



**HAL**  
open science

# Analyse des limites de résolution fréquentielle des capteurs vibrants de type MEMS

Guillaume Papin

► **To cite this version:**

Guillaume Papin. Analyse des limites de résolution fréquentielle des capteurs vibrants de type MEMS. Electronique. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1118 . tel-01138354

**HAL Id: tel-01138354**

**<https://theses.hal.science/tel-01138354>**

Submitted on 1 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE DE DOCTORAT

*Présentée à l'ONERA pour obtenir le grade de*

**Docteur d'Université Paris-Est**

**Spécialité : Electronique, Optronique et Systèmes**

**Ecole Doctorale : MSTIC**

*par*

**Guillaume Papin**

---

# Analyse des limites de résolution fréquentielle des capteurs Vibrants de types MEMS

---

**Directrice de thèse : Gaëlle Lissorgues, ESIEE**

## JURY

<i>Président</i>	Bernard Legrand	Directeur de recherche, LAAS-CNRS
<i>Rapporteur</i>	Antoine Dupret	Ingénieur de recherche, CEA
<i>Rapporteur</i>	Bernard Legrand	Directeur de recherche, LAAS-CNRS
<i>Examineur</i>	Tarik Bourouina	Professeur, ESIEE, Université Paris Est
<i>Examineur</i>	Raphaël Levy	Ingénieur de recherche, ONERA
<i>Examineur</i>	Fabien Parrain	Maître de Conférence, Université Paris XI
<i>Examineur</i>	Gérold Schröpfer	Directeur d'opérations, Coventor
<i>Examineur</i>	Rose-Marie Sauvage	Responsable Nanotechnologies, DGA
<i>Examineur</i>	Olivier Le Traon	Chef d'unité CMT, ONERA



# Remerciements

Je commence par remercier Pierre TOUBOUL, ancien directeur du département DMPH (Département de Mesures Physiques) et actuel directeur de la branche Physique, de m'avoir accueilli dans son département, ainsi que Monsieur Olivier LE TRAON, chef de l'unité Capteurs et Micro-Technologie, pour m'avoir intégré dans son équipe CMT (Capteurs et Micro-Technologies) durant ce travail de thèse.

Je tiens à remercier mon encadrant scientifique Raphaël LEVY pour m'avoir fait confiance et accompagné dans ce travail de thèse. Merci de m'avoir soutenu jusqu'à la fin de ce travail. Merci pour ta disponibilité et ton aide précieuse pour mener au bout cette thèse. Je remercie ma directrice de thèse Gaëlle LISSORGUES de l'ESIEE d'avoir accepté cette thèse. Merci pour tes conseils et pour le suivi du déroulement de mes travaux. Je remercie les membres de mon jury de thèse, Bernard LEGRAND président et rapporteur, Antoine DUPRET également rapporteur et les examinateurs : Tarik BOUROUNA, Fabien PARRAIN, Gérold SCHROPFER, Rose-Marie SAUVAGE, et Olivier LE TRAON.

Je remercie également Alain BOSSEBOEUF pour son accueil à l'IEF, et plus particulièrement Filippo FABBRI pour son implication et son temps consacré dans le bonding des cellules. Je remercie aussi Fabien PARRAIN et Philippe COSTE pour l'aide apportée sur les mesures optiques. Merci pour votre agréable accueil et votre sympathie au travail. Merci Patrick POULICHET, enseignant chercheur à l'ESIEE pour le suivi de mon travail de thèse et sa collaboration sur l'électronique.

Je remercie tous les membres de l'unité CMT. Particulièrement Vincent GAUDINEAU (qui lit uniquement les remerciements dans les thèses) pour le temps passé avec moi, pour ton aide sur mes travaux, pour ta sympathie. NOFLIPE! Merci à Claude CHARTIER, Marc PERNICE et Olivier DUCLOUX pour les petits séjours en salle blanche en votre compagnie. Je remercie Stève MASSON ("tu sais pas c'est qui qui sait qui est avec Raph?") pour le temps passé avec moi sur les calculs et simulations mécaniques et Rachid TAIBI pour ses conseils de technologue. Merci aux petits derniers (ou grands!!) que j'ai rarement croisés, Pierre LAVENUS, Béatrice BOURGETEAU et Guillaume Aoust (un peu de bureau ensemble quand même!!), merci Pierre pour les répétitions!! Merci à François DEYZAC et Denis JANIAUD (Yo Check la taille du crabe!) pour toutes les discussions à 7h30 (et oui j'étais présent.....ou pas!!). Je remercie Jean GUERARD pour ses discussions

atypiques, son "kes tu fé d'bou, arbeit!". Et je remercie Sylvie NICOLLE-DOUET et Hélène MELLER pour les points administratifs où vous étiez toujours disponibles.

Et maintenant je remercie tous les stagiaires que j'ai pu rencontrer, merci à tous pour votre sympathie. Merci aux doctorants de CMT, Iannis ROLAND "de dlà gros", merci à Mélanie DESCHARLES pour des moments mythiques, whormhole et bien entendu tableau!! Grand merci à Baptiste MARECHAL avec qui j'ai passé le plus de temps, merci pour ta bonne humeur et ton aide. Merci pour ta chemise rose et ta coiffure, merci pour le béton quoi!

Je remercie Marie-Noëlle PETIT pour m'avoir hébergé et aidé pour le pot de soutenance. Je remercie tout le monde de s'être déplacé pour assister à ma soutenance ainsi qu'Antoine MOREL de Nancy.

Je remercie ma famille : Papa pour ton soutien malgré les moments difficiles, ma soeur et Vincent. Je remercie ma petite bé qui a su rester forte malgré la distance et qui sait comme je l'aime.

Pensées pour Maman qui aurait tant aimé me voir finir, je t'aime.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>13</b>
1.1 Les capteurs MEMS vibrants à sortie fréquentielle . . . . .	14
1.1.1 Les capteurs inertiels . . . . .	16
1.1.2 Les microbalances à cristal de quartz . . . . .	19
1.1.3 Capteurs de pression . . . . .	20
1.1.4 Capteurs de température . . . . .	21
1.1.5 Référence de temps . . . . .	22
1.1.6 Capteurs de champ magnétique . . . . .	22
1.2 Présentation des différents types de transduction pour l'excitation et la détection d'une poutre vibrante. . . . .	23
1.2.1 La transduction piézoélectrique . . . . .	23
1.2.2 La transduction électrostatique . . . . .	24
1.2.3 La transduction optique . . . . .	25
1.3 Analyse et mesure de la stabilité de fréquence . . . . .	27
1.3.1 Outils mathématiques pour la caractérisation du bruit fréquentiel . . . . .	27
1.3.2 Analyse théorique du bruit de phase : Leeson et Lee-Hajimiri . . . . .	33
1.3.3 Méthode et moteur de simulation du bruit de phase . . . . .	38
1.3.4 Les moyens de mesure de la stabilité de fréquence. . . . .	42
1.4 Conclusion sur l'état de l'art . . . . .	44
<b>2 Développement des modèles comportementaux pour l'étude des oscillateurs de type MEMS.</b>	<b>45</b>
2.1 Présentation générale d'un oscillateur de type MEMS . . . . .	46
2.2 Développement du modèle comportemental du résonateur mécanique . . . . .	46
2.2.1 Expression analytique de l'équation linéaire du mouvement . . . . .	47
2.2.2 Expression des non-linéarités mécaniques . . . . .	51
2.2.3 Expression du bruit mécanique . . . . .	55
2.2.4 Construction du modèle Verilog-A . . . . .	58
2.3 Développement des modèles de transduction . . . . .	58
2.3.1 Développement du modèle pour la transduction piézoélectrique . . . . .	60

2.3.2	Développement du modèle pour la transduction électrostatique . . .	64
2.3.3	Développement du modèle pour la transduction optique . . . . .	67
2.4	Conclusion sur le développement des modèles comportementaux . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Validation expérimentale des modèles et identification des facteurs li-</b>	
	<b>mitant la résolution fréquentielle d'un micro-accéléromètre</b>	<b>79</b>
3.1	Présentation des cellules de test . . . . .	80
3.1.1	Résonateur à transduction piézoélectrique : cellules VIA . . . . .	80
3.1.2	Résonateur à transduction électrostatique : cellules Aladin . . . . .	81
3.2	Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du réso-	
	nateur Aladin . . . . .	83
3.2.1	Mise en place de la mesure expérimentale . . . . .	84
3.2.2	Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure	
	du résonateur . . . . .	86
3.2.3	Validation des simulations en boucle ouverte . . . . .	91
3.3	Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du réso-	
	nateur VIA . . . . .	93
3.3.1	Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure	
	du résonateur . . . . .	94
3.3.2	Validation des simulations en boucle ouverte . . . . .	96
3.3.3	Validation des simulations en boucle fermée . . . . .	100
3.4	Conclusion sur les validations expérimentales . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Exploitation des modèles</b>	<b>109</b>
4.1	Comparaison des différents types de transduction . . . . .	110
4.1.1	Comparaison théorique . . . . .	110
4.1.2	Comparaison des transductions électrostatique et optique pour un	
	oscillateur intégrant un résonateur de type ALADIN en silicium . .	114
4.2	Optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz de type VIA . . . . .	114
4.2.1	Présentation des paramètres d'un accéléromètre vibrant . . . . .	115
4.2.2	Présentation de la méthode d'optimisation . . . . .	116
4.2.3	Optimisation pour l'inertiel . . . . .	121
4.2.4	Optimisation pour la surveillance de zones par sismomètre . . . . .	124
4.3	Compensation de la non-linéarité mécanique d'un capteur MEMS vibrant.	127
4.3.1	Intérêt de la compensation de la non-linéarité mécanique . . . . .	127
4.3.2	Utilisation des non-linéarités électrostatiques. . . . .	128
4.3.3	Utilisation d'un circuit électronique dédié. . . . .	130
4.4	Conclusion sur l'exploitation des modèles . . . . .	134
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Annexe</b>	<b>137</b>

---

A Expression analytique des paramètres motionnels dans le cas d'une hypothèse quasi-statique de Rayleigh	139
B Modèle Verilog-A du résonateur	143
C Modèle Pspice de l'amplificateur opérationnel AD8066	145
D Script d'obtention de la résolution accélérométrique pour la transduction piézoélectrique	147
Publications	151
Bibliographie	151



# Introduction générale

## Contexte

De nos jours, les capteurs sont omniprésents dans notre environnement, ils permettent de mesurer différentes grandeurs physiques (accélération, pression, température...). La recherche du meilleur compromis coût de réalisation/performances/miniaturisation connaît une croissance continue depuis deux décennies permettant aujourd'hui de répondre à la fois à des marchés de grands volumes (téléphonie mobile par exemple) ou des marchés à plus haute valeur ajoutée du secteur aérospatial. Les capteurs de type MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), répondant à ces besoins, sont des micro-systèmes mettant en œuvre différents domaines de la physique (électronique, mécanique, chimie, optique,...) et présentant une structure aux dimensions micrométriques. Différentes technologies ont été proposées et sont encore imaginées par les ingénieurs et chercheurs des bureaux d'études et des laboratoires dans l'objectif d'obtenir toujours de meilleures performances tout en gardant la contrainte des faibles dimensions du système et des coûts de production les plus faibles. Parmi ces micro-capteurs, les MEMS vibrants se caractérisent par leur structure présentant un micro-résonateur mis en vibration à sa fréquence de résonance. Ce principe a donné lieu à de nombreuses mises en œuvre comme des accéléromètres, des capteurs de pression. Leur intérêt réside dans leur excellente résolution et leur grande étendue de mesure.

## Problématique

Les premières études portant sur les capteurs vibrants de types MEMS ont été entreprises dans les années 1980 [1] [2] [3] [4]. Leur résolution a été rapidement améliorée jusqu'à approcher actuellement une limite. La résolution de mesure se définit par le plus petit signal détectable à la sortie du capteur et son niveau actuel permet de répondre à certaines applications (guidage, pilotage pour les capteurs inertiels). Pour dépasser la limite actuelle et atteindre des résolutions ultimes, il est nécessaire d'identifier les facteurs qui limitent la résolution fréquentielle. Ainsi, ce travail vise à obtenir une meilleure résolution du capteur et ainsi permettra d'ouvrir la voie à de nouvelles applications notamment dans le spatial ou pour les centrales inertielles des futurs micro-drones pour lesquelles les dimensions et les performances sont des facteurs importants.

## Les études actuelles

Actuellement de nombreux capteurs vibrants à sortie fréquentielle ont été conçus pour satisfaire un grand nombre d'applications. Les micro-accéléromètres développés par les entreprises Kearfott, Draper ou Honeywell et le laboratoire CMT (Capteurs et Micro-Technologies) de l'ONERA permettent d'obtenir une accélération avec une résolution de l'ordre de  $1\mu g$  [5] [6] [7] [8]. Les microbalances à cristal de quartz de CH instruments [9] ou Elechema [10] permettent quand à elles de connaître la masse d'un dépôt de matière, les capteurs de pression de Thalès [11] ou les capteurs de température [12]. Plus récemment des capteurs de champ magnétique [13] ont été développés afin de tirer profit de leur petite taille et leur forte sensibilité. Tous ces capteurs sont formés sur une même architecture où l'on peut dissocier résonateur, transduction et circuit oscillateur. La transduction peut-être de type piézoélectrique comme développée à l'Onera sur des wafer en quartz, de type électrostatique sur des wafers en silicium ou plus récemment de type optique, où des études sont effectués par exemple au Laboratoire de Recherche de la Marine des Etats-Unis (Navy) [14].

Actuellement des outils de mesure sont utilisés pour quantifier et connaître la stabilité de fréquence de tels capteurs, c'est à dire leur résolution, soit dans le domaine temporel en utilisant la variance d'Allan ou dans le domaine fréquentiel avec la densité spectrale de phase sans pour autant la prédire. Tous ces capteurs vibrants répondent à un besoin avec leur propres spécifications cependant l'origine des limitations de la résolution n'a pas été clairement identifiée du fait de leur complexité multiphysique (mécanique, piézoélectrique, optique, électrique...)

C'est pourquoi cette thèse s'intéresse principalement à analyser et identifier les limites de résolution fréquentielle de capteurs MEMS vibrants en effectuant une modélisation multiphysique.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire s'organise en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, une étude bibliographique sur les capteurs MEMS vibrants est présentée, et tout particulièrement sur les capteurs à sortie fréquentielle. Les différents types de transduction sont présentés ainsi que les différentes méthodes d'analyse et de simulation du bruit de phase des oscillateurs.

Le deuxième chapitre présente une étude théorique des oscillateurs incluant un micro-résonateur mécanique de type poutre en flexion. Tout d'abord le développement du modèle comportemental du résonateur mécanique est effectué puis une modélisation des types de transduction piézoélectrique, électrostatique et optique est développée.

Le troisième chapitre permet de valider les modèles développés dans le deuxième chapitre. Pour cela, une étude expérimentale est effectuée et comparée avec les simulations du modèle sur deux types de cellules : l'une piézoélectrique (cellule VIA) et l'autre électrostatique (cellule Aladin). Cette validation est réalisée à l'aide de l'outil de simulation CADENCE, où le langage multiphysique verilogA permet de relier des grandeurs physiques de natures différentes entre elles. Un banc de mesure du bruit de phase a aussi parallèlement été développé afin de mesurer la stabilité de fréquence de nos capteurs et la comparer à nos simulations.

Le quatrième chapitre exploite les modèles développés et validés. Ils sont mis à profit d'une part pour comparer les performances d'oscillateurs utilisant différents modes de transduction, et d'autre part pour permettre l'optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz. Cette optimisation est effectuée en simulant toutes les combinaisons possibles des paramètres géométrique du résonateur. Ces modèles développés permettent aussi dans un dernier temps d'étudier l'annulation des non linéarités inhérentes aux résonateurs miniatures.



# Chapitre 1

## État de l'art

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Les capteurs MEMS vibrants à sortie fréquentielle . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1.1	Les capteurs inertiels . . . . .	16
1.1.2	Les microbalances à cristal de quartz . . . . .	19
1.1.3	Capteurs de pression . . . . .	20
1.1.4	Capteurs de température . . . . .	21
1.1.5	Référence de temps . . . . .	22
1.1.6	Capteurs de champ magnétique . . . . .	22
<b>1.2</b>	<b>Présentation des différents types de transduction pour l'ex-</b>	
	<b>citation et la détection d'une poutre vibrante. . . . .</b>	<b>23</b>
1.2.1	La transduction piézoélectrique . . . . .	23
1.2.2	La transduction électrostatique . . . . .	24
1.2.3	La transduction optique . . . . .	25
<b>1.3</b>	<b>Analyse et mesure de la stabilité de fréquence . . . . .</b>	<b>27</b>
1.3.1	Outils mathématiques pour la caractérisation du bruit fréquentiel	27
1.3.2	Analyse théorique du bruit de phase : Leeson et Lee-Hajimiri .	33
1.3.3	Méthode et moteur de simulation du bruit de phase . . . . .	38
1.3.4	Les moyens de mesure de la stabilité de fréquence. . . . .	42
<b>1.4</b>	<b>Conclusion sur l'état de l'art . . . . .</b>	<b>44</b>

---

Dans ce chapitre, les travaux sur les capteurs vibrants de type MEMS sont présentés. L'étude se concentrera sur les capteurs dont la grandeur mesurée est la fréquence du résonateur. Les différentes méthodes de mesure, d'analyse et de simulation du bruit de phase des oscillateurs seront ensuite présentées.

## 1.1 Présentation des différents types de capteurs MEMS vibrants à sortie fréquentielle

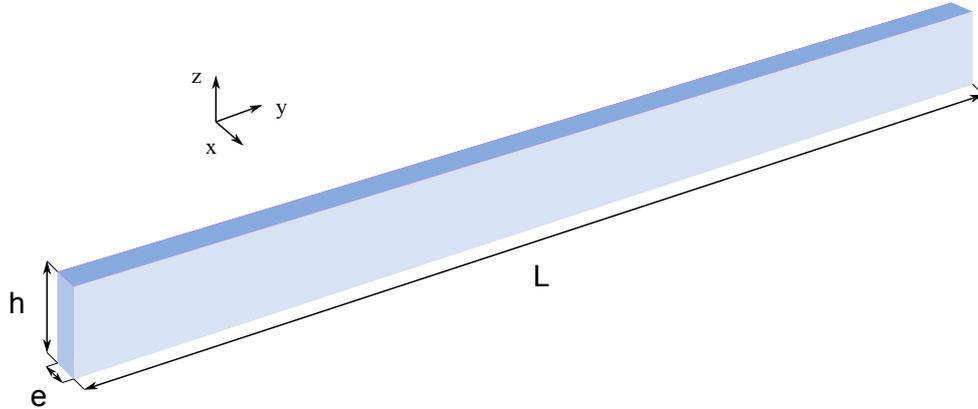


FIGURE 1.1 – Paramètres dimensionnels d'une poutre.

Il existe plusieurs types de résonateurs utilisés comme élément central d'un capteur vibrant. Ce travail de thèse se concentre sur les poutres vibrantes en flexion. En mécanique, une poutre est un élément de structure pour lequel la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. Elle est définie par trois grandeurs dimensionnelles :  $e$  son épaisseur,  $h$  sa hauteur,  $L$  sa longueur (figure 1.1) et par deux grandeurs physiques du matériau :  $\rho$  pour la masse volumique et  $E$  pour le module d'Young. Cet élément peut être mis en vibration grâce à une force d'excitation modulée, ainsi la structure vibre à l'une de ses fréquences propres. À chaque fréquence propre est liée un mode de déformation. L'équation dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( EI \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right) = -\rho e h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + q(y) \quad (1.1)$$

Avec  $I$  le moment quadratique de la section rectangulaire de la poutre,  $X$  la flexion de la poutre et  $q$  une charge extérieure appliquée à la poutre. En l'absence de charge transverse  $q$  et en supposant la poutre homogène ( $E$  et  $I$  indépendant de  $y$ ), on obtient :

$$EI \frac{\partial^4 X}{\partial y^4} = -\rho e h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

La solution générale du déplacement  $X_n(y)$  en fonction des constantes  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$ , et de la fréquence de résonance  $\omega_n$  s'écrit :

$$X_n(y) = a_n \cos(\alpha_n y) + b_n \sin(\alpha_n y) + c_n \cosh(\alpha_n y) + d_n \sinh(\alpha_n y) \quad (1.3)$$

$$\text{avec} \quad \alpha_n^2 = \sqrt{\frac{\rho e h \omega_n^2}{EI}} \quad (1.4)$$

Suivant les conditions aux limites de la poutre, il est possible de retrouver tous les modes et toutes les fréquences propres de cette poutre. Par exemple, pour une poutre encastree-encastree, on utilise les conditions aux limites suivantes :

$$X_n(0) = 0 \quad X_n(L) = 0 \quad X'_n(0) = 0 \quad X'_n(L) = 0 \quad (1.5)$$

En appliquant ces conditions, des solutions sont trouvées si seulement :

$$a_n + c_n = 0 \text{ et } b_n + d_n = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = -\frac{\sin(\alpha_n L) + \sinh(\alpha_n L)}{\cos(\alpha_n L) + \cosh(\alpha_n L)} \text{ et } \cos(\alpha_n L) \cosh(\alpha_n L) - 1 = 0 \quad (1.7)$$

On obtient comme solutions à ces équations :

$$\alpha_1 L = 1.5056\pi \quad \alpha_2 L = 2.4997\pi \quad \alpha_n L \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \geq 3) \quad (1.8)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = -1.01781 \quad \frac{a_2}{b_2} = -0.99923 \quad \frac{a_n}{b_n} \approx -1 \quad (n \geq 3) \quad (1.9)$$

En effectuant le changement de variable  $\alpha_n = \frac{\beta_n \pi}{L}$  et en calculant le moment quadratique de la section rectangulaire de la poutre, on peut représenter les trois premiers modes de déformation (figure 1.2) et définir leurs fréquences respectives :

$$f_n = \frac{\pi \beta_n^2}{4\sqrt{3}} \frac{e}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta_1 = 1.5056 \\ \beta_2 = 2.4997 \\ \beta_n \approx n + \frac{1}{2} \quad (n \geq 3) \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut écrire les nouvelles déformées modales  $X_n(x)$  et ses dérivées successives :

$$X_n(y) = b_n \left[ \frac{a_n}{b_n} (\cos(\alpha_n y) - \cosh(\alpha_n y)) + (\sin(\alpha_n y) - \sinh(\alpha_n y)) \right] \quad (1.11)$$

$$X'_n(y) = b_n \alpha_n \left[ \frac{a_n}{b_n} (-\sin(\alpha_n y) - \sinh(\alpha_n y)) + (\cos(\alpha_n y) - \cosh(\alpha_n y)) \right] \quad (1.12)$$

$$X''_n(y) = b_n \alpha_n^2 \left[ \frac{a_n}{b_n} (-\cos(\alpha_n y) - \cosh(\alpha_n y)) + (-\sin(\alpha_n y) - \sinh(\alpha_n y)) \right] \quad (1.13)$$

Leur fréquence de résonance est liée à de nombreux paramètres tels que la géométrie ou le matériau utilisé. De plus, il est possible de créer des contraintes mécaniques sur la structure qui vont changer le comportement de vibration. Les différentes contraintes appliquées peuvent être :

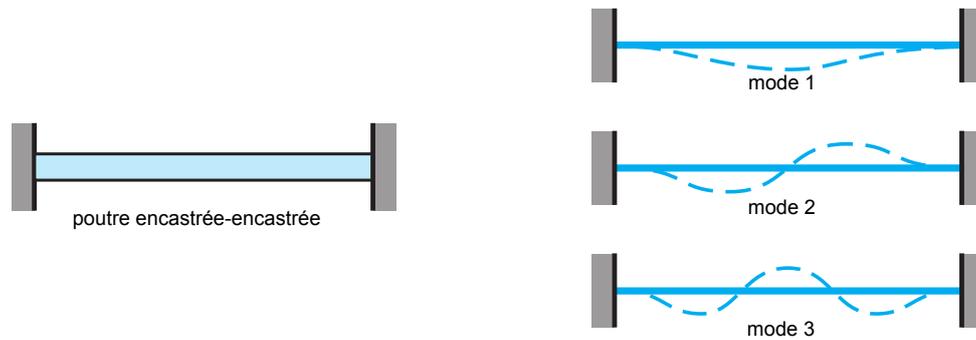


FIGURE 1.2 – Les trois premiers modes d’une poutre encastrée-encastrée.

- Traction/Compression : sollicitation qui consiste à tirer ou comprimer une poutre
  - Flexion : action qui permet de fléchir la poutre
  - Cisaillement : application de forces opposées mais coaxiales (efforts tranchants)
  - Torsion : déformation de la poutre en la faisant vriller sur elle-même
- En jouant sur ces paramètres il est possible d’obtenir différents capteurs.

### 1.1.1 Les capteurs inertiels

Pour déterminer l’attitude d’un objet et sa position dans l’espace, la navigation inertielle est une technique très intéressante par sa capacité à n’utiliser aucune source extérieure, elle est autonome. Pour cela, on utilise une centrale inertielle composée de trois accéléromètres et trois gyromètres afin de connaître les angles d’attitude et les vecteurs vitesse de cet objet en mouvement en temps réel. Ces centrales inertielles peuvent être installées sur de nombreux véhicules comme les navires, les sous-marins, les avions, les missiles ou les véhicules spatiaux. Cette technologie de navigation est forte intéressante de par son indépendance théorique vis à vis des systèmes de positionnement par satellites : GNSS (Global Navigation Satellite System) et connu particulièrement du grand public par le système GPS (Global Positioning System) ou le futur système européen GALILEO. Cependant, peu de systèmes inertiels fonctionnent aujourd’hui de manière autonome du fait de la forte erreur de positionnement liée à l’intégration temporelle des accélérations et vitesse de rotation et nécessitent un recalage absolu ( GPS, reconnaissance de terrain, ...). Les micro-capteurs inertiels vibrants répondent tout particulièrement à cette application.

#### Les micro-accéléromètres

Un accéléromètre permet de mesurer la force spécifique appliquée à un objet : force due à l’accélération du mouvement à laquelle on soustrait l’accélération de la gravité. Selon le principe fondamental de la dynamique, évoqué par Isaac Newton en 1686, l’accélération  $\vec{a}$  subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces  $\vec{F}_i$  qu’il subit, et inversement proportionnelle à sa masse  $m$  (équation 1.14) :

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (1.14)$$

Grâce à ce principe, en encastrant la masse à une extrémité de la poutre, toute accélération dans l'axe de la poutre va créer une force axiale et engendre une contrainte mécanique de traction et de compression. Cette contrainte dépendant de la masse et de l'accélération va provoquer un changement de la fréquence de résonance.

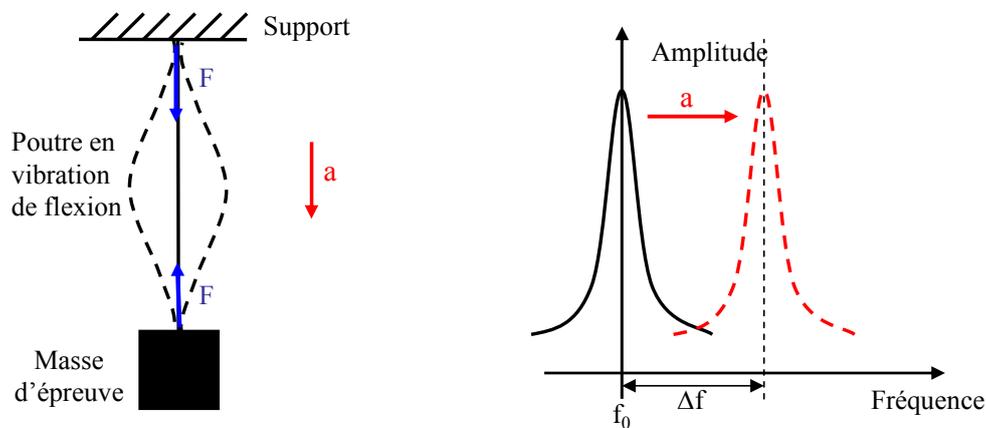


FIGURE 1.3 – Schéma du principe de l'accéléromètre à poutre vibrante.

En effet, dans notre cas sur une configuration encastrée-encastrée, la contrainte provoque un changement de raideur appelée raideur apparente de la poutre pour la même configuration géométrique. Il est ainsi possible de quantifier l'accélération subie grâce à une mesure de cette fréquence de résonance de la poutre. La méthode énergétique de Rayleigh [15] permet de calculer cette nouvelle fréquence de résonance pour chaque mode.

Actuellement de nombreux micro-accéléromètres sont développés sur ce principe. Ils sont capables d'atteindre des performances intéressantes : la compagnie Kearfott a créé un capteur appelé le MVBA (The Micromachined Vibrating Beam Accelerometer) basé sur un résonateur monocristallin en silicium. Sa résolution est de l'ordre de  $1\mu g$  avec une étendue de mesure de  $40g$  et des dimensions de la puce de  $10.2mm$  par  $8.3mm$  [5]. Une seconde entreprise, le Draper Laboratory, fabrique des accéléromètres nommés SOA (Silicon Oscillating Accelerometer figure 1.4) conçus aussi à partir d'un résonateur monocristallin en silicium qui permet un actionnement et une détection électrostatique [6]. Tout en gardant les dimensions du MVBA, ils atteignent de meilleures performances comme le montre le tableau 1.1.

	MVBA Kearfott	SOA Draper
Dimensions ( $mm$ )	$10 \times 8$	$5 \times 5$
Stabilité de biais ( $\mu g$ )	7 jours	—
	90 jours	1
Stabilité du facteur d'échelle ( $ppm$ )	7 jours	—
	90 jours	10
Résolution/Seuil ( $\mu g$ )	1	1
Étendue de mesure ( $g$ )	$\pm 40$	$\pm 100$

TABLE 1.1 – Performances de l'accéléromètre MVBA de Kearfott et du SOA de Draper.

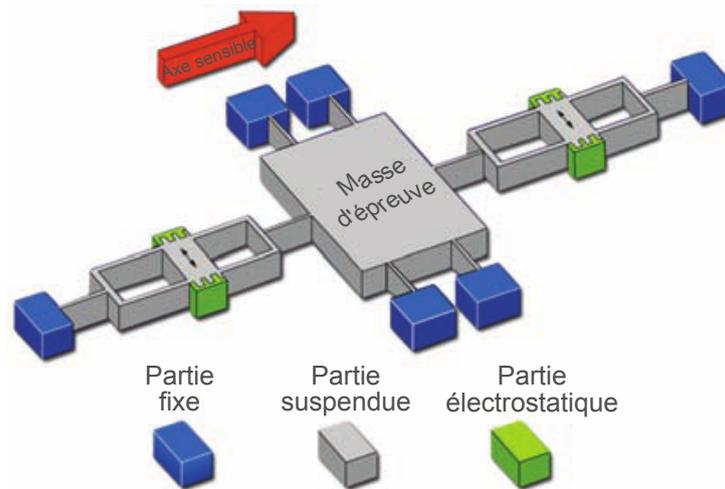


FIGURE 1.4 – Schéma de l'accéléromètre SOA de Draper.

Ces micro-accéléromètres vibrants ont été également étudiés par l'université de science et technologie chinoise de Nanjing en Chine. Cette étude portant sur l'influence de la température d'un tel mécanisme [16].

Honeywell produit deux autres types d'accéléromètres à lame vibrante, l'un monolithique en silicium appelé SiMMA SA500 [17], l'autre utilisant un résonateur en quartz reporté sur une structure métallique : le RBA500 [7].

Leurs performances sont présentées dans le tableau 1.2.

Honeywell	SiMMA SA500	AccelereX RBA500
Dimensions ( $mm$ )	$41 \times 25 \times 8$	$20 \times 20 \times 11$
Stabilité de biais sur un an ( $mg$ )	2.5	4
Stabilité du facteur d'échelle sur un an ( $ppm$ )	360	450
Résolution/Seuil ( $\mu g$ )	50	1
Étendue de mesure ( $g$ )	$\pm 80$	$\pm 70$
Bande passante ( $Hz$ )	1000	400

TABLE 1.2 – Comparaison de deux accéléromètres Honeywell.

L'Onera a été l'un des pionniers dans le développement d'accéléromètre vibrant monolithique, c'est à dire réalisé collectivement à partir d'un même substrat. Le choix initial du matériau a été le quartz cristallin pour ses propriétés piézoélectriques et ses qualités intrinsèques de stabilité. Un premier accéléromètre, appelé VIA (Vibrating Inertial Accelerometer) breveté en 1995 [8], a été développé et transféré à l'industrie. Une modélisation de la déformation liée à l'accélération par éléments finis est visible sur la figure 1.5.

Ce concept profite d'une part des propriétés mécaniques du quartz et d'autre part de son cadre de découplage qui permet d'isoler efficacement les vibrations utiles de la lame vibrante [18]. Une configuration originale nommée DIVA (Differential Inertial Vibrating Accelerometer) a été breveté en 2004 [19]. Elle regroupe deux VIA sur un même substrat avec un parfait découplage mécanique entre-eux afin d'obtenir les performances résumées

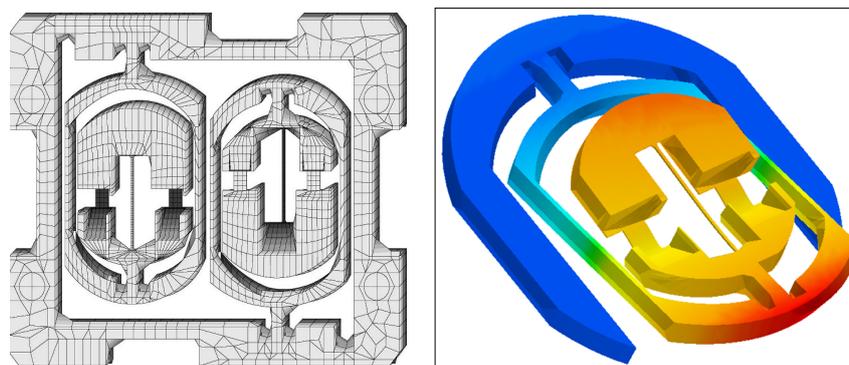


FIGURE 1.5 – Modélisation par éléments finis d'un DIVA à gauche et d'un VIA de l'Onera à droite.

dans le tableau 1.3.

Onera	DIVA
Dimensions ( $mm$ )	$16 \times 16 \times 10$
Stabilité de biais sur un an ( $mg$ )	0.3
Stabilité du facteur d'échelle sur un an ( $ppm$ )	20
Résolution/Seuil ( $\mu g$ )	1
Étendue de mesure ( $g$ )	$\pm 100$

TABLE 1.3 – Performances de l'accéléromètre DIVA de l'Onera.

### 1.1.2 Les microbalances à cristal de quartz

La microbalance à cristal de quartz est fondée sur la mesure de la variation de fréquence propre d'un résonateur en fonction de la masse déposée à sa surface. Dans le cas des microbalances, le mode de vibration en cisaillement d'épaisseur est le plus fréquemment utilisé (fréquences élevées à partir du  $MHz$ ). Lorsqu'il y a dépôt ou dissolution d'une couche solide et rigide en surface d'une électrode, il y a une variation de masse qui se traduit par une variation de la fréquence de résonance du quartz. Dans le cas d'une couche de faible épaisseur, la relation de Sauerbrey peut s'appliquer [20] selon l'équation 1.15 :

$$\Delta f = -\frac{2f_0^2}{\sqrt{\rho_q \mu_q}} \frac{\Delta m}{S} \quad (1.15)$$

avec,

- $\Delta f$  la variation de fréquence de résonance du quartz ( $Hz$ )
- $\Delta m$  la variation de masse ( $g$ )
- $f_0$  la fréquence de résonance du quartz ( $Hz$ )
- $\rho_q$  la masse volumique du quartz ( $g.cm^3$ )
- $\mu_q$  le module de cisaillement ( $g.cm^{-1}.s^{-2}$ )
- $S$  l'aire de l'électrode ( $cm^2$ )

Les principaux fabricants et fournisseurs de microbalances sont Elchema et CH Instruments qui sont deux entreprises installées aux États-Unis. La microbalance CHI400B [9] développée par CH Instruments permet d'obtenir une résolution de masse de l'ordre du dixième de nanogramme alors que celle de Elchema nommée EQCN-700 [10] atteint une résolution du centième de nanogramme. Ces deux microbalances à cristal de quartz sont comparées avec le QCM-750 [21] de KSV NIMA dans le tableau 1.4.

	EQCN-700	CHI400B	QCM-750
Fréquence fondamentale ( $MHz$ )	10	7.995	10
Résolution fréquentielle ( $Hz$ )	0.1	0.1	0.03
Résolution en masse ( $ng$ )	0.01	0.13	0.23
Surface du cristal ( $cm^2$ )	0.196	0.196	1.54

TABLE 1.4 – Comparaison des performances de 3 microbalances à crystal de quartz.

### 1.1.3 Capteurs de pression

La mesure de la pression est nécessaire dans de nombreux domaines. Citons dans le domaine aéronautique les sondes Pitot pour la détermination de la vitesse relative d'un aéronef. Depuis les années 1970, l'utilisation du silicium comme matériau de base a permis d'ouvrir aux capteurs le marché grand public. L'amélioration et la miniaturisation de ces capteurs de pression ont permis de les introduire dans de nouveaux secteurs d'application comme par exemple dans le domaine médical ou spatial. Ainsi, des capteurs de pression à lame vibrante ont vu le jour. Ces capteurs à sortie fréquentielle sont moins sensibles au bruit que des capteurs piezorésistifs et capacitifs analogiques classiques. Leur principe de fonctionnement repose sur l'actionnement d'un diaphragme sensible à une pression extérieure et qui vient créer une force axiale dans la lame vibrante (figure 1.6). Sur le même principe que l'accéléromètre à lame vibrante, cette force se traduit par une contrainte mécanique qui provoque un changement de la fréquence de résonance.

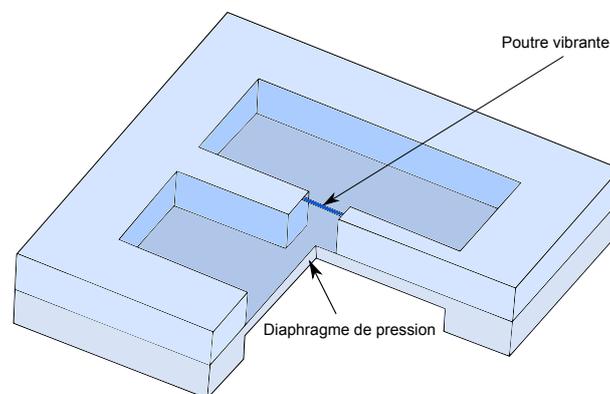


FIGURE 1.6 – Schématisation de la structure d'un capteur de pression à lame vibrante.

Ce type de capteur est étudié à l'institut d'électronique de l'académie chinoise des

sciences [22]. La mesure de la fréquence de résonance de deux résonateurs localisés sur le diaphragme permet d'obtenir une sortie différentielle pour la lecture de la pression. Ce capteur, réalisé sur un même substrat de silicium, peut atteindre une étendue de mesure de  $100kPa$  pour une sensibilité de  $155Hz/kPa$ . Sur la figure 1.7 la modélisation de la déformée de la structure est visible sous une contrainte de pression de  $50kPa$ .

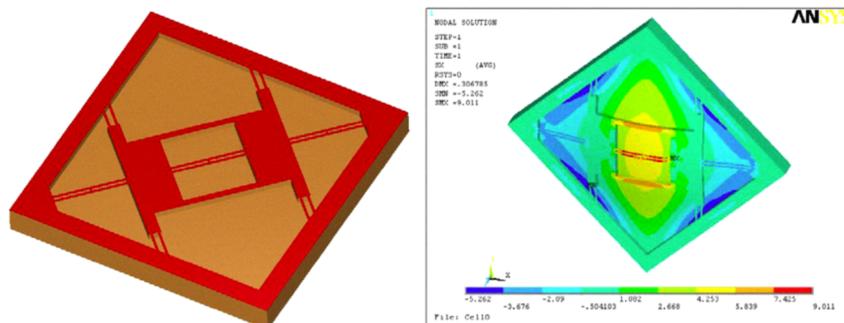


FIGURE 1.7 – Contrainte du capteur de pression à lame vibrante de l'académie chinoise des sciences sous une pression de  $50kPa$ .

Une autre structure a été développée [11] et brevetée par Thalès pour obtenir un capteur de pression (figure 1.8). Ce capteur de pression fonctionne sur le même principe que la structure précédente, où une membrane (sensible à la pression) vient modifier la tension appliquée dans la poutre, qui se traduit par un changement de fréquence.

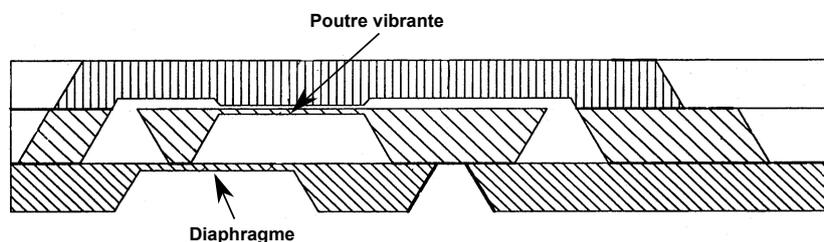


FIGURE 1.8 – Représentation du capteur de pression breveté par Thalès.

### 1.1.4 Capteurs de température

Depuis les années 1960, le principe reliant la variation de la température à la variation de la fréquence de résonance d'un résonateur à quartz est exploité. Le mode de vibration utilisé est principalement le mode de torsion des poutres et la sensibilité du cristal à la température est dépendante de son orientation [23] [24]. L'avantage d'un tel capteur est sa grande sensibilité thermique, où il est possible de déterminer une température avec une précision de  $0.001^{\circ}C$ . La plupart de ces résonateurs sont réalisés à partir d'un diapason en quartz. La formule représentant la fréquence de résonance mesurée  $f(T)$  pour une température  $T$  quelconques est la suivante :

$$f(T) = f(T_0) \left[ \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 \right] \quad (1.16)$$

où  $f(T_0)$  représente la fréquence mesurée à la température  $T_0$ ,  $\alpha$  le coefficient de température du premier ordre et  $\beta$  le coefficient de température du second ordre.

La figure 1.9 présente un capteur de température à quartz de l'entreprise Statek [12]. Ce diapason possédant une fréquence de résonance d'environ  $170\text{kHz}$  possède une sensibilité d'environ  $46\text{ppm}/^\circ\text{C}$ . Son étendue de mesure peut varier de  $-40^\circ\text{C}$  à  $90^\circ\text{C}$ .

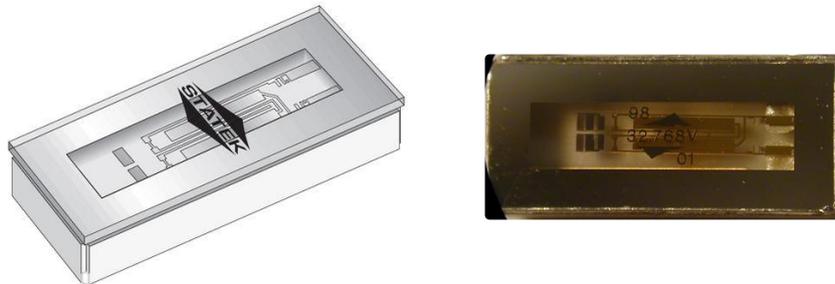


FIGURE 1.9 – Capteur de température à quartz de l'entreprise Statek.

Ces capteurs font toujours l'objet de travaux pour améliorer leur sensibilité, aujourd'hui atteignant les  $80\text{ppm}/^\circ\text{C}$  [25] [26].

### 1.1.5 Référence de temps

Une autre application des résonateurs est la référence de temps. Ses applications sont multiples, par exemple : réglage des fréquences d'horloge pour des transmissions de données numériques, ou pour les conversions émetteur-récepteur des ondes haute fréquence ou pour encore la synchronisation des circuits logiques. La technologie MEMS de ces résonateurs permet d'obtenir des oscillateurs de petites tailles, et de faibles coûts. Ces résonateurs peuvent avoir des fréquences de résonance comprises entre des dizaines de  $\text{kHz}$  [27] jusqu'aux dizaines de  $\text{MHz}$  [28]. D'un résonateur à l'autre, les facteurs de qualité peuvent varier de 1000 [29] à plus de 80000 [30]. Une étude portant sur ces oscillateurs MEMS pour référence de temps a été réalisée, plus particulièrement concernant leurs performances en bruit [31]. Récemment, les sociétés SI-TIME et DISCERA ont commercialisé des références de temps à résonateur en silicium. La taille de ces oscillateurs est fortement réduite par rapport aux oscillateurs à résonateur en quartz, au prix d'une forte sensibilité de la fréquence en température. Cette sensibilité en température est compensée par un circuit de PLL fractionnaire intégré mais dégrade le bruit de phase de l'oscillateur.

### 1.1.6 Capteurs de champ magnétique

Les capteurs à poutre vibrante peuvent aussi être des capteurs très sensibles au champ magnétique. Des couches minces de matériau ferromagnétiques sont déposés sur le bout de la poutre vibrante qui réagissent avec le champ magnétique extérieur. L'interaction magnétostatique tend à réaligner le moment magnétique de la couche mince sur le champ magnétique externe, ce qui génère un couple sur la poutre. Ce couple change la fréquence

de résonance en fonction de l'orientation et l'amplitude du champ extérieur. L'institut pour les nanotechnologies MESA des Pays-Bas étudie ce type de capteur à faible puissance et au champ magnétique ultra-sensible [13]. La résolution obtenue est de 1nT pour une poutre en silicium sur laquelle est déposée une couche mince de cobalt-nickel.

## 1.2 Présentation des différents types de transduction pour l'excitation et la détection d'une poutre vibrante.

Pour l'excitation et la détection du mouvement de la poutre vibrante, un mode de transduction est nécessaire. Les trois points suivants présentent des micro résonateurs vibrants actuels suivant trois modes de transduction différents. Les deux premiers concernent la transduction piézoélectrique et électrostatique et sont très largement utilisés pour ces capteurs, la transduction optique quand à elle est toujours actuellement à l'état de recherche et de miniaturisation mais très prometteuse en terme de rapport signal à bruit.

### 1.2.1 La transduction piézoélectrique

#### Le principe

Les résonateurs à transduction piézoélectrique sont basés sur des matériaux piézoélectriques tels que le quartz. Le principe d'une telle transduction est de générer un déplacement électrique lorsqu'il est soumis à des contraintes mécaniques ou par effet inverse, de se déformer lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Ainsi, grâce à ces propriétés, il est possible de mettre en vibration une poutre encadrée-encadrée soumise à un champ électrique et de détecter cette vibration grâce à la création de charges électriques. La disposition des électrodes doit être adaptée au mode de vibration de la poutre. La figure 1.10 présente une structure d'un diapason doublement encadré avec ses électrodes.

#### Présentation d'un diapason doublement encadré

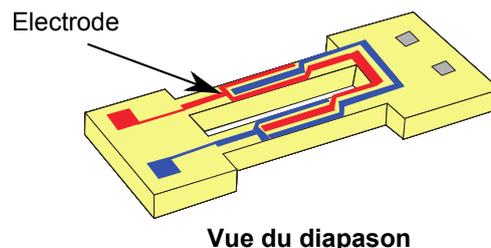


FIGURE 1.10 – Présentation de la structure vibrante en quartz.

L'Onera développe un micro-accéléromètre en quartz. Le résonateur est formé d'une

poutre doublement encastré entre un support et la masse d'épreuve sensible aux accélérations selon un axe.

Le principe repose sur la compression et l'extension de la poutre vibrante. Afin de maintenir en vibration la poutre et de détecter les vibrations d'un tel résonateur, des électrodes sont nécessaires. Ces électrodes sont déposées directement sur le quartz afin de réaliser l'effet piézoélectrique sur un tel matériau (figure 1.11).

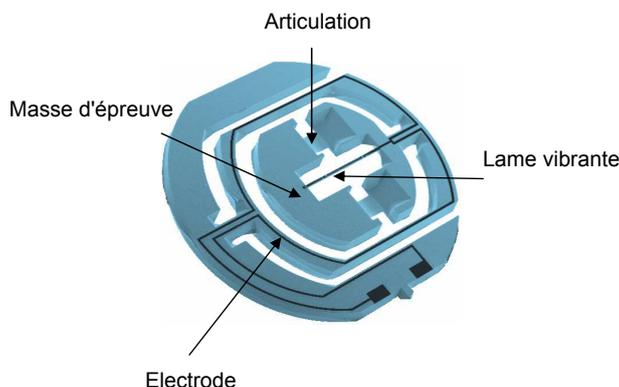


FIGURE 1.11 – Disposition des électrodes sur le résonateur en quartz.

Grâce à cet effet piézoélectrique, il est ainsi possible d'actionner et de détecter les vibrations d'une micro-poutre.

## 1.2.2 La transduction électrostatique

### Le principe

Un second principe est très utilisé actuellement dans les micro-capteurs. Ce principe repose sur l'effet électrostatique. Dans le cas de l'excitation, une force est nécessaire pour mettre en vibration le résonateur MEMS. La transduction électrostatique permet de créer une force électrostatique provenant d'une différence de potentiel appliquée entre deux électrodes. Dans le cas où une électrode est fixe, la seconde se déplace sous l'effet de cette force. Cet effet est réversible, il permet la détection de vibrations grâce au courant qui traverse la capacité mobile. Ces résonateurs à transduction électrostatique généralement réalisés sur du silicium ; matériau semi-conducteur qui est polarisable.

### Présentation d'un micro-accéléromètre bi-axial

A titre d'illustration, nous décrirons le micro accéléromètre de l'école polytechnique de Milan qui constitue un récent développement. L'école Polytechnique de Milan en Italie a conçu un micro-accéléromètre en silicium bi-axial [32]. Ce capteur permet de mesurer simultanément l'accélération sur deux axes en utilisant deux couples de poutres en flexion et une masse d'épreuve. Ce type de micro-accéléromètre est l'évolution d'un micro-accéléromètre uni axial de même architecture du même laboratoire [33]. La figure 1.12 présente ce micro-accéléromètre bi-axial avec sa vue schématique.

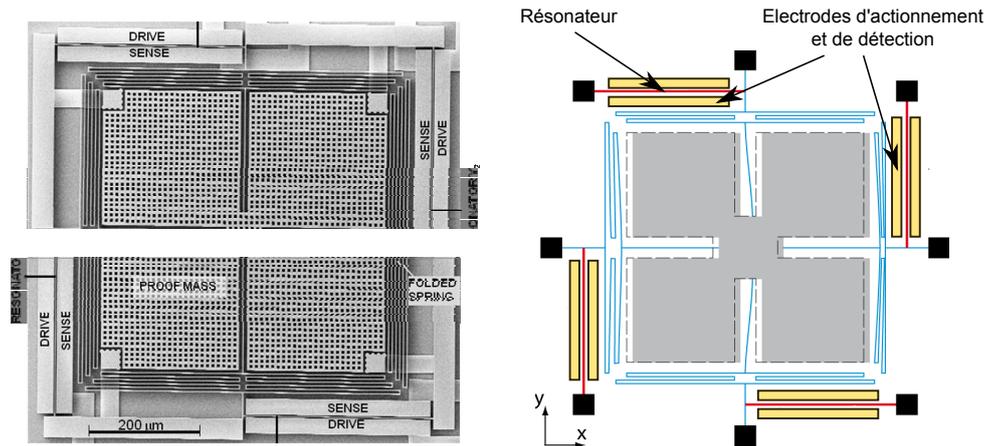


FIGURE 1.12 – A gauche : Photo d'un micro-accéléromètre bi-axial. A droite : Vue schématique du micro-accéléromètre avec la position des électrodes d'actionnement et de détection.

Le type de transduction employé sur ce micro résonateur est la transduction électrostatique. La position des électrodes de transduction est visible sur la figure 1.12. Ces électrodes sont disposées de part et d'autre de chaque poutres vibrantes pour à la fois maintenir en vibration les poutres et détecter leur fréquence de résonance.

### 1.2.3 La transduction optique

#### Le principe

Une partie de la recherche sur les types de transduction est centrée sur l'actionnement et la détection par voie optique. Actuellement, ce mécanisme ne permet pas une intégration résonateur-transduction miniaturisée mais il permet d'une part de ne pas déposer d'électrodes sur la poutre et ainsi garder son facteur de qualité élevé, et d'autre part de profiter d'un fort rapport signal à bruit de détection. Le principe de l'actionnement s'effectue par pression de radiation où la réflexion des photons sur une surface permet d'obtenir une force d'excitation. Pour la détection optique du mouvement du résonateur, deux principes différents sont à l'état de recherche. Ils portent sur une détection de la variation de la puissance lumineuse d'un faisceau mesurée par une photodiode. La puissance lumineuse varie en fonction de l'obscuration du faisceau (knife-edge), ou par la variation de largeur d'une cavité Fabry-Pérot (interférométrie).

#### Expérimentations actuelles d'une transduction optique

Le Laboratoire de Recherche de la Marine des Etats-Unis (Navy) en partenariat avec l'Université de Baltimore ont porté leur recherche sur la détection du mouvement d'une masse d'épreuve avec l'aide d'une cavité Fabry-Pérot. Un brevet d'invention sur ce micro-accéléromètre avec cavité Fabry-Pérot a été déposé en 2003 [14] et la société Lumedyne a été créée pour l'exploiter. La figure 1.13 présente les photos de ce micro-accéléromètre.

