



Modélisation de structure dynamique dans un champ optique

Thomas Crouzil

► To cite this version:

Thomas Crouzil. Modélisation de structure dynamique dans un champ optique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0043 . tel-01136419

HAL Id: tel-01136419

<https://theses.hal.science/tel-01136419>

Submitted on 27 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

l'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **M. Thomas CROUZIL**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Laser, Matière et Nanosciences

Modélisation de structures dynamiques dans un champ optique

Directeur et co-directeur de thèse : M. FREYSZ Éric et M. PERRIN Mathias

Présentée et soutenue publiquement le : 28 avril 2014

Devant la commission d'examen formée de :

M. GRUY Frédéric	Professeur des Universités ENSM de Saint-Étienne, CSPIN	Rapporteur et Président du jury
M. LHEURETTE Éric	Professeur des Universités Université des Sciences de Lille, IEMN	Rapporteur
M. FREYSZ Éric	Directeur de Recherche Université de Bordeaux 1, LOMA	Directeur de thèse
M. PERRIN Mathias	Chargé de Recherche Université de Bordeaux 1, LOMA	Co-directeur de thèse

Titre : Modélisation de structures dynamiques dans un champ optique

Résumé :

Le piégeage optique se présente maintenant, depuis quelques décennies, comme une thématique majeure à l'intersection de diverses disciplines. Depuis les résultats d'Ashkin, de nombreux travaux ont été effectués dans le piégeage et le guidage d'objets physiques (particules, molécules, bactéries, etc.) de toutes tailles. Ces derniers caractériseront alors, devant la longueur d'onde, le domaine optique dans lequel nous nous placerons (Rayleigh, Mie, Optique géométrique).

Notre travail porte donc sur l'étude des propriétés de chaînes linéaires périodiques de gouttelettes (huile), placées dans l'eau, et soumises à deux faisceaux laser horizontaux contra-propageants de profil gaussien. Nous démontrons qu'il est possible d'établir un ordre spatial sur un ensemble de grosses gouttes (devant la longueur d'onde) suivant une structure périodique. L'originalité d'un tel système réside dans le fait que la lumière peut alors être refocalisée par l'ensemble des gouttes espacées périodiquement. Cette périodicité peut ainsi, dans certains cas, conférer au faisceau une refocalisation périodique au sein du réseau. Cette première étude, en limite statique, nous permet ainsi de mettre en évidence les conditions de couplage des modes liés aux chaînes de gouttes. En particulier, nous caractérisons la présence de modes de Bloch où le faisceau se propage avec une périodicité équivalente à celle du réseau. Cela nous amène à remarquer que ces conditions modales sont soumises au paramètre de phase gaussien θ (phase de Gouy). Ainsi, bien que structuré à une échelle largement supérieure, nous mettons en évidence théoriquement des propriétés analogues à celle des cristaux photoniques, conférées par la périodicité des chaînes de gouttes. Ce qui nous permet, en conséquence, de démontrer l'existence de bandes interdites, nous amenant à définir un ensemble de modes guidants/non-guidants de cette chaîne. Cette étude statique est, par la suite, étendue d'un point de vue dynamique en considérant l'effet des forces optiques sur les gouttes. Nous démontrons ainsi qu'il est possible de piéger optiquement de telles gouttes sur des états d'équilibres stables. Au-delà desquels nous mettons en évidence, à travers une étude paramétrique, l'existence de modes oscillants périodiques ou pseudo-périodiques. Enfin, nous prenons en compte les phénomènes de collisions par coalescence, entraînant une réorganisation des répartitions de champs optiques qui peuvent se traduire par de nouvelles configurations de piégeage.

Mots clés : Piégeage optique, optofluidique, modes de Bloch, phase de Gouy, coalescence

Title : Modelling of dynamic structures in an optical field

Abstract :

Optical trapping appears now, since a few decades, as a major theme at the intersection of various disciplines. Since the results of Ashkin, many works were made in the trapping and the guidance of physical objects (particles, molecules, bacteria, etc.) of any sizes. The latter will characterize then, in front of the wavelength, the optical domain in which we shall take place (Rayleigh, Mie, Geometrical Optics).

Our work thus concerns the study of the properties of periodic linear chains of droplets (oil), placed in water, and submitted to two counter-propagating horizontal laser beams of gaussian profile.

We show that it is possible to establish a spatial order of a set of large drops (in front of the wavelength) in a periodic structure. The originality of such a system lies in the fact that the light can then be refocused by the set of periodically spaced drops. This periodicity may thus, in some cases, confer on the beam a periodic refocusing within the network. This first study, in static limit, allows us to identify the conditions of coupling modes associated with drop channels. In particular, we characterize the presence of Bloch modes where the beam propagates with similar frequency to that of the network. This leads us to note that these modal conditions are submitted to the gaussian phase parameter θ (Gouy phase). Thus, although structured at a widely higher scale, we highlight theoretically similar properties to that of the photonic crystals, conferred by the periodicity of the chains of drops. This allows us, consequently, to demonstrate the existence of bandgaps, leading us to define a set of guiding/not-guiding modes of this chain. This static study, thereafter, is extended from a dynamic point of view by taking into account the effect of the optical forces on the drops. We show that it is possible to optically trap such drops on stable equilibrium states. Beyond of which we highlight, through a parametric study, the existence of periodic or pseudo-periodic oscillating modes. Finally, we take into account the phenomena of collisions by coalescence, involving a reorganization of the distributions of optical fields which can result in new configurations of trapping.

Keywords : Optical trapping, optofluidics, Bloch modes, Gouy phase, coalescence

Remerciements

Voici en quelques phrases, le parachèvement de ces années de thèse. Une page formelle, non moins conventionnelle, nous incitant à coucher sur le papier l'ensemble de nos reconnaissances tant convoitées...ou pas!

Il semble indéniable que ce travail n'aurait pu se réaliser sans le bon consentement de mes directeurs de thèse Éric Freysz et Mathias Perrin. Éric, je tenais à souligner ton enthousiasme et ton énergie lorsqu'il est question de discuter de Sciences! Nos conversations, constructives, nous ont souvent permis d'entrevoir les choses différemment. Mathias, je tiens à saluer ton efficacité dans le codage. Mais surtout, le grand flegme et la sagacité dont tu as fait preuve devant ce (petit) tableau blanc du bureau 126! Merci pour cette confiance que tu as su me témoigner tout au long de ces années.

Je tiens également à remercier Frédéric Gruy et Éric Lheurette ayant accepté la relecture de mon manuscrit de thèse en qualité de rapporteurs, et de leur présence en tant que membres du jury, et président pour le premier nommé, dont les interventions furent appréciables et appréciées!

Je remercie inévitablement l'ensemble du personnel du LOMA. Merci à toi Jean-Pierre pour ta disponibilité sans faille, bien que les responsabilités ne manquent pas! Merci également aux secrétaires Isabelle, Laurette, Suzanne, Annie et Sophie dont leur efficacité n'a d'égal que leur bonne humeur. Mais encore, comment ne pas citer le service informatique dignement représenté par Hassan et Richard (soit dit en passant, nous n'avons toujours pas compris pourquoi, bien qu'ayant une des meilleures machines du labo, mon ordi ramait autant...)!

Une thèse ne pourrait toutefois bien se passer sans une ambiance joviale et agréable, dégagée par bon nombre de personnes, dont notre premier étage (mais pas que) fut un excellent cru! Je saluerais notamment Hamid, Jean-François, Philippe, François, Tinihaou, Bin, David, Ulysse, Hatim, Hamza, Joseph, Denise, Simon et Jérôme. Mention toute particulière à Christine pour sa bonne humeur, son dynamisme et son exemplarité dans l'énergie et le temps dévoués remarquablement à l'enseignement! Faculté que j'ai eu la chance d'apprécier en tant que moniteur dans un des modules qu'elle dirigeait. Sans oublier les techniciens chargés des TP (et plus), que sont Pol et Dominique (sans qui tout ne marcherait pas aussi bien!).

Rokhaya, nous avons commencé cette aventure ensemble, au bureau 126, et je t'avouerais que je pense pouvoir affirmer, sans prendre trop de risque, que tu es la collègue idéale. Bien que je te considère plus comme une amie! Une éternité ne me suffirait probablement pas pour trouver, ne serait-ce qu'une once de reproche à ton égard! Bon courage pour cette dernière ligne droite.

La vie au labo est une chose, mais au-delà de quoi de véritables amitiés peuvent se créer. Une cohorte, que je qualifierais de bordelaise (bien que peu au final soient issus des terres d'aquitaine), dans laquelle je placerais Julien (notre Pipo international et maintenant fier père), Gabi, Yann (un grand voyageur dans l'âme), Jean-Christophe (deux mots : entier et passionné), Fabien (une future légende du LOMA...et du VnB), Silvia (on parle de mon accent, mais le tien agrémenté de ton éternel sourire résonneront et rayonneront toujours dans les couloirs du 1er), Sandra (au-delà d'une mécanicienne hors pair, un gardien de but incontestable et incontesté), et Julien (voguant en terre teutonique). Mais aussi, Mæva (une danseuse invétérée), Flo (on en a eu des discussions profondes en soirées...quel bel oxymore), Gabi, Abdu (le ricain), Christophe (on est finalement arrivé à s'y retrouver à ce saut!), Manuela (t'inquiète, tu vas arriver à les mater ces petits ados!), Arabella, Dubuch (les lasers n'ont aucun secret pour toi...ist das nicht?), Alizée, Vincent (cette soirée impro guitare/synthé restera dans les mémoires!), Laura (les terres occitanes ne seront

qu'un passage...), Gillou (tu dois te lasser des eaux lisses...vivement l'écume océanique!), Cam (profitez bien de ce p'tit bout!) et Sophie (désolé mais Benji insiste pour que je squatte un week-end, donc...). Mais encore, l'inimitable Benoît (une façon très personnelle de découvrir les rues bordelaises, mais non moins sympathique...! Il y en aura d'autres l'ami!), Arnaud (dès que tu te mettras à gagner des tournois de pala, promis je repasserai te voir jouer...!), Yves (je crois qu'on tient le bon filon), Fred, Alex, Julien et Marion (c'est sympa les amis de nous avoir suivi sur Bordeaux après l'épopée toulousaine...la porte sera toujours ouverte!).

Quelques noms semblent manquer...comment pourrais-je omettre l'équipe fantastique, avec qui toute cette histoire a commencé : Pedro (il faut vraiment te couper les cheveux maintenant...!), Geoff (on va te trouver un truc sur Bordeaux, tiens bon!), Bentrof (alors poulet, quelles sensations d'être père...?! Et promis, la prochaine fois gros débat sur les *Illuminati*), Bos (notre ronchon préféré...alors, Brassens ou Gainsbourg...?) et mon p'tit Benji (un véritable acolyte Villebonnais...prépare toi poulet, la coupe va commencer sous peu, à nous les terrasses bordelaises)!

Je ne pourrais passer sous silence, également, la fine équipe toulousaine, JP (un binôme de choc), Mike, Charlou, Clém, Ju, Flo, Devin, Aude, Séb, Christophe et Cha! Des apéros mémorables dont on parlera encore dans quelques années...!

Ne comptez pas à ce que je renie mes racines ariégeoises! Sans en dresser une liste exhaustive, voici quelques noms immanquables, Seb (la maison sera toujours ouverte, tu es de la famille...!), Mél (ça en fait du chemin depuis le CP...!), Jérémy (ça y est, papa! Une nouvelle vie mon poulet!), Élo, Cécé (ou Gardon, au choix...?! Joue tes boules!), Ben (LE coloc...quelle aventure...!), Max (tu n'étais pas en reste...), Dindon, Sonia, Math, Émilie, Laurent, Jess, Jérôme et Nico (on s'en souviendra de ces années lycée...!)!

Enfin, merci à la famille qui reste un véritable bol d'air lors des retours au pays. Les *pater* (quelle aventure, n'est-il pas...?!), les frérots (tout ira bien les petitous...!) et So (je sais, je n'aurais pas dû, mais tant de choses passées...!)!

Alors, on remet ça quand...?!!

"Douter de tout ou tout croire sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir."

HENRI POINCARÉ, La Science et l'hypothèse

"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi!"

ALBERT EINSTEIN

Table des matières

Liste des figures	xxi
Liste des tables	xxiii
Constantes et variables	xxv
 Introduction générale	 1
 Étude statique de l'influence d'un réseau de lentilles sur un faisceau laser	 15
Introduction	15
 1 Méthodes de modélisation	 17
1.1 Équations de <i>Maxwell</i>	17
1.1.1 Équation de propagation	18
1.1.2 Faisceau gaussien et modes supérieurs	20
1.2 Approche matricielle	26
1.2.1 Matrice de transfert d'un système optique centré	26
1.2.2 Confinement transversal d'un faisceau gaussien par un ensemble de lentilles équidistantes	31
1.2.3 Propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille boule	33
1.2.4 Propagation à travers plusieurs mailles élémentaires	36
1.3 Diffraction et <i>principe de Huygens-Fresnel</i>	40
1.3.1 Exemples généraux de diffraction	40
1.3.2 Approche analytique du modèle 2D	42
1.3.3 Simplification et symétrie suivant un modèle unidimensionnel	45
 2 Modélisation d'une chaîne de lentilles	 47
2.1 Étude avec un espacement entre lentilles périodique	48
2.1.1 Théorème de <i>Bloch-Floquet</i>	48
2.1.2 États propres dans le cas de lentilles équidistantes	49
2.1.3 Réponse périodique d'un système périodique	54
2.1.4 Excitation des modes en fonction des paramètres d'entrée (ω_{0_i} et σ_i)	62
2.1.5 Analogie avec les cavités fractionnaires	65
2.1.6 Application au cas d'une maille plus complexe	68
2.1.7 Faisceau non purement gaussien	72
2.2 Analogie avec les cristaux photoniques	77
2.2.1 Maille à plusieurs lentilles et ouverture de <i>gap</i>	77
2.2.2 Localisation des maxima du champ dans le réseau et variation sur l'espacement d	82
2.3 Effets d'un défaut : couplage de deux chaînes périodiques	83
2.3.1 Défauts localisés ou ponctuels	83
2.3.2 Défauts étendus ou défauts de <i>Wadsley</i>	91
2.4 Application à un ensemble désordonné	93

Conclusion	97
Étendue du modèle d'un point de vue dynamique	101
3 Introduction des forces optiques	101
3.1 Rappels sur la présentation du système	102
3.2 Description des forces en jeu	103
3.3 Étude sur le calcul de la force optique	108
3.3.1 Analyse sur une seule bille	108
3.3.2 Description du modèle global	112
4 Évolution dynamique d'un ensemble de gouttes	115
4.1 Établissement des équations de la dynamique	115
4.2 Étude de la stabilité des positions d'équilibre	117
4.2.1 Calcul général en dimension 2	118
4.2.2 Synthèse des solutions et cycles limites	120
4.3 Représentation des états d'équilibre sans contact interparticulaire	120
4.3.1 Piégeage avec des paramètres d'entrée symétriques	121
4.3.2 Asymétrie des paramètres d'entrée et cycles limites	131
4.4 Étude propagative sur des gouttes après collision	138
4.4.1 Évolution dynamique avec contact interparticulaire	138
4.4.2 Résultats dynamiques après collision	141
Conclusion	145
Conclusion générale	147
Annexes	153
Annexe A : Expression du <i>déphasage de Gouy</i> en fonction des paramètres de réseau	153
Annexe B : Démonstration du calcul de la largeur de bande interdite	157
Annexe C : Conditions d'égalités des largeurs de faisceau dans le réseau, en fonction des paramètres d'entrée	161
Références bibliographiques	163
Publications	171

Liste des figures

1	Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par deux lentilles convergentes. Ashkin utilisa un montage équivalent pour manipuler, notamment, des billes micrométriques de latex et de polystyrène ($n_b = 1.58$) dans une cuve d'eau ($n_m = 1.33$), par le biais de laser argon, de mode TEM_{00} , à une longueur d'onde de 514.5 nm	2
2	Vue d'ensemble schématique des forces agissant sur une particule diélectrique près du foyer d'un faisceau piégeant, de profil gaussien. Sur le schéma (a) , la particule se trouve sur l'axe du faisceau et est poussée dans le sens de propagation du faisceau, vers le point focal. Cette force résultante correspond à la force de diffusion. Sur la figure (b) , en revanche, la particule est désaxée par rapport à l'axe du faisceau. La distribution d'intensité venant frapper la bille n'est plus répartie de façon symétrique sur sa surface, elle se retrouve donc soumise à un gradient d'intensité. Deux rayons quelconques ont été tracés, dont l'épaisseur est directement proportionnelle à l'intensité lumineuse. Nous voyons clairement que la force de gradient résultante pousse la particule vers la zone de forte intensité, au centre du faisceau ¹	2
3	Atomes de césium ultrafroids, piégés dans un réseau lumineux créé par une combinaison de plusieurs faisceaux lasers interférant au centre du piège optique (image issue de [11]).	3
4	Étirement d'un brin d'ADN, attaché de part et d'autre à des billes de latex, par l'emploi de pinces optiques (image issue de [18]).	4
5	À droite : illustration de la génération d'un vortex optique à l'aide d'une goutte de cristal liquide dite "radiale" à travers laquelle passe un faisceau laser gaussien focalisé et polarisé circulairement. Le front d'onde devient spiralé (vortex) suite à un couplage entre la polarisation de l'onde incidente et les propriétés de biréfringence de la goutte. À gauche : image entre polariseurs croisés de la goutte de cristal liquide (a), et représentation de l'ordre moléculaire 3D radial à l'intérieur de la goutte (b) (image issue de [20]).	4
6	Vue latérale d'un piège optique par deux faisceaux issus de fibres optiques placées en opposition (image issue de [30]).	5
7	Structure pseudo-hexagonale de particules serrées de taille 460 nm (image issue de [31]).	5
8	Simulation du champ électrique autour d'une particule soumise à un champ évanescent. Nous apercevons les franges d'interférence créées entre le champ diffusé par la particule et celui évanescent du faisceau laser (image issue de [36]).	6
9	Manipulation par pinces optiques de gouttes micrométriques sur une surface photosensible. Sur la figure (a) , les gouttes sont piégées par colonnes de 7 et transportées dans un réseau final 7×7 . Sur la figure (b) , 7 gouttes sont piégées et manipulées parallèlement, de telle façon que les 4 extérieures tournent circulairement dans le sens des aiguilles d'une montre, alors que les 3 intérieures tournent dans le sens inverse (images issues de [56]).	6
10	Réseau bidimensionnel de microbulles auto-organisées (image issue de [57]).	7
11	Observation des variations du rayon de courbure d'une bulle d'eau, dues à l'augmentation de la pression de fluide. Il apparaît ainsi une lentille fluide eau-air plan-convexe, de 2 mm de diamètre (image issue de [58]).	7
12	Montage expérimental de piégeage optique sur guide d'onde dans une cellule optofluidique (image issue de [62]).	8
13	Schématisation du phénomène de diffusion d'un faisceau laser en interaction avec une particule sphérique et homogène.	8
14	Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par un réseau de billes.	15

1.1	Répartition d'intensité pour un profil gaussien le long d'une section droite du faisceau.	21
1.2	Paramètres intrinsèques au faisceau gaussien.	22
1.3	Représentation des profils d'intensité du mode fondamental gaussien TEM_{00} et de trois modes d'Hermite-Gauss d'ordre plus élevé. Une représentation a été faite dans le plan transverse (x,y) , où l'amplitude des maxima est caractérisée par une couleur tendant d'autant plus vers le rouge qu'elle sera élevée. Chaque polynôme d'Hermite d'ordre n possède n zéros. L'intensité d'un mode I_{mn} présente donc, dans le plan transverse, une structure formée respectivement de $(m+1)$ et $(n+1)$ maxima suivant les directions y et x	24
1.4	Représentation des profils d'intensité des neuf premiers modes de Laguerre-Gauss, dans le plan transverse (x,y) . Nous constatons que pour $m = 0$, les modes présentent une symétrie cylindrique et les profils d'intensité sont caractérisés par une tache centrale entourée de l anneaux concentriques. Pour $m \neq 0$, ceux-ci sont définis par $(l + 1)$ anneaux (sans tache centrale), dont chacun est parcouru de $2m$ maxima.	25
1.5	Propagation d'un rayon lumineux arrivant sur un système optique homogène par morceaux. . .	27
1.6	Deux fronts d'onde sphériques issus d'une même source et de rayons de courbure respectifs R_{C_1} et R_{C_2} . Les intersections respectives avec l'axe optique (Oz) sont espacées d'une grandeur Δz	28
1.7	Transformation d'une onde sphérique passant à travers un système optique paraxial. Nous avons représenté en particulier la transformation d'un des rayons composant le faisceau, et défini par des paramètres incidents $(r_1, n_{m_1}\alpha_1)$, et émergents $(r_2, n_{m_2}\alpha_2)$	28
1.8	Propagation d'un faisceaux gaussien arrivant sur un système optique quelconque compris entre un milieu incident d'indice n_{m_1} et un milieu émergent d'indice n_{m_2}	30
1.9	Transformation des paramètres $(\omega_0$ et $\sigma_0)$ d'un faisceau gaussien au passage à travers une lentille mince convergente.	31
1.10	Schéma d'équivalence entre un résonateur optique à miroirs sphériques et un réseau de lentilles équidistantes. Les propriétés du rayon, en propagation confinée, sont définies par sa position r_N et son inclinaison par rapport à l'axe optique α_N . Et cela, dans chaque région N du réseau, ou N -ième réflexion dans la cavité. Les miroirs composant cette dernière sont définis par un rayon de courbure tel que : $R_{C_1} = 2f_1$ et $R_{C_2} = 2f_2$	32
1.11	Propagation d'un rayon lumineux interceptant l'axe optique aux points A_1 et A_2 , respectivement situés avant et après un système optique paraxial quelconque caractérisé par une matrice de transfert $ABCD$	33
1.12	Représentation d'une maille élémentaire dans un réseau de lentilles boules équidistantes et identiques (rayon ρ et indice de réfraction n_b). La matrice de transfert $[M]$, définie pour chaque maille du réseau, est donc le produit de la matrice de propagation libre $[T_{prop}]$ sur une distance d , par la matrice propre à la lentille sphérique $[M_{boule}]$	35
1.13	Représentation de la périodicité maximale du réseau accessible pour préserver un état d'équilibre stable, en fonction des variations de l'indice de réfraction relatif, dans le cas de l'approximation en lentille mince et en lentille boule.	36
1.14	Transformation d'un faisceau gaussien, à travers un système optique, suivant divers plans de référence.	37
1.15	Figure de diffraction d'un faisceau laser par une ouverture rectangulaire. Il apparaît clairement le profil d'un sinus cardinal en deux dimensions.	40
1.16	Figure de diffraction d'un faisceau laser par une ouverture circulaire. Il apparaît clairement la symétrie de révolution de l'obstacle éclairé. Cette figure est appelée "tache d'Airy".	40
1.17	Coupe transversale d'un réseau cristallin, faisant apparaître les plans réticulaires espacés de d , dans les conditions vérifiant la loi de Bragg.	41
1.18	Figure de diffraction d'un faisceau lumineux de rayons X par un cristal.	42
1.19	Figure de diffraction d'un faisceau lumineux de rayons X par un quasi-cristal d'ordre 5^2 . Ici, nous sommes en présence de pyrite FeS_2 , se présentant sous forme dodécaédrique aux faces pentagonales.	42
1.20	Schématisation du principe de diffraction associé à un point L dans le plan du diaphragme, transformé en un point M dans le plan d'observation.	43
1.21	Aberrations sphériques par une lentille boule.	45

1.22	Minimisation du phénomène d'aberration sphérique en condition de Gauss due à la faible inclinaison des rayons par rapport à l'axe optique.	45
2.1	Réseau périodique unidimensionnel, composé de 3 particules, et de période a . Il apparaît clairement la présence d'un mode de Bloch, où la périodicité du champ est égale à celle du réseau. La longueur de maille élémentaire est donc définie comme $l_{\text{maille}} = Na = a$	49
2.2	Variation, d'après (2.8), de l'écartement d en fonction du module de Λ_+ , pour un espacement régulier entre lentilles.	51
2.3	Variation, d'après (2.8), de l'écartement d en fonction de l'argument de Λ_+ , pour un espacement régulier entre lentilles.	51
2.4	Propagation d'un faisceau laser dans une cavité confocale où l'espacement entre les deux miroirs est défini comme égal au rayon de courbure de chacun des miroirs. Nous constatons que le recouvrement du faisceau se fait après 4 passages de cavité, soit 2 allers-retours.	53
2.5	Représentation du waist caractéristique du mode propre, dans un réseau de lentilles régulièrement espacées.	54
2.6	Représentation de la distance "waist-lentille" caractéristique du mode propre, dans un réseau de lentilles régulièrement espacées.	54
2.7	Profil d'évolution stable de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$, pour $ \Lambda = 1$. Les positions des lentilles sont repérées par une croix rouge. Nous excitions ici un mode de Bloch.	56
2.8	Profil d'évolution instable de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 6n_m f$, pour $ \Lambda < 1$. Les positions des lentilles sont repérées par une croix rouge. La chaîne de lentilles est ici non guidante.	56
2.9	Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$. Nous excitions ici un mode de Bloch.	56
2.10	Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$. Nous excitions ici un mode de Bloch.	56
2.11	Profil d'évolution du waist ω_0 suivant le modèle de Huygens-Fresnel, dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$	57
2.12	Variation de l'écart au paramètre accordé de waist en fonction du rayon des billes. La chaîne est composée de 10 lentilles, régulièrement espacées, avec $d = 2n_m f$	57
2.13	Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{\text{accord}}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$ et $d = 2n_m f$	58
2.14	Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{\text{accord}}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$ et $d = 2n_m f$	58
2.15	Profil d'évolution du waist ω_0 dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{\text{accord}}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$ et $d = 2n_m f$. Les deux lignes discontinues correspondent aux valeurs de waist prises dans le cas idéal de lentilles infiniment étendues.	58
2.16	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau composé de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.	59
2.17	Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en cercles rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.	59
2.18	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau composé de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans des conditions désaccordées avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est fixé à $0.3\omega_{0i_{\text{accord}}}$, et la distance $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.	60

2.19	Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans des conditions désaccordées avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est fixé à $0.3\omega_{0_{\text{accord}}}$, et la distance $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Huygens-Fresnel, alors qu'en cercles rouges, nous présentons celui de Gauss.	60
2.20	Profil d'évolution de largeur du faisceau pour différentes longueur d'onde. Le réseau est composé de $N_L = 5$ lentilles régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5\mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.	61
2.21	Profil d'évolution de largeur du faisceau, dans un réseau de $N_L = 6$ lentilles, régulièrement espacées, pour différents paramètres de faisceau w_{0i} et σ_i , mentionnés sur chaque graphe. Le waist accordé est de $4.5\mu\text{m}$, et la distance d'accord $\sigma_{i_{\text{accord}}} = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.	62
2.22	Paramètres du faisceau au cours de sa propagation, dans un réseau de 5 lentilles, dont l'espacement entre ces dernières est défini à partir du rapport $K/N = 1/5$. Le waist accordé est de $3.5\mu\text{m}$, et la distance $\sigma_{i_{\text{accord}}} = -101\mu\text{m}$ (soit $\sigma_{i_{\text{accord}}} + f = 239\mu\text{m}$). Le profil est établi pour les deux modèles. Les divers tracés correspondent à différents waist d'entrée ω_{0i} ($\omega_{0M} = \omega_{0_{\text{accord}}}$).	63
2.23	Paramètres du faisceau au cours de sa propagation, dans un réseau de 5 lentilles, dont l'espacement entre ces dernières est défini à partir du rapport $K/N = 1/5$. Les divers tracés correspondent à différentes distances σ_i "laser-foyer objet 1ère lentille" ($\sigma_{iM} = \sigma_{\text{accord}}$).	64
2.24	Analogie entre une cavité d'Herriott désaxée et dépliée et un réseau de lentilles équidistantes. On observe bien une périodicité, acquise par le faisceau, supérieure à celle du réseau. Pour la cavité, on observe un faisceau réentrant à l'ordre 5, alors que sur le réseau, la périodicité du champ n'est égal qu'à deux fois celle du réseau, par soucis de clarté.	65
2.25	Profil d'évolution de largeur du faisceau, dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Chacun des graphes correspond à une valeur de K différente, soit, à diverses distances entre lentilles. Leurs positions, dans le réseau, sont représentées par des marqueurs cruciformes rouges pour le modèle gaussien et des carrés noirs pour Huygens-Fresnel. Quant au profil, il est représenté par des lignes continues bleues pour Gauss et traits discontinus rouges pour Huygens-Fresnel.	66
2.26	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de plusieurs lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Chacun des graphes correspond à des valeurs de N variables, soit, à diverses distances entre lentilles. Leurs positions, dans le réseau, sont représentées par des marqueurs cruciformes rouges pour le modèle gaussien et des carrés noirs pour Huygens-Fresnel. Quant au profil, il est représenté par des lignes continues bleues pour Gauss et traits discontinus rouges pour Huygens-Fresnel.	67
2.27	Représentation d'un réseau de N_L lentilles, dont la maille élémentaire est composée de 3 lentilles espacées successivement de $2d$, $1d$ puis $2d$, pour une valeur de d arbitraire.	68
2.28	Variation de d en fonction du module de Λ_+ , avec $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$	69
2.29	Variation de d en fonction de l'argument de Λ_+ , avec $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$	69
2.30	Profil d'évolution de l'espacement entre billes, dans un réseau comportant un schéma périodique de trois billes, en fonction du déphasage acquis par le faisceau sur une période. Les espacements sont définis tels que $d_1 = 2d$, $d_2 = d$ et $d_3 = 2d$	70
2.31	Profil d'évolution de l'espacement entre billes, dans un réseau comportant un schéma périodique de trois billes, en fonction du cosinus de l'angle de déphasage acquis par le faisceau sur une période. Les espacements sont définis tels que $d_1 = 2d$, $d_2 = d$ et $d_3 = 2d$	70
2.32	Représentation du waist caractéristique du mode propre, dans un réseau défini par une maille élémentaire de 3 lentilles dont les espacements sont $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$	71
2.33	Représentation de la distance "waist-foyer objet" caractéristique du mode propre, dans un réseau défini par une maille élémentaire de 3 lentilles dont les espacements sont $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$	71
2.34	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 7$ lentilles, avec $d_1 = 2d$, $d_2 = d$, $d_3 = 2d$ et $d = n_m f$ et $ \Lambda = 1$. Le waist d'entrée est de $4\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 63\mu\text{m}$	72

2.35	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, avec $d_1 = 2d$, $d_2 = d$, $d_3 = 2d$ et $d = 2n_m f$ et $ \Lambda < 1$. Le waist d'entrée est de $4\mu m$ et $\sigma_i = 63\mu m$	72
2.36	Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5\mu m$ et $\sigma_i = 0\mu m$	73
2.37	Profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5\mu m$ et $\sigma_i = 0\mu m$	73
2.38	Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5\mu m$ et $\sigma_i = 0\mu m$. Ici nous avons ôté la contribution du fondamental.	73
2.39	Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$	74
2.40	Profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$	74
2.41	Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$. Ici nous avons ôté la contribution du fondamental.	74
2.42	Coupe du profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $4.5\mu m$, et $\sigma_i = 0\mu m$	75
2.43	Profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $4.5\mu m$, et $\sigma_i = 0\mu m$	75
2.44	Coupe du profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $13.5\mu m$, et $\sigma_i = 0\mu m$	76
2.45	Profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $13.5\mu m$, et $\sigma_i = 0\mu m$	76
2.46	Représentations des réseaux direct et réciproque dans le cas d'une maille 2D carrée (a), et triangulaire (b). Les surfaces encadrées correspondent aux premières zones de Brillouin (1 ^{ère} ZB) respectives.	79
2.47	Évolution de la largeur de gap en fonction de l'augmentation de la différence entre les distances d_1 et d_2 . Ici, nous avons fixé $d_1 = d$ et avons fait varier la valeur de d_2	80
2.48	Équivalence entre un cristal photonique 1D, de type miroir de Bragg, composé par l'alternance périodique (de période a) de couches planes diélectriques, d'épaisseurs d_1 et d_2 , et de permittivités respectives ϵ_1 et $\epsilon_2 < \epsilon_1$, avec un réseau de lentilles minces dont la maille élémentaire, de longueur a , est composée de deux lentilles espacées de d_1 et d_2	81
2.49	Profil d'évolution de l'espacement entre lentilles, dans un réseau comportant un schéma périodique de deux lentilles, en fonction du déphasage acquis par le faisceau sur une maille élémentaire. Les espacements sont définis tels que $d_1 = d$ et $d_2 = 1.1d$. Nous avons tracé les deux valeurs de d , d_{inf} et d_{sup} , correspondant à un même θ	82
2.50	Profil d'évolution de l'intensité du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, soit deux mailles élémentaires, avec $d_2 = 1.1d_1 = 1.1d$ et $d = 1.718n_m f$. Le waist d'entrée est de $3.6\mu m$, et sa position par rapport au foyer objet de la première lentille de $-6.9\mu m$. La position des lentilles est repérée par des croix vertes pour le modèle de Gauss et des carrés noirs pour celui de Huygens-Fresnel.	82
2.51	Profil d'évolution de l'intensité du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles avec $d_2 = 1.1d_1 = 1.1d$ et $d = 2.1n_m f$. Le waist d'entrée est de $6\mu m$ et sa position par rapport à la première lentille de $19\mu m$. La position des lentilles est repérée par des croix vertes pour le modèle de Gauss et des carrés noirs pour celui de Huygens-Fresnel.	82
2.52	Représentation de l'inclusion d'un défaut lacunaire par l'omission d'une bille dans le réseau périodique initial. À cela se rajoute une évolution de la largeur de la lacune, impliquant une translation du sous-réseau situé au-delà de cette dernière.	83

2.53	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 12$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts inclus dans le réseau. Les graphes (a), (b) et (c) correspondent à une situation initiale en mode de Bloch (avec $d = 2n_{mf}$), dont les défauts valent, respectivement, n_{mf} , $3n_{mf}$ et $4n_{mf}$. Les graphes (d), (e) et (f) correspondent, quant à eux, à une situation initiale désaccordée (avec $d = 3n_{mf}$), où les défauts valent respectivement n_{mf} , $2n_{mf}$ et $4n_{mf}$. Chaque tracé a été effectué suivant les deux modèles. L'évolution en traits discontinus rouges, entre chaque position de billes repérée par un carré noir, correspond au modèle de Huygens-Fresnel. Et celle en traits continus bleus, entre chaque position de billes repérée par une croix verte, correspond au modèle de Gauss.	84
2.54	Schématisation de la transformation du paramètre gaussien à la traversée d'un réseau périodique, auquel nous avons inclus un défaut lacunaire. Celui-ci fut simulé par l'omission d'une bille, suivie d'une translation du sous-réseau situé au-delà du défaut.	85
2.55	Profil d'évolution du maximum d'intensité du faisceau en fonction de l'élargissement du défaut. Le réseau est composé de $N_L = 12$ lentilles, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_{mf}$	86
2.56	Profil d'évolution du minimum d'intensité du faisceau en fonction de l'élargissement du défaut. Le réseau est composé de $N_L = 12$ lentilles, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_{mf}$	86
2.57	Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées, auquel on a ajouté un défaut, entre la troisième et la quatrième lentille, de largeur $\delta = 4d$, avec $d = 2n_{mf}$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$, et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$	87
2.58	Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées, auquel on a ajouté un défaut, entre la troisième et la quatrième lentille, de largeur $\delta = 4d$, avec $d = 2n_{mf}$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$, et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$	87
2.59	Représentation de l'inclusion de plusieurs défauts lacunaires par l'omission et l'insertion (défaut interstitiel) de billes dans le réseau périodique initial.	88
2.60	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées par blocs, avec $w_{0i} = 4.2 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = -62 \mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts inclus dans un même réseau. Leur valeur est chaque fois de $2n_{mf}$ et les diverses périodicités alternent respectivement de n_{mf} à $3n_{mf}$	89
2.61	Variation de la largeur du faisceau, acquise dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées par blocs, pour différentes valeurs de défauts inclus dans un même réseau. Leur valeur est chaque fois de $2n_{mf}$ et les diverses périodicités alternent respectivement de $1.3n_{mf}$ à $2.7n_{mf}$ pour le graphe (a), de $1.6n_{mf}$ à $2.4n_{mf}$ pour le graphe (b), de $1.9n_{mf}$ à $2.1n_{mf}$ pour le graphe (c).	90
2.62	Représentation de l'inclusion d'un défaut étendu par le couplage de deux réseaux de périodes différentes ($d \neq \delta$).	91
2.63	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts récurrents inclus dans le réseau. Les graphes (a), (b) et (c) correspondent à une situation initiale accordée (avec $d = 2n_{mf}$), dont les défauts valent, respectivement, n_{mf} , $3n_{mf}$ et $4n_{mf}$. Les graphes (d), (e) et (f), correspondent, quant à eux, à une situation initiale désaccordée (avec $d = 3n_{mf}$), où les défauts valent respectivement n_{mf} , $2n_{mf}$ et $4n_{mf}$. Chaque tracé a été effectué suivant les deux modèles. L'évolution en traits discontinus rouges, entre chaque position de billes repérée par un carré noir, correspond au modèle de Huygens-Fresnel. Et celle en traits continus bleus, entre chaque position de billes repérée par une croix verte, correspond au modèle de Gauss. . . .	91
2.64	Schématisation de la transformation du paramètre gaussien à la traversée de deux réseaux couplés, définis par deux périodicités différentes.	92
2.65	Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement suivant une loi normale, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Chacun des graphes (a), (b), (c) et (d) correspond, respectivement, à un écart-type ς de 0.01, 0.1, 0.3 et 0.5. Les lignes horizontales en traits discontinus correspondent aux limites d'évolution du faisceau gaussien dans un réseau sans désordre.	94
2.66	Coupe du profil d'amplitude transverse du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le désordre aléatoire, suivant une loi normale, est défini par un écart-type $\varsigma = 0.5$	94

2.67	<i>Profil d'amplitude transverse du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le désordre aléatoire, suivant une loi normale, est défini par un écart-type $\varsigma = 0.5$.</i>	94
3.1	<i>Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par un réseau de billes.</i>	102
3.2	<i>Représentation des systèmes d'axes pour le calcul des forces optiques agissant sur la sphère, dans le cas général où le faisceau est désaxé par rapport au centre de la sphère.</i>	103
3.3	<i>Représentation d'un flux de photons par un rayon lumineux incident sur une sphère diélectrique homogène d'indice de réfraction n_b, évoluant dans un milieu d'indice n_m. Seules les parties réfléchies et transmises du rayon incident au niveau des deux premières interfaces ont été tracées.</i>	104
3.4	<i>Représentation de la quantité de mouvement $\Delta \mathbf{p}_S$ acquise par la sphère, due à la variation de quantité de mouvement du rayon lors d'une réflexion (a) ou d'une réfraction (b) à l'interface.</i>	104
3.5	<i>Représentation du point d'incidence du pinceau lumineux sur la sphère en M, dans le repère lié aux coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ).</i>	106
3.6	<i>Explicitation de l'élément de surface dS, lié au pinceau lumineux incident arrivant en M sur la sphère, en coordonnées sphériques.</i>	106
3.7	<i>Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal d'une bille par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants.</i>	108
3.8	<i>Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id}. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de waist différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Le rayon de la bille est fixé à $50 \mu\text{m}$, son indice de réfraction à $n_b = 1.4$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.</i>	109
3.9	<i>Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id}. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois longueurs d'onde différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f / \pi}$, le rayon de la bille est fixé à $50 \mu\text{m}$, son indice de réfraction à $n_b = 1.4$ et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.</i>	109
3.10	<i>Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id}. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de rayon de bille différentes. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f / \pi}$, l'indice de réfraction de la bille à $n_b = 1.4$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.</i>	110
3.11	<i>Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id}. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs d'indice de réfraction relatif différentes. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f / \pi}$, le rayon de la bille est fixé à $50 \mu\text{m}$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.</i>	110
3.12	<i>Évolution de la force totale de diffusion, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de l'indice de réfraction relatif. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de waist différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Le rayon de la bille est fixé à $50 \mu\text{m}$ et la longueur d'onde à 514.5 nm.</i>	111
3.13	<i>Profil d'évolution des largeurs des faisceaux gauche et droit dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, espacées de $\tilde{d} = 2$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le mode excité ici est un mode de Bloch.</i>	112
3.14	<i>Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 250 \mu\text{m}$.</i>	112
3.15	<i>Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 31$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1.6$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 250 \mu\text{m}$.</i>	113
3.16	<i>Évolution de la force totale de dispersion due à deux lasers contra-propageants dans un réseau de $N_L = 31$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1.6$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 250 \mu\text{m}$.</i>	113
4.1	<i>Schématisation des variations portées sur les paramètres intrinsèques au système d'étude.</i>	121

4.2	<i>Évolution temporelle des écarts de positions par rapport aux positions d'équilibre stable de 3 gouttes équidistantes sur une chaînette éclairée par deux lasers. Les waists d'entrée sont identiques et égaux à $8\mu m$, et la taille du système est fixée à $3.5mm$. Nous avons fait varier les distances σ_i afin de représenter trois situations initiales différentes où l'écart à l'équilibre est de 7%, 12% et 17%.</i>	122
4.3	<i>Profil d'intensité, à l'équilibre, des deux lasers éclairant une chaînette composée de 3 gouttes. Les waists d'entrée sont identiques et égaux à $8\mu m$, et la taille du système est fixée à $3.5mm$. Les positions initiales des gouttes sont repérées par des marqueurs triangulaires ou carrés selon l'écart à l'équilibre considéré, alors que celles finales le sont par des cercles.</i>	122
4.4	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les distances σ_i gauche et droite, et les waists sont fixés à $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$ (a), $2.5mm$ (b), et $3.5mm$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois espacements entre lasers.</i>	123
4.5	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les waists gauche et droit, et $\sigma_{i_g} = \sigma_{i_d} = 0\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$ (a), $2.5mm$ (b), et $3.5mm$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois espacements entre lasers.</i>	124
4.6	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les distances σ_i gauche et droite, et les waists sont fixés à $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8\mu m$. Les distances entre les deux lasers varient en fonction des variations de σ_i pour maintenir la période du réseau de gouttes à $f/2$ (a), f (b), et $3f/2$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois périodicités de réseau.</i>	125
4.7	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Les waists sont fixés à $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8\mu m$. Les distances entre les deux lasers varient en fonction des variations de la période du réseau de gouttes tout en maintenant les distances σ_i à $-f/2$ (a), 0 (b), et $f/2$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois distances "laser-foyer objet" σ_i.</i>	126
4.8	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. La position de la deuxième goutte a été décalée du centre du réseau. La distance entre les deux lasers est fixée à $2mm$ et les distances σ_i à 0. Quant aux waists, ils sont égaux à $8\mu m$ (a), $9\mu m$ (b), et $10\mu m$ (c).</i>	127
4.9	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. La position de la deuxième goutte a été décalée du centre du réseau. La distance entre les deux lasers est fixée à $2mm$ et les waists à $8\mu m$. Quant aux distances σ_i, elles sont égales à $-f/2$ (a), 0 (b), et $f/4$ (c).</i>	128
4.10	<i>Évolution temporelle d'une chaîne de trois gouttes espacées aléatoirement. Les waists d'entrée sont de $8\mu m$, les distances σ_i sont égales à $-f/2$, et l'espacement entre lasers à $2.5mm$.</i>	129
4.11	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 billes soumises à deux lasers contra-propageants. Le waist droit est fixé à $8\mu m$ alors que nous varions celui de gauche. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\sigma_{i_g} = \sigma_{i_d} = 0$.</i>	131
4.12	<i>Représentation de la distance entre les gouttes à l'équilibre pour un système défini par un réseau de 3 gouttes, un espacement entre lasers de $2mm$, et un waist droit fixé à $8\mu m$ alors que nous varions celui de gauche (a). Les distances σ_i sont quant à elles égales à 0. Sur le graphe (b) est représenté la différence entre les deux écarts entre gouttes.</i>	132
4.13	<i>Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 billes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous fixons la distance σ_{i_d} à 0, alors que nous varions σ_{i_g}. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8\mu m$.</i>	132
4.14	<i>Évolution temporelle des positions (a) et des positions réduites (b) de 5 billes éclairées par deux lasers horizontaux contra-propageants. Le milieu environnant est l'eau et l'indice relatif vaut 1.1. Le waist droit est fixé à $8.8\mu m$ et le gauche à $6.8\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2.8mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$.</i>	133

4.15	Évolution temporelle des positions (a) et des positions réduites (b) de 10 billes éclairées par deux lasers horizontaux contra-propageants. Le milieu environnant est l'eau et l'indice relatif vaut 1.1. Le waist droit est fixé à $8.5\mu m$ et le gauche à $6.7\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $5.7mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$	133
4.16	Évolution temporelle des positions de 3 billes éclairées par deux lasers. Le waist droit est fixé à $8\mu m$ alors que nous varions le gauche. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$	134
4.17	Évolution temporelle des positions réduites ($q_{red}(t) = q(t) - q_{ini}$, où q_{ini} correspond aux positions initiales respectives des billes) de 3 billes éclairées par deux lasers. Le waist droit est fixé à $8\mu m$ alors que nous fixons le gauche à $7\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$	135
4.18	Portrait de phase de 3 billes éclairées par deux lasers. Le waist droit est fixé à $8\mu m$ alors que nous varions le gauche. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$. Le point initial est représenté par un triangle vert dont le sommet est vers le haut, alors que le final est représenté par un triangle rouge dont le sommet est vers le bas.	136
4.19	Évolution temporelle du profil de champ du laser gauche au niveau de chacune des trois gouttes de la chaîne. Le waist droit est fixé à $8\mu m$ alors que le gauche l'est à $6.7\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$, et $\sigma_i = 0\mu m$	137
4.20	Modèle de contact dynamique de billes dures diélectriques. Suivant l'option (a) il se produit une répulsion, après contact, sans déformation. Suivant l'option (b) il se produit un doublet par attraction/collage.	138
4.21	Modèle de contact dynamique de gouttes sphériques. L'évolution après contact résulte en une goutte plus grosse que les deux protagonistes ayant coalescées.	139
4.22	<i>Évolutions temporelles des positions de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\mu m$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $0\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$.</i>	141
4.23	<i>Portraits de phase de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\mu m$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $0\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$. Le point final relatif à la dernière bille est représenté par un triangle rouge orienté vers le bas.</i>	141
4.24	Évolutions temporelles des positions de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $8\mu m$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $262\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$	142
4.25	Portraits de phase de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $8\mu m$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $262.5\mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2mm$. Les points finaux relatifs à chacune des deux dernières billes sont représentés par deux triangles rouges orientés vers le bas.	142
4.26	Évolutions temporelles des positions de 5 (a) et 10 (b) gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\mu m$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i fixées à 0. Les distances entre les deux lasers sont respectivement de $3.5mm$ et $5.5mm$	143

Liste des tableaux

1	Principaux domaines d'approximations liés à l'étude de la diffraction.	16
4.1	Nature des équilibres définie à partir de la matrice jacobienne du système.	120
4.2	Écart maximal de la position initiale de la goutte centrale par rapport à sa position d'équilibre stable, selon 3 espacements entre lasers différents, et 6 couples de paramètres (ω_0, σ_i)	129
4.3	Probabilité moyenne, établie sur 20 simulations, de maintenir un état d'équilibre stable dans une chaîne de gouttes réparties initialement de façon aléatoire	130

Constantes et variables

$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$: célérité de la lumière dans le vide

$h \simeq 6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$: constante de *Planck*

$\hbar = h/2\pi \simeq 1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s}$: constante de *Planck* réduite ou *quantum d'action*

$k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$: constante de *Boltzmann*

$\epsilon_0 \simeq 8.85419 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$: permittivité diélectrique du vide

$\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$: perméabilité magnétique du vide

ϵ : permittivité diélectrique d'un milieu/matériau

μ : perméabilité magnétique d'un milieu/matériau

n_b : indice de réfraction des billes/gouttes

n_m : indice de réfraction du milieu environnant

$n = n_b/n_m$: indice de réfraction relatif

ρ : rayon des lentilles boules/billes/gouttes

$\alpha = 2\pi\rho/\lambda$: paramètre de taille

f : focale des lentilles boules/gouttes

V : vergence des lentilles boules/gouttes

m_b : masse des billes/gouttes

N_L , N_{maille} : respectivement nombre total de gouttes dans le réseau et nombre de gouttes sur une maille élémentaire

L_i : i -ème lentille/goutte

d : espacement entre les lentilles/gouttes

λ_0 , $\lambda = \lambda_0/n_m$: respectivement la longueur d'onde des lasers dans le vide et dans un milieu d'indice n_m

$k = 2\pi/\lambda$: nombre d'onde

E_{ph} : énergie d'un photon

ϕ_{ph} : flux de photons moyen

Φ_p : flux de quantité de mouvement lié au faisceau

Φ_E : flux d'énergie associé au faisceau

P_0 , Φ_0 : respectivement puissance et flux incidents des lasers

L_{res} : espacement entre les lasers

ω_0 : largeur de faisceau minimale appelée *col* (en français) ou *waist* (en anglais)

$\omega(z)$: largeur de faisceau à $1/e$ sur le profil transverse de champ

$R_C(z)$: rayon de courbure réel du front d'onde

$z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$: distance de *Rayleigh*

σ : distance *waist-foyer objet* des lentilles/gouttes

$\Delta\Phi$: déphasage complexe total d'une onde lumineuse

θ : phase de *Gouy*

$\underline{q}$: rayon de courbure complexe du faisceau

Γ : demi-angle de divergence du faisceau gaussien

r , ϕ : coordonnées radiale et angulaire

$\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_{boule}$, $\mathbf{T}_{prop}$: respectivement matrices de transfert totale, liée à une lentille boule, et de propagation libre

β : demi-trace de la matrice de transfert $\mathbf{M}$

δ_{lm} : symbole de *Kronecker*

$H_n(x)$, $L_l^m(x)$, $J_\alpha(z)$: respectivement polynômes d'*Hermite*, de *Laguerre*, et fonction de *Bessel* de première espèce

F_{opt} , F_{Lang} , F_f : respectivement forces optique, de *Langevin*, et de frottements fluides

$\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$: champs électrique et magnétique

$\vec{J}(\vec{r}, t)$, $\vec{\rho}(\vec{r}, t)$, $\vec{D}(\vec{r}, t)$: respectivement courant électrique, charge électrique totale, et excitation électrique

$\vec{\epsilon}(\vec{r}, t)$: vecteur polarisation

$\underline{u}(\vec{r})$: amplitude complexe du champ électrique

Introduction générale

État de l'art et mise en contexte de l'étude

L'étude des phénomènes lumineux a de tout temps passionné l'Homme. Toutefois, nous ne remonterons pas aux origines des premières réflexions de pensées et expériences menées par les "Anciens", qui, durant l'Antiquité, ont principalement cherché à définir et à comprendre les mécanismes de la vision, plutôt que la nature même de la *Lumière*. L'*Optique*, au sens moderne où nous l'entendons, prend son véritable essor à l'aube du *XVII^e siècle*, ouvrant alors la voie à une future conception duale plus contemporaine. Ainsi, au gré de diverses réflexions philosophiques et scientifiques, deux théories, qui se sont pourtant avérées complémentaires, s'opposèrent des siècles durant. Une opposition farouche, sur fond d'idéaux politico-religieux, vint alors mettre aux prises deux écoles de pensées. L'une, défendue essentiellement par *C. Huygens*, reprenant les idées de *R. Descartes*, est basée sur une approche ondulatoire de la lumière. L'autre, défendue quant à elle par *I. Newton*, la présente comme un flot de particules.

C'est en marge, mais au fait, de ce débat naissant que *J. Kepler* entreprit, notamment, l'observation et l'interprétation de nombreux phénomènes au cœur d'une étude astronomique de grande ampleur. Parmi ses conclusions, il sera l'un des premiers à apporter une explication au comportement spécifique de la queue des comètes, dans une direction opposée à la position du Soleil, comme étant l'effet d'une action mécanique du rayonnement solaire sur les composants de cette dernière.

Bien que l'existence d'une force de radiation, induite par une onde lumineuse, fut introduite dès *1873* par *J. C. Maxwell* dans son traité sur l'*Électromagnétisme*, la recherche d'une démonstration expérimentale, entreprise par bon nombre de physiciens ³, ne sera mise en évidence qu'au début du *XX^e siècle*, par *P. N. Lebedev* sur des particules macroscopiques [2], puis *E. F. Nichols* et *G. F. Hull* sur des gaz [3,4].

Toutefois, dû à une intensité négligeable face aux autres forces en jeu (gravitationnelle, radiométrique, etc.), l'exploitation de cette force de pression de radiation lumineuse tomba en désuétude jusque dans les années soixante, et l'invention du *laser*. Caractérisée essentiellement par une grande cohérence spatiale et temporelle, cette avancée technologique allait permettre, grâce aux intensités lumineuses alors accessibles, de relancer l'engouement autour de ce phénomène électromagnétique.

C'est dans ce contexte qu'*Arthur Ashkin* proposa les premières expériences visant à exploiter directement les forces dues à la pression de radiation d'un faisceau lumineux, en accélérant et piégeant un ensemble de microparticules (figure 1).

³Sans prétendre en dresser une liste exhaustive, nous pouvons citer principalement les expériences précurseuses de *De Mairan* et *Du Fay* en *1754*, ou encore *Fresnel* en *1825*, qui furent cependant limités par la présence de courants de convection dans l'air ambiant. Quelques décennies après, *Crookes* pensera enfin démontrer cet effet en s'affranchissant du précédent problème en se plaçant dans le vide [1]. Toutefois, la présence de gaz résiduels impliquera un mouvement fluide dû à l'agitation thermique des particules, et permettra ainsi la découverte, non pas des forces de pression de radiation lumineuse, mais des forces radiométriques.

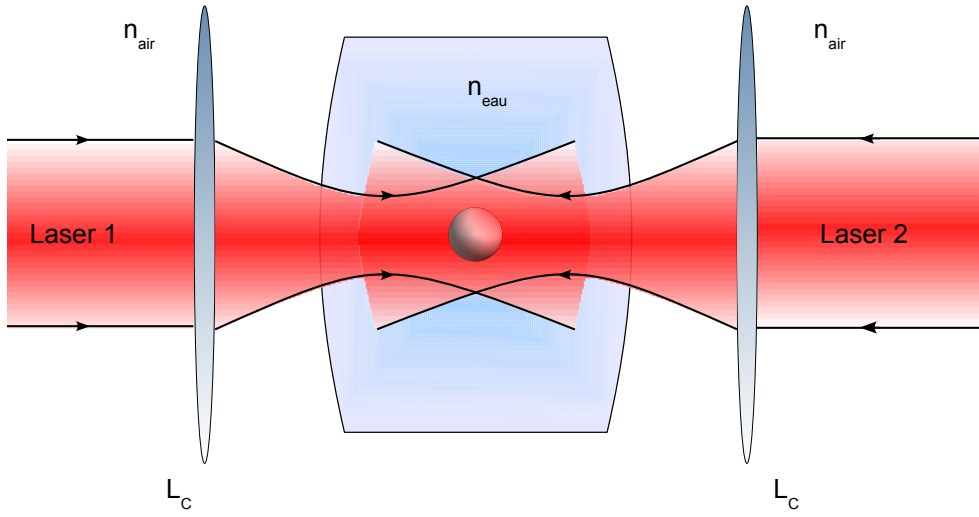


FIGURE 1 – Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par deux lentilles convergentes. Ashkin utilisait un montage équivalent pour manipuler, notamment, des billes micrométriques de latex et de polystyrène ($n_b = 1.58$) dans une cuve d'eau ($n_m = 1.33$), par le biais de laser argon, de mode TEM_{00} , à une longueur d'onde de 514.5 nm.

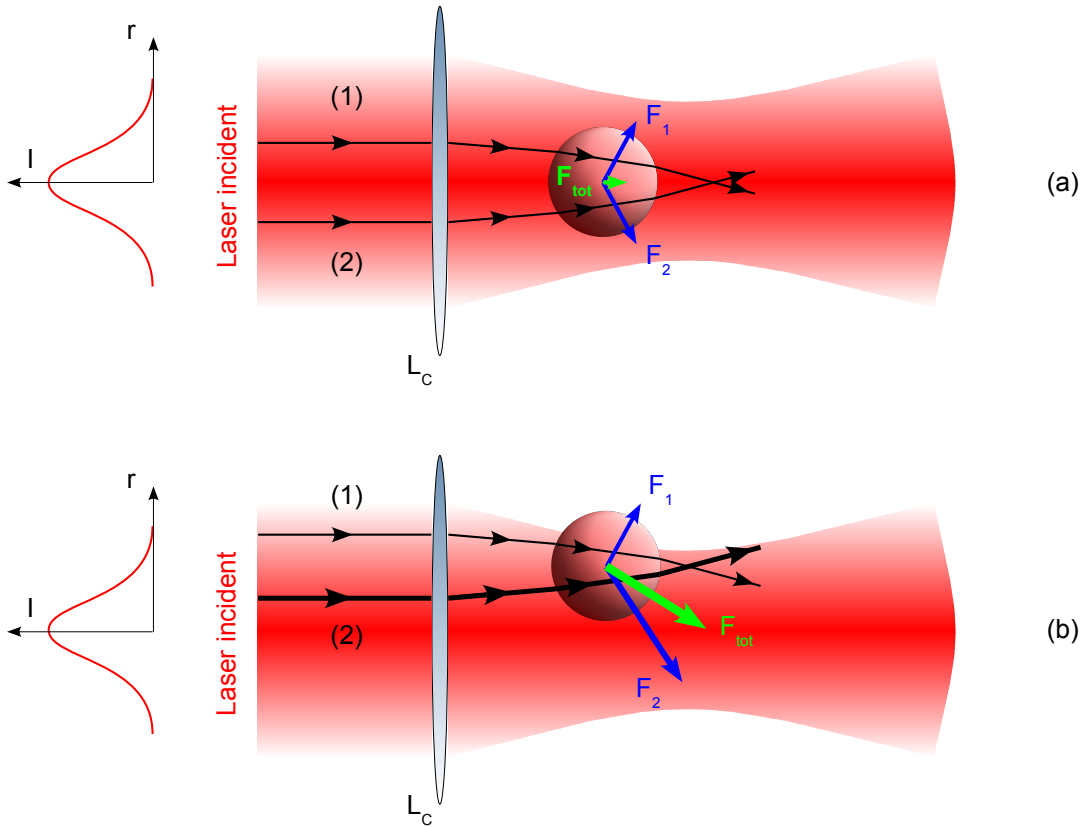


FIGURE 2 – Vue d'ensemble schématique des forces agissant sur une particule diélectrique près du foyer d'un faisceau piégeant, de profil gaussien. Sur le schéma (a), la particule se trouve sur l'axe du faisceau et est poussée dans le sens de propagation du faisceau, vers le point focal. Cette force résultante correspond à la force de diffusion. Sur la figure (b), en revanche, la particule est désaxée par rapport à l'axe du faisceau. La distribution d'intensité venant frapper la bille n'est plus répartie de façon symétrique sur sa surface, elle se retrouve donc soumise à un gradient d'intensité. Deux rayons quelconques ont été tracés, dont l'épaisseur est directement proportionnelle à l'intensité lumineuse. Nous voyons clairement que la force de gradient résultante pousse la particule vers la zone de forte intensité, au centre du faisceau ⁴.

Le piégeage optique se présente maintenant, depuis quelques décennies, comme une thématique majeure à l'intersection de diverses disciplines [5]. Les premiers résultats d'*Ashkin* ont permis de démontrer que les forces optiques pouvaient permettre le déplacement et la lévitation de particules diélectriques micrométriques, à la fois dans l'air et dans l'eau [6]. Il développa également un piège optique tri-dimensionnel stable, basé sur l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants [7]. Cela l'amena, *16 ans* plus tard, à réussir le piégeage de particules utilisant un seul faisceau laser fortement focalisé [8]. Cette expérience lui permit de mettre en évidence l'existence d'une force autre que celle de diffusion, caractérisée par la variation transverse de la distribution d'intensité dans un profil de faisceau de type gaussien, et fut naturellement appelée *force de gradient* (figure 2). Ainsi, les premières "*pincettes optiques*" étaient nées [9].

De nombreuses applications ont pu suivre de ces premiers résultats. Il y eu, en particulier, les expériences menées par *Ashkin* et *Chu* démontrant qu'il était possible de manipuler optiquement des objets aussi petits que des atomes ou des molécules [10]. Cela s'est avéré réalisable dû aux grandes sections efficaces d'absorption présentes au voisinage de résonances atomiques spécifiques, entraînant ainsi la possibilité d'atteindre une pression de radiation assez conséquente pour permettre le piégeage optique. Ces études, réalisées sur des atomes, menèrent, entre autre, au Prix Nobel de Physique en *1997*, attribué conjointement à *C. Cohen-Tannoudji*, *S. Chu* et *W. Phillips* pour leurs développements des méthodes permettant de ralentir, et donc refroidir, des atomes. Ils ont ainsi pu abaisser la température d'un gaz d'atomes en le plaçant à l'intersection des branches d'un montage formé par six faisceaux lasers, permettant le confinement dans les trois directions spatiales ⁵.

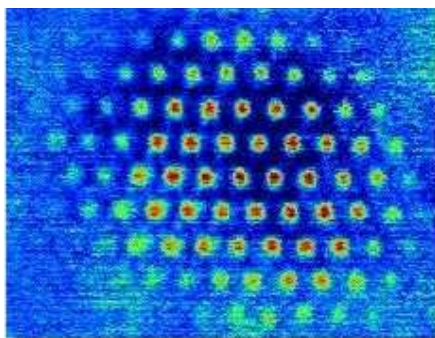


FIGURE 3 – Atomes de césium ultrafroids, piégés dans un réseau lumineux créé par une combinaison de plusieurs faisceaux lasers interférant au centre du piège optique (image issue de [11]).

Ces travaux furent rapidement suivis et étendus dans le domaine de la *biophysique*. En effet, dès *1987*, *Ashkin* et *Dziedzic* démontrèrent qu'il était possible de piéger et manipuler des cellules, des bactéries vivantes et autres virus [12, 13]. Toutefois, un nouveau paramètre entre en compte lors de telles manipulations : leur "viabilité". Il se trouva que les premières expériences menèrent à une trop grande dégradation des cellules. Les longueurs d'onde utilisées (laser *argon* ionisé à 514.5 nm) étaient telles que les dommages apparaissaient irrémédiables. Ils choisirent alors d'utiliser une source infrarouge à $\lambda = 1\text{ }\mu\text{m}$ pour minimiser l'effet ⁶. Des applications plus récentes ont également vues le jour pour la mesure des forces exercées par des moteurs moléculaires comme les *myosine* ⁷ ou *kinésine* ⁸ [14–16]. Mais encore, sur l'étude des propriétés mécaniques d'un simple brin d'ADN étiré de tout son long par le biais de billes attachées à ses extrémités (figure 4) [17].

⁴Signalons toutefois que ce déplacement vers le centre du faisceau est dû au fait que l'indice de réfraction de la particule est supposé ici supérieur à celui du milieu environnant. Dans le cas inverse, l'objet diffusant aurait été expulsé hors du faisceau.

⁵Ces atomes froids ont pu non seulement être piégés, mais surtout maintenus dans un état confiné, en ajoutant par exemple un champ magnétique inhomogène, sur des temps assez longs pour permettre d'effectuer des mesures assez précises. Ils ont ainsi permis de tester la physique quantique et la relativité de façon spectaculaire, et ont amené des progrès prodigieux en physique fondamentale comme en métrologie. Nous pouvons citer comme exemples l'amélioration des horloges atomiques permettant de tester la relativité générale, l'amélioration des interféromètres atomiques pour la mesure des forces de gravité ou d'accélération, mais encore les évolutions traitant de l'information quantique et de l'ordinateur quantique.

⁶Notons toutefois que dans certaines situations, leur caractère invasif apparaît d'un grand intérêt pour effectuer, par exemple, des découps membranaires, de tissus biologiques, etc.

⁷La *myosine* est une protéine jouant un rôle fondamental dans les mécanismes liés à la contraction musculaire.

⁸La *kinésine* est une protéine jouant un rôle dans la division cellulaire et le déplacement des organites et vésicules dans les cellules.

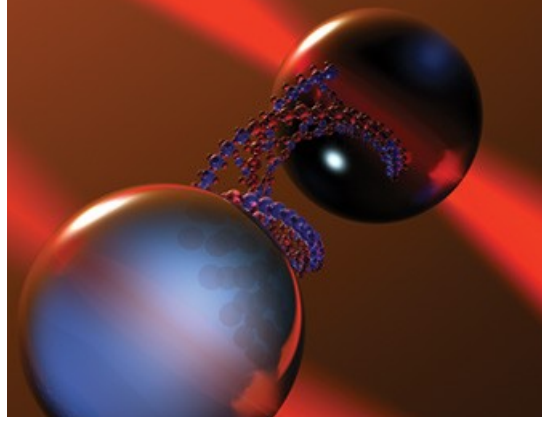


FIGURE 4 – Étirement d'un brin d'ADN, attaché de part et d'autre à des billes de latex, par l'emploi de pinces optiques (image issue de [18]).

Depuis ces recherches précurseuses, notamment de *Chu*, *Ashkin* et *Cohen-Tannoudji*, toute une communauté s'intéresse à l'évolution dynamique de systèmes déformables (cristaux liquides, billes microscopiques en suspension), soumis à des forces optiques. Celles-ci permettent l'échange d'impulsions (comme par exemple dans le cas du refroidissement d'atomes), ou de moments cinétiques (création de vortex dans des cristaux liquides) avec la matière [19, 20].

En effet, *E. Brasselet et al.* ont démontré qu'il était possible de créer un *vortex* optique⁹ à partir d'un faisceau laser gaussien focalisé et polarisé circulairement, et une goutte de cristal liquide de symétrie radiale (figure 5). Ce phénomène atypique résulte d'un couplage entre le moment angulaire de spin (associé à l'état de polarisation), et le moment angulaire orbital (associé à la distribution spatiale de la phase) porté par la lumière : on parle de couplage *spin-orbite* optique. Toutefois, l'interaction même du faisceau lumineux avec le cristal liquide pourra induire, à partir d'une intensité lumineuse suffisante, une réorientation de ce dernier, mettant ainsi en évidence un comportement non linéaire du couplage¹⁰. Soulignons cependant que le cristal liquide ne présentera pas de transition de phase (aucune réorientation) dans la limite des faibles intensités lumineuses, autrement dit, en régime linéaire.

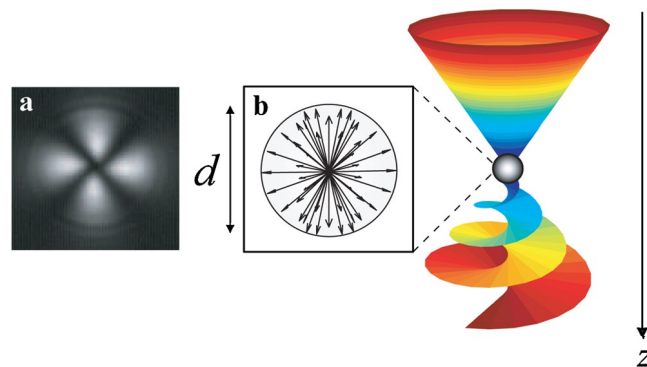


FIGURE 5 – À droite : illustration de la génération d'un vortex optique à l'aide d'une goutte de cristal liquide dite "radiale" à travers laquelle passe un faisceau laser gaussien focalisé et polarisé circulairement. Le front d'onde devient spiralé (vortex) suite à un couplage entre la polarisation de l'onde incidente et les propriétés de biréfringence de la goutte. À gauche : image entre polariseurs croisés de la goutte de cristal liquide (a), et représentation de l'ordre moléculaire 3D radial à l'intérieur de la goutte (b) (image issue de [20]).

⁹Les physiciens arrivent à fabriquer de tels faisceaux depuis les années 1990. Leur structure est analogue à celle d'un tourbillon, et présente un écoulement de l'énergie sous forme de spirale, autour de la direction de propagation. Cette propriété particulière leur permet de conférer un mouvement rotatoire à des objets de taille microscopique.

¹⁰Ces transitions de phases induites, dans des systèmes présentant un grand nombre de degrés de libertés (beaucoup de particules), ont permis d'établir des liens étroits avec la communauté de la physique statistique [21].

Ainsi, les systèmes de billes, cellules, gouttes voire même d'atomes, mis en cavité, et globalement couplés par un champ optique, ont été étudiés dans les années 2000. Cela a notamment donné naissance au concept de refroidissement en cavité par la lumière [22–28]. Du point de vue fondamental, des liens ont alors été tissés entre des modèles typiques de systèmes globalement couplés (modèle de *Kuramoto*), et des systèmes optiques [29].

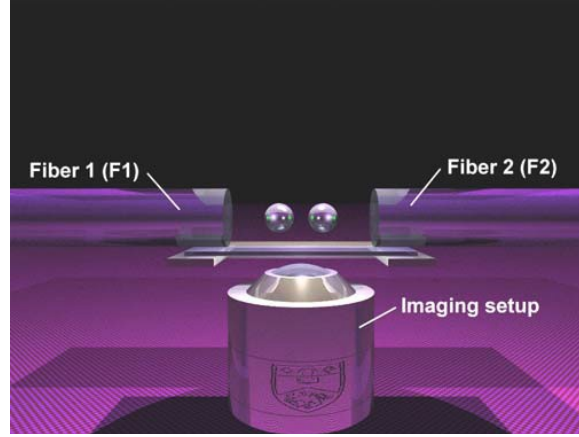


FIGURE 6 – Vue latérale d'un piège optique par deux faisceaux issus de fibres optiques placées en opposition (image issue de [30]).

Ces études ont tout naturellement mené, notamment dû à la taille des pièges conséquente devant les dimensions des objets piégés, vers l'étude non plus d'une seule particule, mais un ensemble de plusieurs objets, de tailles diverses, soumis aux forces optiques.

Depuis les années 1970, et les travaux initiés par *Ashkin*, il est bien connu que le mouvement de petites particules diélectriques peut être contrôlé par l'utilisation de faisceaux lasers dont le potentiel optique résultant est prédominant devant l'agitation thermique du milieu. La pression de radiation, générée par ces derniers sur les particules, induira ainsi une force de diffusion dans le sens de propagation des faisceaux, et une force de gradient suivant le gradient d'intensité du champ. Toutefois, lorsque plusieurs particules se retrouvent piégées dans un même potentiel optique, une nouvelle force de liaison vient s'ajouter aux deux précédentes, participant ainsi à la dynamique du système.

Ce phénomène est défini sous le terme d'*optical binding*, et décrit les interactions, longitudinales et latérales, entre un ensemble de microparticules piégées par un ou plusieurs faisceaux lasers (figure 6). En effet, chacune des particules va induire une modification locale de la densité d'énergie lumineuse due à l'interaction entre le champ incident et le champ diffusé par ces dernières. Les particules les plus proches pourront donc être sensibles à cette variation des potentiels optiques, et permettre l'apparition d'un effet collectif. Cela nous amène à mettre en évidence un couplage entre le champ optique et les éléments diffusifs, entraînant alors un processus d'auto-organisation du système (figure 7).

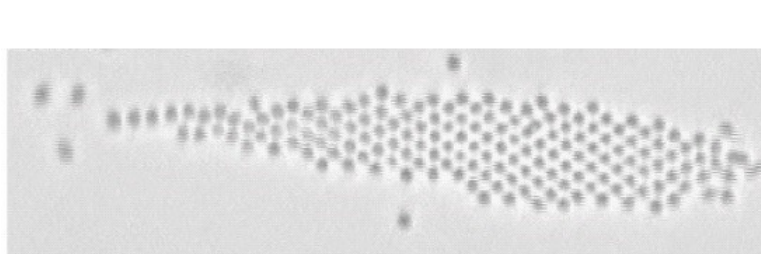


FIGURE 7 – Structure pseudo-hexagonale de particules serrées de taille 460nm (image issue de [31]).

Ce phénomène remarquable implique une grande variété de comportement non linéaires, statiques et dynamiques, tels que la formation de chaînes à deux particules et plus [32–36], des bistabilités [37], ou encore des déplacements de particules périodiques [38, 39].

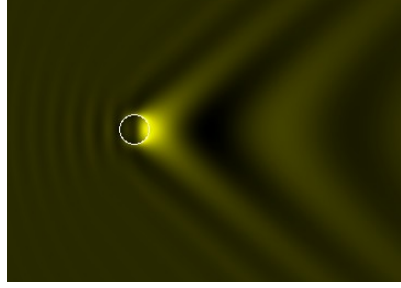


FIGURE 8 – Simulation du champ électrique autour d'une particule soumise à un champ évanescent. Nous apercevons les franges d'interférence créées entre le champ diffusé par la particule et celui évanescent du faisceau laser (image issue de [36]).

Les études qui ont été menées ont essentiellement porté sur le piégeage longitudinal et transversal par des faisceaux contra-propageants de type *gaussien* [40, 41], de *Bessel* [42], ou par des ondes évanescentes [31], dont les milieux fluides environnants sont principalement l'eau ou l'air [43]. Cette diversité fut amenée par les limites que peuvent présenter les faisceaux gaussiens suivant certaines approches, comme nous pourrons le voir dans la suite de ce manuscrit. Ainsi, de très bons accords ont pu être trouvés entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques, notamment développées à partir de théories électromagnétiques telles que la *Théorie de Lorentz-Mie Généralisée (GLMT)*, ou encore la *Technique Multipôle Généralisée (GMT)* prenant en compte les interactions hydrodynamiques entre particules [38].

Généralement, l'étude de telles interactions, sur une [44] ou plusieurs particules [45], est effectuée sur des systèmes diphasiques, appelés systèmes *colloïdaux*¹¹ [33, 46–48]. Les dimensions mises en jeu dans de tels systèmes nous permettent d'introduire la notion de *microfluidique*, qui se présente comme une discipline récente pouvant être définie, d'une façon très simple, comme celle relevant de la manipulation et du contrôle des fluides aux échelles submillimétriques (typiquement de quelques micromètres à plusieurs centaines de micromètres) [49]. Ces ouvertures d'applications directes dans les sciences biologiques lui ont permis un essor considérable depuis les années 1990. C'est justement dans ce contexte que s'est développé l'*optofluidique*, dont le domaine se trouve à l'intersection entre la microfluidique et les avancées technologiques en optique. De nombreuses études ont ainsi permis de réaliser des guides d'ondes fluidiques aux propriétés ajustables [50], des cristaux photoniques [51], ou encore des lentilles fluides [52–55].

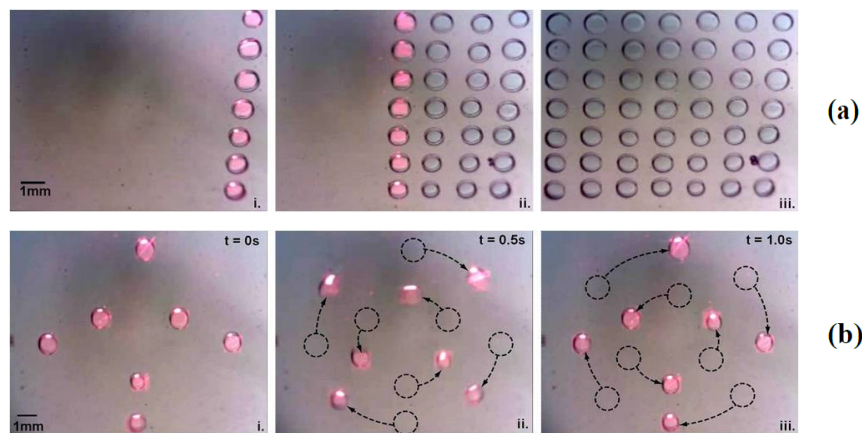


FIGURE 9 – Manipulation par pinces optiques de gouttes micrométriques sur une surface photosensible. Sur la figure (a), les gouttes sont piégées par colonnes de 7 et transportées dans un réseau final 7×7 . Sur la figure (b), 7 gouttes sont piégées et manipulées parallèlement, de telle façon que les 4 extérieures tournent circulairement dans le sens des aiguilles d'une montre, alors que les 3 intérieures tournent dans le sens inverse (images issues de [56]).

¹¹L'utilisation du terme "colloïde" fut employé pour la première fois par *Thomas Graham* en 1861 afin de définir une classe de matériaux ne pouvant diffuser au travers d'une membrane. De manière générale, nous pouvons définir ce terme comme une appellation communément admise pour décrire un système dont au moins l'une des dimensions est comprise sur une échelle s'étendant de quelques nanomètres à quelques micromètres.

Ainsi, en 2006, *G. M. Whitesides et al.* ont démontré qu'il était possible de créer un réseau de diffraction à partir d'un auto-assemblage de bulles, dynamique contrôlable. En effet, en variant la pression et le débit appliqués aux entrées des canaux permettant la génération des bulles, ils ont pu modifier à souhait la période du réseau sur des temps relativement courts (quelques secondes), et de façon très stable (figure 10) [57].

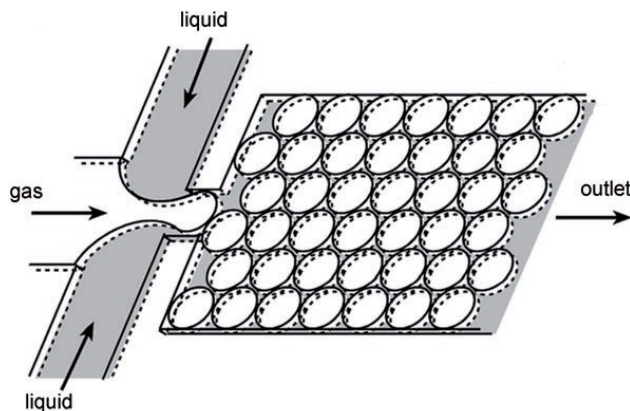


FIGURE 10 – Réseau bidimensionnel de microbulles auto-organisées (image issue de [57]).

Outre la production collective de structures microstructurées, il sera également possible d'implémenter des fonctionnalités optiques reconfigurables, par le contrôle des propriétés optiques du liquide utilisé dans la génération des microparticules de tailles ajustables. Une application actuelle est la création de lentilles fluides, dont les paramètres optiques, tels que la distance focale, sont maîtrisables. Ainsi, contrairement aux situations traditionnelles, les ajustements voulus sur cette dernière pourront être réalisés en changeant la forme de la lentille (par variation de la pression fluide, ou encore en appliquant un champ électrique), sans déplacement quelconque mécanique (figure 11) [52–55, 58].

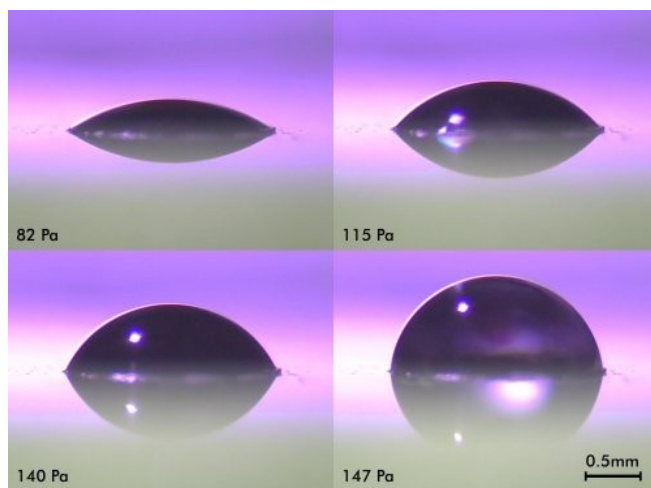


FIGURE 11 – Observation des variations du rayon de courbure d'une bulle d'eau, dues à l'augmentation de la pression de fluide. Il apparaît ainsi une lentille fluide eau-air plan-convexe, de 2 mm de diamètre (image issue de [58]).

Nous pouvons citer comme applications, l'amélioration de la qualité des images pour les appareils photos (plus grande maîtrise de l'ajustement de la focale), combinés ou non dans des téléphones portables, les web cams. De plus, il peut se déduire aisément que, d'un point de vue plus médical, ces résultats auront un impact sur le contrôle et la rectification des déficiences visuelles (myopie, astigmatie, etc.).

Des résultats tout aussi fondamentaux ont également été obtenus sur les caractéristiques propres du piégeage optique par l'utilisation d'ondes évanescentes, obtenues par l'interaction d'un ou deux faisceaux lasers sur la surface d'un prisme [59], ou de guides d'ondes [60]. Dans de telles situations, les ondes de surface résultant de la propagation du champ aux interfaces, créent des potentiels optiques permettant la capture puis le déplacement, autant par traction [61] que par poussée, des billes micrométriques.

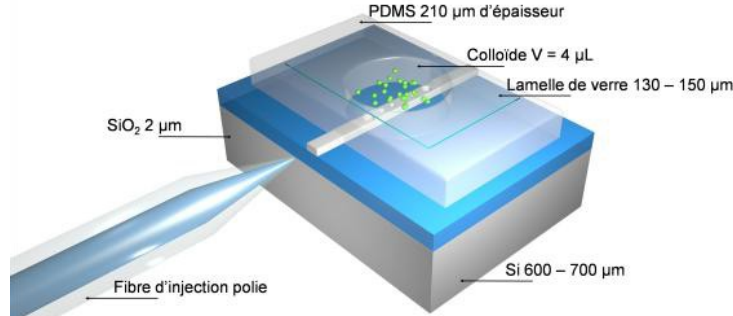


FIGURE 12 – Montage expérimental de piégeage optique sur guide d'onde dans une cellule optofluidique (image issue de [62]).

Ainsi, l'étude du couplage hydrodynamique sur un ensemble de particules piégées dans un puits de potentiel optique, et excitées par un mouvement thermique aléatoire, se présente comme un modèle intéressant dans un projet d'applications directes. En effet, ces cas d'études en milieux fluides, notamment à faible nombre de Reynolds, sont d'autant plus importants qu'ils sont omniprésents dans les secteurs médicaux, et plus généralement des biosciences [63, 64].

Nous venons de présenter modestement quelques domaines d'applications connexes au piégeage optique, intrinsèquement défini par un couplage entre le faisceau lumineux et les objets interposés sur son passage. Outre les phénomènes de réfraction et réflexion à l'interface lors de l'interaction, l'onde électromagnétique va donc être diffusée dans toutes les directions de l'espace (nous supposons les microparticules homogènes) (figure 13). La modélisation de ce processus de diffusion dans le cas d'un objet sphérique est bien connue, depuis le début du siècle dernier, sous le nom de *théorie de Mie* ¹².

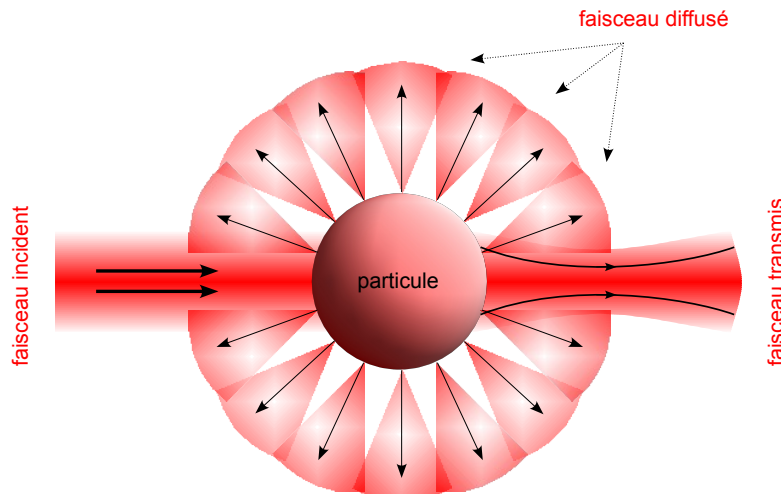


FIGURE 13 – Schématisation du phénomène de diffusion d'un faisceau laser en interaction avec une particule sphérique et homogène.

¹²Également appelée *théorie de Lorenz-Mie (TLM)*, elle a été développée par *Lorenz* dans le cadre de la théorie de l'éther, et par *Mie* dans le cadre des *équations de Maxwell*. Elle a ensuite été réécrite, entre autres, par *Stratton*, *Van de Hulst*, *Kerker*, *Bohren* et *Huffman*. Elle traite du problème de la diffusion d'une onde plane monochromatique par une sphère homogène et isotrope. L'hypothèse d'éclairement uniforme a ensuite été levée, ce qui permet de parler de la *théorie de Lorenz-Mie généralisée (TLMG)*. La *TLMG* décrit ainsi l'interaction entre un faisceau de forme arbitraire et une particule sphérique homogène.

Toutefois, le phénomène ne sera pas abordé de la même façon suivant les dimensions des objets diffusants. Ainsi, le paramètre liant le diamètre ρ des particules et la longueur d'onde, par leur rapport ρ/λ , définira dans quel domaine situer l'étude [65, 66]. Nous distinguerons ici trois principaux modèles¹³ :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{si} & \rho \ll \lambda & \Rightarrow \text{modèle de Rayleigh} \\ \text{si} & \rho \simeq \lambda & \Rightarrow \text{modèle de Mie} \\ \text{si} & \rho \gg \lambda & \Rightarrow \text{modèle de Fraunhofer} \end{array} \right. \quad (0.1)$$

Les modèles de *Rayleigh* et *Fraunhofer*, bien qu'antérieurs à celui de *Mie*, ne se distinguent de ce dernier que par un ensemble d'approximations, se présentant alors comme des cas limites du modèle de *Mie*.

Fondamentalement, lorsqu'un faisceau interagit avec de la matière, nous pouvons associer, d'un point de vue statistique, son évolution à une probabilité d'interaction entre leurs constituants élémentaires. Ainsi, par une approche essentiellement géométrique, nous pouvons définir un terme homogène à une surface fictive d'interaction, proportionnelle au facteur probabiliste. Ce terme sera appelée *section efficace*.

