HAL open science

Singularités des courbes planes, module des dérivations et schéma des arcs

Kodjo Egadédé Kpognon

▶ To cite this version:

Kodjo Egadédé Kpognon. Singularités des courbes planes, module des dérivations et schéma des arcs. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Rennes, 2014. Français. NNT : 2014REN1S111 . tel-01138088

HAL Id: tel-01138088

https://theses.hal.science/tel-01138088v1

Submitted on 1 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANNÉE 2014

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

KPOGNON Kodjo Egadédé

préparée à l'UMR 6625 CNRS-IRMAR
Institut de recherche Mathématique de Rennes
U.F.R. de Mathématiques

Singularités des courbes planes, module des dérivations et schéma des arcs

Thèse soutenue à Rennes le 12 Décembre 2014

devant le jury composé de :

Alain HÉNAUT
Professeur Émérite, Université de Bordeaux 1 / Rapporteur

Ana J. REGUERA
Professeur, Université de Valladolid (Espagne) / Rapporteur

Sylvain DUQUESNE
Professeur, Université de Rennes 1 / Examinateur

Tony EZOME
Maître-assistant, USTM (Gabon) / Examinateur

Julien SEBAG
Professeur, Université de Rennes 1 / Directeur de thèse

À mon Père

Chaque matin
Un gamin s'envole
Pour l'école
Par le même chemin.

Journée après journée
D'année en année
Le chemin fleurit
Le gamin grandit.

La fleur oubliée
À chaque détour
Est une peine liée.
À chaque jour.

Pour son devenir
Sans relâche
L'espoir marche
Vers l'avenir.

Pascal NDOUNA-DEPENAUD

REMERCIEMENTS

Au terme de ces années de thèse, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont entouré, accompagné, tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes remerciements vont spécialement à mon directeur de thèse, Julien SEBAG, pour les nombreuses discussions que nous avons eues et qui ont abouti à ce travail. Merci pour votre soutien et pour vos encouragements dans les jours faciles comme dans les jours difficiles. Vous avez compris mes erreurs et sans relâche vous m'avez aidé à les corriger. Vous m'avez initié à l'algèbre différentielle, à l'étude du schéma des arcs tracés sur une variété et à l'intégration motivique. J'ai bénéficié auprès de vous d'une oreille attentive et d'un regard pointilleux. J'ai beaucoup appris à vos côtés et cette formation me sera utile.

Je remercie Ana J. Reguera et Alain Hénaut d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Le travail que vous avez accompli a permis d'améliorer la qualité du travail proposé. Je remercie Tony Ezome et Sylvain Duquesne pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble du personnel de l'UFR de mathématiques et de l'IRMAR, pour sa disponibilité, sa gentillesse et son efficacité. Marie-Aude, Patrick, Olivier, Chantal, Hélène et Nelly, merci pour votre accueil et pour tous les services que vous m'avez rendus.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont accueilli au bureau 434, Nirmal, Richoux, Nicolas, Anjara, Damien. Vous m'avez tout de suite intégré à l'équipe du bureau 434 et je m'y suis tellement bien senti que je n'ai plus jamais rejoins mon bureau officiel au sixième. La nouvelle équipe du bureau 434 est, à sa manière, toujours aussi chaleureuse. Je remercie Elise, Romain, Julie, Christophe, Nirina et Alexandre avec qui j'ai essayé de garder l'héritage de la pause café « pas vraiment reposante » comme l'écrivait Nicolas dans ses remerciements.

Je remercie l'église qui m'a accueilli et soutenu dans ce pays lointain. Avec vous, les amis, je me suis toujours senti en famille et entouré. J'ai toujours su que je pouvais compter sur vous. Merci pour vos encouragements et pour vos prières quotidiennes. Je fais le choix ici de ne pas citer de nom parce que vous m'avez, chacun à votre façon, apporté quelque chose, ici à Rennes comme à Bordeaux.

Je tiens à remercier ma famille qui a toujours été présente malgré la distance. Je me souviens du dernier coup de fil de mon père, de ses encouragements et de la confiance qu'il avait dans l'aboutissement de cette thèse. Ma mère et ma sœur m'ont appris la persévérance et le sérieux dans le travail. Mon grand frère, Koffi fut mon premier répétiteur de mathématiques. Merci pour tout ce que vous avez fait et continuez à faire pour moi.

Enfin, à toi... à toi que je n'ai pas besoin de nommer. Toi dont la présence cette dernière année m'a fait tellement du bien. Merci pour tout ce que tu es pour moi.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements I

Introduction 1

1. Théorème d'irréductibilité de Kolchin différentiel et une généralisation du théorème de Ritt-Raudenbush 7
1.1. Notations et conventions 7
1.2. Classement 8
1.3. Ordre 8
1.4. Terme dominant, initial et séparant 9
1.5. Comparaison des polynômes différentiels : rang 10
1.6. Ensemble auto-réduit 10
1.7. Algorithme de réduction de Ritt 12
1.8. Comparaison d'ensembles auto-réduits 14
1.9. Ensemble caractéristique 14
1.10. Théorème d'irréductibilité de Kolchin 19
1.11. Quelques compléments 27
1.12. Une généralisation du théorème de Ritt-Raudenbush 28

2. Module des dérivations sur une courbe 31
2.1. Bases de Gröbner 31
2.2. Théorème de Buchsbaum-Eisenbud 35
2.3. Rang du module de dérivation 38
2.4. Module des dérivations d'une courbe algébrique affine 39
2.5. Dérivation résultante et système de générateurs du module des dérivations 50

3. Interlude textile 65
3.1. Tissus : généralités et définitions 65
3.2. Quelques exemples de tissus plans 66
3.3. Linéarisation d'un tissu 67
3.4. Linéarisation des tissus quasi-homogènes incomplets 70

4. Nilpotents du schéma des arcs tracés sur une courbe affine plane 73
4.1. Conventions et notations 74
4.2. S-algorithme 75
4.3. La filtration par le type 83
4.4. Dérivations et filtration par le type 90
4.5. Etude de l'idéal $\mathcal{N}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(\mathbf{f})$ 91
4.6. Changement de base et type 96

4.7. Cas des polynômes homogènes 99
4.8. Application au schéma des arcs tracés sur une courbe 102

5. Fonction zêta motivique et feuilletages 105
5.1. Conventions et notations 105
5.2. Anneaux de Grothendieck 105
5.3. Fonction zêta motivique associée à un morphisme 106
5.4. Fonction zêta associée à une 1-forme de Kähler 107
5.5. Calcul explicite 108
5.6. Exemples 110

6. Perspectives de recherche 117
6.1. Projet à court terme 117
6.2. Projets à plus long terme 117

A. Rappels d'algèbre différentielle 119

B. Schéma des arcs et espace des jets 125
B.1. Espace des jets et schéma des arcs via la géométrie algébrique 125
B.2. Espace des jets et schéma des arcs via l'algèbre différentielle 130
B.3. Quelques propriétés 131
B.4. Morphismes 134

C. Codes 139
C.1. S-algorithme 139
C.2. Test de nilpotence 140
C.3. Dérivation d'adjonction 141
C.4. Dérivation naturelle réduite 141
C.5. Coefficients des dérivations $\delta_{\mathbf{ri}}$ 142
C.6. Décomposition dans une base donnée 142

Bibliographie 147

INTRODUCTION

À toute variété algébrique (affine) on peut associer différents objets algébrico-géométriques qui rendent en particulier compte des singularités de la variété. Cette thèse a pour objet l'étude de ce type d'interaction dans le cadre des courbes algébriques planes. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est une courbe affine plane, nous nous concentrerons ici sur les deux objets associés suivants :

1. Le schéma $\mathscr{L}(X)$ des arcs tracés sur X ;
2. Le module des dérivations $\mathrm{Der}_k(A)$.

En 1968, John F. Nash Jr dans une prépublication non publiée mais parue quelques années plus tard (voir [**44**]) a introduit la notion de schéma des arcs et d'espace de jets pour les variétés algébriques et analytiques sur un corps de caractéristique nulle. Si X est une variété algébrique définie sur un corps k, l'on définit ce k-schéma par la propriété universelle suivante :

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{L}(X)) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(A[[T]]), X)$$

pour toute k-algèbre A. (Voir les annexes pour plus de détails sur cet objet.) Notons que la formulation naturelle du problème universel fait intervenir la catégorie des schémas formels et que la propriété ci-dessus est en réalité un résultat très récent de Bhargav Bhatt (voir [**5**]). Soient m un entier naturel et $\mathscr{L}_m(X)$ l'espace des m-jets de X. Soit n un entier naturel tel que $m \geq n$. La surjection canonique

$$k\,[t]\,/\langle t^{m+1}\rangle \longrightarrow k\,[t]\,/\langle t^{n+1}\rangle$$

induit une projection canonique

$$\theta^X_{m,n} \ : \ \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_n(X)$$

appelé *morphisme de transition* de $\mathscr{L}_m(X)$ dans $\mathscr{L}_n(X)$. Les morphismes de transition font de la suite $(\mathscr{L}_m(X))_{m\in\mathbb{N}}$ un système projectif dans la catégorie des k-schémas. Le schéma $\mathscr{L}(X)$ des arcs tracés sur X (non de type fini en général) s'obtient également comme la limite projective des espaces de jets de X :

$$\mathscr{L}(X) = \varprojlim_m \mathscr{L}_m\,(X)\,.$$

Pour tout entier naturel m, le schéma $\mathscr{L}(X)$ est muni d'un morphisme affine

$$\pi_{X,m} \ : \ \mathscr{L}(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(X)$$

tel que :

$$\pi_{X,m} = \theta^X_{m,n} \circ \pi_{X,n}.$$

Le morphisme $\pi_{X,m}$ est appelé *morphisme de troncation.*

À la lecture de Nash, le concept de schéma des arcs et d'espace de jet doit offrir un cadre pour l'étude des singularités des variétés algébriques et analytiques en permettant notamment de mieux comprendre les résolutions des singularités de Heisuke Hironaka [**32**]. Dans son article [**44**], Nash formula une conjecture pour les surfaces et une question pour les variétés de plus grande dimension.

Question ([**44**]). — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, X une k-variété et $f : Y \longrightarrow X$ une désingularisation divisorielle de X. L'application $\mathscr{N}$ qui, à une composante irréductible de l'ensemble des arcs passant par le lieu singulier de X à image non incluse dans ce dernier, associe un diviseur essentiel de Y, est-elle surjective ?*

Cette question de Nash actuellement connue sous le nom de *problème de Nash* est étudiée par de nombreux auteurs parmi lesquels Ishii Shihoko [**34, 33, 35**], Ishii Shihoko et Kollár János [**36**], Gérard Gonzalez-Sprinberg et Monique Lejeune-Jalabert [**24**] et Ana J. Reguera [**51, 50**]. La réponse à cette question de Nash, dans la formulation originelle, est aujourd'hui connue ; l'on sait que la réponse est positive en dimension inférieure ou égale à 2 et l'on dispose de contre-exemples en toute dimension $n \geq 3$.

En 1995, lors d'un séminaire à Orsay, Maxim Kontsevich introduit la théorie de l'intégration motivique [**40**] en construisant une mesure sur le schéma des arcs tracés sur une variété algébrique dans le but de démontrer le résultat suivant, conjecturé par Victor Batyrev [**3**] :

Théorème **(Kontsevich)**. — *Deux variétés de Calabi-Yau*[1] *birationnellement équivalentes ont les mêmes nombres de Hodge.*

Kontsevich place ainsi le schéma des arcs tracés sur une variété algébrique au centre de nouveaux développements de la géométrie algébrique. Cette nouvelle direction initiée par Jan Denef et François Loeser [**14, 15, 16, 13**] met en lumière de nombreux invariants associés aux variétés algébriques [**11, 2, 4**]. Cependant, l'intégration motivique n'étudie pas de manière intrinsèque le schéma des arcs. En particulier, il n'existe que très peu de résultats concernant la structure géométrique du schéma des arcs tracés sur une variété algébrique.

Dans cette voie, l'un des résultats récents les plus marquants dans l'étude du schéma des arcs en relation avec la théorie des singularités est peut-être le résultat suivant de Mircea Mustaţă qui montre que certaines propriétés géométriques de l'espace des jets permettent de déterminer le type des singularités de la variété de base.

Théorème ([**43**]). — *Soit X une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Si X est localement une intersection complète, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout entier naturel $m \geq 1$, le schéma des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ est irréductible ;*
2. *La k-variété X a des singularités rationnelles.*

Dans le cas d'une courbe algébrique X, cet énoncé dit simplement que X est lisse si et seulement si les espaces de jets $\mathscr{L}_m(X)$ sont tous irréductibles.

1. On appelle variété de Calabi-Yau toute variété complexe X connexe projective et lisse, dont le diviseur canonique K_X est trivial. Classiquement, les variétés de Calabi-Yau de dimension 1 sont les courbes elliptiques et celles de dimension 2 les surfaces $K3$.

Ce résultat de Mustaţă a relancé l'intérêt d'obtenir les résultats structurels pour le schéma des arcs tracés sur une variété en vue de l'étude des singularités du schéma de base.

Parallèlement, l'on peut également s'intéresser au point de vue « différentiel ». (Notons que le schéma des arcs peut aussi se définir du point de vue de l'algèbre différentielle comme représentant les dérivations de Hasse-Schmidt.) Au milieu du XVIIIe siècle, les mathématiciens ont commencé à associer aux équations différentielles, la notion de champ de vecteurs (et par dualité celle de 1-formes différentielles). Le mathématicien français Alexis Claude Clairaut étudie en détail les 1-formes différentielles en dimension 2 (voir [**9, 10**]). Dans les années 30, le mathématicien allemand Erich Kähler introduit la notion de module des différentielles (actuellement connu sous le nom de module des différentielles de Kähler) d'une algèbre A sur un corps k de caractéristique nulle. Kähler définit ce module noté $\Omega^1_{A/k}$ dans le but de fournir un objet algébrique universel. La structure du module des différentielles de Kähler rend compte de certaines propriétés de A sur k. En effet, le critère classique du jacobien montre que A est une k-algèbre lisse si et seulement si $\Omega^1_{A/k}$ est un A-module projectif. Le *module des dérivations* $\mathrm{Der}_k(A)$ se définit comme le dual de $\Omega^1_{A/k}$ au sens suivant :

$$\mathrm{Der}_k(A) \simeq \mathrm{Hom}_A\left(\Omega^1_{A/k}, A\right).$$

Évidemment, la structure algébrique du A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ est notamment liée à la régularité de A. Dans ce type de problématique, la question centrale est probablement la conjecture de Zariski-Lipman [**41**] qui prédit la relation suivante :

***Conjecture* (Zariski-Lipman).** — *Soient k un corps de caractéristique nulle et A une k-algèbre de type fini. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A tel que $\mathrm{Der}_k(A)_{\mathfrak{p}}$ est libre alors $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau régulier.*

Joseph Lipman montre que sous les conditions de la conjecture ci-dessus, l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est au moins normal, et établit donc la validité de cette conjecture en dimension 1. Hubert Flenner démontre cette conjecture pour les variétés dont le lieu singulier est de codimension au moins 3 [**22**]. En 2001, Rolf Källström démontre la conjecture de Zariski-Lipman pour les intersections complètes [**37**]. Récemment de nombreux auteurs ont fourni une preuve de cette conjecture dans des cas particuliers, notamment Stéphane Druel[**17**], Patrick Graf et Sàndor J. Kovàcs [**25, 26**]. Cependant, la conjecture de Zariski-Lipman reste en général et à notre connaissance un problème ouvert pour les algèbres de type fini sur un corps de caractéristique nulle.

Cette thèse porte sur l'interaction entre l'étude des singularités des courbes algébriques planes, le schéma des arcs et le module des dérivations. Nous allons maintenant présenter les résulats que nous avons obtenus dans le cadre de ce travail.

Le chapitre 1 traite d'un résultat de Ellis Robert Kolchin classique en algèbre différentielle qui s'utilise dans l'étude de la topologie du schéma des arcs (théorème 1.10.1).

Théorème. — *Si X est une variété algébrique intègre, alors le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est irréductible.*

Dans ce chapitre, nous reprenons les méthodes que Kolchin a introduit dans son ouvrage [**39**] en géométrisant certains énoncés dans le langage de la géométrie algébrique moderne.

Nous fournissons en outre une petite amélioration que l'on peut considérer comme un « théorème de Kolchin avec conditions initiales » en référence au théorème de Cauchy-Lipschitz. Précisément, nous prouvons le résultat suivant (théorème 1.12.3) :

Théorème. — *Soit m un entier naturel. Soient X une k-variété algébrique réduite et S une sous-variété de l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X. Supposons que (X, X_{sing}) admette une résolution des singularités plongée. Le nombre de composantes irréductibles du sous-schéma réduit $\pi_{X,m}^{-1}(S)_{\text{red}}$ est fini.*

Cet énoncé est probablement connu des spécialistes, mais sa preuve est, à notre connaissance, absente de la littérature.

La question suivante est au cœur du chapitre 2 :

Question. — *Soit $X = \text{Spec}(A)$ une courbe algébrique plane définie sur un corps k de caractéristique 0. Existe-t-il un algorithme pour calculer un système minimal de générateurs du A-module $\text{Der}_k(A)$ des k-dérivations de X ?*

Cette question en apparence totalement élémentaire est difficile et ne possède pas de réponse générale connue. Dans ce chapitre, nous menons une étude algébrique de la question et obtenons différents résulats que nous détaillons ci-dessous. Tout d'abord, nous montrons le résultat suivant dans la section 2.4 (théorème 2.3.4) :

Théorème. — *Soit f un polynôme non constant de $k[x,y]$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Un système minimal de générateurs du module des k-dérivations de A est constitué d'au plus deux dérivations ; exactement deux si la courbe $\text{Spec}(A)$ est singulière.*

Ce théorème est probablement connu des spécialistes de la question et traduit la relation entre singularités de courbes algébriques affines planes et module des dérivations. Sa preuve utilise le théorème de Buchsbaum-Eisenbud que nous énonçons en section 2.2 (théorème 2.2.6). La section 2.5 définit les différentes classes de dérivations (dérivations naturelles et dérivations exceptionnelles) d'une courbe. Nous y présentons la dérivation résultante introduite par Olivier Ripoll, dans sa thèse et qui constitue, en géométrie textile (donc dans un tout autre domaine que celui de ce chapitre), une observation intéressante. Nous l'utiliserons ici pour décrire le module des dérivations de certaines classes de courbes. Dans la section 2.6 nous établissons le lien entre le module des dérivations de la courbe algébrique affine $X = \text{Spec}(k[x,y]/\langle f\rangle)$ et l'idéal conducteur $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle : \partial_y(f))$ (lemme 2.5.2). Ceci nous permet de fournir un algorithme général de calcul d'un système de générateurs du module $\text{Der}_k(k[x,y]/\langle f\rangle)$, *via* la théorie des bases de Gröbner. Cette méthode ne donne pas *a priori* de système minimal, mais *un* système de générateurs complètement calculable. Les sections suivantes présentent quelques classes de courbes pour lesquelles nous avons l'égalité

$$J = \langle g_0, f, \partial_x(f)\rangle,$$

où g_0 est le générateur de l'idéal d'élimination $J \cap k[y]$. Enfin, nous répondons positivement à la question précédente pour quelques classes de courbes en produisant un algorithme sur la base de l'étude précédemment menée. Le théorème ci-dessous résume la section 2.6.

Théorème. — *La question 1 admet une réponse positive pour toute courbe plane X appartenant à l'une des classes suivantes :*

1. *Les courbes planes lisses ;*

2. *les courbes planes définies par un polynôme de degré au plus 2 en l'une des variables ;*
3. *les courbes planes définies par un polynôme quasi-homogène.*

Le chapitre 3 est une conséquence des calculs et méthodes obtenus au chapitre 2. Le résultat principal est le suivant :

Théorème. — *soit $d \geq 4$ un entier ; soit $\mathscr{W}$ un germe de d-tissu du plan complexe, incomplet et quasi-homogène, alors $\mathscr{W}$ est linéarisable (*i.e.*, il existe un difféomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans lui-même qui transforme, simultanément, les d feuilles du tissu $\mathscr{W}$ en d germes de droites analytiques).*

Pour arriver à cela, nous commençons par définir la notion de germe de tissu et présentons dans la section 3.2 quelques exemples de tissus du plan dont notamment les tissus associés à une équation différentielle, point de vue largement développé par Alain Hénaut. Le théorème 3.3.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour que le 3-tissu $\mathscr{W}(x, y, f(x, y))$ soit linéaire. Dans la section 3.3 nous présentons un théorème fondamental d'Alain Hénaut et finissons ce chapitre par la démonstration de son résultat principal (théorème 3.4.2).

Le chapitre 4 fait le lien entre l'étude du module des dérivations d'une courbe algébrique affine plane (menée au chapitre 2) et les nilpotents non triviaux du schéma des arcs tracés sur une courbe. Il se fonde sur les deux problèmes suivants :

1. Trouver un algorithme permettant de tester si une fonction arbitraire du schéma des arcs associés à une courbe plane définie sur un corps de caractéristique 0 est ou non nilpotente (le schéma des arcs est un objet non de type fini en général ; la question n'est donc pas élémentaire) ;
2. Étudier dans ce cadre la propriété de réduction du schéma des arcs en fonction de la géométrie de la courbe dont on est parti.

Le chapitre contient une réponse explicite à ces deux problèmes dont un code sous SAGE très efficace pour le premier problème. Le résultat du deuxième problème utilise un travail de Reguera [**52**, lemme 2.7], qui permet d'introduire une filtration $(\mathcal{N}_{n,n}(f))_{n\in\mathbf{N}}$ « de type fini » de l'idéal des fonctions nilpotentes du schéma des arcs associé à la courbe $X = \mathrm{Spec}(k[x, y]/\langle f\rangle)$, voir section 4.3. (Rappelons que le schéma des arcs associés à une courbe plane n'est jamais un objet de type fini). Nous étudions cette filtration et obtenons au §5 une description des éléments de $\mathcal{N}_{1,1}(f)$. Cette étude permet premièrement d'étendre le résultat principal de l'article [**58**] de Julien Sebag à tout corps de caractéristique nulle et de démontrer la conjecture de Sebag pour les courbes planes, à savoir la suivante :

***Conjecture* (Sebag, 2011)**. — *Soit X une courbe algébrique sur un corps k de caractéristique nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La courbe X est lisse ;*
2. *Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est réduit ;*
3. *Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est irréductible ;*
4. *Le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est réduit.*

Notre méthode associe une fonction nilpotente à la donnée d'une dérivation exceptionnelle. En ce sens, l'étude menée au chapitre 2 permet de produire un grand nombre d'exemples explicites de fonctions nilpotentes de ce type. La proposition d'une méthode explicite revêt un caractère totalement nouveau pour la construction des nilpotents. Par

ailleurs, cette étude permet également de présenter un algorithme que nous avons implémenté, appelé *S-algorithme*. Le S-algorithme associe à tout polynôme différentiel P la forme spéciale $S(P)$ de P. Le théorème 4.3.16 établit une condition nécessaire et suffisante pour que P soit nilpotent. Le schéma des arcs n'étant pas de type fini en général, il n'est à notre connaissance pas aisé de trouver une méthode qui s'applique directement. Le S-algorithme pallie à ce problème.

Théorème. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et f un polynôme irréductible de A. Soit P un polynôme différentiel de $k\{x,y\}$. Le polynôme P appartient à l'idéal différentiel réduit $\{f\}$ si et seulement si $\mathrm{S}(P)$ appartient à $\langle f\rangle \cdot A\{y\}$.*

Le chapitre 5 introduit le formalisme des fonctions zêta motiviques d'une 1-forme locale analogues des fonctions zêta de Denef et Loeser que l'on associe, en analogie aux travaux de Jun-Ichi Igusa, aux hypersurfaces des variétés algébriques. En effet, soient k un corps et x un point fermé d'une k-variété X. Soient U un ouvert de X contenant x et ω une 1-forme non triviale sur U. La *fonction zêta motivique locale* $Z_{\omega,x}(T)$ de ω au point x est la série formelle suivante :

$$Z_{\omega,x}(T) = \sum_{n\geq 1}\left[\pi_{n+1,X}\left(\mathrm{ord}_{\omega,x}^{-1}(n)\right)\cap\left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(x)\right]\mathbb{L}^{-n}T^{n} \in \mathcal{M}_k[[T]].$$

La définition est locale et ne dépend que du germe analytique ou formelle de la 1-forme différentielle. Nous étudions quelques exemples de tels objets dont nous calculons les expressions explicites, en vue de l'étude de leur rationalité (voir proposition 5.5 ; section 5.5). Ce travail qui étend les idées algébriques usuelles au champ différentiel, mêle germes de feuilletages et motifs virtuels. Il se généralise naturellement à un nombre fini de germes de feuilletages, donc aux tissus.

Enfin, un dernier chapitre est consacré à mes perspectives de recherche, qui s'articulent autour des différents thèmes précédemment mentionnés.

Ce travail contient trois annexes qui rappellent d'une part, les notions de base d'algèbre différentielle, la définition des espaces des jets et du schéma des arcs tracés sur une variété et quelques propriétés que nous utilisons et d'autre part, les algorithmes sur SAGE et MAPLE utilisés dans notre travail.

CHAPITRE 1

THÉORÈME D'IRRÉDUCTIBILITÉ DE KOLCHIN DIFFÉRENTIEL ET UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE RITT-RAUDENBUSH

Dans ce chapitre introductif, nous donnons une preuve dans le formalisme du langage de la géométrie algébrique affine moderne d'un théorème de Kolchin portant sur la décomposition irréductible des idéaux différentiels engendrés par des idéaux algébriques. Notre preuve s'appuie essentiellement sur le résultat suivant (lemme 1.10.14) qui est une géométrisation du corollaire 3 page 45 du livre de Kolchin [**39**] :

Soient k un corps de caractéristique nulle et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soient X un schéma affine intègre de type fini plongé dans $\mathbb{A}_k^n$ et f un polynôme irréductible non constant de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que si $V(f)$ désigne l'hypersurface définie par f dans $\mathbb{A}_k^n$ on ait :

$$X \cap V(f) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad X \nsubseteq V(f).$$

Pour tout point x de $X\left(\overline{k}\right)$, il existe un arc tracé sur X passant par x et qui envoie le point générique du schéma affine $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ *dans l'ouvert $X \setminus V(f)$.*

Le résultat ci-dessus est une extension du lemme de Ishii [**36**, Lemme 2.12] aux sous-variétés fermées propres de X. Par ailleurs, nous fournissons une preuve géométrique d'une généralisation du théorème de la base de Ritt-Raudenbush.

Ce chapitre contient un rappel des notions nécessaires au développement de notre preuve. Nous renvoyons aux annexes pour les définitions de base d'algèbre différentielle et pour un rappel des notions d'espace de jets et de schéma des arcs tracés sur une variété algébrique.

1.1. Notations et conventions

1. Tout anneau sera commutatif unitaire.
2. La lettre k désignera un corps différentiel et K une extension différentielle de corps de k.
3. On notera $\mathbb{A}_k^n$ l'espace affine de dimension n sur k.
4. Soit $\mathcal{A}$ un anneau intègre. On notera par $\operatorname{Frac}(\mathcal{A})$ le corps des fractions de $\mathcal{A}$.
5. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Le symbole δ désignera toujours une dérivation de $\mathcal{A}$.
6. On notera par Δ un ensemble fini de dérivations.
7. On notera Θ le semi-groupe libre engendré par les éléments de Δ.
8. On notera par $\Theta(s)$ l'ensemble des éléments de Θ d'ordre inférieur ou égal à s.
9. Soit P un polynôme. Le terme dominant de P sera noté μ_P.
10. L'initial de P sera noté I_P.

11. Le séparant de P sera noté S_P.
12. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de polynômes. On notera par $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}$ le produit $\prod_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{I}_P\mathrm{S}_P$.
13. L'idéal $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} ((\mathcal{A}) \ : \ H^s_{\mathcal{A}})$ sera noté $((\mathcal{A}) \ : \ \mathrm{H}^{\infty}_{\mathcal{A}})$.
14. Soient k un corps différentiel et Σ une famille d'éléments de k. Si k_0 est un sous-corps différentiel de k, on notera $k_0\{\Sigma\}$ l'anneau différentiel engendré par Σ sur k_0.
15. Le corps différentiel engendré par Σ sur k_0 sera noté $k_0\langle\Sigma\rangle$.
16. Soit f un polynôme non constant de $k[x_1, ..., x_n]$. On notera $V(f)$ l'hypersurface définie par f dans $\mathbb{A}^n_k$.
17. Soit X un schéma. L'anneau local de X en x sera noté $\mathcal{O}_{X,x}$.
18. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ sera noté $\mathfrak{M}_x$.
19. Soit m un entier naturel. L'espace des m-jets de X sera noté $\mathscr{L}_m(X)$.
20. On notera $\mathscr{L}(X)$ le schéma des arcs tracés sur X.

1.2. Classement

1.2.1. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Supposons que la famille x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. On notera $\mathbf{x_{i,j}}$ **la dérivée d'ordre j de l'indéterminée différentielle** $\mathbf{x_i}$ **et** $\mathbf{k\{x_1, \ldots, x_n\}}$ **l'anneau des polynômes différentiels en n indéterminées différentielles à coefficients dans k.**

1.2.2. Par ailleurs, on définit une relation d'ordre total [1] sur les indéterminées différentielles $x_1, \ldots, x_n$ et leurs dérivées en posant :

1. $x_i < x_j \quad \forall\, i < j$.
2. $x_{i,j} < x_{i,j+k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
3. $x_{i,j} < x_{l,k} \Longrightarrow x_{i,j+s} < x_{l,k+s} \quad \forall\, s \in \mathbb{N}$.

La relation d'ordre total ainsi définie est appelée *classement*.

Remarque 1.2.1. —
1. Un classement existe toujours sur l'ensemble des indéterminées différentielles et leurs dérivées [**39**, chapitre 0, section 17, lemme 15].
2. La notion de classement est l'analogue différentiel de la notion d'ordre monomial algébrique que nous définirons dans le deuxième chapitre.

1.3. Ordre

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K telle que x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Fixons un classement sur les indéterminées différentielles et leurs dérivées. Soit P un polynôme différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle *ordre* de P relativement à l'indéterminée différentielle x_k et on note $\mathrm{ord}_{x_k}(P)$, l'ordre de dérivation maximal de x_k apparaissant *effectivement* dans l'expression de P. Lorsque les indéterminées différentielles x_k et toutes leurs dérivées n'apparaissent pas *effectivement* dans l'expression du polynôme différentiel P, on dit que l'ordre de P est égal à -1.

1. Une relation d'ordre total sur un ensemble E est une relation d'ordre pour laquelle tout élément de E est comparable avec tout autre élément de E.

Exemple 1.3.1. — Soit $f = x_{1,2} + 2x_{2,3}^2 x_{3,4}$ un polynômes différentiels de $k\{x_1, x_2, x_3\}$. On a :

$$\mathrm{ord}_{x_1}(f) = 2,\ \mathrm{ord}_{x_2}(f) = 3 \text{ et } \mathrm{ord}_{x_3}(f) = 4.$$

1.4. Terme dominant, initial et séparant

Nous précisons dans cette section la définition de la notion de terme dominant, d'initial et de séparant d'un polynôme différentiel.

1.4.1. Soit P un polynôme différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Fixons un classement sur les indéterminées différentielles et leurs dérivées. On appelle *terme dominant* du polynôme différentiel P et on note μ_P, la plus grande dérivée (relativement au classement fixé) $x_{i,j}$ *effectivement* présente dans l'expression de P. On appellera *degré* du polynôme différentiel P et on notera $\deg(P)$, le degré de P comme polynôme en l'indéterminée μ_P. Le coefficient du terme dominant du polynôme différentiel P (dans l'expression de ce dernier) sera appelé *initial* de P et noté I_P. Enfin, la dérivée partielle du polynôme différentiel P par rapport à son terme dominant sera appelée *séparant* de P et notée S_P.

Remarque 1.4.1. — Les notions de terme dominant, de degré, d'initial et de séparant sont des notions relatives. Elles dépendent du classement choisi. En effet, soient x_1, x_2 et x_3 trois indéterminées différentielles sur k. Donnons-nous les deux classements suivants :

$$x_1 < x_{1,1} < x_{1,2} < \cdots < x_2 < x_{2,1} < x_{2,2} < \cdots < x_3 < x_{3,1} < x_{3,2} < \cdots \tag{1}$$

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_{1,1} < x_{2,1} < x_{3,1} < x_{1,2} < x_{2,2} < x_{3,2} < \cdots \tag{2}$$

Soit P le polynôme différentiel de $k\{x_1, x_2, x_3\}$ défini par $P = x_{1,1}x_{2,2} + x_1x_2x_3^2 - 2x_1$. Nous avons par rapport au classement (1)

$$\begin{cases} \deg(P) = 2, \\ \mu_P = x_3, \\ \mathrm{I}_P = x_1x_2, \\ \mathrm{S}_P = 2x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Par rapport au classement (2), nous avons :

$$\begin{cases} \deg(P) = 1, \\ \mu_P = x_{2,2}, \\ \mathrm{I}_P = x_{1,1}, \\ \mathrm{S}_P = x_{1,1}. \end{cases}$$

Dans toute la suite, sauf mention spéciale, nous considérons sans forcément le préciser le classement (1), *i.e.* celui pour lequel pour toute famille $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})$ de $\mathbf{K}$ telle que $\mathbf{x}$ soit une famille d'indéterminées différentielles sur $\mathbf{k}$, on a :

$$\mathbf{x_1 < x_{1,1} < x_{1,2} < \cdots < x_2 < x_{2,1} < x_{2,2} < \cdots < x_n < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots}$$

1.5. Comparaison des polynômes différentiels : rang

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Supposons que la famille x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Soient P et Q deux polynômes différentiels de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. On dit que le *rang* de P est supérieur à celui de Q et on note

$$\mathrm{rg}\,(P) > \mathrm{rg}\,(Q)\,,$$

si et seulement si le terme dominant μ_Q de Q est inférieur au terme dominant μ_P de P ou si les polynômes différentiels P et Q ont le même terme dominant et le degré de Q est inférieur à celui de P. Si les polynômes différentiels P et Q ont le même terme dominant et le même degré, alors on dit qu'ils ont le même rang.

Exemple 1.5.1. — Soient $P = 2x_1 - 3x_2x_{3,2}^4$ et $Q = x_2 + 4x_{3,2}$ deux polynômes différentiels de $k\{x_1, x_2, x_3\}$. Nous avons :

$$\mathrm{rg}\,(P) > \mathrm{rg}\,(Q)\,.$$

En effet,

$$\begin{cases} \mu_P = \mu_Q = x_{3,2}, \\ \text{et} \\ \deg\,(Q) = 1 < \deg\,(P) = 4. \end{cases}$$

1.6. Ensemble auto-réduit

Nous présentons dans cette section la notion d'ensemble auto-réduit et une caractérisation de cette dernière.

1.6.1. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Supposons que x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Soit P un polynôme différentiel non constant de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Un polynôme différentiel Q de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ est dit *partiellement réduit* par rapport à P, si le polynôme différentiel Q ne contient aucune dérivée propre (d'ordre supérieur à 0) du terme dominant μ_P de P. Si de plus le degré en l'indéterminée μ_P du polynôme différentiel Q est inférieur au degré de P, alors le polynôme différentiel Q est dit *réduit* par rapport à P. Plus généralement, soit Λ une famille de polynômes différentiels non constants de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Le polynôme différentiel Q est dit partiellement réduit (resp. réduit) par rapport à Λ si et seulement s'il est partiellement réduit (resp. réduit) par rapport à tous les polynômes différentiels de Λ.

Exemple 1.6.1. — Considérons les polynômes différentiels P et Q de l'exemple précédent : $P = 2x_1 - 3x_2x_{3,2}^4$ et $Q = x_2 + 4x_{3,2}$. Le polynôme différentiel Q est réduit par rapport au polynôme différentiel P. Cependant, le polynôme différentiel P est partiellement réduit par rapport au polynôme différentiel Q mais non réduit par rapport à ce dernier puisqu'ils ont le même terme dominant et le degré de Q est inférieur à celui de P.

Remarque 1.6.2. — Le fait que le polynôme différentiel Q soit partiellement réduit par rapport au polynôme différentiel P n'interdit pas qu'ils aient le même terme dominant. Cela signifie simplement que si $\mu_P = x_{i,\upsilon}$ est le terme dominant de P, alors le polynôme différentiel Q ne contient pas dans son expression une dérivée de l'indéterminée différentielle x_i d'ordre supérieur à υ. En effet, pour $P = 2x_1 - 3x_2x_{3,2}^4$ et $Q = x_2 + 4x_{3,2}$, nous avons Q partiellement réduit par rapport à P avec $\mu_P = \mu_Q = x_{3,2}$.

1.6.2. Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de polynômes différentiels non constants de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ sera dit *auto-réduit* si tout polynôme différentiel de $\mathcal{A}$ est réduit par rapport à tous les autres polynômes différentiels de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, on notera $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}$ le produit $\prod_{P \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_P \mathrm{S}_P$.

Exemple 1.6.3. — Soient $P_1 = x_{1,2} + 2x_{2,3}^2 x_{3,4}$, $P_2 = 3x_{3,1} - x_{4,1}$ et $P_3 = 5x_{1,3}x_{5,2}$ trois polynômes différentiels de $k\{x_1, \ldots, x_5\}$. L'ensemble $\mathcal{A} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est un ensemble auto-réduit de $k\{x_1, \ldots, x_5\}$. En effet, le terme dominant de chacun des polynômes différentiels P_i est la dérivée d'une indéterminée différentielle différente.

Remarque 1.6.4. — La notion d'ensemble auto-réduit a été introduite par Joseph Fels Ritt dans [**56**] sous le nom de « Chaîne ».

1.6.3. La proposition 1.6.5 ci-dessous établit une caractéristique des ensembles auto-réduits.

***Proposition 1.6.5* (Kolchin, 1973).** — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Si la famille x est une famille d'indéterminées différentielles sur k, alors tout ensemble auto-réduit de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ est de cardinal fini.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{A}$ un ensemble auto-réduit de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ de cardinal supérieur à 2. Soient P et Q deux polynômes différentiels distincts de $\mathcal{A}$. Supposons que le terme dominant μ_P de P est $x_{i,j}$. Par définition de l'ensemble $\mathcal{A}$, nous avons

$$\mu_Q \neq x_{i,m} \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $\mu_Q = x_{i,m}$, nous avons l'un des quatre cas suivants :

1. Soit $m < j$ et alors le polynôme différentiel P contiendrait dans son expression une dérivée propre du terme dominant de Q. Par conséquent, le polynôme différentiel P ne serait pas partiellement réduit par rapport à Q.
2. Soit $m > j$ et dans ce cas le polynôme différentiel Q contiendrait dans son expression une dérivée propre du terme dominant de P. Alors, le polynôme différentiel Q ne serait pas partiellement réduit par rapport à P.
3. Soit $m = j$ et $\deg(P) \leq \deg(Q)$, alors le polynôme différentiel Q ne serait pas réduit par rapport à P.
4. Soit $m = j$ et $\deg(P) > \deg(Q)$, alors le polynôme différentiel P ne serait pas réduit par rapport à Q.

Par conséquent, si $\mu_P = x_{i,j}$, nous avons $\mu_Q = x_{l,m}$ avec $i \neq l$. D'où, le cardinal de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est au plus n. □

La proposition 1.6.5 donne lieu en particulier au corollaire suivant :

Corollaire 1.6.6. — *Soit x un élément de K. Si l'élément x est une indéterminée différentielle sur k, alors tout ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ de $k\{x\}$ est de cardinal* 1.

Démonstration. — L'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est un ensemble fini d'après la proposition 1.6.5. On note $\mathrm{card}(\mathcal{A})$ le cardinal de $\mathcal{A}$. Si $\mathrm{card}(\mathcal{A}) \geq 2$, l'ensemble $\mathcal{A}$ ne peut être auto-réduit d'après la preuve de la proposition 1.6.5. □

1.7. Algorithme de réduction de Ritt

La proposition 1.7.1 présente l'algorithme de réduction de Ritt. Cet algorithme joue dans le processus de réduction des polynômes différentiels un rôle analogue à celui de la division euclidienne dans le processus de réduction des polynômes algébriques.

***Proposition 1.7.1* (Ritt, 1932).** — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Si la famille x est une famille d'indéterminées différentielles sur k, alors pour tout ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ et tout polynôme différentiel Q de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$, il existe un polynôme différentiel Q_0 de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ réduit par rapport à $\mathcal{A}$, appelé* le reste *de Q par rapport à $\mathcal{A}$ et deux familles d'entiers naturels non nuls $(s_P)_{P\in\mathcal{A}}$ et $(i_P)_{P\in\mathcal{A}}$ tels que*

$$\prod_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{I}_P^{i_P} \mathrm{S}_P^{s_P} \cdot Q \equiv Q_0 \bmod [\mathcal{A}] .$$

Autrement dit, il existe un polynôme différentiel Q_0 tel que le polynôme différentiel

$$\prod_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{I}_P^{i_P} \mathrm{S}_P^{s_P} \cdot Q - Q_0$$

s'écrive comme combinaison linéaire des dérivées θA_i des éléments A_i de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ avec $\theta\mu_{A_i}$ inférieur au terme dominant du polynôme différentiel Q.

L'algorithme de réduction de Ritt s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1.7.2. — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K telle que la famille x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Pour tout ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour tout polynôme différentiel Q de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$, il existe un polynôme différentiel $\widetilde{Q}$ de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ de rang inférieur ou égal à celui de Q, partiellement réduit par rapport à $\mathcal{A}$, appelé* le reste partiel *de Q par rapport à $\mathcal{A}$ et une famille d'entiers naturels non nuls $(s_P)_{P\in\mathcal{A}}$ tels que :*

$$\prod_{P\in\mathcal{A}} S_P^{s_P} \cdot Q \equiv \widetilde{Q} \bmod [\mathcal{A}] .$$

Autrement dit, il existe un polynôme différentiel $\widetilde{Q}$ tel que le polynôme différentiel

$$\prod_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{I}_P^{i_P} \mathrm{S}_P^{s_P} \cdot Q - \widetilde{Q}$$

s'écrive comme combinaison linéaire des dérivées θA_i des éléments A_i de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ avec $\theta\mu_{A_i}$ inférieur au terme dominant du polynôme différentiel $\widetilde{Q}$.

Démonstration. — Si le polynôme différentiel Q est partiellement réduit par rapport à l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$, le lemme est trivial puisqu'il suffira de prendre :

$$\widetilde{Q} = Q \quad \text{et} \quad s_P = 0 \quad \forall\, P \in \mathcal{A}.$$

Sinon, le polynôme différentiel Q contient effectivement dans son expression au moins une dérivée propre du terme dominant d'un polynôme différentiel de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$. Soit u la plus grande dérivée parmi toutes les dérivées des termes dominants des polynômes différentiels de $\mathcal{A}$ effectivement présentes dans l'expression de Q. Supposons que le lemme soit vrai pour tout polynôme différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ ne contenant pas dans son expression une dérivée du terme dominant d'un élément de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ supérieure ou égale à u. Soit μ_P le plus grand parmi les termes dominants des polynômes

différentiels de $\mathcal{A}$ dont u est une dérivée propre. Soit d le degré du polynôme différentiel P. Nous pouvons écrire P sous la forme :

$$P = \mathrm{I}_P \mu_P^d - P_1,$$

avec P_1 un polynôme différentiel tel que $\mathrm{rg}\,(P_1) < \mathrm{rg}\left(\mu_P^d\right)$. Posons $u = \theta\mu_P$. Il existe un polynôme différentiel T_1 ne contenant pas u dans son expression tel que :

$$\theta P = \mathrm{S}_P \theta \mu_P - T_1 = \mathrm{S}_P u - T_1.$$

Posons $t = \deg_u(Q)$. Nous pouvons écrire le polynôme différentiel Q sous la forme suivante :

$$Q = Ju^t + Q_1$$

avec J un polynôme différentiel ne contenant pas u dans son expression et Q_1 un polynôme différentiel tel que $\deg_u(Q_1) < t$. En multipliant le polynôme différentiel Q par S_P^t nous obtenons :

$$\mathrm{S}_P^t Q = J\left(\mathrm{S}_P u\right)^t + \mathrm{S}_P^t Q_1 = J\left(\theta P + T_1\right)^t + \mathrm{S}_P^t Q_1.$$

D'où

$$\mathrm{S}_P^t Q \equiv JT_1^t + T \bmod [\theta P] \quad \text{avec} \quad T \equiv \mathrm{S}_P^t Q_1 \bmod [\theta P].$$

Le polynôme différentiel $F = JT_1^t + T$ ne contient pas effectivement dans son expression une dérivée de μ_P supérieure ou égale à u. Alors, par hypothèse, le reste partiel $\widetilde{F}$ de F et les entiers naturels $(l_R)_{R\in\mathcal{A}}$ tels que : $\prod_{R\in\mathcal{A}} \mathrm{S}_R^{l_R} \cdot F \equiv \widetilde{F} \bmod [\mathcal{A}]$ existent. Il suffit donc de poser

$$\widetilde{Q} = \widetilde{F},\ s_P = l_P + t,\ \text{et}\ s_R = l_R\ \forall\ R \in \mathcal{A} \setminus P.$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons maintenant présenter la preuve de l'algorithme de Ritt.

Algorithme de Ritt. — Le lemme 1.7.2 montre qu'il existe des entiers naturels $(s_P)_{P\in\mathcal{A}}$ et un polynôme différentiel partiellement réduit par rapport à l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ tels que

$$\prod_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{S}_P^{s_P} \cdot Q \equiv \widetilde{Q} \bmod [\mathcal{A}].$$

Soit $P = \mathrm{I}_P \mu_P^{d_1} + P_0$ avec $\deg_{\mu_P}(P_0) < d_1$, le polynôme différentiel de rang maximal de $\mathcal{A}$ (P existe puisque l'ensemble $\mathcal{A}$ est de cardinal fini). Posons $e_1 = \deg_{\mu_P}\left(\widetilde{Q}\right)$. Nous pouvons écrire le polynôme différentiel $\widetilde{Q}$ sous la forme suivante : $\widetilde{Q} = Q_1\mu_P^{e_1} + Q_2$, où $Q_1,\ Q_2$ sont deux polynômes différentiels tels que Q_1 ne contienne pas μ_P dans son expression et $\deg_{\mu_P}(Q_2) < e_1$. Nous définissons l'entier naturel i_P comme suit : si $e_1 < d_1$, $i_P = 0$, et si $e_1 \geq d_1$, on pose $i_P = e_1 - d_1 + 1$. En multipliant le polynôme différentiel $\widetilde{Q}$ par $\mathrm{I}_P^{i_P}$ nous obtenons :

$$\mathrm{I}_P^{i_P} \cdot \widetilde{Q} \equiv \widetilde{Q}_P \bmod [P].$$

Le polynôme différentiel $\widetilde{Q}_P$ est partiellement réduit par rapport à $\mathcal{A}$ et de degré inférieur à celui de P.

Soit F le polynôme différentiel de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ de rang supérieur à celui de tous les polynômes différentiels de ce dernier excepté P. Posons $\deg(F) = d_2$ et $e_2 = \deg_{\mu_F}\left(\widetilde{Q}_P\right)$. Nous pouvons écrire $\widetilde{Q}_P$ sous la forme suivante : $\widetilde{Q}_P = Q_3\mu_Q^{e_2} + Q_4$, où $Q_3,\ Q_4$ sont deux polynômes différentiels tels que Q_3 ne contienne pas μ_F dans son expression et $\deg_{\mu_F}(Q_4) < e_2$. Nous définissons l'entier naturel i_F comme suit : si $e_2 < d_2$, $i_F = 0$, et si

$e_2 \geq d_2$, on pose $i_F = e_2 - d_2 + 1$. En multipliant le polynôme différentiel $\widetilde{Q}_P$ par $\mathrm{I}_F^{i_F}$ nous obtenons :

$$\mathrm{I}_F^{i_F} \cdot \widetilde{Q}_P \equiv \widetilde{Q}_F \bmod [F]$$

Le polynôme différentiel $\widetilde{Q}_F$ est partiellement réduit par rapport à l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ et de degré inférieur à celui de F.

Ainsi de suite, nous définissons les entiers i_R et les polynômes différentiels $\widetilde{Q}_R$ pour tout polynôme différentiel R de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ tels que : $\widetilde{Q}_R$ soit partiellement réduit par rapport à $\mathcal{A}$ et de degré inférieur au degré de R. Ainsi, nous obtenons :

$$\prod_{T \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_T^{i_T} \mathrm{S}_T^{s_T} \cdot Q \equiv \prod_{T \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_T^{i_T} \cdot \widetilde{Q} \equiv Q_0 \bmod [\mathcal{A}] \,.$$

Ce qui achève la preuve. □

1.8. Comparaison d'ensembles auto-réduits

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'indéterminées différentielles sur k. Nous définissons un pré-ordre [2] sur l'ensemble des sous-ensembles auto-réduits de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ comme suit : soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-ensembles auto-réduits de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Notons $P_1, \ldots, P_r$ les éléments de $\mathcal{A}$ et $Q_1, \ldots, Q_s$ ceux de $\mathcal{B}$ classés par ordre croissant relativement à leur *rang*. On dit que *le rang* de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est inférieur à celui de $\mathcal{B}$ s'il existe un entier naturel non nul l avec $l \leq \min\{s,\ r\}$ tel que :

$$\mathrm{rg}\,(P_i) = \mathrm{rg}\,(Q_i)\,,\ 1 \leq i < l,\ \text{et}\ \ \mathrm{rg}\,(P_l) < \mathrm{rg}\,(Q_l) \tag{3}$$

ou si

$$s < r \ \ \text{et}\ \ \mathrm{rg}\,(P_i) = \mathrm{rg}\,(Q_i) \quad 1 \leq i \leq s \quad . \tag{4}$$

Si $r = s$ et $\mathrm{rg}\,(P_i) = \mathrm{rg}\,(Q_i)$, alors nous disons que les ensembles auto-réduits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont le même *rang*.

Exemple 1.8.1. — Soient $P_1 = x_1 + 2x_{1,2}$, $P_2 = 1 - x_{1,1}x_{2,3}$, $Q_1 = 2 + x_{1,2}$, $Q_2 = x_1 - x_{2,2}^2$, et $Q_3 = x_{3,1} + x_4$ des polynômes différentiels de $k\{x_1, \ldots, x_4\}$. Posons $\mathcal{A} = \{P_1, P_2\}$ et $\mathcal{B} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont auto-réduits et le rang de $\mathcal{B}$ est inférieur à celui de $\mathcal{A}$. En effet :

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\,(Q_1) & = & \mathrm{rg}\,(P_1) \\ \\ \mathrm{rg}\,(Q_2) & < & \mathrm{rg}\,(P_2) \end{array}\right\} \ \text{alors}\ \mathrm{rg}\,(\mathcal{A}) < \mathrm{rg}\,(\mathcal{B}) \quad \text{par}\ \ (3)\,.$$

1.9. Ensemble caractéristique

Cette section est consacrée à la définition et à l'étude de quelques propriétés des ensembles caractéristiques. Pour tout ce qui suit on pourra se référer à [**39**] et à [**56**] .

2. relation binaire réflexive et transitive.

1.9.1. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'indéterminées différentielles sur k et $\mathcal{I}$ un idéal différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle *ensemble caractéristique* de l'idéal différentiel $\mathcal{I}$ tout sous-ensemble auto-réduit de rang minimal de ce dernier.

Exemple 1.9.1. — Soient x et y deux éléments de K. Supposons que les éléments x et y soient des indéterminées différentielles sur k. Donnons-nous un classement pour lequel x soit inférieur à y. Soient $P_1 = 2y - 1$ et $P_2 = x - 1$ deux polynômes différentiels de $k\{x,\ y\}$. Posons $\mathcal{A} = \{P_1, P_2\}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel $([\mathcal{A}]\ :\ \mathrm{H}_{\mathcal{A}})$ puisque tout ensemble auto-réduit de ce dernier a un rang supérieur à celui de $\mathcal{A}$.

Contre-exemple. — Soient x et y deux éléments de K. Supposons que les éléments x et y soient deux indéterminées différentielles sur k. Donnons-nous un classement pour lequel x soit inférieur à y. Soient $P_1 = (x-1)\,y - 1$ et $P_2 = x^2 - 1$ deux polynômes différentiels de $k\{x, y\}$. Posons $\mathcal{A} = \{P_1, P_2\}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel $([\mathcal{A}]\ :\ \mathrm{H}_{\mathcal{A}})$. En effet, si on pose $\mathcal{B} = \{x + 1\}$, nous avons

$$\mathcal{B} \in ([\mathcal{A}]\ :\ \mathrm{H}_{\mathcal{A}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(\mathcal{B}) < \mathrm{rg}\,(\mathcal{A})\,.$$

Remarque 1.9.2. — Si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel $\mathcal{I}$ et Q un polynôme différentiel de $\mathcal{A}$, alors le séparant S_Q de Q n'appartient pas à $\mathcal{I}$. En effet, si le séparant S_Q du polynôme différentiel Q appartient à $\mathcal{I}$, l'ensemble $\{\mathrm{S}_Q\}$ serait un sous-ensemble auto-réduit de $\mathcal{I}$ de rang inférieur à celui de $\mathcal{A}$.

1.9.2. Il n'est pas clair d'après la définition d'un ensemble caractéristique que ce dernier existe. La proposition 1.9.3 ci-dessous fournit la preuve de l'existence d'un ensemble caractéristique pour tout idéal différentiel.

