



*Modélisation numérique des articulations  
en caoutchouc  
de la liaison au sol automobile  
en simulation multi-corps transitoire*

THÈSE

présentée par

Béatrice BOURGETEAU

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

*(spécialité mécanique)*

soutenue le 06/11/2009

*Composition du jury*

|                             |                                       |                                                 |
|-----------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <i>Président :</i>          | M. Etienne Balmès                     | (ENSAM Paris)                                   |
| <i>Rapporteurs :</i>        | M. Louis Jezequel<br>M. Didier Remond | (École Centrale Lyon)<br>(INSA Lyon)            |
| <i>Examineurs :</i>         | M. Franck Moiro<br>M. Guillaume Puel  | (PSA Peugeot Citroën)<br>(École Centrale Paris) |
| <i>Directeur de thèse :</i> | M. Denis Aubry                        | (École Centrale Paris)                          |



*Á ma maman, à Julien et à tous mes amis qui ont partagé les moments difficiles  
et heureux*





---

# Table des matières

---

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Table des matières                                                                     | i         |
| <b>1 Introduction</b>                                                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Contexte industriel . . . . .                                                      | 3         |
| 1.1.1 Motivations de l'étude . . . . .                                                 | 3         |
| 1.1.2 Objectifs et préalables industriels . . . . .                                    | 8         |
| 1.2 Objectifs et préalables scientifiques . . . . .                                    | 10        |
| 1.2.1 Modélisation du caoutchouc naturel . . . . .                                     | 10        |
| 1.2.2 Identification et modélisation numérique . . . . .                               | 11        |
| 1.2.3 Résumé des objectifs scientifiques . . . . .                                     | 12        |
| 1.3 Objectifs de la thèse . . . . .                                                    | 13        |
| 1.3.1 Résumé de la problématique . . . . .                                             | 13        |
| <b>2 Propriétés et modélisation des articulations en caoutchouc</b>                    | <b>17</b> |
| 2.1 Les articulations élastiques en caoutchouc . . . . .                               | 18        |
| 2.1.1 Généralités . . . . .                                                            | 18        |
| 2.1.2 Influence de la géométrie et découplages axiaux . . . . .                        | 19        |
| 2.2 Comportement mécanique du CCNC et des cales . . . . .                              | 24        |
| 2.2.1 Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone . . . . .                           | 24        |
| 2.2.2 Élasticité du caoutchouc . . . . .                                               | 26        |
| 2.2.3 Hystérésis indépendante du temps . . . . .                                       | 28        |
| 2.2.4 Visco-élasticité . . . . .                                                       | 33        |
| 2.2.5 Effet Mullins . . . . .                                                          | 48        |
| 2.3 Modélisation des comportements du caoutchouc . . . . .                             | 50        |
| 2.3.1 Modélisation générale des phénomènes hystérétiques . . . . .                     | 50        |
| 2.3.2 Modélisation de la visco-élasticité . . . . .                                    | 55        |
| 2.3.3 Conclusion comportements mécaniques des articulations en<br>caoutchouc . . . . . | 58        |
| <b>3 Modélisation des liaisons élastiques</b>                                          | <b>61</b> |

|          |                                                                            |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.1      | Étude de quelques modèles complets de liaison élastique . . . . .          | 62         |
| 3.1.1    | Modèle Triboelastic Visco-Solid (TVS) . . . . .                            | 62         |
| 3.1.2    | Modèle avec dérivée non entière (DNE) . . . . .                            | 66         |
| 3.1.3    | Modèle SID . . . . .                                                       | 68         |
| 3.1.4    | Le modèle RT . . . . .                                                     | 69         |
| 3.1.5    | Modèle de Bouc-Wen modifié . . . . .                                       | 71         |
| 3.1.6    | Conclusion sur les modèles existants . . . . .                             | 72         |
| 3.2      | Modélisation de l'élasticité non-linéaire . . . . .                        | 74         |
| 3.3      | Enrichissement du modèle : de l'hystérésis à la visco-élasticité . . . . . | 77         |
| 3.3.1    | Modèle STS : modèle hystérétique indépendant du temps . . . . .            | 77         |
| 3.3.2    | Modèle RT : introduction de la visco-élasticité . . . . .                  | 89         |
| 3.3.3    | Le modèle STVS . . . . .                                                   | 99         |
| 3.4      | Étude numérique des modèles STS, RT et STVS . . . . .                      | 104        |
| 3.4.1    | Modèle STS discret . . . . .                                               | 104        |
| 3.4.2    | Modèle STS continu et rebroussements . . . . .                             | 105        |
| 3.4.3    | Modèle STVS : intégration du modèle . . . . .                              | 108        |
| 3.5      | Conclusion sur le choix du modèle . . . . .                                | 109        |
| 3.5.1    | Résumé . . . . .                                                           | 112        |
| 3.5.2    | Perspectives . . . . .                                                     | 112        |
| <b>4</b> | <b>Simulation multi-corps</b>                                              | <b>115</b> |
| 4.1      | Liaison au Sol et dynamique du véhicule . . . . .                          | 116        |
| 4.1.1    | Liaison Au Sol (LAS) . . . . .                                             | 116        |
| 4.1.2    | Dynamique du véhicule . . . . .                                            | 118        |
| 4.1.3    | Précisions sur les liaisons élastiques étudiées . . . . .                  | 120        |
| 4.2      | Deux exemples simples : balourd et trépidations . . . . .                  | 121        |
| 4.2.1    | Introduction . . . . .                                                     | 121        |
| 4.2.2    | Le balourd de roue . . . . .                                               | 124        |
| 4.2.3    | Les trépidations . . . . .                                                 | 133        |
| 4.3      | Introduction du modèle de cale dans ADAMS® . . . . .                       | 136        |
| 4.4      | Apports du modèle d'articulation dans ADAMS . . . . .                      | 141        |
| 4.4.1    | Résultats qualitatifs des simulations multi-corps . . . . .                | 141        |
| 4.4.2    | Comparaison entre mesures et simulations . . . . .                         | 148        |
| 4.5      | Conclusion sur les résultats obtenus dans ADAMS® . . . . .                 | 151        |
| 4.5.1    | Perspectives . . . . .                                                     | 153        |
| <b>5</b> | <b>Identification paramétrique du modèle de liaison élastique</b>          | <b>155</b> |
| 5.1      | Généralités et état de l'art . . . . .                                     | 156        |
| 5.1.1    | Introduction . . . . .                                                     | 156        |
| 5.1.2    | Problème direct et problème inverse . . . . .                              | 157        |
| 5.1.3    | Application à notre problématique . . . . .                                | 159        |
| 5.1.4    | Méthodes d'identification . . . . .                                        | 160        |

|          |                                                                                                   |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2      | Identification directe du modèle STS discret . . . . .                                            | 161        |
| 5.2.1    | Introduction . . . . .                                                                            | 161        |
| 5.2.2    | Choix des grandeurs caractéristiques . . . . .                                                    | 163        |
| 5.2.3    | Méthode d'identification . . . . .                                                                | 165        |
| 5.2.4    | Résultats d'identification STS . . . . .                                                          | 166        |
| 5.2.5    | Identification empirique RT et STVS grâce au STS . . . . .                                        | 167        |
| 5.3      | Approximation fréquentielle des modèles RT et STVS . . . . .                                      | 171        |
| 5.3.1    | Approximation fréquentielle . . . . .                                                             | 172        |
| 5.3.2    | Calcul de la raideur et de l'angle de perte équivalents . . . . .                                 | 174        |
| 5.3.3    | Étude de l'impact des paramètres sur le comportement<br>fréquentiel . . . . .                     | 176        |
| 5.3.4    | Identification à partir de données fréquentielles . . . . .                                       | 183        |
| 5.3.5    | Conclusion sur l'identification fréquentielle . . . . .                                           | 185        |
| 5.4      | Identification sur des sollicitations temporelles quelconques . . . . .                           | 186        |
| 5.4.1    | Résolution d'un problème inverse avec état adjoint . . . . .                                      | 187        |
| 5.4.2    | Une application proche du modèle RT . . . . .                                                     | 193        |
| 5.4.3    | Conclusion et application aux modèles de cales . . . . .                                          | 198        |
| 5.5      | Conclusion sur l'identification . . . . .                                                         | 198        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>                                                                                 | <b>201</b> |
| 6.1      | Apports et perspectives concernant le comportement des articula-<br>tions en caoutchouc . . . . . | 201        |
| 6.2      | Apports et perspectives pour la modélisation des articulations en<br>caoutchouc . . . . .         | 203        |
| 6.3      | Apports et perspectives pour la simulation multi-corps transitoire .                              | 204        |
| 6.4      | Apports et perspectives pour l'identification paramétrique . . . . .                              | 205        |
| 6.5      | Conclusion . . . . .                                                                              | 206        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                              | <b>207</b> |
| <b>A</b> | <b>Fonctions signe et valeur absolue régularisées</b>                                             | <b>215</b> |
| A.1      | Utilisation des fonctions régularisées . . . . .                                                  | 215        |
| A.2      | Régularisée de la distribution d'Heaviside avec overshoot . . . . .                               | 216        |
| A.3      | Régularisées $C^1$ et $C^2$ d'Heaviside . . . . .                                                 | 217        |
| A.3.1    | Fonction approchée de classe $C^1$ . . . . .                                                      | 217        |
| A.3.2    | Fonction approchée de classe $C^2$ . . . . .                                                      | 217        |
| A.4      | Régularisées sigmoïdes d'Heaviside . . . . .                                                      | 217        |
| <b>B</b> | <b>Étude expérimentale : La relaxation des articulations en caou-<br/>tchouc</b>                  | <b>219</b> |
| B.1      | Étude de la relaxation et des effets d'historique . . . . .                                       | 220        |
| B.2      | Étude de relaxation pour deux cales de caractéristiques très différentes                          | 222        |

|          |                                                                                        |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| B.3      | Relaxation et notion de mémoire évanescence . . . . .                                  | 223        |
| B.4      | Solid visco-élastique linéaire . . . . .                                               | 227        |
| B.5      | Conclusion . . . . .                                                                   | 228        |
| <b>C</b> | <b>Grandeurs caractéristiques quasi-statiques nécessaires à l'identification</b>       | <b>229</b> |
| C.1      | Grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis . . . . .                           | 229        |
| C.2      | Calcul des grandeurs intermédiaires d'un cycle d'hystérésis discret type STS . . . . . | 231        |
| C.2.1    | Les points de changement de pente . . . . .                                            | 231        |
| C.2.2    | Les pentes des portions d'hystérésis discrète . . . . .                                | 232        |
| C.3      | Calcul des grandeurs caractéristiques à partir des grandeurs intermédiaires . . . . .  | 233        |
| C.3.1    | Raideur sécante . . . . .                                                              | 233        |
| C.3.2    | Les tangentes extrêmes . . . . .                                                       | 233        |
| C.3.3    | Aire de l'hystérésis . . . . .                                                         | 234        |
| C.4      | Approximation continue du cycle d'hystérésis discret du STS . . .                      | 235        |
| C.5      | Identification des données quasi-statiques . . . . .                                   | 237        |
| <b>D</b> | <b>Exemples d'identification temporelle (compléments)</b>                              | <b>239</b> |
| D.1      | Résultats concernant l'exemple n°1 . . . . .                                           | 239        |
| D.2      | Résultats concernant l'exemple n°2 . . . . .                                           | 239        |
| <b>E</b> | <b>Illustration des résultats de simulation fréquentielle pour les trépidations</b>    | <b>241</b> |
|          | <b>Abréviations</b>                                                                    | <b>245</b> |
|          | <b>Table des figures</b>                                                               | <b>246</b> |
|          | <b>Liste des tableaux</b>                                                              | <b>251</b> |
|          | <b>Résumé</b>                                                                          | <b>253</b> |

---

# Remerciements

---

Beaucoup de personnes ont participé directement ou indirectement à cette thèse et ont contribué à son aboutissement. Un certain nombre ont fait preuve d'un investissement important au cours de ces travaux. Aussi, j'espère n'oublier aucune d'entre elles dans cette modeste page de remerciements.

Tout d'abord, j'aimerais remercier l'ANRT, PSA Peugeot Citroën et l'Ecole Centrale Paris de m'avoir donné la chance de faire une thèse mêlant enjeux industriels et scientifiques.

Je souhaite également remercier Étienne Blamès, Louis Jézéquel et Didier Rémond qui m'ont accordé leur temps en lisant ce mémoire et qui m'ont aidée, par leurs remarques à prendre le recul nécessaire à l'analyse des résultats obtenus.

Au laboratoire MSSMat, je souhaite dire un grand merci à mon directeur de thèse, Denis Aubry, pour son soutien, ses explications et sa patience. Guillaume Puel a également beaucoup contribué à ces travaux par sa connaissance des problèmes d'identification, par son écoute et son aide. Merci à Arnaud, Audrey, Nadia, Reza, Anne et tous les autres camarades de thèse pour leur aide et leur soutien.

Je tiens à remercier mes deux tuteurs industriels, Pierre Ferbach, et Franck Moiroit qui malgré plusieurs réorganisations s'est investi pleinement dans son rôle de tuteur industriel.

Mes meilleurs remerciements à tous mes collègues du service de conception de la LAS chez PSA, qui grâce à leurs compétences, leur savoir faire et leur humour, m'ont aidée au cours de cette thèse. Parmi eux Dominique, Michel, Pascal, Jérémy, Ludovic, Josselyn et Nicolas m'ont apporté leur aide dans les moments de doute et d'interrogations. Un merci particulier à Fabrice Boyer sans qui les arcanes sacrées de Matlab seraient restées un grand mystère.

Merci à Benoît Parmentier d'avoir apporté ses lumières à ces travaux. Je remercie également Ida Raoult et Yohan le Chenadec pour leurs idées et leur gentillesse. Un grand remerciement à Pierre Charrier, qui a beaucoup contribué à la partie expérimentale de ces travaux.



# Chapitre 1

---

## Introduction

---

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat CIFRE, en partenariat avec le service conception de la Liaison Au Sol (LAS) chez PSA Peugeot Citroën et le laboratoire Mécanique Sol Structure Matériaux (MSSMat) de l'École Centrale Paris (ECP). Son objectif est de compléter la modélisation des liaisons élastiques existant chez PSA dans le cadre des simulations multi-corps transitoires de la LAS. Ce sujet de thèse répond à des enjeux industriels à la croisée de diverses disciplines scientifiques : mécanique des matériaux, dynamique des structures, modélisation numérique et identification paramétrique.

L'introduction qui suit dresse un tableau du contexte industriel et scientifique dans lequel ce travail s'est déroulé. Elle permet de définir quelques notions essentielles qui seront reprises au cours de ce mémoire. Ces quelques paragraphes délimitent et précisent la problématique qui a été traitée au cours de ces travaux, tout en mettant en évidence leurs différents aspects.

### 1.1 Contexte industriel

#### 1.1.1 Motivations de l'étude

La LAS en automobile désigne les éléments intermédiaires entre le sol et la caisse du véhicule qui sont destinés à supporter cette dernière. Une illustration de cet ensemble est représentée par transparence sur la figure 1.1.

Outre ses fonctions de guidage et de stabilité de l'automobile, elle assure également des fonctions essentielles pour le conducteur et ses passagers en terme de confort et de sécurité, comme précisé dans l'article de Danno [22]. Le schéma 1.2 récapitule quelques-unes des fonctions qui servent à évaluer les performances d'une LAS. Ci-dessous les trois principales d'entre elles sont définies ; les deux dernières seront utilisées à titre d'exemples au cours des chapitres suivants de ce



FIG. 1.1: Vue par transparence des éléments constitutifs d'une LAS.

mémoire :

Le **comportement routier** englobe les performances liées à la tenue de route et au respect de la trajectoire. Cette fonction comprend certains aspects de la sécurité active, c'est-à-dire la prévention d'accidents, comme l'évitement des obstacles par exemple ou VDA étudié par Boyer dans [11].

L'**agrément de direction ou de conduite**, traduit un ressenti du conducteur par rapport aux efforts dans le volant (gradient de couple à fournir lors d'une manoeuvre) ou la facilité à diriger le véhicule (accord entre angle appliqué au volant et réponse du véhicule). Il s'agit d'une notion plutôt subjective. Elle est évaluée par des pilotes professionnels qui notent les performances du véhicule. Le ressenti d'un conducteur peut difficilement être quantifié dans la mesure où le corps humain se comporte comme un filtre plus ou moins sensible selon les individus. Pour cette raison, on recourt plutôt à une échelle de notation qu'à la mesure de grandeurs physiques.

Le **confort Acoustique et Vibratoire (ACV)** vise l'atténuation des bruits et vibrations indésirables. Certaines catégories de vibrations observables dans un véhicule sont répertoriées dans le tableau 1.2. Elles possèdent des désignations différentes selon les domaines de fréquences et d'amplitudes concernés.

Parmi les pièces constitutives de la LAS, se trouvent de nombreuses **liaisons élastiques**, dont on peut voir un exemple d'implantation sur un train arrière en figure 1.3. Elles sont aussi appelées **articulations en caoutchouc** ou de façon moins conventionnelle, chez PSA, **cales de LAS**. Ces pièces ont une double fonc-



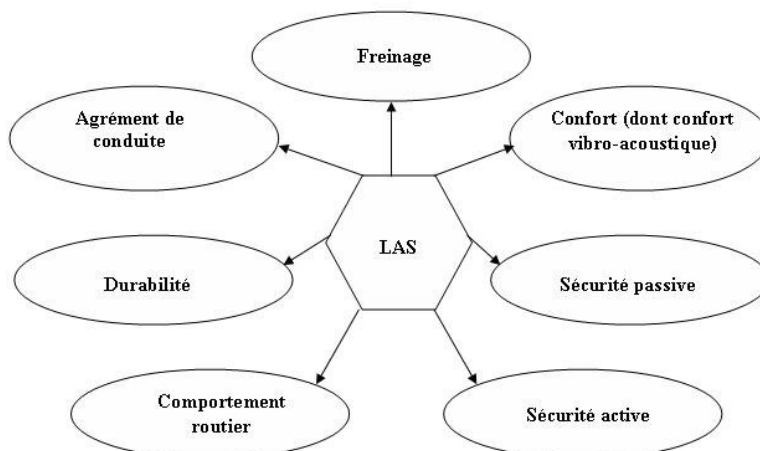


FIG. 1.2: Diagramme de quelques performances automobiles liées à la LAS.

tion de filtrage des vibrations et de transmission des mouvements et efforts. De ce fait, elles jouent un rôle essentiel dans les deux performances citées ci-dessus que sont l'agrément de direction et le confort ACV. Une représentation tridimensionnelle d'articulation en caoutchouc se trouve sur la figure 1.4. Une liaison élastique doit assurer un compromis entre confort et comportement du véhicule comme le précise Halconruy dans son livre en référence [34]. Elles sont constituées de Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone (CCNC) et présentent de ce fait un comportement mécanique fortement non-linéaire. Ces non-linéarités peuvent avoir des répercussions positives ou néfastes sur la réponse globale du véhicule.

L'influence des articulations en caoutchouc sur le comportement de la LAS dans certaines situations de vie du véhicule est parfois mal maîtrisée. Ainsi, pour deux véhicules de définition identique dont on change une seule liaison élastique, certaines grandeurs caractéristiques de la LAS peuvent évoluer assez significativement.

Il peut s'agir d'une évolution dans le domaine de l'ACV, elle est alors quantifiable (fréquence de résonance, amplitude des vibrations, volume sonore, etc.). Elle peut également influencer sur l'agrément de direction, qui correspond au ressenti d'un conducteur. Ce ressenti peut être décliné en un certain nombre de « prestations » ou sous-fonctions, dont quelques exemples sont donnés dans le tableau 1.1. Parmi les prestations indiquées dans le tableau, nous nous intéresserons tout particulièrement au cours des chapitres qui suivent aux trépidations, au balourd de roue et à la réponse en lacet.

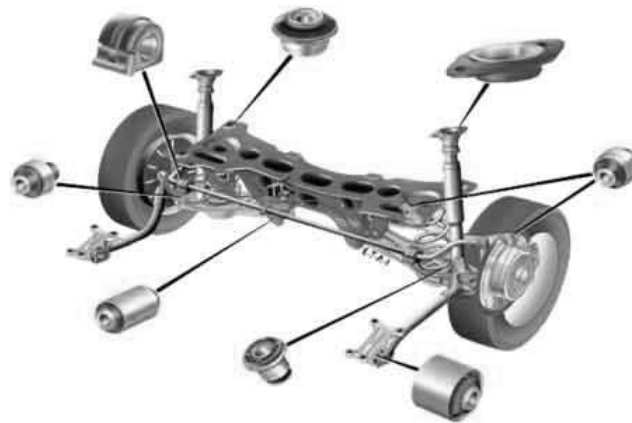


FIG. 1.3: Éclaté des différentes liaisons élastiques en CCNC sur un essieu arrière de véhicule.

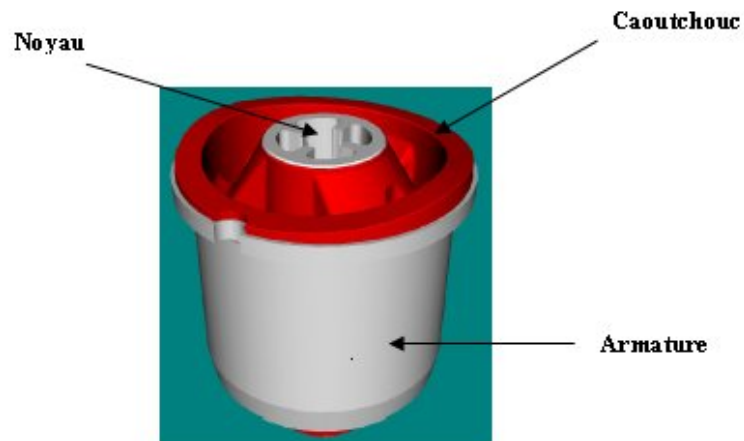


FIG. 1.4: Représentation tridimensionnelle (CAO) d'une articulation en caoutchouc de la LAS.

Un cas récent, lors d'une phase d'avant-projet et d'évaluation de diverses articulations répondant à un même cahier des charges, a mis en évidence que des articulations quasiment identiques à la mesure, pouvaient donner lieu à des comportements très différents en agrément de direction, c'est-à-dire en terme de ressenti du pilote. La seule variation notable entre les deux articulations en question, concernait les mesures de relaxation et donc le domaine transitoire du comportement des articulations en caoutchouc.

Les sollicitations mettant en évidence ces ressentis différents semblent, d'après les pilotes interrogés, être des échelons d'angle au volant, qui eux-même induisent des échelons d'écrasement dans l'articulation, comme nous le verrons au cours de ce mémoire au chapitre 5. Le comportement transitoire de la LAS semble donc

| Comportement Routier | Agrément de conduite    | Confort ACV         |
|----------------------|-------------------------|---------------------|
| Tirage               | Effort volant parking   | Confort vertical    |
| Tenue de caisse      | Réponse lacet           | Trépidations        |
| Motricité            | Centrage                | Percussions         |
| Stabilité virage     | Effort de direction     | Sensibilité balourd |
| Inscription virage   | Gradient de direction   | Tressautements      |
| Stabilité vent       | Réversibilité direction | Toucher de route    |
| Tenue de cap         | Remontées filtrage      | Bruit de roulement  |

TAB. 1.1: Tableau présentant certains items d'évaluation d'une LAS, pour les trois types de performances correspondantes, à savoir, le comportement routier, l'agrément de conduite et l'ACV.

dans ce cas directement influencé par le comportement transitoire des liaisons élastiques. Il est par conséquent nécessaire de disposer d'une modélisation pertinente et précise des articulations en transitoire, si l'on souhaite être capable de représenter de tels résultats.

L'ensemble des comportements d'une automobile peut être décrit et modélisé grâce à la « dynamique du véhicule ». Un certain nombre de grandeurs caractéristiques de la LAS, ainsi que des lois de comportement éprouvées pour chacune des pièces, permettent de modéliser les réponses quasi-statiques, transitoires ou dynamiques d'un véhicule.

Des logiciels de « simulation multi-corps » permettent de calculer la réponse de ces lois de comportement pour la structure complète de LAS. Ils modélisent chacun de ses éléments constitutifs, sous des formes plus ou moins simplifiées (poutres, éléments finis, ressorts, amortisseurs), ainsi que les liaisons qui permettent leur cohésion, dont les articulations en caoutchouc. Parmi ces logiciels, ADAMS<sup>®</sup> de MSC Corporate a été utilisé au cours de ces travaux.

Le logiciel de simulation multi-corps ADAMS<sup>®</sup> est un outil précieux lors de la conception et de la validation de la LAS chez PSA. Il permet trois types de simulations distinctes :

- élasto-cinématique (quasi-statique) ;
- transitoire (temporelle) ;
- dynamique (fréquentielle en régime forcé avec le solveur NASTRAN MSC et des outils spécifiques à PSA).

La modélisation transitoire des liaisons élastiques chez PSA est moins aboutie que celle du comportement dynamique ou statique. En effet, les vibrations et bruits sont les premières nuisances que l'on souhaite atténuer dans une automobile. Il s'agit là de la fonction principale des articulations en caoutchouc ;

pour cette raison de nombreux modèles dynamiques de liaison élastique existent. Un certain nombre d'entre eux sont utilisés dans l'industrie automobile pour la modélisation fréquentielle.

Les simulations transitoires, quant à elles, sont plus rarement utilisées et comportent la plupart du temps une simple élasticité non-linéaire en guise de modèle de liaison élastique. Cependant, des simulations dans le domaine temporel, qui plus est transitoire, nécessitent la prise en compte de l'ensemble des réponses mécaniques des articulations en caoutchouc dans les domaines énumérés ci-dessus pour ADAMS<sup>®</sup>. Les phénomènes de relaxation comme on a pu le voir plus haut ne peuvent être négligés.

À terme, une meilleure modélisation du comportement des articulations au sein de la LAS en simulation multi-corps transitoire apportera à PSA :

- une meilleure représentativité des simulations dans le domaine transitoire et un lien avec les autres domaines de sollicitations (fréquentiel, quasi-statique) ;
- une mise en évidence des phénomènes mécaniques ayant lieu dans l'articulation et susceptibles d'influencer le comportement global de la LAS ;
- l'amélioration de la prévision et la prévention des effets transitoires non désirés du comportement des articulations ;
- l'initialisation d'une réflexion sur les grandeurs pertinentes à fournir aux manufacturiers en terme de cahier des charges des articulations en caoutchouc pour obtenir le comportement désiré, une fois les pièces montées sur véhicule et ce notamment pour des sollicitations transitoires.

### 1.1.2 Objectifs et préalables industriels

Des études préliminaires au sein de PSA ont abouti à plusieurs conclusions quant aux moyens et aux outils à utiliser de façon préférentielle pour obtenir une nouvelle modélisation des articulations en caoutchouc en simulation multi-corps transitoire :

1. L'utilisation de l'outil **éléments finis** pour la modélisation des liaisons élastiques a été rejetée pour plusieurs raisons. D'une part, ces modèles ralentiraient trop la simulation. Et d'autre part, ils ne seraient d'aucune utilité en avance de phase, tant que la géométrie des pièces est inconnue. La modélisation que PSA souhaite obtenir ne doit pas être réalisée selon un point de vue microscopique, comme cela pourrait être le cas pour une modélisation éléments finis du CCNC, mais selon un point de vue macroscopique, celui du comportement l'ensemble de l'articulation {armatures +

corps en caoutchouc}.

2. Il a été décidé dans un premier temps de s'intéresser uniquement aux **sollicitations uni-directionnelles**. Le modèle adopté doit être une loi phénoménologique en traction compression donnant l'évolution des efforts en fonction des déplacements. Cela exclut la représentation des couplages tridimensionnels entre directions de sollicitations.
3. Les grandeurs caractéristiques à disposition des ingénieurs sont souvent des **données fréquentielles**. Il est donc préférable de s'adapter, de façon à pouvoir identifier un modèle temporel destiné à la modélisation transitoire sur des données fréquentielles. La représentativité du comportement temporel ne devra pas se faire au détriment de celle du comportement fréquentiel, mais en cohérence avec celui-ci pour un domaine de fréquence compris entre 1 Hz et 80 Hz, notamment aux basses fréquences qui sont cruciales pour le ressenti du conducteur. Cependant, ces données peuvent s'avérer insuffisantes à une identification correcte.
4. Un modèle destiné à la modélisation statique est déjà exploité chez PSA dans le cadre de simulations multi-corps statiques. Il s'agit du modèle **STS (Standard Triboelastic Solid)**. L'objectif de ces travaux est d'enrichir ce modèle, qui semble satisfaisant pour le service de conception de la LAS en terme de modélisation statique ou quasi-statique du comportement des articulations en caoutchouc. Ces travaux doivent donc pérenniser les acquis liés aux premiers travaux concernant le *STS* et les compléter en ajoutant à ce modèle la composante visco-élastique du comportement des liaisons élastiques.

Les autres contraintes liées à l'utilisation industrielle du modèle peuvent se résumer comme suit :

- utilisation aisée et implantation dans ADAMS<sup>®</sup> ou d'autres logiciels similaires ;
- performances en temps de calcul et robustesse de la convergence des calculs ;
- cohérence des comportements représentés avec la réalité, de même qu'entre réponses temporelle et fréquentielle ;
- rapidité d'identification des paramètres du modèle ;
- vérification de la pertinence du modèle sur une gamme variée de sollicitations.

## 1.2 Objectifs et préalables scientifiques

### 1.2.1 Modélisation du caoutchouc naturel

Les lois de comportement des matériaux utilisées pour la modélisation numérique sont de plus en plus complexes aujourd'hui. Elles sont souvent non-linéaires et dépendent d'un nombre croissant de paramètres. Cette tendance est liée à l'utilisation de codes éléments finis, dont les performances augmentent tout comme celles des machines de calcul.

Ce type de simulations éléments finis permet de modéliser finement le comportement d'un matériau, notamment pour l'endurance des pièces ou les crashes de véhicules automobiles. Dans ce dernier cas, les contraintes liées à la sécurité du conducteur et des passagers justifient le choix de lois fortement non-linéaires, ainsi que celui d'une précision et d'un temps de calcul importants. À l'opposé, dans le domaine de la conception de la LAS, où les délais sont sans cesse réduits en raison de la compétitivité accrue, de telles durées de calcul, chiffrées en jours, sont inenvisageables.

La diversité des approches, la quantité de travaux sur le comportement des élastomères et l'intérêt croissant de la communauté scientifique pour le sujet, se sont illustrés par la naissance en 1999 de la conférence européenne de modélisation du comportement des matériaux caoutchoucs, ECCMR (*European Conference of Constitutive Modelling of Rubber*) qui a lieu tous les deux ans. La littérature comporte de nombreux travaux sur le caoutchouc naturel chargé en noir de carbone et sur les élastomères en général. Cependant, les multiples non-linéarités de comportement, la complexité des structures microscopiques de tels matériaux, suscitent toujours de nombreuses interrogations et laissent le champ libre à de nouvelles investigations.

La plus grande partie du caoutchouc produit dans le monde est destinée à l'industrie automobile. Les études sur des pièces industrialisées constituées de CCNC, notamment les liaisons élastiques automobiles ou les blocs isolants parasismiques ont donné lieu à des modèles qui pour certains sont d'ores et déjà appliqués dans l'industrie. Par conséquent, l'objectif de cette thèse n'est pas d'étudier de façon approfondie chacun des comportements du caoutchouc, ceci ayant déjà été réalisé de façon extensive dans la littérature scientifique et industrielle. Des études expérimentales sont cependant présentées concernant certains comportements précis, notamment les comportements transitoires tels que la réponse en relaxation des articulations en CCNC.

Ce travail vise à répertorier les propriétés susceptibles d'influencer le comportement du véhicule et choisir parmi les modèles existants le plus pertinent, tout en réalisant les modifications nécessaires pour l'adapter à notre situation. Plusieurs

auteurs se sont intéressés spécifiquement à la représentation du comportement dynamique des articulations en caoutchouc comme Coja [18] et Boukamel [9]. Ils privilégient ainsi la modélisation du comportement fréquentiel au détriment du comportement temporel. Au sein des modèles existants, certains peuvent être utilisés dans le cadre de notre application, mais les contraintes industrielles ne permettent pas toujours de les implanter tels quels chez PSA. De plus, ils peuvent présenter des lacunes et ne modéliser qu'une partie du comportement transitoire qui est nécessaire à la simulation multi-corps.

### 1.2.2 Identification et modélisation numérique

Un point important à souligner est le domaine d'utilisation du futur modèle. Il apparaît très difficile de réaliser un modèle simple permettant de reproduire l'ensemble des comportements d'une liaison élastique, tant dans le domaine temporel que fréquentiel, et ce, sur de larges gammes d'amplitudes et de fréquences. C'est pourquoi, il est nécessaire de définir un cadre précis d'utilisation pour le nouveau modèle, ou bien d'adapter la procédure d'identification en fonction du domaine de simulation souhaité.

Ainsi, selon la prestation étudiée, comme on peut le voir dans le tableau 1.2, les domaines d'amplitudes et de fréquences ne sont pas les mêmes. De plus, selon l'approche choisie et les données ou mesures utilisées pour identifier les paramètres du modèle, certains comportements seront très bien représentés au détriment d'autres. Par exemple, un manque de données dans une gamme de fréquences ou des données surabondantes dans telle autre peuvent entraîner un biais dans l'identification.

| Prestation         | Domaine de fréquence | Domaine d'amplitude |
|--------------------|----------------------|---------------------|
| Trépidations       | 8 à 30 Hz            | 1 mm                |
| Percussions        | 10 à 40 Hz           | 5 mm                |
| Toucher de route   | 30 à 50 Hz           | maximum 0.1 mm      |
| Bruit de roulement | 40 à 800 Hz          | 0.1 mm              |
| Balourd de roue    | environ 20 Hz        | 1 mm                |

TAB. 1.2: Domaines d'amplitudes et de fréquences pour certaines prestations en ACoustique et Vibratoire (ACV).

Nous avons attaché une grande importance à la problématique d'identification paramétrique au cours de ce travail. Le choix d'un modèle est indissociable de celui d'une démarche d'identification, l'un ne devant pas pénaliser l'autre. Ces dernières années, des méthodes d'identification de plus en plus élaborées et variées ont été développées, afin de résoudre des problèmes inverses associés à des lois de

comportement mécanique, encore une fois, fortement non-linéaires et possédant de nombreux paramètres.

Si le nombre de paramètres du modèle d'articulation dans notre cas doit rester restreint pour limiter les données nécessaires à l'identification, ses équations du fait de l'introduction de la visco-élasticité et de l'hystérésis présentent des non-linéarités importantes. Ceci est principalement lié à la non-linéarité du comportement tant en amplitude qu'en fréquence du CCNC. Nous nous sommes donc intéressés à des méthodes d'identification temporelles avec un état adjoint pour les sollicitations quelconques du domaine temporel. Mais nous avons également dû prendre en compte, dans la mesure du possible, le caractère fréquentiel de certaines grandeurs utilisées dans le cahier des charges chez PSA et mettre en oeuvre une méthode d'approximation fréquentielle, en vue d'une identification dans ce domaine.

Les techniques de simulation multi-corps ont également beaucoup évolué ces dernières années et les méthodes numériques d'intégration associées aux logiciels sont de plus en plus rapides et performantes. La modélisation de structures complexes comme la LAS des véhicules automobiles donne lieu à des systèmes d'équations différentielles non-linéaires dits « systèmes d'équations différentielles algébriques » (EDA), qui possèdent un grand nombre de degrés de liberté.

Les intégrateurs dans les logiciels de simulation multi-corps sont particulièrement adaptés à ce type d'équations. Grâce à ces nouveaux outils mathématiques, l'intégration de modèles tels que ceux qui seront évoqués plus loin pour la modélisation des liaisons élastiques est facilitée.

Cependant, l'ajout d'un nombre important de modèles d'articulations en caoutchouc, risque d'entraîner des difficultés d'intégration et un allongement du temps de calcul. L'un des objectifs de ce travail est de limiter ce type de conséquences, néfastes dans le cadre d'une application industrielle, surtout en phase de conception, cette dernière étant sans cesse raccourcie.

### 1.2.3 Résumé des objectifs scientifiques

Les enjeux scientifiques peuvent donc être résumés par les quatre axes suivants :

- choix des comportements mécaniques des liaisons en caoutchouc nécessaires à la simulation multi-corps transitoire et étude plus approfondie de certains de ces comportements ;
- choix d'un modèle pertinent avec un nombre restreint de paramètres ;
- choix d'une modélisation numérique de ce modèle ne détériorant pas le



- temps de simulation ;
- recherche d’une méthode d’identification fine et adaptée à la non linéarité du modèle choisi.

## 1.3 Objectifs de la thèse

### 1.3.1 Résumé de la problématique

Ce travail de thèse, comme le soulignent les deux paragraphes précédents 1.1 et 1.2, combine enjeux industriels et scientifiques. La problématique principale de cette étude est la modélisation numérique des liaisons élastiques en caoutchouc pour la simulation multi-corps transitoire de la LAS. Autrement dit, ce modèle devra essentiellement fonctionner dans le domaine temporel. Il doit servir de base à une meilleure compréhension du comportement des articulations en caoutchouc et de leur impact sur les performances de la LAS. Dans le futur, une telle compréhension permettra de mieux spécifier les grandeurs caractéristiques de l’articulation aux manufacturiers et de mieux prévoir ou corriger certains dysfonctionnements de la LAS liés aux liaisons élastiques en caoutchouc.

Pour cela plusieurs objectifs doivent être atteints :

1. compréhension des comportements mécaniques de la liaison élastique en CCNC ;
2. choix d’un modèle représentatif des liaisons élastiques en CCNC en transitoire ;
3. implantation du modèle via des méthodes numériques pertinentes ;
4. élaboration d’une méthode d’identification adaptée ;
5. vérification de la pertinence de la modélisation au sein de la structure LAS ;
6. comparaison entre simulations et essais expérimentaux.

Le modèle en question doit se présenter sous forme de loi effort en fonction des déplacements, valable en transitoire sur certaines plages d’amplitudes et de fréquences, à savoir de un à une centaine de Hertz et de 0,05 à 5 mm environ. Ce modèle représente le comportement de la pièce. Il doit prendre en compte non seulement le matériau constitutif, mais également la géométrie de la cale de façon intrinsèque, contrairement à un modèle éléments finis. Par ailleurs, il doit modéliser le comportement temporel des articulations en caoutchouc, mais son comportement fréquentiel devra être cohérent avec le comportement dynamique des articulations en caoutchouc. En effet, les grandeurs caractéristiques des liaisons élastiques fournies aux manufacturiers dans le cahier des charges sont aussi appelées « spécifications », et ce sont principalement des données fréquentielles.

De plus, le modèle ne représentera pas le comportement tri-dimensionnel des liaisons élastiques, notamment les couplages entre directions de sollicitations. Ces derniers, d'après l'expérience des constructeurs automobiles et fabricants d'articulations, ne sont pas complètement négligeables.

Par ailleurs, comme indiqué au paragraphe précédent, l'objectif n'est pas d'obtenir un modèle dont le nombre de paramètres serait prohibitif. Le modèle doit être relativement simple et comporter une dizaine de paramètres maximum. Il doit être aisé à mettre en oeuvre et adaptable à différents logiciels.

Enfin, la démarche d'identification doit être cohérente de l'ensemble de ces exigences. Ces travaux doivent intégrer les acquis des recherches préliminaires effectuées par le service de conception de la LAS, notamment l'utilisation du modèle *STS* pour la simulation multi-corps quasi-statique des liaisons en caoutchouc.

#### **Déroulement du mémoire :**

Ce mémoire est orienté selon les quatre axes suivants :

1. bibliographie et étude expérimentale des liaisons en caoutchouc et de leur modélisation ;
2. choix, évaluation et intégration numérique d'un ou plusieurs modèles pertinents ;
3. introduction et évaluation du modèle dans ADAMS® et simulation de sollicitations types pour un modèle de véhicule complet en transitoire ;
4. identification paramétrique du modèle.

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude bibliographique des propriétés des cales. Les informations trouvées dans la littérature sont complétées par des études expérimentales, réalisées chez les manufacturiers d'articulations en caoutchouc. La dernière partie est consacrée à l'étude de quelques exemples de modèles élémentaires de liaisons élastiques.

Le **chapitre 3** traite du choix et de la mise en oeuvre de quelques uns des modèles les plus pertinents d'après l'étude bibliographique et expérimentale. Leur évaluation est réalisée via la comparaison entre des mesures sur pièces et la simulation de leur comportement sous Matlab® et Mathematica®. Enfin, les techniques numériques mises en place lors de l'intégration du modèle sont détaillées.

Une troisième partie, **chapitre 4**, est consacrée à l'implantation du modèle dans la structure de la LAS. L'introduction dans le logiciel ADAMS® et son uti-

lisation sont également détaillées. Quelques cas types de simulation multi-corps sont traités et comparés avec des mesures sur banc. D'autres sollicitations estimées proches de situations de vie du véhicule sont également analysées.

La dernière partie, **chapitre 5** aborde l'identification des paramètres, en commençant par une étude de sensibilité et une méthode empirique. Deux pistes pour élaborer des méthodes d'identification plus précises sont présentées, l'une destinée au domaine fréquentiel, basée sur l'utilisation des données habituellement disponibles chez PSA sur les cales, l'autre destinée au domaine temporel et aux sollicitations quelconques. Une étude de faisabilité de ces méthodes d'identification est réalisée mais ces méthodes ne sont pas systématisées. Des travaux ultérieurs d'industrialisation sur le sujet seront effectués chez PSA.



## Chapitre 2

---

# Propriétés et modélisation des articulations en caoutchouc

---

Ce premier chapitre décrit les caractéristiques du comportement mécanique des liaisons élastiques en Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone (CCNC) ainsi que leur modélisation. Afin de répondre à la problématique décrite en introduction, une première étude théorique consiste à recueillir des informations provenant de la littérature et d'essais expérimentaux réalisés en partenariat avec des fabricants d'articulations. L'ensemble de ces données est analysé afin d'en extraire les comportements pertinents pour notre étude.

La première partie de ce chapitre est consacrée à quelques généralités sur les liaisons élastiques. Des considérations sur la géométrie et la configuration de ces pièces nous orientent quant à la façon de les modéliser. Les sollicitations auxquelles elles sont soumises, ainsi que les composantes du comportement mécanique des articulations en CCNC sont également définies.

Il s'agit dans une seconde partie d'entrer dans le détail de chacun des comportements et de répertorier les phénomènes qu'il est pertinent de modéliser ou non dans le cadre d'une simulation transitoire multi-corps de la Liaison Au Sol (LAS). Ces comportements mécaniques sont usuellement subdivisés comme suit :

1. élasticité non-linéaire,
2. hystérésis,
3. visco-élasticité.

Des phénomènes indépendants de ces trois comportements, comme l'effet Mullins, sont également décrits.

Afin de mieux préciser quelles composantes peuvent avoir une influence, la description de certains comportements est accompagnée d'études expérimentales réalisées sur pièces réelles. L'ensemble des résultats expérimentaux est présenté en annexe **B**.

Enfin, une sélection de modèles pour chacun des comportements est présentée en dernière partie de ce chapitre. Cette présentation de modèles partiels permet d'anticiper sur les choix décrits au chapitre **3** concernant la modélisation des articulations en caoutchouc.

## **2.1 Les articulations élastiques en caoutchouc**

Comme il a été indiqué en introduction de ce mémoire, les liaisons élastiques sont des composants de la LAS qui permettent de relier deux pièces entre elles. Les articulations en caoutchouc peuvent également assurer l'interface entre la LAS et la caisse du véhicule, notamment pour garantir le filtrage Acoustique et Vibratoire (ACV).

Ces pièces mécaniques sont constituées de trois éléments solidaires entre eux : une armature extérieure en métal ou en plastique, un noyau métallique et un corps en CCNC. Les éléments sont assemblés entre eux par adhésion. L'illustration figure **1.4** permet de mieux appréhender ce composant.

L'étude de certaines articulations de la LAS est privilégiée dans ce mémoire, avec l'objectif ultime de généraliser le modèle au maximum de composants en CCNC ayant un comportement mécanique similaire aux pièces étudiées dans ce mémoire.

### **2.1.1 Généralités**

L'ensemble des travaux menés au cours de cette thèse concernent trois sortes de liaisons élastiques différentes :

- les articulations E1 arrière se situant sur l'essieu arrière,
- E1 avant du triangle de direction
- E2 avant du triangle de direction.

La localisation de ces articulations dans une LAS est présentée au chapitre **4** paragraphe **4.1.3**.

Les liaisons élastiques, grâce à leur corps en CCNC assurent la cohérence des composants de la LAS, tout en autorisant une certaine flexibilité selon les six degrés de liberté. Comme il est mis en évidence dans les articles de Leprivey [49] et Halconrui [34], elles sont essentielles au comportement routier et au confort d'un véhicule. Cependant, ce sont des pièces passives. C'est-à-dire qu'elles ne peuvent

être pilotées ou instrumentées pour réagir différemment selon les situations de vie du véhicule, contrairement à des cales hydrauliques ou magnéto-rhéologiques. Ceci explique l'intérêt pour les fabricants d'articulation de maîtriser les différentes composantes de leur comportement mécanique afin d'optimiser leur conception.

Pour les constructeurs automobiles, cette maîtrise passe par la réalisation d'un cahier des charges en accord avec leurs besoins. Les grandeurs spécifiées doivent être suffisantes pour obtenir le comportement attendu, mais laisser une marge aux manufacturiers d'articulations en caoutchouc pour adapter la liaison élastique au cahier des charges.

Les manufacturiers interviennent à la fois sur le matériau et sur le dessin des pièces pour satisfaire les besoins du constructeur automobile. Ce dernier attend un comportement macroscopique, l'équipementier dessine des pièces y répondant en jouant sur des leviers microscopiques (formulation du matériau, géométrie exacte des sous-ensembles de la pièce).

Les « spécifications » sont les grandeurs caractéristiques données par PSA dans le cahier des charges fourni aux équipementiers. Ces valeurs caractéristiques sont actuellement au nombre de cinq :

- raideur à 1 Hz, 1mm ;
- raideur à 15 Hz, 1 mm (ou 0.5 mm selon les capacités de la machine de mesure) ;
- raideur à 150 Hz, 0.1 mm ;
- tangente de l'angle de perte  $\phi$  à 15 Hz et 1 ou 0.5 mm ;
- raideur statique (mesurée sur un cycle lent à grande amplitude).

La définition exacte des grandeurs citées ci-dessus, comme la raideur, l'angle de perte ou la raideur statique, sera fournie un peu plus loin dans ce chapitre au paragraphe 2.2.4.

### 2.1.2 Influence de la géométrie et découplages axiaux

Les liaisons élastiques de LAS sont des éléments à la géométrie très variée en fonction de leur emplacement dans la LAS. Leur noyau métallique est emmanché sur une pièce du train ou sur la caisse du véhicule et leur armature externe en plastique ou métal est liée à une seconde pièce de la LAS ou à la caisse. Les mouvements relatifs entre le noyau et l'armature autorisés par la présence du corps en caoutchouc dépendent de la géométrie de chacun de ces trois éléments.

Les articulations E2 et E1 du triangle avant, sont de petits cylindres axi-symétriques, tandis que les cales E1 de traverse arrière présentent une géométrie plus complexe afin de favoriser certains modes de sollicitation du matériau. La

figure 2.1 présente différentes géométries du corps en caoutchouc selon l'axe principal des articulations.

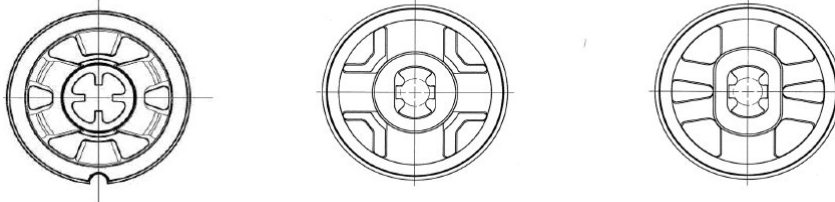


FIG. 2.1: Vue axiale du corps en caoutchouc de trois cales différentes.

Les noyaux et armatures ont des géométries elles aussi variées. Cependant, nous ne nous y intéresserons pas dans le détail. Leurs formes sont souvent liées à des contraintes de positionnement et d'assemblage de l'articulation dans la LAS. Elles n'influent que très peu sur le comportement mécanique de la pièce. La géométrie du corps en caoutchouc au contraire influe directement sur les comportements mécaniques qui nous intéressent.

La présence d'alvéoles sur la cale E1 arrière permet par exemple d'éviter de travailler immédiatement sur une raideur importante dans une direction donnée et pour des amplitudes faibles. La présence de nervures permet au contraire une rigidification du corps en caoutchouc selon certains axes. Par exemple, certaines liaisons présentent selon la direction axiale des collerettes en caoutchouc qui recouvrent l'une des faces de l'armature pour limiter les chocs et adoucir les saturations des efforts selon cette direction.

Une partie des propriétés des articulations en caoutchouc est donc issue des contacts ou interactions entre les différentes parties de la pièce. Le noyau, l'armature, les nervures et excroissances de matière, introduisent des saturations en effort et en déplacement, étant donné que le matériau caoutchouc est incompressible. Ces phénomènes induisent des **modifications de la courbe d'élasticité non-linéaire**  $K(x)$ , mais n'introduisent pas de nouveau comportement mécanique par rapport à ceux intrinsèques au matériau.

Les différents ergots du corps en caoutchouc peuvent venir en contact les uns avec les autres, créant localement des frottements secs supplémentaires et **augmentent l'hystérésis** naturellement associée au caoutchouc. C'est également le cas lorsque des alvéoles sont présentes et que leurs surfaces libres entrent en contact.

*La géométrie des articulations accentue donc des phénomènes déjà présents dans le matériau.* Elle peut être prise en compte comme une composante implicite



du comportement de la pièce.

Il existe plusieurs modes de sollicitation des liaisons élastiques. Ceux-ci sont indiqués à la figure 2.2 sous leur désignation industrielle. Ces appellations ne sont pas les dénominations classiques en mécanique.

La sollicitation dite « radiale », par exemple, n'est en réalité qu'une sollicitation de traction compression perpendiculaire à l'axe de l'articulation. Ces sollicitations dépendent des mouvements relatifs des pièces auxquelles sont reliés l'armature extérieure et le noyau de la pièce. Dans la figure 2.2, seuls les deux premiers cas de figure nous intéressent. Pour rappel, nous nous intéressons ici uniquement au comportement uni-axial en traction-compression des liaisons en caoutchouc.

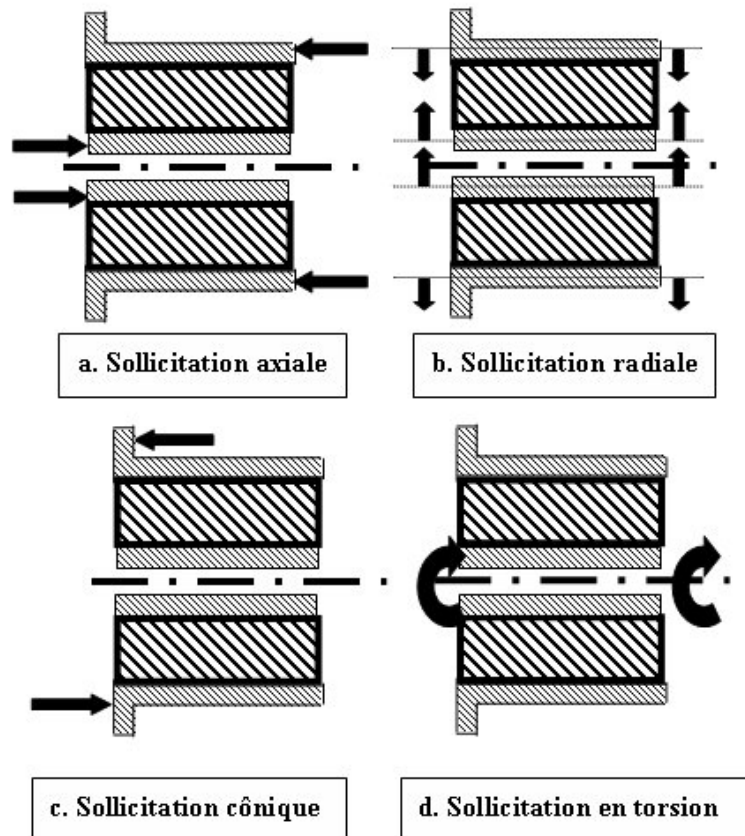


FIG. 2.2: Dénomination industrielle des modes de sollicitation des articulations en caoutchouc. Le corps en caoutchouc est en gris, la chape extérieure et le noyau en traits fins.

Les liaisons E1 arrières en figure 2.1 ne sont pas axisymétriques et présentent plusieurs bras de caoutchouc reliant noyau et armature. La différence de géométrie entre les bras horizontaux et verticaux est destinée à obtenir des raideurs différentes selon les deux axes. La géométrie des articulations en CCNC est destinée à introduire une anisotropie de comportement. Les équipementiers cherchent notamment à faire jouer la différence entre module de compression élevé et module de cisaillement plus faible. Il en résulte un découplage partiel du comportement selon ces deux directions. La transmission des efforts de direction selon l'axe horizontal est ainsi favorisée et les vibrations sont limitées selon l'axe vertical pour assurer le confort ACV.

Nous allons à présent nous livrer à un rapide calcul en nous plaçant face à une articulation selon sa direction axiale, comme sur la figure 2.3. Il est possible, en première approximation, de remplacer chacun des bras en caoutchouc par un ressort linéaire équivalent, en négligeant les comportements d'amortissement. L'axe vertical est noté  $x_1$  et  $x_2$  l'axe horizontal, et enfin  $x_3$  la direction axiale. Selon la direction de sollicitation, la raideur globale de l'articulation sera différente, comme il sera démontré par la suite.

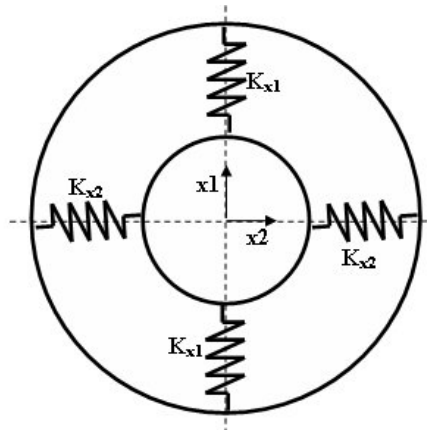


FIG. 2.3: Représentation schématique d'une modélisation purement élastique des bras en caoutchouc de la liaison élastique E1 arrière en vue axiale.

Nous avons déjà remarqué que les bras disposés selon les axes  $x_1$  et  $x_2$  sont différents, de plus la raideur en compression d'un bras n'est pas identique à celle observée en cisaillement. Supposons un mouvement vertical de la chape par rapport au noyau de la liaison, c'est-à-dire une sollicitation « radiale » pour les industriels. Les bras  $K_{x1}$  seront sollicités en traction-compression et seront assimilables à une raideur  $K_{x1}^{comp}$ , tandis que les bras  $K_{x2}$  seront sollicités en cisaillement et opposeront une raideur  $K_{x2}^{cis}$ . Les rôles sont inversés pour une sollicitation selon l'axe  $x_2$ . Par ailleurs, si l'on sollicite l'armature selon l'axe  $x_3$  du cylindre

en caoutchouc par rapport à son noyau, les quatre bras subiront un cisaillement. La raideur de cisaillement de chacun des bras selon cet axe  $x_3$  sera différente de celle observée selon  $x_1$  et  $x_2$ .

Pour résumer, si on sollicite la liaison élastique décrite en figure 2.3, la raideur totale équivalente en traction-compression vaudra :

- selon  $x_1$ ,  $K_{totx1} = 2K_{x1}^{comp} + 2K_{x2}^{cisx1}$  ;
- selon  $x_2$ ,  $K_{totx2} = 2K_{x2}^{comp} + 2K_{x1}^{cisx2}$  ;
- selon  $x_3$ ,  $K_{totx3} = 2K_{x1}^{cisx3} + 2K_{x2}^{cisx3}$ .

Il est possible d'étendre ce raisonnement à de la torsion, on aura alors un moment appliqué à l'armature par rapport au noyau de l'articulation. Dans ce cas, la raideur totale vaudra approximativement  $K_{tot}^{rotx3} = 2K_{x1}^{cisx2} + 2K_{x2}^{cisx1}$ .

D'après ce qui a été précédemment indiqué, les cales sont dessinées de façon à se déformer beaucoup en axial et en torsion. Au contraire, elles opposent une raideur importante en radial et en conique. Dans leur article [14], Busfield et Davies décrivent à partir d'une géométrie simplifiée les équations qui régissent les différentes raideurs associées à chacune des sollicitations pour une cale parfaitement cylindrique. De même, Sjöberg [72], Coja [18] puis Garcia [28] ont repris ce principe de calcul de raideur à partir de la géométrie dans leurs travaux de thèse respectifs.

### Exemple de calcul de facteur de forme

Dans ce paragraphe, nous allons donner un exemple de calcul de la courbe d'élasticité d'une cale de géométrie schématisée par un cylindre évidé en son centre. Il ne s'agit plus ici de considérer de simples raideurs disposées selon chacun des axes principaux de la pièce, mais bien l'aspect volumique de celle-ci. Ce calcul aboutit à un coefficient géométrique permettant de passer du module du matériau à la raideur de la pièce dans une direction. On considère alors que le matériau est isotrope.

Pour créer un déplacement du coeur de l'articulation par rapport à la chape selon  $x_3$ , il faut imposer un effort  $F$  ; la raideur selon cet axe vaudra donc :  $K_{x3} = \frac{F}{x_3} = \frac{2\pi Gl}{\ln(\chi)}$ , avec  $\chi = \frac{b}{a}$ . Les valeurs  $a$  et  $b$  désignent respectivement le rayon intérieur et extérieur de la cale,  $G$ , le module de cisaillement et  $l$ , la longueur ou hauteur de l'articulation. L'ensemble des raideurs pour une cale cylindrique est traité par Busfield et al. dans [14]. On retrouve ce genre d'approche dans l'article de Kim [44] sur l'optimisation du dessin des cales.

## 2.2 Comportement mécanique du CCNC et des cales

Le paragraphe précédent démontre que la géométrie des articulations en caoutchouc ne fait que modifier les trois catégories de comportements du CCNC cités en introduction de ce chapitre. Chacune de ces composantes va à présent être étudiée de façon plus précise dans cette section. Le schéma 2.4 met en correspondance ces trois comportements avec les éléments rhéologiques qui leur sont associés. Ces éléments rhéologiques sont souvent utilisés comme brique de base pour modéliser chacun des comportements du caoutchouc, comme nous le verrons au paragraphe 2.3.

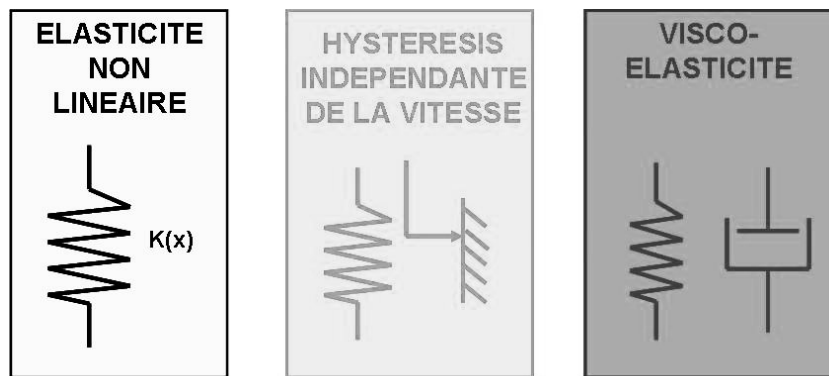


FIG. 2.4: Les trois comportements mécaniques principaux des liaisons élastiques en CCNC et les éléments rhéologiques qui leurs sont associés.

### 2.2.1 Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone

Les **polymères** sont une grande famille de matériaux. Ils ont en commun des macro-molécules à squelette carboné. Ces macro-molécules sont elles-mêmes constituées de parties élémentaires, appelées monomères, qui se répètent un grand nombre de fois le long du squelette.

Les polymères sont subdivisés selon leurs propriétés en deux catégories : les thermodurcissables, qui durcissent sous l'action de la chaleur et/ou d'un additif et les thermoplastiques qui redeviennent malléables après chauffage. Par ailleurs, on identifie une sous-catégorie, les élastomères, qui sont des polymères hautement déformables, et ce, de façon quasi-réversible. Ces derniers peuvent être soit thermodurcissables, soit thermoplastiques. Le **caoutchouc naturel** fait partie de la famille des polymères et de la sous-famille des **élastomères thermodurcissables**.

Le caoutchouc est issu d'une substance contenue dans l'écorce de l'hévéa, le latex. Le polymère qui constitue le latex est le **poly-isoprène**, dont une représentation est donnée en figure 2.5. On trouve parmi les additifs qui sont ajoutés au latex des huiles ou des **plastifiants** qui assouplissent le matériau. Certains composés, sous forme de particules, comme les agrégats de **noir de carbone** ou de silice, assurent en partie la tenue mécanique du caoutchouc en jouant sur sa rigidité.

Du **soufre** est également ajouté au mélange, il permet par processus de vulcanisation de réticuler les macro-molécules de poly-isoprène entre elles. Lors de cette opération, on chauffe le mélange de latex, d'additifs et de soufre ; ainsi des liaisons soufrées se créent entre chaînes carbonées pour former un réseau tridimensionnel plus ou moins régulier, qui confère son élasticité au caoutchouc.

Cette étape de production des pièces en caoutchouc est réalisée lors de la mise en forme grâce à des moules chauffants entre autres techniques. C'est également à ce moment que les inserts métalliques et plastiques sont mis en place, par une technique d'adhésion, induisant localement dans la pièce des contraintes résiduelles, compte-tenu des effets de retrait et de rétreint.

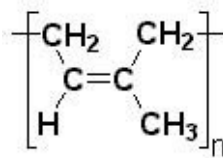


FIG. 2.5: Molécule de poly-isoprène, polymère constitutif du latex.

Outre la décomposition décrite figure 2.4, standard en mécanique des matériaux, un certain nombre de non-linéarités sont causes de phénomènes connexes. Certains comportements peuvent s'avérer gênants pour les performances d'un véhicule ou encore lors des caractérisations expérimentales des cales. Parmi ces comportements, nous étudierons tout particulièrement l'effet Payne ainsi que l'effet d'historique, qui sont associés au comportement hystérétique, comme nous allons le voir au paragraphe 2.2.3.

Les phénomènes de relaxation dans le caoutchouc sont, quant à eux, liés à la visco-élasticité du matériau, de même que les comportements dynamiques tels que la rigidification en fréquence. Ce que nous appelons « effet mémoire », est associé à la *mémoire évanescence* des matériaux visco-élastiques. Le comportement aux hautes températures est intimement lié au comportement temporel et donc visco-élastique du matériau, comme en témoigne l'équivalence entre temps et température de William Landel Ferry [26].

L'effet Mullins est souvent considéré comme un phénomène d'endommagement du caoutchouc, qui peut éventuellement influencer les trois grands comportements mécaniques du matériau. Il est particulièrement gênant pour les essais de caractérisation et doit être impérativement modélisé dans le cadre de lois de fatigue. Il n'influence cependant pas le comportement des véhicules dans le domaine transitoire.

## 2.2.2 Élasticité du caoutchouc

L'élasticité est la propriété des matériaux leur permettant de retrouver leur état initial après une déformation. Les élastomères ont pour particularité de pouvoir récupérer leur forme initiale après de très grandes déformations. L'élasticité non-linéaire du caoutchouc est un comportement réversible.

Cette élasticité peut être considérée comme isotrope si le matériau est amorphe, comme c'est le cas la plupart du temps pour le caoutchouc. Mais la géométrie du composant mécanique peut induire une très forte anisotropie du comportement de la pièce, comme précisé au paragraphe 2.1. Par ailleurs, les phénomènes de rétreint et de retrait lors du moulage et les conditions aux limites de la pièces induisent des contraintes résiduelles qui peuvent augmenter la non-linéarité de l'élasticité. De plus, les matériaux élastomères sont relativement incompressibles ; leur coefficient de Poisson est proche de 0,5. Le module de cisaillement est en général très inférieur au module de compression. Toute géométrie ou sollicitation qui produit une compression dans le matériau augmente les saturations en déplacement.

L'élasticité des articulations en caoutchouc permet la cohésion de la LAS et la bonne transmission des efforts de direction dans une automobile. L'impact de la non-linéarité élastique est actuellement pris en compte dans les simulations multi-corps transitoires chez PSA, sous forme d'une courbe linéaire continue par morceaux avec plusieurs ruptures de pente, qui donne l'effort en fonction du déplacement de l'armature de la cale par rapport à son noyau. En effet, lorsqu'on augmente la charge du véhicule, l'articulation ne travaille plus sur la même zone de la courbe d'élasticité non-linéaire, ce qui induit une rigidification plus ou moins importante de la pièce. Cependant, l'unique prise en compte de cette parcelle de la réponse mécanique des liaisons élastiques peut s'avérer insuffisante pour représenter la réalité du comportement de la LAS.

Quelle que soit la vitesse de déformation, le caoutchouc chargé en noir de carbone présente toujours une hystérésis. Une part de cette hystérésis est dite indépendante de la vitesse de sollicitation, l'autre est dite visco-élastique. Lorsque l'on impose une sollicitation cyclique à une liaison élastique, on observera donc

une courbe de charge et de décharge qui ne se superposent pas et forment un cycle d'hystérésis dans un diagramme effort en fonction des déplacements. Souvent, l'épaisseur de ce cycle est négligée lorsque l'on impose des sollicitations de grande amplitude.

On assimile alors le comportement élastique de la pièce en caoutchouc à la courbe moyenne de ce cycle. Pour les amplitudes plus faibles, les phénomènes dissipatifs deviennent prédominants, et l'épaisseur du cycle ne peut plus être négligée. Un cycle d'amplitude moyenne et la courbe moyenne correspondantes sont représentés en figure 2.6. On désignera par la suite la courbe moyenne comme étant la « loi filiforme » d'élasticité ou la « courbe élasto-cinématique ».

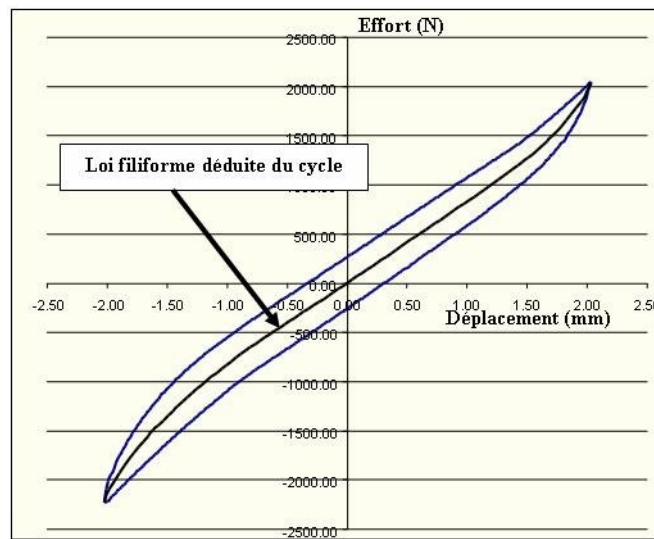


FIG. 2.6: Loi filiforme obtenue à partir d'un cycle à moyenne amplitude et faible vitesse (20mm/min).

Cette courbe non-linéaire donnant l'effort en fonction du déplacement peut être approchée par une courbe linéaire par morceaux, comme dans ADAMS<sup>®</sup> chez PSA, ou par une fonction dont la formulation sera détaillée au paragraphe 3.2.

Des approches microscopiques permettent d'obtenir à partir du nombre de chaînes et noeuds actifs dans l'élastomère, une loi d'élasticité du matériau, dite « élasticité caoutchoutique ou entropique », qui n'est valable qu'aux faibles déformations. L'hyper-élasticité est une extension de ce type de lois, utilisée pour les grandes déformations. L'une des lois hyper-élastiques les plus connues est celle de Mooney-Rivlin [53], [67]. On peut également citer, entre autres travaux, ceux d'Arruda et Boyce [4] sur un modèle à huit chaînes. Cependant, cette approche, habituellement utilisée pour les modèles éléments finis n'est pas envisageable dans notre étude. Le modèle recherché ici doit refléter le comportement global,

autrement dit, macroscopique, de la liaison élastique et non le comportement du matériau en mécanique des milieux continus.

Une dernière variante pour modéliser l'élasticité des cales, est détaillée dans [72]. Elle consiste à utiliser les paramètres géométriques simplifiés pour calculer la courbe d'élasticité non-linéaire. Si cette approche confère un caractère moins phénoménologique et plus physique à la loi obtenue, elle nécessite de connaître la géométrie de la pièce, ce qui ne sera pas toujours le cas lors de la phase de conception. On peut voir un exemple de ce type d'approche en fin du paragraphe 2.1.2.

### 2.2.3 Hystérésis indépendante du temps

Le terme « hystérésis » provient du grec *hysterein* qui signifie « être en retard ». Cette première acception est utilisée pour tous les systèmes qui provoquent un déphasage entre l'entrée et la sortie. L'hystérésis pure ou statique dont nous parlons ici, a plutôt le sens du mot grec *hystor*, qui désigne une dépendance à l'historique de sollicitation, mais pas au temps ou à la vitesse. Ainsi, un système est dit « hystérétique » si la relation entre entrée et sortie est une non-linéarité qui présente deux branches selon le « sens » de sollicitation du système. Le passage d'une branche à l'autre s'effectue après certains seuils ou extrema d'entrée.

L'hystérésis est la partie dissipative du comportement des articulations en caoutchouc qui est indépendante de la vitesse de sollicitation. Autrement dit, pour une vitesse très faible ou une vitesse très élevée, la contribution de ce comportement à la réponse globale de la cale aura le même niveau. On compare parfois le comportement hystérétique des élastomères à la plasticité des matériaux métalliques, bien que les origines microscopiques des deux phénomènes soient assez différentes. En pratique, la modélisation des deux comportements est souvent réalisée de la même façon.

L'hystérésis est associée à la présence de charges de noir de carbone dans le CCNC. Physiquement, on explique la dissipation hystérétique par des « frottements » déclenchés par les particules de noir de carbone dans le caoutchouc. Plusieurs explications microscopiques existent. La première d'entre elles est la suivante : les interactions faibles entre agrégats de noir de carbone mesurant de 10 à 600 nm de diamètre produisent un réseau secondaire dans la résine de caoutchouc. Ce réseau secondaire contribue à la cohésion du matériau. Les interactions faibles disparaissent lorsque les particules subissent des éloignements trop importants. La rupture de ces liaisons faibles dissipe de l'énergie. Une seconde interprétation considère que la dissipation d'énergie provient de la décohésion ou plutôt des frottements entre agrégats et macro-molécules.



L'hystérésis introduit également une notion d'historique des sollicitations antérieures et nécessite une mémorisation des sollicitations précédentes, que nous allons évoquer un peu plus loin dans ce paragraphe. Cette notion d'historique est indépendante du temps, contrairement à l'effet mémoire dont nous parlerons dans le paragraphe concernant la visco-élasticité. La réponse d'un système hystérétique indépendant du taux de déformation est invariante par une transformation de l'échelle de temps. Le matériau mémorise les points de changement de sens de sollicitation, ainsi que les niveaux d'amplitude en effort et en déplacement auxquels ce changement a lieu. Chaque pointe d'hystérésis, ou changement de direction de sollicitation, sera nommée au cours des paragraphes suivant « point de rebroussement ». Cette notion de point de rebroussement est essentielle pour la compréhension des effets d'historique.

L'hystérésis provoque également une non-linéarité en amplitude appelée « effet Payne ». On observe un assouplissement de la cale lorsque l'amplitude de sollicitation augmente. Cet effet s'oppose donc à la non-linéarité de l'élasticité, qui accroît la raideur des cycles avec l'amplitude. L'effet Payne et la prise en compte des phénomènes d'historique sont particulièrement importants pour le comportement de la LAS. Nous allons donc dès à présent nous attacher à décrire plus précisément l'effet Payne, puis l'effet d'historique, qui ont une contribution importante dans une modélisation temporelle transitoire, notamment pour le domaine d'amplitudes qui nous intéresse.

### Effet Payne

L'effet Payne [63] est une conséquence du comportement hystérétique des liaisons élastiques. Il est lié à la présence de charges de noir de carbone dans le caoutchouc naturel. Il est à noter que le taux de noir de carbone, sa dispersion, ainsi que la taille des particules sont susceptibles d'influencer ce phénomène comme indiqué par Harris dans [36]. Des essais réalisés par Trelleborg<sup>®</sup> ont confirmé l'influence du taux de noir de carbone sur l'amplitude du phénomène. Une illustration de l'influence du taux de noir de carbone sur la perte de raideur avec l'amplitude de sollicitation se trouve en figure 2.7. Des résultats comparables se trouvent dans l'article de Gil-Negrete [31]. Les articulations en caoutchouc de LAS présentent un taux de noir de carbone d'environ 43 % en masse, en anglais « parts per hundred parts of resin (phr) ». C'est un taux important, qui accroît considérablement la non-linéarité en amplitude. Au contraire, la courbe la plus foncée à 0 phr de noir de carbone ne présente pas d'effet Payne.

Ce phénomène a été étudié par Payne dès 1964 [62]. Lorsque l'amplitude de sollicitation augmente, le caoutchouc chargé en noir de carbone voit sa raideur diminuer, selon une loi sigmoïde qui forme un palier haut aux très petites am-

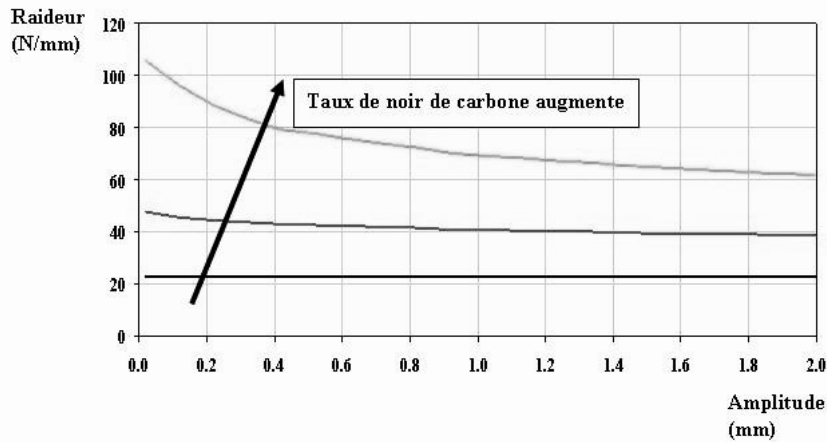


FIG. 2.7: Courbe expérimentale traduisant l'impact sur l'effet Payne de trois taux de noir de carbone (0 phr, 20 phr, 43 phr en allant de la courbe la plus foncée à la plus claire).

plitudes, jusqu'à  $1 \mu\text{m}$  environ et un palier bas aux grandes amplitudes, environ 4 ou 5 mm. L'angle de perte quant à lui augmente puis diminue. Lion, dans son article [51], décrit pour différentes fréquences de sollicitation ce phénomène, pour la partie réelle et la partie imaginaire du module d'un caoutchouc. Certains de ces résultats sont reproduits dans la figure 2.8.

L'effet Payne a à peu près les mêmes origines microscopiques que l'hystérésis. Lorsque les amplitudes sont grandes, les interactions faibles de Van der Waals dans le réseau secondaire d'agrégats disparaissent, induisant une raideur moins importante du matériau. Ces ruptures sont réversibles. Aussi, lorsque l'on retourne à de faibles amplitudes, la raideur augmente-t-elle. D'autres explications évoquent la décohésion entre macro-molécules et surface des agrégats, avec formation de liaisons à l'interface entre les deux phases aux faibles déformations.

### Effet d'historique

Les effets d'historique du comportement hystérétique d'un système peuvent être décrits grâce aux *règles de Madelung* et à la *loi de Masing*. Les *règles de Madelung* permettent de gérer le comportement en cas de petits cycles ayant lieu à l'intérieur d'un grand cycle d'hystérésis. Elles sont au nombre de trois, décrites dans le livre de Borkate et Sprekels [12] et illustrée en figure 2.9 :

1. Toute courbe  $\Gamma_1$ , issue d'un point de rebroussement  $R3$  dans le graphe effort en fonction du déplacement, est entièrement déterminée par les coordonnées

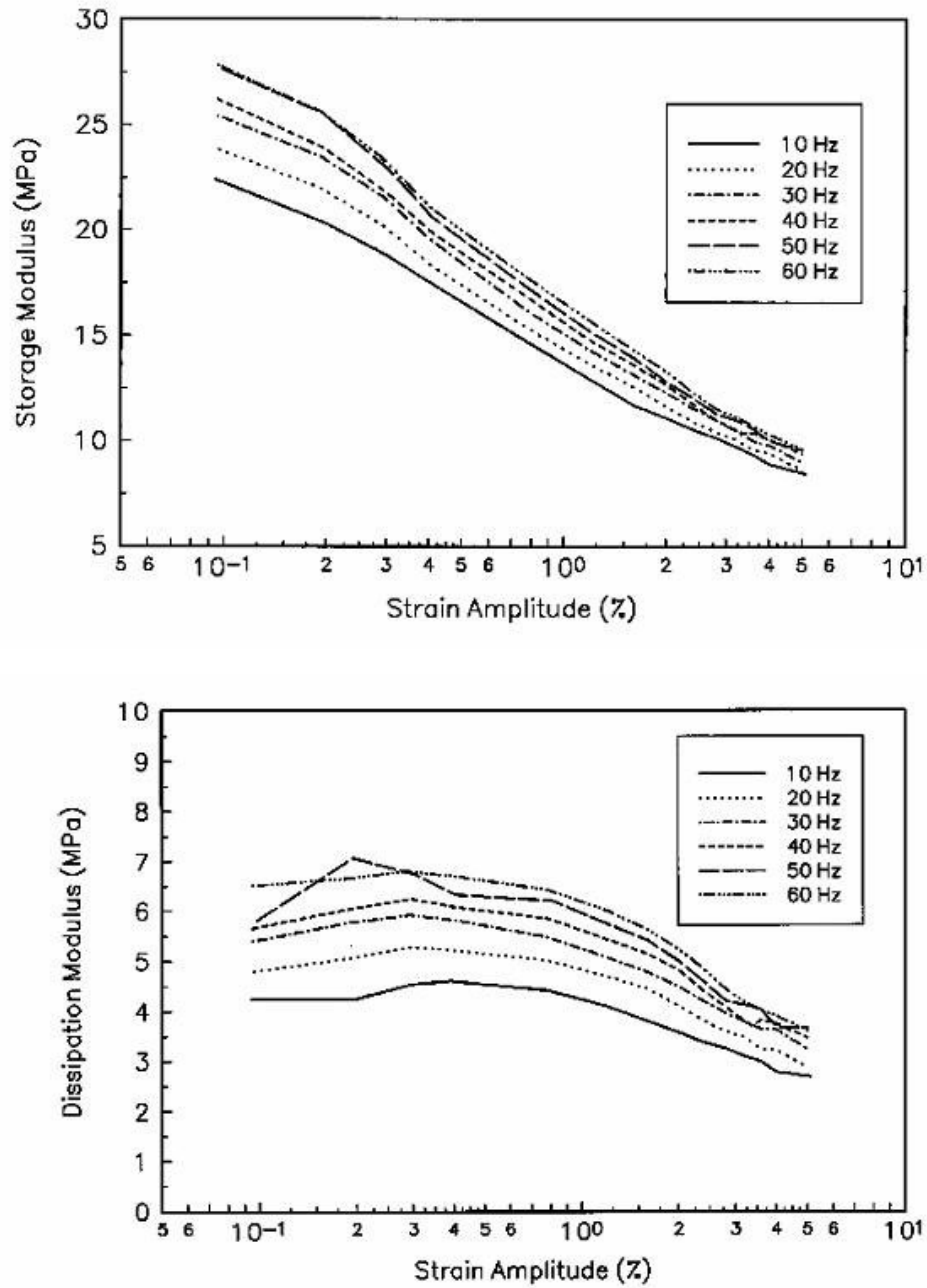


FIG. 2.8: Impact de l'effet Payne sur la partie réelle du module du caoutchouc (module de stockage) et sa partie imaginaire (module de perte) extrait de l'article de Lion [51].

de  $R3$ .