Toutefois, en tenant compte des considérations optiques, il est important de préciser que lorsque la lumière intercepte une particule, son intensité s'en trouve diminuée. Cela est défini par le terme d'*extinction*. Cette dernière est alors liée aux phénomènes de diffusion (comprenant la réfraction) et d'absorption de l'onde. Ainsi, nous pouvons définir la puissance d'extinction du faisceau comme la différence entre la puissance incidente P_0 et celle transmise P_{trans} :

$$P_{ext} = P_0 - P_{trans} \quad (0.2)$$

Ce que nous pouvons réécrire, en considérant les processus mis en jeu lors de l'interaction :

$$P_{ext} = P_{sca} + P_{abs} \quad (0.3)$$

où P_{sca} et P_{abs} correspondent respectivement aux puissances de diffusion et d'absorption.

Cela nous amène, en considérant l'homogénéité des équations, à une relation équivalente faisant intervenir la notion de section efficace précédente, telle que :

$$P_{ext} = C_{ext} \cdot I_0 \quad (0.4)$$

où C_{ext} est la section efficace d'extinction, et I_0 l'intensité du faisceau incident.

De la même façon, nous pouvons définir les puissances de diffusion et d'absorption comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{sca} &= C_{sca} \cdot I_0 \\ P_{abs} &= C_{abs} \cdot I_0 \end{array} \right. \quad (0.5)$$

Nous pouvons alors déduire de ces relations une nouvelle définition de la section efficace, comme étant le rapport entre la puissance de l'onde assimilée à un processus donné, et l'intensité du faisceau incident.

Ce qui nous permet d'en déduire, à partir de (0.3), la relation suivante :

$$C_{ext} = C_{sca} + C_{abs} \quad (0.6)$$

¹³Nous proposerons toutefois une étude plus détaillée dans le chapitre qui suit.

Ainsi, en nous plaçant dans le cas général du modèle de *Mie*, nous pouvons en déduire l'expression des sections efficaces [66] :

$$\begin{cases} C_{ext} &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (2p+1) \Re\{a_p + b_p\} \\ C_{sca} &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (2p+1) (|a_p|^2 + |b_p|^2) \end{cases} \quad (0.7)$$

C_{abs} se déduisant directement de (0.6) ; et nous définissons les coefficients a et b tels que [66] :

$$\begin{cases} a_p &= \frac{\zeta'_p(\beta) \zeta_p(\alpha) - n \zeta_p(\beta) \zeta'_p(\alpha)}{\zeta'_p(\beta) \Upsilon_p(\alpha) - n \zeta_p(\beta) \Upsilon'_p(\alpha)} \\ b_p &= \frac{n \zeta'_p(\beta) \zeta_p(\alpha) - \zeta_p(\beta) \zeta'_p(\alpha)}{n \zeta'_p(\beta) \Upsilon_p(\alpha) - \zeta_p(\beta) \Upsilon'_p(\alpha)} \end{cases} \quad (0.8)$$

où $n = n_b/n_m$ est l'indice de réfraction relatif, $\alpha = 2\pi\rho/\lambda$ est le paramètre dit de taille et $\beta = n\alpha$. Quant aux fonctions ζ et Υ , elles correspondent aux fonctions de *Riccati-Bessel* ¹⁴.

Toutefois, nous considérons ici le cas de grandes particules devant la longueur d'onde, ce qui nous permet de simplifier (0.7) comme ¹⁵ [66] :

$$C_{ext} = 2\pi\rho^2 \quad (0.9)$$

De plus, ces dernières sont également supposées comme non absorbantes, ainsi :

$$C_{abs} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{ext} = C_{sca} \quad (0.10)$$

Mie a ainsi, à partir des équations de *Maxwell*, développé un modèle décrivant la diffusion d'un faisceau lumineux, par une particule sphérique et homogène ¹⁶, dans un milieu non absorbant.

¹⁴Un développement plus détaillé de ce calcul est présenté, notamment, dans [66].

¹⁵Ce facteur 2 correspond au paradoxe d'extinction décrit dans la littérature [66].

¹⁶Cela est également valable pour un ensemble de particules, mais dans le cas où elles seront assez éloignées les unes des autres afin que la diffusion émise par chacune d'elles n'ait pas d'effet sur les autres, autrement dit, sans diffusion multiple.

Présentation du système et structure du manuscrit

Bien qu'initialement le piégeage optique fut caractérisé par l'emploi de billes relativement petites (de l'ordre du micromètre et en deça), et limité à un domaine particulier de la physique, il se présente aujourd'hui comme un connecteur logique à l'intersection de nombreuses disciplines.

Dans l'ensemble des résultats obtenus, l'*optical binding* s'est présenté comme l'un des plus remarquables. En effet, par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, il s'est avéré possible d'établir un couplage dynamique entre des *nano/micro*-billes diélectriques et un champ lumineux. Ce phénomène pouvant alors induire un processus d'auto-organisation des particules, en se stabilisant par influence mutuelle. Toutefois, la faible dimension de ces dernières¹⁷ va entraîner une diffusion du faisceau sur un grand angle solide, impliquant que seule une faible portion d'énergie ne soit propagée entre les billes. Les interactions ne se feront alors qu'à courte portée, et les effets collectifs ne s'observeront que sur de petites chaînes de billes. Dans quelle(s) mesure(s) serait-il alors possible d'observer un processus identique mais sur un plus grand nombre de particules ?

L'étude que nous avons menée s'est donc inscrite dans ce contexte, en considérant qu'il serait possible d'établir un ordre spatial, au même titre qu'un ensemble de petites particules (ou d'atomes) soumises à un champ optique suffisamment fort, sur un ensemble de grosses billes (plusieurs dizaines de micromètres) suivant une structure périodique.

L'originalité d'un tel système réside dans le fait que la lumière peut alors être refocalisée par l'ensemble des billes, et permettre ainsi de maintenir l'énergie du faisceau au cours de sa propagation. En espaçant alors ces derniers périodiquement nous pourrons, dans certains cas, conférer au faisceau une refocalisation périodique au sein du réseau.

Cela nous a permis d'aborder le problème sous deux angles différents, mais complémentaires. En premier lieu, nous nous sommes donc intéressés à une approche statique, en considérant la propagation d'un faisceau lumineux, dans un réseau de particules donné, sans tenir compte de l'influence des forces optiques. Sous certaines conditions imposées sur les paramètres du système, nous avons alors pu observer un confinement périodique du faisceau. Ces résultats nous ont ainsi permis d'établir un lien avec les cristaux photoniques, où la propagation d'une onde électromagnétique va totalement être conditionnée par la longueur d'onde du faisceau et les paramètres de la structure cristalline (épaisseur et indice de réfraction des couches diélectriques). Nous mettrons ainsi en évidence la présence de modes guidants et non guidants dans notre système, et nous établirons un ensemble de corrélations entre les propriétés intrinsèques liées au(x) faisceau(x) laser(s), et celles liées aux particules formant le réseau.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à une étude dynamique en considérant l'effet des forces optiques. Nous avons ainsi cherché à démontrer qu'il était possible de piéger des objets dont le diamètre atteint la centaine de microns. Au-delà des positions d'équilibres stables, nous avons pu mettre en évidence la présence d'états dynamiques oscillants plus complexes, qui n'avaient pas été observés jusqu'à ce jour à notre connaissance.

Ce manuscrit s'articulera ainsi suivant deux grands axes. Une première partie abordera l'approche statique du problème, alors qu'une seconde présentera nos résultats dans le régime dynamique.

Le *premier* chapitre nous permettra d'introduire les outils mathématiques employés, et justifiant quant à la qualité des hypothèses que nous avons posées pour décrire notre système. Ainsi, nous présenterons les concepts physiques élémentaires mis en jeu afin de permettre la bonne compréhension de la suite de nos propos. Nous établirons alors les conditions de stabilité auxquelles un faisceau est soumis dans un réseau de lentilles.

¹⁷Généralement, les particules utilisées sont de type *Rayleigh* (diamètre petit devant la longueur d'onde) ou *Mie* (diamètre du même ordre de grandeur que la longueur d'onde).

Dans le *deuxième* chapitre, nous exposerons l'ensemble de nos résultats auxquels nous proposerons des interprétations et apporterons des perspectives d'applications. Nous expliciterons entre autres les propriétés intrinsèques du couplage établi entre un réseau de lentilles espacées périodiquement et un faisceau lumineux propageant. Nous caractériserons ainsi la réponse optique du système en fonction des paramètres d'étude, en démontrant notamment l'existence de modes de *Bloch*. Enfin, nous exposerons une analogie observée avec les cristaux photoniques.

Le *troisième* chapitre nous permettra d'introduire l'approche dynamique en présentant la démarche suivie pour établir le calcul des forces optiques en présence. Nous illustrerons alors cela en analysant la réponse d'une seule goutte soumises aux champs lumineux.

Enfin, dans le *quatrième* chapitre, nous commencerons par présenter la dynamique de notre système et établirons les conditions de stabilité des gouttes. Suite à quoi, nous exposerons l'ensemble de nos résultats numériques, et discuterons de leur établissement et des applications expérimentales envisageables.

Étude statique de l'influence d'un réseau de lentilles sur un faisceau laser

Introduction

Comme nous venons de le voir, depuis les idées novatrices de *Kepler* au XVII^e siècle, et les premières démonstrations en laboratoire au début du siècle dernier, nous savons que toute onde électromagnétique confère à tout obstacle, par interaction, une force de pression de radiation lumineuse. La nature intrinsèque d'une telle onde implique que cette force soit négligeable à l'échelle macroscopique devant d'autres forces telle que la gravitation. Cependant, elle sera également négligeable à des échelles plus petites dû à l'agitation thermique qui devient significative pour des systèmes dont les tailles caractéristiques sont de l'ordre du nanomètre. Ce problème fut levé avec l'invention du laser dans les années 1960, où la cohérence et l'intensité du flux lumineux ont permis de démontrer expérimentalement l'utilisation de ces forces pour le piégeage de nanoparticules. Très vite, les recherches se sont tournées vers des applications biologiques et médicales, entraînant par la même la nécessité d'étendre les techniques de piégeage à des objets plus gros. C'est justement dans ce contexte que la microfluidique, et par extension l'optofluidique, se sont révélées dans les années 1990.

Le sujet de notre travail s'est donc inscrit dans cette thématique, toujours aussi riche et actuelle, tant le nombre de domaines d'applications tend à se diversifier.

Nous allons, dans cette première partie, étudier le comportement d'un faisceau lumineux se propageant dans un réseau de billes que nous caractériserons. Nous nous limiterons ici à la réponse optique du système en ne considérant pas l'influence dynamique due aux forces optiques. En effet, nous savons que pour de petites particules, typiquement de faible dimension devant la longueur d'onde, l'influence d'un champ optique pourra induire un processus d'auto-organisation du réseau de billes.

Nous démontrerons dans ce qui suit que nous pouvons retrouver des comportements similaires, inhérents à ceux observés en *optical binding*. Toutefois, les particules que nous allons considérer possèdent, dans notre cas, des dimensions significatives devant les paramètres intrinsèques aux faisceaux lumineux. Typiquement, un diamètre de cent micromètres.

Le système que nous proposons comporte un ensemble unidimensionnel de particules sphériques¹⁸ transparentes et diélectriques, soumises à deux faisceaux lasers horizontaux, incohérents entre eux, et de profils transverses divers. Ces derniers seront placés de manière contra-propageante afin de compenser leur force de pression de radiation respective, et l'injection en entrée sera prise sur l'axe, autrement dit confondue avec l'axe horizontal (Oz) (figure 14).

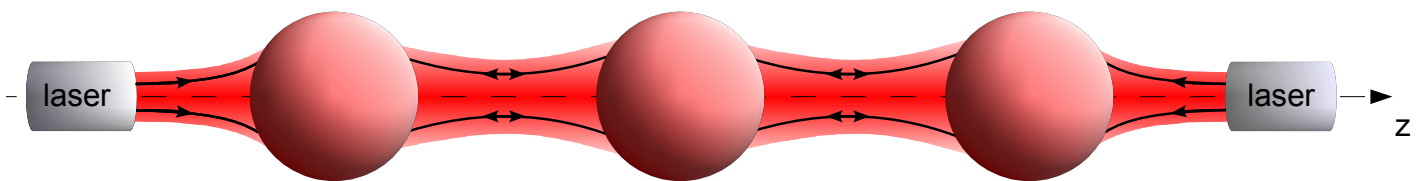


FIGURE 14 – Géométrie caractéristique d'un piégeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par un réseau de billes.

¹⁸Nous assimilerons ces particules, dans un premier temps, à de simples billes, qui elles mêmes seront approximées par des lentilles boules.

Notons que la grande dimension des billes, devant la longueur d'onde des faisceaux, va nous permettre de nous placer dans l'approximation de l'optique géométrique. Toutefois, cette dernière ne pourra expliquer un des phénomènes les plus importants en optique, et connus depuis le XVII^e siècle à travers les travaux précurseurs de *Grimaldi*¹⁹ : la *diffraction*.

En effet, lorsqu'une onde, quelle qu'elle soit²⁰, rencontrera un obstacle, elle sera soumise à un processus d'"éparpillement"²¹ de telle façon que les ondes résultantes interféreront les unes avec les autres et formeront une figure caractéristique de diffraction.

Huygens apportera une interprétation correcte du phénomène en invoquant le caractère ondulatoire de la lumière [69]. Raisonement repris et défendu, au détriment de la théorie corpusculaire newtonienne, par *Fresnel* [70] et *Fraunhofer* au début du XIX^e siècle. L'approximation de *Fraunhofer*, en champ lointain, est valable lorsque les distances considérées sont, comme son nom l'indique, suffisantes pour que l'on puisse approximer l'onde comme plane. En revanche, en champ proche, l'approximation valable sera celle de *Fresnel* puisque celle-ci prend en compte la courbure du front d'onde.

Toutefois, précisons que suivant les dimensions du système d'étude, l'approche de la diffraction pourra être traitée de façon plus ou moins simplifiée. La théorie exacte fut cependant développée, dans le cas d'une sphère, par *G. Mie* en 1908. À partir de quoi, nous pourrions alors distinguer les divers cas de figures en fonction de 3 principaux paramètres : le premier, habituellement noté $\alpha = k\rho$, est lié au paramètre de bille ρ (rayon de la sphère) et au nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, le deuxième, généralement noté $n = n_b/n_m$, correspond à l'indice de réfraction relatif entre celui de la bille et du milieu, et enfin, le troisième est lié à un terme de déphasage acquit par le rayon à la traversée de la bille, et s'exprime comme $2k\rho(n-1)$.

Ainsi, suivant la valeur de chacun de ces paramètres comparée à 1, nous pourrions établir l'ensemble des domaines différentiables. Nous avons reporté, dans le tableau qui suit, les principaux résultats où le symbole "−" signifie petit devant 1, celui "+" signifie grand devant 1, alors que "∀" signifie quelconque [66] :

TABLE 1 – Principaux domaines d'approximations liés à l'étude de la diffraction.

α	$(n-1)$	$2\alpha(n-1)$	Approximations
−	∀	−	Rayleigh
∀	−	−	Rayleigh-Gans-Debye
+	−	∀	Diffraction anormale
+	∀	+	Fraunhofer

Sans rentrer particulièrement dans le détail, nous pouvons apporter une interprétation de lecture à ce tableau. Nous apercevons, en premier lieu, que les approximations de *Rayleigh* et de *Fraunhofer* semblent présenter les limites aux antipodes des échelles de mesures. Toutefois, les connaissances des propriétés des objets diffractants sont inutiles dans l'approximation de *Fraunhofer*, alors qu'elles le sont pour les autres. Enfin, en *diffraction anormale*, nous considérons de grandes sphères, mais des indices de réfraction du milieu environnant et des billes très proches, ainsi, l'approximation de l'optique géométrique pourra s'appliquer pour la propagation des rayons lumineux. De plus, ces derniers seront supposés comme n'étant quasiment pas déviés aux interfaces "*bille-milieu*".

Notre étude se placera, ainsi, proche des conditions de *diffraction anormale*.

¹⁹Ce phénomène de *diffraction*, intimement lié au caractère ondulatoire de la lumière, ne peut être expliqué par l'optique géométrique. En 1665, *Grimaldi* publie un des premiers traités expliquant la diffraction [67]. Sans être pour autant le premier à l'observer, il est néanmoins un précurseur dans son analyse détaillée.

²⁰En effet, dans sa thèse publiée en 1924, *L. de Broglie* démontra la nature ondulatoire associée à toute forme d'énergie, impliquant par la même toute forme de matière : "*Les corpuscules matériels, tout comme les photons, peuvent avoir un comportement ondulatoire*" [68].

²¹Ce phénomène peut également être vu comme une conséquence de la limitation de l'étendue spatiale de l'onde, par les dimensions finies de l'objet diffractant.

Chapitre 1

Méthodes de modélisation

Sommaire

1.1	Équations de <i>Maxwell</i>	17
1.1.1	Équation de propagation	18
1.1.1.1	Équation d' <i>Helmoltz</i>	18
1.1.1.2	Approximation paraxiale	19
1.1.2	Faisceau gaussien et modes supérieurs	20
1.1.2.1	Mode fondamental gaussien	20
1.1.2.2	Modes propres d'ordre supérieur	23
1.2	Approche matricielle	26
1.2.1	Matrice de transfert d'un système optique centré	26
1.2.1.1	Relation de passage	26
1.2.1.2	Application au faisceau gaussien	27
1.2.2	Confinement transversal d'un faisceau gaussien par un ensemble de lentilles équidistantes	31
1.2.3	Propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille boule	33
1.2.4	Propagation à travers plusieurs mailles élémentaires	36
1.2.4.1	Matrice de transfert et plans de référence	36
1.2.4.2	Systèmes focalisant périodiques stable et instable	38
1.3	Diffraction et <i>principe de Huygens-Fresnel</i>	40
1.3.1	Exemples généraux de diffraction	40
1.3.2	Approche analytique du modèle 2D	42
1.3.3	Simplification et symétrie suivant un modèle unidimensionnel	45

1.1 Équations de *Maxwell*

L'étude des phénomènes optiques a été, depuis l'Antiquité, source de nombreux rebondissements et controverses. Bien que mise à mal durant près de deux siècles, suite aux travaux de *Newton* prônant une approche corpusculaire de la lumière, la théorie ondulatoire connue son plus grand succès avec le parachèvement de la théorie unificatrice de l'électromagnétisme à la fin du XIX^e siècle par *J. C. Maxwell*. Nous ne chercherons pas plus à développer une approche *historique* ici, et nous placerons plutôt suivant une démarche plus *axiomatique* en présentant les équations de Maxwell comme un postulat de départ.

La aborderons le traitement de la lumière à partir d'une approche classique. Son évolution pourra alors être totalement décrite par les équations vectorielles de *Maxwell*, et les conditions aux limites imposées par le système. Toutefois, leur résolution est généralement très compliquée à établir, due essentiellement au phénomène de diffraction (nous y reviendrons au cours du chapitre) [71]. Nous verrons alors que ce dernier pourra être traité suivant un ensemble d'approximations.

1.1.1 Équation de propagation

1.1.1.1 Équation d'*Helmoltz*

Les équations de *Maxwell* représentent les équations les plus générales des lois de l'électromagnétisme classique. Elles sont au nombre de quatre et peuvent se scinder en deux groupes distincts ¹.

Les deux premières correspondent donc, respectivement, à l'équation de *Maxwell-Faraday* et à l'équation de conservation du flux magnétique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.2)$$

Celles-ci traduisent à la fois l'existence d'un champ électrique induit par les variations temporelles d'un champ magnétique (équation (1.1)), que l'absence de divergence des lignes de champ magnétique à partir de n'importe quel point de l'espace (équation (1.2)).

Les deux suivantes correspondent respectivement à l'équation de *Maxwell-Gauss* et à l'équation de *Maxwell-Ampère* :

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.4)$$

Celles-ci traduisent à la fois la proportionnalité entre le flux du champ électrique issu d'un volume donné et la charge électrique totale s'y trouvant (équation (1.3)), que l'existence d'un champ magnétique induit à la fois par la présence d'un courant électrique $\vec{J}(\vec{r}, t)$ et par les variations temporelles d'un champ électrique (équation (1.4)).

Nous allons chercher à dissocier les expressions liées à la propagation de chacun des deux champs pour n'en considérer qu'un seul.

Pour cela, nous définissons un champ électrique $\vec{E}$, que nous supposons polarisé linéairement en chaque point de l'espace :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t) \vec{e}(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

avec $\vec{e}(\vec{r}, t)$ le vecteur polarisation, supposé constant dû à la polarisation linéaire du champ.

Ainsi, en calculant le rotationnel de l'équation (1.1), et en tenant compte de la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (1.6)$$

Nous obtenons :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (1.7)$$

¹En effet, les deux premières peuvent être vues comme une interprétation directe du champ indépendamment des sources émettrices, alors que les deux suivantes se présentent comme dépendantes de ces dernières.

Toutefois, rappelons que chacune d'elles possède une forme dite *locale*, et une forme dite *intégrale*. La première est employée pour des points de l'espace bien définis, revenant ainsi à approximer le milieu comme homogène, alors que la seconde est définie pour décrire les relations de passage à l'interface entre deux milieux différents. Nous rappellerons ici leurs expressions sous forme *locale*.

Or, nous admettons évoluer dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, sans charge ni courant ($\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$), autrement dit en absence de source. Les équations (1.3) et (1.4) se réduisent donc à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (1.8)$$

Ce qui nous amène, à partir de l'équation (1.7), à l'équation de propagation suivante :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (1.9)$$

Celle-ci est appelée équation de d'Alembert, et porte sur la forme vectorielle du champ, décrivant à la fois l'amplitude (module) et la polarisation (caractère vectoriel) de l'onde. Remarquons toutefois que cette équation est déduite des équations de Maxwell, sans pour autant en être équivalente. Une solution de (1.9) ne sera donc pas automatiquement solution de (1.1).

La quasi-monochromaticité du champ laser va nous permettre ici de découpler les dépendances spatiale et temporelle de l'onde. Nous ne nous intéresserons alors qu'à l'évolution spatiale en considérant la structure temporelle comme simple (généralement suivant une distribution sinusoïdale).

Nous chercherons les solutions harmoniques de cette équation d'onde, appelées *modes propres*. Ainsi, en introduisant le nombre d'onde k , nous obtenons l'équation de Helmholtz :

$$[\nabla^2 + k^2] \underline{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.10)$$

Chacune des composantes du champ pourra alors être traitée indépendamment des autres. En effet, nous considérons, ici, un milieu homogène d'indice de réfraction n_m . Ainsi, en faisant intervenir la permittivité du milieu ϵ et l'excitation électrique $\vec{D}$, nous pouvons écrire à partir de (1.8) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.11)$$

Les trois composantes du champ sont alors gouvernées par la même équation de Helmholtz (1.10), conséquence des équations de Maxwell. L'évolution spatio(-temporelle) de chaque composante étant identique, nous pouvons limiter l'étude à une seule dimension de l'espace (grandeur scalaire) pour en déduire celle du champ électromagnétique de l'onde lumineuse.

Pour comprendre l'importance de l'homogénéité du milieu, écrivons la même équation que précédemment, mais pour un milieu inhomogène :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) + \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = -\frac{2}{n_m} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} n_m \quad (1.12)$$

Ce qui, reporté dans les équations de Maxwell, fait intervenir un terme supplémentaire avec $\vec{E}$ sous forme vectorielle². Nous ne pourrions, dans un tel cas, définir le champ électromagnétique sous une forme scalaire unique.

1.1.1.2 Approximation paraxiale

Exprimons le champ électrique E comme une solution générale de l'équation de Helmholtz :

$$\underline{E}(\vec{r}) = \underline{u}(\vec{r}) \exp(-ikz) \quad (1.13)$$

où $\underline{u}(\vec{r})$ est l'amplitude complexe du champ (fonction lentement variable), décrivant l'évolution spatiale du faisceau.

²Précisons toutefois que cette expression n'est pas générale, et sous-tend une grande approximation, puisque la réponse est supposée ici instantanée et locale.

Faisons l'hypothèse que les variations de $\underline{u}(\vec{r})$, dans la direction de propagation (Oz), sont négligeables sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde, devant les variations du terme en onde plane e^{-ikz} . De la même façon, nous supposons une faible divergence du faisceau par rapport à son axe de propagation, ainsi [72] :

$$\left| \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} \right| \quad (1.14)$$

On peut donc en déduire une réécriture de l'équation de propagation simplifiée, à partir de (1.10) et (1.13), telle que :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} = 0 \quad (1.15)$$

Une telle équation possède une infinité de solutions. Toutefois, comme nous le verrons par la suite, certaines posséderont une plus grande importance dans la description des faisceaux lasers.

En effet, la propagation libre d'une onde électromagnétique est souvent décrite par une somme d'ondes planes, non limitées cependant transversalement. Or, dans le cas d'un faisceau laser, la faible divergence traduit un confinement transverse de la répartition spatiale de l'énergie, véhiculée par le paquet d'onde. L'onde émise, dans un tel cas, possède alors généralement une répartition d'éclairement sous forme gaussienne³, suivant un plan perpendiculaire à l'axe de propagation. Ainsi, la description de tels faisceaux en ondes planes est donc inadaptée.

À dessein, nous chercherons alors une solution de la forme :

$$\underline{u}(\vec{r}) = A(z) \exp \left(-i \left[\Delta\Phi(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2) \right] \right) \quad (1.16)$$

$\Delta\Phi$ est un déphasage complexe⁴, et q un rayon de courbure complexe (courbure du front d'onde et variation d'amplitude transverse) que nous définirons dans la section qui suit.

Une telle expression est issue des solutions en ondes sphériques où un développement à l'ordre 1, justifié par l'approximation paraxiale, a été introduit sur les facteurs de variation transverse d'amplitude et de phase. Nous allons maintenant voir ce que représente une telle solution et en extraire et définir ses principaux termes.

1.1.2 Faisceau gaussien et modes supérieurs

1.1.2.1 Mode fondamental gaussien

Les faisceaux gaussiens ont été introduits, au même titre que les ondes planes ou sphériques, comme une solution particulière de l'équation de propagation, dans l'approximation paraxiale. Sans redémontrer l'ensemble des résultats, dont la littérature est déjà bien fournie depuis les années 60, nous présenterons ici les principales relations liées aux faisceaux gaussiens.

Pour ce faire, considérons l'amplitude complexe d'une onde incidente, à profil gaussien et à front de phase plan, issue du plan où le diamètre du faisceau est minimal :

$$\underline{u}_0(\vec{r}) = A \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2} \right) \quad (1.17)$$

où ω_0 , appelé *col* ou *waist* en anglais, définit la taille minimale transverse du faisceau.

³Nous verrons par la suite que cette solution, correspondant à celle de plus bas ordre, appartient à un plus grand ensemble comportant une infinité de solutions, décrites à partir des fonctions de *Hermite-Gauss* en coordonnées rectangulaires, et *Laguerre-Gauss* en coordonnées cylindriques.

⁴Nous tenons compte ici du déphasage total dû à la propagation du champ suivant l'axe de propagation (Oz). Ainsi, nous admettons que l'exponentielle apparaissant dans l'équation (1.13) est maintenant contenue dans l'expression de $\Delta\Phi$

Considérons alors que le faisceau, en propagation libre dans l'espace suivant (Oz), se retrouve en expansion dû à sa diffraction. Ainsi, pour connaître de quelle façon la distribution du champ évolue, nous pouvons résoudre l'intégrale de diffraction, suivant l'approximation de *Huygens-Fresnel* (que nous développerons dans la section qui suit), de la forme [72] :

$$\underline{u}(X, Y, z) = \frac{A}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint \underline{u}_0(x, y) \exp \left[ik \frac{(X-x)^2 + (Y-y)^2}{2z} \right] dx dy \quad (1.18)$$

Sans développer les calculs, nous pouvons extraire de cette résolution l'expression de deux paramètres réels :

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right) \quad \text{et} \quad R_C(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (1.19)$$

où $z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$ correspond à la distance de Rayleigh et décrit la divergence du faisceau.

Ces derniers représentent respectivement le rayon à $1/e$ du profil gaussien d'amplitude transverse dans le plan d'abscisse z (figure 1.1), et le rayon de courbure du front d'onde sur l'axe z .

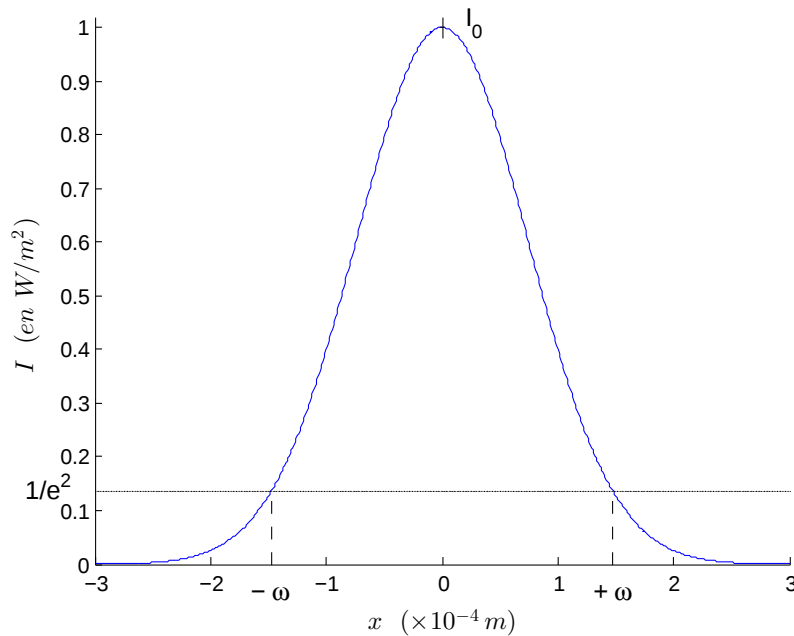


FIGURE 1.1 – Répartition d'intensité pour un profil gaussien le long d'une section droite du faisceau.

Suivant *Kogelnik et al.*, nous pouvons alors considérer, par analogie avec les ondes sphériques, la définition suivante du rayon de courbure complexe à partir des paramètres ω et R_C [73, 74] :

$$\frac{1}{\underline{q}(z)} = \frac{1}{R_C(z)} - i \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)} \quad (1.20)$$

Ce qui nous permet de déduire, en respectant les lois de propagation (1.19) dans (1.20), une relation simple d'évolution du paramètre $\underline{q}$ comme [72, 75] :

$$\underline{q}(z) = z + \underline{q}_0 \quad (1.21)$$

Ce qui, en considérant qu'en $z = 0$, $R(z = 0) = \infty$ et $\omega^2(z = 0) = \omega_0^2$, impose que :

$$\underline{q}(0) = \underline{q}_0 = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \quad (1.22)$$

La relation (1.21) permet alors de définir, en tout point, la propagation d'un faisceau gaussien (figure 1.2).

L'évolution qui s'en suit, suivant l'axe de propagation (Oz), est ainsi caractérisée par un "étalement" transverse du profil, accompagnée d'une décroissance de son amplitude maximale par principe de conservation de l'énergie.

Le faisceau, alors en continuelle divergence, tend à grande distance du *col* ($z \gg z_R$) vers un faisceau conique dont le demi-angle au sommet se définit, lorsque z tend vers l'infini, comme :

$$\tan(\Gamma) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\omega(z)}{R_C(z)} \right) = \frac{\omega_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \Rightarrow \Gamma \simeq \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \quad (1.23)$$

Le profil du faisceau converge alors vers celui d'une onde sphérique-gaussienne. Le rayon de courbure complexe s'identifie alors à celui du front d'onde réel $R_C(z)$, dont le centre tend vers le plan du col (figure 1.2).

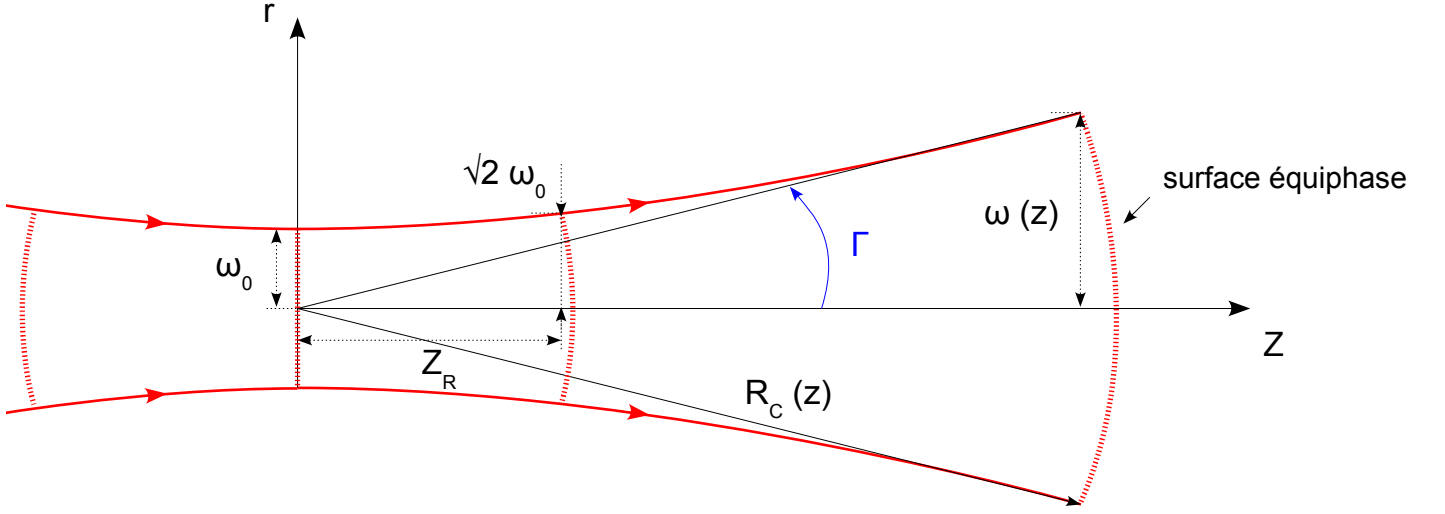


FIGURE 1.2 – Paramètres intrinsèques au faisceau gaussien.

Remarque : Nous nous limitons ici à une seule dimension transverse (symétrie radiale). Or, physiquement, le profil de l'onde s'étend dans les trois dimensions de l'espace, une composante longitudinale (Oz), et deux transverses (Ox) et (Oy). Chacun des paramètres du faisceau sera donc défini suivant chacune de ces dimensions. Ainsi, en considérant les composantes du waist ω_{0x} et ω_{0y} d'une part, et leur position respective z_{0x} et z_{0y} d'autre part, comme identiques, le faisceau admettra une symétrie de révolution autour de son axe de propagation et sera dit circulaire [76]. Toutefois, en considérant des inégalités sur les composantes du waist, le faisceau deviendra elliptique, ou encore astigmatique [77] si les positions, en plus, diffèrent.

Le faisceau que nous considérons ici, de type gaussien, présente donc une symétrie cylindrique. La composante radiale dans le plan transverse est alors définie comme $r = x^2 + y^2$. L'équation (1.15), pour un champ cylindrique, devient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (1.24)$$

Ainsi, en reportant la solution (1.16) sous forme cylindrique :

$$\underline{u}(r, z) = A(z) \exp \left(-i \left[\Delta\Phi(z) + \frac{k r^2}{2\underline{q}(z)} \right] \right) = A(z) \exp \left(-i \left[\Delta\Phi(z) + \frac{k r^2}{2R_C(z)} \right] - \frac{r^2}{\omega^2(z)} \right) \quad (1.25)$$

dans l'équation (1.24), nous en déduisons l'expression fondamentale (au premier ordre en $(r/R_C)^2$) de l'onde sphérique gaussienne [72] :

$$\underline{u}(r, z) = A_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left(-\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left(-i \left[kz + \frac{kr^2}{2R_C(z)} - \text{Arctan} \left(\frac{z}{z_R} \right) \right] \right) \quad (1.26)$$

Le facteur inversement proportionnel à $\omega(z)$ est un facteur de normalisation, la première exponentielle est un terme lié au caractère gaussien de l'onde, et la deuxième exponentielle comprend respectivement un terme de propagation, un suivant lié au caractère en onde sphérique et enfin un terme purement gaussien appelé *phase de Gouy*.

1.1.2.2 Modes propres d'ordre supérieur

Au-delà du mode fondamental décrit précédemment, l'équation (1.15) admet d'autres solutions plus complexes que l'on appelle *modes d'ordre supérieur*. Celles-ci définissent une famille de solutions à base de polynômes d'*Hermite* en coordonnées cartésiennes, ou de *Laguerre* en coordonnées cylindriques, formant une base orthogonale complète [72]. Ainsi, chaque mode pourra être vu comme une combinaison linéaire de ces modes.

L'expression de l'amplitude complexe normalisée, en coordonnées cartésiennes, s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{mn}(r, z) &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^{m+n} m! n!} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega(z)} \times H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) \times H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) \dots \\ &\times \exp \left(-i \left[\Delta\Phi_{mn}(z) + \frac{k r^2}{2\underline{q}(z)} \right] \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

où H_n sont les polynômes d'*Hermite* d'ordre n , définis comme suit :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} = n! \sum_{p=0}^{n/2} (-1)^p \frac{(2x)^{n-2p}}{p!(n-2p)!} \quad (1.28)$$

Nous retrouvons clairement le mode fondamental gaussien en posant $n = 0$, soit $H_0(x) = 1$.

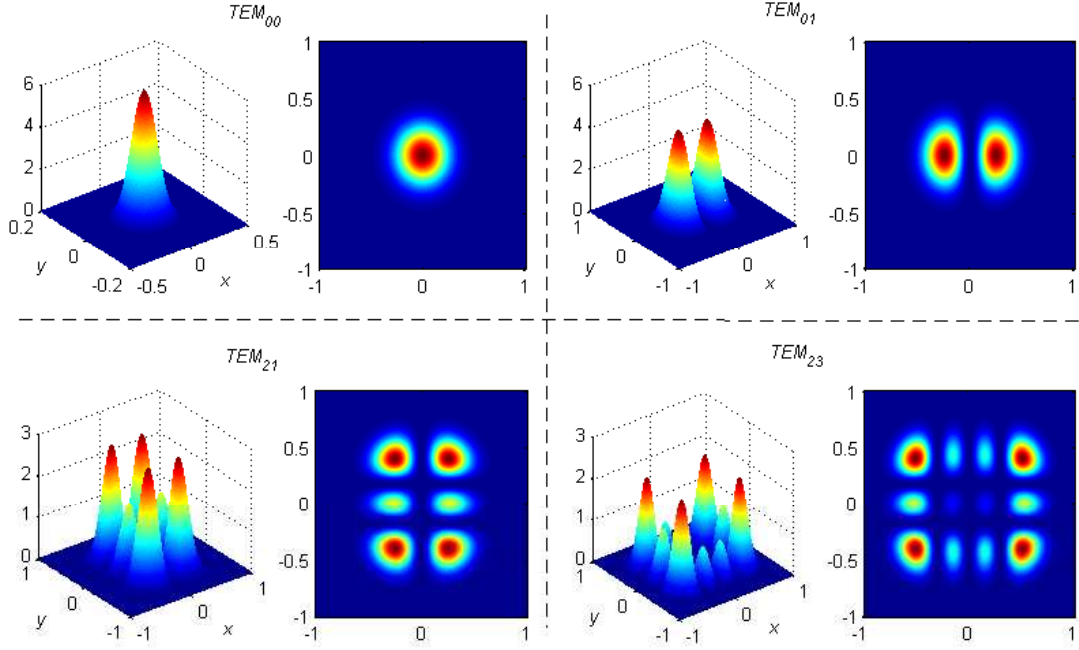


FIGURE 1.3 – Représentation des profils d'intensité du mode fondamental gaussien TEM_{00} et de trois modes d'Hermite-Gauss d'ordre plus élevé. Une représentation a été faite dans le plan transverse (x,y) , où l'amplitude des maxima est caractérisée par une couleur tendant d'autant plus vers le rouge qu'elle sera élevée. Chaque polynôme d'Hermite d'ordre n possède n zéros. L'intensité d'un mode I_{mn} présente donc, dans le plan transverse, une structure formée respectivement de $(m+1)$ et $(n+1)$ maxima suivant les directions y et x .

Notons que les fonctions $\omega(z)$ et $R_C(z)$ sont équivalentes à celles du mode fondamental, et sont par conséquent des caractéristiques générales des modes gaussiens. Toutefois, nous pouvons souligner le fait que la courbure du front d'onde soit indépendante du mode considéré, alors que la phase en dépend à travers le terme gaussien :

$$\Delta\Phi_{mn}(z) = kz - (m+n+1) \operatorname{Arctan}\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (1.29)$$

Comme nous l'avons déjà précisé auparavant, une autre famille de solutions de l'équation paraxiale est donnée par la base des modes de *Laguerre-Gauss*. Les solutions peuvent alors s'écrire, en coordonnées cylindriques, sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{lm}(r, \phi, z) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{l!}{(1+\delta_{0m})(l+m)!}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right)^m \times L_l^m\left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)}\right) \dots \\ &\times \exp\left(-i\left[kz - (2l+m+1) \operatorname{Arctan}\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2q(z)} - m\phi\right]\right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

où les entiers l et $m \in \mathbb{N}$, et correspondent respectivement aux indices radial et angulaire ; les quantités q , ω et z_R sont identiques au cas précédent avec les solutions *Hermite-gaussiennes* ; les fonctions L_l^m définissent quant à elles les polynômes de *Laguerre* généralisés tels que :

$$L_l^m(x) = \frac{x^{-m}}{l!} e^x \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^{l+m} e^{-x}) \quad (1.31)$$

Et enfin, δ_{lm} correspond au symbole de *Kronecker*, définissant la condition d'orthonormalité de ces fonctions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{u}_l^*(r, \phi, z) \underline{u}_m(r, \phi, z) dr = \delta_{lm} \quad (1.32)$$

avec $\delta_{lm} = 1$ si $l = m$, et 0 sinon.

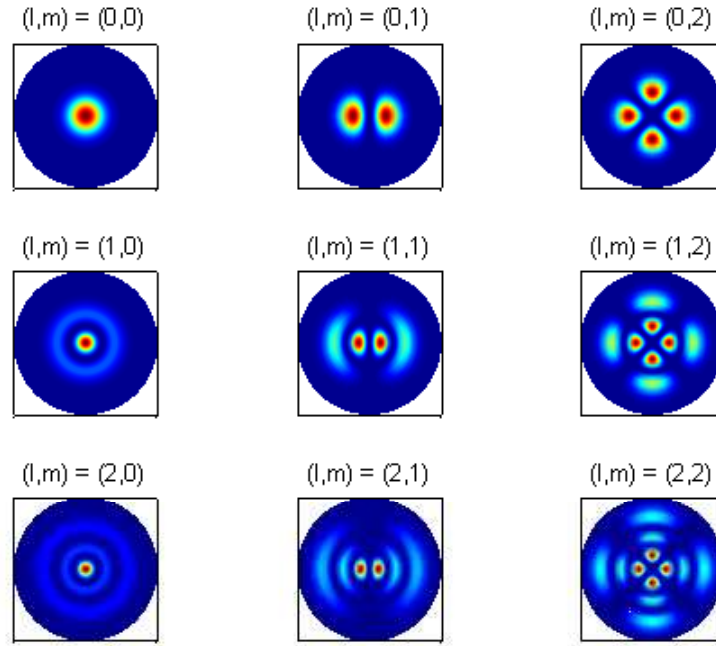


FIGURE 1.4 – Représentation des profils d'intensité des neuf premiers modes de Laguerre-Gauss, dans le plan transverse (x, y) . Nous constatons que pour $m = 0$, les modes présentent une symétrie cylindrique et les profils d'intensité sont caractérisés par une tache centrale entourée de l anneaux concentriques. Pour $m \neq 0$, ceux-ci sont définis par $(l + 1)$ anneaux (sans tache centrale), dont chacun est parcouru de $2m$ maxima.

Au final, nous voyons que ces solutions peuvent être écrites comme un produit entre le mode gaussien fondamental et des polynômes (1.27 et 1.30). Mathématiquement, comme nous l'avions avancé en début de paragraphe, ces fonctions *Hermite-gaussienne* et *Laguerre-gaussienne* forment une base hilbertienne dans l'espace des fonctions de carré sommable. Ainsi, il sera possible de passer linéairement de l'une de ces fonctions à l'autre.

D'un point de vue plus physique, l'emploi d'une de ces fonctions plutôt qu'une autre se présentera comme une alternative au développement d'un champ électrique en propagation libre, suivant la symétrie présentée par le système. Ainsi, pour un champ à symétrie cylindrique, nous opterons naturellement pour un développement dans la base de *Laguerre-Gauss*. En revanche, dès que cette symétrie sera brisée, dans le cas de l'insertion d'un diaphragme rectangulaire ou encore d'une injection en cavité hors axe, la base de *Hermite-Gauss* sera plus adaptée.

De façon générale, un tel faisceau aura l'avantage de garder un profil d'intensité gaussien tout au long de sa propagation en espace libre, sans que celui-ci ne change. Seul le rayon évoluera. Notons par ailleurs que son passage à travers un simple élément optique (lentille sans aberration, etc.) n'affectera pas plus sa forme générale qui restera de profil gaussien en sortie.

Nous venons de rappeler les principes élémentaires d'évolution d'une onde électromagnétique à profil gaussien, dans l'approximation paraxiale. Ainsi, nous allons maintenant chercher à étudier comment un tel faisceau se déforme au cours de sa propagation dans l'espace libre, et à la traversée d'éléments optiques tels que des lentilles. Pour ce faire, nous commencerons par introduire la méthode de calcul matriciel, très efficace dans la simplification des calculs pour les systèmes linéaires.

1.2 Approche matricielle

Dès la fin du XVIII^e siècle, une nouvelle branche des mathématiques voit le jour, dont l'approche prévoit une simplification dans la résolution des équations linéaires. La *théorie des matrices* se développe ainsi en s'étendant à l'ensemble de la communauté scientifique. L'application en optique fut évidente dû au caractère linéaire des lois de la réfraction et de la réflexion dans les conditions de *Gauss*⁵ (conditions de stigmatisme approché). Ainsi, elle sera appliquée à la propagation d'un rayon lumineux dans l'approximation de l'optique géométrique paraxiale.

Dans les années 60, à l'aube du développement des premiers lasers, cette théorie sera étendue à la propagation de faisceaux gaussiens au sein d'un résonateur optique [73, 78]. L'intérêt majeur de cette approche réside dans la simplification des calculs permettant alors d'obtenir une relation entre un plan objet et un plan image séparés par un système optique complexe. Toutefois, cette démarche sera totalement opaque au comportement du faisceau à l'intérieur du système, et donc inadaptée à toute interprétation physique. Elle ne se présentera ainsi que comme une simple alternative de calcul pour obtenir rapidement le profil d'évolution d'une image en sortie de système.

Nous proposons ici de suivre cette démarche appliquée au rayon de courbure complexe $\underline{q}$, lié au faisceau gaussien [79–81].

1.2.1 Matrice de transfert d'un système optique centré

1.2.1.1 Relation de passage

La méthode matricielle fut initialement établie en optique géométrique pour décrire la propagation de rayons lumineux à travers divers systèmes optiques paraxiaux (lentilles, miroirs, etc.). Dans cette approche, chaque élément du système est caractérisé par une matrice de transfert, et le système global est défini par une matrice égale au produit des matrices de chacun de ses éléments. La connaissance de cette matrice de transfert va alors nous permettre de déterminer systématiquement les éléments cardinaux d'un système optique centré quelconque.

Ainsi, à chaque plan i de référence, un rayon sera caractérisé par sa position transverse r_i , et son angle optique $n_{m_i}\alpha_i$, correspondant au produit entre l'indice du milieu et l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe de propagation (Oz)⁶ (figure 1.5). Dans les conditions de *Gauss*, autrement dit pour des angles incidents faiblement inclinés sur l'axe optique, les relations liant ces derniers paramètres étant linéaires, nous pouvons poser [72, 73, 75] :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ n_{m_2}\alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} r_1 \\ n_{m_1}\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ n_{m_1}\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

où la matrice $\mathbf{M}$ caractérise complètement le système optique traversé.

Plusieurs méthodes existent pour calculer cette matrice de transfert, toutefois, au-delà d'une détermination expérimentale, l'approche analytique la plus courante reste le calcul par identification des termes A , B , C et D à partir de considérations géométriques et des lois de *Snell-Descartes* [75].

⁵Nous rappelons ici que les *lois de Snell-Descartes* traduisent le changement de direction, par réflexion et par réfraction, d'un rayon lumineux rectiligne, à la traversée d'un dioptré séparant deux milieux homogènes. Pour ce qui est de la loi de la réfraction, dans le cas d'un rayon arrivant avec un angle d'incidence i_1 à la surface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , et émergent avec un angle i_2 , nous avons : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. Ce qui amène dans les conditions de *Gauss* à : $n_1 i_1 \simeq n_2 i_2$.

⁶Les paramètres r et α que nous considérons ici sont deux grandeurs réelles, car nous estimons que les rayons sont contenus dans le plan méridien (Ozr). Bien évidemment, si nous souhaitons passer en coordonnées cartésiennes, nous pourrions assimiler autant la coordonnée radiale r que celle angulaire α , de façon équivalente, aux coordonnées transverses (x ou y) et leur équivalent angulaire. Ainsi, si nous avons considéré l'espace tridimensionnel, nous aurions fait intervenir des grandeurs complexes telles que : $\underline{r} = r_x + ir_y$ et $\underline{\alpha} = \alpha_x + i\alpha_y$.

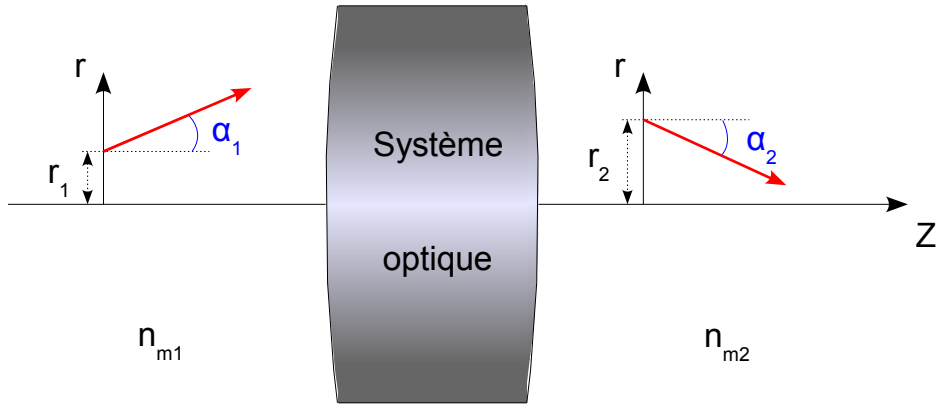


FIGURE 1.5 – Propagation d'un rayon lumineux arrivant sur un système optique homogène par morceaux.

Remarque : Dans certains ouvrages, les auteurs ont choisi de considérer, dans l'expression des vecteurs colonnes liés aux faisceaux en entrée et sortie de système, une notation avec l'angle d'inclinaison α_i , plutôt que l'angle optique $n_{m_i}\alpha_i$. Ce choix n'a pas retenu notre attention essentiellement pour les raisons suivantes :

- i) le déterminant des matrices n'est plus généralement égal à 1, mais au rapport des indices définissant les deux milieux ;
- ii) la vergence ne s'obtient plus directement par l'opposé de l'élément C de la matrice de transfert $\mathbf{M}$;
- iii) la matrice de réfraction d'un dioptré plan n'est plus égale à la matrice unité.

1.2.1.2 Application au faisceau gaussien

Nous allons à présent exposer de quelle manière il est possible d'appliquer ce même formalisme matriciel à l'étude des faisceaux gaussiens.

Pour ce faire, nous allons commencer par rappeler les conditions de propagation d'un faisceau sphérique, dans un milieu homogène, dans l'approximation de l'optique géométrique. La variation des fronts d'onde de tels faisceaux se propageant le long de l'axe peut se traduire à travers les éléments de la matrice de rayons (1.33).

Pour cela, considérons en premier lieu la propagation libre d'une onde sphérique, prise à deux positions de fronts de phase différentes, caractérisés par des rayons de courbures R_{C_1} et R_{C_2} , et séparés d'une distance Δz (figure 1.6).

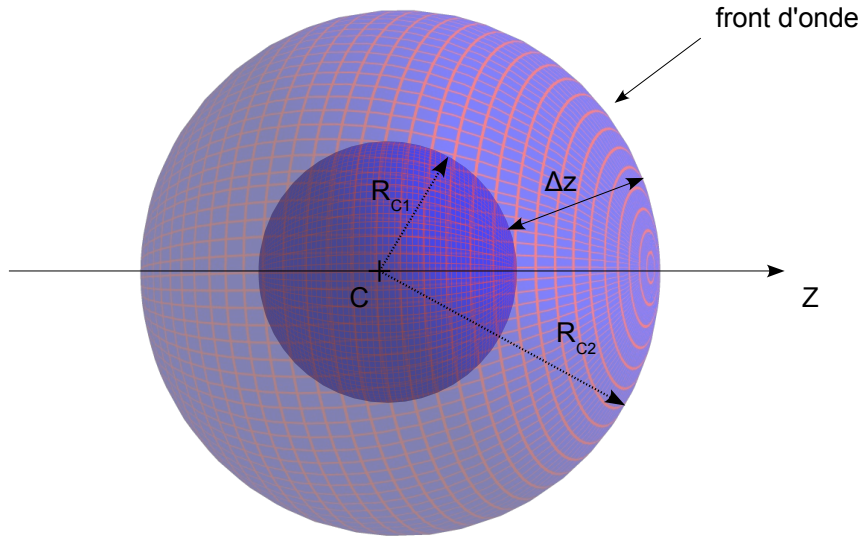


FIGURE 1.6 – Deux fronts d'onde sphériques issus d'une même source et de rayons de courbure respectifs R_{C_1} et R_{C_2} . Les intersections respectives avec l'axe optique (Oz) sont espacées d'une grandeur Δz .

Il apparaît évident que la transformation pour passer du rayon de courbure R_{C_1} au rayon R_{C_2} est :

$$R_{C_2} = R_{C_1} + \Delta z \quad (1.34)$$

où le rayon est compté positivement s'il est issu de la gauche (front concave), et négativement dans le cas contraire (front convexe).

De la même façon, propageons un même faisceau de rayon de courbure R_{C_1} , arrivant sur une lentille mince de focale f . Le faisceau émergent en sortie de lentille préservera sa forme sphérique. Toutefois, son rayon de courbure se sera modifié, à partir des relations de conjugaison, tel que :

$$\frac{1}{R_{C_2}} = \frac{1}{R_{C_1}} - \frac{1}{f} \quad (1.35)$$

Considérons maintenant que ce faisceau traverse un système optique quelconque, dans les conditions paraxiales, comme sur la figure 1.7.

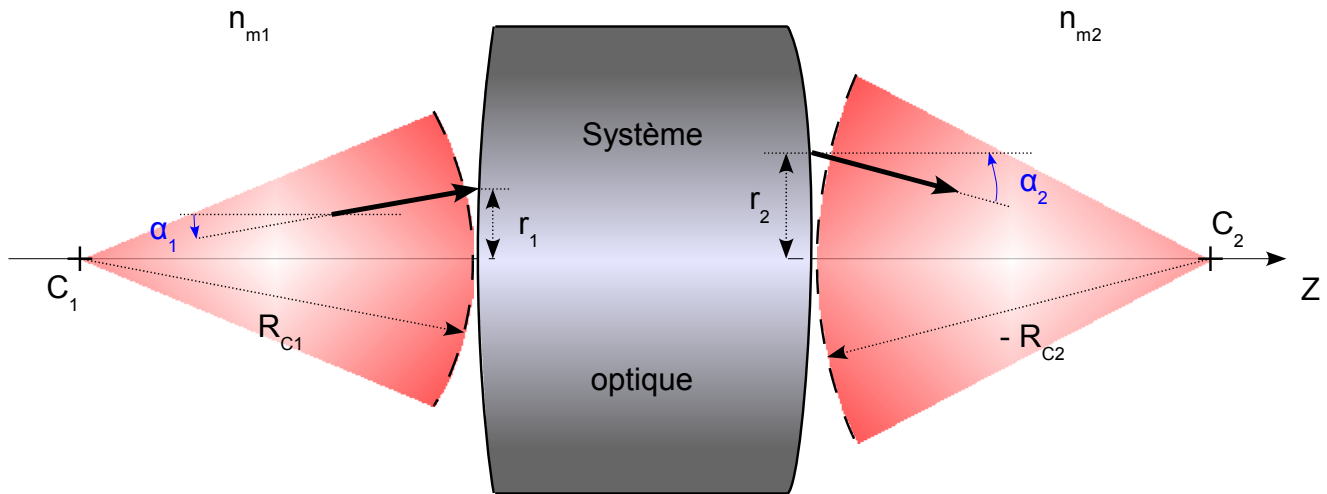


FIGURE 1.7 – Transformation d'une onde sphérique passant à travers un système optique paraxial. Nous avons représenté en particulier la transformation d'un des rayons composant le faisceau, et défini par des paramètres incidents ($r_1, n_{m1}\alpha_1$), et émergents ($r_2, n_{m2}\alpha_2$).

Il apparaît alors que le même raisonnement, identique à celui effectué pour les rayons paraxiaux, peut être étendu aux ondes sphériques.

Ainsi, nous pouvons déduire de la forme matricielle précédente en (1.33) le système suivant :

$$\begin{cases} r_2 &= A r_1 + B n_{m_1} \alpha_1 \\ n_{m_2} \alpha_2 &= C r_1 + D n_{m_1} \alpha_1 \end{cases} \quad (1.36)$$

Ce qui nous amène, en effectuant le rapport des deux égalités à :

$$\frac{r_2}{n_{m_2} \alpha_2} = \frac{A (r_1 / n_{m_1} \alpha_1) + B}{C (r_1 / n_{m_1} \alpha_1) + D} \quad (1.37)$$

Ce qui nous permet de poser la loi de propagation suivante pour un faisceau sphérique :

$$\frac{R_{C_2}}{n_{m_2}} = \frac{A (R_{C_1} / n_{m_1}) + B}{C (R_{C_1} / n_{m_1}) + D} \quad (1.38)$$

où nous avons considéré $R_{C_1} \simeq r_1 / \alpha_1$ et $R_{C_2} \simeq r_2 / \alpha_2$ en limite d'approximation paraxiale.

Nous allons à présent étendre cette étude aux faisceaux gaussiens [79, 82]. Comme nous l'avons rappelé dans la section (1.1.2), il est commun d'exprimer le paramètre gaussien $\underline{q}$ sous une relation simple d'évolution telle que :

$$\underline{q}(z) = \underline{q}_0 + z \quad (1.39)$$

où nous avons fixé $\underline{q}_0$ comme étant le paramètre gaussien au niveau du *waist*.

Par la même, nous pouvons considérer non plus l'évolution du faisceau gaussien à partir du plan du *waist*, mais entre deux plans quelconques de l'espace. Ainsi, dû à la linéarité de l'équation (1.39), nous pouvons écrire :

$$\underline{q}_2(z) = \underline{q}_1(z) + z \quad (1.40)$$

De la même façon, la propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille mince s'effectuera par une évolution de ses paramètres intrinsèques. Ainsi, sa largeur de faisceau ω restera inchangée, alors que les rayons de courbure du front d'onde suivront la loi d'évolution des rayons de courbure dans le cas d'une onde sphérique (équation (1.35)). Ce qui nous permet de déduire la loi d'évolution des faisceaux gaussiens, via les lentilles minces, telle que [73] :

$$\frac{1}{\underline{q}_2} = \frac{1}{\underline{q}_1} - \frac{1}{f} \quad (1.41)$$

Nous ressortons de ces deux équations (1.40) et (1.41), en parallèle avec les équations respectives (1.34) et (1.35), un comportement évolutif du paramètre $\underline{q}$ similaire à celui observé pour le rayon de courbure d'un faisceau sphérique.

Ce qui nous amène à définir, de manière équivalente à (1.38), pour un faisceau gaussien [72, 74, 75] :

$$\frac{\underline{q}_2}{n_{m_2}} = \frac{A (\underline{q}_1 / n_{m_1}) + B}{C (\underline{q}_1 / n_{m_1}) + D} \quad (1.42)$$

où n_{m_1} et n_{m_2} représentent respectivement les indices de réfraction des milieux initial et final. Les quatre éléments A , B , C et D correspondent aux composantes de la matrice (unitaire) de transfert $\mathbf{M}$ entre les plans (P_1) et (P_2) , situés respectivement en entrée et en sortie du système optique centré (figure 1.8). Toutefois, l'absorption du milieu étant négligée, la matrice $\mathbf{M}$ sera définie comme réelle [72].

Cette forme généralisée de la propagation d'un faisceau gaussien entre deux plans de l'espace, séparés par un système optique quelconque, est appelée *loi ABCD*. Son établissement nous a permis de montrer une analogie entre la loi d'évolution du paramètre complexe gaussien $\underline{q}$, et celle à laquelle obéit une onde sphérique suivant l'optique géométrique.

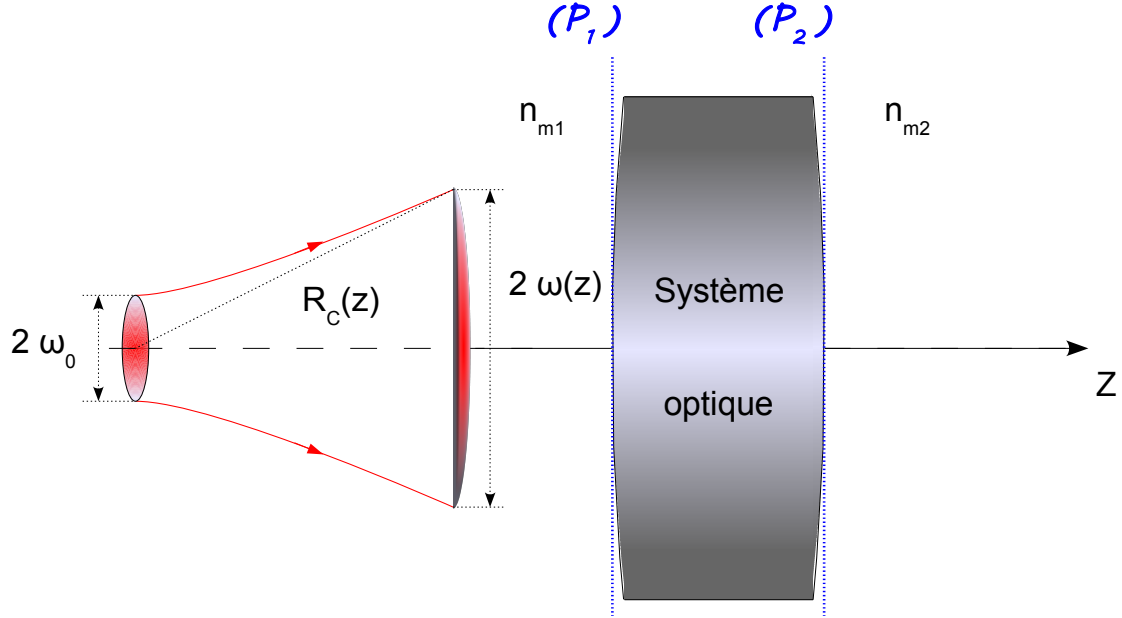


FIGURE 1.8 – Propagation d'un faisceaux gaussien arrivant sur un système optique quelconque compris entre un milieu incident d'indice n_{m1} et un milieu émergent d'indice n_{m2} .

Nous pouvons alors définir l'ensemble des paramètres d'un faisceau gaussien propagé, à partir de la loi de propagation entre le rayon de courbure complexe défini en entrée et en sortie d'un système optique dont les caractéristiques sont connues (distance focale et plans principaux).

Rappelons ainsi, à titre d'exemple, le cas de la transformation d'un faisceau gaussien par une lentille mince convergente de focale f (figure 1.9). Nous savons alors que les plans principaux sont confondus avec le plan contenant le centre de la lentille. Les éléments définissant le système vont ainsi nous permettre de déduire assez facilement les composantes de la matrice de transfert *ABCD*. Ce qui nous amène, à partir des équations (1.39) et (1.42)⁷, aux équations de transformations entre les paramètres de faisceau en entrée de système (ω_0 et σ_0), et ceux en sortie (ω_1 et σ_1) :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \frac{f}{\sqrt{\sigma_0^2 + z_R^2}} \\ \sigma_1 = \sigma_0 \frac{f^2}{\sigma_0^2 + z_R^2} \end{cases} \quad (1.43)$$

où σ_0 et σ_1 représentent, respectivement, les distances *waist objet-foyer objet* et *foyer image-waist image*.

⁷En revenant à une condition générale où les paramètres *ABCD* restent quelconques, nous pouvons remonter à la relation homographique, liant la position d'un point objet à celle d'un point image, des faisceaux non gaussiens en posant $z_R = 0$.

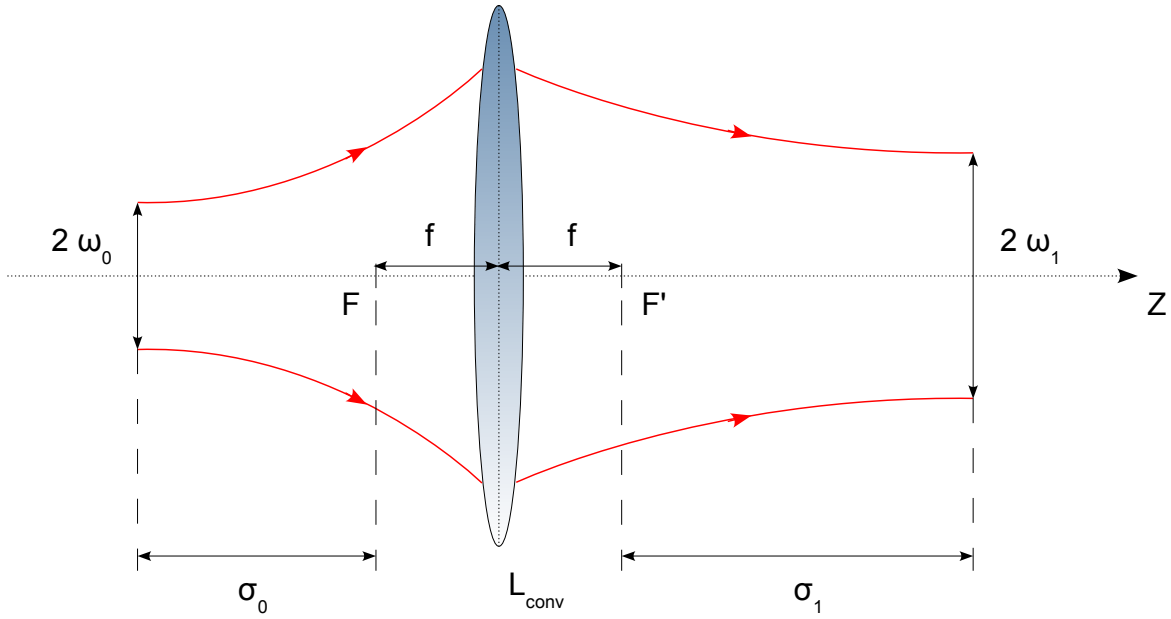


FIGURE 1.9 – Transformation des paramètres (ω_0 et σ_0) d'un faisceau gaussien au passage à travers une lentille mince convergente.

1.2.2 Confinement transversal d'un faisceau gaussien par un ensemble de lentilles équidistantes

Bien que naturellement peu divergeant, il est souvent nécessaire de contenir une grande partie de l'énergie d'un faisceau laser au cours de sa propagation. Cela est réalisé généralement par l'emploi d'un résonateur optique, autrement dit, d'une cavité formée par deux miroirs en opposition. Ainsi, si les rayons de courbure des réflecteurs coïncident avec celui du front d'onde du faisceau propagé, et que le déphasage accumulé par ce dernier sur un aller-retour de cavité est un multiple entier de 2π , alors le champ entrera en résonance avec la cavité⁸. Celui-ci restera donc confiné au sein du résonateur, et présentera une évolution périodique de son champ. Cela vérifie les conditions de stabilité du faisceau.

Nous chercherons, dans un premier temps, à obtenir des profils de champ périodiques, tout en admettant l'homogénéité du milieu environnant ($n_{m_1} = n_{m_2} = n_m$). Cela revient à considérer que les rayons restent confinés proches de l'axe, au cours de la propagation, à travers les divers éléments optiques. Pour cela, nous pouvons commencer par établir l'analogie, bien connue, entre une cavité dépliée et un ensemble de lentilles équidistantes (figure 1.10) [73, 83].

⁸Nous verrons par la suite que le déphasage accumulé sur un aller-retour de cavité peut également prendre une valeur rationnelle, et plus simplement entière, de 2π dans le cas des cavités fractionnellement dégénérées [78].

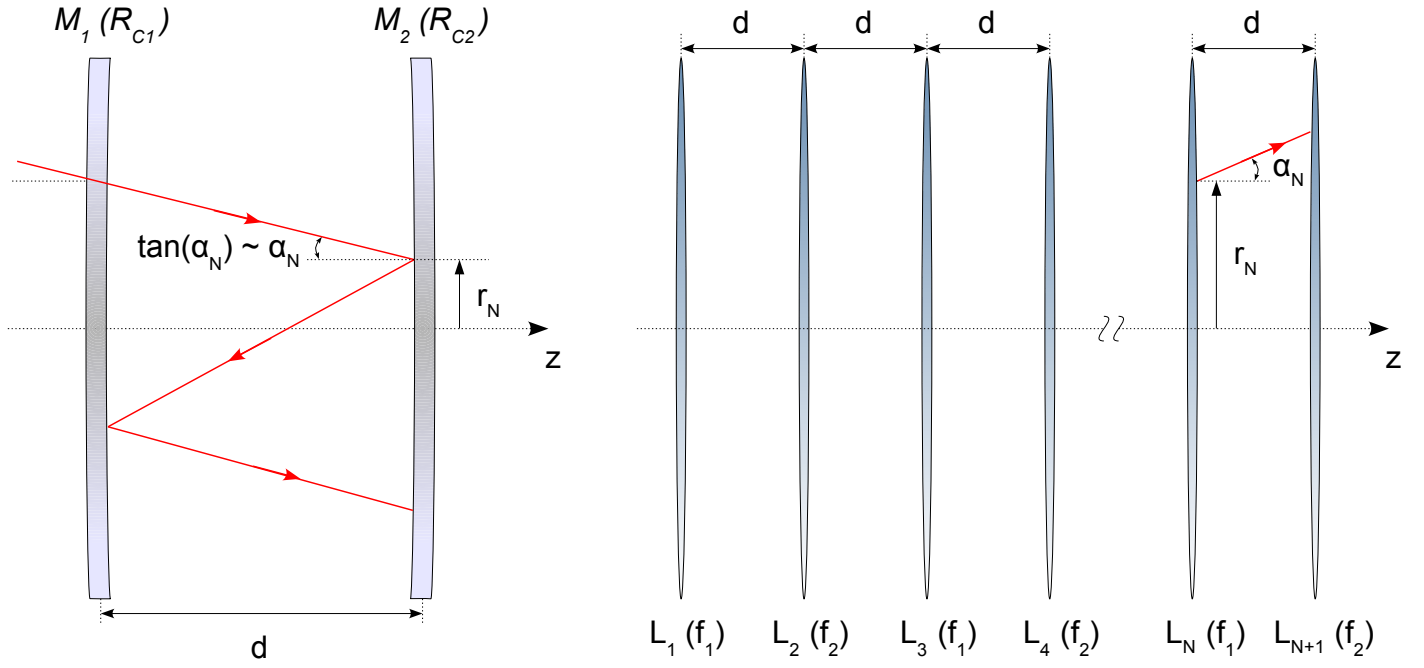


FIGURE 1.10 – Schéma d'équivalence entre un résonateur optique à miroirs sphériques et un réseau de lentilles équidistantes. Les propriétés du rayon, en propagation confinée, sont définies par sa position r_N et son inclinaison par rapport à l'axe optique α_N . Et cela, dans chaque région N du réseau, ou N -ième réflexion dans la cavité. Les miroirs composant cette dernière sont définis par un rayon de courbure tel que : $R_{C_1} = 2f_1$ et $R_{C_2} = 2f_2$.

Cela revient à considérer qu'au bout d'une période, nous retrouvons exactement le même rayon de courbure complexe qu'initialement. Cela est équivalent au cas des cavités optiques où, après un aller-retour du faisceau entre les deux miroirs, un mode se déphase d'un multiple entier (cavité simple), ou rationnel (cavité fractionnaire), de 2π , afin d'établir des conditions d'interférences constructives au sein du résonateur. Nous pouvons donc écrire, à partir de (1.42) :

$$\underline{\hat{q}} = \frac{A\underline{\hat{q}} + B}{C\underline{\hat{q}} + D} \quad (1.44)$$

où nous définissons le paramètre réduit $\underline{\hat{q}} = q/n_m$.

La résolution du polynôme d'ordre deux en résultant nous amène à la condition de stabilité bien connue dans le cas des cavités, soit :

$$|A + D| < 2 \quad \Rightarrow \quad |Tr(\mathbf{M})| < 2 \quad (1.45)$$

où $Tr(\mathbf{M})$ représente la trace de la matrice de transfert $\mathbf{M}$.

Ce résultat est issu du fait que les solutions doivent être complexes pour que le faisceau existe, impliquant que le discriminant soit négatif.

Toutefois, une autre possibilité revient à injecter le faisceau non plus sur l'axe, mais désaxé d'un certain angle par rapport à l'axe optique. Cela fut initialement étudié par *Herriott et al.*, en 1964, dans le but d'obtenir une haute dégénérescence de modes transverses excités, appartenant à différents modes longitudinaux (sec. 2.1.5) [78]. Il fut démontré, entre autre, qu'il était possible, dans le cas d'une injection de faisceau hors axe, de définir des paramètres de système pour lesquels la cavité serait ré-entrante. Ainsi, le faisceau peut se reboucler spatialement sur lui-même après N allers-retours. Toutefois, les points d'impact liés au faisceau sur les miroirs définiront un schéma suivant une géométrie elliptique, contrairement au cas sur axe caractérisé par une trajectoire circulaire.

1.2.3 Propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille boule

L'approximation en lentille mince peut se justifier lorsque son épaisseur est négligeable devant les dimensions du système d'étude. Or, dès qu'elles deviennent du même ordre de grandeur, on ne pourra plus négliger la propagation des rayons lumineux à l'intérieur de la lentille, qui sera alors approximée à une lentille boule. Il apparaît évident que sa distance focale en sera changée, ainsi, déterminons en quoi les conditions de stabilité peuvent évoluer lorsque l'approximation en lentille mince n'est plus valable.

Pour cela, commençons par établir l'expression de la matrice de transfert liée à une lentille boule de rayon ρ . Nous considérons que cette dernière est constituée de deux dioptries sphériques, délimitant un milieu interne d'indice de réfraction n_b d'un milieu extérieur d'indice n_m .

$$\mathbf{M}_{boule} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} & 2 \rho \frac{n_m}{n_b} \\ 2 \frac{n_m - n_b}{\rho n_b} & 1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

L'expression de cette matrice a été obtenue en fixant l'espacement entre les deux dioptries à 2ρ , revenant à considérer le cas d'une sphère idéale. L'analyse dimensionnelle des éléments matriciels nous indique que les éléments B et C sont respectivement homogènes à une longueur, et l'inverse d'une longueur. Le premier est lié à la distance entre les sommets de chaque dioptrie, et le deuxième à la vergence du système optique [72,75]. De la même façon, une propriété générale sur les systèmes centrés nous permet d'avancer que l'élément C est identique, quels que soient les plans de références considérés.

Pour montrer cela, nous allons considérer la propagation d'un rayon lumineux entre deux milieux, d'indices respectifs n_{m1} et n_{m2} , et séparés par un système optique paraxial quelconque. Nous nous intéresserons simplement à la transformation de points particuliers, définissant l'intersection du rayon avec l'axe optique avant (point A_1), et après (point A_2) le système optique (figure 1.11).

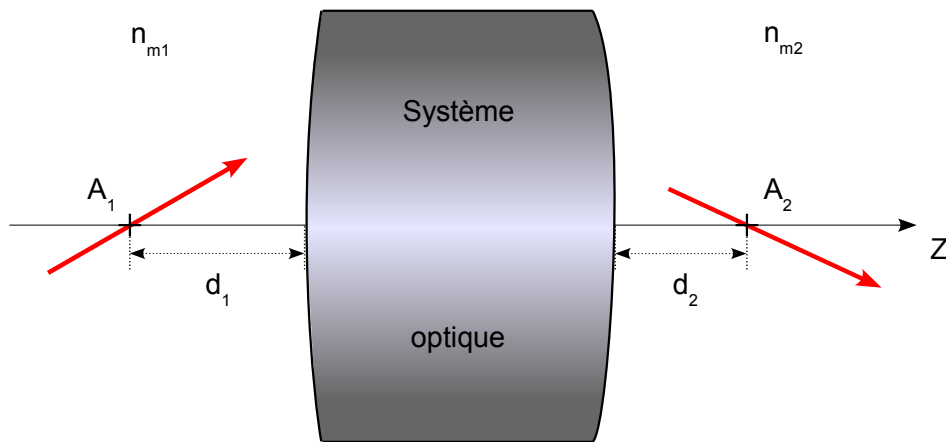


FIGURE 1.11 – Propagation d'un rayon lumineux interceptant l'axe optique aux points A_1 et A_2 , respectivement situés avant et après un système optique paraxial quelconque caractérisé par une matrice de transfert $ABCD$.

En considérant que les points A_1 et A_2 se trouvent respectivement à une distance d_1 de la face d'entrée et d_2 de celle de sortie du système optique, nous pouvons calculer la matrice de transfert $\mathbf{M}$ caractérisant la propagation entre les deux points :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & d_2/n_{m_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1/n_{m_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A + C \frac{d_2}{n_{m_2}} & A \frac{d_1}{n_{m_1}} + C \frac{d_1 d_2}{n_{m_1} n_{m_2}} + B + D \frac{d_2}{n_{m_2}} \\ C & C \frac{d_1}{n_{m_1}} + D \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Il est clair que seul l'élément M_{21} , de la matrice de transfert $\mathbf{M}$, est indépendant du parcours du rayon, autrement dit de la distance ($A_1 A_2$). Il représente donc une caractéristique intrinsèque au système. Nous pouvons alors en déduire l'expression de la focale, dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques, à partir de la relation $V = 1/f$.

Nous observons, en premier lieu, que l'expression de la focale dans le cas d'une lentille boule :

$$f = -\frac{1}{2} \frac{\rho n_b}{n_m - n_b} \quad (1.48)$$

diffère de celle d'une lentille mince d'un facteur $n = n_m/n_b$.

Ici, les calculs ont été effectués en considérant un espacement, entre les deux sommets des dioptries, égal à 2ρ pour le cas de la lentille épaisse, et tendant vers 0 pour celui en lentille mince. Ainsi, pour $n_m < n_b$, nous avons $f_{mince} < f_{épaisse}$.

Suite à cela, il suffit de considérer une matrice de propagation libre sur une distance d , et de multiplier cette dernière avec celle de la lentille boule pour obtenir la matrice de transfert liée à une maille élémentaire composée d'une seule lentille (figure 1.12).

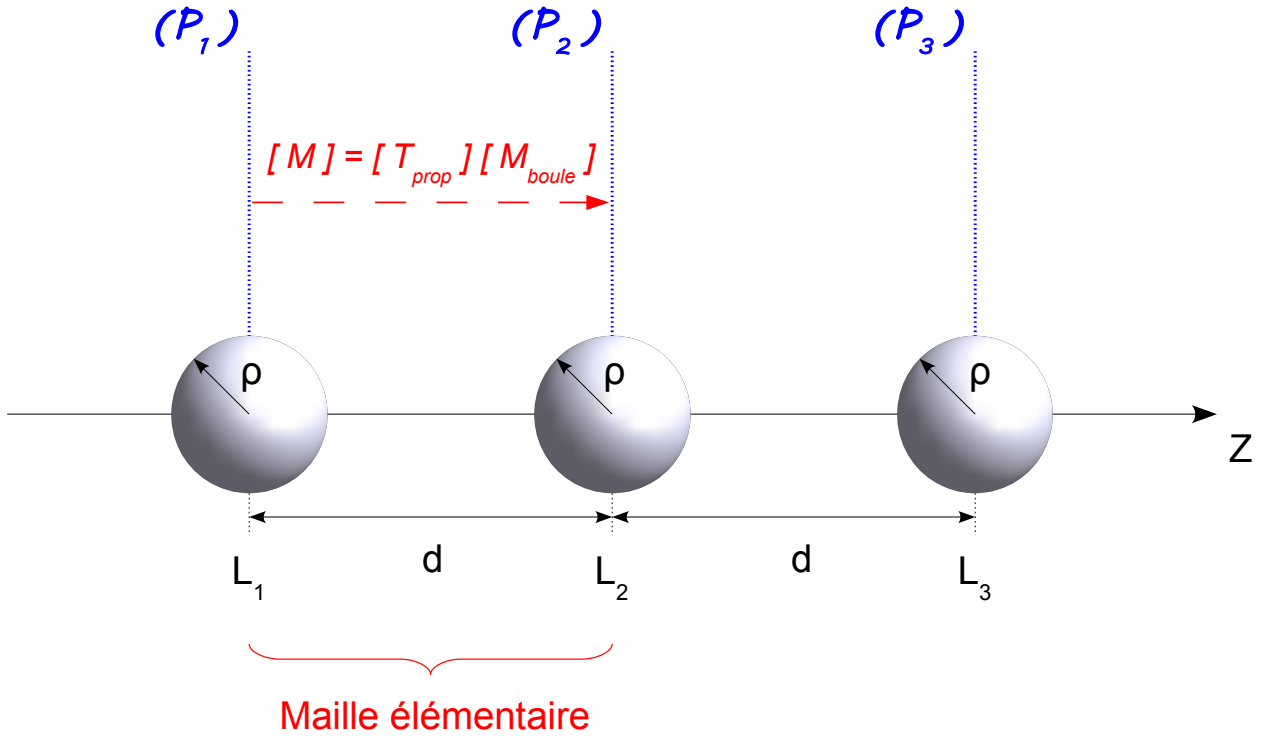


FIGURE 1.12 – Représentation d'une maille élémentaire dans un réseau de lentilles boules équidistantes et identiques (rayon ρ et indice de réfraction n_b). La matrice de transfert $[M]$, définie pour chaque maille du réseau, est donc le produit de la matrice de propagation libre $[T_{prop}]$ sur une distance d , par la matrice propre à la lentille sphérique $[M_{boule}]$.

La résolution du polynôme caractéristique nous permet d'obtenir, à partir des valeurs propres, les conditions de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} d < 4n_m f & \text{pour une lentille mince} \\ d < 4f/n & \text{pour une lentille épaisse} \end{cases} \quad (1.49)$$

Nous en déduisons que dans le cas d'une lentille boule épaisse, l'intervalle sur lequel nous pourrions obtenir des conditions de stabilité du faisceau sera plus restreint que dans le cas d'une lentille mince (car $n = n_b/n_m$ et $n_b > 1$). Nous pouvons constater cela à partir de la figure 1.13, où nous observons significativement une diminution de l'espacement maximal entre billes définissant un équilibre stable dans le système, en fonction de l'augmentation de l'indice de réfraction relatif n . Nous pouvons justifier ce résultat à partir d'une simple interprétation géométrique, en considérant que le faisceau est refocalisé après chaque passage de lentille d'autant plus fortement que le gradient d'indice augmente. Les espacements des billes à l'équilibre s'en trouvent alors diminués.

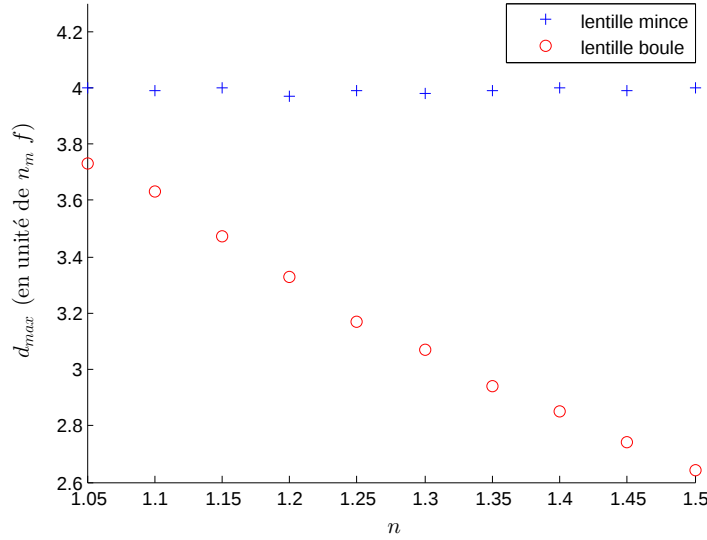


FIGURE 1.13 – Représentation de la périodicité maximale du réseau accessible pour préserver un état d'équilibre stable, en fonction des variations de l'indice de réfraction relatif, dans le cas de l'approximation en lentille mince et en lentille boule.

Observons, à présent, le cas d'une propagation à travers, non plus une maille, mais N mailles élémentaires.

1.2.4 Propagation à travers plusieurs mailles élémentaires

1.2.4.1 Matrice de transfert et plans de référence

Nous venons de voir que le rayon de courbure complexe réduit satisfait à l'équation (1.42) :

$$\hat{q}_2 = \frac{A \hat{q}_1 + B}{C \hat{q}_1 + D} \quad (1.50)$$

Ces résultats, établis sur une période, peuvent bien évidemment être généralisés sur un plus grand nombre de périodes. En posant $\hat{q}_0$ le rayon de courbure complexe initial, et $\hat{q}_N$ et $\hat{q}_{N+1}$ les rayons de courbure complexes respectivement dans les N -ième et $(N+1)$ -ième plans de référence, nous pouvons écrire [72] :

$$\hat{q}_{N+1} = \frac{A \hat{q}_N + B}{C \hat{q}_N + D} = \frac{A_{N+1} \hat{q}_0 + B_{N+1}}{C_{N+1} \hat{q}_0 + D_{N+1}}, \quad \forall \hat{q}(z) \text{ avec } z \in \text{période} \quad (1.51)$$

où les éléments (A, B, C, D) correspondent à la matrice de transfert $\mathbf{M}$ définie sur une période, et ceux notés $(A_{N+1}, B_{N+1}, C_{N+1}, D_{N+1})$ à la matrice de transfert $\mathbf{M}_{N+1}$ définie sur $(N+1)$ périodes.