***Proposition 1.9.3* (Kolchin).** — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K. Si la famille x est une famille d'indéterminées différentielles sur k, alors tout ensemble non vide de sous-ensembles auto-réduits de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ admet un élément de rang minimal.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{F} = \{\mathcal{A}_i\}$ un ensemble non vide de sous-ensembles auto-réduits de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soient n_i le cardinal de $\mathcal{A}_i$ et P_{ij} $(1 \leq j \leq n_i)$ les polynômes différentiels de $\mathcal{A}_i$ classés par ordre croissant relativement à leur rang. Nous construisons à partir de $\mathfrak{F}$, un ensemble $\mathfrak{F}_1$ contenant les ensembles auto-réduits $\mathcal{A}_i$ de $\mathfrak{F}$ dont le polynôme différentiel de rang minimal P_{i1} a un rang inférieur ou égal à celui des autres polynômes différentiels P_{j1} :

$$\mathfrak{F}_1 = \{\mathcal{A}_i \in \mathfrak{F} \mid \mathrm{rg}\,(P_{i1}) \leq \mathrm{rg}\,(P_{j1})\ \ \forall\ j\}\,.$$

L'ensemble $\mathfrak{F}_1$ est clairement non vide. Si tous les ensembles auto-réduits de $\mathfrak{F}_1$ sont de cardinal 1, alors tout élément de $\mathfrak{F}_1$ est un ensemble auto-réduit de rang minimal. Sinon, nous construisons un ensemble $\mathfrak{F}_2$ constitué des ensembles auto-réduits $\mathcal{A}_m$ de $\mathfrak{F}_1$ pour lesquels le polynôme différentiel de rang inférieur à celui des autres polynômes différentiels excepté le polynôme différentiel de rang minimal P_{m2}, est de rang inférieur ou égal à celui des autres polynômes différentiels P_{l2} de $\mathfrak{F}_1$:

$$\mathfrak{F}_2 = \{\mathcal{A}_m \in \mathfrak{F}_1 \mid \mathrm{rg}\,(P_{m2}) \leq \mathrm{rg}\,(P_{l2})\ \ \forall\ l\}\,.$$

Si tous les éléments de $\mathfrak{F}_2$ sont de cardinal 2, alors tout ensemble auto-réduit de $\mathfrak{F}_2$ est un ensemble auto-réduit de rang minimal. Sinon, on réitère le procédé. La proposition 1.6.5 montre qu'il y a un nombre fini d'étapes (au plus $\max\limits_i\ n_i$). $\square$

1.9.3. Nous énonçons et démontrons ici une propriété des ensembles caractéristiques utile au développement de la preuve du théorème d'irréductibilité de Kolchin.

***Proposition 1.9.4* (Kolchin, 1973).** — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de K telle que la famille x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble auto-réduit de $\mathcal{I}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de $\mathcal{I}$ si et seulement si ce dernier ne contient aucun polynôme différentiel non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$.*

Démonstration. — En effet, supposons que l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ ne soit pas un ensemble caractéristique. Alors, il existe un ensemble auto-réduit $\mathcal{B} = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$ de rang inférieur à celui de $\mathcal{A}$. Par conséquent, il existe un entier naturel $l \leq s$ tel que Q_l soit un polynôme différentiel non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$ puisque si l'ensemble auto-réduit $\mathcal{B}$ a un rang inférieur à celui de $\mathcal{A}$ par (3), par définition, il existe un entier $l \leq \min\{r,\ s\}$ tel que :

$$\mathrm{rg}\,(Q_i) = \mathrm{rg}\,(P_i)\,,\ i < l \ \text{ et } \ \mathrm{rg}\,(Q_l) < \mathrm{rg}\,(P_l)\,.$$

Ainsi, le polynôme différentiel Q_l est un polynôme différentiel non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$. De même, si le rang de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{B}$ est inférieur à celui de $\mathcal{A}$ par (4), nous avons

$$s > r \ \text{ et } \ \mathrm{rg}\,(Q_i) = \mathrm{rg}\,(P_i)\,, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Dans ce cas, le polynôme différentiel Q_{r+1} est un polynôme différentiel non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$.

Inversement, si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de l'idéal différentiel $\mathcal{I}$ et Q est un polynôme différentiel non nul de $\mathcal{I}$ réduit par rapport à $\mathcal{A}$, nous avons la trichotomie suivante :

1. Soit le rang du polynôme différentiel Q est supérieur à celui du polynôme différentiel P_r, et dans ce cas, l'ensemble auto-réduit $\mathcal{S}_1 = \{P_1, \ldots, P_r,\ Q\}$ a un rang inférieur à celui de $\mathcal{A}$ par (4).
2. Soit il existe $i \leq r$ tel que le rang du polynôme différentiel Q soit inférieur à celui du polynôme différentiel P_i et supérieur à celui du polynôme différentiel P_{i-1}, alors l'ensemble auto-réduit $\mathcal{S}_2 = \{P_1, \ldots, P_{i-1}, Q\}$ a un rang inférieur au rang de $\mathcal{A}$ par (3).
3. Soit le rang du polynôme différentiel Q est inférieur à celui du polynôme différentiel P_i pour tout i et par conséquent l'ensemble auto-réduit $\mathcal{S}_3 = \{Q\}$ a un rang inférieur au rang de $\mathcal{A}$ par 3. Ce qui contredit l'hypothèse et achève la preuve.

□

1.9.4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble auto-réduit soit un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier est la *cohérence* encore appelée *condition de Rosenfeld*. Cette condition définie plus bas fut introduite par Azriel Rosenfeld, étudiant de Ellis Robert Kolchin en 1959 dans [**57**].

Définition 1.9.5. — Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie d'éléments de K. Supposons que x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble auto-réduit de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. L'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est dit *cohérent* si pour tous polynômes différentiels P et Q dans $\mathcal{A}$ tels que les termes dominants μ_P de P et μ_Q de Q admettent

une dérivée commune υ, *i.e.* $\upsilon = \theta\mu_P = \theta^{'}\mu_Q$, le polynôme différentiel $\mathrm{S}_Q\theta P - \mathrm{S}_P\theta^{'}Q$ appartient à $((\mathcal{A}_\upsilon) \ : \ \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$, où

$$\mathcal{A}_\upsilon = \left\{\theta^{''}T \mid T \in \mathcal{A},\ \theta^{''} \in \Theta,\ \text{et}\ \theta^{''}\mu_T < \upsilon\right\}.$$

La condition de Rosenfeld exige qu'après multiplication du polynôme différentiel $\mathrm{S}_Q\theta P - \mathrm{S}_P\theta^{'}Q$ par une puissance convenable de $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}$, le polynôme différentiel obtenu s'écrive comme combinaison linéaire des dérivées d'éléments de l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ ayant leurs termes dominants respectifs inférieurs à υ.

Remarque 1.9.6. — Il suffit de vérifier la condition de Rosenfeld pour la plus petite dérivée commune des termes dominants des polynômes différentiels P et Q.

Exemple 1.9.7. — Soient $P_1 = x_{1,2}+2x_{2,3}^2x_{3,4},\ P_2 = 3x_{3,1}-x_{4,1},\ P_3 = 5x_{1,3}x_{5,2}$ trois polynômes différentiels de $k\{x_1,\ldots,x_5\}$. Le sous-ensemble $\mathcal{A} = \{P_1, P_2, P_3\}$ de $k\{x_1,\ldots,x_5\}$ est un ensemble auto-réduit cohérent puisqu'il n'existe pas d'opérateurs de dérivations θ et $\theta^{'}$ tels que $\theta P_i = \theta^{'}P_j$ pour $i \neq j$.

Remarque 1.9.8. — Tout ensemble auto-réduit n'est pas cohérent. En effet, soit $k = \mathbb{C}\,(x,\ y)$ le corps des fonctions polynômiales à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Munissons $k\{z\}$ de l'ensemble fini de dérivations $\Delta = \{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\}$ et adoptons les notations standards de Monge : $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial p}{\partial x}$, $s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, et $t = \frac{\partial q}{\partial y}$. Considérons les polynômes différentiels :

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & p^2 + (1+x+y)\,p \\ P_2 & = & (2+y)\,q \end{array}$$

Donnons-nous un classement pour lequel la variable p soit inférieur à la variable q. L'ensemble $\mathcal{A} = \{P_1,\ P_2\}$ est un ensemble auto-réduit non cohérent. En effet, le terme dominant du polynôme différentiel P_1 est p et celui du polynôme différentiel P_2 est q, l'ensemble $\mathcal{A}$ est clairement auto-réduit et nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S}_{P_1} & = & 2p+1+x+y \\ \mathrm{S}_{P_2} & = & 2+y \end{array}$$

L'initial du polynôme différentiel P_1 est 1 et celui du polynôme différentiel P_2 est $2+y$. La plus petite dérivée commune du terme dominant de P_1 et de celui de P_2 est s. Posons $f = \mathrm{S}_{P_1}\frac{\partial P_2}{\partial x} - \mathrm{S}_{P_2}\frac{\partial P_1}{\partial y} = (2+y)\,p$. Le polynôme différentiel f ne satisfait pas à la condition de cohérence puisqu'il ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de dérivées de polynômes différentiels P_i de $\mathcal{A}$ ayant leurs termes dominants respectifs inférieurs à s. D'où $\mathcal{A}$ est auto-réduit non cohérent.

***Proposition 1.9.9* (Lemme de Rosenfeld)**. — *Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ une famille finie d'éléments de K. Si la famille x est une famille d'indéterminées différentielles sur k et $\mathcal{A}$ un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier $\mathcal{I}$ de $k\{x_1,\ldots,x_n\}$, alors $\mathcal{I} = ([\mathcal{A}] \ : \ \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$, l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est cohérent et l'idéal $((\mathcal{A}) \ : \ \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est un idéal premier qui ne contient pas d'éléments non nuls réduits par rapport à $\mathcal{A}$. Inversement, si $\mathcal{A}$ est un ensemble auto-réduit cohérent de $k\{x_1,\ldots,x_n\}$ tel que l'idéal $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ soit un idéal premier ne contenant aucun élément non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble caractéristique de l'idéal différentiel premier $([\mathcal{A}] \ : \ \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ de $k\{x_1,\ldots,x_n\}$.*

Avant de donner la preuve du lemme de Rosenfeld, il est nécessaire de montrer le lemme suivant :

Lemme 1.9.10. — *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie d'éléments de K. Supposons que la famille x soit une famille d'indéterminées différentielles sur k. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble auto-réduit cohérent de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Tout polynôme différentiel partiellement réduit par rapport à $\mathcal{A}$ de l'idéal différentiel $([\mathcal{A}] : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ appartient à l'idéal $((\mathcal{A}) : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$.*

Démonstration. — Soit P un polynôme différentiel de l'idéal différentiel $([\mathcal{A}] : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ partiellement réduit par rapport à $\mathcal{A}$. Nous allons montrer que le polynôme différentiel P appartient à l'idéal $((\mathcal{A}) : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$. Pour ce faire, posons $r = \mathrm{card}\,(\mathcal{A})$ et notons Q_i les polynômes différentiels de $\mathcal{A}$. Le polynôme différentiel $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{s} P$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{s} P = \Sigma_{i=1}^{r} C_i \theta_i Q_i + \Sigma_{j=1}^{s} D_j Q_j, \tag{5}$$

où les θ_i sont des dérivations propres, C_i et D_j des polynômes différentiels de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. S'il existe pour P une équation du genre (5) avec $r = 0$, alors notre lemme est trivial. Sinon, soit ν l'élément de rang maximal dans l'ensemble constitué de $\theta_1 \mu_{Q_1}, \ldots, \theta_r \mu_{Q_r}$ et supposons que notre équation (5) est celle pour laquelle ν est minimal. Considérons, quitte à changer d'indices, que $\theta_i \mu_{Q_i}$ a un rang inférieur à celui de ν pour $1 \leq i \leq q-1$ et que $\theta_i \mu_{Q_i} = \nu$ pour $q \leq i \leq r$. En multipliant (5) par le séparant S_{Q_r} de Q_r nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_{Q_r} \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{s} P = \Sigma_{i=1}^{q-1} \mathrm{S}_{Q_r} C_i \theta_i Q_i + \Sigma_{j=1}^{s} \mathrm{S}_{Q_r} \mathrm{D}_j Q_j + \Sigma_{i=q}^{r} C_i \left(\mathrm{S}_{Q_r} \theta_i Q_i - \mathrm{S}_{Q_i} \theta_r \mathrm{Q}_r \right) \\ + \Sigma_{i=q}^{r} C_i \mathrm{S}_{Q_i} \theta_r Q_r. \end{aligned} \tag{6}$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ étant auto-réduit cohérent, en multipliant (6) par une puissance convenable de $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}$, nous obtenons :

$$\mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{l} P = \sum_{i=1}^{r'} C_i' \theta_i' Q_i' + \Sigma_{j=1}^{s'} D_j' Q_j' + E \theta_r Q_r \tag{7}$$

avec E un polynôme différentiel de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons

$$\theta_r Q_r = \mathrm{S}_{Q_r} \nu + T,$$

où le polynôme différentiel T a un rang inférieur au rang de ν. Comme le séparant S_{Q_r} de Q_r est différent de zéro (puisque nous sommes en caractéristique 0), en remplaçant ν par $-T/\mathrm{S}_{Q_r}$ dans (7) et en multipliant par une puissance convenable de $\mathrm{H}_{\mathcal{A}}$, nous obtenons une équation du genre (5) pour laquelle toutes les dérivées ont un rang inférieur à celui de ν. Ce qui contredit notre hypothèse et achève la preuve. □

Lemme de Rosenfeld. — Si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier $\mathcal{I}$, alors on a : $\mathcal{I} = ([\mathcal{A}] : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$, l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est cohérent et l'idéal $((\mathcal{A}) : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est un idéal premier qui ne contient pas d'éléments non nuls réduits par rapport à $\mathcal{A}$. En effet, d'après la proposition 1.9.4, l'idéal différentiel $\mathcal{I}$ ne contient pas de polynôme différentiel non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$. Par conséquent, le polynôme différentiel $H_{\mathcal{A}}$ n'appartient pas à $\mathcal{I}$. Le reste par rapport à $\mathcal{A}$ d'un polynôme différentiel de $\mathcal{I}$ est nul puisque réduit par rapport à $\mathcal{A}$ et appartenant à $\mathcal{I}$. Alors, d'après l'algorithme de réduction de Ritt (proposition 1.7.1) on a : $\mathcal{I} = ([\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ et $\mathcal{A}$ cohérent. Par ailleurs, l'idéal $((\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}) = ([\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^{\infty}) \cap k\,[\mathcal{U}]$, où $\mathcal{U}$ est égal à l'ensemble des dérivées qui apparaissent dans l'expression des polynômes différentiels de $\mathcal{A}$ et qui ne sont pas des dérivées des termes dominants des polynômes de $\mathcal{A}$. Donc, l'idéal $((\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est premier et ne contient aucun polynôme non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$.

Inversement, si $\mathcal{A}$ est un ensemble auto-réduit cohérent de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ tel que l'idéal $((\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ soit un idéal premier ne contenant aucun élément non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble caractéristique de l'idéal différentiel premier $([\mathcal{A}] : \mathrm{H}_{\mathcal{A}}^{\infty})$ de

$k\{x_1, \ldots, x_n\}$. En effet, soient P et Q deux polynômes différentiels de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ tels que le produit PQ appartiennent à $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$. Notons respectivement P_0 et Q_0 le reste de P et de Q par rapport à $\mathcal{A}$. Nous avons

$$H_{\mathcal{A}}^{s} PQ = P_0 Q_0 \bmod [\mathcal{A}], \ s \ \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme 1.9.10, l'ensemble $\mathcal{A}$ étant auto-réduit cohérent, le produit P_0Q_0 appartient à $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$. Par hypothèse l'idéal $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est premier. Par conséquent, soit P_0 ou Q_0 appartient à $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$. Si le polynôme P_0 appartient à $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$, alors polynôme différentiel P appartient à $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ puisque P_0 est le reste de P par rapport à $\mathcal{A}$. De même, si le polynôme Q_0 appartient à $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$, alors le polynôme différentiel Q appartient $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$. D'où l'idéal différentiel $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est un idéal différentiel premier de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Tout polynôme différentiel réduit par rapport à $\mathcal{A}$ de $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ est nul puisqu'appartenant à l'idéal $((\mathcal{A}) \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ d'après le lemme 1.9.10. De ce fait, l'ensemble auto-réduit $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de $([\mathcal{A}] \ : \ H_{\mathcal{A}}^{\infty})$ d'après la proposition 1.9.4. Ce qui achève la preuve. □

1.10. Théorème d'irréductibilité de Kolchin

Cette section énonce et démontre le théorème d'irréductibilité de Kolchin. La lettre k désigne désormais un corps de caractéristique nulle et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

1.10.1. L'énoncé d'algèbre différentielle donné par E. R. Kolchin dans [**39**, chapitre 4] est le suivant :

Théorème 1.10.1 **(Théorème d'irréductibilité de Kolchin)**
Soit I un idéal de dimension d de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Si I est premier, alors l'idéal différentiel réduit $\{I\}$ engendré par I est un idéal différentiel premier de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. En outre, si l'on pose $k\{y_1, \ldots, y_n\} = k\{x_1, \ldots, x_n\}/\{I\}$ et $m = \operatorname{card}(\Delta)$, le degré de transcendance de $k(\{\theta y_i, \ \theta \in \Theta(s)\})$ sur k est :

$$\omega(s) = d \begin{pmatrix} s+m \\ m \end{pmatrix} \ \forall \ s \in \mathbb{N}.$$

Nous rappelons que la dimension d'un idéal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ est la dimension du k-schéma affine de type fini $X = \operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$ défini par I dans $\mathbb{A}_k^n$. Pour tout entier naturel m et s, on a :

$$\begin{pmatrix} s+m \\ m \end{pmatrix} = \frac{(s+m)(s+m-1)(s+m-2) \ \cdots \ (s+1)}{m!}$$

1.10.2. Le théorème d'irréductibilité de Kolchin raffine l'analogue différentiel du théorème de la base de Hilbert pour les anneaux de polynômes dont voici un énoncé :

Théorème 1.10.2 **(Ritt-Raudenbush)**. — *Soit J un idéal différentiel radical de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Il existe un sous-ensemble fini S de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ tel que :*

$$J = \sqrt{[S]}.$$

Le théorème 1.10.2, connu sous le nom de *théorème de la base de Ritt-Raudenbush*, montre que pour tout corps de caractéristique nulle k et pour tout idéal algébrique I de

$k[x_1, \ldots, x_n]$, l'idéal différentiel réduit $\{I\}$ engendré par I est un idéal différentiel différentiellement de type fini, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini S de I tel que

$$\{I\} = \{S\}.$$

Par conséquent, l'idéal différentiel réduit $\{I\}$ est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux différentiels premiers. Le théorème d'irréductibilité de Kolchin apporte une précision supplémentaire en établissant que la décomposition irréductible de $\{I\}$ est induite par celle de l'idéal I.

1.10.3. Une traduction géométrique du théorème d'irréductibilité de Kolchin est la suivante :

Théorème 1.10.3. — *Soit X une k-variété. Si X est irréductible, alors le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X l'est aussi.*

Notre traduction du théorème d'irréductibilité de Kolchin ne tient pas compte du volet concernant la dimension dans la version différentielle.

De nombreux auteurs ont donné une preuve géométrique de ce théorème dont Lawrence Ein et Mircea Mustaţă [**18**, théorème 3.3], Johannes Nicaise et Julien Sebag [**45**] (en utilisant le théorème de résolution des singularités de Heisuke Hironaka [**32**]), Henri Gillet [**?**, théorème 1, page 13], Ana J. Reguera [**52**, corollaire 2.10], Ishii Shihoko et János Kollár [**36**, lemme 2.12] (sans utilisation d'une résolution des singularités). Notre preuve du théorème d'irréductibilité de Kolchin s'intègre dans cette dernière approche.

Corollaire 1.10.4. — *Soit X une k-variété. Si $(X_i)_{i=1}^m$ sont les composantes irréductibles de X, alors $(\mathscr{L}(X_i))_{i=1}^m$ sont les composantes irréductibles de $\mathscr{L}(X)$.*

Lorsque l'on suppose la k-variété algébrique X lisse dans le théorème d'irréductibilité de Kolchin, la preuve de ce dernier devient relativement simple. En effet :

Soit m un entier naturel. Lorsque la variété algébrique X est lisse, les morphismes de troncation $\pi_m : \mathscr{L}_\infty(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(X)$ sont surjectifs et ouverts. Le résultat annoncé découle du lemme 1.10.5 et du lemme 1.10.6 ci-après.

Lemme 1.10.5. — *Soient X et Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'application f est surjective et ouverte (resp. telle que l'espace topologique Y s'identifie canoniquement au quotient de X par la relation d'équivalence définie par f).*
2. *Pour tout y appartenant à Y, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est irréductible (resp. connexe).*

Alors, pour que X soit irréductible (resp. connexe), il faut et il suffit que Y le soit.

Démonstration. — Voir [**28**, Prop 2.1.14]. □

Lemme 1.10.6. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'espaces topologiques. Si f est surjective et X irréductible, alors Y est irréductible.*

Démonstration. — Supposons que Y ne soit pas irréductible. Alors, il existe deux fermés propres U et V de Y tels que : $Y = U \cup V$. Par conséquent,

$$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Donc

$$X = f^{-1}(U) \text{ ou } X = f^{-1}(V) \text{ et } Y = U \text{ ou } Y = V.$$

Ceci contredit l'hypothèse et achève la preuve. □

Il n'existe pas d'analogue du théorème d'irréductibilité de Kolchin pour les espaces de jets.

Exemple 1.10.7. — Soit X la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par

$$x_2 x_1 = 0.$$

Notons X_{reg} le lieu régulier de X. L'espace des 1-jets $\mathscr{L}_1(X)$ de X a deux composantes irréductibles : $\overline{\mathscr{L}_1(X_{\mathrm{reg}})}$ et $\theta_1^{-1}((0,0))$ avec

$$\theta_1^{-1}((0,0)) \simeq \mathbb{A}_k^2.$$

1.10.4. Dans cette sous-section, nous démontrons le théorème d'irréductibilité de Kolchin dans le cas général sans recourir à l'existence d'une résolution des singularités en caractéristique nulle, mais en transcrivant dans le langage de la géométrie algébrique moderne, la preuve d'algèbre différentielle d'origine [**39**, prop. 10, page 200] fournissant ainsi une démonstration élémentaire du théorème d'irréductibilité de Kolchin.

Lemme 1.10.8. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique affine intègre sur k. Soit x un point fermé de $\mathcal{C}$. Il existe une extension finie k' de corps de k et un morphisme de k-schémas*

$$\alpha \ : \ \mathrm{Spec}\left(k'((t))\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(k(\mathcal{C})\right)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\left(k'[[t]]\right) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{C} \\
\mathrm{Spec}\left(k'((t))\right) \arrow[u] \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Spec}\left(k(\mathcal{C})\right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif avec $\varphi(0) = x$, le point 0 étant le point fermé de $\mathrm{Spec}\left(k'[[t]]\right)$.

Démonstration. — Soit x un point fermé de la courbe algébrique affine intègre $\mathcal{C}$. Notons $\overline{\mathcal{C}}$ la normalisée de $\mathcal{C}$ et f le morphisme de normalisation. Ce dernier étant surjectif, il existe un point y de $\overline{\mathcal{C}}$ tel que le k-morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathcal{C},x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ soit injectif. Soient $\mathfrak{M}_y$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ le complété $\mathfrak{M}_y$-adique de $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ est régulier puisque de Dedekind, *i.e.* noethérien normal de dimension 1. Alors, il existe une extension de corps k' de k tel que le morphisme de k-algèbres suivant $k'[[t]] \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ soit un isomorphisme. En effet, le corps k étant de caractéristique nulle, le corps résiduel $k(y)$ de $\overline{\mathcal{C}}$ en y est une extension algébrique séparable de k et donc une k-algèbre formellement lisse. Par conséquent, il existe un sous-corps k' de $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ contenant k tel que $k(y)$ soit isomorphe à k' puisque l'automorphisme identique de $k(y) = \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}/\mathfrak{M}_y\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ se factorise en

$$k(y) \xrightarrow{u} \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}/\mathfrak{M}_y\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y},$$

où u est un k-morphisme, donc nécessairement un k-isomorphisme de $k(y)$ sur un sous-corps k' de $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$. Le morphisme de k-algèbres $k'[t] \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ qui, à t associe le générateur g de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_y$ de $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$, induit un morphisme de k-algèbres surjectif $k'[[t]] \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ et comme les k-algèbres $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ et $k'[[t]]$ sont intègres de même dimension, ce dernier est un isomorphisme de k-algèbres.

Nous obtenons alors une injection de $\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}$ dans $k'[[t]]$ en composant l'injection $\mathcal{O}_{\mathcal{C},x} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y}$ et l'injection $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}},y} \longrightarrow k'[[t]]$. Comme $\mathrm{Frac}\left(\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}\right) = k(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Frac}\left(k'[[t]]\right) = k'((t))$, il

existe un unique morphisme $\alpha^* : k(\mathcal{C}) \longrightarrow k'((t))$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{C},x} & \xrightarrow{\varphi^*} & k'[[t]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\alpha^*} & k'((t)). \end{array}$$

Ce qui induit le diagramme commutatif de schémas suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,(k'[[t]]) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}\,(k'((t))) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Spec}\,(k(\mathcal{C})). \end{array}$$

□

Remarque 1.10.9. — l'injection $\mathcal{O}_{\mathcal{C},x} \xrightarrow{\varphi^*} k'[[t]]$ est unique si et seulement si x est un point régulier de la courbe algébrique $\mathcal{C}$.

Le théorème correspondant de Kolchin [**39**, proposition 11, page 41] s'énonçait ainsi :

Théorème 1.10.10. — *Soit K un corps algébriquement clos. Soit L une extension finie de corps de K de degré de transcendance* 1. *Soient R un anneau tel que $K \subset R \subset L$ et $f : R \to K$ une spécialisation sur K. Il existe un K-morphisme $\varphi : L \to K((t))$ tel que*

$$\varphi(R) \subset K[[t]] \text{ et pour tout } x \in R,\ (\varphi(x))(0) = f(x).$$

Exemple 1.10.11. — Soient k un *corps algébriquement clos* et X la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}^2_k$ par $x_2^2 = x_1^3$. Notons $A = k[x_1, x_2] / \left(x_2^2 - x_1^3\right)$ l'anneau des fonctions régulières sur X. Soient $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ les images respectives de x_1 et de x_2 par la surjection canonique

$$k[x_1, x_2] \longrightarrow A.$$

On a :

$$\overline{x_2}^2 = \overline{x_1}^3.$$

Le corps des fractions de l'anneau intègre A, c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles de X, est donné par :

$$\mathrm{Frac}\,(A) = k\left(\overline{x_2}/\overline{x_1}\right).$$

Posons $u = \overline{x_2}/\overline{x_1}$. On a u entier sur A (puisqu'il annule le polynôme $T^2 = \overline{x_1}$) mais n'appartient pas à A (la courbe algébrique X n'est pas normale). La clôture intégrale $\widetilde{A}$ de A dans $\mathrm{Frac}\,(A)$ est :

$$A[u] = k[u].$$

Par conséquent, la normalisée $\overline{X}$ de X est le schéma affine $\mathrm{Spec}\,(k[u])$. Le complété (u)-adique de $k[u]$ étant $k[[u]]$ et le k-morphisme $A \longrightarrow k[u]$ étant injectif, on obtient par composition une injection de A dans $k[[u]]$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & k[[u]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Frac}\,(A) & \longrightarrow & k((t)) \end{array}$$

Ce qui induit le diagramme commutatif de schémas suivant :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(k[[t]]) \arrow[r] & X \\ \operatorname{Spec}(k((t))) \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Spec}(\operatorname{Frac}(A)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Le théorème 1.10.12 ci-dessous est un résultat connu d'algèbre commutative dû au mathématicien allemand Wolfgang Krull.

Théorème 1.10.12 **(Théorème des idéaux principaux de Krull)**
Soient A un anneau noethérien et f un élément de A qui n'est ni un diviseur de zéro, ni un élément unité. Tout idéal premier minimal contenant f est de hauteur 1.

Démonstration. — Voir [**1**, page.122]. □

Le corollaire 1.10.13 qui suit est une conséquence géométrique directe du théorème des idéaux principaux de Krull.

Corollaire 1.10.13. — *Soit X un k-schéma affine intègre de type fini. Fixons un plongement de X dans $\mathbb{A}_k^n$. Soit f un polynôme irréductible non constant de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Notons $V(f)$ l'hypersurface définie par f dans $\mathbb{A}_k^n$. Si $X \nsubseteq V(f)$, alors pour tout k-point x de X, il existe une k-courbe algébrique affine intègre $\mathcal{C}$ tracée sur X telle que :*

$$x \in \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \nsubseteq V(f).$$

Démonstration. — Si le k-schéma affine intègre de type fini X est une courbe algébrique affine, alors l'énoncé est trivial. Sinon, soit $Y = \{x\}$ la clôture de Zariski du point x. Posons

$$X = \operatorname{Spec}(A) \text{ et } \dim(X) - \dim(Y) = s.$$

Construisons la courbe algébrique affine intègre $\mathcal{C}$ tracée sur X telle que :

$$x \in \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \nsubseteq V(f).$$

Soit $D_X(f)$ l'ouvert $X \setminus V(f)$. Par hypothèse $X \nsubseteq V(f)$, alors il existe un point x_1 dans $D_X(f)$ tel que l'idéal premier $\mathcal{P}_{x_1}$ de A correspondant à x_1 soit de hauteur 1. En effet, l'ouvert $D_X(f) = \operatorname{Spec}(A_f)$ avec l'anneau A_f noethérien. Alors, il suffit de prendre un élément a_1 de A_f qui n'est ni un diviseur de zéro, ni un élément unité et conclure avec le théorème des idéaux principaux de Krull (théorème 1.10.12). Le k-schéma affine de type fini $\mathcal{C}_1 = \operatorname{Spec}(A/\mathcal{P}_{x_1})$ est de dimension $\dim(X) - 1$. Par construction de $\mathcal{C}_1$, nous avons :

$$Y \subset \mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_1 \nsubseteq V(f).$$

Alors, il existe comme plus haut un point x_2 dans $D_{\mathcal{C}_1}(f)$ tel que l'idéal premier $\mathcal{P}_{x_2}$ de $A/\mathcal{P}_{x_1}$ correspondant à x_2 soit de hauteur 1. Posons $\mathcal{C}_2 = \operatorname{Spec}(A/(\mathcal{P}_{x_1}, \mathcal{P}_{x_2}))$. Nous avons :

$$Y \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2 \nsubseteq V(f) \quad \text{et } \dim(\mathcal{C}_2) = \dim(X) - 2.$$

En réitérant $s-1$ fois le procédé, nous obtenons un sous-schéma $\mathcal{C}_{s-1}$ de X avec :

$$Y \subset \mathcal{C}_{s-1} \subset X, \quad \mathcal{C}_{s-1} \nsubseteq V(f) \text{ et } \dim(\mathcal{C}_{s-1}) = \dim(Y) + 1$$

Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{s-1}$. La courbe algébrique affine $\mathcal{C}$ satisfait aux conditions annoncées. □

L'énoncé suivant correspondent au corollaire 3 de la page 45 du livre de Kolchin [**39**]. C'est une version du lemme classique de sélection de courbe.

Lemme 1.10.14. — *Soit X un k-schéma affine intègre de type fini. Fixons un plongement de X dans $\mathbb{A}_k^n$. Soit f un polynôme irréductible non constant de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Notons $V(f)$ l'hypersurface définie par f dans $\mathbb{A}_k^n$. Supposons que*

$$X \nsubseteq V(f).$$

Soient 0 *et* η *respectivement le point fermé et le point générique de* $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$. *Pour tout* $\overline{k}$*-point* x *de* X, *il existe un morphisme* φ *dans* $\operatorname{Hom}\left(\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right), X\right)$ *tel que :*

$$\varphi(0) = x \quad et \quad \varphi(\eta) \in D_X(f) = X \setminus V(f).$$

Démonstration. — Soit x un $\overline{k}$-point de X. La donnée de x induit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}\left(\overline{k}\right) & \xrightarrow{\chi_x} & X \\ 0 & \longmapsto & x \end{array}$$

L'inclusion $\overline{k} \hookrightarrow \overline{k}[[t]]$ induit à son tour un morphisme de schémas qui composé avec le morphisme χ_x donne un morphisme

$$\psi \ : \ \operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right) \longrightarrow X,$$

qui envoie le point fermé 0 et le point générique η de $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ sur x. Alors, si le point x n'appartient pas à $V(f)$, on pose $\varphi = \psi$ et le théorème est clair. Sinon, d'après le corollaire 1.10.13, il existe une $\overline{k}$-courbe algébrique affine intègre $\mathcal{C}$ telle que :

$$x \in \mathcal{C} \subset X \text{ et } \mathcal{C} \nsubseteq V(f).$$

Par conséquent, d'après le lemme 1.10.8, il existe un morphisme $\varphi \ : \ \operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right) \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que les images respectives par φ du point fermé 0 et du point générique η de $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ soient x et le point générique $\xi_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$. Ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.10.15. — Les résultats ci-dessus montrent que si Y est une sous-variété fermée propre de X, alors tout $\overline{k}$-arc tracé sur X dont l'origine appartient à Y est la spécialisation d'un arc tracé sur X dont l'image appartient à $X \setminus Y$. En effet, si on pose $X = \operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$, par définition d'une sous-variété fermée, il existe un idéal J de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que la sous-variété Y soit isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I + J)$. Si les éléments $f_1, \ldots, f_n$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ sont les générateurs de J, alors on a :

$$Y = X \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)\right).$$

Le résultat annoncé découle du lemme 1.10.14 et du fait que l'ouvert $X \setminus V(f_i)$ soit inclus dans $X \setminus Y$. Par ailleurs, si la sous-variété Y de X est le lieu singulier de X ($Y = X_{sing}$), alors le résultat annoncé correspond au lemme 2.12 de l'article **[36]**. Se rapporter à l'annexe B pour la définition de la notion d'arcs tracés sur une variété algébrique.

Théorème de Kolchin. — Soient X le k-schéma affine de type fini défini par l'idéal premier I dans $\mathbb{A}_k^n$ et $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ l'anneau des fonctions régulières sur X. Posons

$$\overline{x}_i = x_i \mod [I].$$

Soit $k(X)$ le corps des fonctions de X. On a :

$$A = k[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n] \quad \text{et} \quad k(X) = k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n).$$

Quitte à réarranger les $\overline{x}_i$, supposons que la famille $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d)$ est une base de transcendance de $k(X)$ sur k. L'élément $\overline{x}_j$ est alors algébrique sur $k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1})$ de degré disons d_j pour $d < j \leq n$. Par conséquent, il existe un polynôme irréductible P_j dans I ne

contenant pas effectivement les variables $x_{j+1}, \ldots, x_n$ dans son expression, de degré d_j en x_j et de degré inférieur à d_t en tout x_t pour $d < t < j$. De ce fait, l'idéal I ne contient aucun polynôme non nul de degré inférieur à d_j en x_j pour tout $d < j \leq n$. L'ensemble $B = \{P_{d+1}, \ldots, P_n\}$ est un ensemble auto-réduit (par construction) et

$$I = ((B) \ : \ H_B^\infty) \quad \text{dans} \quad k[x_1, \ldots, x_n].$$

En effet, pour tout polynôme Q appartenant à $((B) \ : \ H_B^\infty)$, on a par définition : $H_B^s Q$ appartient à l'idéal $(B) \subset I$ pour un entier naturel s convenablement choisi. L'idéal I étant premier et le polynôme H_B^s n'appartenant pas à I, alors Q appartient à I. Inversement, soit Q un polynôme non nul de I. Le reste de Q par rapport à B est nul par définition de B. D'où, d'après l'algorithme de réduction de Ritt (proposition 1.7.1), il existe un entier naturel s tel que $H_B^s Q$ appartiennent à (B). Donc Q appartient à $((B) \ : \ H_B^\infty)$. Par ailleurs, les termes dominants de deux éléments distincts de l'ensemble auto-réduit B n'ont pas de dérivées communes, alors B est cohérent et d'après le lemme de Rosenfeld (lemme 1.9.9), l'idéal $I_1 = ([\mathcal{B}] \ : \ H_{\mathcal{B}}^\infty)$ est un idéal différentiel premier.

Maintenant, montrons que l'idéal différentiel I_1 est l'idéal différentiel réduit engendré par I. Par définition :

$$I = ((B) \ : \ H_B^\infty) \subseteq ([B] \ : \ H_B^\infty) = I_1.$$

Par conséquent, on a :

$$\{I\} \subseteq I_1.$$

Reste à montrer que l'idéal différentiel I_1 est inclus dans l'idéal différentiel $\{I\}$. A cet effet, il suffira de montrer que

$$I_1 \cap k[x_1, \ldots, x_n] \subseteq I,$$

c'est-à-dire que le k-schéma affine de type fini $Y = \operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I_1 \cap k[x_1, \ldots, x_n])$ défini par I_1 dans $\mathbb{A}_k^n$ est inclus dans $X = \operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$. Par définition des k-schémas affines de type fini X et Y, nous avons clairement l'inclusion suivante :

$$Y \setminus \ V(\mathrm{H}_B) \subseteq X.$$

Soit $\overline{k}$ la clôture algébrique de k et a un $\overline{k}$-point de Y. Le lemme 1.10.14 affirme qu'il existe un morphisme ψ dans $\operatorname{Hom}\left(\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right), Y\right)$ tel que ψ envoie le point fermé 0 de $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ sur a et le point générique η de $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ sur un point ξ de X. Nous pouvons alors construire une unique spécialisation φ de ψ telle que l'image du point fermé 0 et celui du point générique η de $\operatorname{Spec}\left(\overline{k}[[t]]\right)$ soit ξ. Le point ξ de X est une généralisation du point a. Alors, ce dernier est un $\overline{k}$-point de X puisque la clôture de Zariski $\overline{\{\xi\}}$ de ξ est incluse dans X. Par conséquent,

$$Y \subseteq X.$$

Nous avons donc

$$\mathcal{I}_1 \cap k[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \mathcal{I}.$$

Ce qui achève la preuve du premier volet du théorème.

Pour ce qui est du second volet du théorème, nous avons supposé que $k\{y_1, \ldots, y_n\} = k\{x_1, \ldots, x_n\}/\{\mathcal{I}\}$. Alors, pour tout polynôme Q de l'ensemble auto-réduit cohérent B, nous avons :

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{S}_Q(y_1, \ldots, y_n) \neq 0.$$

Ainsi, le terme dominant $\mu_Q(y_1,\ldots,y_n)$ de Q est algébrique sur $k\left((\theta y_1,\ldots,\theta y_n)_{\theta y_i<\mu_Q}\right)$. De même, si v est une dérivée du terme dominant d'un élément de B, alors $v(y_1,\ldots,y_n)$ est algébrique sur $k\left((\theta y_1,\ldots,\theta y_n)_{\theta y_i<v}\right)$. Posons

$$\mathcal{T}=\{\theta y_i \mid \theta y_i \neq \theta^{'}\mu_{\mathrm{Q}}, Q\in B\}.$$

Par construction de l'ensemble auto-réduit cohérent B, nous avons $\mathcal{T}=\{\theta y_i,\ 1\leq i\leq d\}$ puisque pour $d<i\leq n$, le terme dominant d'un polynôme P_i de B est y_i. Si on pose $\mathcal{T}(s)=\{\theta y_i \mid \theta y_i\in\mathcal{T},\ \mathrm{ord}(\theta)\leq s\}$, d'après ce qui précède, le degré de transcendance $\omega(s)$ de $k(\{\theta y_i,\theta\in\Theta(s)\})$ sur k est donné par :

$$\omega(s)=\mathrm{card}(\mathcal{T}(s))$$

car l'ensemble $\mathcal{T}(s)$ est la base de transcendance de $k(\{\theta y_i,\theta\in\Theta(s)\})$ sur k. Alors, reste à compter les éléments de $\mathcal{T}(s)$. Par définition, un opérateur de dérivation $\theta=\delta_1^{e_1}\cdots\delta_m^{e_m}$ avec $e_1,\ldots,e_m$ dans $\mathbb{N}$. Par conséquent, pour tout i dans $\{1,\ldots,d\}$, le nombre des dérivées θy_i dans $\mathcal{T}(s)$ est $\begin{pmatrix} s+m \\ m \end{pmatrix}$ puisqu'étant égal au nombre de m-uplets $(e_1,\ldots,e_m)\in\mathbb{N}^m$ tels que $\Sigma_{i=1}^m e_i=s$. Donc, le degré de transcendance $\omega(s)=d\begin{pmatrix} s+m \\ m \end{pmatrix}$. □

1.10.5. Contre-exemple en caractéristique positive. — Lorsque le corps de base est de caractéristique non nulle, le théorème d'irréductibilité de Kolchin ci-dessus (théorème 1.10.1) est faux. Il est facile d'en exhiber un contre-exemple.

Exemple 1.10.16. — considérons le polynôme algébrique irréductible

$$P=x_1^p+x_3^{p+1}+x_2^p x_3$$

de $k[x_1,x_2,x_3]$. L'idéal $I=\langle P\rangle$ est un idéal premier de $k[x_1,x_2,x_3]$. Cependant, l'idéal différentiel réduit $\{P\}$, engendré par P n'est pas un idéal différentiel premier de $k\{x_1,x_2,x_3\}$. En effet, l'idéal différentiel réduit $\{P\}$ se décompose comme intersection de l'idéal différentiel premier $\left(x_1^p+x_3^{p+1}+x_2^p x_3\right)\cap[x_{3,1}]$ et de l'idéal différentiel premier $[x_1,x_2+x_3]$ puisque

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial x_3}=x_{3,1}\left(x_2^p+x_3^p\right).$$

De même, pour tout entier naturel n, l'idéal différentiel réduit $\{P_n\}$, engendré par le polynôme algébrique irréductible

$$P_n=(x_1x_2\cdots x_n)^p(n+x_1+\cdots+x_n)+x_1^p+\cdots+x_n^p,$$

est l'intersection des n idéaux différentiels premiers

$$\left[x_i,x_1^p+\cdots+x_{i-1}^p+x_{i+1}^p+\cdots+x_n^p\right]\quad 1\leq i\leq n$$

et de l'idéal différentiel premier

$$(P_n)\cap[x_{1,1},\ldots,x_{n,1}]$$

puisque

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_i}=x_{i,1}(x_1x_2\cdots x_n)^p\ \ 1\leq i\leq n.$$

Exemple 1.10.17. — Soient k un corps de caractéristique 2 et X le parapluie de Whitney défini par $x_3^2 = x_1 x_2^2$ dans $\mathbb{A}_k^3$. Le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est non irréductible tandis que le schéma de base X est irréductible. En effet, l'ensemble $\pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ contient au moins une composante irréductible de $\mathscr{L}(X)$ puisque le lieu singulier X_{sing} de X est la k-variété algébrique définie dans $\mathbb{A}_k^3$ par

$$x_2 = x_3 = 0.$$

La normalisée $\overline{X}$ de X est isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[u,v])$. Le morphisme de normalisation associe au couple (u,v) le triplet $\left(u^2, v, uv\right)$ et l'image réciproque $\overline{X_{\text{sing}}}$ de X_{sing} par le morphisme de normalisation est définie par

$$v = 0 \ \text{ dans } \ \operatorname{Spec}(k[u,v]).$$

Alors, la restriction du morphisme de normalisation à $\overline{X_{\text{sing}}}$ $(\overline{X_{\text{sing}}} \longrightarrow X_{\text{sing}})$ est purement inséparable. Par conséquent, un arc tracé sur X_{sing} ne peut se relever en un arc tracés sur $\overline{X_{\text{sing}}}$. Donc $\mathscr{L}(X)$ admet deux composantes irréductibles : $\pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ et $\overline{\pi^{-1}(X_{\text{reg}})}$.

1.11. Quelques compléments

Récemment dans l'article [**52**, Lemme 2.7], Reguera montre le théorème suivant :

Théorème 1.11.1. — *Soient X une variété algébrique sur un corps parfait k et $\mathscr{L}(X)$ le schéma des arcs tracés sur X. Notons X_{sing} le lieu singulier de X. Il existe une correspondance bijective entre les composantes irréductibles de X et celles de $\mathscr{L}(X) \setminus \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$.*

Le théorème de Reguera (théorème 1.11.1) est une extension du théorème d'irréductibilité de Kolchin au cas des corps parfaits (notamment de caractéristique positive). En effet, l'auteur montre que dans ce cas, l'idéal différentiel réduit $\{I\}$ engendré par un idéal premier I de $k[x_1, \ldots, x_n]$, coïncide avec l'idéal différentiel premier $([I] \ : \ H_I^\infty)$. Nous fournissons ci-dessous une preuve en caractéristique nulle.

Démonstration. — Soit P un polynôme différentiel de $([I] \ : \ H_I^\infty)$. Il existe par définition un entier naturel N tel que

$$(H_I)^N P \in [I] \subset \{I\}.$$

Comme H_I n'appartient pas à l'idéal différentiel réduit $\{I\}$ et que ce dernier est premier d'après le théorème d'irréductibilité de Kolchin, alors on a :

$$P \in \{I\}.$$

On sait que

$$[I] \subset ([I] \ : \ H_I^\infty).$$

Par conséquent

$$\{I\} = \sqrt{[I]} \subset \sqrt{\left([I] \ : \ H_I^\infty\right)}.$$

Comme l'idéal I est premier, le lemme de Rosenfeld (proposition 1.9.9) démontre que l'idéal différentiel $([I] \ : \ H_I^\infty)$ est premier. Donc

$$\sqrt{\left([I] \ : \ H_I^\infty\right)} = ([I] \ : \ H_I^\infty).$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.11.2. — Dans [**52**], Reguera utilise un argument différent du lemme de Rosenfeld pour montrer que l'idéal $([I] \ : \ H_I^\infty)$ est premier.

Lorsque le corps de base n'est pas un corps parfait, le théorème de Reguera tel qu'énoncé est faux comme le montre par exemple le contrexemple suivant de Johannes Nicaise et Julien Sebag :

Contre-exemple **([46])**. — Soient k un corps de caractéritique p positive et a un élément de $k - k^p$. Soit X l'hypersurface définie dans $\mathbb{A}_k^3$ par le polynôme

$$f = x^p + yz^p - a.$$

L'hypersurface X est irréductible puisque f l'est. Cependant, le schéma des arcs tracés sur X est non irréductible puisque le sous-ensemble fermé $V(z) = \pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ contient l'ouvert non vide $D(y_1)$.

Dans l'article [**46**, théorème 3.19], Nicaise et Sebag fournissent la généralisation suivante du théorème de Reguera.

Théorème 1.11.3. — *Soit X une variété algébrique sur un corps k. Il existe une correspondance bijective entre les composantes irréductibles géométriquement réduites de X et les composantes irréductibles du schéma des arcs tracés sur X qui ne sont pas contenues dans $\pi^{-1}(X_{\text{sing}})$.*

1.12. Une généralisation du théorème de Ritt-Raudenbush

Soient X une k-variété algébrique et C un sous-ensemble du schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X. On dit que C est *une partie constructible* de $\mathscr{L}(X)$ s'il existe un entier naturel m tel que C soit l'image réciproque par le morphisme de troncation π_m d'un ensemble constructible S de l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X. Cette définition correspond à la définition classique par [**27**, §8.3]. Dans cette section, nous montrons qu'en caractéristique nulle, le nombre de composantes irréductibles de la partie constructible $C = \pi_{X,m}^{-1}(S)$ du schéma des arcs tracés sur une variété algébrique, est fini.

Soit Y une k-variété algébrique. On notera Y_{red} le sous-schéma réduit associé à Y.

1.12.1. Comme tout ensemble constructible de $\mathscr{L}_m(X)$ s'écrit comme une réunion disjointe de sous-variétés, il est facile de se convaincre que l'on peut supposer que C est une sous-variété réduite.

1.12.2. Lorsque la variété de base est lisse, l'énoncé est facile à déduire.

Théorème 1.12.1. — *Soient X une k-variété algébrique lisse et m un entier naturel quelconque. Soit S une sous-variété intègre de $\mathscr{L}_m(X)$. Posons $C = \pi_{X,m}^{-1}(S)_{\text{red}}$. Alors C est intègre.*

Démonstration. — La k-variété X étant lisse, les morphismes de troncation $\pi_{X,m}$ sont surjectifs et ouverts. Alors, d'après le lemme 1.10.5, comme la sous-variété S est irréductible, l'image réciproque $\pi_{X,m}^{-1}(S)$ de S par le morphisme de troncation $\pi_{X,m}$ l'est aussi et le théorème est clair. □

Corollaire 1.12.2. — *Soient X une k-variété algébrique lisse et m un entier naturel quelconque. Soit S une sous-variété propre réduite de $\mathscr{L}_m(X)$. La décomposition irréductibles de $\pi_{X,m}^{-1}(S)$ est induite par celle de S.*

Démonstration. — Soient $(S_i)_{i=1}^n$ les composantes irréductibles de la sous-variété S. D'après le théorème 1.12.1, pour tout i, l'ensemble $\pi_{X,m}^{-1}(S_i)$ est un fermé irréductible de $\pi_{X,m}^{-1}(S)$. Reste alors à montrer que

$$\pi_{X,m}^{-1}(S_i) \nsubseteq \pi_{X,m}^{-1}(S_j), \ i \neq j.$$

Supposons qu'on ait :

$$\pi_{X,m}^{-1}(S_i) \subseteq \pi_{X,m}^{-1}(S_j), \ i \neq j. \tag{8}$$

Le morphisme de troncation $\pi_{X,m}$ étant surjectif, en composant (8) par $\pi_{X,m}$, on obtient :

$$S_i \subseteq S_j.$$

Ce qui est impossible par hypothèse. Alors,

$$\pi_{X,m}^{-1}(S_i) \nsubseteq \pi_{X,m}^{-1}(S_j), \ i \neq j.$$

La décomposition en composantes irréductibles de $\pi_{X,m}^{-1}(S)$ est induite par celle de S puisque $\pi_{X,m}^{-1}(S) = \cup_{i=1}^n \pi_{X,m}^{-1}(S_i)$ avec $\pi_{X,m}^{-1}(S_i) \nsubseteq \pi_{X,m}^{-1}(S_j)$ pour $i \neq j$. □

1.12.3. Soit X une k-variété. Nous notons X_{sing} l'unique sous-schéma réduit de X formé des points singuliers de X. Dans le cas général nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.12.3. — *Soit m un entier naturel. Soient X une k-variété algébrique réduite et S une sous-variété réduite de l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X. Supposons que le couple (X, X_{sing}) admette une résolution plongée des singularités. Le nombre de composantes irréductibles de $\pi_{X,m}^{-1}(S)_{\text{red}}$ est fini.*

Démonstration. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ une résolution des singularités de X. Soient

$$f_m : \mathscr{L}_m(Y) \longrightarrow \mathscr{L}_m(X)$$

le morphisme induit par f sur les espaces de jets et

$$f_\infty : \mathscr{L}(Y) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$$

celui induit par f sur les schémas des arcs. L'image réciproque $f_m^{-1}(S)$ de S par f_m est une sous-variété de $\mathscr{L}_m(Y)$. Nous avons par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}(Y) \arrow[r, "f_\infty"] \arrow[d, "\pi_{Y,m}"'] & \mathscr{L}(X) \arrow[d, "\pi_{X,m}"] \\
\mathscr{L}_m(Y) \arrow[r, "f_m"] \arrow[d, "\theta_{Y,m}"'] & \mathscr{L}_m(X) \arrow[d, "\theta_{X,m}"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

la relation :

$$f_\infty^{-1}\left(\pi_{X,m}^{-1}(S)\right) = \pi_{Y,m}^{-1}\left(f_m^{-1}(S)\right).$$

D'après la proposition B.4.8, le morphisme f_∞ induit une bijection de $\mathscr{L}(Y) \backslash f_\infty^{-1}(\mathscr{L}(X_{\text{sing}}))$ dans $\mathscr{L}(X) \setminus \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$. Tous les points génériques des composantes irréductibles de $\pi_{X,m}^{-1}(S) \setminus \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$ se relèvent alors de façon unique en points génériques des composantes irréductibles de $f_\infty^{-1}\left(\pi_{X,m}^{-1}(S)\right)$. Comme Y est lisse, ces dernières sont en nombre fini.

Une induction noethérienne sur la dimension de X permet de montrer que le nombre de composantes irréductibles de $\pi_{X,m}^{-1}(S) \cap \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$ est fini et donc de conclure. En effet, si X est de dimension nulle, alors il consiste en un ensemble fini de point. Le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est dans ce cas isomorphe à X d'après la proposition B.3.5 et le théorème est trivial.

Si la dimension de X est non nulle, supposons le théorème vrai pour toute variété Y telle que

$$\dim(Y) < \dim(X).$$

Montrons que le théorème reste vrai pour X. A cet effet, nous pouvons remarquer que

$$\pi_{X,m}^{-1}(S) \cap \mathscr{L}(X_{\text{sing}}) = \pi_{X_{\text{sing}},m}^{-1}(S \cap \mathscr{L}_m(X_{\text{sing}})).$$

En effet, un point x appartient à $\pi_{X_{\text{sing}},m}^{-1}(S \cap \mathscr{L}_m(X_{\text{sing}}))$ si et seulement si x appartient à $\mathscr{L}(X_{\text{sing}})$ et $\pi_{X,m}(x)$ appartient à $S \cap \mathscr{L}_m(X_{\text{sing}})$. Ce qui équivaut au fait que le point x appartienne à $\pi_{X,m}^{-1}(S) \cap \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$. Alors, par hypothèse d'induction $\pi_{X,m}^{-1}(S) \cap \mathscr{L}(X_{\text{sing}})$ a un nombre fini de composantes irréductibles puisque la dimension du lieu singulier X_{sing} de X est strictement inférieure à celle de X. D'où le théorème. □

Remarque 1.12.4. — La preuve ci-dessus reprend l'idée générale développée par Nash dans la preuve de la proposition 1 de [**44**].