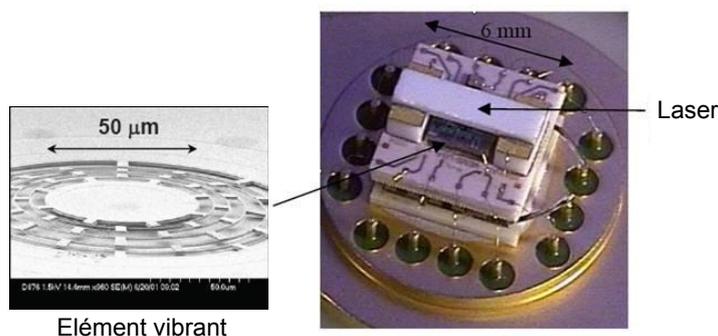


FIGURE 1.13 – Photo du micro-accelerometre avec cavite Fabry-Pérot de la Navy.

Une étude portant sur la théorie et des simulations d'un tel principe a aussi été réalisée, et des premiers résultats expérimentaux ont été démontrés [34] [35]. L'excitation optique a également été réalisée par l'Université Cornell dans l'Etat de New-York où la détection se fait par la méthode d'obscuration du faisceau [36].

Cette méthode d'obscuration du faisceau pour la détection de vibration d'une micro poutre a aussi été testée par le département d'Ingénierie Mécanique et Aérospatial de Boston [37] et le département d'Ingénierie Electrique de l'Institut Technologique d'Israël [38]. Des déplacements de quelques nanomètres ont été détectés.

La méthode par interférométrie a été expérimentée sur différents MEMS vibrants par l'École Polytechnique de Montréal [39] et sur des QCM par le Laboratoire de Recherche de la Marine des Etats-Unis [40]. La structure vibrante de l'École Polytechnique de Montréal est visible sur la figure 1.14

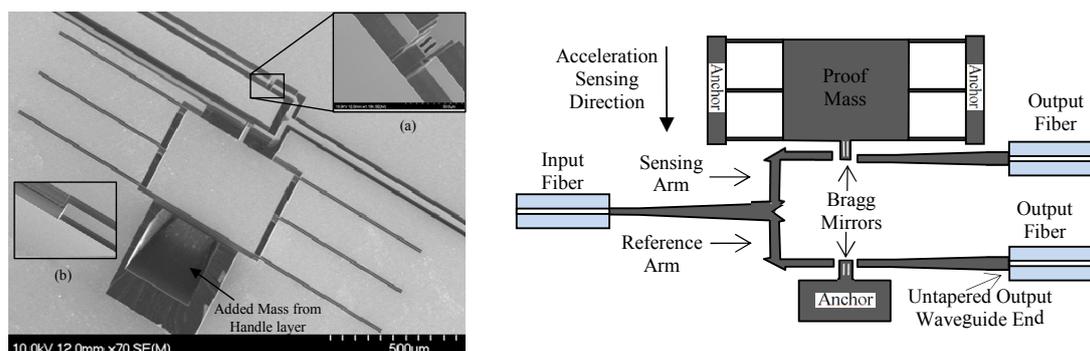


FIGURE 1.14 – Photo et schéma du micro-accelerometre de l'École Polytechnique de Montréal.

La détection des vibrations par voie optique reste encore marginale dans le domaine des MEMS vibrants par rapport à d'autres modes de détection (capacitif, piézoélectrique). Toutefois, différents laboratoires ont réalisé récemment des oscillateurs optomécaniques par pression de radiation avec l'onde évanescente d'une fibre ou d'un guide d'onde optique.

Ces travaux démontrent qu'un tel principe peut être étendu aux différents micro capteurs à sortie fréquentielle.

## 1.3 Analyse et mesure de la stabilité de fréquence

Dans le cas des capteurs vibrants à sortie fréquentielle, la fréquence propre du résonateur est proportionnelle à la mesurande. La stabilité et la résolution du capteur dépendent donc respectivement de la stabilité et du bruit de fréquence de l'oscillateur. Il est ainsi nécessaire d'utiliser des outils pour caractériser cette stabilité de fréquence. La caractérisation dans le domaine fréquentiel permet de déterminer l'origine physique des différents bruits de mesure, elle est particulièrement adaptée pour les applications temps-fréquence. La caractérisation dans le domaine temporel, ne permet pas de déterminer l'origine physique de tous les types de bruit, mais permet de déterminer la résolution du capteur en fonction du temps d'intégration de la mesure, elle est donc bien adaptée aux applications suivantes : accéléromètre, microbalance, capteur de pression, capteur de champ magnétique.

### 1.3.1 Outils mathématiques pour la caractérisation du bruit fréquentiel

Le signal  $V(t)$  temporel délivré par un oscillateur idéal conserve en permanence la même fréquence  $f_0$  et la même amplitude  $V_0$ , et est ainsi de la forme :

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.17)$$

Le signal réel est cependant perturbé, différents phénomènes aléatoires modifient la phase et l'amplitude du signal [41]. On le modélise sous la forme :

$$V(t) = (V_0 + \epsilon(t)) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) \quad (1.18)$$

où  $\epsilon(t)$  est la perturbation en amplitude et  $\phi(t)$  la perturbation en phase.  $\phi(t)$  représente le bruit de phase qui est déterminant pour la résolution et son origine est à la fois mécanique (résonateur) et électronique (actionnement, détection, amplification). La fréquence instantanée  $f(t)$  est donnée par l'équation 1.19 :

$$f(t) = f_0 + \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi} \quad (1.19)$$

Avec  $\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi}{dt}$ .

On définit également l'écart de fréquence normé instantané  $y(t)$  par :

$$y(t) = \frac{f(t) - f_0}{f_0} = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi f_0} \quad (1.20)$$

La stabilité de fréquence est ainsi induite par des perturbations du signal qui peuvent être exprimées comme une perturbation de fréquence (bruit fréquentiel). La caractérisa-

tion de ce bruit fréquentiel est spécifiée dans le domaine des fréquences par la densité spectrale et dans le domaine temporel par la variance d'Allan.

### Domaine fréquentiel : densité spectrale

La densité spectrale est utilisée pour décrire la stabilité des oscillateurs dans le domaine fréquentiel. Pour un processus aléatoire  $p(t)$ , sa densité spectrale bilatérale  $S_p^{BL}$  (équation 1.22) est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation  $R_p(\tau)$  (équation 1.21) [42].

$$R_p(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r(t)r(t-\tau)dt \quad (1.21)$$

$$S_p^{BL}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_p(u)e^{-2j\pi fu}du \quad (1.22)$$

Cette densité spectrale caractérise la répartition de l'énergie du signal considéré dans l'espace des fréquences. Ainsi, la densité spectrale de puissance de phase  $S_\phi(f)$  caractérise la répartition fréquentielle de  $\phi(t)$ . Généralement le bruit de phase d'une source est noté  $L(f)$  et appelé "pureté spectrale" tel que [43] :

$$L(f) = \frac{1}{2}S_\phi(f) \quad (1.23)$$

Cette pureté spectrale est caractérisée à une distance  $f$  de la porteuse par la puissance disponible  $P_{1Hz}$  de part et d'autre de la porteuse dans une bande de  $1Hz$  sur la puissance de la porteuse  $P_0$ . On obtient alors l'équation 1.24 :

$$S_\phi(f) = 10 \log \left( \frac{2P_{1Hz}}{P_0} \right) \quad (1.24)$$

La représentation de ce spectre du signal de sortie résultant de la modulation en phase du signal d'oscillation à la fréquence  $f_0$  par du bruit est visible sur la figure 1.15 :

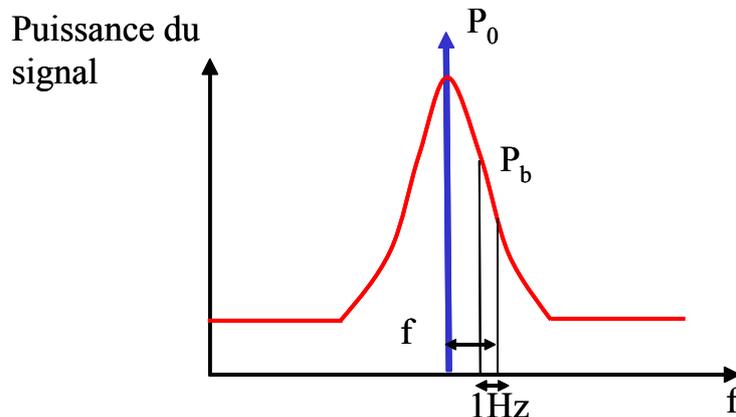


FIGURE 1.15 – Représentation du spectre de l'oscillateur.

On peut caractériser les fluctuations relatives de fréquence (équation 1.20) par leur densité spectrale :

$$S_y(f) = \frac{f^2}{f_0^2} S_\phi(f) \quad (1.25)$$

### Domaine temporel : variance d'Allan

La variance d'Allan est un outil mathématique qui s'est imposé dans le domaine temps-fréquence pour mesurer la stabilité de fréquence en fonction du temps d'intégration de la mesure. Dans la réalité, on ne dispose jamais d'une infinité d'échantillons, c'est pourquoi on évalue la variance à partir d'un nombre fini d'échantillons. La variance à N échantillons peut s'écrire :

$$\sigma^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (1.26)$$

où  $\bar{y}_k$  représente la moyenne de  $y(t)$  (équation 1.20) sur un intervalle de temps de durée  $\tau$  à partir de la date  $t_k$  :

$$\bar{y}_k = \bar{y}(t_k) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(u) du \quad (1.27)$$

N est le nombre d'échantillons  $\bar{y}_k$  disponibles, et  $\tau$  la période d'analyse. Pour estimer la dispersion des écarts de fréquence normée instantanée autour de leur valeur moyenne, l'IEEE recommande depuis 1986 d'utiliser la variance dite "d'Allan" à deux échantillons (N=2) [44][45]. Cette variance d'Allan  $\sigma_y^2$  est donnée par :

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle \sigma^2(2, \tau) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^2 \left( \bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j \right)^2 \right\rangle \quad (1.28)$$

où  $\langle \rangle$  représente une moyenne sur des échantillons et en simplifiant, on obtient :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \right\rangle \quad (1.29)$$

$\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  sont des échantillons adjacents de moyennes d'écarts de fréquence normés instantanés sur les durées  $\tau$ . Ici, la variance d'Allan calcule l'écart entre deux échantillons successifs adjacents. Une façon plus générale de l'écrire est [46] :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{y}_{k+1}(\tau) - \bar{y}_k(\tau))^2 \quad (1.30)$$

Il est possible de lier les résultats de l'analyse fréquentielle avec ceux de l'analyse temporelle. Cependant, la variance d'Allan n'est pas capable de discriminer entre différents types de bruits de phase.

## Relation entre les deux domaines

L'expression de la variance vraie  $I^2(\tau)$  de la variable  $y(t)$  est donnée en fonction de la densité spectrale  $S_y(f)$  par :

$$I^2(\tau) = \int_0^\infty S_y(f) |H_\tau(f)|^2 df \quad (1.31)$$

où  $H_\tau(f)$  est la "Fonction de transfert" de l'opérateur variance. Cette fonction de transfert est la transformée de Fourier de la "Réponse impulsionnelle" de la variance. Elle est représentée pour la variance d'Allan sur la figure 1.16 [47].

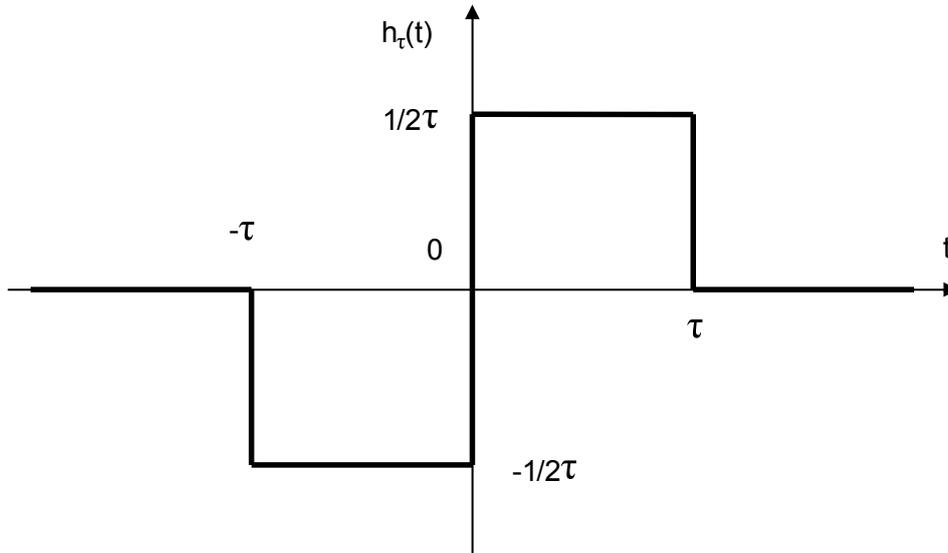


FIGURE 1.16 – Réponse impulsionnelle de la variance d'Allan.

La fonction de transfert qui correspond à cette réponse impulsionnelle est :

$$|H_\tau(f)|^2 = 2 \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} \quad (1.32)$$

Ainsi, on obtient la variance d'Allan en fonction de la densité spectrale selon l'équation 1.33 :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} df \quad (1.33)$$

Durant ces dernières années, l'expérience a montré que les bruits affectant un oscillateur peuvent être modélisés dans la densité spectrale par une loi de puissance de  $f$ , qui s'écrit :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha \quad (1.34)$$

avec les  $h_\alpha$  indépendants de la fréquence.

A chaque terme correspond une modulation de bruit particulière :

- $\alpha = -2$  : bruit de marche aléatoire de fréquence (Random Walk Frequency Noise)
- $\alpha = -1$  : bruit de flicker de fréquence (Flicker Frequency Noise)
- $\alpha = 0$  : bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise)
- $\alpha = 1$  : bruit de flicker de phase (Flicker Phase Noise)
- $\alpha = 2$  : bruit blanc de phase (White Phase Noise)

L'équation 1.33 devient alors :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha \int_0^\infty f^\alpha \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} df \quad (1.35)$$

Lorsque  $f$  tend vers 0, l'intégrale de cette équation converge pour toutes les puissances de  $\alpha$ , et la convergence à l'infini est assurée par la fréquence de coupure haute  $f_h$  présente sur chaque système physique. Il devient ainsi possible d'écrire la variance d'Allan comme une loi de puissance de  $\tau$  à l'aide de ces mêmes coefficients  $h_\alpha$  :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{(2\pi)^2}{6} h_{-2} \tau + 2 \ln(2) h_{-1} + \frac{1}{2} h_0 \tau^{-1} + \frac{1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)}{(2\pi)^2} h_1 \tau^{-2} + \frac{3f_h}{(2\pi)^2} h_2 \tau^{-2} \quad (1.36)$$

A partir de l'équation 1.25 qui relie la densité spectrale de fréquence à la densité spectrale de phase et celle qui la relie à la variance d'Allan (équation 1.36), on peut résumer ces relation dans le tableau 1.5 suivant :

Type de Bruit	Blanc de phase	Flicker de phase	Blanc de fréquence	Flicker de fréquence	Marche aléatoire de fréquence
$S_\phi(f)$	$b_0$	$b_{-1} f^{-1}$	$b_{-2} f^{-2}$	$b_{-3} f^{-3}$	$b_{-4} f^{-4}$
$S_y(f)$	$b_0 \frac{f^2}{f_0^2}$	$b_{-1} \frac{f}{f_0^2}$	$b_{-2} \frac{1}{f_0^2}$	$b_{-4} \frac{f^{-1}}{f_0^2}$	$b_{-3} \frac{f^{-2}}{f_0^2}$
$\sigma_y^2(\tau)$	$\frac{3f_h b_0}{(2\pi)^2 f_0^2} \tau^{-2}$	$(1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)) \frac{b_{-1}}{(2\pi)^2 f_0^2} \tau^{-2}$	$\frac{b_{-2}}{2f_0^2} \tau^{-1}$	$\frac{2 \ln(2) b_{-3}}{f_0^2}$	$\frac{(2\pi)^2 b_{-4}}{6f_0^2} \tau$

TABLE 1.5 – Relation entre la densité spectrale de fréquence, la densité spectrale de phase et la variance d'Allan.

Les représentations des pentes de ces différentes fonctions propre à chaque bruit sont visibles sur les figures suivantes :

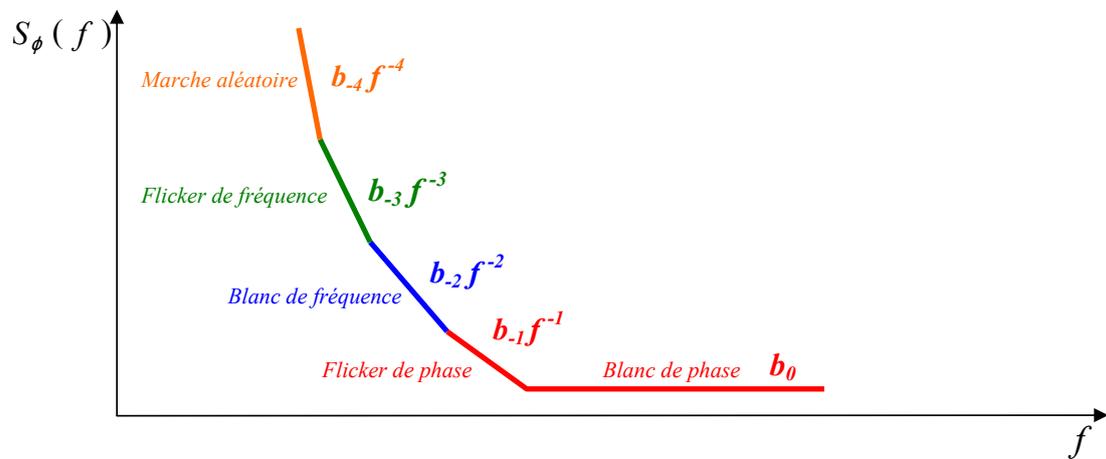


FIGURE 1.17 – Courbe type de la densité spectrale de phase.

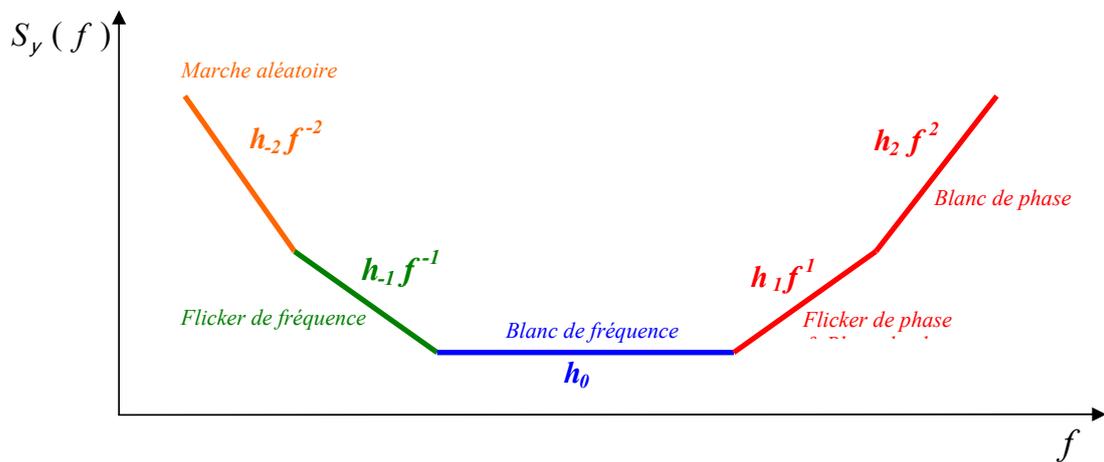


FIGURE 1.18 – Courbe type de la densité spectrale de fréquence.

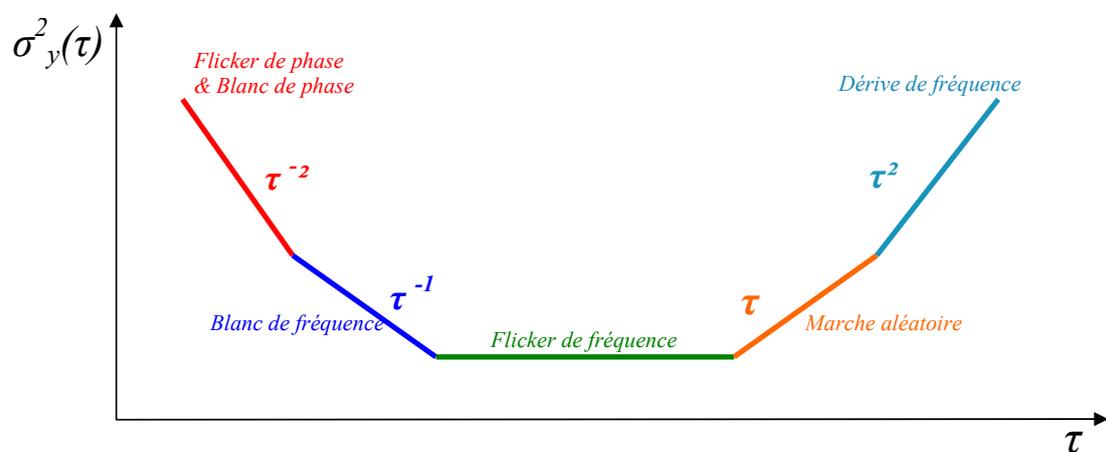


FIGURE 1.19 – Courbe type de la variance d'Allan.

### 1.3.2 Analyse théorique du bruit de phase : Leeson et Lee-Hajimiri

Le bruit de phase prend son origine dans le bruit des composants constituant le circuit oscillant. Le comportement non linéaire de l'oscillateur crée un phénomène de mélange des sources du bruit basse fréquence avec le signal haute fréquence à proximité de la fréquence d'oscillation. Nous allons présenter les deux modèles les plus répandus dans l'estimation de ce bruit de phase. Le premier, l'effet Leeson est caractérisé par son bruit qui est considéré invariant au cours du temps, alors que le second, le modèle de Lee-Hajimiri est un modèle non stationnaire.

#### Le modèle de Leeson : théorie linéaire et stationnaire

Le modèle de Leeson, du nom de son inventeur, a été développé en 1966. Il s'agit d'un modèle linéaire de prédiction du bruit de phase [48]. Son principe repose sur le bruit de l'amplificateur de la boucle d'oscillation qui est directement lié aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur. Ce bruit de l'amplificateur est composée d'un bruit blanc et d'un bruit en  $1/f$  (bruit Flicker). Ce bruit vient moduler la phase du signal autour de la porteuse. La représentation de ce phénomène est représentée sur la figure 1.20.

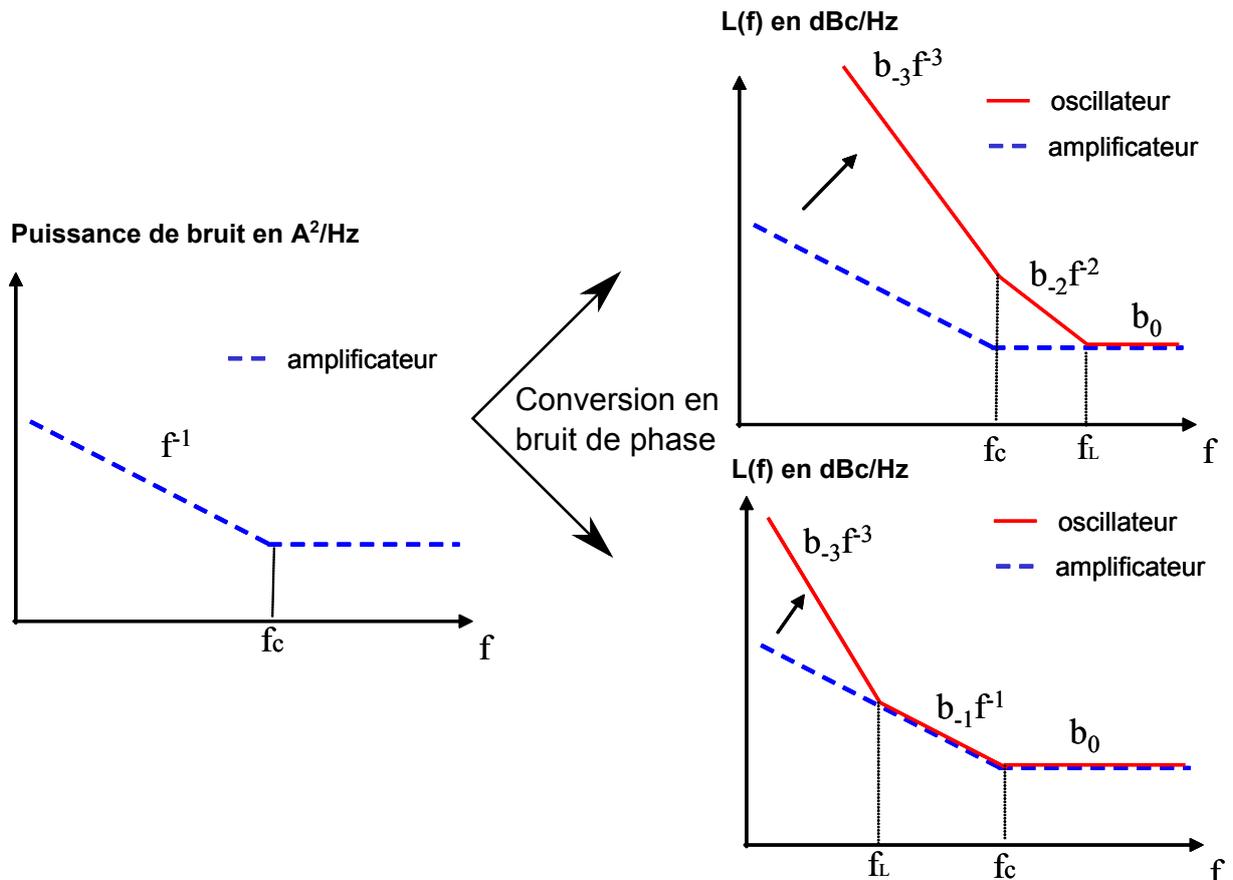


FIGURE 1.20 – Modèle de Leeson du bruit de phase.

Ce modèle met en évidence l'existence de deux fréquences de coupure. La première,  $f_c$  représente la fréquence de coupure entre le bruit blanc et le bruit Flicker des circuits

actifs de l'oscillateur, et la seconde  $f_L$  représente la fréquence de Leeson ( $f_L = \frac{f_0}{2Q}$ ) en dessous de laquelle la pente du bruit de phase est multipliée par  $f_{-2}$ . Suivant la position de la fréquence de coupure  $f_c$  par rapport à  $f_L$  différentes pentes de bruit apparaissent.

Lorsque  $f_c < f_L$  le bruit de l'oscillateur est formé de trois pentes en  $f^0$ ,  $f^{-2}$  et  $f^{-3}$ .

Lorsque  $f_c > f_L$  le bruit de l'oscillateur est formé de trois pentes en  $f^0$ ,  $f^{-1}$  et  $f^{-3}$ . Ainsi, le modèle de Leeson est défini par la formule Leeson-Cutler suivante :

$$L(f) = 10 \log \left[ \frac{FKT}{2P_R} \left( 1 + \frac{1}{f^2} \left( \frac{f_0}{2Q} \right)^2 \right) \left( 1 + \frac{f_c}{f} \right) \right] \quad (1.37)$$

Avec  $\frac{FKT}{P_R}$  le plancher du bruit de phase composé essentiellement du bruit thermique.  $F$  est le facteur de bruit,  $K$  la constante de Boltzman,  $T$  la température,  $P_R$  la puissance moyenne dissipée dans le circuit résonant et  $Q$  le facteur de qualité du circuit résonant. Cette formule est déduite d'un modèle simple par rapport aux phénomènes de conversion responsables du bruit de phase, cependant elle ne tient pas compte des comportements non linéaires des composants.

### Le modèle d'Hajimiri : théorie linéaire et non stationnaire

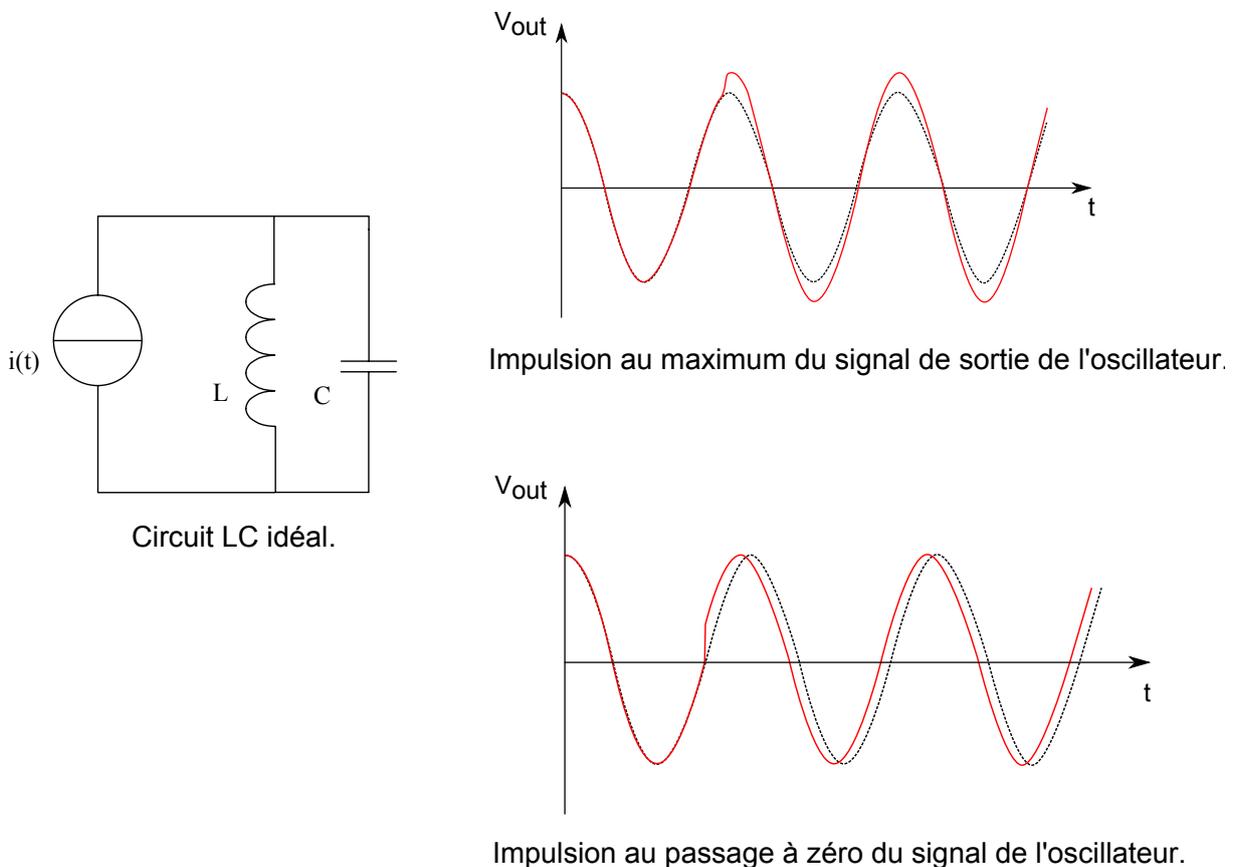


FIGURE 1.21 – Réponse de l'oscillateur suivant le moment de l'impulsion.

Le modèle d'Hajimiri est basé sur la variance temporelle où la réaction de l'oscilla-

teur dépend de l'instant d'injection du bruit. le principe est de déterminer la réponse impulsionnelle de la phase d'un oscillateur excité par une injection de faible amplitude assimilable à des courants de bruit. Hajimiri définit la fonction de sensibilité impulsionnelle ISF (Impulse sensitivity function) pour caractériser ce bruit de phase de l'oscillateur [49]. Suivant l'instant  $t$  où est injecté l'impulsion en courant, la réponse de l'oscillateur est différente. En effet, si l'impulsion est appliquée au moment du passage à zéro de la sortie, l'effet sur la phase sera maximum et inversement, si l'impulsion est appliquée au moment où le signal de sortie est à son maximum en amplitude, l'effet sera nul sur la phase. La figure 1.21 représente ce phénomène au moment de l'injection d'une impulsion dans un circuit LC.

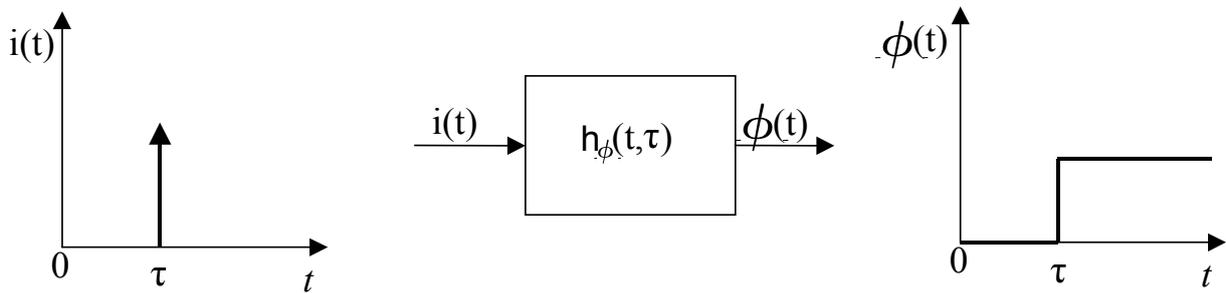


FIGURE 1.22 – Modèle de la réponse impulsionnelle de la phase.

La figure 1.22 représente la méthode permettant de calculer le bruit de phase en passant par le calcul de la fonction de transfert temporelle de la réponse en phase à une perturbation. La réponse impulsionnelle de la phase de l'oscillateur  $h_\phi(t, \tau)$  peut s'écrire :

$$h_\phi(t, \tau) = \frac{\Gamma(\omega_0\tau)}{q_{max}} u(t - \tau) \quad (1.38)$$

Avec  $q_{max} = CV_{max}$  représentant la charge maximale et la fonction  $u$  qui est la fonction échelon appliquée à l'instant  $\tau$ .  $\Gamma$  est la fonction de proportionnalité appelée ISF. Cette fonction est sans dimension, indépendante de la fréquence et de l'amplitude et de période  $2\pi$ . Elle traduit la sensibilité en phase de l'oscillateur. Cette fonction peut être déterminée par simulation ou par une méthode analytique dans certains cas [50][51]. Cette fonction se décompose en série de Fourier et s'exprime par :

$$\Gamma(\omega_0\tau) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0\tau + \theta_n) \quad (1.39)$$

Avec  $c_0..c_n$  représentant les coefficients de Fourier réels, et  $\theta_n$  la phase de la  $n^{ième}$  harmonique. Dans la suite  $\theta_n$  est ignoré en supposant que les composantes de bruits ne sont pas corrélées, de sorte que leur phase relative ne soit pas pertinente. La réponse en phase de l'oscillateur au courant de bruit  $i(t)$  injecté vaut :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\phi(t, \tau) i(\tau) d\tau = \frac{1}{q_{max}} \int_{-\infty}^t \Gamma(\omega_0\tau) i(\tau) d\tau \quad (1.40)$$

En injectant l'équation 1.39, la réponse en phase devient :

$$\phi(t) = \frac{1}{q_{max}} \left( \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^t i(\tau) \cos(n\omega_0\tau) d\tau \right) \quad (1.41)$$

La séquence correspondant à cette opération mathématique est représentée sur la partie gauche de la figure 1.23.

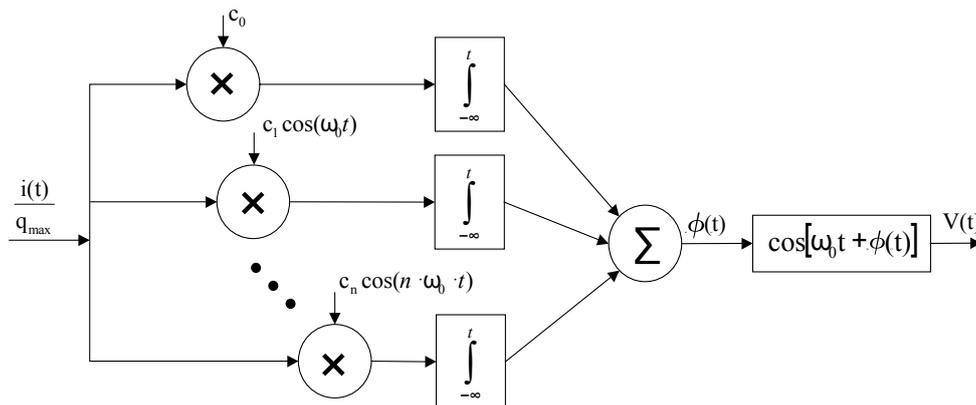


FIGURE 1.23 – Système équivalent pour la décomposition de la fonction de sensibilité impulsionnelle.

Considérons maintenant que le courant injecté soit sinusoïdal à une fréquence proche d'un multiple de la fréquence d'oscillation, de la forme :

$$i(t) = I_m \cos[(m\omega_0 + \Delta\omega)t] \quad (1.42)$$

où  $\Delta\omega \ll \omega_0$  et en remplaçant l'équation 1.42 dans l'équation 1.41 on remarque que les termes de l'intégrale sont négligeables sauf lorsque  $n = m$  et obtient la phase suivante :

$$\phi(t) \approx \frac{I_m c_m \sin(\Delta\omega t)}{2q_{max} \Delta\omega} \quad (1.43)$$

Le spectre de  $\phi(t)$  est constitué de deux bandes latérales distants de  $\pm\Delta\omega$ . Afin d'obtenir la densité spectrale de puissance de la tension de sortie de l'oscillateur, on peut écrire pour les petites valeurs de  $\phi(t)$  :

$$\cos(\omega_0 t + \phi(t)) \approx \cos(\omega_0 t) - \phi(t) \sin(\omega_0 t) \quad (1.44)$$

Ainsi, le rapport de puissance contenue dans une bande latérale par rapport à la puissance de la porteuse s'écrit :

$$P_{SB}(\Delta\omega) \approx 10 \log \left( \frac{I_m c_m}{2q_{max} \Delta\omega} \right)^2 \quad (1.45)$$

Ce cas peut être étendu à une source de bruit blanc de densité spectrale  $\bar{i}_n^2/\Delta f$  [52] :

$$L(\Delta\omega) = 10 \log \left( \frac{\frac{\bar{i}_n^2}{\Delta f} \sum_{n=0}^{\infty} c_m^2}{4q_{max}^2 \Delta\omega^2} \right) \quad (1.46)$$

La figure 1.24 illustre cette équation où les composantes de bruit à proximité des multiples entiers de la porteuse se rapportent autour de la porteuse elle-même.

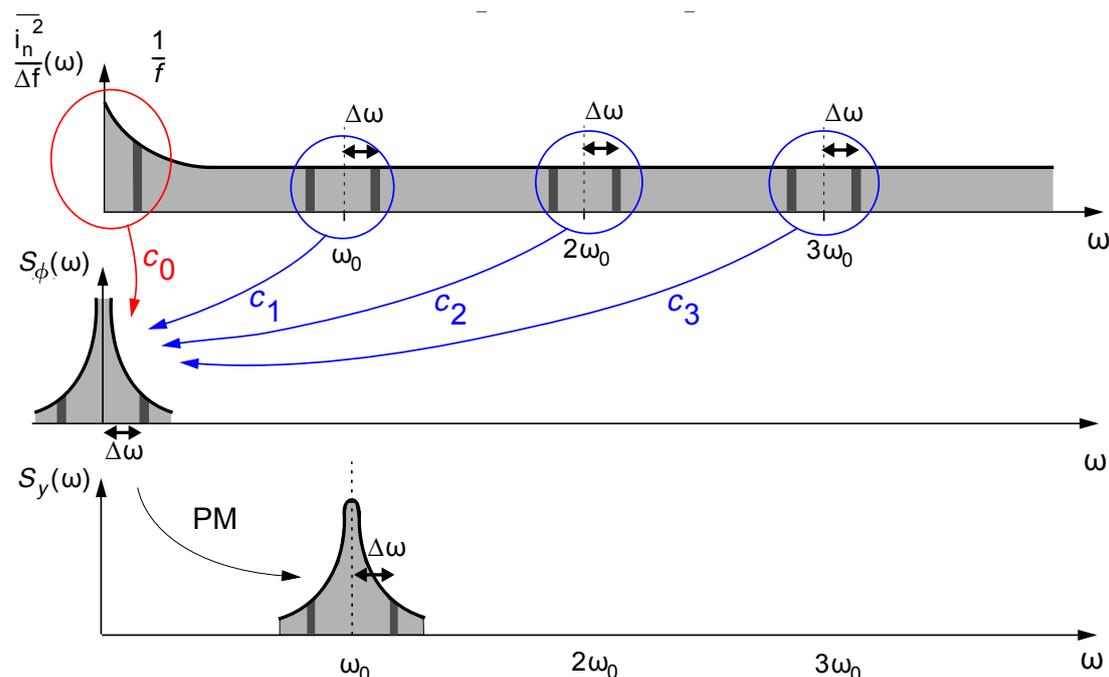


FIGURE 1.24 – Origine et évolution du bruit en bruit de phase autour de la porteuse.

Nous pouvons utiliser l'égalité de Parseval suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_m^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Gamma(x)| dx = 2\Gamma_{rms}^2 \quad (1.47)$$

La densité spectrale de bruit de phase dans la région  $1/f^2$  peut ainsi s'exprimer par :

$$L(\Delta\omega) = 10 \log \left( \frac{\frac{\bar{i}_n^2}{\Delta f} \Gamma_{rms}^2}{2q_{max}^2 \Delta\omega^2} \right) \quad (1.48)$$

La densité spectrale de la source de bruit en  $1/f$  peut s'exprimer par :

$$\bar{i}_{n,1/f}^2 = \bar{i}_n^2 \frac{\omega_{1/f}}{\Delta\omega} \quad (1.49)$$

où  $\omega_{1/f}$  est la fréquence de coin. En utilisant l'équation 1.46, on obtient la densité

spectrale de bruit dans la région  $1/f^3$  :

$$L(\Delta\omega) = 10 \log \left( \frac{\frac{\bar{i}_n^2}{\Delta f} c_0^2}{4q_{max}^2 \Delta\omega^2} \frac{\omega_{1/f}}{\Delta\omega} \right) \quad (1.50)$$

En égalisant l'équation 1.50 avec l'équation 1.48, on retrouve la fréquence séparant la région en  $1/f^2$  de la région  $1/f^3$  :

$$\Delta\omega_{1/f^3} = \omega_{1/f} \frac{c_0^2}{2\Gamma_{rms}^2} \quad (1.51)$$

Par des modifications très simples, le modèle Hajimiri-Lee peut aussi tenir compte de sources de bruit qui n'apparaissent périodiquement que dans un bref intervalle de temps. Pour cela, une modulation de la fonction ISF par un terme multiplicateur peut modéliser ce phénomène. Le modèle de Hajimiri-Lee est ainsi plus précis que le modèle de Leeson, mais il est plus difficile à mettre en oeuvre.

### 1.3.3 Méthode et moteur de simulation du bruit de phase

#### Simulation d'un circuit électronique

La simulation d'un circuit consiste à déterminer sa réponse à une ou plusieurs excitations continues et/ou variables. Le simulateur électrique Spice [53] [54] calcule numériquement la réponse d'un circuit à une excitation déterminée. Le simulateur résout les équations qui définissent les modèles mathématiques des composants du circuit. La technique de résolution consiste à discrétiser le temps sur un intervalle infini. Plus le pas de temps sera faible par rapport aux constantes de temps présentes dans le signal, plus la méthode sera précise. Ainsi, la précision d'analyse est reliée au temps de calcul. De plus, une erreur à l'instant  $t_i$  peut dégrader la solution à l'instant  $t_{i+1}$  dont les circuits à grand facteur de qualité sont sensibles.

Dans le cas d'une analyse de type DC (régime statique), il n'est pas possible de résoudre le système d'équation non linéaire du circuit, ainsi que pour une analyse petits signaux AC (régime dynamique), le circuit est linéarisé autour de son point de fonctionnement.

#### Les différents régimes permanents

Le régime permanent (Steady-state) d'un circuit désigne sa réponse lorsque les effets des conditions initiales ont disparu. Ces différents types de régimes sont (figure 1.25) :

- Le régime permanent statique (DC), la solution est le point de polarisation qui ne varie pas avec le temps.
- Le régime permanent périodique des circuits linéaires, où l'excitation se fait par une seule source sinusoïdale et sa réponse est elle-même sinusoïdale.

- Le régime permanent périodique des circuits non linéaires (Periodic steady-state), où l'excitation se fait par une seule source périodique et la réponse n'est pas nécessairement sinusoïdale mais de même période que le signal d'excitation.

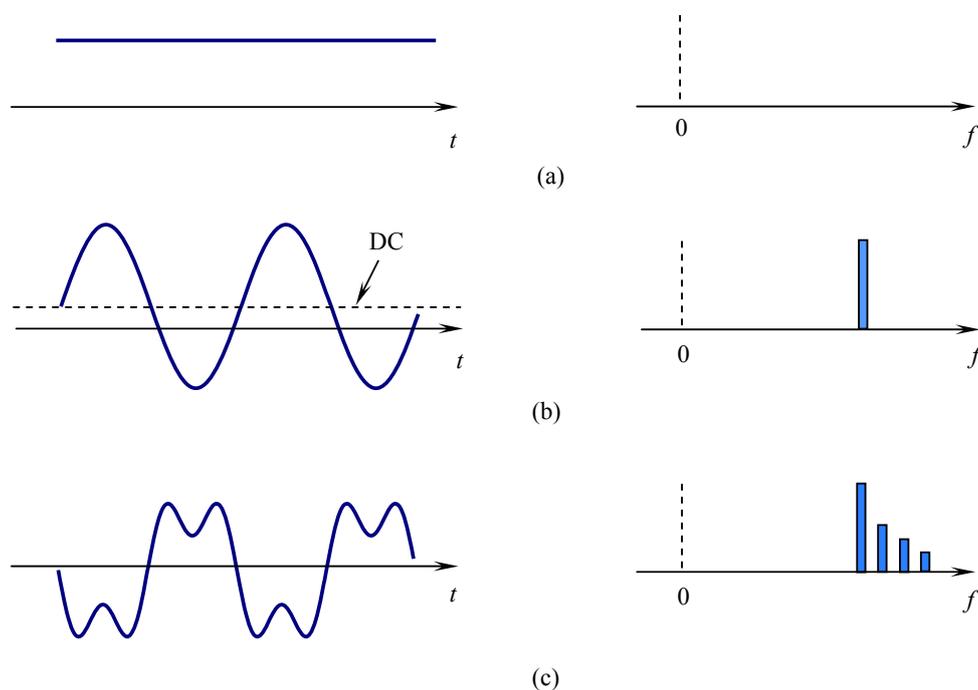


FIGURE 1.25 – Différents types de régimes permanents : (a) statique, (b) circuit linéaire excité par une source linéaire, (c) circuit non linéaire excité par une source périodique.

Les différentes méthodes permettant de déterminer le régime permanent périodique d'un circuit non linéaire sont la méthode balistique ou la méthode d'équilibrage harmonique (harmonic-balance) [55] [56]. Ces méthodes permettent d'obtenir la solution plus rapidement qu'un simulateur tel que Spice.

### La méthode Newton-balistique

Pour décrire l'état d'équilibre électrique d'un circuit non linéaire, on exprime la loi de courant de Kirchhoff en tout noeud du circuit sous la forme [57] :

$$f(v(t), t) = i(v(t)) + \dot{q}(v(t)) + u(t) = 0 \quad (1.52)$$

avec  $v$  le vecteur des tensions des noeuds,  $i$  la somme des courants aux noeuds,  $q$  la somme des charges aux noeuds des capacités et  $u$  le vecteur des sources de courant. Pour commencer, on résout sur l'intervalle  $T$  l'équation 1.52 en partant d'une condition initiale  $v(0)$  et on calcule  $v(T)$ . Ensuite, l'algorithme de la méthode permet de corriger la condition initiale  $v(0)$  par un processus itératif afin de vérifier l'équation suivante :

$$v(0) - v(T) = 0 \quad (1.53)$$

L'organigramme de cette méthode est présenté sur la figure 1.26 :

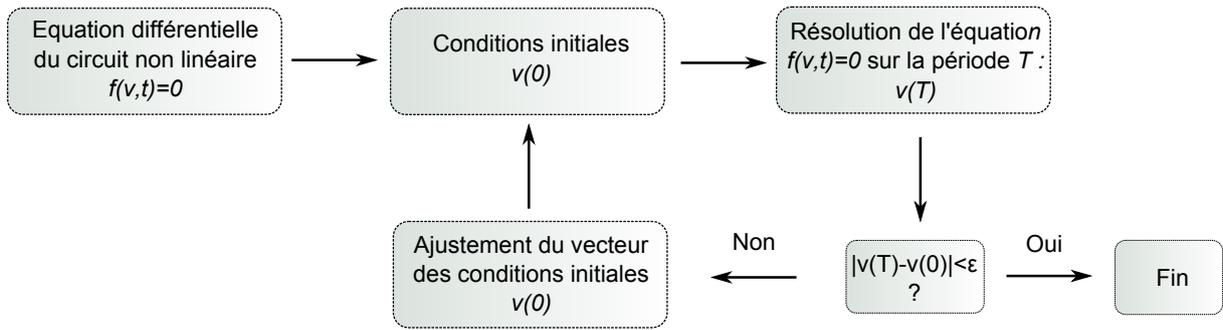


FIGURE 1.26 – Organigramme de la méthode balistique.

La figure 1.27 représente le processus de la solution par itération. On part d'un état  $v(0)^k$  où  $k$  représente le numéro d'itération. Dans le cas où  $v(T)^k$  n'est pas relativement égale à  $v(0)^k$ , une nouvelle itération est effectuée à l'état initial  $v(0)^{k+1}$ . La solution finale est obtenue lorsque  $v(T)^{k+1} \approx v(0)^{k+1}$ .

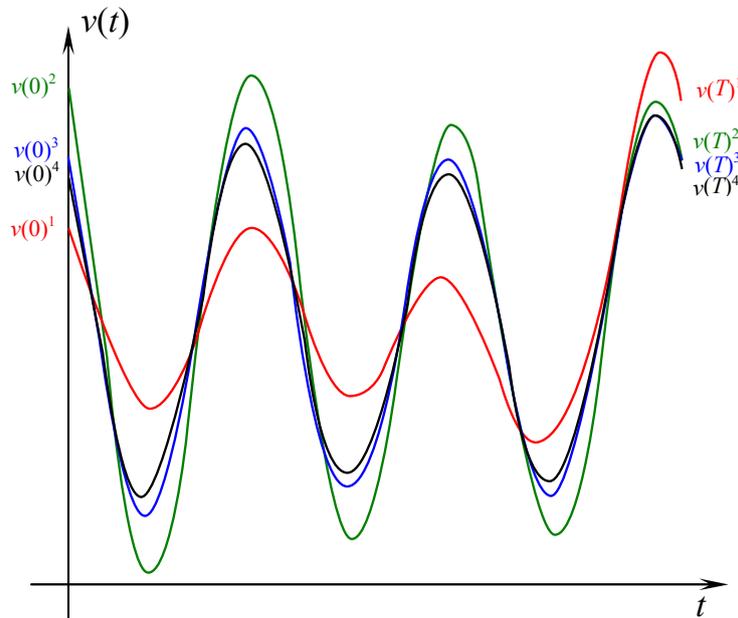


FIGURE 1.27 – processus d'itération de la méthode balistique.

### L'analyse Periodic Steady State (PSS)

L'analyse Periodic Steady State (PSS) de Cadence calcule directement la réponse périodique à l'état stationnaire d'un circuit lorsqu'il est soumis à une excitation périodique. Cette analyse utilise la méthode Newton-balistique précédemment développée. L'analyse PSS peut ne pas converger dans deux cas. Le premier cas est si la réponse n'est pas périodique alors que celle de l'excitation du circuit l'est. Le second cas est que la relation entre l'état initial du circuit et l'état final du circuit doit être quasi linéaire sinon l'analyse peut prendre un long temps avant de converger. L'analyse PSS peut se décomposer en deux phases [58] :

- La phase d’initialisation par une analyse temporelle par des condition initiales arbitraires.
- La phase balistique qui calcule le régime permanent périodique du circuit.

Différents intervalles de temps apparaissent dans l’analyse PSS. Le premier intervalle commence à  $t_{start}$  où l’analyse temporelle est effectuée. Ensuite la valeur  $t_{onset}$  est automatiquement déterminée par le simulateur à partir duquel les sources indépendantes sont considérées comme étant en régime périodique. Le second intervalle d’une durée  $t_{stab}$  est une option pour l’utilisateur pour augmenter le temps de stabilisation. Dans le cas d’un oscillateur, ce temps de stabilisation correspond au temps de démarrage de l’oscillateur, égal au produit du facteur de qualité du résonateur par sa période propre. Cet intervalle aide à la convergence de la réponse. Le dernier intervalle est compris entre la date  $t_{init}$  et  $t_{stop}$ . Cet intervalle est déterminé par la fréquence de résonance et dure une période. Pendant cette période la phase balistique commence. La figure 1.28 résume les différentes étapes de l’analyse PSS.

