



HAL
open science

Etude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement : l'approche CRONE en matière de formalisation, d'analyse et de synthèse.

Aurore Létévé

► **To cite this version:**

Aurore Létévé. Etude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement : l'approche CRONE en matière de formalisation, d'analyse et de synthèse.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0346 . tel-01140345

HAL Id: tel-01140345

<https://theses.hal.science/tel-01140345>

Submitted on 8 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par

Aurore LÉTÉVÉ

en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

**Etude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme
sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites
de fonctionnement : l'approche CRONE en matière de
formalisation, d'analyse et de synthèse**

Soutenu le 16/12/2014

Après avis de

M	Y. CHAMAILLARD	Professeur à l'Université d'Orléans Laboratoire PRISME – IUT Orléans – Orléans	<i>Rapporteur</i>
M	D. MEIZEL	Professeur à l'Université de Limoges, XLIM – UMR 7252 du CNRS – Limoges	<i>Rapporteur</i>

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de MM.

X. MOREAU	Professeur à l'Université de Bordeaux, IMS – UMR 5218 du CNRS – Talence	<i>Directeur</i>
V. HERNETTE	Docteur, Ingénieur à la DRIA PSA Peugeot Citroën, DRD/DRIA/ACBI/LAS/SMTR – Vélizy-Villacoublay	<i>Examineur</i>
A. OUSTALOUP	Professeur à l'INP Bordeaux, ENSEIRB-MATMECA IMS – UMR 5218 du CNRS – Talence	<i>Examineur</i>
A. ZOLGHADRI	Professeur à l'Université de Bordeaux, IMS – UMR 5218 du CNRS – Talence	<i>Président</i>

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système CNRS UMR 5218
351 cours de la Libération – 33405 Talence Cedex – France
<http://www.ims-bordeaux.fr/>



Titre

Etude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement : l'approche CRONE en matière de formalisation, d'analyse et de synthèse.

Résumé

Le sujet concerne l'étude de l'influence des suspensions de véhicules de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement. Une première partie présente le contexte et la problématique liés au sujet ainsi que les notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire : les Systèmes à Dérivée Non Entière (SDNE). Une seconde partie présente l'analyse de la suspension, d'une part dans le cadre du confort vibratoire et d'autre part dans le cadre du comportement routier. Enfin, une troisième et dernière partie propose deux chapitres dont l'un vise à montrer les résultats d'une étude de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale et l'autre propose une nouvelle génération de butée qui améliore les résultats présentés au chapitre précédent.

Mots clés

suspension, approche CRONE, systèmes à dérivée non entière

Title

Study of the influence of passenger vehicle suspension on vibrational comfort, driving behaviour and operating limits : CRONE approach to formalization, analysis and synthesis.

Abstract

The subject deals with the study of the influence of passenger vehicle suspension on vibrational comfort, driving behaviour and operating limits. The first part exposes the context and the problems related to the subject and the theoretical concepts necessary for the understanding of this memory : fractionnal systems. The second part presents the analysis of the suspension, in one hand in the vibration comfort and on the other hand on the driving behaviour. A third and final part has two chapters, one aims to show the results of a study of the influence of limit stops on the vertical dynamics and the other offers a new generation of limit stop that improves results presented in the previous chapter.

Keywords

suspension, CRONE approach, fractionnal systems



Remerciements

Ce travail a été effectué conjointement avec le Laboratoire d'Intégration du Matériau au Système (IMS) de Bordeaux, UMR 5218 du CNRS, et la Direction de la Recherche et de l'Innovation Automobile de PSA Peugeot Citroën située en partie à Vélizy.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Xavier Moreau, professeur à l'Université de Bordeaux, pour m'avoir fait profiter de son expérience, de sa maîtrise rédactionnelle ainsi que pour m'avoir fait confiance durant les trois années qu'a duré cette thèse.

Je tiens à remercier également, Vincent Hernet, qui m'a encadrée chez PSA tout au long de cette thèse, pour sa confiance totale dans mes activités et son partage de son expérience qui m'a permise d'être aujourd'hui complètement autonome.

Messieurs Yann Chamailard et Dominique Meizel ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury.

Messieurs Alain Oustaloup et Ali Zolghadri me font l'honneur de participer au Jury de soutenance, je les en remercie profondément.

Je remercie également toutes les personnes qui, de prêt ou de loin, ont contribué au bon déroulement de ces travaux.

Enfin, je souhaite adresser mes remerciements à mes parents, à mon frère Hugues et surtout à mon conjoint Rémi pour leur soutien constant, leur aide chacun à leur manière et leur confiance dans la réussite de ces trois années de thèse.



Organisation et contenu de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une CIFRE (Convention Industrielle de Formation par la REcherche) au sein de l'équipe CRONE du groupe Automatique du laboratoire IMS, UMR 5218 CNRS, et au sein de l'équipe suspension de l'entité SMTR (Systèmes Mécaniques Trains Roues) de la DRIA (Direction de la Recherche et de l'Ingénierie Avancée) de PSA Peugeot-Citroën. Cette thèse s'est déroulée sous la direction de Xavier MOREAU, Professeur à l'Université de Bordeaux, et sous la responsabilité au sein de l'entreprise de Vincent HERNETTE, Docteur et Ingénieur de la DRIA.

Le sujet concerne l'étude de l'influence des suspensions de véhicules de tourisme sur le confort vibratoire, le comportement routier et les limites de fonctionnement, le mémoire étant structuré en trois parties comportant chacune deux chapitres.

Ainsi, la partie 1 intitulée "*Un tour d'horizon en matière de suspension et de systèmes à dérivées non entières*" regroupe deux chapitres visant à donner le contexte et la problématique liés au sujet ainsi que les notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire.

Le chapitre 1, intitulé : "*Contexte et problématique*", présente un état de l'art sur le sujet en justifiant le rôle d'une suspension en matière de confort et en introduisant un lexique spécifique à ce système.

Les routes sur lesquelles les véhicules sont amenés à se déplacer sont très hétérogènes. La taille, la forme, la fréquence d'apparition des aspérités de la chaussée sont très variables en fonction du type de réseaux considérés (autoroute, routes nationales, départementales, chemins, ...). Cette succession d'inégalités engendre au niveau de la roue des mouvements continus dont le sens et l'intensité dépendent du profil de l'obstacle et de la vitesse de passage. Ces mouvements s'accompagnent d'accélération verticales plus ou moins violentes.

Ainsi, un premier travail bibliographique sur la biomécanique de l'être humain est présenté permettant d'appréhender les enjeux de la suspension en termes de confort.

Il s'en suit un tour d'horizon en matière de suspension mais aussi de dispositifs de fin de course appelés butée ainsi qu'un inventaire des différentes perturbations mises en jeu dans la dynamique globale du véhicule afin de bien comprendre la problématique liée aux architectures traditionnelles de suspension.

Enfin, et pour mieux prendre en compte les phénomènes mécaniques intervenants, il est nécessaire d'étudier la suspension en tant que système d'un véhicule complet. Une démarche graduelle construite à partir d'un cycle en V regroupant des modèles simplifiés facilite la compréhension.

Le chapitre 2, intitulé : "*Systèmes à Dérivées non Entières : SDNE*", présente les principaux concepts et outils en matière de Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) utilisés au chapitre 3 avec la suspension CRONE et au chapitre 6 avec la définition d'une butée dissipative innovante de fin de course.

Aujourd'hui, au XXI^{ème} siècle, dans le domaine des sciences pour l'ingénieur, les systèmes d'ordre non entier sont étudiés par un nombre d'auteurs de plus en plus important. En effet, il y a un grand nombre de systèmes physiques dont le comportement dynamique peut être décrit avec parcimonie grâce à des modèles d'ordre non entier.



Dans ce chapitre, aucun domaine de la physique n'est privilégié, d'où l'emploi d'une terminologie générale en ce qui concerne les variables de puissance, à savoir le flux généralisé (vitesse, courant, débit, flux thermique,...) et l'effort généralisé (force, tension, pression, température,...), et ce telles qu'elles sont définies dans l'approche Bond-Graph.

Ainsi, une première partie est consacrée à la définition et aux différentes interprétations tant géométrique que systémique de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier.

Ensuite, il s'agit de présenter la synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence selon deux approches, d'abord fréquentielle puis temporelle. La première est basée sur le principe d'une distribution récursive de pôles et zéros tandis que la seconde réside en une discrétisation modale de la représentation diffusive.

Enfin, les études de la dynamique des Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) de 1^{ère} et 2^{ème} espèces sont développées, permettant ainsi de bien mettre en évidence les propriétés les plus remarquables de tels systèmes.

La partie 2 intitulée "*Confort vibratoire et comportement routier*" regroupe deux chapitres qui concernent plus précisément l'analyse de la suspension, d'une part dans le cadre du confort vibratoire et, d'autre part, sur le comportement routier.

Le chapitre 3, intitulé : "*Analyse et synthèse de la suspension dans le cadre du confort vibratoire*" se focalise sur le domaine de fonctionnement des petites variations de la course de la suspension autour de son point d'équilibre statique. Cette étape est généralement la première dans le cadre d'une démarche, non seulement d'analyse visant à bien comprendre les phénomènes dynamiques dominants, mais aussi de synthèse de toute nouvelle architecture de suspension orientée confort vibratoire.

L'objectif de la suspension d'un véhicule de tourisme dans le cadre du confort vibratoire est donc de limiter la transmission aux passagers des vibrations liées aux variations du profil routier.

La première partie de ce chapitre est d'abord consacrée à la modélisation avec la mise en place d'un modèle d'analyse linéarisé autour du point d'équilibre statique de la suspension, puis à l'établissement des fonctions de sensibilité associées. Le découplage dynamique des modes de caisse et de roue est présenté et exploité pour en déduire deux modèles de synthèse, l'un associé à la caisse et l'autre à la roue, ainsi qu'une simplification des fonctions de sensibilité définies auparavant.

Pour continuer, deux exemples d'illustration de suspension de véhicule Citroën C5 qui permettent de contourner un certain nombre de dilemmes sont présentés, à savoir la suspension Hydractive de série et la suspension CRONE Hydractive.

Le chapitre 4, intitulé "*Étude de l'influence de la dynamique verticale sur le comportement routier*" a pour objectif l'analyse de l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale à travers la suspension dans le cadre de *l'agrément de conduite*, domaine d'étude défini par la zone *linéaire* de fonctionnement du pneumatique.

Le point de départ de ce chapitre est un constat concernant les publications scientifiques en matière d'études de suspension de véhicule, d'une part, et d'étude de la stabilité du véhicule, d'autre part.

Il est à noter qu'au sein de l'équipe CRONE, l'analyse de l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale a déjà été étudiée dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) mais uniquement dans un contexte de sécurité active pour des situations d'urgence où les pneumatiques sont sollicités dans leur zone non linéaire de fonctionnement.

Pour répondre à cet objectif, trois scénarii sont étudiés : un changement de voie à vi



tesse constante, un freinage en ligne droite et un changement de voie avec freinage, ces trois situations d'essai étant accompagnées d'une variation dissymétrique du profil routier.

La partie 3 intitulée "*Choc et butée de fin de course*" regroupe deux chapitres dont l'un vise à montrer les résultats d'une étude de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale et l'autre propose une nouvelle génération de butée qui améliore les résultats présentés au chapitre 5.

Le chapitre 5, intitulé : "*Étude de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale*", présente une ouverture sur une problématique qui n'avait pas été abordée jusque là par l'équipe CRONE, à savoir l'étude de l'influence des butées de fin de course de la suspension sur la dynamique verticale du véhicule.

Ce sont des dispositifs visant à préserver la mécanique et notamment le châssis lors de fortes compressions (ou détentes) assimilables à des chocs. Leur rôle est donc principalement de limiter la course de la tige de piston et, par conséquent, de limiter le débattement de la suspension.

Ainsi, ce chapitre commence par la définition d'un modèle non linéaire à deux degrés de liberté (2 ddl) d'un quart de véhicule, d'une part, et d'un modèle d'obstacle isolé, d'autre part.

Ce chapitre se poursuit par l'analyse numérique et analytique de l'influence sur la dynamique du modèle à 2 ddl (choc et régime transitoire) de deux solutions existantes, une butée PU qui équipe des véhicules de série et une butée hydraulique.

Enfin, le chapitre 6, intitulé : "*Vers une nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière*", a pour objectif de définir à l'échelle fonctionnelle une butée dissipative innovante, non seulement en intégrant les avantages de la butée hydraulique présentée au chapitre 5, à savoir la progressivité et bien entendu le caractère dissipatif, mais aussi en élargissant le domaine de performance d'une telle butée, sa conception devant se faire à l'aide d'un faible nombre de paramètres de synthèse de haut niveau.

La stratégie adoptée pour atteindre cet objectif s'articule autour de deux points. Le premier concerne l'établissement d'un modèle de synthèse. Le second concerne le caractère dissipatif de la nouvelle butée étudiée, caractère fondé sur le concept d'intégration non entière. En effet, le coefficient de frottement visqueux apparent de cette nouvelle butée est proportionnel à l'intégrale d'ordre non entier de son déplacement.

Finalement, la conclusion générale résume l'apport de cette thèse, récapitule les réalisations effectuées et présente les perspectives envisagées.



Avant Propos

L'histoire de la suspension CRONE

Cette thèse, effectuée au sein de l'équipe CRONE, a permis à son auteur de bénéficier du retour d'expérience acquis dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec PSA qui dure depuis 25 ans. En effet, les travaux de l'équipe CRONE appliqués à la suspension ont commencé en 1989 avec le stage de DEA de Bruno BLUTEAU intitulé : « Obtention d'un amortisseur non entier à travers la non-stationnarité d'un amortisseur traditionnel » co-encadré par Alain OUSTALOUP et Michel NOUILLANT [Bluteau, 1989]. C'est à cette époque que commencèrent les échanges avec la DRAS (Direction de la Recherche et des Affaires Scientifiques) de PSA par l'intermédiaire d'Henri LACHAIZE, responsable du service liaisons au sol. S'en suivirent un certain nombre d'études qui débouchèrent sur des réalisations passives et commandées (Figure 2), jusqu'à la suspension CRONE Hydractive présentée dans cette thèse.

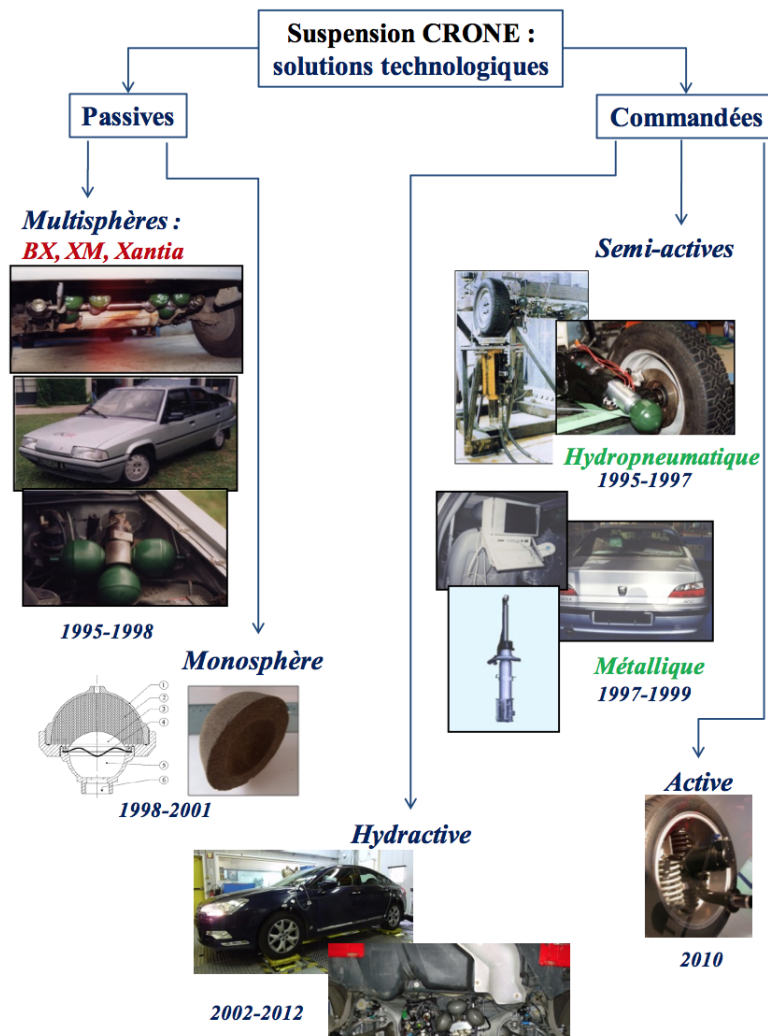


FIGURE 1 – Illustration des différentes solutions technologiques de la suspension CRONE

Ainsi, dans un premier temps, l'objectif était de montrer l'intérêt de la dérivation non entière en isolation vibratoire à travers la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement.



En effet, dans le cadre de la dynamique des systèmes linéaires entiers (caractérisés par des équations différentielles linéaires d'ordres entiers), l'augmentation de la masse se traduit par une diminution de l'amortissement. Par contre, dans le cadre de la dynamique des systèmes linéaires non entiers (caractérisés par des équations différentielles linéaires d'ordres non entiers), l'amortissement est indépendant de la masse. Les conditions nécessaires à l'obtention de la mise en défaut de l'interdépendance masse-amortissement sont le résultat de l'approche CRONE. La suspension issue de cette approche, appelée suspension CRONE, est caractérisée par une impédance qui n'est autre qu'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence défini par quatre paramètres (appelés paramètres de synthèse de haut niveau), et ce indépendamment de toute solution technologique.

Le concept de la suspension CRONE s'est donc concrétisé en 1990 avec le brevet n°90 046 13 déposé par Alain OUSTALOUP et Michel NOUILLANT [Oustaloup, 1990].

Ensuite, les travaux de la thèse de Xavier MOREAU [Moreau, 1995] ont permis d'étendre et d'appliquer le concept de la suspension CRONE aux suspensions de véhicules automobiles avec l'obtention de la robustesse de la tenue de caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue. Deux solutions technologiques furent étudiées : une version passive multisphère implantée sur un véhicule expérimental du laboratoire, à savoir une Citroën BX, et une version semi-active développée spécifiquement pour la technologie hydropneumatique.

Cette version passive de la suspension CRONE a obtenu en 1995 le trophée AFCET récompensant la meilleure innovation dans le cadre d'une collaboration université-industrie [AFCET, 1995]. Cette solution, composée de trois sphères et de trois amortisseurs judicieusement répartis avec un dimensionnement volontairement très orienté confort, a permis de valider expérimentalement des performances remarquables en matière de tenue de caisse sous sollicitations route, de robustesse de la tenue de caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue et d'isolation vibratoire. Malgré une raideur statique très faible, cette version présentait une excellente tenue de caisse au freinage grâce à la présence de bras tirés au niveau de l'essieu arrière (effet anti-plongée). Quant aux mouvements de la caisse sous sollicitations transversales (roulis), ils étaient limités par la présence des barres anti-devers. De 1995 à 1998, PSA équipa plusieurs véhicules expérimentaux (XM et Xantia) de cette version passive.

Parallèlement à cette version passive, deux versions semi-actives ont été développées : la première pour suspension hydropneumatique (1995-1997) [Doré, 1996] [Abadie, 1998] et la seconde pour suspension métallique (1997-1999) [Abadie, 2001]. L'originalité se situait à la fois sur le plan technologique avec une conception innovante d'AMortisseurs COntinûment VARIables (AMCOVAR) et sur le plan du contrôle avec la commande CRONE. Ces deux solutions ont été réalisées à l'aide de la société Coverplant Engineering située au Pian Médoc (33). La première a été testée sur un banc de suspension dans les locaux de la société Métravib à Lyon (69), la seconde montée sur une Peugeot 406 a fait l'objet de nombreux essais sur banc, piste et route.

De 1998 à 2001, une autre voie a été explorée en matière de suspension CRONE passive monosphère. Cette solution, étudiée et réalisée durant la thèse de Pascal DAVID [David, 2001], était constituée d'un massif poreux perfusé par un fluide visco-élastique [Abadie, 1999]. Elle exploitait le lien entre les phénomènes de diffusion et la dérivation non entière. Cette solution présentait une impédance d'entrée hydropneumatique non entière comparable à celle obtenue avec la version passive multisphère.

Durant la période 2002-2012, le concept de la suspension CRONE a été étendu à la suspension Hydractive. Cette suspension qui s'inscrit dans le cadre des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) présente deux avantages :

- la technologie hydropneumatique permet l'obtention de la robustesse de la rapidité de la réponse verticale de la caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue, et ce grâce à la raideur de suspension qui est fonction de la masse suspendue ;



- la suspension Hydractive permet une meilleure gestion de certains dilemmes grâce à ses deux modes (souple et ferme), l'un étant plutôt dédié aux sollicitations route (mode souple) et l'autre aux sollicitations conducteur (mode ferme).

La suspension CRONE dimensionnée en 1995, et très orientée confort, a donc été utilisée pour le mode souple de la suspension Hydractive. L'application de l'approche CRONE à des SDH a donné lieu à la définition d'une nouvelle classe de systèmes, à savoir les Systèmes Dynamiques Hybrides Non Entiers (SDHNE), et a permis d'enrichir les connaissances de l'équipe CRONE en matière de dynamique globale du véhicule. Ce travail a donné lieu à deux thèses (2002 thèse de Cédric NOUILLANT [Nouillant, 2002] et 2004 Thèse d'Olivier ALTET [Altet, 2004]).

Au cours de cette collaboration avec PSA, des contraintes supplémentaires concernant le dimensionnement de la suspension sont venues s'ajouter aux contraintes initiales.

La première contrainte supplémentaire concerne l'industrialisation et plus particulièrement le coût lié à la disparité des valeurs paramétriques des organes (sphères et amortisseurs) de la version passive multisphère. Face à cette contrainte, l'équipe CRONE développa une suspension composée d'organes identiques de série, les propriétés de robustesse de la version initiale étant bien entendu conservées (2008 thèse de Pascal SERRIER, [Serrier, 2008]).

À la contrainte concernant la tenue de caisse, des contraintes en matière de filtrage aux moyennes fréquences (2-8Hz), de tenue de roue (autour de 15 HZ) et de filtrage aux hautes fréquences (20-40Hz) sont venues se rajouter. Ces contraintes ne sont pas nouvelles, mais avec l'amélioration du confort des véhicules (insonorisation, complexité des trains permettant un meilleur filtrage,...), elles ne peuvent plus être considérées comme secondaires. Ainsi, la principale difficulté réside dans la gestion des dilemmes tenue de caisse/filtrage et tenue de roue/filtrage. En effet, la caisse et la roue sont d'autant mieux tenues que l'amortissement est important, alors qu'au contraire le filtrage est d'autant plus efficace que l'amortissement est nul.

La thèse d'Audrey RIZZO [Rizzo, 2012] a permis de proposer une évolution de l'approche CRONE pour dimensionner une suspension Hydractive répondant à l'ensemble de ces contraintes. Ainsi, une démarche de conception et de réalisation d'une suspension CRONE Hydractive a été développée aboutissant à une stratégie de gestion, non seulement du dilemme isolation vibratoire/tenue de caisse, mais aussi à celle du dilemme isolation vibratoire/tenue de roue. La stratégie ainsi présentée a été implantée sur différents véhicules chez PSA avec différentes architectures de suspension bi-états.

Enfin, dans le cadre d'une étude sur Véhicule électrique Léger de Ville (projet VéLV), un travail de formalisation de l'influence de la suspension sur la dynamique globale du véhicule a été réalisé. Cette étude a permis d'enrichir la stratégie de commutation déjà développée pour agir en virage et en freinage, et ainsi optimiser l'utilisation de la suspension.

Il est à noter que des suspensions CRONE actives ont été étudiées en s'appuyant sur les technologies électrohydropneumatique et électrique sans donner lieu à la réalisation de prototypes, l'originalité se situant principalement au niveau de la commande CRONE.

Apport de la thèse dans ce contexte

L'apport de la thèse d'Aurore Létévé peut être défini chronologiquement par les contributions présentes dans chacun des chapitres.

Dans le *chapitre 1*, les apports se situent d'abord de manière classique au niveau de la synthèse bibliographique en ce qui concerne la présentation du contexte. Ensuite, la formalisation synthétique de la problématique des suspensions traditionnelles des véhicules de tourisme constitue un deuxième apport. Enfin, d'un point de vue méthodologique, la stratégie



adoptée pour proposer des solutions aux différents problèmes et dilemmes qui composent la problématique formalisée est un troisième apport, tant d'un point de vue de l'analyse, que de la synthèse. En effet, le découpage du domaine de fonctionnement global en trois domaines d'étude définis par la nature de l'amplitude (petite, moyenne et grande) du débattement de la suspension permet de garantir une parfaite adéquation entre les domaines de validité des outils employés et les problèmes traités. Ce chapitre constitue un point de départ incontournable et nécessaire pour la suite du mémoire de thèse.

Dans le *chapitre 2*, les apports concernent, là encore, la synthèse bibliographique avec les principaux concepts et outils en matière de Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) utilisés aux chapitres 3 et 6. Plus particulièrement, une contribution spécifique concerne l'étude du comportement dynamique d'un système d'ordre non entier de deuxième espèce, notamment en ce qui concerne la recherche des racines du polynôme caractéristique et de l'analyse de la sensibilité paramétrique (lieux des racines). Cette étude se voulant générique et indépendante de tout domaine de la physique, l'approche et la terminologie bond-graph sont utilisées. Ainsi, un tel système résulte de l'association d'un premier élément de stockage d'énergie de type I en série avec un second élément de stockage de type C et un élément de type fractor dont l'effort généralisé est proportionnel à l'intégrale d'ordre non entier de son flux généralisé, cette formulation respectant ainsi le principe de causalité intégrale.

Dans le *chapitre 3*, les apports se situent au niveau de la définition d'une méthode qui exploite, tant pour l'analyse que pour la synthèse, le découplage dynamique présent dans le cas des suspensions des véhicules de tourisme, et ce entre le mode de pompage de la masse suspendue (au voisinage de 1 Hz) et celui du battement de la masse non suspendue (au voisinage de 12 à 15 Hz). Il est à noter que cette méthode est originale dans la mesure où cette propriété n'est pas exploitée dans la littérature concernant ce type de suspension. Plus particulièrement en matière de synthèse, l'apport se situe au niveau d'une approche modale non entière utilisée pour définir les paramètres de synthèse de haut niveau de la suspension CRONE Hydractive, et ce conformément aux développements présentés au chapitre 2. Cette approche est nouvelle dans la mesure où tous les travaux antérieurs à cette thèse concernant la suspension CRONE exploitent le caractère « naturellement » bouclé du système pour définir les paramètres de synthèse de haut niveau à l'aide de l'approche loop-shaping de la commande CRONE.

Dans le *chapitre 4*, l'apport concerne la démarche adoptée pour étudier l'influence de la dynamique verticale sur le comportement routier. En effet, il est usuel dans la littérature concernant la dynamique du véhicule de négliger la suspension lors de l'étude de la stabilité du véhicule, notamment à l'aide d'un modèle lacet-dérive. Ce chapitre met en évidence que le domaine de validité de cette hypothèse simplificatrice se limite au cas de l'agrément de conduite qui correspond au domaine linéaire de fonctionnement du pneumatique. Cette étude vient en complément de travaux antérieurs menés au sein de l'équipe CRONE qui ont montré que l'influence de la suspension n'est pas négligeable sur le comportement routier en situation d'urgence dès l'instant où le domaine non linéaire du pneumatique est atteint.

Dans le *chapitre 5*, l'apport se situe au niveau méthodologique avec l'analyse de l'influence des chocs, résultant des butées de fin de course de la suspension, sur la dynamique verticale. Cette méthode exploite, une fois de plus, le découplage dynamique entre le mode de pompage de la caisse et le mode de battement de la roue, facilitant ainsi la formalisation de la problématique. Appliquée à deux solutions existantes pour lesquelles les avantages et les inconvénients sont mis en évidence, cette méthode d'analyse permet de définir la butée de fin



de course « idéale » qui sert de cible au chapitre 6 pour la définition d'une nouvelle butée. Il est à noter que ce travail représente une ouverture sur une problématique qui n'avait pas été abordée jusque là par l'équipe CRONE.

Enfin, dans le *chapitre 6*, l'apport se situe à l'échelle fonctionnelle dans la définition des paramètres de synthèse de haut niveau d'une nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière. En effet, à l'image des travaux concernant la suspension CRONE, les propriétés de parcimonie paramétrique de l'opérateur d'intégration non entière sont largement exploitées pour définir avec un nombre de paramètres réduit (deux en l'occurrence) le comportement dynamique souhaité de cette butée CRONE.

Xavier MOREAU
Directeur de thèse

Table des matières

I	Un tour d’horizon en matière de suspension et de Systèmes à Dérivées Non Entières	1
1	Contexte et Problématique	3
1.1	Introduction	4
1.2	Comportement dynamique de l’être humain	4
1.2.1	Introduction : à quelles fréquences l’être humain est-il sensible ?	4
1.2.2	Biomécanique de l’être humain dans la plage de fréquence 0-20 Hz	5
1.2.3	Excitation par la liaison au sol	6
1.2.4	Conclusion	8
1.3	Un tour d’horizon en matière de suspension	8
1.3.1	Les architectures de suspension dites traditionnelles	9
1.3.2	Les architectures de suspension dites complexes	10
1.3.3	Les différents dispositifs de fin de course	15
1.4	La problématique des suspensions de véhicules automobiles	18
1.4.1	Les perturbations en provenance de la route et du conducteur	18
1.4.2	La problématique liée aux architectures traditionnelles de suspension	18
1.5	Domaines de fonctionnement et domaines d’étude	20
1.5.1	Domaines de fonctionnement	20
1.5.2	Adéquations des différents domaines	21
1.6	Les différents modèles pour l’étude de la suspension	22
1.6.1	Modèle de validation à l’échelle du véhicule complet	24
1.6.2	Modèle d’analyse à l’échelle d’un quart de véhicule	26
1.6.3	Modélisation du pneumatique : Pacejka	26
1.7	Conclusion	34
2	Systèmes à Dérivées Non Entières : SDNE	37
2.1	Introduction	38
2.2	Opérateur intégrro-différentiel d’ordre non entier	38
2.2.1	Intégration non entière	38
2.2.2	Interprétation géométrique	40
2.2.3	Interprétation système	41
2.3	Synthèse d’un intégrateur d’ordre non entier borné	44
2.3.1	Approche fréquentielle	44
2.3.2	Approche temporelle	46
2.4	Systèmes d’ordre non entier	47
2.4.1	Système de 1 ^{ère} espèce	48
2.4.2	Système de 2 ^{ème} espèce	58



2.5	Conclusion	76
II	Confort vibratoire et comportement routier	77
3	Analyse et synthèse de la suspension dans le cadre du confort vibratoire	79
3.1	Introduction	80
3.2	Modèle d'analyse et fonctions de sensibilité liés au domaine du confort vibratoire	80
3.3	Exploitation du découplage dynamique pour les modèles de synthèse	83
3.3.1	Formulation du découplage dynamique	83
3.3.2	Déduction des modèles réduits	84
3.4	Exemple d'illustration de la démarche d'analyse : la suspension Hydractive de série	88
3.4.1	Architecture organique	88
3.4.2	Fonctionnement	88
3.4.3	Performances	89
3.5	Exemple d'illustration d'une synthèse d'architecture complexe : la suspension CRONE Hydractive	93
3.5.1	Architecture organique : expression analytique de l'impédance	93
3.5.2	Détermination des facteurs d'amortissement	94
3.5.3	Estimation paramétrique et performances	95
3.5.4	Fonctionnement	100
3.6	Comparaison des réponses fréquentielles et temporelles des modes "ferme", "souple" et CRONE	100
3.6.1	Rappels	100
3.6.2	Transfert force-débattement	101
3.6.3	Transfert Caisse-Route	101
3.6.4	Transfert Roue-Route	101
3.7	Conclusion	105
4	Étude de l'influence de la dynamique verticale sur le comportement routier	107
4.1	Introduction	108
4.2	Définition du domaine d'étude	108
4.3	Modèle d'analyse du véhicule	111
4.3.1	Dynamique longitudinale	112
4.3.2	Dynamique de lacet	113
4.3.3	Dynamique transversale	114
4.3.4	Dynamique de rotation des roues	114
4.3.5	Variations des appuis au sol	114
4.3.6	Trajectoire	115
4.4	Valeurs paramétriques du modèle d'analyse	116
4.5	Situations d'essai	119
4.5.1	Scénario 1 : changement de voie à vitesse constante	119
4.5.2	Scénario 2 : freinage en ligne droite	128
4.5.3	Scénario 3 : changement de voie avec freinage	135
4.6	Conclusion	141



III	Choc et butée de fin de course	143
5	Étude de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale	145
5.1	Introduction	146
5.2	Modélisation	146
5.2.1	Définition du domaine d'étude	146
5.2.2	Modèle non linéaire d'un quart de véhicule	146
5.2.3	Modèle analytique de l'obstacle isolé	148
5.3	Analyse de deux solutions existantes	153
5.3.1	Butée élastique	153
5.3.2	Butée hydraulique	162
5.4	Définition fonctionnelle de la butée idéale	182
5.5	Conclusion	182
6	Vers une nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière	183
6.1	Introduction	184
6.2	Du modèle d'analyse au modèle de synthèse	185
6.2.1	Analyse complémentaire	185
6.2.2	Réduction du modèle d'analyse : modèle de synthèse	194
6.3	Nouvelle butée dissipative fondée sur l'intégration non entière	197
6.3.1	Définition	197
6.3.2	Méthode de dimensionnement : approche optimale	199
6.3.3	Performances	203
6.4	Conclusion :	214
	Bibliographie	229



Première partie

Un tour d'horizon en matière de
suspension et de Systèmes à Dérivées
Non Entières

Chapitre 1

Contexte et Problématique

Sommaire

1.1	Introduction	4
1.2	Comportement dynamique de l'être humain	4
1.2.1	Introduction : à quelles fréquences l'être humain est-il sensible ?	4
1.2.2	Biomécanique de l'être humain dans la plage de fréquence 0-20 Hz	5
1.2.3	Excitation par la liaison au sol	6
1.2.4	Conclusion	8
1.3	Un tour d'horizon en matière de suspension	8
1.3.1	Les architectures de suspension dites traditionnelles	9
1.3.2	Les architectures de suspension dites complexes	10
1.3.3	Les différents dispositifs de fin de course	15
1.4	La problématique des suspensions de véhicules automobiles	18
1.4.1	Les perturbations en provenance de la route et du conducteur	18
1.4.2	La problématique liée aux architectures traditionnelles de suspension	18
1.5	Domaines de fonctionnement et domaines d'étude	20
1.5.1	Domaines de fonctionnement	20
1.5.2	Adéquations des différents domaines	21
1.6	Les différents modèles pour l'étude de la suspension	22
1.6.1	Modèle de validation à l'échelle du véhicule complet	24
1.6.2	Modèle d'analyse à l'échelle d'un quart de véhicule	26
1.6.3	Modélisation du pneumatique : Pacejka	26
1.7	Conclusion	34



1.1 Introduction

Les routes sur lesquelles les véhicules sont amenés à se déplacer sont très hétérogènes. La taille, la forme, la fréquence d'apparition des aspérités de la chaussée sont très variables en fonction du type de réseaux considérés (autoroute, routes nationales, départementales, chemins, ...) et de l'état d'ancienneté du revêtement. Lors d'un parcours, les roues d'un véhicule rencontrent des obstacles très diversifiés dont la distribution est apparemment aléatoire tant sur l'aspect spatial que sur l'aspect temporel. Cette succession d'inégalités engendre au niveau de la roue des mouvements continus dont le sens et l'intensité dépendent du profil de l'obstacle et de la vitesse de passage. Ces mouvements s'accompagnent d'accélération verticales plus ou moins violentes. Lorsque le châssis est relié rigidement à la roue, ces accélérations sont directement transmises aux composants de la caisse, aux occupants et au chargement du véhicule. Dans cette configuration, les éléments de structure et les équipements sont constamment soumis à des sollicitations extrêmement sévères susceptibles de diminuer leur durée de vie.

La suite de ce chapitre est d'abord consacrée à la bonne compréhension des phénomènes biomécaniques expliquant l'inconfort des passagers, mais également la connaissance des phénomènes physiques et mécaniques à l'origine de ces vibrations. Ensuite, pour bien situer le contexte et permettre au lecteur de se familiariser avec les notions liées à la suspension des véhicules de tourisme, un tour d'horizon en matière de suspension allant des différentes architectures aux multiples dispositifs de fin de course est présenté. Pour continuer, un inventaire des perturbations mises en jeu dans la dynamique globale du véhicule est établi, et ce afin de bien comprendre la problématique liée aux architectures traditionnelles de suspension. Enfin, et pour mieux prendre en compte les phénomènes mécaniques intervenants, il est nécessaire d'étudier la suspension en tant que système d'un véhicule complet. Une démarche graduelle construite à partir d'un cycle en V regroupant des modèles simplifiés facilite la compréhension. Par ailleurs, le pneumatique est un élément complexe du véhicule et joue un rôle important dans la dynamique globale du véhicule. Le modèle de Pacejka constitue ainsi le dernier élément présenté dans ce chapitre 1.

1.2 Comportement dynamique de l'être humain

1.2.1 Introduction : à quelles fréquences l'être humain est-il sensible ?

Le confort est une notion très étendue qui a pour but de préciser les propriétés de l'environnement qui interagissent avec les occupants sur le plan physiologique. En fait, le confort de l'occupant d'un véhicule résulte de la combinaison de plusieurs facteurs caractérisant l'environnement physique de l'habitacle [Pollone et al. (1986)] (bruit, espace, température, vibration, etc.). Les effets ressentis de ces facteurs sur chaque individu dépendent des caractéristiques propres tant sur le plan physique (anthropométrie, capacités sensorielles et fonctionnelles) que socioculturel (tolérance, motivation). Les vibrations mécaniques mettent en jeu une grande variété de phénomènes de transmission à travers le corps humain [Griffin (1996)] [Berthoz (1992)]. En effet, ce dernier est un ensemble hétérogène d'organes, de tissus de soutien, et de structures osseuses qui transmettent des efforts issus de ces vibrations extérieures. Les tissus et organes se comportent comme des filtres qui amplifient ou atténuent ces vibrations selon les fréquences considérées. Les différentes masses corporelles peuvent donc être animées de déplacements relatifs dont l'apparition est fonction de la fréquence et de l'amplitude de la vibration.

L'étude de la sensibilité humaine aux vibrations démontre que la bande de fréquences 0 à 100 Hz est très importante. Le corps humain, d'un point de vue biomécanique (Figure 1.1),



est modélisé par un ensemble de systèmes masse-ressort-amortisseur dont les caractéristiques sont non linéaires. Pour certaines fréquences, les masses corporelles entrent en résonance. Par conséquent, mesurer les vibrations du plancher dans le poste de conduite n'est pas suffisant. Il faut aussi connaître les mouvements des masses corporelles. A l'étude mécanique doit donc s'ajouter une étude biomécanique.

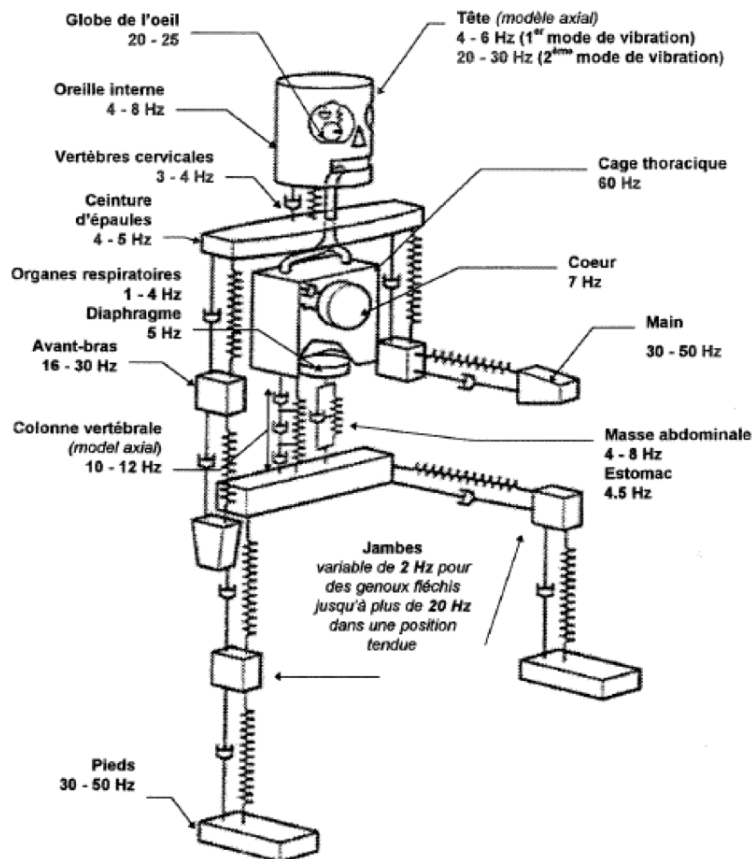


FIGURE 1.1 – Décomposition du corps humain en système masses ressorts amortisseurs

La zone de fréquences entre 0 et 100 Hz est donc décomposée en trois bandes de fréquences :

- la première concerne les fréquences inférieures à 20 Hz, autrement dit, les vibrations basses fréquences au sens biomécanique,
- la deuxième regroupe les fréquences moyennes qui se placent entre 20 et 100 Hz,
- la troisième rassemble les phénomènes acoustiques dont les fréquences sont supérieures à 100 Hz.

Il s'avère que la plage de fréquence de 0 à 20 Hz dans laquelle le corps humain est extrêmement sensible aux vibrations verticales correspond à la plage de fonctionnement de la suspension.

1.2.2 Biomécanique de l'être humain dans la plage de fréquence 0-20 Hz

L'approche biomécanique des vibrations [Berthoz (1971)] permet donc de définir les fréquences de résonance des différents organes de l'être humain et ainsi d'identifier l'impact de la suspension sur le ressenti des passagers [ISO 5349 (1986)] [Griffin (1976)]. Cela permet également d'identifier le potentiel de la suspension en terme de confort car, même si elle joue un rôle important dans le confort verticale, au-delà d'une certaine fréquence, d'autres systèmes



du véhicule entrent en action pour dégrader ou améliorer ce même confort verticale.

La sollicitation des organes à des fréquences bien précises provoque des problèmes allant d'un simple mal-être jusqu'à la dégradation d'une ou plusieurs fonctions biologique [Berthoz (1967)] [BSI (1987a)] [BSI (1987b)] [Parlement Européen (2002)]. D'où l'importance d'éviter la transmission des vibrations aux régions physiologiquement sensibles. Ceci démontre l'intérêt de posséder un système de filtrage qui soit très efficace dans la plage comprenant les fréquences de résonance des organes.

L'oreille interne est particulièrement sensible aux vibrations périodiques de très basses fréquences (inférieures à 1 Hz). Une exposition directe de ce type peut occasionner une cinétose plus communément appelé : "mal des transports" (altération de nature neuro-végétative).

Le coeur présente une résonance à 7 Hz. De plus des douleurs analogues à celle de l'infarctus du myocarde apparaissent à 4 Hz et persistent jusqu'à 11 Hz.

Des mouvements d'ensemble de la masse thoraco-abdominale sont probablement liés aux propriétés dynamiques du foie qui pèse 1,5 kg environ. Sa fréquence de résonance est située entre 4 et 8 Hz, celle de l'estomac entre 4 et 5 Hz [Griffin (1986)] [Griffin et al. (1977)]. Dans certains cas, une augmentation des troubles gastro-intestinaux (ulcères gastroduodénaux et gastrites) a été rapportée par les conducteurs de véhicules vibrants. Au-dessus et jusqu'au 6 Hz, ces effets se manifestent par une respiration et une parole compliquées.

Les mouvements du rein sont maximaux entre 6 et 12 Hz, ils peuvent induire des étirements de l'uretère et modifier le péristaltisme de celui-ci (contraction des muscles pour déplacer le contenu d'un organe).

Enfin des études épidémiologiques [INRS 2001] ont montrées que des douleurs lombaires, hernies discales et lésions précoces de la colonne vertébrale sont plus fréquentes en cas d'exposition prolongée de l'ensemble du corps à des vibrations dans les moyennes fréquences à partir de 10 Hz.

L'être humain est donc fortement sensible aux vibrations verticales qu'il subit, c'est pourquoi la suspension doit, entre autres, permettre de filtrer toutes les vibrations désagréables pour l'Homme [Griffin et al. (1988)]. L'exposition aux vibrations est inhérente à l'utilisation de véhicule. Lorsqu'une personne est assise sur un siège dans un véhicule roulant sur une route plus ou moins lisse, les vibrations sont transmises à l'ensemble du corps. Le risque de lésion dépend de l'intensité et de la fréquence des vibrations. C'est pourquoi il ne faut pas se contenter d'étudier le corps humain seul, mais l'Humain dans le véhicule. Ce qui nous amène à nous poser des questions sur la contribution de la structure du véhicule au filtrage des vibrations ressenties par l'être humain. Un véhicule en mouvement génère-t-il forcément des vibrations ressenties par l'être humain ? Quel rôle peut jouer la suspension sur la combinaison Homme-Véhicule ?

1.2.3 Excitation par la liaison au sol

Les vibrations à bord d'un véhicule proviennent de trois sources :

- le moteur ou intermédiaire mécanique entre le moteur et les roues ;
- le tour de roue ;
- le sol qui impose aux roues des mouvements dont la composition en fréquences, la nature et l'amplitude dépendent du profil du terrain et de la vitesse de l'engin.

L'excitation par le sol est responsable de la plus grande partie des oscillations de grande amplitude dans la plage 0 à 100 Hz [Cucuz (1992)] [Vercelotti (1986)].

Les études de biomécanique humaine montrent que la fréquence à laquelle ce dernier est le moins sensible aux vibrations verticales se trouve autour de 1 Hz.

Le système "homme-caisse-suspension" entre en résonance pour une fréquence autour de 1 Hz. Ce mode n'existe que par la présence de la suspension (comme détaillé par la suite dans



la partie 1.4.3). Par conséquent le choix du dimensionnement de la suspension est primordial de manière à placer ce mode dans la zone de fréquence la moins sensible pour l'être humain.

Le système "homme-siège" (Figure 1.2) possède un mode dont la fréquence de résonance est aux environs de 4 Hz [Hontschik et al. (1972)] [Hontschik et al. (1974)]. Il est possible de définir deux phénomènes : le rebond et le tassement dans la zone 2.5 à 8 Hz. Le premier correspond à un mouvement d'oscillation du conducteur d'amplitude quasi-constante autour d'une valeur moyenne. Le second apparaît quand l'amplitude de ce mouvement s'accroît subitement lors d'un passage dans un grand creux par exemple. Le thorax vient alors comprimer l'abdomen. Cette zone de fréquence intégrant le mode du conducteur sur son siège correspond également à une zone particulièrement sensible en biomécanique humaine. C'est pourquoi il est très important de filtrer au maximum les vibrations provenant de la route aux fréquences comprise entre 2.5 et 8 Hz. Cette zone est dite : zone des **tressautements**.

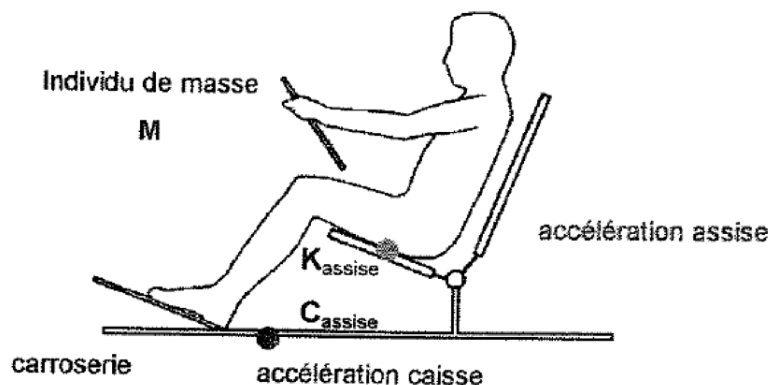


FIGURE 1.2 – *Conducteur sur son siège*

Le système "suspension-roue" présente un mode propre entre 11 et 17 Hz en fonction du pneumatique. Le dimensionnement de la suspension a une réelle influence dans cette zone de fréquences puisqu'il est responsable de ce que l'on appelle le rebond de roue, ou battement de roue lorsque ce mode est mal contrôlé. Ce phénomène, présent uniquement sur les véhicules suspendus, correspond à l'entrée en résonance de la roue provoquant des vibrations dans la caisse à travers les éléments du train, aussi appelé ébranlements de trains. En effet, l'énergie de la roue doit être dissipée par un amortisseur car le pneumatique à lui seul ne suffit pas. Par conséquent, il est nécessaire de trouver d'autres éléments résistifs pouvant dissiper cette énergie avant que cette dernière n'atteigne la caisse et donc les passagers. Une solution est de traiter ce phénomène par l'amortisseur de suspension comme cela est détaillé dans le chapitre 3.

Le système "homme-siège-véhicule" (Figure 1.3) réagit à la zone de fréquences (5 à 60 Hz) dans laquelle les vibrations sont ressenties au niveau du plancher, des sièges et du volant, c'est ce que l'on appelle : les **trépidations** [Dignac (2011)]. Elles sont soit dues à une excitation aléatoire entretenue provoquées par une "route bosselée de campagne" par exemple, soit à une excitation périodique de type "ondulation" souvent ressentie sur autoroute par exemple. Deux phénomènes distincts sont présents en réalité sous ce terme :

- les modes de corps rigides qui sont des modes vibratoires où des masses indéformables entrent en résonance sur différentes fixations élastiques (mode de moteur, mode de train avant et arrière...)
- les modes de structures où la structure elle-même se déforme, notamment sur un revêtement légèrement dégradé et donc générateur de fréquences comprises entre 10 et 40 Hz. Si une structure présente des modes de vibrations peu amortis dans cette bande de

fréquences, ces modes peuvent engendrer des vibrations importantes. C'est le cas pour certain véhicule où le mode de torsion est situé autour de 20 Hz. L'analyse vibratoire fait apparaître un maximum vibratoire aux places arrières entre 15 et 30 Hz.

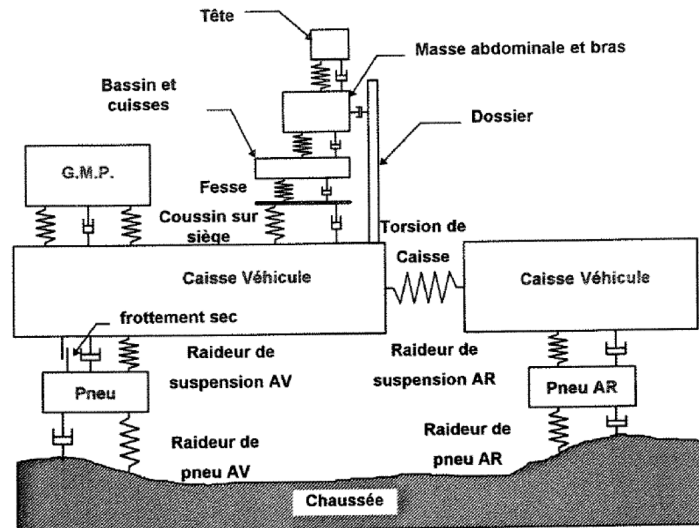


FIGURE 1.3 – *Modèle simplifié du système "Homme-siège-véhicule"*

Après 40 Hz et jusqu'au 200 Hz, des percussions (choc à la roue type bouche d'égout, raccord bitume, ...) sont à l'origine des vibrations et chocs sonores éprouvés par les passagers.

Finalement, au-dessus de 250 Hz les vibrations se manifestent par des sons basses fréquences (bruits de roulement).

1.2.4 Conclusion

L'exposition aux vibrations est donc inhérente à l'utilisation d'un véhicule. Les vibrations les plus néfastes sont situées dans la plage de fréquences 2 à 15 Hz :

- Entre 2 et 8 Hz les organes internes peuvent entrer en résonance (zone des tressautements),
- Entre 8 et 15 Hz les vibrations sont transmises à l'ensemble du corps par le biais de la colonne vertébrale.

Malheureusement, bien que certains équipements du véhicule protègent les passagers de certaines fréquences sensibles en agissant comme un filtre (c'est le cas du siège), ces mêmes équipements couplés à l'homme ou autres masses suspendues ont leurs propres modes de résonance qui pour certains ne sont pas idéalement situés. La suspension est un système qui permet de filtrer une partie de ces fréquences non désirables au niveau de la caisse. Il est donc important :

- en dessous de 1 Hz, de ne pas amplifier le contenu spectral des sollicitations route ;
- entre 2,5 et 8 Hz (zone fréquentielle dans laquelle la majorité des organes internes sont sollicités) et autour du mode de roue (1 Hz), de diminuer le contenu spectral des sollicitations route transmis à la caisse.

1.3 Un tour d'horizon en matière de suspension

Il existe de nombreuses manières de classer l'ensemble des suspensions de véhicule de tourisme allant d'un point de vue énergétique (système passif, actif ou semi-actif) à un point



de vue fonctionnel (capacitif, résistif au sens bond graph [Dauphin-Tanguy (2000)]) en passant par un point de vue organique et technologique (hydraulique, mécanique, électrique, ...). Toute la suite de ce mémoire est concentrée sur la distinction d'un point de vue **fonctionnel** des différentes suspensions existantes.

Ainsi, l'ensemble des suspensions de véhicule de tourisme peut être classé en deux types, selon que la suspension est composée seulement d'un combiné passif ressort-amortisseur par quart de véhicule ou non. Le premier type de suspension est alors dénommé architecture "traditionnelle" de suspension. De cette façon, toutes les suspensions automobiles qui ne sont pas de ce type sont classées parmi les architectures "complexes" de suspension.

1.3.1 Les architectures de suspension dites traditionnelles

De nos jours, le ressort à lames est très utilisé mais il est plutôt réservé aux véhicules de type tout terrain (notamment militaires) ou aux véhicules utilitaires.

Depuis l'arrivée des automobiles, différentes solutions de suspensions dites traditionnelles ont fait leur apparition. On peut citer comme exemple les suspensions à bras tirés (figure 1.4a) ou les suspensions MacPherson ou pseudo MacPherson (figure 1.4b) parmi les plus courantes. Ces suspensions possèdent généralement un ressort hélicoïdal et un amortisseur concentriques sur la jambe de force.

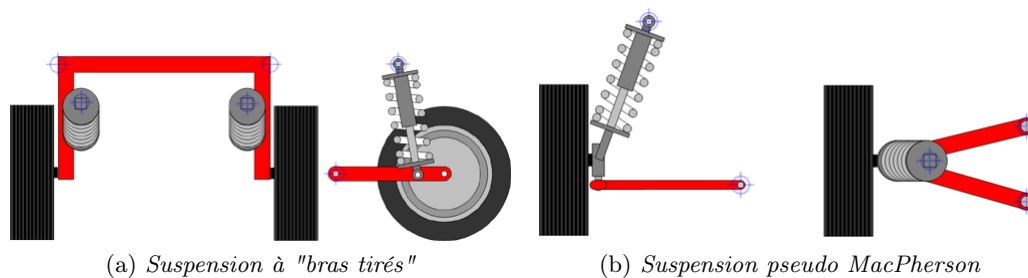


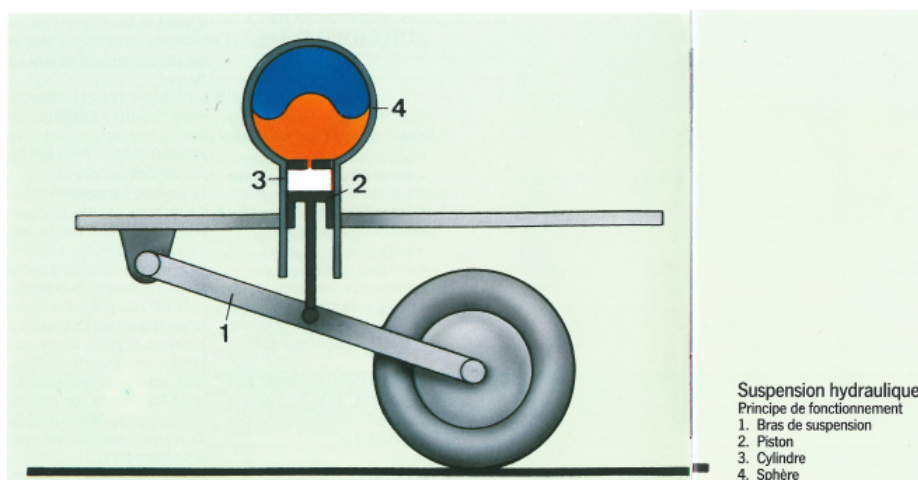
FIGURE 1.4 – Exemples de suspensions traditionnelles contemporaines

Ces dernières sont de loin les plus répandues sur le parc des véhicules de tourisme car elles sont plus simples à mettre en oeuvre et les moins onéreuses.

D'autres technologies de suspension dites traditionnelles existent comme la suspension hydropneumatique mono-sphère présentée figure 1.5 et mise au point par Paul Magnès en 1954. Le premier véhicule équipé de cette technologie fût la Citroën Traction mais c'est avec l'arrivée de la Citroën DS, présentée au salon de Genève en 1955, que ce système est développé en série.

Le principe vise à remplacer le ressort de la suspension mécanique traditionnelle par deux fluides : un liquide (de l'huile végétale dans un premier temps, puis minérale) et un gaz (de l'azote) séparés par une membrane. Le gaz est l'élément élastique de la suspension et sa pression varie en fonction de la charge du véhicule. Le liquide, incompressible, permet d'assurer le lien entre les organes mécanique des essieux et le gaz. Chaque roue est équipée d'un ensemble (figure 1.6) constitué d'un bras de suspension, d'un piston solidaire de ce bras qui coulisse dans un cylindre agissant sur le liquide pour comprimer le gaz contenu dans la sphère et ayant une masse constante. L'amortissement est obtenu par laminage du liquide à travers des clapets. Ceux-ci sont constitués de trous placés entre le cylindre et la sphère, comme illustré sur la figure 1.7

Mais cette solution organique étant couteuse et nécessitant un entretien spécifique et régulier, elle reste réservée pour les véhicules haut de gamme.

FIGURE 1.5 – *Sphère de suspension hydropneumatique*FIGURE 1.6 – *Principe de fonctionnement de la suspension hydropneumatique traditionnelle*

1.3.2 Les architectures de suspension dites complexes

C'est avec l'arrivée de la mécatronique, au début des années 80, que les premières architectures de suspension complexes sont mises au jour.

Parmi les nombreuses solutions complexes existantes pour améliorer le confort et la sécurité des passagers d'un véhicule de tourisme, on trouve la suspension BOSE, développée à partir des années 1980 [BOSE (SiteWeb)]. Cette suspension utilise un actionneur électromagnétique pour rejeter les perturbations, qu'elles proviennent de la route ou du conducteur. Le Docteur Amar Bose a mené une étude durant plusieurs décennies visant à déterminer de façon analytique la performance optimale que peut réaliser une suspension, indépendamment des limites de toute solution technologique actuelle. Ainsi, il a proposé un système comprenant un moteur linéaire électromagnétique et un amplificateur de puissance disposé au niveau de chaque roue, comme présenté figure 1.8. Ce dispositif est géré par un ensemble d'algorithmes de commande. Le moteur électromagnétique est composé d'un vérin électrique qui assure le rôle de suspension en agissant sur le débattement de la suspension. Il n'y a alors plus aucun ressort et amortisseur.

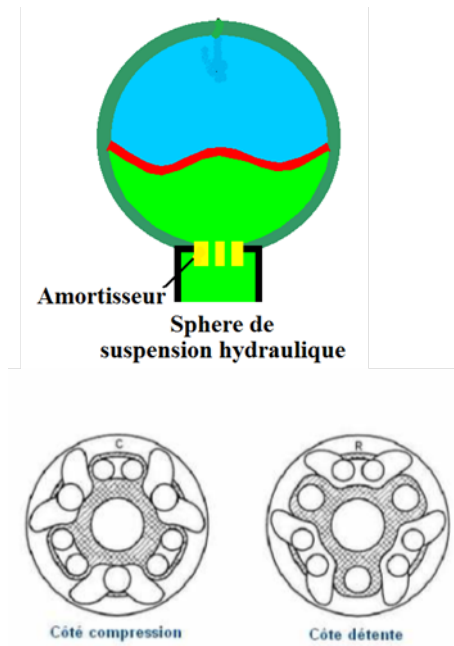


FIGURE 1.7 – Amortisseur d'une suspension hydropneumatique

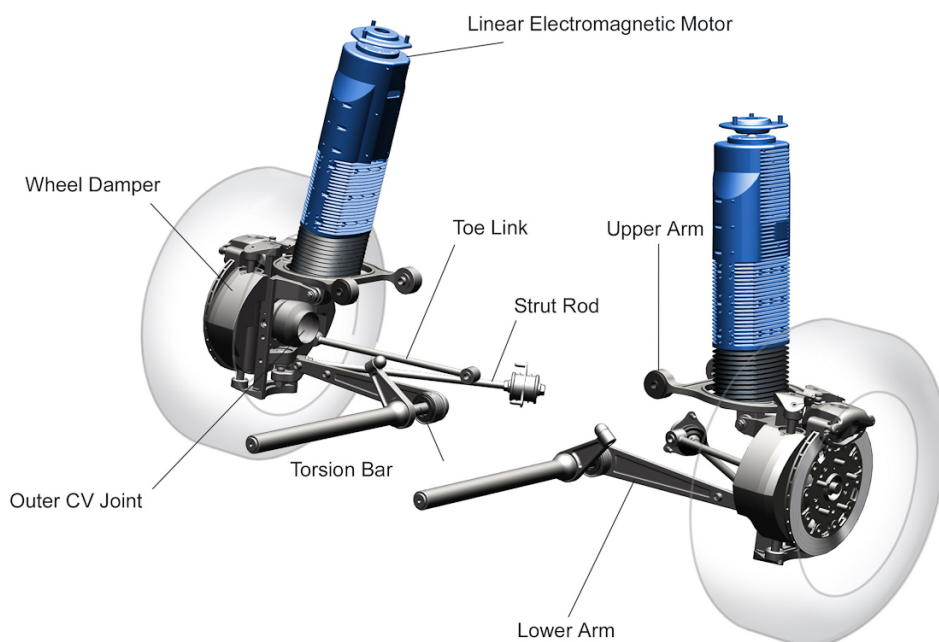


FIGURE 1.8 – Moteur linéaire électromagnétique de la suspension BOSE

Comme on peut le voir sur la figure 1.9, chaque roue du véhicule est équipée de ce dispositif, ce qui permet une action roue par roue.

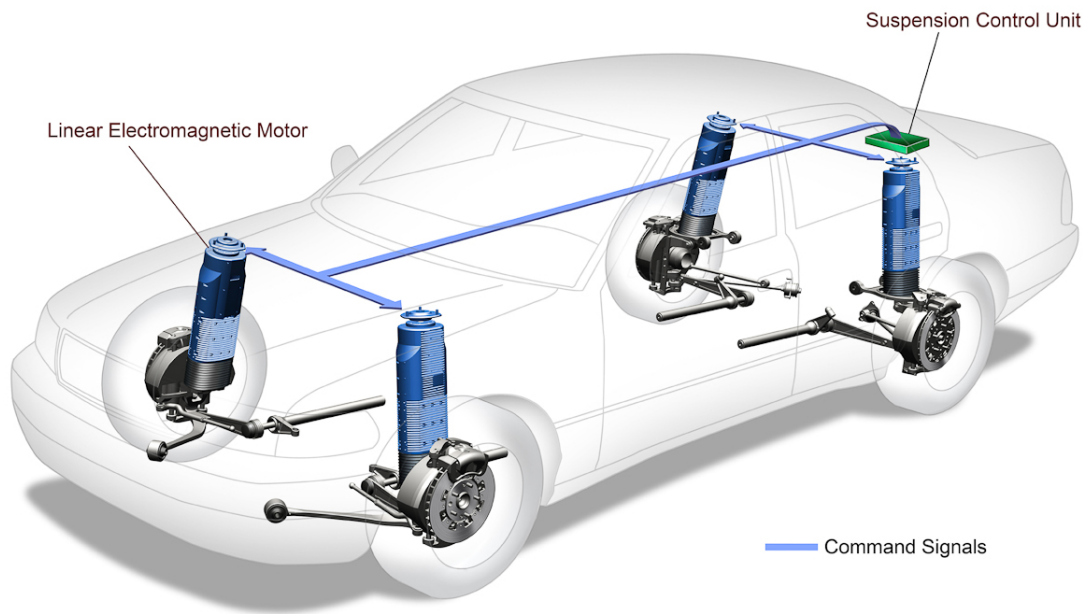


FIGURE 1.9 – Architecture de la suspension BOSE

Malgré un poids considérable de 30 kg par roue ainsi qu'un coût de production très important, les performances de ce dispositif sont extrêmement intéressantes. Le moteur électromagnétique de la suspension BOSE permet de **contrôler la tenue de caisse sous les sollicitations du conducteur**. En effet, comme le montre la figure 1.10 lors de manoeuvres d'évitement ou de freinage d'urgence, le véhicule équipé de la suspension BOSE (à droite) ne subit pas de tangage ou de roulis, contrairement au véhicule équipé d'un dispositif hydraulique classique (à gauche).

De plus, cette suspension étant totalement commandable, lors d'un enchaînement de virages (des chicanes par exemple), il est possible de faire prendre du roulis au véhicule équipé de la suspension BOSE de la même façon qu'un véhicule à 2 roues, et ce, afin de garantir une meilleure tenue de route.

Une autre approche de suspension complexe consiste à ajouter un moteur électrique à l'intérieur de la roue et permettant, tout comme le dispositif BOSE, de contrôler la tenue de caisse sous les sollicitations du conducteur, comme l'a proposé Michelin avec l'Active Wheel au Mondial de l'Automobile en 2008 (figure 1.11).

Contrairement au système de suspension BOSE, le dispositif de l'Active Wheel conserve certains éléments présents dans une architecture traditionnelle à savoir le ressort. Le moteur dédié au fonctionnement de la suspension de l'Active Wheel permet d'anticiper les actions du conducteur en générant une force visant à tenir la caisse. Ainsi, la suspension n'est plus à caractère purement mécanique mais électro-magnétique, avec un temps de réponse extrêmement rapide, ce qui permet là encore de contrôler le pompage, le tangage et le roulis du véhicule. De plus, concevoir l'architecture de la suspension avec un système roue par roue permet un

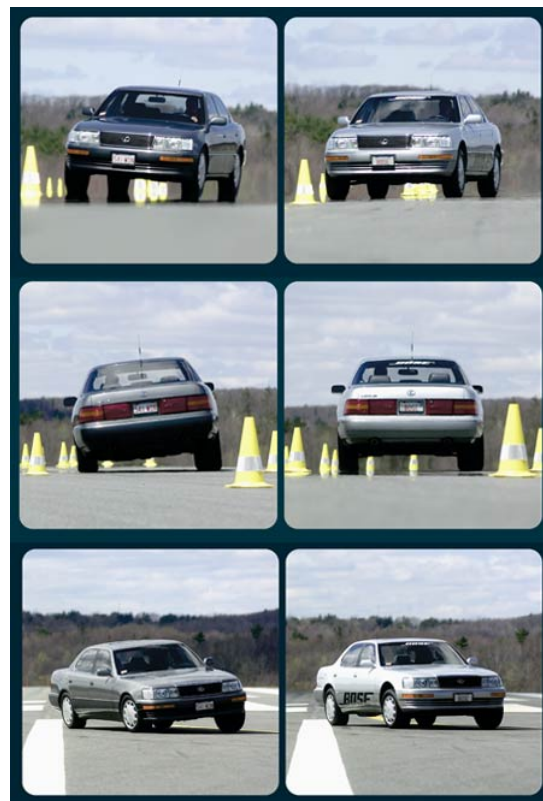


FIGURE 1.10 – Illustration de la tenue de caisse pour un véhicule équipé d'une suspension hydraulique classique (à gauche) et le même véhicule équipé de la suspension BOSE (à droite)

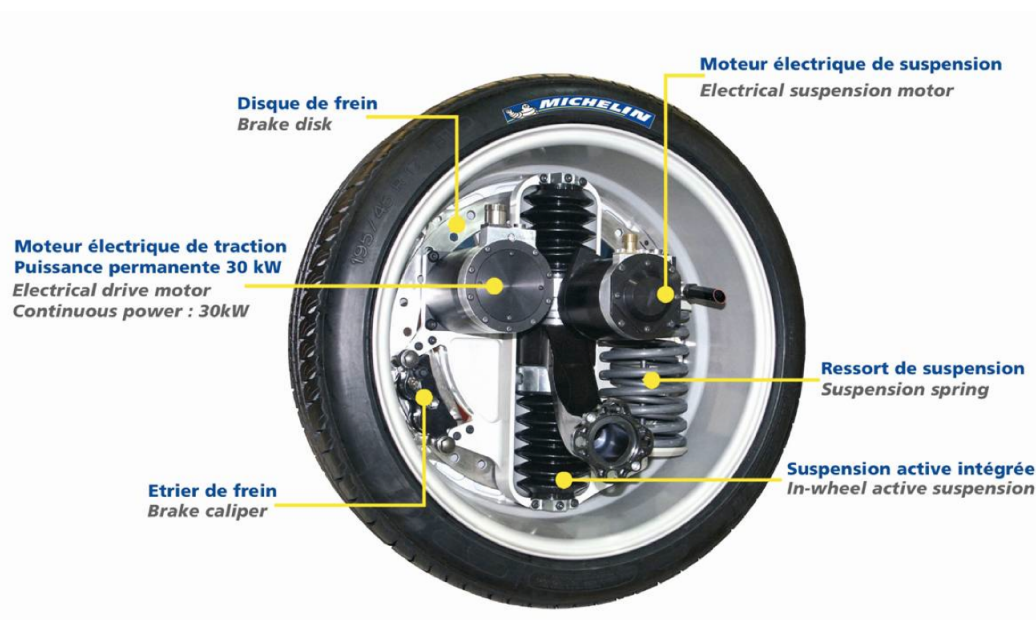


FIGURE 1.11 – Eléments constituant l'Active Wheel de Michelin

meilleur contrôle de la stabilité du véhicule et ainsi accroître la sécurité des passagers. Malgré tout, ce dispositif n'est pas proposé en série par les constructeurs en raison des coûts de fabrication et d'entretien.

Un dispositif de suspension complexe est néanmoins bien présent sur le marché des véhi-

cules de tourisme depuis la fin des années 1980 [Institut Citroën (1994)]. Il s'agit de la suspension Hydractive bi-états, conçue là encore par Citroën et dont le premier véhicule équipé est la Citroën XM. Cette solution de suspension est la résultante de deux technologies : la suspension hydropneumatique traditionnelle couplée à l'électronique embarquée. Les progrès en matière d'électronique ont depuis permis l'évolution de cette solution qui a été déclinée en plusieurs générations. Cette solution possède deux états de suspension : le mode dit "ferme" et le mode dit "souple". Le terme "mode" est ici employé au sens de fonctionnement. La suspension Hydractive est issue de la combinaison d'une architecture traditionnelle pour le mode ferme et d'une architecture complexe pour le mode souple. Ces caractérisations "ferme" et "souple" ont été introduites par Citroën dès l'arrivée de la Citroën XM sur le marché automobile, à la fin des années 1980.

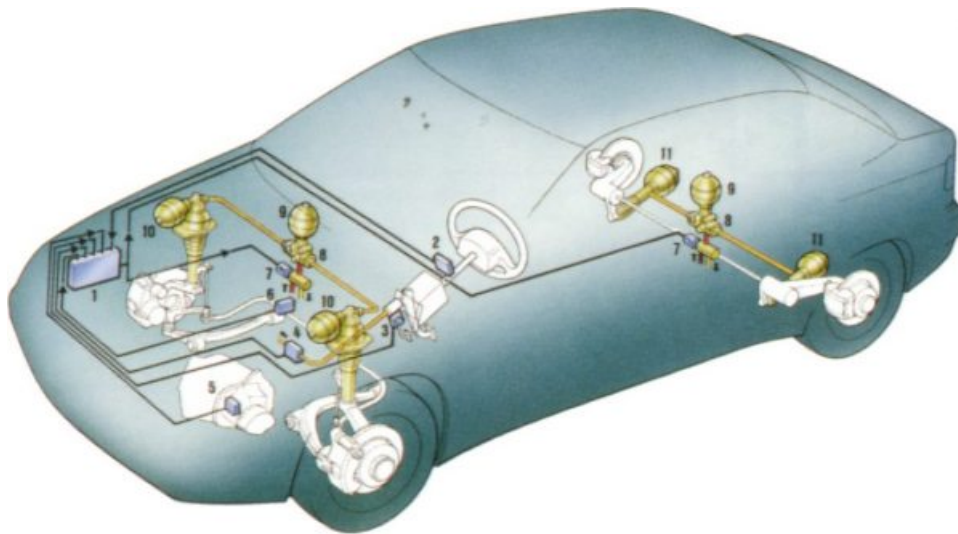


FIGURE 1.12 – Dispositif de la suspension Hydractive bi-état

La partie électronique (figure 1.12) de la suspension Hydractive est dotée de nombreux capteurs qui mesurent :

- l'angle et la vitesse de rotation du volant (2)
- l'accélération (3)
- le freinage (4),
- le débattement vertical de la caisse (5)

Les informations transmises par ces capteurs sont analysées par un calculateur (1). Celui-ci actionne à son tour une électrovanne (7) permettant d'agir sur le réseau hydraulique haute pression constitué des sphères et amortisseurs (9, 10 et 11) par l'intermédiaire de l'ajustement du régulateur de raideur (8). Les sphères et amortisseurs sont disposés de façon à permettre les deux états de la suspension : ferme et souple.

La suspension Hydractive est alors capable d'anticiper les événements et ainsi se placer automatiquement sur le meilleur mode de fonctionnement par rapport aux conditions de roulage (profil de la route et style de conduite).

Actuellement, c'est la génération Hydractive III+ qui équipe certains véhicules, avec notamment la Citroën C5 haut de gamme et la Citroën C6.

Cette technologie de suspension étant tout de même très onéreuse, elle reste réservée aux véhicules haut de gamme.

Enfin, un dernier exemple d'architecture de suspension complexe qui peut être cité est la suspension CREUAT [CREUAT (SiteWeb)]. Cette solution est très proche de la solution précédemment évoquée puisque c'est une suspension dite Hydractive multi-états. Le principe



de fonctionnement est le même que la suspension Hydractive bi-état. Ce sont les implémentations mécanique et hydraulique qui sont différentes de par la présence des éléments centraux permettant de mieux gérer le couplage entre la dynamique verticale et les dynamique longitudinale et latérale comme l'illustrent les figures 1.13 et 1.14.



FIGURE 1.13 – *Implantation mécanique de la suspension CREUAT*

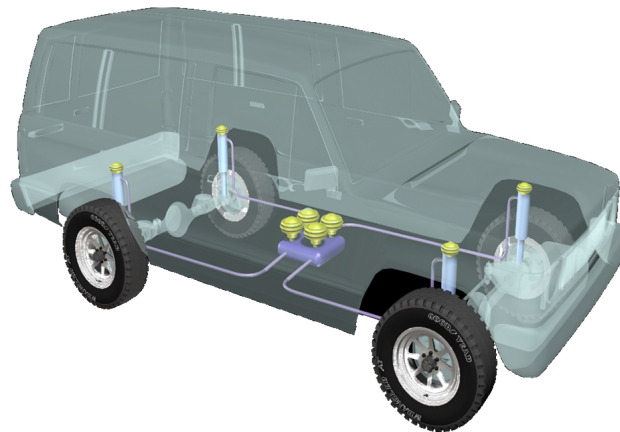


FIGURE 1.14 – *Implantation hydraulique de la suspension CREUAT*

Cependant, cette solution technologique de suspension reste réservée aux véhicules tout terrain, aux ambulances ou aux véhicules de compétition.

Par ces quelques exemples, différentes technologies de suspension ont été présentées afin de constituer un tour d'horizon permettant d'avoir une vision générale des deux architectures de suspension existantes.

Dans le cas des architectures traditionnelles, de nombreux dilemmes existent définissant ainsi la problématique initiale face à laquelle il faut apporter des solutions.

1.3.3 Les différents dispositifs de fin de course

Les butées de fin de course sont des dispositifs visant à préserver la mécanique et notamment le châssis lors de fortes compressions (ou détentes) assimilables à des chocs. Leur rôle est donc principalement de limiter la course de la tige de piston et, par conséquent, de limiter le débattement de la suspension.

De la même manière que pour les nombreux types de suspensions, il s'agit ici de faire un tour d'horizon en définissant une classification des différentes solutions existantes de butées de fin de course allant d'une distinction d'un point de vue technologique (caoutchouc, polyuréthane, métallique, etc...) à une distinction d'un point de vue fonctionnel (élastique, visco-élastique, visqueuse, etc...) en passant par une classification d'un point de vue de la progressivité en termes d'efforts transmis à la caisse par la suspension. C'est cette dernière qui est considérée tout au long de ce chapitre.

Les butées qui n'ont pas de progressivité sont assimilables à de simples ressorts. Sur les amortisseurs actuels, ces butées se situent par exemple au niveau de la jonction tige-piston du vérin et sont plutôt des butées de détente. L'inconvénient de ce dispositif est qu'il y a une forte discontinuité en terme d'accélération au moment de l'impact.

D'autres butées sont un peu plus progressives en terme d'effort, les butées en caoutchouc comme sur la Citroën 2 CV par exemple, ou les butées en polyuréthane, dites butées PU (figure 1.15), qu'on retrouve sur quasiment tous les modèles de véhicules de tourisme, quel qu'en soit le constructeur. Ces dispositifs fonctionnent comme un ressort non linéaire. La progressivité est donc plus importante. Ils emmagasinent de l'énergie en fonction de leur hauteur de compression et la restituent intégralement lors de la phase de détente qui suit. Cette énergie restituée engendre une sortie rapide de l'amortisseur, donc de la roue et provoque un renvoi intempestif qui perturbe la tenue de route. Par ailleurs, ces systèmes étant uniquement pilotés par la hauteur de leur compression, ils ne s'adaptent pas aux différentes vitesses de la multitude de chocs que subie la voiture.

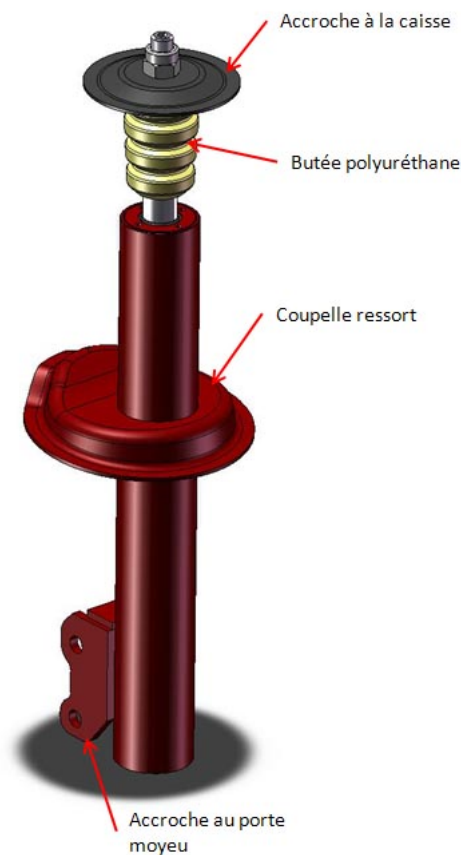


FIGURE 1.15 – Exemple d'un amortisseur classique avec butée PU

Enfin, les butées hydrauliques (Soben, Donerre, Renault, Kyb, etc...) sont des dispositifs dont la progressivité est beaucoup plus importante (figure 1.16). Ce type de dispositif doit



avoir un maximum d'amortissement en un minimum de course, tout en étant le plus progressif possible.

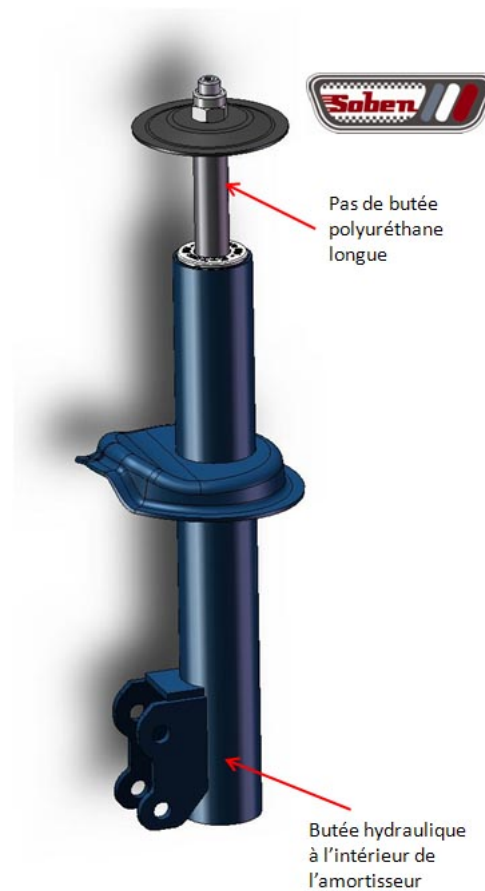


FIGURE 1.16 – Exemple d'un amortisseur avec butée hydraulique SOBEN

Le rôle principal d'une butée hydraulique de compression est d'absorber l'énergie et la dissiper. Ainsi, elle ne restitue pas d'énergie sur la phase de détente qui suit. De plus, la butée hydraulique est sensible à la position, mais aussi à la vitesse d'impact. Elle optimise la dissipation énergétique en optimisant systématiquement la course de l'amortisseur. En effet, contrairement aux butées mécaniques, la butée hydraulique permet à l'amortisseur de parcourir toute la course disponible sur une très large plage de chocs.

La butée hydraulique de compression est un organe installé à l'intérieur de l'amortisseur (figure 1.17). Elle joue le rôle d'un second amortisseur monté en série avec l'amortisseur principal sur sa fin de course de compression.

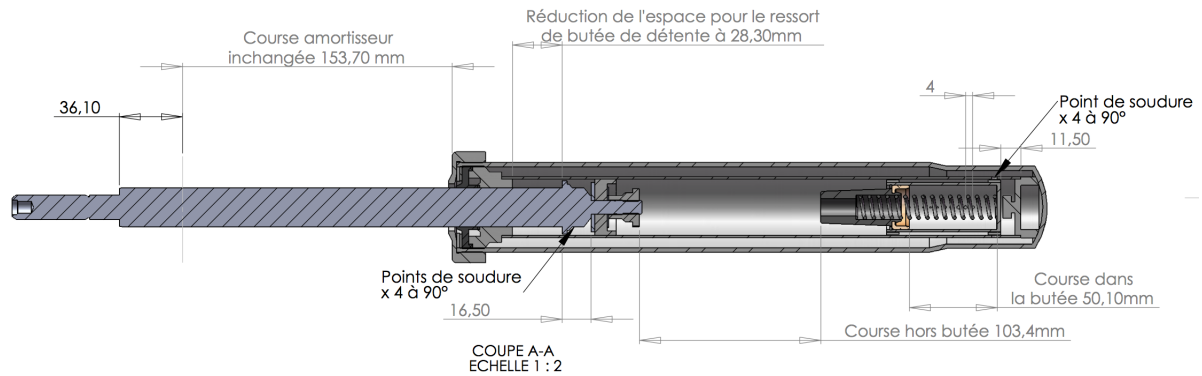


FIGURE 1.17 – Plan d'un amortisseur SOBEN avec butée hydraulique

1.4 La problématique des suspensions de véhicules automobiles

1.4.1 Les perturbations en provenance de la route et du conducteur

Le point de départ de la formalisation de la problématique des suspensions de véhicules automobiles est l'inventaire des perturbations qui sollicitent la dynamique du véhicule. Ces perturbations se classent principalement en deux catégories :

- les perturbations en provenance de la route, notées $v_0(t)$ dans toute la suite de ce mémoire, qui résultent des variations verticales du profil routier combinées à la vitesse d'avancement du véhicule, leur contenu spectral étant très riche et réparti sur une plage fréquentielle $[0 ; 50 \text{ Hz}]$ [Guglielmi et al. (1998)] ;
- les perturbations en provenance du conducteur (appelées aussi reports de charge), notées $f_0(t)$ dans toute la suite de ce mémoire, qui résultent de son action sur les organes de conduite (volant et pédales), leur contenu spectral étant beaucoup moins riche et plus concentré vers les basses fréquences. Les conséquences de ces perturbations sur la dynamique du véhicule sont analysées selon trois domaines dont leur présentation fait l'objet d'un paragraphe développé plus loin dans ce chapitre.

1.4.2 La problématique liée aux architectures traditionnelles de suspension

Afin de garantir la sécurité des passagers et leur confort lors de déplacements, la suspension des véhicules de tourisme a plusieurs objectifs à remplir.

L'assurance d'une sécurité des passagers élevée dans un véhicule de tourisme passe par une bonne **tenue de route**. Lors d'une situation d'urgence comme un virage en épingle, un obstacle imprévu ou une adhérence variable, c'est le comportement du véhicule qui est primordial pour la sécurité. La tenue de route est principalement dépendante du pneumatique car lui seul assure le contact entre la route et le véhicule. Mais il est facile de se rendre compte que la suspension joue aussi un rôle important dans la tenue de route. Dans un environnement avec un sol dégradé, le battement de la roue a une influence sur la charge normale dynamique ce qui peut provoquer un décollement de la roue entraînant alors une absence de génération de force de traction ou de freinage ou même de guidage. La présence de la suspension permet de palier à ce problème en atténuant les variations de la charge normale sur le pneumatique et ainsi de contrôler la tenue de roue. Une suspension dite **ferme** et **amortie** donne alors la possibilité d'atténuer les débattements verticaux de la roue. Un premier objectif de la suspension est donc de **contrôler la tenue de roue**.

Un autre élément important, et réellement pris en compte par les constructeurs automobiles depuis maintenant plus d'un siècle, est le confort en matière d'**isolation vibratoire**.



Dans un véhicule de tourisme, trois éléments participent au confort des passagers. Le premier élément est le pneumatique. Les premiers pneumatiques développés par Michelin à la toute fin du XIX^{ième} siècle étaient seulement constitués d'une bande de caoutchouc entourant le cerclage métallique afin de réduire les nuisances sonores liés au claquement des roues sur les pavés des routes et chemins de l'époque. Depuis, Dunlop et Michelin ont largement développé le pneumatique, muni d'une chambre à air, dans le but d'améliorer sensiblement le confort vibro-acoustique. L'élasticité de l'air contenu dans le pneumatique absorbe en partie les irrégularités du sol et les déformations causées par les obstacles. Ensuite vient la suspension qui selon son dimensionnement permet de filtrer jusqu'à 80% des irrégularités de la route [Rizzo (2012)]. De façon à pouvoir se déformer afin d'assurer un filtrage le plus efficace, la suspension doit être **sous amortie**. Enfin, le siège constitue le dernier maillon de la chaîne de confort. Les premiers sièges équipant les véhicules de tourisme se résumaient à de simples planches de bois, puis ont été remplacés par des ressorts pour finalement être conçus dans des mousses plus ou moins fermes selon la finition du véhicule. Ainsi, un second objectif de la suspension est d'**assurer une bonne isolation vibratoire** des passagers vis-à-vis des irrégularités de la route.

Le confort des passagers ne demeure pas seulement dans l'isolation vibratoire mais aussi dans la limitation des mouvements de la caisse lorsque celle-ci est sollicitée aux basses fréquences, à savoir sur la plage de fréquences [0;5 Hz]. C'est justement sur cette plage de fréquences que le corps humain est le plus sensible : une sollicitation dont la fréquence de résonance est inférieure à 1 Hz perturbe l'oreille interne engendrant une cinétose, plus communément appelée mal de mer. Les organes internes sont sollicités pour des fréquences entre 4 et 8 Hz. Le squelette est quant à lui sollicité pour des fréquences supérieures à 10 Hz. Or, la caisse entre en résonance autour de son mode propre, c'est à dire aux environs de 1 Hz. De ce fait, il est primordial de filtrer les aspérités de la route sur cette plage de fréquences. Ainsi, la suspension doit avoir une faible raideur, autrement dit, elle doit être **souple**. De plus, il est nécessaire de dimensionner une suspension **amortie** de façon à limiter l'amplification des irrégularités de la route par la caisse. Un troisième objectif de la suspension est de **garantir la tenue de la caisse sous sollicitations de la route**.

La dynamique du véhicule étant une notion tridimensionnelle, il est également important de tenir compte des mouvements de roulis autour de l'axe x et de tangage autour de l'axe y provoqués principalement par les sollicitations en provenance du conducteur. Ces situations sont rencontrées lors de manoeuvres telles qu'en virages ou au freinage. Il est alors indispensable d'avoir une suspension ayant une raideur élevée ainsi qu'un amortissement important soit une suspension dite ferme. Un quatrième objectif de la suspension est donc d'**assurer la tenue de la caisse sous sollicitations provenant du conducteur**.

Enfin, [Nouillant (2002)] a montré que la suspension agit sur la dynamique globale du véhicule, à savoir la dynamique lacet-dérive et la dynamique longitudinale. Un dernier objectif de la suspension est donc d'**optimiser son influence sur la dynamique globale du véhicule**.

Le lecteur remarquera que ces différents objectifs sont parfois incompatibles. Il apparaît alors la notion de dilemmes pour le dimensionnement d'une suspension. Parmi les principaux dilemmes, citons :

- l'interdépendance **isolation vibratoire - tenues de caisse et de roue** qui traduit le fait qu'une augmentation de l'isolation vibratoire (filtrage des sollicitations de la route) par une diminution du coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur entraîne une diminution des tenues de caisse et de roue (augmentation des facteurs de résonance et diminution des facteurs d'amortissement associés aux modes propres de pompage de la caisse et de battement de la roue) ;
- l'interdépendance **isolation vibratoire - tenue de caisse sous sollicitations du**



conducteur qui s'exprime par le fait qu'une augmentation de l'isolation vibratoire (amélioration du confort vibratoire aux moyennes et hautes fréquences) par une diminution de la raideur du ressort de suspension entraîne une augmentation du déplacement de la caisse en virage (roulis), au freinage (plongée) et à l'accélération (cabrage), source d'inconfort aux basses fréquences ;

- l'interdépendance **masse - amortissement** qui traduit le fait qu'une augmentation de la masse du véhicule (variation entre à vide et en charge) entraîne une diminution de l'amortissement du mode de pompage de la caisse (qui s'accompagne d'une augmentation de son facteur de résonance).

