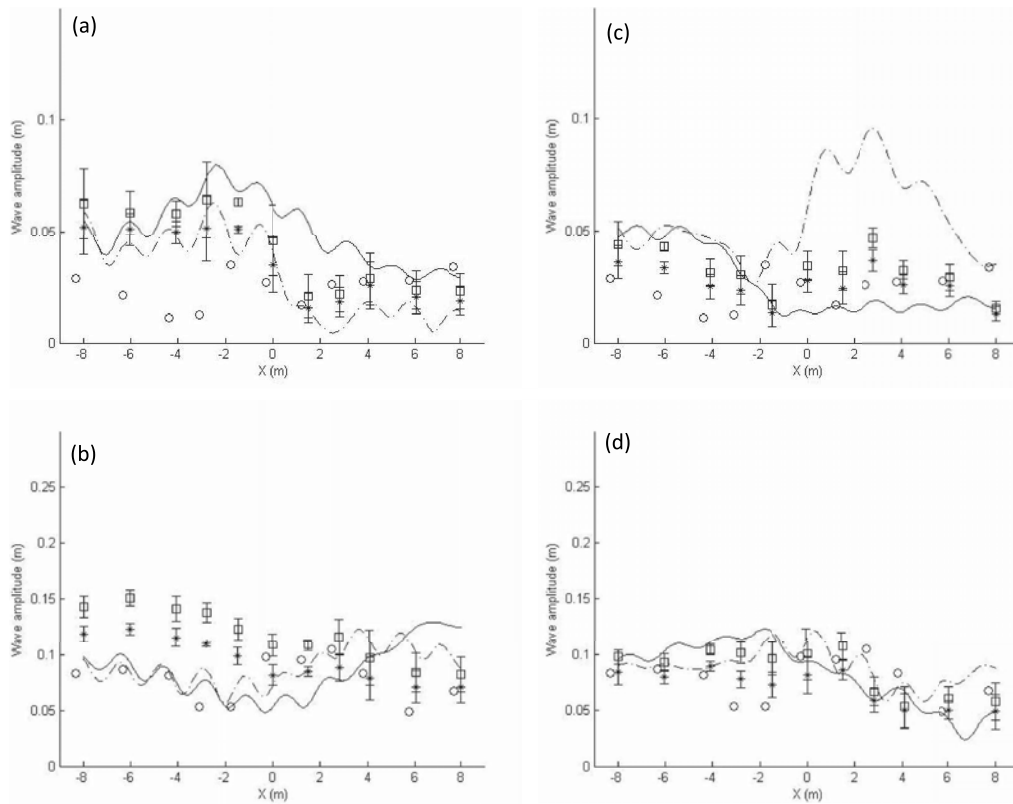


FIG. 13. Wave amplitude for  $Y = 3.5$  (left) and  $Y = 5.8$  (right), (a)  $H = 10$  cm, (b)  $H = 20$  cm : (\*) WG, (□) PS, (---) model, mean current  $U_0$ , (—) model, (c) mean current  $U_{10}$ , (d) mean current  $U_{20}$ ; (o) CM ( $Y = -0.53$ ).

$U_0$ , there are no more observed for the current field  $U_{10}$ . For the case  $H = 20$  cm, even if the calculated and observed maxima of amplification are of same order, the observed behavior is of significantly different shape for both current fields  $U_0$  and  $U_{20}$ . Indeed, within the experiments, the amplification is observed after a strong decrease of about 30% due to wave breaking, not taken into account in the calculations, and followed by a huge amplification of order 100% from this minimum. If the transverse phase lag observed explains qualitatively the amplification, numerical calculations assumed depth-averaged current. Possible effects of vertical shear current are discussed in Secs. IV B and IV C.

## B. Surface wave amplitude through pressure and velocity data

It is known that the wave amplitude and celerity depend on the vertical shear of current (Kirby and Chen<sup>36</sup>). In order to discuss the vertical uniformity of the mean current, indirect measurements of the wave amplitude were made by use of both the velocity (through *CM* sensor) and pressure (through *PS*) amplitudes data at the wave frequency. From the wave crest shape presented in Fig. 9, which is found to vary slowly within the basin excepted in some few locations, diffraction effects are neglected in the following indirect measurement of the surface wave amplitude. Neglecting the reflected wave effects and assuming both current and wave direction along the  $x$ -axis, the corresponding velocity potential for a surface wave deformation of the form (1) is then as follows:

$$\Phi(x, z, t) = \frac{ia_i c_v}{k} e^{i(\omega t - kx)} + Ux, \quad (14)$$

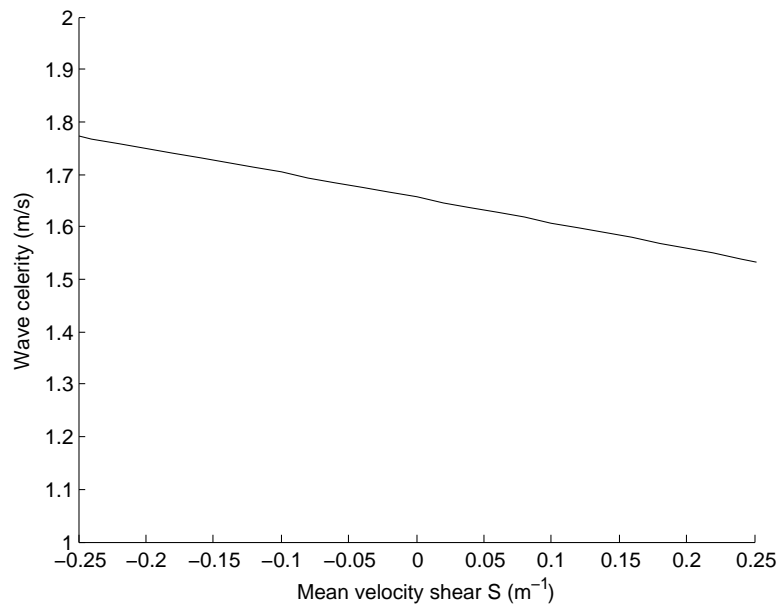


FIG. 14. Influence of the mean velocity shear on the wave celerity,  $U_s = 0.30$  m/s.

where  $z$ -axis is vertical upwards,  $c_v = \frac{\sigma^- \cosh(k^-(z+h))}{\sinh(k^-h)}$ . The local current  $U$  is interpolated from the  $CM$  measurements. It is assumed to have a direction close to the one of the waves. Velocity fields are given by  $\vec{u}(u, w) = \vec{\nabla} \Phi$  and the pressure at leading order by  $p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho U \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ .

The wave amplitude  $a$  obtained from either  $u$  or  $p$  measurements at a water depth  $z$  is then of the form

$$a = \frac{|u|}{c_v} = \frac{|p|}{c_p} \quad (15)$$

with  $c_p = \rho \left( \frac{\omega}{k} - |U| \right) \frac{\sigma^- \cosh(k^-(z+h))}{\sinh(k^-h)}$ .

Results for the wave amplitude are given for various transects along the basin. They are presented in Fig. 12(a) for the center part of the basin ( $Y = 0$ , constant water depth,  $h = 3$  m), in Fig. 12(b) above the sloping end of the UTDM,  $Y = 2.2$ , in Fig. 13(a) above the edge of the flat side part of the UTDM,  $Y = 3.5$ , in Fig. 13(b) above the flat part of the UTDM,  $Y = 5.8$ . The standard deviation is indicated for both the  $WG$  data and the  $PS$  data, registered for the successive experiments corresponding to the four locations of the  $CM$ . We can observe that in the central longitudinal part of the basin ( $Y = 0$ ), the wave amplitudes calculated though the velocities are in fairly good agreement with those measured directly by the  $WG$ . Those calculated with the pressures are in rather good agreement with an overestimate in the central part of the basin. For the lateral transects, significant differences are observed, especially for  $Y = 3.5$ . If these behaviors are observed or both wave amplitudes, differences between the  $CM$  data and the  $WG$  data are higher for the smaller wave amplitude ( $H = 10$  cm) for  $Y = 3.5$  and  $Y = 5.5$ . In Figs. 13(a–d), corresponding results from the numerical model are also given at the locations of the  $WG$  and  $PS$ . In order to estimate the wave–current interaction effect, calculations are carried out with either the mean current in the absence of waves  $U_0$  or in the conditions of experiments ( $U_{10}$  or  $U_{20}$ , for respectively  $H = 10$  cm and  $H = 20$  cm). The matching between the experimental and the numerical data is somewhat correct, but strong discrepancies appear in some parts. In addition, these discrepancies not only depend on the section  $Y$  but also on the wave amplitude condition, as shown, for instance, in Figs. 12 and 13. The numerical results are also sensitive to the mean current as shown in Figs. 12 and 13 for the case  $H = 10$  cm for which a significant difference is numerically observed above and down-wave the mound. All these

results confirm the complexity of the flow and the role of the shear currents, both horizontally and vertically.

