



**HAL**  
open science

# Essais sur la Diversification des Portefeuilles Financiers et des Fonds Structurés de Crédit : Une Approche en termes de copules

Abdallah Ben Saida

► **To cite this version:**

Abdallah Ben Saida. Essais sur la Diversification des Portefeuilles Financiers et des Fonds Structurés de Crédit : Une Approche en termes de copules. Economies et finances. Université de Cergy Pontoise; Université de Sfax. Faculté des sciences économiques et de gestion, 2014. Français. NNT : 2014CERG0705 . tel-01144258

**HAL Id: tel-01144258**

**<https://theses.hal.science/tel-01144258>**

Submitted on 21 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE  
U.F.R. ECONOMIE et GESTION - THEMA

**ESSAIS SUR LA DIVERSIFICATION DES PORTEFEUILLES  
FINANCIERS ET DES FONDS STRUCTURES DE CREDIT :  
UNE APPROCHE EN TERMES DE COPULES**

**THESE**

*pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR EN SCIENCES de GESTION**

*(arrêté du 30 mars 1992)*

*Présentée et soutenue publiquement 10 Décembre 2014*

*par*

**M. Abdallah BEN SAIDA**

**JURY**

**Directeur de thèse :** **Monsieur Jean-Luc PRIGENT**  
Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise

**Rapporteurs :** **Monsieur Bertrand MAILLET**  
Professeur à l'Université de la Réunion

**Monsieur Olivier SCAILLET**  
Professeur à HEC Genève

**Examineur :** **Monsieur Mondher BELLALAH**  
Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise

« La recherche procède par des moments distincts et durables,  
intuition, aveuglement, exaltation et fièvre.  
Elle aboutit un jour à cette joie,  
et connaît cette joie celui qui a vécu des moments singuliers » .  
**Albert Einstein**  
*Comment je vois le monde (1934)*

## REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, c'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, le professeur Jean-Luc PRIGENT, pour avoir dirigé cette thèse, m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions, pour ses conseils et remarques avertis, et enfin pour la confiance qu'il m'a témoignée en me laissant une grande autonomie quant aux orientations de mes travaux. J'espère avoir été digne de cette confiance et que ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Quoi qu'il en soit, j'ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honoré d'avoir finalisé ce projet sous ses directives.

Je remercie très chaleureusement les deux rapporteurs de ma thèse, les professeurs Bertrand MAILLET et Olivier SCAILLET, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse en dépit de leurs nombreuses occupations. Je remercie également le professeur Mondher BELLALAH pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de siéger comme président de jury.

Merci à tous les membres du laboratoire THEMA pour leur accueil. Je remercie tout particulièrement mes collègues de bureau Cigdem, Celine, Lionel et Mehdi pour avoir vécu les différentes étapes de cette aventure. A Jeremy, Kim, Emeline, Delphine, Samia, Louis et les autres que j'ai peut être oubliés, je leur souhaite toute la réussite possible. Merci à vous !

A mes amis, Nouredine, Naceur, Sami, Hechmi, Farid, Wafa et Hanen, je tenais à vous faire part de toute mon estime et de tout mon respect. Vous étiez pour moi chacun à votre manière une source de soutien et de motivation. Nous avons partagé ensemble ces dernières années des moments inoubliables, qu'il nous faudrait autant de thèses à chacun pour les recueillir. Un grand merci.

A mes grand-pères, partis trop tôt, des hommes de caractères, de conviction, des hommes généreux et tels que, grandir dans leur sillage, ne peut que sculpter la personnalité et apprendre l'humilité. Je pense à vous.

A mon père et ma mère, leurs présences et leurs encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que j'entreprends. Qu'ils trouvent dans cette thèse le fruit de leurs sacrifices inépuisables. A mon frère et mes sœurs, Atef, Jouda et « Hafsouti » j'ai beaucoup de chance de vous avoir. Sachez que je vous aime tous.

A mes amis de toujours, en France comme en Tunisie, qui même loin restent présents.

Enfin, je remercie ma chère épouse pour tout son amour, sa présence au quotidien et son soutien sans faille. Tout simplement je t'aime. . . .

## Table des matières

Table des figures	3
Liste des tableaux	5
Introduction Générale	9
<b>partie 1. GESTION DE PORTEFEUILLE</b>	<b>16</b>
Chapitre 1. Généralités sur les Mesures de Risque, la Théorie de Portefeuille et la Diversification	17
1. Introduction	17
2. Décisions en situation d'incertitude et mesures de risque	19
3. Théorie du portefeuille et diversification	27
4. Conclusion	35
Chapitre 2. Diversification et Choix de Copules	36
1. Introduction	36
2. Les fonctions copules : Définitions et calibrage	38
3. Littérature sur l'utilisation des fonctions copules en finance	50
4. Les mesures de diversification	52
5. Illustration empirique	58
6. Conclusion	67
7. Annexes	68
Chapitre 3. Robustesse des Mesures de Risque Value-at-Risk et Expected-Shortfall dans le Cadre d'un Modèle GARCH-Copule Dynamique	72
1. Introduction	72
2. Revue de littérature	74
3. Estimation de la Value-at-Risk et de L'Expected-Shortfall	78
4. Etude de simulation	82
5. Illustration empirique	95
6. Conclusion	111
Chapitre 4. Robustesse de l'Allocation de Portefeuille en Présence d'une Copule Mal Spécifiée	112
1. Introduction	112
2. Revue de littérature	114
3. Présentation du modèle et programme de l'investisseur	118
4. Etude de simulation	123
5. Validation empirique	137
6. Conclusion	155

<b>partie 2. RISQUE DE CREDIT</b>	<b>156</b>
Chapitre 5. Risque de Crédit et Modélisation de la Dépendance des Défauts : Aperçu Théorique	157
1. Introduction	157
2. Le risque de crédit	157
3. Modèles de portefeuilles et modélisation de la dépendance	165
4. Conclusion	173
Chapitre 6. Un Modèle Actuariel pour la Mesure du Risque au Niveau d'un Portefeuille de Crédit : Une Approche en termes de Copules	174
1. Introduction	174
2. Méthodologie	175
3. Le modèle pour le défaut et la migration de crédit	175
4. La distribution de perte	179
5. Application	181
6. Conclusion	195
7. Annexes	196
Chapitre 7. A Propos du Score de Diversité	198
1. Introduction	198
2. Score de diversité et CDOs : Une synthèse	200
3. Score de diversité et extensions	203
4. Modélisation de la dépendance avec les copules	211
5. La prise en compte des effets de contagion	223
6. L'estimation du processus ponctuel modélisant la contagion	226
7. Calcul du score de diversité	232
8. Conclusion	233
Annexes	234
Chapitre 8. Conclusion Générale	240
Bibliographie	243

## Table des figures

1	VaR et CVaR sur une distribution de pertes d'un portefeuille	27
1	Diagramme quantile-quantile	60
2	Régressions : Mesures de diversification	61
3	Dépendance des quantiles	63
4	Résultats de la régression "IDP"	71
1	Séries de rendements et évolution relative	96
2	Estimation de la VaR et de l' ES	100
3	Exigences en Capital Réglementaire (MRC)	109
1	Fonction d'utilité de l'investisseur	122
2	Richesse finale relative : Cas "EW" ; Horizon 1 mois	132
3	Richesse finale relative : Cas "EW" ; Horizon 12 mois	132
4	Richesse finale relative : Cas "MV" ; Horizon 1 mois	133
5	Richesse finale relative : Cas "MV" ; Horizon 12 mois	133
6	Richesse finale relative : Cas "SRP" ; Horizon 1 mois	134
7	Richesse finale relative : Cas "SRP" ; Horizon 12 mois	134
8	Séries de rendements et évolution relative	138
9	Composition du fonds : "vrai modèle"	144
10	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds EW ; Rebalancement mensuel	146
11	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds MV ; Rebalancement mensuel	146
12	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds SRP ; Rebalancement mensuel	147
13	Allocation optimale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon = 1 mois	147
14	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 1 mois	148
15	Richesse terminale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 1 mois	148
16	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds EW ; tous les modèles	149
17	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds MV ; tous les modèles	149

18	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds SRP ; tous les modèles	150
19	Composition du Fonds : "Vrai modèle" ; Horizon= 3 mois	151
20	Allocation optimale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon = 3 mois	152
21	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds EW ; rebalancement trimestriel	152
22	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds MV ; rebalancement trimestriel	153
23	Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds SRP ; rebalancement trimestriel	153
24	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 3 mois	153
25	Richesse terminale : Cas du "vrai modèle" ; rebalancement trimestriel	154
26	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds EW ; Horizon = 3 mois ; tous les modèles	154
27	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds MV ; Horizon = 3 mois ; tous les modèles	155
28	Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds SRP ; Horizon = 3 mois ; Tous les modèles	155
1	Dépendance des quantiles : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa Vs Ba ; Allemagne	185
2	Dépendance des quantiles : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa Vs Ba ; France	185
1	Score de diversité pour la copule gaussienne et de Student en fonction de Rho	217
2	Score de diversité et copules	218
3	Score de diversité pour les copules $\pi=0.005$	219
4	Impact des probabilités de défaut	219
5	Scores de diversité et copules versus Moody's (échantillon global)	220
6	Scores de diversité versus la forme réduite de Moody's	221
7	Somme des carrés des erreurs en p et queue de distribution inférieure	222



## Liste des tableaux

1	Score de Diversité de Moody's	58
2	Score de Diversité d'un portefeuille	58
3	Diversification et choix de Copules : GoF test	66
4	Diversification et choix de Copules : Pourcentage d'adéquation	66
5	Statistiques descriptives : Secteur Automobile	68
6	Statistiques descriptives : Secteur Energie	69
7	Statistiques descriptives : Secteur Finance et Assurance	70
8	Statistiques descriptives : Secteur Télécommunications	71
1	Statistiques descriptives des données simulées	88
2	Statistiques descriptives : Vrai modèle	90
3	Statistiques descriptives : Copule Gaussienne	90
4	Statistiques descriptives : Copule de Clayton	90
5	Statistiques descriptives : Copule de Gumbel	90
6	Statistiques descriptives : Marginales gaussiennes	91
7	Pourcentages des exceptions sur la VaR : Cas EW	92
8	Pourcentages des exceptions sur la VaR : Cas MV	92
9	VaR moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas EW	94
10	VaR moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas MV	94
11	ES moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas EW	94
12	ES moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas MV	95
13	Statistiques descriptives des indices	96
14	Résultats de l'estimation des paramètres : Spécification GJR-GARCH-N	97
15	Résultats de l'estimation des paramètres : Spécification GJR-GARCH-SkT	97
16	Estimation des paramètres des fonctions Copules et Gof test	99
17	Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.95 ; portefeuille EW	105

18	Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.99 ; portefeuille EW	105
19	Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.95 ; portefeuille MV	106
20	Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.99 ; portefeuille MV	106
21	Fonction de pertes : Blanco et Ihle ; portefeuille EW	107
22	Fonction de pertes : Blanco et Ihle ; portefeuille MV	107
23	Fonction de pertes : Caporin ; portefeuille EW	108
24	Fonction de pertes : Caporin ; portefeuille MV	108
25	VaR moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille EW	109
26	ES moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille EW	110
27	VaR moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille MV	110
28	ES moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille MV	110
1	Statistiques descriptives : Rendements simulés	120
2	Composition de l'actif risqué	126
3	Allocation optimale : "Vrai modèle"	127
4	Allocation optimale : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 1 mois	128
5	Allocation optimale : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 12 mois	129
6	Mesure de performance : Farinelli-Tibelli ; cas du "vrai modèle"	135
7	Mesure de Performance : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 1 mois	136
8	Mesure de Performance : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 12 mois	137
9	Statistiques descriptives	139
10	Résultats des estimations : Spécification GJR-GARCH-N	141
11	Résultats des estimations : Spécification GJR-GARCH-Sk-T	142
12	Choix de copules : Résultats du test d'adéquation	143
1	Statistiques descriptives : Rating Aaa ; Allemagne	183
2	Statistiques descriptives : Rating Baa ; Allemagne	183
3	Statistiques descriptives : Rating Ba ; Allemagne	184
4	Statistiques descriptives : Rating Aaa ; France	184
5	Statistiques descriptives : Rating Baa ; France	184
6	Statistiques descriptives : Rating Ba ; France	185

7	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa ; Allemagne	186
8	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Baa ; Allemagne	186
9	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Ba ; Allemagne	187
10	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa ; France	187
11	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Baa ; France	188
12	Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Ba ; France	188
13	Structure par terme des taux Spot	189
14	Structure par terme des taux Forward	189
15	Valeur actuelle et Valeur forward avec non changement dans la qualité de crédit ; Cas Allemagne	189
16	Valeur actuelle et Valeur forward avec non changement dans la qualité de crédit ; Cas France	190
17	Données relatives aux taux de hazard	190
18	Matrice de transition : Source Moody's 2010	191
19	Bandes de Migration pour les "temps jusqu'au défaut"	191
20	Valeur forward en t1 pour le portefeuille d'expositions notées Ba ; France	191
21	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating A ; Allemagne	193
22	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Baa ; Allemagne	193
23	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Ba ; Allemagne	194
24	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating A ; France	194
25	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Baa ; France	194
26	VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Ba ; France	194
27	Caractéristiques Aaa Rating ; Allemagne	196
28	Caractéristiques Baa Rating ; Allemagne	196
29	Caractéristiques Ba Rating ; Allemagne	196
30	Caractéristiques Aaa Rating ; France	196
31	Caractéristiques Baa Rating ; France	197
32	Caractéristiques Ba Rating ; France	197

1	Nombre de firmes et score de diversité de Moody's	204
---	---	-----

## Introduction Générale

La multiplication des risques est au cœur même de l'activité économique et financière. De nos jours, la prise en compte de ces sources de risque impose de nouvelles mesures quant à la détermination du contrôle et à la gestion de ces risques, tant pour les organismes publiques, que pour les institutions privées, telles que les compagnies d'assurance, les fonds de pension et les banques.

L'effondrement du célèbre fonds spéculatif LTCM, qui a englouti plus de 2 milliards de dollars, est un parfait exemple de la nécessité de mieux appréhender et contrôler ces situations extrêmes. Récemment encore, la crise financière de 2008, qui a touché l'ensemble de marchés financiers à l'échelle mondiale, ne cesse de peser sur la croissance de pays majeurs. Alors que les exemples se multiplient et ont tendance à se ressembler, il devient de plus en plus nécessaire de se doter d'outils et de normes permettant de mieux appréhender les risques qui se développent sur les marchés financiers. Les instances bancaires mondiales, pleinement conscientes de cette nécessité, ont trouvé utile de dresser des barrières restrictives. Ceci peut être appréhendé au travers des multiples recommandations du comité de Bâle (1996, 2004, et récemment Bâle III), dont le but est de restreindre le champ d'exposition aux risques des institutions financières en laissant plus de place aux méthodes internes de contrôle et de gestion, et en introduisant un processus de surveillance prudentielle tout en renforçant la discipline de marché.

Au rythme soutenu où les sources de risque sur les marchés financiers se développent d'un jour à l'autre, il est impératif de les cerner au sein de catégories bien définies, afin notamment de mieux appréhender les décisions traitant de leurs modes de gestion. Dans ce sens, on parle de nos jours de trois grandes catégories de source de risque : le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel en distinguant récemment de plus le risque de liquidité et le risque de contrepartie.

La première source de risque est celle qui traite du risque de crédit, risque bancaire par excellence. En première approximation, le risque de crédit peut être défini comme le risque de perte lié au changement de la qualité de la signature d'une contrepartie. La catégorie traitant du risque du marché peut être définie comme étant le risque de perte liée aux variations des conditions du marché (prix, taux d'intérêt, taux de change...). La gestion de ce type de risque est devenue relativement aisée, suite à une littérature abondante qui a débouché sur une modélisation plus réaliste de ces risques, notamment pour ce qui est des modèles de taux d'intérêt. La troisième catégorie relative au risque opérationnel est liée au risque de pertes résultant "de carences ou

de défaillance attribuables à des procédures, personnels et systèmes internes ou à des événements extérieurs."

Au sein de ces trois grandes catégories de risque, on peut distinguer des risques plus spécifiques tels que le risque de liquidité qui est souvent perçu comme le risque de ne pas pouvoir mobiliser à un instant donné assez de liquidité et ainsi de ne pas faire face à ses engagements ; le risque de contrepartie où l'établissement avec lequel un accord a été conclu fait défaut lui-même. Ces deux dernières catégories sont appréhendées dans le cadre d'une catégorie de risque plus concrète (risque du marché, risque de crédit).

Etant donné cette panoplie des sources de risque, pour une institution financière, on peut envisager deux cas de figure : le cas où ces risques se manifestent individuellement (la gestion de ces risques se ramène à une gestion classique qui traite chaque catégorie à part) ; le cas le plus extrême, lorsque ces risques se manifestent mutuellement (on pense alors au mode de gestion approprié qui ne peut être traité que si on envisage une méthode d'agrégation globale de risque). Ainsi, l'enjeu auquel font face ces institutions financières est de se doter de tous les moyens susceptibles de mieux capturer les irrégularités des marchés financiers, ce qui permet ainsi de faire face à ces deux sources de risques aussi importantes l'une que l'autre.

L'objet fondamental de la gestion de portefeuille est d'améliorer la qualité globale dudit portefeuille, au moyen de diverses méthodes d'optimisation qui peuvent se baser par exemple sur le concept de diversification cher à Markowitz voire même sur des techniques d'assurance de portefeuille appropriées. Pour ce faire, il est nécessaire de se doter d'un "bon" modèle pour représenter les diverses "corrélations" des actifs utilisés pour composer le portefeuille, ce qui doit permettre de mesurer l'impact d'une stratégie donnée sur la qualité du portefeuille. La théorie moderne de portefeuille, que l'on doit à son "inventeur" Harry Markowitz (1952), permet de proposer des éléments de réponse à cette problématique. L'enseignement majeur de la théorie de Markowitz est le rôle fondamental joué par la diversification dans la réduction du risque et dans l'amélioration de la qualité des portefeuilles. L'impact des corrélations pour parvenir à atteindre cet objectif est capital, étant donné que la variance, adoptée à partir de Markowitz comme mesure naturelle du risque, n'est autre qu'une somme pondérée des variances mais aussi des covariances qui se trouvent entre les paires des facteurs de risque composant le portefeuille. Dans l'approche initiale de Markowitz, la distribution jointe entre ces facteurs de risque se résume aux deux premiers moments, ce qui par exemple est bien pris en compte par la distribution multivariée gaussienne. Cette dernière hypothèse sur la distribution de probabilité est cependant loin d'être vérifiée dans le contexte économique actuel, dans la mesure où nombreuses sont les études récentes qui ne cessent d'insister sur le fait que la majorité des distributions de probabilité en finance sont des distributions qui s'ajustent mal à la seule loi normale, et encore moins leur distribution jointe (Longin et Solnik, 2001). Du côté des portefeuilles de crédit, récemment encore les réponses à ces questions étaient basées sur des hypothèses fortes : Soit les risques étaient supposés indépendants, notamment à travers les travaux de Kijima et Muromachi (2000), traitant le cas

de l'indépendance conditionnelle des temps de défaut, ou encore les travaux de Jarrow et Yu (2001) relatifs à l'hypothèse d'une intensité de défaut asymétrique ; soit on admettait aussi leur dépendance, mais en leur imposant de suivre la même loi, l'idée la plus simple étant jusqu'ici d'utiliser une seule loi multi-variée à savoir la loi normale. Cette dernière approche se révèle inadaptée car la notion de défaut (qualitative) et aussi la date de défaut (durée) se prêtent mal à une spécification gaussienne.

En conséquence, l'enjeu est d'élaborer des modèles qui rendent compte de ces insuffisances (hypothèse gaussienne, indépendance des défauts...), tout en restant aisément interprétables. Pour répondre à cette problématique, les chercheurs ont dû remettre au goût du jour la notion de fonctions Copules, instrument statistique de grand intérêt, introduit par Sklar (1959). En effet, les apports de cette théorie suggèrent en particulier de modéliser la dépendance des composantes indépendamment du choix des lois marginales. Désormais, une modélisation plus souple et plus réaliste des interactions entre les facteurs de risque est possible grâce à cette théorie. Depuis, l'utilisation de l'approche copules en finance ne cesse de se développer, permettant ainsi un vif enrichissement de la théorie financière surtout du point de vue de la modélisation de la dépendance des actifs financiers, point qui lui est fondamental. Des références comme celle de Frees et Valdez (1998), Bouyé et al (2000) ou Embrechts et al (2002), présentent une revue des travaux sur l'utilisation des copules en finance et assurance. Récemment encore, nombreux sont les travaux qui ont essayé d'apporter des éléments de réponse à cette problématique. Des travaux comme ceux de Genest et al (2006), Scaillet (2007) ou aussi Berg (2009) traitent de la question du choix de la meilleure copule, dans un cadre purement statistique. Yamai et Yoshida (2002), Di Clemente et Romano (2003), ainsi que Fantazzini (2008) utilisent ces fonctions pour l'estimation des mesures de risque telles que la Value-at-Risk et l'Expected-Shortfall. Patton (2004) introduit l'idée des copules conditionnelles, permettant ainsi l'utilisation de cette approche dans une vision dynamique. Li (2000) propose une application de la copule gaussienne dans l'étude du risque de crédit. Schönbucher et Shubert (2001) élargissent le précédent cadre d'analyse en introduisant la classe des copules archimédiennes.

Pour toutes ces applications, le seul objectif est de valider l'apport de l'approche copule dans l'un ou l'autre de ces champs d'application. Ainsi, peu d'attention a été accordée à l'impact du choix du modèle copule dans l'atteinte des objectifs fixés. En effet, on peut penser que le choix d'un modèle de copules qui ne s'ajuste pas au mieux avec le contexte dans lequel on travaille peut altérer les résultats obtenus et conduire à des conclusions (interprétations) erronées. C'est dans ce cadre que se place cette thèse qui tente de proposer des éléments de réponse concernant l'impact du choix du modèle de copules sur les différentes problématiques soulevées par la gestion des portefeuilles et des risques. Nous allons essayer de répondre ainsi à des questions du type : Quelles composantes du modèle de copules aura le plus d'impact dans le processus d'estimation des mesures de risques les plus complexes ? L'investisseur est-il plutôt sensible à une mauvaise spécification de

la copule ou à celle des marginales dans le cadre d'un problème d'allocation optimale d'actifs ?

Toutes ces questions soulevées sont d'une importance majeure, que ce soit d'un point de vue académique là où la réponse à de telles interrogations permet d'éclaircir le champ d'application des fonctions copules en finance, ou aussi d'un point de vue plus opérationnel où cela permet d'affiner les outils de prise de décision.

Pour répondre à toutes ces interrogations, cette thèse est développée autour de sept chapitres dans lesquels nous proposons tout d'abord de ré-examiner l'apport d'une telle approche notamment en matière de gestion des risques et d'allocation optimale d'actifs. Nous insistons en particulier sur la mise en valeur de la part de chacune des composantes marginales et du choix de la fonction copule, surtout en cas de mauvaise spécification du modèle. Nous mettons en évidence aussi le rôle de l'attitude face aux risques des investisseurs, dans le cadre de telles problématiques (ce qui constitue entre autres l'un des aspects novateurs de cette thèse).

La première partie de la thèse concerne les problématiques soulevées par la gestion des portefeuilles financiers, à savoir la diversification des portefeuilles, la gestion des risques et l'allocation optimale d'actifs. Elle est développée ainsi sous forme de quatre chapitres :

- Le premier chapitre rappelle les notions essentielles utilisées et étudiées tout au long de cette partie. Nous rappelons dans un premier temps les principaux éléments de la théorie de la prise de décision en situation d'incertitude. Dans la suite, nous rappelons le cadre d'analyse relatif aux mesures de risque alternatives, dont notamment celles de type "Downside risk" (VaR et CVaR), développées pour pallier le défaut des mesures de risque faisant référence au cadre classique (i.e. la variance). Dans un deuxième temps, nous rappelons la notion de diversification des portefeuilles, élément central de la théorie moderne de portefeuille. Nous discutons surtout du constat empirique, exprimé dans les travaux de Goetzman et Kumar (2003) ainsi que Plokovnichenko (2005), suggérant la concentration des portefeuilles, en contradiction directe avec les énoncés de l'approche moyenne-variance. Finalement, nous passons en revue les théories alternatives du portefeuille, essentiellement développées pour tenir compte des ambiguïtés entachant le comportement des investisseurs en matière d'investissement. Ceci nous permet de faire le lien ultérieurement entre les enseignements de ces théories et la sensibilité des investisseurs par rapport au choix du modèle copule.

- Le deuxième chapitre<sup>1</sup> reprend la notion de la diversification de portefeuille pour étudier notamment la relation qui peut se trouver entre le degré de diversification (concentration) des portefeuilles et le choix de la fonction copule s'ajustant au mieux avec leurs structures de dépendance. Partant des résultats conflictuels, d'un côté les travaux de Romano (2002) suggèrent la validité de la copule Gaussienne pour le cas bivarié, d'un autre côté ceux

---

<sup>1</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "Diversification and Copula Choice". Il a été présenté à la conférence internationale de Finance et Assurance (Djerba, 2008). Il sera soumis à *Journal of Multinational Finance*.



de Patton (2004) attestent la validité d'une telle copule uniquement pour le cas des portefeuilles de grandes tailles. Nous estimons qu'un tel constat est dû essentiellement à l'insuffisance de la caractéristique correspondant à la taille des portefeuilles, pour prétendre différencier les structures de dépendance des portefeuilles. En effet, la taille des portefeuilles étant fixée, on pense que la structure de dépendance d'un portefeuille suffisamment diversifié peut dévier énormément de celle d'un autre portefeuille largement concentré sur un certain nombre d'actifs (secteurs). De ce fait, nous envisageons d'introduire une mesure liée à une autre caractéristique beaucoup plus profonde, à savoir le niveau de diversification des portefeuilles, que nous utilisons pour déceler une éventuelle correspondance avec le choix de la copule appropriée. Les résultats trouvés vont dans le sens de notre proposition, et permettent ainsi d'élucider le problème des résultats ultérieurs, en grande partie contradictoires.

- Le troisième chapitre<sup>2</sup> traite de la problématique, tant débattue, faisant référence au risque de modèle. Impliqué dans le cadre de l'approche par les fonction copules, le risque de modèle se manifeste surtout en cas d'une mauvaise spécification de l'une ou l'autre ou conjointement des deux composantes définissant le modèle, à savoir la définition des distributions marginales ainsi que celle liée à la fonction copule. Ainsi, on pense qu'une mauvaise spécification dans l'une ou l'autre de ces composantes aura des répercussions sur les résultats escomptés plus au moins conséquentes. Dans le cadre de ce chapitre, nous proposons d'étudier cette problématique dans une orientation dédiée aux mesures des risques extrêmes, VaR et CVaR. L'utilisation de l'approche copule dans le cadre de ces problématiques est toujours d'actualité, et la littérature semble construire un consensus autour de la performance d'une telle approche pour concevoir des mesures de risque plus robustes. C'est ainsi que Di Clemente et Romano (2004), ainsi que Fantazzini (2008), plaident tous deux pour la supériorité des copules elliptiques dans le processus d'estimation de ces mesures de risque. Junker et May (2005) mettent en évidence les performances de la copule de Frank, combinée avec des marginales issues des modèles GARCH, pour améliorer ces estimations. Palaro et Hotta (2006) parviennent à des conclusions similaires, suggérant cette fois-ci l'optimalité de la copule de Clayton. Notons, pour l'ensemble de ces applications, qu'aucune attention particulière n'a été accordée à l'étude de l'impact d'une mauvaise spécification du modèle de copule sur la performance des résultats obtenus. Partant de ce constat, nous proposons ainsi d'étudier la part imputée à chacune des composantes du modèle de copules sur la validité des résultats des estimations des mesures de risque, VaR et CVaR. Nous proposons aussi de vérifier le rôle de la composition du portefeuille dans le cadre de cette problématique.

---

<sup>2</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Une première version intitulée "Estimation de la Value-at-risk : une approche à travers les fonctions Copules" a été présentée à la conférence internationale IFC 2009.

La version finale est intitulée "Measuring Value-at-Risk and Expected-Shortfall : A dynamic Copula-GARCH approach".

Elle a été présentée à la conférence internationale de l'AFFI (Aix-en-Provence, Mai 2014). Elle sera soumise à *Journal of Financial Econometrics*.

- Dans la continuité du chapitre précédent, le quatrième chapitre<sup>3</sup> traite du même thème, relatif toujours au risque d'une mauvaise spécification dans le modèle copule, mais dédié à ce niveau au problème d'allocation optimale d'actifs. En effet, nombreuses sont les études qui ont montré l'utilité de l'approche copule dans le cadre du problème d'allocation (Patton (2004) et Ricetti (2013)), permettant ainsi de dépasser le cadre gaussien imposé par l'approche classique de Markowitz (1952). Récemment encore, les théories comportementales de portefeuilles, dont notamment celles de Statman (2000), suscitent un vif regain d'intérêt, surtout pour leurs capacités à expliquer les ambiguïtés entachant le comportement des investisseurs en matière d'investissement. Selon de telles théories, les décisions d'investissement sont largement guidées par le degré d'aversion aux pertes, parallèlement aux gains, des investisseurs. A ce niveau, on pense que la mauvaise spécification dans le modèle copule impactera différemment les décisions d'investissement, et par la suite la richesse finale, selon que l'investisseur est plus ou moins averse aux pertes (gains). Nous plaçant dans le cadre particulier de Zakamouline (2014), nous analysons l'impact de la mauvaise spécification du modèle copule, sur les décisions en matière d'investissement entre un actif risqué et un actif sans risque. L'actif risqué prend ici les caractéristiques d'un fond composé de trois actifs construit selon les différentes configurations, ce qui nous permet d'identifier la sensibilité des investisseurs face à la mauvaise spécification du modèle selon le type de fond. N'oublions pas cependant d'étudier l'impact de l'horizon d'investissement sur l'amplitude de ces sensibilités.

La deuxième partie de la thèse s'intéresse au risque de crédit et aux produits structurés de crédit. Nous abordons entre autres les problèmes liés surtout à la diversification et aux mesures de risque au sein de tels produits. Elle est développée ainsi sous forme de trois chapitres.

- Le cinquième chapitre de la thèse reprend le cadre d'analyse du risque de crédit, ainsi que les notions essentielles nous permettant d'aborder le problème de la modélisation de la dépendance au sein des portefeuilles de crédit. Dans un premier temps, nous rappelons les approches principales dédiées à l'étude du risque de crédit. Il s'agit essentiellement de l'approche structurelle et de l'approche sous forme réduite. Nous introduisons, dans un deuxième temps, les différentes tentatives qui ont essayé de tenir compte de la dépendance qui peut se trouver au sein des portefeuilles de crédit. Nous discutons surtout de leurs avantages ainsi que de leurs limites principales.

- Le sixième chapitre<sup>4</sup> traite de la problématique des mesures de risque au sein des portefeuilles de crédit, et propose un modèle actuariel pour l'estimation de ces mesures. En effet, en estimant que le risque de crédit peut provenir d'un éventuel défaut ou aussi d'une éventuelle migration dans la qualité de crédit, cela nous laisse envisager un modèle actuariel qui serait

---

<sup>3</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "On the Robustness of the Portfolio Allocation Under Copula Misspecification"

Il sera soumis à *Journal of Portfolio Management*.

<sup>4</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "An Actuarial Model for Measuring Risk of Credit Portfolios : A Copula Approach."

Il sera soumis à *European Actuarial Journal*.

beaucoup plus adapté nous permettant une meilleure appréciation de la situation de risque encourue dans de tels portefeuilles. Combiné aux avantages de l'approche copule dans la modélisation de la structure de dépendance, nous pouvons penser qu'un tel modèle actuariel est en mesure de fournir les mesures de risque (VaR et CVaR) les plus robustes. D'un autre côté, en estimant aussi que la structure de dépendance existante dans les portefeuilles de crédit peut être différente d'un portefeuille à un autre, selon que ce dernier soit composé d'obligations ayant une bonne ou alternativement une mauvaise qualité de crédit, nous pouvons envisager d'étudier la relation entre la nature des portefeuilles, i.e. selon la qualité des obligations, et le choix de la copule ayant modélisé au mieux la structure de dépendance. Ceci étant fait, l'objectif ultime est d'analyser l'impact résultant du choix d'une mauvaise spécification de la fonction copule sur la validité des estimations des mesures de risque, tout en faisant la différence entre la qualité des portefeuilles étudiés.

- Le septième chapitre<sup>5</sup> met l'accent sur l'impact de la contagion sur les risques de défaut des produits structurés de crédit, comme illustré par la récente crise financière. Une question ouverte porte entre autres sur la notion de diversification et sur l'évaluation du risque de concentration au sein du portefeuille collatéral d'un produit structuré de crédit de type CDO. Une première tentative de réponse à cette question a été proposée par Moody's lors de la réalisation de son processus de notation des CDO. Concrètement, Moody's suggère le Score de Diversité (Diversity Score : DS) comme une mesure de la diversification dans le portefeuille collatéral. Cette mesure est utilisée dans la technique d'expansion binomiale de Moody's ("Binomial Expansion Technique : " BET) pour en déduire la probabilité de défaut et donc pour calibrer la perte attendue dans le portefeuille. A ce niveau, la pertinence de cette approche pour évaluer la réalité de défaut dans le marché des CDO peut être remise en question, en particulier en présence d'effets de contagion entre tranches de CDO. En effet, cette méthode suppose essentiellement que la répartition de la perte réelle peut être estimée avec précision à partir de la distribution des pertes d'un portefeuille beaucoup plus simplifié, qui est un portefeuille contenant des actifs seulement indépendants. Dans ce chapitre, nous examinons la pertinence de cette approche pour évaluer la réalité des défauts dans le marché des CDO, lorsque les actifs sont dépendants, et ce pour une grande variété de modèles.

---

<sup>5</sup>Deux papiers de recherche ont été extraits de ce chapitre. Le premier intitulé

"Credit-Risk Contagion Modelling" sera soumis à *Journal of Economic Surveys*.

Le deuxième intitulé "*Modelling Contagion for Credit Derivatives : a Copula Analysis*" sera soumis à *Journal of Empirical Finance*.

Première partie

# **GESTION DE PORTEFEUILLE**

## Généralités sur les Mesures de Risque, la Théorie de Portefeuille et la Diversification

### 1. Introduction

Dans ce chapitre introductif, nous rappelons certaines des notions essentielles que nous utilisons tout au long de cette thèse.

Prendre des décisions en situation d'incertitude est un problème omniprésent dans la majorité des activités économiques et financières. En matière de financement et d'investissement, les situations déterministes sont caractérisées par des cash-flows certains, et les décisions sont souvent prises sur la base du critère de la Valeur Actuelle Nette (VAN). Pour les problèmes de décision en univers stochastique, les alternatives sont caractérisées par des variables aléatoires introduisant ainsi le risque dans le système décisionnel. Par conséquent, maximiser les gains attendus est insuffisant pour prendre des décisions rationnelles. Une solution à ce problème trouve son origine dans les travaux de Von Neumann-Morgenstern (VNM), proposant une axiomatique liée à la théorie des fonctions d'utilité et permettant de décrire le comportement des agents économique face au risque. Il en ressort que le critère de sélection est la maximisation de l'utilité espérée.

Dans ce contexte d'incertitude, le problème majeur auquel font face les preneurs de décisions est l'évaluation de leur exposition au risque. En règle générale, une mesure de risque est une mesure qui permet d'évaluer, pour une période donnée, l'ampleur des pertes encourues. On peut adjoindre à cette mesure de risque, une mesure de performance qui intègre par exemple l'espérance des gains. Une forme moderne liée à la quantification du risque trouve son origine dans l'article prééminent de H. Markowitz (1952), le risque étant défini par la variance du portefeuille. Le choix de la variance comme mesure du risque semble être un choix naturel du fait que l'écart par rapport à l'espérance qu'elle quantifie est qualifié de risque, ce risque étant de dévier de manière trop significative de l'anticipation rationnelle du rendement du portefeuille. Néanmoins, étant donné que le risque est associé souvent à une situation négative, la variance ne peut pas remplir la fonction de mesure de risque fiable, car elle pénalise autant les écarts négatifs par rapport à la moyenne que les écarts positifs. Ceci est d'autant dommageable que les distributions de probabilités sont asymétriques. Pour cette raison, les mesures de risque de type « Downside risk measures » ont été étudiées et proposées comme des alternatives à la variance. Ces dernières années, le secteur financier et bancaire a introduit les mesures de risque basées sur les quantiles, la plus connue étant la Value-at-Risk (VaR), qui est utilisée de plus en plus comme outil de gestion des risques (voir à cet égard Jorion (1997) et Duffie et Pan (1997)). Plus récemment, des mesures de risque cohérentes ont

été développées afin de surmonter les limites liées à la Value-at-Risk (non convexité). C'est le cas de la Conditional Value-at-Risk (CVaR), également appelée Expected-Shortfall (ES), proposée par Artzner et largement étudiée par Rockafellar et Uryasev (2000). La section **2.3** sera consacrée à la présentation de l'ensemble de ces mesures de risque dites alternatives.

Dans un contexte de gestion de portefeuille et en présence d'incertitude le défi est double : Comment répartir une certaine "richesse" entre les différents véhicules d'investissement disponibles tout en tenant compte de l'ampleur de la situation de risque ? Le modèle de gestion de portefeuille le plus connu, et couramment utilisé par de nombreuses institutions financières jusqu'à nos jours, reste celui développé par Markowitz (1952), considéré depuis comme le père et fondateur de théorie moderne de portefeuille. Ce modèle dont la conception est très simplifiée, est parfaitement compatible avec les énoncés de la théorie de l'utilité de VNM. En effet, Markowitz considère que les agents économiques sont par nature averses au risque, et les caractérisent par des fonctions d'utilité quadratiques. Ils font leur choix en se basant uniquement sur les deux premiers moments de la distribution aléatoire de leur richesse : l'espérance et la variance. L'espérance de l'utilité de la richesse d'un individu serait donc une fonction de la moyenne et de la variance de la rentabilité de son portefeuille. Par conséquent, Markowitz a pu formuler le problème de portefeuille comme étant un compromis entre la moyenne et la variance du portefeuille. Il établit ainsi le théorème central de l'approche Moyenne-Variance (MV) qui consiste à maximiser le rendement espéré du portefeuille pour une variance donnée ou à minimiser la variance pour un rendement espéré cible. Ces deux principes conduisent à la formulation de la frontière efficiente, à partir de laquelle l'investisseur peut choisir son portefeuille préféré, celui qui coïncide avec ses préférences pour le risque.

L'enseignement de base qu'avance la théorie moderne de portefeuille suggère que les actifs financiers ne doivent plus être sélectionnés uniquement sur la base de leurs caractéristiques individuelles, mais qu'il est judicieux d'examiner les potentialités liées à la dépendance qui peut exister entre eux. Ce résultat constituait le premier support de l'idée de la diversification des portefeuilles. La diversification était ainsi synonyme de réduction de risque et le modèle de Markowitz insiste sur le fait que le portefeuille optimal doit être pleinement diversifié. Néanmoins, la réalité est loin de ces recommandations et plusieurs études telles que Barber et Odeon (2000) ou aussi Goetzman et Kumar (2008) ont pu montrer que les portefeuilles individuels sont peu diversifiés. Nous reviendrons sur cette idée dans la section 3.2 afin d'expliquer les limites de la diversification du portefeuille.

Malgré sa simplicité, l'approche Moyenne-Variance, se heurte à de nombreuses limites tant sur le niveau technique que méthodologique. Sur le plan technique, l'approche moyenne-variance est difficile à mettre en place en présence d'un nombre considérable d'actifs détenus dans le portefeuille, en raison des calculs complexes sur la matrice de variance-covariance. A ce niveau, le modèle de marché, tel que développé par Sharpe (1963) ou encore, dans un contexte plus général, les modèles factoriels tel que énoncés par Ross (1976), ont été proposés pour résoudre le problème de réduction de dimension. Sur le plan méthodologique, du fait des critiques adressées à l'encontre

de la variance, des approches alternatives ont été développées pour résoudre le problème d'optimisation en utilisant les mesures de risques de type « Downside risk measures ». Roy (1952) a introduit le concept de « Safety First » et suggère d'utiliser le "niveau de subsistance" dans la procédure d'optimisation. Markowitz (1952) quand à lui suggère d'utiliser la semi-variance. Harlow (1991) recommande d'utiliser les moments partiels inférieurs (Lower Partial Moments (LPM)). Plus récemment, des conclusions plus générales sur la minimisation de la VaR ou de la CVaR sont exprimées dans Rockafellar et Uryasev (2002), suggérant l'efficacité des « Downside risk measures » dans la résolution du problème d'optimisation de portefeuille en particulier pour le cas des distributions asymétriques.

D'un autre côté, la théorie de l'utilité espérée (dans sa conception de base) semble être insuffisante pour décrire le comportement des agents économiques face au risque. En effet, au travers de multiples expérimentations, Kahneman et Tversky (1979), ont parvenus à montrer que les agents économiques ont tendance à déformer les probabilités objectives des événements, particulièrement en cas de manque d'information. Ainsi, des versions alternatives de la théorie de l'utilité espérée ont été développées depuis les années 80. Nous pouvons citer entre autres, la «Théorie de l'Utilité Pondérée» de Chew et MacCrimmon (1979), la «Théorie des Perspectives» de Kahneman et Tversky (1979), la «Théorie de l'Utilité Anticipée » de Quiggin (1982) et enfin la «Théorie de Regret » mise en place par Loomes et Sugden (1982). L'application de ces propositions à la problématique de choix des portefeuilles a donné naissance à la théorie comportementale de portefeuille. Les études de Benartzi et Thaler (1995) et Magi (2009) illustrent bien l'impact des préférences comportementales sur le processus de sélection de portefeuilles. Nous récapitulons toutes ces approches dans la section 3.3, consacrée aux théories alternatives de portefeuille.

## 2. Décisions en situation d'incertitude et mesures de risque

La plupart des décisions se prennent dans un environnement incertain, c'est-à-dire que les résultats de chaque décision peuvent dépendre de la réalisation ou non de certains événements. Pour mieux aider un décideur face à un problème en environnement incertain, il faut définir un modèle de comportement basé sur des axiomes rationnels et intuitifs et tel que, si le décideur est en accord avec ces axiomes, il sera aussi en accord avec le modèle qui résulte de ces axiomes et qui représentera ses préférences. Ainsi, parmi toutes les décisions possibles, l'évaluation par ce modèle de chaque décision pourra faciliter son choix. Cette modélisation trouve son origine dans la théorie de l'utilité espérée.

**2.1. Théorie de l'utilité espérée.** Avant les travaux de Bernoulli (1738), le choix des loteries reposait sur le seul critère de l'espérance des gains. En retenant ce point de vue, et face à une loterie  $W$  ayant des réalisations possibles  $W = (w_1, \dots, w_n)$  qui sont associés aux probabilités  $\Omega = (p_1, \dots, p_n)$ , un individu rationnel serait indifférent entre le revenu aléatoire de la loterie  $\widetilde{W}$  et le montant certain équivalent à  $\mathbb{E}(\widetilde{W}) = \sum p_i w_i$ ,

et entre plusieurs loteries il devrait choisir celle qui maximise l'espérance des gains.

Face à ce problème de décision, des paradoxes sont apparus tel le paradoxe de Saint-Petersbourg. Bernoulli a été le premier à proposer une solution à ce paradoxe. L'idée consiste à appliquer une fonction d'utilité logarithmique aux réalisations possibles de la loterie. Ainsi, et en faisant l'hypothèse d'une utilité marginale décroissante pour les niveaux de gains, l'espérance d'utilité de la loterie peut être finie, même si sa valeur espérée est infinie. Toutefois, Bernoulli n'a pas abordé la question relative à la mesure de l'utilité, ni comment son principe de l'espérance d'utilité serait rationnel. Ainsi, le modèle de Bernoulli est surtout un modèle à vocation descriptive et il a fallu attendre les travaux de John Von Neumann et Oscar Morgenstern (1945) qui, tout en considérant une axiomatique autour des choix rationnels, ont permis de fonder théoriquement l'espérance d'utilité comme critère de choix dans l'incertain.

Spécifiquement, Von Neumann et Morgenstern démontrent que quatre axiomes de base garantissent l'existence d'une fonction d'utilité numérique dont l'espérance préserve l'ordre de préférences entre les loteries, i.e. que le niveau de préférence le plus dominant correspond à l'espérance d'utilité la plus élevée. Le théorème suivant récapitule les énoncés de la théorie de l'utilité espérée :

**THÉOREME 1. (*Utilité espérée*)**

*En supposant une relation de préférence satisfaisant les quatre axiomes sur les choix rationnels de VNM (complétude, transitivité, continuité et indépendance). Cette relation peut être représentée par une fonction de préférence (utilité)  $U$  linéaire en probabilité et ayant des valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et tel que pour deux loteries quelconque  $L_1 = \{(p_1^1, \dots, p_1^n)\}$  et  $L_2 = \{(p_2^1, \dots, p_2^n)\}$  on a :*

$$L_1 \succeq L_2 \iff \sum_{i=1}^n p_1^i U(w_i) \geq \sum_{i=1}^n p_2^i U(w_i)$$

Ce théorème est d'une utilité extrême. En fait, il permet d'assigner des utilités aux différentes réalisations des loteries disponibles. Ces utilités traduisent l'attitude face au risque de l'agent économique rationnel. Le calcul de l'utilité espérée permet par la suite de classer les différentes alternatives risquées et peut servir de base à la formation des anticipations sur les choix des agents économiques.

Remarquons aussi, que deux fonctions d'utilité  $U$  et  $V$  liées par une relation affine croissante telle que  $V(w_i) = aU(w_i) + b$ , conduisent aux mêmes décisions. En effet, si l'alternative  $X$  est retenue selon la fonctionnelle  $U$  ( $X$  Maximise  $E[U(X)]$ ) cela signifie qu'elle maximise aussi  $E[V(X)] = aE[U(X)] + b$  et qu'elle sera donc retenue par la fonctionnelle  $V$ . Ainsi, le comportement d'un individu caractérisé par une fonction d'utilité  $U$  quelconque ne peut être distingué de celui dont les préférences sont reflétées par une fonction  $V$  définie à une transformation linéaire positive de la fonction  $U$ .



2.1.1. *Aversion pour le risque.* Un concept important lié à la théorie de l'utilité espérée est celui de l'aversion pour le risque. La logique correspondante considère qu'une loterie est d'autant moins attractive (ou plus risquée) par rapport à l'espérance des ses gains, que les préférences sont averses pour le risque (ou risquophobes). En cas d'indifférence systématique entre les deux, l'individu est supposé neutre au risque. En d'autres termes, un décideur qui présente de l'aversion pour le risque aura tendance à privilégier un montant certain équivalent à l'espérance des gains de la loterie plutôt que de participer à la loterie elle-même. Le raisonnement est réciproque pour celui qui a du goût pour le risque. Sous une forme mathématique nous pouvons écrire :

Si on considère une alternative risquée décrite par la variable aléatoire  $X$  :

-)  $\int u(x) f(x) dx = \int u(x) dF(x)$  correspond à l'utilité de l'alternative risquée.

-)  $u(\int x dF(x))$  correspond à l'utilité du projet certain équivalent en terme d'espérance des gains.

Par conséquent on parlera d'aversion pour le risque si

$$\forall F(.) \quad \int u(x) dF(x) \leq u(\int x dF(x))$$

Lorsqu'on raisonne avec des variables aléatoires discrètes on peut écrire :

-)  $\sum_i u(x_i) p_i$  est l'utilité de l'alternative risqué

-)  $u(\sum_i x_i p_i)$  est l'utilité du projet certain équivalent en terme d'espérance des gains.

Et l'aversion au risque se traduit par :

$$\forall (p_1, \dots, p_n) \quad \sum_i u(x_i) p_i \leq u(\sum_i x_i p_i)$$

Les équations précédentes sont très intéressantes car elles permettent de mettre en relation la forme de la fonction d'utilité et l'attitude des individus par rapport au risque. En effet, jusque là, la seule chose qui peut être connue sur la fonction d'utilité  $U(.)$  est qu'elle est croissante. Ceci traduit le fait que les individus associent généralement des indices d'utilité plus importants à des sommes de monnaie plus importantes. A ce niveau, l'inégalité de Jensen, définissant la concavité d'une fonction, permet d'aller un peu plus loin dans la description de la fonction d'utilité. En effet :

**DÉFINITION 1. (Inégalité de Jensen).** Si  $g$  est une fonction concave de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  alors,

$$\forall F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad g(\int x dF(x)) \leq \int g(x) dF$$

Ainsi, en mettant en relation les équations précédentes et cette dernière définition, il est évident qu'il y a une équivalence entre l'aversion au risque et la concavité de la fonction d'utilité. De ce fait, l'aversion (le goût) pour le risque se traduit par une fonction d'utilité concave (convexe) et la neutralité vis-à-vis du risque est désormais équivalente à une fonction d'utilité linéaire.

La propriété de concavité de la fonction d'utilité nous permet de traiter la notion de l'aversion pour le risque, sous l'angle du concept de l'équivalent certain. En effet, ce dernier noté généralement  $EC(X)$ , correspond au montant sûr qui procure le même niveau d'utilité que la loterie  $X$ . L'investisseur étant ainsi indifférent entre le choix de recevoir  $EC(X)$  avec certitude, ou d'investir dans la loterie  $X$  dont le gain espéré est  $E(X)$ . L'aversion pour

le risque (fonction d'utilité concave) est équivalente à l'inégalité  $EC(X) < E(X)$ , et la différence  $\pi(X) = E(X) - EC(X)$  est appelée « prime de risque », telle que introduite par Pratt (1964). Cette dernière correspond au montant maximum qu'un investisseur se permet de perdre pour récupérer l'équivalent certain. À partir de ces propriétés, nous pouvons proposer les définitions suivantes :

**DÉFINITION 2. (*Aversion pour le risque*)**

Pour toute variable aléatoire  $X$ ,

- (1) Un investisseur est dit averse au risque si  $E(X) \geq EC(X)$ , ou encore si  $\pi(X) \geq 0$ .
- (2) Un investisseur est dit neutre au risque si  $E(X) = EC(X)$ , ou encore  $\pi(X) = 0$ .
- (3) Un investisseur est dit aime le risque si  $E(X) \leq EC(X)$ , ou encore  $\pi(X) \leq 0$ .

Kenneth Arrow (1971) et John Pratt (1964) ont mentionné l'importance d'établir une mesure du degré d'aversion pour le risque. En effet, il est simple de constater que, à l'intérieur de chaque catégorie d'investisseur le niveau d'aversion au risque peut varier en fonction du niveau de la richesse initiale. Un investisseur suffisamment riche serait moins averse au risque qu'un autre qui est moins riche. Partant de ce fait, la concavité serait insuffisante pour caractériser le degré d'aversion au risque. Les deux auteurs envisagent une autre approche plus plausible à travers l'étude de la prime de risque. Le résultat suivant est dû à Pratt (1964) :

**DÉFINITION 3. (*Degré d'aversion au risque*)**

$U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  étant deux fonctions d'utilité représentant des préférences sur les richesses, les préférences avec  $U(\cdot)$  ont plus d'aversion au risque que celle avec  $V(\cdot)$ , si la prime de risque satisfait l'inégalité :  $\pi_U(X) \geq \pi_V(X)$  pour toutes les variables aléatoires  $X$ .

Par la suite, et en utilisant un développement de Taylor appliqué à la mesure de l'utilité espérée  $[E(U(X))]$ , les deux auteurs proposent une approximation de la prime de risque sous le nom « Approximation d'Arrow-Pratt » :

$$\pi(X) \simeq -[U''(E[X])/U'(E[X])] \sigma_X^2$$

La variance  $\sigma_X^2$  étant positive, le ratio  $-[U''(E[X])/U'(E[X])]$  peut être considéré comme une mesure de l'aversion au risque.

Pour résumer, le coefficient  $A(x) = -U''(x)/U'(x)$  dénotera la mesure d'Aversion au Risque Absolue d'Arrow-Pratt (Absolute Risk-Avesion (ARA)). Cependant, afin de tenir compte du niveau de la richesse initiale, le coefficient  $B(x) = -xU''(x)/U'(x)$  peut être utilisé. Il correspond à la mesure d'Aversion au risque Relative d'Arrow-Pratt (Relative Risk-Avesion (RRA)).