Cependant, il est important de noter que l'apparition des architectures complexes de suspension a permis d'améliorer la gestion de la majorité des dilemmes. Citons par exemple la suspension Hydractive dont le principe a été évoqué précédemment. La commande d'une électrovanne tout-ou-rien permet de disposer d'une architecture traditionnelle dimensionnée pour optimiser le comportement routier ou d'une architecture plus complexe (car composée de plusieurs sphères Citroën) dimensionnée pour optimiser le confort vibratoire.

1.5 Domaines de fonctionnement et domaines d'étude

Tout au long de ce mémoire de thèse, une attention toute particulière est faite, non seulement en ce qui concerne la distinction entre domaines de fonctionnement et domaines d'étude, mais aussi en ce qui concerne leur adéquation. Il est donc essentiel de préciser, voire de définir, ces notions.

Ainsi, dans ce mémoire, le fonctionnement de la suspension d'un véhicule de tourisme est fractionné selon trois domaines. Le découpage choisi et la définition de ces trois domaines sont directement liés à l'amplitude des variations du débattement de la suspension autour de son point d'équilibre statique. Quant aux domaines d'étude, ils concernent le *confort vibratoire*, le *comportement routier* et les *limites de fonctionnement*, la nature de l'étude relevant soit seulement de l'analyse en vue de mieux comprendre les phénomènes dynamiques dominants (c'est le cas d'une partie du chapitre 3 et de la totalité des chapitres 4 et 5), soit de l'analyse **et** de la synthèse en vue de la conception (c'est le cas d'une partie du chapitre 3 et de la totalité du chapitre 6).

1.5.1 Domaines de fonctionnement

Aux petites variations

L'étendue du premier domaine de fonctionnement, défini autour de la position d'équilibre statique, est fixée par l'amplitude de petites variations. Cette première zone permet d'établir un modèle linéarisé autour de la position d'équilibre statique [Serrier (2008)]. Ce modèle linéaire autorise alors l'exploitation de la dualité temps-fréquence, tant pour l'analyse que pour la synthèse d'une nouvelle architecture de suspension. Il est à noter que ces petites variations concernent principalement la dynamique verticale associée au domaine d'étude du confort vibratoire. En effet, elles n'entraînent pas de modification significative de l'équilibre dynamique global du véhicule associée au domaine d'étude du comportement routier [Rizzo (2012)]. C'est la raison pour laquelle en matière de synthèse seules les perturbations $v_0(t)$ issues des petites variations du profil routier sont prises en compte, la mise en évidence des effets négligeables des petites variations des perturbations $f_0(t)$ issues des reports de charge étant traitée uniquement dans le cadre de l'analyse.



Aux moyennes variations

Un deuxième domaine, toujours autour de la position d'équilibre statique, dont l'étendue, plus importante que la précédente, est fixé par l'amplitude de moyennes variations. Ces dernières ne conduisent pas, cependant, à des chocs liés aux butées de fin de course, mais entraînent des modifications notables de l'équilibre dynamique du véhicule [Gillespie (1992)]. Ces moyennes variations résultent aussi bien des perturbations $v_0(t)$ issues du profil routier que celles $f_0(t)$ issues des reports de charge. Cette zone est donc principalement associée au domaine d'étude du comportement routier qui nécessite un modèle plus complexe que le modèle quart de véhicule (au minimum un modèle bicyclette, voire un modèle quatre roues avec suspension).

Aux grandes variations

Un dernier domaine est défini par toute la course de la suspension parcourue lors de grandes variations, conduisant alors au contact avec les butées de fin de course. Là aussi, ces grandes variations résultent aussi bien des perturbations $v_0(t)$ issues du profil routier (passage d'un dos d'âne à vitesse importante par exemple), que celles $f_0(t)$ issues des reports de charge (freinage d'urgence en courbe par exemple). Ces grandes variations sont associées au domaine d'étude des limites de fonctionnement pour lequel il faut chercher à limiter le choc lors du contact dans les premiers instants avec les butées, et ce à la fois pour des raisons d'inconfort et de sécurité dans la mesure où le comportement routier, en particulier la tenue de route, est fortement modifié lors de situations d'urgence.

Ces trois domaines de fonctionnement définissent, non seulement les limites des domaines de validité associés aux différents modèles utilisés, mais aussi fixent d'un point de vue méthodologique la chronologie des étapes suivies lors de la synthèse d'une nouvelle architecture de suspension.

1.5.2 Adéquations des différents domaines

Le tableau de la figure 1.18 résume l'adéquation entre domaines de fonctionnement et domaines d'étude. Ainsi, le *confort vibratoire* peut être analysé dans le cadre des trois domaines de fonctionnement (cases vertes), mais la synthèse d'une nouvelle architecture de suspension n'est faite dans ce mémoire qu'aux petites variations (approche CRONE), en aucun cas aux moyennes et/ou grandes variations (cases rouges). Ensuite, le *comportement routier* peut être analysé, lui aussi, dans le cadre des trois domaines de fonctionnement (cases vertes), sachant que dans ce mémoire aucune méthode de synthèse orientée comportement routier n'est proposée (cases rouges). Enfin, l'analyse des *limites de fonctionnement* aux petites et moyennes variations n'a évidemment pas lieu d'être puisque les butées de fin de course ne sont pas sollicitées (cases rouges), seul le domaine de fonctionnement aux grandes variations est étudié, non seulement en terme d'analyse, mais aussi en terme de synthèse (cases vertes).



		Domaines de fonctionnement					
		Petites variations		Moyennes variations		Grandes variations	
		Analyse	Synthèse	Analyse	Synthèse	Analyse	Synthèse
Domaines d'étude	Confort vibratoire						
	Comportement routier						
	Limites de fonctionnement						

FIGURE 1.18 – Adéquation entre domaines de fonctionnement et domaines d'étude

1.6 Les différents modèles pour l'étude de la suspension

Remarque

Concernant les différentes grandeurs physiques $X(t)$ présentes tout au long de ce mémoire, la convention de notation adoptée est la suivante :

$$X(t) = X^e + x(t) , \quad (1.6.1)$$

où

- $X(t)$ représente dans un référentiel absolu la valeur de la grandeur physique considérée,
- X^e définit la valeur (constante) de référence fixée par le régime stationnaire (équilibre) autour de laquelle l'étude du comportement dynamique est effectuée
- et $x(t)$ les petites variations de la grandeur physique $X(t)$ autour de sa valeur à l'équilibre X^e .

En résumé, toutes les notations en minuscule sont des variations et toutes les grandeurs physiques n'ayant pas de notation en majuscule sont des grandeurs dont la référence est nulle. Enfin, la Transformée de Laplace (TF) de la variation $x(t)$ est notée $\tilde{X}(s) = TF\{x(t)\}$.

La conception de tout ou partie d'un véhicule est une tâche complexe. Très vite apparaît dans ce processus la nécessité de disposer d'un modèle, mais "Quel modèle pour faire quoi?". A cette question, il existe trois réponses définissant trois types de modèle par ordre de complexité décroissante, soit un modèle pour :

- **valider** en simulation de nouveaux organes et leurs lois de commande, on parle alors d'un modèle de validation appelé encore simulateur. Il s'agit de l'étape ultime avant l'implantation et la validation sur le véhicule. Les modèles de validation sont souvent des modèles "hybrides" constitués à la fois de modèles de connaissances (boîte blanche) pour certaines parties, et de modèles de comportement (boîte noire) pour d'autres parties comme les pneumatiques ou l'élastocinématique [Gillespie (1992)] des essieux, modèles issus de mesures sur banc d'essai. Tous les constructeurs et leurs équipementiers disposent aujourd'hui de ce type de modèle ;
- **comprendre** les phénomènes prépondérants et les comportements dominants afin de "s'imprégner" de la dynamique du système. On parle alors de modèle d'analyse souvent déduit du modèle de validation par l'introduction d'hypothèses simplificatrices. Cette étape est indispensable pour définir des stratégies, notamment de commande ;
- **synthétiser** les lois de commande des organes mécatroniques introduits au sein du véhicule. Cette étape conduit à la notion de modèle de synthèse obtenu en posant des



d'hypothèses simplificatrices supplémentaires et en définissant les domaines d'incertitudes indispensables dans le cadre d'une stratégie de commande robuste.

Quoi qu'il en soit, un véhicule est un système complexe dont la modélisation conduit à une représentation imparfaite de la réalité, le degré d'imperfection étant fonction de l'objectif fixé (valider, comprendre ou synthétiser). C'est la raison pour laquelle, notamment dans le cadre d'une collaboration avec un partenaire industriel, les travaux développés correspondent souvent à des études comparatives effectuées selon les quatre étapes suivantes :

- Dans un premier temps, le partenaire industriel fournit un modèle simplifié de "référence" dont les valeurs numériques des paramètres ont fait l'objet d'un recalage lors de confrontations entre les résultats simulés et ceux mesurés sur banc, sur piste et sur route, le degré de corrélation et le domaine de validité du modèle étant alors parfaitement connus ;
- Ensuite, ce modèle de "référence" est utilisé pour établir les spécifications du cahier des charges du nouveau système étudié (systèmes de direction, de freinage, de suspension,...) ;
- L'étape suivante est la mise en oeuvre d'une stratégie d'innovation visant à améliorer l'existant ;
- La dernière étape consiste alors à confronter les performances du nouveau dispositif ainsi conçu avec celles du modèle de "référence".

Toutes ces étapes sont illustrées sous la forme d'un cycle en V présenté figure 1.19.

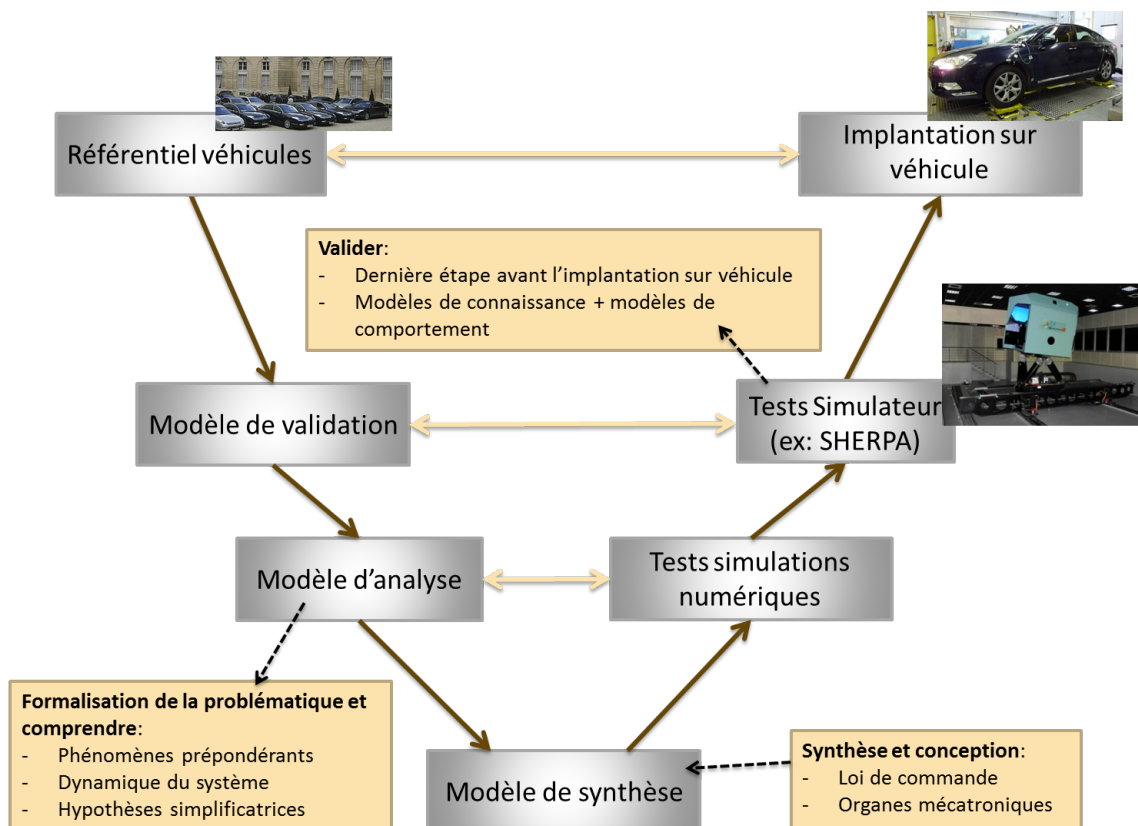


FIGURE 1.19 – Cycle en V pour la conception des éléments d'un véhicule

1.6.1 Modèle de validation à l'échelle du véhicule complet

De nombreux modèles de validation [Connair et al. (1999)] [Juricic (2004)] [Kruczek et al. (2004)] [Giangulio (2006)] existent parmi lesquels certains sont commercialisés. Ils sont organisés de manière modulaire autour d'un noyau qui, généralement, représente le châssis du véhicule. Les entrées de ce noyau central correspondent aux composantes des actions mécaniques exercées sur la caisse par son environnement, c'est-à-dire aussi bien par les organes du véhicule en liaison avec le châssis comme les suspensions, que par les effets aérodynamiques entraînés par le déplacement du véhicule dans l'air. Les sorties de ce noyau sont les paramètres cinématiques du châssis. Ces variables sont calculées par la résolution d'un système d'équations non linéaires issues de l'écriture du principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse ou de l'application du formalisme de Lagrange. Autour du noyau central s'articulent des modules correspondant aux modèles des différents organes du véhicule tels que la direction, la suspension, le système de freinage, le groupe moto-propulseur, etc... La finesse de la modélisation adoptée pour le noyau central conditionne de façon importante la qualité du simulateur et son domaine de validité. Le noyau des simulateurs comporte généralement un modèle quatre roues à 14 degrés de liberté (ddl) comme le modèle complet issu de la collaboration de LMS (entreprise développant l'outil de modélisation AMESIM®) et PSA illustré figure 1.20.

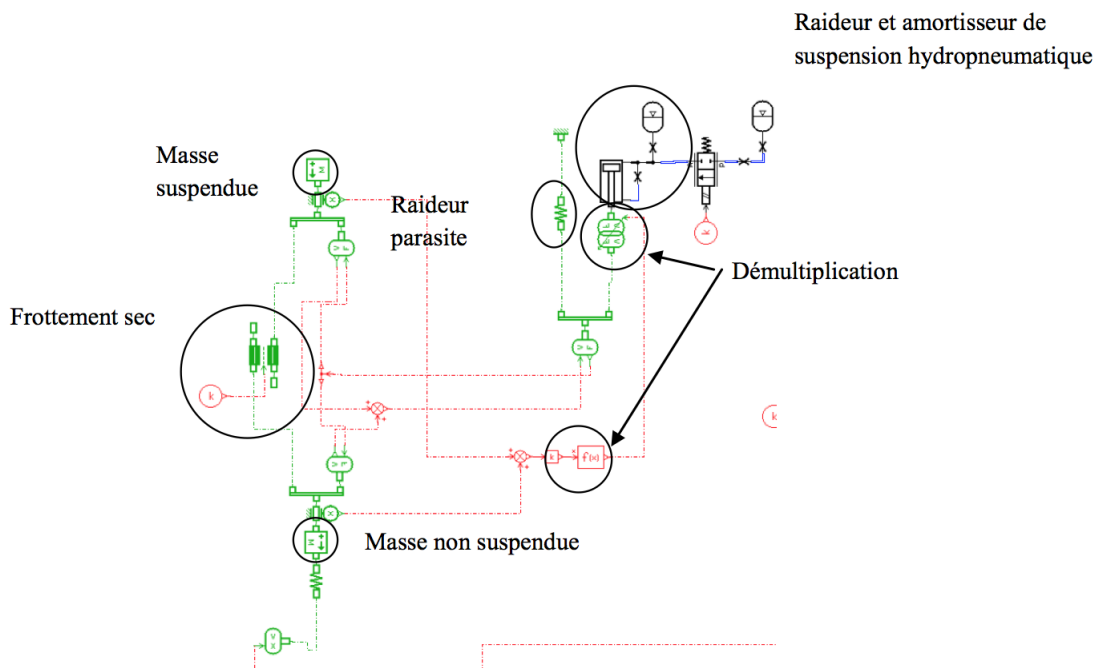


FIGURE 1.20 – Modèle de validation réalisé sous Amesim®

Néanmoins, l'inconvénient est le temps passé pour les simulations. Malgré ces méthodes existantes en co-simulation, celles-ci restent tout de même fastidieuses à mettre en oeuvre. Il est également possible d'employer des modèles plus complexes allant jusqu'à 38 ddl tels que celui développé dans [Venture (2003)]. Dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, on dispose d'un modèle de validation à 14 ddl (figure 1.21) développé sous Matlab/Simulink en interne PSA et accompagné d'une bibliothèque de fichiers définissant l'état paramétrique de différents véhicules, valeurs ayant fait l'objet de recalages à la suite de mesures sur banc, sur piste et sur route.

Plus particulièrement, le véhicule de référence utilisé dans cette étude est une Citroën C5

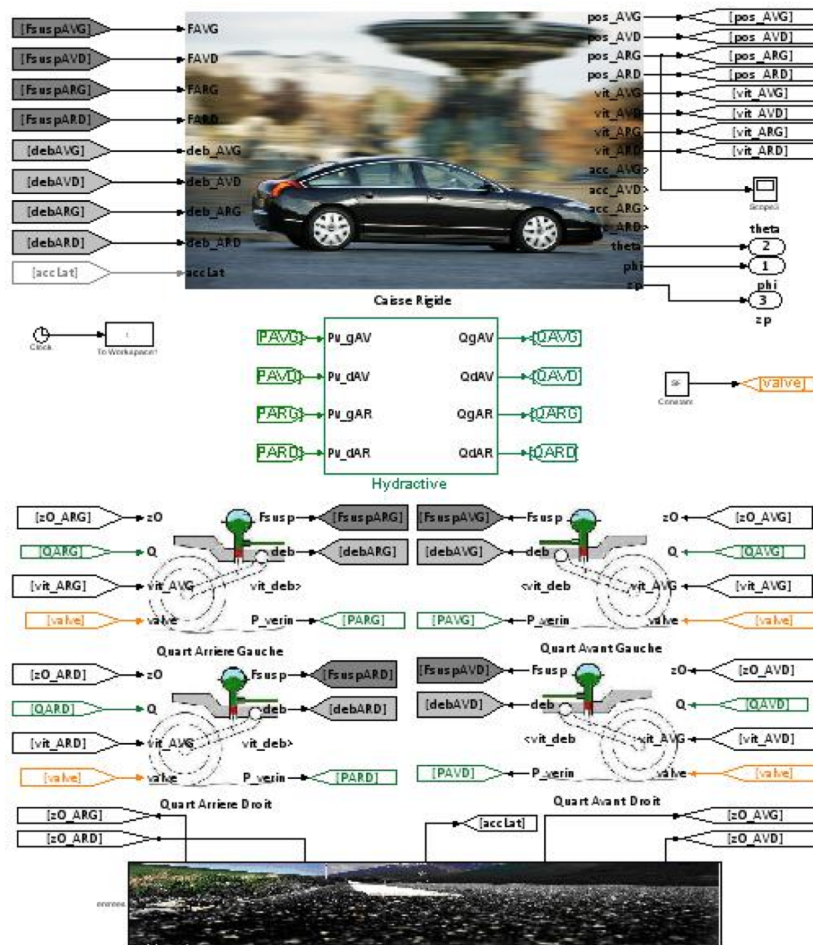


FIGURE 1.21 – Modèle de validation réalisé sous Matlab/Simulink

hydractive de série (figure 1.22). Les différents phénomènes physiques présents (notamment non linéaires) sont pris en compte tels que les frottements secs, les raideurs parasites, les lois d’amortissement, la compressibilité du fluide, les canalisations... Ce modèle permet de valider le comportement dynamique et d’étudier l’impact d’un nouveau dimensionnement ou d’une nouvelle architecture de suspension sur le comportement dynamique du véhicule complet [Rizzo (2012)].



FIGURE 1.22 – Véhicule Citroën C5 lors de tests sur un banc quatre vérins



1.6.2 Modèle d'analyse à l'échelle d'un quart de véhicule

Pour faciliter l'analyse, le degré de complexité est diminué en exploitant la symétrie du véhicule, permettant alors de passer du véhicule complet (14 ddl) au quart de véhicule (2 ddl). L'objectif est alors de disposer d'un modèle d'analyse qui se veut générique et indépendant de l'architecture de la suspension utilisée. La figure 1.23 représente la schématisation et le paramétrage d'un tel modèle où les m_i représentent les masses non suspendue ($i = 1$) et suspendue ($i = 2$). La schématisation des éléments de la suspension se veut volontairement générique car il n'y a, à ce stade, pas de distinction faite entre les architectures traditionnelles et complexes. $f_0(t)$ est une source d'effort, S_e , utilisée pour modéliser les reports de charge et $v_0(t)$ une source de flux, S_f , représentant la vitesse verticale du point de contact pneumatique-sol. Les $v_i(t)$ désignent les vitesses verticales des masses non suspendue ($i = 1$) et suspendue ($i = 2$) dont les expressions sont données par

$$v_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t f_{\Sigma i}(\tau) d\tau + v_i(0) , \quad (1.6.2)$$

où $f_{\Sigma i}(t)$ représente la somme algébrique des efforts extérieurs appliqués à la masse m_i , soit :

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) = f_1(t) + f_s(t) - m_1 g \\ f_{\Sigma 2}(t) = f_0(t) - f_s(t) - m_2 g \end{cases} , \quad (1.6.3)$$

avec $f_1(t)$ la force verticale développée par le pneumatique sur la masse m_1 , $f_s(t)$ la force verticale appliquée par la suspension sur la masse m_2 et g l'accélération de pesanteur. Pour une pression de gonflage et une taille données du pneumatique, la force $f_1(t)$ dépend de manière non linéaire de la déformation et de la vitesse de déformation verticales du pneumatique. De la même manière, pour une élastocinématique donnée du train roulant [Gillespie (1992)], la force $f_s(t)$ développée par la suspension dépend de manière non linéaire du débattement et de la vitesse de débattement.

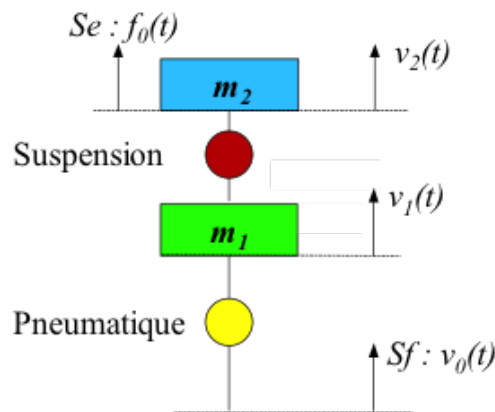


FIGURE 1.23 – Schématisation et paramétrage du modèle d'analyse $\frac{1}{4}$ véhicule

1.6.3 Modélisation du pneumatique : Pacejka

Le pneumatique

Après avoir étudié l'influence de la suspension sur la dynamique verticale et avant d'analyser son influence sur la dynamique globale du véhicule, il apparaît essentiel de rappeler le



comportement du pneumatique. En effet, le pneumatique est le seul élément de contact entre le véhicule et le sol. Cette zone de contact est appelée **aire de contact**.

En fonctionnement, le pneumatique génère plusieurs types d'efforts :

- les efforts longitudinaux, responsables de l'accélération ou du freinage,
- les efforts latéraux, permettent au véhicule de négocier un virage.

Exceptés les efforts aérodynamiques, toutes les forces et moments externes appliqués sur un véhicule sont essentiellement résultants du contact entre le pneumatique et le sol. Ainsi, la connaissance et la compréhension des propriétés des pneumatiques, notamment l'étude des forces et moments développés au niveau de l'aire de contact, sont particulièrement importantes pour toute étude de comportement routier des véhicules de tourisme.

Les roues pneumatiques d'un véhicule de tourisme ont trois rôles essentiels :

- assurer l'adhérence à la route permettant au véhicule d'avoir une bonne tenue de route ;
- transmettre les forces motrices pour développer les efforts longitudinaux qui permettent au conducteur d'accélérer ou de freiner.

Les composantes du pneumatique

Le pneumatique est un assemblage de matériaux aux propriétés diverses dont la confection requiert un grand savoir faire, c'est ce qu'on appelle un composite. Les composantes d'un pneumatique sont illustrés figure 1.24 :

1. une **couche d'un caoutchouc synthétique très étanche à l'air**. Cette feuille va se trouver à l'intérieur du pneu et fera fonction de chambre à air,
2. la **nappe-carcasse**. Cette carcasse est composée de minces câbles en fibres textiles disposés en arceaux droits et collés au caoutchouc. Ces câbles sont un élément clé de la structure du pneu et vont lui permettre de résister à la pression. Dans une nappe de pneu automobile, il y a environ 1400 câbles qui peuvent chacun résister à une force de 15 kg,
3. un **retournement de nappe carcasse**. Son rôle est de transmettre les couples moteur et freineur de la jante vers l'aire de contact au sol,
4. les **tringles** servent à serrer le pneu sur la jante. Elles peuvent supporter jusqu'à 1800 kg sans risque de rupture,
5. les **flancs** en gomme souple vont protéger le pneu des chocs qui pourraient endommager la carcasse, comme les chocs contre les trottoirs, par exemple. Une gomme dure assure la liaison entre le pneu et la jante,
6. les **nappes-sommet**. Armées de câbles en acier très fins mais très résistants, elles sont croisées obliquement et collées l'une sur l'autre. Le croisement de leur fils avec ceux de la carcasse forme des triangles indéformables. Dénommée triangulation, cette disposition assure la rigidification du sommet. Ces nappes, qui ceinturent tout le sommet du pneu, ont un rôle très complexe :
 - elles doivent être suffisamment rigides dans le sens circonférentiel du pneu pour ne pas s'étirer sous l'effet de la centrifugation, afin de maîtriser parfaitement le diamètre du pneu, quelles que soient les conditions d'utilisation,
 - elles doivent aussi être rigides dans le sens transversal pour résister aux efforts de dérive. Mais elles doivent également être souples dans le sens vertical pour "boire l'obstacle",
7. la **bande de roulement** est posée par dessus les nappes sommet. Cette partie du pneu, qui reçoit les sculptures, est en contact avec la route. Dans l'aire de contact au sol, la bande de roulement doit pouvoir résister à des efforts très importants. Le

mélange qui la constitue doit être adhérent sur tous types de sols, résister à l'usure, à l'abrasion et doit s'échauffer faiblement.



FIGURE 1.24 – *Éléments du pneumatique*

Les forces et moments liés au pneumatique

Le pneumatique est un système sujet aux forces et moments externes. Ces forces et moments sont exprimés dans un repère lié à la roue. Ce repère, mobile et utilisé pour décrire l'orientation de la roue, correspond aux normes ISO (International Organization for Standardization). L'origine R du repère $R_R = (R, x_R, y_R, z_R)$ coïncide avec le centre de l'aire de contact, comme présenté figure 1.25.

La nature des efforts est liée à un certain nombre d'interactions :

- interaction entre la roue et la chaussée ;
- interaction entre la roue et le système de suspension ;
- interaction entre la roue et les éléments de système de direction (à travers des manoeuvres du conducteur).

Ces efforts sont aussi affectés par :

- les perturbations générées par l'environnement (ex : type de chaussée, vent) ;
- les variations dans l'état du véhicule (i.e. vitesse de véhicule, usure du pneumatique, etc.)

Les forces et moments qui interviennent sur le pneumatique, par rapport au repère de référence, sont :

- F_x , la composante de la force suivant l'axe x_R , résultant du contact entre la roue et la chaussée, et représentant la force longitudinale, appelé **effort longitudinal**,
- F_y , la composante de la force suivant l'axe y_R , résultant du contact entre la roue et la chaussée, et représente la force latérale, appelé **effort transversal**,
- F_z , la composante de la force suivant l'axe z_R , résultant du contact entre la roue et la chaussée, appelé **effort normal**.

Un pneumatique est également soumis à des moments autour de chaque axe :

- M_x , le moment autour de l'axe x_R et représentant le **moment de renversement**,
- M_y , le moment autour de l'axe y_R et représentant le **moment de résistance au roulement**,
- M_z , le moment autour de l'axe z_R et représentant le **moment d'auto-alignement**.

Dans la géométrie de la roue, deux angles ont une plus grande importance, l'angle de dérive et l'angle de carrossage.

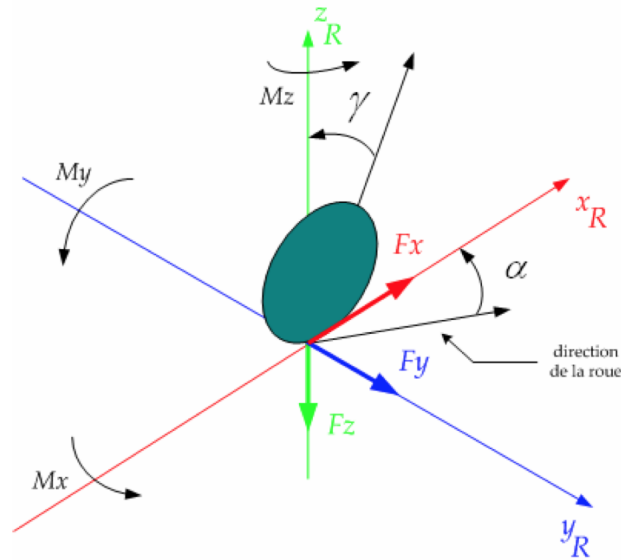


FIGURE 1.25 – Illustration des forces et moments appliqués à la roue

L'**angle de dérive**, noté ici $\Delta_p(t)$ (et indifféremment $\Delta(t)$ ou $\alpha(t)$ dans la littérature), est l'angle entre la tangente à la trajectoire et l'axe portant le vecteur vitesse du point de contact pneumatique-sol, comme illustré figure 1.26. On considère souvent que les dérives $\Delta_p(t)$ des pneumatiques d'un même essieu sont identiques, d'où :

— pour les pneumatiques de l'essieu avant :

$$\Delta_{pvd}(t) = \Delta_{pvg}(t) = \Delta_{pv}(t) = B_{vref}(t) - \Delta_G(t) - \frac{L_{av}}{V_x(t)} \dot{\Psi}(t) , \quad (1.6.4)$$

— pour les pneumatiques de l'essieu arrière :

$$\Delta_{prd}(t) = \Delta_{prg}(t) = \Delta_{pr}(t) = -\Delta_G(t) + \frac{L_{ar}}{V_x(t)} \dot{\Psi}(t) . \quad (1.6.5)$$

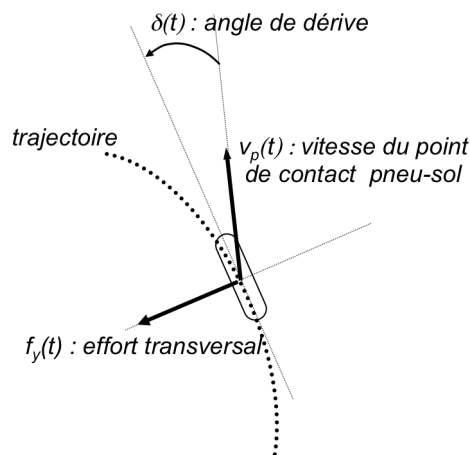


FIGURE 1.26 – Angle de dérive du pneumatique

L'**angle de carrossage**, noté $\gamma(t)$, est l'angle entre le plan de la roue et la verticale au sol et est exprimé en degrés comme illustré figure 1.27. Le carrossage est positif lorsque les



plans médians des roues convergent vers le bas et négatif quand ils convergent vers le haut. La géométrie de suspension de la plupart des véhicules comporte un carrossage légèrement négatif. Ceci va compenser l'effet de la courbure de la route et optimiser le pourcentage de la bande de roulement qui entre en contact avec la chaussée. Pour éviter un ripage des pneus sur le sol, il faut faire converger les roues pour compenser l'effet du carrossage, qui tend à les faire diverger.

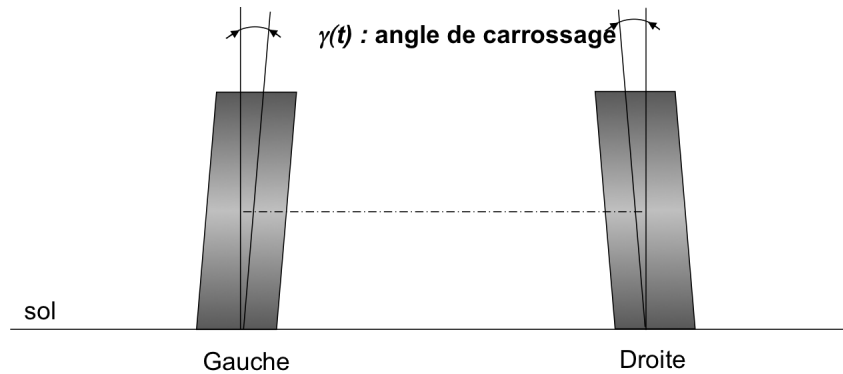


FIGURE 1.27 – Angle de carrossage du pneumatique

L'**adhérence** μ est considérée comme un paramètre incertain compris entre 0.1 (sol verglacé) et 1 (sol sec), identique pour chacune des deux roues.

Le **taux de glissement**, noté $T(t)$, est le paramètre le plus important qui intervient dans la compréhension de la force de traction (respectivement la force de freinage). Il existe plusieurs façons de le définir, la plus simple étant la suivante : l'application d'un couple moteur (respectivement d'un couple de freinage) à la roue est à l'origine de l'apparition d'un taux de glissement (voir figure 1.28).

L'expression du taux de glissement $T(V_x(t), \Omega_r(t))$ est fonction de la vitesse longitudinale $V_x(t)$ du véhicule, de la vitesse angulaire $\Omega_r(t)$ de la roue et du rayon sous charge r_o , et dépend des phases d'accélération ou de freinage, soit :

$$T(V_x(t), \Omega_r(t)) = \begin{cases} T_{acc}(V_x(t), \Omega_r(t)) = 1 - \frac{V_x(t)}{\Omega_r(t) r_o} \geq 0 \Leftrightarrow \Omega_r(t) r_o \geq V_x(t) \\ T_{fre}(V_x(t), \Omega_r(t)) = \frac{\Omega_r(t) r_o}{V_x(t)} - 1 < 0 \Leftrightarrow \Omega_r(t) r_o < V_x(t) \end{cases} \quad (1.6.6)$$

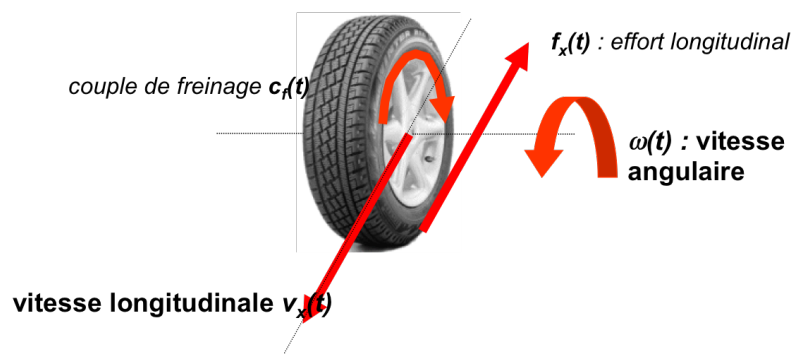


FIGURE 1.28 – Illustration des variables intervenant dans la formule du taux de glissement du pneumatique



Le modèle empirique de Pacejka, ou formule magique

Maintenant que les principaux éléments concernant le pneumatique ont été introduits, il s'agit de s'attacher à la modélisation de celui-ci.

Pour ce faire, différentes modélisations du pneumatique sont disponibles dans la littérature, mais à l'heure actuelle aucun modèle ne répond simultanément et de manière satisfaisante aux quatre points suivants :

- spécification des performances ;
- identification du comportement ;
- simulation ;
- réalisme physique.

En matière de classification, les modèles se répartissent principalement en deux familles :

- les modèles de connaissances (utilisation de lois de friction de Lugre dans [Canudas-de-Wit et al. (2003)], de lois de frottement avec effet Stribeck dans [Gäfvert (2005)], du formalisme bond-graph dans [Zin (2002)], du modèle brosse dans [Pacejka (2002)]);
- les modèles empiriques (formule magique dans [Pacejka (2002)], principe de similitude dans [Radt et al. (1983)] et [Radt (1993)], modèle neuronal dans [Palkovics et al. (1986)]).

Les modèles de connaissances sont construits à partir des lois de la physique et offrent un éclairage sur les mécanismes mis en jeu dans le pneumatique. Malheureusement, ils ne sont valables que dans le cadre d'hypothèses conceptuelles, souvent restrictives, et nécessitent généralement des grandeurs difficiles, voire impossibles, à mesurer (champ de pression dans l'aire de contact, zone d'adhérence, chasse pneumatique, températures).

Les modèles empiriques sont définis uniquement à partir de variables mesurables et pertinentes dans le cadre de la dynamique du véhicule. Ce ne sont généralement que des descriptions macroscopiques fonctionnelles qui ne permettent pas d'expliquer les mécanismes physiques générant les différents phénomènes. Ils facilitent l'expression des efforts du pneumatique qui interviennent dans la dynamique du véhicule. Parmi ces modèles, le modèle de Pacejka est celui le plus souvent utilisé.

Pour **chacune des roues**, les entrées de ce modèle sont :

- l'effort vertical $F_{zvd/g}(t)$,
- la dérive $\Delta_{pvd/g}(t)$,
- l'adhérence μ ,
- le taux de glissement $T(V_x(t), \Omega_r(t))$.

Les sorties du modèle sont :

- l'effort longitudinal $F_{xvd/g}(t)$,
- l'effort transversal $F_{yvd/g}(t)$,
- le moment d'auto-alignement $M_{zad/g}(t)$.

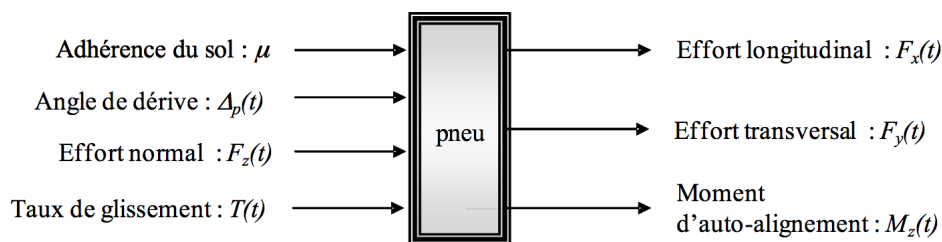


FIGURE 1.29 – *Modèle boîte noire du pneumatique*

Certaines grandeurs étant maintenues constantes lors des mesures sur banc d'essais (telles que la charge verticale, la vitesse du véhicule, la pression de gonflage, le carrossage, l'adhérence,



...), les efforts du pneumatique sont principalement fonction :

- de la charge verticale,
- du taux de glissement longitudinal,
- et de la dérive latérale.

Les caractéristiques qui en découlent sont paramétrées par des macro-coefficients illustrés par la figure 1.30 [Ripert (2006)], à savoir :

- un centre de symétrie paramétré par le couple (S_h, S_v) ,
- une pente à l'origine K ,
- un extremum paramétré par le couple (x_m, D) ,
- une asymptote L .

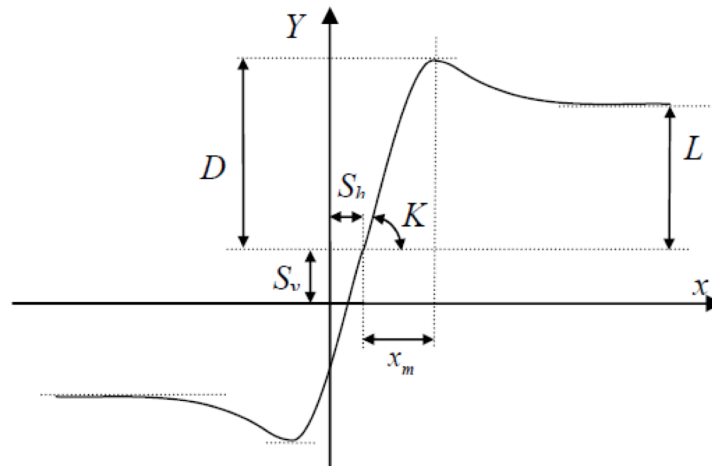


FIGURE 1.30 – Illustration du paramétrage de la formule magique de Pacejka

La **formule magique** permet de décrire ce comportement anti-symétrique à l'aide d'une expression de la forme :

$$Y = \mu D \sin(C \arctan(\varphi)) + S_v, \quad (1.6.7)$$

avec

$$\varphi = (1 - E)B(x + S_h) + E \arctan(B(x + S_h)), \quad (1.6.8)$$

où x représente la dérive ou le taux de glissement et Y l'effort latéral ou longitudinal du pneumatique en fonction de la direction étudiée.

Le facteur de forme C est donné par :

$$C = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{L}{D}\right), \quad (1.6.9)$$

le facteur d'échelle B est lié à la pente à l'origine par :

$$B = \frac{K}{CD}, \quad (1.6.10)$$

quant au facteur de courbure E , son expression est de la forme :

$$E = \frac{B(x_m + S_h) - \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)}{B(x_m + S_h) - \arctan B((x_m + S_h))}. \quad (1.6.11)$$



Selon les composantes à caractériser, on a les contraintes suivantes sur C :

- pour les efforts longitudinal et latéral : $1 < C < 2$. La courbe a ainsi un seul zéro et 2 extrema,
- pour le moment d'auto-alignement : $2 < C < 3$. La courbe a ainsi 3 zéros et 4 extrema.

De plus, pour une grande partie des pneumatiques commercialisés, les macros paramètres S_v et S_h sont souvent considérés comme nuls. Cette même hypothèse est posée dans la suite des calculs.

L'expression (1.6.7) de l'effort Y en fonction de x ainsi définie pour les directions transversale ou longitudinale permet de calculer sa dérivée (linéarisation), soit :

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial X} \right|_{x=x^*} = BCD \frac{\left[1 - E + \frac{E}{1 + (Bx)^2} \right]}{1 + B^2 \left[(1 - E)x + \frac{E}{B} \cdot \arctan(Bx) \right]^2 \cos \left[C \arctan \left(B \left[(1 - E)x^* + \frac{E}{B} \arctan(Bx) \right] \right) \right]}, \quad (1.6.12)$$

où x^* représente le point d'équilibre autour duquel la dérivée est calculée. Ces dérivées sont notées c_x pour la dérivée de l'effort longitudinal, fonction du taux de glissement τ , et c_y pour celle de l'effort transversal, fonction de la dérive δ , soit :

$$\begin{cases} f_x = c_x \tau \\ f_y = c_y \delta \end{cases} . \quad (1.6.13)$$

Ces dérivées sont respectivement nommées **rigidités de dérive** et **rigidité de glissement**. Le lecteur trouvera dans [Schuring et al. (1994)] une étude complète de l'influence des macro-coefficients en fonction de leurs valeurs.

Plus précisément, la relation entre l'**effort longitudinal** $F_x(t)$ et le **taux de glissement** $T(V_x(t), \Omega_r(t))$ est donnée **pour chaque roue** par :

$$F_x(t) = \mu_x D_x \sin \left[C_x \arctan \left(B_x \left[(1 - E_x)T(t) + \frac{E_x}{B_x} \arctan(B_x T(t)) \right] \right) \right], \quad (1.6.14)$$

où les macroparamètres B_x , C_x , D_x et E_x dépendent de microparamètres et de l'effort normal F_z .

La relation entre l'**effort transversal** $F_y(t)$ et la **dérive** $\Delta_p(t)$ est donnée **pour chaque roue** par :

$$F_y(t) = \mu_y D_y \sin \left[C_y \arctan \left(B_y \left[(1 - E_y)T(t) + \frac{E_y}{B_y} \arctan(B_y \Delta_p(t)) \right] \right) \right], \quad (1.6.15)$$

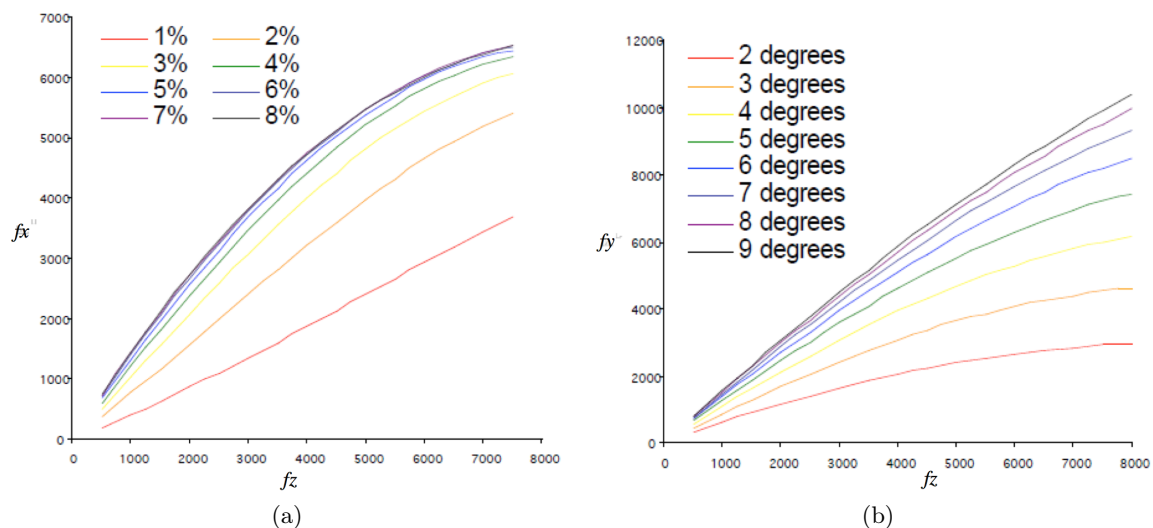
où les macroparamètres B_y , C_y , D_y et E_y dépendent de microparamètres et de l'effort normal F_z .

Les macro-coefficients définis précédemment dépendent des efforts verticaux F_z appliqués sur chacune des roues [Olsen et al. (2008)], comme illustré sur la figure 1.31. En effet, les paramètres K , D et x_m sont directement liés aux F_z comme le précisent les équations du tableau 1.1 :

Ces efforts verticaux F_z dépendent d'une partie statique F_z^e (répartition du poids du véhicule sur chacune des roues) et d'une partie dynamique.



Macro-coefficients	pour l'effort longitudinal	pour l'effort latéral
D	$b_1 F_z^2 + b_2 F_z$	$a_1 F_z^2 + a_2 F_z$
K	$(b_3 F_z^2 + b_4 F_z) e^{-b_5 F_z}$	$a_3 \sin \left(2a \tan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right) \left(1 - a_5 \left(\frac{S_h - a_9 F_z - a_{10}}{a_8} \right) \right)$
x_m		$\frac{D}{K} - S_h$
S_h	$b_9 F_z^2 + b_{10}$	$a_9 F_z^2 + a_{10}$

TABLE 1.1 – Dépendance des macro-coefficients du modèle de Pacejka à l'effort vertical F_z FIGURE 1.31 – Exemple de variations des efforts d'un pneumatique ($F_x(a)$ et $F_y(b)$) en fonction de F_z pour différentes valeurs du taux de glissement (a) et de la dérive (b)

Cette partie montre que le pneumatique joue un rôle essentiel en ce qui concerne la dynamique du véhicule. Son comportement dépend directement de la dérive (donc de la direction) et du couple à la roue (donc du freinage ou de l'accélération) comme l'illustrent bien les équations du modèle de Pacejka. Ce modèle a le mérite de mettre également en évidence le couplage avec les efforts verticaux qui viennent influencer la valeur des coefficients de pondération de la dérive et du taux de glissement. Ces efforts verticaux dépendent, quant à eux, indirectement de la suspension, mettant ainsi en évidence le couplage entre la suspension et les dynamiques transversale et longitudinale du véhicule. La procédure de mesure des macro-coefficients est réalisée sur banc [Brossard (2006)].

1.7 Conclusion

L'étude de la biomécanique de l'être humain facilite la synthèse d'une nouvelle suspension puisqu'elle met en exergue différentes zones fréquentielles où celle-ci joue un rôle particulier :



- en dessous de 1 Hz, de ne pas amplifier le contenu spectral des sollicitations route ;
- entre 2,5 et 8 Hz (zone fréquentielle dans laquelle la majorité des organes internes sont sollicités) et autour du mode de roue (1 Hz), de diminuer le contenu spectral des sollicitations route transmis à la caisse.

La classification d'un point de vue fonctionnelle des architectures de suspension fait ressortir deux grandes classes : les architectures dites traditionnelles composées seulement d'un combiné passif ressort-amortisseur par quart de véhicule, et les autres, appelées architectures complexes. Cette distinction permet de soulever 3 dilemmes qui constituent la problématique générale de ce mémoire :

- l'interdépendance **isolation vibratoire - tenues de caisse et de roue**,
- l'interdépendance **isolation vibratoire - tenue de caisse sous sollicitations du conducteur**,
- et l'interdépendance **masse - amortissement**.

La structure de ce mémoire repose sur le principe de domaines de fonctionnement et domaines d'étude avec notamment une adéquation entre les premiers et seconds.

De plus, l'étude de la suspension nécessite la mise en place de modèles adaptés allant du modèle de véhicule complet pour la validation au modèle réduit pour la synthèse introduits dans ce chapitre.



Chapitre 2

Systemes à Dérivées Non Entières : SDNE

Sommaire

2.1	Introduction	38
2.2	Opérateur intégral-différentiel d'ordre non entier	38
2.2.1	Intégration non entière	38
2.2.2	Interprétation géométrique	40
2.2.3	Interprétation système	41
2.3	Synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné	44
2.3.1	Approche fréquentielle	44
2.3.2	Approche temporelle	46
2.4	Systemes d'ordre non entier	47
2.4.1	Systeme de 1 ^{ère} espèce	48
2.4.2	Systeme de 2 ^{ème} espèce	58
2.5	Conclusion	76



2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principaux concepts et outils en matière de Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) utilisés au chapitre 3 avec la suspension CRONE et au chapitre 6 avec la définition d'une butée dissipative innovante de fin de course.

Le concept de dérivation non entière date de 1695 lorsque L'Hospital et Leibniz s'interrogeaient dans leurs correspondances sur la signification d'une dérivée d'ordre 0.5 [Dugowson (1994)]. Au cours du XVIII^{ième} siècle, il y eu seulement quelques contributions sur ce sujet, notamment de la part d'Euler qui souleva de nouveau le problème de la définition d'une dérivée d'ordre d'ordre non entier. Plus tard, au XIX^{ième} siècle, Liouville et Riemann donnèrent une définition cohérente de la dérivée d'ordre non entier. Mais, c'est surtout au cours de la deuxième moitié du XX^{ième} siècle que des avancées majeures concernant la théorie de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier ont été réalisées [Oldham et al. (1974)] [Miller et al. (1993)] [Samko et al. (1993)] [Oustaloup (1995)]. Aujourd'hui, au XXI^{ième} siècle, dans le domaine des sciences pour l'ingénieur, les systèmes d'ordre non entier sont étudiés par un nombre d'auteurs de plus en plus important. En effet, il y a un grand nombre de systèmes physiques dont le comportement dynamique peut être décrit avec parcimonie grâce à des modèles d'ordre non entier : processus électrochimiques [Sabatier et al. (2006)], diffusion thermique dans un milieu homogène semi-infini [Lin (2001)] [Cois (2002)], polarisation diélectrique [Bohannon (2000)], matériaux visco-élastiques [Moreau et al. (2002)] [Ramus-Serment et al. (2002)].

Dans ce chapitre 2, l'étude se voulant générique, aucun domaine de la physique n'est privilégié, d'où l'emploi d'une terminologie générale en ce qui concerne les variables de puissance, à savoir le flux généralisé $f(t)$ (vitesse, courant, débit, flux thermique,...) et l'effort généralisé $e(t)$ (force, tension, pression, température,...), et ce telles qu'elles sont définies dans l'approche Bond-Graph. Néanmoins, conscient que tous les lecteurs ne sont pas nécessairement familiarisés avec l'approche Bond-Graph, les schémas retenus pour représenter ces systèmes relèvent plus des schémas "électriques" et "mécaniques" respectant l'analogie énergétique, et ce dans la mesure où la lecture de ces schémas est plus abordable pour un non spécialiste que ne le sont les schémas Bond-Graph.

Après cette introduction générale pour situer le contexte, la suite est d'abord consacrée aux définitions et aux interprétations de l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier. Ensuite, il s'agit de présenter la synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence selon deux approches, d'abord fréquentielle puis temporelle. La première est basée sur le principe d'une distribution récursive de N pôles et N zéros tandis que la seconde réside en une discrétisation modale de la représentation diffusive. Enfin, les études de la dynamique des Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) de 1^{ère} et 2^{ème} espèces sont développées, permettant ainsi de bien mettre en évidence les propriétés les plus remarquables de tels systèmes.

2.2 Opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier

2.2.1 Intégration non entière

Inspirée de la formule de Cauchy [Miller et al. (1993)] [Oldham et al. (1974)] [Samko et al. (1993)], la définition de Riemann-Liouville de l'**intégrale d'ordre m** d'une fonction $v(t)$, notée ${}_0I_t^m v(t)$ avec $m > 0$, a été établie au XIX^{ième} siècle sous la forme :

$${}_0I_t^m v(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m)(t-\tau)^{1-m}} v(\tau) d\tau, \quad (2.2.1)$$



avec $t > 0$, $m \in \mathbb{R}^+$ et où $\Gamma(m)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(m) \triangleq \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} dx, \quad (2.2.2)$$

où x est une variable muette d'intégration.

Dans le cadre d'une approche système où $v(t)$ désigne l'entrée et $x(t)$ la sortie, l'intégrale d'ordre m de $v(t)$, notée $x(t) = {}_0I_t^m v(t)$, soit :

$$x(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m)(t-\tau)^{1-m}} v(\tau) d\tau, \quad (2.2.3)$$

peut être interprétée comme le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle $h_m(t)$ du système, soit :

$$h_m(t) = \frac{1}{\Gamma(m)t^{(1-m)}}, \quad (2.2.4)$$

et son entrée $v(t)$, soit :

$$x(t) \triangleq \int_0^t h_m(t-\tau)v(\tau)d\tau = h_m(t) * v(t). \quad (2.2.5)$$

La transformée de Laplace de $h_m(t)$, notée $I^m(s)$, qui n'est autre que la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre $m > 0$, est donnée par [Oldham et al. (1974)] :

$$I^m(s) = TL\{h_m(t)\} = TL\left\{\frac{1}{\Gamma(m)t^{(1-m)}}\right\} = \frac{1}{s^m}. \quad (2.2.6)$$

La figure 2.1 présente les réponses fréquentielles et impulsionnelles d'un intégrateur généralisé pour des ordres m compris entre 0 et 2.

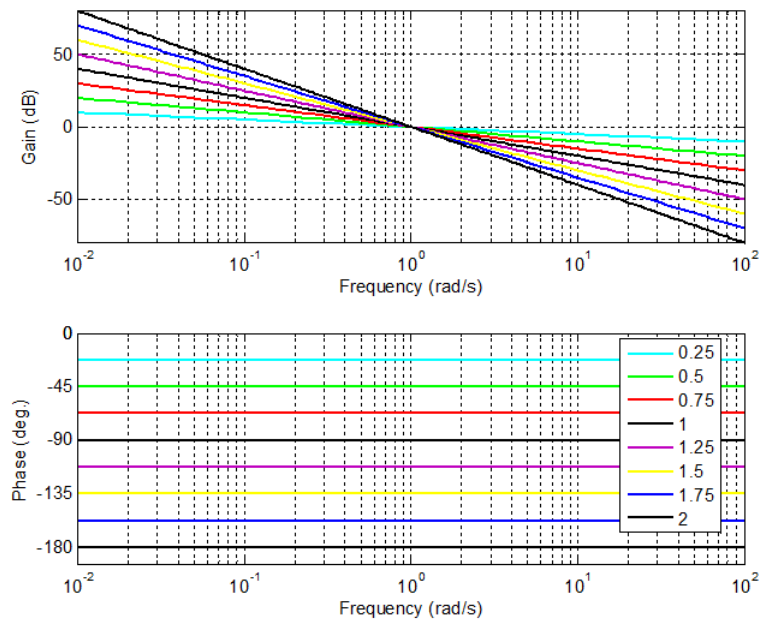
Par ailleurs, la dérivation non entière est l'opération duale de l'intégration non entière [Trigeassou et al. (2011)]. En effet, si

$$x(t) = {}_0I_t^m v(t) \text{ ou } X(s) = \frac{1}{s^m} V(s), \quad (2.2.7)$$

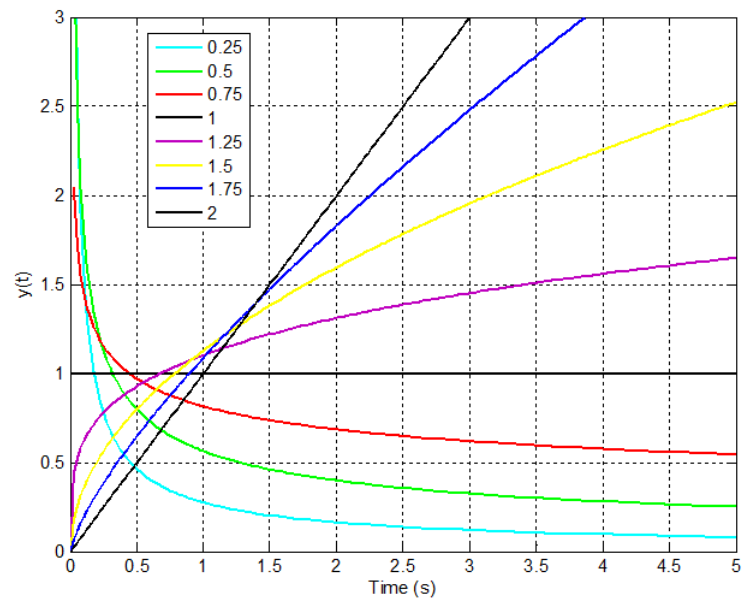
alors

$$v(t) = D^m(x(t)) \text{ ou } V(s) = s^m X(s). \quad (2.2.8)$$

Cette définition de la dérivée d'ordre non entier basée sur l'opérateur $I^m(s)$, sans formulation analytique de $D^m(x(t))$, est la définition implicite de la dérivation d'ordre non entier. Toutefois, cette définition implicite existe seulement à l'intérieur d'un système bouclé, comme c'est le cas lors de la simulation des équations différentielles d'ordre non entier (cf. paragraphe 2.4).



(a)



(b)

FIGURE 2.1 – Réponses fréquentielles (a) et impulsionnelles (b) d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

2.2.2 Interprétation géométrique

La difficulté d'attribuer à cet opérateur un sens géométrique [Adda (1997)] [Moreau et al. (2005)] [Nigmatullin (1992)] [Podlubny (2005)], comparable à celui que l'on accorde à l'intégration d'ordre entier, n'est certes pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté.

Néanmoins, dans le cas où l'ordre m est réel, la définition (2.2.1) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $v(t)$ pondéré par un facteur d'oubli représenté



par la fonction $h_m(t - \tau)$ définie par :

$$h_m(t - \tau) \triangleq \frac{1}{\Gamma(m)(t - \tau)^{1-m}}. \quad (2.2.9)$$

Ainsi, si m est égal à 1, ${}_0I_t^m v(t)$ est une intégrale classique, toutes les valeurs de $v(t)$ ayant le même "poids". Si m est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de "poids" que les plus anciennes. La figure 2.2 représente les variations du facteur d'oubli $h_m(t - \tau)$ pour des valeurs de m comprises entre 0.1 et 1. A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration m mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion [Cois (2002)].

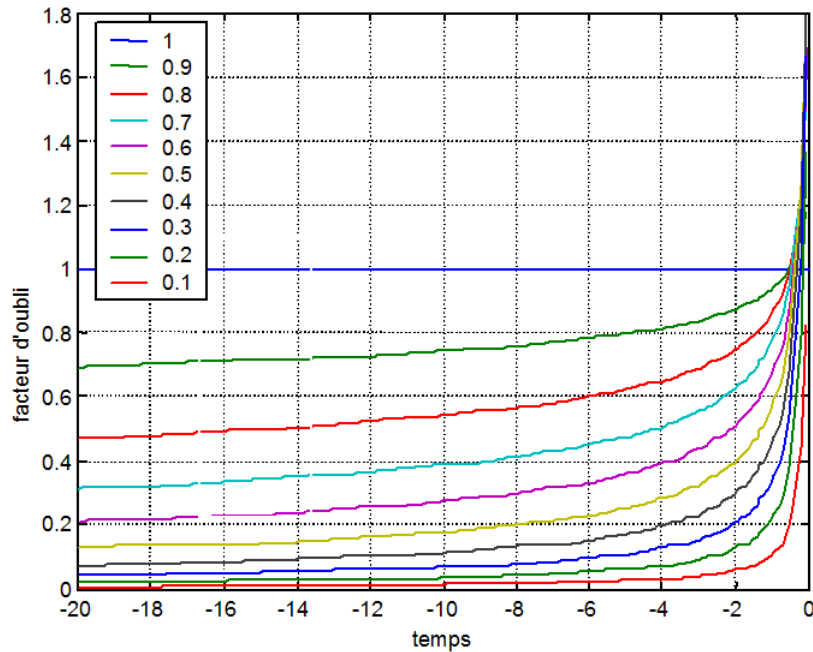


FIGURE 2.2 – Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli $h_m(t - \tau)$ dans le cas d'une intégrale d'ordre réel m tel que $0.1 < m < 1$

2.2.3 Interprétation système

Dans le domaine de la modélisation, l'approche bond-graph [Dauphin-Tanguy (2000)] a démontré tous les avantages de l'utilisation de la causalité intégrale pour la simulation numérique lors de l'étude de la dynamique des systèmes. Par exemple, avec un élément C de stockage d'énergie (en bond-graph l'élément C, appelé **capacitor** par les anglo-saxons, est utilisé pour représenter les phénomènes capacitifs des ressorts, des barres de torsion, des accumulateurs électriques et hydropneumatiques,...), la relation causale entre ses variables de puissance est donnée par :

$$e_C(t) = \frac{1}{c} \int_0^t f_C(\tau) d\tau + e_C(0), \quad (2.2.10)$$

où $f_C(t)$ et $e_C(t)$ représentent le flux et l'effort généralisés, $e_C(0)$ une condition initiale (CI) sur l'effort et $c \in \mathbb{R}^+$ un paramètre caractéristique de l'élément C. Avec un élément I de stockage d'énergie (en bond-graph l'élément I est utilisé pour représenter les phénomènes



inertiels des masses en translation, des inerties en rotation, des inductances électriques et hydrauliques,...), la relation causale entre ses variables de puissance est donnée par :

$$f_I(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_I(\tau) d\tau + f_I(0) , \quad (2.2.11)$$

où $f_I(t)$ et $e_I(t)$ représentent le flux et l'effort généralisés, $f_I(0)$ une condition initiale (CI) sur le flux et $l \in \mathbb{R}^+$ un paramètre caractéristique de l'élément I .

La figure 2.3 représente deux schémas fonctionnels illustrant les relations de causalité des éléments C et I .

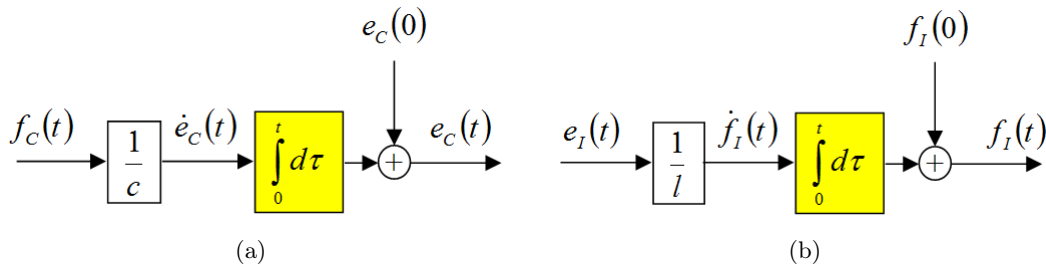


FIGURE 2.3 – Schémas fonctionnels illustrant les relations de causalité des éléments C (a) et I (b)

Pour les systèmes d'ordre non entier, la causalité intégrale conduit à utiliser un intégrateur d'ordre non entier, appelé **fractor** par les anglo-saxons (contraction de **fractional integrator**) [Bohannon (2000)]. L'intérêt d'utiliser la causalité intégrale est le même que pour les systèmes rationnels [Trigeassou, et al. (1999)] [Trigeassou et al. (2011)].

L'introduction de la forme diffusive [Trigeassou et al. (2011)] facilite l'interprétation système de l'intégrateur d'ordre non entier. En effet, cet intégrateur est un système linéaire qui possède une infinité de variables d'état $z(\omega, t)$ distribuées fréquemment et vérifiant l'équation différentielle du premier ordre en t , soit :

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + v(t) . \quad (2.2.12)$$

La sortie $x(t)$ de l'intégrateur est alors la somme de toutes les contributions pondérées des états $z(\omega, t)$, soit :

$$x(t) = \int_0^\infty \mu_m(\omega) z(\omega, t) d\omega , \quad (2.2.13)$$

où $\mu_m(\omega)$ est le facteur de pondération défini par

$$\mu_m(\omega) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \omega^{-m} \text{ avec } 0 < m < 1 . \quad (2.2.14)$$

La figure 2.4 présente les variations de $\mu_m(\omega)$ pour $0 < m < 1$ et $10^{-1} \text{rad/s} < \omega < 10 \text{rad/s}$.

Remarque

Il est important de noter que, contrairement à un élément I ou C dont les sorties des intégrateurs d'ordre 1 sont des variables d'état (variables de puissance : flux ou effort généralisés utilisées notamment pour calculer l'énergie stockée), la sortie $x(t)$ d'un intégrateur d'ordre non

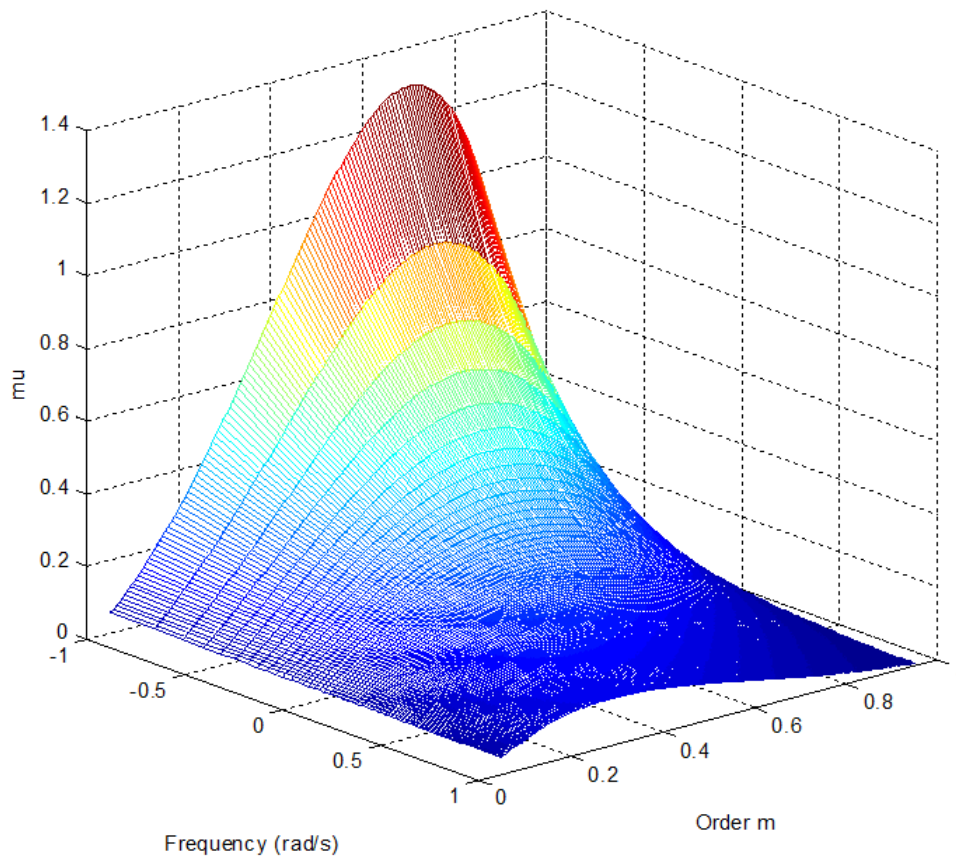


FIGURE 2.4 – Variations de $\mu_m(\omega)$ pour $0 < m < 1$ et $10^{-1} \text{rad/s} < \omega < 10 \text{rad/s}$

entier n'est pas une variable d'état. C'est la raison pour laquelle $x(t)$ est appelée "pseudo-état" dans la littérature récente [Trigeassou et al. (2011)].



2.3 Synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné

Aussi bien dans le cadre de l'analyse que dans celui de la synthèse (numérique et analogique) de systèmes d'ordre non entier [Oustaloup (1995)], les comportements non entier se situent souvent sur un intervalle tempo-fréquentiel borné. A ce constat, et par rapport aux systèmes entiers, s'ajoute l'augmentation du degré de complexité en matière de simulation temporelle liée à la notion de mémoire longue qui caractérise de tels systèmes. C'est la raison pour laquelle de nombreuses méthodes de synthèse ont été développées au cours de ces trente dernières années. Dans [Aoun (2004)] et [Podlubny (2002)], un tour d'horizon de plusieurs méthodes de synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier est proposé. Parmi celles-ci on trouve :

- une approche fréquentielle développée par Oustaloup depuis le milieu des années 70 [Oustaloup (1995)] ;
- une approche temporelle développée par Montseny vingt ans après et reprise plus récemment par Trigeassou [Trigeassou et al. (2011)], notamment pour calculer les conditions initiales d'un système d'ordre non entier.

2.3.1 Approche fréquentielle

Dans de nombreux domaines de la physique, ainsi que dans de nombreuses applications, les comportements d'ordre non entier sont observés ou synthétisés sur des intervalles bornés en fréquence [Trigeassou et al. (1999)] [Lin (2001)] [Cois (2002)] [Poinot et al. (2004)] [Serrier et al. (2007)]. C'est la raison pour laquelle la fonction de transfert

$$I^m(s) = \frac{1}{s^m} \quad (2.3.1)$$

est remplacée par une fonction de transfert bornée en fréquence $\omega_b I_{\omega_h}^m(s)$ de la forme :

$$\omega_b I_{\omega_h}^m(s) = \frac{K_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^\nu, \quad (2.3.2)$$

où

$$\begin{cases} \nu \in \mathbb{R}^+, \omega_b \in \mathbb{R}^{*+}, \omega_h \in \mathbb{R}^{*+}, \omega_b \ll \omega_h \text{ et } K_0 \in \mathbb{R}^{*+} \\ K_0 = \omega_m^{1-m} \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_h}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_b}\right)^2} \right)^{\nu/2} \\ \omega_m = \sqrt{\omega_b \omega_h} \end{cases}, \quad (2.3.3)$$

expression qui traduit (figure 2.5) un comportement intégrateur d'ordre :

- 1 aux basses et hautes fréquences,
- $m = (1 - \nu)$ aux moyennes fréquences, de part et d'autre de la fréquence médiane ω_m .

Remarque

Une variante peut être introduite aux basses et hautes fréquences selon la valeur m . Ainsi :

- si $0.5 < m < 1$, alors un comportement intégrateur d'ordre 1 est imposé aux basses et hautes fréquences (comme précédemment) ;



- mais si $0 < m < 0.5$, alors un comportement d'ordre 0 (comportement proportionnel) peut être imposé aux basses et hautes fréquences.

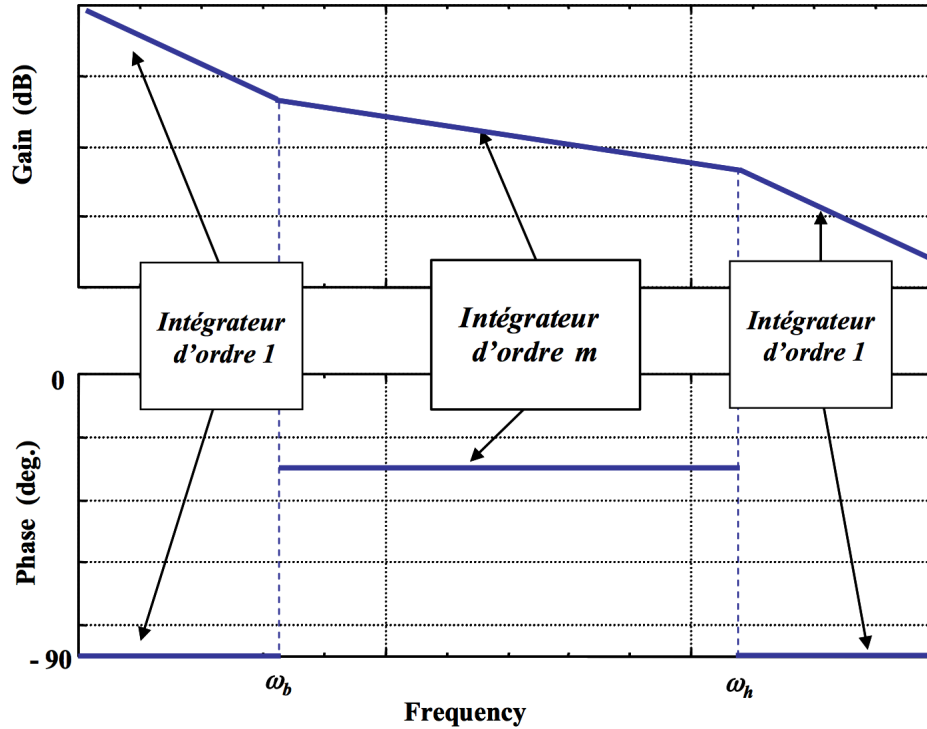


FIGURE 2.5 – Diagrammes asymptotiques de Bode d'un intégrateur non entier borné en fréquence

La synthèse repose alors sur une distribution récursive de N zéros et N pôles réels, soit :

$$\omega_b I_{\omega_h}^m(s) \approx I_N(s), \quad (2.3.4)$$

avec

$$I_N(s) = \frac{K_0}{s} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{zi}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pi}}} \right), \quad (2.3.5)$$

où les relations de passage entre les paramètres de la forme non entière $\omega_b I_{\omega_h}^m(s)$ (2.3.2) et ceux de la forme rationnelle $I_N(s)$ (2.3.5) sont données par [Oustaloup (1995)] :

$$\begin{aligned} \alpha\eta &= \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-\nu}, \quad \alpha = (\alpha\eta)^\nu, \\ \omega_{z1} &= \sqrt{\eta} \omega_b, \quad \omega_{pN} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h, \quad \frac{\omega_{pi}}{\omega_{zi}} = \alpha > 1, \\ \frac{\omega_{zi+1}}{\omega_{pi}} &= \eta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{zi+1}}{\omega_{zi}} = \frac{\omega_{pi+1}}{\omega_{pi}} = \alpha\eta > 1, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$



où α et η sont appelés facteurs récurrents.

Une décomposition de l'expression (2.3.2) de $I_N(s)$ en éléments simples facilite le passage dans le domaine temporel, soit :

$$I_N(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{K_i}{s + \omega_{pi}} \right), \quad (2.3.7)$$

avec

$$K_i = \frac{K_0(\omega_{pi} - \omega_{zi})}{\omega_{zi}} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{1 - \frac{\omega_{pi}}{\omega_{zj}}}{1 - \frac{\omega_{pj}}{\omega_{zj}}} \right), \quad (2.3.8)$$

décomposition à laquelle est associée une représentation d'état de la forme [Trigeassou et al. (2011)] :

$$\begin{cases} \dot{w} = A_F w + B_F v \\ x = C_F w \end{cases}, \quad (2.3.9)$$

où

$$\underbrace{w}_{((N+1) \times 1)} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_i \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \underbrace{A_F}_{((N+1) \times (N+1))} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_{p1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_{pi} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -\omega_{pN} \end{bmatrix}, \quad (2.3.10)$$

$$\underbrace{B_F}_{((N+1) \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underbrace{C_F}_{(1 \times (N+1))} = [K_0 \quad K_1 \quad \dots \quad K_i \quad \dots \quad K_N].$$

2.3.2 Approche temporelle

L'approche temporelle réside dans une discrétisation modale de la représentation diffusive [Trigeassou et al. (2011)]. Ainsi, les relations (2.2.12), (2.2.13) et (2.2.14) deviennent :

$$\dot{z}(\omega_k, t) = \dot{z}_k(t) = -\omega_k z_k(t) + v(t), \quad \text{pour } k = 1 \dots K, \quad (2.3.11)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \mu_m(\omega_k) z_k(t) \Delta\omega_k, \quad (2.3.12)$$

et

$$\mu_m(\omega_k) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \omega_k^{-m} \quad \text{avec } 0 < m < 1. \quad (2.3.13)$$

Afin d'obtenir un comportement intégrateur d'ordre 1 au-delà des bornes, c'est-à-dire aux basses et hautes fréquences conformément à l'approche fréquentielle, un mode intégrateur pour $k = 0$ est rajouté, d'où la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_T z + B_T v \\ x = C_T z \end{cases}, \quad (2.3.14)$$



où

$$\underset{((K+1) \times 1)}{\underline{z}} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_k \\ \dots \\ z_K \end{pmatrix}, \quad \underset{((K+1) \times (K+1))}{A_T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -\omega_K \end{bmatrix}, \quad (2.3.15)$$

$$\underset{((K+1) \times 1)}{B_T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{(1 \times (K+1))}{C_T} = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_i \quad \dots \quad c_K]$$

avec

$$c_k = \mu_m(\omega_k) \Delta\omega_k, \quad (2.3.16)$$

$\Delta\omega_k$ étant le pas de rang k de la discrétisation modale, pas pouvant être constant ou variable.

2.4 Systèmes d'ordre non entier

D'une manière générale, on appelle Système à Dérivées Non Entières (SDNE) un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ dont la dynamique est décrite par une équation différentielle générale de la forme :

$$\sum_{k=0}^{N_a} a_k D^{\gamma_{ak}} y(t) = \sum_{k=0}^{N_b} b_k D^{\gamma_{bk}} u(t), \quad (2.4.1)$$

où $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_{ak} \in \mathbb{R}$ et $\gamma_{bk} \in \mathbb{R}$. Il est à noter que cette formulation SISO (Simple Input - Simple Output) peut être étendue sans difficulté à un système MIMO (Multi Input - Multi Output) [Sabatier (2010)].

La suite de ce paragraphe se focalise sur deux types de système d'ordre non entier :

- l'un caractérisé par une équation différentielle avec un seul ordre de dérivation dont la forme canonique est donnée par :

$$\omega_u^{-n} D^n y(t) + y(t) = u(t), \quad (2.4.2)$$

où $\omega_u \in \mathbb{R}^{*+}$ et $n \in [0, 2]$, appelé système de 1^{ère} espèce ;

- l'autre caractérisé par une équation différentielle avec deux ordres de dérivation dont la forme canonique est définie par :

$$\omega_0^{-2} D^2 y(t) + 2\zeta\omega_0^{-\nu} D^\nu y(t) + y(t) = u(t), \quad (2.4.3)$$

où $\omega_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ et $\nu \in [0, 1]$, appelé système de 2^{ème} espèce.



2.4.1 Système de 1^{ère} espèce

Modélisation

Un tel système résulte de l'association d'un élément I (au sens bond graph) et d'un élément caractérisé par une impédance d'ordre non entier, appelée **fractance** (contraction de **fractional impedance**) [Le Méhauté, et al. (1998)] [Krishna (2011)]. Pour un **fractor**, l'effort généralisé $e_\lambda(t)$ est proportionnel à l'intégrale non entière d'ordre m du flux généralisé $f_\lambda(t)$, soit :

$$e_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m)(t-\tau)^{1-m}} f_\lambda(\tau) d\tau + e_\lambda(0), \quad (2.4.4)$$

où $e_\lambda(0)$ est une fonction qui prend en compte les conditions initiales [Hartley et al. (2002)] [Hartley et al. (2007)] [Lorenzo et al. (2007a)] [Lorenzo et al. (2007b)] [Sabatier et al. (2008)] [Trigeassou et al. (2011)], et où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et $m \in [0, 1]$. Si $m = 1$ alors le **fractor** est un élément C purement capacitif, (**capacitor**), si $m = 0$ alors le **fractor** est un élément R purement résistif (**resistor**).

La relation (2.4.4) est réécrite sous une forme générique d'un produit de convolution, soit :

$$e_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} h_m(t) * f_\lambda(t) + e_\lambda(0), \quad (2.4.5)$$

où $h_m(t)$ représente la réponse impulsionnelle (relation (2.2.4)) de l'intégrateur d'ordre non entier d'ordre m .

Cette étude se veut générique et indépendante de tout domaine de la physique. Cependant, pour illustrer les concepts et faciliter la compréhension, des schémas "électriques" et "mécaniques" sont utilisés.

La figure 2.6 présente le schéma du système d'ordre non entier étudié où $e_0(t)$ représente un effort généralisé généré par une source S_e et $f(t)$ le flux généralisé de l'élément I . Plus précisément, ce système résulte de l'association d'un élément I avec un fractor pour $0 < m < 1$ (a et d), un capacitor pour $m = 1$ (b et e) et un resistor pour $m = 0$ (c et f).

L'élément I et le **fractor** étant en série, le flux généralisé $f(t)$ à travers chaque élément est le même. De plus, l'effort généralisé $e_0(t)$ est égal à la somme de $e_I(t)$ et $e_\lambda(t)$, soit :

$$e_0(t) = e_I(t) + e_\lambda(t). \quad (2.4.6)$$

Finalement, les relations de causalité du système sont :

$$\begin{cases} e_I(t) = e_0(t) - e_\lambda(t) \\ f(t) = \frac{1}{I} \int_0^t e_I(\tau) d\tau + f(0) \\ e_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} h_m(t) * f(t) + e_\lambda(0) \end{cases}. \quad (2.4.7)$$

La figure 2.7 présente le schéma causal établi à partir des relations (2.4.7) et utilisé pour la simulation numérique.

Un tel schéma présente une boucle fermée. Les relations entre boucle ouverte et boucle fermée sont utilisées pour l'analyse d'un tel système. Par ailleurs, le système étant linéaire, le principe de superposition est appliqué pour étudier le régime forcé ($e_0(t) \neq 0$ et $CI = 0$), le régime libre ($e_0(t) = 0$ et $CI \neq 0$) étant traité dans [Sabatier et al. (2010)] [Trigeassou et

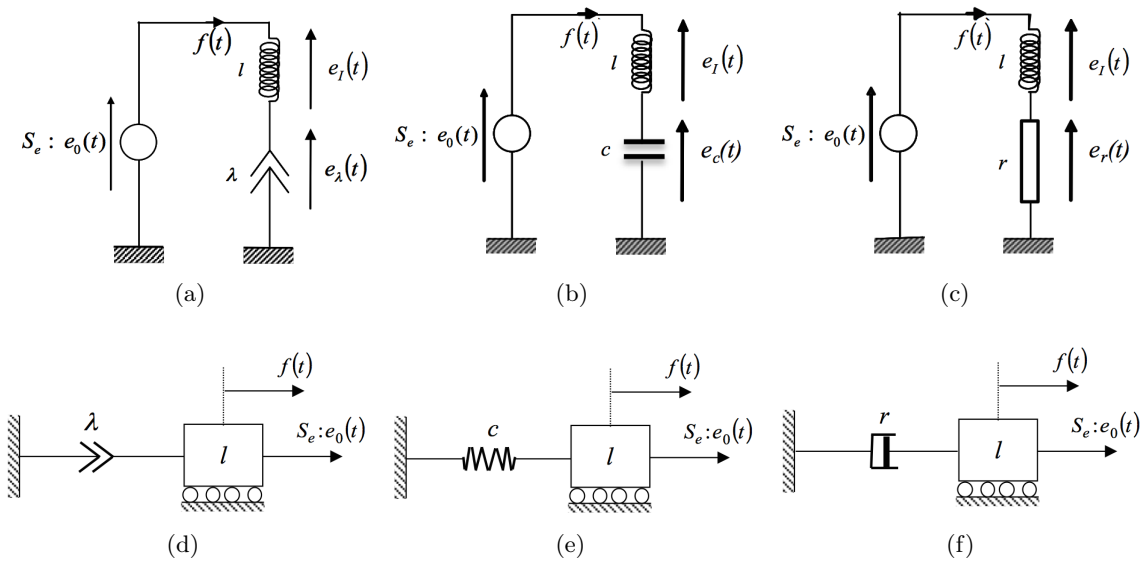


FIGURE 2.6 – Schémas électriques composés d'un élément I et : d'un fracteur (a et d), d'un capacitor (b et e), ou d'un resistor (c et f)

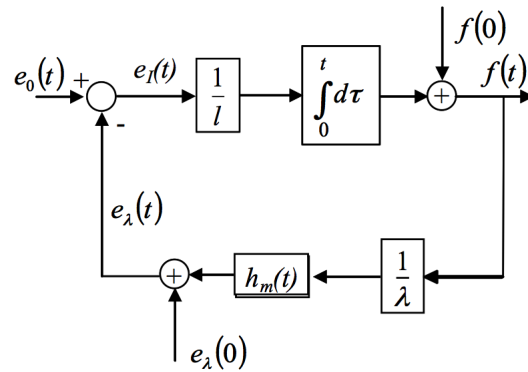


FIGURE 2.7 – Schéma causal utilisé pour la simulation numérique

al. (2011)]. Par conséquent, les conditions initiales étant supposées nulles, la transformée de Laplace des relations (2.4.7) conduit à :

$$\begin{cases} E_I(s) = E_0(s) - E_\lambda(s) \\ F(s) = \frac{1}{ls} E_I(s) \\ E_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda s^m} F(s) \end{cases}, \quad (2.4.8)$$

et au schéma fonctionnel de la figure 2.8, où la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ est donnée par :

$$\beta(s) = \frac{1}{l\lambda s^{1+m}}. \quad (2.4.9)$$

Ainsi, l'expression de $\beta(s)$ est de la forme :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^n, \quad (2.4.10)$$

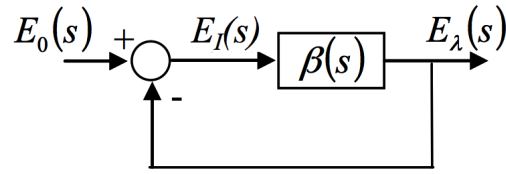


FIGURE 2.8 – Schéma fonctionnel associé au schéma causal de la figure 2.7

où $n = 1 + m$ avec $n \in [1, 2]$ et où $\omega_u = \left(\frac{1}{l\lambda}\right)^{1/n} \in \mathbb{R}^{*+}$ est la fréquence au gain unité en boucle ouverte.

Remarque

Les paramètres l de l'élément I et λ du **fractor** sont considérés comme incertains, et donc ω_u aussi, soit :

$$\omega_u \in [\omega_{u_{min}}, \omega_{u_{max}}] . \quad (2.4.11)$$

L'impact des incertitudes de la fréquence au gain unité sur le comportement dynamique de ce système d'ordre non entier élémentaire est discuté dans le paragraphe **robustesse du degré de stabilité**.

Finalement, la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par

$$H_1(s) = \frac{E_\lambda(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n} . \quad (2.4.12)$$

L'équation différentielle linéaire d'ordre non entier associée au système de 1^{ère} espèce est donc bien de la forme :

$$\omega_u^{-n} D^n y(t) + y(t) = u(t) , \quad (2.4.13)$$

en posant $y(t) = e_\lambda(t)$ et $u(t) = e_0(t)$.

Stabilité et degré de stabilité

La stabilité des systèmes d'ordre non entier a été traitée dans différents contextes (linéaire, non linéaire, commensurable, non commensurable, non stationnaire, stationnaire, avec retard, sans retard, analytique, numérique) par différents auteurs, comme le présente l'état de l'art de l'article de [Sabatier et al. (2010)]. Comme pour les systèmes rationnels à temps invariant, il est aujourd'hui bien connu que la stabilité d'un système linéaire d'ordre non entier dépend de la localisation de ses pôles dans le plan complexe. Pour un système d'ordre non entier commensurable, des critères de stabilité ont été proposés. Le plus connu est le théorème de Matignon [Matignon (1996)] établi pour les systèmes ayant un ordre de dérivation $0 < n < 1$. Ce théorème est en fait le point de départ de plusieurs résultats dans ce domaine [Matignon (1998)] [Matignon (2005)] [Momani (2004)]. Pour les systèmes avec $1 < n < 2$, une démonstration de l'extension du théorème de Matignon est proposé dans [Moze et al. (2005)].

Remarque

Dans ce chapitre, nous considérons un ordre n entre 1 et 2, et donc m entre 0 (pour un



resistor) et 1 (pour un *capacitor*). Pour le cas particulier $n = 2$, la relation (2.4.12) définit un système conservatif.

La localisation dans le plan complexe des pôles du système d'ordre non entier de première espèce peut être déterminée à partir de la résolution de l'équation caractéristique :

$$1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n = 0, \quad (2.4.14)$$

qui conduit à

$$\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n = -1 = e^{j(\pi+2k\pi)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.4.15)$$

ou encore

$$s = \omega_u e^{j \frac{1+2k}{n} \pi}, \quad (2.4.16)$$

avec

$$-1 < \frac{1+2k}{n} < 1. \quad (2.4.17)$$

Il existe seulement deux valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ qui satisfont aux inégalités précédentes [Oustaloup (1995)], à savoir $k = 0$ et $k = -1$, conduisant ainsi à deux pôles, soit :

$$s_0 = \omega_u e^{j \frac{\pi}{n}} \text{ et } s_{-1} = \omega_u e^{-j \frac{\pi}{n}}. \quad (2.4.18)$$

Ces pôles définissent un mode oscillatoire, dans la mesure où ils sont complexes conjugués, et forment un angle 2Θ avec $\Theta = \pi - \frac{\pi}{n}$ (figure 2.9).