2. Si un point  $R4$  sur la courbe  $\Gamma_1$  devient à son tour point de rebroussement, alors la courbe  $\Gamma_2$  qui prend son origine en  $R4$  ramène au point  $R3$ .
3. Si la courbe  $\Gamma_2$  continue au-delà du point  $R3$  alors elle coïncide avec la courbe  $\Gamma$  qui a mené au point  $R3$  avant que le cycle  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ne soit parcouru.

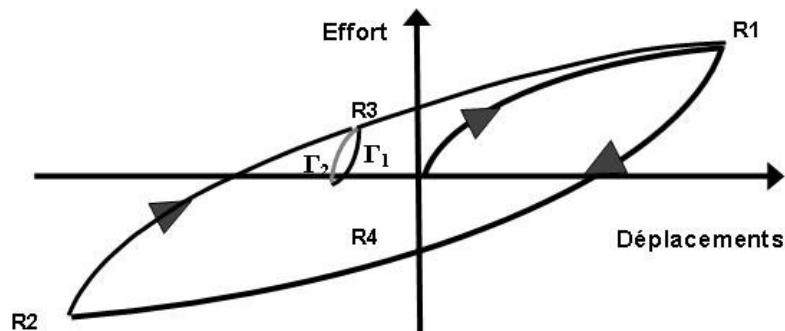


FIG. 2.9: Illustration des règles de Madelung sur un cycle de faible amplitude.

La *loi de Masing* [7] gère le passage du comportement avant premier rebroussement ou courbe maîtresse du modèle et après premier rebroussement. Il existe une homothétie entre la courbe de première charge et les courbes qui génèrent les cycles d'hystérésis qui suivent cette première sollicitation. Cette homothétie est représentée sur la figure 2.10, elle est de rapport 2 entre la courbe de première charge (avant  $R1$ ) et la courbe du cycle stabilisé (après  $R1$ ).

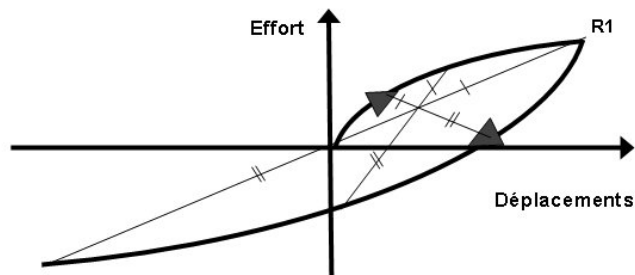


FIG. 2.10: Illustration de la loi de Masing.

### 2.2.4 Visco-élasticité

La dernière composante du comportement mécanique du caoutchouc et des articulations élastiques, est la visco-élasticité. C'est l'une des composantes les plus difficiles à modéliser. Elle influence autant la réponse temporelle que fréquentielle du caoutchouc. Elle provoque un certain nombre de phénomènes qui peuvent être gênants s'ils sont trop amplifiés dans une LAS : relaxation, rigidification fréquentielle, effets de mémoire évanescence. Ainsi la relaxation des contraintes dans la liaison élastique peut engendrer un retard dans la transmission des efforts de direction. Un tel retard peut être néfaste à l'appréciation de l'agrément de direction par les essayeurs. En revanche, une visco-élasticité trop faible pourra au contraire diminuer la capacité de dissipation des liaisons élastiques et réduire le confort ACV.

Ce comportement mécanique est identique à celui d'un fluide très visqueux. Contrairement à l'hystérésis, indépendante de la vitesse de sollicitation, la visco-élasticité n'est pas invariante par une transformation de l'échelle temporelle. La durée, la vitesse et la fréquence du chargement modifient la forme de la réponse. L'explication microscopique de cette composante est le frottement des molécules de caoutchouc entre elles lors de leurs mouvements relatifs. Le coefficient de frottement spécifique du monomère constitutif du CCNC (isoprène), noté  $\zeta_o$ , dépend beaucoup de la température, de la pression et de la quantité de plastifiants présents dans le mélange. Pour une molécule complète, possédant  $N_m$  monomères, la force de friction vaut  $F_{visc} = N_m \zeta_o \nu$ , où  $\nu$  est la vitesse de déplacement de la molécule. Ce comportement est décrit par Kramer, Hivdt et Ferry dans [45].

Ce mécanisme microscopique explique que cette composante du comportement des élastomères est fortement dépendante de la température. L'agitation thermique facilite les mouvements moléculaires ou reptations des chaînes et limite les effets visqueux. Inversement, une sollicitation rapide (temps de sollicitation court, vitesse ou fréquence élevées) ne laisse pas le temps aux molécules de se réorganiser dans le matériau. Ceci induit des effets visqueux plus importants aux hautes fréquences, ainsi qu'aux faibles températures. On explique ainsi la rigidification dynamique des articulations en caoutchouc.

L'une des conséquences de la visco-élasticité est l'apparition d'une mémoire évanescence dans le matériau. La réponse visco-élastique d'une articulation en caoutchouc va varier légèrement, selon l'histoire de chargement subie. Ce type de phénomènes est particulièrement bien illustré dans le domaine de la relaxation de contrainte. Une expérience de relaxation sur une pièce au repos ne sera donc pas identique à la réponse de cette même pièce qui a été précédemment déformée.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons mieux décrire trois phénomènes

attachés à la visco-élasticité et essentiels dans le cadre d'une modélisation transitoire en simulation multi-corps de la LAS :

- la rigidification en fréquence qui est associée aux problématiques de température ;
- les comportements transitoires tels que la relaxation ;
- la mémoire évanescence des matériaux visco-élastiques.

### Comportement dynamique des pièces en caoutchouc

Ce paragraphe va traiter du comportement dynamique du caoutchouc et des liaisons élastiques de la LAS. On appelle comportement dynamique la réponse d'un matériau soumis à une déformation harmonique de la forme  $u(t) = u_o \sin(\omega t)$  où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation de la sollicitation. Bien que la réponse des articulations en caoutchouc soit non-linéaire, c'est le premier harmonique qui est prédominant. Les mesures du comportement fréquentiel des articulations en caoutchouc sont d'ailleurs toujours réalisées sur la composante au premier harmonique de la réponse. Lorsqu'un matériau est linéaire, sa réponse au premier harmonique sera considérée comme étant de la forme  $F(t) = F_o \sin(\omega t + \delta)$ . On pourra encore écrire l'effort produit par l'articulation sous la forme :

$$F(t) = u_o(K'(\omega) \sin(\omega t) + K''(\omega) \cos(\omega t)) \quad (2.1)$$

Le déphasage  $\delta$  est produit par les deux composantes mécaniques hystérétiques et visco-élastiques. Cet angle est appelé « angle de perte ». Il traduit la dissipation d'énergie ou/et l'élasticité différée. Ce que l'on appelle communément la raideur dynamique de la cale est la valeur  $K_o$  du module de raideur complexe. Ce dernier est obtenu par analyse au premier harmonique. La partie réelle de la raideur est notée  $K'$  et s'appelle la « raideur de stockage ». Comme son nom l'indique, elle représente la partie de l'énergie que le matériau a stockée sous forme d'énergie élastique. La partie imaginaire notée  $K''$  représente la partie dissipative du comportement mécanique.

Nous allons plutôt nous intéresser ici à la raideur des cales et la tangente de l'angle de perte, qui sont des grandeurs caractéristiques très utilisées chez PSA. La raideur n'est autre que  $K_o = \sqrt{K'^2 + K''^2}$ . L'angle de perte est l'angle  $\delta$ , dans ces conditions la tangente de l'angle de perte vaut  $\tan(\delta) = \frac{K''}{K'}$ . On peut retrouver la plupart de ces définitions dans le livre de Gent [30].

L'évolution du module d'Young  $E$  d'un élastomère en fonction de la fréquence, ainsi que la tangente de l'angle de perte  $\tan(\delta)$  sont reproduits en figure 2.11.

L'évolution de la raideur et de l'angle de perte d'une articulation présentent qualitativement la même allure que celle du module et de l'angle de perte du caoutchouc.

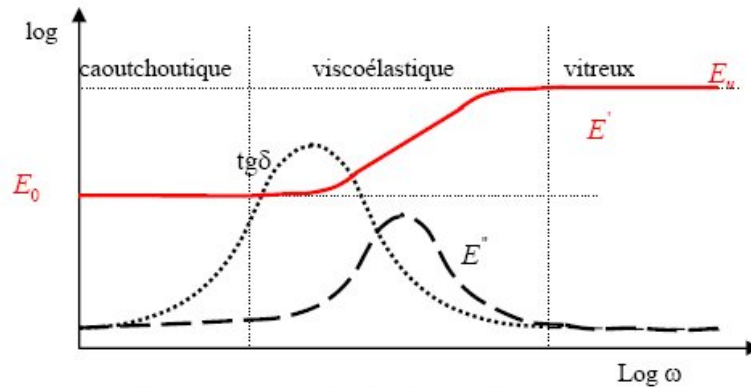


Figure I-4 - Evolution qualitative des modules avec la fréquence

FIG. 2.11: Évolution qualitative en échelle logarithmique du module complexe en fonction du logarithme de la fréquence (partie réelle  $E'$ , imaginaire  $E''$ , angle de perte  $\delta$ ). Figure extraite de la thèse de Coquelle [19].

On observe une dépendance du comportement du caoutchouc et des liaisons élastiques à la fréquence. On remarque sur la figure 2.11, qu'il existe trois domaines différents de comportement des pièces élastomères, selon que le matériau est à l'état vitreux aux fréquences élevées, caoutchoutique aux fréquences faibles ou visco-élastique dans le domaine intermédiaire. La loi WLF donne une équivalence entre le comportement temporel et le comportement en température pour certains polymères. Dans le cas du caoutchouc, on observe l'évolution indiquée en figure 2.12.

Nous allons à présent décrire plus précisément l'évolution du comportement mécanique des pièces en caoutchouc avec la fréquence et la température. Lorsque l'on augmente progressivement la température, ou que l'on diminue la fréquence, on rencontre successivement les états suivants :

1. L'état vitreux, pour lequel l'élastomère est très rigide.
2. La transition vitreuse ou visco-élastique. C'est une transition de second ordre car elle n'a pas de chaleur latente spécifique. Elle a lieu autour d'une température notée  $T_g$ ,  $-72^\circ C$  pour le caoutchouc naturel, qui induit un ramollissement important du matériau.
3. On atteint ensuite le plateau dit caoutchoutique, pour lequel le matériau a le comportement de haute élasticité des élastomères. l'évolution de la raideur

avec la fréquence et la température  $\gamma$  est moindre que dans la transition vitreuse.

Il arrive que le CCNC ayant subi une forte déformation, présente une structure cristalline. Dans la mesure où le caoutchouc naturel a une grande régularité dans ses molécules et possède des additifs naturels spécifiques à l'hévéa, il cristallise partiellement aux grandes déformations. Dans ce cas, en plus des trois domaines cités ci-dessus, il y aura une transition de fusion de la partie cristalline du caoutchouc (alignements de macro-molécules) à la température  $T_c$ . La température limite d'existence du matériau est notée  $T_f$ , température de fusion, à laquelle il y a destruction du caoutchouc.

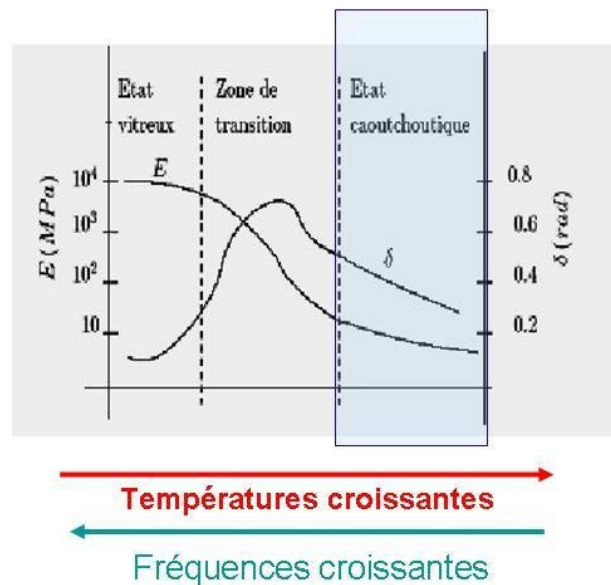


FIG. 2.12: Évolution qualitative du module de raideur et de l'angle de perte pour une température qui augmente ou une fréquence qui décroît ; à température ambiante le domaine d'existence du caoutchouc est l'état caoutchoutique.

La température de transition vitreuse du caoutchouc est inférieure à la température ambiante. Le CCNC possède aux températures proches de  $20^\circ C$  une élasticité importante car il est à l'état caoutchoutique. Il est à noter que la dissipation d'énergie dans le caoutchouc est réalisée pour la plus grande part sous forme de chaleur. Pour certaines gammes de sollicitations, cette chaleur n'a pas le temps d'être évacuée, d'autant que le CCNC est un isolant thermique. On observe dans certains cas de charge un échauffement non négligeable, qui peut engendrer une évolution des propriétés mécaniques de l'articulation.

Ces phénomènes ont été étudiés avec plus de précision au sein de PSA dans



[47]. Lechenadec démontre dans sa thèse que l'échauffement des cales dépasse parfois la dizaine de degrés, si la sollicitation est d'amplitude assez importante et de longue durée. Cependant, la modélisation des différentes pièces de LAS dans ADAMS<sup>®</sup> ne prend pas en compte l'impact de la température ambiante, ni l'auto-échauffement des différentes pièces de la LAS. De plus, les sollicitations, pour lesquelles le modèle élaboré au cours de ce mémoire est destiné, ne sont pas sévères. Elles ne produiront qu'un échauffement négligeable et des évolutions de propriétés mécaniques d'un ordre de grandeur faible.

La figure 2.13 montre l'évolution de la raideur avec la fréquence pour le domaine qui nous intéresse, c'est-à-dire dans la zone caoutchoutique. On peut voir que, bien que cette rigidification dynamique ne soit pas très importante, elle n'est pas négligeable dans le cadre de la modélisation du comportement fin d'un véhicule. L'ampleur du phénomène est moindre par rapport à la baisse de raideur induite par l'effet Payne. On perd environ 50 % de raideur avec l'effet Payne contre 20 % avec la rigidification dynamique sur le domaine que nous étudions.

En plus de la rigidification de la cale, son angle de perte augmente également très légèrement comme indiqué sur la courbe expérimentale 2.14. On peut observer sur les figures 2.13 et 2.14 l'effet Payne. Plusieurs amplitudes de sollicitation sont représentées. Les raideurs diminuent avec l'amplitude et l'angle de perte augmente jusqu'à 0,2 mm puis diminue.

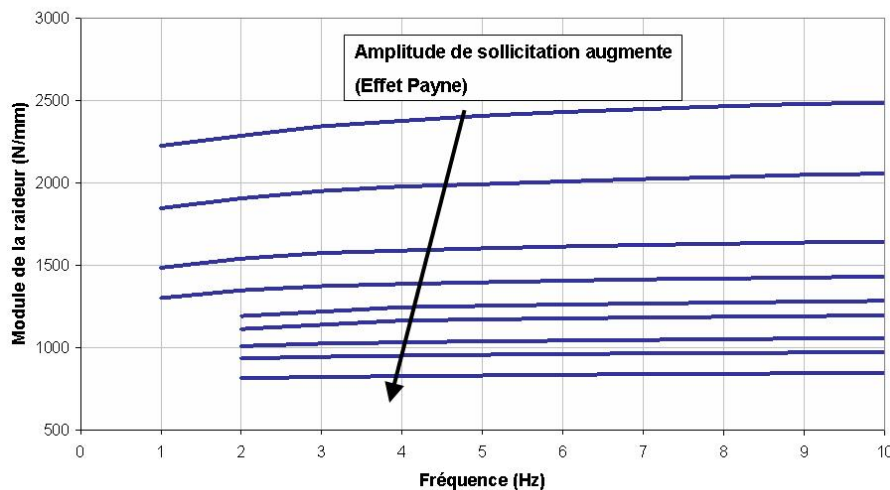


FIG. 2.13: Courbe expérimentale représentant l'évolution de la raideur dynamique avec la fréquence pour des amplitudes de 0,01, 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,75, 1 et 2 mm.

La rigidification dynamique se traduit également par des changements de

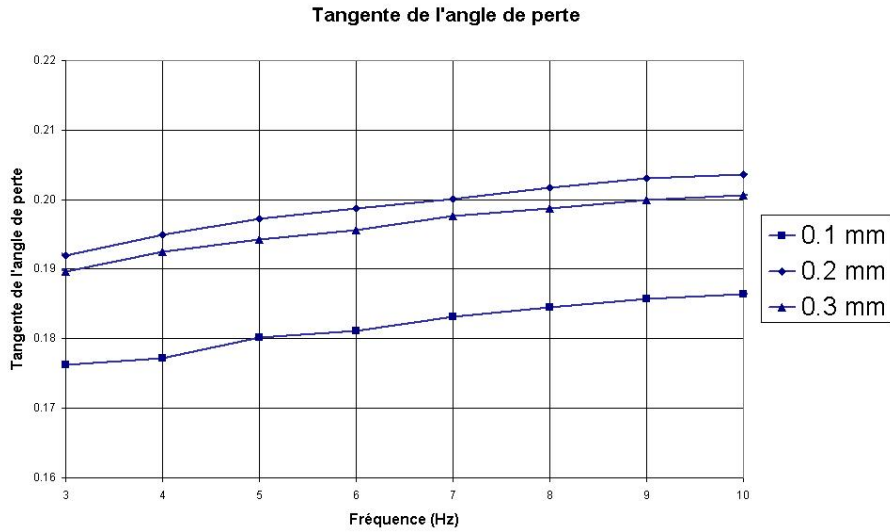


FIG. 2.14: Courbe expérimentale représentant l'évolution de la tangente de l'angle de perte dynamique avec la fréquence pour des amplitudes de 0,1, 0,2 et 0,3 mm.

forme de la courbe d'hystérésis lorsqu'on augmente la vitesse de sollicitation sur une sollicitation de type triangle en déplacement. Ainsi, la surface de l'hystérésis de même que la dissipation augmentent avec la vitesse. La courbe d'hystérésis s'arrondit tandis que son angle de perte et sa raideur augmentent. Une illustration de la dépendance en vitesse de sollicitation est donnée en figure 2.15. Ces évolutions sont assez peu sensibles et il est nécessaire d'augmenter la vitesse d'un facteur 1000 pour observer une véritable différence entre les réponses à deux vitesses de sollicitation.

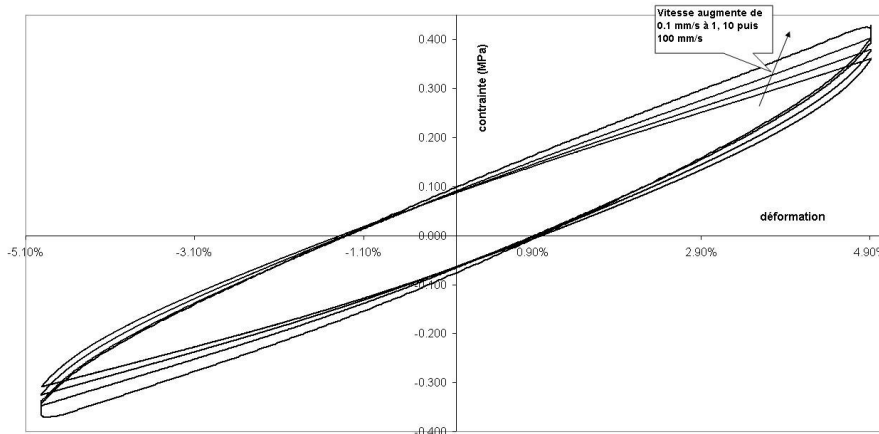


FIG. 2.15: Courbe expérimentale montrant l'évolution d'un cycle d'hystérésis en sollicitation triangulaire pour des vitesses allant de 0.1 à 100 mm/min.

Nous nous intéressons à des fréquences assez faibles : 100 Hz maximum. À de telles fréquences, les modes propres des articulations en caoutchouc ne sont pas sollicités et ne doivent donc pas être nécessairement pris en compte dans la modélisation. Les premiers d'entre eux se trouvent aux alentours de 500 Hz.

Nous avons parlé de la raideur dynamique au cours de ce paragraphe. Elle est calculée sur la réponse d'une sollicitation harmonique grâce à une analyse de Fourier. Une autre raideur, dite quasi-statique sert à caractériser le comportement des cales. Cette raideur est mesurée sur un cycle répondant à une sollicitation très lente de forme triangulaire, dite « sollicitation quasi-statique ». On mesure la pente moyenne du cycle, soit à partir des deux tangentes extrêmes de celui-ci, soit en traçant une ligne moyenne. Cette raideur est supposée représenter le comportement statique, c'est-à-dire la raideur à une fréquence nulle.

### **Relaxation et autres phénomènes transitoires visco-élastiques**

Le comportement transitoire des articulations en caoutchouc est fortement influencé par la visco-élasticité. Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe aux comportements de relaxation qui mettent en évidence les caractéristiques visco-élastiques transitoires d'un matériau. Une attention particulière est portée au comportement transitoire des articulations en caoutchouc. Cela se justifie par le fait que les phénomènes de relaxation sont probablement à l'origine de certains comportements indésirables de la LAS. On espère ainsi, en les étudiant plus finement, les modéliser de façon pertinente et mettre en évidence leur impact lors de simulations multi-corps en transitoire.

Lorsqu'une liaison élastique est soumise à un échelon en déplacement, sa réponse n'est pas immédiate et l'effort évolue pendant que les déplacements restent constants. On dit qu'il y a relaxation des efforts ou des contraintes selon la grandeur observée. On obtient alors des courbes qui ont l'aspect indiqué en figure 2.16. Le fluage quant à lui correspond à un échelon en effort imposé à la cale dont les déplacements évoluent à effort constant ; il correspond à une situation de repos statique du véhicule.

Comme cette étude porte principalement sur le comportement transitoire, les études expérimentales réalisées au cours de ces travaux, se sont orientées principalement sur des essais de relaxation. Des études approfondies sur le comportement mécanique en relaxation ont été menées en collaboration avec les fournisseurs, afin de mieux comprendre l'impact de ce phénomène : ses non-linéarités et sa relation avec l'effet de mémoire évanescence. L'étude expérimentale complète se trouve en annexe B.

L'étude comporte des essais de relaxation à différentes amplitudes de sollicitation, différentes vitesses ou temps de montée pour atteindre le déplacement maximal. La relaxation du CCNC n'a rien à voir avec la relaxation exponentielle d'une cellule de Maxwell comportant des éléments linéaires.

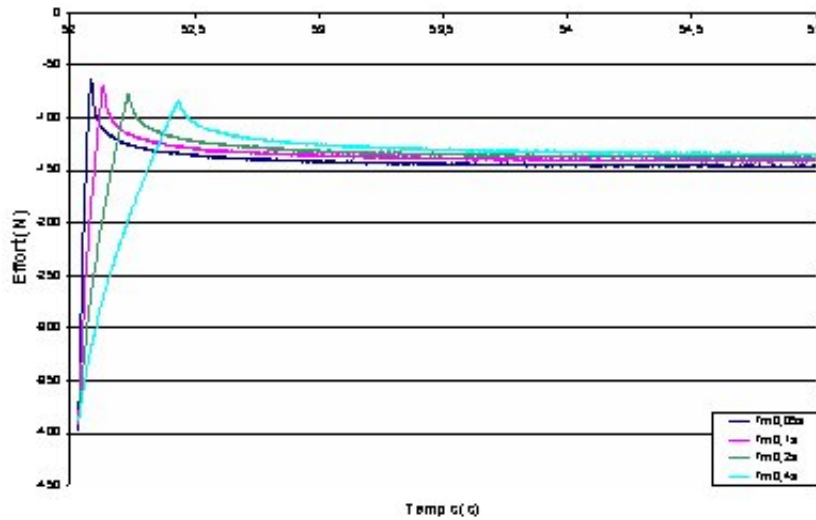


FIG. 2.16: Différentes courbes expérimentales de relaxation en réponse à des échelons de déplacement appliqués à des vitesses plus ou moins importantes (temps de montée de 0,05, 1, 2 et 4 secondes).

Les propriétés usuelles du caoutchouc en relaxation ont été confirmées. La vitesse de montée conditionne le niveau d'effort maximum atteint lors de l'essai. Plus la vitesse de montée est élevée, plus les effets visco-élastiques seront importants. Ce type de phénomène correspond tout à fait à ce que l'on peut attendre d'un matériau visco-élastique.

Le niveau de l'échelon lors de l'essai de relaxation joue également un rôle important : plus l'amplitude du chargement est élevée, plus l'effort atteint l'est (voir figure 2.18). L'effort obtenu après une période de relaxation fixée, n'est pas proportionnel à l'effort maximum atteint. La baisse d'effort dans l'articulation est moins importante en pourcentage pour des grandes amplitudes. Mais dans l'absolu, la différence entre effort maximum atteint et effort obtenu après une dizaine de secondes, augmente bien avec l'amplitude de sollicitation. Pour des temps de montée longs, on voit beaucoup moins les effets visco-élastiques de l'amplitude et de la vitesse de sollicitation. Mais pour un temps de montée plus court, qui permet à tous les effets de retard visco-élastique de s'exprimer, on voit nettement les différences (voir comparaison entre les courbes expérimentales figures 2.18 et 2.19).

Enfin, pour des temps importants de relaxation, on remarque que la courbe évolue différemment selon l'échelle de temps. Ainsi, pour des temps courts, inféri-

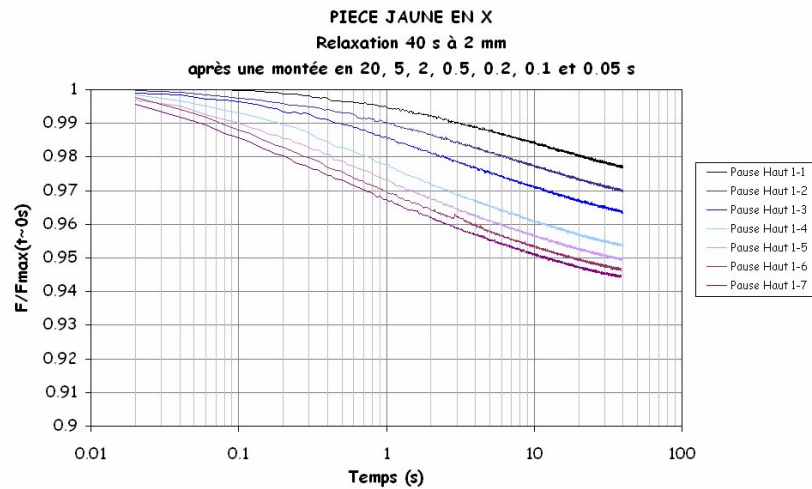


FIG. 2.17: Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacement de 2mm avec des temps de montée allant de 20 à 0.05 secondes.

eurs à 2 s, on peut observer une certaine pente de relaxation ; au-delà, la pente augmente. Pour des temps très longs, c'est-à-dire en chauffant le matériau pour utiliser l'équivalence temps-température [26], on peut observer que l'effort finit par diminuer très vite. Cependant, les phénomènes que nous étudions dans le domaine de la dynamique du véhicule transitoire sont des phénomènes de courte durée. Des simulations de plusieurs heures de roulage sont très rares et ne nécessitent pas une modélisation fine du comportement des liaisons élastiques.

La relaxation cyclique est issue de la superposition du comportement de relaxation et du comportement cyclique, comme indiqué par Blès dans sa thèse [7]. En effet, contrairement à ce qui peut être observé sur peu de cycles, lors d'une sollicitation cyclique de longue durée, accompagnée d'une précharge (sollicitation échelon à grande échelle) on peut observer une dérive plus ou moins importante des cycles comme sur la figure 2.20. Pour un nombre de cycles moins important, seuls les quelques premiers cycles semblent dériver pour tendre vers un cycle stabilisé.

### Effet mémoire évanescence

L'effet mémoire de la visco-élasticité, résulte du fait que la réponse d'un matériau visco-élastique dépend non seulement de la déformation et de l'effort instantanés auxquels il est soumis, mais également de l'historique de sollicita-

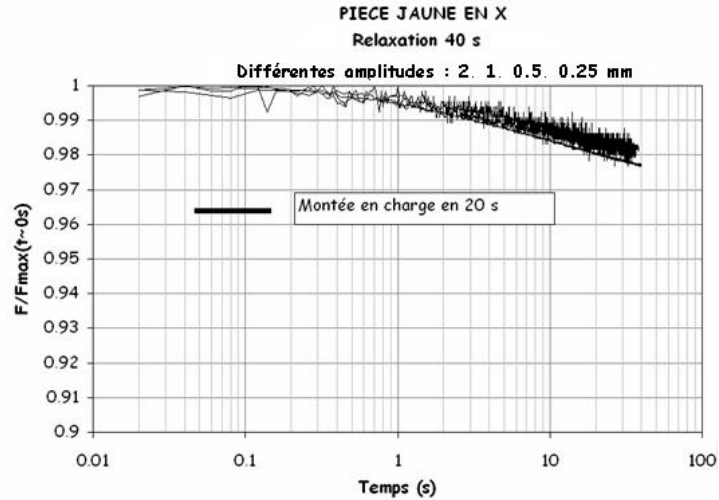


FIG. 2.18: Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacements de 2, 1, 0.5 et 0.25 mm avec un temps de montée de 20 secondes.

tion qui précède. Cet effet mémoire, contrairement à l'effet d'historique n'est pas indépendant du temps. Ce comportement est tout à fait visible sur des sollicitations de type relaxations répétées. La réponse de la cale dépendra non seulement du parcours de sollicitation en déplacement (règles de Masing et Madelung), mais également du temps mis à effectuer ce parcours, comme cela est précisé par Haupt dans [38].

Ainsi, deux relaxations successives sur une même cale ne donneront pas la même réponse en effort que si l'on effectue chacune de ces deux relaxations non successivement sur l'articulation. De même, selon l'historique de sollicitation précédent, la relaxation n'aura pas la même forme, comme on peut l'observer sur les deux figures 2.21 et 2.22. Une seconde étude en collaboration avec des équipementiers, également présentée en annexe B nous a permis d'obtenir quelques résultats expérimentaux sur ce sujet. Des essais dits « sapin » ou en « épi » sont des sollicitations permettant de bien caractériser ce type de comportement. On fait subir à une pièce un chargement cyclique au cours duquel plusieurs pauses de relaxation sont imposées. Ces essais sont présentés en annexe B.

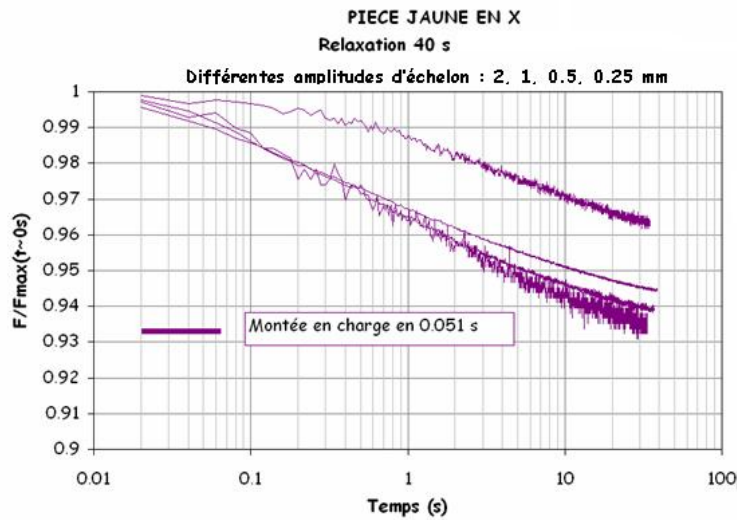


FIG. 2.19: Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacements de 2, 1, 0.5 et 0.25 mm avec un temps de montée de 0.05 secondes.

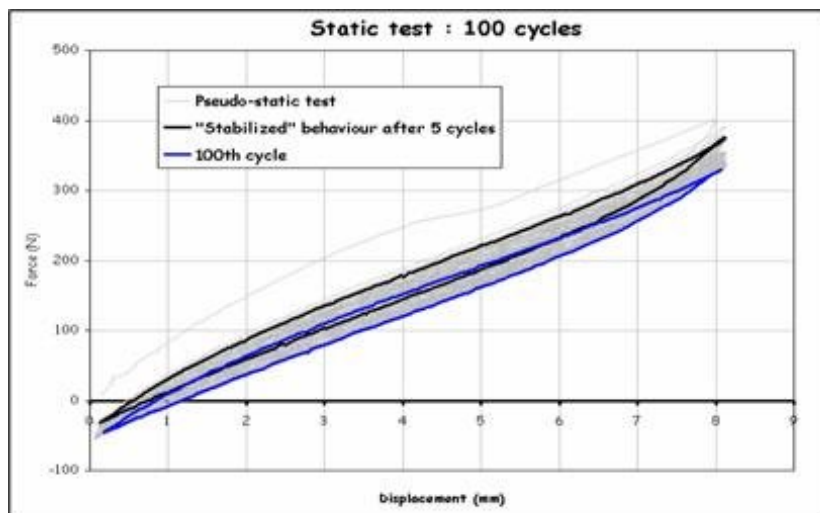


FIG. 2.20: Dérive des cycles pour une sollicitation cyclique constante de longue durée (ici cent cycles de 4 millimètres d'amplitude à une précharge statique de 200 N).

On remarque que plus le matériau a déjà subi d'échelons avec des temps de récupération courts, plus la relaxation suivante est importante. En effet, l'énergie emmagasinée lors d'un écrasement, n'est pas complètement relaxée au cours d'une faible période de relaxation, si on ajoute alors un deuxième échelon en écrasement, la relaxation suivante sera liée à ce dernier échelon et aux effets de l'échelon précédent. Par ailleurs, une relaxation inverse après un point de rebroussement présentera des effets combinés des précédentes relaxations et de la relaxation inverse.

On peut ainsi voir qu'en effectuant une relaxation à différents stades du cycle d'hystérésis, pour une même vitesse de montée, la relaxation est de plus en plus marquée (courbes de la figure 2.23). De plus, toujours sur la même figure, on observe que la courbe de relaxation après rebroussement est quasiment plate, voire repart dans le sens inverse de relaxation. Ce dernier phénomène est lié au fait que le changement de sens de sollicitation, c'est-à-dire le point de rebroussement, est mémorisé par la courbe. Il introduit un changement de sens de vitesse de sollicitation, et la pièce emmagasine à ce moment un fort potentiel visco-élastique. De ce fait, la réponse de la cale présente deux relaxations superposées, l'une correspondant au changement de sens de sollicitation, l'autre correspondant à l'échelon. Le changement de sens de sollicitation introduit un comportement transitoire, qui compense partiellement la première relaxation. On a donc bien une dépendance à la sollicitation qui s'estompe au fur et à mesure qu'on s'éloigne de cette sollicitation dans le temps (et l'espace).

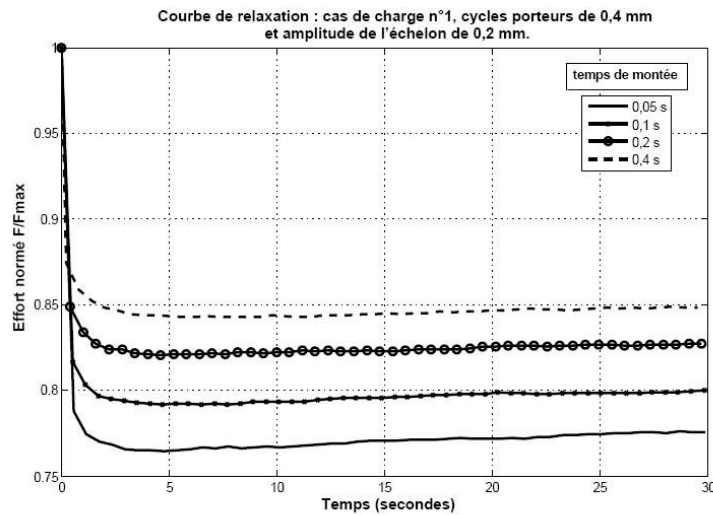


FIG. 2.21: Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge n°1 en annexe B.

Un autre exemple des phénomènes liés à l'effet mémoire est celui qui consiste à



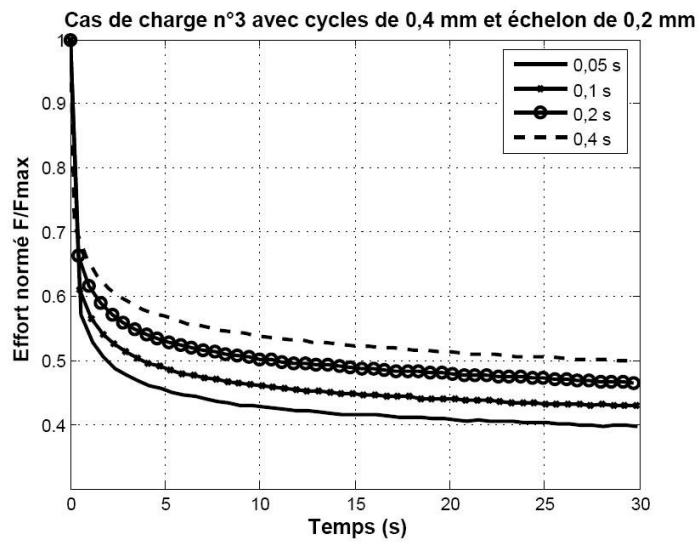


FIG. 2.22: Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge n°3 en annexe B.

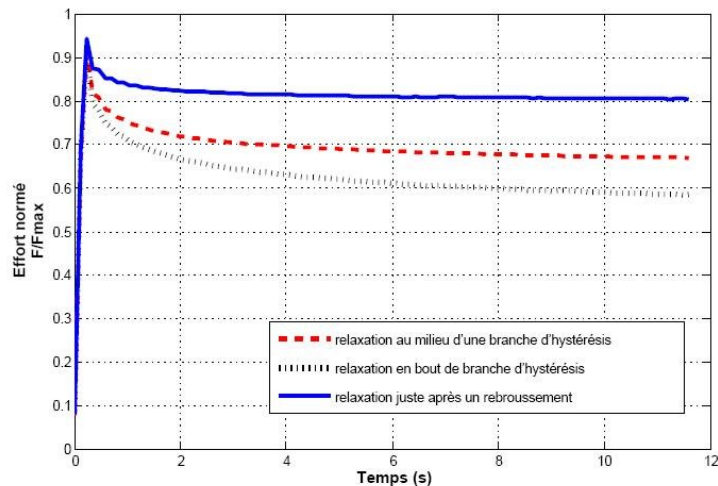


FIG. 2.23: Relaxations de durées identiques à même vitesse de montée à différents stades du cycle d'hystérésis.

imposer deux historiques de déplacement différents et à effectuer la même relaxation par la suite, comme sur le graphique 2.24. Dans ce cas, on voit clairement que selon le type de sollicitation qui précède la relaxation, la réponse visco-élastique ne se manifeste pas de la même façon et dans les mêmes proportions dans l'effort restitué par l'articulation. Ainsi, dans l'article [39], Haupt et Sedlan mettent-ils en évidence l'importance de l'historique antérieur de sollicitations lors d'un essai de relaxation. Ceci est tout à fait évident sur des essais dits « sapin » ou

en « épi », qui font subir à la pièce plusieurs relaxations successives à différents niveaux d'un cycle de chargement et de déchargement voir annexe B.

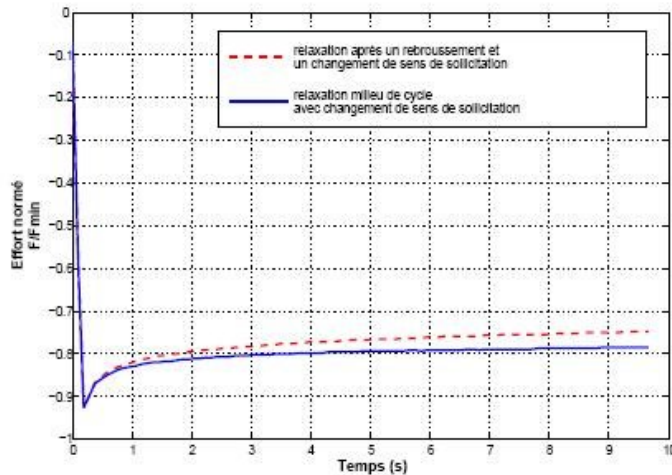


FIG. 2.24: Deux relaxations inverses de vitesses et amplitudes de sollicitation échelon identiques

### Couplage hystérético-visco-élastique

Une étude spécifique a été menée pour déterminer si les comportements visco-élastiques et hystérétiques pouvaient réellement être représentés par des composantes parallèles dans un modèle rhéologique. En d'autres termes, on a cherché à vérifier la superposition de Boltzmann. À cette fin, des essais à différents taux de noir de carbone ont été réalisés, dans le but de mesurer la rigidification fréquentielle et en amplitude de ces différents CCNC. Cette étude est la seule qui a été réalisée sur éprouvettes en caoutchouc. Elle a déjà été évoquée au paragraphe 2.2.3 concernant l'effet Payne .

En théorie si les deux comportements sont indépendants, l'effet Payne devrait varier avec le taux de noir de carbone. Le comportement dynamique, quant à lui, devrait toujours présenter une rigidification ; les valeurs seront alors translatées vers des niveaux plus faibles en raideur et en tangente d'angle de perte.

Cependant, les résultats obtenus ont montré que le taux de noir de carbone influençait également la rigidification fréquentielle. En effet, non seulement la courbe de balayage en fréquence est translatée, mais elle présente aussi une rigidification moins importante lorsque le taux de noir de carbone diminue, comme on peut l'observer sur les figures 2.25, 2.26 et 2.27. Il est donc plus pertinent de choisir un modèle qui lie l'hystérésis et la visco-élasticité, et non qui les superpose de façon indépendante.

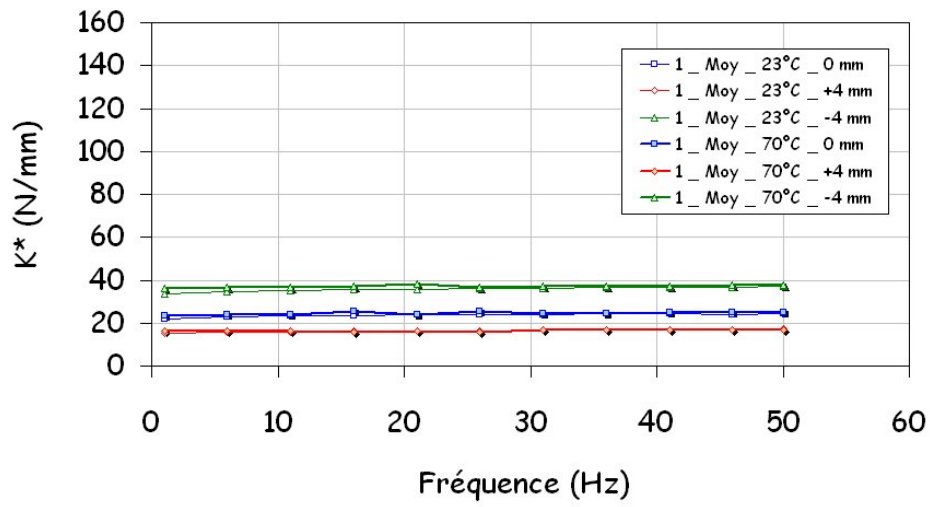


FIG. 2.25: Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 0 phr de noir de carbone.

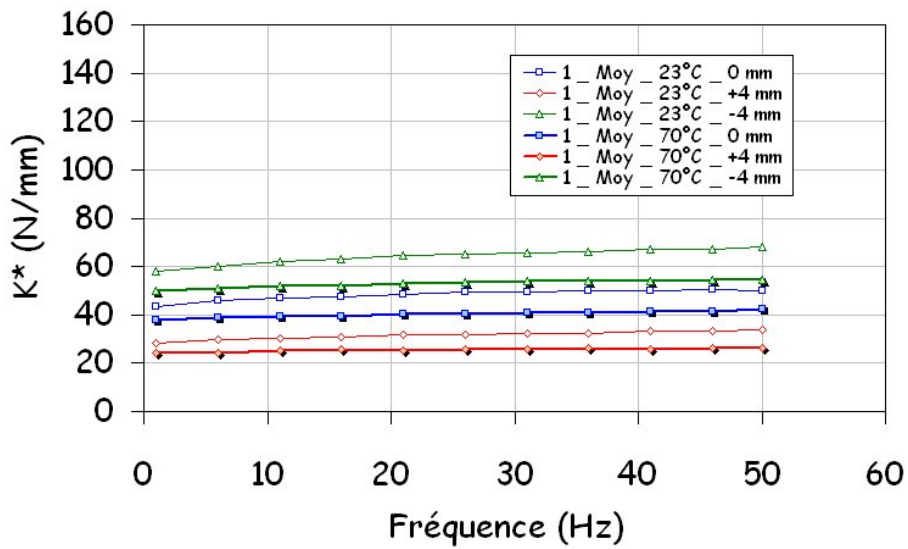


FIG. 2.26: Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 20 phr de noir de carbone.

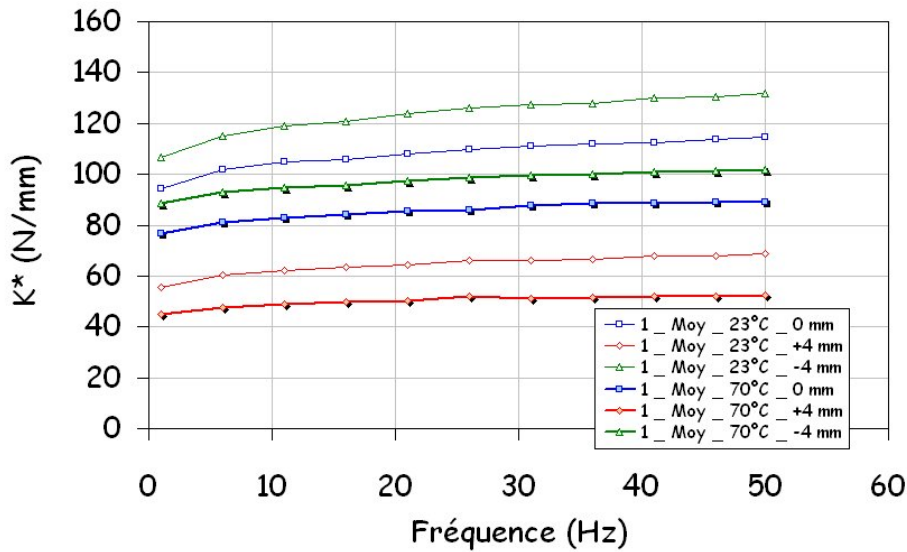


FIG. 2.27: Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 43 phr de noir de carbone.

### 2.2.5 Effet Mullins

Le caoutchouc naturel chargé en noir de carbone ainsi qu'un certain nombre d'autres élastomères chargés présentent un comportement particulier pour les premiers cycles de chargement figure 2.28. Celui-ci a fait l'objet de nombreuses études par Mullins [56],[55], d'où son appellation d'« effet Mullins ». Lorsqu'un élément en caoutchouc chargé en noir de carbone n'a jamais été sollicité mécaniquement, il subit une perte de raideur au cours des cycles de chargement suivants, comme on peut le voir sur la figure 2.29. La perte entre le premier et le deuxième cycle est la plus importante, mais l'adoucissement se poursuit jusqu'à un cycle stabilisé après cinq chargements environ. Ce phénomène est quasiment irréversible ; il n'apparaît plus lors des chargements postérieurs à la même amplitude [17]. Il s'apparente à de l'endommagement, car il fait intervenir des mécanismes de rupture de liaisons définitifs, qui induisent une baisse de la rigidité du matériau.

Ce phénomène peut être expliqué de diverses façons. Mullins et Tobin [57] considèrent, ainsi que Johnson et Beatty, que le caoutchouc est constitué de deux phases : l'une de module élevé, sous forme de particules de noir de carbone, et l'autre de module plus faible, le caoutchouc. La partie dure peut être désagrégée au cours de la déformation pour laisser place à la phase de module moins élevé et ce de façon quasi-irréversible. Cela revient alors à une transition de phase. Bueche [13] évoque une rupture des molécules reliant deux particules de noir de carbone ou des ruptures de liaisons faibles entre deux agrégats de noir ou entre un agrégat

et le caoutchouc. Certains auteurs suggèrent plutôt un glissement des particules le long des chaînes les plus courtes, provoquant un éloignement des particules de noir entre elles et un module d'Young moins élevé. Une synthèse des travaux sur l'effet Mullins, ses origines microscopiques et les premières modélisations existantes a été réalisée par Harwood, Mullins et Payne dans [37].

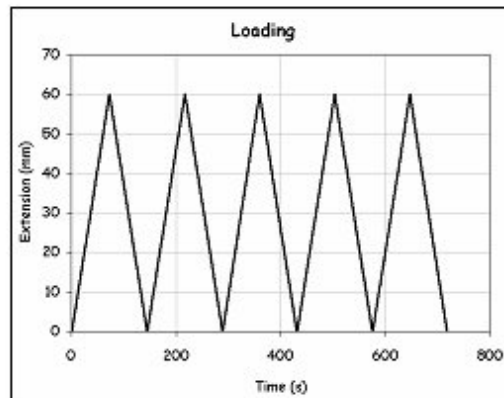


FIG. 2.28: Sollicitation en déplacement pour cinq cycles.

Lors d'essais de caractérisation de pièces en caoutchouc, l'effet Mullins doit être pris en compte et une phase dite de « déverminage », permet d'accommoder le caoutchouc, c'est-à-dire d'éliminer ce phénomène avant toute étude expérimentale. Pour ce faire, la pièce est sollicitée selon toutes les directions, avec cinq cycles d'amplitude assez importante. En effet, toute sollicitation d'amplitude supérieure à celle utilisée lors de cette phase, entraînera à nouveau une baisse de raideur lors des premiers cycles, tandis que les sollicitations d'amplitude inférieure ne la présenteront plus. Un exemple de phénomène pouvant apparaître après un mauvais déverminage est la non superposition de courbes d'évolution de la raideur avec l'amplitude ou la fréquence, si les amplitudes sont balayées dans le sens croissant puis décroissant.

Pour ce qui est de notre étude, la modélisation du fonctionnement des articulations en caoutchouc en cours de vie n'entraîne pas la nécessité d'introduire un tel comportement. L'effet Mullins étant quasiment irréversible, il ne réapparaît que si le véhicule et donc la liaison élastique restent au repos pendant un temps

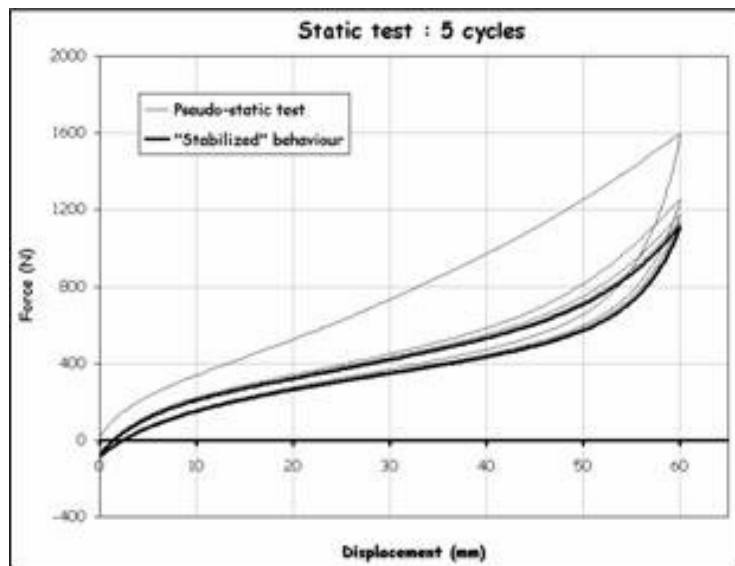


FIG. 2.29: Observation de l'effet Mullins sur la réponse de la cale lors des cinq premiers cycles décrits figure 2.28.

très long au regard de la durée de vie des véhicules. Un conducteur a très peu de chances de sentir ses effets, à moins de laisser son véhicule au parking pour une durée de l'ordre de trois ans. Par ailleurs, les seuls tests de roulage réalisés à la sortie de l'usine, suffisent probablement à déverminer la cale. En cours de service, les articulations en caoutchouc ne présenteront donc plus d'effet Mullins. Il est inutile de chercher à le modéliser pour des simulations transitoires en cours de vie comme l'indique Allen dans sa thèse [2]. Cette remarque est à prendre tout particulièrement en compte si l'on cherche à modéliser l'agrément de direction.

## 2.3 Modélisation des comportements du caoutchouc

Cette partie traite des modélisations les plus courantes associées à chacun des comportements hystériques et visco-élastiques. L'élasticité est traitée à part au paragraphe 3.2, car sa modélisation actuelle chez PSA n'est pas remise en cause et semble satisfaisante.

### 2.3.1 Modélisation générale des phénomènes hystériques

La profusion des phénomènes hystériques dans de nombreux domaines scientifiques (mécanique, économie ou sciences sociales...) a poussé un grand nombre de chercheurs à formaliser le comportement des systèmes hystériques. Dans le domaine de la mécanique, plusieurs disciplines sont concernées. On peut citer

entre autres les changements de phase des matériaux, le comportement des alliages à mémoire de forme et l'élasto-plasticité. Pour modéliser le comportement hystérétique indépendant du temps, des opérateurs élémentaires ont été introduits. On trouve trois opérateurs fondamentaux décrits par Brokate et Sprekels dans [12] :

1. L'opérateur Relais (*Relay* en anglais) ;
2. L'opérateur Jeu (*Play* en anglais) ;
3. L'opérateur élasto-plastique.

Le premier opérateur **Relais** correspond au comportement d'un relais électrique qui passe d'un état à l'autre, lorsqu'il dépasse certains seuils ( $S_1$ ,  $S_2$ ). Il est représenté sur la figure 2.30. Une combinaison linéaire de plusieurs de ces opérateurs, permet d'obtenir n'importe quelle forme d'hystérésis. Ce type de combinaison est appelée modèle de Preisach [12].

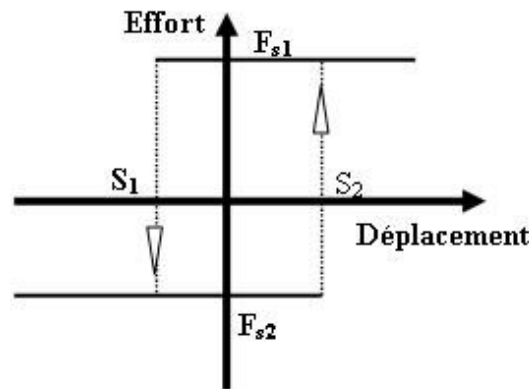


FIG. 2.30: Comportement de l'opérateur hystérétique élémentaire Relais ou *Relay*.

On peut voir que cet opérateur ne peut être utilisé, compte tenu de sa forme et de son sens de rotation qui est l'inverse de celui des cycles des articulations en caoutchouc, que l'on peut voir sur la figure 2.31.

Le second opérateur, correspond au comportement que pourraient avoir deux pièces séparées par un jeu non nul. Son comportement est décrit sur le schéma 2.32.

Cet opérateur **Jeu** est également parcouru dans le sens opposé à celui observable sur le comportement cyclique des cales. Une combinaison continue linéaire d'opérateurs Jeu donne des modèles de type Prandtl-Ishlinskii, très souvent utilisés pour la modélisation des alliages à mémoire de forme ou des matériaux piezo-électriques comme dans l'article de Ang [3], modélisation que nous avons pendant un temps envisagée.

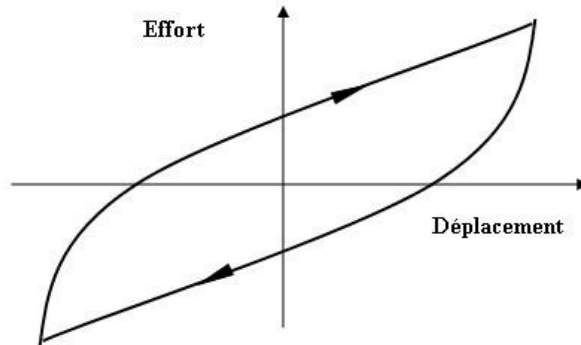


FIG. 2.31: Sens de parcours de la courbe d'hystérésis d'un CCNC soumis à un chargement cyclique.

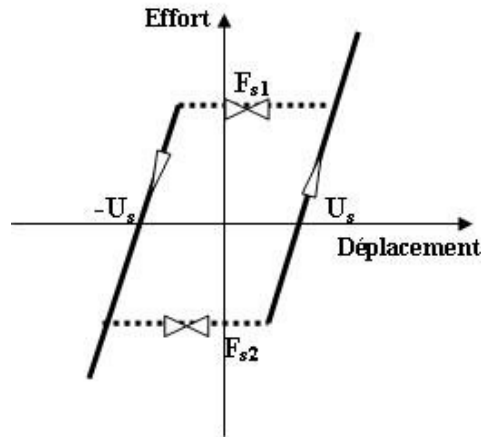


FIG. 2.32: Comportement de l'opérateur hystérétique élémentaire Jeu ou *Play*

Finalement, l'opérateur hystérétique élémentaire le plus pertinent dans notre cas est l'opérateur élasto-plastique. Cet opérateur a pour comportement, celui de l'association en série d'un ressort et d'un frotteur comme on peut le voir sur l'illustration 2.33. L'hystérésis indépendante du temps est souvent rapprochée du comportement mécanique élasto-plastique des matériaux métalliques.

Une combinaison linéaire de plusieurs de ces opérateurs élasto-plastiques, donne un modèle rhéologique discret utilisé en élasto-plasticité sous le nom de modèle de Saint-Venant qui est présenté dans la référence [48]. La figure 2.34, montre ce modèle. Il peut avoir un nombre limité d'éléments (modèle discret) ou un nombre infini d'éléments avec une répartition continue des efforts seuil  $F_{Si}$  comme dans la thèse de Blès [7] (modèle continu). Iwan a également proposé



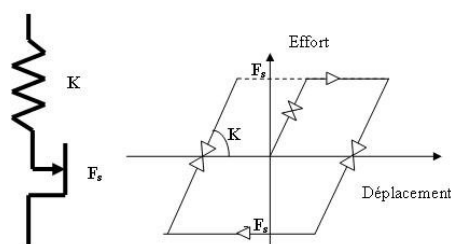


FIG. 2.33: Comportement de l'opérateur élasto-plastique et modèle rhéologique équivalent.

différentes combinaisons de frotteurs et ressorts en parallèle et en série dans [42] afin de modéliser l'hystérésis. La forme de l'hystérésis est alors dépendante de la fonction de répartition des  $F_{S_i}$  et des raideurs  $K_i$ . On remarque que pour ces trois opérateurs, la vitesse de sollicitation n'a pas d'impact sur la forme de la réponse, puisque seules les valeurs seuils déterminent la forme de l'opérateur. Ils sont donc indépendants de toute transformation d'échelle de temps, comme l'exige la modélisation de l'hystérésis non visco-élastique.

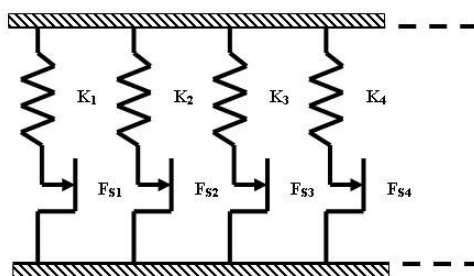


FIG. 2.34: Représentation rhéologique du modèle de Saint-Venant.

En 1988, Turner a proposé de rendre compte du comportement hystérétique dépendant de l'amplitude de sollicitation par un assemblage tribo-élastique de ressorts et de frotteurs en série. Ce modèle a ensuite été amélioré par Coveney et Turner [20], sous le nom de « Standard Triboelastic Solid » (*STS*) ; une représentation rhéologique de cet assemblage se trouve en illustration 2.35.

Le *STS*, contrairement aux modèles précédents, est constitué de ressorts et de frotteurs qui possèdent tous le même effort seuil et des ressorts qui présentent tous la même raideur. Leur agencement en série induit une évolution de la raideur qui décroît avec l'amplitude. Le déclenchement progressif des frotteurs donne la forme de l'hystérésis qui est proche d'une courbe racine carrée (voir annexe C). Ce modèle ne nécessite pas l'utilisation d'une fonction de répartition pour les différents seuils de frotteurs et raideurs de ressort, car l'assemblage en série

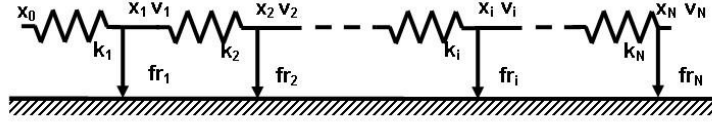


FIG. 2.35: Assemblage tribologique donnant le *STS* (Standard Triboelastic Solid).

tient lieu de fonction de répartition. D'une façon générale, ce type de modèle permet d'obtenir des résultats assez satisfaisants pour ce qui est du comportement hystérétique des liaisons élastiques en caoutchouc et avec peu de paramètres.

Il semble intéressant de comparer le comportement du modèle contenant des cellules élasto-plastiques en série (modèle de Turner) et celui comportant des cellules en parallèle (modèle de Saint Venant). Pour cela, il suffit de résoudre sur chaque portion des modèles discrets représentés en figures 2.35 et 2.34, l'équivalence entre les raideurs et les efforts seuils du *STS* et du modèle de Saint Venant. Ces relations sont décrites dans le tableau 2.1 ; les calculs sont détaillés en annexe C. On remarque que le glissement des frotteurs joue le rôle d'interrupteur dans le modèle de Saint Venant et de déclencheur dans le *STS*. Au fur et à mesure que le nombre de ressorts en jeu dans le modèle série augmente, le nombre de ressorts en jeu dans le modèle parallèle diminue.

| Paramètres <i>STS</i> | Paramètres Saint Venant                                                  |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $K_{STS1} = Kpa$      | $K_{SV1} = Kpa - \frac{KpaKt}{Kpa+Kt}$                                   |
| $K_{STS_i} = Kt$      | $K_{SV_i} = \frac{KpaKt}{(i-1)Kpa+Kt} - \frac{KpaKt}{(i)Kpa+Kt}$         |
| $F_{fSTS_i} = F_f$    | $F_{fSV_i} = \sum K_{SV_i} \frac{F_f}{K_{0+} \frac{KpaKt}{(i-1)Kpa+Kt}}$ |

TAB. 2.1: Comparaison entre les modèles *STS* et modèles de Saint Venant.

D'autres modèles existent pour représenter le comportement hystérétique. On peut citer parmi les modèles continus le modèle de Dahl (1968) qui est utilisé chez PSA pour d'autres applications, les modèles de Krasnosel'skii, de Duhem-Madelung, ou de Bouc (se référer à la thèse de Al Majid [1]). Nous parlerons un peu plus loin du modèle hystérétique de Berg [6], utilisé par Sjöberg [72]. La principale lacune en terme de modélisation des liaisons élastiques chez PSA provient d'une modélisation visco-élastique trop succincte (cellules de Maxwell) dans le domaine transitoire. C'est cette modélisation que nous allons maintenant aborder.

### 2.3.2 Modélisation de la visco-élasticité

La visco-élasticité est définie par un comportement à la frontière entre celui du fluide visqueux et celui du matériau solide élastique. Ce comportement peut être modélisé selon diverses approches. D'un point de vue rhéologique, on utilise habituellement une combinaison de ressorts et d'amortisseurs. Les modèles analogiques les plus simples sont ceux de Maxwell et de Kelvin-Voigt.

Le modèle de Maxwell est représenté figure 2.36a. Il contient un amortisseur linéaire en série avec un ressort ; c'est le modèle élémentaire pour la représentation de phénomènes de relaxation exponentielle (voir annexe B). Celui de Kelvin-Voigt (figure 2.36b), constitué d'un ressort en parallèle avec un amortisseur linéaire, représente très bien les phénomènes de fluage. D'autres assemblages rhéologiques relativement simples existent, comme le modèle de Zener, figure 2.36c, aussi appelé *Standard Linear Solid*, ou le modèle d'Oldroyd ou de Burger figure 2.36d qui présentent en série ou en parallèle un modèle de Maxwell et une cellule de Kelvin-Voigt.

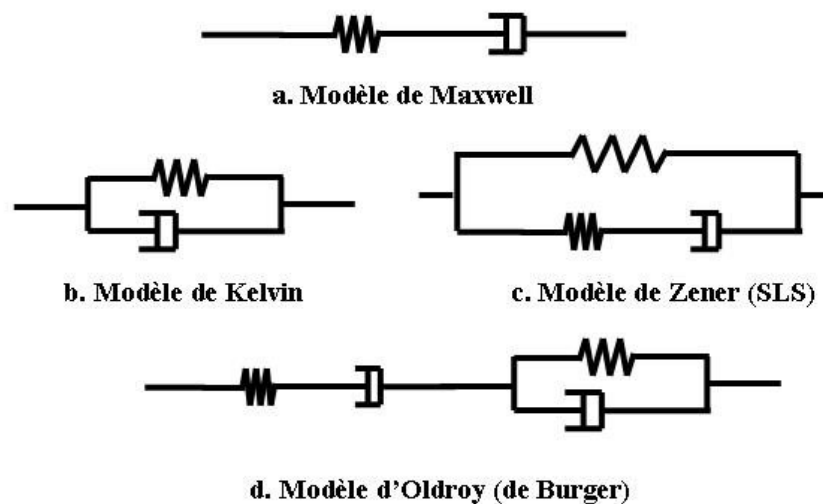


FIG. 2.36: Les modèles classiques de visco-élasticité : Maxwell, Kelvin-Voigt, Zener, Oldroyd.

Ces modèles simples sont souvent mis en défaut pour la représentation de matériaux complexes. Des modèles généralisés, comme celui de Maxwell ou Kelvin-Voigt ont été développés comme présenté dans la thèse de Huyn [41] afin d'obtenir des comportements fréquentiels et des courbes de relaxation plus en adéquation

avec la réalité. Des modèles avec une organisation d'amortisseurs et ressorts sous forme d'échelle ont également été élaborés par Gross [33] ou encore Schiessel et Blumen [70], tout comme des organisations fractales par Heymans et Bauwens [40], afin de mieux représenter les fonctions de relaxation et les courbes de comportement dynamique des matériaux visco-élastiques sur un large domaine de fréquences et de temps.

C'est dans ce cadre que les **dérivées non entières ou fractionnaires** ont été introduites, afin de modéliser de façon plus réaliste et avec moins de paramètres le comportement visco-élastique des matériaux, notamment des polymères et élastomères. Cette modélisation est plus intéressante qu'un modèle généralisé de Maxwell, ou autres modèles fractals, car elle présente peu de paramètres et permet de reproduire de façon satisfaisante le comportement dynamique des élastomères sur une large gamme de fréquences. Plusieurs études sur le comportement dynamique de pièces en caoutchouc ont abouti à de telles modélisations. On peut citer parmi les nombreux travaux sur le sujet, les thèses de Saad [69] et de Hyun [41], mais également ceux de Coja [18].

Comme indiqué dans la thèse de Dugowson [23], Leibniz est le premier en 1662 à imaginer la théorie des dérivées fractionnaires. La définition la plus répandue de la dérivation à un ordre non entier,  $\alpha$ , au point  $b$  est celle donnée par Grünwald (1867) :

$$\frac{d^\alpha f(t)}{[d(x-b)]^\alpha} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-b}{N}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j \frac{x-b}{N}\right) \quad (2.2)$$

Plusieurs autres définitions existent qui sont indiquées dans le livre de Oldham et Spanier [61]. Nous ne citerons qu'une autre définition qui est fréquemment utilisée pour intégrer dans le domaine temporel les dérivées non entières. Il s'agit de la définition de Riemann-Liouville sur  $\mathbf{R}_+$  :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t-u) du \quad (2.3)$$

N.B. : La fonction Gamma ou factorielle s'écrit  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$  si  $\alpha > 0$ .

La transformée de Laplace d'une dérivée non entière est similaire à celle d'une dérivée d'ordre entier,  $f^n(p) = p^n f$ , ce qui donne un formalisme extrêmement simple en dynamique fréquentielle :  $T(\omega) = (i\omega)^\alpha = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \omega^\alpha$ .

Il est à noter que le comportement d'une dérivée non entière peut être considéré comme intermédiaire entre le comportement d'un ressort et celui d'un amortisseur linéaire, selon la valeur de l'ordre de la dérivation. Pour  $\alpha = 0$ , la Dérivée

Non Entière (DNE) se comporte comme un ressort. Si  $\alpha = 1$ , elle équivaut à un amortisseur linéaire. Pour cette raison, la DNE est représentée par un élément rhéologique baptisé *springpot*. Cet élément rhéologique est caractérisé par deux paramètres : un coefficient multiplicatif noté  $B$  et son ordre de dérivation noté  $\alpha$ .

Revenons un court instant sur les modèles fractals. Certains des auteurs ont démontré qu'en considérant que l'ensemble des coefficients des ressorts et amortisseurs linéaires sont tous égaux, la fonction de transfert équivalente d'un assemblage fractal correspond à une puissance fractionnaire de  $i\omega$ . Un résumé de cette démonstration se trouve dans la thèse de Huyn [41]. Dans ces conditions, Comme l'indique Robert dans [68], ce modèle fractal peut être avantageusement remplacé par une dérivée non entière (voir figure 2.37).

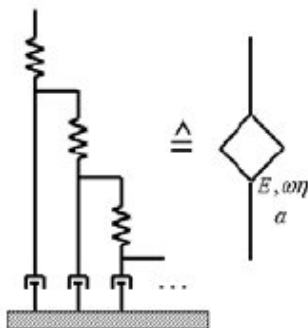


FIG. 2.37: Un springpot, élément rhéologique représentant et son équivalent en terme de combinaison ressorts et amortisseurs.

De nombreux autres modèles visco-élastiques existent. Parmi eux, nous citerons ceux utilisés dans le domaine des simulations éléments finis, Miehe et Keck [52], Lion [50]. On peut citer également celui de Bouc Wen [80] qui a été modifié par Yoo, pour obtenir une modélisation à la fois hystérétique et visco-élastique des articulations en caoutchouc, justement à destination des simulations dans le logiciel ADAMS<sup>®</sup>. Ce modèle sera présenté au paragraphe 3.1.5.

Tous ces modèles visco-élastiques sont la plupart du temps considérés comme indépendants du comportement hystérétique du caoutchouc et de l'élasticité non-linéaire. On émet alors l'hypothèse que les deux comportements peuvent être décrits par une superposition linéaire de Boltzmann, c'est-à-dire par des branches parallèles, dont les efforts s'additionnent. Or, le taux de noir de carbone, comme on a pu le voir au paragraphe 2.2.3 sur l'effet Payne, amplifie la non-linéarité en amplitude, qui est liée au comportement hystérétique du CCNC. Il a pu être observé que pour différents taux de noir de carbone non seulement l'effet Payne augmente, mais également la rigidification en fréquence et les effets visco-élastiques.

Les deux comportements dissipatifs sont donc liés.

### 2.3.3 Conclusion comportements mécaniques des articulations en caoutchouc

Cette section a montré à travers une étude bibliographique et analytique que la géométrie des articulations en CCNC implique non pas l'introduction de nouveaux phénomènes, mais une accentuation de phénomènes déjà présents dans le CCNC. Par ailleurs, cette géométrie implique un découplage du comportement des liaisons élastiques selon leurs différents axes principaux. Ce dernier point justifie l'utilisation d'une modélisation unidimensionnelle en traction compression. Des termes de couplages négligeables en première approximation existent cependant et pourront être étudiés ultérieurement.

L'étude bibliographique et expérimentale des divers comportements mécaniques du caoutchouc et des liaisons élastiques a dégagé les phénomènes essentiels pour une modélisation temporelle transitoire dans ADAMS®. La figure 2.38 indique l'ensemble des comportements qui doivent être représentés par le modèle d'articulation en caoutchouc.

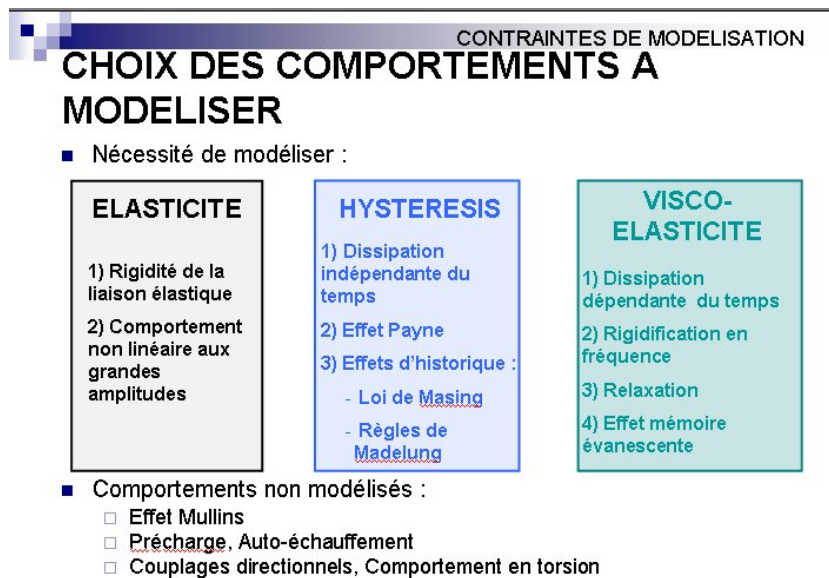


FIG. 2.38: Récapitulatifs des comportements qui doivent être modélisés pour une bonne représentativité des comportements d'une articulation en caoutchouc dans le domaine temporel.

On compte parmi les phénomènes essentiels pour une bonne représentativité du modèle temporel :

- l'effet Payne;

- les effets d'historique liés aux règles de Madelung et à la loi de Masing ;
- le comportement en relaxation de contrainte ;
- la mémoire évanescence.

On note que l'on cherche également à être cohérent vis-à-vis du domaine fréquentiel en essayant d'obtenir un modèle dont le comportement est représentatif de la rigidification en fréquence. Cependant, le modèle étant destiné à la simulation temporelle, cette dernière sera privilégiée.

Nous avons également pu mettre en évidence le fait que l'effet Payne, lié au comportement hystérétique et à la présence de noir de carbone est couplé avec la rigidification en fréquence. En effet un taux de noir de carbone croissant augmente l'effet Payne, mais également la rigidification fréquentielle (voir figure 2.39). Les deux comportements visco-élasticité et hystérésis ne peuvent donc être considérés comme indépendants au sens strict. Une modélisation hystérétique en parallèle d'un modèle visco-élastique est donc non représentative de ce qui est mesurable sur pièce.

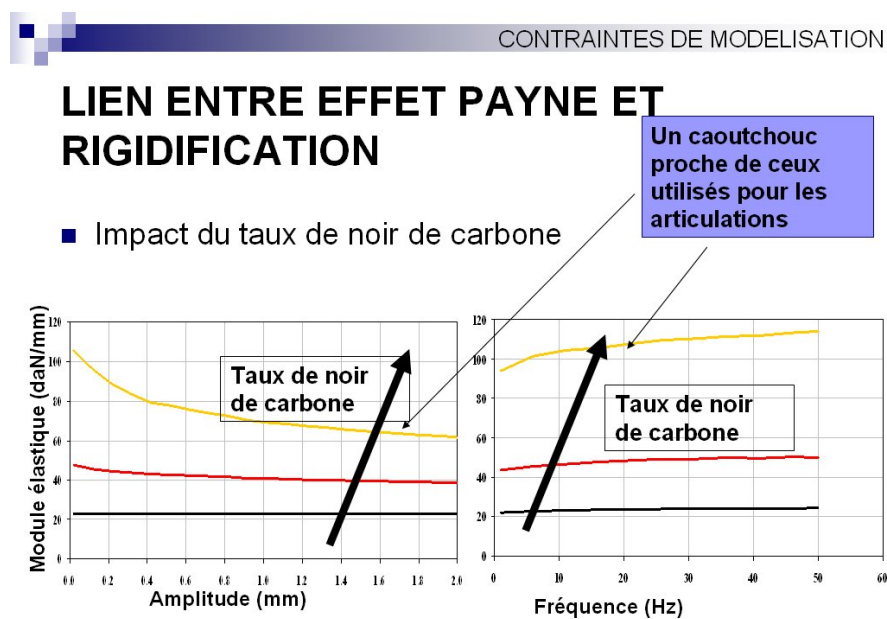


FIG. 2.39: Couplage entre non linéarité en amplitude (effet Payne) et rigidification fréquentielle.

Nous avons également montré que l'effet Mullins pour l'application qui nous intéresse n'était pas un comportement pertinent à modéliser. Il le serait pour une modélisation visant à simuler la fatigue ou la dissipation d'énergie dans les articulations en caoutchouc. Il peut également l'être si l'on souhaite simuler le

ressenti d'un automobiliste qui a laissé pour une période très longue sa voiture au garage. Cependant, pour toutes les études expérimentales, cet effet a été pris en compte et des déverminages ont été opérés avant chaque étude expérimentale.

Il est important de noter que notre étude n'a pas inclus l'effet de la précharge sur le comportement de l'élastomère. Cet effet est non négligeable et a été notamment modélisé par Huyn [41] via des paramètres de loi de comportement évolutifs en fonction de la précharge. Ce comportement est d'autant plus intéressant à étudier sur les articulations en caoutchouc qu'elles sont destinées à être soumises à une précharge en évolution permanente en fonction des mouvements de la caisse du véhicule (reports de charge lors de virages par exemple). Il sera donc nécessaire pour PSA d'introduire cette notion de précharge au sein du modèle d'articulation.

L'auto-échauffement du caoutchouc sous sollicitations cycliques répétées est non négligeable et entraîne une évolution des caractéristiques mécaniques du matériau, notamment dans le domaine fréquentiel. Ce sera notamment le cas lorsque l'on cherche à simuler l'ensemble des sollicitations subies par la LAS lors des essais longs sur circuit avec des sols irréguliers. Deux obstacles s'opposent à simuler ce genre de comportement. Le premier est purement pratique : ajouter un couplage thermo-mécanique dans le modèle d'articulation risquerait de détériorer la rapidité de la simulation, pour un maigre profit en terme de précision de calcul. Le second obstacle est l'absence de mesures disponibles lors de la conception pour identifier ce type de phénomène.

Mais il est nécessaire de garder à l'esprit que selon sa température d'utilisation et son échauffement, l'articulation présentera un comportement évolutif et ce de façon suffisante pour rendre notre modélisation erronée. En effet, cette modélisation sera identifiée sur des courbes de mesure à température ambiante (20°C) sans auto-échauffement.

Il va de soit que si les outils numériques le permettent un jour, sans alourdir la durée de simulation, il sera très intéressant d'étudier l'impact de l'auto-échauffement ainsi que celui de la température extérieure sur le comportement des articulations de LAS.



## Chapitre 3

---

# Modélisation des liaisons élastiques

---

Le chapitre 2, nous a permis de déterminer les comportements des articulations en caoutchouc essentiels pour notre problématique et de passer en revue différentes approches de modélisation pour chacun d'entre eux.

Ce chapitre 3 s'articule en quatre parties. La première présente un certain nombre de modèles complets susceptibles de représenter les comportements d'une articulation en caoutchouc. Ils ont été étudiés au cours de ces travaux et l'analyse qui en résulte est résumée en début du présent chapitre. La comparaison de ces différentes approches a permis de définir la plus prometteuse en terme de modélisation complète des articulations en caoutchouc dans le domaine temporel transitoire par rapport aux attentes du constructeur automobile.

La seconde partie est entièrement consacrée à la modélisation de l'élasticité non-linéaire des articulations en caoutchouc. Cette modélisation est imposée par PSA, mais nécessite quelques précisions. Il s'agit d'exprimer à l'aide d'une loi effort en fonction des déplacements l'équation de la loi filiforme d'élasticité, appelée « Courbe élasto-cinématique » chez PSA.

La troisième partie décrit l'enrichissement progressif du modèle de liaison élastique en caoutchouc, à partir du modèle *STS* initial jusqu'aux améliorations apportées au modèle *RT*, sous forme d'un nouveau modèle appelé *STVS* au paragraphe 3.3.3. Les différents modèles sont successivement évalués, pour cela leurs propriétés et leur aptitude à représenter le comportement réel des liaisons élastiques sont décrites. La démarche qui a présidé aux différents choix de modélisation est présentée au fil des paragraphes.

Enfin, une dernière partie du chapitre abordera les problématiques numériques rencontrées lors de la mise en place dans Matlab<sup>®</sup> ou Mathematica<sup>®</sup> de ces

modèles. Les résultats de cette étude d'intégration numérique seront exploités au chapitre 4 pour l'intégration des modèles dans ADAMS<sup>®</sup>. Nous décrivons dans ce paragraphe, comment les problèmes numériques causés par la non-linéarité du modèle *RT* et du modèle *STVS* peuvent être surmontés.