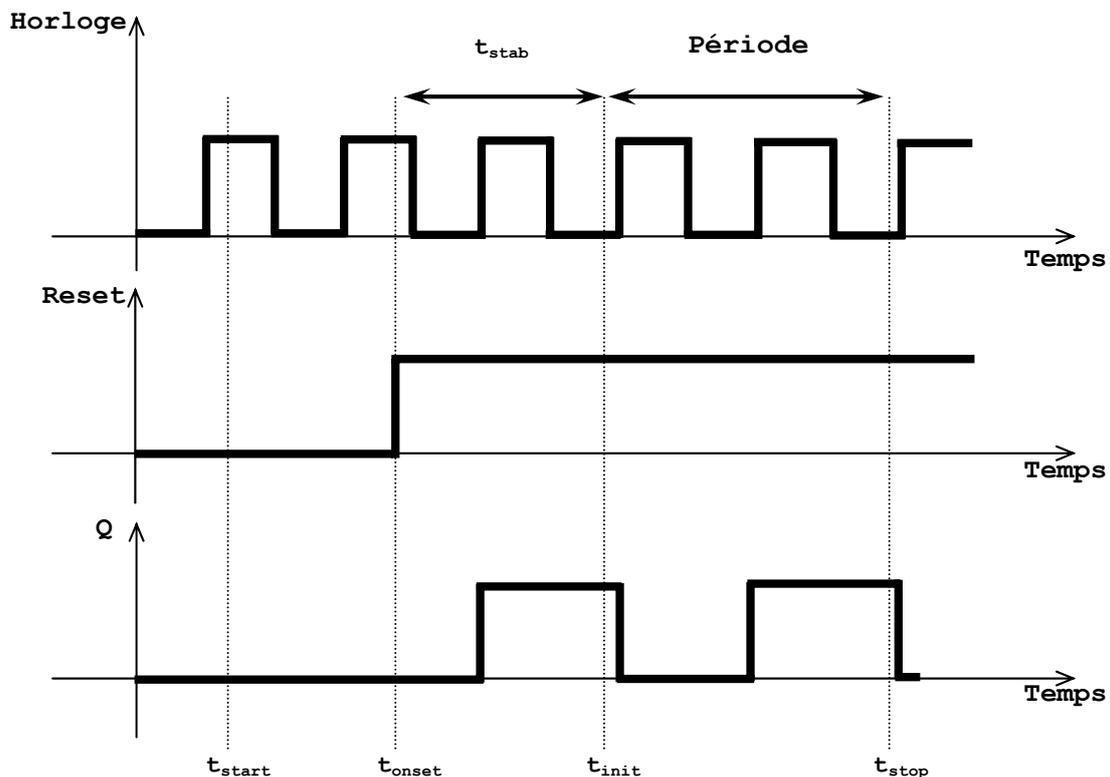


FIGURE 1.28 – Chronogramme des différentes étapes de l’analyse PSS.

### L’analyse Periodic Noise (Pnoise)

Cette analyse du bruit périodique Pnoise implantée dans le logiciel CADENCE est similaire à l’analyse de bruit classique mais dans le cas de circuits pour lesquels les signaux sont périodiques. Elle intègre les effets des non linéarités présents dans notre circuit. L’analyse Pnoise permet de ressortir le comportement en bruit des mélangeurs, des filtres à capacités commutés ou des circuits oscillateurs. Dans notre cas, elle permet de ressortir

le bruit de phase de notre système nécessaire pour déterminer la stabilité de fréquence de notre oscillateur. Une analyse PSS est antérieurement nécessaire pour se placer autour du point de fonctionnement précédemment calculé. L'analyse Pnoise regroupe le bruit total de tous les composants et sources de bruits précédemment entrés dans le circuit. Cette analyse prend en compte le bruit qui est mélangé à chaque harmonique du signal d'excitation et qui apparait à la fréquence de sortie. Le paramètre "maxsideband" permet de donner le nombre d'harmoniques pris en compte dans la simulation du bruit. Ces simulations permettent d'estimer le bruit de phase d'un oscillateur. La mesure de la stabilité de fréquence peut quand à elle s'effectuer dans le domaine temporel ou fréquentiel par un post traitement.

### 1.3.4 Les moyens de mesure de la stabilité de fréquence.

#### Les mesures temporelles

Les mesures de stabilité de fréquence dans le domaine temporel se réalisent à partir de la variance d'Allan. Cette variance d'Allan peut-être calculée à partir des mesures d'un compteur. En effet, le compteur permet d'obtenir les différentes fréquences du capteur pour des temps d'intégration donnés. En automatisant la procédure, et en effectuant un post traitement, il est possible de restituer cette variance d'Allan. Les performances d'une telle mesure seront limitées par la précision de l'horloge nécessaire au fonctionnement du compteur et par le temps mort entre deux mesures.

Dans le commerce, des entreprises construisent des compteurs capables de mesurer directement la variance d'Allan où le post traitement se fait directement dans l'appareil. L'entreprise Stanford Research Systems réalise ce type de compteur comme le SR620. La façade de ce compteur est visible sur la figure 1.29 et quelques spécifications sont données dans le tableau 1.6.



FIGURE 1.29 – Façade du compteur SR620 de Stanford Research Systems.

Fréquence	Variance d'Allan (1s)	Stabilité de 0°C à 50°C
0.001Hz à 1.3GHz	$3.10^{-10}$	1ppm

TABLE 1.6 – Spécifications du compteur SR620.

## Les mesures fréquentielles

Les mesures de stabilité de fréquence dans le domaine fréquentiel sont réalisées par un banc de mesure du bruit de phase. Ce banc est composé d'une source de référence asservie sur la fréquence de la source à mesurer. Un mélangeur actif ou passif ainsi qu'un filtre passe bas est nécessaire. Ce type de banc est généralement conçu directement par les laboratoires où ils peuvent les adapter à leur type de mesure. Le laboratoire Femto-st de Besançon a publié quelques articles sur la conception de leur banc de bruit de phase qui permet des mesures faibles bruits [59] [60].

Des entreprises vendent des appareils de mesure du bruit de phase prêt à l'emploi. L'entreprise Rhode and Schwarz est leader de ce marché et produit par exemple l'analyseur de signal FSV visible sur la figure 1.30. Quelques spécifications sont décrites dans le tableau 1.7.



FIGURE 1.30 – Façade de l'analyseur spectrale de Rhode and Schwarz.

Fréquence porteuse	Bruit de phase (100Hz)	Stabilité de 0°C à 50°C
10Hz à 7Ghz	-120dBc/Hz	1ppm

TABLE 1.7 – Spécifications de l'analyseur de signal FSV.

## 1.4 Conclusion sur l'état de l'art

Une étude bibliographique a été effectuée pour présenter les différents capteurs MEMS vibrants à sortie fréquentielle. Cette étude a montré que ces types de capteur permettent de mesurer des grandeurs physiques telles qu'une accélération, une masse, une pression ou encore une température. Ces capteurs vibrants multiphysique comportent une partie mécanique (le résonateur), un type de transduction et un circuit oscillateur. Cet état de l'art a aussi montré qu'il existait des outils pour estimer la stabilité de fréquence d'un signal (bruit de phase et variance d'Allan), des logiciels pour la simuler (simulateur SpectreRF sous Cadence) et des appareils pour la mesurer (analyseur de spectre et compteur) sans jamais la prédire.

# Chapitre 2

## Développement des modèles comportementaux pour l'étude des oscillateurs de type MEMS.

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation générale d'un oscillateur de type MEMS . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>2.2</b>	<b>Développement du modèle comportemental du résonateur mécanique . . . . .</b>	<b>46</b>
2.2.1	Expression analytique de l'équation linéaire du mouvement . . .	47
2.2.2	Expression des non-linéarités mécaniques . . . . .	51
2.2.3	Expression du bruit mécanique . . . . .	55
2.2.4	Construction du modèle Verilog-A . . . . .	58
<b>2.3</b>	<b>Développement des modèles de transduction . . . . .</b>	<b>58</b>
2.3.1	Développement du modèle pour la transduction piézoélectrique	60
2.3.2	Développement du modèle pour la transduction électrostatique	64
2.3.3	Développement du modèle pour la transduction optique . . . . .	67
<b>2.4</b>	<b>Conclusion sur le développement des modèles comporte- mentaux . . . . .</b>	<b>78</b>

---

Ce chapitre présente une étude théorique des oscillateurs incluant un micro-résonateur mécanique (appelés oscillateurs MEMS). Ce chapitre est divisé en trois parties : la première porte sur la présentation générale d'un oscillateur de type MEMS, la seconde sur le développement du modèle comportemental du résonateur mécanique et la troisième sur les différents types de transduction. Cette modélisation, dans un second temps, permettra d'identifier les facteurs limitant la résolution fréquentielle et de comparer les différentes architectures d'oscillateurs MEMS dans le but d'obtenir une résolution ultime.

## 2.1 Présentation générale d'un oscillateur de type MEMS

Dans le but d'identifier les paramètres limitants la résolution fréquentielle des oscillateurs MEMS un modèle multiphysique constitué d'ODE (Ordinary Differential Equation) est développé. Ce modèle sera utilisé dans le logiciel Cadence qui permet des simulations précises d'oscillateurs (démarrage, bruit de phase) comme précisé dans la bibliographie. Il est divisé en trois parties distinctes comme présenté sur la figure 2.1 :

- Le résonateur mécanique modélisé par un système masse-ressort (Verilog-A). On se limitera dans cette étude aux résonateurs généralement utilisés dans le domaine des capteurs MEMS c'est à dire une poutre vibrant en flexion encastree-encastree dans la gamme de fréquence de  $10kHz$  à  $100kHz$ .
- Le type de transduction : les systèmes d'excitation et de détection sont modélisés par des équations écrites en Verilog-A. Dans notre étude, on se limitera aux transductions piézoélectrique, électrostatique et optique. En effet les deux premières sont classiques dans le domaine des MEMS et l'analyse bibliographique a montré que la transduction optique promet un fort potentiel en terme de résolution de mesure.
- Le circuit oscillateur : sa construction est faite grâce aux modèles constructeurs (Spice) ou avec les modèles développés en Verilog-A.

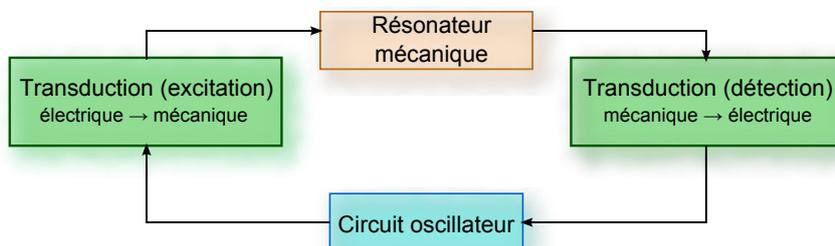


FIGURE 2.1 – Description des blocs constituant un oscillateur MEMS.

Dans les paragraphes suivants, chaque partie du système est modélisée séparément. Par la suite, une analyse sur des capteurs réels permettra d'identifier les facteurs limitant la résolution fréquentielle.

## 2.2 Développement du modèle comportemental du résonateur mécanique

Le résonateur est la principale partie du système, qui est sensible au mesurande. Dans un premier temps, un modèle comportemental linéaire du résonateur mécanique est développé puis les non-linéarités et le bruit intrinsèque sont ajoutés.

### 2.2.1 Expression analytique de l'équation linéaire du mouvement

Le résonateur est constitué d'une micro-poutre vibrant en flexion, définie par trois grandeurs dimensionnelles :  $e$  son épaisseur vibrante,  $h$  sa hauteur,  $L$  sa longueur (figure 1.1 du chapitre 1) et par deux grandeurs physiques du matériau utilisé :  $\rho$  pour la masse volumique et  $E$  pour le module d'Young. La modélisation comportementale (Verilog-A) de ce résonateur va permettre de relier la force mécanique appliquée à la poutre à son déplacement. On peut modéliser le résonateur à lame vibrante par un système oscillant à un degré de liberté. En effet, son déplacement varie en fonction du temps selon un seul axe. Ce déplacement est régi par une équation différentielle du second ordre qui en mécanique peut se représenter par un modèle masse-ressort-amortisseur présenté sur la figure 2.2.

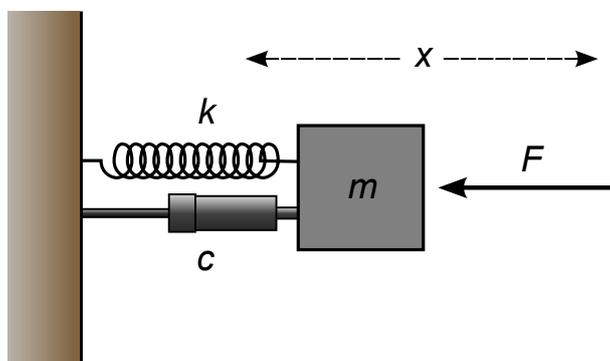


FIGURE 2.2 – Représentation schématique du système masse-ressort-amortisseur.

L'équation différentielle du second ordre associée à ce modèle est la suivante (équation 2.1) :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (2.1)$$

$F$  [ $kg.m.s^{-2}$ ] est la force d'excitation,  $x$  [ $m$ ] le déplacement mécanique de la masse d'épreuve,  $m$  [ $kg$ ] la masse,  $k$  [ $kg.s^{-2}$ ] la constante de raideur, et  $c$  [ $kg.s^{-1}$ ] le coefficient d'amortissement.

L'élément vibrant de ce système est une masse  $m$  qui représente la masse vibrante effective de la poutre. On peut définir deux paramètres du mode de résonance,  $Q$  le facteur de qualité représentant le taux d'amortissement du résonateur et  $\omega_0$  sa pulsation propre (équation 2.2).

$$\begin{cases} Q = \frac{m\omega_0}{c} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad (2.2)$$

L'équation 2.1 peut alors s'écrire sous la forme suivante, ce qui simplifiera les calculs

ultérieurs :

$$m\ddot{x} + \frac{m\omega_0}{Q}\dot{x} + m\omega_0^2x = F \quad (2.3)$$

### Expression analytique des paramètres motionnels

Les coefficients de l'équation 2.3 peuvent s'écrire à l'aide des paramètres de la poutre étudiée. Pour les obtenir, on peut utiliser la modélisation de la déformée dans une hypothèse quasi-statique de Rayleigh (Annexe A) ou grâce à la déformée modale  $X_n(y)$  dans le formalisme d'Euler Bernoulli que l'on va détailler ci-dessous. Pour déterminer la masse efficace  $m_{eff}$  et la raideur  $k_{eff}$ , il faut d'une part lier le maximum d'énergie potentielle entre la poutre et le système masse-ressort puis faire de même avec l'énergie cinétique [61].

Dans le cas de l'énergie potentielle, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}k_{eff}X_{n_{max}}^2 = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left( \frac{\partial^2 X_n}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (2.4)$$

Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire, on obtient :

$$k_{eff} = \frac{Ehe^3 \int_0^L \left( \frac{\partial^2 X_n}{\partial y^2} \right)^2 dy}{12 X_{n_{max}}^2} \quad (2.5)$$

Pour le premier mode de déformation en flexion, avec l'équation 1.7, l'équation 1.8 et l'équation 1.11 on a :

$$X_{n_{max}}^2 = X_n^2 \left( \frac{L}{2} \right) \approx 2.62b_1^2 \quad (2.6)$$

$$\int_0^L \left( \frac{\partial^2 X_n}{\partial y^2} \right)^2 dy \approx 518 \frac{b_1^2}{L^3} \quad (2.7)$$

On obtient ainsi comme raideur efficace :

$$k_{eff} = \frac{16Ehe^3}{L^3} \quad (2.8)$$

Dans le cas de l'énergie cinétique, l'égalisation des énergies maximales s'écrit :

$$\frac{1}{2}m_{eff} \left( \frac{\partial X_n}{\partial t} \right)_{max}^2 = \frac{1}{2}\rho eh \int_0^L \left( \frac{\partial X_n}{\partial t} \right)^2 dy \quad (2.9)$$

En présence d'un mouvement harmonique à la pulsation  $\omega$  :

$$\left( \frac{\partial X_n}{\partial t} \right)_{max} = \omega X_{n_{max}} \quad (2.10)$$

L'expression de masse efficace  $m_{eff}$  devient :

$$m_{eff} = \frac{\rho e h \int_0^L X_n^2(y) dy}{X_{n_{max}}^2} \quad (2.11)$$

Pour le premier mode de déformation en flexion, avec l'équation 1.11 on a :

$$m_{eff} = \int_0^L X_n^2(y) dy \approx 1.03 L b_1^2 \quad (2.12)$$

On obtient ainsi comme masse efficace :

$$m_{eff} \approx 0.38 \rho h e L \quad (2.13)$$

Avec l'aide de l'équation 1.10 exprimant la pulsation propre  $\omega_0$ , l'expression du coefficient d'amortissement peut s'exprimer sous cette forme :

$$c = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{k}{Q\omega_0} = \frac{16Ehe^3}{L^3} \frac{2\sqrt{3}}{Q\pi^2\beta_1^2} \frac{L^2}{e} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{2.48}{Q} \frac{he^2}{L} \sqrt{\rho E} \quad (2.14)$$

Finalement l'équation 2.3 peut s'écrire avec les paramètres du matériau et de la géométrie de la poutre comme sur l'équation 2.15 suivante :

$$0.38\rho h e L \ddot{x} + \frac{2.48}{Q} \frac{he^2}{L} \sqrt{\rho E} \dot{x} + \frac{16Ehe^3}{L^3} x = F \quad (2.15)$$

Le dernier paramètre  $Q$  représentant le facteur de qualité peut aussi être exprimé en fonction de la géométrie et du matériau de la poutre. En effet, on peut distinguer cinq mécanismes principaux de dissipation des oscillateurs MEMS.

### Expression analytique du facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un résonateur représente sa capacité à conserver son énergie mécanique au cours de la vibration. L'ensemble des différents mécanismes de dissipation qui interviennent dans les micro-résonateurs vibrants en flexion a été développé en détail dans la thèse de Baptiste le Foulgoc [61].

**Les pertes par le support** Le résonateur est une partie mobile mais fixé au support. Une partie de l'énergie vibratoire est transmise au support et est ainsi dissipée. Ces pertes, appelées pertes par le support, ont pour conséquences de diminuer le facteur de qualité. Elles peuvent être fortement diminuées grâce à des structures de découplage qui ont pour effet de diminuer les sollicitations de la structure sur la fixation. Par exemple, sur le VIA (Vibrating Inertial Accelerometer), conçu par l'Onera [19], un cadre de découplage est présent afin d'isoler efficacement les vibrations utiles de la lame vibrante de l'encastrement.

**L'amortissement gazeux** Un second principe qui détériore le facteur de qualité est l'amortissement gazeux. Dans un premier cas, les parois de la poutre interagissent avec le gaz environnant, une force de frottement se crée et induit une perte d'énergie. Dans un second cas, pour le cas de faibles gaps, par exemple dans l'excitation ou la détection capacitive, un phénomène appelé "squeeze-film damping" intervient. Les molécules de gaz se retrouvent piégées entre les deux parois. Ce facteur de qualité  $Q_{squeeze}$  a été exprimé par Minhang Bao [62] en considérant la théorie cinétique des gaz [63]. On retrouve ce résultat dans la thèse de Baptiste Le Foulgoc [61] pour une poutre encastree aux deux extrémités :

$$Q_{squeeze} = \frac{\pi^3 \sqrt{\pi} \beta_1^2}{\sqrt{6}} \frac{ge^2}{L^2(L+h)} \frac{1}{P} \sqrt{\frac{E\rho R_0 T}{M_{gaz}}} \quad (2.16)$$

où  $\beta_1$  est le paramètre du mode principal de la poutre de l'équation 1.10,  $g$  représente la dimension du gap de gaz,  $L, h, e$  sont les dimensions de la poutre vibrante,  $P$  la pression du gaz,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $R_0$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température en Kelvin et  $M_{gaz}$  la masse moléculaire du gaz.

Ainsi, pour que le résonateur ne soit pas affecté, il est nécessaire de fonctionner sous vide. Le niveau de vide nécessaire à atteindre afin de minimiser cette dissipation dans le cas des oscillateurs MEMS étudiés est de l'ordre de  $10^{-3} mbar$  [61].

**La viscosité intrinsèque du matériau** La viscosité intrinsèque du matériau crée des pertes d'énergies pendant la vibration. Elle s'exprime en fonction du module d'Young, de la viscosité du matériau et de la pulsation propre du système. Dans notre gamme d'oscillateurs MEMS, cette dissipation est négligeable.

**L'effet thermoélastique** Le dernier mécanisme est l'effet thermoélastique qui est la principale source de dissipation, et qui est causé par le couplage entre les champs thermique et de déformation au sein du résonateur. Lorsqu'un solide thermoélastique est en mouvement, il se trouve en déséquilibre thermique à cause d'une augmentation ou diminution locale de température des fibres de la poutre. Le système incite à se relaxer pour retrouver son état d'équilibre. Dans le cas d'une poutre en vibration de flexion, Clarence Zener a développé des expressions pour décrire ce phénomène [64, 65]. Selon la théorie de Zener, l'expression du facteur de qualité thermoélastique est :

$$Q_{thermo} = \frac{\rho C_p}{\alpha^2 T_0 E} \frac{f_r^2 + f_t^2}{f_r f_t} \text{ avec } f_t = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\rho C_p e^2} \quad (2.17)$$

où  $\rho [kg.m^{-3}]$  est la masse volumique,  $C_p [kg.m^{-3}]$  est la chaleur spécifique à pression constante,  $\alpha [K^{-1}]$  représente le coefficient de dilatation thermique,  $T_0 [K]$  est la température,  $E [N.m^2]$  est le module d'Young,  $\lambda [W.m^{-1}.K^{-1}]$  la conductibilité thermique,  $f_r$  la fréquence de résonance et  $f_t$  la fréquence de transition. En fonction des paramètres

géométriques de la poutre, on obtient :

$$Q_{thermo} = \frac{0.65e^6 \rho EC_p^2 + 1.53L^4 \lambda^2}{e^3 L^2 \sqrt{E^3} \alpha^2 \lambda T_0} \sqrt{\rho} \quad (2.18)$$

Cette valeur  $Q_{thermo}$  du facteur de qualité peut être appliquée aux oscillateurs MEMS de notre étude. En effet, le  $Q$  du résonateur s'exprime comme la somme des différents contributeurs  $Q_i$  à la dissipation d'énergie :

$$\frac{1}{Q} = \sum_i \frac{1}{Q_i} \quad (2.19)$$

$Q_{thermo}$  étant la valeur la plus petite par rapport aux autres facteurs de qualité présents, il est le principal contributeur des pertes d'énergie de notre système. Ainsi, le facteur de qualité  $Q$  s'exprime par l'équation 2.20 suivante :

$$\frac{1}{Q} \approx \frac{1}{Q_{thermo}} \quad (2.20)$$

Dans l'équation 2.21 le  $Q$  est remplacé par ce nouveau  $Q_{thermo}$ , la nouvelle expression du comportement dynamique de la poutre est :

$$0.38\rho h e L \ddot{x} + \frac{h e^5 L E^2 \alpha^2 \lambda T_0}{0.26 \rho e^6 E C_p^2 + 0.62 \lambda^2 L^4} \dot{x} + \frac{16 E h e^3}{L^3} x = F \quad (2.21)$$

Cette équation peut être affinée en ajoutant le comportement non-linéaire présent lorsque l'amplitude d'excitation est importante.

## 2.2.2 Expression des non-linéarités mécaniques

### Expression du terme des non-linéarités dans l'équation du mouvement

Un facteur non linéaire peut être introduit pour décrire une force de rappel de la poutre [66]. Il s'agit d'une non-linéarité mécanique en  $x^3$  présente dans le résonateur. Il peut être exprimé en fonction des paramètres géométriques et matériau du résonateur [67]. Cette déformation résulte d'une force axiale supplémentaire causée par le changement de longueur de la poutre.

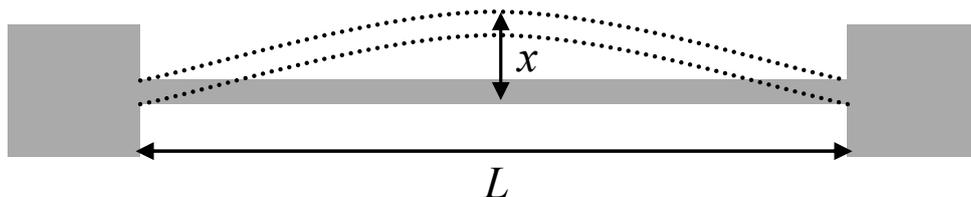


FIGURE 2.3 – Déformée d'une poutre vibrante encastree-encastree.

Pour le calcul du terme anharmonique, le profil du déplacement (figure 2.3) est approximé à un triangle comme présenté sur la figure 2.4. La nouvelle longueur de la poutre

au maximum de la déformée est notée  $L_{max}$ . On obtient ainsi l'équation 2.22 :

$$L_{max}^2 \approx L^2 + (2x)^2 \iff L_{max} \approx L\sqrt{1 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2} \quad (2.22)$$

Après un développement limité d'ordre 1, l'équation 2.22 s'écrit :

$$L_{max} \approx L \left[ 1 + 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

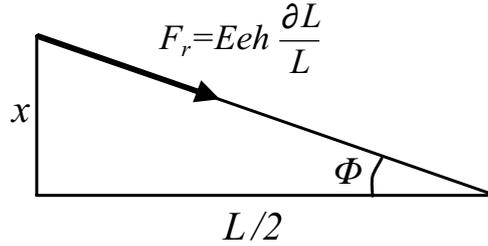


FIGURE 2.4 – Approximation du profil du déplacement pour le calcul des non-linéarités.

La poutre soumise à la force de traction va suivre la Loi de Hooke (équation 2.24) suivante :

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.24)$$

où  $\epsilon$  représente l'allongement relatif et  $\sigma$  la contrainte, définie par la relation  $\sigma = \frac{F_r}{S}$ , avec  $S$  l'aire de la section droite de la poutre. Cette force de rappel  $F_r$  peut donc s'exprimer par l'équation 2.25 :

$$F_r = \sigma S = Eeh \frac{\partial L}{L} \quad (2.25)$$

La vibration se faisant selon  $x$ , la direction de la force résultante de l'élongation de la poutre  $F_x$  doit être selon cet axe, on arrive à l'équation 2.26 suivante :

$$F_x = 2F_r \sin \phi = 2Eeh \frac{(L_{max} - L)}{L} \frac{2x}{L_{max}} \quad (2.26)$$

avec l'aide de l'équation 2.23, on en déduit l'équation 2.27 :

$$F_x \approx 8Eeh \left( \frac{x}{L} \right)^2 \frac{x}{L_{max}} \approx 8Eeh \frac{x^3}{L^3} \quad (2.27)$$

Il faut rajouter ce terme dû à l'élongation de la poutre dans l'équation 2.21 pour obtenir le comportement non linéaire de la poutre, on obtient ainsi l'équation 2.28 de

Duffing :

$$0.38\rho heL\ddot{x} + \frac{he^5LE^2\alpha^2\lambda T_0}{0.26\rho e^6EC_p^2 + 0.62\lambda^2L^4}\dot{x} + \frac{16Ehe^3}{L^3}x + \frac{8Ehe}{L^3}x^3 = F \quad (2.28)$$

### Expression de la force critique et de l'amplitude critique avant les non-linéarités

Ces non-linéarités sont une limite au fonctionnement du capteur. En effet, lorsque la force d'excitation croît, la courbe de résonance se déforme. Après un certain seuil, la rupture brutale de la courbe de résonance est une source d'instabilité dans une boucle oscillatrice. Il est ainsi nécessaire de quantifier cette amplitude critique de vibration pour travailler dans le domaine linéaire.

Dans les conditions linéaires du résonateur, à partir de l'équation 2.2, on obtient le déplacement en fonction de la pulsation :

$$x(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (2.29)$$

On se considère désormais au voisinage de la résonance tel que :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \quad (2.30)$$

le développement au premier ordre nous donne :

$$x(\omega) = \frac{F_0}{2m} \frac{1}{\left(\epsilon\omega_0 \left(\frac{j}{2Q} - 1\right) + \frac{j\omega_0^2}{2Q}\right)} \approx \frac{F_0}{2m\omega_0} \frac{1}{\left(\frac{j\omega_0}{2Q} - \epsilon\right)} \quad (2.31)$$

Le carré de l'amplitude du mouvement au voisinage de  $\epsilon$  de la résonance s'écrit :

$$A^2(\epsilon) = |x(\epsilon)|^2 = \frac{F_0^2}{4m^2\omega_0^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}\right)} \quad (2.32)$$

Le caractère non-linéaire conduit à une relation entre la nouvelle raideur  $k_{nl}$  et l'amplitude de vibration développée dans l'équation 2.28 :

$$k_{nl} = k(1 + \kappa A^2) \iff \omega_{nl}^2 = \omega_0^2(1 + \kappa A^2) \quad (2.33)$$

$$\text{avec } \kappa = \frac{1}{2e^2}.$$

Cette nouvelle pulsation propre du système dépend elle même de l'amplitude :

$$\omega_{nl}^2 = \omega_0^2(1 + \kappa A^2) \iff \omega_{nl} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\kappa A^2}{2}\right) = \omega_0 + \kappa_{nl} A^2 \quad (2.34)$$

$$\text{avec } \kappa_{nl} = \frac{\omega_0}{4e^2}.$$

Dans l'équation 2.32, la petite différence  $\epsilon = \omega - \omega_0$  s'exprime alors par  $\omega - \omega_{nl} = \epsilon - \kappa_{nl}A^2$ , on obtient ainsi la nouvelle équation :

$$A^2(\epsilon) \left( (\epsilon - \kappa_{nl}A^2(\epsilon))^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2} \right) = \frac{F_0^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (2.35)$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à  $A^2(\epsilon)$  et ses racines réelles déterminent l'amplitude des oscillations forcées. Quand  $F_0$  est suffisamment petite, l'amplitude  $A(\epsilon)$  est aussi petite, les puissances de  $A(\epsilon)$  supérieures à 2 peuvent-être négligées. Ainsi, l'amplitude retrouve la forme de l'équation 2.32 qui est représentée par une courbe symétrique avec un maximum au point  $\epsilon = 0$ . Quand  $F_0$  augmente, la courbe change de forme tout en gardant un unique maximum qui se déplace dans le sens positif des fréquences si  $\kappa_{nl} > 0$ . A ce niveau là, seulement une des trois racines de l'équation 2.32 est réelle (à gauche de la figure 2.5).

Quand  $F_0$  atteint une certaine valeur  $F_c$ , la nature de la courbe change. Pour toutes forces  $F_0 > F_c$ , l'équation 2.32 a trois racines réelles, correspondant à la portion ABCD (à droite de la figure 2.5). Cette limite est définie par son point d'inflexion, elle est déterminée par les conditions  $\frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \infty$ .

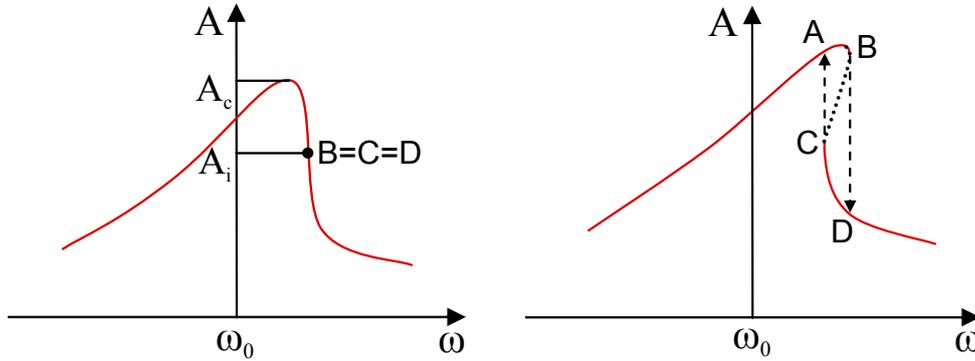


FIGURE 2.5 – A gauche : point inflexion critique. A droite : instabilité due aux non-linéarités.

En dérivant l'équation 2.35 par rapport à  $\epsilon$ , on a :

$$\frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{-\epsilon A(\epsilon) + \kappa_{nl}A^3(\epsilon)}{\epsilon^2 - 4\kappa_{nl}\epsilon A^2(\epsilon) + 3\kappa_{nl}^2A^4(\epsilon) + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} \quad (2.36)$$

La position des points B et C est déterminée en résolvant l'équation suivante :

$$\epsilon^2 - 4\kappa_{nl}\epsilon A^2(\epsilon) + 3\kappa_{nl}^2A^4(\epsilon) + \frac{\omega_0^2}{4Q^2} = 0 \quad (2.37)$$

Le calcul de la valeur de la force d'excitation critique  $F_c$  est l'amplitude pour laquelle la section BC est réduite à un point d'inflexion, c'est à dire pour laquelle les deux racines de l'équation quadratique (équation 2.37) en  $A^2(\epsilon)$  coïncident. En égalisant à 0 le déterminant

de cette équation, nous obtenons les coordonnées  $(A_i, \epsilon_i)$  du point d'inflexion :

$$A_i = \sqrt{\frac{\omega_0}{\sqrt{3}\kappa_{nl}Q}} \text{ et } \epsilon_i = \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2Q} \quad (2.38)$$

On remplace les coordonnées de ce point dans l'équation 2.35 :

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{3}\kappa_{nl}Q} \left( \left( \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{\sqrt{3}Q} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2} \right) = \frac{F_c^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (2.39)$$

On isole  $F_c$  de l'équation 2.39 :

$$F_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}\kappa_{nl}Q} \frac{4\omega_0^2}{12Q^2} 4m^2\omega_0^2 \quad (2.40)$$

Finalement, la force d'excitation critique s'écrit donc :

$$F_c = \frac{\sqrt{8}m\omega_0^2}{\sqrt{3\sqrt{3}Q^3\kappa}} \quad (2.41)$$

L'amplitude critique  $A_c$  est obtenue avec l'équation 2.35 en remplaçant  $F_0$  par  $F_c$ . L'amplitude est maximale pour  $\epsilon = \kappa_{nl}A^2(\epsilon)$ , on obtient  $A_c$  :

$$A_c = \frac{F_c Q}{m\omega_0^2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3\sqrt{3}\kappa Q}} \quad (2.42)$$

En fonction des dimensions du résonateur, cette force d'excitation critique ainsi que cette amplitude critique s'écrivent :

$$F_c = \frac{64}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \frac{Ehe^4}{\sqrt{Q^3}L^3} \text{ et } A_c = \frac{4}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \frac{e}{\sqrt{Q}} \quad (2.43)$$

La modélisation masse-ressort-amortisseur a permis d'aboutir à l'équation 2.28 dite de Duffing. Cette équation décrit le comportement de la poutre encastree-encastree à l'aide des paramètres géométrique et matériau du résonateur, il est maintenant nécessaire d'ajouter le bruit mécanique du résonateur à ce système.

### 2.2.3 Expression du bruit mécanique

Le système étant en équilibre thermique, le résonateur mécanique présente une certaine quantité aléatoire de mouvement appelé bruit brownien. Ce bruit provient de l'agitation des molécules de la structure. Cette vibration aléatoire constitue le bruit thermique du résonateur. Elle est liée à l'amortissement du système. En l'absence de force, l'équation 2.1 ne pourrait être vérifiée. En effet, la présence de l'amortissement dans le système indique que même le plus petit vacillement aléatoire continuerait à diminuer, ce qui reviendrait

à dire que la température continuerait aussi à diminuer, or elle ne peut pas descendre en-dessous de celle de l'environnement. Ainsi le modèle physique correct pour l'oscillateur harmonique comprend un générateur de force d'amplitude permettant de maintenir le système en équilibre thermique. L'équation différentielle devient :

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = f_n \quad (2.44)$$

où  $x_n$  est le bruit en déplacement et  $f_n$  est la force de fluctuation requise pour maintenir l'équilibre thermique.

La relation fondamentale qui régit l'analyse du bruit thermique est exprimée par le théorème de l'équipartition de l'énergie [68] [69] : chaque degré de liberté d'un système en équilibre thermique a une énergie de bruit moyenne de  $\frac{1}{2}k_B T$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température en Kelvin. Ainsi la moyenne quadratique de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\left\langle \frac{1}{2}kx_n^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \iff k \langle x_n^2 \rangle = k_B T \quad (2.45)$$

$x_n(t)$  est un signal aléatoire fonction du temps  $t$  et décrit par sa fonction d'autocorrélation  $R_{xx}$  définie de la façon suivante [70] :

$$R_{xx}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)x_i(t + \tau) \quad (2.46)$$

Le signal  $x_n(t)$  étant considéré ergodique, on obtient l'équation 2.47 comme nouvelle fonction d'autocorrélation et l'équation 2.48 pour son déplacement quadratique :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t + \tau)dt \quad (2.47)$$

$$\langle x_n^2 \rangle = R_{xx}(0) \quad (2.48)$$

Dans le domaine spectral, la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation est appelée la densité spectrale de puissance du déplacement et s'exprime par l'équation 2.49 :

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.49)$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient de même l'équation 2.50 :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.50)$$

D'où l'on déduit le déplacement quadratique suivant l'expression :

$$\langle x_n^2 \rangle = R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.51)$$

De plus, la densité spectrale de puissance de la réponse  $S_{xx}$  de l'oscillateur à une force aléatoire est égale à la densité spectrale de l'excitation  $S_{ff}$  (de spectre plat) multiplié par la fonction de transfert non affectée par le processus aléatoire de l'oscillateur :

$$S_{xx}(\omega) = |H|^2 S_{ff} \quad (2.52)$$

avec  $H(\omega) = \frac{X_n}{F_n}$  la fonction de transfert qui est obtenue grâce à l'équation 2.44 transposée dans le domaine des fréquences :

$$-\omega^2 m X_n(\omega) + j\omega c X_n(\omega) + k X_n(\omega) = F_n(\omega) \iff H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega c + k} \quad (2.53)$$

En utilisant l'équation 2.51, l'équation 2.52 et l'équation 2.53 on obtient l'équation suivante :

$$\langle x_n^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H|^2 S_{ff} d\omega = \frac{S_{ff}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \quad (2.54)$$

En posant  $z = \frac{\omega}{\omega_0}$  on obtient :

$$\langle x_n^2 \rangle = \frac{S_{ff}}{2\pi\omega_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left(\frac{k}{\omega_0^2} - mz^2\right)^2 + \frac{c^2 z^2}{\omega_0^2}} = \frac{S_{ff}}{2\pi\omega_0^3 m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1 - z^2)^2 + \frac{z^2}{Q^2}} \quad (2.55)$$

Après quelques manipulations, on peut convertir l'intégrale de l'équation 2.55 selon une forme standard [71] et trouver qu'elle converge vers la valeur  $\pi Q$ . On peut réécrire cette équation :

$$\langle x_n^2 \rangle = \frac{S_{ff} Q}{2\omega_0^3 m^2} = \frac{S_{ff}}{2kc} \quad (2.56)$$

La densité spectrale de bruit du résonateur  $S_{ff}^+$  étant réelle, son intégrale est restreinte aux fréquences positives [72], on obtient :

$$\langle x_n^2 \rangle = \frac{S_{ff}^+}{4kc} \quad (2.57)$$

Et finalement, on peut déduire le niveau de cette densité spectrale de bruit du résonateur en utilisant le théorème de l'équipartition de l'équation 2.45 :

$$k \langle x_n^2 \rangle = k_B T \iff S_{ff}^+ = 4k_B T c \quad (2.58)$$

$c$ , le coefficient d'amortissement est remplacé par son expression à l'aide de l'équation A.13 et l'équation 2.18 :

$$S_{ff}^+ = 4k_B \frac{he^5 LE^2 \alpha^2 \lambda T^2}{0.26 \rho e^6 EC_p^2 + 0.62 \lambda^2 L^4} \quad (2.59)$$

Cette densité spectrale de bruit brownien de résonateur s'exprime en  $N^2.Hz^{-1}$ . Cette équation de bruit mécanique du résonateur et l'équation 2.21 du déplacement de la poutre décrivent le comportement du résonateur avec pour paramètres la géométrie et le matériau utilisés. Ces équations sont ensuite implémentées en langage Verilog-A pour simuler le modèle du résonateur.

### 2.2.4 Construction du modèle Verilog-A

Le modèle Verilog-A du résonateur se comporte comme une boîte noire avec une entrée, une sortie et les paramètres  $T$  et  $Q$  pour respectivement la température et le facteur de qualité (figure 2.6). Il décrit le comportement mécanique du résonateur par l'équation différentielle 2.28. Ici, le paramètre d'entrée est la force  $F_x$  en Newton appliquée au centre de la poutre encastée-encastée et la sortie est le déplacement  $x$  de la poutre en son milieu. Le modèle Verilog-A du bloc résonateur est visible en Annexe B. Une fois ce modèle construit, il est possible de le simuler en boucle ouverte pour étudier l'impact des paramètres sur le comportement mécanique et sur son bruit mécanique.

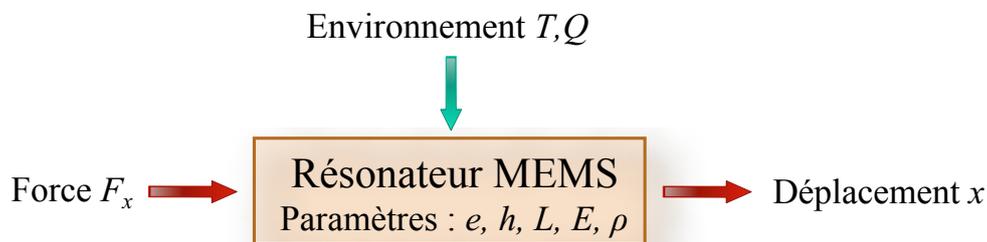


FIGURE 2.6 – Bloc résonateur pour le modèle Verilog-A avec une force en entrée et le déplacement en sortie.

## 2.3 Développement des modèles de transduction

Dans l'architecture d'un oscillateur MEMS, l'excitation du résonateur ainsi que la détection est possible grâce à différents types de transduction. Dans cette étude où le résonateur est un MEMS vibrant, l'excitation est obtenue à l'aide d'un signal électrique qui est converti en une force mécanique et la détection doit pouvoir convertir un déplacement de la poutre vibrante du résonateur en un signal électrique. Actuellement, plusieurs principes permettent ces conversions. Ici, trois types de transduction différentes vont être étudiées :

- La transduction piézoélectrique : commune dans le domaine des MEMS actuel, elle permet aux matériaux piézoélectriques de se polariser sous l'effet d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'un champ électrique est appliqué.
- La transduction électrostatique : appelée aussi transduction capacitive, elle permet la détection de variation de capacité entre deux électrodes se déplaçant l'une par rapport à l'autre sous l'effet d'une force externe, et réciproquement, une différence de polarisation sur les électrodes engendre une force électrostatique qui déplace l'électrode mobile.
- La transduction optique : l'excitation optique est effectuée à l'aide de l'actionnement par pression de radiation et la détection par deux moyens, la méthode knife-edge (par obscuration du faisceau) ou la détection optique par interférométrie.

Le schéma représentatif du modèle est visible sur la figure 2.7, l'excitation et la détection sont deux éléments qui se trouvent de part et d'autre du bloc résonateur et qui peuvent être étudiés séparément.



FIGURE 2.7 – Schéma représentant la transduction : l'excitation et la détection d'un résonateur.

Pour cela, dans un premier temps une partie théorique est développée pour obtenir les équations nécessaires à la création du modèle Verilog-A des blocs de transduction et ensuite l'analyse du couplage est réalisée avec le logiciel Cadence.

### 2.3.1 Développement du modèle pour la transduction piézoélectrique

La piézoélectricité est un principe réversible. Le premier, appelé effet piézoélectrique direct, est la propriété d'un matériau à générer un déplacement électrique lorsqu'il est soumis à des contraintes mécaniques. Le second, appelé effet piézoélectrique inverse, est la propriété d'un matériau à se déformer lorsqu'il est soumis à un champ électrique. Ainsi, grâce à ces propriétés, il est possible de mettre en vibration une poutre encastrée-encastrée soumise à un champ électrique et de détecter cette vibration grâce à la création de charge. Pour ce mode de fonctionnement, des électrodes métalliques sont placées sur la surface de la poutre vibrante qui est un matériau piézoélectrique comme le quartz. La disposition doit être adaptée au mode de vibration de la poutre.

#### Configuration de la position des électrodes pour une poutre encastrée-encastrée

Le sens des contraintes d'une poutre en flexion dépend du mode de la poutre. En effet, il est dépendant de l'extension ou de la compression des fibres. Le mode principal d'une poutre bi-encastrée a été montré sur la figure 1.2.

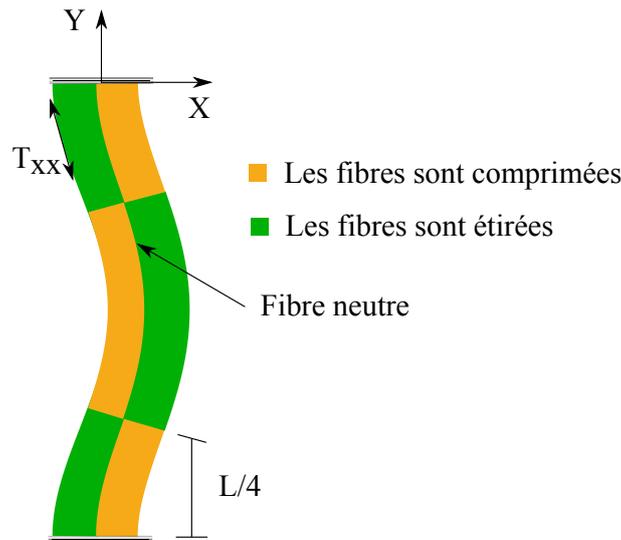


FIGURE 2.8 – Schéma représentant l'étirement et la compression des fibres d'une poutre encastrée-encastrée.

La figure 2.8 rappelle la déformée d'une poutre encastrée-encastrée où l'on distingue les différentes courbures du mode. Pour la partie jaune, les fibres sont comprimées, et pour la partie verte les fibres sont étirées. Les contraintes sont de signes opposés sur ces deux parties. La fibre neutre est la fibre générée par la courbe moyenne et qui garde sa longueur lors de la flexion. Plus l'on s'écarte de cette fibre neutre, plus la valeur de la contrainte augmente.

En utilisant l'effet piézoélectrique inverse, le champ électrique doit être en cohérence avec le sens des contraintes souhaité. Le contenu de la matrice des coefficients piézoélectriques du matériau permet d'étudier les possibilités d'excitation et de détection. Pour

une poutre en quartz orientée suivant l'axe  $y$ , l'excitation de la déformation axiale  $S_2$  peut se faire à l'aide du champ électrique  $E_1$ , via le coefficient piézoélectrique  $d_{12} = -d_{11}$  (équation 2.60), où  $[s]$  représente la matrice des coefficients élastiques et  $[T]$  la matrice des contraintes.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ -d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & -d_{11} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + [s] \times [T] \quad (2.60)$$

La figure 2.9 illustre la disposition des électrodes idéales mais irréaliste pour favoriser le mode principal de la poutre. Un champ  $E_1$  de signe opposé de part et d'autre de la fibre neutre est nécessaire.

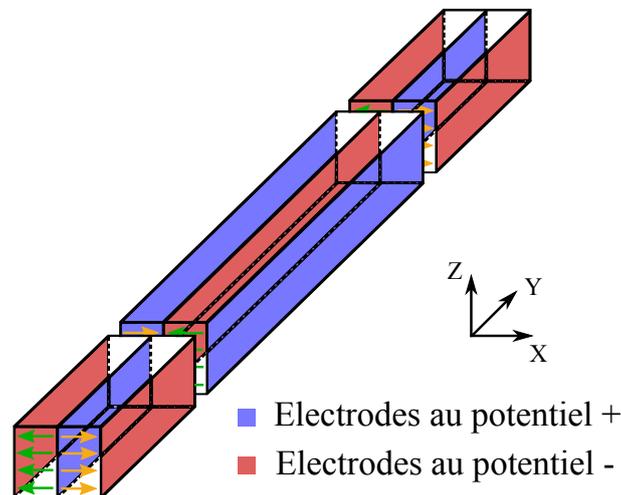


FIGURE 2.9 – Disposition des électrodes idéale sur une poutre bi-encastée pour l'excitation et la détection du mode principal.

Ce type de configuration est idéal et pas réalisable à cause de l'électrode centrale le long de la fibre neutre. Des solutions de réalisation pour les différentes configurations d'électrodes sont exposées sur la figure 2.10. La configuration optimale est la solution la plus efficace et réalisable devant le cas idéal, cependant, elle n'est pas simple à réaliser pour des micro-poutres. La configuration simplifiée, possède les électrodes uniquement le long de l'épaisseur vibrante.

La figure 2.10 montre le champ électrique associé à la disposition des électrodes pour les extrémités de la poutre encastée-encastée. Pour la partie centrale, la polarisation des électrodes doit être inversée pour respecter la déformée du mode principal de la poutre. Suivant la géométrie de la poutre, le coefficient de conversion piézoélectrique peut varier, une estimation de sa valeur en fonction des paramètres géométriques est nécessaire. Nous introduirons le cas échéant un coefficient correctif  $a_{corr}$  qui rend compte de l'efficacité du système des électrodes pour la configuration simplifiée. Pour ces électrodes d'excitation

et de détection de la poutre en quartz, l'efficacité peut-être jusqu'à quatre fois moins importante ( $a_{corr} = 1/4$ ) que la configuration idéale [73].

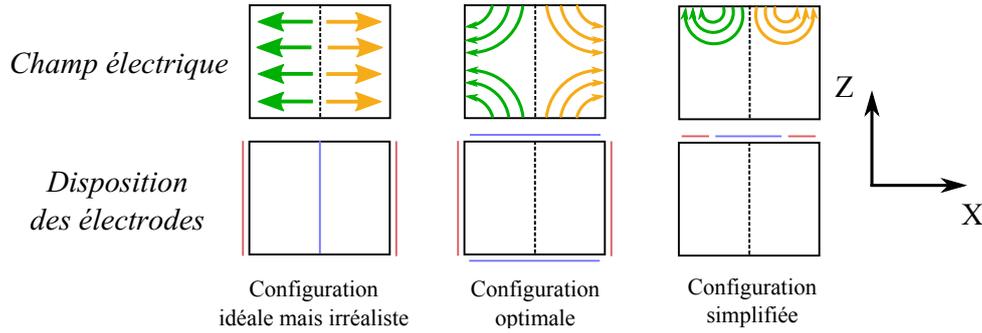


FIGURE 2.10 – Configurations d'électrodes pour la détection et l'excitation de la flexion pour le quartz (poutre vue en section).

### Calcul du coefficient de conversion piézoélectrique en fonction des paramètres géométriques de la poutre

La conversion piézoélectrique est modélisée par un coefficient piézoélectrique qui s'exprime en  $N/V$  pour l'effet inverse et en  $C/m$  pour l'effet direct. Les deux effets étant indissociables, les coefficients associés sont ainsi égaux. Les équations constitutives de la piézoélectricité (équation 2.61) relient le déplacement électrique  $D$  (en  $C/m^2$ ), le champ électrique  $E$  (en  $V/m$ ), la déformation  $S$  (sans unité) de la poutre et les contraintes  $T$  (en  $N/m^2$ ) à travers les coefficients élastiques  $c$  (en  $N/m^2$ ) et piézoélectriques  $e^t$  (en  $C/m^2$ ) ainsi que la permittivité électrique  $\epsilon^S$  (en  $F/m$ ) du matériau [74].

$$\begin{cases} T = c^E S - e^t E \\ D = \epsilon^S E + e S \end{cases} \quad (2.61)$$

Les calculs suivants sont effectués pour la position idéale des électrodes auxquelles on appliquera le coefficient correctionnel  $a_{corr}$ .

La densité surfacique de charges  $\sigma$  sur une électrode est donnée par l'équation 2.62 dans laquelle  $e_{12}$  est la constante piézoélectrique du quartz qui couple le champ  $E_1$  à la déformation  $S_2$ .

$$\sigma = e_{12} S_2 \quad (2.62)$$

La figure 2.11 montre la disposition des électrodes pour la configuration simplifiée sur la poutre vibrante. Sur chaque segment, on calcule la quantité de charge collectée sur la surface des électrodes.

Pour cela, on utilise la figure 2.9 pour une disposition des électrodes idéales. Pour le segment 1, on déduit de l'équation 2.62 la quantité de charge sur l'électrode de longueur

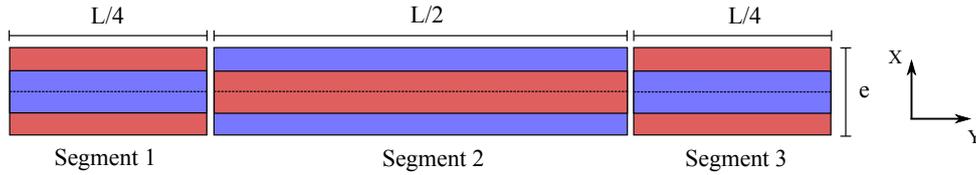


FIGURE 2.11 – Disposition des électrodes pour la configuration simplifiée d'une poutre bi-encastrée pour l'excitation et la détection du mode principal.

$L/4$  et de hauteur  $h$  :

$$Q = \int \int \sigma = \int_0^{L/4} \int_{-h/2}^{h/2} e_{12} S_2 \partial y \partial z \quad (2.63)$$

La déformation  $S_2$  s'exprime en fonction du déplacement  $U_2$  selon l'équation 2.64 :

$$S_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y} \quad (2.64)$$

En utilisant les hypothèses de Bernoulli de la poutre en flexion sur le déplacement  $U$  [75], on a l'équation 2.65 suivante :

$$U_2 = -x \frac{\partial U_1}{\partial y} \quad (2.65)$$

Avec l'équation A.6 et l'équation A.7, on obtient le déplacement selon l'axe  $y$  en fonction du déplacement  $X = u\left(\frac{L}{2}\right)$  au milieu de la poutre :

$$u(y) = U_1(y) = -\frac{4X}{L^2} \left( \frac{4y^3}{L} - 3y^2 \right) \quad (2.66)$$

$$\text{d'où } U_2(y) = x \frac{4X}{L^2} \left( \frac{12y^2}{L} - 6y \right) \quad (2.67)$$

Ainsi, on obtient l'équation 2.68 pour la quantité de charge reçue par la première électrode du segment 1 :

$$Q_a = e_{12} \frac{3Xeh}{2L} \quad (2.68)$$

De la même manière, la quantité de charge de l'électrode sur la face opposée du premier segment s'exprime par l'équation 2.69 suivante :

$$Q_b = e_{12} \frac{3Xeh}{2L} \quad (2.69)$$

La quantité de charge collectée sur les deux électrodes du segment 1 vaut :

$$Q_1 = Q_a + Q_b = e_{12} \frac{3Xeh}{L} \quad (2.70)$$

Par le même calcul, on trouve la charge reçue par le segment 2 vaut :

$$Q_2 = e_{12} \frac{6Xeh}{L} \quad (2.71)$$

Par symétrie avec le segment 1, la charge reçue par le segment 3 est la même que pour le segment 1. On obtient ainsi la charge totale collectée par le système d'électrodes :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = e_{12} \frac{12Xeh}{L} \quad (2.72)$$

Pour exprimer la conversion du déplacement en charge, on écrit  $Q = n_x X$ , on en déduit la valeur du coefficient de conversion piézoélectrique  $n_x$  (équation 2.74) en fonction des paramètres géométriques du résonateur :

$$n_x = e_{12} \frac{12eh}{L} \quad (2.73)$$

Et finalement en appliquant le coefficient correctif  $a_{corr}$  obtenu par les mesures [73], on obtient :

$$n_{cx} = e_{12} \frac{3eh}{L} \quad (2.74)$$

Ce coefficient de conversion piézoélectrique s'exprime en  $C/m$  pour la détection et en  $N/V$  pour l'excitation et est égal dans les deux cas. La modélisation de la transduction piézoélectrique en fonction des paramètres géométriques du résonateur est ainsi possible.