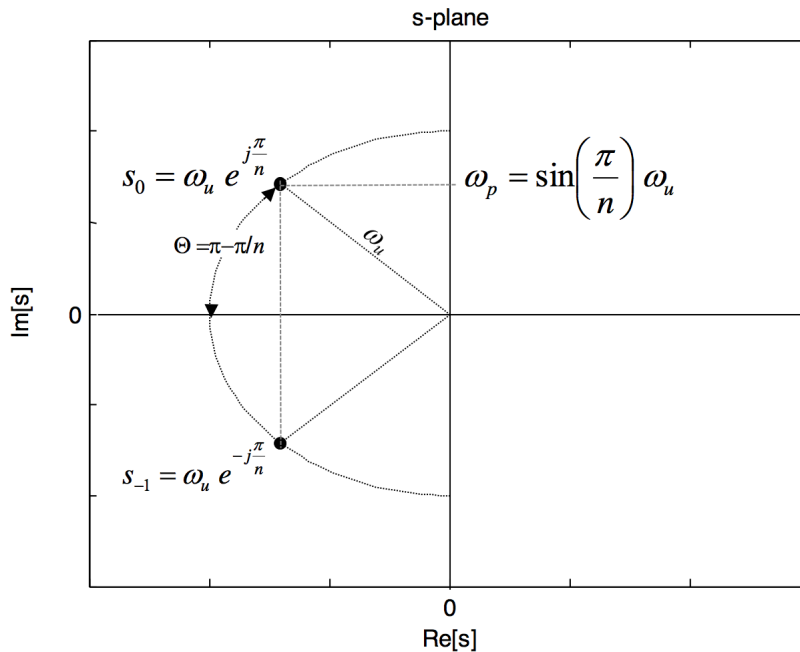


FIGURE 2.9 – Localisation des pôles dans le plan complexe

Lorsque $n \in [1, 2]$, la stabilité peut être caractérisée par un concept plus précis : le degré de stabilité.



Pour $n \in [1, 2]$, le régime transitoire d'un système d'ordre non entier élémentaire présente un caractère oscillatoire. Ainsi, le degré de stabilité peut être quantifié dans le domaine temporel par le facteur d'amortissement ζ directement déduit du demi-angle $\Theta = \pi - \frac{\pi}{n}$ (figure 2.9) [Oustaloup (1995)] :

$$\zeta(n) = \cos(\Theta) = -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.4.19)$$

Ce résultat montre que **le facteur d'amortissement $\zeta(n)$ dépend exclusivement de l'ordre n .**

Remarque

- Si $n = 1$ alors $\zeta = 1$ et le système présente un amortissement critique.
- Si $n = 2$ alors $\zeta = 0$ et le système est non amorti (système conservatif).

La figure 2.10 présente le facteur d'amortissement ζ en fonction de l'ordre $n = 2 - m$.

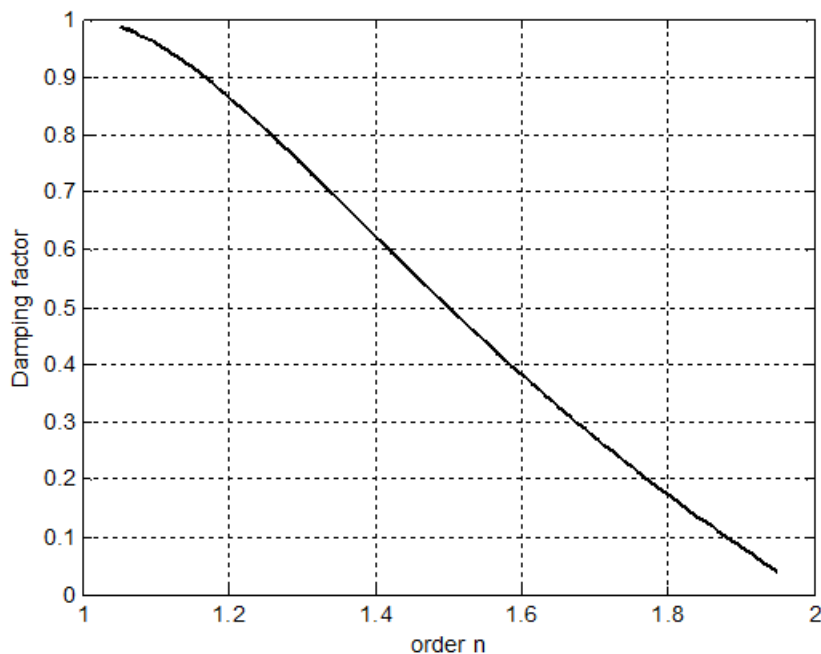


FIGURE 2.10 – Facteur d'amortissement ζ en fonction de l'ordre n

Réponses fréquentielles

La réponse fréquentielle $H_1(j\omega)$ du transfert défini par la relation (2.4.12) est donnée par :

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_u}\right)^n}, \quad (2.4.20)$$

ou encore, en introduisant la pulsation normalisée $\Omega_1 = \omega/\omega_u$,

$$H_1(j\Omega_1) = \frac{1}{1 + \Omega_1^n j^n}. \quad (2.4.21)$$



Sachant que

$$j^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad (2.4.22)$$

l'expression (2.4.21) se réécrit sous la forme :

$$H_1(j\Omega) = \frac{1}{\left(1 + \Omega_1^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) + j \Omega_1^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.4.23)$$

d'où l'on en déduit le gain et l'argument, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} |H_1(j\Omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \Omega_1^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \Omega_1^{2n} \sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}} \\ \arg H_1(j\Omega_1) = -\arctan\left(\frac{\Omega_1^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{1 + \Omega_1^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}\right) \end{array} \right. \quad (2.4.24)$$

Pour $n \in [1, 2]$, la réponse fréquentielle $H_1(j\omega)$ du transfert de $H_1(s)$ comporte une résonance [Oustaloup (1995)]. La figure 2.11 présente les diagrammes de Bode de $H_1(s)$ avec $\omega_u = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de n .

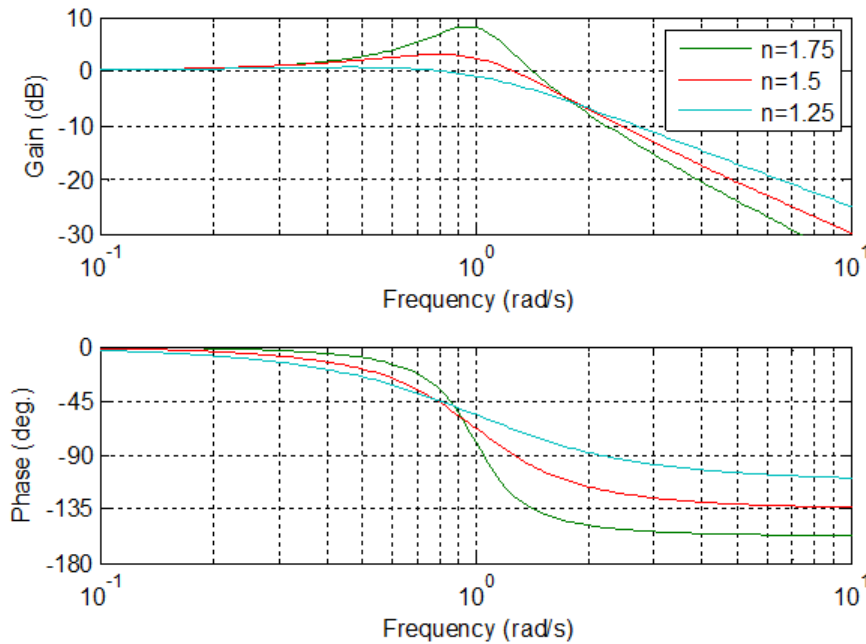


FIGURE 2.11 – Diagrammes de Bode de $H_1(s)$ avec $\omega_u = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de n

Le degré de stabilité peut être quantifié dans le domaine fréquentiel (et en boucle fermée) par le facteur de résonance $Q_{H_1}(n)$, défini par [Oustaloup (1995)] :

$$Q_{H_1}(n) = \frac{\max |H_1(j\omega)|}{|H_1(j0)|} = |H_1(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}, \quad (2.4.25)$$



où la fréquence de résonance, ω_r , est donnée par :

$$\omega_r = \left(-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \omega_u . \quad (2.4.26)$$

Ce résultat montre que le facteur de résonance $Q_{H_1}(n)$ dépend exclusivement de l'ordre n . Le facteur de résonance Q_{H_1} est tracé en fonction de l'ordre n (figure 2.12a) et en fonction du facteur d'amortissement ζ (figure 2.12b).

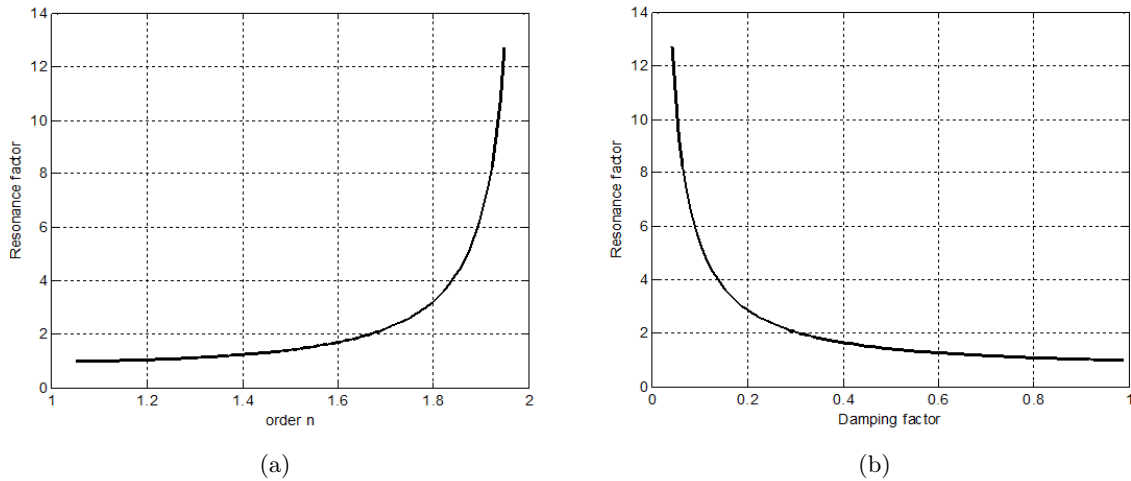


FIGURE 2.12 – Facteur de résonance Q_{H_1} en fonction de l'ordre n (a) et en fonction du facteur d'amortissement ζ (b)

Dans le domaine fréquentiel et dans le cadre d'une analyse boucle ouverte d'un système bouclé, le degré de stabilité peut être quantifié par la marge de phase, M_Φ , définie par :

$$M_\Phi = \pi + \arg \beta(j\omega_u) = \pi - n\frac{\pi}{2} = (2 - n)\frac{\pi}{2} = m\frac{\pi}{2} . \quad (2.4.27)$$

Ce résultat montre que la marge de phase $M_\Phi(n)$ dépend exclusivement de l'ordre n . La figure 2.13 présente les lieux de Nichols de la boucle ouverte pour $n = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ (figure 2.13a) et la marge de phase $M_\Phi(n)$ en fonction de l'ordre n (figure 2.13b).

Réponses temporelles

Dans le domaine temporel, la rapidité de la dynamique est caractérisée par la constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_u}$ égale à l'inverse de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, sachant que dans le domaine fréquentiel ω_u est utilisée pour définir la bande passante d'un système linéaire.

Pour un système d'ordre non entier de première espèce avec $n \in [1, 2]$, la fréquence propre ω_p est directement déduite de ω_u et du demi-angle $\Theta = \pi - \frac{\pi}{n}$ (figure 2.9), soit :

$$\omega_p = \sin \Theta \omega_u = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \omega_u . \quad (2.4.28)$$

Remarque

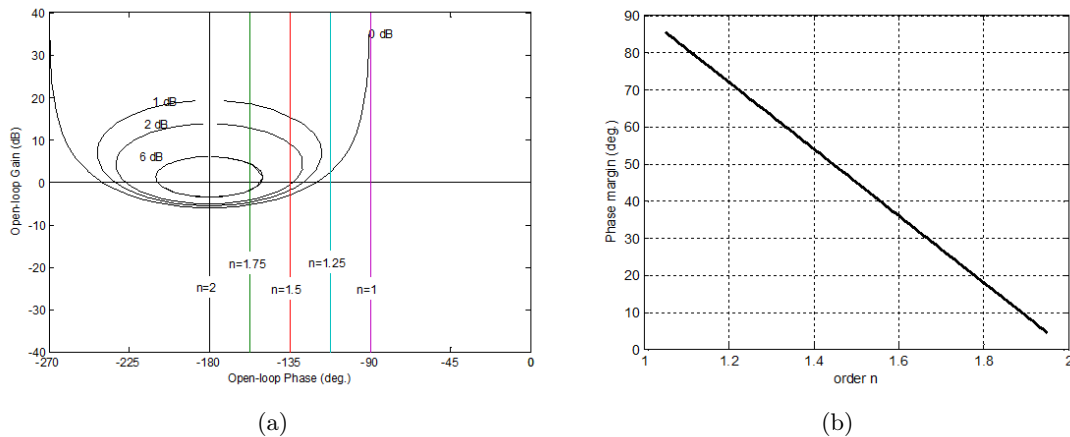


FIGURE 2.13 – Lieux de Nichols en boucle ouverte avec $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour $n = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ (a); marge de phase $M_\Phi(n)$ en fonction de l'ordre n (b)

- Si $n = 1$ alors $\omega_p = 0$ et la réponse du régime transitoire ne présente pas de caractère oscillatoire.
- Si $n = 2$ alors $\omega_p = \omega_u$ et la réponse du régime transitoire est non amortie.

De plus, si tracer les réponses fréquentielles d'un système d'ordre non entier ne pose pas de problème particulier, simuler numériquement les réponses temporelles est plus délicat. Dans ce mémoire, la méthode retenue s'appuie sur la synthèse fréquentielle d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence telle que présentée au paragraphe 2.3.1. Dans ce cadre, deux solutions sont envisageables selon l'objectif de l'analyse temporelle :

- si l'analyse se limite à l'étude entrée-sortie, alors il est possible d'utiliser le schéma fonctionnel de la figure 2.8 en synthétisant l'intégrateur non entier d'ordre n que représente la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ (relation (2.4.10)). Dans ce cas, la synthèse fréquentielle est effectuée de part et d'autre de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_u ;
- si en plus de l'étude entrée-sortie l'analyse s'étend aux variables internes, en particuliers les états du système de 1^{ère} espèce, alors il faut utiliser le schéma causal de la figure 2.7 en synthétisant l'intégrateur non entier d'ordre m que représente la fonction de transfert du fractor.

Ainsi, pour $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs de n , les figures 2.14 et 2.15 présentent les réponses impulsionnelle et indicielle.

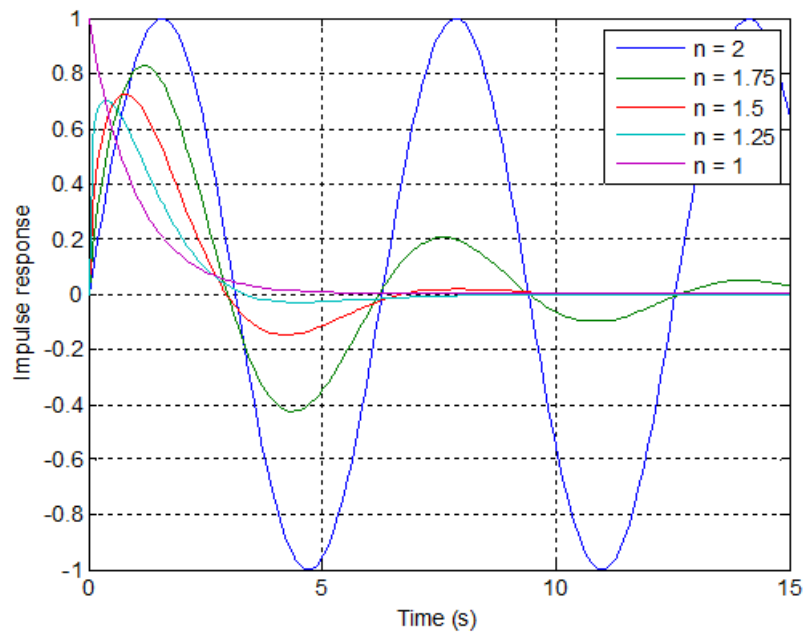


FIGURE 2.14 – Réponses impulsionnelles pour $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs de n

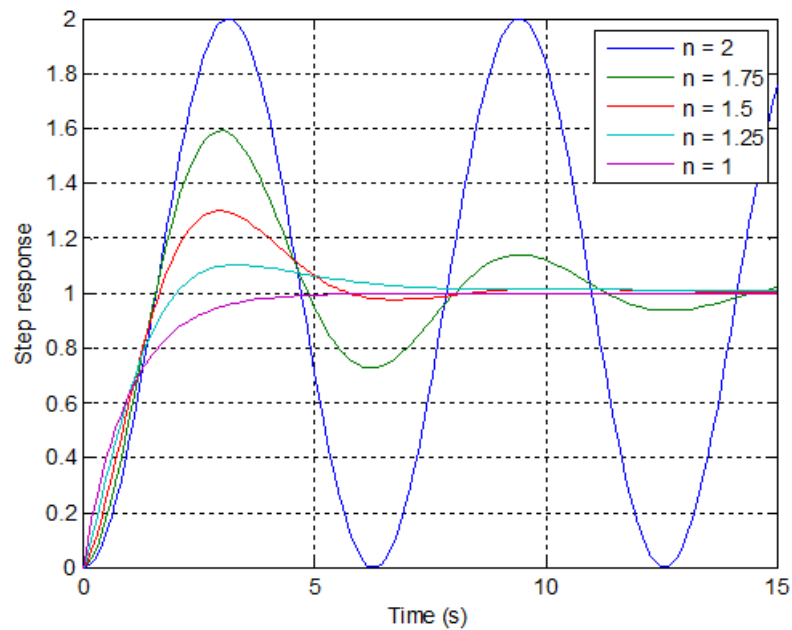


FIGURE 2.15 – Réponses indicielles pour $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs de n

Robustesse du degré de stabilité

Le tableau 2.1 résume les principales caractéristiques dynamiques du système d'ordre non entier de première espèce. Pour différentes valeurs incertaines de l et λ , ω_u varie et donc aussi les fréquences caractéristiques. Cependant, le degré de stabilité, mesuré à partir du facteur d'amortissement $\zeta(n)$, du facteur de résonance $Q(n)$, ou de la marge de phase $M_\Phi(n)$, étant exclusivement lié à l'ordre n , ne varie pas avec l et λ , introduisant ainsi le concept de **robustesse du degré de stabilité**.



	Degré de stabilité	Fréquences caractéristiques
Domaine temporel	$\zeta(n) = -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$	$\omega_p = -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\omega_u$
Domaine fréquentiel boucle fermée	$Q(n) = \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$	$\omega_r = \left(-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1/n}\omega_u$
Domaine fréquentiel boucle ouverte	$M_\Phi(n) = (2-n)\frac{\pi}{2}$	$\omega_u = (l\lambda)^{-1/n}$

TABLE 2.1 – Principales caractéristiques dynamiques du système d'ordre non entier élémentaire

La figure 2.16 illustre la robustesse du degré de stabilité dans le plan complexe avec $n = 1.5$, une fréquence au gain unité nominale $\omega_{u_{nom}} = 1$ rad/s, une fréquence au gain unité maximale $\omega_{u_{max}} = 2\omega_{u_{nom}}$ et une fréquence au gain unité minimale $\omega_{u_{min}} = 0.5\omega_{u_{nom}}$. Le lieu des racines fait bien apparaître une demi-droite d'iso-amortissement, illustrant la robustesse de l'amortissement.

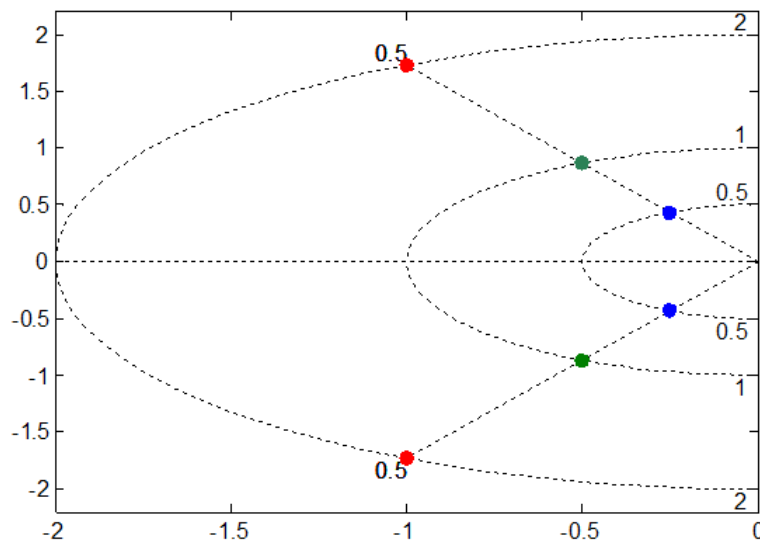


FIGURE 2.16 – Illustration de la robustesse dans le plan complexe avec $n = 1.5$, $\zeta = 0.5$, $\omega_{u_{nom}} = 1$ rad/s (vert), $\omega_{u_{max}} = 2\omega_{u_{nom}}$ (rouge) et $\omega_{u_{min}} = 0.5\omega_{u_{nom}}$ (bleu)

La figure 2.17 illustre l'influence des variations de ω_u sur le comportement dynamique du système d'ordre non entier pour $n = 1.5$, $\zeta = 0.5$, $\omega_{u_{nom}} = 1$ rad/s, $\omega_{u_{max}} = 2\omega_{u_{nom}}$ et $\omega_{u_{min}} = 0.5\omega_{u_{nom}}$.

Plus précisément, la figure 2.17a présente les diagrammes de Bode de la boucle ouverte, la figure 2.17b les lieux de Nichols de la boucle ouverte, la figure 2.17c les diagrammes de gain de la boucle fermée et la figure 2.17d les réponses indicielles.

Les variations de ω_u se traduisent par des variations de gain en boucle ouverte. C'est la



raison pour laquelle tous les lieux de Nichols de la boucle ouverte sont tangents au même contour d'amplitude (figure 2.17b). De plus, on peut observer la robustesse du facteur de résonance (figure 2.17c) et la robustesse du premier dépassement (figure 2.17d) lorsque ω_u varie.

En observant les figures 2.17c et 2.17d, on peut dire que toutes les réponses fréquentielles et temporelles se déduisent de la réponse nominale à partir d'une transformation consistant en une extension ou une contraction des axes des domaines fréquentiel et temporel [A.Z.Daou (2011b)].

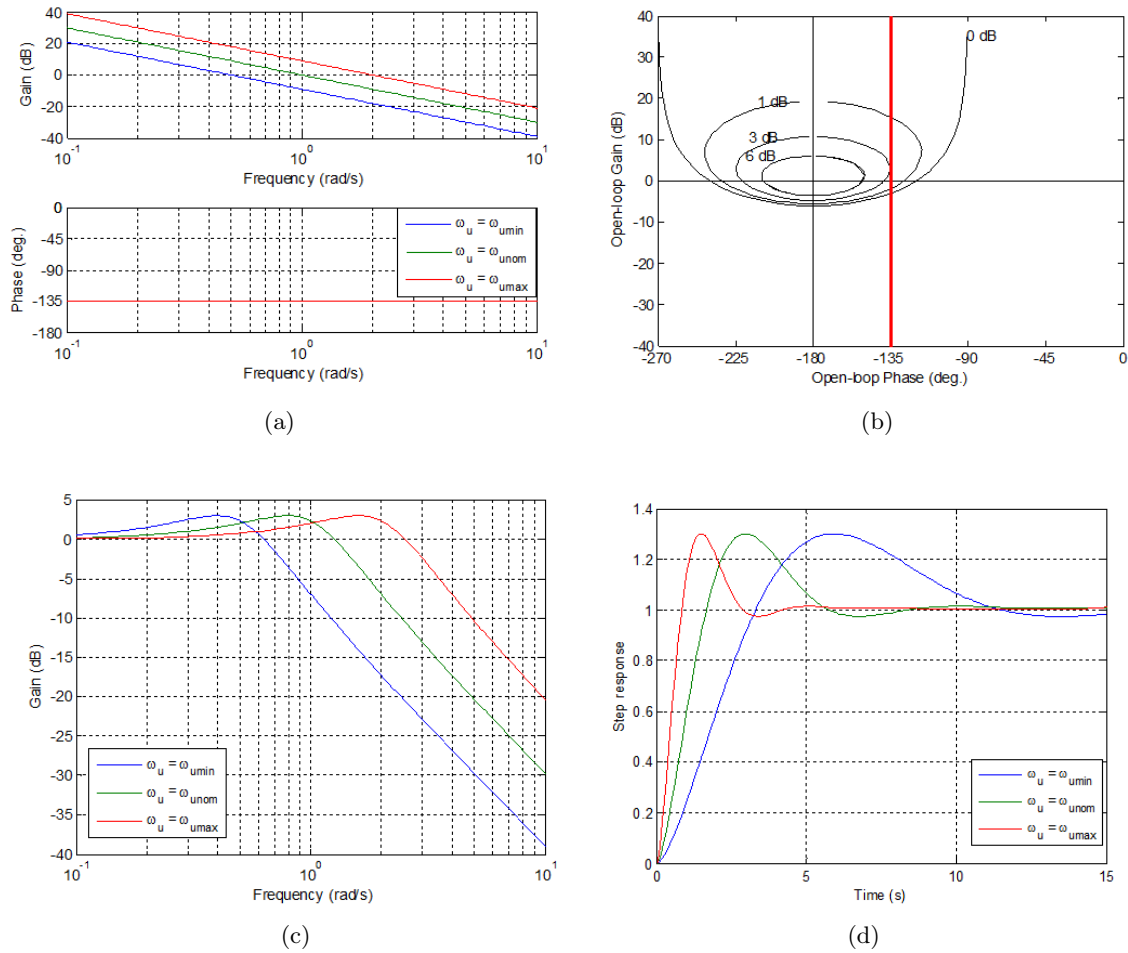


FIGURE 2.17 – Illustration de la robustesse du degré de stabilité en fonction des variations de ω_u ($\omega_{u\text{nom}} = 1 \text{ rad/s}$; $\omega_{u\min} = 0.5 \omega_{u\text{nom}}$; $\omega_{u\max} = 2 \omega_{u\text{nom}}$) pour $n = 1.5$: diagrammes de Bode de la boucle ouverte (a), lieux de Nichols en boucle ouverte (b); diagrammes de gain de la boucle fermée (c) et réponses indicielles (d)

2.4.2 Système de 2^{ème} espèce

Modélisation

Un tel système résulte de l'association d'un élément I en série avec un élément C et un **ractor**, dont l'effort généralisé $e_\lambda(t)$ est proportionnel à l'intégrale d'ordre non entier d'ordre m du flux généralisé $f_\lambda(t)$, élément identique à celui défini au paragraphe précédent par la relation (1.34).



Cette étude se veut toujours générique et indépendante de tout domaine de la physique, mais là encore pour illustrer les concepts et faciliter la compréhension, des schémas "électrique" et "mécanique" sont utilisés (figure 2.18).

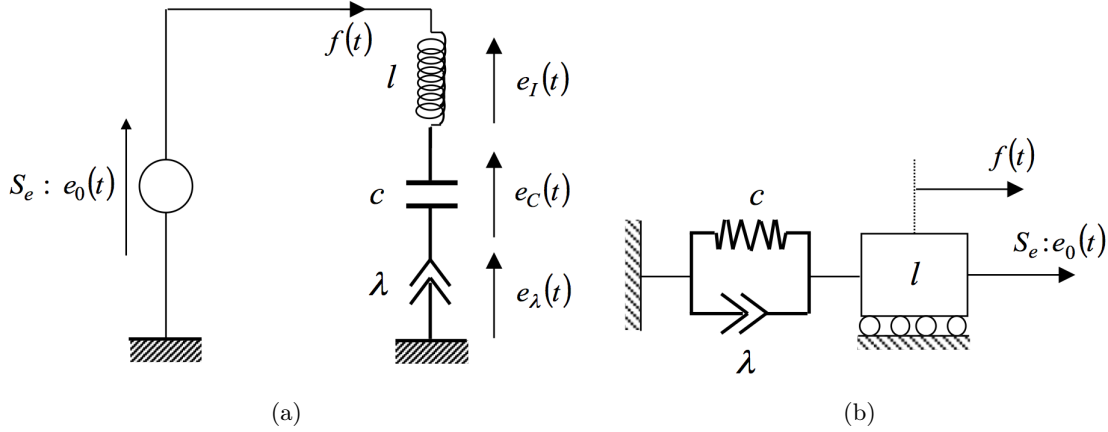


FIGURE 2.18 – Schémas "électrique" (a) et "mécanique" (b) composés d'un élément I en série avec un élément C et un fractor

Les trois éléments étant en série, le flux généralisé $f(t)$ à travers chaque élément est le même. De plus, la source d'effort généralisé $e_0(t)$ est égale à la somme de $e_I(t)$, $e_C(t)$ et $e_\lambda(t)$, soit :

$$e_0(t) = e_I(t) + e_C(t) + e_\lambda(t) . \quad (2.4.29)$$

Finalement, les relations de causalité du système sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_I(t) = e_0(t) - e_C(t) - e_\lambda(t) \\ f(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_I(\tau) d\tau + f(0) \\ e_C(t) = \frac{1}{c} \int_0^t f(\tau) d\tau + e_C(0) \\ e_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} h_m(t) * f(t) + e_\lambda(0) \end{array} \right. . \quad (2.4.30)$$

La figure 2.19 présente le schéma causal établi à partir des relations (2.4.30) et utilisé pour la simulation numérique.

Le système étant linéaire, le principe de superposition est appliqué pour étudier le régime forcé ($e_0(t) \neq 0$ et $CI = 0$), le régime libre ($e_0(t) = 0$ et $CI \neq 0$) étant traité dans [Sabatier et al. (2010)] [Trigeassou et al. (2011)]. Par conséquent, les conditions initiales étant supposées nulles, la transformée de Laplace des relations (2.4.30) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_I(s) = E_0(s) - E_C(s) - E_\lambda(s) \\ F(s) = \frac{1}{ls} E_I(s) \\ E_C(s) = \frac{1}{cs} F(s) \\ E_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda s^m} F(s) \end{array} \right. . \quad (2.4.31)$$

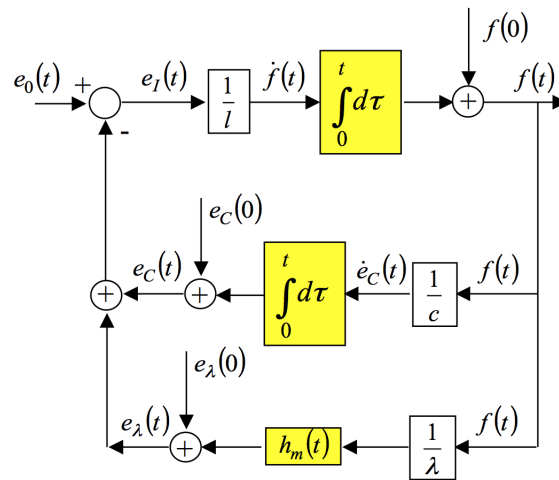


FIGURE 2.19 – Schéma causal utilisé pour la simulation numérique

Finalement, en combinant les différentes relations du système d'équations (2.4.31), on obtient la fonction de transfert $H_2(s)$ du système de 2^{ème} espèce, soit :

$$H_2(s) = \frac{E_C(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}, \quad (2.4.32)$$

en posant

$$\begin{cases} lc = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{lc}} \in \mathbb{R}^{*+} \\ 1 - m = \nu \\ \frac{c}{\lambda} = \frac{2\zeta}{\omega_0^\nu} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2\lambda\sqrt{l^\nu c^{\nu-2}}} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}. \quad (2.4.33)$$

L'équation différentielle linéaire d'ordre non entier associée au système de 2^{ème} espèce est donc bien de la forme

$$\omega_0^{-2} D^2 y(t) + 2\zeta \omega_0^{-\nu} D^\nu y(t) + y(t) = u(t) \quad (2.4.34)$$

en posant $y(t) = e_C(t)$ et $u(t) = e_0(t)$.

Stabilité et degré de stabilité

La localisation dans le plan complexe des pôles du système d'ordre non entier de 2^{ème} espèce est déterminée à partir de la recherche des racines du polynôme caractéristique $P(s)$ défini par

$$P(s) = 1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2, \quad (2.4.35)$$

soit :

$$P(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} s^\nu + \omega_0^2 = 0. \quad (2.4.36)$$

Remarque



- Si $\nu = 0$, alors le système possède deux racines complexes conjuguées à partie réelle nulle, c'est-à-dire situées sur l'axe des imaginaires indépendamment de la valeur de $\zeta \in \mathbb{R}^+$, le système est alors juste oscillant.
- Si $\nu = 1$, alors la position des deux racines dans le plan complexe dépend de la valeur de $\zeta \in \mathbb{R}^+$, soit :
 - Si $\zeta > 1$, alors le polynôme possède deux racines réelles distinctes situées sur le demi-axe des réels négatifs, le système présente ainsi un régime transitoire apériodique ;
 - Si $\zeta = 1$, alors le polynôme possède deux racines réelles confondues situées sur le demi-axe des réels négatifs, le système présente toujours un régime transitoire apériodique qualifié de critique ;
 - Si $0 < \zeta < 1$, alors le polynôme possède deux racines complexes conjuguées situées dans le demi-plan gauche, le système présente ainsi un régime transitoire oscillatoire convergent ;
 - Si $\zeta = 0$, alors le polynôme possède deux racines complexes conjuguées situées sur l'axe des imaginaires, le système est alors juste oscillant.

En dehors de ces deux cas particuliers d'ordres entiers, une étude spécifique est nécessaire. Pour faciliter la résolution du polynôme caractéristique, on pose :

$$\begin{cases} s = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta \\ s^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta \\ s^\nu = r^\nu e^{i\nu\theta} = r^\nu \cos \nu\theta + i r^\nu \sin \nu\theta \end{cases} . \quad (2.4.37)$$

L'introduction des relations du système 2.4.37 dans l'équation 2.4.36 conduit à :

$$(r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta) + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} (r^\nu \cos \nu\theta + i r^\nu \sin \nu\theta) + \omega_0^2 = 0 , \quad (2.4.38)$$

ou encore, en rassemblant partie réelle et partie imaginaire,

$$(r^2 \cos 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \cos \nu\theta + \omega_0^2) + i(r^2 \sin 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \sin \nu\theta) = 0 , \quad (2.4.39)$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} r^2 \cos 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \cos \nu\theta + \omega_0^2 = 0 \\ r^2 \sin 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \sin \nu\theta = 0 \end{cases} . \quad (2.4.40)$$

Pour alléger l'écriture, posons

$$\begin{cases} x_1 = r^2 \\ x_2 = 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \end{cases} , \quad (2.4.41)$$

d'où la nouvelle expression du système (2.4.40) :

$$\begin{cases} x_1 \cos 2\theta + x_2 \cos \nu\theta + \omega_0^2 = 0 \\ x_1 \sin 2\theta + x_2 \sin \nu\theta = 0 \end{cases} . \quad (2.4.42)$$

De la seconde équation du système (2.4.42), on en déduit x_2 , soit :

$$x_2 = -\frac{\sin 2\theta}{\sin \nu\theta} x_1 , \quad (2.4.43)$$

qui, introduit dans la première équation du système (2.4.42), permet d'obtenir x_1 , soit :

$$x_1 = \frac{\sin \nu\theta}{\sin 2\theta \cos \nu\theta - \cos 2\theta \sin \nu\theta} \omega_0^2 , \quad (2.4.44)$$



ou encore, sous forme plus condensée (compte tenu de l'identité trigonométrique du dénominateur),

$$x_1 = \frac{\sin \nu \theta}{\sin(2 - \nu)\theta} \omega_0^2. \quad (2.4.45)$$

En substituant dans la relation (2.4.43) x_1 par son expression (2.4.45), on obtient (après quelques développements trigonométriques) l'expression de x_2 , soit :

$$x_2 = \frac{2 \sin \theta}{\sin(2 - \nu)\theta} \cos(\pi - \theta) \omega_0^2. \quad (2.4.46)$$

Compte tenu du système (2.4.41) et des expressions (2.4.45) de x_1 et (2.4.46) de x_2 , il vient :

$$\begin{cases} x_1 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\sin \nu \theta}{\sin(2 - \nu)\theta}} \omega_0 \Rightarrow \rho = \frac{r}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\sin \nu \theta}{\sin(2 - \nu)\theta}} \\ x_2 = 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \Rightarrow \zeta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{(\sin(2 - \nu)\theta)^{2-\nu} (\sin \nu \theta)^\nu}} \cos(\pi - \theta) \end{cases}, \quad (2.4.47)$$

avec

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_{lim} = \frac{\pi}{2 - \nu}. \quad (2.4.48)$$

Remarque

Si $\nu = 1$ alors

$$\begin{cases} \rho = 1 \Rightarrow r = \omega_0 \\ \zeta = \cos(\pi - \theta) \end{cases}, \quad (2.4.49)$$

expressions bien connues dans le cas d'un système entier du deuxième ordre.

A titre d'illustration, les figures 2.20, 2.21 et 2.22 présentent les résultats obtenus avec $\nu = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ et 1 , θ variant entre $\pi/2$ et $\theta_{lim} = \pi/(2 - \nu)$, et ce pour le module normalisé $\rho = r/\omega_0$ (figure 2.20), le facteur d'amortissement ζ (figure 2.21) et le lieu des racines (figure 2.22).

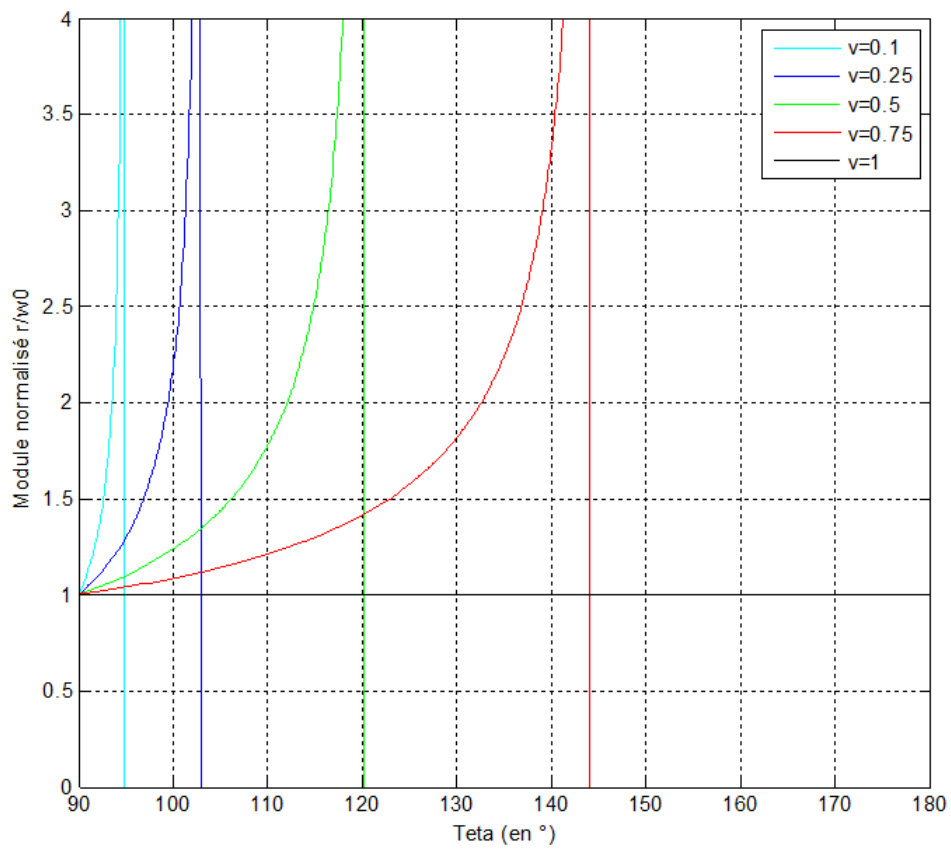


FIGURE 2.20 – Variation du module normalisé $\rho = r/\omega_0$ en fonction de θ et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)

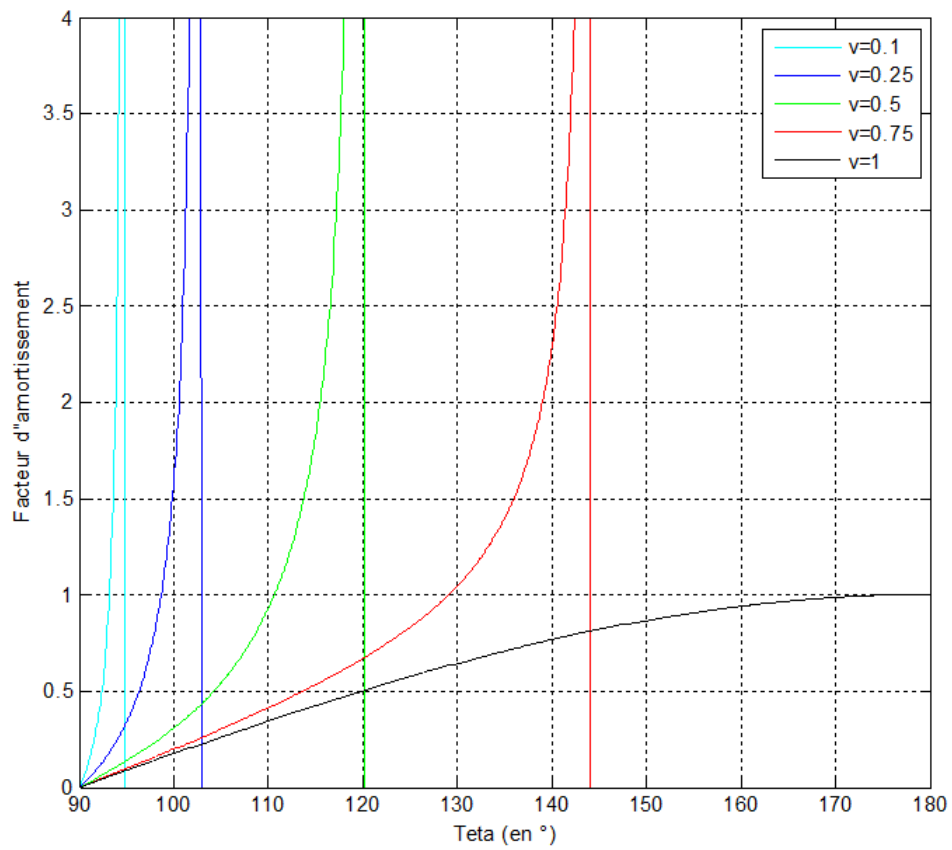


FIGURE 2.21 – Variation du facteur d'amortissement ζ en fonction de θ et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)

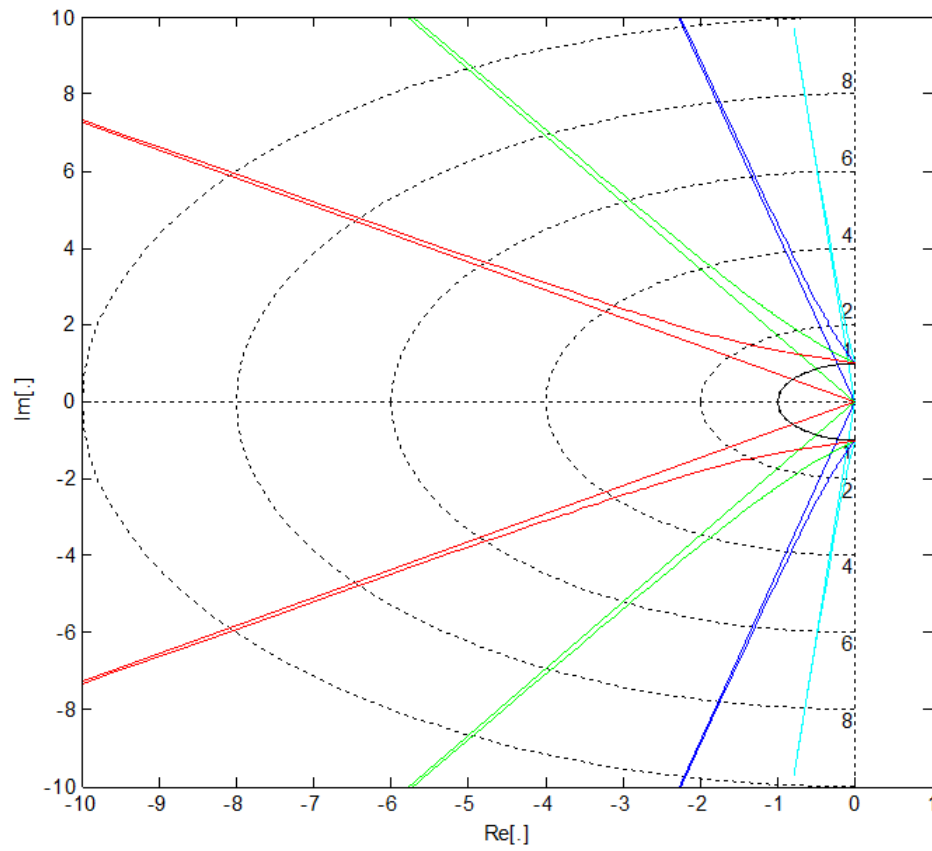


FIGURE 2.22 – Lieux des racines avec $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)



Réponses fréquentielles

La réponse fréquentielle $H_2(j\omega)$ du transfert défini par la relation (2.4.32) est donnée par :

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\nu + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (2.4.50)$$

ou encore, en introduisant la pulsation normalisée $\Omega_2 = \omega/\omega_0$,

$$H_2(j\Omega_2) = \frac{1}{1 - \Omega_2^2 + 2\zeta\Omega_2^\nu j^\nu}. \quad (2.4.51)$$

Sachant que

$$j^\nu = \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.4.52)$$

l'expression (2.4.51) se réécrit sous la forme :

$$H_2(j\Omega_2) = \frac{1}{\left(1 - \Omega_2^2 + 2\zeta\Omega_2^\nu \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)\right) + j 2\zeta\Omega_2^\nu \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.4.53)$$

d'où l'on en déduit le gain et l'argument, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} |H_2(j\Omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega_2^2 + 2\zeta\Omega_2^\nu \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 2\zeta\Omega_2^\nu \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)^2}} \\ \arg H_2(j\Omega_2) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\Omega_2^\nu \sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \Omega_2^2 + 2\zeta\Omega_2^\nu \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}\right) \end{array} \right. \quad (2.4.54)$$

Il est à noter que pour $\Omega_2 = 1$ (soit $\omega = \omega_0$), $\arg H_2(j\omega_0) = -\nu\pi/2$, valeur qui définit un point invariant vis-à-vis de ζ dans le diagramme de phase.

Les figures 2.23 à 2.26 présentent les diagrammes de Bode de $H_2(s)$ pour $\nu = 0.25$ (figure 2.23), $\nu = 0.5$ (figure 2.24), $\nu = 0.75$ (figure 2.25) et $\nu = 1$ (figure 2.26), et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement, soit $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir).

En ce qui concerne le facteur de résonance Q_{H_2} de $H_2(j\omega)$, défini par

$$Q_{H_2} = \frac{\max(|H_2(j\Omega_2)|)}{|H_2(j0)|}, \quad (2.4.55)$$

soit, sachant que $|H_2(j0)| = 1$ et que $\max(|H_2(j\Omega_2)|) = |H_2(j\Omega_r)|$ avec Ω_r la pulsation de résonance normalisée,

$$Q_{H_2} = |H_2(j\Omega_r)|, \quad (2.4.56)$$

l'obtention de son expression analytique, à partir de la recherche de l'expression analytique de Ω_r solution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega_2} |H_2(j\Omega_2)| &= 0 \\ \Rightarrow \Omega_2^4 - \zeta \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) (2 + \nu)\Omega_2^{2+\nu} - \Omega_2^2 + 2\zeta^2 \nu \Omega_2^{2\nu} + \zeta \cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right) \nu \Omega_2^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

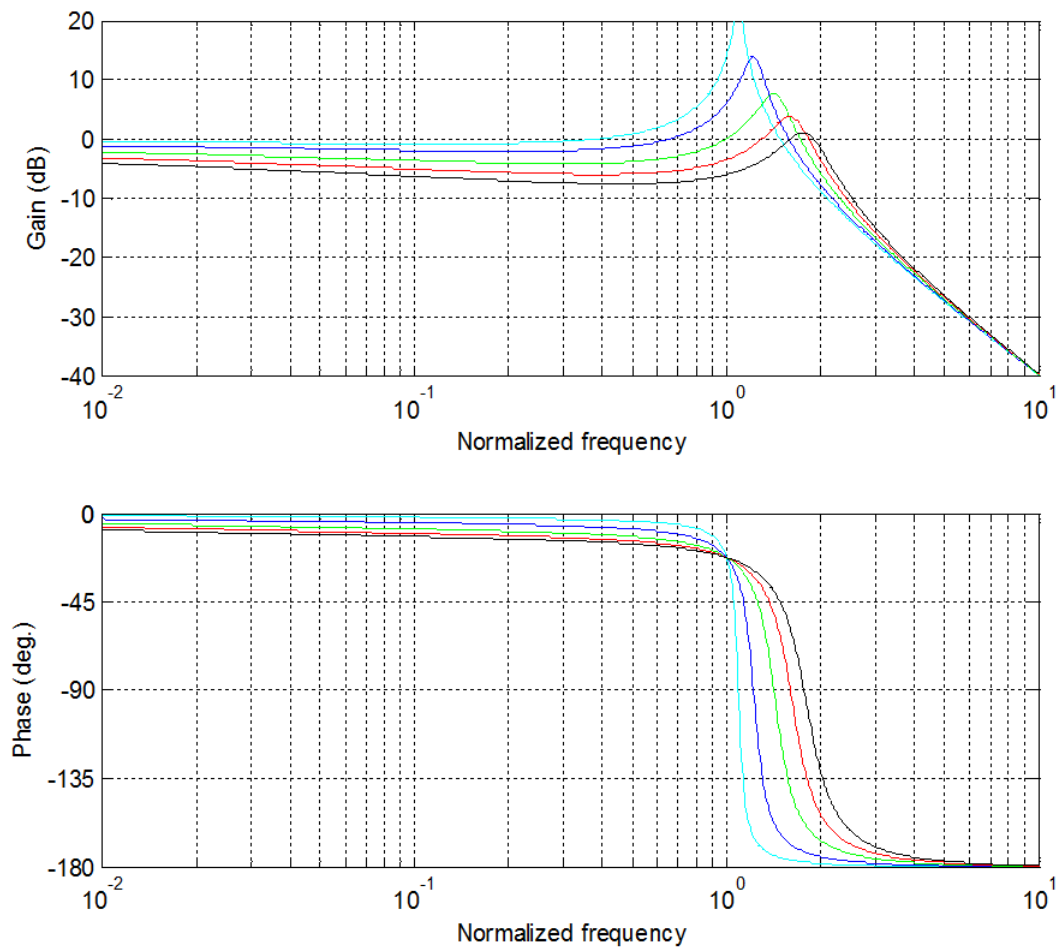


FIGURE 2.23 – Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.25$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)

n'est pas possible, seule une approche numérique est envisageable. A ce titre, la figure 2.27 illustre les variations du facteur de résonance en fonction du facteur d'amortissement pour différentes valeurs de ν comprises entre 0 et 1. Globalement, quelle que soit la valeur de ν , le facteur de résonance diminue quand le facteur d'amortissement augmente.

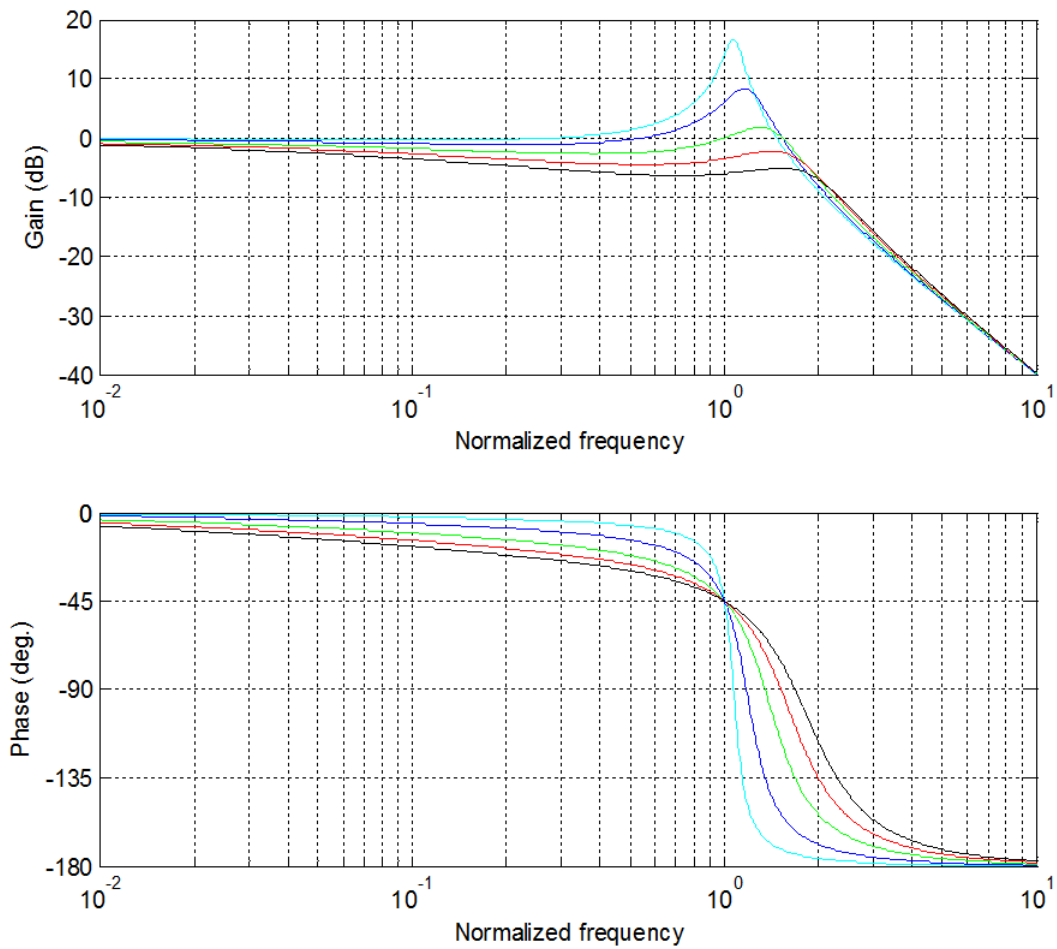


FIGURE 2.24 – Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)

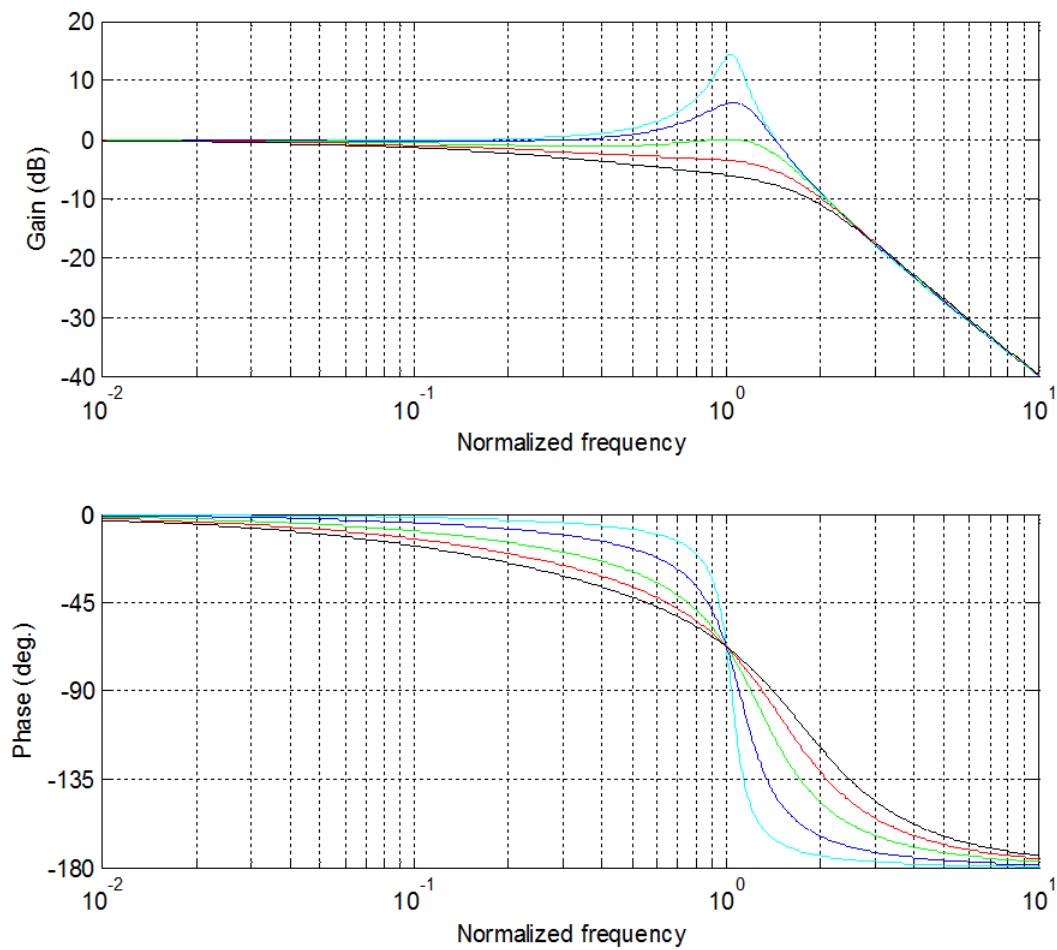


FIGURE 2.25 – Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.75$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)

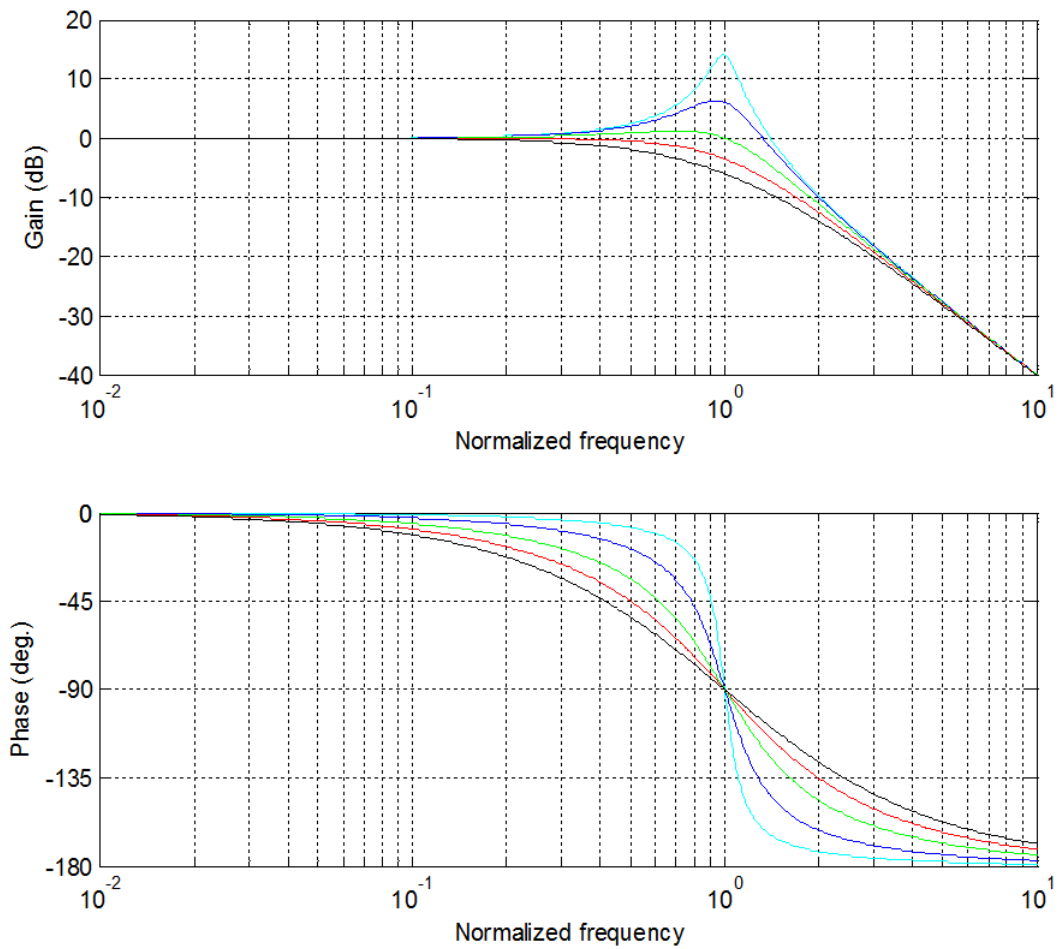


FIGURE 2.26 – Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 1$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)



Remarque

Bien entendu dans le cas particulier où $\nu = 1$, les expressions analytiques de Ω_r et Q_{H_2} sont parfaitement connues, soit :

$$\begin{cases} \Omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \\ Q_{H_2} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{cases} \quad (2.4.58)$$

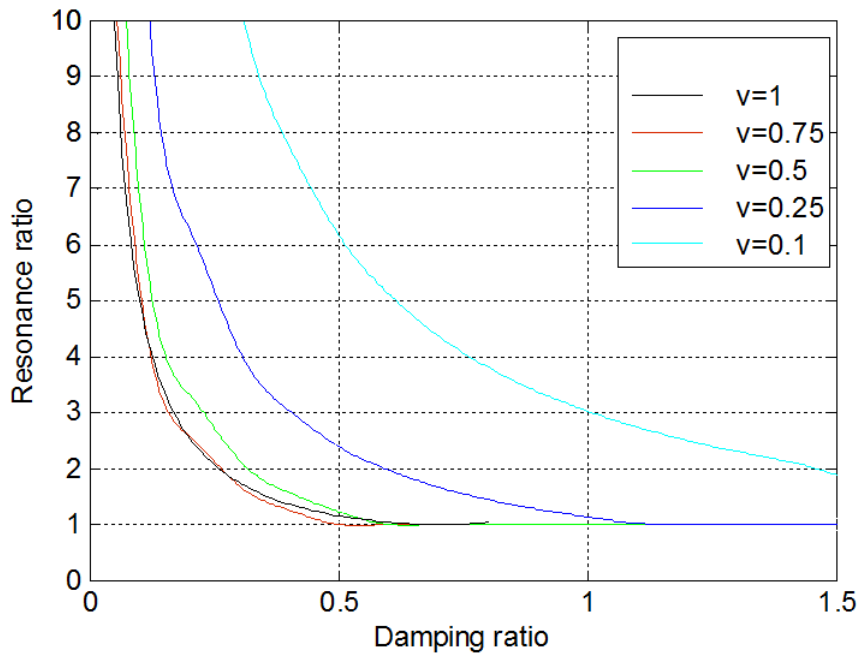


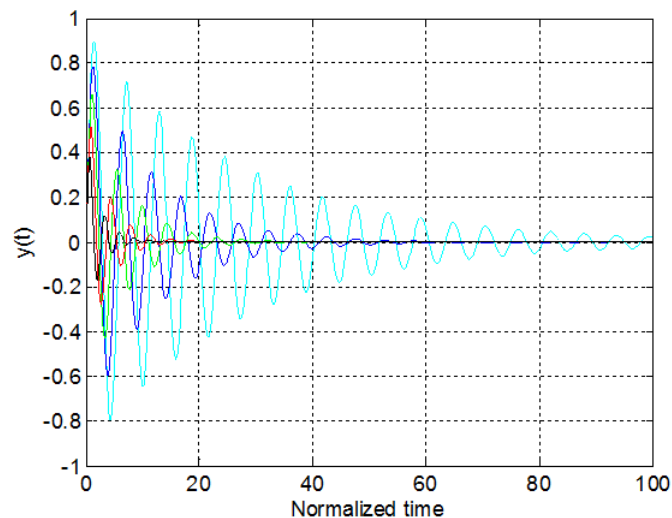
FIGURE 2.27 – Variation du facteur de résonance Q_{H_2} en fonction du facteur d'amortissement ζ , pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)



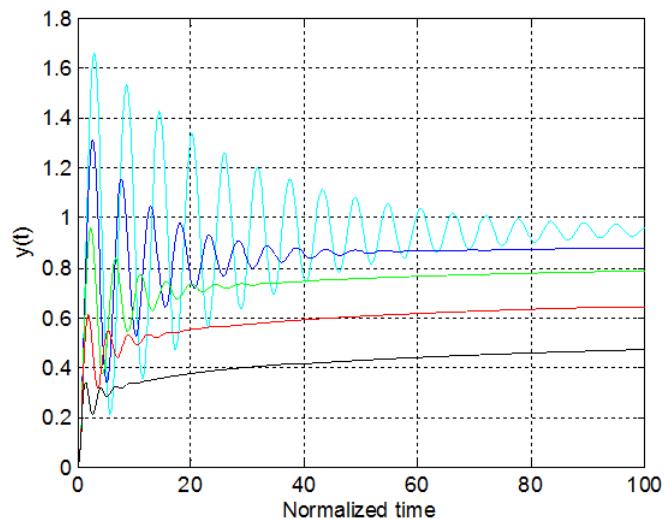
Réponses temporelles

Les réponses temporelles (impulsionnelles et indicielles) sont obtenues en utilisant la forme rationnelle de l'intégrateur non entier borné en fréquence défini par la relation (2.3.5). La synthèse est effectuée sur 6 décades ($\omega_h/\omega_b = 10^6$), de part et d'autre d'une fréquence médiane normalisée $\Omega_m = \omega_m/\omega_0 = 1$ et à l'aide de 20 cellules ($N = 20$). A noter que les réponses temporelles sont tracées en fonction du temps normalisé $\omega_0 t$.

Ainsi, les figures 2.28 à 2.31 présentent les réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.25$ (figure 2.28), $\nu = 0.5$ (figure 2.29), $\nu = 0.75$ (figure 2.30) et $\nu = 1$ (figure 2.31), et ce pour différentes valeurs du facteur d'amortissement, soit $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir).

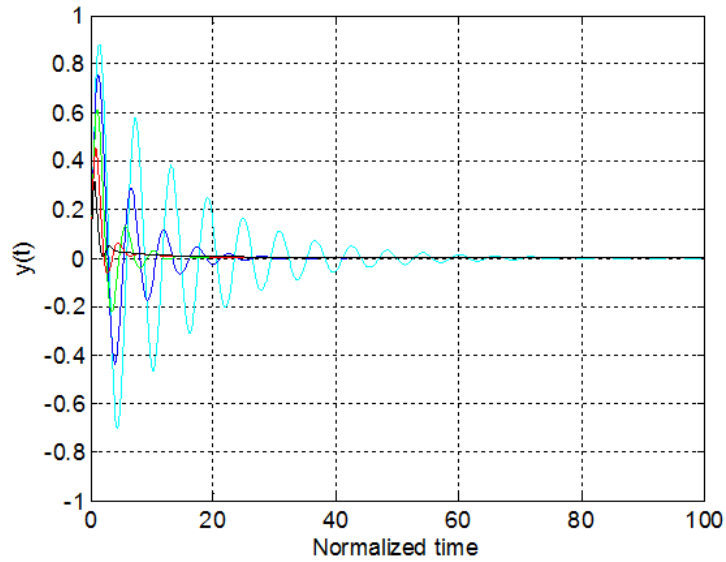


(a)

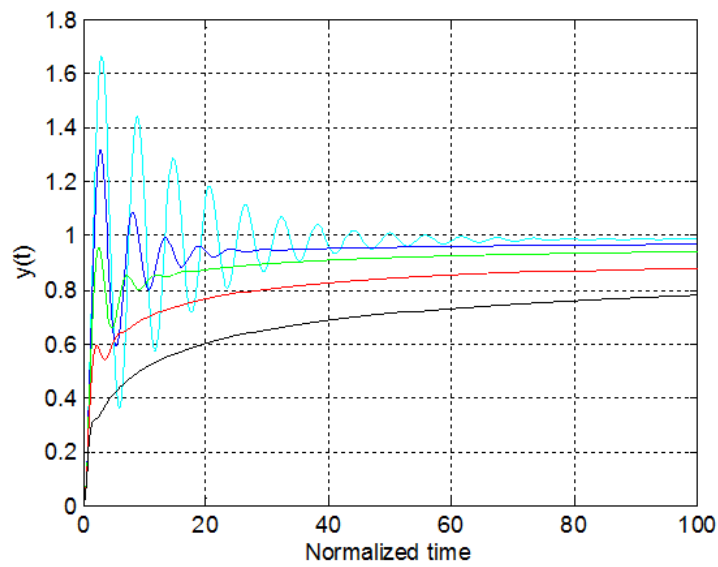


(b)

FIGURE 2.28 – Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.25$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)

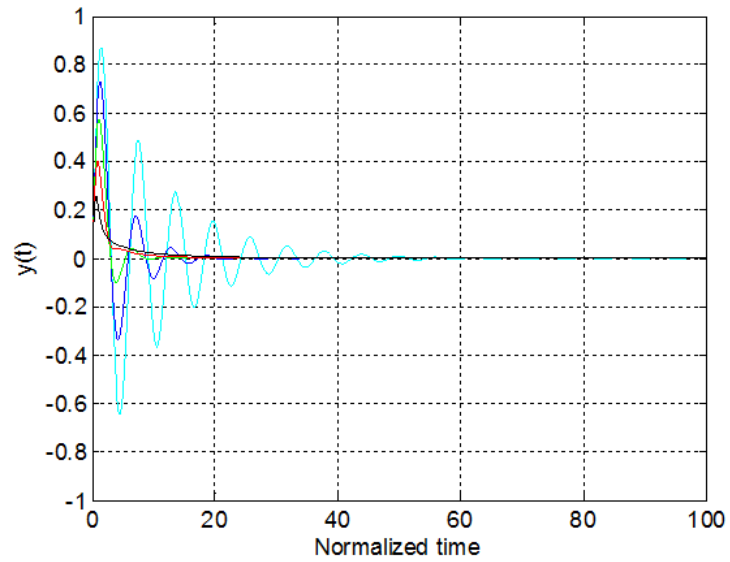


(a)

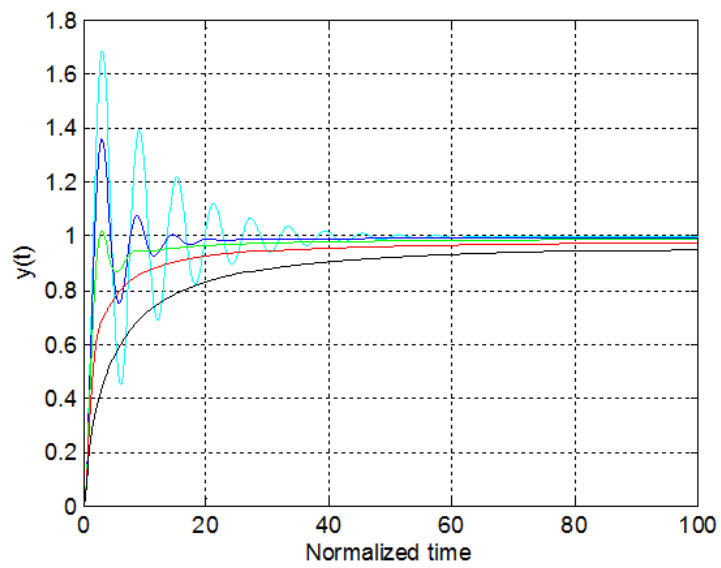


(b)

FIGURE 2.29 – Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)

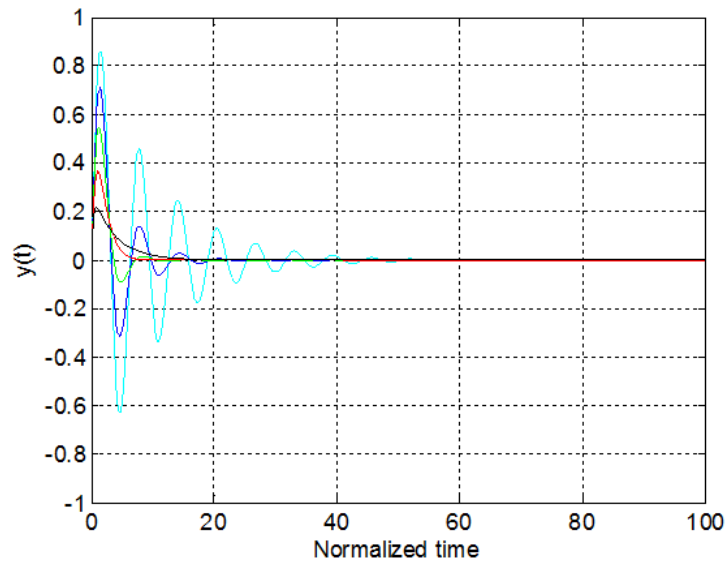


(a)

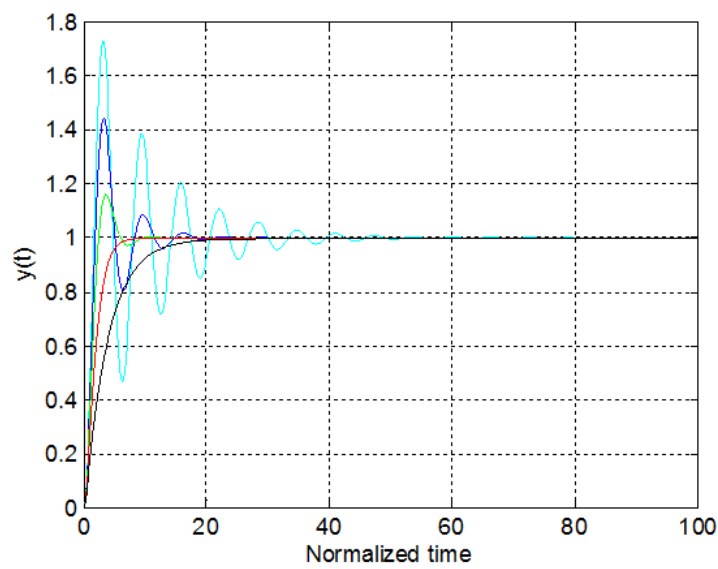


(b)

FIGURE 2.30 – Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.75$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)



(a)



(b)

FIGURE 2.31 – Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 1$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)



2.5 Conclusion

Si l'extension de la notion d'ordre de dérivation au corps des réels et des complexes date du XIX^{ème} siècle, l'application de la dérivation non entière est plus récente puisqu'elle date de la 2^{ème} partie du XX^{ème} siècle. En effet, pendant longtemps, ce nouvel opérateur a été considéré par les physiciens comme un concept mathématique sans application possible pour les sciences physiques. Aujourd'hui son application, notamment en sciences pour l'ingénieur, s'avère significative et largement répandue dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'automatique [A.Z.Daou et al. (2010b)] [A.Z.Daou et al. (2010c)] [Moreau et al. (2010b)], la thermique, l'électrochimie, ...

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce chapitre 2 avec les définitions et les interprétations de l'intégration d'ordre non entier. De plus, l'analyse de la dynamique des SDNE de 1^{ère} et 2^{ème} espèces met bien en évidence les propriétés les plus remarquables de ces systèmes. Ces résultats sont exploités au chapitre 3 avec une synthèse modale permettant de définir les paramètres de haut niveau de la suspension CRONE et au chapitre 6, là encore, pour définir les paramètres de synthèse de haut niveau de la butée innovante proposée.

Deuxième partie

Confort vibratoire et comportement
routier

Analyse et synthèse de la suspension dans le cadre du confort vibratoire

Sommaire

3.1	Introduction	80
3.2	Modèle d'analyse et fonctions de sensibilité liés au domaine du confort vibratoire	80
3.3	Exploitation du découplage dynamique pour les modèles de synthèse	83
3.3.1	Formulation du découplage dynamique	83
3.3.2	Déduction des modèles réduits	84
3.4	Exemple d'illustration de la démarche d'analyse : la suspension Hydractive de série	88
3.4.1	Architecture organique	88
3.4.2	Fonctionnement	88
3.4.3	Performances	89
3.5	Exemple d'illustration d'une synthèse d'architecture complexe : la suspension CRONE Hydractive	93
3.5.1	Architecture organique : expression analytique de l'impédance	93
3.5.2	Détermination des facteurs d'amortissement	94
3.5.3	Estimation paramétrique et performances	95
3.5.4	Fonctionnement	100
3.6	Comparaison des réponses fréquentielles et temporelles des modes "ferme", "souple" et CRONE	100
3.6.1	Rappels	100
3.6.2	Transfert force-débattement	101
3.6.3	Transfert Caisse-Route	101
3.6.4	Transfert Roue-Route	101
3.7	Conclusion	105



3.1 Introduction

Conformément à la démarche globale présentée dans le chapitre 1 de ce mémoire, le chapitre 3 se focalise sur le domaine de fonctionnement des petites variations de la course c de la suspension autour de son point d'équilibre statique. Cette étape est généralement la première dans le cadre d'une démarche, non seulement d'analyse visant à bien comprendre les phénomènes dynamiques dominants, mais aussi de synthèse de toute nouvelle architecture de suspension orientée confort vibratoire. Les petites variations de la course de la suspension autour de son point d'équilibre statique concernent essentiellement la dynamique verticale et n'ont pas d'impact significatif sur la dynamique globale du véhicule, ce point étant traité au chapitre 4.

L'objectif de la suspension d'un véhicule de tourisme dans le cadre du confort vibratoire est donc de limiter la transmission aux passagers des vibrations liées aux variations du profil routier. Pour répondre à cet objectif, la suspension doit tout d'abord avoir une bonne isolation vibratoire, c'est à dire avoir un bon filtrage dans la zone des moyennes et hautes fréquences. Pour garantir un bon confort vibratoire, il est également nécessaire d'avoir une bonne tenue de caisse, soit une résonance du transfert caisse-route la plus faible possible. De plus, il faut faire attention également à ne pas négliger la tenue de roue. En effet, un battement de roue trop important peut provoquer des vibrations dans la caisse à travers la suspension engendrant alors de l'inconfort du point de vue des passagers. Par ailleurs, chez PSA Peugeot Citroën, il est à noter que la valeur de la masse maximale de référence d'un véhicule pour l'étude d'une suspension est la masse "4p28" qui correspond au poids de 4 personnes de taille adulte (le conducteur et 3 passagers) auquel sont additionnés 28 kg de bagages dans le coffre.

La suite de ce chapitre est d'abord consacrée au développement d'un modèle d'analyse linéarisé autour du point d'équilibre statique de la suspension, puis à l'établissement des fonctions de sensibilité associées. Ensuite, une des particularités des véhicules de tourisme, le découplage dynamique des modes de caisse et de roue, est présenté et exploité pour en déduire deux modèles de synthèse, l'un associé à la caisse et l'autre à la roue, ainsi qu'une simplification des fonctions de sensibilité définies auparavant. Il est important de préciser que ce découplage dynamique existe pour les trois domaines de fonctionnement, ne se limitant pas seulement aux petites variations. Pour continuer, deux exemples d'illustration de suspension de véhicule Citroën C5 qui permettent de contourner un certain nombre de dilemmes sont présentés, d'abord la suspension Hydractive de série dans le cadre de l'analyse, puis la suspension CRONE Hydractive dans le cadre de la synthèse.

3.2 Modèle d'analyse et fonctions de sensibilité liés au domaine du confort vibratoire

A partir de la linéarisation autour de la position d'équilibre statique et après passage en transformée de Laplace sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, un modèle linéaire est déduit. La figure 3.1a présente la schématisation et le paramétrage du modèle quart de véhicule linéarisé. Le comportement vertical du pneumatique est représenté par un modèle de Kelvin-Voigt [Gillepsie (1992)] où k_1 désigne la raideur verticale et b_1 le coefficient de frottement visqueux équivalent du pneumatique. Quant à la suspension, le caractère générique de la démarche à ce stade du développement conduit à considérer sont impédance mécanique $I_s(s)$. La figure 3.1b présente un schéma causal conformément à l'approche Bond Graph [Margolis (2001)] [Dauphin-Tanguy (2009)] où les causalités intégrales pour les éléments I et C sont respectées.

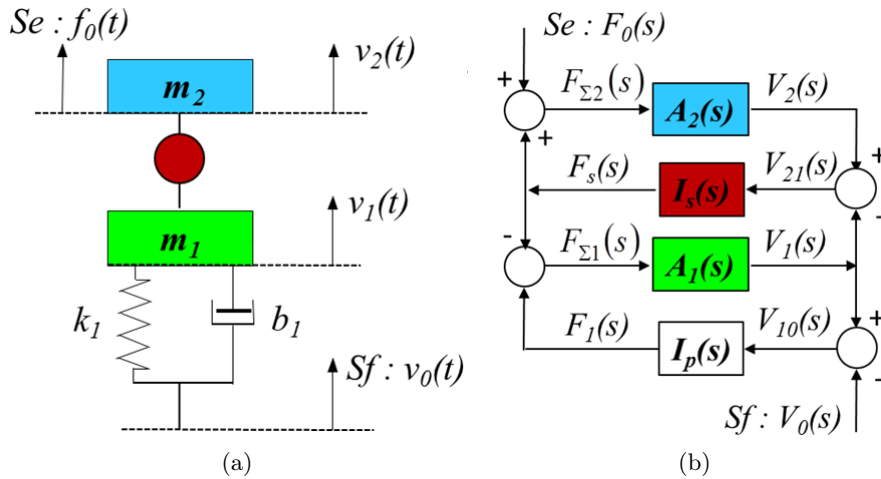


FIGURE 3.1 – Modèles d'analyse 1/4 véhicule (a) : schématisation et paramétrage et (b) : schéma causal

$A_i(s)$ représente l'admittance de la masse m_i , soit :

$$A_i(s) = \frac{V_i(s)}{F_{\Sigma i}(s)} = \frac{1}{m_i s}, \quad (3.2.1)$$

avec $V_i(s) = TL\{v_i(t)\}$ et $F_{\Sigma i}(s) = TL\{f_{\Sigma i}(t)\}$, TL désignant la Transformée de Laplace.

$I_p(s)$ désigne l'impédance du pneumatique, soit :

$$I_p(s) = \frac{F_1(s)}{V_{01}(s)} = \frac{k_1}{s} + b_1, \quad (3.2.2)$$

avec $F_1(s) = TL\{f_1(t)\}$ et $V_{01}(s) = TL\{v_{01}(t) = v_0(t) - v_1(t)\}$ la vitesse de déformation du pneumatique. Il est à noter que la faible valeur du coefficient de frottement visqueux équivalent b_1 (entre 50 Ns/m et 100 Ns/m selon le pneumatique) par rapport à celle de l'amortisseur (de l'ordre de 1000 Ns/m à 1500 Ns/m) peut être négligée lors de l'analyse et de la synthèse d'une architecture de suspension.

Les grandeurs représentatives qui sont utilisées par la suite pour l'analyse aux petites variations selon les trois domaines (**confort vibratoire**, **comportement routier** et **limites de fonctionnement**) sont :

- $V_1(s)$ laquelle permet de remonter après intégration aux variations $Z_1(s)$ de la position verticale du centre roue par rapport à la position d'équilibre statique. Cette grandeur intervient dans le **confort vibratoire** ;
- $V_2(s)$ qui permet de remonter après intégration aux variations $Z_2(s)$ de la position verticale de la caisse par rapport à la position d'équilibre statique. Cette grandeur intervient également dans le **confort vibratoire** ;
- $F_1(s)$ laquelle intervient avec la composante statique dans la génération des efforts longitudinaux F_x et transversaux F_y du pneumatique, et donc sur la dynamique globale du véhicule. Cette grandeur est liée au **comportement routier** ;
- $F_s(s)$ l'effort développé par la suspension dont la valeur maximale est limitée par la technologie, grandeur liée aux **limites de fonctionnement** ;
- $V_{10}(s)$ qui permet de remonter après intégration à la déformation $Z_{10}(s)$ du pneumatique limitée par sa taille. Cette grandeur est liée aux **limites de fonctionnement** ;



- $V_{21}(s)$ la vitesse de débattement de la suspension. Elle permet de remonter après intégration à son débattement $Z_{21}(s)$ limité par sa course. Cette grandeur est également liée aux **limites de fonctionnement** ;

Les fonctions de sensibilité sont alors établies indépendamment de l'expression de l'impédance $I_s(s)$ de la suspension (figure 3.2).

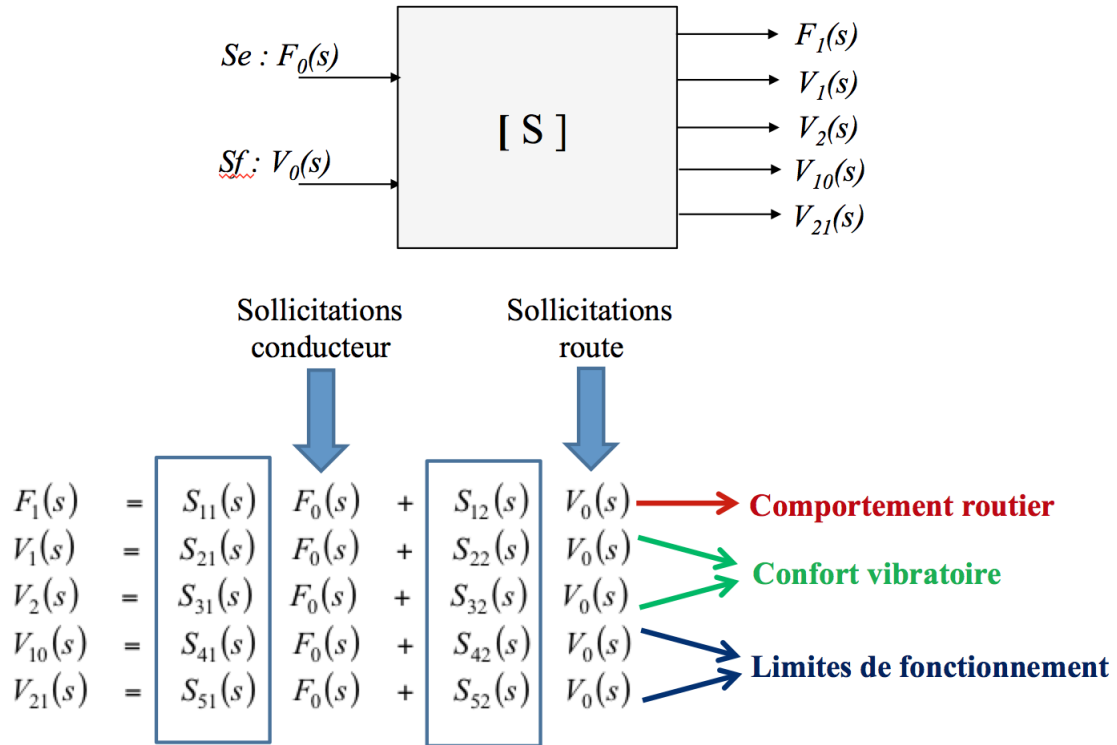


FIGURE 3.2 – Illustration concernant les fonctions $S_{ij}(s)$ de sensibilité

Les expressions analytiques des fonctions de sensibilité $S_{ij}(s)$ aux perturbations du conducteur sont données par :

$$S_{11}(s) = \left. \frac{F_1(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{k_1 I_s(s) s}{Den(s)} \quad (3.2.3)$$

$$S_{21}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{I_s(s) s^2}{Den(s)} \implies \left. \frac{Z_1(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{I_s(s) s}{Den(s)} \quad (3.2.4)$$

$$S_{31}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{m_1 s^3 + I_s(s) s^2 + k_1 s}{Den(s)} \implies \left. \frac{Z_2(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{m_1 s^2 + I_s(s) s + k_1}{Den(s)} \quad (3.2.5)$$

$$S_{41}(s) = \left. \frac{V_{10}(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{I_s(s) s^2}{Den(s)} \implies \left. \frac{Z_{10}(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{I_s(s) s}{Den(s)} \quad (3.2.6)$$

$$S_{51}(s) = \left. \frac{V_{21}(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{s(m_1 s^2 + k_1)}{Den(s)} \implies \left. \frac{Z_{21}(s)}{F_0(s)} \right|_{V_0(s)=0} = \frac{m_1 s^2 + k_1}{Den(s)} \quad (3.2.7)$$



Les expressions analytiques des fonctions de sensibilité $S_{ij}(s)$ aux perturbations de la route sont données par :

$$S_{12}(s) = \left. \frac{F_1(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} = \frac{k_1(m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)I_s(s)s)}{Den(s)} \quad (3.2.8)$$

$$S_{22}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} = \frac{k_1(m_2 s^2 + I_s(s)s)}{Den(s)} = \left. \frac{Z_1(s)}{Z_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} \quad (3.2.9)$$

$$S_{32}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} = \frac{k_1 I_s(s)s}{Den(s)} = \left. \frac{Z_2(s)}{Z_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} \quad (3.2.10)$$

$$S_{42}(s) = \left. \frac{V_{10}(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} = -\frac{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)I_s(s)s^3}{Den(s)} = \left. \frac{Z_{10}(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} \quad (3.2.11)$$

$$S_{52}(s) = \left. \frac{V_{21}(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} = -\frac{k_1 m_2 s^2}{Den(s)} = \left. \frac{Z_{21}(s)}{V_0(s)} \right|_{F_0(s)=0} \quad (3.2.12)$$

avec

$$Den(s) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)I_s(s)s^3 + k_1 m_2 s^2 + k_1 I_s(s)s . \quad (3.2.13)$$

3.3 Exploitation du découplage dynamique pour les modèles de synthèse

Par rapport aux véhicules de course par exemple [Carriou (2010)], une des particularités des véhicules de tourisme (résultant de la prise en compte de la physiologie et de la biomécanique du corps humain) est le découplage dynamique entre les modes de caisse (au voisinage de 1 Hz) et de roue (au voisinage de 12 à 15 Hz). C'est la raison pour laquelle les conditions nécessaires à ce découplage dynamique sont précisées.