En effet, il peut être aisé de montrer que si une matrice $\mathbf{M}_1$ permet de transformer $\hat{q}_1$ en $\hat{q}_2$, et que si une matrice $\mathbf{M}_2$ permet pareillement de transformer $\hat{q}_2$ en $\hat{q}_3$, la matrice $\mathbf{M}_3$, alors définie par le produit des deux précédentes, va permettre le passage direct de $\hat{q}_1$ à $\hat{q}_3$.

En résumé, si nous cherchons à exprimer le paramètre gaussien en un plan donné $\hat{q}_N$, en fonction du paramètre initial $\hat{q}_0$, nous devons calculer la matrice totale $\mathbf{M}_N$ comme le produit des matrices élémentaires liées à chaque transformation.

En d'autres termes, suivant le plan de référence initial que nous considérons, la matrice de transfert ne sera pas définie de la même façon (figure 1.14).

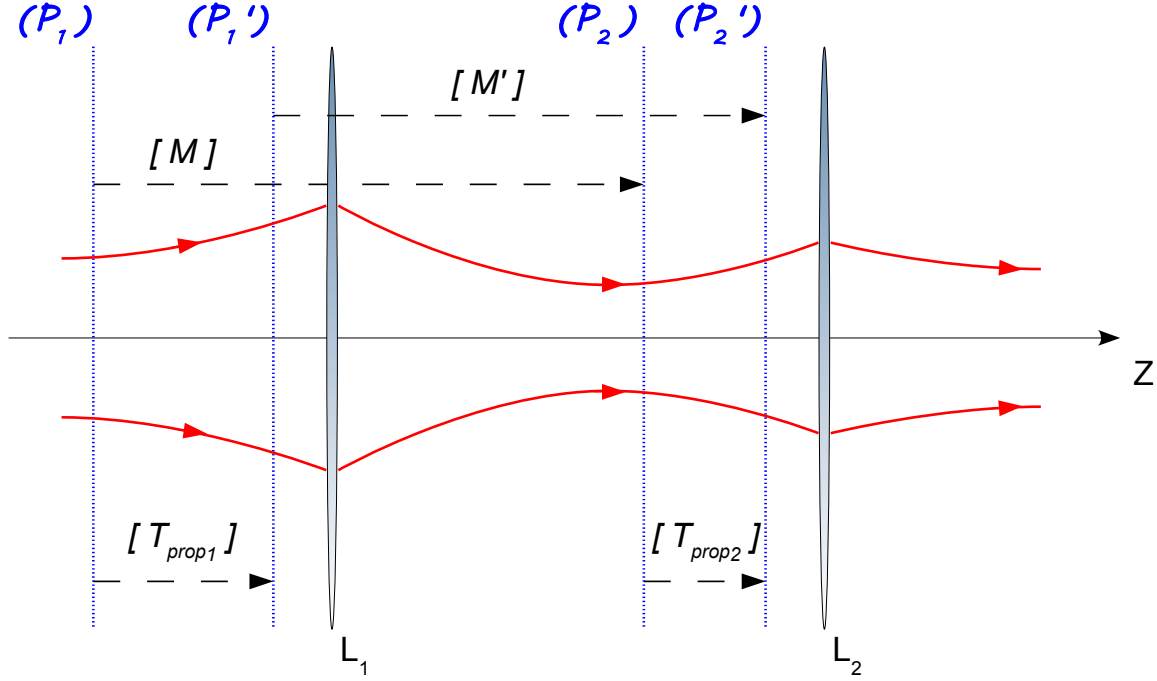


FIGURE 1.14 – Transformation d'un faisceau gaussien, à travers un système optique, suivant divers plans de référence.

Établissons alors le liens entre les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$.

Pour cela, commençons par définir le passage libre entre deux plans :

$$\hat{q}_{P_1'} = \frac{t_{11} \hat{q}_{P_1} + t_{12}}{t_{13} \hat{q}_{P_1} + t_{14}} \quad ; \quad \hat{q}_{P_2'} = \frac{t_{21} \hat{q}_{P_2} + t_{22}}{t_{23} \hat{q}_{P_2} + t_{24}} \quad (1.52)$$

où les éléments $(t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14})$ et $(t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{24})$ correspondent respectivement aux matrices de propagation libre $\mathbf{T}_{prop_1}$ et $\mathbf{T}_{prop_2}$.

De la même façon, définissons le passage à travers une lentille :

$$\hat{q}_{P_2} = \frac{A \hat{q}_{P_1} + B}{C \hat{q}_{P_1} + D} \quad ; \quad \hat{q}_{P_2'} = \frac{A' \hat{q}_{P_1'} + B'}{C' \hat{q}_{P_1'} + D'} \quad (1.53)$$

où les éléments (A, B, C, D) et (A', B', C', D') correspondent respectivement aux matrices de transfert $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$.

Ainsi, nous en déduisons la transformation des propriétés du faisceau entre deux plans séparés par une lentille. Pour cela, établissons les matrices de transfert $\mathbf{U}$ entre les plans (P_1') et (P_2) , puis $\mathbf{V}$ entre les plans (P_1) et (P_2) :

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_{prop_2}^{-1} \mathbf{M}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{T}_{prop_2}^{-1} \mathbf{M}' \mathbf{T}_{prop_1} \quad (1.54)$$

Ce qui nous amène à :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} = \mathbf{T}_{prop_2}^{-1} \mathbf{M}' \mathbf{T}_{prop_1} \quad (1.55)$$

Nous reconnaissons ici la formule d'un changement de base. Ainsi, faire un changement de base sur $\mathbf{M}$ correspond donc à changer les plans (P_1) et (P_2) en (P_1') et (P_2') .

1.2.4.2 Systèmes focalisant périodiques stable et instable

Par conséquent, un tel problème de matrices en cascade peut se résoudre analytiquement, en cherchant les valeurs et vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M}$ [72]. De façon équivalente, nous chercherons une base de vecteurs propres $\underline{\xi}$, que nous associons au paramètre $\hat{q}$, et valeurs propres correspondantes Λ , satisfaisant l'équation propre suivante :

$$\mathbf{M}\underline{\xi} = \Lambda\underline{\xi} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{M} - \Lambda\mathbf{1})\underline{\xi} = 0 \quad (1.56)$$

L'équation (1.56) possède alors une solution $\underline{\xi}$ non nulle, si et seulement si le déterminant de la matrice $(\mathbf{M} - \Lambda\mathbf{1})$ est posé égal à zéro. Il s'en suit le polynôme caractéristique :

$$(-1)^2 \Lambda^2 + (-1)^1 \Lambda^1 \text{Tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0 \quad (1.57)$$

où $\text{Tr}(\mathbf{M}) = A + D$, et $\det(\mathbf{M}) = 1$ (matrice unitaire).

En résolvant le polynôme obtenu en (1.57), et en posant $\beta = (A + D)/2$, nous déduisons les solutions suivantes :

$$\Lambda_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (1.58)$$

À partir de quoi, nous pouvons poser :

$$\underline{\xi}_N = \mathbf{M}^N \underline{\xi}_0 = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_+^N & 0 \\ 0 & \Lambda_-^N \end{pmatrix} \mathbf{P} \underline{\xi}_0 \quad (1.59)$$

où $\underline{\xi}_0$ est un vecteur initial associé à $\hat{q}_0$, $\mathbf{P}$ est la matrice de passage unitaire, et $\Lambda_{\pm}$ les deux valeurs propres de $\mathbf{M}$ constituant la matrice diagonale $\mathbf{D}$.

Nous obtenons donc, suivant les valeurs de β , deux types de solutions que nous allons maintenant développer [72].

Système stable En l'occurrence, si $\beta^2 < 1$, soit $|\beta| < 1$, les racines seront complexes conjuguées. Ce qui nous amène à poser $\Lambda_- = \Lambda_+^*$, pouvant se mettre sous la forme $\Lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$. Cela implique que $|\Lambda_{\pm}| = 1$, et que les solutions sont périodiques. Notons toutefois que leur période ne sera pas forcément égale à celle de la chaîne de lentilles.

En considérant que le vecteur initial puisse s'exprimer comme une combinaison linéaire des deux vecteurs propres $\underline{\xi}_{\pm}$, associés à chacune des deux valeurs propres $\Lambda_{\pm}$, tel que :

$$\underline{\xi}_0 = c_+ \underline{\xi}_+ + c_- \underline{\xi}_- \quad (1.60)$$

nous pouvons en déduire l'expression de tout vecteur, dans un tel système périodique :

$$\underline{\xi}_N = c_+ \Lambda_+^N \underline{\xi}_+ + c_- \Lambda_-^N \underline{\xi}_- \quad (1.61)$$

Ce qui, ramené aux valeurs propres précédentes, nous donne :

$$\underline{\xi}_N = c_+ e^{+iN\theta} \underline{\xi}_+ + c_- e^{-iN\theta} \underline{\xi}_- = \underline{\xi}_0 \cos(N\theta) + \hat{p}_0 \sin(N\theta) \quad (1.62)$$

avec $\hat{p}_0 = i(c_+ \underline{\xi}_+ - c_- \underline{\xi}_-)$, et c_+ et c_- des coefficients réels.

Système instable En revanche, si $\beta^2 \geq 1$, soit $|\beta| \geq 1$, les racines seront réelles. Or, sachant que $\Lambda_+ \Lambda_- = 1$, nous pouvons poser $\Lambda_- = \Lambda_+^{-1}$, que nous pouvons écrire sous la forme $\Lambda_{\pm} = e^{\pm\theta}$. Ce qui, en suivant le même raisonnement que précédemment, nous permet de traduire la propagation d'un rayon quelconque dans un système à périodique :

$$\underline{\xi}_N = c_+ e^{+N\theta} \underline{\xi}_+ + c_- e^{-N\theta} \underline{\xi}_- = \underline{\xi}_0 \cosh(N\theta) + \underline{\hat{p}}_0 \sinh(N\theta) \quad (1.63)$$

Dans de telles conditions d'instabilité, au cours de la propagation du rayon sur les N périodes, il va être amené à s'éloigner successivement de l'axe suivant une divergence exponentielle, jusqu'à sortir du système.

Les vecteurs propres, associés aux valeurs propres précédentes, s'obtiennent alors :

$$\mathbf{M} \underline{\xi}_{\pm} = \Lambda_{\pm} \underline{\xi}_{\pm} \quad \text{avec} \quad \underline{\xi}_{\pm} = \begin{pmatrix} \xi_{1\pm} \\ \xi_{2\pm} \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

Soit :

$$\begin{cases} A \xi_{1\pm} + B \xi_{2\pm} = \Lambda_{\pm} \xi_{1\pm} \\ C \xi_{1\pm} + D \xi_{2\pm} = \Lambda_{\pm} \xi_{2\pm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_{2\pm} = \xi_{1\pm} \frac{(\Lambda_{\pm} - A)}{B} \\ \xi_{2\pm} = \xi_{1\pm} \frac{C}{(\Lambda_{\pm} - D)} \end{cases} \quad (1.65)$$

Ce qui nous amène, en normalisant par rapport à $\xi_{2\pm}$ (soit $\xi_{2\pm} = 1$), aux vecteurs propres suivants :

$$\underline{\xi}_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{B}{(\Lambda_{\pm} - A)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\Lambda_{\pm} - D)}{C} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Il est important de préciser que d'un point de vue purement physique, la seule solution acceptable est celle pour laquelle la partie imaginaire du "vecteur propre", que nous associons au rayon complexe $\hat{q}$, est positive. Sans quoi, la largeur du faisceau ω ne serait plus définie.

1.3 Diffraction et *principe de Huygens-Fresnel*

Nous venons ainsi de rappeler les conditions de propagation d'un faisceau gaussien dans l'espace libre et à travers un système optique paraxial quelconque. Or, un des intérêts majeurs reste de caractériser son évolution au contact d'objets transparents ou non.

1.3.1 Exemples généraux de diffraction

Lorsque la lumière rencontre un obstacle, celle-ci est soumise à un ensemble de phénomènes liés à l'interaction avec les composants élémentaires de ce dernier (absorption, diffusion, dispersion, etc.). Or, la comparaison des dimensions intrinsèques de l'obstacle, devant celle de la lumière (typiquement sa longueur d'onde), va jouer un rôle prépondérant dans l'interprétation de l'image obtenue au-delà de l'objet. En effet, un des phénomènes les plus remarquables et complexes, en optique, reste celui de la *diffraction* lié au comportement d'une onde interagissant avec un obstacle.

Comme nous le verrons dans la section qui suit, l'ensemble de la surface de l'obstacle, soumise au rayonnement lumineux, peut être vue comme une infinité de points, se comportant chacun comme une source secondaire. Ces derniers réémettent ainsi une infinité d'ondes sphériques dans tout l'espace. De ce fait, ces ondes interféreront de manière à créer une figure de diffraction spécifique, sur un écran situé en aval de l'obstacle.

Un exemple notoire est celui d'un faisceau lumineux passant à travers un écran percé d'un trou (diaphragme). La figure de diffraction qui en suit est alors directement définie par la géométrie du système (forme et dimension(s) du trou). Tant que la taille de l'ouverture reste grande devant la longueur d'onde, l'image observée conserve globalement un profil similaire à celui du trou. En revanche, lorsqu'elle devient du même ordre de grandeur, et en deçà, une tache centrale, dont les dimensions augmentent avec la diminution de l'ouverture, se retrouve entourée par une succession de maxima secondaires brillants (figures 1.15 et 1.16).

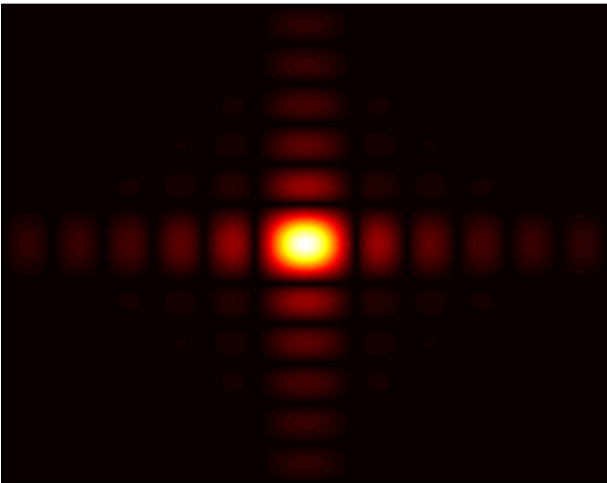


FIGURE 1.15 – Figure de diffraction d'un faisceau laser par une ouverture rectangulaire. Il apparaît clairement le profil d'un sinus cardinal en deux dimensions.

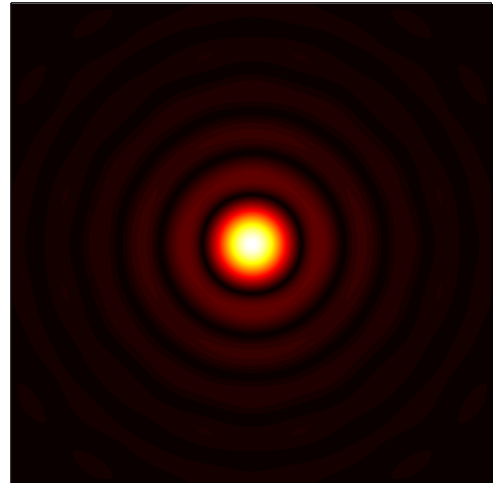


FIGURE 1.16 – Figure de diffraction d'un faisceau laser par une ouverture circulaire. Il apparaît clairement la symétrie de révolution de l'obstacle éclairé. Cette figure est appelée "tache d'Airy".

Remarque : Les deux figures de diffraction, obtenues précédemment, correspondent au cas d'un faisceau lumineux envoyé sur un diaphragme d'ouverture rectangulaire (figure 1.15) ou circulaire (figure 1.16). Toutefois, d'après le théorème de Babinet, nous pouvons avancer que les figures seraient équivalentes dans le cas d'ouvertures dont la géométrie serait "complémentaire" à celle d'un trou, soit une obstruction. Ainsi, à l'exception de la partie centrale (figure géométrique de l'ouverture), la figure de diffraction d'une fente sera équivalente à celle d'un fil tendu.

Nous venons de voir qu'un phénomène diffractif apparaissait au passage d'une onde à travers un diaphragme, ou de façon équivalente un obstacle opaque. Toutefois, un processus identique peut être observé dans le cas d'objets tridimensionnels, tels que des cristaux.

Un cristal peut être vu comme la répétition périodique tridimensionnelle d'éléments (atomes ou molécules). Or, cet agencement, caractérisé par un facteur de périodicité inter-atomique, pourra induire un effet diffractif significatif lorsque ce dernier sera proche des dimensions de la longueur d'onde du faisceau lumineux (généralement des *rayons X*).

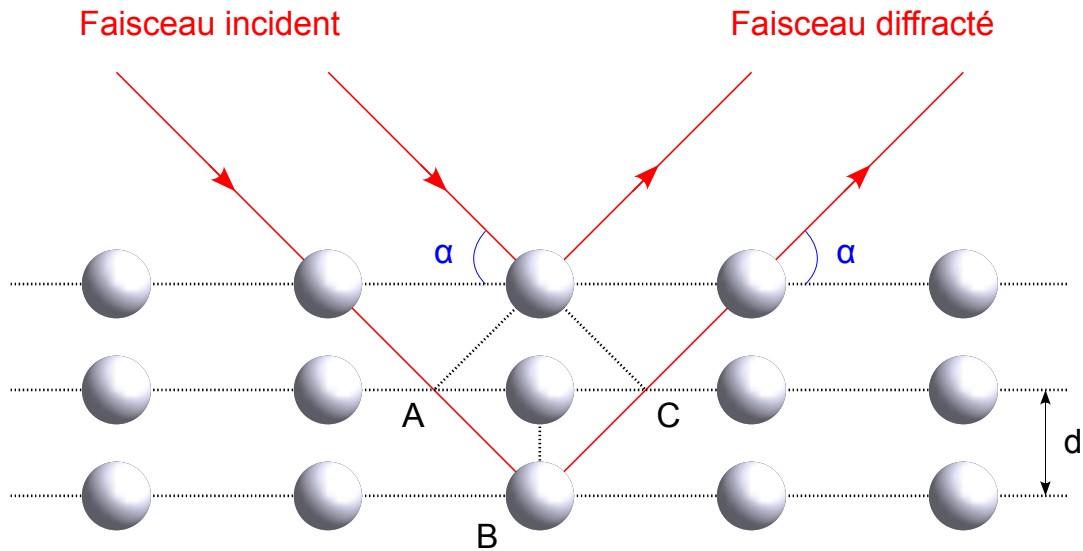


FIGURE 1.17 – Coupe transversale d'un réseau cristallin, faisant apparaître les plans réticulaires espacés de d , dans les conditions vérifiant la loi de Bragg.

Le schéma, exposé sur la figure 1.17, représente une coupe transverse de plans réticulaires passant par les centres des atomes constituant le cristal, et espacés d'une distance d . L'angle α (appelé *angle de Bragg*), détermine l'incidence d'un faisceau parallèle sur ces plans réticulaires. Compte tenu du dessin, il est évident que le rayon qui se réfléchit sur un plan d'atomes parcourt une distance moindre que celui qui se réfléchit sur le plan suivant. La différence de chemin optique entre les deux rayons lumineux particuliers représentés vaut alors :

$$AB + BC = 2d \sin(\alpha) \quad (1.67)$$

Ils interfèrent de manière constructive lorsque cette différence de marche est égale à un nombre entier k de longueur d'onde. Cela traduit la *loi de Bragg*, et se définit comme :

$$2d \sin(\alpha) = k\lambda \quad (1.68)$$

Dans ce cas là, on dira que les ondes (ou les rayons lumineux par abus de langage dû à l'approximation géométrique) sont en phases, ce qui permet d'observer un maximum d'intensité.

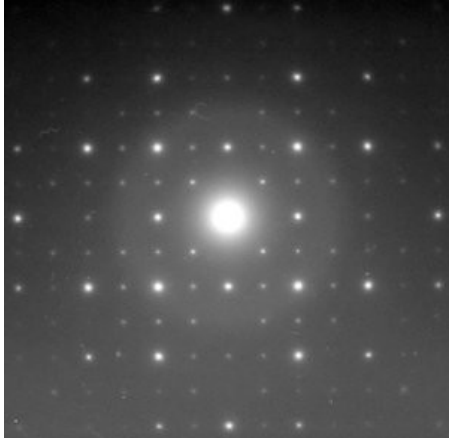


FIGURE 1.18 – *Figure de diffraction d'un faisceau lumineux de rayons X par un cristal.*



FIGURE 1.19 – *Figure de diffraction d'un faisceau lumineux de rayons X par un quasi-cristal d'ordre 5⁹. Ici, nous sommes en présence de pyrite FeS_2 , se présentant sous forme dodécaédrique aux faces pentagonales.*

Les figures de diffraction (celle du faisceau laser qui traverse un tissu, ou celle produite par les *rayons X* diffractés par un cristal) peuvent fournir ainsi des informations précieuses sur la nature et la structure de l'objet responsable de la diffraction (tissu ou cristal) ¹⁰.

Ce phénomène général de diffraction, intimement lié au caractère ondulatoire de la lumière, ne peut être expliqué par l'optique géométrique. Observons alors par quelle approche nous pouvons interpréter qualitativement et quantitativement cet effet.

1.3.2 Approche analytique du modèle 2D

Nous venons de voir que la diffraction d'un faisceau était étroitement liée aux dimensions des objets présents sur le parcours de la lumière. Toutefois, bien que les dimensions des lentilles, dans notre système d'étude, soient grandes devant la longueur d'onde du faisceau, des phénomènes de diffraction peuvent apparaître sur le pourtour de ces objets. D'après le principe de *Huygens-Fresnel*, nous pouvons considérer que chacun des points composant la surface (Σ) de l'objet diffractant peut être assimilé à une source secondaire fictive émettant des ondelettes sphériques, dont l'amplitude est proportionnelle à celle de l'onde incidente au point donné L , dans le plan (xOy) .

⁹Ces cristaux particuliers présentent une symétrie très complexe, dite non périodique. Autrement dit, cette géométrie possède indéniablement une régularité précise, sans pour autant présenter une périodicité de translation dans les dimensions spatiales usuelles. De façon générale, il est possible d'établir un ordre en utilisant les "pavages de Penrose". Il est alors permis de définir une périodicité dans des super-espaces d'ordre élevé.

¹⁰Max von Laue permit le premier de mettre en évidence la diffraction des *rayons X* par les cristaux. Ce qui l'amena à démontrer simultanément que ces rayons se comportent comme des ondes, et que les atomes sont périodiquement organisés au sein des cristaux. Ces travaux lui permirent d'obtenir le prix Nobel de Physique en 1914. *William Henry Bragg* et son fils *William Lawrence* formaliseront et développeront, par la suite, la diffraction des *rayons X* par les cristaux, comme méthode d'étude de leur structure [84]. Ils obtinrent ainsi le même prix que *von Laue* l'année qui suivit.

Si nous désignons alors par $d\Psi$ l'amplitude élémentaire du champ créée en M par une ondelette sphérique, issue de la source élémentaire placée en L dont l'amplitude est $\underline{\Psi}_0$, nous avons [72] :

$$d\Psi(M) = Q \underline{\Psi}_0(L) \underline{t}(x, y) \frac{\exp(ikr)}{r} dS \quad (1.69)$$

où dS désigne l'élément de surface entourant le point L, $\underline{t}(x, y)$ le facteur de transmission, ou transmittance, de l'objet diffractant, et Q est un facteur d'inclinaison ¹¹.

Ici, la portion du faisceau passant au-delà des limites géométriques de la lentille ne sera pas, par conséquent, affectée par cette dernière, et la transmittance liée à cette portion d'espace peut être définie comme : $\underline{t}(x, y) = 1$. Ainsi, en nous ramenant aux limites de la lentille, l'expression de l'amplitude complexe de l'onde diffractée, au point M du plan d'observation ($XO'Y$), est donnée par (figure 1.20) :

$$\underline{\Psi}(M) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \underline{\Psi}_0(L) \underline{t}(x, y) \frac{\exp(ikr)}{r} dS \quad (1.70)$$

Nous plaçant en approximation paraxiale, nous simplifierons les calculs en utilisant l'*optique de Fourier*, basée sur l'emploi de la transformée du même nom. Cependant, la distance entre les plans pupillaires n'étant pas grande devant les autres dimensions du système optique, notamment le diamètre des lentilles boules, l'approximation de *Fresnel* sera plus adéquate que celle de *Fraunhofer*. Ainsi, de façon générale, l'amplitude complexe $\underline{\Psi}$ de l'onde diffractée, dans l'approximation de *Fresnel*, au point d'observation M dans le plan ($XO'Y$), s'exprime comme :

$$\underline{\Psi}(M) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint \underline{\Psi}_0(x, y) \underline{t}(x, y) \exp \left[ik \frac{(X - x)^2 + (Y - y)^2}{2z} \right] dx dy \quad (1.71)$$

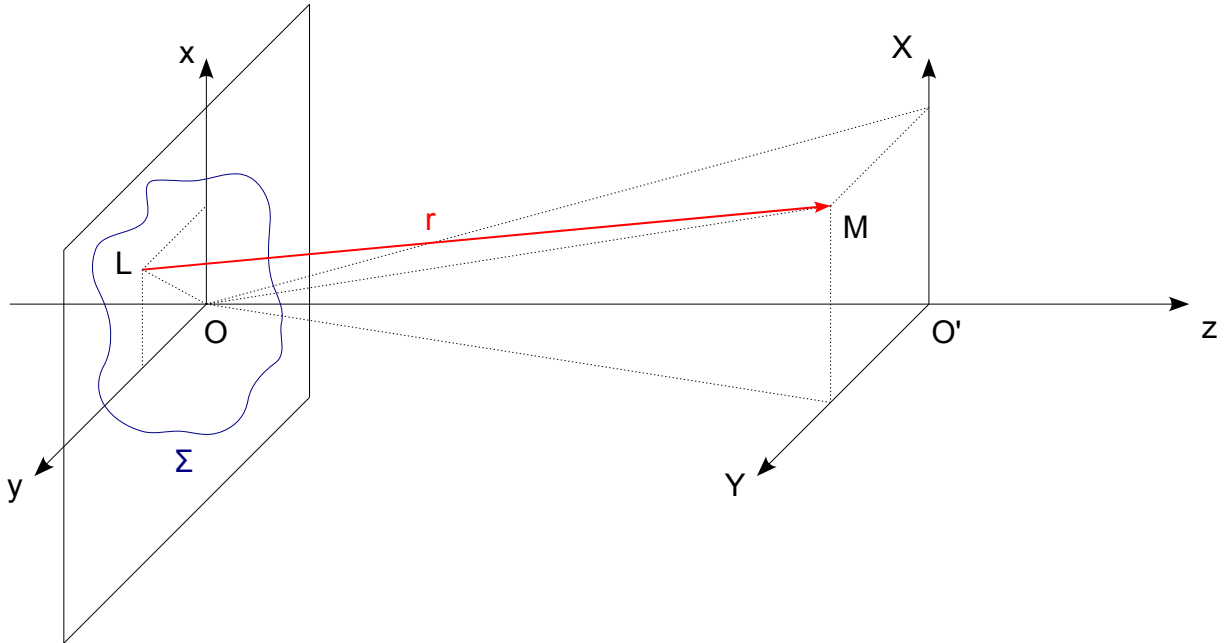


FIGURE 1.20 – Schématisation du principe de diffraction associé à un point L dans le plan du diaphragme, transformé en un point M dans le plan d'observation.

¹¹Ce coefficient d'inclinaison Q , encore appelé facteur d'obliquité, fut introduit par *A. Fresnel*. Il est ainsi lié à l'angle χ que fait le vecteur $\vec{LM}$ avec la normale en L à la surface Σ . Autrement dit, à l'angle entre la direction de propagation de l'onde incidente et la direction de l'onde diffractée. Nous pouvons toutefois remarquer le fait que nous avons omis d'explicitier cette dépendance en χ , et supposés sa constance. Cela fut volontairement admis puisque nous nous sommes placés en approximation paraxiale, l'angle χ est donc supposé très petit. En toute rigueur, l'expression formelle de ce facteur d'inclinaison nécessite l'emploi de la *théorie de Kirchoff* [71], permettant de montrer son expression telle que : $Q(\chi) = \frac{1}{2\lambda i} (1 + \cos(\chi))$. Nous pouvons toutefois apporter une interprétation à cette expression. En effet, le préfacteur introduit un déphasage de $\pi/2$ de toute onde diffractée, alors que le terme en *cosinus* implique que le phénomène ne soit pas isotrope. En effet, la diffraction ne pourra pas se faire dans le sens opposé à celui de l'onde incidente.

En développant le terme quadratique de phase, et en introduisant les fréquences spatiales, nous obtenons :

$$\underline{\Psi}(M) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\pi\lambda z(u^2+v^2)} \iint \underline{\Psi}_0(x, y) \underline{t}(x, y) \exp \left[ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right] \exp \left[-2i\pi \frac{(ux + vy)}{\lambda z} \right] dx dy \quad (1.72)$$

où $\underline{\Psi}_0$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente, et u et v les fréquences spatiales définies comme :

$$u = \frac{X}{\lambda z} \quad \text{et} \quad v = \frac{Y}{\lambda z} \quad (1.73)$$

Sans détailler les calculs, il apparaît que d'après l'équation (1.72), chercher l'image d'un faisceau lumineux, passant à travers un instrument optique, revient à établir le produit de convolution entre la fonction d'onde incidente et une fonction $\underline{h}_F$, appelée *réponse impulsionnelle de Fresnel* :

$$\underline{\Psi}(M) = \underline{\Psi}_0(x, y) * \underline{h}_F(x, y) \quad (1.74)$$

où :

$$\underline{h}_F(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \underline{t}(x, y) \exp \left[ik \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right] \quad (1.75)$$

Dans le cas d'une simple ouverture (diaphragme), ou identiquement d'un disque opaque, l'expression de la transmittance $\underline{t}(x, y)$ est traduite par une fonction simple égale à l'unité quand la lumière passe, et à zéro lorsqu'elle est obstruée. Toutefois, dans notre cas de figure, l'objet diffractant est une lentille boule, dont le diamètre 2ρ ne peut être négligé. Nous allons devoir introduire un terme de déphasage supplémentaire dans l'expression du facteur de transmission, tenant compte du déphasage accumulé par un rayon quelconque ¹² traversant la lentille :

$$\underline{t}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} > \rho \\ e^{-i\Delta\varphi(x, y)} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \end{cases} \quad (1.76)$$

avec,

$$\Delta\varphi(x, y) = 2k(n_b - n_m) \sqrt{\rho^2 - (x^2 + y^2)} \quad (1.77)$$

où n_b et n_m représentent respectivement l'indice de réfraction de la lentille et du milieu environnant, et ρ le rayon de la lentille boule.

Cela équivaut au produit de leur transformée de *Fourier* :

$$\hat{\underline{\Psi}}(u, v) = \hat{\underline{\Psi}}_0(u, v) \cdot \hat{\underline{H}}_F(u, v) \quad (1.78)$$

où $\hat{\underline{H}}_F(u, v)$ définit la fonction de transfert de *Fresnel*.

Il suffit alors de calculer la transformée de *Fourier* inverse pour revenir en représentation spatiale. Quant aux limites du domaine d'intégration, elles seront définies par le diamètres des lentilles boules.

¹²Par rayon quelconque nous entendons tout rayon traversant la lentille hors axe.

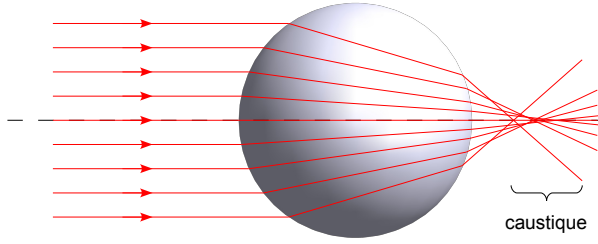


FIGURE 1.21 – *Aberrations sphériques par une lentille boule.*

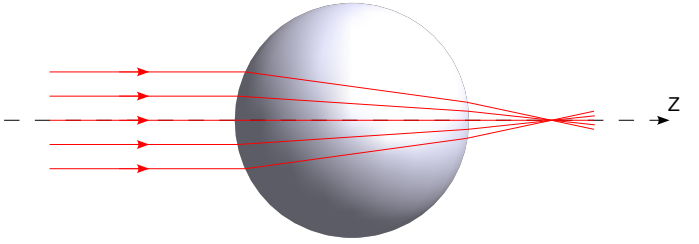


FIGURE 1.22 – *Minimisation du phénomène d'aberration sphérique en condition de Gauss due à la faible inclinaison des rayons par rapport à l'axe optique.*

Il est important de préciser que bien qu'étant en approximation paraxiale ($R_C(z) \gg xy$), les dimensions des lentilles sont telles que des phénomènes d'aberrations sphériques peuvent apparaître (figures 1.21 et 1.22). Nous tenons compte du phénomène dans notre modèle en calculant la différence de marche entre un rayon lumineux frappant la lentille sur l'axe, et un rayon écarté d'un certain angle par rapport à l'horizontale, frappant cette dernière à proximité de ses bords (équation (1.77)).

1.3.3 Simplification et symétrie suivant un modèle unidimensionnel

Nous considérons dans cette étude que le faisceau est gaussien, et injecté sur l'axe optique. Ainsi, nous pouvons admettre qu'il présente une symétrie de révolution autour de l'axe de propagation (Oz). Cela nous permet de nous placer en géométrie cylindrique afin de réduire les dimensions du système. Le champ est alors simplement défini par sa coordonnée radiale r , et donc indépendant de sa coordonnée azimutale ϕ [72]. L'intégrale de *Fresnel* prend alors la forme suivante :

$$\underline{\Psi}(M) = \frac{k}{i} e^{\frac{ikr'^2}{2z}} \int_0^\infty \underline{\Psi}_0(r) \exp \left[i \left(\frac{kr^2}{2z} + \Delta\Phi \right) \right] J_0(2\pi ur) r dr \quad (1.79)$$

où $\underline{\Psi}_0$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente, k/i est un facteur d'inclinaison, u une fréquence spatiale et J_0 la fonction de *Bessel* de première espèce d'ordre 0, définie de façon générale comme :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \quad J_\alpha(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha t - z \sin(t)) dt \quad (1.80)$$

À partir de l'équation (1.79), nous pouvons introduire la fonction de *Hankel* d'ordre 0 suivante :

$$H_0 \{ \underline{\Psi}_0(r) \} = 2\pi \int_0^\infty \underline{\Psi}_0(r) J_0(2\pi ur) r dr \quad (1.81)$$

Ce qui nous permet d'écrire [85] :

$$\underline{\Psi}(M) = \frac{1}{\lambda i} e^{\frac{ikr'^2}{2z}} H_0 \left\{ \underline{\Psi}_0(r) e^{i \left(\frac{kr^2}{2z} + \Delta\Phi \right)} \right\} \quad (1.82)$$

Nous obtenons donc l'intégrale de diffraction dans l'approximation de *Fresnel* en coordonnées cylindriques. La transformée de *Hankel* peut être évaluée numériquement grâce à sa forme quasi discrète [86–88]. Cette transformée présente un coût d'opération plus faible qu'une *Transformée de Fourier Rapide* bidimensionnelle (communément appelée *FFT* pour *Fast Fourier Transform*), car elle résout l'intégrale non plus dans le plan mais seulement sur l'axe radial.

Nous venons de présenter l'ensemble des outils mathématiques qui nous permettent de justifier quant à la qualité des hypothèses que nous posons. Mais également de définir les conditions de stabilité d'un faisceau lumineux au sein d'un réseau de lentilles périodiquement espacées. Ces résultats vont ainsi nous permettre d'observer et d'analyser la réponse optique d'un tel système dans le chapitre qui suit.

Chapitre 2

Modélisation d'une chaîne de lentilles

Sommaire

2.1	Étude avec un espacement entre lentilles périodique	48
2.1.1	Théorème de <i>Bloch-Floquet</i>	48
2.1.2	États propres dans le cas de lentilles équidistantes	49
2.1.2.1	Matrice de transfert, valeurs et vecteurs propres	49
2.1.2.2	Déphasage de <i>Gouy</i>	51
2.1.2.3	Paramètres gaussiens liés aux modes propres	53
2.1.3	Réponse périodique d'un système périodique	54
2.1.3.1	Exemple d'application à la propagation d'un faisceau dans un réseau donné	54
2.1.3.2	Comparaison des deux modèles	59
2.1.3.3	Influence des variations de la longueur d'onde sur les modes du réseau	60
2.1.4	Excitation des modes en fonction des paramètres d'entrée (ω_{0_i} et σ_i)	62
2.1.4.1	Analyse générale de l'évolution longitudinale du faisceau	62
2.1.4.2	Analyse spécifique des modes excités à partir d'un diagramme $\sigma(\omega_0)$	63
2.1.5	Analogie avec les cavités fractionnaires	65
2.1.6	Application au cas d'une maille plus complexe	68
2.1.6.1	Matrice de transfert liée au système	68
2.1.6.2	Propagation d'un faisceau à travers le réseau	72
2.1.7	Faisceau non purement gaussien	72
2.1.7.1	Faisceau <i>multimodes</i> en présence de TEM_{00}	72
2.1.7.2	Faisceau <i>Hermite-gaussien</i>	75
2.2	Analogie avec les cristaux photoniques	77
2.2.1	Maille à plusieurs lentilles et ouverture de <i>gap</i>	77
2.2.1.1	Analogie entre la <i>première zone de Brillouin</i> d'un cristal photonique et celle d'un réseau périodique de lentilles	78
2.2.1.2	Ouverture de <i>gap</i> dans un réseau de lentilles	80
2.2.2	Localisation des maxima du champ dans le réseau et variation sur l'espacement d	82
2.3	Effets d'un défaut : couplage de deux chaînes périodiques	83
2.3.1	Défauts localisés ou ponctuels	83
2.3.1.1	Défaut lacunaire ou défaut de <i>Schottky</i>	83
2.3.1.2	Défaut <i>multi-lacunaire</i>	88
2.3.2	Défauts étendus ou défauts de <i>Wadsley</i>	91
2.4	Application à un ensemble désordonné	93

2.1 Étude avec un espacement entre lentilles périodique

2.1.1 Théorème de *Bloch-Floquet*

Le *théorème de Bloch-Floquet* fut initialement énoncé dans les années 1920 pour déterminer les solutions de l'équation de *Schrödinger*, indépendante du temps, pour un potentiel périodique [89, 90]. Il fut, par la suite, appliqué au cas des cristaux parfaits ¹ pour décrire le comportement des électrons régit par un potentiel périodique au sein des cristaux. De la même façon, il fut possible d'étendre un raisonnement analogue aux cristaux photoniques ², pour décrire la propagation des photons dans un potentiel créé, cette fois, par la périodicité de l'indice optique (nous reviendrons sur ce point plus en détail à la section (2.2)).

Observons en premier lieu une vision générale du problème. Considérons un réseau périodique défini par une alternance de deux milieux diélectriques différents. Ainsi, d'après le *théorème de Bloch-Floquet*, nous pouvons définir un mode de *Bloch* solution à partir d'une fonction périodique ³, intrinsèquement définie par les paramètres du système, de la forme [91, 92] :

$$H(z) = e^{ikz} u_k(z) \quad (2.1)$$

où $u_k(z)$ est une fonction *a-périodique* qui possède la périodicité du réseau : a , tel que $u_k(z) = u_k(z + a)$.

Un mode de *Bloch* se définit ainsi comme une solution particulière du champ, dont la périodicité est celle du réseau.

En introduisant cette solution dans les équations de *Maxwell* obtenues pour des milieux diélectriques isotropes sans perte, sans source ni charge, et pour des champs harmoniques, et en définissant un opérateur hermitien ⁴ Θ comme :

$$\Theta_k = \left(ik + \vec{\nabla} \right) \times \frac{1}{\epsilon(z)} \left(ik + \vec{\nabla} \right) \times \quad (2.2)$$

nous en déduisons une détermination de u_k à partir de l'équation finale :

$$\Theta_k u_k(z) = \left(\frac{\omega(k)}{c} \right)^2 u_k(z) \quad (2.3)$$

Nous retrouvons une équation caractéristique aux valeurs propres.

Dans notre situation, le paramètre associé au champ est le rayon de courbure complexe q , dont l'évolution dépend de la structure du système, autrement dit de la période du réseau de billes. Or, nous avons vu dans le chapitre précédent que les conditions de périodicité du rayon complexe pouvaient être déduites du calcul de diagonalisation de la matrice de transfert définie sur une maille. L'expression de ce dernier, dans un plan donné, peut alors être obtenue à partir d'une combinaison linéaire des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives (équation (1.62)).

¹ Les cristaux parfaits se définissent, comme leur nom l'indique, comme des cristaux idéaux, sans défaut. Ils sont donc assimilés à des empilements périodiques et infinis d'atomes ou de molécules.

² Les cristaux photoniques consistent en un empilement périodique de couches de matériaux diélectriques. Selon le nombre de dimensions spatiales suivant lesquelles la périodicité est vérifiée, nous serons en présence d'un cristal photonique 1D, 2D ou 3D.

³ Typiquement, dans le cas des cristaux photoniques, cette fonction périodique possède la périodicité du potentiel généré par la périodicité des couches diélectriques formant le cristal.

⁴ Un opérateur Θ sera dit hermitien s'il vérifie la relation suivante : $\langle x | \Theta | y \rangle = \langle y | \Theta | x \rangle^*$, où $\langle x | y \rangle$ se définit comme le produit scalaire dans un espace de *Hilbert*, et $\langle | \Theta | \rangle^* = \bar{\Theta}$ comme le complexe conjugué. Ainsi, dans une base orthonormale, une matrice $\mathbf{A}$ sera dite hermitienne si : $\mathbf{A} = {}^t(\bar{\mathbf{A}})$.

Ainsi, de la même façon que les valeurs propres, associées à un système défini par une structure diélectrique périodique, correspondent aux fréquences pour lesquelles un faisceau lumineux pourra se propager dans un cristal photonique, nous associerons aux valeurs propres de notre système les espacements pour lesquels la propagation du champ sera permise. Cette analogie fera l'objet d'une prochaine section (section (2.2)).

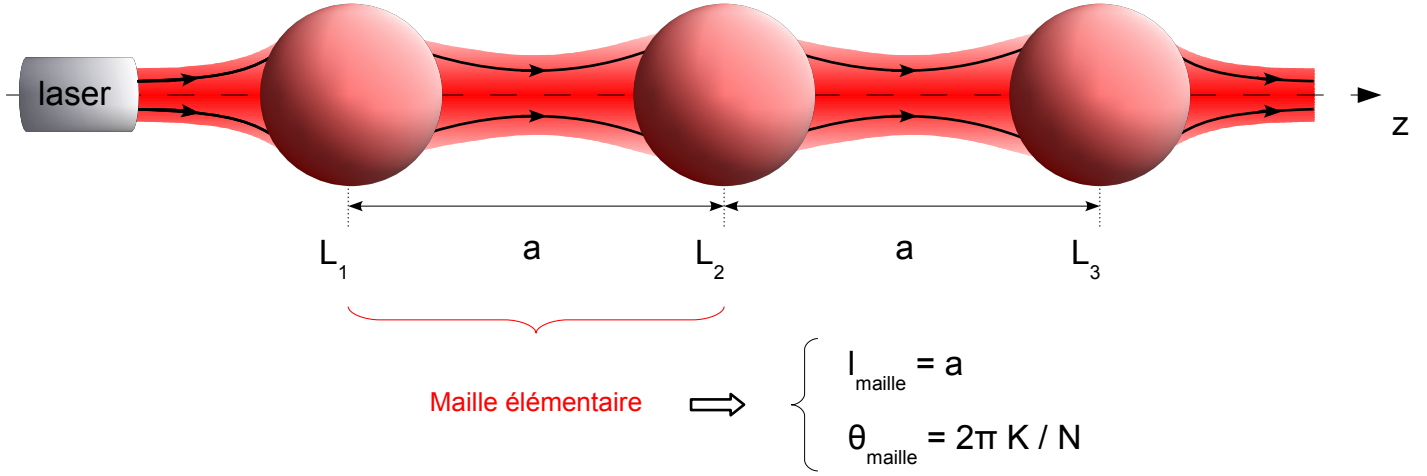


FIGURE 2.1 – Réseau périodique unidimensionnel, composé de 3 particules, et de période a . Il apparaît clairement la présence d'un mode de Bloch, où la périodicité du champ est égale à celle du réseau. La longueur de maille élémentaire est donc définie comme $l_{\text{maille}} = N a = a$.

Rappelons toutefois que l'expression des valeurs propres, définissant un confinement périodique du faisceau, peut se mettre sous la forme $e^{\pm i\theta}$, où θ correspond à la phase de *Gouy*⁵ et est définie comme un rationnel K/N à un facteur 2π près. Par conséquent, nous pourrions établir, notamment, l'ensemble des modes liés au réseau périodique à partir de θ .

2.1.2 États propres dans le cas de lentilles équidistantes

2.1.2.1 Matrice de transfert, valeurs et vecteurs propres

Nous allons à présent chercher à déterminer l'ensemble des paramètres définissant le confinement d'un faisceau lumineux dans un réseau de lentilles. Le cas le plus simple revient à considérer ces dernières identiques et régulièrement espacées.

Ainsi, commençons par calculer la matrice de transfert $\mathbf{M}$ dans le cas où la maille élémentaire est définie par une seule lentille. Les matrices utiles seront donc [72] :

$$T_{\text{lens}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad T_{\text{prop}} = \begin{pmatrix} 1 & d/n_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

La première correspond au passage à travers une lentille mince de distance focale f , et la seconde à une propagation libre sur une distance d dont le milieu environnant possède un indice de réfraction n_m .

La matrice finale, correspondant au système optique, est alors donnée par le produit de ces deux matrices :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - d/n_m f & d/n_m \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

⁵Nous reviendrons plus en détail sur sa définition au paragraphe (2.1.2.2).

Comme nous l'avons souligné dans le précédent chapitre, nous constatons que les éléments diagonaux (A et D) sont sans dimension ; l'élément B est quant à lui homogène à une longueur, alors que C à l'inverse d'une longueur. Posons alors le paramètre réduit suivant :

$$\tilde{d} = d/n_m f \quad (2.6)$$

Nous pouvons ainsi réécrire la matrice $\mathbf{M}$, définie en (2.5), comme suit :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{d} & \tilde{d} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Nous avons ainsi défini une nouvelle matrice, de telle façon que ses composantes soient sans dimension ; les éléments diagonaux restant inchangés ($\tilde{A} = A$ et $\tilde{D} = D$), alors que $\tilde{B} = B/f$ et $\tilde{C} = Cf$.

Les valeurs et vecteurs propres solutions peuvent donc être déduits, en considérant $\tilde{\beta} = (\tilde{A} + \tilde{D})/2$, comme :

$$\begin{cases} \Lambda_{\pm} = \tilde{\beta} \pm \sqrt{\tilde{\beta}^2 - 1} = 1 - \tilde{d}/2 \left[1 \mp \sqrt{1 - 4/\tilde{d}} \right] \\ \underline{\xi}_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{B}}{(\Lambda_{\pm} - \tilde{A})} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d}/2 \left[1 \mp i\sqrt{4/\tilde{d} - 1} \right] \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous savons ici que le rayon "propre" $\underline{\hat{q}}$ est une quantité nécessairement complexe, ainsi [78] :

$$1 - \frac{4}{\tilde{d}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{d} < 4 \quad (2.9)$$

Ce qui, ramené au paramètre réel, donne la condition $d < 4n_m f$, où f représente la focale de la lentille et n_m l'indice de réfraction du milieu environnant. Nous retrouvons bien ici, comme attendu, les conditions de stabilité d'une cavité optique simple, dépliée [72, 93].

Nous venons d'établir les conditions de stabilité d'un système optique, composé d'un ensemble de lentilles régulièrement espacées. Il apparaît qu'un seul paramètre libre, $\tilde{d}$, intervient dans les solutions propres obtenues. Ainsi, ayant montré précédemment que les solutions stables étaient liées aux valeurs propres dont le module est égal à l'unité, observons l'influence des variations du paramètre $\tilde{d}$ sur la stabilité du système.

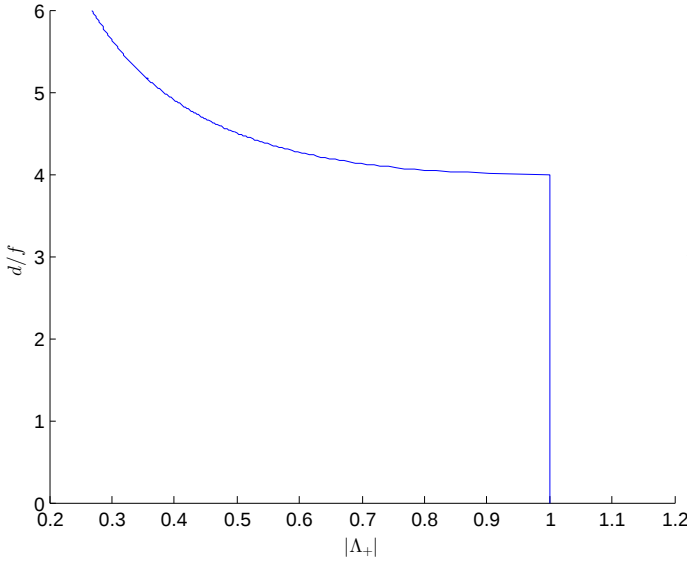


FIGURE 2.2 – Variation, d'après (2.8), de l'écartement d en fonction du module de Λ_+ , pour un espacement régulier entre lentilles.

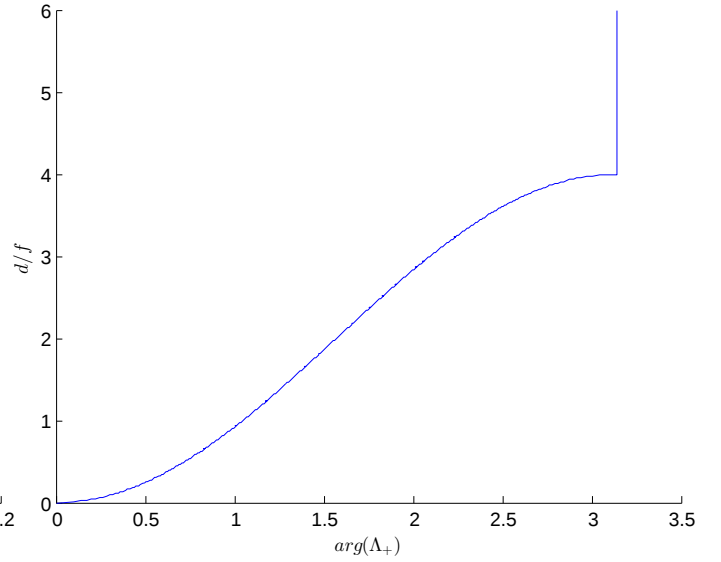


FIGURE 2.3 – Variation, d'après (2.8), de l'écartement d en fonction de l'argument de Λ_+ , pour un espacement régulier entre lentilles.

La figure 2.2 nous montre que pour des valeurs d'espacement entre lentilles inférieures à $4n_m f$, $|\Lambda| = 1$, et en diffère pour des espacements plus grands. Par conséquent, le faisceau restera confiné proche de l'axe au cours de sa propagation dans le système. Dans le cas contraire, soit pour des distances entre lentilles supérieures à $4n_m f$, nous perdons la stabilité et, à chaque période du réseau, le faisceau suivra une divergence exponentielle en $e^{\theta N}$.

Nous retrouvons ici les résultats bien connus depuis les travaux précurseurs de *Herriott et al.* sur la stabilité d'un faisceau au sein d'une cavité optique.

2.1.2.2 Déphasage de Gouy

Nous venons donc de voir que la condition de stabilité du système était directement liée aux valeurs propres de la matrice de transfert, soit, d'après nos calculs précédents, au paramètre $\tilde{\beta}$. Ce dernier étant défini comme la demi-trace de la matrice de transfert :

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{A} + \tilde{D}}{2} \quad (2.10)$$

Nous avons vu que les solutions correspondantes étant complexes, nous pouvons poser $\Lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$, ainsi :

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad (2.11)$$

où θ est défini comme un rationnel à un facteur 2π près, soit $\theta = 2\pi K/N$, avec $1 \leq K \leq N-1$.

Or, $\sum_i \Lambda_i = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}) = 2\tilde{\beta}$. D'où :

$$\tilde{\beta} = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{Arccos}(\tilde{\beta}) \quad (2.12)$$

En effet, en tenant compte du déphasage, acquis par le faisceau, entre les deux positions de références z_{L_1} et z_{L_2} que l'on note $\Delta\Phi$, nous pouvons écrire :

$$\Delta\Phi = \Phi(z_{L_2}) - \Phi(z_{L_1}) = -k(z_{L_2} - z_{L_1}) + \Delta\theta \quad (2.13)$$

Le premier terme correspond au déphasage dû à la propagation sur l'axe, et le second est un terme additif propre aux faisceaux gaussiens. Ce dernier est appelé "*déphasage de Gouy*", et correspond au déphasage par rapport à une onde plane de même longueur d'onde, qui se propage entre les mêmes plans [94,95].

Nous pouvons poser, à partir de la définition donnée en (1.26) :

$$\Delta\theta = \theta(z_{L_2}) - \theta(z_{L_1}) = \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_2}}{z_R}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) \quad (2.14)$$

Afin de simplifier cette expression, nous pouvons introduire le paramètre gaussien $g_i = 1 - d/2n_m f_i$ (où l'indice i se réfère à la i -ème lentilles), tout en considérant comme origine la position du col ω_0 . Nous ne détaillerons pas les calculs ici (se reporter à l'annexe **A**), mais à la suite de quelques manipulations algébriques nous obtenons :

$$\theta = 2 \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right) = \text{Arccos}(g) \quad (2.15)$$

Ainsi, en considérant $\tilde{g} = 1 - \tilde{d}/2$, et en se ramenant à l'expression, précédemment obtenue, en fonction de la demi-trace de la matrice de transfert, nous écrivons :

$$\text{Arccos}(\tilde{\beta}) = \text{Arccos}(\tilde{g}) = 2\pi \frac{K}{N} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\beta} = \tilde{g} = \cos\left(2\pi \frac{K}{N}\right) \quad (2.16)$$

Ce qui, ramené à l'expression avec la trace de $\tilde{\mathbf{M}}$ conduit, dans notre situation, à :

$$\frac{\tilde{A} + \tilde{D}}{2} = \cos\left(2\pi \frac{K}{N}\right) \quad (2.17)$$

En remplaçant les éléments diagonaux $\tilde{A}$ et $\tilde{D}$, de la matrice de transfert, par leur expression respective obtenue précédemment dans le cas de lentilles équidistantes, nous en déduisons (2.7) :

$$1 - \frac{\tilde{d}}{2} = \cos\left(2\pi \frac{K}{N}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{d} = 2 \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{K}{N}\right)\right] \quad (2.18)$$

Nous venons donc d'établir une condition de stabilité du faisceau liant les paramètres de réseau (espacement entre lentilles $\tilde{d}$), et de faisceau (phase de *Gouy* θ), dans le cas d'un espacement entre lentilles régulier. Nous savons que, bien que le déphasage $\Delta\Phi$ puisse évoluer librement dans le réseau, le déphasage "gaussien", quant à lui, doit suivre une évolution périodique suivant la relation $\theta = 2\pi K/N$.

Nous pouvons alors, pour un ensemble de valeurs du rapport K/N rationnelles, définir un ensemble de solutions de (2.18) satisfaisant les conditions d'*accord* de faisceau. Cela, tant que l'inégalité stricte $\tilde{d} < 4$ est respectée. Dans le cas contraire (soit $\tilde{d} > 4$), il apparaît que $|\cos(\theta)| > 1$, ce qui impliquerait une solution complexe. Or, le paramètre $\tilde{d}$ étant lié à deux grandeurs homogènes à une distance, il s'impose de lui même comme une grandeur réelle. Nous pourrions donc, par la suite, nous servir de cette propriété pour expliciter et définir les solutions stables et instables de notre système.

En prenant l'exemple d'un espacement entre lentilles égal à $2n_m f$, autrement dit un rapport $K/N = 1/4$, nous pouvons en déduire que $\tilde{g} = 0$, soit :

$$\theta = \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2} \quad (2.19)$$

Nous obtenons donc, pour cette valeur d'espacement, une phase "gaussienne", ou encore *phase de Gouy*, égal à $\pi/2$. Physiquement, cela signifie que le faisceau gaussien présente un retard de phase de $\pi/2$, par rapport à une onde plane monochromatique associée. Cette situation particulière, où la distance entre deux lentilles est égale à deux fois la focale, est équivalente au cas des cavités confocales (où la distance d est égale aux rayons de courbure des deux miroirs composant la cavité (figure 2.4)). Dans une telle situation, nous savons que les tailles de faisceau au *col* (ω_0), et au niveau des lentilles ($\omega(z_L)$), sont telles que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \quad \text{et} \quad \omega(z_L) = \sqrt{\frac{2\lambda f}{\pi}} \quad (2.20)$$

Nous constatons alors que le facteur de proportionnalité entre les deux grandeurs est défini par $\omega(z_L) = \sqrt{2}\omega_0$ (résultat que nous retrouvons sur la figure 2.7). Ce résultat traduit le fait que chaque lentille se trouve espacée de deux fois la distance de *Rayleigh* ($z_R = f$), ainsi, il serait possible d'approximer les fronts d'onde comme plans.

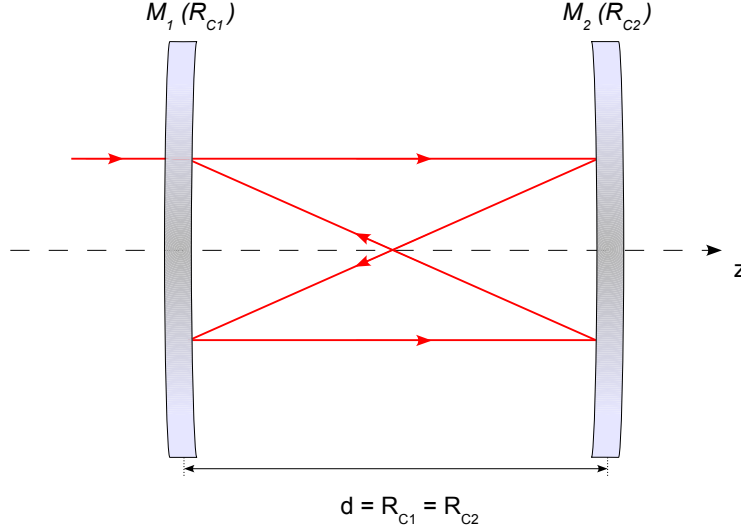


FIGURE 2.4 – Propagation d'un faisceau laser dans une cavité confocale où l'espacement entre les deux miroirs est défini comme égal au rayon de courbure de chacun des miroirs. Nous constatons que le recouvrement du faisceau se fait après 4 passages de cavité, soit 2 allers-retours.

En outre, nous savons que dans le cas d'une cavité confocale, tout faisceau incident, parallèle à l'axe de propagation, se recouvre sur lui-même après deux allers-retours de cavité (figure 2.4). Ce que nous retrouvons ici. Typiquement, dans notre situation, $\theta = \pi/2$. Ce qui nous amène à en déduire que la période est définie sur quatre passages de mailles élémentaires ($\theta = 4 \times \pi/2 = 2\pi$).

Toutefois, précisons ce que nous entendons par conditions particulières. En effet, lorsque le faisceau se trouve *accordé* spatialement sur les propriétés du réseau, celui-ci se retrouve identique à lui-même après le passage d'une seule maille élémentaire. Dans de telles conditions, la propagation du faisceau est telle que la courbure des fronts d'onde, au niveau des lentilles, est égale à deux fois la focale de ces dernières. C'est ce que l'on définit comme un mode de *Bloch* du réseau.

2.1.2.3 Paramètres gaussiens liés aux modes propres

Nous venons d'établir la condition de périodicité du faisceau, nous imposant une limite dans l'étendue spatiale du réseau. Tant que nous resterons sur le domaine défini par la condition (2.9), comme nous allons le voir à travers les figures 2.5 et 2.6, il sera possible de définir les paramètres d'existence d'un faisceau, répondant au critère de périodicité et stabilité au sein du réseau.

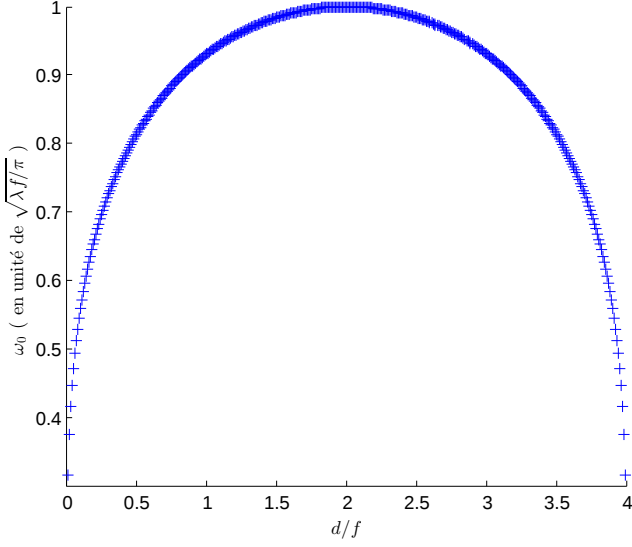


FIGURE 2.5 – Représentation du waist caractéristique du mode propre, dans un réseau de lentilles régulièrement espacées.

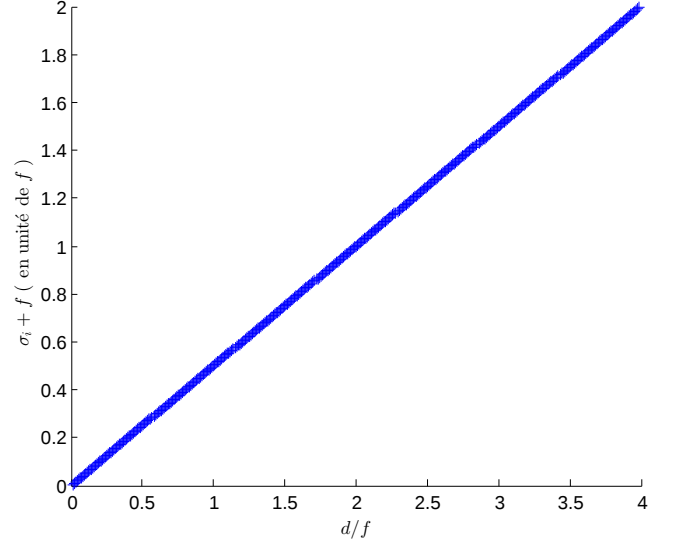


FIGURE 2.6 – Représentation de la distance "waist-lentille" caractéristique du mode propre, dans un réseau de lentilles régulièrement espacées.

En effet, nous savons d'après l'étude sur le module des valeurs propres, qu'un ensemble de solutions stables est défini pour tout un ensemble de valeur de d . D'après la figure 2.5, nous constatons que le maximum est atteint pour un espacement de $2n_m f$ (cas des cavités confocales où les rayons de courbure sont confondus), correspondant à la superposition des foyers de deux lentilles successives. Les variations sur σ , correspondant à la distance entre le *waist-objet* et le foyer objet de la lentille qui suit, sont, quant à elles, linéaires sur le domaine de solutions.

Notons que dans cette situation, le mode du système est simple. En effet, la maille élémentaire est composée d'une seule lentille. Nous allons voir, par la suite, que cela n'est pas toujours le cas, en considérant notamment des mailles plus complexes composées de plusieurs lentilles.

2.1.3 Réponse périodique d'un système périodique

2.1.3.1 Exemple d'application à la propagation d'un faisceau dans un réseau donné

Modèle en lentilles infiniment étendues Afin d'illustrer notre propos, nous allons appliquer la méthode précédente à un réseau dont la maille élémentaire est définie par un espacement entre lentilles de $d = 2n_m f$.

Le calcul préalable des valeurs et vecteurs propres (équations (2.8)), suivant les conditions de stabilité ($\tilde{d} < 4$), nous donne :

$$\Lambda_{\pm} = \pm i \quad \text{et} \quad \xi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \mp i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

À partir de quoi, sachant que le rayon de courbure est défini comme $\underline{q} = z + iz_R$, nous pouvons en déduire les paramètres intrinsèques au faisceau tels que [75] :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i + 1 &= \Re\{\hat{q}\} &= 1 \\ \hat{z}_{R_i} &= \Im\{\hat{q}\} &= 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Or, à partir de l'expression de la distance de *Rayleigh* :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i + 1 &= 1 \\ \hat{\omega}_{0_i} &= \sqrt{\frac{\lambda \hat{z}_{R_i}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i &= 0 \\ \omega_{0_i} &= \sqrt{\frac{\lambda z_{Ri}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \end{cases} \quad (2.23)$$

Nous pouvons souligner ici la dépendance sur la longueur d'onde. En effet, le *waist* apparaît comme proportionnel à $\sqrt{\lambda}$, ainsi, une augmentation de celle-ci entraînera une augmentation du *col* du mode propre. Inversement, nous atteindrons des faisceaux d'autant plus focalisés dans le réseau, que la longueur d'onde sera faible.

Cette propriété fut notamment prise en compte lorsque le développement des pinces optiques se démocratisa dans le domaine des sciences biologiques et médicales [12, 13]. En effet, les trop petites longueurs d'onde, utilisées initialement, impliquaient une trop forte concentration énergétique au point de focalisation du faisceau. Les cellules alors piégées se retrouvaient partiellement, voir totalement endommagées.

Au delà d'une simple manipulation par déplacement, nous voyons qu'il pourrait être intéressant d'utiliser un système à longueur d'onde ajustable afin de trier un ensemble de particules, ou assimilées comme telles, par variation de la taille de *waist*.

À présent, considérons un deuxième cas de figure, où la condition de stabilité n'est plus respectée. Fixons nous arbitrairement, à partir des solutions établies, un espacement $d = 6n_m f$:

$$\Lambda_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \xi_{\pm} = \begin{pmatrix} 3 \mp \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Les valeurs propres étant purement réelles, aucune évolution périodique ne sera possible dans le réseau. À chaque période, le faisceau s'éloignera de l'axe exponentiellement, ce qui impliquera une divergence, au bout de N mailles, suivant un facteur égal à $e^{\theta N}$. La chaîne de gouttes se trouve alors ici non guidante.

En somme, nous avons pu obtenir les paramètres d'entrée du faisceau nous permettant de propager ce dernier à travers un réseau de lentilles. Les figures 2.7 et 2.8 traduisent ce comportement. La première correspond à une solution périodique stable où nous voyons clairement le faisceau confiné au sein du réseau. Cette situation correspond à une condition où le faisceau est *accordé* sur les propriétés du réseau, c'est ce que nous appelons un mode de *Bloch*.

Quant à la seconde configuration, elle traduit une situation d'instabilité du faisceau. En effet, au cours de sa propagation, celui-ci va diverger d'autant plus rapidement qu'il progressera dans le réseau. Cette situation est assimilable au cas où les valeurs propres obtenues sont purement réelles, ce qui n'est possible que pour une largeur de profil tendant vers l'infini. Les modes ne sont alors plus confinés au sein du réseau, mais tendent à remplir tout l'espace. Il apparaît ainsi un lien étroit entre la divergence du faisceau et la nature de Λ .

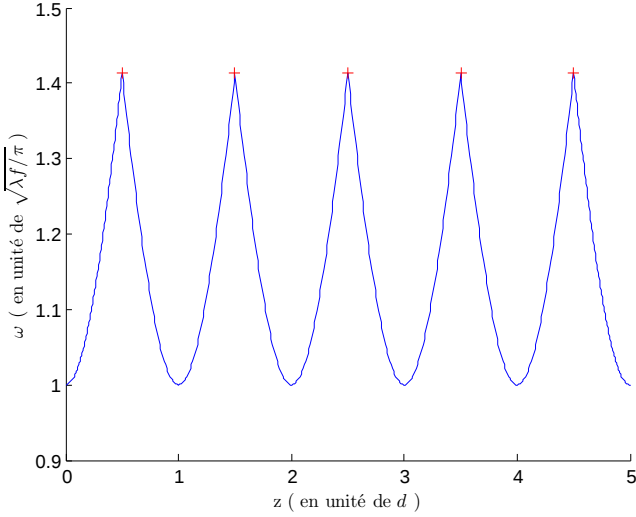


FIGURE 2.7 – Profil d'évolution stable de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$, pour $|\Lambda| = 1$. Les positions des lentilles sont repérées par une croix rouge. Nous excitions ici un mode de Bloch.

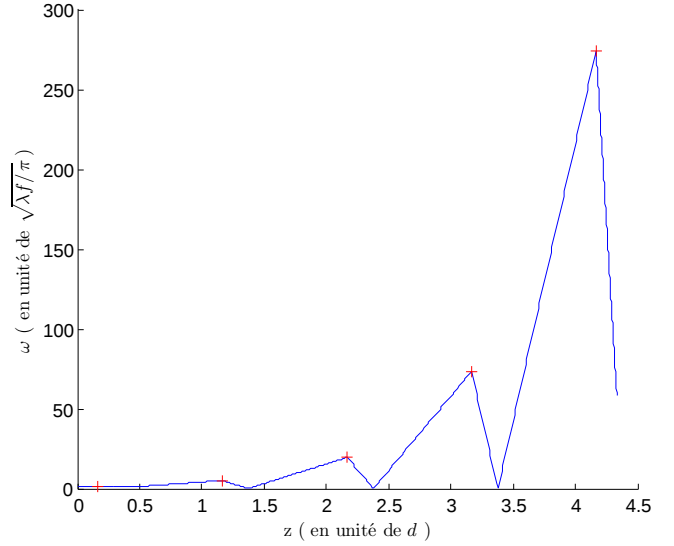


FIGURE 2.8 – Profil d'évolution instable de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 6n_m f$, pour $|\Lambda| < 1$. Les positions des lentilles sont repérées par une croix rouge. La chaîne de lentilles est ici non guidante.

Modèle en lentilles finies Nous savons qu'un faisceau pourra, ou non, se propager dans un réseau suivant une évolution stable ou instable. Or, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il est important de considérer les dimensions de nos billes pour rendre compte des phénomènes de diffraction. Pour ce faire, nous avons été amené à prendre en compte le déphasage supplémentaire acquis par un faisceau à la traversée d'une lentille boule.

Ainsi, en considérant la transformation du champ, entre deux plans du réseau séparés par une lentille, suivant l'intégrale de *Fresnel* en symétrie cylindrique (1.79), nous pouvons observer la propagation d'un faisceau gaussien dans un réseau de lentilles, identique aux situations précédentes.

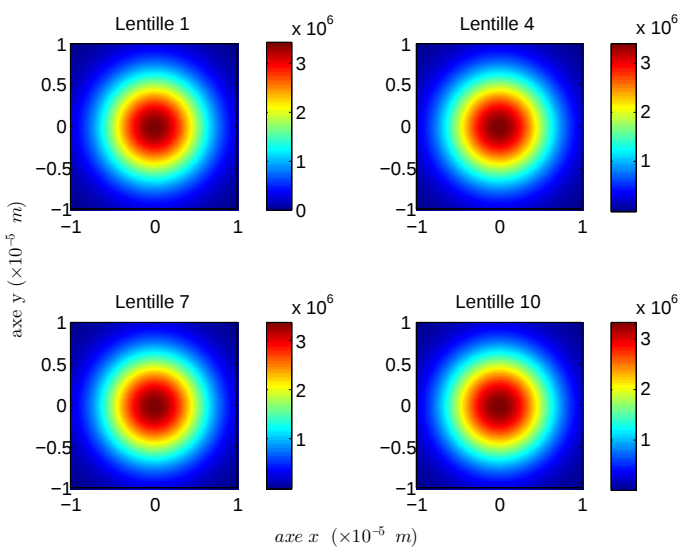


FIGURE 2.9 – Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$. Nous excitions ici un mode de Bloch.

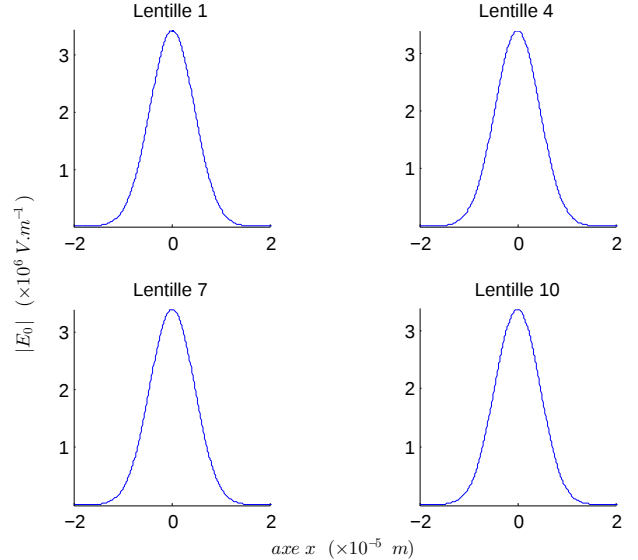


FIGURE 2.10 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2n_m f$. Nous excitions ici un mode de Bloch.

Nous voyons bien, d'après les figures 2.9 et 2.10, que dans les conditions d'*accord*, autrement dit d'auto-reproduction du champ après chaque passage de lentille, le profil de champ reste bien quasi-identique au cours de sa propagation dans le réseau. Ainsi, seul existe le mode fondamental gaussien TEM_{00} . Cela semble se confirmer, aux vues du profil de *waist* (figure 2.11), où nous pouvons constater que sa valeur ne varie quasiment pas. On observe, toutefois, une légère fluctuation, traduisant un écart en comparaison au modèle en lentilles infiniment étendues. Cela se justifie par les limites d'intégration, définies par les dimensions finies des objets diffractants. En augmentant le diamètre des billes, nous pouvons toutefois améliorer cet effet en minimisant l'écart relevé dû à la diffraction, comme nous pouvons le constater sur la figure 2.12.

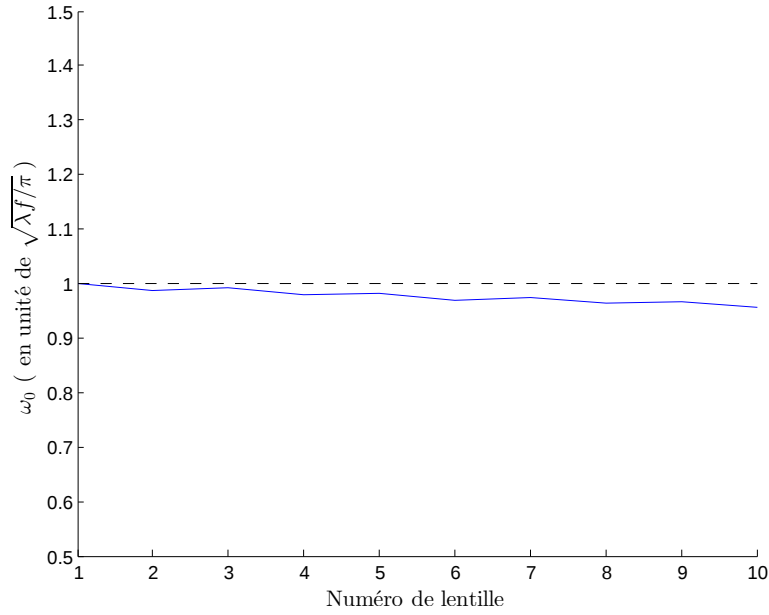


FIGURE 2.11 – Profil d'évolution du waist ω_0 suivant le modèle de Huygens-Fresnel, dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu m$, $\sigma_i = 0 \mu m$ et $d = 2n_m f$.

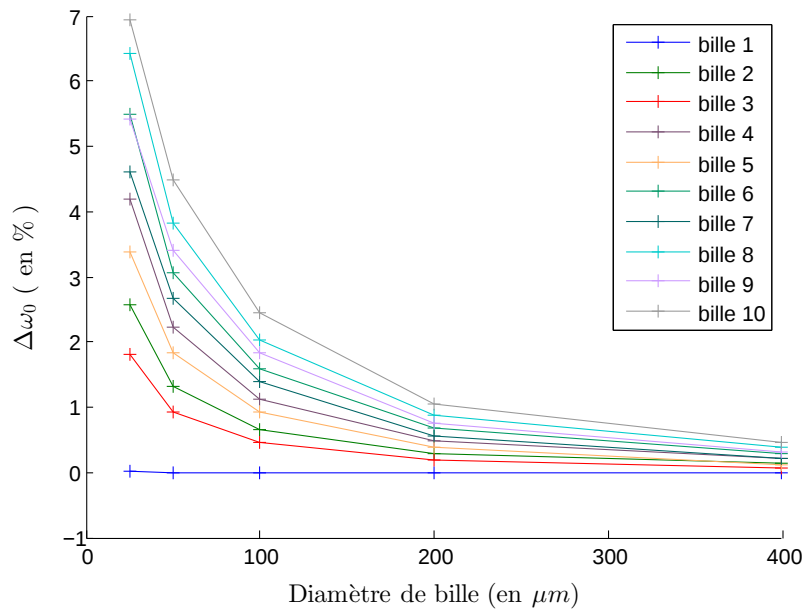


FIGURE 2.12 – Variation de l'écart au paramètre accordé de waist en fonction du rayon des billes. La chaîne est composée de 10 lentilles, régulièrement espacées, avec $d = 2n_m f$.

Suite à cela, observons quelles seraient les conséquences si nous sortions des conditions d'*accord*. Ainsi, nous pouvons voir sur les figures 2.13 à 2.15 qui suivent, qu'en prenant un *waist* à l'injection égal à 0.3 fois sa valeur *accordée*, le mode fondamental gaussien TEM_{00} n'est plus conservé, et des modes supérieurs TEM_{mn} apparaissent au cours de la propagation dans le réseau.

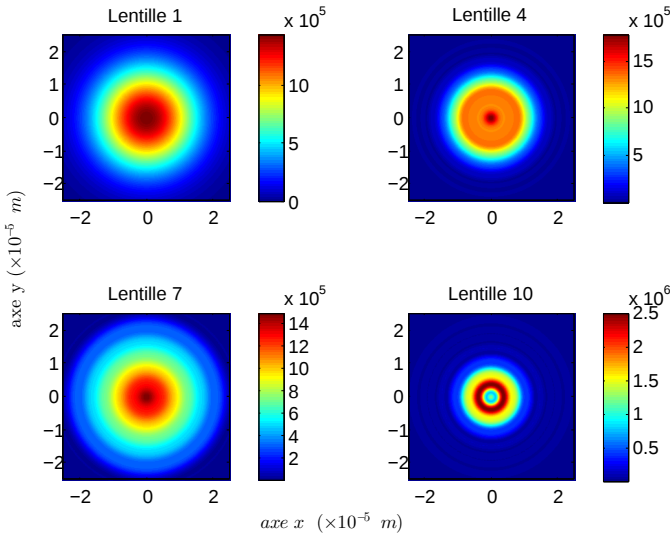


FIGURE 2.13 – Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{accord}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{accord}}$ et $d = 2n_m f$.

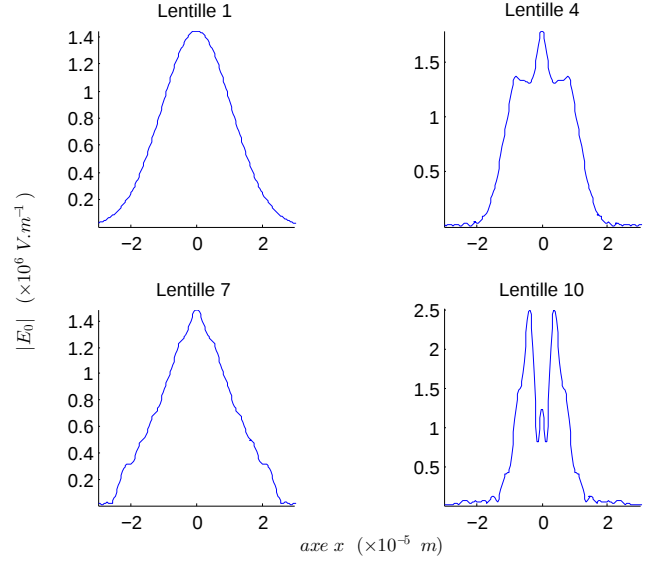


FIGURE 2.14 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{accord}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{accord}}$ et $d = 2n_m f$.

Les quantités, telles que le rayon de courbure réel $R_C(z)$, ou encore la largeur de faisceau $\omega(z)$, évoluent en fonction de z comme le mode fondamental (qui n'est autre que le mode TEM_{00}). La différence essentielle avec ce dernier est donc la dépendance transverse de l'amplitude $\underline{u}_{mn}$ des modes, qui est le produit d'une gaussienne par des polynômes d'*Hermite*.

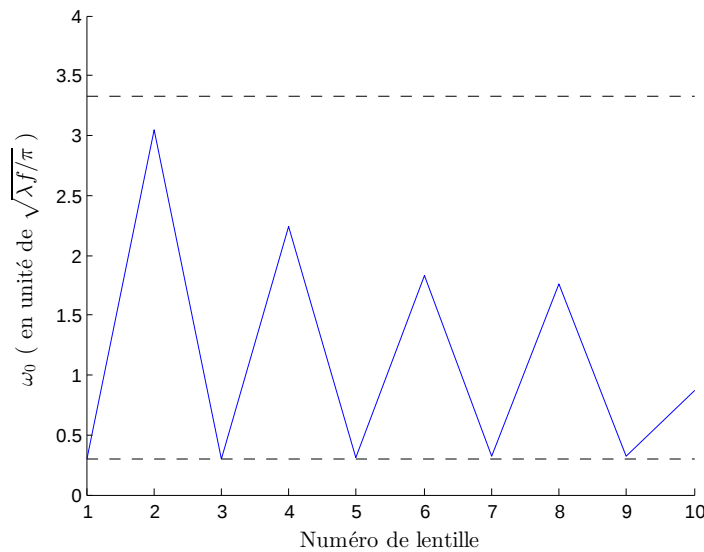


FIGURE 2.15 – Profil d'évolution du waist ω_0 dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $\omega_{0i} = 0.3\omega_{0i_{accord}}$, $\sigma_i = \sigma_{i_{accord}}$ et $d = 2n_m f$. Les deux lignes discontinues correspondent aux valeurs de waist prises dans le cas idéal de lentilles infiniment étendues.

Nous apercevons sur la figure 2.15 un écart sur la valeur du *waist*, par rapport au modèle matriciel en lentilles infiniment étendues, essentiellement pour les lentilles numérotées paires. Or, comme nous pouvons le voir sur le profil transverse de la figure 2.14, le mode propagé n'est plus gaussien TEM_{00} , et la définition même du *waist* devient intrinsèquement difficile à établir d'autant plus que nous progressons dans le réseau.

Nous venons de proposer un modèle plus élaboré du système, où celui-ci prend en compte les dimensions finies des billes définissant le réseau. Ainsi, nous allons dans la prochaine section comparer les deux modèles et définir leurs limites.

2.1.3.2 Comparaison des deux modèles

Nous venons d'établir, dans le cas d'un réseau périodique défini par un ensemble de lentilles équidistantes, plusieurs résultats suivant deux modèles distincts. Nous avons ainsi considéré, dans un premier temps, les lentilles comme infiniment étendues (*Gauss*), puis, dans un second temps, limitées suivant leur extension transverse (*Huygens-Fresnel*). Il semble évident que suivant le modèle de *Gauss*, le profil injecté évoluera dans le réseau sans une modification profonde de sa nature. En effet, les lentilles n'étant pas limitées dans leur étendue, elles ne contraindront pas matériellement le profil transverse de l'onde et s'acquitteront alors de tout effet diffractif.

Cependant, selon une approche plus réaliste, la diffraction jouera bien évidemment un rôle et pourra entraîner une modification du mode injecté, en entrée de réseau. Ce qui est bien décrit par le second modèle.

Afin de rendre clairement compte de ces différences, observons la représentation des profils transverses et longitudinaux, pour chacun des deux modèles, dans le cas d'une situation *accordée* et *désaccordée*.

Paramètres de faisceau *accordés* Dans de telles conditions, les paramètres liés au faisceau, accordé sur les propriétés du réseau, sont définis tels que [83] :

$$z_{R_{accord}} = \sqrt{dn_m f - d^2/4} = n_m f \quad \text{et} \quad w_{0_{accord}} = \sqrt{\frac{z_{R_{accord}} \lambda}{\pi}} = \sqrt{\frac{n_m f \lambda}{\pi}} \quad (2.25)$$

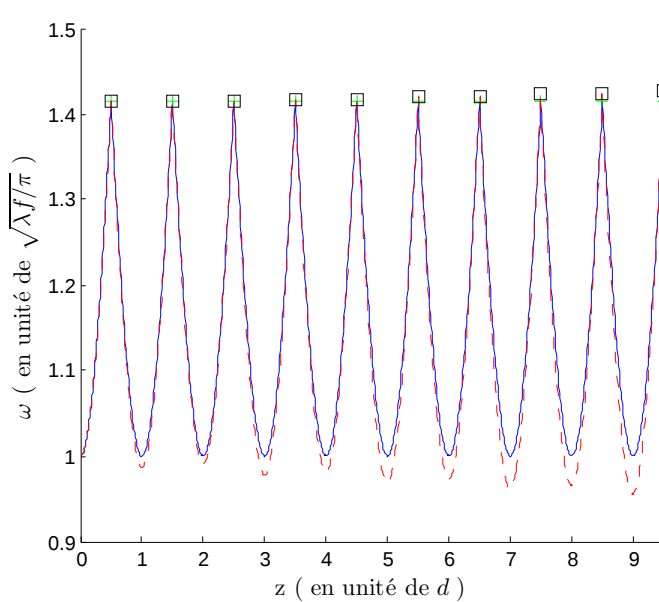


FIGURE 2.16 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau composé de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5\mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.