CHAPITRE 2

MODULE DES DÉRIVATIONS SUR UNE COURBE

La problématique principale de ce chapitre est de décrire un système minimal explicite de générateurs du module des dérivations d'une courbe algébrique affine plane définie sur un corps de caractéristique nulle. Après une présentation des outils utilisés et une étude générale de la situation, nous fournissons une méthode de calcul explicite d'un tel système dans les cas particuliers suivants :

1. Le cas d'une courbe algébrique affine plane définie par un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à 2 en l'une des variables ;
2. Le cas d'une courbe algébrique affine plane définie par un polynôme quasi-homogène.

Notre méthode reste valable pour d'autres classes de polynômes (voir sous-section 2.5.10). La sous-section 2.5.6 présente les limites de la méthode envisagée.

Soit n un entier naturel. Dans ce chapitre, sauf mention spéciale, la lettre k désignera un corps de caractéristique nulle et $k[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes en n indéterminées à coefficients dans k. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on notera par ∂_{x_i} la dérivée partielle première par rapport à la variable x_i.

2.1. Bases de Gröbner

La notion de base de Gröbner a été introduite dans les années 1960, indépendamment par Heisuke Hironaka et Bruno Buchberger. Le nom « base de Gröbner » est celui du directeur de thèse Wolfgang Gröbner de Buchberger. En permettant de ramener l'étude des idéaux polynomiaux à celle des idéaux monomiaux, les bases de Gröbner constituent un puissant outil algorithmique pour la résolution des problèmes tels que l'appartenance à un idéal, la résolution des systèmes d'équations polynomiales et d'équations implicites d'un lieu géométrique donné par un paramétrage. Cette section est consacrée au rappel de quelques résultats relatifs à la notion de base de Gröbner d'un idéal. Pour un exposé détaillé sur cette dernière, nous renvoyons à [**47**].

2.1.1. Un *monôme* dans $k[x_1, \ldots, x_n]$ est un polynôme produit d'indéterminées ; autrement dit, un polynôme de $k[x_1, \ldots, x_n]$ dont un seul coefficient est non nul et égal à l'unité. On appelle *terme*, le produit d'un monôme par un scalaire.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{N}^n$. Notons x^a le monôme $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. Un *ordre monomial* dans $k[x_1, \ldots, x_n]$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble des monômes telle que pour tous monômes x^a, x^b et x^c on ait :

$$x^a \leq x^b \text{ et } x^c \geq 1 \text{ implique } x^a x^c \leq x^b x^c.$$

***Exemple 2.1.1* (Ordre lexicographique).** — Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{N}^n$. On dit que x^α est supérieur à x^β et on note $x^\alpha > x^\beta$ relativement à l'ordre lexicographique si le premier coefficient non nul du vecteur $\alpha - \beta$ est positif.

2.1.2. Soit $f = \Sigma_a \alpha_a x^a$ un polynôme non nul de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Fixons sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ un ordre monomial. On appelle *monôme dominant* (ou *monôme de tête*) de f, le plus grand monôme (suivant l'ordre monomial fixé) effectivement présent dans l'expression du polynôme f. Le *coefficient dominant* (ou *coefficient de tête*) de f est le coefficient du monôme dominant de f. Enfin, on appelle *terme dominant* (ou *terme de tête*) du polynôme f, le produit de son coefficient dominant par son monôme dominant.

Exemple 2.1.2. — Munissons $k[x, y, z]$ de l'ordre lexicographique. Soit $f = x^2y^3z + x^3z^2 + 2x^5$ un polynôme de $k[x, y, z]$. Le monôme dominant du polynôme f est x^5, son coefficient dominant est 2 et son terme dominant est $2x^5$.

Nous pouvons remarquer que la notion de monôme dominant (par ricochet celle de coefficient et de terme dominant) dépend de l'ordre monomial fixé. Dans toute la suite de ce chapitre, sauf mention spéciale, les monômes seront ordonnés suivant l'ordre lexicographique.

2.1.3. Un idéal I de l'anneau des polynômes en n indéterminées $k[x_1, \ldots, x_n]$ à coefficients dans k est dit *monomial* s'il est engendré par les monômes de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

***Lemme 2.1.3* (Dickson).** — *Soit n un entier naturel non nul. Tout idéal monomial de $k[x_1, \ldots, x_n]$ est engendré par un nombre fini d'éléments.*

Le lemme de Dickson (lemme 2.1.3) assure le caractère noethérien de l'ensemble des idéaux monomiaux de $k[x_1, \ldots, x_n]$ ordonné par l'inclusion.

Proposition 2.1.4. — *Soient n un entier naturel non nul et I un idéal non nul de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Soit f un polynôme de I. On note $\mathrm{TD}(f)$ le terme dominant du polynôme f. Si on pose $\mathrm{TD}(I) = \{cx^a | \text{il existe un polynôme } f \text{ appartenant à } I \text{ tel que } \mathrm{TD}(f) = cx^a\}$, alors on a les assertions suivantes :*

1. *L'idéal $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle$, engendré par $\mathrm{TD}(I)$, est un idéal monomial ;*
2. *Il existe des polynômes $g_1, \ldots, g_s$ dans I tels que $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle = \langle \mathrm{TD}(g_1), \ldots, \mathrm{TD}(g_s) \rangle$.*

Démonstration. — 1. Soit g un polynôme non nul de l'idéal I. L'idéal monomial engendré par le monôme dominant $\mathrm{MD}(g)$ de g coïncide avec celui engendré par son terme dominant $\mathrm{TD}(g)$. Notons$\langle \mathrm{MD}(I) \rangle$ l'idéal monomial engendré par les monômes dominants des éléments de I. On a :

$$\langle \mathrm{TD}(I) \rangle = \langle \mathrm{MD}(I) \rangle .$$

Ce qui montre le premier point.

2. L'idéal $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle$ est un idéal monomial d'après la première assertion. Le lemme de Dickson (lemme 2.1.3) assure alors l'existence d'un nombre fini de polynômes $g_1, \ldots, g_s$ de I tels que l'idéal $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle$ soit engendré par les $\mathrm{MD}(g_i)$. D'où :

$$\langle \mathrm{TD}(I) \rangle = \langle \mathrm{TD}(g_1), \ldots, \mathrm{TD}(g_s) \rangle$$

puisque

$$\langle \mathrm{MD}(g_1), \ldots, \mathrm{MD}(g_s) \rangle = \langle \mathrm{TD}(g_1), \ldots, \mathrm{TD}(g_s) \rangle .$$

□

2.1.4. Soit I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Pour un ordre monomial fixé, un sous-ensemble fini G de l'idéal I est appelé *base de Gröbner* de I si et seulement si l'idéal engendré par les termes dominants des éléments de G coïncide avec celui engendré par les termes dominants des éléments de I.

2.1.5. Il n'est *a priori* pas clair d'après la définition d'une base de Gröbner d'un idéal qu'elle existe. Le théorème 2.1.5 ci-dessous donne une preuve de ce fait.

Théorème 2.1.5. — *Soit n un entier naturel non nul. Tout idéal non nul I de l'anneau des polynômes en n indéterminées à coefficients dans k admet une base de Gröbner.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.1.4, il existe des polynômes $g_1, \ldots, g_s$ dans I tels que $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle = \langle \mathrm{TD}(g_1), \ldots, \mathrm{TD}(g_s) \rangle$. Soient f un polynôme de I et r un reste de la division de f par les g_i. Le polynôme r est tel qu'aucun terme dominant des polynômes g_i ne divise le terme dominant de r. Supposons que le polynôme r soit non nul. On a :

$$r = f - a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s.$$

Par conséquent, le polynôme r appartient à I et le terme dominant de r appartient à l'idéal $\langle \mathrm{TD}(I) \rangle$ qui, lui, coïncide avec l'idéal $\langle \mathrm{TD}(g_1), \ldots, \mathrm{TD}(g_s) \rangle$. On aboutit à une contradiction. Donc le polynôme r est nul et les polynômes g_i engendrent l'idéal I. Par construction des polynômes g_i, le sous-ensemble $G = (g_1, \ldots, g_s)$ est une base de Gröbner de I. □

Remarque 2.1.6. — La preuve du théorème 2.1.5 montre qu'une base de Gröbner d'un idéal I est une base de I.

2.1.6. On dispose de plusieurs algorithmes pour construire une base de Gröbner d'un idéal. Le premier et le plus connu est *l'algorithme de Buchberger*. Nous renvoyons à [**47**, chapitre 2] pour plus de détails concernant cet algorithme.

Proposition 2.1.7. — *Soient f un polynôme de $k[x_1, \ldots, x_n]$ et I un idéal de ce dernier. Soit G une base de Gröbner de I. Il existe un unique polynôme r de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que :*

1. *Aucun monôme de r ne soit divisible par le terme dominant d'un élément de G.*
2. *Le polynôme $f - r$ appartienne à l'idéal I.*

2.1.7. Le polynôme r de la proposition 2.1.7 est appelé le *reste* du polynôme f par la base de Gröbner G de l'idéal I. Une base de Gröbner permet donc de résoudre le problème d'unicité du reste d'un polynôme par rapport à un ensemble. Cependant, par définition d'une base de Gröbner, il n'y a pas unicité des bases de Gröbner d'un idéal. En effet, pour tout idéal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, si G est une base de Gröbner de I, alors on construit une nouvelle base de Gröbner de I en ajoutant à G un nombre fini de polynômes de I. Cela est simplement dû au fait qu'une partie finie d'un idéal qui contient une base de Gröbner est une base de Gröbner. Pour résoudre le problème de non-unicité des bases de Gröbner on introduit la terminologie suivante :

Définition 2.1.8. — Soit I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Soit G une base de Gröbner de I. On dit que G est une *base de Gröbner réduite* de I si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le coefficient dominant de tout polynôme g de G est égal à 1 ;
2. Aucun monôme d'un polynôme g de G n'appartient à l'idéal $\langle \mathrm{TD}(G - \{g\}) \rangle$.

Théorème 2.1.9. — *Tout idéal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$ possède une unique base de Gröbner réduite.*

Démonstration. — Commençons par montrer l'existence. Soit G une base de Gröbner de I telle que le coefficient dominant de tout polynôme g de G soit égal à 1. Notre objectif est de modifier G de façon à obtenir une base de Gröbner qui satisfasse aux conditions du théorème. On commence par enlever de G tout polynôme dont le monôme dominant est divisible par celui d'un autre polynôme de G. L'ensemble G_1 obtenu est une base de Gröbner de I puisque pour tout élément minimal (au sens de la division) ω de l'idéal $\langle \mathrm{TD}(G) \rangle$, on ne garde qu'un unique polynôme g de G tel que :

$$\mathrm{TD}(g) = \omega.$$

Pour tout polynôme $g \in G$, on note $\widetilde{g}$ le reste du polynôme $g - \mathrm{TD}(g)$ par G_1 et

$$G_2 = \{\mathrm{TD}(g) + \widetilde{g} \mid g \in G_1\}.$$

L'ensemble G_2 est encore une base de Gröbner de I puisque les termes dominants des polynômes de G_1 et de G_2 sont identiques et le polynôme $\mathrm{TD}(g) + \widetilde{g}$ appartient à l'idéal I. Il est clair par construction qu'aucun monôme du polynôme $\mathrm{TD}(g) + \widetilde{g}$ n'appartient à l'idéal $\langle \mathrm{TD}(G_2 - \{\mathrm{TD}(g) + \widetilde{g}\}) \rangle$. Par conséquent, l'ensemble G_2 est une base de Gröbner réduite de l'idéal I. Ceci étant, il reste à montrer l'unicité. Supposons que G et H soient deux bases de Gröbner réduites de I. L'ensemble $\{\mathrm{TD}(g) \,|g \in G\}$ (comme $\{\mathrm{TD}(h) \,|h \in H\}$) est l'ensemble des éléments minimaux (au sens de la division) de l'ensemble des termes dominants de l'idéal I. Soient g et h deux polynômes appartenant respectivement à G et à H tels que :

$$\mathrm{TD}(g) = \mathrm{TD}(h).$$

Le polynôme $g - h$ est égal à son reste r par G. Comme $g - h$ appartient à l'idéal I, le polynôme r est nul. Ainsi, on a : $g - h = 0$. Ce qui achève la preuve. □

2.1.8. Soient n un entier naturel non nul et I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle $j^{\text{ième}}$ *idéal d'élimination* de I et on note I_j, l'idéal de $k[x_{j+1}, \ldots, x_n]$ défini par

$$I_j = I \cap k[x_{j+1}, \ldots, x_n].$$

Théorème 2.1.10 **(Théorème d'élimination)**. — *Soient I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ et G une base de Gröbner de I. Pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, l'ensemble*

$$G_j = G \cap k[x_{j+1}, \ldots, x_n]$$

est une base de Gröbner du $j^{\text{ième}}$ idéal d'élimination I_j de I.

Démonstration. — Voir [**47**, Théorème 2, page 113]. □

2.1.9. Soient k *un corps algébriquement clos* et I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. On dit que l'idéal I est de *dimension zéro* si la variété algébrique affine $\mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$ définie par I dans $\mathbb{A}^n_k$ est de dimension zéro. Géométriquement, la variété $\mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$ consiste en un nombre fini de points.

Le théorème 2.1.11 ci-dessous fournit une caractérisation des idéaux de dimension zéro.

Théorème 2.1.11. — *Soient k un corps algébriquement clos et I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Soit G une base de Gröbner de I. L'idéal I est de dimension zéro si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un élément de G dont le terme dominant est une pure puissance de x_i.*

Démonstration. — Soit X la variété algébrique affine définie par l'idéal I. Supposons que X soit un ensemble de s points $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$. Nous identifions pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ la donnée de $\mathfrak{p}_i$ et celle du n-uplet $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$. Soit f_i le polynôme en la variable x_i donné par :

$$f_i = \prod_{j=1}^{s} (x_i - a_{ji}).$$

Le polynôme f_i s'annule en tout point de X. Alors, d'après le théorème des zéros de Hilbert, il existe un entier naturel non nul m tel que :

$$f_i^m \in I.$$

Par définition d'une base de Gröbner, il existe un polynôme g_i dans G tel que le terme dominant de g_i divise celui de f_i^m (c'est-à-dire x_i^{sm}). Par conséquent, le terme dominant de g_i est une pure puissance de x_i.

Supposons maintenant que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un élément g_j dans la base de Gröbner G de l'idéal I dont le terme dominant est une pure puissance de x_j. Soit n_j le degré en x_j du polynôme g_j. Posons

$$A = \sum_{\alpha_i < n_i} k \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

L'espace vectoriel A est un k-espace vectoriel de dimension finie. L'application

$$\varphi \ : \ A \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]/I,$$

qui à x_j^s associe sa classe dans $k[x_1, \ldots, x_n]/I$, est une application k-linéaire surjective d'espaces vectoriels puisque tout polynôme h appartient à la même classe que son reste après division par les g_j pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, l'anneau quotient $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ est un espace vectoriel de dimension fini. L'idéal I est donc de dimension zéro. □

Remarque 2.1.12. — Le théorème 2.1.11 ci-dessus reste vrai lorsque le corps de base k n'est pas supposé algébriquement clos. Patrizia Gianni, Barry Trager, et Gail Zacharias établissent ce fait dans [**48**, proposition 5.2].

2.2. Théorème de Buchsbaum-Eisenbud

Soit A un anneau. Le théorème de Hilbert-Burch examine sous quelles conditions le module des syzygies pour un système de m générateurs d'un idéal I est de rang $m-1$. On a dans ce cas une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A^{m-1} \xrightarrow{\varphi_2} A^m \xrightarrow{\varphi_1} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

Après à un bref rappel de la notion de syzygies et de résolution d'un module, nous énonçons et démontrons le théorème de Hilbert-Burch et présentons une généralisation de ce dernier : le théorème de Buchsbaum-Eisenbud. Pour cette section, le livre [**21**] constitue une bonne référence.

2.2.1. Soit A un anneau et M un module de type fini sur A. Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une famille génératrice de M. Le *module des relations* entre les générateurs de M ou encore *le premier module des syzygies* de M, noté $\mathrm{Syz}\,(M)$, est l'ensemble des éléments $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de A^m tels que :

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m = 0.$$

Le premier module des syzygies de M est, comme son nom l'indique, un module sur A. On obtient le second module des syzygies $\mathrm{Syz}^2\,(M)$ de M en calculant le premier module des syzygies de $\mathrm{Syz}\,(M)$ ($\mathrm{Syz}^2\,(M) = \mathrm{Syz}\,(\mathrm{Syz}\,(M))$). En itérant ce procédé, on calcule le $n^{ième}$ module des syzygies de M en considérant les relations entre les générateurs du $(n-1)^{ième}$ module des syzygies de M.

2.2.2. Rappelons quelques terminologies et résultats d'algèbre commutative.

Définition 2.2.1. — Soit A un anneau. Une suite de morphismes de A-modules

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

est un *complexe* de A-modules, si la composition de deux morphismes consécutifs est le morphisme nul, c'est-à-dire $\varphi_{i-1} \circ \varphi_i = 0$ pour tout i. De manière équivalente, cette condition signifie que l'image du morphisme φ_i est incluse dans le noyau du morphisme φ_{i-1}. Le complexe est dit *exact* si le noyau du morphisme φ_{i-1} coïncide avec l'image du morphisme φ_i, *i.e.*

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi_{i-1}) = \mathrm{Im}\,(\varphi_i) \text{ pour tout } i.$$

Exemple 2.2.2. — Soient A un anneau et x un élément de A. La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot x} A \longrightarrow 0,$$

où $\cdot x$ désigne la multiplication par x dans A, est un complexe de A-modules, qui n'est pas nécessairement exact.

Définition 2.2.3. — Soient A un anneau et M un A-module. Une *résolution de M* est un complexe exact de A-modules de la forme :

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0.$$

S'il existe un entier naturel n tel que $M_i = 0$ pour tout entier i supérieur à n et M_n non nul, alors la résolution est dite *finie* de longueur n. Lorsque tous les M_i sont des A-modules libres, la résolution est dite *libre*.

***Théorème 2.2.4* ([20]).** — *Soit A un anneau. Tout A-module M possède une résolution libre.*

Démonstration. — En effet, on peut choisir un A-module libre M_0 et appliquer par un morphisme φ_0 les générateurs de M_0 sur ceux de M. Le morphisme φ_0 ainsi construit est surjectif et d'après le premier théorème d'isomorphisme, les A-modules $M_0/\mathrm{Ker}\,(\varphi_0)$ et M sont isomorphes. Si $\mathrm{Ker}\,(\varphi_0)$ est non nul, on choisit un A-module libre M_1 de même rang que $\mathrm{Ker}\,(\varphi_0)$ et on applique par un morphisme φ_1 les générateurs de M_1 sur ceux de $\mathrm{Ker}\,(\varphi_0)$. En continuant ainsi, on construit une résolution libre de M. $\square$

2.2.3. En 1890, dans [**31**], David Hilbert a montré le théorème 2.2.5 (actuellement connu sous le nom de théorème de Hilbert-Burch) pour les idéaux homogènes de codimension 2 dans l'anneau des polynômes en guise d'exemple de résolution libre. La preuve complète est due à Lindsay Burch en 1968 dans [**8**].

Nous énonçons le théorème de Hilbert-Burch tel que présenté dans [**21**, théorème 20.15].

***Théorème 2.2.5* (Hilbert-Burch).** — *Soient A un anneau noethérien et I un idéal de A. S'il existe un entier naturel non nul m tel que l'anneau quotient A/I possède une résolution libre de la forme*

$$0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

avec F_1 isomorphe à A^m, alors le A-module F_2 est isomorphe à A^{m-1}. En outre, il existe un élément inversible a dans A tel que l'idéal $I_{m-1}(\varphi_2)$ engendré par les déterminants des mineurs de taille $m-1$ de la matrice de φ_2 vérifie

$$I = aI_{m-1}(\varphi_2).$$

Théorème de Hilbert-Burch. — Choisissons une base pour F_1 et F_2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, notons d_i le mineur d'ordre $m-1$ obtenu en supprimant la $i^{ième}$ ligne dans la matrice de φ_2. Soit φ l'application de F_1 dans A dont la matrice est donnée par :

$$(d_1 \cdots d_m).$$

La composée $\varphi \circ \varphi_2$ est nulle puisque chaque composante de sa matrice est le déterminant de la matrice carrée d'ordre m obtenue en répétant une colonne de la matrice de φ_2. Notons $\mathrm{Hom}(-, A)$ par $-^*$. La suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi^*} F_1^* \xrightarrow{\varphi_2^*} F_2^*$$

est un complexe exact. L'image de l'application φ_1^* étant incluse dans le noyau de φ_2^*, il existe une application $a : A \to A$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi_1^*"] \arrow[d, "a"'] & F_1^* \arrow[r, "\varphi_2^*"] \arrow[d, equal] & F_2^* \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi^*"] & F_1^* \arrow[r, "\varphi_2^*"] & F_2^*
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme l'application a est une application de A dans lui-même, elle est définie comme la multiplication par un élément de A que nous notons a. La commutativité du diagramme implique que :

$$\varphi_1 = a\varphi.$$

Par conséquent,

$$I = aI_{m-1}(\varphi_2).$$

L'idéal I étant inclus dans $\langle a \rangle$, l'élément a de A n'est pas un diviseur de zéro. □

Le théorème 2.2.6 ([**21**, théorème 20.9]) ci-dessous est une généralisation du théorème de Hilbert-Burch.

***Théorème 2.2.6* (Buchsbaum-Eisenbud).** — *Soit A un anneau noethérien. Si un complexe de A-modules libres de la forme*

$$0 \longrightarrow F_m \xrightarrow{\varphi_m} F_{m-1} \longrightarrow \cdots F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

est exact, alors

$$\operatorname{rang}(\varphi_{i+1}) + \operatorname{rang}(\varphi_i) = \operatorname{rang}(F_i), \ \forall i.$$

2.3. Rang du module de dérivation

On appelle *rang* du module des dérivations d'une algèbre de type fini, le nombre de dérivations dans une famille génératrice minimale. Soit f un polynôme non constant de $k[x,y]$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Nous montrons dans cette sous-section que le module des k-dérivations de A est de rang au plus 2.

Proposition 2.3.1. — *Soit A une k-algèbre de type fini et I un idéal de $k[x_1,\ldots,x_n]$ tel que $A = k[x_1,\ldots,x_n]/I$. L'application A-linéaire*

$$\varphi \ : \ \{\delta \in \operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n]) \,|\, \delta(I) \subseteq I\} \longrightarrow \operatorname{Der}_k(A),$$

définie par $\varphi(\delta)(x_i) = \overline{\delta(x_i)}$, est surjective de noyau $I\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$. En particulier, le morphisme φ induit un isomorphisme de A-modules :

$$\frac{\{\delta \in \operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n]) \,|\, \delta(I) \subseteq I\}}{I\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])} \simeq \operatorname{Der}_k(A).$$

Nous rappelons que pour un idéal I de $k[x_1,\ldots,x_n]$, on note $I\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ le sous-module de $\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ engendré par les éléments de la forme

$$g_i\partial_{x_i} \ ; \ g_i \in I.$$

Démonstration. — Soit $\overline{\delta}$ une k-dérivation de A. On note σ_i un relévement dans $k[x_1,\ldots,x_n]$ de $\overline{\delta}(x_i)$. Soit δ la k-dérivation de $k[x_1,\ldots,x_n]$ donnée par

$$\delta(x_i) = \sigma_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

En vertu du lemme A.0.8, on vérifie aisément que

$$\varphi(\delta) = \overline{\delta}.$$

Posons $M = \{\delta \in \operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n]) \,|\, \delta(I) \subseteq I\}$. L'application φ est une application A-linéaire. En effet, pour toute dérivation δ et γ de M et pour tout élément $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\delta + a\gamma)(x_i) &= \overline{(\delta + a\gamma)(x_i)} \\
&= \overline{\delta(x_i) + a\gamma(x_i)} \\
&= \overline{\delta(x_i)} + a\overline{\gamma(x_i)} \\
&= \varphi(\delta)(x_i) + a\varphi(\gamma)(x_i) \\
&= (\varphi(\delta) + a\varphi(\gamma))(x_i)
\end{aligned}$$

Pour finir, montrons que le noyau $\operatorname{Ker}(\varphi)$ du morphisme φ est égal à $I\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$. Soit δ dans $\{\delta \in \operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n]) \,|\, \delta(I) \subseteq I\}$. D'après la remarque A.0.9, il existe g_i dans $k[x_1,\ldots,x_n]$ tels que

$$\delta = \sum g_i\partial_{x_i}.$$

Par conséquent, $\delta(x_i) = g_i$. La k-dérivation δ appartient à $\operatorname{Ker}(\varphi)$ si et seulement si

$$\delta(x_i) = g_i \in I.$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = I\operatorname{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n]).$$

□

Remarque 2.3.2. — Soit A une k-algèbre de type fini. La proposition 2.3.1 ci-dessus montre que le A-module des k-dérivations de A est un A-module de type fini puisque $\mathrm{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ est de type fini sur $k[x_1,\ldots,x_n]$.

Définition 2.3.3. — Considérons les notations de la proposition 2.3.1. On appellera *relèvement* dans $\mathrm{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ d'une k-dérivation $\overline{\delta}$ de A une k-dérivation δ de $\mathrm{Der}_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ telle que :

$$\varphi(\delta) = \overline{\delta}.$$

Théorème 2.3.4. — *Soit f un polynôme non constant de $k[x,y]$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Un système minimal de générateurs du module des k-dérivations de A est constitué d'au plus deux dérivations.*

Démonstration. — Soit $\begin{pmatrix} f \\ \partial_x(f) \\ \partial_y(f) \end{pmatrix} : k[x,y]^3 \longrightarrow [x,y]$ l'application qui au triplet (a,b,c) associe le polynôme $af + b\partial_x(f) + c\partial_y(f)$ de $k[x,y]$. Soit

$$0 \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow k[x,y]^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ \partial_x(f) \\ \partial_y(f) \end{pmatrix}} k[x,y] \longrightarrow k[x,y]/\langle f, \partial_x(f), \partial_y(f)\rangle$$

une résolution libre de $k[x,y]/\langle f, \partial_x(f), \partial_y(f)\rangle$. D'après le théorème 2.2.6 (le théorème de Buchsbaum-Eisenbud) le module libre F_1 est de rang 2. Par conséquent, le premier module $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x(f) \\ \partial_y(f) \end{pmatrix}$ des syzygies de $\langle f, \partial_x(f), \partial_y(f)\rangle$ est de rang au plus 2 puisqu'il existe une surjection de F_1 dans $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} f \\ \partial_x(f) \\ \partial_y(f) \end{pmatrix}$.

L'énoncé découle alors du fait que le module des k-dérivations de A est isomorphe au quotient du premier module des syzygies de l'idéal $\langle f, \partial_x(f), \partial_y(f)\rangle$ par $\langle f\rangle$ (proposition 2.3.1). □

2.4. Module des dérivations d'une courbe algébrique affine

Une *courbe algébrique affine* sur k est un schéma affine séparé, de type fini, de dimension 1 sur k. Le *module des k-dérivations* d'une courbe algébrique affine X est le module des k-dérivations de l'anneau des fonctions régulières sur X. La proposition 2.3.1 montre que le module des dérivations d'une courbe algébrique affine (d'une variété affine d'une manière générale) sur un corps de caractéristique nulle est de type fini. Dans le cas des courbes planes, le théorème 2.3.4 démontre que le rang du module des dérivations est au plus 2.

2.4.1. Dérivation réduite. — Posons $A = k[x_1,\ldots,x_n]$. Soit

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i},\ a_i \in A$$

une k-dérivation de A.

Définition 2.4.1. — La dérivation δ est *réduite* si les polynômes a_i sont premiers entre-eux. On appelle *k-dérivation réduite associée* à une k-dérivation δ de A, la k-dérivation réduite $\widetilde{\delta}$ de A telle que :

$$\delta = a\widetilde{\delta},\ a \in A \setminus k.$$

Remarque 2.4.2. — Si δ est une k-dérivation réduite de A, alors δ est identique à la k-dérivation réduite de A associée à δ.

Exemple 2.4.3. —

1. Soit $\delta = xy\partial_x + x(x-y)\partial_y$ une k-dérivation de $k[x,y]$. La dérivation réduite $\widetilde{\delta}$ de $k[x,y]$ associée à δ est définie par :
$$\widetilde{\delta} = y\partial_x + (x-y)\partial_y.$$
2. Considérons la k-dérivation $\delta = 3yx^2\partial_x + 2xy^2\partial_y$ de $k[x,y]$. La dérivation réduite $\widetilde{\delta}$ associée à δ est donnée par :
$$\widetilde{\delta} = 3x\partial_x + 2y\partial_y.$$

2.4.2. Dérivation naturelle et dérivation exceptionnelle. — Nous définissons les différentes classes de dérivations sur une courbe algébrique affine puis montrons des conditions nécessaires et suffisantes pour les caractériser.

Définition 2.4.4. — Soit X une courbe algébrique affine définie par un polynôme f de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}^2_k$. Soit $A = k[x,y]/\langle f\rangle$ l'anneau des fonctions régulières sur X. La *dérivation naturelle réduite* de X, notée $\overline{\delta_n}$, est l'image dans $\mathrm{Der}_k(A)$ de la k-dérivation réduite associée à la dérivation

$$\begin{vmatrix} \partial_x(f) & \partial_y(f) \\ \partial_x & \partial_y \end{vmatrix} := -\partial_y(f)\partial_x + \partial_x(f)\partial_y$$

de $k[x,y]$. On appelle *dérivation naturelle* de X, toute k-dérivation obtenue par multiplication de la dérivation naturelle réduite de X par un polynôme non nul de A.

Nous fournissons ci-dessous un code SAGE permettant de calculer les coefficients de la dérivation naturelle réduite δ_n pour tout polynôme f de $k[x,y]$.

```
Start

A.<x,y>=PolynomialRing(QQ)

def delta_n(f):
    fx = f.derivative(x)
    fy= f.derivative(y)
    g=fx.gcd(fy)
    f_x=fx/g
    f_y=fy/g
    return f_x,f_y

End
```

Exemple 2.4.5. —

1. Soit X la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}^2_k$ par le polynôme $f = y^3x^3 + x^2 + y$. La k-dérivation $\delta = -\left(3y^2x^3+1\right)\partial_x + \left(3y^3x^2+2x\right)\partial_y$ de $k[x,y]$ est une dérivation naturelle de X.

2. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = xy$ de $k[x, y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. La k-dérivation $\delta = -x\partial_x + y\partial_y$ est une dérivation naturelle de X.

Définition 2.4.6. — En reprenant les notations de la définition 2.4.4, on appelle *dérivation exceptionnelle* de X, toute k-dérivation de X qui n'est pas une dérivation naturelle de X.

Exemple 2.4.7. — 1. Soit X la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f = x^3 - y^2$. La k-dérivation $\delta = 2x\partial_x + 3y\partial_y$ de $k[x, y]$ est une k-dérivation exceptionnelle de X.

2. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = xy$ de $k[x, y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. La k-dérivation $\delta = x\partial_x$ est une dérivation exceptionnelle de X.

Les propositions (proposition 2.4.8 et proposition 2.4.10) ci-après caractérisent les dérivations naturelles d'une courbe algébrique affine plane.

Proposition 2.4.8. — *Soit f un polynôme non constant de $k[x, y]$. Posons $A = k[x, y]/f$. Le sous-ensemble du A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de A formé par les k-dérivations $\overline{\delta}$ pour lesquelles il existe un relèvement δ dans $\mathrm{Der}_k(k[x, y])$ vérifiant :*

$$\delta(f) = 0,$$

est le sous-A-module de $\mathrm{Der}_k(A)$ engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n de A.

Démonstration. — En effet, soit $\overline{\delta}$ une k-dérivation de A admettant un relèvement δ dans $\mathrm{Der}_k(k[x, y])$ vérifiant :

$$\delta(f) = 0.$$

D'après le lemme A.0.8, il existe deux polynômes α et β de $k[x, y]$ tels que δ s'écrive sous la forme :

$$\delta = \alpha\partial_x + \beta\partial_y.$$

Par hypothèse, nous avons :

$$\alpha\partial_x(f) + \beta\partial_y(f) = 0 \text{ dans } k[x, y]. \tag{9}$$

De même, par définition de la dérivation naturelle réduite δ_n de A, il existe deux polynômes *premiers entre eux a et b* dans $k[x, y]$ tels que : $\delta_n = a\partial_x + b\partial_y$ avec

$$a\partial_x(f) + b\partial_y(f) = 0 \text{ dans } k[x, y]. \tag{10}$$

Comme le polynôme f est non constant, on a :

$$\partial_x(f) \neq 0 \text{ ou } \partial_y(f) \neq 0.$$

Les relations (9) et (10) forment un système de deux équations à deux inconnues à coefficients dans $k(x, y)$ dont au moins l'un des deux coefficients n'est pas nul. L'ensemble des solutions est un $k(x, y)$-espace vectoriel de dimension 1. Donc

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci équivaut à :

$$\alpha b = \beta a.$$

Le résultat annoncé découle alors du fait qu'il existe un polynôme g dans $k[x, y]$ tel que

$$\alpha = ga \text{ et } \beta = gb,$$

puisque les polynômes a et b sont premiers entre eux.

Réciproquement, soit $\overline{\delta}$ une k-dérivation appartenant à $A\delta_n$. Il existe un polynôme $\overline{g}$ dans A tel que :

$$\overline{\delta} = \overline{g}\delta_n.$$

Soit g un représentant de $\overline{g}$ dans $k[x,y]$. Le relèvement $\delta = g\delta_n$ de $\overline{\delta}$ dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ est tel que

$$\delta(f) = 0.$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.4.9. — La proposition 2.4.8 n'est pas vraie en dimension supérieure à 2. En effet, soient $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ un polynôme de $k[x,y,z]$ et $A = k[x,y,z]/\langle f\rangle$. La k-dérivation $\delta = y\partial_z - y\partial_x + (x-z)\partial_y$ de $k[x,y,z]$ vérifie $\delta(f) = 0$. Cependant, l'image de δ dans le A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de A n'appartient pas au sous-A-module de $\mathrm{Der}_k(A)$ engendré par une des trois dérivations naturelles réduites

$$\delta_x = y\partial_z - z\partial_y,\ \delta_y = x\partial_z - z\partial_x \text{ et } \delta_z = x\partial_y - y\partial_x.$$

Proposition 2.4.10. — *Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Le sous-module du A-module des k-dérivations de A, engendré par la dérivation naturelle réduite, est l'image dans $\mathrm{Der}_k(A)$ de l'ensemble des k-dérivations $\delta = a\partial_x + b\partial_y$ de $k[x,y]$ satisfaisant à la condition*

$$\delta(f) \in \langle f\rangle \quad \textit{et} \quad b \in I = \langle f, \partial_x(f)\rangle.$$

Démonstration. — Soit δ un relèvement dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ d'une dérivation $\overline{\delta}$ appartenant au sous-module de $\mathrm{Der}_k(A)$ engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n. Si l'on pose $\delta = a\partial_x + b\partial_y$, alors la condition $\overline{\delta} = \alpha\delta_n$ implique la relation suivante :

$$b \equiv \alpha\partial_x(f) \bmod (f).$$

Par conséquent, le polynôme b appartient à l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$.

Réciproquement, supposons que $\delta = a\partial_x + b\partial_y$ soit une k-dérivation de $k[x,y]$ telle que

$$\delta(f) \in \langle f\rangle \quad \text{et} \quad b \in I = \langle f, \partial_x(f)\rangle.$$

Posons $b = \beta f + \alpha\partial_x(f)$. On a

$$\begin{aligned} \delta &= a\partial_x + b\partial_y \\ &= a\partial_x + \beta f\partial_y + \partial_x(f)\partial_y \\ &= \alpha\delta_n + (a + \alpha\partial_y(f))\partial_x + \beta f\partial_y. \end{aligned}$$

En appliquant, la k-dérivation δ au polynôme f on obtient :

$$\delta(f) = \alpha\delta_n(f) + (a + \alpha\partial_y(f))\partial_x(f) + \beta f\partial_y(f) = cf, \text{ où } c \in k[x,y].$$

Alors f divise le polynôme $(a + \alpha\partial_y(f))\partial_x(f)$. Par hypothèse, les polynômes f et $\partial_x(f)$ n'ont pas de facteurs communs. Donc f divise $a + \alpha\partial_y(f)$. Si on pose $a + \alpha\partial_y(f) = Pf$, où $P \in k[x,y]$, on a

$$\delta = \alpha\delta_n + f(P\partial_x + \beta\partial_y).$$

Ainsi, la k-dérivation induite par δ sur A appartient au sous-module de $\mathrm{Der}_k(A)$ engendré par la dérivation naturelle réduite. □

2.4.3. Dérivation résultante. — Après un rappel précisant la notion de résultant de polynômes en plusieurs variables et quelques propriétés que nous utiliserons, nous étudions une famille de dérivations introduite par Olivier Ripoll (voir [**53**]).

2.4.3.1. Soient f et g deux polynômes de $k[x_1, \ldots, x_n]$ de degré strictement positif en x_1. Posons :

$$f = a_0 x_1^d + a_1 x_1^{d-1} + \cdots + a_d \quad \text{et} \quad g = b_0 x_1^s + b_1 x_1^{s-1} + \cdots + b_s, \ a_i \text{ et } b_i \in k[x_2, \ldots, x_n]$$

avec a_0 et b_0 non nuls. La *matrice de Sylvester* de f et g en x_1 est la matrice carrée d'ordre $(d+s)$ suivante :

$$\begin{pmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\
a_2 & a_1 & \ddots & 0 & & b_1 & \ddots & 0 \\
 & & & a_0 & \vdots & \vdots & & b_0 \\
\vdots & \vdots & & a_1 & & & & b_1 \\
a_{d-1} & & & & b_{s-1} & & & \\
a_d & a_{d-1} & & \vdots & b_s & b_{s-1} & & \\
0 & a_d & & & 0 & b_s & & \vdots \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{d-1} & \vdots & \vdots & & b_{s-1} \\
0 & 0 & & a_d & 0 & 0 & & b_s
\end{pmatrix}$$

Le *résultant* en x_1 des polynômes f et g, noté $\mathrm{Res}(f, g, x_1)$, est le déterminant de la matrice de Sylvester de f et g en x_1. Nous renvoyons à [**47**] pour un exposé détaillé sur la notion de résultant.

2.4.3.2. Précisons deux propriétés du résultant dont nous ferons usage dans la suite de notre travail ([**47**, proposition 1, page 158]).

Proposition 2.4.11. — *Soient f et g deux polynômes de $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de degré non nul en x_1. On a les assertions suivantes :*

1. *Le résultant* $\mathrm{Res}(f, g, x_1)$ *de f et g en x_1 appartient au premier idéal d'élimination*
$$\langle f, g \rangle \cap k[x_2, \ldots, x_n].$$
2. *Le résultant* $\mathrm{Res}(f, g, x_1)$ *des polynômes f et g en x_1 est nul si et seulement si f et g ont un facteur commun de degré non nul en x_1 dans $k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Démonstration. — 1. Chaque coefficient de la matrice de Sylvester des polynômes f et g en x_1 appartient à $k[x_2, \ldots, x_n]$. L'énoncé découle alors du fait que le résultant de f et g en x_1 appartient à l'idéal engendré par f et g. En effet, il suffit de remplacer la dernière ligne l_{d+s} de la matrice de Sylvester par
$$l_{d+s} \leftarrow \sum_{i=1}^{d+s} x^{s+d-i} \times l_i$$
et de développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.

2. Si les polynômes f et g ont un facteur commun de degré non nul en x_1 dans $k[x_1, \ldots, x_n]$, alors d'après la première assertion, ce facteur divise le résultant qui, toujours d'après cette dernière, appartient à $k[x_2, \ldots, x_n]$ et ne contient par conséquent aucun terme en x_1 dans son expression. Le résultant des polynômes f et g en x_1 est donc nul.

□

2.4.3.3. Dans sa thèse Ripoll a introduit la notion de polynômes associés à une équation différentielle dans le cadre de la géométrie des tissus. En particulier, il a démontré la proposition suivante [1] :

***Proposition 2.4.12* (Ripoll).** — *Soit f un polynôme de $k[x,y]$* [2] *de degré d en x strictement supérieur à 1. Si le résultant R en x du polynôme f et sa dérivée partielle $\partial_x(f)$ est non nul, alors pour i dans $\{0,\dots,d-2\}$, il existe un unique couple de polynômes non nuls de $k[x,y]$*

$$u_i = u_{i,2}x^{d-2} + u_{i,3}x^{d-3} + \cdots + u_{i,d} \quad \text{et} \quad v_i = v_{i,1}x^{d-1} + v_{i,2}x^{d-2} + \cdots + v_{i,d}$$

de degré respectif en x inférieur ou égal à $d-2$ et $d-1$ tel que :

$$x^i R\partial_y(f) = u_i f + v_i \partial_x(f). \tag{11}$$

Démonstration. — En effet, si on pose

$$f = a_0(y)\,x^d + a_1(y)\,x^{d-1} + \cdots + a_d$$

et si on note $\mathcal{M}_{2d-1}(k)$ la matrice suivante

$$\begin{pmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & da_0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & & 0 & (d-1)\,a_1 & da_0 & & 0 \\
a_2 & a_1 & & 0 & (d-2)\,a_2 & (d-1)\,a_1 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{d-2} & a_{d-3} & \cdots & a_0 & 2a_{d-2} & 3a_{d-3} & \cdots & da_0 \\
a_{d-1} & a_{d-2} & \cdots & a_1 & a_{d-1} & 2a_{d-2} & \cdots & (d-1)\,a_1 \\
a_d & a_{d-1} & \cdots & a_2 & 0 & a_{d-1} & \cdots & (d-2)\,a_2 \\
0 & a_d & \cdots & a_3 & 0 & 0 & \cdots & (d-3)\,a_3 \\
0 & 0 & \cdots & a_4 & 0 & 0 & \cdots & (d-4)\,a_4 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & a_d & 0 & 0 & & a_{d-1}
\end{pmatrix}$$

l'équation (11) est équivalente à :

$$\mathcal{M}_{2d-1}(k) \times \begin{pmatrix} \frac{u_{i,2}}{R} \\ \vdots \\ \frac{u_{i,d}}{R} \\ \\ \frac{v_{i,1}}{R} \\ \vdots \\ \frac{v_{i,d}}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_y(a_1) \\ \vdots \\ \partial_y(a_d) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le deuxième membre de cette équation comporte i zéros au niveau inférieur et $d-2-i$ zéros au niveau supérieur. On peut remarquer que la matrice M est la transposée de la

1. Nous utilisons ces objets dans un cadre légèrement différent : celui des polynômes en deux variables. En particulier, la dérivation résultante que nous introduisons plus loin n'est pas considérée par Ripoll.

2. Ripoll a démontré la proposition 2.4.12 sur $\mathbb{C}$ et en 3 variables mais ce résultat se généralise sur un corps de caractéristique nulle et en plusieurs variables (voir [**58**]).

matrice de Sylvester du polynôme f et de sa dérivée partielle $\partial_x(f)$ d'après la formule de Sylvester. Le système est alors de Cramer et admet par conséquent une unique solution. Cette unique solution fournit la solution de l'équation (11). □

Remarque 2.4.13. — La proposition 2.4.12 a été utilisée par Ripoll puis par Ripoll et Julien Sebag dans **[54]** dans le cadre de l'étude algébrique des équations différentielles ordinaires polynomiales dans le plan complexe.

Le code SAGE ci-dessous calcule les polynômes u_i et v_i pour un polynôme f de $k[x,y]$ donné.

```
Start

A.<x,y>=PolynomialRing(QQ)

def f_y(f,j):
    d=f.degree(x)
    V=Matrix(A,2*d-1,1,0)
    for i in [0..d]:
        V[2*d-2-i-j, 0]= (f.polynomial(x)[i]).derivative(y)
    return V



def deltari(f):
    M=f.sylvester_matrix(f.derivative(x)).transpose()
    d=f.degree(x)
    R=M.determinant()
    L=[]
    for j in [0..2*d-2]:
        X= R*(M\f_y(f, j))
        L= L+[X]

    return L

End
```

2.4.3.4. Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$. Supposons que le degré d en x de f soit strictement supérieur à 1. Pour tout $i \in \{0,1,\ldots,d-2\}$, la proposition de Ripoll (proposition 2.4.12) assure l'existence d'un (unique) couple de polynômes (u_i, v_i) de $k[x,y]$ avec le degré en x de u_i inférieur ou égal à $d-2$ et celui de v_i inférieur ou égal à $d-1$ tel que :

$$x^i R\partial_y(f) - v_i\partial_x(f) = u_i f. \tag{12}$$

Pour une solution $(\mathbf{u_i}, \mathbf{v_i})$ de l'équation (12), nous appellerons condition de degré $(\star)$ la condition

$$\begin{cases} \mathbf{deg_x}\left(\mathbf{u_i}\right) \leq \mathbf{d-2} \\ \\ \mathbf{deg_x}\left(\mathbf{v_i}\right) \leq \mathbf{d-1}. \end{cases}$$

Définition 2.4.14. — La relation (12) permet de définir une k-dérivation δ_{ri} de $k[x,y]$ en posant :

$$\delta_{ri} = x^i R \partial_y - v_i \partial_x.$$

La dérivation δ_{ri} ainsi définie est telle que

$$\delta_{ri}(f) = u_i f.$$

Elle induit donc d'après la proposition 2.3.1 une k-dérivation de $\mathrm{Der}_k\left(k[x,y]/\langle f\rangle\right)$ que l'on notera $\overline{\delta_{ri}}$.

Proposition 2.4.15. — *Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. L'image de la k-dérivation δ_{ri} de $k[x,y]$ dans le A-module des k-dérivations de A appartient au sous-module de ce dernier engendré par la dérivation naturelle réduite de A.*

Démonstration. — En effet, le résultant R en x des polynômes f et $\partial_x(f)$ étant non nul, il existe deux polynômes α et β de $k[x,y]$ tels que

$$R = \beta f + \alpha \partial_x(f).$$

Par définition de la k-dérivation δ_{ri}, on a :

$$\delta_{ri} = -v_i \partial_x + \left(\beta x^i f + \alpha x^i \partial_x(f)\right)\partial_y.$$

En appliquant cette dernière à f, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \delta_{ri}(f) & = & -v_i \partial_x(f) + \left(\beta x^i f + \alpha x^i \partial_x(f)\right)\partial_y(f) \\ & = & \left(\alpha x^i \partial_y(f) - v_i\right)\partial_x(f) + \beta x^i f \partial_y(f) \end{array}$$

Comme $\delta_{ri}(f) = u_i f$, alors le polynôme f divise $\left(\alpha x^i \partial_y(f) - v_i\right)$ puisque f et $\partial_x(f)$ n'ont pas de facteurs communs. Soit p le polynôme de $k[x,y]$ tel que :

$$\alpha x^i \partial_y(f) - v_i = pf.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \delta_{ri} & = & \left(-\alpha x^i \partial_y(f) + pf\right)\partial_x + \left(\beta x^i f + \alpha x^i \partial_x(f)\right)\partial_y \\ & = & \alpha x^i\left(-\partial_y(f)\partial_x + \partial_x(f)\partial_y\right) + f\left(p\partial_x + \beta x^i \partial_y\right) \end{array}.$$

De ce fait, dans $\mathrm{Der}_k(A)$,

$$\overline{\delta_{ri}} = \alpha x^i \overline{\delta_n}.$$

□

2.4.3.5. Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$ de degré d en x strictement supérieur à 1. Supposons que le résultant R en x du polynôme f et sa dérivée partielle $\partial_x(f)$ soit non nul. Soient U et V deux polynômes de $k[x,y]$ satisfaisant à la condition de degré $(\star)$ tels que

$$R\partial_y(f) = Uf + V\partial_x(f).$$

L'unicité du couple (U,V) garantie par la proposition de Ripoll justifie la définition suivante :

Définition 2.4.16. — En considérant les notations précédentes, soient X la courbe algébrique affine définie par le polynôme f dans $\mathbb{A}_k^2$ et A l'anneau des fonctions régulières sur X. Soient $\widetilde{V}$ et $\widetilde{R}$ les quotients respectifs de la division euclidienne des polynômes V et R par le PGCD des polynômes U, V et R. Le polynôme $\widetilde{R}$ ainsi défini est appelé *le résultant réduit* de f et de sa dérivée partielle $\partial_x(f)$. On appelle *dérivation résultante* de X et on note $\overline{\delta_r}$, l'image de la k-dérivation $\delta_r = -\widetilde{V}\partial_x + \widetilde{R}\partial_y$ de $k[x,y]$ dans le A-module des k-dérivations de A.

Exemple 2.4.17. —

1. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ l'hypersurface définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = x^3 - y^2$ de $k[x,y]$. Un calcul explicite donne :

$$\begin{cases} R = 27y^4 \\ U = 54y^3 \\ V = -18y^3x. \end{cases}$$

Après division par le PGCD des polynômes R, U et V, la dérivation résultante de X est donnée par :

$$\delta_r = 2x\partial_x + 3y\partial_y.$$

2. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = y^3x^3 + x^2 + y$ dans $\mathbb{A}_k^2$. Nous avons :

$$\begin{cases} R = y^4\left(4 + 27y^7\right) \\ U = y^3\left(42y^3x + \left(4 + 27y^7\right)\right) \\ V = y^3\left(-14y^3x^2 + 2\left(9y^7 - 1\right)x - 21y^4\right). \end{cases}$$

La dérivation résultante de X est donc l'image dans l'anneau des fonctions régulières sur X de la k-dérivation

$$\delta = \left(14y^3x^2 - 2\left(9y^7 - 1\right)x + 21y^4\right)\partial_x + y\left(4 + 27y^7\right)\partial_y.$$

3. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. Nous avons après calcul :

$$\begin{cases} R = y^3\left(-4 + 27y^3\right) \\ U = y^2\left(27yx + 3\left(-2 + 27y^3\right)\right) \\ V = -y^2\left(9yx^2 + \left(-2 + 27y^3\right)x - 6y^2\right). \end{cases}$$

D'où, après division par le PGCD des polynômes R, U et V, nous obtenons :

$$\delta_r = -\left(9yx^2 + \left(-2 + 27y^3\right)x - 6y^2\right)\partial_x + y\left(-4 + 27y^3\right)\partial_y.$$

Proposition 2.4.18. — *Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$. Il existe un polynôme p de $k[x,y]$ et un polynôme $s(y)$ de $k[y]$ tels que*

$$\delta_{ri} = pf\partial_x + x^i s(y)\,\delta_r.$$

Démonstration. — Soit $s(y)$ le PGCD du résultant R et des polynômes U et V satisfaisant à la condition de degré $(\star)$ tels que

$$R\partial_y(f) = Uf + V\partial_x(f).$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\delta_{ri} &= -v_i\partial_x + x^i R\partial_y \\ &= -v_i\partial_x + x^i s(y)\widetilde{R}\partial_y \\ &= \left(x^i s(y)\widetilde{V} - v_i\right)\partial_x + x^i s(y)\delta_r\end{aligned}$$

En appliquant la k-dérivation δ_{ri} à f, on obtient :

$$\delta_{ri}(f) = \left(x^i s(y)\widetilde{V} - v_i\right)\partial_x(f) + x^i s(y)\delta_r(f) = u_i f.$$

De ce fait, le polynôme f divise $\left(x^i s(y)\widetilde{V} - v_i\right)$ dans $k[x,y]$ puisque les polynômes f et $\partial_x(f)$ n'ont pas de facteurs communs. Alors, il existe un polynôme p de $k[x,y]$ tel que

$$x^i s(y)\widetilde{V} - v_i = pf.$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.4.19. — La proposition 2.4.18 montre que les k-dérivations δ_{ri} construites à partir du résultat de Ripoll (proposition 2.4.12) appartiennent au sous-module du module des k-dérivations de X engendré par la dérivation résultante réduite de X.

2.4.3.6. Nous étudions le lien entre la dérivation résultante δ_r et la dérivation δ_{r0} dans le cas singulier.

Théorème 2.4.20. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et f un polynôme non constant de $k[x,y]$, de degré d en x strictement supérieur à 1. Supposons que le résultant R en x du polynôme f et sa dérivée partielle $\partial_x(f)$ soit non nul et que la courbe algébrique affine définie par f dans $\mathbb{A}^2_k$ soit singulière. Si (U,V) est l'unique couple de polynômes de $k[x,y]$ vérifiant la condition de degré $(\star)$ tel que*

$$R\partial_y(f) = Uf + V\partial_x(f),$$

alors le PGCD des polynômes R, U et V est non constant.

Démonstration. — En effet, si on pose :

$$U = u_2x^{d-2} + \cdots + u_d \quad \text{et} \quad V = v_1x^{d-1} + \cdots + v_d,$$

où les u_i et v_i appartiennent à $k[y]$, alors d'après les formules de Cramer, les polynômes u_i et v_j sont donnés par : $u_i = \det(S_i)$ et $v_j = \det(S_{d+j-1})$, où S_i et S_{d+j-1} sont respectivement les matrices obtenues en remplaçant la $i^{ième}$ colonne et la $(d+j-1)^{ième}$ colonne de la matrice de Sylvester du polynôme f et de sa dérivée partielle $\partial_x(f)$ par le vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_y(a_1) \\ \vdots \\ \partial_y(a_d) \end{pmatrix}$$

En remplaçant la dernière ligne l_{2d-1} de la matrice S_i par

$$l_{2d-1} \leftarrow \sum_{s=1}^{2d-1} x^{2d-1-s} \times l_s,$$

on ne change pas le déterminant de cette dernière. En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, on prouve l'existence des polynômes A_i, B_i et C_i de $k[x,y]$ tels que

$$u_i = A_i f + B_i \partial_x(f) + C_i \partial_y(f).$$

Un calcul analogue fournit des polynômes α_i, β_i et γ_i dans $k[x,y]$ tels que le polynôme v_j s'écrive sous la forme :

$$v_j = \alpha_j f + \beta_j \partial_x(f) + \gamma_j \partial_y(f).$$

Si $M = (x_0, y_0)$ est un point singulier de la courbe algébrique X définie par le polynôme f, d'après les expressions précédentes des polynômes u_i et v_j, on a :

$$u_i(y_0) = v_i(y_0) = R(y_0) = 0.$$

Par conséquent, le PGCD des polynômes R, U et V est toujours non constant dans le cas singulier, puisque divisible par $\prod_{(x_0,y_0)\in X_{\mathrm{Sing}}} (y - y_0)$. □

Exemple 2.4.21. —

1. Soit f le polynôme de $k[x,y]$ donné par $f(x,y) = x^3 - y^2$. Un calcul explicite donne :

$$\begin{cases} R = 27y^4 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -27y^2 \partial_y(f) \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 9y^2 x \partial_y(f) \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

L'origine est l'unique point singulier de la courbe affine plane définie par f dans $\mathbb{A}_k^2$ et on a :

$$R(0) = u_2(0) = u_3(0) = v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0.$$

Le PGCD des polynômes R, U et V est non nul et égal y^3.