### 3.1 Étude de quelques modèles complets de liaison élastique

Le chapitre 2 donne une idée de la variété des modèles existants pour la modélisation de chacun des comportements hystérétiques et visco-élastiques.

La modélisation élastique peut être faite à l'aide d'une fonction continue par morceaux ou bien d'une autre fonction non linéaire continue, selon le degré de précision requis. Nous avons considéré que le comportement élastique est indépendant de la visco-élasticité et de l'hystérésis. On peut donc procéder par superposition de Boltzmann, auquel cas le choix de la modélisation élastique est réalisé totalement indépendamment du choix de la modélisation visco-élastique et hystérétique.

Les modèles cités ci-dessous, donnent une image de l'état de l'art sur la modélisation de pièces en caoutchouc anti-vibratoire dans une structure et plus particulièrement dans des logiciels similaires à ADAMS<sup>®</sup>. Ne pouvant être exhaustif dans ce domaine, nous avons préféré présenter plusieurs exemples. Ces exemples ont été étudiés au cours de ces travaux et leur utilisation chez PSA a été envisagée :

1. Modèle *STS*
2. Modèle Triboelastic Visco-Solid (TVS) [21]
3. Modèle avec Dérivée Non Entière (DNE) de Sjöberg [71]
4. Modèle SID (Strain Integral Damping) de Tornar [75]
5. Modèle Rate-dependent Triboelastic solid (RT) [21]
6. Modèle de Bouc-Wen modifié [80]

Ces six modèles sont étudiés ci-dessous. Ils constituent des approches extrêmement diversifiées qui utilisent des éléments décrits pour les modélisations hystérétiques et visco-élastiques un peu plus haut dans ce paragraphe.

#### 3.1.1 Modèle Triboelastic Visco-Solid (TVS)

Le modèle *STS* (Standard Triboelastic Solid), a été introduit au paragraphe concernant les modélisations de l'hystérésis. C'est un assemblage en série de ressorts et de frotteurs qui ont tous des paramètres identiques. Cet assemblage est accompagné en parallèle d'une raideur élastique linéaire ou non-linéaire, selon le domaine d'amplitudes parcouru et la modélisation de l'élasticité non-linéaire retenue (voir paragraphe 3.2).

Une raideur en série avec l'assemblage tribo-élastique présenté en figure 2.35, permet de rendre compte de la raideur du composant en caoutchouc aux faibles amplitudes. Cette raideur est qualifiée d'« additionnelle aux petites amplitudes », elle sera notée  $K_{pa}$ . Le modèle *STS* complet avec élasticité est représenté sur l'illustration 3.12.

Il est à noter qu'un modèle de Saint Venant peut tout à fait remplacer le modèle en série de frotteurs secs et de ressorts. Ce modèle équivalent aurait alors des coefficients d'efforts seuils et de raideurs qui évoluent d'une cellule élasto-plastique à l'autre. En effet, tout modèle série possède un modèle parallèle équivalent comme indiqué dans le tableau 2.1 du chapitre précédent. L'utilisation d'un modèle de Saint Venant sous-entend une multiplication des paramètres ou l'introduction d'une fonction de répartition complexe de ces paramètres, ce qui n'est pas envisageable pour l'utilisation prévue chez PSA. Pour mieux comprendre les calculs réalisés dans ce tableau, il est nécessaire de se référer à l'annexe C.

Ce modèle a été étendu à un modèle continu dont le nombre de cellules est infini [21]. Il a pour équations 3.1. Le paramètre caractéristique de l'assemblage tribo-élastique continu, c'est-à-dire pour un nombre de cellules infini, vaut  $C_t = 2F_f K_r$ .

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \left( (N \cdot C_t ((x - x_{reb}) + A))^{0.5} - B \right) \text{sign}(x - x_{reb}) & (3.1) \\
 &+ K_0(x - x_{reb}) + F_{reb} \\
 A &= \frac{N \cdot C_t}{4 \cdot K_{pa}^2} \\
 B &= \frac{N \cdot C_t}{2 \cdot K_{pa}}
 \end{aligned}$$

La valeur de  $N$  dans l'équation 3.1 dépend de la loi de Masing. Si l'on se trouve avant le premier changement de sens de sollicitation ou rebroussement  $R_1$ ,  $N = 1$ , si l'on se trouve après, alors  $N = 2$ . Les variables  $x_{reb}$  et  $F_{reb}$ , sont indicées *reb*, car elles désignent les coordonnées du dernier rebroussement subi par la pièce. On a donc une formulation continue du comportement hystérétique qui respecte la loi de Masing. Cependant, les règles de Madelung ne sont pas respectées, d'où la nécessité d'introduire une mémorisation des différents points de rebroussement ou changements de sens de sollicitation, pour pouvoir les comparer entre eux et appliquer les règles de Madelung. Ce modèle n'a pas été conservé tel quel chez PSA, mais nous entrerons davantage dans le détail au paragraphe 3.3.1 sur ce point.

Le modèle rhéologique *STS* (voir figure 3.12) représente très bien le comportement hystérétique et élastique des cales. Cependant, aucun des comportements visco-élastiques, comme la rigidification en fréquence ou la relaxation ne sont représentés par le *STS*, qu'il soit continu ou discret, comme on peut le voir sur les figures 3.1 et 3.2.

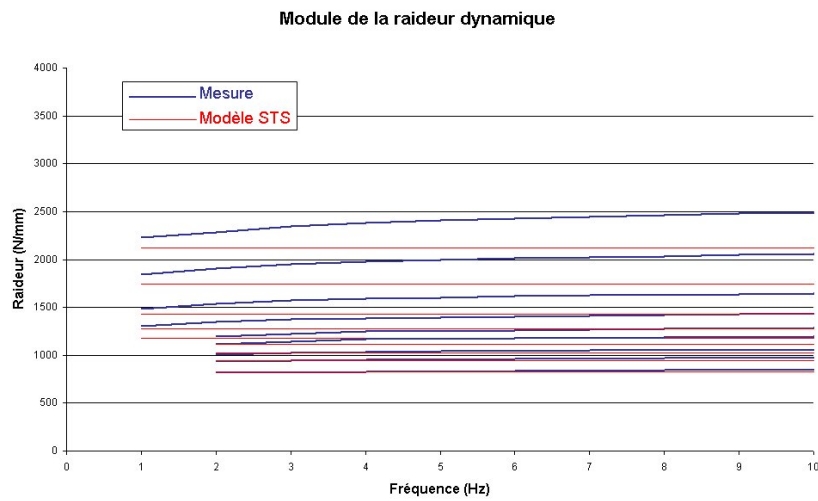


FIG. 3.1: Comparaison de la raideur obtenue avec un modèle *STS* continu et celle obtenue par des mesures sur une liaison élastique.

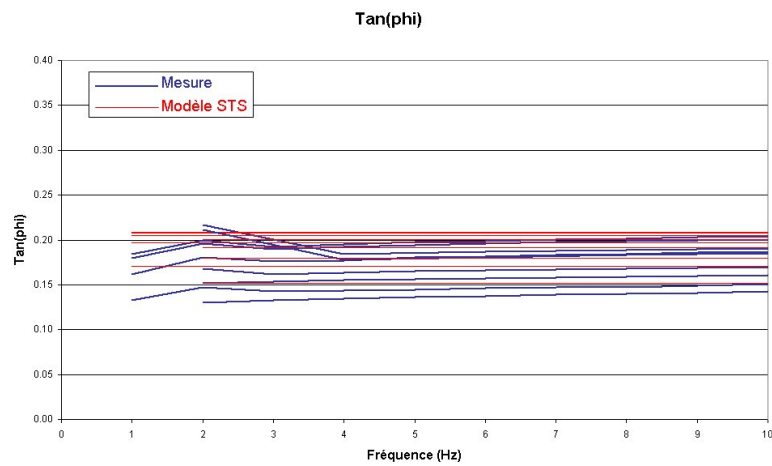


FIG. 3.2: Comparaison des tangentes d'angle de perte obtenues avec le *STS* continu et ceux mesurés sur liaison élastique.

Le modèle *STS* implanté chez PSA est quasiment identique au modèle utilisé par Oberlé. Dans son article, Oberlé [59] précise que le modèle utilisé est mis en parallèle de trois cellules de Maxwell dont le rôle est de représenter le comportement visco-élastique des cales. Il semble en effet assez naturel, lorsqu'on dispose d'un modèle satisfaisant pour représenter l'hystérésis comme le modèle *STS*, de le conserver et de chercher à ajouter en parallèle des éléments susceptibles de modéliser la visco-élasticité. Coveney, dans son article [21], tente d'améliorer le *STS* en ajoutant en parallèle une cellule de Maxwell. Les résultats sont peu satisfaisants, car la relaxation d'un élastomère ne peut être représentée par une seule et unique cellule de Maxwell. En effet, comme nous avons pu le remarquer en annexe B, une cellule de Maxwell possède un comportement en relaxation fondamentalement différent de celui du CCNC. Pour pallier cette difficulté, le modèle utilisé par Paulstra comporte trois cellules de Maxwell en parallèle.

L'utilisation de trois cellules de Maxwell limite le nombre de paramètres tout en permettant de représenter le comportement sur une plage de fréquences assez large. La figure 3.3 donne une représentation rhéologique du modèle en question, pour trois cellules de Maxwell. Le modèle aura donc dix paramètres caractéristiques en considérant une élasticité linéaire de raideur  $K_0$ , une raideur  $K_{pa}$ , une raideur  $K_r$  et un effort seuil  $F_f$ , pour la partie *STS*, et enfin trois coefficients d'amortissement  $\eta_i$  et trois raideurs  $K_i$ ;  $i$  vaut 1, 2 ou 3 selon la cellule de Maxwell concernée.

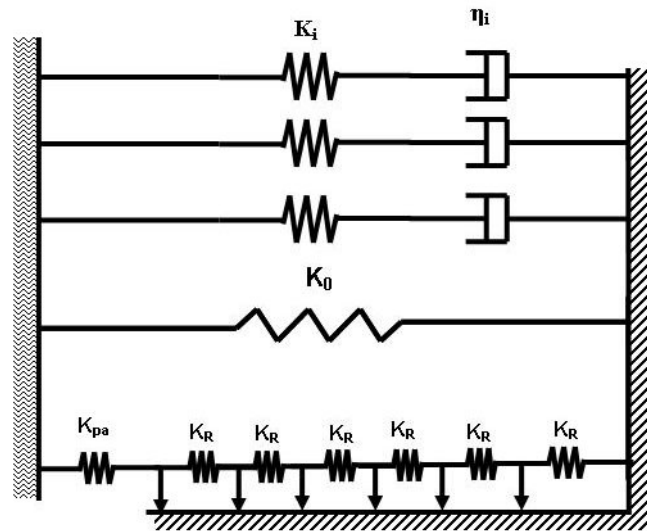


FIG. 3.3: Le modèle *TVS* de Paulstra : modèle *STS* en parallèle de trois cellules de Maxwell.

Ce type de modèle a été testé chez PSA, mais n'a pas donné satisfaction,

notamment dans les domaines dynamique et transitoire. Il arrive que le comportement visco-élastique ne puisse être identifié de façon satisfaisante sur la base de trois cellules de Maxwell. De plus, l'utilisation de seulement trois cellules de Maxwell ne permet pas toujours de reproduire correctement les comportements dynamique et transitoire des articulations.

### 3.1.2 Modèle avec dérivée non entière (DNE)

Une autre solution est d'utiliser le modèle avec des dérivées non entières, qui semble reproduire assez bien le comportement dynamique des cales. Leur identification sur des données fréquentielles est aisée étant donné la simplicité du formalisme dans ce domaine.

Les modèles proposés successivement par Sjöberg, Coja, puis Garcia sont orientés vers le comportement dynamique des articulations en caoutchouc. Ils représentent à la fois les composantes élastique, hystérétique et visco-élastique comme représenté sur la figure 3.5. La composante élastique est obtenue grâce au calcul du facteur de forme. La partie hystérétique provient du modèle de Berg [6], dont il a été question au paragraphe concernant la modélisation de l'hystérésis. Il se présente sous la forme suivante, avec  $x_s$  l'écrasement au dernier point de rebroussement :

$$F_{frott} = F_{fs} + \frac{x - x_s}{x_2(1 - a) + (x - x_s)}(F_{fmax} - F_{fs}) \text{ si } x > x_s \quad (3.2)$$

$$F_{frott} = F_{fs} + \frac{x - x_s}{x_2(1 + a) - (x - x_s)}(F_{fmax} + F_{fs}) \text{ si } x < x_s \quad (3.3)$$

$$F_{frott} = F_{fs} \text{ si } x = x_s$$

Une illustration du comportement du modèle de Berg pour une sollicitation cyclique, ainsi que la correspondance entre les différents paramètres et la forme du cycle sont indiquées en figure 3.4. Comme on peut le voir dans la formulation, ce modèle ne respecte pas intrinsèquement les règles de Masing et Madelung. Il nécessitera donc la programmation d'un algorithme permettant de suivre ces lois essentielles du comportement hystérétique pur. Cette remarque est valable pour la plupart des modèles continus d'hystérésis pure, dont la forme est décrite par deux équations différentes selon la branche de l'hystérésis sur laquelle on se trouve et une troisième pour le comportement avant premier rebroussement.

La partie visco-élastique du modèle, quant à elle, est décrite à l'aide d'une dérivée fractionnaire à deux paramètres. Cependant, comme précisé dans le paragraphe sur la modélisation de la visco-élasticité, les dérivées non entières sont fastidieuses à intégrer. De ce fait, même pour un algorithme extrêmement simple d'intégration comme ceux proposés dans [61], il est nécessaire d'utiliser l'ensemble des pas de temps précédents pour calculer la valeur d'effort au pas de temps sui-

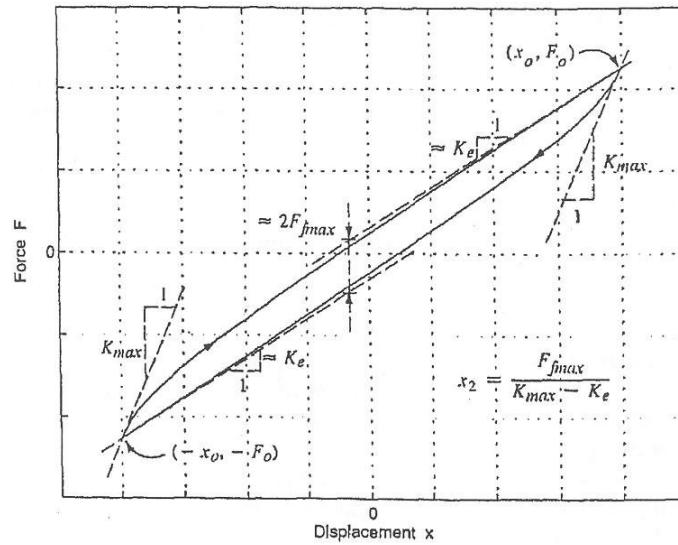


FIG. 3.4: Allure d'un cycle hystérique obtenu avec le modèle de Berg et relation avec les paramètres du modèle (issus de [6]).

vant. Cependant, on obtient des résultats assez convaincants en temporel aussi bien qu'en dynamique.

De nombreux auteurs ont étudié la modélisation de la visco-élasticité du caoutchouc chargé en noir de carbone grâce aux dérivées non entières, on peut notamment citer l'article très complet de Haupt et Lion [38]. Ce type de modélisation a été introduit notamment pour la modélisation de matériaux dont le spectre de relaxation est continu.

Le modèle le plus proche de notre problématique provient des travaux de Kari, Sjöberg, Coja et Garcia. Ce modèle consiste à mettre en parallèle trois éléments, correspondant chacun à un des trois comportements mécaniques décrits au cours de ce chapitre, comme on peut le voir sur la figure 3.5.

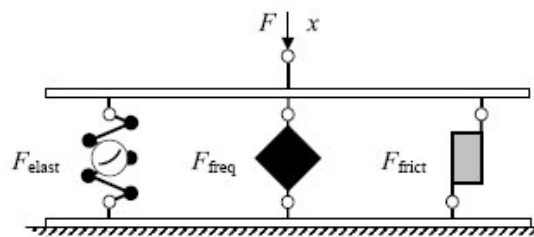


FIG. 3.5: Modèle de M. Sjöberg.

Le modèle d'articulation proposé par M. Sjöberg dans sa thèse [72], est une

combinaison (en partant de la gauche vers la droite sur la figure 3.5), d'une élasticité non-linéaire, d'une partie visco-élastique et enfin d'une partie frictionnelle pour l'hystérésis pure. La non-linéarité de la partie élastique a été modélisée via un facteur de forme géométrique, contrairement au modèle utilisé par PSA qui est une représentation purement mathématique. La partie visco-élastique est modélisée grâce à un *springpot*, c'est-à-dire une dérivée non entière. Enfin, La partie hystérétique est modélisée grâce à Berg [6].

Ce modèle présente la plupart des propriétés que nous cherchons pour une modélisation d'articulation en caoutchouc. Cependant, l'utilisation de dérivées non entières, introduit une forte orientation du modèle vers le comportement dynamique des articulations. En effet, il est plus aisé d'utiliser les dérivées fractionnaires dans le domaine fréquentiel, que dans le domaine temporel, qui nécessite le calcul coûteux de produits de convolution ou d'approximations équivalentes [27]. Une telle approche est souvent utilisée en modélisation éléments finis. De plus, l'identification des paramètres de la dérivée non entière est très difficile à partir de données temporelles.

Il est à noter un développement important de ce type de modélisations dans l'industrie du caoutchouc, car elle permet d'être représentatif du comportement dynamique à peu de frais, c'est-à-dire avec une identification relativement simple puisque le comportement est associé à seulement deux paramètres.

### 3.1.3 Modèle SID

Le modèle que nous allons décrire est un modèle qui est présenté dans les articles [75] et [76]. Ce modèle a été conçu par le service ACV de PSA pour représenter l'amortissement hystérétique des cales de suspension moteur, dont le rôle est d'éviter la transmission des vibrations du moteur, vers la caisse et non de transmettre des efforts, comme les articulations de LAS. Pour cela, un élément appelé ressort-amortisseur, différent cependant du springpot cité précédemment, dont le comportement est intermédiaire entre celui d'un ressort et celui d'un amortisseur a été utilisé.

Ce modèle est fondé sur l'hypothèse que l'hystérésis est prédominante sur le comportement visco-élastique dans les supports de groupe motopropulseur (GMP). Ce type de modélisation a été utilisé pour améliorer la simulation du comportement dynamique du GMP lors des démarrages fréquents, comme pour un système Stop et Start.

Ce modèle introduit un comportement dissipatif, obéissant à la loi effort en fonction de la vitesse  $v(t)$  et des déplacements  $x(t)$  suivante :

$$F(t) = k(x(t) + \tan(\phi) \text{signe}(v(t)) |y(t)v(t)|^{\frac{1}{2}}) \quad (3.4)$$

La variable d'état  $y(t)$  est une variable introduite de façon à avoir un filtrage plus ou moins important des valeurs anciennes. Pour cela,  $y(t)$  doit satisfaire



l'équation qui suit :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -h(t)y(t) + x(t) \quad (3.5)$$

Dans cette équation,  $h(t)$  correspond à une impulsion en sollicitation et produit le comportement hystérétique. Pour simplifier l'équation ci-dessus, on pose l'approximation :

$$y(t) = \int_0^t (e^{-h(t-\tau)}x(\tau))d\tau \quad (3.6)$$

La constante  $h$  définit alors le temps considéré comme étant du passé lointain :

$$(t - \tau) \gg \frac{1}{h} \quad (3.7)$$

Ce modèle ne présente pas de dépendance à la fréquence ou à la vitesse de sollicitation qui soit proche de celles observables sur les articulations en caoutchouc. Bien que simple et intéressant pour les cales de GMP, notamment en terme de dissipation par hystérésis, ce modèle ne donne pas les formes d'hystérésis recherchées pour un modèle d'articulation de LAS ce qui implique une mauvaise représentation du comportement temporel.

### 3.1.4 Le modèle RT

Nous nous sommes également intéressés au modèle de Coveney [21] dit Rate-dependent Triboelastic Solid (RT) , qui présente un assemblage en échelle de ressorts linéaires avec des amortisseurs non-linéaires, comme on peut le voir sur la figure 3.22. Ces amortisseurs non-linéaires permettent à la fois d'assurer la visco-élasticité du modèle, mais également la partie hystérétique du comportement. Ce modèle sera étudié de façon plus approfondie aux paragraphes suivants.

Coveney, au-delà de la représentation du comportement hystérétique pur, a cherché à rendre compte du comportement visco-élastique des cales para-sismiques. En ajoutant en parallèle du modèle *STS* une cellule de Maxwell ou plus, Coveney s'est orienté vers un modèle qu'il nomme *TVS* pour *Triboelastic Visco-elastic Solid*. En réalité, cette pratique qui consiste en un ajout en parallèle d'un modèle hystérétique avec un modèle de Maxwell simple ou généralisé est le modèle rhéologique le plus utilisé dans la littérature.

Cependant, comme le soulignent plusieurs auteurs, un nombre fini de cellules de Maxwell ne permet pas de représenter tous les comportements de relaxation des élastomères. Cet assemblage présente une forme de relaxation parfois assez éloignée de celle observable pour les articulations en caoutchouc. Coveney a également proposé en collaboration avec Johnson [21], un modèle inspiré du *STS* discret, mais qui introduit en lieu et place des frotteurs de Coulomb, des amortisseurs non-linéaires. La formulation de cet amortissement non-linéaire est issue

d'une contrainte simple en terme de comportement : être représentatif d'un comportement intermédiaire entre frotteur de Coulomb et un amortisseur linéaire. On peut voir cette contrainte s'exprimer dans la formule 3.8.

$$F_{RT}(x') = F_s \text{sign}(x') \left| \frac{x'}{V_0} \right|^{\frac{1}{2p+1}} \quad (3.8)$$

Lorsque  $\frac{1}{2p+1}$  est proche de 0, alors le comportement est celui d'un frotteur sec d'effort seuil  $F_s$ . Pour  $\frac{1}{2p+1} = 1$ , on a un comportement qui s'apparente à un amortisseur linéaire, de coefficient d'amortissement  $\frac{F_s}{V_0}$ . Le modèle RT pour trois cellules peut être représenté comme illustré en figure 3.6.

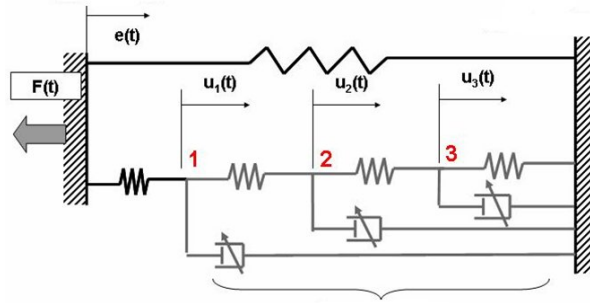


FIG. 3.6: Modèle  $RT$  pour trois cellules d'amortissement non-linéaire.

Le modèle  $RT$  présente visco-élasticité et hystérésis pure couplées, compte tenu des amortisseurs non-linéaires qui le constituent. Il représente bien la relaxation des élastomères, la rigidification dynamique, la réponse bi-sinus du modèle.

Le modèle  $RT$  est le modèle qui semble le plus abouti de la famille des modèles rhéologiques présentés précédemment. Il représente non seulement les trois comportements du CCNC, mais il introduit également une notion de couplage entre comportement visco-élastique et comportement hystérétique. Ce dernier point a été mis en évidence dans les résultats expérimentaux décrivant l'intrication entre effet de rigidification dynamique et l'effet Payne section 2.2.4. En outre, il permet sans ajouter d'algorithme spécifique de représenter les règles de Madelung et la loi de Masing.

Nous n'irons pas plus avant dans la description et les propriétés du modèle  $RT$ , qui sera étudié de façon plus approfondie au cours des paragraphes suivants de ce chapitre. Une remarque importante doit cependant être faite. Même si ce modèle est un modèle temporel, son intégration numérique peut s'avérer difficile. De plus, son comportement dynamique doit être étudié via des transformations de Fourier. Il n'existera donc pas de formulation simple dans le domaine fréquentiel du modèle.

### 3.1.5 Modèle de Bouc-Wen modifié

D'autres modèles, fondés sur des outils en plein essor comme les réseaux de neurones, ont émergé. Citons parmi eux, la modélisation destinée à la dynamique du véhicule de Yoo, Baek et Sohn [80]. Ces mêmes auteurs ont mis au point récemment une modélisation des articulations en caoutchouc dans [60], destinée à ADAMS<sup>®</sup>, en utilisant un modèle modifié de Bouc-Wen. Ce modèle est représenté sur la figure 3.7.

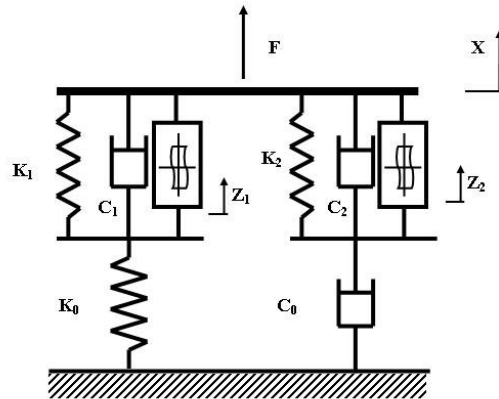


FIG. 3.7: Modèle de Bouc-Wen modifié et ses paramètres.

On distingue sur cette figure des amortisseurs non-linéaires, des ressorts et des éléments produisant un frottement en loi puissance du déplacement. Cette loi de frottement est assez proche de la loi d'amortissement utilisée par Coveney pour le modèle *RT*. Ce modèle obéit aux équations 3.9. Le déplacement du petit plateau à gauche est noté  $y$  et celui de droite,  $w$ .

$$\begin{aligned}
 z_1' &= (x' - y')[A_1 - \gamma_1 + \beta_1 \operatorname{sgn}(x' - y') \operatorname{sgn}(z_1) |z_1|^{n_1}] \\
 z_2' &= (x' - w')[A_2 - \gamma_2 + \beta_2 \operatorname{sgn}(x' - w') \operatorname{sgn}(z_2) |z_2|^{n_2}] \\
 y' &= \frac{1}{c_1} \{c_1 x' + k_1(x - y) - k_0 y + \alpha_1 z_1\} \\
 w' &= \frac{1}{c_0 + c_2} \{c_2 x' + k_2(x - w) + \alpha_2 z_2\} \\
 F(t) &= k_0 y + c_0 w'
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ce modèle transcrit assez bien l'ensemble des comportements que nous souhaitons reproduire, avec peu de paramètres, toutefois plus nombreux que les paramètres du modèle *RT* ou Dérivée Non Entière. Ses équations sont assez non-linéaires, tout comme celles du modèle *RT*. Les deux modèles similaires, mais de

paramètres différents, ajoutés en parallèle permettent de reproduire les effets de non linéarité en amplitude.

### 3.1.6 Conclusion sur les modèles existants

Les quelques modèles présentés ci-dessus sont des modèles destinés aux pièces CCNC anti-vibratoires, présentant de forts taux d'amortissement. Le modèle de Tornar, ne peut pas satisfaire les besoins de la LAS en terme d'applications transitoires temporelles. Il est plutôt destiné à représenter une énergie dissipée, que la forme réelle du comportement d'une articulation de LAS. Les modèles de type *TVS*, n'ont pas été retenus car inadaptés et nécessitant beaucoup plus que trois cellules de Maxwell pour donner un comportement satisfaisant, d'après les précédentes recherches chez PSA.

Les modèles de Bouc-Wen modifié, DNE et *RT* sont les meilleurs candidats pour notre application. Les modèles DNE ont pour principal rôle de modéliser le comportement dynamique des pièces dans le domaine fréquentiel. De ce fait, ils sont extrêmement simples à utiliser dans le domaine fréquentiel, mais leur intégration dans le domaine temporel est plus difficile.

Le modèle de Bouc-Wen modifié semble avoir des propriétés assez intéressantes [60] dans le domaine transitoire. Cependant, on note que son nombre de paramètres est assez important et la signification physique de ceux-ci est difficilement intelligible. Il s'agit d'un modèle essentiellement mathématique contrairement au modèle *RT* qui présente une interprétation rhéologique.

Pour mieux comprendre les avantages et inconvénients de chacun de ces modèles, nous allons les comparer dans le tableau 3.1. Ce tableau présente les caractéristiques de chacun des modèles :

- NP : Nombre de paramètres, hors paramètres de l'élasticité non-linéaire ;
- H : Modélisation de l'Hystérésis indépendante du temps ;
- V : Modélisation de la visco-élasticité ;
- IT : Identification temporelle possible ;
- IF : Identification fréquentielle possible ;
- D : Destiné au comportement Dynamique ;
- T : Destiné au comportement Temporel quelconque ;
- CHV : Couplage hystérético-visco-élastique.

Si le critère est respecté, il sera marqué « + » sinon ou s'il est difficile à mettre en oeuvre « - ».

On remarque que les seuls modèles destinés à représenter le comportement temporel d'une articulation capables de modéliser la visco-élasticité sont le *TVS*, le *RT* et le modèle de Bouc-Wen. Le modèle de Tornar, en privilégiant l'hystérésis, néglige la rigidification fréquentielle. Dans le modèle de Tornar l'aire du cycle augmente avec la fréquence, mais pas la pente du cycle. Ce modèle présente par

| Modèle           | NP | H | V  | IT | IF | D  | T  | CHV |
|------------------|----|---|----|----|----|----|----|-----|
| STS              | 3  | + | -  | +  | -  | -  | +- | -   |
| TVS              | 10 | + | +  | +  | +  | -  | +  | -   |
| DNE Berg         | 10 | + | +  | -  | +  | +  | -  | -   |
| RT               | 5  | + | +  | +  | -  | +  | +  | +   |
| Bouc-Wen modifié | 5  | + | +  | +  | -+ | -+ | +  | -   |
| Tornar           | 5  | + | +- | +  | -  | +  | -  | -   |

TAB. 3.1: Tableau comparatif de six modèles cités en exemple plus haut.

ailleurs une hystérésis dont la forme permet d'obtenir une dissipation équivalente, mais ne peut pas être exploitée pour représenter le comportement temporel réel d'articulations en caoutchouc.

Le modèle de Bouc-Wen, modifié par Yoo et al. est intéressant, car il reproduit l'ensemble des comportements nécessaires. Cependant, les réponses bi-sinus et l'effet Payne semblent moins bien représentés qu'avec le modèle *RT* par exemple.

Le modèle avec DNE est l'un des plus prometteurs, mais sa signification physique reste un sujet d'étude et de discussion, notamment dans le cadre des représentations temporelles. En effet, les DNE sont avant tout destinées aux modélisations dynamiques, pour lesquelles le formalisme reste simple. Les simulations temporelles d'un tel modèle nécessitent un algorithme spécifique assez élaboré et l'identification sur des données temporelles est relativement compliquée. Enfin, la philosophie imposée par les précédentes utilisations chez PSA de modèles d'articulations nous oriente plutôt vers un modèle rhéologique de type *RT*, proche du modèle *STS* actuellement étudié pour la modélisation quasi-statique des articulations.

D'autres modèles, issus de théories de la statistique comme celui utilisé par Boukamel [9] ou encore le modèle de Prandtl-Ishlinskii utilisé par Ang pour modéliser les phénomènes visco-élastiques dans les alliages à mémoire de forme [3] ont été envisagés. Mais la difficulté d'identification, le nombre de paramètres, la difficulté de mise en oeuvre de tels modèles statistiques en dehors des fonctions de distributions classiques a coupé court à cette piste. Ce type d'approche est cependant intéressant, car il permet de s'adapter à une plus grande variété de matériaux, l'hystérésis pouvant être totalement sculptée grâce aux fonctions de répartition des paramètres en fonction de la fréquence. Mais les grandeurs caractéristiques du comportement de la pièce sont plus difficiles à utiliser en terme de spécifications pour les fabricants de liaisons élastiques.

Nous allons à présent aborder la modélisation de l'élasticité non-linéaire. Celle-ci a rapidement été évoquée au chapitre précédent et mérite qu'on s'y at-

tarde un peu. Bien que les présents travaux n'aient pas donné lieu à une nouvelle modélisation de ce comportement, celui-ci est essentiel. Pour des raisons de compatibilité avec d'anciens modèles sous ADAMS<sup>®</sup> nous avons conservé le modèle existant chez PSA que nous allons décrire ci-dessous. Cette partie nous permet également d'expliquer comment nous nous sommes affranchi la plupart du temps des non-linéarités liées à cette composante au cours de nos travaux.

## 3.2 Modélisation de l'élasticité non-linéaire

Comme indiqué au paragraphe 2.2.2, parler de l'élasticité du caoutchouc, revient à négliger le comportement dissipatif du caoutchouc. Même à très faible vitesse et à grande amplitude, une sollicitation cyclique sur un CCNC produit un décalage entre courbe de charge et de décharge. Le caoutchouc ne présente donc pas de domaine élastique non dissipatif à proprement parler comme les métaux. On assimile cependant le cycle produit lors d'une sollicitation lente de grande amplitude à une courbe bijective efforts en fonction des déplacements. On néglige alors les phénomènes irréversibles qui ont eu lieu lors de cette sollicitation. La partie dissipative est alors incluse dans les modélisations hystérétiques et visco-élastiques de la pièce en CCNC. Après ce préambule, nous parlerons toujours de l'élasticité en gardant à l'esprit, que cette élasticité n'est qu'une simple approche phénoménologique.

Le modèle d'élasticité non-linéaire du caoutchouc, utilisé dans le logiciel de simulation multi-corps ADAMS<sup>®</sup> à l'heure actuelle est identique en élasto-cinématique, en dynamique et en transitoire. Pour des raisons pratiques, ce même modèle a été conservé au cours des travaux de thèse. Ceci permet d'obtenir une cohérence entre les réponses obtenues dans les différents domaines de simulation dans ADAMS<sup>®</sup>. Le modèle en question a déjà été évoqué au chapitre précédent dans la partie modélisation de l'élasticité (voir paragraphe 2.2.2).

Il est important de souligner encore une fois que le modèle élaboré est phénoménologique. Il ne permet pas d'expliquer l'origine microscopique des phénomènes liés à l'élasticité. De même, cette modélisation ne permet aucunement de faire un lien entre la géométrie de la cale et sa réponse mécanique notamment en terme de saturation. Une telle démarche n'est malheureusement pas possible au sein du service de conception de la LAS, étant donné que la géométrie de l'articulation en caoutchouc n'est pas forcément connue au moment où les simulations sont réalisées.

Cependant, d'autres données sont toujours connues, que l'on se trouve en phase d'avant projet ou de vie série de l'articulation en caoutchouc ; ce sont les spécifications fournies par PSA aux fabricants de liaisons élastiques qui sont détaillées au paragraphe 2.1.1. Ces spécifications, ainsi qu'un certain nombre de mesures réalisées par les fournisseurs sur des prototypes sont les éléments qui

peuvent servir à l'identification paramétrique de la modélisation numérique des liaisons élastiques en phase de conception. Parmi les mesures fournies usuellement par les fabricants d'articulations en CCNC, on trouve :

- un cycle quasi-statique, obtenu lors d'une sollicitation triangle à grande amplitude et très faible vitesse de sollicitation ;
- plusieurs cycles quasi-statiques de plus faibles amplitudes ;
- des mesures dynamiques raideurs et tangentes de l'angle de perte, dont les spécifications, sont indiquées en paragraphe 2.1.1.

Du grand cycle quasi-statique, comme indiqué au chapitre précédent, paragraphe 2.2.2, on déduit la courbe moyenne comme sur la figure 2.6, par une procédure automatisée chez PSA. Enfin, cette courbe permet une identification des paramètres de la fonction évoquée au chapitre 2, dont l'équation est précisée en 3.10. Cette fonction est paramétrée par les grandeurs suivantes :

- les non-linéarités,  $N_{sup}$  et  $N_{inf}$  ;
- les saturations  $S_{sup}$  et  $S_{inf}$  ;
- les progressivités  $P_{sup}$  et  $P_{inf}$  ;
- la raideur élastique linéaire  $K_0$  .

On peut noter que pour les paramètres que sont la non-linéarité  $N$ , la saturation  $S$  et la progressivité  $P$ , il existe des seuils différents selon que la pièce est soumise à une traction ou une compression. Ceci permet de rendre compte de l'asymétrie de comportement de la pièce. En effet, l'incompressibilité liée à un coefficient de Poisson proche de 0,5 et la géométrie des liaisons élastiques introduisent des non-linéarités qui sont souvent plus importantes en compression qu'en traction. La formulation de la loi effort déplacement représentant l'élasticité non-linéaire des cales en caoutchouc prend finalement la forme décrite dans l'équation 3.10.

$$\frac{F_{elast}(x)}{K_0} = x + \begin{cases} \left( \tan \left( \left| \frac{x - N_{sup}}{S_{sup} - N_{sup}} \right| \frac{\pi}{2} \right) - P_{sup} \left| \frac{x - N_{sup}}{S_{sup} - N_{sup}} \right| \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x > N_{sup} \\ \left( \tan \left( \left| \frac{N_{inf} - x}{N_{inf} - S_{inf}} \right| \frac{\pi}{2} \right) - P_{inf} \left| \frac{N_{inf} - x}{N_{inf} - S_{inf}} \right| \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x < N_{inf} \\ 0 & \text{si } N_{inf} < x < N_{sup} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour des paramètres ayant les valeurs décrites dans le tableau 3.2, on obtient la courbe de la figure 3.8. Sur cette courbe, on a indiqué à quelle grandeur correspond chacun des paramètres.

| Paramètre | Valeur   |
|-----------|----------|
| $K_0$     | 350 N/mm |
| $N_{inf}$ | -2 mm    |
| $N_{sup}$ | 2 mm     |
| $S_{sup}$ | 8,4 mm   |
| $S_{inf}$ | -8,4 mm  |
| $P_{sup}$ | 156 N    |
| $P_{inf}$ | 156 N    |

TAB. 3.2: Tableau des paramètres utilisés pour obtenir la courbe d'élasticité non-linéaire de la figure 3.8.

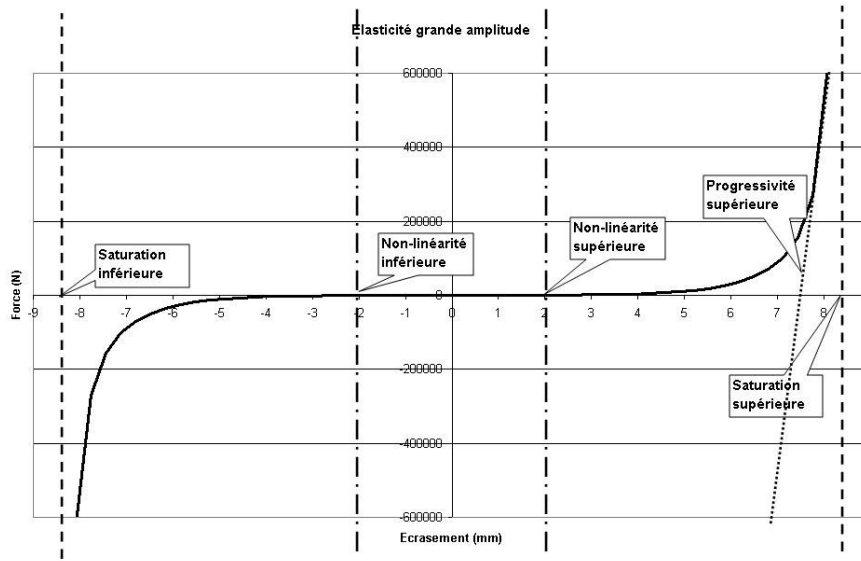


FIG. 3.8: Courbe d'élasticité non-linéaire et son paramétrage (N.B. : la partie centrale semble horizontale en raison de l'échelle).

Comme on peut le voir, le paramètre  $N$  indique le déplacement au-delà duquel on considère que la courbe n'est plus affine. Cette fonction affine s'écrit sous la forme  $K_0x$  où  $x$  est le déplacement en millimètres et  $K_0$ , la raideur élastique linéaire aux grandes amplitudes de la pièce. Le paramètre  $S$  indique la saturation, c'est-à-dire le déplacement maximum que peut subir la pièce. La courbe présente une asymptote verticale pour ce déplacement. Pour de telles amplitudes de sollicitation, l'incompressibilité du matériau induit un module très important. La progressivité  $P$ , quant à elle, correspond à la vitesse avec laquelle l'effort évolue entre le début de la non-linéarité  $N$  et la saturation  $S$ .

Les différents paramètres de la fonction sont identifiés sur les courbes non-linéaires déduites du cycle quasi-statique grande amplitude, c'est-à-dire sur la



loi dite « filiforme » ou courbe élasto-cinématique. La démarche de calcul de la courbe élasto-cinématique, puis d'identification des paramètres est représentée sur la figure 3.9 pour la « cale proto », dont l'identification est reprise pour les autres comportements mécaniques au paragraphe 5.2.5.

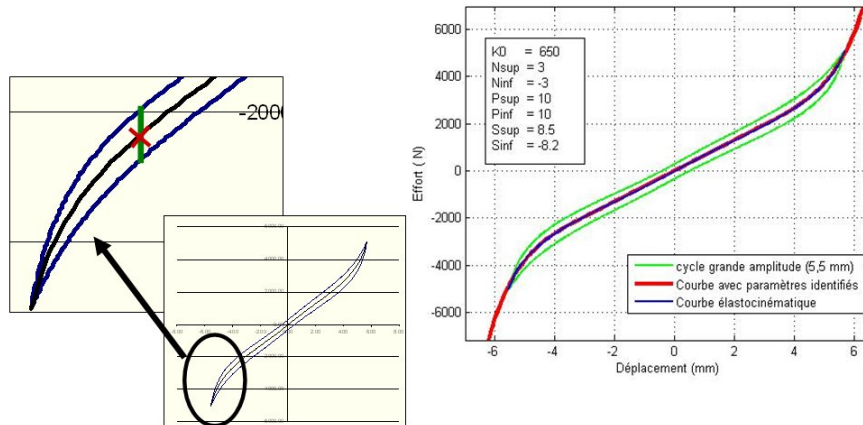


FIG. 3.9: Illustration de l'identification des paramètres d'une courbe d'élasticité non linéaire sous Matlab.

Dans la suite du mémoire, cette fonction sera utilisée pour représenter l'élasticité non-linéaire du CCNC. Dans un premier temps, étant donné que cette partie de la modélisation du comportement ne nécessite pas d'études supplémentaires, on pourra remplacer la courbe non-linéaire par une simple raideur de valeur  $K_0$ . Cela permettra dans le domaine quasi-linéaire du caoutchouc de faire une étude plus simple pour la modélisation des comportements visco-élastiques et hystérétiques que l'on a étudiés sur des domaines d'amplitudes faibles (jusqu'à 2mm environ). Ainsi, les hystérésis produites ne seront pas distordues par la non-linéarité élastique.

### 3.3 Enrichissement du modèle : de l'hystérésis à la visco-élasticité

#### 3.3.1 Modèle STS : modèle hystérétique indépendant du temps

Le seul modèle élastique, ne suffit pas à décrire de façon précise le comportement mécanique des articulations en CCNC dans le domaine transitoire. À petites et moyennes amplitudes, entre 0.05 et 2 mm, l'effet **Payne** est très important comme nous avons pu le décrire au chapitre précédent, paragraphe 2.2.3. Pour une sollicitation sinusoïdale à 10 Hz, une augmentation de l'amplitude de sollicitation de 0,1 à 2 mm entraîne une perte de raideur de 50% environ. Pour la

même pièce, la perte de raideur entre une sollicitation à une fréquence 100 Hz et 1 Hz à 0,5 mm d'amplitude n'est que de 20 %.

Il est donc nécessaire d'intégrer un modèle hystérétique, capable de représenter l'effet Payne et les effets d'historique qui sont prédominants dans les gammes d'amplitudes que nous souhaitons représenter. Le modèle *STS* ou *Standard Tribo-elastic Solid* est un modèle hystérétique issu du domaine du génie para-sismique. Il a été utilisé par PSA dans le cadre de certaines simulations transitoires dans ADAMS® pour le comportement des liaisons élastiques. Ce modèle a déjà été mentionné aux paragraphes 2.3.1 et 3.1.1. Nous allons dans un premier temps le présenter de façon plus approfondie et indiquer les comportements qu'il est susceptible de modéliser. Nous détaillerons également quelques-unes de ses propriétés et caractéristiques principales.

### Le modèle STS

Le modèle *STS* existe sous différentes formes. Ses deux formes principales, à savoir le modèle discret et le modèle continu, définies par Coveney dans [20] sont décrites aux paragraphes 2.3.1 et 3.1.1. Cependant, il existe différentes versions qui ont été adaptées à des problématiques industrielles avec des variantes de paramétrage. Le service de conception de la LAS chez PSA a par exemple élaboré une version continue afin de l'adapter à ses besoins en matière de modélisation des articulations en caoutchouc. Il s'agit du modèle *STS<sub>n+</sub>*, qui est un modèle *STS* continu modifié, dont nous parlerons un peu plus loin.

Tout d'abord, nous allons décrire plus en détails le *STS discret*. Il est constitué d'un assemblage en série de ressorts et de frotteurs secs, dit « assemblage tribo-élastique » [77]. Il est illustré sur la figure 3.12 sous forme rhéologique. Chacun des frotteurs du modèle obéit à une loi de frottement sec représentée à la figure 3.10. Celle-ci a pour expression  $F(x') = F_f \text{signe}(x')$ , en notant  $x$  le déplacement de l'armature extérieure par rapport à l'armature intérieure de l'articulation selon une direction et  $x' = \frac{dx}{dt}$  la vitesse correspondante, où  $F_f$  est l'effort seuil au-delà duquel le frotteur se libère et peut glisser librement.

Ce modèle possède, comme on peut le voir figure 3.12, cinq paramètres.  $K_0$  est la raideur élastique au sens où nous l'avons définie au paragraphe précédent. Le paramètre  $K_{pa}$  représente la raideur additionnelle aux très petites amplitudes. La valeur de  $F_f$  correspond à l'effort seuil de chacun des frotteurs de Coulomb de l'assemblage et  $K_r$  à la raideur des ressorts intermédiaires. Le dernier paramètre est le nombre de cellules  $N_{cell}$ . Une « cellule », désigne l'assemblage d'une raideur  $K_r$  avec un frotteur de Coulomb de paramètre  $F_f$  ; elle est représentée sur la figure 3.11. Sur l'illustration 3.12, est représenté un exemple du modèle *STS* possédant  $N_{cell} = 6$  cellules.

La version continue du *STS* a été choisie par PSA dans un premier temps pour enrichir la modélisation des articulations en caoutchouc dans le domaine

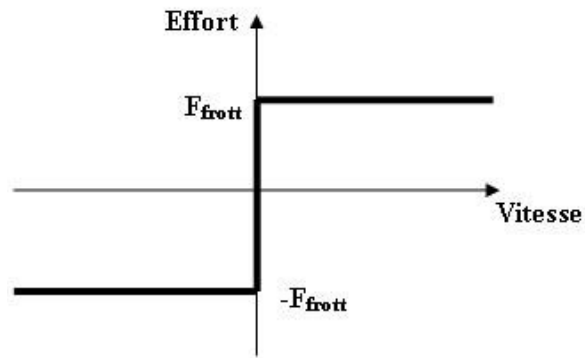


FIG. 3.10: Effort en fonction de la vitesse de déplacement pour un frotteur sec de seuil  $F_f$ .

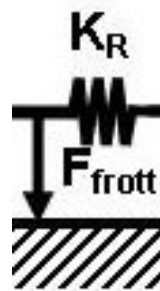


FIG. 3.11: Une cellule du modèle STS discret combinant un ressort et un frotteur.

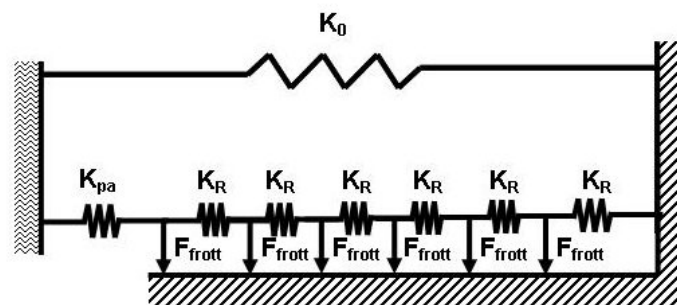


FIG. 3.12: Modèle STS discret pour six cellules.

transitoire de simulation multi-corps. Coveney dans [20] décrit l'approximation qui lui a permis d'obtenir un modèle continu pour un nombre de cellules infini.

Son comportement est régi par l'ensemble d'équations 3.11 et 3.12. Les indices  $r$  ajoutés aux termes d'effort et de déplacement, indiquent un effort ou déplacement à partir des coordonnées du dernier point de changement de sens de sollicitation ou « point de rebroussement ». Si on note  $x_{reb}$  et  $F_{reb}$  les coordonnées de ce dernier point de rebroussement, alors les grandeurs indicées  $r$  peuvent être calculées de la façon qui suit :  $x_r = x - x_{reb}$  et  $F_r = F - F_{reb}$ .

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \text{signe}(x)(\sqrt{C_t(|x| + A)} - B) \\ F_r(x_r) &= \text{signe}(x_r)(\sqrt{2C_t(|x_r| + A^*)} - B^*) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Les valeurs des coefficients  $A, B, A^*, B^*$  sont indiquées ci dessous :

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_t}{4K_{pa}^2} \\ B &= \frac{C_t}{2K_{pa}} \\ A^* &= 4A \\ B^* &= 2B \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les paramètres du modèle continu sont alors au nombre de trois. On retrouve le raideur élastique  $K_0$ , la raideur additionnelle aux petites amplitudes  $K_{pa}$  et un dernier paramètre  $C_t = 2F_f K_r$  qui caractérise l'assemblage infini de ressorts de raideur  $K_r$  et de frotteurs d'effort seuil  $F_f$ . En effet, le passage à la limite du nombre de cellules  $N_{cell}$ , implique que ce dernier n'est plus un paramètre à part entière. L'assemblage tribo-élastique peut être caractérisé par un seul et unique paramètre  $C_t$ , montrant par là-même que les paramètres  $F_f, K_r$  sont liés. Pour le modèle discret, au contraire, le nombre fini de cellules implique que la réponse du modèle est unique pour chaque triplet  $N_{cell}, F_{frott}, K_r$ . Rappelons que si l'on remplace l'élasticité linéaire  $K_0$  par une élasticité non-linéaire, ce ne seront plus trois paramètres, mais neuf (les sept paramètres de l'élasticité et les deux du *STS* continu), qui caractériseront le comportement complet de la cale.

Afin d'améliorer la corrélation entre la simulation et la mesure, le service de conception de la LAS de PSA a introduit une racine  $n$ ième à la place de la racine carrée dans l'expression du *STS* continu. Ce procédé induit une très forte non-linéarité dans le paramétrage des équations, qui deviennent les équations 3.13 et 3.14. Cette variante est le *STS $n$ +* dont nous avons parlé plus haut.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \text{sign}(x)(\sqrt[n]{C_t(|x| + A)} - B) \\ F_r(x_r) &= \text{sign}(x_r)(\sqrt[n]{2C_t(|x_r| + A^*)} - B^*) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \left( n \frac{K_{pa}}{C_t} \right)^{\frac{n}{1-n}} \\
 B &= A^{\frac{1}{n}} \\
 A^* &= 2^n A \\
 B^* &= 2.B
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Les indices  $r$  indiquent ici encore les efforts et déplacements à partir du dernier point de rebroussement rencontré. Le paramètre supplémentaire  $n$  est fortement couplé aux autres paramètres  $C_t$  et  $K_{pa}$ . Cela nuit beaucoup à la précision lors de l'identification et rend celle-ci très délicate. Le paramètre  $n$  est particulièrement difficile à identifier à partir de mesures. Ces dernières peuvent être bruitées par exemple, ce qui ne permettra pas d'avoir les informations nécessaires pour identifier une petite variation de  $n$ .

### Comportements modélisés par le STS

On constate que tous les phénomènes associés à l'hystérésis des articulations en caoutchouc, sont assez bien représentés tant par le modèle *STS* discret que par le modèle continu, avec quelques nuances. Comme la figure 3.13 le montre, l'aspect des cycles d'hystérésis est très proche de celui obtenu à la mesure. Comme on peut le voir sur l'illustration 3.14, l'effet *Payne* et la forme des hystérésis sont proches de ce que l'on peut observer sur des mesures de liaisons élastiques présentées au chapitre 2, figures 2.6 et 2.15. En ce qui concerne l'effet *Payne*, c'est la mise en jeu de plus ou moins de ressorts du modèle qui fait évoluer la raideur globale du modèle. Celle-ci décroît d'une raideur  $K_\mu = K_0 + K_{pa}$  pour les petites amplitudes à une raideur plus faible  $K_{macro} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{(N_{cell}-1)K_{pa}+K_r}$  pour les grandes amplitudes.  $K_\mu$  n'est sollicitée que si les amplitudes sont très faibles, aucun frotteur n'est alors débloqué.  $K_{macro}$  est obtenue lorsque l'ensemble des cellules est déclenché.

De même, la loi de Masing et les règles de Madelung sont respectées comme on peut le voir sur les figures 3.15 et 3.16. Sur une sollicitation bi-sinus c'est-à-dire une superposition de deux sinus d'amplitudes et fréquences différentes, on peut bien voir l'impact de l'historique de sollicitation, avec le respect des règles de Madelung.

Il est intéressant de remarquer les formes différentes de boucles selon l'endroit du grand cycle où a lieu la petite boucle de sollicitation. Ces différences sont liées à la position des petites boucles sur le grand cycle, qui induit des petits cycles d'amplitude d'autant plus importante que l'on s'approche d'une extrémité de la boucle principale d'hystérésis comme indiqué figure 3.17. La pente de ces petites boucles varie donc en raison de l'effet *Payne*, et après chaque petit cycle on repart sur la grande boucle d'hystérésis ainsi que le prescrivent les règles de Masing.

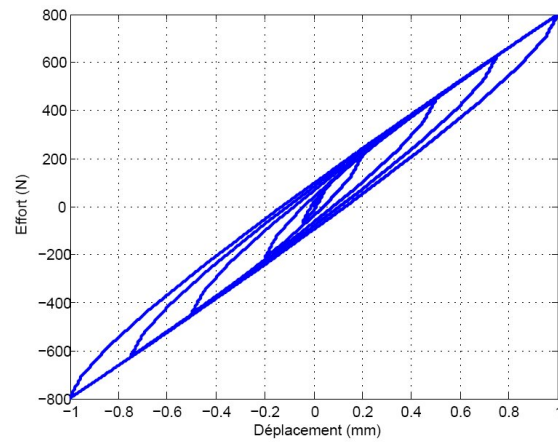


FIG. 3.13: Cycles d'hystérésis produits par le modèle *STS* discret à différentes amplitudes pour mettre en évidence l'effet Payne.

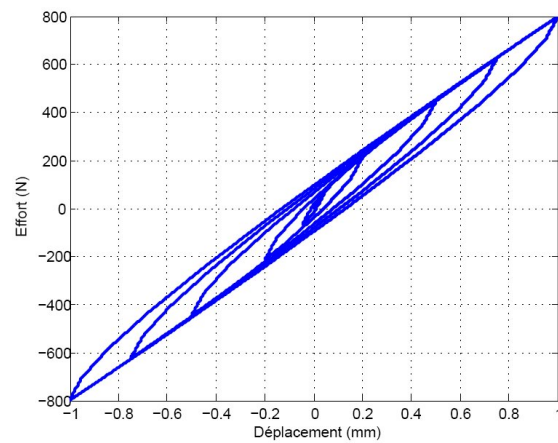


FIG. 3.14: Cycles d'hystérésis engendrés par le modèle *STS* discret ( $F_s=30, K_o=560, K_{pa}=1280, K_r=990, N_{cell}=15$ ) à différentes amplitudes de sollicitation (1, 0,75, 0,5, 0,2 et 0,05 mm).

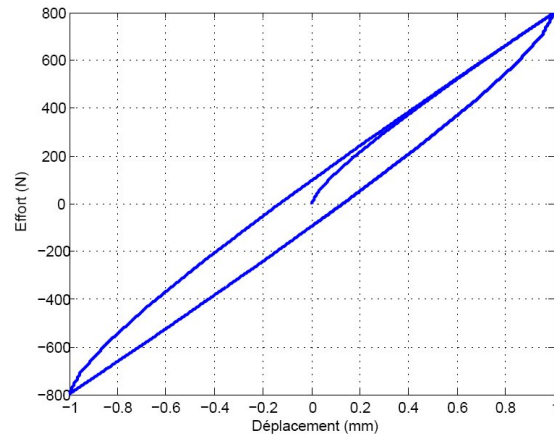


FIG. 3.15: Cycles d'hystérésis décrits par le modèle *STS* discret représenté avec le comportement avant et après premier rebroussement.

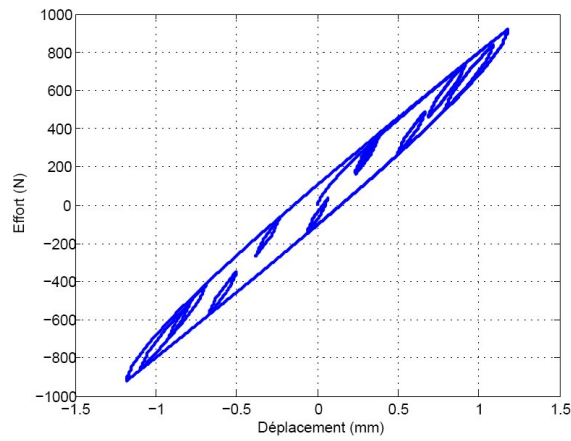


FIG. 3.16: Réponse d'un modèle *STS* discret à une sollicitation bi-sinus (1 Hz 1mm et 10 Hz 0.2 mm).

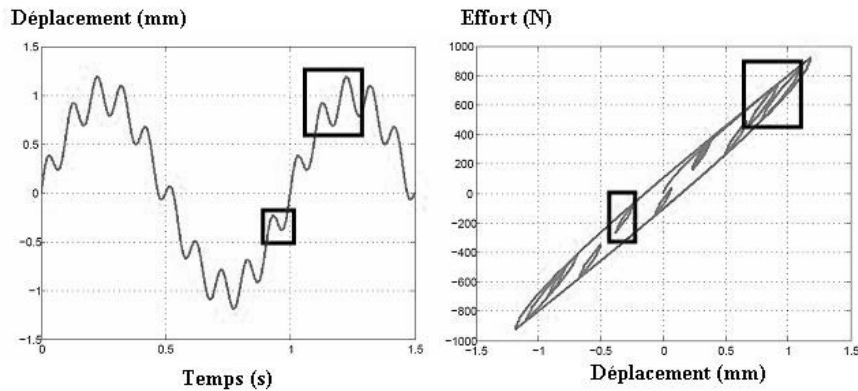


FIG. 3.17: Illustration sur l'amplitude des cycles pour une sollicitation bi-sinus, courbe de déplacement, et courbe effort en fonction des déplacements.

Les différents comportements représentés par le modèle *STS* ont donc été présentés au cours de ce paragraphe. L'ensemble des comportements hystérétiques sont décrits par le modèle *STS* discret. Le modèle *STS continu*, quant à lui, ne reproduit correctement l'ensemble des comportements hystérétiques qu'à condition d'utiliser un algorithme permettant d'assurer le respect des règles de Madelung et Masing. Il en est de même pour le *STS<sub>n+</sub>*.

Les comportements visco-élastiques ne sont pas du tout représentés par ce type de modèles. Lors d'une sollicitation par un échelon en déplacement du modèle *STS*, aucune relaxation n'aura lieu. Le modèle ne représente par ailleurs en aucun cas la rigidification en fréquence, comme on peut le voir sur les figures 3.2 et 3.1.

### Propriétés et caractéristiques du modèle *STS*

Nous allons à présent revenir sur les propriétés remarquables des trois modèles *STS discret*, *STS continu* et *STS<sub>n+</sub>* et les étudier de façon un peu plus approfondie que ci-dessus. Celles décrites pour le *STS discret* présenteront un intérêt tout particulier au chapitre 5 sur l'identification des paramètres. Par ailleurs, les réflexions concernant le *STS<sub>n+</sub>* mettent en évidence la nécessité de modéliser la visco-élasticité des articulations en caoutchouc.

Intéressons-nous tout d'abord aux propriétés du modèle *STS* discret. La première propriété du modèle *STS discret* est de produire des courbes d'hystérésis symétriques par rapport à leur centre ; de ce fait, les éventuelles différences de comportement entre traction et compression ne pourront être traduites que par l'élasticité non-linéaire. L'effet Payne est très bien représenté. On constate en effet une baisse de la raideur avec l'amplitude. Il existe un seuil haut de raideur aux faibles amplitudes et un seuil bas aux grandes amplitudes. Ceci corrobore



les observations expérimentales dans la littérature. Le modèle discret conserve la mémoire des sollicitations précédentes via l'état des frotteurs et des ressorts intermédiaires.

Le modèle *STS discret* possède un nombre fini de cellules et par conséquent présente une réponse continue par morceaux. La forme de la courbe d'hystérésis est constituée de petits segments. Afin d'éviter que les courbes ne soient pas réalistes, il est nécessaire d'utiliser un modèle dont le nombre de cellules  $N_{cell}$  est assez élevé. Pour les petites amplitudes, la discrétisation des cycles d'hystérésis est plus visible. Il est nécessaire de jouer sur les efforts seuils et les raideurs de façon à répartir le déclenchement des cellules tout au long de la gamme d'amplitudes que l'on souhaite représenter.

L'expérience a montré que le *STS discret* doit posséder au moins dix cellules pour représenter correctement une sollicitation d'une amplitude de deux millimètres environ. De plus, le nombre de cellules assure la finesse de la modélisation de l'effet Payne. Si l'on souhaite couvrir un domaine étendu d'amplitudes, il convient également de choisir un nombre de cellules relativement élevé, des seuils de frottement et des raideurs intermédiaires en conséquence. Cependant, un trop grand nombre de cellules alourdit la simulation. Le paramètre  $N_{cell}$  peut être fixé de façon à limiter la discrétisation du modèle et à éviter un trop grand nombre de cellules. Si le nombre de cellules est fixé, le *STS discret* ne possède plus que quatre paramètres. Nous avons fixé, après étude, le nombre de cellules  $N_{cell} = 15$  pour représenter un domaine d'amplitude allant de 0.05 mm à 2 mm.

Il est à noter que pour une amplitude très faible de sollicitation, seules la raideur élastique  $K_0$  et la raideur additionnelle aux petites amplitudes  $K_{pa}$  participent à la réponse du modèle. Celle-ci ne présentera alors pas d'hystérésis et aura une raideur globale de valeur  $K_\mu = K_0 + K_{pa}$ . Le déphasage entre déplacement et effort dans le modèle sera nul, ce qui n'est pas réaliste. C'est la raideur maximum atteinte pour les petites amplitudes. On peut remarquer ici que si  $N_{cell}$  devient très important,  $K_{macro}$  tend vers la raideur  $K_0$  pour les grandes amplitudes.

À présent, nous allons décrire les propriétés des modèles *STS* continu et *STS $n$* . Le modèle *STS* continu est plus simple d'un point de vue formulation que le modèle discret et ne nécessite pas d'intégrer le comportement hautement non-linéaire des frotteurs. Il s'agit d'une relation mathématique entre efforts et déplacements. Il présente malgré cela plusieurs inconvénients :

- Nécessité de gérer la *loi de Masing* via les coefficients  $A$  et  $B$  avant le premier rebroussement noté  $R_1$  et  $A^*$  et  $B^*$  après ;
- Nécessité de respecter les *règles de Madelung*, avec un algorithme de détection et de mémorisation des points de rebroussement et de gestion de l'historique des rebroussements ;

- Impossibilité dans certains cas d’avoir une courbe qui soit suffisamment proche des courbes expérimentales quasi-statiques.

Le premier point peut être résolu grâce à un test au sein de l’algorithme d’intégration du modèle. Cette opération permet de déterminer si l’on doit utiliser la formule  $F_0$  qui correspond au comportement avant  $R_1$  ou  $F_r$  après  $R_1$ . Ce choix dépend des sollicitations antérieures de l’articulation, si celles-ci sont connues. Si la liaison élastique était au repos précédemment, alors on se situe avant  $R_1$ . Au contraire, si l’articulation était déjà sollicitée avant le début de la simulation, on se trouve après  $R_1$ .

Le second point, le respect des règles de Madelung, implique un algorithme de mémorisation des rebroussements. Il faut alors hiérarchiser les points de rebroussement mémorisés. On détermine ainsi le point de rebroussement le plus éloigné de la sollicitation, qui détermine l’aspect de la branche principale de l’hystérésis. On supprime ensuite ceux qui ne peuvent plus avoir d’influence.

Cette démarche ne va pas sans compliquer l’intégration du modèle dans un logiciel de simulation. Un filtrage des micro-rebroussements, c’est-à-dire des très petits cycles, provoqués par un bruitage de l’entrée, est nécessaire pour la stabilité de l’algorithme. Ces petits cycles sont supposés sans influence sur la réponse globale du véhicule. Ils sont éliminés grâce à deux filtres du premier ordre en espace et en temps. Ces bruits peuvent également provenir d’artefacts liés à la simulation numérique. Le filtrage n’altère donc en aucun cas la bonne représentativité du modèle.

Si l’ensemble de ces précautions - mémorisation des rebroussements et filtrage - ne sont pas prises, il y a un risque d’obtenir des résultats incongrus comme sur la figure 3.18.

Enfin, le troisième point est lié à la forme de l’hystérésis produite par le modèle *STS continu*. Les courbes quasi-statiques sont des mesures réalisées à précharge nulle. Elles correspondent à la réponse de la cale à une sollicitation en déplacement triangulaire de vitesse relativement faible, à savoir 20 mm/min.

On peut considérer que les courbes quasi-statiques ne sont pas reproduites fidèlement en raison de la forme en racine carrée des branches d’hystérésis décrites par le *STS continu*. Auquel cas, on cherche à modifier légèrement la forme de branche parabolique des courbes d’hystérésis pour obtenir des résultats plus conformes à la réalité. Ou bien, on peut considérer que la forme des mesures quasi-statiques est différente en raison de la visco-élasticité de la pièce, qui se manifeste pour une vitesse de 20 mm/min. Dans ce second cas de figure, on modifie le modèle afin d’y ajouter la représentation des comportements visco-élastiques non modélisés par le *STS continu*.

La première solution a été dans un premier temps retenue par les ingénieurs de PSA, sous la forme du  $STS_{n+}$ . Pour le  $STS_{n+}$ , on fait varier légèrement la fonction racine de la formule analytique autour d'une valeur proche de deux. D'autres modèles avec des formulations continues, comme ceux de Berg [71] ou Dahl [1] existent. Ces derniers présentent des formes d'hystérésis légèrement différentes et sont parfois plus souples pour s'adapter à la forme de la courbe d'hystérésis, notamment en cas de dissymétrie des branches ascendantes et descendantes.

Pour le modèle continu, contrairement au modèle discret, il est possible de modéliser de très petits aussi bien que de très grands cycles car la courbe est définie de façon continue. La raideur aux petites amplitudes tend vers celle obtenue avec le modèle discret et celle aux grandes amplitudes, vers la valeur de la raideur sécante pour un modèle discret dont le nombre de cellules est infini. Or, si  $N_{cell}$  est infini, cette raideur sécante (ou raideur pointe à pointe) tend vers  $K_0$ , comme indiqué un peu plus haut.

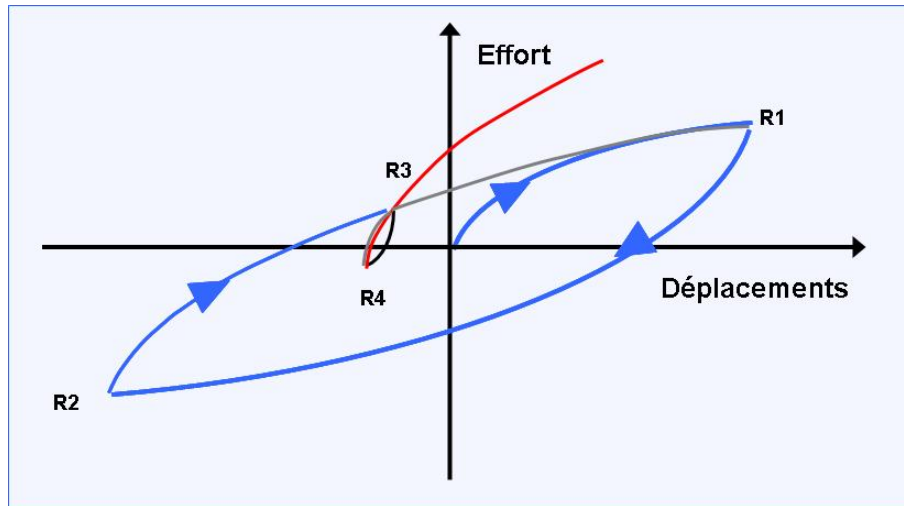


FIG. 3.18: Réponse du modèle STS continu en l'absence d'algorithme de gestion des rebroussements et de l'historique de sollicitation en rouge et avec algorithme en gris.

Une fois l'algorithme de gestion des rebroussements et des mémoires programmé, le modèle  $STS_{continu}$  donne des résultats comparables à ceux présentés pour le  $STS_{discret}$  et prend en compte l'ensemble des règles de Madelung et la loi de Masing. Le cycle ne présente aucune discrétisation, contrairement à ce qui peut être obtenu avec le modèle discret. Cette discrétisation est visible notamment en début de branche d'hystérésis en raison de la différence de raideur entre  $K_{pa}$  et  $K_r$ , comme on peut l'observer en comparant les figures 3.19 et 3.14.

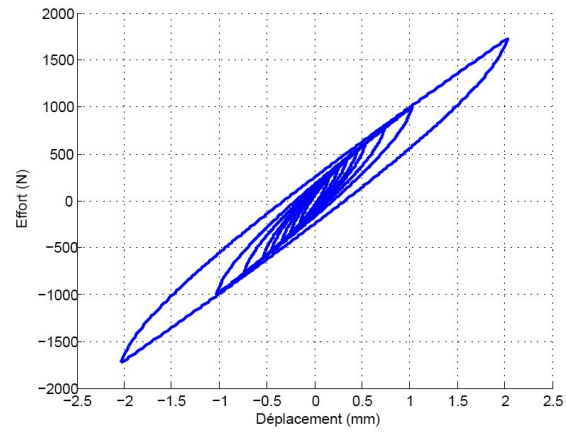


FIG. 3.19: Réponse d'un modèle STS continu à des sollicitations de diverses amplitudes et illustration de l'effet Payne.

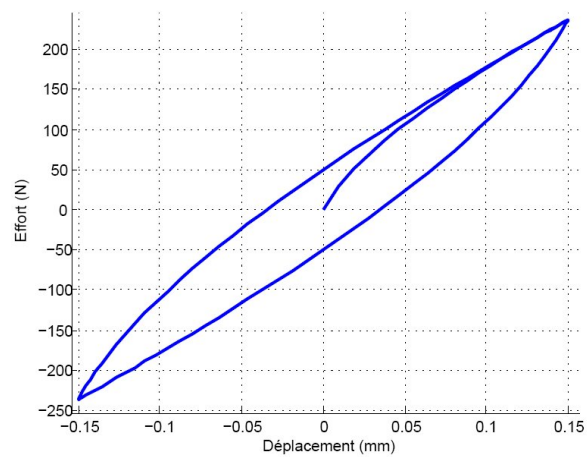


FIG. 3.20: Réponse avant et après  $R1$  du modèle  $STSn+$  continu modifié par PSA avec un paramètre  $n$ .

Le tableau 3.3 récapitule les avantages et inconvénients des modèles *STS continu*, *STSn+* et *STS discret*. On peut voir sur ce tableau que le nombre de paramètres n'est pas discriminant, puisque l'on souhaite un modèle ne dépassant pas une dizaine de paramètres hors paramètres décrivant l'élasticité non-linéaire. Le modèle discret assure le respect des règles de Madelung et de Masing sans nécessiter un algorithme spécifique, ce qui présente un grand intérêt en matière de programmation et de représentation physique du comportement hystérétique. En outre, il est relativement facile à identifier analytiquement, contrairement aux versions continues, tout particulièrement le *STSn+* qui est très non-linéaire. Enfin, le fait que le modèle soit discret laisse le champ libre pour introduire au sein du modèle, et non en parallèle, la composante visco-élastique manquante. L'ensemble de ces arguments nous a poussé à conserver un modèle du type *STS discret* pour représenter l'hystérésis. D'où l'utilisation du modèle discret comme base d'un nouveau modèle incluant la visco-élasticité.

| caractéristique      | STS discret | STS continu   | STSn+       |
|----------------------|-------------|---------------|-------------|
| Nombre de paramètres | 5           | 3             | 4           |
| Identification       | analytique  | moindre carré | difficile   |
| Visco-élasticité     | Non         | Non           | Non         |
| Madelung/Masing      | Oui         | Non           | Non         |
| Ncell                | 15          | $\emptyset$   | $\emptyset$ |

TAB. 3.3: Tableau récapitulatif des caractéristiques positives et négatives pour les différentes variantes du modèle *STS*.

En conclusion, la lacune principale du modèle *STS*, quel qu'il soit, est l'absence de représentation de la visco-élasticité. Cette partie du comportement mécanique est responsable de comportements transitoires, tels que la relaxation ou encore de la rigidification en fréquence. Ce sont des propriétés très importantes des articulations en caoutchouc. Elles ont un impact sur le comportement de la LAS et doivent être modélisées.

C'est pour cette raison qu'un modèle plus complet, reproduisant à la fois les comportements hystérétiques et visco-élastiques, a pris le pas sur le *STS* : le modèle *RT* décrit au paragraphe 3.3.2. Ce modèle *RT* a été élaboré par Coveney. Celui-ci a fait évoluer le *STS discret* afin d'introduire la visco-élasticité, tout en conservant les propriétés positives du modèle *STS* : respect des propriétés liées au comportement hystérétique indépendant du temps.

### 3.3.2 Modèle RT : introduction de la visco-élasticité

#### Description du modèle RT

Le modèle *RT* ou *Rate-dependent Triboelastic* a été proposé par Coveney dans [21] afin de compenser l'absence de visco-élasticité dans le modèle *STS*. Il est constitué d'un assemblage d'amortisseurs non-linéaires et de ressorts comme on peut le voir en illustration 3.22. Autrement dit, dans ce modèle, chacune des cellules du modèle *STS* est remplacée par une cellule comportant un ressort et un amortisseur non-linéaire (voir figure 3.23). Les amortisseurs non-linéaires du *RT* sont tous régis par une loi identique, dont la formule est présentée à l'équation 3.15. Le tracé de cette loi effort en fonction de la vitesse  $x' = \frac{dx}{dt}$  de déplacement est représenté en figure 3.21.

$$F(x') = F_s \operatorname{sign}(x') \left| \frac{x'}{V_0} \right|^{\frac{1}{2p+1}} \quad (3.15)$$

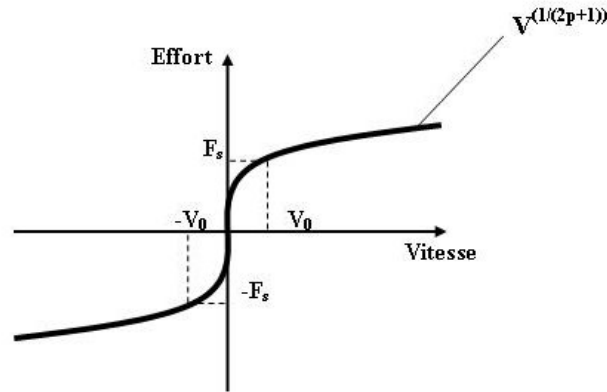


FIG. 3.21: Loi d'amortissement du modèle RT, avec les différents paramètres  $F_s$ ,  $V_0$  et  $p$ .

Coveney a souhaité conserver un paramétrage proche de celui du *STS discret*, avec un effort  $F_s$  atteint à la vitesse  $V_0$ , où  $F_s$  serait un équivalent du paramètre  $F_f$  et  $V_0$  la vitesse de référence à laquelle on retrouve le comportement identifié avec un modèle *STS* identique. De plus, le choix d'un paramètre  $p$  permet l'obtention d'une valeur plus fine et significative qu'une simple fonction puissance. La fonction  $\frac{1}{2p+1}$  prend des valeurs comprises entre 0 et 1. Cette formulation peut être conservée, mais équivaut à un paramètre  $pw = \frac{1}{2p+1}$ . Si par la suite nous ne parlerons plus du paramètre  $p$  mais de  $pw$ , pour simplifier le propos, il convient de garder à l'esprit que derrière le paramètre  $pw$ , se cache  $p$ . En effet, le modèle est plus sensible aux variations du paramètre  $pw$ , qu'à celles de  $p$  qui autorise

une plus grande précision et une évolution plus douce du comportement selon ses valeurs.

Enfin, cette loi possède trois paramètres qui ne sont pas indépendants les uns des autres :  $F_s$ ,  $p$  et  $V_0$ . On peut en réalité réduire ces trois paramètres à deux paramètres indépendants :  $pw$  et  $C_o$ . La loi est réécrite en fonction de ce nouveau paramétrage précisé à l'équation 3.18 :

$$C_o = \frac{F_s}{V_0^{1/(2p+1)}} \tag{3.16}$$

$$pw = \frac{1}{2p + 1} \tag{3.17}$$

$$F(x') = C_o \text{sign}(x') |x'|^{pw} \tag{3.18}$$

Une illustration du modèle  $RT$  pour six cellules se trouve en figure 3.22. Le modèle rhéologique obéit à un système non-linéaire d'équations différentielles. Chacune de ces équations correspond à l'équilibre écrit à chaque noeud ou point de jonction des cellules entre elles. Ces équations sont détaillées dans le système 3.19 pour quatre cellules. Dans ces équations les déplacements sont notés  $u_i$  pour chacune des cellules et  $e$  est le déplacement relatif de l'armature extérieure par rapport au noyau de la liaison élastique.

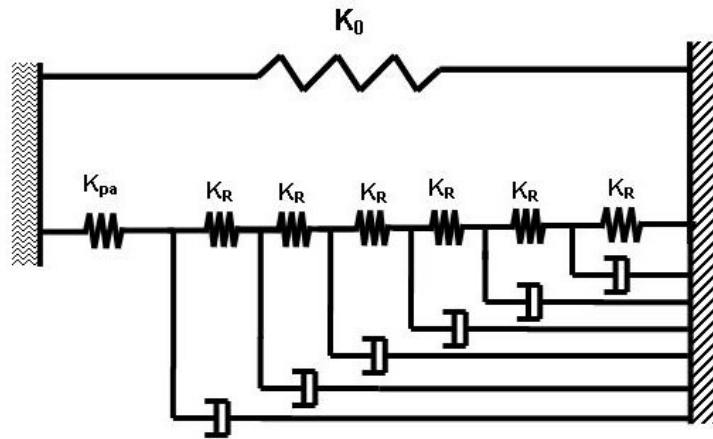
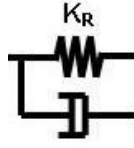


FIG. 3.22: Modèle  $RT$  pour six cellules.

FIG. 3.23: Une cellule du Modèle *RT*.

$$\begin{aligned}
 K_{pa}(e - u_1) - K_r(u_1 - u_2) - C_o \text{sign}(u'_1)|u'_1|^{pw} &= 0 & (3.19) \\
 K_r(u_1 - u_2) - K_r(u_2 - u_3) - C_o \text{sign}(u'_2)|u'_2|^{pw} &= 0 \\
 K_r(u_2 - u_3) - K_r(u_3 - u_4) - C_o \text{sign}(u'_3)|u'_3|^{pw} &= 0 \\
 K_r(u_3 - u_4) - K_r(u_4) - C_o \text{sign}(u'_4)|u'_4|^{pw} &= 0
 \end{aligned}$$

### Représentation des comportements réels d'une articulation

Ce modèle est particulièrement intéressant, car il prend en compte le couplage entre hystérésis et visco-élasticité, mis en évidence expérimentalement au paragraphe 2.2.4. Ce couplage se traduit notamment par l'expression de l'amortissement non-linéaire qui est intermédiaire entre un amortissement linéaire pour  $pw = 1$  et le comportement d'un frotteur pour  $pw = 0$ . Pour cette raison, on ne peut plus considérer d'un côté le comportement visco-élastique et le comportement hystérétique d'un autre côté, les deux comportements sont couplés.