Un second principe de transduction basé sur des matériaux semi-conducteurs comme le silicium est aussi utilisable pour la détection et l'excitation d'un résonateur MEMS, il s'agit de la transduction électrostatique présentée ci-dessous.

### 2.3.2 Développement du modèle pour la transduction électrostatique

Comme pour la transduction piézoélectrique, la transduction électrostatique est basée sur un principe réversible. Elle est utilisée à la fois pour l'excitation du MEMS vibrant et pour la détection du déplacement de la poutre du MEMS. Après avoir présenté le principe de cette transduction, le développement du modèle portera d'abord sur l'excitation d'un résonateur MEMS vibrant puis sur sa détection.

#### Principe de la transduction électrostatique.

Dans le cas de l'excitation, une force est nécessaire pour mettre en vibration le résonateur MEMS. La transduction électrostatique permet de créer une force électrostatique provenant d'une différence de potentiel appliquée à deux électrodes. Dans le cas où une électrode est fixe, la seconde se déplace sous l'effet de cette force. Cet effet est présenté

sur la figure 2.12.

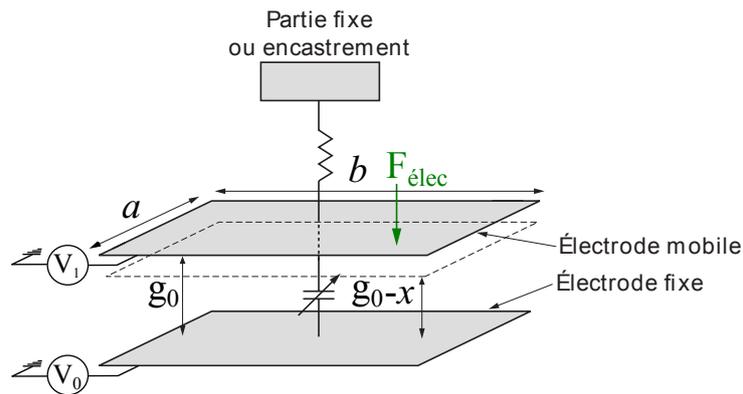


FIGURE 2.12 – Principe de la transduction électrostatique.

Ce schéma représente deux électrodes polarisées au potentiel  $V_0$  et  $V_1$ . Ces électrodes ont pour dimensions  $a$  en largeur et  $b$  en longueur afin d'obtenir une surface  $S = ab$ . Elles sont séparées par un milieu diélectrique d'épaisseur  $g_0$  qui sera appelé le gap dans notre étude sur les résonateurs MEMS vibrants. Dans cette configuration, la force électrostatique s'exprime suivant l'équation 2.75.

$$F_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r U^2 \frac{ab}{g_0^2} \quad (2.75)$$

Avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $\epsilon_r$  la permittivité relative et  $U$  la différence de potentiel entre les deux électrodes ( $V_1 - V_0$ ).

Selon le même principe, ce dispositif peut permettre la détection de vibrations grâce au courant  $i(t)$  qui traverse la capacité mobile (équation 2.76) :

$$i(t) = \frac{d(C(t)U(t))}{dt} \quad (2.76)$$

Avec  $C(t)$  qui représente la capacité des deux électrodes parallèles et, en négligeant les effets de bords, qui s'exprime par l'équation 2.77 :

$$C(t) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{ab}{g(t)} \quad (2.77)$$

La valeur maximale du déplacement statique de l'électrode mobile est limitée par le phénomène de tension de collage appelée pull-in. Le pull-in correspond à la tension maximale avant que les deux électrodes rentrent en contact. Ce phénomène se produit lorsque l'armature mobile suspendue se déplace de plus d'un tiers de la valeur initiale du gap  $g_0$ . La tension de pull-in  $V_p$  pour un condensateur plan est exprimée par l'équation 2.78 suivante [76] :

$$V_p = \sqrt{\frac{8K_{ar}g_0^3}{27\epsilon_0\epsilon_r ab}} \quad (2.78)$$

où  $K_{ar}$  représente la raideur de l'armature mobile. Cette équation permet d'estimer la tension maximale à appliquer pour éviter une détérioration du résonateur MEMS vibrant.

L'étude qui suit porte sur la configuration des électrodes pour l'excitation du résonateur et sur celle de la détection.

### Excitation électrostatique d'un résonateur MEMS vibrant.

L'excitation électrostatique utilise aussi une électrode pour créer une force sur la poutre. Cette fois-ci une tension alternative  $v = v_0 \cos(\omega t)$  est superposée à une tension continue pour exciter le mode principal de la poutre. La présence de cette tension continue permet d'augmenter l'amplitude de la force d'excitation et de pouvoir éventuellement la contrôler. Pour le calcul de cette force, la déformée de la poutre est prise en compte. L'expression générale de la déformée  $X_n(y)$  d'une poutre de longueur  $L$  encadrée à ses deux extrémités est exprimée par l'équation 1.11 [77].

Pour le mode principal de résonance, les valeurs  $\alpha_1 L$  et  $\frac{a_1}{b_1}$  sont données par l'équation 1.8 et l'équation 1.9. La valeur  $b_1$  est calculée en normalisant le mode 1 au maximum de vibration (milieu de poutre). Pour cela, on résout  $X_1(\frac{L}{2}) = 1$  et on trouve  $b_1 = 0.61865$ .

La force électrostatique s'exprime par l'équation 2.79 suivante :

$$F_{exci} = X_1(y) \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r (U_{exci} + v)^2 \frac{ab}{(g_0 - X_c x)^2} \quad (2.79)$$

$X_1(y)$  correspond à l'efficacité de la force créée par l'électrode, centrée sur la position  $y$  de la poutre et  $X_c$  correspond à la déformée moyenne le long de cette électrode de longueur  $c$  présentée sur la figure 2.13. Elle s'exprime par l'expression suivant ci-dessous :

$$X_c = \frac{1}{c} \int_{\frac{y-c}{2}}^{\frac{y+c}{2}} X_1(y) dy \quad (2.80)$$

En développant cette force électrostatique d'excitation, trois composantes apparaissent :

$$F_{exci} = \frac{X_1(y) \epsilon_0 \epsilon_r ab}{4(g_0 - X_c x)^2} (2U_{exci}^2 + v_0^2) + \frac{X_1(y) \epsilon_0 \epsilon_r ab}{(g_0 - X_c x)^2} U_{exci} v_0 \cos(\omega t) + \frac{X_1(y) \epsilon_0 \epsilon_r ab}{4(g_0 - X_c x)^2} v_0^2 \cos(2\omega t) \quad (2.81)$$

Dans l'équation 2.81, le premier terme correspond à une force statique, le deuxième terme à la force d'excitation proportionnelle à la tension  $U_{exci}$  et le dernier terme représente une force de fréquence double par rapport à la fréquence de résonance. La première et la dernière composantes, néfastes au bon fonctionnement du résonateur, peuvent être compensées en disposant une électrode de l'autre côté de la poutre vibrante et en appliquant une tension opposée  $-v$  comme indiqué sur la figure 2.13.

$$\text{On pose } X_b = \frac{1}{b} \int_{\frac{L-b}{2}}^{\frac{L+b}{2}} X_1(y) dy \quad \text{la déformée moyenne le long de l'électrode } b. \quad (2.82)$$

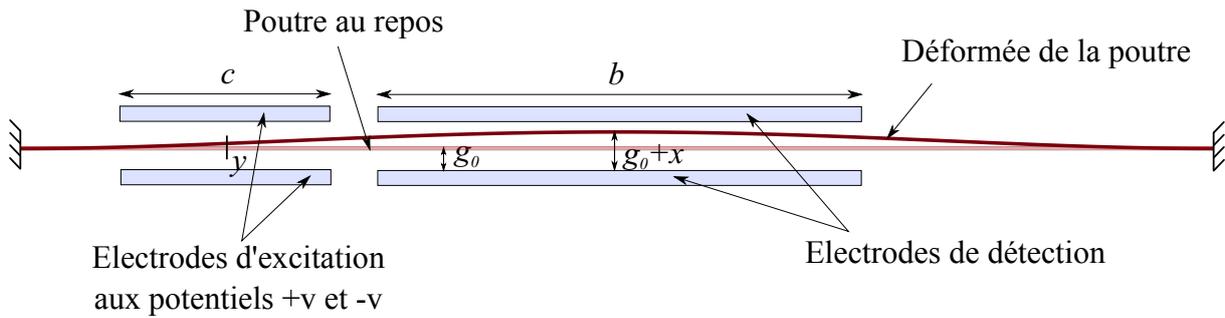


FIGURE 2.13 – Schéma de la poutre vibrante avec les électrodes d'excitation et de détection.

Et  $U_{NL}$  la tension entre la poutre et l'électrode  $b$  de détection. on sait que  $X_c \ll X_b$  et si  $U_{exci} \ll U_{NL}$ , les termes non linéaires peuvent être ignorés et ainsi, la nouvelle force d'excitation appliquée à la poutre s'écrit :

$$F_{exci} \approx \frac{2X_1(y)\epsilon_0\epsilon_r ab}{g_0^2} U_{exci} v_0 \cos(\omega t) \quad (2.83)$$

### Détection électrostatique d'un résonateur MEMS vibrant.

La détection électrostatique utilise la variation de la capacité entre l'électrode fixe et la poutre vibrante. La valeur du courant  $i(t)$  qui traverse cette capacité a été exprimé dans l'équation 2.86. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$i(t) = C(t) \frac{\partial U(t)}{\partial t} + U(t) \frac{\partial C(t)}{\partial t} \quad (2.84)$$

Avec :

$$C(t) = \epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{g_0 - x(t)} \quad (2.85)$$

On utilise ici l'électrode centrale, et on prend l'hypothèse que  $U(t)$  ne dépend pas du temps ainsi, en développant  $C(t)$  en série de Taylor et en ne considérant que les termes d'ordre zéro, on réduit l'expression de  $i(t)$  :

$$i(t) = \frac{\epsilon_0\epsilon_r ab U_{NL}}{g_0^2} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \quad (2.86)$$

Cette expression est uniquement valable pour une électrode positionnée au milieu de la poutre.

### 2.3.3 Développement du modèle pour la transduction optique

Le troisième principe de transduction étudié est basé sur l'optique. La transduction optique peut servir à la fois pour l'excitation d'un micro-résonateur et pour sa détection. L'étude théorique portera sur un unique principe d'actionnement qui s'effectue par pres-

sion de radiation. Pour la détection optique du mouvement du résonateur, deux principes différents seront développés. Ils portent sur une détection de la variation de la puissance lumineuse d'un faisceau via une photodiode. La puissance lumineuse varie par l'obscuration du faisceau (knife-edge), ou par la variation de largeur d'une cavité Fabry-Pérot (interférométrie).

### Excitation optique d'un résonateur MEMS vibrant par pression de radiation.

La pression de radiation est la pression exercée sur une surface exposée à un rayonnement électromagnétique. Lors de la réflexion d'un photon sur la surface, il y a un transfert d'impulsion énergétique. Les forces générées par pression de radiation sont généralement très faibles mais peuvent servir à actionner un micro-résonateur vibrant. La possibilité d'actionner optiquement par pression de radiation des micro-poutres a été démontrée expérimentalement par l'Université de Constance [78] et plus récemment en 2006 par l'Institut Technologique de Californie [79].

La force exercée sur une surface par pression de radiation peut-être exprimée en fonction de la puissance du faisceau incident [80]. La figure 2.14 montre une onde plane de longueur d'onde  $\Lambda$  qui vient créer une pression de radiation sur une surface diélectrique avec un angle d'incidence  $\theta$ .

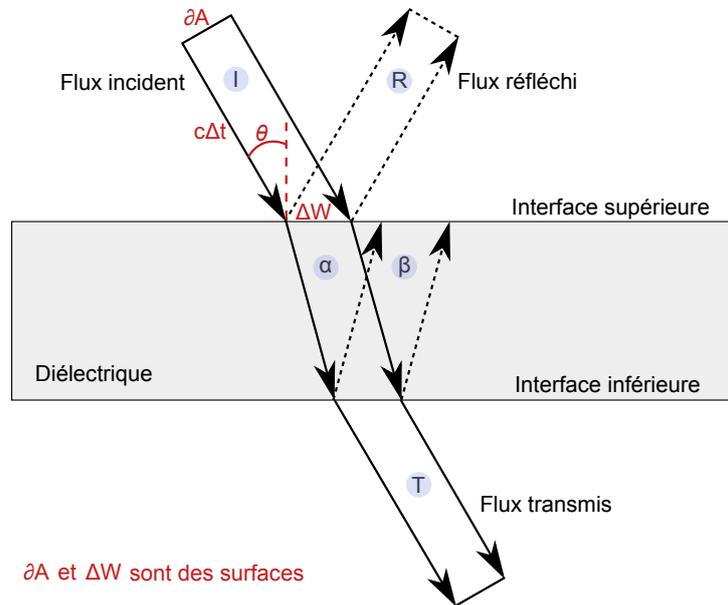


FIGURE 2.14 – Interaction optique par pression de radiation.

L'équation 2.87 représente la quantité de mouvement  $g$  par unité de volume du champ électromagnétique :

$$g = \frac{S}{\nu^2} \quad (2.87)$$

où  $S$  est le vecteur Poynting représentant le flux d'énergie (puissance par unité de surface),  $\nu$  représente la vitesse de l'onde dans le diélectrique et  $c$  la vitesse de la lumière

dans le vide. L'onde incidente est contenue dans un cylindre de section  $\partial A = \Delta W \cos(\theta)$  et de longueur  $c\Delta t$  (figure 2.14). Le volume de ce cylindre est  $\Delta\tau = c\Delta t\Delta W \cos(\theta)$ .

La pression de radiation associée au champ utile est la composante normale à la surface. La quantité de mouvement de l'énergie incidente s'exprime alors par l'équation 2.88.

$$G_I = g_I \cos(\theta)\Delta\tau = \frac{S_I\Delta t\Delta W \cos^2(\theta)}{c} \quad (2.88)$$

Et la quantité de mouvement de l'énergie réfléchie  $G_R$  et transmise  $G_T$  s'exprime par l'équation 2.90.

$$G_R = g_R \cos(\theta)\Delta\tau = \frac{S_R\Delta t\Delta W \cos^2(\theta)}{c} \quad (2.89)$$

$$G_T = g_T \cos(\theta)\Delta\tau = \frac{S_T\Delta t\Delta W \cos^2(\theta)}{c} \quad (2.90)$$

où  $g_R, g_T$  représentent respectivement la quantité de mouvement par unité de volume de l'onde réfléchie et transmise et  $S_R, S_T$  respectivement le flux d'énergie de ces même ondes. De plus, on appelle  $G_\alpha$  et  $G_\beta$  les quantités de mouvement des ondes planes présentes dans le diélectrique.

En focalisant la source laser sur la hauteur de la poutre en son milieu et en considérant la conservation de la quantité de mouvement au niveau des interfaces matérielles, la quantité de mouvement reçue par l'interface supérieure peut s'écrire selon l'équation 2.91 :

$$\Delta G_1 = G_I + G_R - G_\alpha - G_\beta \quad (2.91)$$

Et la quantité de mouvement reçue par l'interface inférieure s'écrit :

$$\Delta G_2 = G_\alpha + G_\beta - G_T \quad (2.92)$$

La pression de radiation s'exerçant sur une surface matérielle peut s'écrire :

$$P_{rad} = \frac{F}{\Delta W} = \frac{\Delta G}{\Delta t\Delta W} \quad (2.93)$$

Et sur ce diélectrique s'exprime comme la somme de  $P_1 + P_2$ , on obtient ainsi l'équation 2.95 :

$$P_{rad} = \frac{\Delta G_1 + \Delta G_2}{\Delta t\Delta W} = \frac{G_I + G_R - G_T}{\Delta t\Delta W} \quad (2.94)$$

$$P_{rad} = (S_I + S_R - S_T) \frac{\cos^2(\theta)}{c} \quad (2.95)$$

En normalisant la densité de puissance où  $R$  représente la réflectivité et  $T$  la transmittance selon l'équation 2.96, on a :

$$R = \frac{S_R}{S_I} \text{ et } T = \frac{S_T}{S_I} \quad (2.96)$$

Le diélectrique n'engendrant aucune absorption sur les photons,  $T + R = 1$ . On obtient au final l'équation 2.97 comme la pression s'exerçant sur le diélectrique.

$$P_{rad} = \frac{2RS_I}{c} \cos^2(\theta) \quad (2.97)$$

Cette équation permet de connaître la force exercée sur une micro-poutre en connaissant la puissance du faisceau incident et le coefficient de réflectivité du matériau. La détection du mouvement peut se faire dans un premier temps par la méthode "knife-edge".

### Détection optique d'un résonateur MEMS vibrant par obscuration du faisceau.

Le principe de fonctionnement de la détection par obscuration du faisceau est détaillé sur la figure 2.15. Le courant issu de la photodiode intègre la partie du faisceau lumineux non caché par la poutre, il est donc dépendant du déplacement de la poutre.

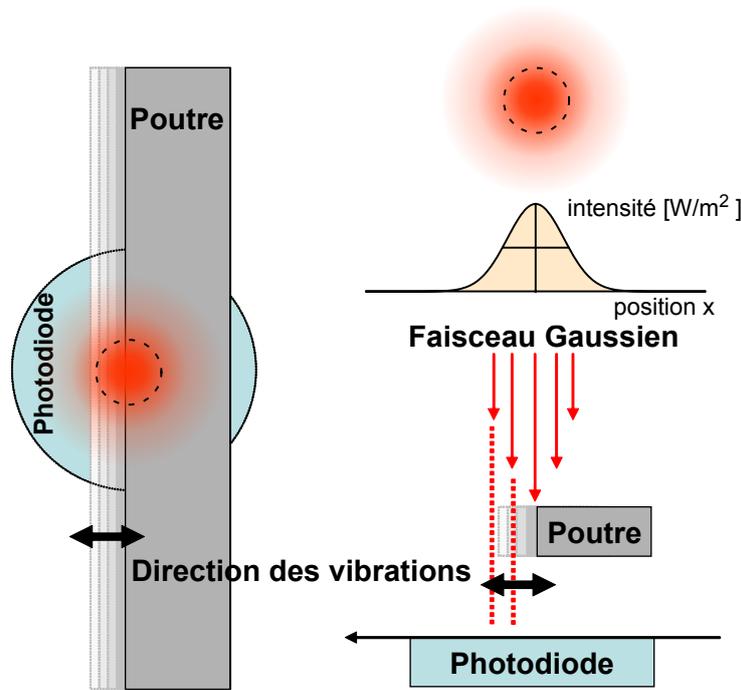


FIGURE 2.15 – Détection par obscuration du faisceau.

La distribution de l'intensité moyenne temporelle d'un faisceau gaussien est notée  $I(x, y, z)$ . Cette distribution appelée irradianse quantifie la puissance d'un signal électromagnétique par unité de surface. Elle s'exprime par l'équation 2.98 suivante :

$$I(x, y, z) = I_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 \exp \left( -2 \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right) \quad (2.98)$$

$I_0$  est l'intensité au centre du faisceau,  $\omega_0$  est la largeur minimale du faisceau à son origine (ou waist) et  $\omega(z)$  la largeur du faisceau à une distance  $z$  de l'origine. La figure 2.16

présente la position initiale de la poutre. Suivant la valeur de  $X$ , c'est à dire la position de la poutre, la puissance du faisceau est plus ou moins transmise.

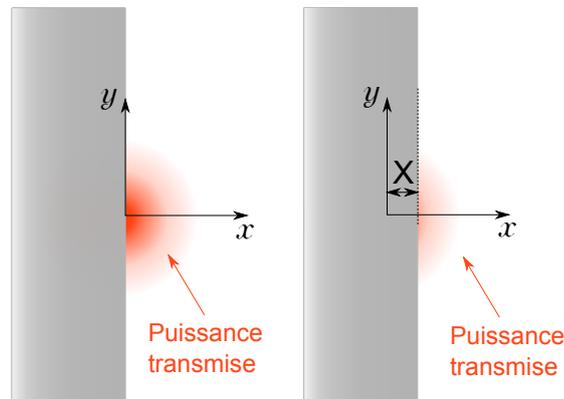


FIGURE 2.16 – Puissance transmise à la photodiode suivant la position  $X$  de la poutre.

La puissance totale du faisceau est notée  $P_{tot}$ , elle se calcule à partir de l'équation 2.99.

$$P_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I(x, y, z) \quad (2.99)$$

En remplaçant l'irradiance  $I(x, y, z)$  par l'expression de l'équation 2.98, on obtient :

$$P_{tot} = I_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega(z)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{x^2}{\omega^2(z)}\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{y^2}{\omega^2(z)}\right) dy \quad (2.100)$$

Par identification, on retrouve le calcul d'intégrale de l'équation 2.101 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2.101)$$

La puissance totale du faisceau peut alors être simplifiée et vaut :

$$P_{tot} = \frac{\pi}{2} \omega_0^2 I_0 \quad (2.102)$$

Ensuite, on calcule la puissance du faisceau reçue par la photodiode en fonction de la position  $X$  de la poutre. Pour cela, on néglige des effets de bords éventuels et la poutre a une réflectivité totale. Cette puissance est notée  $P(X)$  et se calcule avec l'équation 2.103.

$$P(X) = \int_X^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I(x, y, z) \quad (2.103)$$

Avec l'équation 2.98 de l'irradiance et l'équation 2.102 de la puissance totale du fais-

ceau, on obtient la puissance  $P(X)$  :

$$P(X) = \frac{2P_{tot}}{\pi\omega^2(z)} \int_X^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-2\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}\right) dy \quad (2.104)$$

$$P(X) = \frac{P_{tot}}{\omega(z)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_X^\infty \exp\left(-2\frac{x^2}{\omega^2(z)}\right) dx \quad (2.105)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} t &= \frac{2x}{\omega(z)} \\ dt &= \frac{2}{\omega(z)} dx \end{aligned} \quad (2.106)$$

On obtient alors pour la puissance  $P(X)$  du faisceau :

$$P(X) = \frac{P_{tot}}{\omega(z)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega(z)}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}X}{\omega(z)}}^\infty \exp(-t^2) dt \quad (2.107)$$

La fonction d'erreur complémentaire notée  $erfc$  est définie par :

$$erfc(a) = 1 - erf(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \exp(-t^2) dt \quad (2.108)$$

En remplaçant cette fonction dans l'équation 2.107 on en déduit la puissance  $P(X)$  du faisceau :

$$P(X) = \frac{P_{tot}}{2} \left[ 1 - erf\left(\frac{\sqrt{2}X}{\omega(z)}\right) \right] \quad (2.109)$$

Après un développement en série de Taylor de l'équation 2.109 au voisinage de  $X$ , on en déduit finalement la puissance  $P(X)$  reçue par la photodiode en fonction du déplacement de la poutre :

$$P(X) = \frac{P_0}{2} + \frac{P_0\sqrt{2}}{\omega(z)\sqrt{\pi}} X + \frac{2P_0\sqrt{2}}{3\omega^3(z)\sqrt{\pi}} X^3 \quad (2.110)$$

Avec  $P_0 = P_{tot}$ . En connaissant la puissance totale du faisceau gaussien et sa largeur au niveau de la poutre, il est ainsi possible de détecter le déplacement  $X$  de cette micro-poutre à l'aide d'une photodiode. La deuxième méthode pour la détection optique de la vibration d'une micro-poutre se fait par interférométrie.

### Détection optique d'un résonateur MEMS vibrant par interférométrie.

La détection optique des vibrations d'une micro-poutre peut se faire à l'aide d'un interféromètre Fabry-Pérot. La figure 2.17 présente ce mode de détection où un faisceau lumineux éclaire une cavité Fabry-Pérot composé de deux miroirs de Bragg sur les bras d'un diapason encastré-encastré. Ce principe de détection a été détaillé dans la thèse de Maurine Malak [81].

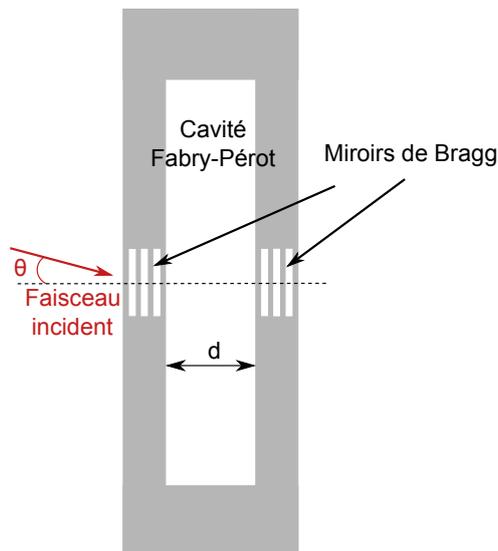


FIGURE 2.17 – Fonctionnement de la détection des vibrations d'un micro-résonateur de type diapason par interférométrie.

Cette cavité ainsi que le réseau de Bragg peuvent être obtenus par le biais d'un micro-usinage du Silicium. La figure 2.18 présente le rayon lumineux d'une source lumineuse monochromatique et la cavité Fabry-Pérot. Les dimensions et les angles sont inscrits sur cette même figure.

Pour cette étude, le rayon incident entre dans la cavité d'indice de réfraction  $n$  avec un angle  $\theta_0$ . Dans un premier temps, il faut calculer le déphasage  $\Delta\phi$  entre deux rayons successifs. Notons  $\zeta$  la différence de marche entre un rayon qui sort et un autre rayon qui est réfléchi une fois de plus. Le second rayon parcourt en plus la distance  $AB + BC - AD$ .

$$\zeta = n(AB + BC) - n_0AD = \frac{nd}{\cos(\theta)} + \frac{nd}{\cos(\theta)} - n_02d \tan(\theta) \sin(\theta_0) \quad (2.111)$$

En utilisant les lois de Snell-Descartes  $n_0 \sin(\theta_0) = n \sin(\theta)$ , on en déduit :

$$\zeta = \frac{2nd}{\cos(\theta)} - 2nd \sin(\theta) \tan(\theta) = 2nd \cos(\theta) \quad (2.112)$$

Pour une longueur d'onde  $\lambda$  du faisceau lumineux, le déphasage  $\Delta\phi$  vaut :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd \cos(\theta)}{\lambda} \quad (2.113)$$

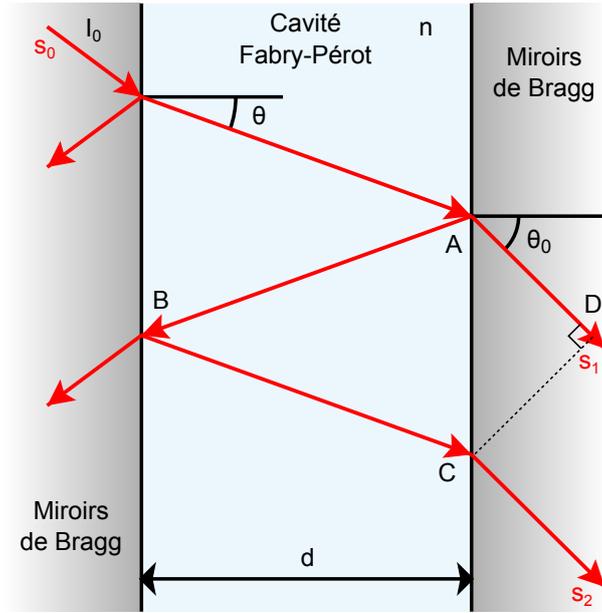


FIGURE 2.18 – Fonctionnement de la détection des vibration d'un micro-résonateur par interférométrie.

La phase du  $(n+1)$ -ième rayon est :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta\phi = \phi_1 + n\Delta\phi \quad (2.114)$$

On relie l'intensité lumineuse d'un rayon  $I$  par son amplitude vibratoire  $s$  au carré selon l'équation 2.115.

$$I = |s|^2 = \bar{s} \quad (2.115)$$

Lorsqu'un rayon subit une réflexion son intensité est diminuée d'un facteur  $R$  (réflectivité), donc son amplitude est atténuée d'un facteur  $\sqrt{R}$  à chaque réflexion. En notant  $s_0$  l'amplitude complexe du rayon incident,  $s_1$  l'amplitude complexe du premier rayon qui sort de la cavité, on peut en déduire l'amplitude complexe du  $(n+1)$ -ième rayon. Ce  $(n+1)$ -ième rayon a subi deux réflexions de plus que le premier rayon :

$$s_{n+1} = s_1 (Re^{j\Delta\phi})^n \quad (2.116)$$

De plus, le premier rayon qui sort de la cavité a subi deux réfractions de plus par rapport au rayon incident  $r_0$ , chaque réfraction multipliant l'intensité lumineuse par  $1-R$ .

$$s_1 = (1-R)s_0 \quad (2.117)$$

En faisant converger tous les rayons lumineux sur la photodiode, l'amplitude de cette

onde  $s$  est la somme des contributions de chaque rayon :

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = s_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (Re^{j\Delta\phi})^n}{1 - Re^{j\Delta\phi}} = s_1 \frac{1}{1 - Re^{j\Delta\phi}} \quad (2.118)$$

En utilisant l'équation 2.115 de l'intensité lumineuse et l'équation 2.117 de l'expression du premier rayon en fonction du rayon incident, l'intensité lumineuse  $I_{phd}$  reçue par la photodiode devient :

$$I_{phd} = s\bar{s} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2(\frac{\Delta\phi}{2}))} \quad (2.119)$$

Et finalement, on obtient l'intensité lumineuse  $I_{phd}$  en fonction de l'intensité lumineuse initiale  $I_0$  et du déplacement relative  $d$  entre les deux lames d'un diapason (figure 2.18) :

$$I_{phd} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \left( \frac{2\pi nd \cos(\theta)}{\lambda} \right)} \quad (2.120)$$

Les miroirs de Bragg situés sur les deux branches du diapason servent à améliorer la réflectivité  $R$  de la cavité Fabry-Pérot. La figure 2.19 présente la courbe de l'intensité transmise à la photodiode par rapport au déplacement  $x$  d'une branche du diapason.

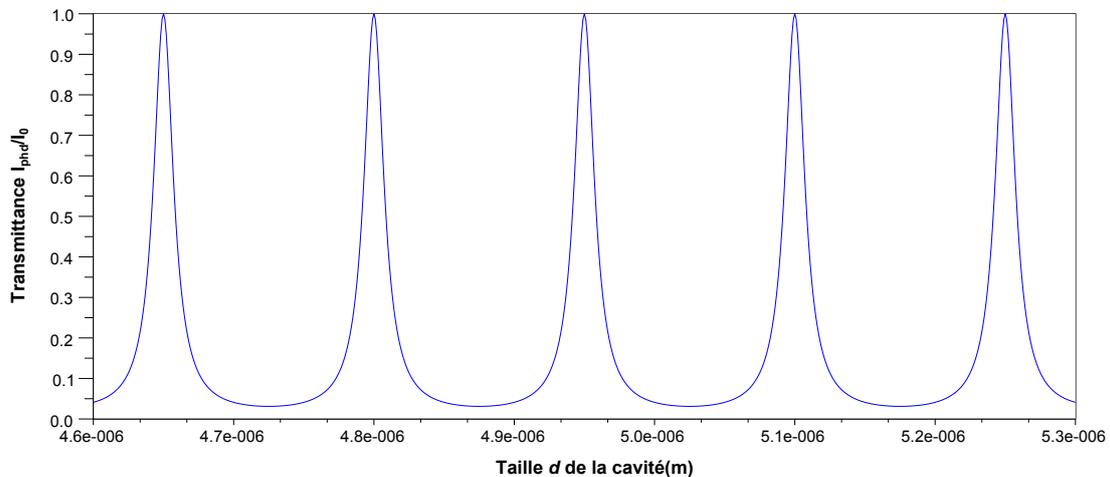


FIGURE 2.19 – Variation de l'intensité transmise en fonction de la taille de la cavité Fabry-Pérot.

Le point de fonctionnement se situe soit sur le flanc positif, soit sur le flanc négatif localisé de part et d'autre d'un pic de résonance optique. Une vibration du résonateur se traduira par une variation de la longueur de la cavité. Ainsi, cela entraînera la variation de la puissance optique transmise par la cavité et détectée par une photodiode. Cette variation suivra par conséquent le rythme des vibrations mécaniques. L'effet de la vibration est plus amplifié lorsque le facteur de qualité optique est élevé. Cependant cela réduit la plage de vibration utile. Si l'on place le point de fonctionnement au sommet du pic optique, on obtiendra une fréquence double en réponse au niveau de la photodiode

comme présenté sur la figure 2.20.

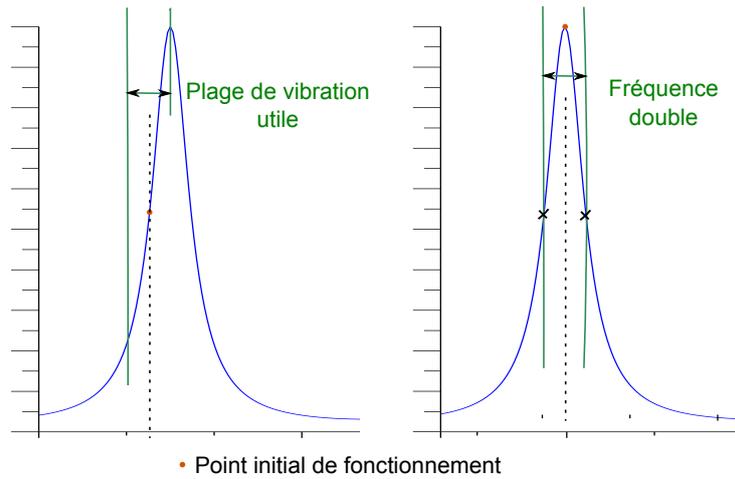


FIGURE 2.20 – Influence de la position du point de fonctionnement pour la détection par interférométrie.

La plage de fonctionnement peut être adaptée au résonateur en jouant sur l'indice de réfraction (caractéristique du matériau) et la longueur d'onde de la source lumineuse.

Type de transduction	Actionnement (Force en $N$ )	Détection (Courant en $A$ )
Piézoélectrique	$F = a_{corr} e_{12} \frac{12eh}{L} V_x$	$i = a_{corr} e_{12} \frac{12eh}{L} \dot{x}$
Electrostatique	$F = \frac{2X_1(y)\epsilon_0\epsilon_r ab}{g_0^2} U_{exci} V_x$	$i = \frac{\epsilon_0\epsilon_r ab}{g_0^2} U_{NL} \dot{x}$
Optique	$F = \frac{2RT_1}{c} \cos^2(\theta) V_x$	$i_{obs} = T_2 P_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega(z)\sqrt{\pi}} x + \frac{2\sqrt{2}}{3\omega^3(z)\sqrt{\pi}} x^3 \right)$ $i_{interf} = \frac{T_2 P_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left( \frac{2\pi n(d_0 - 2x) \cos(\theta)}{\lambda} \right)}$

TABLE 2.1 – Equations sur l'actionnement et la détection d'une poutre encastree-encastree pour differents types de transduction.

$T_1$  représente le coefficient de conversion entre la puissance du laser et sa tension en  $W.V^{-1}$  et  $T_2$  est la réceptivité de la photodiode en  $A.W^{-1}$ .

## Conclusion sur les méthodes d'actionnement et de détection optique

Ces méthodes d'actionnement et de détection optique permettent de supprimer les électrodes déposées sur la structure vibrante afin de limiter l'amortissement mécanique et ainsi obtenir un meilleur facteur de qualité. Cependant, la fabrication est plus complexe pour intégrer les réseaux de Bragg. Ces modèles permettent de comparer ce mode de transduction aux modes plus courants que sont la piézoélectricité et la transduction électrostatique. Le tableau 2.1 suivant présente le récapitulatif des équations liées à l'actionnement ou la détection d'une poutre vibrante encastrée-encastrée pour ces différents types de transduction. Avant la comparaison de ces types de transduction et afin de valider les modèles développés dans ce chapitre, une étude expérimentale est effectuée sur deux types de cellules : l'une piézoélectrique (cellule VIA) et l'autre électrostatique (cellule Aladin).

## 2.4 Conclusion sur le développement des modèles comportementaux

Une étude théorique a été effectuée pour modéliser le comportement multiphysique d'un micro-résonateur de type poutre vibrant en flexion. Le comportement mécanique, le bruit mécanique et les non-linéarités mécaniques du résonateur ont été exprimés tout en utilisant uniquement les paramètres géométriques ( $e$ ,  $h$  et  $L$ ) et les paramètres matériau. Le type de transduction pouvant être piézoélectrique, électrostatique ou optique a aussi été étudié et mis en équation.

# Chapitre 3

## Validation expérimentale des modèles et identification des facteurs limitant la résolution fréquentielle d'un micro-accéléromètre

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation des cellules de test</b>	<b>80</b>
3.1.1	Résonateur à transduction piézoélectrique : cellules VIA	80
3.1.2	Résonateur à transduction électrostatique : cellules Aladin	81
<b>3.2</b>	<b>Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du résonateur Aladin</b>	<b>83</b>
3.2.1	Mise en place de la mesure expérimentale	84
3.2.2	Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure du résonateur	86
3.2.3	Validation des simulations en boucle ouverte	91
<b>3.3</b>	<b>Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du résonateur VIA</b>	<b>93</b>
3.3.1	Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure du résonateur	94
3.3.2	Validation des simulations en boucle ouverte	96
3.3.3	Validation des simulations en boucle fermée	100
<b>3.4</b>	<b>Conclusion sur les validations expérimentales</b>	<b>108</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons valider d'une part les modèles développés et d'autre part l'outil de simulation en utilisant deux cellules distinctes par leur mode de transduction : électrostatique et piézoélectrique. Puis grâce à l'analyse du bruit de phase, nous identifierons les facteurs limitant la résolution d'un micro-accéléromètre.

## 3.1 Présentation des cellules de test

Dans le chapitre 2, des modèles comportementaux pour l'étude d'un oscillateur de type MEMS ont été développés. Afin de valider cette modélisation ainsi que l'outil de simulation, deux cellules de test disponibles au laboratoire sont caractérisées et comparées aux simulations Cadence. Ces deux cellules sont distinctes par leur type de transduction. L'une étant piézoélectrique, constitue l'élément central d'un micro-accéléromètre vibrant (cellules VIA). Et la seconde étant électrostatique, développée dans le but de pouvoir comparer deux types d'actionnement et de détection : optique et électrostatique dans le cadre d'un projet de recherche (cellules Aladin) [82] [83]. La mise en place d'un banc de caractérisation de la transduction optique du micro-résonateur est actuellement encore en cours, la validation expérimentale de ce type de transduction n'a donc pas été possible dans le cadre de ce travail de thèse.

### 3.1.1 Résonateur à transduction piézoélectrique : cellules VIA

#### Architecture de la cellule

La partie active de la cellule VIA est composée d'une lame vibrante en flexion, d'une masse d'épreuve servant à la mesure accélérométrique et de deux articulations. Cette partie active est reliée au support par le biais d'un cadre de découplage servant à isoler efficacement les vibrations utiles de la lame vibrante. Cette architecture est visible sur la figure 3.1. Ces cellules sont réalisées par le biais d'étapes de photolithographie et d'usinage chimique sur des wafers de quartz métallisés.

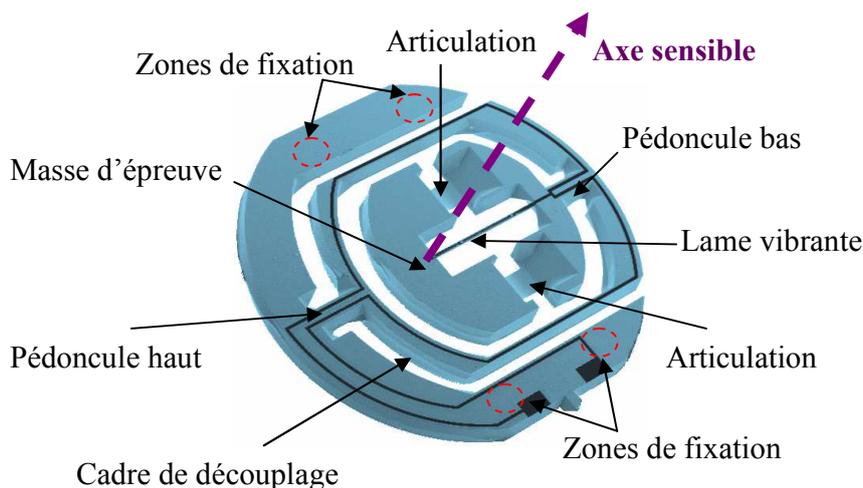


FIGURE 3.1 – Architecture de la cellule VIA

Les dimensions de la cellule attendues après usinage sont les suivantes. Le diamètre des cellules VIA est de  $6\text{mm}$  et l'épaisseur du quartz est de  $400\mu\text{m}$ . La lame vibrante est une poutre ayant une épaisseur vibrante  $e$  de  $54\mu\text{m}$ , une hauteur  $h$  de  $30\mu\text{m}$  et une longueur  $L$  de  $2.26\text{mm}$ . Ces dimensions sont présentées dans le tableau 3.1.

Dimensions de la poutre	VIA
Épaisseur vibrante ( $\mu m$ )	54
Hauteur ( $\mu m$ )	30
Longueur ( $mm$ )	2.26

TABLE 3.1 – Dimensions de la poutre vibrante d'un VIA.

L'actionnement et la détection de la vibration de la poutre est possible grâce à la transduction piézoélectrique.

### Configuration des électrodes sur la cellule

Le quartz étant un matériau piézoélectrique, la poutre vibrante est mise en vibration grâce à l'effet piézoélectrique. Pour cela, des électrodes sont déposées sur le quartz au niveau de la poutre pour pouvoir créer des contraintes par le biais d'un champ électrique et récupérer des charges proportionnelles au déplacement de la poutre.

La disposition de ces électrodes pour le VIA est présentée sur la figure 3.2. Cette configuration a été vu dans la partie 2.3.1 sur la figure 2.10 et a été nommée "Configuration simplifiée".

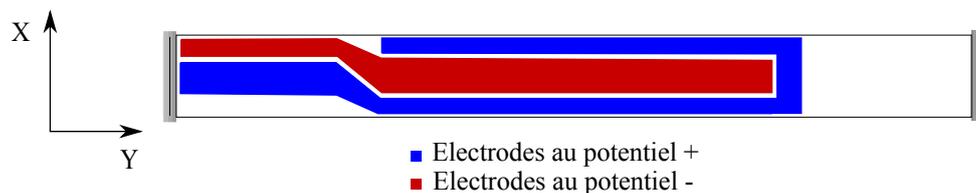


FIGURE 3.2 – Schéma de la disposition des électrodes sur la cellule VIA

## 3.1.2 Résonateur à transduction électrostatique : cellules Aladin

### Architecture de la cellule

Dans le cadre du projet ALADIN, des micro-résonateurs ont été réalisés en vue de l'étude de leur actionnement et de leur détection par voie optique. La finalité de ce projet est de réaliser des capteurs MEMS vibrants à hautes performances en silicium. La transduction optique permet d'obtenir des coefficients de qualité ayant des valeurs ultimes, en évitant un amortissement mécanique du résonateur à cause des électrodes situées à proximité de la poutre vibrante. Ces résonateurs sont aussi conçus avec des plots d'actionnement et de détection pour une transduction électrostatique dans le but de pouvoir caractériser séparément l'actionnement et la détection optique.

Ces résonateurs sont des diapasons, ce qui permet de confiner l'énergie vibratoire dans les lames sans utiliser un cadre de découplage. Le résonateur étudié est réalisé sur un substrat SOI (silicon on insulator) et sa géométrie est un diapason encastré-encastré.

L'épaisseur vibrante  $e$  du silicium est de  $8\mu m$ , la longueur  $L$  d'une poutre du diapason est de  $1,32mm$  et une hauteur de  $h$  de  $100\mu m$ . Ces dimensions sont présentées dans le tableau 3.2.

Dimensions de la poutre	Aladin
Épaisseur vibrante ( $\mu m$ )	8
Hauteur ( $\mu m$ )	100
Longueur ( $mm$ )	1.32

TABLE 3.2 – Dimensions de la poutre vibrante d'une cellule Aladin.

La cellule comporte huit électrodes de part et d'autre du diapason pour l'excitation et la détection électrostatique. De plus, une cavité Fabry-Pérot composée de miroirs de Bragg est située sur les bras du diapason pour étudier le principe de détection des vibrations par interférométrie. Ces électrodes et les miroirs de Bragg sont visibles sur la figure 3.3.

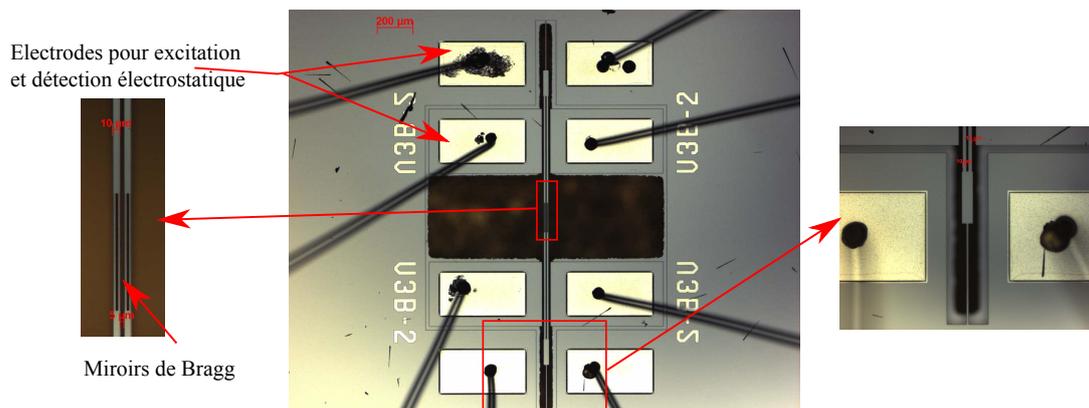


FIGURE 3.3 – Photos du diapason Aladin encastré-encastré

Le schéma descriptif de cette cellule est visible sur la figure 3.4. La gravure de l'oxyde de silicium a permis de libérer le diapason et de former des électrodes sur des îlots isolés électriquement pour pouvoir actionner et détecter les vibrations du résonateur. Des photos effectuées avec un microscope électronique à balayage sont présentées sur la figure 3.5.

Dans notre étude expérimentale, l'excitation et la détection de la vibration du diapason est effectuée uniquement grâce à la transduction électrostatique. En effet, le banc de caractérisation optique est en cours de construction.

### Configuration électrostatique de la cellule

Le silicium étant un semi-conducteur, le diapason peut être mis en vibration grâce à l'effet électrostatique. Quatre plots de polarisation se situent aux extrémités de la structure pour permettre la polarisation du diapason en silicium. Quatre îlots ont été intégrés de part et d'autre du résonateur afin d'obtenir une différence de potentiel entre la poutre du diapason mobile et ces électrodes. Ces mêmes électrodes permettent de recevoir les

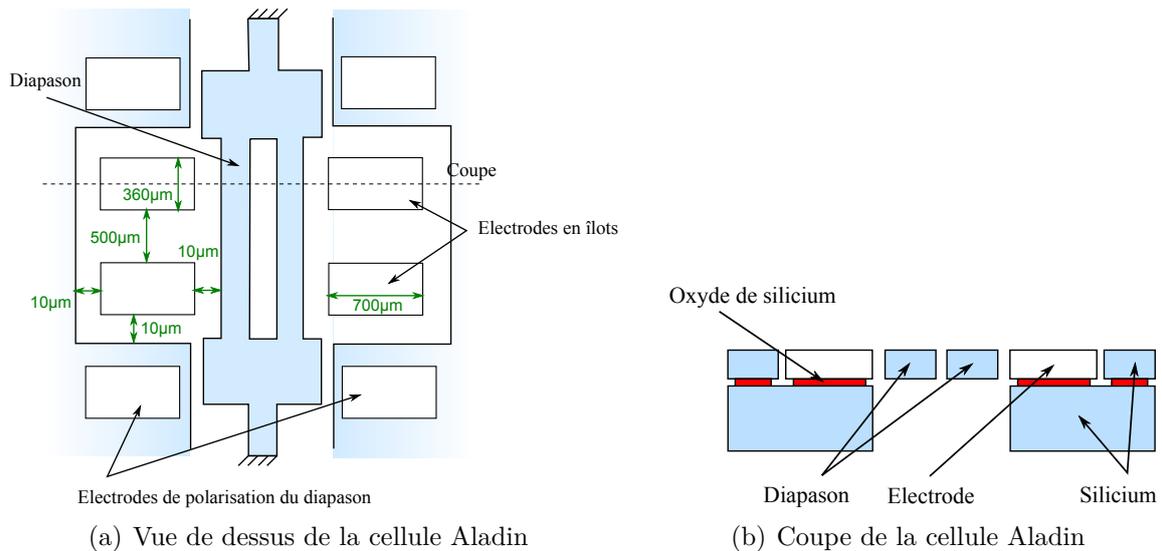


FIGURE 3.4 – Schéma descriptif de la cellule Aladin en vue de dessus et en coupe.

charges lors du mouvement de la poutre. Le schéma de la disposition des électrodes de la cellule Aladin est présenté sur la figure 3.4.

Ces deux cellules (VIA et Aladin) sont utilisées pour valider les modèles développés (chapitre 2) pour le résonateur mécanique et les transductions piézoélectriques et électrostatique, en confrontant les simulations aux mesures expérimentales.

## 3.2 Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du résonateur Aladin

Après la mise en place du dispositif pour effectuer des mesures électriques sur la cellule Aladin, une caractérisation de la cellule est effectuée : identification de ses modes de résonance, mesure de ses paramètres motionnels et de l'effet des non-linéarités. L'étude expérimentale est ensuite comparée aux simulations comportementales effectuées à l'aide du logiciel CADENCE. Les valeurs des coefficients matériau utilisées pour les calculs ou la simulation sont ceux du silicium que l'on retrouve dans le tableau 3.3 suivant :

Propriétés du Silicium	Symbole	Unité	Valeur
Masse volumique	$\rho$	$kg.m^{-3}$	2330
Chaleur spécifique à pression constante	$C_p$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	700
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha$	$K^{-1}$	$2,6.10^{-6}$
Module d'Young	$E$	$N.m^{-2}$	$1,68.10^{11}$
Conductibilité thermique	$\kappa$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	148

TABLE 3.3 – Valeurs des coefficients pour le silicium.

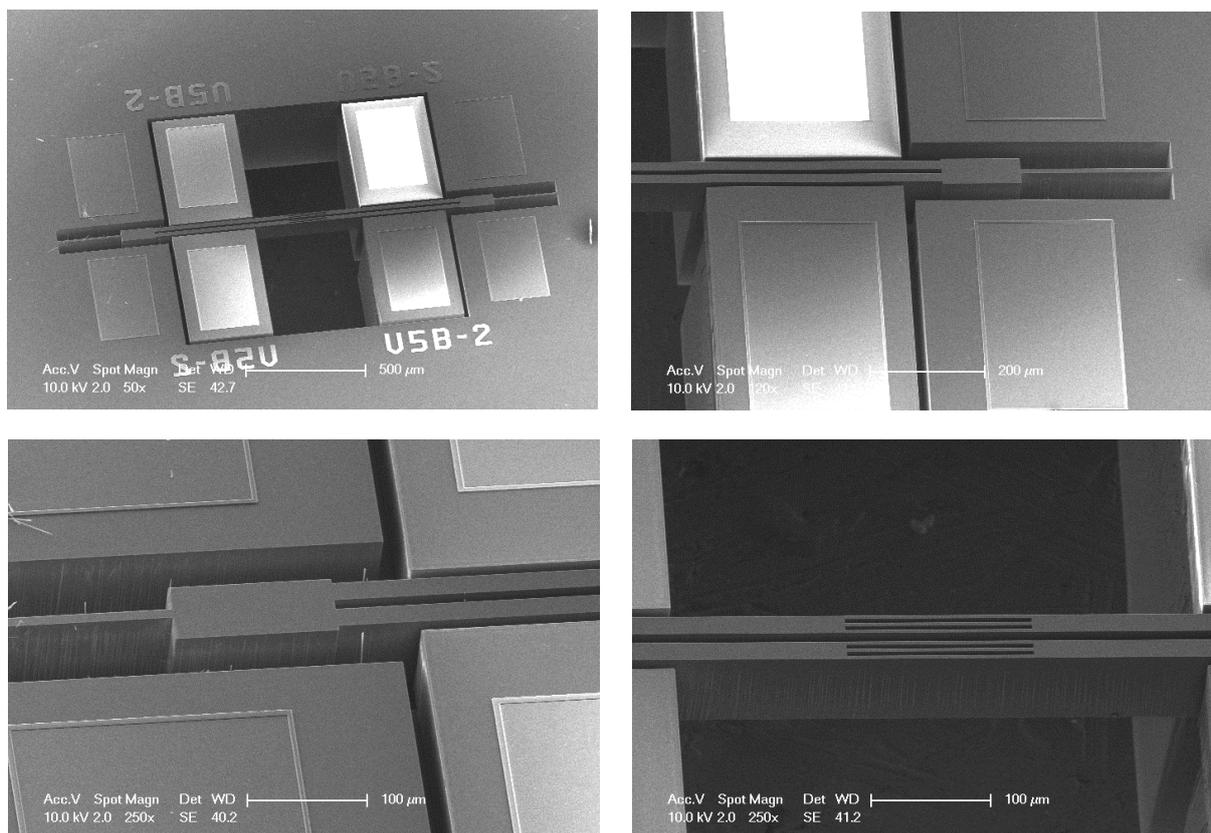


FIGURE 3.5 – Photos avec un microscope électronique à balayage de la cellule Aladin

### 3.2.1 Mise en place de la mesure expérimentale

#### Développement du banc de mesure pour la caractérisation de la cellule

Après la fabrication, la cellule Aladin est collée sur un support pour pouvoir effectuer un bonding. Ce bonding permet de relier électriquement les plots d'actionnement et de détection de part et d'autre de la poutre vibrante. La capacité inter-électrode parasite est annulée à l'aide d'un amplificateur inverseur suivi d'une capacité. L'amplificateur de charges en sortie du résonateur permet d'obtenir une tension proportionnelle au déplacement de la poutre. Le schéma électrique de la mesure est présenté sur la figure 3.6. Le signal de sortie étant de très faible amplitude (quelques  $mV$  maximum), on utilise un amplificateur à détection synchrone qui permet d'extraire le signal porté par une fréquence d'un environnement bruité. Cet appareil permet à la fois d'injecter le signal d'excitation au résonateur et de détecter ses vibrations par le biais de la variation de capacité entre l'électrode de détection et la poutre vibrante.