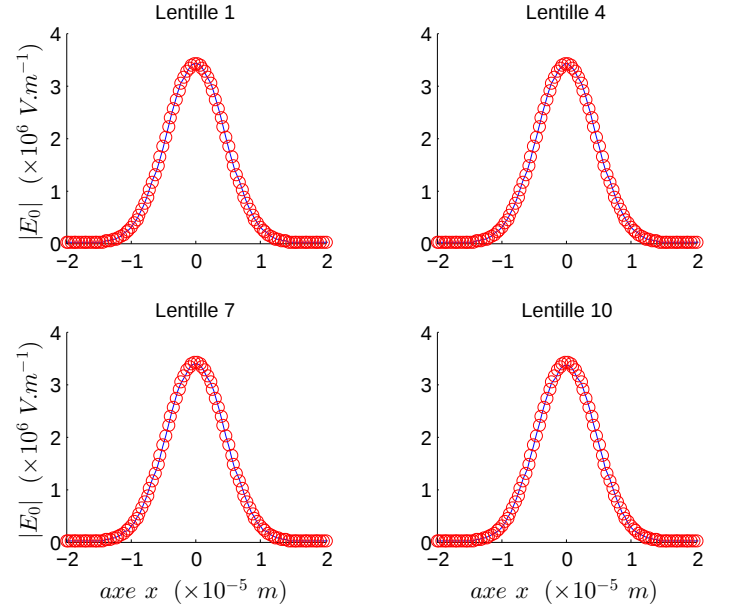


FIGURE 2.17 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5\mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Huygens-Fresnel, alors qu'en cercles rouges, nous présentons celui de Gauss.

D'après les figures 2.16 et 2.17, assimilées à l'excitation d'un mode de *Bloch*, nous constatons une bonne correspondance entre les deux modèles. Nous pouvons cependant remarquer un léger écart, visible sur le profil longitudinal. Cela s'explique, comme nous l'avons précédemment relevé, par le phénomène de diffraction.

Nous voyons en effet que les deux modèles préservent un bon accord sur un petit nombre de lentilles. Ainsi, nous pouvons affirmer que dans de telles conditions, l'approximation en lentilles étendues reste valable. Typiquement, sur une dizaine de billes, nous voyons que l'écart est de l'ordre de 1%. Cela reste donc convenable.

Paramètres de faisceau désaccordés Observons, de la même façon, de quelle manière le faisceau évolue dans le réseau sans que ses paramètres ne soient *accordés* sur les propriétés du réseau.

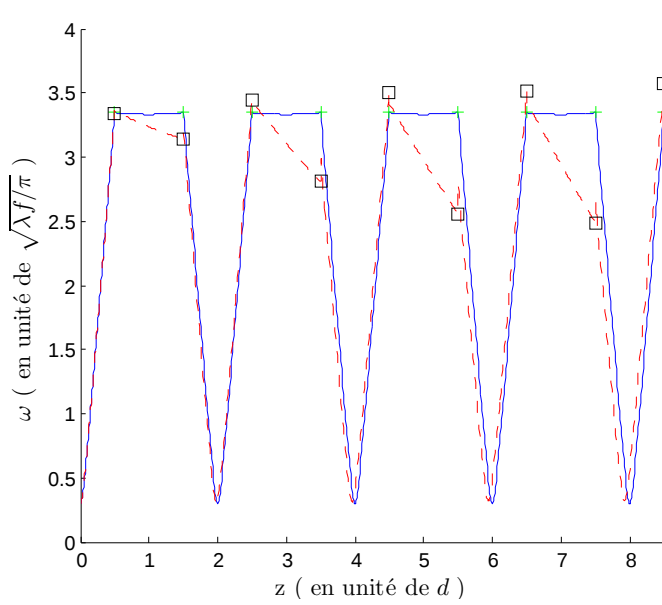


FIGURE 2.18 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau composé de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans des conditions désaccordées avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est fixé à $0.3\omega_{0_{\text{accord}}}$, et la distance $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.

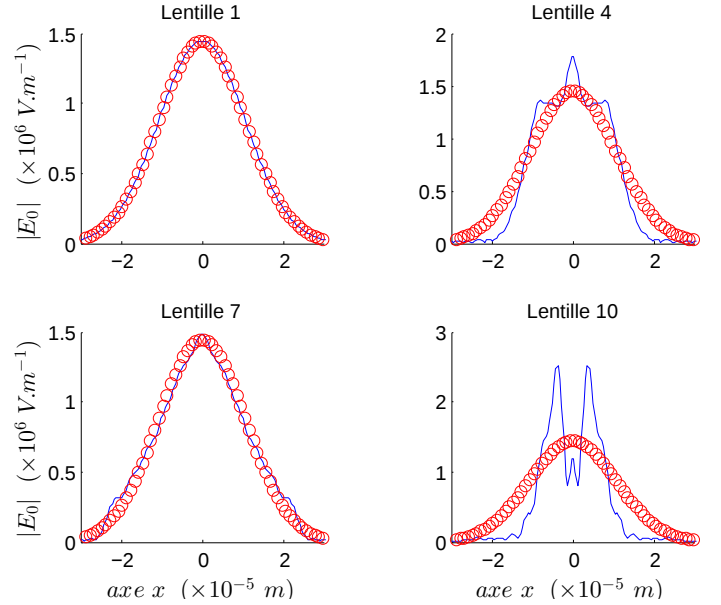


FIGURE 2.19 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, et dans des conditions désaccordées avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est fixé à $0.3\omega_{0_{\text{accord}}}$, et la distance $\sigma_i = \sigma_{i_{\text{accord}}}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en cercles rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.

Contrairement au cas précédent, nous observons une nette différence entre les deux modèles (figures 2.18 et 2.19). Cela se justifie encore une fois par la diffraction du faisceau par le pourtour des billes. L'effet en est d'autant plus accentué que le diamètre du faisceau $\omega(z)$ se rapproche de la valeur du rayon des billes. Typiquement, nous atteignons ici une largeur de faisceau de l'ordre de 30 % de celle du rayon ρ , alors que pour le cas *accordé* nous étions inférieur à 10 %. Il en résulte donc l'apparition de modes transverses d'ordre supérieur au mode fondamental.

2.1.3.3 Influence des variations de la longueur d'onde sur les modes du réseau

Nous avons choisi jusque là, à titre d'exemple, le cas d'une seule longueur d'onde fixée à 514.5 nm . Cette longueur d'onde est notamment définie pour un faisceau laser *Argon*, assurant, entre autre, une minimisation des dommages sur certaines cellules. L'approche est donc non invasive. La manipulation par piégeage optique, sur des cellules vivantes, se présente donc comme idéale.

Toutefois, nous savons que cette dernière intervient dans l'expression de la distance de *Rayleigh*, ainsi, elle va jouer un rôle dans les paramètres d'*accord* de réseau, comme nous avons déjà pu l'entrevoir dans la sous-section (2.1.3.1). Afin de caractériser cela, observons les variations de la longueur d'onde sur la propagation d'un faisceau initialement *accordé* sur le réseau, pour une longueur d'onde donnée, soit $\lambda = 514.5 \text{ nm}$.

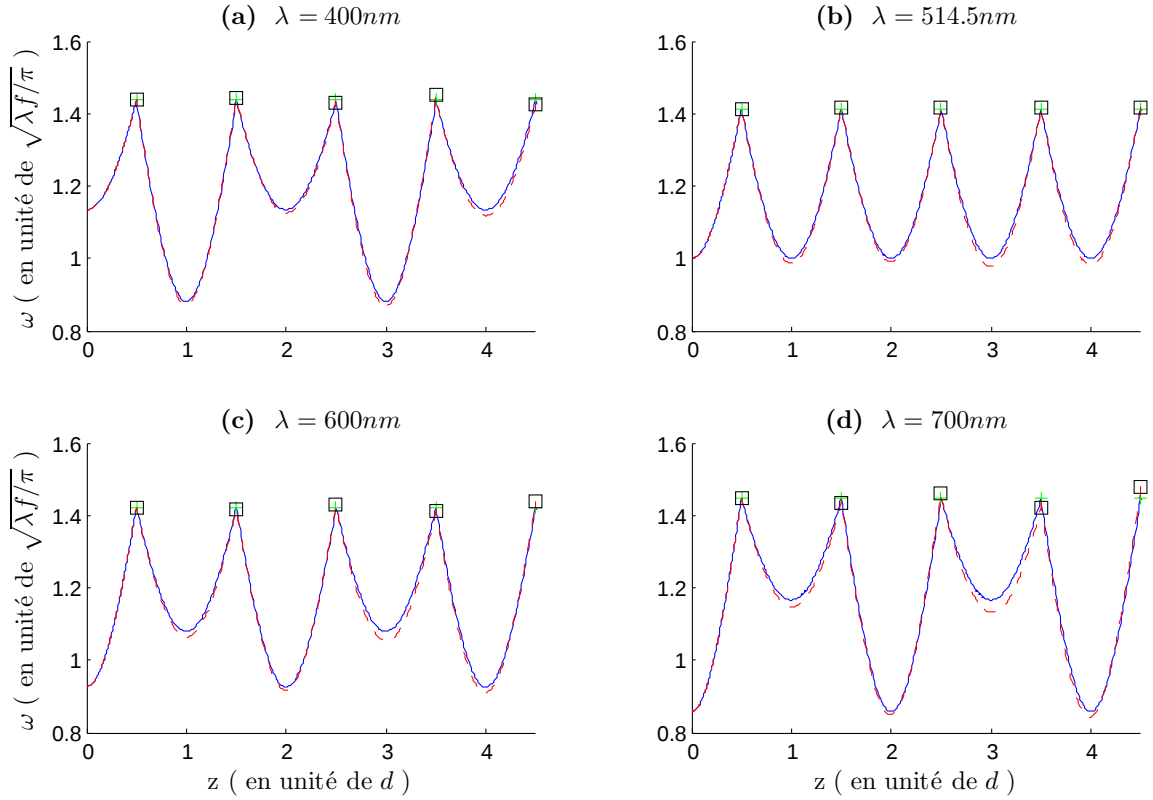


FIGURE 2.20 – Profil d'évolution de largeur du faisceau pour différentes longueur d'onde. Le réseau est composé de $N_L = 5$ lentilles régulièrement espacées, et dans les conditions d'accord avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5\mu\text{m}$ et la distance $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.

Nous observons, comme attendu, lorsque nous varions la longueur d'onde propre caractéristique au mode de Bloch, que nous perdons les conditions d'accord. En effet, la modification de la longueur d'onde du faisceau, dans un réseau donné, implique par la même une valeur différente du *waist* associé au mode propre. Ainsi, varier la longueur d'onde revient à *désaccorder* le système.

Toutefois, nous pouvons également souligner le fait que les maxima d'intensité ne se situent pas dans les mêmes zones, suivant si λ est inférieure ou supérieure à λ_{accord} . Autrement dit, pour $\omega_{0i} > \omega_{0\text{accord}}$, soit $\lambda < \lambda_{\text{accord}}$, le *waist* qui suivra sera inférieur à sa valeur *accordée*. Et cela, en suivant selon une évolution périodique. *A contrario*, pour $\omega_{0i} < \omega_{0\text{accord}}$, soit $\lambda > \lambda_{\text{accord}}$, le *waist* qui suivra sera supérieur à sa valeur *accordée*.

L'intensité des faisceaux étant inversement proportionnelle au *waist*, son évolution suivra un comportement identique à celle de ce dernier, mais dans une proportion inverse. Ces maxima périodiques font ainsi apparaître une périodicité du faisceau égale à deux fois celle du réseau ⁶. Nous verrons ainsi que cela aura toute son importance lorsque nous souhaiterons piéger dynamiquement un ensemble de particules.

⁶Cette valeur correspond au fait que l'espacement entre les billes est défini par un rapport $K/N = 1/2$. Ce qui implique que lorsque nous désaccordons le faisceau sur les propriétés du réseau, celui-ci présente un schéma périodique défini sur N lentilles. Nous verrons cela plus en détail dans la section qui suit.

2.1.4 Excitation des modes en fonction des paramètres d'entrée (ω_{0_i} et σ_i)

Nous venons de voir comment il était possible d'obtenir les conditions d'*accord* de faisceau, dans un réseau simple de lentilles identiques, périodiquement espacées. Nous allons observer, suite à cela, ce qu'implique des variations sur les paramètres du faisceau d'entrée qui excite ces modes.

2.1.4.1 Analyse générale de l'évolution longitudinale du faisceau

Outre cette périodicité intrinsèquement liée au réseau, il apparaît un comportement variable du faisceau en son sein, suivant les paramètres à l'injection. Comme nous pouvons le voir sur les trois premiers graphes de la figure 2.21, les variations du *waist* d'entrée impliquent deux comportements principaux du faisceau dans le réseau, comme nous l'avons souligné précédemment dans l'étude des variations sur λ . En effet, pour une valeur inférieure à celle correspondant au cas *accordé*, les minima d'intensité (ou maxima en valeur de *col*) se situent dans les zones impaires (délimitées par deux lentilles successives de numéros respectifs impair et pair), alors qu'inversement, pour une valeur de *waist* supérieure à celle *accordée*, les minima se situent dans les zones du réseau paires.

Un cas particulier est observé dans les conditions d'*accord*, où toutes les largeurs de *col* restent identiques au *waist* initial ; et cela, quelque soit la zone du réseau. Ce résultat était pleinement prévisible puisque cela caractérise l'excitation d'un mode de *Bloch*, correspondant aux conditions d'auto-reproduction du champ dans le réseau à chaque passage de maille élémentaire. Quant aux variations sur le paramètre σ_i , nous pouvons souligner le fait que ses implications, sur l'évolution du faisceau, sont intimement liées à la caractéristique intrinsèque de divergence des faisceaux gaussiens. Cela entraîne un décalage sur la position des cols de faisceau.

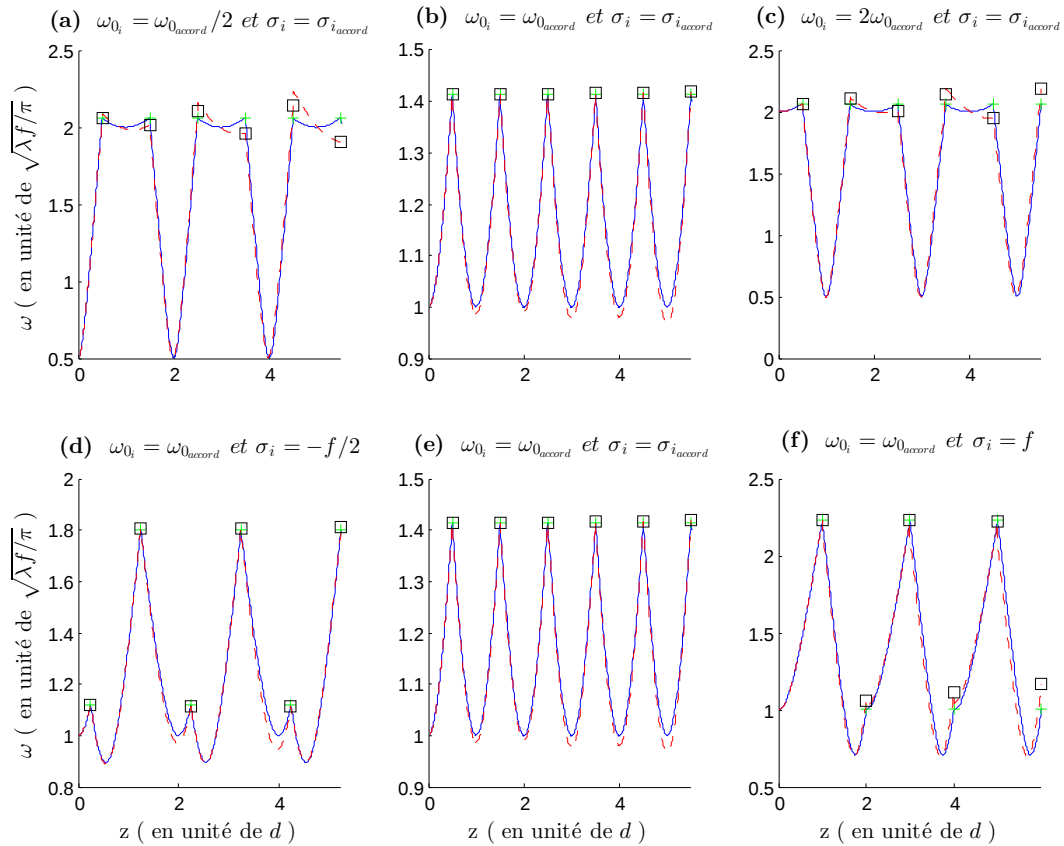


FIGURE 2.21 – Profil d'évolution de largeur du faisceau, dans un réseau de $N_L = 6$ lentilles, régulièrement espacées, pour différents paramètres de faisceau ω_{0_i} et σ_i , mentionnés sur chaque graphe. Le *waist* accordé est de $4.5\mu\text{m}$, et la distance d'accord $\sigma_{i_{\text{accord}}} = 0\mu\text{m}$. Le profil est établi pour les deux modèles. En traits pleins et bleus le modèle est celui de Gauss, alors qu'en traits pointillés rouges, nous présentons celui de Huygens-Fresnel.

De façon générale, nous observons que les valeurs de *waist* minimales sont atteintes pour des paramètres de faisceau hors des conditions d'*accord*. Ainsi, les maxima d'intensité sont obtenus pour ces mêmes conditions.

Remarque : En considérant les variations sur le waist d'entrée, nous constatons que les maxima seront identiques, que ce soit pour un facteur donné ou son inverse (figures 2.21 (a) et (c)). Toutefois, cette assertion ne sera vérifiée que sous certaines conditions. En l'occurrence, cela est vrai dans notre situation car nous injectons le faisceau d'entrée à une distance de la première lentille équivalente à la distance de Rayleigh (démonstration en annexe C).

En revanche, si nous observons les variations sur la distance d'entrée σ_i , les maxima atteints seront d'autant plus importants que nous serons généralement éloignés de l'accord, et plus spécifiquement définis par des valeurs σ_i supérieures à $\sigma_{i_{accord}}$ (figures 2.21 (d) et (f)).

2.1.4.2 Analyse spécifique des modes excités à partir d'un diagramme $\sigma(\omega_0)$

Nous considérons un réseau dont la matrice de transfert correspond à un rapport $K/N = 1/5$ (équation (2.17)). Or, nous savons que ce rapport est caractéristique des conditions d'auto-reproduction du champ dans le réseau. Nous allons représenter les valeurs des paramètres (ω_0, σ) , prises entre les lentilles, sur une maille de 5 lentilles. Nous pouvons exciter le mode de *Bloch*, ou d'autres modes périodiques, dont la période est alors donnée par le rapport K/N .

Nous avons alors opté pour une représentation $\sigma(\omega_0)$ pour rendre compte de leur évolution en fonction de l'écart au mode *accordé*.

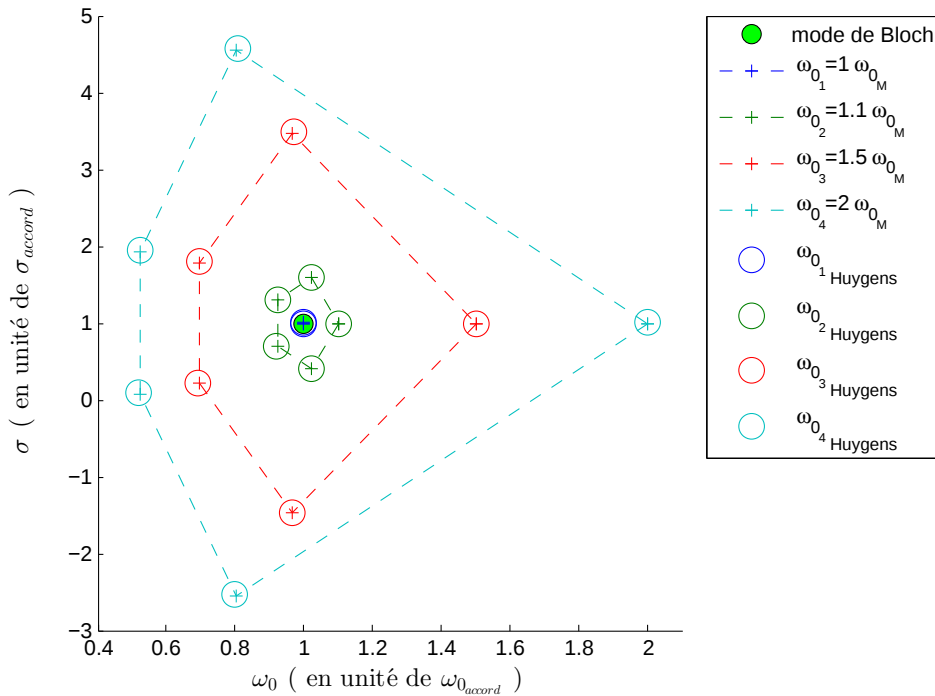


FIGURE 2.22 – Paramètres du faisceau au cours de sa propagation, dans un réseau de 5 lentilles, dont l'espacement entre ces dernières est défini à partir du rapport $K/N = 1/5$. Le waist accordé est de $3.5\mu m$, et la distance $\sigma_{i_{accord}} = -101\mu m$ (soit $\sigma_{i_{accord}} + f = 239\mu m$). Le profil est établi pour les deux modèles. Les divers tracés correspondent à différents waist d'entrée ω_{0_i} ($\omega_{0_M} = \omega_{0_{accord}}$).

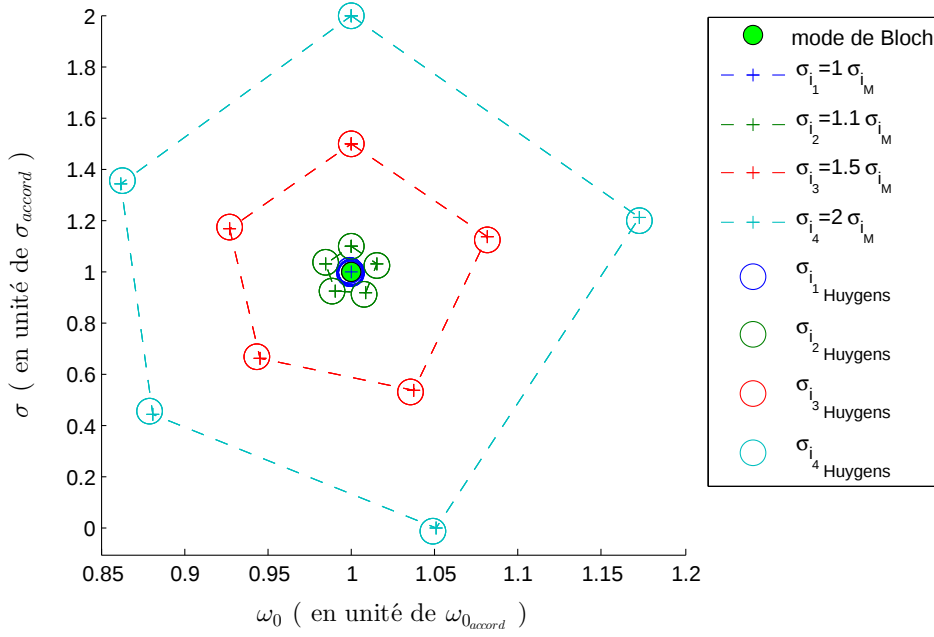


FIGURE 2.23 – Paramètres du faisceau au cours de sa propagation, dans un réseau de 5 lentilles, dont l'espacement entre ces dernières est défini à partir du rapport $K/N = 1/5$. Les divers tracés correspondent à différentes distances σ_i "laser-foyer objet 1ère lentille" ($\sigma_{iM} = \sigma_{accord}$).

D'après les figures 2.22 et 2.23, nous observons, en premier lieu, que la réponse du système est caractérisée par un schéma périodique défini par cinq lentilles. Nous avons vu que, dans certains cas, il était possible d'établir des paramètres de faisceau de telle sorte que ce dernier soit *accordé* sur la période du réseau. Nous appelons alors cela un mode de *Bloch*. Or, en s'écartant de ce dernier, nous explicitons la périodicité généralement acquise par le champ dans le réseau ; autrement dit, pour des paramètres d'entrée ω_{0i} et σ_i quelconques. Dans notre cas, nous avons fixé un rapport $K/N = 1/5$. Ainsi, hors des conditions d'*accord*, nous apercevons cette périodicité propre, dont la valeur atteint $N = 5$ fois celle du réseau.

En second lieu, nous remarquons une certaine robustesse de la réponse du système pour des valeurs de *waists* d'entrée faiblement désaccordées. Toutefois, il apparaît que plus le système est *désaccordé*, et plus la réponse de la chaîne périodique se fait avec des modulations importantes de ω_0 et σ . En outre, les valeurs prises par ces deux derniers paramètres s'écarteront d'autant plus de leurs valeurs initiales acquises sur la première maille, que le faisceau progressera dans le réseau. Ces variations s'expliquent par les pertes énergétiques dues au phénomène de diffraction. Ainsi, nous distinguerons clairement cela à partir du modèle de *Huygens-Fresnel*, en comparaison du modèle de *Gauss* où les lentilles sont considérées infiniment étendues, et où les paramètres préservent, par conséquent, leur norme.

Cependant, nous nous sommes aperçus que sur un plus grand nombre de lentilles, les variations sur σ_i impliquent, sur le modèle en lentilles finies, des écarts moindre que ceux observés pour les variations sur ω_{0i} . Mais encore, l'amplitude de ces dernières semble identique en tout point. Cela se justifiant par une sensible équidistance au mode de *Bloch*.

Il est toutefois bien connu qu'un tel réseau de lentilles, périodiquement espacées, est équivalent à une cavité dépliée selon l'axe de propagation. En effet, chaque réflexion du faisceau sur l'un des deux miroirs coaxiaux (de rayons de courbure R_{C1} et R_{C2}) composant la cavité, peut être assimilée au passage à travers des lentilles (de focales correspondantes $f_1 = R_{C1}/2$ et $f_2 = R_{C2}/2$) [cf. section (1.2)]. Or, nous savons que dans de telles cavités, ce facteur K/N correspond, dans des conditions de stabilité, aux N allers-retours et aux K révolutions transverses nécessaires au faisceau pour que celui-ci se recouvre ; autrement dit, pour que son paramètre gaussien $\underline{\hat{q}}$ redevienne identique à lui-même après $K \times 2\pi$ rotations, et N mailles élémentaires parcourues.

Ces résultats apparaissent en accord avec ceux obtenus dans le cas des cavités fractionnellement dégénérées. Travaux initiés par *Herriott et al.*, mais largement repris depuis, notamment par *Gigan et al.* pour l'étude des transmissions à travers une cavité paraxiale stable et plus particulièrement hémiconfocale [96]. On peut également citer l'équipe de *Romanini et al.* pour l'étude de la spectroscopie d'absorption CRDS (pour *Cavity Ring-Down Spectroscopy*) [97,98].

De façon générale, il fut constaté que pour de telles cavités, il est possible d'observer une réponse optique périodique avec une période plus grande que celle de la cavité, en désaxant le faisceau d'entrée [99,100]. On peut donc retrouver les conditions de faisceau "réentrant" d'*Herriott* discutées en [78] (figure 2.24).

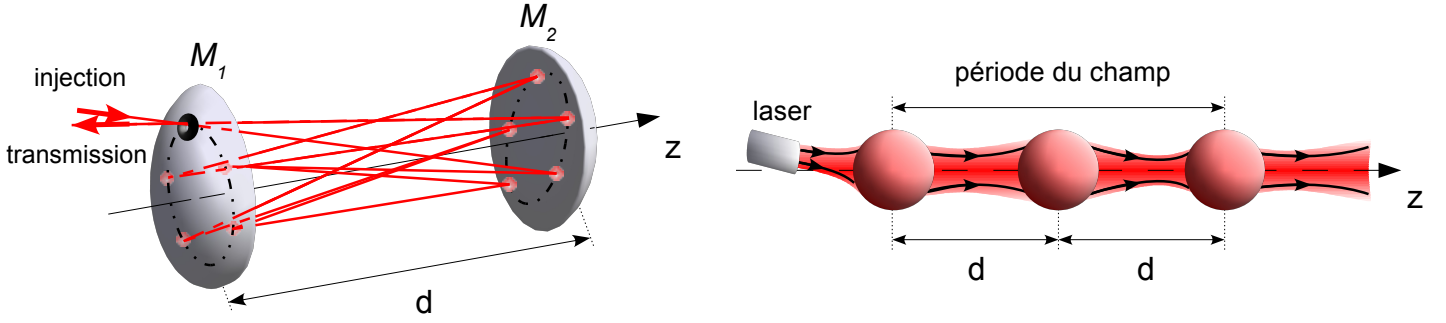


FIGURE 2.24 – Analogie entre une cavité d'Herriott désaxée et dépliée et un réseau de lentilles équidistantes. On observe bien une périodicité, acquise par le faisceau, supérieure à celle du réseau. Pour la cavité, on observe un faisceau réentrant à l'ordre 5, alors que sur le réseau, la périodicité du champ n'est égal qu'à deux fois celle du réseau, par soucis de clarté.

En somme, nous pouvons souligner le fait que quelles que soient les caractéristiques de notre faisceau en entrée (soit ω_{0i} et σ_i quelconques), celui-ci excitera un mode propageant à la traversée du système optique, dont la périodicité est équivalente à N/K fois celle du réseau. A l'exception, comme nous venons de le voir précédemment, du mode de *Bloch*, où la périodicité du champ et du réseau sont identiques.

Regardons alors ce que les variations de ce facteur K/N impliquent dans notre cas. Pour cela, nous garderons les caractéristiques de faisceau obtenues dans le cas d'un espacement périodique entre lentilles pris égal à $2n_m f$ (ou encore $\tilde{d} = 2$).

2.1.5 Analogie avec les cavités fractionnaires

Les cavités, ou résonateurs optiques, sont de nos jours des dispositifs bien connus. Ils se composent de deux miroirs et tendent, sous certaines conditions, à maintenir confiner un faisceau laser incident. Pour cela, les fronts d'onde du faisceau doivent coïncider avec les rayons de courbure des miroirs, et le déphasage θ , accumulé sur un aller-retour, être un multiple entier de 2π . Le faisceau entre alors en résonance avec la cavité. Cela est notamment lié aux phénomènes d'interférences se produisant lors de la propagation du faisceau entre les deux miroirs. Les ondes confinées, associées à une fréquence donnée, sont ainsi appelées *modes propres*. L'expression de ces fréquences propres est alors donnée par :

$$\nu_{q,mn} = \frac{c}{2d} \left(q + (m + n + 1) \frac{\theta}{2\pi} \right) \quad (2.26)$$

Ainsi, l'ensemble des longueurs d'onde présentent dans la cavité, associées aux modes longitudinaux q , définissent un peigne de fréquences. Pour un mode q donné, nous pourrions alors définir la fréquence des modes transverses (m, n), ayant le profil transverse associé.

Aucune précision supplémentaire, jusque-là, n'a été apportée sur le déphasage gaussien θ de l'onde. Il s'avère que pour une valeur rationnelle multiple de 2π , soit $\theta = 2\pi K/N$, nous pourrions définir l'ensemble des fréquences propres de résonance comme :

$$\nu_{q,mn} = \frac{c}{2d} \left(q + (m+n+1) \frac{K}{N} \right) = \frac{c}{2Nd} (Nq + K(m+n+1)) \quad (2.27)$$

Il apparaît donc une possibilité de dégénérescence modale pour divers modes longitudinaux q , au-delà d'une dégénérescence de modes transverses $(m+n)$ déjà présente pour une cavité traditionnelle. Nous pouvons ainsi établir un lien avec des familles de modes longitudinaux différents [78, 98].

Influence du couple de valeurs (K, N) Nous venons de voir que le rapport K/N intervenait dans la définition de la périodicité du réseau de lentilles. Observons alors quelles sont les conséquences sur le comportement du faisceau en son sein.

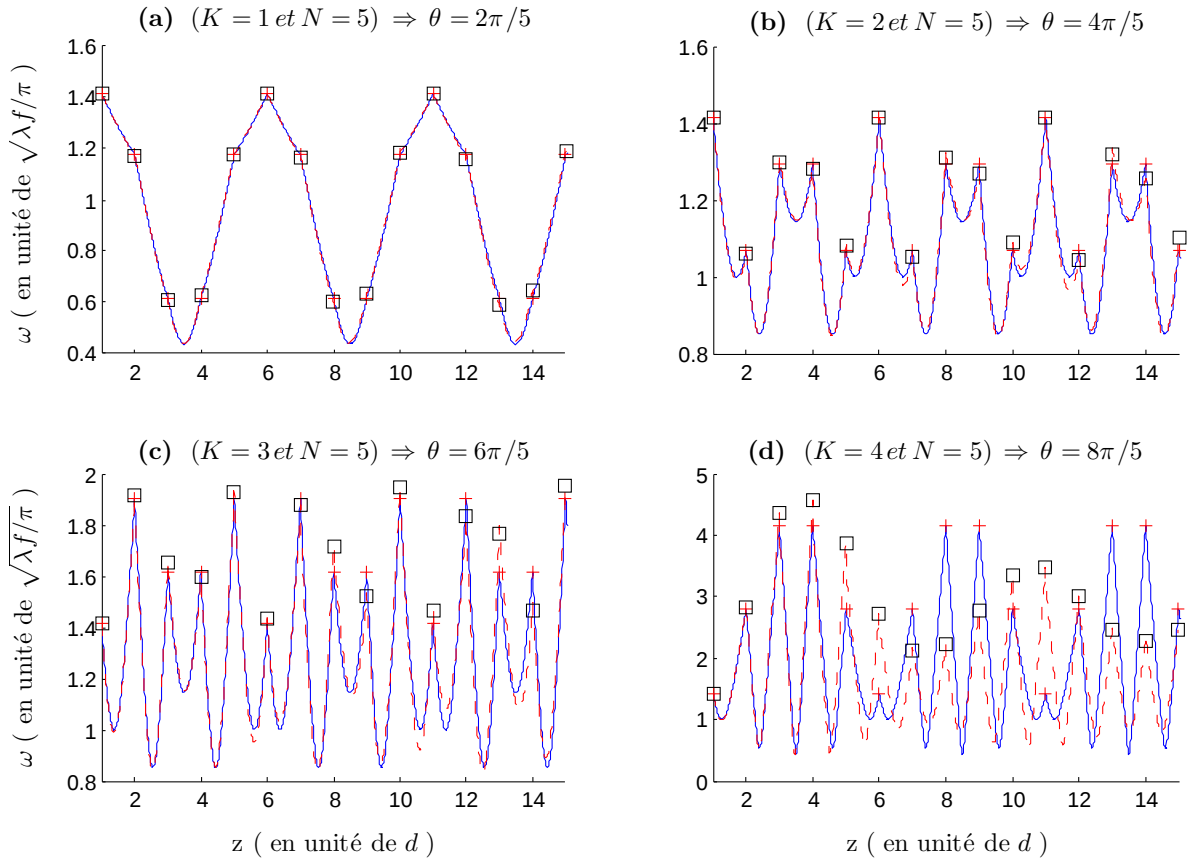


FIGURE 2.25 – Profil d'évolution de largeur du faisceau, dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Chacun des graphes correspond à une valeur de K différente, soit, à diverses distances entre lentilles. Leurs positions, dans le réseau, sont représentées par des marqueurs cruciformes rouges pour le modèle gaussien et des carrés noirs pour Huygens-Fresnel. Quant au profil, il est représenté par des lignes continues bleues pour Gauss et traits discontinus rouges pour Huygens-Fresnel.

Nous pouvons voir, sur la figure 2.25, les différents profils d'évolution longitudinale de la largeur du faisceau dans un réseau de 15 lentilles. D'après la définition de l'espacement $\tilde{d} = 2(1 - \cos(2\pi K/N))$, l'augmentation de K entraîne une augmentation de la période du réseau. Les maxima de la taille du faisceau au niveau des lentilles augmentent, et la diffraction ne peut plus être négligée. En conséquence, nous observons un désaccord entre les modèles de *Huygens-Fresnel* et *Gauss* pour $K = 4$ (figure 2.25 (d)), mais un très bon accord pour $K = 1$ (figure 2.25 (a)).

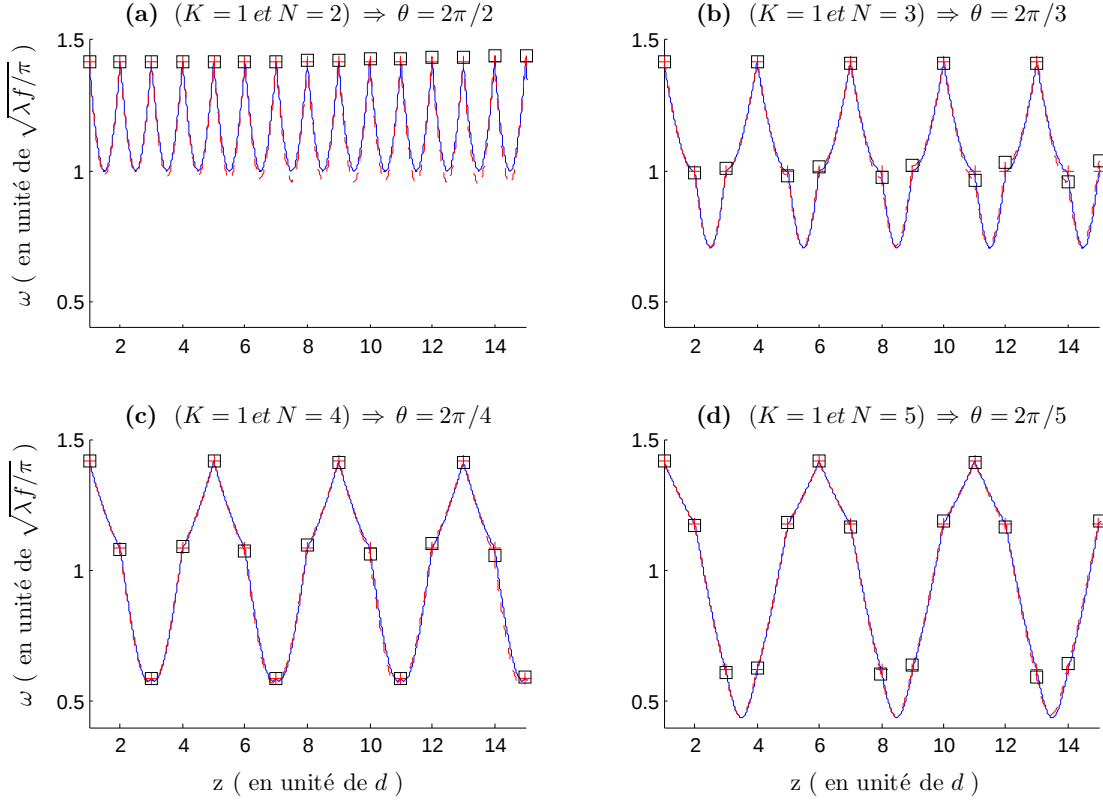


FIGURE 2.26 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de plusieurs lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$. Chacun des graphes correspond à des valeurs de N variables, soit, à diverses distances entre lentilles. Leurs positions, dans le réseau, sont représentées par des marqueurs cruciformes rouges pour le modèle gaussien et des carrés noirs pour Huygens-Fresnel. Quant au profil, il est représenté par des lignes continues bleues pour Gauss et traits discontinus rouges pour Huygens-Fresnel.

Observons les variations de N lorsque nous propageons un faisceau dans le réseau. D'après les résultats présentés sur la figure 2.26 (où la valeur de K a été fixée arbitrairement à 1), nous remarquons que la périodicité du faisceau est égale à N fois celle du réseau. Exception faite du mode de *Bloch* ($N = 2$), où celles-ci sont identiques. Il peut être judicieux de remarquer que cette augmentation de N , entraînant une augmentation du nombre de lentilles qui définissent la maille élémentaire, implique une augmentation sur la variété des tailles de *waists* et de faisceau. En effet, ceux-ci semblent suivre un schéma bien défini tel que :

$$\begin{cases} \text{Si } N \text{ est pair} & \Rightarrow \quad \nu_{\omega p} = \left(\frac{N}{2} + 1\right) \quad \text{et} \quad \nu_{\omega_0 p} = \left(\frac{N}{2}\right) \\ \text{Si } N \text{ est impair} & \Rightarrow \quad \nu_{\omega i} = \nu_{\omega_0 i} = \left(\frac{N+1}{2}\right) \end{cases} \quad (2.28)$$

où $\nu_{\omega_0 p/i}$ et $\nu_{\omega p/i}$ représentent respectivement le nombre de valeurs de tailles de *waists* et de faisceau, sur une maille, pour des valeurs de N paires et impaires.

Contrairement à la situation précédente, l'augmentation de N va cette fois impliquer une diminution de l'écart entre lentilles, et donc de la période du réseau ; cela se justifiant de la même façon que pour l'augmentation du terme K .

2.1.6 Application au cas d'une maille plus complexe

2.1.6.1 Matrice de transfert liée au système

Nous venons d'établir un ensemble de résultats dans le cas d'un réseau de lentilles équidistantes, pouvant alors s'apparenter directement à ceux obtenus pour les cavités optiques.

Regardons alors ce qu'il se passe dans une situation où la maille élémentaire est composée de plusieurs lentilles. Nous choisissons une cellule primitive formée de trois lentilles, et placées suivant le schéma : $\{d_1 = 2d; d_2 = d; d_3 = 2d\}$ (figure 2.27).

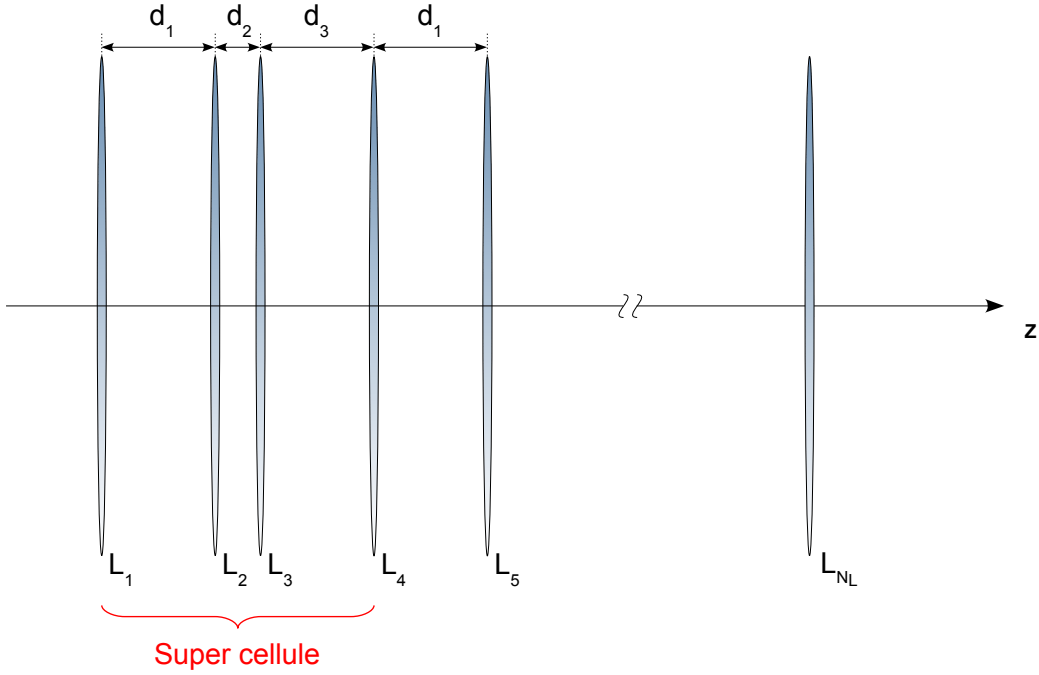


FIGURE 2.27 – Représentation d'un réseau de N_L lentilles, dont la maille élémentaire est composée de 3 lentilles espacées successivement de $2d$, $1d$ puis $2d$, pour une valeur de d arbitraire.

Commençons par établir l'expression de la matrice de transfert, associée à cette maille, à partir des paramètres réduits $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ et $\tilde{d}_3$, que nous exprimons en fonction de $\tilde{d}$, ainsi :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{M}} &= \tilde{\mathbf{T}}_{prop}(\tilde{d}_3) \tilde{\mathbf{T}}_{lens} \tilde{\mathbf{T}}_{prop}(\tilde{d}_2) \tilde{\mathbf{T}}_{lens} \tilde{\mathbf{T}}_{prop}(\tilde{d}_1) \tilde{\mathbf{T}}_{lens} \\
 &= \begin{pmatrix} -4\tilde{d}^3 + 14\tilde{d}^2 - 10\tilde{d} + 1 & 4\tilde{d}^3 - 12\tilde{d}^2 + 5\tilde{d} \\ -2\tilde{d}^2 + 6\tilde{d} - 3 & 2\tilde{d}^2 - 5\tilde{d} + 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

L'expression littérale des valeurs propres en fonction du paramètre $\tilde{d}$ ne présente aucun intérêt ici. Nous nous contenterons d'observer numériquement les résultats obtenus, en fonction de $\tilde{d}$.

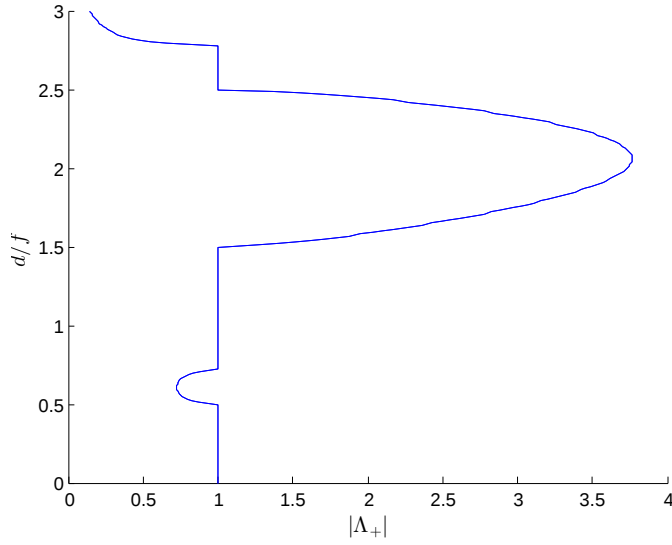


FIGURE 2.28 – Variation de d en fonction du module de Λ_+ , avec $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$.

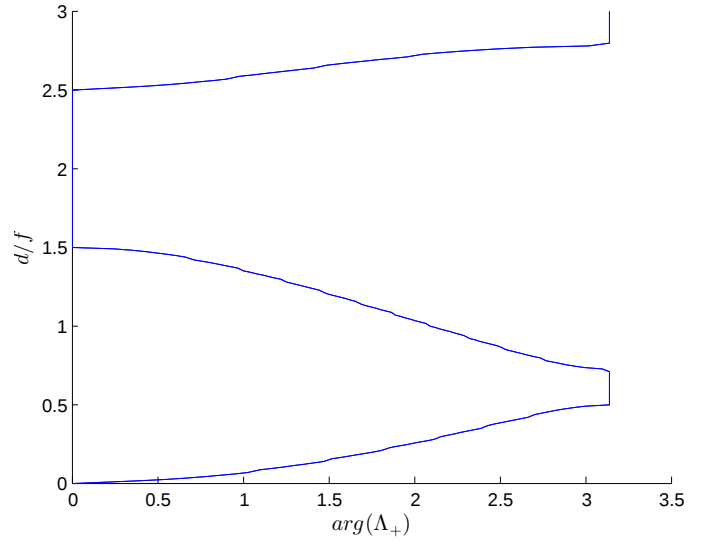


FIGURE 2.29 – Variation de d en fonction de l'argument de Λ_+ , avec $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$.

Comme nous pouvons le voir sur les figures 2.28 et 2.29, le mode de *Bloch* n'est défini que sur certains intervalles de $\tilde{d}$ (pour les zones où le module de la valeur propre est égal à 1). Dans le cas contraire, l'onde lumineuse ne peut se propager dans le réseau, elle est alors qualifiée d'onde évanescente.

Toutefois, contrairement au cas en "*maille simple*" vu à la section 2.1.2, nous relevons ici des discontinuités dans l'ensemble des solutions.

Ainsi, en considérant l'égalité (2.15), nous déduisons une expression généralisée du paramètre gaussien dans le cas d'une maille complexe :

$$g_p = \cos \left(2\pi \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + (-1)^p 2\pi \frac{K}{N} \right) \quad , \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \quad (2.30)$$

Nous distinguons ainsi p familles de solutions de $\tilde{d}_p$, dont le nombre équivaut à celui des lentilles définissant la maille élémentaire. Ainsi, nous étant fixé une maille élémentaire définie par trois lentilles (figure 2.27), nous observons bien trois familles de solutions sur $\tilde{d}$ (figures 2.28 et 2.29).

Il en ressort que pour un déphasage θ donné, nous pourrions extraire p solutions de $\tilde{d}$, appartenant chacune à une des p familles. Nous verrons dans la section qui suit que ces dernières peuvent être assimilées aux différentes zones de *Brillouin* pour θ ⁷ (figure 2.30).

Nous venons de voir, au cours des précédentes sections, l'importance du paramètre θ dans les conditions de reproduction du champ périodiquement dans un réseau de lentilles. Permettant, ainsi, d'établir un couplage entre les propriétés intrinsèques du faisceau et du réseau.

⁷Remarquons toutefois que l'équation (2.18) a été obtenue dans le cas d'une maille simple, autrement dit, pour une maille élémentaire définie par une seule lentille. Ainsi, nous ne distinguerons qu'une seule famille de solutions sur $\tilde{d}$, dont les valeurs correspondent à la première zone de *Brillouin*.

Observons alors ce déphasage, accumulé par le faisceau, sur une période du réseau, dont la matrice de transfert est celle définie en (2.29) (figure 2.30).

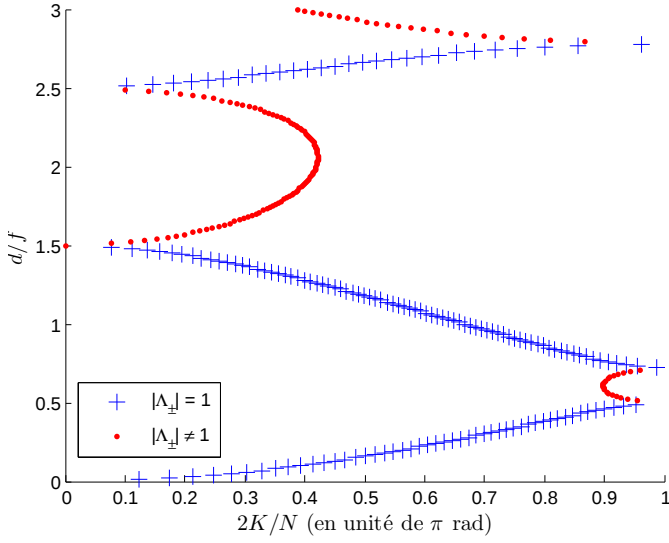


FIGURE 2.30 – Profil d'évolution de l'espacement entre billes, dans un réseau comportant un schéma périodique de trois billes, en fonction du déphasage acquis par le faisceau sur une période. Les espacements sont définis tels que $d_1 = 2d$, $d_2 = d$ et $d_3 = 2d$.

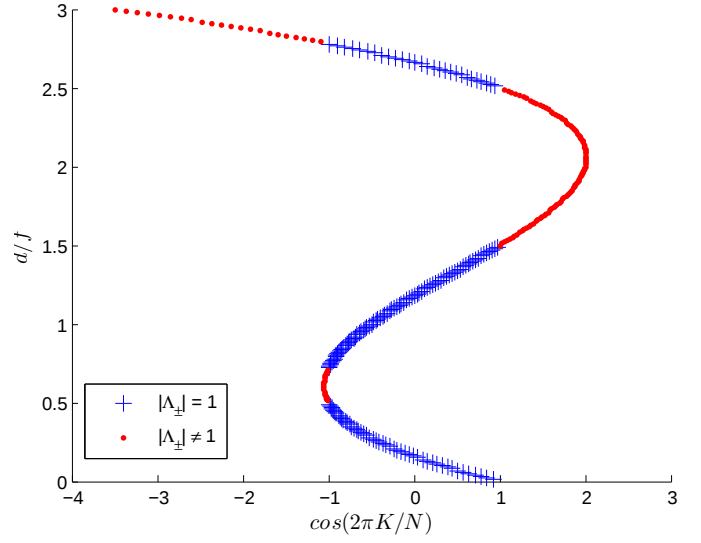


FIGURE 2.31 – Profil d'évolution de l'espacement entre billes, dans un réseau comportant un schéma périodique de trois billes, en fonction du cosinus de l'angle de déphasage acquis par le faisceau sur une période. Les espacements sont définis tels que $d_1 = 2d$, $d_2 = d$ et $d_3 = 2d$.

Il apparaît clairement, d'après les figures 2.30 et 2.31, des zones pour lesquelles nous ne pouvons définir de faisceau se propageant de façon stable, dans le réseau de lentilles. Cette distinction se fait dans le cas où, les valeurs propres calculées ont un module inférieur ou supérieur à l'unité, soit $|\cos(\theta)| > 1$. Ainsi, il apparaît que θ est défini comme une grandeur complexe. L'onde se propageant peut alors être vue comme une onde évanescente (décroissance exponentielle). Soulignons le fait que la partie réelle du déphasage gaussien, dans les bandes interdites, est toujours égale à π ou 0 [π]. Quant à la partie imaginaire, nous constatons qu'elle atteint un minimum aux extrémités de la bande interdite avec une valeur nulle, et un maximum en centre de zone.

Étude d'un système périodique focalisant stable Nous pouvons maintenant nous fixer une valeur d'espacement entre lentilles pour lequel le faisceau restera confiné au sein du réseau. Prenons, arbitrairement, le cas où $\tilde{d} = 1$ (figure 2.28). La matrice de transfert est alors :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\tilde{d}=1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Nous pouvons alors en déduire les valeurs et vecteur propres correspondants :

$$\Lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \xi_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

À partir de là, nous allons pouvoir remonter aux caractéristiques intrinsèques du faisceau. Autrement dit, nous allons déduire du vecteur propre les paramètres d'entrée de faisceau $\{\omega_{0_i}, \sigma_i\}$, liés au mode propre. Ainsi :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i + 1 = \Re\{\hat{q}\} = \frac{3}{2} \\ \hat{z}_{R_i} = \Im\{\hat{q}\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\sigma}_i + 1 = \frac{3}{2} \\ \hat{\omega}_{0_i} = \sqrt{\frac{\lambda \hat{z}_{R_i}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda \sqrt{3}}{2\pi}} \end{cases} \quad (2.33)$$

Ces valeurs peuvent, bien évidemment, se retrouver graphiquement à partir des figures 2.32 et 2.33, où nous avons reporté la valeur de chacun des paramètres de faisceau liés aux modes propres définis pour l'ensemble des espacements d solutions. Il suffit, pour cela, de reporter la valeur de d que nous nous sommes fixés ($d = 1n_m f$), et de lire les valeurs de ω_{0_i} et σ_i correspondantes.

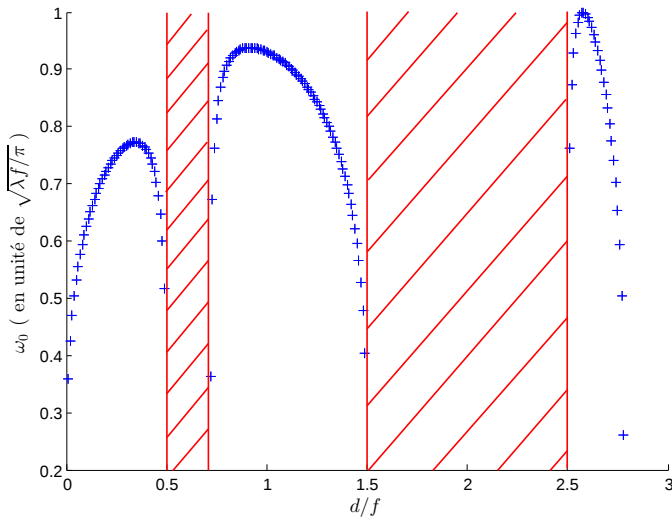


FIGURE 2.32 – Représentation du waist caractéristique du mode propre, dans un réseau défini par une maille élémentaire de 3 lentilles dont les espacements sont $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$.

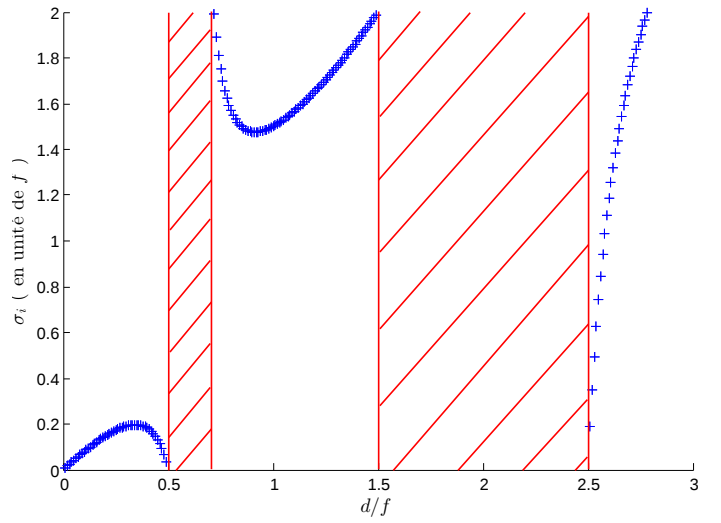


FIGURE 2.33 – Représentation de la distance "waist-foyer objet" caractéristique du mode propre, dans un réseau défini par une maille élémentaire de 3 lentilles dont les espacements sont $d_1 = d_3 = 2d_2 = 2d$.

Étude d'un système périodique focalisant instable De la même manière, nous pouvons nous placer dans une situation où $|\Lambda| \neq 1$. Prenons le cas $\tilde{d} = 2$ (figure 2.28) :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -4\tilde{d}^3 + 14\tilde{d}^2 - 10\tilde{d} + 1 & 4\tilde{d}^3 - 12\tilde{d}^2 + 5\tilde{d} \\ -2\tilde{d}^2 + 6\tilde{d} - 3 & 2\tilde{d}^2 - 5\tilde{d} + 1 \end{pmatrix} \stackrel{\tilde{d}=2}{=} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Les valeurs et vecteurs propres en découlant sont alors :

$$\Lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \underline{\xi}_{\pm} = \begin{pmatrix} 3 \pm \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Nous voyons bien, ici, que nous obtenons des valeurs et vecteurs propres purement réels. Il n'existe pas, par conséquent, de mode propre pour un tel système. Un faisceau stable ne peut donc être défini avec un tel espacement entre les lentilles.

De façon générale, nous observons sur les figures 2.32 et 2.33 plusieurs intervalles de d (zones rayées) pour lesquels aucune propagation ne sera permise. Ces derniers définissent alors des bandes de gap équivalentes à celles observées, par exemple, pour les cristaux photoniques. Cette analogie fera l'objet de notre prochaine section.

2.1.6.2 Propagation d'un faisceau à travers le réseau

En observant la propagation du faisceau dans le réseau, suivant les deux cas de figure possibles, nous retrouvons bien le comportement observé dans l'étude d'une maille élémentaire à une lentille. À savoir, un confinement proche de l'axe pour un système périodique stable (figure 2.34), ou une divergence du faisceau pour un état instable (figure 2.35).

Précisons toutefois que la périodicité du réseau et celle du champ sont identiques sur la figure 2.34, ce qui signifie que nous excitons un mode de *Bloch*.

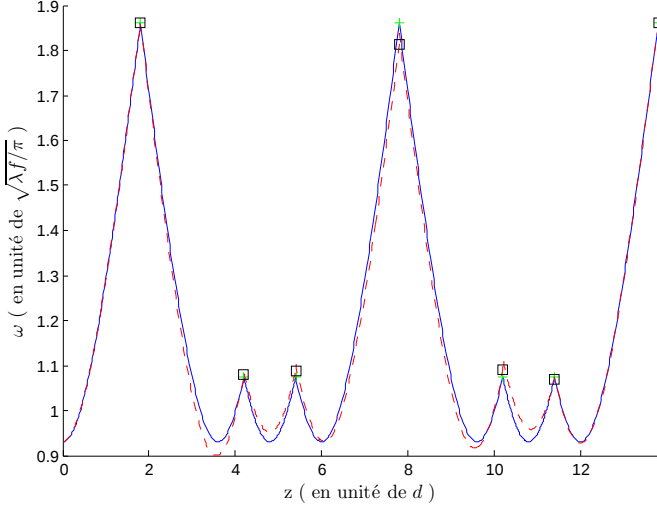


FIGURE 2.34 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 7$ lentilles, avec $d_1 = 2d$, $d_2 = d$, $d_3 = 2d$ et $d = n_m f$ et $|\Lambda| = 1$. Le waist d'entrée est de $4\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 63\mu\text{m}$.

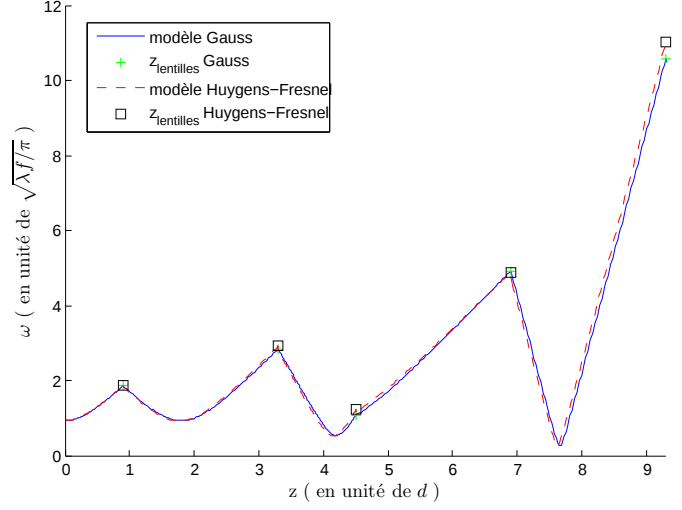


FIGURE 2.35 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, avec $d_1 = 2d$, $d_2 = d$, $d_3 = 2d$ et $d = 2n_m f$ et $|\Lambda| < 1$. Le waist d'entrée est de $4\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 63\mu\text{m}$.

2.1.7 Faisceau non purement gaussien

Le piégeage optique et la manipulation de particules de taille micrométrique ont reçu une attention particulière depuis les travaux précurseurs d'*Ashkin* sur la pression de radiation. Cette technologie est devenue particulièrement puissante en physique atomique pour manipuler les atomes neutres, et dans les sciences biophysiques pour piéger des cellules vivantes et organelles. Ainsi, depuis maintenant plusieurs années, les chercheurs se sont intéressés à de nouvelles formes de faisceaux, autres que gaussiens. L'ensemble des possibilités de solutions qu'offre l'équation d'onde paraxiale n'est qu'une raison supplémentaire à cet engouement. De récents travaux menés par *Zhao et al.* ont permis de démontrer qu'il était possible de piéger et manipuler de petites particules, d'indices de réfraction variables, avec un faisceau *Hermite-cosh-gaussien* [101]. Toutefois, l'ensemble de ces observations ont été effectuées dans le cas de billes de dimension équivalente à celle de la longueur d'onde. Notre démarche s'inscrit donc au-delà de ces résultats.

Notons toutefois qu'il est évident qu'en sortie de laser (faisceau multimodes $TEM_{00} + TEM_{nm}$), ou de fibre optique (profil de fonction de *Bessel*), un faisceau ne sera pas purement gaussien (dans son mode fondamental TEM_{00}), mais sera plutôt une combinaison de plusieurs modes. Une façon, bien connue, de sélectionner le mode fondamental est de placer, par exemple, un diaphragme sur l'axe de propagation du faisceau. Toutefois, cela pourra avoir également des conséquences sur la sélection du mode.

2.1.7.1 Faisceau multimodes en présence de TEM_{00}

Afin de se rendre compte du filtrage modal imposé par un tel système optique de lentilles, nous allons, dans ce paragraphe, observer la propagation d'un faisceau *multimodes*. Pour cela, nous ajouterons un pourcentage de mode TEM_{01} au mode fondamental, en entrée, et observerons l'évolution du profil transverse de ce faisceau dans le réseau. Le raisonnement tenu avec l'ajout de TEM_{01} pourrait, bien évidemment, être étendu à tout autre mode d'ordre supérieur. Ceux-ci n'étant autres que le produit entre le mode fondamental gaussien et un polynôme d'*Hermite*, associé à l'ordre.

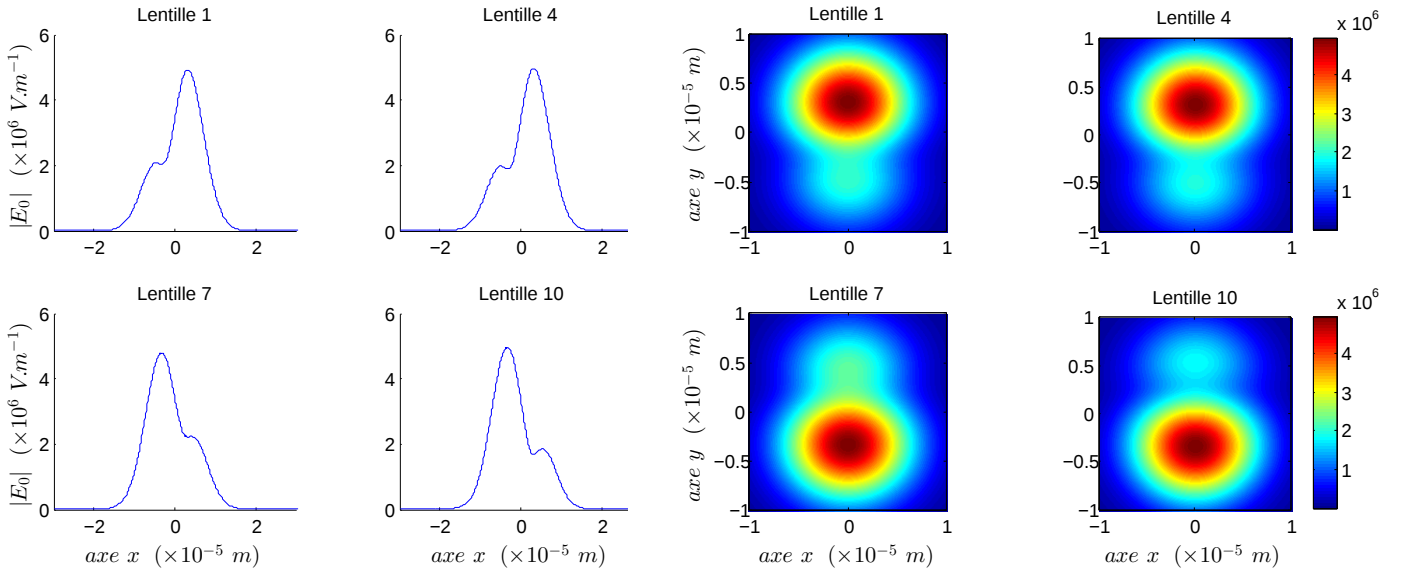


FIGURE 2.36 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

FIGURE 2.37 – Profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

Les résultats observés sur les figures 2.36 et 2.37 ont été obtenus dans une situation où le faisceau possède des paramètres d'entrée tel que le mode TEM_{00} soit *accordé* sur les propriétés du réseau. Nous nous apercevons alors que le mélange des deux modes se propage dans le réseau. Toutefois, nous constatons un certain filtrage du mode supérieur TEM_{01} , comme nous pouvons le voir sur la figure 2.38, où la contribution du mode fondamental a été déduite. En effet, l'amplitude atteinte présente un maximum faible devant celui du profil multimodes. Nous relevons également l'apparition d'une périodicité de faisceau égale à 4 fois celle du réseau.

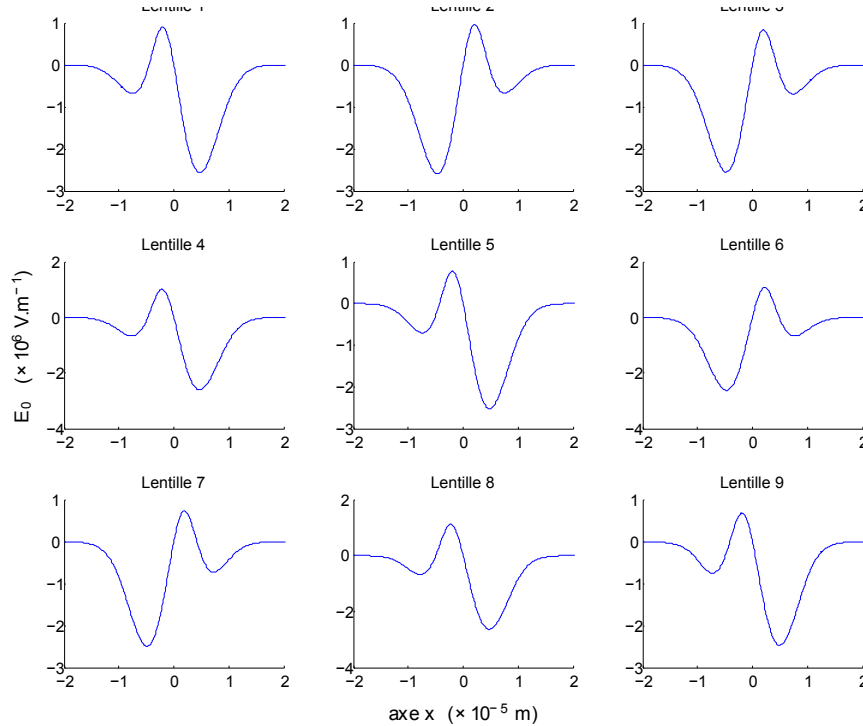


FIGURE 2.38 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Ici nous avons ôté la contribution du fondamental.

Regardons maintenant les mêmes résultats dans une situation *désaccordée*.

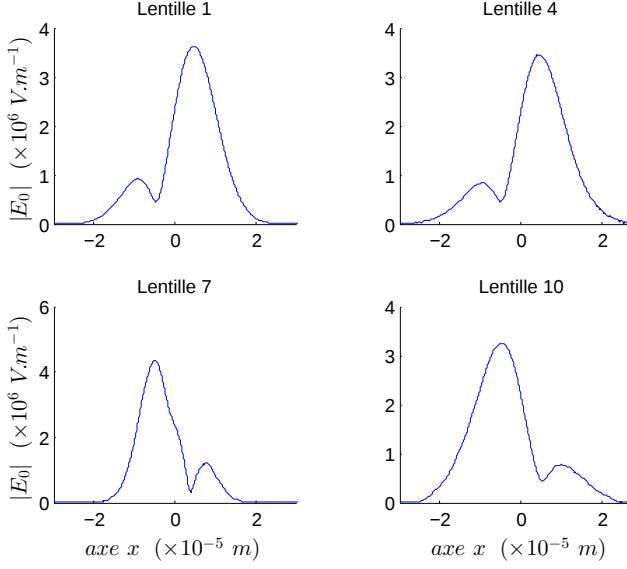


FIGURE 2.39 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$.

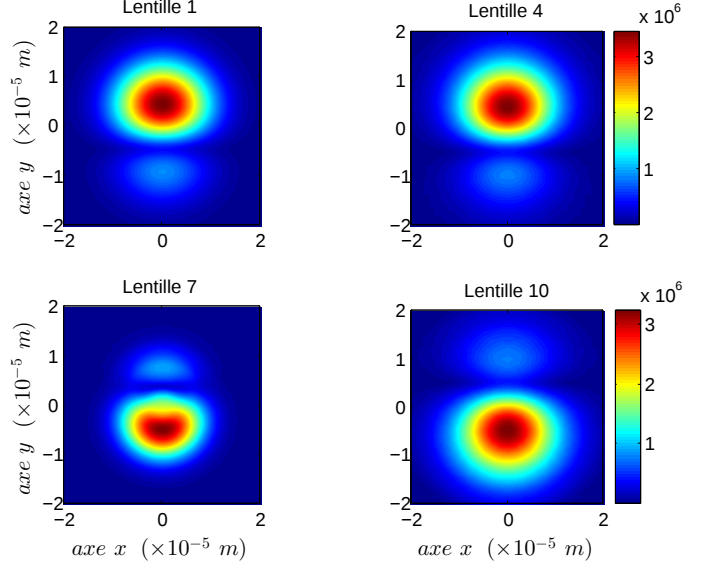


FIGURE 2.40 – Profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$.

Nous observons, dans cette situation, que le mode TEM_{01} se conserve toujours au cours de la propagation du faisceau. Toutefois, en comparaison avec le mode de *Bloch*, nous voyons que le profil transverse, quel que soit le mode observé, est plus étalé. Nous avons ainsi une amplitude plus faible, et une largeur plus conséquente.

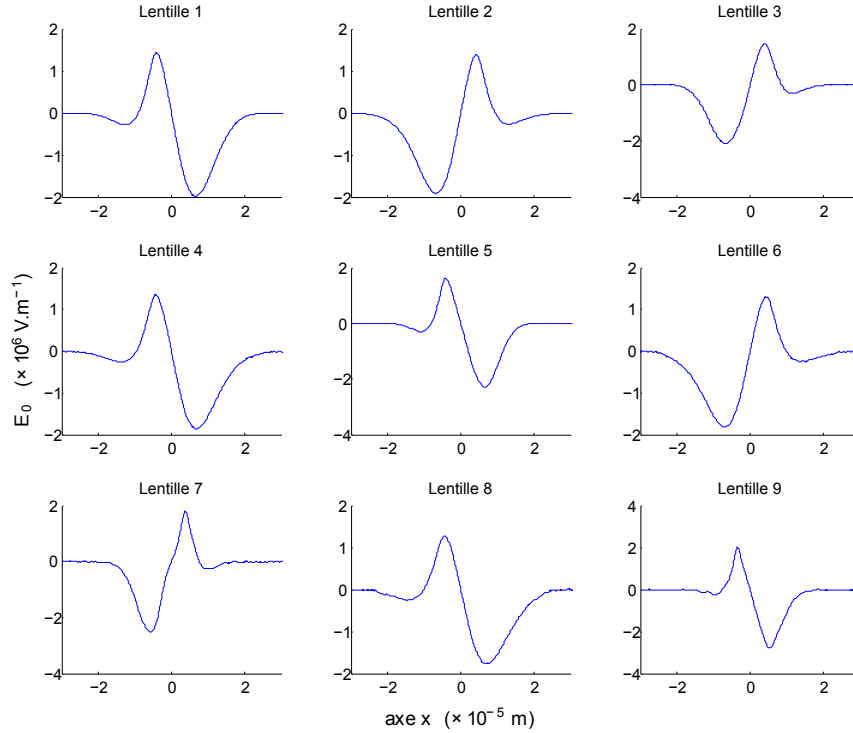


FIGURE 2.41 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau multimodes dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le faisceau est composé du mode fondamental TEM_{00} auquel nous avons ajouté 100% de TEM_{01} . Le waist d'entrée est de $9\mu m$, soit $2\omega_{0_{accord}}$, et $\sigma_i = 0\mu m$. Ici nous avons ôté la contribution du fondamental.

De façon générale, nous voyons que propager un faisceau multimodes permet d'obtenir des profils transverses d'amplitude supérieure au mode fondamental seul.

Il pourrait alors être possible de se servir de ce faisceau en séparant chacun des deux lobes, à l'aide d'un montage interférométrique, pour ensuite les recombiner de façon cohérente sur un mode proche du fondamental, afin d'obtenir un maximum d'intensité [102, 103].

2.1.7.2 Faisceau *Hermite-gaussien*

Nous allons maintenant ne considérer que des modes d'ordre supérieur au fondamental. Pour ce faire, nous obtenons pour les profils à symétrie cartésienne de type *Hermite-gauss*. L'amplitude complexe normalisée, à une dimension transverse, s'exprime telle que :

$$u_n(r, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n! \omega_0}\right)^{1/2} \left(\frac{q_0}{q(z)}\right)^{1/2} \left(\frac{q_0 q^*(z)}{q_0^* q(z)}\right)^{n/2} \times H_n\left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)}\right) \exp\left(-i \frac{kr^2}{2q(z)}\right) \quad (2.36)$$

Nous savons que pour un mode de *Bloch*, le profil gaussien du champ se propage à travers ce dernier sans se déformer. Vérifions ce qu'il en est pour un mode différent TEM_{01} .

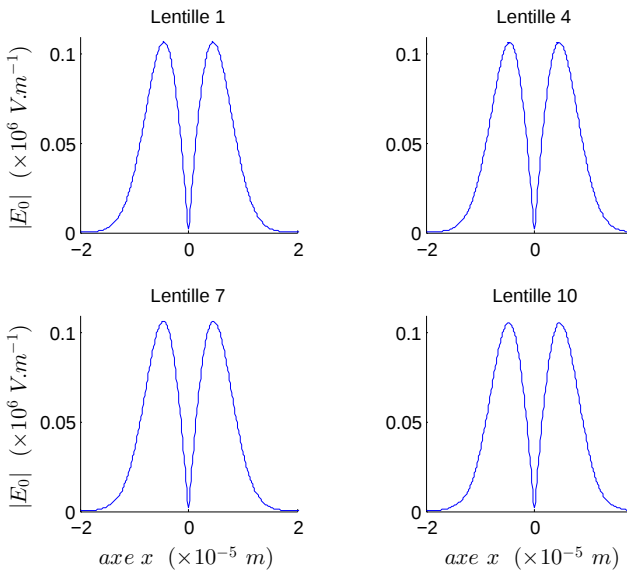


FIGURE 2.42 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu m$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

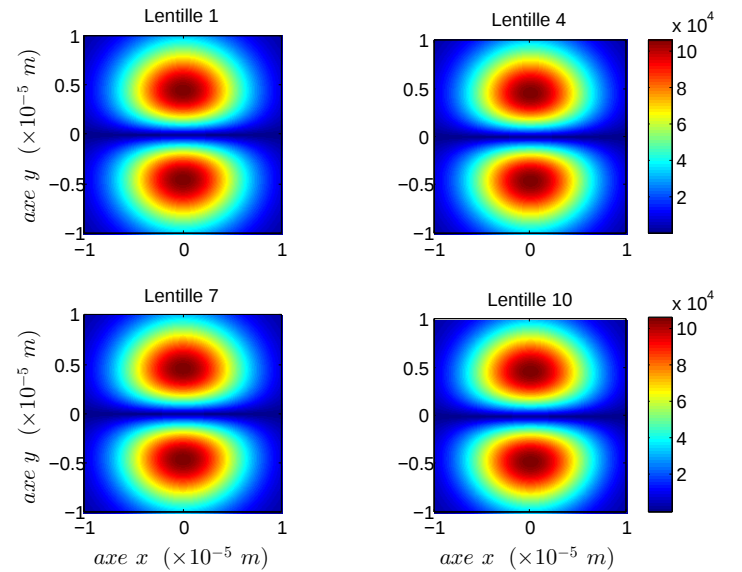


FIGURE 2.43 – Profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu m$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

Nous constatons que l'ordre du mode n'a pas d'importance dans une situation d'*accord*. En effet, tout comme le mode fondamental, le profil TEM_{01} se propage dans le réseau sans être déformé. Ainsi, quel que soit le mode que nous considérons, nous savons que seul le profil transverse du champ et le déphasage en sont caractéristiques. L'évolution longitudinale et le rayon de courbure réel du faisceau sont, quant à eux, indépendants du mode propagé. La condition d'auto-reproduction spatiale du champ est donc conservée.

Lorsque nous injectons maintenant un même faisceau mais dans un cas *désaccordé*, nous constatons une évolution du mode au cours de la propagation du faisceau dans le réseau.

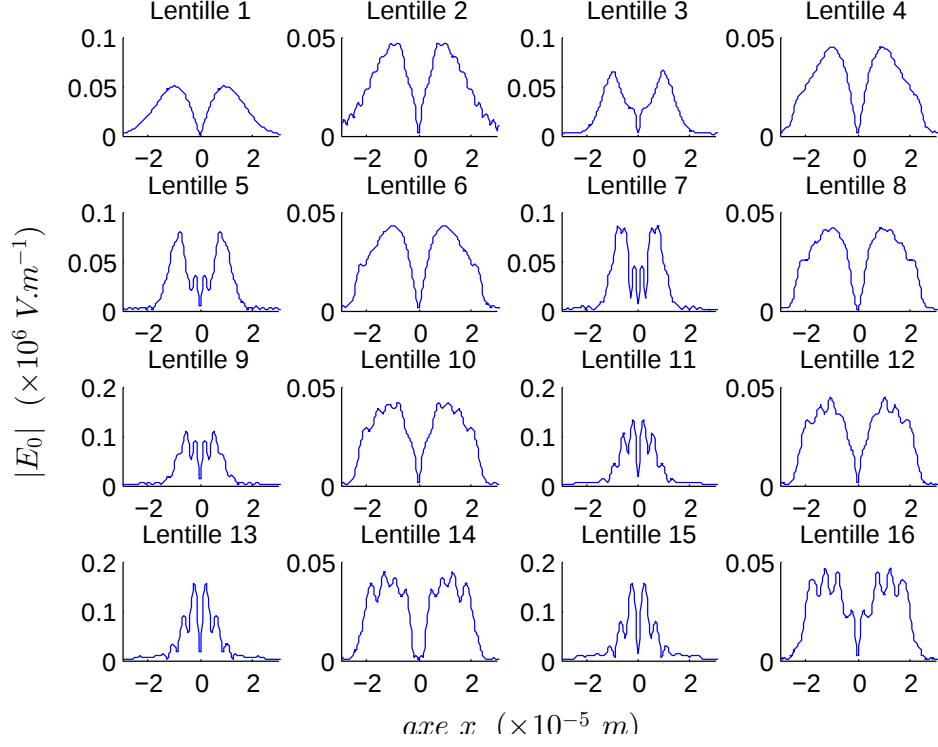


FIGURE 2.44 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $13.5 \mu m$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

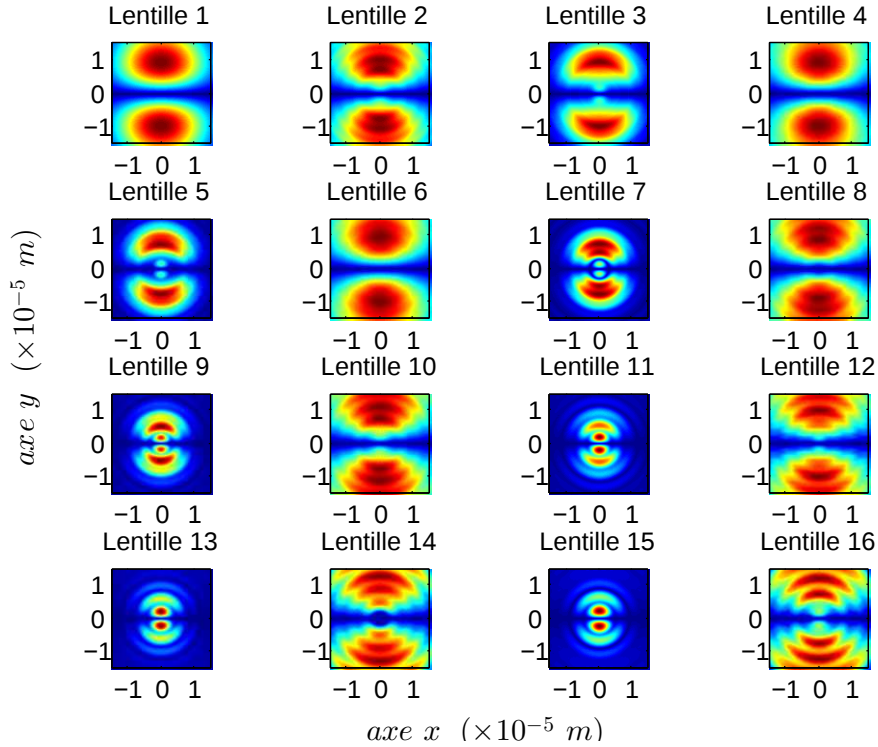


FIGURE 2.45 – Profil d'amplitude du faisceau TEM_{01} dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées. Le waist d'entrée est de $13.5 \mu m$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

En effet, nous voyons apparaître une évolution sur deux modes différents du champ obtenus en fin de réseau, et dont la périodicité est identique et égale à deux fois celle du réseau (deux passages de lentilles). Les modes finaux sont caractéristiques de celui injecté en entrée. En effet, nous remarquons qu'un des deux n'est autre que le mode lui-même (TEM_{01}), mais dont la largeur est plus étroite, et par conséquent d'amplitude plus grande (par principe de conservation de l'énergie). Le second mode atteint est, quant à lui, moins spécifique. Il apparaît judicieux de souligner que ce comportement est encore une fois identique à celui observé pour le mode fondamental, mais également pour d'autres modes d'ordres supérieurs. Les variations du *waist* d'entrée n'auront cependant pas de conséquence majeure sur l'établissement de ces modes. Toutefois, celui-ci se fera d'autant plus rapidement dans le réseau que l'écart à sa valeur *accordée* sera grand.