Ainsi, dans le cas particulier des **architectures traditionnelles** de suspension et confortément au cadre d'étude décrit précédemment, l'impédance de la suspension $I_s(s)$ s'écrit :

$$I_s(s) = \frac{F_s(s)}{V_{12}(s)} = \frac{k_2}{s} + b_2 , \quad (3.3.1)$$

avec $F_s(s) = TL\{f_s(t)\}$ et $V_{12}(s) = TL\{v_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t)\}$ la vitesse de débattement et où k_2 désigne la raideur du ressort et b_2 le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur.

En introduisant l'expression (3.3.1) dans la relation (3.2.13), on obtient :

$$Den(s) = m_1 m_2 s^4 + b_2(m_1 + m_2)s^3 + (k_2(m_1 + m_2) + k_1 m_2)s^2 + k_1 b_2 s + k_1 k_2 . \quad (3.3.2)$$

3.3.1 Formulation du découplage dynamique

D'un **point de vue mathématique**, les conditions de découplage dynamique sont :

$$\text{si } k_2 \ll k_1 \text{ et si } b_2 = \sqrt{k_2 m_2} , \quad (3.3.3)$$

alors le polynôme (3.3.2) d'ordre 4 en s peut se factoriser sous la forme de deux polynômes d'ordre 2, soit :

$$Den(s) = (m_1 s^2 + b_2 s + k_1)(m_2 s^2 + b_2 s + k_2) . \quad (3.3.4)$$



La recherche des racines du polynôme caractéristique $P(s)$ est alors facilitée, soit :

$$P(s) = Den(s) = 0 \implies (s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2) = 0, \quad (3.3.5)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{n1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} : \text{ pulsation naturelle non amortie du mode de roue} \\ \zeta_1 = \frac{b_2}{2\sqrt{k_1 m_1}} : \text{ facteur d'amortissement du mode de roue} \\ \omega_{n2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} : \text{ pulsation naturelle non amortie du mode de caisse} \\ \zeta_2 = \frac{b_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} : \text{ facteur d'amortissement du mode de caisse} \end{array} \right. . \quad (3.3.6)$$

Il est à noter que la condition (3.3.3), $b_2 = \sqrt{k_2 m_2}$, conduit à $\zeta_2 = 0.5$.

On peut ainsi faire deux remarques :

- *le premier polynôme est associé au mode de roue (le plus rapide) et le second au mode de caisse (le plus lent) ;*
- *l'expression (3.3.4) met en évidence pour une architecture traditionnelle le fait que c'est le même élément dissipatif pour les deux modes (de caisse et de roue).*

D'un **point de vue pratique**, pour les véhicules de tourisme, la condition $k_2 \ll k_1$ est toujours vérifiée. En effet, pour une suspension métallique [Rizzo (2012)] k_2 est de l'ordre de 20 000 N/m, alors que l'ordre de grandeur de k_1 selon la taille du pneu varie entre 250 000 N/m et 350 000 N/m. Pour une suspension hydropneumatique, les valeurs de k_2 étant plus faibles, cette condition est d'autant plus vérifiée. Quant à l'égalité **stricte** concernant le coefficient de frottement visqueux b_2 , elle n'a pas besoin d'être rigoureusement vérifiée. En effet, pour des valeurs voisines de 0.5, le découplage dynamique est toujours observé, soit :

$$k_2 \ll k_1 \text{ et } b_2 \approx \sqrt{k_2 m_2} \implies \zeta_2 = \frac{b_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} \approx 0.5. \quad (3.3.7)$$

Il est important de noter que, pour toute synthèse d'une nouvelle suspension, et ce quelle que soit son architecture (traditionnelle ou complexe), le respect du découplage dynamique fait partie intégrante du cahier des charges de celle-ci.

3.3.2 Dédution des modèles réduits

Pour l'analyse et la synthèse, la première conséquence de ce découplage dynamique concerne l'expression (3.2.9) du transfert $T_{10}(s)$ qui se simplifie alors sous la forme :

$$T_{10}(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_0(s)} \approx \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{n1}}\right)^2 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}s + 1} \quad (3.3.8)$$

et la seconde concerne l'expression (3.2.10) de la réponse fréquentielle $T_{20}(j\omega)$, à savoir :

$$\forall \omega \ll \omega_{n1}, T_{20}(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega)}{Z_0(j\omega)} \approx \frac{k_2 + b_2 j\omega}{k_2 + b_2 j\omega + m_2(j\omega)^2}. \quad (3.3.9)$$



Comme illustré sur la figure 3.3a, la plage fréquentielle de validité du modèle associé à la relation (3.3.9) s'étend de 0 à 5 Hz environ. Dans cette plage fréquentielle, toutes les variations Z_0 du profil routier sont transmises sans amplification ou atténuation au déplacement vertical Z_1 de la roue. La dynamique de roue est donc négligeable devant celle de la caisse.

De même, comme illustré sur la figure 3.3b, le domaine fréquentiel de validité du modèle associé à l'équation (3.3.8) s'étend sur l'ensemble de la plage fréquentielle de fonctionnement de la suspension, soit de 0 à 30 Hz environ. Dans cette plage fréquentielle, aucune variation Z_0 du profil routier n'est transmise au déplacement vertical Z_2 de la caisse. On peut alors négliger la dynamique de caisse devant celle de la roue.

Ainsi, pour l'analyse et la synthèse, comme présenté sur la figure 3.4, le modèle quart de véhicule linéarisé à 2 ddl peut être alors réduit à deux modèles linéaires quart de véhicule à 1 ddl [Rizzo (2012)], l'un sur la plage [0 ; 5 Hz] associé à l'expression (3.3.9), l'autre sur la plage [5 ; 30 Hz] associé à la réponse fréquentielle de l'expression (3.3.8).

De plus, en matière d'étude du confort vibratoire, et quelle que soit l'architecture de suspension considérée, les points analysés sont :

- les **tenues de roue et de caisse** caractérisées dans le domaine temporel par les facteurs d'amortissement ζ_1 et ζ_2 , chacune des tenues étant d'autant meilleure que le facteur d'amortissement est important. Dans le domaine fréquentiel, les tenues sont caractérisées par les facteurs de résonance Q_1 et Q_2 des réponses fréquentielles $T_{10}(j\omega)$ et $T_{20}(j\omega)$ (relations (3.3.8) et (3.3.9)) respectivement, la tenue étant d'autant meilleure que le facteur de résonance est bien entendu faible ;
- l'**isolation vibratoire** caractérisée par le filtrage, c'est-à-dire la décroissance des diagrammes de gain des réponses fréquentielles, dans la zone des moyennes fréquences de grande sensibilité du corps humain dans la direction verticale (entre 2 et 8 Hz), c'est à dire entre les deux modes de caisse et de roue, et au-delà du mode de roue (entre 15 et 30 Hz), zone des "hautes fréquences" en matière d'étude de suspension de véhicule de tourisme.

Une telle formalisation de la problématique du confort vibratoire associée à la démarche d'analyse présentée dans ce chapitre facilite la mise en évidence des nombreux dilemmes inhérents aux architectures traditionnelles, notamment ceux décrits au chapitre 1 [Rizzo (2012)].

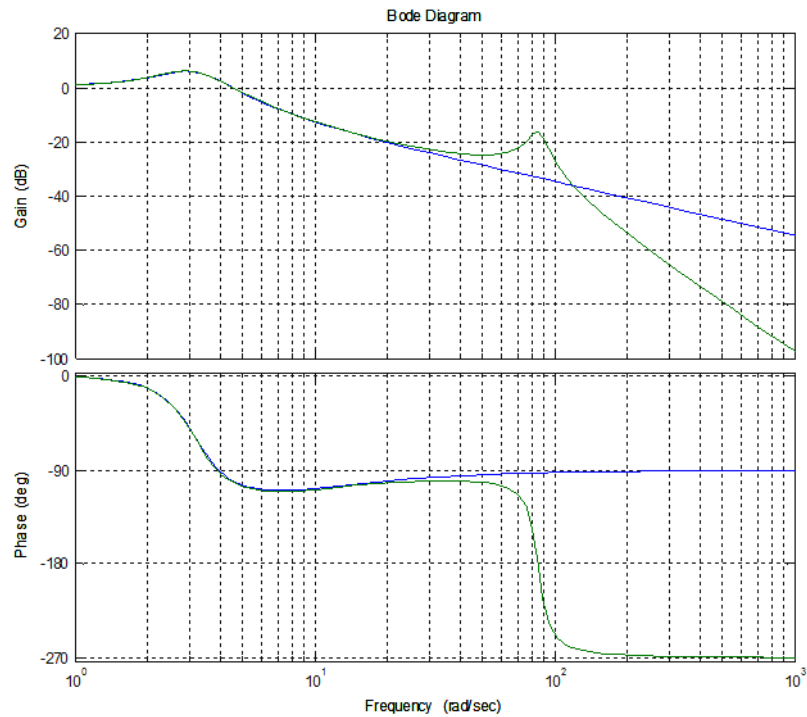
Compte tenu de toutes les remarques précédentes, et toujours dans le cadre du confort vibratoire, l'objectif de toutes les nouvelles architectures de suspension est donc de chercher à améliorer les tenues de roue et de caisse, ainsi que l'isolation vibratoire, tout en respectant le découplage dynamique des deux modes.

Le respect du découplage dynamique conduit à la généralisation de la factorisation de l'expression (3.2.13), soit :

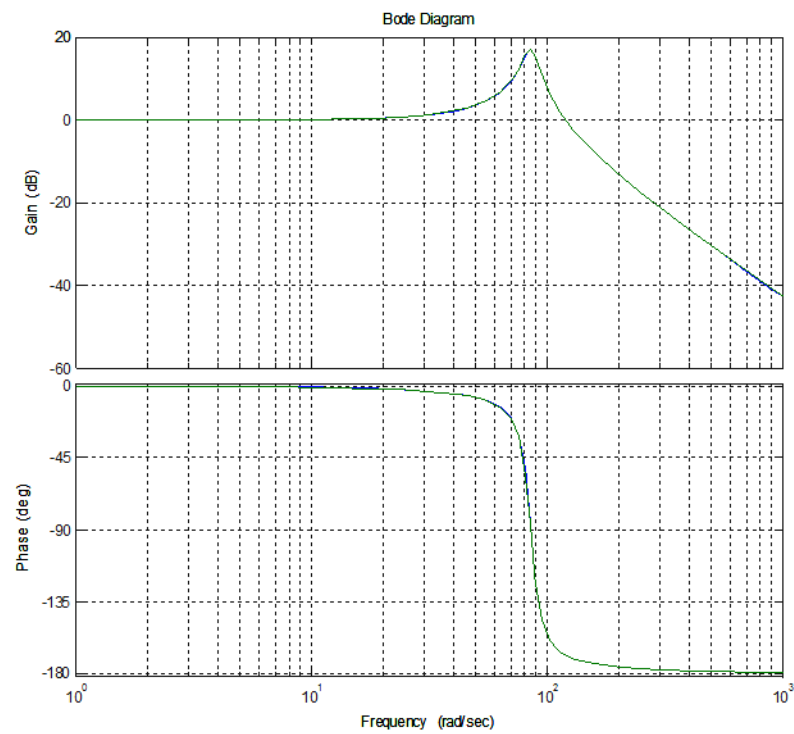
$$Den(s) = (m_1 s^2 + I_s(s)s + k_1)(m_2 s^2 + I_s(s)s) , \quad (3.3.10)$$

où

$$\lim_{s \rightarrow 0} I_s(s)s \ll k_1 . \quad (3.3.11)$$



(a)



(b)

FIGURE 3.3 – Diagramme de gains en échelle dB des transferts $T_{20}(s)$ (a) et $T_{10}(s)$ (b) pour un véhicule de tourisme

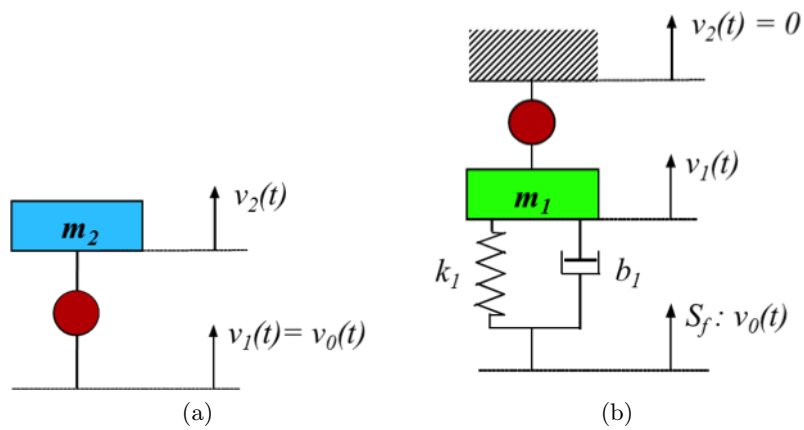


FIGURE 3.4 – Modèles d'analyse 1/4 véhicule correspondant aux expressions des transferts $T_{20}(s)$ (a) et $T_{10}(s)$ (b) pour un véhicule de tourisme



3.4 Exemple d'illustration de la démarche d'analyse : la suspension Hydractive de série

3.4.1 Architecture organique

Au cours des années 1980, avec l'arrivée de la mécatronique chez Citroën, la suspension hydropneumatique (architecture traditionnelle) évolue vers la suspension Hydractive (architecture complexe). Cette suspension est composée :

- d'une sphère et d'un amortisseur à chaque roue qui définissent une architecture traditionnelle dimensionnée pour le comportement routier (figure 3.15a), et dont l'expression de l'impédance mécanique $I_s(s)$ est donnée par :

$$I_s(s) = S_v^2 \left(\frac{1}{C_2 s} + R_2 \right) = \frac{k_2}{s} + b_2, \quad (3.4.1)$$

avec S_v la section équivalente du vérin de suspension (tenant compte de la démultiplication due à la cinématique du train), $C_2 = S_v^2/k_2$ la capacité hydropneumatique de la sphère et $R_2 = b_2/S_v^2$ la résistance hydraulique de l'amortisseur,

- et d'une sphère additionnelle associée à son amortisseur, l'ensemble définissant alors une architecture complexe dimensionnée pour le confort vibratoire (figure 3.15b), l'expression de l'impédance mécanique étant donnée par

$$I_s(s) = \frac{S_v^2}{\frac{1}{\left(\frac{1}{C_1 s} + R_1\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2 s} + R_2\right)}}, \quad (3.4.2)$$

où les C_j représentent les capacités hydropneumatiques et les R_j les résistances hydrauliques.

Le passage d'une architecture à l'autre est réalisé à l'aide d'une électrovanne tout-ou rien qui permet d'isoler ou de mettre en communication les différents organes hydropneumatiques qui composent la suspension. Le gain statique (raideur résultante) du transfert force-débattement, soit $\lim_{s \rightarrow 0} s I_s(s)$, étant plus important dans le cas de l'architecture traditionnelle que celui de l'architecture complexe, les terminologies mode "ferme" (pour le comportement routier) et mode "souple" (pour le confort vibratoire) ont été adoptées chez PSA depuis cette époque.

3.4.2 Fonctionnement

D'un point de vue de l'instrumentation, les véhicules Citroën équipés d'une suspension Hydractive possèdent notamment :

- des capteurs de débattement mesurant la position de la caisse par rapport à la roue ;
- des capteurs de position des pédales de frein et d'accélération, ainsi que d'un capteur d'angle au volant permettant d'anticiper les conséquences des actions du conducteur (report de charge $f_0(t)$) ;
- d'un calculateur qui à partir de ces mesures et d'un algorithme de supervision commande l'ouverture ou la fermeture de l'électrovanne, et donc la commutation entre les modes "ferme" et "souple".

D'un point de vue de la commande, la logique de commutation est la suivante (figure 3.6) :

- en l'absence de sollicitation du conducteur sur les organes de conduite (angle volant nul = ligne droite ; vitesse constante = pas de variation de position des pédales) ET

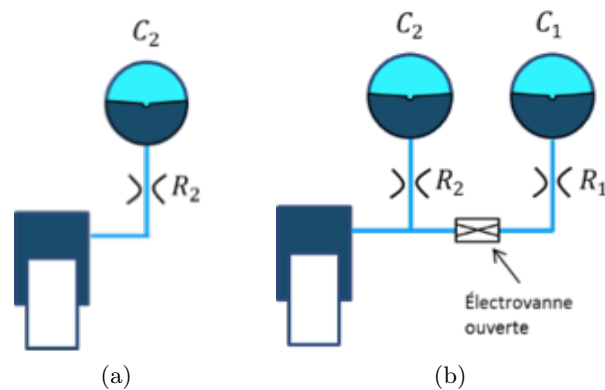


FIGURE 3.5 – Mode "ferme" (a) et mode "souple" (b) de la suspension Hydractive de série pour un quart de véhicule

- d'un débattement de suspension mesuré inférieur à un seuil prédéfini, la suspension est en mode "souple" pour favoriser l'isolation vibratoire ;
- en présence d'une sollicitation du conducteur (détectée et mesurée par les capteurs pédales et/ou volant) ET/OU d'un débattement mesuré supérieur à un seuil, la suspension commute en mode "ferme" pour favoriser le comportement routier ET/OU les tenues de caisse et de roue.

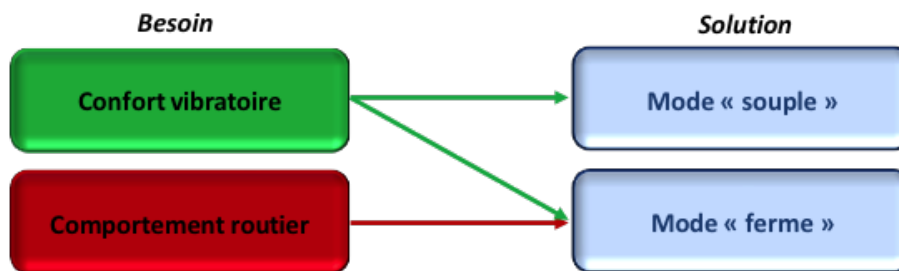


FIGURE 3.6 – Illustration du principe de fonctionnement de la suspension Hydractive de série

La figure 3.7 complète l'illustration du principe de fonctionnement.

3.4.3 Performances

Dans le contexte d'étude précédemment défini, les valeurs numériques des paramètres du modèle linéarisé sont données dans le tableau 3.1. Ces valeurs correspondent à un quart de véhicule arrière. Dans le cas de la technologie hydropneumatique, il est à noter la dépendance des capacités hydropneumatiques des sphères à la masse suspendue m_2 (les capacités diminuent quand la masse augmente) [Serrier (2008)].

La figure 3.8 présente les diagrammes de Bode des réponses fréquentielles $T_{20}(j\omega)$ (figure 3.8a) et $T_{10}(j\omega)$ (figure 3.8c), ainsi que les réponses indicielles $z_2(t)$ (figure 3.8b) et $z_1(t)$ (figure 3.8d) obtenues avec les modèles à 2 ddl et à 1 ddl dans le cas à vide en mode "souple". Ces réponses illustrent bien le découplage dynamique et la validité des hypothèses simplificatrices introduites précédemment.

Les tableaux 3.2 et 3.3 présentent les valeurs numériques des ω_{n_i} et ζ_i obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF) et "souple" (HS). L'état paramétrique de référence considéré pour calculer les variations relatives correspond :

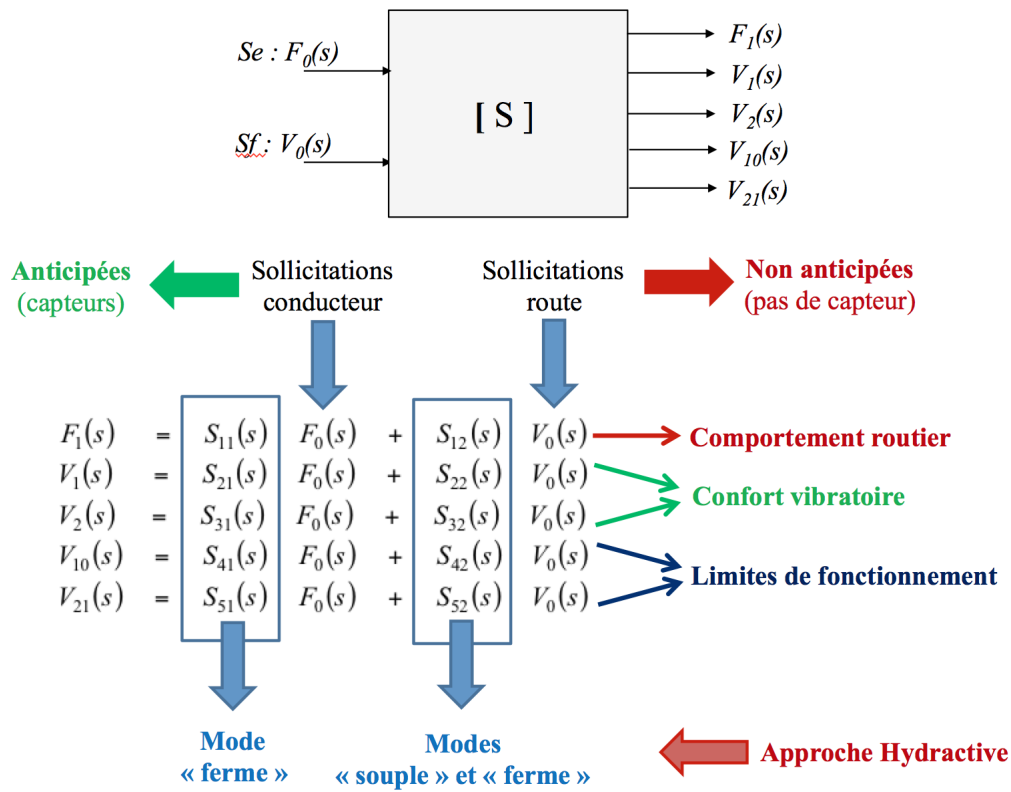


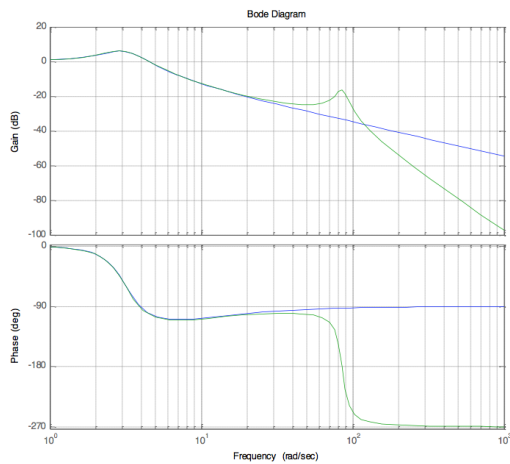
FIGURE 3.7 – Complément d'illustration du principe de fonctionnement de la suspension Hydractive de série

Étage primaire $i = 1$	Étage secondaire $i = 2$		
$m_1 = 50 \text{ kg}$	$S_v = 2,88 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	$R_1 = 16,85 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$	$R_2 = 12,04 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$
$k_1 = 350\,000 \text{ kg}$	A vide		
$b_1 = 50 \text{ Ns/m}$	$m_2 = 320 \text{ kg}$	$C_1 = 13,74 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5/\text{N}$	$C_2 = 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5/\text{N}$
	En charge		
	$m_2 = 472 \text{ kg}$	$C_1 = 6,33 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5/\text{N}$	$C_2 = 5,75 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5/\text{N}$

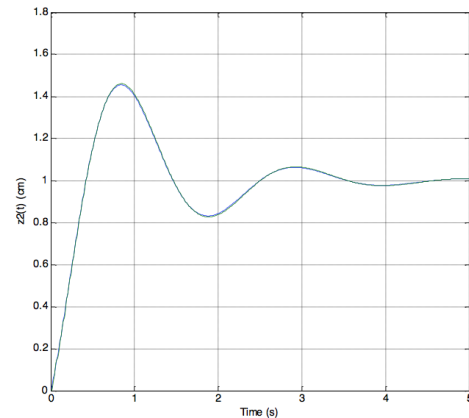
TABLE 3.1 – Valeurs numériques des paramètres du modèle quart de véhicule arrière

- à celui du mode "ferme" pour le calcul de la sensibilité de ω_{n_i} et ζ_i aux variations du chargement entre à vide et en charge ;
- à celui du chargement à vide pour le calcul de la sensibilité de ω_{n_i} et ζ_i aux variations d'architecture entre les modes "ferme" et "souple".

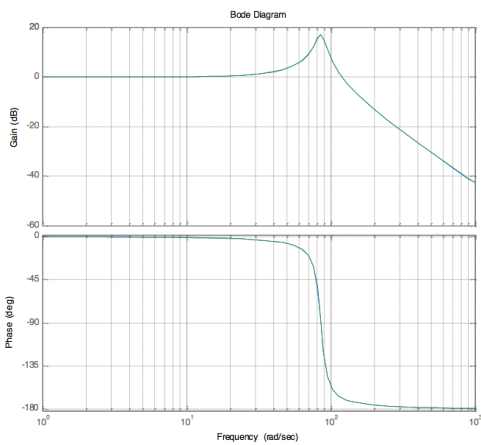
L'observation de ces tableaux permet de faire les remarques suivantes :



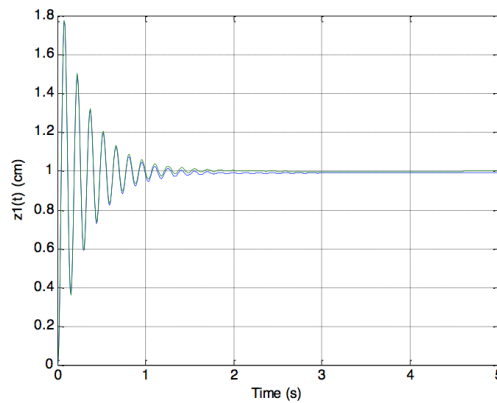
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.8 – Diagrammes de Bode des réponses fréquentielles $T_{20}(j\omega)$ (a) et $T_{10}(j\omega)$ (c), et réponses indicielles $z_2(t)$ (b) et $z_1(t)$ (d) obtenues avec les modèles à 2 ddl (en vert) et à 1 ddl (en bleu) dans le cas à vide en mode "souple"

- pour le mode de roue :
 - une quasi-insensibilité de ω_{n_1} (tableau 3.2a) à la fois aux variations de m_2 (0.6 % à 1.2 % entre à vide et en charge) et au changement d'architecture (0.2 % à 0.8 % entre HF et HS) ;
 - une quasi-insensibilité de ζ_1 (tableau 3.2b) aux variations de m_2 pour une architecture donnée (0.8 % à 0.3 % pour HF ou HS) ;
 - une sensibilité de ζ_1 (tableau 3.2b) de l'ordre de 41.5 % au changement d'architecture pour un chargement donné (à vide ou en charge) ;
- pour le mode de caisse :
 - une sensibilité de ω_{n_2} (tableau 3.3a) de l'ordre de 20 % aux variations de m_2 pour une architecture donnée et de l'ordre de 30 % au changement d'architecture pour un chargement donné ;
 - une sensibilité de ζ_2 (tableau 3.3b) de l'ordre de 45 % aux variations de m_2 pour une architecture donnée et de l'ordre de 10 % au changement d'architecture pour un chargement donné.

Enfin, le rapport $\omega_{n_1}/\omega_{n_2}$ varie entre 16 (pour HF en charge) et 27 (pour HS à vide),



ω_{n_1} (rad/s)	Mode de roue		Variation
	HF	HS	
A vide	85,4	85,2	0,2 %
En charge	86,4	85,7	0,8 %
Variation	1,2 %	0,6 %	

(a)

ζ_1	Mode de roue		Variation
	HF	HS	
A vide	0,121	0,0707	41,6 %
En charge	0,12	0,0705	41,3 %
Variation	0,8 %	0,3 %	

(b)

TABLE 3.2 – Valeurs numériques de ω_{n_1} et ζ_1 obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF) et "souple" (HS)

ω_{n_2} (rad/s)	Mode de caisse		Variation
	HF	HS	
A vide	4,54	3,16	30,4 %
En charge	5,44	3,79	30,3 %
Variation	19,8 %	19,9 %	

(a)

ζ_2	Mode de caisse		Variation
	HF	HS	
A vide	0,355	0,297	11,3 %
En charge	0,181	0,164	9,4 %
Variation	46,0 %	44,8 %	

(b)

TABLE 3.3 – Valeurs numériques de ω_{n_2} et ζ_2 obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF) et "souple" (HS)

illustrant bien le découplage dynamique entre les modes de roue et de caisse.



3.5 Exemple d'illustration d'une synthèse d'architecture complexe : la suspension CRONE Hydractive

Cette version de la suspension CRONE Hydractive, qui équipe une Citroën C5 (figure 3.9), présente elle aussi deux modes de fonctionnement : un mode "ferme" et un mode CRONE.



FIGURE 3.9 – Véhicule Citroën C5 lors de tests sur un banc quatre vérins

L'approche comparative présentée dans ce chapitre par rapport à la série est faite à iso-mode "ferme" (figure 3.8a), tant au niveau architectural (1 sphère et 1 amortisseur de roue), qu'au niveau des valeurs numériques des caractéristiques organiques. Ce point constitue une première contrainte pour la synthèse du mode CRONE à laquelle s'ajoute les spécifications suivantes, à savoir obtenir :

- une *tenue de roue* et une *isolation vibratoire* identiques, voire meilleures que celle obtenue avec le mode "souple" de série ;
- une *tenue de caisse* comparable, voire supérieure à celle obtenue avec le mode "ferme" de série, et ce afin d'éliminer la commutation en mode "ferme" qui peut apparaître avec la série lors d'un débattement important en mode souple (figure 3.6) ;
- une mise en défaut de l'interdépendance *masse-amortissement* lors des variations de la masse du véhicule entre à vide et en charge ;
- un respect du découplage dynamique entre les modes de roue et de caisse.

La méthode de synthèse, qui exploite les différentes remarques faites lors de l'analyse, comporte trois étapes :

- la détermination de l'expression analytique de l'impédance de la suspension dont la structure résulte de l'architecture organique qui intègre, notamment, des contraintes d'encombrement liées à l'application automobile (nombre de sphères supplémentaires) ;
- la détermination des facteurs d'amortissement de chacun des deux modes répondant aux spécifications en matière de *tenues de roue et de caisse*, et ce à l'aide du concept de l'intégration non entière [Oustaloup (1995)], [Samko (2008)]. Cette première étape contribue à l'établissement de contraintes fréquentielles supplémentaires dans la mise en forme du gabarit de la réponse fréquentielle de l'impédance de la suspension ;
- l'estimation des paramètres de l'impédance à l'aide d'une optimisation sous contraintes.

3.5.1 Architecture organique : expression analytique de l'impédance

Par rapport au mode "souple" de la série, l'architecture du mode CRONE est enrichie d'une sphère supplémentaire (figure 3.10) purement capacitive (pas d'élément dissipatif). L'ex-



pression de l'impédance est alors donnée par :

$$I_s(s) = \frac{S_v^2}{C_0 s + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1 s} + R_1\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2 s} + R_2\right)}}, \quad (3.5.1)$$

où les C_j représentent les capacités hydropneumatiques et les R_j les résistances hydrauliques ($j = 0$ à 2). Pour faciliter l'analyse et la synthèse, l'expression (3.6.3) peut se mettre sous la forme :

$$I_s(s) = \frac{K_0}{s} \left(\frac{1 + s/\omega_{z_1}}{1 + s/\omega_{p_1}} \right) \left(\frac{1 + s/\omega_{z_2}}{1 + s/\omega_{p_2}} \right), \quad (3.5.2)$$

avec

$$\begin{cases} K_0 = S_v^2 / (C_0 + C_1 + C_2) \\ \omega_{z_1} = 1/R_1 C_1, \omega_{p_1} = a_1 \omega_{z_1}, a_1 > 1 \\ \omega_{z_2} = 1/R_2 C_2, \omega_{p_2} = a_2 \omega_{z_2}, a_2 > 1 \end{cases}, \quad (3.5.3)$$

mettant ainsi en évidence que l'expression de l'impédance d'une telle architecture n'est autre que celle d'un intégrateur en cascade avec deux cellules à avance de phase [Rizzo (2012)], l'une centrée géométriquement sur la fréquence propre de roue ($i = 1$) et l'autre sur la fréquence propre de caisse ($i = 2$).

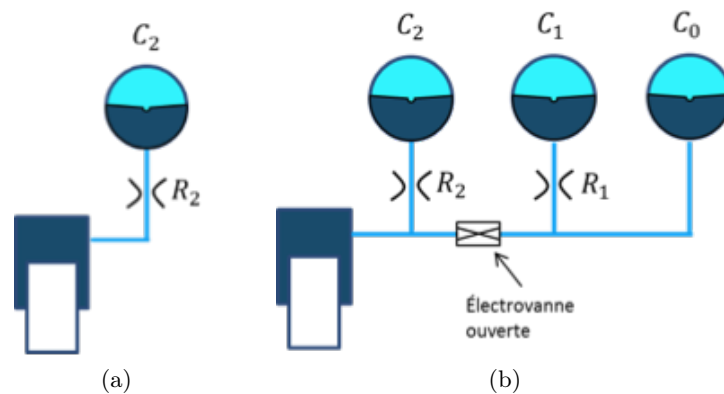


FIGURE 3.10 – Mode "ferme" (a) et mode CRONE (b) de la suspension CRONE Hydractive pour un quart de véhicule

3.5.2 Détermination des facteurs d'amortissement

Les propriétés de parcimonie paramétrique de l'opérateur d'intégration non entière (appelée aussi fractionnaire) [Oustaloup (1995)] sont exploitées pour définir des paramètres de synthèse de haut niveau associés à chacun des deux modes. Ainsi, dans un premier temps à ce stade de la méthode, l'impédance de la suspension se résume à une expression de la forme :

$$I_s(s) = \frac{d_i}{s^{1-\nu_i}}, \quad (3.5.4)$$

avec $i = 1$ pour le mode de roue et 2 pour le mode de caisse, d_i une constante réelle positive



et ν_i un ordre non entier réel compris entre 0 et 1. L'introduction de l'expression (3.5.4) dans la relation (3.3.10) conduit alors à :

$$Den(s) = (m_1 s^2 + d_1 s^{\nu_1} + k_1)(m_2 s^2 + d_2 s^{\nu_2}) . \quad (3.5.5)$$

La solution du problème ainsi posé s'inscrit dans le cadre d'une synthèse modale fractionnaire [Oustaloup (1995)] où les paramètres inconnus, d_i et ν_i , sont à déterminer à partir des spécifications en matière de *rapidité* et d'*amortissement*. La recherche des racines du polynôme caractéristique $P(s)$ conduit alors à la résolution du système suivant :

$$P(s) = Den(s) = 0 \implies \begin{cases} m_1 s^2 + d_1 s^{\nu_1} + k_1 = 0 \\ m_2 s^2 + d_2 s^{\nu_2} = 0 \end{cases} . \quad (3.5.6)$$

La résolution de chacun de ces deux polynômes est traitée au chapitre 2 dans le cadre des SDNE de 1^{ère} espèce pour le polynôme relatif au mode de caisse et de 2^{ème} espèce pour le polynôme relatif au mode de roue.

Conformément aux développements du chapitre 2, la résolution du système (3.5.6), en tenant compte des données de synthèse et des spécifications, conduit :

- pour le mode de roue ($i = 1$), à une paire de racines complexes conjuguées, s_{11} et s_{12} , obtenue numériquement, soit :

$$s_{1\frac{1}{2}} = \rho e^{\pm j\theta_1} \text{ avec } \begin{cases} \rho_1 = 85,95 \text{ rad/s} \\ \theta_1 = 1,648 \text{ rad } (94,42^\circ) \end{cases} , \quad (3.5.7)$$

à laquelle correspondent un facteur d'amortissement $\zeta_1 = \cos(\pi - \theta_1) = 0.0774$ obtenu avec $\nu_1 = 2/3$ et une constante $d_1 = 2944 N s^{2/3} / m$;

- pour le mode de caisse ($i = 2$), à une paire de racines complexes conjuguées, s_{21} et s_{22} , obtenue analytiquement [Oustaloup (1995)], soit :

$$s_{2\frac{1}{2}} = \rho e^{\pm j\theta_2} \text{ avec } \begin{cases} \rho_2 = \left(\frac{d_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{2-\nu_2}} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2-\nu_2} \end{cases} , \quad (3.5.8)$$

dont le facteur d'amortissement $\zeta_2 = \cos(\pi - \theta_2)$ ne dépend que de l'ordre ν_2 . Cette propriété remarquable conduit ainsi à un amortissement robuste vis-à-vis des variations de la masse m_2 entre à vide et en charge. Compte tenu des spécifications, un facteur d'amortissement égal à 0.5 (soit $\theta_2 = 135^\circ$) est choisi conduisant à $\nu_2 = 1/2$ et $d_2 = 4423 N s^{1/2} / m$.

3.5.3 Estimation paramétrique et performances

La première phase de cette dernière étape est de définir un gabarit fréquentiel de la réponse de l'impédance d'une telle architecture résultant de la traduction des différents points des spécifications du cahier des charges. À ce titre, les réponses fréquentielles des expressions (3.5.4) sont utilisées pour construire localement (au voisinage des fréquences propres de la caisse et de la roue) un tel gabarit.

Ensuite, à l'aide d'un module spécifique de la Toolbox CRONE (figure 3.11), des valeurs initiales des paramètres K_0 , ω_{z_1} , ω_{p_1} , ω_{z_2} et ω_{p_2} (relation (3.5.2)) sont introduites. Puis, grâce à une fonctionnalité de l'interface graphique permettant avec la souris de déplacer sur l'écran



les pôles et les zéros, une optimisation "manuelle" visant à "minimiser visuellement" l'écart entre les diagrammes de gain et de phase de l'impédance (3.5.2) et ceux du gabarit fréquentiel est effectuée. Ces premières valeurs paramétriques ainsi obtenues servent ensuite de valeurs initiales utilisées par un algorithme d'optimisation visant à minimiser un critère composé des erreurs quadratiques des diagrammes de gain et de phase entre le gabarit fréquentiel et la réponse fréquentielle de l'expression (3.5.2). Il est à noter que le mode "ferme" étant identique à celui de la série, la valeur numérique initiale de $\omega_{z_2} = 1/R_2C_2$ est identique à celle du paragraphe 3.4.

La figure 3.11 présente une copie d'écran du module spécifique de la Toolbox CRONE [Malti (2011)] utilisé pour l'estimation des paramètres. La réponse fréquentielle tracée correspond à celle du transfert force-débattement défini par $sI_s(s)$. La méthode d'estimation paramétrique ainsi définie conduit à :

$$\begin{cases} K_0 = 3981 \text{ N/m} \\ \omega_{z_1} = 1,66 \text{ rad/s}, \omega_{p_1} = 6,95 \text{ rad/s} \\ \omega_{z_2} = 22 \text{ rad/s}, \omega_{p_2} = 252 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (3.5.9)$$

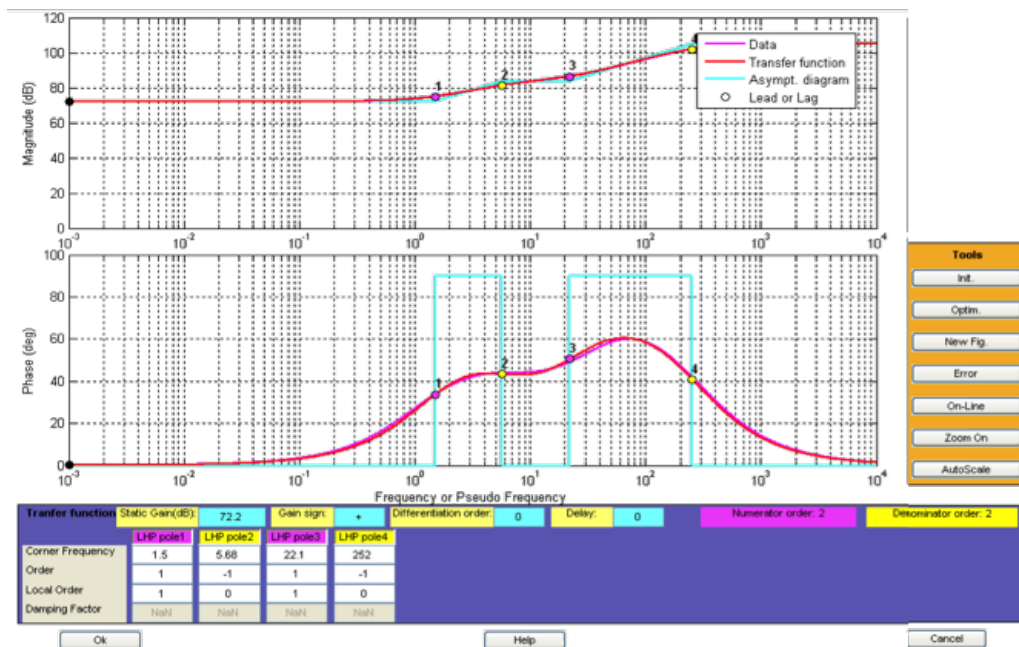


FIGURE 3.11 – Copie d'écran du module spécifique de la Toolbox CRONE utilisé pour l'estimation des paramètres du mode CRONE de la suspension Hydractive

Les tableaux 3.4 et 3.5 présentent les valeurs numériques des ω_{n_i} et ζ_i obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF), "souple" (HS) (déjà présentées tableaux 3.2 et 3.3) et CRONE (HC).

L'observation de ces tableaux permet de faire pour le mode CRONE les remarques comparatives suivantes.

- pour le mode de roue :
 - une même quasi-insensibilité de ω_{n_1} (tableau 3.4a) aux variations de m_2 (0.9 %) ;
 - une augmentation de la sensibilité de ζ_1 (tableau 3.4b) aux variations de m_2 (40.1 %), tout en gardant des valeurs de ζ_1 comprises entre celles des modes "ferme" et "souple" de la série ;
 - une diminution de la sensibilité de ζ_1 (tableau 3.4b) au changement d'architecture entre "ferme" et "CRONE" pour un chargement donné ;



ω_{n_1} (rad/s)	Mode de roue		
	HF	HS	HC
A vide	85,4	85,2	90,8
En charge	86,4	85,7	90
Variation	1,2 %	0,6 %	0,9 %

(a)

ζ_1	Mode de roue		
	HF	HS	HC
A vide	0,121	0,0707	0,0714
En charge	0,12	0,0705	0,1
Variation	0,8 %	0,3 %	40,1 %

(b)

TABLE 3.4 – Valeurs numériques de ω_{n_1} et ζ_1 obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF), "souple" (HS) et CRONE (HC)

ω_{n_2} (rad/s)	Mode de caisse		
	HF	HS	HC
A vide	4,54	3,16	5,42
En charge	5,44	3,79	5,9
Variation	19,8 %	19,9 %	8,9 %

(a)

ζ_2	Mode de caisse		
	HF	HS	HC
A vide	0,355	0,297	0,51
En charge	0,181	0,164	0,55
Variation	46,0 %	44,8 %	7,8 %

(b)

TABLE 3.5 – Valeurs numériques de ω_{n_2} et ζ_2 obtenues à vide et en charge pour les modes "ferme" (HF), "souple" (HS) et CRONE (HC)

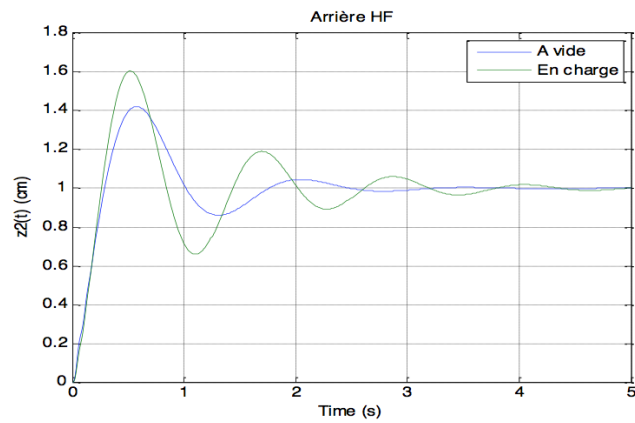
- pour le mode de caisse :
 - une sensibilité de ω_{n_2} (tableau 3.5a) aux variations de m_2 diminuée d'un facteur 2 (8.9 % à la place de 19.8 % pour la série) ;
 - une sensibilité de ζ_2 (tableau 3.5b) aux variations de m_2 diminuée d'un facteur 5 (de l'ordre de 8% à la place de 45 % environ). Il est à noter qu'une variation de 8 % de ζ_2 n'est pas perçue par les passagers du véhicule.

Enfin, on peut observer que le découplage dynamique entre les modes de roue et de caisse est bien respecté.

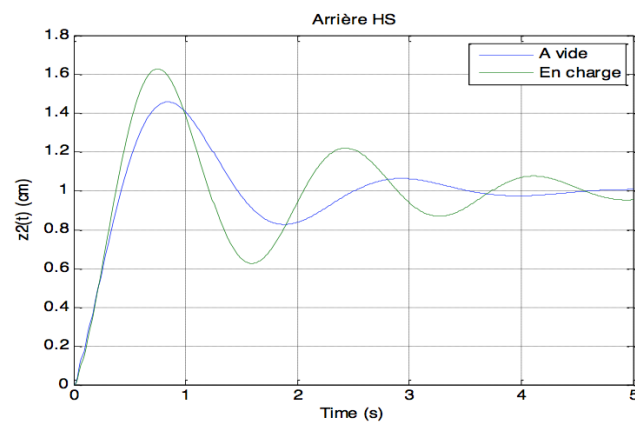
Les figures 3.12 et 3.13 présentent les réponses indicielles obtenues à l'aide du modèle de validation dans le cadre de l'étude aux petites variations. Pour faciliter la comparaison avec la série, sur chaque figure apparaissent les réponses des modes "ferme" (noté HF, pour Hydractive Ferme, en haut à gauche), "souple" (noté HS, pour Hydractive Souple, en haut à droite) et CRONE (noté HC, pour Hydractive CRONE, au milieu en bas).

Ainsi, la figure 3.12 présente les réponses indicielles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'une amplitude de 1 cm. La mise en défaut de l'interdépendance *masse-amortissement*, obtenue à l'aide du mode CRONE (figure 3.12c), se traduit par un facteur d'amortissement pratiquement indépendant de la masse suspendue. De plus, la valeur nettement plus faible du premier dépassement et le caractère peu oscillatoire de ce dernier montrent une meilleure *tenue de caisse*. Enfin, les temps de raideur similaires (temps au bout duquel la réponse atteint pour la première fois sa valeur finale) du mode CRONE et du mode "souple" de la suspension Hydractive de série illustrent bien un dimensionnement identique pour ces deux modes concernant l'*isolation vibratoire*, et ce conformément au cahier des charges.

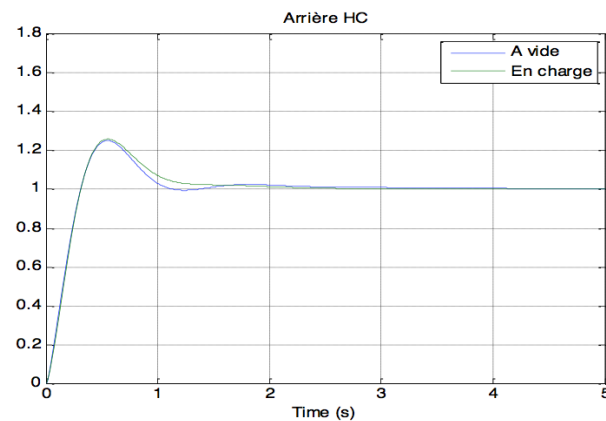
La figure 3.13 présente les réponses indicielles du déplacement vertical de la roue à un saut échelon de la route d'une amplitude de 1 cm. Conformément au cahier des charges, la tenue de roue du mode CRONE (figure 3.13c) est la même que celle du mode "souple" de la suspension Hydractive de série (figure 3.13b). Il est important de noter que le contrôle des vibrations de la roue est essentiel car dans le cas où celles-ci sont trop importantes, il peut y



(a)



(b)

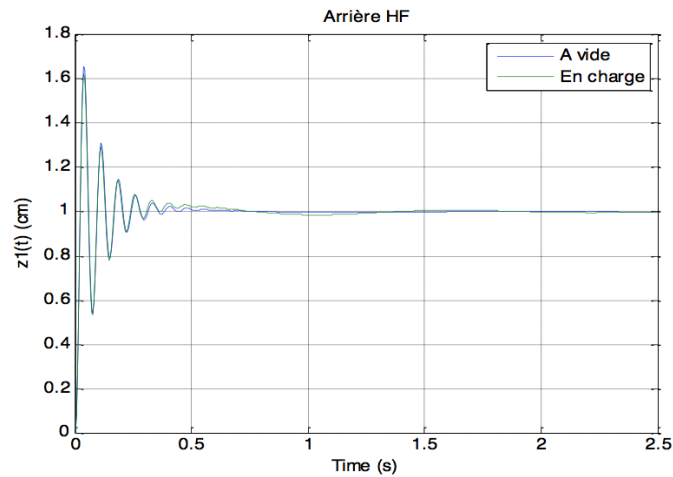


(c)

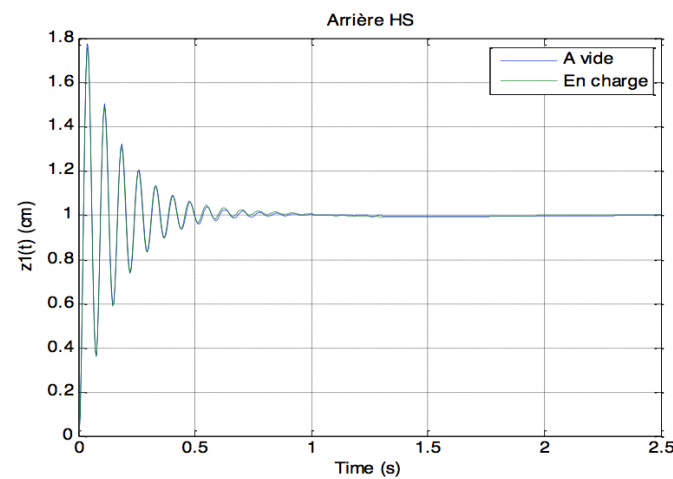
FIGURE 3.12 – Réponses indicielles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à vide (en bleu), en charge (en vert))

avoir des remontées dans la caisse, causant alors une source d'inconfort pour les passagers.

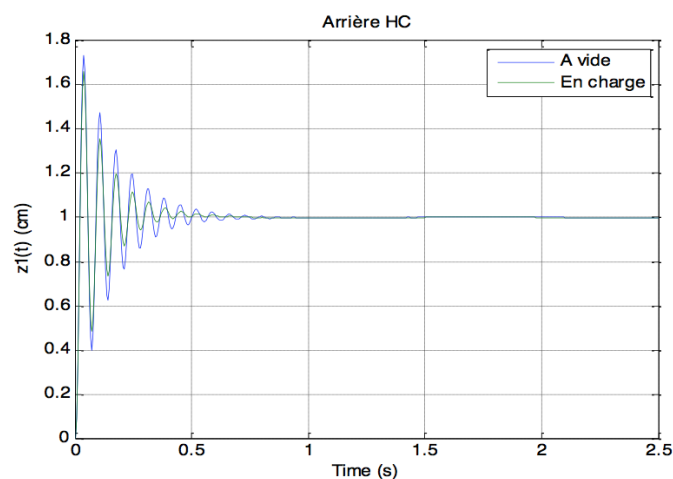
Le lecteur intéressé trouvera dans [Serrier (2008)], [Abi Zeid Daou (2011a)] [Moreau (2012)] une analyse à l'aide des séries de Volterra expliquant pourquoi la mise en défaut de l'interdépendance **masse-amortissement** est conservée lors de grandes variations malgré la présence des non-linéarités des éléments de suspension.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.13 – Réponses indicielles du déplacement vertical de la roue à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à vide (en bleu), en charge (en vert))



3.5.4 Fonctionnement

L'instrumentation nécessaire au fonctionnement de la suspension CRONE Hydractive est identique à celui d'une série (voir paragraphe 3.4).

Quant à la logique de commutation, elle se trouve simplifiée grâce aux mises en défaut de l'interdépendance *masse-amortissement* et de l'interdépendance *isolation vibratoire-tenue de caisse*. Ainsi (figure 3.14) :

- en l'**absence** de sollicitation du conducteur sur les organes de conduite, la suspension est en mode CRONE pour favoriser le confort vibratoire ;
- en **présence** d'une sollicitation du conducteur la suspension commute en mode "ferme" pour favoriser le *comportement routier*.

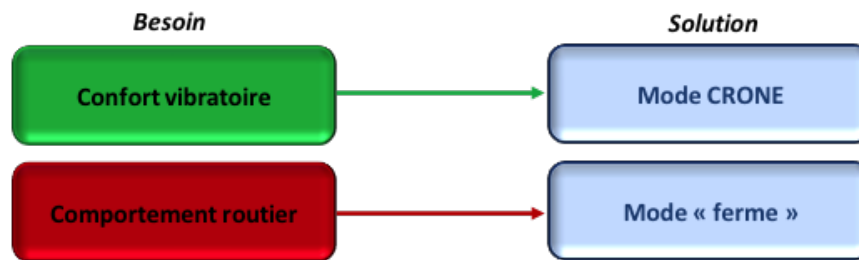


FIGURE 3.14 – Illustration du principe de fonctionnement de la suspension CRONE Hydractive

Ce résultat important permettra, notamment, de faire évoluer la terminologie en matière de suspension Hydractive en remplaçant le terme mode "souple" par **mode confort** (CRONE) et le terme mode "ferme" par **mode comportement routier**.

3.6 Comparaison des réponses fréquentielles et temporelles des modes "ferme", "souple" et CRONE

3.6.1 Rappels

La figure 3.15 rappelle les différentes architectures organiques des modes "ferme", "souple" et "CRONE" des suspensions Hydractive de série et Hydractive CRONE présentées dans les paragraphes qui précèdent.

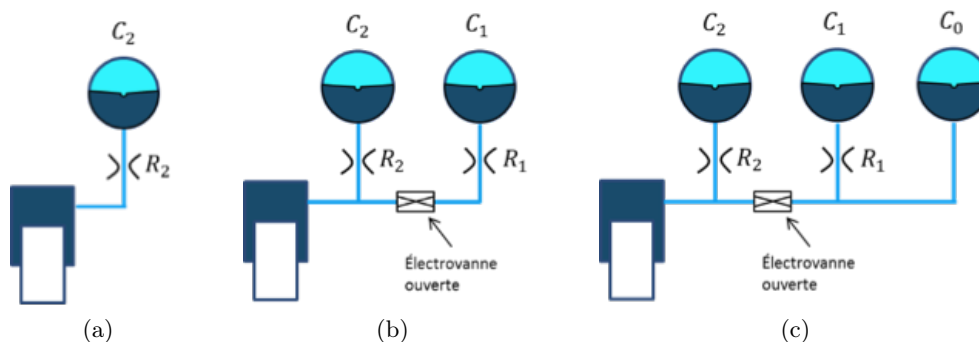


FIGURE 3.15 – Mode "ferme" (a), mode "souple" (b) et mode "CRONE" (c) de la suspension Hydractive de série et hydractive CRONE pour un quart de véhicule

Afin de faciliter la lecture, les expressions analytiques de l'impédance des modes "ferme", "souple" et CRONE de la suspension Hydractive sont ici rappelées :



- expression analytique de l'impédance du mode "ferme" de la suspension Hydractive de série :

$$I_s(s) = S_v^2 \left(\frac{1}{C_2 s} + R_2 \right) ; \quad (3.6.1)$$

- expression analytique de l'impédance du mode "souple" de la suspension Hydractive de série :

$$I_s(s) = \frac{S_v^2}{\frac{1}{\left(\frac{1}{C_1 s} + R_1\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2 s} + R_2\right)}} ; \quad (3.6.2)$$

- expression analytique de l'impédance du mode "CRONE" de la suspension Hydractive CRONE :

$$I_s(s) = \frac{S_v^2}{C_0 s + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1 s} + R_1\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2 s} + R_2\right)}} . \quad (3.6.3)$$

3.6.2 Transfert force-débattement

La figure 3.16 présente les diagrammes de Bode du transfert force-débattement de l'essieu arrière des suspensions Hydractive de série et CRONE Hydractive dans les cas "à vide" (en bleu) et "en charge" (en vert) pour les modes "ferme" (figure 3.16a), "souple" (figure 3.16b) et CRONE (figure 3.16c). La figure 3.16c fait bien apparaître le caractère borné en fréquence de l'intégrateur fractionnaire, comme présenté au chapitre 2.

3.6.3 Transfert Caisse-Route

La figure 3.17 présente les diagrammes de Bode du transfert $T_{20}(s)$ et les réponses indicelles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm dans les cas "à vide" (en bleu) et "en charge" (en vert) pour les modes "ferme" (figures 3.17a et 3.17b), "souple" (figures 3.17c et 3.17d) et CRONE (figures 3.17e et 3.17f).

La figure 3.17f fait bien apparaître l'interdépendance masse-amortissement car quelque soit la masse ("à vide" ou "en charge"), les diagrammes de Bode et les réponses indicelles sont quasiment confondus sur la plage de fréquence de fonctionnement de la suspension.

3.6.4 Transfert Roue-Route

La figure 3.18 fait bien apparaître que la tenue de roue est comparable entre les modes "souple" et CRONE, à iso mode "ferme" et avec une insensibilité à la masse.

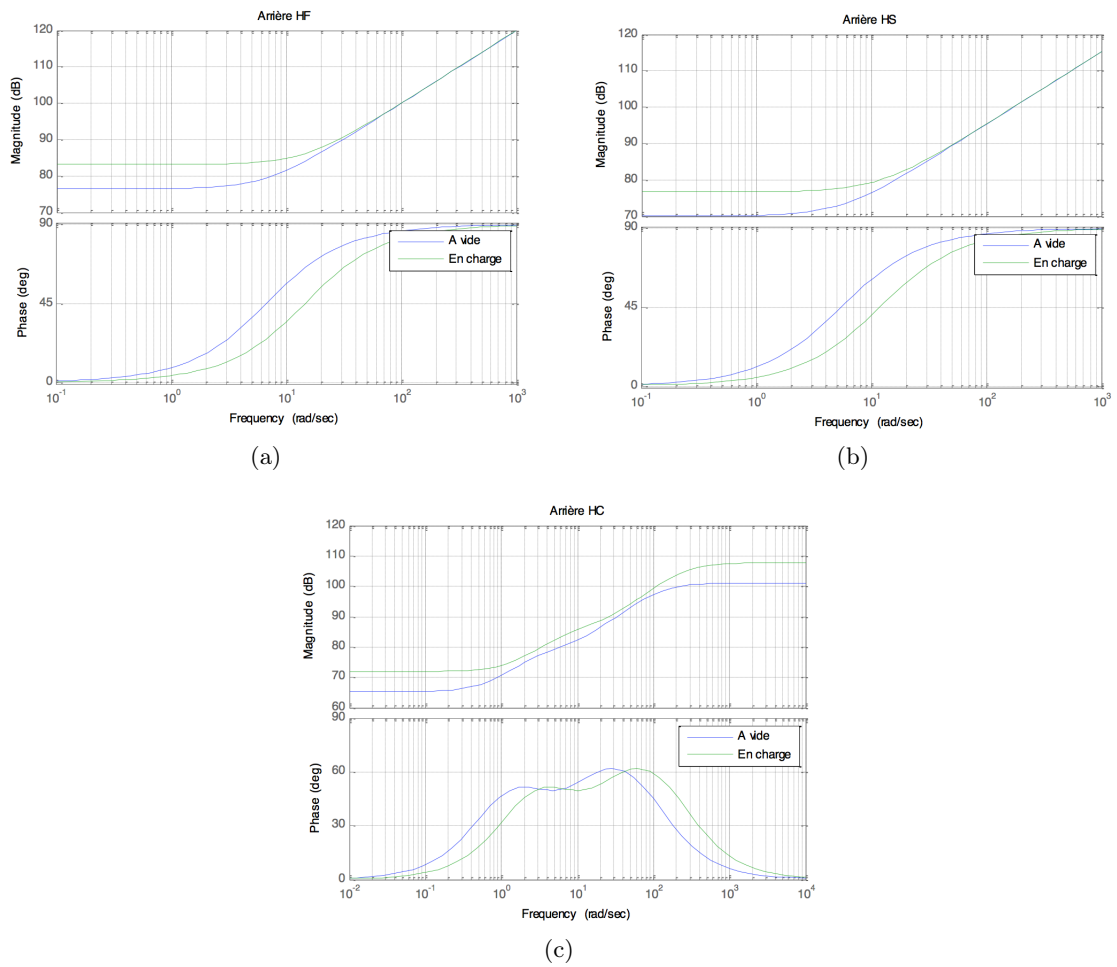
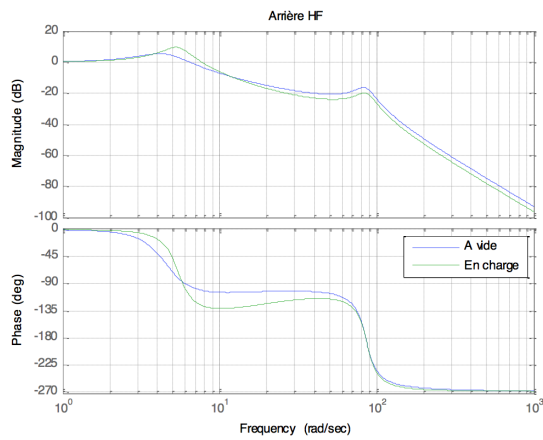
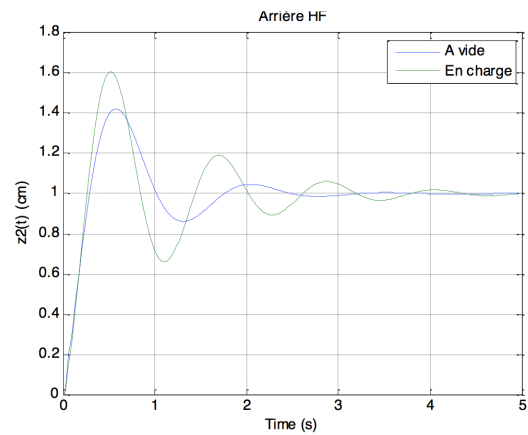


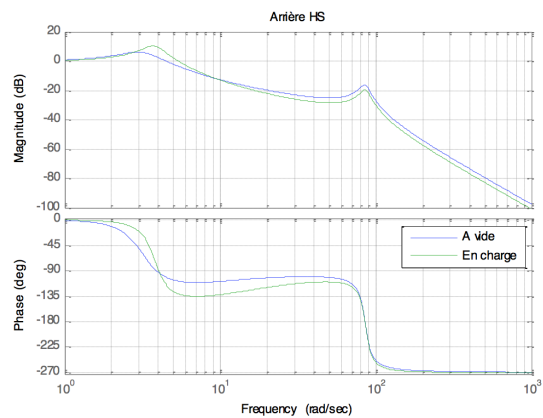
FIGURE 3.16 – Diagrammes de Bode du transfert $sI_s(s)$ (à vide (en bleu), en charge (en vert))



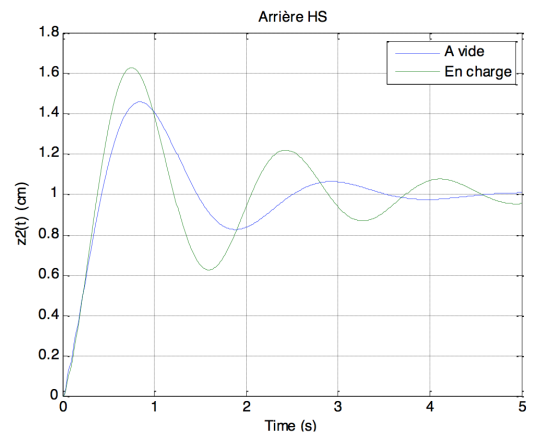
(a)



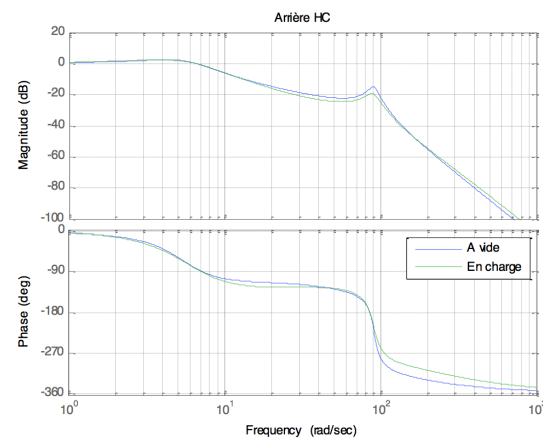
(b)



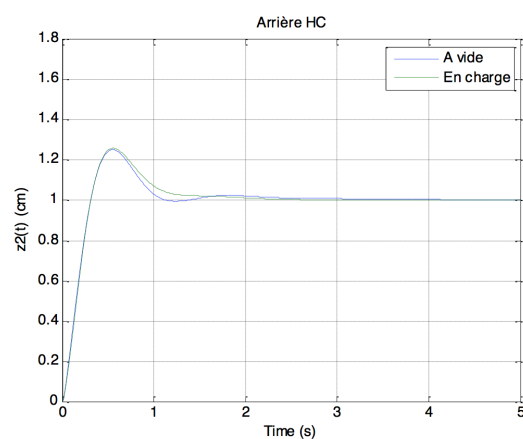
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.17 – Diagrammes de Bode de $T_{20}(j\omega)$ (à gauche) et réponses indicielles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à droite), (à vide (en bleu), en charge (en vert))

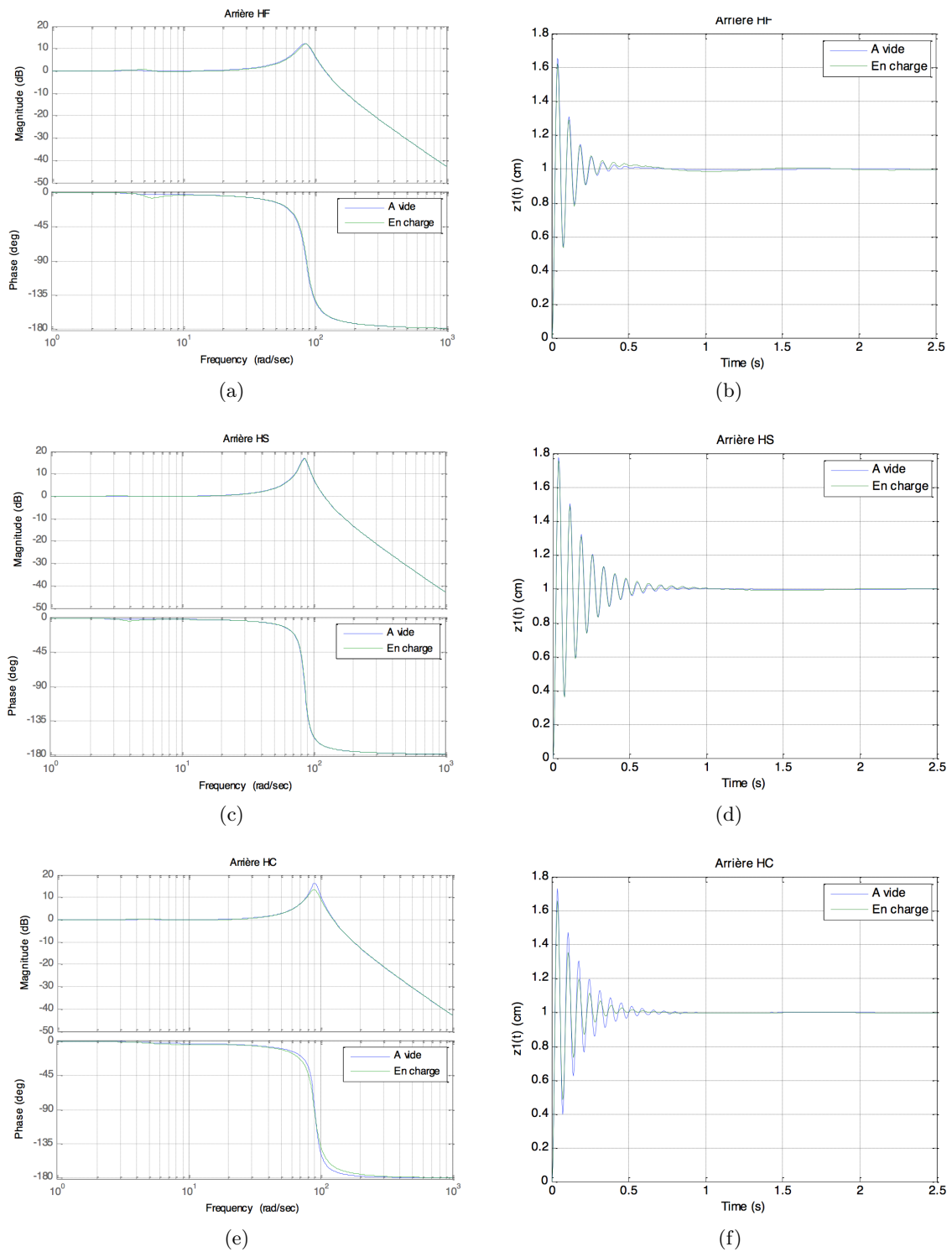


FIGURE 3.18 – Diagrammes de Bode de $T_{10}(j\omega)$ (à gauche) et réponses indicielles du déplacement vertical de la roue à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à droite), (à vide (en bleu), en charge (en vert))



3.7 Conclusion

A l'aide des modèles réduits déduits par exploitation du découplage dynamique valable pour les véhicules de tourisme d'un modèle d'analyse, une démarche d'analyse appliquée à la suspension Hydractive de série, puis une démarche de synthèse appliquée à la suspension CRONE Hydractive ont été présentées.

Les spécifications imposées à la suspension CRONE sont toutes satisfaites, conduisant ainsi à une simplification du fonctionnement par rapport l'Hydractive de série. Parmi les résultats, l'obtention d'une tenue de caisse en mode CRONE supérieure à celle du mode "ferme" avec une quasi-insensibilité aux variations du chargement, et ce sans dégradation de la tenue de roue et de l'isolation vibratoire, est l'un des plus remarquables.



Étude de l'influence de la dynamique verticale sur le comportement routier

Sommaire

4.1	Introduction	108
4.2	Définition du domaine d'étude	108
4.3	Modèle d'analyse du véhicule	111
4.3.1	Dynamique longitudinale	112
4.3.2	Dynamique de lacet	113
4.3.3	Dynamique transversale	114
4.3.4	Dynamique de rotation des roues	114
4.3.5	Variations des appuis au sol	114
4.3.6	Trajectoire	115
4.4	Valeurs paramétriques du modèle d'analyse	116
4.5	Situations d'essai	119
4.5.1	Scénario 1 : changement de voie à vitesse constante	119
4.5.2	Scénario 2 : freinage en ligne droite	128
4.5.3	Scénario 3 : changement de voie avec freinage	135
4.6	Conclusion	141



4.1 Introduction

Le point de départ de ce chapitre 4 est un constat concernant les publications scientifiques en matière d'études de suspension de véhicule, d'une part, et d'étude de la stabilité du véhicule, d'autre part. En effet, la majorité des articles concernant les suspensions ne traitent que de la dynamique verticale [Moreau (2012a)], la tenue de route étant évoquée à travers la tenue de roue, tandis que ceux traitant de la stabilité du véhicule utilisent majoritairement des modèles non suspendus à 4 roues, voire à 2 roues (modèle bicyclette) en introduisant des hypothèses simplificatrices, notamment en ce qui concerne la symétrie du chargement [Moreau (2012b)]. La principale raison de ces choix est liée au caractère complexe de la dynamique globale du véhicule.

Au sein de l'équipe CRONE, l'analyse de l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale a déjà été étudiée dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) appliqué à la sécurité active en situations d'urgence où les pneumatiques sont sollicités dans leur zone non linéaire de fonctionnement. Le lecteur intéressé trouvera dans les thèses de Cédric NOUILLANT [Nouillant (2002)], Olivier ALTET [Altet (2004)] ou encore Audrey RIZZO [Rizzo (2012)] tous les détails sur ce sujet.

L'objectif de ce chapitre 4 est d'analyser l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale à travers la suspension dans le cadre de *l'agrément de conduite*, domaine d'étude défini par la zone *linéaire* de fonctionnement du pneumatique.

Pour atteindre cet objectif, la démarche adoptée en matière d'analyse comporte trois étapes. La première étape s'inscrit dans la continuité du chapitre 3 dans la mesure où elle concerne l'analyse de l'influence des sollicitations en provenance de la route et du conducteur sur les variations de la composante verticale $F_z(t)$ du contact pneumatique/sol (notée $F_1(t)$ au chapitre 3 : $F_z(t) = F_1(t)$). Ensuite, l'influence des variations de $F_z(t)$ sur les composantes longitudinale $F_x(t)$ et transversale $F_y(t)$ est analysée à l'aide du modèle de Pacejka. Enfin, les conséquences des variations des $F_x(t)$ et des $F_y(t)$ sur la dynamique horizontale du véhicule sont étudiées à l'aide de deux modèles à 4 roues, l'un avec suspension et l'autre sans suspension. Afin d'assurer une progressivité dans la complexité de l'analyse, trois scénarii sont étudiés : un changement de voie à vitesse constante, un freinage en ligne droite et un changement de voie avec freinage, ces trois situations d'essai étant accompagnées d'une variation dissymétrique du profil routier.

Après cette brève introduction pour situer le contexte, la suite de ce chapitre s'attache à décrire le domaine d'étude spécifique ainsi que le développement d'un modèle d'analyse du véhicule mettant exergue les différentes dynamiques en jeu dans le comportement global du véhicule : longitudinale, lacet, transversale, etc... Ensuite, et pour mieux comprendre l'analyse de trois situations d'essais proposées en dernière partie de ce chapitre, les valeurs paramétriques du modèle d'analyse développé au paragraphe précédent sont présentés.

4.2 Définition du domaine d'étude

L'étude de la dynamique globale du véhicule s'inscrit dans le cadre de l'étude des systèmes complexes. En effet, un véhicule est un système non linéaire, multivariable, non stationnaire, à paramètres variables en raison, notamment, de la variation de la masse suspendue (entre à vide et en charge) et de sa répartition (fonction de la position des passagers dans le véhicule). Il existe de nombreuses non-linéarités dans un véhicule, mais celles dont l'influence est la plus importante sur la dynamique globale du véhicule sont les non-linéarités des pneumatiques [Moreau (2012a)] [Moreau (2012b)].

Indépendamment des sollicitations en provenance de la route, la figure 4.1 présente, dans un diagramme où l'accélération longitudinale a_x est tracée en fonction de l'accélération trans-



versale a_y ($a_y; a_x$), la zone à l'intérieur de laquelle le pneumatique peut-être considéré comme linéaire lors de sollicitations en provenance du conducteur (par action sur les organes de conduite : volant et pédales). Les ordres de grandeurs des limites de cette zone (qui doivent être affinés précisément en fonction du véhicule étudié) sont pour l'accélération transversale $a_y(t) \pm 0.4g$ et pour l'accélération longitudinale $a_x(t) \pm 0.3g$, g étant l'accélération de pesanteur. L'étude du **comportement routier** d'un véhicule se décompose alors en deux domaines. Le premier se situe à l'intérieur de la zone linéaire et correspond à ce que l'on appelle l'étude de l'**agrément de conduite**. Cette zone couvre l'essentiel du domaine d'utilisation du véhicule et définit le domaine de validité du modèle linéaire du pneumatique. Le second domaine se situe dans la zone non linéaire du pneumatique qui est atteinte en situation d'urgence (freinage et évitement) et qui correspond à la zone d'étude de la **sécurité**. La frontière supérieure de cette zone correspond à la limite d'adhérence sur route sèche.

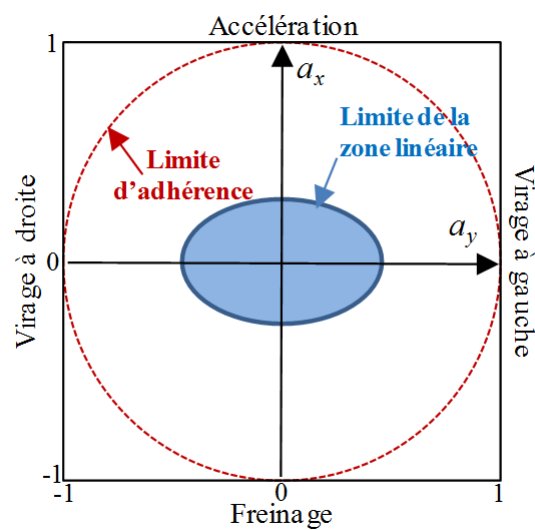


FIGURE 4.1 – Diagramme des accélérations ($a_y; a_x$)

Il est à noter que la zone bleue représente majoritairement le domaine de conduite "client". Par contre, les essayeurs testent systématiquement la zone rouge (en plus de la zone bleue) afin de pousser le véhicule à ses limites.

Ainsi, le degré de complexité d'un modèle de validation (appelé aussi simulateur) d'un véhicule est tel qu'il est difficilement exploitable pour l'analyse, en tout cas inadapté pour atteindre l'objectif de ce chapitre 4.

Compte tenu de ces précisions, il est possible de définir des situations d'essai auxquelles des modèles simplifiés peuvent être associés pour l'analyse. Toujours indépendamment des sollicitations en provenance de la route, la figure 4.2 résume ces différentes situations. Elles peuvent être regroupées en deux catégories : celles en vert qui se trouvent suivant les axes principaux du diagramme et pour lesquelles les dynamiques longitudinale et transversale n'ont pas d'interaction moyennant quelques hypothèses simplificatrices (accélération ou freinage en ligne droite et virage à droite ou à gauche à vitesse constante); celles en rouge où au contraire les dynamiques longitudinale et transversale vont interagir (accélération ou freinage en courbe).

Cette représentation "2D" associée aux accélérations longitudinale et transversale (dynamique horizontale) peut être complétée par un troisième axe concernant l'accélération verticale, et ce conformément aux trois domaines de fonctionnement définis au chapitre 1 (petites, moyennes et grandes variations) où l'accélération verticale $a_2(t)$ de la masse suspendue est la

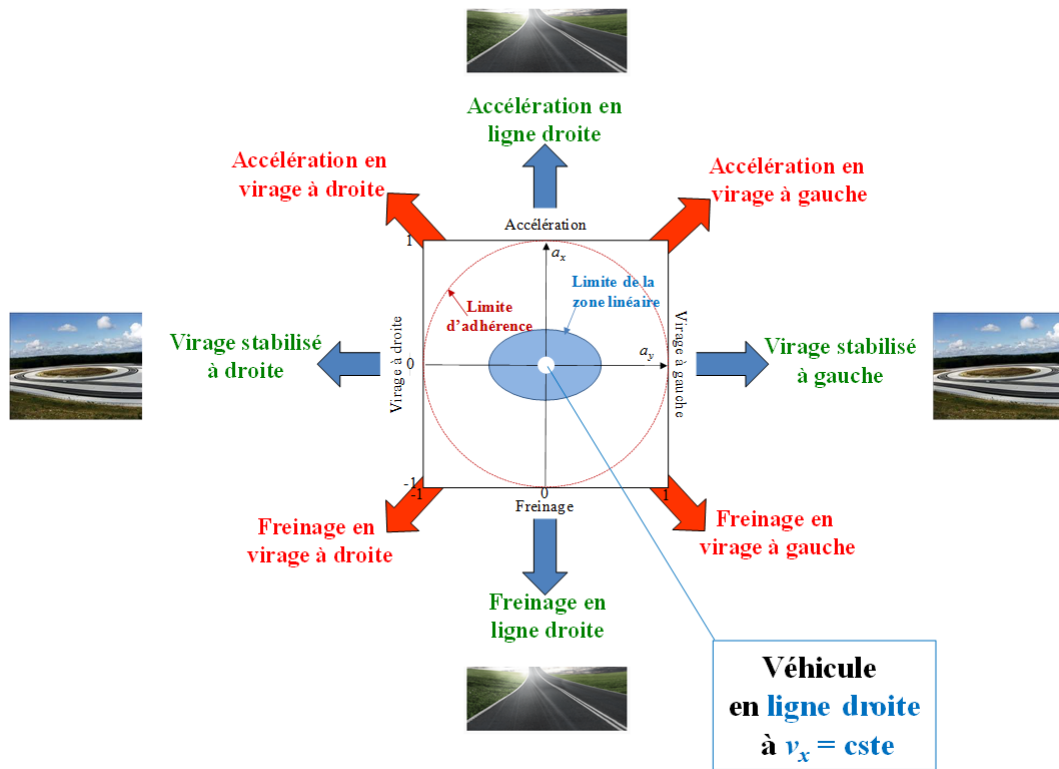
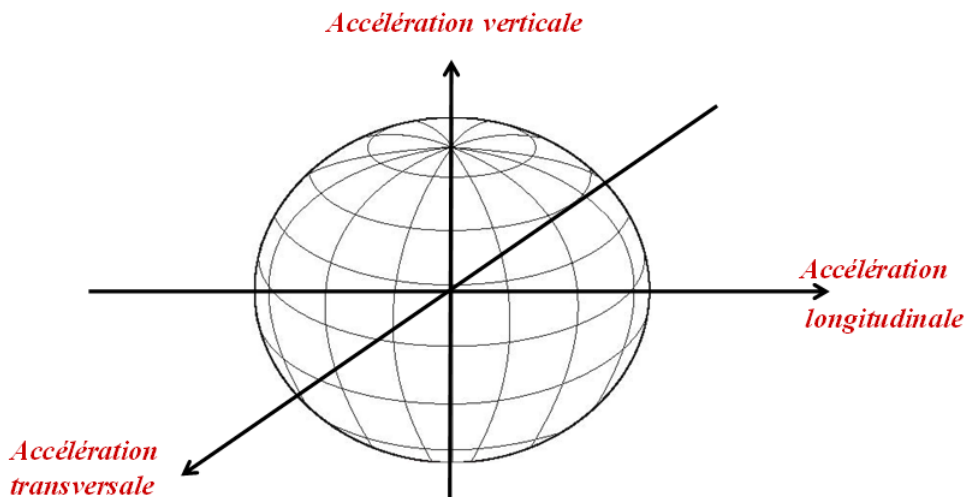


FIGURE 4.2 – Définition des situations d'essai

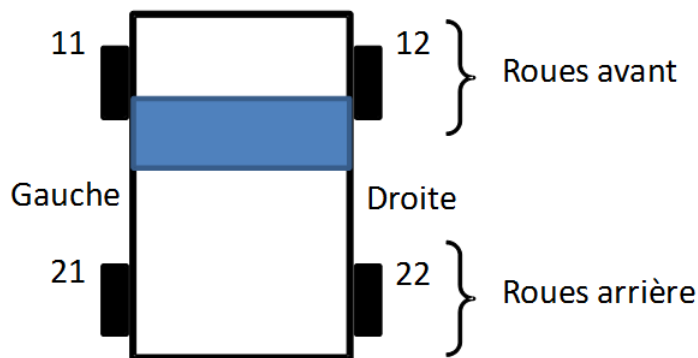
conséquence des sollicitations en provenance, non seulement du conducteur, mais aussi de la route, d'où la représentation "3D" de la figure 4.3.

Les différentes situations étudiées conformément à l'objectif de ce chapitre 4 sont présentées de manière détaillée au paragraphe 4.5. Elles concernent le domaine d'étude associé à l'agrément de conduite. Chaque situation est d'abord initialisée par une trajectoire en ligne droite à vitesse constante sur une route horizontale, ensuite des sollicitations en provenance du conducteur puis de la route sont appliqués successivement à deux instants suffisamment séparés pour que les régimes transitoires ne se superposent pas, et ce pour faciliter l'analyse.

FIGURE 4.3 – Diagramme des accélérations ($a_y; a_x; a_z$)

4.3 Modèle d'analyse du véhicule

Compte tenu de l'objectif de ce chapitre, le modèle d'analyse est donc formé de quatre roues, où seules les deux roues avant sont motrices et directionnelles. Pour des raisons de clarté les 4 roues sont indicées à la manière d'une matrice : l'essieu avant correspondant à la première ligne et les roues à gauche à la première colonne (figure 4.4).

FIGURE 4.4 – Numérotation des 4 roues à l'image d'une matrice 2×2

Le moteur ainsi que la boîte de vitesse et toute la transmission ne sont pas modélisés, la variable d'entrée étant directement le couple $C_u(t)$ à la roue (couple moteur ou couple frein selon les situations). La deuxième variable d'entrée est l'angle de braquage des roues avant, $\beta_v(t)$, ou l'angle au volant, les deux étant reliées par le coefficient de démultiplication de la direction. L'amplitude de l'angle de braquage $\beta_v(t)$ est considérée inférieure à 10° ($\beta_v(t) < 10^\circ$), ce qui correspond à une amplitude de l'angle volant inférieure à 150° (dans la mesure où le facteur de démultiplication de la direction est égal à 15). En dehors des manoeuvres de parking, cette considération est d'autant plus largement vérifiée en pratique que la vitesse V_x du véhicule est élevée. On considère donc que $\cos(\beta_v) \approx 1$ et $\sin(\beta_v) \approx 0$.

De plus, les efforts extérieurs sont pris en compte, en plus de la réaction du sol, la force aérodynamique, la résistance au roulement, la gravité ainsi que le vent (longitudinal ou latéral)

sont représentés. Enfin, la masse suspendue est décomposée en 4 masses M_{ij} localisées à la verticale de chacune des 4 roues (les indices i et j sont conformes à ceux des roues), le chargement n'étant pas nécessairement symétrique par rapport à l'axe longitudinal.

La schématisation et le paramétrage du modèle 4 roues sont présentés figures 4.5 (vue de dessus) et 4.6 (vue de profil coté droit). Il est à noter, pour des raisons de clarté, que les suspensions ne sont pas représentées, mais qu'elles sont bien prises en compte conformément aux chapitres 1 et 3. De plus, toutes les notations qui apparaissent sur les figures 4.4 et 4.5 sont définies au fur et à mesure qu'elles sont introduites dans les développements.

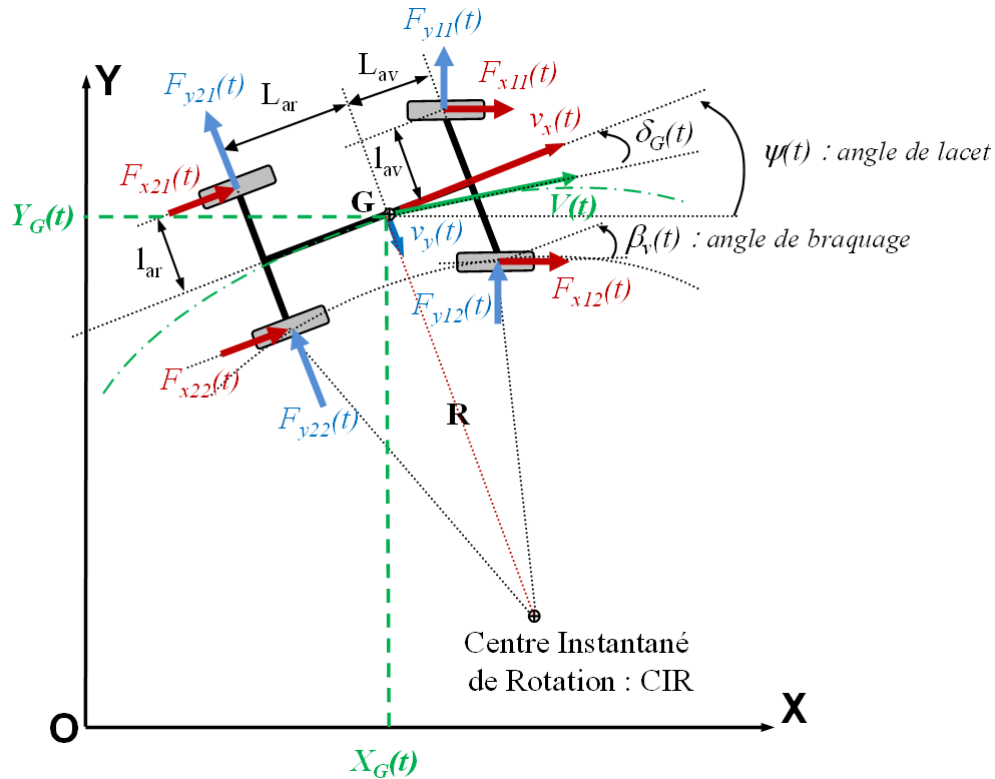


FIGURE 4.5 – Schématisation et paramétrage du modèle (vue de dessus)

4.3.1 Dynamique longitudinale

L'équation décrivant le comportement dynamique longitudinal du véhicule se déduit de la seconde loi de Newton, soit :

$$\Gamma_x(t) = \frac{1}{M_t} F_{\Sigma_x}(t), \quad (4.3.1)$$

où

$$\Gamma_x(t) = \dot{V}_x(t) - V_y(t)\dot{\Psi}(t) \quad (4.3.2)$$

et où la somme algébrique des forces extérieures $F_{\Sigma_x}(t)$ appliquée à la masse totale M_t du véhicule est donnée par :

$$F_{\Sigma_x}(t) = F_x(t) - M_t g \sin \alpha_r(t) - f_{0x}(t) - F_a(V_x) - F_{rr}(V_x), \quad (4.3.3)$$

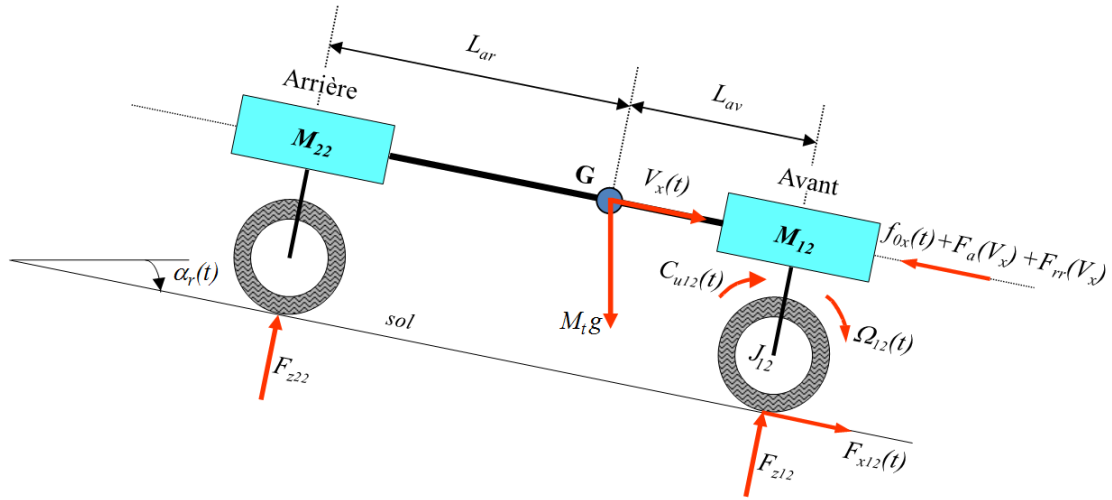


FIGURE 4.6 – Schématisation et paramétrage du modèle (vue de profil coté droit)

avec $F_x(t)$ la résultante des forces développées par les quatre pneumatiques, soit :

$$F_x(t) = F_{x11}(t) + F_{x12}(t) + F_{x21}(t) + F_{x22}(t) , \quad (4.3.4)$$

$\alpha_r(t)$ l'angle qui caractérise la pente de la route par rapport à l'horizontale, $f_{0x}(t)$ une rafale de vent longitudinale modélisée par une force appliquée au centre de gravité G , $F_a(V_x)$ la résistance aérodynamique dont l'expression est donnée par :

$$F_a(V_x) = \frac{1}{2} \rho S_x C_x V_x^2(t) , \quad (4.3.5)$$

avec ρ la masse volumique de l'air, S_x la surface projetée du véhicule dans la direction longitudinale, C_x le coefficient de trainée aérodynamique et $F_{rr}(V_x)$ la résultante de la résistance au roulement des quatre roues exprimée au centre de gravité G dont l'expression est donnée par :

$$F_{rr}(V_x) = (\lambda_0 + \lambda_2 V_x^2(t)) M_t g , \quad (4.3.6)$$

où λ_0 et λ_2 sont des constantes positives.