Le modèle *RT* reproduit l'ensemble des comportements hystérétiques d'une liaison élastique. L'effet Payne comme on peut le voir sur la courbe simulée 3.24 et l'effet d'historique sont respectés comme le montre la courbe 3.25. La différence entre comportement avant et après premier rebroussement est également prise en compte. Comme on peut l'observer sur la figure 3.26.

La forme des hystérésis obtenues avec un modèle *RT* comme sur la figure 3.24 est souvent plus arrondie, que celle obtenue avec le *STS discret*. Ce dernier donne des courbes anguleuses qui semblent plus proches des courbes obtenues via des mesures sur pièces réelles. Cet arrondi est plus ou moins important en fonction de la valeur de  $pw$  et  $C_o$ . On peut remarquer sur la réponse en bi-sinus figure 3.25, qu'une visco-élasticité plus importante, introduite à travers le paramétrage du modèle *RT*, se traduit par un aspect plus arrondi des parties de la courbe reliant deux petits cycles. Cet effet est plus ou moins accentué selon les valeurs de  $pw$  et  $C_o$ .

Intéressons-nous à présent au comportement visco-élastique du modèle *RT*. Ce comportement visco-élastique se traduit par différents effets, comme la rigi-



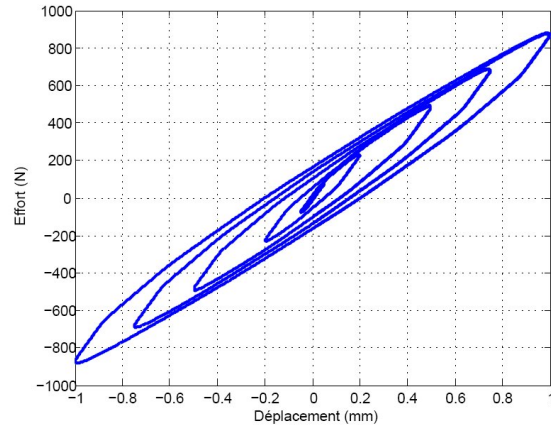


FIG. 3.24: Réponse à des sollicitations de différentes amplitudes pour un modèle *RT*.

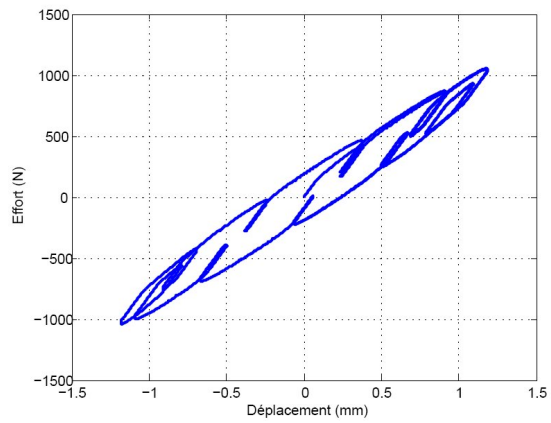


FIG. 3.25: Réponse à une sollicitation bi-sinus pour un modèle *RT* (bi-sinusus identique à celui utilisé pour le modèle *STS*).

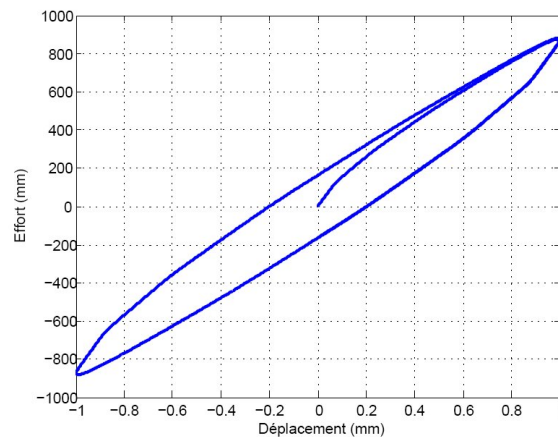


FIG. 3.26: Réponse du modèle *RT* avant et après premier rebroussement sur un cycle à 1 Hz et 1 mm.

dification dynamique, la relaxation ou encore une rigidification avec une vitesse de sollicitation croissante. Illustrons tout d'abord sur la figure 3.27 ce comportement de rigidification avec la fréquence, sur trois cycles de même amplitude et à différentes fréquences : 1 Hz, 10 Hz et 100 Hz.

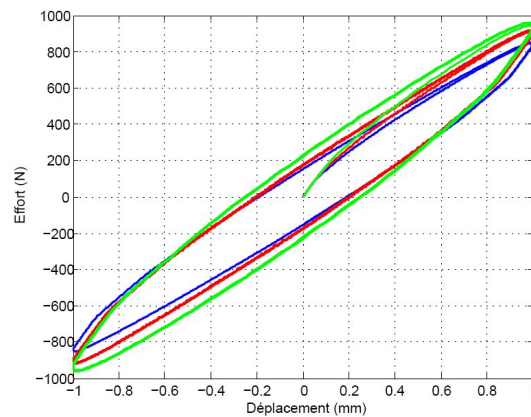


FIG. 3.27: Réponse du modèle *RT* à des sollicitations à différentes fréquences 1 Hz, 10 Hz et 100 Hz.

Le comportement en relaxation est également très important pour notre application. On peut observer sur la figure 3.28, que ce comportement est représenté par le modèle *RT*. Qualitativement, l'impact du temps de montée de l'échelon sur l'effort maximum atteint et la forme de la relaxation obtenue en figure 3.29 sont conformes à ce qui a pu être observé expérimentalement.

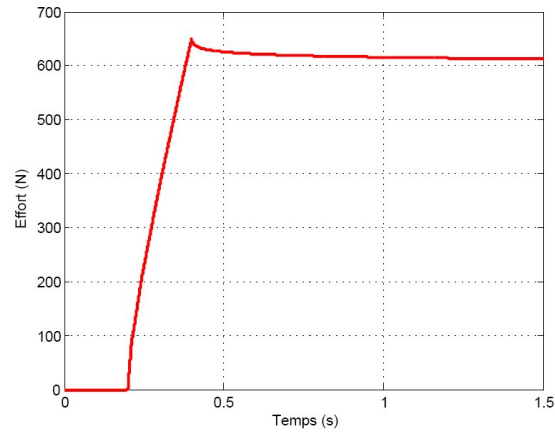


FIG. 3.28: Relaxation du modèle RT pour un échelon de 0.7 mm et un temps de montée de 0.2 secondes.

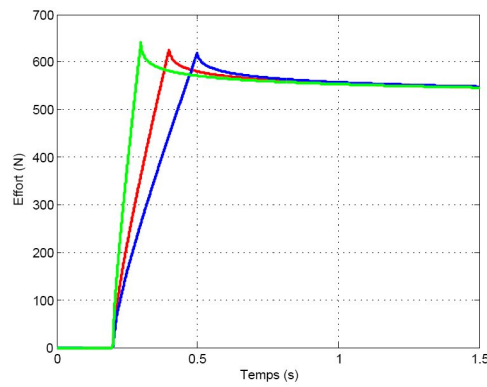


FIG. 3.29: Relaxation du modèle RT pour un échelon de 0.7 mm et des temps de montée de 0.1, 0.2 et 0.3 secondes ;

L'augmentation du module de la raideur et de l'angle de perte avec la fréquence est représentée à la figure 3.30 et 3.31.

### Propriétés du modèle RT

Analysons le comportement fréquentiel du modèle *RT*. L'amortissement non-linéaire du modèle *RT* est représenté pour chacune des cellules par la loi qui suit. En notant  $x_i$  chacun des déplacements dans les amortisseurs, on obtient alors l'équation 3.20.

$$F_i(x_i) = F_s \text{sign}(x'_i) \cdot \left| \frac{x'_i}{V_0} \right|^{pw} \quad (3.20)$$

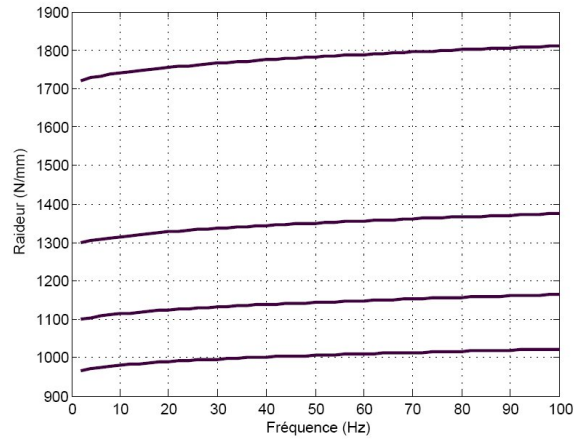


FIG. 3.30: Évolution de la raideur de modèle RT avec la fréquence pour différentes amplitudes.

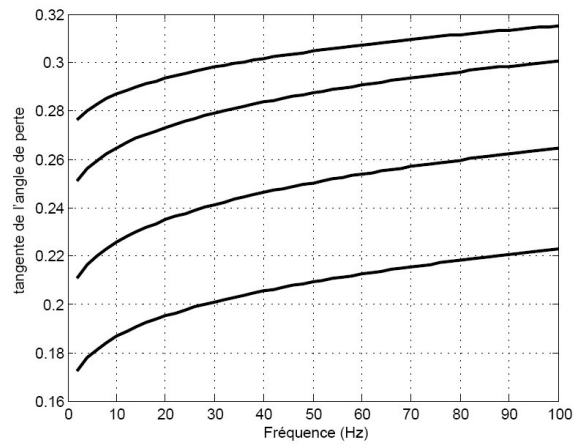


FIG. 3.31: Évolution de la tangente de l'angle de perte du modèle RT pour différentes amplitudes.

Pour un déplacement harmonique imposé au modèle,  $E(t) = A \sin(2\pi ft)$ , la vitesse de déplacement vaut  $E'(t) = A2\pi f \cos(2\pi ft)$ . On fait l'hypothèse déterminante pour le reste de ces travaux que la réponse de chaque amortisseur est proche de celle obtenue par une analyse au premier harmonique, ce qui est vérifié au premier ordre par une analyse harmonique sur le modèle  $RT$  complet. Cela nous donne :  $x'_i = 2\pi f X_i \cos(2\pi ft + \phi_i)$ . Avec  $X_i$  l'amplitude des déplacements dans l'amortisseur  $i$ , et  $\phi_i$  le déphasage par rapport à l'entrée. Une fois cette expression introduite dans la loi d'amortissement, on obtient l'équation 3.21.

$$F_i(t) = F_s \text{sign}(\cos(2\pi ft + \phi_i)) \left| \frac{2\pi f X_i \cos(2\pi ft + \phi_i)}{V_0} \right|^{pw} \quad (3.21)$$

Sous réserve que l'hypothèse soit justifiée, la dernière expression nous permet de faire une remarque sur les propriétés fréquentielles du  $RT$ . Lorsqu'on multiplie l'amplitude de sollicitation par un coefficient  $\mu$ , alors la réponse de l'amortisseur sera multipliée par un facteur  $\mu^{pw}$ . Le module de la raideur complexe, noté  $K$ , obtenu pour chaque amortisseur, quant à lui vérifiera l'équation suivante :

$$K(\mu X_i) = \mu^{pw-1} K(X_i) \quad (3.22)$$

De même, si l'on multiplie la fréquence par une constante multiplicative  $\gamma$ , alors, la réponse de l'amortisseur sera multipliée par  $\gamma^{pw}$ , et la raideur sera alors :

$$K(\gamma f) = \gamma^{pw} K(f) \quad (3.23)$$

Il est donc possible de compenser l'évolution de la raideur due à l'augmentation de l'amplitude d'un facteur  $\mu$ , par une augmentation de la fréquence par un facteur  $\gamma = \mu^{\frac{1}{pw}-1}$ . Ainsi, on obtient les iso-modules de raideurs suivants :  $K(X_i, f) = K(\mu X_i, \mu^{\frac{1}{pw}-1} f)$  pour chacune des cellules d'amortissement du modèle  $RT$ . Si on trace ces iso-raideurs dans un graphe de l'amplitude  $X_i$  et de la fréquence  $f$  avec des échelles logarithmiques, on obtiendra des droites. En effet, pour toute valeur de  $\mu$ , on aura la relation  $K(X_i, f) = K(\mu X_i, \mu^{\frac{1}{pw}-1} f)$ . Ceci permet de calculer la pente de la droite d'iso-raideur dans le diagramme  $\log(X_i)$ ,  $\log(f)$ , qui vaut  $(\frac{1}{pw} - 1)$ . L'ordonnée à l'origine peut être calculée si l'on connaît les coordonnées d'une raideur par laquelle on souhaite que la droite passe.

Lorsqu'on étend ce raisonnement au système complet, on multiplie les équations par une constante  $\mu$ ; ainsi l'ensemble des amplitudes est multiplié par  $\mu$ . Pour faire en sorte que l'amplitude de la vitesse soit également multipliée par  $\mu$ , il faut compenser le fait que multiplier par  $\mu$  l'amortissement non-linéaire revient à multiplier par  $\mu^{1/pw}$  l'amplitude. Pour cela, on utilise la propriété précédente et on multiplie la fréquence par  $\mu^{1-\frac{1}{pw}}$ . Ainsi, on retrouve la propriété sur l'ensemble

du modèle. Malheureusement, ce raisonnement ne peut être étendu aux angles de perte.

Ces propriétés nous ont conduits à tracer pour plusieurs articulations dont nous possédions les mesures fréquentielles, les iso-modules des raideurs complexes en fonction du logarithme de l'amplitude de sollicitation et du logarithme de la fréquence de sollicitation pour des mesures réalisées sur cales. On obtient alors les graphes d'iso-raideurs et iso-tangentes de l'angle de perte tracés sur la figure 3.32 et 3.33. C'est-à-dire les courbes indiquant l'ensemble des couples amplitude/fréquence pour lesquels on obtient une valeur donnée de raideur ou de tangente de l'angle de perte.

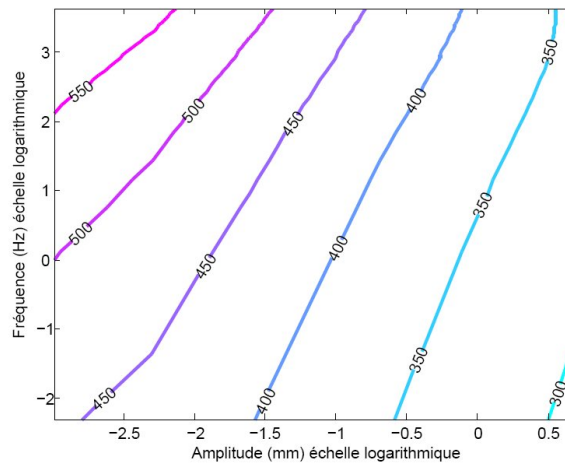


FIG. 3.32: Cartographie des iso-raideurs dans un graphe en échelle logarithmique de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation pour une cale dans une direction.

On remarque sur ces deux illustrations, tout comme sur la plupart des articulations en caoutchouc mesurées, que les iso-raideurs sont effectivement des droites. Celles-ci ne sont cependant pas tout à fait parallèles les unes par rapport aux autres, comme le modélise le *RT*. Les iso-tangentes d'angle de perte mesurées et modélisées sont assez éloignées. Il faut donc s'attendre à une représentativité de l'angle de perte qui soit moins bonne que celle du module de raideur pour un modèle *RT*. Enfin, le rapport entre les pentes des iso-raideurs et du coefficient  $pw$  a été étudié. La précision des mesures semble interdire toute utilisation de cette propriété en matière d'identification au chapitre 5. Cette propriété qui nous est tout d'abord apparue prometteuse n'est en réalité pas exploitable.

On peut constater que malgré sa bonne représentativité des comportements temporels, le modèle *RT* comporte quelques lacunes. Pour une vitesse nulle, la raideur vaudra  $K_0$ , quelle que soit l'amplitude. Ceci est différent de ce qui peut être observé en réalité et de ce qui peut être obtenu avec le modèle *STS*. Pour

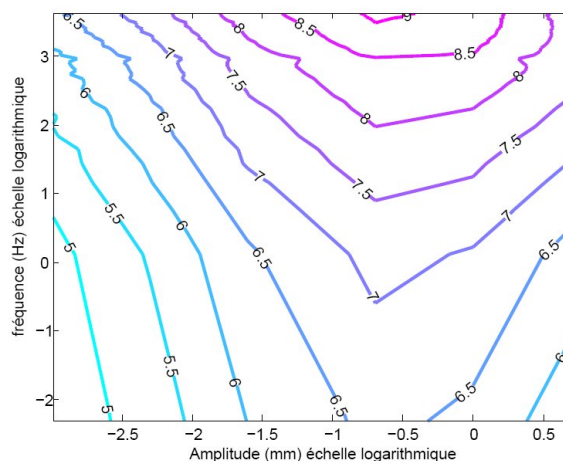


FIG. 3.33: Cartographie des iso-tangentes  $\phi$  dans un graphe en échelle logarithmique de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation pour une cale dans une direction.

une fréquence nulle ou une vitesse de sollicitation nulle, l'amortissement, et donc l'épaisseur de l'hystérésis, seront nuls. L'évolution fréquence/amplitude de la rigidité est correcte, mais celle de l'angle de perte peut s'avérer très mauvaise.

Lors d'essais comparatifs entre mesures et simulations du modèle *RT*, nous avons constaté que pour un niveau de relaxation bien représenté, la rigidification en fréquence était parfois surévaluée. Les courbes temporelles de façon générale sont trop arrondies, ce qui est significatif d'une composante visco-élastique trop importante. Enfin, il est intéressant de remarquer que le modèle *RT* doit, tout comme le modèle *STS discret*, posséder un nombre suffisant de cellules pour être représentatif d'amplitudes allant jusqu'à 2 mm. Ici encore, le nombre de 15 cellules a été retenu.

Il nous a par conséquent fallu enrichir et modifier le modèle *RT* pour qu'il représente au mieux le comportement des articulations, notamment le comportement quasi-statique à faibles fréquences. La volonté de conserver un comportement semblable au *STS discret* pour des vitesses de sollicitation faibles (quasi-statiques), nous a amenés à faire évoluer le *RT* vers le *Standard Tribo-Visco-elastic Solid (STVS)*. Ce nouveau modèle est décrit dans le paragraphe qui suit.

### 3.3.3 Le modèle STVS

#### Description du modèle

Le modèle *STVS* a été introduit pour augmenter la composante hystérétique du modèle *RT*. Grâce à ce nouveau modèle, on réintroduit une composante hystérétique pure pour une vitesse nulle. À vitesse nulle, l'angle de perte et l'aire

de l'hystérésis sont non nuls. Par ailleurs, on limite l'aspect trop arrondi des courbes d'hystérésis obtenues avec le modèle *RT*. Le modèle *STVS* est un hybride entre le modèle *RT* et le *STS*. Comme on peut le constater sur la cellule élémentaire du modèle *STVS* en figure 3.35, l'amortisseur non-linéaire du *RT* est alors remplacé par un amortisseur non-linéaire de type *RT* en parallèle avec un frotteur sec de type *STS*. Une représentation du modèle pour six de ces cellules est donnée en illustration 3.34.

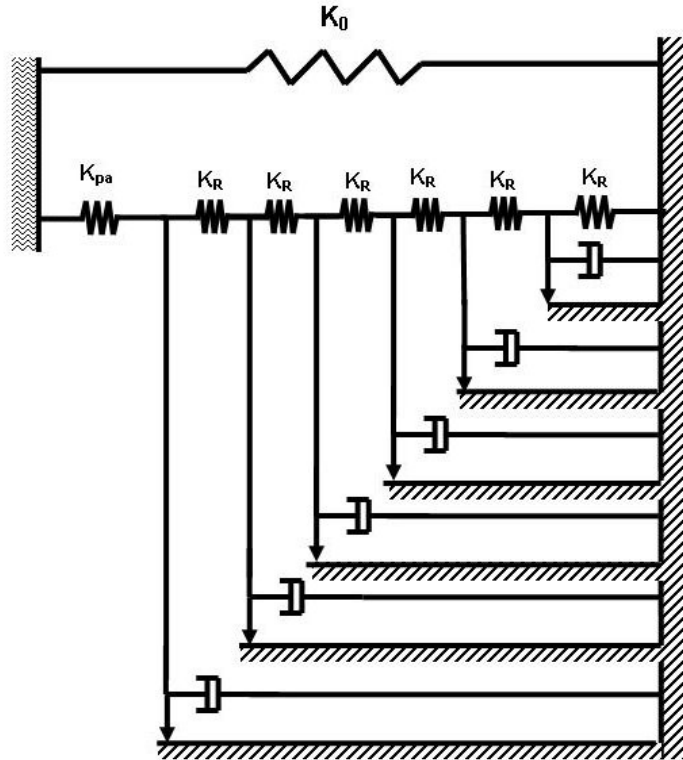


FIG. 3.34: Modèle *STVS* pour six cellules.

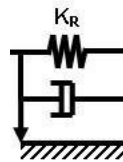


FIG. 3.35: une cellule du Modèle *STVS*.

Ce modèle permet d'obtenir un comportement hystérétique un peu plus proche du comportement réel, tout en combinant des propriétés visco-élastiques cor-



rectes, contrairement au modèle *RT* qui privilégie plutôt les composantes visco-élastiques des liaisons élastiques. Chacune des cellules du modèle *STVS*, est équivalente à un ressort plus un amortisseur non-linéaire dont la loi de comportement globale est celle décrite dans l'équation 3.24.

$$F(x') = F_f \text{sign}(x') + F_s \cdot \text{signe}(x') \left| \frac{x'}{V_0} \right|^{pw} \quad (3.24)$$

### Comportements reproduits par le *STVS*

Comme dans les paragraphes précédents nous allons évaluer les différents comportements du modèle *STVS*, par rapport au comportement réel des articulations en caoutchouc.

On peut tout d'abord remarquer qu'il faut s'attendre à retrouver une partie des propriétés inhérentes à chacun des deux modèles *RT* et *STS*. Étant donné l'organisation en arbre des éléments ressorts, amortisseurs non-linéaires et frotteurs, les propriétés seront cependant différentes d'un modèle *RT* en parallèle avec un modèle *STS*.

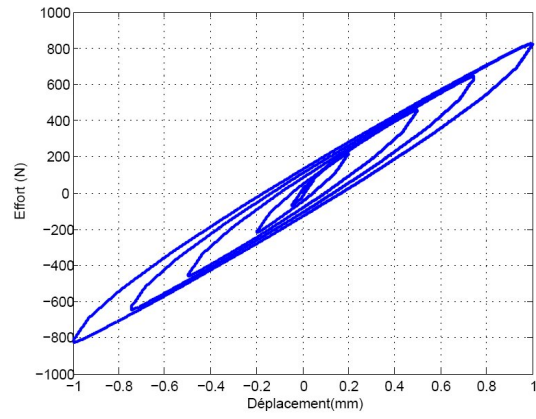
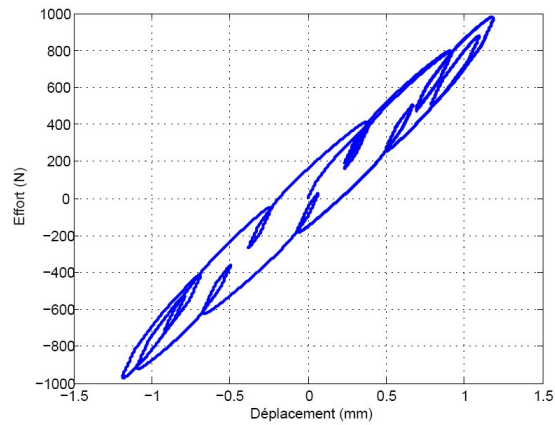
On conserve le couplage entre hystérésis et visco-élasticité du *RT*, tout en ayant cette fois des valeurs de raideur qui sont fonction de l'amplitude de sollicitation en statique comme pour le *STS*. On représente correctement l'effet Payne comme on peut le voir figure 3.36 et l'effet d'historique avec le modèle *STVS* simulé figure 3.42 dans la mesure ou nous avons un modèle discret, dont les ressorts sont organisés en série. On remarque toujours le léger changement de pente entre le début du cycle et la suite, où la seule raideur qui s'exprime est  $K_{pa} + K_0$ . En effet, encore plus que dans le modèle *RT*, l'aspect discret du modèle se fait sentir. Pour le modèle *RT*, l'ensemble des amortisseurs bougent quel que soit l'effort ou la vitesse de sollicitation non nuls. Pour le *STVS*, il faut que l'effort soit suffisant pour débloquer les frotteurs entraînant ainsi les amortisseurs non-linéaires.

De même, les comportements visco-élastiques sont représentés par les figures 3.38 pour la rigidification en fréquence et 3.39 pour la relaxation.

On observe que la rigidification en fréquence et l'aspect « pointu » des hystérésis sont plus en corrélation avec ce qui peut être observé sur des liaisons élastiques réelles. Le comportement fréquentiel du modèle *STVS*, donne des résultats assez encourageants.

### Propriétés du modèle

Comme indiqué au paragraphe précédent, ce modèle présente une combinaison des propriétés du *STS* et du *RT*. Le modèle *STVS* ne peut être identifié analytiquement comme le *STS*, mais il est possible d'utiliser le fait qu'à une vitesse faible, les amortisseurs du *STVS* s'expriment à peine. Le comportement du *STVS* est donc très proche du *STS* à faible vitesse. Si on identifie un modèle *STS*

FIG. 3.36: Modèle *STVS* et Effet Payne.FIG. 3.37: Réponse du modèle *STVS* à un bi-sinus.

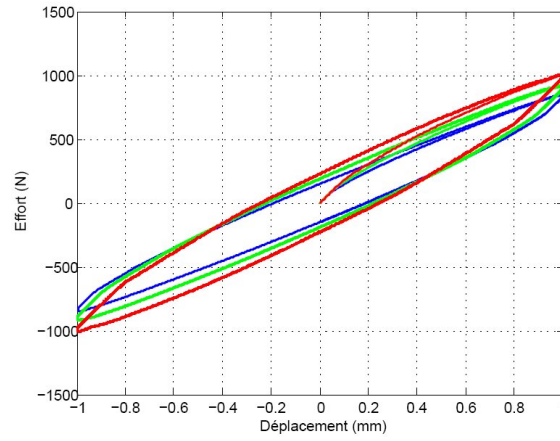


FIG. 3.38: Réponse du modèle *STVS* à trois sollicitations sinus d'amplitude identiques à 1, 10 et 100 Hz

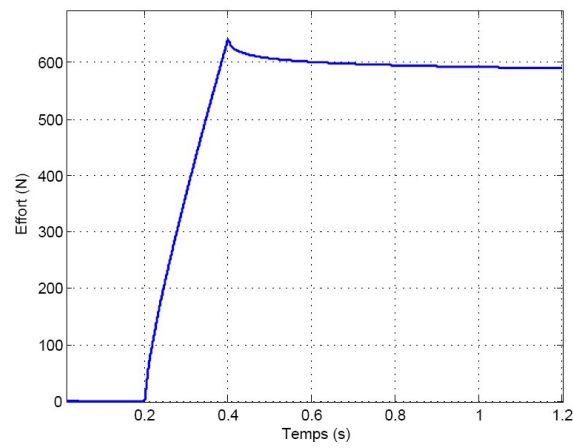


FIG. 3.39: Réponse du modèle *STVS* à un échelon en déplacement.

sur des cycles assez lents, il sera possible d'utiliser ses paramètres pour initialiser l'identification du *STVS*. Cette remarque sera exploitée au chapitre 5.

Par ailleurs, le *STVS* est représentatif des comportements visco-élastiques des articulations tout comme le *RT*, sans dégrader la représentation des raideurs quasi-statiques du *STS*.

## 3.4 Étude numérique des modèles STS, RT et STVS

### 3.4.1 Modèle STS discret

Pour calculer la réponse du modèle *STS discret*, qui comporte de nombreux frotteurs, il est nécessaire de procéder autrement que par intégration temporelle de la loi effort/vitesse. En effet, le saut en effort, qui a lieu dans les frotteurs, interdit toute stabilité d'un algorithme d'intégration. De plus, le modèle *STS* étant indépendant du temps, seul compte l'historique des sollicitations imposées. De ce fait, on utilise la loi d'équilibre en chaque point de jonction entre deux ressorts et un frotteur (voir figure 3.40). On calcule à chaque pas de temps l'effort qui est appliqué à chacun des ressorts de raideur  $K_{pa}$  et  $K_r$ . La différence d'effort entre deux ressorts se touchant donne ainsi l'effort qui est exercé sur le frotteur.

Si l'effort dans le frotteur est inférieur à  $F_f$ , alors le frotteur est bloqué et l'effort dans le frotteur correspond bien à la différence d'effort entre les deux ressorts. Mais s'il est plus élevé que  $F_f$ , alors le frotteur est débloqué, on calcule le déplacement auquel il est soumis. Grâce à ce déplacement, pour le même pas de temps les efforts dans chacun des ressorts sont recalculés. L'opération est répétée jusqu'à ce que la condition d'équilibre soit correctement approchée par chacun des ensembles de deux ressorts et un frotteur.

Pour savoir si la condition d'équilibre est bien respectée, on s'assure que la somme des efforts en chacun des points d'équilibre est inférieure à une certaine tolérance. Cette démarche est répétée à chaque pas de temps, afin d'obtenir les efforts et les déplacements dans chacune des cellules du *STS discret* à chaque pas de temps  $dt$ .

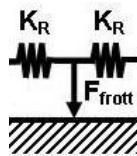


FIG. 3.40: Point du modèle où l'on écrit l'équilibre dans chaque portion du *STS* en vue du calcul de son comportement.

L'erreur commise lors du calcul de l'effort global est donc inférieure à  $N_{cell}Tol$ , en supposant le cas le plus défavorable où l'ensemble des erreurs s'accroissent.

### 3.4.2 Modèle STS continu et rebroussements

Le modèle *STS* continu quant à lui est calculé analytiquement grâce à la loi effort en fonction des déplacements. Il est nécessaire cependant de gérer les règles de Masing et de Madelung. Un algorithme de gestion et de mémorisation des points de rebroussement est donc nécessaire. Ainsi, la mémorisation des coordonnées des derniers points de rebroussement et la comparaison avec celles des précédents points de rebroussement, permet de mémoriser un nombre limité de ces coordonnées, tout en assurant le respect de ces règles. Cet algorithme permet de mémoriser cinq rebroussements maximum, ce qui est suffisant lorsque l'on connaît les règles de Madelung.

Nous allons utiliser le schéma 3.41 pour comprendre comment cet algorithme de gestion des rebroussements fonctionne.

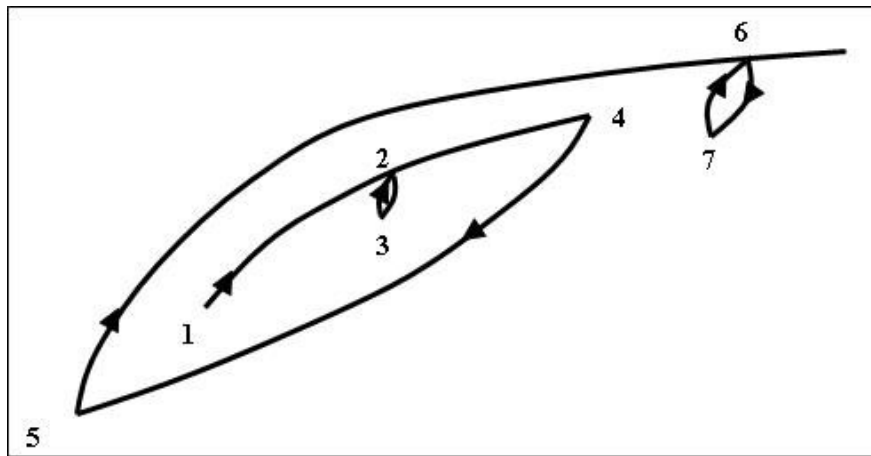


FIG. 3.41: Exemple de réponse hystérétique d'un modèle STS continu et règles de Madelung.

Quoi qu'il arrive, un rebroussement doit toujours être mémorisé dans un premier temps. Ce sont les rebroussements suivants qui déterminent si ce rebroussement doit rester en mémoire ou non. Nous distinguons les rebroussements ascendants, qui précèdent une branche de charge, et les rebroussements descendants qui précèdent une branche de décharge. Lorsque le niveau en déplacement d'un rebroussement descendant est dépassé, ce rebroussement n'a plus d'influence sur la suite des sollicitations. Lorsque le niveau d'un rebroussement ascendant est dépassé en phase descendante, ce rebroussement est également effacé. Pour mieux comprendre, nous allons suivre point par point le schéma 3.41.

On part du point n°1 qui est enregistré comme étant le dernier rebroussement ascendant. Au point n°2 a lieu un rebroussement, qui initie un déchargement de l'articulation, il est également enregistré comme étant le dernier rebroussement descendant. Le point de rebroussement n°3 est ascendant, mais supérieur au point

n°1. Lorsque le point n°2 est à nouveau dépassé, le point n°3 n'aura plus aucune influence et il est effacé. C'est alors le point n°1 qui donnera à nouveau l'origine de l'équation de la courbe de charge.

On arrive ensuite au point n°4, ce point de rebroussement descendant est plus éloigné du point n°1 que le point n°2, c'est donc ce point qui régira l'équation de décharge jusqu'au point n°5 ; le point n°2 est alors effacé.

Le point n°5 étant plus éloigné du point n°4 que ne l'est le point n°1, c'est le point n°5 qui remplace dans la mémoire le point n°1. Lorsqu'on dépasse le point n°4, celui-ci est éliminé, et c'est le point n°6 qui prend le relais et remplace le point 4 en descente, puis le point 7 est effacé dès que 6 est à nouveau atteint.

Ce modèle étant entièrement calculé de façon analytique, aucune erreur n'est introduite par le calcul. Cependant, l'algorithme de détection des rebroussements, nécessite la présence d'un filtre du premier ordre temporel et éventuellement d'un filtre spatial pour enlever tous les micro-rebroussements liés à la simulation numérique, comme indiqué au paragraphe de descriptions du *STS continu*.

### Modèle RT et intégration

Le modèle *RT* présente des équations fortement non-linéaires et les fonctions en jeu ne sont pas forcément toutes dérivables. La fonction d'amortissement non-linéaire présente des « signes » et « valeurs absolues », qui sont des fonctions discontinues dont les dérivées n'existent qu'au sens des distributions. L'intégration de telles équations différentielles non-linéaires nécessite de grandes précautions pour éviter des erreurs trop importantes et des instabilités.

Pour résoudre ce type d'équations différentielles, plusieurs solutions se présentent. On peut remarquer que cette équation fait partie de la famille des équations différentielles algébriques (EDA). Dès lors, les méthodes de résolution des équations différentielles non-linéaires, comme celles de Gear [29] ou de Petzold [65], peuvent être utilisées. Les premiers essais d'intégration des équations différentielles ont été effectués dans Mathematica<sup>®</sup>. Dans ce dernier logiciel, la routine DASSL de L. Petzold permet d'intégrer des équations très fortement non-linéaires. Cependant, les premières tentatives d'intégration implicite de ces équations sont restées infructueuses.

Le système différentiel a donc été dérivé de façon à le rendre explicite en vitesse de déplacement. Malgré cette dérivation l'équation n'était toujours pas intégrable par Mathematica<sup>®</sup>. La loi d'amortissement du modèle *RT* a finalement été modifiée de façon à devenir continue et dérivable de classe  $C^2$ . Pour cela, les fonctions « signe » et « valeur absolue » ont été remplacées par des fonctions approchées. Plusieurs fonctions ont été testées pour régulariser le signe et la valeur absolue. Elles sont répertoriées, ainsi que leurs propriétés en annexe A.

Dans Mathematica<sup>®</sup>, les fonctions de type sigmoïde ont été retenues car elles sont définies, continues et infiniment dérivables dans l'ensemble des réels. Cette méthode d'intégration fonctionne mais reste très lente.

Une seconde méthode, explicite cette fois, a donc été développée, afin de faciliter l'intégration et de limiter les erreurs. Pour ce faire, les équations 3.18 ont été inversées de façon à obtenir une formulation explicite de ces équations sous la forme générale  $F(x, t) = x'(t)$ . Les équations susnommées deviennent alors celles qui suivent 3.25 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_o^{1/pw}} \left| K_{pa}(e - x_1) - K_r(x_1 - x_2) \right|^{1/pw} \text{sign}(K_{pa}(e - x_1) - K_r(x_1 - x_2)) &= x'_1 \\
\frac{1}{C_o^{1/pw}} \left| K_r(x_1 - x_2) - K_r(x_2 - x_3) \right|^{1/pw} \text{sign}(K_r(x_1 - x_2) - K_r(x_2 - x_3)) &= x'_2 \\
\frac{1}{C_o^{1/pw}} \left| K_r(x_2 - x_3) - K_r(x_3 - x_4) \right|^{1/pw} \text{sign}(K_r(x_2 - x_3) - K_r(x_3 - x_4)) &= x'_3 \\
&\dots \\
\frac{1}{C_o^{1/pw}} \left| K_r(x_{14} - x_{15}) - K_r(x_{15}) \right|^{1/pw} \text{sign}(K_r(x_{14} - x_{15}) - K_r(x_{15})) &= x_{15}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ci-dessus on note  $e(t)$  la sollicitation en déplacements à l'entrée du système, les  $x_i$  sont les déplacements de chaque amortisseur non linéaire, les  $x'_i$  sont leur vitesse de déplacement et  $K_r$ ,  $K_{pa}$ ,  $C_o$  et  $pw$ , les paramètres du modèle RT. On peut alors utiliser un algorithme d'Euler pour intégrer le système d'équations différentielles explicites, dont le schéma est pour chaque cellule  $i$  et pour le  $k + 1$ ème pas de temps, en notant  $v = x'$  :

$$\begin{aligned}
x_i^{k+1} - x_i^k &= v_i^k \Delta t \\
v_i^{k+1} &= F^{-1}(v_i^k)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$F^{-1}$  représente la fonction d'amortissement inversée. Cette méthode reste stable et fiable pour de petits pas de temps. L'intégration par ce schéma a été transposée dans Matlab<sup>®</sup>. Malgré le schéma explicite, nous avons essayé de remplacer les fonctions valeur absolue et signe par leur équivalent régularisé. Il s'est avéré dans ce cas que la fonction sigmoïde ne pouvait être utilisée dans Matlab<sup>®</sup>, étant donné les valeurs élevées que prend l'exponentielle dans cette fonction. Cette difficulté numérique nous a poussés à changer de fonction régularisée. Celles qui ont finalement été retenues sont de classe  $C^2$  polynomiales et linéaires par morceaux.

On les notes *ic1hs* pour la fonction valeur absolue approchée et *c2hs* pour la fonction signe équivalente, conformément à l'annexe A. Nous espérons par ce stratagème pouvoir augmenter le pas de temps d'intégration. Cependant, l'augmentation de pas de temps autorisée par cette régularisation ne compense pas le temps d'évaluation de la fonction  $F^{-1}$  qui est plus long en raison de l'évaluation des fonctions régularisées qui s'ajoute à celle de la fonction d'amortissement.

### 3.4.3 Modèle STVS : intégration du modèle

Le modèle *STVS* satisfait mieux les attentes de PSA, notamment en matière de comportement dynamique et quasi-statique. Cependant, cette modélisation est très non-linéaire; les lois d'amortissement qui la constituent sont issues de la combinaison entre un frotteur de type *STS* et un amortisseur non-linéaire de type *RT*. Il présente donc des discontinuités de comportement difficiles à intégrer. Rappelons la formulation de l'amortissement non-linéaire du modèle *STVS* :

$$F(x') = \text{sign}(x')F_f + C_o \text{sign}(x')|x'|^{pw} \quad (3.27)$$

On voit très bien que les deux comportements s'ajoutent. L'amortissement présente donc la discontinuité de comportement des frotteurs et la non-linéarité de l'amortissement *RT* liée à la puissance  $0 < pw < 1$ . L'algorithme d'intégration devra prendre en compte le fait que le frotteur soit déclenché ou non et que son effort soit négatif ou non. Pour cela, il faudra envisager les trois cas indiqués ci-dessous.

1. La différence d'effort entre les ressorts à un point d'équilibre vaut entre  $-F_f$  et  $F_f$ , le frotteur est bloqué, l'amortisseur également, la vitesse dans les deux éléments est nulle.
2. La différence d'effort entre les ressorts à un point d'équilibre vaut plus de  $F_f$ , le frotteur glisse, la vitesse est positive et est régie par la loi d'amortissement *RT*. L'effort dans le frotteur reste constant.
3. La différence d'effort entre les ressorts à un point d'équilibre vaut moins de  $-F_f$ , le frotteur glisse, la vitesse est négative et est régie par la loi d'amortissement *RT*. L'effort dans le frotteur reste constant.

La distinction entre ces trois cas étant faite, il est possible d'inverser morceau par morceau la loi d'amortissement correspondant à l'équation 3.27 :



$$x'_i(t) = \frac{1}{C_0^{\frac{1}{pw}}}(F + F_f)^{\frac{1}{pw}} \text{ si } F > F_f \quad (3.28)$$

$$x'_i(t) = \frac{1}{C_0^{\frac{1}{pw}}}(F + F_f)^{\frac{1}{pw}} \text{ si } F < -F_f \quad (3.29)$$

$$x'_i(t) = 0 \text{ si } -F_f < F < F_f \quad (3.30)$$

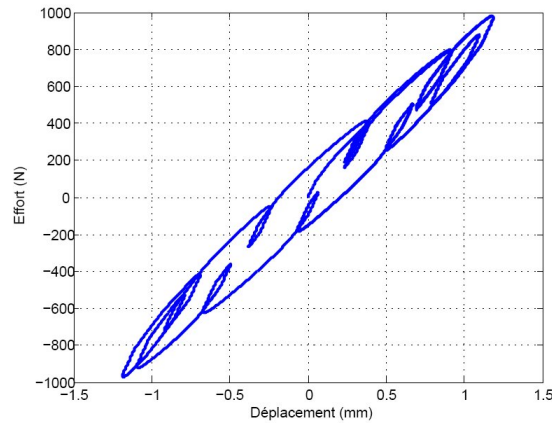
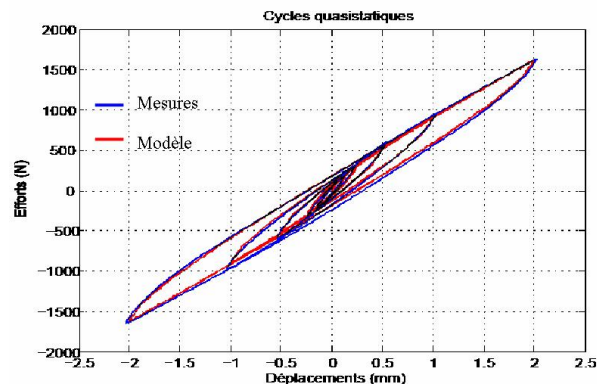
$$(3.31)$$

On peut ensuite utiliser une méthode d'Euler pour intégrer la réponse du *STVS* pour chacune de ses cellules, comme pour le modèle *RT*. Le schéma d'intégration d'Euler est indiqué dans l'équation 3.26. Remarquons ici que si le pas de temps est assez petit et que l'on gère bien le passage d'un état à l'autre avec une structure « if », il est possible de se dispenser des fonctions de régularisation remplaçant le signe ainsi que la valeur absolue. Un pas de temps plus faible entraîne un temps de calcul plus long, tandis que l'ajout des fonctions régularisées ajoute au temps d'évaluation de la fonction.

Les deux méthodologies ont été intégrées dans Matlab<sup>®</sup>, avec et sans régularisation. À l'aide de l'outil « profiler » du logiciel Matlab<sup>®</sup>, il a été mis en évidence que le calcul des fonctions régularisées, surtout dans le cas des fonctions polynomiales de degré élevé (voir annexe A), prend du temps. Les fonctions de type polynomiales de faible degré sont moins longues à évaluer. Les fonctions sigmoïdes de leur côté ne sont pas utilisables dans Matlab<sup>®</sup> en raison de la valeur trop importante que prend l'exponentielle lors de son évaluation. Ce point ne pouvait pas être vérifié dans Mathematica<sup>®</sup>, car ce logiciel peut adapter sa précision de calcul à la taille du nombre évalué. L'implémentation dans Matlab<sup>®</sup> étant plus proche de celle qui est utilisée dans ADAMS<sup>®</sup>, c'est la méthode d'intégration sans régularisation qui a été favorisée.

### 3.5 Conclusion sur le choix du modèle

Le modèle *STVS* a finalement été retenu pour modéliser le comportement mécanique des articulations dans ADAMS<sup>®</sup>. Il s'est avéré que ce modèle hybride entre le *STS discret* et le modèle *RT* présente un comportement satisfaisant, qui semble assez proche de celui mesuré sur les pièces en caoutchouc décrites au chapitre 2. Nous avons pu voir cependant que ce modèle comporte des difficultés d'implantation numérique liées au comportement combiné des frotteurs du *STS* et des amortisseurs non-linéaires du *RT*. Les figures 3.42, 3.43, 3.44 et 3.45 représentent le comportement du modèle *STVS* confronté à des mesures sur articulation.

FIG. 3.42: Réponse du modèle *STVS* à un bi-sinus.FIG. 3.43: Réponse du modèle *STVS* et confrontation aux mesures quasi-statiques.

Le modèle *RT* qui semblait en première approximation assez bien reproduire l'ensemble des comportements nécessaires à notre modélisation, s'est avéré lacunaire et posséder une visco-élasticité trop élevée par rapport aux liaisons élastiques, dont l'hystérésis est plus indépendante du temps et de la fréquence que celle obtenue avec le *RT*. De plus, l'amortissement non-linéaire du *STVS* permet d'obtenir une dépendance du comportement avec l'amplitude y compris pour des vitesses très faibles, voire nulles. Ce n'est pas le cas avec le modèle *RT*. Il y aura donc avec le *STVS* existence de grandeurs statiques qui caractérisent le comportement à vitesses nulles de la pièce, ce qui est plus proche de la réalité.

Jusqu'à présent, nous nous sommes cantonnés à un aspect purement qualitatif concernant les comportements représentés par ces divers modèles. Nous allons

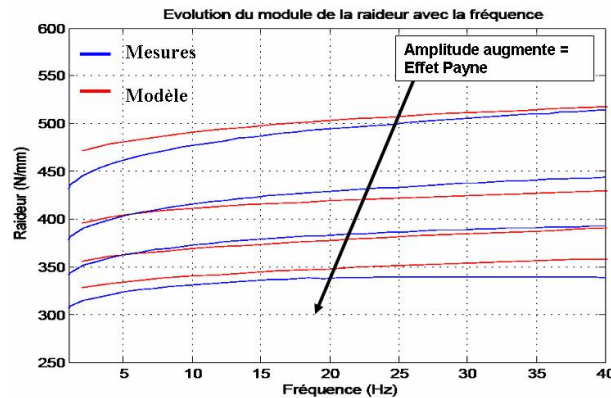


FIG. 3.44: Réponse du modèle *STVS* à une sollicitation harmonique à différentes fréquences, tracé de la raideur dynamique du modèle d'articulation et de la mesure.

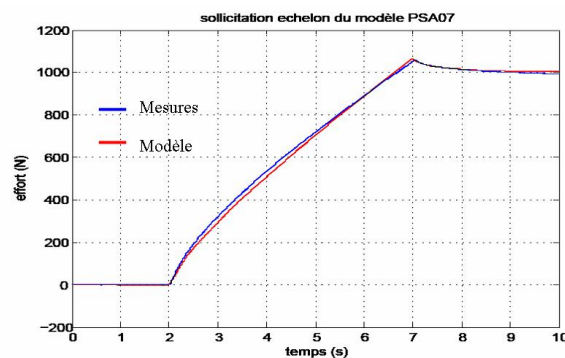


FIG. 3.45: Réponse du modèle *STVS* à un échelon en déplacement et comparaison avec la mesure.

au chapitre 5 décrire l'élaboration d'une méthode d'identification adaptée à ces modèles. Le modèle *STVS* s'est avéré mieux adapté pour assurer la cohérence entre comportement temporel et fréquentiel que le modèle *RT*. Cependant, étant donné le lien entre *STS*, *RT* et *STVS*, il nous a semblé intéressant d'utiliser les modèles *STS* et *RT* pour mieux identifier le modèle *STVS*, comme nous le verrons toujours au chapitre 5.

Afin de valider cette modélisation, pour la problématique industrielle, il est nécessaire de l'introduire dans une structure complète de LAS et de vérifier que les comportements obtenus avec cette modélisation sont réalistes. Le chapitre 4 qui suit, décrit comment introduire ces modèles dans une structure plus ou moins simplifiée de LAS, puis dans un modèle multi-corps.

### 3.5.1 Résumé

Plusieurs approches ont été décrites dans ce chapitre pour modéliser une articulation en caoutchouc. Il est ressorti que le modèle *RT* de Coveney semble le modèle le plus adapté au besoin de PSA en terme de modélisation transitoire temporelle. Il représente l'ensemble des comportements nécessaires pour l'application faite par PSA. Il a l'avantage de se trouver dans la continuité du modèle *STS* utilisé précédemment par PSA. Cependant, l'étude a montré que le modèle *RT* présente des caractéristiques fréquentielles, notamment une tangente de l'angle de perte incohérentes vis-à-vis des mesures faites sur pièce. Par ailleurs, la raideur d'un tel modèle aux alentours d'une fréquence nulle tend toujours vers une même raideur, quelle que soit l'amplitude de sollicitation. Ceci ne correspond pas à la réalité des mesures, occultant la non-linéarité en amplitude pour des vitesses trop faibles.

Le modèle *STVS* apporte une composante quasi-statique de raideur et d'angle de perte même à vitesse ou fréquence nulle, qui permet de prendre en compte l'hystérésis pure même pour des vitesses faibles. Il permet d'augmenter la composante hystérétique qui semble dominante dans le comportement des articulations en caoutchouc, tout en conservant un couplage entre effet Payne et rigidification fréquentielle.

Les premières confrontations entre mesure et modèle ont donné des résultats plutôt satisfaisants. L'ensemble des comportements : cycles statiques, sinus, bi-sinus, relaxation, rigidification fréquentielle, sont correctement représentés avec les bons ordres de grandeur. La tangente de l'angle de perte demeure difficile à reproduire.

### 3.5.2 Perspectives

Avec le modèle *STVS* on perd la possibilité, que l'on avait avec un *STS* continu ou un modèle *RT* d'avoir une hystérésis d'aire non nulle aux faibles amplitudes en raison de la présence des frotteurs. La forte non-linéarité des lois utilisées nous a poussés à chercher des subterfuges pour limiter les discontinuités de loi d'amortissement. Cependant, la contrainte d'un temps de simulation raisonnable, nous a poussés à utiliser une formulation inversée de cette loi d'amortissement de façon à pouvoir l'intégrer avec un algorithme d'Euler. Il est à noter qu'aucun correcteur pour limiter les erreurs d'intégration n'a été implémenté, et pour cette raison les pas d'intégrations doivent restés faibles.

Dans la littérature, de nombreux modèles de caoutchouc font appel aux dérivées non entières. Cet outil semble très puissant et les récents algorithmes développés

pour pouvoir utiliser cet outil dans le domaine temporel (voir article de Galucio [27]) nous encouragent à penser que ce type de modélisation prendra une place de plus en plus importante pour le comportement de matériaux de type élastomères. Leur simulation reste, cependant, assez lourde en terme de mémoire et de temps de calcul pour des modélisations dans le cadre de simulations multi-corps.

Il va sans dire qu'un modèle tel que celui présenté par Sjöberg ou Garcia aurait pu suffire à notre objectif, mais n'aurait pas permis à PSA de pousser plus loin dans la compréhension physique des grandeurs associées à l'articulation en caoutchouc. En effet, les dérivées non entières sont un outil mathématique très puissant pour modéliser les phénomènes visco-élastiques dans les plastiques, mais ne laissent qu'une place limitée à l'interprétation physique.



## Chapitre 4

---

# Simulation multi-corps

---

Ce chapitre aborde la mise en oeuvre au sein d'un modèle de Liaison Au Sol (LAS) des modèles étudiés aux chapitres précédents. En tant qu'éléments non-linéaires, l'introduction au sein d'une structure mécanique de liaisons élastiques peut affecter le comportement global de la structure en question. Ce chapitre est entièrement consacré à cette problématique.

Dans un premier temps, nous allons définir les grandeurs caractéristiques de la LAS et de la dynamique du véhicule qui seront utiles à la compréhension des diverses influences que peuvent avoir les articulations en caoutchouc.

Afin d'illustrer de façon simplifiée l'impact des non-linéarités de comportement des articulations en caoutchouc sur le comportement global de la LAS, deux exemples de comportements vibratoires classiques en dynamique du véhicule sont ensuite présentés : le balourd de roue et les trépidations. Plusieurs modélisations d'articulations en caoutchouc sont testées, tout en restant proche des modèles décrits au cours des chapitres précédents. Ces cas d'étude permettent de faire une première analyse de l'influence des divers paramètres de modélisation et des divers comportements évoqués au chapitre 2.

Le volet suivant de ce chapitre est consacré à la programmation et aux aspects numériques de l'introduction du modèle dans ADAMS<sup>®</sup> en complément de ceux évoqués au chapitre 3. Les difficultés numériques rencontrées lors de l'utilisation des modèles *RT* et *STVS* sont présentées ainsi que les solutions mises en places afin de rendre la simulation plus rapide. Les spécificités de l'utilisation de telles modélisations dans un logiciel de simulation multi-corps sont également détaillées.

Enfin, des simulations qualitatives et comparées avec des mesures sur banc d'essai du comportement en pompage, en virage et en braquage de la LAS, ont

permis l'obtention de premiers résultats encourageants quant à la pertinence du modèle *STVS*. Ces simulations ont mis en évidence plusieurs phénomènes impliquant les articulations en transitoire, comme la relaxation lors d'un virage de grande ampleur ou l'effet Payne associé aux diverses amplitudes de sollicitation.

## 4.1 Liaison au Sol et dynamique du véhicule

Avant d'aborder la modélisation multi-corps, nous allons développer au cours des paragraphes suivants les notions essentielles concernant la LAS et la dynamique des véhicules automobiles. Cette courte description peut être complétée par les livres de Halconruiy [35] et Gillespie [32].

### 4.1.1 Liaison Au Sol (LAS)

#### Les différentes parties de la LAS

Comme indiqué en introduction, la LAS est l'ensemble des éléments qui supportent le véhicule automobile et assurent le contact avec le sol. Hormis le guidage et la stabilité de la voiture, elle assure un grand nombre de fonctions ou prestations (voir tableau 1.1). Les différents ensembles constitutifs de la LAS sont :

- les pneus ;
- les roues ;
- les suspensions ;
- la direction ;
- les essieux.

Un certain nombre de systèmes électroniques peuvent également être intégrés à la LAS, comme l'ABS (AntiBlockierSystem), l'ESP (Electronic Stability Program) ou les suspensions pilotées. Ces éléments ou systèmes permettent de parfaire la composante mécanique de la LAS ainsi que ses performances, surtout en matière de sécurité active. Des liaisons élastiques pilotées existent également, notamment des supports hydrauliques de groupe motopropulseur ou encore des cales magnéto-rhéologiques. De plus en plus d'éléments actifs sont implantés dans la LAS.

Sur l'image 4.41, on peut voir la plupart des éléments en caoutchouc d'une LAS d'automobile. Comme indiqué à plusieurs reprises au cours de ce mémoire, ils sont nombreux et les négliger dans le cadre d'une modélisation multi-corps de la LAS occasionne un manque de représentativité du comportement dynamique du véhicule.





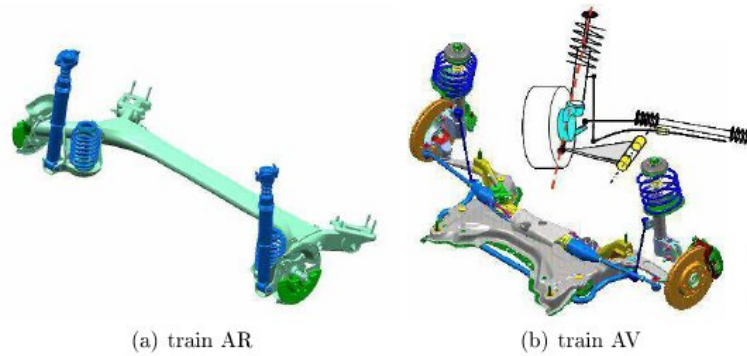


FIG. 4.2: Train avant et train arrière dans une LAS.

#### 4.1.2 Dynamique du véhicule

La dynamique du véhicule consiste à évaluer le comportement du véhicule soumis à certaines sollicitations. Pour évaluer cette réponse du véhicule, il est nécessaire de le positionner dans l'espace. Pour cela on distingue trois directions, la direction longitudinale, qui correspond à l'axe  $X$ , la direction transversale ou axe  $Y$  qui traverse le véhicule de gauche à droite, et enfin l'axe  $Z$ , qui est l'axe vertical du véhicule.

La caisse du véhicule peut tourner autour de ces trois axes. L'angle de rotation autour de l'axe  $Z$  est appelé angle de lacet, celui autour de  $Y$  celui de tangage et enfin celui autour de  $X$  est l'angle de roulis. On peut retrouver l'ensemble de ces données sur le schéma 4.3.

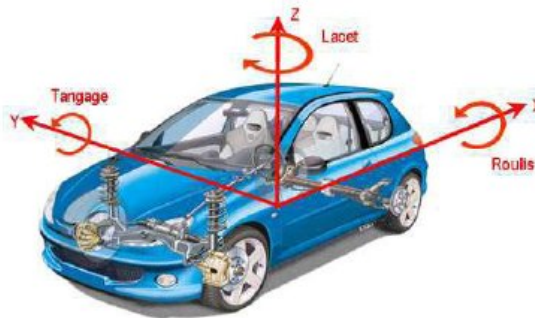


FIG. 4.3: Le positionnement de la caisse du véhicule dans l'espace.

On utilise également un certain nombre d'angles et de distances pour ca-

racteriser l'évolution de la géométrie de la LAS. Ces grandeurs permettent de caractériser le plan de roue, qui correspond au plan qui passe par le milieu de l'épaisseur de la roue. Ce sont les épures cinématiques, lorsque la géométrie seule est prise en compte, et élasto-cinématiques, lorsque les efforts dynamiques dans les liaisons sont également pris en compte.

Elles peuvent être facilement mesurées pour un véhicule sur un banc d'essai multi-vérin. Il suffit de les calculer lors de simulations, pour comparer grandeurs mesurées et grandeurs simulées. Les grandeurs caractéristiques du plan de roue donnent des renseignements intéressants sur le comportement du véhicule et sur sa capacité à répondre de façon adaptée aux commandes du conducteur. L'influence des liaisons élastiques sur le comportement du plan de roue est l'une des applications envisagées pour le modèle décrit au chapitre précédent. Parmi les grandeurs caractéristiques du plan de roue, on trouve :

- la pince et l'ouverture ;
- le carrossage et le contre-carrossage ;
- le braquage.

Ces angles d'inclinaison du plan de roue sont dessinés sur le schéma 4.4.

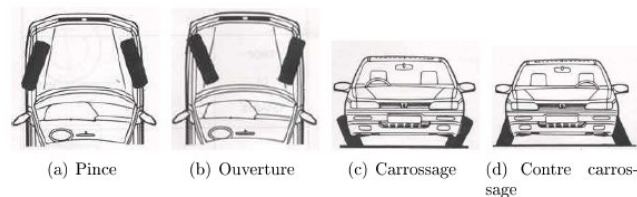


FIG. 4.4: Orientation du plan de roue dans l'espace.

Enfin, la définition de la géométrie de la LAS est complétée par la notion de voie qui est la distance entre les deux centres de roues sur le même essieu. La voie peut également être mesurée entre les deux points de la base de roue. Il existe également une notion de demi-voie pour souligner le caractère non symétrique entre roue gauche et droite de ces grandeurs. L'empattement désigne la distance entre les centres de roue d'un même côté du véhicule. Ces deux notions sont illustrées sur la figure 4.5.

La différence de trajectoire par rapport à l'orientation de la caisse est également essentielle en dynamique du véhicule, elle est mesurée par un angle appelé « dérive ». C'est la différence entre trajectoire suivie et trajectoire « visée », elle est illustrée figure 4.6.

La dynamique des véhicules permet à partir de modèles simplifiés ou de logiciels de simulation multi-corps de calculer les variations géométriques (épures

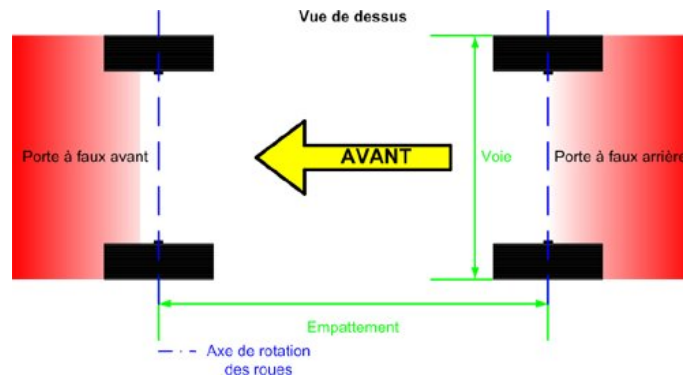


FIG. 4.5: Empattement et voie sur un véhicule vu du dessus et porte à faux avant et arrière.

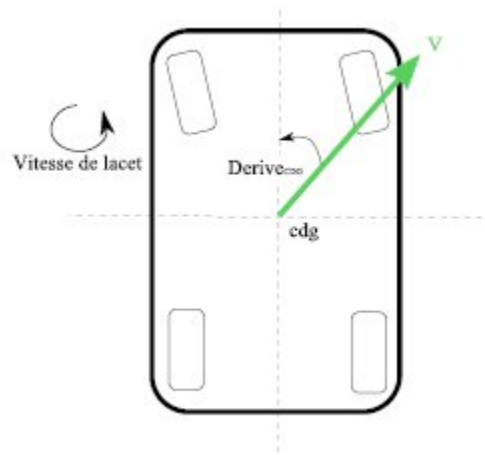


FIG. 4.6: Angle de dérive.

cinématiques et élasto-cinématiques), les modes de résonance et autres réponses d'un véhicule soumis aux diverses sollicitations qu'il peut rencontrer en situation de vie. Nous utiliserons surtout, au cours de ce chapitre, les grandeurs qui caractérisent le plan de roue.

### 4.1.3 Précisions sur les liaisons élastiques étudiées

Les articulations situées entre le bras de la traverse arrière et la caisse du véhicule, sont des pièces très importantes pour le comportement routier. Elles permettent le filtrage ACV vertical, mais elles assurent également la transmission longitudinale des efforts à l'essieu arrière de l'automobile. Leur rôle est également d'assurer un degré de liberté entre la caisse et la LAS. Ces articulations sont représentées sur la figure 4.7 et seront désignées dans la suite du mémoire comme

étant les **cales E1 arrière** droites et gauches selon leur position par rapport à l'axe longitudinal du véhicule.

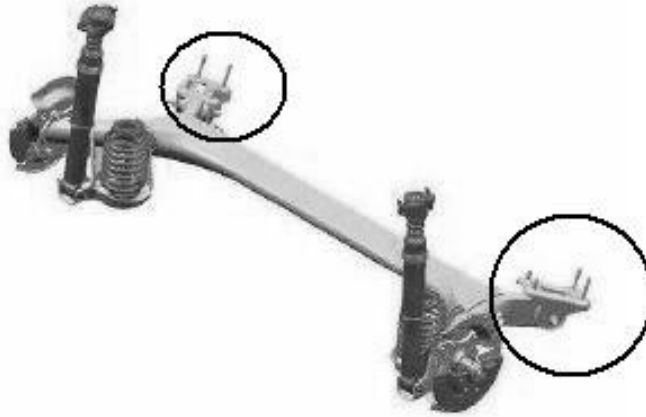


FIG. 4.7: Position des articulations en caoutchouc d'essieu arrière ou articulations E1 arrière.

Les deux autres types de pièces étudiés sont les rotules élastiques du triangle avant de suspension. L'articulation située le plus en avant du triangle (voir schéma 4.8) sera désignée sous le terme de **cale E1 avant** droite ou gauche. L'articulation située plus en arrière du véhicule au bout du triangle, sera notée **cale E2 avant**. Une photographie du triangle de suspension avant en figure 4.9 permet de mieux localiser les points E1 et E2. Ces derniers relient la LAS à la caisse du véhicule, mais sont également solidaires du troisième point du triangle, qui se trouve derrière la roue du véhicule et participe à la cinématique de direction.

On peut voir sur la figure 4.10 un train arrière assez complexe dont le nombre de liaisons souples en caoutchouc est important.

## 4.2 Deux exemples simples : balourd et trépidations

Nous allons à présent nous intéresser à deux exemples simples de prestations ACV, le balourd de roue et les trépidations.

### 4.2.1 Introduction

En mécanique des structures, l'exemple d'un véhicule se déplaçant sur un profil irrégulier de route est souvent étudié. Dans le monde automobile, selon la forme de ce profil, les fréquences de sollicitations engendrées, leurs amplitudes,

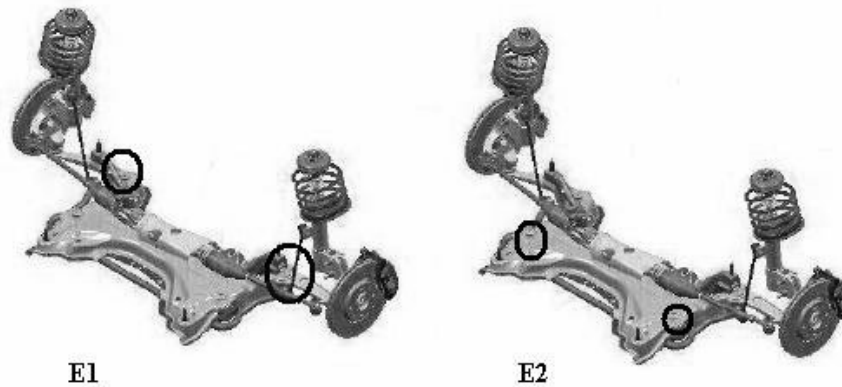


FIG. 4.8: Positionnement des cales E1 et E2 avant sur un train avant de véhicule.

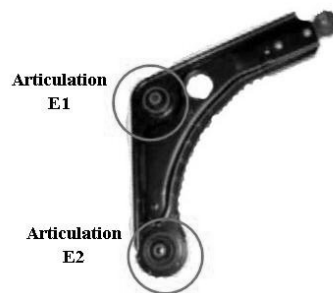


FIG. 4.9: Triangle avant droit de suspension vu du dessus : en bas de la photographie, la cale E2, au milieu du triangle, la cale E1.

la dénomination du phénomène varie. En l'occurrence nous allons nous intéresser aux **trépidations**. Elles sont le résultat d'un profil de route engendrant une sollicitation verticale sinusoïdale d'une amplitude d'environ 1 mm en base de roue. Selon la vitesse du véhicule, la fréquence de sollicitation varie et provoque une réponse plus ou moins bien filtrée par la suspension du véhicule. Le maximum de ressenti et d'inconfort a lieu pour le conducteur et ses passagers à une fréquence d'environ 20 Hz.

Cependant, d'autres sollicitations peuvent intervenir sur le confort des passagers, indépendamment du profil de route. Le **balourd de roue** est un défaut d'équilibrage dynamique ou statique de la roue, qui engendre une sollicitation horizontale de la suspension du véhicule. C'est alors la suspension horizontale de roue qui est mise en cause. Il s'agit, en simplifiant la structure, d'une articulation en caoutchouc située derrière la roue.

Dans ces deux exemples, le rôle des articulations en caoutchouc est très impor-

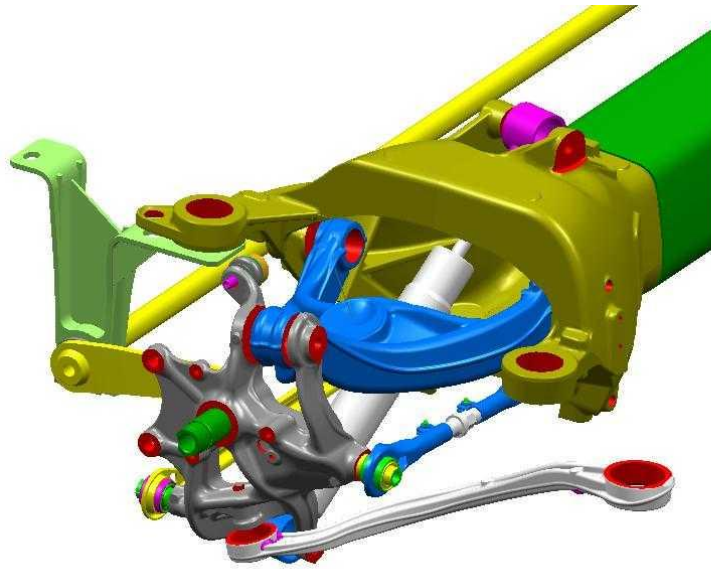


FIG. 4.10: Vue en CAO 3D d'un train arrière complexe.

tant. Elles peuvent selon leurs caractéristiques favoriser ou défavoriser le filtrage des vibrations entre la roue et la caisse du véhicule. Nous nous sommes donc intéressés à une illustration simplifiée de ces deux exemples, comprenant des articulations en caoutchouc.

Plusieurs modélisations ont été adoptées pour ces articulations, afin de voir comment une modélisation plus ou moins complexe et non-linéaire pouvait jouer sur le comportement en balourd (1 degré de liberté (DDL)) et en trépidations (2 DDL). On retrouve parmi ces modélisations :

- une raideur complexe indépendante de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation ;
- une raideur complexe dont l'expression dépend de l'amplitude de sollicitation selon une loi proche du comportement *STS* ;
- une raideur complexe, représentée par le comportement *RT* modélisé dans le domaine fréquentiel par l'approximation décrite au paragraphe 5.3, et qui est donc dépendante de l'amplitude, mais également de la fréquence ;
- une raideur complexe, représentée par le comportement *STVS* modélisé dans le domaine fréquentiel par l'approximation décrite au paragraphe 5.3, pour étudier l'impact de chacun des paramètres du *STVS* sur les trépidations et le balourd.

Nous allons à présent nous intéresser au balourd de roue dont le comportement est assez simple et n'implique qu'une seule raideur, celle d'une articulation

en caoutchouc. Ceci permettra donc de bien détailler l'influence des paramètres de modélisation de la liaison élastique sur le comportement en balourd de la structure.

Avant d'entrer dans le détail de ces deux exemples, il convient de donner quelques définitions supplémentaires :

- **La masse non suspendue** : masse de l'ensemble constitué par le train roulant.
- **La masse suspendue** : masse de la caisse du véhicule à laquelle on ajoute celle du groupe moto-propulseur.

## 4.2.2 Le balourd de roue

### description du modèle de balourd

Le balourd de roue est un défaut d'équilibrage dynamique ou statique de la roue d'un véhicule. Il revient à considérer une roue équilibrée sur laquelle une masse de faible importance est ajoutée à une distance notée  $\epsilon$  du centre de rotation de la roue. La sollicitation induite sur la masse non-suspendue lorsque la roue est en rotation est un effort sinusoïdal dont la fréquence varie avec la vitesse du véhicule. L'amplitude de cet effort évolue proportionnellement au carré de la vitesse du véhicule, à la masse de balourd et à la distance de la masse de balourd au centre de rotation de roue.

L'expression de l'effort de balourd est indiquée en équation 4.1.  $R$  est le rayon de la roue (on considère que la masse de balourd se trouve à la périphérie de celle-ci),  $\omega$  la vitesse angulaire de la roue qui dépend de la vitesse du véhicule.

$$F_B = Rm\omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

Cet effort est appliqué directement à la masse non suspendue  $m_{ns}$ , c'est-à-dire la roue. Cette masse agit sur la caisse par l'intermédiaire d'une raideur qui représente la suspension horizontale de roue (SHR), essentiellement constituée d'une liaison élastique en caoutchouc. On ne prend pas en compte la pesanteur dans le problème. Le schéma 4.11 montre la structure très simple qui représente le comportement en balourd.

L'équation différentielle résultant de la loi fondamentale de la dynamique est l'équation 4.2, où  $K_{shr}$  indique la raideur horizontale de la suspension de roue, qui n'est autre dans ce modèle, que la raideur de la liaison élastique se trouvant derrière la roue. La grandeur  $x(t)$  représente les déplacements de la masse non suspendue au cours du temps.

$$m_{ns} \frac{d^2x}{dt^2} = -K_{shr}x + F_B \quad (4.2)$$



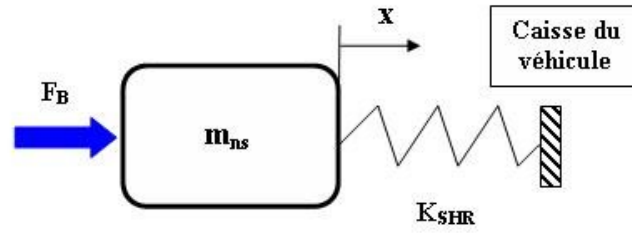


FIG. 4.11: Illustration simplifiée du balourd de roue en dynamique des structures.

Lorsque l'on passe dans un domaine de sollicitation fréquentiel, on obtient l'équation 4.3 qui permet d'en déduire l'expression des déplacements dans la formule 4.4.

$$-\omega^2 m_{ns} X(\omega) = -K_{shr} X(\omega) + Rm\omega^2 \quad (4.3)$$

$$X(\omega) = \frac{Rm\omega^2}{(K_{shr} - m_{ns}\omega^2)} \quad (4.4)$$

La raideur de l'articulation en caoutchouc  $K_{shr}$  a été remplacée par différentes expressions, selon les quatre cas cités en introduction de ce paragraphe 4.2.1. Pour une raideur complexe indépendante de la fréquence et de l'amplitude de sollicitation, on utilise l'expression 4.5. Elle représente une raideur quasi-statique, avec un comportement dissipatif dont le module  $K_0$  et l'angle de perte  $\phi$  sont par conséquent eux aussi indépendants de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation.

$$K_{shr} = (1 + i \tan(\phi))K_0 \quad (4.5)$$

Pour prendre en compte l'effet Payne, on modifie l'expression ci-dessus afin d'ajouter une évolution décroissante vis-à-vis de l'amplitude de sollicitation. L'expression choisie a été définie de façon à être proche de la non-linéarité en amplitude du modèle *STS*. Le modèle *STS* reproduit assez bien l'effet Payne, mais une approximation analytique au premier harmonique de son comportement en amplitude n'est pas réalisable ou s'avère très complexe. L'évolution du module de la raideur en fonction de l'amplitude pour un modèle *STS* est quasiment hyperbolique pour des amplitudes supérieures au micron, avec une asymptote aux grandes amplitudes. Nous avons donc choisi de représenter le modèle *STS* par l'approximation analytique indiquée dans l'équation 4.6. Dans cette expression,

$K_0(1 + i \tan(\phi))$  représente la raideur linéaire et  $\lambda$  est le paramètre assurant une non-linéarité, plus ou moins importante, en amplitude, comme on peut le voir sur la figure 4.12.

$$K_{shr}(A) = K_0(1 + i \tan(\phi))\left(1 + \frac{\lambda}{1 + \sqrt{A}}\right) \quad (4.6)$$

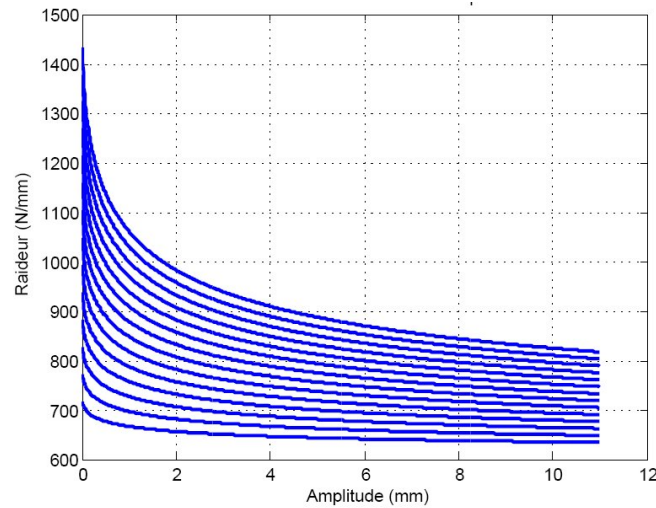


FIG. 4.12: Tracé de l'approximation de la raideur en fonction de l'amplitude pour  $\lambda$  compris entre 0,2 et 1,5.

Le niveau moyen de la raideur ainsi obtenue dépend de  $K_0$ , comme on peut l'observer sur le tracé figure 4.13. Le paramètre  $\lambda$  permet de moduler la décroissance et d'imposer une asymptote plus ou moins proche du point de départ à une amplitude nulle.

Des calculs plus approfondis ont été effectués afin de prendre en compte à la fois la non-linéarité en amplitude et en fréquence. Cette évaluation a été réalisée grâce aux modèles *RT* et *STVS*. Il s'agit des deux derniers cas listés en introduction de ce paragraphe 4.2.1. Pour cela, nous avons utilisé l'approximation fréquentielle décrite au chapitre 5 bien que celle-ci ne soit pas optimum.

### Analyse des résultats : introduction

Les simulations du balourd ont été réalisées pour différentes masses  $m$  de balourd de roue sous Matlab®. L'influence de la non-linéarité est mesurée sur différentes grandeurs caractéristiques du balourd de roue au moment où la fréquence propre de la structure est atteinte :

- L'effort de blocage (effort maximum subi par le système), cet effort doit normalement intervenir aux alentours de 20 Hz fréquence propre de la structure ;

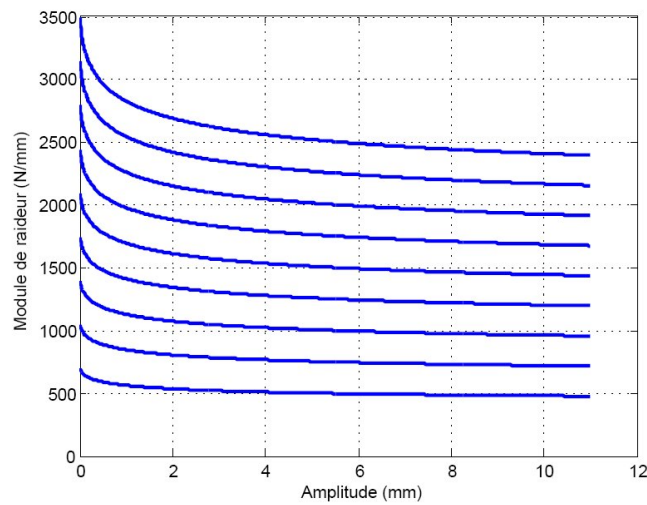


FIG. 4.13: Tracé de l'approximation de la raideur en fonction de l'amplitude pour  $K_0$  compris entre 600 et 2000.

- La vitesse (fréquence propre) du véhicule à laquelle apparaît le blocage (environ 90 km/h) ;
- L'amplitude des déplacements obtenus à ce moment, qui va nous intéressé présentement.

L'analyse comparative des résultats obtenus avec les différentes modélisations de la raideur des articulations a mis en évidence certaines influences des articulations sur le comportement global du véhicule, notamment sur les points suivants :

1. La fréquence à laquelle le déplacement maximum ou l'effort maximum de blocage est atteint varie avec certaines non linéarités ;
2. La forme et l'amplitude du pic de déplacement maximum évoluent en fonction du type de non linéarité qui est introduite.

La suite de ce paragraphe constitue une analyse plus détaillée de l'influence de la non-linéarité en amplitude et en fréquence sur la réponse en balourd, ainsi que de l'impact des divers paramètres des modèles *RT* et *STVS* sur le comportement de la structure face à une sollicitation de type balourd de roue.