#### Disposition des potentiels électriques sur les plots d'actionnement et de détection

La poutre et le substrat sous l'oxyde de silicium sont polarisés au même potentiel par le biais des quatre plots de part et d'autre du diapason. La force électrostatique étant proportionnelle à une différence de potentiels, on envoie le signal d'actionnement

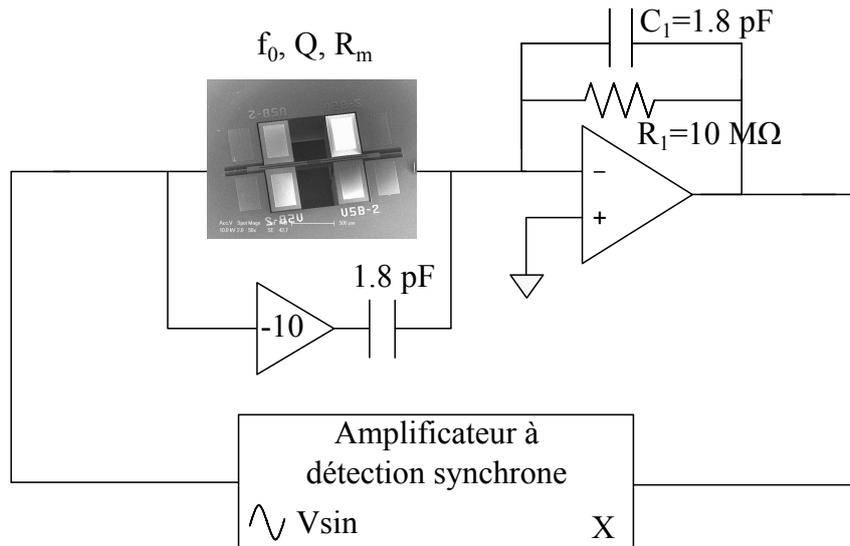


FIGURE 3.6 – Schéma électrique de la mesure en boucle ouverte de la cellule Aladin.

sinusoïdal sur un îlot. Ce potentiel a pour but de mettre en vibration une branche du diapason et a fortiori le diapason entier. Une autre électrode est reliée à l'amplificateur de charges (masse virtuelle) pour détecter la variation de capacité entre cette électrode et la branche mobile du diapason. Les deux autres électrodes disposées autour de la seconde branche du diapason sont au même potentiel que la poutre pour obtenir une force statique nulle. Cette configuration de polarisation des électrodes est représentée sur la figure 3.7.

On utilise l'amplificateur à détection synchrone pour trouver dans un premier temps les principaux modes de résonance.

### Détection des différents modes de résonance

Une simulation par éléments finis de la structure vibrante peut être effectuée. Elle permet d'obtenir tous les modes de résonance du diapason. En effet, pour une telle structure il existe une infinité de modes plus ou moins importants. Pour effectuer cette simulation, la structure est maillée en respectant ses dimensions, puis les paramètres du matériau utilisé sont ajoutés. La simulation modale permet de trouver la fréquence de chaque mode ainsi que de visualiser la déformée. Cette simulation modale a été effectuée sous le logiciel ANSYS. Le tableau 3.4 présente ces différents modes de résonance.

Le mode 3 est le mode important de notre étude. Il s'agit du mode diapason pour lequel les deux branches du diapason vibrent en opposition de phase. Ce mode est intéressant car il permet de confiner l'énergie vibratoire dans les lames et ainsi obtenir un facteur de qualité élevé.

Lors de la première mesure effectuée sous vide, un large balayage fréquentiel est effectué pour détecter les différents modes de résonance avec l'amplificateur à détection synchrone. Les données sont ensuite collectées grâce au logiciel Labview qui permet de piloter cet amplificateur. Le résultat de cette mesure est visible sur la figure 3.8. Pour la détection de ces modes, le signal sinusoïdal envoyé à l'électrode est de  $10mV_p$  et la tension continue de

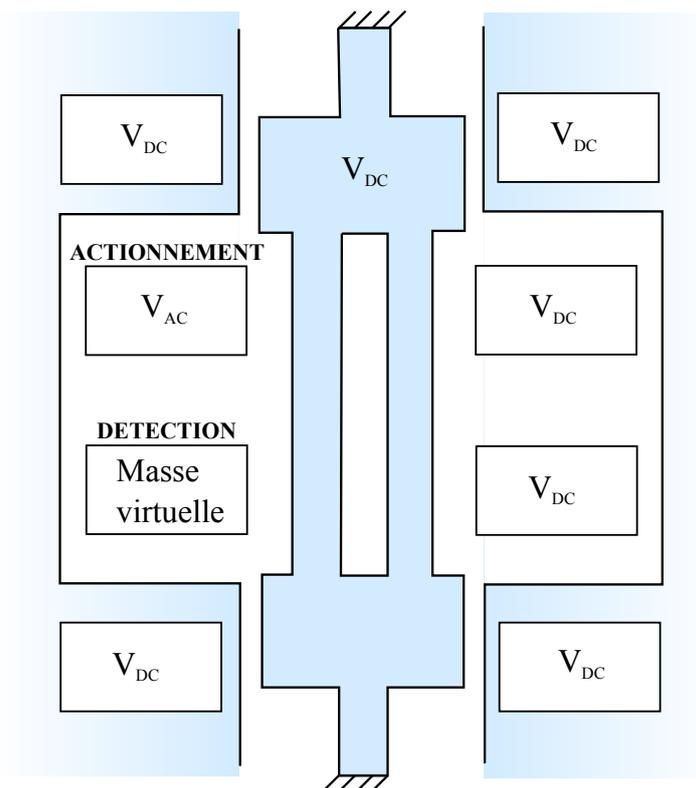


FIGURE 3.7 – Schéma de la polarisation des électrodes de la cellule Aladin.

polarisation est de  $7V$ . Ces valeurs permettent d'exciter le mode diapason juste en dessous de l'amplitude critique, avant apparition des non-linéarités. Cette mesure a été réalisée par incrémentation de  $0.1Hz$ , car la longueur de la raie de résonance à  $-3dB$  attendue pour le mode diapason est de  $0.4Hz$  ( $f_0 = 40000kHz$ ,  $Q \approx 100000$ ). On peut distinguer une principale résonance aux alentours des  $18kHz$  qui correspond au mode 1. En effet, ce mode est favorisé par notre disposition d'actionnement. De plus, on peut distinguer vers  $40kHz$  une seconde résonance qui correspond au mode 3 du diapason qui nous intéresse. les autres modes n'ayant pas été détectés à cause de leur faible amplitude.

### 3.2.2 Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure du résonateur

Une mesure électrique est réalisée sur la cellule. Pour cela, on dépose la cellule avec son circuit électrique dans une enceinte sous vide, ce qui permet de négliger l'amortissement gazeux. La figure 3.9 montre la résonance du mode diapason de la cellule Aladin. Cette mesure a été effectuée avec une tension d'excitation sinusoïdale de  $5mVp$  et d'une tension de polarisation du diapason de  $7V$  (Amplitude critique avant l'apparition d'un hystérésis dans la courbe de résonance dû aux non-linéarités mécaniques).

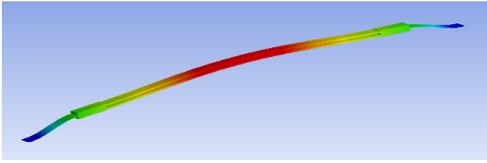
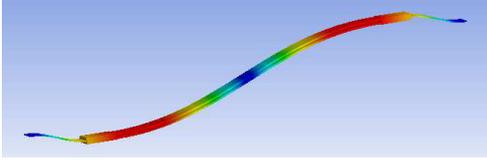
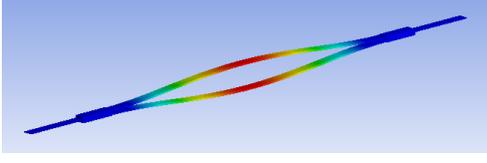
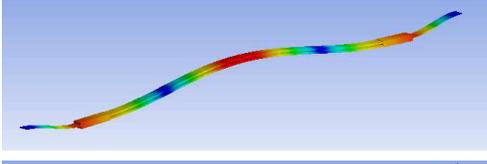
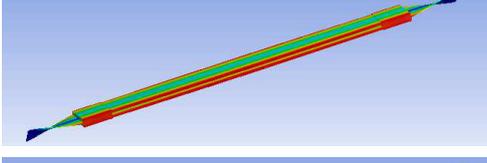
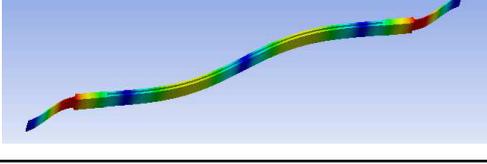
Mode	Fréquence ( $Hz$ )	Déplacement
1	17708	
2	28676	
3	39897	
4	57620	
5	75153	
6	89234	

TABLE 3.4 – Fréquence et déformée des différents modes de résonance de la cellule Aladin - simulations ANSYS -.

### Comparaison de la fréquence de résonance

La fréquence de résonance de la mesure de la cellule sur la figure 3.9 est de  $40134.5Hz$ . La valeur attendue par le calcul théorique à l'aide de l'équation 1.10 est de  $40074Hz$ . L'écart entre ces deux valeurs provient de la précision de fabrication de la cellule. En effet, les valeurs des paramètres géométriques réels du résonateur ne correspondent pas exactement aux valeurs attendues.

L'erreur relative sur la fréquence est ainsi de 0.15%. Comme la fréquence propre d'une poutre doublement encastrée est proportionnelle à son épaisseur vibrante, cela implique un écart sur  $e$  de  $12nm$ .

### Comparaison du facteur de qualité

Le facteur de qualité qui représente la capacité du résonateur à conserver son énergie mécanique au cours de la vibration peut être calculé. Il s'agit du rapport de la fréquence

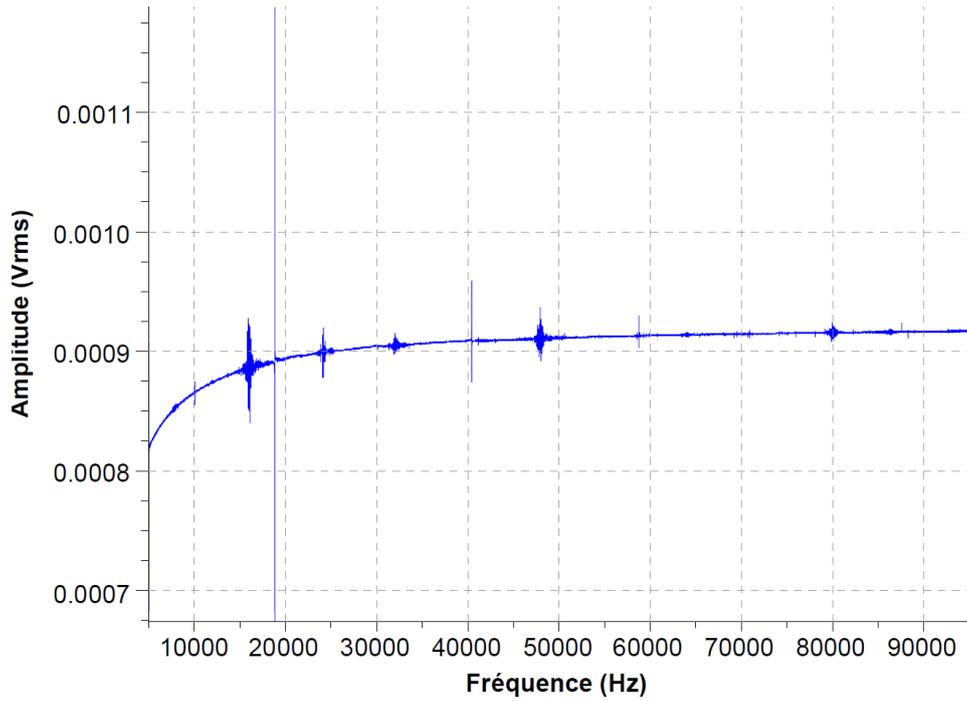


FIGURE 3.8 – Réponse en tension du résonateur Aladin en fonction de sa fréquence.

propre  $f_0$  du résonateur sur la largeur de sa bande passante  $\Delta f$  à  $-3dB$  présenté sur l'équation 3.1 :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (3.1)$$

Le coefficient de qualité  $Q$  calculé est : 50200.

Le coefficient de qualité sous vide est limité par l'effet thermoélastique. Suivant l'équation 2.18, le  $Q_{thermo}$  vaut 263800. Il faut aussi quantifier le  $Q_{squeeze}$  théorique provenant de l'amortissement induit par les molécules piégées entre la poutre et les îlots d'électrodes d'une part, et entre les deux branches du diapason d'autre part, car on travaille avec un faible gap pour une pression d'air de  $2 \cdot 10^{-3} mbar$  dans l'enceinte sous vide. En effet, la première branche du diapason est séparé seulement de  $5 \mu m$  de la seconde. Sous ces conditions et à partir de l'équation 2.16, on obtient un  $Q_{squeeze}$  de 190900. La valeur du  $Q_{theo}$  théorique est de :

$$\frac{1}{Q_{theo}} = \frac{1}{Q_{thermo}} + \frac{1}{Q_{squeeze}} \iff Q_{theo} = 110753 \quad (3.2)$$

L'erreur relative sur le facteur de qualité est ainsi de 54%. Ce fort écart peut s'expliquer par le fait que pour ces faibles dimensions de poutres, l'écart d'épaisseur vibrante des deux branches du diapason limite l'effet diapason, ce qui induit des pertes à l'encastrement.

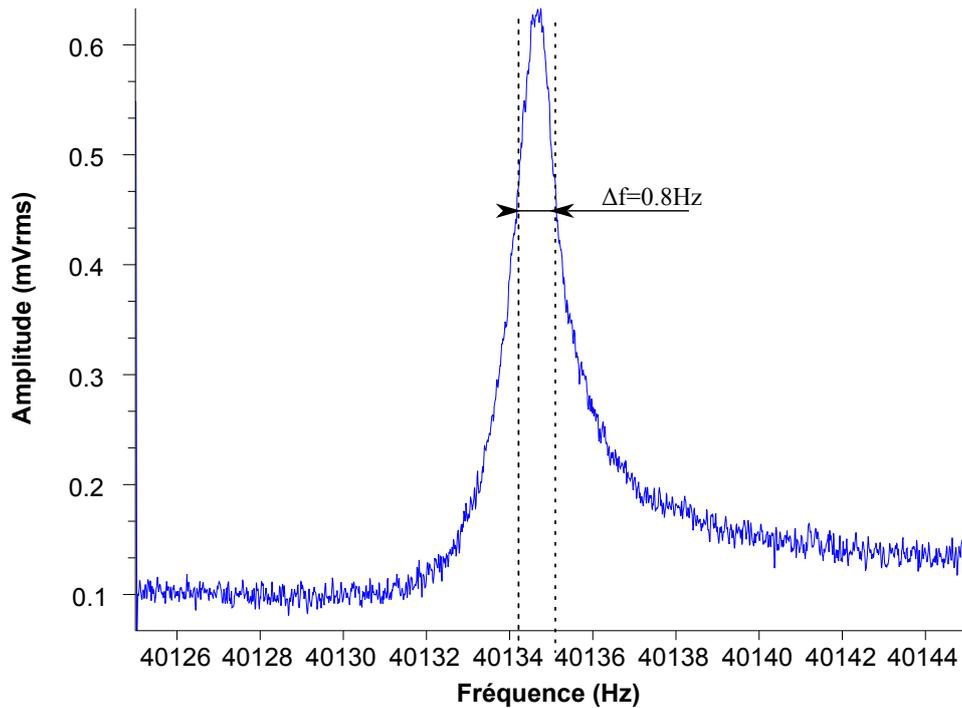


FIGURE 3.9 – Courbe expérimentale de la résonance de la cellule Aladin pour une excitation de 5mVp et 7V de polarisation

### Comparaison de la résistance motionnelle

Un troisième paramètre important pour décrire le résonateur est la résistance motionnelle. Elle permet d'évaluer l'efficacité de son type de transduction. Elle se calcule lorsque le système est à la résonance, le résonateur se comportant comme une résistance  $R_m$ . En appelant  $V_{sin}$  le signal d'entrée et  $V_s$  le signal de sortie on obtient à partir de la figure 3.6 l'équation 3.3.

$$\frac{V_s}{V_{sin}} = \frac{R_1}{R_m} \frac{1}{\sqrt{1 + R_1^2 C_1^2 \omega_0^2}} \quad (3.3)$$

dans notre mesure  $R_1 C_1 \omega_0 \gg 1$ , on obtient ainsi la résistance motionnelle suivante :

$$R_m = \frac{V_{sin}}{V_s C_1 \omega_0} = 11.86 M\Omega \quad (3.4)$$

La résistance motionnelle théorique  $R_{m-theo}$  se calcule de la manière suivante :

$$R_{m-theo} = \frac{m\omega_0}{Qn_1 n_2} \quad (3.5)$$

où  $n_1$  représente le coefficient d'actionnement électrostatique qui relie la force à la tension et  $n_2$  le coefficient de détection électrostatique qui relie le courant de sortie à la vitesse de la poutre. Ces coefficients ont été développés dans l'équation 2.83 et l'équation 2.86.

On obtient donc pour le  $R_{m-theo}$  l'équation 3.6 suivante :

$$R_{m-theo} = \frac{m\omega_0}{Q} \frac{g_0^4}{(X_1(y)\epsilon_0\epsilon_r ab V_{DC})^2} \quad (3.6)$$

où les paramètres  $a$  et  $b$  des électrodes ainsi que leur position  $y$  est visible sur la figure 3.4. Par ce calcul,  $R_{m-theo}$  théorique vaut  $11.65M\Omega$

L'erreur relative sur la résistance motionnelle est ainsi de 1.8%, ce qui est très faible.

### Comparaison de la capacité inter-electrode

Une capacité parasite est présente entre le signal d'entrée et le signal de sortie. Dans notre mesure cette capacité vaut  $180fF$  et est compensée par un circuit dédié. Cette capacité parasite provient de la disposition des électrodes et de la capacité du circuit (distance des pistes sur le circuit imprimé). Elle est calculable à partir du dimensionnement et de la position des électrodes (figure 3.10).

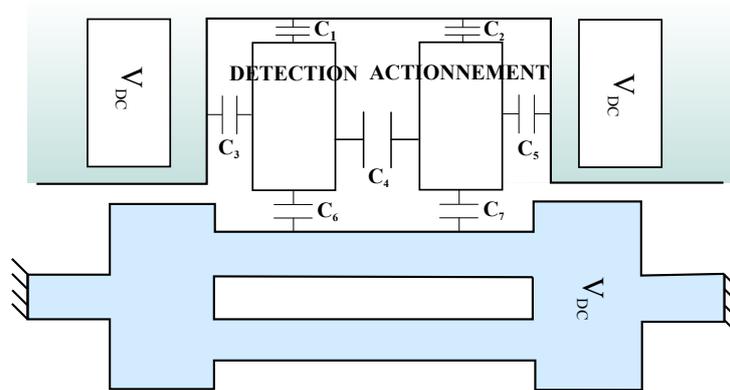


FIGURE 3.10 – Disposition des capacités parasites entre l'actionnement et la détection.

Son schéma électrique équivalent est présenté sur la figure 3.11.

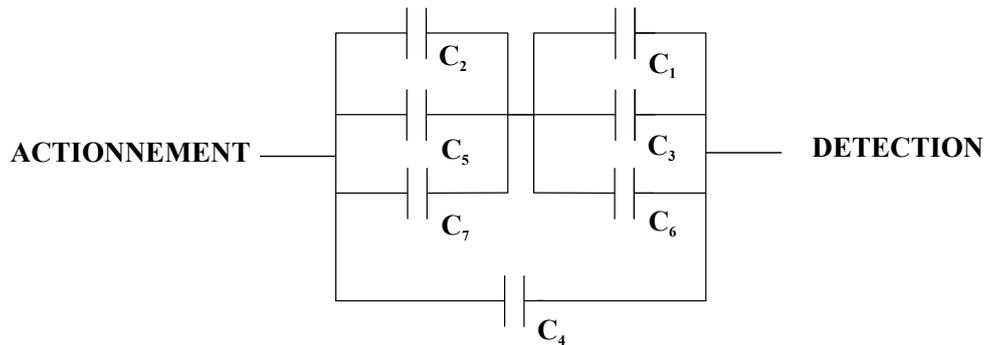


FIGURE 3.11 – Schéma électrique équivalent des capacités parasites.

Il est ainsi possible de calculer la capacité parasite équivalente. En utilisant les dimensions de la figure 3.4, on remarque que  $C_1 = C_6 = C_2 = C_7$  et que  $C_3 = C_5$ . On obtient l'équation de la capacité équivalente suivante :

$$C_{eq} = C_1 + C_4 + \frac{C_3}{2} = 64fF \quad (3.7)$$

L'écart avec la valeur mesurée provient des capacités parasites présentes sur le circuit imprimé entre les différentes pistes. Ces capacités viennent se sommer à celle calculée précédemment.

### Bilan des paramètres motionnels

Le tableau 3.5 présente la comparaison des paramètres motionnels théoriques et mesurés. Ces paramètres sont la fréquence de résonance, la facteur de qualité et la résistance motionnelle.

Aladin	$f_0$ (Hz)	$R_m$ (M $\Omega$ )	$Q$
Modèle	40074	11.65	110753
Mesure	40134	11.86	50200
Erreur relative	0.15%	1.8%	54%

TABLE 3.5 – Comparaison des paramètres motionnels entre le modèle et la mesure de la cellule Aladin.

Le principal écart est sur le facteur de qualité car seuls les pertes par l'amortissement gazeux et par l'effet thermoélastique ont été modélisées. Les pertes à l'encastrement, dues à un mauvais "effet diapason" du fait de la non identité des deux branches du diapason, peuvent expliquer cet écart. Ces valeurs mesurées du tableau 3.5 seront prises en compte dans la simulation du résonateur Aladin.

### 3.2.3 Validation des simulations en boucle ouverte

#### Mesure des non-linéarités du résonateur

A partir d'une tension d'excitation trop élevée, la cellule passe d'un comportement linéaire à un comportement non-linéaire. Ce domaine non-linéaire est détectable par la perte de la symétrie de la figure 3.9. Pour détecter ce comportement, une série de mesures est effectuée en faisant varier dans un premier temps la tension d'excitation sinusoïdale puis dans un second temps en changeant la tension continue de la polarisation du diapason. Dans notre mesure, pour trois polarisations de poutre (6V, 8V et 10V) on fait varier la tension sinusoïdale de 5mV à 10mV puis 20mV. Le résultat de ces mesures est présenté sur la figure 3.12 :

On remarque que le comportement non-linéaire du résonateur dépend à la fois du niveau d'excitation et de la tension de polarisation. En effet, à partir de l'équation 2.83 on retrouve que la force d'excitation appliquée au résonateur est proportionnelle à la tension de polarisation multipliée par la tension sinusoïdale. Pour notre cellule, lorsque ce produit est supérieur à environ  $0.11V^2$  (plus ou moins 10%) un point d'inflexion apparaît. La courbure penche du côté des fréquences hautes à cause des non-linéarités mécaniques en  $x^3$ .

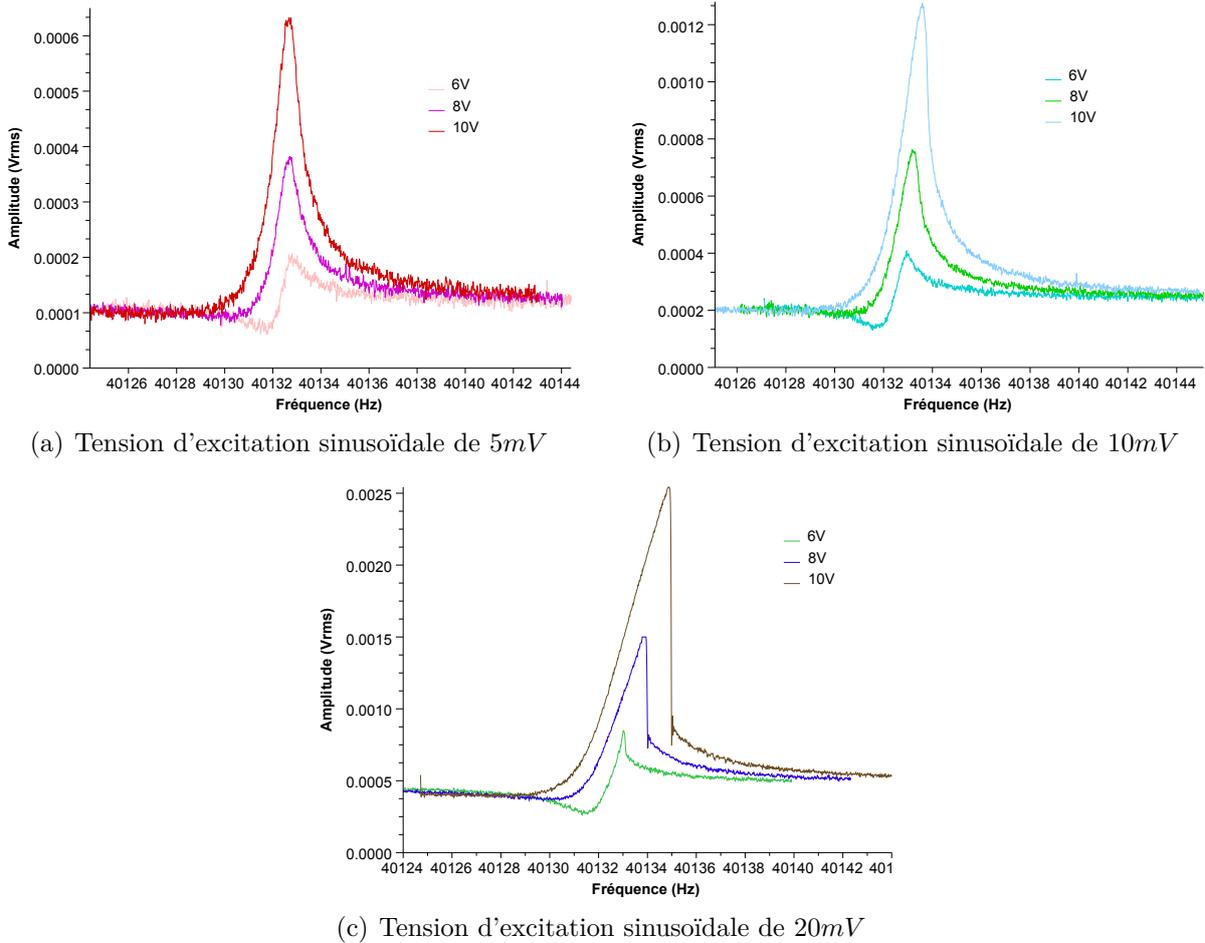


FIGURE 3.12 – Mesure de la réponse de la cellule pour différents niveaux d'excitation.

En utilisant les paramètres motionnels mesurés de la cellule Aladin, une simulation théorique est effectuée pour valider l'outil de simulation.

### Simulation du résonateur Aladin

La simulation en régime non-linéaire du résonateur Aladin se fait à partir du logiciel CADENCE (cf. chapitre 1). La cellule Aladin est en silicium et les paramètres géométriques de la poutre vibrante du diapason ont été présentés sur le tableau 3.2. A partir de ces paramètres et des équations comportementales développées dans le chapitre 2, un modèle est créé avec le langage Verilog-A. Ce modèle comprend l'équation linéaire du mouvement à laquelle sont ajoutés les termes de non-linéarités mécaniques et les équations du mode de transduction. Autour de ce modèle, on insère les modèles des composants électroniques nécessaires à son fonctionnement. Pour cela, on utilise un générateur de tension sinusoïdale et continue, des résistances et condensateurs, ainsi que les modèles Spice des amplificateurs opérationnels utilisés lors de la mesure expérimentale.

L'analyse AC du simulateur n'est pas utilisable car elle linéarise le problème autour d'un point de fonctionnement, et ne prend donc pas en compte les non-linéarités. En effectuant des simulations PSS (Periodic Steady-State cf. chapitre 1), il est possible d'obtenir le spectre de la tension de sortie autour de la fréquence de résonance du résonateur.

L'avantage de la simulation PSS par rapport à la simulation AC (Alternating Current) est qu'elle prend en compte les non-linéarités présentes dans le système. Grâce à la simulation PSS, on peut faire apparaître les non-linéarités du résonateur en augmentant progressivement la force d'excitation qui lui est appliquée.

### Confrontation des résultats théoriques et des simulations

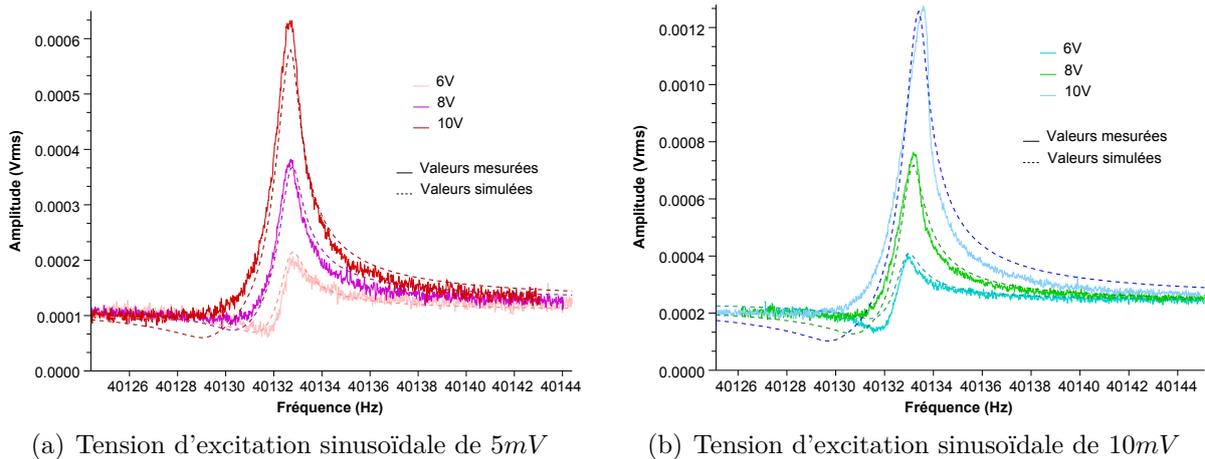


FIGURE 3.13 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs simulées du modèle théorique pour deux niveaux d'excitation (figure (a) et figure (b)).

La figure 3.13 montre la simulation du comportement du résonateur Aladin. Les deux graphiques présentent deux niveaux d'excitation sinusoïdale :  $5mV$  et  $10mV$  pour lesquels l'on fait varier la tension de polarisation. Les simulations ayant pour excitation  $20mV$  ne peuvent aboutir à cause de l'apparition d'une hystérésis dans la courbe de résonance, au-delà du point d'inflexion. Une bonne concordance existe entre la mesure expérimentale et la simulation CADENCE. Cela permet de valider l'utilisation des modèles développés dans le chapitre 1. Cependant aucune simulation en boucle fermée a été effectuée, le signal étant très faible, la conception d'un circuit spécifique n'a pas été entreprise.

## 3.3 Confrontation du modèle théorique avec l'expérience dans le cas du résonateur VIA

De la même façon que pour la cellule Aladin à transduction électrostatique, des mesures électriques sont effectuées. Après la comparaison des paramètres motionnels théoriques et expérimentaux, la simulation en boucle ouverte permet de valider le modèle. Les valeurs des coefficients matériau utilisés pour les calculs ou la simulation sont ceux du quartz que l'on retrouve dans le tableau 3.6 suivant :

Propriétés du Quartz	Symbole	Unité	Valeur
Masse volumique	$\rho$	$kg.m^{-3}$	2650
Chaleur spécifique à pression constante	$C_p$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	750
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha$	$K^{-1}$	$13,7.10^{-6}$
Module d'Young	$E$	$N.m^{-2}$	$7,82.10^{10}$
Conductibilité thermique	$\kappa$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	6,7

TABLE 3.6 – Valeurs des coefficients pour le quartz.

### 3.3.1 Comparaison des paramètres du modèle théorique et de la mesure du résonateur

#### Dispositif de mesure pour la caractérisation de la cellule

Afin que le résonateur ne soit pas affecté par l'amortissement gazeux, il est nécessaire que la cellule VIA fonctionne sous vide. Un circuit dédié permet d'annuler la capacité inter-électrodes, indépendante de la branche motionnelle. Pour cela, la cellule est packagée et mise sous vide. De plus, la sortie du résonateur est branchée sur un amplificateur de charges pour obtenir en sortie une tension. Cette tension est l'image du déplacement de la poutre vibrante. Le schéma électrique de cette mesure est visible sur la figure 3.14.

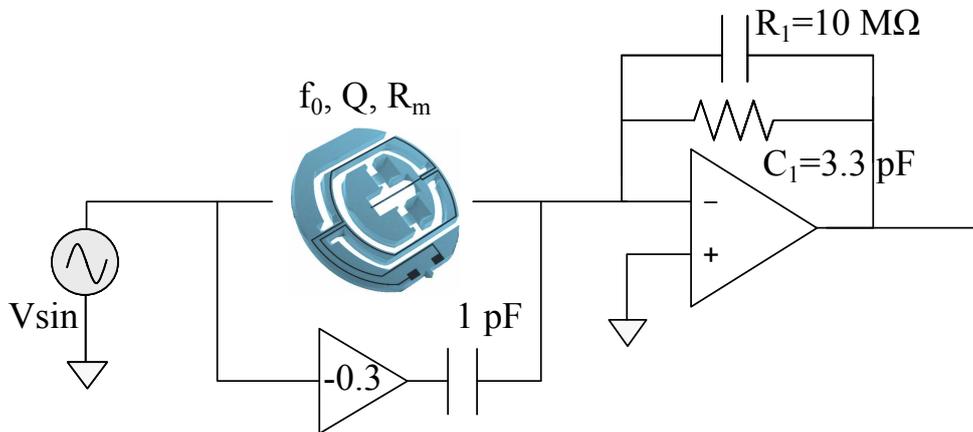


FIGURE 3.14 – Schéma électrique de la mesure en boucle ouverte d'une cellule VIA

La mesure en boucle ouverte d'un résonateur se fait à l'aide d'un générateur de tension sinusoïdale présent à l'entrée du résonateur et un voltmètre permettant de mesurer l'amplitude de la tension en sortie du circuit. la première étape consiste à détecter la résonance de la cellule. Pour cela, on fixe la tension et on effectue un balayage fréquentiel tout en regardant la réponse à l'aide du voltmètre. La figure 3.15 montre le passage de la résonance, l'amplitude du signal augmente jusqu'à atteindre un extrémum avant de diminuer.

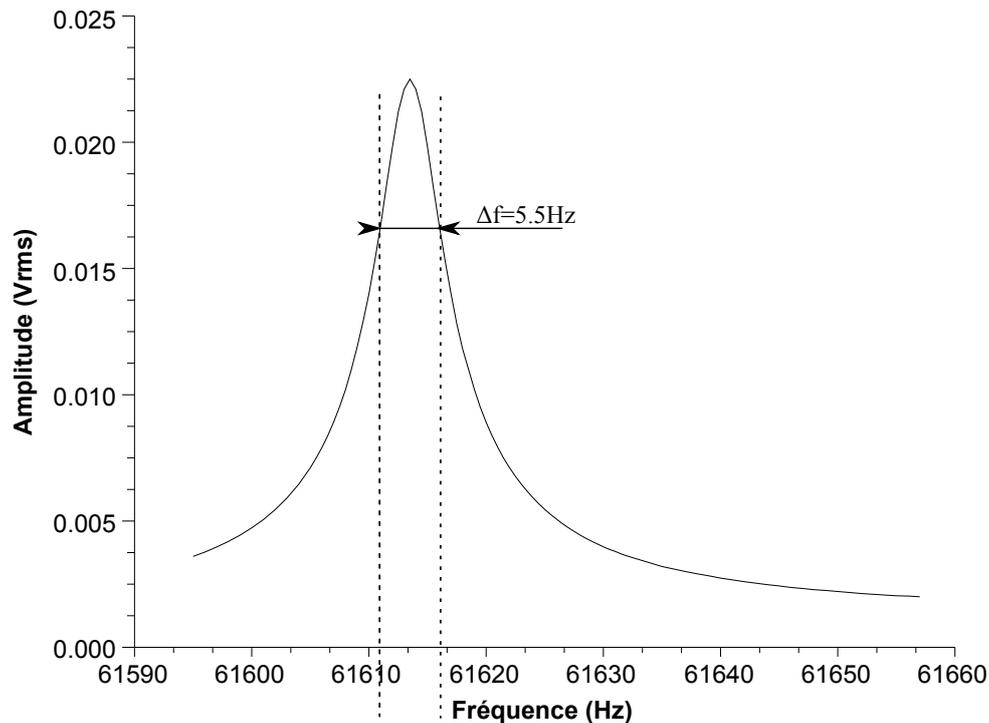


FIGURE 3.15 – Courbe expérimentale de la résonance de la cellule VIA pour une excitation de 100mVpp

### Comparaison de la fréquence de résonance

A l'aide de cette mesure, différents paramètres du résonateur peuvent être calculés. La fréquence de résonance est obtenue au maximum de la courbe et vaut pour cette cellule 61614Hz. La fréquence de résonance théorique est exprimée dans l'équation 1.10 et vaut 59057. En ajustant la mesure de l'épaisseur vibrante à la véritable épaisseur mesurée 56 $\mu$ m, la nouvelle fréquence de résonance est 61220Hz.

L'erreur relative sur la fréquence est de 0.6% et est principalement causée par la précision sur la fabrication de la cellule.

### Comparaison du facteur de qualité

Comme illustré pour la cellule Aladin, le facteur de qualité représente la capacité du résonateur à conserver son énergie mécanique au cours de la vibration. Son expression a été présenté par l'équation 3.1.

Ce résonateur possède un facteur de qualité  $Q$  de 11200, principalement limité par l'effet thermoélastique. L'expression de ce  $Q_{thermo}$  est décrite dans l'équation 2.17 et vaut 16240.

L'erreur relative sur ce facteur de qualité étant de 31%. Cet écart peut être du à l'amortissement induit par les électrodes. Ce phénomène a été décrit dans la référence [84]. En effet, avec un  $Q_{elec}$  de 60000, on obtient bien  $Q_{total} = 12780$ .

## Comparaison de la résistance motionnelle

Sur le même principe que la cellule Aladin, on peut mesurer la résistance motionnelle de la cellule VIA. Le calcul a été développé dans l'équation 3.4. Cette valeur mesurée est de  $2.52M\Omega$ . De manière théorique, elle dépend notamment des pertes mécaniques et du coefficient de conversion piézoélectrique. Elle se calcule par l'équation 3.8 suivante :

$$R_m = \frac{m\omega_0}{Qn^2} \quad (3.8)$$

Le coefficient de conversion piézoélectrique  $n$  a été calculé dans l'équation 2.72 et est adapté à la disposition des électrodes du VIA vue sur la figure 3.2. Comme on applique un facteur correctif déterminé de manière expérimentale sur l'expression du facteur de transduction piézoélectrique, la résistance motionnelle du modèle est exactement égale à la résistance motionnelle mesurée.

## Bilan des paramètres motionnels

Le bilan théorique et mesuré des paramètres motionnels du résonateur est visible sur le tableau 3.7 :

VIA	$f_0$ (Hz)	$R_m$ (M $\Omega$ )	$Q$
Modèle	61220	2.52	12780
Mesure	61614	2.52	11200
Erreur relative	0.6%	0%	12%

TABLE 3.7 – Comparaison des paramètres motionnels entre le modèle et la mesure.

Les paramètres du tableau 3.7 seront utilisés pour la simulation du résonateur VIA.

## 3.3.2 Validation des simulations en boucle ouverte

### Mesure des non-linéarités du résonateur

Comme pour la cellule Aladin, à partir d'une excitation trop élevée la cellule passe dans un comportement non-linéaire. Pour détecter ce comportement, une série de mesures est effectuée pour différents niveaux d'excitation du résonateur. Pour cette cellule de test, sept niveaux d'excitation ont été appliqués :  $100mV_{pp}$ ,  $200mV_{pp}$ ,  $500mV_{pp}$ ,  $1V_{pp}$ ,  $2V_{pp}$ ,  $5V_{pp}$  et  $10V_{pp}$ , en balayant des basses fréquences vers les hautes fréquences. Cette mesure est visible sur la figure 3.16.

On remarque qu'à partir d'une excitation supérieure à  $500mV_{pp}$ , l'identification du comportement non-linéaire est clairement visible et qu'à partir d'une excitation supérieure à  $1V_{pp}$ , la courbe de résonance présente un point d'inflexion. La courbure penche du côté des fréquences hautes car il s'agit des non-linéarités mécaniques en  $x^3$  causées par le changement de longueur de la poutre lors du mouvement du résonateur (cf. chapitre 2.2.2).

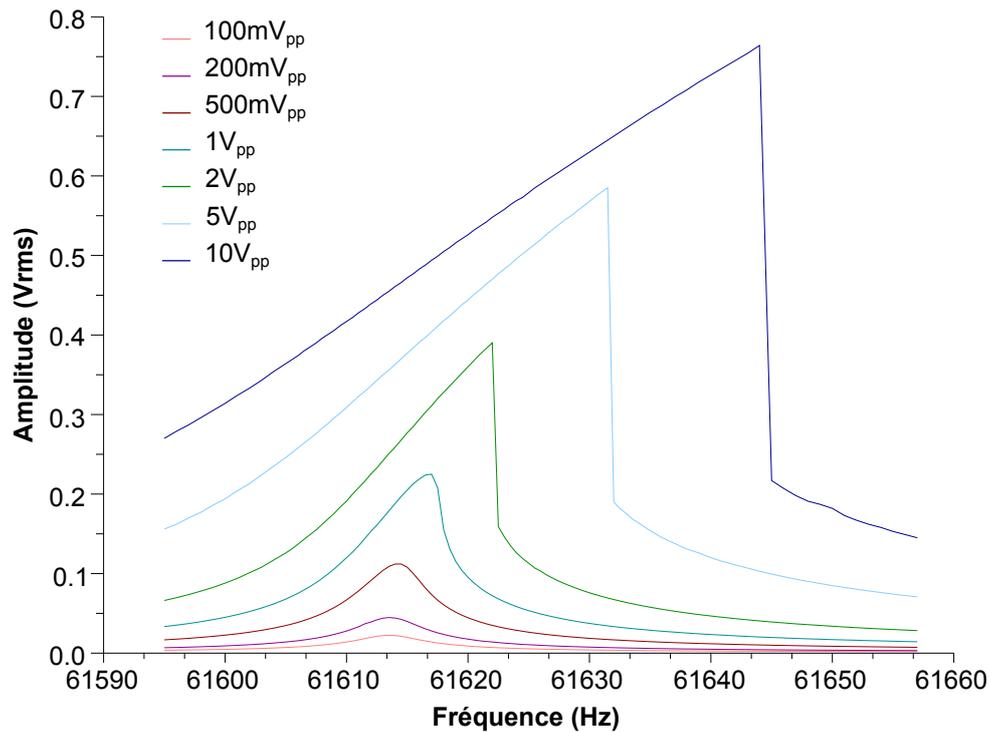


FIGURE 3.16 – Courbe expérimentale de la résonance de la cellule VIA pour différents niveaux d'excitation

A partir des paramètres motionnels mesurés de la cellule VIA, la simulation théorique des non-linéarités du résonateur est effectuée à son tour, ce qui permettra de valider l'outil de simulation.

### Simulation du résonateur

De même que pour la cellule Aladin, on effectue des simulations PSS afin d'obtenir le comportement non-linéaire du résonateur. Des simulations pour quatre niveaux d'excitation ont été réalisés :  $100mV_{pp}$ ,  $200mV_{pp}$ ,  $500mV_{pp}$ ,  $1V_{pp}$ . Au delà d'une amplitude d'excitation de  $1V_{pp}$ , la simulation ne peut plus aboutir à cause de l'apparition d'une hystérésis dans la courbe de résonance, au-delà du point d'inflexion. En effet, pour une fréquence donnée, il existe deux amplitudes différentes.

### Confrontation des résultats théoriques et des simulations

Grâce aux mesures expérimentales effectuées et aux courbes de simulation, il est possible de confronter ces deux résultats (figure 3.17).

La courbe simulée en utilisant le modèle théorique du résonateur coïncide avec la courbe expérimentale. L'aspect non-linéaire de ce résonateur est parfaitement reproduit. Ces courbes permettent de valider la modélisation théorique de ce micro-résonateur à transduction piézoélectrique ainsi que l'outil de simulation.

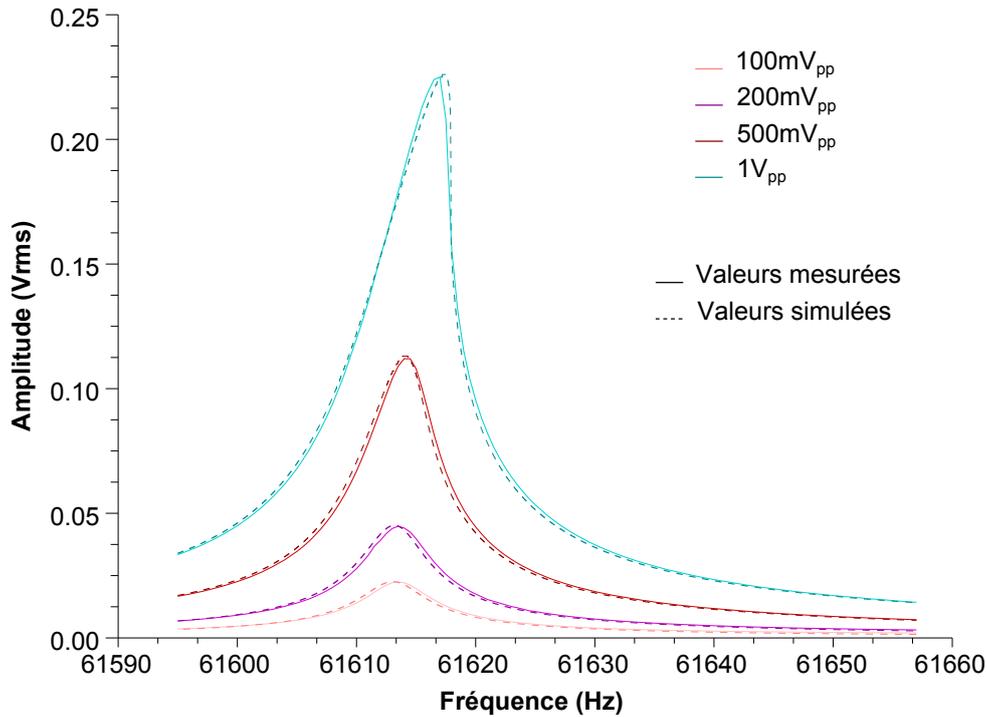
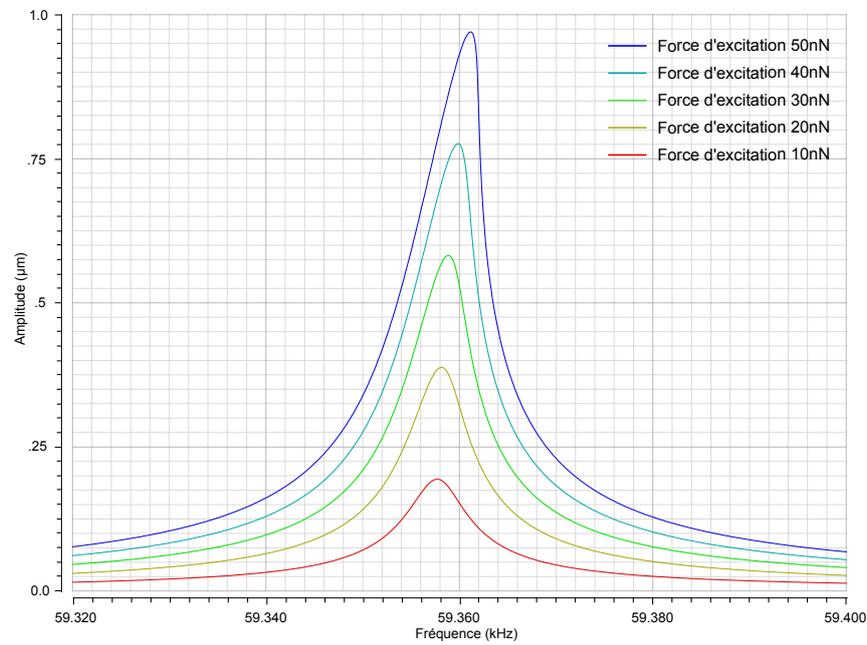


FIGURE 3.17 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs simulées du modèle théorique

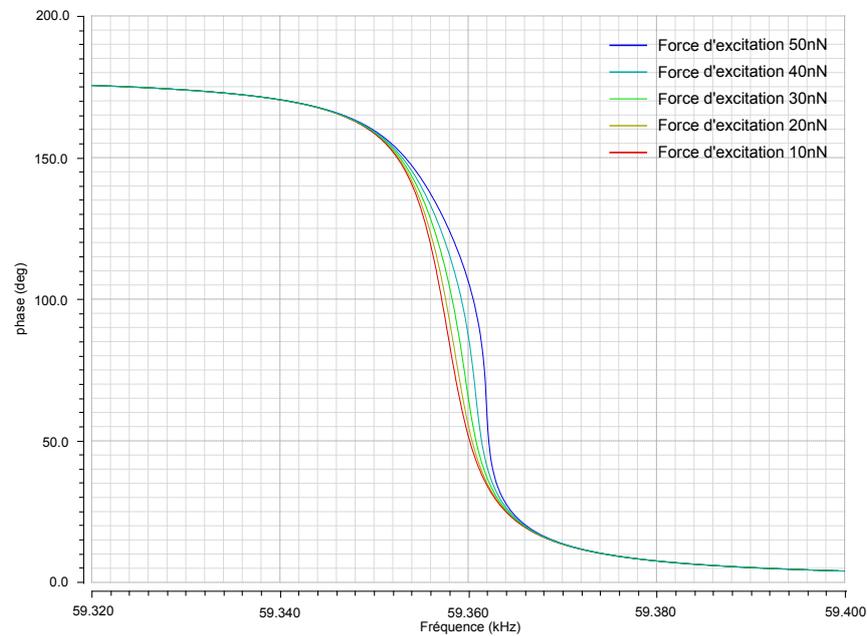
### Validation théorique des non-linéarités

Le calcul de la force critique  $F_c$  et de l'amplitude critique  $A_c$  au moment où le point d'inflexion de la courbe de résonance apparaît ont été exprimées dans l'équation 2.43. On peut ainsi vérifier la valeur de l'amplitude critique et de la force critique. Avec nos paramètres du résonateur, on obtient par le calcul une amplitude critique  $A_c = 0.95\mu m$ , pour une force critique de  $F_c = 48nN$ , qui sont visibles et cohérentes avec la simulation de la figure 3.18. Dans cette simulation, cinq forces d'excitation sont envoyées à l'entrée du résonateur et la sortie correspond au déplacement du centre de la poutre. Cette simulation permet de valider le modèle.

La comparaison de la mesure expérimentale et de la simulation à partir des modèles théoriques a montré dans un premier temps que le facteur de qualité dépend principalement de l'effet thermoélastique et des électrodes. Dans un second temps, on a remarqué que l'amplitude critique avant les non-linéarités est atteinte à partir d'un déplacement de l'ordre du micromètre au centre de la poutre vibrante, et, que la force appliquée à ce point critique vaut  $48nN$ . Cette force correspond dans le cas de la cellule VIA à une tension d'excitation de  $1V_{pp}$ .



(a) Amplitude du résonateur



(b) Phase du résonateur

FIGURE 3.18 – Simulation des non-linéarités en fonction du niveau de la force d'excitation.