### C. Effect of a sheared current on the wave celerity

As shown in Figs. 5(a) and 5(b) for, respectively,  $Y = 0$  and  $Y = 5.8$ , the mean current depends on the depth  $z$ . For a linear shear current, the current takes the form

$$U(z) = U_s - S.z, \quad (16)$$

where  $S$  is the constant shear parameter, and  $d_e$  is a critical depth. For deep water conditions, and assuming  $S$  to remain small, the critical depth  $d_e = \lambda/4$ , the dispersion relation is of the form (Steward and Joy, 1974),<sup>37</sup>

$$(\omega - k^-(U_s - S.d_e))^2 = gk^-. \quad (17)$$

The influence of the shearing  $S$  on the wave celerity is presented in Fig. 14, for  $U_s = -0.30$  m/s. One can observe that to a shear of order  $0.1 \text{ s}^{-1}$  corresponds a variation of the celerity of order  $0.1$  m/s, of same order as the phase evolution observed due to the spatial changes of the mean horizontal current intensity (see Fig. 10). Even this solution does not represent accurately the observed current profile, it gives a good insight of how it may modify the wave celerity.

## V. CONCLUSION

In the present study, wave propagation in opposing current conditions was investigated in a 3D wave basin. Deep water conditions in the whole basin for the wave period considered. A huge wave amplification was experimentally observed in the central deeper zone of the basin. The wave amplitude increase cannot be ascribed to an increase of the intensity of the reverse current in the wave propagation direction, which in the present is of order 20%, far under the observed amplification of 100% for the wave case  $H = 10$  cm. It can no more be explained by a current gradient in the transverse direction with respect to the wave propagation. Indeed, the current was found to weakly vary along the transverse direction, and this transverse variation was found numerically to poorly increase the factor of amplification by comparison to the amplification due to the reverse current intensity increase in the 2D approximation. The major explanation in the hypothesis of no depth-depending currents is the fact that the wave phase depends on the transverse coordinate  $Y$ . Indeed, the numerical results confirm in these conditions a far higher wave amplification. Let us note that the wave phase evolution in the transverse direction slightly depends on the wave conditions, demonstrating also a wave condition depending on mean current field. Qualitatively, this difference may be explained by a slight difference of the mean current on the side parts of the basin, between the wave generators and the location of the more up-wave (or down-stream) measurements ( $X = -8$  m). This results from the combination of the horizontally lateral mixing down-wave the UTMD and the vertical mixing in the upper water layer enhanced by the wave. This unsteady mixing is confirmed by high values of the standard deviation of the measurements in some locations (especially for the depth of immersion of the fixed pressure sensors,  $Z = -1.5$  m) observed in Figs. 8 and 9. However, in spite of these flow fluctuations or variabilities, the phenomenon of wave focusing is observed whatever the experiments carried out. It is poorly sensitive to possible flow fluctuations. We can conclude that there is a full interaction process between the wave and the current, since both depend on the incoming wave conditions. Within this interaction process, the vertical distribution of the mean velocity is found to play a significant role. Such profiles and their spacial evolutions are enhanced by the presence of the 3D bathymetry, which do not impact directly the deep water wave propagation.

In the present experiments, the deployed instrumentation, although not able to quantitatively describe the tri-dimensional current field, have shown significant depth-dependent current conditions, through either mean current measurements (thanks to either *CM* or *PS*) at three vertical locations or indirect calculations of the free surface deformation at the wave frequency. Further works are then scheduled, based on a experimentally finer description of the flow, and numerical approach including sheared current effects.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by ANR Grant No. ANR-13-ASTR-0007. The authors are grateful to the Conseil Général du Var for its financial support for the experiments carried out in the wave basin BGO FIRST in the framework of the GIS HYDRO. The DGA (Direction Générale de l'Armement, France) is acknowledged for its financial supports for the Ph.D. of Jenna Charland.