2.2 Analogie avec les cristaux photoniques

Notre étude porte sur l'analyse d'un guide optique périodique, ainsi, une analogie avec l'étude des cristaux photoniques semblerait pouvoir s'établir. La notion de cristal photonique est liée au comportement d'un photon, placé dans un milieu dont la constante diélectrique présente une structuration périodique. Ainsi, la propriété majeure d'un tel cristal va être de modifier la propagation des ondes électromagnétiques, en créant des bandes d'énergie autorisées et interdites [104–106]. L'absence de mode propagatif des ondes électromagnétiques dans de telles structures, sur toute une plage de fréquences, est alors qualifiée d'effet de bande interdite. Dans le cas le plus simple des réseaux à une dimension, connus sous le nom de *miroirs de Bragg* [107], l'existence de ces longueurs d'onde bloquées est comprise simplement en termes d'interférences, destructives en transmission, entre les faisceaux réfléchis sur les différentes interfaces.

Nous relevons ainsi des similitudes avec notre système. En effet, tout comme un cristal photonique sera caractérisé par une variation périodique de la constante diélectrique du milieu, le réseau que nous considérons se définit par un positionnement périodique des lentilles. Ce système permet alors de mettre en évidence une réponse optique linéaire ⁸, identiquement au cas des cristaux photoniques. Cette linéarisation permet, en outre, d'aborder le problème suivant un formalisme matriciel similaire.

Toutefois, les dimensions caractéristiques que nous considérons diffèrent quelque peu de celles mises en jeu pour les cristaux photoniques. En effet, alors que ces derniers sont définis par une structuration périodique *sub*-longueur d'onde, notre système présente des paramètres intrinsèques (taille de *waist*, diamètre et espacement des lentilles) grands devant celle-ci.

De surcroît, en ne prenant en compte que de faibles gradients d'indices, nous pouvons négliger les réflexions aux interfaces *milieu-lentille*, et s'affranchir des phénomènes d'interférences avec le faisceau incident.

2.2.1 Maille à plusieurs lentilles et ouverture de *gap*

Bien que l'existence de bandes interdites fut initialement démontrée en 1887 par *Rayleigh*, les premiers travaux qui amenèrent à la notion de *cristal photonique* furent menés par *Yablonovitch* un siècle plus tard, dans le but de contrôler l'émission spontanée de la lumière. L'inclusion de microcavités dans des structures périodiques allait ainsi permettre d'ouvrir une nouvelle voie au confinement par la lumière. De récents travaux ont montré qu'il était alors possible de piéger sur un ensemble de positions stables des microparticules via des ondes évanescentes à la surface d'une cavité de cristal photonique [108]. Mais également, les manipuler via les forces optiques à l'intérieur d'une fibre à cristal photonique [109].

Nous allons ainsi démontrer l'existence de l'ouverture d'une bande interdite dans un réseau de billes microscopiques de dimensions grandes devant la longueur d'onde. Cette approche originale nous permettra de définir à partir de quels paramètres nous pourrions modifier de façon contrôlée cette largeur de bande.

⁸Cette linéarité est essentiellement due au fait que nous négligeons les phénomènes d'absorption.

Comme nous avons pu le voir dans la section précédente, il a été possible d'établir un diagramme de bandes caractérisant un ensemble de solutions de $\tilde{d}$ en fonction du déphasage θ . Or, pour une maille complexe (maille composée de plus d'une seule lentille), nous avons explicité la présence d'une ouverture de gap dans le diagramme de bandes, définissant ainsi un ensemble de p familles de solutions distinctes, dont le nombre atteint celui du nombre de lentilles sur une maille élémentaire, et correspondant aux différentes zones de *Brillouin* pour θ .

2.2.1.1 Analogie entre la première zone de Brillouin d'un cristal photonique et celle d'un réseau périodique de lentilles

Un cristal photonique est défini par l'alternance périodique de deux milieux diélectriques. À partir du théorème de *Bloch-Floquet*, nous avons vu que la permittivité pouvait se mettre sous la forme d'une fonction périodique, dont la période était égale à celle du cristal :

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \quad (2.37)$$

où le vecteur $\vec{R}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base du réseau de *Bravais*⁹ $\{\vec{a}_i\}$:

$$\vec{R} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 \quad \text{avec } m_i \in \mathbb{Z} \quad (2.38)$$

Ainsi, nous pouvons, à partir des équations de *Maxwell*, déduire une solution pour le champ de la forme (2.1) :

$$H(\vec{r}) = e^{ik\vec{r}} u_k(\vec{r}) \quad (2.39)$$

En considérant (2.3), nous pouvons toutefois préciser que la fonction diélectrique étant périodique, elle peut être décomposée en série de *Fourier* comme suit :

$$\epsilon(\vec{r}) = \sum_s \epsilon(\vec{G}_s) e^{i\vec{G}_s \vec{r}} \quad (2.40)$$

où $\vec{G}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base du réseau réciproque¹⁰ $\{\vec{b}_i\}$:

$$\vec{G} = l_1 \vec{b}_1 + l_2 \vec{b}_2 + l_3 \vec{b}_3 \quad \text{avec } l_i \in \mathbb{Z} \quad (2.41)$$

Les vecteurs du réseau réciproque sont alors reliés à ceux du réseau direct par la relation :

$$m_i l_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (2.42)$$

où δ_{ij} est le symbole de *Kronecker*.

⁹Ce réseau, encore appelé réseau direct ou réel, correspond à l'ensemble des vecteurs formant une base, et reliant les points de l'espace définissant la maille élémentaire d'une structure périodique.

¹⁰Partant d'un réseau de *Bravais* défini par ses vecteurs de base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, nous introduisons alors les vecteurs de base du réseau réciproque $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ comme les normales à chaque plan formé par deux des trois vecteurs du réseau direct.

La première zone de Brillouin peut alors se définir comme la maille élémentaire dans le réseau réciproque.

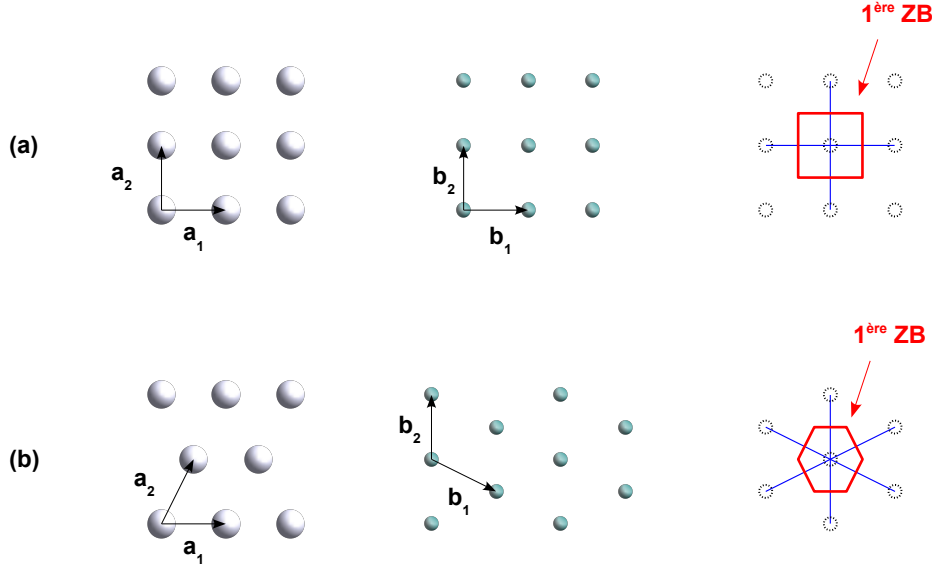


FIGURE 2.46 – Représentations des réseaux direct et réciproque dans le cas d'une maille 2D carrée (a), et triangulaire (b). Les surfaces encadrées correspondent aux premières zones de Brillouin (1^{ère} ZB) respectives.

Finalement, en considérant le théorème de *Bloch-Floquet*, nous pouvons avancer que si l'on impose une translation d'un vecteur $\vec{G}$ au vecteur $\vec{k}$ dans les fonctions de *Bloch* (2.39), les solutions restent invariantes, tant que $\vec{G}$ reste une combinaison linéaire des vecteurs de base du réseau réciproque, autrement dit, tant que $\vec{G}$ satisfait (2.41) et (2.42). Cela signifie que les états propres correspondant aux vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k} + \vec{G}$ sont physiquement équivalents, et possèdent la même énergie. En d'autres termes, l'énergie des ondes de *Bloch* existant dans la structure photonique est une fonction périodique du vecteur d'onde, de même périodicité que le réseau réciproque. Nous pouvons donc restreindre la recherche des états propres à la première zone de *Brillouin*, et ramener tous les vecteurs de l'espace réciproque à un vecteur appartenant à cette dernière.

Nous allons pouvoir étendre ce raisonnement, établi pour les cristaux photoniques, à un réseau périodique de lentilles. Ainsi, de la même façon qu'est défini un critère de périodicité, dans l'espace réciproque, à partir du nombre d'onde $\vec{k}$ pour un cristal photonique, nous allons définir un critère de périodicité équivalent à partir du paramètre θ . Nous pourrions alors déterminer les états propres du système dont les caractéristiques à θ_p et θ_{p+1} (avec p entier naturel) seront identiques (2.43). Autrement dit, les paramètres de faisceau, regroupés sous le rayon de courbure complexe $\underline{q}$, seront des fonctions périodiques de θ définies à partir de la périodicité du réseau de lentilles.

2.2.1.2 Ouverture de *gap* dans un réseau de lentilles

Pour simplifier l'approche, plaçons nous dans une situation où la maille élémentaire de notre réseau est composée de deux lentilles. Les espacements équivalents, notés respectivement d_1 et d_2 , composent la période a du réseau, tel que $a = d_1 + d_2$. Observons l'évolution de cette bande interdite (ou *gap*), en fonction des variations de l'éloignement entre lentilles (figure 2.47).

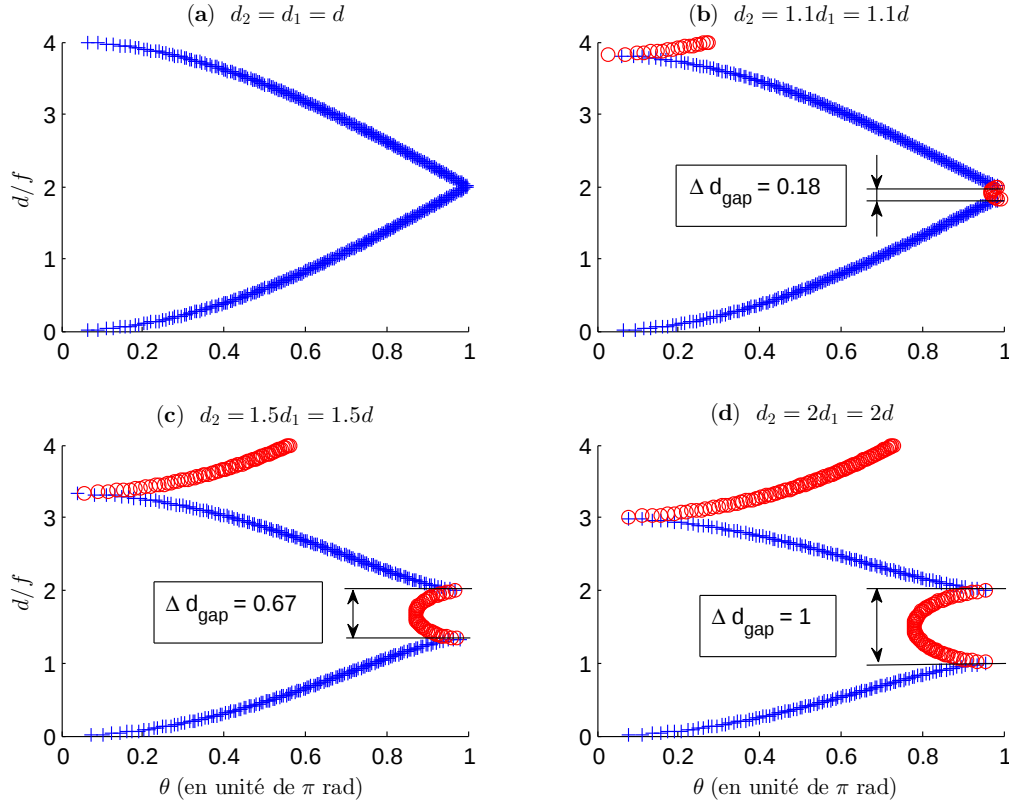


FIGURE 2.47 – Évolution de la largeur de *gap* en fonction de l'augmentation de la différence entre les distances d_1 et d_2 . Ici, nous avons fixé $d_1 = d$ et avons fait varier la valeur de d_2 .

Nous avons représenté sur la figure 2.47 les variations de la périodicité d du réseau, normalisée par la focale des billes, en fonction du déphasage θ , lié à la périodicité du champ. Il apparaît toutefois, en accord avec les précédentes observations, que pour une valeur θ donnée, nous aurons plusieurs solutions de d . En effet, la représentation de ce diagramme de bandes correspond en fait au repliement des ensembles solutions des différentes zones de *Brillouin*. De ce fait, chaque solution d_p correspondant au même θ , équivaut plus justement à :

$$\theta_p = 2\pi \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + (-1)^p \theta_0 \quad (2.43)$$

où θ_0 correspond à la valeur de θ sur la première zone de *Brillouin*, [...] symbolise la partie entière, et p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq N_{\text{maille}} - 1$ avec N_{maille} le nombre de lentilles définissant la maille élémentaire.

Ainsi, pour un type de bille donné (définie par un rayon et un indice de réfraction), nous observons que tous les espacements d ne seront pas possibles pour obtenir un faisceau stable dans un réseau défini par une maille spécifique (présence de bandes interdites dans le diagramme de bandes). Pareillement, à une périodicité fixée, tout type de bille ne pourra convenir pour un confinement. Et cela, de la même façon que toute onde, caractérisée par une fréquence propre, ne pourra se propager dans un cristal photonique.

Nous constatons alors une ouverture de *gap* avec les variations d'espacements sur la maille élémentaire. Plus spécifiquement, dès que les distances d_1 et d_2 sont différentes l'une de l'autre. En effet, deux zones solutions, pour lesquelles $|\cos(\theta)| < 1$, s'établissent distinctement et peuvent être assimilées aux bandes diélectrique et d'air d'un cristal photonique. Il apparaît que l'ouverture se fasse en bord de bande (θ tendant vers π), sous la forme d'une légère inflexion. En effet, de la même façon que la largeur du *gap* augmente avec l'augmentation de la différence d'indice entre les deux milieux composant un cristal photonique [110], celle-ci augmente d'autant plus que l'écart entre les deux distances d_1 et d_2 , est important. De plus, l'évolution de cette ouverture, dans le cas d'une maille élémentaire à deux lentilles, suit la loi (démonstration en annexe B) :

$$\Delta \tilde{d}_{gap} = 2 \tilde{d} \frac{|\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1|}{\tilde{d}_2 \tilde{d}_1} \quad (2.44)$$

Nous pourrions rapprocher cette expression de la largeur de bande interdite à celle analogue pour les cristaux photoniques :

$$\Delta \tilde{\omega}_{gap} = \omega_0 \frac{4}{\pi} \frac{|n_{m2} - n_{m1}|}{n_{m2} + n_{m1}} \quad (2.45)$$

où ω_0 correspond à la pulsation au centre de bande, n_{m1} et n_{m2} les indices de réfraction des deux milieux composant le cristal photonique (miroir de Bragg), et le facteur $4/\pi$ est lié au cas de l'emploi d'une lame quart d'onde (définition particulière du miroir).

Ainsi, l'ensemble des mailles élémentaires de deux lentilles, espacées des valeurs d_1 et d_2 , peut être assimilé à l'empilement de deux matériaux transparents, de permittivité électrique ϵ_1 et ϵ_2 différentes, et espacés d'une période a (figure 2.48). Cela nous permet de mettre en exergue un lien étroit entre un réseau de lentilles et un cristal photonique. De la même façon, comme nous l'avons déjà signalé, l'augmentation de l'écart d'indice (ou permittivité), entre les deux couches formant le *miroir de Bragg*, induira un élargissement du *gap* [110].

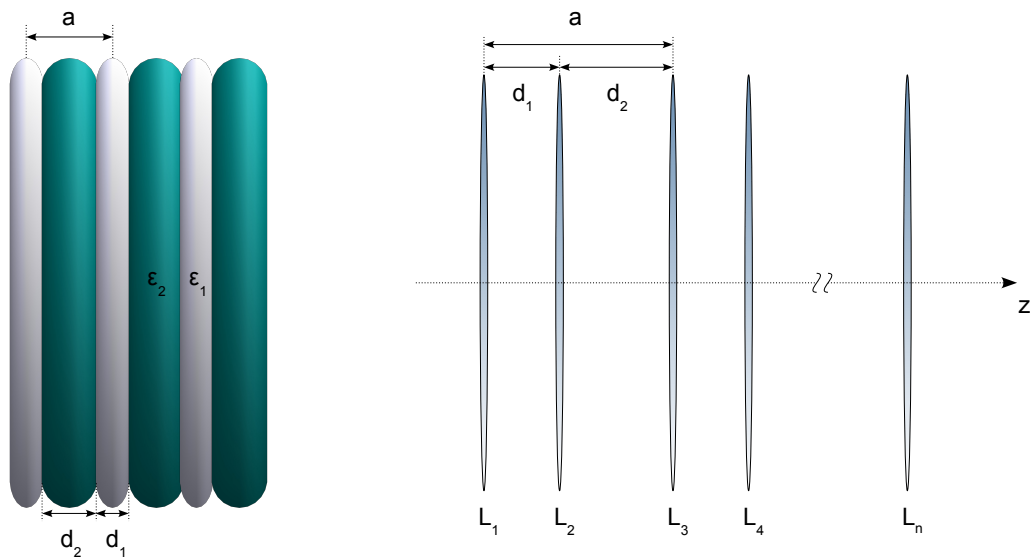


FIGURE 2.48 – Équivalence entre un cristal photonique 1D, de type miroir de Bragg, composé par l'alternance périodique (de période a) de couches planes diélectriques, d'épaisseurs d_1 et d_2 , et de permittivités respectives ϵ_1 et $\epsilon_2 < \epsilon_1$, avec un réseau de lentilles minces dont la maille élémentaire, de longueur a , est composée de deux lentilles espacées de d_1 et d_2 .

2.2.2 Localisation des maxima du champ dans le réseau et variation sur l'espacement d

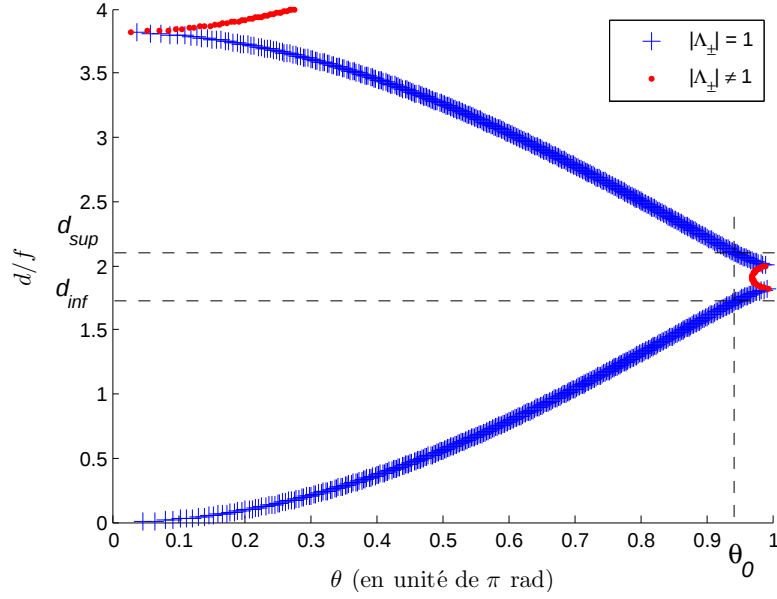


FIGURE 2.49 – Profil d'évolution de l'espacement entre lentilles, dans un réseau comportant un schéma périodique de deux lentilles, en fonction du déphasage acquis par le faisceau sur une maille élémentaire. Les espacements sont définis tels que $d_1 = d$ et $d_2 = 1.1d$. Nous avons tracé les deux valeurs de d , d_{inf} et d_{sup} , correspondant à un même θ .

Observons alors ce que cela implique, si nous nous situons sur la bande inférieure, ou supérieure, du diagramme. Pour ce faire, considérons un schéma équivalent à celui pris en compte sur le graphe de la figure 2.47 (b), à savoir, un réseau défini par une maille élémentaire de deux lentilles, suivies respectivement des espacements $d_1 = d$ et $d_2 = 1.1d$. Ainsi, simulons la propagation d'un faisceau avec des propriétés assimilées à chacune de ces deux situations, soit deux valeurs de d prise sur chacune des bandes, et équivalentes à un même θ . Les valeurs de d que nous déduisons sont alors $d_{inf} = 1.718$ et $d_{sup} = 2.1$ (figure 2.49).

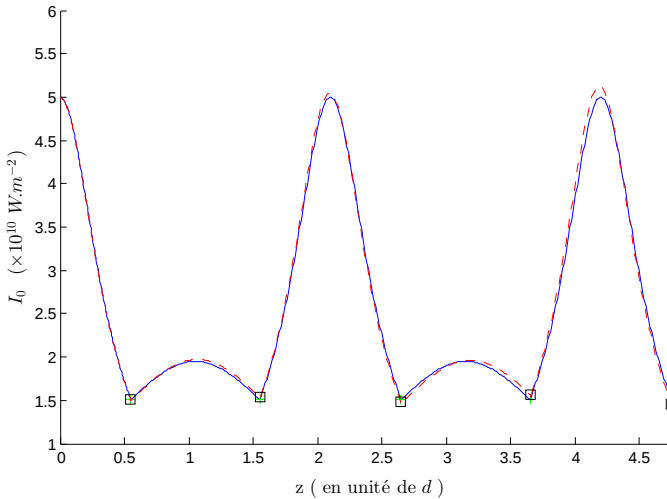


FIGURE 2.50 – Profil d'évolution de l'intensité du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles, soit deux mailles élémentaires, avec $d_2 = 1.1d_1 = 1.1d$ et $d = 1.718 n_m f$. Le waist d'entrée est de $3.6 \mu m$, et sa position par rapport au foyer objet de la première lentille de $-6.9 \mu m$. La position des lentilles est repérée par des croix vertes pour le modèle de Gauss et des carrés noirs pour celui de Huygens-Fresnel.

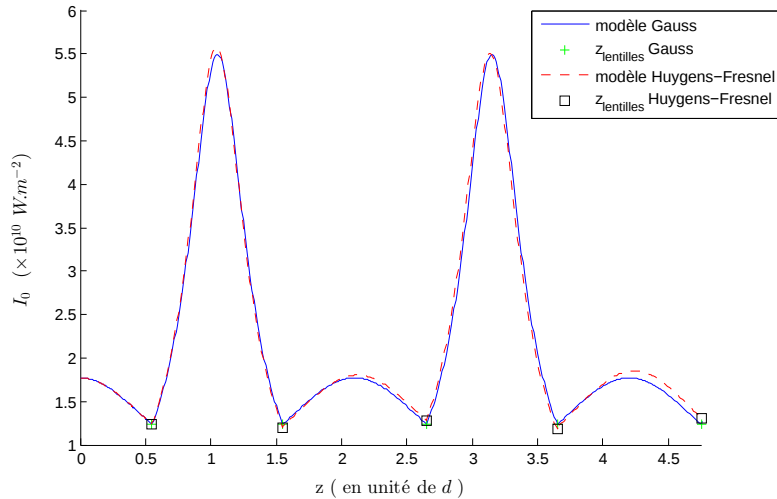


FIGURE 2.51 – Profil d'évolution de l'intensité du faisceau dans un réseau de $N_L = 5$ lentilles avec $d_2 = 1.1d_1 = 1.1d$ et $d = 2.1 n_m f$. Le waist d'entrée est de $6 \mu m$ et sa position par rapport à la première lentille de $19 \mu m$. La position des lentilles est repérée par des croix vertes pour le modèle de Gauss et des carrés noirs pour celui de Huygens-Fresnel.

La valeur de d , utilisée pour cette première figure 2.50, correspond à la branche inférieure du diagramme de bandes (figure 2.47 (b)). Nous pouvons alors voir que le maximum d'intensité se trouve dans les parties où l'écart de distance est le plus élevé, soit, dans les zones de d_2 . En revanche, selon la figure 2.51, où la valeur de d correspond maintenant à la branche supérieure du diagramme de bandes (figure 2.47 (b)), le pic d'intensité se situe dans les zones de plus faible écart de distance, soit pour un écart de d_1 .

Ce changement des positions des maxima dans le réseau est précédé d'un comportement évolutif le long d'une même bande, dont les amplitudes s'égalisent en centre de bande, soit pour $\theta = \pi/2$. Toutefois, ce "saut" s'opère bien en passant d'une branche du diagramme à l'autre car le faisceau se déphase de π aux extrémités des bandes interdites, où le champ est, cela dit, essentiellement confiné dans les zones respectives à celles liées aux maxima sur une bande donnée.

Nous venons de voir qu'il existait, pour cette valeur d'espacement entre lentilles, des zones où aucun mode ne pouvait se propager dans le réseau. Dans certains cas, afin de disposer d'une fréquence de propagation permise (cristaux photoniques), à l'intérieur d'une bande de fréquences interdites, il est nécessaire d'introduire des défauts dans la structure périodique. C'est ce que nous allons maintenant étudier.

2.3 Effets d'un défaut : couplage de deux chaînes périodiques

De tels défauts, dans le cas des cristaux photoniques, sont obtenus en modifiant, localement ou non, la périodicité du cristal. Alors, de nouveaux modes permis pour le champ électromagnétique peuvent apparaître, pour des fréquences se trouvant dans le *gap* photonique. Les champs associés à ces modes sont alors localisés au niveau de ces défauts. Parmi les défauts possibles, nous pouvons faire la distinction entre les défauts ponctuels (retrait, ajout ou modification d'un ou plusieurs des motifs du réseau), qui se comportent comme des microcavités résonantes ¹¹, et les défauts linéaires (couplage sur un ensemble de défauts ponctuels). Regardons ce que cela peut impliquer, dans notre étude, sur une chaîne de billes diélectriques.

2.3.1 Défauts localisés ou ponctuels

2.3.1.1 Défaut lacunaire ou défaut de *Schottky*

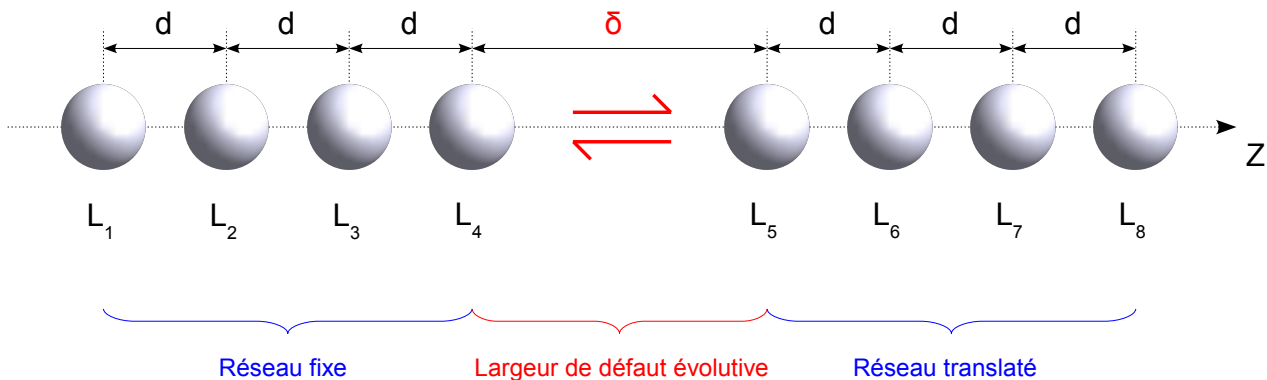


FIGURE 2.52 – Représentation de l'inclusion d'un défaut lacunaire par l'omission d'une bille dans le réseau périodique initial. À cela se rajoute une évolution de la largeur de la lacune, impliquant une translation du sous-réseau situé au-delà de cette dernière.

¹¹Nous verrons que cette propriété, propre aux cristaux photoniques, n'est pas vérifiée dans notre cas, essentiellement dû au fait que nous négligeons les réflexions aux interfaces *milieu-lentille*, et ne considérons pas, en conséquence, d'interférence. Cela se traduira plutôt comme un changement sur les conditions de couplage des "sous-parties" composant la chaîne de lentilles.

Nous proposons d'illustrer cela, en premier lieu, par la figure 2.53, où nous avons inclus un défaut ponctuel dans la chaîne de lentilles équidistantes. Celui-ci fut simplement simulé par un éloignement local plus ou moins important que la période du réseau (figure 2.52).

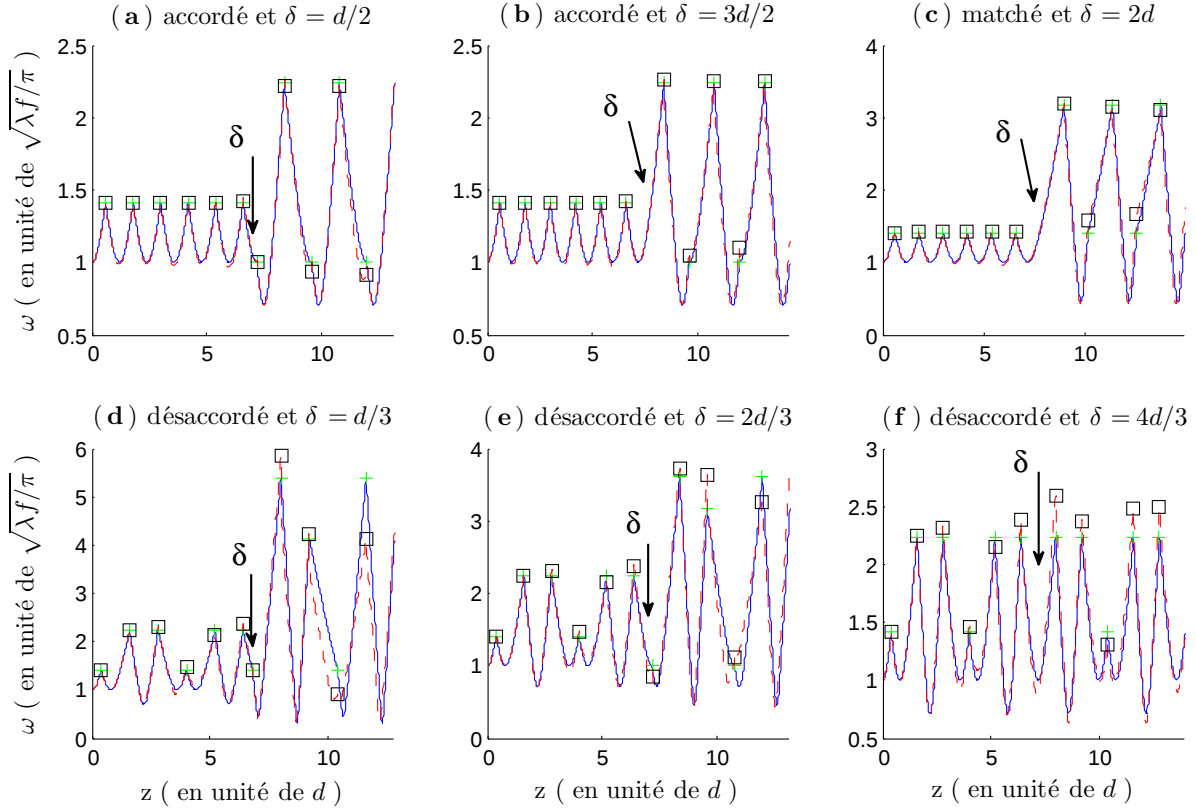


FIGURE 2.53 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 12$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5\mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts inclus dans le réseau. Les graphes (a), (b) et (c) correspondent à une situation initiale en mode de Bloch (avec $d = 2n_m f$), dont les défauts valent, respectivement, $n_m f$, $3n_m f$ et $4n_m f$. Les graphes (d), (e) et (f) correspondent, quant à eux, à une situation initiale désaccordée (avec $d = 3n_m f$), où les défauts valent respectivement $n_m f$, $2n_m f$ et $4n_m f$. Chaque tracé a été effectué suivant les deux modèles. L'évolution en traits discontinus rouges, entre chaque position de billes repérée par un carré noir, correspond au modèle de Huygens-Fresnel. Et celle en traits continus bleus, entre chaque position de billes repérée par une croix verte, correspond au modèle de Gauss.

Bien entendu, l'inclusion d'un simple défaut local ne jouera en rien sur la stabilité du système, tant que celui-ci n'impliquera pas une trop grande divergence du faisceau entre ses extrémités. Les graphes (a), (b) et (c) correspondent donc à un mode de Bloch. Nous savons alors que la périodicité du réseau et du faisceau coïncident. En incluant un défaut, nous modifions les paramètres d'entrée par rapport à la lentille qui suit. La valeur de σ_i s'en trouvant changée, nous ne restons pas sur le même mode. Nous explicitons ainsi le couplage entre deux modes du réseau, par l'insertion d'un défaut.

Étant initialement dans une situation équivalente à celle des cavités confocales ($\tilde{d} = 2$), comme nous l'avons vu précédemment, nous savons que le faisceau redevient identique à lui-même après quatre passages de lentilles. Nous observons bien cela sur les graphes après le défaut. En effet, nous voyons qu'après deux lentilles la largeur de faisceau est identique, toutefois le faisceau ne s'est déphasé que de $\theta = 2 \times \pi/2 = \pi$. Il sera alors totalement identique à lui-même après deux passages supplémentaires.

De façon générale, nous rappelons que la période acquise par le champ est simplement dépendante du paramètre de maille du réseau, et présentera communément une période supérieure à ce dernier. Toutefois, pour tout réseau, nous pourrions toujours définir un mode de Bloch, tant que la condition de stabilité sera respectée (2.9). En conséquence de quoi, la période est minimale, et équivalente à celle du réseau.

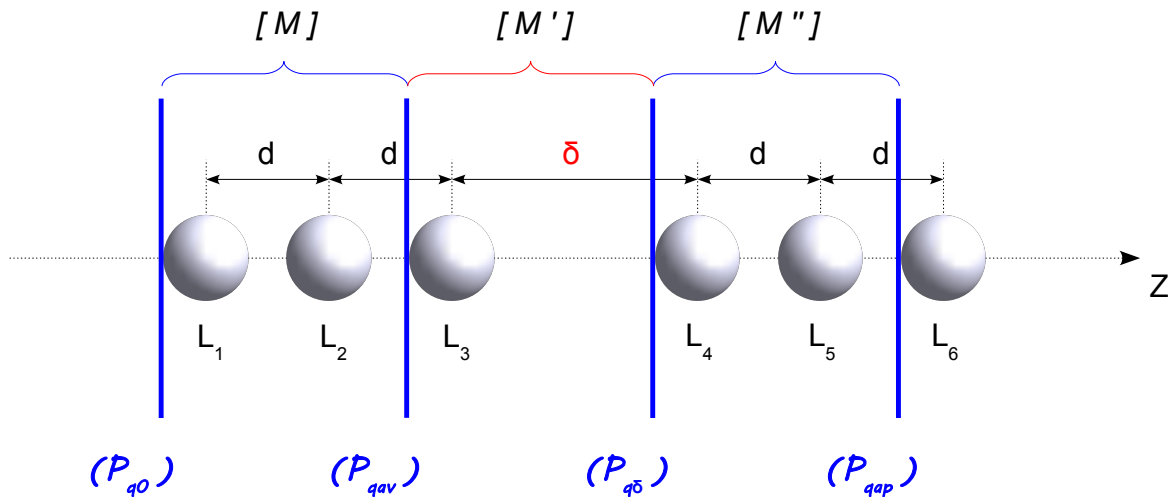


FIGURE 2.54 – Schématisation de la transformation du paramètre gaussien $\underline{q}$ à la traversée d'un réseau périodique, auquel nous avons inclus un défaut lacunaire. Celui-ci fut simulé par l'omission d'une bille, suivie d'une translation du sous-réseau situé au-delà du défaut.

Cela étant, en présence d'un défaut, nous n'avons plus un seul réseau défini par un espacement régulier entre lentilles, mais deux sous-réseaux couplés, définis par un même espacement d , mais séparés de δ . Nous pouvons alors exprimer ce couplage à partir de la méthode matricielle (1.42), comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{q}_{av} & \underset{< default}{=} \frac{A \hat{q}_0 + B}{C \hat{q}_0 + D} \\ \hat{q}_\delta & \underset{\delta=\alpha d}{=} \frac{A' \hat{q}_{av} + B'}{C' \hat{q}_{av} + D'} \\ \hat{q}_{ap} & \underset{> default}{=} \frac{A'' \hat{q}_\delta + B''}{C'' \hat{q}_\delta + D''} \end{array} \right. = \frac{A' (A \hat{q}_0 + B) + B' (C \hat{q}_0 + D)}{C' (A \hat{q}_0 + B) + D' (C \hat{q}_0 + D)}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad (2.46)$$

où $\hat{q}_0$ est le rayon de courbure complexe défini en entrée de réseau, $\hat{q}_{av}$ celui juste avant le défaut, $\hat{q}_\delta$ celui juste après le défaut, et $\hat{q}_{ap}$ celui en fin de réseau (figure 2.54). Le système est caractérisé par un ensemble de trois matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}''$ dont les éléments (A, B, C, D) , (A', B', C', D') et (A'', B'', C'', D'') correspondent respectivement aux zones avant, au niveau, et après le défaut. Il est bien évident que si nous avons autant de mailles élémentaires avant et après le défaut, alors $\mathbf{M} = \mathbf{M}''$.

Cependant, la conclusion restera la même, même si nous partons initialement d'une situation *désaccordée*, comme nous pouvons le voir sur les trois graphes suivants, **(d)**, **(e)** et **(f)**.

La largeur du faisceau, au niveau des lentilles, sera d'autant plus élevée que le défaut sera grand. À l'exception du cas observé sur le graphe **(f)**. En effet, le défaut défini par un écartement de $4n_m f$ implique une position du *waist* à égale distance des deux lentilles situées de part et d'autre de ce dernier. Ainsi, la largeur du faisceau au niveau des lentilles se conserve, ce qui permet la continuité du cycle.

Notons que dans la pratique, même si la précision sur la taille du défaut n'est pas parfaitement définie, nous voyons un comportement similaire du champ propagé. Cela traduit une certaine robustesse de nos résultats.

Enfin, l'observation d'une augmentation de largeur de faisceau, au niveau des lentilles, en fonction de l'évolution de la taille du défaut semble évidente (à l'exception du cas particulier où la valeur des paramètres de faisceau se préservent comme sur la figure 2.53 (f)), dans la mesure où la divergence du faisceau augmente suivant la propagation sur (Oz). Regardons alors (figures 2.55 et 2.56), comment varie les extrema d'intensité de faisceau, en fonction de cette variation de largeur de défaut.

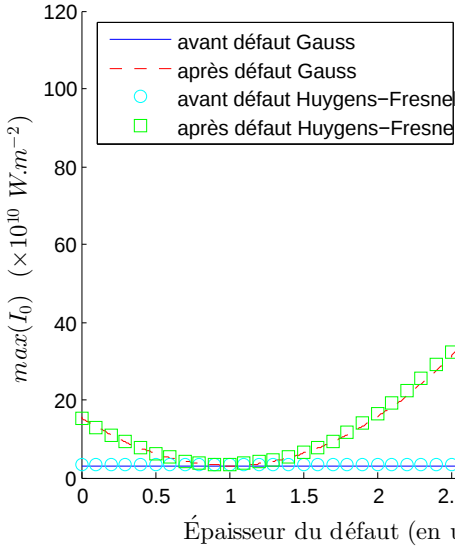


FIGURE 2.55 – Profil d'évolution du maximum d'intensité du faisceau en fonction de l'élargissement du défaut. Le réseau est composé de $N_L = 12$ lentilles, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2 n_m f$.

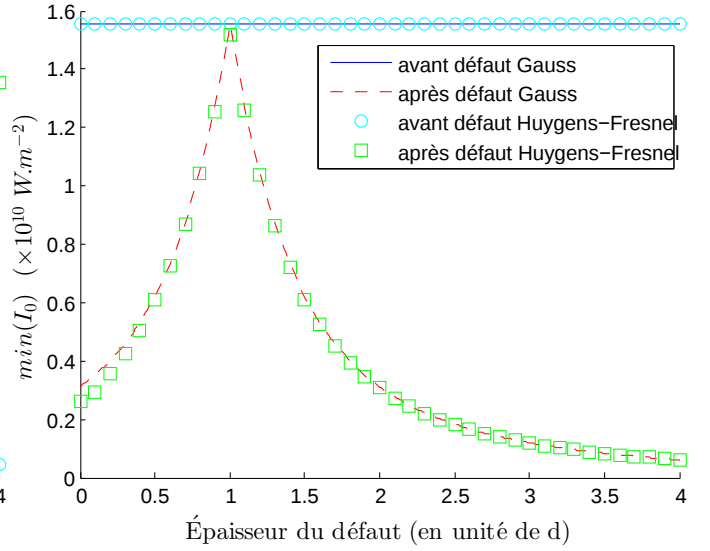


FIGURE 2.56 – Profil d'évolution du minimum d'intensité du faisceau en fonction de l'élargissement du défaut. Le réseau est composé de $N_L = 12$ lentilles, avec $\omega_{0_i} = 4.5 \mu\text{m}$, $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$ et $d = 2 n_m f$.

En observant l'influence de l'espacement d sur les variations de l'intensité dans le réseau, il apparaît qu'un minimum est atteint pour une largeur de défaut de $2 n_m f$, autrement dit, dans le cas où celui-ci est identique à la périodicité du réseau. Cela nous amène donc à conclure que le moindre défaut local, quel qu'il soit, entraînera une augmentation du maximum d'intensité atteint dans le réseau.

Inversement, si nous regardons le profil d'évolution du minimum d'intensité, il apparaît qu'un maximum est atteint lorsque la largeur du défaut vérifie les conditions du mode de *Bloch*, soit pour $\delta = 2 n_m f$. L'allure globale présente une augmentation de ce minimum jusqu'à cet espacement de $2 n_m f$, puis une décroissance tendant asymptotiquement vers zéro.

Ainsi, nous remarquons que l'inclusion d'un défaut entraîne irrémédiablement une augmentation, non seulement du maximum d'intensité accessible dans le réseau, mais plus généralement de l'amplitude de ses valeurs extrêmes.

Notons toutefois qu'une divergence commence à apparaître entre les deux modèles à partir d'une largeur de défaut d'environ $2.5 d$, soit $5 n_m f$ (figures 2.55). Nous comprenons qu'avec un tel écart, la largeur du faisceau au niveau de la lentille qui suit est telle que la diffraction ne peut plus être négligée. Le faisceau se retrouve alors très focalisé, avec un *waist* aux alentours d'un micron.

Cela va donc engendrer l'apparition de modes d'ordres supérieurs après le défaut, comme nous pouvons le voir sur les figures 2.57 et 2.58. Ici, nous avons pris l'exemple d'un défaut de largeur $\delta = 4 d$, soit $8 n_m f$. La largeur du faisceau au niveau de la lentille suivant directement le défaut est d'environ $3.2 \mu\text{m}$, autrement dit, de l'ordre de grandeur du rayon de la lentille ($\rho = 5 \mu\text{m}$). Le *waist* qui en découle est alors d'environ $0.8 \mu\text{m}$, ce qui traduit une forte focalisation du faisceau.

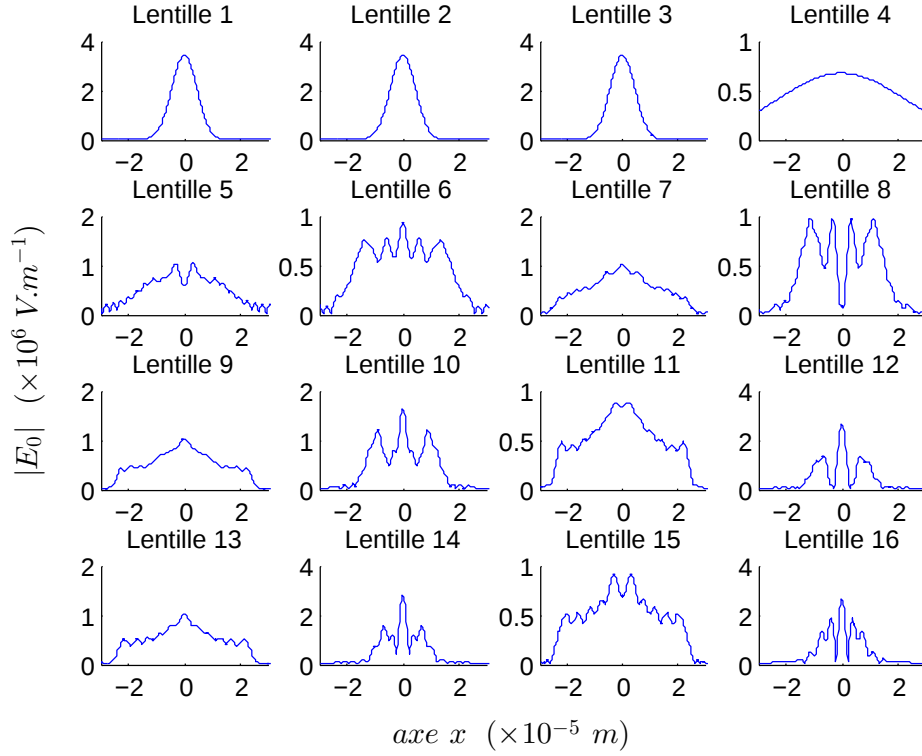


FIGURE 2.57 – Coupe du profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées, auquel on a ajouté un défaut, entre la troisième et la quatrième lentille, de largeur $\delta = 4d$, avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$, et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

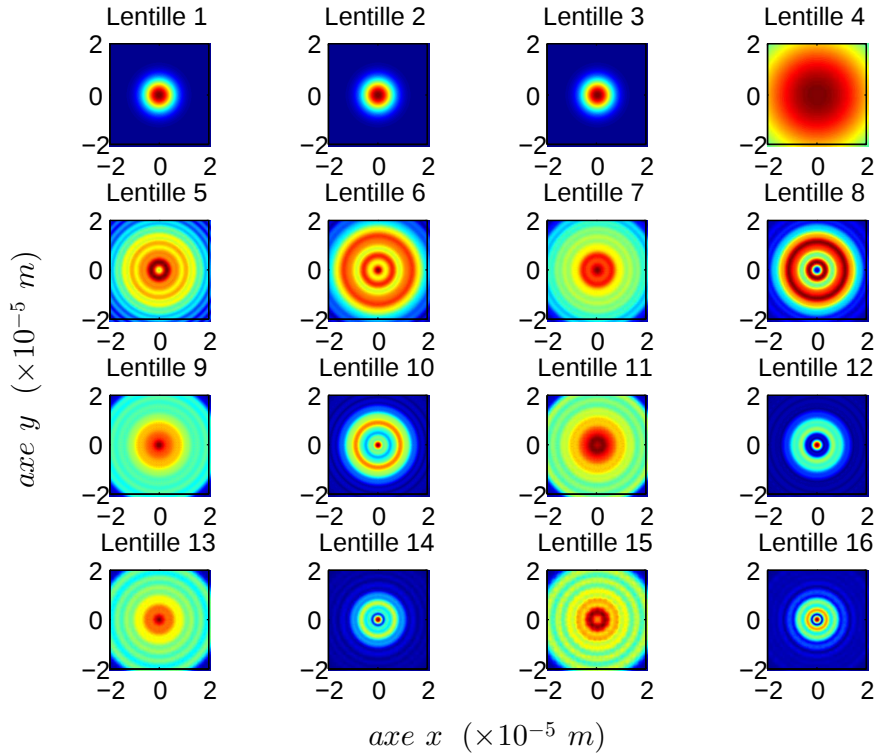


FIGURE 2.58 – Profil d'amplitude du faisceau dans un réseau de $N_L = 16$ lentilles, régulièrement espacées, auquel on a ajouté un défaut, entre la troisième et la quatrième lentille, de largeur $\delta = 4d$, avec $d = 2n_m f$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$, et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

Nous pouvons alors conclure quant à la possibilité de focaliser un faisceau dans une chaîne de gouttes. Cette focalisation sera ainsi d'autant plus importante que la largeur du défaut, ou encore la périodicité du réseau, sera grande. Cela reste en accord avec les propriétés d'évolution d'un faisceau gaussien, impliquant une divergence d'autant plus considérable que l'éloignement au *col* est important.

L'application d'un tel résultat est tout à fait envisageable, notamment dans le domaine des *biosciences*. En effet, la variété des dimensions des objets (organiques ou inorganiques) à manipuler est grande, et nécessite que cette manipulation soit, généralement, non invasive et adaptable aux nombreuses situations. Ainsi, l'accessibilité à une précision d'une relative finesse sur la taille du défaut inséré dans le réseau, nous permettrait le piégeage, voire le guidage, d'objets de diverses tailles avec un seul et même appareillage.

2.3.1.2 Défaut *multi-lacunaire*

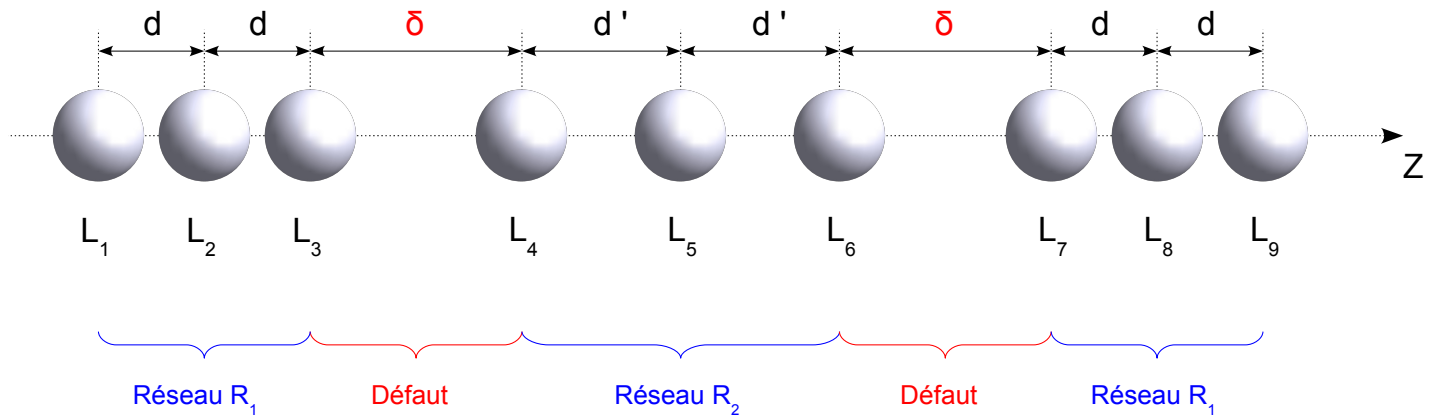


FIGURE 2.59 – Représentation de l'inclusion de plusieurs défauts lacunaires par l'omission et l'insertion (défaut interstitiel) de billes dans le réseau périodique initial.

Une application intéressante peut être déduite de l'inclusion des défauts dans un réseau. En effet, nous venons de voir que la présence d'un défaut modifiait l'évolution d'un faisceau. Or, le mode qui s'en suit présente généralement un *waist* plus petit que celui propre au mode avant le défaut. Cela pourrait avoir son importance lors de la manipulation de cellule, puisqu'il est nécessaire de ne pas dépasser une certaine énergie lumineuse seuil pour ne pas endommager cette dernière.

Pour ce faire, considérons initialement la propagation d'un mode de *Bloch*, dans un réseau de lentilles équidistantes. Nous savons alors que pour deux réseaux distincts, il existera deux modes de *Bloch* associés dont la valeur du *waist* propre est identique (figure 2.5). Il semble donc possible d'atteindre des largeurs de faisceau variables dans un réseau, sans modifier les conditions d'entrée du faisceau, en jouant simplement sur l'espacement entre les lentilles. Les deux systèmes présentent alors une certaine *intrication* de leur mode propre.

Cette propriété est toutefois limitée à un couplage sur deux réseaux, lorsque nous considérons une maille primitive à une seule lentille. Cela pourrait être étendu à des mailles plus complexes, dont le couplage pourrait s'effectuer non plus sur deux, mais un plus grand nombre de réseaux. En d'autres termes, cela peut se généraliser, en considérant une maille élémentaire à N lentilles, à un couplage maximal entre $2 \times N$ réseaux.

Suite à quoi, nous pouvons introduire autant de défauts que nous voulons, dans le but de faire varier, suivant l'intérêt, la largeur du faisceau évoluant dans le réseau (figure 2.59). Un exemple notoire pourrait être le cas d'élargissement ou rétrécissement de faisceau, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.60 qui suit.

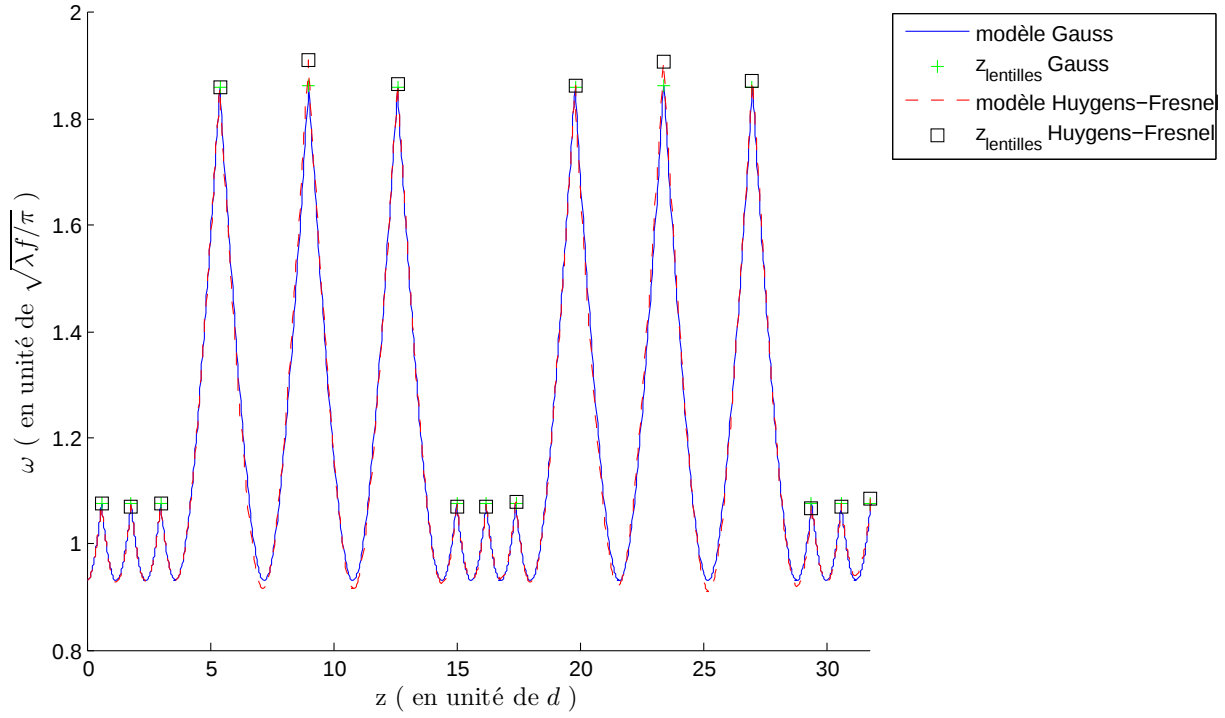


FIGURE 2.60 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées par blocs, avec $w_{0i} = 4.2 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = -62 \mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts inclus dans un même réseau. Leur valeur est chaque fois de $2n_m f$ et les diverses périodicités alternent respectivement de $n_m f$ à $3n_m f$.

En s'étant initialement fixé un réseau dont la période est de $1n_m f$, nous avons déduit de la figure 2.5 que le réseau équivalent à un *waist* propre identique était celui dont la période est de $3n_m f$.

À partir de quoi, il nous a suffi de déduire la largeur du défaut permettant de coupler ces deux réseaux. Pour ce faire, nous avons obtenu sa valeur en sommant les deux distances propres $\sigma_i + f$ relatives à chacun des deux modes de *Bloch*, soit $\delta = 2n_m f$. Il semble important de préciser que ce résultat est général dans le cas d'un réseau comportant une maille primitive à une seule lentille. Cela paraît toutefois relativement intuitif, puisque les paramètres propres du faisceau, sur l'intervalle des valeurs de d vérifiant les conditions de stabilité, définissent un ensemble symétrique autour de la valeur $2n_m f$.

L'écart obtenu entre les deux largeurs de faisceau, prises au niveau des lentilles, est par conséquent une caractéristique intrinsèque au système couplé, et ne peut de la sorte évoluer. Toutefois, nous pourrions nous affranchir de ce problème en considérant d'autres systèmes couplés (figure 2.61). En effet, nous observons que l'écart augmente d'autant plus que la différence de périodicité entre les deux réseaux est grande.

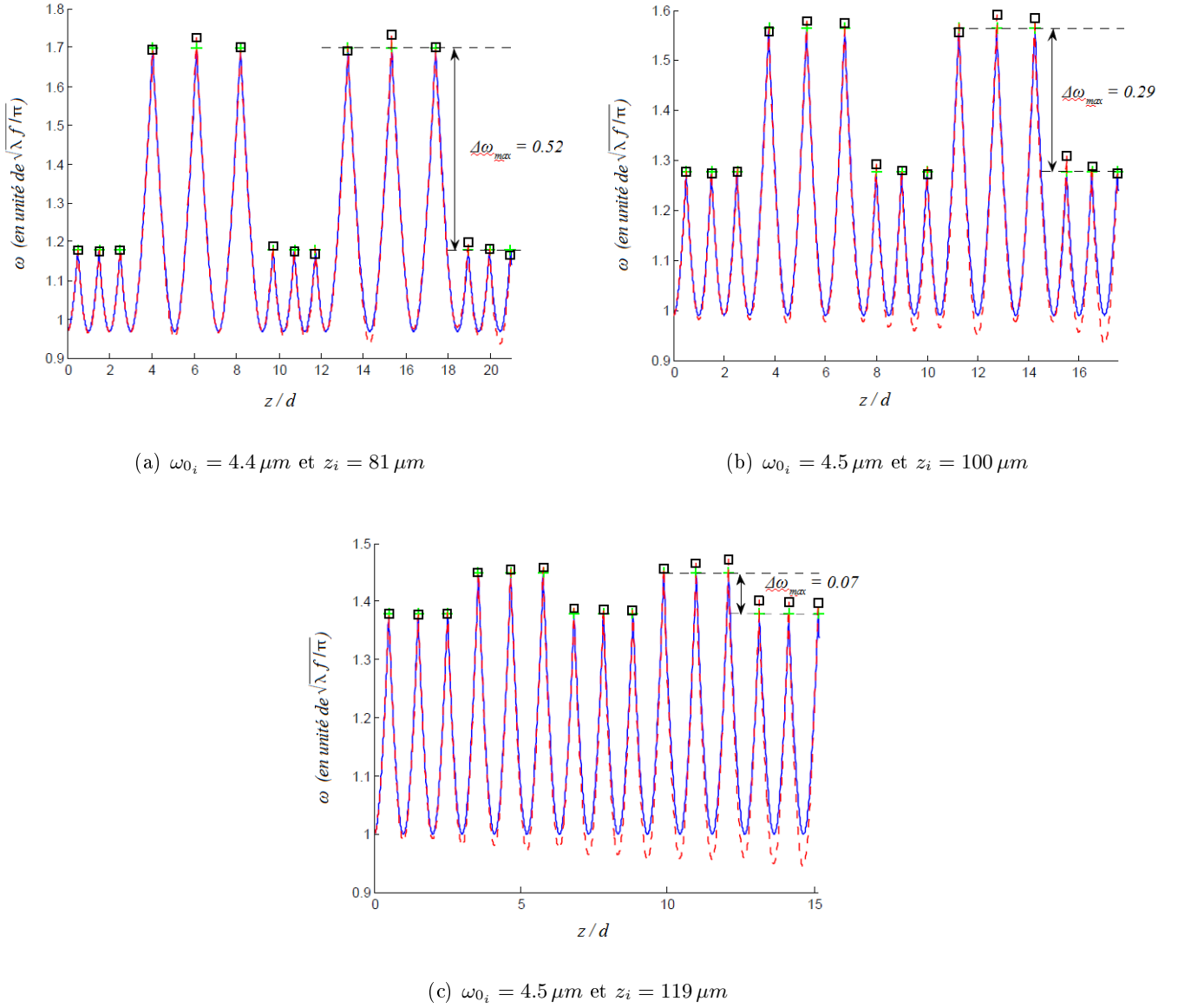


FIGURE 2.61 – Variation de la largeur du faisceau, acquise dans un réseau de $N_L = 15$ lentilles, régulièrement espacées par blocs, pour différentes valeurs de défauts inclus dans un même réseau. Leur valeur est chaque fois de $2n_m f$ et les diverses périodicités alternent respectivement de $1.3n_m f$ à $2.7n_m f$ pour le graphe (a), de $1.6n_m f$ à $2.4n_m f$ pour le graphe (b), de $1.9n_m f$ à $2.1n_m f$ pour le graphe (c).

L'emploi d'un élargisseur de faisceau est souvent nécessaire lorsque l'on souhaite observer un objet étendu au moyen d'un faisceau laser. Celui-ci permettra également d'en diminuer l'intensité en sortie. Outre cela, il apparaît de façon évidente qu'un tel système présente l'avantage de contenir plusieurs réseaux de piégeage, défini par des périodicités distinctes. Ainsi, il serait possible de piéger des particules de tailles diverses, et par la même, effectuer un triage.

Cependant, ces illustrations n'ont pas encore mis en exergue l'influence du paramètre de stabilité. Pour cela, nous allons étudier l'influence d'un défaut étendu. Autrement dit, cela va revenir à coupler un ensemble de défauts localisés entre eux.

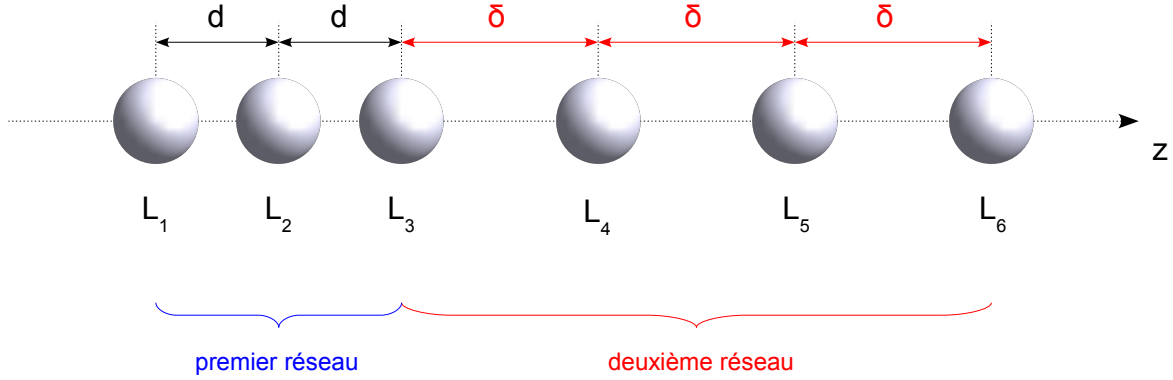
2.3.2 Défauts étendus ou défauts de *Wadsley*

FIGURE 2.62 – Représentation de l'inclusion d'un défaut étendu par le couplage de deux réseaux de périodes différentes ($d \neq \delta$).

Nous venons de voir que l'inclusion d'un défaut localisé n'influe pas, en soi, sur la stabilité du faisceau au sein du réseau. Nous pouvons alors considérer le défaut non plus simplement local, mais répété sur chaque maille primitive, définissant ainsi un deuxième sous-réseau (figure 2.62). Par ce biais, il apparaît plus évident que le faisceau puisse perdre sa stabilité. En effet, le fait de maintenir un défaut revient à définir une nouvelle périodicité de réseau. Observons, pour illustrer cela, la figure 2.63.

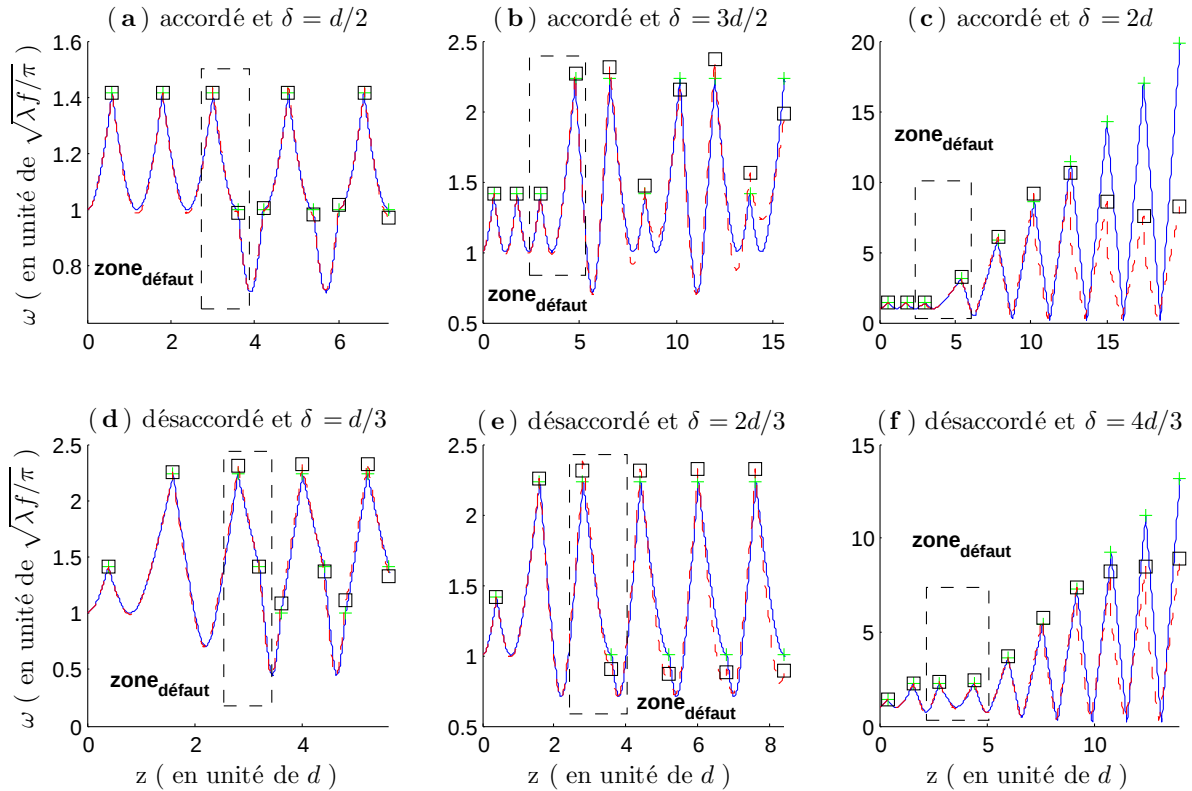


FIGURE 2.63 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, régulièrement espacées, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$, pour différentes valeurs de défauts récurrents inclus dans le réseau. Les graphes (a), (b) et (c) correspondent à une situation initiale accordée (avec $d = 2n_m f$), dont les défauts valent, respectivement, $n_m f$, $3n_m f$ et $4n_m f$. Les graphes (d), (e) et (f), correspondent, quant à eux, à une situation initiale désaccordée (avec $d = 3n_m f$), où les défauts valent respectivement $n_m f$, $2n_m f$ et $4n_m f$. Chaque tracé a été effectué suivant les deux modèles. L'évolution en traits discontinus rouges, entre chaque position de billes repérée par un carré noir, correspond au modèle de Huygens-Fresnel. Et celle en traits continus bleus, entre chaque position de billes repérée par une croix verte, correspond au modèle de Gauss.

Nous avons donc repris ici les mêmes paramètres que ceux définis pour la figure précédente, à ceci près que notre défaut est maintenant permanent à partir d'une lentille donnée. Ainsi, il semble apparaître deux comportements différenciables, autant sur la situation *accordée* que sur celle *désaccordée*. En effet, sur les premiers graphes (a), (b), (d) et (e), nous retrouvons le comportement observé dans le cas d'un défaut ponctuel. À savoir, tant que les dimensions du défaut ne dépassent pas celles imposées par la condition de stabilité, le faisceau reste confiné dans le réseau, avec une évolution périodique. Toutefois, en incluant des défauts, nous modifions les paramètres d'entrée par rapport au réseau qui suit le premier défaut. Le changement sur σ_i en résultant va impliquer une modification du couplage dans le réseau. Ainsi, nous n'avons plus un seul réseau défini par un espacement régulier entre lentilles, mais deux sous-réseaux couplés, définis par deux espacements propres d (avant le défaut) et δ (après le défaut).

Nous pouvons alors, comme précédemment dans le cas d'un simple défaut local, traduire cela par un système couplé de deux équations, explicitant la transformation du paramètre gaussien $\underline{\hat{q}}$ au cours de la propagation du faisceau :

$$\begin{cases} \underline{\hat{q}}_{av} < \overset{=}{\text{défaut}} \frac{A \underline{\hat{q}}_0 + B}{C \underline{\hat{q}}_0 + D} \\ \underline{\hat{q}}_\delta \overset{=}{\delta=\alpha d} \frac{A' \underline{\hat{q}}_{av} + B'}{C' \underline{\hat{q}}_{av} + D'} = \frac{A' (A \underline{\hat{q}}_0 + B) + B' (C \underline{\hat{q}}_0 + D)}{C' (A \underline{\hat{q}}_0 + B) + D' (C \underline{\hat{q}}_0 + D)} \end{cases}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad (2.47)$$

où $\underline{\hat{q}}_0$ est le rayon de courbure complexe défini en entrée de réseau, $\underline{\hat{q}}_{av}$ celui juste avant le deuxième sous-réseau, et $\underline{\hat{q}}_\delta$ celui après (figure 2.64). Le système est caractérisé par un ensemble de deux matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ dont les éléments (A, B, C, D) et (A', B', C', D') correspondent respectivement aux zones avant, et après le défaut.

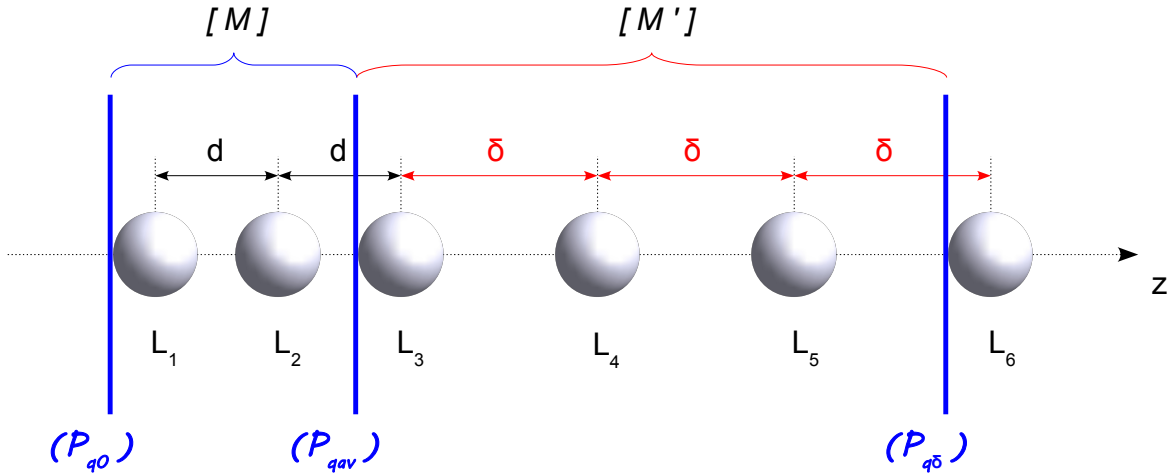


FIGURE 2.64 – Schématisation de la transformation du paramètre gaussien $\underline{\hat{q}}$ à la traversée de deux réseaux couplés, définis par deux périodicités différentes.

En revanche, pour les autres graphes (c) et (f), nous constatons une perte de stabilité du faisceau. Ceci s'explique par le fait que notre espacement ainsi défini ne satisfait plus les conditions de stabilité imposant $\tilde{d} < 4$. Cela a pour conséquence d'entraîner une instabilité du faisceau, l'amenant à s'échapper du réseau relativement vite. Autrement dit, dès quelques billes passées après le défaut, la largeur du faisceau devient supérieure aux dimensions de ces dernières. Et cela, d'autant plus rapidement que l'espacement du défaut sera grand, et que la périodicité du réseau initial (avant défaut), sera petite.

Nous observons alors, généralement, des comportements proches de ceux relevés dans le cas d'un simple défaut local, à l'exception faite que le confinement du faisceau puisse être perdu, dès lors que la périodicité du deuxième sous-réseau dépasse la condition de stabilité. L'intérêt ici est donc qu'en maîtrisant le positionnement des lentilles dans le réseau, nous pouvons, selon la nécessité, confiner le faisceau sur un nombre limité de mailles. Nous caractérisons ainsi un système facilement reconfigurable.

2.4 Application à un ensemble désordonné

Nous venons de présenter un ensemble de résultats obtenus dans le cas de chaînes de lentilles parfaitement périodiques. Toutefois, il paraît nécessaire d'étudier la robustesse de notre modèle en lentilles finies, en le soumettant à un système désordonné. Cette sensibilité aux conditions initiales nous apportera plus concrètement une justification quant aux futures applications expérimentales.

Nous allons pour cela observer, à partir d'une situation *accordée* déjà étudiée précédemment, l'évolution d'un faisceau dans une chaîne de lentilles soumises au désordre.

Pour ce faire, nous distribuons les positions initiales des lentilles suivant une loi normale, dont la moyenne correspond à leur position respective sans désordre. Ainsi, nous choisissons d'utiliser la méthode de *Box-Muller*, sous sa forme polaire, qui va nous permettre de générer un ensemble de variables aléatoires normales, centrées, réduites et indépendantes.

Commençons par tirer deux variables aléatoires u_1 et u_2 indépendantes, uniformément distribuées sur $]0; 1]$. Si nous posons :

$$X_0 = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \cos(2\pi u_2) \quad (2.48)$$

Nous pouvons ainsi en déduire un ensemble de variables aléatoires indépendantes, associées aux positions des billes, suivant une loi normale :

$$Z_0 = \bar{m} + \varsigma X_0 \quad (2.49)$$

où $\bar{m}$ correspond à la moyenne (positions des billes sans désordre), et ς à l'écart-type (écart à la valeur moyenne).

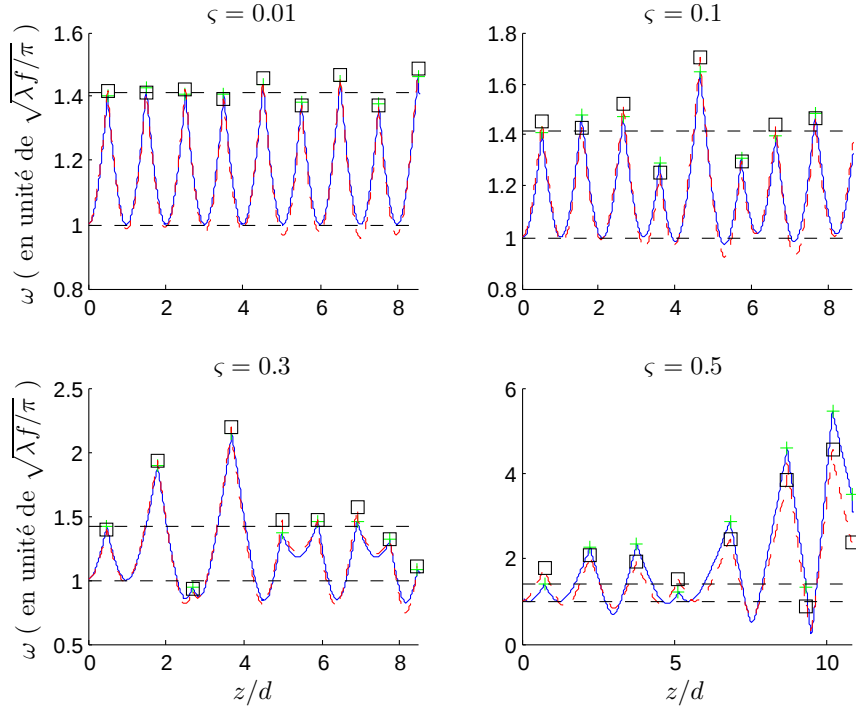


FIGURE 2.65 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement suivant une loi normale, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Chacun des graphes (a), (b), (c) et (d) correspond, respectivement, à un écart-type ζ de 0.01, 0.1, 0.3 et 0.5. Les lignes horizontales en traits discontinus correspondent aux limites d'évolution du faisceau gaussien dans un réseau sans désordre.

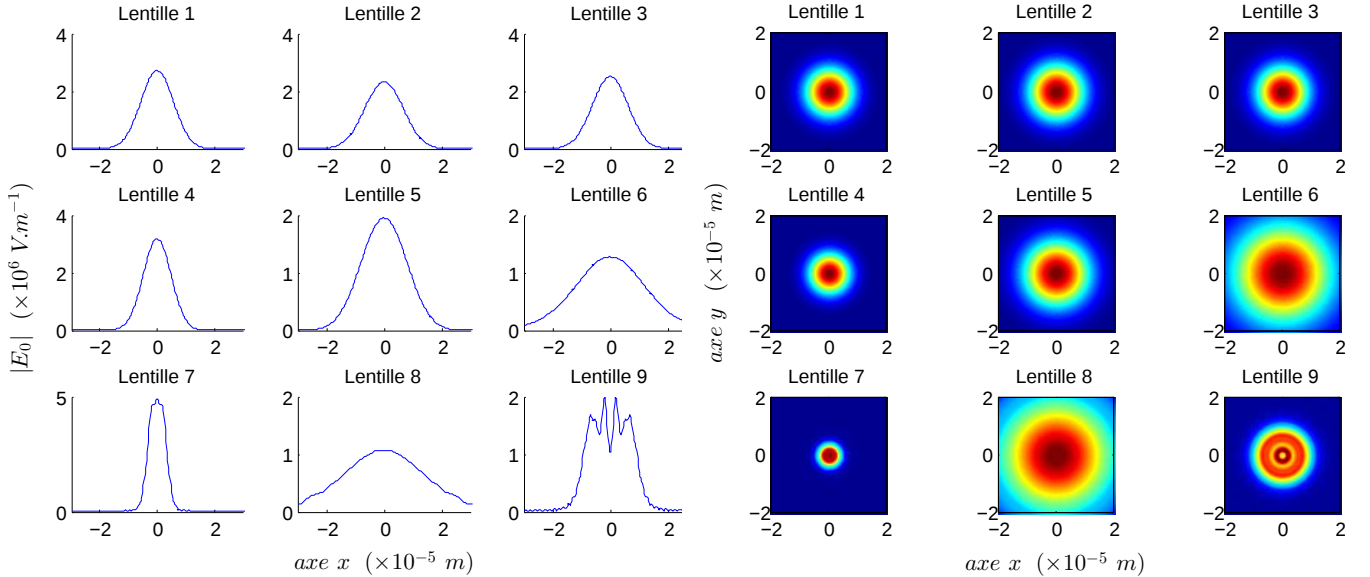


FIGURE 2.66 – Coupe du profil d'amplitude transverse du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le désordre aléatoire, suivant une loi normale, est défini par un écart-type $\zeta = 0.5$.

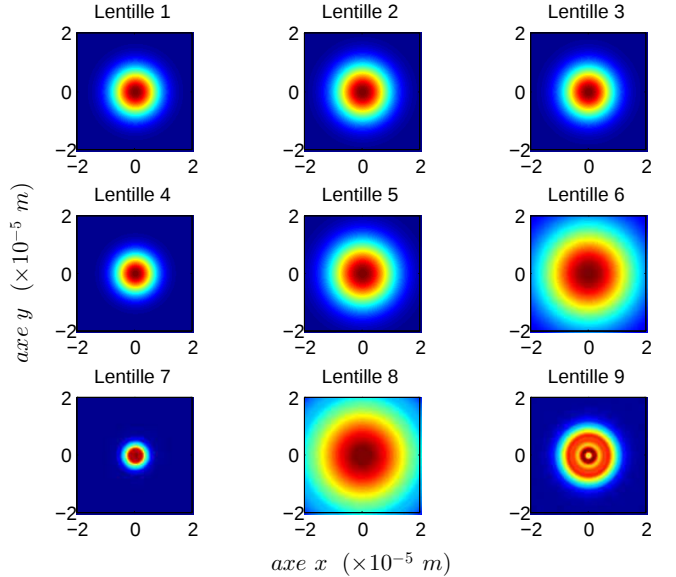


FIGURE 2.67 – Profil d'amplitude transverse du faisceau dans un réseau de $N_L = 9$ lentilles, espacées aléatoirement, avec $w_{0i} = 4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le désordre aléatoire, suivant une loi normale, est défini par un écart-type $\zeta = 0.5$.

Nous observons ici une relative robustesse du modèle au désordre (figure 2.65). Nous constatons, comme nous avons pu le remarquer identiquement dans les sections précédentes, que les variations induites sur le réseau périodique ne modifient pas la propagation du mode, et cela, en moyenne, jusqu'à un écart-type de 0.5, soit une variation moyenne de 50 % autour des positions périodiques. Nous préservons alors un profil gaussien, mais perdons toute périodicité du champ qui reste toutefois confiné dans le réseau.

En outre, nous relevons en évidence que si les variations deviennent assez conséquentes ($\varsigma \simeq 0.4 - 0.5$), les largeurs de faisceau atteintes dans le réseau sont telles (de l'ordre de grandeur du rayon des lentilles), que la diffraction ne peut plus être négligée. Ainsi, l'écart entre les deux modèles augmente au cours de la propagation (figure 2.65 (d)), et des modes d'ordres supérieurs apparaissent (figures 2.66 et 2.67).

Conclusion

Cette première étude statique nous a donc permis d'expliciter le comportement d'un faisceau quelconque, traversant un ensemble de gouttes diélectriques. Celles-ci ont été réparties de façon périodique, dans un réseau défini à partir de mailles élémentaires plus ou moins complexes.

Initialement décrit par un modèle matriciel en lentilles infiniment étendues, nous avons par la suite comparé nos résultats avec ceux obtenus avec un modèle plus réaliste, pour la description du front d'onde, de type *Huygens-Fresnel*. Ce dernier nous a permis de considérer le phénomène de diffraction induit par les conditions aux bords que nous imposent les dimensions finies des objets diffractants. Ainsi que la prise en compte des effets d'aberrations sphériques induits par la courbure des surfaces dioptriques.

Nous avons pu, ainsi, caractériser les modes des chaînes, et les conditions de couplage à ces modes. En particulier, nous avons pu extraire les conditions d'*accord* de faisceau sur les propriétés géométriques du réseau (mode de *Bloch*), en imposant que son paramètre gaussien q redevienne identique à lui-même après le passage d'une ou plusieurs mailles élémentaires (typiquement N mailles). Ces conditions d'auto-reproduction du champ se sont avérées réalisables sous la condition d'un déphasage θ , accumulé à chaque passage de lentille, égal à une fraction rationnelle à un facteur 2π près.

L'étude développée autour de ce paramètre gaussien nous a ainsi permis d'établir un rapprochement entre une chaîne de lentilles périodiques auto-guidante et un cristal photonique. En effet, bien que les dimensions caractéristiques des systèmes respectifs soient bien différentes, autrement dit *sub*-longueur d'onde pour le dernier cité, et grande devant celle-ci pour notre cas d'étude, nous avons pu utiliser un même formalisme matriciel pour décrire le comportement du faisceau dans un réseau.

Cela nous a permis, en outre, de démontrer l'existence de *bandes interdites*, et de modes guidants, dans l'ensemble des solutions en stabilité. Nous avons alors pu caractériser l'évolution de ces dernières à partir des propriétés intrinsèques au réseau et au faisceau. Il s'en suit un résultat important nous permettant d'avancer que nous puissions facilement faire évoluer le système d'un état guidant à un état non-guidant, par simple déplacement d'une ou plusieurs gouttes sur le réseau.

Cela étant, nous n'avons encore rien dit quant aux contraintes optiques agissant sur ces dernières. Cela fera l'objet de la prochaine partie. Nous commencerons par présenter la réponse du système soumis à deux faisceaux lasers horizontaux contra-propageants. L'insertion de ce deuxième faisceau ayant pour dessein de stabiliser, dynamiquement, le réseau de gouttes. Ce qui nous amènera, en suivant, à une description de l'étude dynamique du modèle.

Étendue du modèle d'un point de vue dynamique

Chapitre 3

Introduction des forces optiques

Sommaire

3.1	Rappels sur la présentation du système	102
3.2	Description des forces en jeu	103
3.3	Étude sur le calcul de la force optique	108
3.3.1	Analyse sur une seule bille	108
3.3.2	Description du modèle global	112

C'est en 1619 et son traité sur les comètes *De cometis libelli tres*, que *J. Kepler* énonce pour la première fois l'idée selon laquelle la lumière pouvait exercer une force de pression. Cette hypothèse lui permit d'expliquer pourquoi la queue des comètes était dirigée dans un sens opposé à la position du soleil. Toutefois, de part leur faible intensité, il faudra attendre le début du XX^e siècle et les expériences en parallèle de *Lebedev* [2] d'une part, et *Nichols* et *Hull* [3,4] d'autre part, pour que de telles forces soient mises en évidence en laboratoire. Cependant, les densités d'énergie pour envisager exploiter un tel phénomène ne furent accessibles qu'avec l'invention du laser dans les années 60. C'est dans ce contexte que les premières manipulations particulières furent expérimentées quelques années après.