**2.1.2. Fonctions d'utilité standards.** Une éventuelle classification des fonctions d'utilités standards, que l'on peut retrouver dans la littérature économique et financière, s'inspire largement des aspects différents que peut prendre les mesures de l'aversion au risque mentionnés ci-dessus. En effet,

nous pouvons distinguer entre autres, les fonctions d'utilité de type CARA pour « Constant Absolute Risk Aversion », les fonctions d'utilités de type CRRA pour « Constant Relative Risk Aversion » mais aussi les fonctions d'utilité quadratiques. Toutes ces fonctions d'utilités peuvent être regroupées au sein d'une classe plus générale celle des fonctions d'utilités HARA pour « Harmonic Absolute Risk Aversion ».

DÉFINITION 4. (*Fonction d'utilité HARA*)

Une fonction d'utilité est dite de type HARA, si l'inverse de son degré d'aversion absolue au risque est supposé linéaire en fonction du niveau de richesse. Une représentation possible de la forme d'une fonction d'utilité HARA est la suivante :

$$U(x) = a \left( b + \frac{x}{c} \right)^{1-c}$$

U, étant définie sur l'intervalle  $b + \frac{x}{c} > 0$ . Et les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent satisfaire la condition  $\frac{a(1-c)}{c} > 0$ .

Le coefficient de l'Aversion Absolue au Risque (ARA) est donné par :  $A(x) = \left( b + \frac{x}{c} \right)^{-1}$ , qui est parfaitement linéairement inverse en fonction du niveau de la richesse  $x$ .

Etant donnée cette définition nous pouvons distinguer les autres fonctions d'utilités :

\* *Constant Absolute Risk Aversion (CARA)*. Si la paramètre  $c$  tend vers l'infini, le ratio de l'aversion absolu au risque  $A(x)=cte$ , d'où l'appellation donnée. Dans ce cas, la fonction d'utilité peut prendre la forme suivante :  $U(x) = \frac{-exp[-Ax]}{A}$ . Il est à noter que le ratio de l'aversion relative au risque (RRA) est croissant en fonction de la richesse.

\* *Constant Relative Risk Aversion (CRRA)*. Si  $c=0$ , alors le coefficient de l'aversion relative au risque  $B(x)=c$ . Et pour une transformation linéaire nous obtenons :

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-c}}{1-c} & \text{si } c \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } c = 1 \end{cases}$$

\* *Fonctions d'utilité quadratiques*. En considérant le cas ou  $c=-1$ , la fonction d'utilité est alors de type quadratique. Il est important de noter qu'une restriction sur le domaine de définition de la fonction doit être imposée, du fait que l'utilité sera décroissante sur l'intervalle  $]b, \infty[$ . Notons aussi qu'avec ce type de fonction, le coefficient d'aversion relative au risque (ARA) est croissant, ce qui implique que la prime de risque augmente avec la richesse. Or, l'évidence empirique soutient la thèse d'une décroissance de cette prime avec la richesse. Ce sont surtout ces critiques qui ont été adressées à la théorie moderne de portefeuille de Markowitz, et qui font qu'elle ne coïncide pas parfaitement avec la réalité économique.

**2.2. Mesures de risque classiques : Exemple de la Value-at-Risk.** Depuis les premiers travaux traitant de la problématique de la sélection des portefeuilles, une forme moderne de la quantification des risques trouve son origine dans l'article prééminent de Markowitz (1952), où l'auteur définit le risque comme étant la variance du portefeuille. La variance semble

être une mesure naturelle du risque, car tout simplement elle quantifie l'écart par rapport à l'espérance comme étant un risque. Depuis, la variance ou des concepts similaires, comme la semi-variance (Markowitz (1960)), sont les mesures de risque qui ont été très utilisées.

L'utilisation de la variance comme mesure de risque dans la procédure d'optimisation de portefeuille est équivalente à maximiser une fonction d'utilité quadratique, ou aussi à supposer que l'incertitude s'ajuste à une distribution gaussienne. Néanmoins, comme mentionné ci-dessus, la fonction d'utilité quadratique ne manque pas de propriétés indésirables, telles que la satiété ou aussi un coefficient d'aversion absolu au risque croissant. De plus, d'un point de vue empirique, il a été démontré que la distribution gaussienne s'ajuste mal aux distributions de probabilité de la majorité des variables économiques et financières. D'un autre côté, la variance ne permet pas de quantifier le risque d'une perte monétaire potentielle. Finalement, et par définition, la variance pénalise les écarts positifs par rapport à la moyenne identiquement avec ceux des écarts négatifs, chose qui est inconcevable vu que le risque est souvent lié au risque de pertes. Pour toutes ces raisons, des mesures de risque alternatives, basées sur le « Downside risk », ont été étudiées et proposées pour remplacer la variance.

La nécessité d'introduire de nouvelles mesures de risque, alternatives aux mesures de dispersion, découle surtout du nouveau contexte de régulation de l'activité bancaire et financière. En effet, le nouvel accord de Bâle exige que les institutions financières développent leurs propres modèles internes pour la quantification du capital réglementaire. Les mesures de risque de type quantile, basées sur le risque de perte, ont été largement étudiées. Ainsi, la Value-at-Risk (VaR) été la première tentative pour parvenir à un outil quantitatif pour mesurer les exigences en capital, permettant surtout de tenir compte des distributions de rendements non gaussiennes ou asymétriques. Depuis, la Value-at-Risk est de plus en plus utilisée comme outil de gestion des risques (risk management), surtout lorsqu'il s'agit de positions complexes en options, pour tenir compte du risque de défauts ou aussi lorsque la dépendance entre les actifs est complexe (voir à cet égard Jorion (1997), Duffie et Pan (1997) ou aussi Person et Smithson (2002)).

La Value-at-Risk est souvent définie comme étant la plus grande perte possible sur une position donnée pour un niveau de confiance donné  $\alpha$ . Toutefois, elle ne correspond pas généralement à la plus grande perte enregistrée, car tout simplement sur le "(1 -  $\alpha$ ) pourcent" des cas restant la perte réelle peu dépasser le seuil de la VaR. d'un point de vue mathématique, la Value-at-Risk est définie de la manière qui suit :

Pour un vecteur d'allocation  $w = [w_1, \dots, w_n]$ , la valeur du portefeuille à l'instant  $t$ ,  $V_t(w_t)$ , est donnée par :

$$V_t(w_t) = \sum_{i=1}^n w_{i,t} S_{i,t} = w' \cdot S_t \quad (2.1)$$

le vecteur  $S_t$  étant le vecteur de prix des actifs composant le portefeuille.

Il s'en suit que le changement de la valeur du portefeuille entre les instant  $t$  et  $t+1$ , est égal à :

$$\Delta V_{t+1}(w_t) = (V_{t+1} - V_t)(w_t) = \sum_{i=1}^n w_{i,t} (S_{i,t+1} - S_{i,t}) = w' \cdot \Delta S_t \quad (2.2)$$

En supposant que  $\mathbb{P}_{S_{t,t}}$  désigne la distribution conditionnelle des prix futurs de  $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{n,t})$ , et étant donnée l'information à l'instant  $t$ , pour un niveau de confiance d'ordre de  $\alpha$  (généralement entre 95% et 99%), la Value-at-Risk  $VaR_{(t,\alpha)}(w_t)$  est définie comme suit :

$$\mathbb{P}_{S_{t,t}} [(V_{t+1} - V_t)(w_t) + VaR_{(t,\alpha)}(w_t) < 0] = 1 - \alpha \quad (2.3)$$

En supposant la normalité de la distribution des rendements, la définition précédente de la VaR se ramène à :

$$VaR_{(t,\alpha)}(w_t) = -w'_t \cdot \mu_t + (w'_t \cdot \Sigma \cdot w_t)^{1/2} q_{1-\alpha} \quad (2.4)$$

$\mu_t$ ,  $\Sigma$ ,  $q_{1-\alpha}$  sont respectivement la moyenne, la matrice de Variance-covariance et le quantile d'ordre  $(1 - \alpha)$ , pour une distribution gaussienne.

Tandis que la Value-at-Risk mesure les niveaux de perte qui peuvent être atteints avec un certain niveau de confiance (probabilité), elle ne peut pas nous renseigner sur l'ampleur que peut avoir ces pertes surtout lorsque les événements les plus extrêmes se produisent. De plus, la VaR est évaluée le plus souvent sous l'hypothèse de normalité des facteurs de risque (facilité des calculs), une hypothèse trop réductrice pour un contexte financier trop fluctuant et pouvant aboutir à une large sous estimation de la position risquée. D'un autre côté, la VaR peut être non convexe pour certaines distributions de probabilités. Dès lors, elle ne permet pas de tenir compte de l'effet de la diversification sur la réduction du risque des portefeuilles. Pour toutes ces déficiences d'autres mesures de risque cohérentes ont été développées, c'est le cas de la Conditional Value-at-Risk (CVaR).

**2.3. Mesures de risque cohérentes.** Les mesures de risque classiques que l'on vient d'énumérer (Variance ; Value-at-Risk), présentent des insuffisances (déficiences) particulières, respectivement pour des situations spécifiques à chacune d'elles. Par conséquent, et pour des finalités de généralisation, les mesures de risque doivent être basées sur une certaine axiomatique de cohérence, qui permet de les rendre admissibles pour des situations plus générales.

*2.3.1. Propriétés de cohérence des mesures de risque.* Emanant du nouveau contexte de régulation de l'activité bancaire exigé par l'accord de Bâle, Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) énumèrent un ensemble d'axiomes, qui devront être imposés à une mesure de risque pour qu'elle soit considérée comme une mesure de risque « rationnelle » ou aussi « cohérente ». Nous rappelons dans ce qui suit l'ensemble de ces axiomes :

Notons tout d'abord  $X$ , la variable aléatoire désignant le montant de la variation qui peut être enregistrée sur une position donnée.  $\mathcal{R}(X)$ , la mesure de risque, reflétant le montant de capital à détenir pour faire face aux pertes  $X$ .

- **Monotonie.** Pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

$$X \geq Y \implies \mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$$

Cela signifie que si  $X$  est considérée comme « moins risquée » que  $Y$ , alors la mesure de risque correspondante doit être inférieure.

- **Invariance par translation.**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{R}(X + \alpha.r) = \mathcal{R}(X) - \alpha$$

Cela signifie que si le montant sûr «  $\alpha$  » est investi dans l'actif de référence, ayant pour taux de rendement «  $r$  », il s'en suit que la variation au niveau de la mesure de risque est égale au montant «  $\alpha$  » lui-même. Cette propriété est en parfaite concordance avec l'interprétation monétaire que doit avoir une mesure de risque. Notons en particulier, que si le montant investit dans l'actif de référence correspondait à la mesure de risque elle-même, alors la position est sans risque.

$$\mathcal{R}(X + \mathcal{R}(X).r) = 0$$

- **Homogénéité.**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{R}(\lambda X) = \lambda \mathcal{R}(X)$$

Cette propriété implique que la mesure de risque doit être une fonction linéaire de la taille de position. Cela sous-entend entre autres qu'il n'y a pas de risque de liquidité.

- **Sous additivité.**

$$\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$$

Cette propriété indique que la fusion entre les sources de risque ne crée pas de risque supplémentaire. Il s'en suit que le montant  $\mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$ , est suffisant pour couvrir la position risquée constituée des deux sources de risque  $X$  et  $Y$ .

- **Convexité.**

$$\text{pour tout } \beta \in [0, 1] \quad \mathcal{R}(\beta X + (1 - \beta) Y) \leq \beta \mathcal{R}(X) + (1 - \beta) \mathcal{R}(Y)$$

**DÉFINITION 5.** *Une mesure de risque qui satisfait les axiomes de monotonie, de sous-additivité, d'homogénéité, et d'invariance par translation, est dite une mesure de risque cohérente. Et une mesure de risque qui satisfait les axiomes de monotonie, d'invariance par translation et de convexité est dite mesure de risque convexe.*

**2.3.2. La Conditional-VaR : une mesure de risque cohérente.** La mesure de risque VaR est généralement critiquée pour son manque d'information sur les pertes potentielles pouvant dépasser le niveau des pertes fixées par la VaR. Dans cette perspective, la CVaR est proposée en tant qu'alternative à la mesure VaR. Ainsi, et en prenant le cas des distributions continues, pour un niveau de confiance  $\alpha$ , et un horizon d'investissement  $h$ , la CVaR est définie en tant que l'espérance conditionnelle des pertes excédant le seuil de la VaR. De ce fait, et contrairement à la VaR, la CVaR fournit une information additionnelle sur les pertes se trouvant dans la queue de la distribution dépassant le quantile relatif au seuil de de la VaR.

Mathématiquement, la CVaR est définie à travers la relation suivante :

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha} r_p(r) dr, \quad (2.5)$$

ou aussi d'une manière équivalente

$$CVaR_\alpha = \mathbb{E}_p [X | X \leq VaR_\alpha], \quad (2.6)$$

$r_p$  étant la distribution de probabilité, et  $VaR_\alpha$  étant calculée pour l'horizon d'investissement  $h$  et pour un niveau de confiance  $\alpha \in [0, 1]$

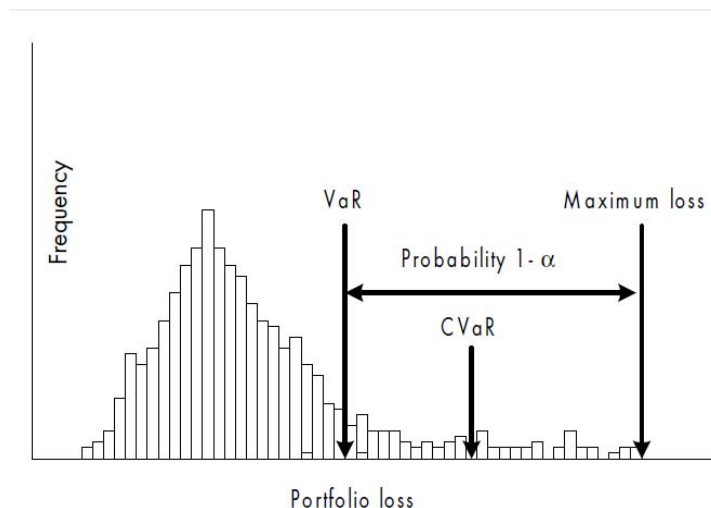


FIG. 1. VaR et CVaR sur une distribution de pertes d'un portefeuille

Acerbi et Tasche (2002) montrent que la CVaR satisfait les quatre axiomes que doit remplir une mesure de risque cohérente. De plus, la CVaR est une fonction convexe par rapport aux proportions investies dans un portefeuille, permettant ainsi la construction d'algorithmes d'optimisation efficaces. En particulier, Rockafellar et Uryasev (2000) montrent que la CVaR peut être minimisée via les techniques de programmation linéaire, ce qui permet d'aboutir sur des résultats d'optimisation à la fois efficaces et stables.

### 3. Théorie du portefeuille et diversification

L'objectif de tout modèle de gestion de portefeuille est la détermination des prix d'équilibre des actifs sur le marché, si tous les investisseurs optent pour ce modèle. A leur tour les stratégies de gestion de portefeuilles dépendent étroitement de l'attitude des investisseurs face au risque et de leur façon de percevoir et de mesurer ce risque. Elles dépendent aussi de leurs exigences en termes de rendement et de performance. De ce fait, le processus de gestion optimale de portefeuille s'avère une tâche difficile et complexe.

**3.1. Théorie moderne de portefeuille.** La théorie moderne de portefeuille développée par Markowitz est par définition une théorie « normative ». En effet, elle propose d'expliquer ce que devrait être le comportement d'un investisseur rationnel lors de la construction de son portefeuille, ceci en situation d'incertitude. A la différence des théories classiques suggérant la maximisation de la seule espérance de rentabilité, la théorie de Markowitz souligne l'importance d'optimiser conjointement le couple rentabilité-risque du portefeuille. Ainsi, face à la multiplicité des combinaisons possibles à

la disposition de l'investisseur, en termes de rentabilité et de variance de portefeuilles, Markowitz introduit la notion de portefeuille « efficient ». Un portefeuille est dit efficient, si ce dernier permet de minimiser le risque pour une rentabilité attendue fixée. La résolution de ce programme permet de distinguer la frontière des portefeuilles efficients parmi l'enveloppe de tous les portefeuilles possibles. Sur cette frontière, il est possible de distinguer entre deux branches. La branche inférieure (dans le plan  $(0, E(R_p), \sigma)$ ) étant dominée au sens de l'analyse moyenne-variance, elle permet d'assigner à la branche supérieure la qualité de « frontière efficiente ». Ainsi, la frontière efficiente renferme tous les portefeuilles optimaux qui sont dominants au sens de l'analyse moyenne-variance. La résolution du programme de maximisation de la rentabilité attendue sous une contrainte de niveau de risque fixée permet de retrouver l'équation de cette frontière. Cette dernière, explicite la relation qui doit exister entre l'espérance de rentabilité d'un portefeuille efficient en fonction de son niveau de risque. Généralement, il faut distinguer entre la frontière efficiente développée uniquement en présence d'actifs risqués dans l'économie, et une deuxième construite en présence d'un actif sans risque en plus des actifs risqués. Le résultat le plus important selon cette dernière analyse étant celui qui a été formulée dans le « Théorème de séparation à deux fonds » pour son auteur J. Tobin (1958). Selon ce théorème, tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons linéaires de l'actif sans risque et du portefeuille tangent. Ainsi, bien qu'il existe  $N+1$  actifs différents sur le marché ( $N$  actifs risqués et un sans risque), tous les portefeuilles efficients se construisent à partir des mêmes deux fonds (l'actif sans risque et le portefeuille de tangence).

3.1.1. *Analogie entre l'analyse de Markowitz et la maximisation de l'utilité espérée.* Selon la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern, l'investisseur sélectionne les alternatives risquées dans un objectif de maximisation de la valeur espérée de sa fonction d'utilité. Sous certaines hypothèses, relatives à la forme de la fonction d'utilité ou aussi à la distribution de rendements des titres composant le portefeuille, on retrouve une certaine analogie entre l'approche de l'utilité espérée et celle développée par Markowitz. En effet, l'hypothèse principale sur laquelle repose la théorie de portefeuille à la Markowitz suggère qu'il est possible de représenter les préférences des investisseurs par des fonctions d'utilité ne dépendant que des deux premiers moments de la distribution de la richesse terminale, soit la moyenne et la variance. Ces fonctions d'utilités seront croissantes en l'espérance et décroissantes en la variance du rendement du portefeuille. Grâce à cette hypothèse, l'analyse de portefeuille sous l'angle de la théorie de l'utilité espérée peut se résumer simplement en une analyse de type espérance-variance. Les résultats du programme de maximisation de l'espérance de l'utilité conduisaient donc aux mêmes solutions sur les portefeuilles efficients que suggérait le programme d'optimisation de Markowitz.

Toutefois, cette hypothèse ne peut être valable que pour certaines restrictions difficilement applicables en l'état actuel du contexte économique et financier. Nous en citons ici trois exemples. Premièrement, lorsque la fonction d'utilité de l'investisseur est de type quadratique, ayant par exemple la



forme  $U(w) = w - Aw^2$ , avec  $A > 0$ . Dans ce cas, l'espérance de l'utilité est bien fonction de l'espérance et de la variance. En effet, on a :

$$\mathbb{E}[U(V_T)] = \mathbb{E}[V_T - AV_T^2] = \mathbb{E}[V_T] - A \left( \mathbb{E}[V_T]^2 + \sigma_{V_T}^2 \right) \quad (3.1)$$

$\mathbb{E}[\cdot]$  et  $\sigma_{V_T}^2$ , représentent respectivement l'espérance et la variance de la richesse terminale de l'investisseur. Dans ce cas, le programme de maximisation de l'utilité espérée se résume en une maximisation de l'espérance toute en tenant compte de l'aversion de l'investisseur à la variance qui est contrôlée ici par le paramètre  $A$ . C'est d'ailleurs l'exemple de fonction d'utilité qu'a choisie Markowitz pour justifier son approche moyenne-variance.

Une deuxième manière de justifier cette approche serait de supposer que les rendements sont des variables aléatoires dont la distribution est gaussienne. Selon cette hypothèse toute l'information sur la distribution de rendement du portefeuille se résume dans les deux premiers moments i.e. l'espérance et la variance.

Dans ce cadre, si on considère que la fonction d'utilité est de type exponentielle :  $U(w) = -exp^{-Aw}$ , alors on retrouve la comptabilité avec l'analyse de Markowitz. En effet, selon cette représentation, maximiser l'espérance d'utilité revient à maximiser  $E[w] - \frac{A}{2}\sigma_w^2$ , qui est de même type (quadratique) que le premier cas.

Nous avons pu vérifier ici l'analogie qui se trouve entre l'approche moyenne-variance proposée par Markowitz et celle plus générale de l'utilité espérée. Toutefois, cette équivalence n'est possible que sous certaines hypothèses très réductrices qui ne concordent pas avec les réalités des marchés financiers. Les critiques adressées à l'approche de Markowitz seront issues de ce cadre d'analyse très restreint, et les approches alternatives qui ont été proposées visent à relâcher ces hypothèses. Nous reviendrons sur ces approches dans la section 3.2.

*3.1.2. A propos de la diversification des portefeuilles.* L'enseignement majeur qui ressort de la théorie moderne des portefeuilles est sans doute celui lié au concept de la diversification. En effet, ce dernier renseigne sur l'importance de détenir des portefeuilles suffisamment diversifiés pour atteindre l'objectif de minimisation de risque. Ceci se traduit par l'intérêt que devrait porter un gestionnaire de fonds à la taille des portefeuilles qu'il gère. Plus la taille de ces portefeuilles est grande plus le risque est à son minimum. Ce résultat est justifiable au travers d'une simple stratégie de diversification naïve suggérant la construction d'un portefeuille équilibré suffisamment grand. En effet, le risque d'un portefeuille de taille «  $n$  » mesuré par la variance, s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j cov(r_i, r_j) \quad (3.2)$$

$w_i$  et  $w_j$ , étant respectivement les proportions investis sur l'actif  $i$  et l'actif  $j$ ;  $r_i$  et  $r_j$  sont les rendements respectifs du titre  $i$  et du titre  $j$ , et  $cov(r_i, r_j)$  étant la covariance entre le rendement du titre  $i$  et celui du titre  $j$ . Dans le cas d'une diversification naïve, nous aurons  $w_i = w_j = \frac{1}{n}$ , et l'équation précédente se réécrit comme suit :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{cov}(r_i, r_j) \quad (3.3)$$

Dans l'équation précédente, on dénombre respectivement  $n$  termes de variance et  $n(n-1)$  termes de covariance. Dès lors, si on pose

$$\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2, \text{ et } \overline{\text{cov}_n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{n^2} \text{cov}(r_i, r_j)$$

On obtient :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \overline{\sigma_n^2} + \frac{n-1}{n} \overline{\text{cov}_n} \quad (3.4)$$

Ainsi, il apparaît, que lorsque la taille du portefeuille devient suffisamment grande, le premier terme de la partie droite de l'équation tend vers zéro, alors que le second terme tend vers la covariance moyenne,  $(n-1)/n$  tend vers 1. Ce résultat montre la relation qui existe entre la taille du portefeuille et son risque mesuré par la variance. Plus le portefeuille est grand (i.e. suffisamment diversifié), plus son risque se résume à la covariance moyenne, qui n'est autre que la partie relative au risque systématique c.-à-d. non diversifiable. L'autre partie peut être éliminée grâce à la diversification.

Le résultat précédent rappelle le rôle de la diversification dans la réduction du risque, enseignement clé de la théorie de Markowitz. Toutefois, cette conclusion se heurte à un constat empirique tout à fait contradictoire. En effet, nombreuses sont les études qui ont pu vérifier la sous-diversification ou aussi la concentration des portefeuilles. Barber et Odean (2000) reportent qu'un investisseur individuel typique tend à détenir un portefeuille composé uniquement de 4 actions. Ce résultat a été confirmé par Polkovnichenko (2005) sur les données du SCF (the Survey of Consumer Finances), où un effet de sous diversification a été détecté parmi les portefeuilles détenus par les ménages américains. Dans une contribution récente, Goetzmann et Kumar (2008), défendent aussi l'effet de concentration au niveau des portefeuilles des investisseurs individuels, de plus l'effet de concentration est plus important chez les jeunes investisseurs, les moins éduqués et ceux ayant les revenus les plus faibles. Les auteurs expliquent ces résultats surtout par la qualité informationnelle supérieure liée à la détention de portefeuilles concentrés. Cette dernière notion remonte essentiellement à la proposition de J.M. Keynes quant à la conduite d'une politique d'investissement d'un portefeuille. En effet, pour Keynes, gérer son portefeuille de manière optimale revient à concentrer ses fonds sur un nombre limité d'actifs sur lesquels on possède des informations de bonne qualité, plutôt que de les diversifier.

Les explications théoriques apportées à la pertinence de l'idée de concentration de portefeuilles remontent à Fama (1965). Il s'agit d'une remise en cause de la validité de la théorie des erreurs dans la justification de l'effet de la diversification sur la diminution du risque des portefeuilles, l'idée étant d'utiliser les distributions alpha-stables comme loi de distribution du terme d'erreur figurant dans le modèle de marché de Sharpe (1963). Avec

des telles lois, le risque n'est plus mesuré par la variance mais par un paramètre d'échelle des fluctuations qui dépendra du paramètre « alpha ». Ainsi, dans le cas où alpha est  $>$  à 1, le principe de diversification fonctionne encore. Autrement, le principe de diversification dégénère, dans la mesure où l'adjonction d'un titre supplémentaire ne conduit pas à la réduction des fluctuations de la valeur du portefeuille. Ainsi, pour ces valeurs du paramètre « alpha » la diversification est inefficace et il convient mieux de concentrer ses fonds sur un nombre limité d'actifs. Une deuxième justification de l'idée de concentration des portefeuilles, trouve son origine dans la notion de l'asymétrie qui pourrait se trouver au niveau des distributions de gains et de pertes, et les préférences des agents quant à cette asymétrie. Simkowitz et Beedles (1978) sont les premiers à aborder explicitement la relation entre diversification et asymétrie, et démontrent au travers d'un modèle économétrique que la diversification détruit l'asymétrie positive que cherchaient les investisseurs. Conine et Tamarkin (1981) dérivent le nombre optimal de titres à détenir dans un portefeuille, pour un investisseur ayant des préférences pour l'asymétrie positive. Explicitement, le nombre optimal des titres est obtenu au point où l'accroissement marginal de l'utilité espérée suite à une diminution de la variance serait égal au décroissement marginal de l'utilité espérée suite au décroissement de la Skewness. Récemment, Mitton et Vorkink (2007) élargissent le cadre d'analyse précédent pour tenir compte d'une préférence pour l'asymétrie qui diffère d'un investisseur à l'autre. Dans ce contexte, ils montrent qu'une forte préférence pour l'asymétrie engendre une forte réduction de la diversification. Dans une des contributions les plus récentes, Le Courtois et Walter (2012) revisitent l'idée de Mitton et Vorkink (2007), tout en essayant de proposer des méthodes de résolutions alternatives. Une première qui généralise le programme d'optimisation tout en considérant uniquement la composante asymétrie, sans la coasymétrie, une deuxième en utilisant les fonctions d'utilité cubique et une dernière en utilisant les moments centrés. Les résultats trouvés sont en faveur d'une concentration au niveau des portefeuilles comme conséquence directe de la présence d'asymétrie dans la structure des actifs disponibles.

Pour conclure, nous pouvons dire que la diversification totale correspond à une stratégie d'investissement rationnelle uniquement pour un investisseur averse au risque agissant sur un marché de titres homogènes, et s'il est concerné uniquement par les deux premiers moments de la distribution de son rendement. Autrement, les comportements observés sur les marchés, révélant une grande concentration des portefeuilles ne s'expliquent pas uniquement par les imperfections de marché, mais surtout par l'existence et la préférence pour l'asymétrie positive. Ce dernier point nous amène à aborder les théories alternatives de la gestion de portefeuilles qui ont été introduites afin de donner des explications théoriques aux comportements des investisseurs qui sortent du cadre d'analyse de l'approche traditionnelle moyenne-variance.

**3.2. Théorie alternatives de gestion de portefeuille.** Nous venons de mentionner ci-dessus les ambiguïtés qui entachent la notion de diversification. Statman (2004) qualifie ce phénomène de « puzzle », issue du cadre classique de l'approche moyenne-variance. La résolution de ce « puzzle » ne

peut se faire que dans le cadre d'approches de gestion de portefeuilles qui remettent en cause les hypothèses réductrices de l'approche de Markowitz. C'est dans ce cadre que nous présentons dans cette section les théories alternatives de gestion de portefeuilles. Nous présentons successivement le modèle « Safety first » de Roy (1952), ainsi que les variantes qui en découlent, liées souvent aux mesures de risque de type « downside ». Finalement, nous abordons les modèles liés à la théorie comportementale de portefeuille.

3.2.1. *Les modèles basés sur le concept du « Safety first ».* Une approche alternative à celle proposée par Markowitz (1952), est celle qui a été développée la même année par Roy (1952) grâce au concept du "Safety First". En effet, et à la différence de l'idée de Markowitz (1952) qui lie le risque aux déviations de la richesse de l'investisseur par rapport à sa valeur moyenne, pondérant ainsi de la même façon les gains et les pertes probables, et suggérant la variance comme mesure de risque suffisante, Roy (1952) traduit le risque plutôt en termes des pertes supportées par l'investisseur. Ainsi, selon ce concept, l'investisseur tient à préserver un niveau minimum de richesse, appelé souvent seuil de subsistance et noté  $s$ , et une réalisation de richesse qui est inférieure à ce seuil sera considérée comme une perte. De ce fait, Roy (1952) propose d'utiliser ce seuil comme critère de choix de portefeuille, dans le sens où l'objectif de l'investisseur consiste à minimiser la probabilité  $P$  que la richesse passe en dessous du seuil de subsistance :  $P = \Pr(W \leq s)$  où  $W$  représente une variable aléatoire caractérisant la richesse finale de l'investisseur. On retrouve ainsi une équivalence entre l'approche de Roy (1952) et celle de Markowitz (1952), dans la mesure où  $P$  est conçue en tant qu'une mesure de risque que l'investisseur cherche à minimiser pour retrouver la répartition optimale de sa richesse.

Une limite au modèle proposé par Roy (1952) est qu'il ne renseigne pas sur ce qu'est censé faire l'investisseur de la richesse excédentaire, une fois le portefeuille optimal constitué et le seuil de subsistance est assuré dans tout les états de la nature. C'est à cette limite qu'Arzac et Bawa (1977) tente d'apporter des solutions en rajoutant un critère de choix supplémentaire qui est l'espérance de la richesse finale ou aussi l'espérance de rendement du portefeuille. Les auteurs introduisent aussi la notion de probabilité de faillite admissible par l'investisseur introduite par Telser (1955), qu'ils associent à la probabilité de dépassement du seuil de subsistance défini par Roy (1952). Concrètement, le programme de l'investisseur, s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Où } \pi = \begin{cases} \text{Max } (\pi, \mu = E(W)) \\ 1, \text{ si } P = \Pr(W \leq s) \leq \alpha \\ 1 - P, \text{ sinon} \end{cases}$$

Selon ce programme, l'investisseur maximise la rentabilité espérée sous la contrainte que la probabilité de se retrouver en deça du seuil de subsistance ne dépasse pas le niveau critique. Ainsi, face à deux portefeuilles procurant le même niveau de sécurité, l'investisseur choisit celui qui offre la rentabilité espérée la plus élevée. Parallèlement, face à deux portefeuilles offrant la même rentabilité espérée, l'investisseur est tenté par celui qui minimise la probabilité de se retrouver en deça du seuil de subsistance tout en ne dépassant pas le niveau critique. On retrouve ainsi une analogie entre l'approche de Markowitz (1952) et celle proposée par Arzac et Bawa (1977).

Toutefois, on peut s'attendre à ce que le choix de portefeuilles, pour un investisseur se comportant à la manière de l'approche moyenne-variance ne coïncide pas avec celui agissant selon les recommandations de l'approche d'Arzac et Bawa. Les différences principales sont dûes au choix de la mesure de risque. En effet, pour le premier la mesure de risque est bien la variance, pénalisant autant les écarts de rendements positifs que ceux négatifs. Alors que le deuxième, agissant selon le critère "Safety First", ne considère que le "downside risk", i.e. la probabilité de se retrouver en dessous du seuil minimal. Dans cette lignée, d'autres modèles se sont développés utilisant les mesures de risque de type "downside risk" à l'image de la Value-at-Risk ou aussi la Conditional Value-at-Risk.

3.2.2. *La théorie comportementale de portefeuille.* L'incapacité de la théorie de l'espérance d'utilité à décrire les comportements observés des individus est attestée dans de nombreux articles empiriques ou d'économie expérimentale, et a donné lieu au développement de théories alternatives comme la théorie des perspectives (Kahneman et Tversky, 1979), les modèles d'utilité dépendante du rang (Quiggin, 1982), ou plus récemment la théorie des perspectives cumulées (Tversky et Kahneman, 1992). D'un autre côté, les avancées de Thaler (1999) à travers la théorie de la comptabilité mentale, qui renvoie à la manière avec laquelle les individus perçoivent, classent et organisent les flux financiers et leur investissement, ont donné lieu au développement de l'idée stipulant la hiérarchisation des flux d'investissement en catégories ou comptes liés souvent à leur degré de liquidité. C'est en s'inspirant de ce cadre d'analyse que Shefrin et Statman (2000) ont pu développer leur théorie dite "comportementale" de portefeuilles, dans l'objectif d'apporter des éléments de réponse aux comportements controversés des investisseurs et échappant aux conclusions de la théorie usuelle de Markowitz (1952). Dans ce cadre, la théorie comportementale de portefeuille "Behavioral Portfolio Theory" (BPT) sera développée en deux versions.

Dans la première version, appelée BPT-SA (Single mental Account version), les auteurs combinent le concept "Safety First" aux conclusions de la psychologue Lola Lopes (1987). Selon cette dernière, les décisions des individus sont gouvernées par deux sentiments : la crainte et l'espoir. L'adaptation au choix d'investissement se traduit, pour chacun de ces deux sentiments, par une déformation de la distribution de probabilité des richesses finales.

Dans le cadre de cette première version, le programme de l'agent consiste à maximiser la richesse finale espérée sous une contrainte de sécurité :

$$\begin{cases} \text{Max } \mathbb{E}_h(W) \\ \text{s.c } \Pr(W < A) \leq \alpha \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\mathbb{E}_h$  signifie une espérance calculée après la déformation de la distribution des probabilités objectives, par une fonction caractérisant le degré d'optimisme ou de pessimisme de l'investisseur.

A caractérise le niveau d'aspiration que l'investisseur souhaite dépasser avec une probabilité  $1 - \alpha$ , tel que suggéré par Lopes (1987) et remplaçant ainsi le seuil de sécurité dans le modèle de Roy (1952).

La résolution de ce programme débouche sur un portefeuille ayant un profil particulier. Plus précisément, le portefeuille final de l'investisseur contiendra deux composantes, la première étant une proportion sur l'actif le moins risqué, voire même sans risque, permettant d'assurer le niveau d'aspiration  $A$  avec une probabilité de faillite ne dépassant pas le seuil  $\alpha$ . La deuxième composante est un actif ayant les caractéristiques d'une loterie.

Dans la deuxième version, appelé BPT-MA (Multiple mental Account), les auteurs introduisent un autre biais psychologique, émanant des travaux de Thaler (1999), et connu sous le nom de comptabilité mentale. Cette version est considérée comme étant une extension de la première, dans le sens où sont considérées plusieurs couches ou comptes mentaux à la fois. Ceci est à la différence de la première version où n'est considérée qu'un seul compte mental. Ainsi, l'idée consiste à introduire différents niveaux d'aspiration, associés chacun aux différents comptes mentaux considérés.

De ce fait, la résolution du programme de l'investisseur débouche sur un portefeuille disposé en pyramide, sous forme de "couches superposées". La première couche est constituée d'actifs monétaires, ou d'actifs sans risque, destinée souvent à satisfaire le besoin de sécurité de l'investisseur. La deuxième couche, contenant essentiellement des actions, est consacrée à l'obtention d'un certain niveau d'aspiration. La troisième couche, composée d'actions et éventuellement d'options ou d'autres produits dérivés, est destinée à faire profiter l'investisseur du potentiel de rendement que peut offrir cette classe d'actifs.

Ainsi, selon les conclusions de cette théorie comportementale de portefeuille, les chercheurs ont pu formuler des justifications quant aux ambiguïtés entachant le comportement des investisseurs en matière d'investissement et de préférences face aux risques. En effet, le cadre d'analyse qu'adopte la première version du modèle de Shefrin et Statman (2000) permet d'apporter finalement une réponse au célèbre paradigme énoncé par Friedman et Savage (1948), selon lequel les investisseurs achetant des contrats d'assurance sont tentés aussi par des loteries. De plus, les extensions apportées à la deuxième version du modèle favorise la concentration des portefeuilles sur un certain nombre d'actifs, un aspect qui contredit le principe de diversification largement défendu par l'approche classique de Markowitz (1952), mais qui confirme nettement les résultats des dernières études empiriques, dont notamment celles de Kumar et Goetzman (2008) ainsi que Plokovnechinko (2005), montrant la forte concentration des portefeuilles.

#### 4. Conclusion

Dans ce chapitre nous introduisons les différentes notions utilisées dans le cadre de cette thèse. Nous avons pu ainsi rappeler le cadre d'analyse des théories modernes dédiées aux mesures de risque comme la Value-at-Risk et de la Conditional Value-at-Risk abordées dans le troisième chapitre, pour étudier notamment l'utilité et l'impact de l'utilisation de l'approche copule dans l'estimation de ces mesures. Nous avons discuté aussi des apports et des limites de la théorie moderne du portefeuilles, de la notion de diversification ainsi que des théories du portefeuille alternatives, notamment celles relatives à la théorie comportementale du portefeuille. En effet, nous envisageons d'étudier l'apport de la théorie des fonctions copules par rapport au degré d'aversion aux risque des investisseurs. Ce point sera abordé dans le quatrième chapitre.

## Diversification et Choix de Copules

### 1. Introduction

En détenant des portefeuilles, les institutions financières sont confrontées à plusieurs types de risques ; un risque de marché, un risque opérationnel et un risque de crédit. En faisant référence à cette vaste gamme de risques, et en rappelant l'objectif fondamental de la gestion des dits portefeuilles, visant à l'amélioration de leurs qualités, au moyen de divers méthodes d'optimisation voire de techniques d'assurance de portefeuille appropriées, l'objectif est d'utiliser le meilleur modèle de corrélation qui contribue à la bonne évaluation de l'impact du choix de l'une ou l'autre des techniques afin d'améliorer la performance des portefeuilles. En effet, la modélisation de la dépendance est d'une grande importance pour la construction de portefeuille et la gestion des risques. En ce sens, la littérature récente a bien mis en évidence l'impact de la dépendance entre les variables financières sur le risque global du portefeuille (Longin et Solnik (2001), Ang et Chen (2002)). Ainsi, un modèle inapproprié pour la mesure de la dépendance conduit au choix de portefeuilles non optimaux.

L'approche classique pour modéliser la dépendance est basée sur l'hypothèse d'une distribution multivariée normale. En posant une telle hypothèse, les conclusions en terme de gestion de portefeuilles et des risques sont basées sur les recommandations de l'analyse moyenne-variance, qui considère qu'un coefficient de corrélation linéaire est une mesure statistique suffisante et appropriée pour décrire la structure de dépendance. Toutefois, des preuves d'ordre empirique ont montré les insuffisances de la distribution multivariée normale pour modéliser la distribution de rendements des actifs financiers, étant donné surtout que les distributions marginales sont plutôt asymétriques et à queues épaisses. Cela pouvait être une bonne raison pour avoir des réserves sur la validité des mesures de corrélations classiques pour modéliser la structure de dépendance au sein d'un portefeuille d'actifs.

Ces preuves ont encouragé les chercheurs à développer des modèles de dépendance qui se veulent plus souples et surtout plus réalistes. Dans ce contexte, une nouvelle ligne de recherche recommande la validité des fonctions copules pour modéliser les distributions multivariées<sup>1</sup>, remettant ainsi au goût du jour le cadre théorique proposé par Sklar (1959), suggérant que toute distribution multivariée ayant des distributions marginales continues peut être construite à partir d'une fonction de copule et de ses distributions marginales. La fonction copule est ainsi une distribution multivariée ayant des marges uniformes.

---

<sup>1</sup>Voir à cet effet Embrechts, McNeil and Straumann (2001).



Dès lors, les fonctions copules sont un outil d'une grande utilité en raison de leur flexibilité lors de l'estimation de la fonction de distribution jointe, mais aussi pour les avantages potentiels lors de la phase de simulation. En effet, les fonctions copules permettent de modéliser la structure de dépendance indépendamment des distributions marginales. De cette façon, nous pouvons construire une distribution multivariée avec différentes marges et la structure de dépendance sera donnée par la fonction de copule elle-même. Traditionnellement, ceci était impossible en utilisant la distribution multivariée gaussienne, pour laquelle les distributions marginales doivent être de même famille, c'est à dire elles-mêmes gaussiennes. Pendant la phase de simulation, les fonctions copules permettent de générer des variables aléatoires ayant une structure de dépendance donnée avec des algorithmes qui sont faciles à mettre en place.

Par conséquent, de nombreuses applications utilisant les fonctions copules se sont développées. Il s'agit en particulier des applications dans le domaine du "risk management" traitant de l'estimation des mesures de risque, dans la modélisation de la corrélation au sein de portefeuille de crédits ou aussi pour étudier l'effet de contagion. Des références comme celles de Frees et Valdez (1998), Bouyé et al (2000) ou Embrechts et al (2003) présentent une bonne revue de littérature sur l'utilisation des copules en finance et assurance.

Le principal objectif lié à l'utilisation de l'approche copule vise à obtenir le modèle adéquat permettant la modélisation de la structure de dépendance. Ceci se résume selon deux procédures : La calibration des paramètres des fonctions copules disponibles et ensuite le choix de la meilleure copule ayant décrit au mieux la structure de dépendance via des tests d'adéquation appropriés.

Malgré les multiples fonctions copules disponibles, la copule gaussienne reste celle la plus utilisée dans la pratique (en général pour des raisons de simplicité). Celle-ci a été intégrée dans plusieurs systèmes de gestion de risques tels que JP Morgan (1997) et KMV (2001). Encore récemment, les études empiriques de Romano (2002) mentionnent la validité de la copule gaussienne pour le cas des portefeuilles bivariés. Chen et al (2004), traitant du choix de la meilleure copule pour le cas de portefeuilles de plus grande dimension ( $N=2, \dots, 30$ ), suggèrent la validité de copule la de Student.

En dépit de ces résultats, nous mettons en avant le problème principal que pose ce genre d'analyse surtout pour leur manque de précision sur la qualité des portefeuilles étudiés. En effet, on peut penser à une situation particulière pour laquelle deux portefeuilles ont une même dimension et donnant lieu à des choix de copules différents. Face à ce genre de limite, nous envisageons d'intégrer une caractéristique fondamentale, liée à la nature même du portefeuille, permettant de différencier entre des portefeuilles de même dimension, et permettant de répondre surtout au paradoxe issu de choix de copule différents. Pour répondre à cette question, nous suggérons d'utiliser une mesure permettant de quantifier le niveau de diversification se trouvant au sein des portefeuilles étudiés. En effet, selon cette perspective, nous pensons que la structure de dépendance d'un portefeuille bien diversifié

doit être différente de celle d'un autre largement concentré sur un certains nombre d'actifs (secteurs).

Dans ce cadre, l'objectif de ce chapitre consiste à vérifier la nature de la structure de dépendance qui peut se trouver dans des portefeuilles caractérisés par des niveaux de diversification différents. En d'autres termes, le degré de diversification peut-il nous informer directement sur la fonction copule appropriée à la structure de dépendance correspondante? En fait, jusqu'à présent, aucun consensus n'a été établi pour assigner une fonction copule particulière à une application (contexte) qui lui est spécifique. Parallèlement, aucune procédure de sélection de fonction copule n'a été proclamée comme étant définitive, permettant de vérifier l'adéquation de la copule en question. Ceci laisse le débat sur la question du choix des fonctions copules toujours ouvert, pour lequel nous essayons d'apporter quelques éléments de réponses.

Le reste de ce chapitre<sup>2</sup> sera structuré comme suit. Dans la première section, nous introduisons les fonctions copules, nous discutons de leurs méthodes de calibration et des tests d'adéquation permettant de sélectionner la meilleure copule. Dans la deuxième section nous passons en revue les différentes mesures de diversification présentes dans la littérature. Dans la troisième section nous essayons de vérifier, à travers une illustration empirique, la validité de la relation qui peut exister entre le degré de diversification d'un portefeuille et le choix de la copule permettant de décrire au mieux la structure de dépendance y afférent. Nous concluons sur les résultats les plus significatives dans la dernière section.

## 2. Les fonctions copules : Définitions et calibrage

**2.1. Illusions sur le coefficient de corrélation linéaire.** Comprendre les relations qui peuvent exister entre une représentation multivariée de plusieurs variables est l'un des problèmes majeurs dans la science des statistiques et dans le domaine de la finance. L'analyse des données et des régressions s'est développée dans la plupart des méthodologies de la statistique appliquée. En effet, c'est l'une des composantes importantes de l'analyse multivariée, parce qu'elle permet aux chercheurs de s'intéresser à l'effet des variables explicatives sur la variable expliquée. Une limite majeure de cette analyse, est qu'elle requiert de définir la dimension de la variable dépendante comme étant la mesure d'intérêt fondamentale. Les autres dimensions, prises par les variables explicatives, viennent en support de cette variable. Un autre concept, omniprésent dans la majorité des applications mathématiques et financières, utilisé pour décrire la relation qui se trouve entre plusieurs variables, est celui de la corrélation linéaire. La popularité de ce concept peut être expliquée par plusieurs raisons. En effet, il est facile de calculer les moments d'ordre deux (variance; covariance) et de dériver ensuite le coefficient de corrélation, étant par nature la mesure de la dépendance pour les distributions multivariées gaussiennes et plus généralement pour les distributions multivariées sphériques et elliptiques.

---

<sup>2</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "Diversification and Copula Choice". Il a été présenté à la conférence internationale de Finance et Assurance (Djerba, 2008). Il sera soumis à *Journal of Multinational Finance*.

A partir de ce dernier point, on comprend facilement les limites de l'utilisation de ce concept pour les distributions non elliptiques (caractéristique de la plupart des distributions en finance). En effet, le coefficient de corrélation ne peut pas capturer les relations de dépendance non linéaire. Ainsi, Il est nécessaire de connaître les illusions qui entachent la notion de la corrélation, surtout lorsqu'il s'agit de travailler dans un contexte qui ne favorise pas l'utilisation du modèle de la distribution multivariée gaussienne. En effet, en dehors du monde elliptique, la corrélation doit être utilisée avec précautions.

**Illusion 1** Le fait de connaître les distributions marginales et le coefficient de corrélation détermine t-il la distribution jointe ?

Ceci est vrai seulement si on porte notre attention sur la distribution multivariée gaussienne ou sur les distributions elliptiques d'une façon générale. Prenons l'exemple de deux variables aléatoires qui ont chacune une distribution normale standard et un coefficient de corrélation donné de 0,7. Dans ce cas il y a une seule distribution bivariée elliptique qui convient avec ces données, à savoir la distribution bivariée normale avec une corrélation de 0,7. En dehors de la classe des distributions elliptiques, il y a une infinité de distributions qui peuvent s'adapter à cette situation (on utilise généralement les distributions elliptiques pour faciliter les estimations ainsi que les simulations). En plus, le coefficient de corrélation ne dit rien sur le degré de dépendance dans les queues des distributions. En effet, il est largement connu que le coefficient de corrélation résume la structure de dépendance au centre de la distribution jointe et ignore les éventuelles dépendances à l'extrême.

**Illusion 2** Etant donné les distributions marginales  $F_1$  et  $F_2$  pour les variables  $X_1$  et  $X_2$ , les corrélations linaires entre -1 et +1 peuvent être atteintes suite à une spécification convenable pour la distribution jointe  $F$ .

Encore une fois, ceci est vrai que dans le cas d'un univers elliptique. En général la corrélation à atteindre dépend de  $F_1$  et  $F_2$  et forme un intervalle fermé  $[\rho_{min}; \rho_{max}]$  contenant 0, qui est un sous ensemble de  $[-1, 1]$ . Le théorème qui suit montre quelles corrélations sont possibles, pour des distributions marginales données.

**THÉOREME 2.** Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire ayant pour marginales  $F_1$  et  $F_2$ , et une structure de dépendance non spécifiée. Supposons que  $\sigma^2(X) > 0$  et  $\sigma^2(Y) > 0$ , alors on a :

(1) L'ensemble des corrélations possibles est un intervalle fermé  $[\rho_{min}; \rho_{max}]$  et pour les corrélations extrêmes on a  $\rho_{min} < 0 < \rho_{max}$  ;

(2) La corrélation extrême  $\rho = \rho_{min}$  est atteinte si et seulement si X et Y sont parfaitement et négativement dépendantes ; La corrélation extrême  $\rho = \rho_{max}$  est atteinte si et seulement si X et Y sont parfaitement et positivement dépendantes ;

(3)  $\rho_{min} = -1$  si X et Y sont de même type ;  $\rho_{min} = +1$  si X et Y sont de même type.

Ce fait nous montre qu'il est possible d'avoir un vecteur aléatoire  $(X, Y)$  pour lequel la corrélation n'est pas +1 ou -1, pourtant X et Y sont parfaitement (positivement, négativement) corrélées. Ceci montre aussi que des faibles corrélations ne peuvent pas être interprétées comme impliquant des faibles dépendances entre les variables aléatoires.

Finalement, on peut terminer sur quelques désavantages de la notion de la corrélation. Nous considérons toujours le cas de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

- Les variances des deux variables doivent être finies, sinon la corrélation linéaire ne peut pas être définie. Ceci ne peut pas idéaliser une mesure de dépendance et peut causer une plénitude de problèmes lorsqu'on travaille avec des distributions à queues épaisses.
- Une corrélation nulle entre ces deux variables n'implique pas qu'elles soient indépendantes. Ceci est admissible par contre pour le cas d'une distribution multivariée normale.
- La corrélation linéaire présente l'inconvénient majeur d'être non invariante sous des transformations non linéaires strictement croissantes pour les deux variables aléatoires.

Ainsi, on peut dire que la corrélation linéaire, malgré les avantages qu'elle propose, n'est pas une mesure fiable de la dépendance. De ce point de vue, les chercheurs se sont penchés vers des mesures alternatives, telle la corrélation des rangs ou aussi le tau de Kendall. Toutefois, les manipulations, lors des calculs, ne sont aussi faciles que dans le cas de la corrélation linéaire.

On a pu distinguer ainsi les difficultés qui entachent les notions relatives aux mesures ordinaires de la dépendance. En effet, leurs apports pour décrire la structure de dépendance qui peut exister entre plusieurs variables sont souvent contestés.

L'une des réponses apportées à cette problématique (décrire la structure de dépendance multi-variables), serait sans doute de construire la fonction de distribution jointe, qui doit être consistante avec les fonctions de distribution marginales et la structure des corrélations. En effet, si on détient un modèle, pour des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , sous la forme d'une distribution jointe  $F$ , on peut dire qu'on connaît tout sur ce qui doit être connu sur ces variables. En effet, on connaît désormais leurs comportements marginaux, on peut évaluer aussi leurs probabilités conditionnelles. On dit que la structure de dépendance est contenue dans la distribution jointe  $F$ .

Cependant, il n'est pas aussi facile de construire de telles fonctions, surtout lorsque le nombre des variables est relativement élevé. Pour répondre à cet enjeu, les chercheurs ont dû remettre au goût du jour la notion de fonctions copules, instrument statistique de grand intérêt, introduit pour la première fois par Sklar (1959). En effet, les apports de cette théorie suggèrent la possibilité de constituer la fonction de distribution jointe, tout en connaissant les distributions marginales. Désormais, une modélisation plus réaliste et plus souple des liaisons entre les variables est possible grâce à cette théorie.

**2.2. Idée derrière les fonctions copules.** Après avoir discuter de la nécessité d'une mesure fiable pour la structure de dépendance, outre celle de la corrélation linéaire ou celles de la corrélation des rangs (le  $\rho$  de Spearman et le tau de Kendall), on s'intéresse particulièrement à la construction de la distribution jointe. Nous avons signalé la contribution que peut apporter la théorie des fonctions copules pour résoudre ce problème. En effet, et comme on l'a déjà mentionné, la problématique majeure derrière la description de la

structure de dépendance est de construire la fonction de distribution jointe. Les fonctions copules sont une solution ingénieuse pour la résolution de ce type de problème. En effet, voici l'idée qui a suscité l'apparition de cette approche :

Soit le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_n)$  pour lequel on veut construire la distribution jointe. Dans ces conditions,  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires ayant les distributions marginales suivantes  $F_1, \dots, F_n$ , telles que  $F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = u_i$

La fonction de distribution jointe est donnée par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (2.1)$$

On a alors :

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.2)$$

$U_i$  étant définies sur  $[0,1]$ , et en prenant la fonction  $C$  telle que :

$$\begin{aligned} C : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$F$  étant la fonction de répartition du vecteur.

