Université Paris-Sud

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

Présentée par :

Lionel DARONDEAU

Synthèse en français

Sur la conjecture de Green-Griffiths logarithmique

(Dégénérescence algébrique effective des courbes holomorphes entières à valeurs dans des complémentaires d'hypersurfaces projectives de grand degré)

Soutenue le 03 Juillet 2014 devant la commission d'examen composée de :

M.	Jean-Pierre Demailly	Professeur, Grenoble	(*président du jury*)
M.	Gerd Dethloff	Professeur, Brest	(*examinateur*)
M.	Julien Duval	Professeur, Orsay	(*examinateur*)
M.	Joël Merker	Professeur, Orsay	(*directeur de thèse*)
M.	Christophe Mourougane	Professeur, Rennes	(*rapporteur*)
M.	Nessim Sibony	Professeur, Orsay	(*examinateur*)

Rapporteurs absents lors de la soutenance :

M.	András Szenes	Professeur, Genève	(*rapporteur*)
M.	Katsutoshi Yamanoi	Professeur, Tokyo	(*rapporteur*)

École Doctorale Mathématique
de la Région Paris-Sud

N° national de thèse 2014-PA11-2134

CHAPITRE I

Présentation des résultats

Sommaire

1.	**Introduction**	**1**
1.1.	Motivations	1
1.2.	L'approche des jets	2
1.3.	La stratégie de Siu	5
1.4.	Existence de différentielles de jets	5
1.5.	Dégénérescence algébrique effective	6
1.6.	Principaux résultats de ce mémoire	7

1. Introduction

1.1. Motivations. Une variété complexe X est dite *hyperbolique* au sens de Brody lorsqu'il n'existe pas d'application holomorphe entière non constante $f\colon \mathbb{C} \to X$ à valeurs dans X. Le théorème de Picard (1879) donne un exemple de telle variété :

Théorème. *Il n'existe pas d'application holomorphe entière non constante :*

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Le théorème de Green ([21]), qui généralise le théorème de Picard, fournit des exemples en dimension supérieure :

Théorème. *Il n'existe pas d'application holomorphe entière non constante :*

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n \setminus H_1 \cup \cdots \cup H_{2n+1},$$

à valeurs dans le complémentaire de la réunion de $2n+1$ *hyperplans de* $\mathbb{P}^n$ *en position générale.*

La notion d'hyperbolicité peut être assouplie pour obtenir une notion plus faible, qui est la *dégénérescence algébrique* des courbes entières. Une courbe entière $\mathbb{C} \to X$ à valeurs dans une variété algébrique complexe X est dite *algébriquement dégénérée* s'il existe une sous-variété algébrique propre $Z \subsetneq X$ qui contient son image. Dans [21], Green prouve en fait le résultat plus général :

Théorème. *L'image d'une courbe entière* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ *évitant* $n + k \geqslant n + 1$ *hyperplans en position générale est contenue dans un sous-espace linéaire projectif de dimension au plus la partie entière de* $\frac{n}{k}$*. Cette borne* $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ *est optimale.*

On obtient donc que les courbes à valeurs dans le complémentaire de $n + 2$ hyperplans en position générale dans $\mathbb{P}^n$ sont algébriquement dégénérées.

On peut aussi considérer des hypersurfaces plus générales que des réunions d'hyperplans. L'une des motivations est la conjecture suivante ([27]), que nous choisissons de restreindre à l'hyperbolicité au sens de Brody, eu égard aux objectifs de ce mémoire :

Conjecture (Kobayashi). *Il n'existe pas d'application holomorphe entière non constante à valeurs dans le complémentaire* $\mathbb{P}^n \setminus X_d$ *d'une hypersurface générique* X_d *de degré* $d \geqslant 2n+1$.

Ici *générique* signifie que les coefficients de l'équation définissante de X_d doivent se trouver en dehors d'une certaine sous-variété algébrique propre de l'espace projectif S de tous les coefficients des polynômes homogènes de degré d :

$$S := P\Big(\Gamma\Big(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\Big)\Big),$$

lequel paramétrise les hypersurfaces algébriques de degré d dans $\mathbb{P}^n$. La borne $2n+1$ peut à la fois être justifiée par le théorème de Green ci-dessus et par les travaux de Zaĭdenberg ([51]), qui montrent que le complémentaire d'une hypersurface générique de degré $2n$ dans $\mathbb{P}^n$ n'est *pas* hyperbolique.