Mis en évidence dès les années 1970 par *A. Ashkin*, le piégeage optique est aujourd'hui devenu une technique courante pour la manipulation non-destructive et non-invasive d'objets dont les dimensions peuvent s'étendre de quelques dizaines de nanomètres à plusieurs dizaines de micromètres [10,12]. Dans le même temps, *Imbert et al.* [111,112] développent, à l'appui des résultats de *Ashkin*, l'expression de la force de radiation qu'exerce un faisceau laser sur une sphère, de grand diamètre devant la longueur d'onde, dans l'approximation de l'optique géométrique. Notre approche se situera donc dans le cadre de cette approximation, justifiée par des rayons de billes de l'ordre d'une centaine de fois la longueur d'onde.

3.1 Rappels sur la présentation du système

Nous porterons notre attention, dans ce chapitre, sur la réponse d'un système optique composé de N_L billes diélectriques transparentes de rayon ρ , d'indice de réfraction n_b , immergées dans un milieu d'indice de réfraction n_m . Celles-ci interagiront alors avec deux faisceaux lasers monochromatiques, horizontaux et contra-propageants le long de l'axe (Oz), de mode transverse variable (figure 3.1).

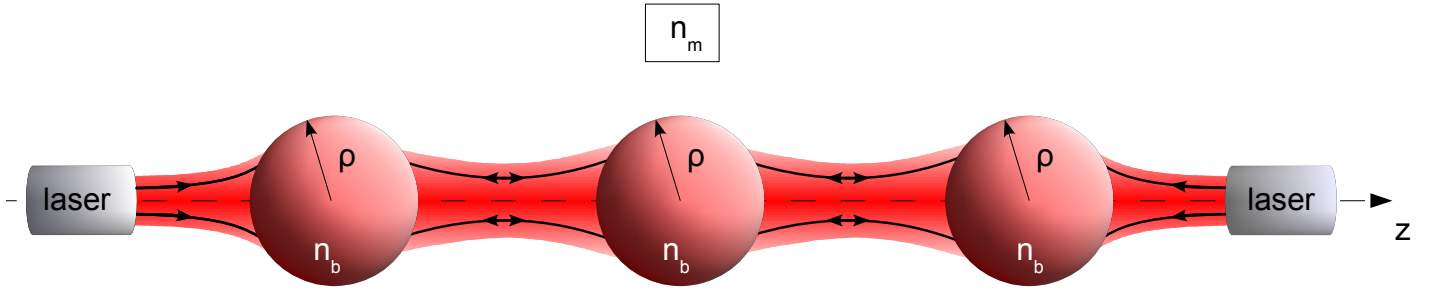


FIGURE 3.1 – Géométrie caractéristique d'un piègeage optique horizontal par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants, et refocalisés par un réseau de billes.

Nous considérons, dans un premier temps, deux lasers incidents de mode TEM_{00} dont le profil d'intensité est gaussien. Le profil de champ réel le long de l'axe de propagation z est alors défini tel que :

$$E(r, z) = E_0(z) e^{-r^2/\omega(z)^2} \quad (3.1)$$

où r représente la distance à l'axe d'un point, dans le plan transversal, $\omega(z)$ le rayon de la section droite du faisceau gaussien dans le plan de front z , et $E_0(z)$ l'amplitude du champ en $r = 0$.

Nous considérons, comme nous l'avons déjà précisé dans le préambule, que nous nous plaçons suivant l'approche de l'optique géométrique. Cela se justifiant par le fait que le diamètre de nos billes soit grand devant la longueur d'onde de la lumière. Ainsi, trois processus classiques peuvent être distingués lorsque nous étudions l'interaction du faisceau avec ces billes : la *diffraction* par les bords de la particule assimilée à un disque opaque, la *réfraction* à travers la lentille épaisse que constitue la sphère, et la *réflexion* sur son pourtour. Lorsque le rayon ρ de la particule est tel que le paramètre $\alpha = 2\pi\rho/\lambda \geq 100$ [113–115], on peut considérer ces trois processus comme indépendants et superposer leurs effets, autrement dit sommer leurs contributions respectives [66, 116]. Ce que nous vérifions ici avec $2\pi\rho/\lambda \simeq 600$, où $\rho = 50 \mu m$.

Ainsi, le diamètre des billes que nous considérons étant grand devant la longueur d'onde, nous pourrions négliger le phénomène de diffraction ; ce qui nous amènera à ne considérer que seules les forces dues à la réflexion et à la réfraction du faisceau par la sphère. Regardons plus en détail le principe du calcul de cette force totale.

3.2 Description des forces en jeu

Considérons un pinceau de lumière, dont un rayon frappe la surface d'une sphère en un point M , de coordonnées (X, Y, Z) dans le système associé dont l'origine O coïncide avec le centre de la sphère. Ce rayon apparaît alors comme issu d'un point C , correspondant au centre de courbure relatif au front de phase de l'onde au point M . L'axe (OZ) est pris parallèle à l'axe de propagation (Oz) du faisceau, et situé à une distance ρ_0 . Les vecteurs $\mathbf{CM}$ (rayon) et $\mathbf{OM}$ (normale) définissant le plan d'incidence, forment l'angle d'incidence i . L'angle θ sera défini, quant à lui, par l'angle formé entre les vecteurs $\mathbf{OC}$ et $\mathbf{OM}$ (figure 3.2).

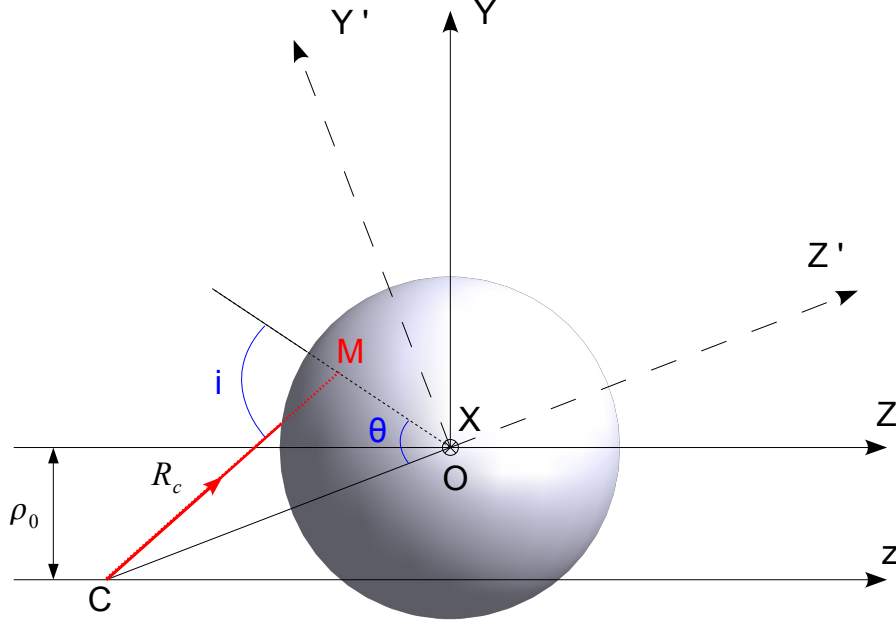


FIGURE 3.2 – Représentation des systèmes d'axes pour le calcul des forces optiques agissant sur la sphère, dans le cas général où le faisceau est désaxé par rapport au centre de la sphère.

Sans entrer dans le détail des développements établis en mécanique quantique, nous nous devons toutefois de préciser que lorsque la lumière interagit avec la matière, son comportement jusqu'alors décrit par celui d'une onde, s'interprète corpusculairement sous forme de quanta d'énergie (photon). Ces photons véhiculant une énergie $E_{ph} = h\nu$, possèdent par la même une quantité de mouvement définie par la relation de de Broglie¹ :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (3.2)$$

où $h \simeq 6.626 \times 10^{-34} J.s$ est la constante de Planck et $\hbar = h/2\pi$ la constante réduite, alors que λ et k représentent, respectivement, la longueur d'onde et le nombre d'onde, associés au photon.

Nous considérerons ainsi le faisceau lumineux comme un flux de photons, véhiculant une certaine énergie, autrement dit une certaine quantité de mouvement.

Nous avons représenté sur la figure 3.3 un rayon incident, issu d'un milieu homogène d'indice de réfraction n_m , arrivant sur une sphère transparente diélectrique d'indice n_b . La variation d'indice va alors entraîner une partition du rayon, dont une partie sera réfléchi et l'autre réfractée. Le rayon ainsi transmis au niveau de la surface d'"entrée" de la sphère se propagera jusqu'à la surface de "sortie" sans être atténué puisque nous considérons la sphère comme non absorbante. À cette nouvelle interface, les photons se retrouveront une nouvelle fois réfractés et réfléchis.

¹À partir de l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion, nous pouvons obtenir l'expression de l'énergie liée à toute particule, dans un référentiel inertiel, telle que : $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$. Ce boson médiateur de l'interaction électromagnétique étant théoriquement sans masse, il vient que $E_{ph} = pc$. Or $E_{ph} = h\nu = hc/\lambda = \hbar ck$, soit $p = \hbar k$.

Nous estimerons, dans un premier temps, que les deux indices de réfraction n_b et n_m sont assez proches (indice relatif proche de 1) pour négliger les propagations successives à l'intérieur de la sphère.

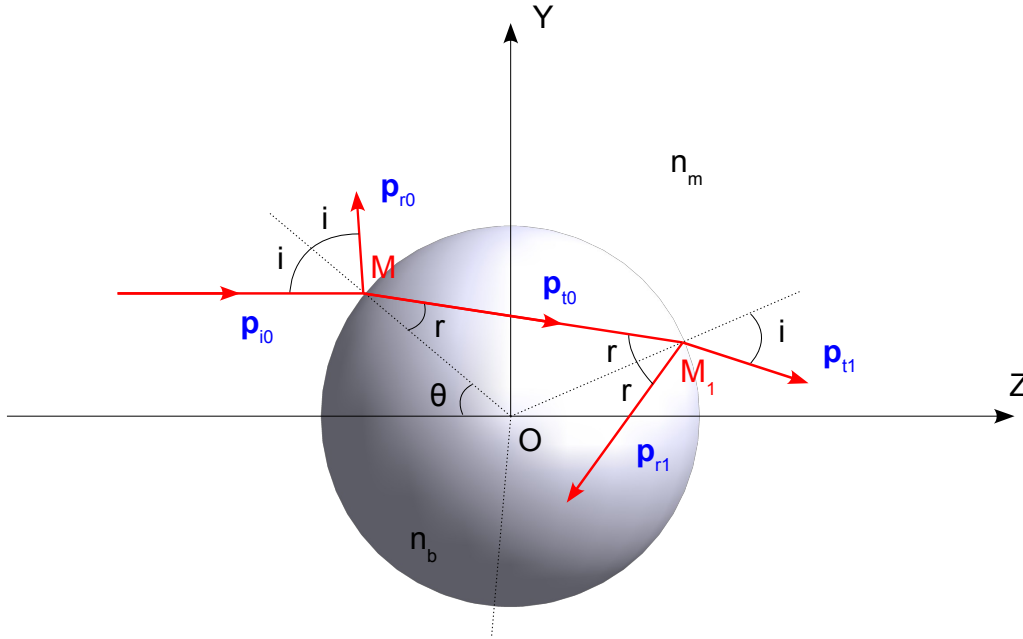


FIGURE 3.3 – Représentation d'un flux de photons par un rayon lumineux incident sur une sphère diélectrique homogène d'indice de réfraction n_b , évoluant dans un milieu d'indice n_m . Seules les parties réfléchies et transmises du rayon incident au niveau des deux premières interfaces ont été tracées.

Nous considérerons ici que le système composé du faisceau incident et de la sphère est supposé isolé, et que les collisions entre les photons et la sphère sont élastiques. Ainsi, le principe de conservation de la quantité de mouvement nous permet d'avancer qu'une variation sur la quantité de mouvement du faisceau entraînera par la même une variation sur la quantité de mouvement liée à la sphère, suivant une même direction mais de sens opposé (figure 3.4).

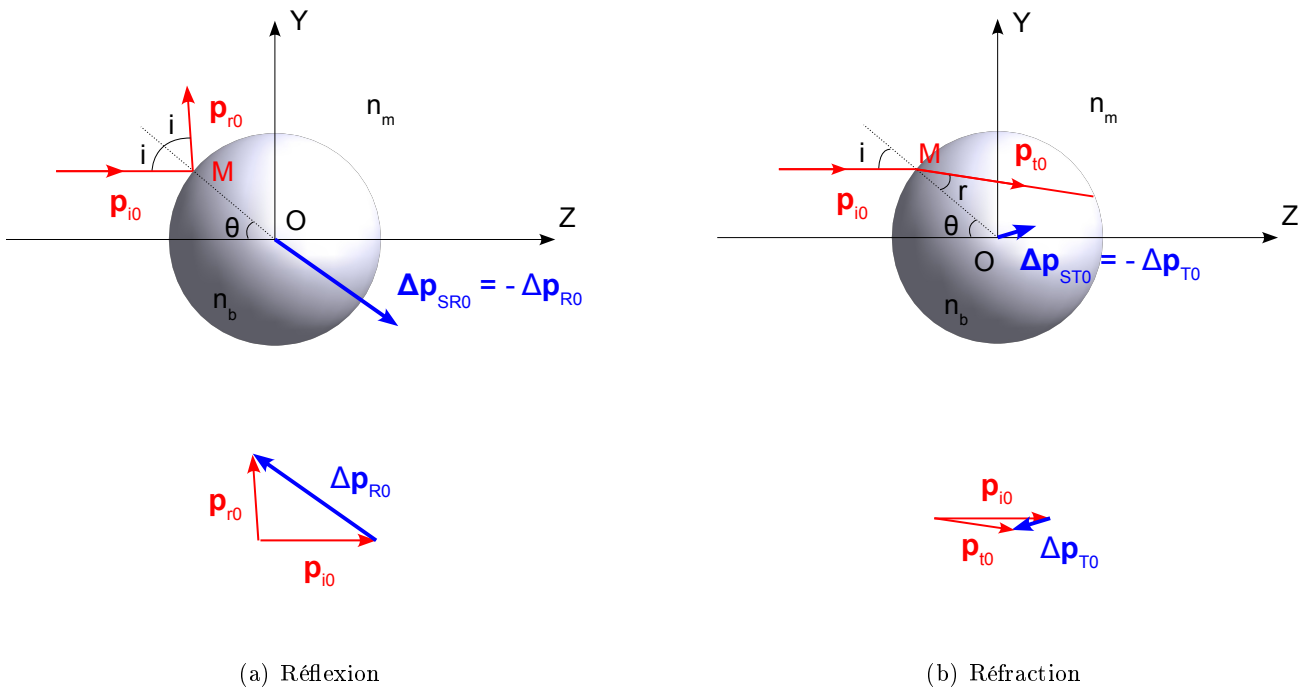


FIGURE 3.4 – Représentation de la quantité de mouvement $\Delta \mathbf{p}_S$ acquise par la sphère, due à la variation de quantité de mouvement du rayon lors d'une réflexion (a) ou d'une réfraction (b) à l'interface.

Cela étant, d'après la deuxième et la troisième loi de *Newton*, nous pouvons en déduire que l'objet subit, dû au faisceau, une force dirigée dans la direction de la variation de quantité de mouvement Δp , selon la relation :

$$F = -\frac{dp}{dt} = \frac{dp_S}{dt} \quad (3.3)$$

où F est la force exercée sur la sphère par le faisceau, et dp et dp_S correspondent respectivement aux changements de quantité de mouvement totale de l'ensemble des photons et de la sphère.

Nous allons alors devoir, dans le but de calculer la force totale induite par le faisceau, exprimer l'ensemble des variations des quantités de mouvement liées à chacun des phénomènes optiques observés aux interfaces. Ainsi, nous en déduisons les composantes axiales des quantités de mouvement, transférées à la sphère, issues de la réflexion et de la réfraction sur la face d'entrée, respectivement $\Delta p_{S_{R0z}}$ et $\Delta p_{S_{T0z}}$, et sur la face de sortie, respectivement $\Delta p_{S_{R1z}}$ et $\Delta p_{S_{T1z}}$.

Commençons par établir l'expression de $\Delta p_{S_{R0z}}$:

$$\begin{aligned} \Delta p_{S_{R0z}} &= -\Delta p_{R0z} = p_{i0z} - p_{r0z} \\ &= \frac{h n_m}{\lambda_0} \cos(i - \theta) + \frac{h n_m}{\lambda_0} \cos(\theta + i) \\ &= \frac{h n_m}{\lambda_0} 2 \cos(i) \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les trois autres se déduisent de la même façon par considérations géométriques et trigonométriques, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{S_{T0z}} = p_{i0z} - p_{t0z} = \frac{h}{\lambda_0} [n_m \cos(i - \theta) - n_b \cos(\theta - r)] \\ \Delta p_{S_{R1z}} = p_{t0z} - p_{r1z} = \frac{h}{\lambda_0} n_b [\cos(\theta - r) + \cos(3r - \theta)] \\ \Delta p_{S_{T1z}} = p_{t0z} - p_{t1z} = \frac{h}{\lambda_0} [n_b \cos(\theta - r) - n_m \cos(\theta + i - 2r)] \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où λ_0 correspond à la longueur d'onde de la lumière dans le vide, et i et r aux angles d'incidence et de réfraction liés par la loi de *Snell-Descartes*. Quant aux indices, r et t se réfèrent respectivement aux phénomènes de réflexion et transmission, 0 et 1 aux interfaces d'entrée et de sortie, et z est relatif à la composante longitudinale.

Ces variations de quantité de mouvement transférées à la sphère sont associées à un seul photon. Nous allons devoir tenir compte du nombre total N de photons pour en déduire l'influence totale du faisceau.

Pour ce faire, nous allons pondérer chaque variation élémentaire $\Delta p_{S_{\alpha z}}$ par le nombre relatif de photons associé. Ces derniers peuvent être obtenus à partir des coefficients de *Fresnel* en intensité, que nous considérons comme une valeur moyenne de leur deux composantes transverses respectives, polarisées parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence ² [117] :

$$R = \frac{R_{\parallel} + R_{\perp}}{2} \quad et \quad T = \frac{T_{\parallel} + T_{\perp}}{2} \quad (3.6)$$

²Notons que ces expressions reviennent à considérer que le faisceau lumineux est composé d'un même nombre de photons dans chacune des deux polarisations.

À partir de quoi nous en déduisons la variation de quantité de mouvement totale acquise par la sphère, soumise au faisceau [118] :

$$dp_{S_z} = R \Delta p_{S_{R0z}} + T \Delta p_{S_{T0z}} + RT \Delta p_{S_{R1z}} + T^2 \Delta p_{S_{T1z}} \quad (3.7)$$

Le flux de quantité de mouvement associé, obtenu à partir du flux de photons moyen ϕ_{ph} , se déduit alors :

$$\Phi_p = \phi_{ph} dp_S = \frac{N}{dt} dp_S \quad (3.8)$$

Flux que nous pouvons ramener en terme d'énergie, soit, par définition, à la puissance du faisceau :

$$\Phi_E = P = \phi_{ph} E_{ph} = \frac{N h c}{\lambda_0 dt} \quad (3.9)$$

Or, l'évolution radiale de cette puissance, au sein du faisceau, suit celle de son intensité $I(r, z)$, calculée sur une surface élémentaire dS et située à une distance $r = \rho \sin(\Theta)$ de l'axe (figure 3.5), soit :

$$dP(r, z) = I(r, z) dS = \frac{2P}{\pi \omega(z)^2} e^{-2r^2/\omega(z)^2} dS \quad (3.10)$$

Calculons ainsi l'élément de surface dS suivant les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , en coordonnées sphériques (figures 3.5 et 3.6) :

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\Theta) \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\Theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\Theta) \end{cases} \Rightarrow dS = \rho^2 \sin(\Theta) d\Theta d\phi \quad (3.11)$$

où ρ est la distance d'un point de la sphère au pôle (soit son rayon), Θ est l'angle zénithal défini sur $[0; \pi]$, et ϕ est l'angle azimutal (ou polaire) défini sur $[0; 2\pi]$.

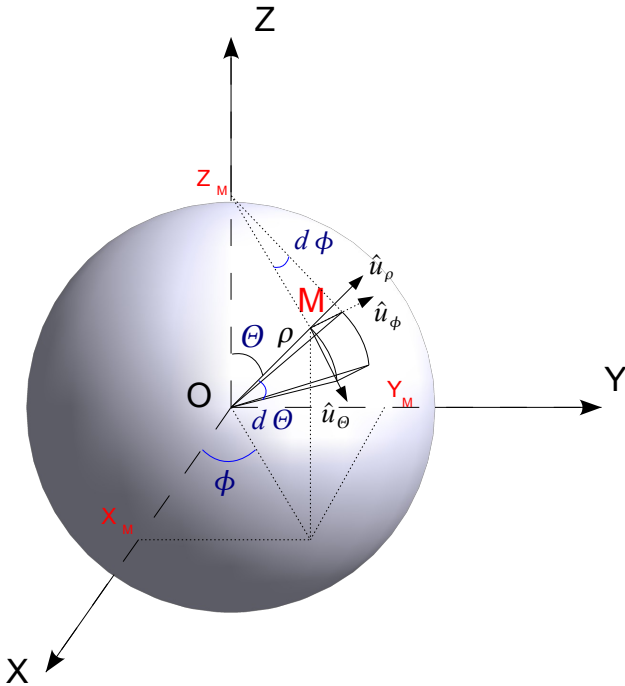


FIGURE 3.5 – Représentation du point d'incidence du pinceau lumineux sur la sphère en M , dans le repère lié aux coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) .

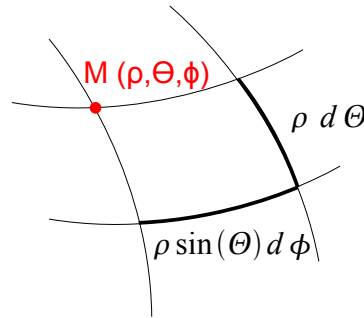


FIGURE 3.6 – Explicitation de l'élément de surface dS , lié au pinceau lumineux incident arrivant en M sur la sphère, en coordonnées sphériques.

Or, définissant l'angle θ comme l'angle supplémentaire à l'angle polaire Θ , soit $\theta = \pi - \Theta$, nous en déduisons $\sin(\Theta) = \sin(\theta)$ et $d\Theta = -d\theta$, soit :

$$dS = -\rho^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (3.12)$$

Ainsi, à partir des expressions précédentes, nous pouvons en déduire la force élémentaire totale, exercée par le faisceau laser incident sur la sphère, telle que :

$$dF_z = N \cos(i) \frac{dp_{S_z}}{dt} = \frac{I(r, z)}{E_{ph}} \cos(i) dp_{S_z} dS \quad (3.13)$$

Par ailleurs, notons que cette composante axiale est la résultante de chacune des contributions des forces élémentaires liées aux phénomènes énoncés précédemment, ainsi :

$$dF_z = dF_{R0_z} + dF_{T0_z} + dF_{R1_z} + dF_{T1_z} \quad (3.14)$$

Suite à quoi, nous obtenons les expressions des composantes de la force totale $\mathbf{F}$ par simple intégration des composantes élémentaires sur la partie illuminée de la face avant de la sphère ; autrement dit, l'ensemble des points de la calotte sphérique définis pour des valeurs de $\cos(i)$ positives ou nulles.

En conséquence, nous obtenons, à partir de (3.13) et (3.12), l'expression des quatre contributions axiales précédentes :

$$\begin{aligned} F_{R0_z} &= \int_0^{\theta_{max}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{c} I(r, z) \rho^2 R n_m \cos^2(i) \sin(2\theta) \\ F_{T0_z} &= \int_0^{\theta_{max}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{c} I(r, z) \rho^2 \sin(\theta) \cos(i) T [n_m \cos(i - \theta) - n_b \cos(\theta - r)] \\ F_{R1_z} &= \int_0^{\theta_{max}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{c} I(r, z) \rho^2 \sin(\theta) \cos(i) T R n_b [\cos(\theta - r) + \cos(3r - \theta)] \\ F_{T1_z} &= \int_0^{\theta_{max}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{c} I(r, z) \rho^2 \sin(\theta) \cos(i) T^2 [n_b \cos(\theta - r) - n_m \cos(\theta + i - 2r)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ce qui nous amène à une expression finale de la composante axiale de la force totale, telle que :

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{2\pi n_m \rho^2}{c} \int_0^{\theta_{max}} d\theta I(r, z) \sin(\theta) \cos(i) [\cos(i - \theta) + R \cos(i + \theta) + \dots \\ &\quad R T \frac{n_b}{n_m} \cos(3r - \theta) - T^2 \cos(\theta + i - 2r)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Que nous pouvons réécrire, à partir de (3.10), comme :

$$F_z = \frac{n_m P}{c} Q \quad (3.17)$$

où P correspond à la puissance d'un rayon, et Q à un facteur dit d'efficacité le long de l'axe de propagation (Oz) (à entendre comme une efficacité de transfert de quantité de mouvement entre les photons et la sphère), sans dimension, et défini à partir des coefficients de *Fresnel* R et T et des diverses directions associées à chaque rayon traversant la sphère ³.

³Notons toutefois que la valeur maximale que peut atteindre ce facteur est $Q = 2$, et correspond au cas d'un rayon réfléchi perpendiculairement par un miroir parfaitement réfléchissant.

La borne supérieure de l'intégrale θ_{max} sera définie par la zone limite d'illumination de la face de la sphère, située dans la région d'incidence liée au faisceau. Nous obtenons donc sa valeur par la condition limite vue précédemment : $i = i_{max} = \pi/2$. Ainsi, à partir de considérations géométriques (figure 3.2) :

$$\theta_{max} = \arctan\left(\frac{R_c}{\rho}\right) \quad (3.18)$$

où $R_c = z [1 + (z_R/z)^2]$ correspond au rayon de courbure du front d'onde.

Pour obtenir à présent l'expression de la composante radiale de la force, il suffirait de calculer les variations de quantité de mouvement de la même façon que précédemment, toutefois, la suite de notre propos se situe exclusivement dans le cas de sphères centrées sur l'axe de propagation, ce qui implique que les axes (Oz) , (OZ) et (OZ') soient confondus ($\rho_0 = 0$, figure 3.2). La composante radiale sera alors nulle par symétrie.

Nous venons ainsi d'établir le calcul de la force de radiation exercée par un faisceau laser, sur une sphère transparente et homogène, suivant une approche basée sur l'optique géométrique. Observons ainsi, dans la section qui suit, son influence sur une puis plusieurs billes, en fonction des paramètres du système d'étude.

3.3 Étude sur le calcul de la force optique

3.3.1 Analyse sur une seule bille

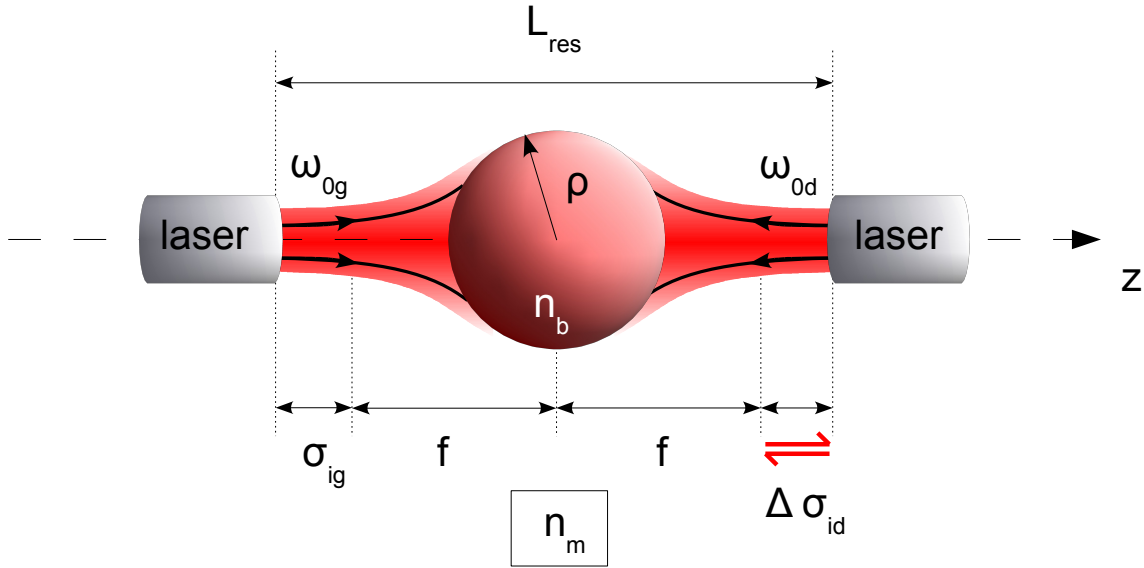


FIGURE 3.7 – Géométrie caractéristique d'un piègeage optique horizontal d'une bille par l'emploi de deux faisceaux lasers contra-propageants.

À partir des expressions que nous venons d'établir, nous allons commencer par étudier le comportement d'une seule bille, plongée dans un milieu fluide d'indice de réfraction n_m (ici l'eau avec $n_m = 1.33$), et soumise à deux faisceaux lasers horizontaux contra-propageants, de mode transverse TEM_{00} (figure 3.7). Le flux incident, n'intervenant dans l'expression de la force que par un facteur multiplicatif, sera fixé à 1 W , et sera supposé suffisant pour que la force axiale permette d'équilibrer le poids de la sphère. Ce dernier point sera également justifié par des densités que nous supposons égales entre la bille et le fluide.

Notre analyse a ainsi porté autant sur les paramètres du faisceau (*waist* ω_0 et longueur d'onde λ), que sur les paramètres propres à la bille (rayon ρ et indice de réfraction n_b). Toutefois, une parfaite équivalence sur le conditionnement des deux lasers entraînerait, pour raison évidente de symétrie, une force de radiation totale nulle sur la bille. Une façon de s'affranchir de cela revient simplement à considérer un des paramètres indépendamment de l'autre. Nous ferons varier ici la distance σ_{id} , revenant à modifier la position du laser se propageant suivant l'axe (Oz), dans le sens négatif ($z < 0$).

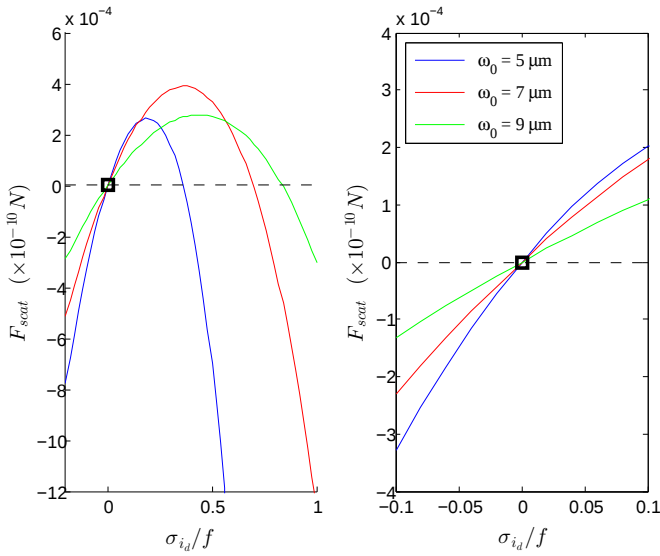


FIGURE 3.8 – Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id} . Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de waist différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Le rayon de la bille est fixé à $50\text{ }\mu\text{m}$, son indice de réfraction à $n_b = 1.4$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0\text{ }\mu\text{m}$.

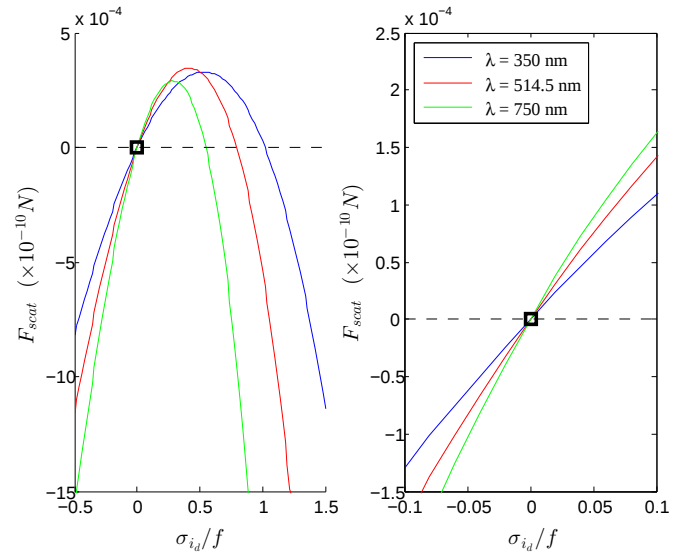


FIGURE 3.9 – Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id} . Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois longueurs d'onde différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f/\pi}$, le rayon de la bille est fixé à $50\text{ }\mu\text{m}$, son indice de réfraction à $n_b = 1.4$ et $\sigma_{ig} = 0\text{ }\mu\text{m}$.

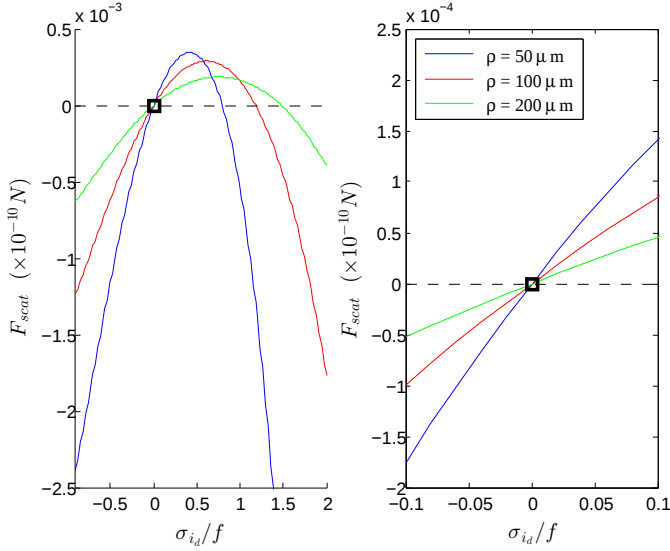


FIGURE 3.10 – Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id} . Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de rayon de bille différentes. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f/\pi}$, l'indice de réfraction de la bille à $n_b = 1.4$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.

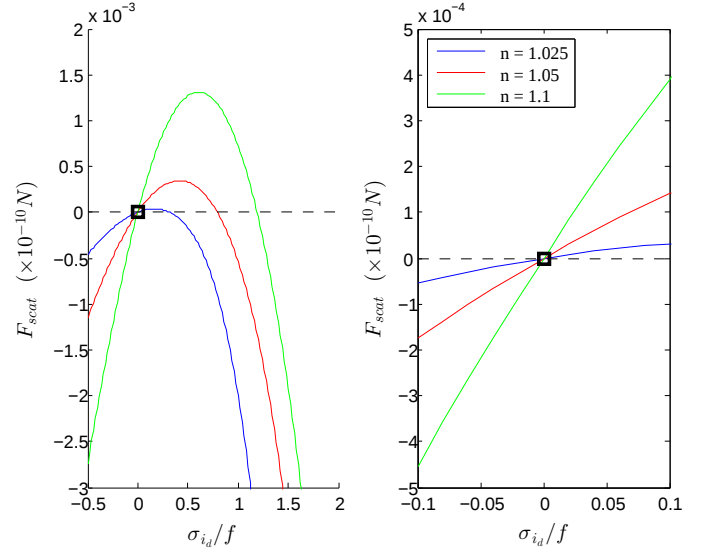


FIGURE 3.11 – Évolution de la force totale, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de la distance σ_{id} . Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs d'indice de réfraction relatif différentes. Les waists d'entrée ont été fixés à $\sqrt{\lambda f/\pi}$, le rayon de la bille est fixé à $50 \mu\text{m}$, la longueur d'onde à 514.5 nm et $\sigma_{ig} = 0 \mu\text{m}$.

En premier lieu, nous nous apercevons que la force de diffusion totale s'annule pour deux valeurs distinctes de σ_{id} , en considérant, en revanche, la position du laser gauche (identifiée à σ_{ig}) fixe. La première d'entre elles, obtenue pour $\sigma_{id} = 0$, correspond à la position du laser droit définissant un système parfaitement symétrique. Il apparaît donc évident que la force totale s'annule quels que soient les paramètres variables étudiés, et la position d'équilibre est une position d'équilibre stable. La seconde est, quant à elle, obtenue pour un éloignement supérieur à la situation symétrique, la position définit alors un équilibre instable. Cette valeur sera ainsi d'autant plus élevée que le *waist*, le rayon de la bille, ou encore l'indice de réfraction relatif seront grands (figures 3.8, 3.10 et 3.11). Toutefois, nous constatons que ces mêmes zéros de la force totale seront d'autant plus petits que la longueur d'onde sera élevée (figure 3.9).

Pour comprendre cette différence il faut se reporter à l'expression de la force (3.16). Nous constatons alors que cette dernière est proportionnelle à ρ^2/ω^2 . Ainsi, en tenant compte parallèlement des variations de la largeur d'un faisceau gaussien en fonction de la distance z au *col*, il apparaît évident que l'évolution de la position d'un des deux lasers, pour laquelle la force s'annule, suivra une tendance identique que ce soit pour les variations suivant la taille de *waist*, le rayon de bille ou même l'indice relatif. À l'inverse, de mêmes considérations nous amènent à conclure quant à un comportement opposé dans le cas des variations de la longueur d'onde. En effet, nous remarquons que la dépendance de la divergence du faisceau est directement, et non plus inversement comme dans le cas du *waist*, proportionnelle à cette dernière.

La tendance générale de ces quatre figures veut que la force totale reste positive entre les deux positions où elle s'annule. Autrement dit, la force due au laser gauche est supérieure au droit, et la bille se retrouve poussée vers ce dernier. Inversement, en dehors de cet intervalle, la force due au laser droit prédomine, impliquant ainsi une force totale négative, et un déplacement particulière vers le laser opposé, soit le laser gauche.

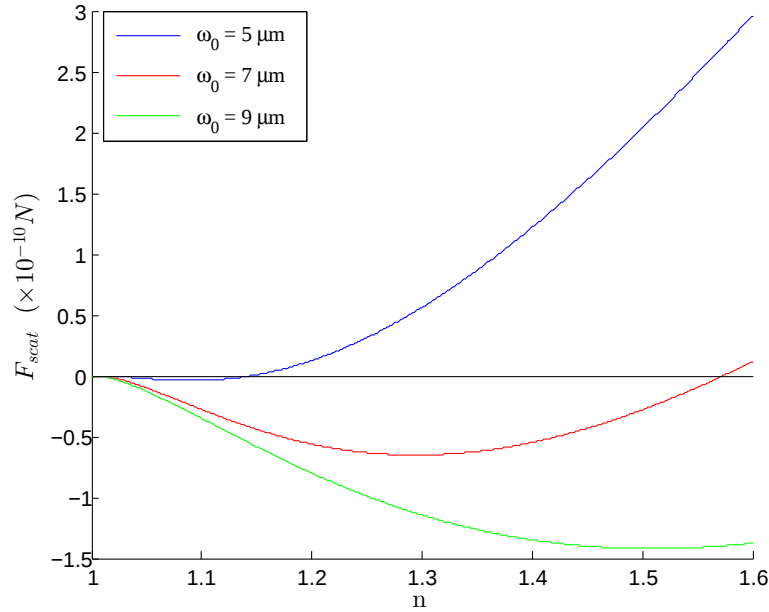


FIGURE 3.12 – Évolution de la force totale de diffusion, sur une bille, due à deux lasers contra-propageants, en fonction de l'indice de réfraction relatif. Le milieu environnant considéré est l'eau ($n_m = 1.33$) et les calculs ont été effectués pour trois valeurs de waist différentes, mais identiques pour les lasers co- et contra-propageant. Le rayon de la bille est fixé à $50 \mu m$ et la longueur d'onde à $514.5 nm$.

La figure 3.12 montre l'évolution de la force totale de diffusion en fonction des variations de l'indice de réfraction relatif n , pour trois valeurs distinctes de waists d'entrée. Nous avons ici choisi les couples de valeurs (ω_0, σ_{id}) tels qu'ils correspondent aux points situés aux minima des trois courbes sur la figure 3.8. Nous constatons que l'intervalle sur lequel la force est négative, autrement dit où la force due au laser droit est supérieure à celle du laser gauche, est d'autant plus important que le *waist* d'entrée est élevé. Cela s'entend assez simplement en considérant l'évolution de la divergence d'un faisceau en fonction de la taille du *col*.

Toutefois, nous remarquons que la force s'annule pour une valeur d'indice proche de 1.14 dans le cas d'un *waist* de $5 \mu m$, mais bien au-delà pour des *waists* plus grands. Il s'avère donc que pour appliquer un tel piège à des milieux biologiques, la nécessité d'un *waist* étroit s'imposera. En effet, l'indice de réfraction relatif varie typiquement entre 1.015 (tissu fortement hydraté) et 1.165 (tissu complètement déshydraté en milieu aqueux) dans les tissus biologiques, dont la variation dépend de la teneur en eau.

Nous ne développerons pas plus ici notre analyse portée à une seule bille, dont la problématique a déjà été abordée par plusieurs équipes sous des angles aussi nombreux que variés. Ainsi, pendant que certains cherchent à démontrer la possibilité de piéger des particules de diverses tailles dans des profils de faisceaux autres que gaussiens [101, 119–122], d'autres s'intéressent aux géométries du piège [123], ou encore à la nature des particules [20, 124, 125].

Enfin, sans revenir sur les travaux de *Ashkin*, nous pouvons citer une étude précurseuse relativement exhaustive menée par *Roosen et al.* dans les années 1970. Ils déduisirent analytiquement, puis vérifièrent expérimentalement, l'ensemble des positions d'équilibres stables que pouvait atteindre une bille soumise à un faisceau vertical ou deux faisceaux horizontaux contra-propageants, mais dans le cas d'une bille légèrement désaxée par rapport à l'axe de propagation commun aux deux lasers [112, 117].

3.3.2 Description du modèle global

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'une chaîne de billes. La situation la plus simple consiste à considérer un ensemble de billes identiques, régulièrement espacées et soumises à deux faisceaux lasers symétriquement positionnés par rapport au centre du réseau (figure 3.1).

D'après la *première partie* de ce manuscrit, nous savons qu'il est possible de trouver, pour tout réseau, un mode de *Bloch* pour lequel la période est égale à celle du réseau. Nous pouvons voir cela avec un exemple à maille simple (figure 3.13), et un à maille complexe (figure 3.14).

Nous déduisons clairement que la force totale, induite par la présence des deux lasers, est nulle sur chacune des billes. Cela était totalement prévisible dû aux symétries du problème.

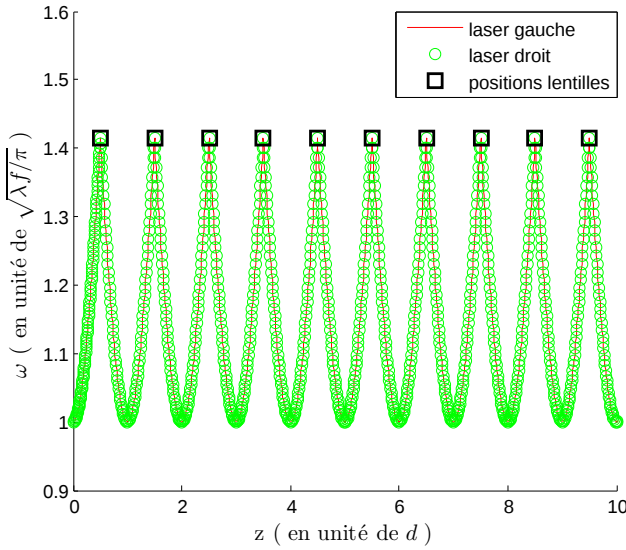


FIGURE 3.13 – Profil d'évolution des largeurs des faisceaux gauche et droit dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles, espacées de $\tilde{d} = 2$. Le waist d'entrée est de $4.5 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le mode excité ici est un mode de Bloch.

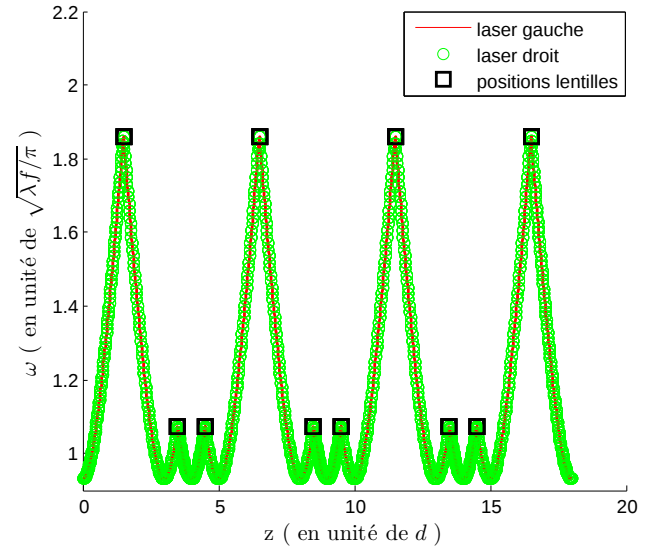


FIGURE 3.14 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 10$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu\text{m}$ et $\sigma_i = 250 \mu\text{m}$.

Il apparaît bien que l'équilibre établi sur les deux cas précédents soit stable. Les billes ainsi disposées se retrouvent alors piégées sur leurs positions initiales.

Toutefois, lorsque l'espacement entre les billes ne définit plus un état confiné du faisceau (figure 3.15), nous voyons bien ce dernier s'échapper du réseau au cours de sa propagation. À partir du profil de force (figure 3.16), nous observons clairement que les billes sur la gauche du réseau ne sont soumises, quasiment, qu'à l'influence du faisceau de gauche, et inversement. Cela s'explique en considérant la divergence de chacun des faisceaux, faisant tendre rapidement leur énergie respective vers zéro au sein du réseau. D'où une valeur d'énergie totale nulle au centre de ce dernier (somme de deux contributions nulles), mais respectivement positive et négative à gauche et à droite. Cela implique un mouvement des billes, respectivement proches de chacun des deux lasers, dans la même direction mais de sens opposé. Ainsi, elles devraient avoir tendance à s'assembler au centre du réseau.

Le conditionnel prend néanmoins toute son importance ici. En effet, ainsi soumises aux forces optiques, les billes vont être amenées à se déplacer dans le réseau. Or, ce réarrangement va engendrer, par la même, une modification du profil de champ. Toute la question réside alors dans le fait de savoir si un nouveau système stable peut s'établir.

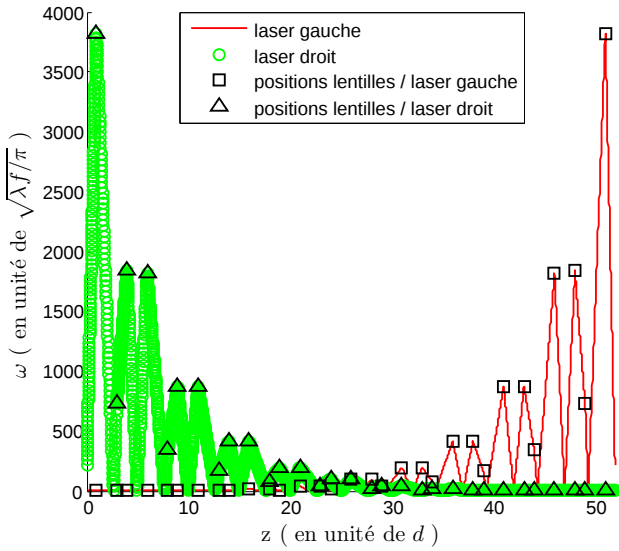


FIGURE 3.15 – Profil d'évolution de largeur du faisceau dans un réseau de $N_L = 31$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1.6$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu m$ et $\sigma_i = 250 \mu m$.

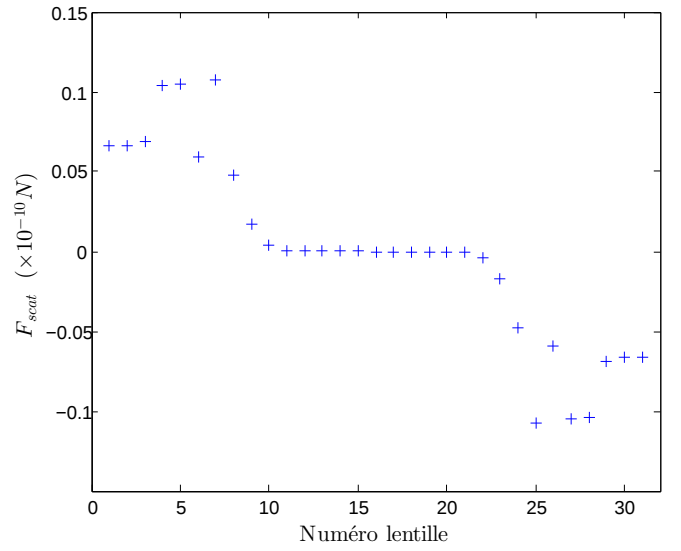


FIGURE 3.16 – Évolution de la force totale de dispersion due à deux lasers contra-propageants dans un réseau de $N_L = 31$ lentilles avec $\tilde{d}_1 = 2\tilde{d}$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}$, $\tilde{d}_3 = 2\tilde{d}$ et $\tilde{d} = 1.6$. Le waist d'entrée est de $7.3 \mu m$ et $\sigma_i = 250 \mu m$.

Cela étant, il semble évident que pour un réseau donné, quel que soit le profil spatial de champ, du moment qu'il est périodique, nous pourrions toujours définir un ensemble de paramètres de faisceaux symétriques, et annuler la force sur chaque bille. En revanche, serait-il possible, en fixant les paramètres de faisceaux, d'obtenir des conditions de piégeage à partir de positions de billes initiales quelconques ? Ou identiquement, à partir d'un réseau donné, obtenir également un état d'équilibre stable, mais pour des paramètres de faisceaux asymétriques.

Nous traiterons ces questions dans le chapitre suivant, en considérant la dynamique du système.

Auparavant, il est intéressant d'estimer l'amplitude des forces optiques. En effet, dans le cas où nous considérerions une application à un ensemble de gouttes en suspension dans un fluide, et soumises à deux faisceaux lasers contra-propageants, la dynamique serait alors entièrement dépendante des forces optiques mises en jeu (nous rappelons que nous supposons ici les gouttes de grand diamètre devant la longueur d'onde).

Comme nous venons de le voir, un photon possède une certaine quantité de mouvement dont le transfert peut s'interpréter comme une force $\mathbf{F}$ exercée sur une période de temps Δt :

$$p = \hbar k = h/\lambda = F \Delta t \quad (3.19)$$

où nous rappelons que k et λ correspondent respectivement au nombre d'onde et la longueur d'onde du photon, et $h = 2\pi\hbar$ à la constante de Planck.

Ainsi, nous pouvons déduire de (3.17), pour une puissance de $1W$ et l'eau comme milieu environnant ($n_m = 1.33$), une estimation de la force optique telle que :

$$F_z = \frac{n_m P}{c} Q \simeq 4.4 \times 10^{-9} Q \quad (3.20)$$

Typiquement, la valeur du facteur Q , dans le cas de particules diélectriques, atteindra quelques dixièmes suivant la valeur de l'indice de réfraction relatif [126].

Si nous prenons l'exemple d'une bille de polystyrène dans l'eau, une approximation de la force nous donne $F_z \simeq 2.7 \times 10^{-9} N$.

Or, pour des gouttes de rayon $50 \mu m$, dont la masse volumique est de l'ordre de celle de l'eau $\mu_b \simeq 1.06 \times 10^3 kg.m^{-3}$, nous en déduisons une masse de l'ordre de :

$$m_b = V_b \mu_b = \frac{4}{3} \pi \rho^3 \mu_b \simeq 5.6 \times 10^{-10} kg \quad (3.21)$$

soit un poids de :

$$P_b = m_b g \simeq 5.4 \times 10^{-9} N \quad (3.22)$$

Toutefois, comme tout corps plongé dans un fluide, les particules sont soumises à la poussée d'*Archimède*, opposée au poids et définie telle que :

$$P_A = \mu_m V_b g \simeq 5.1 \times 10^{-9} N \quad \Rightarrow \quad \frac{P_b}{P_A} = \frac{\mu_b}{\mu_m} \simeq 1.06 \quad (3.23)$$

Nous constatons alors que les deux forces sont sensiblement égales. Étant naturellement orientées suivant une même direction (verticale), mais de sens opposé, nous pouvons déduire simplement la résultante de ces deux forces. Ce qui, en prenant une orientation de l'axe vertical vers le haut, nous permet d'écrire :

$$\left\| \vec{P}_A + \vec{P}_b \right\| = |P_A - P_b| = V_b g |\mu_m - \mu_b| = m_b g \left| \frac{\mu_m}{\mu_b} - 1 \right| \simeq 3 \times 10^{-10} N \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m_b} |P_A - P_b| = g \left| \frac{\mu_m}{\mu_b} - 1 \right| \simeq 0.5 N.kg^{-1} \quad (3.25)$$

Ainsi, l'accélération transmise aux gouttes F_{opt}/m_b semble être assez conséquente devant la somme de chacune des contributions précédentes, de telle façon que des effets dynamiques significatifs devraient apparaître :

$$\frac{F_{opt}}{m_b} \simeq 4.7 N.kg^{-1} \quad (3.26)$$

Cependant, nous pouvons souligner le fait que cette situation est une idéalisation de la réalité. En effet, de façon plus juste, en considérant une suspension de gouttes, il devrait être nécessaire de prendre en compte l'excentrement entre ces dernières et l'axe commun aux faisceaux. Nous devrions alors considérer une force de gradient transverse amenant au préalable les gouttes sur l'axe optique.

Une façon de s'affranchir de cela serait de confiner spatialement les gouttes en les laissant évoluer sur un guide "unidimensionnel".

Nous allons ainsi, dans le prochain chapitre, établir les équations de la dynamique auxquelles sont soumises chacune des gouttes, tout en justifiant l'ensemble des approximations que nous avons considéré dans notre étude. Nous exposerons alors, dans la continuité, les premières représentations dynamiques liées aux résultats préalablement établis dans les chapitres précédents.

Chapitre 4

Évolution dynamique d'un ensemble de gouttes

Sommaire

4.1	Établissement des équations de la dynamique	115
4.2	Étude de la stabilité des positions d'équilibre	117
4.2.1	Calcul général en dimension 2	118
4.2.2	Synthèse des solutions et cycles limites	120
4.3	Représentation des états d'équilibre sans contact interparticulaire	120
4.3.1	Piégeage avec des paramètres d'entrée symétriques	121
4.3.1.1	Positionnement périodique des gouttes	121
4.3.1.2	Influence du désordre sur la stabilité de l'équilibre	127
4.3.2	Asymétrie des paramètres d'entrée et cycles limites	131
4.4	Étude propagative sur des gouttes après collision	138
4.4.1	Évolution dynamique avec contact interparticulaire	138
4.4.1.1	Modèle de billes dures diélectriques	138
4.4.1.2	Modèle de gouttes en coalescence	139
4.4.2	Résultats dynamiques après collision	141

4.1 Établissement des équations de la dynamique

Nous allons maintenant étudier la réponse dynamique d'un ensemble de gouttes diélectriques supposées indéformables (tension superficielle suffisante devant les forces de frottements).

Nous commençons, afin de considérer les effets inertiels liés à ces dernières, par donner le système d'équations couplées auquel sont soumises chacune des particules, à partir du principe fondamental de la dynamique suivant l'axe de propagation (Oz) :

$$\begin{cases} \frac{dz_n(t)}{dt} &= \frac{p_n(t)}{m_b} \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= F_{opt}(z_n, t) + F_f(z_n, t) + F_{Lang}(z_n, t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où p et m_b correspondent respectivement à la quantité de mouvement et à la masse des particules.

Nous retrouvons donc l'ensemble des forces extérieures s'appliquant à une goutte en mouvement dans un fluide, et soumise à un faisceau lumineux : la force optique longitudinale F_{opt} induite par les lasers (présentée dans la section précédente), la force de frottement fluide F_f due au milieu environnant, et la force *stochastique de Langevin* F_{Lang} (ou bruit blanc gaussien) due aux particules composant le fluide environnant.

Comme nous le verrons par la suite, les vitesses v des particules dans le réseau atteignent au maximum des valeurs de l'ordre de $10^{-5} m.s^{-1}$, ce qui, en considérant une viscosité cinématique ν_m du milieu environnant aux alentours de $10^{-6} m^2.s^{-1}$, nous permet d'en déduire le *nombre de Reynolds* équivalent :

$$Re = \frac{v \rho_b}{\nu_m} \simeq 5 \times 10^{-4} \ll 1 \quad (4.2)$$

Cela implique que les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité, l'approximation de *Stokes* peut alors être appliquée et l'expression des forces de frottements fluides prend alors la forme [127] :

$$F_f = -\gamma \frac{p}{m_b} \quad , \quad \text{avec} \quad \gamma = 6\pi\eta_m\rho \quad (4.3)$$

où $\eta_m = 1.002 \times 10^{-3} Pa.s$ correspond à la viscosité dynamique du milieu environnant (ici l'eau).

Cela va donc nous permettre de simplifier le problème en nous plaçant en limite de friction forte. Le système peut alors se réécrire, d'après (4.1), comme :

$$|\dot{p}| \ll \left| \gamma \frac{p}{m_b} \right| \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{F_{opt}}{\gamma} + \frac{F_{Lang}}{\gamma} \quad (4.4)$$

En outre, il semble judicieux de justifier la prise en compte de la force de *Langevin*. En effet, celle-ci est définie comme une force aléatoire décrivant les collisions entre les gouttes et les particules composant le milieu. Nous supposons alors qu'une énergie cinétique peut être conférée aux gouttes, due aux fluctuations thermiques du fluide, autrement dit, à la distribution moyenne des vitesses des molécules composant le fluide environnant (théorème d'équipartition de l'énergie).

Nous pouvons ainsi déduire l'amplitude de cette force stochastique [128, 129] :

$$F_{Lang} = \gamma \sqrt{\frac{2k_B T}{m_b}} \simeq 3.63 \times 10^{-12} N \quad \Rightarrow \quad F_{Lang}/F_{opt} \ll 1 \quad (4.5)$$

où $k_B \simeq 1.38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$ définit la constante de *Boltzmann*, et $T \simeq 300 K$ la température du milieu.

Nous constatons que la force *stochastique de Langevin* pourra alors être négligée ¹, dû essentiellement aux masses élevées des gouttes.

Nous allons ainsi pouvoir nous ramener, en limite de friction forte, au "simple" calcul de la force optique, à un coefficient de friction près. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, les grandes dimensions de notre système vont nous permettre d'obtenir son expression dans l'approximation de l'optique géométrique, sous l'hypothèse des faisceaux gaussiens (3.16) [130]. Cette expression sera toutefois toujours valable sous la condition de modes d'ordres supérieurs, mais les expressions des intensités devront alors être considérées en conséquence [127].

¹Cela nous permet de déduire, par la même, que le potentiel optique U , induit par les forces lumineuses, sera assez profond pour surmonter l'énergie cinétique des gouttes due aux fluctuations thermiques du fluide. Cette condition pourra alors être traduite par le calcul du *coefficient de Boltzmann* [6, 101] : $e^{-U/k_B T} \ll 1$.

Rappelons que la première problématique soulevée ici est l'étude du comportement d'une chaîne de gouttes réparties initialement de façon aléatoire, et soumise à deux lasers dont les paramètres ont été fixés.

Ainsi, la recherche des états d'équilibre nous amène à obtenir les positions z_n des gouttes pour lesquelles la force optique s'annule sur chacune d'elles, soit $F_{tot}(z_n) = 0$. La stabilité de cet état sera alors déduite de la diagonalisation de la matrice *jacobienne* du système définie en (4.1) (cela sera développé plus en détail dans la section (4.2) qui suit).

Les solutions obtenues ont alors été vérifiées par une simulation temporelle, dont nous présentons succinctement la démarche suivie :

- i) *nous commençons par évaluer le profil de mode à chaque position de goutte (suivant la méthode matricielle des rayons ou l'intégrale de Huygens-Fresnel) ;*
- ii) *à partir de quoi nous calculons la force optique sur chaque goutte via l'équation (3.16) ;*
- iii) *enfin, nous intégrons le système (4.1) avec un pas de temps Δt , et itérons jusqu'à un temps maximal t_{max} avec un pas de 1.*

Nous venons ainsi d'établir la dynamique à laquelle sera soumise chacune des billes composant le réseau initial. Cependant, bien que nous puissions conclure quant à la possibilité de piéger les billes sur des positions d'équilibre dans les potentiels optiques, nous n'avons encore rien avancé quant à leur stabilité.

4.2 Étude de la stabilité des positions d'équilibre

En considérant la force liée à l'agitation thermique des molécules du fluide ambiant comme négligeable, il apparaît de façon évidente que l'équilibre des billes dépendra des forces optiques et des forces de frottements fluides. Ainsi, l'équilibre sera atteint lorsque la somme de ces forces $F_{tot}(z_n)$ (avec $1 \leq n \leq N_L$ et $n \in \mathbb{N}$), s'appliquant à chacune des N_L billes, sera nulle :

$$F_{tot}(z_n) = \sum F_{ext}(z_n) = F_{opt}(z_n) - F_f(z_n) = 0 \quad (4.6)$$

Ce qui, en limite de friction forte, nous amène, à partir de (4.1), à l'équation du mouvement suivante (la dépendance temporelle de chaque variable est sous-entendue) :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=z_n} = \frac{F_{opt}(z_n)}{\gamma} = 0 \quad (4.7)$$

Nous venons alors de définir les conditions d'équilibre pour une position de bille donnée. Or, qu'en est-il de la stabilité de ce point d'équilibre ? Pour ce faire, nous allons partir d'un cas général, équivalent à notre situation d'étude, mais sans approximation préalable particulière.

4.2.1 Calcul général en dimension 2

Considérons un système de deux variables, identique à (4.1), dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(z, p) \\ \frac{dp}{dt} = g(z, p) \end{cases} \quad (4.8)$$

Les fonctions f et g sont admises comme non-linéaires. Nous allons alors supposer qu'il existe au moins un couple de valeurs $u_{eq} = (z_{eq}, p_{eq})$ pour lequel :

$$\begin{cases} f(z_{eq}, p_{eq}) = 0 \\ g(z_{eq}, p_{eq}) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Le point u_{eq} est alors un point d'équilibre du système. Pour en connaître la stabilité, nous allons nous placer au point u_{eq} et appliquer une légère perturbation (ϵ_z, ϵ_p) . La dynamique interne du système induira alors un amortissement ou une amplification de cette dernière, traduisant respectivement une situation stable ou instable.

Pour ce faire, nous allons devoir, au préalable, simplifier le problème en linéarisant le système.

Soit f une fonction à une variable réelle z , et ϵ_z un réel proche de zéro. Nous pouvons alors écrire la *série de Taylor* suivante :

$$f(z_{eq} + \epsilon_z) = f(z_{eq}) + \epsilon_z \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_{eq}} + \frac{1}{2!} \epsilon_z^2 \left. \frac{d^2f}{dz^2} \right|_{z_{eq}} + \dots + \frac{1}{n!} \epsilon_z^n \left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z_{eq}} + \dots \quad (4.10)$$

Nous pouvons négliger les termes de degré élevé. Ce qui nous permet de réécrire cette expression comme :

$$f(z_{eq} + \epsilon_z) \simeq f(z_{eq}) + \epsilon_z \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_{eq}} \quad (4.11)$$

Nous obtenons ainsi une approximation linéaire de f au voisinage de z_{eq} .

Appliquons maintenant cela à une fonction f de deux variables réelles z et p . Comme précédemment, nous poserons z_{eq} et p_{eq} deux réels, et $u_{eq} = (z_{eq}, p_{eq})$. Soient ϵ_z et ϵ_p deux réels proches de zéro. Alors :

$$f(z_{eq} + \epsilon_z, p_{eq} + \epsilon_p) \simeq f(z_{eq}, p_{eq}) + \epsilon_z \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z_{eq}} + \epsilon_p \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \quad (4.12)$$

Nous en déduisons une approximation linéaire de f au voisinage de (z_{eq}, p_{eq}) .

Revenons à notre système initial, que nous simplifions alors par les approximations linéaires précédemment établies. Soient $z = z_{eq} + \epsilon_z$ et $p = p_{eq} + \epsilon_p$. Or, nous avons selon (4.8) : $dz/dt = f(z, p)$ et $dp/dt = g(z, p)$. Ainsi, d'après ce qui précède nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(z_{eq}, p_{eq}) + \epsilon_z \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z_{eq}} + \epsilon_p \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \\ \frac{dp}{dt} = g(z_{eq}, p_{eq}) + \epsilon_z \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{z_{eq}} + \epsilon_p \left. \frac{\partial g}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \end{cases} \quad (4.13)$$

Or, nous avons posé $f(z_{eq}, p_{eq}) = 0$ et $g(z_{eq}, p_{eq}) = 0$. Ainsi, nous en déduisons :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \epsilon_z \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z_{eq}} + \epsilon_p \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \\ \frac{dp}{dt} = \epsilon_z \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{z_{eq}} + \epsilon_p \left. \frac{\partial g}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \end{cases} \quad (4.14)$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt}(u - u_{eq}) = \frac{du}{dt} = J(z_{eq}, p_{eq}) \cdot (u - u_{eq}) \quad (4.15)$$

avec,

$$u_{eq} = \begin{pmatrix} z_{eq} \\ p_{eq} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} z_{eq} + \epsilon_z \\ p_{eq} + \epsilon_p \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

et,

$$J(z_{eq}, p_{eq}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z_{eq}} & \left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{z_{eq}} & \left. \frac{\partial g}{\partial p} \right|_{p_{eq}} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

où $J(u_{eq})$ est la matrice *jacobienne* du système. L'analyse de la stabilité sous forme linéaire peut donc être déterminée à partir des valeurs propres de J .

Soient λ_1 et λ_2 ses valeurs propres, et v_1 et v_2 les vecteurs propres associés. Nous avons :

$$\begin{cases} J(u_{eq}) \cdot v_1 &= \lambda_1 \cdot v_1 \\ J(u_{eq}) \cdot v_2 &= \lambda_2 \cdot v_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Soient a_1 et a_2 deux réels tels que $(u - u_{eq}) = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Nous pouvons alors écrire, à partir de cette combinaison linéaire des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= J(u_{eq}) \cdot (u - u_{eq}) \\ &= a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous obtenons ainsi les directions propres et valeurs propres.

Ce qui nous amène aux solutions du type :

$$u(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (4.20)$$

Donc si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont toutes les deux négatives, les exponentielles contenues dans l'équation (4.20) vont tendre vers zéro lorsque t deviendra grand. L'écart entre u et u_{eq} va alors être amené à se réduire au cours du temps ; autrement dit, la dynamique du système nous ramènera vers u_{eq} après l'application d'une perturbation (ϵ_z, ϵ_p) donnée. L'équilibre peut alors être qualifié de *stable*.

Ainsi, u_{eq} sera défini comme un équilibre stable si et seulement si la partie réelle de λ_{max} est négative.

Remarque : Dans les cas où les valeurs propres sont complexes, le système présentera un comportement oscillatoire.

Nous venons d'établir le calcul général pour l'étude de stabilité d'un point d'équilibre donné. Toutefois, nous avons vu que notre système pouvait être soumis à un ensemble d'approximations justifiées dans la section précédente.

La simplification de ce dernier nous a amené à traduire la dynamique à travers une seule équation différentielle (4.7) :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=z_{eqn}} = \frac{F_{opt}(z_{eqn})}{\gamma} = 0 \quad (4.21)$$

Ce qui nous amène à en déduire, assez directement, les solutions liées à un équilibre stable en suivant un raisonnement analogue, mais simplifié, du cas généralisé développé précédemment.

4.2.2 Synthèse des solutions et cycles limites

Au-delà de la notion de *stabilité*, nous pouvons extraire un ensemble de solutions qui définiront la *nature* de l'équilibre. Pour ce faire, remarquons que le calcul de diagonalisation de la matrice *jacobienne* nous amène à la résolution d'une équation caractéristique, dont l'expression pour une matrice carrée d'ordre 2 est telle que :

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(J(u_{eq})) + \det(J(u_{eq})) = 0 \quad (4.22)$$

La variété des solutions dépendra alors des valeurs prises par $\text{Tr}(J(u_{eq}))$ et $\det(J(u_{eq}))$. Ainsi, nous distinguerons essentiellement 4 types d'équilibres : les *nœuds*, les *cols*, les *foyers* et les *centres*. Nous pourrions alors parler de *stabilité* et *instabilité* dans le cas des *nœuds* et des *foyers*. Récapitulons cela dans le tableau qui suit :

TABLE 4.1 – Nature des équilibres définie à partir de la matrice jacobienne du système.

$\text{Tr}(J(u_{eq})) \backslash \det(J(u_{eq}))$	$-\infty$	0	$\frac{1}{4} \text{Tr}(J(u_{eq}))$	$+\infty$
$-\infty$	col ou point selle		nœud stable	foyer stable
0			----- centre	
$+\infty$			nœud instable	foyer instable

4.3 Représentation des états d'équilibre sans contact interparticulaire

Nous venons de voir comment étudier l'évolution dynamique d'une chaîne de gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Pour ce faire, nous avons été amenés à rechercher, au préalable, pour une répartition initiale de gouttes aléatoire, les états stationnaires par *minimisation* de la norme de la *force optique*, dont sa valeur dans le réseau dépend d'un ensemble de paramètres. Ceux-ci peuvent autant être liés aux lasers : *waists* ω_{0_g} et ω_{0_d} , et éloignements horizontaux σ_{i_g} et σ_{i_d} , d'entrée ; qu'au réseau : longueur totale L_{res} (revenant à l'espacement entre les deux lasers), et paramètre de périodicité d ; ou encore aux gouttes elles-mêmes : rayon ρ , masse m_b et indice de réfraction n_b . Suite à quoi, nous avons déduit la stabilité des équilibres.

Nous allons ainsi présenter nos résultats en dynamique, où nous ne considérerons pas, dans un premier temps, de contact entre les gouttes. Cela fera l'objet de la prochaine section.

4.3.1 Piégeage avec des paramètres d'entrée symétriques

Précisons toutefois que nous allons, dans cette partie, prendre l'exemple de trois gouttes afin de rendre le plus visible possible les graphiques exposés. Cependant, gardons à l'esprit que les résultats restent valables pour un plus grand nombre de gouttes.

4.3.1.1 Positionnement périodique des gouttes

Avant d'observer la sensibilité du système à établir un équilibre stable, devant le positionnement aléatoire des gouttes, nous allons étudier cette même sensibilité mais en préservant une certaine symétrie de la chaîne. Cela va donc nous amener, dans un premier temps, à considérer initialement le centre du réseau comme fixe ² (figure 4.1).

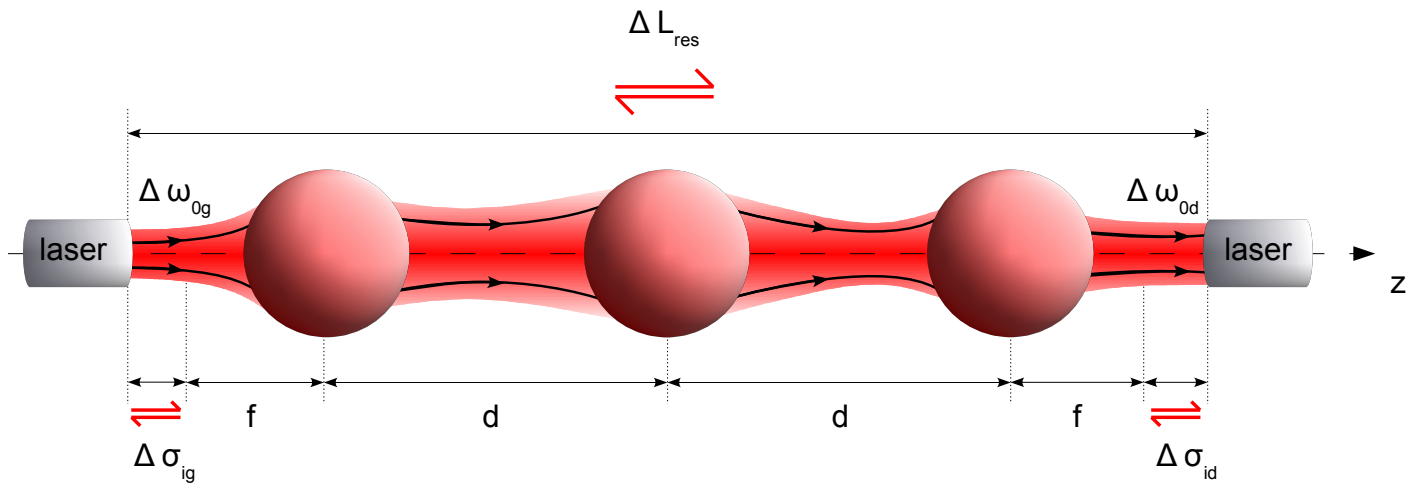


FIGURE 4.1 – Schématisation des variations portées sur les paramètres intrinsèques au système d'étude.

Ce raisonnement va entraîner trois interprétations spatiales possibles de l'évolution du système. En effet, si nous faisons varier les dimensions du système tout en préservant l'équidistance entre les gouttes, cela induit simplement une variation de l'espacement d'entrée σ_i , et/ou de l'espacement entre lasers L_{res} .

Ainsi, une première interprétation revient à considérer la distance entre les lasers comme fixe. Ce qui entraîne une simple variation sur σ_i . Cela revient au final à dilater (diminution de σ_i) ou contracter (augmentation de σ_i) la chaîne de goutte (figure 4.1).

Comme cela était attendu, nous constatons dans une situation d'équilibre *stable*, une position des gouttes invariante dans le temps. Nous voyons alors que ces dernières se placent dans les minima d'intensité (figure 4.3), impliquant par la même que les forces de radiation aient une contribution nulle. La dynamique est bien figée.

²Il se trouve que dans notre situation, où le nombre de particules composant la chaîne est impair, soit égal à trois, le centre du réseau coïncide avec la position d'une des gouttes, les autres pouvant toutefois évoluer, mais de façon symétrique.

Pour bien rendre compte de la stabilité de cet équilibre, nous avons décalé initialement la position des gouttes extrémales en variant simplement, comme décrit précédemment, les distances σ_i . Nous constatons que celles-ci viennent se placer sur leurs positions d'équilibres *stables* (figure 4.2).

Nous définissons ici (figure 4.2) les positions réduites comme la différence entre la position des billes à l'instant t et celle à l'équilibre :

$$q_{red}(t) = q(t) - q_{eq} \quad (4.23)$$

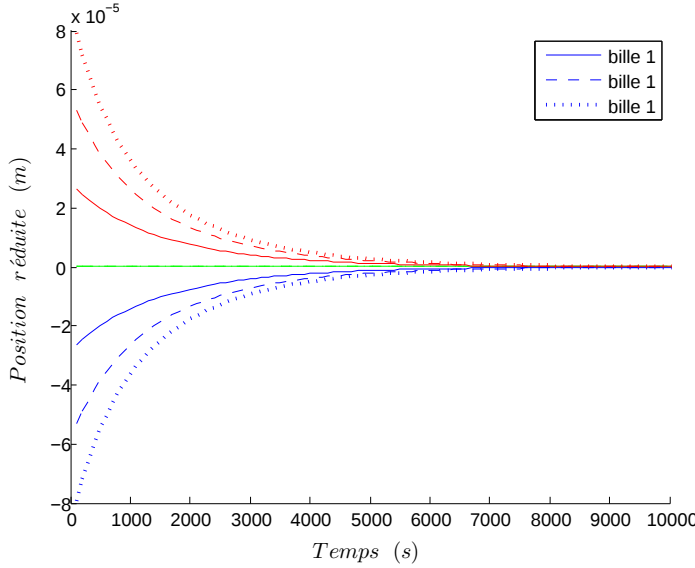


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des écarts de positions par rapport aux positions d'équilibre stable de 3 gouttes équidistantes sur une chaînette éclairée par deux lasers. Les waists d'entrée sont identiques et égaux à $8\mu\text{m}$, et la taille du système est fixée à 3.5mm . Nous avons fait varier les distances σ_i afin de représenter trois situations initiales différentes où l'écart à l'équilibre est de 7%, 12% et 17%.

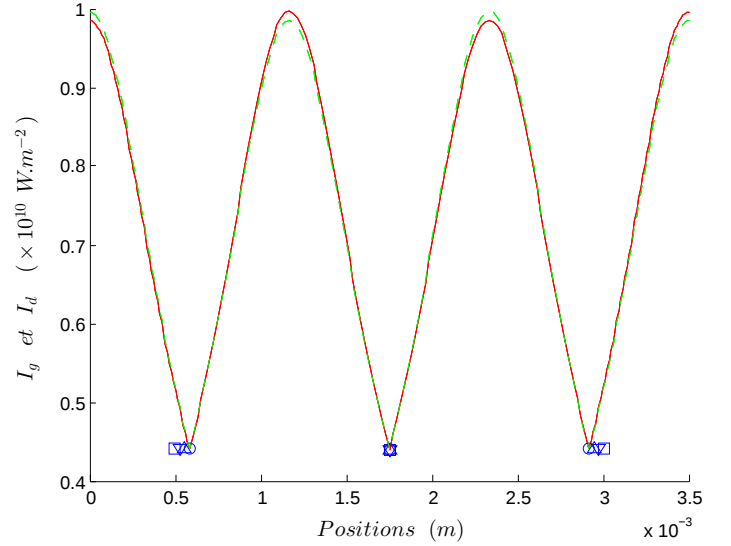


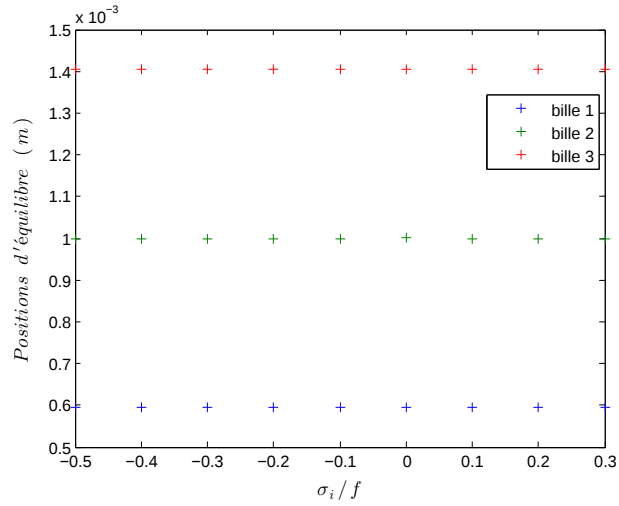
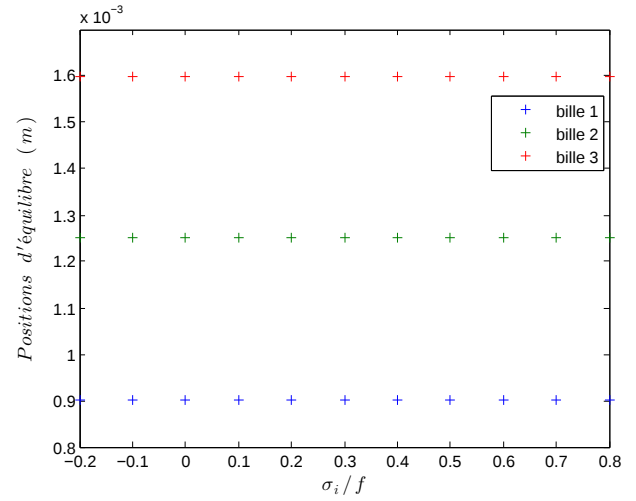
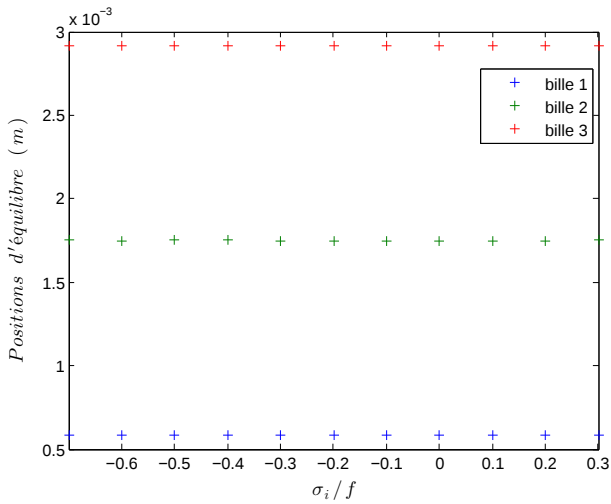
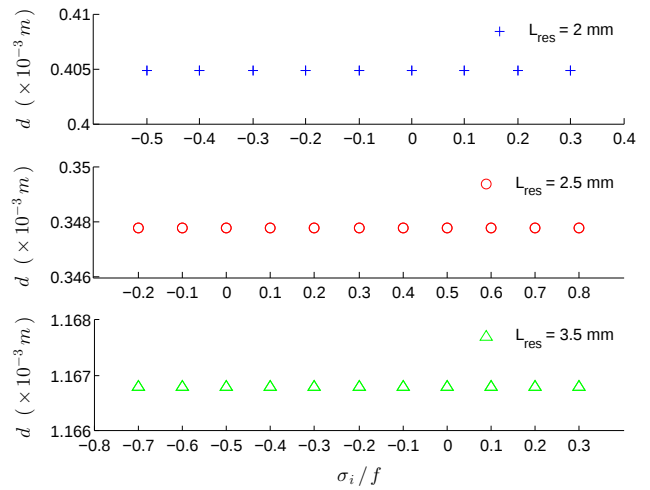
FIGURE 4.3 – Profil d'intensité, à l'équilibre, des deux lasers éclairant une chaînette composée de 3 gouttes. Les waists d'entrée sont identiques et égaux à $8\mu\text{m}$, et la taille du système est fixée à 3.5mm . Les positions initiales des gouttes sont repérées par des marqueurs triangulaires ou carrés selon l'écart à l'équilibre considéré, alors que celles finales le sont par des cercles.

Toutefois, nous remarquons que même avec un écart à l'équilibre de 17%, la convergence se fait toujours vers le même état. Une étude sur les variations de σ_i va ainsi nous permettre d'en dire plus. Précisons, avant cela, que la convergence s'établit ici sur un certain temps, dont la valeur dépend de la puissance de faisceau. En effet, la force totale ne dépendant pas de la force de *Langevin*, son intensité se retrouve alors directement proportionnelle à la puissance.

Pour ce faire, nous nous fixons trois espacements entre lasers différents et observons la dynamique des gouttes (figure 4.4). Nous constatons bien que sur une amplitude des variations de σ_i pouvant aller jusqu'à plus de $500\mu\text{m}$, la convergence des gouttes se fait toujours vers les mêmes positions, maintenues sur des écarts identiques. Et cela, selon les trois cas de figure étudiés (figure 4.4 (d)).

Typiquement, nous pourrions établir un état piégeant jusqu'à une diminution de σ_i de plus de 80% de sa valeur à l'équilibre, ou une augmentation de près de 20%, pour un espacement de 3.5mm entre les lasers. Alors que pour un espacement de 2mm , nous serons limité à une diminution aux alentours de 55%, et une augmentation de plus de 22% de σ_i .

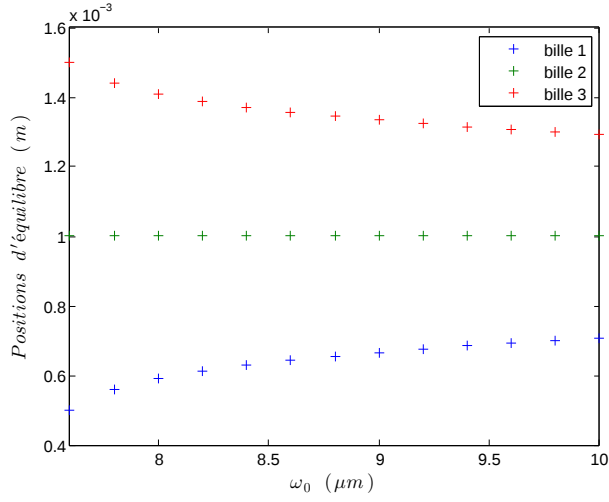
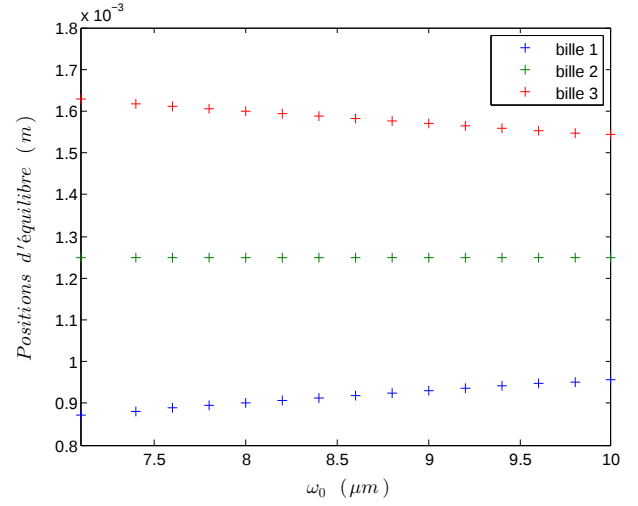
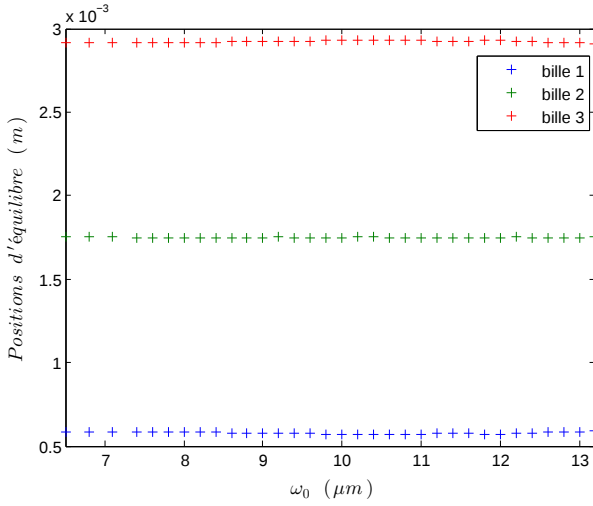
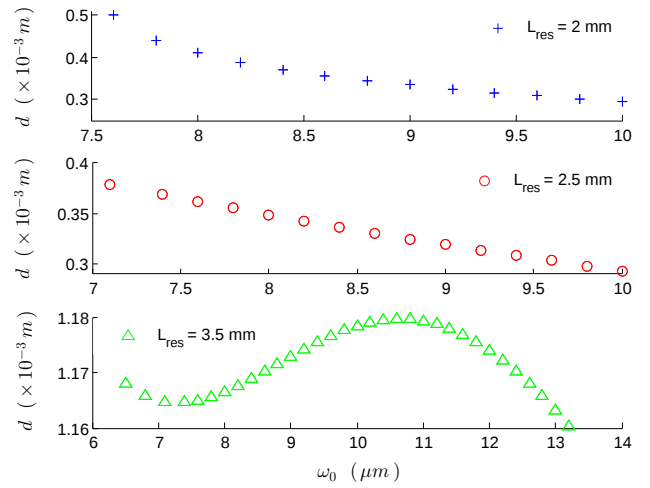
En outre, au-delà des limites observées sur les intervalles de σ_i , l'équilibre est perdu et les gouttes tendent à se rapprocher les unes des autres, ou sortir du système.