On peut vérifier que  $C$  possède toutes les propriétés d'une fonction de répartition à  $n$  dimensions. Ceci a amené Sklar(1959) à définir  $C$  en tant que fonction *Copule* et à introduire ainsi la définition suivante :

**DÉFINITION 6. Originale de Sklar (1959)** Nous appellerons *Copule* (à  $n$  dimensions) toute fonction  $C$  continue et non décroissante au sens employé pour une fonction de répartition à  $n$  dimensions définie sur le produit cartésien de  $n$  intervalles fermés  $[0,1]$  et satisfaisant aux conditions suivantes  $C(0, \dots, 0) = 0$  et  $C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$

**REMARQUE 1.** Le vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  est multivarié gaussien, de matrice de corrélation  $\Sigma$ , si et seulement s'il admet une représentation gaussienne pour  $C$  ainsi que pour les distributions marginales  $F_i$ . Dans ce cas :

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(\Phi(x_1)), \dots, \Phi^{-1}(\Phi(x_n))) \\ &= \Phi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Sinon, si la représentation que l'on admet pour  $C$  est autre que la représentation gaussienne<sup>3</sup>, ou aussi, si les distributions marginales sont autres que la distribution normale, le vecteur s'éloigne largement de la représentation gaussienne.

### 2.3. Définitions.

**DÉFINITION 7.** Une fonction *Copule* à  $n$  dimensions est une fonction de distribution multivariée  $C$ , avec des distributions marginales uniformes dans  $[0,1]$ , et ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ;
- (2)  $C$  est continue et croissante ;

---

<sup>3</sup>Voir la section dédiée aux familles des fonctions copules (elliptiques, archimédiennes).

- (3)  $C$  possède les marginales  $C_i$  satisfaisant  $C_i(u) = C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$  pour tout  $u \in [0, 1]$ .

Il est évident, à partir de cette dernière définition, que si  $F_1, \dots, F_n$  sont des fonctions de distributions univariées,  $C(F(x_1), \dots, F(x_n))$  est une fonction de distribution multivariée ayant pour marginales  $F_1, \dots, F_n$  parce que  $U_i = F_i(x_i)$   $i = 1, \dots, n$  sont des variables aléatoires uniformes. On conclut par dire que les fonctions copules constituent un outil avantageux pour construire et simuler les distributions multivariées. Ceci est illustré à travers le résultat le plus important tiré de la théorie des fonctions Copules, à savoir le théorème de Sklar.

**THÉORÈME 3.** *Étant donné un vecteur aléatoire de fonction de distribution  $F$ , et dont les composantes ont les distribution  $F_i$   $i = 1, \dots, n$ , il existe une copule  $C$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n))$$

La copule  $C$  est unique dans le cas où les variables aléatoires  $F_1, \dots, F_n$  sont continues.

Réciproquement, étant données des fonctions de répartition pour des marginales  $F_1, \dots, F_n$ , et une fonction copule  $C$ , on peut construire un vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  de telle sorte que les  $F_i$  soient les fonctions de distribution de  $X_i$  et que la fonction de répartition de  $(X_1, \dots, X_n)$  soit donnée par :  $F(x_1, \dots, x_n) = C(F(x_1), \dots, F(x_n))$ .

**DÉFINITION 8.** *On dit que la copule  $C_1$  est plus petite que la copule  $C_2$  (ou aussi  $C_2$  est plus grande que  $C_1$ ), et on écrit que si  $C_1 \prec C_2$*

$$\begin{aligned} \forall (u_1, \dots, u_n) \in I^n \\ C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Deux types spécifiques de copule peuvent jouer un rôle important, la borne inférieure et la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding  $C^-$  et  $C^+$ .

$$\begin{aligned} C^-(u_1, \dots, u_n) &= \max \left\{ 1 - n + \sum_{i=1}^n u_i, 0 \right\} \\ C^+(u_1, \dots, u_n) &= \min \{u_1, \dots, u_n\} \end{aligned}$$

Pour n'importe quel type de copule, on peut montrer que :  $C^- \prec C \prec C^+$

Le concept de l'ordre de concordance peut être illustré facilement à travers l'exemple de la copule gaussienne (Joe [1997]) :

$$C(u_1, u_2, \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$$

Pour cette famille de copule on a :

$$C^- = C_{\rho=-1} \prec C_{\rho<0} \prec C_{\rho=0} = C^\perp \prec C_{\rho>0} \prec C_{\rho=1} = C^+$$

avec  $C^\perp = \prod_{i=1}^n u_i$ .

De même si on considère l'exemple de la copule de Frank, définie par le résultat suivant :

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

On peut vérifier facilement que cette fonction copule retient un ordre de concordance positif en fonction du paramètre  $\alpha$ , et que les copules de

Fréchet-Hoeffding relatives respectivement, à la borne inférieure, la borne supérieure, ainsi que la copule produit, sont des cas particuliers de la copule de Frank, quand  $\alpha$  tend respectivement vers,  $-\infty$ ,  $+\infty$  et 0.

REMARQUE 2. *La représentation canonique de la densité d'une fonction copule est donnée par :*

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \quad (2.4)$$

Pour obtenir la densité de la distribution  $F$  à N-dimensions, on a recours à la relation suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^N f_n(x_n) \quad (2.5)$$

Avec  $f_n$  est la densité de la marginale  $F_n$ .

**2.4. Familles des fonctions copules.** La littérature consacrée à l'approche copule nous fournit différents types de fonctions qui peuvent être résumés en deux catégories de familles : La famille des copules elliptiques et celle des copules archimédiennes.

2.4.1. *Les copules liées aux distributions elliptiques :* La famille des copules elliptiques est liée à la classe de distributions elliptiques. Cette classe fournit des exemples utiles pour la construction des distributions multivariées. Par conséquent, la modélisation de la structure de dépendance ainsi que les simulations sont faciles à mettre en place. Dans cette famille, on distingue la copule gaussienne et la copule de Student.

#### La copule Gaussienne

Il s'agit de la copule d'un vecteur multivarié gaussien de matrice de corrélation  $\rho$ , de moyennes nulles et variances égales à l'unité. Soit  $\varphi_\rho$  la distribution normale multivariée standardisée du vecteur, ayant pour matrice de corrélation  $\rho$ .

Ainsi, la copule gaussienne multivariée prend la forme suivante :

$$C(u_1, \dots, u_N; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N)) \quad (2.6)$$

La fonction de densité correspondante est :

$$c(u_1, \dots, u_N; \rho) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varsigma^T (\rho^{-1} - I) \varsigma\right) \quad (2.7)$$

Avec  $\varsigma_i = \Phi^{-1}(u_i)$

#### La copule de Student

La copule de Student est la copule de la distribution multivariée t-Student. Soit  $T_{\rho, \nu}$  la distribution multivariée de Student normalisée, avec une matrice de corrélation  $\rho$  et  $\nu$  degrés de liberté. Ainsi, la copule de Student multivariée sera donnée par la fonction suivante :

$$C(u_1, \dots, u_N; \rho, \nu) = T_{\rho, \nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_N)) \quad (2.8)$$

Avec  $T_{\rho, \nu}(x_1, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_N} \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2}) |\rho|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) (\nu\pi)^{\frac{N}{2}}} (1 + \frac{1}{\nu} x^T \rho^{-1} x)^{-\frac{(\nu+N)}{2}} dx$ ,

$t_\nu^{-1}$  étant l'inverse de la distribution univariée de Student.

La fonction de densité correspondante est :

$$c(u_1, \dots, u_N; \rho, \nu) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^N (1 + \frac{1}{\nu} \varsigma^T \rho^{-1} \varsigma)^{-\frac{\nu+N}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+N}{2})]^N [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^N \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{\varsigma_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}$$

$$\varsigma_i = t_\nu^{-1}(u_i)$$

2.4.2. *Les copules Archimédiennes.* Genest et Mac Kay (1986) définissent les copules archimédiennes comme suit :

$$c(u_1, \dots, u_N) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_N)) & \text{si } \sum_{n=1}^N \varphi(u_n) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec  $\varphi$  une fonction appelée souvent «générateur de la copule», satisfaisant

- $\varphi(1) = 0$ ;
- Pour tout  $t \in (0, 1)$ ,  $\varphi'(t) < 0$ , i.e.  $\varphi$  est décroissante;
- Pour tout  $t \in (0, 1)$ ,  $\varphi''(t) \geq 0$ , i.e.  $\varphi$  est convexe.

Voici quelques exemples de Copule archimédienne, relatives au cas biva-rié :

- La copule Produit

$$C^\perp : \varphi(u) = -\ln(u) ; C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2 \quad (2.10)$$

- La copule de Clayton :

$$\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1, \alpha > 0 ; C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2.11)$$

- La copule de Gumbel :

$$\varphi(u) = (-\ln u)^\alpha, \alpha \geq 1 ; C(u_1, u_2) = \exp \left\{ - [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad (2.12)$$

- La copule de Frank :

$$\varphi(u) = -\ln \frac{e^{-\alpha u} - 1}{e^{-\alpha} - 1}, \alpha \geq \mathbb{R} ; C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right) \quad (2.13)$$

Les extensions pour le cas multivarié sont données à travers les résultats suivants :

- La copule Produit  $C^\perp$  :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^n u_j \quad (2.14)$$

- La copule de Cook-Jhonson :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{j=1}^n u_j^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2.15)$$



– La copule de Gumbel-Hougaard :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha + \dots + (-\ln u_n)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad (2.16)$$

– La copule de Frank :

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \cdot \dots \cdot (e^{-\alpha u_n} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \right) \quad (2.17)$$

**2.5. Méthodes de calibration.** La question relative à la calibration des fonctions copules situe la problématique dans un ordre plutôt empirique. En effet, il s'agit d'estimer les paramètres des fonctions copules par rapport à l'ensemble des données qui sont à disposition. Ceci passe systématiquement par l'estimation des paramètres des marginales. A ce stade, la littérature consacrée à la question suggère deux types de méthodes : Les méthodes paramétriques et les méthodes non paramétriques. Pour l'instant, nous allons nous limiter au cas des méthodes paramétriques du fait que la méthode non paramétrique, qui consiste en la construction de la copule empirique, trouve son utilité lors du choix de la copule appropriée, chose qui sera traitée dans la section correspondante.

Dans cette section nous allons considérer un échantillon de variable aléatoire représenté par les séries temporelles  $X = (X_{1t}, \dots, X_{Nt})_{t=1}^T$ , avec  $N$  le nombre de variables incluses dans l'échantillon et  $T$  étant le nombre d'observations (qui peuvent être journalières, mensuelles ou annuelles).

Notons que pour le cas des méthodes paramétriques, on peut distinguer trois méthodes : la méthode du maximum de vraisemblance (ML), la méthode (IFM) pour "Inference Function for Margins", et la méthode (CML) pour "Canonical Maximum Likelihood". La caractéristique commune qui relie l'ensemble de ces méthodes repose sur la maximisation de la fonction de log-vraisemblance.

2.5.1. *La méthode (ML) : Maximum Likelihood.* Soit  $\theta$  un vecteur à  $k$  dimensions des paramètres à estimer. Dans ce cas  $\theta = (v_1, \dots, v_n; \alpha)$ , où  $v_i$   $i = 1, \dots, n$  le vecteur des paramètres relatif aux distributions marginales  $F_i$ , et  $\alpha$  le vecteur des paramètres relatif à la fonction Copule.

Soit aussi  $L_t(\theta)$  et  $l_t(\theta)$ , respectivement la fonction de vraisemblance et celle du log-vraisemblance relatives à l'observation à l'instant  $t$ . On définit ainsi la fonction du log-vraisemblance comme suit :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta) \quad (2.18)$$

Reprenons ensuite la représentation canonique de la fonction de densité relative à la fonction de distribution jointe :

$$f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n), \dots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^N f_n(x_n) \quad (2.19)$$

Ainsi, on peut prolonger la fonction du log-vraisemblance à :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \nu_1), \dots, F_n(x_n^t; \nu_n), \dots, F_N(x_N^t; \nu_N); \alpha) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln f_i(x_i^t; \nu_i) \quad (2.20)$$

Finalement, on peut définir l'estimateur (ML)  $\hat{\theta}$  du vecteur des paramètres  $\theta$ , comme étant celui qui maximise la fonction précédente, i.e.  $\hat{\theta} = \arg \max (l(\theta))$ .

Il s'ensuit que le calibrage par le biais de cette méthode sera un peu compliqué. En effet, il nécessite une estimation simultanée des paramètres des marges et ceux liés à la structure de dépendance. En outre, comme souligné par Mashal et Naldi (2002), selon cette procédure, il serait impératif d'avoir un nombre considérable d'observations, et par conséquent, elle requiert un effort de calcul intensif. Ainsi, d'autres méthodes ont été établies suggérant la séparation entre les estimations des paramètres des distributions marginales de celles liées à la fonction de copule.

2.5.2. *La méthode (IFM) : Inference Function for Margins.* Selon la méthode IFM, et à la différence de la méthode précédente, là où l'estimation des paramètres se fait en une seule étape, les paramètres des distributions marginales sont estimés séparément de ceux de la fonction Copule. En d'autres termes, le processus d'estimation est divisé en deux étapes :

- (1) Estimer le vecteur des paramètres  $\nu_i$   $i = 1, \dots, n$  relatifs aux distributions marginales  $F_i$  en utilisant la méthode ML :

$$\hat{\nu}_i = \arg \max l^i(\nu_i) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \nu_i)$$

2. Estimer le vecteur des paramètres  $\alpha$  de la fonction Copule, étant données les estimations faites dans l'étape précédente :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \arg \max l(\alpha) \\ &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \nu_1), \dots, F_n(x_n^t; \nu_n), \dots, F_N(x_N^t; \nu_N); \alpha) \end{aligned}$$

2.5.3. *La méthode (CML) : Canonical Maximum Likelihood.* La méthode CML adopte le même processus d'estimation que celui proposé par la méthode IFM. Toutefois, la différence réside dans la présomption faite sur la forme paramétrique des distributions marginales. En effet, cette méthode repose sur le concept de la transformation empirique des marginales. Cette transformation tend à approcher la forme paramétrique des marginales,  $F_i(\cdot)$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , avec la fonction de distribution empirique définie comme suit :

$$\hat{F}_i(\cdot) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{\{x_{it} \leq \cdot\}}$$

Ainsi, la méthode CML est implémentée à travers la procédure suivante : Transformer l'ensemble des données initiales  $(X_{1t}, \dots, X_{Nt})_{t=1}^T$  en des variables uniformes, en utilisant les fonctions de distribution empiriques.

- (1) Estimer le vecteur des paramètres de la copule à travers la relation suivante :

$$\hat{\alpha} = \arg \max l(\alpha) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, \dots, \tilde{u}_N; \alpha)$$

**2.6. Critères de sélection.** La problématique majeure liée à l'utilisation de l'approche copule tient au choix de la copule appropriée, ayant décrit au mieux la structure de dépendance étudiée. Etant donné ce défi, la littérature orientée vers la théorie des fonctions copules enregistre une grande contribution dans cet axe de recherche. Récemment encore elle connaît une grande évolution. Désormais, nous sommes face à une multitude de critères de sélections, chose qui rend difficile la distinction du choix de la meilleure copule. Parmi les plus utilisés sont, citons ceux basés sur les critères d'information. En effet, lors de l'estimation des paramètres de la fonction copule, les méthodes utilisées suggèrent la maximisation de la fonction de vraisemblance. Dès lors, ce cadre d'analyse favorise l'utilisation des tests d'adéquation basés sur la dernière fonction de vraisemblance, à l'image de la mesure d'AKAIKE « AIC ». Celle ci se définit selon l'expression suivante :

$$AIC = -2 \log \text{likelihood} + 2K$$

K étant le nombre de paramètres du modèle (ici de la fonction copule)

Lorsqu'il s'agit d'utiliser ce critère, la meilleure copule est celle qui minimise la mesure précédente.

Récemment encore, plusieurs auteurs s'intéressent au développement des tests d'adéquation (Goodness of fit tests), introduits pour la première fois par Genest et Rivest (1993). Ces tests sont basés sur une comparaison directe entre la structure de dépendance implicite à la fonction copule et celle qui est observée empiriquement. Dans ce qui suit, nous passons en revue les différents types de conceptions développées dans le cadre de cette approche.

2.6.1. *Les tests GoF basés sur le processus de la copule empirique.* La plupart des tests sur la qualité d'ajustement liés aux copules qui ont été récemment proposés reposent essentiellement sur une comparaison entre la copule empirique au sens de Deheuvels et la copule paramétrique hypothétique.

La copule empirique estimée à partir d'un échantillon *iid* de dimension  $d$  introduite par Deheuvels est défini comme suit :

$$C_E(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}(U_{1t} \leq u_1, U_{2t} \leq u_2, \dots, U_{dt} \leq u_d) \quad (2.21)$$

où  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$

En effet, comme le souligne Genest (2009), la copule empirique au sens de Deheuvels est sans doute le rapprochement le plus objectif pour la vraie copule sous jacente car elle est entièrement non-paramétrique. La supériorité des Gof basés sur le calcul de la distance entre la copule empirique et

la copule hypothétique a été démontrée dans plusieurs études exhaustives. (Berg 2009; Berg et Quessy 2009; Genest et al 2009).

Le premier type des estimateurs à distance minimales qui ont été examinés est basé sur le processus empirique :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{E}} = \sqrt{T} (C_E - C_{\hat{\theta}})$$

où  $C_E$  est la copule empirique de Deheuvels, et  $C_{\hat{\theta}}$  une copule hypothétique d'une famille de copules paramétriques ayant pour paramètre  $\hat{\theta}$  obtenu à partir des pseudo-observations  $(u_{it})$ . La convergence de  $\mathbf{C}_{\mathbf{E}}$  sous des conditions de régularité a été établie dans Genest et Rémillard (2008). Des statistiques simples de type Cramér-von-Mises (Cvm) et Kolmogorov-Smirnov (KS) basées sur la copule empirique  $C_E$  sont établies respectivement comme suit :

$$S_n = \int_{[0,1]^d} \mathbf{C}_{\mathbf{E}}(u)^2 dC_E \quad (2.22)$$

et

$$T_n = \sup_{u \in [0,1]^d} |\mathbf{C}_{\mathbf{E}}(u)| \quad (2.23)$$

La version empirique pour la statistique  $S_n$  est donnée par Genest et al (2009) selon :

$$S_n(u, \theta) = \sum_{t=1}^T \{C_E(U_{1t}, U_{2t}, \dots, U_{dt}) - C_{\hat{\theta}}(U_{1t}, U_{2t}, \dots, U_{dt})\}^2$$

D'une manière similaire on peut obtenir une version empirique pour la statistique  $T_n$ .

Du fait que la distribution asymptotique des statistiques des tests est inconnue, des p-value approximative doivent être obtenues par une procédure de bootstrap paramétrique. Une description détaillée de la procédure bootstrap est donnée dans Genest et al (2009).

2.6.2. *Les tests Gof à base d'estimateur de type Kernel.* Une autre procédure pour les tests d'adéquation de copules fait référence à l'approche proposée par Fermanian (2005) ainsi que Scaillet (2007). Cette approche est basée sur les estimateurs de type Kernel appliqué à la densité de la copule empirique.

Ainsi, étant donné le vecteur  $\hat{U}_i$  à d-dimensions, pour les variables transformées  $X_i$ , tel que  $\hat{U}_i(F_1(X_{1,i}), \dots, F_d(X_{d,i}))$   $i = 1, \dots, n$ , et étant donné le processus de la copule empirique tel que définit dans l'équation 2.13. l'estimateur de Kernel pour la densité de la copule au point  $(\mathbf{u})$  est donné à travers la relation suivante :

$$c(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_H(\mathbf{u} - \hat{U}_i) \quad (2.24)$$

$K_H(y) = K(H^{-1}y) / \det H$ ,  $K$  étant le Kernel à d-dimension, et  $H$  est une matrice non singulière, symétrique pour les paramètres de lissage.

Pour une famille de copules paramétriques  $C(\mathbf{u}, \theta)$ , ayant pour densité  $c(\mathbf{u}, \theta)$ , Fermanian (2005) propose la statistique suivante :

$$J(w) := \int \left[ \widehat{c}(\mathbf{u}, \theta) - K_H * c(\mathbf{u}, \widehat{\theta}) \right] w(u) d(u) \quad (2.25)$$

$w(u)$  étant une fonction de poids et  $*$  caractérisant la convolution entre le Kernel et la densité de la copule.

Scaillet (2007) teste la performance d'une telle procédure, pour des échantillons de taille réduite, et montre son efficacité par comparaison avec la procédure de Genest, Quessy et Rémillard (2006).

2.6.3. *Les tests GoF basés sur la transformée de Rosenblatt.* La deuxième catégorie des tests d'adéquation que l'on cite fait référence aux tests qui sont basés sur la transformée de probabilité intégrale de Rosenblatt (1952), et qui consiste à transformer un ensemble de variables dépendantes en un ensemble des variables indépendantes  $U([0, 1])^d$ , étant données leurs distributions multivariées.

En conséquence, pour un vecteur de variables aléatoires données  $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, \dots, X_d)$  ayant pour marginales  $F_i(x_i)$   $i = 1, \dots, d$  et comme fonction de distribution conditionnelle  $F_{2|1}$ , la transformée de Rosenblatt pour  $\mathbf{X}$  est définie par :

$$R(\mathbf{X}) \equiv (R_1(X_1), R_2(X_2), \dots, R_d(X_d))$$

avec

$$R_1(X_1) \equiv F_1(X_1),$$

$$R_2(X_2) \equiv F_{2|1}(X_{2|1}),$$

.

.

.

$$R_d(X_d) \equiv F_{d|1, \dots, d-1}(X_{d|1, \dots, d-1})$$

Tel que mentionné dans Berg(2009), la transformée de Rosenblatt peut être utilisée dans les tests d'adéquation de type Gof en l'appliquant à un vecteur de variables aléatoires tout en faisant l'hypothèse sur une fonction copule paramétrique donnée. Étant donné que le vecteur de variable transformée  $V \equiv R(X)$  est i.i.d.  $U([0, 1])^d$ , Genest et al (2009) proposent de mesurer la distance entre la copule empirique et la copule d'indépendance pour chaque élément de la matrice transformée  $V$  qui dépend de l'hypothèse nulle faite sur la copule paramétrique  $C_{\hat{\theta}}$ . La version empirique de la statistique de Cramer-Von-Mises est ainsi donnée par :

$$S_n(V) = \sum_{t=1}^T \{C_E(V_{1t}, V_{2t}, \dots, V_{dt}) - C_{\perp}(V_{1t}, V_{2t}, \dots, V_{dt})\}^2$$

2.6.4. *Tests basés sur le Critère d'Information de Kullback-Liebler (KLIC).*

Les tests d'adéquation classiques répondent généralement à la question de savoir si une copule paramétrique correspond parfaitement à un ensemble de données ou non. Toutefois, il est quasiment impossible d'avoir un consensus sur un test bien déterminé pour qu'il soit adapté à toutes les situations et pour toutes les familles de copules. C'est dans ce sens que Genest et al (2009) affirmaient que la statistique de Cramer-Von-Mises basée sur le processus empirique semble être très adaptée pour tester l'hypothèse d'une copule de Clayton ou bien aussi d'une copule de Frank. Le test construit sur la base de

la transformée de Kendall offre la meilleure performance pour le test d'hypothèse d'une copule de Gumbel. Finalement une version du test basé sur la transformée de Rosenblatt semble être adéquate pour tester l'absence d'une structure de dépendance de type copule Normale ou copule de Student.

Cet état de non-consensus amène à traiter d'une extension récente du Critère d'information de Kullback-Liebler (KLIC), adaptée aux cas des fonctions copules (Chen et al, 2004 ; Chen et Fan, 2006), et proposée ultérieurement dans une vision out-of-sample par Diks et al (2010). Similaire au critère d'information d'Akaike (AIC) qui a été déjà utilisé dans plusieurs études sur la sélection de copules, le critère KLIC peut être utilisé pour comparer directement l'ajustement d'un ensemble de copules paramétriques. Il mesure la distance entre une copule paramétrique donnée et la densité de la « Vraie copule ». La copule ayant la plus faible mesure est préférée aux autres copules candidates.

Nous reformulons ici la définition de la mesure KLIC adaptée au contexte des fonctions copules, les spécifications exactes des tests et leurs propriétés statistiques peuvent être trouvées dans Diks et al.(2010). Soit respectivement  $c_A$  et  $c$  la densité de la copule paramétrique candidate et celle de la « vraie copule ». Ainsi, la mesure KLIC-Copule pour  $A$  est définie comme suit :

$$KLIC(c_A) := \int_{[0,1]^d} c(u) \log \left( \frac{c_A(u)}{c(u)} \right) du = \mathbf{E}(\log c(U_t) - \log c_A(U_t))$$

avec  $U_t \equiv (U_{1t}, \dots, U_{dt})' = (F_1(X_{1t}), \dots, F_d(X_{dt}))'$

### 3. Littérature sur l'utilisation des fonctions copules en finance

La dernière décennie a été caractérisée par une augmentation incessante des applications de l'approche copule dans la recherche économique et financière à l'échelle empirique, motivée surtout par des preuves de plus en plus évidentes rejetant l'hypothèse de normalité pour un grand nombre de variables économiques, en particulier les rendements des actifs financiers (Longin et Solnik, 2001, Ang et Chen, 2002). C'est ainsi, que nous passons en revue, mais qui n'est en aucun cas exhaustive, les différentes applications de l'approche copules dans le contexte de la finance empirique.

**3.1. Gestion des risques.** Un des premiers domaines d'application des fonctions copules en finance est la gestion des risques, l'objectif fondamental des gestionnaires de risques étant de développer des modèles probants pour la mesure des risques, la Value-at-Risk (VaR) en particulier, ou d'autres mesures visant à estimer la probabilité de pertes importantes. Ceci entraîne une demande incessante pour des modèles flexibles pour tenir compte au mieux de la dépendance qui se trouve entre les différentes sources de risque.

Ainsi, Di Clemente et Romano (2005) étudient les capacités d'une modélisation combinant l'apport de la théorie des valeurs extrêmes pour la représentation des distributions marginales et la théorie des fonctions copules, particulièrement les copules elliptiques, pour l'estimation de la mesure de risque VaR. Les résultats sont en faveur de l'adéquation d'un tel type de modélisation par rapport à d'autres modèles de corrélation classique. Récemment, Berger (2013) s'intéressent au même type de modélisation, mais combinée avec un modèle DCC-GARCH, afin de construire un

modèle de prévision dynamique pour la même mesure de risque. Dans un autre contexte, He et Gong (2009) utilisent les fonctions copules dans une logique de gestion de risque intégrée, où le risque de marché et le risque de crédit doivent être considérés conjointement, et construisent un modèle pour l'estimation de la Conditional Value-at-Risk. Les résultats montrent que le risque peut être largement sous-évalué en ignorant la composante liée au risque de crédit, essentiellement pour les sociétés ayant une faible signature. Pour terminer, McNeil et al (2010), et Alexander (2008) constituent une référence détaillée sur l'application des fonctions copules dans la gestion des risques.

**3.2. Gestion de portefeuilles.** Le cadre général de la théorie de gestion des portefeuilles suppose un problème de prise de décision qui consiste à trouver les allocations optimales permettant la maximisation de la richesse finale de l'investisseur et par conséquent le niveau de son utilité espérée. Ceci nécessite bien un modèle permettant la construction de la distribution jointe pour les actifs considérés dans le portefeuille. Les applications de l'approche copule dans le cadre de cette problématique sont multiples. Ainsi, Patton (2004) considère le cas des portefeuilles bivariés et étudie l'apport des copules dynamiques. Stulajter (2009) considère les fonctions copules dans le cadre d'un problème d'optimisation basé sur la mesure de risque CVaR. L'auteur conclut sur la performance de l'approche copule par rapport à celle basée sur l'utilisation du coefficient de corrélation de Pearson. La performance est d'autant plus importante que le seuil de confiance de la CVaR est élevée. Ortobelli et al (2010) étudient l'apport d'une spécification ARMA-GARCH, combinée à une copule de Student asymétrique, dans le cadre d'un problème d'optimisation de portefeuille basé sur les mesures de performances. Les résultats confirment les performances des stratégies basées sur les données simulées sur la base de la spécification étudiée par comparaison à ceux basées sur l'historique de données. Pour terminer, Ricetti (2013) montre l'utilité de l'approche copule dans le cadre d'un modèle d'allocation de portefeuille composé d'actifs de types macro. Cette utilité est moindre pour des portefeuilles composés uniquement d'indices boursiers.

**3.3. Produits dérivés.** Une autre application de la théorie des fonctions copules trouve son utilité dans le cadre de la problématique liée à l'évaluation des produits dérivés de crédit (Credit Default Swap et Collateralized Debt Obligations). En effet, ces contrats impliquent généralement différents types de sources de risque sous-jacentes, ce qui fait qu'il devient de plus en plus impératif de tenir un modèle de corrélation en adéquation avec ce contexte. Li (2000) fut le premier à utiliser les fonctions copules dans le cadre d'une application en risque de crédit. La contribution majeure de ce modèle a été de pouvoir modéliser la dépendance entre les temps de défaut à la place d'une dépendance entre les événements de défauts. Shönbucher et Schubert (2001) ont étendu le modèle de Li (2000), en généralisant l'approche copule tout en permettant l'utilisation d'autres classes de copules, à l'instar des copules archimédiennes, mais aussi en spécifiant une dynamique pour les intensités de défauts. Hamilton et al (2002) reprennent le même objectif et proposent d'utiliser une autre copule de type archimédienne, plus

précisément la copule de Ait-Mikhail-Haq. Dans une étude plutôt d'ordre empirique, Mashal, Naldi et Zeevi (2003) soutiennent l'idée que la copule pour les rendements des actions d'une firme est la même que celle des rendements de la valeur de la firme. Ainsi, il est possible de calibrer la dépendance entre les événements de défaut avec de l'information facilement accessible. D'autres applications de l'approche copule dans un cadre dédié à d'autres types de produits dérivés sont recensées dans Cherubini et al (2004).

**3.4. Autres applications.** Il existe d'autres applications des fonctions copules dans l'économie et la finance qui ne correspondent pas vraiment à l'une ou l'autre des catégories mentionnées ci-dessus. Ainsi, Rodriguez (2007) utilise les fonctions copules pour étudier le phénomène de contagion. Dans la même logique, Bartram et al (2007) utilisent un modèle de copule dynamique pour étudier l'intégration des marchés financiers dans la zone euro. Patton (2009), ainsi que Kang et al (2010), appliquent les fonctions copules pour étudier la dépendance entre les rendements des hedges funds et les autres classes d'actifs financiers. Finalement, Zimmer (2012) s'intéresse au rôle des fonctions copules dans la récente crise des subprimes.

#### 4. Les mesures de diversification

Depuis les travaux de Markowitz (1959), la diversification était synonyme de réduction de risque. On reconnaît surtout (d'après la relation 3.4) que plus la taille du portefeuille est grande, plus on est en mesure de réduire le risque. Ainsi, il en ressort qu'une mesure évidente du degré de diversification serait la dimension du portefeuille. Toutefois, toujours en faisant référence à la même relation, il est évident que le risque ne peut en aucun cas être éliminé, mais se trouve réduit au niveau de la composante liée au risque systématique induite par les facteurs macroéconomiques. Dans la même logique, Elton et Gruber (1995) mentionnent que la réduction du risque n'est pas proportionnelle avec l'ajout d'actifs supplémentaires dans le portefeuille. Ils suggèrent l'existence d'un nombre optimal d'actifs (spécifiquement 20 actifs) à partir duquel il n'y ait plus de bénéfice tiré de la diversification. Ainsi, la taille du portefeuille ne peut en aucun cas être le seul indicateur du niveau de la diversification qui se trouve dans le portefeuille. En effet, une mesure de diversification fiable doit incorporer d'autres caractéristiques du portefeuille. On pense surtout à la structure de dépendance résumant les interactions qui se trouvent entre les différents actifs. C'est dans ce cadre que de nombreuses contributions se sont penchées sur cette problématique afin de proposer des mesures de diversification qui permettent de dépasser les limites de la seule information donnée par la dimension du portefeuille. Des approches comme celles de la théorie d'information ou aussi celle de l'analyse en composante principale en constituent des exemples. Dans la suite de cette section, un aperçu non exhaustif des différentes contributions sera donné.

**4.1. Le nombre d'actifs.** Comme mentionné ci-dessus, la première approche dédiée à la mesure de la diversification consiste à dénombrer les actifs constituant le portefeuille. Evans et Archer (1968) ont été les premiers à tester la validité de cette approche. Partant de l'idée que la variance



du portefeuille diminue avec l'ajout d'actifs supplémentaires dans le portefeuille, ils se sont intéressés à régresser le risque du portefeuille mesuré par l'écart-type par rapport à la taille du portefeuille ( $d$ ) mesurée par la variable  $1/d$ . Les conclusions de cette étude suggèrent l'existence d'un nombre optimal d'actifs (ici 10 actifs), à partir duquel une analyse marginale complémentaire doit être effectuée afin de mesurer le trade-off entre les coûts de transaction additionnels et la réduction du risque. Poursuivant le même objectif, Statman (1987) ainsi qu'Elton et Gruber (1995) aboutissent à des résultats similaires suggérant l'existence d'un seuil critique à partir duquel la diversification n'est plus avantageuse. Ainsi, ces résultats semblent remettre en cause la validité de la taille du portefeuille comme mesure fiable de la diversification. En effet, selon ces conclusions, la diversification doit être entretenue tant que le bénéfice marginal provenant de la réduction du risque dépasse le coût marginal issu des coûts de transaction supplémentaires. Dans ce contexte, un portefeuille suffisamment grand peut ne pas être bien diversifié à cause des coûts additionnels.

D'un autre point de vue conceptuel, nous mentionnons que la relation liant la taille du portefeuille à la réduction du risque n'est valable que pour le cas d'un portefeuille équilibré, où les rendements des actifs sont issus d'une distribution multivariée normale avec des moyennes, des variances et des covariances égales. En dehors de ce cas particulier, la taille ne serait pas synonyme de diversification.

Malgré toutes ces limites, la taille du portefeuille reste toujours un outil permettant de juger le degré de diversification surtout pour des raisons de simplicité. D'autres approches se sont développées et sont toujours utilisées conjointement avec la taille du portefeuille.

**4.2. Approche basée sur la théorie d'information.** Une deuxième approche qui tente d'évaluer le degré de diversification d'un portefeuille est basée sur les apports de la théorie de l'information. Cette théorie vise la quantification du degré du désordre se trouvant dans une variable aléatoire donnée, par le biais de la mesure de l'entropie de Shannon. Selon cette mesure, la variable d'étude serait la distribution de la variable aléatoire, et concrètement plus l'entropie est grande, plus le degré de désordre est grand, et par conséquent plus l'incertitude sur la variable aléatoire sera importante. Une application directe des énoncés de cette théorie pour étudier la diversification au niveau des portefeuilles, consiste à quantifier le désordre se trouvant dans la distribution du vecteur des pondérations.

Woerheide et Persson (1993) ont proposé de comparer différents indices de mesure de diversification. Dans leur étude, ils incluent deux indices basés sur les mesures de la concentration économique, à savoir le célèbre indice de Herfindahl ainsi que celui de Rosenbluth (1961), et ensuite deux autres indices dont celui défini dans Marfels (1971), et celui de Horvath (1972), et finalement un indice basé sur la théorie de l'information définie dans Hart (1972) comme étant la mesure d'entropie, et donné par la relation suivante :

$$D = - \sum_{i=1}^N w_i \ln (w_i) \quad (4.1)$$

L'objectif de l'étude consiste à étudier la relation qui existe entre l'écart-type de rendement des portefeuilles, choisis aléatoirement et affectés à différents vecteurs d'allocation, et les différents indices de diversification déjà spécifiés. Woerheide et Persson (1993) constatent que, parmi les 5 indices de diversification examinés, l'indice de Herfindahl (*CHI*), donné par la relation ci-dessous, donne le pouvoir explicatif le plus élevé avec un  $R^2$  de 0,548. Ainsi, ils recommandent le CHI comme mesure fiable permettant d'évaluer le degré de diversification dans un portefeuille. De plus, ils concluent que pour des valeurs de l'indice qui sont inférieures à 0.85, le portefeuille ne peut pas être considéré comme suffisamment diversifié.

$$CHI = 1 - \sum_{i=1}^N w_i^2 \quad (4.2)$$

Dans un autre contexte, Bera et Park (2008), proposent d'appliquer les mesures de diversification dans le cadre du processus de construction des portefeuilles. Les auteurs proposent ainsi de maximiser l'entropie du vecteur d'allocation sous des contraintes sur le rendements et la variance du portefeuille. Les résultats suggèrent la performance d'une telle approche par comparaison avec l'approche Moyenne-Variance classique.

**4.3. Approche basée sur l'analyse en composante principale : Rudin et Morgan (2006).** L'idée principale qui sous-tend la technique de l'analyse en composante principale, vise à transformer un ensemble de variable aléatoires corrélées en une combinaison linéaire de variables non corrélées. Par application dans le cadre d'un portefeuille composé de  $N$  actifs, dont les données historiques présentent généralement des corrélations les unes avec les autres. L'idée est de transformer le vecteur de rendement du portefeuille en une combinaison linéaire de  $k$  actifs non corrélés. En des termes plus concrets, ceci est équivalent à la recherche des  $k$  facteurs qui sont responsables, en grande partie, de la variance qui se trouve dans le portefeuille. Par intuition, on s'attend à ce que plus les  $N$  actifs constituant le portefeuille sont non corrélés, plus le nombre des composantes principales  $k$  est proche de  $N$ , indiquant ainsi un grand niveau d'hétérogénéité entre les variables, et inversement si les actifs sont fortement corrélés.

Formellement, les composantes principales sont des combinaisons linéaires non corrélées formées à partir du portefeuille d'origine. Ainsi, elles ne peuvent pas être considérées comme étant des actifs purs, mais plutôt des portefeuilles non corrélés appelés souvent *portefeuilles principaux*.

Techniquement, l'analyse en composante principale utilise le théorème de décomposition spectrale issue de l'algèbre linéaire, qui confirme que la matrice des covariances  $\Sigma$  peut être écrite comme étant le produit donné par :

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma' \quad (4.3)$$

où  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2)$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $\Sigma$ . Par la suite, les valeurs propres peuvent être classées par ordre décroissant tel que  $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_N^2$ . De plus  $\Gamma$  est une matrice orthogonale, avec  $\Gamma' \Gamma = I_N$ , dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de  $\Sigma$ . Ces vecteurs

propres constituent ainsi les *portefeuilles principales*, déjà mentionnés, dont la variance de chaque portefeuille principal  $k$  est donnée par  $\lambda_k^2$ .

Parmi les études ayant utilisé les apports de l'analyse en composante principale pour mesurer la diversification des portefeuilles, on peut citer Rudin et Morgan (2006). Dans leur étude, les auteurs examinent des portefeuilles équipondérés, et proposent ainsi de surmonter les limites issues de l'utilisation de la seule dimension du portefeuille pour juger de la diversification au sein des portefeuilles financiers, à travers l'utilisation d'un nouveau indice à base de composantes principales, dénommé *Indice de Diversification de Portefeuille* (IDP), donné par la relation suivante :

$$IDP_N = 2 \sum_{k=1}^N kW_k - 1 \quad \text{avec } W_k = \frac{\lambda_k^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}$$

$W_k$  est appelé "*poids relatif*" du  $k^{\text{ème}}$  portefeuille principal, et interprété comme étant la fraction de la variance totale du portefeuille d'origine expliquée par le  $k^{\text{ème}}$  portefeuille principal.

Une interprétation du résultat obtenu sur l'IDP, pour un portefeuille équipondéré, suggère équivalent l'investissement dans un portefeuille de dimension  $N$  et celui ayant un nombre d'actifs égal au PDI, donnant ainsi le même degré de diversification.

Les résultats de l'étude de Rudin et Morgan (2006), appliquée aux portefeuilles équipondérés issuent de l'indice S&P 100, suggèrent que l'IDP moyen pour des portefeuilles composés de 40 actifs est seulement de 20. Pour des portefeuilles qui sont composés de 100 actifs, l'IDP moyen est de l'ordre de 40.

Une des limites de l'approche de Rudin et Morgan (2006) est liée au fait d'être valable uniquement pour des portefeuilles équipondérés. Une généralisation possible, pour considérer différents vecteurs d'allocations, serait d'une grande utilité. Ceci est bien illustré dans l'approche de Meucci (2009) détaillée dans le paragraphe suivant.

**4.4. Approche Hybride : Meucci (2009).** Une nouvelle approche, récemment proposée par Meucci (2009), propose un modèle hybride, basé à la fois sur les recommandations de la théorie d'information et celle de l'analyse en composante principale. En effet, Meucci (2009) tente de pallier la limite principale de l'approche proposée dans Rudin et Morgan (2006), à savoir d'être valable uniquement pour les portefeuilles équipondérés, tout en combinant les modèles utilisant la théorie d'information à celui utilisant l'analyse en composante principale.

Ainsi, comme dans le cadre de Rudin et Morgan (2006), Meucci (2009), considère la même matrice des covariances  $\Sigma$ , qui peut être décomposée via le résultat :

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma'$$

Comme mentionné ci-dessus,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2)$ , avec  $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_N^2$ , est toujours la matrice diagonale des valeurs propres de  $\Sigma$ . Les vecteurs colonnes  $e_1, \dots, e_N$  de la matrice orthogonale  $\Gamma$  sont les vecteurs propres correspondant à chacune des valeurs propres  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2$ . Ces vecteurs propres

feront toujours référence à ce que l'on a appelé ci-dessus les "*portefeuilles principaux*".

À la différence de Rudin et Morgan (2006), Meucci traite des portefeuilles arbitrairement alloués sur les  $N$  actifs sélectionnés, des termes supplémentaires étant ainsi introduits, à commencer par le vecteur des rendements pour chacun des portefeuilles principaux  $e_1, \dots, e_N$ , qui sera donné par le résultat suivant :

$$\tilde{R} = (e'_1 \bar{R}, \dots, e'_N \bar{R}) = \Gamma' \bar{R} \quad (4.4)$$

où  $\bar{R}$  désigne les vecteurs de rendements des  $N$  actifs risqués. Notons que les variances pour les  $N$  portefeuilles principaux sont données par  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2$ , et que par construction leurs covariances sont nulles.

Le portefeuille d'origine  $w$  peut être ainsi reconstruit comme étant une combinaison linéaire des portefeuilles principaux via le résultat suivant :

$$\tilde{w} = \Gamma' w = (e'_1 w, \dots, e'_N w)$$

où  $\tilde{w}$  désigne le portefeuille principal pondéré.

En utilisant la propriété d'orthogonalité de  $\Gamma$ , la distribution de rendement du portefeuille peut être réécrite comme suit :

$$\tilde{w}' \tilde{R} = (\Gamma' w)' (\Gamma' \bar{R}) = w' \Gamma \Gamma^{-1} \bar{R} \quad (4.5)$$

De plus, la variance pour chacun des portefeuilles principaux peut être donnée à travers le résultat suivant :

$$V(\tilde{w}_i \tilde{R}_i) = \tilde{w}_i^2 V(\tilde{R}_i) = \tilde{w}_i^2 \lambda_i^2 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

Aussi, du fait que la  $Cov(\tilde{w}_i \tilde{R}_i, \tilde{w}_j \tilde{R}_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ , la variance totale du rendement du portefeuille peut être donnée par le résultat suivant :

$$V(w' \bar{R}_i) = V(\tilde{w}' \tilde{R}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_i^2 \lambda_i^2 \quad (4.7)$$

Ces différents développements ont donné naissance à ce que Meucci considère comme étant la *distribution de diversification*

$$p(w) = (p_1(w), \dots, p_N(w)) \in \mathbb{R}^N$$

avec

$$p_i(w) = \frac{\tilde{w}_i^2 \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}_i^2 \lambda_i^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Cette dernière représente la fraction de la variance de rendement de chaque portefeuille principale pondérée dans la variance totale du portefeuille  $w$ .

Ainsi, Meucci définit le portefeuille  $w$  comme étant un portefeuille diversifié lorsque sa variance totale, donnée par le dénominateur de la relation précédente, n'est pas concentrée sur un petit nombre  $p_i(w)$ . Étant donnée cette définition, et étant donné aussi que les portefeuilles principaux sont non-corrélés, l'application des mesures de concentration issues de la théorie d'information est totalement justifiée. Une mesure de diversification peut être ainsi obtenue en appliquant la mesure d'entropie à la distribution de

diversification  $p(w)$ . Meucci (2009) propose d'utiliser l'exponentielle de la mesure d'entropie de Shannon :

$$N_{Ent}(w) = \exp\left(-\sum_{i=1}^N p_i(w) \log(p_i(w))\right) \quad (4.9)$$

Selon cette mesure, des valeurs élevées pour  $N_{Ent}$  sont assignées à des portefeuilles suffisamment diversifiés. Par contre des faibles valeurs indiquent une concentration sur un nombre réduit de sources de risque.

Meucci propose d'appliquer cette mesure de diversification dans le cadre d'un problème d'optimisation sous contraintes. Ainsi, à l'image de Bera et Park (2008), il s'agit de maximiser une fonction objective incluant la mesure de diversification  $N_{Ent}$ .

**4.5. Le Score de Diversité de Moody's.** En plus de son activité principale, qui consiste à évaluer la qualité de crédit des émetteurs sur le marché des obligations, Moody's propose de mesurer la qualité de la diversification se trouvant dans les produits structurés de crédit, à l'image des CLO pour "Collateralized Loan Obligation". Ces nouveaux produits sont le résultat de la nouvelle vague de titrisation qu'a connu le marché de crédit, et qui connaissent un grand succès parmi les investisseurs institutionnels. Ce constat a favorisé le développement des modèles qui permettent d'assigner la qualité de crédit de ces nouveaux produits. Ceci ne peut se faire que connaissant le niveau de la diversification qui règne dans de tels portefeuilles. Face à cet enjeu, Moody's a pu développer sa mesure phare de la diversification au sein des produits structurés de crédit, à savoir le "Diversity Score" ou Score de diversité. Cette dernière repose sur l'approche "Binomial Expansion Technique" (BET), basée sur une hypothèse centrale suggérant que les émetteurs opérant dans le même secteur d'activité sont considérés comme étant liés, tandis que les émetteurs appartenant à des secteurs différents peuvent être considérés comme indépendants. Ainsi, la répartition du nombre de défauts de paiements parmi "I" émetteurs risqués d'un même secteur peut être approchée en utilisant seulement "D" émetteurs indépendants i.e.

$$\sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\tau_i < t)} = \frac{I}{D} \sum_{i=1}^I \mathbf{1}_{(\tilde{\tau}_i < t)} \quad (4.10)$$

où  $(\mathbf{1}_{(\tau_i < t)}, \dots, \mathbf{1}_{(\tau_I < t)})$  sont des variables dépendantes distribuées selon la loi de Bernoulli, ayant pour paramètres  $p_i$   $i \in \{1, \dots, I\}$ , et  $(\mathbf{1}_{(\tilde{\tau}_1 < t)}, \dots, \mathbf{1}_{(\tilde{\tau}_I < t)})$  sont des Bernoulli iid de paramètres  $p$ .

Selon Moody's, D est calculé afin de faire correspondre les deux premiers moments des deux côtés de l'équation précédente. En distinguant entre 32 secteurs d'activité différents, Moody's a pu dresser une correspondance entre le nombre d'émetteurs issus du même secteur et le "Diversity score" qui lui est équivalent. Ceci est illustré dans le tableau suivant :

A titre d'exemple, et afin d'illustrer cette mesure, nous reportons l'exemple d'un portefeuille de crédits composé de 100 obligations, répertoriées sur les 32 secteurs d'activité recensés par Moody's, et qui est distribué comme suit :

TAB. 1. Score de Diversité de Moody's

Nombre d'émetteurs	Diversity Score
1	1
2	1.5
3	2
4	2.3
5	2.6
6	3
7	3.25
8	3.5
9	3.75
10	4

TAB. 2. Score de Diversité d'un portefeuille

Nbre d'émetteurs par secteur	1	2	3	4	5
Nbre d'incidences	6	4	7	10	5
Diversity Score	6	6	14	23	13

Selon cet exemple, nous pouvons vérifier qu'il existe six cas pour lesquels les émetteurs sont les seuls représentants de leur secteur d'activité, quatre cas où on enregistre une paire d'émetteurs dans le même secteur, etc. Les scores élémentaires sont extraits à partir du tableau précédent, le score final étant la somme des ces derniers, il s'établit ainsi au niveau de 62. Ceci permet de conclure que le portefeuille de crédit de départ composé de 100 obligations (émetteurs), supposés être dépendants, et repartis sur les 32 secteurs tel que mentionné ci-dessus, peut se résumer en un portefeuille de 62 titres indépendants.

Toutefois, nous mentionnons que le "Score de Diversité", mesure développée essentiellement pour assigner la qualité de la diversification au sein des produits structurés de crédit, peut être utilisé de manière générale dans le contexte des portefeuilles actions. En effet, on admet largement que les temps de défauts, sont des fonctions croissantes des rendements des actions. Donc on s'attend à ce que les temps de défauts et les rendements des actions aient la même structure de dépendance. Ainsi, il serait possible d'appliquer la même mesure de diversification, ici le "Score de Diversité", à la fois pour les portefeuilles de crédit et aussi pour les portefeuilles actions, dont les titres sont issus des mêmes émetteurs.

## 5. Illustration empirique

Dans cette section, nous proposons d'illustrer empiriquement l'objectif principal de ce chapitre, à savoir, identifier la nature de la relation qui peut exister entre la diversification des portefeuilles et le choix de la fonction copule ayant décrit au mieux leurs structures de dépendance. Pour cet objectif, nous envisageons dans un premier temps de valider une mesure de diversification de portefeuilles, parmi les différentes mesures introduites ci-dessus.

Dans un deuxième temps, nous mettons en relation le choix de la meilleure copule avec la mesure de diversification sélectionnée.

**5.1. Description des données.** Nous avons choisi d'appliquer notre méthodologie sur des portefeuilles actions. Ces derniers sont issus des quatre secteurs leaders du marché allemand, à savoir le secteur automobile, le secteur des énergies, le secteur financier et le secteur des télécommunications. Ainsi, pour chaque secteur, nous avons sélectionné 10 sociétés, chose qui nous permet essentiellement de constituer des portefeuilles ayant différentes dimensions, soit  $N=2, 4, 6, 8$  ou  $10$ . Les sociétés sélectionnées sont représentatives de la catégorie "large market capitalization", ce qui assure que l'analyse ne sera pas affectée par les problèmes liés au risque de liquidité. Nous avons considéré les cours de clôture journaliers couvrant la période allant du 30/06/2004 au 30/06/2014, soit environ 2332 observations après traitement pour les jours de non cotation. Etant donnés ces prix de clôture, nous avons considéré les rendements respectifs sur la base de la relation suivante :

$$X_{i,t} = \log \left( \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right) \quad t = 2, \dots, T ; i = 1, \dots, d \quad (5.1)$$

$S_{i,t}$  étant la prix de clôture de la société "i" à l'instant "t".

Dans les tableaux suivants, nous avons reporté les statistiques descriptives pour les différentes séries. Ces statistiques mettent en évidence la non-normalité des données surtout à partir des valeurs du coefficient d'asymétrie, la skewness, et du kurtosis. En outre, le test de Jarque-Bera confirme cette idée et rejette fermement la normalité pour toutes les variables. De plus, nous mentionnons surtout la grande variabilité des séries de rendements du secteur financier, avec un écart-type annualisé moyen de l'ordre de 50%. D'un autre côté, il faut noter que les séries de rendement du secteur des énergies présentent des coefficients d'asymétrie négatifs, synonyme d'une grande probabilité d'événements extrêmes, et qui suppose que l'introduction de tels actifs dans les portefeuilles nécessite l'introduction d'un modèle de dépendance qui permet de tenir compte de ce caractère asymétrique.

De plus, nous reportons, dans la figure 1 qui suit, le diagramme quantile-quantile pour une sélection de séries de rendements. Ce dernier permet d'évaluer la qualité d'ajustement de la distribution des rendements à celle de la loi normale. D'après ces diagrammes, on confirme l'inadéquation de la distribution de la loi normale pour ajuster les séries de rendements de l'ensemble des actifs.