4.3.2 Dynamique de lacet

De la même manière, la dynamique de lacet est décrite par :

$$\ddot{\Psi}(t) = \frac{1}{I_z} C_{\Sigma_z}(t) , \quad (4.3.7)$$

où la somme algébrique des couples appliqués au véhicule est donnée par :

$$C_{\Sigma_z}(t) = L_{av}(F_{y11}(t) + F_{y12}(t)) + l_{av}(F_{x12}(t) + F_{x11}(t)) \\ L_{ar}(F_{y21}(t) + F_{y22}(t)) + l_{ar}(F_{x21}(t) + F_{x22}(t)) . \quad (4.3.8)$$



4.3.3 Dynamique transversale

De la même manière, la dynamique transversale du véhicule peut se déduire de la seconde loi de Newton :

$$\Gamma_y(t) = \frac{1}{M_t} F_{\Sigma_y}(t) = \dot{V}_y(t) + V_x(t)\dot{\Psi}(t) , \quad (4.3.9)$$

où

$$\Gamma_y(t) = \dot{V}_y(t) + V_x(t)\dot{\Psi}(t) . \quad (4.3.10)$$

La somme algébrique des forces $F_{\Sigma_y}(t)$ est en partie due aux forces développées par les quatre pneumatiques auxquelles une force $f_{0y}(t)$ appliquée au centre de gravité G est ajoutée pour modéliser une rafale de vent latérale, soit :

$$F_{\Sigma_y}(t) = F_{y11}(t) + F_{y12}(t) + F_{y21}(t) + F_{y22}(t) + f_{0y}(t) . \quad (4.3.11)$$

4.3.4 Dynamique de rotation des roues

La dynamique de rotation est décrite pour chaque roue par l'équation

$$\Omega_{ij}(t) = \frac{1}{J_{ij}} \int_0^t C_{\Sigma_{ij}}(\tau) d\tau + \Omega_{ij}(0) , \quad (4.3.12)$$

avec J_{ij} l'inertie de la roue et $\Omega_{ij}(t)$ la vitesse angulaire de chaque roue et $C_{\Sigma_{ij}}(t)$ la somme algébrique des couples appliquée à chaque roue, soit :

$$C_{\Sigma_{ij}}(t) = C_{uij}(t) + r_{0ij}(t)F_{xij}(t) - C_{fij}(t) , \quad (4.3.13)$$

où $C_{uij}(t)$ est le couple appliqué à la roue (couple moteur ou couple frein selon la situation), r_{0ij} est le rayon sous charge de la roue et $C_f(t)$ est un couple du au frottement visqueux décrit par :

$$C_{fij}(t) = b_{rij}\Omega_{ij}(t) , \quad (4.3.14)$$

avec b_{rij} le coefficient de frottement visqueux.

4.3.5 Variations des appuis au sol

L'expression de la composante verticale $F_{zij}(t)$ du pneumatique est constituée d'une partie statique F_{zij}^e et d'une partie dynamique $f_{zij}(t)$, soit :

$$F_{zij}(t) = F_{zij}^e + f_{zij}(t) , \quad (4.3.15)$$

où la partie statique est égale au poids du véhicule réparti sur chacune des 4 roues, soit :

$$F_{zij}^e = (m_{ij} + M_{ij})g , \quad (4.3.16)$$

avec m_{ij} et M_{ij} les masses non suspendues et suspendues respectivement, et où la partie dynamique dépend des reports de charge $f_{0ij}(t)$ induits par les accélérations $\Gamma_x(t)$ et $\Gamma_y(t)$, et



des variations $z_{0ij}(t)$ du profil routier au niveau du point de contact pneumatique/sol. Pour rappel, les reports de charge sont donnés par :

$$f_{0ij}(t) = \pm \Gamma_y(t) H_{cdg} \frac{M_t}{2l_i} \pm \Gamma_x(t) H_{cdg} \frac{M_t}{2L_i}, \quad (4.3.17)$$

avec H_{cdg} la hauteur du centre de gravité du véhicule, L l'empattement du véhicule ($L = L_{av} + L_{ar}$), l_i la demi-voie (l_{av} pour $i = 1$ ou l_{ar} pour $i = 2$). Il est à noter que le signe $+$ ou $-$ devant les accélérations $\Gamma_x(t)$ et $\Gamma_y(t)$ dépend de la situation (freinage, accélération, virage à droite ou à gauche) et de la roue considérée.

Remarque

Il est important d'insister sur le fait que l'influence de la suspension sur les variations des appuis $F_{zij}(t)$ au sol apparaît à travers le battement de roue $z_{1ij}(t)$ dont les variations résultent à la fois des reports de charge et des variations du profil routier (Cf. chapitre 3). Ainsi, l'influence de la suspension se manifeste durant le régime transitoire de $z_{1ij}(t)$, c'est-à-dire sur la tenue de roue et ne modifie en rien la valeur de $F_{zij}(t)$ en régime stationnaire (Cf. paragraphe 4.5).

4.3.6 Trajectoire

Parmi les grandeurs à analyser, la trajectoire du véhicule occupe une place importante. Elle est définie à chaque instant par les coordonnées $X_G(t)$ et $Y_G(t)$ du centre de gravité G dans le repère absolu R_0 (Figure 4.7).

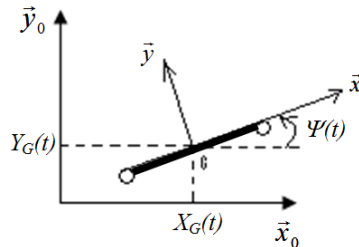


FIGURE 4.7 – Paramétrage pour le calcul de la trajectoire

Les coordonnées $X_G(t)$ et $Y_G(t)$ sont obtenues en intégrant les composantes $\dot{X}_G(t)$ et $\dot{Y}_G(t)$ de la vitesse du centre de gravité définie dans le repère absolu R_0 , soit :

$$\vec{V}_{G/R_0} = V_x(t)\vec{x} + V_y(t)\vec{y} = \left[\frac{d \vec{OG}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} (X_G(t)\vec{x}_0 + Y_G(t)\vec{y}_0) \right]_{R_0}, \quad (4.3.18)$$

ou encore, après dérivation,

$$\vec{V}_{G/R_0} = \dot{X}_G(t)\vec{x}_0 + \dot{Y}_G(t)\vec{y}_0 = V_x(t)\vec{x} + V_y(t)\vec{y}, \quad (4.3.19)$$

expression qui, compte tenue de la relation

$$\begin{cases} \vec{x} = \cos \Psi(t)\vec{x}_0 + \sin \Psi(t)\vec{y}_0 \\ \vec{y} = -\sin \Psi(t)\vec{x}_0 + \cos \Psi(t)\vec{y}_0 \end{cases}, \quad (4.3.20)$$



est de la forme

$$\begin{cases} \dot{X}_G(t) = V_x(t) \cos \Psi(t) - V_y(t) \sin \Psi(t) \\ \dot{Y}_G(t) = V_x(t) \sin \Psi(t) + V_y(t) \cos \Psi(t) \end{cases} . \quad (4.3.21)$$

Finalement, en intégrant la relation (4.3.20), on obtient :

$$\begin{cases} X_G(t) = \int_0^t (V_x(\tau) \cos \Psi(\tau) - V_y(\tau) \sin \Psi(\tau)) d\tau + X_{G0} = x_G(t) + X_{G0} \\ Y_G(t) = \int_0^t (V_x(\tau) \sin \Psi(\tau) + V_y(\tau) \cos \Psi(\tau)) d\tau + Y_{G0} = y_G(t) + Y_{G0} \end{cases} , \quad (4.3.22)$$

où τ est une variable muette, X_{G0} et Y_{G0} les valeurs initiales de la position du CdG du véhicule.

4.4 Valeurs paramétriques du modèle d'analyse

Les valeurs paramétriques du modèle d'analyse correspondent au véhicule Citroën C5 déjà présenté au chapitre 3 (cf. figure 3.9) sur lequel peuvent être montées une suspension métallique, une suspension Hydractive de série ou la suspension CRONE Hydractive [Rizzo (2012)].

Dans la suite de ce chapitre, volontairement pour limiter le nombre de pages, c'est le cas le plus défavorable qui est présenté en matière de tenue de route, à savoir la suspension Hydractive de série :

- en mode souple (HS), puisque le facteur d'amortissement associé au battement de roue est le plus faible (cf. chapitre 3) ;
- à vide, ce qui correspond à des composantes statiques F_{zij}^e des appuis au sol les plus faibles.

Afin de faciliter l'analyse, les résultats sont comparés à ceux obtenus avec le même modèle 4 roues non suspendu (sans prise en compte de la Dynamique Verticale, DV).

Les figures 4.8 et 4.9 présentent les caractéristiques statiques $F_x = f$ (taux de glissement) (figure 4.8) et $F_y = g$ (dérive) (figure 4.9) des pneumatiques montés sur l'essieu avant (en haut) et sur l'essieu arrière (en bas) de la Citroën C5 à vide, sur route sèche.

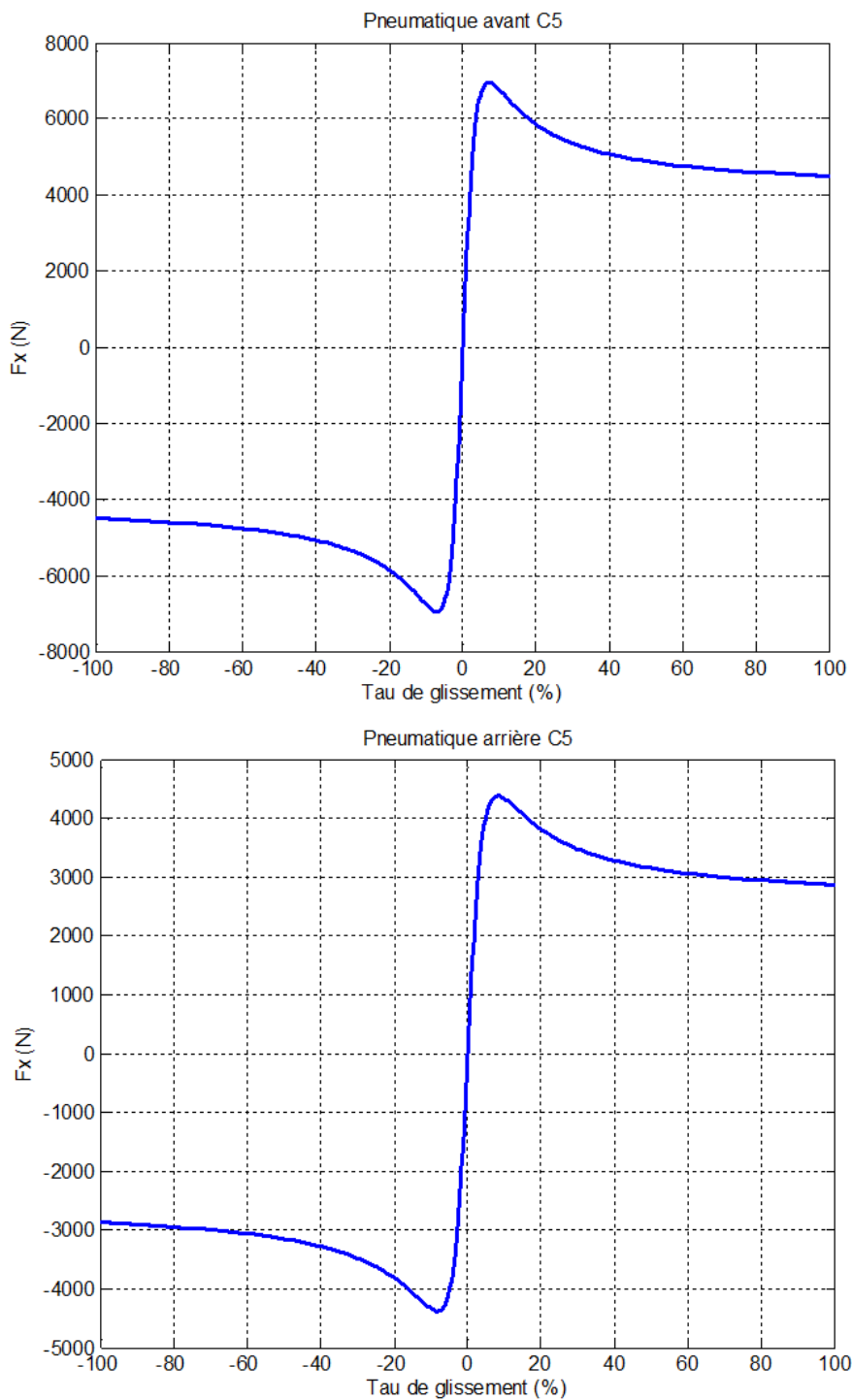


FIGURE 4.8 – Caractéristiques statiques $F_x = f(\text{taux de glissement})$ des pneumatiques montés sur l'essieu avant (en haut) et sur l'essieu arrière (en bas) de la Citroën C5 à vide (en bleu) et en charge (en vert) sur route sèche

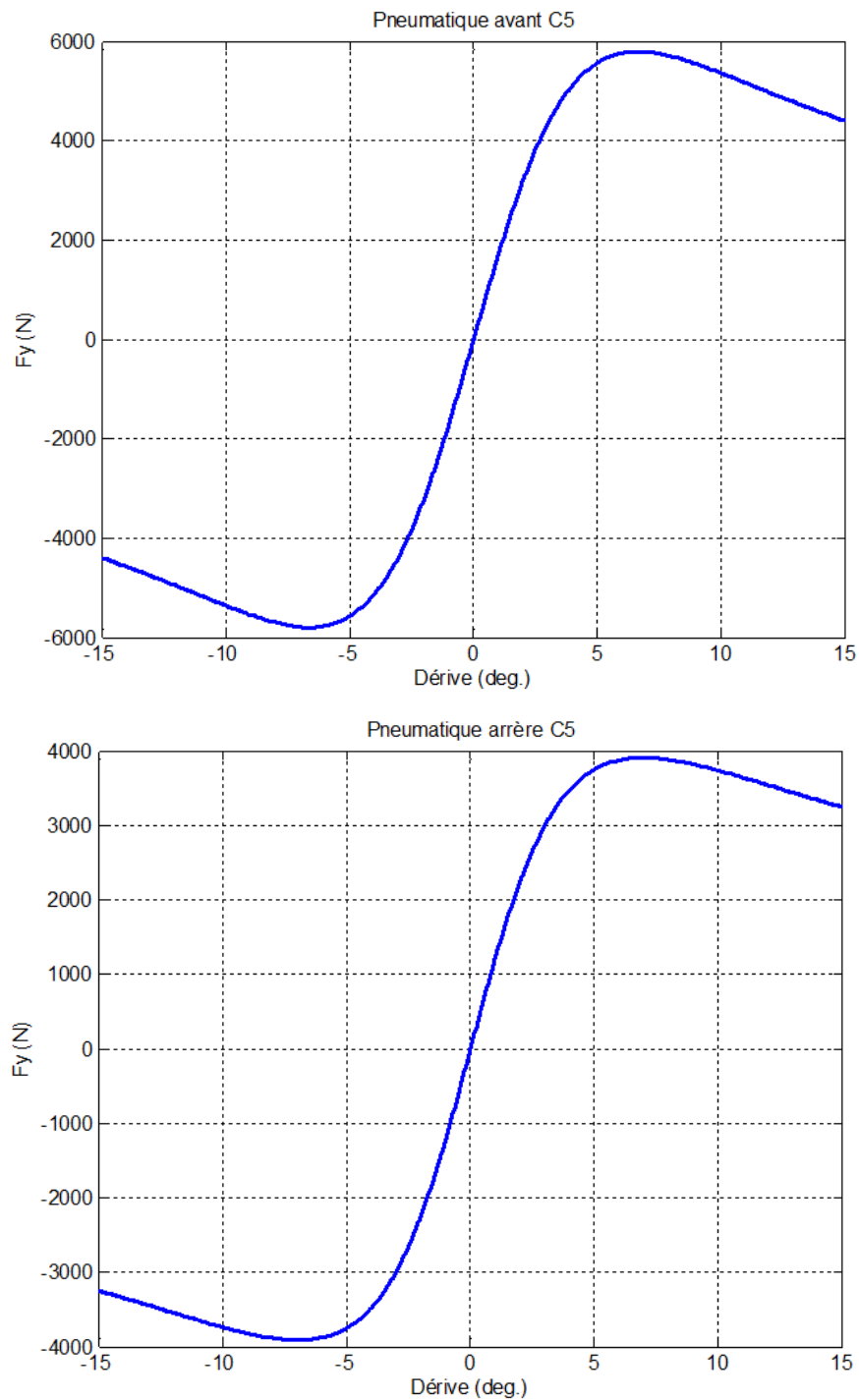


FIGURE 4.9 – Caractéristiques statiques $F_y = g(\text{dérive})$ des pneumatiques montés sur l'essieu avant (en haut) et sur l'essieu arrière (en bas) de la Citroën C5 à vide (en bleu) et en charge (en vert) sur route sèche



4.5 Situations d'essai

La route est sèche ($\mu = 1$), horizontale et à 2 fois 2 voies, la suspension Hydractive est en mode souple (HS) et le véhicule à vide roule avec une vitesse initiale constante $V_x = 90\text{km/h}$.

Trois scénarii assurant une progressivité dans la complexité sont étudiés, à savoir :

- scénario 1 : changement de voie à vitesse constante ;
- scénario 2 : freinage en ligne droite ;
- scénario 3 : changement de voie avec freinage (évitement d'obstacle), ce dernier scénario étant une agrégation des deux premiers.

Par ailleurs, les entrées commandables (conducteur) sont l'angle de braquage $\beta_v(t)$ des roues avant et les couples $C_{uij}(t)$ appliqués à chacune des quatre roues. Quant aux entrées non commandables (route), elles sont définies par une variation $z_0(t)$ dissymétrique du profil vertical de l'uni de la chaussée de type saut échelon d'une amplitude de 2 cm appliquée sous les roues du coté gauche uniquement (d'abord la roue avant, puis la roue arrière avec un retard fonction de la vitesse et de l'empattement du véhicule). Pour faciliter l'analyse, les entrées du conducteur et de la route sont appliquées à des instants suffisamment éloignés pour que les régimes transitoires en réponse à chacune des entrées ne se superposent pas.

D'une manière générale en matière d'analyse, toutes les variables d'un modèle sont intéressantes à observer pour bien comprendre la manière dont les conséquences des entrées se "propagent" tout au long des chemins causaux, et ce pour bien s'imprégner de la dynamique du système. Dans ce paragraphe, afin de limiter le nombre de pages, seules les grandeurs les plus importantes pour analyser l'influence de la dynamique verticale sur le comportement routier sont présentées, à savoir :

- pour chaque pneumatique :
 - les efforts verticaux $F_z(t)$;
 - les efforts transversaux $F_y(t)$;
 - les efforts transversaux $F_x(t)$;
- les accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$;
- les vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$;
- l'angle $\Psi(t)$ et la vitesse $\dot{\Psi}(t)$ de lacet ;
- la trajectoire du véhicule.

4.5.1 Scénario 1 : changement de voie à vitesse constante

Le scénario de cette première situation d'essai est le suivant :

- de $t = 0$ s à 0.5 s, le véhicule est en ligne droite sur la voie de droite ;
- de $t = 0.5$ s à 3.5 s, le véhicule effectue un changement de la voie de droite vers la voie de gauche avec une variation de l'angle de braquage des roues conformément au tracé présenté figure 4.10 (entrée conducteur) ;
- à partir de $t = 5$ s, le véhicule est de nouveau en ligne droite mais sur la voie de gauche ;
- à $t = 8$ s, une variation dissymétrique du profil vertical de l'uni de la chaussée (entrée route) de type saut échelon d'une amplitude de 2 cm est appliquée sous les roues de gauche ;
- fin de la simulation à $t = 10$ s.

La figures 4.10 présente les entrées commandables (conducteur). Plus précisément, la figure 4.10 présente l'évolution de l'angle de braquage imposé lors du changement de voie.

La figure 4.11 présente les couples appliqués aux roues motrices (en haut) pour maintenir une vitesse constante $V_x = 90\text{km/h}$ et aux roues non motrices (en bas, couples nuls).

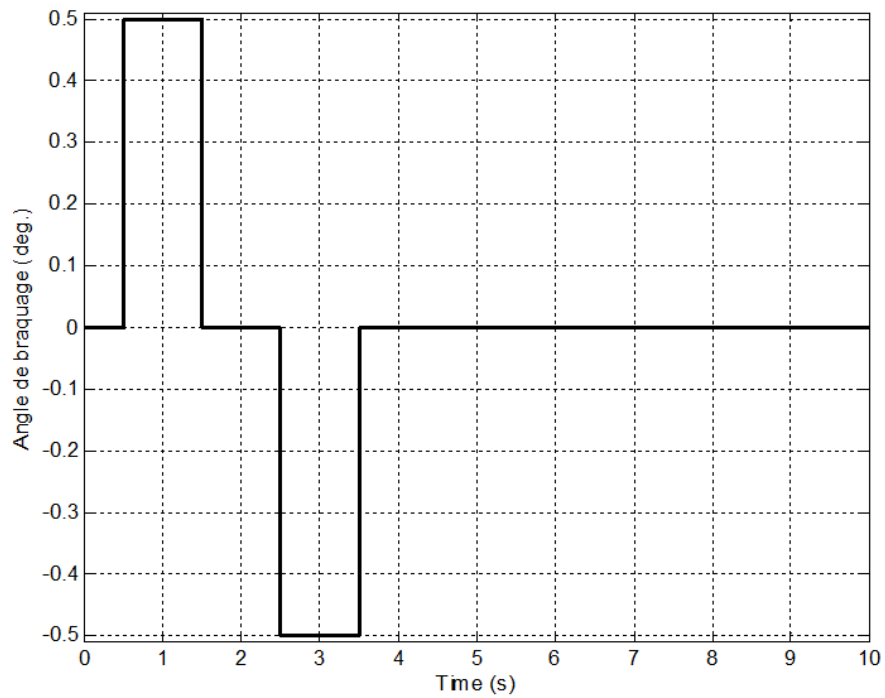


FIGURE 4.10 – Évolution de l'angle de braquage lors du changement de voie

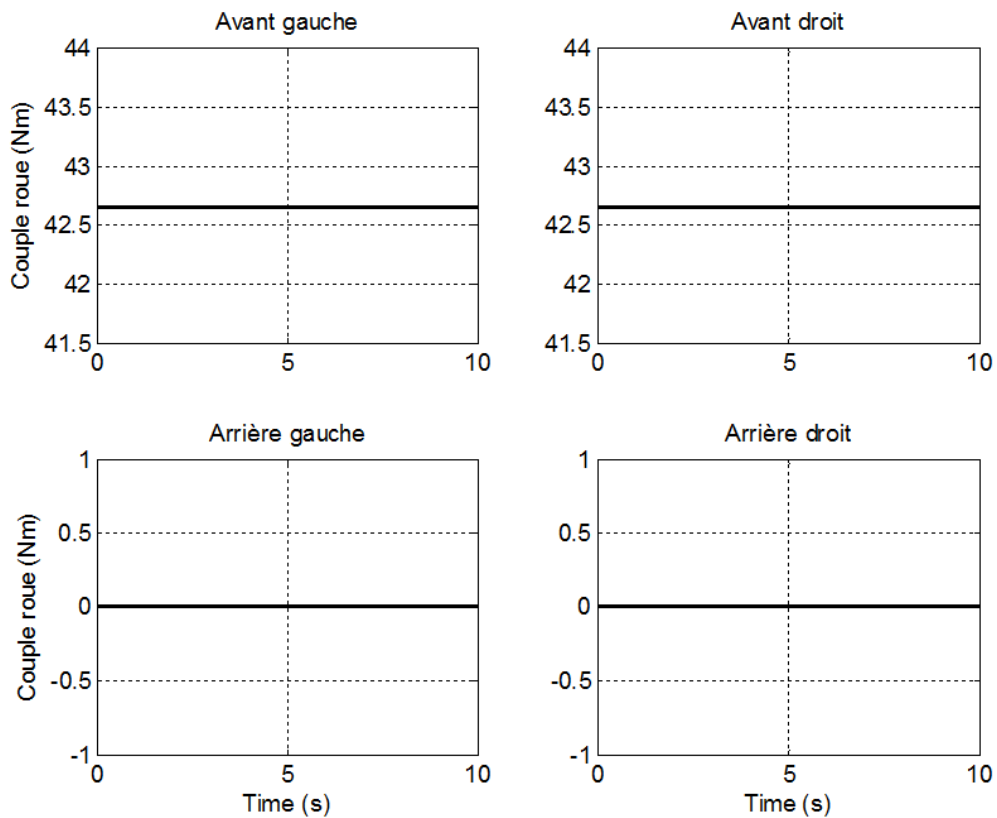


FIGURE 4.11 – Couples appliqués aux roues motrices (en haut) pour maintenir une vitesse constante $V_x = 90\text{km/h}$ et aux roues non motrices (en bas)



La figure 4.12 présente les évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ (appuis au sol) des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (prise en compte de la Dynamique Verticale : en bleu avec DV) et avec le modèle non suspendu (non prise en compte de la Dynamique Verticale : en rouge sans DV).

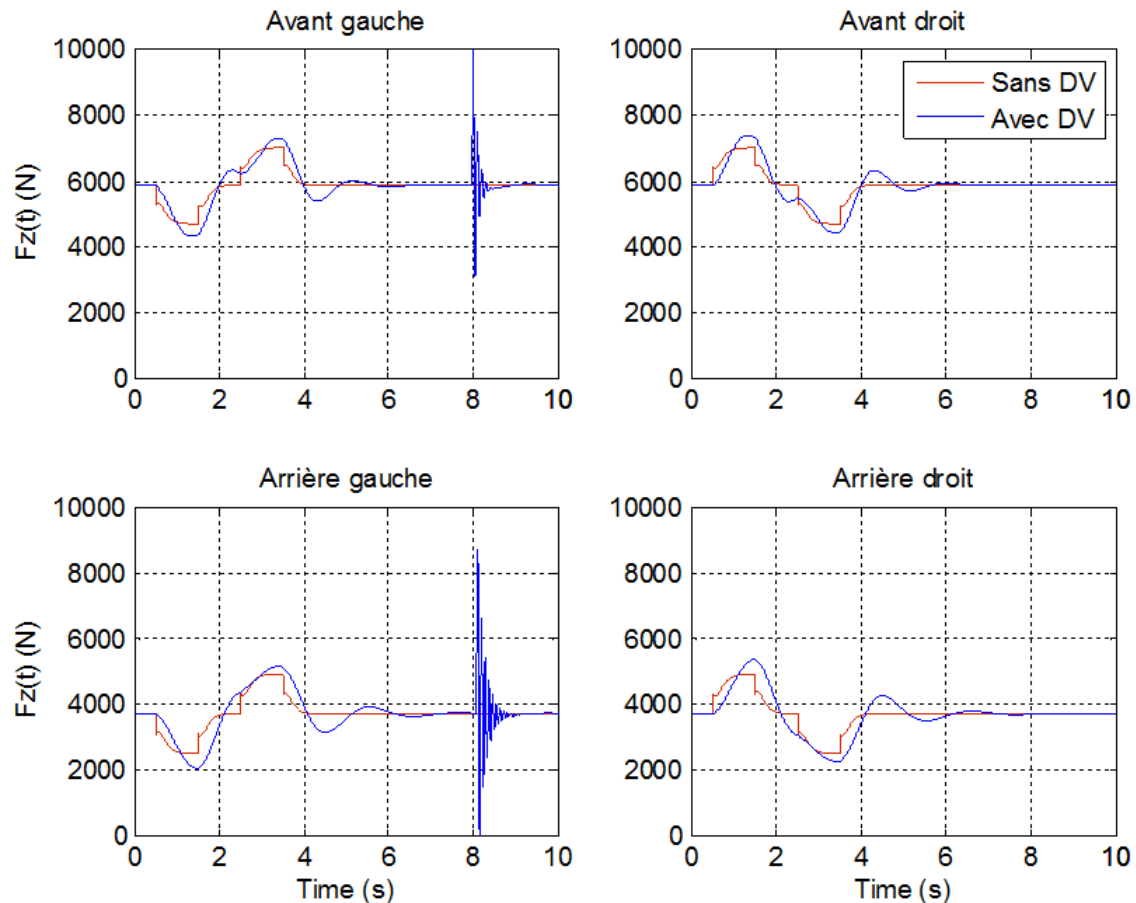


FIGURE 4.12 – Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.13 présente les évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route.

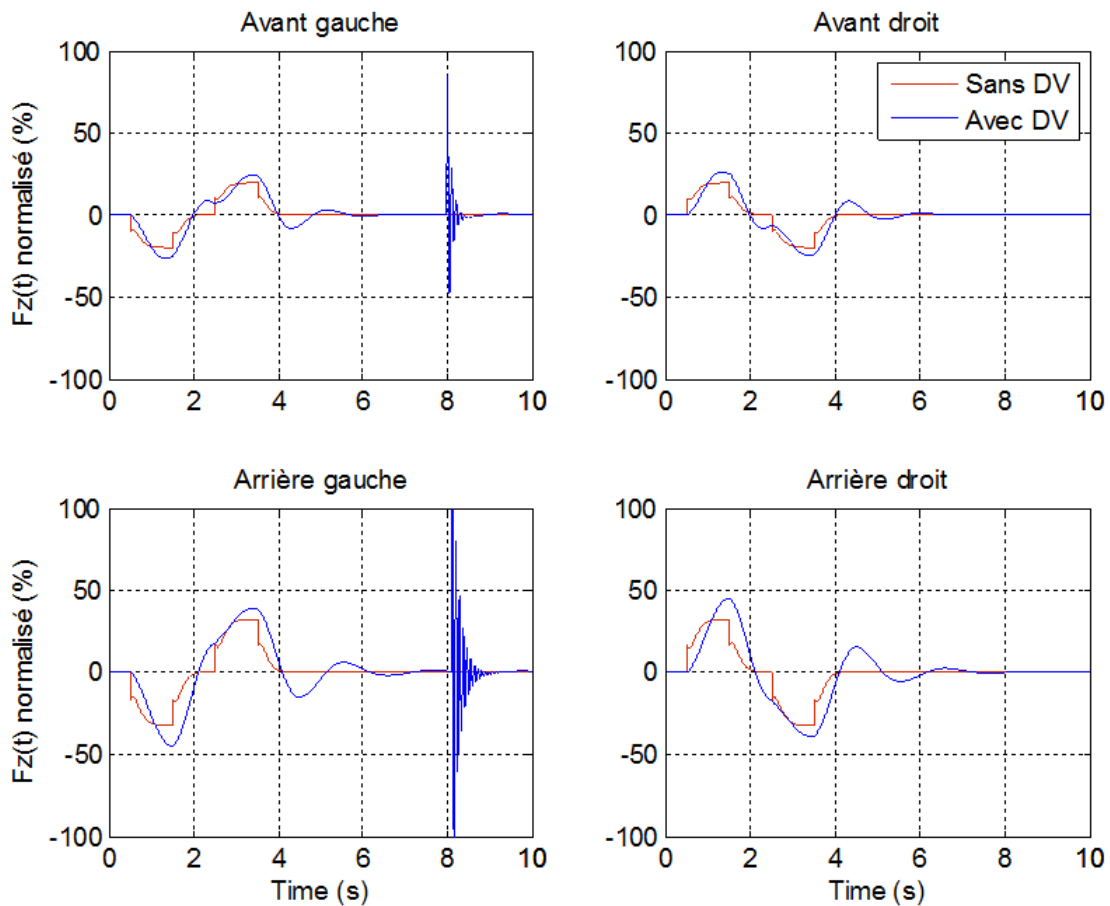


FIGURE 4.13 – Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)

L'observation de ces figures conduit à plusieurs remarques.

D'abord, l'analyse de l'influence des variations du profil routier implique nécessairement la prise en compte de la dynamique verticale. Ainsi, le modèle non suspendu (en rouge) ne peut pas rendre compte de la variation de $F_z(t)$ en réponse à l'entrée route (avant et arrière gauche).

Avec le modèle non suspendu, en réponse aux entrées du conducteur, la forme des variations des $F_z(t)$ est identique à celle des reports de charge qui sont proportionnels aux accélérations longitudinale et transversale (Cf. relation 4.3.17 et figure 4.16).

Avec le modèle suspendu, la forme de l'évolution des $F_z(t)$ en réponse aux entrées du conducteur (qui génèrent les reports de charge) est imposée par les dynamiques verticales (Pompage Tangage Roulis : PTR) de la masse suspendue (dont les modes propres sont au voisinage de 1 Hz), tandis que la forme de l'évolution des $F_z(t)$ en réponse aux entrées de la route est imposée par la dynamique verticale (battement) des masses non suspendues (dont les modes propres sont au voisinage de 12 à 15 Hz).

En relatif, les variations les plus importantes par rapport à la valeur statique sont celles de la roue arrière gauche en réponse à la variation de la route, et ce en raison d'un battement de roue faiblement amorti (Cf. Chapitre 3).



La figure 4.14 présente les évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques toujours pour les mêmes conditions. Les variations des $F_y(t)$ résultent des variations des dérives et des efforts verticaux des pneumatiques en réponse au braquage des roues (Cf modèle de Pacejka, Chapitre 1).

Les réponses des modèles non suspendu et suspendu aux entrées du conducteur sont très proches. De plus, pour les deux modèles en ligne droite en régime stationnaire, les $F_y(t)$ sont nuls et insensibles aux variations du profil routier. Ce constat illustre ainsi la très faible influence de la dynamique verticale sur les variations des $F_y(t)$ pour ce scénario.

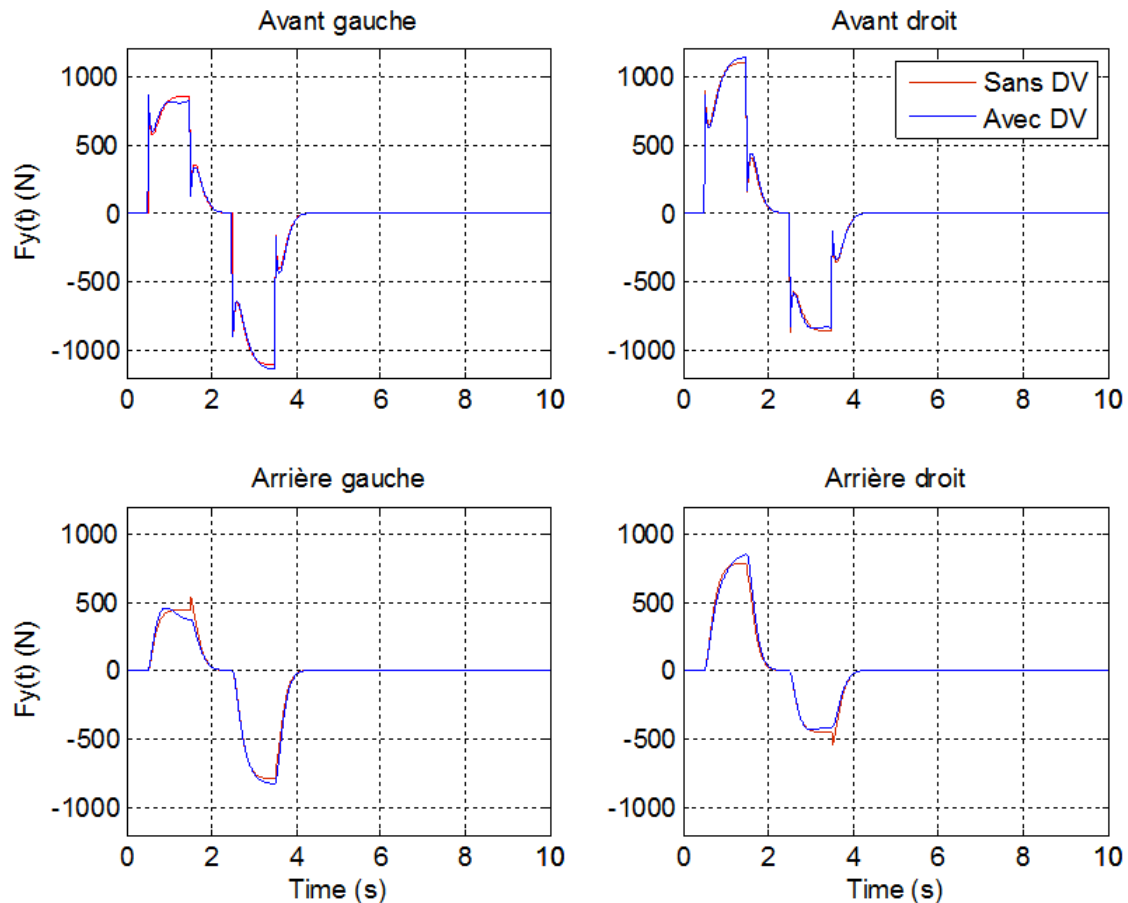


FIGURE 4.14 – Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.15 présente les évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques.

D'une manière générale, les variations des $F_x(t)$ résultent des variations des taux de glissement et des efforts verticaux des pneumatiques (Cf. modèle de Pacejka, Chapitre 1). Pour ce scénario, les couples appliqués aux roues motrices étant constants, les taux de glissement ne varient pas, leurs valeurs étant imposées par les conditions initiales. Ainsi, quel que soit le modèle considéré (suspendu ou pas), la sensibilité des $F_x(t)$ aux variations des $F_z(t)$ est très faible, en tout cas difficilement perceptible à partir des tracés compte tenu de l'échelle adoptée. Là encore, ce constat illustre la très faible influence de la dynamique verticale sur les variations des $F_x(t)$ pour ce scénario.

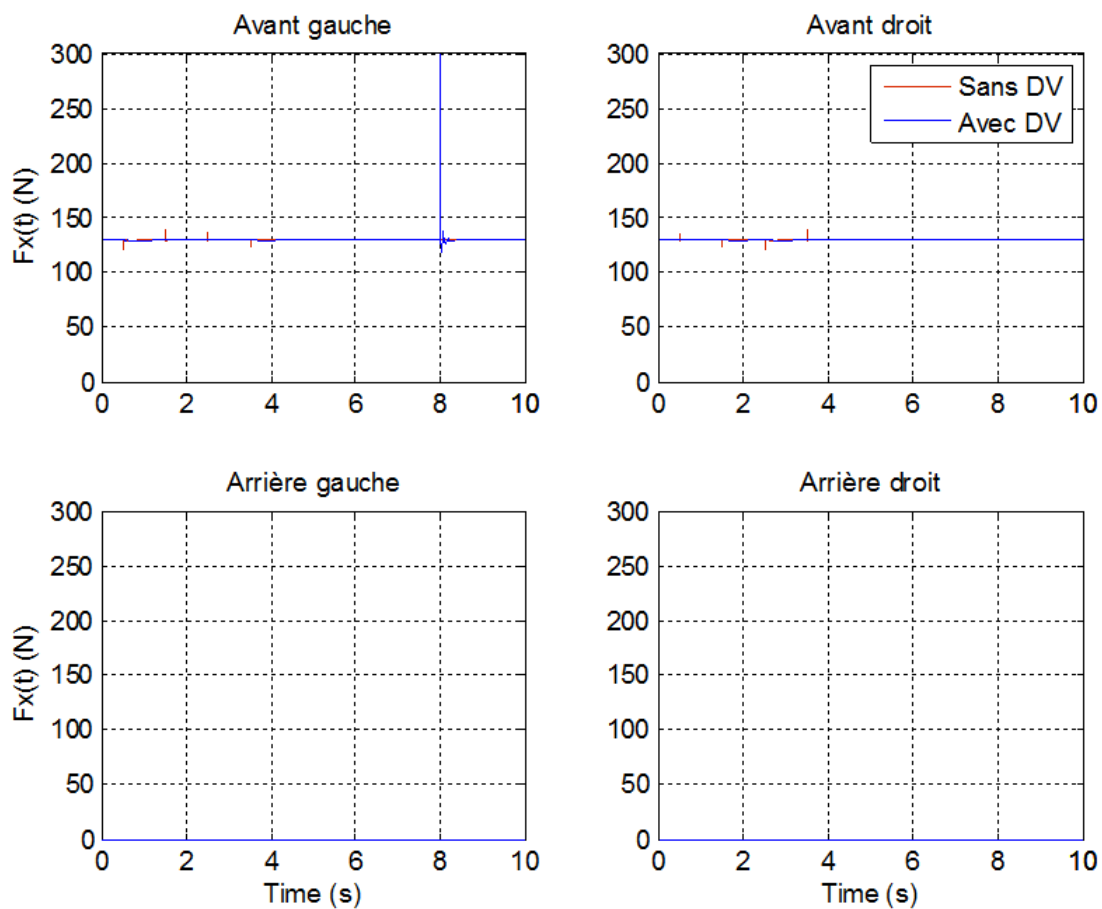


FIGURE 4.15 – Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.16 présente les évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut), ainsi que celles des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge).

Ces figures illustrent bien la très faible influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale dans la mesure où les réponses des deux modèles (suspendu et non suspendu) sont quasiment identiques. De plus, à travers les tracés de $a_x(t)$ et de $V_x(t)$, on vérifie bien que la dynamique longitudinale n'est pas impactée par ce scénario. Enfin, les valeurs de $a_x(t)$ (nulles) et de $a_y(t)$ (inférieures à 0.2 g en valeur absolue) permettent de vérifier que ce scénario s'inscrit bien dans le cadre de l'agrément de conduite défini par la zone bleue du diagramme de la figure 4.1.

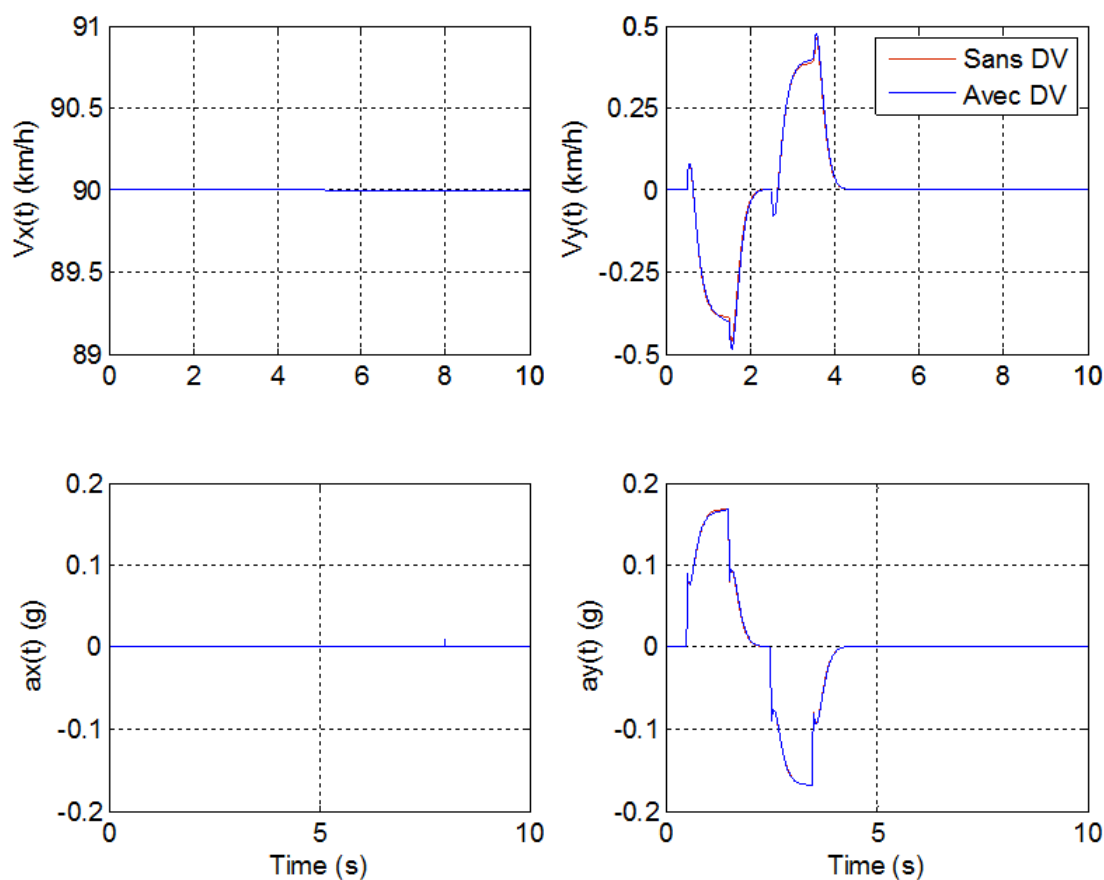


FIGURE 4.16 – Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.17 présente les évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas). Les réponses des deux modèles (suspendu et non suspendu) sont quasiment identiques, illustrant une fois de plus à travers ces deux variables la très faible influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale.

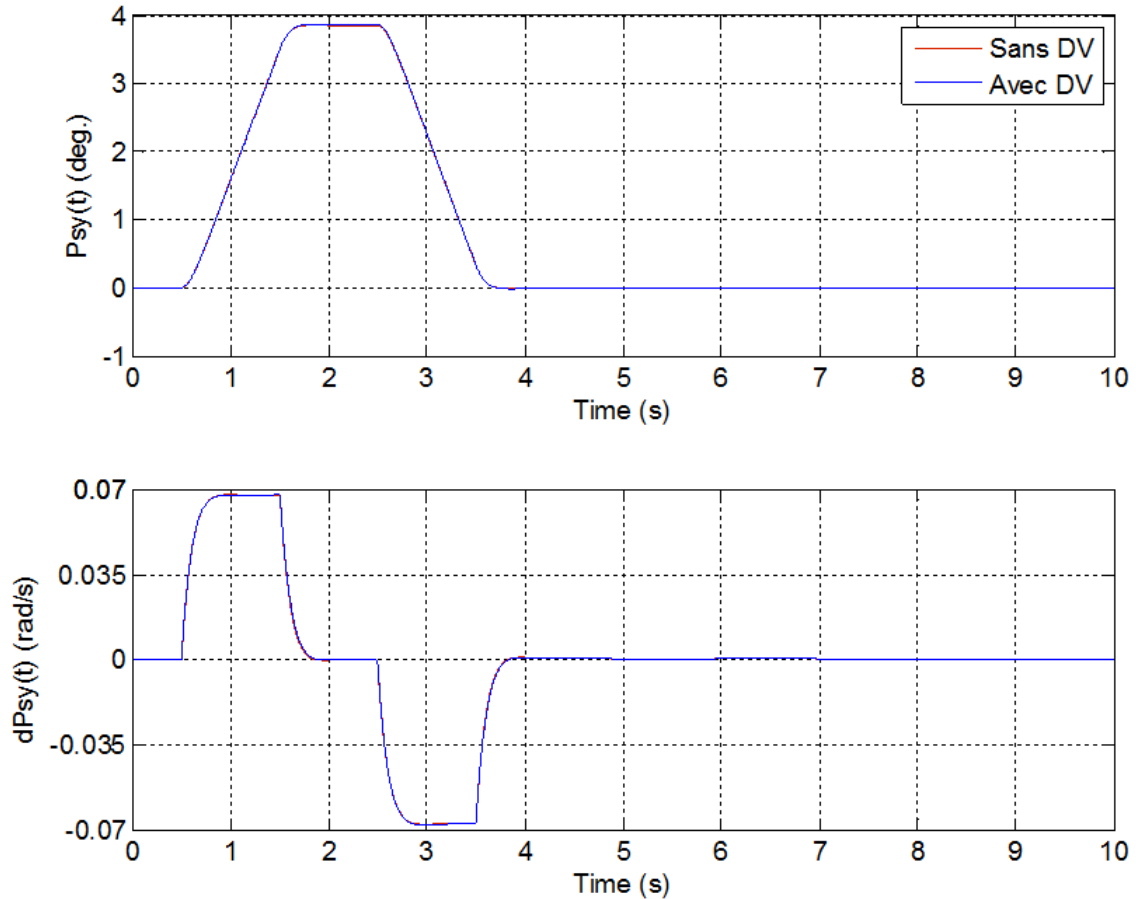


FIGURE 4.17 – Évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.18 présente les trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) toujours en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche). Les deux trajectoires se superposent quasiment parfaitement illustrant ainsi, pour le scénario étudié, que l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale est négligeable.

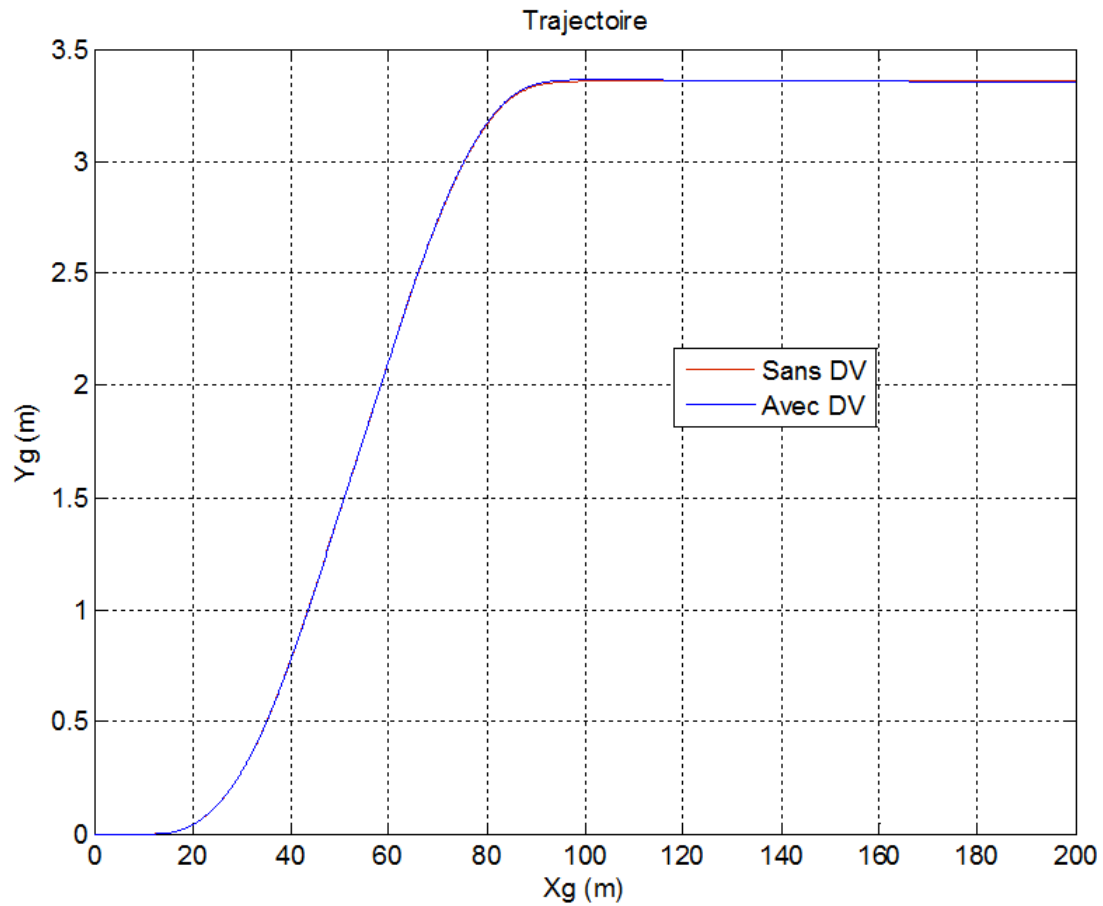


FIGURE 4.18 – Trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



4.5.2 Scénario 2 : freinage en ligne droite

Le scénario de cette deuxième situation d'essai est le suivant :

- de $t = 0$ s à 1 s, le véhicule est en ligne droite à une vitesse constante de 90 km/h ;
- de $t = 1$ s à 2 s, la première phase du freinage est définie par une variation des couples à la roue de type rampe (entrée conducteur) ;
- à partir de $t = 2$ s, la seconde phase de freinage est définie par des couples à la roue constants ;
- à $t = 8$ s, une variation dissymétrique du profil vertical de l'uni de la chaussée (entrée route) de type saut échelon d'une amplitude de 2 cm est appliquée sous les roues de gauche ;
- fin de la simulation à $t = 10$ s.

La figure 4.19 présente les couples appliqués aux roues de l'essieu avant (en haut) et à celles de l'essieu arrière (en bas).

Il est à noter que la loi de répartition de freinage avant/arrière est fixée par la répartition des masses, soit 60% à l'avant et donc 40% à l'arrière.

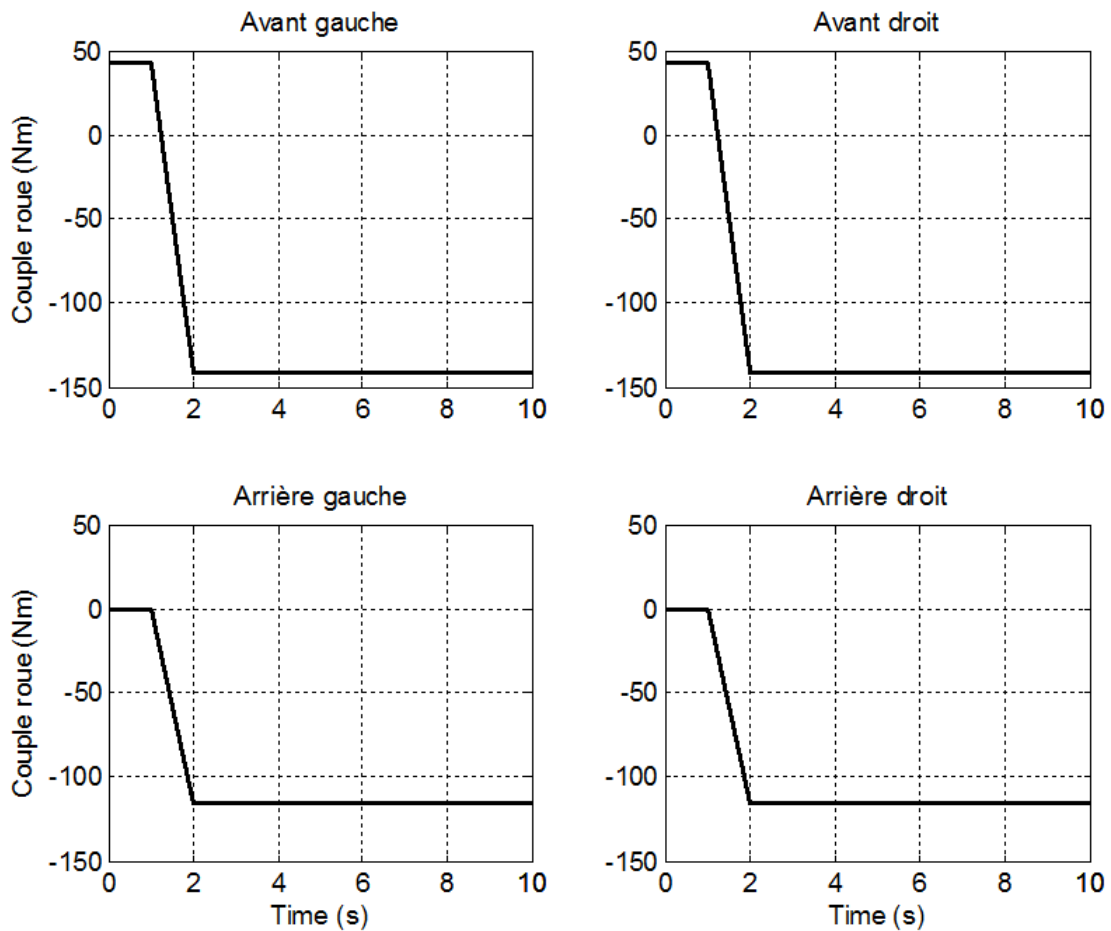


FIGURE 4.19 – *Couples appliqués aux roues de l'essieu avant (en haut) et à celles de l'essieu arrière (en bas)*



La figure 4.20 présente les évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ (appuis au sol) des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge).

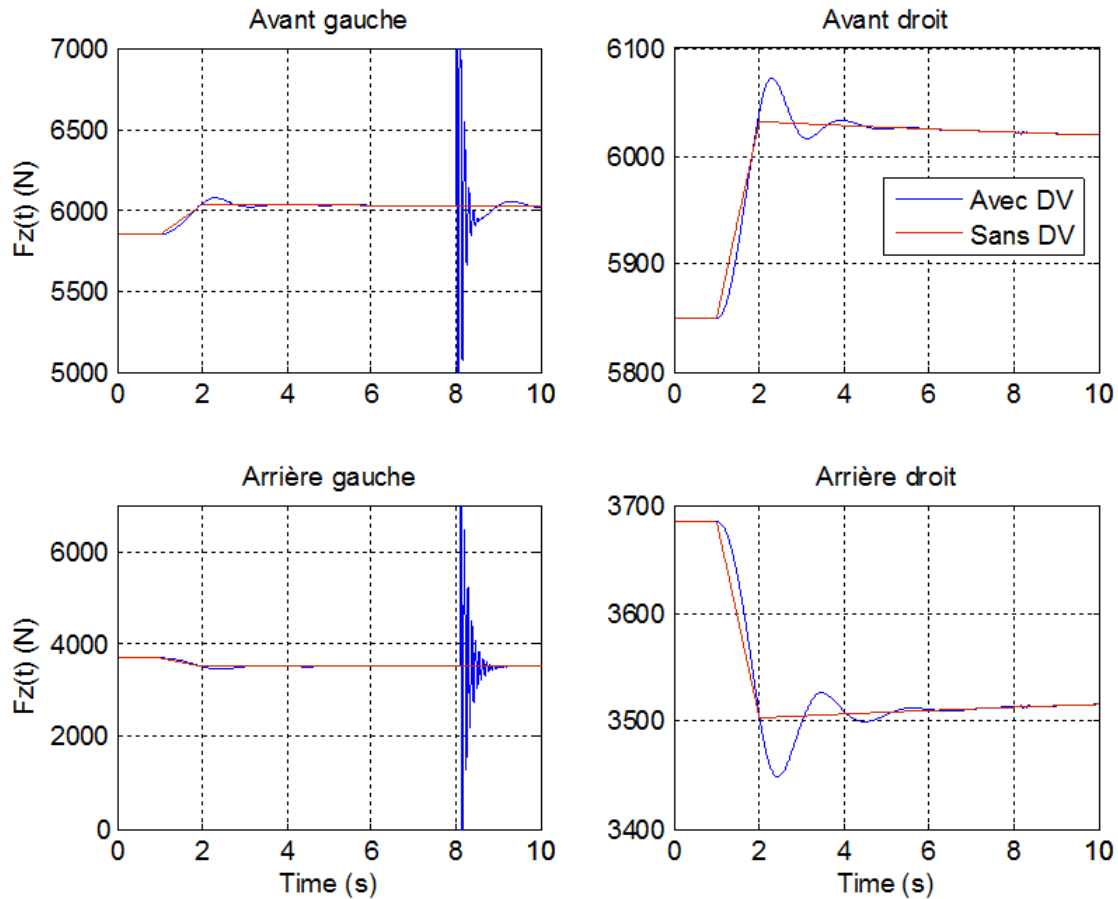


FIGURE 4.20 – Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.21 présente les évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route.

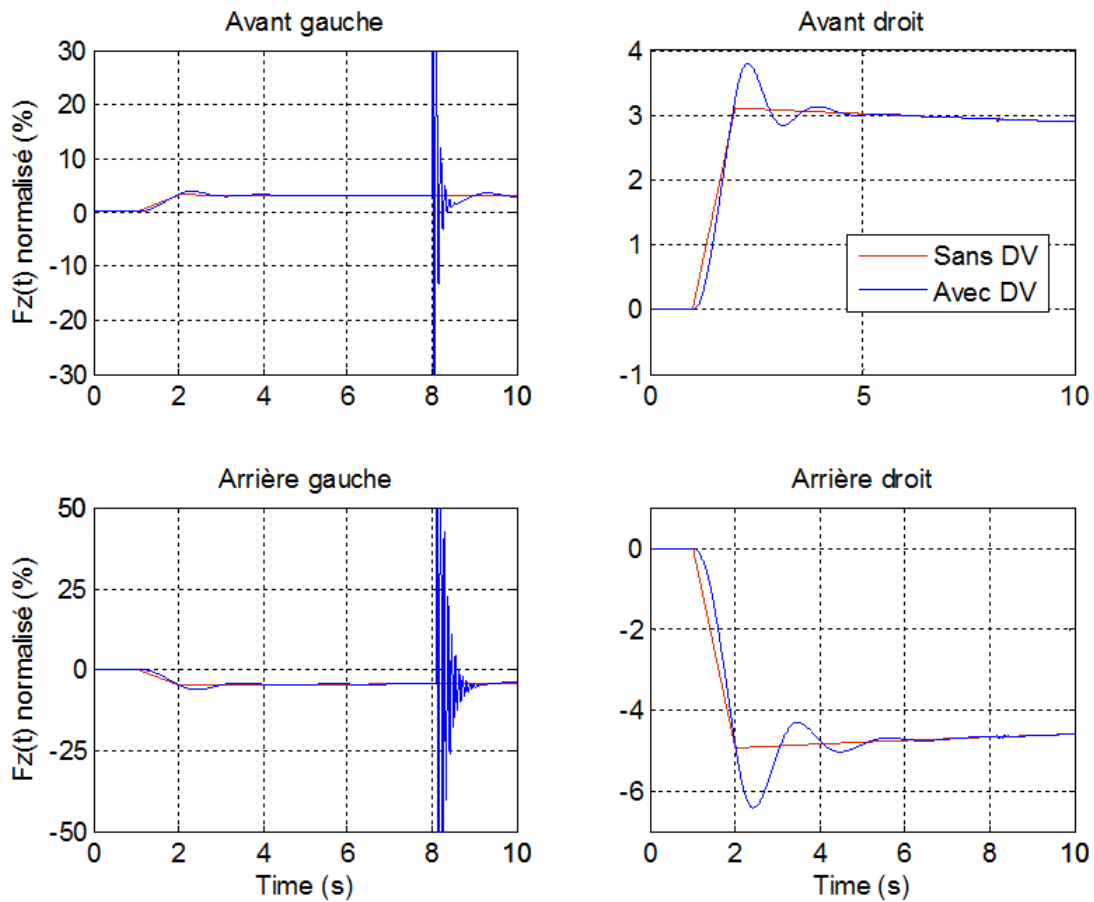


FIGURE 4.21 – Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)

L'observation de ces figures conduit à plusieurs remarques.

Avec le modèle non suspendu, comme pour le scénario 1, la forme des variations des $F_z(t)$ est identique à celle des reports de charge proportionnels aux accélérations longitudinale et transversale.

Avec le modèle suspendu, de la même manière que pour le scénario 1, la forme de l'évolution des $F_z(t)$ en réponse aux entrées du conducteur (qui génèrent les reports de charge) est imposée par les dynamiques verticales (Pompage et Tangage) de la masse suspendue, tandis que la forme de l'évolution des $F_z(t)$ en réponse aux entrées de la route est imposée par la dynamique verticale des masses non suspendues.

En relatif, les variations les plus importantes par rapport à la valeur statique sont toujours celles de la roue arrière gauche en réponse à la variation de la route, et ce en raison d'un battement de roue faiblement amorti.

Il est à noter que si la règle généralement adoptée dans ce mémoire de thèse est de tracer les réponses des quatre roues avec la même échelle de façon à faciliter la vision globale, volontairement ici les réponses des quatre roues ont leur propre échelle afin de faciliter la comparaison des réponses de chacun des modèles.



La figure 4.22 présente les évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques toujours pour les mêmes conditions. La dynamique transversale n'étant pas sollicitée, ces efforts sont bien entendu nuls.

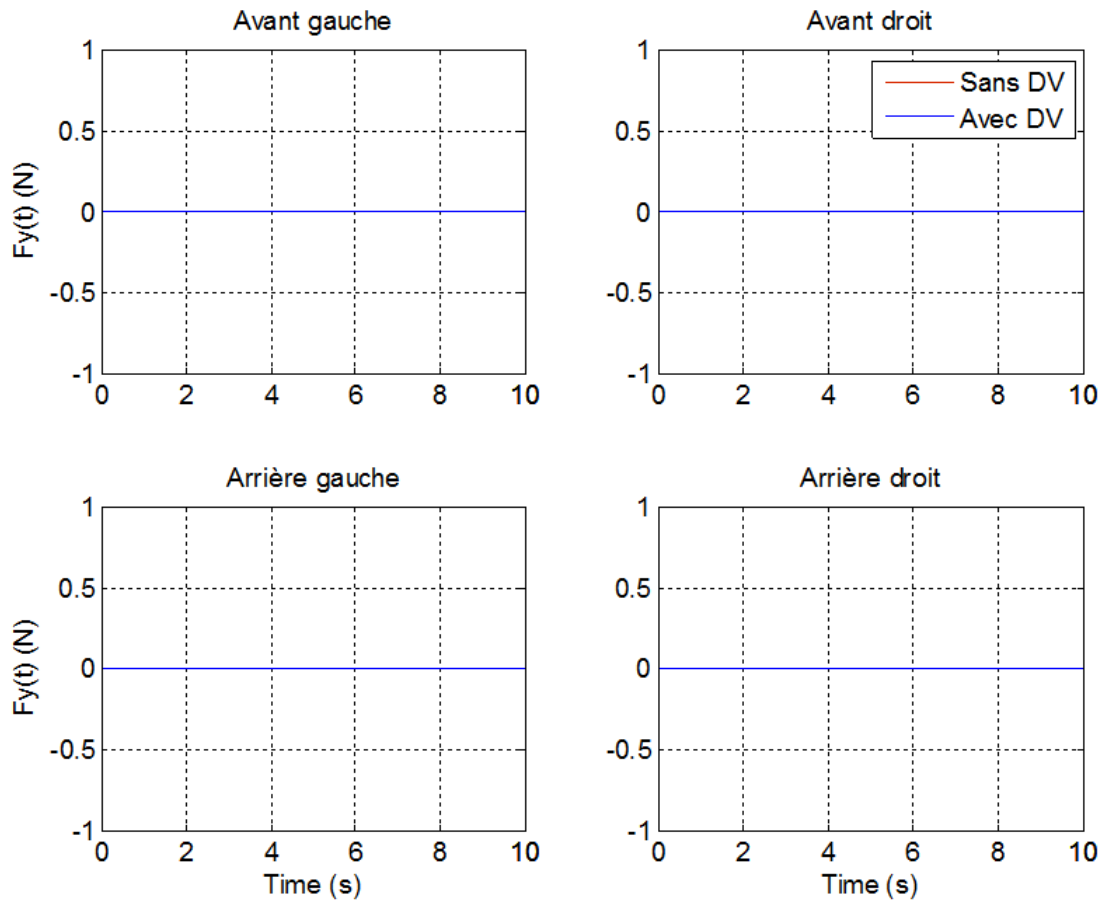


FIGURE 4.22 – Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (freinage) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.23 présente les évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques.

Les variations des $F_x(t)$ en réponse aux entrées du conducteur étant identiques pour les deux modèles, l'influence de la dynamique verticale peut être considérée comme négligeable. Quant aux variations des $F_x(t)$ en réponse aux entrées de la route vis-à-vis desquelles le modèle suspendu est le seul adapté, elles apparaissent essentiellement au niveau de la roue arrière gauche.

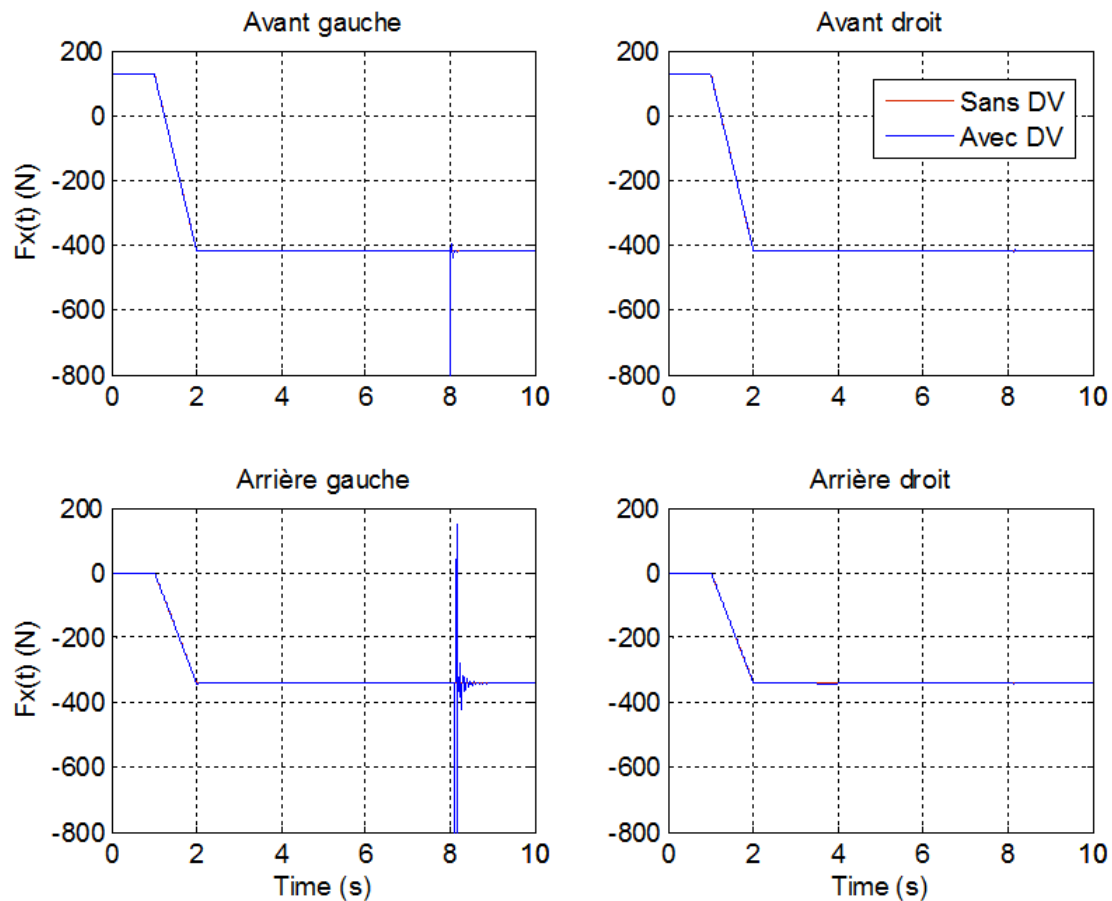


FIGURE 4.23 – Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (freinage) et route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche)



La figure 4.24 présente les évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut), ainsi que celles des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge).

Ces figures illustrent bien la très faible influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale dans la mesure où les réponses des deux modèles (suspendu et non suspendu) sont quasiment identiques. De plus, à travers les tracés de $a_y(t)$ et de $V_y(t)$, on vérifie bien que la dynamique transversale n'est pas impactée par ce scénario. Enfin, les valeurs de $a_y(t)$ (nulles) et de $a_x(t)$ (inférieures à 0.2 g en valeur absolue) permettent de vérifier que ce scénario s'inscrit bien dans le cadre de l'agrément de conduite défini par la zone bleue du diagramme de la figure 4.1.

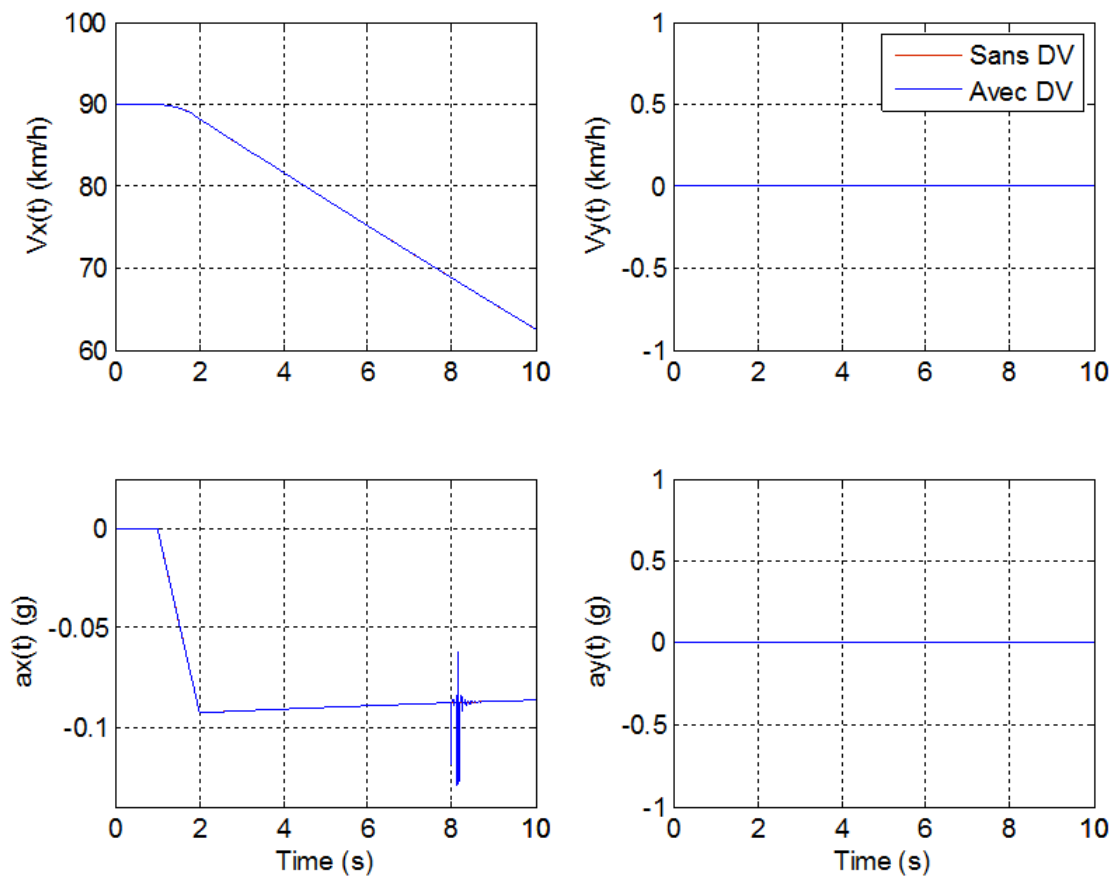


FIGURE 4.24 – Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.25 présente les évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas). Les réponses des deux modèles (suspendu et non suspendu) sont parfaitement identiques, illustrant à travers ces deux variables et pour ce scénario l'absence d'influence de la dynamique verticale sur la dynamique transversale.

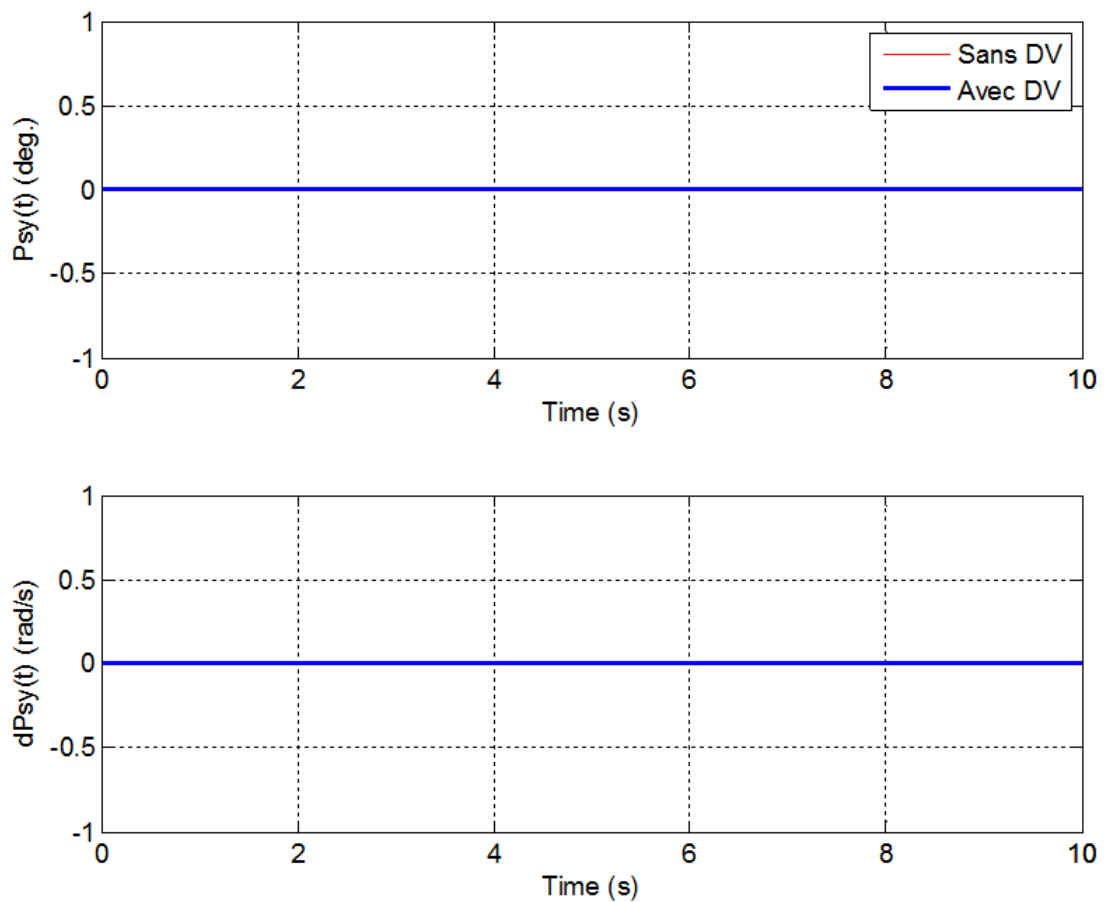


FIGURE 4.25 – *Evolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)*

En résumé pour ce deuxième scénario, le véhicule étant supposé parfaitement symétrique par rapport à son axe longitudinal, non seulement au niveau de la répartition de son chargement, mais aussi en ce qui concerne les forces des suspensions et les couples appliqués aux roues d'un même essieu, la dynamique verticale n'a pas d'influence sur la dynamique horizontale, et ce malgré la dissymétrie de la l'entrée route.



4.5.3 Scénario 3 : changement de voie avec freinage

Le scénario de cette troisième et dernière situation d'essai est une agrégation des deux premiers. Ainsi, les entrées du conducteur sont conformes à celles définies :

- au scénario 1 en ce qui concerne le braquage des roues (figure 4.10) ;
- au scénario 2 en ce qui concerne les couples appliqués aux roues (figure 4.19),

les entrées de la route étant, elles aussi, identiques à celles déjà utilisées.

La figure 4.26 présente les évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ (appuis au sol) des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie et freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge).

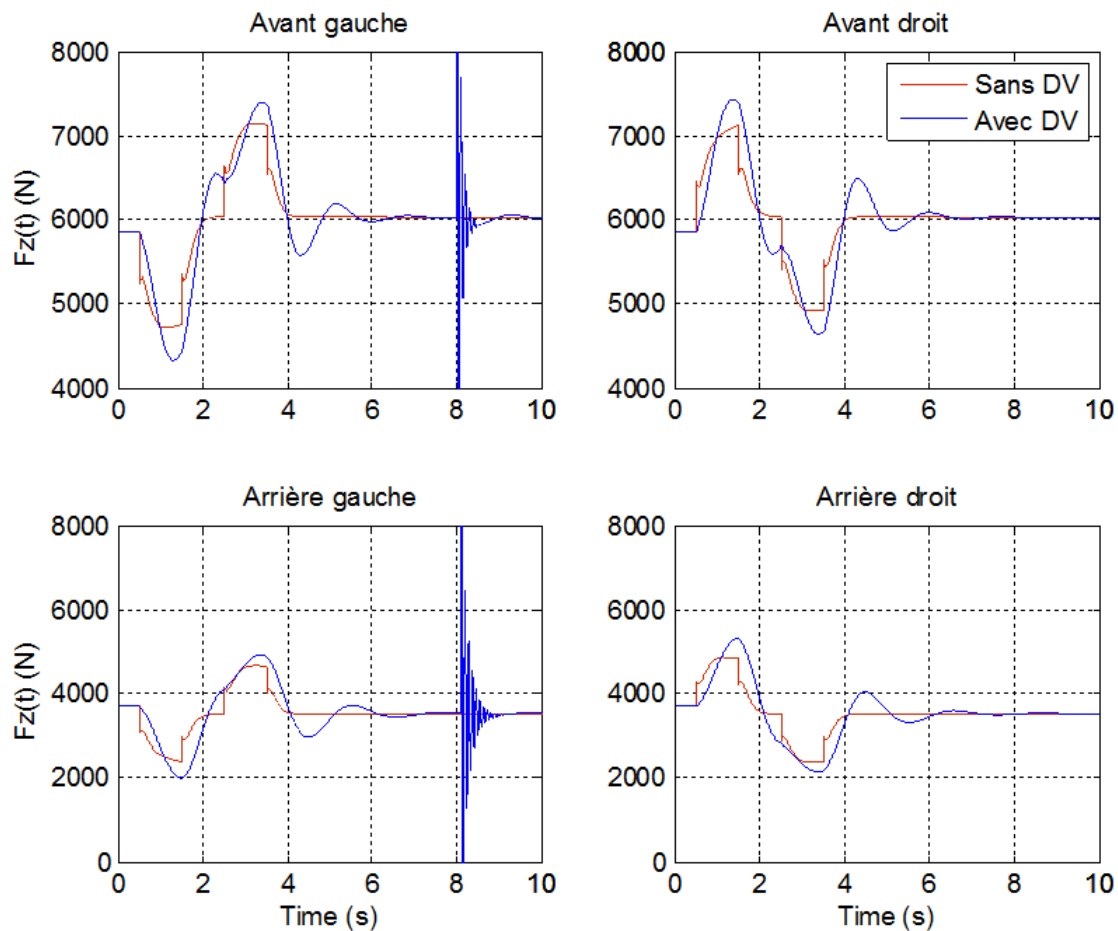


FIGURE 4.26 – Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie et freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du côté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.27 présente les évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route.

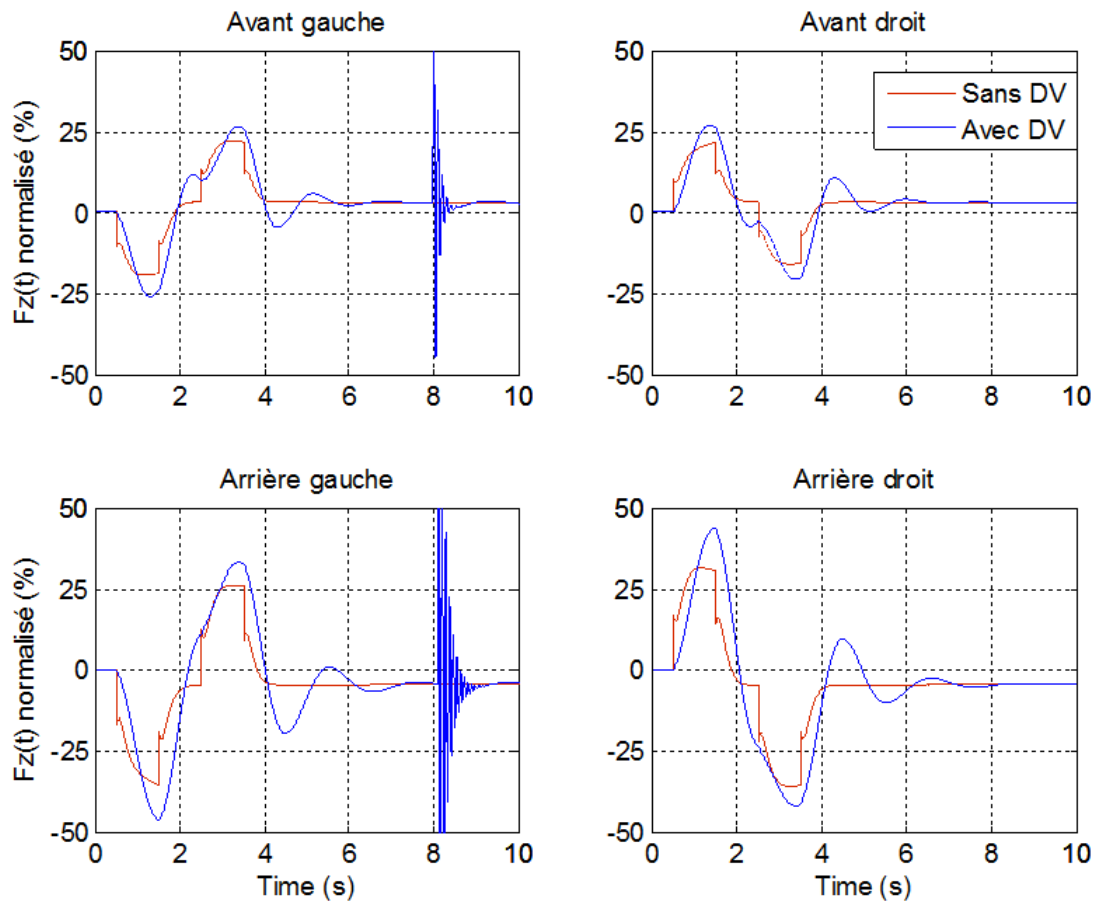


FIGURE 4.27 – Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)

Comme pour les deux premiers scénarii, on observe une différence entre les réponses obtenues avec les modèles suspendu et non suspendu. En relatif, les variations les plus importantes sont toujours celles de la roue arrière gauche en réponse à la variation de la route, et ce en raison d'un battement de roue faiblement amorti.



La figure 4.28 présente les évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques toujours pour les mêmes conditions.

Comme précédemment, la différence des réponses des deux modèles est suffisamment faible pour être négligée.

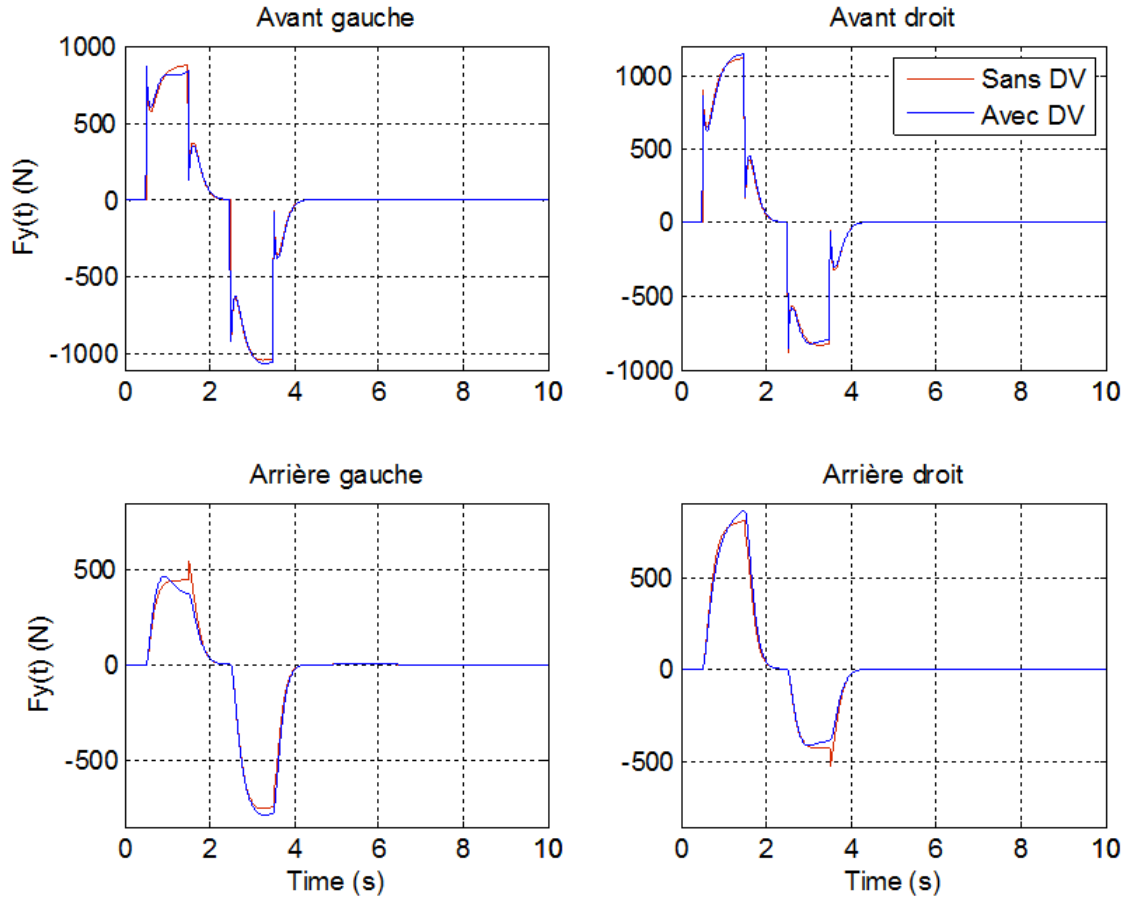


FIGURE 4.28 – Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.29 présente les évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques.