2. Considérons le polynôme $f = x^3 + y^3 - xy$ de $k[x,y]$. Nous avons après calcul

$$\begin{cases} R = y^3\left(-4 + 27y^3\right) \\ u_2 = -27f + 9x\partial_x(f) + 18y\partial_y(f) \\ u_3 = 81y^2 f - 3y(9xy - 2)\partial_x(f) + 18yx\partial_x(f) \\ v_1 = 9f - 3x\partial_x(f) - 6y\partial_y(f) \\ v_2 = -27y^2 f + y(9xy - 2)\partial_x(f) - 6yx\partial_y(f) \\ v_3 = -6yf + 2xy\partial_x(f) + 4y^2\partial_y(f). \end{cases}$$

On a clairement à l'origine (unique point singulier de la courbe plane définie par f)

$$R(0) = u_2(0) = u_3(0) = v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 0.$$

Le PGCD des polynômes R, U et V est non nul puisque divisible par y. Il est égal y^2.

Remarque 2.4.22. — 1. Le théorème 2.4.20 ci-dessus établit que pour toute courbe algébrique affine singulière réduite X sur un corps k de caractéristique nulle, la dérivation résultante δ_r de X est toujours différente de la k-dérivation δ_{r0} de $\mathbb{A}_k^2$.

2. Si on écrit le polynôme f sous la forme $f = a_0x^d + \cdots + a_d$ avec a_i dans $k[y]$ et a_0 non nul, alors le PGCD des polynômes R, U et V est donné par

$$a_0^\alpha \prod (y - y_i)^{\alpha_i},$$

où α et α_i sont des entiers naturels non nuls bien choisis et les y_i sont les ordonnées des points singuliers de la courbe plane définie par f.

2.5. Dérivation résultante et système de générateurs du module des dérivations

Dans cette section, nous expliquons comment décrire un système de générateurs du module des dérivations d'une courbe algébrique plane et étudions les rapports avec la dérivation résultante.

2.5.1. Soient f un polynôme réduit non constant de $k[y]$ et $\overline{\delta}$ une k-dérivation de $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Soit $\delta = a\partial_x + b\partial_y$ un relèvement dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ de $\overline{\delta}$. Il existe un polynôme c de $k[x,y]$ tel que

$$\delta(f) = b\frac{\partial f}{\partial y} = cf.$$

Le polynôme f étant réduit, il divise b puisque n'ayant aucun facteur commun avec $\frac{\partial f}{\partial y}$. Soit q le quotient de la division du polynôme b par f. On a :

$$\delta = a\partial_x + fq\partial_y.$$

La k-dérivation $\overline{\delta}$ de A appartient alors au A-module engendré par l'image $\overline{\partial_x}$ de la k-dérivation ∂_x de $k[x,y]$ dans $\mathrm{Der}_k(A)$. Il s'en suit que

$$\mathrm{Der}_k(A) = A\overline{\partial_x}.$$

De manière analogue, lorsque f est un polynôme réduit non constant de $k[x]$, on a :

$$\mathrm{Der}_k(A) = A\overline{\partial_y}.$$

Dans la suite de notre travail, le polynôme f sera toujours un polynôme à deux variables .

2.5.2. Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$. Posons

$$J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f)).$$

Soit b un polynôme de J. Il existe deux polynômes a et c de $k[x,y]$ tels que

$$b\frac{\partial f}{\partial y} = cf - a\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Soit δ_b la k-dérivation de $k[x,y]$ définie par :

$$\delta_b = a\partial_x + b\partial_y.$$

D'après la proposition 2.3.1, la k-dérivation δ_b de $k[x,y]$ induit une k-dérivation $\overline{\delta_b}$ de la courbe algébrique affine définie par le polynôme f dans $\mathbb{A}_k^2$.

Définition 2.5.1. — La dérivation $\overline{\delta_b}$ sera appelée *dérivation associée* au polynôme b. Nous appellerons *dérivation d'élimination* la dérivation associée au générateur du premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$.

Lemme 2.5.2. — *Considérons les notations ci-dessus et posons* $A = k[x,y]/\langle f \rangle$. *L'application* $\psi : J \longrightarrow \mathrm{Der}_k(A)$ *qui, au polynôme* b *associe* $\overline{\delta_b}$ *est une application bien définie et un épimorphisme de* A*-modules de noyau l'idéal* $\langle f \rangle$. *En particulier, elle induit un isomorphisme de* $J/\langle f \rangle$ *dans* $\mathrm{Der}_k(A)$.

Démonstration. — Commençons par montrer que ψ est une application bien définie. Soient b_1 et b_2 deux polynômes de J. Soient $\delta_{b_1} = a_1\partial_x + b_1\partial_y$ et $\delta_{b_2} = a_2\partial_x + b_2\partial_y$ deux dérivations de $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ telles que :

$$\delta_{b_1}(f) = c_1 f \quad \text{et} \quad \delta_{b_2}(f) = c_2 f.$$

Supposons que

$$b_1 = b_2.$$

Soit $\delta = \delta_1 - \delta_2$. La dérivation δ appartient à $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ puisque ce dernier est un module. En appliquant δ à f, on obtient :

$$\delta(f) = (a_1 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x} = (c_1 - c_2) f.$$

Le polynôme f étant réduit, il existe un polyôme p dans $k[x,y]$ tel que

$$a_1 - a_2 = pf.$$

De ce fait,

$$\delta_{b_1} = \delta_{b_2} + pf\partial_x.$$

D'où $\overline{\delta_{b_1}} = \overline{\delta_{b_2}}$ et ψ est une application bien définie.

L'application ψ est A-linéaire. En effet, pour tout $\alpha \in A$, tout b_1 et b_2 dans J, on a :

$$\psi(b_1 + \alpha \cdot b_2) = \overline{\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2}}.$$

Le polynôme $b_1 + \alpha \cdot b_2$ appartient à J, ce dernier étant un idéal. Alors, il existe deux polynômes a et c de $k[x,y]$ tels que :

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + (b_1 + \alpha \cdot b_2)\partial_y(f) = cf.$$

Posons

$$\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2} = a\partial_x + (b_1 + \alpha \cdot b_2)\partial_y.$$

Soient $\delta_{b_1} = a_1\partial_x + b_1\partial_y$ et $\delta_{b_2} = a_2\partial_x + b_2\partial_y$ des relèvements respectifs de $\overline{\delta_{b_1}}$ et de $\overline{\delta_{b_2}}$ dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$. On a :

$$\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2} = \delta_{b_1} + \alpha \cdot \delta_{b_2} + (a - a_1 - \alpha \cdot a_2)\partial_x.$$

En appliquant la dérivation $\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2}$ au polynôme f, ce dernier étant réduit, il divise le polynôme $a - a_1 - \alpha \cdot a_2$. Posons

$$a - a_1 - \alpha \cdot a_2 = pf, \ p \in k[x,y].$$

Nous avons

$$\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2} = \delta_{b_1} + \alpha \cdot \delta_{b_2} + pf\partial_x.$$

D'où,

$$\overline{\delta_{b_1+\alpha\cdot b_2}} = \overline{\delta_{b_1}} + \alpha \cdot \overline{\delta_{b_2}}.$$

Le morphisme de A-modules ψ est surjectif puisque pour toute k-dérivation $\overline{\delta}$ de A, il existe un polynôme b de J tel que δ_b soit un relèvement dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ de $\overline{\delta}$.

Reste à montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$ du morphisme ψ est égal à l'idéal $\langle f\rangle$. Soit b un polynôme de J appartenant à $\langle f\rangle$. La k-dérivation δ_b définie par $\delta_b = b\partial_y$ est un relèvement dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ de la dérivation $\overline{\delta_b}$ associée au polynôme b. Cette dernière est donc nulle dans $\mathrm{Der}_k(A)$ puisque f divise b. Soit b' un polynôme dans $\mathrm{Ker}(\psi)$. On a : $\psi(b') = \overline{\delta_{b'}}$ est nulle dans $\mathrm{Der}_k(A)$. D'après la proposition 2.3.1, il existe une k-dérivation D dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$ telle que :

$$\delta_{b'} = a'\partial_x + b'\partial_y = fD.$$

De ce fait, le polynôme b' de $k[x,y]$ appartient à $\langle f\rangle$. Ce qui achève la preuve. □

2.5.3. Le lemme 2.5.2 permet de ramener l'étude du module des k-dérivations d'une courbe algébrique affine plane $X = \mathrm{Spec}(A)$ définie par un polynôme f dans $\mathbb{A}^2_k$ à l'étude de l'idéal conducteur $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$. Le calcul d'une base de ce dernier (une base de Gröbner par exemple) permet de calculer un système de générateurs de $\mathrm{Der}_k(A)$. En effet, si $(g_1,\ldots,g_m)$ est un système de générateurs de J, alors $\left(\overline{\delta_{g_1}},\ldots,\overline{\delta_{g_m}}\right)$ est un système de générateurs de $\mathrm{Der}_k(A)$. Nous explicitons ci-dessous un algorithme de calcul d'un système de générateurs sachant f.

```
Start

Input: f

Output: a basis H of Der_{k}( A)

H:={}

Compute the reduced Groebner basis G of
       J = ( < f, \partial_{x}( f)> : \partial_{y}( f ))
for each g in G compute \delta_{b}
       H = H \cup {\delta_{b}}

End
```

Exemple 2.5.3. — 1. Soit f le polynôme de $k[x,y]$ défini par : $f = x^3 + y^3 + yx$. Une famille génératrice de l'idéal J est donnée par :

$$G = \begin{cases} g_0 = \left(4 + 27y^3\right) y \\ g_1 = \left(2x + 3y^2\right) y \\ g_2 = 3x^2 - 9y^2x + 7y + 27y^4. \end{cases}$$

Soit

$$H = \begin{cases} \delta_{g_0} = -\left(-27y^3x - 2x + 6y^2 + 9yx^2\right)\partial_x + y\left(4 + 27y^3\right)\partial_y \\ \delta_{g_1} = x\left(3y^2 + x\right)\partial_x + y\left(2x + 3y^2\right)\partial_y \\ \delta_{g_2} = -\left(-2x + 12y^2 + 18yx^2 - 27y^3x\right)\partial_x + \left(g_2 = 3x^2 - 9y^2x + 7y + 27y^4\right)\partial_y \end{cases}$$

la famille des dérivations associées aux polynômes de G. D'après le lemme 2.5.2, l'image de la famille H dans $\mathrm{Der}_k(A)$ est un système de générateurs de $\mathrm{Der}_k(A)$.

2. De même, si on considère le polynôme $f = x^4 + y^4 - x^2$ de $k[x,y]$, une famille génératrice de l'idéal conducteur J est

$$G' = \begin{cases} g_0 = -y^4 + 4y^8 \\ g_1 = -xy^3 + 4y^7 x \\ g_2 = -2y^7 + y^3 x^2 \end{cases}$$

et l'image de la famille

$$H' = \begin{cases} \delta_{g_0} = 2y^3 x \left(x^2 + 2y^4 - 1\right) \partial_x + \left(-y^4 + 4y^8\right) \partial_y \\ \delta_{g_1} = 2x^2 y^2 \left(x^2 + 2y^4 - 1\right) \partial_x + \left(-xy^3 + 4y^7 x\right) \partial_y \\ \delta_{g_2} = -2y^6 x \partial_x + \left(-2y^7 + y^3 x^2\right) \partial_y \end{cases}$$

dans $\mathrm{Der}_k(A)$ engendre ce dernier.

Remarque 2.5.4. — Le calcul d'une base de Gröbner de l'idéal J ne fournit pas toujours un système minimal de générateurs J. Par conséquent, un système de générateurs de $\mathrm{Der}_k(A)$ associé à une base de Gröbner de J n'est pas toujours minimal.

2.5.4. Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x,y]$ de degré d en x strictement supérieur à 1. Posons

$$J = (\langle f, \partial_x(f) \rangle \ : \ \partial_y(f)) \quad \text{et} \quad A = k[x,y] / \langle f \rangle.$$

Si le générateur de l'idéal d'élimination $J \cap k[y]$ satisfait à la condition de degré $(\star)$, alors la dérivation résultante appartient à tout système de générateurs de $\mathrm{Der}_k(A)$ associé à une base de Gröbner de J. En effet,

Proposition 2.5.5. — *Soient f un polynôme réduit non constant de degré $d \geq 2$ de $k[x,y]$ et $J = (\langle f, \partial_x(f) \rangle \ : \ \partial_y(f))$. Si le générateur de l'idéal d'élimination $J \cap k[y]$ satisfait à la condition de degré $(\star)$, alors il est identique au résultant réduit $\widetilde{R}$ de f et sa dérivée partielle $\partial_x(f)$.*

Démonstration. — Le résultant réduit $\widetilde{R}$ appartient comme le résultant au premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ de J. Soit G la base de Gröbner réduite de J. Il existe un polynôme g_{i_0} dans G tel que le terme dominant $\mathrm{TD}(g_{i_0})$ du polynôme g_{i_0} divise celui du résultant réduit $\widetilde{R}$. Le polynôme g_{i_0} appartient donc à $k[y]$ (les monômes étant ordonnés suivant l'ordre lexicographique). Le polynôme g_{i_0} engendre le premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ d'après le théorème d'élimination. Supposons que le degré en y du polynôme g_{i_0} soit différent de celui de $\widetilde{R}$. Alors, il existe un polynôme b dans $k[y]$ de degré au moins 1 en y tel que :

$$\widetilde{R} = b g_{i_0}.$$

Par définition de g_{i_0} et par hypothèse, il existe deux polynômes α et β de $k[x,y]$ respectivement de degré au plus $d-2$ et $d-1$ en x tels que

$$g_{i_0} \partial_y(f) = \alpha f + \beta \partial_x(f).$$

Par unicité des polynômes $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ satisfaisant aux conditions de degré pour lesquels on a :

$$\widetilde{U} f + \widetilde{V} \partial_x(f) = \widetilde{R} \partial_y(f),$$

on obtient :

$$\widetilde{U} = b\alpha \quad \text{et} \quad \widetilde{V} = b\beta.$$

Ce qui contredit le fait que les polynômes $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ et $\widetilde{R}$ soient premiers entre eux. Donc

$$g_{i_0} = \widetilde{R}.$$

□

Remarque 2.5.6. — 1. Sous les hypothèses de la proposition 2.5.5, la dérivation résultante réduite et la dérivation d'élimination sont identiques.

2. Lorsque le polynôme f est unitaire en x (unitaire comme polynôme en la variable x), le générateur g_{i_0} de l'idéal d'élimination $(\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f)) \cap k[y]$ satisfait à la condition de degré $(\star)$. En effet, il existe deux polynômes α et β de $k[x,y]$ tels que :

$$g_{i_0}\partial_y(f) = \alpha f + \beta \partial_x(f). \tag{13}$$

Soit $d \geq 2$ le degré en x de f. Supposons que le degré en x du polynôme α soit supérieur à $d-2$. Soient α' et p respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de α par $\partial_x(f)$. D'après la relation (13), on a :

$$g_{i_0}\partial_y(f) = \alpha' f + (\beta + pf)\,\partial_x(f).$$

Le polynôme $g_{i_0}\partial_y(f) - \alpha' f$ est alors de degré au plus $2d-2$ en x puisque α' est de degré inférieur ou égal à $d-2$ ($\partial_x(f)$ étant unitaire de degré $d-1$ en x). Par conséquent, le polynôme $\beta + pf$ est de degré inférieur ou égal à $d-1$ en x et g_{i_0} satisfait à la condition de degré $(\star)$. On procède de manière analogue en divisant β par f lorsque le degré en x du polynôme β est strictement supérieur à $d-1$ dans la relation (13).

En considérant les notations du lemme 2.5.5, l'hypothèse selon laquelle le générateur du premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ de J devra satisfaire à la condition de degré $(\star)$ est nécessaire puisque dans le cas contraire il est facile de trouver un contre-exemple au lemme 2.5.5.

Exemple 2.5.7. — Soit f le polynôme de $k[x,y]$ donné par $f(x,y) = \left(y^6+1\right)x^2 + 3y^{13}$. Le générateur g_{i_0} du premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ de J est :

$$g_{i_0} = y,$$

tandis que le résultant réduit

$$\widetilde{R} = 6y\left(y^6+1\right)$$

puisque

$$\begin{cases} R = 12y^{13}\left(y^6+1\right)^2 \\ U = 156y^{12}\left(y^6+1\right)^2 \\ V = -6y^{12}\left(7y^6+13\right)\left(y^6+1\right)x. \end{cases}$$

De même, si f est le polynôme de $k[x,y]$ défini par $f = \left(y^3+1\right)x^3 + y^2$. Le générateur g_{i_0} de l'idéal d'élimination $J \cap k[y]$ est :

$$g_{i_0} = y,$$

alors que le résultant réduit est donné par

$$\widetilde{R} = 3y(y+1)\left(y^2-y+1\right)$$

car

$$\begin{cases} R = 27y^4 (y+1)^3 \left(y^2 - y + 1\right)^3 \\ U = 54y^3 (y+1)^3 \left(y^2 - y + 1\right)^3 \\ V = 9y^3 \left(y^3 - 2\right) (y+1)^2 \left(y^2 - y + 1\right)^2 x. \end{cases}$$

Une conséquence immédiate du contre-exemple ci-dessus est le fait que la dérivation résultante δ_r n'appartient pas à toute famille génératrice minimale du module des dérivations d'une courbe algébrique affine plane.

2.5.5. Dans le but de fournir une méthode de calcul explicite d'un système minimal de générateurs du module des dérivations d'une courbe algébrique affine plane, nous nous intéressons au calcul d'une famille génératrice minimale de l'idéal conducteur J. Cependant, l'idéal J, comme tous les idéaux conducteurs d'une manière générale est difficile à prédire. En effet, même si J s'écrit comme le noyau de la multiplication par $\partial_y (f)$ dans $k[x,y]/\langle f, \partial_x (f)\rangle$, le calcul explicite d'une famille génératrice minimale de J n'est pas aisé. Dans le cas des polynômes de degré au plus 2 en x (sous-section 2.5.8), des polynômes quasi-homogènes (sous-section 2.5.9) et pour certains cas concrets de polynômes f dans $k[x,y]$ que nous ne pouvons pas caractériser de manière générale (sous-section 2.5.10), nous établissons le résultat suivant :

$$J = \langle f, \partial_x (f), g_0 \rangle, \tag{14}$$

où le polynôme g_0 désigne le générateur du premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ de J.

2.5.6. L'exemple suivant montre que la formule (14) n'a aucune chance de se réaliser en général.

Exemple 2.5.8. — Pour $f = x^6 - y^3x^4 + y^4$, la base de Gröbner réduite de J est donnée par

$$G = \begin{cases} g_0 = -27y^2 + 4y^7 \\ g_1 = -27yx + 4y^6x \\ g_2 = 3yx^2 - 2y^4 \\ g_3 = 5x^4 - 4y^6 + 12y. \end{cases}$$

Alors que la base de Gröbner réduite de l'idéal $\langle f, \partial_x (f), g_0 \rangle$ est

$$H = \begin{cases} h_0 = -27y^2 + 4y^7 \\ h_1 = -2y^5 + 3y^2x^2 \\ h_2 = -4y^6x + 9x^5. \end{cases}$$

De même, si l'on considère le polynôme $f = x^5 + xy^2 + y^3$ de $k[x,y]$, la base de Gröbner réduite de J est

$$G' = \begin{cases} g_0 = 3125y^4 + 256y^2 \\ g_1 = 4xy + 5y^2 \\ g_2 = 160x^3 + 1875y^3 + 128y, \end{cases}$$

tandis que celle de l'idéal $\langle f, \partial_x (f), g_0 \rangle$ est

$$H' = \begin{cases} h_0 = 3125y^4 + 256y^2 \\ h_1 = 5y^3 + 4xy^2 \\ h_2 = 5x^4 + y^2. \end{cases}$$

2.5.7. Calcul explicite d'un système minimal de générateurs dans le cas lisse. — Considérons une courbe algébrique affine plane X définie sur k. Lorsque X est lisse sur k, toutes les k-dérivations de X sont naturelles comme le montre le théorème 2.5.9 ci-après :

Théorème 2.5.9. — *Soient f un polynôme de $k[x,y]$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine définie par f dans $\mathbb{A}^2_k$. Si la courbe X est lisse, alors le A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de X est libre de rang 1 et une base de ce dernier est donnée par la dérivation naturelle réduite de X.*

Démonstration. — En effet, si on note f_x et f_y les images respectives des dérivées partielles $\partial_x(f)$ par rapport à x et $\partial_y(f)$ par rapport à y de f dans A, alors il existe deux polynômes a et b dans $k[x,y]$ tels que, dans A, l'on a la relation :

$$\overline{a} f_x + \overline{b} f_y = 1 \tag{15}$$

puisque A est un anneau régulier. Soient $\overline{\delta}$ une k-dérivation de A et δ un relèvement de $\overline{\delta}$ dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$. Il existe deux polynômes α et β dans $k[x,y]$ tels que δ s'écrive sous la forme :

$$\delta = \alpha\partial_x + \beta\partial_y.$$

Par conséquent, on a, dans l'anneau A, la relation :

$$\overline{\alpha} f_x + \overline{\beta} f_y = 0. \tag{16}$$

De la relation (15), l'on déduit, dans A, que

$$\overline{\alpha} = \overline{a\alpha} f_x + \overline{\alpha}\overline{b} f_y.$$

De la relation (16), l'on déduit que

$$\overline{\alpha} = (-\overline{a}\overline{\beta} + \overline{\alpha}\overline{b}) f_y$$

et que

$$\overline{\beta} = (\overline{a}\overline{\beta} - \overline{\alpha}\overline{b}) f_x.$$

Posons D la k-dérivation de $k[x,y]$ définie par $D = (-a\beta + \alpha b)\cdot(f_y\partial_x - f_x\partial_y)$. Il est facile de voir que :

1. l'image de D dans A est la k-dérivation $\overline{\delta}$ de A,
2. l'image de D dans A appartient au sous-module engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n de A.

Alors, nous avons l'inclusion suivante de A-modules :

$$\mathrm{Der}_k(A) \subseteq A\delta_n.$$

L'inclusion inverse étant triviale, nous pouvons conclure que le A-module des k-dérivations de A est engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n de A. □

Exemple 2.5.10. — 1. Soient $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ un polynôme de $k[x,y]$ et $X = \mathrm{Spec}(k[x,y]/\langle f\rangle)$ l'ellipse définie par f dans $\mathbb{A}^2_k$. Posons $A = k[x,y]/\langle f\rangle$. Le A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite $\delta_n = (2x+y)\partial_y - (x+2y)\partial_x$ de X.

2. Soit X la courbe elliptique définie sur $\mathbb{R}$ par l'équation
$$y^2 = x^3 + x.$$
Le module des $\mathbb{R}$-dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite $\delta_n = 2y\partial_x + \left(3x^2 + 1\right)\partial_y$ de X.

Remarque 2.5.11. — Soient f un polynôme réduit non constant de $k[x, y]$ et X la courbe algébrique affine plane définie par f dans $\mathbb{A}^2_k$. Lorsque la courbe X est lisse, l'idéal conducteur $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$ coïncide avec l'idéal $\langle f, \partial_x(f)\rangle$.

2.5.8. Calcul explicite d'un système minimal de générateurs dans le cas des polynômes de degré au plus 2 en x. —

Lemme 2.5.12. — *Soit $f \in k[x, y]$ un polynôme réduit de degré 2 en x. La base de Gröbner réduite de $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$ ne contient que deux éléments.*

Démonstration. — Soit G la base de Gröbner réduite de l'idéal $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$. Soient $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$ et H une base de Gröbner de I obtenue par l'algorithme de Buchberger ([**47**, chapitre 2, §7]). Il existe par définition un entier naturel non nul m et des polynômes $h_i \in k[x, y]$ tels que
$$H = \langle f, \partial_x(f), h_1, \ldots, h_m\rangle.$$
Les monômes étant classés suivant l'ordre lexicographique, les polynômes h_i sont de degré au plus 1 en x. Comme l'idéal I est de dimension zéro, le théorème 2.1.11 affirme que H contient un polynôme unitaire en x de degré 1. L'idéal I étant inclus dans J, la base de Gröbner réduite G de J contient un polynôme unitaire en x de degré 1 par définition d'une base de Gröbner. Par conséquent, la base G ne peut contenir que deux éléments puisqu'elle est réduite. □

Remarque 2.5.13. — Sous les hypothèses du lemme 2.5.12, la base de Gröbner réduite de l'idéal J est un système minimal de générateurs de J.

Proposition 2.5.14. — *Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ une courbe algébrique affine plane définie par un polynôme réduit $f \in k[x, y]$ de degré au plus 2 en x. La dérivation d'élimination appartient à un système minimal de générateurs du module des k-dérivations de X.*

Démonstration. — La proposition découle directement du lemme 2.5.12 et du lemme 2.5.2. □

Théorème 2.5.15. — *Soit f un polynôme réduit non constant de $k[x, y]$ de degré au plus 2 en x. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine plane définie par f. Si la courbe X est singulière, alors le A-module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de X est de rang 2 ; engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n et par la dérivation d'élimination.*

Démonstration. — Soient $G = (g_0, g_1, \ldots, g_s)$ et $H = (h_0, h_1, \ldots, h_m)$ les bases de Gröbner respectives des l'idéaux $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$ et $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$. Quitte à changer d'indices, supposons que g_0 soit le générateur du premier idéal d'élimination $J \cap k[y]$ de J. Pour tout i, soit r_i le reste du polynôme g_i par H. Par définition du polynôme r_i, son degré en x est nul puisqu'il existe d'après le théorème 2.1.11 un i_0 tel que le terme dominant de h_{i_0} soit égal à x. Le polynôme r_i appartient alors au premier idéal d'élimination $J \bigcap k[y]$. De ce fait, il est divisible par le polynôme g_0. Par conséquent, les idéaux $J = (\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f))$

et $I' = \langle f, \partial_x(f), g_0 \rangle$ coïncident. L'énoncé découle alors du lemme 2.5.2 qui établit que le module des k-dérivations de X est isomorphe à $J/\langle f \rangle$. □

Exemple 2.5.16. — 1. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = x^2 + y^8 x + y^{11}$ de $k[x,y]$. La base de Gröbner réduite de l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f) \rangle$ est donnée par $H = (h_0, h_1)$, où $h_0 = y^{16} - 4y^{11}$ et $h_1 = x + \frac{1}{2}y^8$. La base de Gröbner réduite de l'idéal $J = (I : \partial_y(f))$ est donnée par $G = \left(\widetilde{R}, g\right)$, où $\widetilde{R} = y^6 - 4y$ et $g = x + 2y^3$. Le reste r du polynôme g par H est : $r = -\frac{1}{2}y^8 + 2y^3$. Le polynôme r appartient bien à l'idéal engendré par le résultant réduit $\widetilde{R}$. L'idéal J coïncide donc avec l'idéal $I + \langle \widetilde{R} \rangle$ et le module des k-dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -\left(8y^7 x + 11y^{10}\right)\partial_x + \left(2x + y^8\right)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(2\left(4y^5 - 11\right)x + 5y^8\right)\partial_x + \left(y^6 - 4y\right)\partial_y.$$

2. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = \left(y^6 + 1\right)x^2 + 3y^{13}$ de $k[x,y]$, alors l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f) \rangle$ admet pour base de Gröbner réduite le couple $\left(y^{13}, x\right)$ et l'idéal $J = (I : \partial_y(f))$ a pour base de Gröbner réduite le couple (y, x). L'idéal J coïncide avec l'idéal $I + \langle \widetilde{R} \rangle$, où $\langle \widetilde{R} \rangle = \langle y \rangle$. Le module des k-dérivations de la courbe algébrique affine X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -\left(6y^5 x^2 + 39y^{12}\right)\partial_x + 2\left(y^6 + 1\right)x\partial_x$$

et par la dérivation réduite associée à :

$$\delta_r = \left(7y^6 + 13\right)x\partial_x + 6y\left(y^6 + 1\right)\partial_y.$$

3. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f = x^3 - x^2 - y^2$ de $k[x,y]$, alors l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f) \rangle$ admet pour base de Gröbner réduite le couple $\left(4y^2 + 27y^4, 9y^2 + 2x\right)$ et l'idéal $J = (I : \partial_y(f))$ a pour base de Gröbner réduite le couple $\left(4y + 27y^3, 9y^2 + 2x\right)$. Posons $\widetilde{R} = 4y + 27y^3$. L'idéal J coïncide avec l'idéal $I + \langle \widetilde{R} \rangle$. Le module des k-dérivations de la courbe algébrique affine X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = 2y\partial_x + x(3x - 2)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = 2\left(-2x^2 + \left(2 + 9y^2\right)x - 3y^2\right)\partial_x + \left(4y + 27y^3\right)\partial_y.$$

2.5.9. Calcul explicite des générateurs dans le cas quasi-homogène. —

Définition 2.5.17. — Soient f un polynôme de $k[x,y]$ et d un entier naturel non nul. Soit (α, β) un couple de nombres rationnels non nuls. On dit que f est *quasi-homogène* de degré d avec le poids (α, β) si :

$$\forall \lambda \in k,\ f\left(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y\right) = \lambda^d f(x,y). \tag{17}$$

On dira que le polynôme f est *quasi-homogène* s'il est quasi-homogène de degré 1 avec un certain poids.

Remarque 2.5.18. — Si f est quasi-homogène de degré d avec le poids (α, β), alors f est quasi-homogène de degré 1 avec le poids $\left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}\right)$.

Exemple 2.5.19. — Le polynôme f de $k[x,y]$ défini par $f(x,y) = x^3 - y^2$ est quasi-homogène. En effet, pour tout $\lambda \in k$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda^{\frac{1}{3}}x, \lambda^{\frac{1}{2}}y\right) &= \left(\lambda^{\frac{1}{3}}x\right)^3 + \left(\lambda^{\frac{1}{2}}y\right)^2 \\ &= \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

De même, le polynôme $f(x,y) = x^4 - xy^3 + y^4$ de $k[x,y]$ est quasi-homogène puisque homogène. Cependant, le polynôme f défini par $f(x,y) = x^3 + y^2 - x^2$ n'est pas quasi-homogène.

La proposition 2.5.20 ci-dessous donne explicitement les générateurs du module des dérivations pour une courbe algébrique affine X définie par un polynôme quasi-homogène.

Théorème 2.5.20. — *Soit f un polynôme réduit quasi-homogène de $k[x,y]$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine plane définie par f. Si la courbe X est singulière, alors le module $\mathrm{Der}_k(A)$ des k-dérivations de X est de rang 2, engendré par la dérivation naturelle réduite δ_n de X et par la dérivation exceptionnelle dite d'Euler*

$$\delta_e = c_1 x\partial_x + c_2 y\partial_y, \text{ où } c_i \in k.$$

En outre, la dérivation d'Euler et la dérivation résultante réduite coïncident.

Avant de démontrer le théorème 2.5.20 ci-dessus, rappelons l'identité d'Euler. Soit f un polynôme quasi-homogène de $k[x,y]$. Il existe des constantes non nulles c_1, c_2 et c_3 dans k telles que :

$$c_1 x\partial_x(f) + c_2 y\partial_y(f) = c_3 f. \tag{18}$$

La relation (18) est appelée *identité d'Euler*. Cette dernière s'obtient en dérivant la relation (17) par rapport à λ puis en attribuant à λ la valeur 1.

Démonstration. — Le polynôme f étant quasi-homogène, il existe d'après l'identité d'Euler des constantes non nulles c_1, c_2 et c_3 dans k telles que :

$$c_1 x\partial_x(f) + c_2 y\partial_y(f) = c_3 f.$$

Soient $\overline{\Delta}$ une k-dérivation de A et Δ un relèvement de $\overline{\Delta}$ dans $\mathrm{Der}_k(k[x,y])$. Il existe par définition de Δ, un polynôme a dans $k[x,y]$ tel que

$$\Delta(f) = af \text{ dans } k[x,y].$$

Si a est nul, alors $\overline{\Delta}$ est égal au produit de la dérivation naturelle réduite δ_n de A par un polynôme de A d'après la proposition 2.4.8. Sinon, soit δ_e la k-dérivation d'Euler de A, c'est-à-dire celle induite par la k-dérivation $\delta = c_1 x\partial_x + c_2 y\partial_y$ de $k[x,y]$ sur A. D'après l'identité d'Euler on a :

$$\delta(f) = c_3 f \text{ dans } k[x,y].$$

Ainsi, $\left(\Delta - \frac{a}{c_3}\delta\right)(f) = 0$. Par conséquent, la k-dérivation $\overline{\Delta} - \frac{c}{c_3}\delta_e$ de A, où c est l'image du polynôme a dans A, est le produit de la dérivation naturelle réduite δ_n de A par un polynôme b de A, c'est-à-dire que $\overline{\Delta} - \frac{c}{c_3}\delta_e = b\delta_n$ d'après la proposition 2.4.8. Alors,

$$\overline{\Delta} = b\delta_n + \frac{a}{c_3}\delta_e.$$

Donc,

$$\mathrm{Der}_k(A) = A\delta_n + A\delta_e.$$

Enfin, la dérivation résultante réduite de X coïncide avec la dérivation d'Euler δ_e de ce dernier. En effet, soit δ_r la dérivation résultante de X. Il existe par définition un polynôme non nul u de $k[x,y]$ tel que :

$$\delta_r(f) = uf.$$

Sachant que $\delta_e(f) = c_3 f$ avec c_3 une constante non nulle de k, on a :

$$\delta_r = \frac{u}{c_3}\delta_e.$$

Comme la dérivation d'Euler δ_e est une dérivation réduite, alors elle est identique à la dérivation résultante réduite puisque satisfaisant à la condition de degré $(\star)$. □

Exemple 2.5.21. —

1. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = x^3 - y^2$. Ce dernier étant quasi-homogène, le A-module des dérivations de X sur k est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = 2y\partial_x + 3x^2\partial_y$$

et par la dérivation résultante réduite

$$\delta_e = 2x\partial_x + 3y\partial_y.$$

2. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ est l'hypersurface définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = xy$, alors le A-module des k-dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -x\partial_x + y\partial_y$$

et par la dérivation résultante réduite

$$\delta_e = x\partial_x + y\partial_y.$$

3. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = x^4 + xy^3 - y^4$. Le module des k-dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = \left(4y^3 - 3xy^2\right)\partial_x + \left(4x^3 + y^3\right)\partial_y$$

et par la dérivation résultante réduite

$$\delta_e = x\partial_x + y\partial_y.$$

2.5.10. Exemples. — Nous décrivons explicitement les générateurs du module des dérivations de quelques courbes algébriques affines qui ne font pas partie des cas formellement démontrés plus haut.

2.5.10.1. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f(x,y) = x^3 + y^2 - x^2$ de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. On a l'égalité suivante :

$$(\langle f, \partial_x(f)\rangle \ : \ \partial_y(f)) = \langle f, \partial_x(f)\rangle + \langle g_0\rangle,$$

où $g_0 = -4y + 27y^3$. Alors le module des k dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -2y\partial_x + x(3x-2)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(4x^2 + 2\left(-2 + 9y^2\right)x - 6y^2\right)\partial_x + y\left(-4 + 27y^2\right)\partial_y.$$

2.5.10.2. Soit X la courbe algébrique définie par le polynôme $f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2 + 2y$ de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. Si on pose $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$ et $J = (I \ : \ \partial_y(f))$, alors on a

$$J = I + \langle \left(y^3+2\right)\left(-1+8y+4y^4\right)y\rangle.$$

Le module des k dérivations de X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -2\left(2y^3+1\right)\partial_x + 2x\left(2x^2+1\right)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(4x^2 + 2\left(-2+9y^2\right)x - 6y^2\right)\partial_x + \left(y^3+2\right)\left(-1+8y+4y^4\right)y\partial_y.$$

2.5.10.3. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. La base de Gröbner réduite de l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$ est donnée par

$$H = \begin{cases} h_0 = -4y^2 + 27y^5 \\ h_1 = -3y^3 + 2yx \\ h_2 = 3x^2 - y. \end{cases}$$

Un calcul de la base de Gröbner réduite G de l'idéal $J = (I \ : \ \partial_y(f))$ donne

$$G = \begin{cases} g_0 = 4y - 27y^4 \\ g_1 = -2yx + 3y^3 \\ g_2 = -3x^2 - 9y^2x + 7y - 27y^4. \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que

$$J = I + \langle g_0\rangle$$

car

$$\begin{cases} g_1 = -h_1 \\ g_2 = \dfrac{3}{2}g_0 - \dfrac{9}{2}yh_1 - h_2. \end{cases}$$

Le module des k-dérivations de X est donc engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = \left(x - 3y^2\right)\partial_x + \left(3x^2 - y\right)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(3y^2 + x\right)(-2+9xy)\partial_x + y\left(-4+27y^3\right)\partial_y.$$

2.5.10.4. Considérons la courbe algébrique définie par le polynôme $f(x,y) = x^3 + yx^2 + y^2$ dans $\mathbb{A}_k^2$. La base de Gröbner réduite de idéal $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$ est donnée par

$$H = \begin{cases} h_0 = 4y^3 + 27y^2 \\ h_1 = -9y^2 + 2xy^2 \\ h_2 = 3x^2 + 2yx. \end{cases}$$

Celle de l'idéal $J = (I \ : \ \partial_y(f))$ est donnée par

$$G = \begin{cases} g_0 = 4y^2 + 27y \\ g_1 = 2yx - 9y \\ g_2 = x^2 + 3y. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les idéaux J et $I + \langle g_0 \rangle$ coïncident puisque

$$\begin{cases} g_1 = \left(\frac{2}{27}x - \frac{1}{3}\right) g_0 - \frac{4}{27} h_1 \\ g_2 = \left(-\frac{2}{81}x + \frac{1}{9}\right) g_0 + \frac{4}{81} h_1 + \frac{1}{3} h_2. \end{cases}$$

Par conséquent, le module des k-dérivations de la variété algébrique affine X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -\left(2y + x^2\right) \partial_x + \left(3x^2 + 2yx\right) \partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(-2x^2 + 2\left(y + 9\right) x - 3y\right) \partial_x + y\left(4y + 27\right) \partial_y.$$

2.5.10.5. Considérons la courbe algébrique définie par le polynôme $f(x, y) = y^3x^3 - x^2 + 2y^2$ dans $\mathbb{A}_k^2$. la base de Gröbner réduite de idéal $I = \langle f, \partial_x(f) \rangle$ est donnée par

$$H = \begin{cases} h_0 = -2y^2 + 27y^{10} \\ h_1 = -9y^5 + x. \end{cases}$$

Celle de l'idéal $J = (I \ : \ \partial_y(f))$ est donnée par

$$G = \begin{cases} g_0 = -2y + 27y^9 \\ g_1 = -9y^5 + x. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les idéaux J et $I + \langle g_0 \rangle$ coïncident. Par conséquent, le modules des k-dérivations de la variété algébrique affine X est engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -y\left(3yx^3 + 4\right) \partial_x + x\left(3y^3x - 2\right) \partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = \left(-24y^5 - 2x + 8y^3x^2 - 9y^8x\right) \partial_x + y\left(-2 + 27y^8\right) \partial_y.$$

2.5.10.6. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f(x, y) = x^4 + y^2x^3 - y^4$ de $k[x, y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. La base de Gröbner réduite de l'idéal $I = \langle f, \partial_x(f) \rangle$ est donnée par

$$H = \begin{cases} h_0 = -4y^2 + 27y^5 \\ h_1 = -3y^3 + 2yx \\ h_2 = 3x^2 - y. \end{cases}$$

Un calcul explicite de la base de Gröbner réduite G de l'idéal $J = (I \ : \ \partial_y(f))$ donne

$$G = \begin{cases} g_0 = 4y - 27y^4 \\ g_1 = -2yx + 3y^3 \\ g_2 = -3x^2 - 9y^2x + 7y - 27y^4. \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que $J = I + \langle g_0 \rangle$ puisque

$$\begin{cases} g_1 = -h_1 \\ g_2 = \frac{3}{2} g_0 - \frac{9}{2} y h_1 - h_2. \end{cases}$$

Le module des k-dérivations de X est donc engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = \left(x - 3y^2\right) \partial_x + \left(3x^2 - y\right) \partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = 2x\left(4 - 27y^3\right)\partial_x + y\left(-4 + 27y^3\right)\partial_y.$$

2.5.10.7. Soit X la courbe algébrique affine définie par le polynôme $f(x,y) = y^2x^4 - x^2 + y^2$ de $k[x,y]$ dans $\mathbb{A}_k^2$. Si on pose $I = \langle f, \partial_x(f)\rangle$ et $J = (I \ : \ \partial_y(f))$, alors la base de Gröbner réduite de l'idéal I est donnée par

$$H = \begin{cases} h_0 = -y^2 + 4y^6 \\ h_1 = -x + 4xy^4 \\ h_2 = -2y^2 + x^2, \end{cases}$$

et celle de l'idéal J est donnée par

$$G = \begin{cases} g_0 = -y + 4y^5 \\ g_1 = -x + 4xy^4 \\ g_2 = -2y^2 + x^2. \end{cases}$$

On a par conséquent

$$J = I + \langle g_0 \rangle$$

et le module des k-dérivations de X est donc engendré par la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -2y\left(x^4 + 1\right)\partial_x + 2x\left(y^2x^2 - 1\right)\partial_y$$

et par la dérivation d'élimination

$$\delta_r = x\left(2y^2x^2 - 1\right)\partial_x + y\left(4y^4 - 1\right)\partial_y.$$

2.5.11. La construction de la dérivation résultante suppose un choix : celui du calcul du résultant en x du polynôme f et de sa dérivée partielle par rapport à x. Le choix dual, c'est-à-dire celui qui consiste à considérer le résultant en y du polynôme f et de sa dérivée partielle par rapport à y, fournit une k-dérivation δ de A qui s'exprime en fonction de la dérivation naturelle réduite et de la dérivation résultante réduite dans tous les cas favorables à notre résultat.

Exemple 2.5.22. — 1. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ l'hypersurface définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2$. La k-dérivation δ obtenue à partir de la proposition de Ripoll en considérant le résultant en y du polynôme f et de sa dérivée partielle par rapport à y est donnée par :

$$\delta = 2x\left(x^2 - 1\right)\partial_x + y\left(2x^2 - 1\right)\partial_y.$$

Cette dernière s'exprime en fonction de la dérivation naturelle réduite

$$\delta_n = -2y^3\partial_x + x\left(2x^2 - 1\right)\partial_y$$

et de la dérivation résultante réduite

$$\delta_r = 2x\left(x^2 + 2y^4 - 1\right)\partial_x + y\left(4y^4 - 1\right)\partial_y.$$

Plus précisément :

$$\delta = \delta_r + 2xy\delta_n.$$

2. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ l'hypersurface définie dans $\mathbb{A}_k^2$ par le polynôme $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$. La k-dérivation δ obtenue à partir de la proposition de Ripoll en considérant le résultant en y du polynôme f et de sa dérivée partielle par rapport à y est donnée par :
$$\delta = x\left(-4 + 27x^3\right)\partial_x + \left(9xy^2 + \left(-2 + 27x^3\right)y - 6x^2\right)\partial_y.$$
La dérivation naturelle réduite δ_n est donnée par
$$\delta_n = -\left(3y^2 - x\right)\partial_x + \left(3x^2 - y\right)\partial_y$$
et la dérivation résultante réduite
$$\delta_r = \left(9yx^2 + x\left(-2 + 27y^3\right) - 6y^2\right)\partial_x + y\left(-4 + 27y^3\right)\partial_y.$$
Un calcul élémentaire montre que nous avons :
$$\delta = \delta_r - (2 - 18yx)\,\delta_n.$$

CHAPITRE 3

INTERLUDE TEXTILE

La géométrie des tissus est consacrée à l'étude des propriétés géométriques d'une famille de feuilletages en position générale. Vers les années 1930 à Hambourg, elle se constitue comme une discipline autonome sous l'impulsion de Wilhelm Blaschke, Gerrit Bol et G. Thomsen. Le problème de linéarisation des tissus a été abordé par Blaschke et Bol [**6**] (dans le cadre des tissus plans) puis par différents mathématiciens en France et à l'étranger à différentes périodes. Parmi eux, Alain Hénaut [**29, 30**] adopte un point de vue implicite en géométrie des tissus, ce qui lui permet notamment d'obtenir des critères différentiels remarquables de linéarisation. Le problème de linéarisation des tissus quasi-homogènes incomplets est le sujet de ce chapitre. Nous l'abordons via le point de vue implicite et nous nous limiterons à évoquer les germes de tissus du plan complexe dans un voisinage de l'origine.

3.1. Tissus : généralités et définitions

3.1.1. Feuilletage. — Un germe de feuilletage $\mathscr{F}$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ correspond à la donnée d'une 1-forme $\omega \in \mathbb{C}\{x, y\}$ définie à unité multiplicative près.

Exemple 3.1.1. — Soit F un polynôme non nul de $\mathbb{C}[x, y]$ tel que

$$F(0, 0) = 0.$$

Le polynôme F définit dans un voisinage de l'origine un feuilletage $\mathscr{F}$ dont les feuilles sont les courbes de niveau

$$\{F(x, y) = cste\}.$$

Le feuilletage $\mathscr{F}$ est donc défini par la 1-forme différentielle

$$\omega = \partial_x(F)\, dx + \partial_y(F)\, dy$$

ou encore par la dérivation (ou le champ de vecteurs)

$$D = -\partial_y(F)\, \partial_x + \partial_x(F)\, \partial_y.$$

3.1.2. Tissu. — Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient d feuilletages $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_d$ définis au voisinage d'un point de $\mathbb{C}^2$ dont les feuilles sont respectivement données par $\{F_i(x, y) = cste\}$. On dit que les feuilletages $\mathscr{F}_i$ sont en position générale si :

$$dF_j(x, y) \wedge dF_l(x, y) \neq 0,\ 1 \leq j < l \leq d.$$

Définition 3.1.2. — Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un point de $\mathbb{C}^2$. Un *d-tissu* $\mathscr{W}_d$ de $\mathbb{C}^2$ au voisinage de p (ou germe de d-tissu en p) est la donnée de d feuilletages de courbes analytiques complexes en position générale au voisinage de p.

Les feuilles d'un d-tissu $\mathscr{W}_d$ au voisinage d'un point p sont les courbes intégrales de d champs de vecteurs $D_i = \alpha_i \partial_x + \beta_i \partial_y$ à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ qui sont deux à deux linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que

$$\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \neq 0$$

au voisinage de p.

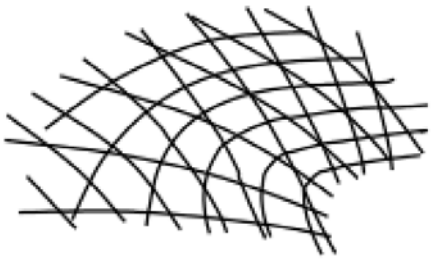

FIGURE 1. **3-tissu plan**

3.2. Quelques exemples de tissus plans

Nous présentons ici deux exemples de tissus plans en théorie des équations différentielles.

3.2.1. Le 3-tissu plan. — Soient ω_1, ω_2 et ω_3 trois 1-formes différentielles sur $\mathbb{C}\{x, y\}$. Soit $\mathscr{W}_3$ un 3-tissu du plan défini ω_1, ω_2 et ω_3. Ces dernières peuvent être normalisées de façon à ce que la condition de normalisation

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

soit satisfaite. En effet, l'hypothèse de position générale assure que ces trois 1-formes différentielles sont deux à deux linéairement indépendantes. Alors il existe α et β inversibles dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ tels que

$$\omega_3 = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2.$$

Comme les 1-formes différentielles ω et $\sigma\omega$ définissent le même feuilletage lorsque σ est un inversible de $\mathbb{C}\{x, y\}$, nous avons la condition de normalisation en remplaçant ω_1 et ω_2 respectivement par $\frac{1}{\alpha}\omega_1$ et $\frac{1}{\beta}\omega_2$.

Soit $\mathscr{F}_3$ le feuilletage défini par ω_3 au voisinage d'un point (x_0, y_0) de $\mathbb{C}^2$. Il existe une fonction f avec $df\,(x_0, y_0) \neq 0$ telle que les feuilles de $\mathscr{F}_3$ soient les courbes de niveau de f. On dit que la fonction f est *la fonction de définition* du feuilletage $\mathscr{F}_3$. On peut donc choisir $\omega_3 = df$ puisque $df \wedge \omega_3 = 0$. La condition de normalisation et la définition de df permettent de choisir $\omega_1 = -\frac{\partial f}{\partial x} dx$ et $\omega_1 = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$. Le 3-tissu $\mathscr{W}_3$ est donné au voisinage du point (x_0, y_0) par

$$(x = cste, y = cste, f\,(x, y) = cst)\,.$$

Réciproquement, si on se donne une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x, y) \text{ avec } f\,(0, 0) = 0,$$

les courbes intégrales de cette équation forment un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbb{C}^2$ au voisinage de l'origine. A cette équation, on peut donc associer le 3-tissu $\mathscr{W}_3$ donné par les feuilletages définis par les fonctions x, y et le feuilletage $\mathscr{F}$.

3.2.2. Tissu associé à une équation différentielle implicite. — Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une équation différentielle implicite du premier ordre de la forme suivante :

(19)
$$F\left(x,y,y'\right)=a_0\left(x,y\right)\cdot\left(y'\right)^d+a_1\left(x,y\right)\cdot\left(y'\right)^{d-1}+\cdots+a_d\left(x,y\right)=0 \text{ avec } F\in\mathbb{C}\{x,y\}\left[y'\right].$$

On suppose que le polynôme $F\left(x,y,z\right)$ en z est réduit et $a_0\left(x,y\right)\neq 0$. Notons R le résultant en z du polynôme F et de sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial z}$. En vertu du théorème de Cauchy, les d courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme (19) définissent un d-tissu non singulier en dehors du lieu singulier défini par $\{R=0\}$. En effet, dans un voisinage V d'un point p de $\mathbb{C}^2\setminus\{R=0\}$ tel que $a_0\left(p\right)\neq 0$, il existe d applications holomorphes $(x,y)\longrightarrow z_i\left(x,y\right)$ telles que sur V on ait :

$$F\left(x,y,z\right)=a_0\left(x,y\right)\prod_{i=1}^{d}\left(z+z_i\left(x,y\right)\right) \text{ avec } z_i\left(p\right)\neq z_j\left(p\right) \text{ pour } i\neq j.$$

Au voisinage du point p, l'équation différentielle $F\left(x,y,y'\right)=0$ admet d solution $(x,y)\longrightarrow y_i\left(x,y\right)$ qui sont des intégrales premières des feuilletages définis par les champs de vecteurs $D_i=\partial_x+z_i\partial_y$. On peut donc considérer le tissu $\mathscr{W}\left(y_1,\ldots,y_d\right)$ au voisinage du point p. Cette construction locale peut se faire au voisinage de tout point p hors du lieu singulier. Les tissus ainsi obtenus se recollent pour former un tissu global (singulier) sur $\mathbb{C}^2$.
Réciproquement, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, la donnée d'un d-tissu non singulier de $\mathbb{C}^2$ permet de construire une équation différentielle

$$F\left(x,y,y'\right)=\prod_{i=1}^{d}\left(\partial_y\left(F_i\right)y'+\partial_x\left(F_i\right)\right)=0 \tag{20}$$

de la forme (19) vérifiant $R\neq 0$ et dont les d solutions au voisinage de 0 sont les pentes des feuilles du tissu

$$p_i\left(x,y\right)=-\frac{\partial_x\left(F_i\right)}{\partial_y\left(F_i\right)}.$$

Ainsi, tout tissu du plan est implicitement présenté par une équation différentielle F de la forme (19), et ce, à multiplication par un inversible près. On peut alors entreprendre l'étude géométrique de l'équation $F\left(x,y,y'\right)=0$ par celle du tissu qui lui est associé.

Remarque 3.2.1. — La définition implicite ne privilégie aucune feuille du tissu. Ce point de vue dans l'étude des tissus a été développé par Hénaut.

3.3. Linéarisation d'un tissu

3.3.1. Tissu linéaire. — Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un d-tissu est *linéaire* si ses feuilles $\{F_i\left(x,y\right)=cste\}$ sont des germes de droites de $\mathbb{C}^2$, non nécessairement parallèles.

Théorème 3.3.1. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et $\mathscr{W}_3$ le 3-tissu dont les feuilles sont définies par les courbes de niveau de x, y et $f\left(x,y\right)$. Soit δ la k-dérivation de*

$k[x,y]$ *donnée par :*

$$\delta = \frac{\partial f}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial f}{\partial x}\partial_y.$$

Le 3-tissu $\mathscr{W}_3$ *est linéaire si et seulement si* $\delta^2(f) = 0$.