### 3.3.3 Validation des simulations en boucle fermée

Après la validation en boucle ouverte de la modélisation de la cellule piézoélectrique VIA, la simulation de cette même cellule en boucle fermée à l'aide d'un circuit oscillateur est effectuée. Pour cela, on utilise un oscillateur auto-entretenu.

#### Oscillateur auto-entretenu

L'oscillateur auto-entretenu génère un signal périodique à la fréquence de résonance du résonateur. Le signal doit respecter les conditions de Barkhausen à la fréquence d'oscillation. En effet, l'amplitude et la phase du signal en entrée et en sortie de la boucle en boucle ouverte doivent être identiques. Ce qui se traduit par des contraintes sur le gain et le déphasage de la fonction de transfert en boucle ouverte. La figure 3.19 présente ce circuit oscillateur, où les diodes permettent de limiter le gain de la boucle et le réglage du déphasage est effectué via un circuit déphaseur.

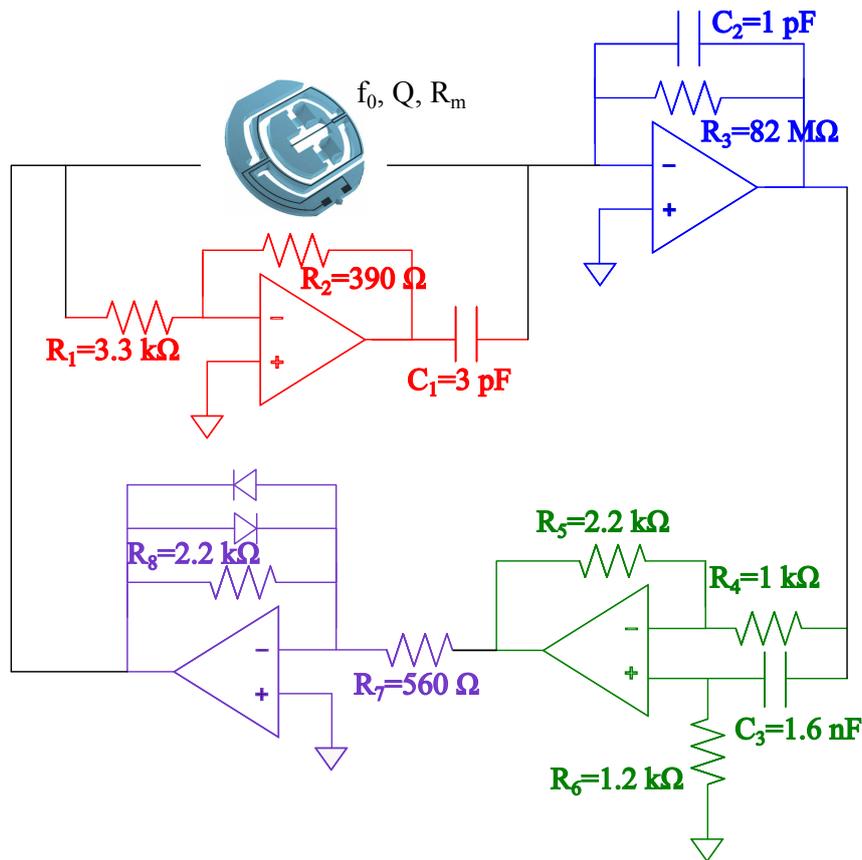


FIGURE 3.19 – Cellule VIA intégrée à son circuit oscillateur à diodes.

Sur cette figure, on retrouve en rouge le circuit servant à compenser la capacité inter-électrode de la transduction piézoélectrique. En bleu, l'amplificateur de charges qui permet d'obtenir en sortie une tension, en vert, l'amplificateur opérationnel servant à régler le déphasage de la boucle et, pour finir en violet le limiteur à diodes pour limiter le gain de la boucle.

Une fois le système oscillant en régime établi et stabilisé en température, on mesure sa stabilité de fréquence dans le domaine fréquentiel.

### Dispositif mis en place pour la mesure du bruit de phase

Dans le domaine fréquentiel, la mesure du bruit de phase d'un oscillateur permet de mesurer la stabilité de fréquence du signal. Pour cela, il faut asservir un oscillateur de référence de même fréquence que l'oscillateur à tester au moyen d'une boucle d'asservissement de phase. Pour notre étude, notre référence est un synthétiseur de fréquence Agilent 33522A en mode VCO. La figure 3.20 présente le banc de mesure utilisé pour l'oscillateur VIA.

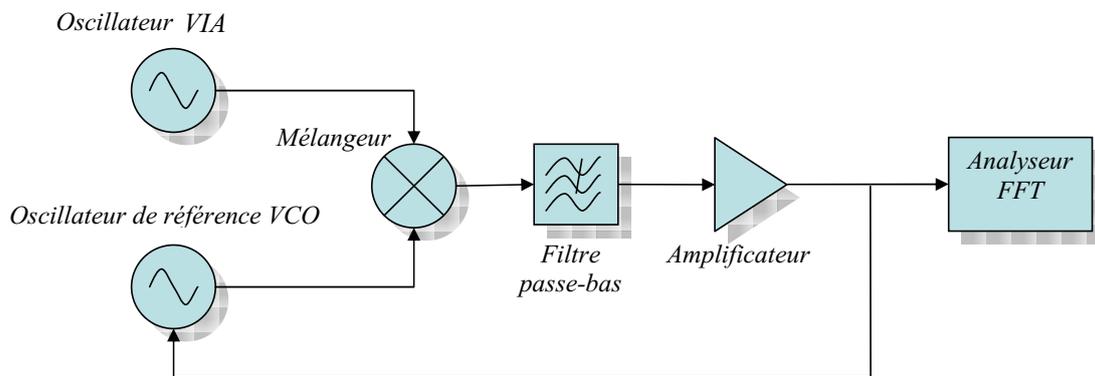


FIGURE 3.20 – Banc de mesure du bruit de phase d'un oscillateur.

Cette boucle à verrouillage de phase permet de mettre les deux oscillateurs en quadrature de phase. Le mélangeur est un élément important de la chaîne de mesure car le signal à sa sortie est quasi continu, il ne doit donc pas générer du bruit flicker basse fréquence. Un mélangeur passif a donc été conçu dans ce but. Ce mélangeur passif est basé sur des diodes et deux transformateurs [85]. Ce mélangeur est présenté sur la figure 3.21.

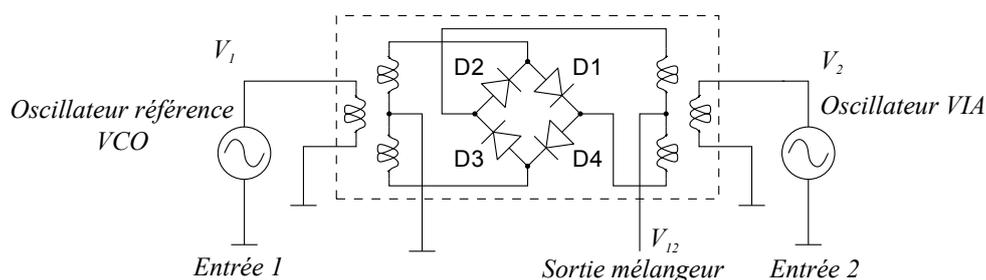


FIGURE 3.21 – Mélangeur passif à diodes.

Ce mélangeur fonctionne comme un détecteur de phase. Le signal de référence est envoyé sur une voie du mélangeur et comparé au signal à mesurer en quadrature injecté directement sur l'autre voie [86].

La tension appliquée à l'entrée 1 du mélangeur par :

$$V_1(t) = V_{01} \sin(2\pi f_0 t + \phi_1(t)) \quad (3.9)$$

La tension d'entrée 2 du mélangeur est :

$$V_2(t) = V_{02} \cos(2\pi f_0 t + \phi_2(t)) \quad (3.10)$$

Le signal  $V_{12}(t)$  en sortie du mélangeur est alors :

$$V_{12}(t) = \frac{V_{01}V_{02}}{2}(\sin(4\pi f_0 t + \phi_1(t) + \phi_2(t)) + \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t))) \quad (3.11)$$

Le filtre passe-bas en sortie du mélangeur élimine la composante haute fréquence. A la sortie de ce filtre, la tension est alors  $V_f(t)$  :

$$V_f(t) = \frac{V_{01}V_{02}}{2} \sin(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \quad (3.12)$$

avec  $\phi_1(t) - \phi_2(t)$  autour de 0 et  $K$  le gain de l'amplificateur. A la sortie de l'amplificateur, la tension se simplifie par l'équation 3.13 :

$$V(t) \approx \frac{V_{01}V_{02}}{2} K(\phi_1(t) - \phi_2(t)) = k_\phi(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \quad (3.13)$$

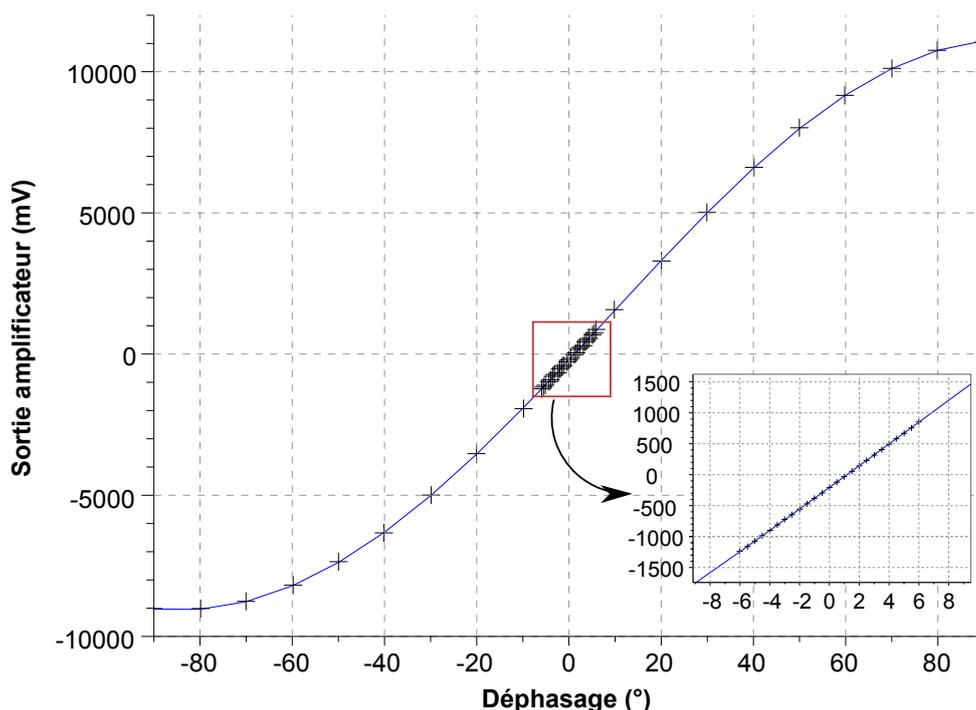


FIGURE 3.22 – Courbe mesurée de sensibilité du mélangeur.

Le mélangeur produit une tension proportionnelle à la différence de phase des deux signaux. Pour étalonner ce banc de mesure et ainsi quantifier le bruit de phase, il est nécessaire de retrouver ce coefficient  $k_\phi(V/rad)$ . La valeur de  $k_\phi$  dépend du mélangeur utilisé, de l'amplificateur et des puissances mises en jeu sur les voies d'entrée. Pour obtenir ce coefficient, on se sert d'un générateur double voies, et, en connaissant le déphasage entre les deux signaux d'entrée et en mesurant la tension continue de sortie, on obtient ce

coefficient de proportionnalité. Le graphique de cette mesure est présenté sur la figure 3.22.

En effectuant une régression linéaire autour de 0, on obtient le coefficient  $k_\phi = 4.3V.rad^{-1}$ . Connaissant  $k_\phi$ , il est désormais possible d'évaluer le bruit de phase grâce à un analyseur de spectre.

### Mesure du bruit de phase

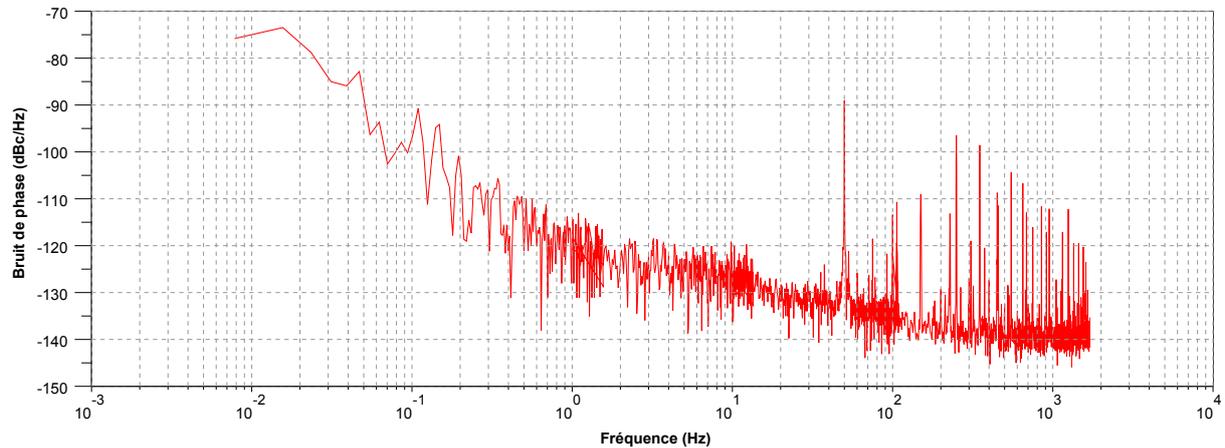


FIGURE 3.23 – Plancher de bruit du banc de mesure du bruit de phase.

L'analyse spectrale se fait à partir d'un analyseur de spectre Agilent 35670A. Dans un premier temps, il convient de mesurer le plancher. Cette mesure s'effectue à l'aide d'un Agilent 33522A. Les résultats exprimés en  $V^2/Hz$  sont ramenés en  $dBc/Hz$  par le biais du coefficient  $k_\phi$  dans la configuration type utilisée pour le mélangeur. La figure 3.23 présente le seuil minimum détectable du bruit de phase de notre banc de mesure.

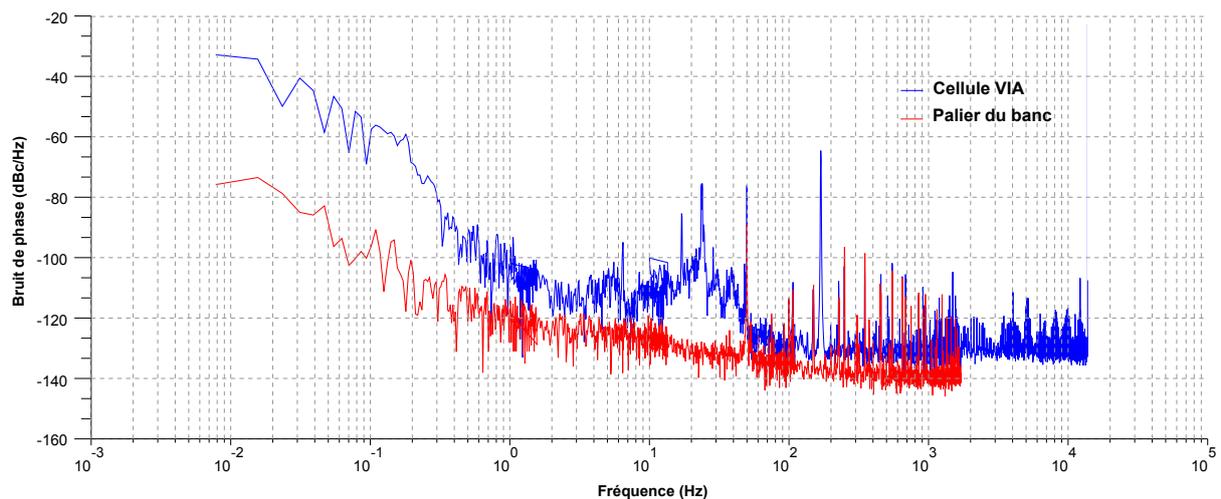


FIGURE 3.24 – Mesure du bruit de phase d'une cellule VIA.

Ensuite, une mesure est effectuée sur une cellule VIA avec son circuit oscillateur à diodes comme présenté sur la figure 3.19. La mesure est acquise et automatisée avec le logiciel Labview qui pilote l'analyseur de spectre. Les résultats de cette mesure sont présentés sur la figure 3.24. Sur cette même figure, on remarque que la mesure n'atteint

pas le palier de notre banc, ce qui permet de valider les performances de ce capteur. La modélisation du comportement de ce capteur en boucle fermée est nécessaire pour pouvoir valider l'outil de simulation et les modèles développés.

### Modélisation du bruit de phase sous Cadence

La simulation du bruit de phase de ce capteur se fait en plusieurs temps sous Cadence :

- La modélisation comportementale du circuit oscillateur
- La simulation du démarrage de l'oscillateur (modules transient et PSS : Periodic Steady State)
- La simulation du bruit de phase de l'oscillateur (module Pnoise : Periodic noise)

Dans un premier temps, il est nécessaire de modéliser le comportement du circuit. Pour cela, on utilise les équations du chapitre 1 pour développer le modèle du résonateur avec son type de transduction. En utilisant Virtuoso Schematic, le circuit oscillateur est construit autour de ce résonateur en respectant les composants du circuit mesuré (cf. figure 3.19). En effet, dans cette modélisation comportementale, le bruit brownien du résonateur ainsi que tous les bruits des résistances, amplificateurs opérationnels ou composants utilisés sont pris en compte.

Dans un second temps, une analyse temporelle est lancée pour simuler le démarrage de l'oscillateur. Cette analyse temporelle est effectuée à partir du module "transient". Elle permet de vérifier que l'oscillateur démarre dans les bonnes conditions. La figure 3.25 présente cette simulation du démarrage de l'oscillateur.

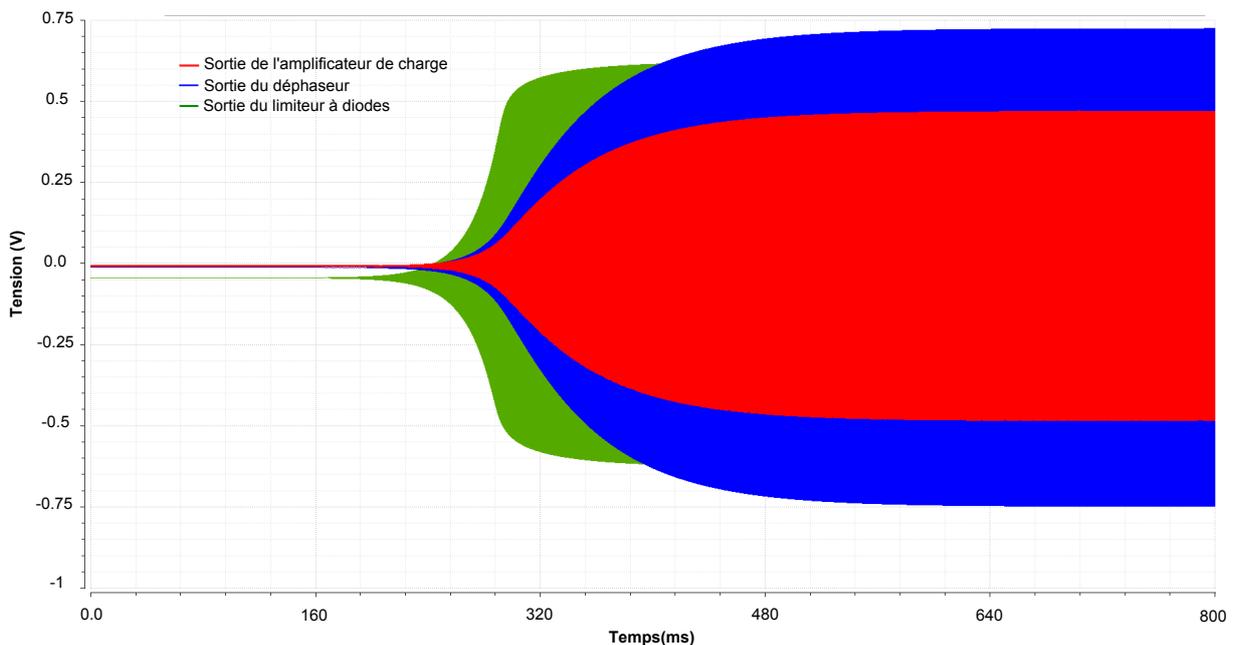


FIGURE 3.25 – Démarrage de l'oscillateur d'une cellule VIA.

La simulation permet de vérifier la fréquence du signal, l'amplitude du signal dans la boucle et le temps de stabilisation de l'oscillateur. Ici, la fréquence du signal est bien de  $61600Hz$  et l'amplitude du signal en sortie de l'amplificateur de charge est de  $0.5Vp$ . Le temps de stabilisation de l'oscillateur après son démarrage est d'environ  $800ms$ .

Dans un troisième temps, après cette vérification de l'analyse temporelle, l'analyse PSS est lancée. Cette analyse est nécessaire au lancement de l'analyse Pnoise du bruit de phase. Pour que cette analyse soit réussie, il faut configurer le paramètre "tstab". Ce paramètre correspond à la longueur de la simulation temporelle avant le calcul de la solution PSS. Cette valeur correspond au minimum au temps de stabilisation de l'oscillateur trouvé dans l'analyse temporelle. La figure 3.26 présente le résultat de cette analyse.

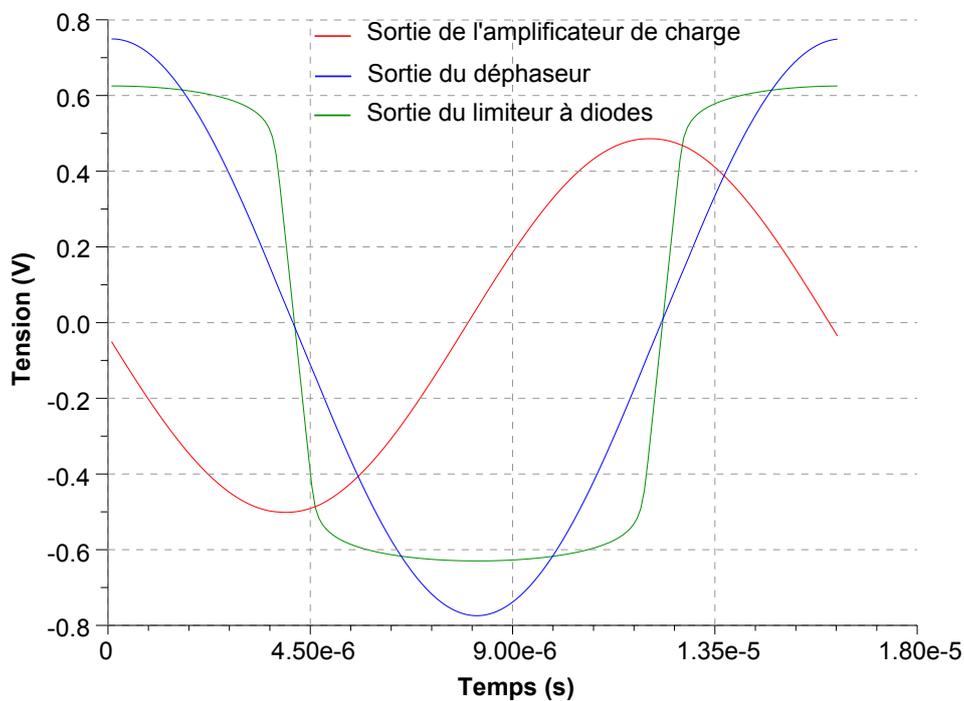


FIGURE 3.26 – Simulation PSS de l'oscillateur d'une cellule VIA.

Le signal en sortie du limiteur à diode est bien écrêté et en quadrature par rapport au signal en sortie de l'amplificateur de charges.

Pour finir, à partir de cette simulation PSS, l'analyse Pnoise est lancée pour obtenir la courbe du bruit de phase de cet oscillateur. Pour respecter la mesure précédente, on effectue cette simulation sur le signal en sortie de l'amplificateur de charges. La figure 3.27 présente le résultat simulé du bruit de phase de cet oscillateur à diode pour la cellule VIA.

A partir d'un écart de  $10Hz$  de la porteuse, on obtient un plancher de bruit blanc égal à  $-132dBc/Hz$  avec une remontée en  $f^{-2}$  pour les fréquences plus petites. Afin de valider la simulation du bruit de phase, le résultat va être comparé au bruit de phase mesuré sur la cellule VIA (figure 3.24).

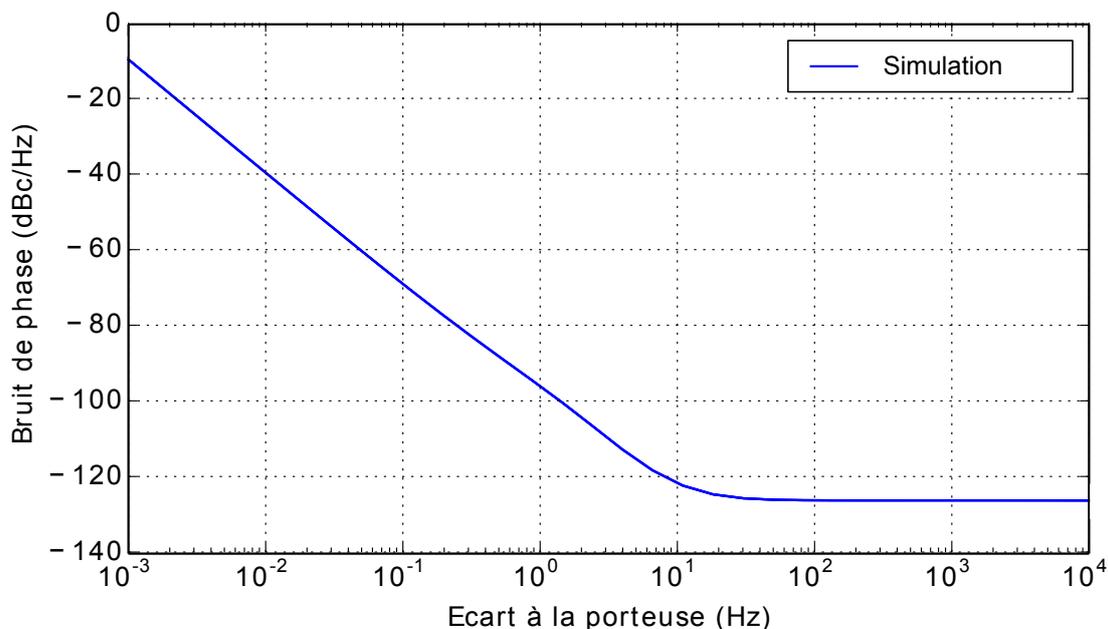


FIGURE 3.27 – Bruit de phase simulé de l'oscillateur à diode d'une cellule VIA.

### Validation et identification des facteurs limitant la résolution fréquentielle

Le circuit oscillateur a été adapté à la cellule VIA. Une fois l'oscillateur stable, la mesure du bruit de phase a été effectuée. Ainsi, le capteur a été modélisé entièrement en respectant les composants utilisés pendant la mesure. Cette modélisation fait intervenir les bruits des résistances, et des amplificateurs opérationnels et du résonateur. Grâce au logiciel Cadence, il a été possible de simuler le bruit de phase attendu par ce résonateur. La figure 3.28 présente la superposition de la mesure avec la simulation.

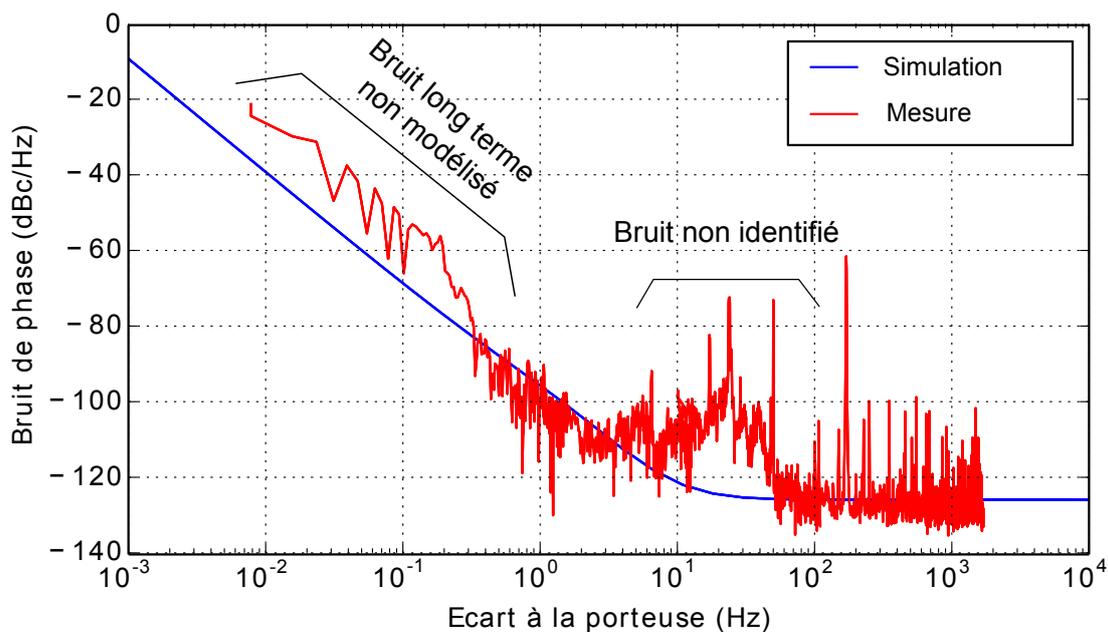


FIGURE 3.28 – Superposition du bruit de phase mesuré et simulé pour la cellule VIA.

Deux zones se distinguent par leur différence avec la simulation. La première, pour des fréquences plus petites que  $0.2Hz$ , la mesure présente une source de bruit plus importante qu'en simulation. Celle-ci provient d'un bruit sur le long terme non modélisé dû à la température. La deuxième zone, entre les fréquences de  $5Hz$  à  $50Hz$  comporte un bruit non-identifié. Pour le reste de la courbe, c'est à dire les fréquences comprises entre  $0.2Hz$  et  $5Hz$ , et les fréquences hautes ( $> 50Hz$ ), le modèle correspond aux mesures effectuées.

Il est ainsi possible d'identifier les bruits dominants sur ces deux parties afin de connaître les composants limitant les performances en terme de bruit de phase du capteur. Pour cela, après la simulation, l'étude sur la contribution de chaque bruit est effectuée. Le graphique de la figure 3.29 représente cette contribution en pourcentage pour chaque bruit dominant.

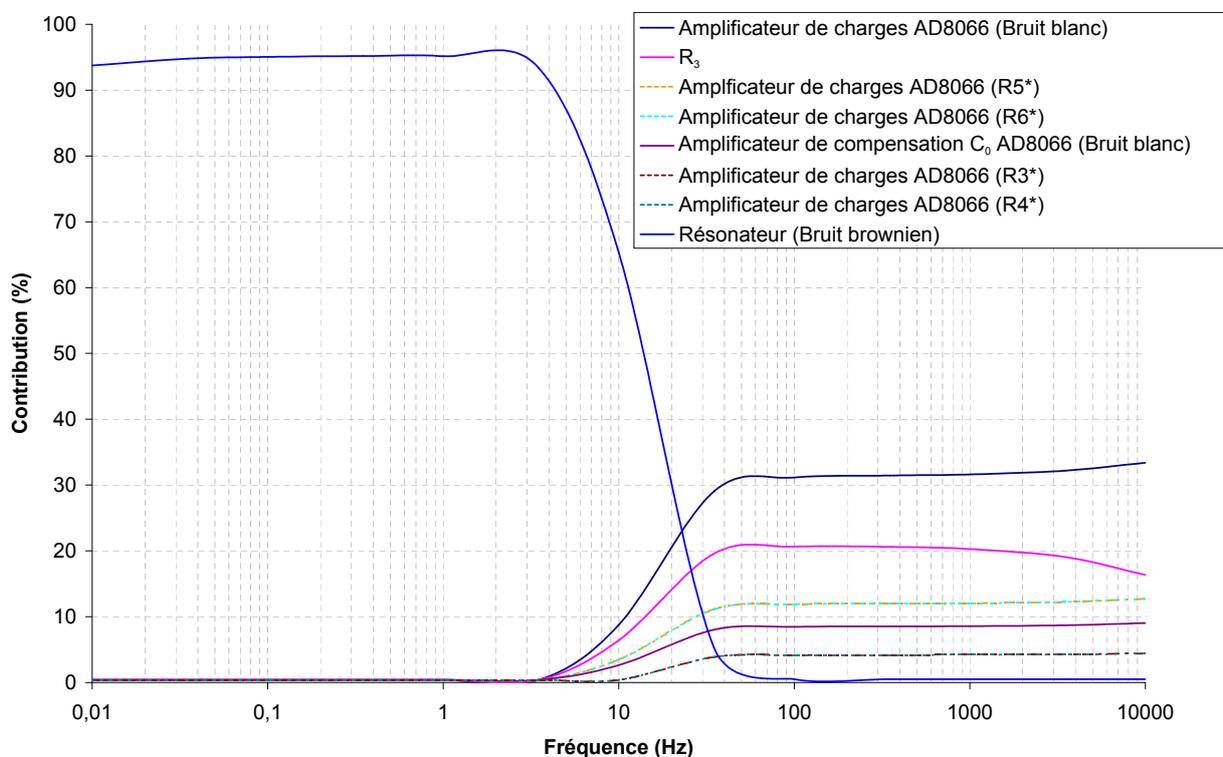


FIGURE 3.29 – Contribution en pourcentage de chaque bruit dominant du circuit oscillateur à diode pour la cellule VIA.

Pour les fréquences plus petites que  $20Hz$ , le contributeur principal est le bruit brownien du résonateur. Au delà de cette fréquence, la résistance  $R_3$  (figure 3.19) de  $82M\Omega$  crée 20% du bruit total et le bruit blanc de l'amplificateur de compensation de la capacité inter-électrode  $C_0$  crée 8%. Le reste provient de l'amplificateur de charges AD8066 :

- 33% pour le bruit blanc
- 13% pour la résistance  $R5^*$  et aussi pour la résistance  $R6^*$  visible sur le modèle Pspice en Annexe C
- 5% pour la résistance  $R3^*$  et aussi pour la résistance  $R4^*$  visible de même sur le modèle Pspice en Annexe C

La déviation d'Allan représentant la stabilité de fréquence d'un signal permet également de valider les simulations. En effet, sur la figure 3.30 on retrouve la déviation d'Allan mesurée directement sur une cellule VIA à l'aide d'un compteur. Cette mesure est comparée à la simulation. On remarque la superposition de ces courbes, ce qui permet de valider le modèle développé.

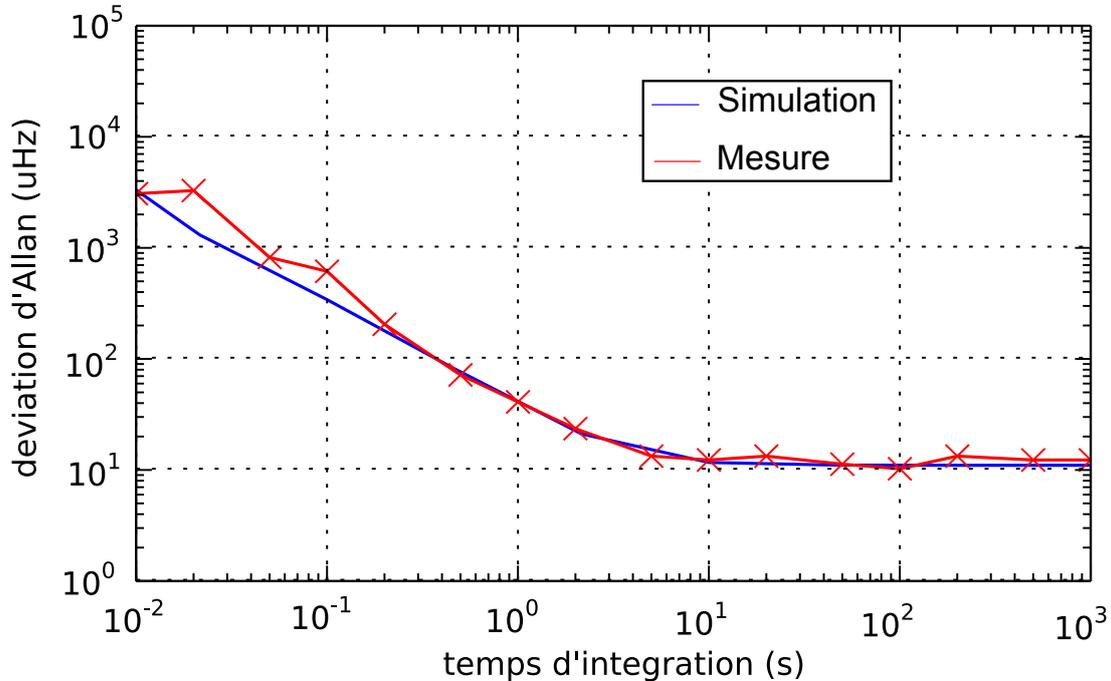


FIGURE 3.30 – Superposition de la déviation d'Allan mesurée et simulée pour la cellule VIA.

### 3.4 Conclusion sur les validations expérimentales

Les mesures expérimentales confrontées aux simulations ont permis de valider les modèles développés dans le chapitre 2. Dans un premier temps, cette validation a été faite en boucle ouverte où l'on a pu vérifier le comportement non-linéaire des résonateurs étudiés. Dans un second temps, la validation en boucle fermée a permis de valider la simulation du bruit de phase. Grâce à cette modélisation, il devient possible de connaître les composants limitant la résolution fréquentielle, ce qui permet d'améliorer les performances de l'oscillateur pour obtenir au final une meilleure résolution du micro-capteur.

Dans le prochain chapitre, cet outil va nous servir d'une part à comparer trois types de transduction différents et d'autre part à proposer une optimisation du micro-accéléromètre VIA.

# Chapitre 4

## Exploitation des modèles

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Comparaison des différents types de transduction . . . . .</b>	<b>110</b>
4.1.1	Comparaison théorique . . . . .	110
4.1.2	Comparaison des transductions électrostatique et optique pour un oscillateur intégrant un résonateur de type ALADIN en silicium	114
<b>4.2</b>	<b>Optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz de type VIA . . . . .</b>	<b>114</b>
4.2.1	Présentation des paramètres d'un accéléromètre vibrant . . . . .	115
4.2.2	Présentation de la méthode d'optimisation . . . . .	116
4.2.3	Optimisation pour l'inertiel . . . . .	121
4.2.4	Optimisation pour la surveillance de zones par sismomètre . . . . .	124
<b>4.3</b>	<b>Compensation de la non-linéarité mécanique d'un capteur MEMS vibrant. . . . .</b>	<b>127</b>
4.3.1	Intérêt de la compensation de la non-linéarité mécanique . . . . .	127
4.3.2	Utilisation des non-linéarités électrostatiques. . . . .	128
4.3.3	Utilisation d'un circuit électronique dédié. . . . .	130
<b>4.4</b>	<b>Conclusion sur l'exploitation des modèles . . . . .</b>	<b>134</b>

---

Dans ce chapitre, les modèles développés et validés dans les chapitres précédents sont mis à profit d'une part pour comparer les performances d'oscillateurs utilisant différents modes de transduction, et d'autre part pour permettre l'optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz et l'annulation des non linéarités inhérentes aux résonateurs miniatures.

## 4.1 Comparaison des différents types de transduction

Dans un premier temps, les expressions analytiques développées précédemment seront utilisées pour comparer les performances d'oscillateurs utilisant les différents types de transduction. Les simulations des modèles seront ensuite menées afin de déterminer l'intérêt de la transduction optique par rapport aux transductions piézoélectrique et électrostatique sur des résonateurs connus.

### 4.1.1 Comparaison théorique

#### Détection hors résonance

Concernant les vibrations forcées de résonateurs (hors résonance), le bruit de détection prédominant est le bruit du système de détection. Le rapport signal à bruit de détection sera donc d'autant plus élevé que le courant de détection est élevé pour une amplitude de vibration donnée. On peut ainsi comparer l'influence des types de transduction sur le rapport signal à bruit hors résonance en exploitant les équations analytiques développées dans le chapitre 2. On rappelle ici les expressions analytiques développées et résumées dans le tableau 2.1 du courant de détection pour une transduction piézoélectrique et une transduction électrostatique.

$$i_{piezo} = a_{corr} e_{12} \frac{12eh}{L} \dot{x} \quad (4.1)$$

$$i_{elec} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{g_0^2} U_{NL} \dot{x} \quad (4.2)$$

Dans le cas de ces deux détections, en restant dans le domaine linéaire et en se plaçant autour d'un point de fonctionnement, on obtient l'expression du courant de détection proportionnel au déplacement  $x$  :

$$i_{piezo} = a_{corr} e_{12} \frac{12eh}{L} \omega_0 x \quad (4.3)$$

$$i_{elec} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{g_0^2} U_{NL} \omega_0 x \quad (4.4)$$

En remplaçant, la pulsation propre  $\omega_0$  par l'expression de la fréquence de résonance d'une poutre (équation 1.10 du chapitre 1), on obtient :

$$i_{piezo} = a_{corr} e_{12} \frac{2\sqrt{3}\pi^2 \beta_1^2 e^2 h}{L^3} \sqrt{\frac{E}{\rho}} x \quad (4.5)$$

$$i_{elec} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{g_0^2} U_{NL} \frac{\pi^2 \beta_1^2 e}{2\sqrt{3}L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} x \quad (4.6)$$

Dans le cas d'une détection optique par obscuration, on rappelle l'expression du cou-

rant de détection proportionnel au déplacement  $x$  :

$$i_{obs} = T_2 P_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega(z)\sqrt{\pi}} x \right) \quad (4.7)$$

Dans le cas de la détection par interférométrie, on a vu que le point de fonctionnement se trouve sur le flanc positif ou négatif d'un pic de résonance optique (figure 2.19). L'équation de l'intensité est la suivante :

$$i_{interf} = \frac{T_2 P_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left( \frac{2\pi n x \cos(\theta)}{\lambda} \right)} \quad (4.8)$$

La poutre ayant un faible déplacement autour de ce point de fonctionnement (quelques nanomètres), il est possible de linéariser la courbe autour de ce point (plage de détection de quelques dizaines de nanomètres figure 2.19). Il convient dans un premier temps de calculer la position  $y_f$  de ce point de fonctionnement. Ce point de fonctionnement se trouvant au maximum de pente, une double intégration sur  $d$  permet de le situer. Pour la simplification des calculs on prendra pour valeur de réflectivité  $R = 0.95$  (correspondant à des cas pratiques). La double intégration ainsi que la résolution du point de fonctionnement peut se faire en calcul formel.

$$\frac{di_{interf}}{dx} = - \frac{6080 T_2 P_0 \sin \left( \frac{2\pi n x \cos(\theta)}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi n x \cos(\theta)}{\lambda} \right) \pi n \cos(\theta)}{\left( 1 + 1520 \sin^2 \left( \frac{2\pi n x \cos(\theta)}{\lambda} \right) \right)^2 \lambda} \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2 i_{interf}}{dx^2} = 0 \Rightarrow x_{f1} = \pm \frac{0.0023\lambda}{n \cos(\theta)} \text{ ou } x_{f2} = \pm \frac{0.49\lambda}{n \cos(\theta)} \quad (4.11)$$

Dans un second temps, on retrouve la pente de l'équation 4.8 au point de fonctionnement en prenant la dérivée première en ce point.  $x_{f1}$  et  $x_{f2}$  étant deux points de fonctionnement similaires et de même pente.

$$\frac{di_{interf}}{dx}(x_{f1}) = \frac{159 T_2 P_0 n \cos(\theta)}{\lambda} \quad (4.12)$$

Finalement, on obtient l'approximation du courant de détection optique par interférométrie après linéarisation autour du point de fonctionnement par :

$$i_{interf} = \frac{159 T_2 P_0 n \cos(\theta)}{\lambda} x \quad (4.13)$$

Appelons  $K$  le rapport d'homothétie des dimensions d'un résonateur. Prenons dans cet exemple, une électrode de détection maximale, c'est à dire pour  $a = h$  et  $b = L$ . En

effectuant cette homothétie, il est possible de conclure sur le rapport  $\frac{i}{x}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{i_{piezo}}{x} &\propto \text{Constante} \\
 \frac{i_{elec}}{x} &\propto K \text{ pour } K < 1 \text{ (gap minimum pour la technologie utilisée)} \\
 &\propto \frac{1}{K} \text{ pour } K > 1 \text{ (le gap dépend alors du facteur d'homothétie)} \quad (4.14) \\
 \frac{i_{obs}}{x} &\propto \text{Constante} \\
 \frac{i_{interf}}{x} &\propto \text{Constante}
 \end{aligned}$$

En prenant pour exemple les dimensions d'une poutre Aladin (tableau 3.2, chapitre 3), il est possible de tracer ces rapports en fonction du rapport d'homothétie  $K$  pour comparer entre eux les domaines intéressants des différents types de transduction (figure 4.1). Les différentes valeurs des constantes sont reportées dans le tableau 4.1 pour les détections piézoélectrique et électrostatique.

	$a_{corr}$	$e_{12}$	$\epsilon_0 \epsilon_r (kg^{-1}.m^{-3}.A^2.s^4)$	$g_0 (\mu m)$	$U_{NL} (V)$
Valeur	0,21	0,1711	$8,85.10^{-12}$	5	10

TABLE 4.1 – Valeurs des constantes pour la détection piézoélectrique et électrostatique.

Dans le cas de la détection optique, ces valeurs sont présentées dans le tableau 4.2 avec pour  $\rho$  la masse volumique et  $E$  le module de Young du silicium (tableau 3.3).

	$T_2 (A.W^{-1})$	$P_0 (mW)$	$\omega(z) (\mu m)$	$\theta (^\circ)$	$n$	$\lambda (nm)$
Valeur	1	0.1	5	0	1	1550

TABLE 4.2 – Valeurs des constantes pour la détection optique.

Pour comparer les valeurs de détection suivant le type de transduction, on prend tout d'abord le niveau typique de bruit d'un amplificateur faible bruit ( $10nV/\sqrt{Hz}$ ). Ce bruit de tension est transformé en courant de bruit à l'entrée de cet amplificateur en prenant comme capacité inter-électrodes  $C_0 = 1pF$ . Le bruit optique sur la photodiode (shot noise) est également pris en compte pour la détection optique [87].

Les différentes valeurs du bruit de détection sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_{piezo} &= 2,3.10^{-13} m/\sqrt{Hz} \\
 x_{elec} &= 4,7.10^{-13}/K m/\sqrt{Hz} \quad K < 1 \\
 &= 4,7.10^{-13}K m/\sqrt{Hz} \quad K > 1 \\
 x_{obs} &= 3,5.10^{-13} m/\sqrt{Hz} \\
 x_{interf} &= 5,5.10^{-16} m/\sqrt{Hz}
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

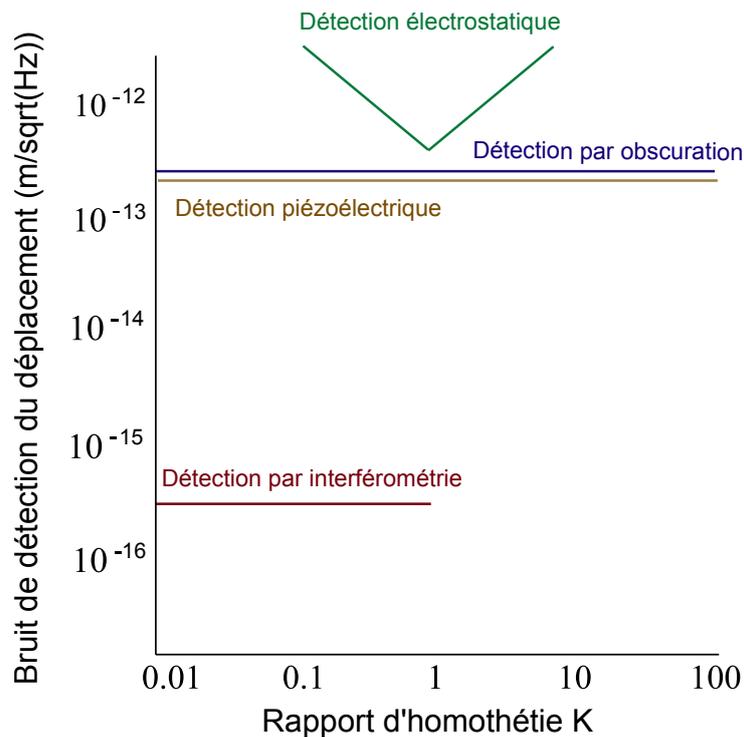


FIGURE 4.1 – Bruit de détection en déplacement de la poutre en fonction d'un rapport d'homothétie pour différents types de transduction.

Le bruit de détection piézoélectrique est proportionnellement moins important que celui de l'électrostatique. Le matériau quartz est ainsi mieux adaptée aux petites dimensions de ce résonateur. Pour la détection électrostatique la tension de polarisation  $U_{NL}$  est fixée (au maximum avant le pull-in). La détection par interférométrie est beaucoup plus résolue que les autres techniques de détection, mais elle se fait autour d'un point de fonctionnement, ce qui engendre deux conséquences néfastes :

- d'une part une mauvaise stabilité de la mesure : toute variation de la longueur d'onde du faisceau ou de la distance source-poutre (en température notamment) a pour conséquence une variation de la mesure.
- d'autre part la détection est possible que pour des faibles valeurs de déplacements ( $< 10$  nm)

Pour l'optique, la largeur du faisceau  $\omega(z)$  doit être plus petite que l'épaisseur vibrante de la poutre ce qui a pour conséquence de limiter la diminution de la taille de la poutre à quelques micromètres.

### 4.1.2 Comparaison des transductions électrostatique et optique pour un oscillateur intégrant un résonateur de type ALADIN en silicium

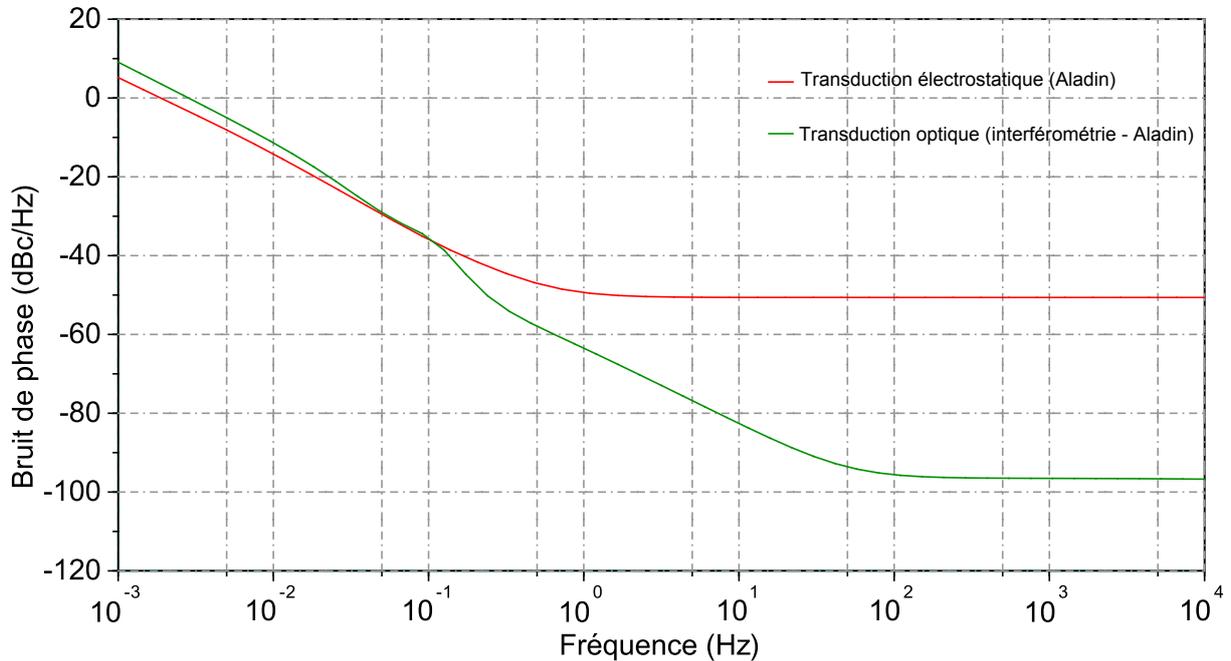


FIGURE 4.2 – Comparaison du bruit de phase du résonateur Aladin pour une transduction électrostatique et une transduction optique (interférométrie).

A partir des équations et des circuits développés dans les chapitres précédents, il est possible de simuler le bruit de phase d'un oscillateur intégrant une cellule Aladin en utilisant la transduction électrostatique ou la transduction optique par interférométrie. Les résultats de ces simulations sont visibles sur la figure 4.2. Ces simulations montrent que la transduction optique par interférométrie permet une résolution (bruit blanc de phase) meilleure que la transduction électrostatique. En effet, le bruit blanc de phase est à environ  $-98\text{dBc/Hz}$  dans le cas de la transduction optique contre  $-50\text{dBc/Hz}$  dans le cas de la transduction électrostatique. La transduction optique est ainsi plus appropriée à un tel résonateur de faibles dimensions.

## 4.2 Optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz de type VIA

Dans cette partie, nous allons optimiser un accéléromètre vibrant en quartz de type VIA. Pour cela, nous allons identifier les paramètres déterminant les performances de l'accéléromètre puis décrire la méthode d'optimisation. Cette optimisation dépend fortement de l'utilisation finale du capteur. L'optimisation conduira ainsi à deux résonateurs différents pour les deux applications traitées : la navigation inertielle et la mesure d'ondes sismiques pour la surveillance de zone.