Les deux modèles conduisent aux mêmes résultats en ce qui concerne les réponses aux entrées du conducteur. Par contre, les différences apparaissent en réponse aux entrées de la route dans la mesure où le modèle non suspendue n'est pas adapté pour de telles entrées.

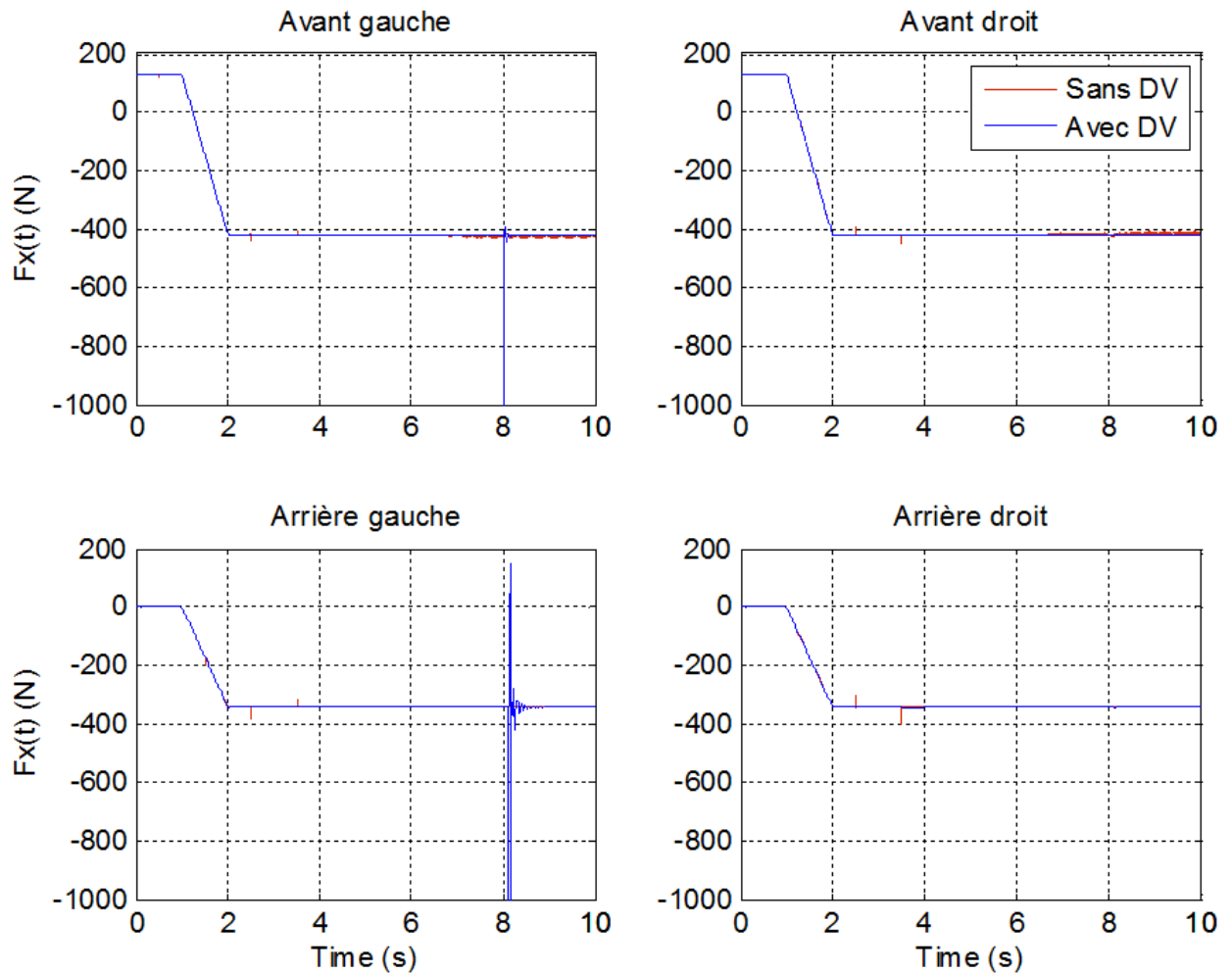


FIGURE 4.29 – Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.30 présente les évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut), ainsi que celles des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge).

Malgré la superposition des deux types d'entrées du conducteur (braquage et freinage simultanément), ces figures illustrent bien la très faible influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale dans la mesure où les réponses des deux modèles (suspendu et non suspendu) sont quasiment identiques. De plus, les valeurs de $a_x(t)$ et de $a_y(t)$ permettent de vérifier que ce scénario s'inscrit bien dans le cadre de l'agrément de conduite défini par la zone bleue du diagramme de la figure 4.1.

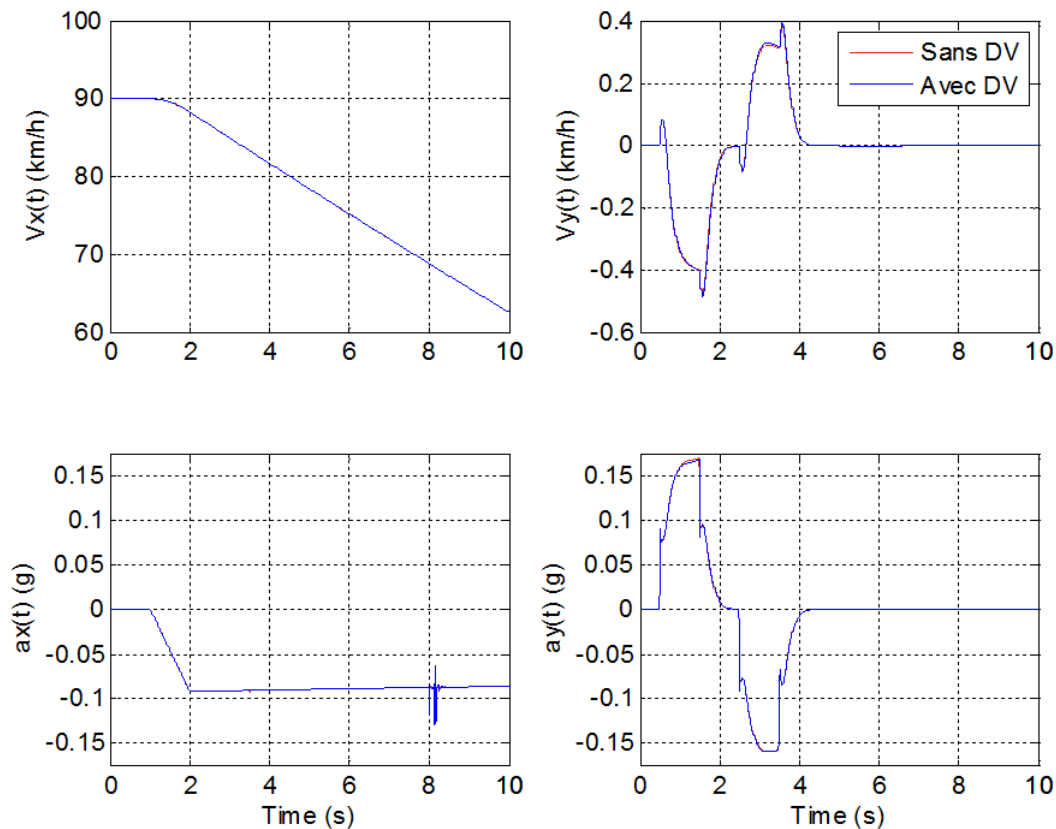


FIGURE 4.30 – Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.31 présente les évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas). Ces réponses ne font que confirmer la tendance qui se dégage, à savoir la très faible influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale pour le domaine de fonctionnement qui définit l'agrément de conduite.

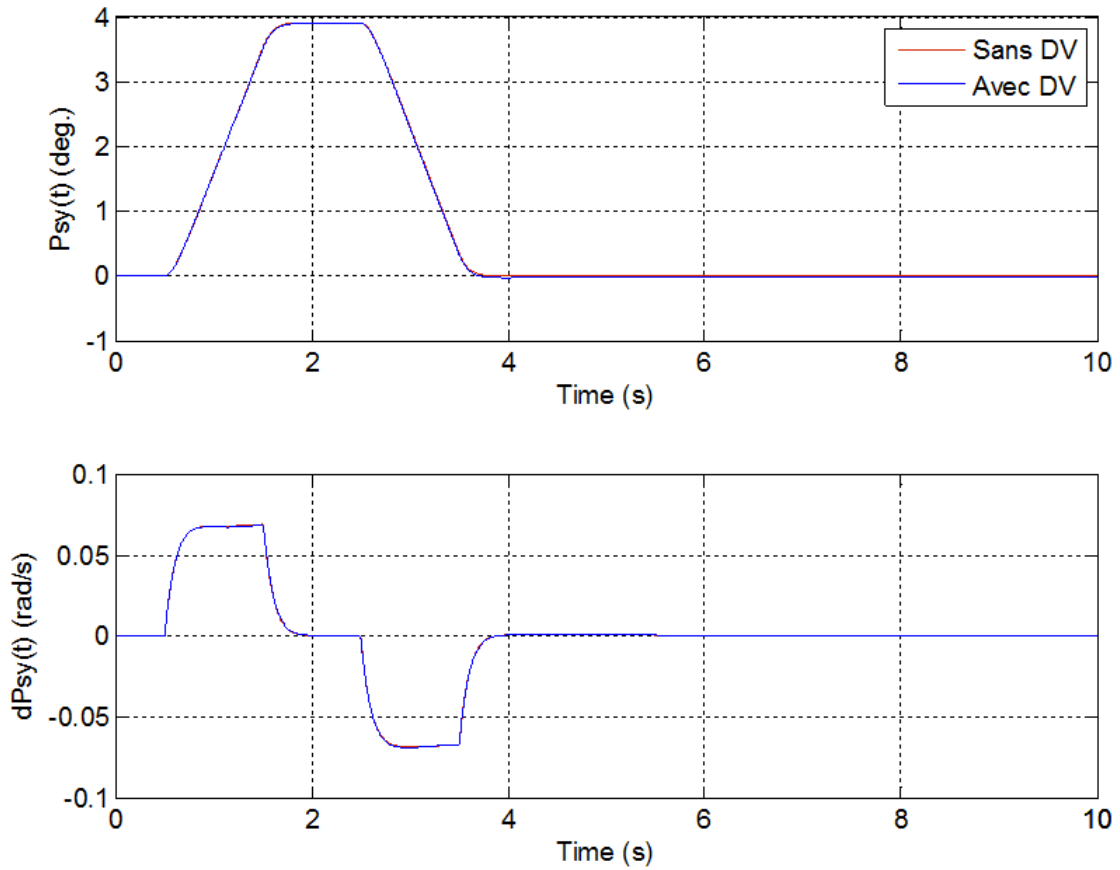


FIGURE 4.31 – Évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)



La figure 4.32 présente les trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge). Les deux trajectoires se superposent, confirmant ainsi que l'influence de la dynamique verticale sur la dynamique horizontale est négligeable.

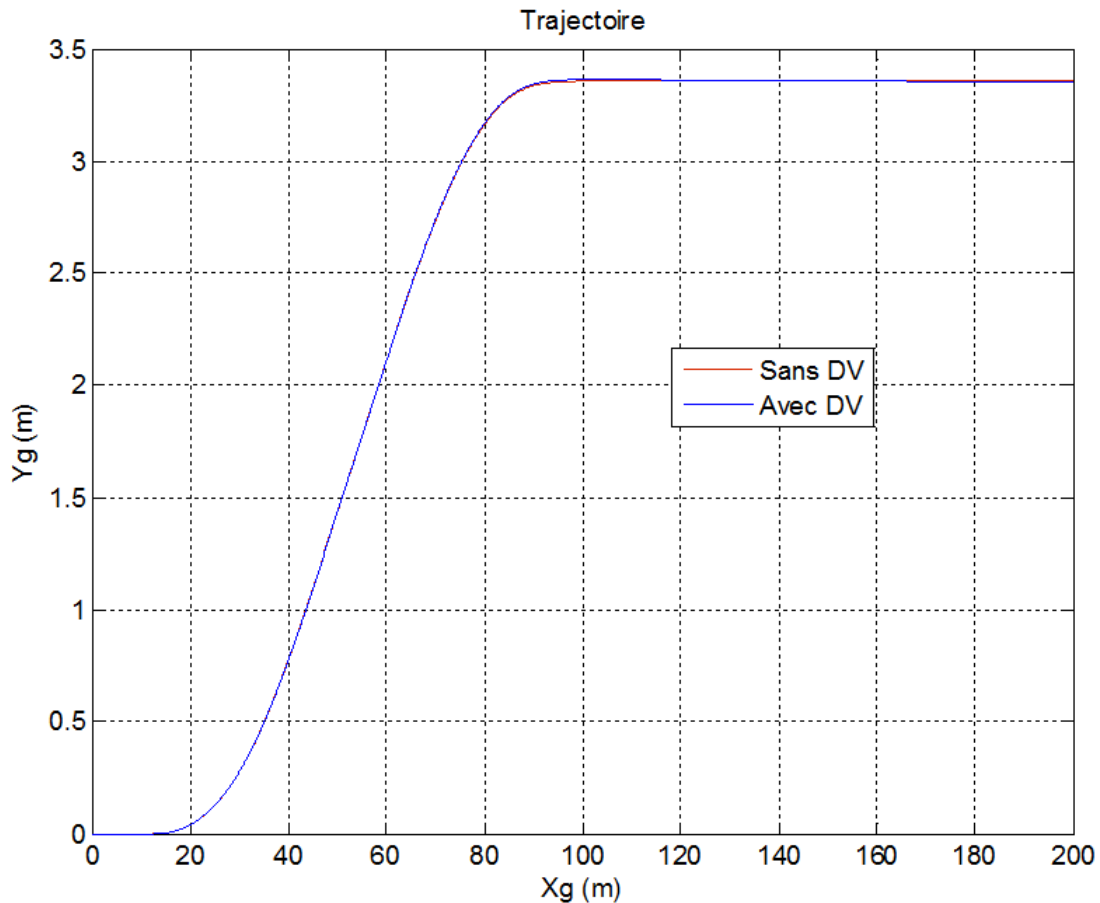


FIGURE 4.32 – Trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur

En résumé, ce troisième scénario qui résulte de l'agrégation des deux premiers confirme la tendance qui se dégage tout au long de ce chapitre.

4.6 Conclusion

A l'aide de deux modèles à 4 roues (l'un suspendu, l'autre non suspendu) et de trois situations d'essais auxquelles sont associées à la fois des entrées du conducteur et de la route, ce chapitre met en évidence que :

- la dynamique verticale a une influence sur la variation des appuis au sol $F_z(t)$;
- dans la zone linéaire du pneumatique, la variation des appuis n'a pas d'influence significative sur la dynamique horizontale, notamment sur l'agrément de conduite.

La zone linéaire du pneumatique coïncidant avec la zone dite de "conduite client" c'est à dire la zone qui couvre la majorité du domaine d'utilisation du véhicule, on peut dire que la dynamique verticale du véhicule n'a pas d'influence significative sur le comportement routier.



Troisième partie

Choc et butée de fin de course

Chapitre 5

Étude de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale

Sommaire

5.1	Introduction	146
5.2	Modélisation	146
5.2.1	Définition du domaine d'étude	146
5.2.2	Modèle non linéaire d'un quart de véhicule	146
5.2.3	Modèle analytique de l'obstacle isolé	148
5.3	Analyse de deux solutions existantes	153
5.3.1	Butée élastique	153
5.3.2	Butée hydraulique	162
5.4	Définition fonctionnelle de la butée idéale	182
5.5	Conclusion	182



5.1 Introduction

Ce chapitre constitue une ouverture sur une problématique qui n'avait pas été abordée jusque là par l'équipe CRONE, à savoir l'étude de l'influence des butées de fin de course de la suspension sur la dynamique verticale du véhicule.

Les butées de fin de course sont des dispositifs visant à préserver la mécanique et notamment le châssis lors de fortes compressions (ou détentes) assimilables à des chocs. Leur rôle est donc principalement de limiter la course de la tige de piston et, par conséquent, de limiter le débattement de la suspension.

Ainsi, ce chapitre commence par la définition d'un modèle non linéaire à deux degrés de liberté (2 ddl) d'un quart de véhicule, d'une part, et d'un modèle d'obstacle isolé, d'autre part, le domaine d'étude traité dans ce chapitre est présenté. Deux phases bien distinctes et successives sont étudiées :

- d'abord le choc, intervenant dans les premiers instants lors de la compression, choc caractérisé par l'amplitude maximale de l'accélération verticale de la masse suspendue et par son jerk (dérivée première de l'accélération) ;
- ensuite la forme du régime transitoire à l'issue du choc et plus particulièrement l'amortissement des réponses des masses non suspendue et suspendue, grandeur qui caractérise les tenues de roue et de caisse telles que définies au chapitre 1.

Ce chapitre se poursuit par l'analyse numérique, mais aussi analytique, de l'influence sur la dynamique du modèle à 2 ddl (choc et régime transitoire) de deux solutions existantes, à savoir une butée PU qui équipe des véhicules de série, et une butée hydraulique prototype développée par la société SOBEN [Soben (SiteWeb)] et testée par PSA Peugeot Citroën. L'analyse comparative de ces deux solutions conduit à la définition à **l'échelle fonctionnelle** d'une butée "idéale" à travers l'ensemble des spécifications imposées : progressivité de la mise en action de la butée, minimisation de l'accélération maximale au moment du choc et maximisation de l'énergie dissipée.

5.2 Modélisation

5.2.1 Définition du domaine d'étude

La réponse à la question "un modèle pour faire quoi ?" se résume ici à comprendre les phénomènes dynamiques dominants lors de la mise en fonctionnement des butées de fin de course dans un cas très sévère. Celui retenu dans le cadre de notre domaine d'étude correspond au cas d'un véhicule en charge (4P28 : 4 Personnes de 70 kg avec 28 kg de bagage) lors d'un franchissement d'un obstacle isolé de type dos-d'âne à vitesse constante en ligne droite (pas de report de charge). Chronologiquement, les premières butées hydrauliques ont d'abord été introduites pour intervenir pendant la phase de compression. C'est la raison pour laquelle la définition de la géométrie de l'obstacle isolé et la vitesse de franchissement du véhicule font l'objet d'une attention toute particulière pour que les butées soient sollicitées de manière significative dès la phase d'attaque (ou de montée) de la roue, et ce afin de bien montrer leur intérêt, mais aussi leur limite.

5.2.2 Modèle non linéaire d'un quart de véhicule

Compte tenu de l'objectif, à savoir l'analyse de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale, le modèle retenu est celui d'un quart de véhicule à 2 ddl.

La figure 5.1 représente la schématisation et le paramétrage d'un tel modèle où les notations utilisées sont conformes à celles définies aux chapitres 1 et 3, c'est-à-dire des variations autour de la position d'équilibre statique avec des conditions initiales nulles. Ainsi, les $v_i(t)$



désignent les vitesses verticales des masses non suspendue ($i = 1$: roue) et suspendue ($i = 2$: caisse) dont les expressions sont données par (relations concernant les blocs "caisse" et "roue" de la figure 5.1b) :

$$v_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t f_{\Sigma i}(\tau) d\tau, \quad (5.2.1)$$

où, conformément au domaine d'étude précédemment défini, $f_{\Sigma i}(s)$ représente la somme algébrique des efforts extérieurs appliqués à la masse m_i , soit :

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) = f_1(t) - f_s(t) \\ f_{\Sigma 2}(t) = f_s(t) \end{cases}, \quad (5.2.2)$$

avec

- $f_1(t)$ la variation de la force verticale développée par le pneumatique sur la masse m_1 , dont l'expression est donnée par (relation concernant le bloc "pneu" de la figure 5.1b) :

$$f_1(t) = k_1 \int_0^t v_{01}(\tau) d\tau + b_1 v_{01}(t), \quad (5.2.3)$$

où $v_{01}(t) = v_0(t) - v_1(t)$;

- $f_s(t)$ la variation de la force verticale appliquée par la suspension sur la masse m_2 , somme des trois forces développées par le ressort de raideur k_2 , l'amortisseur et la butée, soit (relation concernant le bloc "suspension" de la figure 5.1b) :

$$f_s(t) = k_2 \int_0^t v_{12}(\tau) d\tau + f_{amort}(t) + f_{bute}(t), \quad (5.2.4)$$

où $v_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t)$.

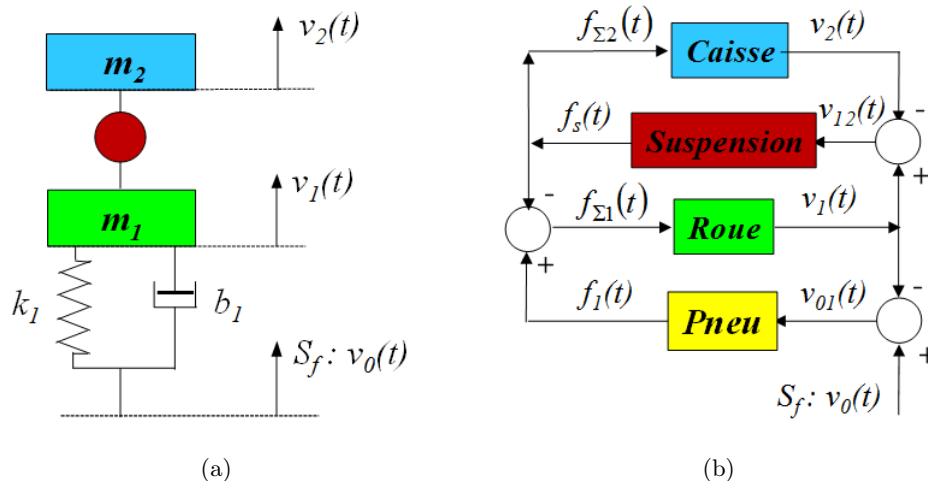


FIGURE 5.1 – Modèles d'analyse 1/4 véhicule (a) : schématisation et paramétrage et (b) : schéma causal

Dans la mesure où nous sommes dans le cadre de débattements avec de grandes amplitudes, les non-linéarités des butées et de l'amortisseur de la suspension sont prises en compte à l'aide de cartographies (LUT : Look-Up-Table) résultant de mesures sur banc (amortisseur, figure 5.2, et butée PU, figure 5.3) ou d'un modèle de connaissance ayant fait l'objet d'un recalage après des essais sur banc (butée hydraulique Soben, figure 5.4).

Les différentes parties de ce modèle d'analyse sont programmées sous MatLab et Simulink.

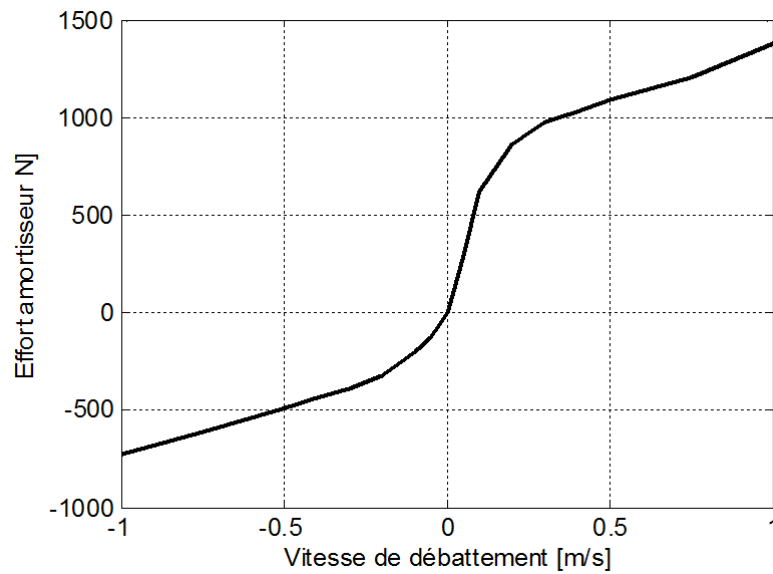


FIGURE 5.2 – Exemple d’une caractéristique non linéaire Force-Vitesse de débattement mesurée sur banc d’essai d’un amortisseur de Citroën C3

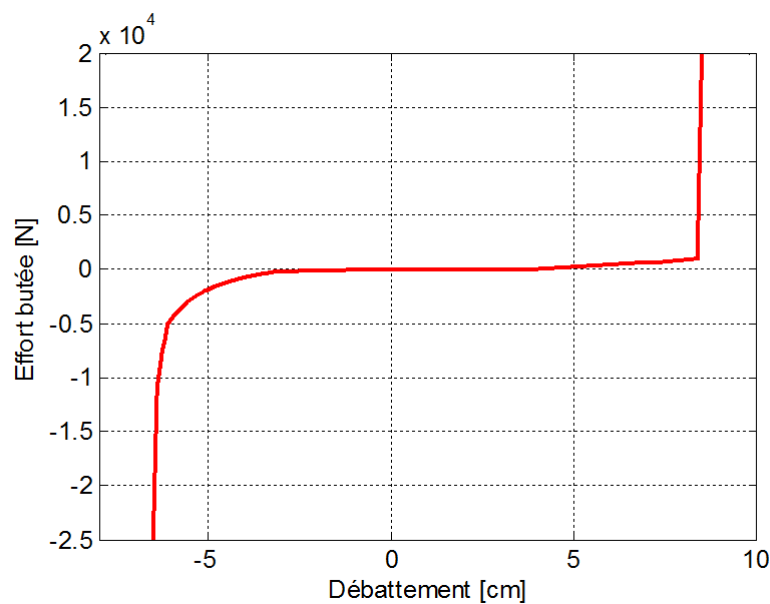


FIGURE 5.3 – Exemple d’une caractéristique non linéaire Force-Débattement mesurée sur banc d’essai d’une butée PU de Citroën C3

5.2.3 Modèle analytique de l’obstacle isolé

L’expression analytique du profil géométrique $z_0(x)$ retenue pour la suite est définie par :

$$z_0(x) = \frac{h}{2} (th(a(x - x_0)) - th(a(x - x_1))) , \quad (5.2.5)$$

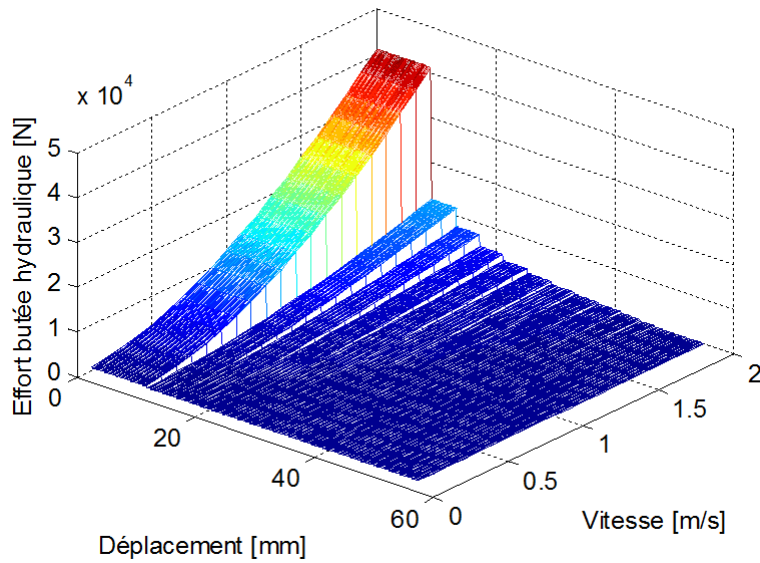


FIGURE 5.4 – Exemple d'une caractéristique non linéaire Force-Vitesse-Débattement d'une butée hydraulique Soben

avec

$$\begin{cases} x(t) = v_x(t) \\ a = \frac{2}{h} \operatorname{tg} \alpha \\ x_1 = x_0 + L \end{cases}, \quad (5.2.6)$$

et où

- $th(\cdot)$: fonction tangente hyperbolique ;
- h : hauteur de l'obstacle ;
- x_0 : position du premier point d'inflexion ;
- α : angle d'attaque au point d'inflexion ;
- L : longueur entre les deux points d'inflexion ;
- v_x : vitesse longitudinale de franchissement.

La figure 5.5 présente un exemple de tracé du profil géométrique $z_0(x)$ pour $h = 2\text{cm}$, $L = 4\text{m}$, $x_0 = 1\text{m}$ et $\alpha = 10^\circ$ où ces quatre paramètres sont repérés conformément à la définition (5.2.5).

L'intérêt d'utiliser la fonction tangente hyperbolique $th(\cdot)$ est son caractère continûment dérivable (ce qui n'est pas le cas avec un signal rectangulaire). Ainsi, l'expression analytique de la loi horaire $v_0(t)$ est ensuite établie à partir de la dérivée première de $z_0(x)$ par rapport à x , soit :

$$\frac{dz_0}{dx} = \operatorname{tg} \alpha (th^2(a(x - x_1)) - th^2(a(x - x_0))) . \quad (5.2.7)$$

Ainsi, sachant que

$$v_0(t) = \frac{dz_0}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (5.2.8)$$

on en déduit

$$v_0(t) = v_x \operatorname{tg} \alpha (th^2(v_x a(t - t_1)) - th^2(v_x a(t - t_0))) , \quad (5.2.9)$$

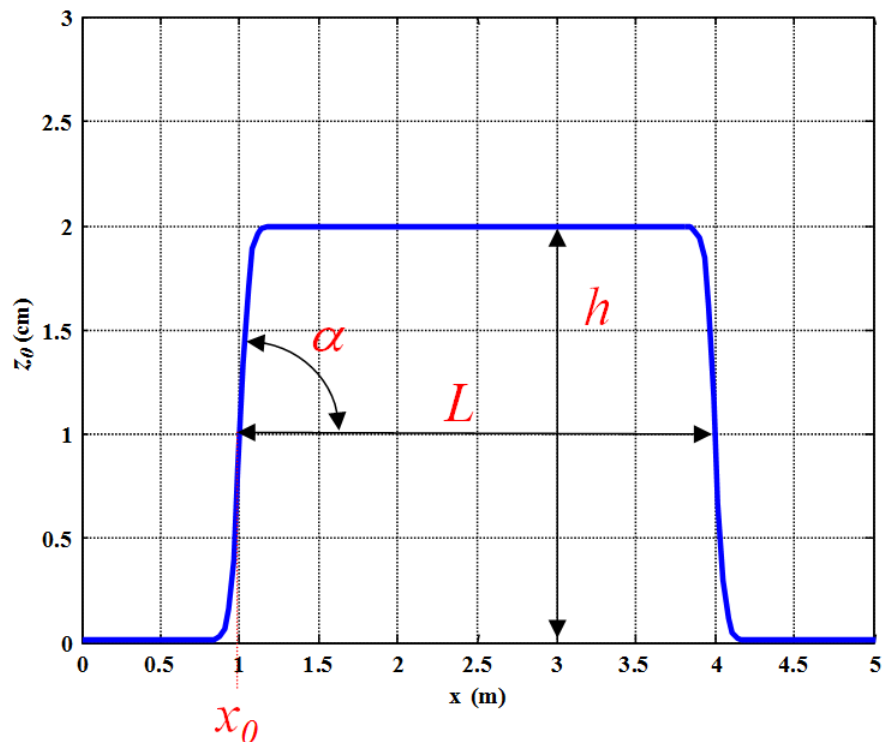


FIGURE 5.5 – Paramétrage du profil géométrique $z_0(x)$ et exemple de tracé pour $h = 2\text{cm}$, $L = 4\text{m}$, $x_0 = 1\text{m}$ et $\alpha = 10^\circ$

avec

$$t_0 = x_0/v_x \text{ et } t_1 = x_1/v_x . \quad (5.2.10)$$

La figure 5.6 présente le tracé de dz_0/dx obtenu pour l'exemple présenté figure 5.5.

Cet obstacle isolé peut être dimensionné pour étudier :

- la phase de compression seule, puis la phase de détente lorsque le régime transitoire de la masse suspendue est terminé, et ce en choisissant $L/v_x(t)$ supérieur au temps du régime transitoire de la masse suspendue ;
- l'enchaînement de la compression et de la détente sans laisser le temps à la masse suspendue d'atteindre son régime permanent entre les deux phases.

Compte tenu du contexte d'étude, c'est ce dernier cas qui est retenu dans la suite de ce chapitre.

La figure 5.7 présente le profil géométrique $z_0(x)$ de l'obstacle isolé retenu pour l'analyse où $h = 10\text{cm}$, $L = 0.938\text{m}$, $x_0 = 6\text{m}$ et $\alpha = 25^\circ$.

La figure 5.8 présente le profil horaire $z_0(t)$ de l'obstacle isolé obtenu lors d'un franchissement à la vitesse $v_x = 15\text{km/h}$. A titre de comparaison, un profil en 1/2 sinus de même amplitude, souvent utilisé pour une telle étude, est tracé sur la même figure. Il est à noter la discontinuité introduite par le profil en 1/2 sinus qui n'est pas en adéquation avec le rayon de la roue du véhicule.

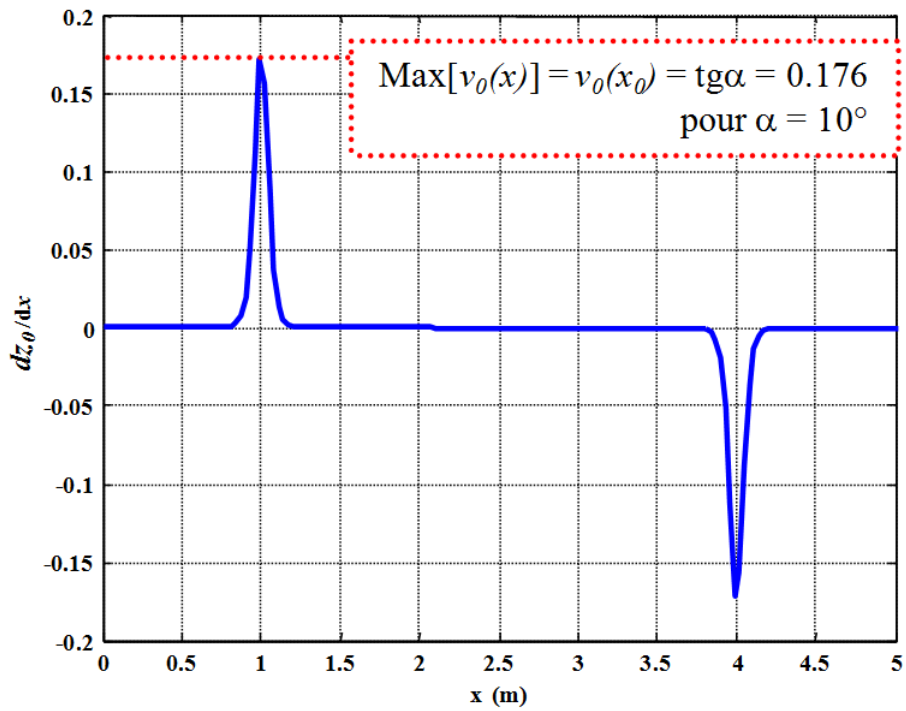


FIGURE 5.6 – Tracé de dz_0/dx pour $h = 2$ cm, $L = 4$ m, $x_0 = 1$ m et $\alpha = 10^\circ$

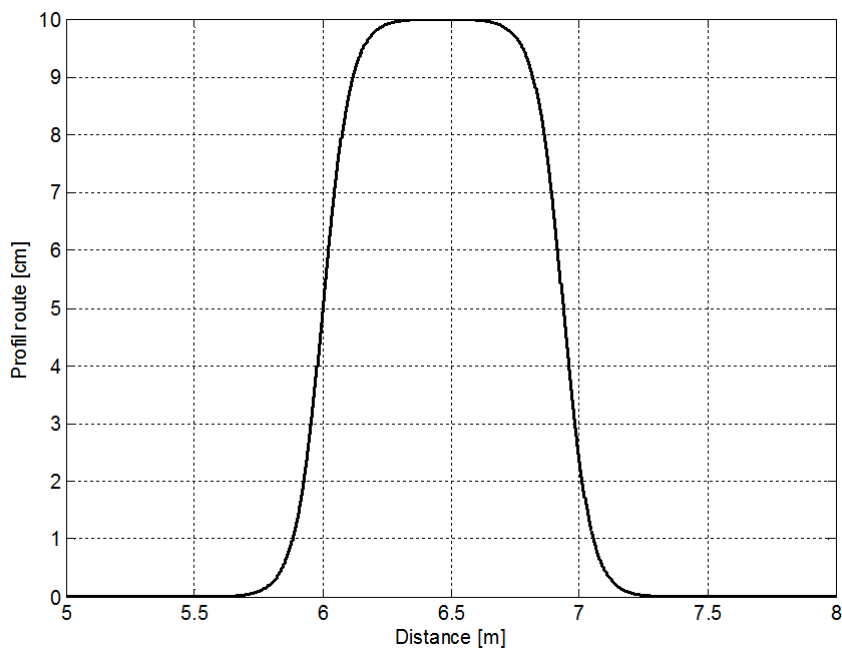


FIGURE 5.7 – Profil géométrique $z_0(x)$ de l'obstacle isolé retenu pour l'analyse : $h = 10$ cm, $L = 0.938$ m, $x_0 = 6$ m et $\alpha = 25^\circ$

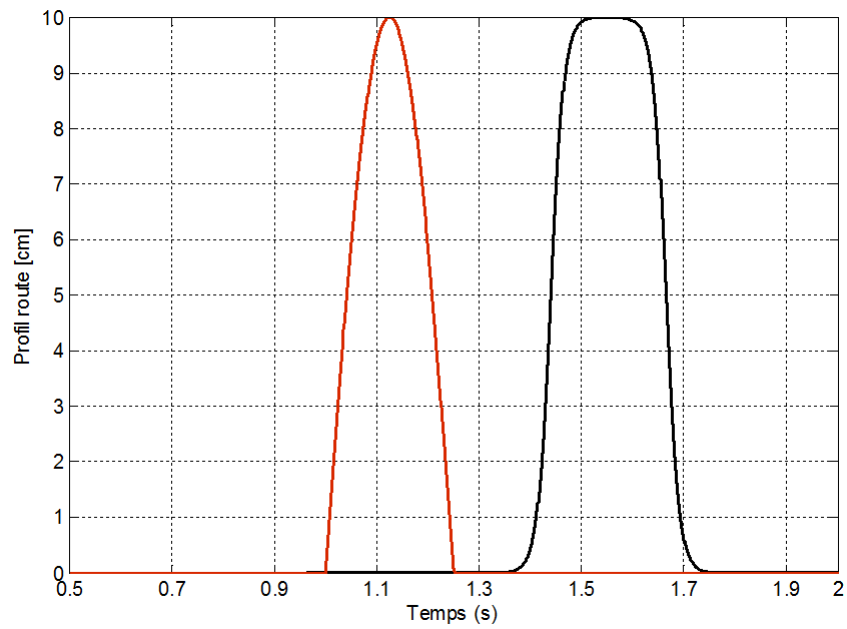


FIGURE 5.8 – Profil horaire $z_0(t)$ de l'obstacle isolé obtenu lors d'un franchissement à la vitesse $v_x = 15\text{km/h}$ (en noir) et, à titre comparatif, celui d'un obstacle en $1/2$ sinus (en rouge)



5.3 Analyse de deux solutions existantes

L'analyse de l'influence des butées de fin de course sur la dynamique verticale est présentée à l'aide de deux solutions existantes, en l'occurrence une butée élastique qui équipe la majorité des véhicules de tourisme, puis une butée hydraulique aujourd'hui au stade de prototype.

5.3.1 Butée élastique

La figure 5.9 présente, dans le cadre d'une analyse comparative, les caractéristiques statiques Force-Débattement de la butée PU série (en rouge) et d'une butée élastique (en bleu) de même raideur de fin de course mais sans progressivité. L'objectif de cette comparaison est de mettre en évidence l'importance du caractère progressif de la mise en action d'une butée.

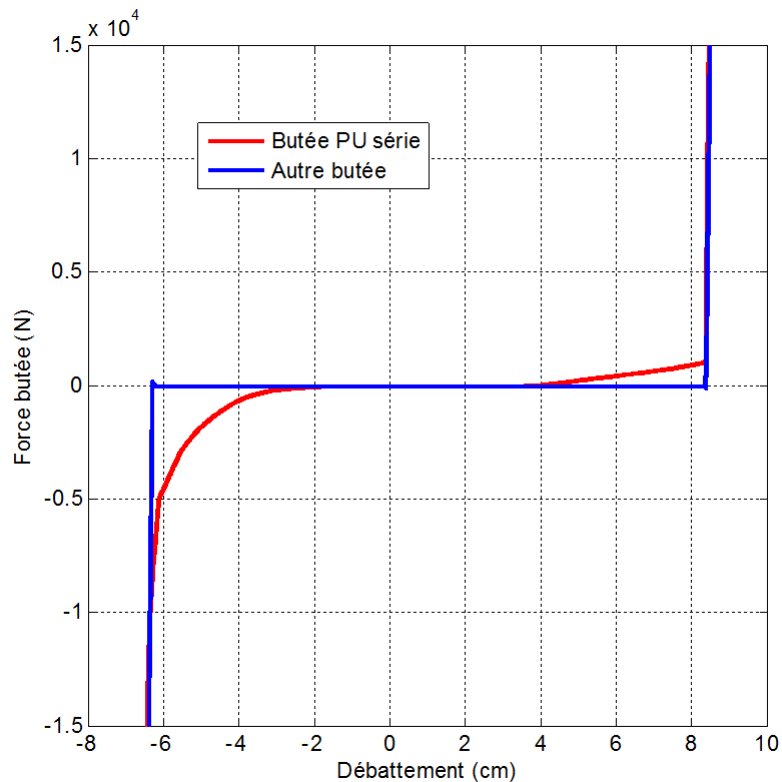


FIGURE 5.9 – Caractéristiques statiques Force-Débattement d'une butée PU série (en rouge) et d'une butée élastique (en bleu) de même raideur de fin de course mais sans progressivité



Analyse du régime transitoire

La figure 5.10 présente les régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec la butée PU de série (a) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (b).

Il est à noter qu'à l'échelle de tout le régime transitoire, l'influence de la progressivité de la butée PU n'entraîne pas une différence significative de comportement.

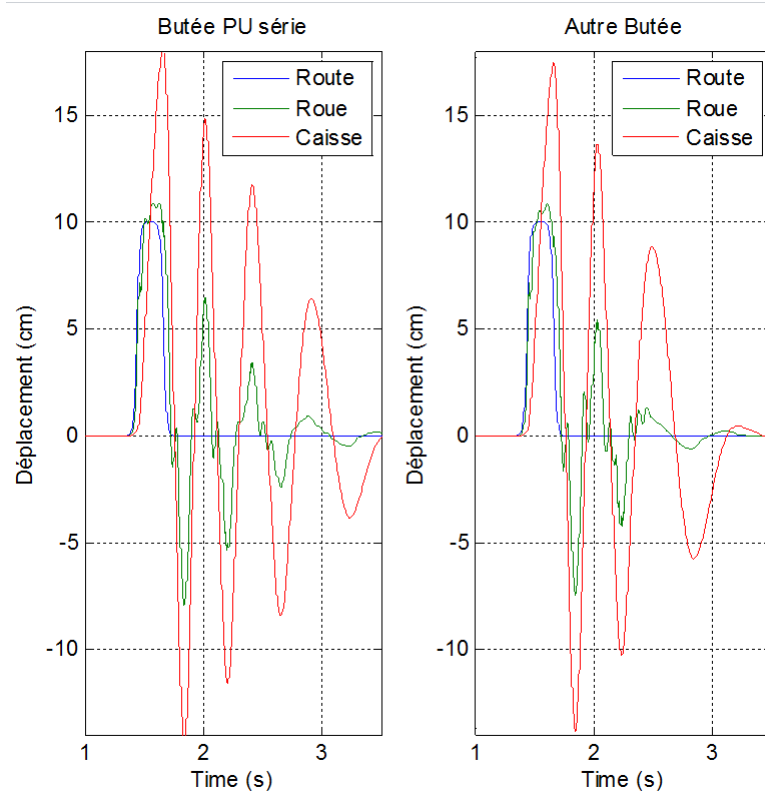


FIGURE 5.10 – Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité



La figure 5.11 présente l'évolution du débattement de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenu avec la butée PU de série (a) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (b). Les traits en pointillés rouges représentent les limites du débattement (fin de course) qui génèrent plusieurs chocs successifs à la compression (valeur négative) et à la détente (valeur positive) chaque fois qu'elles sont atteintes.

Là encore, à l'échelle de tout le régime transitoire, l'influence de la progressivité de la butée PU n'entraîne pas une différence significative de comportement.

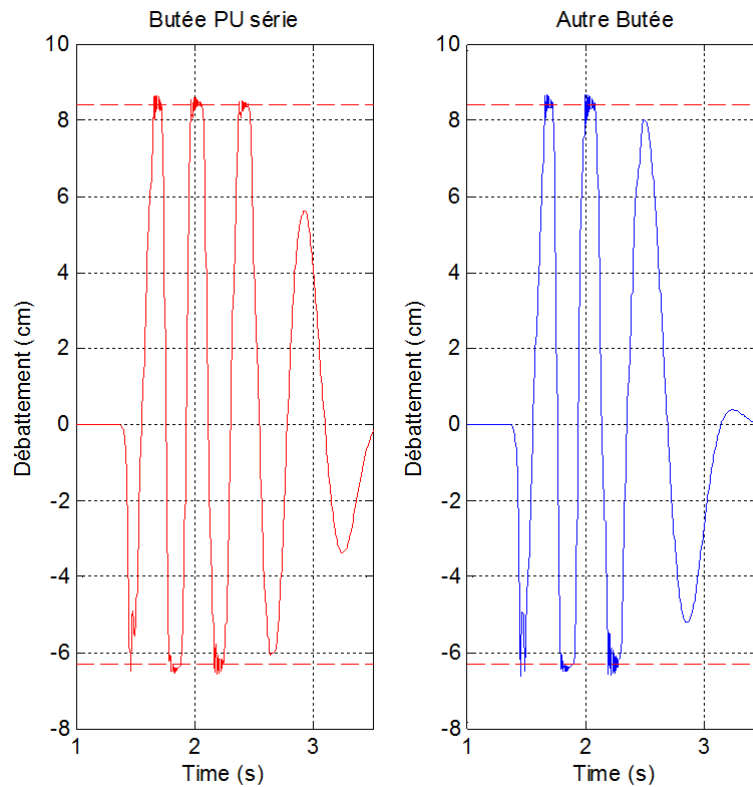


FIGURE 5.11 – *Débattements de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité*



La figure 5.12 présente l'évolution de l'accélération verticale de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu).

Ce tracé fait apparaître une différence significative dans les instants du premier choc. C'est la raison pour laquelle le paragraphe suivant se focalise sur cette phase où l'influence de la progressivité de la butée PU apparaît clairement.

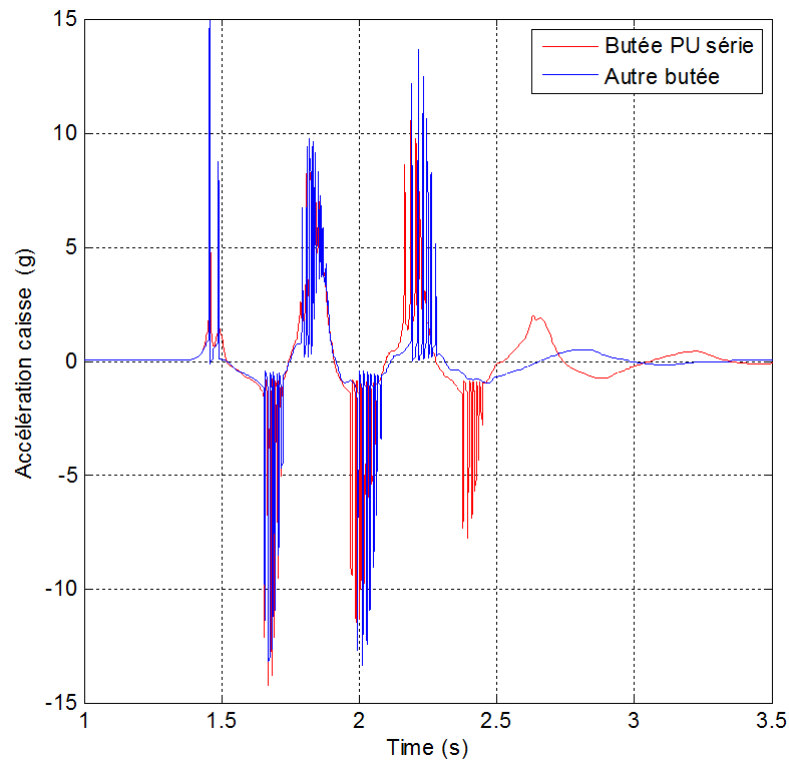


FIGURE 5.12 – Accélérations verticales de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé avec (en rouge) la butée PU de série et (bleu) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité



Analyse du premier choc

La figure 5.13 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) avec la butée PU de série (a) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (b).

Ces réponses illustrent une fois de plus le découplage entre la dynamique verticale de la roue et celle de la caisse. En effet, au moment du premier choc, le déplacement vertical de la roue est de 7,2 cm alors que celui de la caisse est dix fois plus faible, traduisant bien que ce premier choc est induit principalement par la dynamique de roue. Ainsi, dans la perspective d'un développement analytique visant à bien mettre en évidence les phénomènes physiques prépondérants mis en jeu lors de ce premier choc en compression, le modèle simplifié à 1 ddl présenté au chapitre 3, où la caisse est considérée comme immobile, est parfaitement adapté.

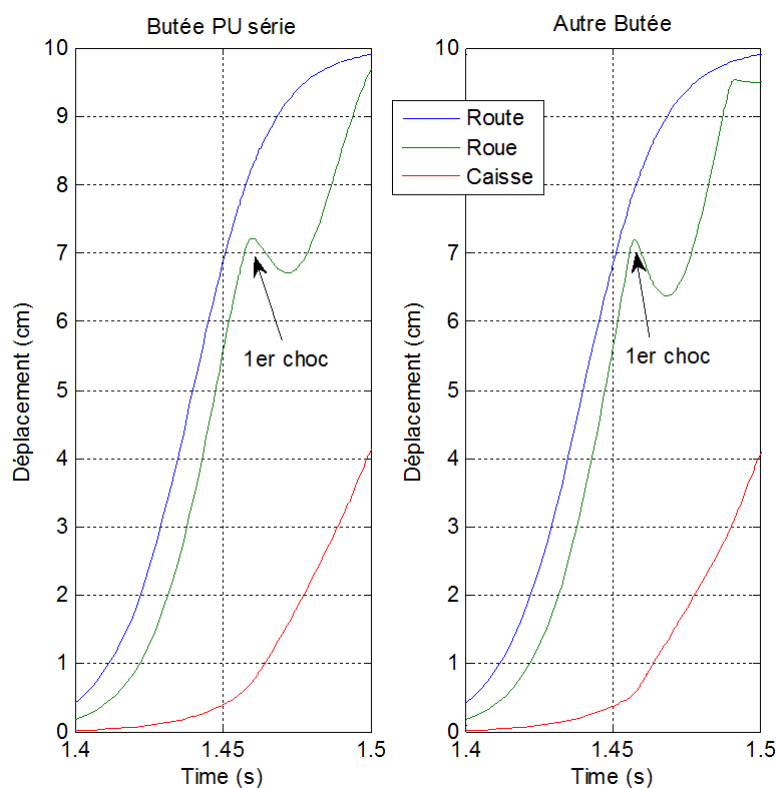


FIGURE 5.13 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité



La figure 5.14 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenu avec la butée PU de série (a) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (b).

On observe un deuxième choc, toujours en compression, avec la butée sans progressivité qui n'existe pas avec la butée PU.

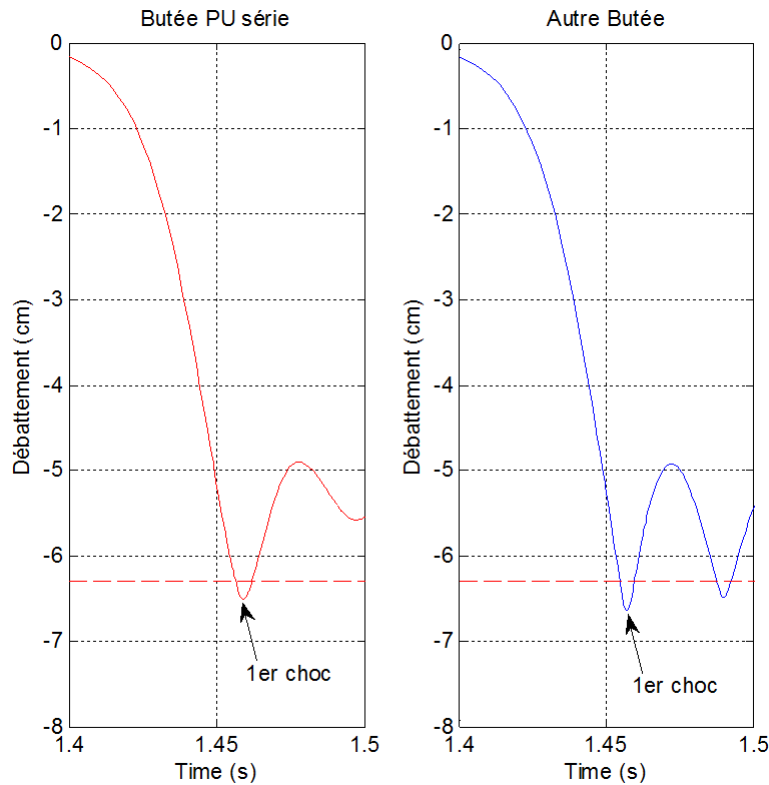


FIGURE 5.14 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenu avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité



La figure 5.15 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu).

Cette figure illustre bien l'influence de la progressivité de la mise en action de la butée. En effet, alors que les butées ont la même raideur de fin de course, la butée sans progressivité génère une accélération au moment du choc pratiquement deux fois plus importante que la butée PU. De plus, l'absence de progressivité entraîne une discontinuité de l'accélération qui se traduit alors par un niveau de jerk (dérivée première de l'accélération par rapport au temps, figure 5.16) non seulement très important comparativement à celui de la butée PU, mais en plus inacceptable d'un point de vue pratique, en particulier en ce qui concerne la physiologie du corps humain.

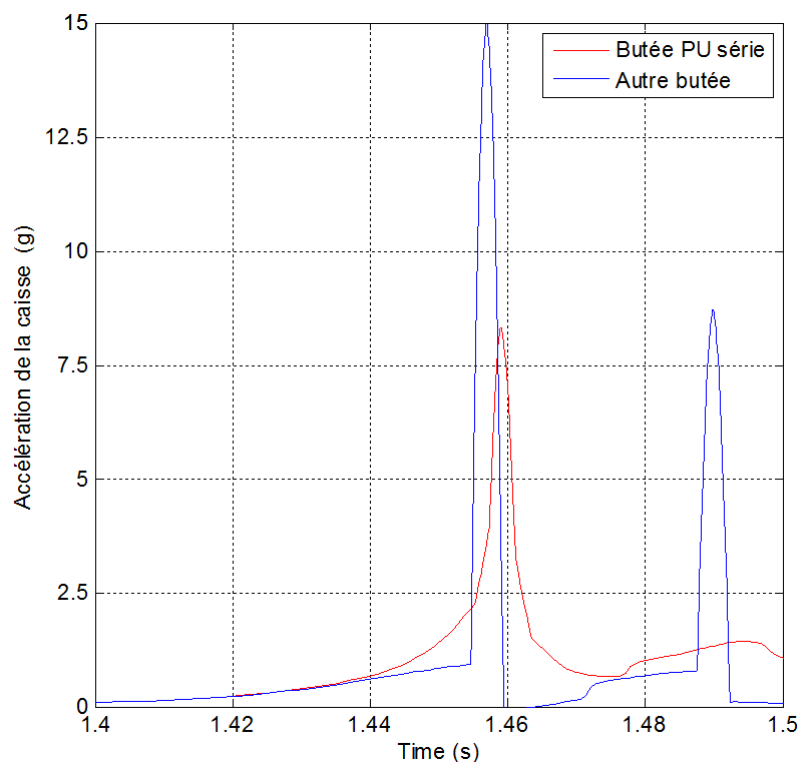


FIGURE 5.15 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu)

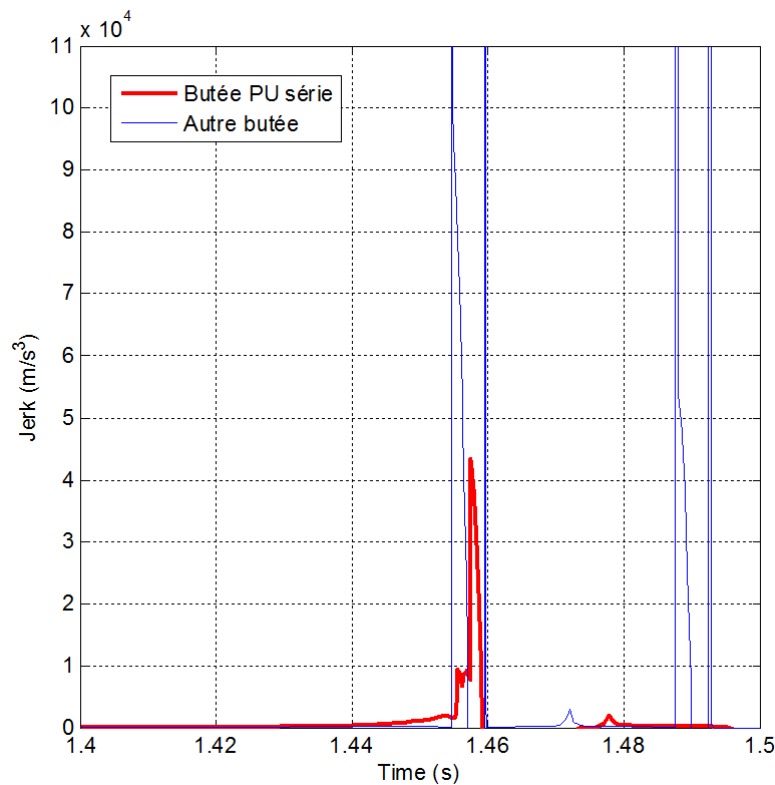


FIGURE 5.16 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le jerk vertical de la caisse obtenu avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu)

Pour terminer ce paragraphe concernant l'analyse de l'influence de la butée élastique sur la dynamique verticale, la figure 5.17 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les variations des efforts $f_s(t)$ de la suspension (en bleu) et $f_{bute}(t)$ de la butée (en vert) toujours dans le même cadre d'étude.

L'observation de cette figure conduit à deux commentaires importants pour la suite.

D'abord le maximum de l'accélération verticale de la caisse est atteint au même instant que celui de l'effort transmis par la suspension à la caisse. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'accélération est proportionnelle (via le terme $1/m_2$) à l'effort transmis. Ainsi, minimiser l'accélération verticale revient à minimiser, au moment du choc, l'effort transmis par la suspension.

Ensuite, on constate que l'ordre de grandeur du maximum de l'effort transmis par la suspension, toujours au moment du choc, est fixé par le maximum de l'effort développé par la butée (quelle que soit sa progressivité). Finalement, minimiser l'accélération verticale revient à minimiser, au moment du choc, l'effort développé par la butée.

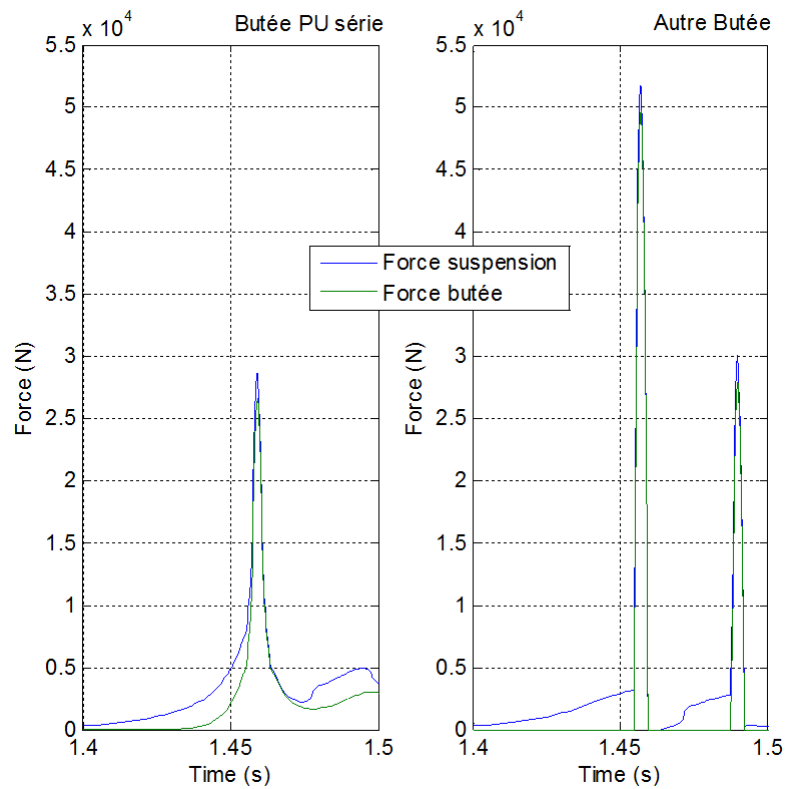


FIGURE 5.17 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les variations des efforts $f_s(t)$ de la suspension (en *bleu*) et $f_{butée}(t)$ de la butée (en *vert*) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité



5.3.2 Butée hydraulique

La figure 5.18 présente, pour l'analyse comparative, les caractéristiques statiques Force-Débattement de la butée PU de série (en rouge) et d'une butée PU (en noir) développée spécifiquement en complément de la butée hydraulique. Cette butée complémentaire à la même caractéristique en détente que la butée PU de série (zone où la butée hydraulique n'est pas opérationnelle) et ne présente quasiment pas de progressivité en compression (zone au contraire où la butée hydraulique est opérationnelle).

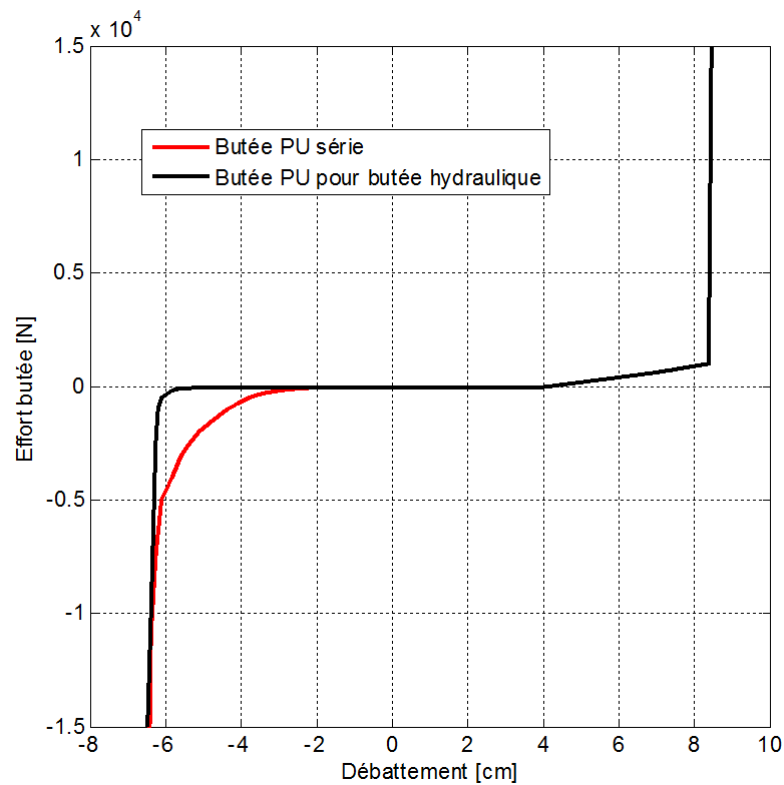


FIGURE 5.18 – Caractéristiques statiques Force-Débattement de la butée PU de série (en rouge) et d'une butée PU (en noir) développée spécifiquement en complément de la butée hydraulique



Analyse du régime transitoire

La figure 5.19 présente les régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec la butée PU de série (a) et la butée hydraulique (b).

L'influence de la butée hydraulique sur les régimes transitoires de la caisse et de la roue apparaît de manière significative principalement en raison de son caractère dissipatif (étudié de manière plus approfondie au paragraphe suivant) associé à sa progressivité de mise en action. Ainsi, les tenues de caisse et de roue sont améliorées comparativement à celles obtenues avec la butée PU de série qui ne présente pas de caractère dissipatif.

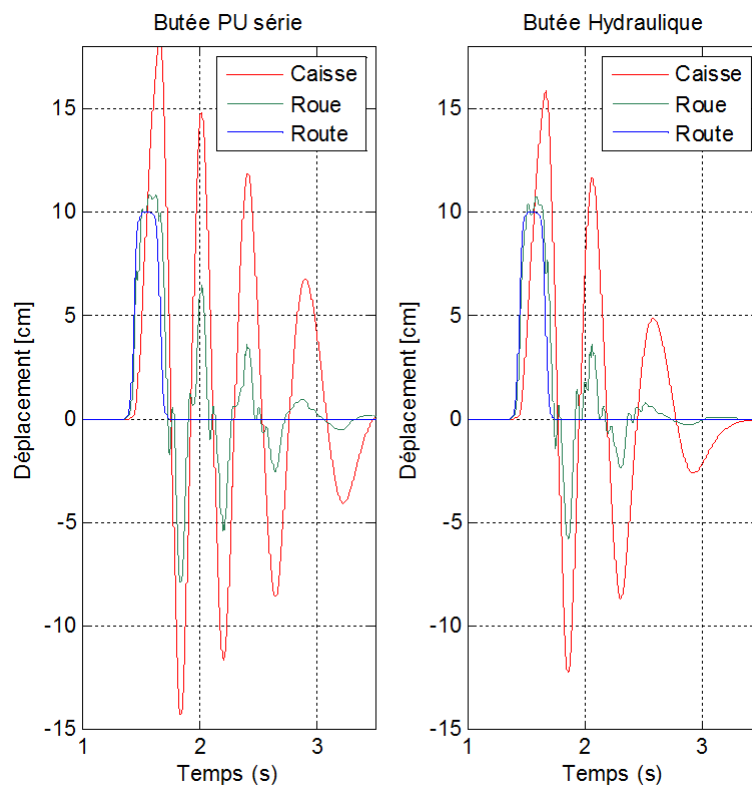


FIGURE 5.19 – Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique



La figure 5.20 présente l'évolution du débattement de la suspension obtenue avec la butée PU de série (a) et la butée hydraulique (b).

L'observation faite en ce qui concerne les régimes transitoires de la caisse et de la roue se retrouve évidemment au niveau du débattement de la suspension.

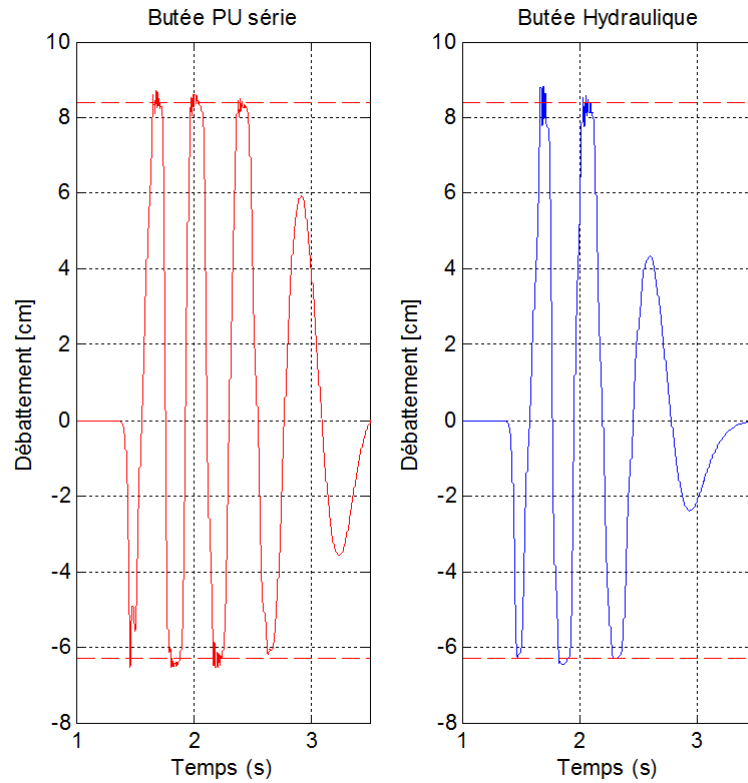


FIGURE 5.20 – *Débattements de la suspension obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique lors du franchissement de l'obstacle isolé*



La figure 5.21 présente l'évolution de l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (a) et la butée hydraulique (b). On observe une diminution importante des pics d'accélération positive dans les phases de compression où la butée hydraulique intervient. Cette analyse est reprise de manière plus approfondie au paragraphe suivant avec l'étude des instants du premier choc en compression.

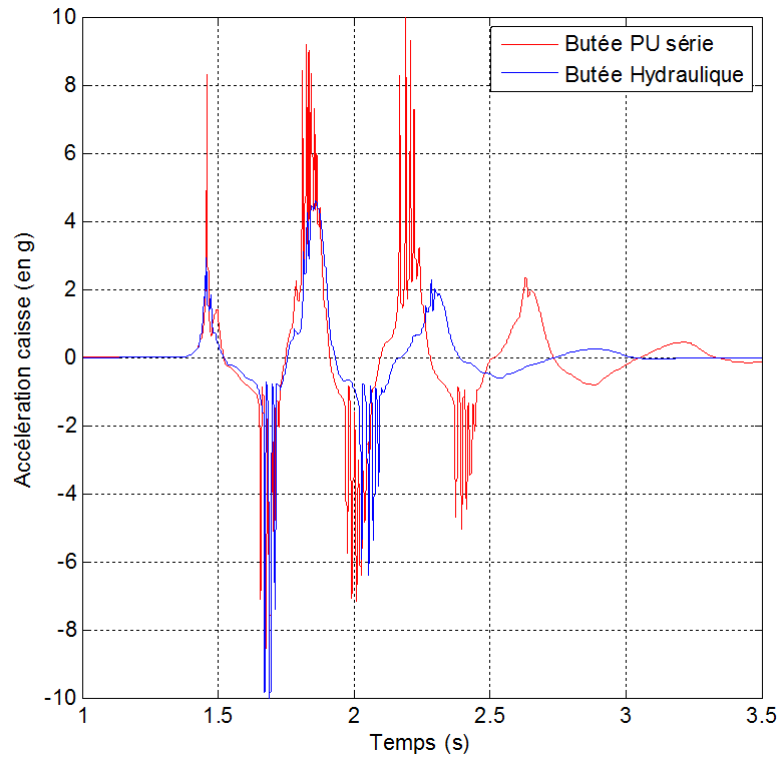


FIGURE 5.21 – Accélérations verticales de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)



Analyse du premier choc

La figure 5.22 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) avec la butée PU de série (a) et la butée hydraulique (b). On constate, en présence de la butée hydraulique, que la réponse de la roue est faiblement perturbée par le choc contrairement à celle obtenue en présence de la butée PU.

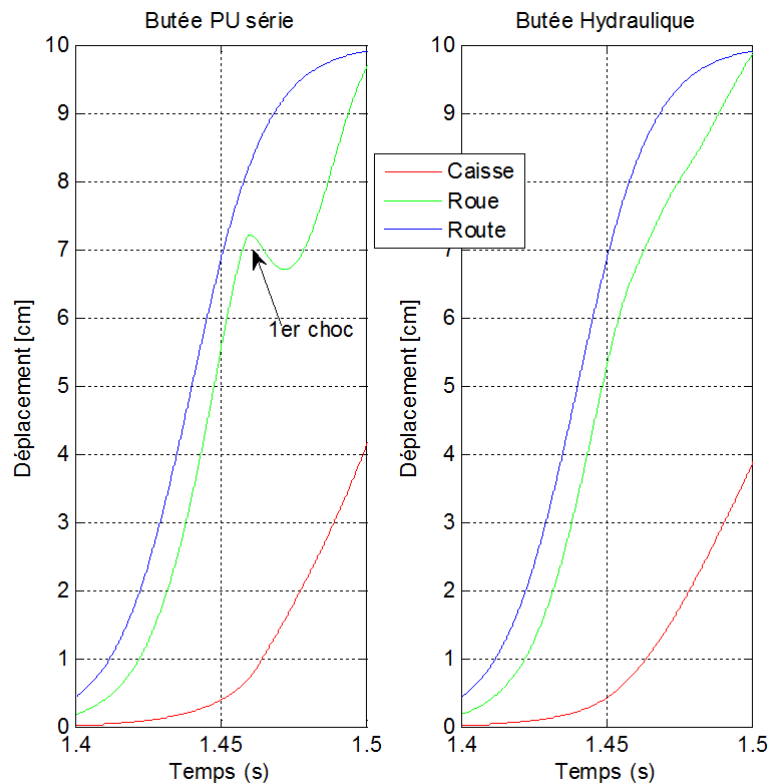


FIGURE 5.22 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique



La figure 5.23 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension obtenu avec la butée PU de série (a) et la butée hydraulique (b) lors du franchissement de l'obstacle isolé. En présence de la butée hydraulique, le caractère oscillatoire du débattement est localement diminué.

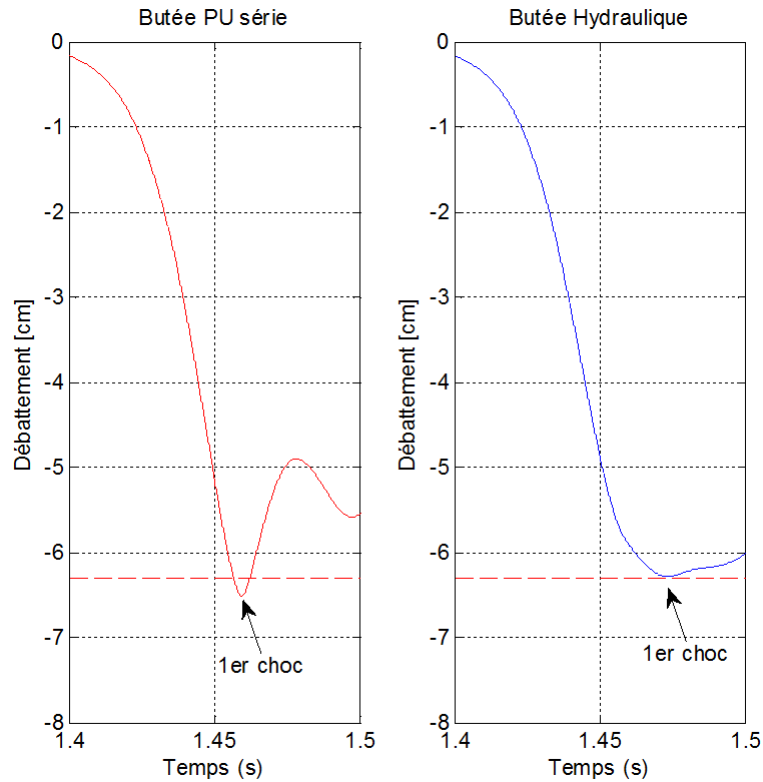


FIGURE 5.23 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les débattements de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique



La figure 5.24 présente l'évolution de l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu) lors du franchissement de l'obstacle isolé. La présence de la butée hydraulique permet de diminuer pratiquement d'un facteur 3 le maximum de l'accélération verticale comparativement au maximum obtenu avec la butée PU.

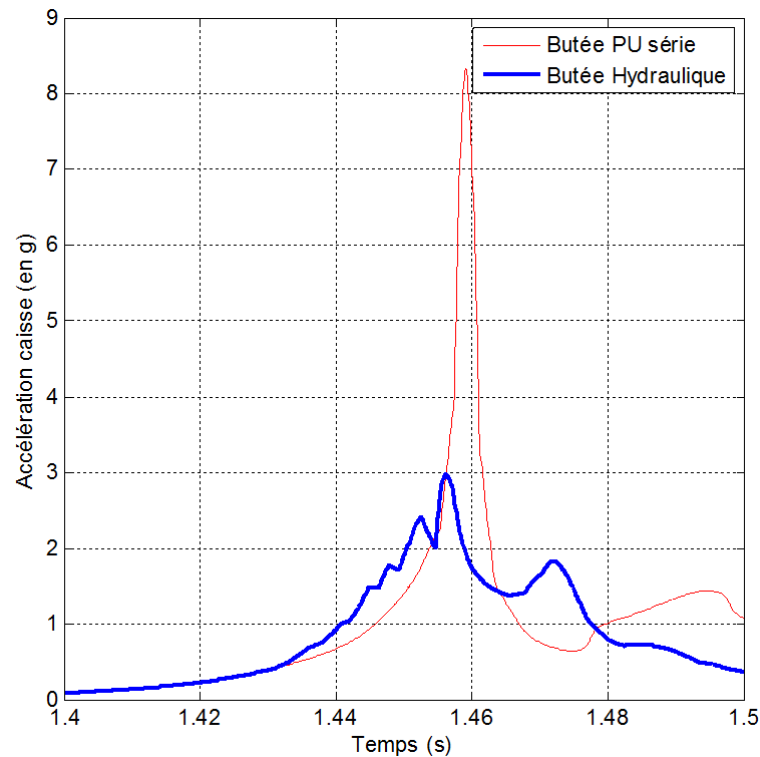


FIGURE 5.24 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu) lors du franchissement de l'obstacle isolé



La figure 5.25 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant la puissance transmise à la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu). Pour rappel, la puissance transmise à la caisse est définie par le produit entre la résultante des efforts extérieurs appliqués à la masse suspendue m_2 , en l'occurrence ici la force $f_s(t)$ (relation (5.2.4)) développée par la suspension, et la vitesse de débattement $v_{12}(t)$. La présence de la butée hydraulique permet de diminuer de manière très significative la puissance transmise à la caisse, et ce comparativement à celle transmise en présence de la butée PU.

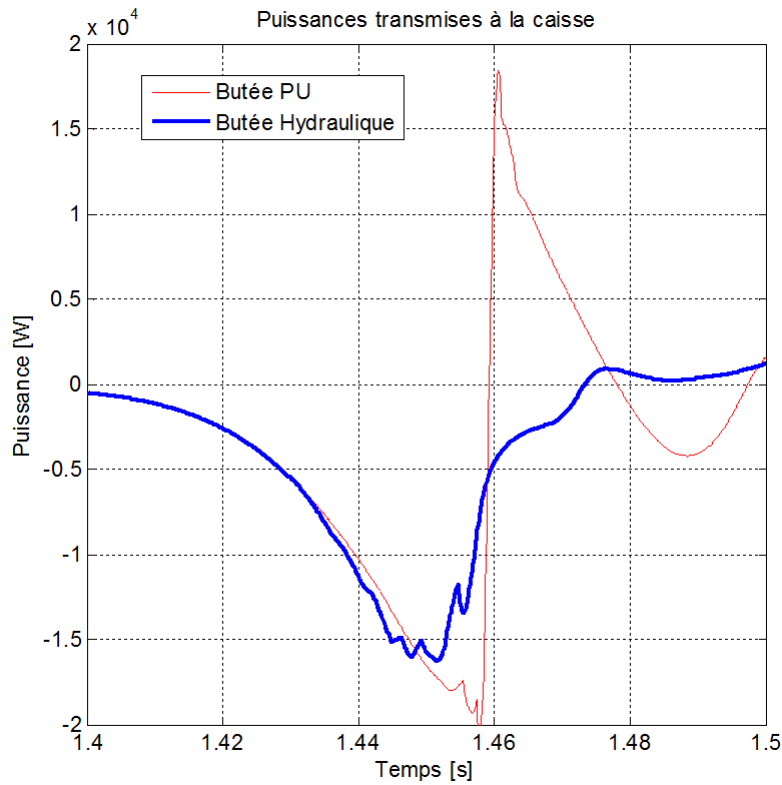


FIGURE 5.25 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant la puissance transmise à la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)



Caractère dissipatif de la butée hydraulique

Le caractère dissipatif de la butée hydraulique est étudié à l'aide :

- du coefficient de frottement visqueux apparent, noté b_a , défini par le rapport entre la force développée par la butée $f_{butée}(t)$ et sa vitesse de débattement $v_{butée}(t)$ qui est égale à la vitesse de débattement $v_{12}(t)$ de la suspension dès l'instant où le piston de la butée est entraîné par la tige de l'amortisseur, soit :

$$b_a(v_{butée}, z_{butée}) = \frac{f_{butée}(t)}{v_{butée}(t)}, \quad (5.3.1)$$

où $z_{butée}$ désigne le déplacement de la butée ;

- la puissance instantanée dissipée par la butée, notée $P_{db}(t)$, définie par le produit entre la force développée par la butée $f_{butée}(t)$ et sa vitesse de débattement $v_{butée}(t)$, soit :

$$P_{db}(t) = f_{butée}(t) * v_{butée}(t); \quad (5.3.2)$$

- l'énergie dissipée par la butée sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$, notée E_{db} , définie par l'intégration entre t_1 et t_2 de la puissance instantanée $P_{db}(t)$, soit :

$$E_{db} = \int_{t_1}^{t_2} P_{db}(t) dt; \quad (5.3.3)$$

Dans un premier temps, afin de bien comprendre le caractère dissipatif d'une butée hydraulique, et ce dans la perspective de pouvoir établir les spécifications utilisées au chapitre 6 pour la définition d'une nouvelle génération de butée dissipative fondée sur l'intégration non entière, une analyse harmonique de la butée hydraulique seule est proposée. Pour faciliter cette analyse, une comparaison est faite avec l'amortisseur non linéaire tel que défini précédemment, ainsi qu'un amortisseur linéaire de coefficient de frottement visqueux b_2 , ces deux amortisseurs étant soumis à la même entrée harmonique $z_{12}(t)$ que celle appliquée à la butée hydraulique, soit :

$$z_{12}(t) = \frac{c}{2} + Z_d \sin(\omega t), \quad (5.3.4)$$

où c désigne la course du vérin de suspension (150 mm) et Z_d l'amplitude choisie pour solliciter la butée hydraulique sur toute sa course c_b (63 mm). L'expression de la vitesse de débattement $v_{12}(t)$, déduite de celle de $z_{12}(t)$ en dérivant par rapport au temps, est alors donnée par :

$$v_{12}(t) = Z_d \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.3.5)$$

A titre d'illustration, la figure 5.26 présente un exemple de sollicitation harmonique où sont tracés le débattement (en haut) et la vitesse de débattement (au milieu) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz, ainsi que les forces (en bas) développées par la butée hydraulique (en **bleu**), l'amortisseur non linéaire (en **rouge**) et l'amortisseur linéaire (en **noir**) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$, valeur représentative du coefficient de frottement visqueux utilisé dans le cadre des suspensions des véhicules de tourisme.

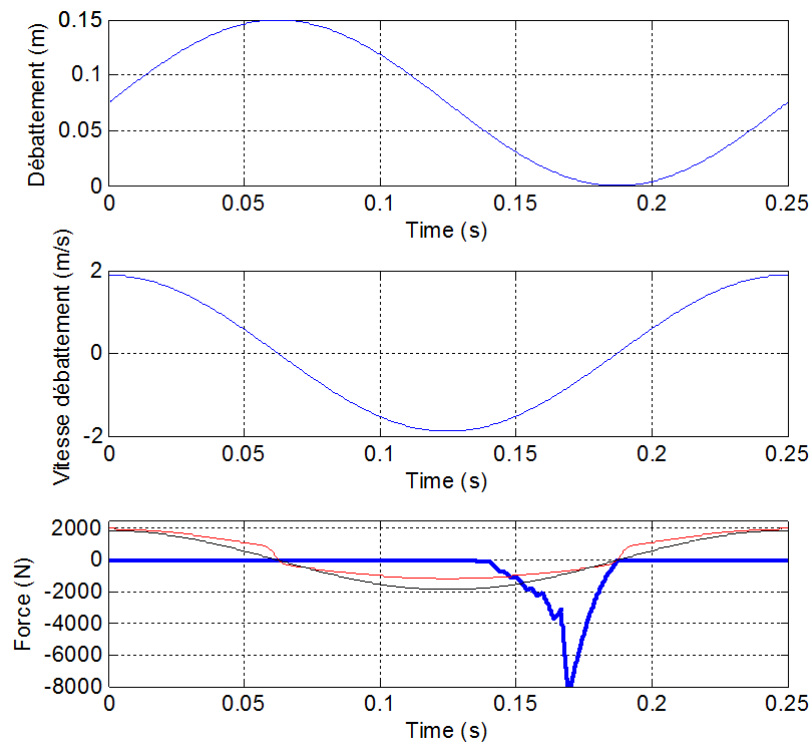


FIGURE 5.26 – Débattement (en haut) et vitesse de débattement (au milieu) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz, et forces (en bas) développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$

La figure 5.27 présente les tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$ en fonction de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz.

Cette figure permet de bien mettre en évidence une partie du domaine de fonctionnement de la butée hydraulique. En effet, les systèmes hydrauliques passifs tels que les amortisseurs linéaire (en noir) et non linéaire (en rouge) fonctionnent dans les quadrants 1 (force > 0 et vitesse > 0) et 3 (force < 0 et vitesse < 0) d'un diagramme Force-Vitesse, alors que la butée hydraulique ne fonctionne que dans le quadrant 3. De plus, le maximum de l'effort développé par la butée hydraulique est très important comparativement à ceux obtenus avec les amortisseurs linéaire et non linéaires.

La figure 5.28 présente les tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$ en fonction du débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz.

Cette figure est complémentaire à la précédente dans la mesure où l'effort développée par la butée hydraulique dépend, non seulement de sa vitesse de débattement, mais aussi de son débattement, ce qui n'est pas le cas pour des amortisseurs classiques. En effet, dans le cas d'un amortisseur linéaire (en noir) en régime harmonique stationnaire, le tracé de la force en fonction du débattement est une ellipse dont la surface est égale à l'énergie dissipée durant une période. Dans le cas d'un amortisseur non linéaire (en rouge) pour le même essai harmonique, le tracé de la force en fonction du débattement est un "patatoïde" dont la surface est toujours égale à l'énergie dissipée durant une période. Dans le cas de la butée hydraulique, le tracé de sa force en fonction de son débattement permet de bien observer la zone du débattement où

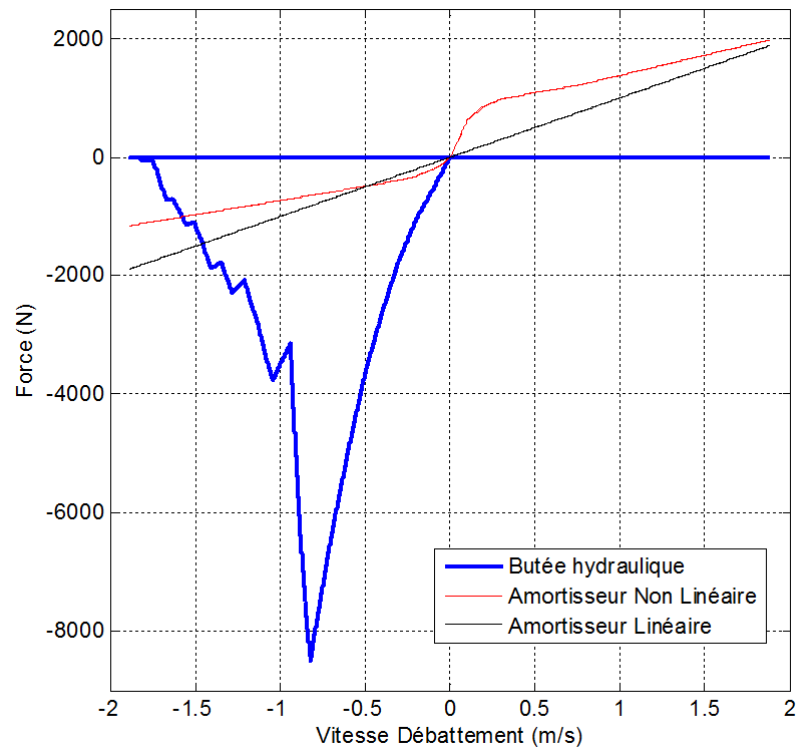


FIGURE 5.27 – Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et l'amortisseur linéaire (en *noir*) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en fonction de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz

la butée est opérationnelle et la progressivité avec laquelle elle rentre en action.