En ce qui concerne la dégénérescence algébrique, la conjecture de Green et Griffiths ([22]) énonce, dans un cadre très large, que toute variété algébrique lisse de type général X possède une sous-variété algébrique propre $Z \subsetneq X$, qui contient les images de toutes les courbes holomorphes entières non constantes $f\colon \mathbb{C} \to X$. Dans le cas considéré ici des hypersurfaces projectives, cette conjecture devient :

Conjecture (Green-Griffiths). *L'image d'une courbe entière* $f\colon \mathbb{C} \to X_d$, *à valeurs dans une hypersurface* X_d *de* $\mathbb{P}^{n+1}$ *de degré* $d \geqslant n+3$ *n'est pas Zariski-dense dans* X_d.

Conjecture (Green-Griffiths logarithmique). *L'image d'une courbe entière* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n \setminus X_d$, *à valeurs dans le complémentaire dans* $\mathbb{P}^n$ *d'une hypersurface* X_d *de degré* $d \geqslant n+2$ *n'est pas Zariski-dense dans* $\mathbb{P}^n$.

La version forte de ces conjectures exige que la sous-variété algébrique propre Z de l'espace d'arrivée contenant l'image $f(\mathbb{C}) \subset Z$ ne dépende pas de la courbe entière non constante f.

Dans ce mémoire, une réponse positive est apportée à la conjecture de Green-Griffiths logarithmique forte, pour des hypersurfaces génériques de degré $d \geqslant (5n)^2\, n^n$.

1.2. L'approche des jets. À la suite de l'article de 1926 du mathématicien français André Bloch [1] sur les courbes entières à valeurs dans des variétés abéliennes, l'approche qui a dominé pour traiter les problèmes d'hyperbolicité est d'utiliser un grand nombre d'équations différentielles algébriques vérifiées par toute courbe entière. On se ramène ainsi à un problème d'élimination algébrique, et il suffit de montrer que le nombre d'inconnues est (beaucoup) plus grand que le nombre de contraintes.

Il est pratique de décrire ces équations différentielles en utilisant le formalisme des *jets*. Pour une application holomorphe $f\colon \mathbb{C} \to X$, à valeurs dans une variété complexe X et une trivialisation locale de $X \simeq \mathbb{C}^n$, le k-jet de f correspond à son développement de Taylor tronqué à l'ordre k. La notion locale de polynôme en les coefficients de Taylor $f_i', f_i'', \ldots, f_i^{(k)}$ de f, de poids homogène m pour le nombre de "primes" a un sens global, comme le montrent les formules de changement de cartes de Faà di Bruno. On appelle *différentielle de jets* de degré k et de poids m le recollement de tels polynômes.

Dans son article, Bloch prouve le résultat d'hyperbolicité suivant :

Théorème. *Soit X un variété abélienne et soit $Y \subset X$ une sous-variété de X. Si Y ne contient le translaté d'aucune sous-variété abélienne de X, alors il n'existe pas de courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to Y$ à valeurs dans Y.*

Sa démonstration se déroule en trois étapes.

① La production explicite de *différentielles de jets holomorphes*, c'est-à-dire des polynômes dans les variables de jets $f_i^{(j)}$ à coefficients holomorphes, qui s'annulent sur un diviseur ample $A \subset X$.

② Le *théorème fondamental d'annulation* suivant, qui fait le lien entre différentielles de jets et hyperbolicité :

Théorème (Lemme d'Ahlfors-Schwarz). *Si ω est une différentielle de jets holomorphe, s'annulant sur un diviseur ample $A \subset X$, et $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière, alors le pullback $f^\star\omega \equiv 0$ s'annule identiquement sur $\mathbb{C}$.*

③ La détermination du lieu de dégénérescence : le translaté d'une sous-variété abélienne (qui doit être vide pour obtenir l'hyperbolicité).