**5.2. Choix d'une mesure de diversification.** L'étape qui suit consiste à valider une mesure de diversification de portefeuilles parmi les différentes mesures spécifiées ci-dessus. Ainsi, nous adoptons la même procédure que Woerheide et Person (1993), pour laquelle à partir de l'univers de 40 actifs déjà sélectionnés, nous construisons des portefeuilles équipondérés ayant différentes dimensions  $d = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Ainsi, la dimension « d » étant fixée, nous faisons varier la composition des portefeuilles afin d'atteindre des niveaux de diversification différents. Il s'agit surtout de faire varier la composition sectorielle, chose qui permet d'aboutir à des portefeuilles ayant

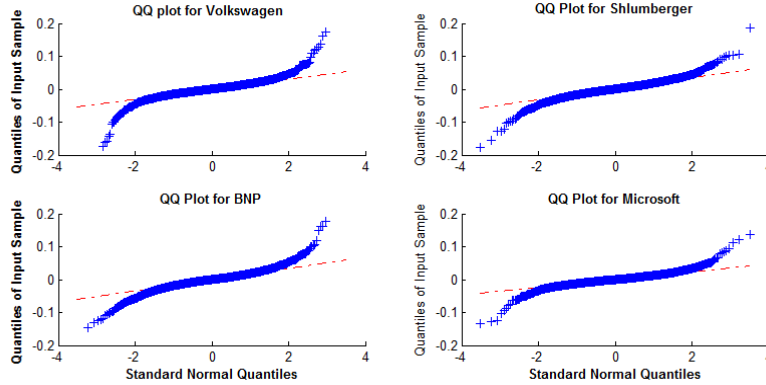


FIG. 1. Diagramme quantile-quantile

différents niveaux de concentration sectorielle, et par la suite différents niveaux de diversification. En effet, ceci permet entre autres de mesurer la diversification selon l'approche de Moody's qui repose, à la différence des autres méthodes, sur la concentration sectorielle des portefeuilles.

Selon cette procédure, nous obtenons 254 portefeuilles, pour lesquels nous avons calculé le risque selon leurs écart-types de rendement respectifs. Ceci permet d'obtenir une série de 254 écart-type  $(\sigma_P)_{d,i}$ , ainsi que des séries pour les mesures de diversification respectives  $(DI(k))_{d,i}$   $k = 1, \dots, 4$ , à savoir le Complément de l'indice de Herfindahl (*CHI*), l'Indice de Diversification de Portefeuille (*IDP*), la mesure ( $N_{Ent}$ ) de Meucci, et le Score Diversité de Moody's (*DS*).

Finalement, pour chacun des quatre indices, nous régressons l'écart-type annualisé du portefeuille sur la valeur respective de l'indice  $(DI(k))_{d,i}$  selon la modélisation suivante

$$\sigma_P = \alpha_k + \gamma_k DI(k) + \epsilon_k, \quad k = 1, \dots, 4 \quad (5.2)$$

La mesure de goodness-of-fit  $R^2$  pour chacune des quatre régressions est utilisée par la suite pour attester la qualité de l'ajustement linéaire entre l'écart-type de rendement et le degré de diversification du portefeuille.

Les résultats des estimations, à la différence de ceux obtenus par Woerheide et Person (1993), sont en faveur de l'Indice de Diversification de Portefeuille (*IDP*). En effet, cette mesure procure le pouvoir explicatif le plus important, avec un  $R^2$  de l'ordre de 29%. De plus, les paramètres de la régression sont significatifs, ce qui atteste d'une relation négative entre le degré de diversification et le risque mesuré par l'écart-type, et confirme ainsi l'intuition selon laquelle plus le niveau de diversification de portefeuilles augmente, plus il est susceptible de réduire le risque<sup>4</sup>.

Dans la figure 2, nous reportons une comparaison entre la régression utilisant l'Indice de Diversification de Portefeuille (*IDP*) et celle utilisant la mesure de Moody's. Cette figure montre les différences en matière de la qualité d'ajustement entre les deux mesures.

<sup>4</sup>Les résultats de cette estimation sont donnés en annexe.



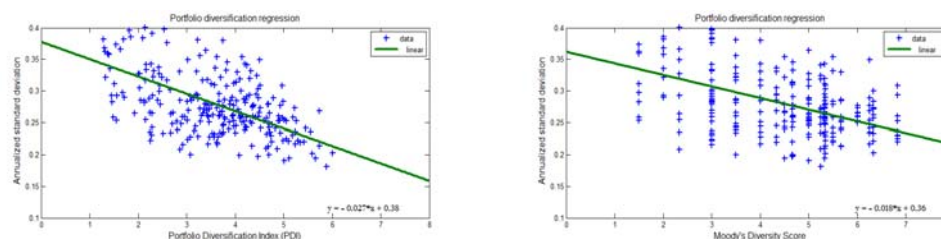


FIG. 2. Régressions : Mesures de diversification

Ces résultats nous permettent de conclure sur le choix de l'Indice de Diversification de Portefeuille (IDP) comme mesure adéquate, permettant de distinguer le niveau de diversification qui se trouve dans les portefeuilles. Nous mentionnons que cette mesure n'est valable que pour des portefeuilles équipondérés. Pour considérer d'autres vecteurs d'allocation, nous proposons d'utiliser le "Score de Diversité" de Moody's, ce dernier étant surtout indépendant des pondérations, et procurant un pouvoir explicatif, quant à la relation linéaire entre la diversification et le risque du portefeuille, de l'ordre de 20%, qui reste proche de celui donné par l'Indice de Diversification de Portefeuille (IDP).

**5.3. Choix de la fonction Copule.** Etant donné le choix fait sur la mesure du degré de diversification de portefeuilles, nous essayons dans la suite de vérifier la validité de notre hypothèse centrale à savoir la correspondance entre le niveau de la diversification et la structure de dépendance se trouvant dans les portefeuilles. En effet, on peut penser que la structure de dépendance, et par la suite la fonction copule d'un portefeuille suffisamment diversifié, peut dévier de celle d'un portefeuille non diversifié. Autrement dit, nous admettons que les portefeuilles non diversifiés sont généralement constitués d'actifs qui ont toujours des caractéristiques statistiques communes qui les mettent en relation les uns avec les autres. Ces caractéristiques se matérialisent sous la forme d'une réponse commune à des événements extrêmes qui auront souvent les mêmes conséquences pour tous les actifs. On s'attend ainsi à ce que la structure de dépendance se trouvant dans des tels portefeuilles "concentrés" doit contenir toute l'information quant à ces conséquences communes.

Pour illustrer cette idée, nous proposons tout d'abord de comparer la dépendance des quantiles issue des portefeuilles ayant différents niveaux de diversification. En effet, la dépendance des quantiles consiste à mesurer l'intensité de la dépendance entre les variables à la fois dans la queue de dépendance inférieure et supérieure. Elle est définie comme suit :

$$\lambda^q = \left\{ \begin{array}{ll} \Pr[U_{1t} \leq q | U_{2t} \leq q], & 0 < q \leq 1/2 \\ \Pr[U_{1t} > q | U_{2t} > q], & 1/2 < q \leq 1 \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C(q,q)}{q}, & 0 < q \leq 1/2 \\ \frac{1-2q+C(q,q)}{1-q}, & 1/2 < q \leq 1 \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

$$\hat{\lambda}^q = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{Tq} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}\{U_{1t} \leq q, U_{2t} \leq q\}, & 0 < q \leq 1/2 \\ \frac{1}{T(1-q)} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}\{U_{1t} > q, U_{2t} > q\}, & 1/2 < q \leq 1 \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

La dépendance des quantiles fournit ainsi une description plus riche de la structure de dépendance se trouvant entre deux variables. En effet, en mesurant l'intensité de la dépendance entre les deux variables, tout en passant du centre ( $q = 1/2$ ), aux queues des distributions, et tout en comparant la dépendance de queue gauche ( $q < 1/2$ ) à la dépendance de queue droite ( $q > 1/2$ ), on fournit une information plus détaillée sur la structure de dépendance que celle donnée par la simple mesure de la corrélation linéaire ou aussi par le coefficient de corrélation de rang. C'est ainsi que l'information donnée par la dépendance des quantiles est d'une grande utilité pour se prononcer sur la nature de la structure de dépendance qui se trouve dans le portefeuille (symétrique ou asymétrique), cela permet de vérifier son adéquation à la structure de dépendance issue de l'une ou l'autre des fonctions copules.

Dans la figure qui suit, nous proposons de comparer, à travers la dépendance des quantiles, la structure de dépendance de deux portefeuilles ayant une dimension  $d = 2$ . Le premier est un portefeuille non diversifié, composé de deux actifs provenant d'un même secteur, ayant un indice de diversification  $IDP = 1.447$ , le deuxième est considéré comme diversifié, composé de deux actifs provenant de secteurs différents, et ayant un indice de diversification  $IDP = 1.448$ .

On peut constater tout d'abord que l'intensité de la dépendance de quantile est plus prononcée pour un portefeuille non diversifié que pour celui suffisamment diversifié. Ceci confirme notre proposition selon laquelle les facteurs communs, mettant en relation les actifs composant les portefeuilles non diversifiés, ont tendance à créer une plus forte dépendance, surtout dans les quantiles extrêmes. De plus, on vérifie le caractère quasi symétrique de la structure de dépendance pour les deux types de portefeuilles, ce qui implique forcément l'inadéquation des structures de dépendance asymétriques imposées par les deux copules archimédiennes à savoir la copule de Clayton et celle de Gumbel.

Finalement, nous reportons l'adéquation de la copule de Student pour décrire la structure de dépendance se trouvant dans le portefeuille « non diversifié ». Pour le portefeuille « diversifié », la copule gaussienne semble être la plus adéquate, quoique la copule de Student procure une qualité d'ajustement similaire. Ainsi, on peut dire que la copule de Student, étant par nature une copule symétrique, admettant un coefficient de dépendance

de queue non nul<sup>5</sup>, permet de tenir compte au mieux de la dépendance des quantiles aux extrêmes. Elle est ainsi plus adéquate pour modéliser la structure de dépendance des portefeuilles « non diversifiés ».

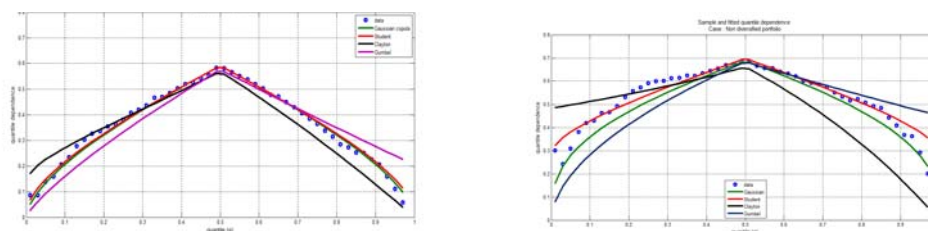


FIG. 3. Dépendance des quantiles

Afin de valider cette première constatation, et proposer ainsi une généralisation possible pour le cas de portefeuilles de dimension plus grande, ayant des niveaux de diversification plus élevés, nous continuons d'augmenter la dimension des portefeuilles, tout en faisant varier leur concentration sectorielle. Cette dernière est illustrée dans la deuxième colonne des tableaux 7 et 8 qui suivent. Pour chacune de ces configurations, nous avons considéré dix portefeuilles différents, pour lesquels nous avons calculé l'Indice de Diversification de portefeuille (IDP) moyen, reporté dans la troisième colonne des mêmes tableaux. Pour chacun de ces portefeuilles nous avons estimé ensuite les paramètres des différentes fonctions copules considérées, à savoir la copule Gaussienne, la copule de Student, la copule de Clayton et la copule de Gumbel.

Afin de sélectionner la meilleure copule, nous avons choisi d'appliquer le test d'adéquation basé sur le processus de la copule empirique. A ce niveau, nous mentionnons qu'il n'y a pas eu de consensus définitif sur la validité de l'une ou l'autre des procédures proposées dans la littérature. Néanmoins, nous nous inspirons des résultats issus de la revue proposée par Genest et al (2009), dans laquelle les auteurs suggèrent une éventuelle performance des tests basés sur le processus de la copule empirique par rapport à ceux basés sur la transformée de Kendall ou aussi ceux basés sur la transformée de Rosenblatt. Ils mentionnent aussi que les tests utilisant la statistique de Cramer-von Mises surperforment ceux développés sous la statistique de Kolmogorov-Smirnov.

Les résultats de cette étude sont résumés dans les tableaux qui suivent. On vérifie tout d'abord la validité du constat que nous avons illustré lors de l'analyse précédente (dépendance des quantiles). En effet, nous pouvons vérifier l'adéquation de la copule de Student pour les portefeuilles qui ne sont pas considérés comme « suffisamment diversifiés ». Ceci est vrai surtout pour le cas bidimensionnel pour lequel la copule de Student est validée pour l'ensemble (100%) des portefeuilles sélectionnés pour cette dimension. Ces résultats semblent être différents de ceux obtenus par Romano (2002) ainsi

<sup>5</sup>Par comparaison avec celui de la copule Gaussienne, qui est nul.

que Chen et al (2006), où ils affirment la validité de la copule gaussienne pour le cas bivarié.

On note aussi que la copule de Student reste toujours valable pour les portefeuilles composés de quatre actifs. En effet, cette copule minimise toujours la statistique de Cramer-von Mises  $S_n$ . Cependant, la qualité de l'ajustement de cette copule tend à diminuer avec l'augmentation du degré de diversification. On peut noter à titre d'exemple que la copule de Student s'ajuste convenablement pour décrire la structure de dépendance de 90% des portefeuilles composés de quatre actifs et ayant un degré de diversification mesuré par l'IDP de l'ordre de 3.313. Cette qualité d'adéquation passe à seulement 50% des portefeuilles ayant la même dimension et dont le degré de diversification augmente et passe à 3.455. La structure de dépendance du reste des portefeuilles s'ajuste mieux à la copule Gaussienne. Ce constat est encore valable pour les portefeuilles composés de six actifs, mais avec une qualité d'adéquation de moins en moins satisfaisante. Ainsi, plus la taille des portefeuilles augmente ( $N=8$ ;  $N=10$ ), engendrant ainsi des niveaux de diversification plus élevés, meilleure est la qualité d'ajustement de la copule gaussienne pour décrire la structure de dépendance de ces portefeuilles. Néanmoins, notons qu'au sein de cette même dimension, la copule de Student continue à s'ajuster parfaitement à la structure de dépendance de portefeuilles "non diversifiés", plus concentrés sur un certain nombre d'actifs issus d'un même secteur. En effet, pour  $N=10$ , la copule de Student est en adéquation avec la structure de dépendance des 75% des portefeuilles composés d'actifs appartenant au même secteur d'activité, ayant ainsi un degré de diversification moyen de 5.173. Plus le degré de diversification augmente, et plus le choix se porte sur la copule Gaussienne. Ceci semble contredire encore une fois les résultats de Chen et al (2004) suggérant l'adéquation de la copule de Student pour les portefeuilles de grandes dimensions ( $N=4, \dots, 30$ ). En effet, selon les résultats auxquels nous sommes parvenus, il faut bien distinguer les portefeuilles au sein d'une même dimension, la copule Gaussienne n'étant valable que pour les portefeuilles les plus diversifiés. Pour les portefeuilles concentrés, la copule de Student semble être plus adéquate. En effet, comme expliqué ci dessus, les portefeuilles non diversifiés, concentrés sur un nombre d'actifs appartenant à un même secteur ou aussi à des secteurs interdépendants, sont souvent assujettis à des facteurs communs qui conditionnent largement leurs caractéristiques statistiques. Ainsi, ces mêmes facteurs ont tendance à créer une structure de dépendance qui ne peut pas être captée par la copule Gaussienne. La copule de Student, ayant des coefficients de dépendance de queues non nuls, peut tenir compte des ces événements extrêmes.

Finalement, nous signalons l'inadéquation de la copule de Clayton ainsi que celle de Gumbel pour décrire la structure de dépendance de l'ensemble des portefeuilles. En effet, par construction, ces deux copules archimédiennes présentent des structures de dépendance asymétriques qui ne sont pas en adéquation avec la structure de dépendance symétrique se trouvant dans ces portefeuilles et qui est bien captée par celles induites par les deux copules elliptiques (Gaussienne et Student). On pense alors qu'un mélange de copules, combinant la copule de Clayton et celle de Gumbel pourrait

s'ajuster au mieux aux caractéristiques de ces portefeuilles. Il reste alors à déterminer les proportions optimales à affecter à chacune de ces copules permettant de mettre en adéquation la structure de dépendance et le niveau de diversification du portefeuille.

TAB. 3. Diversification et choix de Copules : GoF test

		<b>PDI</b>	<b>Gaussian</b>	<b>Student</b>	<b>Clayton</b>	<b>Gumbel</b>
<b>N=2</b>	2/0	2,447	0,039	<b>0,026</b>	0,343	0,180
	1/1	2,448	0,037	<b>0,029</b>	0,198	0,161
<b>N=4</b>	4/0	3,313	0,075	<b>0,065</b>	1,725	1,255
	2/2	3,284	0,093	<b>0,080</b>	1,300	1,080
	3/1	3,367	0,077	<b>0,071</b>	1,346	1,063
	2/1/1	3,455	0,084	<b>0,080</b>	0,961	0,923
<b>N=6</b>	6/0	3,866	0,084	<b>0,079</b>	2,542	2,026
	3/3	4,043	0,076	<b>0,072</b>	1,341	1,390
	4/1/1	4,240	0,096	<b>0,094</b>	1,633	1,537
	3/1/1/1	4,328	<b>0,088</b>	0,085	1,257	1,162
<b>N=8</b>	8/0	4,612	0,072	<b>0,071</b>	2,787	2,180
	2/2/2/2	4,947	<b>0,072</b>	0,074	1,166	1,148
	4/4	5,034	<b>0,070</b>	0,071	1,449	1,345
	5/1/1/1	5,079	<b>0,074</b>	0,075	1,433	1,339
<b>N=10</b>	10/0	5,173	0,079	<b>0,080</b>	3,237	2,615
	5/5	5,739	<b>0,058</b>	0,065	1,215	1,167
	7/1/1/1	5,770	<b>0,065</b>	0,072	1,153	1,141
	4/2/2/2	6,004	<b>0,053</b>	0,056	0,943	0,940

TAB. 4. Diversification et choix de Copules : Pourcentage d'adéquation

		<b>PDI</b>	<b>Gaussian</b>	<b>Student</b>	<b>Clayton</b>	<b>Gumbel</b>
<b>N=2</b>	2/0	2,447	0.00%	<b>100%</b>	0.00%	0.00%
	1/1	2,448	0.00%	<b>100%</b>	0.00%	0.00%
<b>N=4</b>	4/0	3,313	10.%	<b>90%</b>	0.00%	0.00%
	2/2	3,284	20%	<b>80%</b>	0.00%	0.00%
	3/1	3,367	10%	<b>90%</b>	0.00%	0.00%
	2/1/1	3,455	50%	<b>50%</b>	0.00%	0.00%
<b>N=6</b>	6/0	3,866	30%	<b>70%</b>	0.00%	0.00%
	3/3	4,043	30%	<b>70%</b>	0.00%	0.00%
	4/1/1	4,240	40%	<b>60%</b>	0.00%	0.00%
	3/1/1/1	4,328	<b>60%</b>	40%	0.00%	0.00%
<b>N=8</b>	8/0	4,612	50%	<b>50%</b>	0.00%	0.00%
	2/2/2/2	4,947	<b>90%</b>	10%	0.00%	0.00%
	4/4	5,034	<b>60%</b>	40%	0.00%	0.00%
	5/1/1/1	5,079	<b>60%</b>	40%	0.00%	0.00%
<b>N=10</b>	10/0	5,173	25%	<b>75%</b>	0.00%	0.00%
	5/5	5,739	<b>100%</b>	0.00%	0.00%	0.00%
	7/1/1/1	5,770	<b>100%</b>	0.00%	0.00%	0.00%
	4/2/2/2	6,004	<b>90%</b>	10%	0.00%	0.00%

## 6. Conclusion

Au cours de cette étude, nous avons essayé d'illustrer une méthode qui nous permet de distinguer la relation qui peut exister entre le degré de diversification d'un portefeuille donné et le choix de la fonction copule ayant décrit au mieux sa structure de dépendance. Notre méthodologie a été appliquée sur des portefeuilles actions, issus du marché allemand et cotés sur la bourse de Frankfort. Les résultats de notre étude suggèrent, dans un premier temps, la validité de l'Indice de Diversification de Portefeuille (IDP) comme étant la mesure du niveau de diversification la plus adéquate. Dans un deuxième temps, nous avons pu vérifier l'adéquation de la copule de Student dans la modélisation de la structure de dépendance des portefeuilles concentrés, dont la dimension ne dépassant pas les six actifs. Par contre, plus la dimension des portefeuilles augmente, ainsi que leurs niveaux de diversification, meilleure est l'adéquation de la copule gaussienne.

Dans la suite de cette thèse, nous allons essayer d'étudier l'impact d'une mauvaise spécification du modèle copule, dans le cadre des problématiques dédiées surtout à la mesure des risques extrêmes et à l'allocation optimale de portefeuilles. En effet, on peut penser qu'une mauvaise spécification du modèle copule peut occasionner de graves conséquences sur la bonne réalisation des objectifs fixés, mettant en péril ainsi la situation économique des institutions financières.

## 7. Annexes

TAB. 5. Statistiques descriptives : Secteur Automobile

	<b>Audi</b>	<b>BMW</b>	<b>Continent</b>	<b>Diamler</b>	<b>Fiat</b>
<b>Moyenne</b>	4,48 $10^{-04}$	4,41 $10^{-04}$	6,43 $10^{-04}$	3,11 $10^{-04}$	1,95 $10^{-05}$
<b>Min</b>	-0,185	-0,132	-0,325	-0,293	-0,726
<b>Max</b>	0,230	0,161	0,282	0,215	0,511
<b>Std</b>	0,018	0,020	0,029	0,022	0,033
<b>Skewness</b>	0,856	0,449	-0,068	-0,219	-2,812
<b>Kurtosis</b>	22,699	12,671	29,938	24,134	119,44
<b>JB test</b>	3,79 $10^{+04}$	9,16 $10^{+03}$	7,04 $10^{+04}$	4,34 $10^{+04}$	1,32 $10^{+06}$
	<b>Ford</b>	<b>Man</b>	<b>Peugeot</b>	<b>Renalut</b>	<b>VW</b>
<b>Moyenne</b>	2,09 $10^{-05}$	4,86 $10^{-04}$	-6,06 $10^{-04}$	6,62 $10^{-05}$	7,54 $10^{-04}$
<b>Min</b>	-0,253	-0,153	-0,212	-0,327	-0,580
<b>Max</b>	0,590	0,183	0,183	0,554	0,805
<b>Std</b>	0,032	0,023	0,028	0,029	0,035
<b>Skewness</b>	2,730	0,159	0,057	2,248	5,045
<b>Kurtosis</b>	61,09	11,25	8,25	63,15	204,28
<b>JB test</b>	3,30 $10^{+05}$	6,62 $10^{+03}$	2,68 $10^{+03}$	3,53 $10^{+05}$	3,94 $10^{+06}$



TAB. 6. Statistiques descriptives : Secteur Energie

	<b>BG</b>	<b>BP</b>	<b>Chevron</b>	<b>ENI</b>	<b>Exxon</b>
<b>Moyenne</b>	4,73 $10^{-04}$	3,400 $10^{-05}$	1,59 $10^{-04}$	$1,6610^{-04}$	3,62 $10^{-04}$
<b>Min</b>	-0,145	-0,148	-0,691	-0,133	-0,210
<b>Max</b>	0,147	0,127	0,141	0,141	0,1369
<b>Std</b>	0,024	0,017	0,021	0,017	0,015
<b>Skewness</b>	-0,086	-0,352	-13,719	0,335	-0,763
<b>Kurtosis</b>	6,983	11,360	435,022	16,008	27,259
<b>JB test</b>	1,54 $10^{+03}$	6,837 $10^{+03}$	1,82 $10^{+07}$	$1,6410^{+04}$	5,73 $10^{+04}$
	<b>GAZPR</b>	<b>STATOIL</b>	<b>Schlum</b>	<b>Shell</b>	<b>Total</b>
<b>Moyenne</b>	1,89 $10^{-04}$	8,25 $10^{-04}$	5,49 $10^{-04}$	7,79 $10^{-04}$	2,27 $10^{-04}$
<b>Min</b>	-0,314	-0,129	-0,176	-0,099	-0,093
<b>Max</b>	0,266	0,277	0,187	1,201	0,123
<b>Std</b>	0,029	0,023	0,022	0,030	0,015
<b>Skewness</b>	-0,474	1,670	-0,337	25,961	0,402
<b>Kurtosis</b>	17,310	24,974	10,351	1020,86	11,440
<b>JB test</b>	1,99 $10^{+04}$	4,79 $10^{+04}$	5,29 $10^{+03}$	1,008 $10^{+08}$	6,98 $10^{+03}$

TAB. 7. Statistiques descriptives : Secteur Finance et Assurance

	<b>BNP</b>	<b>BOA</b>	<b>Barclays</b>	<b>Citi</b>	<b>DB</b>
<b>Moyenne</b>	5,51 $10^{-05}$	-7,74 $10^{-04}$	-3,82 $10^{-04}$	-1,02 $10^{-03}$	-3,64 $10^{-04}$
<b>Min</b>	-0,213	-0,685	-0,613	-0,639	-0,180
<b>Max</b>	0,278	0,448	0,893	0,550	0,377
<b>Std</b>	0,026	0,0364	0,0396	0,0386	0,0265
<b>Skewness</b>	0,851	-1,508	4,959	-0,334	2,074
<b>Kurtosis</b>	18,171	84,486	170,527	76,869	33,697
<b>JB test</b>	2,26 $10^{+04}$	6,45 $10^{+05}$	2,73 $10^{+06}$	5,31 $10^{+05}$	9,31 $10^{+04}$
	<b>Goldman</b>	<b>HSBC</b>	<b>ING</b>	<b>JPM</b>	<b>SG</b>
<b>Moyenne</b>	2,17 $10^{-04}$	-1,26 $10^{-04}$	-2,72 $10^{-04}$	1,75 $10^{-04}$	-2,24 $10^{-04}$
<b>Min</b>	-0,248	-0,276	-0,518	-0,324	-0,164
<b>Max</b>	0,398	0,352	0,607	0,306	0,464
<b>Std</b>	0,027	0,019	0,034	0,025	0,031
<b>Skewness</b>	1,327	1,332	0,446	0,789	1,501
<b>Kurtosis</b>	36,328	77,412	72,156	42,803	29,125
<b>JB test</b>	1,08 $10^{+05}$	5,38 $10^{+05}$	4,64 $10^{+05}$	1,54 $10^{+05}$	6,71 $10^{+04}$

TAB. 8. Statistiques descriptives : Secteur Télécommunications

	Apple	ChinaMobD.	TKom	IBM	Microsoft
<b>Moyenne</b>	7,34 10 <sup>-04</sup>	1,26 10 <sup>-03</sup>	3,99 10 <sup>-04</sup>	3,03 10 <sup>-04</sup>	1,76 10 <sup>-04</sup>
<b>Min</b>	-1,954	-0,117	-0,131	-0,099	-0,133
<b>Max</b>	1,967	0,250	0,715	0,118	0,137
<b>Std</b>	0,074	0,024	0,021	0,014	0,016
<b>Skewness</b>	-7,510	2,380	16,158	0,206	-0,130
<b>Kurtosis</b>	621,333	25,836	544,665	11,400	14,359
<b>JB test</b>	3,71 10 <sup>+07</sup>	5,28 10 <sup>+04</sup>	2,85 10 <sup>+07</sup>	6,87 10 <sup>+03</sup>	1,25 10 <sup>+04</sup>
	Orange	Telefonica	Verizon	Vodafone	Yahoo
<b>Moyenne</b>	-1,20 10 <sup>-04</sup>	9,71 10 <sup>-05</sup>	1,83 10 <sup>-04</sup>	-1,41 10 <sup>-04</sup>	-5,81 10 <sup>-05</sup>
<b>Min</b>	-0,093	-0,107	-0,140	-0,548	-0,210
<b>Max</b>	0,112	0,126	0,152	0,109	0,405
<b>Std</b>	0,016	0,015	0,015	0,021	0,025
<b>Skewness</b>	0,190	-0,052	0,366	-7,011	1,285
<b>Kurtosis</b>	6,346	9,794	14,477	180,740	36,320
<b>JB test</b>	1,10 10 <sup>+03</sup>	4,48 10 <sup>+03</sup>	1,28 10 <sup>+04</sup>	3,08 10 <sup>+06</sup>	1,08 10 <sup>+05</sup>

Number of observations 254  
 Number of regressors 2  
 columns 1 through 4

```

'c(0)'      [ 0.3778]      [0.0102]      [ 0.0155]
'c(1)'      [-0.0274]      [0.0027]      [ 0.0038]

```

columns 5 through 6

```

't-stat'    [24.2943]      [ 0]
            [-7.1985]      [7.0430e-012]

```

R2: 0.28786  
 Variance of s2: 0.0023763  
 Log likelihood: 408.4588  
 D-w statistics: 2.0788

FIG. 4. Résultats de la régression "IDP"

## **Robustesse des Mesures de Risque Value-at-Risk et Expected-Shortfall dans le Cadre d'un Modèle GARCH-Copule Dynamique**

### **1. Introduction**

Au cours des dernières décennies, nombreuses sont les institutions financières qui ont connu des pertes exceptionnelles (plusieurs ont été victimes d'événements extrêmes inattendus qui ont causé leurs faillites). En conséquence, une approche plus globale de la gestion des risques a été mise en place à l'échelle internationale. Cette approche prend en compte autant que possible ces événements extrêmes qui sont généralement mal spécifiés dans les modèles standards de mesure de risque. Ce projet a été initié par JP Morgan (1997) à travers la mise en place de la méthodologie incluse dans le système de RiskMetrics<sup>®</sup>, qui propose la Value-at-Risk (VaR) comme une mesure de risque alternative. Cette dernière est définie comme étant le montant des pertes potentielles encourues par une institution financière, pour un horizon donné et pour un niveau de confiance fixé. Depuis, et selon le comité de Bâle (1996), les institutions financières peuvent développer leurs propres modèles internes pour mesurer la Value-at-Risk, servant à calculer le capital réglementaire permettant de couvrir leurs positions risquées.

En dépit de l'approbation de toute la société financière pour sa méthodologie attrayante, l'estimation de la Value-at-Risk ne manque pas de difficulté. Ceci se matérialise sous la forme d'un risque de modèle, issu surtout des multiples méthodes disponibles pour sa mise en place. La variété des approches, incluant la VaR historique, l'approche paramétrique ou aussi l'approche Monte Carlo, interpelle les chercheurs ainsi que les praticiens lorsqu'ils cherchent à déterminer le modèle le plus performant. Cependant, aujourd'hui encore, les résultats ne sont pas concluants. Beder (1995) a tenté de comparer la méthode à base de simulation de Monte Carlo à celle de la simulation historique dans le cadre des positions à revenus fixes ou dans celui des positions en options. Les résultats suggèrent des grandes différences dans le calcul de la VaR issue des différents modèles appliqués à un même portefeuille. En outre, l'ampleur des différences ne suit pas une tendance claire liée à la complexité du portefeuille. Giot et Laurent (2004) s'intéressant au cas de la méthode paramétrique, tentent d'évaluer la performance d'un modèle ARCH par rapport à un modèle basé sur la volatilité réalisée. Ils concluent que les deux méthodes semblent équivalentes.

Récemment, les modèles de calcul de la VaR ont été critiqués à propos de la validité de leurs hypothèses statistiques sous-jacentes. En effet, les chercheurs reprochent aux méthodes traditionnelles le fait de supposer à la

fois la normalité et la stationnarité des distributions des actifs financiers, ce qui ne semble pas tenir empiriquement. En effet, on rappelle les résultats de Longin et Solnik (2001), ainsi que ceux d'Ang et Chen (2002), qui ont démontré que les rendements des actifs sont plus fortement corrélés en période de grande volatilité des marchés qu'en période de ralentissement de l'activité économique. Embrecht et al (2003) suggèrent également l'inefficacité de l'hypothèse de normalité multivariée, et donc la corrélation linéaire pour décrire de telles asymétries. Par conséquent, les estimations réalisées dans le cadre de telles hypothèses restrictives pourraient conduire à des mesures de risque (VaR) inadéquates.

L'approche relativement récente en termes de copules qui remonte à l'article fondateur de Sklar (1959), permet aux chercheurs de dépasser le cadre gaussien imposé par les méthodes traditionnelles. Les travaux utilisant l'approche copule dans le cadre des modèles d'estimation de la valeur à risque (VaR) sont d'actualité. Ainsi, Di Clemente et Romano (2005) combinent l'approche copule à la théorie des valeurs extrêmes et fournissent une estimation plus robuste de la VaR. Schlogell et O'kane (2005) accordent une certaine attention au portefeuille de crédit et développent, sous une certaine approximation, des formules analytiques pour la densité et la fonction de répartition de la distribution des pertes. Mendes et de Souza (2004) tentent d'évaluer la variabilité de la Value-at-Risk sous différentes structures de dépendance.

Néanmoins, l'introduction de cette approche dans le cadre des modèles de calcul de la VaR<sup>1</sup>, rajoute aussi bien de la complexité ainsi que l'incertitude par rapport aux résultats obtenus et à l'efficacité du modèle utilisé. En effet, la multiplicité des fonctions copules qui peuvent être utilisées complique la tâche du gestionnaire du risque ou plus généralement de l'institution financière visant à développer son propre modèle interne pour la mesure de risque. En effet, cette dernière serait amenée à tester plusieurs modèles copules et à choisir le modèle le plus probant. Toutefois, bien que le modèle retenu semble surperformer les autres modèles candidats, le choix peut être entaché de biais en ignorant d'autres fonctions copules pouvant s'ajuster au mieux à la nature du portefeuille étudié. En effet, on a bien montré dans le chapitre précédent que le choix de la copule est étroitement lié à la nature du portefeuille. Donc on pense qu'en choisissant un modèle copule mal spécifié peut engendrer des différences de résultats considérables par rapport à ceux procurés par le vrai modèle<sup>2</sup>.

Dans le même contexte, l'approche copule est utilisée pour calculer une nouvelle mesure de risque, à savoir la Conditional Value-at-Risk (CVaR) appelée aussi Expected-Shortfall (ES), afin de reconsidérer le problème du risque des queues de distributions issu de la définition même de la Value-at-Risk. En effet, et selon Artzner (1997, 1999), le concept de VaR ne mesure

---

<sup>1</sup>L'approche copule est utilisée surtout dans le cadre de la méthode de simulation de Monte Carlo.

<sup>2</sup>On mentionne que le modèle copule est la combinaison de deux composante. La première est liée au choix des distributions marginales, la deuxième étant la fonction copule qui les mettent en relation. Ainsi, la mauvaise spécification du modèle copule, peut être due soit à l'une ou l'autre de ces deux composante, soit à une mauvaise spécification simultanée des lois marginales et de la fonction copule.

que le quantile de la distribution de perte et ne tient pas compte des pertes extrêmes au-delà du niveau de la VaR. Ainsi la VaR peut ignorer des informations importantes concernant la queue de la distribution sous-jacente. La plupart des travaux consacrés à cet axe de recherche tentent de comparer l'effet de l'utilisation de l'approche copule à la fois sur les deux mesures de risque, VaR et ES. Dans cette logique, Yamai et Yoshihara (2002) ont essayé de faire une analyse comparative entre les estimations de la VaR et de l'ES en combinant l'apport de la loi des valeurs extrêmes et différentes hypothèses concernant la structure de dépendance. Les résultats suggèrent que les estimations faites sur la VaR et l'ES varient en fonction de la copule adoptée. Les différences sont d'autant plus élevées que l'indice de queue ainsi que le rho de Spearman sont grands. La question qui se pose à ce niveau, serait de comparer l'impact d'une mauvaise spécification du modèle copule à la fois sur ces deux mesures de risque. Autrement dit, une mauvaise spécification du modèle aura-t-elle le même impact sur les mesures de risque ?

Afin de répondre à toutes ces problématiques, l'objectif de ce chapitre est triple. En guise de premier objectif, nous visons à comparer l'impact d'une mauvaise spécification du modèle copule sur les deux mesures de risque étudiées à savoir la Value-at-Risk et l'Expected-Shortfall. Nous concluons par la suite sur la part de chacune des composantes du modèle copule, à savoir la part imputée à une mauvaise spécification de la fonction copule, et la part imputée à une mauvaise spécification des marginales dans l'estimation de ces deux mesures de risque. Nous terminons en étudiant l'impact de la composition du portefeuille, afin de déterminer sur une possible minimisation de cet impact d'erreur de modèle dans le processus d'estimation des mesures de risque.

## 2. Revue de littérature

Dans cette section, nous passons en revue la littérature académique qui a été consacrée aux questions de mise en œuvre des outils de mesure de risque tels la Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Value-at-Risk (CVaR). Nous développons cette revue de littérature sous trois angles différents répondant à trois catégories de questions : La première étant le choix de l'horizon de temps pour lequel la VaR est estimée ; la deuxième concerne l'importance de tenir compte de la variabilité de la volatilité au cours du temps ; la dernière considère l'importance de tenir compte de la corrélation entre les facteurs de risque ainsi que l'utilisation de l'approche copule dans le cadre de cette problématique.

Une des questions fondamentales dans l'utilisation de la Value-at-Risk, en tant que mesure de risque et particulièrement pour le calcul du capital réglementaire, est bien l'horizon pour lequel la VaR est calculée. Il semble y avoir un consensus parmi les chercheurs ainsi que les décideurs au niveau du risk management que l'horizon approprié pour le calcul de la VaR devrait dépendre des caractéristiques de la position. C'est ainsi que Christoffersen et Diebold (2000) et Christoffersen, Diebold et Schuermann (1998), affirment que l'horizon pertinent dépendra probablement de la classe d'actifs (actions Vs titres à revenu fixe) composant la position en question. Contrairement à ce consensus, Finger (2009), souligne qu'il n'existe pas de cadre conceptuel

ou statistique pour justifier l'agrégation d'une VaR de dix-jours, suggérée par les recommandations de l'accord de Bale II (2004). Danielson (2002) mentionne que si l'objectif du calcul de la VaR est de protéger une position contre les pertes que peut engendrer une crise de liquidité, l'horizon de dix jours avec un niveau de confiance à 99% fait référence à un événement qui se produit environ 25 fois par décennie. Alors que pour une crise de liquidité, il est « peu probable qu'elle se produira même une fois par décennie ». Ainsi, la probabilité et le problème ne correspondent pas. De même, d'autres auteurs ont suggéré que l'horizon approprié doit dépendre de la finalité économique qui sous-tend le calcul de la VaR. Smithson et Minton (1996), par exemple, affirment que la plupart des gestionnaires de risque estiment qu'un horizon d'un jour est valable pour des fins transactionnelles, mais sont en désaccord sur l'horizon approprié lorsque l'objectif tient à la solvabilité de long terme.

Le calcul de la VaR pour des horizons plus lointains introduit la question sur la variabilité au cours du temps de la composition des portefeuilles, en particulier pour les institutions œuvrant sur des marchés relatifs à des actifs activement négociés tel le marché de devises (Diebold, Hickman, Inoue et Schuermann, 1998). Une solution commune, permettant de contourner le problème des changements apportés à la composition du portefeuille, est le calcul de la VaR pour des horizons courts et l'extension des résultats pour la période de temps désirée en utilisant l'approximation utilisant la racine carrée du temps. Bien que simple à mettre en œuvre, Bakshi et Panayotov (2010) soulignent que ce choix peut compromettre l'exactitude de la VaR, du fait que le risque de queue est susceptible d'être sous-estimé. L'exactitude de l'approximation utilisant la racine carrée de l'horizon de temps dépend largement des propriétés statistiques du processus de génération de données des facteurs de risque. C'est ainsi que Diebold et al (1998) montrent que, si les facteurs de risque suivent une spécification de type GARCH (1,1), l'utilisation de l'approximation par la racine carrée sur-estime la volatilité de long terme et par conséquent sur-estime le calcul de la VaR. Des conclusions similaires sont tirées par Provizionatou, Markose et Menkens (2005). Contrairement aux auteurs précédents, Danielsson et Zigrand (2006) constatent que, lorsque le facteur de risque sous-jacent suit un processus de diffusion avec saut, l'approximation par la racine carrée du temps sous-estime systématiquement le risque, et que le biais est d'autant plus important que l'horizon est lointain.

Cette dernière problématique introduit celle liée à l'étude des caractéristiques propres des facteurs de risque et leur impact sur le calcul de la VaR. En effet, c'est désormais un fait stylisé que certaines classes d'actifs, telles que les actions et les produits des taux, présentent une volatilité variant dans le temps. Tenir compte de cette caractéristique dans les modèles VaR a été l'une des questions les plus étudiées. Côté industrie, nombreuses sont les institutions qui ont préconisé l'utilisation de mesures de risques à fort potentiel de réactivité, à l'égard des mesures intégrant une volatilité exponentielle pondérée dans le temps « exponential time-weighted measures of volatility ». La raison évoquée est liée au fait que ces modèles serviront comme des alertes précoces de l'évolution des conditions du marché. La littérature académique a également souligné l'importance d'incorporer cette composante dans les

modèles de calcul de la VaR. Pritsker (2006) a pu montrer théoriquement que l'utilisation de la VaR historique sans tenir compte de la composante liée à la volatilité variant dans le temps conduit systématiquement à sous-estimer le risque, là où les vrais facteurs de risque sous-jacents présentent une volatilité non stationnaire. À l'inverse, d'autres auteurs sont en faveur de l'idée que, selon l'objectif de la VaR, l'intérêt de capturer la volatilité peut ne pas être nécessaire, ou peut être même inapproprié. Christoffersen et Diebold (2000) relèvent que la prévision de la volatilité décroît rapidement avec l'horizon de temps pour la plupart des actifs. Ceci implique que, tenir compte d'une volatilité non stationnaire, peut ne pas être aussi important lorsque l'horizon de calcul de la VaR est long.

D'un autre côté, une littérature abondante a été consacrée aux modèles permettant de mieux tenir compte de la volatilité dans le calcul de la VaR, à commencer par celui proposé par JP Morgan (1997), qui préconise l'utilisation de l'approche EWMA, et considéré comme l'une des références de l'industrie en la matière. Une approche alternative et plus simple consiste à pondérer les données historiques selon les pondérations introduites par Boudoukh, Richardson et Whitelaw (1998). Une approche encore plus simple consiste à calculer la VaR par simulation historique en utilisant un échantillon d'observations court et fréquemment mis à jour. Dunn (2009) a suggéré que cette méthode s'ajuste au mieux à la variabilité de la volatilité dans le temps. D'un autre côté, Pritsker (2006) a montré que l'approche de Boudoukh et al (1998) n'est pas assez robuste pour détecter des changements au niveau de la volatilité, et préconise l'utilisation de la méthode de simulation historique filtrée (FHS), introduite par Barone-Adesi, Giannopoulos et Vosper (1999).

Le dernier aspect que nous examinons dans cette revue de littérature concerne l'importance accordée à la corrélation entre les facteurs de risque lors de l'estimation de la VaR et de l'ES. En effet, nombreuses sont les études qui ont montré l'intérêt de dépasser le cadre gaussien imposé par le modèle Riskmetrics. Ce dernier, et dans sa version paramétrique, suppose une distribution multi-variée gaussienne pour les facteurs de risque. Toutefois, il a été largement prouvé que les facteurs de risque, matérialisés par les séries de rendements des actifs financiers, sont souvent asymétriques et leptokurtiques, caractérisés aussi par des faits stylisés liés à une structure de dépendance asymétrique (Longin et Solnik, 2001, Ang et Bekaert, 2002 ainsi que Ang et Chen, 2002). D'où, tout l'intérêt de tenir compte de cet aspect lors de l'estimation des mesures de risque, faute de quoi le risque peut être largement sous-évalué (Okimoto, 2008). Les travaux dédiés à cette problématique font usage de deux approches aussi complémentaires, et qui ont montré tout l'intérêt théorique et empirique pour résoudre cette question, à savoir l'approche par les modèles GARCH multivariés, ainsi que celle par les fonctions copules.

Dans le cadre de la première approche, Ledoit et al (2003) testent les différentes alternatives des modèles GARCH multivariés, incluant le modèle BEKK, CCC ainsi que les modèles GARCH flexibles, et parviennent à une égalité entre les différents modèles GARCH testés en termes d'estimation de la Value-at-Risk. Morimoto et Kawasaki (2008) concluent sur la performance



du modèle DCC (Dynamic Conditional Correlation), surtout dans le cadre d'une analyse de type intra-journalière. Toutefois, Tsafack (2008) suggère qu'un tel modèle combiné avec des innovations de types gaussiennes ou de Student peut générer des sous-estimations importantes pour la VaR ainsi que pour l'ES, par comparaison avec un modèle favorisant des marginales asymétriques. Dans une autre perspective, Santos et al (2009) comparent deux types de modélisation à savoir celle des modèles GARCH univariés, ainsi que celle des modèles GARCH multivariés. Les résultats débouchent sur une supériorité des modèles multivariés lorsque la taille de l'échantillon d'estimation est suffisamment grande.

La deuxième approche, faisant référence aux fonctions copules suscitent énormément l'intérêt, à la fois de la part des académiciens et des praticiens, pour tout ce qui est lié à la modélisation des structures de dépendance. Intégrées dans la problématique de gestion des risques, les fonctions copules offrent un potentiel énorme aux gestionnaires permettant surtout de tenir compte de l'aspect asymétrique lié à la dépendance des marchés financiers. Dans une contribution récente, Okimoto (2008) souligne qu'en ignorant une telle asymétrie, cela peut affecter significativement les mesures de risque. Selon ses résultats, la VaR pour un niveau de confiance allant de 90% à 99%, peut être sous-évaluée de 10%, alors que l'Expected-Shortfall est sous-évaluée d'environ 5% à 10% pour le même niveau de confiance.

La littérature empirique dédiée au choix optimal de la famille de copule paramétrique permettant d'estimer au mieux les mesures de risque VaR et ES peut être regroupée en trois classes. Dans la première classe, on trouve ceux qui plaident pour l'optimalité des copules elliptiques, à savoir la copule gaussienne et la copule de Student. Di Clemente et Romano (2004), à l'aide d'un portefeuille composé de 20 titres sélectionnés sur le marché italien, et en utilisant un modèle combinant des marginales suivant des distributions à valeurs extrêmes et une copule elliptique, parviennent à démontrer qu'un tel choix peut estimer au mieux la VaR par comparaison avec un modèle de corrélation classique. Cependant, on reproche à cette étude de ne pas inclure d'autres familles de copules paramétriques, ni d'utiliser les tests d'adéquation permettant de sélectionner la meilleure copule. Fantazzini (2008), dans une étude qui a été faite sur trois portefeuilles bivariés, construits à partir d'indices boursiers, illustre le choix optimal d'une copule gaussienne constante ou dynamique afin d'estimer correctement la mesure de risque VaR. Le second courant d'études est en faveur de la supériorité des copules archimédiennes. Junker et May (2005) suggèrent qu'une copule de Frank combinée avec des marginales issues des modèles GARCH univariés peut améliorer l'estimation de la VaR et de l'ES par rapport aux modèles de copules elliptiques. Des résultats similaires ont été exposés dans Palaro et Hotta (2006). Les auteurs ont montré qu'une combinaison entre une copule de Clayton avec des marginales symétriques issues d'un modèle GARCH, améliorent sensiblement les résultats des estimations par rapport à des modèles de copules elliptiques.

Des études récentes, la plupart appartenant à la troisième catégorie de travaux, démontrent que la copule paramétrique optimale ainsi que la structure de la dépendance entre les rendements des actifs ne sont pas constantes

dans le temps. Afin de permettre à la forme paramétrique de la copule de varier en fonction du temps, des études plus récentes, comme celles de Rodriguez (2007), Chollette, Heinen, et Valdesogo (2009), Markwat, Kole, et van Dijk (2010) appliquent des combinaisons convexes de copules. Les résultats de ces études sont en faveur des modèles utilisant des mélanges de copules, permettant ainsi une meilleure estimation de la VaR et de l'ES que celles données par les modèles de copules inconditionnels. Pour conclure, Caillaud et Guégan (2009) comparent différents types de modélisations dynamiques incluant, le modèle RiskMetrics, les modèles GARCH multivariés, "Multivariate Markov-Switching models", ainsi que les copules dynamiques. Les résultats suggèrent la supériorité de l'approche copule. Elle permet entre autres de prendre en compte les crises financières, et surtout l'obtention d'exigences en fonds propres moins importantes.

### 3. Estimation de la Value-at-Risk et de L'Expected-Shortfall

Dans cette section, nous présentons les différents modèles que nous utilisons tout au long de ce chapitre pour l'estimation des mesures de risque VaR et ES. Nous détaillons successivement l'implémentation du modèle GARCH-Copule dynamique, le modèle RiskMetrics ainsi que celui de Simulation Historique. Les deux derniers modèles font références aux modèles traditionnels, et servant en tant que benchmark pour comparer les résultats avec ceux obtenus sous le modèle GARCH-Copule dynamique.

La value-at-Risk est un concept développé dans le cadre de la discipline de la gestion des risques, définie comme étant la perte maximale qu'une institution financière peut subir sur une position risquée donnée, avec un niveau de probabilité donnée et sur une période de temps bien spécifiée.

Soit  $R_{t+h}$ , le log rendement, sur la période  $[t, t + h]$ , d'un portefeuille matérialisant une position risquée donnée. Ce dernier étant défini comme suit :

$$R_{t+h} = w' . r_{t+h} \quad (3.1)$$

$r_{t+h} = (r_{1,t+h}, \dots, r_{d,t+h})'$ , étant un vecteur  $d \times 1$  représentant les facteurs de risque, et  $w$  le vecteur des pondérations composant le portefeuille tel que  $\sum_{i=1}^d w_i = 1$ .

Soit aussi  $F_h(x)$ , la fonction de distribution cumulative ("cdf") du rendement du portefeuille  $R_{t+h}$ . Ainsi la Value-at-Risk est formellement définie comme suit :

**DÉFINITION 9. (*Value-at-Risk*)** *Etant donné un niveau de probabilité  $\alpha \in [0, 1]$ , la VaR pour une position longue donnée, sur un horizon de temps  $h$ , est donnée par le nombre réel  $VaR_\alpha^{t+h}$  tel que*

$$\Pr \left[ R_{t+h} \leq -VaR_\alpha^{t+h} \right] = \alpha = F_h \left( -VaR_\alpha^{t+h} \right) \quad (3.2)$$

Ainsi,  $VaR_\alpha^{t+h}$  peut être vu comme étant l'opposé du quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de rendement du portefeuille  $R_{t+h}$ , qui dépend directement de la fonction de distribution multivariée  $r_{t+h}$ .

Comme mentionné ci-dessus, cette définition de la VaR n'est pas si fiable pour être considérée comme une mesure de risque cohérente. Les principales

critiques sont liées au fait que la VaR ne renseigne rien sur la perte qui peut être subie au delà du seuil de confiance, c'est à dire dépassant le niveau de la VaR. En outre, la VaR ne vérifie pas la propriété de sous-additivité qu'une mesure de risque cohérente doit satisfaire (voir à cet égard Artzner, 1997). Une autre mesure de risque cohérente est alors introduite, appelée désormais Expected-Shortfall ou ES.

Formellement, cette mesure représente la perte espérée sachant que le seuil critique des pertes est dépassé, celui ci peut être celui de la VaR. Ainsi elle se définit comme suit :

$$ES_{\alpha}^{t+h} = \mathbb{E} \left( -R_{t+h} \mid -R_{t+h} \geq VaR_{\alpha}^{t+h} \right) \quad (3.3)$$

**3.1. Le modèle GARCH-Copule dynamique.** Comme mentionné précédemment, l'approche copule est bien établie pour modéliser la structure de dépendance d'une série d'observations identiquement et indépendamment distribuées (iid). Cependant, dans nombreux travaux, l'approche copules est directement appliquée aux séries de rendements des actifs financiers. Néanmoins, nous reconnaissons les récents faits stylisés liés aux queues de distributions épaisses et au phénomène de "volatility clustering" observés sur l'ensemble de données des séries financières. Etant donné ce fait, il est utile d'introduire des modèles GARCH afin de filtrer ces distributions. Ensuite, le modèle de copule peut être utilisé pour modéliser la structure de dépendance entre les innovations standardisées considérées ici comme des observations iid.