 (a) $L_{res} = 2 \text{ mm}$

 (b) $L_{res} = 2.5 \text{ mm}$

 (c) $L_{res} = 3.5 \text{ mm}$


(d) Période du réseau de gouttes à l'équilibre

FIGURE 4.4 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les distances σ_i gauche et droite, et les waists sont fixés à $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8 \mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2 mm (a), 2.5 mm (b), et 3.5 mm (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois espacements entre lasers.

De la même façon, nous pouvons constater que les variations sur les *waists* d'entrée n'auront pas une influence similaire sur l'évolution des gouttes. Comme nous pouvons le voir sur les graphes qui suivent, une augmentation de la largeur du *col* va entraîner généralement une diminution de la période du réseau, excepté pour un espacement de 3.5 mm entre les lasers, où l'évolution de la période est sinusoïdale, avec une amplitude crête à crête atteignant les 20 μm .


 (a) $L_{res} = 2 \text{ mm}$

 (b) $L_{res} = 2.5 \text{ mm}$

 (c) $L_{res} = 3.5 \text{ mm}$


(d) Période du réseau de gouttes à l'équilibre

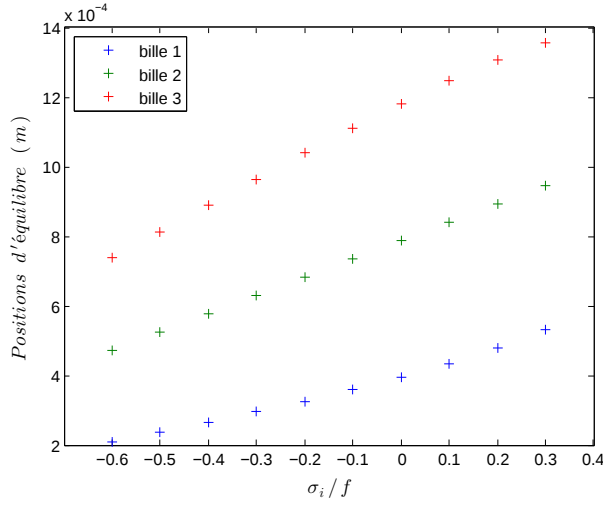
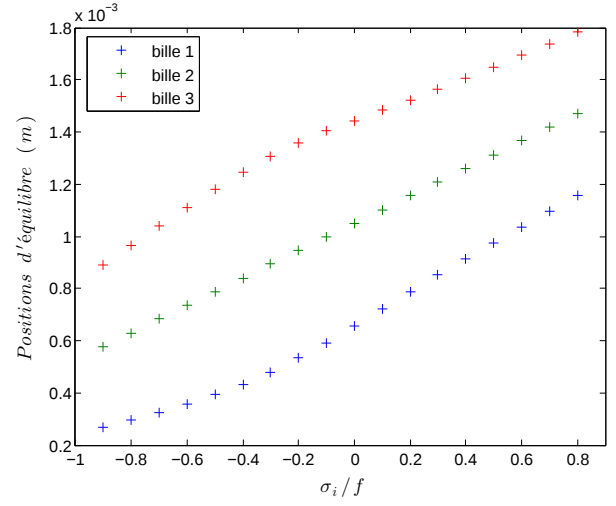
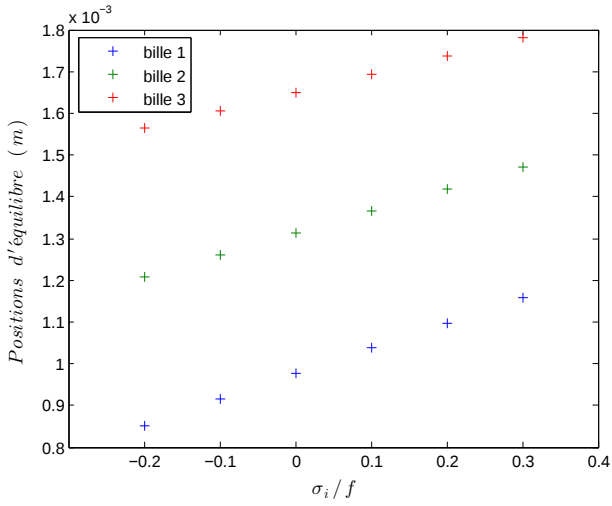
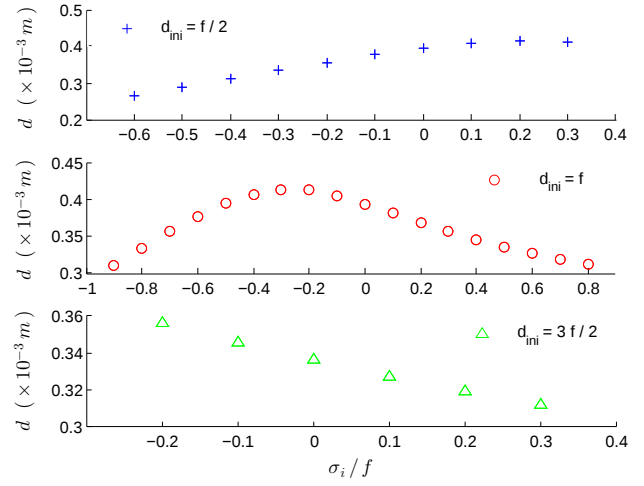
FIGURE 4.5 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les waists gauche et droit, et $\sigma_{i_g} = \sigma_{i_d} = 0 \mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2 mm (a), 2.5 mm (b), et 3.5 mm (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois espacements entre lasers.

En somme, si nous faisons varier les paramètres de faisceau tout en fixant l'espacement entre les lasers et en imposant une périodicité du réseau de gouttes, les résultats observés différeront d'un paramètre à l'autre. En effet, nous constatons que l'état d'équilibre stable obtenu est indépendant des fluctuations de la distance σ_i . Alors qu'en modifiant les valeurs de *waist* en entrée, nous observons une variation de la périodicité de l'état final.

À l'inverse, nous pouvons être amenés à considérer l'espacement entre les lasers comme variable, ce qui implique parallèlement une variation soit de la période du réseau, soit de la distance σ_i (figure 4.1).

Sur la figure 4.6 est représenté l'évolution de l'équilibre stable dans le cas où la périodicité de la chaîne de gouttes est fixée, et la distance σ_i varie avec L_{res} . Nous constatons, en premier lieu, un déplacement vers l'avant des positions d'équilibre, avec l'augmentation de L_{res} . Toutefois, ce déplacement est accompagné, suivant la périodicité initiale du réseau q_{ini} , d'une variation différente de la période de la chaîne de gouttes à l'équilibre (graphe 4.6 (d)).

Ces résultats nous permettent de montrer que les variations, observées pour les réseaux définis initialement par $d_{ini} = f/2$ et $d_{ini} = 3f/2$, se retrouvent dans leur globalité pour un réseau dont la périodicité initiale est telle que $d_{ini} = f$.

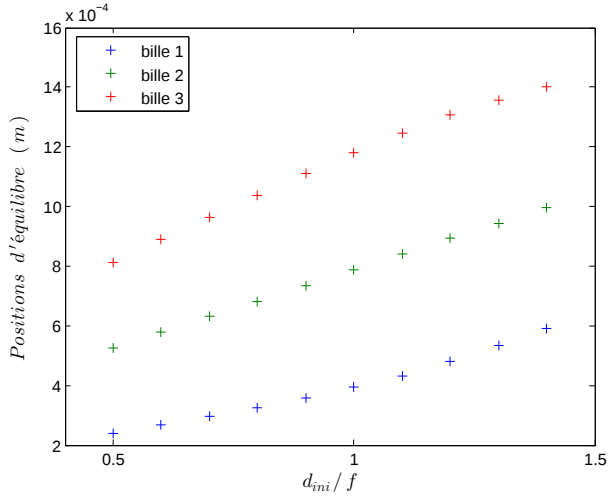
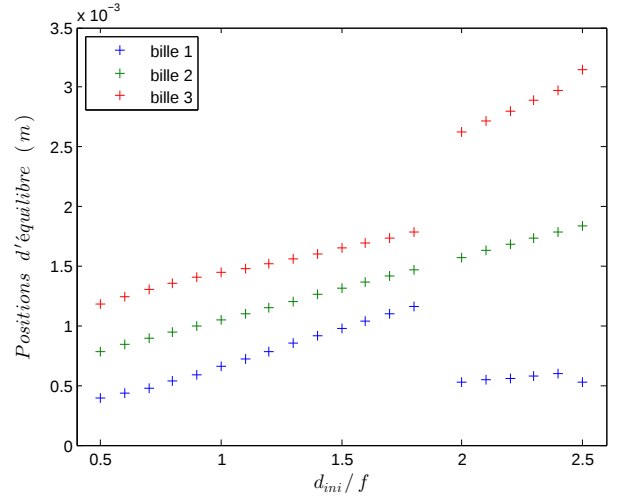
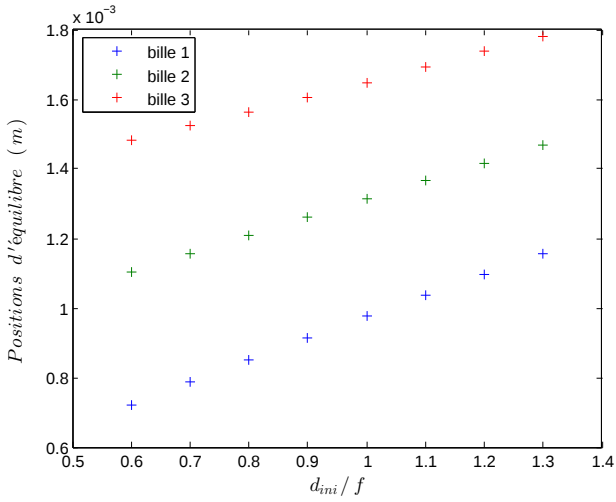
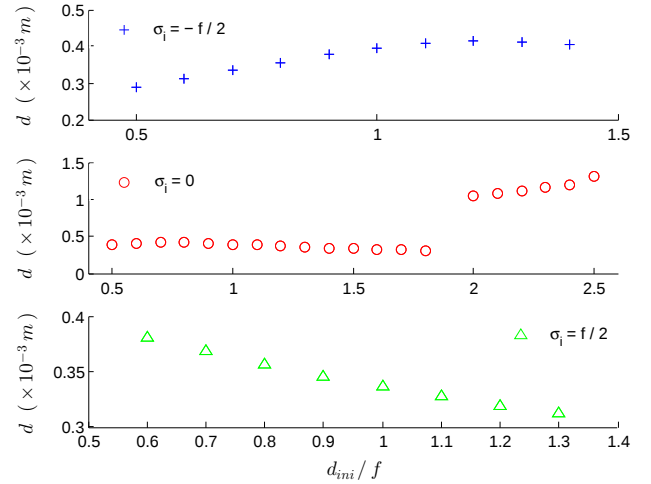

 (a) $d_{ini} = f/2$

 (b) $d_{ini} = f$

 (c) $d_{ini} = 3f/2$


(d) Période du réseau de gouttes à l'équilibre

FIGURE 4.6 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous varions identiquement les distances σ_i gauche et droite, et les waists sont fixés à $\omega_{0g} = \omega_{0d} = 8\mu\text{m}$. Les distances entre les deux lasers varient en fonction des variations de σ_i pour maintenir la période du réseau de gouttes à $f/2$ (a), f (b), et $3f/2$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois périodicités de réseau.

Sur la figure 4.7 qui suit est représenté l'évolution de l'équilibre stable dans le cas où la périodicité de la chaîne de gouttes varie cette fois-ci avec L_{res} , alors que la distance σ_i est laissée fixe. Nous constatons, comme précédemment, un déplacement vers l'avant des positions d'équilibre, avec l'augmentation de L_{res} . Cela étant, la variation de la période de la chaîne de gouttes à l'équilibre va dépendre, à présent, de la distance initiale σ_i (graphe 4.7 (d)).

Encore une fois, nous pouvons avancer que les variations observées pour les réseaux définis initialement par $\sigma_i = -f/2$ et $\sigma_i = f/2$, se retrouvent dans leur globalité pour un réseau dont la distance σ_i est égale à 0, autrement dit lorsque les lasers se trouvent initialement à la distance focale des gouttes extrêmes du réseau (figure 4.1). Toutefois, nous pouvons remarquer une brusque dilatation du réseau de gouttes entre $1.8f$ et $2f$ (graphes 4.7 (b) et 4.7 (d)). Il apparaît évident qu'une telle caractéristique puisse être d'un grand intérêt pour le triage de cellules ou particules suivant leur taille.


 (a) $\sigma_i = -f/2$

 (b) $\sigma_i = 0$

 (c) $\sigma_i = f/2$


(d) Période du réseau de gouttes à l'équilibre

FIGURE 4.7 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. Les waists sont fixés à $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8 \mu m$. Les distances entre les deux lasers varient en fonction des variations de la période du réseau de gouttes tout en maintenant les distances σ_i à $-f/2$ (a), 0 (b), et $f/2$ (c). Enfin, sur le graphe (d) est représenté l'écart entre les gouttes à l'équilibre pour les trois distances "laser-foyer objet" σ_i .

Nous concluons, au final, que lorsque nous imposons initialement un réseau périodique, nous pouvons atteindre un état piégeant avec un écart initial des gouttes, par rapport à leurs positions d'équilibre, au maximum égal à 80 %. De plus, nous relevons que ces dernières, pour un espacement entre lasers donné, sont indépendantes des variations de σ_i , mais évoluent en fonction des *waists* d'entrée. En revanche, lorsque l'écart entre lasers varie, nous constatons que l'ensemble des variations du réseau à l'équilibre peut se retrouver pour un seul paramètre σ_i ou d_{ini} donné.

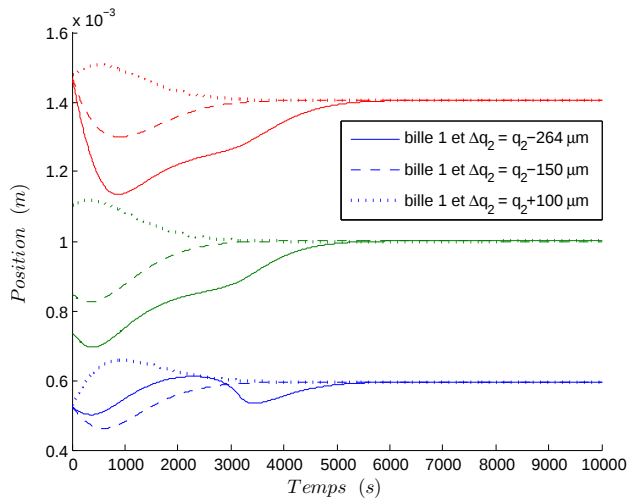
4.3.1.2 Influence du désordre sur la stabilité de l'équilibre

Nous venons de voir comment évoluait l'équilibre des gouttes, à partir des variations sur les paramètres du système, tout en préservant initialement une chaîne périodique. Nous allons à présent nous intéresser à une distribution aléatoire des gouttes.

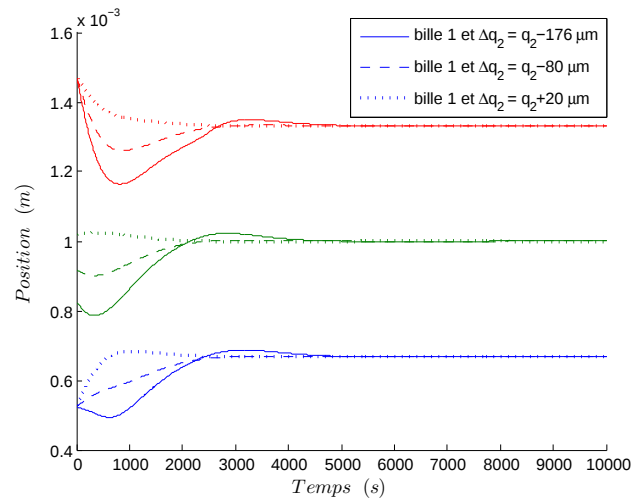
Pour ce faire, nous allons dans un premier temps positionner les gouttes, situées aux limites du réseau, à une distance des lasers que nous fixerons à partir de σ_i . Suite à quoi, nous déplacerons la goutte centrale autour de sa position à l'équilibre. Dans un second temps, nous présenterons les résultats sans que σ_i soit défini comme un paramètre ajustable, mais simplement déduit de la distribution aléatoire des gouttes :

$$\begin{cases} \sigma_{i_g} = q_{ini_1} - f \\ \sigma_{i_d} = L_{res} - q_{ini_{N_L}} - f \end{cases} \quad (4.24)$$

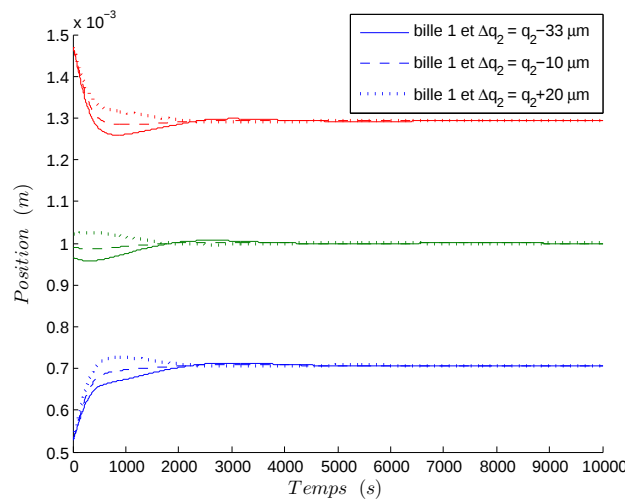
où q_{ini_1} et $q_{ini_{N_L}}$ correspondent respectivement aux positions initiales de la première et de la dernière goutte dans le réseau.



(a) $\omega_0 = 8\mu m$



(b) $\omega_0 = 9\mu m$



(c) $\omega_0 = 10\mu m$

FIGURE 4.8 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. La position de la deuxième goutte a été décalée du centre du réseau. La distance entre les deux lasers est fixée à 2 mm et les distances σ_i à 0. Quant aux waists, ils sont égaux à 8 μm (a), 9 μm (b), et 10 μm (c).

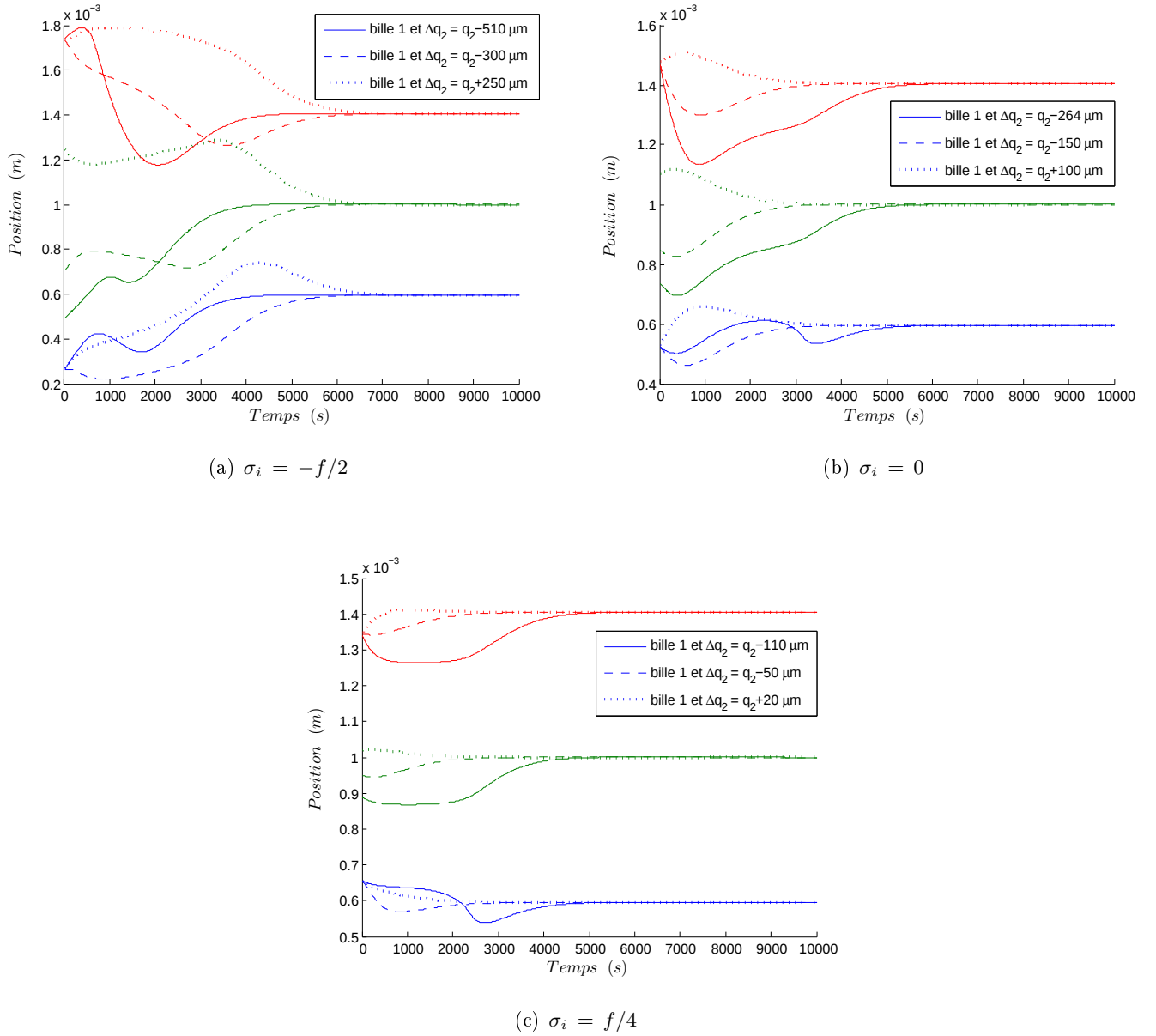


FIGURE 4.9 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 gouttes soumises à deux lasers contra-propageants. La position de la deuxième goutte a été décalée du centre du réseau. La distance entre les deux lasers est fixée à 2 mm et les waists à 8 μm . Quant aux distances σ_i , elles sont égales à $-f/2$ (a), 0 (b), et $f/4$ (c).

Nous pouvons voir sur les figures 4.8 et 4.9 que l'équilibre peut être préservé même lorsque la périodicité de la chaîne de goutte est initialement rompue.

Nous avons répertorié dans le tableau 4.2 un ensemble de résultats obtenus pour trois espacements entre lasers différents, et plusieurs couples de paramètres variables (ω_0 , σ_i). Nous constatons, généralement, que nous pourrions éloigner les gouttes de leurs positions d'équilibre d'une distance d'autant plus élevée que l'espacement L_{res} , la distance σ_i et/ou le waist ω_0 seront faibles ³.

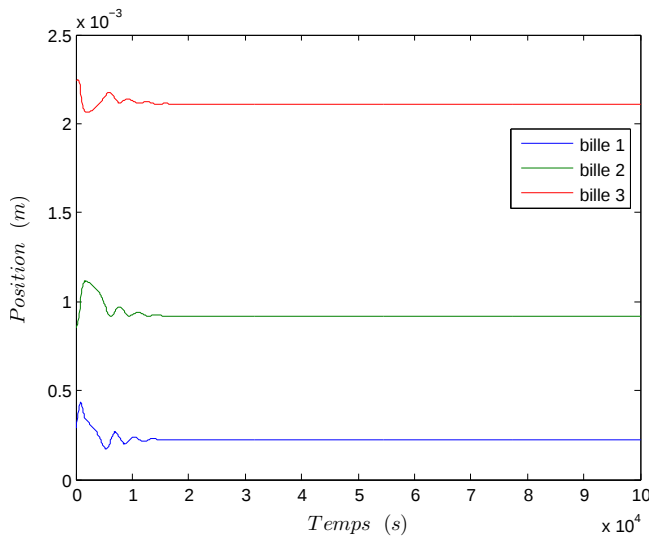
Concrètement, nous relevons que ces écarts correspondent à des variations de positions allant de 110 μm jusqu'à 510 μm pour $L_{res} = 2\text{ mm}$, de 6 μm jusqu'à 400 μm pour $L_{res} = 2.5\text{ mm}$, et de 50 μm jusqu'à 350 μm pour $L_{res} = 3.5\text{ mm}$. Valeurs que nous pouvons encore ramenées aux dimensions des gouttes, dont le diamètre atteint 100 μm .

³Signalons que le sens de variation de la position de la goutte n'a pas d'importance ici puisque les paramètres de faisceaux ont été fixés identiquement.

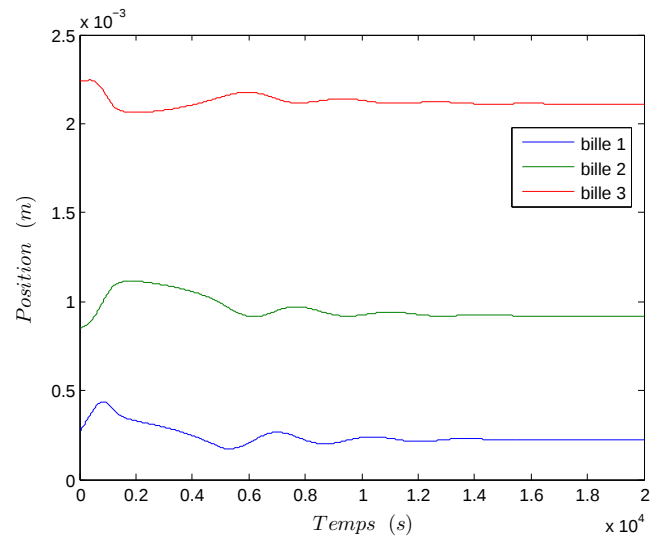
TABLE 4.2 – Écart maximal de la position initiale de la goutte centrale par rapport à sa position d'équilibre stable, selon 3 espacements entre lasers différents, et 6 couples de paramètres (ω_0, σ_i)

	$\omega_0 = 8 \mu m$			$\sigma_i = 0$		
	$\sigma_i = -f/2$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i = f/4$	$\omega_0 = 8 \mu m$	$\omega_0 = 9 \mu m$	$\omega_0 = 10 \mu m$
$L_{res} = 2 mm$	51 %	26.4 %	11 %	26.4 %	17.6 %	3.3 %
$L_{res} = 2.5 mm$	32.5 %	26.2 %	16.6 %	26.2 %	12 %	0.48 %
$L_{res} = 3.5 mm$	2.7 %	13.7 %	19.7 %	13.7 %	12.7 %	10.1 %

De façon générale, nous avons observé que les états d'équilibre étaient toujours caractérisés par des positions symétriques des gouttes sur la chaîne. Toutefois, des états d'équilibre "asymétriques" peuvent également être obtenus. En effet, nous pouvons voir sur l'exemple présenté sur la figure 4.10, où nous avons augmenté l'espacement entre les lasers en passant de $2 mm$ à $2.5 mm$, qu'un équilibre stable est atteint pour des positions asymétriques des gouttes. En revanche, le positionnement périodique de ces dernières correspond ici à un équilibre instable du système.



(a) Dynamique sur 100000 s



(b) Zoom sur les premières 20000 s

FIGURE 4.10 – Évolution temporelle d'une chaîne de trois gouttes espacées aléatoirement. Les waists d'entrée sont de $8 \mu m$, les distances σ_i sont égales à $-f/2$, et l'espacement entre lasers à $2.5 mm$.

Nous allons maintenant établir un désordre initial sur l'ensemble des gouttes à partir de la méthode de *Box-Muller* définie à la section (2.4). Nous positionnerons, ainsi, initialement les gouttes à partir d'une loi normale.

Nous avons effectué plusieurs simulations en faisant varier l'écart-type de 0 à 0.5 par pas de 0.1. Nous constatons une certaine robustesse du modèle face au désordre, pour un *waist* de $8\mu m$, jusqu'à un facteur de 0.3, autrement dit une variation moyenne de 30 % autour de la position d'équilibre. En revanche, pour une valeur au *col* plus grande, il apparaît une forte sensibilité du système au désordre.

TABLE 4.3 – Probabilité moyenne, établie sur 20 simulations, de maintenir un état d'équilibre stable dans une chaîne de gouttes réparties initialement de façon aléatoire

	$\varsigma = 0.1$			$\varsigma = 0.2$		
	$\omega_0 = 8\mu m$	$\omega_0 = 9\mu m$	$\omega_0 = 10\mu m$	$\omega_0 = 8\mu m$	$\omega_0 = 9\mu m$	$\omega_0 = 10\mu m$
$L_{res} = 2mm$	90 %	40 %	0 %	80 %	60 %	0 %
$L_{res} = 2.5mm$	90 %	40 %	0 %	80 %	60 %	0 %
$L_{res} = 3.5mm$	90 %	60 %	90 %	70 %	30 %	40 %

	$\varsigma = 0.3$			$\varsigma = 0.4$		
	$\omega_0 = 8\mu m$	$\omega_0 = 9\mu m$	$\omega_0 = 10\mu m$	$\omega_0 = 8\mu m$	$\omega_0 = 9\mu m$	$\omega_0 = 10\mu m$
$L_{res} = 2mm$	60 %	60 %	0 %	50 %	30 %	0 %
$L_{res} = 2.5mm$	50 %	60 %	0 %	50 %	30 %	0 %
$L_{res} = 3.5mm$	20 %	20 %	40 %	10 %	10 %	10 %

	$\varsigma = 0.5$		
	$\omega_0 = 8\mu m$	$\omega_0 = 9\mu m$	$\omega_0 = 10\mu m$
$L_{res} = 2mm$	50 %	25 %	0 %
$L_{res} = 2.5mm$	50 %	25 %	0 %
$L_{res} = 3.5mm$	10 %	10 %	10 %

4.3.2 Asymétrie des paramètres d'entrée et cycles limites

Nous présentons ici nos résultats dans le cas d'une chaîne courte de trois gouttes identiques, évoluant dans un réseau de longueur variable. La longueur d'onde des faisceaux contra-propageants est fixée à 514.5 nm , pour une puissance de 1 W .

Comme nous venons de le voir, si nous imposons des paramètres d'entrée de faisceaux identiques, les positions des gouttes définissant une chaîne stable se caractérisent généralement par un espacement périodique. Toutefois, nous venons également de constater qu'une simple modification de l'espacement entre les lasers pouvait induire l'apparition d'une nouvelle structure aperiodique. Observons alors quelles sont les conséquences sur l'établissement d'un équilibre si nous imposons des paramètres d'entrée de faisceaux asymétriques.

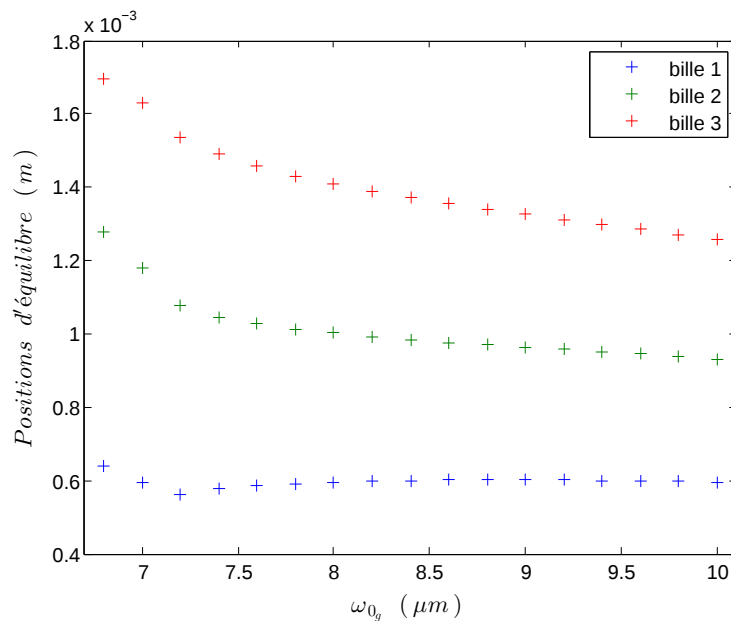


FIGURE 4.11 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 billes soumises à deux lasers contra-propageants. Le waist droit est fixé à $8\mu\text{m}$ alors que nous varions celui de gauche. La distance entre les deux lasers est de 2 mm , et $\sigma_{ig} = \sigma_{id} = 0$.

Nous constatons ici deux comportements caractéristiques suivant le paramètre étudié. En effet, si nous varions un des deux *waists* indépendamment de l'autre, nous observons que l'équilibre atteint se fera toujours suivant une structure des gouttes aperiodique, et cela tant que ω_{0g} sera différent de ω_{0d} (figures 4.11 et 4.12). Ce résultat diffère donc du cas précédent.

Toutefois, nous remarquons que le système tend rapidement vers un réseau quasi-périodique, accompagné d'une diminution de l'espacement entre les gouttes, lorsque la valeur du *waist* d'entrée augmente (graphe 4.12 (b)). Concrètement, nous relevons des écarts compris entre 3 et 6.5 fois les dimensions des gouttes. Alors que les différences entre les espacements apparaissent comme inférieures au diamètre de ces dernières au-delà d'un *waist* ω_{0g} de $7\mu\text{m}$, et inférieures à 10 % de ce même diamètre au-delà de $7.6\mu\text{m}$.

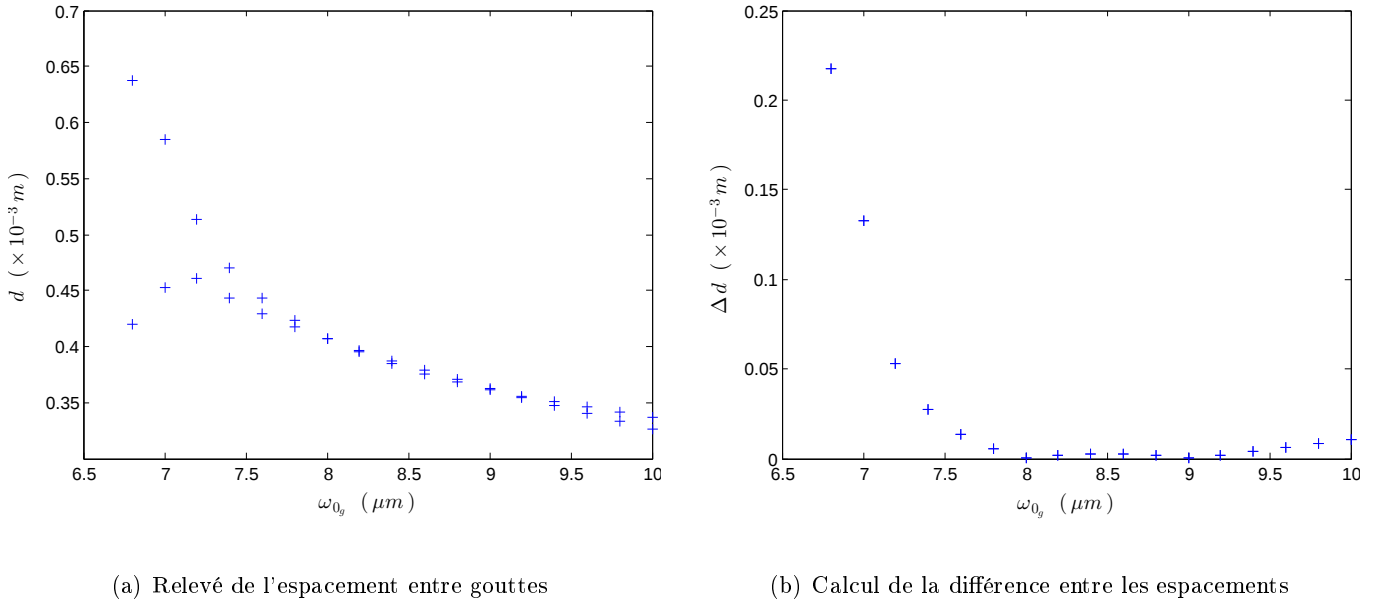


FIGURE 4.12 – Représentation de la distance entre les gouttes à l'équilibre pour un système défini par un réseau de 3 gouttes, un espacement entre lasers de 2 mm, et un waist droit fixé à $8 \mu\text{m}$ alors que nous varions celui de gauche (a). Les distances σ_i sont quant à elles égales à 0. Sur le graphe (b) est représenté la différence entre les deux écarts entre gouttes.

En revanche, les variations suivant la distance σ_{i_g} apparaissent identiques à celles relevées pour des paramètres égaux. Autrement dit, lorsque nous modifions la valeur d'une des deux distances σ_i , l'état final du système reste inchangé (figure 4.13).

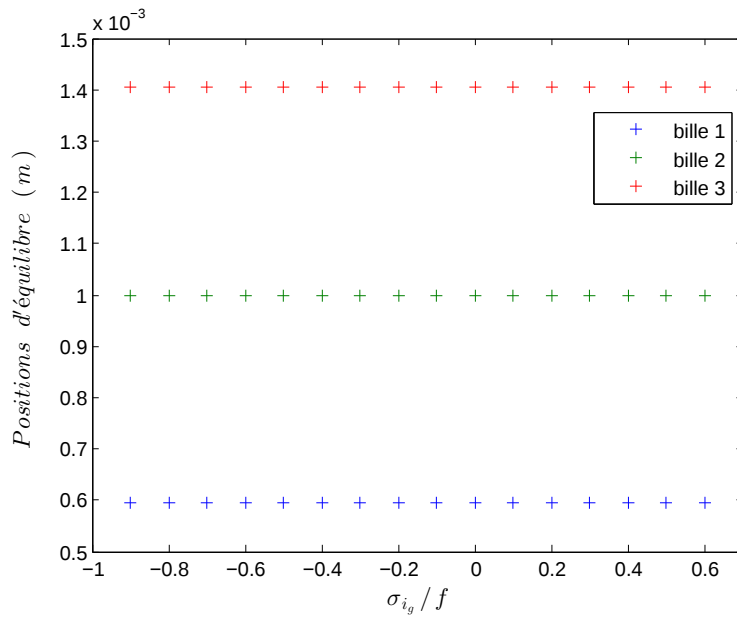


FIGURE 4.13 – Relevé des positions d'équilibre dans un réseau de 3 billes soumises à deux lasers contra-propageants. Nous fixons la distance σ_{i_d} à 0, alors que nous varions σ_{i_g} . La distance entre les deux lasers est de 2 mm, et $\omega_{0_g} = \omega_{0_d} = 8 \mu\text{m}$.

Cela étant, nous pouvons observer des résultats identiques pour un plus grand nombre de gouttes. En effet, nous constatons sur les figures 4.14 et 4.15 que les gouttes évoluent de façon erratique vers un point fixe, sans que ces dernières, à l'équilibre, ne soient espacées périodiquement.

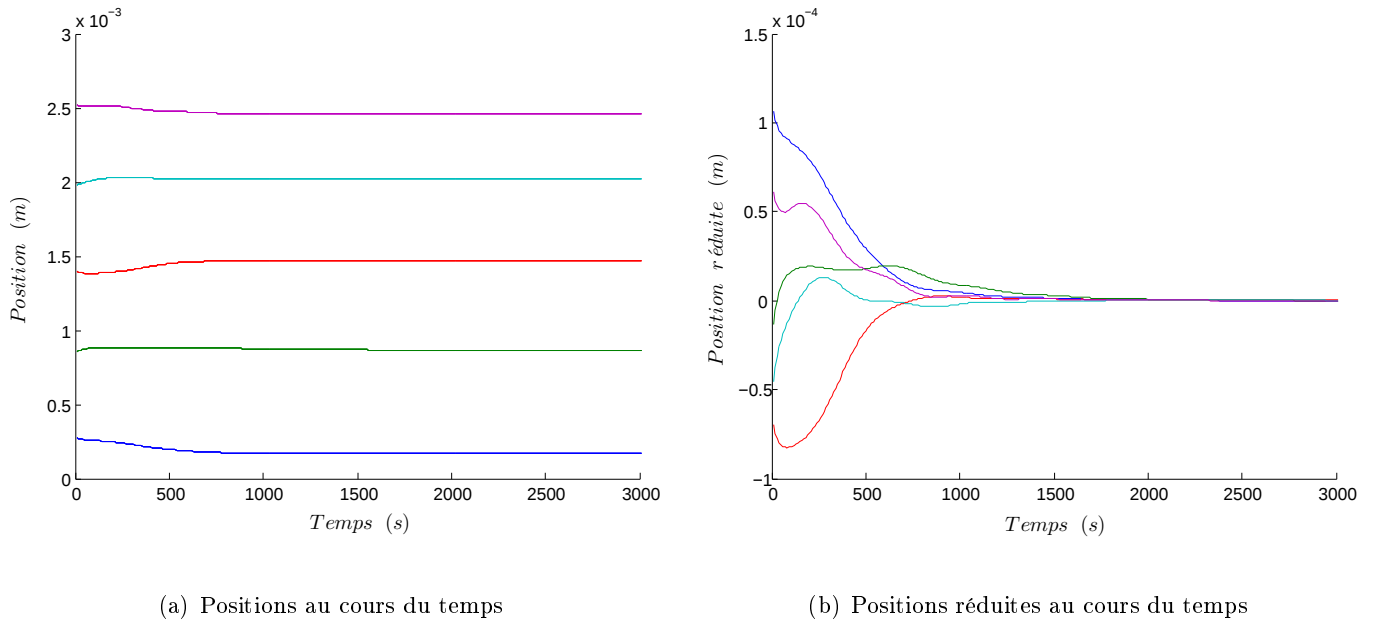


FIGURE 4.14 – Évolution temporelle des positions (a) et des positions réduites (b) de 5 billes éclairées par deux lasers horizontaux contra-propageants. Le milieu environnant est l'eau et l'indice relatif vaut 1.1. Le waist droit est fixé à $8.8 \mu m$ et le gauche à $6.8 \mu m$. La distance entre les deux lasers est de $2.8 mm$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

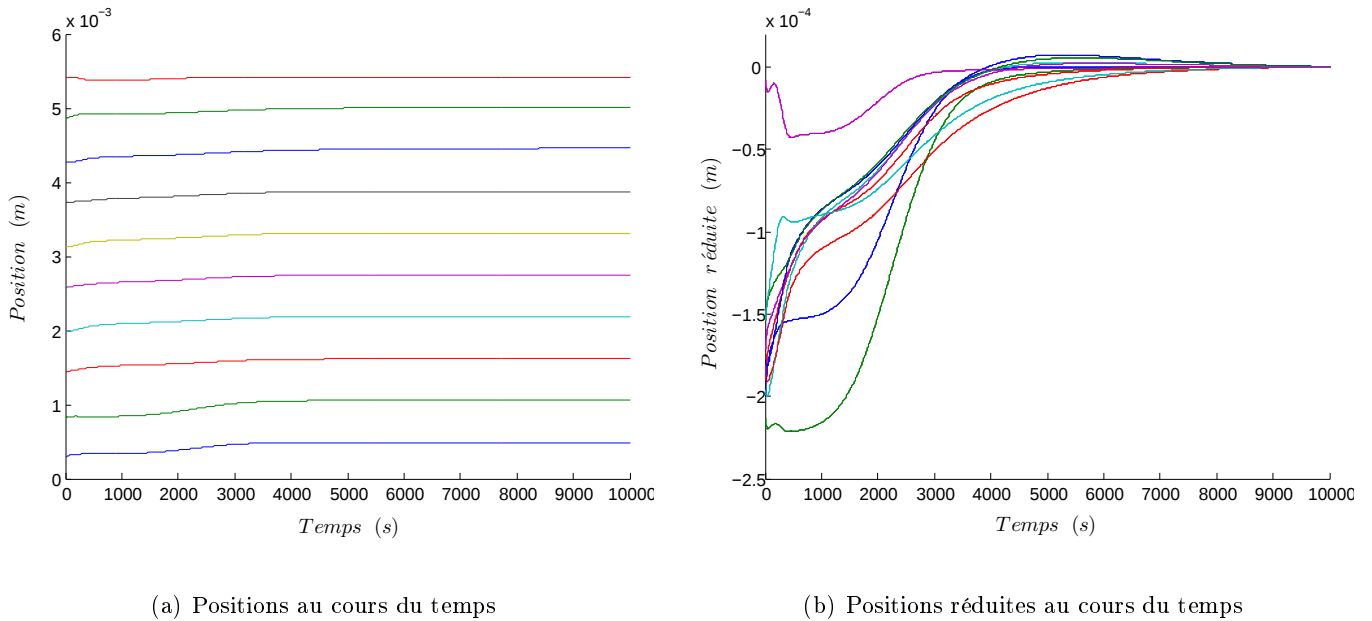


FIGURE 4.15 – Évolution temporelle des positions (a) et des positions réduites (b) de 10 billes éclairées par deux lasers horizontaux contra-propageants. Le milieu environnant est l'eau et l'indice relatif vaut 1.1. Le waist droit est fixé à $8.5 \mu m$ et le gauche à $6.7 \mu m$. La distance entre les deux lasers est de $5.7 mm$, et $\sigma_i = 0 \mu m$.

Nous venons de voir, dans l'étude qui précède, que nous pouvions obtenir un ensemble d'états d'équilibre stables bien que les *waists* d'entrée, liés aux faisceaux incidents, ne soient pas égaux.

Intéressons nous alors au comportement dynamique de la chaîne de gouttes, lorsque celle-ci évolue vers l'équilibre. Et en particulier, lorsque la valeur du *waist* se rapproche des limites de stabilité.

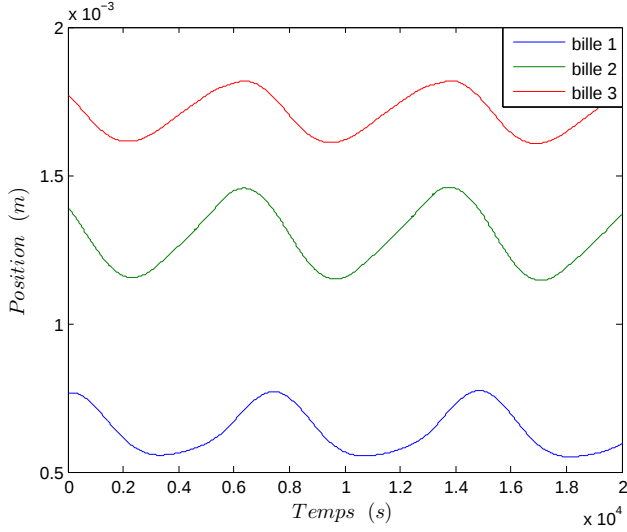
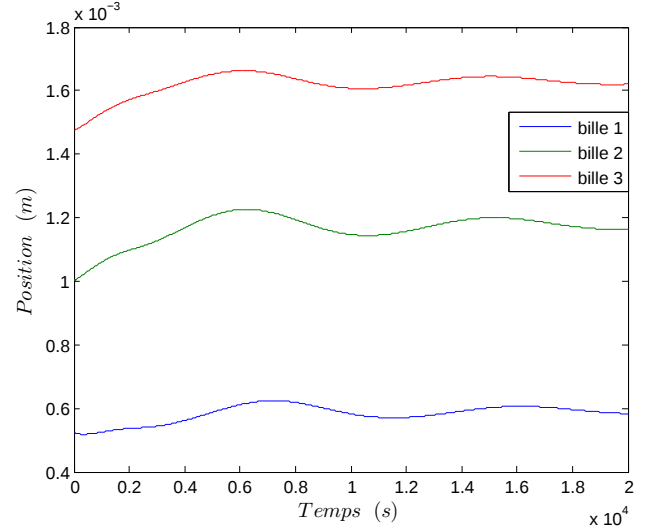
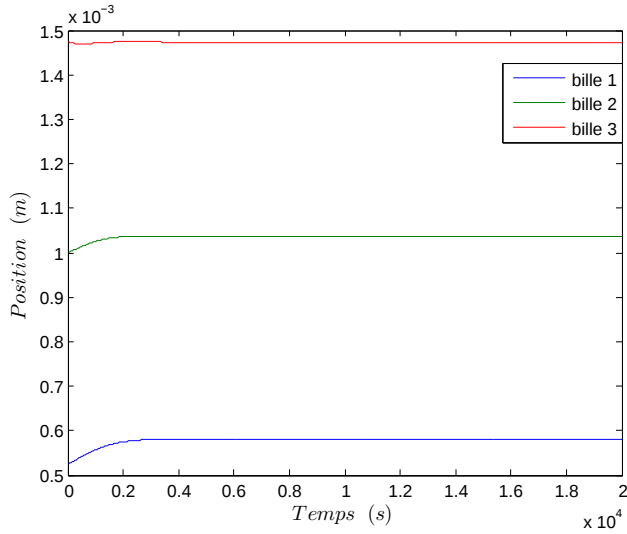
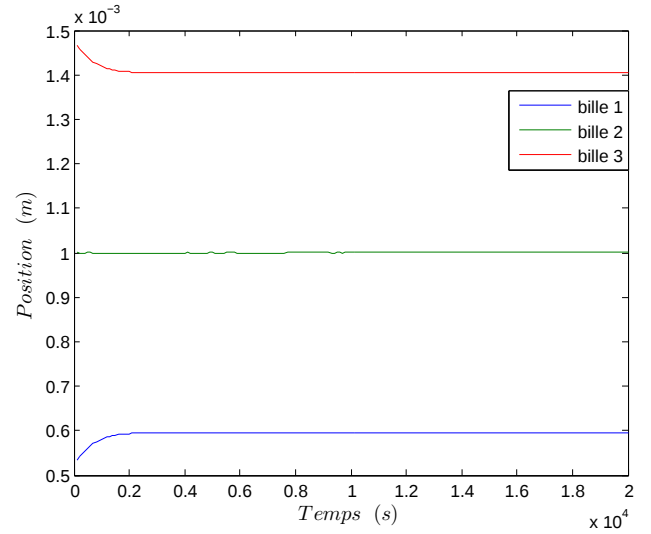

 (a) $\omega_{0g} = 6.7 \mu\text{m}$

 (b) $\omega_{0g} = 7 \mu\text{m}$

 (c) $\omega_{0g} = 7.5 \mu\text{m}$

 (d) $\omega_{0g} = 8 \mu\text{m}$

FIGURE 4.16 – Évolution temporelle des positions de 3 billes éclairées par deux lasers. Le *waist* droit est fixé à $8 \mu\text{m}$ alors que nous varions le gauche. La distance entre les deux lasers est de 2 mm , et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

Nous constatons qu'en partant d'une position d'équilibre stable obtenue avec les deux *waists* identiques (figures 4.16 (d) et 4.18 (d)), et en faisant varier de façon indépendante la valeur du *waist* d'un des deux lasers, la nature des équilibres changent. En effet, nous commençons par observer une évolution vers un autre point d'équilibre équivalent à un *nœud stable* (figures 4.16 (c) et 4.18 (c)). Ce nouvel état tend à se faire rapprocher deux des gouttes du réseau, brisant ainsi la symétrie spatiale. Ce rapprochement va induire l'apparition d'un nouvel équilibre. En premier lieu en *foyer stable* (figures 4.16 (b) et 4.18 (b)), puis vers un *centre* (figures 4.16 (a) et 4.18 (a)). Un *foyer stable* est typiquement représenté par une spirale, sur le portrait de phase, tendant vers le point d'équilibre. Cela se traduit dynamiquement par une oscillation amortie des positions, dans le temps, autour d'une valeur moyenne n'étant autre que le point d'équilibre (figure 4.17). Pour un *centre*, en revanche, les trajectoires ne tendent jamais vers le point d'équilibre, mais restent dans son voisinage : on parle de *stabilité neutre*. Dans tous les autres cas de stabilité, il s'agit de *stabilité asymptotique*.

Nous soulignons ainsi le fait que pour une valeur de ω_{0_g} égale puis supérieure à ω_{0_d} , les gouttes à l'équilibre se positionnent à égales distances les unes des autres et tendent à se rapprocher lorsque ω_{0_g} augmente. Cela confirme parfaitement les résultats observés sur l'étude des équilibres présentés notamment sur la figure 4.11. A l'inverse, lorsque ω_{0_g} devient inférieure à ω_{0_d} , les gouttes semblent s'écarter les unes des autres tout en brisant la symétrie de la chaîne. En continuant à diminuer la valeur du *waist*, nous pouvons alors voir apparaître un état piégeant établi après plusieurs oscillations de relaxation (figure 4.17). Notons toutefois que le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre va dépendre entièrement des forces optiques. Or, nous situant en limite de friction forte, nous en déduisons que le temps de convergence du système sera proportionnel à $1/P$. Enfin, nous remarquons qu'à partir d'un *waist* ω_{0_g} de $6.7 \mu\text{m}$, et en-deça, aucun point fixe stable ne peut être obtenu. Toutefois, nous constatons que dans certains cas les trajectoires des gouttes peuvent rester liées, et leurs positions commencer à osciller (figure 4.16 (a)).

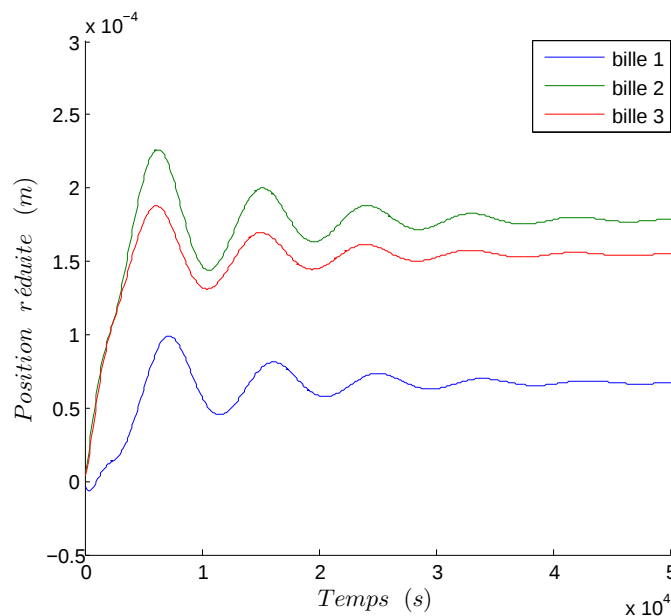


FIGURE 4.17 – Évolution temporelle des positions réduites ($q_{red}(t) = q(t) - q_{ini}$, où q_{ini} correspond aux positions initiales respectives des billes) de 3 billes éclairées par deux lasers. Le *waist* droit est fixé à $8 \mu\text{m}$ alors que nous fixons le gauche à $7 \mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2 mm , et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$.

Soulignons que de tels changements d'états dynamiques collectifs, observés par simple modification d'un des paramètres du système, sont caractéristiques des systèmes fortement couplés.

Des résultats similaires avaient été observés en opto-fluidique, notamment par l'équipe de *J. Ng et al.*, dès 2005, où ils démontrèrent l'existence d'états piégeants oscillants, définis dans un plan perpendiculaire au plan de propagation du faisceau [41].

Dans le même temps, les équipes de *R. Gordon et al.* en 2008, ou encore *J. M. Taylor et al.* en 2009, observèrent des mouvements identiques mais dans le plan parallèle au plan du faisceau [131, 132]. Les études furent menées avec de petites particules (de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde), légèrement désaxées par rapport à l'axe optique, et dont les paramètres de faisceaux étaient identiques. Cette brisure de symétrie entraîne alors la nécessité de considérer la force de gradient latérale. Dans un tel cas de figure, nous comprenons que l'alternance de prédominance entre les forces de diffusion et de gradient implique l'apparition d'une oscillation autour de l'équilibre, jusqu'à que ce dernier soit atteint.

Notre approche se distingue donc de ces précédents résultats, comme nous avons pu le remarquer jusqu'à présent, par le maintien d'une injection sur l'axe, une asymétrie des paramètres d'entrée de faisceaux, et des tailles de particules grandes devant la longueur d'onde (typiquement d'un facteur 100).

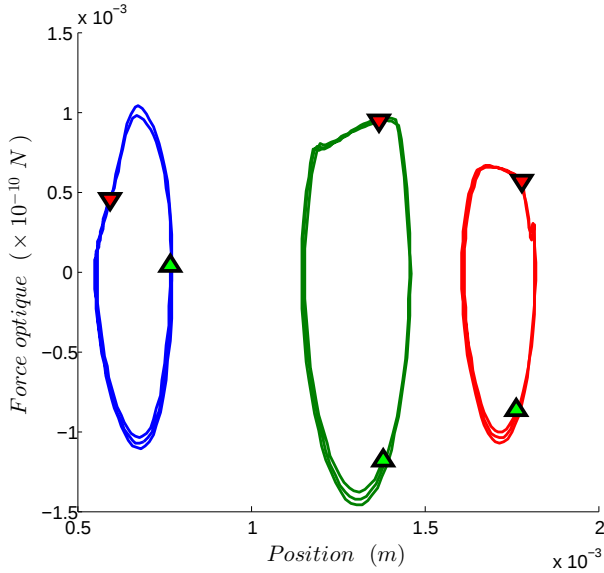
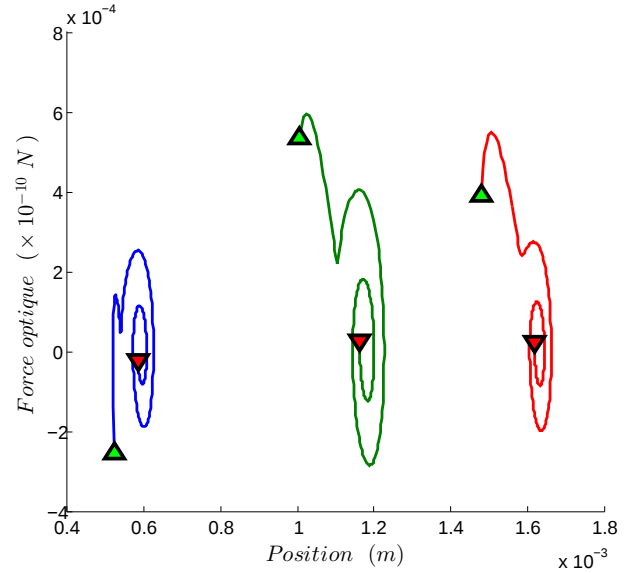
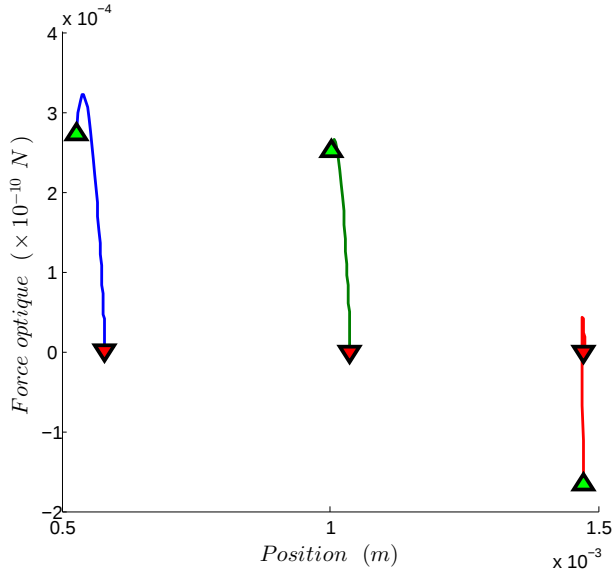
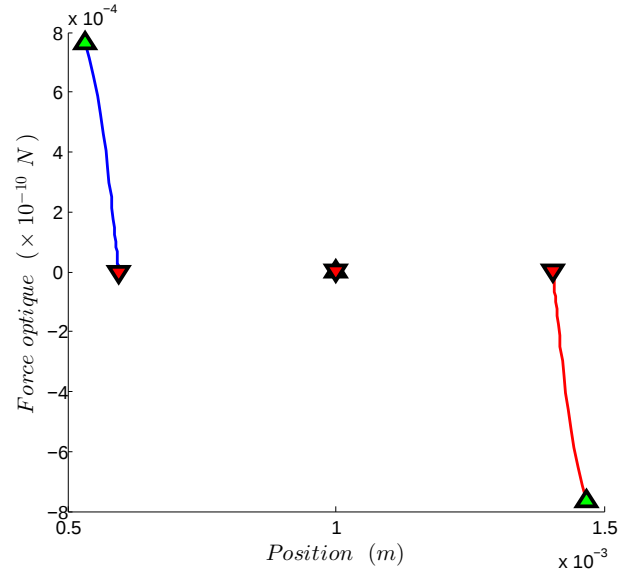

 (a) Centre avec $\omega_{0g} = 6.7 \mu\text{m}$

 (b) Foyer stable avec $\omega_{0g} = 7 \mu\text{m}$

 (c) nœud stable avec $\omega_{0g} = 7.5 \mu\text{m}$

 (d) nœud stable avec $\omega_{0g} = 8 \mu\text{m}$

FIGURE 4.18 – Portrait de phase de 3 billes éclairées par deux lasers. Le waist droit est fixé à $8 \mu\text{m}$ alors que nous varions le gauche. La distance entre les deux lasers est de 2 mm , et $\sigma_i = 0 \mu\text{m}$. Le point initial est représenté par un triangle vert dont le sommet est vers le haut, alors que le final est représenté par un triangle rouge dont le sommet est vers le bas.

Nous pouvons constater que l'oscillation sur la figure 4.16 (a) n'est pas parfaitement sinusoïdale, cela implique que la trajectoire sur le portrait de phase ⁴ équivalent ne soit pas typiquement elliptique (figure 4.18 (a)). Nous pouvons également relever le fait que dans la situation observée sur le graphe 4.18 (b), les forces optiques se comportent comme des forces de rappel, identiques à celle d'un ressort, exercées sur les gouttes, tendant ainsi à les stabiliser sur leurs positions d'équilibre. Nous observons, dans ce cas, l'excitation d'un mode dit *pseudo-périodique*.

Précisons cependant que l'évolution transverse des faisceaux est préservée dans le réseau. En effet, bien qu'étant en présence d'oscillations temporelles, le profil reste gaussien et caractérisé par une allure pouvant s'apparenter à celle de battements avec une évolution périodique de son amplitude, et donc de sa largeur à mi-hauteur, au cours des oscillations (figure 4.19).

⁴La représentation traditionnelle d'un portrait de phase veut que soit exprimé en ordonnée la vitesse au lieu de la force. Or, les deux représentations sont équivalentes pour nous, car nous sommes en limite de friction forte.

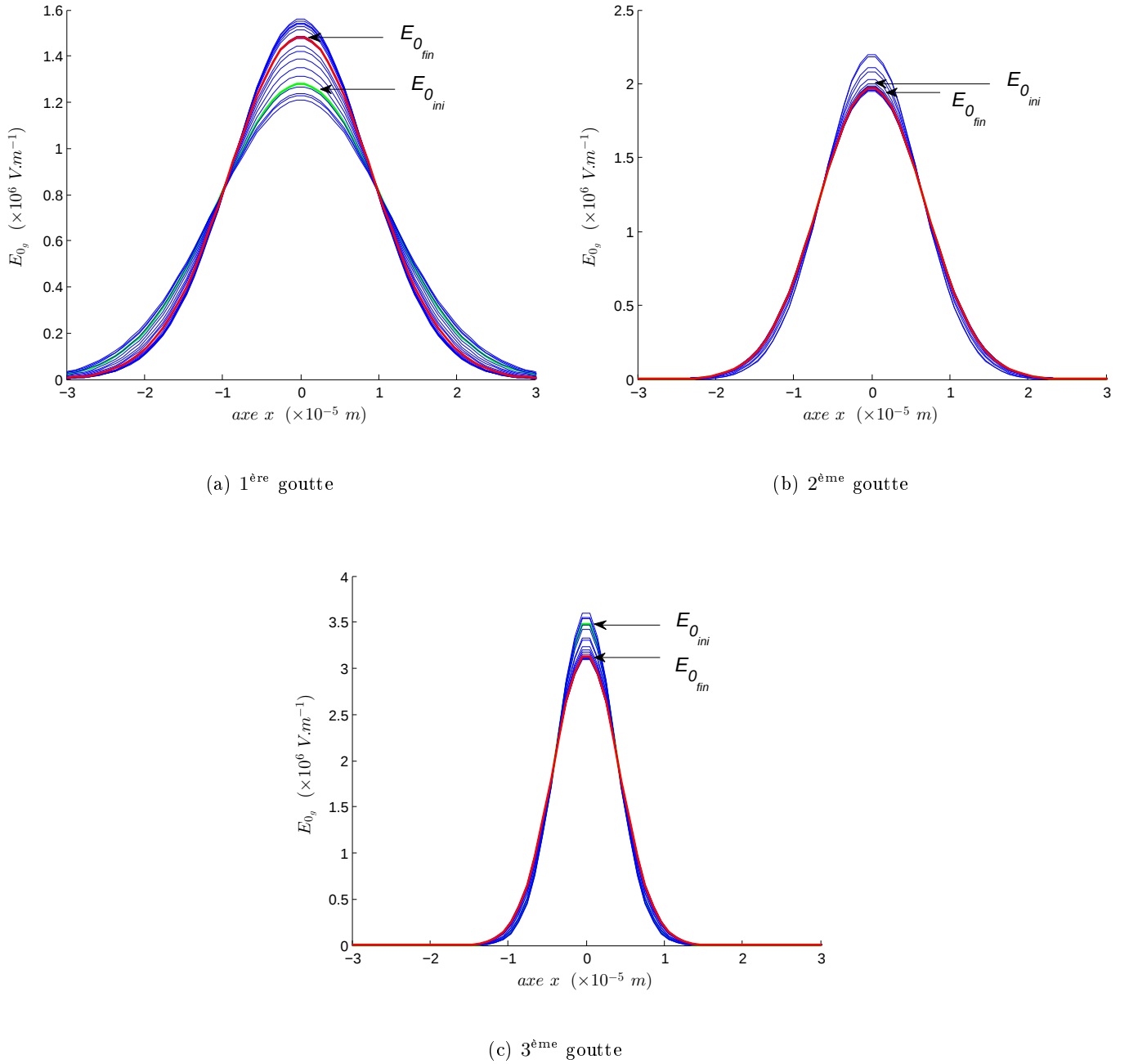


FIGURE 4.19 – Évolution temporelle du profil de champ du laser gauche au niveau de chacune des trois gouttes de la chaîne. Le waist droit est fixé à $8\mu\text{m}$ alors que le gauche l'est à $6.7\mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2mm , et $\sigma_i = 0\mu\text{m}$.

L'apparition de ces oscillations est directement liée à l'inégalité des paramètres de faisceaux d'entrée. Toutefois, dans le cas où nous faisons varier identiquement les valeurs de *waists* sur les faisceaux gauche et droit, toujours pour une taille de réseau fixe, nous pourrions obtenir un ensemble de positions d'équilibre stable sans état transitoire oscillant.

4.4 Étude propagative sur des gouttes après collision

Nous savons maintenant que dans certains cas, l'équilibre des forces, dues aux deux faisceaux contra-propageants, ne peut être atteint dans le réseau. Le couplage établi entre le potentiel optique et les positions des gouttes ne permet plus d'établir des positions piégeantes pour ces dernières. La dynamique résultante, bien que toujours intrinsèquement déterminée par les éléments du système, va pouvoir entraîner d'éventuelles collisions entre les gouttes. Dans un tel cas de figure, nous observons typiquement une phase de coalescence, durant laquelle le nombre de gouttes diminue, et leur taille augmente. Cette phase est alors suivie, selon le cas, d'un état stationnaire (la goutte ne bouge plus), d'un état d'équilibre oscillant, ou d'un régime permanent : la chaîne se brise en plusieurs chaînettes, qui s'éloignent les unes des autres.

4.4.1 Évolution dynamique avec contact interparticulaire

Lors de la simulation dynamique d'un ensemble de particules soumises à un piège optique, ces dernières peuvent être amenées à entrer en contact, impliquant dans certains cas une inhomogénéité sur le nombre de particules. Ainsi, deux façons simples de percevoir cela s'offrent à nous : soit par un modèle de sphères dures, soit par un modèle de gouttes coalescant au contact. Nous présenterons rapidement ces deux versions.

4.4.1.1 Modèle de billes dures diélectriques

Dans le cas où les billes considérées sont solides, ou liquides mais ayant une tension superficielle suffisante pour contrer l'inertie acquise par celles-ci due aux forces de radiation, nous pourrions les approximer à des billes dures. Lors d'un rapprochement, ces sphères dures peuvent se percuter sans déformation notable mais suivi d'une création de doublet par attraction/collage (figure 4.20 (b)), ou d'une répulsion suite à un rebond après contact (figure 4.20 (a)).

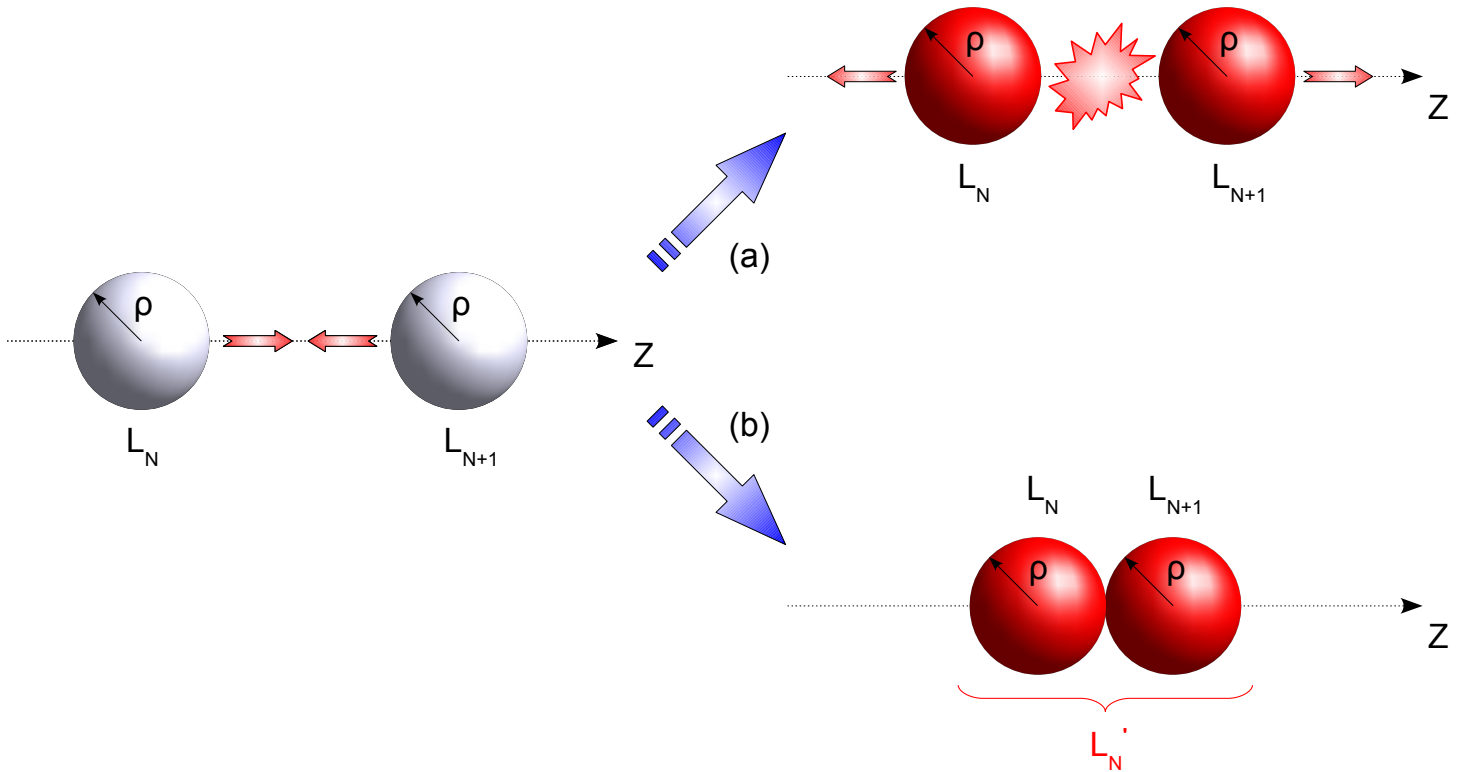


FIGURE 4.20 – *Modèle de contact dynamique de billes dures diélectriques. Suivant l'option (a) il se produit une répulsion, après contact, sans déformation. Suivant l'option (b) il se produit un doublet par attraction/collage.*

Ainsi, si les deux billes se percutent et rebondissent l'une sur l'autre, leur nature n'en sera pas changée et elles continueront à évoluer dans le réseau sous l'influence des forces de radiation et du fluide environnant. Cependant, si nous considérons qu'elles se collent, elles ne seront plus vues indépendamment l'une de l'autre, mais comme un doublet de deux lentilles boules accolées. La focale équivalente en sera changée. Pour obtenir sa nouvelle expression, nous pouvons utiliser la matrice liée à une lentille boule que nous avons déjà calculée, que nous multiplierons par elle-même pour en déduire celle équivalente à deux lentilles accolées :

$$\mathbf{M}_{boule} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} & 2\rho \frac{n_m}{n_b} \\ 2 \frac{n_m - n_b}{\rho n_b} & 1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

D'où,

$$\mathbf{M}'_{boule} = \mathbf{M}_{boule}^2 = \begin{pmatrix} 1 + 4 \frac{n_m - n_b}{n_b} 2 \frac{n_m}{n_b} & 4\rho \frac{n_m}{n_b} \left(1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} \right) \\ 4 \frac{n_m - n_b}{\rho n_b} \left(1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} \right) & 1 + 4 \frac{n_m - n_b}{n_b} 2 \frac{n_m}{n_b} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Nous pouvons alors en déduire l'expression de la focale f' en fonction de celle de la vergence V' telle que :

$$-V' = 4 \frac{n_m - n_b}{\rho n_b} \left(1 + 2 \frac{n_m - n_b}{n_b} \right) = 2V (1 - \rho V) \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{n_m}{V'} \quad (4.27)$$

Un tel modèle a été suivi par *Cao et al.* [133]. Les auteurs ont ainsi cherché à modéliser l'auto-arrangement d'un ensemble de micro-billes soumises à un seul faisceau laser, de profil gaussien. Les résultats qu'ils ont pu obtenir les ont amenés à en déduire qu'un ensemble de billes accolées, sous forme de *cluster*, était d'autant plus gros que leur indice de réfraction, ou encore leur taille, étaient petits.

4.4.1.2 Modèle de gouttes en coalescence

Dans le cas où les billes considérées sont liquides mais interpénétrables, nous pourrions les approximer à des gouttes sphériques. Après contact, celles-ci fusionnent pour ne former qu'une seule et même goutte plus grosse.

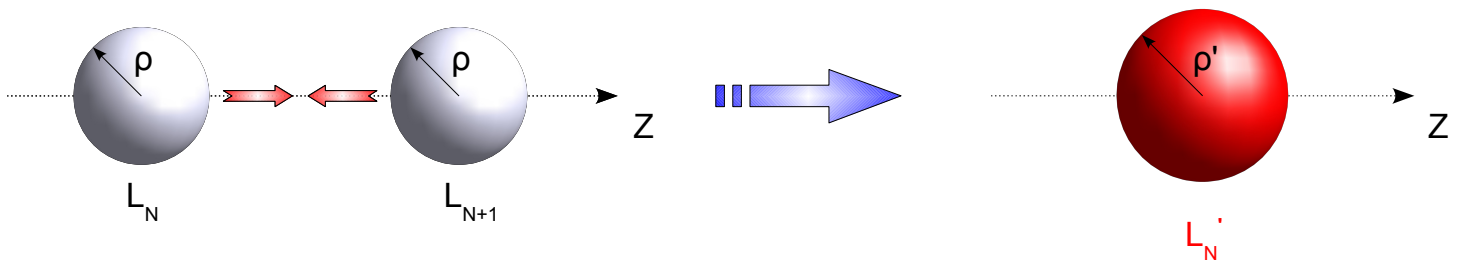


FIGURE 4.21 – *Modèle de contact dynamique de gouttes sphériques. L'évolution après contact résulte en une goutte plus grosse que les deux protagonistes ayant coalescées.*

Le résultat de cette fusion implique une augmentation de la taille de la goutte par rapport aux précédentes, cela va donc encore influencer sur la focale.

À partir de la conservation du volume nous pouvons poser :

$$\rho' = \rho \cdot 2^{1/3} \quad (4.28)$$

où ρ et ρ' représentent respectivement le rayon des gouttes initiales et celui de la goutte finale après coalescence.

L'expression de la focale s'en déduit aisément :

$$f' = \frac{n \rho'}{2(n-1)} = f \cdot 2^{1/3} \quad (4.29)$$

en posant $n = n_b/n_m$.

Notre étude se portant dans des milieux fluides, dont les indices de réfraction liés au milieu environnant et aux gouttes sont relativement proches, nous choisirons de suivre ce dernier schéma pour modéliser la collision des particules. Le processus d'évolution dynamique, suivi par les gouttes résultant d'une coalescence, sera bien évidemment identique à celui suivi par les gouttes initiales.

Lorsque deux gouttes distinctes se rapprochent significativement l'une de l'autre à un temps t , une collision suivie d'un recouvrement peut se produire. Ainsi, nous imposons une coalescence "instantanée" si la condition suivante, au temps $t + dt$, est vérifiée :

$$L < \rho_1 + \rho_2 \quad (4.30)$$

où L est la distance entre les centres de masse des deux billes, et ρ_1 et ρ_2 leur rayon respectif.

À partir de quoi, le processus se répète de goutte en goutte jusqu'à qu'un état permanent ne s'établisse. Cependant, l'efficacité de cette détection de recouvrement sera d'autant plus importante que le pas de temps considéré sera petit. Nous devons ainsi chercher à optimiser le temps de calcul avec un pas de temps assez grand, tout en ne le considérant pas trop conséquent pour ne pas omettre de collisions.

4.4.2 Résultats dynamiques après collision

Pour observer de telles situations collisionnelles, reprenons le système précédent et plaçons nous dans le cas d'une chaîne de gouttes instable et définie, par exemple, à partir d'un *waist* supérieur aux paramètres limites de stabilité obtenus.

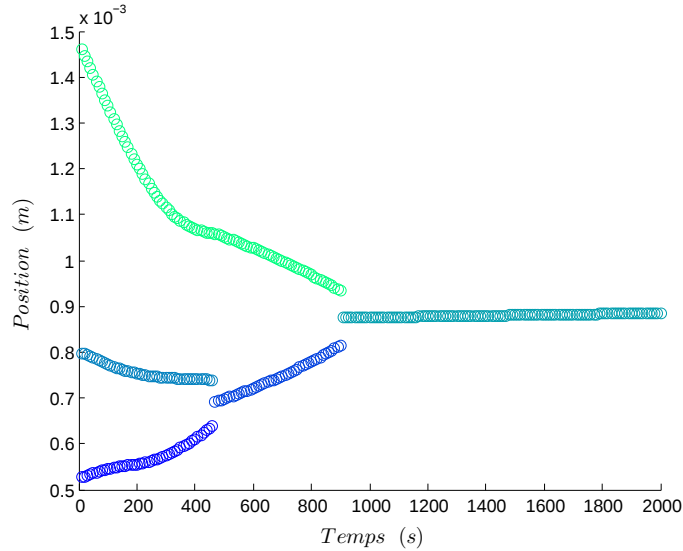


FIGURE 4.22 – Évolutions temporelles des positions de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\mu\text{m}$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $0\mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2mm .

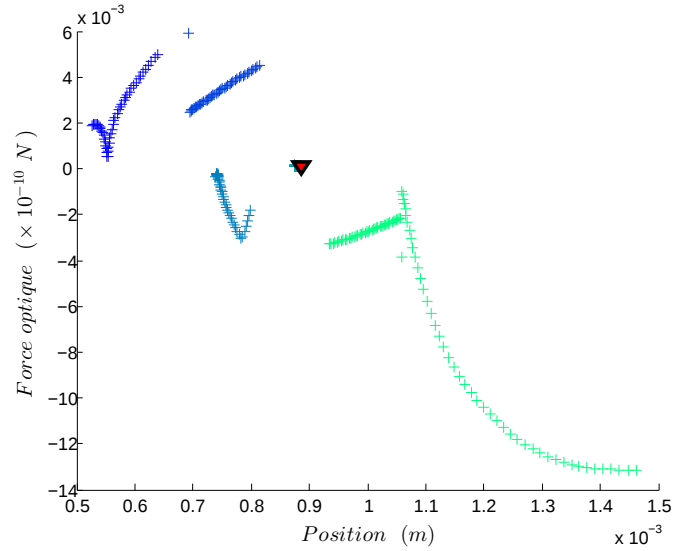


FIGURE 4.23 – Portraits de phase de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\mu\text{m}$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $0\mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2mm . Le point final relatif à la dernière bille est représenté par un triangle rouge orienté vers le bas.

Nous constatons ici que les trois gouttes initiales sont poussées les unes vers les autres pour entrer successivement en coalescence et ne former qu'une seule et même goutte. Dès lors qu'une collision se produit, le profil de force est alors modifié et affecte en retour l'ensemble des autres gouttes constituant la chaîne. La goutte ainsi résultante, plus grosse que les trois précédentes, pourra alors venir se placer sur une position d'équilibre stable au centre du réseau, comme nous pouvons l'observer sur la figure 4.22. Cette position particulière s'expliquant par les symétries du système.

Afin d'observer une nature d'équilibre différente, nous choisissons d'augmenter l'éloignement *laser-bille* σ_i comme suit.

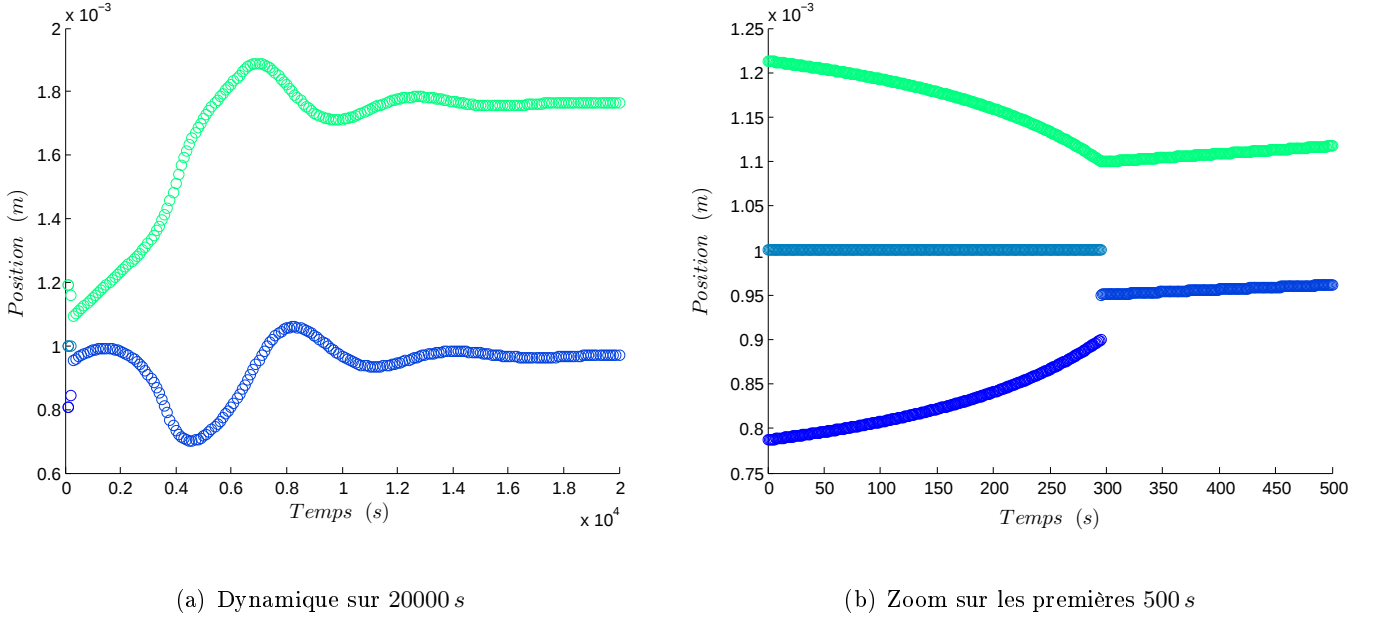


FIGURE 4.24 – Évolutions temporelles des positions de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $8 \mu\text{m}$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $262 \mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2 mm .