Un demi siècle plus tard, Philip Green et Mark Griffiths ([22]) modernisent les concepts de Bloch et établissent plusieurs résultats fondamentaux sur la géométrie des courbes entières. Dans leur article de 1979, ils obtiennent le résultat :

Théorème. *Soit X une variété algébrique complexe vérifiant $q > \dim X$, où $q = \dim H^1(\overline{X}, \mathcal{O})$ pour n'importe quelle compactification $\overline{X}$ de X. Alors l'image de toute application holomorphe entière $\mathbb{C} \to X$ est contenue dans une sous-variété algébrique propre de X.*

Ce résultat avait déjà été énoncé par Bloch, et prouvé dans certains cas particuliers. Ochiai a également étudié certains cas particuliers. Comme Bloch et Ochiai, Green et Griffiths utilisent les *jets d'ordre supérieur*. Ils définissent les pseudo-métriques de jets et la notion de pseudo-métrique de jets à courbure sectionnelle holomorphe $\leqslant -1$. La démonstration du lemme d'Ahlfors-Schwarz implique que si la variété considérée X est munie d'une telle métrique sur ses k-jets, alors pour toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$, l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans l'ensemble dégénéré de la métrique. Green et Griffiths choisissent ensuite la pseudo-métrique de façon à contrôler l'ensemble de dégénérescence.

En 1995 et ultérieurement aussi, Demailly([7]) a développé une technique de *jets invariants* prolongeant et améliorant l'approche de Green et Griffiths. Il introduit de nouveaux objets géométriques. Une *variété complexe dirigée* est par définition un sous-fibré vectoriel holomorphe $V \to X$ du fibré tangent $T_X \to X$ d'une variété complexe X. Pour étudier l'hyperbolicité de (X, V) on utilise la *méthode de la courbure négative* : par le lemme d'Ahlfors-Schwarz, l'existence d'une métrique hermitienne à courbure négative sur le fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{P(V)}(-1)$ implique la non existence de courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V. Le cas le plus intéressant est celui où le sous-fibré $V = T_X$ est le fibré tangent en entier, car on obtient alors l'hyperbolicité de X. Sous certaines hypothèses de positivité du fibré dual $V^\star$, il est possible de construire une telle métrique. Par exemple :

Théorème. *Soit (X, V) une variété complexe dirigée. Si $V^\star$ est ample, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V est constante.*

Pour généraliser la situation aux k-jets Demailly introduit une tour de fibrés projectifs. Cette construction a été généralisée au cas logarithmique par Dethloff et Lu ([10]).

Soit $\overline{X}$ une variété complexe et D un diviseur simple à croisements normaux sur $\overline{X}$, c'est-à-dire $D = \sum D_i$, où les composantes D_i sont des diviseurs lisses irréductibles qui s'intersectent transversalement. Une telle paire $(\overline{X}, D)$ est appelée une *paire logarithmique*. On note $T_{\overline{X}}(-\log D)$ le *fibré tangent logarithmique à $\overline{X}$ le long de D* ([35]). Pour tout sous-fibré V du fibré tangent logarithmique :

$$V \subset T_{\overline{X}}(-\log D) \subset T_{\overline{X}},$$

on construit ([7, 10]), pour tout ordre fixé $k \in \mathbb{N}$, la *tour de Demailly logarithmique* des fibrés de jets projectivisés :

$$\big(\overline{X}_k, D_k, V_k\big) \to \big(\overline{X}_{k-1}, D_{k-1}, V_{k-1}\big) \to \ldots \to \big(\overline{X}_1, D_1, V_1\big) \to \big(\overline{X}_0, D_0, V_0\big) := \big(\overline{X}, D, V\big),$$

ayant pour propriété principale que toute trajectoire tangente à V non constante $f\colon \Delta_R \to \overline{X} \setminus D$ se relève uniquement en une trajectoire $f_{[k]}\colon \Delta_R \to \overline{X}_k \setminus D_k$ tangente à V_k, qui ne dépend que du k-jet de f. Cette tour a pris une grande importance dans l'étude de la dégénérescence algébrique des courbes entières sur $\overline{X} \setminus D$ (*cf.* les articles de survol [15, 38]).