Ainsi, le modèle proposé combine, d'une manière dynamique, les avantages soutenus par la théorie des modèles GARCH dans la modélisation et la prévision de la volatilité de rendements des actifs, et la souplesse de l'approche de copule dans la modélisation de la structure de dépendance.

Nous rappelons que si un vecteur de variables de type séries temporelles à n-dimension  $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})$  est supposé suivre une modélisation de type GARCH-Copule, par construction la fonction de distribution jointe est donnée par la forme suivante :

$$F(\mathbf{y}_t \mid \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}_t) = C(F_1(y_{1,t} \mid \mu_{1,t}, h_{1,t}), \dots, F_n(y_{n,t} \mid \mu_{n,t}, h_{n,t}))$$

avec  $C$  étant la copule à n-dimension,  $F_i$  sont les fonctions de distribution marginales conditionnelles relatives à la série  $y_{i,t}$ , dont la dynamique est décrite par un intercept  $\mu_{i,t}$  qui correspond à la moyenne conditionnelle et par un terme d'erreur  $\sqrt{h_{i,t}}\eta_{i,t}$ , qui peut être constant où dépendant du temps comme dans une spécification GARCH(1,1) par exemple.

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \\ \varepsilon_{i,t} &= \sqrt{h_{i,t}}\eta_{i,t} \\ h_{i,t} &= \omega_{i,t} + \alpha_{i,t}\varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{i,t-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$h_{i,t}$  étant la variance conditionnelle de la série  $y_{i,t}$  étant donnée l'information disponible  $I_{i,t-1} = \{y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots\}$ ,  $\eta_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$  sont des variables aléatoires iid caractérisant les innovations standardisées, considérées comme des bruits blancs de moyenne nulle et de variance égalant l'unité.

A ce niveau nous mentionnons que lors de la spécification d'un tel modèle multivarié, la première étape est de bien spécifier le modèle pour les variables

marginales. Ces modèles doivent prendre en compte au mieux les caractéristiques de ces variables. Il a été bien démontré par de nombreux auteurs, que les séries de rendements des actifs financiers peuvent être modélisées avec succès par les modèles ARMA-GARCH. Ainsi, le choix d'un modèle pour les variables marginales devrait passer tout d'abord par le choix d'une spécification GARCH parmi l'armada des modèles disponibles (EGARCH, GJR-GARCH, AP-GARCH,...). Ensuite, il s'agit de définir la spécification de la distribution conditionnelle des innovations standardisées  $\eta_{i,t}$ , celles-ci peuvent être Normale, Student, Skewed t ou tout autre distribution pouvant reproduire les caractéristiques statistiques des variables en question. Finalement, le choix d'un modèle parmi toutes ces combinaisons possibles peut se faire grâce à la mesure d'Akaike (AIC), celle-ci étant en étroite relation avec la fonction Log-Likelihood permettant l'estimation des paramètres de la spécification GARCH choisie.

Ayant choisi le modèle pour les variables marginales, l'étape suivante est de modéliser la distribution jointe des innovations standardisées, obtenues grâce à la spécification GARCH. Ceci est fait en choisissant la fonction copule qui s'ajuste au mieux à ces variables. Ainsi, on peut considérer plusieurs fonctions copules parmi les familles de copules disponibles (elliptiques, archimédiennes,...), ce qui permet de considérer différents comportements pour la structure de dépendance. On choisit ensuite la meilleure copule, ayant reproduit au mieux les caractéristiques de la structure de dépendance des variables étudiées.

Nous rappelons aussi que le but de ce type de modélisation est de pouvoir estimer les mesures de risque VaR et ES d'une manière dynamique. Pour atteindre cet objectif, nous avons choisi de développer le modèle décrit ci-dessus, dans une version dynamique afin de surmonter le problème de la non-stationnarité des distributions marginales et celui de la structure de dépendance. Cette caractéristique est profondément examinée dans les travaux de Guégan et Zhang (2010). Ainsi, notre approche est similaire à Palaro et Hotta (2006) ainsi que Caillaut et Guégan (2009), dans laquelle nous appliquons le concept de fenêtre mobile pour établir la dynamique de changement des marginales ainsi que la structure de dépendance à travers la fonction copule.

Par conséquent, et afin d'estimer la VaR et l'ES au niveau de confiance fixé, nous procédons comme suit : A l'instant  $t$ , ne connaissant que l'information disponible jusqu'à cet instant et après avoir estimé le modèle GARCH-Copule, nous devons simuler la distribution jointe du vecteur d'innovations  $\eta_{t+1}$  à partir de la copule sélectionnée. Par la suite, nous devons remettre à l'échelle (rescale) les innovations standardisées simulées, tout en utilisant les prévisions faites sur l'horizon choisi de la moyenne et de la variance, données par les résultats des estimations de la spécification GARCH retenue. Ainsi, nous obtenons la distribution simulée du rendement du portefeuille. La VaR est alors le quantile opportun de cette distribution au niveau de confiance choisi. Il suffit donc d'ordonner les  $N$  valeurs de rendements simulées, en ordre croissant. La VaR à un niveau de confiance  $\alpha$  est alors le  $\alpha * N$  scénario ordonné. Ayant obtenu la valeur de la VaR, le calcul de l'Expected

Shortfall est alors simple et peut se faire grâce à la formule suivante :

$$ES_{\alpha}^{t+1} = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{R_i \leq VaR_{\alpha}^{t+1}\}} \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^N R_i \mathbf{1}_{\{R_i \leq VaR_{\alpha}^{t+1}\}} \right) \quad (3.5)$$

Étant donné que l'estimation du modèle et la simulation à partir de la copule est une tâche qui peut être très lourde en temps de calcul, surtout dans une optique dynamique, nous avons choisi d'estimer le modèle copule que tous les 100 observations (ce qui est équivalent à 6 mois d'observations journalières). En effet, nous ne nous attendions pas à des grandes variations quand aux estimations des paramètres des fonctions copules<sup>3</sup>. Ainsi, nous estimons le(s) paramètre(s) de la fonction copule pour l'instant  $t$ , tout en utilisant toute l'information prévalant à cette instant, et nous gardons ce(s) paramètre(s) fixes pour les 99 prochaines observations. Cela signifie que seuls les paramètres de la spécifications GARCH sont estimés d'une manière dynamique, les paramètres de la fonction copules sont supposés être statique tout au long de cette fenêtre d'estimation qui compte 100 observations. Ainsi, pour chaque sous-échantillon, nous mettons à jour les estimations de la  $VaR_{\alpha}^{t+1}$  et de l' $ES_{\alpha}^{t+1}$ , tout en simulant le vecteur des innovations standardisées à partir de la copule sélectionnée, et en les remettant à l'échelle des rendements en utilisant les estimations faites sur la moyenne et la variance conditionnelles, extraites à partir de la spécification GARCH.

Les étapes détaillées de cette procédure sont comme suit :

- (1) A l'instant  $t$  donné, sélectionner un sous-échantillon de taille  $N$ . Le premier sous-échantillon étant de  $t - N$  à  $t - 1$ .
- (2) Estimer les paramètres de la spécification GARCH retenue.
- (3) Utiliser l'échantillon des innovations standardisés pour estimer les paramètres de la fonction copule  $C(\cdot)$ . Nous utilisons la méthode CML.
- (4) Simuler à partir de la Copule  $C(\cdot)$ , pour chaque instant de la fenêtre d'estimation  $t+h$ ,  $h = 1, \dots, 99$ ,  $j = 10000$  scénarios pour le vecteur des innovations standardisées  $\eta_{t+h}$ .
- (5) Estimer pour chaque instant  $t+h$ ,  $h = 2, \dots, 99$ , les paramètres de la spécification GARCH.
- (6) Afin d'obtenir la distribution des rendements simulés des différents actifs composant les portefeuilles, il faut remettre à l'échelle des rendements les innovations standardisées simulées à partir de la copule tout en utilisant les prévisions de la moyenne et de la variance conditionnelle. Ceci est donné par le résultat suivant :
$$\hat{r}(i)_{j,t+h} = \hat{\mu}_{i,t} + \hat{\phi}r_{i,t+h-1} + \eta(i)_{j,t+h} \hat{\sigma}_{i,t+h}$$
- (7) Calculer la VaR et l'ES en utilisant les formules respectives.
- (8) Finalement, répéter l'ensemble de cette procédure pour chaque sous-échantillon aux observations  $t + 100$ ,  $t + 200$ ,  $t + 300, \dots$ , etc, jusqu'à que l'on parcourt toute la période d'estimation fixée.

---

<sup>3</sup>Ceci sera bien illustré lors de notre illustration empirique.

**3.2. L'approche RiskMetrics.** Généralement, et dans la plupart des applications en gestion des risques, les scénarios pour les rendements des actifs financiers sont générés à partir d'une distribution conditionnelle multivariée normale. Cette approche a été introduite par RiskMetrics (1996).

Selon cette approche, les log-rendements des "d" actifs composant le portefeuille, durant la période de temps  $[t, t + 1]$ , sont caractérisés par une distribution multivariée gaussienne conditionnelle à l'ensemble des informations disponible à l'instant  $t$ , ayant pour paramètre le vecteur de rendements espérés  $\mu_{t+1}$  et la matrice de variance-covariance variant dans le temps  $\Sigma_{t+1} = (\sigma_{ij,t+1})$   $i, j = 1, \dots, d$ , avec  $\sigma_{ii,t+1} = \sigma_{i,t+1}^2$ . Les éléments de la matrice de variance-covariance  $d \times d$ , sont prévus en utilisant le schéma de la méthode EWMA, définit comme suit :

$$\sigma_{ij,t+1}^2 = \lambda \sigma_{ij,t} + (1 - \lambda) r_{i,t} r_{j,t} \quad (3.6)$$

où  $\lambda$  est le facteur de décroissance considéré comme étant égal à 0.94 dans RiskMetrics.

Ainsi, pour un niveau de confiance  $\alpha$  fixé,  $VaR_\alpha^{t+1}$  étant l'opposé du quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de rendement du portefeuille  $R_{t+1}$ , obtenu à partir de la distribution multivariée normale simulée  $N(0, \Sigma_{t+1})$ . L' $ES_\alpha^{t+1}$  est obtenue en utilisant la relation correspondante.

**3.3. La méthode de Simulation Historique.** Cette méthode est considérée comme étant la plus transparente et la plus simple en termes de temps calcul. En fait, elle ne présuppose aucune loi paramétrique puisqu'elle se base sur la distribution des rendements empirique du portefeuille. Dans ce cas, pour calculer la VaR, nous devons disposer des  $N$  observations passées du rendement du portefeuille. La mesure VaR est alors définie comme étant le  $\alpha$ -quantile de cette distribution empirique. Ainsi, la  $VaR_\alpha^{t+1}$  est égale à :

$$VaR_\alpha^{t+1} = -R_{(\alpha N),t} \quad (3.7)$$

avec  $R_{(i),t}$ , étant la statistique d'ordre  $i$ .

L' $ES_\alpha^{t+1}$ , étant la moyenne des rendements empiriques qui sont en dessous du seuil de la  $VaR_\alpha^{t+1}$ , est donnée par le résultats suivant :

$$ES_\alpha^{t+1} = -\frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^{\alpha N} R_{(i),t} \quad (3.8)$$

#### 4. Etude de simulation

Dans cette section, nous envisageons principalement, à travers une large étude de type simulation, donner un premier élément de réponse aux différentes questions que nous soulevons dans le cadre de ce chapitre. En effet, en se basant sur des données que nous simulons sur la base d'un "Data Generating Process" (DGP), nous essayons de vérifier notre hypothèse centrale concernant l'impact d'une erreur dans le modèle GARCH-Copule sur les estimations des différentes mesures de risque VaR et ES obtenues. Ainsi, l'idée est de simuler un grand nombre de répliques sur les trajectoires de rendement d'un portefeuille fictif que nous construisons, et qui reproduit au mieux les caractéristiques statistiques des actifs financiers. Nous estimons

ensuite les deux mesures de risque VaR et ES sur la base du "vrai modèle" qui a servi à la simulation des données, que nous comparons aux résultats des estimations obtenues sur la base d'une erreur sur l'une ou l'autre des composantes rentrant dans la définition de notre modèle de base.

Ainsi, nous présentons tout d'abord le modèle de simulation, puis nous rapportons et nous interprétons les résultats obtenus.

**4.1. Modèle Simulation.** Le choix final du modèle de simulation, dit aussi le "Data Generating Process", doit répondre essentiellement à deux conditions particulières. Tout d'abord, il doit être en étroite relation avec le cadre d'analyse de notre thèse en général, et du présent chapitre en particulier. En plus, le modèle de simulation doit répliquer au mieux les caractéristiques statistiques de la majeure partie des classes d'actifs financiers. Ainsi, il s'agit de simuler des trajectoires de rendement qui sont gouvernées par des processus GARCH donnés, et dont la structure de dépendance des innovations est décrite par une fonction copule fixée. Ainsi, nous décrivons successivement dans ce qui suit le choix du processus GARCH qui sert à simuler la trajectoire de la variance conditionnelle de la série de rendement, le choix de la distribution marginale conditionnelle des innovations et finalement le choix de la fonction Copule.

4.1.1. *Modèle pour la variance conditionnelle : Cas du GJR-GARCH.* Les développements récents dans la théorie de l'économétrie de la finance suggèrent l'utilisation de modèle de séries temporelles non-linéaires pour modéliser le rendement et le risque des actifs financiers. Parmi ces modèles non-linéaires, les modèles ARCH/GARCH sont les plus utilisés, surtout pour leur capacités à tenir compte d'un fait stylisé marquant s'agissant du "volatility clustering". En statistique, ce phénomène est connu sous le nom d'hétéroscédasticité, ce qui signifie que la variance n'est plus constante mais évolue dans le temps et dépend (conditionnellement) de son passé. Pour tenir compte de ce phénomène, Engle (1982) a introduit la famille des modèles ARCH, généralisée par la suite par Bollerslev (1986) introduisant ainsi la catégorie des modèles GARCH. Par comparaison avec les modèles ARCH, les modèles GARCH incluent, en plus de la composante autoregressive (AR), une composante moyenne mobile (MA). Ajoutant des termes de type (MA) au niveau de la spécification GARCH, cela signifie que la variance conditionnelle est aussi une fonction linéaire de son passé, ce qui améliore la performance des modèles ARCH. Ainsi, le modèle GARCH est un mécanisme qui utilise les variances passées pour expliquer les variances futures. Plus précisément, le modèle GARCH est une technique servant à modéliser la dépendance sérielle de la volatilité.

Ainsi, la version de base d'un modèle GARCH(p,q) rajoute "p" retards de la variance conditionnelle au niveau de l'équation linéaire du modèle ARCH(q). L'équation de la variance est ainsi généralisée, et donnée comme suit :

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

REMARQUE 3. (1)  $\varepsilon_t$  est un terme d'erreur (innovation), issu de l'équation de la moyenne conditionnelle. Il peut être divisé en une

composante stochastique  $\eta_t$  et un écart-type  $\sigma_t$  dépendant du temps, tel que  $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ .  $\eta_t$  est appelée aussi résidu ou innovation standardisée. C'est une variable aléatoire de moyenne nulle, identiquement et indépendamment distribuée, et qui est supposée être distribuée selon une loi normale, de Student ou suivant une autre distribution leptocurtique (nous discutons de ce choix dans la sous-section suivante).

- (2)  $\beta_i \geq 0$ ;  $\alpha_i \geq 0$ ;  $\kappa \geq 0$ , avec pour contrainte supplémentaire  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$ .
- (3) Si  $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$ , alors le processus GARCH( $p, q$ ) est supposé être faiblement stationnaire. Plus la somme tend vers l'unité, plus la variance converge vers sa valeur inconditionnelle.

Par comparaison avec les modèles de séries temporelles traditionnelles supposant l'homoscédasticité, les modèles GARCH modélisent avec succès le caractère hétéroscédastique observé sur la plupart des séries financières. En raison de leur grande utilisation, plusieurs extensions et modifications ont été proposées au modèle GARCH standard afin de pallier les limites conceptuelles ne permettant plus de tenir compte de toutes les caractéristiques statistiques observées récemment sur les séries financières. En effet, la principale critique adressée au modèle GARCH standard est qu'il est un processus symétrique qui ignore le signe des chocs que subissent les marchés financiers. En effet, le modèle suppose qu'une information positive aura le même impact sur la volatilité, qu'une information négative, ce qui montre un effet symétrique dans l'équation de la variance conditionnelle. Toutefois, la situation réelle des marchés financiers n'en est pas ainsi. En effet, des études ont montré que lorsque les marchés subissent des chocs (négatifs), les prix sont d'autant tirés vers le bas que les chocs sont violents. Cependant, lorsque les marchés sont "motivés" par des informations positives la fluctuation des prix n'aura pas la même amplitude que celle en cas de chocs négatif. En d'autres termes, les chocs négatifs entraînent une plus grande volatilité sur les marchés que celle donnée par des chocs positifs (Schewart (1989)). Ceci trouve son explication dans les avancées de la théorie de la finance comportementale où les investisseurs sentent plus le risque que la satisfaction en faisant face à la volatilité des marchés financiers.

Actuellement, ce phénomène supposant que les chocs négatifs auront plus d'impact sur la volatilité des marchés, que ceux des chocs positifs de même amplitude, est désigné par l'effet de levier que subissent les rendements des actifs financiers. Ainsi, l'effet de levier engendre une asymétrie dans la dynamique de la variance, et pallie ainsi la limite principale des modèles GARCH standards supposant la symétrie des chocs. C'est ainsi que plusieurs versions de modèle GARCH asymétriques ont vu le jour, à l'instar du modèle EGARCH ou aussi le modèle GJR GARCH que nous choisissons ici pour simuler la dynamique de la variance conditionnelle dans notre modèle GARCH-copule.



Le modèle GJR-GARCH remonte aux travaux de Glosten, Jaggannathan et Runkle (1993), dont la dynamique de la variance conditionnelle est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j + \gamma_j \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-j} < 0}) \varepsilon_{t-j}^2 \quad (4.1)$$

\*) avec  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-j} < 0} = 1$  si  $\varepsilon_{t-j} < 0$ , autrement  $\mathbb{I}_{\varepsilon_{t-j} < 0} = 0$ . Les contraintes du modèles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_i &\geq 0; \quad \alpha_i \geq 0; \quad \kappa \geq 0, \\ \alpha_j + \gamma_j &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \gamma_j &< 1. \end{aligned}$$

\*)  $\sum_{j=1}^q \gamma_j \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-j} < 0} \varepsilon_{t-j}^2$  étant les termes liés à l'effet de levier.

REMARQUE 4. *On signale que la dynamique du modèle GARCH est imbriquée dans celle du modèle GJR. En effet, lorsque les coefficients liés aux termes de l'effet de levier sont nuls, on retrouve la forme du modèle GARCH standard.*

4.1.2. *Distributions conditionnelles des marginales : Cas de la distribution Skewed-t.* D'autres faits stylisés, en plus de celui du phénomène de l'hétéroscédasticité, sont observés sur les distributions de rendements des actifs financiers. En effet, ces distributions sont reconnues être des distributions leptocurtiques et à queues épaisses engendrant une plus grande probabilité d'occurrence des événements extrêmes. De nombreuses études ont pu vérifier l'incapacité du modèle GARCH standard (utilisant une distribution normale pour modéliser la distribution des innovations standardisées), à tenir compte complètement de ces faits stylisés. En effet, il semble que l'hétéroscadsticité n'explique pas la totalité des caractéristiques des distributions à queues épaisses. Ces observations ont conduit à l'introduction des distributions à queues épaisses pour modéliser les innovations. Ainsi, Nelson (1991) a considéré la distribution des erreurs généralisées, Bollerslev et Wooldridge (1992) ont utilisé la distribution de Student, tandis qu'Engle et Gonzalez-Rivera ont opté pour une modélisation non paramétrique. Finalement, Hansen (1994) a été le premier à développer un modèle GARCH qui permet de tenir compte des quatre premiers moments de la distribution de rendement. En effet, pour la moyenne et la variance conditionnelle, il opte pour un modèle GARCH standard. Pour contrôler les moments d'ordre supérieurs (Kurtosis et Skewness), il construit une nouvelle densité, qui consiste en une généralisation de la distribution de Student, pour laquelle il ajoute un paramètre permettant de contrôler la skewness. La densité de la nouvelle loi, désormais appelée, Skewed-t, est donnée par le résultat suivant :

$Z$  étant une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance égale à l'unité :  $Z \sim ST(\eta, \lambda)$ . Ainsi  $Z$  aura pour densité  $d(z; \eta, \lambda)$ , telle que :

$$d(z; \eta, \lambda) = \begin{cases} bc \left( 1 + \frac{1}{\eta-2} \left( \frac{bz+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-[(\eta+1)/2]} & \text{si } z > -a/b \\ bc \left( 1 + \frac{1}{\eta-2} \left( \frac{bz+a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-[(\eta+1)/2]} & \text{si } z \leq -a/b \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $a \equiv 4\lambda c \frac{\eta-2}{\eta-1}$ ,  $b \equiv 1 + 3\lambda^2 - a^2$ ,  $c \equiv \frac{\Gamma(\frac{\eta+1}{2})}{\sqrt{\pi(\eta-2)\Gamma(\eta/2)}}$ .

Nous signalons aussi que, par sa définition, la distribution Skewed-t englobe un large éventail de densités classiques. En effet, lorsque le paramètre d'asymétrie  $\lambda = 0$ , la distribution Skewed-t se réduit à la distribution de Student symétrique. Si, en plus, le paramètre relatif au degré de liberté  $\eta \rightarrow \infty$ , la distribution se trouve réduite à celle de la loi normale.

Ainsi, pour toutes ces considérations, tout d'abord pour ces capacités à tenir compte des faits stylisés observés sur les distributions de rendements des actifs, ensuite pour ces capacités à englober des densités de probabilités plus classiques à l'instar de la distribution normale ou celle de Student, nous avons choisi de modéliser les distributions marginales des innovations par celle de la distribution Skewed-t. Ceci nous permet d'étudier, par la suite, notre hypothèse centrale relative à l'impact d'une mauvaise spécification de la distribution marginale sur les mesures de risque VaR et ES, surtout lorsque cette dernière ne tient pas compte du caractère asymétrique de ces distributions à l'égard de la distribution normale, que nous prenons pour exemple.

4.1.3. *Choix de la copule et structure finale du modèle de simulation.* La dernière étape aboutissant à l'élaboration de notre modèle de simulation, que nous voulons le plus général possible afin de tenir compte au mieux des caractéristiques statistiques des actifs financiers, consiste à choisir la fonction copule modélisant la structure de dépendance au niveau des innovations. Ce choix découle surtout des conclusions auxquels nous sommes parvenus lors du précédent chapitre. En effet, nous avons pu vérifier l'adéquation de la copule gaussienne et la copule de Student dans la modélisation de la structure de dépendance de portefeuilles financiers "plus" ou "moins" diversifiés. Ces deux copules appartenant à la famille des copules elliptiques, permettent de considérer symétriquement les dépendances de queue positive et négative. Par ailleurs, la copule de Student peut être considérée comme étant une généralisation possible de la copule gaussienne. En effet, justifiant d'un paramètre additionnel " $\nu$ " contrôlant le degré de la dépendance qui se trouve dans les queues, la copule de Student permet de tenir compte d'un large spectre de structures de dépendance symétrique. De plus, plus le paramètre contrôlant le degré de liberté de la copule de Student  $\nu$  tend vers l'infini, plus la copule de student coïncide avec la copule gaussienne. Ainsi, pour toutes ces considérations, nous retenons la copule de Student pour tenir compte de la structure de dépendance des innovations standardisées issues de la spécification GJR-GARCH déjà retenue.

Ainsi, la structure finale de notre modèle de simulation suggère une spécification de type GJR-GARCH pour tenir compte de la dynamique de la

variance conditionnelle, les innovations seront modélisées par des distributions Skewed-t dont la structure de dépendance est donnée à travers une copule de student.

Alors que la majorité des travaux inscrits dans le cadre de la problématique de l'estimation des mesures de risque et de l'optimisation de portefeuilles avec une approche copule restreint le champ d'étude au cas bivarié, nous avons choisi de travailler dans un cadre trivarié afin d'offrir une première tentative de généralisation des résultats obtenus.

Dans ce contexte, notre modèle AR(1)-GJR GARCH(1,1)-Copule trivarié se présente comme suit :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu + AR Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} \eta_t \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec  $h$  une matrice diagonale contenant les variances individuelles décrites par le processus GJR-GARCH suivant :

$$h_{i,t} = \omega_{i,t} + \alpha_{i,t} \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{i,t-1} + \gamma_i \mathbb{I}_{\varepsilon_{t-1} < 0} \varepsilon_{i,t-1}^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

$\eta_{i,t}$  étant les innovations standardisées ayant une moyenne nulle et une variance égale à l'unité. Elles sont supposées distribuées selon des Skewed-t *Skewt* ( $v_i, \lambda_i$ ).

Les paramètres que nous avons choisi pour les différentes moyennes et variances conditionnelles sont résumés dans les vecteurs qui suivent<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0003 \\ 0.0005 \end{bmatrix}, \quad AR = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-6} \\ 2 \cdot 10^{-6} \\ 2 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \\ \alpha &= \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour les distributions marginales des innovations standardisées, nous avons choisi les paramètres suivants :

$$v = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.15 \\ -0.15 \end{bmatrix}$$

Pour la Copule de student  $C_{St(R,\theta)}$  nous avons retenu les paramètres suivants :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \theta = 4$$

**4.2. Mise en place du modèle.** La première étape consiste à simuler les séries de rendements des actifs composant le portefeuille. Ainsi nous simulons les séries des log-rendements journaliers en utilisant la spécification AR(1)-GJR GARCH-Copule trivariée que nous avons spécifiée ci-dessus. Une étude basée sur les simulations nécessite un nombre suffisamment grand de réplifications. Ce dernier a été fixé à  $n\_rep = 1000$  réplifications. La taille de l'échantillon est donnée par  $n\_sample = 2000$ , ce qui représente un

<sup>4</sup>Le choix de ces paramètres est motivé surtout par notre volonté de reproduire les dynamiques types des séries financières (indices boursiers, actions, taux de change..., etc)

TAB. 1. Statistiques descriptives des données simulées

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	2.113 $10^{-4}$	2.938 $10^{-4}$	4.931 $10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0101	0.0101	0.0102
<b>Kurtosis</b>	7.270	9.112	12.289
<b>Skewness</b>	-0.292	-0.363	-0.404

échantillon assez conséquent de données, soit l'équivalent de presque 10 ans d'observations journalières. Ainsi, nous avons à simuler la matrice  $\mathbf{Z}$  qui aura pour dimension  $(n\_sample, n\_assets, n\_rep)$ .  $n\_assets$  étant le nombre d'actifs composant le portefeuille, qui est au nombre de trois ici.

Une fois  $Z$  simulée, l'étape suivante consiste à choisir le modèle à appliquer permettant d'aboutir sur les estimations des mesures de risque VaR et ES. En effet, il s'agit de travailler avec les données disponibles basées sur un échantillon de taille réduite à  $n\_sample - T$ ,  $T = 1$  étant l'horizon d'investissement d'un jour nécessaire pour l'estimation de telles mesures de risque. Ce dernier échantillon servira de base aux différentes estimations faites sur la base du modèle sélectionné. Ceci étant fait, nous simulons les trajectoires de rendements futurs des actifs composant le portefeuille. Par la suite la distribution de rendement du portefeuille est obtenue étant donné le vecteur d'allocation choisi (EW, MV). Le premier (EW), fait référence au portefeuille équipondéré, alors que le deuxième (MV) est issu des recommandations de l'approche moyenne-variance. Le calcul des deux mesures de risque VaR et ES se fait sur la base des formules correspondantes.

Tout ceci, se résume aux étapes énumérées ci-dessous :

- (1) Choisir une spécification GJR-GARCH-Copule permettant de modéliser les dynamiques des actifs composant le portefeuille ;
- (2) Pour chaque actif, estimer les paramètres du modèle GJR-GARCH.
- (3) Ajuster le(s) paramètre(s) de la copule aux innovations standardisées.
- (4) Simuler  $J = 100000$  scénarios à partir de la copule et les inférer par la suite dans le processus de simulation des spécifications GJR-GARCH individuels, sur la base des paramètres obtenus ;
- (5) Calculer les deux mesures de risque VaR et ES pour les différents niveaux de confiance choisis.

**4.3. Résultats des simulations.** Tout d'abord, il faut signaler que lors du paramétrage de notre modèle de simulation, nous avons choisi les mêmes valeurs pour les différents actifs pour la quasi totalité des paramètres du modèle. Les seules différenciations que nous avons apportées concernent les valeurs des moyennes inconditionnelles ainsi que celles relatives au degré de liberté des distribution marginales. Ce choix nous permet de faciliter les comparaisons entre les actifs et de juger l'impact d'une telle modélisation sur leurs caractéristiques statistiques. Ainsi, d'après les statistiques descriptives des rendements simulés, énumérés dans le tableau précédent,

on retrouve les valeurs des moyennes inconditionnelles assignées aux différents actifs. Ceci montre que la dynamique des rendements des actifs, même en étant gouvernées par des spécification de variances conditionnelles asymétriques, converge toujours vers une valeur centrale, celle de la moyenne inconditionnelle. On remarque ensuite que le modèle de simulation débouche sur des actifs ayant le même profil de risque lorsque ce dernier est mesuré par l'écart-type. Toutefois, ces actifs semblent se différencier par leurs moments d'ordre supérieurs. En effet, par comparaison avec les deux autres actifs, l'actif 3 étant celui qui a le kurtosis le plus élevé (Kurtosis = 12.289) ainsi que la plus grande asymétrie négative (Skewness = -0.404). Ce dernier est aussi celui ayant le plus faible degré de liberté au niveau de la distribution marginale conditionnelle. On remarque aussi, que plus ce paramètre lié au degré de liberté augmente, moins grand est le kurtosis et aussi l'asymétrie négative. On mentionne ainsi, l'impact de ce paramètre sur la Skewness et le kurtosis, et surtout la capacité de la distribution Skewed-t à en tenir compte des moments d'ordre supérieurs. Ceci montre déjà l'importance du choix des distributions marginales conditionnelles pour tenir compte des toutes les caractéristiques statistiques des actifs financiers.

4.3.1. *Statistiques descriptives.* Le résultat suivant que nous présentons ici concerne les statistiques descriptives des différents actifs, issus des différents modèles de simulation. Ceci aura pour but de pouvoir comparer l'impact d'une mauvaise spécification du modèle sur les quatre premiers moments des distributions des différents actifs composant le portefeuille. A ce niveau, nous mentionnons que nous étudions deux types de mauvaise spécification sur notre modèle GJR-GARCH-Copule de départ. Il s'agit soit d'une mauvaise spécification de la copule, où il s'agit d'utiliser alternativement une copule gaussienne, une copule de Clayton ou aussi une copule de Gumbel, à la place de la vraie copule de Student. Il peut s'agir aussi d'une mauvaise spécification des marginales, où nous utilisons des marginales gaussiennes à la place des vraies marginales Skewed-T. Ainsi, il s'agit de comparer toutes ces alternatives par rapport au vrai "Data Generating Process".

D'après les résultats qui figurent dans les tableaux (2, 3, 4, 5 et 6) qui suivent, nous pouvons noter que l'ensemble des modèles utilisés, même pour celui du vrai modèle, débouchent sur une légère surestimation de la moyenne de rendements, tout en permettant de capter l'écart-type observé sur les données simulées. Notons aussi que les modèles supposant une mauvaise spécification de la copule entraînent une sous-estimation du kurtosis, tandis que le modèle supposant une mauvaise spécification des marginales débouche sur une sous-estimation importante à la fois du kurtosis et de la skewness des distributions de rendements des différents actifs. Ceci illustre qu'une mauvaise spécification des marginales peut avoir des grandes conséquences sur les rendements simulés des actifs, suite à d'importantes sous-estimations des moments d'ordres supérieurs.

TAB. 2. Statistiques descriptives : Vrai modèle

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	$3.104 \cdot 10^{-4}$	$3.539 \cdot 10^{-4}$	$4.911 \cdot 10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0091	0.0093	0.0089
<b>Kurtosis</b>	4.427	4.9347	8.506
<b>Skewness</b>	-0.307	-0.346	-0.460

TAB. 3. Statistiques descriptives : Copule Gaussienne

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	$3.102 \cdot 10^{-4}$	$3.492 \cdot 10^{-4}$	$4.835 \cdot 10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0091	0.0093	0.0089
<b>Kurtosis</b>	4.437	4.950	6.690
<b>Skewness</b>	-0.310	-0.339	-0.424

TAB. 4. Statistiques descriptives : Copule de Clayton

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	$3.094 \cdot 10^{-4}$	$3.517 \cdot 10^{-4}$	$4.858 \cdot 10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0091	0.0093	0.0089
<b>Kurtosis</b>	4.418	5.014	6.673
<b>Skewness</b>	-0.305	-0.349	-0.416

TAB. 5. Statistiques descriptives : Copule de Gumbel

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	$3.057 \cdot 10^{-4}$	$3.529 \cdot 10^{-4}$	$4.820 \cdot 10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0091	0.0093	0.0089
<b>Kurtosis</b>	4.449	5.175	7.516
<b>Skewness</b>	-0.304	-0.345	-0.433

TAB. 6. Statistiques descriptives : Marginales gaussiennes

	<b>Actif 1</b>	<b>Actif 2</b>	<b>Actif 3</b>
<b>Moyenne</b>	$2.207 \cdot 10^{-4}$	$3.051 \cdot 10^{-4}$	$5.044 \cdot 10^{-4}$
<b>Ecart-type</b>	0.0091	0.0092	0.0089
<b>Kurtosis</b>	2.999	2.995	2.998
<b>Skewness</b>	0.0012	0.0015	-0.0002

4.3.2. *VaR et ES.* Nous présentons et interprétons ici les résultats des estimations des mesures de risque considérées, VaR et ES. Pour ces calculs nous avons considéré différents niveaux de confiance allant de 0.75 à 0.995. Ceci nous permet de comparer le comportement des différents modèles pour chacun de ces seuils.

Dans les tableaux 7 et 8, nous avons reporté les pourcentages des exceptions des différents modèles pour les différents seuils spécifiés. Ceci est équivalent, pour chaque niveau de confiance, à la proportion des pertes en dépassement de la mesure VaR donnée par le modèle en considération. D'après ces résultats, il semble que pour de faibles niveaux de confiance, 75% et 90%, le modèle supposant une mauvaise spécification au niveau des marginales, utilisant ainsi des marges gaussiennes, performe aussi bien que les autres modèles. Toutefois, pour des niveaux de confiance plus élevés, ce modèle échoue face au "vrai modèle" et face aussi aux modèles supposant une mauvaise spécification de la copule, sauf pour le cas du modèle utilisant la copule de Gumbel qui semble être le modèle le moins performant. Ce constat est le même pour les deux configurations de portefeuilles considérées (EW) et (MV). Ainsi, on peut dire que la copule de Gumbel, par sa nature d'être une copule archimédienne, ne considérant que la dépendance de queue positive, ne permet pas de tenir compte des événements extrêmes se produisant dans le quadrant inférieur, et aboutit ainsi à des mesures VaR qui sous-estiment largement les pertes réalisées.

D'un autre côté, nous signalons les performances du modèle utilisant la copule de Clayton. En effet, ce dernier modèle est celui qui présente les proportions d'exceptions les plus faibles, surtout pour les niveaux de confiance élevés 95%, 99% et 99.5%. Ainsi, ce modèle performe mieux que le "vrai modèle". Ce dernier, ne donnant une proportion d'exceptions qui soit conforme avec le niveau de confiance en considération que pour celui le plus élevé fixé à 99.5%. Ceci est toujours vrai pour les deux compositions de portefeuille étudiées.

L'analyse suivante que nous avons menée concerne les variations relatives des mesures VaR et ES moyennes issues des modèles alternatifs par rapport à celles obtenues par le biais du "vrai-modèle". Les résultats figurent dans les tableaux 9 à 12. Les résultats les plus importants de cette analyse sont au nombre de deux. Premièrement, on vérifie que l'impact d'une mauvaise spécification du modèle impacte plus la mesure de risque ES que celle de la VaR. A titre d'exemple, pour le portefeuille équi pondéré "EW", nous mentionnons que le modèle utilisant la copule gaussienne sous-estime la mesure VaR 99% de l'ordre de 4.29%. Le même modèle sous-estime la mesure ES 99% de l'ordre de 7.84%. On peut noter aussi, pour le même portefeuille,

que le modèle utilisant la copule de Clayton sur-estime la mesure VaR 99% de l'ordre de 6.93%. Le même modèle sur-estime la mesure de risque ES de l'ordre de 7.38%. Ce dernier résultat explique en partie les performances du modèle utilisant la copule de Clayton par rapport au "vrai modèle". Le deuxième résultat qui découle de cette analyse suggère que l'impact d'une mauvaise spécification au niveau du modèle copule serait moins important lorsqu'on se positionne sur le portefeuille moyenne-variance "MV". Ce même portefeuille, conçu pour minimiser le risque du portefeuille, mesuré par son écart-type, minimise aussi bien les mesures VaR et ES obtenues. Cependant, toujours pour le même portefeuille (MV), une mauvaise spécification des marginales aurait plus d'impact sur les mesures VaR et ES que celui obtenu sur le portefeuille équilibré (EW).

TAB. 7. Pourcentages des exceptions sur la VaR : Cas EW

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	26.1	11.1	5.8	1.2	<b>0.3</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	24.5	10.5	5.8	1.3	0.7
Copule de Clayton	27.6	10.7	<b>5.6</b>	<b>0.9</b>	<b>0.3</b>
Copule de Gumbel	24.2	11.3	6.8	2.4	1.2
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	<b>23.2</b>	<b>10.1</b>	5.9	2.0	1.2

TAB. 8. Pourcentages des exceptions sur la VaR : Cas MV

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	25.9	11.1	5.7	1.1	0.3
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	25.3	10.9	5.6	1.1	0.8
Copule de Clayton	27.1	10.9	<b>5.2</b>	<b>0.8</b>	<b>0.2</b>
Copule de Gumbel	25.1	11.5	6.3	2.1	0.9
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	<b>23.7</b>	<b>10.3</b>	5.6	1.8	1.1

4.3.3. *Conclusions de la partie simulation.* -) Le modèle combinant la copule de Clayton aux vraies spécifications marginales semble être le plus performant parmi tous les modèles candidats. Il dépasse ainsi les performances du "vrai modèle" de simulation. Ce dernier ne semble en adéquation avec les proportions d'exceptions exigées par le niveau de confiance considéré que pour le seuil extrême de 99.5%.

-) Une mauvaise spécification du modèle a plus d'impact sur la mesure de risque ES que pour celle de la VaR.

-) La composition du portefeuille engendre des comportements différents sur l'impact de l'une ou l'autre des composantes du modèle. En effet, en se positionnant sur le portefeuille "MV", une mauvaise spécification de la



copule aura moins d'impact sur les mesures de risque VaR et ES, que celui obtenu sur le portefeuille "EW". Toutefois, une mauvaise spécification des marginales est plus conséquente.

Nous allons essayer de vérifier la validité de toutes ces conclusions dans le cadre de l'illustration empirique qui suit.

TAB. 9. VaR moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas EW

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0086</b>	<b>0,0119</b>	<b>0,0197</b>	<b>0,0233</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	6.12	3.12	0.8	-4.29	-6.36
Copule de Clayton	-9.43	1.33	4.26	6.93	7.47
Copule de Gumbel	7.61	-1.93	-6.17	-13.67	-16.35
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	14.61	4.00	-1.06	-11.44	-15.63

TAB. 10. VaR moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas MV

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0038</b>	<b>0,0084</b>	<b>0,0117</b>	<b>0,0193</b>	<b>0,0228</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	5.30	2.69	0.72	-3.88	-5.63
Copule de Clayton	-8.06	1.27	3.76	5.83	6.37
Copule de Gumbel	6.48	-1.54	-5.10	-11.50	-13.77
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	15.14	4.09	-1.14	-11.82	-16.01

TAB. 11. ES moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas EW

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0.0089</b>	<b>0.0134</b>	<b>0.0168</b>	<b>0.0252</b>	<b>0.0291</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	1.06	-1.29	-3.28	-7.84	-9.75
Copule de Clayton	1.81	4.91	6.12	7.38	7.53
Copule de Gumbel	-4.62	-9.05	-12.07	-18.14	-20.48
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	0.2	-5.34	-9.46	-18.8	-22.75

TAB. 12. ES moyenne et pourcentages des variations par rapport au "Vrai modèle" : Cas MV

	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0.0088</b>	<b>0.0132</b>	<b>0.0165</b>	<b>0.0246</b>	<b>0.0284</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	0.86	-1.14	-2.86	-6.85	-8.47
Copule de Clayton	1.61	4.28	5.31	6.35	6.51
Copule de Gumbel	-3.83	-7.54	-10.09	-15.29	-17.29
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales gaussiennes	0.21	-5.46	-9.65	-19.11	-23.06

## 5. Illustration empirique

L'objectif principal de ce chapitre est de vérifier l'impact d'une mauvaise spécification d'une modélisation de type GARCH-Copules sur les mesures de risque les plus utilisées, à savoir la Value-at-Risk et l'Expected Shortfall. Nous visons à tester la validité d'une telle modélisation dynamique par comparaison à d'autres modèles plus traditionnels, à l'égard du modèle RiskMetrics ou aussi celui faisant référence à la méthode de simulation historique. Nous consacrons ainsi cette section à l'illustration empirique de toutes ces considérations et vérifier ainsi les conclusions tirées lors de l'étude de simulation. Les résultats empiriques s'enchaîneront comme suit. Nous commençons par une analyse statistique des données utilisées. Nous détaillons ensuite les résultats des estimations obtenues avec les différents modèles ainsi que toute la procédure de backtesting permettant de tester la validité statistique et économique des modèles.

**5.1. Description des données.** Nous appliquons notre méthodologie sur un portefeuille composé de 3 des indices boursiers mondiaux majeurs, à savoir, le CAC 40, le DAX 30 et le FTSE 100. Notre échantillon d'analyse comprend 2001 observations concernant les prix de clôture d'indices, et s'étend sur la période du 16/08/2006 au 30/06/2014, permettant ainsi de couvrir la récente crise des "Subprime", et de vérifier surtout les capacités de la modélisation proposée à tenir compte d'un tel contexte de crise

Nous nous intéressons aux rendements réalisés des indices, que nous définissons comme suit :

$$r_{i,t} = \log \left( \frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right) \quad t = 2, \dots, T ; i = 1, \dots, 3 \quad (5.1)$$

$S_{i,t}$  étant la valeur de l'indice "i" à l'instant "t". Les séries de rendements, ainsi que l'évolution relative des différents indices sont présentées dans la figure 1. Dans cette figure on peut distinguer facilement le fait stylisé très marquant relatif au regroupement de volatilité ou aussi "volatility clustering", observé surtout en temps de crise pour l'ensemble des indices. L'évolution relative illustre la croissance rapide de l'indice DAX 30, qui a repris plus rapidement les pertes subies pendant la période de crise.

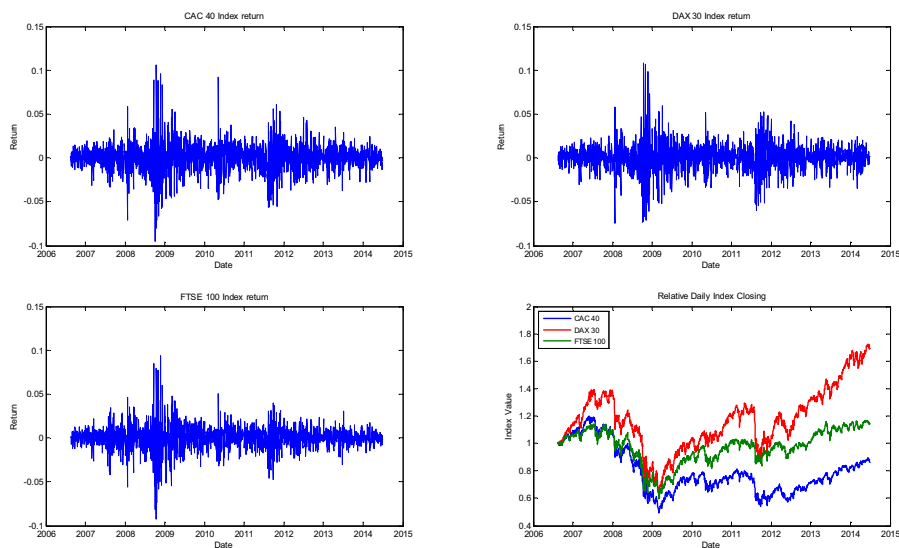


FIG. 1. Séries de rendements et évolution relative

Le tableau 13 fournit un résumé des statistiques descriptives des séries des log-rendements des indices. On mentionne surtout le résultat donné par la statistique de Jarque-Bera. Cette dernière confirme le rejet de l'hypothèse de normalité de la distribution de rendements pour l'ensemble des indices.

TAB. 13. Statistiques descriptives des indices

	CAC 40	DAX 30	FTSE 100
<b>Moyenne</b>	-0.0001	0.0002	$6.10^{-05}$
<b>Mediane</b>	0.0002	0.0008	0.0002
<b>Min</b>	-0.0947	-0.0743	-0.0926
<b>Max</b>	0.1059	0.1079	0.0938
<b>Ecart-type</b>	0.0156	0.0148	0.0131
<b>Skewness</b>	0.0806	0.0558	-0.1224
<b>Kurtosis</b>	9.0567	9.5716	10.6065
<b>JB Test</b>	3059.2	3599.9	4826.6

**5.2. Distributions marginales conditionnelles.** Dans cette section, nous présentons les résultats des estimations, par maximum de vraisemblance, des paramètres des différentes spécifications AR(1)-GJR GARCH(1,1) retenues. En effet, on vise à sélectionner la meilleure spécification à utiliser pour modéliser la dynamique des séries de rendement. Ainsi, il s'agit de choisir entre une spécification supposant des marginales de type Skewed-t, que l'on note GJR-GARCH-SkT, ou une spécification supposant des marginales gaussiennes, que l'on note GJR-GARCH-N. A ce niveau, nous mentionnons que nous divisons notre échantillon d'observations en deux sous-échantillons. Un premier échantillon de taille  $T_1 = 1000$ , servant en tant que fenêtre mobile pour effectuer les estimations des paramètres "in-the-sample". Le

deuxième échantillon de taille identique  $T_2 = 1000$ , est ainsi considéré pour réaliser toute la procédure de backtesting.

Le seul résultat que nous présentons ici, à titre d'illustration, concene uniquement les estimations faites sur la base du premier échantillon "in-the-sample", couvrant la période allant de  $t = 1$  à  $t = 1000$ . Les autres estimations sont omises du fait que le processus d'estimation est conduit d'une manière dynamique sur toute la période de test. En général, tous les résultats indiquent une légère prééminence de la spécification GJR-GARCH-N supposant des marginales gaussiennes (86.1% pour le CAC 40, 75.55% pour le DAX, 59.2% pour le FTSE)<sup>5</sup>. Ainsi, nous considérons cette dernière spécification comme étant le "vrai modèle" pour modéliser la dynamique des marginales.

TAB. 14. Résultats de l'estimation des paramètres : Spécification GJR-GARCH-N

	CAC 40	DAX 30	FTSE 100
$\mu$	$-8.764 \cdot 10^{-5}$	$3.265 \cdot 10^{-4}$	$8.284 \cdot 10^{-5}$
$\phi$	-0.0552	-0.0175	-0.333
$\omega$	0	0	0
$\alpha$	0	0	0
$\beta$	0.8769	0.8891	0.8964
$\gamma$	0.2164	0.1855	0.1815
<b>AIC</b>	-5688.5	-5785.0	-5936.1

TAB. 15. Résultats de l'estimation des paramètres : Spécification GJR-GARCH-SkT

	CAC 40	DAX 30	FTSE 100
$\mu$	-0.0001	0.0009	0.0001
$\phi$	-0.0685	-0.0281	-0.0459
$\omega$	0	0	0
$\alpha$	0.0025	0.05	0.004
$\beta$	0.8963	0.8398	0.9089
$\gamma$	0.1843	0.2	0.1548
$\nu$	17.01	8	16.51
$\lambda$	-0.1393	-0.09	-0.1607
<b>AIC</b>	-5688	-5802.2	-5940.5

**5.3. Modélisation de la structure de dépendance.** Etant donné le choix fait sur les distributions conditionnelles des marginales, nous présentons dans cette section les résultats relatifs aux estimations et au choix de la meilleure copule ayant décrit au mieux la structure de dépendance présente entre les innovations standardisées. Ce choix sera fait sur la base de la statistique de Cramer-Von Mises " $S_n$ " tel que spécifiée dans le chapitre précédent.

<sup>5</sup>Sur la base de la mesure AIC

Nous choisissons ainsi la meilleure copule parmi quatre modèles candidats, à savoir la copule Gaussienne, la copule de Student, la copule de Clayton, et la copule de Gumbel. Nous effectuons ce choix pour dix sous-échantillons (sub-sample) différents de taille respective  $T_{ss} = 100$ . En effet, nous supposons que le(s) paramètre(s) de la copule reste statique tout au long de la fenêtre du sous-échantillon. Nous actualisons les estimations des paramètres pour chaque nouveau sous-échantillon que nous gardons stables pour toute la période que couvre le sous-échantillon. Les résultats de ces estimations sont reportés dans le tableau 16. Ces résultats sont en faveur du choix de la copule de Student comme meilleure copule, sur l'ensemble de la période de test.

Ainsi, le "vrai modèle" semble se construire autour d'une spécification GJR-GARCH avec des marginales gaussienne et une copule de Student pour la structure de dépendance.

**5.4. Résultats des estimations.** Les estimations des mesures de risque VaR et ES pour l'horizon d'investissement journalier, au niveau de confiance de 95% sont illustrées dans la figure 2. Les autres résultats pour les niveaux de confiance sont comparés aux pertes observées et sont enregistrés pour être utilisés dans le cadre de la procédure de backtesting. Dans cette figure, nous avons illustré une comparaison des estimations VaR et ES obtenues en utilisant l'approche GARCH-Copule dynamique et celles obtenues en utilisant les modèles traditionnels (EWMA, Simulation Historique). Nous pouvons constater l'efficacité de l'aspect dynamique introduit au travers l'approche GARCH-Copule. En effet, les trajectoires obtenues sont loin des valeurs statiques obtenues par la méthode de Simulation Historique. Cette dernière méthode manque de réactivité et se trouve affectée par un réel inconvénient se manifestant surtout lorsque des rendements négatifs élevés restent bloqués dans la fenêtre mobile pour plusieurs sous-échantillons consécutifs. D'un autre côté, les résultats illustrés dans cette figure ne permettent pas distinguer de grandes différences entre l'ensemble des spécifications GJR-GARCH-Copule étudiées. Nous allons essayer de distinguer la validité de ces modèles dans la suite, grâce à la procédure de backtesting.