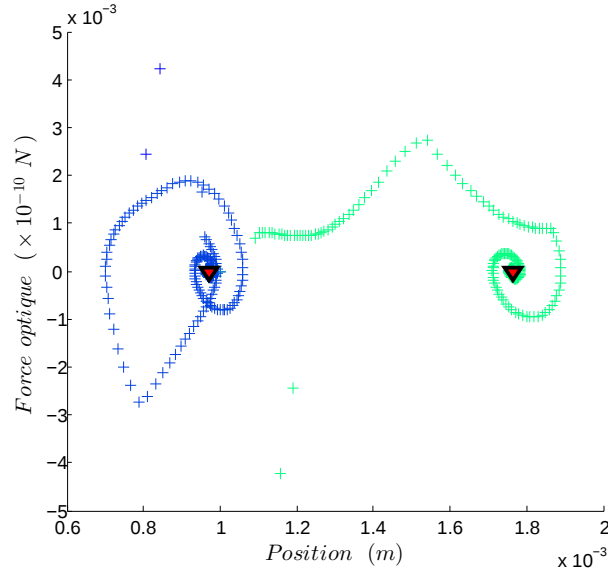
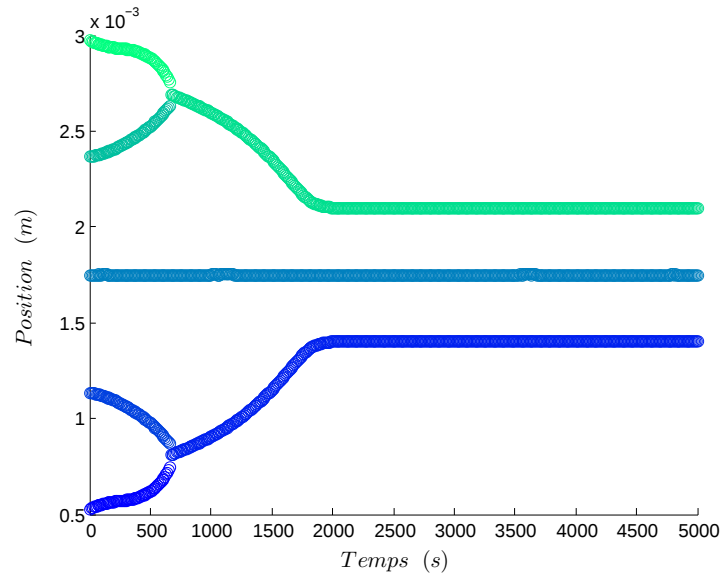


FIGURE 4.25 – Portraits de phase de 3 gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $8 \mu\text{m}$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i égales à $262.5 \mu\text{m}$. La distance entre les deux lasers est de 2 mm . Les points finaux relatifs à chacune des deux dernières billes sont représentés par deux triangles rouges orientés vers le bas.

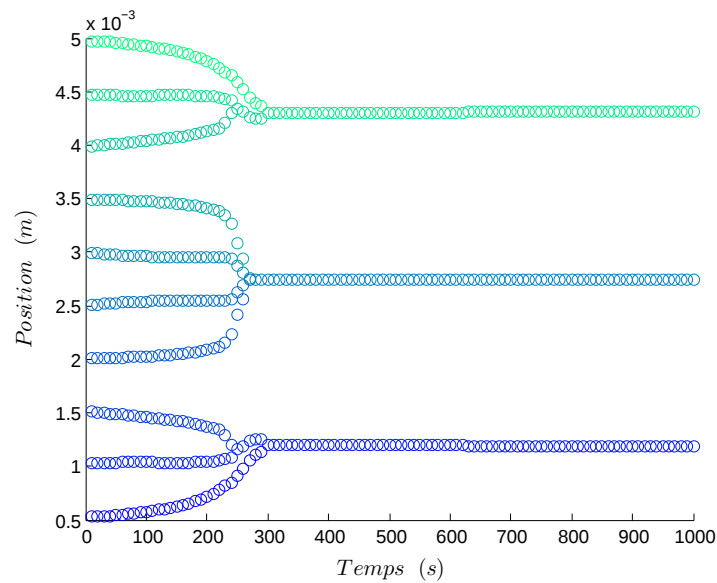
Il apparaît clairement, d'après la simulation dynamique présentée sur la figure 4.24, que les trois gouttes initiales sont poussées les unes vers les autres jusqu'à ce que les deux premières coalescent. La goutte résultante, et plus grosse, induit alors un réarrangement des profils de potentiel optique au sein du réseau, poussant les deux gouttes restantes à évoluer sur une position d'équilibre oscillante et amortie. Cela se traduit, dans le portrait de phase, par une spirale tendant asymptotiquement vers un point. La nature de cet équilibre est typiquement celle d'un *foyer stable* (figure 4.25).

De la même façon, nous pouvons montrer, à travers la figure 4.26, que des états dynamiques identiques, avec un plus grand nombre de gouttes, peuvent être obtenus. Typiquement, sur la figure 4.26 (a) nous voyons apparaître la coalescence de cinq gouttes initiales en trois, piégées sur un équilibre stable. En revanche, sur la figure 4.26 (b), partant d'un réseau initial de dix gouttes, nous aboutissons à un état final n'en comportant plus que trois, dont les deux extrémales s'éloignent l'une de l'autre à vitesse constante.

Ces résultats se présentent ainsi comme des exemples de dynamiques de micro-gouttes coalescentes, contrôlées optiquement, et observables expérimentalement.



(a) Dynamique avec une chaîne de 5 gouttes



(b) Dynamique avec une chaîne de 10 gouttes

FIGURE 4.26 – Évolutions temporelles des positions de 5 (a) et 10 (b) gouttes entrant en collision, et éclairées par deux lasers horizontaux. Les waists d'entrée associés à chacun des deux lasers sont identiques et égaux à $11\ \mu\text{m}$. Tout comme les distances lasers-focale objet σ_i fixées à 0. Les distances entre les deux lasers sont respectivement de 3.5 mm et 5.5 mm.

Conclusion

Faisant suite aux résultats établis en statique, cette étude dynamique nous a permis de montrer qu'il était avant tout possible d'extraire des états piégeants d'une chaîne de gouttes *centi*-micrométriques, soumises à deux faisceaux lasers horizontaux contra-propageants.

Nous avons alors montré que pour des paramètres de faisceaux identiques, et en imposant un espacement fixe entre les lasers, les variations sur la distance σ_i n'influent pas sur l'équilibre des gouttes dans un réseau donné, alors que celles imposées sur ω_0 ont révélées que les positions des gouttes à l'équilibre évoluent de telle façon que la périodicité de la chaîne diminue avec l'augmentation du *waist*.

A contrario, si nous faisons varier l'espacement entre les lasers, les variations parallèles sur la distance σ_i , ou la périodicité initiale de la chaîne de gouttelettes d_{ini} , vont entraîner une modification de l'état du système à l'équilibre. Nous avons cependant remarqué que nous pouvions retrouver l'ensemble des variations observées sur les gouttes piégées pour un seul paramètre d'étude donné, autrement dit pour $\sigma_i = 0$ (distance laser-foyer objet égale à la distance focale), ou encore $d_{ini} = f$ (période de la chaîne de gouttes égale à la distance focale).

En brisant alors la périodicité initiale du réseau de gouttes, nous avons remarqué que les probabilités de ne pas atteindre un équilibre stable étaient d'autant plus élevées que le *waist* était grand. Toutefois, nous pouvons remédier à cela, toute proportion gardée, en augmentant l'espacement entre les lasers.

En observant, par la suite, l'évolution des équilibres pour des paramètres de faisceaux "asymétriques", nous nous sommes rendu compte, dans un premier temps, que les variations sur σ_i , identiquement au cas "symétrique", n'influent pas sur les positions des gouttes. En revanche, celles imposées sur le *waist* induisent non seulement une évolution des positions des gouttes à l'équilibre, mais également une perte de la périodicité de la chaîne.

Cela s'est avéré particulièrement intéressant dans la mesure où l'étude de ces divers équilibres nous a permis de caractériser des états transitoires dynamiques oscillants. Plus spécifiquement, ces solutions atypiques se différencient, de par leur nature, à travers la présence de modes périodiques (oscillations entretenues) ou pseudo-périodiques (oscillations amorties).

Cela étant, si le système n'évolue pas vers un état d'équilibre stable ou oscillant, les gouttes vont être amenées à entrer en collision. Nous avons alors opté pour une modélisation avec coalescence, ce qui, en conséquence, nous permet de considérer une nouvelle modulation du champ dans le réseau de gouttes, pouvant aboutir sur une nouvelle configuration piégeante.

Un des intérêts de ces derniers résultats est que les processus collisionnels restent maîtrisables par l'expérimentateur. En effet, en variant les paramètres de faisceaux tels que les *waists*, les distances laser-foyer objet, ou encore l'espacement entre les deux lasers, les gouttes coalesceront plus ou moins vite sur des états finaux à une ou plusieurs particules. En outre, la vitesse de convergence vers un état donné sera d'autant plus contrôlable par simple variation de la puissance des deux lasers.

Conclusion générale

Le piégeage optique est une thématique majeure, en perpétuel essor depuis les années 1970. Les premières études s'attachèrent à démontrer qu'il était possible de piéger de petites particules, de tailles *nano* et *micrométrique*, au moyen des forces optiques, engendrées par un ou plusieurs lasers.

De nombreuses applications ont ainsi rapidement pu suivre de ces premiers résultats. En effet, le caractère non invasif de cette approche se remarqua d'un intérêt primordial en biologie et en médecine. Plus spécifiquement, cela permit, entre autre, la manipulation d'organismes cellulaires tels que les virus, bactéries, spermatozoïdes, globules rouges ou autres cellules rétinienne. Mais également, l'analyse des propriétés élastiques des matériaux biologiques tels que les membranes de globules rouges, les protéines ou les brins d'ADN. Ou encore, l'étude fonctionnelle des moteurs moléculaires tels que les myosines ou les kinésines. Toutefois, les intensités mises en jeu avec l'emploi d'un laser peuvent être telles, que les cellules manipulées soient endommagées. Ainsi, le choix de la longueur d'onde s'est avéré être d'une première importance, permettant alors de minimiser l'absorption lumineuse par la préparation biologique, et donc de limiter les risques de détériorations thermiques ou photochimiques.

Ces études, menées en milieux fluides, ont notamment permis le développement de la microfluidique, et par extension l'optofluidique. Ainsi, outre la production collective de structures microstructurées, il a également été montré qu'il était possible d'implémenter des fonctionnalités optiques, reconfigurables par le contrôle des propriétés optiques du liquide utilisé dans la génération de microgouttes (lentilles fluides).

Au-delà de ces résultats, une des observations les plus remarquables fut celle du comportement collectif d'un ensemble de particules, soumises à un potentiel optique, et connue sous le nom d'*optical binding*. En effet, les expériences ont montré qu'il existait un certain couplage entre le champ et les particules. Cette force supplémentaire est ainsi due à la diffusion du faisceau par les objets piégés. Lorsque ces derniers sont de petites tailles devant la longueur d'onde, la diffusion se fera sur un grand angle solide, et une faible portion de l'énergie injectée sera alors transmise par les particules à leurs plus proches voisines. Cela étant, à une échelle plus grande, autrement dit lorsque les dimensions du système (diamètre des particules, taille de *waist*, etc.) sont grandes devant la longueur d'onde, le faisceau peut être clairement confiné au sein d'un réseau de gouttes par refocalisations successives. Les pertes par diffusion et diffraction peuvent alors être minimisées, et un couplage dynamique significatif peut ainsi s'établir, permettant l'émergence d'un phénomène d'organisation auto-induit, par influence mutuelle avec le champ optique.

Le travail de thèse développé et exposé dans ce manuscrit s'inscrit donc dans ce contexte. Nous nous sommes attachés à démontrer qu'il était possible d'établir un ordre spatial, au même titre qu'un ensemble d'atomes soumis à un champ optique suffisamment fort, sur un ensemble de grosses gouttes suivant une structure périodique. L'originalité d'un tel système réside dans le fait que la lumière peut alors être refocalisée par l'ensemble des gouttes espacées périodiquement. Cette périodicité pourra alors, dans certains cas, conférer au faisceau une refocalisation périodique au sein du réseau.

Notre étude s'articula ainsi autour de deux grands axes.

La première approche, en statique, nous permit de nous affranchir de l'influence des forces optiques, pour se focaliser essentiellement sur la réponse optique d'une chaîne de particules transparentes et diélectriques, assimilées en première approximation à des lentilles boules, soumises à un faisceau laser.

La grande dimension des objets que nous considérons nous a permis d'appréhender le problème de deux façons : par une simple théorie matricielle des rayons, et par une approche plus réaliste basée sur le calcul intégral de *Huygens-Fresnel*. La description du front d'onde, suivant ce dernier schéma, nous a alors permis de considérer le phénomène de diffraction induit par les conditions aux bords que nous imposent les dimensions finies des objets diffractants. Ainsi que la prise en compte des effets d'aberrations sphériques induits par la courbure des surfaces dioptriques. De surcroît, en ne considérant que de faibles gradients d'indices, nous avons pu négliger les réflexions aux interfaces *milieu-lentille*, et s'affranchir des phénomènes d'interférences avec le faisceau incident.

Cette première étude nous a ainsi permis de mettre en évidence les conditions de couplage des modes liés aux chaînes de lentilles. En particulier, nous avons pu caractériser la présence de modes de *Bloch* où le profil de champ se répète d'une maille élémentaire à la suivante. Cela nous a amené à remarquer que ces conditions modales étaient soumises au paramètre de phase gaussien θ , respectant une valeur rationnelle de son rapport K/N .

Cela nous permit de démontrer théoriquement que pour une chaîne périodique, la réponse optique est analogue à celle d'un cristal photonique. Et cela, bien que les dimensions intrinsèques liées à l'étude d'un cristal photonique soient typiquement *sub*-longueur d'onde, et grandes devant cette dernière pour notre système.

Ainsi, nous avons pu extraire un ensemble de solutions pour lesquelles le faisceau pouvait, ou pas, se propager dans le réseau de lentilles. Cela nous a permis, en conséquence, de démontrer l'existence de bandes interdites dans un diagramme de bandes défini à partir de l'espacement entre lentilles d , et du déphasage gaussien θ . Nous sommes ainsi arrivés à caractériser l'évolution du système, à partir des paramètres inhérents au faisceau et au réseau, d'un état guidant à un état non-guidant, par simple déplacement d'une ou plusieurs gouttes.

Cette première approche, en limite statique, fut étendue au régime dynamique où les forces optiques ont été supposées assez conséquentes pour déplacer les gouttes. Toutefois, la masse de celles-ci, relativement élevée, nous a permis de négliger les forces induites par l'agitation thermique des molécules composant le milieu environnant.

Nous avons ainsi démontré qu'il était possible de piéger optiquement de telles gouttes. L'étude des équilibres, à partir des paramètres de faisceaux et/ou de réseau, nous a permis de montrer que ces états pouvaient évoluer non seulement spatialement, mais également de par leur nature propre. En d'autres termes, nous avons observé que les points fixes sur lesquels étaient piégées les gouttes pouvaient évoluer spatialement dans le réseau avec les variations des paramètres d'études, tels que les *waists* d'entrée, les distances initiales σ_i ou encore les espacements entre lasers L_{res} . Cette évolution pouvant se faire périodiquement ou non. Toutefois, il s'est avéré que pour des paramètres de faisceaux "asymétriques", nous avons pu mettre en évidence l'existence de modes oscillants périodiques ou pseudo-périodiques.

Enfin, lorsque les gouttes se meuvent suivant un régime instable, elles peuvent être amenées à entrer en collision et coalescer. Nous avons remarqué que les systèmes résultants pouvaient, à leur tour, soit évoluer vers un état d'équilibre stable, soit vers un état dynamique oscillant, soit poursuivre leurs processus de coalescence jusqu'à qu'il ne reste qu'une seule et même goutte dans le réseau.

L'ensemble de ces résultats nous permet, essentiellement, de conclure quant à la possibilité de déplacer, piéger, trier ou même faire coalescer, un ensemble de gouttes dont les dimensions sont significativement grandes devant la longueur d'onde, au moyen de deux faisceaux laser horizontaux contra-propageants, et de profils transverses divers.

Perspectives

Nous pouvons envisager de nombreuses perspectives suites à ces travaux, autant d'un point de vue purement théorique/numérique, qu'expérimental.

Le modèle que nous avons suivi se présente principalement comme un système idéalisé où les gouttes sont supposées indéformables, parfaitement sphériques et dont l'indice de réfraction est proche de celui du milieu environnant. Il pourrait être intéressant d'étudier, en conséquence, l'influence des faisceaux et du milieu sur la déformation, locale ou pas, de la surface des gouttes. Mais également, analyser l'impact de l'augmentation du gradient d'indice en considérant les phénomènes de réflexions aux interfaces, ou encore, observer le comportement des états d'équilibres en ne considérant plus la sphéricité des objets piégés.

De surcroît, nous avons supposé que la diffraction des ondes était totalement définie par une théorie scalaire, ne tenant pas compte de la nature vectorielle d'une onde électromagnétique. La modélisation pourrait alors prendre en compte ce caractère vectoriel.

Dynamiquement, bien que les gouttes aient une masse relativement élevée, il pourrait être intéressant de quantifier l'influence de la force de *Langevin* (bruit blanc gaussien) en fonction des variations des paramètres liés aux gouttes et au milieu environnant. Ce qui pourrait, en parallèle, amener à observer l'évolution du système au-delà de la limite en friction forte.

Enfin, nous avons commencé à implémenter le calcul des forces optiques dans le cas où le profil de champ n'est plus simplement gaussien, mais le manque de temps ne nous a pas permis d'exploiter cela. Un prochain travail pourrait alors permettre de poursuivre la démarche entreprise.

Pour conclure, il apparaît, comme à l'aboutissement de tout travail théorique, que l'ensemble de ces résultats puissent être validés expérimentalement.

Annexes

Annexe A : Expression du *déphasage de Gouy* en fonction des paramètres de réseau

Rappelons ici que notre maille élémentaire est composée d'une seule lentille, nous sommes donc dans une situation équivalente aux cavités optiques.

La matrice de transfert correspondante à été calculée et est définie, sous sa forme réduite, comme :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{d} & \tilde{d} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

À partir de cette dernière nous pouvons, par un calcul de diagonalisation, en déduire les valeurs et vecteurs propres correspondants. N'oublions pas que nous cherchons à obtenir une expression du déphasage θ en fonction des paramètres de réseau pour en déduire les situations stables. Ainsi, nous savons que les valeurs propres, dans ce cas là, seront complexes et pourront s'écrire $\Lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$. De cette façon :

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \quad (\text{A.32})$$

où θ est défini comme un rationnel à un facteur 2π près, soit $\theta = 2\pi K/N$, avec $1 \leq K \leq N - 1$.

Or, $\sum_i \Lambda_i = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{M}}) = 2\tilde{\beta}$. D'où :

$$\tilde{\beta} = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{Arccos}(\tilde{\beta}) \quad (\text{A.33})$$

En effet, en tenant compte du déphasage, acquis par le faisceau, entre les deux positions de références z_{L_1} et z_{L_2} que l'on note $\Delta\Phi$, nous pouvons écrire :

$$\Delta\Phi = \Phi(z_{L_2}) - \Phi(z_{L_1}) = -k(z_{L_2} - z_{L_1}) + \Delta\theta \quad (\text{A.34})$$

Le premier terme correspond au déphasage dû à la propagation sur l'axe, et le second est un terme additif propre aux faisceaux gaussiens. Ce dernier est appelé "*déphasage de Gouy*", et correspond au déphasage par rapport à une onde plane de même longueur d'onde, qui se propage entre les mêmes plans [94,95] :

$$\Delta\theta = \theta(z_{L_2}) - \theta(z_{L_1}) = \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_2}}{z_R}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) \quad (\text{A.35})$$

Afin de simplifier cette expression, nous pouvons introduire le paramètre gaussien $g_i = 1 - d/2n_m f_i$ (où l'indice i se réfère à la i -ème lentille), tout en considérant comme origine la position du col ω_0 . Nous trouvons finalement :

$$\begin{cases} z_{L_1} &= \frac{d(d - 2f_2)}{2f_1 + 2f_2 - 2d} &= -d \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} \\ z_{L_2} &= \frac{d(2f_1 - d)}{2f_1 + 2f_2 - 2d} &= d \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2} &= z_{L_1} + d \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Or, pour nous, toutes les lentilles sont identiques, ce qui implique $f_i = f \Rightarrow g_i = g \quad \forall i$, ainsi :

$$\begin{cases} z_{L_1} &= -d \frac{g(1-g)}{2g(1-g)} = -\frac{d}{2} \\ z_{L_2} &= d \frac{g(1-g)}{2g(1-g)} = \frac{d}{2} = -z_{L_1} \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Ce résultat vient bien confirmer le fait que les positions des *cols* du faisceau, entre deux lentilles successives, se trouvent à mi-distance de chacune d'elles (propriété des conditions d'*accord* de faisceau sur le réseau).

À partir de là, et en tenant compte de la parité de la fonction *arc tangente*, nous pouvons réécrire l'expression de la phase accumulée entre les positions z_{L_1} et z_{L_2} , telle que :

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Arctan}\left(-\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) \\ &= -2 \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Cependant, en exprimant la distance de *Rayleigh* en fonction des mêmes paramètres usités pour z_{L_1} et z_{L_2} , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} z_R &= \left[d \frac{(2f_1 - d)(2f_2 - d)(2f_1 + 2f_2 - d)}{(2f_1 + 2f_2 - 2d)^2} \right]^{1/2} = d \left[\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} \right]^{1/2} \\ &\stackrel{g_1=g_2=g}{=} \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1+g}{1-g}} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Ainsi :

$$\theta = -2 \text{Arctan}\left(\frac{z_{L_1}}{z_R}\right) = -2 \text{Arctan}\left(\frac{-d/2}{d/2 \times \sqrt{(1+g)/(1-g)}}\right) = 2 \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right) \quad (\text{A.40})$$

En tenant compte du fait que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \pi/2$, et de la relation sur les fonctions circulaires réciproques :

$$\text{Arctan}\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{Arccos}(x) \quad (\text{A.41})$$

nous pouvons en déduire :

$$\theta = \text{Arccos}(g) \quad (\text{A.42})$$

Ainsi, en considérant $\tilde{g} = 1 - \tilde{d}/2$, et en se ramenant à l'expression, précédemment obtenue, en fonction de la demi-trace $\tilde{\beta}$ de la matrice de transfert, nous écrivons :

$$\text{Arccos}(\tilde{\beta}) = \text{Arccos}(\tilde{g}) = 2\pi \frac{K}{N} \Rightarrow \tilde{\beta} = \tilde{g} = \cos\left(2\pi \frac{K}{N}\right) \quad (\text{A.43})$$

Ce qui, ramené à l'expression avec la trace de $\tilde{\mathbf{M}}$ conduit, dans notre situation, à :

$$\frac{\tilde{A} + \tilde{D}}{2} = \cos\left(2\pi\frac{K}{N}\right) \quad (\text{A.44})$$

En remplaçant les éléments diagonaux $\tilde{A}$ et $\tilde{D}$, de la matrice de transfert, par leur expression respective obtenue précédemment dans le cas de lentilles équidistantes, nous en déduisons (A.31) :

$$1 - \frac{\tilde{d}}{2} = \cos\left(2\pi\frac{K}{N}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{d} = 2\left(1 - \cos\left(2\pi\frac{K}{N}\right)\right) = 2(1 - \cos(\theta)) \quad (\text{A.45})$$

Ce qui définit, *in fine*, une condition de stabilité du faisceau par l'explicitation d'un couplage entre les paramètres de réseau et de faisceau, dans le cas d'un espacement régulier entre lentilles.

Annexe B : Démonstration du calcul de la largeur de bande interdite

Rappelons ici que la maille élémentaire du réseau est composée de deux lentilles, chacune suivie d'un espacement à la suivante égal à d_1 et d_2 . Ces distances composent alors la période a du réseau, tel que $a = d_1 + d_2$. Nous avons alors constaté que l'apparition d'une bande interdite, dans le diagramme de bandes $d/f(\theta)$, se faisait dès lors que les valeurs de d_1 et d_2 différaient. Nous savons maintenant que les zones solutions, correspondant à l'existence d'un faisceau stable dans un réseau défini par la maille solution, s'établissent, suite à un calcul de diagonalisation de la matrice de transfert, pour la condition $|\cos(\theta)| < 1$.

Ainsi, commençons par calculer la matrice de transfert $\mathbf{M}$, dans le cas où la maille élémentaire est définie par deux lentilles. Les matrices utiles seront donc :

$$T_{lens} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad T_{prop} = \begin{pmatrix} 1 & d/n_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

La première correspond au passage à travers une lentille mince de distance focale f , et la seconde à une propagation sur une distance d dans un milieu d'indice de réfraction n_m .

La matrice finale, correspondant au système optique, est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & d_2/n_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1/n_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_1 + 2d_2}{n_m f} + \frac{d_1 d_2}{n_m^2 f^2} & \frac{d_1 + d_2}{n_m} - \frac{d_1 d_2}{n_m^2 f} \\ -\frac{2}{f} + \frac{d_1}{n_m f^2} & 1 - \frac{d_1}{n_m f} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

En posant les paramètres réduits $\tilde{d}_1 = d_1/n_m f$ et $\tilde{d}_2 = d_2/n_m f$ (comme établi à la section **2.1**), nous pouvons réécrire la matrice $\mathbf{M}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{d}_1 - 2\tilde{d}_2 + \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 & \tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 - \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \\ -2 + \tilde{d}_1 & 1 - \tilde{d}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

La matrice ainsi définie, le calcul de diagonalisation nous amène à l'expression du discriminant suivante :

$$\Delta = (\tilde{A} + \tilde{D})^2 - 4 \quad (\text{A.49})$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{D}$ correspondent aux éléments diagonaux de la matrice $\tilde{\mathbf{M}}$.

Ce qui, en fonction de la demi-trace $\tilde{\beta}$ de $\tilde{\mathbf{M}}$, donne :

$$\Delta = (2\tilde{\beta})^2 - 4 = 4(\tilde{\beta}^2 - 1) \quad (\text{A.50})$$

Nous savons que les solutions sont alors obtenues pour un discriminant négatif, ce qui, inversement, nous amène à imposer ce dernier positif pour définir l'ensemble des valeurs sur le *gap* :

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad 4\tilde{\beta}^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\beta}^2 > 1 \\ \Leftrightarrow \quad |\tilde{\beta}| > 1 \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Ce qui donne :

$$|\tilde{A} + \tilde{D}| > 2 \quad (\text{A.52})$$

Réécrivons cette inégalité à partir des paramètres réduits :

$$|2 - 2(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) + \tilde{d}_1\tilde{d}_2| > 2 \quad (\text{A.53})$$

Explicitons ces paramètres en fonction d'un paramètre commun d tel que :

$$\tilde{d}_1 = \alpha\tilde{d} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_2 = \beta\tilde{d} \quad , \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^{+*} \quad (\text{A.54})$$

Résolvons alors chacune des inéquations :

$$\begin{cases} 2(\alpha + \beta)\tilde{d} - \alpha\beta\tilde{d}^2 - 4 > 0 \\ 2(\alpha + \beta)\tilde{d}' - \alpha\beta\tilde{d}'^2 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tilde{d}^2 - 2\frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}\tilde{d} + \frac{4}{\alpha\beta} < 0 \\ \tilde{d}'^2 - 2\frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}\tilde{d}' > 0 \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

Cela nous amène, une nouvelle fois, à la résolution d'une équation polynomiale de degré 2 :

$$\begin{cases} \Delta = \frac{4}{\alpha^2\beta^2} ((\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta) \\ \Delta' = \frac{4}{\alpha^2\beta^2} (\alpha + \beta)^2 \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

Soit :

$$\begin{cases} \tilde{d}_{\pm} = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \pm \frac{1}{\alpha\beta} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \pm \frac{1}{\alpha\beta} |\alpha - \beta| \\ \tilde{d}'_{\pm} = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \pm \frac{1}{\alpha\beta} |\alpha + \beta| \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

Ainsi, nous pouvons remonter à l'intervalle définissant la largeur de bande interdite telle que :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{d} &= \tilde{d}_+ - \tilde{d}_- &= 2 \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha\beta} \\ \Delta\tilde{d}' &= \tilde{d}'_+ - \tilde{d}'_- &= 2 \frac{|\alpha + \beta|}{\alpha\beta} \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Ce qui nous permet d'obtenir ces expressions, en fonction des paramètres réduits, telles que :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{d} &= 2\tilde{d} \frac{|\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2|}{\tilde{d}_1\tilde{d}_2} \\ \Delta\tilde{d}' &= 2\tilde{d}' \frac{|\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2|}{\tilde{d}_1\tilde{d}_2} \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Voici ainsi établi l'expression de la largeur de *bande interdite*, dans le cas d'un réseau périodique, dont la maille élémentaire est composée de deux lentilles.

Annexe C : Conditions d'égalités des largeurs de faisceau dans le réseau, en fonction des paramètres d'entrée

Nous proposons ici de clarifier les conditions auxquelles est soumis le système, afin de vérifier les similitudes observées dans le profil d'évolution du faisceau dans un réseau de lentilles équidistantes, comme présenté sur la figure 2.21.

Commençons par revenir sur le cas particulier que nous avons considéré. En l'occurrence, nous avons commencé par nous fixer un espacement régulier entre les lentilles égal à $2n_m f$, soit :

$$d = 2n_m f \quad (\text{A.60})$$

Ce qui nous permet, à partir des paramètres de faisceau correspondant à un mode de *Bloch* [83] :

$$\begin{cases} z_{R_{accord}} &= \sqrt{df - \frac{d^2}{4}} \\ \omega_{0_{accord}} &= \sqrt{\frac{\lambda z_{R_{accord}}}{\pi}} \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

d'en déduire, en posant $z_{R_a} = z_{R_{accord}}$ et $\omega_{0_a} = \omega_{0_{accord}}$, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} z_{R_a} &= \sqrt{2n_m f^2 - \frac{(2n_m f)^2}{4}} = f \sqrt{n_m (2 - n_m)} \\ \omega_{0_a} &= \sqrt{\frac{\lambda z_{R_a}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} (n_m (2 - n_m))^{1/4} \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

Suite à quoi, nous avons choisi d'utiliser des facteurs de ω_{0_a} tels que :

$$\omega_0 = \alpha \omega_{0_a} \quad , \quad \text{avec } \alpha \in \mathfrak{R}^{+*} \quad (\text{A.63})$$

Ce qui nous permet de déduire les distances de *Rayleigh* associées :

$$z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \alpha^2 \omega_{0_a}^2 = \alpha^2 f \sqrt{n_m (2 - n_m)} \quad (\text{A.64})$$

À partir de quoi, nous pouvons exprimer la largeur de faisceau au niveau de la première lentille, en estimant injecter le faisceau à une distance $z = z_L = z_{r_a}$ de cette dernière :

$$\begin{aligned}
 \omega(z = z_L, \omega_0 = \alpha \omega_{0a}) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\
 &= \alpha \omega_{0a} \sqrt{1 + \left(\frac{f \sqrt{n_m(2-n_m)}}{\alpha^2 f \sqrt{n_m(2-n_m)}}\right)^2} \\
 &= \frac{\omega_{0a}}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^4}
 \end{aligned} \tag{A.65}$$

Calculons la même largeur en considérant l'inverse du facteur sur ω_0 :

$$\begin{aligned}
 \omega(z = z_L, \omega_0 = \omega_{0a}/\alpha) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \omega_{0a} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha^2 f \sqrt{n_m(2-n_m)}}{f \sqrt{n_m(2-n_m)}}\right)^2} \\
 &= \frac{\omega_{0a}}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^4}
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

Les deux expressions sont égales. Nous avons bien une distribution identique des valeurs prises par les paramètres du faisceau dans un réseau de lentilles équidistantes, et cela lorsque l'injection est faite à une distance z_{R_a} de la première lentille.

En prenant une situation plus générale, autrement dit, sans imposer de conditions sur le *waist* ω_0 et la distance à l'entrée σ_i (ce qui revient à z_L dans notre calcul précédent), nous distinguons deux ensembles de solutions.

Rappelons que nous cherchons à expliciter l'ensemble solution pour lequel les largeurs de faisceaux sont identiques pour deux valeurs de *waists* ω_0 inverses :

$$\omega(z_L, \omega_0) = \omega(z_L, 1/\omega_0) \tag{A.67}$$

Soit :

$$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_L}{z_R}\right)^2} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{1 + \left(\frac{z_L}{z_R}\right)^2} \tag{A.68}$$

Et,

$$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_L \lambda}{\pi \omega_0^2}\right)^2} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{1 + \left(\frac{z_L \lambda \omega_0^2}{\pi}\right)^2} \tag{A.69}$$

Ainsi, nous en déduisons que :

$$\begin{cases} \text{si } z_L = \frac{\pi}{\lambda} & \Rightarrow & \omega_0 \in \mathbb{R}^{+*} \\ \text{si } z_L \neq \frac{\pi}{\lambda} & \Rightarrow & \omega_0 = 1 \end{cases} \tag{A.70}$$

Références bibliographiques

- [1] W. Crookes. On attraction and repulsion resulting from radiation. *Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London*, 164 :501–527, 1874.
- [2] P. N. Lebedev. The experimental study of the pressure of the light. *Ann. der Phys.*, 6 (11) :433–458, 1901.
- [3] E. F. Nichols and G. F. Hull. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. *Phys. Rev.*, 13 :307–320, 1901.
- [4] E. F. Nichols and G. F. Hull. The pressure due to radiation. In *American Academy of Arts and Sciences*, volume 38 (20), 1903.
- [5] K. Dholakia and P. Reece. Optical micromanipulation takes hold. *Nano Today*, 1 (1) :18, 2006.
- [6] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 24 :156, 1970.
- [7] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Optical levitation by radiation pressure. *Appl. Phys. Lett.*, 9 :283, 1971.
- [8] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Opt. Lett.*, 11 (5) :288–290, 1986.
- [9] A. Ashkin. History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules. *IEEE J Sel Top Quantum Electron*, 6 :841–856, 2000.
- [10] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :314, 1986.
- [11] D. Boiron, A. Michaud, J. M. Fournier, L. Simard, M. Sprenger, G. Grynberg, and C. Salomon. Cold and dense cesium clouds in far-detuned dipole traps. *Phys. Rev. A*, 57 (6) :R4106–R4109, 1998.
- [12] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria. *Science*, 235 :1517–1520, 1987.
- [13] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330 :769–771, 1987.
- [14] K. C. Neuman and S. M. Block. Optical trapping. *Rev. Sci. Instrum.*, 75 :2787–2809, 2004.
- [15] S. C. Kuo and M. P. Sheetz. Force of single kinesin molecules measured with optical tweezers. *Science*, 260 (5105) :232–234, 1993.
- [16] J. T. Finer, R. M. Simmons, and J. A. Spudich. Single myosin molecule mechanics : piconewton forces and nanometre steps. *Nature*, 368 :113–119, 1994.
- [17] S. Chu. Laser manipulation of atoms and particles. *Science*, 253 :861–866, 1991.
- [18] V. Coffey. The tiniest traps : Optical manipulation gets smaller. *Opt. and Photon. news*, 24 (4) :24–31, 2013.
- [19] D. G. Grier. A revolution in optical manipulation. *Nature*, 424 :810–816, 2003.

- [20] E. Brasselet, N. Murazawa, H. Misawa, and S. Juodkakis. Optical vortices from liquid crystal droplets. *Phys. Rev. Lett.*, 103 (10) :103903, 2009.
- [21] F. A. Pinheiro, M. Rusek, A. Orłowski, and B. A. van Tiggelen. Probing anderson localization of light via decay rate statistics. *Phys. Rev. E*, 69, 2004.
- [22] P. Domokos and H. Ritsch. Mechanical effects of light in optical resonators. *J. Opt. Soc. Am. B*, 20 (5) :1098–1130, 2003.
- [23] P. F. Barker and M. N. Schneider. Cavity cooling of an optically trapped nanoparticle. *Phys. Rev. A*, 81, 2010.
- [24] G. A. T. Pender, P. F. Barker, F. Marquardt, J. Millen, and T. S. Monteiro. Optomechanical cooling of levitated spheres with doubly-resonant fields. *Phys. Rev. A*, 85, 2012.
- [25] J. T. Rubin and L. Deych. On optical forces in spherical whispering gallery mode resonators. *Optics Express*, 19 (22) :22337–22349, 2011.
- [26] H. Ritsch, P. Domokos, F. Brennecke, and T. Esslinger. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :553–601, 2012.
- [27] P. F. Barker. Doppler cooling a microsphere. *Phys. Rev. Lett.*, 105, 2010.
- [28] S. Singh, G. A. Phelps, D. S. Goldbaum, E. M. Wright, and P. Meystre. All-optical optomechanics : An optical spring mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 105, 2010.
- [29] S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Superradiant rayleigh scattering and collective atomic recoil lasing in a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 98, 2007.
- [30] V. Karásek, K. Dholakia, and P. Zemánek. Analysis of optical binding in one dimension. *Appl. Phys. B*, 84 :149–156, 2006.
- [31] C. D. Mellor, T. A. Fennerty, and C. D. Bain. Polarization effects in optically bound particle arrays. *Optics Express*, 14 (21), 2006.
- [32] M. M. Burns, J. M. Fournier, and J. A. Golovchenko. Optical binding. *Phys. Rev. Lett.*, 63 (12) :1233–1236, 1989.
- [33] S. Tatarkova, A. Carruthers, and K. Dholakia. One-dimensional optically bound arrays of microscopic particles. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 2002.
- [34] W. Singer, M. Frick, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte. Self-organized array of regularly spaced microbeads in a fiber-optical trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 20 :1568–1574, 2003.
- [35] V. Karásek and P. Zemánek. Analytical description of longitudinal optical binding of two spherical nanoparticles. *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, 9 :S215–220, 2007.
- [36] J. M. Taylor and G. D. Love. Optical binding mechanisms : a conceptual model for gaussian beam traps. *Opt. Express*, 17 :15381–9, 2009.
- [37] N. K. Metzger, K. Dholakia, and E. M. Wright. Observation of bistability and hysteresis in optical binding of two dielectric spheres. *Phys. Rev. Lett.*, 96 (6), 2006.
- [38] M. Kawano, J. T. Blakely, R. Gordon, and D. Sinton. Theory of dielectric micro-sphere dynamics in a dual-beam optical trap. *New Jour. Phys.*, 16 (13), 2008.
- [39] J. M. Taylor, L. Y. Wong, C. D. Bain, and G. D. Love. Emergent properties in optically bound matter. *Optics Express*, 16 (10), 2008.
- [40] D. McGloin, A. E. Carruthers, K. Dholakia, and E. M. Wright. Optically bound microscopic particles in one dimension. *Phys. Rev. E*, 69, 2004.

- [41] Jack Ng, Z. F. Lin, C. T. Chan, and Ping Sheng. Photonic clusters formed by dielectric microspheres : Numerical simulations. *Phys. Rev. B*, 72, 2005.
- [42] T. Cizmár, V. Kollárová, Z. Bouchal, and P. Zemánek. Sub-micron particle organization by self-imaging of non-diffracting beams. *New Jour. Phys.*, 8 (43), 2006.
- [43] M. Guillon and B. Stout. Optical trapping and binding in air : Imaging and spectroscopic analysis. *Phys. Rev. A*, 77 :023806, 2008.
- [44] M. Tanyeri, E. M. Johnson-Chavarria, and C. M. Schroeder. Hydrodynamic trap for single particles and cells. *Appl. Phys. Lett.*, 96 (22), 2010.
- [45] W.-H. Tan and S. Takeuchi. Dynamic microarray system with gentle retrieval mechanism for cell-encapsulating hydrogel beads. *The Roy. Soc. of Chem.*, 8, 2008.
- [46] M. Polin, D. G. Grier, and S. R. Quake. Anomalous vibrational dispersion in holographically trapped colloidal arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :088101, 2006.
- [47] F. Evers, C. Zunke, R. D. L. Hanes, J. Bewerunge, I. Ladadwa, A. Heuer, and S. U. Egelhaaf. Particle dynamics in two-dimensional random energy landscapes - experiments and simulations. *Phys. Rev. E*, 88 :022125, 2013.
- [48] R. D. Leonardo, S. Keen, J. Leach, G. D. Love C. D. Saunter, G. Ruocco, and M. Padgett. Eigenmodes of a hydrodynamically coupled micron-size multiple-particle ring. *Phys. Rev. E*, 76 :061402, 2007.
- [49] J. Nilsson, M. Evander, B. Hammarström, and T. Laurell. Review of cell and particle trapping in microfluidic systems. *Analytica Chimica Acta*, 649, 2009.
- [50] D. B. Wolfe, R. S. Conroy, P. Garstecki, B. T. Mayers, M. A. Fischbach, K. E. Paul, M. Prentiss, and G. M. Whitesides. Dynamic control of liquid-core/liquid-cladding optical waveguides. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 101 (34), 2004.
- [51] D. Erickson, T. Rockwood, T. Emery, A. Scherer, and D. Psaltis. Nanofluidic tuning of photonic crystal circuits. *Opt. Lett.*, 31 (1), 2006.
- [52] D.-Y. Zhang, N. Justis, and Y.-H. Lo. Fluidic adaptive lens of transformable lens type. *Appl. Phys. Lett.*, 84 (21), 2004.
- [53] D.-Y. Zhang, V. Lien, Y. Berdichevsky, J. Choi, and Y.-H. Lo. Fluidic adaptive lens with high focal length tunability. *Appl. Phys. Lett.*, 82 (19), 2003.
- [54] H. Choi and Y. Won. Fluidic lens of floating oil using round-pot chamber based on electrowetting. *Opt. Lett.*, 38 (13), 2013.
- [55] J. K. Lee, K.-W. Park, J. C. Choi, H.-R. Kim, and S. H. Kong. Variable-focus fluid lens using an electromagnetic actuator. In *Acta Physica Polonica A*, volume 123 (2), 2013.
- [56] S. N. Pei, J. K. Valley, S. L. Neale, A. Jamshidi, H.-Y. Hsu, and M. C. Wu. Light-actuated digital microfluidics for large-scale, parallel manipulation of arbitrarily sized droplets. *Micro Elect. Mechan. Syst. (MEMS)*, 2010. IEEE 23rd International Conference.
- [57] M. Hashimoto, B. Mayers, P. Garstecki, and G. M. Whitesides. Flowing lattices of bubbles as tunable, self-assembled diffraction gratings. *Small*, 2 (11), 2006.
- [58] P. M. Moran, S. Dharmatilleke, A. H. Khaw, K. W. Tan, M. L. Chan, and I. Rodriguez. Fluidic lenses with variable focal length. *Appl. Phys. Lett.*, 88 (4), 2006.
- [59] M. D. Summers, R. D. Dear, J. M. Taylor, and G. A. D. Ritchie. Directed assembly of optically bound matter. *Opt. Exp.*, 20 (2), 2012.
- [60] K. Grujic, O. G. Helleso, J. S. Wilkinson, and J. P. Hole. Optical propulsion of microspheres along a channel waveguide produced by cs^+ ion-exchange in glass. *Opt. Comm.*, 239 :227–235, 2004.

- [61] S. Sukhov and A. Dogariu. On the concept of tractor beams. *Opt. Lett.*, 35 (22) :3847–3849, 2010.
- [62] C. Renaut, J. Dellinger, B. Cluzel, D. Peyrade, E. Picard, E. Hadji, and F. de Fornel. Piégeage optique avec une microcavité fabry-pérot en soi. In *Journée de la Photonique*, 2011. 1ère éd.
- [63] D. J. Stevenson, F. Gunn-Moore, and K. Dholakia. Light forces the pace : optical manipulation for biophotonics. *Journal of Biomedical Optics*, 15 (4), 2010.
- [64] D. Brennan, J. Justice, B. Corbett, T. McCarthy, and P. Galvin. Emerging optofluidic technologies for point-of-care genetic analysis systems : a review. *Anal. Bioanal. Chem.*, 395 (3), 2009.
- [65] H. Horvath. Gustav mie and the scattering and absorption of light by particles : Historic developments and basics. *Jour. of Quant. Spect. and Rad. Trans.*, 110 :787–799, 2009.
- [66] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications, 1981. Inc.
- [67] Francesco Maria Grimaldi. *Physico mathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis libri duo*. 1665. Bologna.
- [68] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quanta. In *Annales de la fondation Louis de Broglie*, volume 17 (1), 1992.
- [69] C. Huygens. *Traité de la Lumière*. 1690. Leide.
- [70] A. Fresnel. Premier mémoire sur la diffraction de la lumière. In *Académie des sciences*, 1815.
- [71] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 1999. Seventh edition.
- [72] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [73] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5 :1550–1567, october 1966.
- [74] H. Kogelnik. On the propagation of gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation. *Applied Optics*, 4 (12) :1562–1569, october 1965.
- [75] J.-Ph. Pérez. *Optique*. Dunod, 2004.
- [76] J. Sokoloff. *Modélisation par la méthode des faisceaux gaussiens vectoriels et multimodes de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un diélectrique épais ou un réflecteur métallique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2001.
- [77] J. A. Arnaud and H. Kogelnik. Gaussian light beams with general astigmatism. *Appl. Opt.*, 8 :1687–1694, 1969.
- [78] D. R. Herriott, H. Kogelnik, and R. Kompfner. Off-axis paths in spherical mirror interferometers. *Appl. Opt.*, 3 (4) :523–526, april 1964.
- [79] P. A. Bélanger. Beam propagation and the abcd ray matrices. *Opt. Lett.*, 16 (4) :196–198, 1991.
- [80] R. Herloski, S. Marshall, and R. Antos. Gaussian beam ray-equivalent modeling and optical design. *Appl. Opt.*, 22 (8) :1168–1174, 1983.
- [81] J. Arnaud. Representation of gaussian beams by complex rays. *Appl. Opt.*, 24 (4) :538–543, 1985.
- [82] G. A. Deschamps. Gaussian beam as a bundle of complex rays. *Electronics Letters*, 7 (23) :684–685, 1971.
- [83] R. G. Wenzel. Oscillations of gaussian beam parameters in periodic lens waveguides. *Opt. Comm.*, 43 (2) :89–92, 1982.
- [84] W. L. Bragg. The structure of some crystals as indicated by their diffraction of x-rays. In *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, volume 89, 1913.

- [85] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 2000. 3e éd.
- [86] J. Brault and P. Léna. Sur la transformation numérique de hankel et son application à la réduction de profils instrumentaux bidimensionnels. *Annales d'Astrophysique*, 31 :323–332, 1968.
- [87] M. Guizar-Sicairos and J. C. Gutiérrez-Vega. Computation of quasi-discrete hankel transforms of integer order for propagating optical wave fields. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21 :53–58, 2004.
- [88] R. K. Pandey and O. P. Singh and V. K. Singh. An efficient algorithm for computing zero-order hankel transforms. *Applied Mathematical Sciences*, 2 (60) :2991–3000, 2008.
- [89] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales Scientifique de l'École Normale Supérieure*, 12 :47–88, 1883.
- [90] F. Bloch. über die quantenmechanik der electronen in kristallgittern. *Z. Phys.*, 52 :555–600, 1928.
- [91] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, 1996. New York.
- [92] S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos. *Introduction to Photonic Crystals : Bloch's Theorem, Band Diagrams, and Gaps (But No Defects)*. MIT, 2003.
- [93] N. Hodgson and H. Weber. *Laser Resonators and Beam Propagation*. Springer, 2005. Berlin.
- [94] L. G. Gouy. Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses. In *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, pages 1251–1253, 1890.
- [95] L. G. Gouy. Sur la propagation anormale des ondes. In *Annales de Chimie et de Physique*, 24, pages 145–213, 1891.
- [96] S. Gigan, L. Lopez, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre. Image transmission through a stable paraxial cavity. *Phys. Rev. A*, 72, 2005.
- [97] K. K. Lehmann and D. Romanini. The superposition principle and cavity ring-down spectroscopy. *J. Chem. Phys.*, 105 (23), 1996.
- [98] J. Courtois. *Développement de systèmes multipassages pour application à la spectroscopie d'absorption : cavity ring-down spectroscopy multimode et cellule à passages multiples*. PhD thesis, Université Paris XI - Orsay, 2009.
- [99] A. Sennaroglu and J. G. Fujimoto. Design criteria for herriott-type multi-pass cavities for ultrashort pulse lasers. *Optics Express*, 11 (9), 2003.
- [100] M. T. Duignan, B. J. Feldman, and W. T. Whitney. Threshold reduction for simulated brillouin scattering using a multipass herriott cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9 (4), 1992.
- [101] Z. Liu, K. Huang, and D. Zhao. Simultaneous trapping of low- and high-index microparticles by using highly focused elegant hermite-cosh-gaussian beams. *Opt. and Las. in Eng.*, 51 (6) :761–767, 2013.
- [102] G. Machavariani, N. Davidson, A. A. Ishaaya, A. A. Friesem, and E. Hasman. Transformation of a high order mode intensity distribution to a nearly gaussian beam. In *Proceedings of SPIE*, volume 5147, pages 271–275, 2003.
- [103] A. A. Ishaayaa, G. Machavariani, N. Davidson, A. A. Friesem, and E. Hasman. Conversion of a high-order mode beam into a nearly gaussian beam by use of a single interferometric element. *Optics Letters*, 28 (7) :504–506, 2003. April 1.
- [104] E. Yablonovitch. Photonic band-gap crystals. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 5 (16) :2443–2460, 1993.
- [105] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn. *Photonic Crystals : Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, 1995. Princeton.

- [106] V. P. Bykov. Spontaneous emission in a periodic structure. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 35 :269–273, 1972.
- [107] R. P. Stanley, R. Houdre, U. Oesterle, M. Gail hanou, and M. Ilegems. Ultrahigh finesse microcavity with distributed bragg reflectors. *Appl. Phys. Lett.*, 65 (15) :1883, 1994.
- [108] C. Renaut, J. Dellinger, B. Cluzel, T. Honegger, D. Peyrade, and al. Assembly of microparticles by optical trapping with a photonic crystal nanocavity. *Appl. Phys. Lett.*, 100, 2012.
- [109] T. G. Euser, O. A. Schmidt, S. Unterkofer, and P. St.J. Russell. Laser propulsion of particles and cells in hollow-core photonic crystal fiber. In *Optics in the Life Sciences Congress Technical Digest*, 2013.
- [110] A. Yariv and P. Yeh. *Optical Waves in Crystals*. Wiley and Sons, 2003.
- [111] G. Roosen and C. Imbert. Optical levitation by means of two horizontal laser beams : A theoretical and experimental study. *Phys. Lett. A*, 59 (1) :6–8, 1976.
- [112] G. Roosen. La lévitation optique de sphères. *Can. J. Phys.*, 57 :1260–1279, 1979.
- [113] W. M. Irvine. Light scattering by spherical particles : Radiation pressure, asymmetry factor, and extinction cross section. *J. Opt. Soc. Am.*, 55 (1) :16–21, 1965.
- [114] P. Chylek, J. T. Kiehl, and M. K. W. Ko. Optical levitation and partial-wave resonances. *Phys. Rev. A*, 18 (5) :2229–2233, 1978.
- [115] P. Chylek, J. T. Kiehl, and M. K. W. Ko. Narrow resonance structure in the mie scattering characteristics. *Appl. Opt.*, 17 (19) :3019–3021, 1978.
- [116] A. Kastler. *La diffusion de la lumière par les milieux troubles*. Paris : Hermann, 1952. Actualités scientifiques et industrielles.
- [117] G. Roosen, B. Delaunay, and C. Imbert. Radiation pressure exerted by a light beam on refractive spheres : theoretical and experimental study. *J. Optics*, 8 (3) :181–187, 1977.
- [118] R. C. Gauthier and S. Wallace. Optical levitation of spheres : analytical development and numerical computations of the force equations. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12 (9), 1995.
- [119] S. E. Skelton, M. Sergides, R. Saija, M. A. Iatì, O. M. Maragó, and P. H. Jones. Trapping volume control in optical tweezers using cylindrical vector beams. *Optics Letters*, 38 (1) :28–30, 2013.
- [120] T. P. Meyrath, F. Schreck, J. L. Hanssen, C. S. Chu, and M. G. Raizen. A high frequency optical trap for atoms using hermite-gaussian beams. *Opt. Express*, 13 (8) :2843–51, 2005.
- [121] H.-S. Chai and L.-G. Wang. Improvement of optical trapping effect by using the focused high-order laguerre-gaussian beams. *Micron*, 43 (8) :887–892, 2012.
- [122] R. W. Bowman, G. M. Gibson, A. Linnenberger D. B. Phillips, J. A. Grieve, D. M. Carberry, S. Serati, M. J. Miles, and M. J. Padgett. "red tweezers" : Fast, customisable hologram generation for optical tweezers. *Comp. Phys. Comm.*, 2013.
- [123] K. D. Leake, A. R. Hawkins, and H. Schmidt. All-optical particle trap using orthogonally intersecting beams. *Photon. Res.*, 1 (1) :47–51, 2013.
- [124] Q. Zhan. Trapping metallic rayleigh particles with radial polarization. *Optics Express*, 12 (15) :3377–3382, 2004.
- [125] R. J. Hernández, A. Mazzulla, A. Pane, K. Volke-Sepúlveda, and G. Cipparrone. Attractive-repulsive dynamics on light-responsive chiral microparticles induced by polarized tweezers. *The Royal Soc ; of Chem.*, 13 :459–467, 2003.
- [126] A. Ashkin. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime. *Biophysical Journal*, 61 :569–582, 1992.

- [127] A. Isomura, N. Magome, M. I. Kohira, and K. Yoshikawa. Toward the stable optical trapping of a droplet with counter laser beams under microgravity. *Chem. Phys. Lett.*, 429 (1-3) :321–325, 2006.
- [128] A. Einstein. On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. der Phys.*, 17, 1905.
- [129] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987. 2nd ed.
- [130] R. Gussgard, T. Lindmo, and I. Brevik. Calculation of the trapping force in a strongly focused laser beam. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9 (10), 1992.
- [131] R. Gordon, M. Kawano, J. T. Blakely, and D. Sinton. Optohydrodynamic theory of particles in a dual-beam optical trap. *Phys. Rev. B*, 77 (24), 2008.
- [132] J. M. Taylor and G. D. Love. Spontaneous symmetry breaking and circulation by optically bound microparticle chains in gaussian beam traps. *Phys. Rev. A*, 80 (5), 2009.
- [133] Y. Cao, L. Chen, W. Ding, F. Sun, and T. Zhu. Optical collection of multiple spheres in single tightly focused beams. *Opt. Comm.*, 311 :332–337, 2013.
- [134] W. H. Wright, G. J. Sonek, Y. Tadir, and M. W. Berns. Laser trapping in cell biology. *IEEE Jour. Quant. Elect.*, 26 (12), 1990.

Publications

Dynamics of a chain of optically coupled micro droplets

Th. Crouzil

Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine, Université Bordeaux I, CNRS, 33405 Talence, France

M. Perrin

m.perrin@loma.u-bordeaux1.fr

Laboratoire Ondes et Matière d'Aquitaine, Université Bordeaux I, CNRS, 33405 Talence, France

We study a chain of fluid droplets excited by two incoherent laser beams. Such structured object is merely an array of spherical lenses, that can guide a TEM_{pq} optical mode. Taking into account the optical forces exerted by two counterpropagating beams, we show that the droplets can be trapped and the chain auto-organizes in the optical potential. The model takes into account the possible coalescence of several droplets, and shows that the droplet size can increase before they become trapped at stable positions. For some input beam parameters (beam waist size and position), we have observed dynamic trapping : the droplets experience collective oscillation. Meanwhile, the beam shape evolves periodically in time.

[DOI: <http://dx.doi.org/10.2971/jeos.2013.1307>]

Keywords: Optofluidics, trapping

1 INTRODUCTION

Trapping of neutral Rayleigh particles by a single laser beam has been demonstrated by Ashkin more than 20 years ago [1]. Since then, much work has been devoted to the trapping of nanometric and microscopic particles, and applicative developments have been proposed, concerning on-chip biology [2], microscopy [3], optofluidics [4, 5]. Typically, the trapping potential is created by optical techniques such as, spatial light modulation [6], holographic methods [7], phase contrast methods [8], or by using photonic crystal cavities [9]. In any case, one can expect, at first sight, to find the particles trapped at the bottom of the prescribed potential well, with a significant probability, provided that the incident field is high enough to overcome the thermal energy. But in such simple picture, one assumes a total decoupling between the prescribed potential and the trapped objects. However, experiments have shown that an intense field can induce forces between the trapped particles that modify noticeably their spatial arrangement as well as the shape of the externally imposed potential [10, 11]. These additional forces are due to the scattering and redistribution of the incident light by the trapped objects. But at first sight, Mie or Rayleigh particles (whose size is close to or smaller than the wavelength) scatter light at a wide solid angle [12], what should lead to a short range interaction between particles. When optical binding takes place, it is a collective response of the scatterers that ensures coupling with a much longer range [13, 14]. In a situation with two counterpropagating (CP) beams, this can be explained by the refocalisation of the beams [10] by the trapped particles. We transpose such idea at a larger scale, with particle radius, waist size, and inter-particle distance much greater than the wavelength. Then, the diffraction losses can be kept small and almost all the beam energy can be conserved along the chain of trapped objects that would then behave as a waveguide. In this case, the cou-

pling between particles is expected to be strong, so that a small displacement of one of them can change the force felt by a particle very far from it. Then, one can expect very interesting dynamical properties. Note that breathing and collective oscillations have been observed experimentally and described theoretically for small particles [10, 15]. Besides, stability and auto-organisation in the transverse plane has been studied for two dimensional structures [16].

In this article, we report on the theoretical study of the dynamics of a unidimensional chain of spherical droplets of fluids (e.g. water in air), that interacts with two CP laser beams. In the first section, we deal with the optical response of a periodic chain, and describes the optical modes that can be guided in such system. In the second section, we present a simple model used to describe the dynamics, that can handle the collisions that lead to droplet coalescence. The results are presented, that show droplet trapping. In particular, we predict a dynamically trapped state where all the particles undergo collective breathing oscillations.

2 MODES OF AN OPTICAL CHAIN

In this section only, we neglect the optical forces, and study the optical response of a chain of droplets to an incident beam. If one considers spherical particles much greater than the wavelength as well as a relatively small index contrast, one can : (i) neglect the backreflection that would otherwise give rise to Fabry Perot interferences between two droplets, (ii) use matrix ray optics (model 1), or a Helmholtz equation (model 2) to describe how the field profile changes along the chain. We will present both model results, and show that they are in good

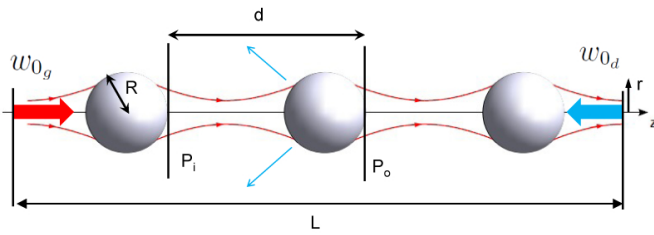


FIG. 1 Scheme of the studied system, with two CP beams whose waists are distant of L . The waist size of the beam propagating towards $z > 0$ (resp. $z < 0$) is denoted $w_{0,g}$ (resp. $w_{0,d}$). Note that only three droplets have been sketched for the sake of clarity.

agreement provided that the beam waist on each droplet is significantly smaller than the droplet radius.

Let us consider a uni-dimensional periodic chain made of spherical droplets, of radius R , index of refraction n_{int} , plunged into an external medium of index n_{ext} – see Figure 1. Optically, they behave as an ensemble of ball lens of focal length $f = -(R/2) n_{ext}/(n_{ext} - n_{int})$, so that the propagation matrix over one period (of length d) is :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{n_{ext}f} & \frac{d}{n_{ext}} \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

This unitary matrix can be diagonalized, so that the operator for N elementary patterns (propagation over a distance Nd) reads :

$$M_N = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix}^N \cdot P,$$

where P depends on the object plane P_o and image plane P_i between which one considers the propagation, and $\Lambda_{\pm}$ are the eigenvalues of M , that can be written $\Lambda_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$. Then, a simple calculation gives :

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{d}{2n_{ext}f} \right). \quad (1)$$

Now, if a Gaussian mode, characterized by its complex radius q_0 at the center of the first droplet ($z=d$) propagates over N periods, its shape (as described by matrix optics, denoted model 1) becomes $q_N = M_N \cdot q_0$, what can be simply evaluated [17].

Note that, by choosing specific injection condition, one can excite a “Bloch” mode, that will repeat with the period of the chain [18]. This is valid for any value of θ , provided the incident field has a waist size ω_B and is focused at a distance z_B of the center of the first lens, with :

$$\begin{aligned} \omega_B &= \sqrt{\frac{n_{ext}f\lambda}{\pi}}, \\ z_B &= d/2, \end{aligned} \quad (2)$$

then, the waist will be refocused at a point equidistant from 2 neighboring droplets, leading to a periodic field profile similar to the one of Figure 2(a)).

In the general case, when Eqs. (2) are not satisfied, Bloch theorem tells us that the incident field excites a mode whose period is greater than the one of the chain. One can consider that

after N droplets the complex radius of the beam has been dephased of $K2\pi$, with K integer. By imposing $\theta = 2\pi K/N$, one gets a condition on the ratio d/f to observe such periodic fields in the chain.

$$\frac{d}{n_{ext}f} = 2(1 - \cos(2\pi K/N)) \quad (3)$$

As f depends on the droplets radius, one can, by simply vary the distance d , excite very different periodic responses in the chain. Some examples are given in Figure 2, where the waist of the Gaussian beam is plotted versus the position in the chain.

This model where only Gaussian beams (TEM_{00}) have been considered has the advantage to give simple analytical formulae. However, it is a priori not valid if the waist is comparable to the droplet radius. Therefore, we developed a more accurate, Huygens-Fresnel description of the wavefront evolution. Then, the field at wavelength λ in an object plane P_o and its image in plane P_i are related by an Huygens integral, that can be written in cylindrical coordinates [17]:

$$\begin{aligned} \Psi_i(r) &= \frac{2i\pi}{\lambda z} e^{(-i\frac{kz}{2} - i\frac{kz^2}{2z})} \\ &\times \int_0^\infty \Psi_o(r_o) e^{-i\left(\frac{k r_o^2}{2z} + \Delta\Phi(r_o)\right)} J_0(2\pi \frac{r}{\lambda z} r_o) r_o dr_o, \end{aligned} \quad (4)$$

where k is the wavenumber, z is the distance between the two planes. If the object (resp. image) plane are just before (resp. after) the droplet, $\Delta\Phi(r_o) = (n_{int} - n_{ext})\sqrt{R^2 - r_o^2}$ is the phase acquired by a ray passing through the droplet at a distance r_o from the axis.

Note that this expression takes into account the spherical aberrations and the diffraction that leads to a non-Gaussian profile. Calculations have been carried out using Matlab, and some routines from the OSCAR package [19]. The results are shown in Figure 2, and are in very good agreement with the matrix model, provided that the spot size on the droplet, ω , remains small enough ($\omega \sim R/5$ in Figure 2).

We have described the beam propagation in a periodic chain of droplets. It comes out that the period of the beam width depends simply on the ratio d/f . Besides, for any value of d/f , one can excite a mode whose periodicity is exactly the one of the chain. This latter is called a Bloch mode, by analogy to the formalism developed in the physics of periodic media (solid state physics, photonics).

It is not difficult to imagine what would happen if one were to send two intense CP laser beams on the chain. One could arrange so that the same mode profile with the same periodicity is excited by both beams. Then, one can expect to have trapping, with a zero total force exerted on each droplet. However, not all the excited modes would give rise to stable trapping, and some more detailed study is required.

3 DYNAMICS OF THE CHAIN

Let us now consider the influence of optical forces. Due to the droplet radius, and the index gradient, optical forces can

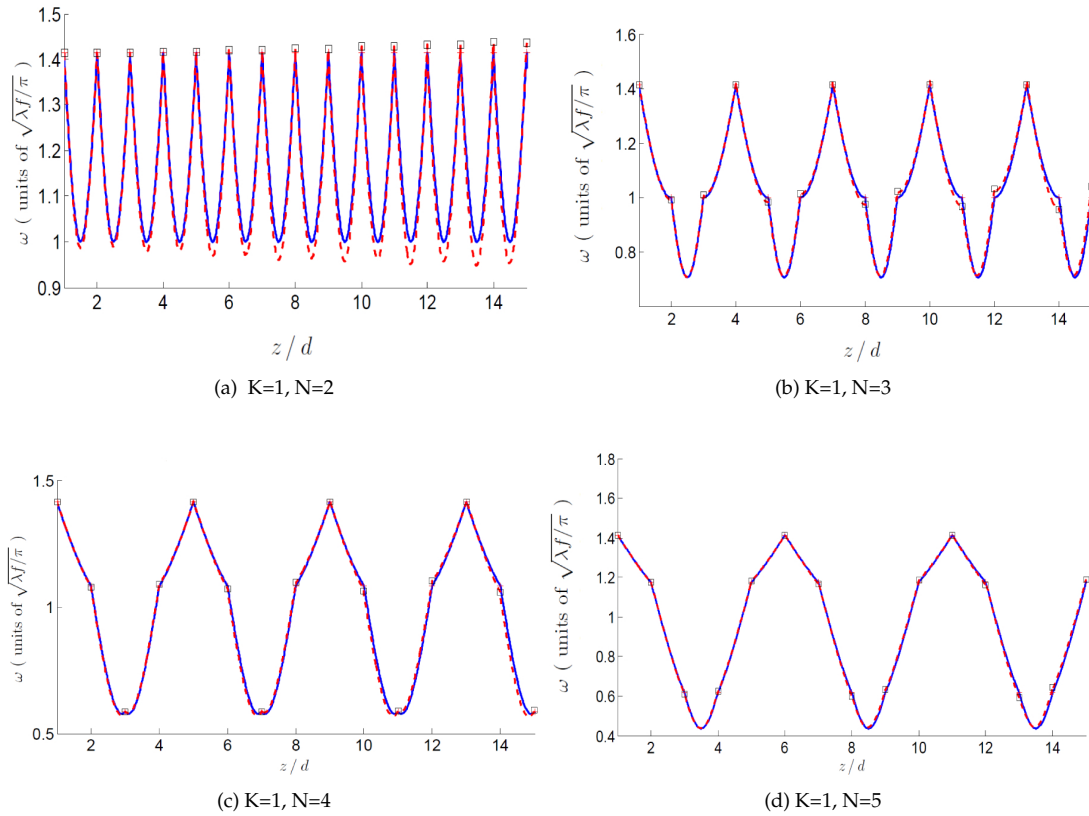


FIG. 2 Waist profile of the gaussian beam excited for several values of the ratio d/f (see Eq. (3)). The incident waist is $\omega_0 = R/5$, with $R = 50 \mu\text{m}$. The solid (resp. dashed) line corresponds to the ray matrix (resp. Huygens) model.

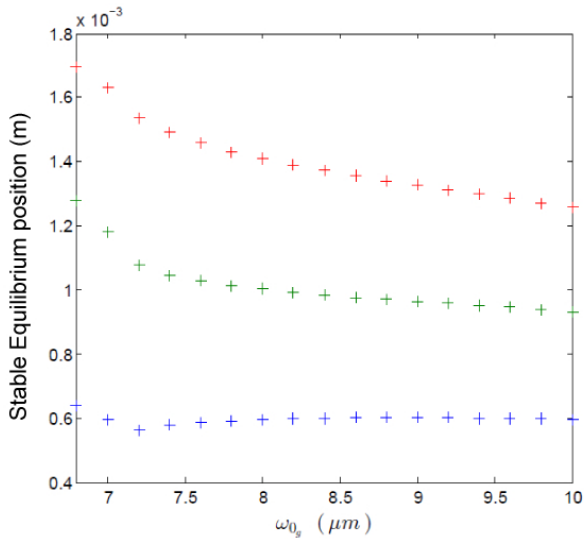


FIG. 3 Stable equilibrium obtained from the fixed point analysis of the equation of motion, for three droplets of $50 \mu\text{m}$ radius in CP beams. Both beams are separated by $L = 2 \text{ mm}$. One beam waist is fixed, $w_{0d} = 8 \mu\text{m}$ and w_{0g} is varied between $6.75 \mu\text{m}$ and $10 \mu\text{m}$ (See Figure 1). Both beam power is $P=1 \text{ W}$.

be safely computed from ray optics, under the hypothesis of Gaussian beams [20], if the shape remain spherical at all times.

However, one knows that an intense light beam can distort the droplet and thereby introduce large spherical aberrations. Recent works on droplet deformation by gaussian beam can help to evaluate the laser intensity at which this phenomenon occurs [22]. It comes out that the corrections to spherical shape

due to the interaction with a beam of power P , whose waist w_0 is smaller than the droplet radius R scale as $(R/w_0)^2(P/\zeta)$, where ζ is the surface tension. In our case, we could expect some small deformation for a power of 1W in a spot radius of $w_0 \sim 10\mu\text{m}$ impinging on a $50 \mu\text{m}$ radius water droplet, and observe a slight change of the focal length and in the spherical aberrations. However, for the sake of simplicity, we have not considered this effect in the model. Yet, a more precise Huygens-Fresnel description of the beam propagation could be use to compute the forces on a non-spherical surface. In this case one could still use [20] to compute the optical force, but with the correct weight for the intensity of each ray [21].

The equations of motion of each droplets are :

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= v_i(t), \\ \frac{dv_i}{dt} &= \frac{1}{m} [F_{opt}(z_i) - \gamma v_i(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

where z_i , v_i and $F_{opt}(z_i)$ are respectively the position, velocity and the longitudinal optical force on the i^{th} droplet of mass m . Note that $F_{opt}(z_i)$ is a very complex function of the position of all the other droplets, computed from [20]. As we are working at low Reynolds number, the friction coefficient can be expressed [21] as $\gamma = 6\pi\eta R$, where η is the dynamic viscosity of the external medium. All the presented result hereafter correspond to water droplets in air. Then, $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$, $n_{int} = 1.33$.

First, one searches for equilibrium positions. Therefore, we impose the waist size and position of both beams, and search for the z_i that satisfy $F_{opt}(z_i) = 0$. Then, the stable states

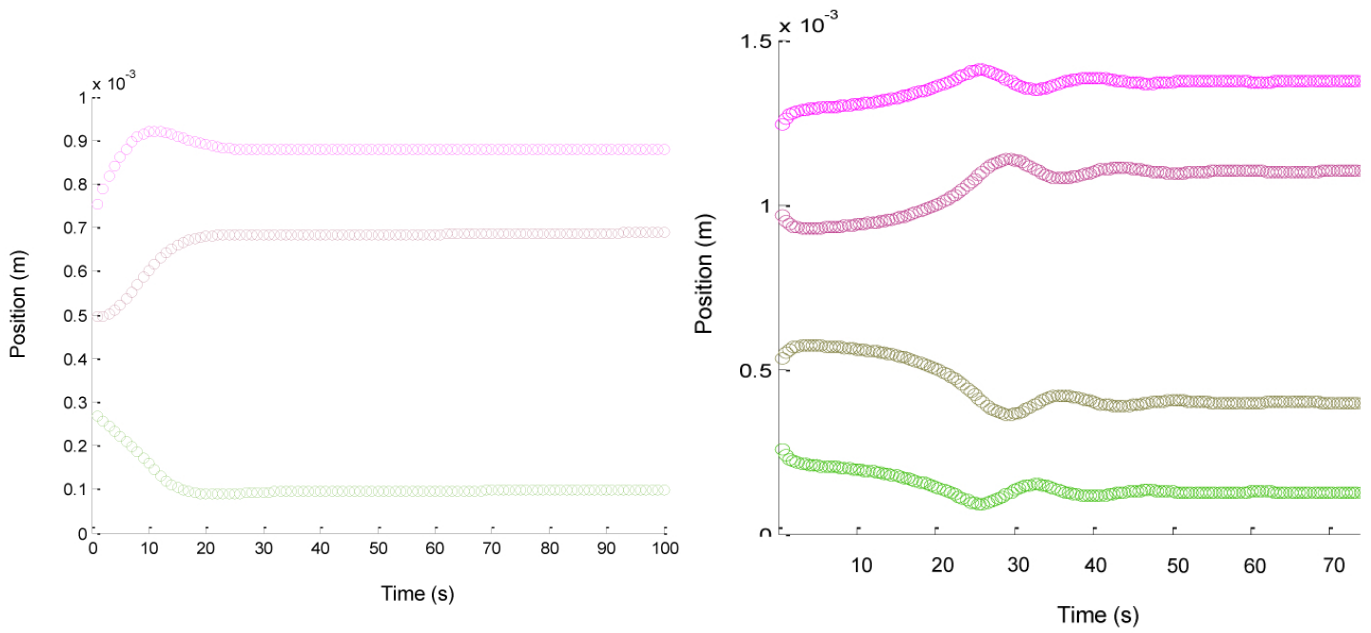
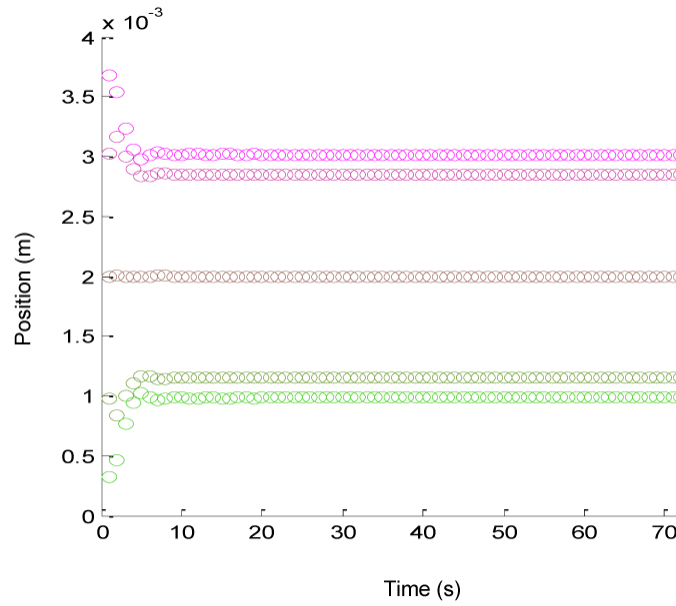
(a) Three droplets chain. $w_{0g} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0d} = 4 \mu\text{m}$, $L = 1 \text{ mm}$. (see Figure 1)(b) Four droplets chain. $w_{0g} = w_{0d} = 5 \mu\text{m}$. $L = 1.5 \text{ mm}$. (see Figure 1)(c) Five droplets chain. $w_{0g} = w_{0d} = 10 \mu\text{m}$. $L = 4 \text{ mm}$. (see Figure 1)

FIG. 4 Time evolution of the chain towards a stable equilibrium. Example of chains of 3, 4 and 5 droplets with $R = 50 \mu\text{m}$ and $\lambda = 514.5 \text{ nm}$. Beam power is $P = 1 \text{ W}$. In (b) and (c), the injection conditions are symmetric and the structure is symmetric by respect to $z = L/2$. In (a) both beams do not have the same waist and the situation is asymmetric.

are found by searching for the eigenvalues of the jacobian of Eq. (5), at the equilibrium positions, that have a negative real part [23]. Figure 3 shows the stable equilibrium positions that we obtained for a short chain, as a function of one incident beam waist (the other being fixed at $8 \mu\text{m}$). In general the intensity of both 1W-power laser beams incident on the droplets is not identical. Nevertheless, the structure can reach a stable and does not move. In the particular case of symmetric

injection conditions (when both beams have the same waist, $w_{0g} = w_{0d} = 8 \mu\text{m}$), the structure auto-organises exactly in the middle of the space between the two lasers. The droplet in the middle of the chain is stable at $z = L/2$. In a more general case (asymmetric injection conditions), we noticed that the stable chains are not perfectly periodic.

In order to check that the solutions we obtained indeed cor-

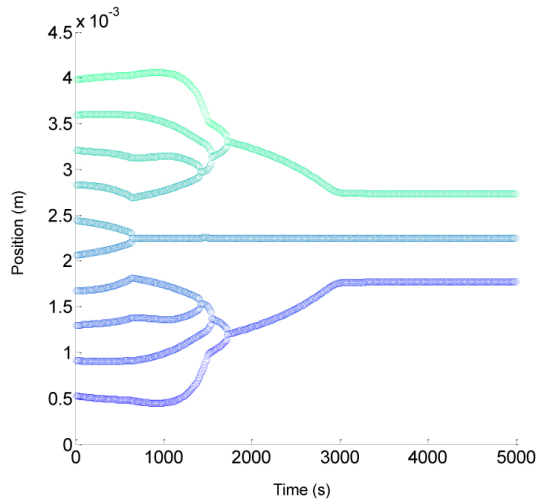


FIG. 5 Time evolution of the chain when coalescence phenomena occurs. $R = 50 \mu\text{m}$, $\lambda = 514.5 \text{ nm}$ and $L = 4.5 \text{ mm}$. The initial chain is periodic and a Bloch mode is excited by symmetric injection condition, see. Eq. (2).

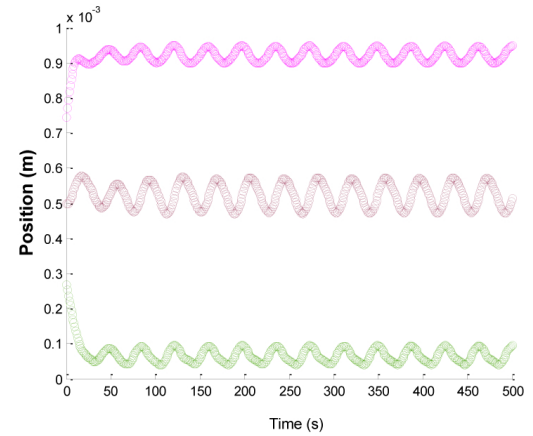
respond to trapped states, we made time simulation, starting from different initial conditions. Then, we observed that the droplets can experience collisions. In order to model what would happen if two or more droplet collide and then coalesce, we developed the following algorithm :

1. One evaluates the mode profile at each droplet position (either from a matrix ray theory or a Huygens integral).
2. Then one computes $F_{opt}(z_i)$ using [20].
3. Eq. (5) is integrated on a time step Δt .
4. The process is iterated untill a collision occurs or the simulation is finished.
5. If a collision occurs (between two droplets), one is removed, the radius of the other one is increased, so that the total volume is conserved. Then the dynamics is iterated.

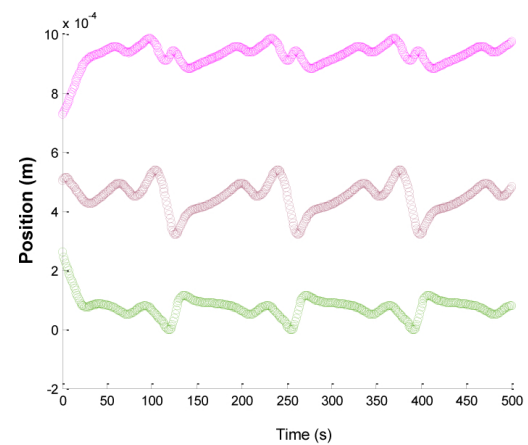
This “molecular dynamics” algorithm has been implemented with Matlab, and after some time, the system generally reaches a steady state, whether collisions occurs or not. Figure 4 shows a typical evolution for short chains. One can see that, varying the injection parameters (the waist size), one can obtain stable trapping after some relaxation oscillation. Note that the time needed to reach the equilibrium depends on the optical force, and is typically of several minutes with an optical power of $P=1\text{W}$. In the case where friction is strong enough so that one can neglect inertia [21], this convergence time scales as $\tau \sim 1/P$.

If one increases the number of droplets initially present, some of them will be pushed towards one another, and will coalesce. When a collision occurs, the force profile is modified and affects all the other droplets. Eventually, the chain can reach a stable trapped states, but with less droplets than what initially present. Figure 5 shows an example where a 10 droplet system evolves to a 3 droplet one, that is stable in the trap.

This is an example of optically controlled coalescence and trapping with micro droplets that could be observable experimentally.



(a) Three droplets oscillating. $w_{0g} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0d} = 6 \mu\text{m}$, $L = 1 \text{ mm}$



(b) $w_{0g} = 5 \mu\text{m}$, $w_{0d} = 8 \mu\text{m}$, $L = 1 \text{ mm}$

FIG. 6 Time evolution of a three droplets chain when a breathing state is excited. $R = 50 \mu\text{m}$ and $\lambda = 514.5 \text{ nm}$. The beam power is $P = 1 \text{ W}$.

For some beam parameters, one observes that no stable fixed point can be reached. However, the droplets trajectories can remain bounded, and the droplets position start to oscillate, see Figure 6. Again, we noticed that the oscillation frequency (in the limit of strong friction) scales linearly with the light power. The fact that a fixed trapped state can destabilize upon changing a parameter (here, the incident beam waists), to become a state of collective oscillation is typical from strongly coupled system, and has been observed elsewhere in the trapping of cold atoms [24]. In opto-fluidics, such oscillations have been obtained with small particles in the transverse plane [16], or in longitudinal binding [15]. But in our work the particles are much larger than the wavelength and their motion modulate the gaussian beam profile in a very simple way. Indeed, we observe a periodic breathing of its waist between each droplet.

4 CONCLUSION

We have studied the dynamics of an optical chain for which most of the incident energy is not diffracted away or absorbed, but guided. The strong coupling which is therefore created between the droplets leads to an interesting dynamics. We observed some ‘standard’ trapped state, where all the droplets

relax to some fixed position, but also droplet coalescence before trapping. In some cases, the fixed point is unstable, and the system converges to a dynamical trapped state, where all the droplets oscillate periodically in position and velocity. Such dynamics has been observed with solid particles in the Mie regime [16], but not to our knowledge with large droplets that may coalesce. The perspective are mainly theoretical, and are related to the very general problem of spontaneous symmetry breaking and auto-organisation in complex systems. Yet, we have shown that one can control the beam profile through the positions of the droplets. This could be used to make a switch in order to control the beam propagation in the chain. It should be also possible to filter out some modes of a multimode incident beam, using an optofluidic system made of a few droplets actuated by light or by external voltage [25].

5 ACKNOWLEDGEMENT

Thomas Crouzil acknowledges support from the Region Aquitaine, allocation number 20091304004.

References

- [1] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E Bjorkholm, and S. Chu, "Observation of a single beam gradient force optical trap for dielectric particle," Opt. Lett. **11**, 288–290 (1986).
- [2] D. J. Odde, and M. J. Renn, "Laser-guided direct writing for applications in biotechnology," TIBTECH **17**, 385–389 (1999).
- [3] A. Jesacher, C. Maurer, A. Schwaighofer, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, "Full phase and amplitude control of holographic optical tweezers with high efficiency," Opt. Express **16**(7), 4479–4486 (2008).
- [4] S. J. Hart, and A. V. Terray, "Refractive-index-driven separation of colloidal polymer particles using optical chromatography," Appl. Phys. Lett. **83**, 5316 (2003).
- [5] T. Kaneta, Y. Ishidzu, N. Mishima, and T. Imasaka, "Theory of optical chromatography," Anal. Chem. **69**, 2701–2710 (1997).
- [6] J. E. Curtis, B. A. Koss, and D. G. Grier, "Dynamic holographic optical tweezers," Opt. Commun. **207**, 169–175 (2002).
- [7] E. R. Dufresne, G. C. Spalding, M. T. Dearing, S. A. Sheets, and D. G. Grier, "Computer-generated holographic optical tweezer arrays," Rev. Sci. Instrum. **72**, 1810 (2001).
- [8] R. L. Eriksen, P. C. Mogensen, and J. Glückstad, "Multiple-beam optical tweezers generated by the generalized phase-contrast method," Opt. Lett. **27**(4), 267–269 (2002).
- [9] A. Rahmani, and P. Chaumet, "Optical trapping near a photonic crystal," Opt. Express **14**, 6353–6358 (2006).
- [10] S. A. Tartakova, A. E. Carruthers, and K. Dholakia, "One-dimensional optically bound arrays of microscopic particles," Phys. Rev. Lett., **89**, 283901 (2002).
- [11] N. K. Metzger, E. M. Wright, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Visualization of optical binding of microparticles using a femtosecond fiber optical trap," Opt. Express **14**, 3677–3687 (2006).
- [12] H. C. van de Hulst, *Light Scattering by small particles* (Courier Dover Publications, Mineola, 1957).
- [13] V. Demergis, and E. L. Florin, "Ultrastrong optical binding of metallic nanoparticles," Nano Lett. **12**, 5756–5760 (2012).
- [14] J. M. Taylor, L. Y. Wong, C. D. Bain, and G. D. Love, "Emergent properties in optically bound matter," Opt. Express **16**(10), 6921–6929 (2008).
- [15] M. Kawano, J. T. Blakely, R. Gordon, and D. Sinton, "Theory of dielectric micro-sphere dynamics in a dual-beam optical trap," Opt. Express **16**(13), 9306–9317 (2008).
- [16] J. Ng, Z. F. Lin, C. T. Chan, and P. Sheng, "Photonic clusters formed by dielectric microspheres: Numerical simulations," Phys. Rev. B **72**, 085130 (2005).
- [17] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Sausalito, 1986).
- [18] R. G. Wenzel, "Oscillation of gaussian beam parameters in periodic lens waveguides," Opt. Commun. **43**, 89–92 (1982).
- [19] J. Degallaix, "Oscar a matlab based optical fft code," J. Phys.: Conf. Ser. **228**, 012021 (2010).
- [20] R. Gussgard, T. Lindmo, and I. Brevik, "Calculation of the trapping force in a strongly focused laser beam," JOSA B **9**, 1922–1930 (1992).
- [21] A. Isomura, N. Magome, M. I. Kohira, and K. Yoshikawa, "Toward the stable optical trapping of a droplet with counter laser beams under microgravity," Chem. Phys. Lett. **429**, 0605165 (2006).
- [22] S. Å. Ellingsen, "Theory of microdroplet and microbubble deformation by gaussian laser beam," J. Opt. Soc. Am. B **30**(6), 1694–1710 (2013).
- [23] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos* (Perseus Books, Cambridge, 1994).
- [24] J. Javaloyes, M. Perrin, and A. Politi, "Collective atomic recoil laser as a synchronization transition," Phys. Rev. E **78**, 011108 (2008).
- [25] A. S. Basu, and Y. B. Gianchandani, "A programmable array for contact-free manipulation of floating droplets on featureless substrates by the modulation of surface tension," J. Microelectromech. S. **18**(6), 1163 (2009).