En effet, nous avons vu qu'une première étape dans la preuve de la dégénérescence algébrique des courbes entières est de montrer qu'il existe un polynôme P non nul sur $\overline{X}$, tel que toute courbe entière non constante $f\colon \mathbb{C} \to \overline{X} \setminus D$ satisfasse l'équation différentielle algébrique :

$$P\big(f, f', f'', \ldots, f^{(k)}\big) \equiv 0.$$

Étant par définition un fibré vectoriel projectif, la variété $\overline{X}_k$ est naturellement équipée d'un fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(-1)$. Soit $\pi_{k,0}$ la projection naturelle du k-ème niveau de la tour vers la base $\overline{X}_0 = \overline{X}$. Les images directes :

$$\mathcal{E}_{k,m}V^\star := (\pi_k)_\star \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m)$$

peuvent être vues comme des fibrés vectoriels d'opérateurs différentiels d'ordre k et de degré m agissant sur les courbes holomorphes dans X tangentes à V et invariantes par reparamétrage. Alors, J.-P. Demailly a démontré un théorème fondamental d'annulation ([7, 10]), qui stipule que pour toute section globale :

$$P \in H^0\big(\overline{X}_k, \mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m) \otimes \pi_{k,0}^\star A^\vee\big) = H^0\big(\overline{X}, \mathcal{E}_{k,m}V^\star \otimes A^\vee\big),$$

à valeurs dans le dual $A^\vee$ d'un fibré en droites ample $A \to \overline{X}$, on a, pour tout courbe entière non constante $f\colon \mathbb{C} \to \overline{X} \setminus D$ tangente à V :

$$P\big(f, f', f'', \ldots, f^{(k)}\big) \equiv 0.$$

Ce théorème d'annulation (étape ② de la démonstration de Bloch) permet une approche alternative à la production explicite de différentielles de jets holomorphes (étape ① de la démonstration de Bloch). On peut se ramener à l'étude des sections globales du faisceau $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m)$ qui s'annulent sur A. En contrepartie, le manque d'information sur les différentielles de jets obtenues complique l'étape ③ de la démonstration de Bloch. Dans certains cas, Diverio et Rousseau ([16]) ont même donné récemment des exemples où les équations qu'on obtient de cette façon ne suffisent pas pour obtenir des informations sur la base $\overline{X}_0$.

L'algèbre des jets invariants étudiée par Rousseau ([41]), par Merker ([29]), ainsi que par Bérczi et Kirwan ([5]) est compliquée.

1.3. La stratégie de Siu. En 1996 ([48]), en 2002 ([45]) et en 2004 ([46]), Siu a traité le cas des hypersurfaces projectives de dimension 2 (en degré non optimal) et il a proposé des idées générales adéquates, mais réputées difficiles à réaliser techniquement, afin de traiter la dimension n quelconque. Il utilise une stratégie en deux étapes :

① – ② La construction explicite en coordonnées projectives de sections holomorphes globales du fibré des différentielles de jets, dans l'esprit des travaux de Bloch.

③ La déformation de ces sections pour obtenir suffisamment d'équations. Cette deuxième étape est inspirée des travaux de Ein-Clemens-Voisin ([6, 18, 50]) sur les courbes rationnelles, dans lesquels il est établit que :

Théorème. *Il n'existe pas de courbe rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1 \to X_d$ à valeurs dans une hypersurface générique X_d de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \geqslant 2n-1$.*

Pour déformer les équations différentielles, on travaille en famille, sur l'hypersurface universelle de degré d :

$$\mathcal{H} := \Big\{Z, P_s\colon P_s(Z) = 0\Big\} \subset \mathbb{P}^n \times S.$$

Si ω est une famille de différentielles de k-jets sur les fibres de la deuxième projection, et si ω_s s'annule sur $A \subset H_s$, pour tout champs de vecteurs méromorphe V tangent à l'espace des k-jets verticaux de $\mathcal{H}$, dont l'ordre des pôles est plus petit que le degré d'annulation de ω, la dérivée de Lie $(\mathsf{V}\cdot\omega)_s$ vérifie toujours les hypothèses du lemme d'Ahlfors-Schwarz, et fournit donc une nouvelle équation différentielle.