TAB. 16. Estimation des paramètres des fonctions Copules et Gof test

		Parameter	$S_n$	$LLF$
<b>Sub-sample 1</b>	Gaussian copula	.	0.025	2019.596
	Student copula	7.41	<b>0.019</b>	<b>2066.551</b>
	Clayton copula	3.56	1.384	1648.465
	Gumbel copula	3.32	0.395	1763.064
<b>Sub-sampel 2</b>	Gaussian copula	.	0.020	2064.596
	Student copula	6.96	<b>0.015</b>	<b>2118.362</b>
	Clayton copula	3.65	1.422	1681.667
	Gumbel copula	3.45	0.333	1838.527
<b>Sub-sampel 3</b>	Gaussian copula	.	0.021	1985.603
	Student copula	6.19	<b>0.014</b>	<b>2048.63</b>
	Clayton copula	3.44	1.483	1604.869
	Gumbel copula	3.36	0.308	1785.677
<b>Sub-sampel 4</b>	Gaussian copula	.	0.025	1993.251
	Student copula	5.78	<b>0.017</b>	<b>2062.139</b>
	Clayton copula	3.47	1.416	1612.591
	Gumbel copula	3.35	0.321	1787.208
<b>Sub-sampel 5</b>	Gaussian copula	.	0.023	1996.667
	Student copula	6.65	<b>0.017</b>	<b>2050.61</b>
	Clayton copula	3.36	1.564	1571.892
	Gumbel copula	3.36	0.291	1796.084
<b>Sub-sampel 6</b>	Gaussian copula	.	0.238	1976.306
	Student copula	6.23	<b>0.016</b>	<b>2036.314</b>
	Clayton copula	3.33	1.574	1567.403
	Gumbel copula	3.34	0.284	1778.371
<b>Sub-sampel 7</b>	Gaussian copula	.	0.216	1966.132
	Student copula	7.44	<b>0.015</b>	<b>2005.123</b>
	Clayton copula	3.19	1.736	1519.598
	Gumbel copula	3.30	0.252	1762.75
<b>Sub-sampel 8</b>	Gaussian copula	.	0.018	1779.323
	Student copula	8.90	<b>0.015</b>	<b>1804.292</b>
	Clayton copula	3.03	1.508	1398.311
	Gumbel copula	3.19	0.266	1609.139
<b>Sub-sampel 9</b>	Gaussian copula	.	0.018	1779.323
	Student copula	8.43	<b>0.015</b>	<b>1804.292</b>
	Clayton copula	2.86	1.508	1398.311
	Gumbel copula	3.03	0.266	1609.139
<b>Sub-sampel 10</b>	Gaussian copula	.	0.016	1680.872
	Student copula	8, 21	<b>0.131</b>	<b>1704.038</b>
	Clayton copula	2.62	1.657	1294.033
	Gumbel copula	2.86	0.269	1503.926

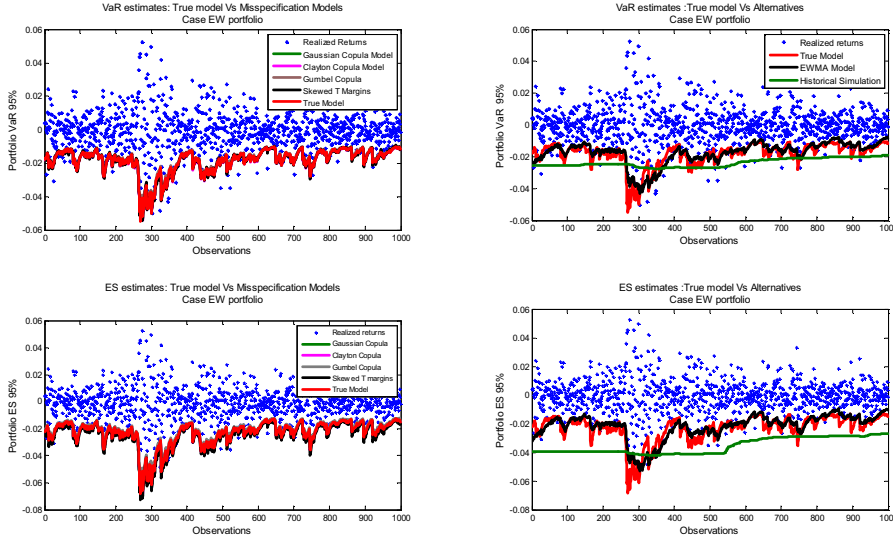


FIG. 2. Estimation de la VaR et de l' ES

**5.5. Backtesting.** Dans cette section, nous décrivons toute la procédure de backtesting conçue pour étudier la validité statistique et économique des modèles étudiés. L'objectif principal est de vérifier l'hypothèse suggérant qu'en optant pour le "vrai modèle" GARCH-Copule, on aboutit souvent aux meilleures performances quant aux estimations des mesures de risque VaR et ES.

5.5.1. *Taux d'exception.* La première procédure classique consiste à calculer le nombre d'exceptions là où la perte effective du portefeuille dépasse l'estimation faite sur la VaR, pour le niveau de confiance choisi. Nous exprimons ce nombre en pourcentage et nous le comparons avec le niveau de confiance. Le «meilleur» modèle devrait maintenir la proportion d'exceptions au plus près du niveau du seuil de confiance choisi.

5.5.2. *Couverture non conditionnelle.* Cette procédure fait référence au test de Kupiec. Ce test est basé sur la théorie binomiale et permet de répondre à la question si le taux d'exceptions  $N/T$  est statistiquement et significativement différent du niveau de probabilité  $p$ . Selon la théorie binomiale, l'hypothèse nulle peut être formellement testée par la statistique du rapport du log-vraisemblance (Jorion 2006, p.147)

$$LR_{UC} = -2 \ln \left[ (1-p)^{(T-N)} (p)^N \right] + 2 \ln \left[ \left( 1 - \frac{N}{T} \right)^{(T-N)} \left( \frac{N}{T} \right)^N \right] \quad (5.2)$$

$p$  étant le seuil de violation cible (e.g.  $p = 0.01$  pour une VaR à 99%),  $N$  le nombre d'exceptions et  $T$  est le nombre total d'observations de la période de test.

Sous  $H_0$ , la statistique  $LR_{UC}$  est asymptotiquement distribuée selon une loi de  $\chi^2(1)$ . Ce test peut rejeter des modèles avec à la fois des taux d'exceptions faibles ou élevés. Un des inconvénients du test de Kupiec est qu'il ne soit pas défini pour des modèles ayant un taux d'exception nul. Aussi un autre test de couverture inconditionnelle asymptotique, équivalent



à celui de Kupiec (1995) est donné dans Jorion (2006, p 144). Ce test repose sur la statistique  $z_{UC}$  donnée par la relation suivante :

$$z_{UC} = (N - pT) / \sqrt{p(1-p)T} \quad (5.3)$$

Sous  $H_0$ , la statistique  $z_{UC}$  est asymptotiquement distribuée selon une loi normale standard.

5.5.3. *Couverture conditionnelle.* Une des limites des tests de couverture inconditionnelle est qu'ils ignorent les possibles regroupements des exceptions, là où des multiples pertes se succèdent sans pour autant être captées par le modèle VaR. Ainsi, une nouvelle procédure basée sur le test de Christoffersen (1998), permet de tester l'hypothèse conjointe de couverture conditionnelle et d'indépendance des exceptions. La statistique du test est donnée par le résultat suivant :

$$LR_{CC} = -2 \ln \left[ (1-p)^{(T-N)} (p)^N \right] + 2 \ln \left[ (1-\pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1-\pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \right] \quad (5.4)$$

avec  $n_{ij}$  étant le nombre d'observations ayant reçu la valeur  $i$ , et qui est suivi par l'observation ayant reçu la valeur  $j$  ( $i, j = 0, 1$ ). 0 supposant qu'il n'ait pas eu d'exceptions, 1 est équivalent à la réalisation d'une exception.

$\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$  sont les probabilités correspondantes. Sous  $H_0$ , ce test est distribué asymptotiquement selon une loi du  $\chi^2(2)$ .

5.5.4. *Fonctions de Pertes : "Loss Functions".* Cette procédure est largement inspirée du cadre réglementaire proposé par le Comité de Bâle sur le contrôle de l'activité bancaire (1996), prenant en compte essentiellement l'ordre de grandeur des exceptions. Cette procédure peut être accomplie en utilisant des fonctions de pertes telles que introduites pour la première fois par Lopez (1998).

La forme générale des "fonctions de pertes" est donnée par le résultat suivant :

$$C_{t+1} = \begin{cases} f(L_{t+1}, VaR_t) & \text{si } L_{t+1} \geq VaR_t \\ g(L_{t+1}, VaR_t) & \text{si } L_{t+1} \leq VaR_t \end{cases} \quad (5.5)$$

$f(x, y)$  et  $g(x, y)$  sont deux fonctions arbitraires telles que  $f(x, y) \geq g(x, y)$  pour  $x$  et  $y$  donnés.

Il s'ensuit qu'on préfère des faibles valeurs pour la fonction de perte  $C_{t+1}$ , vu que l'on affecte des scores plus élevés pour les exceptions que pour les non-exceptions. Ainsi, des scores numériques sont attribués pour les estimations VaR ponctuelles, et le score final pour l'ensemble de la période de test est obtenu par

$$C = \sum_{i=1}^n C_{t+1,i} \quad (5.6)$$

Finalement, le modèle VaR le plus fiable est celui permettant de minimiser le score de la fonction de pertes.

De nombreuses fonctions de pertes peuvent être envisagées<sup>6</sup>. La première que nous considérons ici est celle proposée par Blanco et Ihle (1998). Selon cette fonction, l'intérêt est porté vers la variation relative des exceptions qui est donnée par la formule suivante :

$$C_{t+1} = \begin{cases} \frac{L_{t+1} - VaR_t}{VaR_t} & \text{si } L_{t+1} \geq VaR_t \\ 0 & \text{si } L_{t+1} \leq VaR_t \end{cases} \quad (5.7)$$

Pour la deuxième fonction, nous considérons la mesure proposée par Caporin (2003). En effet, on peut penser que le meilleur modèle doit tenir compte à la fois des sous-estimations et des sur-estimations de la VaR. Cela peut avoir des conséquences pour les institutions financières sur la manière de gérer leurs exigences en fonds propres. Cette mesure est exprimée comme suit :

$$f(L_{t+1}, VaR_t) = \left| 1 - \left| \frac{L_{t+1}}{VaR_t} \right| \right| \quad (5.8)$$

Finalement, et dans la même logique, nous calculons le "Market Risk Charge" (MRC) caractérisant les exigences en capital que doivent allouer les institutions financières pour faire face au risque de marché qu'elles subissent sur les positions risquées en cours. Ces exigences découlent directement de la réglementation issue de l'accord de la comité de Bâle sur la supervision de l'activité bancaire (1996), et sont données par la formule suivante :

$$MRC_t = \max \left( k\sqrt{10} \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} (99\%, 1 \text{ jours}), \sqrt{10} VaR_{t-i} (99\%, 1 \text{ jours}) \right) \quad (5.9)$$

$k$  étant un coefficient multiplicatif fixé par les régulateurs. Il dépend du nombre des exceptions enregistrées durant les 250 derniers jours, soit la dernière année.

Ainsi, une mise en place cohérente de la procédure de backtesting se fait dans l'ordre suivant. Nous utilisons tout d'abord le taux d'exception, le test de Kupiec, celui de Jorion ainsi que celui de Christoffersen afin de tester la validité statistique des différents modèles. Ensuite nous appliquons les fonctions des pertes ainsi que la mesure du capital réglementaire (MRC) afin de tester leur validité économique.

Les Tableaux 17 à 20 récapitulent les résultats de la procédure de la validation statistique des modèles utilisés. D'après ces résultats, nous vérifions que l'ensemble des test statistiques rejettent fortement la validité du modèle EWMA ainsi que celui utilisant la méthode de Simulation Historique (HS). En effet, les deux modèles développent des taux d'exceptions qui sont loin des niveaux de confiance considérés. Ainsi, quoique la méthode de Simulation Historique procure les taux d'exceptions les plus faibles, elle ne parvient pas

---

<sup>6</sup>Il est à noter que la première procédure illustrée ci-dessus, relative au nombre des exceptions, peut être assimilée à une fonction de perte implicite à la méthode binomiale, qui mesure le nombre d'exceptions selon :

$$C_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{t+1} \geq VaR_t \\ 0 & \text{si } L_{t+1} \leq VaR_t \end{cases}$$

à valider les tests d'indépendance et de couverture conditionnelle. Ce constat est vrai pour les deux configurations de portefeuille étudiées (EW et MV). Ainsi, nous n'incluons pas ces deux méthodes pour la suite des procédures visant à tester la validité économique des modèles.

Les résultats trouvés montrent aussi que pour le reste des modèles, les deux configurations de portefeuille considérées, EW et MV, procurent les mêmes taux d'exceptions. Ainsi, les différents modèles parviennent à valider l'ensemble des tests statistiques, bien que les taux d'exceptions semblent être légèrement supérieurs au niveau de confiance retenu, surtout pour le niveau de 99%.

D'un autre côté, on distingue la surperformance du modèle GJR-GARCH copule avec des marges Skewed-t, supposant ainsi une mauvaise spécification au niveau des marginales, par rapport au "vrai modèle". En effet, il procure un taux d'exceptions largement inférieur à celui que donne le vrai modèle (0,5% contre 1,2% sur le portefeuille "EW" pour le niveau de confiance de 99%, et 0,6% contre 1,3% sur le portefeuille "MV" pour le même niveau de confiance). Ainsi, on pense qu'un modèle GJR-GARCH copule avec des marges Skewed-t est capable de tenir compte des caractéristiques statistiques des données financières, surtout en ce qui concerne leurs caractères asymétriques ainsi que l'éventuelle dépendance pour les quantiles extrêmes. Nous estimons ainsi que cette surperformance est due essentiellement à une surestimation de la mesure de risque VaR. Cette surestimation permet de tenir compte des pertes extrêmes qui ont échappées aux autres modèles. Nous revenons sur ce point plus loin dans notre analyse.

Les tableaux 21 à 24 récapitulent les résultats de la procédure de back-testing basée sur les fonctions de pertes. Selon la mesure Blanco & Ihle, le modèle supposant une mauvaise spécification des marginales, utilisant ainsi des marginales Skewed-t, donne toujours les meilleurs résultats surtout pour les niveaux de confiance les plus extrêmes. En effet, comme le montrent les tableaux 25 et 27, ce modèle surestime la mesure de risque VaR de l'ordre de 10% à 17% respectivement pour les portefeuilles "EW" et "MV". Ainsi, cette surestimation minimise le nombre d'exceptions et minimise aussi la variation relative des pertes en dépassement de la VaR.

Cependant en considérant la fonction de perte de Caporin, nous vérifions que le modèle GJR-GARCH-Copule avec des marginales Skewed-t donne les mesures les plus élevées, ce qui montre que ce modèle surestime les pertes même lorsque les pertes effectives sont en dessous de la limite de la VaR. Ce résultat laisse anticiper de lourdes exigences en capital calculées sur la base de ce dernier modèle. Nous vérifions ce constat à travers la figure 3, dans laquelle nous examinons la surestimation des exigences en capital procurées par le modèle supposant une mauvaise spécification des marginales par comparaison aux autres modèles supposant une mauvaise spécification de la copule. Cette surestimation est plus prononcée sur le portefeuille construit sur la base des recommandations de l'approche moyenne-variance (MV) que celui composé en équipondéré (EW). On pense ainsi, d'un point de vue économique, que cette surestimation serait probablement pénalisante pour l'adoption d'un tel modèle comme modèle de mesure de risque, surtout en temps de crise là où les institutions financières auront le plus besoin de liquidité.

Ainsi, on peut distinguer la validité de l'utilisation d'un tel modèle GJR-GARCH, utilisant à la fois les vraies marginales et la vraie copule ayant décrit leur structure de dépendance. Ce modèle présente un bon compromis entre la validité statistique, liée au nombre d'exceptions, et la validité économique permettant de minimiser les exigences en capital. Toutefois, nous mentionnons que les modèles supposant une mauvaise spécification de la copule, à l'image du modèle utilisant la copule de Clayton ou celui utilisant la copule Gaussienne, procurent des résultats similaires.

Finalement, nous analysons les résultats liés à l'étude des variations relative des deux mesures de risque VaR et ES obtenues par le "vrai modèle" par rapport à ceux obtenus par les modèles alternatifs. Nous concluons sur deux points importants. Premièrement, nous pouvons vérifier que l'impact d'une mauvaise spécification du modèle impacte plus la mesure de risque ES que celle de la VaR. Sur ce point, nous mentionnons, qu'une mauvaise spécification des marginales a plus d'impact que celle induite par une mauvaise spécification de la copule (une surestimation de l'ES de l'ordre de 17,29% pour le modèle supposant une mauvaise spécification des marginales, contre une sous-estimation de 6,36% pour le modèle supposant une mauvaise spécification de la copule (ici la copule de Gumbel)). Le deuxième point important suggère qu'il est possible de minimiser l'impact d'une mauvaise spécification de la copule si on se positionne sur le portefeuille moyenne-variance (MV). Toutefois, ce même portefeuille augmente le risque d'une mauvaise spécification des marginales. Ces derniers résultats semblent confirmer les résultats de l'étude de simulation.

TAB. 17. Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.95 ; portefeuille EW

		<b>95%_EW</b>			
		<b>N/T</b>	<b>LR<sub>UC</sub></b>	<b>z<sub>UC</sub></b>	<b>LR<sub>CC</sub></b>
<b>Vrai modèle</b>		0,046	0,337	-0,573	0,344
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne		0,048	0,081	-0,283	0,127
Copule de Clayton		0,045	0,533	-0,719	0,534
Copule de Gumbel		0,049	0,019	-0,138	0,097
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t		0,046	0,337	-0,573	0,345
<b>EWMA</b>		<b>0,053</b>	0,192	0,443	0,207
<b>Historical Simulation</b>		0,021	<b>22,381</b>	<b>-4,203</b>	<b>29,445</b>

TAB. 18. Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.99 ; portefeuille EW

		<b>99%_EW</b>			
		<b>N/T</b>	<b>LR<sub>UC</sub></b>	<b>z<sub>UC</sub></b>	<b>LR<sub>CC</sub></b>
<b>Vrai modèle</b>		<b>0,012</b>	0,384	0,639	0,676
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne		<b>0,012</b>	0,384	0,639	0,676
Copule de Clayton		<b>0,011</b>	0,100	0,321	0,345
Copule de Gumbel		<b>0,015</b>	2,199	1,593	3,714
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t		0,008	0,430	-0,633	0,559
<b>EWMA</b>		<b>0,020</b>	<b>7,848</b>	<b>3,183</b>	8,666
<b>Historical Simulation</b>		0,002	<b>9,611</b>	<b>-2,541</b>	<b>9,619</b>

TAB. 19. Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.95 ; portefeuille MV

	<b>95%_MV</b>			
	<b>N/T</b>	<b>LR<sub>UC</sub></b>	<b>z<sub>UC</sub></b>	<b>LR<sub>CC</sub></b>
<b>Vrai modèle</b>	0,050	0,000	0,007	0,106
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>				
Copule Gaussienne	0,049	0,019	-0,138	0,097
Copule de Clayton	0,048	0,081	-0,283	0,127
Copule de Gumbel	0,052	0,087	0,298	0,310
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>				
Marginales Skewed-t	0,050	0,000	0,007	0,106
<b>EWMA</b>	<b>0,069</b>	<b>6,871</b>	<b>2,765</b>	<b>9,089</b>
<b>Historical Simulation</b>	0,018	<b>28,220</b>	<b>-4,638</b>	<b>37,090</b>

TAB. 20. Résultats de la procédure de backtesting : VaR 0.99 ; portefeuille MV

	<b>99%_MV</b>			
	<b>N/T</b>	<b>LR<sub>UC</sub></b>	<b>z<sub>UC</sub></b>	<b>LR<sub>CC</sub></b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,013</b>	0,837	0,957	1,180
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>				
Copule Gaussienne	<b>0,012</b>	0,384	0,639	0,676
Copule de Clayton	<b>0,012</b>	0,384	0,639	0,676
Copule de Gumbel	<b>0,013</b>	0,837	0,957	1,180
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>				
Marginales Skewed-t	0,006	1,878	-1,269	1,951
<b>EWMA</b>	<b>0,022</b>	<b>10,863</b>	<b>3,819</b>	<b>13,727</b>
<b>Historical Simulation</b>	0,001	<b>13,458</b>	<b>-2,859</b>	<b>13,460</b>

TAB. 21. Fonction de pertes : Blanco et Ihle ; portefeuille EW

	<b>Blanco&amp;Ihle_EW</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	195,631	37,786	15,731	3,429	2,178
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	193,996	37,239	15,617	3,370	2,135
Copule de Clayton	212,270	36,556	14,567	3,164	1,908
Copule de Gumbel	189,765	39,950	17,886	4,282	2,860
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	249,601	42,935	15,630	2,143	0,956

TAB. 22. Fonction de pertes : Blanco et Ihle ; portefeuille MV

	<b>Blanco&amp;Ihle_MV</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	196,490	37,017	13,566	1,834	0,764
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	195,312	36,936	13,734	1,759	0,762
Copule de Clayton	197,836	35,715	13,035	1,782	0,769
Copule de Gumbel	193,088	36,922	14,107	1,986	0,912
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	262,098	43,347	14,182	0,962	0,408

TAB. 23. Fonction de pertes : Caporin ; portefeuille EW

	<b>Caporin_EW</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	691,242	572,946	615,711	701,135	726,426
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	689,700	573,046	615,238	699,550	724,669
Copule de Clayton	717,255	573,924	618,535	705,444	730,613
Copule de Gumbel	683,837	570,956	608,565	686,692	710,571
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	773,078	571,785	618,430	725,218	757,829

TAB. 24. Fonction de pertes : Caporin ; portefeuille MV

	<b>Caporin_MV</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	702,352	573,428	612,889	699,173	725,126
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	701,189	573,282	612,846	698,104	724,310
Copule de Clayton	706,661	573,078	613,974	700,301	726,483
Copule de Gumbel	697,724	573,498	612,397	696,456	722,056
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	808,446	574,580	616,513	724,343	758,862



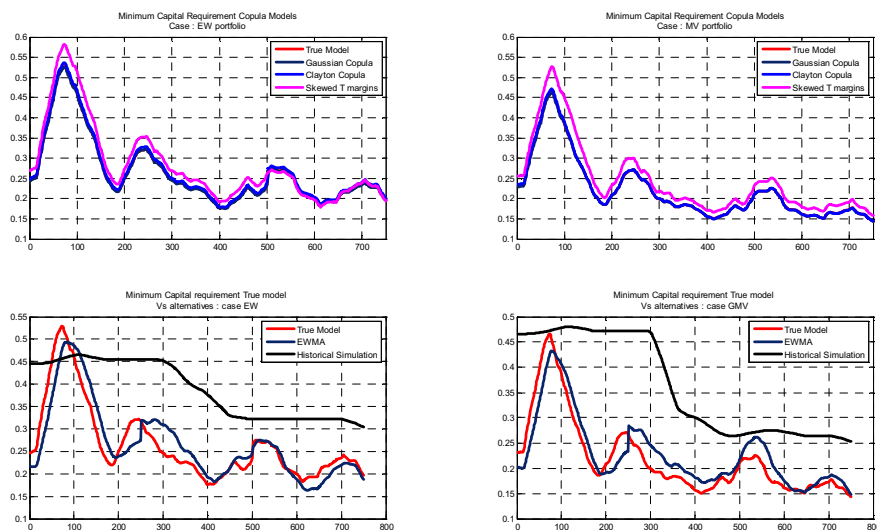


FIG. 3. Exigences en Capital Réglementaire (MRC)

TAB. 25. VaR moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille EW

	VaR moyenne "EW"				
	0.75	0.9	0.95	0.99	0.995
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0075</b>	<b>0,0143</b>	<b>0,0184</b>	<b>0,0261</b>	<b>0,0289</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	0,434	0,103	-0,114	-0,566	-0,670
Copule de Clayton	-3,916	0,766	1,428	1,708	1,761
Copule de Gumbel	1,270	-1,988	-3,381	-5,455	-6,132
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	-10,500	-2,939	1,210	10,392	14,535

TAB. 26. ES moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille EW

	<b>ES moyenne "EW"</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0142</b>	<b>0,0196</b>	<b>0,0231</b>	<b>0,0298</b>	<b>0,0324</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	-0,011	-0,252	-0,417	-0,677	-0,741
Copule de Clayton	0,353	1,400	1,602	1,744	1,739
Copule de Gumbel	-2,421	-3,955	-4,840	-6,362	-6,873
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	-0,491	4,315	8,050	17,295	21,525

TAB. 27. VaR moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille MV

	<b>VaR moyenne "MV"</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0065</b>	<b>0,0125</b>	<b>0,0160</b>	<b>0,0227</b>	<b>0,0251</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	0,203	-0,061	-0,091	-0,279	-0,258
Copule de Clayton	-0,424	0,551	0,679	0,628	0,796
Copule de Gumbel	0,727	-0,155	-0,561	-1,185	-1,292
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	-12,122	-3,398	1,181	11,099	15,613

TAB. 28. ES moyenne et pourcentages de variation par rapport au "Vrai modèle" : portefeuille MV

	<b>ES moyenne "MV"</b>				
	<b>0.75</b>	<b>0.9</b>	<b>0.95</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
<b>Vrai modèle</b>	<b>0,0124</b>	<b>0,0171</b>	<b>0,0201</b>	<b>0,0259</b>	<b>0,0281</b>
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>					
Copule Gaussienne	-0,039	-0,128	-0,166	-0,215	-0,165
Copule de Clayton	0,463	0,662	0,689	0,781	0,836
Copule de Gumbel	-0,275	-0,705	-0,955	-1,385	-1,513
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>					
Marginales Skewed-t	-0,794	4,535	8,581	18,579	23,194

## 6. Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de déterminer les capacités d'un modèle GARCH-Copule dynamique par rapport aux méthodes traditionnelles pour l'estimation des mesures de risque à l'image de la VaR et de l'Expected-Shortfall. Les résultats montrent l'efficacité de ce type de modélisation. En effet le modèle GJR-GARCH, supposant des innovations de type Skewed-t combinées avec une copule de Student, ainsi que celui combiné à la copule de Clayton, semblent être des meilleures alternatives, parmi tous les modèles étudiés. En outre, tous les résultats de backtesting confirment l'hypothèse suggérant qu'en choisissant le meilleur modèle GARCH-Copule, ici la copule de Student avec des innovations extraites d'une spécification de type GJR GARCH, il est toujours possible d'aboutir aux résultats les plus fiables.

## Robustesse de l'Allocation de Portefeuille en Présence d'une Copule Mal Spécifiée

### 1. Introduction

Le "trade-off" entre la rentabilité et le risque reste toujours le principe fondamental qui gouverne les décisions d'investissements. Ainsi, la décision de répartir la richesse entre les différents véhicules d'investissement disponibles est désormais une tâche difficile à laquelle doit faire face un gérant de portefeuille ou, plus généralement, tout investisseur cherchant à maximiser son niveau de richesse futur. Dans cette logique, Ibbotson et Kaplan (2000) mentionnent l'importance de l'impact de la composante liée à la recherche de l'allocation optimale sur le rendement du portefeuille, ceci par comparaison au processus de sélection d'actifs. En effet, environ 40% de l'écart de rendement est expliqué par des différences au niveau de la répartition d'actifs.

Afin de calculer les proportions optimales d'actifs, l'investisseur résout généralement un problème qui consiste à optimiser une certaine fonction objective sous contrainte. Habituellement, en faisant toujours référence au cadre d'analyse du problème de prise de décision en situation d'incertitude, la fonction objective est une fonction de l'utilité espérée. Ainsi, le point de départ permettant d'aboutir sur l'allocation optimale passe certainement par la modélisation des préférences des investisseurs au travers des fonctions d'utilité traduisant au mieux leurs goûts pour le risque. Le modèle de Markowitz (1952) fut le premier à formaliser une réponse analytique au problème d'allocation d'actifs. En effet, Markowitz considère le cas particulier des investisseurs ayant des préférences pour le risque s'ajustant à des fonctions d'utilité de type quadratique. De plus, l'information sur les facteurs de risque, qui ne sont que les rendements des actifs composant le portefeuille, se résume aux deux premiers moments de la loi gaussienne, à savoir la moyenne et la variance. Dans ce cas, la fonction objective de l'investisseur est une fonction seulement du rendement espéré et la variance du portefeuille. Ce cadre d'analyse permet à Markowitz de formuler un modèle flexible pour l'allocation optimale de portefeuilles. La solution analytique de ce problème donne l'ensemble des portefeuilles qui forment la "frontière dite efficiente", celle-ci représente les rendements optimaux à atteindre pour chaque niveau de risque. Le choix de l'investisseur se fait à l'intersection des courbes d'indifférences, retraçant sa fonction d'utilité, et de la "frontière efficiente". Ce choix donne ainsi la composition finale du portefeuille optimal.

Récemment, nombreuses sont les études théoriques et empiriques qui ont mis en doute la validité des hypothèses réductrices du modèle de Markowitz. A lumière de la complexité caractérisant les préférences des investisseurs,

l'utilité quadratique conduit généralement à une augmentation de l'aversion absolue au risque, chose qui est incompatible avec la majorité des constatations empiriques affirmant la préférence des investisseurs pour une asymétrie positive. C'est le cas aussi de l'hypothèse sur la normalité des rendements des actifs. En effet, cette dernière impose des queues de distribution moins épaisses de ce que ce qu'on peut vérifier empiriquement, ce qui implique de très faibles probabilités d'occurrence pour des événements extrêmes là où toutes les classes d'actifs se déprécient dans un scénario typique d'un crash boursier (Fung et Hsieh, 2001, Agarwal et Naik, 2000).

Afin de pallier les limites de l'approche classique, des approches alternatives se sont développées. Bares et al (2002) traitent de l'optimisation des portefeuilles dans le cadre de l'approche de l'utilité espérée en utilisant des fonctions d'utilité iso-élastiques. Popova et al (2003), Cvitanic et al (2003) ainsi que Jurczenko et al (2005) introduisent l'analyse basée sur les moments d'ordres supérieurs. Krokmal et al (2002), Favre et Galeano (2002) ainsi que Agrawal et Naik (2004) construisent les portefeuilles optimaux en utilisant des mesures de risque alternatives. Toutes ces méthodes ont montré leurs performances par rapport aux résultats donnés au travers de l'analyse classique. Ceci confirme ainsi tout l'intérêt de traiter de la question portant sur l'allocation des portefeuilles en dehors du cadre gaussien.

Dans une autre dimension, les fonctions copules ont été utilisées pour résoudre le problème de modélisation des probabilités jointes, l'utilisation de ces fonctions dans le cadre du problème d'allocation d'actifs étant toujours d'actualité. Intégrées dans l'une ou l'autre des nouvelles approches de résolution du problème d'optimisation de portefeuilles, les fonctions copules offrent une nette amélioration des résultats. Ainsi Patton (2004) utilise les fonctions copules dans le cadre de l'approche de l'utilité espérée et parvient à montrer l'importance de tenir compte de la skewness et de l'asymétrie des structures de dépendance dans le calcul des allocations optimales. Di Clemente et Romano (2004), utilisent les fonctions copules dans le but d'optimiser un portefeuille de crédit dans le cadre d'une approche de type moyenne-CVaR. Plus récemment, Ricetti (2013) intègre les fonctions copules à une modélisation GARCH pour considérer l'allocation optimale dans le cadre d'un portefeuille de matières premières.

A ce niveau, nous mentionnons que pour l'une ou l'autre de ces études, aucune attention particulière n'a été accordée au choix de la meilleure copule dans le processus d'optimisation des portefeuilles. En effet, la majorité des études précédemment citées focalisent leur attention sur les avantages du modèle intégrant les fonctions copules par rapport à celui de l'approche moyenne variance. Sinon, il s'agit de comparer des modèles copules et de choisir par la suite celui offrant les meilleures performances.

Pour toutes ces considérations, nous envisageons d'étudier, dans le cadre de ce chapitre, l'impact du choix du modèle de copules sur la performance des portefeuilles optimaux conditionnés à ce type de modèle. En des termes plus concrets, nous espérons vérifier l'hypothèse pour laquelle en choisissant le meilleur modèle de copule, il est toujours possible d'aboutir sur le portefeuille offrant les meilleures performances. Nous envisageons d'étudier cette problématique dans le cadre de la théorie comportementale de portefeuille.

En effet, on peut penser que le degré d'aversion aux pertes, parallèlement aux gains, impactera différemment les choix des investisseurs et par la suite leurs sensibilités face au choix du modèle de copules. Ceci nous permet de dépasser entre autres le cadre classique de la théorie de l'utilité espérée, pour laquelle de nombreuses réserves ont été formulées quant à sa valeur de modèle descriptif de choix en situation d'incertitude.

Nous plaçant dans le cadre particulier de Zakamouline (2014), nous considérons ainsi un investisseur ayant de l'aversion aux pertes, cherchant à répartir son investissement entre un actif risqué et un actif sans risque. Nous analysons ainsi l'impact du choix d'une mauvaise spécification du modèle sur le processus d'allocation optimale et par la suite sur le niveau de la richesse finale de l'investisseur. Notre première contribution à la littérature consiste en une meilleure compréhension du comportement de l'investisseur en termes de choix d'investissement. Notre deuxième contribution consiste en une meilleure illustration de la sensibilité des investisseurs face au large spectre de modèles copules disponibles.

La première section de ce chapitre<sup>1</sup> débute sur une revue de littérature dédiée au problème d'allocation de portefeuille et à l'utilisation de l'approche copule dans le cadre de cette problématique. La deuxième section est consacrée à la description du modèle de simulation ainsi que du problème de l'investisseur. Nous reportons et nous analysons dans la troisième section l'ensemble des résultats de la partie simulation. La quatrième section résume les résultats de notre illustration empirique. Nous concluons dans la dernière section sur les résultats les plus importants de cette étude.

## 2. Revue de littérature

Les questions principales en matière d'allocation de portefeuille peuvent être répertoriées sous trois grandes catégories. La première catégorie concerne le choix du mode de gestion optimal à opérer en matière d'allocation d'actifs. Il s'agit surtout de comparer la gestion passive à la gestion active de portefeuille. La deuxième catégorie de travaux regroupe ceux visant à dépasser le cadre gaussien imposé par le modèle de Markowitz. La dernière catégorie regroupe les travaux étudiant le risque d'incertitude ou aussi le risque de modèle dans une telle problématique.

Le choix de portefeuille dans un cadre uni-périodique est accommodant dans la mesure où les solutions analytiques pour les allocations optimales sont disponibles dans certains cas particuliers. Toutefois, dans un cadre multi-périodique, le choix des allocations optimales est beaucoup plus contraignant. En effet, l'investisseur fait généralement le choix entre deux stratégies, une stratégie passive, de type « buy and hold », qui consiste à acheter et maintenir la position jusqu'à l'horizon d'investissement, ou une stratégie active qui consiste à « rebalancer » le portefeuille d'une manière dynamique. Le débat sur la gestion active-passive a occupé à la fois les académiciens et les praticiens depuis des années. Les questions principales qui se posent portent essentiellement sur la surperformance éventuelle que peut

---

<sup>1</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "On the Robustness of the Portfolio Allocation Under Copula Misspecification"

Il sera soumis à *Journal of Portfolio Management*.

avoir une stratégie de gestion active et surtout si cette surperformance est persistante ou non. Les conclusions à ce sujet sont néanmoins contradictoires.

Hendricks, Patel, et Zeckhauser (1993), Wermers (2000), Avramov et Wermers (2006), Kosowski et al. (2006), Cremers et Petajisto (2009), ainsi que Fama et French (2010), étudiant le mode de gestion des « Fonds Mutuels » sont en faveur d'une gestion active. Ils affirment tous la possibilité qu'ont certains gestionnaires d'actifs de générer une surperformance régulière nette des coûts de transactions. En revanche, Carhart (1997), French (2008), Barras, Scaillet et Wermers (2010), ainsi que Busse, Goyal et Wahal (2010) soulignent que, en moyenne, les alphas des fonds activement gérés sont soit proches de zéro soit même négatifs. D'autres études, étant convaincues par les performances d'un mode de gestion dynamique, essaient d'identifier la meilleure stratégie active. Milevsky et Posner (1998), examinent deux stratégies d'allocation dynamique, à savoir la stratégie de rebalancement périodique et celle du constant mix. Les résultats suggèrent que, plus la période du temps de rééquilibrage de la stratégie de rebalancement périodique diminue, plus les deux stratégies donnent les mêmes résultats. En d'autres termes, le rebalancement continu, matérialisé par la stratégie du « constant mix », peut être considéré comme un cas limite du rebalancement périodique. Sun et al (2006), dans le cadre d'une approche en termes d'équivalent certain, développent une stratégie de rebalancement active visant à minimiser une fonction combinant les coûts de transaction et la « tracking error ». Les résultats illustrent la surperformance de cette stratégie par comparaison avec des stratégies plus conventionnelles, telles que le rebalancement périodique (mensuel, trimestriel, annuel), et le rebalancement avec une tolérance de 5%.

Le cadre classique de l'approche moyenne-variance sous-tend l'utilisation d'une distribution multivariée normale pour modéliser les séries de rendements et la variance comme mesure de risque. Bien qu'ayant eu un énorme succès dans le milieu pratique, cette approche fait l'objet de critiques soutenues surtout suite au contexte économique qui règne depuis la crise financière récente. La recherche dans les modèles alternatifs est désormais un champ prometteur. Les études récentes se concentrent sur l'introduction de nouvelles mesures de risque afin de mieux tenir compte des risques extrêmes, ainsi que sur différentes distributions de probabilité jointes permettant de mieux tenir compte de la structure de dépendance dans le portefeuille.

Roy (1952) a été parmi les premiers à décliner les fondements théoriques de l'approche moyenne-variance de Markowitz. En effet, il a été convaincu que les investisseurs sélectionnent les portefeuilles efficients tout en minimisant la probabilité de dégager un niveau de rendement inférieur à un seuil cible fixé à l'avance. Dans le but de surmonter les limites de la variance, Markowitz (1959) a proposé une procédure d'optimisation basée sur une mesure de risque alternative, la semi-variance. Fishburn (1977) a pu démontrer que la perception du risque des investisseurs change considérablement en dessous d'un seuil de rendement cible et favorise ainsi la nature asymétrique du risque. Ces approches orientées vers le risque de baisse, le « downside risk », sont également connues sous le nom de « Safety first ».

Une classe commune regroupant les mesures de risque asymétriques évoque les moments partiels inférieurs (Lower Partial Moment). Ainsi, Bawa (1975) ainsi que Fishburn (1977) dérivent la relation entre les LPM et la dominance stochastique, et ont démontré que les décisions prises sur la base des LPM sont compatibles avec les principes de la dominance stochastique (1ère, 2ème et 3ème degré). Bawa et Lindberg (1977) tiennent compte de la diversification du « downside risk », et proposent une mesure alternative basée sur les co-mouvements des rendements en dessous du seuil cible. Harlow (1991) suggère que l'optimisation de portefeuilles basée sur les mesures de risque asymétriques aboutit généralement sur des portefeuilles plus concentrés en obligations offrant ainsi une meilleure protection contre le risque. En effet, les portefeuilles obtenus ont une exposition au risque moins importante que celle obtenue par une optimisation plus classique basée sur la variance. Récemment, Sing et Ong (2000), étudiant des portefeuilles incluant l'actif immobilier, trouvent des résultats différents. En effet, l'allocation d'actif dans le cadre d'une approche CLPM (Co-Lower Partial Moments) asymétrique favorise une répartition plus concentrée en actions. Les auteurs mentionnent qu'une telle proportion en actions, combinée avec les autres classes d'actifs, peut être considérée comme étant un bon compromis permettant d'atteindre un rendement espéré plus important. Stevenson (2001), et dans une orientation « out-of-sample », indique que l'utilisation des mesures de risque asymétriques, pour des investisseurs averses au risque, entraîne une amélioration significative de la performance du portefeuille. Alexandre et Baptista (2002), ainsi que Jarrow et Zhao (2006) concluent que si les distributions de rendements sont normales, le choix des portefeuilles optimaux avec une approche classique basée sur la variance coïncide avec celui donné par les mesures de risque asymétriques.

Récemment encore, avec le succès des mesures de risque à base de quantiles telles que la VaR ou aussi la CVaR, des approches alternatives préconisent l'utilisation de telles mesures dans l'optimisation de portefeuilles. Tout commence avec Rockafellar et Uryasev (2000) qui démontrent les possibilités théoriques et mathématiques de l'utilisation de la CVaR dans le cadre du problème d'allocation d'actifs, et la possibilité d'optimiser la CVaR tout en utilisant des méthodes de programmation linéaire. Campbell, Ronald et Koedijk (2001) développent un modèle de sélection de portefeuille sous une contrainte de type VaR et suggèrent que, sous certaines conditions sur la distribution de rendement de portefeuille (normale ou Student), le modèle donne des résultats identiques à ceux développés dans le cadre de l'approche moyenne-variance. Alexander et Baptista (2004), analysent le problème de choix de portefeuille résultant de l'imposition d'une contrainte de type VaR dans le cadre de l'approche moyenne-variance, et le comparent à celui résultant d'une contrainte de type CVaR. Les résultats indiquent, qu'en présence de l'actif sans risque, l'optimisation de portefeuille sous une contrainte CVaR est plus efficace, pour le cas des investisseurs légèrement averses au risque, par comparaison avec une contrainte de type de VaR. Toutefois, en l'absence de l'actif sans risque, la contrainte de type CVaR a un effet contradictoire en ce qu'elle est susceptible de forcer les investisseurs très averses au risque à sélectionner des portefeuilles plus risqués.



Une autre approche alternative en matière d'allocation de portefeuille fait référence à l'utilisation des moments additionnels des distributions de rendements. En effet, c'est Hanoch et Levy (1970) qui sont les premiers à démontrer l'importance d'intégrer les moments d'ordre supérieur dans l'analyse moyenne-variance, surtout lorsque la distribution sous-jacente s'éloigne du cadre gaussien ou aussi lorsque la fonction d'utilité de l'investisseur n'est plus quadratique. Scott et Horvath (1980) démontrent analytiquement que les investisseurs préfèrent les rendements avec plus de skewness et moins de kurtosis. Partant de ces conclusions, Bekeart et Harvey (1997), Harvey et Siddique (2000), Dittmar (2002), Maillet et Jurczenko (2006) ainsi que Cvitanic et al (2008) démontrent que les moments d'ordre supérieurs améliorent l'allocation de portefeuille notamment en cas de non-normalité de la distribution de rendement. De plus, Cvitanic et al (2008) suggèrent qu'en ignorant d'intégrer les moments additionnels, cela engendre un surinvestissement sur l'actif risqué, surtout lorsque la volatilité est élevée. Jondeau et Rockinger (2006) montrent que le coût d'opportunité, résultant de l'utilisation de l'approche moyenne-variance, par comparaison avec une approche à base de fonction d'utilité allant jusqu'au quatrième moment de la distribution de rendement, peut être très important en cas d'énorme déviation de l'hypothèse gaussienne.

Une dernière approche visant à relâcher le cadre gaussien imposé par l'approche moyenne-variance concerne la modélisation du caractère asymétrique de la structure de dépendance du portefeuille. Une des solutions apportées à cette problématique est celle des fonctions copules. La popularité de l'approche copule résulte principalement dans sa capacité à décomposer la distribution jointe des variables aléatoires en les distributions marginales des variables aléatoires individuelles et la forme de la fonction copule reliant ces marginales.

L'utilisation des fonctions copules dans le cadre du problème d'allocation de portefeuille est d'actualité et connaît un véritable essor. Patton (2004), fut le premier à montrer l'utilité des fonctions copules dans la résolution de ce genre de problématique. En effet, l'auteur considère le cas d'un investisseur averse au risque dont la fonction d'utilité est de type CRRA. Il suppose également différents types de structure de dépendance à travers différentes fonctions copules. Les résultats illustrent la performance du modèle utilisant les fonctions copules, permettant de capturer l'aspect asymétrique de la structure de dépendance, par rapport à une modélisation classique de type moyenne-variance, et ce uniquement dans le cas d'un problème d'optimisation sans contraintes sur vente à découvert. En effet pour un problème d'optimisation avec contraintes, l'auteur ne trouve pas une relation de supériorité significative. Stulajter (2009) étudie l'impact des fonctions copules dans le cadre d'un problème d'optimisation basé sur la mesure de risque CVaR. L'auteur confirme que l'utilisation du coefficient de corrélation linéaire de Person conduit à une sous-estimation du risque et par conséquent à une allocation non optimale de ressources. En plus, la surperformance de la copule de Student, par rapport aux autres modèles copules, est démontrée. Cette supériorité est d'autant plus importante que le seuil de confiance de la

CVaR est élevée, et/ou que le niveau de CVaR cible est important. Finalement, Ricetti (2013) suggère que les fonctions copules ne sont pas utiles pour choisir parmi des actifs incluant les indices boursiers, mais elles peuvent être d'une grande utilité dans le cadre d'un modèle d'allocation de portefeuille incluant des actifs de type macro, c'est-à-dire choisir l'allocation optimale entre un actif de type indice et un autre de type obligation ou matières premières.

La dernière catégorie de travaux que nous évoquons dans cette revue de littérature, concerne le risque de modèle ou aussi le risque d'incertitude. Il s'agit des travaux qui essaient d'étudier l'impact d'une incertitude lié soit à l'estimation des paramètres du modèle ou au choix du modèle lui-même. Dans cette ligne de recherche, Markowitz et Usmen (2003) comparent la performance de deux méthodes permettant de tenir compte du risque de modèle résultant de l'incertitude sur l'estimation des paramètres, à savoir la méthode Bayésienne et celle utilisant la méthode de Monte Carlo avec rééchantillonnage suggérée par Michaud (1989). Ils démontrent que l'investisseur utilisant la méthode de Michaud est généralement celui qui aura les meilleures performances. Kacperczyk et Damien (2011) s'intéressent au problème d'incertitude au niveau de la distribution de rendement du portefeuille et son impact sur l'allocation optimale du portefeuille. Pour cet effet, ils utilisent une approche Bayésienne semi-paramétrique. Les résultats montrent que l'incertitude sur la distribution de rendement varie substantiellement en fonction du temps. De plus, et par comparaison avec un investisseur ayant une incertitude sur l'estimation des paramètres, celui ayant une incertitude sur la distribution de rendement et ses paramètres alloue moins de richesse sur l'actif risqué. Par conséquent, la stratégie d'un tel investisseur génère les rendements les plus élevés. Pour terminer, Kang (2011) étudie le problème d'allocation d'actifs en cas d'incertitude au niveau du modèle GARCH-Copule modélisant la dynamique du portefeuille, et ce par une approche Bayésienne. Les résultats suggèrent que l'approche Bayésienne donne les mêmes résultats que les modèles classiques en cas de faible aversion au risque de l'investisseur.

### 3. Présentation du modèle et programme de l'investisseur

Cette section est consacrée à la spécification du modèle qui servira de base au travail de simulation. Nous présentons aussi le programme d'optimisation qui caractérisera les choix de l'investisseur. Ainsi, il s'agit de développer le DGP « Data Generating Process » qui gouvernera la simulation des différents facteurs de risque. Notre modèle suppose une structure de type GARCH-Copule multivariée telle que suggérée dans Fantazzini (2008) et Ricetti (2013). Les facteurs de risque seront gouvernés individuellement par des processus de type AR-GJR GARCH que nous avons choisis pour leur capacité à reproduire l'ensemble des faits stylisés observés sur les actifs financiers.

**3.1. Le modèle de simulation.** Un vecteur de variables de type séries temporelles à  $n$ -dimension  $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{n,t})$  est supposé suivre une modélisation GARCH-Copule, si par construction la fonction de distribution jointe

est donnée par :

$$F(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}_t) = C(F_1(y_{1,t} | \mu_{1,t}, h_{1,t}), \dots, F_n(y_{n,t} | \mu_{n,t}, h_{n,t})) \quad (3.1)$$

$C$  étant la copule à  $n$ -dimensions,  $F_i$  étant les fonctions de distribution marginales conditionnelles relatives à la série  $y_{i,t}$ , dont la dynamique est décrite par un intercept  $\mu_{i,t}$  qui correspond à la moyenne conditionnelle et par un terme d'erreur  $\sqrt{h_{i,t}}\eta_{i,t}$ , qui peut être constant ou dépendant du temps comme dans une spécification GARCH(1,1) par exemple.

$$\begin{aligned} y_{i,t} &= \mu_{i,t} + \sqrt{h_{i,t}}\eta_{i,t} \\ h_{i,t} &= \omega_{i,t} + \alpha_{i,t}(y_{i,t-1} - \mu_{i,t-1})^2 + \beta_i h_{i,t-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$h_{i,t}$  étant la variance conditionnelle de la série  $y_{i,t}$ , étant donnée l'information disponible  $I_{i,t-1} = \{y_{i,t-1}, y_{i,t-2}, \dots\}$ ,  $\eta_{i,t}$  sont des variables aléatoires iid de moyenne nulle.

Dans le cadre de notre travail, nous avons supposé que les innovations standardisées  $\eta_{i,t}$  auront des distributions de type Skewed-t comme suggéré par Hansen (1994),  $\eta_{i,t} \sim SkewT(v_i, \lambda_i)$ . Ce choix est fait afin de tenir compte du caractère leptocurtique observé sur la majorité des séries financières et économiques (Patton, 2004; Fantazzini, 2008). Ainsi, la distribution marginale conditionnelle pour chaque facteur de risque est donnée par la fonction suivante :

$$F_i(y_{i,t} | \mu_{i,t}, h_{i,t}) = SkewT_{v_i, \lambda_i} \left( (y_{i,t} - \mu_{i,t}) \sqrt{h_{i,t}} \right) \quad i = 1, \dots, p \quad (3.3)$$

Pour modéliser la volatilité conditionnelle, nous avons adopté un modèle de type GJR-GARCH. Ce modèle nous permet de reproduire les effets asymétriques des chocs observés sur la volatilité conditionnelle des séries financières. Finalement pour modéliser la structure de dépendance, nous avons choisi la copule de Student. Cette copule est symétrique, elle possède des queues de dépendance supérieure et inférieure identiques. Le choix de cette copule s'explique par son adoption dans plusieurs travaux dont notamment Patton (2004).

Alors que la majorité des travaux inscrits dans le cadre de la problématique d'optimisation de portefeuilles avec une approche copule restreints le champ d'étude au cas bivarié, nous avons choisi de travailler dans un cadre trivarié afin d'offrir une première tentative de généralisation des résultats obtenus.

Dans ce contexte, notre modèle copule AR(1)-GJR GARCH(1,1)- Copule trivarié se présente comme suit :

$$X_t = \mu + AR X_{t-1} + \sqrt{h_t}\eta_t \quad (3.4)$$

avec  $h$  une matrice diagonale contenant les variances individuelles décrites par le processus GJR-GARCH :

$$h_{i,t} = \omega_i + \alpha_i \eta_{i,t-1}^2 h_{i,t-1} + \beta_i h_{i,t-1} + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{i,t-1} < 0} \eta_{i,t-1}^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

$\eta_{i,t}$  étant les innovations standardisés ayant une moyenne nulle et une variance égale à l'unité. Elles sont supposés distribuées selon des Skewed t  $Skewt(v_i, \lambda_i)$ .

Les paramètres des différentes moyennes et variances conditionnelles

sont résumés dans les vecteurs qui suivent :

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.005 \\ 0.009 \end{bmatrix}, AR = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.001 \\ -0.001 \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.000001 \\ 0.000001 \\ 0.000001 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Pour les distributions marginales des innovations standardisées nous avons choisi les paramètres suivants :

$$v = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Pour la fonction Copule nous avons choisi de travailler avec la copule Student  $C_{St(R,\theta)}$  pour laquelle nous avons fixé les paramètres suivants :

$$R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -0.5 & -0.5 \\ \hline -0.5 & 1 & 0.5 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ et } \theta = 4$$

Le choix de ces paramètres est motivé en premier lieu par notre volonté de reproduire les dynamiques types des séries financières. Dans un deuxième lieu, il s'agit de travailler avec un portefeuille d'actifs ayant des profils de risque différents. Ceci nous permet de vérifier l'impact du choix du modèle adéquat sur la composition de l'allocation optimale. Ainsi notre portefeuille sera composé d'un actif faiblement risqué (Bonds), d'un autre moyennement risqué (Equity) et d'un dernier à haut profil de risque (commodity). Ces caractéristiques sont résumées surtout à travers les paramètres de la moyenne conditionnelle, du paramètre  $\beta$  relatif à la persistance de la volatilité, du paramètre  $\gamma$  relatif à l'impact des innovations négatives sur la volatilité conditionnelle et finalement du choix des paramètres des marginales. Ainsi, la lecture de ces paramètres dans l'ordre d'une écriture vectorielle montre bien que l'actif 1 est l'actif le moins risqué, l'actif 2 est celui moyennement risqué et finalement l'actif 3 est l'actif le plus risqué. Les caractéristiques statistiques des séries de rendements simulés sont résumées dans le tableau qui suit.

TAB. 1. Statistiques descriptives : Rendements simulés

	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis
<b>Actif 1</b>	0.000705	0.3077	0.7882	3.7911
<b>Actif 2</b>	0.0054	0.3376	0.0074	3.7264
<b>Actif 3</b>	0.009	0.4005	-1.1935	8.7180

**3.2. Programme de l'investisseur.** L'objectif de notre étude est de déceler l'impact d'une mauvaise spécification du modèle gouvernant la dynamique des actifs financiers sur l'allocation optimale et par la suite sur la performance du portefeuille. Nous envisageons en plus d'étudier le rôle des préférences de l'investisseur et de son goût pour le risque dans ce genre de

problématique. Ainsi, nous optons pour la même approche poursuivie dans Zakamouline (2014). Selon cette dernière, l'investisseur est supposé avoir une fonction d'utilité en adéquation avec les conclusions de la finance comportementale (Kahneman et Tversky, 1979). On considère ainsi que les investisseurs ont de l'aversion aux pertes, et veulent investir leur richesse entre un actif risqué et l'actif sans risque. Dans ce cadre, Zakamouline (2014) développe des solutions analytiques permettant d'obtenir l'allocation optimale ainsi que la mesure de performance issue du programme de maximisation de l'utilité espérée.