### Impact de la non-linéarité en amplitude

Les expressions utilisées pour le comportement linéaire et non-linéaire de l'articulation en caoutchouc se trouvent ci-dessous, avec  $A$  l'amplitude de déplacement :

$$K_{shr}(A) = K_0(1 + i \tan(\phi))(1 + \frac{\lambda}{2}) \quad (4.7)$$

$$K_{shr}(A) = K_0(1 + i \tan(\phi))(1 + \frac{\lambda}{1 + \sqrt{A}}) \quad (4.8)$$

Ces expressions ont été choisies de façon à ce que le comportement statique à 1 mm de l'équation soit identique à celui de l'équation 4.7. La figure 4.14 montre les amplitudes de déplacement obtenues avec la fréquence de sollicitation. Pour des valeurs de  $m_{ns} = 45$  kg,  $m = 10$  g,  $R = 200$  mm, le déplacement maximum obtenu pour une raideur  $K_0 = 493$  daN/mm et  $\tan(\phi) = 0,15$  est de 0,3 mm. On observe, pour les deux types de formulation de raideur, une fréquence de 20 Hz environ pour l'amplitude maximum de déplacement. La pulsation propre du système vaut environ  $\omega = \sqrt{K_{shr}/m_{ns}}$ ; elle dépend donc de  $\lambda$ ,  $K_0$  et  $\tan(\phi)$ . Comme  $\lambda$  introduit la non linéarité en amplitude, il est normal que la fréquence propre du système soit dépendante de cette non linéarité.

Lorsque l'on compare le comportement du balourd de roue calculé avec une raideur linéaire avec celui obtenu pour une raideur non-linéaire avec l'amplitude, on constate effectivement un décalage de la fréquence à laquelle le déplacement est maximum. Plus l'influence de la non-linéarité en amplitude est amplifiée pour  $\lambda$  grand, plus le décalage est important en fréquence, comme on peut le voir sur la figure 4.15. Le niveau de déplacement atteint, quant à lui ne semble pas être affecté par la non-linéarité en amplitude.

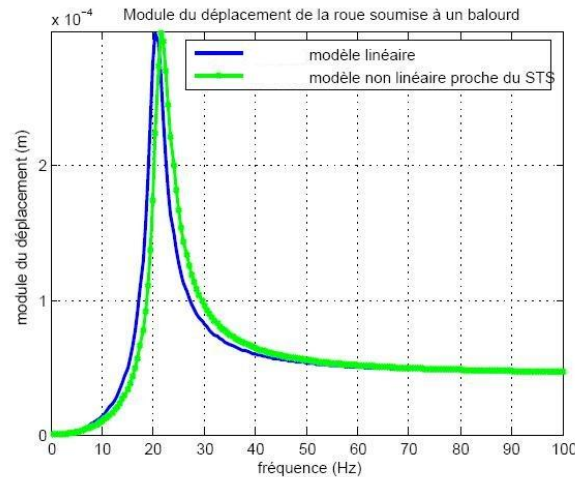


FIG. 4.14: Illustration du comportement en balourd de roue, déplacement de la roue en fonction de la fréquence de sollicitation (pour  $m=10$ g).

Pour une masse de balourd qui augmente, l'amplitude de déplacement maximum augmente. Pour une masse de balourd de  $m = 50$  g, on atteint au maximum 1,5 mm, la fréquence reste aux alentours de 20 Hz, comme on peut le voir figure 4.16. Cependant, pour des masses aussi importantes de balourds les deux courbes représentant un comportement linéaire et un non linéaire sont quasiment superposées.

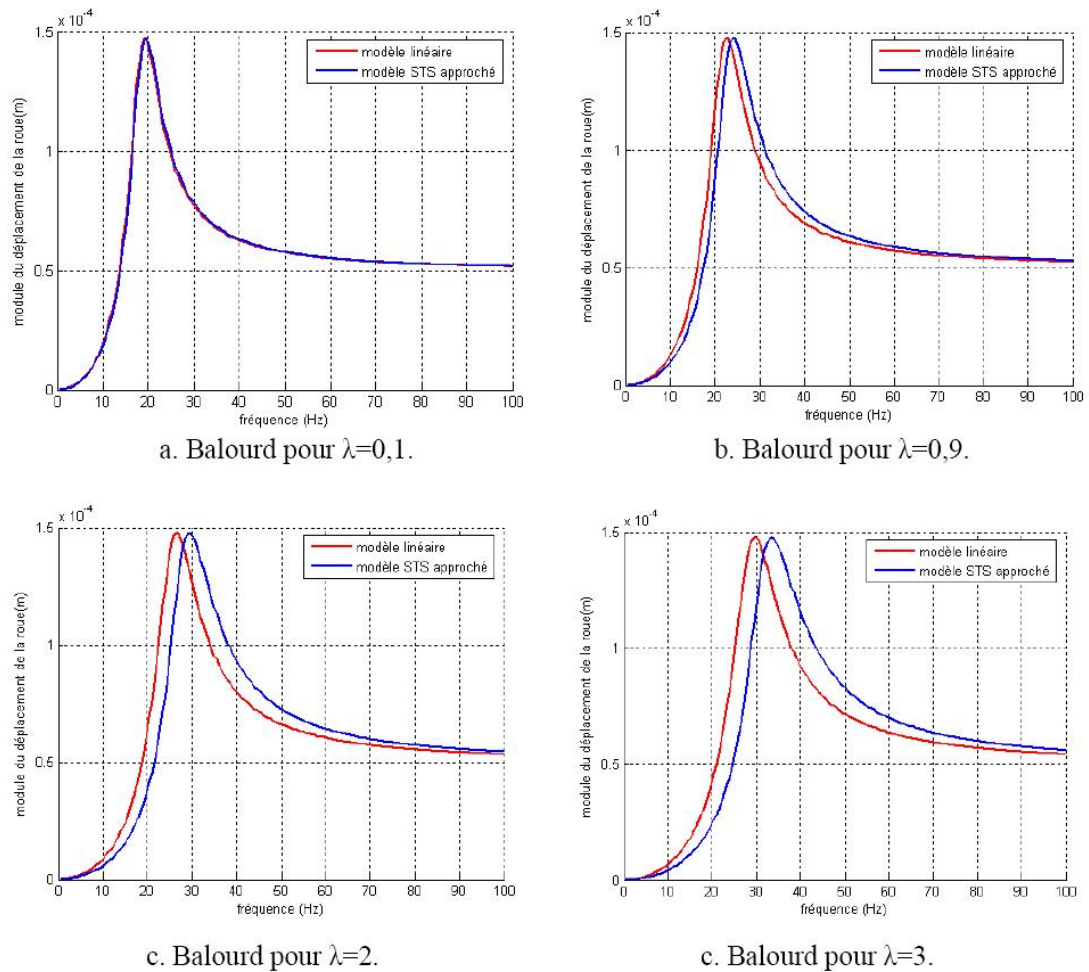


FIG. 4.15: Illustration du comportement en balourd de roue, déplacement de la roue en fonction de la fréquence de sollicitation pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

### Impact de la modélisation RT ou STVS

Nous allons à présent nous intéresser à l'influence de la non-linéarité en fréquence et en amplitude sur le comportement de balourd de roue. Pour cela on compare les résultats obtenus sur le modèle *RT* et le modèle linéaire indépendant de l'amplitude et la fréquence de sollicitation. Outre l'influence sur la fréquence propre du système, on note que pour un modèle *RT*, l'amplitude de déplacement maximum est également influencée par des variations de paramètres du modèle *RT*.

Plus  $K_{pa}$  est faible, plus le niveau maximum de déplacement atteint en balourd de roue est élevé, comme on peut le constater sur la figure ci-dessous 4.18. La

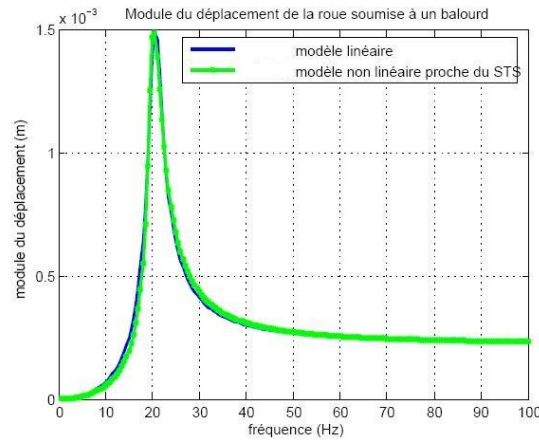


FIG. 4.16: Évolution du déplacement causé par un balourd de roue à différentes fréquences pour un modèle linéaire et un modèle non-linéaire (pour  $m=50g$ ).

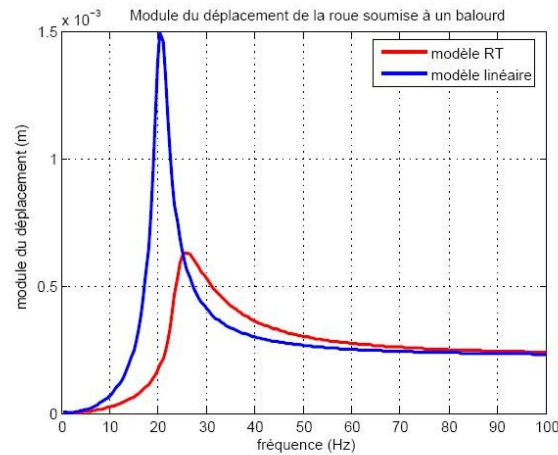


FIG. 4.17: Comparaison du comportement indépendant de l'amplitude et de la fréquence d'une articulation en caoutchouc et du comportement RT dépendant de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation.

fréquence de mode propre de la structure, quant à elle, a tendance à diminuer et à rejoindre celle du modèle linéaire. Pour un  $K_{pa}$  faible, le comportement sera en effet très peu hystérétique et assez proche d'un modèle linéaire.

Au contraire, lorsqu'on augmente  $K_r$ , l'amplitude de déplacement maximum augmente et la fréquence de mode propre augmente, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous 4.19.

Pour ce qui est du paramètre  $pw$  compris entre 0 et 1, on note une évolution de la courbe des déplacements en fonction de la fréquence de sollicitation du

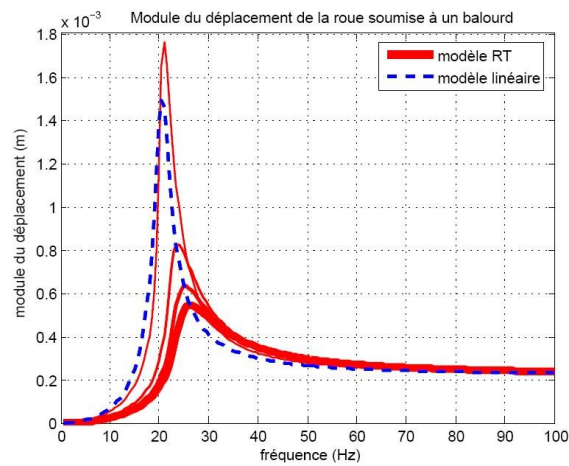


FIG. 4.18: Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre  $K_{pa}$  (traits épais  $K_{pa}$  élevé (6000 N/mm) et traits fins  $K_{pa}$  faible (500 N/mm)).

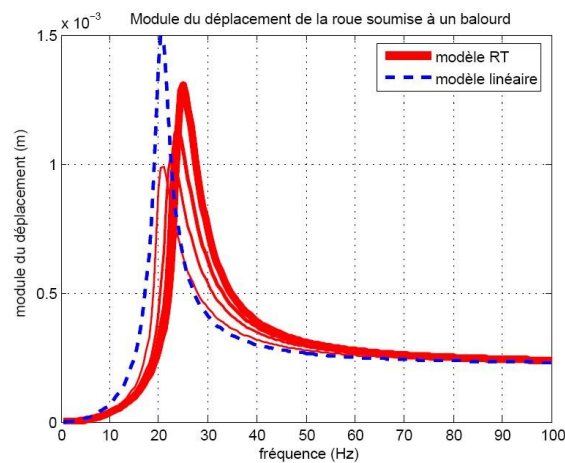


FIG. 4.19: Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre  $K_r$  (traits épais  $K_r$  élevé (6000 N/mm) et traits fins  $K_r$  faible (500 N/mm) avec 1500 et 3000 comme valeurs intermédiaires).

balourd limitée. Au-delà de  $pw = 0,1$  l'évolution de l'amplitude maximale de déplacement est très rapide. Les variations de fréquence de mode propre sont plus limitées que pour les autres paramètres. Plus  $pw$  augmente plus l'amplitude de déplacement augmente, plus la fréquence diminue, comme on peut le voir sur la figure suivante 4.20.

Concernant le paramètre  $C_o$ , l'amplitude maximum de déplacement évolue rapidement lorsque le paramètre diminue et la fréquence évolue assez peu quand



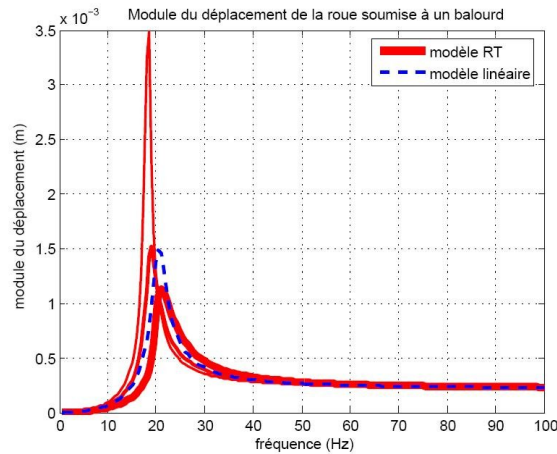


FIG. 4.20: Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre  $pw$  (traits épais  $pw$  faible (0,1) et traits fins  $pw$  élevé (0,9), avec 0,5 comme valeur intermédiaire).

$C_o$  augmente (4.21). On remarque que les deux paramètres  $C_o$  et  $pw$  qui sont les plus symptomatiques de la visco-élasticité influent surtout sur l'amplitude maximum atteinte plutôt que sur la fréquence à laquelle ce maximum est atteint. La non linéarité apportée par ces deux paramètres au modèle est assez importante.

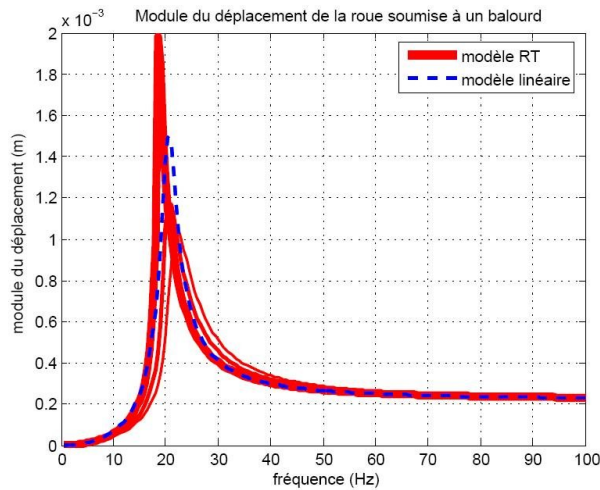


FIG. 4.21: Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre  $C_o$  (traits épais  $C_o$  faible (20) et traits fins  $C_o$  élevé (90) avec une valeur intermédiaire à  $C_o = 50$ ).

Les paramètres  $K_{pa}$  et  $K_t$  au contraire font varier de façon linéaire les amplitudes maximums de déplacement et la fréquence propre de la structure. Comme



nous l'avons plusieurs fois évoqué au cours de cette thèse, les traits communs entre le *RT* et le *STVS* permettent de prévoir un comportement similaire du balourd de roue pour les paramètres communs aux deux modèles.

Un calcul pour vérifier l'influence de la masse de balourd vis-à-vis des différents modèles linéaires, STS approché et RT approché a été effectué. Ce calcul a permis de mettre en évidence que l'influence des non linéarités dépend de la masse de balourd de roue.

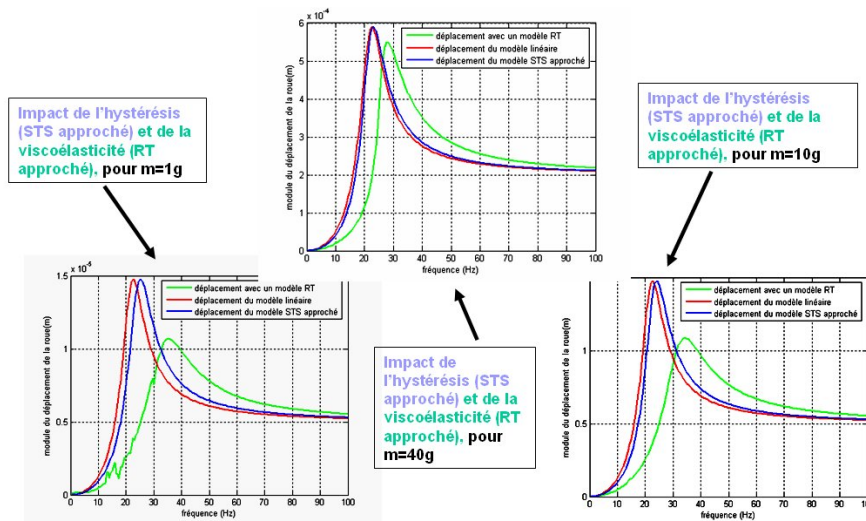


FIG. 4.22: Illustration de l'évolution de l'influence des non linéarités liées à la modélisation des articulations en fonction de la masse de balourd pour 1, 10 et 40 g.

### 4.2.3 Les trépidations

Les trépidations sont principalement dues à l'état et au type de route sur laquelle circule le véhicule. Elles sont nettement perceptibles pour des sollicitations de 0,4 mm/s; le seuil minimum de perception humain se trouve entre 0,1 et 0,2 mm/s. Ce sont des excitations de l'ordre du millimètre dont la plage de fréquence est comprise entre 5 et 30Hz, voire 40 Hz. Elles peuvent être ressenties dans le volant, la planche de bord, les planchers, les assises ou les dossiers de sièges. Pour ce qui est du volant, on distingue les vibrations verticales liées au mode de colonne du volant.

La planche de bord quant à elle est excitée en mode de flexion. Ces phénomènes apparaissent en roulage sur pavés, sur autoroute à partir de 100 km/h ou sur route à profil ondulé. En ce qui concerne le plancher et les sièges, les ébranlements sont dus aux battements de roues, aux modes d'essieux, aux modes de GMP (Groupe Moto-Propulseur) et de caisse. Ces derniers phénomènes sont plutôt liés à une

excitation sur route à bon revêtement, mais à profil ondulé ou déformé.

La modélisation de la structure du véhicule peut alors être représentée comme sur la figure 4.23. Ce modèle est désigné en automobile sous le terme générique de modèle **quart de véhicule**. Il ne représente qu'un seul ensemble roue suspension et un quart de la masse suspendue. Il est très souvent utilisé en automobile comme indiqué dans le livre de Gillespie [32], afin de déterminer certains comportements caractéristiques de la LAS comme les trépidations ou le rebond de roue.  $x_0$  représente la sollicitation en base de roue liée aux déformations de la route parcourue. Pour notre exemple, nous imposons une sollicitation sinusoïdale à différentes fréquences, d'une amplitude variant de 1 à 2 mm.

Deux masses sont prises en compte, la masse suspendue qui représente l'ensemble {caisse + groupe moto-propulseur (GMP)} et la masse non suspendue, qui correspond à l'ensemble {roue + pneu}. On se trouve donc dans le cas d'un modèle à deux degrés de liberté.

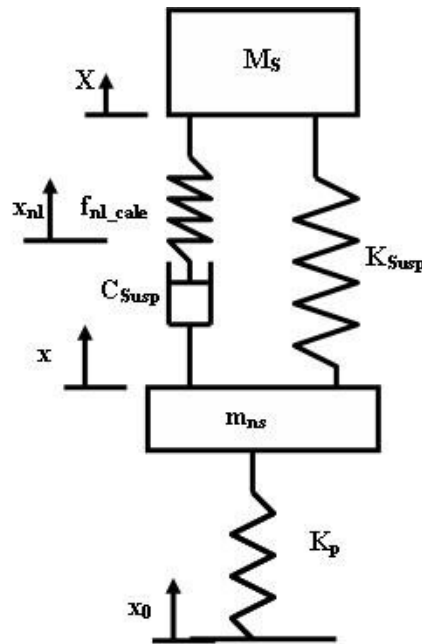


FIG. 4.23: Illustration d'un modèle simplifié « quart de véhicule » à destination du calcul des trépidations en dynamique des structures.

Les équations de la dynamique 4.9 donnent dans ce cas :

$$\begin{aligned}
M_s \frac{d^2 X}{dt^2} &= -K_{susp}(X - x) - f_{nl}[X - x_{nl}](X - x_{nl}) & (4.9) \\
m_{ns} \frac{d^2 x}{dt^2} &= K_{susp}(X - x) + C_{susp} \frac{d(x_{nl} - x)}{dt} - K_p(x - x_0) \\
f_{nl}[X - x_{nl}](X - x_{nl}) &= -C_{susp} \frac{d(x_{nl} - x)}{dt}
\end{aligned}$$

On reprend la même approximation de la non-linéarité en raideur de la cale qu'à l'exemple sur le balourd de roue. Pour les fréquences du système non amorti, on trouve les valeurs suivantes :  $f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{susp}K_p}{M_s(K_{susp}+K_p)}}$  et  $f_{ns} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(K_{susp}+K_p)}{m_{ns}}}$ . Le premier mode se trouve aux alentours de 1 Hz, ce qui est relativement gênant pour les passagers étant donné que la sensibilité d'un être humain à des sollicitations proches de cette fréquence est très importante et provoque souvent les maux des transports.

### Résultats obtenus pour les trépidations

On remarque sur la figure 4.24 que la transmission des déplacements à la caisse du véhicule est dépendante de la masse non suspendue. Plus celle-ci est faible, plus les vibrations ressenties dans le domaine de la dizaine de Hertz seront faibles.

Le modèle linéaire et le modèle non-linéaire de type *STS* donnent des résultats assez proches, comme on peut le voir figure 4.25.

### Influence de la non-linéarité en fréquence et en amplitude

Nous avons également introduit les modèles *RT* et *STVS* en lieu et place du ressort non-linéaire. Ces deux modèles ont une influence légèrement plus importante sur les niveaux de transmission des vibrations à la caisse du véhicule et les fréquences auxquelles les niveaux maximum sont atteints. On peut voir sur l'illustration 4.25 la transmission des vibrations pour les quatre modèles envisagés : linéaire, *STS* approché, *RT* et *STVS*.

Qualitativement, on remarque que le paramètre ayant le plus d'influence est la raideur  $K_0$ , qui régit la raideur globale de l'articulation.  $K_{pa}$  et  $K_r$ , contrairement à l'attendu ont moins d'influence pour les trépidations que pour le balourd. En effet, la raideur de suspension étant relativement faible, la raideur des cales assez importante, cette dernière peut entraîner des niveaux d'effort assez élevés. Le paramètre  $C_o$  et la puissance  $pw$  font très peu évoluer la réponse fréquentielle. Les illustrations correspondantes se trouvent en annexe E.

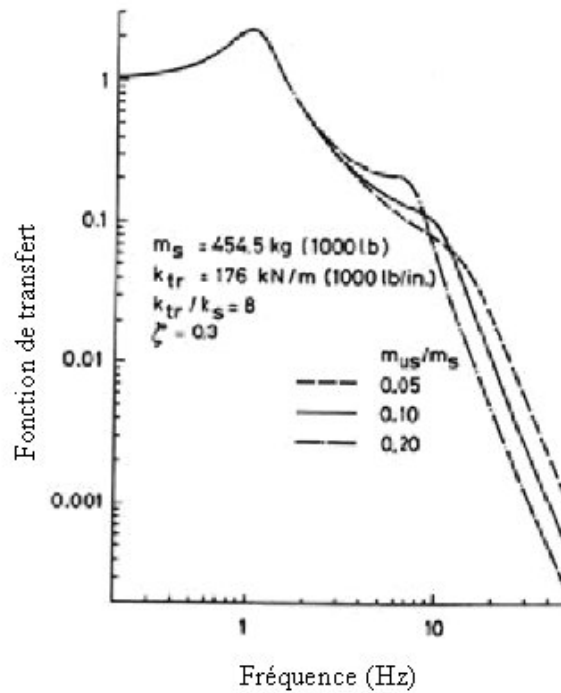


FIG. 4.24: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations et différentes masses non suspendues. Illustration provenant de l'article de Wong [78].

### 4.3 Introduction du modèle de cale dans ADAMS®

L'introduction du modèle d'articulation en caoutchouc dans ADAMS®, c'est-à-dire à l'intérieur d'une structure complexe de LAS, suppose le choix d'une fonction utilisateur et d'une méthode d'intégration numérique appropriées. Plusieurs possibilités s'offrent à l'utilisateur d'ADAMS® pour introduire un nouveau modèle de liaison dans ce logiciel. Les liaisons sont habituellement représentées grâce à une fonction décrivant leur loi de comportement en effort en fonction des déplacements, c'est la loi d'élasticité non-linéaire ou loi élasto-cinématique.

Le nombre de degrés de liberté dans une modélisation multi-corps de LAS est très important. On peut trouver jusqu'à 600 éléments en caoutchouc dans un véhicule, comme indiqué dans [54] en 1988. Ce nombre ne cesse d'augmenter du fait de structures de plus en plus complexes, comme les structures multi-bras (voir figure 4.10).

Il s'agit, lors de l'introduction dans ADAMS® du modèle *STVS*, de ne pas occasionner une augmentation trop importante du temps de calcul lors des simulations. Pour cela, il est nécessaire d'alléger et de simplifier au maximum la charge de calcul prise par l'intégrateur du logiciel lors de simulations temporelles.

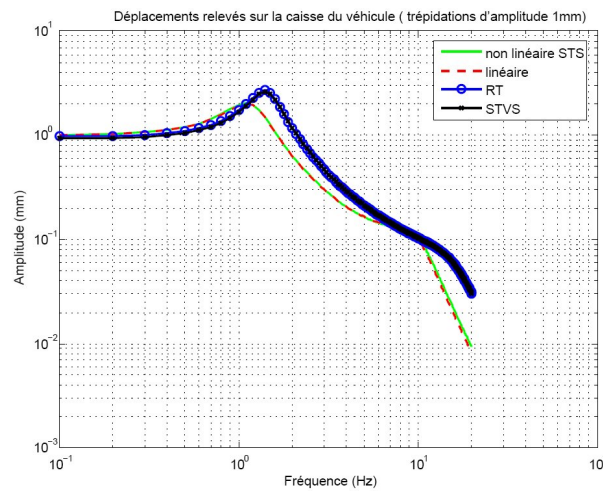


FIG. 4.25: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour les quatre modèles de cales envisagés.

Le *RT* tout comme le *STVS* sont des modèles de comportement régis par un système d'équations différentielles à quinze degrés de liberté. Pour chaque liaison et dans chaque direction de sollicitation, il est nécessaire de résoudre un système de quinze équations différentielles non-linéaires. Il convient donc d'adapter la méthode d'implantation et d'intégration aux contraintes industrielles qui sont, entre autres, des délais de conception et des délais de résolution de problèmes réduits. Les temps de simulation doivent donc rester raisonnables et ne pas dépasser une nuit pour des sollicitations simulées durant quelques minutes environ.

Le modèle *STVS*, tout comme le *RT*, ont été introduits dans ADAMS® grâce à des fonctions utilisateur. Ces fonctions, programmées en Fortran, assurent le calcul de l'effort produit par le modèle de liaison élastique. Le choix de la fonction utilisateur dans ADAMS® a été orienté vers deux possibilités. La première consiste à intégrer le système d'équations différentielles via ADAMS®. La seconde consiste à intégrer ces équations dans la fonction utilisateur elle-même.

Ces deux méthodes ont été implantées et comparées sur un modèle simplifié de structure. Ce modèle consiste en une poutre reliée à une pièce encastrée au sol par une articulation de type *STVS* et ce pour une sollicitation uni-directionnelle. Ce modèle simple correspond au système isolé {bras arrière + cale E1 arrière + caisse encastrée} présenté en figure 4.26.

Il nous a permis dans un premier temps de vérifier pour différents jeux de sollicitations que le modèle, une fois introduit dans ADAMS®, donne des réponses pertinentes par rapport au comportement réel d'une liaison élastique. Différents

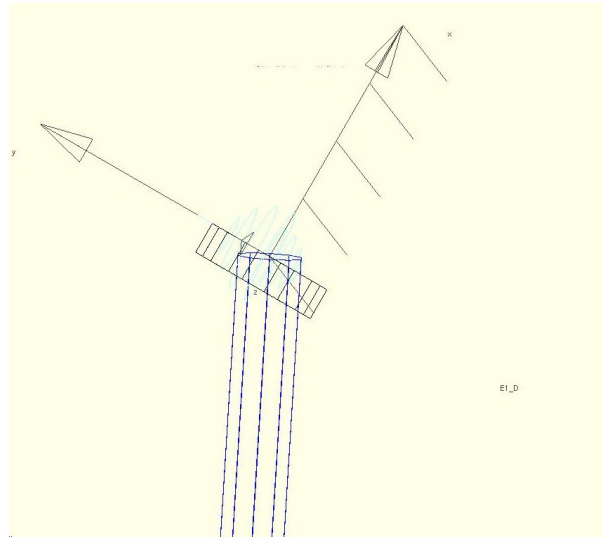


FIG. 4.26: Structure simple dans ADAMS<sup>®</sup>, constituée d'une poutre, d'une liaison dans une direction et d'un solide encasté; ce système équivaut à isoler une cale E1 arrière dans le cas où la caisse du véhicule est considérée comme encastée.

jeux de sollicitations ont ainsi été testés, notamment des échelons, des sollicitations triangulaires ou encore des sollicitations bi-sinus ou temporelles quelconques. Ce modèle simple a donc permis de valider et de vérifier le modèle d'articulation une fois introduit dans ADAMS<sup>®</sup> et de détecter les anomalies de comportement liées à une mauvaise programmation.

Dans un second temps, ce modèle simple de structure nous a permis de comparer les différentes approches d'intégration des modèles *RT* et *STVS* dans ADAMS<sup>®</sup>. Nous avons ensuite choisi parmi celles-ci l'approche numérique et fonctionnelle la plus pertinente. Pour ce qui est du choix de la fonction utilisateur d'ADAMS<sup>®</sup> permettant d'introduire la loi de comportement des modèles d'articulations, on peut soit utiliser la fonction *GSESUB* ou la fonction *VARSUB*. La différence entre ces deux fonctions provient de la relation entrée / sortie considérée.

La fonction *GSESUB* permet de résoudre le système d'équations différentielles du modèle d'articulation en même temps que celui régissant le comportement mécanique du restant de la structure, on déduit à partir des variables d'état l'effort dans la liaison en caoutchouc. La fonction *VARSUB* permet de calculer l'effort à chaque instant en intégrant au sein de la fonction à chaque pas de temps le comportement des articulations, et ce, sans faire appel à l'intégrateur d'ADAMS<sup>®</sup>.

Chacune de ces deux possibilités présente avantages et inconvénients, seule l'implantation de ces deux solutions dans la structure simplifiée évoquée en fi-

gure 4.26 a permis de les départager. La figure 4.27 présente les avantages et inconvénients de chacune des méthodes.

| VARSUB                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | GSESUB                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>⊗ Programmation simple</li> <li>⊗ Intégration réalisée dans VARSUB®</li> <li>⊗ Pas de temps semi-adaptable</li> <li>⊗ Moins de fichiers</li> <li>⊗ Proche de la programmation Matlab®</li> <li>⊗ Algorithme d'intégration indépendant du STVS</li> <li>⊗ Utilisation de plus de fonctions ADAMS®</li> <li>⊗ Pas de correcteur d'erreur</li> <li>⊗ Pas de temps très petit</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>⊗ Programmation simple</li> <li>⊗ Intégration réalisée par le solveur d'ADAMS®</li> <li>⊗ Déjà utilisée pour le STS continu</li> <li>⊗ Correcteur d'ADAMS®</li> <li>⊗ Pas de temps adaptable</li> <li>⊗ Intégrateur imposé par le STVS</li> <li>⊗ Allonge le temps de simulation</li> <li>⊗ Introduit beaucoup de degrés de liberté supplémentaires à résoudre</li> <li>⊗ Code plus long</li> </ul> |

FIG. 4.27: Comparaison entre les deux fonctions utilisateur VARSUB et GSESUB.

Plusieurs arguments nous ont fait choisir la fonction *VARSUB* plutôt que la *GSESUB*. L'argument le plus décisif est l'impossibilité d'utiliser n'importe quel algorithme d'intégration dans ADAMS® une fois les modèles d'articulations introduits. En effet, dans la structure simple il s'est avéré que certains algorithmes d'ADAMS® comme WSTIFF fonctionnaient bien, tandis que d'autres ne permettaient même pas l'intégration.

De plus, certains éléments de structure de LAS dans ADAMS® sont modélisés par des éléments finis. Une telle modélisation nécessite souvent l'utilisation d'un algorithme d'intégration bien précis lors de simulations temporelles. Il arrivera donc dans certains cas que l'algorithme d'intégration nécessaire pour le *STVS* ou le *RT* ne corresponde pas à celui qui doit être utilisé pour d'autres fonctions utilisateurs ou pour les super-éléments (éléments finis simplifiés). Pour éviter ce type de désagrément, qui rendrait le modèle inutilisable en présence de super-éléments, nous avons préféré intégrer le modèle dans la fonction utilisateur, et donc utiliser la fonction utilisateur *VARSUB*.

Il est alors nécessaire d'intégrer le modèle à l'intérieur de la fonction utilisateur. Après différents essais avec des algorithmes d'intégration comme Euler, le point milieu ou Runge-Kutta, nous avons choisi la méthode la plus simple mais également la plus rapide, à savoir Euler. À ce stade de nos réflexions, il est important de souligner que pour des algorithmes d'ordre plus élevé que 1, il est

impossible de ne pas utiliser une régularisation d'ordre au moins  $C^2$  des fonctions d'amortissement non-linéaires. Ces régularisations sont nécessaires pour assurer la stabilité et limiter les erreurs d'intégration. Une tentative avec une méthode de correcteur a également été mise en place.

Cependant, au regard des temps de calcul obtenus, et après divers essais avec le profiler de Matlab<sup>®</sup>, nous avons conclu que l'utilisation de fonctions régularisées allonge le temps de calcul, notamment celui de la fonction différentielle. Pour ne pas nuire à la rapidité du calcul, une autre méthode décrite ci-dessous a été envisagée.

Nous sommes donc retournés à la méthode d'Euler décrite au chapitre 3, dans la section 3.4, qui permet d'exprimer le système d'équations différentielles sous forme explicite et ce, sans régularisation (voir annexe A). Cette méthode extrêmement simple nécessite cependant un pas de temps relativement faible pour assurer sa stabilité. Pour cette raison, nous avons utilisé une fonction d'ADAMS<sup>®</sup> permettant de connaître le dernier pas de temps convergé et donc de calculer la distance entre ce temps et le temps auquel l'on cherche à intégrer le modèle. Ainsi, on peut diviser le pas de temps variable utilisé par ADAMS<sup>®</sup>, obtenu via la fonction « *timget* », par un certain nombre entier pour faire en sorte que le pas de temps d'intégration du modèle de cale évolue avec les variations du pas de temps utilisé par l'intégrateur d'ADAMS<sup>®</sup>.

L'utilisation de cette fonction utilisateur « *timget* » induit cependant quelques désagréments, notamment pour transposer le modèle d'un logiciel à un autre. En effet, la fonction *VARSUB* utilise beaucoup de fonctions spécifiques à ADAMS<sup>®</sup> dans le code Fortran et de ce fait, en cas de transposition dans un autre logiciel, il est nécessaire de traduire ces fonctions. Nous avons cependant considéré que les fonctions ADAMS<sup>®</sup> utilisées étaient des fonctions de base que l'on retrouve dans tous les logiciels de simulation multi-corps : choix de l'axe dimensionnel concerné, calcul des vitesses et déplacements, obtention du dernier pas de temps convergé.

Plusieurs fichiers sont utilisés lors de cette implantation :

- fichier Fortran assurant le passage entre commandes ADAMS et commandes Pivert (sur-couche PSA du logiciel ADAMS<sup>®</sup>);
- fichier fortran décrivant le programme de la fonction *VARSUB*;
- fichier d'ajout ou incorporate (.inc), qui permet d'ajouter un certain nombre de constantes utiles pour la fonction *VARSUB*;
- fichier commande (.cmd), qui permet d'indiquer les articulations et les directions concernées par la modélisation d'articulation introduite, et les paramètres du modèle RT ou STVS dans chacune des directions. Ces modèles sont au préalable identifiés (voir paragraphe 3).



Nous allons à présent montrer quelques premiers résultats obtenus dans ADAMS grâce à la structure simplifiée. Ces résultats montrent que le modèle se comporte dans ADAMS<sup>®</sup> à peu près comme dans Matlab<sup>®</sup>. Cependant quelques nuances sont à prendre en compte. L'utilisation de sollicitations sous forme d'échelon dans ADAMS<sup>®</sup> est limitée par l'approximation de l'échelon par une fonction spline. La rampe de montée ne peut en aucun cas dépasser une certaine vitesse qui est assez faible au regard des sollicitations transitoires que peuvent réellement endurer des véhicules. Malgré l'introduction d'un modèle plus performant d'articulation, la représentativité des comportements du véhicule pourra très bien être entravée par les limitations de l'outil multi-corps utilisé, en l'occurrence ADAMS<sup>®</sup>.

## 4.4 Apports du modèle d'articulation dans ADAMS

Après avoir vérifié l'implantation et le bon fonctionnement des modèles *RT* et *STVS* dans ADAMS<sup>®</sup> au paragraphe précédent, nous allons à présent nous intéresser à l'influence de ces modèles sur la simulation du comportement global de la LAS. Pour cela, des modèles d'articulation ont été introduits selon les trois directions principales des cales E1 et E2 avant et E1 arrière (voir 4.1) dans un modèle multi-corps de 307. Nous avons privilégié une version du véhicule comportant des articulations d'angle de perte élevé, pour mieux mettre en évidence des phénomènes visco-élastiques.

Des mesures sur banc ont également été effectuées afin de vérifier le degré de pertinence de cette nouvelle modélisation par rapport à la réalité. On distingue deux sortes de bancs d'essais : les bancs de caractérisation de véhicule (BCV) et les bancs de caractérisation de train (BCT). Ce sont des bancs de caractérisation quasi-statique, c'est-à-dire à vitesse faible et constante (signaux triangulaires).

D'autre part, nous avons simulé la réponse d'un véhicule à des sollicitations plus complexes que celles qui pouvaient être opérées sur ces bancs. Nous avons notamment réalisé des sollicitations à différentes vitesses ou encore des échelons d'angle au volant. Ces dernières simulations permettent de se faire une première idée de la pertinence du modèle d'articulations.

Les études présentées dans ce chapitre sont plus qualitatives que quantitatives. Il faudra enrichir ces résultats lors de l'arrivée chez PSA d'un banc de caractérisation dynamique permettant de jouer des sollicitations transitoires plus complexes et à différentes vitesses.

### 4.4.1 Résultats qualitatifs des simulations multi-corps

Les simulations de cette étude ont été réalisées pour certaines avec le modèle *STSn+* continu de PSA, le modèle *RT* et enfin le modèle *STVS*. Plusieurs types de sollicitations ont été étudiées au cours de ce travail, afin de mettre en évidence

les divers aspects du nouveau modèle de liaisons élastiques et son impact sur le comportement global du véhicule. Il s'agit des sollicitations suivantes : pompage, roulis, déplacements de crémaillère.

Le pompage correspond à une sollicitation triangulaire verticale périodique en base de roue. On monte alors le train ou le véhicule complet, selon le type de banc utilisé, sur des vérins qui se déplacent verticalement. Ce type d'essais induit des débattements dans la suspension et fait évoluer les grandeurs caractéristiques du plan de roue, comme le carrossage, la pince ou la voie (demi-voie).

Le roulis procède de la même installation, mais on impose alors que le déplacement périodique des vérins soit en opposition de phase entre côté gauche et droit du véhicule.

Enfin, les sollicitations en déplacement de crémaillère permettent en l'absence de modèle de direction, de simuler la commande du volant. En effet, à un coefficient de démultiplication près, l'angle au volant correspond à un déplacement de la crémaillère. Nous avons donc imposé grâce à ce système des sollicitations transitoires comme des échelons d'angle volant (inscription en virage et maintien du cap en virage).

Intéressons-nous tout d'abord aux sollicitations en pompage pour les modèles *RT* et *STVS*. Lors d'une sollicitation de pompage triangulaire en base de roue, les articulations subissent une sollicitation en déplacement triangulaires, dont l'amplitude dépend de celle de la sollicitation en pompage. On a donc en pompage une relation directe entre le triangle appliqué en base de roue et le déplacement appliqué sur l'articulation (voir réponse de l'articulation E1 arrière figure 4.28. Les comportements obtenus avec le modèle *RT* et le modèle *STVS* figure identifiés sur une même liaison élastique sont comparés sur la figure 4.29. Ce graphique, issu de la simulation, nous permet de dire que l'aspect général d'un modèle à l'autre est conservé. Cependant, la différence entre les deux modèles est bien nette, dans la mesure où le *RT* induit des non-linéarités plus importantes en carrossage, avec une épaisseur d'hystérésis et donc un effet dissipatif plus important.

Plusieurs vitesses de sollicitation ont été testées en pompage avec un débattement de 60 mm, afin de mettre en évidence l'influence de la vitesse de sollicitation des articulations en caoutchouc sur les grandeurs du plan de roue. La réponse en carrossage de la LAS présente une évolution en épaisseur de cycle avec la vitesse, comme on peut l'observer sur la figure 4.30. On peut également observer des phénomènes d'instabilité numérique qui apparaissent sur ces cycles quand la vitesse de sollicitation devient plus rapide.

Les réponses en terme de demi-voie donnent des résultats comparables à ceux obtenus en carrossage quant aux essais de pompage. On reproduit assez bien l'ef-

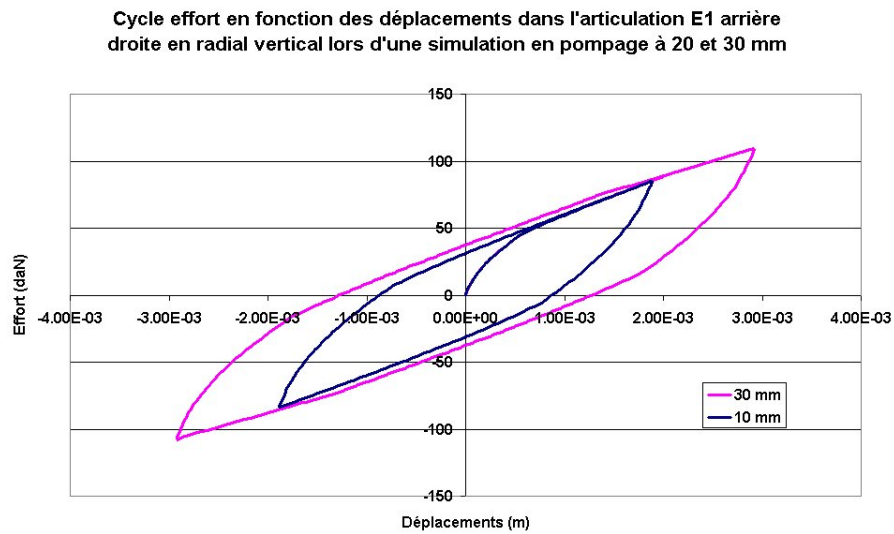


FIG. 4.28: Réponse d'une articulation en caoutchouc E1 arrière lors d'une sollicitation en pompage de 10 et 30 mm pour un modèle STVS.

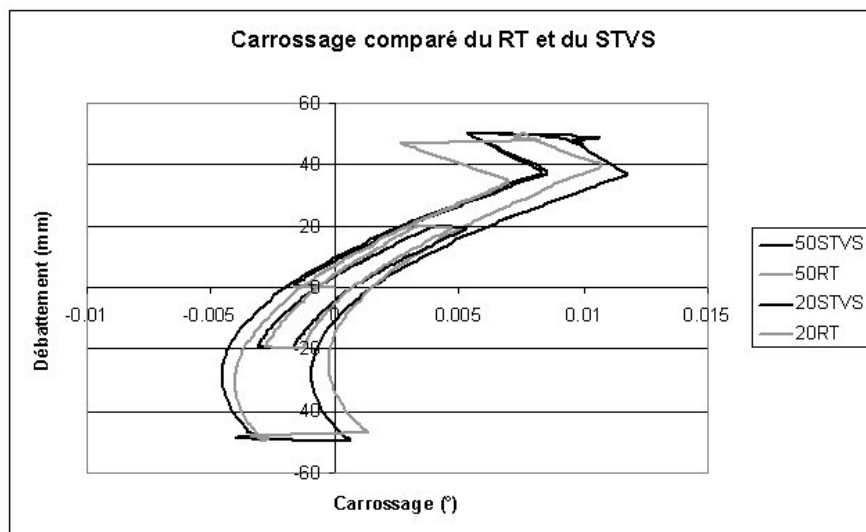


FIG. 4.29: Comparaison du carrossage obtenu pour un modèle RT et un modèle STVS identifiés sur la même cale.

fet Payne et la non linéarité en vitesse.

Pour ce qui est des sollicitations transversales en base de roue, la grandeur la plus représentative de l'évolution du plan de roue est la pince en fonction de l'effort appliqué en base de roue. On peut voir sur la figure 4.31, le résultat ob-

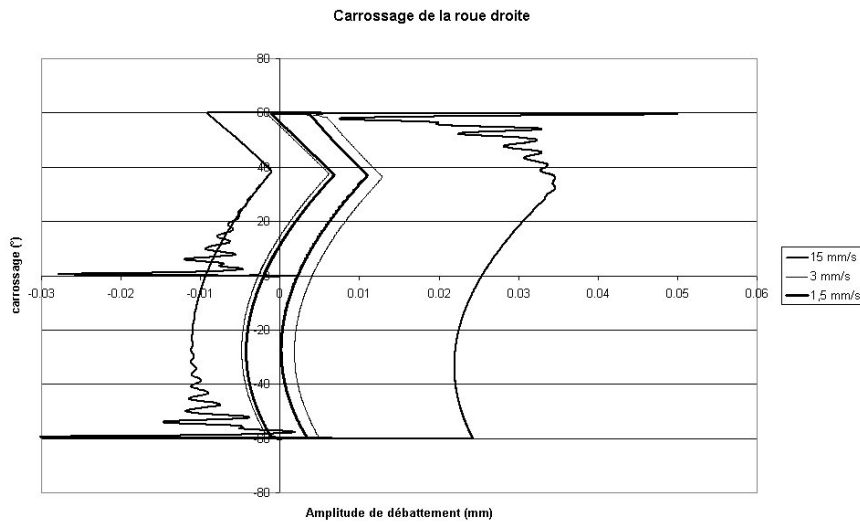


FIG. 4.30: Évolution du carrossage droit pour trois vitesses différentes de sollicitation : 1,5 mm/s, 3 mm/s et 15 mm/s, pour du pompage à une amplitude de 60mm.

tenu pour un modèle *STVS* identifié sur deux articulations de tangente d'angle de perte différents. On remarque que les résultats obtenus évoluent beaucoup en fonction de l'articulation introduite, d'où une dissipation et un confort accrus pour une articulation plus visco-élastique (tangente d'angle de perte élevée).

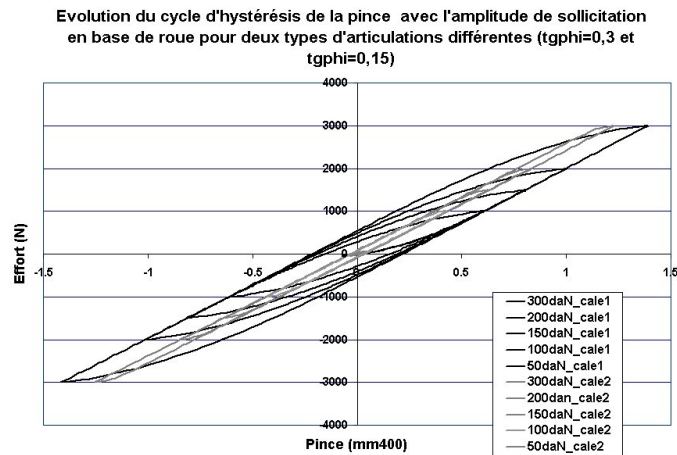


FIG. 4.31: Pince obtenue pour une sollicitation transversale en base de roue d'amplitudes 50 à 300 daN à avec un modèle *STVS* identifié sur deux articulations différentes.

Intéressons nous à présent aux sollicitations en déplacement crémaillère. Différents

essais ont été réalisés. Les premiers essais comportent uniquement un échelon de déplacement crémaillère. Les essais suivants ont été réalisés avec deux échelons successifs pour mettre en évidence les effets d'historique liés à la mémoire évanescence de l'articulation en caoutchouc.

Tout d'abord, il a été souligné à plusieurs reprises au cours de ce mémoire que les échelons au volant sollicitent le comportement transitoire des liaisons élastiques. Or, aucune mesure n'a permis de réellement montrer la réponse des articulations en caoutchouc à un échelon volant jusqu'à ce point. Nous avons donc dans un premier temps vérifié qu'une sollicitation d'échelon d'angle au volant (ou de déplacement de crémaillère) entraîne effectivement une sollicitation en échelon sur l'articulation; autrement dit, nous avons vérifié que le comportement des articulations provoqué par un échelon d'angle au volant est bien un comportement transitoire. La figure 4.32 montre que la réponse en effort est bien un échelon, avec une relaxation plus importante pour le modèle *RT*.

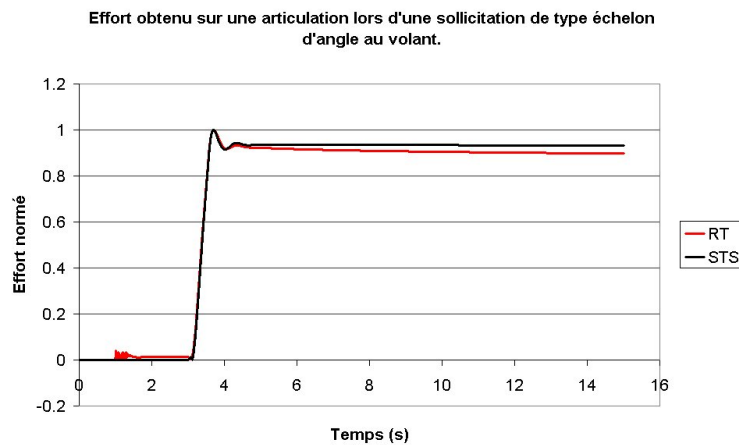


FIG. 4.32: Réponse en effort normalisé d'une articulation soumise à un échelon d'angle volant.

Sur la figure 4.32 on peut noter plusieurs choses. On remarque que l'on impose une sollicitation nulle pendant 1 seconde, sans déclencher les modèles d'articulation. Ce laps de temps permet au modèle multi-corps de se stabiliser. On remarque également que pour le modèle *RT*, qui nécessite une intégration temporelle, contrairement au *STSn+* qui est une fonction analytique, la réponse en effort présente une légère instabilité lorsqu'on met en fonction les modèles d'articulation. C'est pourquoi, on attend une seconde supplémentaire sans solliciter le modèle, afin qu'il se stabilise avec les articulations.

Nous avons ensuite pu vérifier que ce comportement transitoire se transmet également aux grandeurs caractéristiques du plan de roue. Ces dernières affirmations sont illustrées aux figures 4.33 et 4.34 qui donne la réponse transitoire

en effort et en écrasement des articulations lors d'une sollicitation en échelon au volant et en figure 4.35 qui décrit le comportement transitoire de la pince de roue en réponse à un échelon d'angle au volant pour un modèle *STVS*.

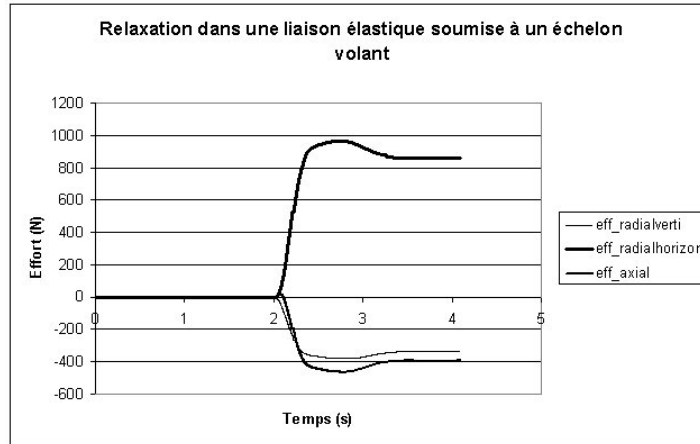


FIG. 4.33: Réponse transitoire d'une cale E1 arrière à un échelon d'angle au volant.

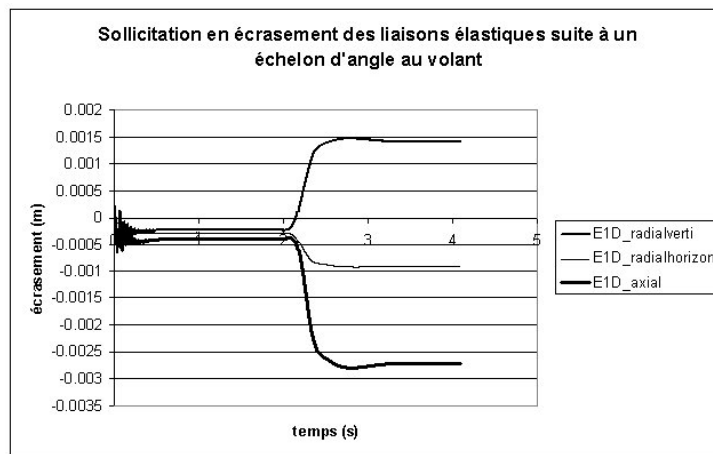


FIG. 4.34: Sollicitation transitoire en écrasement d'une liaison élastique E1 arrière à un échelon d'angle au volant.

L'évolution du plan de roue subit un retard par rapport à la consigne d'angle au volant appliquée ce qui peut induire en terme d'agrément de direction une réponse du véhicule un peu retardée. Ces résultats ont été obtenus pour un modèle *STVS* identifié avec une articulation de tangente d'angle de perte valant 0,3. On peut également remarquer, pour un échelon imposé, que la réponse du système

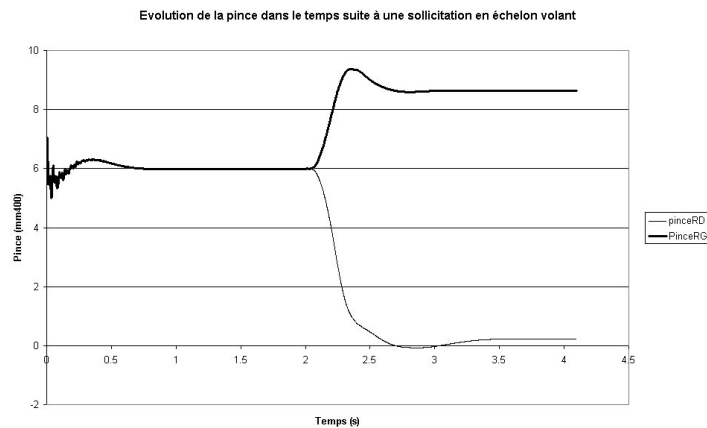


FIG. 4.35: Évolution de la pince de roue droite dans le temps lors d'une sollicitation d'échelon d'angle volant.

multi-corps est adoucie par rapport à la sollicitation initiale. Cela provient du fait qu'un filtrage s'opère à travers la structure de la LAS et à travers le traitement numérique dans ADAMS®.

Des simulations avec un modèle *RT* (voir figure 4.36) ont été réalisées. Ces dernières mettent très bien en évidence le phénomène de mémoire évanescence, voire l'exagère étant donné que la composante visco-élastique est plus importante pour le *RT* que pour le *STVS*. Cependant, aucune mesure ne nous permet de confirmer ce point.

Nous allons à présent étudier un cas d'historique de sollicitations avec le modèle *RT* ; cette étude a été décrite dans l'article publié à l'occasion de l'ECCMR 2007 [10]. Il s'agit d'effectuer une première relaxation (sous forme d'échelon volant) puis d'imposer un temps de repos pendant quelques secondes, puis d'effectuer une seconde relaxation moins importante en amplitude, soit dans le même sens de déplacement que la première, soit dans le sens opposé.

Les déplacements dans l'articulation en caoutchouc E2 du triangle avant de direction pour les échelons de sens opposés sont représentés à la figure 4.37. La réponse en effort de la cale est représentée en figure 4.38.

Intéressons-nous à présent à la réponse en effort lorsque les deux échelons ont été imposés dans le même sens de sollicitation. La réponse en effort de l'articulation est alors présentée en figure 4.39 et semble obéir aux lois régissant le comportement visco-élastique qu'est la mémoire évanescence. On montre ainsi au moins qualitativement que les articulations ont un impact certain sur le comportement transitoire de la LAS puisque comme nous l'avons vu plus haut, ce comportement transitoire se répercute de façon directe sur le plan de roue via la pince. De plus elles impactent également le comportement de la LAS en incluant une dépendance vis-à-vis de l'historique de sollicitation.

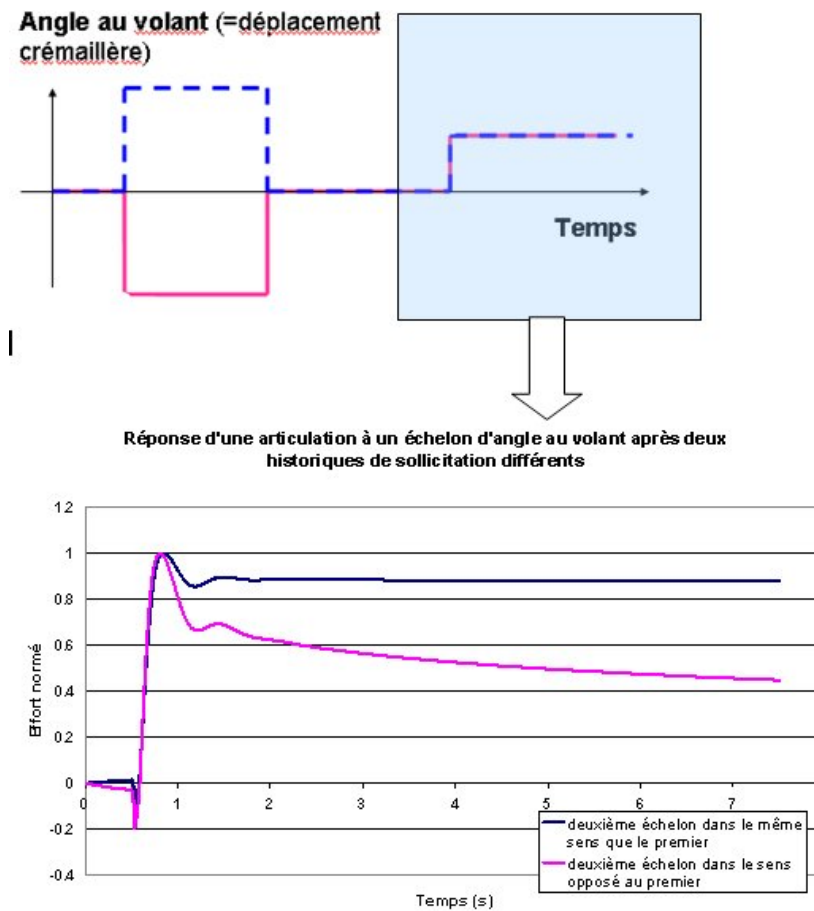


FIG. 4.36: Évolution de l'effort de l'articulation pour une modélisation *RT* suite à des échelons d'angles au volant identiques précédés d'historiques différents.

#### 4.4.2 Comparaison entre mesures et simulations

La plupart des mesures qui sont présentées ci-dessous sont des mesures réalisées sur le BCV chez PSA dont une photographie est présentée en 4.40. Le BCV permet de mesurer les efforts de suspension hors amortissement et l'élasto-cinématique. Ce banc est constitué d'un marbre dont la caisse du véhicule est rendue solidaire à l'aide de pinces. On y remplace les quatre roues du véhicule par des fausses roues indéformables, ce qui implique qu'une sollicitation en base de roue équivaut à une sollicitation en centre de roue moyennant la prise en compte du bras de levier. Des vérins permettent ensuite de venir appliquer des efforts sur les roues selon les trois directions et des capteurs d'en mesurer les déplacements. Les forces de suspension sont quant à elles mesurées à l'aide de balances.

La comparaison entre mesures et simulations dans le cadre des trois types de sollicitations quasi-statiques évoquées plus haut est très instructive.



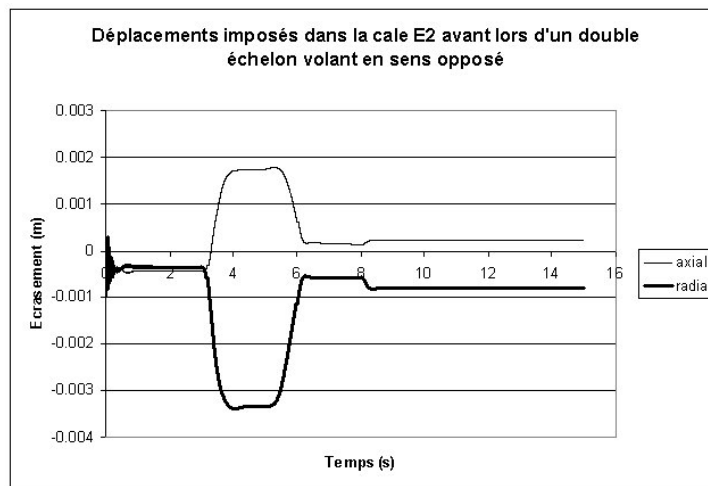


FIG. 4.37: Sollicitation transitoire en écrasement d'une liaison élastique E1 arrière à deux échelons d'angle au volant successifs.

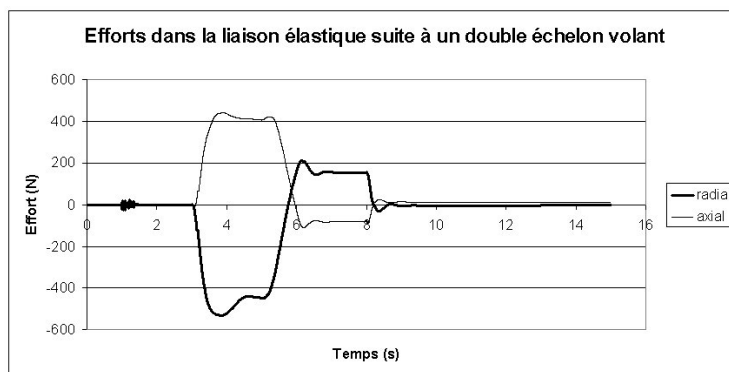


FIG. 4.38: Réponse de l'articulation E2 en effort à l'écrasement de la figure 4.37 produit par d'une sollicitation de double échelon d'angle volant de sens opposé.

Pour rappel, la première sollicitation mesurée est le pompage. Ce sont des débattements de roue verticaux imposés simultanément en base de roue gauche et droite, avec des signaux triangulaires de 0,1 Hz. La seconde sollicitation est le roulis, qui consiste en des débattements verticaux de même nature que le pompage, mais avec les sollicitations à droite et à gauche en opposition de phase.

Enfin, un effort transversal en base de roue appliqué simultanément sur les roues gauche et droite est imposé sous forme de signal triangulaire à 1 Hz.

Les grandeurs alors étudiées sont le carrossage, la pince, et éventuellement la demi-voie qui permettent de définir l'évolution du plan de roue au cours de ces simulations, en fonction de l'effort imposé en base de roue.

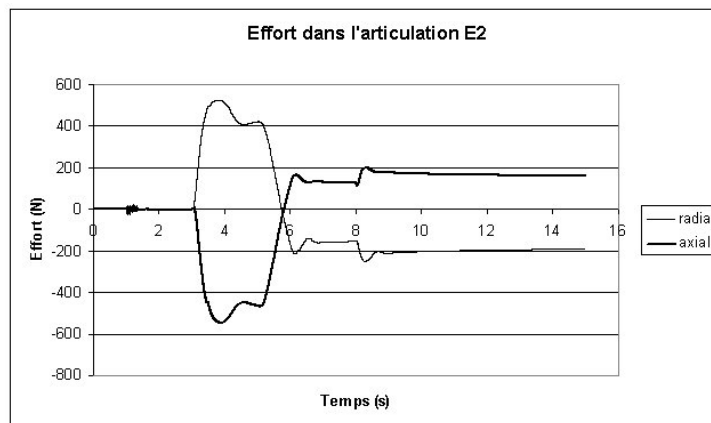


FIG. 4.39: Réponse de l'articulation E2 en effort à l'écrasement produit par une sollicitation de double échelon d'angle volant de même sens.

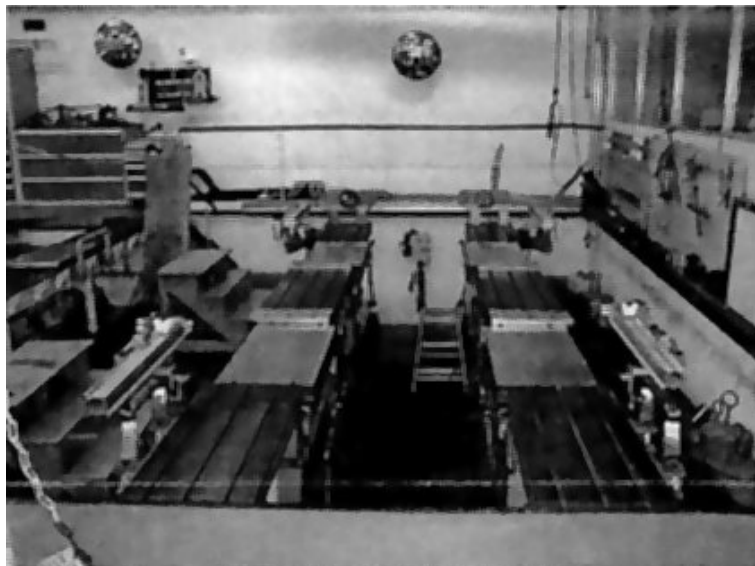


FIG. 4.40: Photographie du banc d'essai BCV chez PSA.

Le tableau 4.1, récapitule les sollicitations, leurs amplitudes et leur direction.

Les résultats de simulation sont peu surprenants. En pompage et en roulis, seuls le carrossage et la demi-voie ont une évolution significative avec l'amplitude. La pince, quant à elle, présente une hystérésis beaucoup plus faible. En sollicitation transversale, au contraire, il est possible d'observer l'évolution de la pince avec l'amplitude de sollicitation. Cette dernière évolution permet de mettre largement en évidence l'influence de l'effet Payne comme on a pu le voir plus haut.

Qualitativement, lorsque l'on compare les mesures réalisées sur le train arrière au BCV et les simulations, les résultats sont comparables. Ces résultats sont

| Désignation         | Direction              | Type de sollicitation | Amplitudes  |
|---------------------|------------------------|-----------------------|-------------|
| pompage<br>40,50,60 | verticale              | déplacement (mm)      | 10,20,30,   |
| roulis<br>40,50,60  | verticale              | déplacement (mm)      | 10,20,30,   |
| Fy<br>200,250,300   | horizontale transverse | effort(daN)           | 50,100,150, |

TAB. 4.1: Description des sollicitations triangle à une fréquence de 0,1 Hz imposées en pompage, en roulis et effort transversal.

présentés en figure 4.41. Cependant, il semble que la raideur du train arrière dans ADAMS® soit trop faible pour être représentative de la réalité. Il se peut que cela soit dû à la non prise en compte de la précharge dans le modèle d'articulation en caoutchouc.

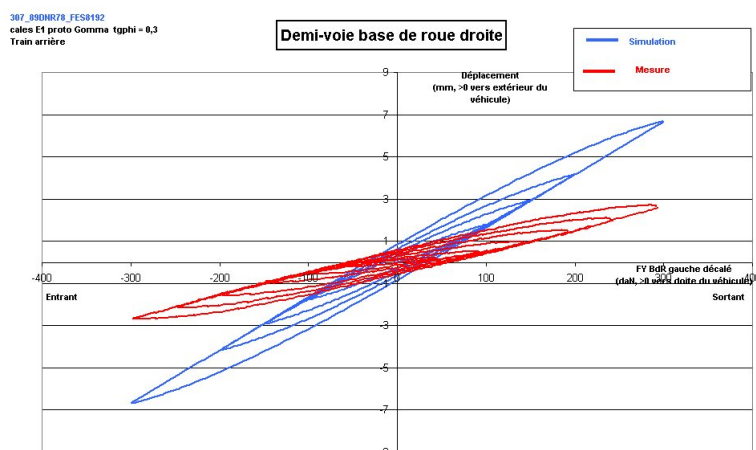


FIG. 4.41: Comparaison simulation en bleu avec la mesure en rouge pour une sollicitation en transverse en base de roue.

## 4.5 Conclusion sur les résultats obtenus dans ADAMS®

Les nouveaux modèles d'articulation *STVS* dans ADAMS® ont permis de démontrer qu'une sollicitation transitoire imposée à l'ensemble de la structure de LAS entraîne également une sollicitation et une réponse transitoire des liaisons élastiques en CCNC. Ce type de phénomènes n'a pu jusqu'alors être mis en évidence avec des modèles purement élastiques ou hystérétiques comme le *STS*. L'impact de la visco-élasticité et surtout des variations de caractéristiques visco-élastiques entre deux articulations en caoutchouc sur la réponse de la LAS à des sollicitation d'angle au volant ou en pompage est réel. Il ne peut donc être négligé

si l'on cherche à simuler l'agrément de direction et donc le confort de conduite du conducteur.

Ce modèle permet des simulations assez rapides de sollicitations transitoires de courte durée. On compte une heure de simulation pour une sollicitation transitoire de une minute environ. Si des comparaisons entre comportement simulé et mesuré ont pu être présentées, ces comparaisons ne restent que qualitatives. Il faudra attendre de nouveaux moyens de mesures pour confirmer la pertinence du modèle en transitoire. Par ailleurs, l'introduction de l'influence de la précharge dans le modèle d'articulation permettra sûrement d'améliorer la représentativité du modèle.

Il est important de souligner que malgré l'utilisation de modèles de liaison élastique pertinents, des lacunes en matière de modélisation multi-corps transitoire existent et limitent par cela la précision de simulation. Les modèles de véhicule fonctionnant en transitoire sont des modèles multi-corps simplifiés pour faciliter l'intégration et éviter des temps de simulation démesurés. De ce fait, ils ne reproduisent pas exactement le comportement de la LAS. Il va sans dire que dans certains cas, l'éloignement entre modélisation mesurée et simulée n'est pas du à la précision de modélisation des articulations. On soulignera notamment les limitations en terme de simulation transitoire d'échelons de sollicitation en effort dans ADAMS®.

On a pu remarquer cependant que, selon le type de modèle d'articulation, la réponse pouvait être assez différente, ce qui confirme la pertinence de l'introduction de la visco-élasticité dans la modélisation des articulations en caoutchouc. Enfin, les résultats obtenus avec le *STVS* semblent globalement plus proches de la mesure que ceux obtenus avec le *RT*.

Nos choix en matière de modélisation multi-corps ont beaucoup pris en compte les besoins industriels en terme de facilité d'utilisation et de rapidité de simulation. On peut leur reprocher de ne pas avoir intégré une boucle de vérification des erreurs d'intégration afin de limiter la divergence. Nous avons donc dû réduire les pas de temps en les calquant sur ceux utilisés par ADAMS®. Cette méthode fonctionne assez bien et diverge très rarement ou pour des sollicitations très sévères. De plus, pour assurer la stabilité numérique du modèle de LAS, il est nécessaire d'attendre un certain laps de temps afin de laisser le modèle de LAS se stabiliser, avant de mettre en fonctionnement les modèles d'articulations qui eux-même nécessitent une deuxième temporisation avant de se stabiliser. Une amélioration numérique de la modélisation pourra donc permettre de parfaire l'aspect stabilité et robustesse de la simulation.

### 4.5.1 Perspectives

Un nouveau logiciel de simulation a été introduit chez PSA au cours des derniers mois de cette thèse. L'un des enjeux est d'arriver à transposer les fonctions utilisées actuellement dans ADAMS®, dans ce nouveau logiciel.

Les études réalisées l'ont été à partir d'articulations identifiées de façon empirique. Compte tenu des premiers résultats, une identification plus précise pourrait permettre d'améliorer la vision quant à la précision atteignable avec un logiciel de simulation multi-corps dans le domaine transitoire.

Par ailleurs les mesures expérimentales in-situ obtenues sur les bancs d'essais statiques chez PSA sont pour l'heure insuffisants pour faire des études plus complètes quant à la prédictivité de la modélisation de la LAS dans ADAMS®. Des essais sur piste et bancs dynamique avec enregistrement du comportement des liaisons élastiques donneraient des informations plus complètes et exploitable pour entièrement vérifier la pertinence du modèle.

Enfin, l'introduction dans la modélisation de l'impact d'autres phénomènes (précharge, auto-échauffement) permettrait de parfaire la modélisation.



## Chapitre 5

---

# Identification paramétrique du modèle de liaison élastique

---

Le chapitre 3 décrit l'élaboration du modèle *STVS* et la corrélation entre le comportement décrit par ce modèle et celui des articulations en caoutchouc naturel de la Liaison Au Sol (LAS). L'introduction d'un tel modèle au sein d'un modèle multi-corps de suspension automobile, donne des comportements pertinents et représentatifs d'une LAS réelle, comme montré au chapitre 4.

Cependant, l'organisation en arbre des éléments constitutifs de ce modèle et la non-linéarité de la loi d'amortissement choisie présentent un inconvénient pour l'identification des paramètres du modèle *STVS*. Une identification directe et précise, autre que numérique, est impossible, d'où la nécessité de mener une étude plus approfondie sur cette problématique.

Ce chapitre est destiné à fournir les outils pour identifier au mieux les paramètres du *STVS* pour chaque nouvelle articulation en caoutchouc soumise aux ingénieurs chez PSA. Ce volet de l'étude a été mené afin de faciliter l'utilisation du modèle. De nombreuses méthodes d'identification existent, la question ici a été de déterminer laquelle est la plus appropriée au *STVS*, voire d'en élaborer une spécifique à ce modèle.

Ce chapitre a été découpé en quatre grands volets, en fonction des différentes pistes explorées. Le premier d'entre eux concerne l'état de l'art et quelques outils pour mieux appréhender les techniques évoquées par la suite. Le second est consacré à une approche d'identification empirique, utilisant le modèle *STS* pour obtenir des premières valeurs approchées pour le *RT* et le *STVS*. Une troisième partie de ce chapitre est consacré à une approche fréquentielle de l'identification

des modèles *RT* et *STVS*. Et enfin, la dernière section est consacrée à l'élaboration d'une méthode d'identification paramétrique de ces modèles sur des données temporelles.

## 5.1 Généralités et état de l'art

Afin de souligner les enjeux liés à la problématique de l'identification, cette section dresse un rapide état de l'art sur le sujet. Elle pose les bases et indique les références utiles concernant les diverses méthodes qui seront abordées au cours de ce chapitre. L'identification paramétrique dans le domaine de la modélisation numérique est aussi essentielle que le choix du modèle lui-même.

### 5.1.1 Introduction

Plusieurs étapes s'imposent lors de l'élaboration d'une technique d'identification. Ces étapes sont essentielles pour obtenir une méthode efficace et pertinente vis-à-vis du modèle et des données disponibles pour l'identification.

La toute première concerne le choix des grandeurs caractéristiques d'identification à partir desquelles seront déduits les paramètres du modèle. Ce choix peut-être relativement restreint.

Dans notre cas, lorsque les pièces ne sont pas encore fabriquées, seules les quelques spécifications peuvent servir à l'identification (voir spécifications au paragraphe 2.1.1). Il est à noter que la tolérance autorisée autour des grandeurs spécifiées peut entraîner une différence de comportement des articulations réelles par rapport aux données spécifiées.

Une fois la liaison élastique fabriquée, des mesures peuvent être effectuées sur pièce pour élargir l'éventail des grandeurs permettant l'identification du modèle. Il faudra également choisir entre données temporelles ou fréquentielles, si possible en fonction de la nature de la modélisation et du comportement que l'on souhaite privilégier au cours des simulations.

La deuxième étape consiste à décider quelle méthode utiliser pour identifier les paramètres. Il existe plusieurs méthodes d'identification paramétrique.

Les méthodes analytiques sont utilisées lorsqu'il est possible de calculer une relation entre les grandeurs caractéristiques et les paramètres.

Les méthodes numériques sont appliquées lorsqu'aucune relation analytique explicite simple n'existe. À partir de la sollicitation et de données parfois partielles sur la réponse réelle de la pièce, on détermine les paramètres donnant le comportement le plus proche de celui observé à la mesure.



### 5.1.2 Problème direct et problème inverse

L'identification paramétrique consiste à résoudre un « problème inverse ». Cette désignation est utilisée par opposition au « problème direct », qui consiste à calculer la réponse d'un modèle possédant un certain jeu de paramètres pour une sollicitation donnée. Le problème inverse permet de calculer la valeur des paramètres de ce même modèle, en utilisant la réponse produite pour une sollicitation connue.

Plus précisément, le problème direct consiste à déterminer la réponse du système mécanique à partir de la connaissance de la sollicitation, des conditions aux limites, des conditions initiales, de la loi de comportement et de ses paramètres utilisés pour modéliser le comportement. L'inconnue est donc la réponse du système à une sollicitation donnée (voir figure 5.1).

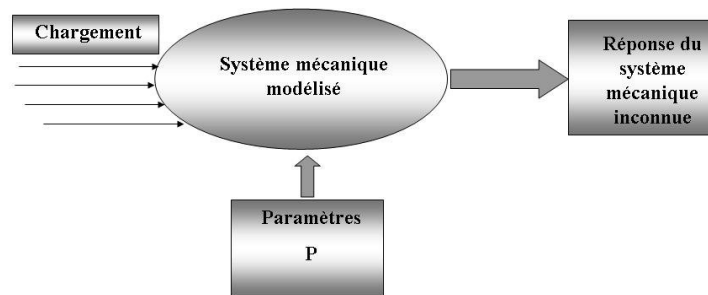


FIG. 5.1: Représentation schématique d'un problème direct, de ses données et de ses inconnues.

Dans le problème inverse, la réponse du système et la forme de ses lois de comportement sont connues ainsi que, parfois, les conditions aux limites. Cependant, les paramètres caractéristiques du système ne sont pas encore déterminés pour le système en question. Le problème inverse consiste alors à déterminer à partir de la réponse du système et de la forme des lois de comportement, les paramètres ou dans certains cas, lorsqu'elles sont inconnues, les conditions aux limites ou initiales qui ont conduit à l'obtention de cette réponse particulière du système (voir illustration 5.2).

Si le problème direct admet souvent une réponse unique et physique à un certain jeu de paramètres donné, pour une sollicitation déterminée - lors de l'élaboration de la loi ce point est généralement vérifié - il n'en est pas de même du problème inverse. En effet, la loi de comportement, établie pour représenter un comportement mécanique donné, est étudiée pour produire une réponse qui est proche d'« un » comportement réel. Cependant, cette loi n'est pas représentative de l'« ensemble » des comportements réels du système mécanique modélisé.

Autrement dit, parmi l'ensemble des comportements réels d'un système mécanique, certains comportements sont peu connus ou non pertinents et ne seront

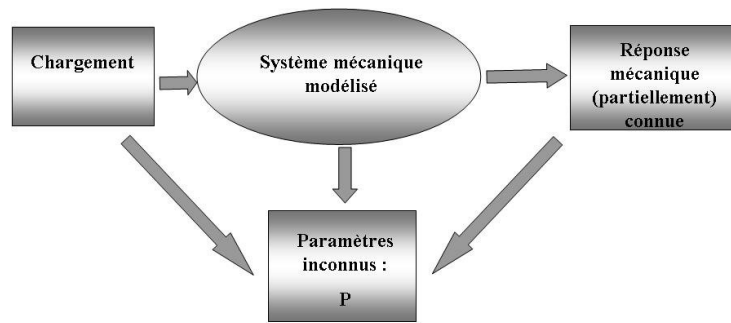


FIG. 5.2: Représentation schématique du problème inverse.

donc pas représentés par une modélisation donnée. Il n’y a donc pas forcément bijection entre l’ensemble des comportements modélisés et les comportements réels du système modélisé. De ce fait, le problème inverse peut ne pas admettre de solution.

Un problème peut être qualifié de « bien posé » au sens d’Hadamard, si les trois conditions suivantes sont réunies ou non :

1. il existe une solution ;
2. elle est unique ;
3. elle est stable pour une petite perturbation.