Pour obtenir suffisamment d'équations indépendantes, on doit considérer les champs de vecteurs *obliques*, c'est-à-dire qui ont une composante non nulle dans la directions de l'espace des paramètres S et montrer que l'espace tangent aux jets verticaux possède un repère méromorphe avec des pôles d'ordre peu élevé.

La méthode de déformation de Siu, bien décrite dans [14, 15, 38], a été rendue effective par Păun ([37]) en dimension 2, et par Rousseau en dimension 3, à la fois dans le cas compact ([43]) et dans le cas logarithmique ([42]). Dans le cas compact, la technique a été généralisée en toute dimension par Merker ([30]), avec une amélioration importante de la détermination du lieu où l'énoncé d'engendrement global ③ est valide, qui a mené à une preuve de la dégénérescence algébrique *forte* des courbes entières à valeurs dans une hypersurface projective générique de grand degré, avec Diverio et Rousseau ([14]). Dans le contexte légèrement différent des familles d'hypersurfaces projectives, Mourougane ([34]) a mis la technique en œuvre en toute dimension et pour tout degré.

1.4. Existence de différentielles de jets. La construction explicite ① de différentielles de jets globales étant difficile, on utilise plutôt les méthodes cohomologiques développées par Demailly et Diverio ([7, 10, 13, 19]) pour obtenir l'existence d'équations différentielles (*malheureusement non explicites*). La stratégie adoptée pour obtenir des équations différentielles est de s'assurer de l'existence de sections globales non nulles du fibré en droite $\mathcal{O}_{\overline{X}_k}(m) \otimes \pi_{k,0}^{\star} A^{\vee}$, pour $m \gg 1$.

Une approche, avec les fibrés de Schur ([7]), consiste à contrôler les groupes de cohomologie paire supérieurs H^{2i} afin d'utiliser le théorème de Riemann-Roch. Dans [40], en dimension 3, Rousseau est capable de borner la dimension de H^2 en utilisant

les inégalités de Morse holomorphes ([7, 49]). Ensuite dans [32], Merker traite le cas de la dimension arbitraire pour des différentielles de jets avec un grand ordre.

Avec une approche différente, dans [8], Demailly traite le cas de la dimension arbitraire en utilisant une version forte des inégalités de Morse holomorphes.

Une autre approche, développée dans des contextes variés ([12, 13, 14, 3, 34, 2]), consiste à appliquer les inégalités de Morse holomorphes pour prouver l'existence de sections d'un certain sous-faisceau plus simple du faisceau des différentielles de jets. Ceci conduit à établir la positivité d'un certain nombre d'intersection au k-ème niveau de la tour de Demailly :

$$I = \int_{\overline{X}_\kappa} p\Big(\pi^\star_{\kappa,1} u_1, \dots, \pi^\star_{\kappa,\kappa-1} u_{k-1}, u_k\Big),$$

où p est un polynôme, à coefficients dans l'anneau de cohomologie de la base, dans les premières classes de Chern :

$$u_i := c_1\Big(O_{\overline{X}_i}(1)\Big).$$

1.5. Dégénérescence algébrique effective. La première confirmation de la conjecture de Green-Griffiths en toute dimension est un résultat récent de Diverio, Merker et Rousseau ([14]), qui établit l'énoncé avec une borne effective en utilisant les fibrés de Demailly et une version algébrique des inégalités de Morse holomorphes. Ils démontrent le théorème suivant :

Théorème. *Soit $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface projective lisse générique de* dimension arbitraire *$n \geqslant 2$. Si le degré de X_d est plus grand que l'entier* explicite *2^{n^5}, alors il existe une sous-variété propre $Z \subset X_d$, telle que toute courbe holomorphe entière $f : \mathbb{C} \to X_d$ prend en fait ses valeurs dans $Z \supset f(\mathbb{C})$.*

Leur preuve est basée de façon essentielle sur la stratégie de déformation développée par Siu, combinée avec les techniques cohomologiques de Demailly. L'idée directrice est de produire un grand nombre d'équations différentielles algébriques que toute courbe entière doit satisfaire. Ensuite, l'énoncé de dégénérescence algébrique est obtenu (moralement) par élimination algébrique de toutes les dérivées. Le procédé qui produit de nombreuses équations différentielles se décline en deux étapes principales :

① – ② L'existence de différentielles de jets invariants s'annulant sur un diviseur ample dans les hypersurfaces projectives de grand degré, par des méthodes cohomologiques, en suivant les travaux de Demailly et de Diverio [7, 12, 13].