Démonstration. — Pour alléger les notations, notons respectivement $\partial_x(f)$ et $\partial_y(f)$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ du polynôme f. Soit $p = \frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)}$ la pente des feuilles transversales du 3-tissu $\mathscr{W}_3$. Sachant que les feuilles verticales et horizontales de $\mathscr{W}_3$ sont données par $x = cste$ et $y = cste$, les feuilles transversales du tissu sont définies de façon à ce que p soit égal à $tan(\alpha)$, où α désigne l'angle formé par la normale aux feuilles transversales et les feuilles horizontales. Le 3-tissu $\mathscr{W}_3$ est linéaire si et seulement si la pente p reste constante le long des feuilles transversales du tissu. Ce qui se traduit par l'équation

$$d(p) = 0 \bmod (\omega_1 + \omega_2). \tag{21}$$

Soient ∂_1 et ∂_2 les champs de vecteurs de la base duale de la base $B = (\omega_1, \omega_2)$. Par définition, on a :

$$\partial_1 = -\frac{1}{\partial_x(f)}\frac{\partial}{\partial x} \text{ et } \partial_1 = -\frac{1}{\partial_y(f)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

L'équation (21) équivaut à

$$\partial_1(p)\,\omega_1 + \partial_2(p)\,\omega_2 = 0 \bmod (\omega_1 + \omega_2).$$

Comme B est une base, alors

$$\partial_1(p) - \partial_2(p) = 0. \tag{22}$$

Un calcul rapide permet de montrer que l'équation (22) est équivalent à $\delta^2(f) = 0$.

□

Exemple 3.3.2. — Soit $\mathscr{W}_3$ le 3-tissu défini par la fonction $f_1 = x + y$. Pour ce tissu nous avons

$$\delta^2(f) = 0.$$

Le 3-tissu $\mathscr{W}_3$ est linéaire. Cependant, le 3-tissu défini par la fonction $f_2 = x^2 + xy - y^2$ ne l'est pas puisque

$$\delta^2(g) \neq 0.$$

3.3.2. Tissu linéarisable. — Un d-tissu $\mathscr{W}$ est *linéarisable* s'il existe un difféomorphisme local $(\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ qui transforme $\mathscr{W}$ en un d-tissu linéaire. Autrement dit, linéariser un d-tissu $\mathscr{W}$ signifie trouver un difféomorphisme qui transforme simultanément les d feuilles de $\mathscr{W}$ en d germes analytiques de droites.

Remarque 3.3.3. — L'étude des configurations possibles pour un tissu ne présente un intérêt véritable que si $d \geq 3$ puisqu'un 1-tissu (*resp.* un 2-tissu) est localement difféomorphe au tissu des droites $x = cste$ (*resp.* $x = cste$ et $y = cste$) d'après le théorème d'inversion locale.

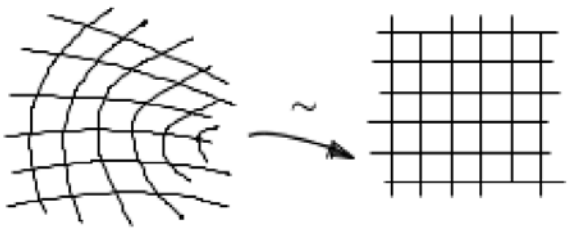

FIGURE 2. **Tous les germes de 2-tissus plans sont linéarisables**

3.3.3. Le polynôme de linéarisation d'Alain Hénaut. — Soit $\mathscr{W}$ un d-tissu du plan dont les dérivations associées sont $D_i = \partial_x + p_i \partial_y$ avec $p_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Il existe alors, via un déterminant de Vandermonde et l'hypothèse de position générale, un unique polynôme $P_{\mathscr{W}}$ à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$, de degré au plus $d-1$ de la forme :

$$P_{\mathscr{W}} = l_1 \cdot p^{d-1} + l_2 \cdot p^{d-2} + \cdots + l_d$$

tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$D_i(p_i) := \partial_x(p_i) + p_i \partial_y(p_i) = P_{\mathscr{W}}(x, y, p_i(x, y)).$$

Le polynôme $P_{\mathscr{W}}$ est appelé *le polynôme de linéarisation* du tissu $\mathscr{W}$. On vérifie par le théorème des fonctions implicites que les feuilles du tissu sont les graphes de solutions de l'équation différentielle

$$y'' = P_{\mathscr{W}}(x, y, y').$$

Théorème 3.3.4 **(Hénaut, 1993)**. — *Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 4. Soit $\mathscr{W}$ un d-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les dérivations associées sont $D_i := \partial_x + p_i \partial_y$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Le polynôme de linéarisation $P_{\mathscr{W}} = l_1 \cdot p^{d-1} + l_2 \cdot p_{d-2} + \cdots + l_d$ possède les propriétés suivantes :*

1. *Le tissu $\mathscr{W}$ est linéaire si et seulement si $P_{\mathscr{W}} = 0$;*
2. *Le tissu $\mathscr{W}$ est linéarisable si et seulement si $\deg(P_{\mathscr{W}}) \leq 3$ et $(l_d, l_{d-1}, l_{d-2}, l_{l-3})$ est une solution du système différentiel non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \partial_x(\partial_x(l_{d-2})) - 2\partial_x(\partial_y(l_{d-1})) + 3\partial_y(\partial_y(l_d)) + 6l_d\partial_x(l_{d-3}) - 3l_{d-2}\partial_y(l_d) \\ -3l_d\partial_y(l_{d-2}) + 3l_{d-3}\partial_x(l_d) + 2l_{d-1}\partial_y(l_{d-1}) - l_{d-1}\partial_x(l_{d-2}) = 0 \\ 3\partial_x(\partial_x(l_{d-3})) - 2\partial_x(\partial_y(l_{d-2})) + \partial_y(\partial_y(l_{d-1})) - 6l_{d-3}\partial_y(l_d) + 3l_{d-1}\partial_x(l_{d-3}) \\ +3l_{d-3}\partial_x(l_{d-1}) - 3l_d\partial_y(l_{d-3}) - 2l_{d-2}\partial_x(l_{d-2}) + l_{d-2}\partial_y(l_{d-1}) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Voir [**29**, proposition 3]. □

Remarque 3.3.5. — D'après le premier point, un d-tissu est linéaire si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, l'on a :

$$D_i(p_i) = 0,$$

c'est-à-dire $P_{\mathscr{W}} = 0$.

3.4. Linéarisation des tissus quasi-homogènes incomplets

Soit $F \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme réduit, non constant, en deux variables effectives tel que

$$\deg_x(F) = d \geq 3$$

on peut lui associer l'équation différentielle

$$F\left(y', y\right) = 0, \tag{23}$$

dans le plan complexe. La variable x étant absente de cette expression, nous dirons qu'une telle équation différentielle est *incomplète*. Le d-tissu $\mathscr{W}_F$ associé est alors qualifié de *tissu incomplet*. Si F est en outre quasi-homogène (voir chapitre 2), nous dirons que $\mathscr{W}_F$ est un d-tissu *incomplet quasi-homogène*.

Dans cette section, nous allons montrer à l'aide du théorème de Hénaut (théorème 3.3.4) et de nos résultats du chapitre 2 que le d-tissu incomplet $\mathscr{W}_F$ est linéarisable si le polynôme F est quasi-homogène.

Rappelons que δ_e désigne la dérivation d'Euler introduite dans la sous-section 2.5.9 du chapitre 2.

Lemme 3.4.1. — *Soit $F \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme réduit, non constant, en deux variables effectives tel que*

$$\deg_x(F) = d \geq 3.$$

Soit $\mathscr{W}$ le d-tissu associé à F. Si F est quasi-homogène, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le polynôme de linéarisation soit donné par la relation :

$$yP_{\mathscr{W}} = \lambda x^2.$$

Démonstration. — Soit R le résultant en x des polynômes F et $\partial_x(F)$. D'après le théorème 2.5.20, l'on sait que la dérivation

$$\frac{\delta_{r1}}{R}$$

induit l'unique solution $\left(P_{\mathscr{W}}, \frac{U}{R}\right) \in (\mathbb{C}(y)[x])^2$ de l'équation

$$x\partial_y(F) + P_{\mathscr{W}}\partial_x(F) = \frac{U}{R}F \tag{24}$$

avec la condition de degré $(\star)$ [**53**, théorème 2.1]. Or la dérivation $x\delta_e = y\delta_{r1}$ induit l'équation

$$x\left[c_1 x\partial_x(F) + c_2 y\partial_y(F)\right] = c_3 xF \quad \text{avec} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

L'équation 25 se réécrit encore :

$$x\partial_y(F) + \frac{c_1 c_2^{-1} x^2}{y}\partial_x(F) = \frac{x c_3 c_2^{-1}}{y}F \quad \text{dans } \mathbb{C}(y). \tag{26}$$

Elle vérifie donc la condition de degré $(\star)$. Par unicité, l'on conclut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_{\mathscr{W}} = \lambda\frac{x^2}{y}$$

puisque $\deg_x(F) \geq 3$ par hypothèse. □

Théorème 3.4.2. — *Soit $F \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme réduit, non constant, en deux variables effectives tel que*

$$\deg_x(F) = d \geq 4.$$

Soit $\mathscr{W}$ le d-tissu associé à F. Si F est quasi-homogène, alors le d-tissu $\mathscr{W}$ est linéarisable.

Démonstration. — L'énoncé découle directement du théorème de Hénaut (théorème 3.3.4). En effet, d'après le lemme 3.4.1, le polynôme de linéarisation $P_{\mathscr{W}}$ du d-tissu $\mathscr{W}$ est de la forme :

$$P_{\mathscr{W}} = \frac{\lambda}{y} x^2.$$

Ses coefficients vérifient trivialement le système différentiel du théorème 3.3.4. En outre, l'on voit que

$$\deg_x (P_{\mathscr{W}}) = 2 < 3.$$

Cela conclut la preuve. □

CHAPITRE 4

NILPOTENTS DU SCHÉMA DES ARCS TRACÉS SUR UNE COURBE AFFINE PLANE

Soient k un corps de caractéristique nulle et $k\left[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right]$ l'anneau des polynômes en une infinité d'indéterminées. Soit Δ la k-dérivation de $k\left[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right]$ définie par :

$$\Delta(x_i) = x_{i+1} \text{ et } \Delta(y_i) = y_{i+1}.$$

Par convention, on notera

$$x_0 = x \text{ et } y_0 = y.$$

La dérivation Δ, appelée *dérivation d'adjonction*, munit l'anneau $k\left[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right]$ d'une structure d'anneau différentiel. C'est l'anneau des polynômes différentiels en x et y que l'on note simplement $k\{x, y\}$.

Soient f un polynôme non constant de $k[x, y]$ et $X = \operatorname{Spec}(k[x, y]/\langle f\rangle)$ la courbe algébrique affine plane définie par f. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'idéal différentiel réduit $\{f\}$ engendré par f dans $k\{x, y\}$. En d'autres termes, nous décrivons complètement les nilpotents de l'anneau des fonctions régulières sur le schéma des arcs tracés sur X.

Posons $A = k[x, y]$. L'idée principale dans ce chapitre est de fournir une caractérisation algorithmique des polynômes différentiels de l'idéal $\{f\}$. A cet effet, nous introduisons un algorithme appelé S-algorithme (voir section 4.2). Ce dernier associe à tout polynôme différentiel P de $k\{x, y\}$ un polynôme différentiel $\mathrm{S}(P)$ de $A\{y\}$. Le polynôme $\mathrm{S}(P)$ est appelé *la forme spéciale* de P par rapport à f et nous obtenons le critère de nilpotence suivant (théorème 4.3.16) :

Théorème 4.0.3. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et f un polynôme irréductible de A. Soit P un polynôme différentiel de $k\{x, y\}$. Le polynôme P appartient à l'idéal différentiel réduit $\{f\}$ si et seulement si $\mathrm{S}(P)$ appartient à $\langle f\rangle \cdot A\{y\}$.*

Il n'est en général pas facile de calculer un système de générateur de l'idéal différentiel $\{f\}$ qui, *a priori*, n'est pas de type fini. La question de savoir si $\{f\}$ est différentiellement de type fini est à notre connaissance un problème ouvert. Cependant, le S-algorithme dont nous donnons un code SAGE dans la section 4.2 permet de vérifier efficacement (sans chercher à calculer un système de générateurs) si un polynôme différentiel P appartient à l'idéal $\{f\}$.

Par ailleurs, nous introduisons une filtration notée $(\mathcal{N}_{n,n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Nous l'appellerons *filtration par le type*. La filtration par le type est en général une filtration exhaustive de l'idéal différentiel

$$([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty) = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left([f] \ : \ (\partial_1(f))^N\right).$$

Lorsque le polynôme f est irréductible, notre filtration divise l'idéal différentiel réduit $\{f\}$ en parties de type fini beaucoup plus faciles à calculer que $\{f\}$ tout entier. La partie $\mathcal{N}_{n,n}(f)$, formée par les polynômes *de type* (n,n), induit pour tout entier naturel n, un sous-schéma fermé

$$\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)_{\mathrm{red}}$$

de l'espace des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ de X. Les schémas $\mathscr{L}_{n,n}(X)$ sont en général des sous-schémas propres du sous-schéma réduit $\mathscr{L}_n(X)_{\mathrm{red}}$ associé à $\mathscr{L}_n(X)$. Leur limite projective coïncide avec le sous-schéma réduit associé au schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X lorsque f est irréductible. Ce formalisme fournit dans le cas des courbes un théorème portant sur la structure géométrique du schéma des arcs et de l'espace des jets dont voici l'énoncé :

Théorème 4.0.4. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et f un polynôme irréductible de $k[x,y]$. Soit X la courbe affine plane induite par f dans $\mathbb{A}^2_k$: $X = \mathrm{Spec}(k[x,y]/\langle f\rangle)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le k-schéma X est lisse ;*
2. *Le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est réduit ;*
3. *Pour tout entier naturel n, l'espace des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ de X est réduit ;*
4. *Il existe un entier naturel non nul n tel que l'espace des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ soit réduit ;*
5. *Pour tout entier naturel n, l'immersion fermée $\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$ est un isomorphisme ;*
6. *Il existe un entier naturel non nul n tel que l'immersion fermée $\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$ soit un isomorphisme ;*
7. *Pour tout entier naturel n, l'espace des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ de X est irréductible.*

4.1. Conventions et notations

4.1.1. Dans ce chapitre, la lettre k désignera un corps de caractéristique nulle. Pour tout entier naturel n, on notera A_n l'anneau des polynômes

$$k\left[(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}, (y_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}\right].$$

Par conséquent, on a :

$$A_n = A_{n-1}[x_n, y_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On notera simplement par A l'anneau $A_0 = k[x_0, y_0]$. Soit P un polynôme différentiel de A_n. On appellera *degré en n de P* et on notera $\deg_n(P)$, le degré total de P comme polynôme en x_n et y_n.

Soient P un polynôme différentiel de A_n et d le degré en n de P. On appelle *n-décomposition homogène* de P la donnée d'une famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A_n, homogènes comme polynômes de $A_{n-1}[x_n, y_n]$, telle que

$$P = \sum_{i\geq 0} P_i = \sum_{i=0}^{d} P_i \quad \text{et } \forall i \in \mathbb{N},\ \deg_n(P_i) = i \quad \text{ou } P_i = 0.$$

Cette décomposition est unique.

4.1.2. Soient B une k-algèbre et δ une k-dérivation de B. Soit m un entier naturel non nul. On note $\delta^{(m)}$ le produit de composition de m copies de δ. Par convention $\delta^{(0)} = \mathrm{Id}_B$. Soit f un polynôme de A. On notera dans ce chapitre $\partial_1(f)$ (resp. $\partial_2(f)$) la dérivée partielle de f par rapport à x (resp. y). Soient n un entier naturel non nul et Δ la dérivation d'adjonction. On note $J_n(f)$ l'idéal de A_n engendré par $f, \Delta(f), \cdots, \Delta^{(n)}(f)$:

$$J_n(f) = \langle f, \Delta(f), \cdots, \Delta^{(n)}(f) \rangle \text{ dans } A_n.$$

On pose

$$Q_n(f) = \Delta^{(n)}(f) - (x_n \partial_1(f) + y_n \partial_2(f)), \ n \geq 1.$$

On remarque aisément par définition que

$$Q_1(f) = 0.$$

4.2. S-algorithme

Dans cette section, nous décrivons le S-algorithme puis fournissons un code SAGE de ce dernier.

4.2.1. Soient m un entier naturel non nul et P un polynôme de A_m tel que

$$\deg_m(P) = d_m \geq 1.$$

Rappelons que

$$\Delta^{(m)}(f) = x_m \partial_1(f) + y_m \partial_2(f) + Q_m(f), \forall m \geq 1.$$

Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la m-décomposition homogène de P considéré comme un polynôme de $A_{m-1}[x_m, y_m]$. Posons

$$\begin{aligned} P^{(m)} &= (\partial_1(f))^{d_m} P_0 + \sum_{i \geq 1} (\partial_1(f))^{d_m - i} P_i(-y_m \partial_2(f) - Q_m(f), y_m \partial_1(f)) \\ &= (\partial_1(f))^{d_m} P_0 + \sum_{i=1}^{d_m} (\partial_1(f))^{d_m - i} P_i(-y_m \partial_2(f) - Q_m(f), y_m \partial_1(f)). \end{aligned} \tag{27}$$

Lorsque P est un polynôme de $A_{m-1}[y_m]$, par la relation (27), on a :

$$P^{(m)} = P_{|y_m \leftarrow y_m \partial_1(f)}.$$

Nous pouvons remarquer que l'application $(\cdot)^{(m)}$ élimine la variable x_m dans l'expression de P. Le polynôme $P^{(m)}$ appartient ainsi à $A_{m-1}[y_m]$.

Remarque 4.2.1. — L'image du polynôme $P^{(m)}$ dans l'anneau quotient $k\{x, y\}/[f]$ coïncide avec celle du polynôme $(\partial_1(f))^{d_m} P$.

Nous pouvons itérer ce procédé, c'est-à-dire éliminer par l'application $(\cdot)^{(m-1)}$ la variable x_{m-1}, puis par l'application $(\cdot)^{(m-2)}$ la variable x_{m-2} et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un polynôme de $A[y_1, \ldots, y_m]$ après m étapes. En effet, pour tout j dans $\{1, \ldots, m-1\}$, nous avons

$$P^{(j)} = \left(P^{(j+1)}\right)^{(j)}. \tag{28}$$

Dans la relation (28), le polynôme différentiel $P^{(j+1)}$ est considéré comme un polynôme de l'anneau $(A_{j-1}[y_{j+1}, \ldots, y_m])[x_j, y_j]$. Si $P^{(j+1)}$ ne contient pas effectivement les variables x_j et y_j dans son expression, alors on a :

$$P^{(j)} = P^{(j+1)},$$

et l'algorithme continue avec le couple (x_{j-1}, y_{j-1}). Après m étapes, nous obtenons un polynôme

$$P^{(1)} = \mathrm{S}(P) \in A[y_1, \ldots, y_m].$$

Définition 4.2.2. — Soit P un polynôme différentiel de $k\{x, y\}$. On appelle *forme spéciale de P par rapport à f* ou simplement *forme spéciale de P*, le polynôme $\mathrm{S}(P)$ de $A[y_1, \ldots, y_m]$ défini ci-dessus.

Lemme 4.2.3. — *Soit f un polynôme non constant de A. Soient m un entier naturel et P un polynôme différentiel de A_m. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si P appartient à $A[y_1, \ldots, y_m]$, alors $\mathrm{S}(P) = P(y_1\partial_1(f), \ldots, y_m\partial_1(f))$;*
2. *Si Q appartient à $A[y_1, \ldots, y_m]$, alors $\mathrm{S}(QP) = Q(y_1\partial_1(f), \ldots, y_m\partial_1(f))\,\mathrm{S}(P)$;*
3. *Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\mathrm{S}\left(\Delta^{(n)}(f)\right) = 0$;*
4. *Si $m = 1$ et P homogène comme polynôme différentiel de $A[x_1, y_1]$ de degré d en 1 non nul, alors $\mathrm{S}(P) = P^{(1)} = y_1^d P(-\partial_2(f), \partial_1(f))$.*

Démonstration. — Les assertions 1. et 2. découlent directement des définitions.
3. On sait que

$$\Delta^{(n)}(f) = x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f) + Q_n(f).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\left(\Delta^{(n)}(f)\right) &= (-\partial_2(f)\,y_n - Q_n(f))\,\partial_1(f) + y_n\partial_1(f)\,\partial_2(f) + Q_n(f)\,\partial_1(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Dans ce cas $Q_1(f) = 0$. Par définition, on a alors

$$\mathrm{S}(P) = P^{(1)} = y_1^d P(-\partial_2(f), \partial_1(f)).$$

□

Nous déduisons aisément des définitions les propriétés suivantes de la forme spéciale d'un polynôme.

Théorème 4.2.4. — *Soit f un polynôme non constant de A. Soient m un entier naturel non nul et P un polynôme différentiel de A_m. La forme spéciale $\mathrm{S}(P)$ de P par rapport à f satisfait aux propriétés suivantes :*

1. *Le polynôme différentiel $\mathrm{S}(P)$ appartient à $A[y_1, \ldots, y_m]$;*
2. *Si $\deg_m(P) \geq 1$, alors nous avons $\deg_m(\mathrm{S}(P)) \leq \deg_m(P)$;*
3. *Il existe un entier naturel N satisfaisant à la formule suivante :*

$$(\partial_1(f))^N P = \mathrm{S}(P) \mod J_m(f) \text{ dans } A_m.$$

Soient n un entier naturel et P un polynôme différentiel de $J_n(f)$. Il existe des polynômes $R_0, \ldots, R_n$ dans A_n tels que

$$P = \sum_{i=0}^{n} R_i \Delta^{(i)}(f).$$

Soit d le degré en n du polynôme différentiel R_n. Si $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp. $(R_{j,i})_{i\in\mathbb{N}}$ pour tout j dans $\{0, \ldots, n\}$) est la n-décomposition homogène de P (resp. R_j pour tout j dans $\{0, \ldots, n\}$),

nous avons :

$$
(29)\quad \begin{cases}
P_0 & = & \boxed{R_{n,0}Q_n(f)} + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,0}\Delta^{(i)}(f) \\
P_1 & = & R_{n,1}Q_n(f) + \boxed{(x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,R_{n,0}} + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,1}\Delta^{(i)}(f) \\
 & \vdots & \\
P_j & = & R_{n,j}Q_n(f) + (x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,R_{n,j-1} + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,j}\Delta^{(i)}(f) \\
 & \vdots & \\
P_d & = & \boxed{R_{n,d}Q_n(f)} + (x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,R_{n,d-1} + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,d}\Delta^{(i)}(f) \\
P_{d+1} & = & \boxed{(x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,R_{n,d}} + \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,d+1}\Delta^{(i)}(f) \\
P_{d+2} & = & \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,d+2}\Delta^{(i)}(f) \\
 & \vdots &
\end{cases}
$$

Lemme 4.2.5. — *Soit f un polynôme réduit non constant de A. Soient n un entier naturel non nul et P un polynôme différentiel de $J_n(f) \cap A_{n-1}$. Il existe un entier naturel N tel que*

$$(\partial_1(f))^N P \in J_{n-1}(f).$$

Démonstration. — Considérons les notations de (29). En particulier, posons

$$d = \deg_n(R_n) \text{ et } N = d+1.$$

Par hypothèse

$$P_i = 0,\ i \geq 1.$$

Alors nous avons :

$$
(30)\quad \begin{aligned}
(\partial_1(f))^N P &= \sum_{i=0}^{d+1} (\partial_1(f))^{N-i} P_i \\
&= \sum_{i=0}^{d} (\partial_1(f))^{N-i-1} (\partial_1(f) P_i + P_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Soit $\mathrm{Sp} : k\{x,y\} \longrightarrow k\{x,y\}$ le morphisme de k-algèbres défini par la spécialisation

$$x_n \mapsto (-y_n\partial_2(f) - Q_n(f)),\ y_n \mapsto y_n\partial_1(f) \quad \text{et} \quad x_i, y_i \mapsto x_i, y_i,\ \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{n\}.$$

Pour tout entier naturel j dans $\{0, \ldots, d\}$, nous avons :

$$(31)\qquad (\partial_1(f))\,\mathrm{Sp}(R_{n,j})\,Q_n(f) + \mathrm{Sp}((x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,R_{n,j}) = 0.$$

En appliquant le morphisme Sp à (30), l'annulation de la diagonale décrite dans (31) montre que

$$(\partial_1(f))^N P \in J_{n-1}(f).$$

□

Ce qui nous permet d'énoncer la proposition essentielle suivante :

Proposition 4.2.6. — *Soit f un polynôme réduit non constant de A. Soit n un entier naturel. Pour tout polynôme différentiel P de $J_n(f)$, nous avons :*

$$\mathrm{S}(P) \in \langle f \rangle \cdot A[y_1, \ldots, y_n].$$

Démonstration. — Considérons les notations de (29) et démontrons la proposition par induction sur n. Pour $n = 0$, la proposition est claire puisque $\mathrm{S}(P) = P$ par définition. Pour $n = 1$, nous pouvons supposer que

$$P = R_0 f + R_1 \Delta(f), \text{ avec } \deg_1(P) = d_1 \geq 1, \ \deg_1(R_0) = d_1 \text{ et } \deg_1(R_1) = d_1 - 1$$

puisque $\Delta(f)$ est homogène de degré 1 en 1. La proposition découle alors du lemme 4.2.3 car

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(P) &= P^{(1)} \\ &= (\partial_1(f))^{d_1} R_{0,0} f + \textstyle\sum_{i=1}^{d_1} (\partial_1(f))^{d_1 - i} S_i(-y_1 \partial_2(f), y_1 \partial_1(f)) \\ &= f R_0^{(1)}, \end{aligned}$$

avec $S_i = R_{0,i} f + R_{1,i-1} \Delta(f)$ pour tout i dans $\{1, \ldots, d_1\}$.

Pour n strictement supérieur à 1, posons

$$d_n = \deg_n(P).$$

Supposons que la proposition soit vraie pour tout entier l dans l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ et montrons qu'elle reste vrai au rang n. Pour ce faire, nous pouvons distinguer deux cas sous nos hypothèses :

Cas 1 : le polynôme différentiel P appartient à A_{n-1} ;

Cas 2 : le polynôme différentiel P appartient à $A_n \setminus A_{n-1}$.

Commençons par démontrer le cas 1. Le polynôme différentiel P appartient à A_{n-1}. D'après le lemme 4.2.5, il existe un entier naturel N tel que

$$(\partial_1(f))^N P \in J_{n-1}(f).$$

Par hypothèse d'induction, le polynôme f divise le polynôme différentiel $\mathrm{S}\left((\partial_1(f))^N P\right)$ qui est égal à $(\partial_1(f))^N \mathrm{S}(P)$ d'après le lemme 4.2.3. Comme f est réduit, il divise $\mathrm{S}(P)$.

Dans le cas 2, le polynôme différentiel P appartient à $A_n \setminus A_{n-1}$. Posons

$$\begin{cases} e = d + 1 - d_n, \text{ si } d > d_n \\ \\ e = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que pour e non nul, si on pose $S_i = \partial_1(f) R_{n,i} Q_n(f) + (x_n \partial_1(f) + y_n \partial_2(f)) R_{n,i}$ pour tout i dans $\{0, \ldots, d\}$, alors

$$(\partial_1(f))^e \sum_{i=0}^{d_n} (\partial_1(f))^{d_n - i} P_i = \sum_{i=0}^{d+1} (\partial_1(f))^{d+1-i} P_i \equiv \sum_{i=0}^{d} (\partial_1(f))^{d-i} S_i \bmod J_{n-1}(f).$$

Nous avons de ce fait l'annulation de la diagonale décrite dans (31) pour $((\partial_1(f))^e P)^{(n)}$. Par conséquent, le polynôme différentiel $((\partial_1(f))^e P)^{(n)}$ appartient à l'idéal $J_{n-1}(f)$ dans l'anneau $A_{n-1}[y_n]$. En décomposant l'expression de $((\partial_1(f))^e P)^{(n)}$ sur la base $\{1, y_n, \ldots, y_n^{d_n}\}$, nous obtenons la formule suivante :

$$((\partial_1(f))^e P)^{(n)} = \sum_{i=0}^{d_n} a_i Y_n^i,$$

où les a_i sont des polynômes différentiels de A_{n-1}. Notons que les polynômes a_i appartiennent à l'idéal $J_{n-1}(f)$ dans A_{n-1} et que les coefficients de $\mathrm{S}\left(\left(\left(\partial_1(f)\right)^e P\right)\right)$ proviennent de ceux des a_i. Alors, par application de l'hypothèse d'induction aux polynômes différentiels a_i, nous déduisons que le polynôme f divise $\mathrm{S}\left(\left(\partial_1(f)\right)^e P\right) = \left(\partial_1(f)\right)^e \mathrm{S}(P)$. Ce qui achève la preuve puisque le polynôme f est réduit. □

Exemple 4.2.7. — Soient $f = x_0^3 - y_0^2$ un polynôme de A et $P = 3x_2y_0^2 + 4x_1y_0y_1 - 2y_1^2x_0 - 2x_0y_0y_2$ un polynôme différentiel de A_2. Le polynôme P appartient à $J_2(f)$. En effet, si

$$\begin{cases} R_0 = -3x_2 \\ R_1 = -2x_1 \\ R_2 = x_0, \end{cases}$$

on vérifie aisément que

$$P = \sum_{i=0}^{2} R_i \Delta^{(i)}(f).$$

En suivant le S-algorithme, on obtient :

$$\begin{cases} P^{(2)} & = & 12x_0^2x_1y_0y_1 - 6x_0^3y_1^2 - 18y_0^2x_0x_1^2 + 6y_0^2y_1^2 - 6y_0\left(x_0^3 - y_0^2\right)y_2 \\ & = & a_0 + a_1y_2 \\ \mathrm{S}(P) & = & -18x_0\left(x_0^3 - y_0^2\right)\left(3x_0^3y_0y_2 + 3x_0^3y_1^2 - 4y_0^2y_1^2\right), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 & = & 12x_0^2x_1y_0y_1 - 6x_0^3y_1^2 - 18y_0^2x_0x_1^2 + 6y_0^2y_1^2 \\ & = & \left(-6y_1^2 + 18x_0x_1^2\right)f - 6x_1x_0^2\Delta(f) \\ a_1 & = & -6y_0\left(x_0^3 - y_0^2\right) = -6y_0f. \end{cases}$$

Exemple 4.2.8. — Soient $f = x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2$ et $P = 6y_1x_1^2 + 6x_1y_1^2 + 4x_1^3 + 3x_1y_0y_2 + 2y_1^3 - 3y_1y_2x_0 - x_0y_0y_3 + x_3y_0^2$. Nous avons

$$P = \sum_{i=0}^{3} R_i \Delta^{(i)}(f), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_0 = \dfrac{4}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}y_3 \\ R_1 = 0 \\ R_2 = 2x_1 + y_1 \\ R_3 = -\dfrac{2}{3}x_0 - \dfrac{1}{3}y_0. \end{cases}$$

Si $a_{0,3} = a_{0,0} + a_{1,0} + a_{2,0} + a_{3,0}$ et

$$\begin{cases} a_{0,0} & = & 8x_0x_1^3 + 4x_1^3y_0 - 6x_1x_2y_0^2 \\ a_{1,0} & = & 12x_0x_1^2y_1 + 6x_1^2y_0y_1 - 3x_2y_0^2y_1 \\ a_{2,0} & = & 12x_0x_1y_1^2 + 6x_1y_0y_1^2 + 4x_0y_1^3 + 2y_0y_1^3 \\ a_{3,0} & = & 6x_0x_1y_0y_2 - 6x_0^2y_1y_2 - 3x_0y_0y_1y_2 - 6y_0^2y_1y_2 \\ a_{1,3} & = & -2x_0^2y_0 - 2x_0y_0^2 - 2y_0^3, \end{cases}$$

alors on a :

$$P^{(3)} = a_{0,3} + a_{1,3}y_3.$$

On peut remarquer que

$$\begin{cases} a_{0,3} = b_0 f + b_1 \Delta(f) + b_2 \Delta^{(2)}(f) \\ b_0 = -8y_1y_2 - 8x_1x_2 - 4x_2y_1 - 4x_1y_2 \\ b_1 = 4x_1^2 + 4y_1x_1 + 4y_0y_2 + 4y_1^2 + 4x_0x_2 + 2x_2y_0 + 2y_2x_0 \\ b_2 = -3y_0y_1 \\ a_{1,3} = -2y_0 f. \end{cases}$$

Si $a_{0,2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ et $a_{1,2} = a'_0 + a'_1$, nous avons

$$P^{(2)} = a_{0,2} + a_{1,2}y_2$$

avec

$$\begin{cases} a_0 &= 16x_0^2x_1^3 + 16x_0x_1^3y_0 + 16x_1^3y_0^2 + 24x_0^2x_1^2y_1 \\ a_1 &= 24x_0x_1^2y_0y_1 + 24x_1^2y_0^2y_1 + 24x_0^2x_1y_1^2 + 24x_0x_1y_0y_1^2 \\ a_2 &= 24x_1y_0^2y_1^2 + 8x_0^2y_1^3 + 8x_0y_0y_1^3 + 8y_0^2y_1^3 \\ a_3 &= -4x_0^3y_0y_3 - 6x_0^2y_0^2y_3 - 6x_0y_0^3y_3 - 2y_0^4y_3 \\ a'_0 &= 12x_0^2x_1y_0y_2 + 12x_0x_1y_0^2y_2 + 12x_1y_0^3y_2 \\ a'_1 &= -12x_0^3y_1y_2 - 12x_0^2y_0y_1y_2 - 12x_0y_0^2y_1y_2. \end{cases}$$

Après factorisation on obtient

$$\begin{cases} a_{0,2} = c_0 f \\ c_0 = 16x_1^3 + 24y_1x_1^2 + 24x_1y_1^2 - 4x_0y_0y_3 - 2y_0^2y_3 + 8y_1^3 \\ a_{1,2} = (12y_0x_1 - 12y_1x_0) f. \end{cases}$$

Enfin, $\mathrm{S}(P) = P^{(1)} = -2fQ$, le polynôme différentiel Q étant donné par :

$$\begin{cases} Q &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ Q_0 &= 36x_0^2y_0y_1^3 + 36x_0y_0^2y_1^3 + 36y_0^3y_1^3 + 48x_0^4y_1y_2 \\ Q_1 &= 96x_0^3y_0y_1y_2 + 108x_0^2y_0^2y_1y_2 + 60x_0y_0^3y_1y_2 \\ Q_2 &= 12y_0^4y_1y_2 + 16x_0^4y_0y_3 + 32x_0^3y_0^2y_3 \\ Q_3 &= 24x_0^2y_0^3y_3 + 8x_0y_0^4y_3 + y_0^5y_3. \end{cases}$$

Exemple 4.2.9. — Soient $f = x_0^3 + y_0^2 - x_0^2$ et $P = -6y_1^3x_0^2 + 6y_1^3x_0 - 10y_1^2x_1y_0 + 6x_1^3y_0 - 9x_0x_1^3y_0 + 9y_1^2x_1y_0x_0 - 2y_1x_0x_1^2$. Le polynôme différentiel P appartient à l'idéal $A_1 \cap J_2(f)$

puisque

$$P=\sum_{i=0}^{2} T_i \Delta^{(i)}(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_0 = T_{1,0}+T_{2,0}+T_{3,0} \\ T_{1,0} = \frac{81}{2}x_1^3y_0 - \frac{243}{2}y_0^2x_1^2y_1 + 9y_1x_1^2 - \frac{27}{2}y_1^2y_0x_1 + \frac{81}{2}y_1x_1^2x_0^2 \\ T_{2,0} = -6x_2y_1 + \frac{27}{2}x_2y_1x_0^2 + \frac{81}{2}y_1y_0^2x_2 + 9y_1^3 - \frac{729}{4}x_1^3y_0x_0^2 \\ T_{3,0} = 6y_2x_1 - \frac{27}{2}y_2x_1x_0^2 - \frac{81}{2}y_0^2y_2x_1 \\ T_1 = T_{0,1}+T_{1,1}+T_{2,1}+T_{3,1} \\ T_{0,1} = -3y_2x_0 + 3x_2y_0 + \frac{27}{2}y_0y_1^2x_0 - \frac{27}{2}y_1x_1x_0^3 - \frac{9}{2}y_0x_1^2 \\ T_{1,1} = -\frac{9}{2}y_0y_1^2 - 2y_1x_1 + \frac{27}{2}y_2x_0y_0^2 - \frac{81}{4}y_0^3x_2 - \frac{27}{2}y_1y_0^2x_1 \\ T_{2,1} = \frac{243}{4}x_1^2y_0^3 + \frac{243}{4}y_0x_1^2x_0^3 - \frac{81}{4}y_0x_1^2x_0^2 + \frac{9}{2}y_2x_0^3 \\ T_{3,1} = -\frac{3}{2}y_2x_0^2 + \frac{27}{2}y_1x_0^2x_1 - 27y_0x_0x_1^2 \\ T_2 = T_{0,2}+T_{1,2} \\ T_{0,2} = \frac{81}{4}x_1y_0^3 - \frac{9}{2}x_0^3y_1 + \frac{3}{2}x_0^2y_1 \\ T_{1,2} = -\frac{27}{2}x_0y_0^2y_1 + 3y_1x_0 - 3y_0x_1. \end{cases}$$

Un calcul explicite donne :

$$\mathrm{S}(P) = 6y_1^3(3x_0-2)\left(-3x_0^2+2x_0+2y_0\right)\left(3x_0^2-2x_0+2y_0\right)\left(x_0^3-x_0^2+y_0^2\right).$$

4.2.2. Un programme du S-algorithme. — Nous fournissons ci-dessous un code SAGE du S-algorithme décrit pour $m=40$, $P=-y_3x_0+x_3y_0$ et $f=x_0^2+x_0y_0+y_0^2$.

```
Input: m, P, f ;

output: S(P).

Start

m=40

variables = [ 'x%i' % i for i in [0..m] ] + [ 'y%i' % i for i in [0..m] ]
A = PolynomialRing(QQ,variables)

for i in [0..m]:
    exec("x%i = A.gen(%s)" % (i,i))
    exec("y%i = A.gen(%s)" % (i,m+1+i))

def der(f):
    a= sum(derivative(f,A.gen(i))*A.gen(i+1) for i in [0..len(A.gens())-2] )
    return a

def Der(f,j,m):
    if m-j==0:
        return f
    else:
        k=0
        while k< m-j:
```

```
            f=der(f); k=k+1
        return f


def DH(P, x, y):
    L1= P.monomials()
    L2= P.coefficients()
    T= [L1[i]*L2[i] for i in [0..len(L1)-1]]
    d= 0
    for t in T:
        d= max(d, t.degree(x)+t.degree(y))

    L= [0 for i in [0..d] ]

    for t in T:
        e= t.degree(x) + t.degree(y)
        L[e] = t +L[e]
    return d,L


def Spoly(P,f):
    j=0
    while j < m:
        x= A.gen(m -j)
        y= A.gen(2*m+1-j)
        Q= Der(f,j,m) - x*derivative(f, A.gen(0)) - y*derivative(f, A.gen(m+1))
        D = DH(P,x,y)
        d= D[0]
        L= D[1]
        P = (derivative(f, A.gen(0)))^(d)*L[0] + sum([derivative(f, A.gen(0))^(d-i)\
        *L[i].subs( {x : - y*derivative(f, A.gen(2*m+1)) - Q, y: y*derivative(f, A.gen(0))}) 
        j=j+1
    return P.factor()

End

f=x0^2 + x0*y0 + y0^2

P = -y3*x0 + x3*y0

Spoly(P,f)

(-2) * (x0^2 + x0*y0 + y0^2) * (27*y0^2*y1^3 + 36*x0^2*y0*y1*y2 + 36*x0*y0^2*y1*y2 \
+ 9*y0^3*y1*y2 + 16*x0^4*y3 + 32*x0^3*y0*y3 + 24*x0^2*y0^2*y3 + 8*x0*y0^3*y3 + y0^4*y3)
```

Une application directe du S-algorithme donne les exemples de calculs explicites suivants :

Exemple 4.2.10. — Soient $f = X_0^3 - Y_0^2$ et $P = 9X_0X_1^2 - 4Y_1^2$. La forme spéciale de P est donnée par :

$$\mathrm{S}(P) = 36X_0Y_1^2\left(-X_0^3 + Y_0^2\right).$$

Exemple 4.2.11. — Soient $f = X_0Y_0$ et $P = 2X_2Y_2^2X_0 - X_1^2Y_0 + 3Y_2$. Nous avons :

$$\mathrm{S}(P) = -Y_0^3\left(-4X_0^2Y_1^2Y_2^2 + 2X_0^2Y_0Y_2^3 + X_0^2Y_0Y_1^2 - 3Y_0^2Y_2\right).$$

Exemple 4.2.12. — Soient $f = X_0^2 + X_0Y_0 + Y_0^2$ et $P = -Y_3X_1 + X_3Y_1$. Un calcul explicite donne :

$$\mathrm{S}(P) = -18Y_1^2(2X_0 + Y_0)\left(X_0^2 + X_0Y_0 + Y_0^2\right)\left(3Y_0Y_1^2 + 4X_0^2Y_2 + 4X_0Y_0Y_2 + Y_0^2Y_2\right).$$

Nous pouvons remarquer dans l'exemple 4.2.12 que

$$0 = \deg_3(\mathrm{S}(P)) < \deg_3(P) = 1.$$

4.3. La filtration par le type

Dans cette section, nous introduisons dans l'anneau des polynômes différentiels $k\{x, y\}$ une filtration associée à un polynôme non constant f de A. Cette filtration sera appelée *filtration par le type*. La filtration par le type est appropriée pour l'étude de l'idéal différentiel réduit $\{f\}$.

4.3.1. Soit f un polynôme non constant de A. Soit (m, n) un couple d'entiers naturels. Soit P un polynôme différentiel de $k\{x, y\}$. On dit que P est de type (m, n) par rapport à f (ou simplement de type (m, n)), si P appartient à A_m et s'il existe un entier naturel N tel que

$$(\partial_1(f))^N P \in J_n(f) \cdot k\{x, y\}.$$

Notons que pour $m = n$, cela équivaut à :

$$(\partial_1(f))^N P \in J_n(f).$$

Remarque 4.3.1. — La notion de *type* introduite ici dépend du choix de la k-dérivation ∂_1 ou ∂_2. Dans ce chapitre, nous faisons le choix de ∂_1.

Lemme 4.3.2. — *Soient f un polynôme non constant de A et P un polynôme différentiel de $k\{x, y\}$. Si P est de type (m, n) par rapport à f, alors le polynôme différentiel $\Delta(P)$ est de type $(m + 1, n + 1)$.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un entier naturel N et des polynômes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ de $k\{x, y\}$ tels que

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{l=0}^{n} Q_l \Delta^{(l)}(f). \tag{32}$$

En appliquant la dérivation d'adjonction Δ à l'équation (32), le polynôme $(\partial_1(f))^N \Delta(P)$ appartenant à A_{m+1} est égal à :

$$-N(\partial_1(f))^{N-1}\Delta(\partial_1(f))P + f\Delta(Q_0) + \left(\sum_{l=1}^{n}(Q_{l-1} + \Delta(Q_l))\Delta^{(l)}(f)\right) + Q_n\Delta^{(n+1)}(f).$$

Par conséquent,

$$(\partial_1(f))^{N+1}\Delta(P) \in J_{n+1}(f) \cdot k\{x, y\} \cap A_{m+1}$$

puisque

$$(\partial_1(f))^N P \in J_n(f) \cdot k\{x,y\} \cap A_m.$$

□

Le sous-ensemble de $k\{x,y\}$, formé par les polynômes différentiels de type (m,n), est un idéal de A_m que nous noterons $\mathcal{N}_{m,n}(f)$. Il est aisé de vérifier que

$$\mathcal{N}_{m,n}(f) \subset \mathcal{N}_{m,n+1}(f) \subset \mathcal{N}_{m+1,n+1}(f), \ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Lorsque le polynôme f est supposé réduit, on a :

$$\mathcal{N}_{m,0}(f) = \langle f \rangle \cdot A_m \text{ et } \mathcal{N}_{0,n}(f) = \langle f \rangle \cdot A, \ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

On peut aussi remarquer que

$$J_n(f) \subset \mathcal{N}_{n,n}(f) \text{ dans } A_n.$$

Lemme 4.3.3. — *Soit f un polynôme non constant de A. Soit m et n deux entiers naturels. Si $n \geq m$, alors*

$$\mathcal{N}_{m,n}(f) = \mathcal{N}_{m,m}(f).$$

Démonstration. — Pour tout entier naturel non nul t, notons $\mathrm{Sp}_t : k\{x,y\} \to k\{x,y\}$ le morphisme de k-algèbres défini par la spécialisation de X_j, Y_j à 0 pour tout j strictement supérieur à t, et

$$X_j \to X_j, \ Y_j \to Y_j, \ \forall j \leq t.$$

Par définition, il existe un entier naturel N et des polynômes $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ de $k\{x,y\}$ tels que

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{l=0}^{n} Q_l \Delta^{(l)}(f). \tag{33}$$

Quitte à appliquer le morphisme Sp_n à l'équation (33), on peut supposer que les polynômes différentiels Q_l appartiennent à A_n. D'après la proposition 4.2.6 et le théorème 4.2.4, il existe alors des polynômes $R_0, \ldots, R_m$ dans A_m tels que

$$(\partial_1(f))^N P - \sum_{j=0}^{m} R_j \Delta^{(j)}(f) = \mathrm{S}\left(\partial_1(f)^N P\right) = Rf. \tag{34}$$

On conclut en considérant l'image de (34) par le morphisme Sp_m. □

Exemple 4.3.4. — Soient $f = x_0^4 + x_0 y_0^3 - y_0^4$ un polynôme de A et $P = 16x_1y_1^2y_0^4 + 3x_1^3y_0^4 - 16y_1^3x_0y_0^3 + 6y_1^3x_0^3y_0 - 9y_1x_1^2x_0y_0^3$ un polynôme de A_1. Le polynôme P appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,2}(f)$ puisque

$$P = \sum_{i=0}^{2} Q_i \Delta^{(i)}(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_0 = -12x_1^2y_1 - 16x_1y_1^2 - 4x_2y_1x_0 + 4x_1y_2x_0 \\ Q_1 = 4x_0y_1^2 + 3x_1^2y_0 + x_2x_0y_0 - y_2x_0^2 \\ Q_2 = x_0^2y_1 - x_0x_1y_0. \end{cases}$$

Un calcul explicite de $\mathrm{S}(P)$ donne :

$$\mathrm{S}(P) = 4y_0y_1^3(-64y_0^8 + 96y_0^7x_0 - 39y_0^6x_0^2 - 128y_0^5x_0^3 + 96y_0^4x_0^4 - 24y_0^3x_0^5 - 256y_0^2x_0^6 + 96x_0^8)f.$$

Et on a la formule :

$$\partial_1(f)P - \sum_{j=0}^{1} R_j \Delta^{(j)}(f) = \mathrm{S}(\partial_1(f)P),$$

avec

$$\begin{cases} R_1 = -y_0^2(-3y_0^2x_1^2 - 16y_1^2y_0^2 + 6x_1x_0y_0y_1 + 6x_0^2y_1^2) \\ R_0 = R_{0,1} + R_{0,2} + R_{0,3} \\ R_{0,1} = -12y_0^3y_1x_1^2 - 1536x_0^{11}y_0y_1^3 + 4096y_1^3x_0^9y_0^3 - 1536y_1^3x_0^7y_0^5 + 3072y_1^3x_0^6y_0^6 \\ R_{0,2} = -1920y_1^3x_0^4y_0^8 + 1536y_1^3x_0^3y_0^9 + 156y_1^3x_0^2y_0^{10} + 24x_0^2y_1^3y_0 + 720y_1^3x_0^5y_0^7 \\ R_{0,3} = -384y_1^3x_0y_0^{11} + 256y_1^3y_0^{12} - 64y_1^3y_0^3 + 24x_1x_0y_1^2y_0^2. \end{cases}$$

De cette dernière relation, on déduit que le polynôme P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$.

Définition 4.3.5. — Soit f un polynôme non constant de A. La famille $(\mathcal{N}_{n,n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes de $k\{x,y\}$ est appelée *filtration par le type* associée à f. C'est une filtration exhaustive de l'idéal différentiel

$$([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty) = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left([f] \ : \ (\partial_1(f))^N\right).$$

Remarque 4.3.6. — Pour tout entier naturel n, il est possible de calculer une base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ dans A_n. En effet, nous avons

$$\mathcal{N}_{n,n}(f) = ((J_n(f), 1 - t\cdot\partial_1(f))\cdot A_n[t]) \cap A_n.$$

Alors, l'intersection d'une base de Gröbner de l'idéal $\langle J_n(f), 1 - t\cdot\partial_1(f)\rangle$ de $A_n[t]$ avec A_n donne une base de Gröbner de $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ d'après le théorème d'élimination. Cependant, d'un point de vue effectif, la complexité du calcul d'une base de Gröbner est telle que pour des entiers naturels n assez petits, supérieurs à 5 par exemple, il est difficile de calculer une base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ avec des logiciels de calcul formel comme SAGE et Maple. Cette remarque justifie l'introduction du S-algorithme qui s'avère plus efficace pour tester l'appartenance à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$.

Exemple 4.3.7. — Reprenons les polynômes de l'exemple 4.3.4 : $f = x_0^4 + x_0y_0^3 - y_0^4$ et $P = 16x_1y_1^2y_0^4 + 3x_1^3y_0^4 - 16y_1^3x_0y_0^3 + 6y_1^3x_0^3y_0 - 9y_1x_1^2x_0y_0^3$. Un calcul explicite de la base de Gröbner réduite G de $\mathcal{N}_{1,1}(f)$, pour l'ordre lexicographique, suivant la méthode décrite dans la remarque 4.3.6, donne :

$$G = \begin{cases} g_0 = x_0^4 + x_0y_0^3 - y_0^4 \\ g_1 = -y_1x_0 + x_1y_0 \\ g_2 = x_1x_0^3 - y_1y_0^3 + y_1y_0^2x_0 \\ g_3 = x_0^2x_1^2 - y_1^2y_0^2 + y_0y_1^2x_0 \\ g_4 = x_1^3x_0 + y_1^3x_0 - y_1^3y_0 \\ g_5 = x_1^4 + x_1y_1^3 - y_1^4 \end{cases}$$

On obtient

$$P = \left(3x_1^2y_0^3 - 6x_0y_1y_0^2x_1 - 6y_1^2y_0x_0^2 + 16y_0^3y_1^2\right)g_1,$$

et donc P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}$.

4.3.2. Soit f un polynôme non constant de A. Il existe un entier naturel non nul n, des entiers $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, des polynômes irréductibles $f_1,\ldots,f_n$ de A tels que

$$f = \prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}.$$

Le théorème d'irréductibilité de Kolchin (voir chapitre 1) montre l'égalité suivante :

$$\{f\} = \{f_1\} \cap \cdots \cap \{f_n\}. \tag{35}$$

La proposition suivante qui est une forme particulière de [**52**, lemme 2.7], complète la remarque précédente dans la description de l'idéal différentiel $\{f\}$.

Proposition 4.3.8. — *Soit f un polynôme irréductible non constant de A. On a*

$$\{f\} = \sqrt{[f]} \cdot k\{x,y\} = ([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty) = \bigcup_{N \geq 1} \left([f] \ : \ (\partial_1(f))^N\right).$$

Démonstration. — Soit P un polynôme différentiel de $([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty)$. Il existe par définition un entier naturel N tel que

$$(\partial_1(f))^N P \in [f] \subset \{f\}.$$

Comme $\partial_1(f)$ n'appartient pas à l'idéal différentiel réduit $\{f\}$ et que ce dernier est premier d'après le théorème d'irréductibilité de Kolchin, alors on a :

$$P \in \{f\}.$$

On sait que

$$[f] \subset ([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty).$$

Par conséquent

$$\{f\} = \sqrt{[f]} \cdot k\{x,y\} \subset \sqrt{([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty)}.$$

D'après le lemme de Rosenfeld (chapitre 1, proposition 1.9.9), l'idéal différentiel $([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty)$ est premier. Donc

$$\sqrt{([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty)} = ([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty).$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.3.9. — Notons que dans le *loc. cit.* le choix de la dérivation d'adjonction est légèrement différent. Cependant, par un changement de variables le lemme 2.7 du *loc. cit.* implique la proposition 4.3.8 ci-dessus.

Nous déduisons de la relation (35) et de la proposition 4.3.8 la formule suivante :

$$\{f\} = ([f_1] \ : \ (\partial_1(f_1))^\infty) \cap \cdots \cap ([f_n] \ : \ (\partial_1(f_n))^\infty).$$

Lorsque le polynôme f est irréductible, nous avons :

$$\{f\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{n,n}(f).$$

En particulier, pour tout polynôme différentiel P, il existe un entier naturel n tel que P appartienne à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ si et seulement si $\overline{P}$ appartenant à $k\{x,y\}/[f]$ est nilpotent.

Remarque 4.3.10. — La notion d'irréductibilité est fondamentale dans la proposition 4.3.8. En effet, cette dernière est fausse si le polynôme f est réductible comme le montre l'exemple 4.3.11 ci-dessous.

Exemple 4.3.11. — Soit $f = xy$. D'après le théorème d'irréductibilité de Kolchin :

$$\{xy\} = [x] \cap [y].$$

Cependant, un calcul immédiat fournit le résultat suivant :

$$([f] \ : \ (\partial_1(f))^\infty) = ([f] \ : \ (y)^\infty) = [x].$$

4.3.3. Soit n un entier naturel. Lorsque le polynôme f est irréductible, nous avons les inclusions suivantes

$$\sqrt{J_n(f)} \subset \mathcal{N}_{n,n}(f) = (J_n(f) \ : \ (\partial_1(f))^\infty) \subset \left(\sqrt{J_n(f)} \ : \ (\partial_1(f))^\infty\right). \tag{36}$$

En effet, soit P dans $\sqrt{J_n(f)}$. Le polynôme différentiel P appartient à $\{f\} \cap A_n$. Ainsi, par la remarque 4.3.8, il existe un entier naturel m tel que

$$P \in \mathcal{N}_{m,m}(f).$$

Si m est inférieur à n, alors P appartient évidemment à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. Si m est strictement supérieur à n, le lemme 4.3.3 montre que P appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ puisqu'étant un polynôme différentiel de l'idéal $\mathcal{N}_{n,m}(f)$.