- <sup>1</sup>R. S. Arthur, "Refraction of water waves by islands and shoals with circular bottom contours," *Trans. Am. Geophys. Un.* **27**(2), 168–177, doi:10.1029/TR027i002p00168 (1946).
- <sup>2</sup>J. C. W. Berkhoff, N. Booy, and A. C. Radder, "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves," *Coast. Eng.* **6**(3), 255–279 (1982).
- <sup>3</sup>C. L. Vincent and M. J. Briggs, "Refraction-diffraction of irregular waves over a mound," *J. Waterw. Div.-ASCE* **115**, 269–284 (1989).
- <sup>4</sup>N. Jarry, V. Rey, F. Gouaud, and D. Lajoie, "Gravity wave amplification and phase crest re-organization over a shoal," *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11**, 789–796 (2011).
- <sup>5</sup>D. J. Wang, M. Katory, and Y. S. Li, "Analytical and experimental investigation on the hydrodynamic performance of onshore wave-power device," *Ocean Eng.* **29**, 871–885 (2002).
- <sup>6</sup>F. Gouaud, V. Rey, R. Van Hooff, and J. Piazzola, "Experimental study of the hydrodynamic performance of an onshore wave-power device in the presence of an underwater mound," *Coastal Eng.* **57**, 996–1005 (2010).
- <sup>7</sup>I. V. Lavrenov, "The wave energy concentration at the aghulas current of south africa," *Nat. Hazards* **17**, 117–127 (1998).
- <sup>8</sup>I. V. Lavrenov and A. V. Porubov, "Three reasons for freak wave generation in the non-uniform current," *Eur. J. Mech. B-Fluid* **25**, 574–585 (2006).
- <sup>9</sup>N. Booij, R. C. Ris, and L. H. Holthuijsen, "A third generation wave model for coastal regions. Part I. Model description and validation," *J. Geophys. Res.* **104**, 7649–7666, doi:10.1029/98JC02622 (1999).
- <sup>10</sup>M. Benoit, F. Marcos, and F. Becq, "Development of a third-generation shallow-water wave model with unstructured spatial meshing," in *Proceedings of the 25th International Conference on Coastal Engineering, ASCE* (New York, 1996), pp. 465–478.
- <sup>11</sup>J. C. W. Berkhoff, "Computation of combined refraction-diffraction," in *Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference, ASCE* (New York, 1972), pp. 471–490.
- <sup>12</sup>A. C. Radder, "On the parabolic equation method for water-wave propagation," *J. Fluid Mech.* **95**, 159–176 (1979).
- <sup>13</sup>J. T. Kirby, "Higher order approximations in the parabolic equation method for water waves," *J. Geophys. Res.* **91**, 933–952, doi:10.1029/JC091iC01p00933 (1986).
- <sup>14</sup>Y. S. Li and J. M. Zhan, "Boussinesq-type model with boundary-fitted coordinate system," *J. Waterw. Div.-ASCE* **127**(3), 152–160 (2001).
- <sup>15</sup>W. Chen, V. Panchang, and Z. Demirebilek, "On the modeling of wave-current interaction using the elliptic mild-slope wave equation," *Ocean Eng.* **32**(17–18), 2135–2164 (2005).
- <sup>16</sup>H. S. Zhang, H. J. Zhao, P. Ding, and G. P. Miao, "On the modeling of wave propagation on non-uniform currents and depth," *Ocean Eng.* **34**, 1393–1404 (2007).
- <sup>17</sup>L. Griffiths and R. Porter, "Focusing of surface waves by variable bathymetry," *Appl. Ocean Res.* **34**, 150–163 (2012).
- <sup>18</sup>E. Guazzelli, V. Rey, and M. Belzons, "Higher-order bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds," *J. Fluid Mech.* **245**, 301–317 (1992).
- <sup>19</sup>V. Rey, "A note on the scattering of obliquely incident surface gravity waves by cylindrical obstacles in waters of finite depth," *Eur. J. Mech. B/Fluids* **14**(1), 207–216 (1995).
- <sup>20</sup>J. Touboul and V. Rey, "Bottom pressure distribution due to wave scattering near a submerged obstacle," *J. Fluid Mech.* **702**, 444–459 (2012).
- <sup>21</sup>S. R. Massel, "Extended refraction-diffraction equation for surface waves," *Coastal Eng.* **19**, 97–126 (1993).
- <sup>22</sup>K. Belibassakis, G. Athanassoulis, and T. Gerostathis, "A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry," *Appl. Ocean Res.* **23**(6), 319–336 (2001).
- <sup>23</sup>K. Belibassakis, T. Gerostathis, and G. Athanassoulis, "A coupled-mode model for water wave scattering by horizontal, non-homogeneous current in general bottom topography," *Appl. Ocean Res.* **33**, 384–397 (2011).
- <sup>24</sup>C. Swan and R. L. James, "A simple analytical model for surface water waves on a depth-varying current," *Appl. Ocean Res.* **22**, 331–347 (2000).
- <sup>25</sup>C. Swan, I. P. Cummins, and R. L. James, "An experimental study of two-dimensional surface water waves propagating on depth varying currents," *J. Fluid Mech.* **428**, 273–304 (2001).
- <sup>26</sup>H. Margaretha, "Mathematical modelling of wave-current interaction in a hydrodynamic laboratory basin," Ph.D. thesis (Department of Applied Mathematics, University of Twente, The Netherlands, 2005).
- <sup>27</sup>R. D. MacIver, R. R. Simons, and G. P. Thomas, "Gravity wave interacting with a narrow jet-like current," *J. Geophys. Res.* **111**, C03009, doi:10.1029/2005JC003030 (2006).
- <sup>28</sup>V. Rey, R. Capobianco, and C. Dulou, "Wave scattering by a submerged plate in presence of a steady uniform current," *Coastal Eng.* **47**, 27–34 (2002).
- <sup>29</sup>R. Magne, V. Rey, and F. Ardhuin, "Measurement of wave scattering by topography in presence of current," *Phys. Fluids* **17**, 126601 (2005).
- <sup>30</sup>V. Rey and J. Touboul, "Forces and moment on a horizontal plate due to regular and irregular waves in the presence of current," *Appl. Ocean Res.* **33**, 88–99 (2011).
- <sup>31</sup>V. Rey, F. Guinot, and J. Touboul, "Large scale experimental study of wave-current interactions in the presence of a 3d bathymetry," in *Proceedings of the XIVth International Congress of International Maritime Association of the Maritime (IMAM)* (CRC Press, London, 2012), pp. 873–880.