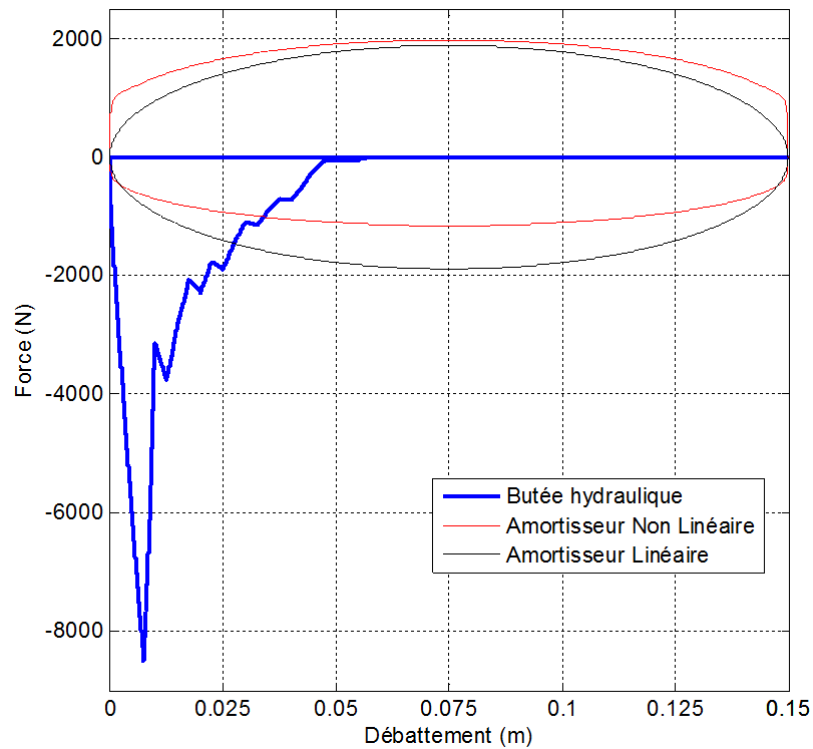


FIGURE 5.28 – Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et l'amortisseur linéaire (en *noir*) pour $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$ en fonction du débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz

La figure 5.29 présente, pour ce même essai, les tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et l'amortisseur linéaire (en *noir*) pour $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$ en fonction du débattement et de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz.

Ce tracé en trois dimensions permet de bien visualiser simultanément l'influence du débattement et de la vitesse de débattement sur l'effort développée par la butée hydraulique, les deux figures précédentes étant des projections des trajectoires dans les plans Force-Vitesse de débattement et Force-Débattement.

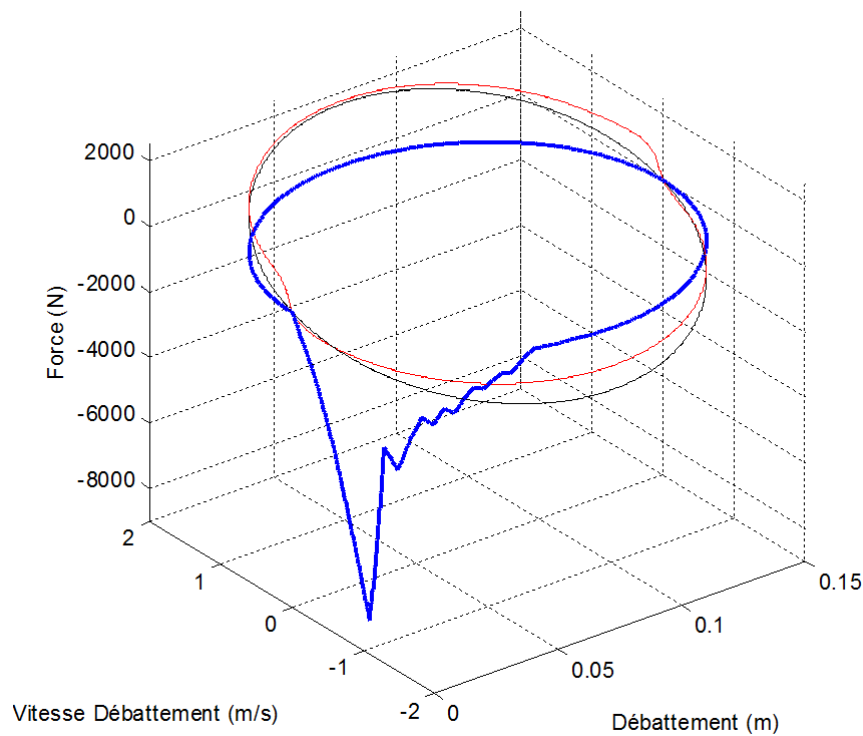


FIGURE 5.29 – Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et l'amortisseur linéaire (en *noir*) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en fonction du débattement et de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz

La figure 5.30 présente l'évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*), de l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et de l'amortisseur linéaire (en *noir* $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz .

Cette figure illustre bien les différences fonctionnelles entre ces éléments dont le point commun est leur caractère dissipatif. En effet, pour l'amortisseur linéaire, le coefficient de frottement visqueux est constant (1000 Ns/m pour cet exemple). Pour l'amortisseur non linéaire, le coefficient de frottement visqueux est variable (entre 750 Ns/m et $6\,000 \text{ Ns/m}$ environ), mais jamais nul. Ainsi, pour ces deux éléments, le caractère dissipatif est toujours présent dès l'instant où il y a un mouvement relatif de la roue par rapport à la caisse, et réciproquement. Pour la butée hydraulique, le coefficient de frottement visqueux est, non seulement variable (entre 0 et $10\,000 \text{ Ns/m}$), mais aussi très "localisé". Le caractère dissipatif de la butée est donc ponctuel.

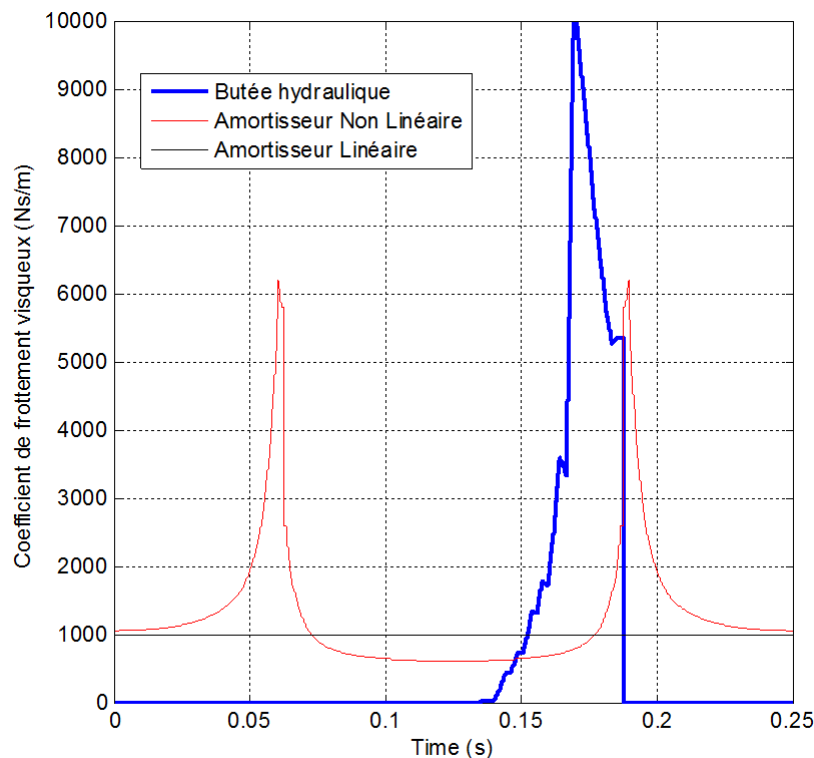


FIGURE 5.30 – Évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*), de l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et de l'amortisseur linéaire (en noir où $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz

La figure 5.31 présente l'évolution de la puissance dissipée par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et l'amortisseur linéaire (en noir $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz.

Cette figure illustre bien le caractère dissipatif "ponctuel" de la butée hydraulique.

Dans un deuxième temps, le caractère dissipatif de la butée hydraulique est analysé dans le cadre du franchissement de l'obstacle isolé.

Ainsi, la figure 5.32 présente les tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *vert*) et la butée PU (en *rouge*) en fonction du débattement.

Bien entendu, les tracés en régime transitoire oscillatoire sont plus complexes que ceux obtenus en régime harmonique stationnaire. Il n'en reste pas moins que la progressivité et la plage de la course où la butée hydraulique intervient apparaissent clairement.

La figure 5.33 présente les tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *vert*) et la butée PU (en *rouge*) en fonction de la vitesse de débattement lors du franchissement de l'obstacle isolé.

Malgré la complexité des trajectoires, on observe bien le domaine de fonctionnement de la butée hydraulique qui se limite au quadrant 3 (force < 0 et vitesse < 0), alors que l'amortisseur non linéaire fonctionne dans les quadrants 1 et 3.

La figure 5.34 présente un zoom sur l'évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*) et de l'amortisseur non linéaire (en *vert*) lors des instants du premier choc en compression résultant du franchissement de l'obstacle isolé.

Ce zoom permet de se focaliser sur la première mise en action de la butée hydraulique et de constater qu'au moment du premier choc l'action de la butée hydraulique est prépondérante

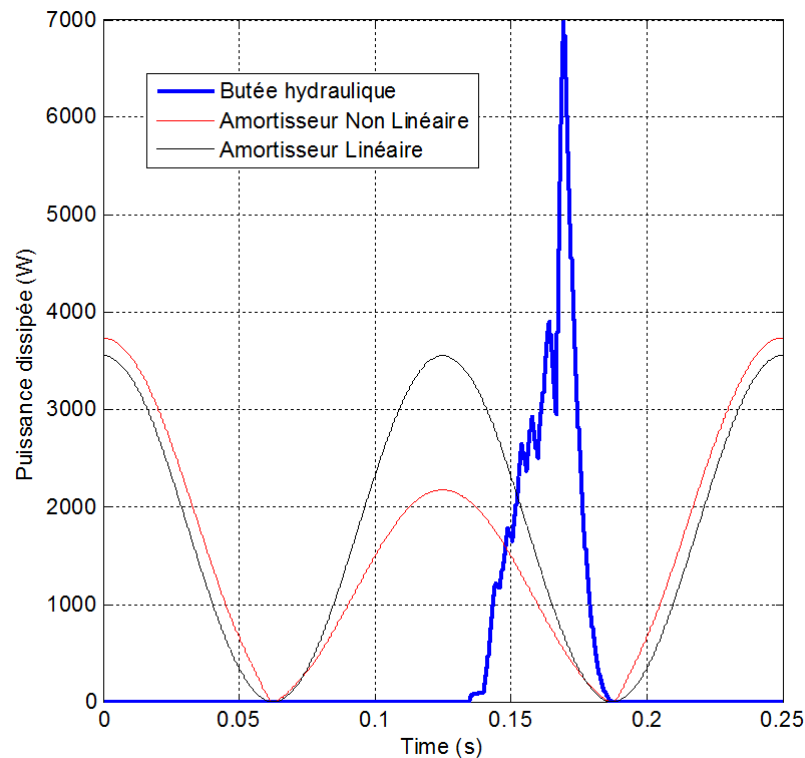


FIGURE 5.31 – Evolution de la puissance dissipée par la butée hydraulique (en *bleu*), par l'amortisseur non linéaire (en *rouge*) et par l'amortisseur linéaire (en noir $b_2 = 1000 \text{ N s/m}$) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz

devant celle de l'amortisseur.

La figure 5.35 présente les variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*) et de l'amortisseur non linéaire (en *vert*) en fonction de la vitesse de débattement.

Cette figure illustre, une fois de plus, les limites de fonctionnement de la butée hydraulique, à savoir la phase de compression (zone des vitesses de débattement négatives), alors que l'amortisseur non linéaire intervient en compression et en détente de manière non symétrique.

La figure 5.36 présente les variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*) et de l'amortisseur non linéaire (en *vert*) en fonction du débattement.

Cette dernière figure illustre parfaitement la différence de fonctionnement entre ces deux éléments dissipatifs.

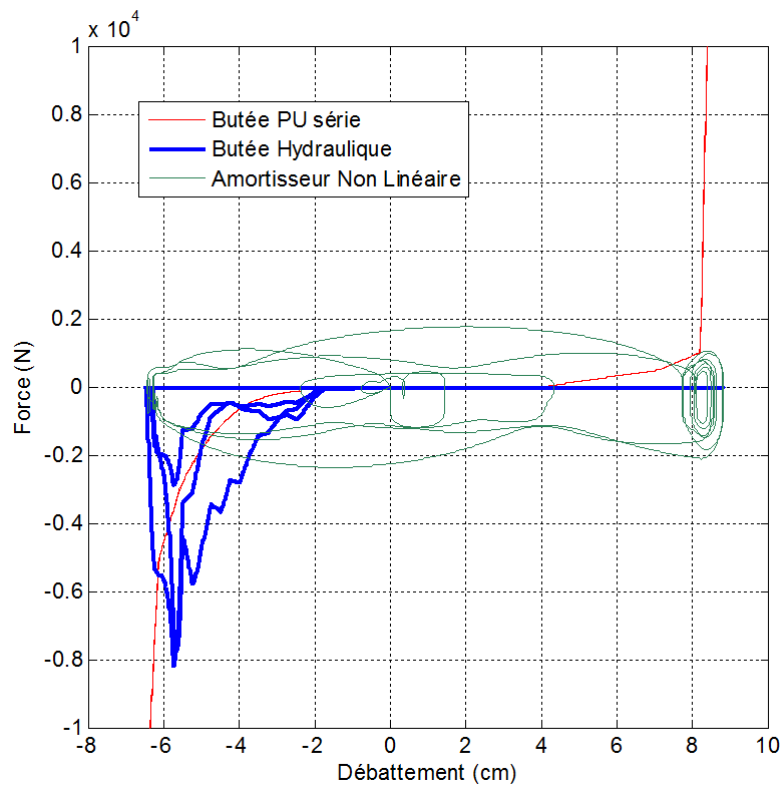


FIGURE 5.32 – Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *vert*) et la butée PU (en *rouge*) en fonction du débattement lors du franchissement de l'obstacle isolé

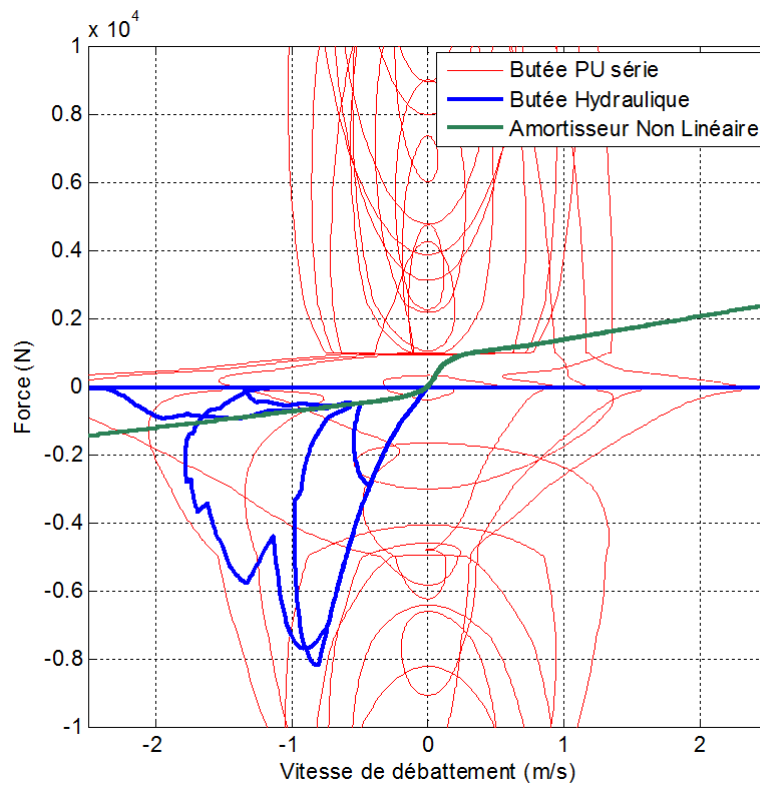


FIGURE 5.33 – Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en *bleu*), l'amortisseur non linéaire (en *vert*) et la butée PU (en *rouge*) en fonction de la vitesse de débattement lors du franchissement de l'obstacle isolé

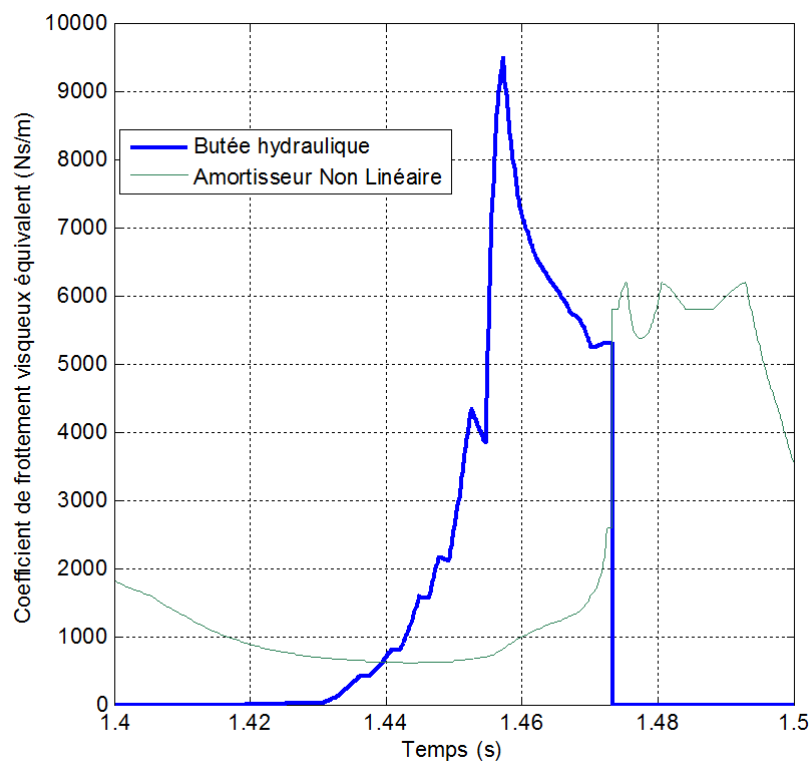


FIGURE 5.34 – Zoom sur l'évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu) et de l'amortisseur non linéaire (en vert) lors des instants du premier choc en compression résultant du franchissement de l'obstacle isolé

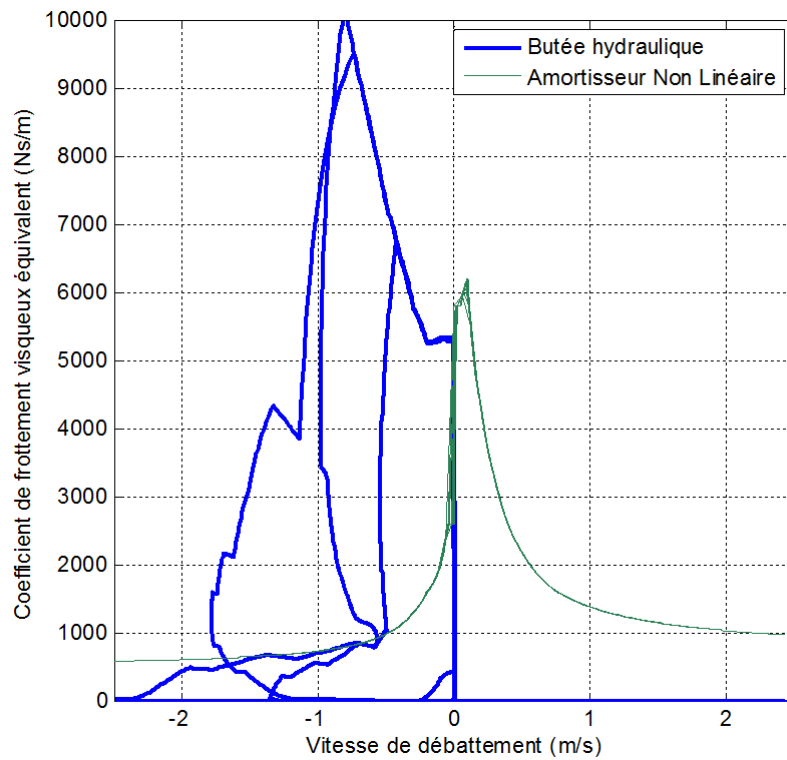


FIGURE 5.35 – Variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu) et de l'amortisseur non linéaire (en vert) en fonction de la vitesse de débattement

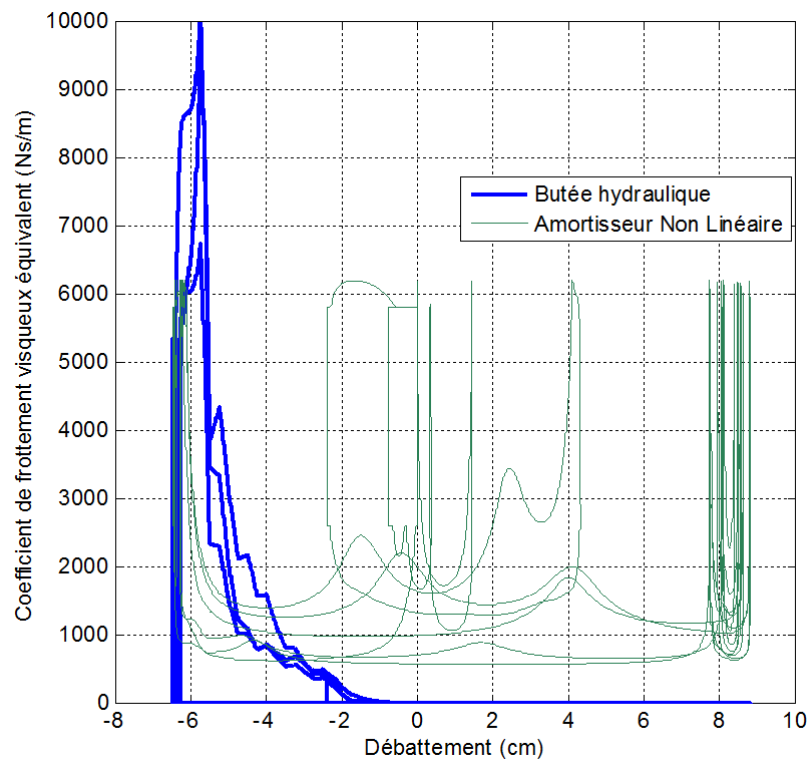


FIGURE 5.36 – Variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en *bleu*) et de l'amortisseur non linéaire (en *vert*) en fonction du débattement



5.4 Définition fonctionnelle de la butée idéale

Le dénominateur commun entre les butées PU et hydraulique est la progressivité avec laquelle elles rentrent en action. Cette progressivité peut se quantifier pour la butée PU par la loi de variation de sa raideur apparente et pour la butée hydraulique par la loi de variation de son coefficient de frottement visqueux apparent.

Au contraire, ce qui différencie de manière fondamentale la butée hydraulique de la butée PU c'est son caractère dissipatif. En effet, la butée PU présente un caractère élastique qui se traduit, dans un premier temps au moment du choc, par un stockage d'une quantité d'énergie potentielle d'élasticité, puis dans un deuxième temps par une restitution de cette énergie stockée. Le caractère dissipatif de la butée hydraulique permet de limiter de manière significative la puissance du choc transmise à la masse suspendue.

Par ailleurs, le caractère dissipatif de la butée hydraulique présentée dans ce chapitre peut être augmenté en rajoutant au domaine de fonctionnement limité au quadrant 3 le domaine associé au quadrant 1 du plan Force-Vitesse de débattement.

Ainsi, la butée idéale doit être présentée à la fois :

- un caractère dissipatif dans les quadrants 1 et 3 du plan Force-Vitesse de débattement ;
- une progressivité lors de sa mise en action qui peut être définie par la loi de variation de son coefficient de frottement visqueux apparent.

L'objectif est donc de minimiser la puissance transmise à la masse suspendue en maximisant la puissance dissipée lors des chocs.

5.5 Conclusion

A partir d'un modèle non linéaire quart de véhicule et d'un modèle analytique d'un obstacle isolé, l'analyse de deux solutions existantes (une butée élastique et une butée hydraulique) toutes deux comparées à une butée de référence (la butée PU), conduit à :

- pour la butée élastique, malgré de meilleures performances au niveau du premier choc, à l'échelle de tout le régime transitoire, l'influence de la progressivité de la butée PU n'entraîne pas une différence significative de comportement.
- dans le cas de la butée hydraulique, dont le caractère dissipatif est présent contrairement à la butée PU, au niveau du régime transitoire, les tenues de caisse et de roue sont largement améliorées. De plus, aux instants du premier choc, le pic d'accélération verticale de la caisse est quasiment divisé par 3, ce qui améliore considérablement la tenue de caisse mais aussi le confort des passagers au franchissement même de l'obstacle car le débattement s'en trouve lui-même réduit.

Chapitre 6

Vers une nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière

Sommaire

6.1	Introduction	184
6.2	Du modèle d'analyse au modèle de synthèse	185
6.2.1	Analyse complémentaire	185
6.2.2	Réduction du modèle d'analyse : modèle de synthèse	194
6.3	Nouvelle butée dissipative fondée sur l'intégration non entière	197
6.3.1	Définition	197
6.3.2	Méthode de dimensionnement : approche optimale	199
6.3.3	Performances	203
6.4	Conclusion	214



6.1 Introduction

L'objectif de ce dernier chapitre est de définir à **l'échelle fonctionnelle** une butée dissipative innovante, non seulement en intégrant les avantages de la butée hydraulique présentée au chapitre 5, à savoir la progressivité et bien entendu le caractère dissipatif, mais aussi en élargissant le domaine de performance d'une telle butée, sa conception devant se faire à l'aide d'un faible nombre de paramètres de synthèse de haut niveau. Afin que l'étude comparative soit significative, cette nouvelle butée dispose de la même course que la butée hydraulique. Comme le domaine d'étude est parfaitement identique dans les deux cas, la conséquence est que ces deux butées entrent en action au même instant, noté t_1 .

La stratégie adoptée pour atteindre l'objectif ainsi défini s'articule autour de deux points définis successivement.

Le premier point concerne l'établissement d'un modèle de synthèse. En effet, le modèle d'analyse présenté au chapitre 5 est un modèle quart de véhicule à 2 degrés de liberté (2 ddl) au sein duquel sont présentes des non-linéarités associées aux caractéristiques de l'amortisseur et des butées élastiques de fin de course. De plus, comme l'illustre le schéma causal associé à un tel modèle (cf. chapitre 5), ce système est "naturellement bouclé", notamment au niveau de la suspension. Ainsi, tout développement **analytique** visant, dans un premier temps, à analyser l'influence des paramètres d'une butée de fin de course sur le comportement dynamique, puis dans un deuxième temps à établir une démarche **analytique** de conception permettant de déterminer les paramètres optimaux vis-à-vis d'un critère, n'est pas envisageable. Malgré tout, et ce afin de privilégier une approche **analytique** et de faire appel à l'analyse **numérique** le plus tardivement possible dans la démarche de conception telle qu'elle est proposée dans les paragraphes suivants, un modèle de synthèse résultant d'une simplification du modèle d'analyse est établi. Cette réduction de modèle s'appuie sur le fait que la méthode de dimensionnement proposée vise d'abord à réduire les **causes** et les **conséquences** du premier choc de la phase de compression apparaissant dans les premiers instants du franchissement de l'obstacle isolé. Cette focalisation dans les premiers instants permet d'exploiter le découplage dynamique existant entre le mode de roue (le plus rapide) et le mode de caisse (10 fois plus lent). En effet, les phénomènes mis en jeu lors du premier choc sont majoritairement et essentiellement dus à la dynamique de roue. De plus, ces premiers instants sont décomposés en deux intervalles. Le premier, noté IT_1 , est défini à partir de l'instant d'application t_0 de l'obstacle isolé jusqu'à l'instant t_1 où les butées commencent à rentrer en action ($IT_1 = [t_0; t_1]$). Le modèle réduit associé à cet intervalle est un modèle **linéaire à 1 ddl** (le ddl de la roue) indépendant de toute butée de fin de course (dans la mesure où elles ne sont pas encore intervenues). Ce premier modèle réduit linéaire permet d'établir un certain nombre de développements analytiques, notamment grâce à l'exploitation de la dualité temps-fréquence, facilitant ainsi l'établissement des conditions initiales associées à l'intervalle suivant. Le deuxième intervalle, noté IT_2 , est défini à partir de l'instant t_1 jusqu'à un instant t_2 ($IT_2 =]t_1; t_2]$) correspondant à la fin de course de la première phase de compression pour laquelle la vitesse de débattement $v_{12}(t)$ de la suspension s'annule (inversion du mouvement : passage de la fin de la première phase de compression vers le début de la première phase de détente). Le modèle réduit associé à cet intervalle est un modèle **non linéaire** en raison de la présence des butées, mais toujours à **1 ddl**. La progressivité et l'énergie dissipée par la butée durant ce deuxième intervalle conditionne de manière fondamentale, non seulement l'intensité du premier choc quantifiable à l'aide de l'accélération verticale de la caisse, mais aussi la forme des régimes transitoires de la roue et de la caisse qui apparaissent durant un troisième et dernier intervalle, noté IT_3 , défini à partir de l'instant t_2 jusqu'à l'instant t_{fin} ($IT_3 =]t_2; t_{fin}]$) correspondant au retour à l'état d'équilibre (existant avant le franchissement de l'obstacle isolé). Bien entendu, le modèle associé à ce troisième intervalle est **non linéaire à 2 ddl** (retour au modèle d'analyse), la



dynamique de caisse n'étant plus négligeable devant celle de la roue. Ainsi, l'instant t_2 définit la limite temporelle supérieure du domaine de validité du modèle de synthèse à 1 ddl.

Le second point autour duquel s'articule la stratégie proposée concerne le caractère dissipatif de la nouvelle butée étudiée, caractère fondé sur le concept d'intégration non entière. En effet, le coefficient de frottement visqueux apparent, noté $b_{aNE}(\cdot)$, de cette nouvelle butée est proportionnel à l'intégrale d'ordre m de son déplacement, noté $z_{bNE}(t)$, où $0 < m < 1$ et où le terme de proportionnalité est noté b_m . A partir du domaine d'étude tel que défini au chapitre 5, du modèle de synthèse et d'un ensemble de spécifications, une méthode de dimensionnement est proposée. En raison du caractère dynamique non linéaire pris en compte globalement à l'aide du modèle quart de véhicule à 2 ddl de l'instant initial t_0 à l'instant final t_{fin} , la démarche proposée ne peut être "absolue" mais seulement "comparative". Plus précisément, les spécifications du cahier des charges concernant le comportement dynamique désiré sont établies comparativement au comportement dynamique de la butée hydraulique observé à un instant de référence t_{ref} appartenant à l'intervalle IT_2 ($t_1 < t_{ref} < t_2$). Dans les premiers instants de cet intervalle IT_2 et au voisinage de l'instant t_{ref} , le déplacement de la butée $z_{bNE}(t)$ étant assimilable à une rampe dont la pente n'est autre que la vitesse de la butée à l'instant t_{ref} , notée $v_{bNE}(t_{ref})$, l'expression analytique du coefficient de frottement visqueux apparent $b_{aNE}(t)$ est établie (par intégration non entière), puis celle de la puissance instantanée dissipée. Ensuite, en précisant la valeur de la puissance dissipée désirée à $t = t_{ref}$, notée $P_{dNE}(t_{ref})$, pour la nouvelle butée, ou de manière équivalente, en précisant le gain λ ($\lambda > 1$) souhaité par rapport à la puissance dissipée au même instant t_{ref} , notée $P_{dBH}(t_{ref})$, par la butée hydraulique, une relation analytique entre le terme de proportionnalité b_m et l'ordre non entier m est établie à iso- $P_{dNE}(t_{ref})$. Le tracé de la fonction $b_m = f(m)$ illustre bien qu'une augmentation de m sur l'intervalle $[0; 1]$ entraîne une augmentation de b_m . Il est à noter que la valeur de m influence directement la progressivité.

Finalement, indépendamment de toutes solutions technologiques, les performances obtenues à l'**échelle fonctionnelle** mettent en évidence un potentiel important en ce qui concerne cette nouvelle génération de butée dissipative fondée sur le concept d'intégration non entière.

6.2 Du modèle d'analyse au modèle de synthèse

6.2.1 Analyse complémentaire

L'analyse présentée dans ce paragraphe, complémentaire à celle développée au chapitre 5, a pour objectif de justifier les simplifications qui conduisent à la réduction du modèle d'analyse. Cette analyse est fondée, dans un premier temps, sur une approche énergétique. Plus précisément, les énergies cinétiques T , potentielles V et de dissipation E_d sont calculées, puis tracées en fonction du temps sur les intervalles IT_1 et IT_2 . Ensuite, l'analyse se poursuit avec les différents efforts générés (les causes) pour enfin se terminer avec l'analyse des mouvements de la roue et de la caisse (les conséquences).

Énergies mises en jeu

L'énergie cinétique totale T résulte de la somme des énergies cinétiques T_1 stockée dans la masse m_1 et T_2 stockée dans la masse m_2 , soit :

$$T = T_1 + T_2 , \quad (6.2.1)$$



avec

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2(t) \\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2(t) \end{cases} \quad (6.2.2)$$

La figure 6.1 présente l'évolution dans les premiers instants des énergies cinétiques totale T (en **bleu**), T_1 de la roue (en **noir**) et T_2 de la caisse (en **rouge**) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite).

L'observation de cette figure, notamment en ce qui concerne l'intervalle entre $t = 1.4 \text{ s}$ et $t = 1.45 \text{ s}$, conduit à deux remarques.

Sur cet intervalle, quelle que soit la butée, l'énergie cinétique totale T est essentiellement égale à l'énergie cinétique T_1 de la roue, illustrant ainsi que l'énergie cinétique T_2 de la caisse est négligeable devant celle de la roue. De plus, toujours sur ce même intervalle $[1.40 \text{ s} ; 1.45 \text{ s}]$, l'énergie cinétique maximale de la roue en présence de la butée hydraulique (environ 75 J) est plus faible que celle obtenue en présence de la butée PU (environ 100 J), soit une diminution de 25% . Cette différence est due à l'énergie dissipée par la butée hydraulique conduisant ainsi à une diminution importante de l'accélération verticale de la caisse comparativement à celle obtenue avec la butée PU de série, déjà observée au chapitre 5, sur cet intervalle.

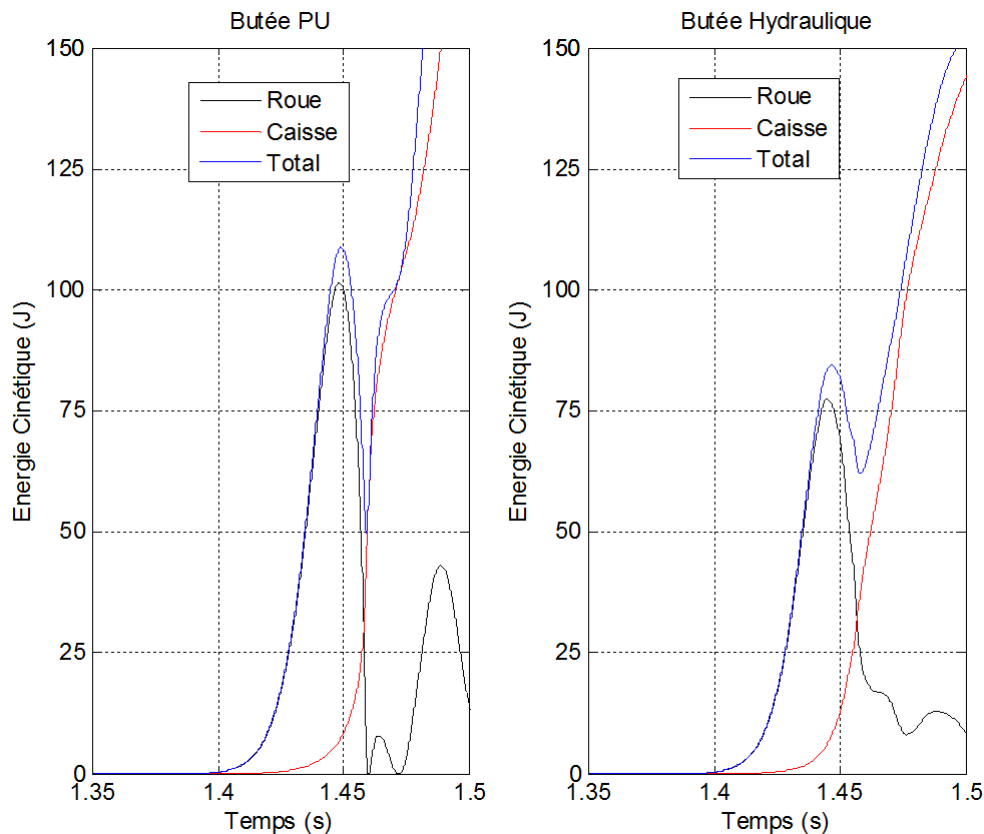


FIGURE 6.1 – Évolution dans les premiers instants des énergies cinétiques totale T (en **bleu**), T_1 de la roue (en **noir**) et T_2 de la caisse (en **rouge**) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)

Ensuite, l'énergie potentielle d'élasticité totale V_e résulte de la somme des énergies potentielles d'élasticité V_{e1} stockée dans le pneumatique de raideur k_1 , V_{e2} stockée dans le ressort



de la suspension de raideur k_2 et V_{e3} stockée dans les butées PU (aussi bien la butée PU de série que la butée PU modifiée pour la butée hydraulique), soit :

$$V_e = V_{e1} + V_{e2} + V_{e3} , \quad (6.2.3)$$

avec

$$\begin{cases} V_{e1} = \frac{1}{2}k_1 (z_0(t) - z_1(t))^2 \\ V_{e2} = \frac{1}{2}k_2 (z_1(t) - z_2(t))^2 \end{cases} . \quad (6.2.4)$$

Il est à noter que les variations de l'énergie potentielle de pesanteur V_p étant négligeables devant celles de l'énergie potentielle d'élasticité V_e , V_p est considérée constante dans le cadre du domaine d'étude tel que défini au chapitre 5.

La figure 6.2 présente l'évolution dans les premiers instants des énergies potentielles d'élasticité totale V_e (en bleu), V_{e1} (en noir), V_{e2} (en rouge) et V_{e3} (en vert) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite).

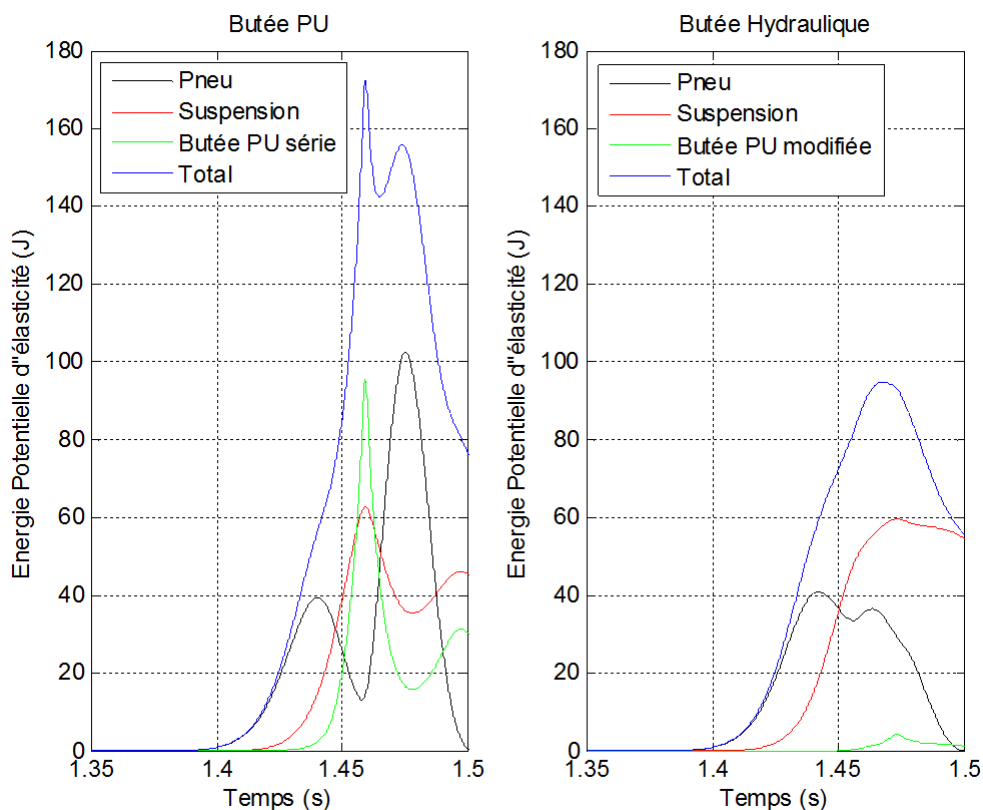


FIGURE 6.2 – Évolution dans les premiers instants des énergies potentielles d'élasticité : totale V_e (en bleu), V_{e1} (en noir), V_{e2} (en rouge) et V_{e3} (en vert) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)

Dans les premiers instants, de t_0 à $t = 1.43s$ environ, l'énergie potentielle d'élasticité totale V_e est essentiellement égale à l'énergie V_{e1} stockée dans le pneumatique, les énergies V_{e2} du ressort de suspension et V_{e3} des butées PU (qui ne sont pas encore rentrées en action) étant négligeables devant V_{e1} .



Enfin, l'énergie dissipée totale E_d résulte de la somme des énergies E_{d1} dissipée dans l'amortisseur de coefficient de frottement visqueux apparent $b_{a2}(\cdot)$ et E_{d2} dissipée dans la butée hydraulique de coefficient de frottement visqueux apparent $b_{aBH}(\cdot)$ (E_{d2} étant nulle dans le cas de la butée PU de série), soit :

$$E_d = E_{d1} + E_{d2} , \quad (6.2.5)$$

avec

$$\begin{cases} E_{d1} = \int_{t_0}^{t_2} P_{d1}(t) dt \\ E_{d2} = \int_{t_0}^{t_2} P_{d2}(t) dt \end{cases} , \quad (6.2.6)$$

où

$$\begin{cases} P_{d1}(t) = f_{amort}(t) v_{12}(t) = b_{a2}(\cdot) v_{12}^2(t) \\ P_{d2}(t) = f_{BH}(t) v_{12}(t) = b_{aBH}(\cdot) v_{12}^2(t) \end{cases} . \quad (6.2.7)$$

$f_{amort}(t)$ étant la force développée par l'amortisseur non linéaire de la suspension et $f_{BH}(t)$ celle de la butée hydraulique.

La figure 6.3 présente l'évolution dans les premiers instants de 1.35s à 1.50s des énergies E_{d1} (en **bleu**) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en **vert**) dissipée par la butée hydraulique et E_d totale (en **rouge**) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite).

L'observation de cette figure conduit à deux remarques.

D'abord, l'énergie dissipée totale E_d sur cet intervalle de temps en présence de la butée hydraulique (de l'ordre de 170J dont 55J dissipés par l'amortisseur (soit environ 32 %) et 115J par la butée hydraulique) est bien supérieure à celle dissipée en présence de la butée PU (de l'ordre de 90J dissipée à 100 % par l'amortisseur non linéaire).

Enfin, la présence de la butée hydraulique conduit l'amortisseur non linéaire (identique dans les deux cas) à être moins sollicité, ce qui devrait se traduire à long terme par une augmentation de sa durée de vie.

En résumé, cette analyse énergétique permet de mettre en évidence dans les premiers instants sur l'intervalle IT_1 , avant l'entrée en action des butées, que :

- l'énergie cinétique de la caisse est négligeable devant celle de la roue ;
- l'énergie potentielle d'élasticité du ressort de suspension est négligeable devant celle du pneumatique.

Afin d'affiner cette analyse énergétique toujours dans la perspective d'une réduction de modèle, une analyse des différents efforts générés est développée dans le paragraphe suivant.

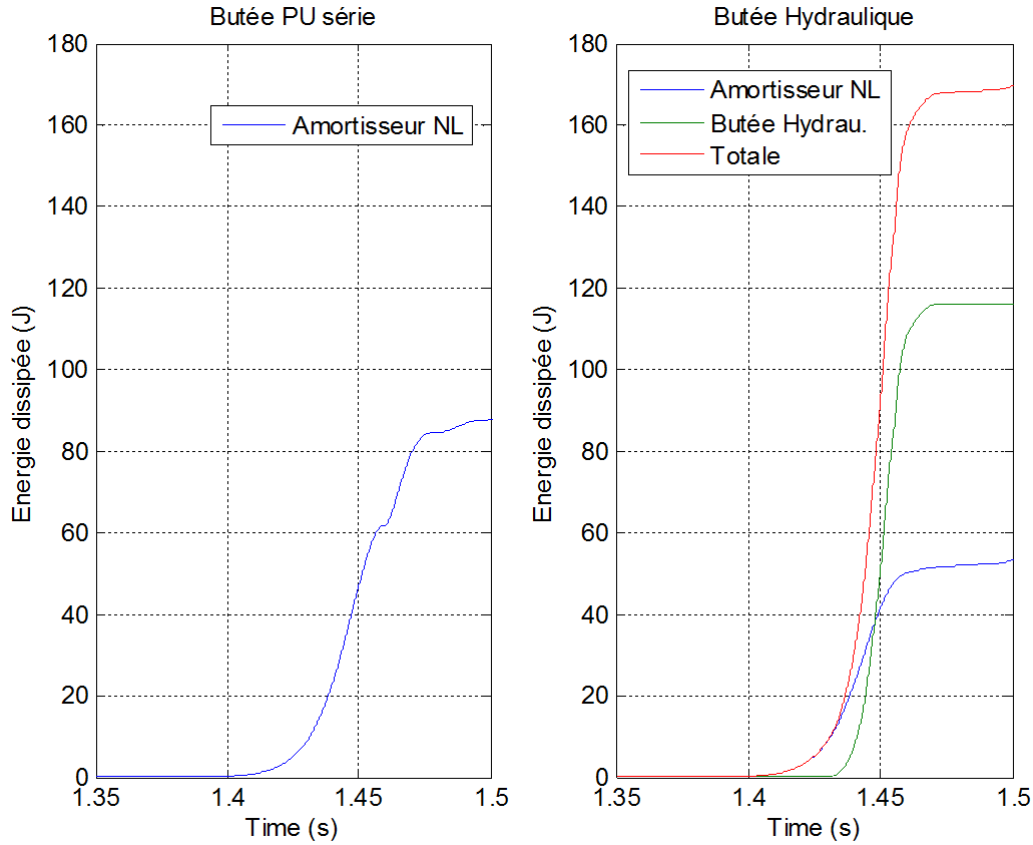


FIGURE 6.3 – Évolution dans les premiers instants de 1.35s à 1.5s des énergies E_{d1} (en *bleu*) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en *vert*) dissipée par la butée hydraulique et E_d totale (en *rouge*) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)

Efforts générés

Reprenons les équations du modèle d'analyse développé au chapitre 5, soit :

$$v_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t f_{\Sigma i}(\tau) d\tau + v_i(0) \quad (6.2.8)$$

où, conformément au domaine d'étude précédemment défini, $f_{\Sigma i}$ représente la somme algébrique des variations des efforts extérieurs appliqués à la masse m_i , soit :

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) = f_1(t) - f_s(t) \\ f_{\Sigma 2}(t) = f_s(t) \end{cases}, \quad (6.2.9)$$

où

$$\begin{cases} f_1(t) = k_1(z_0(t) - z_1(t)) \\ f_s(t) = f_2(t) + f_{amort}(t) + f_{butée}(t) \\ f_2(t) = k_2(z_1(t) - z_2(t)) \\ f_{amort}(t) = b_{a2}(\cdot)(v_1(t) - v_2(t)) \\ f_{butée}(t) = b_{aBH}(\cdot)(v_1(t) - v_2(t)) \end{cases}. \quad (6.2.10)$$

La figure 6.4 présente l'évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts, à savoir $f_1(t)$ (en *vert*), $f_2(t)$ (en cyan), $f_{amort}(t)$ (en magenta), $f_{butée}(t)$ (en *rouge*)



pour la butée PU à gauche et en **bleu** pour la butée hydraulique à droite) et la force totale $f_s(t)$ (en noir) transmise à la masse m_2 .

Quelle que soit la butée, le maximum de la force transmise à la masse m_2 , qui fixe la valeur maximale de l'accélération verticale de cette masse, est principalement imposé par le maximum de la force générée par les butées. Ainsi, minimiser l'accélération revient à minimiser l'effort transmis par les butées.

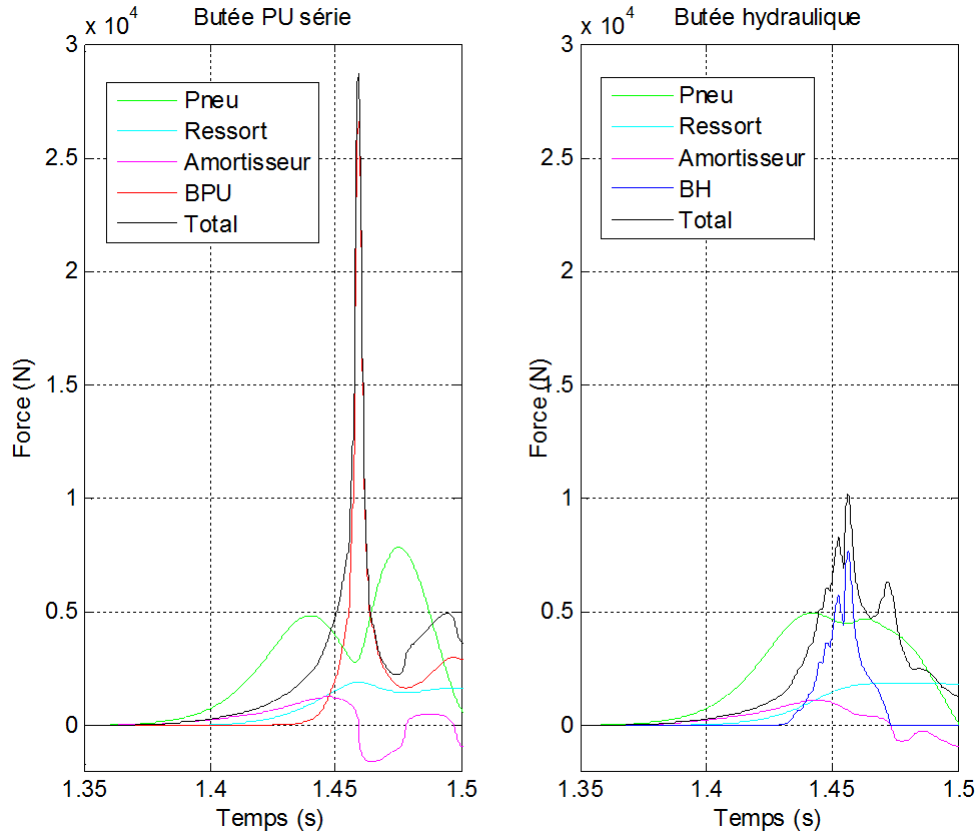


FIGURE 6.4 – Évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts, à savoir : $f_1(t)$ (en vert), $f_2(t)$ (en cyan), $f_{amort}(t)$ (en magenta), $f_{butée}(t)$ (en rouge pour la butée PU à gauche et en bleu pour la butée hydraulique à droite) et la force totale $f_s(t)$ (en noir) transmise à la masse m_2

Afin d'analyser la contribution des mouvements de la roue et de la caisse sur les efforts générés, le système d'équations (6.2.10) est réécrit en distribuant les raideurs et les coefficients de frottement visqueux, soit :

$$\begin{cases} f_1(t) = k_1 z_0(t) - k_1 z_1(t) \\ f_2(t) = k_2 z_1(t) - k_2 z_2(t) \\ f_{amort}(t) = b_{a2}(\cdot)v_1(t) - b_{a2}(\cdot)v_2(t) \\ f_{butée}(t) = b_{aBH}(\cdot)v_1(t) - b_{aBH}(\cdot)v_2(t) \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Cette distribution permet de faire apparaître une source d'effort $f_{z_0}(t) = k_1 z_0(t)$ généré par le profil de l'obstacle (la cause), et les contributions des mouvements, d'une part de la roue à travers $z_1(t)$ et $v_1(t)$, et d'autre part de la caisse à travers $z_2(t)$ et $v_2(t)$ (les conséquences).

La figure 6.5 présente l'évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts générés en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite). Ainsi, les tracés en bleu représentent l'effort développé par le pneumatique avec en



trait continu la contribution de $[k_1 z_0(t)]$ et en traits discontinus celle de $[k_1 z_1(t)]$, en rouge l'effort développé par le ressort de suspension avec en trait continu la contribution de $[k_2 z_2(t)]$ et en traits discontinus celle de $[k_2 z_1(t)]$, en vert l'effort développé par l'amortisseur non linéaire avec en trait continu la contribution de $[b_{a2}(\cdot)v_2(t)]$ et en traits discontinus celle de $[b_{a2}(\cdot)v_1(t)]$, et enfin en noir l'effort développé par les butées PU (à gauche) et hydraulique (à droite) avec en trait continu la contribution de $[b_{aBH}(\cdot)v_2(t)]$ et en traits discontinus celle de $[b_{aBH}(\cdot)v_1(t)]$.

L'observation de cette figure conduit à plusieurs remarques.

En matière d'efforts élastiques, l'effort développé par le ressort de suspension est négligeable devant celui développé par le pneumatique. En matière d'efforts dissipatifs, avant l'entrée en action de la butée hydraulique, la contribution $[b_{a2}(\cdot)v_2(t)]$ de la caisse en ce qui concerne l'amortisseur est négligeable devant celle $[b_{a2}(\cdot)v_1(t)]$ de la roue.

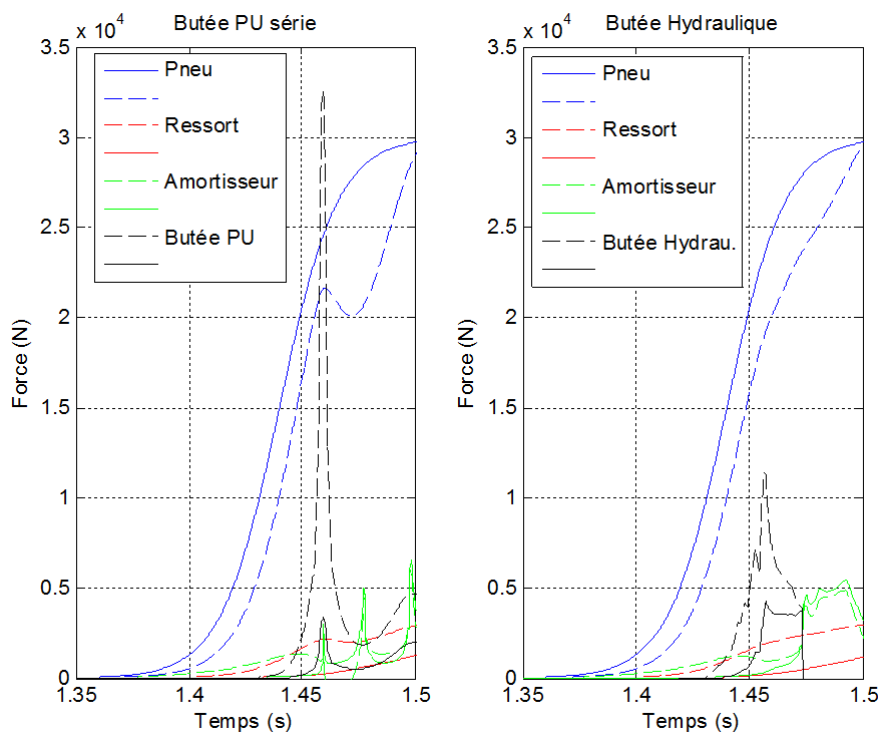


FIGURE 6.5 – Évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts générés en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)

Les conséquences : accélération, vitesse et déplacement

Pour rappel, l'accélération $a_2(t)$ de la masse m_2 est donnée par :

$$a_2(t) = \frac{1}{m_2} f_{\Sigma 2}(t) . \quad (6.2.12)$$

La figure 6.6 présente l'évolution de $a_2(t)$, de 1.35s à 1.50s, obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu). L'apport de la butée dissipative par rapport à la butée élastique est vraiment significatif dans la mesure où l'on observe une diminution du maximum d'un facteur 2.8.

La figure 6.7 présente l'évolution des vitesses $v_1(t)$ de la roue (en rouge) et $v_2(t)$ de la caisse (en bleu), de 1.35s à 1.50s, obtenues avec la butée PU de série (à gauche) et la butée

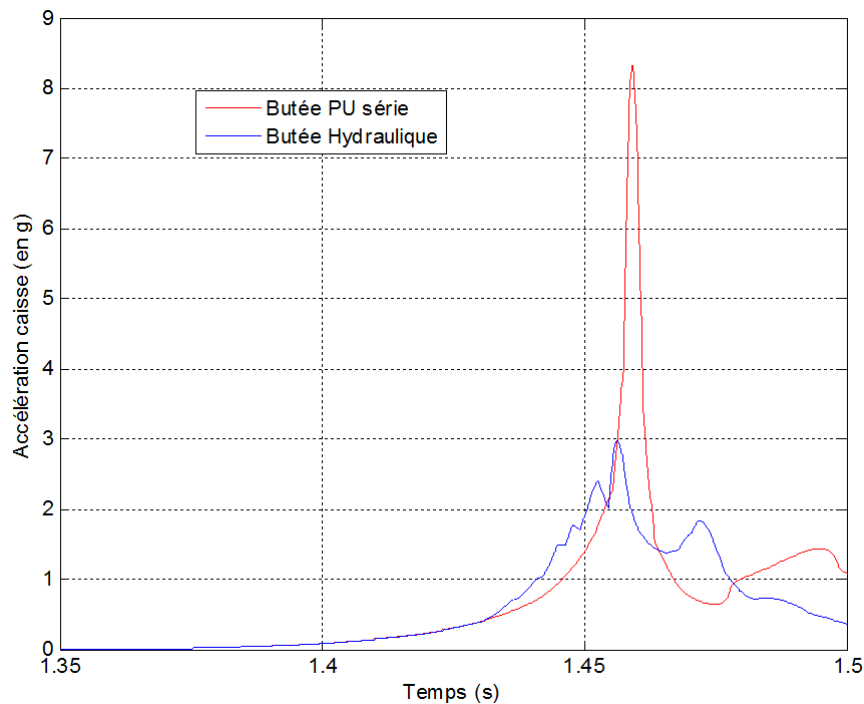


FIGURE 6.6 – Évolution de $a_2(t)$, de 1.35s à 1.50s, obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)

hydraulique (à droite). Dans les premiers instants, de 1.35s à 1.45s, la vitesse de la caisse est bien négligeable devant celle de la roue.

Pour terminer cette analyse complémentaire, la figure 6.8 présente, toujours sur l'intervalle compris entre 1.35s et 1.50s, les évolutions du débattement $z_{12}(t)$ de la suspension (en haut) et de sa vitesse de débattement $v_{12}(t)$ (au milieu) obtenues avec les butées PU de série (en rouge) et hydraulique (en bleu). Ces tracés sont complétés (en bas) par ceux des efforts développés par la butée PU de série, la butée hydraulique et sa butée PU modifiée (en noir) qui lui est associée.

Les traits pointillés verticaux en rouge et en bleu soulignent le fait que les efforts maximaux développés par les butées élastiques sont atteints en fin de course lorsque la vitesse de débattement s'annule, ce qui n'est pas le cas pour l'effort maximal développé par la butée dissipative.

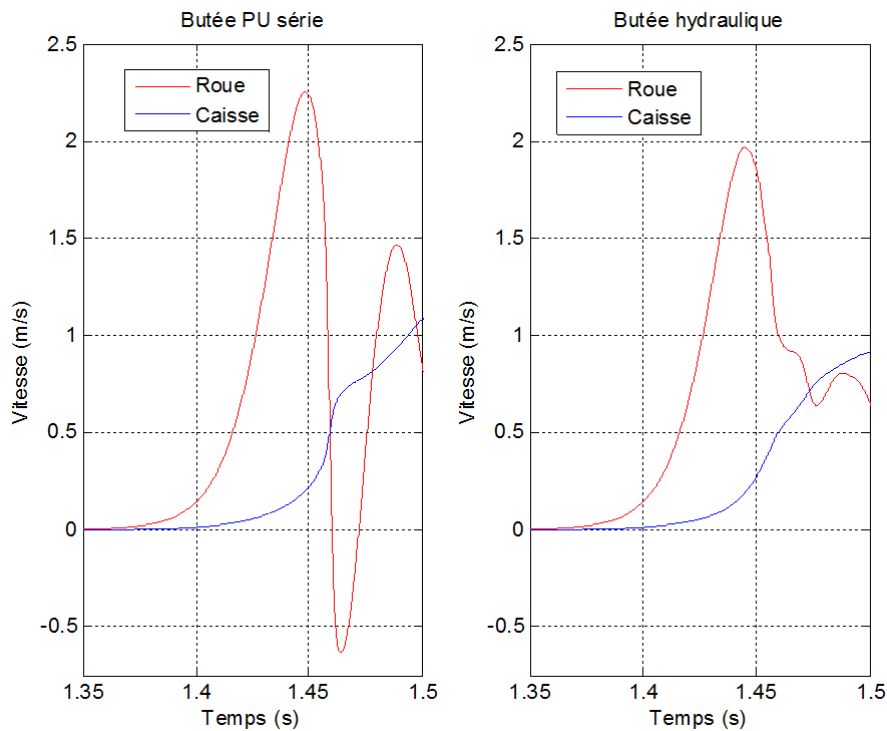


FIGURE 6.7 – Évolution des vitesses $v_1(t)$ de la roue (en rouge) et $v_2(t)$ de la caisse (en bleu), de 1.35s à 1.50s, obtenues avec la butée PU de série (à gauche) et la butée hydraulique (à droite)

La conclusion de cette analyse complémentaire présentée dans ce paragraphe est que la focalisation dans les premiers instants permet d'exploiter le découplage dynamique existant entre le mode de roue (le plus rapide) et le mode de caisse (10 fois plus lent). En effet, les phénomènes mis en jeu lors du premier choc sont majoritairement et essentiellement dus à la dynamique de roue. Pour faciliter l'établissement du modèle de synthèse présenté au paragraphe suivant, les premiers instants peuvent être décomposés en deux intervalles :

- le premier, noté IT_1 , défini à partir de l'instant d'application t_0 de l'obstacle isolé jusqu'à l'instant t_1 où les butées commencent à rentrer en action ($IT_1 = [t_0; t_1]$). Cet instant t_1 est différent pour les butées élastiques PU et la butée hydraulique ;
- le second, noté IT_2 , défini à partir de l'instant t_1 jusqu'à un instant t_2 ($IT_2 =]t_1; t_2]$) correspondant à la fin de course de la première phase de compression pour laquelle la vitesse de débattement $v_{12}(t)$ de la suspension s'annule. Là encore, comme l'illustre la figure 6.8, l'instant t_2 est différent selon la nature de la butée.

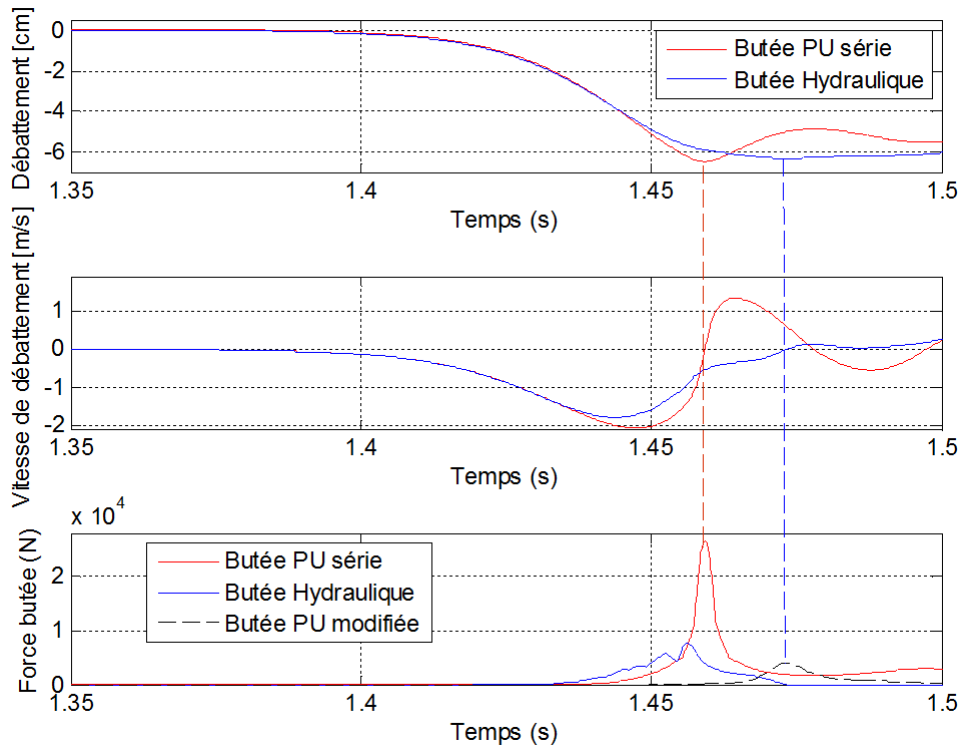


FIGURE 6.8 – Évolutions du débattement $z_{12}(t)$ de la suspension (en haut) et de sa vitesse de débattement $v_{12}(t)$ (au milieu) obtenues avec les butées PU de série (en rouge) et hydraulique (en bleu), tracés complétés (en bas) par ceux des efforts développés par la butée PU de série, la butée hydraulique et sa butée PU modifiée (en noir) qui lui est associée

6.2.2 Réduction du modèle d'analyse : modèle de synthèse

Compte tenue des conclusions du paragraphe précédent, le modèle de synthèse résultant de la réduction du modèle d'analyse se compose de deux sous-modèles : le premier associé à l'intervalle IT_1 et le second à l'intervalle IT_2 .

Pour ces deux intervalles, le déplacement et la vitesse de la caisse sont considérés comme négligeables devant ceux de la roue, soit :

$$\begin{cases} z_1(t) \gg z_2(t) \Rightarrow z_1(t) - z_2(t) \approx z_1(t) \Leftrightarrow z_2(t) \approx 0 \\ v_1(t) \gg v_2(t) \Rightarrow v_1(t) - v_2(t) \approx v_1(t) \Leftrightarrow v_2(t) \approx 0 \end{cases}, \quad (6.2.13)$$

entraînant des simplifications au niveau des efforts du ressort, de l'amortisseur et de la butée hydraulique, soit :

$$\begin{cases} f_2(t) = k_2(z_1(t) - z_2(t)) \approx k_2 z_1(t) \\ f_{amort}(t) = b_{a2}(\cdot)(v_1(t) - v_2(t)) \approx b_{a2}(\cdot)v_1(t) \\ f_{butée}(t) = b_{aBH}(\cdot)(v_1(t) - v_2(t)) \approx b_{aBH}(\cdot)v_1(t) \end{cases}. \quad (6.2.14)$$

Sur l'intervalle IT_1 , durant lequel les butées ne sont pas encore rentrées en action, les efforts résultants se résument alors à :

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) = k_1(z_0(t) - z_1(t)) - k_2(z_1(t) - b_{a2}(\cdot)v_1(t)) \\ f_{\Sigma 2}(t) = k_2(z_1(t) - b_{a2}(\cdot)v_1(t)) \end{cases}, \quad (6.2.15)$$



ou encore, sachant que $k_1 \gg k_2$,

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) \approx k_1(z_0(t) - z_1(t)) - b_{a2}(\cdot)v_1(t) \\ f_{\Sigma 2}(t) \approx b_{a2}(\cdot)v_1(t) \end{cases} . \quad (6.2.16)$$

Compte tenu de la relation (6.2.12), l'accélération verticale $a_2(t)$ de la caisse se résume alors à :

$$a_2(t) \approx \frac{b_{a2}(\cdot)}{m_2}v_1(t) . \quad (6.2.17)$$

Sur l'intervalle IT_2 , où les butées rentrent en action et toujours en considérant que $k_1 \gg k_2$, les efforts résultants se résument alors à :

$$\begin{cases} f_{\Sigma 1}(t) \approx k_1(z_0(t) - z_1(t)) - (b_{a2}(\cdot) + b_{aBH}(\cdot))v_1(t) \\ f_{\Sigma 2}(t) \approx (b_{a2}(\cdot) + b_{aBH}(\cdot))v_1(t) \end{cases} . \quad (6.2.18)$$

Là aussi, compte tenu de la relation (6.2.12), l'accélération verticale $a_2(t)$ de la caisse se résume alors à :

$$a_2(t) \approx \frac{(b_{a2}(\cdot) + b_{aBH}(\cdot))}{m_2}v_1(t) . \quad (6.2.19)$$

La figure 6.9 présente la schématisation et le paramétrage du modèle réduit, utilisé comme modèle de synthèse au paragraphe suivant, et dont le domaine de validité se limite aux intervalles $IT_1 + IT_2$.

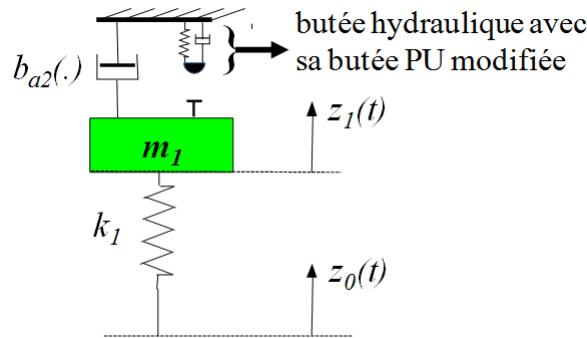


FIGURE 6.9 – Schématisation et paramétrage du modèle de synthèse

Afin de disposer d'un modèle de synthèse linéaire sur l'intervalle IT_1 , l'amortisseur non linéaire est remplacé par un amortisseur linéaire de coefficient de frottement visqueux b_2 dont la valeur est fixée par la valeur moyenne de $b_{a2}(\cdot)$ sur l'intervalle IT_1 . Le comportement dynamique de la masse m_1 est alors décrit sur l'intervalle IT_1 par une équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$m_1\ddot{z}_1(t) + b_2\dot{z}_1(t) + k_1z_1(t) = k_1z_0(t) , \quad (6.2.20)$$

dont la transformée de Laplace sous l'hypothèse de conditions initiales nulles conduit à la fonction de transfert réduite $T_{10}(s)$ présentée au chapitre 3, relation (3.3.8), soit :

$$T_{10}(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_0(s)} \approx \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{n1}}\right)^2 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}}s + 1} , \quad (6.2.21)$$



où ω_{n1} et ζ_1 sont définis par la relation (3.3.6). Bien entendu, il ne faut pas perdre de vue que le domaine de validité de ce modèle réduit est étroit, limité à l'intervalle IT_1 dans le domaine temporel.

Les figures 6.10 et 6.11 présentent un zoom sur les premiers instants des réponses du déplacement (figure 6.10) et de la vitesse (figure 6.11) de la roue obtenus, non seulement avec le modèle d'analyse non linéaire à 2 ddl (modèle complet) en présence de la butée PU de série (BPU en vert) et en présence de la butée hydraulique (BH en rouge), mais aussi avec le modèle réduit défini par l'équation différentielle 6.2.20 en l'absence de toute butée. L'observation de ces deux figures permet d'affirmer que le modèle réduit rend compte de manière satisfaisante (écart maximal inférieur à 1% par rapport au modèle complet BPU) des évolutions du déplacement et de la vitesse de la roue sur l'intervalle $[1.35s; 1.44s]$.

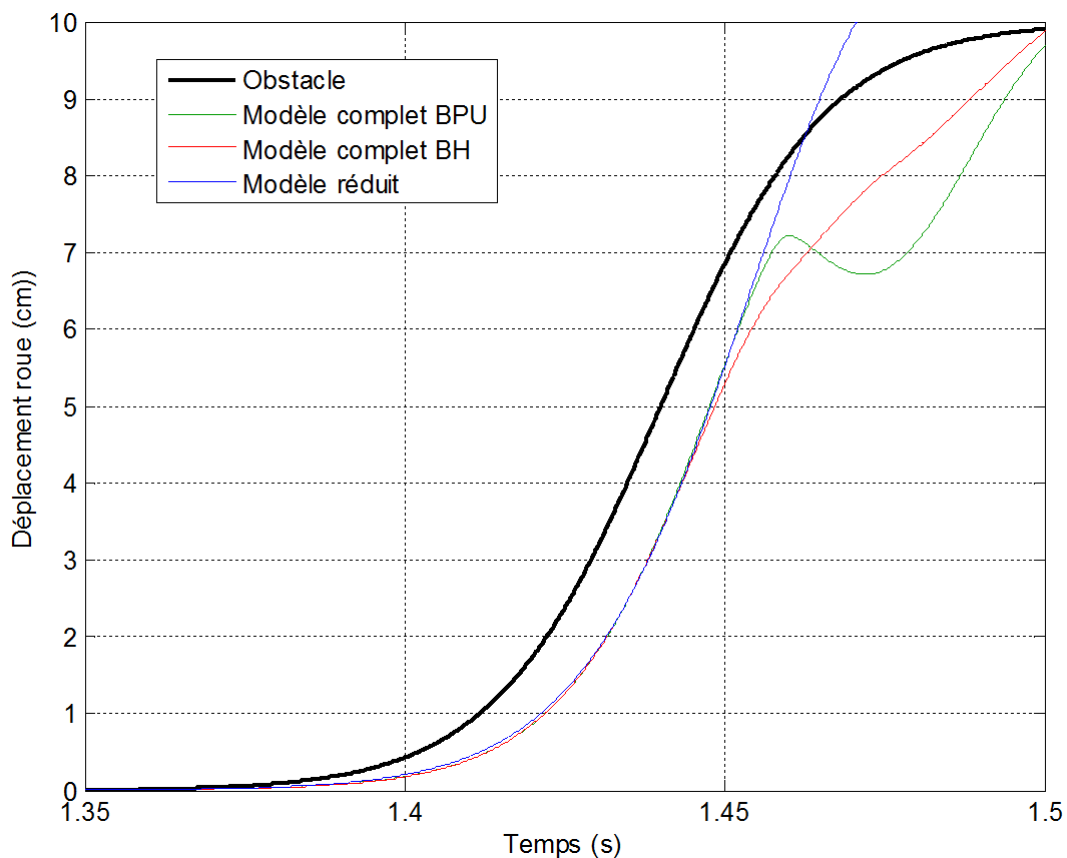


FIGURE 6.10 – Zoom sur les premiers instants du profil $z_0(t)$ (en noir) de l'obstacle et des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue obtenus avec le modèle complet (modèle d'analyse) en présence de la butée élastique PU de série (en vert) et de la butée hydraulique (en rouge), et obtenu avec le modèle de synthèse réduit sans butée (en bleu)

En résumé, l'établissement d'un modèle réduit, tel que défini dans ce paragraphe, constitue le premier des deux points autour desquels s'articule la stratégie adoptée pour atteindre l'objectif défini en introduction. Le paragraphe suivant présente le second point, à savoir une nouvelle butée dont le caractère dissipatif est fondé sur le concept d'intégration non entière.

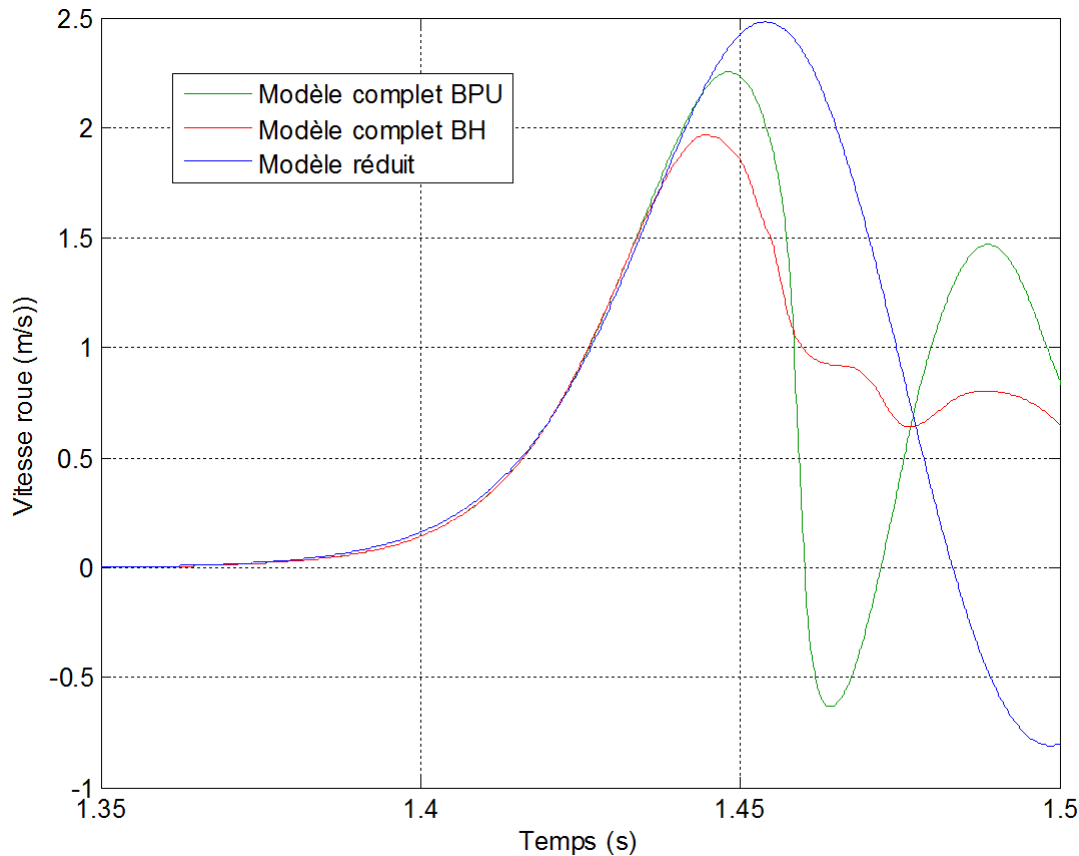


FIGURE 6.11 – Zoom sur les premiers instants des vitesses verticales $z_1(t)$ de la roue obtenues avec le modèle complet (modèle d'analyse) en présence de la butée élastique PU de série (en vert) et de la butée hydraulique (en rouge), et obtenue avec le modèle de synthèse réduit sans butée (en bleu)

6.3 Nouvelle butée dissipative fondée sur l'intégration non entière

La nouvelle butée proposée résulte de l'analyse comparative entre la butée PU de série et la butée hydraulique. Ainsi, les avantages de la butée hydraulique sont, non seulement conservés, mais en plus étendus, en l'occurrence :

- un caractère dissipatif, non seulement dans le quadrant 3 du diagramme Force-Vitesse à l'image de la butée hydraulique, mais aussi dans le quadrant 1 ;
- une progressivité de l'effort développée en raison de la dépendance du coefficient de frottement visqueux apparent au déplacement de la butée, dépendance fondée sur l'intégration non entière.

6.3.1 Définition

La force $f_{bNE}(t)$ développée par cette nouvelle butée dissipative est définie classiquement par le produit entre son coefficient de frottement visqueux apparent $b_{aNE}(t)$ et sa vitesse $v_{bNE}(t)$, soit :

$$f_{bNE}(t) = b_{aNE}(t) v_{bNE}(t) \quad (6.3.1)$$



où $b_{aNE}(t)$ est proportionnel à l'intégrale d'ordre m de son déplacement $z_{bNE}(t)$, soit :

$$b_{aNE}(t) = b_m {}_0I_t^m z_{bNE}(t) , \quad (6.3.2)$$

avec, conformément à la définition présentée au chapitre 2,

$${}_0I_t^m z_{bNE}(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m)(t-\tau)^{1-m}} z_{bNE}(\tau) d\tau , m \in [0; 1] . \quad (6.3.3)$$

La transformée de Laplace de la relation 6.3.2, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, conduit à :

$$B_{aNE}(s) = \frac{b_m}{s^m} Z_{bNE}(s) . \quad (6.3.4)$$

De plus, dans les premiers instants où $t \in IT_2$, $z_{bNE}(t)$ est assimilée à une rampe de pente A_0 (figure 6.12), soit :

$$Z_{bNE}(s) = \frac{A_0}{s^2} , \quad (6.3.5)$$

d'où

$$B_{aNE}(s) = \frac{b_m}{s^m} \frac{A_0}{s^2} . \quad (6.3.6)$$

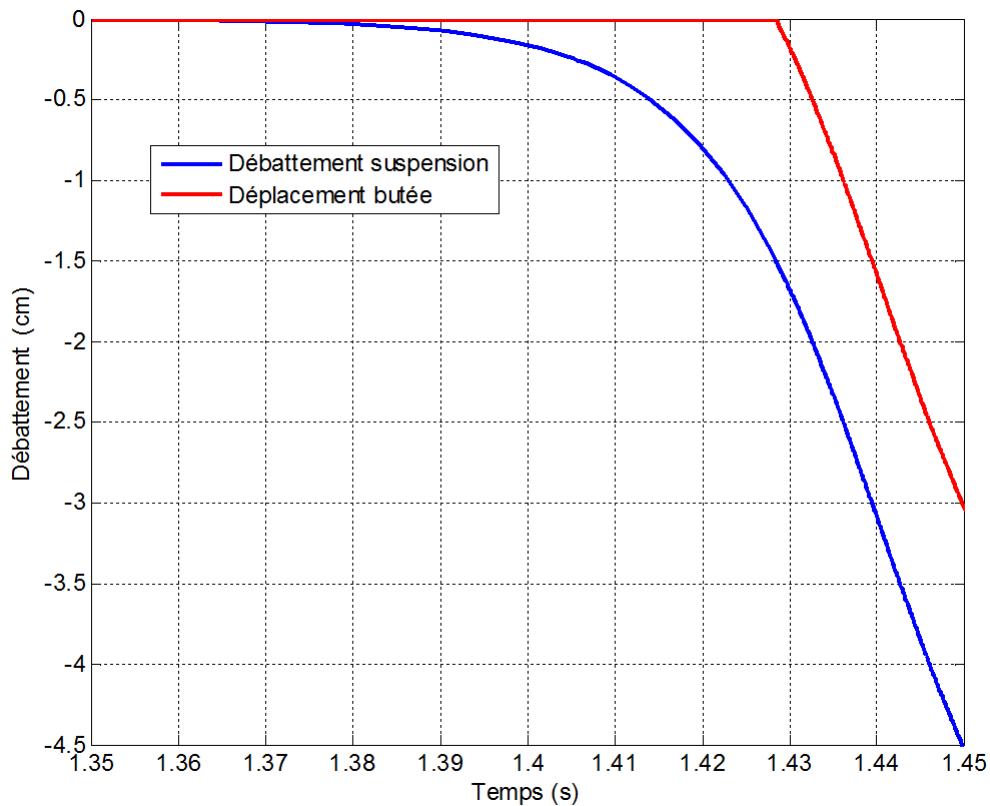


FIGURE 6.12 – Zoom sur les premiers instants du débattement de la suspension (en *bleu*) et du déplacement de la butée (en *rouge*) assimilable à une rampe de pente A_0 sur l'intervalle $[1.428s; 1.450s]$



L'expression de $b_{aNE}(t)$ est alors obtenue par transformée inverse de Laplace, soit :

$$\forall t \in [t_1; t_2], b_{aNE}(t) = \frac{b_m A_0}{\Gamma(2+m)} t^{1+m} . \quad (6.3.7)$$

Ainsi, sur l'intervalle de temps considéré et pour les valeurs extrémales de m , en l'occurrence $m = 0$, $b_{aNE}(t)$ varie de manière linéaire par rapport au temps, et pour $m = 1$, de manière parabolique. Dans les premiers instants où la butée entre en action, l'ordre m fixe la courbure de la réponse temporelle de $b_{aNE}(t)$ et donc la progressivité.

Enfin, l'expression de la puissance instantanée $P_{dNE}(t)$ est donnée par :

$$P_{bNE}(t) = f_{bNE}(t) v_{bNE}(t) , \quad (6.3.8)$$

ou encore, compte tenu de l'expression (6.3.1) de $f_{bNE}(t)$,

$$P_{bNE}(t) = f_{bNE}(t) (v_{bNE}(t))^2 . \quad (6.3.9)$$

Sur l'intervalle $[t_1; t_2]$, en raison de l'expression (6.3.7) de $b_{aNE}(t)$, la puissance se résume à :

$$P_{bNE}(t) = \frac{b_m A_0}{\Gamma(2+m)} t^{1+m} (v_{bNE}(t))^2 . \quad (6.3.10)$$

Remarque

Le point commun de cette nouvelle butée avec la butée hydraulique est l'utilisation d'un coefficient de frottement visqueux apparent en ce qui concerne son caractère dissipatif. Par contre, l'une des différences fondamentales est que le coefficient de frottement visqueux apparent de la butée hydraulique est obtenu a posteriori en effectuant le rapport entre la force et la vitesse, alors que dans le cas de la nouvelle butée il est défini a priori à l'aide d'une relation analytique linéaire qui exploite la propriété de parcimonie paramétrique propre à l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier. En effet, seuls deux paramètres de synthèse de haut niveau sont nécessaires : l'ordre m pour la progressivité et le terme de proportionnalité bm pour le niveau de la dissipation.

6.3.2 Méthode de dimensionnement : approche optimale

Le point de départ de la méthode de dimensionnement proposée, dont l'objectif est de déterminer de manière optimale les deux paramètres m et b_m , est fixé par les spécifications du cahier des charges en ce qui concerne le comportement dynamique désiré. Ce dernier est établi comparativement au comportement dynamique de la butée hydraulique observé à un instant de référence t_{ref} appartenant à l'intervalle IT_2 ($t_1 < t_{ref} < t_2$). Plus précisément, la valeur de la puissance dissipée désirée à $t = t_{ref}$, notée $P_{dNE}(t_{ref})$, pour la nouvelle butée est fixée, ou de manière équivalente, le gain λ ($\lambda > 1$) souhaité par rapport à la puissance dissipée au même instant t_{ref} , notée $P_{dBH}(t_{ref})$, par la butée hydraulique est imposé, soit :

$$P_{dNE}(t_{ref}) \geq P_{dBH}(t_{ref}) , \quad (6.3.11)$$

ou encore, compte tenu de l'expression (6.3.10) de $P_{dNE}(t)$:

$$\frac{b_m A_0}{\Gamma(2+m)} t_{ref}^{1+m} (v_{bNE}(t_{ref}))^2 \geq P_{dBH}(t_{ref}) . \quad (6.3.12)$$



A partir de l'expression (6.3.12), une relation analytique entre le terme de proportionnalité b_m et l'ordre non entier m est établie à $iso - P_{dNE}(t_{ref}) = \lambda P_{dBH}(t_{ref})$, soit :

$$b_m \geq \frac{\lambda P_{dBH}(t_{ref})}{A_0(v_{bNE}(t_{ref}))^2} \frac{\Gamma(2+m)}{t_{ref}^{1+m}}. \quad (6.3.13)$$

A titre d'illustration, la figure 6.13 présente la variation du terme de proportionnalité b_m en fonction de l'ordre non entier m où $\lambda = 2.5$ avec $iso - P_{dNE}(t_{ref}) = \lambda P_{dBH}(t_{ref}) = 1875W$ et $t_{ref} = 1.435s$. Le tracé de la fonction $b_m = f(m)$ illustre bien qu'une augmentation de m sur l'intervalle $[0; 1]$ entraîne une augmentation de b_m . Il est à noter que l'unité de b_m dans le Système International (SI) s'exprime en Ns^ν/m^2 , avec $\nu = 1 - m$ (attention à ne pas confondre le symbole $[m]$ pour le mètre et l'ordre de dérivation m).

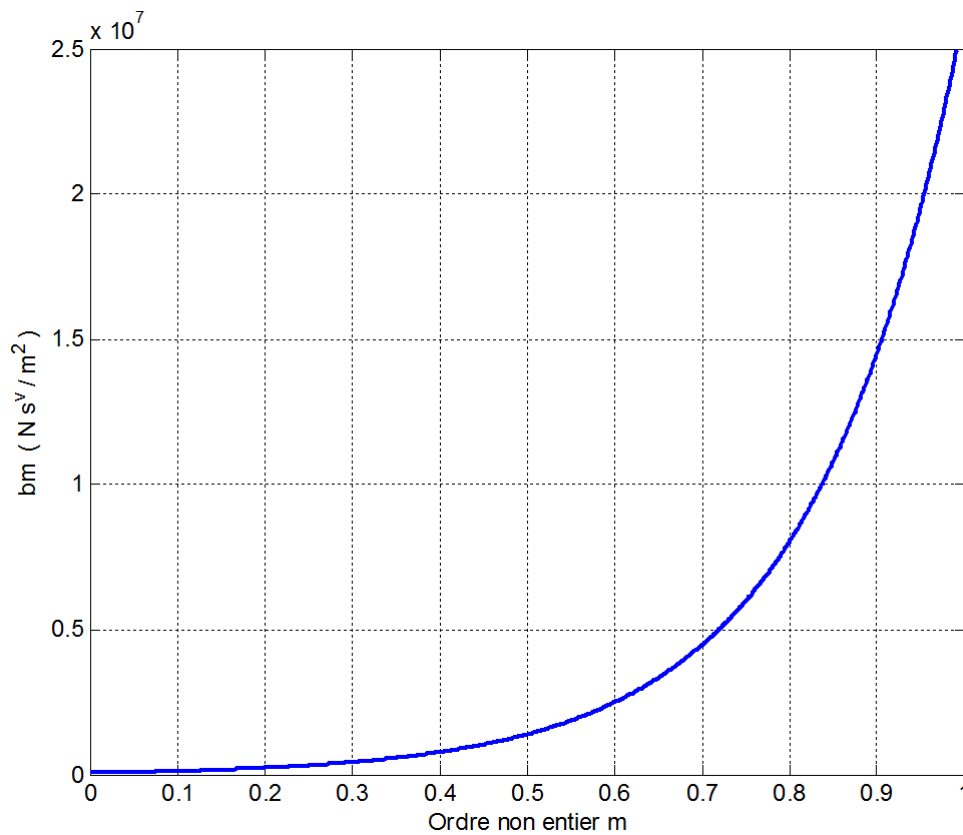


FIGURE 6.13 – Variation du terme de proportionnalité $b_m [Nsv/m^2]$ en fonction de l'ordre non entier m à $iso - P_{dNE}(t_{ref}) = 2.5P_{dBH}(t_{ref}) = 1875W$ où $t_{ref} = 1.435s$

L'établissement de l'expression analytique (6.3.13) de la fonction $b_m = f(m)$ marque la fin des développements analytiques. Pour aller plus loin dans l'analyse et notamment étudier l'influence de l'ordre m sur les différentes grandeurs physiques (force, accélération, débattement, énergie dissipée,...), la suite de ce paragraphe s'appuie sur une analyse numérique.