Inversement, Si P appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$, il existe un entier naturel N tel que $(\partial_1(f))^N P$ appartienne à $J_n(f)$; donc $(\partial_1(f)P)^N$ appartient à $J_n(f)$.

Remarque 4.3.12. — En général, lorsque m est strictement supérieur à n, l'idéal $\sqrt{J_n(f)}$ est strictement inclus dans $\sqrt{J_m(f)} \cap A_n$.

Exemple 4.3.13. — Soient $f = x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2$ et $P = x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2$. Nous avons

$$P^3 \in J_2(f).$$

En effet,

$$P^3 = \sum_{i=0}^{2} a_i \Delta^{(i)}(f) \ \text{ avec } \begin{cases} a_0 = \dfrac{3}{4}(-x_2y_1 + y_2x_1)^2 \\ a_1 = a_{0,1} + a_{1,1} + a_{2,1} \\ a_{0,1} = -\frac{1}{2}x_1^3x_2 - x_1^3y_2 + \frac{3}{4}x_2^2y_1x_0 + \frac{3}{4}x_2y_1y_2x_0 \\ a_{1,1} = \frac{1}{2}x_2y_1^3 + \frac{3}{4}x_2y_1y_0y_2 - \frac{3}{2}y_1x_1^2y_2 - \frac{3}{2}y_1^2y_2x_1 \\ a_{2,1} = -\frac{1}{2}y_1^3y_2 - \frac{3}{4}y_2x_1x_2x_0 - \frac{3}{4}y_2^2x_1x_0 - \frac{3}{4}y_2^2x_1y_0 \\ a_2 = a_{0,2} + a_{1,2} \\ a_{0,2} = \frac{1}{2}x_1^4 + x_1^3y_1 - \frac{3}{4}y_0y_1^2x_2 - \frac{3}{4}x_2y_1x_1x_0 - \frac{3}{4}x_2y_1^2x_0 + \frac{3}{2}x_1^2y_1^2 \\ a_{1,2} = x_1y_1^3 + \frac{1}{2}y_1^4 + \frac{3}{4}y_1x_1y_0y_2 + \frac{3}{4}y_2x_1^2x_0 + \frac{3}{4}y_1x_1y_2x_0. \end{cases}$$

Cependant, le polynôme P n'appartient pas à $\sqrt{J_1(f)}$ car si on pose $J = \langle f, \Delta(f), 1 - t \cdot P \rangle$ dans $k[x_0, x_1, y_0, y_1, t]$ muni de l'ordre suivant :

$$t > x_1 > x_0 > y_1 > y_0, \tag{37}$$

la base de Gröbner réduite G de J pour l'ordre (37) est donnée par

$$G = \begin{cases} g_0 = y_0^2 \\ g_1 = x_0y_0 \\ g_2 = x_0^2 \\ g_3 = 2x_0x_1 + y_0x_1 + y_1x_0 + 2y_1y_0 \\ g_4 = 3y_1y_0x_1t - 3y_1^2x_0t + 4x_0 + 2y_0 \\ g_5 = x_1^2t + y_1x_1t + y_1^2t - 1 \end{cases}$$

dans $k[x_0, x_1, y_0, y_1, t]$. On remarque aisément que le polynôme constant 1 n'appartient pas à J puisque son reste par G est égal à 1. Donc le polynôme différentiel P n'appartient pas à $\sqrt{J_1(f)}$ par [**47**, chapitre 4, proposition 8].

Remarque 4.3.14. — En général, l'inclusion $\sqrt{J_n(f)} \subset \mathcal{N}_{n,n}(f)$ est stricte même si le polynôme f est supposé irréductible.

Exemple 4.3.15. — Considérons le polynôme $f = x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2$. Nous avons

$$\left(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2\right)^3 \in J_2(f).$$

Cependant, le polynôme $\left(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2\right)$ n'appartient pas à $\sqrt{J_1(f)}$. On peut recourir à [**47**, chapitre 4, proposition 8] pour établir ce fait.

4.3.4. Soient n un entier naturel et $X = \operatorname{Spec}(A/\langle f\rangle)$. On pose

$$\mathscr{L}_{n,n}(X) = \operatorname{Spec}(A_n/\mathcal{N}_{n,n}(f)).$$

D'après la remarque 4.3.14, il existe une immersion fermée de k-schémas

$$\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$$

qui se factorise par

$$\mathscr{L}_n(X)_{\mathrm{red}} \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$$

lorsque f est irréductible. Dans ce cas, en passant à la limite, l'immersion fermée de k-schémas

$$\varprojlim \mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}(X)_{\mathrm{red}}$$

est un isomorphisme d'après la proposition 4.3.8.

4.3.5. Commençons par la remarque suivante : soient f un polynôme réduit de A et P un polynôme différentiel de A_n. D'après le théorème 4.2.4, si P appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$, la forme spéciale $\mathrm{S}(P)$ de P appartient aussi à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel N tel que

$$(\partial_1(f))^N \mathrm{S}(P) \in J_n(f).$$

L'énoncé suivant donne lieu à une caractérisation effective de l'appartenance à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. En particulier, il fait un lien entre le S-algorithme et la filtration par le type et fournit un énoncé plus fort que la remarque ci-dessus.

Théorème 4.3.16. — *Soient f un polynôme réduit de A et P un polynôme différentiel de $k\{x,y\}$. Le polynôme P appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ si et seulement si $\mathrm{S}(P)$ appartient à $\langle f\rangle \cdot A_n$.*

En particulier, si le polynôme f est irréductible, le polynôme différentiel P appartient à $\{f\}$ si et seulement si $\mathrm{S}(P)$ appartient à $\langle f\rangle \cdot k\{x,y\}$.

Démonstration. — Si $\mathrm{S}(P)$ appartient à $\langle f\rangle \cdot A_n$, alors P appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ par le théorème 4.2.4. Inversement, si P appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$, il existe un entier naturel N et des polynômes $Q_0, \ldots, Q_n$ de A_n tels que

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{i=0}^{n} Q_i \Delta^{(i)}(f).$$

Alors, d'après la proposition 4.2.6, le polynôme f divise

$$\mathrm{S}\left((\partial_1(f))^N P\right) = (\partial_1(f))^N \mathrm{S}(P).$$

Ce qui achève la preuve puisque f est réduit par hypothèse. □

Exemple 4.3.17. — Soit $f = x_0^3 - y_0^2$ un polynôme de A. Soient $P_1 = 4y_1^6 - 21y_1^4x_1^2x_0 + 18x_1^3y_0y_1^3$ et $Q = 9x_0x_1^3y_0 - 7y_0x_0y_1^2 + 2y_1^3x_0$ deux polynômes différentiels de A_1. Nous avons :

$$\mathrm{S}\,(P) = 972x_0^6y_1^6\left(-4y_0^2 + 3x_0^3\right)f$$

et

$$\mathrm{S}\,(Q) = 9x_0y_1^2(8y_1y_0^4 - 21x_0^6y_0 + 6y_1x_0^6).$$

Par le théorème 4.3.16, le polynôme P appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}\,(f)$ tandis que Q n'appartient pas à ce dernier. En outre, en suivant la remarque 4.3.6, la base de Gröbner réduite G de l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}\,(f)$, pour l'ordre lexicographique, est donnée par :

$$\begin{cases} g_0 = x_0^3 - y_0^2 \\ g_1 = 3y_0x_1 - 2x_0y_1 \\ g_2 = 3x_0^2x_1 - 2y_0y_1 \\ g_3 = 9x_0x_1^2 - 4y_1^2. \end{cases}$$

Le polynôme P appartient alors à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}\,(f)$ puisque

$$P = 6x_1^2y_1^3g_1 - y_1^4g_3.$$

Cependant, le reste du polynôme Q par rapport à G est :

$$R = -7y_0y_1^2x_0 + \tfrac{14}{3}y_1^3x_0 \neq 0.$$

Alors Q n'appartient pas à $\mathcal{N}_{1,1}\,(f)$.

4.3.6. Nous pouvons compléter le code du S-algorithme par le programme suivant qui permet de tester l'appartenance d'un polynôme différentiel à l'idéal $\mathcal{N}_{m,m}\,(f)$, pour tout entier naturel non nul m.

```
Start

def Nilp(f,P):
    J=A.ideal(f)
    if J.reduce(Spoly(P,f).expand())==0:
        return "yes, P is nilpotent."
    else:
        return "No, P is not nilpotent."

End

f=x0^2 + x0*y0 + y0^2

P = -y3*x0 + x3*y0

Nilp(f,P)

'yes, P is nilpotent.'
```

4.4. Dérivations et filtration par le type

Dans cette section nous introduisons une famille spéciale de k-dérivations qui fournit un point de vue alternatif sur le S-algorithme. Soit m un entier naturel non nul. Soient a et b deux polynômes de A. Nous définissons la A_{m-1}-dérivation $\mathcal{D}_m(a,b)$ de $A_{m-1}[x_m, y_m]$ par :

$$\mathcal{D}_m(a,b)(P) = a\partial_{x_m}(P) + b\partial_{y_m}(P).$$

Remarque 4.4.1. — De manière analogue, nous pouvons introduire la A_m-dérivation $\mathcal{E}_m$ définie par

$$\mathcal{E}_m(P) = x_1\partial_{x_m}(P) + y_1\partial_{y_m}(P).$$

Cette dernière dérivation a les mêmes propriétés que la famille $(\mathcal{D}_m(a,b))_{a,b\in A}$.

Établissons quelques propriétés importantes des A_{m-1}-dérivations $\mathcal{D}_m(a,b)$.

Proposition 4.4.2. — *Soient m et d deux entiers naturels non nuls. Soit (a,b) un couple de polynômes de A tels que*

$$a\partial_1(f) + b\partial_2(f) \in \langle f\rangle \cdot A.$$

Soit P un polynôme différentiel de A_m de degré d en m. Nous avons les assertions suivantes :

1. *$\mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P) = d!P_d(a,b)$, le polynôme P_d étant le polynôme homogène de degré d dans la m-décomposition homogène de P.*
2. *$\mathcal{D}_{m+1}(a,b)(\Delta(P)) = \mathcal{D}_m(a,b)(P)$;*
3. *Si P appartient à $\mathcal{N}_{m,m}(f)$, alors $\mathcal{D}_m(a,b)(P)$ appartient à $\mathcal{N}_{m,m}(f)$.*

Démonstration. — 1. Notons Q_P le polynôme de $A_{m-1}[w]$ défini par :

$$Q_P(w) = P(aw, bw).$$

Soit $P = \sum_{i=0}^{d} P_i$ la m-décomposition homogène de P. Par définition, nous avons :

$$Q_P(w) = \sum_{i=0}^{d} P_i(a,b)\, w^i.$$

Il s'en suit que

$$\mathcal{D}_m(a,b)^{(j)}(P)(aw,bw) = \partial_w^{(j)} Q_P(w),\ \forall j \in \{0,\dots,d\}.$$

Pour $j = d$, on a

$$\mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P)(aw,bw) = \mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P)(0,0).$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P) &= \mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P)(0,0)\\
&= \mathcal{D}_m(a,b)^{(d)}(P)(aw,bw)\\
&= \partial_w^{(d)} Q_P(w)\\
&= d!P_d(a,b).
\end{aligned}$$

D'où la première assertion.

2. Par définition de la dérivation d'adjonction Δ, le terme en x_{m+1} et y_{m+1} dans $\Delta(P)$ est égal à

$$x_{m+1}\partial_{x_m}(P) + y_{m+1}\partial_{y_m}(P). \tag{38}$$

D'après (38) et la définition de $\mathcal{D}_m(a,b)$, nous avons

$$\mathcal{D}_{m+1}(a,b)(\Delta(P)) = a\partial_{x_m}(P) + b\partial_{y_m}(P) = \mathcal{D}_m(a,b)(P).$$

3. Par hypothèse il existe un entier naturel N et des polynômes $R_0, \ldots, R_m$ de A_m tels que :

$$(\partial_1(f))^N P = R_0 f + R_1\Delta(f) + \cdots + R_m\Delta^{(m)}(f). \tag{39}$$

Comme

$$\mathcal{D}_m(a,b)\left((\partial_1(f))^N P\right) = (\partial_1(f))^N \mathcal{D}_m(a,b)(P),$$

il suffira de montrer par (39) que

$$\mathcal{D}_m(a,b)\left(\Delta^{(j)}(f)\right) \in J_m(f),\ \forall j \in \{0,\ldots,m\}.$$

Ce qui est clair pour tout j dans $\{0,\ldots,m-1\}$ puisque dans ce cas

$$\Delta^{(j)}(f) \in A_{m-1}.$$

Supposons que j soit égal à m. Il existe un polynôme $Q_m(f)$ dans A_{m-1} tel que

$$\Delta^{(m)}(f) = x_m\partial_1(f) + y_m\partial_2(f) + Q_m(f). \tag{40}$$

La relation(40) implique que

$$\mathcal{D}_m(a,b)\left(\Delta^{(m)}(f)\right) = a\partial_1(f) + b\partial_2(f) \in \langle f\rangle \cdot A.$$

Ce qui achève la preuve.

□

4.5. Etude de l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(\mathbf{f})$

Soit f un polynôme non constant de A. Soient a et b deux polynômes de A tels que

$$a\partial_1(f) + b\partial_2(f) \in \langle f\rangle \cdot A.$$

Dans cette section, nous donnons une description complète de l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ en utilisant les dérivations $\mathcal{D}_1(a,b)$ et montrons que ce point de vue est compatible avec le S-algorithme.

Proposition 4.5.1. — *Soient f un polynôme non constant de A et P un polynôme différentiel de A_1. Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la 1-décomposition homogène de P. Si le degré d en 1 de P est non nul, alors nous avons*

$$\mathrm{S}(P) = (\partial_1(f))^d P_0 + \sum_{i=1}^{d} \frac{y_1^i}{i!}(\partial_1(f))^{d-i}\mathcal{D}_1^{(i)}(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P_i).$$

Si le polynôme différentiel P est homogène de degré d en 1 non nul, nous avons d'après la proposition 4.5.1

$$\mathrm{S}(P) = P^{(1)} = y_1^d P(-\partial_2(f), \partial_1(f)).$$

Démonstration. — On sait que $Q_1(f) = 0$. L'énoncé découle directement de la définition de $P^{(1)}$ et de la proposition 4.4.2. □

4.5.1. Commençons par faire les deux remarques suivantes : soient P un polynôme différentiel de A_1 et d son degré en 1. Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la 1-décomposition homogène de P.

Remarque 4.5.2. — Le polynôme P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ si et seulement si les P_i appartiennent à ce dernier pour tout i. En effet, soient Q_0 et Q_1 des polynômes de A_1 tels que

$$(\partial_1(f))^N P = Q_0 f + Q_1 \Delta(f).$$

Nous pouvons supposer que

$$\deg_1(Q_0) \leq d \text{ et } \deg_1(Q_1) \leq d-1$$

puisque $\Delta(f)$ est un polynôme homogène de $A[x_1, y_1]$ de degré 1 en 1. Soient $(Q_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Q_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ les 1-décompositions homogènes respectives de Q_0 et Q_1. Nous avons

$$(\partial_1(f))^N P = Q_{0,0} f + \sum_{i=1}^{d} (Q_{0,i} f + Q_{1,i-1}\Delta(f)).$$

La 1-décomposition homogène de P est alors donnée par :

$$(\partial_1(f))^N P_0 = Q_{0,0} f \text{ et } (\partial_1(f))^N P_i = Q_{0,i} f + Q_{1,i-1}\Delta(f), \ \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Remarque 4.5.3. — Supposons que le polynôme f est réduit. Soient N un entier naturel et $Q_0, \ldots, Q_n$ des polynômes de A_m tels que

$$(\partial_1(f))^N P = Q_0 f + Q_1 \Delta(f) + \cdots + Q_n \Delta^{(n)}(f).$$

En identifiant les monômes dans A des deux côtés de l'égalité, nous avons

$$P_0 \in \langle f \rangle \cdot A.$$

Théorème 4.5.4. — *Soient f un polynôme réduit non constant de degré d de A et P un polynôme différentiel de $A[x_1, y_1]$ de degré en 1 non nul. Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la 1-décomposition homogène de P. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le polynôme P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$;*
2. *Pour tout i dans $\{0, \ldots, d\}$, nous avons*
$$\mathcal{D}_1^{(i)}(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P_i) \in \langle f \rangle \cdot A \ ;$$
3. *Pour tout i dans $\{0, \ldots, d\}$, pour tout couple de polynômes (a, b) de A^2 tel que $(a\partial_1(f) + b\partial_2(f))$ appartienne à $\langle f \rangle \cdot A$, nous avons*
$$\mathcal{D}_1^{(i)}(a, b)(P_i) \in \langle f \rangle \cdot A \ ;$$
4. *La forme spéciale $\mathrm{S}(P)$ de P par rapport à f appartient à $\langle f \rangle \cdot A[y_1]$.*

Démonstration. — 1. $\Rightarrow$ 3. D'après la remarque 4.5.2, les polynômes P_i appartiennent à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ pour tout i dans $\{0, \ldots, d\}$. D'après la proposition 4.4.2, nous avons $\mathcal{D}_1^{(i)}(a, b)(P_i)$ appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$. Comme le degré en 1 du polynôme P_i est égal à i pour tout i dans $\{0, \ldots, d\}$, nous avons

$$\mathcal{D}_1^{(i)}(a, b)(P_i) \in A,$$

et par la remarque 4.5.3, nous obtenons

$$\mathcal{D}_1^{(i)}(a, b)(P_i) \langle f \rangle \cdot A.$$

3. $\Rightarrow$ 2. Cette implication est formelle.

2. $\Leftrightarrow$ 4. L'équivalence se déduit de la proposition 4.5.1.

2. $\Rightarrow$ 1. Quitte à remplacer le polynôme P par P_d, nous supposons que P est homogène de degré d en 1. Comme les polynômes $\Delta(f) = x_1\partial_1(f) + y_1\partial_2(f)$ et P sont homogènes, il existe un polynôme R dans A_1 tel que

$$(\partial_1(f))^d P - y_1^d P(-\partial_2(f), \partial_1(f)) = \Delta(f) R. \tag{41}$$

Nous pouvons souligner au passage que si d est non nul, alors le polynôme R l'est aussi. D'après la relation (41) et la proposition 4.4.2, nous avons

$$(\partial_1(f))^d P = \frac{y_1^d}{d!}\mathcal{D}_1^{(d)}(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P) + \Delta(f) R. \tag{42}$$

Alors, par hypothèse

$$(\partial_1(f))^d P \in J_1(f).$$

Ce qui signifie exactement que P est de type $(1,1)$. □

4.5.2. Dans cette sous-section, nous exhibons une classe importante de polynômes de type $(1,1)$ qui ne sont pas contenus dans l'idéal $J_1(f)$.

Proposition 4.5.5. — *Soit f un polynôme réduit non constant de A. Soit (a,b) un couple de polynômes de A tel que $a\partial_1(f) + b\partial_2(f)$ appartienne à l'idéal $\langle f\rangle \cdot A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à l'idéal $\sqrt{J_1(f)}$ mais pas l'idéal différentiel $[f]$;*
2. *Le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ mais pas l'idéal $J_1(f)$;*
3. *La k-dérivation $\overline{\delta}$ induite par la k-dérivation $\delta = a\partial_1 + b\partial_2$ de A sur $A/\langle f\rangle$ est une dérivation exceptionnelle de $A/\langle f\rangle$.*

L'équivalence 1. $\Leftrightarrow$ 3. dans la proposition 4.5.5 étend [**58**, proposition 4.4, 4.5] à tout corps de caractéristique nulle en remplaçant l'argument analytique de la preuve de [**58**, proposition 4.5] par le lemme 4.5.6 ci-dessous qui est purement algébrique.

Lemme 4.5.6. — *Soient f un polynôme réduit non constant de A et $\delta = a\partial_1 + b\partial_2$ une k-dérivation de ce dernier telle que $\delta(f)$ appartienne à $\langle f\rangle \cdot A$. Soit $\mathcal{B}$ un idéal premier de A. Si $\mathcal{B}$ contient l'idéal $\langle f, \partial_1(f), \partial_2(f)\rangle$, alors les polynômes a et b appartiennent à $\mathcal{B}$.*

Démonstration. — Posons $J = (\langle f, \partial_1(f)\rangle : \partial_2(f))$. Il suffira de démontrer le lemme pour le polynôme a. En effet, nous aboutissons à la même conclusion pour le polynôme b en intervertissant le rôle de $\partial_1(f)$ et de $\partial_2(f)$ dans l'idéal J.

Supposons que le polynôme a n'appartienne pas à l'idéal $\mathcal{B}$. L'image $\overline{a}$ de a dans $A/\langle f\rangle$ est alors un inversible de ce dernier. Par conséquent,

$$\left(J \cdot \frac{A}{\langle f\rangle}\right)_{\mathcal{B}} \cong \left(\frac{A}{\langle f\rangle}\right)_{\mathcal{B}}.$$

D'après le lemme 2.5.2 du chapitre 3, nous avons :

$$\mathrm{Der}_k((A/\langle f\rangle))_{\mathcal{B}} \cong \mathrm{Der}_k((A/\langle f\rangle)_{\mathcal{B}}) \cong \left(\frac{A}{\langle f\rangle}\right)_{\mathcal{B}}.$$

De ce fait, le $\left(\frac{A}{\langle f\rangle}\right)_{\mathcal{B}}$-module $\mathrm{Der}_k((A/\langle f\rangle))_{\mathcal{B}}$ est un module libre. La courbe algébrique affine $X = \mathrm{Spec}(A/\langle f\rangle)$ définie par f dans $\mathbb{A}_k^2$ est donc lisse au point $\mathcal{B}$ d'après le théorème 1 de [**41**]. Ce qui contredit l'hypothèse et achève la preuve. □

Remarque 4.5.7. — Le lemme 4.5.6 ci-dessus ne se généralise pas en caractéristique p on nulle. En effet, si l'on considère le polynôme $f = x^p - y^{p+1}$ de $k[x,y]$ et la dérivation $\overline{\delta}$ de $k[x,y]/\langle f\rangle$ définie par :

$$\overline{\delta}(x) = 1 \quad \text{et } \overline{\delta}(y) = 0,$$

l'origine n'est pas lisse et pourtant $\overline{\delta}$ n'envoie pas (x,y) dans (x,y).

Proposition 4.5.5. — 1. $\Rightarrow$ 2. Cette implication vient de la remarque 4.3.10 puisque

$$\sqrt{J_1(f)} \subset \mathcal{N}_{1,1}(f) \quad \text{et} \quad J_1(f) \subset [f] \quad \text{dans} \quad k\{x,y\}.$$

2. $\Leftrightarrow$ 3. Soit $\delta = a\partial_1 + b\partial_2$ une k-dérivation de A. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes différentiels de A_1 tels que :

$$bx_1 - ay_1 = Q_0 f + Q_1 \Delta(f). \tag{43}$$

Par identification des deux côtés de l'égalité dans la relation (43), il existe des polynômes $q_{1,0}$, $q_{0,1}$ et $q_{0,0}$ dans A tels que

$$\begin{cases} b &= q_{1,0} f + q_{0,0}\partial_1(f) \\ \\ -a &= q_{0,1} f + q_{0,0}\partial_2(f). \end{cases}$$

En remplaçant les polynômes a et b par leur expression, on obtient :

$$\delta = q_{0,0}(\partial_1(f)\partial_2 - \partial_2(f)\partial_1) - f(q_{0.1}\partial_1 - q_{1,0}\partial_2).$$

Par conséquent, la k-dérivation induite par δ sur $A/\langle f\rangle$ est une dérivation naturelle de $A/\langle f\rangle$.

3. $\Rightarrow$ 1. Commençons par montrer que le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à $\sqrt{J_1(f)}$. Soit $\mathcal{B}$ un idéal premier de A_1 contenant $J_1(f)$. Si $\mathcal{B}$ contient $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$, alors $\mathcal{B} \cap A$ contient les polynômes f, $\partial_1(f)$, et $\partial_2(f)$. D'après le lemme 4.5.6, les polynômes a et b appartiennent à $\mathcal{B} \cap A$ qui est lui-même inclus dans $\mathcal{B}$. Donc, le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à $\mathcal{B}$.

Par ailleurs, supposons que $\partial_1(f)$ ou $\partial_2(f)$ n'appartienne pas à $\mathcal{B}$. Ce qui signifie que l'idéal premier $\mathcal{B} \cap A$ correspond à un point régulier de la courbe algébrique affine $X = \operatorname{Spec}(A/\langle f\rangle)$. Soit K le corps des fractions de $A_1/\mathcal{B}$. L'idéal B correspond alors à un élément de $X\left(K[t]/\langle t^2\rangle\right)$, c'est-à-dire $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1)$ dans K^4 tels que

$$f(\alpha_0 + \alpha_1 t, \beta_0 + \beta_1 t) = 0 \bmod t^2.$$

Soit $(\alpha(t), \beta(t))$ dans $K[[t]]^2$ un relèvement de $\mathcal{B}$ dans $\mathscr{L}(X)(K)$. L'existence de ce relèvement est garanti par le lemme de Hensel. Nous avons

$$f(\alpha(t), \beta(t)) = 0.$$

Alors

$$\alpha'(t)\partial_1(f)(\alpha(t), \beta(t)) + \beta'(t)\partial_2(f)(\alpha(t), \beta(t)) = 0. \tag{44}$$

Comme le polynôme $a\partial_1(f) + b\partial_2(f)$ appartient à l'idéal $\langle f\rangle \cdot A$, nous obtenons

$$a(\alpha(t), \beta(t))\partial_1(f)(\alpha(t), \beta(t)) + b(\alpha(t), \beta(t))\partial_2(f)(\alpha(t), \beta(t)) = 0. \tag{45}$$

D'après les relations (44) et (45), on conclut que

$$\begin{vmatrix} a(\alpha(t), \beta(t)) & \alpha'(t) \\ b(\alpha(t), \beta(t)) & \beta'(t) \end{vmatrix} = 0, \tag{46}$$

puisque

$$\partial_1(f)(\alpha(t),\beta(t)) \neq 0 \quad \text{où} \quad \partial_2(f)(\alpha(t),\beta(t)) \neq 0.$$

En posant $t = 0$ dans (46), nous obtenons

$$a(\alpha_0,\beta_0)\beta_1 - b(\alpha_0,\beta_0)\alpha_1 = 0,$$

et le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à $\mathcal{B}$. Ce qui achève cette partie de la preuve.

Supposons maintenant qu'il existe un entier naturel non nul n et des polynômes $R_0, \ldots, R_n$ de $k\{x,y\}$ tels que

$$bx_1 - ay_1 = \sum_{i=0}^{n} R_i \Delta^{(i)}(f). \tag{47}$$

Notons que pour tout i dans $\{2,\ldots,n\}$, chaque monôme de $\Delta^{(i)}(f)$ est divisible par au moins un terme de la forme :

- x_1^l avec $l \geq 2$;
- y_1^l avec $l \geq 2$;
- x_l avec $l \geq 2$;
- y_l avec $l \geq 2$.

Alors, Par identification dans l'équation (47), il existe des polynômes q, p et r dans A tels que

$$bx_1 - ay_1 = (px_1 + qy_1)f + r\Delta(f). \tag{48}$$

Comme dans la preuve de l'équivalence de 2. et 3., la relation (48) implique qu'il existe une k-dérivation D de A telle que

$$\delta = a\partial_1 + b\partial_2 = -r(\partial_2(f)\partial_1 - \partial_1(f)\partial_2) + fD.$$

Ce qui contredit le fait que δ induise une dérivation exceptionnelle sur $A/\langle f\rangle$ et achève la preuve. □

Remarque 4.5.8. — Soit f un polynôme réduit non constant de A. Posons $X = \mathrm{Spec}(A/\langle f\rangle)$. On identifie classiquement l'espace des 1-jets de X à l'espace tangent de Zariski de X, *i.e.* au schéma affine $\mathrm{Spec}\left(\mathrm{Sym}\left(\Omega^1_{A/\langle f\rangle|k}\right)\right)$. La proposition 4.5.5 calcule les nilpotents non triviaux de l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}\left(\Omega^1_{A/\langle f\rangle|k}\right)$. Le polynôme différentiel $bx_1 - ay_1$ correspond à la 1-forme différentielle $bdx_0 - ady_0$ classiquement associée à la k-dérivation $a\partial_1 + b\partial_2$ dans ce chapitre.

Remarque 4.5.9. — Soit f un polynôme réduit non constant de A. Soient P un polynôme différentiel de A_1 de degré d en 1 non nul et $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la 1-décomposition homogène de P. Supposons que P appartienne à $J_1(f)$. Pour tout entier naturel i,

$$P_i \in J_1(f) \text{ et } \mathcal{D}_1^{(i-1)}(-\partial_2(f),\partial_1(f))(P_i) \in J_1(f).$$

Cette dernière relation fournit une condition nécessaire pour qu'un polynôme P de $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ n'appartienne pas à $J_1(f)$.

Exemple 4.5.10. — Soient $f = x_0^3 - y_0^2$ un polynôme de A et $P = 9x_0x_1^2 - 4y_1^2$ un polynôme différentiel de A_1. Nous avons

$$\mathcal{D}_1(-\partial_2(f),\partial_1(f))(P) = 12x_0(3y_0x_1 - 2x_0y_1).$$

Comme la k-dérivation $\delta = 2x_0^2\partial_1 + 3y_0x_0\partial_2$ induit une dérivation exceptionnelle de l'anneau quotient $A/\langle f\rangle$, nous déduisons de la proposition 4.5.5 et de la remarque 4.5.9 que le polynôme différentiel P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f) \setminus J_1(f)$.

Exemple 4.5.11. — Considérons $f = x_0y_0$ et $P = x_1y_1$. Le polynôme différentiel P appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ puisque

$$y_0^2 P = 0 \bmod J_1(f).$$

Cependant, le polynôme différentiel P n'appartient pas à $J_1(f)$. En effet, s'il existe deux polynômes R_0 et R_1 tels que

$$P = R_0 f + R_1 \Delta(f), \tag{49}$$

alors en spécialisant (49) par $x_0,\ y_0 \mapsto 0$ et $x_1 \mapsto x_1$, $y_1 \mapsto y_1$, nous obtenons $P = 0$ ce qui n'est pas vrai. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P) &= -\partial_2(f)\, y_1 + \partial_1(f)\, x_1 \\ &= -x_0y_1 + y_0x_1. \end{aligned}$$

La k-dérivation $\delta = x_0\partial_1 + y_0\partial_2$ induit une dérivation exceptionnelle de $A/\langle f\rangle$. Alors, d'après la proposition 4.5.5 et la remarque 4.5.9, le polynôme différentiel P n'appartient pas à $J_1(f)$.

Exemple 4.5.12. — Soit $f = x_0y_0$ et $p = y_0x_1^2$. Le polynôme différentiel P appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ mais pas à $J_1(f)$ puisque son reste par rapport à la base de Gröbner réduite $G = \{x_0y_0, y_1x_0^2, x_1y_0 + x_0y_1\}$ de $J_1(f)$, pour l'ordre lexicographique, est égal à $-x_0x_1y_1$. Nous avons aussi

$$\mathcal{D}_1(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P) = -2fx_1.$$

Alors $\mathcal{D}_1(-\partial_2(f), \partial_1(f))(P)$ appartient à $J_1(f)$. Ce qui nous permet de conclure que la condition nécessaire de la remarque 4.5.9 n'est pas suffisante.

Remarque 4.5.13. — La forme spéciale ne permet pas de tester la non trivialité.

Exemple 4.5.14. — Considérons le polynôme $f = x_0^3 - y_0^2$. Soient $P = 9x_0x_1^2 - 4y_1^2$ et $Q = 3x_0^2x_1 - 2y_0y_1$ deux polynômes différentiels de A_1. Un calcul immédiat montre que la forme spéciale du polynôme différentiel P est nulle, tout comme celle du polynôme différentiel Q. Cependant, le polynôme différentiel P n'appartient pas à l'idéal $J_1(f)$ tandis que Q appartient à ce dernier.

Remarque 4.5.15. — Comme pour tout entier naturel non nul n nous avons

$$\sqrt{J_1(f)} \subset \sqrt{J_n(f)} \subset \{f\},$$

sous les hypothèses de la proposition 4.5.5, le polynôme $bx_1 - ay_1$ appartient à $\sqrt{J_n(f)}$.

4.6. Changement de base et type

Soit k' une extension de corps de k. Notons $A_{k'}$ l'anneau des polynômes $k'[x, y]$ et plus généralement

$$(A_{k'})_n = A_n \otimes_k k',\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout polynôme P de A_n, on pose

$$P_{k'} = P \otimes 1_{k'} \quad \text{dans} \quad (A_{k'})_n.$$

Le but de cette section est de décrire le lien entre l'idéal différentiel $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ de A_n et l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f_{k'})$ de $(A_{k'})_n$.

Soient m et n deux entiers naturels. Soit P un polynôme de $\mathcal{N}_{m,n}(f)$. Par définition, il existe un entier naturel N et des polynômes $Q_0, \ldots, Q_n$ de A_n tels que

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{i=0}^{n} Q_i \Delta^{(i)}(f). \tag{50}$$

Nous observons directement de (50) que le polynôme $P_{k'}$ appartient à $\mathcal{N}_{m,n}(f_{k'})$. D'où l'assertion suivante :

Lemme 4.6.1. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et k' une extension de corps de k. Soient m et n deux entiers naturels et f un polynôme de A. La A_m-application linéaire naturelle*

$$\mathcal{N}_{m,n}(f) \longrightarrow \mathcal{N}_{m,n}(f_{k'}),$$

qui à P associe $P_{k'}$, est injective.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base du k espace vectoriel k'. Pour tout polynôme P de $(A_{k'})_m$, il existe une unique famille de polynôme $(P_i)_{i\in I}$ de $(A_m)^I$ presque tous nuls et un entier naturel non nul s tels que

$$P = \sum_{j=1}^{s} P_{ei_j} e_{i_j} = \sum_{i\in I} P_{e_i} e_i \text{ dans } (A_{k'})_m. \tag{51}$$

Le polynôme P_{e_i} est appelé *la composante de P par rapport à e_i* pour tout i dans I. Cette décomposition est compatible avec l'action de la dérivation d'adjonction Δ. Plus précisément, si P est un polynôme de $(A_{k'})_m$, nous avons

$$\Delta(P) = \sum_{i\in I} \Delta(P_{e_i}) e_i. \tag{52}$$

Lemme 4.6.2. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et k' une extension de corps de k. Soit $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,s\}}$ une base du k-espace vectoriel k'. Soient m, n deux entiers naturels et f un polynôme de A. Soit P un polynôme de $(A_{k'})_m$. Le polynôme P appartient à $\mathcal{N}_{m,n}(f_{k'})$ si et seulement si P_{e_i} appartient à $\mathcal{N}_{m,n}(f)$ pour tout i dans $\{1,\ldots,s\}$.*

Démonstration. — De la relation (50), nous déduisons les expressions suivantes :

$$(\partial_1(f))^N \left(\sum_{j\in I} P_{e_j} e_j\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j\in I} Q_{i,e_j} e_j\right) \Delta^{(i)}(f) \tag{53}$$

$$\sum_{j\in I} \left((\partial_1(f))^N P_{e_j}\right) e_j = \sum_{j\in I} \left(\sum_{i=0}^{n} Q_{i,e_j} \Delta^{(i)}(f)\right) e_j. \tag{54}$$

Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est aussi une base du A_m-module $(A_{k'})_m$, pour tout j dans I, nous avons

$$(\partial_1(f))^N P_{e_j} = \sum_{i=0}^{n} Q_{i,e_j} \Delta^{(i)}(f).$$

Inversement, pour tout j dans I, il existe un entier N_j tel que

$$(\partial_1(f))^{N_j} P_{e_j} = \sum_{i=0}^{n} Q_{i,j} \Delta^{(i)}(f).$$

Soit $N = \max_{j\in\{1,\ldots,s}(N_j)$ (cette définition a un sens puisque les P_{e_i} sont presque tous nuls). Alors, en suivant la décomposition de (53), nous avons

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{i=0}^{n} Q_i \Delta^{(i)}(f)$$

avec $Q_i = \sum_{j\in I}^{n} (\partial_1(f))^{N-N_j} Q_{i,j} e_j$. □

En considérant le résultat du lemme 4.6.2, on voit que l'isomorphisme naturel

$$(A_{k'})_m \simeq \oplus_{i\in I} A_m e_i$$

induit un isomorphisme

$$\mathcal{N}_{m,n}(f) \to \oplus_{i\in I}\mathcal{N}_{m,n}(f),$$

qui à P associe $(P_{e_i})_{i\in I}$.

Remarque 4.6.3. — Le lemme 4.6.2 est compatible avec le théorème 4.8.1 puisque la lissité est stable par changement de base.

Exemple 4.6.4. — Soit $f = x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2$ un polynôme de A. Soit k' le corps de décomposition de f. Soit σ le k-automorphisme non trivial de k'. Notons α et $\overline{\alpha} = \sigma(\alpha)$ les racines du polynôme $t_2 + t + 1$ de $k[t]$. Alors

$$f_{k'} = (x_0 - \alpha y_0)(x_0 - \overline{\alpha} y_0) \quad \text{dans} \quad A_{k'}.$$

Nous avons

$$\{f_{k'}\} = [x_0 - \alpha y_0] \cap [x_0 - \overline{\alpha} y_0] = [x_0 - \alpha y_0] \cdot [x_0 - \overline{\alpha} y_0].$$

Nous déduisons que la famille de polynômes de l'anneau A_m donnée par

$$G'_n = G'_{n-1} \cup H_n,$$

avec

$$\begin{aligned} H_n \quad = \quad & \{x_ny_0 - y_nx_0, x_ny_1 - y_nx_1, \ldots, x_ny_{n-1} - y_nx_{n-1}\ ; \\ & x_nx_0 + y_nx_0 + y_ny_0, x_nx_1 + y_nx_1 + y_ny_1, \ldots, x_nx_{n-1} + y_nx_{n-1} + y_ny_{n-1}\ ; \\ & x_n^2 + x_ny_n + y_n^2\} \end{aligned}$$

et

$$G'_0 = \{x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2\},$$

est un système de générateur de l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. En effet, un calcul direct donne lieu à la formule suivante :

$$(x_0 - \alpha y_0)(x_0 - \overline{\alpha} y_0) = x_ny_j + y_jy_n + \tfrac{1}{2}(y_jx_n + y_nx_j) + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}(x_ny_j - y_nx_j)\ \forall n, j \in \mathbb{N},\ j \leq n.$$

Le lemme 4.6.2 implique que le polynôme $x_ny_j + y_jy_n + \frac{1}{2}(y_jx_n + y_nx_j)$ et le polynôme $(x_ny_j - y_nx_j)$ appartiennent à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. Le résultat annoncé découle du fait que le polynôme $x_ny_j + y_jy_n + \frac{1}{2}(y_jx_n + y_nx_j)$ est égal à

$$x_nx_j + y_nx_j + y_ny_j + \tfrac{1}{2}(x_ny_j - y_nx_j).$$

4.7. Cas des polynômes homogènes

4.7.1. Soit n un entier naturel non nul. Nous rappelons que

$$\Delta^{(n)}(f) = x_n \partial_1(f) + y_n \partial_2(f) + Q_n(f).$$

Lemme 4.7.1. — *Soit f un polynôme homogène non constant de A. Le polynôme différentiel $x_1 \Delta(\partial_1(f)) + y_1 \Delta(\partial_2(f))$ appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$.*

Démonstration. — On sait que $Q_2(f) = x_1 \Delta(\partial_1(f)) + y_1 \Delta(\partial_2(f))$. Plus précisément

$$Q_2(f) = x_1(x_1 \partial_{11}(f) + y_1 \partial_{12}(f)) + y_1(x_1 \partial_{21}(f) + y_1 \partial_{22}(f)). \tag{55}$$

D'après le théorème 4.5.3, il suffira de vérifier que

$$\mathcal{D}_1^{(2)}(x_0, y_0)(Q_2(f)) \in \langle f \rangle \cdot A.$$

En appliquant l'identité d'Euler à (55), nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathcal{D}_1^{(2)}(x_0,y_0)(Q_2(f))}{2} & = & x_0(x_0 \partial_{11}(f) + y_0 \partial_{12}(f)) + y_0(x_0 \partial_{21}(f) + y_0 \partial_{22}(f)) \\ & = & (d-1)(x_0 \partial_1(f) + y_0 \partial_2(f)) \\ & = & d(d-1) f. \end{array}$$

Ce qui achève la preuve. □

Exemple 4.7.2. — Soit $f = x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2$. Un calcul explicite donne :

$$\begin{array}{rcl} Q_2(f) & = & x_1 \Delta(\partial_1(f)) + y_1 \Delta(\partial_2(f)) \\ & = & x_1(2x_1 + y_1) + y_1(x_1 + 2y_1) \quad \text{dans } A_1. \end{array}$$

En appliquant l'application linéaire $\mathcal{D}_1^2(x_0, y_0)$ au polynôme différentiel $Q_2(f)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_1^2(x_0, y_0)(Q_2(f)) & = & x_0(2x_0 + y_0) + y_0(x_0 + 2y_0) \\ & = & x_0(2x_0 + y_0) + y_0(2y_0 + x_0) \\ & = & 2\left(x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2\right). \end{array}$$

Alors, le polynôme différentiel $Q_2(f)$ appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ d'après le théorème 4.5.4. Nous pouvons aussi calculer la base de Gröbner réduite G de l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$ en utilisant la remarque 4.3.6 :

$$G = \begin{cases} g_0 = x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 \\ g_1 = y_0 x_1 - y_1 x_0 \\ g_2 = y_1 x_0 + x_1 x_0 + y_1 y_0 \\ g_3 = y_1 x_1 + x_1^2 + y_1^2 \end{cases}$$

et vérifier que $Q_2(f) = 2g_3$.

Lemme 4.7.3. — *Soit f un polynôme homogène non constant de A. Pour tout entier naturel non nul n, le polynôme différentiel $Q_n(f)$ appartient à $\mathcal{N}_{n-1,n-1}(f)$.*

Démonstration. — Raisonnons par induction sur l'entier naturel n. Pour $n = 1$, on a par définition $Q_1(f) = 0$; l'assertion est alors claire dans ce cas.

Pour $n = 2$, le lemme 4.7.1 prouve le résultat.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons que l'assertion soit vraie pour tout entier l strictement inférieur à n et montrons qu'elle reste vraie au rang n. Par définition, nous avons

$$\Delta^{(n-1)}(f) = (x_{n-1} \partial_1(f) + y_{n-1} \partial_2(f)) + Q_{n-1}(f). \tag{56}$$

D'après la relation (56), nous avons

$$Q_n(f) = x_{n-1}\Delta(\partial_1(f)) + y_{n-1}\Delta(\partial_2(f)) + \Delta(Q_{n-1}(f)). \tag{57}$$

Par hypothèse d'induction et par le lemme 4.3.2, nous savons que le polynôme différentiel $\Delta(Q_{n-1}(f))$ appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{n-1,n-1}(f)$. Reste à montrer alors que

$$T_n = x_{n-1}\Delta(\partial_1(f)) + y_{n-1}\Delta(\partial_2(f))$$

appartient à $\mathcal{N}_{n-1,n-1}(f)$. Posons

$$U_n = \partial_1(f)\,T_n - y_{n-1}\left(-\partial_2(f)\,\Delta(\partial_1(f)) + \partial_1(f)\,\Delta(\partial_2(f))\right). \tag{58}$$

On a :

$$\begin{aligned} U_n &= (x_{n-1}\partial_1(f) + y_{n-1}\partial_2(f))\,\Delta(\partial_1(f)) + (\partial_1(f)\,\Delta(\partial_2(f))\,(y_{n-1} - y_{n-1})) \\ &= \Delta(\partial_1(f)) \cdot \left(\Delta^{(n-1)}(f) - Q_{n-1}(f)\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction, le polynôme U_n appartient à $\mathcal{N}_{n-1,n-1}(f)$. D'après le lemme 4.7.1, le polynôme $-\partial_2(f)\,\Delta(\partial_1(f)) + \partial_1(f)\,\Delta(\partial_2(f))$ appartient à $\mathcal{N}_{1,1}(f)$. La relation (58) implique donc que

$$\partial_1(f)\,T_n \in \mathcal{N}_{n-1,n-1}(f).$$

□

Corollaire 4.7.4. — *Soit f un polynôme homogène non constant de A. Pour tout entier naturel non nul n, le polynôme différentiel $x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f)$ appartient à $\mathcal{N}_{n,n}(f)$.*

Démonstration. — L'énoncé découle directement du lemme 4.7.3 puisque par définition

$$x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f) = \Delta^{(n)}(f) - Q_n(f).$$

□

4.7.2. Soient f un polynôme homogène non constant de A et P un polynôme différentiel de $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. Par définition, il existe un entier naturel N et des polynômes $T_0, \ldots, T_n$ de A_n tels que :

$$(\partial_1(f))^N P = \sum_{i=0}^{n} T_i \Delta^{(i)}(f). \tag{59}$$

D'après le lemme 4.7.3, pour tout entier naturel m dans $\{2, \ldots, n\}$, il existe un entier naturel N_m et des polynômes $T_{0,m}, \ldots, T_{m-1,m}$ de A_{m-1} tels que :

$$(\partial_1(f))^{N_m} Q_m(f) = \sum_{i=0}^{m-1} T_{i,m} \Delta^{(i)}(f). \tag{60}$$

Des relations (59) et (60) nous déduisons que le polynôme $(\partial_1(f))^{N+N_n} P$ est égal à

$$(\partial_1(f))^{N_n}(x_n\partial_1(f) + y_n\partial_2(f))\,T_n + \sum_{i=0}^{n-1}\left((\partial_1(f))^{N_n} T_i + T_{i,n}\right)\Delta^{(i)}(f). \tag{61}$$

En itérant ce procédé pour tout j dans $\{2, \ldots, n-1\}$, nous pouvons remarquer qu'il existe un entier naturel M et des polynômes $U_0, \ldots, U_n$ de A_n tels que

$$(\partial_1(f))^M P = \sum_{i=0}^{n} (x_i\partial_1(f) + y_i\partial_2(f))\,U_i. \tag{62}$$

Exemple 4.7.5. — Soient $f = x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2$ un polynôme de A et $P = -y_3x_0 + x_3y_0$ un polynôme différentiel de A_3. On a :

$$(\partial_1(f))^5 P = \sum_{i=0}^{3} T_i \Delta^{(i)}(f)$$

avec

$$\begin{cases} T_0 = T_{0,1} + T_{0,2} \\ T_{0,1} = 32x_0^3x_3y_0 + 48x_0^2y_0^2x_3 - 8y_0^4x_3 - 32x_0^4y_3 - 48x_0^3y_0y_3 + 8x_0y_0^3y_3 - 18y_0^4y_3 - 72y_0^3x_2x_1 \\ T_{0,2} = -36y_0^3x_2y_1 + 72y_0^2y_1x_1^2 + 72y_0^2y_1^2x_1 - 36y_0^3y_2x_1 - 18y_0^3y_2y_1 + 18y_0^2y_1^3 \\ T_1 = -9y_0^2(-2x_2y_0^2 - y_0^2y_2 - 2y_0y_1^2 - 4y_0x_2x_0 + 2y_0y_1x_1 - 2y_0y_2x_0 + 4y_1x_1x_0 + 2y_1^2x_0) \\ T_2 = -27y_0^4y_1 \\ T_3 = 9y_0^5. \end{cases}$$

Dans ce cas, un calcul immédiat de $Q_3(f)$ donne :

$$Q_3(f) = 6x_1x_2 + 3y_2x_1 + 3y_1x_2 + 6y_1y_2,$$

et on a :

$$Q_3(f) = \sum_{i=0}^{2} T_{i,3}\Delta^{(i)}(f) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_{0,3} = T_{0,3,0} + T_{0,3,1} + T_{0,3,2} + T_{0,3,3} \\ T_{0,3,0} = -132y_0^3x_2y_1 + 96x_0^3y_2x_1 + 144x_0^2y_0y_2x_1 - 24y_0^3y_2x_1 \\ T_{0,3,1} = 192x_0^3x_1x_2 + 288x_0^2y_0x_1x_2 - 48y_0^3x_2x_1 + 96x_0^3y_1x_2 \\ T_{0,3,2} = 288x_0^2y_0y_1y_2 - 102y_0^3y_2y_1 + 108y_0^2y_1^2x_1 + 54y_0^2y_1^3 \\ T_{0,3,3} = 192x_0^3y_1y_2 + 144x_0^2y_0y_1x_2 \\ T_{1,3} = -27y_0^2(-y_0^2y_2 - 2x_2y_0^2 + 2y_0y_1x_1 + 2y_0y_1^2 + 2y_1^2x_0) \\ T_{2,3} = 27y_0^3y_1(2x_0 + y_0). \end{cases}$$

Alors, si $U_0 = U_{0,1} + U_{0,2} + U_{0,3} + U_{0,4}$ et

$$\begin{cases} U_{0,1} = -256y_3x_0^8 + 256x_0^7x_3y_0 - 896x_0^7y_0y_3 + 896x_0^6y_0^2x_3 - 1152x_0^6y_0^2y_3 \\ U_{0,2} = 1152x_0^5y_0^3x_3 - 640x_0^5y_0^3y_3 - 224x_0^4y_0^4y_3 + 640x_0^4y_0^4x_3 - 144x_0^3y_0^5y_3 \\ U_{0,3} = 224x_0^3y_0^5x_3 + 32x_0^2y_0^6y_3 + 144x_0^2y_0^6x_3 - 32x_0y_0^7x_3 \\ U_{0,4} = 40x_0y_0^7y_3 - 40y_0^8x_3 - 81y_0^8y_3 \\ U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = 81y_0^9, \end{cases}$$

on vérifie aisément que :

$$(\partial_1(f))^9 P = \sum_{i=0}^{3} (x_i\partial_1(f) + y_i\partial_2(f))\, U_i.$$

Corollaire 4.7.6. — *Soit f un polynôme homogène non constant de A. Soient n un entier naturel non nul et P un polynôme différentiel de A_n. Supposons que P appartienne à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. Soient Q un polynôme différentiel de A_m et j un entier naturel. Si on pose $m = \max(n-1, j)$, alors le polynôme différentiel $P(X_jQ, Y_jQ)$ appartient à $\mathcal{N}_{m,m}(f)$.*

Démonstration. — D'après l'équation (62), il existe un entier naturel M et des polynômes différentiels $U_0, \ldots, U_n$ de A_n tels que

$$(\partial_1(f))^M P = \sum_{i=0}^{n} (x_i \partial_1(f) + y_i \partial_2(f)) U_i. \tag{63}$$

En spécialisant $x_n \mapsto x_j Q$ et $y_n \mapsto y_j Q$ dans la relation (63), l'image du polynôme $(\partial_1(f))^M P$ est égale à :

$$(x_i \partial_1(f) + y_i \partial_2(f)) U_n(x_j Q, y_j Q) Q + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \partial_1(f) + y_i \partial_2(f)) U_i(x_j Q, y_j Q).$$

D'après l'identité d'Euler, pour $j = 0$,

$$x_0 \partial_1(f) + y_0 \partial_2(f) = \deg_0(f) f.$$

L'énoncé découle du corollaire 4.7.4. □

Exemple 4.7.7. — Soit f un polynôme homogène non constant de A. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. Le polynôme

$$x_n y_{n-1} - y_n x_{n-1}$$

appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. En effet, soit $V_n = x_n y_{n-1} - y_n x_{n-1}$. Un calcul direct donne la formule suivante :

$$(\partial_1(f)) V_n - y_n(-y_{n-1}\partial_2(f) - x_{n-1}\partial_1(f)) = y_{n-1}\left(\Delta^{(n)}(f) - Q_n(f)\right).$$

On conclut avec le lemme 4.7.3 puisque le polynôme $y_n(-y_{n-1}\partial_2(f) - x_{n-1}\partial_1(f))$ appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ d'après le corollaire 4.7.4.

Remarque 4.7.8. — Il est en général possible de trouver un polynôme P qui appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{n,n}(f)$ et qui n'appartient pas à $[\mathcal{N}_{n-1,n-1}(f)]$.

Exemple 4.7.9. — Soient $f = x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2$ un polynôme de A et $P = -y_1 x_0 + x_1 y_0$ un polynôme différentiel de A_1. D'après l'exemple 4.7.7, nous savons que P appartient à l'idéal $\mathcal{N}_{1,1}(f)$. Cependant, le polynôme différentiel P n'appartient pas à l'idéal différentiel $[f]$ d'après la proposition 4.5.5.

4.8. Application au schéma des arcs tracés sur une courbe

Rappelons que si f est un polynôme non constant de A et X la courbe algébrique affine plane définie par f, l'espace des n-jets de X est le schéma affine

$$\mathscr{L}_n(X) = \operatorname{Spec}(A_m / J_n(f))$$

et le schéma des arcs tracés sur X est le schéma affine

$$\mathscr{L}(X) = \operatorname{Spec}(k\{x, y\} / [f]).$$

Le théorème 4.8.1 ci-dessous est le résultat principal de cette section.