- <sup>32</sup>D. Drevard, V. Rey, and P. Fraunié, "Partially standing wave measurement in the presence of steady current by use of coincident velocity and/or pressure data," *Coastal Eng.* **56**, 992–1001 (2009).
- <sup>33</sup>J. T. Kirby, "A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography," *J. Geophys. Res., [Ocean]* **89**(C1), 745–747, doi:10.1029/JC089iC01p00745 (1984).
- <sup>34</sup>V. Panchang, B. Pearce, G. Wei, and B. Cushman-Roisin, "Solution of the mild-slope wave problem by iteration," *Appl. Ocean Res.* **13**(4), 187–199 (1991).
- <sup>35</sup>J. T. Kirby, "A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations," *Coastal Eng.* **13**(3), 211–218 (1989).
- <sup>36</sup>J. T. Kirby and T. Chen, "Surface waves on vertically sheared flows: Approximate dispersion relations," *J. Geophys. Res.* **94**(C1), 745–747, doi:10.1029/JC094iC01p01013 (1989).
- <sup>37</sup>R. H. Stewart and J. W. Joy, "Hf radio measurements of surface currents," *Deep-Sea Res.* **21**, 1039–1049 (1974).







**Jenna Charland**

MIO - UTLN

DGA - CNRS

**Résumé :**

L'objectif de ce travail était d'améliorer la compréhension et la modélisation de la propagation de la houle au dessus d'une topographie lentement variable et en présence d'un courant inhomogène. Nous nous sommes en particulier intéressés à l'influence d'un courant cisailé linéairement et verticalement sur la dynamique de la houle. Dans ce but un modèle linéaire de propagation de la houle a été développé et une campagne expérimentale à été menée en bassin de génie océanique.

Au cours de cette campagne expérimentale les paramètres de la houle et du courant ont été mesurés avec une haute résolution spatio-temporelle. Nous avons pu décrire l'interaction complexe entre la houle et le courant, en particulier les effets de l'évolution spatiale des gradients verticaux et horizontaux de ce dernier sur la propagation de la houle.

**Mots clés :** propagation de la houle, courant cisailé, topographie lentement variable, modélisation, expériences en bassin de grandes dimensions

**Abstract :**

The purpose of this work was the improvement of the understanding and the modelling of wave propagation over a slowly varying topography in presence of a inhomogeneous current. Particularly we focus on the influence of a linearly vertically sheared current on the wave behaviour. To this end, we develop a new wave propagation model and we carry out an experimental study in an ocean engineering basin.

During the experiments, wave parameters and currents parameters have been measured with a high spatial and temporal resolution. This allows us to describe the complex interaction between the wave and the current, particularly its horizontal and vertical gradients effects on the wave propagation.

**Keywords :** wave propagation, sheared current, slowly varying topography, modelling, large scale basin experiments