Etant donné ce contexte, nous considérons tout au long de cette étude un investisseur avec une richesse initiale  $W_0$ . L'objectif est d'allouer cette richesse entre un actif risqué, typique d'un fonds "F" investi sur trois actifs eux mêmes risqués, pour un montant  $x_0$ . Le restant de la somme sera investi sur l'actif sans risque, pour le montant  $W_0 - x_0$ . Etant donné aussi un vecteur pour les prix initiaux pour les actifs composant le fonds risqué, la contrainte budgétaire de l'investisseur est la suivante :

$$x_0 = x'p_0 \quad (3.6)$$

$x$  étant le vecteur correspondant aux nombres d'actions ou de contrats achetés. Le vecteur des proportions correspondantes "w" peut être obtenu en divisant l'équation précédente par  $x_0$ .

Le portefeuille global sélectionné (composé du fonds et de l'actif sans risque) sera conservé jusqu'à l'horizon d'investissement spécifié ( $T$ ). Sachant qu'il n'y aura pas de rebalancement durant toute la période d'investissement, le temps à partir de la date  $t_0$  jusqu'à  $T$  constitue une seule période, correspondant ainsi à une stratégie d'investissement de type « Buy and Hold ». La richesse finale s'exprime ainsi sous la forme :

$$W_T = W_0 (1 + R_p)$$

$R_p$  étant le rendement du portefeuille globale de l'investisseur, il est donné par l'expression suivante :

$$R_p = a (R_F - r) + r \quad (3.7)$$

$r$  étant le rendement de l'actif sans risque (Cash),  $a$  la proportion investie sur l'actif risqué telle que  $a = \frac{x_0}{W_0}$ , et  $R_F$  correspond au rendement de l'actif risqué "F", ce dernier étant inconnu à la date initiale où l'investisseur décide d'investir. Etant donné ceci, le rendement du portefeuille ainsi que la richesse finale de l'investisseur seront donnés par des variables aléatoires suivant des distributions de probabilité inconnues dépendantes de  $R_F$ .

L'objectif de l'investisseur est de choisir "a" qui maximise le niveau de son utilité espérée

$$E [U^* (W_T (R_F))] = \max_a E [U (W_T (R_F))] \quad (3.8)$$

Tel que mentionné dans Zakamouline (2014), s'il existe une solution asymptotique ou explicite pour la valeur de l'allocation optimale "a", l'utilité espérée maximale peut être écrite comme étant une fonction strictement croissante d'une certaine quantité qui peut être interprétée comme une mesure de performance.

$$E [U^* (W_T (R_F))] = f (\pi (R_F)) \quad (3.9)$$

Considérant un investisseur ayant de l'aversion aux pertes, telle que introduite par Kahneman et Tversky (1979), Zakamouline (2014) propose une forme plus générale d'une fonction d'utilité puissance et linéaire par morceaux ayant la forme suivante :

$$U(W(x)) = \begin{cases} 1_+ a(x - \tau) - \frac{\gamma_+}{\alpha} a^\alpha (x - \tau)^\alpha & \text{si } x \geq \tau \\ -\lambda \left( 1_- a(\tau - x) + \frac{\gamma_-}{\beta} a^\beta (\tau - x)^\beta \right) & \text{si } x \leq \tau \end{cases} \quad (3.10)$$

" $\tau$ " peut être interprété comme étant le taux rendement de référence de l'investisseur ou aussi le taux de rendement minimum accepté (généralement, le taux de rendement minimum accepté est égal au taux sans risque " $r$ ").  $1_+$  ou  $1_-$  sont deux indicateurs prenant les valeurs  $\{0, 1\}$  et utilisés pour spécifier si la fonction d'utilité de l'investisseur comporte une partie linéaire respectivement en dessus et en dessous du niveau de référence.  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sont les paramètres contrôlant l'aversion au risque de l'investisseur respectivement en dessus et en dessous du niveau de référence,  $\lambda$  est le paramètre contrôlant le degré de l'aversion aux pertes.

Nous rappelons que cette forme généralisée de la fonction d'utilité englobe la fonction d'utilité quadratique utilisée par Markowitz, ainsi que les fonctions d'utilité utilisées par Fishburn (1977), Bawa (1978), ou aussi par Kahneman et Tversky (1979). Elle permet aussi à l'analyste de spécifier différents types de préférences de l'investisseur, notamment l'aversion aux pertes, ou aussi son goût, sa neutralité, ou son aversion au risque.

Dans le cas particulier d'une fonction d'utilité puissance par morceaux ( $1_+ = 1_- = 0$  ;  $\gamma_+ = -\alpha$  ;  $\gamma_- = \beta$ ), que nous représentons dans la figure 1, et sous certaines conditions, la solution optimale pour le problème d'allocation existe. Elle est donnée à travers le résultat suivant :

$$a^* = \left( \frac{\alpha UPM_\alpha(x, r)}{\lambda \beta LPM_\beta(x, r)} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}} \quad (3.11)$$

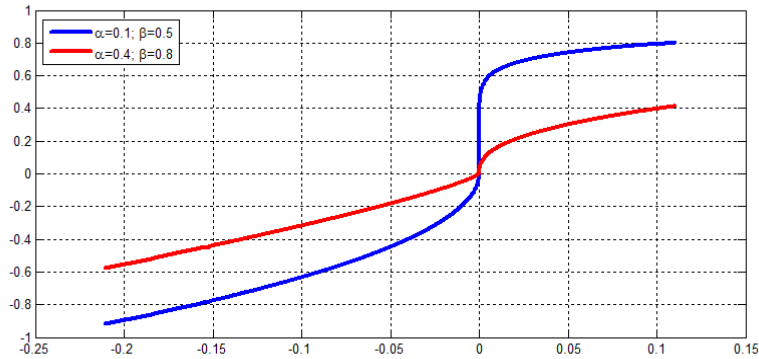


FIG. 1. Fonction d'utilité de l'investisseur

#### 4. Etude de simulation

Dans cette section, nous essayons de mettre en place le modèle de simulation tel que illustré ci-dessus. Nous analysons aussi l'ensemble des résultats qui en découlent. L'objectif est de détecter l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle GARCH-copule utilisé pour les simulations. Nous étudions ainsi une mauvaise spécification de la fonction copule (autre que la vraie copule supposée ici de type Student)<sup>2</sup>. Il s'agit aussi d'une mauvaise spécification des marginales (en utilisant des marginales gaussiennes à la place des vraies marginales Skewed-t).

Nous illustrons cette étude sous deux axes : Le premier concerne le degré d'aversion au risque de l'investisseur contrôlé par les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ; le deuxième examine l'impact de l'horizon d'investissement  $T$ . Nous étudions l'ensemble de ces aspects pour différents types de positionnement sur le fonds risqué. Pour cet objectif, nous considérons trois configurations d'investissements différentes, à savoir l'Equally-Weighted (EW), le portefeuille Moyenne-Variance (MV) ainsi que le portefeuille à ratio de Sharpe maximal (SRP) (Tangency Portfolio) résultant de la tangence entre la frontière efficiente et la droite d'allocation d'actifs.

**4.1. Mise en place du modèle.** La première étape consiste à simuler les séries de rendements des actifs composant le fonds risqué "F". Ainsi nous simulons les séries des log-rendements mensuels en utilisant la spécification AR(1)-GJR GARCH avec copule de Student et marginales Skewed-t, que nous avons spécifiées ci-dessus. Une étude basée sur les simulations nécessite un nombre suffisamment grand de réplifications. Ce dernier est fixé à  $n_{rep} = 1000$  réplifications. La taille de l'échantillon est fixée à  $n_{sample} = 2500$ , qui représente un échantillon assez conséquent pour des données mensuelles. Ainsi, nous simulons la matrice  $Z$  qui aura pour dimension  $(n_{sample}, n_{assets}, n_{rep})$ ,  $n_{assets}$  étant le nombre d'actifs composant le fonds risqué, qui est au nombre de trois.

Une fois simulé  $Z$ , l'étape suivante consiste à choisir le modèle à appliquer permettant d'aboutir à l'allocation optimale ainsi qu'à la richesse finale de l'investisseur. En effet, il s'agit de travailler avec les données disponibles basées sur un échantillon de taille réduite  $(n_{sample} - T)$ ,  $T$  étant l'horizon d'investissement. Ce dernier servira de base aux différentes estimations faites sur la base du modèle sélectionné. Ceci étant fait, nous simulons les trajectoires de rendements futurs des actifs et par la suite la distribution de rendement du fonds, étant donné le vecteur d'allocation choisit (EW, MV ou SRP). Finalement, Nous calculons l'allocation optimale grâce à la solution explicite du modèle de Zakamouline (2014), et par la suite la richesse finale de l'investisseur en se basant sur les rendements réalisés ex-post. Ceci se résume aux étapes énumérées ci-dessous :

- (1) Choisir une spécification GJR-GARCH-Copule permettant de modéliser les dynamiques des actifs composant le fonds risqué ainsi que leurs distribution jointe ;
- (2) Pour chaque actif, estimer les paramètres du modèle GJR-GARCH ;

---

<sup>2</sup>Il s'agit de la copule Gaussienne, la copule de Clayton ou aussi de la Copule de Gumbel.

- (3) Ajuster le(s) paramètre(s) de la copule aux innovations standardisées ;
- (4) Pour chaque  $i = 1, \dots, T$ , afin de simuler les trajectoires de rendements futures, simuler  $J = 100000$  scénarios à partir de la copule et les inférer par la suite dans le processus de simulation des spécifications GJR-GARCH individuelles ;
- (5) Calculer l'allocation optimale  $a^*$  maximisant l'utilité espérée de l'investisseur, ainsi que la richesse finale qui en découle du vecteur d'allocation.

**4.2. Résultats des simulations.** Nous avons fixé les valeurs suivantes pour ces paramètres :

- Le taux annuel pour l'actif sans risque est  $r = 2\%$ .
- Le paramètre contrôlant l'aversion aux pertes  $\lambda = 3$ , reflétant ainsi un investisseur ayant de l'aversion aux pertes. En effet,  $\lambda = 1$  correspond à un investisseur neutre aux pertes.
- Le paramètre contrôlant l'aversion au risque au-dessus du seuil de référence  $\alpha = \{0.1; 0.2; 0.3; 0.4\}$ . Plus  $\alpha$  est petit, plus l'investisseur est susceptible être averse au risque dans cette région.
- Le paramètre contrôlant l'aversion au risque au-dessous du seuil de référence  $\beta = \{0.5; 0.6; 0.7; 0.8\}$ .  $0 < \beta < 1$ , correspond à un investisseur ayant du goût pour le risque dans cette région.
- L'horizon d'investissement est fixé à  $T = 1$  mois ;  $T = 3$  mois ou  $T = 12$  mois

4.2.1. *Composition de l'actif risqué et allocation optimale.* Tel que mentionné ci-dessus notre étude s'intéresse à déterminer l'impact d'une mauvaise spécification du modèle GARCH-Copule sur l'allocation optimale de portefeuille ainsi que sur la richesse finale de l'investisseur. Nous tentons donc d'examiner ces implications pour différents profils d'investisseurs matérialisés par leurs préférences pour le risque. Nous envisageons aussi étudier l'impact de différents positionnements ou composition de l'actif risqué (EW, MV, ou SRP). N'oublions pas aussi, l'impact de l'horizon d'investissement dans toute cette analyse.

Ainsi le premier résultat que nous présentons, concerne la composition du fonds donnée selon les deux configurations envisagées (MV) et (SRP). Les résultats du tableau 2 mentionnent l'adéquation du modèle utilisant la copule gaussienne combinée aux "vraies marginales", ainsi que celui utilisant la "vraie copule" combinée aux marginales gaussiennes, avec les compositions préconisées par le "vrai modèle". Toutefois, nous remarquons une nette différence de compositions établies avec les deux modèles utilisant des copules archimédiennes, à savoir le modèle utilisant la copule Rotated Clayton et celui utilisant la copule de Rotated Gumbel. En effet, ces deux modèles sous-évaluent largement l'allocation sur l'actif le moins risqué. Cette sous-évaluation varie de 10% pour le portefeuille MV, à 15% pour le portefeuille SRP. Ceci est vrai pour tous les horizons d'investissement pris en considération. On pense alors que les éventuelles différences, pouvant exister entre les différents modèles, peuvent trouver une explication directe dans ces disparités.



Les tableaux 3, 4 et 5 résument l'allocation optimale sur l'actif risqué. Le tableau 3 présente l'allocation optimale calculée avec le vrai modèle supposant une Copule Student et des marges Skewed-t. Tandis que les tableaux 4 et 5 récapitulent les différences d'allocation (en variation relative) entre le "vrai modèle" et les modèles alternatifs.

Pour ce qui est de l'allocation optimale, calculée sur la base du "vrai modèle", nous constatons que cette dernière est la plus élevée pour le cas du fonds SRP, aussi elle a tendance à augmenter au fur et à mesure que l'horizon d'investissement augmente. Cette disposition peut être due en grande partie à l'attitude de l'investisseur face au risque. En effet, partant de distributions de rendements favorisant l'asymétrie négative, étant donné aussi que l'investisseur est censé être moins averse au risque sur la région des rendements négatifs, nous envisageons que plus l'horizon d'investissement augmente, plus grande étant l'incertitude sur la variabilité des rendements, et plus l'investisseur aura tendance à investir sur l'actif risqué pour prétendre éviter cette situation désavantageuse.

Pour ce qui est des différences d'allocation relatives, notons que les résultats obtenus se différencient surtout selon la nature du modèle, l'horizon de l'investissement, la nature du fonds, ainsi que l'attitude des investisseurs face aux risques. En effet, nous vérifions que les variations les plus importantes sont obtenues pour les deux modèles supposant une mauvaise spécification de la copule, de type copules archimédiennes (rotated Clayton et rotated Gumbel). Pour ces deux modèles, l'allocation optimale sur l'actif risqué est largement sous-estimée (-99% pour le cas du modèle de la copule rotated Clayton, fonds SRP, sur un horizon d'investissement de 12 mois et pour un investisseur ayant des préférences de type  $\alpha = 0.4$  ;  $\beta = 0.5$ ). Les sous-estimations les plus importantes sont enregistrées pour le cas du fonds SRP, elles augmentent également avec l'horizon d'investissement. On pense ainsi, que l'impact d'une mauvaise spécification de ce type (copules archimédiennes), impactera forcément la richesse finale de l'investisseur. Nous étudions cet aspect dans la section suivante.

Le modèle utilisant la copule Gaussienne, sous-estime également l'allocation optimale sur l'actif risqué. Par contre, on remarque que plus loin est l'horizon d'investissement, moindre est la sous-estimation du modèle. On pense ainsi, que plus l'horizon d'investissement est grand, plus l'investisseur est indifférent entre des modèles utilisant des copules elliptiques (Gaussienne ou Student).

Pour le cas du modèle utilisant une mauvaise spécification au niveau des marginales, le comportement semble être différent selon la nature du fonds ainsi que selon l'horizon d'investissement. En effet, sur un fonds de type EW, le modèle sous-estime l'allocation optimale sur l'actif risqué, dans les mêmes proportions que celles du modèle de la copule gaussienne. Également, la sous-estimation diminue avec l'horizon d'investissement. Par contre, pour le cas des fonds MV et SRP, le modèle génère une surestimation de l'allocation optimale.

Finalement, notons que pour l'ensemble de ces modèles, l'attitude face au risque de l'investisseur semble être un facteur déterminant de l'allocation optimale. Ainsi nous vérifions que l'impact d'une mauvaise spécification du

modèle, affecte largement les choix d'un investisseur dont les préférences sont de types " $\alpha = 0.4$  ;  $\beta = 0.5$ ". Ce dernier étant moins averse au risque pour les rendements qui sont supérieurs au seuil de référence, aussi pour les rendements qui sont inférieurs, la moindre variation sur les caractéristiques des séries de rendements aura des conséquences très importantes sur les décisions d'investissement de l'investisseur. Nous vérifions dans la suite, l'impact de tels résultats sur la richesse finale de l'investisseur.

TAB. 2. Composition de l'actif risqué

<b>Horizon =1 mois</b>		
	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
<b>Vrai modèle</b>	[0.487 0.280 0.233]	[0.413 0.216 0.371]
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>		
Copule Gaussienne	[0.485 0.284 0.231]	[0.413 0.222 0.365]
Copule rotated Clayton	[0.399 0.334 0.267]	[0.248 0.319 0.433]
Copule rotated Gumbel	[0.386 0.334 0.280]	[0.259 0.323 0.418]
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>		
Marginales gaussiennes	[0.487 0.282 0.231]	[0.475 0.250 0.275]
<b>Horizon =3 mois</b>		
	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
<b>Vrai modèle</b>	[0.490 0.283 0.227]	[0.406 0.220 0.374]
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>		
Copule Gaussienne	[0.490 0.286 0.224]	[0.402 0.225 0.373]
Copule rotated Clayton	[0.407 0.333 0.260]	[0.248 0.312 0.440]
Copule rotated Gumbel	[0.393 0.335 0.272]	[0.260 0.322 0.418]
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>		
Marginales gaussiennes	[0.489 0.282 0.229]	[0.477 0.267 0.256]
<b>Horizon =12 mois</b>		
	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
<b>Vrai modèle</b>	[0.498 0.290 0.212]	[0.349 0.227 0.434]
<b>Mauvaise spécification de la Copule</b>		
Copule Gaussienne	[0.497 0.294 0.209]	[0.350 0.228 0.422]
Copule rotated Clayton	[0.420 0.338 0.242]	[0.238 0.308 0.454]
Copule rotated Gumbel	[0.403 0.338 0.259]	[0.243 0.312 0.445]
<b>Mauvaise spécification des marginales</b>		
Marginales gaussiennes	[0.489 0.283 0.228]	[0.486 0.291 0.223]

TAB. 3. Allocation optimale : "Vrai modèle"

<b>Horizon =1 mois</b>			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.126	0.140	0.165
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.393	0.442	0.463
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	0.944	1.09	3.798
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	1.408	1.607	1.816
<b>Horizon =3 mois</b>			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.164	0.187	0.202
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.381	0.426	0.434
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	28.654	38.491	72.175
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	2.412	2.747	2.959
<b>Horizon =12 mois</b>			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.404	0.433	0.389
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.513	0.544	0.492
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	147.2	99.5	75.1
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	10.537	10.99	9.723

TAB. 4. Allocation optimale : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 1 mois

<b>Fonds EW</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-9.72	-50.57	-43.43	-19.12
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-7.10	-41.94	-33.76	-10.36
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-24.59	-83.96	-74.51	-51.59
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-9.03	-53.06	-43.56	-14.35

<b>Fonds MV</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-13.55	-59.79	-52.74	16.97
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-8.60	-50.23	-42.36	8.58
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-37.82	-94.51	-91.12	114.04
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-11.22	-62.54	-53.83	14.53

<b>Fonds SRP</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-13.22	-58.53	-51.90	0.79
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-8.56	-49.45	-41.74	3.39
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-40.74	-94.54	-91.27	-19.05
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-11.25	-61.28	-52.98	4.13

4.2.2. *Richesse finale et performance des portefeuilles.* Dans cette section nous analysons l'impact de la mauvaise spécification du modèle sur la richesse finale de l'investisseur, ainsi que la performance des modèles alternatifs par rapport au « vrai modèle ». En effet, il s'agit de calculer la richesse finale étant donnée la composition de l'actif risqué ainsi que l'allocation optimale calculée par le modèle pris en considération. Les figures (3,4, 5, 6 et 7) récapitulent les résultats de cette étude.

Afin de répondre à notre question clé, visant à détecter la composante qui aura le plus d'impact sur la richesse finale de l'investisseur (soit une mauvaise spécification de la copule, soit aussi une mauvaise spécification des marginales), nous essayons de comparer la richesse finale que procure le « vrai modèle » à celle obtenue par le modèle alternatif. Ainsi, le "vrai modèle" est pris comme benchmark, qui va servir de base pour comparer les autres modèles. Nous rapportons ainsi, la richesse finale du modèle alternatif à celle du « vrai modèle », le résultat obtenu nous permet de représenter la fonction de répartition empirique de ce rapport, et nous permet d'étudier la dominance stochastique des différentes alternatives<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Notons que ces conclusions se limitent uniquement aux situations pour lesquels le modèle candidat est moins performant que le vrai modèle i.e. le quadrant où le rapport des richesses finales est inférieurs à 1. Nous étudions dans la section suivante la performance globale des différentes stratégies, pour tenir compte à la fois des potentialités de sous et de sur-performance du modèle, à travers une mesure de performance appropriée.

TAB. 5. Allocation optimale : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 12 mois

<b>Fond EW</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-3.67	-70.02	-53.67	-6.79
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-2.38	-55.57	-40.76	-3.75
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-22.21	-94.67	-81.95	-5.66
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-3.75	-73.11	-56.99	-4.39

<b>Fond MV</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-3.71	-75.31	-60.74	6.30
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-2.31	-60.75	-46.82	3.22
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-25.95	-99.68	-97.87	46.05
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-3.64	-78.21	-63.88	7.24

<b>Fond SRP</b>				
	C Gaus- sienne	C Clay- ton	C.Gumbel	Gaussian <i>Marg</i>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-2.99	-69.99	-54.79	10.14
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-1.91	-55.70	-41.86	7.81
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-6.31	-98.94	-94.90	23.57
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-2.93	-73.08	-58.03	8.39

Ainsi, nous constatons que pour des horizons d'investissement courts, horizon =1 mois, l'investisseur est plutôt sensible à une mauvaise spécification de la copule, particulièrement pour les copules archimédiennes (rotated-Clayton et rotated-Gumbel). Ceci est vrai pour les différentes configurations du fonds (EW, MV ou SRP). Ainsi, nous envisageons qu'une mauvaise spécification du modèle, utilisant à titre d'exemple une copule gaussienne, peut limiter les pertes par rapport à celles que peut subir l'investisseur en cas d'utilisation d'un modèle supposant une copule de type archimédienne (rotated-Clayton ou rotated-Gumbel). On peut noter, à titre d'exemple, pour le cas d'un fonds EW, et pour le cas d'un investisseur ayant des préférences de types " $\alpha = 0.4 ; \beta = 0.8$ ", que la probabilité que la richesse finale procurée par le modèle utilisant la copule rotated-Clayton (modèle 1) soit inférieur de 5% à celle donnée par le « vrai modèle », est de l'ordre de 38%  $\left\{ \mathbb{P} \left[ \frac{W_T^{Cl}}{W_T^*} \leq 0.95 \right] = 38\% \right\}$ . Cette dernière est seulement de l'ordre de 5%, pour le cas du modèle utilisant la copule Gaussienne (modèle 2).

Dans la ligne des résultats tirées sur l'allocation optimale, nous mentionnons que l'impact d'une telle mauvaise spécification (de la copule) est d'autant plus élevé que l'investisseur est censé être moins averse au risque, ayant des préférences de types " $\alpha = 0.4 ; \beta = 0.5$ ". En effet on peut lire, pour le cas de cet investisseur, et pour le cas du fonds EW, que la probabilité que la richesse finale procurée par le modèle utilisant la copule rotated-Clayton soit inférieur de 1% à celle donnée par le "vrai modèle", est de l'ordre de 50%

$\left\{ \mathbb{P} \left[ \frac{W_T^{CI}}{W_T^*} \leq 0.99 \right] = 50\% \right\}$ . Cette dernière est seulement de 18% pour le cas d'un investisseur, supposé être plus averse au risque, ayant des préférences de types " $\alpha = 0.1; \beta = 0.5$ ".

Pour des horizons d'investissement plus longs (horizon =12 mois), le constat semble être le même pour les deux types de fonds, EW et SRP. De ce fait, l'investisseur le moins averse au risque est toujours plus sensible à une mauvaise spécification de copules de type archimédiennes. Cependant, pour le cas du fonds "MV", la tendance semble s'inverser. En effet, toujours pour le cas d'un investisseur dont les préférences sont de types " $\alpha = 0.4; \beta = 0.8$ ", une mauvaise spécification des marginales semble avoir moins d'impact que celui du à une mauvaise spécification de copules, y compris celle supposant une copule Gaussienne. A cet effet, nous pouvons lire, que la probabilité que la richesse finale procurée par le modèle utilisant la copule de Gaussienne soit inférieure de 20% à celle donnée par le "vrai modèle", est de l'ordre de 42%  $\left\{ \mathbb{P} \left[ \frac{W_T^{CI}}{W_T^*} \leq 0.80 \right] = 42\% \right\}$ . Cette dernière est seulement de 18% pour le cas d'une mauvaise spécification de marginales.

La dernière analyse que nous menons consiste à comparer les modèles candidats sur la base d'une mesure de performance. Cette dernière consiste à calculer le rapport des gains potentiels aux pertes potentielles. Elle permet de valider une sous-performance ou aussi une éventuelle surperformance par rapport au "vrai modèle". En effet, étant donné le vecteur de la richesse finale, nous calculons la mesure de performance correspondante et nous comparons la variation relative par rapport à celle obtenue par le "vrai modèle". Dans cette intention, nous utilisons la mesure de performance qui découle du cadre d'analyse de Zakamouline (2014), résultante du programme de maximisation de la richesse de l'investisseur, et correspondante au ratio de Farinelli-Tibelletti. Ce dernier est défini à travers l'expression suivante :

$$FT_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\sqrt[\alpha]{UPM_{\alpha}(x,r)}}{\sqrt[\beta]{LPM_{\beta}(x,r)}} \quad (4.1)$$

Zakamouline (2014), mentionne qu'étant donnée que la fonction d'utilité de l'investisseur est croissante en les valeurs de  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , le ratio de Farinelli-Tibelletti (FT) ne viole pas le principe de la dominance stochastique de premier ordre.

Nous analysons tout d'abord les résultats obtenus pour le cas du "vrai modèle". Ces résultats montrent, que ce dernier modèle s'adapte au mieux au programme d'un investisseur ayant des préférences de type " $\alpha = 0.4; \beta = 0.5$ ", pour lequel on obtient la performance la plus élevée, indépendamment du type du fonds et de l'horizon d'investissement choisis. Ainsi, ce dernier semble profiter de son faible degré d'aversion au risque pour allouer plus de richesse sur le fonds risqué, et bénéficier ainsi du potentiel de gains offert par cet actif.

La comparaison des modèles alternatifs par rapport au "vrai modèle" confirme les conclusions obtenues ci-dessus. Nous mentionnons surtout la sensibilité des investisseurs à une mauvaise spécification de copules, particulièrement de types archimédiennes, notamment pour le cas du fonds construit en "EW".

La tendance semble s'inverser pour le cas des configurations alternatives, soit MV et SRP. En effet, pour le cas du fonds SRP, les investisseurs sont plutôt sensibles à une mauvaise spécification des marginales. Avec notamment plus d'impact pour les horizons d'investissement éloignés (horizon =12 mois). Pour le cas du fonds "MV", les investisseurs sont toujours sensibles à une mauvaise spécification des marginales, mais le sont uniquement pour des horizons d'investissement courts (horizon =1 mois). Pour des horizons d'investissement éloignés, les investisseurs sont plutôt sensibles à une modélisation utilisant la copule Gaussienne.

Notons, que pour le cas de ces deux configurations, les modèles supposant des copules archimédiennes, semblent surperformer le "vrai modèle". Ainsi, allouer moins de richesse sur l'actif risqué, semble favoriser la performance des ces modèles.

Pour terminer, nous mentionnons le fait qu'une éventuelle sous-performance, due à une mauvaise spécification du modèle, affecte plus l'investisseur le moins averse au risque, matérialisé par des préférences de type " $\alpha = 0.4 ; \beta = 0.5$ ". Cependant, en cas d'une possible surperformance du modèle, notamment pour le cas de copules archimédiennes, observée sur les fonds MV et SRP, cela semble profiter plus pour le cas de l'investisseur le plus averse au risque, dont les préférences sont de types " $\alpha = 0.1 ; \beta = 0.5$ ".

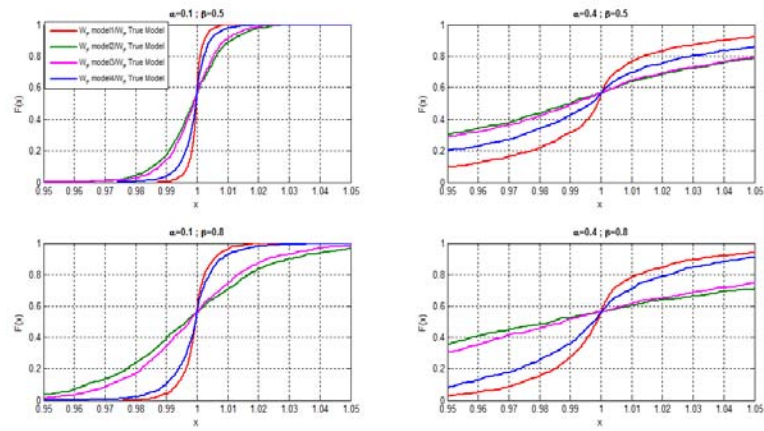


FIG. 2. Richesse finale relative : Cas "EW" ; Horizon 1 mois

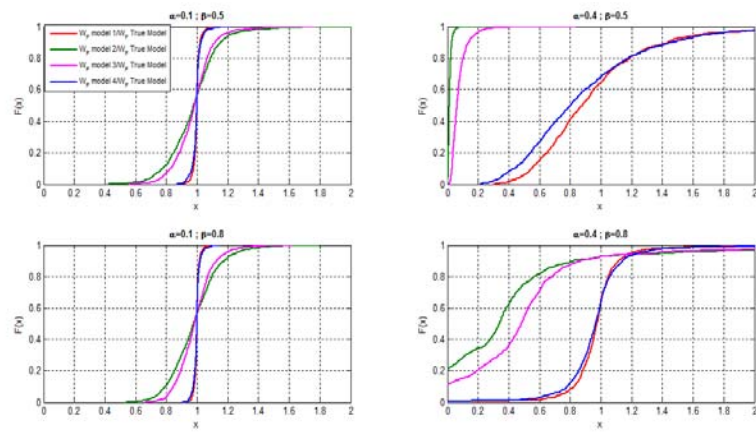


FIG. 3. Richesse finale relative : Cas "EW" ; Horizon 12 mois



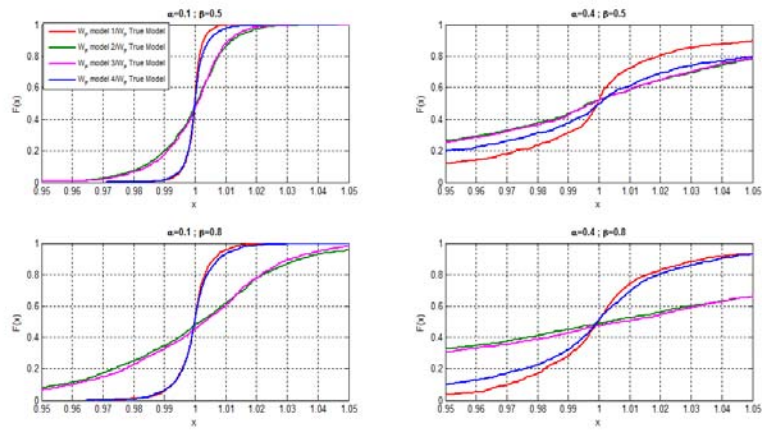


FIG. 4. Richesse finale relative : Cas "MV" ; Horizon 1 mois

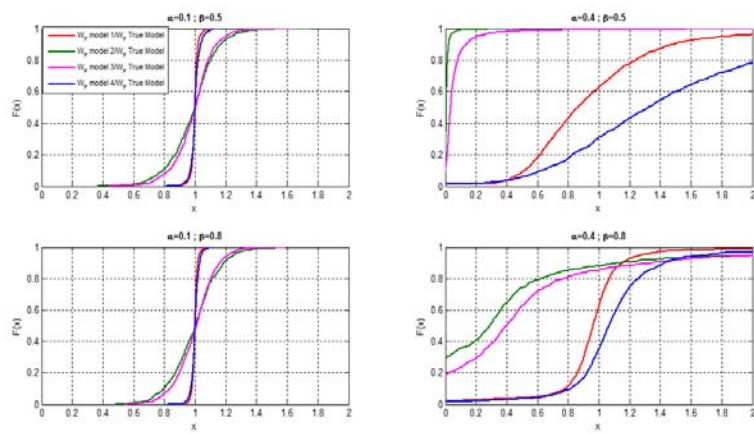


FIG. 5. Richesse finale relative : Cas "MV" ; Horizon 12 mois

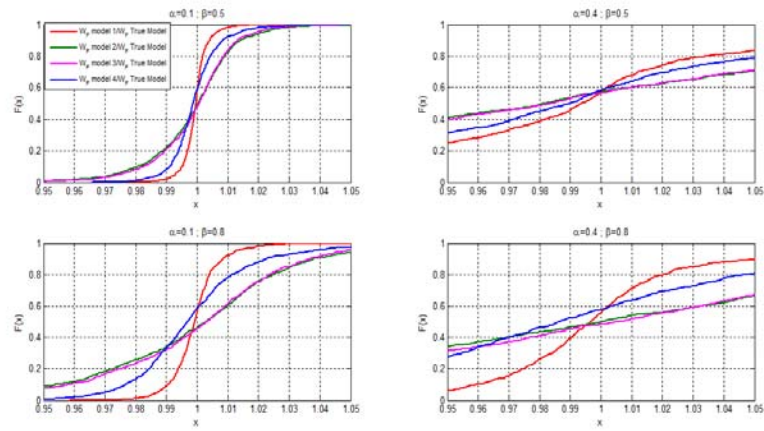


FIG. 6. Richesse finale relative : Cas "SRP" ; Horizon 1 mois

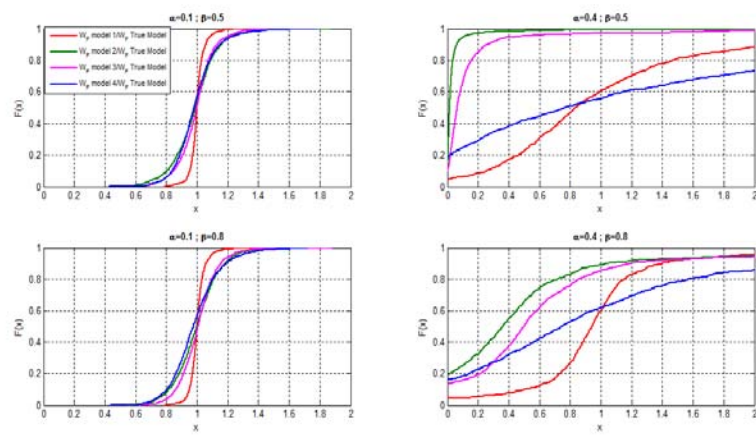


FIG. 7. Richesse finale relative : Cas "SRP" ; Horizon 12 mois

TAB. 6. Mesure de performance : Farinelli-Tibelli; cas du "vrai modèle"

<b>Horizon =1 mois</b>			
<i>F-T</i> ( $\alpha, \beta$ )			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.0158	0.0059	0.0131
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.0077	0.0031	0.0065
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	<b>1.213</b>	<b>0.8578</b>	<b>0.9587</b>
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	0.661	0.504	0.6065

<b>Horizon =3 mois</b>			
<i>F-T</i> ( $\alpha, \beta$ )			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.014	0.0078	0.0146
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.007	0.004	0.0072
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	<b>1.585</b>	<b>1.038</b>	<b>1.366</b>
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	0.755	0.557	0.706

<b>Horizon =12 mois</b>			
<i>F-T</i> ( $\alpha, \beta$ )			
	<b>EW</b>	<b>MV</b>	<b>SRP</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.0278	0.008	0.0211
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.0136	0.0043	0.0104
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	<b>2.026</b>	<b>1.679</b>	<b>2.163</b>
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	1.152	0.7921	0.0104

TAB. 7. Mesure de Performance : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 1 mois

<b>Fonds EW</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0	-0.632	-1.265	-0.632
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0	-1.298	-7.971	-0.807
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-1.046	-4.929	-1.298	-1.298
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	0.121	-1.543	-2.087	-0.635

<b>Fonds MV</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	5.084	27.118	45.762	-3.389
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	3.225	22.580	41.935	-3.225
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	3.885	20.564	23.443	-8.894
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	0.376	9.365	12.380	-2.222

<b>Fonds SRP</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	-6.870	35.114	34.351	-48.854
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	-7.692	30.769	29.230	-46.153
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	3.869	28.851	26.066	-18.201
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-1.368	11.343	10.717	-15.812

TAB. 8. Mesure de Performance : Variation relative par rapport au "Vrai modèle" ; Horizon 12 mois

<b>Fonds EW</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	0.359	-2.517	-1.798	0
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	0.735	0	0	0
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	2.408	-14.942	-11.285	-0.947
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	0.095	-0.564	-0.694	-0.312

<b>Fonds MV</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	3.75	60.00	80.00	15.00
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	2.325	58.139	72.093	13.95
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	-5.905	9.149	12.591	2.090
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	-0.378	14.631	18.583	2.322

<b>Fonds SRP</b>				
	<b>C Gaus- sienne</b>	<b>C Clay- ton</b>	<b>C.Gumbel</b>	<b>Gaussian Marg</b>
$\alpha = 0.1; \beta = 0.5$	16.113	50.236	53.080	-65.876
$\alpha = 0.1; \beta = 0.8$	16.346	50.00	51.293	-62.50
$\alpha = 0.4; \beta = 0.5$	17.027	23.303	20.904	-31.937
$\alpha = 0.4; \beta = 0.8$	16.346	50.00	51.923	-62.50

## 5. Validation empirique

Nous rappelons l'objectif de ce chapitre visant à étudier l'impact d'une mauvaise spécification dans une modélisation de type GARCH-Copules dans le cadre d'un problème d'allocation de portefeuilles. En effet, nous envisageons valider, à travers des données empiriques, les premières conclusions tirées de notre étude de simulation et de se prononcer sur l'impact du choix de la fonction copule ainsi que celles des distributions marginales, sur la composition du portefeuille et la richesse finale de l'investisseur. Nous détaillons dans la suite les différents résultats de notre illustration empirique.

**5.1. Description des données.** Nous envisageons appliquer notre méthodologie sur un portefeuille synthétisant un fonds investit sur 3 actifs ayant des profils de risque différents, soit respectivement l'Eurobond pour caractériser un investissement dans une obligation, l'indice S&P 500 caractérisant un investissement dans un indice boursier, et finalement un investissement dans un indice de matière première lié au pétrole brut "Brent". Nous considérons ainsi un fonds investit sur des contrats « Futures » liés à ces différents actifs. Notre échantillon d'analyse comprend 124 observations relatives aux rendements mensuels réalisés sur les trois actifs, et s'étend sur la période du 01/08/2003 au 1/12/2013, soit dix ans d'observations.

Les séries de rendements, ainsi que l'évolution relative des différents actifs sont représentées dans la figure (8). Dans cette figure nous pouvons distinguer, grâce notamment à la variabilité des séries de rendements, le

profil de risque de différents actifs. D'un côté l'Eurobond, matérialisant un investissement dans l'obligation, est l'actif le moins risqué. De l'autre côté l'indice de matière première lié au pétrole brut Brent semble être l'actif le plus risqué. Les statistiques descriptives, résumées dans le tableau (9), confirment ces constatations. Nous vérifions surtout le caractère asymétrique des séries de rendement de l'indice S&P 500 ainsi que celui de l'indice de matière première. Nous mentionnons aussi la corrélation négative entre l'actif matérialisant l'investissement dans une obligation, soit l'Eurobond, et celui lié à l'indice S&P 500 et aussi à l'indice de matière première (pétrole brut Brent). Ces résultats suggèrent que le marché obligataire évolue inversement par rapport aux marchés actions et matières premières. Ceci matérialise la situation atypique que connaissent les marchés, surtout que la période d'étude englobe la crise financière récente des "Subprime". Dans un tel contexte, le marché des actions ainsi que celui des matières premières s'effondrent, comme le démontrent les valeurs négatives extrêmes enregistrées respectivement sur ces deux marchés (-19% et -39%). Ne profitant pas ainsi de la baisse des taux d'intérêt sur le marché obligataire, les investisseurs sur les marchés actions et des matières premières sont obligés de revoir à la baisse leurs flux futurs.

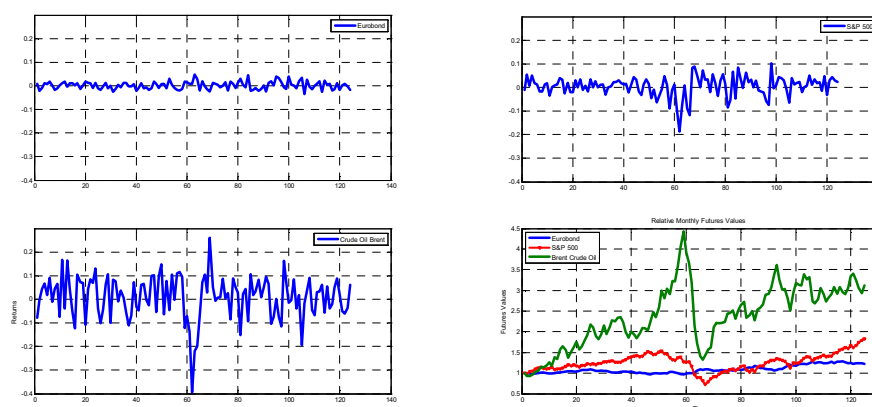


FIG. 8. Séries de rendements et évolution relative

**5.2. Méthodologie et Résultats.** Nous consacrons cette section à la description de notre méthodologie et à la présentation de différents résultats permettant de répondre à notre problématique.

En effet, pour répondre à la question relative à l'impact d'une mauvaise spécification dans la modélisation des séries de rendements des actifs composant le portefeuille, la première étape consiste à distinguer le « vrai modèle » ou aussi la meilleure spécification GARCH-Copule s'ajustant au mieux aux caractéristiques statistiques de ces actifs. Ce travail est ainsi similaire à celui développé dans le cadre du chapitre précédent. En effet, afin de pouvoir filtrer les séries de rendements des différents actifs en ce qui concerne la présence d'un éventuel problème d'hétéroscédasticité dans les données, nous distinguons entre deux spécifications de type GJR-GARCH. Il s'agit

TAB. 9. Statistiques descriptives

	<b>Eurobond</b>	<b>S&amp;P 500</b>	<b>Crude Oil</b>
<b>Moyenne</b>	0.0016	0.0049	0.0092
<b>Min</b>	-0.0358	-0.1856	-0.3948
<b>Max</b>	0.0467	0.1023	0.2602
<b>Ecart-type</b>	0.0162	0.0427	0.0902
<b>Skewness</b>	0.3335	-1.0950	-0.8505
<b>Kurtosis</b>	2.8792	5.8630	5.4964
<b>JB Test</b>	2.3742	67.1300	47.1484
<b>Matrice de Corrélation</b>	<b>1</b>	<b>-0.3807</b>	<b>-0.3790</b>
		<b>1</b>	<b>0.4504</b>
			<b>1</b>

de tester les capacités d'adéquation d'une spécification GJR-GARCH sous l'hypothèse de normalité des innovations standardisées, contre une deuxième spécification supposant une distribution de type Skewed-t. Ceci étant fait, nous sélectionnons par la suite la meilleure copule modélisant au mieux la structure de dépendance se trouvant entre ces innovations. Nous distinguons ainsi entre une copule Gaussienne, une copule de Student, la rotated-Clayton ainsi que la rotated-Gumbel. En effet, étant donnée la corrélation négative qui se trouve entre les actifs, spécifiquement entre l'Eurobond et les deux indices S&P 500 et matières premières, les versions standards liées aux deux copules archimédiennes (Clayton et Gumbel), sont incapables de tenir compte de cet aspect. Ces copules sont conçues pour tenir compte uniquement de la dépendance positive entre les variables.

Ainsi, afin de prendre en compte cette spécificité, nous utilisons deux versions modifiées pour les deux fonctions copules archimédiennes. En effet, tel que mentionné dans Patton (2012), pour le cas bivarié, Il s'agit d'introduire une rotation à  $90^\circ$  pour l'une ou l'autre des deux variables, ainsi par exemple pour la copule de Clayton :

$$(1 - U_{1t}, U_{2t}) \sim C_{Clayton}(\kappa) \quad (5.1)$$

Pour le cas de notre portefeuille trivarié, et vu que la corrélation négative concerne essentiellement la relation entre le marché obligataire et les deux marchés actions et matières premières, nous envisageons introduire une rotation à la fonction copule à travers la modification de la première variable (celle liée à la série de rendement de l'Eurobond). On aura ainsi :

$$(1 - U_{1t}, U_{2t}, U_{3t}) \sim C_{Clayton}(\kappa)$$

Des grandes valeurs pour le paramètre  $\kappa$  de la copule, impliquent une grande dépendance négative entre la première variable et les deux autres variables (qui correspond exactement au cas de nos données). Ceci implique aussi une dépendance de queue dans le deuxième quadrant (i.e.  $U_1 \rightarrow 1$  et  $U_2 \rightarrow 0$ ), plutôt que dans le troisième quadrant pour la copule de Calyton habituelle. Le même type de rotation peut être appliqué au cas de la copule de Gumbel et implique ainsi une dépendance de queue dans le quatrième

quadrant (i.e.  $U_1 \rightarrow 0$  et  $U_2 \rightarrow 1$ ), plutôt que dans le premier quadrant pour la copule de Gumbel classique.

Dans l'objectif de sélectionner la meilleure copule, parmi les quatre fonctions copules candidates, et comme pour le cas du chapitre précédent, nous nous référons au test d'adéquation basé sur la statistique de Cramer-Von Mises " $S_n$ " telle que spécifiée dans le premier chapitre.

Une fois validé "le vrai modèle" relatif à la fois aux distributions marginales et à la fonction copule, l'étape suivante consiste à utiliser ce dernier pour simuler les trajectoires de rendements sur l'horizon d'investissement choisi. Ceci étant fait, nous déduisons l'allocation optimale entre l'actif sans risque et le fonds ainsi que la richesse finale de l'investisseur sur la base de rendements réalisés ex-post. A ce niveau nous avons retenu, deux horizons d'investissement, l'horizon  $H_1 = 1$  mois et celui  $H_2 = 3$  mois.

Pour terminer, et afin de pouvoir comparer la performance des différents modèles sélectionnés, nous avons choisi de diviser notre échantillon de base comportant 124 observations, en deux sous échantillons. Un premier échantillon d'étude servant à l'estimation de paramètres des modèles. Un deuxième échantillon de test pour le calcul de la richesse finale procurée par les différents modèles. Ainsi, afin de parcourir toute la période de test, nous optons pour une fenêtre mobile utilisant à chaque fois un historique de 100 observations, couvrant ainsi une période de 8 ans, permettant d'estimer les paramètres du modèle sélectionné, simuler la trajectoire de rendement du portefeuille, déterminer l'allocation optimale et par la suite la richesse finale de l'investisseur sur l'horizon d'investissement spécifié. Selon ce procédé, la période de test s'étend sur le reste des observations, soit une période de deux ans couvrant 24 observations pour un horizon d'investissement mensuel.

**5.3. Distributions marginales et structure de dépendance.** Dans cette section nous reportons les résultats des estimations des paramètres, par maximum de vraisemblance, pour les différentes spécifications AR(1)-GJR GARCH(1,1) étudiées. En effet, il s'agit de sélectionner la meilleure spécification pour modéliser la dynamique des séries de rendements des actifs. Ainsi, nous choisissons entre une spécification GJR- GARCH supposant des marginales distribuées selon une Skewed-t, notée GJR-GARCH-SkT, et une spécification supposant des marginales gaussiennes, que l'on note GJR-GARCH-N. Les résultats que nous présentons dans les tableaux 10 et 11, concernent les estimations développées sur la base du premier échantillon "in-the-sample", portant sur la période allant de  $t=1$  à  $t=100$ . Les autres résultats seront omis du fait que le processus d'estimation est conduit d'une manière dynamique sur toute la période de test. Pour résumer, les résultats des estimations, selon la mesure d'adéquation d'AKAIKE, montrent l'adéquation totale de la spécification avec marges gaussiennes pour modéliser la dynamique de la série de rendements de l'actif "Eurobond". Pour ce dernier, étant l'actif le moins asymétrique, comme le montre les résultats des statistiques descriptives, une spécification supposant des marginales gaussiennes semble être suffisante pour modéliser la dynamique de sa série de rendement. Pour les deux autres actifs, supposés être plus risqués et plus asymétriques, la spécification avec des marginales gaussiennes est incapable de tenir compte de ces caractéristiques. La spécification avec des marginales



Skewed-t est donc plus appropriée. Pour l'ensemble de ces considérations, et surtout pour les capacités de généralisation de la spécification utilisant des marges Skewed T, du faite que la distribution gaussienne n'est qu'un cas particulier issu de la distribution Skewed-t, nous optons pour cette dernière spécification comme étant le 'vrai modèle' pour modéliser la dynamique des marginales.

Etant donné le choix fait sur les distributions conditionnelles des marginales, l'étape suivante concerne le choix de la fonction copule ayant décrit au mieux la structure de dépendance. Ce choix est fait sur la base de la statistique de Cramer-Von Mises " $S_n$ ". Ainsi, la meilleure copule candidate est celle qui minimise la valeur de cette statistique, minimisant par la suite la distance par rapport à la copule empirique. Nous procédons à ce choix pour le cas des huit sous-échantillons de la période de test. En effet, nous supposons stable le choix de la fonction copule ainsi que son paramètre durant toute la période du sous-échantillon, fixée à une durée de 3 mois, et que nous considérons suffisante pour garder la stabilité de la fonction copule et de son paramètre. Ainsi, nous actualisons, les estimations des paramètres, ainsi que la sélection de la meilleure copule, pour chaque nouveau sous-échantillon. Nous reportons les résultats dans le tableau 12. Ces résultats suggèrent l'adéquation de la copule "rotated Clayton" comme étant la meilleure copule, sur l'ensemble de la période de test. Ainsi, le vrai modèle se construit autour d'une spécification GJR-GARCH avec des marges Skewed-T, pour modéliser la dynamique des marginales, et la copule "roated Calyton", pour modéliser la structure de dépendance.

TAB. 10. Résultats des estimations : Spécification GJR-GARCH-N

	<b>Eurobond</b>	<b>S&amp;P 500</b>	<b>Crude Oil</b>
$\mu$	0,00168	0,00202	0,0152
$\phi$	0,1237	0,1098	0,0717
$\omega$	0	0.0001	0.0056
$\alpha$	0.0833	0	0
$\beta$	-0.0833	0.3843	0.6713
$\gamma$	0.9389	0.7745	0
<b>AIC</b>	-537,837	-366,316	-193,833

TAB. 11. Résultats des estimations : Spécification GJR-GARCH-Sk-T

	<b>Eurobond</b>	<b>S&amp;P 500</b>	<b>Crude Oil</b>
$\mu$	0,0010	0,0026	0,0162
$\phi$	0,0898	0,0478	0,0272
$\omega$	0	0.0001	0.0018
$\alpha$	0.0301	0.0012	0
$\beta$	-0.0301	0.5522	0.2783
$\gamma$	0.9847	0.7133	0.6296
$\nu$	102.0100	102.0100	102.0100
$\lambda$	0.3647	-0.5727	-0.3272
<b>AIC</b>	-532,709	-368,009	-190,096

**5.4. Composition du Fond, allocation optimale et richesse finale.** Dans cette section, nous reportons et nous analysons les résultats concernant la composition de l'actif risqué, l'allocation optimale ainsi que la richesse finale que procure chacun des modèles étudiés. A ce niveau, nous nous intéressons aux résultats pour un horizon d'investissement de 1 mois. Nous étudions dans la section suivante l'impact d'un horizon d'investissement plus éloigné sur ces résultats.

5.4.1. *Composition du fonds.* Nous commençons par analyser la composition du fonds risqué, en matière de répartition de la richesse sur les trois actifs le composant. En effet, on pense que les éventuelles divergences entre les modèles, trouvent une explication directe dans les différences en matière de répartition de la richesse. L'évolution de la composition de l'actif risqué, pour le cas du « vrai modèle », utilisant la copule rotated-Clayton, combinée à des marges Skewed-T, est donnée dans la figure (9). Dans cette figure nous pouvons vérifier les différences en matière d'allocation pour un Fond composée selon les recommandations de l'approche moyenne-variance (MV), et celui composé sous un objectif de maximisation du ratio de Sharpe (SRP). Selon ces résultats, le fonds (MV) alloue plus de richesse sur l'actif le moins risqué, soit "L'eurobond". Ceci est logique dans la mesure où ce portefeuille est composé selon une logique de minimisation de risque. Le fonds (SRP), alloue la part de la richesse la plus importante sur l'indice S&P 500, notamment en période de tendance haussière des marchés.