Théorème 4.8.1. — *Soit X une courbe affine plane sur k. les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le k-schéma $\mathscr{L}(X)$ est réduit ;*
2. *Le k-schéma X est lisse ;*
3. *Pour tout entier naturel n, le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est lisse ;*

4. *Il existe un entier naturel non nul n tel que le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est lisse ;*
5. *Pour tout entier naturel n, le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est réduit ;*
6. *Il existe un entier naturel non nul n tel que le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ soit réduit.*

Si la courbe X est irréductible, alors ces assertions sont équivalentes aux suivantes

7. *Pour tout entier naturel n, l'immersion fermée $\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$ est un isomorphisme ;*
8. *Il existe un entier naturel non nul n tel que l'immersion fermée $\mathscr{L}_{n,n}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}_n(X)$ soit un isomorphisme.*
9. *La courbe X est réduite et, pour tout entier naturel n, le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est irréductible.*

L'équivalence $1 \Longleftrightarrow 2$ étend le résultat principal de [**58**] à tout corps de caractéristique nulle. Notre preuve reprend les arguments du *loc. cit.*, en remplaçant l'utilisation de [**58**, théorème 3] par celui de la proposition 4.5.5. Le reste des assertions complète le tableau.

Démonstration. — $2. \Longrightarrow 1.$ Supposons que la courbe X soit lisse. Pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que

$$U \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$$

soit étale. L'implication découle alors de la proposition B.3.2 du chapitre 2 qui montre que

$$\mathscr{L}(U) \simeq U \times_{\mathbb{A}^1_k} \mathscr{L}\left(\mathbb{A}^1_k\right).$$

$1. \Longrightarrow 2.$ Supposons que la courbe X soit singulier. Si X n'est pas réduit, alors le schéma des arcs tracés sur X ne l'est pas non plus. En effet, posons $X = \operatorname{Spec}(A/\langle f\rangle)$. On a par définition

$$\mathscr{L}(X) = \operatorname{Spec}(k\{x,y\}/[f]).$$

Soit $s : X \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ la section du morphisme de troncation $\pi : \mathscr{L}(X) \longrightarrow X$. Le morphisme identité

$$X \xrightarrow{s} \mathscr{L}(X) \xrightarrow{\pi} X,$$

induit le morphisme identité de k-algèbres

$$A/\langle f\rangle \longrightarrow k\{x,y\}/[f] \longrightarrow A/\langle f\rangle$$

que nous noterons Id. Si $\mathscr{L}(X)$ est réduit et X ne l'est pas, alors tout élément nilpotent non trivial de $A/\langle f\rangle$ est envoyé par Id sur 0. Ce qui est absurde. Ainsi, si $\mathscr{L}(X)$ est réduit alors X est réduit. De ce fait, supposons que X soit réduit et singulier. D'après le chapitre 3, il existe une k-dérivation exceptionnelle δ de X. Par la proposition 4.5.5, nous associons à δ un élément non trivial de l'idéal différentiel $\{f\}$, c'est-à-dire un élément de $\{f\} \setminus [f]$. Ce qui contredit notre hypothèse et prouve l'implication.

$2. \Longrightarrow 3.$ Cette implication est démontrée dans la proposition B.4.5 du chapitre 2.

$3. \Longrightarrow 5.$ Cette assertion découle directement de la définition de la lissité.

$5. \Longrightarrow 6.$ L'implication est formelle.

$6. \Longrightarrow 2.$ Supposons que X ne soit pas lisse. Si X n'est pas réduit, alors tout élément de $\sqrt{\langle f\rangle} \setminus \langle f\rangle$ fournit un élément de $\sqrt{J_n(f)} \setminus J_n(f)$. Ainsi, nous pouvons supposer que X est réduit et singulier. En appliquant la proposition 4.5.5, nous aboutissons à une contradiction.

3. $\Longrightarrow$ 4. L'implication est formelle.

4. $\Longrightarrow$ 2. Supposons que X ne soit pas lisse. Si X n'est pas réduit, alors l'espace $\mathscr{L}_n(X)$ des n-jets de X ne l'est pas aussi. Ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, nous supposons que X est réduit et singulier. En appliquant la proposition 4.5.5, nous aboutissons à une contradiction. Donc la courbe X est lisse.

Supposons maintenant que le polynôme f est irréductible.

8. $\Longrightarrow$ 2. Supposons que la courbe X ne soit pas lisse. Si X n'est pas réduit, tout élément de $\sqrt{\langle f\rangle} \setminus \langle f\rangle$ fournit un élément de $\mathcal{N}_{n,n}(f) \setminus J_n(f)$. Alors, nous pouvons supposer que X est réduit et singulier. La proposition 4.5.5 permet de déboucher sur une contradiction.

7. $\Longrightarrow$ 8. Cette implication est formelle.

2. $\Longrightarrow$ 7. Lorsque X est intègre et lisse, l'idéal $\sqrt{J_n(f)} = J_n(f)$ est un iéal premier de A_n pour tout entier naturel n. Soit P un polynôme de $\mathcal{N}_{n,n}(f)$. Le polynôme P appartient à $\{f\} = [f]$. Alors, il existe un entier naturel m tel que

$$P \in J_m(f) \cap A_n.$$

Supposons que m soit strictement supérieur à n. Comme les schémas $\mathscr{L}_n(X)$ et $\mathscr{L}_m(X)$ sont intègres et que le morphisme de troncation

$$\theta_n^m \ : \ \mathscr{L}_m(X) \to \mathscr{L}_n(X)$$

est surjectif, alors le morphisme de k-algèbres

$$A_n/J_n(f) \to A_m/J_m(f)$$

est injectif. Par le lemme de factorisation, nous déduisons que

$$J_m(f) \cap A_n = J_n(f).$$

2. $\Leftrightarrow$ 9. Cette équivalence est démontrée dans [**43**, corollaire 4.2] □

Remarque 4.8.2. — L'implication 4 $\Longrightarrow$ 1 dans le théorème peut aussi se déduire de [**27**, proposition 8.7.1]

Comme dans [**58**, théorème 4], nous déduisons le corollaire suivant par [**42**, proposition 2/ 4.2],

Corollaire 4.8.3. — *Soit X une courbe projective plane sur k. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le k-schéma $\mathscr{L}(X)$ est réduit ;*
2. *Le k-schéma X est lisse ;*
3. *Pour tout entier naturel n, le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est lisse ;*
4. *Pour tout entier naturel n, le k-schéma $\mathscr{L}_n(X)$ est réduit ;*

CHAPITRE 5

FONCTION ZÊTA MOTIVIQUE ET FEUILLETAGES

Soit k un corps de caractéristique nulle et X une k-variété connexe lisse de dimension d. Jan Denef et François Loeser [**12, 15**], par analogie aux travaux de Jun-Ichi Igusa, associent à la donnée d'un morphisme dominant $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$ une série génératrice $Z_f(T)$ à coefficients dans le localisé d'un certain anneau de Grothendieck. Cette dernière est appelée *fonction zêta motivique*. Denef et Loeser montrent en utilisant le théorème de résolution des singularités de Heisuke Hironaka [**32**] que $Z_f(T)$ est rationnelle. Dans ce chapitre, nous définissons la notion de fonction zêta motivique des 1-formes de Kähler.

5.1. Conventions et notations

Soit X une k-variété et $x \in X$. Nous noterons $\mathscr{L}_x(X)$ le sous-espace du schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X défini par :

$$\mathscr{L}_x(X) = \mathscr{L}(X) \cap \pi_{0,X}^{-1}(x).$$

Soient $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau des germes en x des fonctions régulières de X et $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}_{X,x}, K[[t]])$ l'ensemble des morphismes de k-algèbres locales. On a :

$$\mathscr{L}_x(X)(K) \simeq \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}_{X,x}, K[[t]]). \tag{64}$$

De même, nous désignerons par $\mathscr{L}_{n,x}(X)$, le sous-espace de l'espace des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ de X défini par :

$$\mathscr{L}_{n,x}(X) = \mathscr{L}_n(X) \cap \left(\theta_{n,0}^X\right)^{-1}(x).$$

Nous avons la bijection fonctorielle suivante :

$$\mathscr{L}_{n,x}(X)(K) \simeq \mathrm{Hom}_k^{\mathrm{loc}}\left(\mathcal{O}_{X,x}, K[t]/\langle t^{n+1}\rangle\right). \tag{65}$$

Dans toute la suite de notre travail, nous ne distinguons pas la notion de k-points de $\mathscr{L}(X)$ (resp. $\mathscr{L}_m(X)$) et celle de $k[[t]]$-points (resp. $k[t]/\langle t^{m+1}\rangle$-points) de X.

5.2. Anneaux de Grothendieck

Soit X une k-variété. Notons $[X]$ la classe d'isomorphismes de X sur k. On appelle *groupe de Grothendieck* des k-variétés et l'on note $K_0(\mathrm{Var}_k)$, le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme sur k des variétés, quotienté par la relation suivante :

$$[X] = [S] + [X \setminus S], \text{ lorsque } S \text{ est une sous-variété fermée de } X.$$

Le groupe de Grothendieck est naturellement muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire. En effet, pour toute k-variété X et Y, le produit dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$, est induit par le produit fibré au-dessus de k *via* les formules

$$[X]\cdot[Y]=\left[X\times_{\mathrm{Spec}(k)}Y\right],\ \text{pour tout couple de } k\text{-variétés } (X,Y).$$

Par définition du produit fibré, on a :

$$\mathrm{Spec}\,(k)\times_{\mathrm{Spec}(k)}X=X\times_{\mathrm{Spec}(k)}\mathrm{Spec}\,(k)=X.$$

La classe de $\mathrm{Spec}\,(k)$ est donc l'élément neutre pour cette structure d'anneau. Notons également que pour toute k-variété X, on a :

$$[X]=[X_{\mathrm{red}}].$$

Remarque 5.2.1. — En passant d'une k-variété X à la classe d'isomorphismes de X, nous perdons certaines informations géométriques. En effet, dans le cas de la courbe algébrique affine définie dans $\mathbb{A}^2_k$ par l'équation :

$$x^3-y^2=0,$$

nous avons

$$[X]=\left[\mathbb{A}^1_k\right].$$

On note 1 la classe d'un point et $\mathbb{L}$ la classe de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$ et l'on définit $\mathcal{M}_k$ comme le localisé en $\mathbb{L}$ de $K_0(\mathrm{Var}_k)$.

Les anneaux $K_0(\mathrm{Var}_k)$ et $\mathcal{M}_k$ sont encore assez mal connus. Bjorn Poonen a récemment montré dans [**49**] que $K_0(\mathrm{Var}_k)$ n'était pas un anneau intègre. La question de savoir si $\mathcal{M}_k$ est intègre ou si l'application naturelle

$$K_0(\mathrm{Var}_k)\longrightarrow\mathcal{M}_k$$

est injective, est à notre connaissance une question ouverte.

5.3. Fonction zêta motivique associée à un morphisme

Dans cette section nous suivons les articles [**15**] et [**12**] de Denef et Loeser.

5.3.1. Posons

$$\mathfrak{X}_n(f)=\{\alpha\in\mathscr{L}_n(X)\mid \mathrm{ord}_t(f(\alpha))=n\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{X}_n(f)$ est une sous-variété localement fermée de $\mathscr{L}_n(X)$. Dans [**15, 12**], Denef et Loeser ont associé à f une fonction zêta motivique par analogie avec la fonction zêta de Igusa dans le cas p-adique. En effet, ils définissent la *fonction zêta motivique naïve associée à f* comme étant la série formelle

$$Z_f(T)=\sum_{n\geq 1}[\mathfrak{X}_n(f)]\,\mathbb{L}^{-nd}T^n\in\mathcal{M}_k[[T]].$$

5.3.2. En utilisant le théorème de résolution des singularités de Hironaka, Denef et Loeser [**15**] montrent que la fonction zêta motivique $Z_f(T)$ associée à f est une fonction rationnelle. Plus précisément, ils prouvent que $Z_f(T)$ appartient au sous-anneau de $\mathcal{M}_k[[T]]$ engendré par $\mathcal{M}_k[T]$ et les éléments $(1-\mathbb{L}^{-s}T^m)^{-1}$ avec $(s,m)\in\mathbb{N}^2$. Les deux auteurs utilisent ce résultat pour formuler la conjecture de la monodromie associée à des objets de ce type.

5.3.3. Soit x un k-point de X. En suivant Denef et Loeser, on note

$$\mathfrak{X}_{n,x}(f) = \{\alpha \in \mathscr{L}_{n,x}(X) \mid \mathrm{ord}_t(f(\alpha)) = n\}$$

et l'on définit la *fonction zêta motivique naïve associée à f de support x* comme la série formelle :

$$Z_{f,x}(T) = \sum_{n\geq 1} [\mathfrak{X}_{n,x}(f)]\, \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}_k[[T]].$$

Cette fonction zêta rend compte des propriétés arithmétiques de la k-variété X au point x sur l'anneau des séries formelles $k[[T]]$.

5.4. Fonction zêta associée à une 1-forme de Kähler

5.4.1. Soient k un corps et X une k-variété lisse de dimension d. Soient U un ouvert de X et $x \in U$. Soient ω une 1-forme sur U et φ un arc tracé sur X d'origine x. Donnons nous un système de coordonnées local $(x_1, \ldots, x_d)$ au voisinage de x (*i.e.* un système minimal de générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_x$ de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. Posons

$$\varphi(x_i) = \varphi_i(t), \ \forall i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Par localisation, la 1-forme ω induit une unique 1-forme dans $\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}|k}$. Nous avons alors un morphisme de $k[t]/t^{n+1}$-modules

$$\theta \ : \ \varphi^*\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}|k} \longrightarrow \Omega^1_{k[t]/t^{n+1}|k}$$

explicitement défini par :

$$\theta(dx_i \otimes 1) = \varphi_i'(t)\, dt \bmod t^{n+1}.$$

En passant à la limite, la donnée de φ induit un morphisme de $k[[t]]$-modules

$$ev_\varphi \ : \ \varphi^*\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}|k} \longrightarrow \widehat{\Omega^1_{k[[t]]|k}},$$

qui à $dx_i \otimes 1$ associe $\varphi_i'(t)\, dt$.
Si on fixe un isomorphisme de $k[[t]]$-modules entre $\widehat{\Omega^1_{k[[t]]|k}}$ et $k[[t]]$ (notons en effet que $\widehat{\Omega^1_{k[[t]]|k}}$ est un module de rang 1 engendré par dt), l'image de la 1-forme ω par le morphisme ev_φ, c'est-à-dire l'élément $ev_\varphi(\varphi^*\omega)$ de $k[[t]]$, est nul ou s'écrit sous-la forme

$$u \cdot t^n, \ u \in k[[t]]^* \ \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, l'entier n est unique. Il ne dépend pas de l'isomorphisme choisi. Ce qui justifie la définition suivante :

Définition 5.4.1. — Soient x un point fermé de X et φ un arc tracé sur X d'origine x. On définit *l'ordre* $\mathrm{ord}_{\omega,x}(\varphi)$ de ω en φ au point x de manière suivante :

$$\mathrm{ord}_{\omega,x}(\varphi) \ := \begin{cases} +\infty & \text{si } ev_\varphi(\varphi^*\omega) = 0 \\ \\ n & \text{si } ev_\varphi(\varphi^*\omega) = u \cdot t^n. \end{cases}$$

Cette donnée définit une application

$$\mathrm{ord}_{\omega,x} \ : \ \mathscr{L}(X) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

qui à tout arc φ tracé sur X associe $\mathrm{ord}_{\omega,x}(\varphi)$.

Remarque 5.4.2. — Comme la fibre de la 1-forme ω en x est indépendante de l'ouvert U sur lequel ω est définie, la définition 5.4.1 ne dépend pas du choix de U. Par changement de base, on peut étendre la définition 5.4.1 à tout $x \in X(K)$ pour toute extension K de k.

Lemme 5.4.3. — *Pour tout entier naturel n, l'ensemble $\pi_{n,X}\left(\mathrm{ord}_{\omega,x}^{-1}(n)\right)$ est un sous-ensemble constructible de $\mathscr{L}_n(X)$.*

Démonstration. — Découle directement de la remarque 5.4.6 et du lemme 5.5.1. □

5.4.2. Soient k un corps et X une k-variété lisse de dimension d. Soit U un ouvert de X. Soit ω une 1-forme sur U. Dans ce qui suit nous montrons comment associer une fonction zêta motivique à ω.

Définition 5.4.4. — Soient k un corps et X une k-variété lisse. Soit x un point fermé de X. Soient U un ouvert de X contenant x et ω une 1-forme non triviale sur U. La *fonction zêta motivique locale* $Z_{\omega,x}(T)$ de ω au point x est la série formelle suivante :

$$Z_{\omega,x}(T) = \sum_{n\geq 1}\left[\pi_{n+1,X}\left(\mathrm{ord}_{\omega,x}^{-1}(n)\right)\cap\left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(x)\right]\mathbb{L}^{-n}T^{n} \in \mathcal{M}_k[[T]].$$

Cette définition peut s'étendre au cas d'un nombre fini de 1-formes de la manière suivante :

Définition 5.4.5. — Soient k un corps et X une k-variété lisse. Soit x un point fermé de X. Soient U un ouvert de X contenant x et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ un m-uplet de 1-formes non triviales sur U. La *fonction polyzêta motivique locale* de ω au point x est la série formelle suivante :

$$Z_{w,x}(T) = \sum_{\substack{n = (n_1,\ldots,n_m)\\ n_i\geq 1}}\left[\pi_{n+1,X}\left(\cap_{i=1}^{m}\mathrm{ord}_{\omega_i,x}^{-1}(n_i)\right)\cap\left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(x)\right]\mathbb{L}^{-\left(\sum_{i=1}^{m}n_i\right)}T_1^{n_1}\cdots T_m^{n_m}$$

de $\mathcal{M}_k[[T]]$.

Remarque 5.4.6. — Nous pouvons étendre la définition 5.4.4 au cas de la donnée d'un germe de 1-forme analytique de $k\{x_1, \ldots, x_d\}$. En particulier, si X est définie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, comme

$$\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} = \widehat{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}}$$

pour tout $x \in X(\mathbb{C})$, il facile de se convaincre que

$$Z_{\omega^{\mathrm{an}}} = Z_{\omega}.$$

Notons que cette définition (la définition 5.4.4) est encore la même si l'on remplace ω par $\lambda\omega$ avec $\lambda \in k^*$. Elle ne dépend donc que du feuilletage associé à ω.

5.5. Calcul explicite

Dans cette section k désigne le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit X une k-variété lisse de dimension d. Soient x un point fermé de X et ω une 1-forme définie dans un voisinage ouvert U de x. Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ un système régulier de générateurs de l'anneau

local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x. Les 1-formes $dx_1, \ldots, dx_d$ engendrent $\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}}$. Il existe des séries formelles $a_i \in k[[x_1, \ldots, x_d]]$ telles que la 1-forme ω s'écrive sous la forme :

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} a_i(x_1, \ldots, x_d)\, dx_i \quad \text{(quitte à regarder cette égalité dans } \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}}\text{)}.$$

Par ailleurs, soit $\varphi : \operatorname{Spec}(k[[t]]) \longrightarrow X$ un arc tracé sur X d'origine x. Le morphisme φ induit un morphisme d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k[[t]]$$

que nous noterons encore φ. On pose

$$\varphi(x_i) = \varphi_i(t).$$

Nous identifions dans la suite de notre travail le morphisme φ au d-uplet $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$. Dans cette section, nous décrivons la fonction zêta associée à une 1-forme définie au voisinage de l'origine. Nous montrons qu'elle est rationnelle dans un cas particulier.

Lemme 5.5.1. — *Nous nous plaçons sous les hypothèses ci-dessus. Soient $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ un arc tracé sur X tel que $\varphi(0) = 0$ et ω une 1-forme définie au voisinage de 0. Nous avons*

$$\operatorname{ord}_\omega(\varphi) = \operatorname{ord}_t\left(\sum_{i=1}^{d} \varphi_i'(t) \cdot a_i(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))\right).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe des définitions. En effet, dans $\widehat{\Omega^1_{k[[t]]|k}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= \sum_{i=1}^{d} \varphi^*(a_i)\, d(\varphi(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))\, d(\varphi_i(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \varphi_i'(t) \cdot a_i(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))\, dt.
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.5.2. — Si $a_i \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ la formule $a_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ a bien un sens car $\varphi_i(0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Proposition 5.5.3. — *Considérons les hypothèses ci-dessus et supposons qu'il existe f et h dans $\mathcal{O}_{X,0}$ tels que*

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega = hdf.$$

Alors

$$Z_{\omega,0}(T) = Z_{hf,0}(T).$$

Démonstration. — La formule ci-dessus découle directement de la règle de composition. En effet, d'après le lemme 5.5.1, nous avons pour tout $\varphi \in k[[t]]^d$ tel que $\varphi(0) = 0$, l'égalité suivante :

$$\varphi^* hdf = h(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t)) \sum_{i=1}^{d} \varphi_i'(t) \cdot (\partial_{x_i}(f))(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))\, dt.$$

Par conséquent,

$$\varphi^* hdf = h(\varphi(t))\, d(f(\varphi(t))).$$

Il s'en suit que

$$\mathrm{ord}_{\omega}^{-1}(n-1) \cap \left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(0) \simeq \mathrm{ord}_{hf}^{-1}(n) \cap \left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(0)$$

comme sous-schémas fermés réduits de $\mathscr{L}\left(\mathbb{A}_k^d\right)$. Alors, dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$,

$$\left[\pi_{n,X}\left(\mathrm{ord}_{\omega}^{-1}(n-1) \cap \left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(0)\right)\right] = \left[\pi_{n,X}\left(\mathrm{ord}_{hf}^{-1}(n) \cap \left(\theta_{n+1,0}^{X}\right)^{-1}(0)\right)\right].$$

Ce qui achève la preuve. □

Remarque 5.5.4. — Sous les hypothèses de la proposition, la fonction zêta locale $Z_{\omega,0}(T)$ est rationnelle d'après **[15]**.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_d)$ un point de k^d. Nous rappelons que x est un *point singulier* de la 1-forme $\omega = \sum_{i=1}^{d} a_i(x_1, \ldots, x_d)\, dx_i$ si

$$a_i(x) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Dans le cas contraire, l'on dit que x est un *point lisse* de ω.

Corollaire 5.5.5. — *Si x est un point lisse de ω, alors $Z_{\omega,x}(T)$ est une série formelle géométrique.*

Démonstration. — La 1-forme ω étant non singulière en x, le théorème de Cauchy montre l'existence d'une unique série formelle $f \in k\{x_1, \ldots, x_d\}$ telle que

$$f(0) = 0 \ \text{ et } \ \omega = hdf,\ h \in k\{x_1, \ldots, x_d\}^*.$$

Sachant que $\mathrm{ord}_h^{-1}(n)$ est vide si et seulement si n est non nul et que $\mathrm{ord}_h^{-1}(n)$ est égal à l'espace des arcs passant par l'origine $\mathscr{L}_0(X)$ si n est nul, alors nous avons :

$$Z_{\omega,0}(T) = Z_{hf,0}(T) = Z_{f,0}(T).$$

□

Remarque 5.5.6. — Si $f(0) = 0$ et $df(0)$, il découle de la proposition 5.5.3 que $Z_{hdf,0}$ est une fraction rationnelle mais cette dernière n'est pas géométrique.

5.6. Exemples

Exemple 5.6.1. — Soit $f = y - x^2$ et ω la 1-forme donnée par :

$$\omega = df = dy - 2xdx.$$

Soit K une extension de corps de k. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_{\omega,0}\left(\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\right)=1\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)^*\omega\right)=1\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(b_1+2\left(b_2-a_1^2\right)t-6a_1a_2t^2-4a_2^2t^3\right)\right)=1\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)(K)=\{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle|\ b_1=0 \text{ et } b_2-a_1^2\neq 0\}.$$

De ces conditions, l'on observe que $b_1=0$, il n'y a pas de condition sur a_2, ce qui produit un facteur $\mathbb{L}$ dans le $K_0(\mathrm{Var}_k)$. Par ailleurs dans l'espace de coordonnées $a_1,\ b_2$, on a la condition $b_2-a_1^2\neq 0$ qui définit le complémentaire de la courbe plane d'équation $b_2-a_1^2=0$, dont la classe est égale à $\mathbb{L}^2-\mathbb{L}$. Par conséquent, la classe du coefficient cherché est donné par le produit des conditions ci-dessus, soit :

$$\left[\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)\right]=\mathbb{L}\left(\mathbb{L}^2-\mathbb{L}\right)=\mathbb{L}^3-\mathbb{L}^2.$$

De même, si on pose $A=4\left(a_2^2+2a_1a_3\right)+10a_2a_3t+6a_3^2t^2$, alors

$$\begin{aligned}
\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_{\omega,0}\left(\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\right)=2\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)^*\omega\right)=2\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(b_1+2\left(b_2-a_1^2\right)t+3\left(b_3-a_1a_2\right)t^2-At^3\right)\right)=2\}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^4\rangle \\
&\qquad |\ b_1=0,\ b_2-a_1^2=0 \text{ et } b_3-2a_1a_2\neq 0\}.
\end{aligned}$$

De ce fait, l'on observe que $b_1=0$, il n'y a pas de condition sur a_3, ce qui produit un facteur $\mathbb{L}$ dans le $K_0(\mathrm{Var}_k)$. Par ailleurs dans l'espace de coordonnées $a_1,\ b_2$, on a la courbe plane d'équation $b_2-a_1^2=0$, dont la classe est égale à $\mathbb{L}$. Enfin, dans l'espace de coordonnées $a_1,\ a_2$ et b_3, on a la condition $b_3-2a_1a_2\neq 0$ qui définit le complémentaire de la surface

d'équation $b_3 - 2a_1a_2 = 0$, dont la classe est égale à $\mathbb{L}^3 - \mathbb{L}^2$. Par conséquent :

$$\left[\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right) \cap \theta_{3,0}^{-1}(0)\right] = \mathbb{L}^2\left(\mathbb{L}^3 - \mathbb{L}^2\right) = \mathbb{L}^5 - \mathbb{L}^4.$$

D'une manière générale, les K-points de $\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right) \cap \theta_{n+1,0}^{-1}(0)$ correspondent aux couples

$$\left(a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_{n+1}t^{n+1}, b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_{n+1}t^{n+1}\right) \in K[t]/\langle t^{n+2}\rangle$$

pour lesquels nous avons :

$$\begin{gathered} b_1 = 0\ ; \\ b_2 - a_1^2 = 0\ ; \\ \vdots \\ b_{n-1} - \sum_{i+j=n-1}^{n-2} a_ia_j = 0\ ; \\ b_n - \sum_{i+j=n}^{n-1} a_ia_j \neq 0. \end{gathered}$$

Ainsi :

$$\left[\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right) \cap \theta_{n+1,0}^{-1}(0)\right] = \mathbb{L}^{2n+1} - \mathbb{L}^{2n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_{\omega,0}(T) &= \textstyle\sum_{n\geq 1}\left(\mathbb{L}^{2n+1} - \mathbb{L}^{2n}\right)\mathbb{L}^{-n}T^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1}(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}T)^n \\ &= \frac{\mathbb{L}T(\mathbb{L}-1)}{1-\mathbb{L}T}. \end{aligned}$$

Exemple 5.6.2. — Soit $f = y^2 - x^3$ et ω la 1-forme définie par :

$$\omega = df = 2ydy - 3x^2dx.$$

Soit K une extension de corps de k. Les K-points de $\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right) \cap \theta_{2,0}^{-1}(0)$ correspondent aux couples

$$\left(a_1t + a_2t^2, b_1t + b_2t^2\right) \in K[t]/\langle t^3\rangle$$

satisfaisant à la condition :

$$\mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t + a_2t^2, b_1t + b_2t^2\right)^*\omega\right) = 1.$$

Ainsi,

$$\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right) \cap \theta_{2,0}^{-1}(0)(K) = \{\left(a_1t + a_2t^2, b_1t + b_2t^2\right) \in K[t]/\langle t^3\rangle |\ b_1 \neq 0\}.$$

On remarque qu'il n'y a pas de condition sur a_1, a_2 et b_2, ce qui produit un facteur $\mathbb{L}^3$ dans le $K_0(\mathrm{Var}_k)$. L'espace $b_1 \neq 0$ a pour classe $\mathbb{L} - 1$ dans $K_0(\mathrm{Var}_k)$. Par conséquent, la classe du coefficient cherché est donné par le produit des conditions ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\left[\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right) \cap \theta_{2,0}^{-1}(0)\right] = \mathbb{L}^3(\mathbb{L}-1) = \mathbb{L}^4 - \mathbb{L}^3.$$

De même, les K-points de $\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right) \cap \theta_{3,0}^{-1}(0)$ correspondent aux couples

$$\left(a_1t + a_2t^2 + a_3t^3, b_1t + b_2t^2 + b_3t^3\right) \in K[t]/\langle t^4\rangle$$

pour lesquels

$$\mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)^*\omega\right)=2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^4\rangle \\ &\qquad \mid b_1=0 \text{ et } 2b_1b_2-a_1^3\neq 0\} \\ &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^4\rangle \\ &\qquad \mid b_1=0 \text{ et } a_1\neq 0\}\end{aligned}$$

.

On observe que $b_1=0$, il n'y a pas de condition sur $a_2,\ a_3,\ b_2$ et b_3, ce qui produit un facteur $\mathbb{L}^4$ dans le $K_0(\mathrm{Var}_k)$. Par ailleurs, l'espace d'équation $a_1\neq 0$ à pour classe $\mathbb{L}-1$. Par conséquent :

$$\left[\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)\right]=\mathbb{L}^4(\mathbb{L}-1)=\mathbb{L}^5-\mathbb{L}^4.$$

D'une manière générale, les K-points de $\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right)\cap\theta_{n+1,0}^{-1}(0)$ correspondent aux couples

$$\left(a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{n+1}t^{n+1},b_1t+b_2t^2+\cdots+b_{n+1}t^{n+1}\right)\in K[t]/\langle t^{n+2}\rangle$$

qui sont tels que :

$$\begin{gathered}b_1=0\ ;\\ 2b_1b_2-a_1^3=0\ ;\\ \vdots\end{gathered}$$

Ainsi

$$\left[\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right)\cap\theta_{n+1,0}^{-1}(0)\right]=\mathbb{L}^{n+2}-\mathbb{L}^{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}Z_{\omega,0}(T) &= \textstyle\sum_{n\geq 1}\left(\mathbb{L}^{n+2}-\mathbb{L}^{n+1}\right)\mathbb{L}^{-n}T^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 1}\left(\mathbb{L}^2-\mathbb{L}\right)T^n \\ &= \frac{\mathbb{L}(\mathbb{L}-1)T}{1-T}.\end{aligned}$$

Exemple 5.6.3. — Considérons le polynôme $f=xy$ et ω la 1-forme définie par :

$$\omega=df=ydx+xdy.$$

Soit K une extension de corps de k. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_{\omega,0}\left(\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\right)=1\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)^*\omega\right)=1\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(2a_1b_1t+3\left(a_1b_2+a_2b_1\right)t^2+4a_2b_2t^3\right)\right)=1\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle|\ a_1b_1\neq 0\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2,b_1t+b_2t^2\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle|\ a_1\neq 0 \text{ et } b_1\neq 0\}.
\end{aligned}$$

De ce fait,

$$\left[\pi_2\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(1)\right)\cap\theta_{2,0}^{-1}(0)\right]=\mathbb{L}^2(\mathbb{L}-1)^2=\mathbb{L}^4-2\mathbb{L}^3+\mathbb{L}^2.$$

De même, si on pose $B=4\left(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1\right)+5\left(a_2b_3+a_3b_2\right)t+6a_3b_3t^2$, alors

$$\begin{aligned}
\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_{\omega,0}\left(\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\right)=2\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)^*\omega\right)=2\} \\
&= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^3\rangle| \\
&\quad \mathrm{ord}_t\left(\left(2a_1b_1t+3\left(a_1b_2+a_2b_1\right)t^2+Bt^3\right)\right)=2\}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)(K) &= \{\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3,b_1t+b_2t^2+b_3t^3\right)\in K[t]/\langle t^4\rangle \\
&\qquad | \ a_1b_1=0 \text{ et } a_1b_2+a_2b_1\neq 0\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left[\pi_3\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(2)\right)\cap\theta_{3,0}^{-1}(0)\right]=(2\mathbb{L}-1)\left(\mathbb{L}^2-\mathbb{L}\right)\mathbb{L}^2.$$

D'une manière générale, les K-points de $\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right)\cap\theta_{n+1,0}^{-1}(0)$ correspondent aux couples

$$\left(a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{n+1}t^{n+1},b_1t+b_2t^2+\cdots+b_{n+1}t^{n+1}\right)\in K[t]/\langle t^{n+2}\rangle$$

pour lesquels :

$$\begin{gathered} a_1 b_1 = 0 \ ; \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \ ; \\ \vdots \\ a_1 b_{n-2} + a_2 b_{n-3} + \cdots + a_{n-2} b_1 = 0 \ ; \\ a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 \neq 0. \end{gathered}$$

Par conséquent,

$$\left[\pi_{n+1}\left(\mathrm{ord}_{\omega,0}^{-1}(n)\right) \cap \theta_{n+1,0}^{-1}(0)\right] = (2\mathbb{L}-1)\left(\mathbb{L}^2 - \mathbb{L}\right)\mathbb{L}^n.$$

Ainsi

$$Z_{\omega,0}(T) \quad = \quad \frac{(2\mathbb{L}-1)\left(\mathbb{L}^2-\mathbb{L}\right)T^2 + (1-T)\left(\mathbb{L}(\mathbb{L}-1)^2 T\right)}{1-T}.$$

CHAPITRE 6

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Ce dernier chapitre présente quelques perspectives de recherche dont les champs s'inscrivent dans les thèmes abordés par notre travail de thèse.

6.1. Projet à court terme

Dans le cinquième chapitre nous avons introduit la notion de fonction zêta motivique associée à un feuilletage par analogie aux fonctions zêta de Jan Denef et François Loeser, qui sont usuellement asssociées aux hypersurfaces des variétés algébriques lisses. La continuité naturelle de ce travail suit la ligne tracée par Denef et Loeser et consiste à étudier la rationalité de ces nouvelles fonctions zêta, et de donner, si elles étaient rationnelles et si possible, une interprétation géométrique de cette rationalité par analogie à la célèbre conjecture de la monodromie motivique due à Denef et Loeser.

Outre ce grand principe d'analogie, notre projet s'appuie sur les exemples calculés qui sont rationnels. À ce stade de notre réflexion sur le sujet, aucune réponse ne nous apparaît clairement, car les notions mises en jeu sont analytiques et sortent du cadre général de l'intégration motivique. En effet, ici, les coefficients de notre fonction zêta ne sont pas *a priori* des intégrales motiviques au sens de Denef et Loeser car ils prennent en comptent des aspects différentiels dans leur définition. L'intégration motivique classique ne semble ni pouvoir être appliquée brutalement, ni directement intuitivement justifier de la rationalité ou de la non-rationalité. Un premier point intéressant à étudier serait de voir comment adapter cette théorie à notre cadre.

Malgré tout, la stratégie générale des preuves de la rationalité des fonctions zêta de Denef et Loeser pourrait servir de guide. Pour cela, après avoir « globalisé » notre définition, nous pourrions suivre le processus suivant :

1. Démontrer la rationalité pour les formes normales ;
2. Démontrer la formule de l'éclatement (et démontrer des relations entre zêta locales et globales) ;
3. Démontrer la rationalité de la fonction zêta motivique associée à un feuilletage à l'aide d'une résolution des singularités du feuilletage.

6.2. Projets à plus long terme

6.2.1. Module des dérivations. — Une problématique importante du deuxième chapitre de cette thèse est la description d'un système minimal de générateurs du module

des dérivations d'une courbe algébrique affine plane définie par un polynôme arbitraire $f \in k[x, y]$. Nous avons établi le lien entre les générateurs du module des dérivations et ceux de l'idéal conducteur $J = (\langle f, \partial_x(f) \rangle \ : \ \partial_y(f))$. L'utilisation de la théorie de l'élimination et les bases de Gröbner nous ont permis de résoudre ce problème dans quelques cas particuliers. Cependant, le cas général reste sans réponse.

Dans cette direction, il nous semble pertinent de chercher à comprendre le lien qui existe entre la dérivation résultante et la dérivation associée au générateur g_0 du premier idéal d'élimination de l'idéal J, notamment de chercher à comprendre comment g_0 divise le coefficient correspondant de la dérivation résultante. Dans les exemples que nous avons étudiés, ce coefficient possède toujours les mêmes facteurs que g_0 et ne varie de g_0 que par des multiciplicités. Ce phénomène nous semble important à comprendre.

Plus généralement, le problème qui nous intéressera sera d'exhiber une méthode de calcul explicite d'un système minimal de générateurs de l'idéal conducteur J.

6.2.2. Fonctions nilpotentes du schéma des arcs. — Dans le quatrième chapitre nous faisons le lien entre les fonctions nilpotentes du schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur une courbe algébrique affine plane X et les dérivations exceptionnelles de X. En effet, nous montrons comment construire un élément nilpotent non trivial de l'anneau des fonctions régulières de $\mathscr{L}(X)$ à partir d'une dérivation exceptionnelle de X. Par ailleurs, nous démontrons la conjecture suivante de Sebag dans le cadre des courbes planes :

Conjecture 6.2.1. — *Soit X une courbe algébrique sur un corps k de caractéristique nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La courbe X est lisse ;*
2. *Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est réduit ; Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est irréductible ;*
3. *Le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est réduit.*

L'idée serait ici d'approfondir la compréhension des travaux de Ellis Robert Kolchin pour attaquer cette conjecture dans le cas général des courbes et voir ce qu'il peut advenir de cette conjecture pour les variétés d'intersection complète.

ANNEXE A

RAPPELS D'ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE

L'algèbre différentielle trouve son origine dans les travaux du mathématicien américain Joseph Fels Ritt (1893-1951) qui, dans [**55**] et [**56**], en posa les bases en introduisant les notions de polynômes, d'idéaux et de variétés différentielles. L'algèbre différentielle fut développée par Ellis Robert Kolchin (1916-1991), étudiant de Ritt, dont le livre [**39**] est une référence en la matière. Cette annexe rappelle les définitions de base et les propriétés bien connues d'algèbre différentielle. Nous nous sommes appuyés sur les travaux de Irving Kaplansky dans [**38**], sur [**39**] et [**55**] qui sont des bonnes références sur le sujet.

A.0.1. Dérivation. — Soit A un anneau. Une *dérivation* de A est une application additive δ de A dans lui-même qui, pour tout a, b dans A, satisfait à la règle de Leibniz :

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Lorsque A est intègre, toute dérivation δ de A s'étend de façon unique au corps des fractions de A comme suit :

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\delta\left(a\right)b - a\delta\left(b\right)}{b^2} \quad \forall\ a, b \in A.$$

A.0.2. Anneau, sous-anneau, corps et morphisme différentiel. — Un *anneau différentiel* A (resp. un *corps différentiel*) est un anneau (resp. un corps) muni d'un ensemble fini de dérivations Γ. On appelle *anneau des constantes* de A l'ensemble $C = \{a \in A \mid \delta\left(a\right) = 0, \forall\ \delta \in \Gamma\}$. La structure d'anneau de A induit une structure d'anneau sur l'anneau des constantes C de A. Si l'anneau A est un corps, alors l'anneau des constantes C de A l'est aussi. Par ailleurs, si A_0 est un sous-anneau de A stable sous l'action de Γ, c'est-à-dire $\Gamma\left(A_0\right) \subset A_0$, alors on dit que A_0 est un *sous-anneau différentiel* de A.

Soient k et K deux corps différentiels. Le corps K est une *extension différentielle* de k si et seulement si k est un sous-anneau différentiel de K.

Un *morphisme différentiel* est un morphisme d'anneaux qui commute avec les dérivations.

Exemple A.0.1. —

1. Un anneau A muni de la dérivation triviale δ ($i.e$ $\delta\left(a\right) = 0 \quad \forall a \in A$) est un anneau différentiel.
2. Soit n un entier naturel non nul. Le corps des fonctions méromorphes à n variables $x_1, ..., x_n$, sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, muni des dérivations partielles $\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n$, est un corps différentiel.

A.0.3. Polynôme différentiel. — Soit A un anneau différentiel muni d'un ensemble fini de dérivations Γ. Un *opérateur de dérivation* θ est un élément du semi-groupe multiplicatif libre Θ engendré par les éléments de Γ. Autrement dit θ est un opérateur de dérivation si et seulement s'il existe $e_1, \ldots, e_n$ dans $\mathbb{N}$ et $\delta_1, \ldots, \delta_n$ dans Γ tels que

$$\theta = \delta_1^{e_1} \cdots \delta_n^{e_n}.$$

Si le cardinal de l'ensemble Γ est égal à m, alors on appelle *ordre* de θ l'entier naturel

$$s = \sum_{k=1}^{m} e_k.$$

Rappelons que pour tout entier naturel n non nul et toute dérivation δ de A, la dérivation δ^n est le produit de composition de n copies de δ. Par convention $\delta^0 = id_A$.

Soit A un anneau différentiel et $A[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ l'anneau des polynômes en une infinité d'indéterminées à coefficients dans A. On construit une dérivation Δ appelée *dérivation d'adjonction* sur $A[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ en posant

$$\Delta\left(x_i\right) = x_{i+1}.$$

Par convention, l'on noter :

$$x_0 = x, \quad \text{et} \quad x_n = x^{(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

L'anneau $A[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ muni de la dérivation d'adjonction Γ est un anneau différentiel. Ce dernier sera noté $A\{x\}$ et appelé *anneau des polynômes différentiels* en l'indéterminée différentielle x et à coefficients dans A. L'on dit que c'est l'anneau différentiel obtenu par adjonction de x à A. Un *polynôme différentiel* P de $A\{x\}$ est de ce fait un polynôme en x_i à coefficients dans A.

Remarque A.0.2. — Par récurrence, on construit l'anneau différentiel obtenu par adjonction des éléments $x_1, \ldots, x_n$ à A en posant :

$$A\{x_1, \ldots, x_n\} \ := A\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\{x_n\}.$$

Dans ce cas on pose $x_i = x_{i,0}$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ et l'on a :

$$\Delta\left(x_{i,j}\right) = x_{i,j+1}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

De manière générale, si A_0 est un sous-anneau différentiel d'un anneau différentiel A et S une famille d'éléments de ce dernier, le plus petit sous-anneau différentiel de A contenant à la fois A_0 et S est appelé *anneau différentiel engendré* par la famille S sur le sous-anneau différentiel A_0 de A. Ce dernier coïncide en tant qu'anneau avec l'anneau $A_0[\{\theta x, \ \theta \in \Theta, \ x \in S\}]$ engendré par la famille $\Theta S = \{\theta x, \ \theta \in \Theta, \ x \in S\}$ sur A_0. Si la famille d'éléments $\Theta S = \{\theta x, \ \theta \in \Theta, \ x \in S\}$ de A est algébriquement indépendante sur A_0, alors la famille S est appelée *famille d'indéterminées différentielles* sur A_0 et l'anneau différentiel engendré par S coïncide avec l'anneau différentiel $A_0\{S\}$ obtenu par adjonction de la famille S à A_0.

De même, si k est un corps différentiel, S une famille d'éléments de k et k_0 un sous-corps différentiel de k, alors le plus petit sous-corps de k contenant k_0 et S, noté $k_0\langle S\rangle$, est appelé *corps différentiel engendré par* S sur k_0. Le corps différentiel $k_0\langle S\rangle$ coïncide en tant que corps avec $k_0(\{\theta x, \ \theta \in \Theta, \ x \in S\})$.

A.0.4. Idéal différentiel. — Soit I un idéal d'un anneau différentiel A muni d'un ensemble fini de dérivations Γ. On dit que l'idéal I est un *idéal différentiel* de A si

$$\delta(I) \subset I, \ \forall \delta \in \Gamma.$$

Un idéal différentiel I de A est dit *radical* lorsqu'une puissance quelconque d'un élément a de A appartient à I si et seulement si a appartient à ce dernier.

Exemple A.0.3. — Soient k un corps différentiel, K une extension différentielle de corps de k, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ deux familles d'éléments de K. Si les familles x et η sont deux familles d'indéterminées différentielles sur k, alors le morphisme d'anneaux différentiels φ de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans $k\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ qui, à la dérivée d'ordre j de x_i, associe la dérivée d'ordre j de η_i, est un morphisme différentiel appelé *morphisme de substitution.* Le noyau de ce dernier est un idéal différentiel appelé *idéal différentiel défini* par la famille η dans $k\{x_1, \ldots, x_n\}$.

A.0.5. Idéal différentiel réduit engendré. — Soit k un corps de caractéristique nulle et $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'anneau des polynômes différentiels à coefficients dans k. Soit B un sous-ensemble de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle *idéal différentiel engendré* par B et l'on note $[B]$, le plus petit idéal différentiel (au sens de l'inclusion) de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ contenant B. Autrement dit,

$$[B] = \{\Delta^n (B), \ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'idéal différentiel réduit engendré par B est l'intersection de tous les idéaux différentiels radicaux de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ contenant B. Il sera noté $\{B\}$.

On a clairement par définition l'inclusion :

$$[B] \subseteq \{B\}.$$

Lemme A.0.4. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et B un sous-ensemble quelconque de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout polynôme différentiel P de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour tout entier naturel n, le polynôme différentiel $(\Delta (P))^{2n-1}$ appartient à l'idéal $[B]$ lorsque le polynôme différentiel P^n appartient à ce dernier.*

Démonstration. — En effet, si le polynôme différentiel P^n appartient à $[B]$, par définition, le polynôme différentiel $\Delta (P^n)$ appartient à $[B]$. De ce fait,

$$\Delta (P) P^{n-1} \in [B]. \tag{66}$$

En appliquant la dérivation d'adjonction à (66), nous obtenons

$$\Delta^2 (P) P^{n-1} + (n-1) (\Delta (P))^2 P^{n-2} \in [B]. \tag{67}$$

En multipliant (67) par $\Delta (P)$, on a

$$(\Delta (P))^3 P^{n-2} \in [B].$$

En réitérant m fois ce procédé, on obtient la formule

$$(\Delta (P))^{2m-1} P^{n-m} \in [B].$$

Pour $m = n$ on a le résultat annoncé. □

Sous les hypothèses du lemme A.0.4, le sous-ensemble

$$S = \{P \in k\{x_1, \ldots, x_n\} | \exists n \in \mathbb{N},\ P^n \in [B]\}$$

de $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ est un idéal différentiel radical contenant B. Ainsi, l'idéal différentiel réduit $\{B\}$ engendré par B est inclus dans S. L'inclusion inverse étant triviale, nous avons :

$$\{B\} = \{P \in k\{x_1, \ldots, x_n\} | \exists n \in \mathbb{N},\ P^n \in [B]\} = \sqrt{[B]}.$$

A.0.6. Module des dérivations d'une algèbre de type fini. — Nous décrivons dans cette sous-section quelques propriétés générales du module des dérivations des algèbres de type fini sur un corps. Nous nous sommes limités aux propriétés que nous utilisons dans notre travail.

Définition A.0.5. — Soient A une k-algèbre et M un A-module. On appelle *k-dérivation* de A dans M, une application k-linéaire δ de A dans M satisfaisant à la règle de Leibniz, c'est-à-dire :

$$\delta(ab) = \delta(a)\, b + a\delta(b) \quad \forall a, b \in A.$$

On notera $\mathrm{Der}_k(A, M)$ l'ensemble des k-dérivations de A dans M.

Exemple A.0.6. —

1. Soient A une k-algèbre et M un A-module. Soit δ_0 l'application de A dans M qui à tout élément a de A associe 0. L'application δ_0 est une k-dérivation de A dans M appelée *dérivation nulle*.
2. Soit n un entier naturel non nul. Posons $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. La dérivation partielle ∂_{x_i} est une k-dérivation de A dans lui-même. C'est l'unique dérivation δ de A telle que :
$$\delta(x_i) = 1 \text{ et } \delta(x_j) = 0,\ i \neq j.$$
3. Soit x un point rationnel d'une variété algébrique X définie sur k. La surjection canonique de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x dans k admet une section qui permet d'identifier k à un sous-corps de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soient f un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $f(x)$ la classe de f modulo l'idéal maximal $\mathfrak{M}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit d_x l'application de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans k qui à f associe la différentielle de f en x. L'application d_x est une k-dérivation de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans k puisque d_x est une application k-linéaire de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans k satisfaisant à la relation :
$$d_x(fg) = d_x(f)\, g(x) + d_x(g)\, f(x) \ \ \forall f, g \in \mathcal{O}_{X,x}.$$
Il est clair que $d_x\left(\mathfrak{M}_x^2\right) = 0$ puisqu'un élément de $\mathfrak{M}_x^2$ est une somme finie d'éléments de la forme fg, où f et g appartiennent à $\mathfrak{M}_x$, c'est-à-dire sont tels que $f(x) = g(x) = 0$. L'application d_x définit une application k-linéaire u du k-espace vectoriel $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ dans k telle que pour tout représentant $f \in \mathfrak{M}_x$ d'un élément $\overline{f}$ de $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ on ait :
$$u\left(\overline{f}\right) = d_x(f).$$
La réciproque étant vraie, le $\mathcal{O}_{X,x}$-module des k-dérivations de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans k est isomorphe à l'espace tangent de Zariski de la variété X au point x.

Soient A une k-algèbre et M un A-module. Pour toute k-dérivation δ de A dans M et tout élément a dans A, le produit $a\delta$ est encore une k-dérivation de A dans M. En effet,

$$\forall b \in A,\ (a\delta)(b) = a\delta(b).$$

L'ensemble des k-dérivations de A dans M est alors naturellement muni d'une structure de A-module.

A.0.7. Module des différentielles. — Soit A une k-algèbre. Le module $\Omega^1_{A/k}$ *des différentielles de Kähler* de A sur k est l'unique module, à isomorphisme près, quotient du A-module M engendré par les symboles

$$da,\ a \in A$$

par son sous-module N engendré par

$$d\alpha,\ d(a+b) - da - db \text{ et } d(ab) - ad(b) - bd(a),\ \alpha \in k \text{ et } a,\ b \in A.$$

La k-dérivation $d_{A/k} = d\ :\ A \longrightarrow \Omega^1_{A/k}$ satisfait à la propriété universelle suivante :

Pour tout A-module N et toute k-dérivation D de A dans N, il existe un unique morphisme de A-modules $f\ :\ \Omega^1_{A/k} \longrightarrow N$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_{A/k}"] \arrow[dr] & \Omega^1_{A/k} \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Le A-module des k-dérivations de A dans M peut donc être défini comme le module dual du module des différentielles de A sur k puisque par définition de $\Omega^1_{A/k}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_A\left(\Omega^1_{A/k}, M\right) \simeq \mathrm{Der}_k(A, M).$$

Remarque A.0.7. — Le module des différentielles de A sur k représente le foncteur covariant $\mathrm{Der}_k(A, -)$ de la catégorie des A-modules dans celle des ensembles.

Dans la suite de notre travail, le A-module $\mathrm{Der}_k(A, A)$ des k-dérivations de la k-algèbre A dans elle-même sera simplement noté $\mathrm{Der}_k(A)$ et l'on appellera *k-dérivation de A*, tout élément de $\mathrm{Der}_k(A)$.

A.0.8. Propriété. — Soient A une k-algèbre et G une famille génératrice de A. Nous décrivons les k-dérivations de A en fonction de l'image de G par ces dernières.

Lemme A.0.8. — *Soient A une k-algèbre et G un système de générateurs de A. Une k-dérivation δ de A est entièrement déterminée par la donnée de l'ensemble $\{\delta(g_i)\ ; g_i \in G\}$.*

Démonstration. — En effet, pour tout élément a de la k-algèbre A, il existe λ_i dans k et ε_{ij} dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$a = \sum \lambda_i \prod_j g_j^{\varepsilon_{ij}}.$$

Le résultat annoncé découle du fait que :

$$\delta(a) = \sum_{i,l} \lambda_i \varepsilon_{il} \delta(g_l)\, g_l^{\varepsilon_{il}-1} \prod_{j \neq l} g_j^{\varepsilon_{ij}}.$$

□

Remarque A.0.9. — Pour $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, notons ∂_{x_i} la dérivée partielle première par rapport à la variable x_i. Le A-module des k-dérivations de A est le A-module libre engendré par les dérivations partielles ∂_{x_i}. En effet, on a la formule évidente :

$$\delta = \sum \delta(x_i)\, \partial_{x_i}$$

d'après le lemme A.0.8.

ANNEXE B

SCHÉMA DES ARCS ET ESPACE DES JETS

Soit k un corps. Une variété algébrique sur k ou simplement une k-variété algébrique X est un schéma séparé de type fini sur k. On dispose de deux approches distinctes (l'approche algébrique et l'approche différentielle) pour décrire l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ et le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur une k-variété algébrique X. Cette annexe présente ces deux approches et rappelle quelques propriétés géométriques et topologiques connues de $\mathscr{L}_m(X)$ et $\mathscr{L}(X)$. Les articles [**44**], [**36**], [**23**], [**13**], [**52**], [**19**], [**59**] et [**46**] sont ici des bonnes références.

B.1. Espace des jets et schéma des arcs via la géométrie algébrique

Dans cette section, sauf mention spéciale, la lettre k désignera toujours un corps quelconque et K une extension de corps de k.

B.1.1. Espace de jets. — Soient X un k-schéma et m un entier naturel. Un *K-m-jet* de X est la donnée d'un k-morphisme de $\operatorname{Spec}\left(K[t]/\left(t^{m+1}\right)\right)$ dans X. Si Sch/k désigne la catégorie des k-schémas et *Ens* celle des ensembles, alors on définit un foncteur contravariant

$$\mathrm{F}_m^X \ : \ Sch/k \longrightarrow Ens$$

en associant à tout k-schéma Y l'ensemble

$$\mathrm{F}_m^X(Y) = \operatorname{Hom}_k\left(Y \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}\left(k[t]/\left(t^{m+1}\right)\right), X\right).$$

Lorsque le foncteur F_m^X ainsi défini est représentable et le k-schéma $\mathscr{L}_m(X)$ qui le représente est appelé *espace des m-jets* de X. Ce dernier vérifie pour tout k-schéma Y, la bijection fonctorielle suivante :

$$\operatorname{Hom}_k\left(Y, \mathscr{L}_m(X)\right) \simeq F_m^X(Y). \tag{68}$$

En particulier, si le k-schéma Y est affine, c'est-à-dire qu'il existe une k-algèbre A telle que $Y = \operatorname{Spec}(A)$, on a :

$$\mathscr{L}_m(X)(A) \simeq X\left(A[t]/\langle t^{m+1}\rangle\right). \tag{69}$$

De ce fait, l'espace $\mathscr{L}_m(X)$ des *m-jets* de X est la *restriction de Weil* du $k[t]/\langle t^{m+1}\rangle$-schéma $X \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}\left(k[t]/\langle t^{m+1}\rangle\right)$ par rapport au k-morphisme $\operatorname{Spec}\left(k[t]/\langle t^{m+1}\rangle\right) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$. Alors, lorsque l'espace des m-jets de X existe, il est unique à isomorphisme près.