Il arrive souvent qu’à un problème direct réunissant ces conditions, corresponde un problème inverse ne les respectant pas. On dit alors que le problème est « mal posé ». Les cours de Bonnet [8] et Kern [43] donnent plusieurs exemples du non respect de ces conditions. Dans cette situation, le problème inverse pourra ne pas avoir de solution. Il faudra alors rechercher les paramètres du modèle qui permettent de s’approcher le plus possible du cas réel. Afin d’aller au plus près de la réponse réelle, on utilise la minimisation d’une fonction coût, indiquant l’écart entre données réelles et simulées.

Posons à présent les équations générales rencontrées lors d’un problème d’identification paramétrique. Les paramètres sont regroupés dans le vecteur  $p$ . L’entrée du système, à savoir, la sollicitation temporelle en déplacements est notée  $e(t)$  ; il s’agit d’une fonction du temps. Le vecteur des variables d’état de la loi de comportement est noté  $x(t)$ . Elles sont également dépendantes du temps, mais aussi, de façon implicite, des paramètres du modèle,  $p$ . Le système d’EDA (Équations Différentielles Algébriques) implicites, qui constitue les équations de comportement du système mécanique étudié, est noté :

$$\begin{aligned} G(x'(t), x(t), t, p) &= 0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le problème inverse dans notre cas précis consiste à déterminer les paramètres  $p$  qui donnent la réponse fournie par la mesure pour une sollicitation mécanique  $e(t)$  de la liaison élastique en caoutchouc.

Nous l'avons déjà souligné un peu plus haut, ce problème n'est souvent pas un problème bien posé au sens d'Hadamard. Nous n'allons pas chercher la solution du problème inverse, mais la solution optimale, grâce à une fonction coût mesurant l'écart entre la mesure et la simulation. Généralement, une fonction coût au sens des moindres carrés est utilisée, pour le caractère positif et quadratique de la fonction. Il est possible de régulariser le problème inverse, quand il est mal posé, en ajoutant un terme supplémentaire, évitant de s'éloigner d'un jeu de paramètres, estimé comme étant proche de la solution. Cette régularisation permet de ramener le problème ayant plusieurs solution vers un problème possédant une solution unique. La méthode de **régularisation de Tikhonov** [74] est l'une des plus fréquemment utilisée.

L'utilisation de l'**état adjoint** du système d'équations différentielles permet de calculer le gradient par rapport aux paramètres. Cette méthode est souvent appliquée dans le cadre d'études de sensibilité comme dans les articles de Petzold et Cao [16]. Le calcul du gradient obtenu par l'état adjoint est ensuite utilisé dans un algorithme de minimisation de la fonction coût. La méthode de calcul de problèmes inverses est présentée en paragraphe 5.4.

### 5.1.3 Application à notre problématique

Nous avons défini ci-dessus le vocabulaire et les outils de l'identification paramétrique. Nous allons à présent voir en quoi ils s'appliquent à notre problème particulier. Montrons tout d'abord comment le problème inverse qui consiste à identifier les paramètres d'une articulation en caoutchouc à partir de mesures ou de grandeurs caractérisant leur réponse peut ne pas respecter les conditions d'Hadamard.

Concernant le premier point relatif aux conditions d'Hadamard citées au paragraphe 5.1.2, le problème inverse peut très bien ne pas présenter de solution. Nous avons fait délibérément le choix de ne pas modéliser l'effet Mullins, qui peut pourtant avoir une légère influence sur la réponse ou les caractéristiques à partir desquelles l'identification aura lieu. Par ailleurs, une réponse peut être influencée par des phénomènes qui sont inconnus, le modèle n'étant pas prévu pour les représenter, aucun jeu de paramètres ne sera susceptible de convenir précisément pour ce cas de figure.

La deuxième exigence d'Hadamard est l'unicité de la solution. Nous avons cherché dans le chapitre 2 à obtenir un modèle dont le nombre de paramètres est le plus faible possible et surtout dont les paramètres sont indépendants les uns des autres. Il peut arriver, malgré ces précautions, que plusieurs combinaisons de paramètres correspondent à une même réponse, ce qui constituerait une atteinte au deuxième principe d'Hadamard. Cela semble assez peu probable dans notre cas.

Le problème d'identification des paramètres qui nous intéresse est sensible aux petites perturbations. En effet, lorsque la mesure évolue légèrement, les paramètres tel que  $Co$  peuvent évoluer assez rapidement sur certaines plages, comme on peut le voir dans l'étude de sensibilité au paragraphe 5.3.3. Il est également possible que le bruitage des mesures perturbe le processus d'identification, d'où l'existence de techniques probabilistes d'identification comme celles préconisées par Tarantola [73] prenant en compte l'erreur sur la mesure. Nous n'avons pas étudié ce type d'approche au cours de ces travaux.

Le problème inverse associé à l'identification paramétrique du modèle  $STVS$  peut donc déroger aux règles d'Hadamard. Dans ce cas, l'utilisation de la régularisation de Tikhonov pourra apporter des solutions acceptables.

#### 5.1.4 Méthodes d'identification

On distingue plusieurs cas parmi les problèmes d'identification. Le premier cas évident, correspond à l'existence d'une relation explicite entre la courbe de mesure ou les grandeurs caractéristiques et les paramètres du modèle. On peut alors calculer analytiquement les paramètres. Un exemple de ce type d'approche sera donné avec le modèle  $STS$  discret en paragraphe 5.2 de ce chapitre.

Dans ce cas analytique, la résolution est simple. Il suffit de trouver autant de grandeurs mesurées indépendantes les unes des autres que de paramètres à identifier. On écrit, puis on résout le système d'équations correspondant. Il faut d'emblée éliminer les grandeurs sur lesquelles l'erreur de mesure est susceptible d'être trop importante. De même, il faudra éviter les grandeurs pouvant subir un changement trop important d'un jeu de paramètres à un autre assez proche. Et enfin, certaines grandeurs peuvent être trop sensibles à un paramètre et biaiser la valeur identifiée des autres paramètres.

Dans le second cas, il n'existe pas de relation explicite entre grandeurs d'identification et paramètres. Il est alors nécessaire d'inverser numériquement le problème. Les modèles  $STVS$  et  $RT$  sont des exemples de ce type d'identification. On élabore alors une fonction coût déterminant l'écart entre grandeur simulée et grandeur mesurée.

L'utilisation d'un état adjoint, procédure issue de la théorie du contrôle optimal, permet de calculer le gradient de la fonction coût en vue de l'utilisation

d'un algorithme de descente. Cette approche est décrite dans la thèse de Feissel [25].

Elle permet également de calculer la sensibilité des EDA, définissant la réponse du système mécanique, aux divers paramètres. Ce procédé est décrit dans les articles de Petzold [64, 65]. De plus, la méthode de calcul de gradient grâce à l'état adjoint permet de calculer plus facilement celui-ci pour un nombre important de paramètres dans le modèle, comme il est indiqué en référence [16] par Cao.

La thèse de Kucerova [46] résume une grande partie des techniques d'identification connues. Quelques exemples de méthodes se trouvent également dans [5], [25] et [58]. Des logiciels d'identification de paramètres, tels que SiDoLo (B. Pilvin) ou VisualDOC (Vanderplaats Research & Development, Inc., 2006), permettent de résoudre certains de ces problèmes inverses.

Pour le modèle *STVS* ou le *RT*, qui sont des modèles dans le domaine temporel, il est impossible d'identifier directement les paramètres à partir de grandeurs issues du domaine fréquentiel. Les spécifications, qui sont souvent les seules grandeurs disponibles pour les ingénieurs en phase de conception, sont des raideurs dynamiques et tangentes d'angle de perte. Ce sont donc des grandeurs incontournables pour l'identification en l'absence d'autres mesures. Il serait donc préférable pour PSA de trouver un équivalent fréquentiel aux modèles *RT* et *STVS*, afin de permettre l'identification des articulations en avance de phase.

Pour cela, une méthode d'équilibrage harmonique que l'on trouve décrite par Worden dans [79] et Cameron dans [15], permet d'approximer le comportement non linéaire en dynamique, une fois stabilisé d'une articulation en CCNC. On obtient alors une expression analytique implicite entre données fréquentielles simulées et mesurées. Ceci peut permettre grâce à une méthode semi-numérique d'identifier les paramètres. Ce type de procédé est présenté en paragraphe 5.3.

Nous allons à présent nous intéresser au cas simple de l'identification paramétrique du modèle *STS*.

## 5.2 Identification directe du modèle STS discret

### 5.2.1 Introduction

Les modèles hystérétiques indépendants de la vitesse de sollicitation cités au chapitre 2 sont généralement caractérisés et identifiés sur des mesures cycliques, c'est-à-dire des sollicitations triangulaires en déplacement. On obtient ainsi une vitesse de sollicitation quasiment constante, sauf aux points de changement de signe de la vitesse de sollicitation. Celle-ci est choisie la plus faible possible de telle façon que la réponse visco-élastique de la liaison élastique s'exprime très peu, excepté aux points de rebroussement où la vitesse change de signe et donc varie de façon discontinue. L'amplitude de sollicitation utilisée doit être assez élevée

pour donner un modèle représentatif de l'effet Payne, mais ne doit pas atteindre les non-linéarités élastiques qui risquent de perturber l'identification du comportement hystérétique pur. Ces considérations ont été également détaillées par Berg dans [6] pour l'identification de son modèle d'hystérésis, comme on peut le voir sur la figure 5.3.

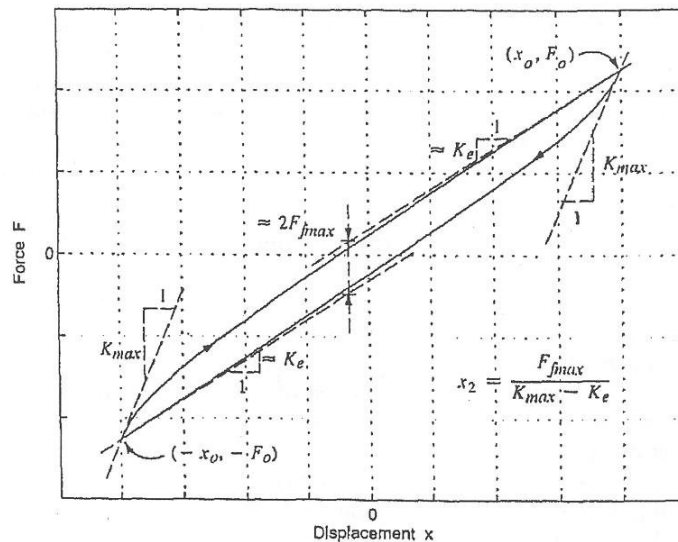


FIG. 5.3: Allure d'une cycle hystérétique obtenu avec le modèle de Berg et relation avec les paramètres du modèle (illustration issue de l'article [6]).

Comme nous l'avons souligné en début de chapitre, il est possible de calculer les paramètres du *STS discret* à partir de la mesure d'un cycle d'hystérésis. Pour cela, il faut imposer un certain nombre de conditions. Tout d'abord, on supposera que pour le cycle sur lequel on identifie le modèle,  $N_{cell}$  cellules (ou frotteurs) sont déclenchées, c'est-à-dire le nombre maximum. Chaque point de changement de pente dans le cycle d'hystérésis discret décrit par le modèle *STS* en figure 5.4 correspond au déclenchement d'un frotteur.

Ainsi, la pointe de l'hystérésis correspondra au seuil de déclenchement en effort du frotteur numéro  $N_{cell} + 1$  s'il avait existé. Rappelons ici que le nombre de cellules adopté pour le modèle *STS* est de quinze cellules, donc  $N_{cell} = 15$ . On considère donc que pour le cycle qui sert à l'identification quinze cellules de type *STS* sont nécessaires, ce choix limite la précision de la simulation.

Dans les conditions décrites ci-dessus, on obtiendra un jeu unique de paramètres pour le modèle *STS discret* pour un cycle d'hystérésis donné. Soulignons tout de même que l'erreur de mesure du cycle quasi-statique choisi peut entraîner une dispersion sur les valeurs obtenues pour le jeu de paramètres à

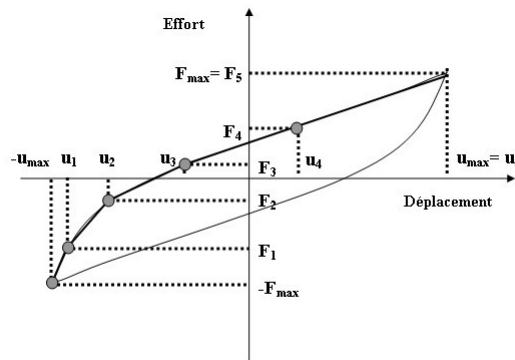


FIG. 5.4: Points de rupture du cycle d'hystérésis discret *STS* sur un cycle d'hystérésis continu mesuré.

identifier. Dans ce cas, le choix des grandeurs associées à ce cycle, qui servent aux calculs peuvent être plus ou moins sensibles à une erreur de mesure. Ainsi, pour un même cycle de mesure utilisé, selon les grandeurs caractéristiques choisies pour l'identification, on observera un écart sur les valeurs de paramètre obtenues.

### 5.2.2 Choix des grandeurs caractéristiques

Nous allons à présent nous intéresser au choix des grandeurs caractéristiques à utiliser pour l'identification du modèle *STS* discret. Pour rappel, ce que nous désignons par modélisation *STS* discrète, correspond à l'assemblage tribo-élastique de  $N_{cell}$  frotteurs et ressorts en série avec un ressort destiné à modéliser les raideurs aux faibles amplitudes, le tout en parallèle avec un ressort représentant l'élasticité linéaire. Les paramètres  $F_f$  et  $K_r$  sont associés à l'assemblage tribo-élastique ; le paramètre  $K_0$  correspond à l'élasticité linéaire et le paramètre  $K_{pa}$  à la raideur additionnelle aux petites amplitudes. On a donc quatre paramètres à identifier pour entièrement déterminer le *STS* à  $N_{cell}$  cellules. Il faut donc choisir quatre grandeurs caractéristiques du cycle mesuré pour identifier ces quatre paramètres.

Un cycle d'hystérésis peut être défini par beaucoup de grandeurs. Nous nous sommes orientés vers des grandeurs caractéristiques du cycle qui sont calculables à partir des paramètres du modèle *STS*.

- l'aire du cycle ;
- la raideur sécante, c'est-à-dire la pente de la droite reliant les deux pointes de l'hystérésis statique ;
- les tangentes en début et en fin d'hystérésis ;
- l'épaisseur à déplacement nul ou à effort nul de l'hystérésis ;

- l’effort maximum atteint ;
- le déplacement maximum atteint.

Toutes ces grandeurs sont représentées sur les figures C.1 et C.2. On constate qu’elles sont au nombre de huit pour quatre paramètres à identifier. Le calcul détaillé de ces grandeurs à partir des paramètres du *STS* est présenté en annexe C. Nous rappelons ci-dessous les principaux résultats :

- la raideur sécante d’un cycle mettant en jeu  $N_{cell}$  cellules :

$$K_{sec} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{\frac{N_{cell}-1}{2}K_{pa} + K_r} \quad (5.2)$$

- la tangente à la courbe d’hystérésis après un rebroussement ou au début d’une sollicitation

$$K_{\mu} = K_0 + K_{pa} \quad (5.3)$$

- la tangente en bout de branche d’hystérésis

$$K_{tg} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{(N_{cell} - 1)K_{pa} + K_r} \quad (5.4)$$

Il est à noter que la raideur dite « sécante » correspond à l’effort maximum divisé par le déplacement maximum. Les trois grandeurs, raideur sécante, effort maximum et déplacement maximum sont liées. Si deux d’entre elles sont utilisées, l’utilisation de la troisième serait redondante.

La formule régissant l’aire de l’hystérésis discrète produite par un *STS* est assez complexe, comme constaté en annexe C. Afin de simplifier cette expression, le calcul d’une courbe continue passant par chaque point de réticulation de l’hystérésis du *STS* discrète a été effectué. Le modèle continu de Coveney [20] peut également servir à un tel calcul. Nous avons dans un premier temps cherché à utiliser cette aire de l’hystérésis pour identifier le *STS* discret. En effet l’aire est une grandeur qui présente une faible sensibilité à une erreur éventuelle de mesure sur le cycle quasi-statique. Malgré cet argument, nous avons dû abandonner cette option en raison de la complexité de l’expression obtenue.

L’épaisseur du cycle à déplacement nul peut être facilement calculée à partir d’une des courbes continues évoquées pour le calcul de l’aire. Mais ici c’est la sensibilité de cette grandeur à une erreur de mesure qui nous a interdit son utilisation ; effectivement, dans certains cas les hystérésis des articulations sont très faibles.

En prenant en compte les considérations précédentes, notre choix s’est porté sur la tangente après point de rebroussement ( $Tg_1$ ), la tangente en bout de branche d’hystérésis ( $Tg_2$ ), la raideur sécante et l’effort maximum ( $F_{max}$ ) ainsi



que le déplacement correspondant ( $X_{max}$ ). Ces quatre grandeurs sont représentées sur la figure 5.5.

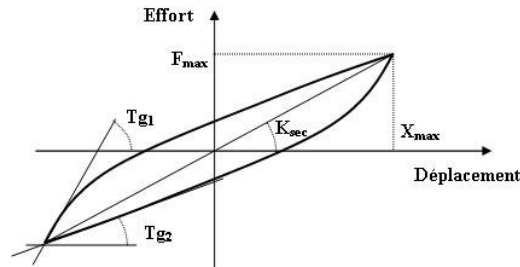


FIG. 5.5: Grandeurs permettant l'identification sur un cycle de grande amplitude des paramètres du modèle *STS*.

### 5.2.3 Méthode d'identification

Une courbe d'hystérésis simulée par les modèles choisis au chapitre 3 présente une symétrie centrale. De ce fait, la plupart de ses grandeurs caractéristiques sont représentées deux fois sur un même cycle : une fois sur la branche ascendante de ce cycle et une fois sur la branche descendante de celui-ci. On prendra donc pour toutes les grandeurs symétriques la moyenne entre les deux valeurs obtenues, l'une sur la branche croissante, l'autre sur la branche décroissante.

Ainsi, l'effort maximum  $F_{max}$  est calculé à partir de la moyenne entre la valeur absolue de l'effort minimum et maximum atteints au cours du cycle. De même, pour le déplacement maximum  $X_{max}$ .

Par ailleurs, pour le calcul des tangentes en début  $Tg_1$  et en bout de branche d'hystérésis  $Tg_2$ , il est nécessaire de définir un critère de calcul. Ce critère évitera que l'on prenne des points trop proches ou trop éloignés les uns des autres pour obtenir ces deux grandeurs. Dans le cas des tangentes également, une moyenne entre valeurs obtenues sur le cycle croissant et sur la branche décroissante est réalisée.

En pointe de cycle, la pente de la branche d'hystérésis varie très peu. La tangente est donc facile à calculer quel que soit l'écart entre les deux points de mesure choisis, utiliser des points écartés d'une distance plus ou moins grande ne change pas beaucoup la valeur obtenue. Par contre, la tangente en début de branche d'hystérésis évolue très vite, le calcul de la tangente en début de cycle nécessite donc quelques précautions. Cette grandeur est également assez sensible

à une erreur de mesure. Il faut donc choisir un écart entre les deux points de mesure utilisés pour calculer la tangente de l'ordre de grandeur du plus petit cycle que l'on souhaite être capable de représenter, à savoir environ 0,1 mm.

Une fois les données caractéristiques du cycle mesuré calculées, on résout le système d'équations correspondant :

$$K_{pa} = \frac{(Tg_1 - Tg_2)(F_{max} - Tg_1 X_{max})}{2F_{max} - (Tg_1 + Tg_2)X_{max}} \quad (5.5)$$

$$K_0 = \frac{(F_{max}(Tg_1 + Tg_2) - 2Tg_1 Tg_2 X_{max})}{2F_{max} - (Tg_1 + Tg_2)X_{max}} \quad (5.6)$$

$$K_r = \frac{(Tg_1 - Tg_2)(N_{cell} - 1)(-F_{max} + Tg_1 X_{max})(F_{max} - Tg_1 X_{max})}{(-2F_{max} + (Tg_1 + Tg_2)X_{max})^2} \quad (5.7)$$

$$F_f = \frac{2(F_{max} - Tg_1 X_{max})(F_{max} - Tg_1 X_{max})}{N_{cell}(2F_{max} - (Tg_1 + Tg_2)X_{max})} \quad (5.8)$$

#### 5.2.4 Résultats d'identification STS

La concordance entre mesure et simulation est relativement bonne, comme on peut l'observer sur les figures 5.6 et 5.7, qui suivent, pour deux pièces de caractéristiques très différentes. On peut ajouter que si la concordance est bonne sur le grand cycle à partir duquel le jeu de paramètres a été identifié, elle est assez satisfaisante pour toutes les amplitudes inférieures.

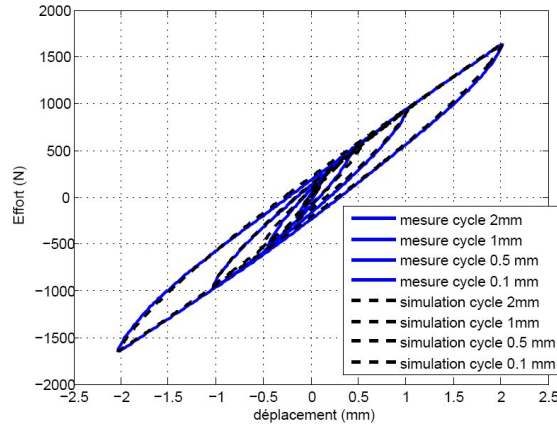


FIG. 5.6: Comparaison entre la mesure et la simulation STS en pointillé avec les paramètres identifiés sur le cycle de plus grande amplitude. ( $N_{cell} = 15$ ,  $F_s = 40,6$ ,  $K_t = 2951,0$ ,  $K_{pa} = 1051,0$  et  $K_0 = 508,2$ )

Pour des amplitudes supérieures à celles du cycle sur lequel l'identification a été réalisée, il faut ajouter la loi non-linéaire élastique en lieu et place du ressort linéaire. Il devient alors nécessaire de distinguer le  $K_0$  de la courbe non-linéaire élastique et celui identifié sur le quasi-statique. En effet, pour les grandes

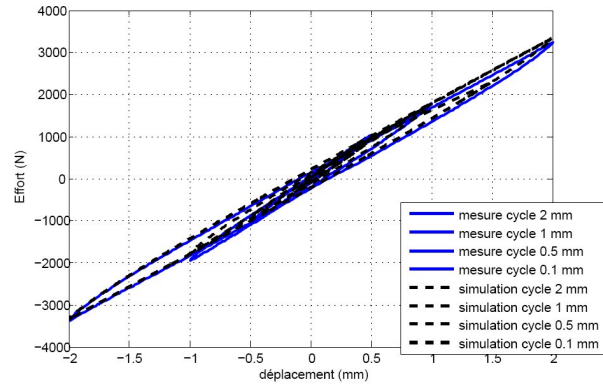


FIG. 5.7: Comparaison entre la mesure et la simulation STS en pointillé avec les paramètres identifiés sur le cycle de plus grande amplitude pour une articulation de faible tangente d'angle de perte. ( $N_{cell} = 15$ ,  $F_s = 40, 2$ ,  $K_t = 2935, 0$ ,  $K_{pa} = 1076, 7$  et  $K_0 = 1362, 6$ )

amplitudes, la partie du modèle contenant l'assemblage tribo-élastique tend vers une raideur négligeable, pour un grand nombre de cellules. Étant donné que dans notre cas le nombre de cellules est fini, la raideur résiduelle dans la branche *STS* est faible mais non négligeable. De ce fait, la raideur élastique non-linéaire doit valoir, si on note la valeur obtenue grâce à l'identification de l'élasticité non linéaire  $K_0^{enl}$  et  $K_0^{qs}$  celle identifiée grâce à l'identification du quasi-statique :

$$K_0^{enl} = K_0^{qs} + \frac{K_{pa}K_r}{(N_{cell} - 1)K_{pa} + K_r} \quad (5.9)$$

Il faudra donc vérifier cette égalité, et la prendre en compte pour l'élasticité non linéaire et remplacer  $K_0^{enl}$  par  $K_0^{qs}$ .

### 5.2.5 Identification empirique RT et STVS grâce au STS

La méthode d'identification pour un modèle *STS* étant définie, nous nous sommes interrogés sur la possible transposition de cette méthode au *RT* et au *STVS*. En effet, les similitudes entre tous ces modèles permet d'utiliser les résultats obtenus pour les paramètres du modèle *STS* afin d'initialiser l'identification du *RT* ou du *STVS*.

Intéressons nous tout d'abord aux similitudes entre *RT* et *STVS*. Étant donné le paramétrage utilisé par Coveney, à une certaine vitesse  $V_0$ , l'amortisseur non linéaire du *RT* présente un effort seuil  $F_s$ . On peut alors choisir  $V_0$  comme étant la vitesse des cycles quasi-statiques mesurés et  $F_s$  comme étant l'effort seuil identifié pour le modèle *STS*,  $F_f$ , sur ce même cycle mesuré.

Pour rappel, le paramétrage du modèle  $RT$  qui a été utilisé au cours de ces travaux a été changé de façon à avoir des paramètres indépendants les uns des autres. Le paramètre  $C_o$  que nous avons défini dans le chapitre 3 vaut  $C_o = \frac{F_s}{V_0^{pw}}$ .

Nous choisissons  $pw$  compris entre 0, 1 et 0, 3 afin de limiter le caractère visco-élastique du modèle dans un premier temps. Par ailleurs, ces ordres de grandeur de  $pw$ , pour les différents cas étudiés au cours de ces travaux, semblent convenir pour reproduire la mesure réelle. La vitesse utilisée pour réaliser les essais quasi-statiques est de 20 mm/min, soit 0,3 mm/s, ce qui permet d'obtenir la valeur de  $V_0$ . Sur la figure 5.8, on peut voir ce que donne le comportement temporel pour une articulation dont on a identifié le modèle  $STS$  en figure 5.6.

De même, le modèle  $STVS$ , pour une vitesse nulle est assimilable à un modèle  $STS$  de paramètres  $F_f, K_r, K_{pa}, K_0$ . Pour le modèle  $STVS$ , on considère qu'à une vitesse de 0,3 mm/s, la majorité de l'hystérésis du cycle provient de l'hystérésis pure et non de la visco-élasticité. On répartit donc le niveau de l'effort seuil obtenu lors de l'identification du  $STS$  entre les paramètres  $F_{frott}$  et  $F_s$  du  $STVS$  de la façon suivante dans un premier temps :

$$F_f^{sts} = \frac{80}{100} F_{frott}^{stvs} + \frac{20}{100} F_s^{stvs} \quad (5.10)$$

Le paramètre  $C_o$  du  $STVS$  vaut alors  $C_o = \frac{F_s^{stvs}}{V_0^{pw}}$ . Ici encore, le paramètre  $pw$  est choisi de façon à conférer un comportement faiblement visco-élastique. Il est compris, pour cette identification, entre 0, 1 et 0, 3.

Les raideurs  $K_r$  et  $K_{pa}$  identifiées avec le  $STS$  sont quant à elles reprises telles quelles et la raideur  $K_0$  également. On obtient alors une première approximation du comportement  $STVS$  pour une simulation temporelle. Nous montrons sur la figure 5.9 le résultat de cette première identification du  $STVS$  sur une sollicitation cyclique. Cette première approximation est plus que satisfaisante pour ce genre de sollicitations.

Les méthodes décrites pour le  $RT$  et le  $STVS$  ne servent qu'à donner une première approximation des paramètres dits « quasi-statiques », à savoir  $K_r, K_{pa}, F_s$ , et  $F_f$  dans le cas du  $STVS$ . Ces deux derniers modèles semblent en effet plus difficiles à appréhender, car il n'existe pas de relation analytique directe et explicite entre une mesure et les paramètres  $pw$  et  $C_o$ . Il faut alors trouver un moyen de déterminer l'ensemble des paramètres des modèles  $RT$  et  $STVS$  en tenant compte à la fois des cycles d'hystérésis quasi-statiques pour l'hystérésis et des mesures dynamiques de raideur et de tangente de l'angle de perte.

Les calculs d'identification grâce au  $STS$  peuvent servir de point de départ pour une identification plus complète et précise des modèles  $RT$  et  $STVS$ , mais ne

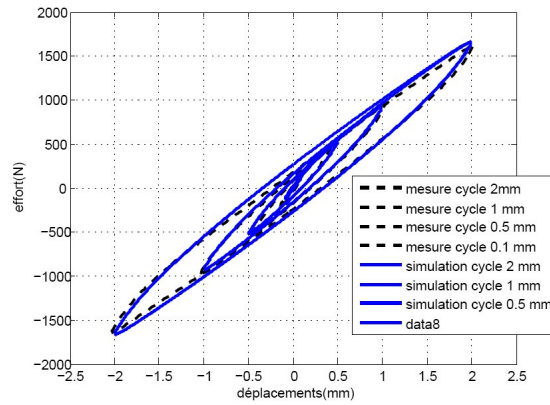


FIG. 5.8: Comparaison entre la mesure et la simulation *RT* avec les paramètres identifiés à partir du modèle *STS*. ( $N_{cell} = 15$ ,  $C_o = 41,1$  ( $V_0 = 0,3$ ),  $pw = 0.1$   $K_t = 2935,0$ ,  $K_{pa} = 1076,7$  et  $K_0 = 508.2$ )

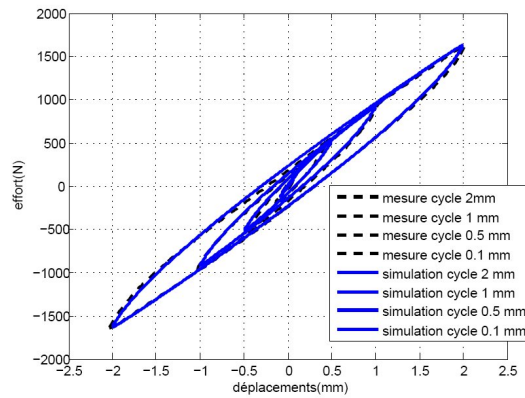


FIG. 5.9: Comparaison entre la mesure et la simulation *STVS* avec les paramètres identifiés à partir du modèle *STS*. ( $N_{cell} = 15$ ,  $F_s = 9$ ,  $C_o = 32$ ,  $pw = 0.15$   $K_t = 2935,0$ ,  $K_{pa} = 1076,7$  et  $K_0 = 508.2$ )

permettent pas d'identifier précisément les paramètres  $pw$  et  $C_0$  dans un premier temps. Pour cette raison, une méthode itérative empirique a été mise en place lors de ces travaux pour identifier ces paramètres de façon cohérente par rapport aux différents types de réponses temporelles et fréquentielles d'une articulation en caoutchouc. Cette méthode itérative, qui nous a permis d'obtenir de bons résultats, suffisants pour les simulations temporelles dans ADAMS®.

Cette méthodologie d'identification est décrite dans l'illustration 5.10. Cette méthode appliquée sur une articulation permet d'obtenir une identification qui satisfait à la fois la représentation des comportements transitoires de type relaxa-

tion (lié à la visco-élasticité), des comportements de type réponse à une sollicitation bi-sinus (comportements temporels quelconques d'une articulation) et de la réponse à une sollicitation triangulaire (représentatif du comportement quasi-statique, où l'hystérésis pure prédomine). Cette corrélation dans le domaine est par ailleurs appuyée par une cohérence vis-à-vis du comportement temporel d'une articulation en caoutchouc. Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 illustrent les étapes 1, 2, 3 de l'identification empirique décrite dans le schéma 5.10. Cette identification progressive est présentée ici pour une seule et même articulation en caoutchouc baptisée « cale proto ». L'étape 0 a été présentée dans les paragraphes précédents pour le *STS* et au paragraphe 3.2 pour l'élasticité non linéaire.

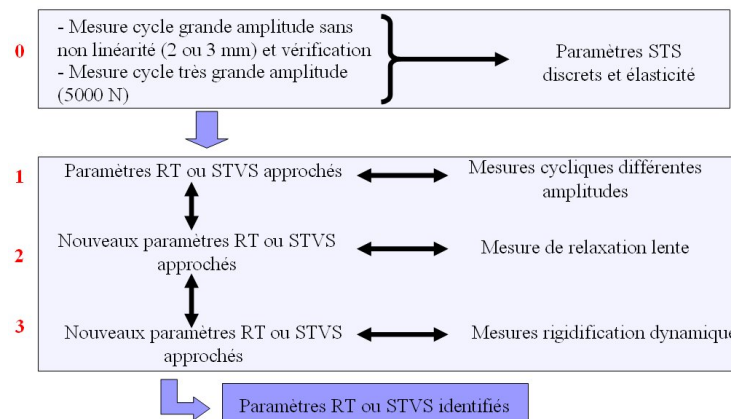


FIG. 5.10: Représentation schématique de la méthode d'identification empirique utilisée dans la première partie de ces travaux.

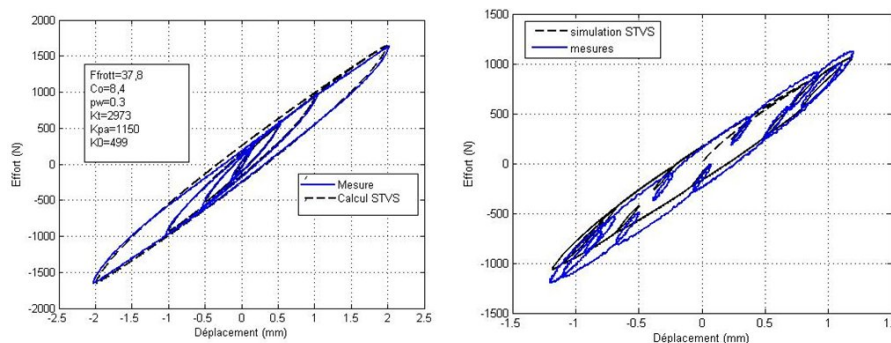


FIG. 5.11: Illustration de l'identification après l'étape 1 de l'identification empirique pour « cale proto » et comparaison entre résultats obtenus sur des sollicitation triangle et bi-sinus.

Bien que cette identification soit relativement satisfaisante, elle n'est pas exploitable industriellement, notamment pour deux raisons : le temps d'identi-

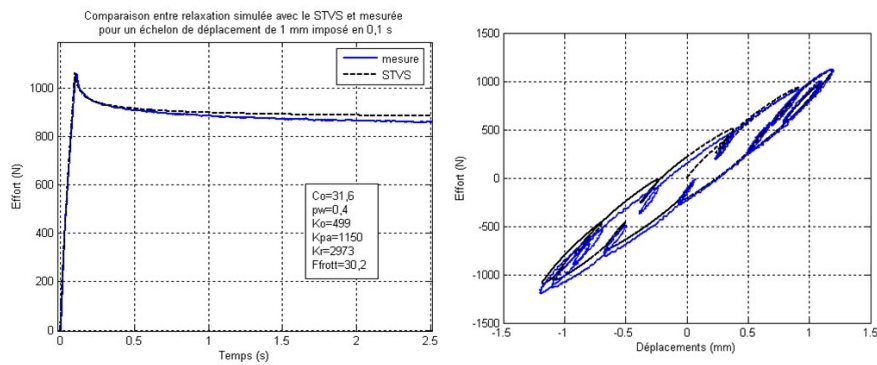


FIG. 5.12: Illustration de l'identification après l'étape 2 de l'identification empirique pour « cale proto », comparaison pour cette identification sur un échelon de relaxation entre le résultat obtenu sur cet échelon et sur un bi-sinus.

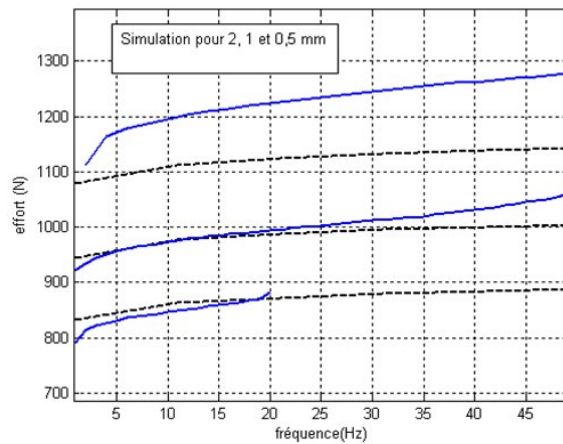


FIG. 5.13: Illustration de l'identification à l'étape 3 de l'identification empirique pour « cale proto » : résultat obtenu dans le domaine fréquentiel.

cation est assez long et il n'est pas possible d'automatiser cette méthode. Nous nous sommes donc orientés vers deux possibilités pour compléter et industrialiser l'identification des paramètres du modèle *STVS* : une approximation fréquentielle ou une identification sur une sollicitation temporelle. C'est la première que nous allons tout d'abord décrire au paragraphe suivant.

### 5.3 Approximation fréquentielle des modèles RT et STVS

Les modèles *RT* et *STVS* sont des modèles adaptés à la simulation temporelle. Il est possible, grâce à une transformation de Fourier au premier harmo-



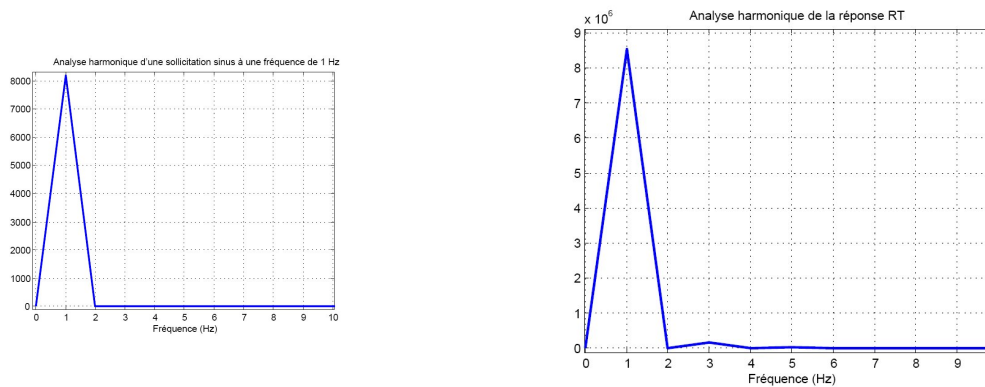


FIG. 5.14: Analyse harmonique d'une sollicitation sinus (à gauche) et de la réponse du modèle RT (à droite)

nique, d'obtenir des valeurs approchées des raideurs dynamiques des modèles. Les manufacturiers d'articulations en caoutchouc font appel à cette approximation au premier harmonique pour effectuer les mesures expérimentales des caractéristiques dynamiques des articulations.

Une rapide vérification du spectre de réponse en fréquence du modèle *RT* montre que le premier harmonique est largement prédominant, viennent ensuite les harmoniques d'ordre supérieur qui sont négligeables vis-à-vis du premier harmonique, comme on peut le voir figure 5.14. La même analyse sur le modèle *STVS* donne des résultats comparables. De même, la réponse à une sollicitation bi-sinus donnera deux harmoniques prédominants correspondant à chacune des deux fréquences de la sollicitation d'origine.

Cependant, une analyse au premier harmonique systématique ne permet pas d'avoir une formulation analytique de l'influence de chacun des paramètres des modèles sur la raideur dynamique ou la tangente de l'angle de perte. De plus, cette méthode nécessite au préalable des simulations temporelles de réponse à un sinus pour plusieurs amplitudes et fréquences ce qui est coûteux en temps de calcul.

Pour ces raisons, une formulation fréquentielle approchée des modèles *RT* et *STVS* a été élaborée. Le double objectif de cette démarche est de mieux comprendre l'impact des paramètres sur le comportement fréquentiel des cales dans un premier temps, puis d'élaborer une méthode d'identification à partir de données fréquentielles, comme les spécifications par exemple.

### 5.3.1 Approximation fréquentielle

Cette formulation est fondée sur un principe simple d'équivalence de puissance efficace dissipée sur un cycle stabilisé, entre un amortisseur linéaire et un amortis-



seur non-linéaire. En supposant que la vitesse est sinusoïdale et se présente sous la forme qui suit  $V(t) = V_a \sin(2\pi ft) = A2\pi f \sin(2\pi ft)$ , il est possible de calculer la puissance efficace associée à cette vitesse par l'équation 5.11. Rappelons que la réponse *RT* et *STVS* présentent des harmoniques d'ordre supérieur à un dont les amplitudes sont négligeables par rapport au premier harmonique (voir figure 5.14 ci-dessus), mais peuvent avoir une influence. Cette approche reste donc une approximation.

$$P_{eff}(A, f) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)V(t)dt \quad (5.11)$$

On peut poser le changement de variable  $\tau = t/T$ , ce qui permet de rendre l'intégration indépendante de la fréquence,  $f$  et de la période d'intégration,  $T$ , comme on peut le voir dans l'équation 5.12.

$$P_{eff}(A, f) = \int_0^1 F(V_a \sin(2\pi\tau))V_a \sin(2\pi\tau)d\tau \quad (5.12)$$

Calculons à présent la puissance efficace dissipée par un amortisseur linéaire équation 5.13, puis par les amortisseurs non-linéaires respectifs des modèles *RT* dans l'équation 5.14 et *STVS* dans l'équation 5.15 :

$$P_{eV}(A, f) = \frac{1}{2}CV_0^2 \quad (5.13)$$

$$P_{eRT}(A, f) = \frac{CoV_a^{pw+1}\Gamma(1 + \frac{pw}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+pw}{2})} \quad (5.14)$$

$$P_{eSTVS}(A, f) = \frac{CoV_a^{pw+1}\Gamma(1 + \frac{pw}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+pw}{2})} + \frac{2F_{frott}V_a^2}{V_a\pi} \quad (5.15)$$

On cherche alors l'amortissement équivalent en fonction de l'amplitude et la fréquence de sollicitation pour un modèle non-linéaire sous la forme :  $C_{eq}(A, f) = \frac{2P_{effnl}}{V_a^2}$ . Ce qui donne la formule 5.16 pour le modèle *RT* et l'expression 5.17 pour le modèle *STVS*.

$$C_{eRT}(A, f) = \frac{2Co(2\pi fA)^{pw-1}\Gamma(1 + \frac{pw}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+pw}{2})} \quad (5.16)$$

$$C_{eSTVS}(A, f) = \frac{2Co(2\pi fA)^{pw-1}\Gamma(1 + \frac{pw}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+pw}{2})} + \frac{4F_{frott}}{(2\pi fA)\pi} \quad (5.17)$$

Les résultats obtenus par cette méthode d'approximation au premier harmonique, ont ensuite été comparés à ceux obtenus par la méthode dite de la « balance harmonique » ou d'équilibrage harmonique présentée entre autres dans la

référence [15]. Cette dernière méthode est très souvent utilisée pour linéariser les comportements localement non-linéaires dans une structure. Il peut s'agir de comportements de type ressort non-linéaire ou amortisseur non-linéaire comme indiqué dans la référence [66]. On considère que la réponse globale  $F(t)$  du système non-linéaire, lorsqu'il atteint son cycle stable limite (ce qui est très rapide dans notre cas) est décomposable dans la base de Fourier de la façon qui suit, où  $m$  est le nombre d'harmoniques considérés :

$$F(t) = A_0 + \sum_{k=1}^m (B_k \cos(k\omega t) + A_k \sin(k\omega t))$$

De même on décompose la réponse  $F_{NL}(t)$  des amortisseurs non linéaires de la façon qui suit :

$$F_{NL}(t) = C_0 + \sum_{k=1}^m (C_k \cos(k\omega t) + D_k \sin(k\omega t))$$

Il est ensuite possible de choisir la troncature en fonction du nombre d'harmoniques que l'on souhaite représenter. Dans notre cas,  $m = 1$ , car nous travaillons seulement au premier harmonique. Avec cette méthode, l'amortissement équivalent pour une entrée de la forme  $y(t) = A \sin(\omega t)$ ,  $C_{eqnl}$  vaudra :

$$C_{eqnl}(A, f) = \frac{C_1}{\omega A} = \frac{C_1}{2\pi f A} \quad (5.18)$$

Les calculs de la balance harmonique donnent donc les mêmes résultats que la méthode de la puissance efficace. Ceci souligne la pertinence de notre approximation, d'autant que les informations et mesures fréquentielles fournies par les manufacturiers de liaisons élastiques en CCNC sont issues d'une analyse au premier harmonique.

### 5.3.2 Calcul de la raideur et de l'angle de perte équivalents

#### Modèle RT

Une fois l'expression de l'amortissement linéaire équivalent connue, il suffit d'introduire celle-ci dans la version fréquentielle des équations d'équilibres des modèles *RT* ou *STVS* comme indiqué en équation 5.24 un peu plus loin. Dans le présent paragraphe, nous nous intéressons au modèle *RT*. Il faut ensuite résoudre le système d'équations non-linéaires qui en découle. Enfin, on calcule l'effort équivalent au premier harmonique grâce aux variables d'état complexes correspondant au déplacement dans chacune des cellules, notés  $\mathbf{X}_i$  (voir équation de l'effort équivalent 5.21) et à l'amplitude de la sollicitation sinus notée  $\mathbf{E}$ .

On obtient ensuite la raideur équivalente via l'équation 5.22, ainsi que la tangente de l'angle de perte via le calcul 5.23, où *IM* et *RE* désignent la partie réelle

et la partie imaginaire.

$$K_{pa}(\mathbf{E} - \mathbf{X}_1) - K_r(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + j\omega C_{eqRT}(|\mathbf{X}_1|, f)\mathbf{X}_1 = 0 \quad (5.19)$$

$$K_r(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) - K_r(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3) + j\omega C_{eqRT}(|\mathbf{X}_2|, f)\mathbf{X}_2 = 0 \quad (5.20)$$

...

$$K_r(\mathbf{X}_{14} - \mathbf{X}_{15}) - K_r\mathbf{X}_{15} + j\omega C_{eqRT}(|\mathbf{X}_{15}|, f)\mathbf{X}_{15} = 0$$

$$F_{eqRT} = K_{pa}(\mathbf{E} - \mathbf{X}_1) + K_0\mathbf{E} \quad (5.21)$$

$$K_{eqRT} = \frac{|K_{pa}(\mathbf{E} - \mathbf{X}_1) + K_0\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}|} \quad (5.22)$$

$$tgphi_{eqRT} = \frac{IM(K_{pa}(\mathbf{E} - \mathbf{X}_1) + K_0\mathbf{E})}{RE(K_{pa}(\mathbf{E} - \mathbf{X}_1) + K_0\mathbf{E})} \quad (5.23)$$

En réalité, la résolution du système d'équations régissant les variables d'état a nécessité quelques astuces numériques. L'équation présente une non-linéarité en raison de l'expression obtenue pour l'amortissement équivalent équation 5.16 qui interdit toute résolution analytique dans le domaine complexe. Les équations ont été transformées de la manière suivante, en notant  $X_i^{Re}$  les parties réelles des variables d'état et  $X_i^{Im}$  les parties imaginaires de ces mêmes variables avec  $i$  compris entre 1 et 15 :

$$\begin{aligned} & K_{pa}(E - X_1^{Re}) - K_r(X_1^{Re} - X_2^{Re}) + \dots \quad (5.24) \\ & X_1^{Im} 2\omega C o\Gamma\left(1 + \frac{pw}{2}\right) \frac{(\omega\sqrt{\epsilon + X_1^{Re}} + X_1^{Im})^{pw-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3+pw}{2}\right)} = 0 \\ & K_{pa}(-X_1^{Im}) - K_r(X_1^{Im} - X_2^{Im}) - X_1^{Re} 2\omega C o\Gamma\left(1 + \frac{pw}{2}\right) \frac{(\omega\sqrt{\epsilon + X_1^{Im}} + X_1^{Re})^{pw-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3+pw}{2}\right)} = 0 \\ & \dots \\ & K_r(X_{14}^{Re} - X_{15}^{Re}) - K_r(X_{15}^{Re}) + X_{15}^{Im} 2\omega C o\Gamma\left(1 + \frac{pw}{2}\right) \frac{(\omega\sqrt{\epsilon + X_{15}^{Re}} + X_{15}^{Im})^{pw-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3+pw}{2}\right)} = 0 \\ & K_r(X_{14}^{Im} - X_{15}^{Im}) - K_r X_{15}^{Im} - X_{15}^{Re} 2\omega C o\Gamma\left(1 + \frac{pw}{2}\right) \frac{(\omega\sqrt{\epsilon + X_{15}^{Im}} + X_{15}^{Re})^{pw-1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3+pw}{2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

Cette décomposition en partie réelle et imaginaire des équations permet de s'affranchir du domaine complexe et d'utiliser les algorithmes de résolution standards dans Matlab<sup>®</sup> comme ceux implémentés dans « fsolve ». Nous avons utilisé

de façon préférentielle l'algorithme de Marquardt-Levenberg pour les équations non-linéaires, étant donné la forte non-linéarité du terme  $(\omega\sqrt{(X_{15}^{Re})^2 + (X_{15}^{Im})^2})^{pw-1}$ . Malgré ces deux précautions de résolution, l'algorithme peut rester lent, voire diverger. Cette divergence est causée par la nullité de certaines variables d'état, notamment pour des amplitudes de sollicitation faibles.

Dans le terme  $(\omega\sqrt{\epsilon + (X_{15}^{Re})^2 + (X_{15}^{Im})^2})^{pw-1}$  on souligne l'ajout d'une valeur  $\epsilon$ . Cette valeur, très petite ( $10^{-5}$  maximum) permet lorsque les valeurs de variable d'état sont nulles de ne pas obtenir un terme infini étant donné que le terme  $pw - 1 < 0$ . Ainsi, l'algorithme converge toujours. Après plusieurs essais les valeurs comprises entre  $\epsilon = 10^{-6}$  et  $\epsilon = 10^{-8}$  ont été choisies.

### Modèle STVS

Les mêmes principes ont été appliqués au *STVS* afin de calculer une valeur approchée de la raideur et de la tangente d'angle de perte à partir des équations fréquentielles et de l'approximation harmonique décrite plus haut.

On rencontre pour ce modèle comme pour le *RT* les mêmes difficultés numériques et un écart important sur le tangente d'angle de perte.

### 5.3.3 Étude de l'impact des paramètres sur le comportement fréquentiel

Nous avons utilisé cette approximation pour réaliser une étude de sensibilité des raideurs et angle de perte approximés obtenus en fonction des paramètres des deux modèles. Pour cela nous avons calculé des valeurs de raideur et de tangente d'angle de perte à une fréquence et amplitude données, en balayant certaines plages de valeurs des différents paramètres des modèles *STVS* et *RT*.

Nous présentons deux types de cartographies dans ce paragraphe. La première, trace l'évolution de la raideur obtenue en fonction de deux des paramètres du modèle *RT* ou *STVS*. La deuxième, trace l'écart entre raideur « mesurée », à 1 Hz et 1 mm par exemple, et la raideur simulée pour la même fréquence et la même amplitude grâce aux modèles, et ce, pour différents jeux de paramètres.

#### Impact des paramètres *RT* sur la raideur et la tangente de l'angle de perte

Pour illustrer cette étude de sensibilité, nous avons balayé des valeurs de paramètres autour des valeurs obtenues lors de l'identification du *RT* et du *STVS* à partir des paramètres quasi-statiques du *STS*.

1. Le paramètre  $K_{pa}$  présente un impact sur la raideur globale du cycle. Pour un jeu de paramètres donné, la raideur  $K_{pa}$ , en augmentant, fait augmenter

la raideur du cycle d'hystérésis au premier harmonique. Cette accroissement de la raideur est fonction du paramètre  $C_o$ . Le couple  $K_{pa}$  et  $C_o$  est lié. Si la pente  $K_{pa}$  est importante ou si  $C_o$  faible, le niveau d'effort seuil  $F_s$  pour une vitesse  $V_0$ , c'est-à-dire pour un  $C_o$  donné, est atteint à un déplacement très faible, la raideur  $K_{pa}$  aura très peu d'influence dans le cycle d'hystérésis, que ce soit au niveau raideur ou tangente de l'angle de perte.

2. Le paramètre  $C_o$  fait augmenter la raideur de façon non linéaire et dépendante de la valeur de  $K_{pa}$ . le paramètre  $C_o$  fait augmenter puis diminuer la tangente de l'angle de perte. pour une valeur de  $K_{pa}$  donnée.
3. Le paramètre  $pw$  lorsqu'il augmente fait augmenter l'angle de perte, cette évolution est dépendante de la valeur de  $C_o$ . Ce paramètre fait très faiblement évoluer la raideur ou l'angle de perte par rapport aux autres paramètres.
4. Le paramètre  $K_t$  en augmentant fait augmenter la raideur. Il a cependant une moindre influence par rapport au paramètre  $K_{pa}$ . La tangente de l'angle de perte évolue quant à elle très peu avec ce paramètre. On peut remarquer que pour les raideurs identifiées via le *STS*, les tangentes d'angle de perte obtenues avec cette approximation semblent assez éloignés des tangentes usuelles qui sont inférieures à un. Ceci est très notable sur la figure 5.18 où l'on remarque que seules des valeurs très faibles de  $K_{pa}$  permettent d'obtenir des angles de perte convenables.

L'ensemble des considérations citées ci-dessus sont illustrées dans les figures 5.15, 5.16 et 5.17.

Sur les cartographies représentant la différence entre une mesure et la simulation en figures 5.18, 5.19, par exemple, on voit que le minimum se trouve dans une vallée. Il sera donc difficile de trouver un algorithme qui trouve le minimum absolu, plusieurs combinaisons de paramètres pouvant éventuellement donner des résultats très proches. Il faut donc utiliser une méthode globale pour pouvoir obtenir le jeu de paramètres qui minimise la différence entre mesure et simulation.

En conclusion de ce paragraphe, on peut noter que deux paramètres seront assez difficiles à identifier à savoir  $K_{pa}$  et  $pw$ . Le premier a beaucoup d'influence si l'on cherche des réponses telles que du balourd, mais moins dès que la structure est plus complexe comme on a pu le voir dans l'exemple des trépidations. Le second a une influence, bien que plus limitée que celle de  $K_{pa}$ , quelle que soit la simplification de la structure du véhicule étudié mais reste couplé notamment avec le paramètre  $C_o$ . Par ailleurs,  $pw$  fait très peu évoluer la raideur pour certains jeux de paramètres, et beaucoup pour d'autres ; il sera donc difficile de l'identifier précisément.

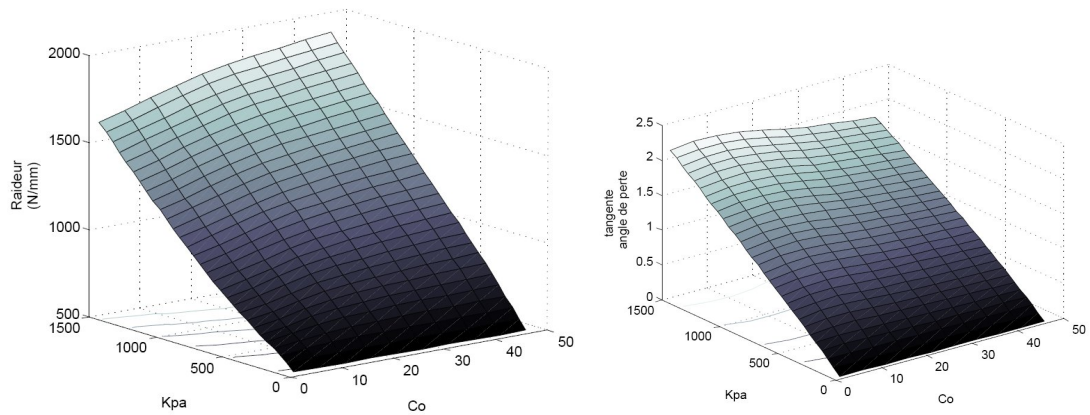


FIG. 5.15: Cartographies donnant la raideur (à gauche) la tangente d'angle de perte (à droite) en fonction de différents couples  $K_{pa}$  et  $C_o$  pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de  $K_t$  de 2951 N/mm, un  $pw$  de 0.01.

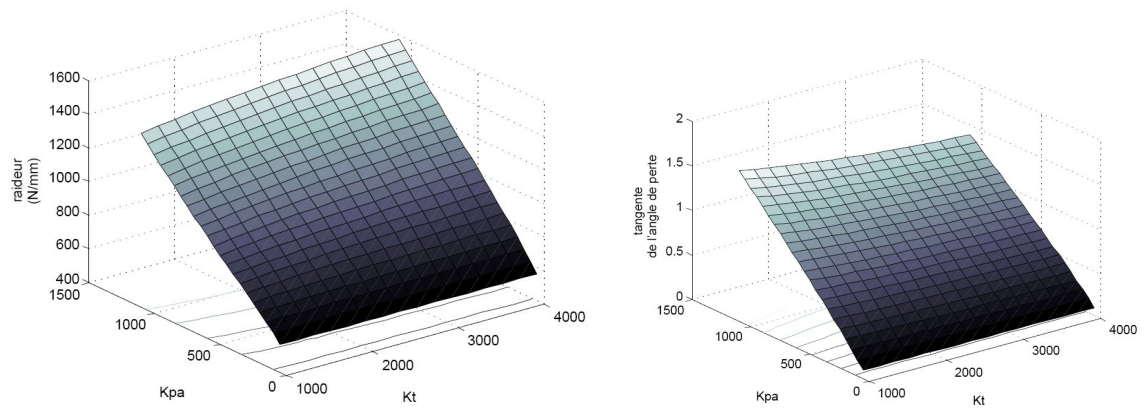


FIG. 5.16: Cartographie donnant la raideur et la tangente de l'angle de perte en fonction de différents couples  $K_{pa}$  et  $K_t$  pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de  $C_o$  de 40, un  $pw$  de 0.01.

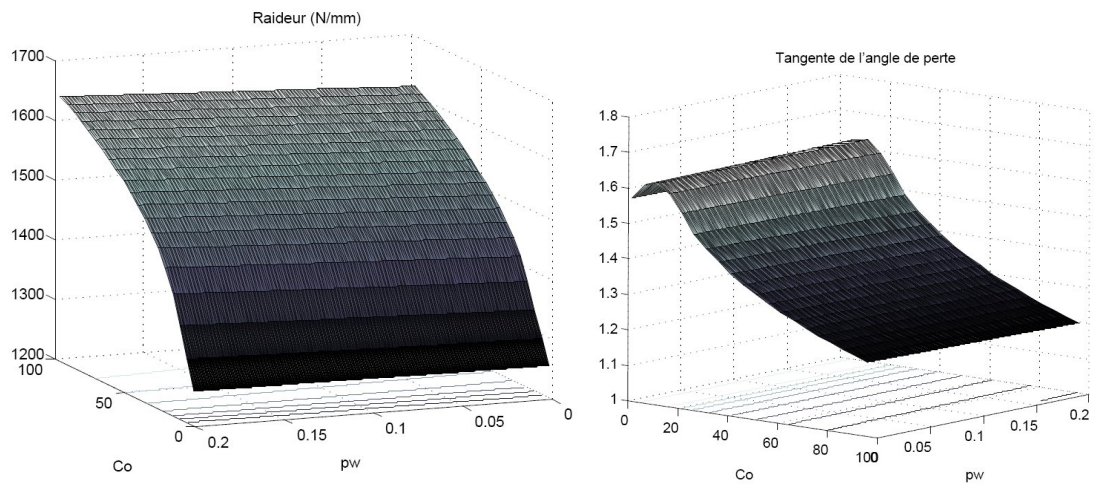


FIG. 5.17: Cartographie donnant la raideur et la tangente de l'angle de perte en fonction de différents couples  $Co$  et  $pw$  pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de  $K_{pa}$  de 1050 N/mm, un  $K_r$  de 2951 N/mm.

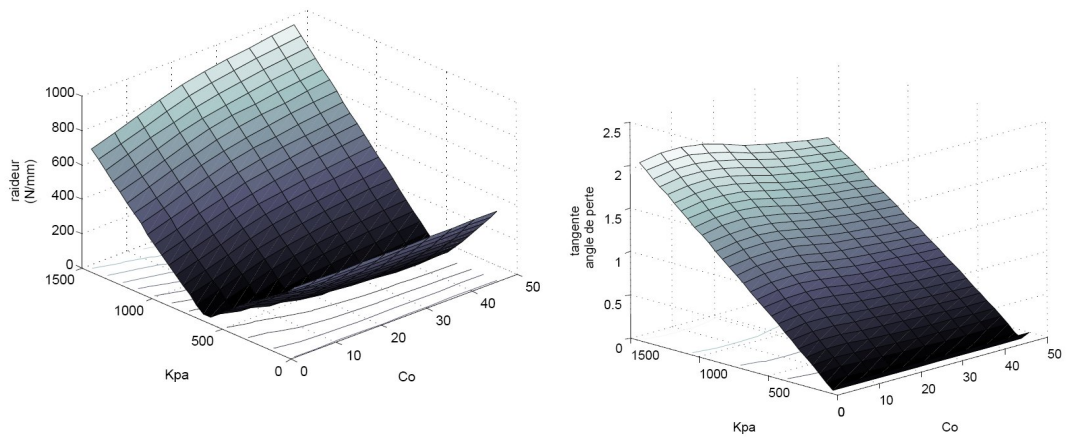


FIG. 5.18: Cartographie donnant la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (920 N/mm) et entre tangente d'angle de perte simulé et mesuré (soit 0,12) avec des paramètres identiques à la figure 5.15.



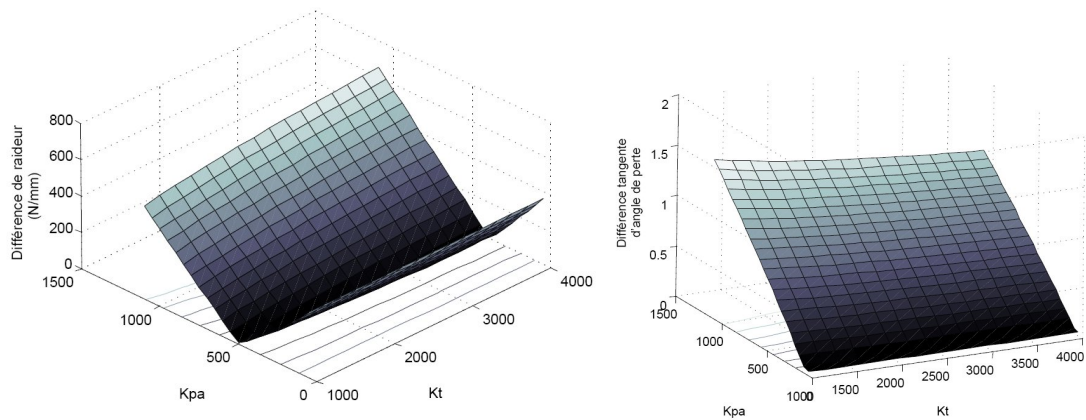


FIG. 5.19: Cartographie donnant la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (920 N/mm) et entre tangente d'angle de perte simulé et mesuré (soit 0,12) avec des paramètres identiques à la figure 5.16.

### Impact des paramètres sur l'approximation STVS

Nous allons à présent effectuer la même analyse que précédemment mais pour le modèle *STVS* cette fois. Du fait des similitudes entre modèle *STVS* et *RT*, la plupart des remarques faites dans le paragraphe précédent peuvent être reprises au compte du modèle *STVS*.

1. Le paramètre  $K_{pa}$  présente un impact sur la raideur globale du cycle. Cette influence peut être remarquée via la formulation de la raideur sécante du *STS* (voir équation 5.2) qui est significative étant donné les similitudes entre *STVS* et *STS*. Cette influence est nettement dépendante du paramètre  $F_s$  et dans une moindre mesure de  $C_o$ . De plus, on remarque comme pour le *RT* que ce paramètre fait très vite augmenter la tangente de l'angle de perte.
2. Le paramètre  $C_o$  fait augmenter la raideur de façon non-linéaire en fonction des autres paramètres notamment  $K_{pa}$  et  $F_s$ .
3. Le paramètre  $pw$  a très peu d'influence pour les jeux de paramètres utilisés sur l'ensemble de figures présentées ici. La figure 5.17 met en évidence les faibles évolutions de raideur et tangente d'angle de perte avec le paramètre  $pw$ .
4. Le paramètre  $K_t$  a globalement la même influence que pour le modèle *RT*.
5. Le paramètre  $F_s$ , qui est spécifique au *STVS*, lorsqu'il augmente fait dans un premier temps augmenter l'angle de perte, puis diminuer cet angle de perte tout comme  $C_o$ . Il fait également augmenter la raideur mais dans des proportions plus importantes que  $C_o$ .

Pour les paramètres  $F_s$  et  $K_{pa}$ , les cartographies simples et différentielles des raideurs et tangentes de l'angle de perte par rapport aux valeurs à 1 Hz et 1 mm



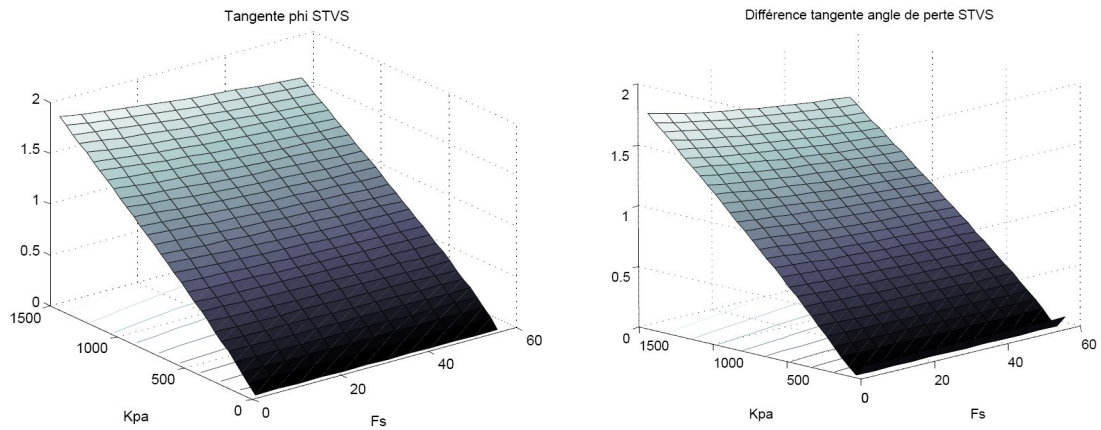


FIG. 5.20: Cartographie donnant la tangente de l'angle de perte en fonction des paramètres  $K_{pa}$  et  $F_s$  (à gauche) et la différence entre tangente d'angle de perte simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent  $Co = 40$ ,  $K_r = 2951$ ,  $pw = 0.01$

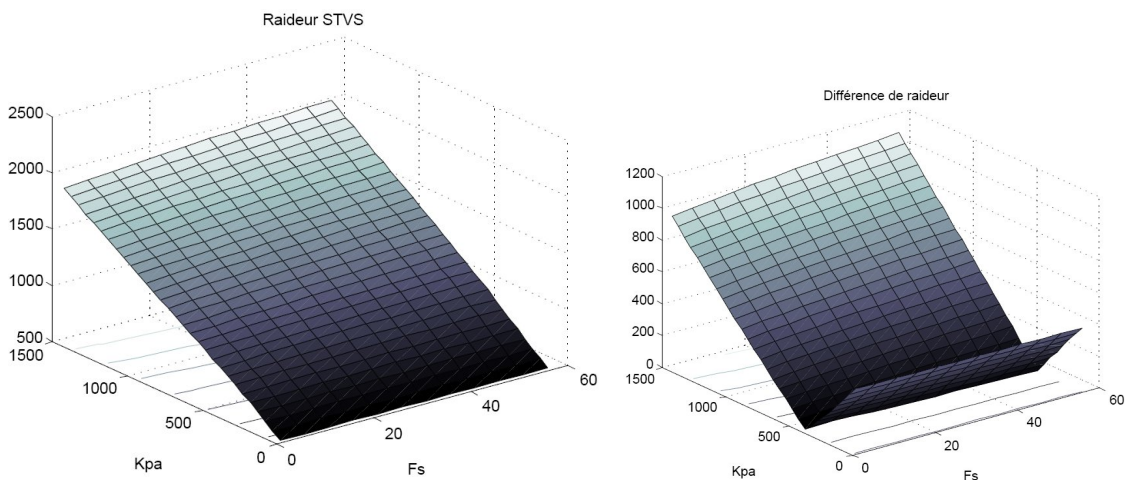


FIG. 5.21: Cartographie donnant la raideur du modèle *STVS* pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres  $K_{pa}$  et  $F_s$  (à gauche) et la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent  $Co = 40$ ,  $K_r = 2951$ ,  $pw = 0.01$

mesurées se trouvent en figures 5.20 et 5.21.

On remarque sur les cartographies montrant la différence entre raideur simulée et mesurée, que pour aucun des jeux de paramètres utilisés la raideur mesurée n'est atteinte. Le seul balayage des paramètres  $F_s$  et  $Co$  ne suffit pas à obtenir un modèle fréquentiel correct.

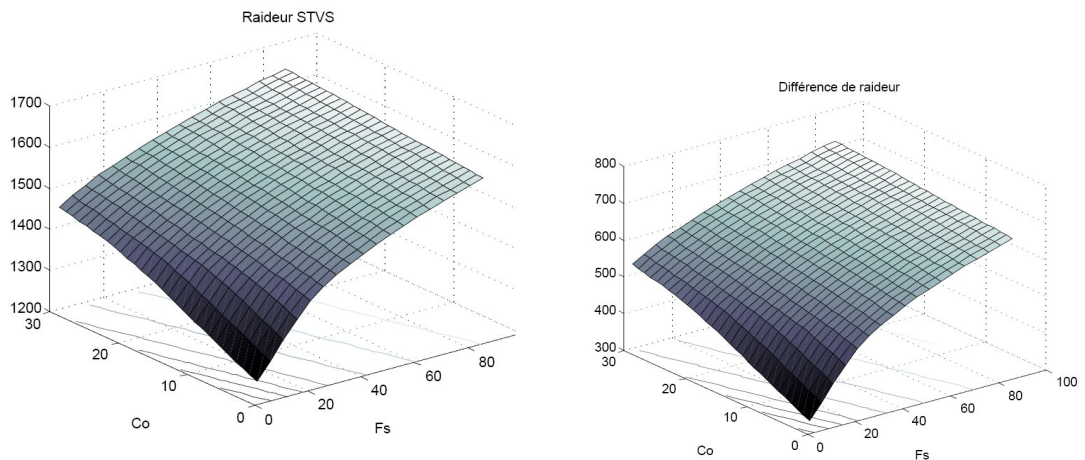


FIG. 5.22: Cartographie donnant la raideur du modèle *STVS* pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres  $Co$  et  $F_s$  (à gauche) et la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent  $K_{pa} = 1051$ ,  $K_r = 2951$ ,  $pw = 0.01$

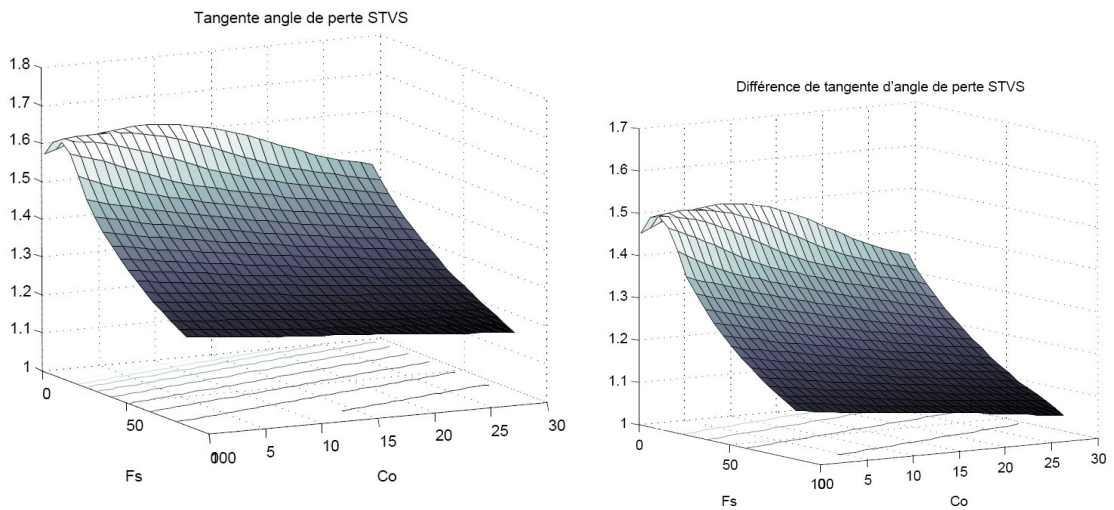


FIG. 5.23: Cartographie donnant la tangente de l'angle de perte du modèle *STVS* pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres  $Co$  et  $F_s$  (à gauche) et la différence entre tangente simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent  $K_{pa} = 1051$ ,  $K_r = 2951$ ,  $pw = 0.01$

Par ailleurs, compte tenu des résultats obtenus aussi bien pour le modèle *RT* que *STVS* en cartographie pour la tangente de l'angle de perte, il paraît difficile d'utiliser celui-ci pour identifier les paramètres du modèle.

### 5.3.4 Identification à partir de données fréquentielles

#### Choix des grandeurs d'identification

Étant donné la corrélation entre analyse au premier harmonique des modèles *RT* et *STVS* et l'approximation fréquentielle de la raideur, il est préférable de choisir des raideurs pour identifier le modèle, plutôt que des tangentes d'angle de perte.

Le paramètre  $K_0$  est supposé déjà identifié via l'identification de la partie élastique du modèle. Quatre paramètres restent donc à identifier pour le *RT* :  $K_{pa}$ ,  $K_r$ ,  $C_o$  et  $pw$ . Nous avons vu ci-dessus que  $pw$ , quelle que soit sa valeur, a peu d'influence sur la raideur. Il est donc nécessaire de trouver un autre moyen de l'identifier. Finalement, trois paramètres semblent identifiables via cette méthode :  $K_{pa}$ ,  $K_r$  et  $C_o$ .

Enfin le choix de grandeurs utilisées pour identifier les paramètres est limité par le peu d'informations de nature fréquentielle disponibles lors de la phase de conception. En effet, les seules données connues lors des phases de conception sont les spécifications. Une fois la cale fabriquée, quelques raideurs supplémentaires peuvent être mesurées sur la pièces. Pour le moment, seules trois raideurs sont nécessaires puisque trois paramètres doivent être identifiés, on prendra alors les raideurs correspondant aux spécifications :

- la raideur à 1 Hz et 1 mm ;
- la raideur à 15 Hz et 1 ou 0,5 mm ;
- la raideur à 100 Hz et 0,1 mm.

Notre choix s'est donc orienté vers ces trois valeurs. Comme indiqué plus haut, une méthode de balayage des trois paramètres a été utilisée afin d'éviter les minima locaux se trouvant dans les vallées identifiées au paragraphe 5.3.3, dans lesquels une méthode de minimisation classique nous entraîne.

#### Méthode d'identification

Nous avons réalisé de nombreux essais afin d'obtenir un balayage optimal. Ce balayage est réalisé en résolvant pour chaque jeux de paramètres les équations décrites au paragraphe 5.3.2. Cette démarche bien que moins coûteuse qu'une simulation temporelle doublée d'une analyse au premier harmonique pour chacun des jeux de paramètres, demeure longue et peut prendre plusieurs heures à plusieurs jours selon la finesse du balayage et le nombre de paramètres balayé.

Cette opération doit être réalisée pour chacune des grandeurs servant à l'identification, autrement dit, les trois raideurs citées au paragraphe précédent.

Une fois le balayage effectué, on cherche le minimum de la fonction coût qui suit :

$$J_{min}(K_{pa}, K_r, C_o) = \left( \frac{(Raid_{1Hz}^{1mm} - Raid_{mes1Hz}^{1mm})}{Raid_{mes1Hz}^{1mm}} \right)^2 + \left( \frac{(Raid_{15Hz}^{0,5mm} - Raid_{mes15Hz}^{0,5mm})}{Raid_{mes15Hz}^{0,5mm}} \right)^2 + \left( \frac{(Raid_{100Hz}^{0,1mm} - Raid_{mes100Hz}^{0,1mm})}{Raid_{mes100Hz}^{0,1mm}} \right)^2 \quad (5.25)$$

On note que l'on norme chacune des différence afin de ne pas favoriser un domaine de fréquence ou d'amplitude. il est possible au contraire de favoriser l'un ou l'autre des domaines de fréquences ou d'amplitude en ajoutant une pondération sur les raideurs servant à l'identification.

On peut introduire d'autres raideurs afin d'avoir plus d'informations, si celles-ci sont connues.

Intéressons nous à un exemple d'identification opérée sur trois raideurs pour identifier les paramètres du modèle *STVS*. Nous utilisons pour cela les balayages effectués au paragraphe 5.3.3 afin de déterminer les amplitudes et sens de balayage. Au regard de l'identification réalisée à partir du STS et des balayages de l'étude de sensibilité, les paramètres sont balayés selon les valeurs suivantes :

- $K_{pa}$  de 10 à 1010 ou 1310 (selon la raideur d'identification) ;
- $K_r$  de 2500 à 5500
- $C_o$  de 1 à 61
- $F_s$  de 5 à 105

On obtient les résultats suivants :

1. Pour la première raideur à 1 Hz, les paramètres identifiés sont  $K_{pa} = 1010$ ,  $K_r = 5500$ ,  $C_o = 61$ ,  $F_s = 105$  avec  $pw = 0.1$ .
2. Pour la raideur à 16 Hz, les paramètres identifiés sont  $K_{pa} = 10$ ,  $K_r = 5500$ ,  $C_o = 1$ ,  $F_s = 5$  avec  $pw = 0.1$ .
3. Pour la raideur à 100 Hz, les paramètres identifiés sont  $K_{pa} = 1310$ ,  $K_r = 2500$ ,  $C_o = 61$ ,  $F_s = 25$  avec  $pw = 0, 1$ .
4. Pour une fonction coût prenant en compte la raideur à 1 Hz et à 16 Hz, on obtient le même jeu de paramètres que pour la raideur à 1 Hz.

On constate dans la plupart des cas que les valeurs de paramètre ont tendance à diverger par rapport à leur valeur initiale qui est donnée par l'identification STS.

Ci-dessous, nous avons utilisé les différents jeux de paramètres identifiés via la méthode fréquentielle sur une ou deux raideurs afin de faire une simulation temporelle et de vérifier la cohérence vis-à-vis du comportement mesure en quasi-statique.

Différents essais, en imposant des contraintes sur les paramètres, en imposant la valeur de certains autres paramètres, en augmentant le nombre de raideurs

servant à l'identification ou encore en laissant le paramètre  $K_0$  plus libre afin d'ajuster sa valeur n'ont donné que des résultats similaires à ceux obtenus ci-dessus, à savoir une divergence des résultats vers les bornes de balayage. Les résultats sont malheureusement peu satisfaisants et ne permettent pas d'identifier de façon précise l'ensemble des paramètres du *STVS*.

L'approximation fréquentielle semble insuffisamment précise pour permettre une identification du modèle *RT* ou *STVS* à partir de données mesurées.

### 5.3.5 Conclusion sur l'identification fréquentielle

Malgré des essais prometteurs en terme de conformité aux modèles *RT* et *STVS* de ces modèles, cette méthode s'est avérée très compliquée à mettre en oeuvre. Par ailleurs les résultats obtenus sont peu satisfaisants en terme de temps de calcul et d'unicité de la solution.

Il existe plusieurs raisons à cela. La première est le manque d'informations fréquentielles utilisables si l'on se contente des spécifications. Deuxièmement, le temps nécessaire pour la mise en oeuvre de cette méthode est trop important. Enfin plusieurs autres causes, spécifiques à chacun des modèles rendent cette méthode peu concluante en terme de précision d'identification :

- Pour ce qui est de l'identification du *RT* :

La représentativité du *RT* en terme de tangente de l'angle de perte est assez mauvaise, en effet, pour des fréquences très faibles, l'angle de perte tend vers zéro, ce qui n'est pas le cas dans les mesures sur pièce réelle. L'angle de perte a tendance à être surévalué.

La méthode de l'équilibre harmonique accentue encore ce défaut étant donné que l'approximation donne un écart assez important entre angle de perte du modèle et celui de l'approximation fréquentielle. L'ensemble de ces arguments nous interdit d'utiliser les tangente d'angle de perte comme valeur caractéristiques d'identification.

Comme on a pu le voir dans l'étude de sensibilité paragraphe 5.3.3, pour une valeur de raideur et un couple de paramètres balayés, le minimum se trouve dans une vallée de pente très faible. Les algorithmes de descente peuvent donc être piégés dans des minima locaux et ne pas donner la valeur optimale.