③ La seconde étape du raisonnement de Siu. L'engendrement global (modulo tensorisation) du fibré tangent à la variété des n-jets verticaux, en suivant les travaux de Siu et de Păun-Rousseau-Merker.

En 2010, Gergely Bérczi [3] a importé des techniques de la géométrie équivariante pour simplifier les calculs et améliorer la borne connue sur le degré. Il montre que le résultat est toujours valide lorsque $d \geqslant n^{8n}$.

En 2012, en utilisant une technique innovante basée sur des estimées probabilistes, Jean-Pierre Demailly ([9]) a amélioré la borne sur le degré des hypersurfaces projectives, et il a obtenu :

$$d \geqslant \frac{n^4}{3}\Big(n \log(n \log(24n))\Big)^n.$$

1.6. Principaux résultats de ce mémoire. Le premier but de cette thèse est d'exporter et d'améliorer les techniques de [14] pour étudier la dégénérescence algébrique des courbes entières $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n \setminus X_d$ à valeurs dans le complémentaire d'une hypersurface X_d de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

Formule de résidus pour la première étape. Pour calculer le produit d'intersection :

$$I = \int_{\overline{X}_\kappa} p\Big(\pi^\star_{\kappa,1} u_1, \dots, \pi^\star_{\kappa,\kappa-1} u_{k-1}, u_k\Big),$$

la stratégie standard consiste à intégrer le long des fibres des projections :

$$\pi_{i,i-1}\colon \overline{X}_i \to \overline{X}_{i-1},$$

jusqu'à obtenir un produit d'intersection sur la base, $\overline{X}_0$, où l'intersection des classes de cohomologie devient plus simple.

Dans [14], Diverio-Merker-Rousseau procèdent à une élimination pas à pas des classes de Chern, et ils sont capables de dénouer l'interaction complexe entre les classes de cohomologie horizontales et les classes de cohomologie verticales par un tour de force technique. Ces calculs précis donnent un résultat *effectif*.

Dans [34] et dans [2], Mourougane et Brotbek utilisent intelligement les *classes de Segre* pour éviter une grande partie des calculs.

Dans [3], Bérczi utilise la géométrie équivariante pour prouver une *formule de résidus* en plusieurs variables, qui évite l'élimination pas à pas des classes de cohomologie horizontales et qui donne un résultat effectif.

Dans le chapitre II, les idées inspirées de ces auteurs sont combinées, pour prouver une formule de résidus en plusieurs variables similaire, qui est vraie dans de nombreux contextes géométriques, puisqu'elle est démontrée dans toute les situations où la tour de Demailly apparaît, *cf. e.g.* [34, 2].

La preuve emprunte la simplification technique de l'usage des classes de Segre, elle donne un résultat effectif, et elle utilise une formule dans l'esprit même de la formule de résidus de Bérczi.

On note $s(V_0)$ la classe de Segre totale du fibré vectoriel V_0 :

$$s_t(V_0) = 1 + t\, s_1(V_0) + t^2\, s_2(V_0) + \cdots,$$

qui est l'inverse de la classe de Chern totale $c_t(V_0)$. Un des points clefs, central dans le chapitre II, consiste à introduire de nouveaux générateurs de la cohomologie verticale :

$$v_i = \Big(\pi^\star_{i,1} u_1 + \cdots + \pi^\star_{i,i-1} u_{i-1} + u_i\Big) \in H^\bullet(\overline{X}_i),$$

lesquels apparaissent *naturellement* quand on considère les suites exactes qui définissent la tour des fibrés de jets projectivisés :

$$\overline{X}_k \to \overline{X}_{k-1} \to \cdots \to \overline{X}_1 \to \overline{X}_0.$$