L'approche numérique utilisée est une procédure itérative, l'itération se faisant sur la valeur de m comprise entre 0 et 1. Ainsi, la valeur de l'ordre m est initialisée à 0 à laquelle correspond une valeur initiale de b_m . A chaque itération, la simulation numérique du modèle complet non linéaire à 2 ddl est lancée de l'instant initial t_0 à l'instant t_2 . A la fin de chaque simulation, les maximums de la force $f_{bNE}(t)$ développée par la butée non entière, de la force $f_{bPUm}(t)$ développée par la butée PU modifiée, du débattement $z_{12}(t)$ de la suspension,



de l'accélération verticale $a_2(t)$ et de l'énergie dissipée $E_{dNE}(t)$ par la butée sont stockés. Pour faciliter l'analyse et notamment pouvoir tracer les variations de tous ces maximums en fonction de l'ordre m sur une même figure, toutes les valeurs sont réduites en les divisant par leur valeur maximale obtenue pour $m = 0$, soit :

$$\forall t \in [t_0; t_2] \text{ et } \forall m \in [0; 1], \begin{cases} F_{bNE}^* = \max[f_{bNE}(t)] / \max[f_{bNE}(m = 0)] \\ F_{bPUM}^* = \max[f_{bPUM}(t)] / \max[f_{bPUM}(m = 0)] \\ Z_{12}^* = \max[z_{12}(t)] / \max[z_{12}(m = 0)] \\ A_2^* = \max[a_2(t)] / \max[a_2(m = 0)] \\ E_{dNE}^* = \max[E_{dNE}(t)] / \max[E_{dNE}(m = 0)] \end{cases} . \quad (6.3.14)$$

A titre d'illustration, les valeurs numériques du domaine d'étude sont celles du tracé de la figure 6.23, à savoir :

$$\begin{cases} t_{ref} = 1.435s \\ \lambda = 2.5 \\ P_{dBH}(t_{ref}) = 750W \\ P_{dNE}(t_{ref}) = 1875W \\ A_0 = v_{bNE}(t_{ref}) = 1.5m/s \end{cases} . \quad (6.3.15)$$

A la valeur initiale $m = 0$ correspond une valeur initiale de $b_m = 85470 \text{ Ns}/m^2$.

La figure 6.14 présente, pour le domaine d'étude défini par les valeurs numériques du système (6.3.15), les variations en fonction de l'ordre m des grandeurs réduites, à savoir F_{bNE}^* (en rouge), F_{bPUM}^* (en magenta), Z_{12}^* (en bleu), A_2^* (en vert) et E_{dNE}^* (en noir).

L'observation de cette figure conduit à plusieurs commentaires.

D'abord, comme prévu pour $m = 0$, toutes les variables réduites ont pour valeur l'unité.

Ensuite, par rapport à cette valeur unité, les variables réduites peuvent être classées en deux catégories. Il y a celles dont les valeurs sont supérieures à l'unité quelle que soit la valeur de l'ordre m sur l'intervalle semi-ouvert $]0; 1]$. C'est le cas de F_{bNE}^* qui augmente de manière quasi-linéaire avec m et de E_{dNE}^* qui augmente pour m compris entre 0 et 0.55, passe par un maximum, puis diminue. La seconde catégorie correspond à celles dont les valeurs sont inférieures à l'unité quelle que soit la valeur de l'ordre m toujours sur l'intervalle semi-ouvert $]0; 1]$. C'est le cas de Z_{12}^* qui diminue lorsque m augmente avec un point d'inflexion au voisinage de $m = 0.35$, mais aussi F_{bPUM}^* qui diminue de manière importante lorsque m augmente de 0 à 0.25 pour ensuite s'annuler. Enfin, en ce qui concerne A_2^* , elle diminue de manière quasi-linéaire de $m = 0$ à $m = 0.21$, puis augmente toujours de manière quasi-linéaire de $m = 0.21$ à $m = 1$.

L'analyse des résultats des simulations numériques, obtenues au fur et à mesure des itérations des valeurs de m , permet de comprendre la sensibilité à l'ordre m des performances observées. Ainsi, sur l'intervalle $[0; 0.21]$, le maximum de l'accélération verticale est principalement dû à l'effort maximal développée par la butée PU modifiée, et ce dans la mesure où l'énergie dissipée n'est pas suffisante pour empêcher le premier choc de fin de course. Ainsi sur cet intervalle, l'augmentation de m entraîne une augmentation de l'énergie dissipée par la butée non entière, une diminution de l'effort maximal de la butée PU modifiée et donc une diminution de l'accélération verticale qui atteint son minimum pour $m = 0.21$. A partir de cette valeur de m , le maximum de l'effort de la butée non entière devient prépondérant devant le maximum de l'effort de la butée PU modifiée qui tend à s'annuler. Il est à noter que les maximums des efforts des deux butées ne sont pas atteints au même instant. Enfin, sur l'intervalle $[0.21; 1]$, le choc de fin de course ayant progressivement disparu au fur et à mesure que la valeur de m augmente, le maximum de l'accélération verticale augmente avec l'augmentation du maximum de l'effort développé par la butée non entière.

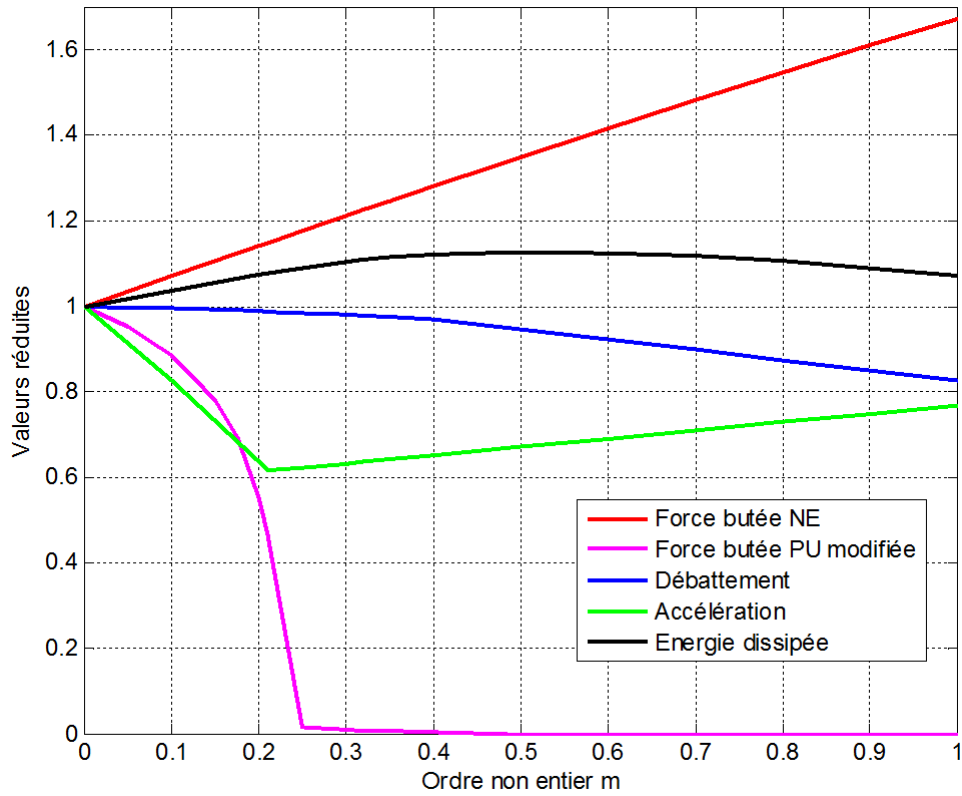


FIGURE 6.14 – Variations en fonction de l'ordre m des grandeurs réduites : F_{bNE}^* (en rouge), $F_{bPU_m}^*$ (en magenta), Z_{12}^* (en bleu), A_2^* (en vert) et E_{dNE}^* (en noir)

En résumé, l'analyse numérique conduit à la définition de trois critères de performances fonction de l'ordre m . Le premier critère, noté $J_1(m)$, concerne l'énergie dissipée par la butée non entière, le deuxième, noté $J_2(m)$, concerne l'accélération verticale de la masse m_2 , le troisième, noté $J_3(m, \rho)$, étant une combinaison linéaire des deux premiers, soit :

$$\forall t \in [t_0; t_2] \text{ et } \forall m \in [0; 1], \begin{cases} J_1(m) = E_{dNE}^* \\ J_2(m) = A_2^* \\ J_3(m, \rho) = \rho E_{dNE}^* + (1 - \rho) A_2^* \end{cases}, \quad (6.3.16)$$

où ρ est une pondération comprise entre 0 ($J_3(m, 0) = J_2(m)$) et 1 ($J_3(m, 1) = J_1(m)$).

A titre d'illustration, dans le cadre du domaine d'étude toujours défini par les valeurs numériques du système (6.3.15), les deux états paramétriques optimaux vis-à-vis de $J_1(m)$ (maximisation de l'énergie dissipée) et de $J_2(m)$ (minimisation de l'accélération verticale de la masse m_2) sont :

$$\forall t \in [t_0; t_2], \begin{cases} \max[J_1(m)] \Rightarrow \begin{cases} m = 0.55 \\ b_m = 1878800 \text{ N s}^{0.45} / m^2 \end{cases} \\ \max[J_2(m)] \Rightarrow \begin{cases} m = 0.21 \\ b_m = 272640 \text{ N s}^{0.79} / m^2 \end{cases} \end{cases}. \quad (6.3.17)$$



6.3.3 Performances

Volontairement, afin de limiter le nombre de pages de ce chapitre 6, les performances présentées dans ce paragraphe (obtenues avec le modèle non linéaire à 2 ddl) correspondent seulement à l'état paramétrique optimal qui minimise l'accélération verticale, soit $m = 0.21$ et $b_m = 272640Ns^{0.79}/m^2$.

La figure 6.15 présente les diagrammes de Bode de la forme rationnelle de l'intégrateur d'ordre $m = 0.21$ borné en fréquence obtenue avec :

$$\begin{cases} \omega_b = 10^{-5} rad/s \\ \omega_h = 10^5 rad/s \\ \omega_m = 1 rad/s \\ N = 20 \end{cases}, \quad (6.3.18)$$

où, pour rappel (cf. chapitre 2), ω_b , ω_h et ω_m sont les pulsations transitionnelles basse, haute et centrale respectivement, et où N est le nombre de cellules utilisées pour la synthèse.

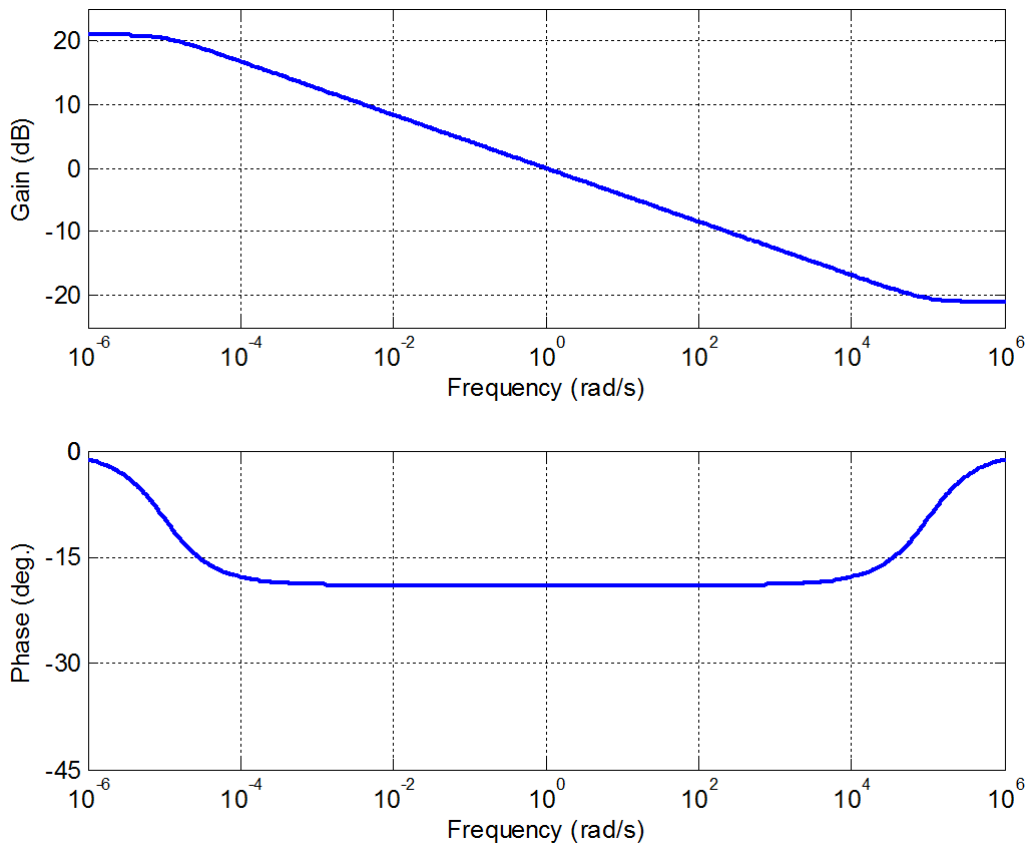


FIGURE 6.15 – Diagrammes de Bode de la forme rationnelle de l'intégrateur d'ordre $m = 0.21$ borné en fréquence



La figure 6.16 présente les évolutions de la puissance dissipée par la butée non entière (en **bleu**) et, pour rappel, par la butée hydraulique (en **rouge**). On peut vérifier qu'à l'instant $t_{ref} = 1.435$ s, la puissance dissipée par la butée non entière est bien supérieure à celle de la butée hydraulique conformément aux spécifications du cahier des charges.

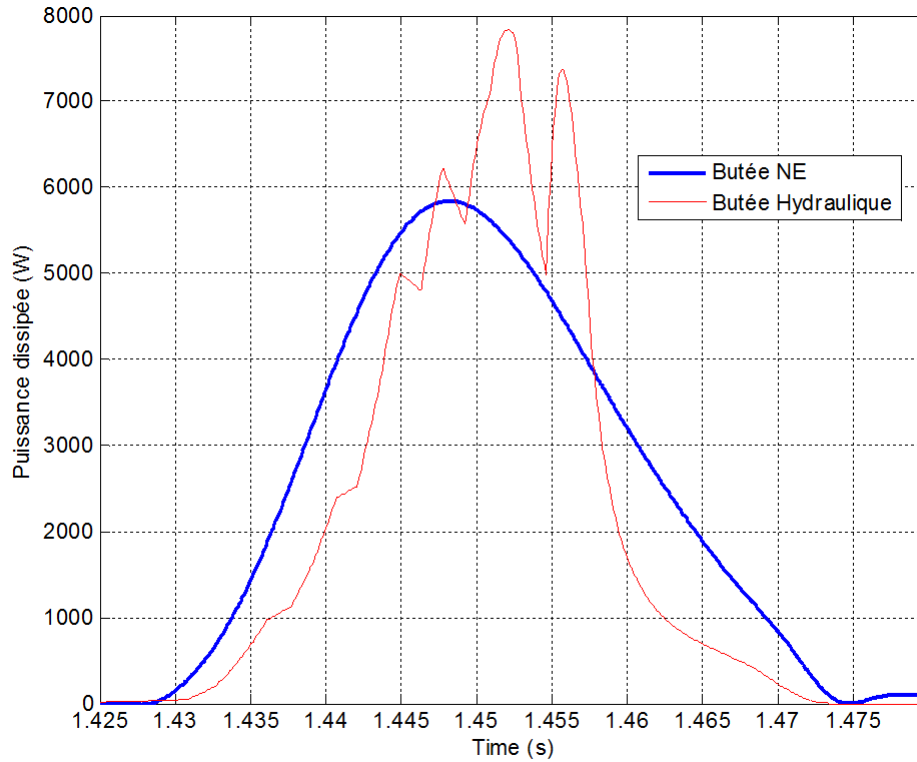


FIGURE 6.16 – Évolutions de la puissance dissipée par la butée non entière (en **bleu**) et par la butée hydraulique (en **rouge**)



Les figures 6.17 et 6.18 présentent les évolutions (figure 6.17) des coefficients de frottement visqueux apparents $b_{aNE}(t)$ de la butée non entière (en **bleu**) et $b_{aBH}(t)$ de la butée hydraulique (en **rouge**) et leurs variations (figure 6.18) en fonction du débattement (figure 6.18 à gauche) et de la vitesse de débattement (figure 6.18 à droite). Conformément aux spécifications du cahier des charges, la butée non entière entre bien en action au même instant que la butée hydraulique (figure 6.17) et pour la même valeur du débattement de la suspension (figure 6.18 à droite). Il est à noter qu'un ordre $m = 0.21$ conduit à une progressivité inférieure à celle de la butée hydraulique, progressivité qui se mesure dans les premiers instants par la courbure de la réponse temporelle du coefficient de frottement visqueux apparent (figure 6.17).

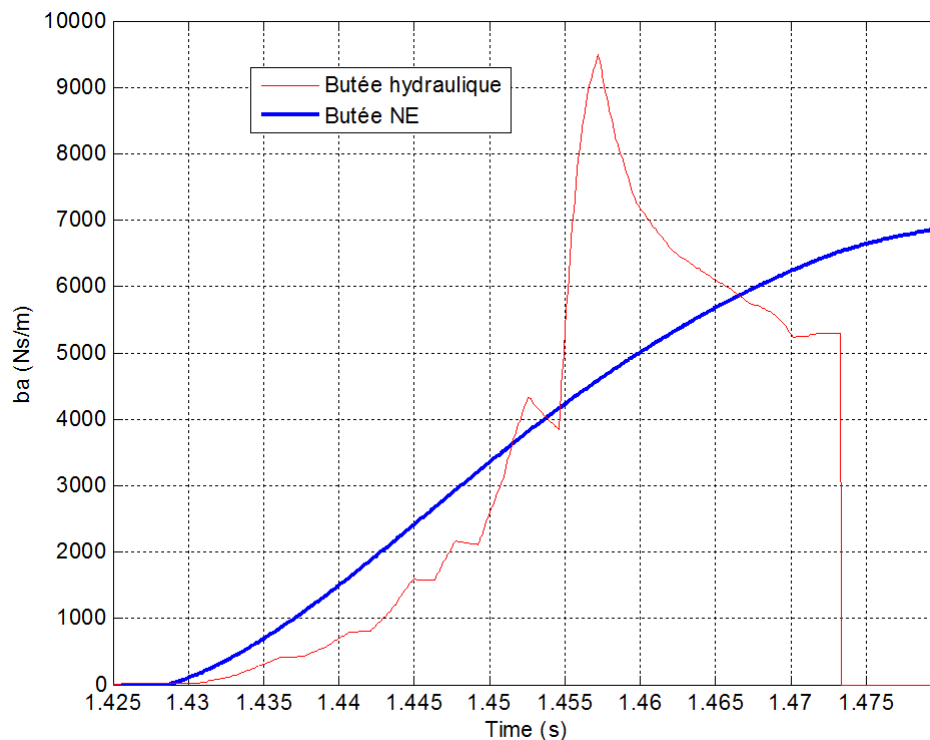


FIGURE 6.17 – Évolutions des coefficients de frottement visqueux apparents $b_{aNE}(t)$ de la butée non entière (en **bleu**) et $b_{aBH}(t)$ de la butée hydraulique (en **rouge**) dans les premiers instants où les deux butées entre en action

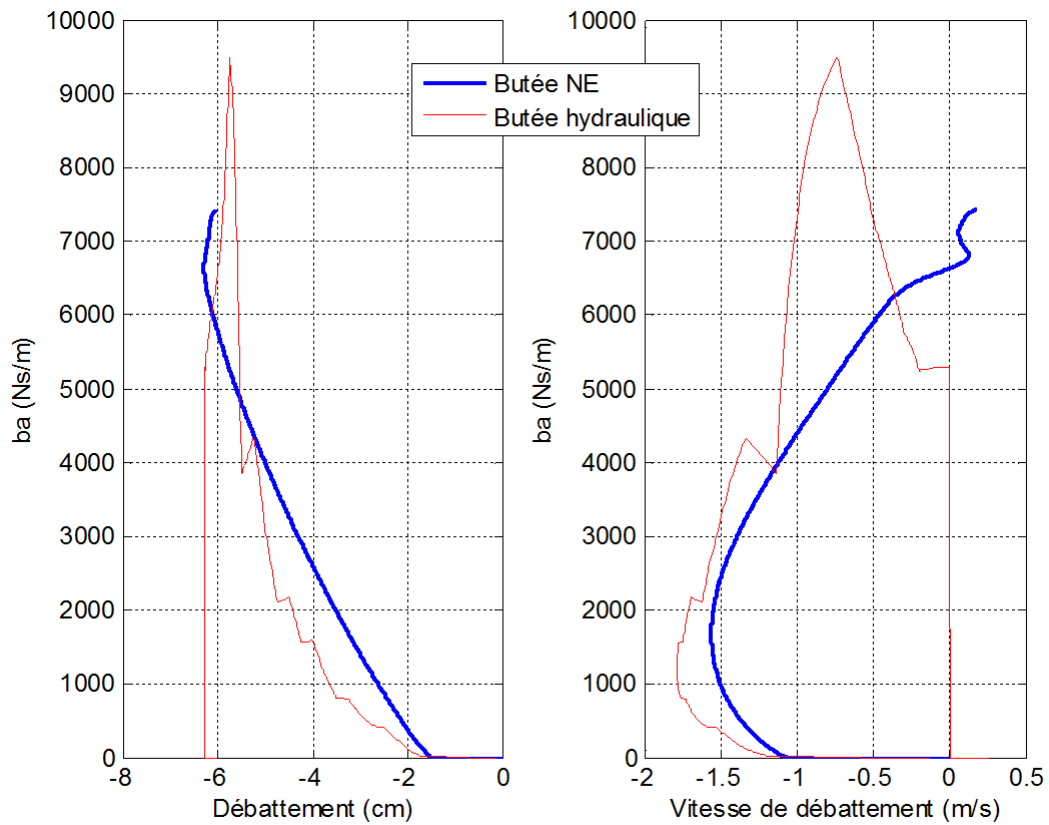


FIGURE 6.18 – Variations des coefficients de frottement visqueux apparents $b_{aNE}(t)$ de la butée non entière (en bleu) et $b_{aBH}(t)$ de la butée hydraulique (en rouge) en fonction du débattement (à gauche) et de la vitesse de débattement (à droite)



La figure 6.19 présente les variations des forces développées par la butée non entière (en **bleu**) et par la butée hydraulique (en **rouge**) en fonction du débattement (à gauche) et de la vitesse de débattement (à droite). Le maximum de la force développée par la butée non entière est bien inférieur à celui de la butée hydraulique, et ce pour une course identique pour les deux butées.

De plus, bien que le temps n'apparaisse pas de manière explicite sur les figures 6.18 et 6.19, il est à noter que les tracés correspondent aux réponses obtenues entre 1.35 s et 1.5 s.

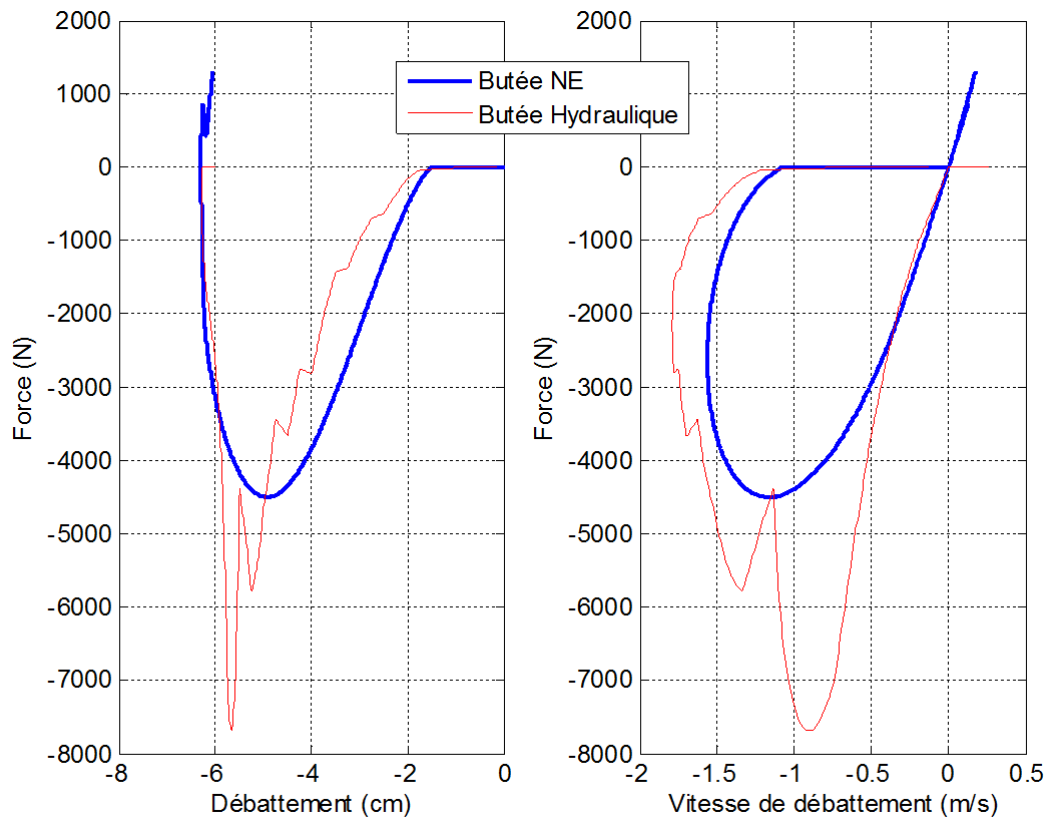


FIGURE 6.19 – Variations des forces développées par la butée non entière (en **bleu**) et par la butée hydraulique (en **rouge**) en fonction du débattement (à gauche) et de la vitesse de débattement (à droite)



La figure 6.20 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) avec la butée PU de série (à gauche) et la butée non entière (à droite).

Ces réponses illustrent, notamment, que le découplage entre la dynamique verticale de la roue et celle de la caisse n'est pas modifié par la présence de cette nouvelle butée fondée sur l'intégration non entière.

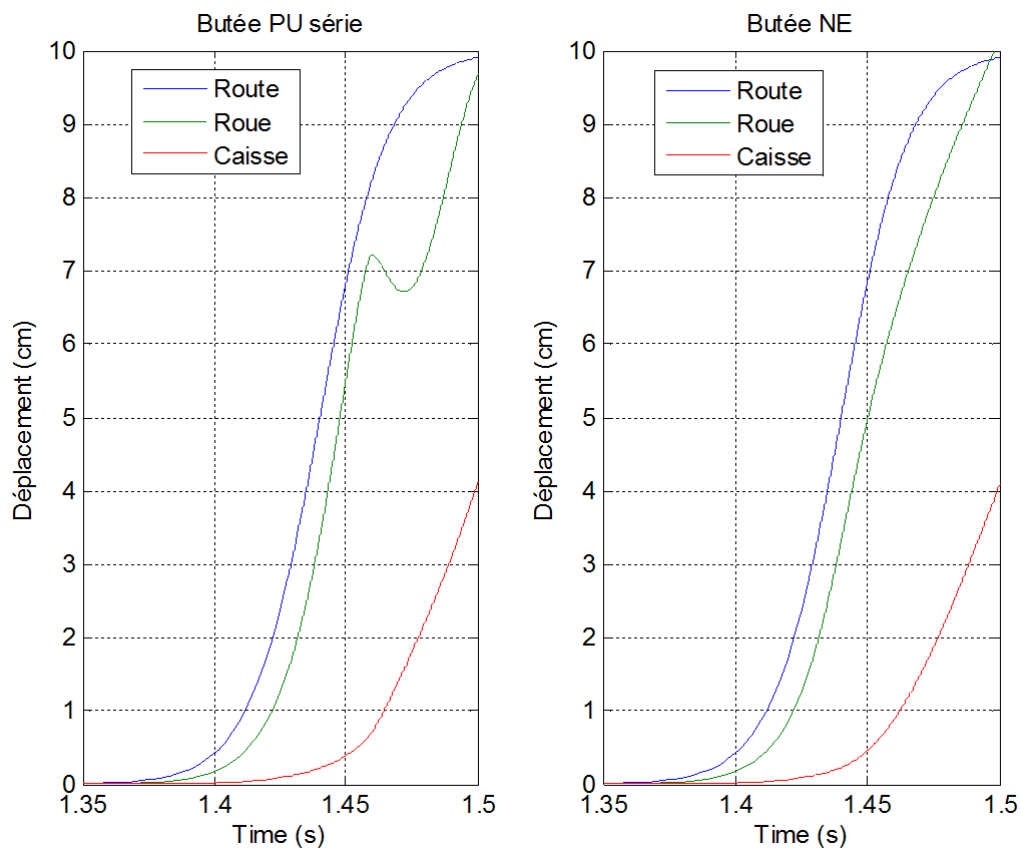


FIGURE 6.20 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière



La figure 6.21 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension obtenu avec la butée PU de série (à gauche) et la butée non entière (à droite).

Dans le cas de la butée non entière, on observe que l'état paramétrique optimal vis-à-vis de la minimisation de l'accélération verticale conduit à un fonctionnement qui exploite la totalité de la course de la butée (63 mm).

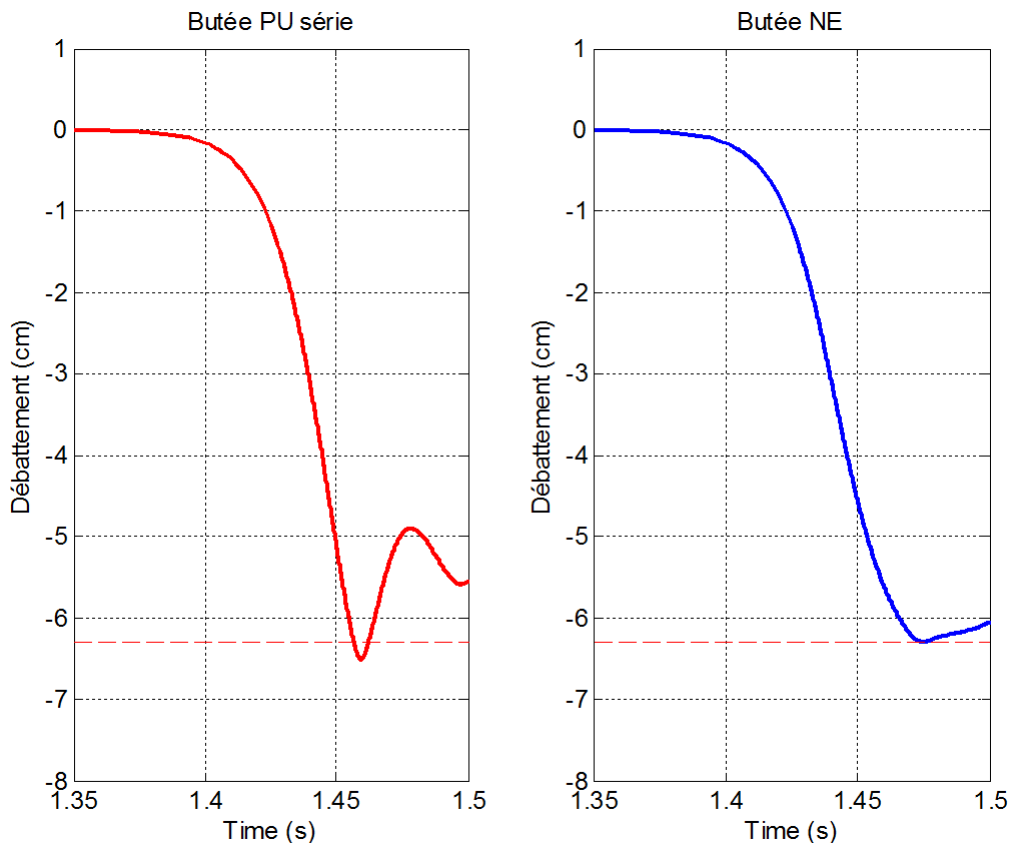


FIGURE 6.21 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension obtenu avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière

La figure 6.22 présente un zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge), la butée non entière (en bleu, trait épais) et la butée hydraulique (en bleu, trait fin).

En complément, et ce afin de faciliter l'analyse, la figure 6.23 présente le même zoom concernant l'effort développé par les butées PU de série (en rouge) et modifiée (en noir, traits pointillés), et la butée non entière (en bleu, trait épais).

En présence de la butée non entière, on observe un premier maximum de l'accélération verticale (figure 6.22) résultant du maximum de l'effort développée par la butée non entière elle-même (figure 6.23), puis un second maximum de l'accélération (de même valeur que le premier, figure 6.22) résultant du maximum de l'effort développée par la butée PU modifiée (figure 6.23) qui intervient en cas de contact de fin de course en complément de la butée dissipative.

Ainsi, l'accélération verticale maximale est diminuée d'un facteur 4 comparativement à celle obtenue avec la butée PU de série.

Il est à noter, pour le même domaine d'étude, qu'à partir d'une valeur de $m = 0.25$ (à



laquelle correspond $b_m = 341050Ns^{0.75}/m^2$) la butée PU modifiée n'intervient plus dans la mesure où il n'y a plus de contact de fin de course lors de la première phase de compression (cf. figure 6.14).

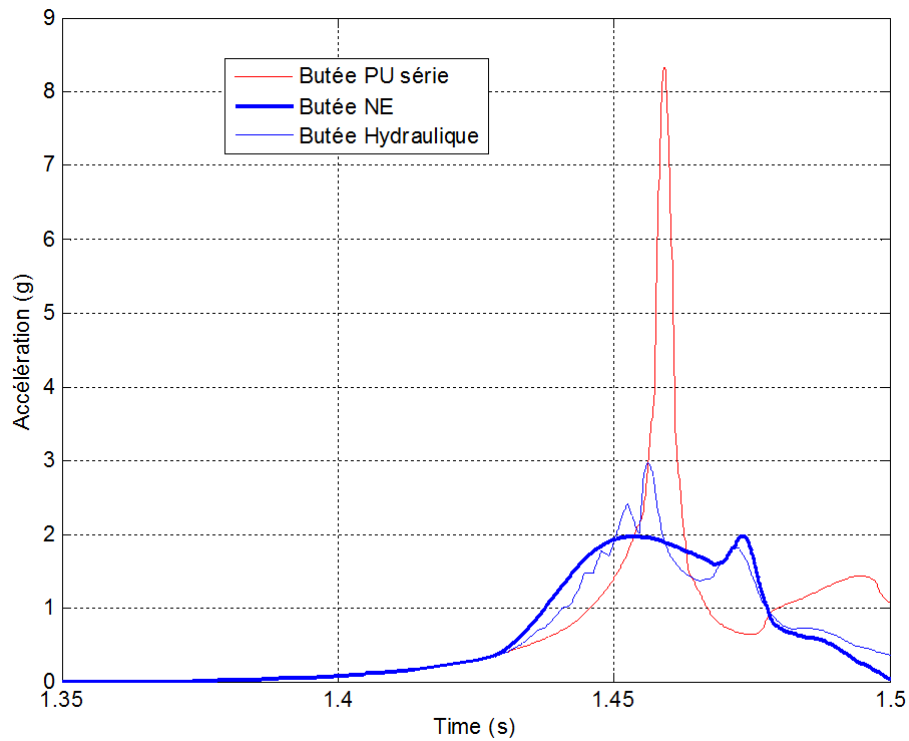


FIGURE 6.22 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge), la butée non entière (en bleu, trait épais) et la butée hydraulique (en bleu, trait fin)

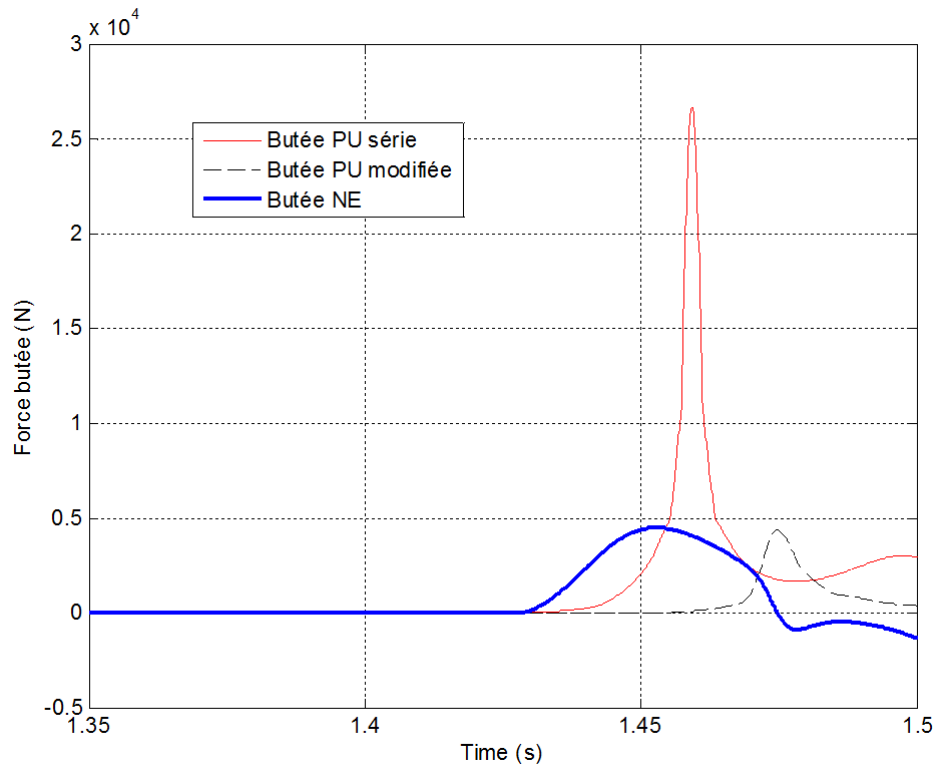


FIGURE 6.23 – Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'effort développé par les butées PU de série (en rouge) et modifiée (en noir, traits pointillés), et la butée non entière (en bleu, trait épais)



La figure 6.24 présente l'évolution dans les premiers instants de 1.35 s à 1.50 s des énergies E_{d1} (en bleu) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en vert) dissipée par les butées et E_d totale (en rouge) obtenues en présence de la butée hydraulique (à gauche) et de la butée non entière (à droite).

L'énergie totale dissipée sur cet intervalle est plus importante en présence de la butée non entière, cette différence étant principalement due au fait que la butée non entière elle-même dissipe plus que la butée hydraulique, et ce conformément aux spécifications du cahier des charges.

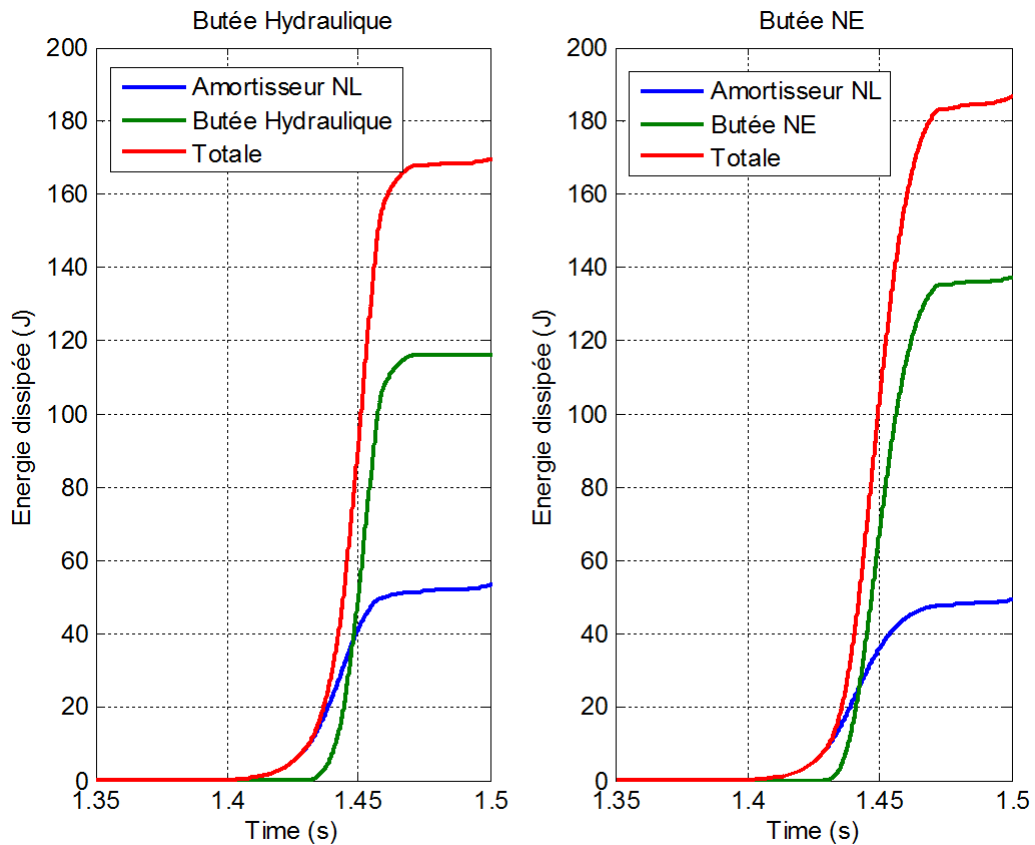


FIGURE 6.24 – Évolution dans les premiers instants de 1.35 s à 1.5 s des énergies E_{d1} (en bleu) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en vert) dissipée par les butées et E_d totale (en rouge) obtenues en présence de la butée PU hydraulique (à gauche) et de la butée non entière (à droite)



La figure 6.25 présente les régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec la butée PU de série (à gauche) et la butée non entière (à droite).

L'influence de la butée non entière sur les régimes transitoires de la caisse et de la roue apparaît de manière très significative, améliorant ainsi les tenues de roue et de caisse lors du franchissement d'un tel obstacle isolé. Cette amélioration se quantifie, notamment, par le nombre de cycles d'oscillations passant de 4 en présence de la butée PU de série à 1 en présence de la butée non entière.

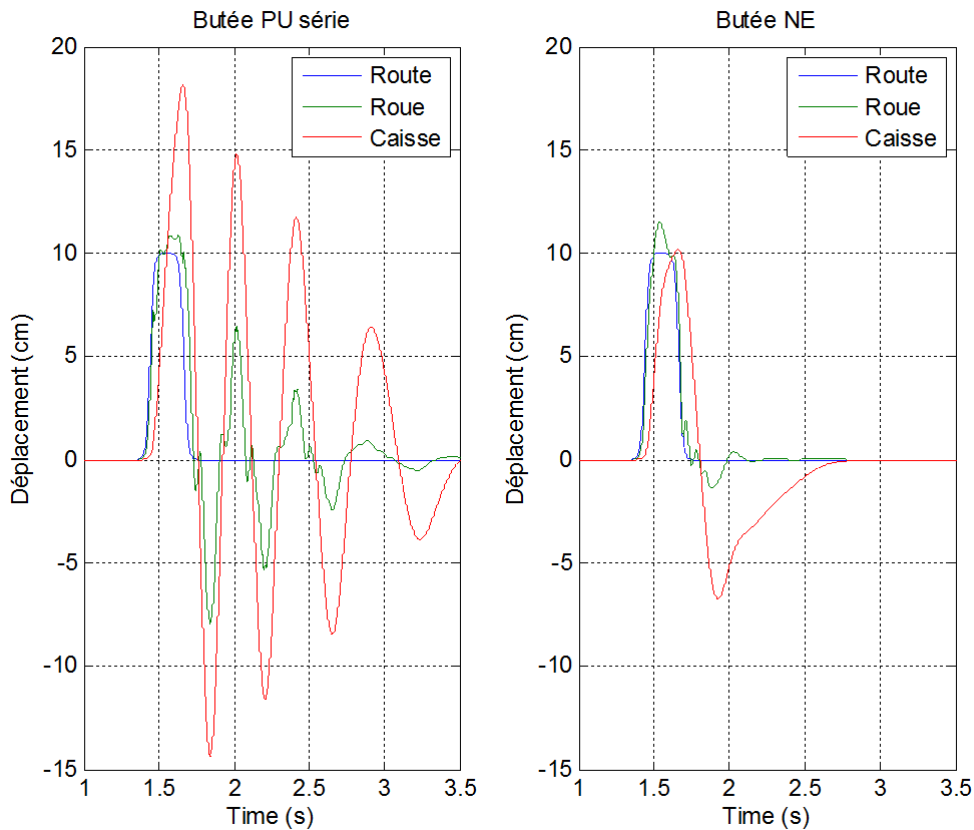


FIGURE 6.25 – Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière



Enfin, la figure 6.26 présente la totalité du régime transitoire du débattement de la suspension obtenue avec la butée PU de série (à gauche) et la butée non entière (à droite).

L'observation faite en ce qui concerne les régimes transitoires de la caisse et de la roue se retrouve évidemment au niveau du débattement de la suspension.

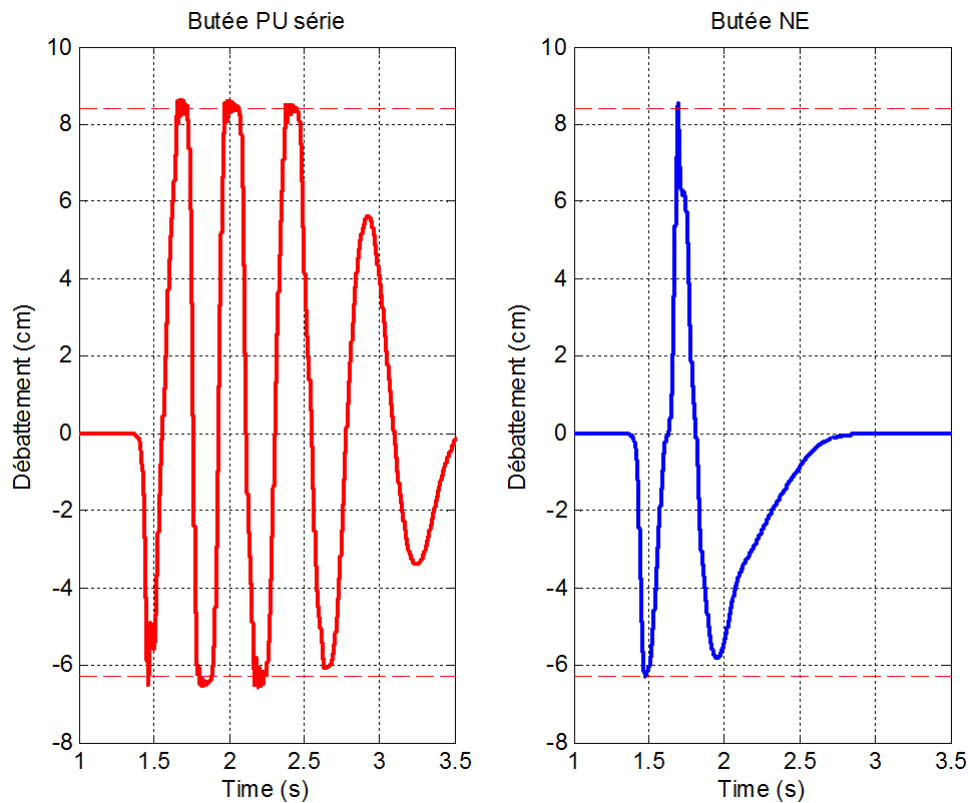


FIGURE 6.26 – Débattements de la suspension obtenus avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière

6.4 Conclusion :

Ce dernier chapitre définit à l'échelle fonctionnelle une butée dissipative innovante qui, non seulement intègre les avantages de la butée hydraulique présentée au chapitre 5 (la progressivité et le caractère dissipatif), mais aussi élargit son domaine de performance. La stratégie adoptée pour atteindre ce résultat s'articule autour de deux points : l'établissement d'un modèle de synthèse par réduction du modèle d'analyse, d'une part, et la définition du caractère dissipatif de la nouvelle butée étudiée, caractère fondé sur le concept d'intégration non entière, d'autre part. Ce second point permet d'exploiter la propriété de parcimonie paramétrique propre à l'opérateur intégral d'ordre non entier. En effet, seuls deux paramètres de synthèse de haut niveau sont nécessaires : l'ordre m et le terme de proportionnalité b_m . Compte tenu du degré de complexité du problème traité, la méthode de dimensionnement proposée combine à la fois une approche analytique qui exploite la réduction du modèle d'analyse et une approche numérique, permettant ainsi d'étudier la sensibilité des grandeurs physiques les plus significatives (forces, accélération, débattement, énergie dissipée) aux deux paramètres de synthèse de haut niveau. Cette analyse conduit à l'établissement de plusieurs critères de performance nécessaires pour déterminer de manière optimale les valeurs



numériques de m et b_m . Enfin, à titre d'illustration, l'état paramétrique optimal vis-à-vis du critère visant à minimiser l'accélération verticale de la masse suspendue conduit à des performances remarquables comparativement à la butée PU de série. En effet, non seulement l'accélération verticale maximale est réduite d'un facteur 4, mais les tenues de roue et de caisse sont améliorées, le nombre de cycles d'oscillations passant ainsi de 4 à 1.



Conclusion générale et perspectives

L'interprétation et la discussion des principaux résultats présentés dans ce mémoire de thèse font l'objet de la conclusion.

Le *chapitre 1* constitue un état de l'art concernant d'une part les différentes architectures de suspension et d'autre part les divers dispositifs de fin de course. Ce chapitre met également en place la problématique liée aux architectures de suspension des véhicules de tourisme dans le contexte d'études menées sur la biomécanique du corps humain.

Le *chapitre 2* constitue un second tutorial dans la mesure où il est consacré à la théorie des Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) avec les définitions et les interprétations de l'intégration d'ordre non entier. De plus, l'analyse de la dynamique des SDNE de 1ère et 2ème espèces met bien en évidence les propriétés les plus remarquables de ces systèmes. Ces résultats sont exploités au chapitre 3 avec une synthèse modale permettant de définir les paramètres de haut niveau de la suspension CRONE et au chapitre 6, là encore, pour définir les paramètres de synthèse de haut niveau de la butée innovante proposée.

Le *chapitre 3* s'inscrit dans la continuité des deux précédents avec un modèle et une démarche d'analyse appliqués à la suspension Hydractive de série, puis une démarche de synthèse appliquée à la suspension CRONE Hydractive présentés à l'aide des modèles réduits et déduits de l'exploitation du découplage dynamique.

Le *chapitre 4* s'inscrit dans le prolongement puisqu'à l'aide de deux modèles à 4 roues (l'un suspendu, l'autre non suspendu) et de trois situations d'essais auxquelles sont associées à la fois des entrées du conducteur et de la route, ce chapitre met en évidence que :

- la dynamique verticale a une influence sur la variation des appuis au sol $F_z(t)$;
- dans la zone linéaire du pneumatique, la variation des appuis n'a pas d'influence significative sur la dynamique horizontale, notamment sur l'agrément de conduite.

Le *chapitre 5* constitue une ouverture sur l'étude de l'influence des butées de fin de course de la suspension sur la dynamique verticale du véhicule.

Dans le cas d'une butée élastique, malgré de meilleures performances au niveau du premier choc, à l'échelle de tout le régime transitoire, l'influence de la progressivité de la butée PU n'entraîne pas une différence significative de comportement.

Dans le cas d'une butée hydraulique, dont le caractère dissipatif constitue une différence par rapport à une butée PU, au niveau du régime transitoire, les tenues de caisse et de roue sont largement améliorées.

Enfin, le *chapitre 6* poursuit vers une nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière. Ce dernier chapitre définit à l'échelle fonctionnelle une butée dissipative innovante et dont le domaine de performances est élargi.

Grâce au concept d'intégration non entière, qui permet d'exploiter la propriété de parcimonie paramétrique propre à l'opérateur intégro-différentiel d'ordre non entier, seuls deux paramètres de synthèse de haut niveau sont nécessaires : l'ordre m et le terme de proportionnalité b_m .

Les perspectives à moyen terme s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours, c'est-à-dire à la fois dans le cadre des Systèmes à Dérivées Non Entières et dans celui



des architectures complexes de suspension.

Ainsi, en matière de synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier telle que définie au chapitre 2 et dans le cadre de la simulation (numérique) temporelle des SDNE, une première perspective est de faire une étude comparative entre l'approche fréquentielle qui repose sur une distribution récursive de pôles et de zéros, et l'approche temporelle qui s'appuie sur une discrétisation modale de la représentation diffuse, et ce afin de mieux mettre en évidence l'intérêt et les limites de cette dernière approche. Une deuxième perspective concerne une extension de l'étude du comportement dynamique d'un système de deuxième espèce, tant d'un point de vue mathématique avec la résolution du polynôme caractéristique, que d'un point de vue de l'interprétation énergétique. En effet, l'analyse présentée au chapitre 2 se limite au niveau de l'équation différentielle à des ordres non entiers compris entre 0 et 1. Ce cas d'étude correspond, en matière d'interprétation du fractor associé, à un comportement de type "visco-élastique". L'extension à des ordres non entiers compris entre 1 et 2, qui d'un point de vue mathématique s'inscrit dans la continuité de ce qui est déjà présenté (la méthode de résolution proposée au chapitre 2 est toujours utilisable), conduit à un changement de causalité intégrale au niveau du fractor. En effet, d'un point de vue de l'interprétation énergétique, ce n'est plus l'effort généralisé qui est proportionnel à l'intégrale d'ordre non entier du flux généralisé, mais l'inverse. Le comportement est alors de type "visco-inertiel".

En matière d'architecture complexe de suspension, une perspective consiste à proposer une méthode de dimensionnement du mode ferme de la suspension Hydractive. En effet, jusqu'à présent, le dimensionnement du mode CRONE (confort) a toujours été fait à iso-mode ferme (tenue de route), c'est-à-dire que l'état ferme de la suspension CRONE Hydractive a toujours été choisi rigoureusement identique à celui de la suspension Hydractive de série utilisée dans le cadre de l'étude comparative.

En ce qui concerne la nouvelle génération de butée de fin de course fondée sur l'intégration non entière et définie à l'échelle fonctionnelle, la perspective est de poursuivre l'étude à l'échelle organique avec, d'une part, un choix d'une technologie et, d'autre part, l'établissement des relations entre les paramètres de synthèse de haut niveau et les paramètres technologiques, et ce afin d'assurer un continuum dans la démarche allant du concept à la réalisation.

Enfin, une dernière perspective, qui fait d'ores et déjà l'objet d'un prochain sujet de thèse dans le cadre de l'OpenLab PSA-IMS, est de proposer une solution technologique alternative à la suspension CRONE Hydractive en utilisant, notamment, des ressorts à lames.



Table des figures

1	i
2	Illustration des différentes solutions technologiques de la suspension CRONE .	ix
1.1	Décomposition du corps humain en système masses ressorts amortisseurs	5
1.2	Conducteur sur son siège	7
1.3	Modèle simplifié du système "Homme-siège-véhicule"	8
1.4	Exemples de suspensions traditionnelles contemporaines	9
1.5	Sphère de suspension hydropneumatique	10
1.6	Principe de fonctionnement de la suspension hydropneumatique traditionnelle	10
1.7	Amortisseur d'une suspension hydropneumatique	11
1.8	Moteur linéaire électromagnétique de la suspension BOSE	11
1.9	Architecture de la suspension BOSE	12
1.10	Illustration de la tenue de caisse pour un véhicule équipé d'une suspension hydraulique classique (à gauche) et le même véhicule équipé de la suspension BOSE (à droite)	13
1.11	Éléments constituant l'Active Wheel de Michelin	13
1.12	Dispositif de la suspension Hydractive bi-état	14
1.13	Implantation mécanique de la suspension CREUAT	15
1.14	Implantation hydraulique de la suspension CREUAT	15
1.15	Exemple d'un amortisseur classique avec butée PU	16
1.16	Exemple d'un amortisseur avec butée hydraulique SOBEN	17
1.17	Plan d'un amortisseur SOBEN avec butée hydraulique	18
1.18	Adéquation entre domaines de fonctionnement et domaines d'étude	22
1.19	Cycle en V pour la conception des éléments d'un véhicule	23
1.20	Modèle de validation réalisé sous Amesim®	24
1.21	Modèle de validation réalisé sous Matlab/Simulink	25
1.22	Véhicule Citroën C5 lors de tests sur un banc quatre vérins	25
1.23	Schématisation et paramétrage du modèle d'analyse $\frac{1}{4}$ véhicule	26
1.24	Éléments du pneumatique	28
1.25	Illustration des forces et moments appliqués à la roue	29
1.26	Angle de dérive du pneumatique	29
1.27	Angle de carrossage du pneumatique	30
1.28	Illustration des variables intervenant dans la formule du taux de glissement du pneumatique	30
1.29	Modèle boîte noire du pneumatique	31
1.30	Illustration du paramétrage de la formule magique de Pacejka	32



1.31	Exemple de variations des efforts d'un pneumatique ($f_x(a)$ et $F_y(b)$) en fonction de F_z pour différentes valeurs du taux de glissement (a) et de la dérive (b) . . .	34
2.1	Réponses fréquentielles (a) et impulsionnelles (b) d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2	40
2.2	Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli $h_m(t - \tau)$ dans le cas d'une intégrale d'ordre réel m tel que $0.1 < m < 1$	41
2.3	Schémas fonctionnels illustrant les relations de causalité des éléments C (a) et I (b)	42
2.4	Variations de $\mu_m(\omega)$ pour $0 < m < 1$ et $10^{-1}rad/s < \omega < 10rad/s$	43
2.5	Diagrammes asymptotiques de Bode d'un intégrateur non entier borné en fréquence	45
2.6	Schémas électriques et mécaniques composés d'un élément I et : d'un fractor (a et d), d'un capacitor (b et e), ou d'un resistor (c et f)	49
2.7	Schéma causal utilisé pour la simulation numérique	49
2.8	Schéma fonctionnel associé au schéma causal de la figure 2.7	50
2.9	Localisation des pôles dans le plan complexe	51
2.10	Facteur d'amortissement ζ en fonction de l'ordre n	52
2.11	Diagrammes de Bode de $H_1(s)$ avec $\omega_u = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de n	53
2.12	Facteur de résonance Q_{H_1} en fonction de l'ordre n (a) et en fonction du facteur d'amortissement ζ (b)	54
2.13	Lieux de Nichols en boucle ouverte avec $\omega_u = 1$ rad/s et pour $n = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ (a); marge de phase $M_\Phi(n)$ en fonction de l'ordre n (b)	55
2.14	Réponses impulsionnelles pour $\omega_u = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de n	56
2.15	Réponses indicielles pour $\omega_u = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de n	56
2.16	Illustration de la robustesse dans le plan complexe avec $n = 1.5$, $\zeta = 0.5$, $\omega_{u_{nom}} = 1$ rad/s (vert), $\omega_{u_{max}} = 2 \omega_{u_{nom}}$ (rouge) et $\omega_{u_{min}} = 0.5 \omega_{u_{nom}}$ (bleu)	57
2.17	Illustration de la robustesse du degré de stabilité en fonction des variations de ω_u ($\omega_{u_{nom}} = 1$ rad/s; $\omega_{u_{min}} = 0.5 \omega_{u_{nom}}$; $\omega_{u_{max}} = 2 \omega_{u_{nom}}$) pour $n = 1.5$: diagrammes de Bode de la boucle ouverte (a), lieux de Nichols en boucle ouverte (b); diagrammes de gain de la boucle fermée (c) et réponses indicielles (d)	58
2.18	Schémas "électrique" (a) et "mécanique" (b) composés d'un élément I en série avec un élément C et un fractor	59
2.19	Schéma causal utilisé pour la simulation numérique	60
2.20	Variation du module normalisé $\rho = r/\omega_0$ en fonction de θ et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)	63
2.21	Variation du facteur d'amortissement ζ en fonction de θ et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)	64
2.22	Lieux des racines avec $\omega_0 = 1$ rad/s et pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)	65
2.23	Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.25$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement: $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	67
2.24	Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement: $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	68



2.25 Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 0.75$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	69
2.26 Diagrammes de Bode de $H_2(s)$ avec $\nu = 1$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	70
2.27 Variation du facteur de résonance Q_{H_2} en fonction du facteur d'amortissement ζ , pour différentes valeurs de l'ordre ν : $\nu = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge) et 1 (noir)	71
2.28 Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.25$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	72
2.29 Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.5$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	73
2.30 Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 0.75$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	74
2.31 Réponses impulsionnelles (a) et indicielles (b) de $y(t)$ avec $\nu = 1$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement : $\zeta = 0.1$ (cyan), 0.25 (bleu), 0.5 (vert), 1 (rouge) et 2 (noir)	75
3.1 Modèles d'analyse 1/4 véhicule (a) : schématisation et paramétrage et (b) : schéma causal	81
3.2 Illustration concernant les fonctions $S_{ij}(s)$ de sensibilité	82
3.3 Diagrammes de Bode en échelle dB des transferts $T_{20}(s)$ (a) et $T_{10}(s)$ (b) pour un véhicule de tourisme	86
3.4 Modèles d'analyse 1/4 véhicule correspondant aux expressions des transferts $T_{20}(s)$ (a) et $T_{10}(s)$ (b) pour un véhicule de tourisme	87
3.5 Mode "ferme" (a) et mode "souple" (b) de la suspension Hydractive de série pour un quart de véhicule	89
3.6 Illustration du principe de fonctionnement de la suspension Hydractive de série	89
3.7 Complément d'illustration du principe de fonctionnement de la suspension Hydractive de série	90
3.8 Diagrammes de Bode des réponses fréquentielles $T_{20}(j\omega)$ (a) et $T_{10}(j\omega)$ (c), et réponses indicielles $z_2(t)$ (b) et $z_1(t)$ (d) obtenues avec les modèles à 2 ddl (en vert) et à 1 ddl (en bleu) dans le cas à vide en mode "souple"	91
3.9 Véhicule Citroën C5 lors de tests sur un banc quatre vérins	93
3.10 Mode "ferme" (a) et mode CRONE (b) de la suspension CRONE Hydractive pour un quart de véhicule	94
3.11 Copie d'écran du module spécifique de la Toolbox CRONE utilisé pour l'estimation des paramètres du mode CRONE de la suspension Hydractive	96
3.12 Réponses indicielles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à vide (en bleu), en charge (en vert))	98
3.13 Réponses indicielles du déplacement vertical de la roue à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à vide (en bleu), en charge (en vert))	99
3.14 Illustration du principe de fonctionnement de la suspension CRONE Hydractive	100
3.15 Mode "ferme" (a), mode "souple" (b) et mode "CRONE" (c) de la suspension Hydractive de série et hydractive CRONE pour un quart de véhicule	100
3.16 Diagrammes de Bode du transfert $sI_s(s)$ (à vide (en bleu), en charge (en vert))	102



3.17	Diagrammes de Bode de $T_{20}(j\omega)$ (à gauche) et réponses indicielles du déplacement vertical de la caisse à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à droite), (à vide (en bleu), en charge (en vert))	103
3.18	Diagrammes de Bode de $T_{10}(j\omega)$ (à gauche) et réponses indicielles du déplacement vertical de la roue à un saut échelon de la route d'amplitude 1 cm (à droite), (à vide (en bleu), en charge (en vert))	104
4.1	Diagramme des accélérations ($a_y; a_x$)	109
4.2	Définition des situations d'essai	110
4.3	Diagramme des accélérations ($a_y; a_x; a_z$)	111
4.4	Numérotation des 4 roues à l'image d'une matrice 2x2	111
4.5	Schématisme et paramétrage du modèle (vue de dessus)	112
4.6	Schématisme et paramétrage du modèle (vue de profil coté droit)	113
4.7	Paramétrage pour le calcul de la trajectoire	115
4.8	Caractéristiques statiques $F_x = f(\text{taux de glissement})$ des pneumatiques montés sur l'essieu avant (en haut) et sur l'essieu arrière (en bas) de la Citroën C5 à vide (en bleu) et en charge (en vert) sur route sèche	117
4.9	Caractéristiques statiques $F_y = g(\text{dérive})$ des pneumatiques montés sur l'essieu avant (en haut) et sur l'essieu arrière (en bas) de la Citroën C5 à vide (en bleu) et en charge (en vert) sur route sèche	118
4.10	Évolution de l'angle de braquage lors du changement de voie	120
4.11	Couples appliqués aux roues motrices (en haut) pour maintenir une vitesse constante $V_x = 90km/h$ et aux roues non motrices (en bas)	120
4.12	Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie) et de la route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	121
4.13	Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	122
4.14	Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	123
4.15	Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	124
4.16	Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	125
4.17	Évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	126
4.18	Trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (changement de voie) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	127



4.19	Couples appliqués aux roues de l'essieu avant (en haut) et à celles de l'essieu arrière (en bas)	128
4.20	Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	129
4.21	Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	130
4.22	Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (freinage) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	131
4.23	Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur (freinage) et route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche)	132
4.24	Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	133
4.25	Évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	134
4.26	Évolutions des efforts verticaux $F_z(t)$ des quatre pneumatiques en réponse aux entrées du conducteur (changement de voie et freinage) et de la route (variation de l'uni sous les roues du coté gauche) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	135
4.27	Évolutions des variations $f_z(t)$ des efforts verticaux autour de leur valeur statique en réponse aux entrées du conducteur et de la route obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	136
4.28	Évolutions des efforts transversaux $F_y(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	137
4.29	Évolutions des efforts longitudinaux $F_x(t)$ des quatre pneumatiques obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	138
4.30	Évolutions des vitesses longitudinale $V_x(t)$ et transversale $V_y(t)$ (en haut) et des accélérations longitudinale $a_x(t)$ et transversale $a_y(t)$ (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	139
4.31	Évolutions de l'angle de lacet (en haut) et de la vitesse de lacet (en bas) obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge)	140
4.32	Trajectoires obtenues avec le modèle suspendu (en bleu) et avec le modèle non suspendu (en rouge) en réponse aux entrées conducteur	141
5.1	Modèles d'analyse 1/4 véhicule (a) : schématisation et paramétrage et (b) : schéma causal	147
5.2	Exemple d'une caractéristique non linéaire Force-Vitesse de débattement mesurée sur banc d'essai d'un amortisseur de Citroën C3	148
5.3	Exemple d'une caractéristique non linéaire Force-Débattement mesurée sur banc d'essai d'une butée PU de Citroën C3	148



5.4	Exemple d'une caractéristique non linéaire Force-Vitesse-Débattement d'une butée hydraulique Soben	149
5.5	Paramétrage du profil géométrique $z_0(x)$ et exemple de tracé pour $h = 2\text{cm}$, $L = 4\text{m}$, $x_0 = 1\text{m}$ et $\alpha = 10^\circ$	150
5.6	Tracé de dz_0/dx pour $h = 2\text{cm}$, $L = 4\text{m}$, $x_0 = 1\text{m}$ et $\alpha = 10^\circ$	151
5.7	Profil géométrique $z_0(x)$ de l'obstacle isolé retenu pour l'analyse : $h = 10\text{cm}$, $L = 0.938\text{m}$, $x_0 = 6\text{m}$ et $\alpha = 25^\circ$	151
5.8	Profil horaire $z_0(t)$ de l'obstacle isolé obtenu lors d'un franchissement à la vitesse $v_x = 15\text{km/h}$ (en noir) et, à titre comparatif, celui d'un obstacle en $1/2$ sinus (en rouge)	152
5.9	Caractéristiques statiques Force-Débattement d'une butée PU série (en rouge) et d'une butée élastique (en bleu) de même raideur de fin de course mais sans progressivité	153
5.10	Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	154
5.11	Débattements de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	155
5.12	Accélérations verticales de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé avec (en rouge) la butée PU de série et (bleu) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	156
5.13	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	157
5.14	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenu avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	158
5.15	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu)	159
5.16	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le jerk vertical de la caisse obtenu avec la butée PU de série (en rouge) et la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité (en bleu)	160
5.17	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les variations des efforts $f_s(t)$ de la suspension (en bleu) et $f_{bute}(t)$ de la butée (en vert) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée élastique de même raideur de fin de course mais sans progressivité	161
5.18	Caractéristiques statiques Force-Débattement de la butée PU de série (en rouge) et d'une butée PU (en noir) développée spécifiquement en complément de la butée hydraulique	162
5.19	Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique	163



5.20	Débattements de la suspension obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique lors du franchissement de l'obstacle isolé	164
5.21	Accélérations verticales de la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)	165
5.22	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique	166
5.23	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les débattements de la suspension résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenus avec (a) la butée PU de série et (b) la butée hydraulique	167
5.24	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu) lors du franchissement de l'obstacle isolé	168
5.25	Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant la puissance transmise à la caisse résultant du franchissement de l'obstacle isolé obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)	169
5.26	Débattement (en haut) et vitesse de débattement (au milieu) en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz, et forces (en bas) développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$	171
5.27	Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en fonction de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz	172
5.28	Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en fonction du débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz	173
5.29	Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en rouge) et l'amortisseur linéaire (en noir) pour $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en fonction du débattement et de la vitesse de débattement en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz	174
5.30	Évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu), de l'amortisseur non linéaire (en rouge) et de l'amortisseur linéaire (en noir) où $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz	175
5.31	Evolution de la puissance dissipée par la butée hydraulique (en bleu), par l'amortisseur non linéaire (en rouge) et par l'amortisseur linéaire (en noir) $b_2 = 1000 \text{ Ns/m}$ en régime harmonique stationnaire à une fréquence de 4 Hz	176
5.32	Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en vert) et la butée PU (en rouge) en fonction du débattement lors du franchissement de l'obstacle isolé	177
5.33	Tracés des forces développées par la butée hydraulique (en bleu), l'amortisseur non linéaire (en vert) et la butée PU (en rouge) en fonction de la vitesse de débattement lors du franchissement de l'obstacle isolé	178
5.34	Zoom sur l'évolution des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu) et de l'amortisseur non linéaire (en vert) lors des instants du premier choc en compression résultant du franchissement de l'obstacle isolé	179



5.35	Variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu) et de l'amortisseur non linéaire (en vert) en fonction de la vitesse de débattement	180
5.36	Variations, obtenues lors du franchissement de l'obstacle isolé, des coefficients de frottement visqueux de la butée hydraulique (en bleu) et de l'amortisseur non linéaire (en vert) en fonction du débattement	181
6.1	Évolution dans les premiers instants des énergies cinétiques totale T (en bleu), T_1 de la roue (en noir) et T_2 de la caisse (en rouge) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)	186
6.2	Évolution dans les premiers instants des énergies potentielles d'élasticité : totale V_e (en bleu), V_{e1} (en noir), V_{e2} (en rouge) et V_{e3} (en vert) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)	187
6.3	Évolution dans les premiers instants de 1.35s à 1.5s des énergies E_{d1} (en bleu) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en vert) dissipée par la butée hydraulique et E_d totale (en rouge) obtenues en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)	189
6.4	Évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts, à savoir : $f_1(t)$ (en vert), $f_2(t)$ (en cyan), $f_{amort}(t)$ (en magenta), $f_{butée}(t)$ (en rouge pour la butée PU à gauche et en bleu pour la butée hydraulique à droite) et la force totale $fs(t)$ (en noir) transmise à la masse m_2	190
6.5	Évolution dans les premiers instants, de 1.35s à 1.50s, des différents efforts générés en présence de la butée PU de série (à gauche) et de la butée hydraulique (à droite)	191
6.6	Évolution de $a_2(t)$, de 1.35s à 1.50s, obtenue avec la butée PU de série (en rouge) et la butée hydraulique (en bleu)	192
6.7	Évolution des vitesses $v_1(t)$ de la roue (en rouge) et $v_2(t)$ de la caisse (en bleu), de 1.35s à 1.50s, obtenues avec la butée PU de série (à gauche) et la butée hydraulique (à droite)	193
6.8	Évolutions du débattement $z_{12}(t)$ de la suspension (en haut) et de sa vitesse de débattement $v_{12}(t)$ (au milieu) obtenues avec les butées PU de série (en rouge) et hydraulique (en bleu), tracés complétés (en bas) par ceux des efforts développés par la butée PU de série, la butée hydraulique et sa butée PU modifiée (en noir) qui lui est associée	194
6.9	Schématisme et paramétrage du modèle de synthèse	195
6.10	Zoom sur les premiers instants du profil $z_0(t)$ (en noir) de l'obstacle et des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue obtenus avec le modèle complet (modèle d'analyse) en présence de la butée élastique PU de série (en vert) et de la butée hydraulique (en rouge), et obtenu avec le modèle de synthèse réduit sans butée (en bleu)	196
6.11	Zoom sur les premiers instants des vitesses verticales $z_1(t)$ de la roue obtenues avec le modèle complet (modèle d'analyse) en présence de la butée élastique PU de série (en vert) et de la butée hydraulique (en rouge), et obtenue avec le modèle de synthèse réduit sans butée (en bleu)	197
6.12	Zoom sur les premiers instants du débattement de la suspension (en bleu) et du déplacement de la butée (en rouge) assimilable à une rampe de pente A_0 sur l'intervalle [1.428s; 1.450s]	198
6.13	Variation du terme de proportionnalité bm [N sv/m ²] en fonction de l'ordre non entier m à $iso - P_{dNE}(t_{ref}) = 2.5P_{dBH}(t_{ref}) = 1875W$ où $t_{ref} = 1.435s$	200



6.14 Variations en fonction de l'ordre m des grandeurs réduites : F_{bNE}^* (en rouge), F_{bPUm}^* (en magenta), Z_{12}^* (en bleu), A_2^* (en vert) et E_{dNE}^* (en noir)	202
6.15 Diagrammes de Bode de la forme rationnelle de l'intégrateur d'ordre $m = 0.21$ borné en fréquence	203
6.16 Évolutions de la puissance dissipée par la butée non entière (en bleu) et par la butée hydraulique (en rouge)	204
6.17 Évolutions des coefficients de frottement visqueux apparents $b_{aNE}(t)$ de la butée non entière (en bleu) et $b_{aBH}(t)$ de la butée hydraulique (en rouge) dans les premiers instants où les deux butées entre en action	205
6.18 Variations des coefficients de frottement visqueux apparents $b_{aNE}(t)$ de la butée non entière (en bleu) et $b_{aBH}(t)$ de la butée hydraulique (en rouge) en fonction du débattement (à gauche) et de la vitesse de débattement (à droite)	206
6.19 Variations des forces développées par la butée non entière (en bleu) et par la butée hydraulique (en rouge) en fonction du débattement (à gauche) et de la vitesse de débattement (à droite)	207
6.20 Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant les réponses des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenues avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière	208
6.21 Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant le débattement de la suspension obtenu avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière	209
6.22 Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'accélération verticale de la caisse obtenue avec la butée PU de série (en rouge), la butée non entière (en bleu, trait épais) et la butée hydraulique (en bleu, trait fin)	210
6.23 Zoom sur les instants du premier choc en compression concernant l'effort développé par les butées PU de série (en rouge) et modifiée (en noir, traits pointillés), et la butée non entière (en bleu, trait épais)	211
6.24 Évolution dans les premiers instants de 1.35 s à 1.5 s des énergies E_{d1} (en bleu) dissipée par l'amortisseur, E_{d2} (en vert) dissipée par les butées et E_d totale (en rouge) obtenues en présence de la butée PU hydraulique (à gauche) et de la butée non entière (à droite)	212
6.25 Régimes transitoires des déplacements verticaux $z_1(t)$ de la roue (en vert) et $z_2(t)$ de la caisse (en rouge) en réponse au franchissement de l'obstacle isolé (en bleu) obtenus avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière	213
6.26 Débattements de la suspension obtenus avec (à gauche) la butée PU de série et (à droite) la butée non entière	214



Bibliographie

- [Abi Zeid Daou et al. (2011a)] R. Abi Zeid Daou, X. Moreau, C. Francis, 2011, *Effect of hydro-pneumatic components nonlinearities on the CRONE suspension*, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 61, N°2, pp. 466-474.
- [Abi Zeid Daou et al. (2011b)] R. Abi Zeid Daou, 2011b, *Etude de l'influence des incertitudes sur le comportement d'un système dynamique non entier de 1^{ère} espèce*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1.
- [Altet (2004)] O. Altet, 2004, *Vers les systèmes dynamiques hybrides non entiers : application au contrôle global du châssis de véhicules équipés de la suspension CRONE Hydractive*, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 en collaboration avec PSA.
- [Aoun et al. (2004)] M. Aoun, R. Malti, F. Levron, A. Oustaloup, 2004, *Numerical Simulations of Fractional Systems : An Overview of Existing Methods and Improvements*, Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 117-131, Kluwer Academic Publishers.
- [Berthoz (1967)] A. Berthoz, 1967, *Effets biomécanique et physiologiques des vibrations sur l'homme*, Ingénieurs de l'automobile, - C.R.de la 7^{ème} Section Technique de la S.I.A.
- [Berthoz (1971)] A. Berthoz, 1971, *Le corps humain et les vibrations*, La Recherche, N°9 volume 2.
- [Berthoz (1992)] A. Berthoz, 1992, *Effet des vibrations sur l'Homme*, In Scherrer J : Précis de physiologie du travail, 2^{ème} édition, Masson édit.
- [BOSE (SiteWeb)] www.bose.com
- [Bohannan (2000)] J.P. Bohannan, 2000, *Application of Fractional Calculus to Polarization Dynamics in Solid Dielectric Materials*, Ph. D. Dissertation, Montana State University.
- [Brossard (2006)] J.P. Brossard, 2006, *Dynamique du véhicule : modélisation des systèmes complexes*, Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [BSI (1987a)] British standard Institution, 1987, *Measurement and evaluation of human exposure to the whole body mechanical vibration and repeated shocks*, BS 6841.
- [BSI (1987b)] British standard Institution, 1987, *Measurement and evaluation of human exposure to vibration transmitted to the hand*, BS 6842.
- [Canudas-de-Wit et al. (2003)] C. Canudas-de-Wit, P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset, G. Gisinger, 2003, *Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction*, Vehicle SystemDynamics, Vol 39 N° 3, p189-226, 2003.
- [Carriou (2010)] A. Carriou, 2010, *Étude cinématique d'un châssis de véhicule de compétition, optimisation des réglages à l'aide d'un modèle numérique et de mesures sur circuit*, Mémoire présenté en vue d'obtenir le Diplôme d'ingénieur CNAM.



- [Cois (2002)] O. Cois, 2002, *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1.
- [Connair et al. (1999)] K. Connair, M. Bodie, P. Chaumette, 1999, *Development of a Common Vehicle Model for Chassis Control Design*, SAE technical paper number 1999-01-0732.
- [CREUAT (SiteWeb)] www.creuat.com
- [Cucuz (1992)] S. Cucuz, 1994, *Evaluation of ride comfort*, Int.J of Vehicule Design, Vol 15, N°3/4/5, pp318-325.
- [Dauphin-Tanguy (2000)] G. Dauphin-Tanguy, 2000, *Les bond-graphs*, Edition Hermès, Paris.
- [Dignac (2011)] D. Dignac, 2011, *Guide de compréhension et de conception en trépidations*, PSA Peugeot Citroën.
- [Dugowson (1994)] S. Dugowson, 1994, *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris Nord.
- [Gäfvert (2005)] M. Gäfvert, J. Svendenius, 2005, *A novel semi-empirical tyre model for combined slips*, Vehicle System Dynamics, Vol. 43, No 5, May 2005, p351-384.
- [Gianguilio (2006)] E. Gianguilio, 2006, *14 d.o.f. VERTEC model, Vehicle Dynamic Simulator Implementation and validation*, 3rd International Colloquium on Vehicle-Tyre-Road Interaction, March.
- [Gillespie (1992)] T.D. Gillespie, 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamic*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA.
- [Griffin (1976)] M.J. Griffin, 1976, *Subjective equivalence of sinuzoidal and random whole body vibration*, Human Factors Research Unit, Institute of Science and Vibration Research, University of Southampton.
- [Griffin et al. (1977)] M.J. Griffin, E.M. Whitham, 1977, *Assessing the discomfort of dual-axis whole-body vibration*, Journal of Sound and Vibration, 54(1), 107-116.
- [Griffin (1986)] M.J. Griffin, 1986, *An objective method of assessing the vibration discomfort in vehicles*, Seminar international sur le confort, vol 39, N°3.
- [Griffin et al. (1988)] M.J. Griffin, K.C. Parsons, 1988, *Whole-body vibration perception thresholds*, Journal of sound and Vibration, 121(2), 237-258.
- [Griffin (1996)] M.J. Griffin, 1996, *Handbook of human vibrations*, ISBN : 0-12-303040-3, 1990.
- [Guglielmi et al. (1998)] M. Guglielmi, J.L. Levy-vehel, 1998, *Analysis and simulation of road profile by means of fractal model AVCS'98*, IEEE International Conference in Advances in vehicle Control Safety, Amiens, France.
- [Hartley et al. (2002)] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, 2002, *Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems*, Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 201-233, Kluwer Academic Publishers.
- [Hartley et al. (2007)] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, 2007, *Application of incomplete gamma functions to the initialization of fractional-order systems*, Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-35843, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7.
- [Hontschik et al. (1972)] H. Hontschik, I. Schmid, 1972, *Le siège élément de liaison entre l'Homme et la voiture automobile*, A.T.Z., N°4.
- [Hontschik et al. (1974)] M.J. Hontschik, H.J. Kinkel, 1974, *Étude des vibrations et ergonomie de différents types de sièges pour automobile*, A.T.Z., N°7, 1974.
- [INRS (2001)] INRS, 2001, *Vibrations, plein le dos*, Edition INRS, ED 864.
- [Institut Citroën (1994)] Institut Citroën, 2001, *L'Hydractive*, Cahier Expert n°4.



- [ISO 5349 (1986)] Norme Internationale, 1986, *Principes directeurs pour le mesurage et l'évaluation de l'exposition des individus aux vibrations transmises par la main*, ISO 5349.
- [Juricic (2004)] J. Juricic, 2004, *Virtual Test Driving*, Article published in *Vehicle Dynamics International*, Issue 2/2004, May.
- [Krishna (2011)] B.T. Krishna, 2011, *Studies on fractional order differentiators and integrators : a survey*, *Signal Processing*, Vol.91, pp. 386-426.
- [Kruczek et al. (2004)] A. Kruczek, A. Stribrsky, 2004, *A Full-Car Model for Active Suspension - Some Practical Aspects*, In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics*. Istanbul : Bogazici University.
- [Le Méhauté et al. (1998)] A. Le Méhauté, R. Nigmatullin, R. Nivanen, 1998, *Flèche du temps et géométrie fractale*, Édition Hermès, Paris.
- [Lin (2001)] J. Lin, 2001, *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [Lorenzo et al. (2007a)] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley, 2007a, *Initialization of fractional differential equations : background and theory*, *Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-34810*, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7.
- [Lorenzo et al. (2007b)] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley, 2007b, *Initialization of fractional differential equations : theory and application*, *Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-34814*, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7.
- [Malti et al. (2011)] R. Malti, P. Melchior, P. Lanusse, 2011, *Towards an object oriented toolbox for fractional systems*, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milan, Italy.
- [Margolis et al. (2001)] D. Margolis, S. Taehyun, 2001, *A bond graph model incorporating sensors, actuators, and vehicle dynamics for developing controllers for vehicle safety*, *Journal of the Franklin Institute* 338, pp. 21-34.
- [Matignon (1996)] D. Matignon, 1996, *Stability results on fractional differential equations with applications to control processing*, *Proceedings of Computational Engineering in Systems and Application Multiconference*, Vol.2, IMACS, IEEE-SMC, pp.963-968.
- [Matignon (1998)] D. Matignon, 1998, *Stability properties for generalized fractional differential systems*, *Systèmes Différentiels Fractionnaires, Modèles, Méthodes et Applications*, ESAIM, Vol.5.
- [Matignon et al. (2005)] D. Matignon, C. Prieur, 2005, *Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems*, *ESAIM, Control, Optimisation and Calculus of Variation*, Vol. 11, pp. 487-507.
- [Miller et al. (1993)] K.S. Miller, B. Ross, 1993, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication.
- [Momami (2004)] S. Momami, 2004, *Lyapunov stability solution of fractional integrodifferential equations*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol.7, pp. 2503-2507.
- [Moreau et al. (2002)] X. Moreau, C. Ramus-Serment, A. Oustaloup, 2002, *Fractional Differentiation in Passive Vibration Control*, *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, pp. 343-362, Kluwer Academic Publishers.
- [Moreau et al. (2012)] X. Moreau, R. Abi Zeid Daou, C. Francis, A. Oustaloup, P. Serrier, 2012, *Étude des non-linéarités des composants hydropneumatiques de la suspension CRONE*, *Journal Européen des Systèmes Automatisés, APII-JESA*, ISSN : 1269-6935, Vol. 46, N°1, pp. 7-39.



- [Moreau et al. (2012a)] X. Moreau, R. Rizzo, C. Mermoz, A. Létévé, P. Morand, P. Melchior, 2012, *Étude de l'influence de la dissymétrie du chargement sur de la tenue de route. Partie 1 : du modèle de validation au modèle d'analyse*, 7ème IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2012 - Grenoble, France, 4-6 Juillet.
- [Moreau et al. (2012b)] X. Moreau, R. Rizzo, C. Mermoz, A. Létévé, P. Morand, P. Melchior, 2012, *Étude de l'influence de la dissymétrie du chargement sur de la tenue de route. Partie 2 : analyse de la stabilité*, 7ème IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2012 - Grenoble, France, 4-6 Juillet.
- [Moze et al. (2005)] M. Moze, J. Sabatier, 2005, *LMI tools for stability analysis of fractional systems*, Proceedings of ASME 2005 IDET/CIE Conferences, Long-Beach, USA, pp.1-9, September 24-28.
- [Nouillant (2002)] C. Nouillant, 2002, *Contribution au pilotage coopératif des systèmes de liaisons au sol d'une automobile par commande hybride hiérarchies*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- [Oldham (1974)] K.B. Oldham, J. Spanier, 1974, *The fractional calculus*, Academic Press, New-York and London.
- [Olsen et al. (2008)] J. Olsen, J. Page, Z. Vulovic, 2008, *Initial Investigations Into Simulating An Open-Wheeler Racing Car*, SimTecT 2008.
- [Oustaloup (1995)] A. Oustaloup, 1995, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Edition Hermès, Paris.
- [Pacejka (2002)] H.B. Pacejka, 2002, *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth-Heinemann.
- [Palkovics et al. (1993)] L. Palkovics, M. El-Gindy, 1993, *Neural Network Representation of Tyre Characteristics : The NeuroTyre*, Int. J. Vehicle Des. 14, pp 563-591.
- [Parlement Européen (2002)] Parlement Européen, 2002, *Directive 2002/44/EC du Parlement européen et du conseil du 22 juin 2002 relatives aux exigences minimales d'hygiène et de sécurité relatives à l'exposition des employés à des risques résultants d'agents physiques (vibrations)*, seizième directive individuelle au sens de l'article 16(1) La Directive 89/391/EEC.
- [Podlubny et al. (2002)] I. Podlubny, I. Petras, B.M. Vinagre, P. O'Leary, L. Dorcak, 2002, *Analogue Realizations of Fractional-Order Controllers*, Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 281-296, Kluwer Academic Publishers.
- [Pollone et al. (1986)] A. Pollone, G. Veroni, 1986, *Accroissement du confort des véhicules automobiles par le contrôle des vibrations*, Fiat Auto, Torino.
- [Poinot et al. (2004)] T. Poinot, J.C. Trigeassou, 2004, *Identification of Fractional Systems Using an Output-Error Technique*, Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 133-154, Kluwer Academic Publishers.
- [Radt et al. (1983)] H.S. Radt, W.F. Milliken, 1983, *Non-dimensionalizing Tyre Data for Vehicle Simulation, Road Vehicle Handling*, Institute of Mechanical Engineering, C133/83.
- [Radt (1993)] H.S. Radt, D.A. Glemming, 1993, *Normalization of tire force and moment data*, Tire science and technology TSTCA. New York 93.
- [Ramus-Serment et al. (1993)] C. Ramus-Serment, X. Moreau, M. Nouillant, A. Oustaloup, F. Levron, 1993, *Generalised approach on fractional response of fractal networks*, Journal of Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 14, pp. 479-488.
- [Ripert (2006)] J.P. Ripert, 2006, *Modélisation et identification paramétrique de l'effort de contact pneumatique/sol pour la dynamique véhicule*, Thèse de doctorat en automatique, robotique et traitement du signal.



- [Rizzo (2012)] A. Rizzo, 2012, *L'approche CRONE dans le domaine des architectures complexes de suspensions de véhicules automobiles : la suspension CRONE Hydractive*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- [Sabatier et al. (2006)] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragotand, P. Roy, 2006, *Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation*, Signal Processing 86 (10), pp. 2645-2657.
- [Sabatier et al. (2008)] J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti, A. Oustaloup, 2008, *How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system ?*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 15, No 5, 1318-1326.
- [Sabatier et al. (2010)] J. Sabatier, M. Moze, C. Farges, 2010, *LMI stability conditions for fractional order systems*, Computers & Mathematics with Applications, Vol.(59) N° 5, 1594-1609.
- [Samko et al. (1993)] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, 1993, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [Schuring et al. (1994)] A. Schuring, W. Pelz, M. Pottinger, 2012, *The BNPS Model - An Automated Implementation of the "Magic Formula" concept*, Society of automotive engineers, SP-1016, Feb 1994.
- [Serrier et al. (2007)] P. Serrier, X. Moreau, A. Oustaloup, 2007, *Limited-Bandwidth Fractional Differentiator : Synthesis and Application in Vibration Isolation*, Chapter in Advances in Fractional Calculus, Springer Edition, pp. 287-302.
- [Serrier (2008)] P. Serrier, 2008, *Analyse de l'influence des non-linéarités dans l'approche CRONE : Application en isolation vibratoire*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- [Soben (SiteWeb)] www.sobenracing.com
- [Trigeassou et al. (1999)] J.C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup, F. Levron, 1999, *Modeling and identification of a non integer order system*, Proceedings of ECC'99, European Control Conference, Karlsruhe, Germany.
- [Trigeassou et al. (2011)] J.C. Trigeassou, N. Maamri, 2011, *Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations*, Signal Processing, Vol. 91, N. 3, March.
- [Venture (2003)] E. Venture, 2003, *Identification des paramètres dynamiques d'une voiture*, thèse de doctorat de l'École Centrale de Nantes.
- [Vercelotti (1986)] E. Vercelotti, 1986, *Human Response to Vibrations, Applicability of modern knowledge to motor vehicle ergonomics*, Motor industry Research Association.
- [Zin (2002)] A. Zin, 2002, *Investigation de la modélisation des phénomènes de dérive du pneumatique de l'automobile dans le contexte de la représentation Bond Graph*, rapport DEA Automatique, LAI, tutelle : W. Marquis-Favre.