On préfère donc une méthode globale à une méthode locale, ce qui implique des balayages de largeur définie à partir des paramètres identifiés grâce au STS (voir paragraphe 5.2). On cherche ensuite le minimum absolu sur l'ensemble de la cartographie en raideur. Ces balayages impliquent 4 paramètres pour le modèle *RT*, à savoir  $K_{pa}$ ,  $K_r$ ,  $Co$  et  $pw$ . Les paramètres

$K_{pa}$  et  $K_r$  ont tendance à aller vers leurs bornes mini pour  $K_{pa}$  et maxi pour  $K_r$ . Le paramètre  $Co$  est franchement non-linéaire et demeure le paramètre le plus compliqué à identifier. Enfin  $pw$  qui est compliqué à identifier semble ne pas avoir beaucoup d'influence sur la raideur, il faudra donc envisager une autre méthode pour l'identifier plus précisément.

– Pour ce qui est de l'identification du *STVS* :

Outre les arguments déjà cités ci-dessus, malgré une meilleure représentativité du comportement réel d'une articulation en caoutchouc, le modèle *STVS* s'avère tout aussi compliqué à identifier par la voie de l'approximation fréquentielle.

Le premier obstacle est le nombre de paramètres. Il est nécessaire d'effectuer un balayage sur 5 paramètres. Les temps de calculs deviennent alors exorbitants avec des ordres de grandeur de plusieurs jours.

Les résultats obtenus donnent également des paramètres identifiés aux bornes maximum et minimum fixées lors du balayage, comme pour le *RT*, ce qui n'est plus représentatif lorsqu'on réalise une simulation dans le domaine temporel.

Enfin, on peut souligner le fait que la méthode de l'équilibrage harmonique n'est pas tout à fait adaptée au modèle *STVS*. En effet, d'après Dunne et Hayward [24], pour que la méthode de la balance harmonique ou équilibrage harmonique soit applicable, la fonction d'amortissement doit respecter les conditions suivantes :

- présenter une réponse périodique dont la fréquence fondamentale est identique à celle de la sollicitation ;
- ne doit pas présenter de discontinuités de type « saut », comme c'est le cas pour le frotteur du *STVS*.

Nous allons, dans le paragraphe qui suit, présenter une alternative d'identification. Il s'agit d'utiliser une réponse temporelle quelconque mesurée sur une pièce, ce qui nécessite la fabrication par les fournisseurs d'une cale prototype entièrement caractérisée.

## 5.4 Identification sur des sollicitations temporelles quelconques

Les résultats obtenus avec l'approximation fréquentielle ci-dessus sont mitigés, ils permettent d'obtenir dans certains cas de bons résultats. Cependant, les grandeurs utilisées étant de nature fréquentielle et leur nombre limité, il sera parfois difficile d'utiliser les balayages décrits plus haut pour identifier de façon précise les paramètres du modèle *STVS* ou même du *RT*. Par ailleurs, dans le cas où



l'on dispose de nombreuses indications dans le domaine fréquentiel, le calcul sera long en raison du balayage.

Une approche différente, permettant d'identifier les paramètres à partir de résultats de mesures temporelles quelconques - on pense notamment aux courbes de relaxation - a été envisagée. Il s'agit d'une méthodologie utilisant la théorie des problèmes inverses, associée à la technique de l'état adjoint pour obtenir le gradient utilisé ensuite dans un algorithme de descente. Ces éléments ont fourni des résultats plutôt encourageants, bien que la méthodologie, n'ait pu être appliquée au modèle complet d'articulation en caoutchouc en vue d'une utilisation industrielle.

Étant donné que la technique d'identification n'a pas été appliquée au modèle complet, la méthodologie générale est présentée, puis des exemples du plus simple au plus complexe sont traités, les derniers alliant l'ensemble des difficultés du modèle de liaison élastique  $RT$ . Une courte introduction, permet de poser les bases de la théorie sur l'utilisation de l'état adjoint pour le calcul du gradient d'une fonction par rapport à des paramètres.

#### 5.4.1 Résolution d'un problème inverse avec état adjoint

Nous notons l'équation 5.26 implicite régissant le modèle dont on souhaite identifier les paramètres. Ici  $x$  désigne le vecteur des variables d'état, c'est-à-dire des déplacements dans chacun des amortisseurs,  $x'$  désigne le vecteur des vitesses dans chacun des ces amortisseurs,  $e(t)$  est la sollicitation temporelle quelconque en déplacement,  $t$  est le temps, et  $p$  désigne le vecteur des paramètres à identifier. Les conditions initiales valent :  $x(t_0) = x_0$  pour une identification sur une mesure qui se déroule dans l'intervalle  $[t_0; T]$ .

$$G(x'(t), x(t), e(t), t, p) = 0 \quad (5.26)$$

#### Fonction écart

Pour pouvoir identifier les paramètres des modèles  $RT$  ou  $STVS$ , une fonction coût ou mesurant l'écart entre la réponse mesurée des articulations en caoutchouc et le résultat de la simulation pour la même sollicitation temporelle quelconque doit être élaborée. Afin de minimiser l'écart entre comportement réel et modèle, la fonction coût est ensuite dérivée par rapport aux paramètres à identifier. On cherche à annuler cette dérivée.

L'écart entre valeurs réelles et valeurs simulées est souvent écrit au sens des moindres carrés. Une fonction coût quadratique, dont la première dérivée par rapport aux paramètres est linéaire est en effet très intéressante. Lorsqu'on a trouvé le jeu de paramètres pour lequel la fonction coût est minimale, sa dérivée

est nulle et les paramètres sont ceux qui produisent le comportement le plus proche de la réponse mesurée.

Il est important de remarquer que la fonction coût peut présenter des minima locaux ou des vallées qui rendent plus difficiles la recherche du minimum absolu de la fonction. Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, on ajoute un terme supplémentaire à la fonction coût.

Ce terme additionnel régularise le problème inverse au sens de Tikhonov, une discussion sur la construction de l'opérateur régularisant se trouve dans le cours de Bonnet [8]. On détermine un jeu de paramètres assez proches de ceux que l'on estime physiquement raisonnables noté  $p_0$ . Cela est réalisé soit par étude de sensibilité en choisissant des paramètres dans une plage de variation précise, soit grâce à une première méthode d'identification moins précise comme celles évoquées aux paragraphes 5.2 et 5.3.

On construit une fonction stabilisatrice d'après le principe de sélection de Tikhonov [74]. C'est-à-dire, que l'on recherche la solution optimale qui se trouve dans une sphère de rayon fini autour du point de coordonnées le vecteur  $p_0$ . La fonction stabilisatrice ajoutée à la fonction coût est indexée par une valeur  $\alpha$ , qui pénalise plus ou moins l'influence de ce terme stabilisateur ou non. On peut par exemple choisir comme fonctionnelle stabilisatrice :

$$\Omega(p) = \frac{\alpha}{2} |p - p_0|^2 \quad (5.27)$$

Il est possible en fonction de la connaissance que l'on a du problème, d'ajouter des termes à la fonction coût, afin d'assurer le respect de certaines contraintes sur les paramètres. On note  $Ax_d$  la mesure de la réponse du système à une sollicitation temporelle réelle  $e(t)$ , avec  $A$  le projecteur permettant d'obtenir la quantité mesurable à partir des variables d'état et  $M^T$  qui note la matrice transposée de la matrice  $M$ . Ainsi, la fonction coût prendra la forme qui suit :

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_0^T |A(x - x_d)|^2 dt + \frac{\alpha}{2} |p - p_0|^2 \quad (5.28)$$

Afin de minimiser cette fonction coût, on en calcule sa dérivée par rapport au vecteur de paramètres  $p$ , en notant  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire :

$$\delta J(p) = \int_0^T (A^T A(x - x_d), \delta x) dt + \alpha (p - p_0, \delta p) = 0 \quad (5.29)$$

### Calcul de l'état adjoint et résolution

On calcule l'équation de sensibilité de la fonction  $G$ , afin d'obtenir des informations sur l'évolution du problème direct avec les paramètres et les variables d'état  $x$ . Pour plus de lisibilité, nous noterons à partir de maintenant la dérivée d'une fonction  $G$  par rapport aux variables d'état  $x$ ,  $D_x G$  et à leur dérivée  $x'$ ,



$D_{x'}G$ , la dérivée par rapport aux paramètres  $p$   $D_pG$  la dérivée par rapport au temps  $G'$ . Ce qui donne pour l'équation de sensibilité l'expression 5.30 :

$$D_pG\delta p + D_xG\delta x + D_{x'}G\delta x' = 0 \quad (5.30)$$

Une fois la fonction coût définie, on cherche à calculer l'état adjoint de telle sorte que ce dernier permette le calcul du gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres assez facilement. En utilisant l'équation 5.30, on pose l'état adjoint comme étant égal à ce qui suit ainsi que les conditions finales correspondantes :

$$-((D_{x'}G)^T z)' + (D_xG)^T z = A^T(A(x - x_d)) \quad (5.31)$$

En utilisant l'ensemble des équations 5.30, 5.29 et 5.31, il est possible d'écrire des relations permettant de calculer les paramètres en fonction des variables d'état  $x$  et de l'état adjoint  $z$ , sans recourir aux dérivées partielles des variables d'état par rapport aux paramètres.

Tout d'abord on effectue le produit scalaire de l'équation de sensibilité par l'état adjoint :

$$\int_0^T \left( D_{x'}G\delta x', z \right) + \left( D_xG\delta x, z \right) + \left( D_pG\delta p, z \right) = 0 \quad (5.32)$$

On effectue le produit scalaire entre  $\delta x$  et l'état adjoint 5.31, et on intègre le tout entre 0 et T :

$$\int_0^T -\left( ((D_{x'}G)^T z)', \delta x \right) + \left( (D_xG)^T z, \delta x \right) dt = \int_0^T \left( A^T(A(x - x_d)), \delta x \right) dt \quad (5.33)$$

Une intégration par parties (IPP), sur le premier terme du premier membre de l'équation 5.33, donne :

$$\int_0^T -\left( ((D_{x'}G)^T z)', \delta x \right) dt = \int_0^T \left( ((D_{x'}G)^T z), \delta x' \right) - \left[ \left( ((D_{x'}G)^T z), \delta x \right) \right]_0^T dt \quad (5.34)$$

La méthode nécessite à ce point d'imposer les conditions initiales et finales sur les dérivées des équations d'état et sur l'état adjoint, ces conditions sont précisées dans Cao [16]. Cela simplifie les calculs et annule la partie entre crochets dans l'équation 5.34 :

$$\begin{aligned} \delta x(0) &= 0 \\ z(T) &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

La première condition est nécessaire, car  $x(0) = 0$  et la seconde est suffisante.

On a donc le premier membre de l'équation 5.32 qui est égal à celui de l'équation 5.33, excepté la partie  $\int_0^T (D_p G \delta p, z) dt$ . On peut donc écrire que le second membre de l'équation 5.33, est égal à  $-\int_0^T (D_p G \delta p, z) dt$  :

$$\int_0^T (A^T(A(x - x_d)), \delta x) dt = -\int_0^T (D_p G \delta p, z) dt \quad (5.36)$$

De plus d'après l'équation 5.29, comme la fonction dérivée de la fonction coût est nulle, on a également l'égalité suivante :

$$\int_0^T (A^T(A(x - x_d)), \delta x) dt = -\alpha(p - p_0, \delta p) \quad (5.37)$$

En utilisant les équations 5.36 et 5.37, on trouve l'équation d'optimalité 5.38.

$$\int_0^T (D_p G)^T z dt - \alpha(p - p_0) = 0 \quad (5.38)$$

Afin d'obtenir la valeur des paramètres  $p$ , il faut alors résoudre simultanément l'ensemble du système d'équations du système direct 5.26, du système adjoint 5.35 et 5.31 et des conditions d'optimalité 5.38, chacun muni des conditions initiales et finales adéquates.

Il est très difficile de résoudre l'ensemble de ces équations simultanément. Le système direct, qui peut être intégré de façon indépendante de l'état adjoint dans le sens direct est souvent résolu en premier. Puis, on résout le système adjoint dans le sens rétrograde. Bien souvent plutôt que de résoudre le système rétrograde, on obtient un système direct équivalent en posant le changement de variable  $\tau = T - t$  dans le système adjoint.

Connaissant les valeurs des variables d'état pour tous les pas de temps, l'intégration du système adjoint peut être effectuée indépendamment des équations d'optimalité, en fonction de l'état direct obtenu précédemment. Enfin, utilisant les variables d'état et l'état adjoint calculés, on peut utiliser les conditions d'optimalité pour calculer un nouveau vecteur  $p$ , plus optimal que  $p_0$ . On applique une méthode du point fixe, en reprenant la nouvelle valeur  $p$  en guise de  $p_0$  pour l'itération suivante, tout en évitant de trop s'éloigner de la précédente valeur calculée.

### Illustration de la méthode

Exemple n°1 Ce premier exemple est constitué d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à une variable :

$$\begin{aligned} x' &= -ax \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Le paramètre  $a$  est supposé inconnu, bien qu'il soit aisément calculable analytiquement pour une donnée mesurée de la variable d'état  $x_m$ . On connaît la réponse exacte pour toute valeur de  $a$ , elle vaut  $\exp(-at)$ . On suppose que la donnée mesurée est  $\exp(-3t)$ , c'est-à-dire que le paramètre  $a$  vaut 3. On cherche ensuite à identifier à partir de la mesure  $x_m(t) = \exp(-3t)$  la valeur de  $a$ , comme si elle nous était inconnue. On utilise  $a_0$  que l'on estime proche du paramètre exact, par exemple  $a_0 = 5$  pour régulariser la fonction coût. La fonction choisie est indiquée en équation 5.40.

$$J(a) = \int_0^T \frac{1}{2} (x(t) - x_m(t))^2 + \frac{\chi_a}{2} (a - a_0)^2 \quad (5.40)$$

D'après la théorie évoquée au paragraphe précédent, l'équation différentielle régissant l'état adjoint et la condition finale correspondante valent :

$$\begin{aligned} az - z' &= x - x_m \\ z(T) &= 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dans ce cas précis le calcul de l'état adjoint ne nécessite pas de calcul numérique, contrairement à notre application comme nous le verrons un peu plus loin. Les équations d'optimalité sont régies par les équations 5.42.

$$\chi_a (a - a_0) = \int_0^T z x dt \quad (5.42)$$

Une fois les équations correspondant à l'état direct, présentées en équation 5.39 et à l'état adjoint, présentées en équation 5.41, résolues, on utilise la condition d'optimalité 5.42 pour élaborer un algorithme d'obtention du paramètre  $a$ . Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, on utilise une méthode du point fixe, avec pour paramètre initial  $a_0$ . Pour l'itération  $n$  on trouve la relation :

$$a^n = a^{n-1} + \frac{1}{\chi_a} \int_0^T (z x) dt \quad (5.43)$$

La suite est contractante et converge. On pourra ensuite brouter ou faire varier légèrement la mesure pour vérifier la fiabilité de la méthode vis-à-vis d'une erreur éventuelle de mesure (calage d'instrument de mesure, bruit blanc, petite perturbation...). les résultats de cet exemple sont récapitulés dans le tableau correspondant en annexe D.

### Exemple n°2

Le deuxième exemple reste simple, mais concerne une équation du second ordre. Soit une loi de comportement qui donne l'évolution d'une variable d'état  $x$ , et disposant d'un paramètre unique  $a$  pour caractériser le système.

$$x'' + ax = 0 \tag{5.44}$$

$$x(0) = 0 \tag{5.45}$$

$$x'(0) = 1$$

Ici encore, la réponse exacte pour toute valeur de  $a$ , peut être calculée analytiquement ; elle vaut  $\sin(at)$ . Supposons que la donnée mesurée soit  $x_m(t) = \sin(t)$ , c'est-à-dire que le paramètre  $a$  vaut 1. On prend un  $a_0$  que l'on estime proche du paramètre exact, par exemple  $a_0 = 3$ , puis on utilise la même fonction d'écart que celle de l'exemple précédent dans l'équation 5.40.

Le système d'équations régissant l'état adjoint et ses conditions initiales est le suivant :

$$(z'' + az) = x(t) - x_m(t) \tag{5.46}$$

$$z(T) = 0 \tag{5.47}$$

$$z'(T) = 0$$

La condition d'optimalité quant à elle vaut :

$$\chi_a(a - a_0) = - \int_0^T zxdt \tag{5.48}$$

Pour cet exemple, comme pour le précédent, des résultats sont résumés en annexe D sous forme de tableau.

### Exploitation et conclusion des exemples

Les exemples ci-dessus ont été mis en oeuvre dans Mathematica<sup>®</sup>.

Des tableaux D.2 et D.1 , plusieurs conclusions peuvent être obtenues :

- $\chi_a$  a une influence sur la vitesse de convergence et la convergence (oscillations, divergence ou convergence) ;
- $T$  ou le temps de mesure a une influence sur la vitesse de convergence et la convergence (oscillations, divergence ou convergence) ;
- la valeur  $a_0$  oblige à un choix de temps d'intégration  $T$  et de paramètre  $\chi_a$  d'autant plus soigné, que  $a_0$  est éloigné de la valeur exacte.

La pondération par  $\frac{1}{\chi_a}$  donne un poids important au gradient local calculé si  $\chi_a$  est faible. Dans ce dernier cas on risque de diverger et de ne pas « voir » le minimum. Une oscillation peut également apparaître en cas de vallée étroite. Il faudra donc de préférence commencer par des valeurs importantes de  $\chi_a$ , quitte à obtenir une convergence lente, et à baisser la valeur de  $\chi_a$  a posteriori.

Dans l'exemple 2, il est intéressant de remarquer que pour un paramètre  $a_0$  élevé, c'est-à-dire, une solution de fréquence élevée, le temps d'intégration peut induire une divergence de l'algorithme. Ainsi, pour  $a_0 = 50$ , on prend  $T = 0.5$ . Effectivement, pour un temps plus important, au même titre que si  $\chi_a$  est trop faible, on gonfle le gradient, ce qui augmente les chances de diverger. En l'occurrence, la réponse au problème direct est périodique et pourvu que l'on choisisse un temps d'intégration donnant un nombre de périodes entières, on ne change l'intégrale que d'un facteur, ou presque, car l'état adjoint n'est pas contraint à être périodique.

Pour l'exemple n°1 on obtient les mêmes types de résultats. Toutes ces remarques rendent compte des précautions à prendre avec cette méthode. L'algorithme choisi, à savoir une méthode du point fixe, n'est pas forcément le plus adapté et entraîne divergence ou obtention de minima locaux.

Il faudrait améliorer l'algorithme pour obtenir de meilleurs résultats. Pour cela, il est possible de choisir un algorithme de descente ou encore d'utiliser un algorithme génétique, qui sont deux philosophies différentes. Cependant, au lieu de modifier l'algorithme, il est tout simplement possible de faire attention au choix du  $\chi_a$ . Des techniques existent pour choisir  $\chi_a$ . Le critère de Morozov [8] par exemple permet de déterminer pour quelle gamme de  $\chi_a$ , la fonctionnelle associée sera régularisante.

### 5.4.2 Une application proche du modèle RT

Après ces deux premiers exemples qui ont permis de mettre en évidence certaines difficultés liées à ce type d'identification, nous allons à présent ajouter une difficulté supplémentaire, à savoir la non-linéarité et le caractère multidimensionnel des modèles d'articulation étudiés. Pour cela, nous avons considéré un modèle intermédiaire, proche du RT, mais n'ayant que deux cellules. La figure 5.24 décrit ce modèle intermédiaire.

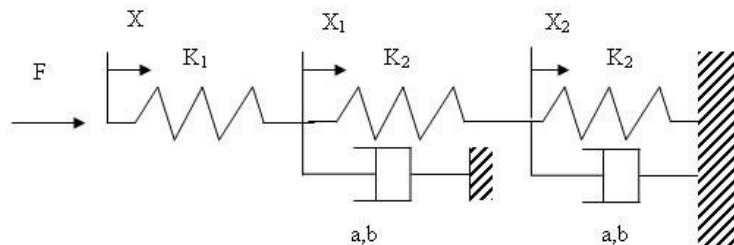


FIG. 5.24: Modèle intermédiaire identifié à l'aide des techniques de problème inverses avec état adjoint.

L'amortissement non linéaire des amortisseurs s'écrit :

$$g(x', a, b) = -b \text{sign}(x') |x'|^a \quad (5.49)$$

Dans cet exemple intermédiaire l'effort produit par la cale lors d'une sollicitation  $X(t) = E(t)$  s'écrit :

$$F(t) = k_1(e - x_1) \quad (5.50)$$

Le problème direct s'écrit :

$$(k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + b \text{Sign}(x'_1) |x'_1|^a = k_1e \quad (5.51)$$

$$2k_2x_2 - k_2x_1 + b \text{Sign}(x'_2) |x'_2|^a = 0 \quad (5.52)$$

$$x_1(0) = 0 \quad (5.53)$$

$$x_2(0) = 0 \quad (5.54)$$

Pour plus de commodité, nous remplaceront l'amortissement non linéaire par la fonction  $g(x', a, b)$ . Dans ce problème, il y a deux variables d'état, le problème adjoint comportera donc un état adjoint à deux composantes. De plus, quatre paramètres sont à identifier :  $k_1$  et  $k_2$  qui sont linéaires,  $b$  et  $a$  qui concernent la partie non linéaire du problème, à savoir l'amortissement.

La fonction coût est choisie sous la forme suivante :

$$J(k_1, k_2, a, b) = \frac{1}{2} \int_0^T ((k_1(e-x_1))^2) dt + \frac{\chi k_1}{2} (k_1 - k_{10})^2 + \frac{\chi k_2}{2} (k_2 - k_{20})^2 + \frac{\chi a}{2} (a - a_0)^2 + \frac{\chi b}{2} (b - b_0)^2 \quad (5.55)$$

Le système d'équations adjoint au problème direct s'écrit :

$$z_1^T (k_1 + k_2) - k_2 z_2^T + ((z'_1)^T g_{x'_1}(x'_1, a, b)) \quad (5.56)$$

$$+ z_1^T g'_{x'_1}(x'_1, a, b) = -k_1 (k_1(e(t) - x_1(t)))$$

$$2k_2 z_2^T - z_1^T(t) k_2 + ((z'_2)^T g_{x'_2}(x'_2, a, b) + z_2^T g'_{x'_2}(x'_2, a, b)) = 0 \quad (5.57)$$

Les équations d'optimalité quant à elles valent :

$$\chi_a (a - a_0) = \int_0^T (g_a(x'_1, a, b) z_1 + g_a(x'_2, a, b) z_2) dt \quad (5.58)$$

$$\chi_b (b - b_0) = \int_0^T (g_b(x'_1, a, b) z_1 + g_b(x'_2, a, b) z_2) dt$$

$$\chi_{K1} (K_1 - K_{10}) = \int_0^T ((e - x_1) z_1[t] + (k_1(e - x_1) - k_1(e - x_{1mes}))(e - x_1)) dt$$

$$\chi_{K2} (K_2 - K_{20}) = \int_0^T ((x_2 - x_1) z_1 - (2x_2 - x_1) z_2) dt$$

En réalité, il a été nécessaire dans Mathematica<sup>®</sup> de modifier légèrement le problème, afin de mieux le résoudre. Deux transformations ont donc été utilisées :

- Les équations du problème direct et du problème adjoint ont été écrites de façon à être explicites.
- Les fonctions valeur absolue et signe ont été remplacées par des fonctions régularisées sigmoïdes qui sont présentées en annexe A, comme cela avait été fait dans un premier temps pour le modèle *RT* et *STVS*.

Les résultats obtenus pour ce premier exemple ont été présentés lors du WCCM 2008. Ils sont assez encourageants quant à l'application de ce même procédé pour un modèle temporel non-linéaire tel que le nôtre. On utilise dans cet exemple proche du *RT* la simulation correspondant aux paramètres  $K_2 = 1000$ ,  $K_1 = 1000$ ,  $b = 100$  et  $a = 0.5$  comme « mesure ». La méthode de résolution pour ces deux exemples était une méthode du point fixe, une autre méthode a été adoptée par la suite, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants. Deux cas ont été traités :

**Cas n°1** Dans ce premier cas on impose les valeurs initiales qui suivent :  $K_2 = 1100$ ,  $K_1 = 1000$ ,  $b = 80$  et  $a = 0.5$ . Après une centaine d'itérations, les résultats obtenus sont les suivants :  $K_2 = 1015$ ,  $K_1 = 1000$ ,  $b = 98.5$  et  $a = 0.5$ .

**Cas n°2** Ce deuxième exemple correspond à une identification du paramètre le plus non linéaire, à savoir la puissance  $a$ . Les autres paramètres ont pour valeur initiale celle qui correspond à la simulation qui sert à l'identification. Après une centaine d'itérations, la valeur obtenue de  $a$  est de 0,62. Après 5000 itérations, la valeur obtenue est de 0,51.

Il est à noter que les paramètres dont la valeur initiale était identique à celle utilisée pour la simulation servant à l'identification évoluent au fur et à mesure des itérations. On les voit évoluer dans un premier temps pour s'éloigner de leur valeur initiale tant que la valeur obtenue pour  $a$  n'est pas assez proche de 0,5. Une fois que le paramètre  $a$  est proche de sa valeur d'identification, les autres paramètres commencent à revenir vers leur valeur initiale. Ce comportement montre combien les paramètres sont liés entre eux.

Au bout de 5000 itérations on obtient pour les paramètres autres que  $a$  les valeurs qui suivent :  $K_2 = 1005$ ,  $K_1 = 1002$ ,  $b = 108$ .

Il est à noter que pour ce cas les différents paramètres  $\chi_i$  ont été choisis de façon à avoir un ordre de grandeur compatible de celui de chacun des paramètres à identifier.

### Discussion et dernière approche

Nous avons utilisé dans les deux exemples précédents un algorithme du point fixe et non une minimisation globale et plus fiable comme celles utilisées par la

fonction *fmincon* de Matlab<sup>®</sup>. Cette méthode du point fixe ne doit être utilisée que dans le cas où l'on est certain de tomber dans un minimum absolu, c'est-à-dire si les points initiaux choisis sont assez proches de la solution ou s'il n'existe pas de minima locaux. Dans le cas de l'identification des modèles *RT* et *STVS*, où de nombreux minima locaux ont été mis en évidence, l'usage d'un algorithme du point fixe est risqué étant donné les observations faites au paragraphe 5.3.3.

L'exemple présenté au WCCM 2008, a montré la faisabilité de l'identification. Cependant, l'identification a été réalisée sur une simulation en partant du principe que la réponse était connue a priori et que cette « mesure » ne présente pas de bruit ou d'écart par rapport à la réalité. Dans notre cas, lorsque l'on identifie par rapport à une mesure, aucune valeur a priori des paramètres ne peut être définie, hormis celle de l'identification empirique qui peut être très éloignée de la solution.

Consécutivement au WCCM, des essais d'identification en bougeant l'ensemble des paramètres, plutôt qu'un seul ou deux d'entre eux, nous a permis de démontrer la nécessité de choisir des sollicitations temporelles pertinentes pour l'identification. Ce choix doit permettre d'exciter l'ensemble du système de la première à la dernière cellule et avoir une gamme de dynamiques et d'amplitudes de sollicitation suffisantes pour identifier de façon satisfaisante les paramètres commandant le comportement visco-élastique. L'idéal est d'identifier sur plusieurs types de sollicitations et donc de mesures et non juste sur quelques valeurs fréquentielles.

Les derniers essais effectués sur l'exemple utilisé lors du WCCM 2008, montrent que l'utilisation de plusieurs types de sollicitations favorise l'identification. Ces essais ont été réalisés sur trois types de sollicitations différentes : une sollicitation sinusoïdale, une sollicitation avec un sinus balayé et une sollicitation avec un échelon de durée plus ou moins longue.

Pour ces trois essais d'identification, les paramètres expérimentaux ont été pris égaux à :  $K_2 = 800$ ,  $K_1 = 1200$ ,  $b = 50$  et  $a = 0.5$  et les paramètres initiaux égaux à  $K_2 = 1000$ ,  $K_1 = 1000$ ,  $b = 80$  et  $a = 0.4$ . Par ailleurs, la recherche d'un minimum de la fonction coût a été réalisée via la fonction *fmincon* de Matlab<sup>®</sup>, mais sans régularisation.

Les résultats obtenus pour chacune des sollicitations sont :

- Pour le sinus 1 Hz 1 mm on obtient en fin d'identification des valeurs paramètres qui sont  $K_1 = 1237$ ,  $K_2 = 1043$ ,  $a = 0.573$  et  $b = 63.0$ , avec une fonction coût qui vaut  $4.10^{-3}$ .
- Pour le sinus balayé on obtient en fin d'identification des valeurs paramètres qui sont  $K_1 = 1208$ ,  $K_2 = 928$ ,  $a = 0.586$  et  $b = 66.5$ , avec une fonction coût qui vaut  $1,8.10^{-3}$
- Pour un échelon on obtient en fin d'identification des valeurs paramètres qui sont  $K_1 = 1150$ ,  $K_2 = 922$ ,  $a = 0.572$  et  $b = 65$ , avec une fonction coût



qui vaut  $11,1 \cdot 10^{-3}$

- Pour un échelon simulé sur une durée de deux secondes au lieu de une seconde précédemment, on obtient en fin d'identification des valeurs paramètres qui sont  $K_1 = 1253$ ,  $K_2 = 800$ ,  $a = 0.583$  et  $b = 66,6$ , avec une fonction coût qui vaut  $3,7 \cdot 10^{-3}$
- Pour une combinaison d'un sinus balayé et d'un échelon simulés sur une durée de 4 secondes, on obtient en fin d'identification des valeurs paramètres qui sont  $K_1 = 1153$ ,  $K_2 = 1017$ ,  $a = 0.567$  et  $b = 63,9$  avec une fonction coût qui vaut  $455 \cdot 10^{-3}$

Ces résultats sont illustrés dans la figure 5.25, qui présente pour la réponse à une sollicitation sinus 1 Hz 1 mm :

- les courbes sinus obtenues avec les paramètres expérimentaux (en vert),
- les paramètres servant à initialiser la minimisation (en bleu),
- les courbes obtenues avec les paramètres issus de l'identification (en rouge).

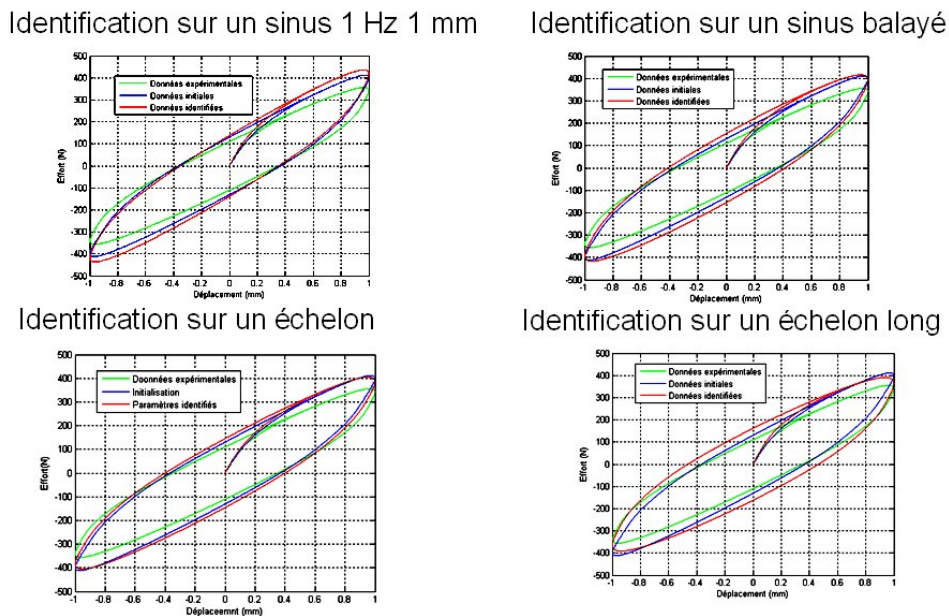


FIG. 5.25: Illustration du résultat d'identification sur différents types de sollicitations via la réponse du modèle avec les paramètres expérimentaux, initiaux et identifiés à un sinus 1 Hz 1 mm.

On note que contrairement à l'attendu les meilleurs identifications semblent être celles qui sont issues d'une identification sur un échelon long. Afin de vérifier ce point, nous avons réalisé le même exercice en donnant la réponse à un échelon pour les paramètres expérimentaux, initiaux et identifiés. On vérifie effectivement en figure 5.26 que la meilleure identification est obtenue sur une relaxation de longue durée.

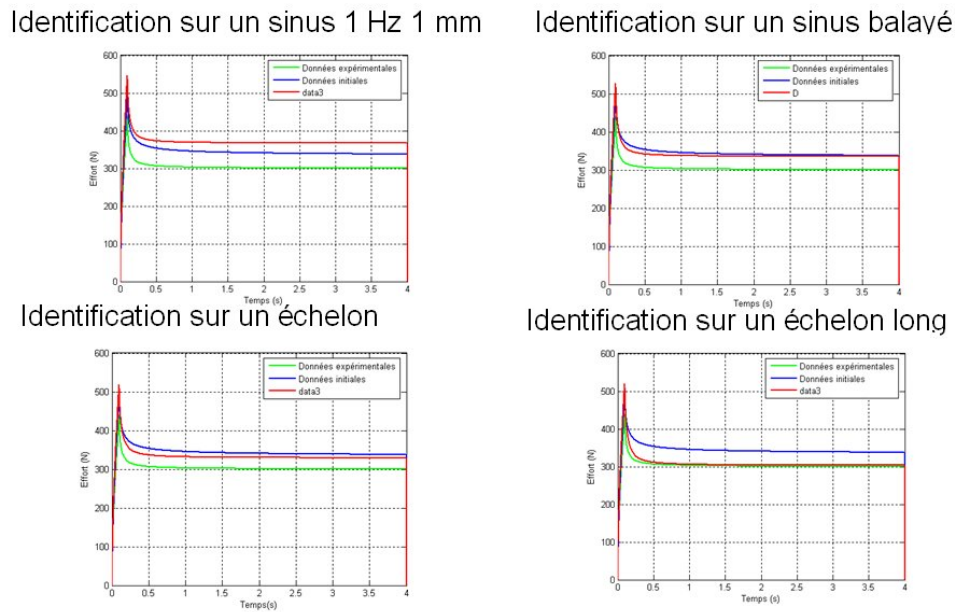


FIG. 5.26: Illustration du résultat d'identification sur différents types de sollicitations via la réponse du modèle avec les paramètres expérimentaux, initiaux et identifiés à une sollicitation en échelon.

L'ensemble des résultats présentés ci-dessus montrent que la variété des mesures utilisées pour l'identification, la durée de ces mesures permettent d'améliorer l'identification.

### 5.4.3 Conclusion et application aux modèles de cales

Ces premiers résultats d'identification dans le domaine temporel sont très encourageants pour une identification future sur un modèle complet d'articulation. Ils doivent être étudiés avec plus d'attention, tant pour le choix des valeurs initiales, des coefficients ou de la régularisation.

## 5.5 Conclusion sur l'identification

Plusieurs méthodes d'identification ont été explorées au cours de ce chapitre. Compte tenu de la non linéarité des modèles *RT* et *STVS* et de leur caractère temporel, l'utilisation d'une approximation fréquentielle s'est avérée inadaptée au problème. Le paragraphe 5.3 montre clairement que la méthode ou le modèle sont inadaptés pour une identification sur des sollicitations fréquentielles, ce qui peut s'avérer gênant pour la cohérence du modèle d'articulation entre les domaines temporels et fréquentiels.

Une première approximation des paramètres à partir de mesures temporelle peut être effectuée grâce à l'identification du modèle STS comme nous l'avons vu au paragraphe 5.2. Ces approximation donne des résultats tout à fait satisfaisants dans le domaine temporel.

Une dernière méthode est proposée en fin de chapitre paragraphe 5.4, cette méthode permet une identification sur une sollicitation temporelle quelconque permettant d'allier l'ensemble des comportements du modèle *STVS* ou *RT* et d'identifier au mieux l'ensemble des paramètre sans privilégier plus la visco-élasticité du modèle ou l'hystérésis indépendante du temps.

Cette dernière méthode a été appliquée à deux cellules de modèle *RT* et semble prometteuse en terme de convergence et de temps de calcul. De plus, la combinaison de plusieurs réponses temporelles {sinus + cyclage triangulaire + relaxation} permettrait d'assurer une bonne identification de l'ensemble des paramètres du modèle.



## Chapitre 6

---

# Conclusion

---

Cette étude est un point de départ en vue d'améliorer la modélisation temporelle transitoire des articulations en caoutchouc de la Liaison Au Sol (LAS) automobile en simulation multi-corps. C'est également un premier pas pour le PSA Peugeot Citroën vers une meilleure compréhension du comportement mécanique des liaisons élastiques, de leur impact sur la réponse de la LAS et sur le ressenti du conducteur et des passagers.

Cette étude, malgré ses apports quant à la compréhension des phénomènes transitoires dans les articulations en caoutchouc, la modélisation et l'impact de ces dernières dans une LAS, est appelée à être complétée et enrichie. Les quelques paragraphes ci-dessous soulignent les avancées et les pistes de recherche qui ont été dégagées au cours de ces travaux.

### **6.1 Apports et perspectives concernant le comportement des articulations en caoutchouc**

Au cours de ces travaux une étude bibliographique nous a permis de distinguer les différents types de comportements en jeux dans les articulations en CCNC (Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone), comme on peut le voir sur la figure 6.1.

Cette étude a été complétée par un volet expérimental en partenariat avec divers fournisseurs, qui met en évidence la complexité des comportements du caoutchouc naturel, notamment les effets d'historiques liés à l'hystérésis indépendante du temps et les effets de mémoire évanescence liés à la visco-élasticité. Cette étude et l'analyse de comportements de type bi-sinus, avec différents historiques de sollicitation ou essais en épi, poussent à croire que les comportements visco-élastiques et hystériques sont liés, contrairement à ce qui est usuellement considéré dans la

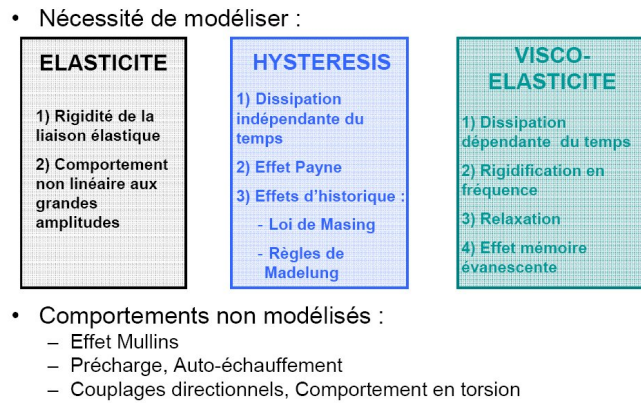


FIG. 6.1: Comportements d'une articulation en CCNC dans le cadre de notre étude.

littérature. Ces deux composantes doivent être modélisées de façon couplée si l'on souhaite correctement représenter le comportement temporel des articulations en caoutchouc.

Afin de confirmer cette hypothèse, une étude sur l'impact du taux de noir de carbone sur l'effet Payne, non linéarité liée à l'hystérésis indépendante du temps, a été menée. En parallèle, l'impact de ce même taux de noir de carbone sur le comportement de rigidification en fréquence, lié au comportement visco-élastique du caoutchouc, a été étudié. Le double impact du noir de carbone sur ces deux comportements, réputés indépendants, indique qu'ils sont couplés. De plus, il est notable d'après ces résultats expérimentaux que, dans les domaines d'amplitudes et de fréquences étudiés au cours de ces travaux, l'effet Payne a un comportement prédominant par rapport à la rigidification en fréquence.

L'effet Mullins n'a pas été modélisé, car quasiment irréversible et non pertinent pour les situations de vie étudiées. Il a cependant été pris en compte au cours des études expérimentales et il serait intéressant de l'étudier de façon plus approfondie pour le représenter dans certains situations de vie de la LAS.

Par ailleurs, on note que pour des articulations en caoutchouc, du type de celles étudiées par PSA, ont un dessin qui permet de limiter les couplages directionnels des articulations en caoutchouc. Il apparaît donc pertinent d'étudier uniquement les comportements uni-directionnels dans un premier temps. Il convient cependant, après ces travaux, de prévoir une étude plus approfondie des couplages directionnels si l'on souhaite mieux comprendre leur influence en simulation multi-corps.

D'autres phénomènes n'ont pas été représentés afin de simplifier la modélisation dans un premier temps. Notamment l'auto-échauffement des articulations en caoutchouc a une forte influence sur le comportement visco-élastique. Son étude peut donner lieu à des travaux intéressants dans le domaine du couplage thermo-

mécanique.

L'effet de la précharge est également très important dans le domaine de la modélisation multi-corps et influe beaucoup sur le point de fonctionnement de l'articulation en caoutchouc et des ses non linéarités. On note par exemple l'influence sur la précharge des phénomènes de reports de charge lorsque le véhicule décrit un virage et qui changent le point de fonctionnement de l'articulation. Une étude spécifique pour prendre en compte l'influence de la précharge peut apporter beaucoup à ce type de modélisation.

## 6.2 Apports et perspectives pour la modélisation des articulations en caoutchouc

Le modèle adopté est le modèle *STVS* (Standard Triboelastic Vico-Solid). Ce nouveau modèle, permet de coupler effet visco-élastique et hystérétique indépendant du temps par sa structure en arbre et grâce à l'utilisation d'un amortissement non linéaire au comportement intermédiaire entre un frotteur et un frotteur en parallèle avec un amortisseur linéaire.

Il met l'accent sur le comportement hystérétique, contrairement au modèle RT (Rate dependent Triboelastic) utilisé dans un premier temps. Une amélioration importante de ce modèle par rapport au RT est la dépendance accrue pour des fréquences très faibles de la raideur à l'amplitude de sollicitation et la possibilité de répartir la part entre comportement visco-élastique et hystérétique grâce aux paramètres du modèle.

Le choix d'une modélisation rhéologique permet d'avoir une approche plus physique de l'impact des différents paramètres du modèle sur les phénomènes. Ainsi, certains paramètres auront une influence principalement sur le comportement visco-élastique ( $C_0$  et  $pw$  par exemple) et d'autres sur le comportement hystérétique ( $F_{frott}$  par exemple).

De plus, le paramétrage du modèle est relativement simple et le nombre de paramètres peu important, contrairement à d'autres modèles rhéologiques présentant un grand nombre de cellules comme Maxwell généralisé ou Saint Venant. Deux pistes de modélisation ont été explorées et non poursuivies, notamment les dérivées non entières qui présentent des développements récents en terme d'algorithme d'intégration dans le domaine temporel, mais n'assurent pas de couplage entre hystérésis et visco-élasticité, et le modèle de Bouc Wen modifié par Yoo [80] qui présente un nombre de paramètres très important et difficiles à interpréter sur le plan de la physique du matériau.

Par ailleurs, l'intégration temporelle du modèle *STVS* est relativement simple, ce qui en fait un modèle bien adapté à la représentation des comportements transitoires temporels.

Les lacunes de ce modèle, malgré sa capacité à représenter la plupart des com-

portements d'une articulation en caoutchouc sont celles signalées au paragraphe 6.1 concernant la modélisation des effets d'auto-échauffement ou de précharge et de couplages directionnels. Ces trois pistes d'étude sont à prendre en compte pour de futures améliorations du modèle.

Enfin, on peut noter que, malgré une bonne corrélation entre domaine temporel et domaine fréquentiel pour le modèle *STVS*, la représentativité du modèle dans le domaine fréquentiel est limitée. Elle pourrait sûrement être améliorée via les études suggérées précédemment. Cependant, il reste très difficile d'obtenir un modèle qui permette de modéliser l'ensemble des comportements d'une articulation dans des domaines temporels et fréquentiels très élargis, sans perdre en précision. Il convient donc de garder à l'esprit que des modèles tels que les dérivées non entières peuvent être plus pertinents si l'on cherche une modélisation essentiellement dynamique des élastomères.

### 6.3 Apports et perspectives pour la simulation multi-corps transitoire

L'introduction de ce modèle via une fonction extérieure au solver du logiciel ADAMS® garantit l'indépendance de la modélisation de chacune des articulations que l'on souhaite simuler. Ceci apporte, d'une part, la possibilité de porter le modèle dans un tout autre logiciel et de modifier l'algorithme d'intégration choisi, et d'autre part, permet d'intégrer dans le modèle multi-corps des éléments complexes qui nécessitent l'utilisation d'un algorithme particulier du solver d'ADAMS®.

Par ailleurs, les ordres de grandeur de temps de simulation sont assez importants. Pour simuler une minute de sollicitation, un modèle multi-corps ne disposant pas de modélisation fine des articulations engendre un temps de simulation d'environ 15 minutes. Pour 18 modèles *STVS* introduits, à savoir la modélisation dans les trois directions principales des articulations E1 et E2 avant et E1 arrière, la simulation passe à 2 heures. Étant donné les délais demandés en conception de la LAS, une démarche d'amélioration de l'intégration numérique des modèles d'articulations sera nécessaire.

La corrélation entre essais effectués sur banc quasi-statique avec une LAS réelle et simulation multi-corps nous a permis de vérifier la pertinence de la modélisation dans ADAMS® par rapport aux différentes grandeurs caractéristiques de la LAS. Cependant, il reste une lacune importante dans cette validation, à savoir la comparaison de ce comportement au comportement réel d'une LAS dans le domaine transitoire ou à différentes vitesses de sollicitation. Pour cela, l'utilisation d'un banc dynamique de mesure est nécessaire.

Nous avons pu cependant constater, pour le moment de façon qualitative, que les effets d'historique de sollicitation et de mémoire évanescence sont tout particulièrement impliqués dans l'évolution des grandeurs caractéristiques de la



LAS, comme la pince de roue en sollicitations de type virage. Cette dernière grandeur a une influence non négligeable sur le ressenti des conducteurs mais difficile à quantifier.

De ce fait, une piste pour compléter l'étude serait d'ajouter dans la modélisation l'ensemble de la direction du véhicule afin de mieux étudier le lien entre propriétés des liaisons élastiques de la LAS et le ressenti du conducteur.

Enfin, il est nécessaire de souligner que tant que les effets de la précharge ne seront pas pris en compte, la représentativité des comportements des articulations ne sera pas complète avec un modèle *STVS*.

## 6.4 Apports et perspectives pour l'identification paramétrique

L'identification malgré les travaux initiés au cours de cette thèse n'est pas aboutie. Seuls des résultats approximatifs ont été obtenus pour le moment. Les premières études visant à identifier soit sur le comportement fréquentiel soit sur le comportement temporel nous ont montré que l'utilisation d'un seul type de sollicitation ne permet pas d'identifier de façon précise à la fois le comportement temporel et fréquentiel. L'un est toujours favorisé au détriment de l'autre.

Les derniers essais d'identification dans le domaine temporel ouvre des perspectives plus vastes, en utilisant plusieurs types de sollicitations à la fois pour l'identification des paramètres du modèle *STVS*. Un travail d'amélioration des algorithmes de descente utilisés et de régularisation des équations est à prévoir pour rendre l'identification plus performante et plus rapide. Il est intéressant de remarquer que les résultats obtenus en matière de simulation temporelle présentent une précision suffisante pour mettre en évidence les phénomènes visco-élastiques qui jusqu'alors n'étaient pas représentés. La précision recherchée en identification devra être jugée au cas par cas selon le type de sollicitation que l'on souhaite simuler.

Enfin, on peut s'interroger sur l'utilisation d'un même modèle pour tous les domaines de simulation évoqués : temporel quasi-statique, temporel transitoire et fréquentiel. Peut-être reste-t-il plus efficace d'utiliser un modèle adapté à chacun de ces domaines pour obtenir les résultats les plus précis possibles.

En terme d'identification, il s'est avéré que l'identification du comportement fréquentiel est la plus complexe. Car si le modèle *STVS* est adapté au domaine temporel, aucun lien direct n'existe entre les grandeurs fréquentielles qui peuvent être mesurées sur une cale et l'intégration des équations temporelles. Un lien a donc dû être établi afin de vérifier ces propriétés. Pour cela nous avons utilisé l'équilibrage harmonique tronqué au premier ordre, qui donne des résultats identiques au calcul d'un amortissement équivalent via l'utilisation de la puissance efficace dissipée par l'amortisseur. Il convient de noter que cette méthode n'est habituellement pas adaptée à des amortissements discontinus comme celui du *STVS*. Cependant, le premier harmonique étant prédominant dans ce modèle, on

obtient une corrélation relativement correcte entre approximation fréquentielle et analyse au premier harmonique du modèle temporel.

Étant donné l'orientation temporelle du modèle *STVS*, nous avons ensuite testé une méthode d'identification sur des données temporelles. Cette méthode s'est avérée très prometteuse sur un modèle *RT* simplifié mais n'a pas pu être menée à bien sur un modèle complet d'articulation.

Les premiers résultats obtenus avec une identification qualitative et les essais sur des modèles simplifiés sont encourageants quant à l'identification des paramètres via des sollicitations temporelles. Les indications fréquentielles ne semblent pas assez riches pour pouvoir identifier à partir de quelques raideurs les paramètres du modèle *STVS*.

Il paraît essentiel pour un modèle destiné au transitoire temporel d'utiliser des données transitoires temporelles pour identifier et vérifier la concordance du modèle et de la mesure. Une étude plus étendue portant sur l'identification de l'ensemble des paramètres du modèle *RT* puis *STVS* doit être entreprise afin d'apporter une identification précise, et ce, sur des mesures de type relaxation ou sinus à plusieurs fréquences, sans passer par le filtre d'une analyse au premier harmonique qui fait perdre des informations.

## 6.5 Conclusion

Le modèle *STVS* étudié correspond aux attentes formulées par PSA et décrites en introduction 1. Les contraintes liées à l'utilisation temporelle et à l'utilisation de données fréquentielles pour l'identification sont cependant impossibles à respecter avec une telle modélisation. Nous nous sommes donc orientés vers une identification temporelle qui aura l'avantage d'être cohérente vis-à-vis du domaine d'utilisation du modèle. Une étude plus poussée sera nécessaire afin de mettre au point l'identification du modèle *STVS* complet.

Des travaux pourrons enrichir ce modèle en exploitant des comportements non encore étudiés. Cette étude n'est qu'une première étape pour PSA afin de simuler l'impact des articulations en caoutchouc sur le comportement de la structure de la LAS de la façon la plus réaliste possible. Une étude dynamique du comportement des liaisons élastiques et pendant les roulages sur piste, avec des enregistrements des niveaux d'effort et de température atteints dans l'articulation, pourraient être très instructive pour améliorer l'approche décrite ci-dessus.

---

# Bibliographie

---

- [1] A. Al Majid. *Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire : opérateurs d'hystérésis et phénoène métrique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002. [cited at p. 54, 87]
- [2] P. Allen. *Models for the dynamic simulation of tank track components*. PhD thesis, Cranfield university, 2006. [cited at p. 50]
- [3] W. T. Ang, F. A. Garmon, P. K. Khosla, and Riviere C. N. Modelling rate dependent hysteresis in piezo electric actuators. *United states conference on intelligent robots and systems*, inconnu :inconnu, 2003. [cited at p. 51, 73]
- [4] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three-dimensionnal constitutive model for large strech behavior of rubber elastic material. *Journal of mechanics and physics of solids*, 41 :389–413, 1993. [cited at p. 27]
- [5] K. Atchonouglo. *Identification des paramètres caractéristiques d'un phénomène thermique ou mécanique régi par une équation différentielle aux dérivées partielles*. PhD thesis, Univertsité de Poitier, 2007. [cited at p. 161]
- [6] M. Berg. A non-linear rubber spring model for rail vehicle dynamics analysis. *Vehicle System Dynamics*, 30 :197–212, 1998. [cited at p. 54, 66, 67, 68, 162, 247, 249]
- [7] G. Blès. *Bases thermomécaniques de la modélisation du comportement des matériaux tissés et des polymères solides*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2002. [cited at p. 32, 41, 52]
- [8] M. Bonnet. *Cours sur les problèmes inverses*, 2004. [cited at p. 158, 188, 193]
- [9] A. Boukamel, J. M. Martinez, and S. Méo. A statistical approach of viscoelastoplastic model for filled elastomers. In *Constitutive models for rubber IV*, 2005. [cited at p. 11, 73]
- [10] B. Bourgeteau, D. Aubry, P. Ferbach, and F. Moiro. Modelling of rubber bushing in vehicle chassis. In *ECCMR 6*, 2007. [cited at p. 147]
- [11] F. Boyer. *Planification de mouvements dynamiques appliquée à la conception de la liaison au sol*. PhD thesis, LAAS, 2007. [cited at p. 4]
- [12] M. Brokate and J. Sprekels. *Hysteresis and phase transitions*. Marsden, J. E. and Sirovich, L. and John, F., 1996. [cited at p. 30, 51]

- [13] F. Bueche. Mullins effect and rubber-filler interactions. *Journal of applied polymer science*, 5 :271–281, 1961. [cited at p. 48]
- [14] J. J. C. Busfield and C. K. L. Davies. Stiffness of simple bonded elastomer bushes : part one. *Plastic, rubber and composites*, 30 :243–257, 2001. [cited at p. 23]
- [15] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An alternative frequency time domain method for calculating the steady state response of non linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989. [cited at p. 161, 174]
- [16] Y. Cao, S. Li, L. Petzold, and R. Serban. Adjoint sensitivity analysis for differentiel-algebraic equations : the adjoint dae system and its numerical solution. *J. Sci. Comput.*, 24 :1076–1089, 2003. [cited at p. 159, 161, 189]
- [17] G. Chagnon. *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. PhD thesis, Ecole Centrale Nantes, 2003. [cited at p. 48]
- [18] M. Coja. *Effective vibro-acoustical modelling of rubber isolators*. PhD thesis, Royal Institute of Technology of Stockholm, 2005. [cited at p. 11, 23, 56]
- [19] E. Coquelle. *Propriétés élastiques et viscoélastiques de matériaux composites adaptatifs*. PhD thesis, Faculté des sciences de l'Université de sophia antipolis, 2004. [cited at p. 35, 246]
- [20] V. A. Coveney, Johnson D. E., and D. M. Turner. A triboelastic model for cyclic mechanical behaviour of filled vulcanizates. *Rubber chemistry and technology*, 68 :660–670, 1995. [cited at p. 53, 78, 80, 164, 236]
- [21] V. A. Coveney and D. E. Johnson. Rate-dependent modelling of a highly filled vulcanizate. *Rubber Chemistry and Technology*, 73 :565–577, 2002. [cited at p. 62, 63, 65, 69, 89]
- [22] G. Danno. Liaisons au sol, la route apprivoisée. *L'auto journal*, 506 :38–41, 1998. [cited at p. 3]
- [23] S. Dugowson. *Les Différentielles métaphysiques : Histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*. PhD thesis, Paris 13, 1994. [cited at p. 56]
- [24] J. F. Dunne and P. Hayward. A split-frequency harmonic balance method for nonlinear oscillators with multi-harmonic forcing. *Journal of sound and vibration*, 295 :939–963, 2006. [cited at p. 186]
- [25] P. Feissel. *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure Cachan, 2003. [cited at p. 161]
- [26] J. D. Ferry, C. Child, R. Zand, D. M. Stern, M. L. Williams, and R. F. Landel. Dynamic properties of polyethyl methacrylate. *Journal of colloid science*, 12 :53–67, 1957. [cited at p. 25, 41]
- [27] M. Galucio. Galpha scheme. *Conf*, à trouver :à trouver, 2007. [cited at p. 68, 113]
- [28] M. Garcia. *Engineering rubber bushing stiffness formulas including dynamic amplitude dependence*. PhD thesis, Royal institute of technology of Stockholm, 2006. [cited at p. 23]

- [29] C. W. Gear. Towards explicit methods for differential algebraic equations. *BIT Numerical Mathematics*, 46 :505–514, 2006. [cited at p. 106]
- [30] A. N. Gent. *Engineering with rubber*. Hanser, 2001. [cited at p. 34]
- [31] N. Gil-Negrete, J. Vinolas, and L. Kari. A simplified methodology to predict the dynamic stiffness of carbon black filled rubber isolators using a finite element code. *Journal of sound and vibration*, 296 :757–767, 2006. [cited at p. 29]
- [32] T. D. Gillespie. *Fundamentals of vehicle dynamics*. SAE, 1994. [cited at p. 116, 134]
- [33] B. Gross and R. M. Fuoss. Ladder structures for representation of viscoelastic systems. *Journal of Polymer Science*, 19 :39–50, 1956. [cited at p. 56]
- [34] Halconrui. La clé de la réussite d’un châssis. *Auto Concept*, 1 :34–41, 1996. [cited at p. 5, 18]
- [35] T. Halconrui. *Les liaisons au sol*. ETAI, 1995. [cited at p. 116]
- [36] J. Harris and A. Stevenson. On the role of nonlinearity in the dynamic behaviour of rubber component. *Rubber Chemistry and Technology*, 59 :740–764, 1986. [cited at p. 29]
- [37] J. A. C. Harwood, L. Mullins, and Payne A. R. Stress softening in rubber a review. *Journal of the IRI*, 1 :17–27, 1967. [cited at p. 49]
- [38] P. Haupt and A. Lion. On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials. *Acta mechanica*, 159 :87–124, 2002. [cited at p. 42, 67]
- [39] P. Haupt and K. Sedlan. Viscoplasticity of elastomeric materials : experimental facts and constitutive modelling. *Archives of applied mechanics*, 71 :89–109, 2001. [cited at p. 45]
- [40] N. Heymans and J. C. Bauwens. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behaviour. *Rheological Acta*, 30 :210–219, 1994. [cited at p. 56]
- [41] A. Huyn Kim Long. *Analyse du comportement dynamique d’un élastomère modélisation et identification*. PhD thesis, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 2005. [cited at p. 55, 56, 57, 60]
- [42] W. D. Iwan. à retrouver. *Journal of applied mechanics*, 34 :612, 1967. [cited at p. 53]
- [43] M. Kern. Problèmes inverses. Cours INRIA, 2002. [cited at p. 158]
- [44] J. J. Kim and H. Y. Kim. Shape design of an engine mount by a method of parametric shape optimization. *International mechanical engineering*, 221 :155–159, 1996. [cited at p. 23]
- [45] O. Kramer, S. Hvidt, and J. D. Ferry. *Science and Technology of Rubber*, chapter 5, pages 211–255. Academic Press, 1994. [cited at p. 33]
- [46] A. Kucerova. *Identification of nonlinear mechanical model parameters based on soft computing methods*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan, 2007. [cited at p. 161]

- [47] Y. Lechenadec, C. Stolz, I. Raoult, Nguyen T. M.-L., B. Delattre, and P. Charrier. A novel approach to the heat build-up problem of rubber. In *ECCMR2007*, 2007. [cited at p. 37]
- [48] J. L. Lemaitre, J. et Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996. [cited at p. 52]
- [49] J. M. Leprivey and A. Deschaume. Une solution innovante : les liaisons élastiques. *L'automobile mag ou autre à trouver*, 1 :36–41, 2001. [cited at p. 18]
- [50] A. Lion. Constitutive modelling of the dynamic properties of elastomers. In *Constitutive Models for rubber (ECCMR 5)*, 2007. [cited at p. 57]
- [51] A. Lion and C. Kardelky. The payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modelling based on fractionnal derivatives and intrinsic timescale. *International Journal of Plasticity*, 20 :1313–1345, 2004. [cited at p. 30, 31, 246]
- [52] C. Miehe and J. Keck. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :323–365, 2000. [cited at p. 57]
- [53] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*, 11 :582–592, 1940. [cited at p. 27]
- [54] K. N. Morman. Application of finite element analysis in the design of automotive elastomeric components. *Rubber chemistry and technology*, 61 :503–533, 1988. [cited at p. 136]
- [55] L. Mullins. Softening of rubber by deformation. *Rubber chemistry technology*, 42 :339–362, 1969. [cited at p. 48]
- [56] L. Mullins and N. Tobin. Stress softening in rubber part one. *Journal of applied polymer science*, inconnu :2993–3009, 1965. [cited at p. 48]
- [57] L. Mullins and N. R. Tobin. Theoretical model for the elastic behaviour of filler-reinforced vulcanized rubbers. *Rubber chemistry and technology*, 1 :555–571, 1957. [cited at p. 48]
- [58] I. Nistor. *Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide*. PhD thesis, Institut national polytechnique de toulouse, 2005. [cited at p. 161]
- [59] A. Oberlé. Modélisation sts (standard triboelastic solid) pour les articulations élastiques de trains roulants et implémentation sous adams. *SIA Congrès Dynamique véhicule et confort suspension*, 2003. [cited at p. 65]
- [60] J. K. Ok, W.S. Yoo, and J. H. Sohn. New nonlinear bushing model for general excitations using bouc-wen hysteretic model. *International Journal of Automotive Technology*, 9 :183–190, 2008. [cited at p. 71, 72]
- [61] K. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Dover Publications, 1974. [cited at p. 56, 66]
- [62] A. R. Payne. à retrouver. *Journal of Colloid Science*, 19 :744, 1964. [cited at p. 29]

- [63] A. R. Payne. Reinforcement of elastomers. *interscience publisher*, à retrouver :à retrouver, 1965. [cited at p. 29]
- [64] L. Petzold. Differential algebraic equations are not odes. *J. Sci. Stat. Comput.*, 3 :3, 1982. [cited at p. 161]
- [65] L. R. Petzold. Numerical solution of differential-algebraic equations in mechanical systems simulation. *Physica D*, 60 :269–279, 1992. [cited at p. 106, 161]
- [66] G. Puel. Mise en évidence et recalage des non-linéarités locales en dynamique des structures. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 2001. [cited at p. 174]
- [67] R. S. Rivlin and R. W. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials : experiments on the deformation of rubber. *Philosophical transaction of the Royal Society of London, Series A*, 243 :251–288, 1950. [cited at p. 27]
- [68] B. Robert, R. Sinkus, J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink. A novel fractal model to explain the rheology of liver tissue using mr-elastography. *Proc. Intl. Soc. Mag. Reson. Med.*, 14 :2560, 2006. [cited at p. 57]
- [69] P. Saad. *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc*. PhD thesis, Ecole Centrale Lyon, 2003. [cited at p. 56]
- [70] H. Schiessel and A. Blumen. Fractal aspects in polymer science. *Fractals*, 3 :483–490, 1995. [cited at p. 56]
- [71] M. Sjöberg. Rubber isolators measurements and modelling using fractional derivatives and friction. *SAE*, 1 :873–884, 2000. [cited at p. 62, 87]
- [72] M. Sjöberg. *On dynamic properties of rubber isolators*. PhD thesis, Royal institute of technology of Stockholm, 2002. [cited at p. 23, 28, 54, 67]
- [73] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005. [cited at p. 160]
- [74] A. N. Tikhonov and V. A. Arsenin. *Solutions of Ill-Posed Problem*. Winston, 1987. [cited at p. 159, 188]
- [75] U. Tornar. Modelling structural hysteretic damping by means of mdi adams. *European ADAMS User conference*, 1997. [cited at p. 62, 68]
- [76] U. Tornar. Application of strain integral damping to engine mounts. *à trouver*, à trouver :à trouver, 2006. [cited at p. 68]
- [77] D.M. Turner. à retrouver. *Plast. Rubber Process. Appl.*, 9 :197, 1988. [cited at p. 78]
- [78] J. Y. Wong. *Theory of ground vehicles*. John Wiley and Sons, 1993. [cited at p. 136, 249]
- [79] K. Worden and G. Tomlinson. Nonlinearity in structural dynamics : Detection, identification and modelling. *Institute of Physics*,, 2000. [cited at p. 161]
- [80] W. S. Yoo, W. K. Baek, and J. H. Sohn. A practical model for bushing components for vehicle dynamic analysis. *Int. J. Vehicle Design*, 36 :345–364, 2004. [cited at p. 57, 62, 71, 203]





# Appendices



## Annexe A

---

# Fonctions signe et valeur absolue régularisées

---

### A.1 Utilisation des fonctions régularisées

Les fonctions *valeur absolue* et *signe* régularisées sont des fonctions qui ont le même comportement que les fonctions *signe* et *valeur absolue*, mais ne présentent pas de discontinuités. C'est-à-dire que toute discontinuité ou point anguleux est remplacé par une forme plus arrondie que la distribution *valeur absolue* et *signe*. Ceci correspond à un filtrage des hautes fréquences de ces distributions.

Avant toute chose, on peut remarquer que la fonction signe est extrêmement proche de la distribution de Heaviside à une constante et un coefficient multiplicatif près, comme on peut le voir sur l'illustration A.1. De plus, la fonction *valeur absolue* est issue de l'intégration au sens des distributions de la fonction *signe*. Ces deux précédentes remarques, nous seront très utiles par la suite.

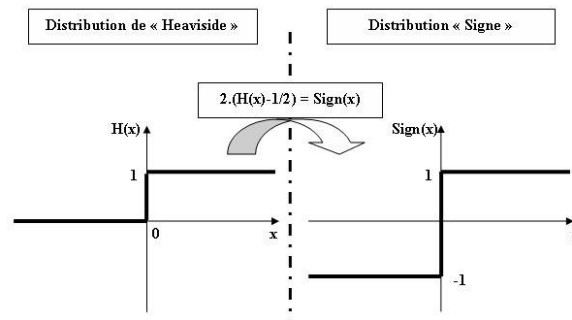


FIG. A.1: Transformation permettant de passer d'une distribution de Heaviside à une fonction Signe.

## A.2 Régularisée de la distribution d'Heaviside avec overshoot

Cette première approximation permet d'adoucir la fonction *signe* grâce à une approximation de la distribution de Heaviside. Cette approximation utilisée à l'origine dans Femlab<sup>®</sup>, consiste en une fonction continue par morceaux. Les portions constantes le restent, seule la partie centrale de la distribution Heaviside est remplacée par une fonction polynomiale. Cette fonction polynomiale a pour variables  $x$ , et un paramètre annexe noté  $\lambda$ . Ce dernier permet d'obtenir une fonction plus ou moins proche de la distribution de Heaviside. Cette approximation subit ensuite les transformations nécessaires indiquées dans la figure A.1 pour aboutir à une approximation continue de la fonction *signe*.

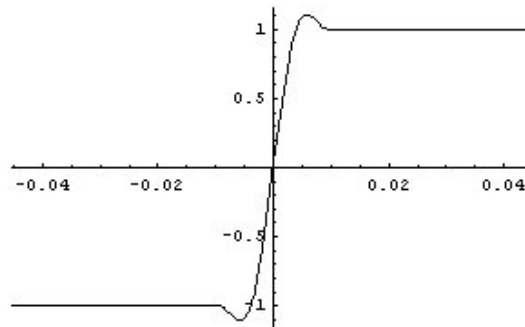


FIG. A.2: Illustration de la présence d'*overshoot* pour des valeurs très faibles de  $\lambda$ .

L'un des inconvénients de cette première approche est le degré élevé (7) du polynôme utilisé. De ce fait, pour des valeurs extrêmes du paramètre de régularisation  $\lambda$ , un *overshoot*, c'est-à-dire un dépassement de valeur, apparaît aux extrémités de la fonction polynomiale. La formulation de la fonction *signe*, approchée par ce stratagème est indiquée en équation A.1.

$$\text{Sign1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} > 1 \\ -1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} < -1 \\ 2((105\frac{x}{\lambda} - 175(\frac{x}{\lambda})^3 + 147(\frac{x}{\lambda})^5 - 45(\frac{x}{\lambda})^7)/64) & \text{si } -1 < \frac{x}{\lambda} < 1 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Pour obtenir une approximation de la fonction *valeur absolue*, il suffit ensuite d'intégrer la fonction ci-dessus, avec les conditions initiales qui adéquatées. Pour la portion constante, l'intégration donne  $-x$  ou  $x$  et pour la portion polynomiale, les

conditions d'intégration doivent être qu'en  $x = \lambda$ , la valeur de la fonction intégrée vaille  $\lambda$  et en  $-x = -\lambda$ , la valeur soit donc  $\lambda$ . Comme la fonction polynomiale en question est paire, si l'une des deux conditions est satisfaite, cela sera suffisant.

Cependant, malgré ces précautions, lorsqu'il y a apparition d'un overshoot pour la fonction *signe* approchée, des phénomènes similaires apparaissent pour la fonction *valeur absolue* approchée. Cette première approximation n'est donc pas acceptable.

### A.3 Régularisées $C^1$ et $C^2$ d'Heaviside

#### A.3.1 Fonction approchée de classe $C^1$

Cette deuxième fonction approchée est une fonction continue par morceaux, avec un polynôme d'ordre 3, comme on peut le voir dans l'équation A.2

$$\text{Sign2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} > 1 \\ -1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} < -1 \\ \frac{x}{\lambda} * (0.75 - 0.25 * (\frac{x}{\lambda})^2) & \text{si } -1 < \frac{x}{\lambda} < 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Son intégration donne l'approximation de la *valeur absolue*.

#### A.3.2 Fonction approchée de classe $C^2$

Cette deuxième fonction approchée est une fonction continue par morceaux, avec un polynôme d'ordre 5, comme on peut le voir dans l'équation A.3.

$$\text{Sign3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} > 1 \\ -1 & \text{si } \frac{x}{\lambda} < -1 \\ \frac{x}{\lambda} * (0.9375 - (\frac{x}{\lambda})^2(0.625 - 0.1875 * \frac{x}{\lambda})^2) & \text{si } -1 < \frac{x}{\lambda} < 1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Son intégration donne l'approximation de la fonction *valeur absolue*.

### A.4 Régularisées sigmoïdes d'Heaviside

Des fonctions très proches de la fonction *signe* et infiniment continues existent. Ce sont les fonctions dites « sigmoïdes » en raison de leur forme. Parmi ces fonctions on trouve la fonction arctangente A.4 et la fonction sigmoïde elle-même qui s'écrit sous la forme indiquée en A.5.

$$\text{Sign5}(x, \lambda) = [2/3 * \text{ArcTan}[\lambda * x]] \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Sign4}(x, \lambda) = (2/(1 + \exp(-\lambda * x)) - 1) \quad (\text{A.5})$$

Ici le paramètre  $\lambda$  qui permet d'ajuster l'approximation est un facteur multiplicatif. Pour obtenir l'approximation de la *valeur absolue* on procède de même que précédemment décrit, à savoir on intègre la fonction *signe* approximée avec des conditions aux limites adéquates.

## Annexe B

---

# Étude expérimentale : La relaxation des articulations en caoutchouc

---

La relaxation est un phénomène que l'on observe uniquement dans les matériaux visco-élastiques. Lorsqu'on impose un échelon de déplacement à un tel matériau, sa réponse en effort n'est pas instantanée. Après un passage par un effort maximum, l'effort va diminuer progressivement. La forme de la courbe effort en fonction du temps est caractéristique du matériau étudié.

Expérimentalement, il est impossible d'imposer un échelon. Aucune machine ne peut fournir une vitesse infinie. On impose donc un pseudo-échelon en déplacement, constitué d'une rampe assez rapide, puis d'un niveau de déplacement constant. Pour de tels déplacements imposés à un matériau visco-élastique, il faut prendre en compte l'influence de chacune des grandeurs caractéristiques de la sollicitation sur la réponse du matériau :

- la pente de la rampe initiale
- le niveau de déplacement atteint

La pente de la rampe est caractérisée par une vitesse de déplacement ou par un temps de montée jusqu'à un certain niveau de déplacement. De plus, les sollicitations précédentes l'essai de relaxation peuvent avoir une influence non négligeable sur le résultat de ces derniers.

Afin d'étudier le comportement en relaxation des articulations en caoutchouc, plusieurs études ont été menées en partenariat avec WOCO S.A., CFGomma et Trelleborg S.A. par PSA Peugeot Citroën dans le cadre de ces travaux de thèse. Les résultats principaux de ces études sont présentés ci-dessous.

## B.1 Étude de la relaxation et des effets d'historique

Nous avons ainsi cherché à voir de façon la plus amplifiée possible le comportement en relaxation des liaisons élastiques en CCNC. Les sollicitations imposées sont précédées d'un déverminage. La pièce subit cinq cycles de grande amplitude dans la direction de sollicitation qui va être étudiée. Cette opération annihile l'effet Mullins et toutes les conséquences indésirables de ce phénomène.

Cette étude a pour premier objectif de déterminer l'influence des paramètres habituellement considérés en relaxation : temps de montée, amplitude de sollicitation. Elle vise également à mettre en évidence l'impact de l'effet mémoire sur la relaxation. Pour cela des essais ont été réalisés à différentes vitesses et amplitudes de pseudo-échelon, mais également après différents historiques de sollicitations.

Afin d'imposer des historiques de sollicitation variés avant l'essai de relaxation, la pièce est soumise à trois cycles triangulaires, de vitesse de sollicitation de 0,1 mm par seconde. Après ces trois cycles, on en entame un quatrième. On réalise ensuite des essais de relaxation d'amplitudes et vitesses variées, à des niveaux différents de ce cycle. On peut également imposer un sens de déplacement lors de l'essai de relaxation qui soit opposé à celui du cycle entamé. Pour mieux visualiser le type de sollicitations imposées en déplacement, plusieurs cas de charge sont présentés en figure B.1

Afin de mieux comparer les réponses en relaxation entre elles, les efforts obtenus sont normés par rapport à l'effort maximum atteint lors de l'essai.

Tout d'abord, la comparaison des relaxations obtenues pour des temps de montée différents nous donne les résultats généraux suivants :

- Le niveau d'effort atteint pour des vitesses plus élevées est plus grand, ce qui découle directement de la visco-élasticité du matériau.
- L'écart entre effort atteint en début de relaxation et celui obtenu après quelques secondes de relaxation pour une réponse normée est plus important pour les temps de montée faibles, autrement dit pour un vitesse de sollicitation élevée.

On présente ci-dessous plusieurs illustrations de courbes de relaxation à différentes vitesses. Les quatre temps de montée utilisés lors de cette étude, sont de 0,05 seconde, 0,1 seconde, 0,2 secondes et 0,4 secondes. La première illustration B.2 correspond au cas de charge n°1 sur la figure B.1, avec une amplitude de sollicitation de 0,2 mm sur un cycle porteur de 0,4 mm d'amplitude.

La deuxième figure B.3, correspond au cas de charge n°2, c'est-à-dire à un essai de relaxation inverse, à un cycle d'amplitude de 0,4 mm et un niveau d'échelon de -0,2 mm.

les figures B.4, B.5 et B.6 représentent respectivement les cas de charge 3, 4 et 5 avec une amplitude de cycle de 0,4 mm et une amplitude d'échelon en déplacements de 0,2 mm.

Le niveau de déplacement atteint par la rampe est également essentiel. Plus le



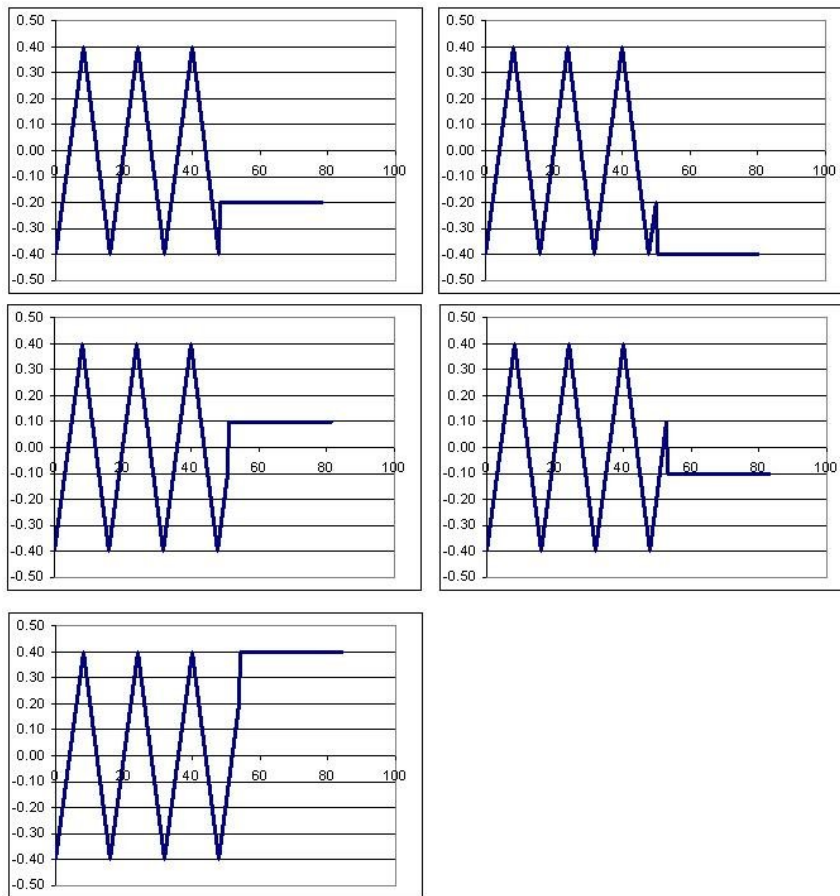


FIG. B.1: Cinq cas de charge étudiés pour mesurer l'impact de l'effet mémoire sur le comportement en relaxation

niveau atteint est élevé, moins le pourcentage de récupération par rapport à l'effort maximum sera important. L'effort maximum atteint sera naturellement plus important cependant. Mais au cours d'un déplacement plus long les molécules ont plus de temps pour se réorganiser par reptation. Il y aura donc moins de déplacements des molécules entre elles lors de la relaxation, des degrés de liberté ayant déjà été relâchés.

Pour un niveau de déplacement identique atteint avec une même vitesse de sollicitation, mais à des stades différents du quatrième cycle, on observe une évolution de la courbe de relaxation. Lorsque la relaxation intervient en tout début de cycle, on observe alors qu'elle est influencée par la sollicitation précédente (décharge du troisième cycle préliminaire) est prédominante et que la relaxation liée à l'échelon agit au début de la réponse puis s'estompe au profit des effets plus importants et durables de la relaxation liée à la rampe que constitue

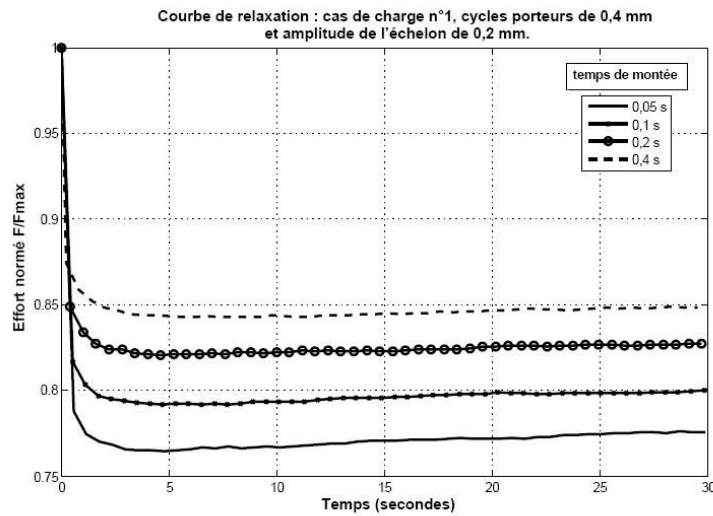


FIG. B.2: Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes.

la décharge du troisième cycle.

Plus on s'éloigne du point de rebroussement entre troisième et quatrième cycle, plus la relaxation due à l'échelon sera importante. On cumule les effets du chargement dû au cycle et celui lié à l'échelon.

## B.2 Étude de relaxation pour deux cales de caractéristiques très différentes

Les études menées ci-dessous n'impliquent pas d'effets d'historiques, car une période de repos du matériaux entre deux essais de relaxation, permet au matériau de récupérer. Une comparaison entre deux cales de caractéristiques différentes a été réalisée ci-dessous, l'une étant plus visco-élastique que l'autre. L'une possède une tangente d'angle de perte de 0,05, l'autre de 0,15. Les résultats et les figures les plus représentatifs sont présentés au paragraphe 2.2.4.

Par ailleurs, une discussion sur le lien existant entre les grandeurs de l'échelon et la forme des courbes de relaxation a été très poussée.