Notons alors r le rang du fibré projectivisé $P(V_0)$. L'énoncé suivant, utile pour l'étape ①, est démontré dans le chapitre II :

Théorème principal (II). *Pour tout polynôme $f \in H^\bullet\big(\overline{X}_0\big)[t_1, \dots, t_k]$, en k variables $t_1, \dots, t_k$, à coefficients dans l'anneau de cohomologie de la base $\overline{X}_0$, la classe de cohomologie :*

$$f\big(\underline{v}\big) = f\big(v_1, \dots, v_k\big) \in H^\bullet\big(\overline{X}_k\big),$$

peut être intégrée le long des fibres du fibré projectif $\overline{X}_k \to \overline{X}_0$ en utilisant la formule :

$$\int_{\overline{X}_k} f\big(\underline{v}\big) = \operatorname*{Coefficient}_{t_1^r \cdots t_k^r}\Big(I(t_1, \dots, t_k)\, \Phi_k(t_1, \dots, t_k)\Big),$$

où $I(\underline{t})$ est le produit d'intersection sur la base :

$$I(t_1,\dots,t_k) := \int_{\overline{X}_0} f(t_1,\dots,t_k)\, s_{1/t_1}(V_0)\cdots s_{1/t_k}(V_0),$$

et où $\Phi_k(\underline{t})$ est la fonction rationnelle universelle :

$$\Phi_k(t_1,\dots,t_k) := \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k} \frac{t_j - t_i}{t_j - 2\,t_i} \prod_{2\leqslant i<j\leqslant k} \frac{t_j - 2\,t_i}{t_j - 2\,t_i + t_{i-1}}.$$

Clarification et généralisation de la stratégie des champs de vecteurs obliques. Ensuite, dans le chapitre III, les champs de vecteurs obliques de Siu-Merker sont développés en toute dimension dans le cadre logarithmique afin d'appliquer la méthode de déformation de Siu. L'énoncé suivant, central dans l'étape ③, y est démontré :

Théorème principal (III). *Si l'ordre des jets k est plus petit que le degré d, alors le 'twist' du fibré tangent aux k-jets verticaux de la variété logarithmique $\big(\mathbb{P}^n \times S, \mathcal{H}\big)$:*

$$T_{J_k^{vert}(\mathbb{P}^n\times S)(-\log \mathcal{H})} \otimes \Big(O_{\mathbb{P}^n}\big(k^2+2k\big) \otimes O_S\big(1\big)\Big)$$

est engendré par ses sections holomorphes globales en tout point du sous-espace des k-jets logarithmiques verticaux réguliers de courbes holomorphes évitant $\mathcal{H}$.

De plus, certains détails laissés au lecteur dans les travaux antérieurs sont complétés dans une approche simplifiée. La preuve fournit donc une clarification du lieu où l'énoncé d'engendrement global est valide, à la fois dans le cas compact, et dans le cas logarithmique.

Conjecture de Green-Griffiths logarithmique. Dans le chapitre IV, la dégénérescence algébrique effective des courbes entières non constantes à valeurs dans le complémentaire d'une hypersurface lisse générique de degré suffisamment grand est établie en utilisant la stratégie ① – ② – ③ :

Théorème principal (IV). *Si $X_d \subset \mathbb{P}^n$ est une hypersurface projective lisse générique de degré :*

$$d \geqslant (5n)^2\, n^n,$$

alors il existe une sous-variété propre $Z \subset \mathbb{P}^n$, de codimension au moins deux, telle que l'image de toute courbe entière non constante $f\colon \mathbb{C} \to \big(\mathbb{P}^n \setminus X_d\big)$ à valeurs dans le complémentaire de X_d, est en fait contenue dans $\big(Z \setminus X_d\big)$.

En dimensions $n = 2$ [19, 44] et $n = 3$ [42], ce théorème est déjà connu avec des estimations meilleures sur le degré.

La borne effective de ce théorème est également valable pour des courbes à valeurs dans une hypersurface lisse générique. C'est donc une amélioration significative des résultats de la littérature (*cf. supra*).

Les introductions des chapitres II,III, IV décrivent plus en détails ces résultats.