### 4.2.1 Présentation des paramètres d'un accéléromètre vibrant

Un accéléromètre vibrant peut servir dans différentes applications. Par exemple, pour le guidage inertiel (double intégration de l'accélération), pour une analyse vibratoire pour le diagnostic d'une machine, pour la mesure d'ondes sismiques, ou encore pour assurer la fonction d'inclinomètre. Suivant toutes ces applications, les paramètres propres de l'accéléromètre qui le caractérise ont plus ou moins d'importance. La liste de ces paramètres est la suivante :

- Le facteur d'échelle
- L'étendue de mesure
- La stabilité à court terme
- La résolution court terme

Tous ces paramètres sont décrits dans les paragraphes suivants.

#### Le facteur d'échelle

Le facteur d'échelle appelé aussi sensibilité de l'accéléromètre est le rapport entre la grandeur de sortie du capteur (ici la fréquence propre du résonateur) et la mesurande (ici l'accélération exercée sur la masse d'épreuve), il s'exprime en  $Hz/g$ . Ce facteur permet de relier la variation de fréquence à l'accélération ressentie par le capteur. Ce facteur d'échelle peut être calculé analytiquement. Dans le cas d'une poutre bi-encastree, ce facteur d'échelle  $K_e$  peut s'exprimer à partir des paramètres géométriques et matériau du résonateur [61].

$$K_e = 0.152 \frac{1}{he^2} \frac{M}{\sqrt{E\rho}} \quad (4.16)$$

avec  $h$  la hauteur de la poutre,  $e$  l'épaisseur vibrante,  $E$  le module d'Young et  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $M$  représentant la masse d'épreuve fixée à l'extrémité de la poutre.

#### L'étendue de mesure

L'étendue de mesure est un paramètre essentiel dans la conception d'un micro-accéléromètre. Le choix des dimensions de la poutre bi-encastree est importante car l'étendue de mesure est déterminée par le flambage du résonateur en compression et par sa rupture en traction. La limite de rupture mesurée sur des micro-résonateurs est très élevée [88], la limitation de l'étendue de mesure est généralement fixée par le flambage du résonateur. La charge critique est donnée par la formule d'Euler [61] et l'accélération critique  $a_{fl}$  à ne pas dépasser est la suivante :

$$a_{fl} = \frac{\pi^2 E h e^3}{3 L^2 M} \quad (4.17)$$

Dans le cas où  $e > h$  la nouvelle formule s'écrit :

$$a_{fl} = \frac{\pi^2 E e h^3}{3 L^2 M} \quad (4.18)$$

### La stabilité de biais à court terme

Le biais du capteur est défini par le signal de sortie (ici l'accélération mesurée) lorsque la mesurande est nulle (ici l'accélération exercée sur la masse d'épreuve). L'instabilité du biais provient principalement des évolutions de phase dans la boucle oscillatrice. La stabilité de biais exprimée en accélération ( $g$ ) [89] peut être définie comme la valeur de l'écart type d'Allan au palier Flicker. L'écart type d'Allan étant issu des simulations de bruit de phase du modèle comportemental du capteur.

### Le bruit de mesure de fréquence

La mesure de fréquence entraîne un bruit, cette expression de bruit  $b_{clk}$  s'exprime dans le cas d'un comptage réciproque (méthode de comptage classique) en  $g$  par l'équation 4.19 [90] :

$$b_{clk} = \frac{f_0}{\tau F_{clk} K_e} \quad (4.19)$$

avec  $\tau$  le temps d'intégration de la mesure,  $F_{clk}$  la fréquence de l'horloge du compteur qui sera prise à  $2GHz$  pour les résultats suivants (utilisation FPGA) et  $K_e$  le facteur d'échelle.

### La résolution court terme

La résolution court terme correspond à la plus petite variation d'accélération détectable par l'accéléromètre suivant un temps d'intégration donné, c'est à dire la plus petite variation de fréquence. Elle est obtenue par l'écart type d'Allan exprimée en  $g$ . L'écart type d'Allan étant issu des simulations de bruit de phase du modèle comportemental du capteur.

Afin d'optimiser le micro-accéléromètre VIA, nous avons mis en place une méthode d'optimisation permettant de réduire la résolution du capteur à partir des paramètres géométriques et matériaux du résonateur.

## 4.2.2 Présentation de la méthode d'optimisation

Le travail présenté dans ce chapitre consiste à exploiter les modèles et les simulations de bruit de phase développés dans les chapitres précédents pour optimiser un capteur vibrant. L'exemple proposé est l'optimisation d'un accéléromètre vibrant piézoélectrique en quartz de type VIA [18].

Cette étude portera dans un premier temps sur la simulation de la résolution accélérométrique d'un VIA pour montrer comment on calcule la résolution d'un accéléromètre à partir des simulations de bruit de phase, puis des simulations seront effectuées en faisant varier seulement les paramètres géométriques du résonateur pour optimiser sa résolution. Les autres critères de performances de l'accéléromètre vibrant seront également calculés et pris en compte dans le processus d'optimisation.

Ce travail d'optimisation de l'accéléromètre dépend fortement de l'application visée. Deux exemples d'optimisation seront présentés : d'une part l'optimisation de l'accéléromètre pour la navigation inertielle, et d'autre part l'optimisation pour la détection d'ondes sismiques pour la surveillance de zones.

### Bornes des paramètres d'optimisation

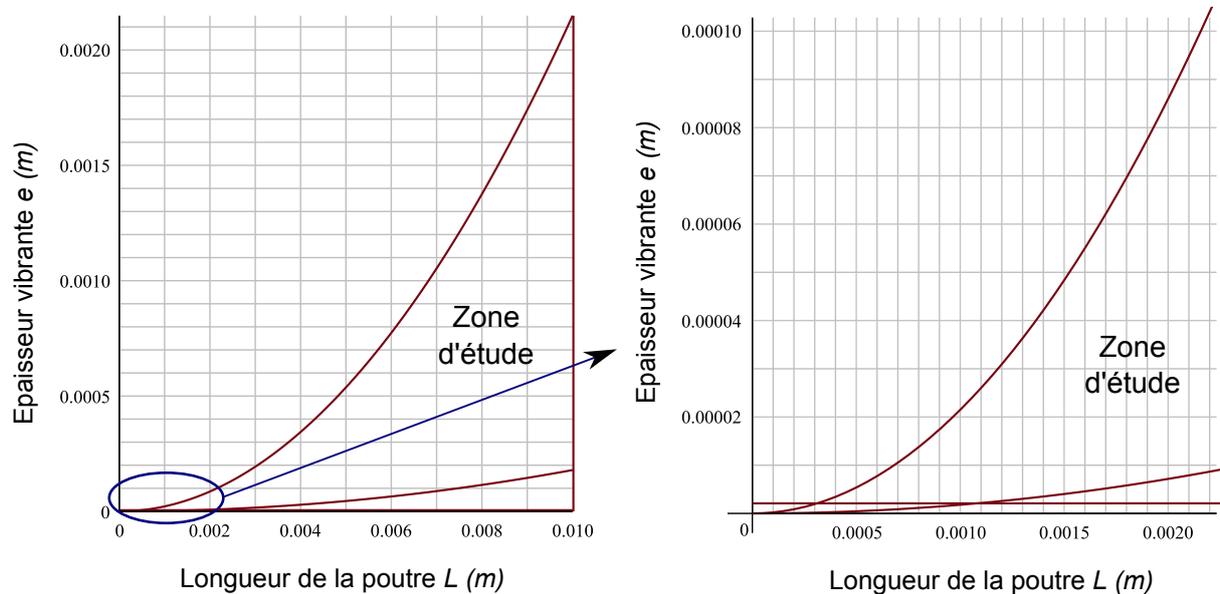


FIGURE 4.3 – Zone d'étude pour la simulation d'optimisation d'un accéléromètre vibrant en quartz

Les paramètres d'entrée des simulations auront pour limites la technologie de fabrication des résonateurs sur wafer de quartz par usinage chimique ou DRIE, ainsi que la fréquence de résonance. Les trois paramètres géométriques du résonateur  $e$ ,  $h$  et  $L$  suffisent pour définir le résonateur. L'épaisseur des wafers de quartz correspondant à la hauteur  $h$  de la poutre est comprise entre  $10\mu m$  et  $500\mu m$  (en effet, des faibles épaisseurs de wafers sont depuis peu disponibles en utilisant la technologie de substrats hybrides : le substrat actif de quartz est collé sur un substrat porteur). Dans notre étude, on se limite à une gamme de fréquence de  $10kHz$  à  $120kHz$ . La fréquence de résonance étant liée aux paramètres  $e$  et  $L$  de la poutre cela permet de borner ces deux paramètres (équation 1.10). Dans l'état actuel de la technologie, une épaisseur vibrante de  $50\mu m$  est nécessaire pour permettre de disposer les électrodes d'actionnement/détection piézoélectrique, toutefois

la borne minimum est fixée à  $1\mu m$  pour permettre une optimisation dans le cas d'une évolution de la technologie de gravure des électrodes. On peut noter par exemple que la technologie e-beam permet des précisions de gravure plus fines de l'ordre de  $100nm$ . La longueur de la poutre aura pour maximum  $1cm$ . On peut ainsi définir la zone d'étude à partir des 4 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 e &> \frac{40000\sqrt{3}}{\pi\beta_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} L^2 \\
 e &< \frac{480000\sqrt{3}}{\pi\beta_1^2} \sqrt{\frac{\rho}{E}} L^2 \\
 e &> 1e - 6 \\
 L &< 1e - 2
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ce domaine d'étude est visible graphiquement sur la figure 4.3. Pour commencer, nous allons montrer comment obtenir la résolution d'un micro-accéléromètre à partir des simulations de bruit de phase en prenant comme exemple l'accéléromètre VIA.

### Simulation des performances pour un micro-accéléromètre VIA

Dans cette étude, nous allons obtenir la résolution accélérométrique à partir des modèles développés sur une cellule VIA. Cette cellule a été présentée dans la partie 3.1.1, l'excitation et la détection du mouvement du résonateur se font par transduction piézo-électrique.

Dans un premier temps, il convient de modéliser le circuit oscillateur ainsi que le résonateur sous Cadence pour la cellule VIA (figure 3.19) puis de simuler son bruit de phase grâce au module SpectreRF (figure 3.28).

Le bruit de phase représente les fluctuations de phase du signal. L'accélération mesurée du capteur étant proportionnelle aux variations de la fréquence propre du résonateur, il convient de caractériser dans un premier temps les fluctuations relatives de fréquences. Pour cela, on utilise l'équation 1.25 qui relie ces deux types de fluctuations relatives entre-elles :  $S_y(f) = \frac{f^2}{f_0^2} S_\phi(f)$ .

Ce bruit de fréquence ou densité spectrale de puissance de fréquence est représenté sur la figure 4.4.

On peut ainsi identifier les sources de bruits affectant cet oscillateur en modélisant cette courbe en loi de puissance de  $f$  (équation 1.34).

A partir de ces fluctuations relatives de fréquences, on peut calculer la variance d'Allan pour un temps d'intégration  $\tau$  du signal (équation 1.33) :

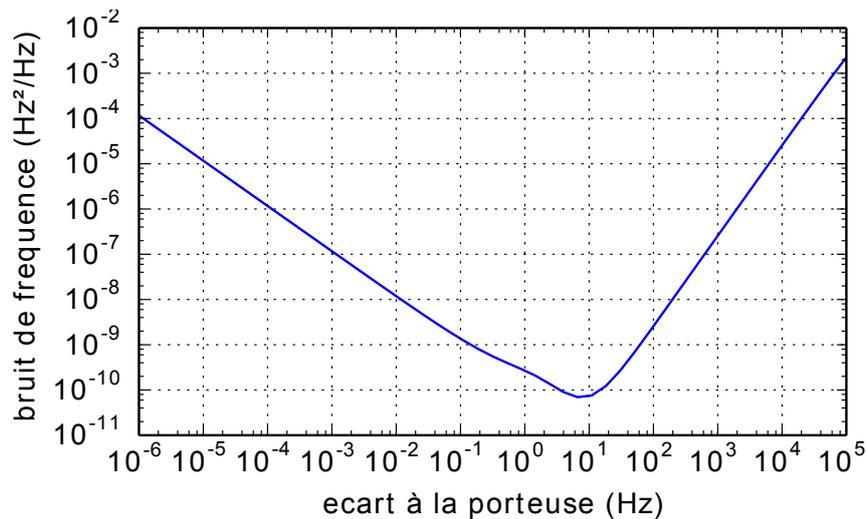


FIGURE 4.4 – Simulation du bruit de fréquence pour un capteur MEMS de type VIA

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} df \quad (4.21)$$

Il est ensuite possible d'obtenir la résolution accélérométrique  $R_2$  en  $g$  du capteur pour un temps d'intégration donné à partir de la fréquence de résonance  $f_0$  et du facteur d'échelle  $K_e$ . On obtient les relations suivantes dans cet exemple :

$$R_2 = \frac{f_0}{K_e} \sigma_y(\tau) \quad (4.22)$$

La résolution de ce capteur est visible sur la figure 4.5.

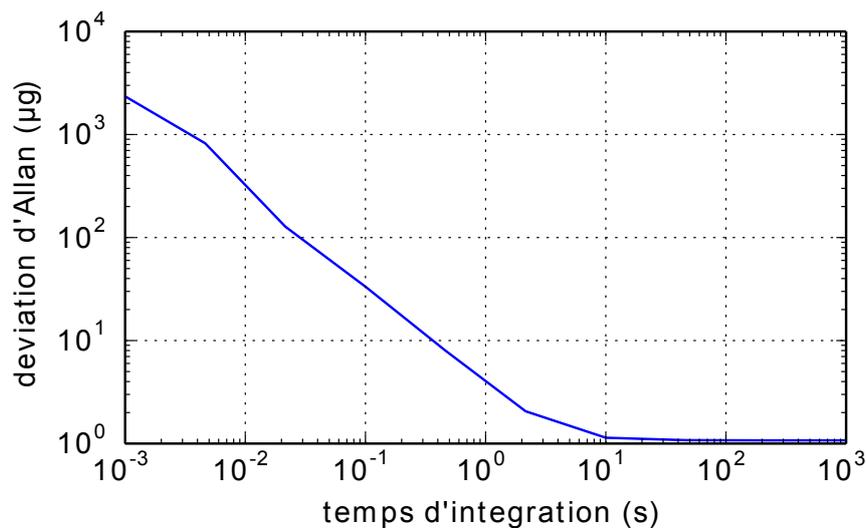


FIGURE 4.5 – Résolution accélérométrique pour un capteur MEMS de type VIA.

A l'aide du logiciel Cadence et des modélisations effectuées, la résolution d'un accéléromètre suivant différents temps d'intégration peut ainsi être déduite théoriquement.

## Simulation de la résolution pour différentes géométries de poutres vibrantes

Nous allons généraliser cette modélisation pour la transduction piézoélectrique en faisant varier les dimensions du résonateur. Le matériau de cette transduction est fixé au quartz et on utilisera les paramètres matériau du tableau 3.6.

Les paramètres non fixés de cette simulation sont les dimensions géométriques de la poutre :  $e$  pour l'épaisseur vibrante,  $h$  pour la hauteur et  $L$  pour la longueur. De même que pour la résolution accélérométrique du VIA, un circuit oscillateur est modélisé sous Cadence.

Un script est développé dans le but de faire tourner plusieurs simulations pour obtenir la résolution recherchée pour différentes valeurs de l'épaisseur vibrante. Ce script est détaillé en Annexe D.

Pour le fonctionnement de ce circuit oscillateur, on se place à la limite de la tension critique d'excitation avant apparition des non linéarités du résonateur. Pour cela, on utilise l'expression de la force critique développée dans l'équation 2.43.

En utilisant le script pour les simulations, on effectue un calcul de la résolution accélérométrique pour un grand nombre de résonateurs définis par leur dimensions :  $(e, h, L)$ . Le script permet d'obtenir les paramètres du modèle comportemental du résonateur et les grandeurs définissant les performances de l'accéléromètre.

Les valeurs des paramètres calculés pour le modèle sont les suivantes :

- La fréquence de résonance.
- Le facteur de qualité.
- Le coefficient piézoélectrique.
- La tension d'excitation du résonateur.

Et les valeurs des performances de l'accéléromètre :

- Le facteur d'échelle de l'accéléromètre.
- L'accélération critique avant flambage de la poutre vibrante.
- La stabilité de biais de l'accéléromètre.
- La résolution.

A partir du bruit de phase simulé, on obtient le calcul de la variance d'Allan pour différents temps d'intégration afin d'aboutir à la résolution de l'accéléromètre.

### Application des critères d'optimisation

En analysant les résultats, on remarque que le résonateur présentant la meilleure résolution à  $2\text{sec}$  n'est pas forcément celui qui présente la meilleure résolution pour un temps d'intégration de  $1\text{ms}$ . En effet, une fois qu'on a simulé un grand nombre de solutions, il faut appliquer des critères d'optimisation qui dépendent de l'application visée pour aboutir à un design optimal.

### 4.2.3 Optimisation pour l'inertiel

#### Paramètres importants

Dans le cadre de la navigation inertielle d'engins militaires, l'étendue de mesure est essentielle, en effet l'accéléromètre peut subir de fortes accélérations de quelques  $g$  pour l'avion de chasse à plusieurs dizaines de  $g$  pour les missiles. Le micro-acéléromètre doit avoir une bonne résolution à court terme pour pouvoir utiliser sa fonction de pilotage où un rafraichissement de plusieurs centaines de hertz est nécessaire. De plus, la mesure de l'accélération étant doublement intégrée, et cette navigation étant autonome et pouvant durer des dizaines de minutes, il faut éviter les problèmes de dérive de biais. Pour cela, le micro-acéléromètre doit garantir une forte stabilité de son biais à long terme.

Pour résumer, il faut une accélération critique avant flambage de la poutre  $a_{fl} > 100g$ , une résolution optimale et une stabilité de biais minimale.

#### Résultats d'optimisation sans la contrainte d'épaisseur vibrante

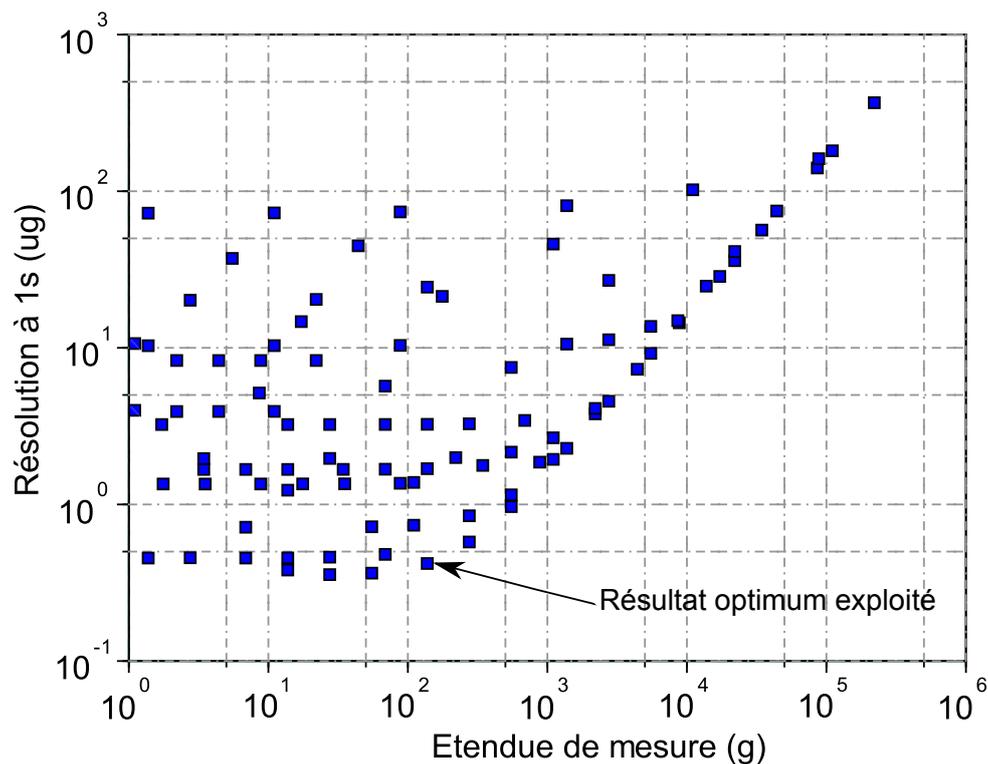


FIGURE 4.6 – Résolution des différents types de résonateur en fonction de l'étendue de mesure

Les résultats de simulation montrent des gammes étendues de résolution et d'étendue de mesure des différents résonateurs. Pour respecter les conditions d'utilisation d'un tel capteur, il faut ajouter au bruit de résolution le bruit de mesure de fréquence  $b_{clk}$  (équation 4.19).

La figure 4.6 représente les résultats, pour les différents résonateurs, de la résolution à  $\tau = 1s$ , en prenant en compte le bruit du compteur, en fonction de l'étendue de mesure.

Dans notre cas, le résonateur optimal est celui qui correspond à un accéléromètre vibrant présentant une étendue de mesure supérieure à  $a_{fl} > 100g$  et avec la meilleure résolution possible.

Ce résonateur a pour épaisseur vibrante  $5\mu m$ , hauteur  $50\mu m$  et longueur  $0.5mm$ . Sa fréquence de résonance est de  $111772Hz$  avec un facteur de qualité d'environ 1080. Sa résistance motionnelle sera de  $7M\Omega$ , sa tension d'excitation  $327mV$  et un facteur d'échelle d'environ  $1000Hz/g$ . Au niveau des performances, il comporte un bruit total de  $0.41\mu g$  pour un temps d'intégration de  $1s$  et une étendue de mesure d'environ  $137g$ . Les différentes caractéristiques du résonateur optimal sont résumées dans les tableaux suivants :

	e ( $\mu m$ )	h ( $\mu m$ )	L ( $mm$ )
Paramètres géométriques	5	50	0.5

TABLE 4.3 – Tableau des paramètres géométriques du résonateur optimal.

	$f_0$ ( $Hz$ )	$R_m$ ( $M\Omega$ )	$Q$
Paramètres comportementaux	111772	7	1080

TABLE 4.4 – Tableau des paramètres comportementaux du résonateur optimal.

	$V_c$ ( $mV$ )	$K_e$ ( $Hz/g$ )	Résolution( $1s$ ) ( $\mu g$ )	Etendue de mesure ( $g$ )	Stabilité du biais ( $\mu g$ )
Résonateur optimal	327	1000	0.41	137	0.5
VIA	700	25	4	1400	1

TABLE 4.5 – Performances du résonateur optimal par rapport au VIA.

A l'état actuel, le microaccéléromètre VIA a des performances de résolution de l'ordre de  $4\mu g$  à  $1s$ . Ce nouveau type d'accéléromètre peut ainsi obtenir une résolution 10 fois meilleure. Sa stabilité court terme devient 3 fois meilleure que celle du VIA. Ce nouveau type de résonateur obtient des meilleures performances par rapport au VIA pour son application accélérométrique.

Cependant, la transduction étant piézoélectrique, l'épaisseur optimale de poutre de  $5\mu m$  est trop petite pour pouvoir poser des électrodes sur celle-ci. Ceci n'est actuellement pas compatible avec la technologie du VIA. Différentes techniques en cours de développement pourront permettre cette réalisation grâce à des électrodes non adhérentes, ou la lithographie à faisceau d'électrons (e-beam) où une résolution des pistes de l'ordre de  $100nm$  est envisageable.

### Résultats d'optimisation avec la contrainte d'épaisseur vibrante

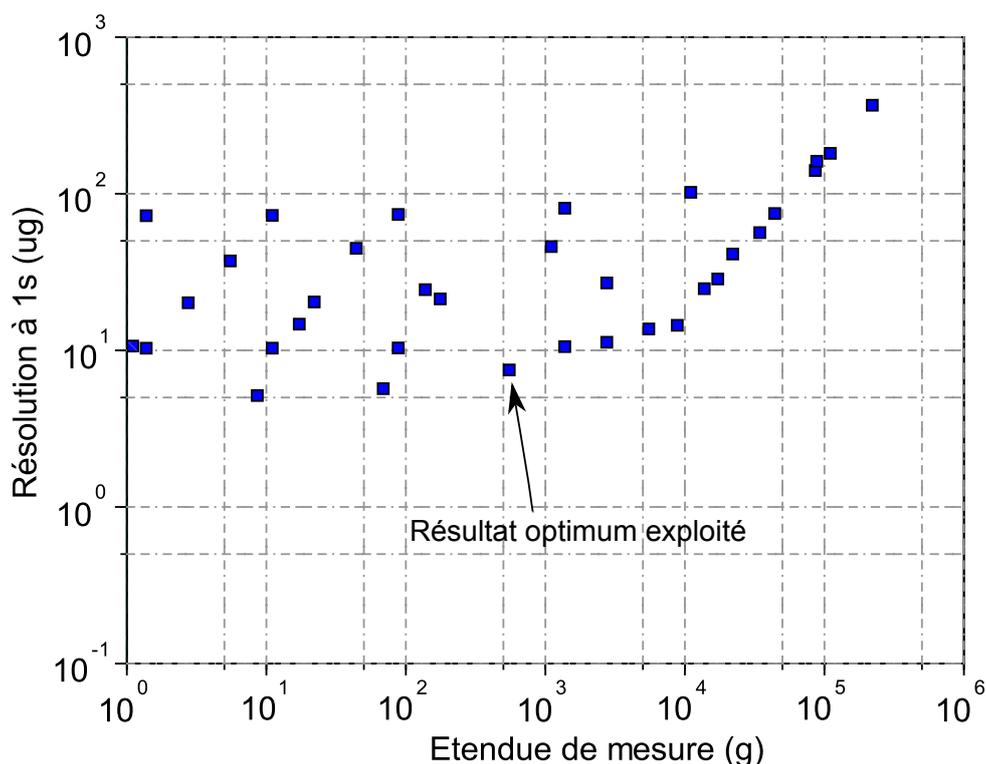


FIGURE 4.7 – Résolution des différents types de résonateur en fonction de l'étendue de mesure et pour épaisseur vibrante supérieure à  $50\mu m$

La même optimisation est effectuée avec la possibilité de déposer des électrodes sur l'épaisseur vibrante de la poutre avec la technologie actuelle. Pour cela, on garde une étendue de mesure  $a_{fl} > 100g$  avec pour épaisseur vibrante  $e > 50\mu m$ . La figure 4.7 représente ces résultats. Les différentes caractéristiques de ce résonateur sont résumées dans les tableaux suivants :

	$e$ ( $\mu m$ )	$h$ ( $\mu m$ )	$L$ ( $mm$ )
Paramètres géométriques	50	20	2

TABLE 4.6 – Tableau des paramètres géométriques du résonateur optimal.

	$f_0$ (Hz)	$R_m$ ( $M\Omega$ )	$Q$
Paramètres comportementaux	69856	5.2	12866

TABLE 4.7 – Tableau des paramètres comportementaux du résonateur optimal.

Ce type de résonateur optimisé est finalement assez proche du résonateur VIA développé à l'Onera.

	$V_c$ ( $mV$ )	$K_e$ ( $Hz/g$ )	Résolution(1s) ( $\mu g$ )	Etendue de mesure ( $g$ )	Stabilité du biais ( $\mu g$ )
Résultat optimal	498	24.8	7.49	550	1
VIA	700	25	4	1400	1

TABLE 4.8 – Performances du résonateur optimal par rapport au VIA avec  $e$  imposée supérieure à  $50\mu m$

#### 4.2.4 Optimisation pour la surveillance de zones par sismomètre

Une autre application possible du microaccéléromètre est la détection d'ondes sismiques. Sa petite taille et sa faible consommation permettent de l'utiliser comme capteur déposé dans un réseau de capteurs sans fils pour mesurer l'accélération du sol produite par les ondes sismiques générées par le pas d'une personne ou le mouvement d'un véhicule. La figure 4.8 et la figure 4.9 montre la mesure d'une accélération produite par une personne en train de marcher. La fréquence de la sinusoïde amortie engendrée par l'onde sismique dépend de la nature du sol, elle est comprise dans la gamme :  $50Hz - 500Hz$ . C'est donc dans cette gamme de fréquence que l'accéléromètre doit présenter un faible bruit de mesure.

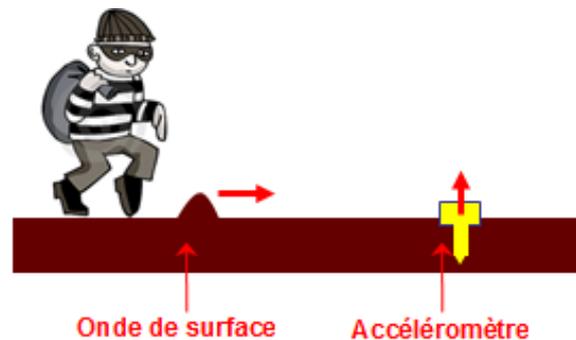


FIGURE 4.8 – Onde sismique produite par le pas d'une personne sur l'accéléromètre.

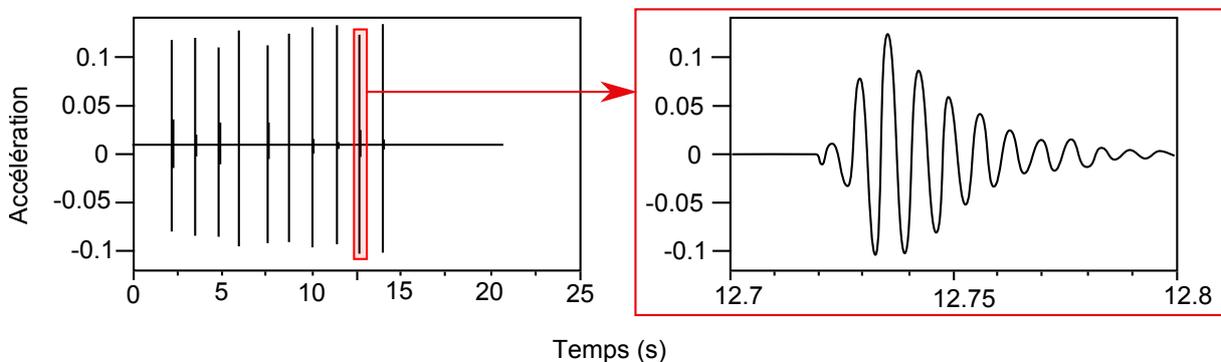


FIGURE 4.9 – Onde sismique produite par le pas d'une personne : à gauche chaque pic correspond à un pas, à droite accélération au sol en réponse au pas.

Etant donné que la mesure d'intérêt est l'amplitude de l'onde sismique, la stabilité de biais n'entre pas en compte dans les performances du sismomètre. La résolution court

terme par contre détermine directement la distance maximale de détection. Pour cette application, l'utilisation d'un tel résonateur dans son domaine non-linéaire est avantageux car cela entraîne une amélioration de la mesure du bruit de phase loin de la porteuse (résolution) mais une dégradation de ce bruit de phase à proximité de la porteuse (stabilité de biais).

L'étendue de mesure d'un tel capteur n'est pas importante où seulement quelques  $g$  suffisent à son fonctionnement. La cellule d'accéléromètre vibrant utilisée ici est une cellule de type VIA mais avec une masse d'épreuve augmentée (AVAS), ce qui permet d'augmenter le facteur d'échelle tout en dégradant l'étendue de mesure [91]. Cette cellule est représentée sur la figure 4.10. Ses caractéristiques sont données dans le tableau 4.9.



FIGURE 4.10 – Modélisation élément finie et photo de la cellule VIA augmentée (AVAS).

	Unité	Performance
Facteur d'échelle	$Hz/g$	440
Etendue de mesure	$g$	$\pm 10$
Bruit en accélération @1s	$ng$	800
Bruit en accélération @10s	$ng$	140
Bruit en accélération @100s	$ng$	80
Bruit en accélération @500s	$ng$	60
Stabilité long terme (1an)	$\mu g$	$< 10$

TABLE 4.9 – Tableau des performances de l'accéléromètre AVAS.

### Résultats d'optimisation

L'étude consiste à déterminer l'amélioration de la portée maximum en fonction de la tension d'excitation en régime non linéaire. Pour cela, on utilise le modèle comportemental d'accéléromètre vibrant développé précédemment. Ce modèle inclut l'équation mécanique du résonateur avec son terme non linéaire, les équations de transduction piézoélectrique et le circuit oscillateur. Les simulations de bruit de phase ont été réalisées en augmentant

l'amplitude d'excitation du résonateur. La figure 4.11 présente ces simulations en régime linéaire (faibles amplitudes) et la figure 4.12 présente ces simulations en régime non linéaire (grandes amplitudes).

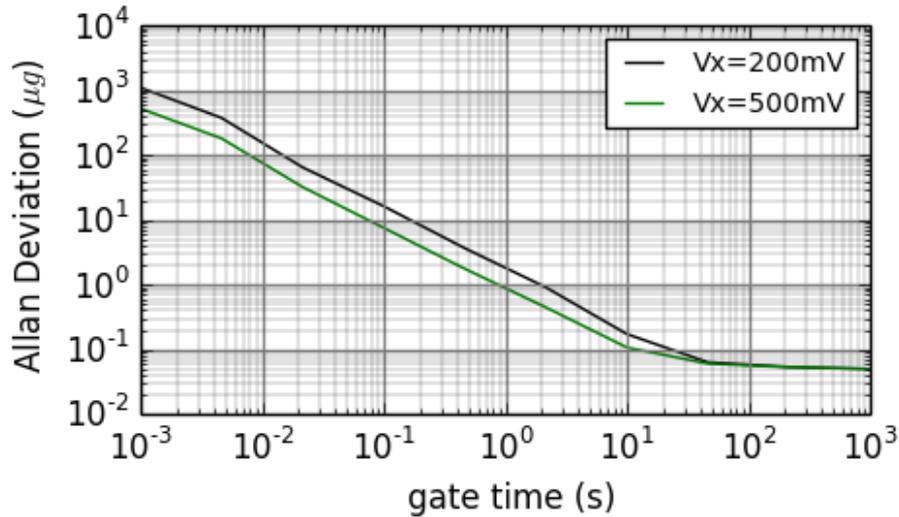


FIGURE 4.11 – Deviation d'Allan en accélération d'un VIA dans la zone linéaire et suivant différentes amplitudes d'excitation.

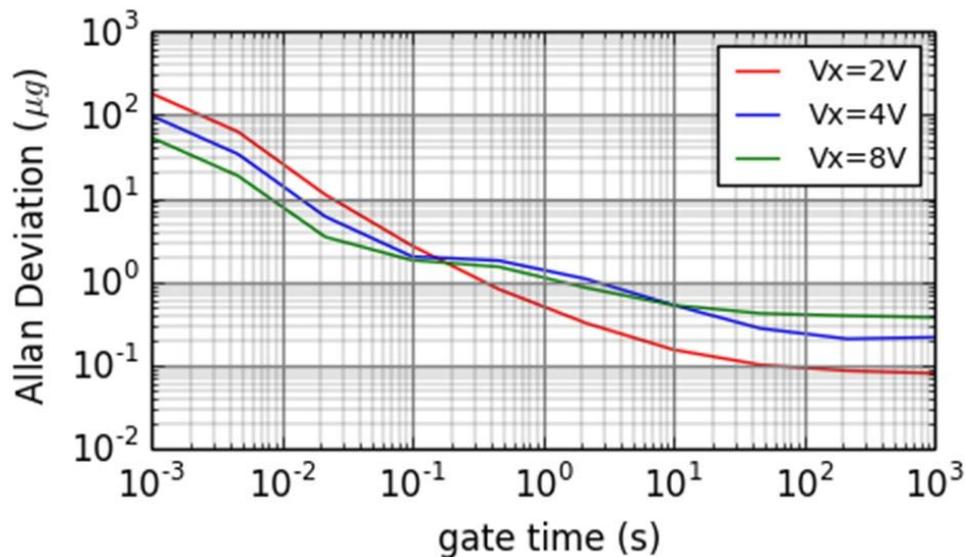


FIGURE 4.12 – Deviation d'Allan en accélération d'un VIA en présence du terme mécanique non linéaire et suivant différentes amplitudes d'excitation.

Cette figure représente trois amplitudes différentes dans le régime non linéaire. Elle confirme que suivant l'augmentation de cette amplitude d'excitation, la variance d'Allan est améliorée pour des temps d'intégration courts et dégradée pour des longs temps d'intégration. Le bruit en accélération peut-être calculé pour ces trois amplitudes qui pilotent le résonateur dans son domaine non-linéaire. Ces résultats sont reportés dans le tableau 4.10.

Tension d'excitation ( $V_{peak}$ )	Bruit ( $\tau = 100s$ ) ( $\mu g_{rms}$ )	Bruit ( $\tau = 1ms$ ) ( $\mu g_{rms}$ )
2	0.1	200
4	0.2	100
8	0.4	50

TABLE 4.10 – Tableau du bruit en accélération pour différents tensions d'excitation.

Les résultats ont montré qu'une tension d'excitation de  $8V$  apporte une meilleure résolution, c'est à dire une meilleure portée de détection [92]. Ce modèle a donc permis de montrer et de quantifier l'intérêt d'utiliser un tel résonateur en régime non linéaire pour cette application. En effet, jusqu'à présent les accéléromètres vibrants fonctionnent toujours en dessous des non linéarités. Le tableau 4.11 présente la comparaison entre la résolution et la consommation de puissance. Cette comparaison est effectuée entre deux accéléromètres MEMS capacitifs existant et notre accéléromètre AVAS. L'utilisation d'un accéléromètre AVAS en régime non linéaire apporte un meilleur compromis.

Accéléromètre MEMS	Résolution ( $\tau = 1ms$ )	Consommation de puissance
SDD1221	$150\mu g$	$25mW$
SF1500	$10\mu g$	$150mW$
AVAS	$40\mu g$	$50mW$

TABLE 4.11 – Tableau de comparaison résolution/consommation.

## 4.3 Compensation de la non-linéarité mécanique d'un capteur MEMS vibrant.

### 4.3.1 Intérêt de la compensation de la non-linéarité mécanique

Des travaux récents ont été réalisés sur l'étude du bruit de phase d'un oscillateur incluant des termes non-linéaires [93]. Ils ont montré qu'en présence de la non-linéarité mécanique du résonateur, augmenter l'amplitude de la force d'excitation entraîne une amélioration de la mesure du bruit de phase loin de la porteuse mais une dégradation de ce bruit de phase à proximité de la porteuse. Concernant les micro-accéléromètres vibrants, ce phénomène permet d'améliorer la résolution court terme au prix de diminuer la stabilité de biais long terme.

L'annulation des non-linéarités devrait permettre d'actionner le résonateur à une amplitude plus élevée en améliorant le bruit de phase proche de la porteuse et loin de la porteuse, ce qui implique dans le cas d'un accéléromètre vibrant une amélioration de la résolution et de la stabilité de biais.

### 4.3.2 Utilisation des non-linéarités électrostatiques.

Dans le cas d'une poutre encadrée-encadrée en silicium et de son actionnement/détection par voie électrostatique, la force qui est créée par une électrode sur notre résonateur est une force électrostatique décrite par l'équation 2.75. A la résonance, la valeur du gap  $g_0$  évolue au cours du temps selon le mouvement  $x$  de la poutre vibrante et n'est pas égale sur tout le long de l'électrode. Elle dépend aussi de la déformée de la poutre liée à son double encastrement. L'expression générale de la déformée  $X_n(y)$  d'une poutre de longueur  $L$  encadrée à ses deux extrémités est exprimée par l'équation 1.11 [77].

Pour le mode principal de résonance, les valeurs  $\alpha_1 L$  et  $\frac{a_1}{b_1}$  sont données par l'équation 1.8 et l'équation 1.9. La valeur  $b_1$  est calculée en normalisant le mode 1 au maximum de vibration (milieu de poutre). Pour cela, on résout  $X_1(\frac{L}{2}) = 1$  et on trouve  $b_1 = 0.61865$ .

$$\text{On pose } X_b = \frac{1}{b} \int_{\frac{L-b}{2}}^{\frac{L+b}{2}} X_1(y) dy \quad \text{la déformée moyenne le long de l'électrode.} \quad (4.23)$$

Avec  $b$  la longueur de l'électrode. Ainsi, la force électrostatique engendrée par une électrode de longueur  $b$  centrée sur la poutre et prenant en compte la déformée s'exprime selon l'équation 4.24 suivante :

$$F_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r a b U_{NL}^2 \frac{1}{(g_0 - X_b x)^2} \quad (4.24)$$

Avec  $a$  la largeur de l'électrode,  $U_{NL}$  le potentiel de l'électrode et  $g_0$  le gap avec la poutre. Le déplacement de la poutre  $X_b x$  en tout point de  $y$  étant négligeable devant la longueur du gap  $g_0$ , on peut effectuer un développement limité de la force électrostatique à l'ordre 3 en  $x$  :

$$F_{elec} \approx \frac{1}{2g_0^2} \epsilon_0 \epsilon_r a b U_{NL}^2 \left( 1 + \frac{2X_b}{g_0} x + \frac{3X_b^2}{g_0^2} x^2 + \frac{4X_b^3}{g_0^3} x^3 \right) \quad (4.25)$$

Cette force électrostatique dépend du déplacement de la poutre. Le terme en  $x^3$  s'oppose à celui de la non-linéarité mécanique du résonateur. En annulant le terme en  $x^2$  et en appliquant une configuration type pour un résonateur, il est possible d'annuler le comportement non-linéaire d'ordre 3 du résonateur. Pour cela, une électrode de même dimension est placée de l'autre côté de la poutre vibrante et soumise au même potentiel comme présenté que la figure 4.13.

La force électrostatique appliquée à la poutre devient :

$$\begin{aligned} F_{elec} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r a b U_{NL}^2 \left( \frac{1}{(g_0 - X_b x)^2} - \frac{1}{(g_0 + X_b x)^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{2g_0^2} \epsilon_0 \epsilon_r a b U_{NL}^2 \left( \frac{4X_b}{g_0} x + \frac{8X_b^3}{g_0^3} x^3 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

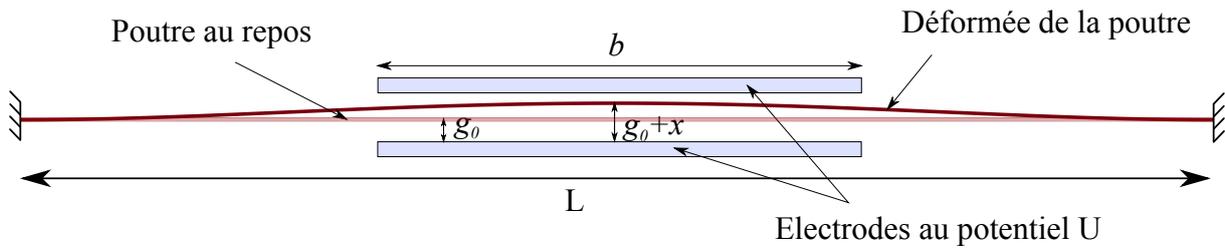


FIGURE 4.13 – Déformée de la poutre vibrante avec les deux électrodes de compensation des non-linéarités.

Cette force est insérée dans l'équation du comportement dynamique de la poutre (équation 2.28). La force  $F$  est divisée en deux forces,  $F_{elec}$  pour compenser la non-linéarité mécanique et  $F_{exci}$  pour l'actionnement du résonateur. Ainsi, la nouvelle équation du comportement dynamique de la poutre devient :

$$0.38\rho heL\ddot{x} + \frac{he^5LE^2\alpha^2\lambda T_0}{0.26\rho e^6EC_p^2 + 0.62\lambda^2L^4}\dot{x} + \left(\frac{16Ehe^3}{L^3} - \frac{2\epsilon_0\epsilon_r abX_bU_{NL}^2}{g_0^3}\right)x + \left(\frac{8Ehe}{L^3} - \frac{4\epsilon_0\epsilon_r abX_b^3U_{NL}^2}{g_0^5}\right)x^3 = F_{exci} \quad (4.27)$$

Le terme proportionnel à  $x^3$  permet de compenser l'effet non-linéaire. Un autre effet, appelé effet de "raideur électrostatique" affecte la fréquence de résonance de l'oscillateur MEMS. Cet effet provient du terme proportionnel au déplacement  $x$  où la "raideur électrostatique" est soustraite à la raideur mécanique. Cela se traduit par une diminution de la fréquence de résonance. Ce phénomène proportionnel au carré de la polarisation exige une alimentation ultra stabilisée, afin de minimiser les fluctuations de fréquences. La tension de pull-in exprimée dans l'équation 2.78, limite la tension applicable aux électrodes pour la compensation de la non-linéarité. Il devient nécessaire d'exprimer les limites d'utilisation d'un tel dispositif.

Dans un premier temps, la nouvelle raideur de la poutre vibrante dépend de la tension présente entre l'électrode et cette poutre et la tension de pull-in dépend de cette raideur. Pour éviter le collage de l'électrode, on veut  $U < V_p$ , ainsi avec l'équation 2.78 et la raideur de l'équation 4.27 on obtient la relation suivante :

$$\frac{8K_{ar}g_0^3}{27\epsilon_0\epsilon_r ab} > -\frac{g_0^3}{2\epsilon_0\epsilon_r abX_b} \left(K_{ar} - \frac{16Ehe^3}{L^3}\right) \quad (4.28)$$

$$K_{ar} > \frac{432Ehe^3}{L^3(16X_b + 27)} \quad (4.29)$$

Pour annuler l'effet non-linéaire du résonateur, le terme proportionnel à  $x^3$  de l'équation 4.27 doit être nul. La tension de polarisation nécessaire au fonctionnement en fonction des paramètres du résonateur et du gap interélectrode est exprimé sur l'équation 4.30 sui-

vante :

$$U_{NL}^2 = \frac{2Eheg_0^5}{L^3\epsilon_0\epsilon_r abX_b^3} \quad (4.30)$$

Et finalement, en injectant cette tension de polarisation dans la raideur de la poutre, on trouve une condition sur la longueur du gap  $g_0$  par rapport aux dimensions du résonateur à l'aide de l'équation 4.29 pour pouvoir annuler les non-linéarités en  $x^3$  du résonateur tout en gardant une tension de pull-in inférieure à la polarisation. Cette condition est définie dans l'équation 4.31 :

$$\frac{16Ehe^3}{L^3} - \frac{2\epsilon_0\epsilon_r abX_b}{g_0^3} \frac{2Eheg_0^5}{L^3\epsilon_0\epsilon_r abX_b^3} > \frac{432Ehe^3}{L^3(16X_b + 27)}$$

$$g_0 < 8eX_b \sqrt{\frac{X_b}{16X_b + 27}} \quad (4.31)$$

Cette application est valable pour des résonateurs poutres doublement encastres en flexion. Si le gap entre les électrodes et la poutre est supérieur à cette valeur, la compensation des non-linéarités mécanique devient impossible à cause de la tension de pull-in qui engendra un collage de la poutre sur l'électrode et détériora le résonateur. Pour maximiser le rapport signal sur bruit, le courant qui traverse la capacité mobile doit être le plus grand possible. Pour cela, le gap  $g_0$  doit être relativement petit avec une tension de polarisation élevée. De plus, le principe de compensation de la non-linéarité mécanique permet d'obtenir un déplacement plus grand de la poutre.

Il est aussi possible d'utiliser un circuit électronique dédié pour annuler ce terme de non-linéarité mécanique en  $x^3$

### 4.3.3 Utilisation d'un circuit électronique dédié.

#### Annulation des non linéarités

Les non-linéarités mécaniques peuvent être décrites par une équation qui peut être modélisée par un chemin de contre réaction non-linéaire sur le résonateur mécanique. Le circuit de compensation introduit un autre chemin de contre réaction comme visible sur la figure 4.14 pour un résonateur MEMS piézoélectrique en tenant compte du coefficient de transduction piézoélectrique. Cela revient à ajouter à la force d'entretien des vibrations une force supplémentaire proportionnelle au cube du déplacement de la poutre.

Tout ce circuit incluant la non linéarité mécanique du résonateur ainsi que son circuit de compensation peut ainsi être réduit à un circuit équivalent linéaire.

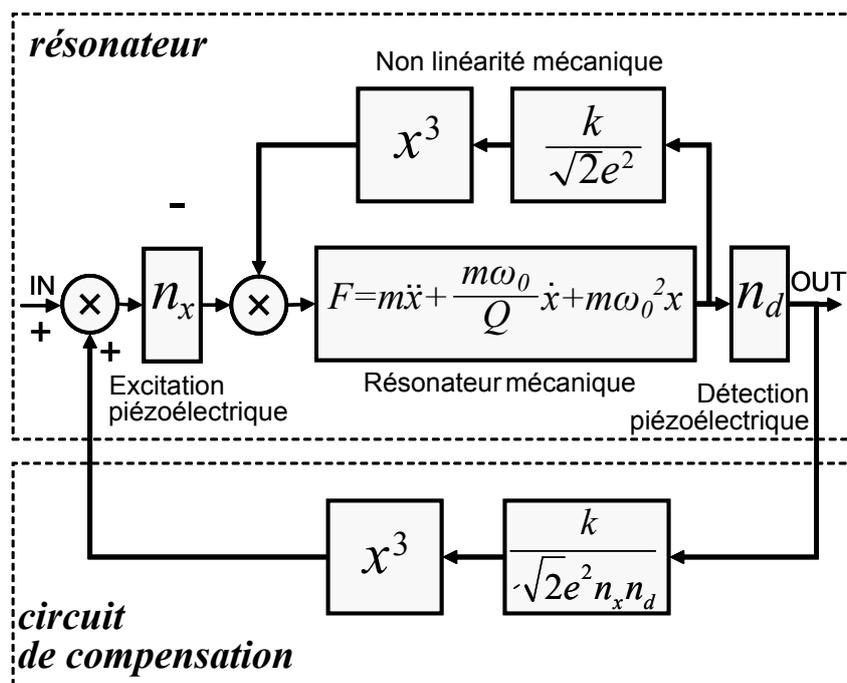


FIGURE 4.14 – Schéma d'un résonateur MEMS incluant la non linéarité mécanique, la transduction piézoélectrique et le chemin de contre réaction pour annuler le comportement non linéaire du résonateur.

### Résultat des simulations

Ce circuit de compensation a été réalisé (figure 4.15), il est formé d'un amplificateur de charge qui a pour but d'obtenir une tension proportionnelle à l'amplitude de vibration de la poutre, de deux multiplieurs et d'un gain pour obtenir le bon niveau d'amplitude de  $x^3$  pour le chemin de contre réaction de la compensation de la non linéarité.

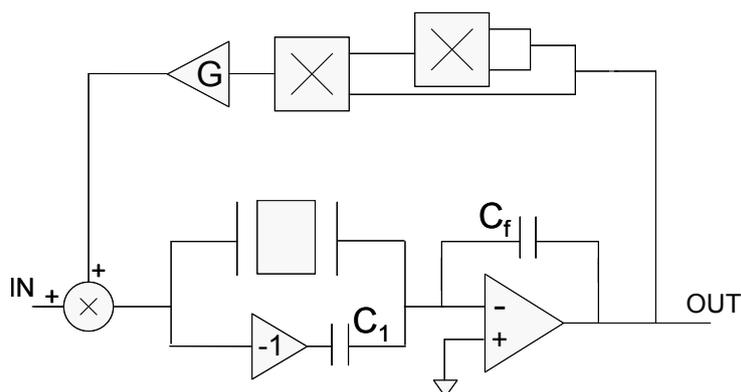


FIGURE 4.15 – Circuit électronique consistant à annuler simultanément la capacité inter-électrode et le comportement non linéaire du résonateur.

Dans un premier temps, ce circuit a été simulé en utilisant le modèle comportemental du VIA développé en langage Verilog-A. Pour cela, une multitude de simulations PSS ont été effectuées sous Cadence sans le circuit de compensation pour une tension d'excitation aux alentours de l'amplitude critique des non linéarités. Puis la même simulation a été exécutée en présence de ce circuit de compensation. La figure 4.16 montre les résultats de

ces simulations. L'annulation de ces non linéarités a ainsi été validée par ces simulations (figure 4.16).

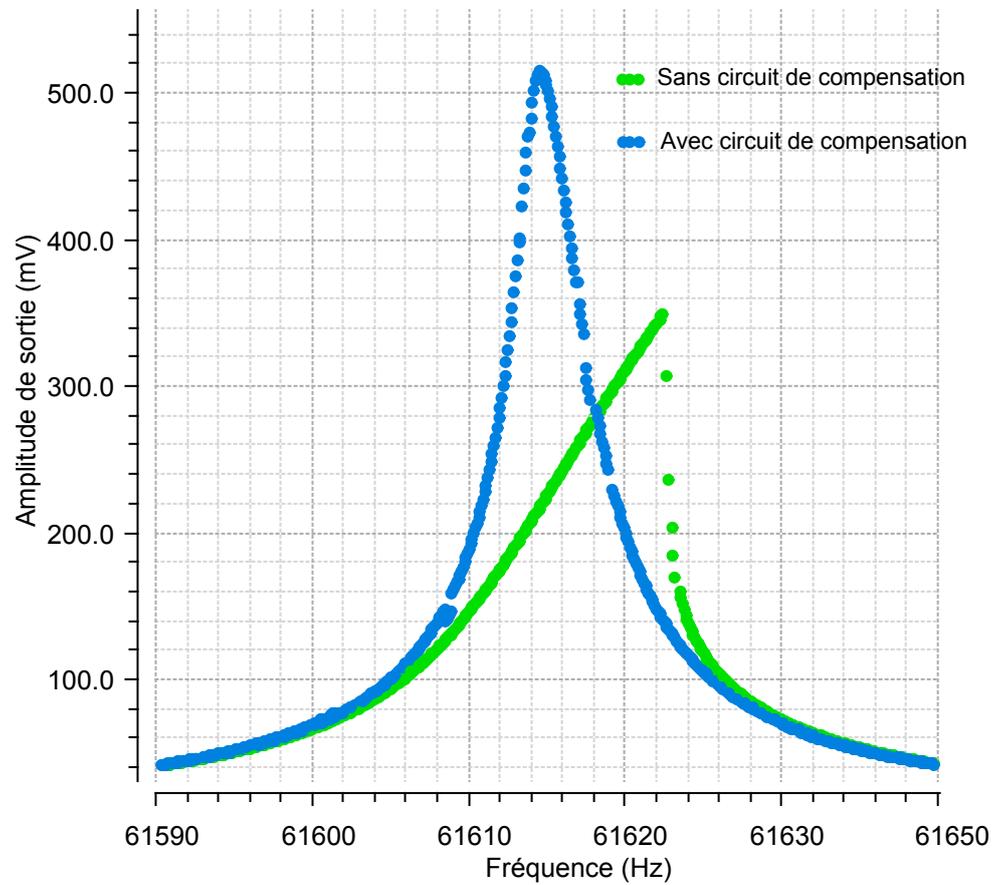


FIGURE 4.16 – Simulation d'un résonateur de type VIA non linéaire avec et sans circuit de compensation.