Remarque B.1.1. — 1. Le foncteur $\mathscr{L}_m$ définit un endofoncteur de la catégorie des k-schéma.

2. On a trivialement d'après la bijection fonctorielle (68)

$$\mathscr{L}_0(X) = X.$$

Exemple B.1.2. — Soit A une k-algèbre. Soit X un schéma de type fini sur k. Se donner un $A[t]/\langle t^2\rangle$-point x de X revient à se donner un morphisme

$$\varphi \ : \ \mathrm{Spec}\left(A[t]/\langle t^2\rangle\right) \longrightarrow X$$

tel que $\varphi(0) = x$, où 0 est l'unique point du schéma $\mathrm{Spec}\left(A[t]/\langle t^2\rangle\right)$. Le morphisme de schémas φ induit un morphisme d'anneaux locaux

$$\varphi_x^* \ : \ \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow A[t]/\langle t^2\rangle$$

pour lequel

$$\varphi_x^*(\mathfrak{M}_x) \subset \langle t\rangle \text{ et } \varphi_x^*\left(\mathfrak{M}_x^2\right) = 0 \text{ puisque } t^2 = 0.$$

Par conséquent, le morphisme φ_x^* induit un morphisme de $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ dans A. Ainsi, se donner un $A[t]/\langle t^2\rangle$-point x de X revient à se donner un vecteur tangent en x. L'espace $\mathscr{L}_1(X)$ des 1-jets de X est donc isomorphe à l'espace tangent de Zariski de X.

B.1.2. Soit X un k-schéma. Soient m et p deux entiers naturels tels que m soit supérieur à p. Lorsque l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ et des p-jets $\mathscr{L}_p(X)$ de X existent, la surjection canonique

$$k[t]/\left(t^{m+1}\right) \longrightarrow k[t]/\left(t^{p+1}\right),$$

induit une projection canonique $\theta_{m,p}^X$ appelée *morphisme de transition* de $\mathscr{L}_m(X)$ dans $\mathscr{L}_p(X)$. Ce morphisme se construit au niveau du foncteur des points en utilisant la relation (68). En effet, pour tout k-schéma Y, la projection canonique

$$k[t]/\left(t^{m+1}\right) \longrightarrow k[t]/\left(t^{p+1}\right),$$

induit par contravariance du foncteur Spec une immersion fermée

$$Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k[t]/\left(t^{p+1}\right)\right) \longrightarrow Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k[t]/\left(t^{m+1}\right)\right).$$

Le foncteur des points h_X de X étant un foncteur contravariant, nous obtenons un morphisme

$$\mathrm{Hom}_k\left(Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k[t]/\left(t^{m+1}\right)\right),\ X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k\left(Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k[t]/\left(t^{p+1}\right)\right),\ X\right).$$

Alors, par la relation (68) nous avons :

$$\mathrm{Hom}_k(Y,\ \mathscr{L}_m(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(Y,\ \mathscr{L}_p(X)).$$

Pour $Y = \mathscr{L}_m(X)$ nous obtenons un morphisme

$$\varphi \ : \ \mathrm{Hom}_k(\mathscr{L}_m(X),\ \mathscr{L}_m(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathscr{L}_m(X),\ \mathscr{L}_p(X)).$$

Le morphisme $\theta_{m,p}^X$ est l'image du morphisme identité $id_{\mathscr{L}_m(X)}$ de $\mathscr{L}_m(X)$ par φ.

B.1.3. Soit X un k-schéma. Soient x un point de X et $k(x)$ le corps résiduel de X en x. Pour $m = 0$, l'injection canonique

$$k \hookrightarrow k[[t]]/\left(t^{p+1}\right)$$

induit une section $\omega_p \ : \ X \longrightarrow \mathscr{L}_p(X)$ du morphisme de transition $\theta_{p,0}^X$. Cette section associe au point x le $k(x)$-p-jet

$$\omega_p(x) \ : \ \mathrm{Spec}\left(k(x)[[t]]/\left(t^{p+1}\right)\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k(x)) \longrightarrow X.$$

Le morphisme $\omega_p(x)$ est appelé le *p-jet constant* en x.

B.1.4. Soit X un k-schéma. Soient m et p deux entiers naturels tels que m soit supérieur à p. Le morphisme de transition $\theta_{m,p}^{X}$ (s'il existe) sera simplement noté $\theta_{m,p}$ s'il n'y a aucun risque de confusion sur le schéma de base. De même, la projection canonique $\theta_{m,0}^{X} \ : \ \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow X$ induite par la projection

$$k[[t]] / \left(t^{m+1}\right) \longrightarrow k,$$

sera notée θ_m^X ou simplement θ_m s'il n'y a aucun risque de confusion.

Soient A une k-algèbre et X un k-schéma. Un A-point α_m de $\mathscr{L}_m(X)$, s'il existe, correspond d'après la bijection fonctorielle (69) à un A-m-jet

$$\alpha_m^{'} \ : \ \mathrm{Spec}\left(A[t] / \left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X$$

qui, à l'unique point 0 de $\mathrm{Spec}\left(A[t] / \left(t^{m+1}\right)\right)$, associe

$$\alpha_m^{'}(0) = x \in X.$$

On a donc :

$$\theta_m(\alpha_m) = \alpha_m^{'}(0) = x.$$

Dans toute la suite de notre travail, nous confondons α_m et $\alpha_m^{'}$.

B.1.5. La proposition B.1.3 ci-après établit l'existence des espaces de jets pour tout schéma de type fini sur un corps.

Proposition B.1.3. — *Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma de type fini. Soit m un entier naturel. L'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X existe et est de type fini.*

Nous fournissons une preuve explicite de la proposition B.1.3 ci-dessus en construisant concrètement le k-schéma de type fini $\mathscr{L}_m(X)$. Cette preuve s'appuie sur le lemme B.1.4 et le lemme B.1.6 ci-après. Des preuves similaires sont consultables dans [**36**] et dans [**19**]. Pour une preuve différente de cette proposition, se rapporter à [**7**, 7.6.4].

Lemme B.1.4. — *Soient X un k-schéma de type fini et U un ouvert affine de X. Si l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X existe, alors l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(U)$ de U existe et nous avons :*

$$\mathscr{L}_m(U) = \theta_m^{-1}(U).$$

Démonstration. — Soit A est une k-algèbre. Les A-points de l'ouvert $\theta_m^{-1}(U)$ (s'ils existent) sont les morphismes $\alpha_m \ : \ \mathrm{Spec}\left(A[t] / \left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X$ qui se factorisent par U. Alors, l'ensemble $\theta_m^{-1}(U)(A)$ est isomorphe à $\mathscr{L}_m(U)(A)$. □

Remarque B.1.5. — Le lemme B.1.4 montre que l'endofoncteur $\mathscr{L}_m$ de la catégorie des schémas sur k préserve les immersions ouvertes.

Soit f un polynôme non constant de $k[x_1, \ldots, x_n]$ et j un entier naturel. On note $\underline{x}^{(j)}$ la famille $(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})$ avec la convention

$$x_{i,0} = x_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

De même, on notera $f^{(j)}\left(\underline{x}^{(0)}, \ldots, \underline{x}^{(j)}\right)$ la dérivée formelle d'ordre j de f considérée comme fonction des variables x_i et de leurs j dérivées successives :

$$f^{(j)}\left(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(j)}\right) = \Delta^{(j)}\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

avec Δ la dérivation d'adjonction.

Lemme B.1.6. — *Soient k un corps algébriquement clos et f un polynôme non constant de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Soit X l'hypersurface définie par $f(\underline{x}) = 0$. L'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est la variété algébrique affine sur k définie par :*

$$f^{(j)}\left(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, j!\underline{x}^{(j)}\right) = 0,\ j \in \{0, \ldots, m\}.$$

Démonstration. — Soit A une k-algèbre. Nous avons :

$$\mathscr{L}_m(X)(A) = \left\{\varphi\ :\ k[\underline{x}] \longrightarrow A[t]/\left(t^{m+1}\right),\ \varphi(x_i) = u_i = \sum_{j=0}^{m} x_i^{(j)} t^j,\ \text{avec } f(\underline{u}) = 0\right\}$$

Cependant :

$$f(\underline{u}) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} f^{(j)}\left(x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, 2!x_i^{(2)}, \ldots, j!x_i^{(j)}\right) t^j.$$

D'où

$$\mathscr{L}_m(X)(A) = \left\{\varphi\ :\ k[\underline{x}] \longrightarrow A[t]/\left(t^{m+1}\right),\ \varphi\left(x_i^{(l)}\right) = l!x_i^{(l)},\ f^{(j)}\left(l!x_i^{(l)}\right) = 0\right\}.$$

Par conséquent

$$\mathscr{L}_m(X)(A) = \mathrm{Hom}\left(k\left[\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(m)}\right]/\langle f^{(j)}\left(l!x_i^{(l)}\right)\rangle, A\right)$$

et donc

$$\mathscr{L}_m(X) = \mathrm{Spec}\left(k\left[\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(m)}\right]/\langle f^{(j)}\left(l!x_i^{(l)}\right)\rangle\right).$$

□

Exemple B.1.7. — Soient n un entier naturel non nul et $X = \mathbb{A}_k^n$ l'espace affine de dimension n. Pour tout entier naturel m, nous avons :

$$\mathscr{L}_m(X) = \mathbb{A}_k^{n(m+1)}.$$

En effet, il suffit de poser $f = 0$ dans le lemme B.1.6 et nous avons le résultat annoncé.

Proposition B.1.3. — Soit X un k-schéma de type fini. Supposons que X soit affine défini par l'idéal $I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ dans $\mathbb{A}_k^n$. Le lemme B.1.6 montre que $\mathscr{L}_m(X)$ existe et est isomorphe au k-schéma de type fini

$$\mathrm{Spec}\left(k\left[\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(m)}\right]/\left(f_l^{(j)}\left(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, j!\underline{x}^{(j)}\right)\right)\right),\ j \in \{0, \ldots, m\}.$$

Supposons maintenant que X ne soit pas affine. Soit $(U_i)_{i=1}^n$ un recouvrement d'ouverts affines de X. Le lemme B.1.6 assure l'existence de l'ouvert $\mathscr{L}_m(U_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Par ailleurs, les ouverts $\left(\theta_m^{U_i}\right)^{-1}(U_i \cap U_j)$ et $\left(\theta_m^{U_j}\right)^{-1}(U_i \cap U_j)$ définissent l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(U_i \cap U_j)$. Ils sont alors canoniquement isomorphes. Par conséquent, nous pouvons construire le k-schéma $\mathscr{L}_m(X)$ en recollant les schémas $\mathscr{L}_m(U_i)$ le long des ouverts $\left(\theta_m^{U_i}\right)^{-1}(U_i \cap U_j)$ et $\left(\theta_m^{U_j}\right)^{-1}(U_i \cap U_j)$ via les isomorphismes

$$\left(\theta_m^{U_i}\right)^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \left(\theta_m^{U_j}\right)^{-1}(U_i \cap U_j).$$

□

Remarque B.1.8. — La preuve ci-dessus montre que l'endofoncteur $\mathscr{L}_m$ de la catégorie des schémas sur k, envoie les schémas affines sur les schémas affines et les schémas de type fini sur les schémas de type fini. Les morphismes de transition sont donc affines.

Remarque B.1.9. — L'espace des jets existe pour des classes de schémas plus larges que celle des k-schémas de type fini. En effet, pour tout schéma Y et pour tout entier naturel m, dans l'article [**59**], Paul Vojta montre l'existence de l'espace des m-jets pour tout Y-schéma X non nécessairement de type fini en utilisant les dérivations de Hasse-Schmidt.

B.1.6. Schéma des arcs. — Soit X un k-schéma de type fini. On appelle *K-arc* tracé sur X ou simplement *arc* tracé sur X une courbe paramétrée tracée sur X, c'est-à-dire la donnée d'un k-morphisme

$$\gamma \ : \ \mathrm{Spec}\left(K\left[[t]\right]\right) \longrightarrow X.$$

L'arc γ détermine deux points de X : l'image $\gamma\left(0\right)$ du point fermé 0 de $\mathrm{Spec}\left(K\left[[t]\right]\right)$ appelée *origine* de l'arc γ et l'image $\gamma\left(\eta\right)$ du point générique η de $\mathrm{Spec}\left(K\left[[t]\right]\right)$.

Les morphismes de transition définis dans la section B.1.2 font de la suite $\left(\mathscr{L}_m\left(X\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ un système projectif dans la catégorie des k-schémas de type fini. On appelle *schéma des arcs* tracés sur X et on note $\mathscr{L}\left(X\right)$, la limite projective des espaces de jets de X.

Remarque B.1.10. — Les morphismes de transition étant affines, pour tout k-schéma de type fini X, le schéma des arcs $\mathscr{L}\left(X\right)$ tracés sur X existe dans la catégorie des k-schémas (voir [**27**, 8.2]). Cependant, il n'est en général pas de type fini.

B.1.7. Soit X un k-schéma de type fini. Le schéma des arcs $\mathscr{L}\left(X\right)$ tracés sur X est muni pour tout entier naturel m d'un morphisme affine

$$\pi_{X,m} \ : \ \mathscr{L}\left(X\right) \longrightarrow \mathscr{L}_m\left(X\right)$$

appelé *morphisme de troncation*. Ce dernier est tel que pour tout entier naturel p supérieur à m, on ait :

$$\pi_{X,m} = \theta_{p,m} \circ \pi_{X,p}.$$

Les morphismes de troncation $\pi_{X,m}$ seront simplement notés π_m et la projection canonique $\pi_{X,0} \ : \ \mathscr{L}\left(X\right) \longrightarrow X$ sera notée π_X ou simplement π s'il n'y a aucun risque de confusion sur le schéma de base.

B.1.8. Soit X un k-schéma de type fini. Le schéma des arcs $\mathscr{L}\left(X\right)$ tracés sur X est naturellement muni en tant que k-schéma de la topologie de Zariski. Cette dernière coïncide avec la topologie limite projective sur $\mathscr{L}\left(X\right)$ (voir [**27**, 8.2.9]).

B.1.9. Soient Y un k-schéma et X un k-schéma de type fini. La représentabilité du foncteur F_m^X et les isomorphismes

$$\begin{cases} \varprojlim_m \left(\mathrm{Hom}_k\left(Y, \mathscr{L}_m\left(X\right)\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_k\left(Y, \varprojlim_m \mathscr{L}_m\left(X\right)\right) \\ \varprojlim_m \left(\mathrm{Hom}_k\left(Y \times_k \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right]/\left(t_{m+1}\right)\right), X\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_k\left(\varinjlim_m \left(Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right]/\left(t^{m+1}\right)\right)\right), X\right), \end{cases}$$

permettent d'obtenir la propriété universelle suivante :

$$\mathrm{Hom}_k\left(Y, \mathscr{L}\left(X\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_k\left(Y \widehat{\times}_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[[t]\right]\right), X\right). \tag{70}$$

Le schéma $Y \widehat{\times}_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[[t]\right]\right)$ est la complétion formelle du schéma $Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[[t]\right]\right)$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathrm{Spec}(k)} \{0\}$.

En particulier, si le k-schéma Y est affine, c'est-à-dire $Y = \operatorname{Spec}(A)$, on a :

$$\mathscr{L}(X)(A) \simeq \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Spec}(A[[t]]), X) \text{ [1]}. \tag{71}$$

La bijection fonctorielle (71) montre que tout K-point rationnel γ du schéma des arcs tracés sur X correspond à un arc

$$\gamma' : \operatorname{Spec}(K[[t]]) \longrightarrow X.$$

Notons 0 le point fermé de $\operatorname{Spec}(K[[t]])$. Par définition, l'image par π de γ est l'origine de l'arc γ' tracé sur X, *i.e.*

$$\pi(\gamma) = \gamma'(0).$$

Dans la suite de notre travail, nous confondons les K-points rationnels γ du schéma des arcs tracés sur X et les arcs γ' correspondants.

B.1.10. Soient X une k-variété et U une sous-variété ouverte de X. On a :

$$\pi^{-1}(U) = \mathscr{L}(U).$$

En effet, on sait par définition que :

$$\mathscr{L}(U) \subseteq \pi^{-1}(U).$$

Reste à montrer l'inclusion inverse. Notons $X \setminus U$ le complémentaire de U dans X et η le point générique de $\operatorname{Spec}(K[[t]])$. Soit γ un K-point rationnel de $\mathscr{L}(X)$. Si $\pi(\gamma)$ appartient à U, alors l'image $\gamma(\eta)$ du point générique de $\operatorname{Spec}(K[[t]])$ par γ appartient aussi à U puisque dans le cas contraire, la clôture de Zariski $\overline{\{\gamma(\eta)\}}$ de $\gamma(\eta)$ serait incluse dans $X \setminus U$ et par conséquent $\pi(\gamma)$ serait dans $X \setminus U$ car

$$\pi(\gamma) \in \overline{\{\gamma(\eta)\}}.$$

Tout arc γ dont l'origine appartient à U est alors un arc tracé sur U. D'où l'inclusion :

$$\pi^{-1}(U) \subseteq \mathscr{L}(U).$$

B.2. Espace des jets et schéma des arcs via l'algèbre différentielle

Dans cette section, la lettre k désigne un corps de caractéristique nulle et Δ la dérivation d'adjonction de l'anneau de polynômes $k\left[(x_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}\right]$.

Lemme B.2.1. — *Soient X une k-variété algébrique définie par l'idéal I dans $\mathbb{A}^n_k$. L'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X est la k-variété algébrique définie dans $\mathbb{A}^{n(m+1)}_k$ par l'idéal*

$$J = \langle I, \Delta(I), \ldots, \Delta^{(m)}(I)\rangle.$$

Démonstration. — Posons

$$I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n].$$

L'énoncé est une conséquence directe du lemme B.1.6 qui affirme que l'espace des m-jets de X est isomorphe à l'intersection des schémas affines :

$$X_l = \operatorname{Spec}\left(k\left[\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(m)}\right] / \langle f_i^{(0)}\left(\underline{x}^{(0)}\right), \ldots, f_i^{(m)}\left(\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(m)}\right)\rangle\right).$$

□

1. Ce résultat à été démontré récemment par Bhargav Bhatt dans [**5**].

Remarque B.2.2. — L'espace des m-jets de tout k-schéma affine de type fini

$$X = \operatorname{Spec}\left(k\left[x_1, \ldots, x_n\right]/I\right)$$

est affine et possède une structure graduée. En effet, d'après le lemme B.2.1, nous pouvons écrire

$$\mathscr{L}_m\left(X\right) = \operatorname{Spec}\left(R_m\right), \text{ où } R_m = \oplus_{i=0}^{m} R_i$$

avec

$$R_i = k\left[\underline{x}^{(0)}, \ldots, \underline{x}^{(i)}\right]/\langle I, \delta\left(I\right), \ldots, \delta^{(i)}\left(I\right)\rangle.$$

Les morphismes de transition $\theta_{m,m-1} \ : \ \mathscr{L}_m\left(X\right) \longrightarrow \mathscr{L}_{m-1}\left(X\right)$ correspondent aux morphismes d'algèbres graduées

$$\theta_{m,m-1}^{*} \ : \ R_{m-1} \longrightarrow R_m.$$

En particulier, le morphisme d'algèbres graduées $\theta_{m,m-1}^{*}$ fait de R_m une R_{m-1}-algèbre engendrée par la m^{ime} partie homogène de R_m sur R_{m-1}.

Le théorème qui suit donne une construction effective de l'espace des arcs tracés sur une k-variété algébrique affine.

Théorème B.2.3. — *Soit X une k-variété affine engendrée par l'idéal I dans $\mathbb{A}_k^n$. Le schéma des arcs tracés sur X est affine et on a :*

$$\mathscr{L}\left(X\right)_{\text{red}} = \operatorname{Spec}\left(k\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}/\left\{I\right\}\right).$$

Démonstration. — En faisant tendre l'entier naturel m vers l'infini dans le lemme B.2.1, nous obtenons un isomorphisme entre le schéma des arcs $\mathscr{L}\left(X\right)$ tracés sur X et le schéma affine $\operatorname{Spec}\left(k\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}/\left[I\right]\right)$. Sachant qu'en caractéristique nulle nous avons

$$\sqrt{\left[I\right]} = \left\{I\right\},$$

alors

$$\mathscr{L}\left(X\right)_{\text{red}} = \operatorname{Spec}\left(k\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}/\left\{I\right\}\right).$$

□

Deux autres descriptions du schéma des arcs tracés sur une variété algébrique sont consultables dans l'article **[23]**. La première s'appuie sur l'existence pour le foncteur d'oubli F de la catégorie des k-algèbres différentielles (k, δ)-Alg dans celle des k-algèbres k-Alg d'un adjoint à gauche G et d'un adjoint à droite D. Le foncteur G associe à toute k-algèbre A l'anneau des polynômes différentiels

$$k\{A\} = k\left[\{\theta a, a \in A \text{ et } \theta \in \Theta\}\right]/\left[I_A\right],$$

où I_A est le noyau du morphisme $k\left[A\right] \longrightarrow A$. Le foncteur D associe à toute k-algèbre B la k-algèbre $B\left[\left[t\right]\right]$ munie de la dérivation $\delta = \partial_t$. La seconde description utilise les propriétés universelles du module des différentielles. Se reporter à **[23]** pour plus de détails.

Remarque B.2.4. — La description de l'espace des jets et du schéma des arcs par l'algèbre différentielle n'est valable qu'en caractéristique nulle.

B.3. Quelques propriétés

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés géométriques et topologiques du schéma des arcs.

B.3.1. Propriétés géométriques. — Nous nous sommes limités aux propriétés que nous utilisons dans ce travail.

B.3.1.1. Les endofoncteurs $\mathscr{L}_m$ et $\mathscr{L}$ de la catégorie des k-schémas commutent avec le produit fibré. En effet,

Proposition B.3.1. — *Soient X et Y deux k-schémas de type fini. On a :*

$$\mathscr{L}\left(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y\right) \simeq \mathscr{L}(X) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathscr{L}(Y).$$

Démonstration. — Soient A une k-algèbre et Z le schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$. Soit m un entier naturel. D'après la relation (69), nous avons :

$$\mathrm{Hom}_k\left(Z,\ \mathscr{L}_m\left(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_k\left(\mathrm{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right), X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y\right).$$

D'après la propriété universelle du produit fibré, le terme de droite est isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_k\left(\mathrm{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right), X\right) \times \mathrm{Hom}_k\left(\mathrm{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right), Y\right),$$

qui, à son tour, par la relation (69), est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_k\left(Z,\ \mathscr{L}_m(X)\right) \times \mathrm{Hom}_k\left(Z,\ \mathscr{L}_m(Y)\right).$$

Enfin, par la propriété universelle du produit fibré, ce dernier terme est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_k\left(Z, \mathscr{L}_m(X) \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathscr{L}_m(Y)\right).$$

Le résultat annoncé s'obtient en passant à la limite projective. □

B.3.1.2. La proposition suivante est une généralisation du lemme B.1.4 au cas des morphismes étales de k-schémas de type fini.

Proposition B.3.2. — *Soient X et Y deux k-schémas de type fini. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme étale de k-schémas. On a :*

$$\mathscr{L}(X) \simeq \mathscr{L}(Y) \times_Y X.$$

Démonstration. — Soient $Z = \mathrm{Spec}(A)$ un k-schéma affine et m un entier naturel. La donnée d'un k-morphisme

$$Z \longrightarrow \mathscr{L}_m(Y) \times_Y X$$

équivaut à celle d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}_m(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Celui-ci équivaut à la donnée du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme f étant étale et le k-schéma $\mathrm{Spec}\left(A[t]/t^{m+1}\right)$ étant un sous-schéma fermé de Z défini par un idéal nilpotent, il existe un unique morphisme $\mathrm{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X$ rendant commutatifs les deux triangles. D'où l'existence par la bijection fonctorielle (68)

d'un unique morphisme de k-schémas $Z \longrightarrow \mathscr{L}_m(X)$. La proposition découle alors de l'isomorphisme suivant :

$$\varprojlim_m (\mathscr{L}_m(Y) \times_Y X) \simeq \left(\varprojlim_m \mathscr{L}_m(Y)\right) \times_Y X.$$

□

B.3.1.3. Le foncteur $\mathscr{L}$ est un foncteur d'oubli de la catégorie des k-schémas réduit dans celle des k-schémas.

Proposition B.3.3. — *Soient X un k-schéma de type fini et X_{red} le sous-schéma réduit associé à X. Le k-morphisme canonique de schémas*

$$\mathscr{L}(X_{\mathrm{red}}) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — L'anneau $k[[t]]$ étant intègre, nous avons par propriété universelle l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k[[t]]), X) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k[[t]]), X_{\mathrm{red}}).$$

□

Remarque B.3.4. — Il n'existe pas d'analogue de la proposition B.3.3 pour les espaces de jets d'un k-schéma de type fini. En effet, soit X la variété algébrique définie dans $\mathbb{A}^2_k$ par $x_1^3 = 0$ ($X = \mathrm{Spec}\left(k[x_1, x_2]/x_1^3\right)$). L'espace des 1-jets $\mathscr{L}_1(X_{\mathrm{red}})$ du sous-schéma réduit X_{red} associé à X est isomorphe à $\mathbb{A}^2_k$. Cependant,

$$\mathscr{L}_1(X) = \mathrm{Spec}\left(k\left[x_1, x_1^{(1)}, x_2, x_2^{(1)}\right] / \left(x_1^3, 3x_1^{(1)}x_1^2\right)\right).$$

B.3.2. Propriétés topologiques. — Nous regardons quelques propriétés topologiques élémentaires du schéma des arcs induites par celles du schéma de base.

Proposition B.3.5. — *Soient k un corps et X un k-schéma réduit de type fini. Si la dimension de X est nulle, alors le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est isomorphe à X.*

Démonstration. — En effet, le k-schéma X étant réduit de type fini et de dimension nulle, il existe une extension finie de corps K de k telle que X soit isomorphe au schéma affine $\mathrm{Spec}(K)$. Ainsi, si A est une extension de corps de k, un A-arc $\gamma : \mathrm{Spec}(A[[t]]) \longrightarrow X$ tracé sur X correspond à un morphisme de k-algèbre $\gamma^\sharp : K \longrightarrow A[[t]]$. La proposition découle alors du lemme B.3.6 ci-dessous. □

Lemme B.3.6. — *Soient k un corps et K une extension algébrique de k. Soient A une extension de corps de k et ψ une application de K dans $A[[t]]$. Si ψ est un morphisme de k-algèbres, alors l'image de ψ est incluse dans A.*

Démonstration. — Supposons que l'image du morphisme ψ ne soit pas incluse dans A. Elle est alors une extension algébrique de A contenue dans $A[[t]]$. Soient $a = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ un élément de l'image de ψ et j le plus grand entier naturel tel que a_j soit non nul. Supposons que j soit non nul. Soit $P \in A[x]$ le polynôme minimal de a sur A. Si a est séparable, on a :

$$0 = P(a) = P(a_0) + \left(a_1 t + \cdots a_j t^j\right) \frac{\partial P}{\partial x}(a_0) \bmod t^{j+1}.$$

Ce qui est impossible puisque a est séparable. Si a est purement inséparable, alors il existe un élément b de A tel que le polynôme minimal P s'écrive sous la forme

$$P = x^{p^m} - b,$$

où p désigne la caractéristique de k ($p > 0$). On a par définition :

$$0 = P(a) = \sum_{i=0}^{j} a_i^{p^m} t^{ip^m} - b.$$

Ce qui est impossible puisque dans ce cas a_j est nul. Donc

$$j = 0$$

et l'image de ψ est incluse dans A. □

Remarque B.3.7. — Le schéma des arcs tracés sur une k-variété X est de type fini si et seulement si la dimension de X est nulle.

Proposition B.3.8. — *Soient k un corps et X un k-schéma de type fini. Si X est étale, alors le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est noethérien.*

Démonstration. — D'après la proposition B.3.2, le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est isomorphe au produit fibré $\mathscr{L}(\mathrm{Spec}(k)) \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$. La proposition B.3.5 montre que $\mathscr{L}(\mathrm{Spec}(k))$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(k)$. Par conséquent, le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est isomorphe à X et la noethérienneté de $\mathscr{L}(X)$ découle de celle de X. □

Proposition B.3.9. — *Soient k un corps et X un k-schéma intègre de type fini. Si X est lisse, alors le schéma des arcs $\mathscr{L}(X)$ tracés sur X est intègre.*

Démonstration. — Pour tout point x de X, il existe un ouvert U de X contenant x et un entier naturel n tel que

$$U \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

soit étale. Ainsi, d'après la proposition B.3.2, nous avons :

$$\mathscr{L}(U) = \mathscr{L}(\mathbb{A}_k^n) \times_{\mathrm{Spec}(k)} U.$$

L'intégrité de $\mathscr{L}(X)$ découle alors de celui de X. □

B.4. Morphismes

Soit X un k-schéma de type fini. Pour harmoniser les notations, dans cette section, nous noterons le schéma des arcs tracés sur X par $\mathscr{L}_\infty(X)$ au lieu de $\mathscr{L}(X)$.

Proposition B.4.1. — *Soient X et Y deux k-schémas de type fini. Pour tout m dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, il existe un morphisme de k-schémas*

$$f_m : \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(Y)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \mathscr{L}_m(X) \arrow[u, "\pi_m^X"] \arrow[r, "f_m"] & \mathscr{L}_m(Y) \arrow[u, "\pi_m^Y"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soient m un entier naturel et A une k-algèbre. Soit α un A-point de $\mathscr{L}_m(X)$. D'après la bijection fonctorielle (69), la donnée de α correspond à un morphisme

$$\operatorname{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X.$$

En composant $\alpha : \operatorname{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X$ et $f : X \longrightarrow Y$, nous obtenons un morphisme $f \circ \alpha$ de $\operatorname{Spec}\left(A[t]/\left(t^{m+1}\right)\right)$ dans Y. Le morphisme $f \circ \alpha$ est un A-point de $\mathscr{L}_m(Y)$. De ce fait, la bijection fonctorielle (69) permet de construire un morphisme $f_m : \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(Y)$ qui, à tout A-point α de $\mathscr{L}_m(X)$ associe le A-point $f \circ \alpha$ de $\mathscr{L}_m(Y)$. Le morphisme f_m ainsi obtenu a la propriété souhaitée. Le morphisme f_∞ est la limite projective des morphismes f_m. □

Remarque B.4.2. —

1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k-schémas de type fini et $Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée. Nous avons l'isomorphisme canonique suivant

$$\mathscr{L}_m\left(f^{-1}(Z)\right) \simeq f_m^{-1}\left(\mathscr{L}_m(Z)\right).$$

2. Soient X un k-schéma de type fini et $i : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$ une immersion fermée. Le morphisme $i_m : \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(\mathbb{A}_k^n)$ induit par i est une immersion fermée. En effet, il existe un unique idéal $I = (f_1, \ldots, f_r)$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tel que X soit isomorphe à $\operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$. Sachant que

$$\mathscr{L}_m(\mathbb{A}_k^n) = \operatorname{Spec}\left(k\left[x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(m)}\right]\right),$$

le résultat découle du lemme B.1.6 qui affirme que

$$\mathscr{L}_m(X) = \operatorname{Spec}\left(k\left[x^{(0)}, \ldots, x^{(m)}\right]/\left(f_i, f_i^{(1)}, \ldots, f_i^{(m)}\right)\right).$$

Plus généralement, si $f : X \longrightarrow Y$ est une immersion fermée, alors $f_m : \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(Y)$ l'est aussi.

Proposition B.4.3. — *Soient X un k-schéma de type fini et m un entier naturel. Lorsque X est séparé, l'espace des m-jets $\mathscr{L}_m(X)$ de X l'est aussi.*

Démonstration. — Soit X un k-schéma séparé de type fini. Le morphisme diagonal

$$\Delta : X \longrightarrow X \times_{\operatorname{Spec}(k)} X$$

est une immersion fermée. D'après la remarque B.4.2, le morphisme

$$\mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m\left(X \times_{\operatorname{Spec}(k)} X\right)$$

est une immersion fermée. D'après la proposition B.3.1,

$$\mathscr{L}_m\left(X \times_{\operatorname{Spec}(k)} X\right) = \mathscr{L}_m(X) \times_{\operatorname{Spec}(k)} \mathscr{L}_m(X).$$

Le k-schéma de type fini $\mathscr{L}_m(X)$ est donc séparé. □

Remarque B.4.4. — L'endofoncteur $\mathscr{L}_m$ de la catégorie des k-schémas envoie les k-variétés sur les k-variétés.

Proposition B.4.5. — *Soient X et Y deux k-schémas de type fini. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k-schémas. Si f est lisse (resp. non ramifié, étale), alors pour tout entier naturel m, le morphisme de k-schémas de type fini $f_m : \mathscr{L}_m(X) \longrightarrow \mathscr{L}_m(Y)$ est lisse (resp. non ramifié, étale).*

Démonstration. — Soient Z un k-schéma affine et Z_0 un sous-schéma fermé de Z défini par un idéal nilpotent. Le schéma $Z_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right] / \left(t^{m+1}\right)\right)$ est un sous-schéma fermé de $Z \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right] / \left(t^{m+1}\right)\right)$ défini par un idéal nilpotent. Donnons-nous le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right] / \left(t^{m+1}\right)\right) \arrow[u] \arrow[r, hook] & Z \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right] / \left(t^{m+1}\right)\right) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Supposons que le morphisme f soit lisse (resp. non ramifié, étale). Il existe (resp. il existe au plus un, il existe un unique) morphisme $Z \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}\left(k\left[t\right] / \left(t^{m+1}\right)\right) \longrightarrow X$ rendant commutatifs les deux triangles. Ce qui équivaut au fait qu'il existe un (resp. il existe au plus un, il existe un unique) morphisme $Z \longrightarrow \mathscr{L}_m\left(X\right)$ rendant commutatifs les deux triangles dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_m\left(X\right) \arrow[r, "f_m"] & \mathscr{L}_m\left(Y\right) . \\ Z_0 \arrow[u] \arrow[r, hook] & Z \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

□

Remarque B.4.6. — Lorsque la k-variété X est lisse (resp. non ramifié, étale), le schéma $\mathscr{L}_m\left(X\right)$ est aussi une k-variété lisse (resp. non ramifié, étale).

Lemme B.4.7. — *Soit X une k-variété de dimension n. Si X est lisse, alors les morphismes de transition $\theta_{m,m-1}$ sont des fibrations localement triviales de fibre $\mathbb{A}^n$ pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. — Soit α_m un point de $\mathscr{L}_m\left(X\right)$. Il existe un point fermé x de X tel que $\theta_m\left(\alpha_m\right)$ soit égal à x. Comme X est lisse, il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme de schémas $U \longrightarrow \mathbb{A}^n$ soit étale. La proposition B.3.2 assure que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_m\left(U\right) &= U \times_{\mathbb{A}^n} \mathbb{A}^{n(m+1)} \\ &= \mathscr{L}_{m-1}\left(U\right) \times_k \mathbb{A}^n. \end{aligned}$$

L'assertion découle alors du fait que $\mathscr{L}_m\left(U\right) = \left(\theta_{m,m-1}\right)^{-1}\left(\mathscr{L}_{m-1}\left(U\right)\right)$. □

Une conséquence immédiate du lemme B.4.7 est la surjectivité des morphismes de transition et des morphismes de troncation lorsque le schéma de base est lisse. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme lisse et surjectif de k-variétés, alors les morphismes f_m et f_∞ induits respectivement par f sur les espaces de m-jets et sur les schémas des arcs sont surjectifs. Nous pouvons aussi remarquer que si X est une k-variété lisse de dimension n, alors $\mathscr{L}_m\left(X\right)$ est une k-variété lisse de dimension $n\left(m+1\right)$.

Proposition B.4.8. — *Soient X et Y deux k-schémas de type fini. Soient W et V respectivement des sous-schémas fermés de X et de Y. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme birationnel propre tel que f induise un isomorphisme de $X \setminus W$ dans $Y \setminus V$. Le morphisme f_∞ induit une bijection de $\mathscr{L}\left(X\right) \setminus \mathscr{L}\left(W\right)$ dans $\mathscr{L}\left(Y\right) \setminus \mathscr{L}\left(V\right)$.*

Démonstration. — Soit A une k-algèbre. Nous pouvons remarquer qu'un A-arc

$$\gamma : \operatorname{Spec}(A[[t]]) \longrightarrow Y$$

tracé sur Y appartient à $\mathscr{L}(Y) \setminus \mathscr{L}(V)$ si et seulement si l'image du point générique η de $\operatorname{Spec}(A[[t]])$ par γ est un point de $Y \setminus V$. Par hypothèse, l'ouvert $Y \setminus V$ est isomorphe à $X \setminus W$. Alors, le critère valuatif de propreté assure l'existence pour tout A-arc γ de $\mathscr{L}(Y) \setminus \mathscr{L}(V)$ d'un unique A-arc $\overline{\gamma}$ tracé sur X avec $f \circ \overline{\gamma} = \gamma$ tel que l'image du point générique η de $\operatorname{Spec}(A[[t]])$ par $\overline{\gamma}$ soit un point de $X \setminus W$. Par conséquent, pour tout A-arc γ de $\mathscr{L}(Y) \setminus \mathscr{L}(V)$ il existe un unique $\overline{\gamma}$ appartenant à $\mathscr{L}(X) \setminus \mathscr{L}(W)$ tel que $f_\infty(\overline{\gamma}) = \gamma$. $\square$

ANNEXE C

CODES

C.1. S-algorithme

```
Input : m, P, f ;

output : S(P).

Start

m=40

variables = [ 'x%i' % i for i in [0..m] ] + [ 'y%i' % i for i in [0..m] ]
A = PolynomialRing(QQ,variables)

for i in [0..m]:
    exec("x%i = A.gen(%s)" % (i,i))
    exec("y%i = A.gen(%s)" % (i,m+1+i))

def der(f):
    a= sum(derivative(f,A.gen(i))*A.gen(i+1) for i in [0..len(A.gens())-2] )
    return a

def Der(f,j,m):
    if m-j==0:
        return f
    else:
        k=0
        while k< m-j:
            f=der(f) ; k=k+1
        return f


def DH(P, x, y) :
    L1= P.monomials()
    L2= P.coefficients()
```

```
    T= [L1[i]*L2[i] for i in [0..len(L1)-1]]
    d= 0
    for t in T :
        d= max(d, t.degree(x)+t.degree(y))

    L= [0 for i in [0..d] ]

    for t in T :
        e= t.degree(x) + t.degree(y)
        L[e] = t +L[e]
    return d,L


def Spoly(P,f):
    j=0
    while j < m:
        x= A.gen(m -j)
        y= A.gen(2*m+1-j)
        Q= Der(f,j,m) - x*derivative(f, A.gen(0)) - y*derivative(f, A.gen(m+1))
        D = DH(P,x,y)
        d= D[0]
        L= D[1]
        P = (derivative(f, A.gen(0)))^(d)*L[0] + sum([derivative(f, A.gen(0))^(d-i)\
        *L[i].subs( {x : - y*derivative(f, A.gen(2*m+1)) - Q, y: y*derivative(f, A.gen(0))}) 
        j=j+1
    return P.factor()

End
```

C.2. Test de nilpotence

```
Start

def Nilp(f,P):
    J=A.ideal(f)
    if J.reduce(Spoly(P,f).expand())==0:
        return "yes, P is nilpotent."
    else:
        return "No, P is not nilpotent."

End

f=x0^2 + x0*y0 + y0^2

P = -y3*x0 + x3*y0
```

```
Nilp(f,P)

'yes, P is nilpotent.'
```

C.3. Dérivation d'adjonction

```
#derivation d'adjonction
m = 40
variables = [ 'x%i' % i for i in range(m+1) ] + [ 'y%i' % i for i in range(m+1) ]
A = PolynomialRing(QQ,variables)

for i in range(m+1):
    exec("x%i = A.gen(%s)" % (i,i))
    exec("y%i = A.gen(%s)" % (i,m+1+i))


def der(f):
    a = sum( [ f.derivative(A.gen(i))*A.gen(i+1) for i in [0..m-1] ] ) + sum([f.derivati
    return a

def Der(f,N):
    if N==0:
        return f
    else:
        k=0
        while k< N:
            f=der(f) ; k=k+1
        return f
```

C.4. Dérivation naturelle réduite

Le code SAGE ci-dessous fournit les coefficients de la dérivation naturelle réduite.

```
Start

A.<x,y>=PolynomialRing(QQ)

def delta_n(f):
    fx = f.derivative(x)
    fy= f.derivative(y)
    g=fx.gcd(fy)
    f_x=fx/g
    f_y=fy/g
    return f_x,f_y
```

```
End
```

C.5. Coefficients des dérivations $\delta_{\mathbf{ri}}$

Le code SAGE ci-dessous calcule les coefficients des dérivations δ_{ri} définies à partir du résultat d'Olivier Ripoll.

```
Start

A.<x,y>=PolynomialRing(QQ)

def f_y(f,j):
    d=f.degree(x)
    V=Matrix(A,2*d-1,1,0)
    for i in [0..d]:
        V[2*d-2-i-j, 0]= (f.polynomial(x)[i]).derivative(y)
    return V



def deltari(f):
    M=f.sylvester_matrix(f.derivative(x)).transpose()
    d=f.degree(x)
    R=M.determinant()
    L=[]
    for j in [0..2*d-2]:
        X= R*(M\f_y(f, j))
        L= L+[X]

    return L


End
```

C.6. Décomposition dans une base donnée

```
with(Groebner):
LT := proc(P, ordre)
    return(LeadingCoefficient(P, ordre) * LeadingMonomial(P, ordre))
end:
IsDivisible := proc(a, b)
```

```
  local res, var, MYVAR ;
  var := indets(a) union indets(b);
  res := true;
  for MYVAR in var do
    if not degree(a, MYVAR) >= degree(b, MYVAR) then
        res := false ;
        break    # sort de la boucle for
    end if
  end do;
  return(evalb(res))
end:
[ seq(0, i=1..10)];
                 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Division := proc(Q, F, ordre)
   local i, long, reste, P, LM, quo;
   P := Q ;
   long := nops(F);
   quo := [seq(0, i = 1..(nops(F)))];
   reste := 0 ;
   while P <> 0 do
        i := 1 ;
        LM := LeadingMonomial(P, ordre) ;
        while (i <= long) and (not IsDivisible(LM, LeadingMonomial(op(i, F), ordre))) do
             i := i + 1
        end do;
        if i <= long then   # il y a un LT dans F qui divise LT(P)
            quo[i]:= expand(quo[i]+LT(P, ordre) / LT(op(i, F), ordre)):
            P := P - LT(P, ordre) / LT(op(i, F), ordre) * op(i, F):
        else   # il n'y a pas de LT dans F qui divise LT(P)
            reste := reste + LT(P, ordre);
            P := P - LT(P, ordre)
        end if;
        P:= expand(P)
   end do;
   return(reste, quo)
end:
Division_tab := proc(a, a_tab, F, F_tab, ordre)
   local i,u,v, long, reste, P, LM, quo, r_tab, longF;
   P := a;
   long := nops(a_tab);
   longF := nops(F) ;
   reste := 0 ;
   r_tab := [seq(a_tab[v], v = 1..(long))];
   while P <> 0 do
        i := 1;
        LM := LeadingMonomial(P, ordre) ;
        while (i <= longF) and (not IsDivisible(LM, LeadingMonomial(op(i, F), ordre))) d
```

```
             i := i + 1
        end do;
        if i <= longF then   # il y a un LT dans F qui divise LT(P)
            for u from 1 to long do

                r_tab[u] := expand(r_tab[u]-LT(P, ordre) / LT(op(i, F), ordre) * F_tab[i][u])
            od:
            P := P - LT(P, ordre) / LT(op(i, F), ordre) * op(i, F):
        else   # il n'y a pas de LT dans F qui divise LT(P)
            reste := reste + LT(P, ordre);
            P := P - LT(P, ordre)
        end if;
        P := expand(P)
   end do;
   return(reste,r_tab)
end;
SPoly_tab := proc(P, P_tab, Q, Q_tab, ordre)
  local ppcm,spol,long, spol_tab;
  long :=nops(P_tab):
  ppcm := lcm(LeadingMonomial(P, ordre), LeadingMonomial(Q, ordre));
  spol := expand(ppcm / LT(P, ordre) * P - ppcm / LT(Q, ordre) * Q):
  spol_tab := [seq(expand(P_tab[i]*ppcm / LT(P, ordre) - Q_tab[i]*ppcm / LT(Q, ordre)), i = 1
  return(spol,spol_tab)
end:


Buchberger_tab := proc(G, ordre)
    local i, j,  ex_long, maj_long, reste, F, f1, f2, LM_f1,F_tab,w,spol,spol_tab,r_tab, long
    F := expand(G);
    long := nops(F);
    F_tab := [seq([seq(0, u = 1..long)], v = 1..long)]:
    for w from 1 to long do
       F_tab[w][w]:= 1
    od:
    ex_long := 0;
    maj_long := 1;
    while maj_long <> 0 do
        maj_long := 0;
        for i from 1 to long - 1 do
            f1 := op(i, F);
            LM_f1 := LeadingMonomial(f1, ordre);
            for j from max(ex_long, i) + 1 to long do
                 f2 := op(j, F);
                 if gcd(LM_f1, LeadingMonomial(f2, ordre)) <> 1 then
                     #print(f1,F_tab[i],f2,F_tab[j]);
                     spol,spol_tab:=SPoly_tab(f1,F_tab[i],f2,F_tab[j], ordre):
                     #print("spol"); #print(spol,spol_tab);
```

```
                    reste, r_tab := Division_tab(spol,spol_tab, F, F_tab, ordre);

                    if reste <> 0 and (not member(reste, F)) then
                          #print("reste qu'on ajoute");
                          #print(reste,r_tab);
                          F := [op(F), reste];
                          F_tab := [op(F_tab),r_tab]:
                          maj_long := maj_long + 1:
                    end if;
                  end if;
            #print(F_tab);
            end do;
        end do;
        ex_long := long;
        long := long + maj_long
    end do;
   return(F, F_tab)
end;

ecriture := proc(f,base, ordre)
    local long, F, F_tab, reste, quo, combi, longF;
    long := nops(base):
    F,F_tab := Buchberger_tab(base,ordre):

    reste,quo := Division(f,F, ordre):
    longF := nops(F_tab);
    combi :=  [seq( sum(quo[i]*F_tab[i][j],i =1..longF), j =1..long)]:
    return(reste, combi)
end:
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[2] V. Batyrev. Stringy hodge numbers of varieties with gorenstein canonic al singularities. *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto , 1997)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ :1–32., 1998.

[3] V. Batyrev. Birational calabi-yau n-folds have equal betti numbers, new trends in algebraic geometry (warwick, 1996). *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 264, Cambridge Univ. Press :1–11., 1999.

[4] V. Batyrev. Non-archimedian integrals and stringy euler numbers of log terminal pairs. *Journal of European Math. Soc.*, 1 :5–33, 1999.

[5] B. Bhatt. Algebraization and tannaka duality. *Arxiv :1404.7483 v1*, 2014.

[6] W. Blaschke and G. Bol. *Geometrie der Gewebe.* Springer. Berlin, 1938.

[7] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[8] L. Burch. On ideals of finite homological dimension in local rings. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 64 (4), 941–948.*, 1968.

[9] A. Clairaut. Recherches générales sur le calcul intégral. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences avec les mémoires de Mathématique et de Physique*, pages 425–436., 1739.

[10] A. Clairaut. Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences avec les mémoires de Mathématique et de Physique*, pages 293–323., 1740.

[11] J. Denef and F. Loeser. Motivic igusa zeta functions. *J. Alg. Geom.*, 7 :505–537, 1998.

[12] J. Denef and F. Loeser. Motivic igusa zeta functions. *J. Algebraic Geom.*, 7(3) :505–537, 1998.

[13] J. Denef and F. Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1) :201–232, 1999.

[14] J. Denef and F. Loeser. Motivic exponential integrals and a motivic thom-sebastiani theorem. *Duke Math. J.*, 99 :285–309, 1999.

[15] J. Denef and F. Loeser. Geometry on arc spaces of algebraic varieties. *Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona 2000, Progr. Math.*, 201 :327–348, 2001.

[16] J. Denef and F. Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the mckay correspondence. *Compositio. Math.*, 131 :267–290, 2002.

[17] S. Druel. The zariski-lipman conjecture for log canonical spaces. *ArXiv*, 1301.5910 [math.AG], 2013.

[18] L. Ein and M. Mustaţă. Generically finite morphisms and formal neighborhoods of arcs. *Geom. Dedicata*, 139 :331–335, 2009.

[19] L. Ein and M. Mustaţă. Jet schemes and singularities. In *Algebraic geometry Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 505–546. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[20] D. Eisenbud. Differential algebra—a scheme theory approach. In *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, pages 95–123. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[21] D. Eisenbud. *Commutative Algebra*, volume 142. 2006.

[22] H. Flenner. Extendability of differential forms on nonisolated singularities. *Invent. Math.*, 94(2) :317–326, 1988.

[23] H. Gillet. Differential algebra—a scheme theory approach. *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, pages 95–123, 2002.

[24] G. Gonzalez-Sprinberg and M. Lejeune-Jalabert. Families of smooth curves on surface singularities and wedges. *Ann. Polon. Math.*, 67(2), 1997.

[25] P. Graf and S. J. Kovàcs. An optimal extension theorem for 1-forms and the lipman-zariski conjecture. *Documenta Math, to appear.Preprint*, arXiv :1301.7315v2 [math.AG], 2014.

[26] P. Graf and S. J. Kovàcs. Potentially du bois spaces. *arXiv*, 1401.4976 [math.AG], 2014.

[27] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Troisiéme partie. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.* Number 28. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1966.

[28] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. I. le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1960.

[29] A. Hénaut. Sur la linéarisation des tissus de $\mathbb{C}^2$. *Topology*, 32 :531–542, 1993.

[30] A. Hénaut. Caractérisation des tissus de $\mathbb{C}^2$ dont le rang est maximal et qui sont linéarisables. *Compositio Math.*, 94 :247–268, 1994.

[31] D. Hilbert. über die vollen invariantensysteme. pages 313–373. Math. Ann. 42, 1890.

[32] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Ann.of Math.*, I((2) 79) :109–203.

[33] S. Ishii. Arcs, valuations and the nash map. *J. Reine Angew. Math*, 588(92), 2005.

[34] S. Ishii. The local nash problem on arc families of singularities. *Ann. Inst. Fourier*, 56(4) :1207–1224, 2006.

[35] S. Ishii. Jet schemes, arc spaces and the nash problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 588(29), 2007.

[36] S. Ishii and J. Kollár. The Nash problem on arc families of singularities. *Duke Math. J.*, 120, 2003.

[37] R. Källström. The zariski–lipman conjecture for complete intersections. *Journal of Algebra*, 337 :169–180, 2011.

[38] I. Kaplansky. *An introduction to differential algebra.* Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago. 1957.

[39] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York, 1973.

[40] M. Kontsevich. *Lecture at Orsay.* 1995.

[41] J. Lipman. Free derivation modules on algebraic varieties. *Amer. J. Math.*, 87 :874–898, 1965.

[42] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 14. Oxford, 2002.

[43] M. Mustaţă. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Invent. Math.*, 145(3) :397–424, 2001. With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel.

[44] J. F. Nash. Arc structure of singularities. *Duke Mathematical Journal*, J. 81, 1995.

[45] J. Nicaise and J. Sebag. Le théorème d'irréductibilité de Kolchin. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341, 2005.

[46] J. Nicaise and J. Sebag. Greenberg approximation and the geometry of arc spaces. *Comm. Algebra*, 38(11) :4077–4096, 2010.

[47] D. Cox J. Little D. O'Shea. Ideals, varieties, and algorithms. *Compos. Math.*, 142, 2006.

[48] B.M.Trager P.Gianni and G.Zacharias. Groebner bases and primary decomposition of polynomial ideals. *Computational Aspects of Commutative Algebra, Special Issue of Journal of Symbolic Computation*, 6 :149–167, 1988.

[49] B. Poonen. The grothendieck ring of varieties is not a domain. *Math. Res. Lett*, 4 :493–497, 2002.

[50] A. J. Reguera. Families of arcs on rational surface singularities. *Manuscripta Math.*, 3(88) :321–333, 1995.

[51] A. J. Reguera. A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map. *Compos. Math.*, 142(1) :119–130, 2006.

[52] A. J. Reguera. Towards the singular locus of the space of arcs. *Amer. J. Math.*, 131(2) :313–350, 2009.

[53] O. Ripoll. Géométrie des tissus du plan et équations différentielles. 2005.

[54] O. Ripoll and J. Sebag. Solutions singulières des tissus polynomiaux du plan. *Journal of algebra*, 2006.

[55] J. F. Ritt. *Differential equations from the algebraic standpoint.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 14. New York, 1932.

[56] J. F. Ritt. Differential Algebra. 1950.

[57] A. Rosenfeld. Specializations in differential algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90, 1959.

[58] J. Sebag. Arcs schemes, derivations and lipman's theorem. *Journal of Algebra*, 347 :173–183, 2011.

[59] P. Vojta. Jets via Hasse-Schmidt derivations. In *Diophantine geometry*, volume 4 of *CRM Series*, pages 335–361. Ed. Norm., Pisa, 2007.