On se rend compte que pour une vitesse de montée en charge très lente, avec des amplitudes différentes, les courbes de relaxation auront tendance à se superposer. L'effet de l'amplitude de sollicitation sera gommé, car la sollicitation sera tellement lente, qu'un effet visco-élastique très limité sera observable. Cette remarque est valable pour des temps de montée allant de 20 s à 2 s. Pour des temps inférieurs (de 0,5 à 0,05 s), on observe une distinction entre les relaxations issues d'échelons à différentes amplitudes. Sur une échelle logarithmique, on peut

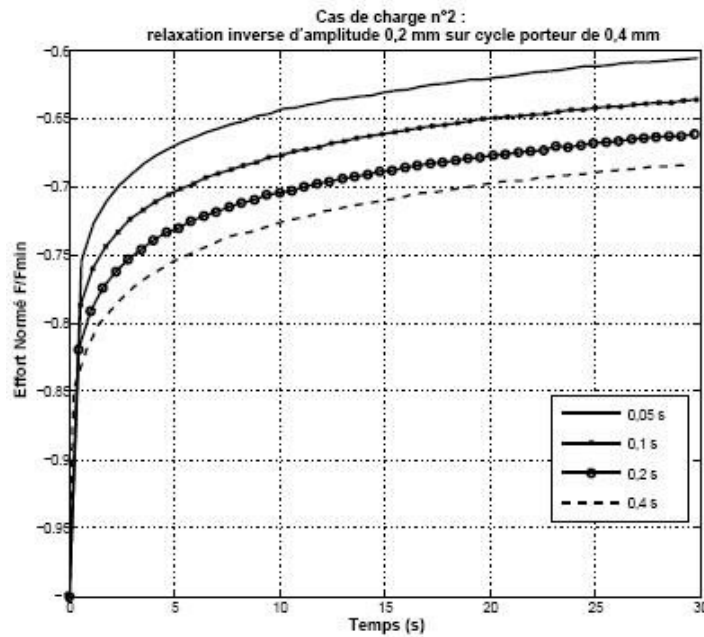


FIG. B.3: Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes.

voir que la cinétique de relaxation dépend essentiellement du temps de montée et non du niveau atteint ou de la vitesse de montée pour la pièce jaune, de faible angle de perte.

Pour la pièce rose, d'angle de perte plus important, la vitesse de sollicitation a plus d'impact sur la loi filiforme et sur les réponses en relaxation. La cinétique de relaxation ne dépend pas du temps de montée, mais de la vitesse pour la pièce rose.

### B.3 Relaxation et notion de mémoire évanescence

Cette étude nous a permis de vérifier des propriétés en relaxation essentielles, notamment pour la notion de mémoire évanescence. On peut remarquer notamment, que le comportement d'une cale après relaxation même d'une durée assez longue pour un conducteur, à savoir dix secondes, la liaison élastique a conservé une partie de l'énergie visco-élastique emmagasinée lors du chargement de l'échelon. Ainsi, la courbe de première charge ne se superpose pas à une courbe de charge à la même vitesse après une relaxation d'une dizaine de seconde.

Des essais dits en épis ou sapins, ont également été réalisés. Ces essais n'ont rien révélé de surprenant, si ce n'est que les relaxations effectuées au différents niveau du cycle sont dépendantes de l'historique de sollicitation précédent. Les es-

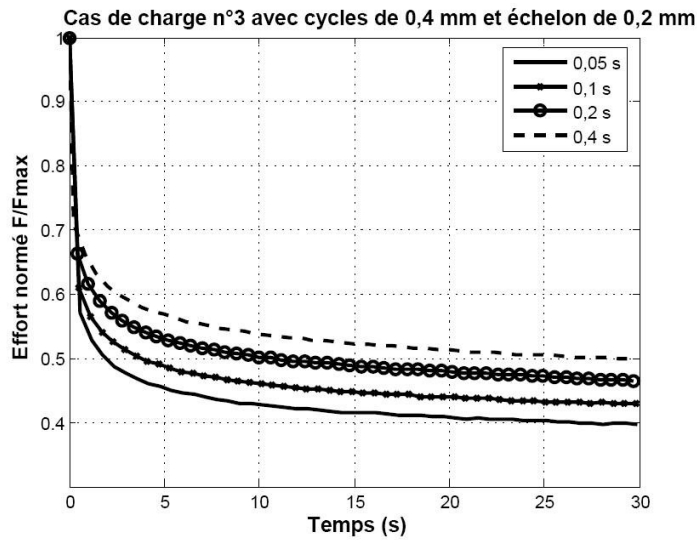


FIG. B.4: Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 3.

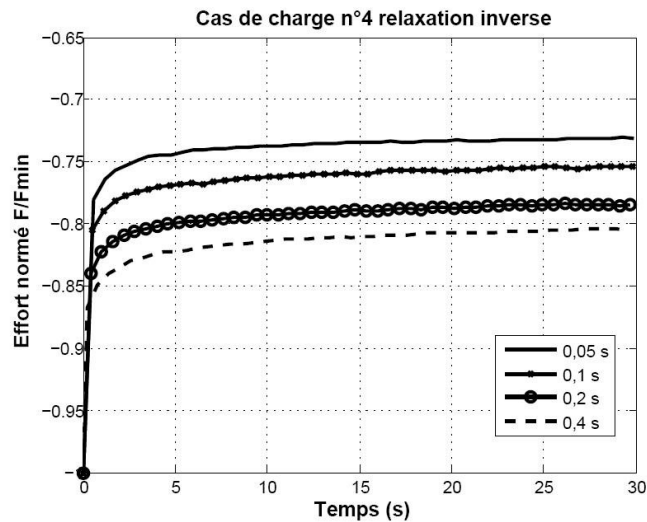


FIG. B.5: Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 4.

sais ont été menés sur des cycles d'amplitude 3 mm à une vitesse de 600 mm/min et des pauses de une minute environ tous les millimètres, la sollicitation est représentée sur la figure B.7. On observe très nettement sur un diagramme effort déplacement que plus l'on s'éloigne du dernier point de rebroussement, plus l'amplitude de la relaxation est importante. La figure B.9 décrit bien ce phénomène. On peut également voir que les efforts après relaxation semblent tendre au bout

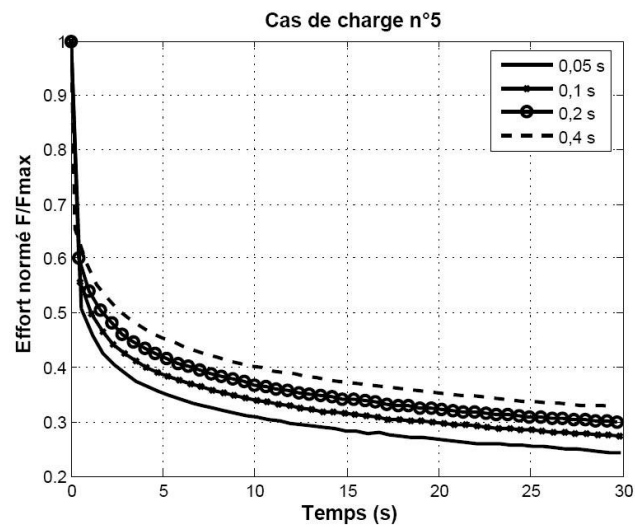


FIG. B.6: Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 5.

d'un temps fini vers un cycle d'hystérésis statique. Cependant, si l'on laisse la relaxation s'opérer sur un temps beaucoup plus long qu'une minute, l'effort diminuera jusqu'à devenir nul, comme on peut le voir en chauffant le matériau. L'effort dans la pièce se trouve en figure B.8.

On souligne que ces essais ont été réalisés après déverminage des cales.

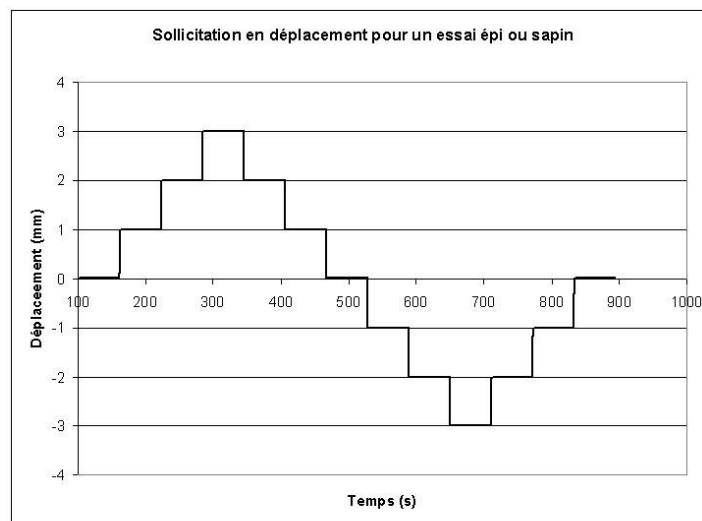


FIG. B.7: Sollicitation en déplacement pour un essai sapin ou épi.

Nous présentons ci-dessous en figure B.10 un résultat d'essai sapin sur une ar-

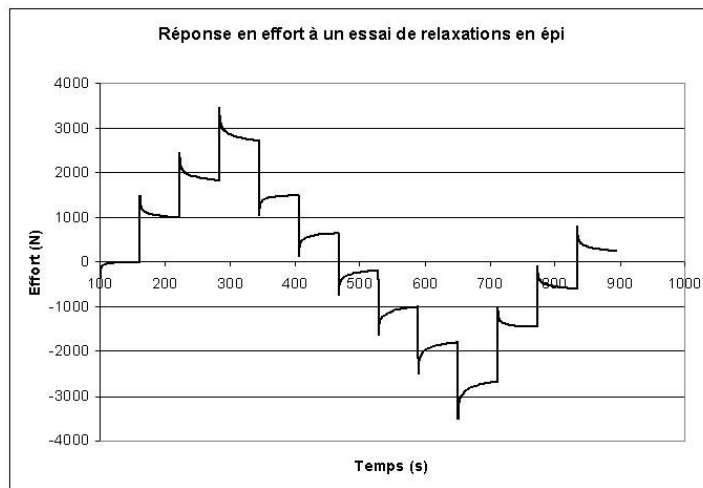


FIG. B.8: Réponse en effort pour un essai sapin ou épi.

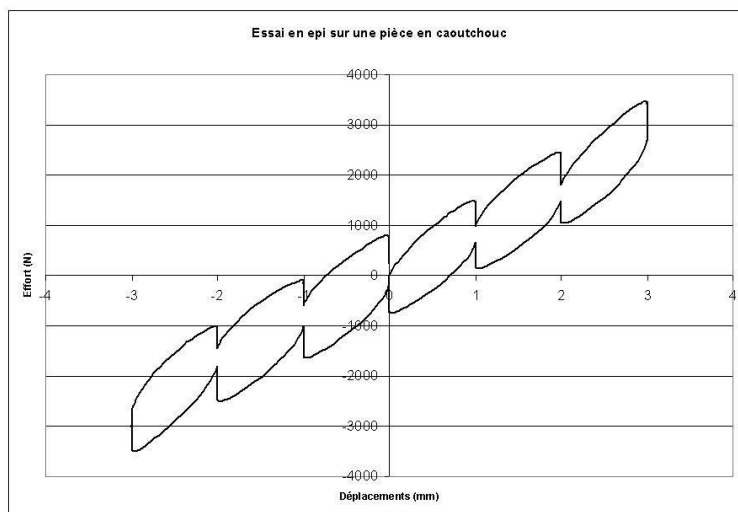


FIG. B.9: Essai en épi sur une pièce en caoutchouc dans un diagramme effort déplacement.

ticulation série de 307. On remarque que cette cale série est moins visco-élastique que la cale précédente. Les relaxations sont moins importantes, l'aire du cycle est plus faible et les différence d'amplitude de relaxation sont moins flagrantes.

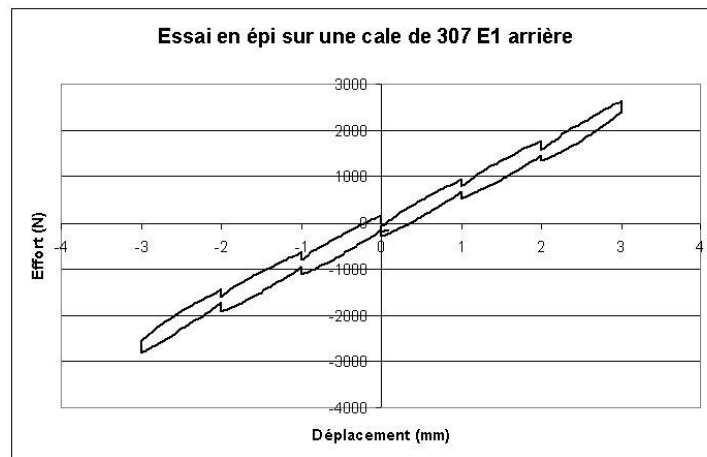


FIG. B.10: Essai en épi sur une articulation série de 307 dans un diagramme effort déplacement.

## B.4 Solid visco-élastique linéaire

Lorsqu'on modélise la relaxation linéaire des polymères, On utilise une cellule de Maxwell. Celle-ci est constituée d'un ressort de raideur  $K_o$  en série avec un amortisseur linéaire de coefficient d'amortissement  $\eta$ . on obtient l'équation différentielle qui suit lorsqu'on écrit l'équilibre en déplacements et en efforts dans la cellule de Maxwell :

$$K_o(e(t) - u_1(t)) + \eta u_1'(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Lorsqu'on se trouve dans la partie "rampe" d'équation  $e(t) = at$  avec comme condition initiale  $u_1(0) = 0$ , la réponse s'écrit sous forme d'une fonction affine, on obtient  $u_1(t) = at + \frac{\eta a}{K_o}$ . Puis dans la partie "pallier" en déplacement de la relaxation, on cherche une réponse sous forme exponentielle, avec pour condition initiale  $u_1(tm) = K_o$ .

La réponse en effort pour une cellule de Maxwell soumise à une essai de relaxation est donc une rampe, suivie d'une exponentielle décroissante. Cette exponentielle écrite en contrainte déformation suit la loi :

$$\sigma(t) = 2G\epsilon_o \exp^{-\frac{G}{\eta}(t-tm)} \quad (\text{B.2})$$

Si l'on écrit l'effort maximum atteint lors d'un essai de relaxation, il vaut  $2G\epsilon_o$ . Cet effort est dépendant de la raideur du ressort, et surtout de l'amplitude de l'échelon imposé  $\epsilon_o$ . Or l'amplitude atteinte est fonction de la vitesse et du temps de montée, donc l'effort maximum atteint lors d'un essai de relaxation sur une solide visco-élastique linéaire dépend effectivement et du niveau, du temps et de la vitesse de montée, qui sont tous trois liés entre eux.

Lorsqu'on norme la courbe par l'effort maximum, la réponse est alors indépendante de  $\epsilon_o$ . On ne doit donc pas observer de différence entre deux courbes de relaxation obtenues par des échelons d'amplitude différentes. Par contre l'aspect de la réponse dépend du temps de montée  $tm$ , plus ce dernier est grand, plus l'amplitude entre l'effort maximum normé et l'effort obtenu au bout d'un temps  $t_2$  sera faible.

## B.5 Conclusion

On peut tout d'abord remarquer que contrairement à un matériau visco-élastique linéaire, la réponse normée par l'effort maximum atteint du CCNC lors d'un essai de relaxation, dépend de l'amplitude de l'échelon. Il y a donc une non linéarité flagrante en amplitude de la visco-élasticité du CCNC et des articulations en caoutchouc.

La vitesse et le temps de montée de l'échelon ont quant à eux des effets totalement en adéquation avec la visco-élasticité du matériau. Une vitesse plus élevée, ou un temps de montée plus faible introduisent une visco-élasticité plus importante et des effets de relaxation amplifiés.

L'effet mémoire peut avoir des conséquences non négligeables sur la forme de la courbe de relaxation. En effet, juste après un rebroussement on a emmagasiné une énergie visco-élastique non négligeable liée au changement de pente brutal dans la sollicitation triangulaire. On estime que cet effet visco-élastique a le temps de se relaxer au cours d'une charge lente et longue de la pièce, autrement dit lors de la partie en charge de la sollicitation cyclique triangulaire. Les cas de charge 3 et 5 des essais sur l'historique sont donc nettement moins influencés par le dernier point de rebroussement que le premier cas de charge. Lorsqu'on sollicite une cale en milieu de cycle, la relaxation subit sera plus importante et en haut d'une pente de charge encore plus, car le chargement triangulaire, bien que lent peut être assimilé à un échelon plus lent qui induit déjà une certaine relaxation des efforts.



## Annexe C

---

# Grandeurs caractéristiques quasi-statiques nécessaires à l'identification

---

### C.1 Grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis

Ce que nous appelons "grandeur caractéristique du cycle d'hystérésis" sont les grandeurs directement observables lors d'un essai de sollicitation cyclique quasi-statique, c'est-à-dire pour une sollicitation en déplacement triangulaire. Elles peuvent également être calculées à partir du cycle mesuré. Les mesures pouvant être bruitées ou présenter une dispersion selon les conditions opératoires, il faut choisir des grandeurs qui ne sont pas trop sensibles à ce type de perturbations.

Un cycle d'hystérésis quasi-statique est mesuré à une vitesse faible comprise entre 10 mm/min et 20 mm/min. Cette catégorie de mesures ne reflète pas les phénomènes de rigidification fréquentielle ou liés à la vitesse, ni même aucun des autres phénomènes visco-élastiques de type relaxation. Il va de soit que les observations menées sur un cycle d'hystérésis, ne permettent d'identifier qu'un comportement indépendant du taux de déformation. C'est effectivement l'objet de cette annexe. Des grandeurs caractéristiques du comportement visco-élastique sont nécessaires à l'identification de modèles comportant de la visco-élasticité comme le *RT* et le *STVS*. Cependant, la proximité des modèles *STS*, *RT* et *STVS*, permet de d'utiliser les paramètres identifiés du *STS* discret pour initialiser l'identification des paramètres des modèles *RT* et *STVS*.

Les grandeurs caractéristiques directement observables sont, par exemple, l'effort maximum atteint lors d'une sollicitation à une certaine amplitude de

déplacement. Les grandeurs calculables à partir des mesures sont entre autres des tangentes à la courbe d'hystérésis, la surface de cette dernière. L'ensemble des grandeurs sont représentées dans les deux figures C.1 et C.2.

Les grandeurs, en question sont au nombre de six :

- l'effort maximum atteint ;
- la raideur sécante du cycle (ou pente pointe à pointe) ;
- la tangente au début de la branche du cycle ;
- la tangente en bout de branche d'hystérésis ;
- l'aire du cycle ;
- l'épaisseur du cycle

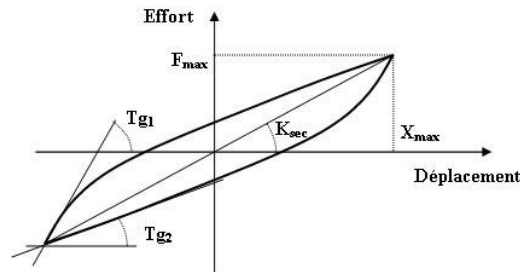


FIG. C.1: Quelques grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis : les deux tangentes extrêmes, la raideur sécante et l'effort maximum atteint

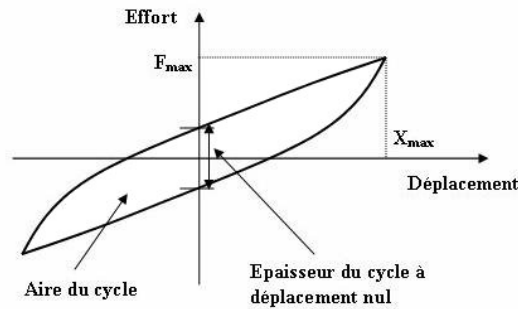


FIG. C.2: Autres grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis : l'aire du cycle et l'épaisseur de celui-ci

Nous allons nous intéresser au calcul exact ou approché de ces différentes valeurs grâce au modèle *STS* discret et éventuellement à une approximation continue de ce modèle. En effet, le modèle *STS* représente la partie quasi-statique des

modèles *RT* et *STVS*, à quelques nuances près, pour des vitesses relativement faibles. Les calculs présentés ci-dessous sont destinés à compléter et enrichir les propos du chapitre sur l'identification des modèles de liaisons élastiques.

## C.2 Calcul des grandeurs intermédiaires d'un cycle d'hystérésis discret type STS

### C.2.1 Les points de changement de pente

Le déplacement auquel a lieu le changement de pente pour chacune des portions de la branche croissante, dépend des différents paramètres du modèle STS discret utilisé. Les coordonnées du point d'origine de la branche d'hystérésis croissante sont directement mesurables sur le graphe effort déplacement. Ces coordonnées valent  $(-F_{max}, -u_{max})$ . La figure C.3 permet de repérer chacun des changements de pente de la courbe discrète en gras qui approxime la courbe d'hystérésis continue mesurée représentée en traits fins. Ce schéma est valable pour une amplitude d'hystérésis ne sollicitant que cinq ressorts d'un modèle STS discret, soit quatre cellules amortisseur/ressort. Les coordonnées de chacun des points suivants peuvent être obtenues par le calcul ci-dessous, en posant  $u_0 = -u_{max}$  et  $F_0 = -F_{max}$  :

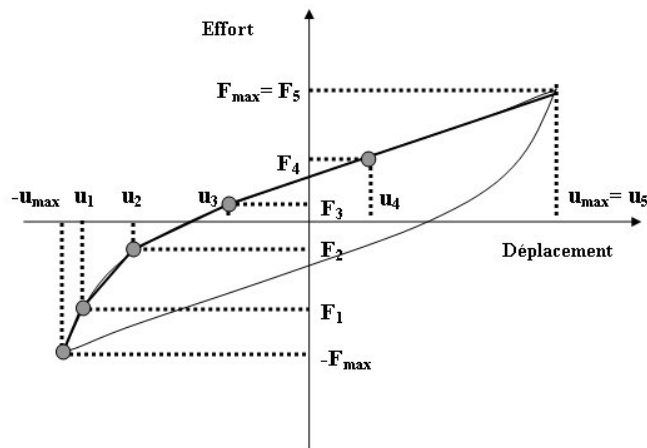


FIG. C.3: Points de changement de pente du cycle d'hystérésis discret d'un modèle STS approxinant une mesure de cycle continu

En ce qui concerne les coordonnées des déplacements, on atteint un changement de pente à chaque nouveau frotteur déclenché. Ceci se traduit en déplacement que lorsqu'on atteint dans la branche de l'assemblage tribo-élastique l'effort  $i2F_f$ , avec  $i - 1$  le nombre de frotteurs déclenchés et  $i$  le nombre de ressorts actifs. Le déplacement supplémentaire nécessaire pour atteindre ce niveau d'effort vaut

$\frac{2F_f}{K_{ser_i}}$  (voir paragraphe suivant). Le coefficient 2 correspond à chaque fois à la règle d'homothétie de Masing. On obtient donc l'expression générale suivante :

$$u_i = u_{i-1} + \frac{2F_f((i-1)K_{pa} + K_r)}{K_{pa}K_r} \quad (C.1)$$

Pour ce qui est des niveaux d'effort atteints lors de ces changements de pente, on les obtient de la façon qui suit à partir de l'équation qui précède sur les déplacements :

$$F_i = F_{i-1} + K_0 \frac{2F_f((i-1)K_{pa} + K_r)}{K_{pa}K_r} + 2F_f \quad (C.2)$$

Si on suppose que le cycle hystérétique, sur lequel on réalise l'identification, met en jeu  $N_{cell} - 1$  cellules, alors l'effort maximum s'écrira :

$$u_{max} = -u_{max} + \sum_{i=1}^{N_{cell}} \left[ \frac{2F_f((i-1)K_{pa} + K_r)}{K_{pa}K_r} \right] \quad (C.3)$$

$$F_{max} = -F_{max} + \sum_{i=1}^{N_{cell}} \left[ K_0 \frac{2F_f((i-1)K_{pa} + K_r)}{K_{pa}K_r} + 2F_f \right] \quad (C.4)$$

Le calcul des valeurs ci-dessus est réalisé pour  $N_{cell} - 1$  cellules, afin de prendre en compte le fait que la dernière cellule du modèle ne doit pas être utilisée pour garder une marge en cas de sollicitation d'amplitude supérieure à celle à laquelle on a identifié le modèle.

Si on calcule ces deux sommes on obtient pour  $N_{cell} - 1$  cellules déclenchées, en utilisant l'égalité remarquable suivante :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_{max} = \frac{2F_f N_{cell} (N_{cell} - 1)}{2K_r} + \frac{2F_f N_{cell}}{K_{pa}} \quad (C.5)$$

$$F_{max} = K_0 \left( \frac{2F_f N_{cell} (N_{cell} - 1)}{2K_r} + \frac{2F_f N_{cell}}{K_{pa}} \right) + 2N_{cell} F_f \quad (C.6)$$

### C.2.2 Les pentes des portions d'hystérésis discrète

La raideur équivalente dans chaque portion d'hystérésis dépend des ressorts sollicités. C'est la pente de chacun des segments. Lors d'un début de chargement, seules les raideurs élastiques  $K_0$  et la raideur  $K_{pa}$  sont sollicitées, ces deux raideurs étant en parallèle l'une de l'autre, elles s'additionnent, d'où la raideur  $K_\mu$  décrite un peu plus loin. Puis au fur et à mesure que les frotteurs glissent, dans la branche STS, le ressort  $K_{pa}$  se retrouve en série avec d'autres ressorts, eux de raideur  $K_r$ .

Étant donné que toutes ces raideurs sont en série, par analogie avec l'électricité, on peut écrire :

$$K_{ser_i} = \frac{1}{\frac{1}{K_{pa}} + \frac{i-1}{K_r}} \quad (C.7)$$

Bien entendu, chacune de ces raideurs équivalentes à l'ensemble des ressorts actifs en série de l'assemblage tribo-élastique, se trouve en parallèle de la raideur élastique dans le modèle STS discret.

$$K_{eq_i} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{(i-1)K_{pa} + K_r} \quad (C.8)$$

### C.3 Calcul des grandeurs caractéristiques à partir des grandeurs intermédiaires

#### C.3.1 Raideur sécante

Ce que l'on nomme raideur sécante est la pente de la droite passant par les deux pointes de l'hystérésis, que l'on peut voir sur la figure C.1.

$$K_{sec} = \frac{2F_{max}}{2u_{max}} \quad (C.9)$$

D'après les expressions de  $F_{max}$  et  $u_{max}$  qui précèdent, on peut obtenir une expression de la raideur sécante uniquement exprimée en fonction de  $K_{pa}$ ,  $K_r$  et  $K_0$ .

$$K_{sec} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{\frac{(N_{cell}-1)}{2}K_{pa} + K_r} \quad (C.10)$$

#### C.3.2 Les tangentes extrêmes

Les tangentes en tout point du cycle d'hystérésis discontinu correspondent soit à la pente du segment sur lequel on se trouve, soit à la moyenne des deux pentes de part et d'autre, lorsqu'on se trouve en un point de changement de pente. Pour calculer les tangentes en certains points, on remarque donc qu'il faut connaître la pente de chacun des segments de l'hystérésis. Pour cela, il est nécessaire de calculer la raideur équivalente en chaque segment, comme réalisé au paragraphe sur le calcul des raideurs équivalentes.

On remarque qu'il est impossible, au début d'une procédure d'identification, de déterminer sur quelle portion de l'hystérésis discrète STS on se trouve, celles-ci étant entièrement déterminées par les paramètres du modèle. Pour cette raison, nous nous sommes intéressés aux pentes extrêmes du cycle, à savoir la pente à l'origine de la boucle d'hystérésis en début de chargement et la pente en bout de

boucle d'hystérésis au niveau de déplacement maximum. Ces deux grandeurs sont les plus faciles à mesurer sur des données expérimentales, car elles sont situées en début et en fin de cycle et ne nécessitent donc pas de savoir se placer précisément par rapport aux segments de l'hystérésis discrète. La seule précaution à prendre est de prendre un nombre de points suffisant pour calculer ces tangentes, sans prendre un nombre de points trop important.

Ces deux tangentes correspondent à la raideur équivalente  $K_\mu$  aux petites amplitudes pour le début du cycle et à la raideur  $K_{macro}$  lorsque la raideur commence à s'approcher de la raideur élastique  $K_0$ .

$$K_\mu = K_0 + K_{pa} \quad (C.11)$$

$$K_{macro} = K_0 + \frac{K_{pa}K_r}{(N_{cell} - 1)K_{pa} + K_r} \quad (C.12)$$

### C.3.3 Aire de l'hystérésis

Le calcul de l'aire d'une hystérésis produite par le *STS discret* est décrit ci-dessous pour un nombre de cellules déterminé noté  $N_{cell} - 1$ . On considère en effet que le nombre de cellules déclenchées pour un cycle d'amplitude définie est connu et qu'en pointe de ce cycle, le modèle se trouve sur le point de passer de l'immobilité d'un frotteur à son déplacement. On reprend les coordonnées des points de changement de pente, pour calculer l'intégrale de l'hystérésis discrète par la méthode des trapèzes.

Pour la partie croissante de la courbe d'hystérésis, on obtient sur chacune des portions de courbe l'intégrale qui se trouve entre le segment et l'axe des abscisses :

$$airecrois_i = \int_{u_{i-1}}^{u_i} [F]_{i-1}^i \quad (C.13)$$

Ceci se traduit en terme de méthode des trapèzes par l'équation suivante :

$$airecrois_i = \frac{(F_i + F_{i-1})([u_i - u_{i-1}])}{2} \quad (C.14)$$

En remplaçant  $F_i$ ,  $F_{i-1}$ ,  $u_i$  et  $u_{i-1}$  par leurs expressions en fonction des paramètres et de la cellule en jeu  $i - 1$ , on obtient pour l'aire d'un trapèze :

$$airecrois_i = \frac{2F_f^2}{K_{pa}^2 K_r^2} (((i-1)K_{pa} + K_r)(2iK_{pa}K_r + K_0((i-1)^2K_{pa} + (2i-1)K_r))) \quad (C.15)$$

En sommant sur  $i$  de 1 à  $N_{cell} - 1$ , on obtient le résultat suivant :

$$Aire_{courbecrois} = \sum_{i=1}^{N_{cell}} airecrois_i \quad (C.16)$$

On renouvelle l'opération avec le chargement décroissant, sachant que la branche décroissante de la courbe d'hystérésis est la même courbe que la branche croissante, ayant au préalable subi une symétrie centrale par rapport à l'origine du graphe. Les points de changement de pente subissent donc une symétrie centrale également. D'où  $u_i^{bas} = -u_{N_{cell}-i}$  et  $F_i^{bas} = -F_{N_{cell}-i}$

$$aire_{decrois}_i = \int_{-u_{N_{cell}-i+1}}^{-u_{N_{cell}-i}} [-F]_{N_{cell}-i+1}^{N_{cell}-i} \quad (C.17)$$

Cela donne lorsqu'on remplace les déplacements et les efforts par leur expression :

$$aire_{crois}_i = \frac{-(F_{N_{cell}-i} + F_{N_{cell}-i+1})(-u_{N_{cell}-i} - u_{N_{cell}-i+1})}{2} \quad (C.18)$$

On trouve normalement la même aire, mais négative que pour la branche croissante, donc l'aire totale vaudra  $2 * Aire_{courbecrois}$ , ce qui donne comme expression :

$$Aire = \frac{F_f^2 * N_{cell}}{3K_{pa}^2 K_r^2} (12K_0 K_r^2 N_{cell} + 12K_{pa} K_r (K_0(N_{cell}-1)N_{cell} + K_r(1+N_{cell}))) + K_{pa}^2 (N_{cell}-1)(3K_0(N_{cell} + \dots)) \quad (C.19)$$

L'expression qui précède est une équation de degré deux par rapport aux différents paramètres du modèle STS. On peut donc imaginer qu'il sera difficile de l'utiliser pour une identification fiable des paramètres du modèle STS discret. De même, il semble impossible de calculer l'épaisseur de l'hystérésis telle que définie sur la figure C.2 à partir d'un modèle STS discret. Pour cette raison, nous nous sommes intéressés à la recherche d'une approximation continue de ce modèle, facilement intégrable et donnant de ce fait les expressions de l'aire et de l'épaisseur de l'hystérésis de façon plus simple.

A priori la définition de l'aire de l'hystérésis pour une courbe continue est évidente, mais celle de l'épaisseur de l'hystérésis est moins évidente. En effet, lorsqu'on regarde un cycle d'hystérésis, on peut l'approximer par une ellipse et il est tentant après avoir pris la raideur sécante, de prendre la dimension de l'hystérésis perpendiculairement à cette raideur sécante. Cependant, nous nous sommes intéressés à deux notions plus simples : l'épaisseur à effort nul et l'épaisseur à déplacement nul. Ces deux notions permettent de mesurer le décalage de la courbe lié au retour anélastique du matériau. Comme notre modèle est piloté en déplacement, l'expression à déplacements nuls nous a paru plus pertinente.

## C.4 Approximation continue du cycle d'hystérésis discret du STS

Pour trouver l'équation de la courbe continue passant par le modèle discret, on reprend les équations des points d'intersection de changement de pente. On

reprend l'expression de chacun des points de changement de pente, on peut pour toute valeur de  $i$ , nombre de cellules actives à un jeu de paramètres de modèle STS discret donné. On obtient pour coordonnées de chaque point d'intersection :

$$u_i = -u_{max} + i \frac{2F_f}{K_{pa}} + \frac{i(i-1) 2F_f}{2 K_r} \quad (C.20)$$

$$F_i = -F_{max} + 2i \left(1 + \frac{K_0}{K_{pa}}\right) F_f + \frac{i(i-1) K_0}{2} \frac{2F_f}{K_r} \quad (C.21)$$

Pour l'effort et le déplacement maximaux , on peut écrire les deux équations suivantes :

$$u_{max} = F_f N_{cell} \left( \frac{1}{K_{pa}} + \frac{1}{2} \frac{N_{cell} - 1}{K_r} \right) + F_{max} \quad (C.22)$$

$$F_{max} = K_0 u_{max} + F_f N_{cell} \quad (C.23)$$

Il suffit alors de résoudre dans la première équation l'équation de degré deux en  $N_{cell}$ .

$$N_{cell} = -\left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{K_r}{2F_f} u_{max}} \quad (C.24)$$

On réinjecte cette valeur dans la deuxième équation en  $F_{max}$ . Cela donne :

$$F_{max} = K_0 u_{max} + F_f \left( \sqrt{\left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{K_r}{2F_f} u_{max}} - \left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (C.25)$$

$$F_i = K_0(u_i + u_{max}) - F_{max} + 2F_f \left( \sqrt{\left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{K_r}{2F_f} (u_{max} + u_i)} - \left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (C.26)$$

On peut comparer cette courbe avec la modélisation approchée de Coveney [20]. On remarque que si la forme générale de la courbe et si les coefficients sont relativement proches, il existe tout de même quelques différences, avec notamment le 1/2 qui est ajouté. L'approximation de Coveney ne suppose pas a priori que le bout de l'hystérésis correspond avec le bout d'un segment, c'est à dire avec un seuil de déclenchement d'un frotteur.

On calcule ensuite l'aire de l'hystérésis à partir de cette formulation continue en notant  $A = 2F_f \left(\frac{K_r}{K_{pa}} - \frac{1}{2}\right)$  et  $B = 2F_f K_r$ , la surface vaut :

$$Aire = \frac{4}{3B} (\sqrt{A^2 + 2Bx}^3 - A^3) - 2x(\sqrt{A^2 + 2Bx} + A) \quad (C.27)$$

De même, on peut alors calculer l'épaisseur du cycle pour un déplacement nul :

$$Epais = 2\sqrt{A^2 + Bx} - \sqrt{A^2 + 2Bx} - A \quad (C.28)$$



## C.5 Identification des données quasi-statiques

A présent que nous avons fait le tour des grandeurs susceptibles de décrire l'hystérésis quasi-statique en rapport avec le modèle STS discret et ses paramètres, nous allons décrire plusieurs possibilités d'identifier les paramètres du STS discret à partir des grandeurs décrites et calculées ci-dessus. Nous évaluerons entre autre la sensibilité qualitative de ces grandeurs à une erreur de mesure.

Plusieurs méthodes sont proposées chacune a été évaluée selon la difficulté de réalisation de l'identification, selon la sensibilité des mesures utilisées, et selon la quantité de données nécessaires. En effet, étant donné la quantité de grandeurs caractéristiques décrites et calculées ci-dessus, de nombreuses combinaisons sont possible pour identifier les paramètres STS discrets à partir des mesures.

La première possibilité envisagée, déjà utilisée en début de ces travaux pour identifier le STSn+, est d'utiliser plusieurs raideurs sécantes, donc plusieurs cycles quasi-statiques. Ceci nécessite d'imposer les nombres de cellules déclenchées sur le plus grand cycle, et de calculer le nombre de cellules déclenchées sur le petit cycle à partir des données du grand cycle. l'idéal est de déterminer  $K_0$  sur une courbe quasi-statique de grande amplitude, pour ensuite déterminer les autres paramètres du modèle,  $K_{pa}$ ,  $K_r$ ,  $F_f$  sur un cycle ne présentant aucune saturation en ses extrema.

Une autre possibilité est d'utiliser l'aire et l'épaisseur du cycle. On utilise alors la courbe continue afin d'identifier l'ensemble des paramètres. On peut également utiliser les tangentes extrêmes et la raideur sécante. Cette possibilité est celle qui a été finalement retenue au chapitre 3. Enfin, une combinaison de plusieurs de ces méthodes permet selon l'aspect de l'hystérésis mesurée de moduler l'identification, si l'aire semble trop faible, les tangentes mesurées peu fiables, etc.

Le chapitre 3 détaille la démarche d'identification appliquée dans notre cas sur un cycle d'hystérésis.

Une autre solution consiste à prendre pour formulation continue approximée, plutôt que la formulation proposée par Coveney, la courbe qui passe vraiment par l'ensemble des points de changement de pente du modèle STS discret. Pour cela, on suppose que l'effort maximum correspond à nombre de cellules entier, contrairement à l'approximation réalisée par Coveney.



## Annexe D

---

# Exemples d'identification temporelle (compléments)

---

### D.1 Résultats concernant l'exemple n°1

Nous allons nous intéresser dans le tableau qui suit à l'exemple 1. En guise de mesure, la réponse analytique du système n°1 pour  $a = 3$  a été utilisée, à savoir  $x_m(t) = \exp(-3t)$ . Nous avons fait varier les différentes grandeurs impactant la résolution du problème. L'éloignement entre  $a$  et  $a_0$ , la valeur du paramètre  $\chi_a$  ont été étudiés afin de montrer leur influence sur la convergence du problème. L'impact du temps d'intégration a également été étudié. L'ensemble des résultats est indiqué dans le tableau ci-dessous :

| Valeur initiale $a_0$ | Paramètre $\chi_a$ | Temps T (s) | Nombre d'itérations |
|-----------------------|--------------------|-------------|---------------------|
| 5                     | 0.01               | 1           | 10                  |
| 10                    | 0.01               | 1           | 20                  |
| 5                     | 0.01               | 5           | 9                   |
| 10                    | 0.01               | 5           | 20                  |
| 5                     | 0.01               | 10          | 9                   |
| 10                    | 0.01               | 10          | 18                  |
| 50                    | 0.001              | 1           | oscille             |

TAB. D.1: Tableau de résultats pour l'identification dans l'exemple n°1

### D.2 Résultats concernant l'exemple n°2

Nous allons nous intéresser dans le tableau qui suit à l'exemple 2 décrit plus haut et qui est représentatif des tendances observées sur les deux autres exemples.

En guise de mesure la réponse analytique du système n°2 pour  $a = 1$  a été utilisée, à savoir  $x_m(t) = \sin(t)$ , une valeur approchée de  $a$  a été prise  $a_0 = 5$ . Enfin, le paramètre  $\chi_a$  a été choisi égal à un, de façon à ce qu'il soit du même ordre de grandeur que  $a$  lui-même. Nous avons ensuite fait varier ces différentes grandeurs afin de connaître l'impact de l'éloignement entre  $a$  et  $a_0$ , celui du paramètre  $\chi_a$  sur la convergence et la rapidité de celle-ci. L'impact du temps d'intégration a également été étudié. L'ensemble des résultats est indiqué dans le tableau ci-dessous :

| Valeur initiale $a_0$ | Paramètre $\chi_a$ | Temps T (s) | Nombre d'itérations      |
|-----------------------|--------------------|-------------|--------------------------|
| 2                     | 10                 | 3           | 66                       |
| 2                     | 10                 | 4           | 37                       |
| 2                     | 10                 | 1           | 10000                    |
| 2                     | 1                  | 1           | 3500                     |
| 2                     | 0.1                | 1           | 355                      |
| 5                     | 10                 | 2           | 658                      |
| 5                     | 1                  | 2           | 61                       |
| 5                     | 0.1                | 2           | oscille entre 0.5 et 2.5 |
| 5                     | 1                  | 1           | 4131                     |
| 5                     | 1                  | 4           | diverge                  |
| 5                     | 10                 | 4           | diverge                  |
| 7                     | 1                  | 2           | 93                       |
| 9                     | 1                  | 2           | diverge                  |
| 9                     | 0.1                | 1           | 449                      |
| 20                    | 0.1                | 1           | 598                      |
| 50                    | 0.01               | 0.5         | 5987                     |
| 0.2                   | 0.1                | 1           | 392                      |

TAB. D.2: Tableau de résultats pour l'identification dans l'exemple n°2

## Annexe E

---

# Illustration des résultats de simulation fréquentielle pour les trépidations

---

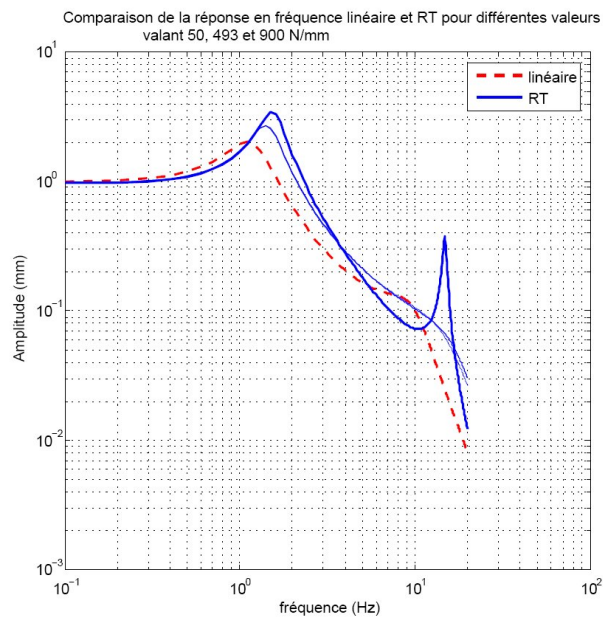


FIG. E.1: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de  $K_0$  avec un modèle *STVS*. ( $K_0$  compris entre 50 et 900 N/mm)

Hormis la différence entre la réponse d'un modèle linéaire (en pointillés ci-

dessus) et non linéaire, on remarque pour une évolution de la valeur de raideur élastique  $K_0$ , un impact sur l'ensemble de la courbe de réponse en fréquence.

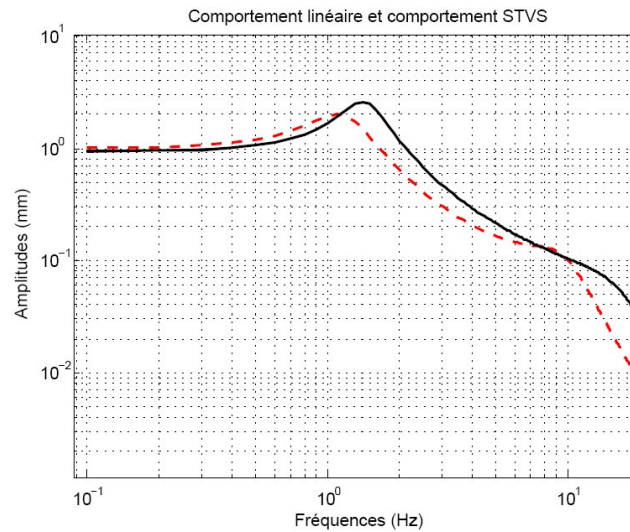


FIG. E.2: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de  $K_{pa}$  dans le modèle *STVS* en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés.

Pour toutes les valeurs testées entre 1 et 3000 N/mm aucune évolution marquante de la réponse fréquentielle en trépidations du véhicule n'est à noter comme on peut le voir ci-dessus, l'ensemble des courbes en traits continus se superposent.

On remarque une légère évolution avec le paramètre  $C_0$  pour les faibles fréquences, mais qui sont celles auxquelles les êtres humains sont particulièrement sensibles. On obtient sensiblement le même type d'évolutions pour des valeurs de  $pw$  de 0,05, 0,2, 0,4, 0,6, jusqu'à 0,8.

On remarque que la raideur  $K_r$  a très rapidement beaucoup d'influence sur le comportement aux basses fréquences contrairement à  $K_{pa}$ .

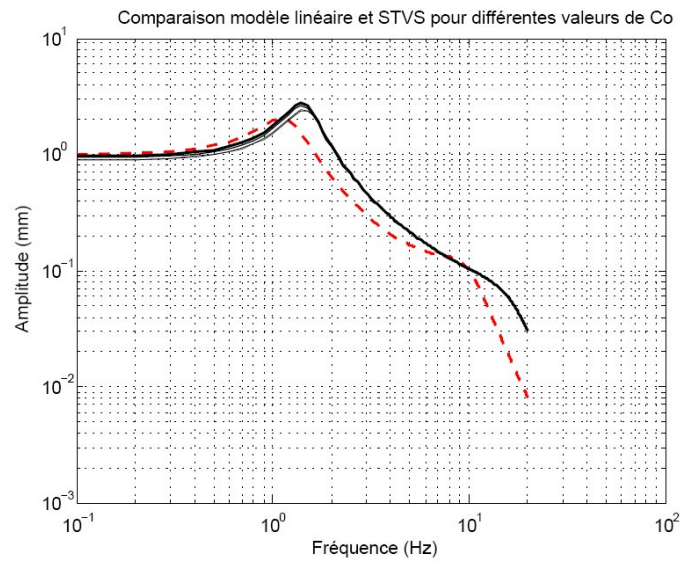


FIG. E.3: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de  $C_0$  dans le modèle *STVS* en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés.  $C_0$  prend successivement les valeurs 50, 100, 200 et 300.

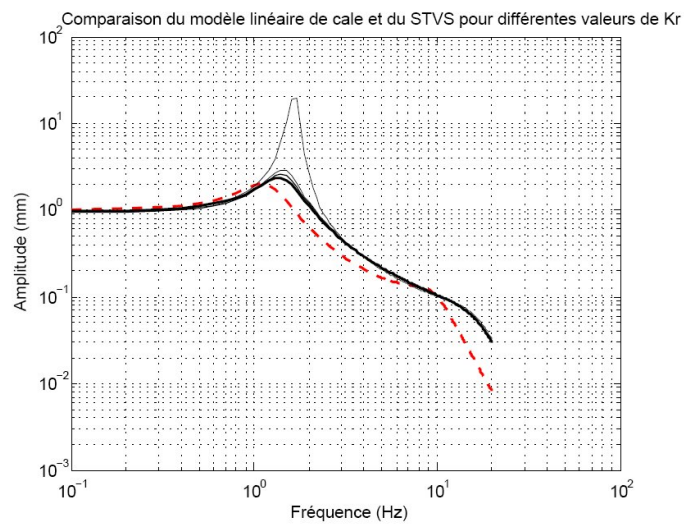


FIG. E.4: Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de  $K_r$  dans le modèle *STVS* en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés.  $K_r$  prend successivement les valeurs de 1 à 30 N/mm.





---

# Liste des Symboles et abréviations

---

| Abréviation | Description                                                | Définition |
|-------------|------------------------------------------------------------|------------|
| CCNC        | Caoutchouc naturel Chargé en Noir de Carbone               | page 5     |
| LAS         | Liaison Au Sol                                             | page 3     |
| STS         | Standard Triboelastic Solid                                | page 53    |
| RT          | Rate-dependent Triboelastic                                | page 89    |
| TVS         | Triboélastique Viscoélastique Solide                       | page 69    |
| ACV         | Acoustique et Vibratoire                                   | page 4     |
| EDA         | Equation Différentielle Algébrique                         | page 12    |
| ECCMR       | European Conference on Constitutive Modelling<br>of Rubber | page 10    |
| MSSMat      | Mécanique Sol Structure Matériaux                          | page 3     |
| ECP         | Ecole Centrale Paris                                       | page 3     |
| phr         | part per hundred of resin                                  | page 29    |
| SHR         | Suspension Horizontale de Roue                             | page 124   |

---

# Table des figures

---

|      |                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Vue par transparence des éléments constitutifs d'une LAS. . . . .                                                                                                                                                                     | 4  |
| 1.2  | Diagramme de quelques performances automobiles liées à la LAS. . . . .                                                                                                                                                                | 5  |
| 1.3  | Éclaté des différentes liaisons élastiques en CCNC sur un essieu arrière de véhicule. . . . .                                                                                                                                         | 6  |
| 1.4  | Représentation tridimensionnelle (CAO) d'une articulation en caoutchouc de la LAS. . . . .                                                                                                                                            | 6  |
| 2.1  | Vue axiale du corps en caoutchouc de trois cales différentes. . . . .                                                                                                                                                                 | 20 |
| 2.2  | Dénomination industrielle des modes de sollicitation des articulations en caoutchouc. Le corps en caoutchouc est en gras, la chape extérieure et le noyau en traits fins. . . . .                                                     | 21 |
| 2.3  | Représentation schématique d'une modélisation purement élastique des bras en caoutchouc de la liaison élastique E1 arrière en vue axiale. . . . .                                                                                     | 22 |
| 2.4  | Les trois comportements mécaniques principaux des liaisons élastiques en CCNC et les éléments rhéologiques qui leur sont associés. . . . .                                                                                            | 24 |
| 2.5  | Molécule de poly-isoprène, polymère constitutif du latex. . . . .                                                                                                                                                                     | 25 |
| 2.6  | Loi filiforme obtenue à partir d'un cycle à moyenne amplitude et faible vitesse (20mm/min). . . . .                                                                                                                                   | 27 |
| 2.7  | Courbe expérimentale traduisant l'impact sur l'effet Payne de trois taux de noir de carbone (0 phr, 20 phr, 43 phr en allant de la courbe la plus foncée à la plus claire). . . . .                                                   | 30 |
| 2.8  | Impact de l'effet Payne sur la partie réelle du module du caoutchouc (module de stockage) et sa partie imaginaire (module de perte) extrait de l'article de Lion [51]. . . . .                                                        | 31 |
| 2.9  | Illustration des règles de Madelung sur un cycle de faible amplitude. . . . .                                                                                                                                                         | 32 |
| 2.10 | Illustration de la loi de Masing. . . . .                                                                                                                                                                                             | 32 |
| 2.11 | Évolution qualitative en échelle logarithmique du module complexe en fonction du logarithme de la fréquence (partie réelle $E'$ , imaginaire $E''$ , angle de perte $\delta$ ). Figure extraite de la thèse de Coquelle [19]. . . . . | 35 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.12 | Évolution qualitative du module de raideur et de l'angle de perte pour une température qui augmente ou une fréquence qui décroît ; à température ambiante le domaine d'existence du caoutchouc est l'état caoutchoutique. . . . . | 36 |
| 2.13 | Courbe expérimentale représentant l'évolution de la raideur dynamique avec la fréquence pour des amplitudes de 0,01, 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,75, 1 et 2 mm. . . . .                                                           | 37 |
| 2.14 | Courbe expérimentale représentant l'évolution de la tangente de l'angle de perte dynamique avec la fréquence pour des amplitudes de 0,1, 0,2 et 0,3 mm. . . . .                                                                   | 38 |
| 2.15 | Courbe expérimentale montrant l'évolution d'un cycle d'hystérésis en sollicitation triangulaire pour des vitesses allant de 0.1 à 100 mm/min. . . . .                                                                             | 38 |
| 2.16 | Différentes courbes expérimentales de relaxation en réponse à des échelons de déplacement appliqués à des vitesses plus ou moins importantes (temps de montée de 0,05, 1, 2 et 4 secondes). . . . .                               | 40 |
| 2.17 | Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacement de 2mm avec des temps de montée allant de 20 à 0.05 secondes. . . . .                                    | 41 |
| 2.18 | Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacements de 2, 1, 0.5 et 0.25 mm avec un temps de montée de 20 secondes. . . . .                                 | 42 |
| 2.19 | Courbes de relaxation normées par l'effort maximum en échelle de temps logarithmique réponse à un échelon de déplacements de 2, 1, 0.5 et 0.25 mm avec un temps de montée de 0.05 secondes. . . . .                               | 43 |
| 2.20 | Dérive des cycles pour une sollicitation cyclique constante de longue durée (ici cent cycles de 4 millimètres d'amplitude à une précharge statique de 200 N). . . . .                                                             | 43 |
| 2.21 | Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge n°1 en annexe B. . . . .                                                                                                         | 44 |
| 2.22 | Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge n°3 en annexe B. . . . .                                                                                                         | 45 |
| 2.23 | Relaxations de durées identiques à même vitesse de montée à différents stades du cycle d'hystérésis. . . . .                                                                                                                      | 45 |
| 2.24 | Deux relaxations inverses de vitesses et amplitudes de sollicitation échelon identiques . . . . .                                                                                                                                 | 46 |
| 2.25 | Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 0 phr de noir de carbone. . . . .                                                                                           | 47 |
| 2.26 | Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 20 phr de noir de carbone. . . . .                                                                                          | 47 |
| 2.27 | Rigidification en fréquence pour deux températures et trois précharges statiques pour un caoutchouc à 43 phr de noir de carbone. . . . .                                                                                          | 48 |

|      |                                                                                                                                                                                  |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.28 | Sollicitation en déplacement pour cinq cycles. . . . .                                                                                                                           | 49 |
| 2.29 | Observation de l'effet Mullins sur la réponse de la cale lors des cinq premiers cycles décrits figure 2.28. . . . .                                                              | 50 |
| 2.30 | Comportement de l'opérateur hystérétique élémentaire Relais ou <i>Relay</i> . . . . .                                                                                            | 51 |
| 2.31 | Sens de parcours de la courbe d'hystérésis d'un CCNC soumis à un chargement cyclique. . . . .                                                                                    | 52 |
| 2.32 | Comportement de l'opérateur hystérétique élémentaire Jeu ou <i>Play</i> . . . . .                                                                                                | 52 |
| 2.33 | Comportement de l'opérateur élasto-plastique et modèle rhéologique équivalent. . . . .                                                                                           | 53 |
| 2.34 | Représentation rhéologique du modèle de Saint-Venant. . . . .                                                                                                                    | 53 |
| 2.35 | Assemblage tribologique donnant le <i>STS</i> (Standard Triboelastic Solid). . . . .                                                                                             | 54 |
| 2.36 | Les modèles classiques de visco-élasticité : Maxwell, Kelvin-Voigt, Zener, Oldroyd. . . . .                                                                                      | 55 |
| 2.37 | Un springpot, élément rhéologique représentant et son équivalent en terme de combinaison ressorts et amortisseurs. . . . .                                                       | 57 |
| 2.38 | Récapitulatifs des comportements qui doivent être modélisés pour une bonne représentativité des comportements d'une articulation en caoutchouc dans le domaine temporel. . . . . | 58 |
| 2.39 | Couplage entre non linéarité en amplitude (effet Payne) et rigidification fréquentielle. . . . .                                                                                 | 59 |
| 3.1  | Comparaison de la raideur obtenue avec un modèle <i>STS</i> continu et celle obtenue par des mesures sur une liaison élastique. . . . .                                          | 64 |
| 3.2  | Comparaison des tangentes d'angle de perte obtenues avec le <i>STS</i> continu et ceux mesurés sur liaison élastique. . . . .                                                    | 64 |
| 3.3  | Le modèle <i>TVS</i> de Paulstra : modèle <i>STS</i> en parallèle de trois cellules de Maxwell. . . . .                                                                          | 65 |
| 3.4  | Allure d'un cycle hystérétique obtenu avec le modèle de Berg et relation avec les paramètres du modèle (issus de [6]). . . . .                                                   | 67 |
| 3.5  | Modèle de M. Sjöberg. . . . .                                                                                                                                                    | 67 |
| 3.6  | Modèle <i>RT</i> pour trois cellules d'amortissement non-linéaire. . . . .                                                                                                       | 70 |
| 3.7  | Modèle de Bouc-Wen modifié et ses paramètres. . . . .                                                                                                                            | 71 |
| 3.8  | Courbe d'élasticité non-linéaire et son paramétrage (N.B. : la partie centrale semble horizontale en raison de l'échelle). . . . .                                               | 76 |
| 3.9  | Illustration de l'identification des paramètres d'une courbe d'élasticité non linéaire sous Matlab. . . . .                                                                      | 77 |
| 3.10 | Effort en fonction de la vitesse de déplacement pour un frotteur sec de seuil $F_f$ . . . . .                                                                                    | 79 |
| 3.11 | Une cellule du modèle <i>STS</i> discret combinant un ressort et un frotteur. . . . .                                                                                            | 79 |
| 3.12 | Modèle <i>STS</i> discret pour six cellules. . . . .                                                                                                                             | 79 |
| 3.13 | Cycles d'hystérésis produits par le modèle <i>STS</i> discret à différentes amplitudes pour mettre en évidence l'effet Payne. . . . .                                            | 82 |

|      |                                                                                                                                                                                                              |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.14 | Cycles d'hystérésis engendrés par le modèle <i>STS</i> discret ( $F_s=30, K_o=560, K_{pa}=1280, K_r=990, N_{cell}=\dots$ ) à différentes amplitudes de sollicitation (1, 0,75, 0,5, 0,2 et 0,05 mm). . . . . | 82 |
| 3.15 | Cycles d'hystérésis décrits par le modèle <i>STS</i> discret représenté avec le comportement avant et après premier rebroussement. . . . .                                                                   | 83 |
| 3.16 | Réponse d'un modèle <i>STS</i> discret à une sollicitation bi-sinus (1 Hz 1mm et 10 Hz 0.2 mm). . . . .                                                                                                      | 83 |
| 3.17 | Illustration sur l'amplitude des cycles pour une sollicitation bi-sinus, courbe de déplacement, et courbe effort en fonction des déplacements. . . . .                                                       | 84 |
| 3.18 | Réponse du modèle <i>STS</i> continu en l'absence d'algorithme de gestion des rebroussements et de l'historique de sollicitation en rouge et avec algorithme en gris. . . . .                                | 87 |
| 3.19 | Réponse d'un modèle <i>STS</i> continu à des sollicitations de diverses amplitudes et illustration de l'effet Payne. . . . .                                                                                 | 88 |
| 3.20 | Réponse avant et après <i>R1</i> du modèle <i>STSn+</i> continu modifié par <i>PSA</i> avec un paramètre <i>n</i> . . . . .                                                                                  | 88 |
| 3.21 | Loi d'amortissement du modèle <i>RT</i> , avec les différents paramètres $F_s, V_0$ et $p$ . . . . .                                                                                                         | 90 |
| 3.22 | Modèle <i>RT</i> pour six cellules. . . . .                                                                                                                                                                  | 91 |
| 3.23 | Une cellule du Modèle <i>RT</i> . . . . .                                                                                                                                                                    | 91 |
| 3.24 | Réponse à des sollicitations de différentes amplitudes pour un modèle <i>RT</i> . . . . .                                                                                                                    | 92 |
| 3.25 | Réponse à une sollicitation bi-sinus pour un modèle <i>RT</i> (bi-sinusus identique à celui utilisé pour le modèle <i>STS</i> ). . . . .                                                                     | 93 |
| 3.26 | Réponse du modèle <i>RT</i> avant et après premier rebroussement sur un cycle à 1 Hz et 1 mm. . . . .                                                                                                        | 93 |
| 3.27 | Réponse du modèle <i>RT</i> à des sollicitations à différentes fréquences 1 Hz, 10 Hz et 100 Hz. . . . .                                                                                                     | 94 |
| 3.28 | Relaxation du modèle <i>RT</i> pour un échelon de 0.7 mm et un temps de montée de 0.2 secondes. . . . .                                                                                                      | 95 |
| 3.29 | Relaxation du modèle <i>RT</i> pour un échelon de 0.7 mm et des temps de montée de 0.1, 0.2 et 0.3 secondes; . . . . .                                                                                       | 95 |
| 3.30 | Évolution de la raideur de modèle <i>RT</i> avec la fréquence pour différentes amplitudes. . . . .                                                                                                           | 96 |
| 3.31 | Évolution de la tangente de l'angle de perte du modèle <i>RT</i> pour différentes amplitudes. . . . .                                                                                                        | 96 |
| 3.32 | Cartographie des iso-raideurs dans un graphe en échelle logarithmique de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation pour une cale dans une direction. . . . .                                           | 98 |
| 3.33 | Cartographie des iso-tangentes phi dans un graphe en échelle logarithmique de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation pour une cale dans une direction. . . . .                                      | 98 |

|      |                                                                                                                                                                        |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.34 | Modèle <i>STVS</i> pour six cellules. . . . .                                                                                                                          | 100 |
| 3.35 | une cellule du Modèle <i>STVS</i> . . . . .                                                                                                                            | 100 |
| 3.36 | Modèle <i>STVS</i> et Effet Payne. . . . .                                                                                                                             | 102 |
| 3.37 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à un bi-sinus. . . . .                                                                                                                   | 102 |
| 3.38 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à trois sollicitations sinus d'amplitude identiques à 1, 10 et 100 Hz . . . . .                                                          | 103 |
| 3.39 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à un échelon en déplacement. . . . .                                                                                                     | 103 |
| 3.40 | Point du modèle où l'on écrit l'équilibre dans chaque portion du <i>STS</i> en vue du calcul de son comportement. . . . .                                              | 104 |
| 3.41 | Exemple de réponse hystérétique d'un modèle <i>STS</i> continu et règles de Madelung. . . . .                                                                          | 105 |
| 3.42 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à un bi-sinus. . . . .                                                                                                                   | 110 |
| 3.43 | Réponse du modèle <i>STVS</i> et confrontation aux mesures quasi-statiques. . . . .                                                                                    | 110 |
| 3.44 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à une sollicitation harmonique à différentes fréquences, tracé de la raideur dynamique du modèle d'articulation et de la mesure. . . . . | 111 |
| 3.45 | Réponse du modèle <i>STVS</i> à un échelon en déplacement et comparaison avec la mesure. . . . .                                                                       | 111 |
| 4.1  | Éléments en caoutchouc d'une automobile. . . . .                                                                                                                       | 117 |
| 4.2  | Train avant et train arrière dans une LAS. . . . .                                                                                                                     | 118 |
| 4.3  | Le positionnement de la caisse du véhicule dans l'espace. . . . .                                                                                                      | 118 |
| 4.4  | Orientation du plan de roue dans l'espace. . . . .                                                                                                                     | 119 |
| 4.5  | Empattement et voie sur un véhicule vu du dessus et porte à faux avant et arrière. . . . .                                                                             | 120 |
| 4.6  | Angle de dérive. . . . .                                                                                                                                               | 120 |
| 4.7  | Position des articulations en caoutchouc d'essieu arrière ou articulations E1 arrière. . . . .                                                                         | 121 |
| 4.8  | Positionnement des cales E1 et E2 avant sur un train avant de véhicule. . . . .                                                                                        | 122 |
| 4.9  | Triangle avant droit de suspension vu du dessus : en bas de la photographie, la cale E2, au milieu du triangle, la cale E1. . . . .                                    | 122 |
| 4.10 | Vue en CAO 3D d'un train arrière complexe. . . . .                                                                                                                     | 123 |
| 4.11 | Illustration simplifiée du balourd de roue en dynamique des structures. . . . .                                                                                        | 125 |
| 4.12 | Tracé de l'approximation de la raideur en fonction de l'amplitude pour $\lambda$ compris entre 0,2 et 1,5. . . . .                                                     | 126 |
| 4.13 | Tracé de l'approximation de la raideur en fonction de l'amplitude pour $K_0$ compris entre 600 et 2000. . . . .                                                        | 127 |
| 4.14 | Illustration du comportement en balourd de roue, déplacement de la roue en fonction de la fréquence de sollicitation (pour $m=10g$ ). . . . .                          | 128 |
| 4.15 | Illustration du comportement en balourd de roue, déplacement de la roue en fonction de la fréquence de sollicitation pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .   | 129 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.16 | Évolution du déplacement causé par un balourd de roue à différentes fréquences pour un modèle linéaire et un modèle non-linéaire (pour $m=50g$ ).                                                                                                   | 130 |
| 4.17 | Comparaison du comportement indépendant de l'amplitude et de la fréquence d'une articulation en caoutchouc et du comportement RT dépendant de l'amplitude et de la fréquence de sollicitation.                                                      | 130 |
| 4.18 | Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre $K_{pa}$ (traits épais $K_{pa}$ élevé (6000 N/mm) et traits fins $K_{pa}$ faible (500 N/mm)).                                                 | 131 |
| 4.19 | Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre $K_r$ (traits épais $K_r$ élevé (6000 N/mm) et traits fins $K_r$ faible (500 N/mm) avec 1500 et 3000 comme valeurs intermédiaires).           | 131 |
| 4.20 | Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre $pw$ (traits épais $pw$ faible (0,1) et traits fins $pw$ élevé (0,9), avec 0,5 comme valeur intermédiaire).                                   | 132 |
| 4.21 | Illustration de l'évolution de la courbe de déplacement en fonction de la fréquence avec le paramètre $C_o$ (traits épais $C_o$ faible (20) et traits fins $C_o$ élevé (90) avec une valeur intermédiaire à $C_o = 50$ ).                           | 132 |
| 4.22 | Illustration de l'évolution de l'influence des non linéarités liées à la modélisation des articulations en fonction de la masse de balourd pour 1, 10 et 40 g.                                                                                      | 133 |
| 4.23 | Illustration d'un modèle simplifié « quart de véhicule » à destination du calcul des trépidations en dynamique des structures.                                                                                                                      | 134 |
| 4.24 | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations et différentes masses non suspendues. Illustration provenant de l'article de Wong [78].                                                             | 136 |
| 4.25 | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour les quatre modèles de cales envisagés.                                                                                                         | 137 |
| 4.26 | Structure simple dans ADAMS <sup>®</sup> , constituée d'une poutre, d'une liaison dans une direction et d'un solide encastré; ce système équivaut à isoler une cale E1 arrière dans le cas où la caisse du véhicule est considérée comme encastrée. | 138 |
| 4.27 | Comparaison entre les deux fonctions utilisateur VARSUB et GSESUB.                                                                                                                                                                                  | 139 |
| 4.28 | Réponse d'une articulation en caoutchouc E1 arrière lors d'une sollicitation en pompage de 10 et 30 mm pour un modèle STVS.                                                                                                                         | 143 |
| 4.29 | Comparaison du carrossage obtenu pour un modèle RT et un modèle STVS identifiés sur la même cale.                                                                                                                                                   | 143 |
| 4.30 | Évolution du carrossage droit pour trois vitesses différentes de sollicitation : 1,5 mm/s, 3 mm/s et 15 mm/s, pour du pompage à une amplitude de 60mm.                                                                                              | 144 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.31 | Pince obtenue pour une sollicitation transversale en base de roue d'amplitudes 50 à 300 daN à avec un modèle STVS identifié sur deux articulations différentes. . . . .                                                                                                                               | 144 |
| 4.32 | Réponse en effort normalisé d'une articulation soumise à un échelon d'angle volant. . . . .                                                                                                                                                                                                           | 145 |
| 4.33 | Réponse transitoire d'une cale E1 arrière à un échelon d'angle au volant. . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 146 |
| 4.34 | Sollicitation transitoire en écrasement d'une liaison élastique E1 arrière à un échelon d'angle au volant. . . . .                                                                                                                                                                                    | 146 |
| 4.35 | Évolution de la pince de roue droite dans le temps lors d'une sollicitation d'échelon d'angle volant. . . . .                                                                                                                                                                                         | 147 |
| 4.36 | Évolution de l'effort de l'articulation pour une modélisation <i>RT</i> suite à des échelons d'angles au volant identiques précédés d'historiques différents. . . . .                                                                                                                                 | 148 |
| 4.37 | Sollicitation transitoire en écrasement d'une liaison élastique E1 arrière à deux échelons d'angle au volant successifs. . . . .                                                                                                                                                                      | 149 |
| 4.38 | Réponse de l'articulation E2 en effort à l'écrasement de la figure 4.37 produit par d'une sollicitation de double échelon d'angle volant de sens opposé. . . . .                                                                                                                                      | 149 |
| 4.39 | Réponse de l'articulation E2 en effort à l'écrasement produit par une sollicitation de double échelon d'angle volant de même sens. . . . .                                                                                                                                                            | 150 |
| 4.40 | Photographie du banc d'essai BCV chez PSA. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 150 |
| 4.41 | Comparaison simulation en bleu avec la mesure en rouge pour une sollicitation en transverse en base de roue. . . . .                                                                                                                                                                                  | 151 |
| 5.1  | Représentation schématique d'un problème direct, de ses données et de ses inconnues. . . . .                                                                                                                                                                                                          | 157 |
| 5.2  | Représentation schématique du problème inverse. . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 158 |
| 5.3  | Allure d'une cycle hystérétique obtenu avec le modèle de Berg et relation avec les paramètres du modèle (illustration issue de l'article [6]). . . . .                                                                                                                                                | 162 |
| 5.4  | Points de rupture du cycle d'hystérésis discret <i>STS</i> sur un cycle d'hystérésis continu mesuré. . . . .                                                                                                                                                                                          | 163 |
| 5.5  | Grandeurs permettant l'identification sur un cycle de grande amplitude des paramètres du modèle <i>STS</i> . . . . .                                                                                                                                                                                  | 165 |
| 5.6  | Comparaison entre la mesure et la simulation STS en pointillé avec les paramètres identifiés sur le cycle de plus grande amplitude. ( $N_{cell} = 15$ , $F_s = 40, 6$ , $K_t = 2951, 0$ , $K_{pa} = 1051, 0$ et $K_0 = 508, 2$ ) . . . . .                                                            | 166 |
| 5.7  | Comparaison entre la mesure et la simulation STS en pointillé avec les paramètres identifiés sur le cycle de plus grande amplitude pour une articulation de faible tangente d'angle de perte. ( $N_{cell} = 15$ , $F_s = 40, 2$ , $K_t = 2935, 0$ , $K_{pa} = 1076, 7$ et $K_0 = 1362, 6$ ) . . . . . | 167 |



|      |                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.8  | Comparaison entre la mesure et la simulation <i>RT</i> avec les paramètres identifiés à partir du modèle <i>STS</i> . ( $N_{cell} = 15$ , $C_o = 41,1$ ( $V_0 = 0,3$ ), $pw = 0.1$ $K_t = 2935,0$ , $K_{pa} = 1076,7$ et $K_0 = 508.2$ ) . . . . .      | 169 |
| 5.9  | Comparaison entre la mesure et la simulation <i>STVS</i> avec les paramètres identifiés à partir du modèle <i>STS</i> . ( $N_{cell} = 15$ , $F_s = 9$ , $C_o = 32$ , $pw = 0.15$ $K_t = 2935,0$ , $K_{pa} = 1076,7$ et $K_0 = 508.2$ ) . . . . .        | 169 |
| 5.10 | Représentation schématique de la méthode d'identification empirique utilisée dans la première partie de ces travaux. . . . .                                                                                                                            | 170 |
| 5.11 | Illustration de l'identification après l'étape 1 de l'identification empirique pour « cale proto » et comparaison entre résultats obtenus sur des sollicitation triangle et bi-sinus. . . . .                                                           | 170 |
| 5.12 | Illustration de l'identification après l'étape 2 de l'identification empirique pour « cale proto », comparaison pour cette identification sur un échelon de relaxation entre le résultat obtenu sur cet échelon et sur un bi-sinus. . . . .             | 171 |
| 5.13 | Illustration de l'identification à l'étape 3 de l'identification empirique pour « cale proto » : résultat obtenu dans le domaine fréquentiel. . . . .                                                                                                   | 171 |
| 5.14 | Analyse harmonique d'une sollicitation sinus (à gauche) et de la réponse du modèle RT (à droite) . . . . .                                                                                                                                              | 172 |
| 5.15 | Cartographies donnant la raideur (à gauche) la tangente d'angle de perte (à droite) en fonction de différents couples $K_{pa}$ et $C_o$ pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de $K_t$ de 2951 N/mm, un $pw$ de 0.01. . . . . | 178 |
| 5.16 | Cartographie donnant la raideur et la tangente de l'angle de perte en fonction de différents couples $K_{pa}$ et $K_t$ pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de $C_o$ de 40, un $pw$ de 0.01. . . . .                         | 178 |
| 5.17 | Cartographie donnant la raideur et la tangente de l'angle de perte en fonction de différents couples $C_o$ et $pw$ pour une fréquence de 1 Hz et une amplitude de 1 mm, une valeur de $K_{pa}$ de 1050 N/mm, un $K_r$ de 2951 N/mm. . . . .             | 179 |
| 5.18 | Cartographie donnant la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (920 N/mm) et entre tangente d'angle de perte simulé et mesuré (soit 0,12) avec des paramètres identiques à la figure 5.15. . . . .               | 179 |
| 5.19 | Cartographie donnant la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (920 N/mm) et entre tangente d'angle de perte simulé et mesuré (soit 0,12) avec des paramètres identiques à la figure 5.16. . . . .               | 180 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.20 | Cartographie donnant la tangente de l'angle de perte en fonction des paramètres $K_{pa}$ et $F_s$ (à gauche) et la différence entre tangente d'angle de perte simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent $Co = 40$ , $K_r = 2951$ , $pw = 0.01$ . . . . .                                         | 181 |
| 5.21 | Cartographie donnant la raideur du modèle <i>STVS</i> pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres $K_{pa}$ et $F_s$ (à gauche) et la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent $Co = 40$ , $K_r = 2951$ , $pw = 0.01$ . . . . .                         | 181 |
| 5.22 | Cartographie donnant la raideur du modèle <i>STVS</i> pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres $Co$ et $F_s$ (à gauche) et la différence entre raideur simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent $K_{pa} = 1051$ , $K_r = 2951$ , $pw = 0.01$ . . . . .                       | 182 |
| 5.23 | Cartographie donnant la tangente de l'angle de perte du modèle <i>STVS</i> pour une sollicitation 1 Hz 1 mm en fonction des paramètres $Co$ et $F_s$ (à gauche) et la différence entre tangente simulée et mesurée à 1 Hz 1 mm pour une articulation (soit 0,12) à droite. Les autres paramètres valent $K_{pa} = 1051$ , $K_r = 2951$ , $pw = 0.01$ . . . . . | 182 |
| 5.24 | Modèle intermédiaire identifié à l'aide des techniques de problème inverses avec état adjoint. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 193 |
| 5.25 | Illustration du résultat d'identification sur différents types de sollicitations via la réponse du modèle avec les paramètres expérimentaux, initiaux et identifiés à un sinus 1 Hz 1 mm. . . . .                                                                                                                                                              | 197 |
| 5.26 | Illustration du résultat d'identification sur différents types de sollicitations via la réponse du modèle avec les paramètres expérimentaux, initiaux et identifiés à une sollicitation en échelon. . . . .                                                                                                                                                    | 198 |
| 6.1  | Comportements d'une articulation en CCNC dans le cadre de notre étude. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 202 |
| A.1  | Transformation permettant de passer d'une distribution de Heaviside à une fonction Signe. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | 215 |
| A.2  | Illustration de la présence d' <i>overshoot</i> pour des valeurs très faibles de $\lambda$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 216 |
| B.1  | Cinq cas de charge étudiés pour mesurer l'impact de l'effet mémoire sur le comportement en relaxation . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 221 |
| B.2  | Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 222 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.3  | Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes. . . . .                                                                                                                                                                                            | 223 |
| B.4  | Réponses en relaxation pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 3. . . . .                                                                                                                                                                                   | 224 |
| B.5  | Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 4. . . . .                                                                                                                                                                           | 224 |
| B.6  | Réponses en relaxation inverse pour des temps de montée de 0,05, 0,1, 0,2 et 0,4 secondes, cas de charge 5. . . . .                                                                                                                                                                           | 225 |
| B.7  | Sollicitation en déplacement pour un essai sapin ou épi. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 225 |
| B.8  | Réponse en effort pour un essai sapin ou épi. . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 226 |
| B.9  | Essai en épi sur une pièce en caoutchouc dans un diagramme effort déplacement. . . . .                                                                                                                                                                                                        | 226 |
| B.10 | Essai en épi sur une articulation série de 307 dans un diagramme effort déplacement. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 227 |
| C.1  | Quelques grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis : les deux tangentes extrêmes, la raideur sécante et l'effort maximum atteint . . .                                                                                                                                               | 230 |
| C.2  | Autres grandeurs caractéristiques d'un cycle d'hystérésis : l'aire du cycle et l'épaisseur de celui-ci . . . . .                                                                                                                                                                              | 230 |
| C.3  | Points de changement de pente du cycle d'hystérésis discret d'un modèle STS approximant une mesure de cycle continu . . . . .                                                                                                                                                                 | 231 |
| E.1  | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de $K_0$ avec un modèle <i>STVS</i> . ( $K_0$ compris entre 50 et 900 N/mm) . . . . .                                                                                | 241 |
| E.2  | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de $K_{pa}$ dans le modèle <i>STVS</i> en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés. . . . .                                                          | 242 |
| E.3  | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de $C_0$ dans le modèle <i>STVS</i> en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés. $C_0$ prend successivement les valeurs 50, 100, 200 et 300. . . . . | 243 |
| E.4  | Transmission des vibrations à la caisse du véhicule pour différentes fréquences de trépidations pour différentes valeurs de $K_r$ dans le modèle <i>STVS</i> en traits continus et pour un modèle linéaire en pointillés. $K_r$ prend successivement les valeurs de 1 à 30 N/mm. . . . .      | 243 |

---

# Liste des tableaux

---

|     |                                                                                                                                                                                             |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | Tableau présentant certains items d'évaluation d'une LAS, pour les trois types de performances correspondantes, à savoir, le comportement routier, l'agrément de conduite et l'ACV. . . . . | 7   |
| 1.2 | Domaines d'amplitudes et de fréquences pour certaines prestations en ACoustique et Vibratoire (ACV). . . . .                                                                                | 11  |
| 2.1 | Comparaison entre les modèles STS et modèles de Saint Venant. . . .                                                                                                                         | 54  |
| 3.1 | Tableau comparatif de six modèles cités en exemple plus haut. . . . .                                                                                                                       | 73  |
| 3.2 | Tableau des paramètres utilisés pour obtenir la courbe d'élasticité non-linéaire de la figure 3.8. . . . .                                                                                  | 76  |
| 3.3 | Tableau récapitulatif des caractéristiques positives et négatives pour les différentes variantes du modèle STS. . . . .                                                                     | 89  |
| 4.1 | Description des sollicitations triangle à une fréquence de 0,1 Hz imposées en pompage, roulis et effort transversal. . . . .                                                                | 151 |
| D.1 | Tableau de résultats pour l'identification dans l'exemple n°1 . . . . .                                                                                                                     | 239 |
| D.2 | Tableau de résultats pour l'identification dans l'exemple n°2 . . . . .                                                                                                                     | 240 |

---

# Résumé

---

**Résumé** Les articulations en caoutchouc naturel sont des éléments indispensables et nombreux dans une liaison au sol automobile afin d'assurer le filtrage des vibrations. Leur comportement non-linéaire, notamment visco-élastique et hystérétique engendre cependant des phénomènes parfois indésirables ou imprévus qui peuvent impacter la dynamique du véhicule. Ce travail a permis de modéliser l'ensemble des comportements d'une articulation en caoutchouc grâce à un nouveau modèle, le modèle STVS ( Standard Triboelastic Visco Solid) inspiré des travaux sur le génie parasismique et notamment du modèle STS (Standard Triboelastic Solid) de V. Coveney. L'identification d'un tel modèle non-linéaire a été envisagée de différentes façons : empirique, ou d'après des données fréquentielles. Les bases d'une identification d'après des données temporelles sont également posées. L'introduction d'un modèle d'articulation identifié sur des mesures dans une simulation transitoire multi-corps de liaison au sol d'un véhicule permet de mettre en évidence des phénomènes qui jusqu'à présent n'étaient pas représentés par une simple élasticité, comme des effets de relaxation des articulations lors d'un échelon d'angle au volant, ou l'impact des différentes amplitudes de sollicitations.

**Abstract** Rubber bushings are necessary elements to filtrate undesirable vibrations in vehicle chassis. They are numerous and their non linear behaviour like viscoelasticity or hysteresis generate phenomena which can influence the vehicle dynamics. This study describes a new model for rubber bushings, representative for all their transient mechanical behaviours. This model is called STVS (Standard Triboelastic Visco Solid). The identification of such a non-linear transient model has been studied through different viewpoints : empirical identification, identification based on frequency data and the elements for a transient data based identification have been described. The introduction of such an identified rubber bushing model in a multi-body simulation of a vehicle chassis, enables us to point out phenomena which could not be evidenced through a simple elasticity modelling : for instance, relaxation in bushings during a wheel angle loading or the impact of different loading amplitudes on the response of the bushing.