## Résultat expérimental

Dans un second temps, ce circuit a été réalisé avec des composants analogiques discrets et la mesure de la fréquence de résonance avec et sans présence du circuit de compensation a été réalisée. Ces résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 4.17 et montrent une réduction de l'effet de non linéarité lorsque le circuit de compensation est connecté.

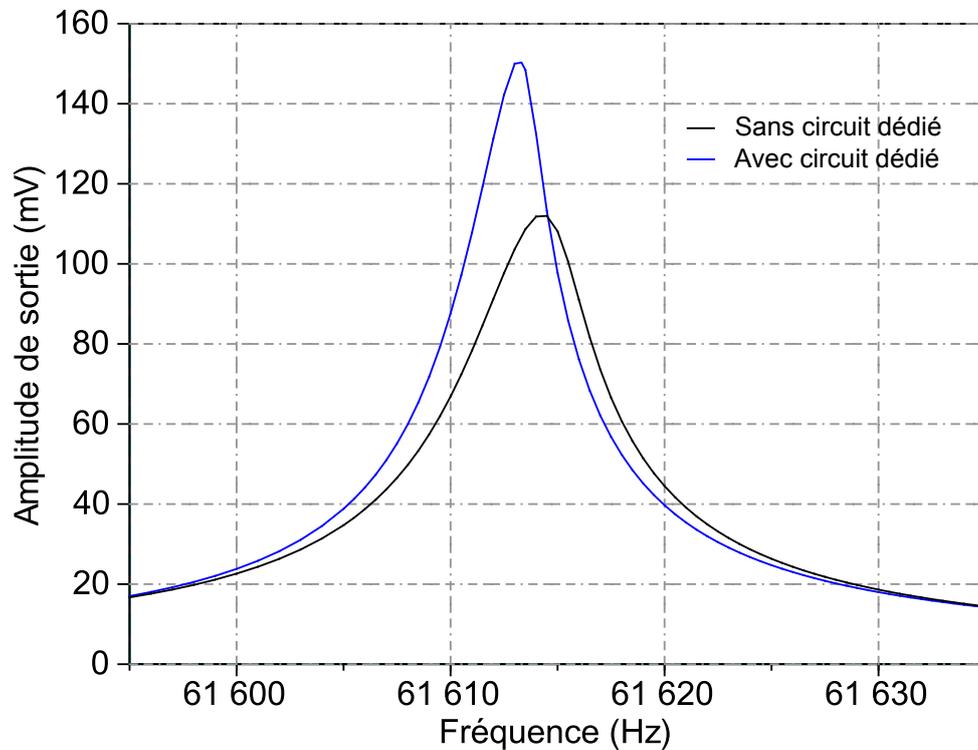


FIGURE 4.17 – Mesures d'un résonateur de type VIA non linéaire avec et sans circuit de compensation. Amplitude de l'amplificateur de charge en fonction de la fréquence

Cependant cet effet n'est pas totalement annulé. En effet, le déphasage induit par les composants discrets analogiques et les signaux parasites induits par les autres modes de résonance de la structure en quartz limitent cet effet de compensation de la non linéarité. Ce circuit de compensation doit encore être amélioré pour pouvoir tester ce résonateur avec un circuit oscillateur et ainsi montrer les nouvelles performances en terme de bruit de phase.

## 4.4 Conclusion sur l'exploitation des modèles

Une fois le modèle comportemental de l'oscillateur MEMS validé, il a été possible de l'exploiter. Une étude analytique hors résonance a été effectuée afin de comparer les trois types de transduction. Des simulations de l'oscillateur complet ont montré un avantage net de la transduction optique pour la diminution du bruit de phase pour les références de temps.

L'étude a permis l'optimisation d'un micro-accéléromètre de type VIA développé à l'Onera et de montrer et quantifier l'intérêt d'utiliser un résonateur en régime non linéaire pour la surveillance de zones par sismomètre.

Les modèles développés ont permis aussi dans un dernier temps d'étudier l'annulation des non linéarités inhérentes aux résonateurs miniatures et tout particulièrement aux accéléromètres vibrant afin d'améliorer la résolution et la stabilité de biais.

# Conclusion

## Conclusions générales

Le travail de ce mémoire a consisté à identifier les limites de résolution fréquentielle de capteurs MEMS vibrants. Dans un premier temps, une étude bibliographique a été effectuée pour présenter les différents capteurs MEMS vibrants à sortie fréquentielle. Cette étude a montré qu'actuellement ce type de capteur est présent tout autour de nous pour mesurer des grandeurs physiques telles qu'une accélération, une masse, une pression ou encore une température. Ces capteurs vibrants comportent une partie mécanique (le résonateur), un type de transduction et un circuit oscillateur. Ils s'agit de capteurs multiphysique pour lesquels leur performance en terme de résolution est difficile à prédire. Cette bibliographie a permis de voir qu'il existait des outils pour estimer la stabilité de fréquence d'un signal (bruit de phase et variance d'Allan), des logiciels pour la simuler (simulateur SpectreRF sous Cadence) et des appareils pour la mesurer (analyseur de spectre et compteur).

Dans un second temps, une étude théorique a été effectuée pour modéliser le comportement multiphysique d'un tel oscillateur MEMS. Pour cela, le comportement mécanique d'une poutre doublement encastree a été mis en équation. Le bruit mécanique et les non-linérités mécaniques du résonateur ont aussi été exprimés tout en utilisant uniquement les paramètres géométriques ( $e$ ,  $h$  et  $L$ ) et les paramètres matériau. Le type de transduction pouvant être piézoélectrique, électrostatique ou optique a aussi été étudié. Ce type de transduction a été exprimé suivant la position des électrodes piézoélectriques et électrostatiques et les dimensions du résonateur. Dans le cas de la transduction optique, l'excitation a été modélisée grâce au phénomène de pression de radiation et la détection grâce à la méthode knife-edge ou par l'interférométrie.

Cette étude théorique a permis d'écrire les équations en Verilog-A nécessaire à la simulation du comportement de l'oscillateur. Pour valider ces simulations sous Cadence, les résultats ont été comparés aux mesures expérimentales sur des cellules réelles. Les cellules caractérisées ont fonctionné en utilisant d'une part la transduction piézoélectrique (cellules VIA) et d'autre part la transduction électrostatique (cellules Aladin). Les validations ont été réalisées en comparant les mesures et les simulations de la cellule en boucle ouverte et en boucle fermée. Ces résultats ont permis d'estimer et de mesurer la stabilité

de fréquence de l'oscillateur tout en identifiant les sources de bruit limitant cette stabilité.

Une fois le modèle comportemental de l'oscillateur MEMS validé, il a été possible de l'exploiter. Pour commencer une étude analytique hors résonance a été effectuée afin de comparer les trois types de transduction. Le calcul du rapport signal à bruit hors résonance, qui détermine la résolution dans le cas d'un gyromètre vibrant par exemple, a montré que la transduction optique par interférométrie était la plus adaptée. Des simulations de l'oscillateur complet ont montré un avantage net de la transduction optique pour la diminution du bruit de phase. Cette étude est valable uniquement pour la stabilité de fréquence et peut être appliquée aux différents capteurs en insérant le facteur d'échelle approprié de la grandeur mesurée.

L'étude a aussi servi à optimiser un micro-accéléromètre de type VIA développé à l'Onera. Les résultats des simulations ont montré que pour ce type de capteur MEMS à transduction piézoélectrique qui pour une application inertielle doit pouvoir subir des accélérations de plus de  $100g$ , le résonateur optimal présente une épaisseur vibrante  $5\mu m$ , une hauteur de  $50\mu m$  et une longueur de  $0.5mm$ . La performance en terme de résolution est d'environ  $0.4\mu g$  à  $1s$  de temps d'intégration. Dans le cas d'une application pour la surveillance de zones par sismomètre, la résolution court terme par contre détermine directement la distance maximale de détection. En présence de la non-linéarité mécanique du résonateur, augmenter l'amplitude de la force d'excitation entraîne une amélioration de la mesure du bruit de phase loin de la porteuse mais une dégradation de ce bruit de phase à proximité de la porteuse. L'étude a ainsi permis de montrer et quantifier l'intérêt d'utiliser un tel résonateur en régime non linéaire alors que jusqu'à présent les accéléromètres vibrants se placent toujours en dessous des non linéarités.

Le dernier point de l'étude a permis de travailler sur l'annulation des non-linéarités. Cette annulation permet d'actionner le résonateur à une amplitude plus élevée tout en améliorant le bruit de phase proche de la porteuse et loin de la porteuse, ce qui implique dans le cas d'un dans le cas d'un accéléromètre vibrant une amélioration de la résolution et de la stabilité de biais. Il a ainsi été montré que cette annulation pouvait s'effectuer de deux façons différentes, l'une en utilisant des électrodes électrostatiques et l'autre en utilisant un circuit électronique dédié.

## Perspectives

A l'issue de cette thèse, un modèle comportemental complet d'un capteur MEMS vibrant a été développé. Ce modèle doit servir au design d'un capteur vibrant quelconque afin de prédire sa résolution en fonction des différents paramètres et ainsi de pouvoir l'optimiser suivant l'application. Ce développement peut aussi servir à développer une électronique intégrée dans un ASIC afin de miniaturiser le capteur tout en minimisant les sources de bruit parasites à la résolution.

L'étude sur les non-linéarités doit aboutir à la conception d'une cellule annulant les non-linéarités à l'aide d'électrodes électrostatique afin de mesurer expérimentalement les performances d'un tel principe.

Au niveau de la transduction optique, les premières prédictions ont montré un fort potentiel d'amélioration de la résolution par rapport aux deux autres types de transduction plus répandus (piézoélectrique et électrostatique). Une étude plus approfondie de ce type de transduction doit être établie afin de créer un design de cellule parfaitement adapté à la stabilité de fréquence et pouvant être mesuré expérimentalement.



# Annexe A

## Expression analytique des paramètres motionnels dans le cas d'une hypothèse quasi-statique de Rayleigh

Dans le cas d'une poutre à section rectangulaire bi-encastée soumise à une force concentrée au centre comme présenté sur le tableau A.1 où l'on peut voir le schéma de la sollicitation avec le bilan de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Dans le cas des

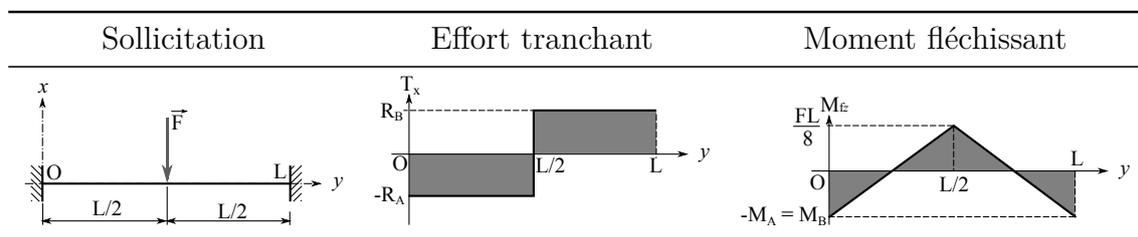


TABLE A.1 – Actions aux liaisons pour une poutre bi-encastée avec une charge concentrée au centre.

petites déformations, la courbure en un point d'une poutre en flexion est proportionnelle au moment fléchissant  $M_f$  et inversement proportionnelle à la rigidité de la poutre. Cette rigidité dépend du matériau, par le module de Young  $E$ , et du profil de la section droite par le moment quadratique  $I_z$ . L'équation d'équilibre mécanique de cette poutre est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{M_f}{EI_z} \quad (\text{A.1})$$

où  $u(y)$  est le déplacement de la poutre selon  $x$ . Le tableau A.1 permet d'obtenir le moment fléchissant  $M_f$  (équation A.2) :

$$M_f = \frac{F}{2} \left( y - \frac{L}{4} \right) \forall y \in \left[ 0, \frac{L}{2} \right] \quad (\text{A.2})$$

En prenant en compte l'équation A.2, l'équation A.1 est intégrée afin d'obtenir la vitesse  $\frac{\partial u}{\partial y}$  en fonction de  $y$  :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F}{4EI_z}y^2 - \frac{FL}{8EI_z}y + A \text{ avec } A : \text{ constante d'intégration} \quad (\text{A.3})$$

D'après les conditions aux limites d'encastrement, en  $y = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0$  donc  $A = 0$  et on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F}{4EI_z}y^2 - \frac{FL}{8EI_z}y \quad (\text{A.4})$$

L'expression est à nouveau intégrée pour obtenir le déplacement  $u$  en fonction de  $y$  :

$$u(y) = \frac{F}{12EI_z}y^3 - \frac{FL}{16EI_z}y^2 + B \text{ avec } B : \text{ constante d'intégration} \quad (\text{A.5})$$

La poutre étant encastree en  $y = 0$ ,  $u(0) = 0$  donc  $B = 0$  et donc le déplacement  $u(y)$  s'écrit selon l'expression suivante :

$$u(y) = \frac{F}{12EI_z}y^3 - \frac{FL}{16EI_z}y^2 \quad (\text{A.6})$$

Le déplacement au milieu de la poutre (pour  $y = \frac{L}{2}$ ) vaut alors :

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{96EI_z} - \frac{FL^3}{64EI_z} = -\frac{FL^3}{192EI_z} \quad (\text{A.7})$$

Connaissant le déplacement, il est possible de retrouver la raideur équivalente de la poutre. La relation de proportionnalité entre la force  $F$  appliquée en un point et la déflexion  $x$  résultante est vue sur l'équation A.8 :

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (\text{A.8})$$

En reportant cette équation dans l'équation A.7, on obtient :

$$k = -\frac{F}{x} = \frac{192EI_z}{L^3} \quad (\text{A.9})$$

De plus le moment quadratique de la section rectangulaire  $S$  par rapport à l'axe  $\vec{x}$  est :

$$I_z = \iint_S x^2 dx dz = \frac{he^3}{12} \quad (\text{A.10})$$

ainsi

$$k = \frac{16Ehe^3}{L^3} \quad (\text{A.11})$$

La valeur de la fréquence pour le mode de flexion concerné a été vue dans l'équation 1.10 du chapitre 1. A l'aide de cette équation, de l'équation A.9 et de l'équation 2.2 reliant la raideur  $k$ , la pulsation propre  $\omega_0$  et la masse  $m$ , il est possible d'obtenir la valeur de la masse efficace :

$$m_{efficace} = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16Ehe^3}{L^3} \frac{12}{\pi^4\beta_1^4} \frac{L^4}{e^2} \frac{\rho}{E} = 0.38\rho h e L \quad (\text{A.12})$$

De même, l'expression du coefficient d'amortissement peut s'exprimer sous cette forme :

$$c = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{k}{Q\omega_0} = \frac{16Ehe^3}{L^3} \frac{2\sqrt{3}}{Q\pi^2\beta_1^2} \frac{L^2}{e} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{2.48}{Q} \frac{he^2}{L} \sqrt{\rho E} \quad (\text{A.13})$$



# Annexe B

## Modèle Verilog-A du résonateur

```
// VerilogA for resonateur-AMS, resonateur, veriloga
`include "constants.vams"
`include "disciplines.vams"

module resonateur(p,Z);
//----- Noeuds-----
inout p,Z;      // noeuds électriques du résonateur
kinematic Z;    // déplacement mécanique (modèle masse-ressorts)
kinematic p;
  kinematic_v Vc; // vitesse de déplacement (modèle masse-ressorts)
//kinematic Zk3; // déplacement lié à la no-linéarité cubique
kinematic Fx;   // force d'excitation (modèle masse-ressorts)

//-----paramètres-----
parameter real e=54e-6 from [0:inf);
parameter real h=30e-6 from [0:inf);
parameter real L=2.26e-3 from [0:inf);
parameter real Rho=2648 from [0:inf);
parameter real E=7.826e10 from [0:inf) ;
parameter real Q=10000 from [0:inf);
//parameter real Tp=25 from [0:inf);

real kb;
real m; // coefficient de conversion piézoélectrique
real c; // capacité inter-électrodes
real k;
real nl;

real nc; // coefficient de conversion piézoélectrique

analog begin
//-----Equations du système-----
Vel(Vc) <+ ddt(Pos(Z));
nc=5;

m=0.38*Rho*h*e*L;
c=(2.48*h*e*e*sqrt(Rho*E))/(Q*L);
k=(16*E*h*e*e*e)/(L*L*L);
nl=(8*E*h*e)/(L*L*L);
kb=1.3806e-23;

//F(Fx) <+ V(p)*nc;
//Pos(Z) <+ (F(Fx)-((M*2*3.141593*f)/Q)*Vel(Vc)-M*ddt(Vel(Vc)))
// (M*pow((2*3.141593*f),2));
// -nl*pow(Pos(Z),3))
```

```
F(Fx) <+ F(p) + white_noise(1.5e-27, "bruit_mecanique");  
Pos(Z) <+ (F(Fx) - m * ddt(Vel(Vc)) - c * Vel(Vc) - nl * pow(Pos(Z), 3)) / k;  
  
end  
endmodule
```

# Annexe C

## Modèle Pspice de l'amplificateur opérationnel AD8066

```
* AD8066 Spice Model
* Description: Amplifier

* Not Modeled:
*   Distortion is not characterized
*
* Parameters modeled include:
*   Open loop gain and phase vs. frequency
*   Output impedance vs. frequency
*   Output clamping voltage and current
*   FET Input common mode range
*   Slew rate
*   Output currents are reflected to V supplies
*   Vos is static and will not vary
*
* END Notes
* Node assignments
*
*           non-inverting input
*           | inverting input
*           | | positive supply
*           | | | negative supply
*           | | | | output
*
.SUBCKT AD8066 1 2 99 50 30

* FET INPUT STAGE
Vos 9 2 1.5m
Cd 1 2 4.5p
Ccm1 1 0 2.1p
Ccm2 2 0 2.1p
J1 5 1 10 NMOD
J2 6 9 11 NMOD
R3 99 5 1132
R4 99 6 1132
R5 10 4 390
R6 11 4 390
I11 4 50 0.87e-3

* COMMON-MODE GAIN NETWORK
*POLE AT 40 MHz
Ecm 80 15 POLY(2) 2 15 1 15 0 .5 .5
*C4 82 85 3.54e-12
*R8 80 82 1k

*ZERO AT 40 kHz
Gcm1 15 81 80 15 4e-6
Lcm1 81 82 2e-3
Rcm1 82 15 1k

*ZERO AT 40 MHz
*Gcm2 15 83 81 15 1e-3
*Lcm2 83 84 3.5e-6
*Rcm2 84 15 1k

*ZERO AT 40 MHz
```

```

*Gcm3 15 85 83 15 1e-3
*Lcm3 85 86 3.5e-6
*Rcm3 86 15 1k

*ZERO AT 40 MHz
*Gcm4 15 91 85 15 1e-3
*Lcm4 91 92 3.5e-6
*Rcm4 92 15 1k

*POLE AT 30 MHz
*Gcm5 15 87 91 15 1e-3
*Ccm5 87 15 5.6e-12
*Rcm5 87 15 1k

*POLE AT 30 MHz
*Gcm6 15 88 87 15 1e-3
*Ccm6 88 15 5.6e-12
*Rcm6 88 15 1k

*POLE AT 30 MHz
*Gcm7 15 89 88 15 1e-3
*Ccm7 89 15 5.6e-12
*Rcm7 89 15 1k

* GAIN STAGE & POLE AT 17 kHz
Ecc 98 0 99 0 1
Ess 52 0 50 0 1
Eref 15 0 POLY(2) 99 0 50 0 0 .5 .5
G1 13 15 5 6 0.6
R7 13 15 3.125k
C3 13 15 3n
V1 98 14 1
V2 16 52 1
D1 13 14 DX
D2 16 13 DX

* POLE AT 334 MHz
G2 15 43 13 15 3.777m
R10 15 43 265
C5 15 43 1.8p

* POLE AT 665 MHz
G3 15 53 43 15 7.54m
R11 15 53 133
C6 15 53 1.8p

*POLE AT 665 MHz
G4 15 63 53 15 7.54m
R12 15 63 133
C7 15 63 1.8p

* BUFFER STAGE
Gbuf 15 32 63 15 1e-3
Rbuf 32 15 1000

* OUTPUT STAGE
Vo1 99 90 0
Vo2 51 50 0
R18 25 90 .02
R19 25 51 .02
Vcd 25 30 0
G6 25 90 99 32 50
G7 51 25 32 50 50
V4 26 25 -0.82
V5 25 27 -0.82
D5 32 26 Dx
D6 27 32 DX

Fo1 15 70 vcd 1
D7 70 71 DX
D8 72 70 DX
Vi1 71 15 0
Vi2 15 72 0

Erefq 96 0 30 0 1
Iq 99 50 5.7m
Fq1 96 99 POLY(2) Vo1 Vi1 0 1 -1
Fq2 50 96 POLY(2) Vo2 Vi2 0 1 -1

.MODEL NMOD NJF VTO=0.13 BETA=100 IS=2.4e-13
.MODEL DX D(IS=1e-15)
.ENDS

```

# Annexe D

## Script d'obtention de la résolution accélérométrique pour la transduction piézoélectrique

```
/* bruit_VIA_mult2.ocn
Author      R.Levy
Language    SKILL/OCEAN
Date        Nov 2013

Function for creating a multi-dimensional array.
Usage:
data=abMultiDimArray(6 8)
Creates a 6 by 8 array (starting index is from 0). Then you can use:
data[4][5]=23
data[0][7]=123
*****
SCCS Info: @(#) abMultiDimArray.il 11/23/09.16:24:27 1.1
*/

procedure(abMultiDimArray(@rest dimensions)
  let((arr)
if(integerp(car(dimensions)) && plusp(car(dimensions)) then
  arr=makeVector(car(dimensions))
  when(cdr(dimensions))
for(ind 0 sub1(car(dimensions))
  arr[ind]=apply('abMultiDimArray cdr(dimensions))
)
) ; when
arr
else
  error("Dimension %L must be a positive integer\n" car(dimensions))
) ; if
) ; let
) ; procedure

defMathConstants('m)
simulator( 'spectre )
design( "/home/levy/ams_workarea/Sim/VIA_ampli_courant/spectre/schematic/netlist
/netlist")
resultsDir( "/home/levy/ams_workarea/Sim/VIA_ampli_courant/spectre/schematic" )
modelFile(
  ("/home/levy/ams_workarea/these_GP/1N4500/1N4500" "")
  ("/home/levy/ams_workarea/these_GP/AD8066/ad8066.cir" "")
)
definitionFile(
  "/opt/cadence/2013/ams410/spectre/c35/soac/processOption.scs"
)
analysis('pnoise ?relharmnum "1" ?start "1e-7" ?stop "stop" ?dec "200"
?maxsideband "MS" ?p "/net011" ?n "" ?oprobe "")
```

```
?iprobe "" ?refsideband "" ?augmented "" ?ppv "" )
analysis('pss ?engine "Harmonic Balance" ?flexbalance "yes" ?oversamplefactor ""
?fund "f" ?harms "MS" ?errpreset "conservative" ?tstab "tstab"
?oscana t ?p "/net011" ?n "" ?oscmethod ""
?step "" ?maxstep "maxstep" ?write "" ?writefinal "" ?swapfile ""
?checkpss "" ?ppv "" ?backtracking "" )

Rho=2648.0 ;Masse volumique
E=7.826e10 ;Module d'Young
a=13.7e-6 ;coefficient de dilatation thermique
l=6.7 ;conductibilit thermique
cp=750.0 ;chaleur specifique pression constante
Co=1e-12 ;capacit inter-lectrodes
kb=1.3806e-23 ; cte de Boltzmann
T=300.0 ; temperature en K
Rf=10e6 ; R feedback ampli de courant

desVar( "Co" 1e-12 )
desVar( "flicker" 122e-15 )
desVar( "bruit_blan" 1e-16 )
desVar( "Rf" Rf )
desVar( "Rgain" 1k )
desVar( "MS" 100 )

e_list = list( 1e-6 2e-6 5e-6 1e-5 2e-5 5e-5 1e-4 2e-4 5e-4)
h_list = list( 1e-6 2e-6 5e-6 1e-5 2e-5 5e-5 1e-4 2e-4 5e-4)
L_list = list( 1e-4 2e-4 5e-4 1e-3 2e-3 5e-3 1e-2 2e-2 5e-2)
;e_list = list( 1e-6 2e-6 3e-6 4e-6 5e-6 6e-6 7e-6 8e-6 9e-6 1e-5 2e-5 3e-5 4e-5
5e-5 6e-5 7e-5 8e-5 9e-5 1e-4 2e-4 3e-4 5e-4)
;h_list = list( 1e-6 2e-6 3e-6 4e-6 5e-6 6e-6 7e-6 8e-6 9e-6 1e-5 2e-5 3e-5 4e-5
5e-5 6e-5 7e-5 8e-5 9e-5 1e-4 2e-4 3e-4 5e-4)
;L_list = list( 1e-4 2e-4 3e-4 5e-4 6e-4 7e-4 8e-4 9e-4 1e-3 2e-3 3e-3 4e-3 5e-3
6e-3 7e-3 8e-3 9e-3 1e-2 2e-2 3e-2)
;e_list = list( 54e-6);
;h_list = list( 30e-6);
;L_list = list( 2.26e-3);
iterations=length(e_list)*length(h_list)*length(L_list)
results=abMultiDimArray(iterations 14)

for( j 0 (iterations-1) ; creation du tableau de resultats
for( k 0 13
results[j][k]=0.0))

i=0
foreach( e e_list
foreach( h h_list
foreach( L L_list

nc=0.5*0.1711*12.0*0.21*e*h/L;
M=0.38*Rho*h*e*L;
c=(h*pow(e,5)*L*E*E*a*a*1*T)/(0.26*Rho*pow(e,6)*E*cp*cp+0.62*1*1*pow(L,4));
k=(16.0*E*h*e*e*e)/(L*L*L);
Qthermo=pow(Rho,0.5)*(0.65*pow(e,6)*Rho*E*cp*cp+1.53*pow(L,4)*1*1)
/(e*e*e*L*L*pow(E,1.5)*a*a*1*T);
Qelec=1e5
Q=Qelec*Qthermo/(Qelec+Qthermo) ; limite du Q par le Qelectrodes=100000
f=1.028*sqrt(E/Rho)*(e/L**2)
maxstep=6e-3/f ; maxstep: 100n pour le VIA
Fc=5.01e12*h*e*e*e*e/(sqrt(Q*Q*Q)*L*L*L); ;force conduisant l'amplitude critique
Vc=Fc/nc; ;force conduisant l'amplitude critique
Rm=c/(nc**2);
V=1.8e-9 ; volume de la masse d'epreuve
Mme=V*Rho ; masse d'epreuve
K=3.75/(h*e*e)*sqrt(Rho/E)*V ; facteur dchelle en Hz/V V=vol. masse epreuve
tstab= 2.0*Q/f
stop=1e6
Rvc= Vc*1e6/0.6
Rgain=150*Rm/(Rf*Vc)
if((h<e) then
Aflambagem.PI**2*E*e*h**3/(9.81*3*L**2*Mme)
; limite de flambage en g (these de Baptiste Le Foulgoc)
else
Aflambagem.PI**2*E*h*e**3/(9.81*3*L**2*Mme)
; limite de flambage en g (these de Baptiste Le Foulgoc)
```

```

) ; fin du if de Aflambage
desVar( "f" f )
desVar( "Q" Q )
desVar( "M" M )
desVar( "nc" nc )
desVar( "Vc" Vc )
desVar( "tstab" tstab )
desVar( "stop" stop )
desVar( "Rvc" Rvc )
desVar( "Rgain" Rgain )
desVar( "maxstep" maxstep )

envOption(
'analysisOrder list("pss" "pnoise")
)
option( ?categ 'turboOpts
'uniMode "APS"
)
temp( 27 )

if( (f<200e3 && f>1e4 && Aflambage>1) then
; condition sur la frequence pour lancer la simulation PSS + PNOISE

run()
PN_dBc= phaseNoise(1 "pss_fd" ?result "pnoise") ; bruit de phase en dBc/Hz

if((PN_dBc==nil) then
AccN_integ_1ms_ug=0.0
AccN_integ_10ms_ug=0.0
AccN_integ_100ms_ug=0.0
AccN_integ_1s_ug=0.0
AccN_integ_2s_ug=0.0
else

relative_frequency= xval(phaseNoise(1 "pss_fd" ?result "pnoise")) ; delta F
PN=2.0*10**(PN_dBc/10.0)
PN_zero=unityGainFreq(PN)
; frequence pour laquelle PN=1 (PN_dBc=0)
if((PN_zero==nil && (integ(PN,1e-5,1e-4)*1e-4)>1) then
; si phase noise>puissance de la porteuse
AccN_integ_1ms_ug=1e7
AccN_integ_10ms_ug=1e7
AccN_integ_100ms_ug=1e7
AccN_integ_1s_ug=1e7
AccN_integ_2s_ug=1e7
else
if((PN_zero==nil && (integ(PN,1e-5,1e-4)*1e-4)<1) then
start=1e-6
else
start=PN_zero*2.0
;start=1e-4
FN=PN*relative_frequency*relative_frequency ; bruit de frquence en Hz^2/Hz
fh=2*f ; bande passante de la mesure de frquence

tau=1 ; tau: temps d'integration (alavar)
FN_alavar=FN*2*sin(m.PI*tau*relative_frequency)**4/(m.PI*tau*relative_frequency)**2*1
/(1+(relative_frequency/fh)**2) ; bruit frequence * fonction transfert alavar
AccN_integ_1s_ug=sqrt(integ( FN_alavar,start,stop))*1e6/K ;alavar tau=1s

tau=1e-3
FN_alavar=FN*sin(m.PI*tau*relative_frequency)**4/(m.PI*tau*relative_frequency)**2*1
/(1+(relative_frequency/fh)**2)
AccN_integ_1ms_ug=sqrt(integ( FN_alavar,start,stop))*1e6/K

tau=1e-2
FN_alavar=FN*sin(m.PI*tau*relative_frequency)**4/(m.PI*tau*relative_frequency)**2*1
/(1+(relative_frequency/fh)**2)
AccN_integ_10ms_ug=sqrt(integ( FN_alavar,start,stop))*1e6/K

tau=1e-1
FN_alavar=FN*sin(m.PI*tau*relative_frequency)**4/(m.PI*tau*relative_frequency)**2*1
/(1+(relative_frequency/fh)**2)
AccN_integ_100ms_ug=sqrt(integ( FN_alavar,start,stop))*1e6/K

tau=2
FN_alavar=FN*sin(m.PI*tau*relative_frequency)**4/(m.PI*tau*relative_frequency)**2*1

```

```
/(1+(relative_frequency/fh)**2)
AccN_integ_2s_ug=sqrt(integ( FN_alavar,start,stop))*1e6/K
)) ; fin du if PN_zero ==nil
;plot(PN_dBc ?expr '( "Acceleration Noise; ug/sqrt(Hz)" ) )
;plot(FN ?expr '( "Acceleration Noise; ug/sqrt(Hz)" ) )
;plot(FN_alavar ?expr '( "Acceleration Noise; ug/sqrt(Hz)" ) )
) ; fin du if PSS fonctionne

results[i][0] = e
results[i][1] = h
results[i][2] = L
results[i][3] = f
results[i][4] = Q
results[i][5] = Rm
results[i][6] = Vc
results[i][7] = K
results[i][8] = Aflambage
results[i][9] = AccN_integ_1ms_ug
results[i][10] = AccN_integ_10ms_ug
results[i][11] = AccN_integ_100ms_ug
results[i][12] = AccN_integ_1s_ug
results[i][13] = AccN_integ_2s_ug

sprintf(i_string "%d" i)
output_file=strcat( "/home/levy/ams_workarea/bruit_VIA_mult2_" i_string ".csv" )
fp = outfile( output_file "w")
fprintf(fp "e, h, L, f, Q, Rm, Vc, K, Aflambage, AccN_integ_1ms_ug,
AccN_integ_10ms_ug, AccN_integ_100ms_ug, AccN_integ_1s_ug, AccN_integ_2s_ug \n")
;for( 1 0 (iterations-1)
for( 1 0 i
fprintf(fp " %10.7f , %10.7f , %10.7f , %10.7f , %10.7f , %10.7f ,
%10.7f ,%10.7f , %10.7f , %10.7f ,%10.7f ,%10.7f ,%10.7f , %10.7f \n"
results[1][0] results[1][1] results[1][2] results[1][3] results[1][4]
results[1][5] results[1][6] results[1][7] results[1][8] results[1][9]
results[1][10] results[1][11] results[1][12] results[1][13])
) ; fin boucle for du fprintf
close(fp);
i=i+1
) ; fin du if f est dans le domaine de frequences
))
```

# Publications

## 1er Auteur

**Article** G. Papin, R. Levy, A. Bosseboeuf, F. Fabbri, F. Parrain, M. Malak, T. Bourouina, G. Lissorgues, and P. Poulichet. Optical actuation and detection of mems resonators : Behavioral modeling and phase noise simulations. *In Frequency Control Symposium (IFCS), 2012 IEEE International*, pages 1-5. IEEE, 2012.

**Article** G. Papin, R. Levy, G. Lissorgues, and P. Poulichet. Behavioural modelling of mems oscillators and phase noise simulation. *In Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), 2011 Symposium on*, pages 392-397. IEEE, 2011.

**Journal** G. Papin, R. Levy, G. Lissorgues, P. Poulichet, S. Masson, B. Maréchal, J. Guérard, D. Janiaud, and O. Le Traon. Behavioural modelling of mems oscillators and phase noise simulation. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 72(1) :11-18,2012.

## 2ème Auteur

**Article** R. Levy, G. Papin, O. Le Traon, D. Janiaud, and J. Guerard. A high resolution vibrating beam accelerometer working in nonlinear region for seismic ground sensor application. *In Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), 2014 Symposium on*. IEEE, 2014.

**Article** R. Levy and G. Papin. A new electronic scheme to compensate mems resonators nonlinearities. *In Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2012 IEEE 25th International Conference on*, pages 508-510. IEEE, 2012.

**Journal** R. Levy, G. Papin, O. Le Traon, D. Janiaud, J. Guerard. Nonlinear regime operation for a high resolution vibrating beam UGS seismometer. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, (en cours de publication - "accepté avec révisions mineures").



# Bibliographie

- [1] Rex B Peters. Angular rate sensor utilizing two vibrating accelerometers secured to a parallelogram linkage, April 16 1985. US Patent 4,510,802.
- [2] James M O’connor and David M Shupe. Vibrating beam rotation sensor, May 3 1983. US Patent 4,381,672.
- [3] Rudolf C Dankwort, Richard H Frische, and Charles D Klem. Vibrating quartz diaphragm pressure sensor, October 23 1984. US Patent 4,479,070.
- [4] Dale R Koehler. Double resonator cantilever accelerometer, October 30 1984. US Patent 4,479,385.
- [5] T.V. Roszhart, H. Jerman, J. Drake, and C. de Cotiis. An inertial-grade, micromachined vibrating beam accelerometer. In *Solid-State Sensors and Actuators, 1995 and Eurosensors IX.. Transducers’ 95. The 8th International Conference on*, volume 2, pages 656–658. IEEE, 1995.
- [6] R. Hopkins, J. Miola, R. Setterlund, B. Dow, and W. Sawyer. The silicon oscillating accelerometer : A high-performance mems accelerometer for precision navigation and strategic guidance applications. *TECHNOLOGY DIGEST*, page 4, 2006.
- [7] Honeywell. Accelerex rba500 accelerometer. pages 1–2, 2005.
- [8] O. Le Traon, D. Janiaud, and S. Muller. Monolithic accelerometric transducer, October 5 1999. US Patent 5,962,786.
- [9] CH Instruments. Model 400b series time-resolved electrochemical quartz crystal microbalance. <http://www.chinstruments.com/chi400.shtml>, 2012.
- [10] ELCHEMA Company. Electrochemical quartz crystal nanobalances specifications. <http://www.elchema.com/EQCN.htm>, 2007.
- [11] Pierre O Lefort and Isabelle Thomas. Pressure micro-sensor, April 26 1994. US Patent 5,305,643.
- [12] Statek. Ts series miniature quartz temperature sensor. <http://www.statek.com/products/pdf/Temp%20Sensor%2010162%20Rev%20B.pdf>, 2012.
- [13] JW van Honschoten, WW Koelmans, SM Konings, L Abelman, and MC Elwenspoek. Nanotesla torque magnetometry using a microcantilever. 2008.
- [14] Richard L Waters and Monti E Aklufi. Micro-electro-mechanical systems ultra-sensitive accelerometer, June 24 2003. US Patent 6,581,465.

- [15] S. Timoshenko and D.H. Young. Vibration problems in engineering. 1972.
- [16] Dong Jin-hu, Qiu An-ping, and Shi Ran. Temperature influence mechanism of micro-mechanical silicon oscillating accelerometer. In *Power Engineering and Automation Conference (PEAM), 2011 IEEE*, volume 3, pages 385–389. IEEE, 2011.
- [17] R. Leonardson and S. Foote. Simma accelerometer for inertial guidance and navigation. In *Position Location and Navigation Symposium, IEEE 1998*, pages 152–160. IEEE, 1998.
- [18] O. Le Traon, D. Janiaud, S. Muller, and P. Bouniol. The via vibrating beam accelerometer : concept and performance. In *Position Location and Navigation Symposium, IEEE 1998*, pages 25–29. IEEE, 1998.
- [19] O. Le Traon, M. Pernice, D. Janiaud, B. Lecorre, and S. Muller. Dispositif de découplage mécanique pour capteur vibrant différentiel monolithique. *French Patent NFR/04.04794 filed*, 5(05), 2004.
- [20] G. Sauerbrey. Verwendung von schwingquarzen zur wägung dünner schichten und zur mikrowägung. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 155(2) :206–222, 1959.
- [21] KSV NIMA. Qcm-z500 | ksv nima. <http://www.ksvnima.com/qcm-z500>, 2012.
- [22] D. Chen, Z. Wu, X. Shi, J. Wang, and L. Liu. Design and modeling of an electromagnetically excited silicon nitride beam resonant pressure sensor. In *Nano/Micro Engineered and Molecular Systems, 2009. NEMS 2009. 4th IEEE International Conference on*, pages 754–757. IEEE, 2009.
- [23] WH Wade and LJ Slutsky. Quartz crystal thermometer. *Review of Scientific Instruments*, 33(2) :212–213, 1962.
- [24] WL Smith and WJ Spencer. Quartz crystal thermometer for measuring temperature deviations in the 10-3 to 10-6° c range. *Review of Scientific Instruments*, 34(3) :268–270, 1963.
- [25] Jun Xu, Xin Li, Jin-hua Duan, and Hai-bo Xu. High-precision low-power quartz tuning fork temperature sensor with optimized resonance excitation. *Journal of Zhejiang University SCIENCE C*, 14(4) :264–273, 2013.
- [26] Jing Ma, Jun Xu, Jinhua Duan, and Haibo Xu. Micro-temperature sensor based on quartz tuning fork resonator. 2013.
- [27] CT-C Nguyen and Roger T Howe. An integrated cmos micromechanical resonator high-q oscillator. *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, 34(4) :440–455, 1999.
- [28] Seungbae Lee and CT-C Nguyen. Mechanically-coupled micromechanical resonator arrays for improved phase noise. In *Frequency Control Symposium and Exposition, 2004. Proceedings of the 2004 IEEE International*, pages 144–150. IEEE, 2004.
- [29] Jan Bienstman, Harrie AC Tilmans, Erik JEA Peeters, Michiel Steyaert, and Robert Puers. An oscillator circuit for electrostatically driven silicon-based one-port resonators. *Sensors and Actuators A : Physical*, 52(1) :179–186, 1996.

- [30] Robert Henry and David Kenny. Comparative analysis of mems, programmable, and synthesized frequency control devices versus traditional quartz based devices. In *Frequency Control Symposium, 2008 IEEE International*, pages 396–401. IEEE, 2008.
- [31] JTM Van Beek and R Puers. A review of mems oscillators for frequency reference and timing applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 22(1) :013001, 2012.
- [32] C Comi, A Corigliano, G Langfelder, A Longoni, A Tocchio, and B Simoni. A new biaxial silicon resonant micro accelerometer. In *Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2011 IEEE 24th International Conference on*, pages 529–532. IEEE, 2011.
- [33] Alessandro Tocchio, Alessandro Caspani, and Giacomo Langfelder. Mechanical and electronic amplitude-limiting techniques in a mems resonant accelerometer. *Sensors Journal, IEEE*, 12(6) :1719–1725, 2012.
- [34] Marcel W Pruessner, Todd H Stievater, Jacob B Khurgin, and William S Rabinovich. Integrated waveguide-dbr microcavity opto-mechanical system. *Optics express*, 19(22) :21904–21918, 2011.
- [35] JB Khurgin, MW Pruessner, TH Stievater, and WS Rabinovich. Optically pumped coherent mechanical oscillators : the laser rate equation theory and experimental verification. *New Journal of Physics*, 14(10) :105022, 2012.
- [36] B Rob Ilic, Slava Krylov, Marianna Kondratovich, and Harold G Craighead. Optically actuated nanoelectromechanical oscillators. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 13(2) :392–399, 2007.
- [37] D Karabacak, T Kouh, CC Huang, and KL Ekinici. Optical knife-edge technique for nanomechanical displacement detection. *Applied physics letters*, 88(19) :193122, 2006.
- [38] O Bochobza-Degani, DJ Seter, E Socher, and Y Nemirovsky. Comparative study of novel micromachined accelerometers employing midos. *Sensors and Actuators A : Physical*, 80(2) :91–99, 2000.
- [39] Kazem Zandia, Jing Zoub, Brian Wongb, Roman V Kruzeleckyb, and Yves-Alain Petera. Voa-based optical mems accelerometer. 2011.
- [40] Marcel W Pruessner, Todd H Stievater, Mike S Ferraro, William S Rabinovich, Jennifer L Stepnowski, and R Andrew McGill. Waveguide micro-opto-electro-mechanical resonant chemical sensors. *Lab on a Chip*, 10(6) :762–768, 2010.
- [41] Jacques Rutman. Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources : fifteen years of progress. *Proceedings of the IEEE*, 66(9) :1048–1075, 1978.
- [42] Alain Michaud. *Étude de la stabilité de la fréquence d'un étalon de fréquence basé sur un maser à rubidium 87 : influence du récepteur cohérent*. 1987.

- [43] Peter Kartaschoff. Frequency and time. *Monographs in Physical Measurement, London : Academic Press, 1978*, 1, 1978.
- [44] Fred L Walls and David W Allan. Measurements of frequency stability. *Proceedings of the IEEE*, 74(1) :162–168, 1986.
- [45] David Allan, Helmut Hellwig, Peter Kartaschoff, Jacques Vanier, John Vig, Ger- not MR Winkler, and NF Yannoni. Standard terminology for fundamental frequency and time metrology. In *Frequency Control Symposium, 1988., Proceedings of the 42nd Annual*, pages 419–425. IEEE, 1988.
- [46] David W Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*, 54(2) :221–230, 1966.
- [47] Pierre Uhrich. Stabilité des oscillateurs ultra-stables. *Journées X-ENSUPS de physique*, 2007.
- [48] David B Leeson. A simple model of feedback oscillator noise spectrum. *Proceedings of the IEEE*, 54(2) :329–330, 1966.
- [49] Thomas H Lee and Ali Hajimiri. Oscillator phase noise : a tutorial. *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, 35(3) :326–336, 2000.
- [50] Thomas H Lee. *The design of low noise oscillators*. Springer, 1999.
- [51] Franz X Kaertner. Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 37(1) :90–101, 1989.
- [52] Ali Hajimiri and Thomas H Lee. Design issues in cmos differential lc oscillators. *Solid-State Circuits, IEEE Journal of*, 34(5) :717–724, 1999.
- [53] Laurence W Nagel. Spice2 : A computer program to simulate semiconductor circuits. *ERL Memo ERL-M520*, 1975.
- [54] Thomas L Quarles. *The SPICE3 implementation guide*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1989.
- [55] M Nakhla and Jiri Vlach. A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 23(2) :85–91, 1976.
- [56] Edouard Ngoya, Almudena Suárez, Raphaël Sommet, and Raymond Quéré. Steady state analysis of free or forced oscillators by harmonic balance and stability investigation of periodic and quasi-periodic regimes. *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, 5(3) :210–223, 1995.
- [57] Farid Chirouf. *Développement d'un outil logiciel industriel d'aide à la conception des oscillateurs à quartz*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.
- [58] RF Affirma. Simulator (spectrerf) user guide. *An Introduction to the PLL Library : How the PFD Model Works*, 2001.

- [59] Enrico Rubiola and Vincent Giordano. A low-flicker scheme for the real-time measurement of phase noise. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 49(4) :501–507, 2002.
- [60] Enrico Rubiola, Ertan Salik, Nan Yu, and Lute Maleki. Phase noise measurements of low power signals. *Electronics Letters*, 39(19) :1389–1390, 2003.
- [61] B. Le Foulgoc. *Évaluation du potentiel de performances micro-accéléromètres inertiels vibrants en silicium*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2008.
- [62] Minhang Bao and Heng Yang. Squeeze film air damping in mems. *Sensors and Actuators A : Physical*, 136(1) :3–27, 2007.
- [63] RG Christian. The theory of oscillating-vane vacuum gauges. *Vacuum*, 16(4) :175–178, 1966.
- [64] Clarence Zener. Internal friction in solids. i. theory of internal friction in reeds. *Physical review*, 52(3) :230, 1937.
- [65] Clarence Zener. Internal friction in solids ii. general theory of thermoelastic internal friction. *Physical Review*, 53(1) :90, 1938.
- [66] V. Kaajakari, T. Mattila, A. Oja, and H. Seppa. Nonlinear limits for single-crystal silicon microresonators. *Microelectromechanical Systems, Journal of*, 13(5) :715–724, 2004.
- [67] J. Juillard, A. Bonnoit, E. Avignon, S. Hentz, N. Kacem, and E. Colinet. From mems to nems : Closed-loop actuation of resonant beams beyond the critical duffing amplitude. In *Sensors, 2008 IEEE*, pages 510 –513, oct. 2008.
- [68] Frank S Crawford. Elementary derivation of the law of equipartition of energy. *Am J. Phys*, 55 :180–182, 1987.
- [69] Thomas B Gabrielson. Fundamental noise limits in miniature acoustic and vibration sensors. Technical report, DTIC Document, 1991.
- [70] Gérard BORELLO. Analyse statistique énergétique sea. *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, (R6215), 2006.
- [71] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. Table of integrals, series and products. *New York : Academic Press,| c1994, 5th ed. completely reset, edited by Jeffrey, Alan*, 1, 1994. Eq. 3.264.2.
- [72] Thomas J Hofler and Steven L Garrett. Thermal noise in a fiber optic sensor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 84 :471, 1988.
- [73] Arnaud Parent. *Apport des nouveaux matériaux piézoélectriques dans le domaine des micro-gyromètres vibrants*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2008.
- [74] Daniel Royer and Eugene Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides : propagation libre et guidée*. Masson, 1996.
- [75] Michel Géradin and Daniel Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*, volume 2. Masson Paris, 1993.

- [76] Harvey C Nathanson, William E Newell, Robert A Wickstrom, and J Ransford Davis Jr. The resonant gate transistor. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 14(3) :117–133, 1967.
- [77] P.M. Morse and K.U. Ingard. Theoretical acoustics. pages 181–185, 1968.
- [78] O Marti, A Ruf, M Hipp, H Bielefeldt, J Colchero, and J Mlynek. Mechanical and thermal effects of laser irradiation on force microscope cantilevers. *Ultramicroscopy*, 42 :345–350, 1992.
- [79] Mani Hossein-Zadeh, Hossein Rokhsari, Ali Hajimiri, and Kerry J Vahala. Characterization of a radiation-pressure-driven micromechanical oscillator. *Physical Review A*, 74(2) :023813, 2006.
- [80] DR Koehler. Optical actuation of micromechanical components. *JOSA B*, 14(9) :2197–2203, 1997.
- [81] Maurine Malak Karam. *A contribution to photonic MEMS : study of optical resonators and interferometers based on all-silicon Bragg reflectors*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011.
- [82] R Levy, G Papin, D Janiaud, and O Le Traon. *Rapport du projet de recherche Aladin*. 2011.
- [83] G Papin, R Levy, A Bosseboeuf, F Fabbri, F Parrain, M Malak, T Bourouina, G Lissorgues, and P Poulichet. Optical actuation and detection of mems resonators : Behavioral modeling and phase noise simulations. In *Frequency Control Symposium (IFCS), 2012 IEEE International*, pages 1–5. IEEE, 2012.
- [84] O Le Traon, S Masson, C Chartier, and D Janiaud. Lgs and gapo< sub> 4</sub> piezoelectric crystals : New results. *Solid State Sciences*, 12(3) :318–324, 2010.
- [85] Enrico Rubiola. Tutorial on the double balanced mixer. *arXiv preprint physics/0608211*, 2006.
- [86] François VERNOTTE. Stabilité temporelle et fréquentielle des oscillateurs : outils d’analyse. *Techniques de l’ingénieur. Mesures et contrôle*, (R681), 2006.
- [87] Alexander G Krause, Martin Winger, Tim D Blasius, Qiang Lin, and Oskar Painter. A high-resolution microchip optomechanical accelerometer. *Nature Photonics*, 6(11) :768–772, 2012.
- [88] Taechung Yi, Lu Li, and Chang-Jin Kim. Microscale material testing of single crystalline silicon : process effects on surface morphology and tensile strength. *Sensors and Actuators A : Physical*, 83(1) :172–178, 2000.
- [89] R Levy and V Gaudineau. Phase noise analysis and performance of the vibrating beam accelerometer. In *Frequency Control Symposium (FCS), 2010 IEEE International*, pages 511–514. IEEE, 2010.
- [90] Enrico Rubiola. High resolution time and frequency counters. *Tutorial of the IEEE International Frequency Control Symposium*, 2012.

- 
- [91] R Levy, D Janiaud, J Guerard, R Taibi, and O Le Traon. A 50 nano-g resolution quartz vibrating beam accelerometer. *Conference IEEE ISISS*, 2014.
- [92] R Levy, G Papin, O Le Traon, D Janiaud, and J Guerard. A high resolution vibrating beam accelerometer working in nonlinear region for seismic ground sensor application. In *Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), 2014 Symposium on*. IEEE, 2014.
- [93] Lin He, Yong Ping Xu, and Moorthi Palaniapan. A state-space phase-noise model for nonlinear mems oscillators employing automatic amplitude control. *Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on*, 57(1) :189–199, 2010.





# **Analyse des limites de résolution fréquentielle des capteurs Vibrants de type MEMS**

Les capteurs de type MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) sont des micro-systèmes mettant en oeuvre différents domaines de la physique (électronique, mécanique, chimie, optique,...) et permettant de mesurer différentes grandeurs physiques (accélération, pression, température...). Parmi ces micro-capteurs, les MEMS vibrants se caractérisent par leur structure présentant un micro-résonateur mis en vibration à sa fréquence de résonance et la variation de cette fréquence est représentative du mesurande. Cette thèse s'intéresse principalement à analyser et identifier les limites de résolution fréquentielle de ces capteurs vibrants en effectuant une modélisation multiphysique.

Dans un premier temps, nous avons modélisé le comportement multiphysique d'un capteur MEMS vibrant en détaillant trois types de transduction (piézoélectrique, électrostatique et optique). La seconde partie a permis de valider les équations développées en se basant sur les simulations sous Cadence (langage multiphysique Verilog-A) et en les validant par des mesures expérimentales. La dernière partie traite de l'optimisation d'un micro-accéléromètre de type VIA (Vibrating Inertial Accelerometer) et l'étude de l'annulation des non linéarités permettant d'améliorer la résolution d'un capteur MEMS vibrant.

**Mots-clés : accéléromètre, MEMS, modélisation, résolution, bruit de phase**

## **Analysis of the frequency resolution limits of MEMS vibrating sensors**

MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) sensors are micro-systems implementing various fields of physics (electronical, mechanical, chemical, optical, ...) and measuring various physical quantities (acceleration, pressure, temperature ...). The vibrating MEMS are characterized by a micro-resonator vibrating at its resonant frequency. The frequency variation is proportional to the measurand. This thesis is concerned with analyzing and identifying the frequency resolution limits of these vibrating sensors by performing multiphysics modeling.

The first step is to model the multiphysics behavior of a vibrating MEMS sensor with three transduction types (piezoelectrical, electrostatic and optical). Secondly, the equations developed are validated, based on simulations with Cadence (multiphysique language Verilog-A) and their comparaison with experimental measurements. The last section presents the micro-accelerometer VIA (Vibrating Inertial Accelerometer) optimization and the nonlinearities cancellation study for improving the resolution of vibrating MEMS sensor.

**Keywords : accelerometer, MEMS, modelling, resolution, phase noise**