Nous remarquons aussi, que les divergences les plus importantes sont enregistrées en période de tendance haussière des marchés. Ainsi par exemple, l'allocation sur l'indice S&P 500 est trois fois plus grande en cette période (dernier trimestre de la période de test), qu'en cas de période de stabilité des marchés. Par contre, en période de grande instabilité des marchés financiers (début du troisième trimestre de notre période de test), les deux profils d'allocation sont beaucoup plus en phase quand à l'allocation sur l'actif le moins risqué (Eurobond). Ce dernier étant l'actif le plus stable par rapport au deux autres actifs composant le portefeuille (S&P 500 et Crude Oil).

Ainsi, on s'attend à ce que les divergences entre les différents modèle étudiés, en matière d'allocation optimale et de richesse finale, seront beaucoup

TAB. 12. Choix de copules : Résultats du test d'adéquation

	Copula	$LLF$	$S_n$	$p$ value
<b>Sub-sampel 1</b>	Gaussian	12.800	0.0265	0.473
	Student	12.797	0.02649	0.439
	Rot. Clayton	<b>14.382</b>	<b>0.02923</b>	<b>0.604</b>
	Rot. Gumbel	7.582	0.06328	0.010
<b>Sub-sampel 2</b>	Gaussian	13.127	0.0348	0.159
	Student	13.032	0.0348	0.175
	Rot. Clayton	<b>15.597</b>	<b>0.0232</b>	<b>0.827</b>
	Rot. Gumbel	8.9519	0.0588	0.033
<b>Sub-sampel 3</b>	Gaussian	16.953	0.0358	0.145
	Student	16.830	0.0358	0.158
	Rot. Clayton	<b>21.360</b>	<b>0.0284</b>	<b>0.670</b>
	Rot. Gumbel	11.357	0.0735	0.011
<b>Sub-sampel 4</b>	Gaussian	16.228	0.0346	0.191
	Student	16.175	0.0346	0.188
	Rot. Clayton	<b>20.057</b>	<b>0.0265</b>	<b>0.726</b>
	Rot. Gumbel	10.704	0.0721	0.006
<b>Sub-sampel 5</b>	Gaussian	17.417	0.0310	0.260
	Student	17.312	0.0310	0.277
	Rot. Clayton	<b>20.326</b>	<b>0.0310</b>	<b>0.545</b>
	Rot. Gumbel	11.458	0.0706	0.007
<b>Sub-sampel 6</b>	Gaussian	21.008	<b>0.0259</b>	0.500
	Student	20.938	<b>0.0259</b>	0.496
	Rot. Clayton	<b>24.331</b>	0.0281	<b>0.610</b>
	Rot. Gumbel	13.468	0.0731	0.011
<b>Sub-sampel 7</b>	Gaussian	20.590	<b>0.0294</b>	0.351
	Student	20.497	<b>0.0294</b>	0.315
	Rot. Clayton	<b>22.607</b>	0.0325	<b>0.465</b>
	Rot. Gumbel	12.948	0.0748	0.005
<b>Sub-sampel 8</b>	Gaussian	19.043	0.0416	0.076
	Student	18.976	0.0415	0.079
	Rot. Clayton	<b>22.159</b>	<b>0.0372</b>	<b>0.319</b>
	Rot. Gumbel	11.365	0.0935	0.000

plus accentuées en période de tendance haussière qu'en période d'instabilité des marchés financiers.

5.4.2. *Allocation optimale.* Etant donnés ces résultats, nous avons reporté dans la figure (13), pour le cas du "vrai modèle", l'évolution de l'allocation optimale sur le Fond risqué résultante de la résolution du programme d'optimisation donné par l'équation (3.11). D'après cette figure nous vérifions que moins l'investisseur est averse au risque, spécifiquement pour les rendements supérieurs au seuil de référence ( $\alpha = 0.4$ ), plus il aura tendance à allouer de la richesse sur le fonds risqué. Ce dernier est tenté surtout par

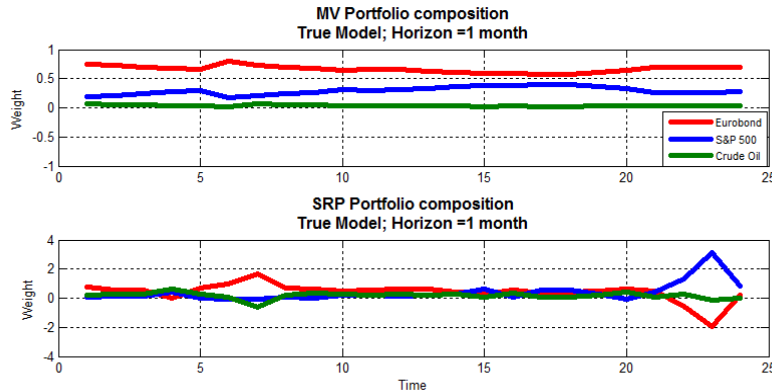


FIG. 9. Composition du fonds : "vrai modèle"

le fonds SRP, celui construit dans un objectif de maximisation de la performance. Cependant, étant plus averse au risque ( $\alpha = 0.1$ ), il alloue moins de richesse sur le fonds risqué, tout en privilégiant le fonds MV, construit dans une logique de minimisation de risque. Notons aussi, que les différences d'allocation entre les trois configurations possibles (EW, MV et SRP) sont beaucoup plus prononcées pour le cas de l'investisseur le moins averse au risque, celui ayant les préférences de types ( $\alpha = 0.4; \beta = 0.8$ )

5.4.3. *Richesse finale.* La figure (14) retrace l'évolution de la richesse de l'investisseur tout au long de la période de test, donnée toujours par le vrai modèle, pour les différentes configurations d'allocation. Cette figure illustre les performances du fonds composé selon les critères de l'approche moyenne-variance (MV). Pour ce dernier la richesse de l'investisseur est toujours supérieure à celle donnée par les deux autres configurations (EW, et SRP). Ceci est d'autant vrai que l'allocation sur le fonds lui même est élevée aussi. Nous mentionnons aussi que les différences par rapport aux deux autres configurations (EW et SRP) sont plus marquées pour le cas de l'investisseur dont les préférences sont de types ( $\alpha = 0.4; \beta = 0.8$ ). Ainsi, nous pouvons dire que plus l'investisseur est censé avoir du goût pour le risque, plus il a tendance à investir sur le fonds risqué composé selon les critères de l'approche MV, et plus sa richesse est supérieure à celle qu'il aurait pu l'obtenir en investissant sur le fonds (EW) ou (SRP). La figure (15) confirme cette dernière constatation. En effet, elle retrace la richesse terminale de l'investisseur<sup>4</sup> en fonction des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  définissant ses préférences en termes d'aversion au risque. Elle illustre les performances du fonds (MV), plus particulièrement pour le cas de l'investisseur le moins averse au risque (pour les rendements qui sont supérieurs au seuil de référence  $\alpha = 0.4$ ).

5.4.4. *Impact d'une mauvaise spécification du modèle.* La dernière analyse que menons concerne l'impact de l'utilisation d'une mauvaise spécification dans le modèle copule sur la richesse finale de l'investisseur. Ainsi, pour chacune des configurations du fonds risqué (EW, MV ou SRP), nous

<sup>4</sup>Richesse finale de l'investisseur au bout de la période de test, équivalente à une stratégie d'investissement portant sur une période de 2 ans avec un rebalancement mensuel.

déterminons l'impact de chacune des composantes du modèle sur la richesse finale de l'investisseur.

Les résultats de cette analyse sont résumés dans les figures 16, 17 et 18. ils montrent tout d'abord des disparités entre les différentes configurations du fonds risqué, ainsi que des changements par rapport aux préférences de l'investisseur.

En effet, la configuration du fonds (EW) est celle qui minimise l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle. C'est uniquement pour le cas de l'investisseur le moins averse au risque ( $\alpha = 0.4 ; \beta = 0.8$ ), que nous pouvons distinguer un impact négatif sur la richesse finale, dû surtout à une mauvaise spécification des marginales (Modèle 4). L'investisseur le plus averse au risque semble être insensible face au choix du modèle. Concernant les deux autres configurations (MV et SRP), l'impact d'une mauvaise spécification des marginales est beaucoup plus prononcé. En effet, sur la configuration SRP, c'est toujours l'investisseur le moins averse au risque qui est le plus sensible à ce type de mauvaise spécification dans le modèle. Cet impact est d'autant plus élevé pendant les périodes d'instabilité des marchés.

Pour le cas de la configuration MV, l'investisseur le moins averse au risque est toujours le plus sensible face à une modélisation utilisant une mauvaise spécification des marginales. Toutefois, nous vérifions que cette sensibilité est marquée par deux phases : Une première phase, là où une mauvaise spécification des marginales semble profiter à ce type d'investisseur, lui permettant de prétendre à une richesse finale plus importante que celle procurée par les autres modèles, particulièrement le "vrai-modèle". Ceci coïncide avec les périodes de tendance haussière des marchés, là où le marché actions (SP&500) et le marché des matières premières (Crude Oil) évoluent à la hausse ; une deuxième phase, caractérisée par une détérioration de la richesse finale par comparaison avec les autres modèles. Cette phase coïncide avec les périodes de tendance baissière des marchés.

Pour résumer, nous pouvons dire que, pour des horizons d'investissement de court terme (horizon = 1 mois), les investisseurs semblent être insensibles au choix du modèle de la fonction copule. Toutefois, pour les investisseurs les moins averses au risque, une mauvaise spécification des marginales peut affecter considérablement le niveau de leurs richesses finales, notamment pour les configurations de type (SRP) et (MV). Cependant, sur la dernière configuration, nous avons pu vérifier qu'une spécification utilisant des marginales gaussiennes peut être bénéfique pour l'investisseur surtout en période de grande stabilité des marchés ou aussi en période de tendance haussière.

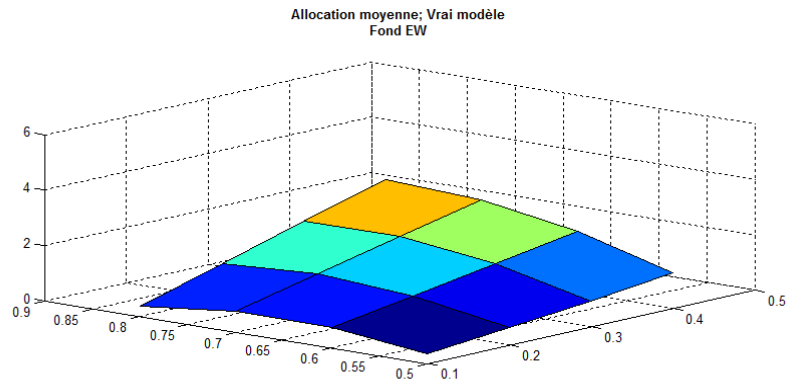


FIG. 10. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds EW ; Rebalancement mensuel

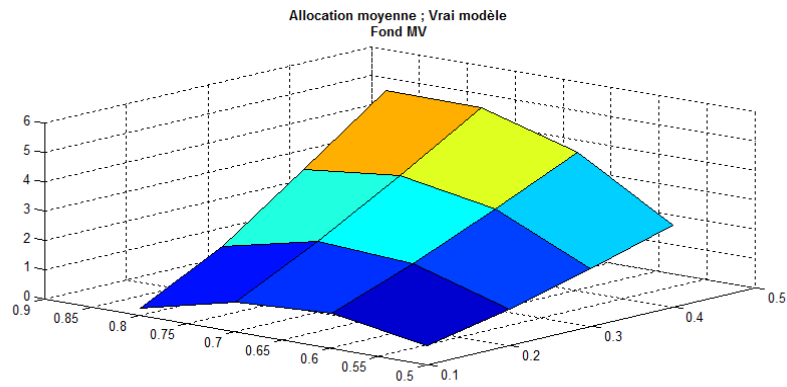


FIG. 11. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds MV ; Rebalancement mensuell

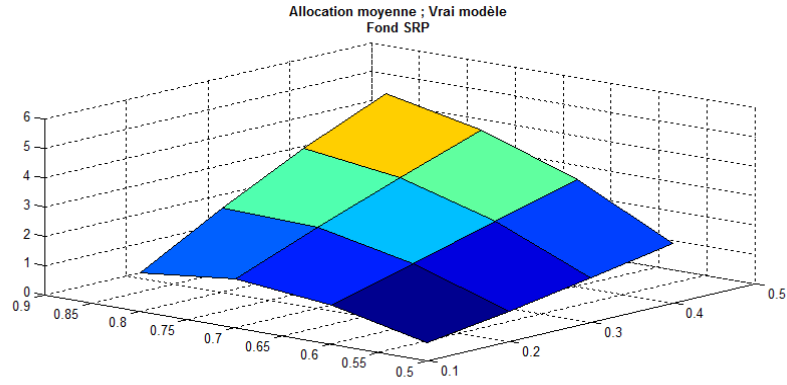


FIG. 12. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds SRP ; Rebalancement mensuel

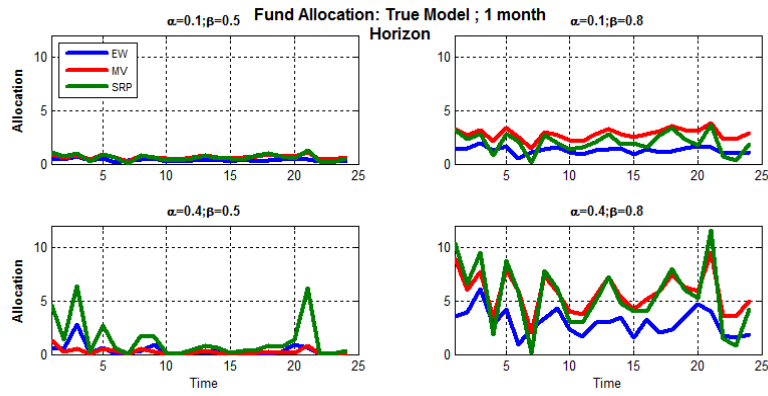


FIG. 13. Allocation optimale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon = 1 mois

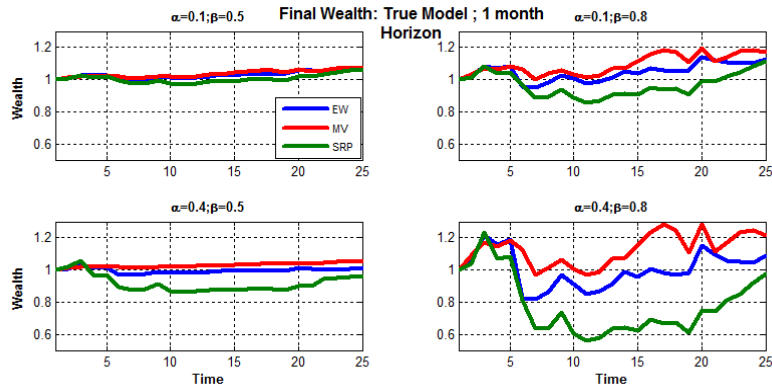


FIG. 14. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 1 mois

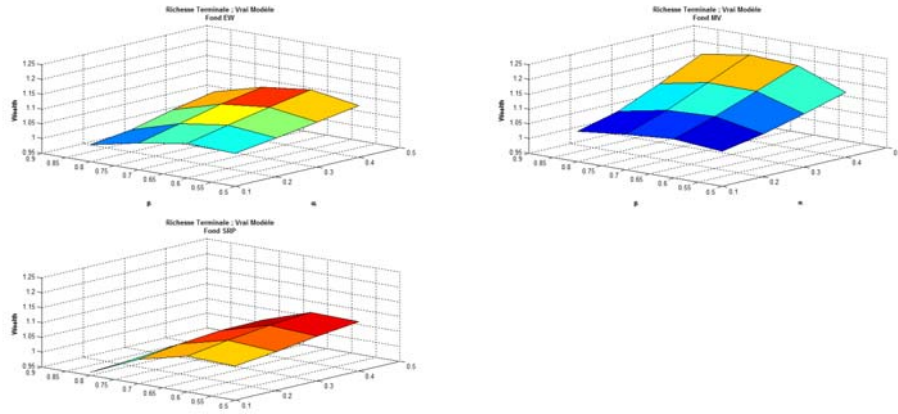


FIG. 15. Richesse terminale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 1 mois



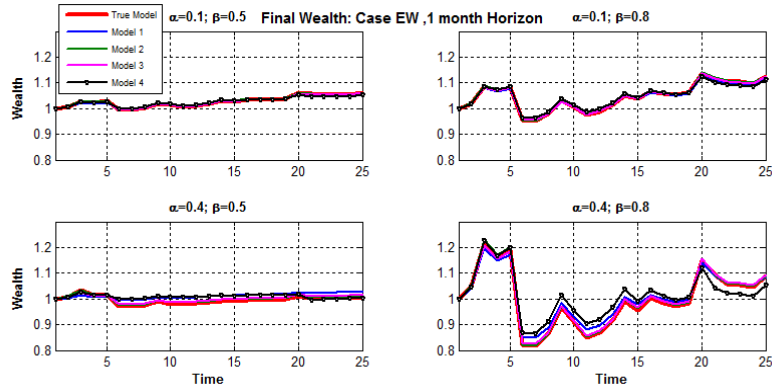


FIG. 16. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds EW ; tous les modèles

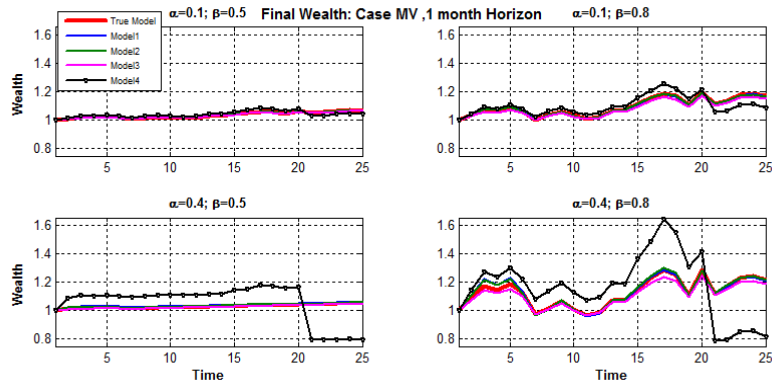


FIG. 17. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds MV ; tous les modèles

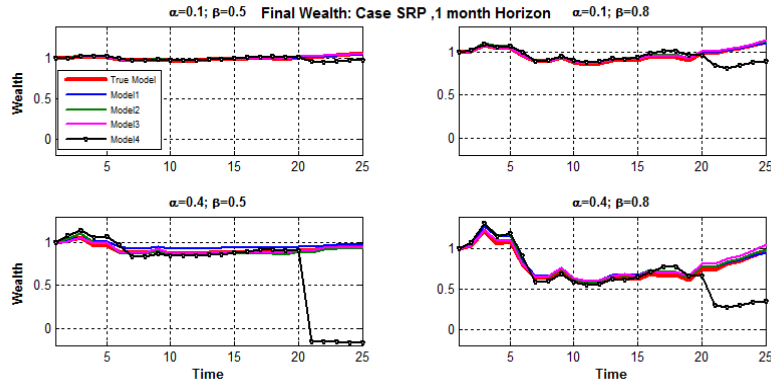


FIG. 18. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds SRP ; tous les modèles

**5.5. Impact de l'horizon d'investissement.** Dans la ligne de l'étude précédente, nous analysons dans cette section l'impact de l'horizon d'investissement sur les conclusions tirées ci dessus. Ainsi, il s'agit d'étudier les conséquences du changement de l'horizon d'investissement sur la composition de l'actif risqué, l'allocation optimale, ainsi que sur la richesse finale de l'investisseur, surtout en cas de mauvaise spécification du modèle.

Concernant la composition du fonds, nous vérifions toujours la même évolution surtout pour le fonds (MV), où l'actif le moins risqué, soit l'Eurobond, reste toujours l'actif le plus représenté, suivi de l'indice S&P 500 et de l'indice de matières premières (Crude Oil). Cependant, nous remarquons une nette revalorisation des pondérations sur le fonds (SRP), surtout concernant les allocations extrêmes enregistrées sur l'Eurobond et l'indice S&P 500. Désormais on obtient des pondérations plus stables.

Ainsi, les premières conséquences concernent surtout les allocations optimales entre le fonds et l'actif sans risque. Ceci est illustré, pour le cas du "vrai modèle", dans les figures 20, 21, 22 et 23. D'après ces figures nous vérifions une nette augmentation de l'allocation sur le fonds (SRP), enregistrée surtout pour le cas de l'investisseur dont les préférences sont de types ( $\alpha = 0.4; \beta = 0.5$ ). Ce dernier, étant moins averse aux risques, semble être sensible aux changements des caractéristiques statistiques de la distribution de rendements de ce type de fonds. Ceci nous renvoie aux résultats de la partie simulation, pour laquelle on a enregistré la même tendance toujours pour ce type d'investisseur.

Pour les autres configurations ainsi que pour les autres profils des investisseurs, nous attestons de la stabilité des allocations avec une nette diminution des différences entre les types de fonds, ce qui peut nous renseigner sur un éventuel rapprochement quand à leurs performances respectives.

En effet, concernant l'évolution de la richesse finale de l'investisseur, nous évoquons la même tendance que celle illustrée pour l'horizon d'investissement de 1 mois. Ainsi, la richesse finale que procure le fonds (MV) domine toujours celles des configurations (EW) et (SRP). Toutefois, on remarque une légère diminution des écarts, due essentiellement aux rapprochements des résultats enregistrés sur l'allocation optimale.

Finalement, concernant l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle sur la richesse finale de l'investisseur, nous avons enregistré surtout, la part de plus en plus importante due à une mauvaise spécification de la fonction copule. Désormais, l'investisseur n'est plus insensible face au choix de la fonction copule. En effet, pour le cas d'un fonds de type (MV), et toujours pour le cas de l'investisseur le moins averse au risque, une mauvaise spécification dans le modèle copule, utilisant la copule rotated-Gumbel, au lieu de la vraie copule (rotated-Clayton), peut altérer sensiblement la richesse finale de l'investisseur. (voir figure 27). Pour le même fonds, et pour la même type d'investisseur, une spécification du modèle utilisant des copules elliptiques (Gaussienne/ Student), peut en revanche améliorer la richesse finale de l'investisseur.

Pour terminer, Nous pouvons dire que, pour des horizons d'investissement plus éloignés, les investisseurs sont toujours sensibles aux choix des marginales. Ils sont aussi sensibles au choix du modèle de la fonction copule. La part des marginales reste tout de même plus importante que celle de la fonction copule. Cette constatation est d'autant plus valable que les investisseurs sont moins averse aux risques.

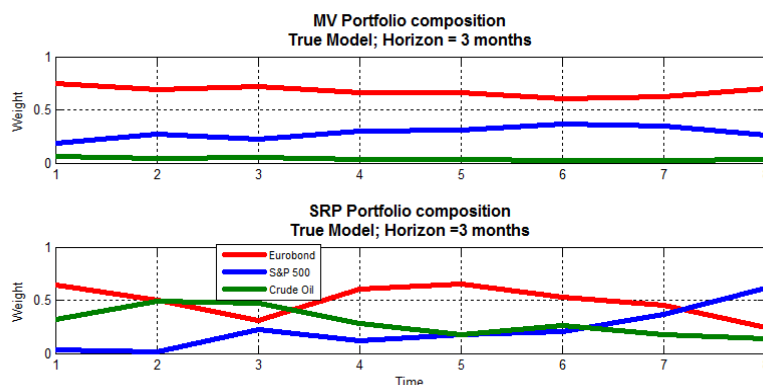


FIG. 19. Composition du Fonds : "Vrai modèle" ; Horizon= 3 mois

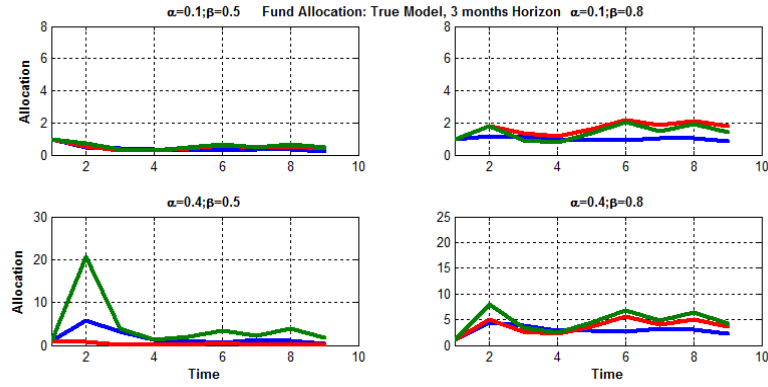


FIG. 20. Allocation optimale : Cas du "vrai modèle" ; Horizon = 3 mois

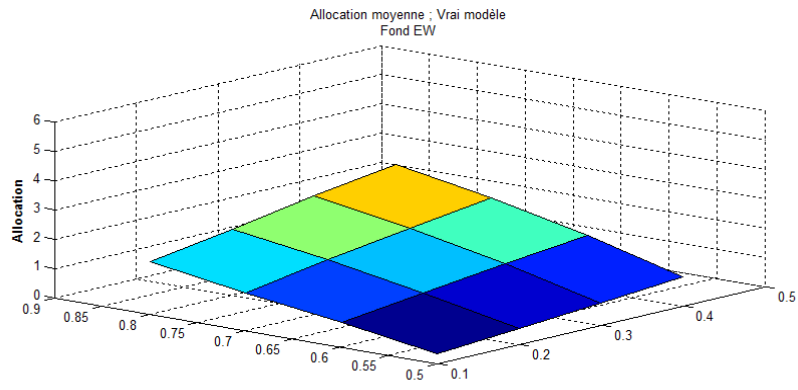


FIG. 21. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds EW ; rebalancement trimestriel

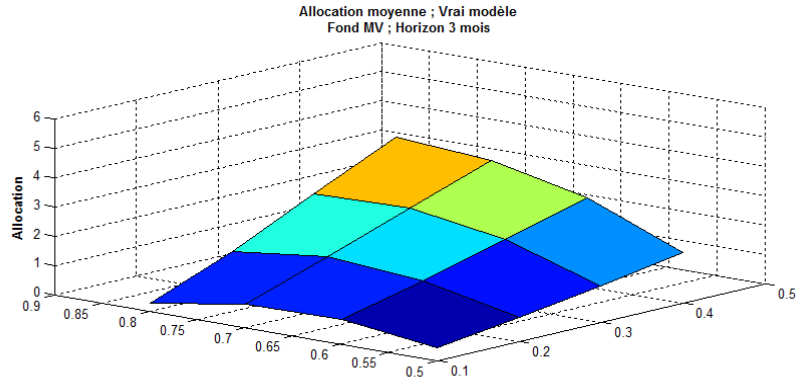


FIG. 22. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds MV ; rebalancement trimestriel

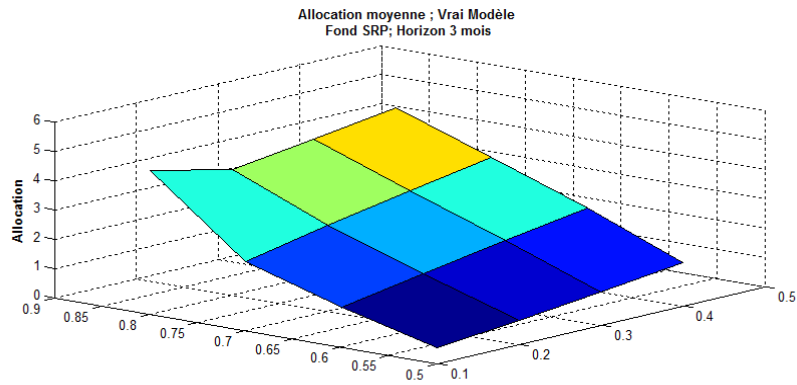


FIG. 23. Allocation moyenne : Cas du "vrai modèle" ; Fonds SRP ; rebalancement trimestriel

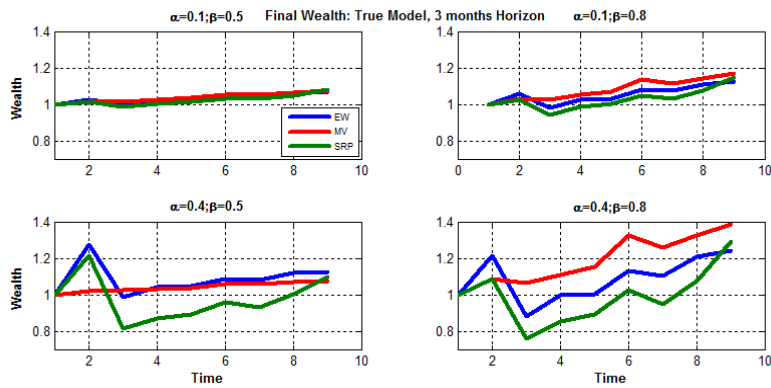


FIG. 24. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas du "vrai modèle" ; Horizon= 3 mois

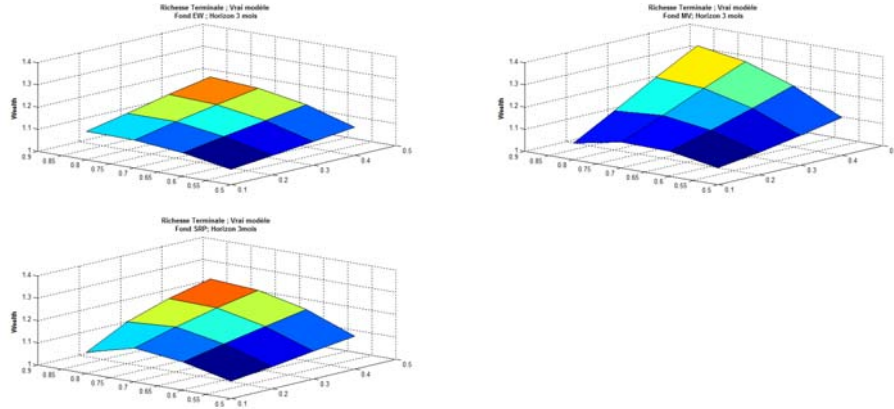


FIG. 25. Richesse terminale : Cas du "vrai modèle" ; rebalancement trimestriel

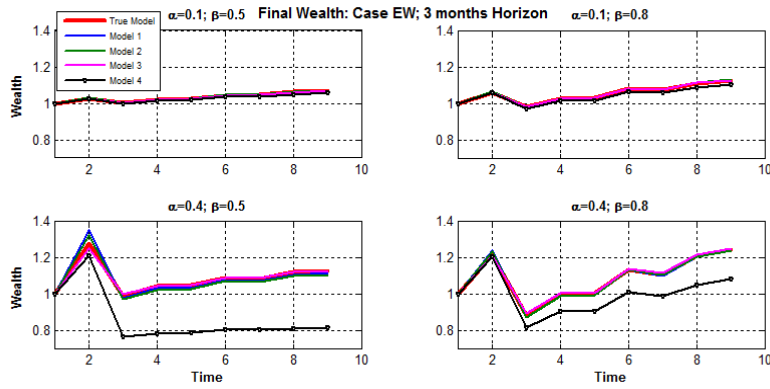


FIG. 26. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds EW ; Horizon = 3 mois ; tous les modèles

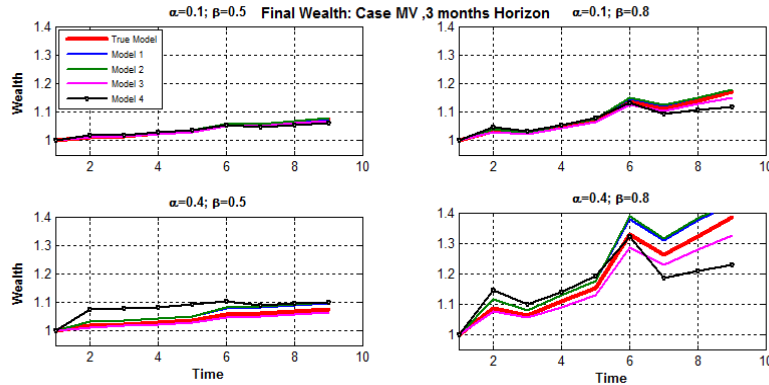


FIG. 27. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds MV ; Horizon = 3 mois ; tous les modèles

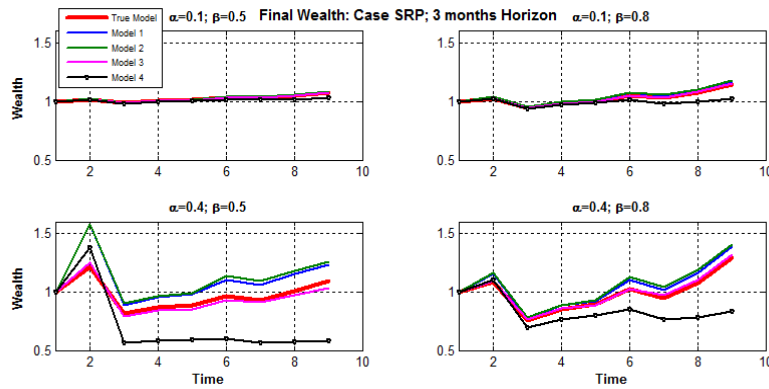


FIG. 28. Evolution de la richesse finale de l'investisseur : Cas d'un Fonds SRP ; Horizon = 3 mois ; Tous les modèles

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'apport de l'approche copule dans le cadre d'un problème d'allocation de portefeuille. Nous avons abordé cette problématique sous l'angle des théories comportementales des portefeuilles. A cet effet, nous avons privilégié le cadre d'analyse proposé dans Zakamouline (2014). En effet, nous avons essayé de vérifier l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle de copules sur l'allocation optimale ainsi que sur la richesse finale de l'investisseur, en fonction du degré d'aversion au risque de l'investisseur. Les résultats montrent surtout la sensibilité de l'investisseur les moins averses au risque pour une mauvaise spécification des marginales. Ce résultat concerne surtout un actif risqué composé selon les recommandations de l'approche moyenne-variance (portefeuille MV), et aussi celui composé selon un objectif de maximisation du ratio de Sharpe (portefeuille SRP).

Deuxième partie

## **RISQUE DE CREDIT**



## Risque de Crédit et Modélisation de la Dépendance des Défauts : Aperçu Théorique

### 1. Introduction

Dans un contexte de risque, la littérature qui traite du thème portant sur le risque de crédit connaît un grand succès et surtout une grande évolution. En effet, traitant à ses débuts le problème de la modélisation du risque de crédit proprement dit, le thème qui s'impose actuellement est celui lié à la modélisation de la dépendance des défauts.

Nous essayons dans ce qui suit de rappeler les résultats de la littérature correspondante à ces deux axes de réflexion. Nous introduisons dans un premier temps les approches dédiées à l'analyse du risque de crédit à une échelle individuelle, là où les titres sont considérés séparément. Il s'agit de l'approche structurelle et de l'approche sous forme réduite. Dans un deuxième temps, nous rappelons l'ensemble des modèles essayant de tenir compte de la dépendance pouvant se trouver dans les portefeuilles de crédit. Nous distinguons entre les modèles commerciaux considérés comme une extension à une échelle multidimensionnelle de l'approche structurelle, et les modèles académiques proposant une généralisation de l'approche réduite.

### 2. Le risque de crédit

**2.1. Présentation générale.** Le risque de crédit peut être défini comme étant le risque de pertes, consécutives au défaut d'un emprunteur sur un engagement de remboursement des dettes contractées. En général, on distingue trois composantes :

- Le risque de défaut correspond à l'incapacité du débiteur à faire face à ses engagements. L'agence de notation Moody's retient la définition suivante : « le risque de défaut est relatif à tout manquement ou tout retard sur le paiement du principal ou des intérêts ». Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles d'accuser une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant stipulé par le contrat de dette.
- Une deuxième composante provenant de l'incertitude autour du taux de recouvrement une fois le défaut est survenu.
- La dégradation de la qualité du crédit constitue la troisième source de risque. Si la perception de la qualité de l'emprunteur se détériore, la prime de risque accordée par les marchés financiers s'accroît en conséquence. De plus, si l'emprunteur bénéficie d'une note de la part d'une agence de notation, celle-ci est susceptible de se dégrader suite à la perception négative des marchés.

Notons que le risque de défaut et de dégradation sont fortement corrélés dans la mesure où la dégradation de la qualité de la contrepartie peut être un élément précurseur d'un éventuel défaut. Ce sont néanmoins deux risques bien distincts. Le risque de dégradation se traduit par une possible dévalorisation de la dette au cours sa période de vie. Les pertes liées à la dégradation de la qualité de la contrepartie se réalisent donc en cas de vente anticipée de la dette sans qu'un défaut soit pour autant produit.

2.1.1. *Les marchés du risque de crédit.* C'est un marché très hétérogène du fait que le risque de crédit prend différentes formes. On distingue néanmoins deux grandes catégories. La première correspond aux prêts bancaires, que l'on s'accorde généralement a dénommé le marché traditionnel du risque de crédit. Ce n'est pas un marché au sens économique du terme. Dans ce contexte le risque de crédit provient d'une asymétrie d'information entre la banque et son client. La seconde catégorie correspond aux obligations risquées. Dans ce cas le risque de crédit provient généralement d'une défaillance de l'un ou de l'ensemble des émetteurs constituant les portefeuilles détenus. Ceci explique en partie que les banques utilisent des outils différents pour mesurer et gérer le risque de crédit selon le portefeuille considéré. Récemment, et parallèlement au marché des obligations risquées, on identifie une nouvelle catégorie, celle relative au marché des dérivés de crédit. Ce dernier peut être considéré comme étant le lieu permettant de transférer le risque de l'actif à une contrepartie sans pour autant céder l'actif en question. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser seulement au marché des obligations risquées et celui des dérivés de crédit, du fait que les modes de gestion du risque sur le marché traditionnel sont beaucoup plus simple, et du fait aussi des encours colossaux qui sont mis en jeu sur les deux marchés en question.

#### **Le marché des obligations risquées**

Les obligations risquées constituent un marché important du risque de crédit. Contrairement aux créances, ce sont des produits qui s'échangent sur un marché financier. Il existe donc des prix de marché, et ces obligations peuvent être revendues. Le risque majeur est donc un risque de variation (négative) de la valeur de l'obligation imputable à la dégradation de la qualité de l'émetteur (downgrading risk ou default risk). C'est donc un risque de crédit, qui se traduit par un risque de marché, mais ce n'est pas un risque de marché pur ou risque de volatilité. Bien sûr, le risque de taux doit aussi être pris en considération dans le cadre du processus du « pricing » des obligations.

L'investisseur en obligations risquées cherche un placement plus rentable que celui obtenu sur les obligations d'état. La différence entre la rentabilité d'une obligation risquée et d'une obligation souveraine est appelée « spread de taux ». Deux composantes expliquent ce « spread de taux », le spread de crédit (risque de dépréciation de la qualité de signature de l'emprunteur), et la liquidité.

Le marché obligataire est l'un des premiers marchés de financement avec plus de 2000 milliards de dollars d'émissions enregistrées chaque année. A titre d'exemple, les obligations libellées en euro représentent 30% des encours à l'échelle mondiale. Aussi et selon les rapports de la banque de France, l'émission d'obligations dans la zone euro, entre 2013 et 2014 approchait les

683 milliards d'euros<sup>1</sup>. Un autre constat peut être tiré des rapports émis par l'agence de notation Moody's ces dernières années concerne surtout le nombre et le volume des défaillances qui ne cesse d'augmenter d'une année à l'autre. En effet, Moody's signale que 256 obligations « corporate » portant l'une de ses notations ont fait défaut en 2009, affectant ainsi un volume équivalent à 330 milliards de dollars. Ce nombre était seulement de 108 défaillances en 2008, pour un volume concernant 280.9 milliards de dollars de dettes<sup>2</sup>. Ces chiffres doivent être interprétés avec précaution. En effet, tous les emprunteurs ne sont pas notés par Moody's, le marché a été fortement agité ces dernières années.

### **Le marché des dérivés de crédit**

Contrairement aux prêts bancaires et aux obligations risquées, considérés comme la source d'origine du risque de crédit, les dérivés de crédit sont des instruments financiers hors bilan permettant de transférer le risque de l'actif à une contrepartie sans pour autant céder l'actif en question. En des termes plus précis, et à titre d'exemple, un « Credit Default Swap », appelé souvent CDS, est un contrat bilatéral entre un acheteur et un vendeur de protection contre un événement de crédit d'un tiers. Le contrat a une maturité bien déterminée, mais se terminera prématurément si l'événement de crédit a eu lieu (défaut). L'acheteur de protection fera des versements périodiques, exprimés en point de base "bp" par année pour le montant notionnel convenu, appelés "prime du CDS". En échange, le vendeur de la protection payera un montant contingent à l'événement de crédit convenu.

Alors que le principe de transfert de risque reste le facteur commun résumant l'activité sur le marché des dérivés de crédit, les produits offerts ne cessent de se développer, offrant ainsi différents degrés de protection adaptées au profil risque des investisseurs. Ces produits portent généralement sur la défaillance d'un ou de plusieurs noms. C'est l'exemple des "Basket Default Swap" pour lesquels le contrat offre à son acheteur une assurance sur l'ensemble des actifs du panier, mais n'est en aucun cas la somme des CDS de chaque actif le constituant. Dans cette direction, les produits proposés sont typiquement des "First-to-default" dont la protection porte sur le premier défaut survenant dans le panier, ou aussi des " $N^{th}$  -to-default", pour lesquels la protection porte sur le  $n$ -ème défaut survenant dans le panier. Récemment, des nouvelles stratégies de structuration on vu le jour. Elles sont généralement basées sur les méthodes de structuration par tranche, et concernent surtout des produits tels que les CDO et les CLO.

Le marché des dérivés de crédit connaît une progression énorme ces dernières années, avec un encours qui avoisinait les 60000 milliards de dollars en 2010 pour les CDS. Cependant, il est considéré comme un marché de spécialistes. Dans ce sens, l'OCC (Office of the Comptroller of the Currency) stipule que 5 banques représentaient 95% de l'encours notionnel total des dérivés de crédit déclarés par les banques commerciales américaines au début

---

<sup>1</sup>STATISTIQUES RELATIVES AUX ÉMISSIONS DE TITRES DE LA ZONE EURO. Banque de France, JUILLET 2014

<sup>2</sup>Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2010. Moody's Investors Service, Février 2011.

des années 2000, avec une part de 57% pour Morgan Guaranty Trust et de 14% pour Citibank.

**2.2. Les modèles d'évaluation du risque de crédit.** La littérature dédiée au risque de crédit distingue entre deux types de modélisation œuvrant essentiellement à décrire le processus de défaut pour la dette obligataire ainsi que pour la majorité des instruments financiers joints. Elles font référence généralement aux modèles structurels et aux modèles sous forme réduite. En effet, l'approche « structurelle » représente le défaut comme un événement endogène défini à partir de l'évolution de la structure du capital de la firme. Cette approche conduit, du moins théoriquement, à une évaluation de la dette risquée et des produits dérivés de crédit relativement à la valeur des actifs de l'entreprise. « Les modèles sous forme réduite », représentent le défaut et les événements de crédit comme des événements exogènes, dont le modèle spécifie la probabilité de survenance. Prenant comme donnée d'entrée l'évaluation de la dette risquée par le marché, les modèles sous forme réduite permettent d'évaluer les produits dérivés de crédit relativement à la dette risquée.

2.2.1. *Les modèles structurels.* L'approche structurelle du risque de crédit est fondée sur les méthodes d'évaluation des options, mises en place par Black et Scholes (1973) et Merton (1974). Il s'agit d'une approche relativement intuitive dans la mesure où le risque de crédit encouru par le détenteur d'une obligation est directement relié à la réalité économique de la firme : le défaut intervient dès que la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée. Il s'agit d'une vision optionnelle de la dette : l'émetteur reçoit le droit de faire défaut sur sa dette, droit qu'il exerce dès que la valeur de ses actifs ne permet plus de la couvrir. Selon cette logique, les modèles structurels utilisent l'évolution des variables structurelles de la firme, telles que la valeur des actions et la valeur de la dette, pour déterminer le temps de défaut. Le modèle de Merton (1974) a été le premier modèle traitant les défauts. Il est considéré comme étant le premier modèle structurel, que voici une présentation illustrative.

#### **Le Modèle de Merton**

Ce modèle constitue l'exemple le plus simple de l'approche structurelle et peut être vu comme étant une transposition du modèle de Black et Scholes au cadre d'analyse du risque de défaut.

Dans son modèle, Merton étudie l'exemple d'une entreprise endettée dont la structure de capital est représentée par une proportion matérialisant les capitaux propres (actions), l'autre proportion est relative à une émission de dette obligataire sous la forme d'une obligation zéro coupon de valeur faciale  $L$  arrivant à maturité en  $T$ . Ainsi la valeur totale des actifs  $V(t)$  est égale à la somme de la valeur des actions en plus de celle de la dette.

Merton modélise l'évolution de la valeur  $V(t)$  des actifs par un mouvement Brownien géométrique, qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

De plus, le modèle suppose les créanciers de la firme ne pouvant pas la forcer à déposer le bilan avant l'échéance  $T$ . Dans ces conditions, l'événement de crédit (le défaut) ne survient qu'en cas de non remboursement à l'échéance du nominal du zéro coupon. A la date  $T$ , si la valeur de la firme est supérieure à la valeur de remboursement de la dette, cette dernière sera remboursée, sinon l'entreprise est en défaut et les créanciers reçoivent la valeur de marché de la firme, naturellement inférieure à la valeur de remboursement. La valeur à maturité de la dette émise par la firme s'exprime comme :

$$D_T = \min(V_T, L) = L - \max(L - V_T, 0)$$

On s'aperçoit que Merton assimile la valeur de la dette, à la valeur d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut, moins la valeur d'une option de vente (put) sur le sous-jacent  $V(t)$  et de prix d'exercice  $L$ . Dans une vision focalisée sur les actionnaires, on mentionne que ces derniers reçoivent soit zéro (en cas de défaut) soit la valeur des actifs moins celle de la dette. Ainsi, la valeur des actions de la firme, à la maturité, est équivalente à la valeur d'une option d'achat (call) sur  $V(t)$  de prix d'exercice  $L$  équivalent au nominal de la dette :

$$S_T = \max(V_T - L, 0)$$

Ainsi, les actions d'une entreprise endettée sont donc des options d'achat, dont les caractéristiques sont :

- Sous-jacent : les actifs de l'entreprise ;
- Prix d'exercice : la valeur de la dette à l'échéance ;
- Maturité : celle de la dette ;
- Volatilité : celle des actifs de la firme ;
- Prime : la valeur des capitaux propres.

En appliquant la formule de Black et Scholes pour évaluer la valeur de ces options, Merton obtient la valeur de la dette risquée, donnée à travers l'expression suivante :

$$D(t, T) = V_t N(-d_1(V_t, L)) + LB(t, T) N(d_2(V_t, L)) \quad (2.2)$$

Nous vérifions que la valeur de la dette est une fonction croissante de la valeur des actifs de la firme, et une fonction décroissante de la maturité de l'obligation, du risque des affaires de l'entreprise et du taux d'intérêt sans risque.

Une problématique majeure pour chaque modèle concerne l'estimation des paramètres. Pour les modèles structurels ça représente toujours une épreuve délicate. En effet, le « spread de crédit », variable principale du modèle, dépend de variables qui ne sont pas directement observables, telle que la volatilité de la valeur des actifs de la firme. Un constat très important en faveur de la résolution de ce problème concerne la relation qui existe entre le « spread de crédit » d'un émetteur et les paramètres décrivant la volatilité des actions de ce dernier. Dans la mesure où les actions sont cotées, leurs valeurs de marché sont donc observables. Il est possible ainsi d'extraire les paramètres du modèle à partir des caractéristiques (valeur et volatilité) des actions. S'il existe également des options cotées sur les actions pour ces émetteurs, leurs valeurs de marché donnent un indicateur de l'anticipation

du marché sur la volatilité des actifs (volatilité implicite) qu'on peut alors relier aux paramètres du modèle.

Le modèle de Merton est le prototype des modèles basés sur la valeur de la firme. Sa relative simplicité a néanmoins soulevé plusieurs problèmes théoriques et empiriques, ayant amené au développement de nombreuses extensions. En effet, le modèle de Merton (1974) suppose que le défaut ne peut intervenir qu'à l'échéance de la dette. Ce point a pu être amélioré par Black et Cox (1976), en permettant la survenance du défaut à tout moment et non plus seulement à la maturité. Dans cette perspective, la valeur totale  $V(t)$  des actifs de la firme suit toujours un processus Brownien géométrique, mais l'entreprise est en défaillance dès que la valeur de ses actifs se trouve inférieure à un seuil qui déclenche le défaut. Le temps de défaut est donc défini comme étant le premier instant (aléatoire) où  $V(t)$  traverse à la baisse une valeur donnée. Dans ce cadre, la valeur de la dette  $D(t, T)$  n'est plus celle d'une option européenne sur  $V(t)$  mais plutôt celle d'une option à barrière.

Les options à barrière pouvant être valorisées dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on obtient des formules analogues (mais plus compliquées) par rapport à celles obtenues par le modèle de Merton, à la fois pour  $D(t, T)$  ainsi que pour la structure par terme des spreads de crédit. Néanmoins, cette complexité plus grande rend difficile la calibration des paramètres ainsi que l'évaluation de produits dérivés, plus complexes qu'une simple obligation. Ceci explique en partie la popularité moindre de ce type de modélisation.

Récemment encore, le modèle de Black et Cox (1976) a été développé par plusieurs auteurs : Brennan et Schwartz (1980) ont traité l'exemple des obligations convertibles, Kim et al (1993) étudient le cas d'une barrière et d'un taux d'intérêt aléatoires, tandis que Longstaff et Schwartz (1995) ont essayé de traiter l'exemple d'une barrière constante et d'un taux d'intérêt aléatoire.

**2.2.2. Les modèles sous forme réduite.** La motivation principale pour les approches sous forme réduite, est de modéliser l'événement de défaut en tant qu'évènement imprévisible. Ces modèles ont émergé pour pallier les limitations et surtout l'applicabilité restreinte de l'approche structurelle, basée sur l'évaluation de la valeur de la firme, et proposent de modéliser les temps de défauts à l'aide des variables exogènes à la valeur de la firme. Dans ce cadre, la modélisation du temps de défaut est essentiellement réduite à la spécification du processus de hasard, tout en respectant une certaine filtration de référence. Sous certaines hypothèses, ceci est équivalent à la modélisation du temps de défaut en terme d'un processus d'intensité, pour lequel nous essayons de présenter une définition simplificatrice, tirée du célèbre article de Jarrow et Turnbull (1995).

### **L'intensité de défaut**

Une phase primordiale, permettant d'introduire la notion de l'intensité de défaut, concerne la définition du cadre d'analyse, que voici :

En effet, dans le cadre des modèles sous forme réduite on se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, F, P)$  muni d'une filtration  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$

- $P$  est une probabilité risque neutre pour laquelle les prix des actifs financiers sont égaux aux espérances de leurs paiements futurs actualisées. Une telle hypothèse suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché avec risque de défaut.
- $F$  correspond à la filtration engendrée par les prix des actifs financiers ; la tribu  $(\mathcal{F}_t)$  représente l'information disponible sur le marché à la date  $t$ .

Dans ce cadre, on considère un émetteur dont on souhaite représenter la probabilité de défaut à différents horizons de temps. Appelons  $\tau$  l'instant aléatoire de survenance du défaut : celui-ci peut être représenté comme étant une variable aléatoire positive, dont il s'agit de modéliser la distribution. Ainsi, l'intensité de défaut  $\lambda(t) > 0$  peut être introduite et définie comme étant la probabilité de défaut par unité de temps, étant donnée le fait que le défaut n'a pas eu lieu avant  $t$ . Si  $\tau > t$ , et pendant un intervalle de temps court  $[t, t + \Delta t]$ , la probabilité que l'événement de défaut survienne peut s'écrire :

$$P_d = \lambda(t) \Delta t \quad (2.3)$$

De même, la probabilité de « survie » c'est-à-dire de l'absence de défaut entre  $t$  et  $\Delta t$ , s'écrit :

$$P_s = 1 - \lambda(t) \Delta t \quad (2.4)$$

Supposons aussi que, conditionnellement au fait que le défaut n'a pas eu lieu avant  $t$ , sa survenance entre  $[t, t + \Delta t]$  est indépendante du passé. De plus si on partage l'intervalle  $[0, t]$  en  $n$  périodes de longueur  $\Delta t$ , la probabilité que le défaut n'ait pas eu lieu entre 0 et  $t$  (ou aussi probabilité de survie en  $t$ ) est donnée par l'équation suivante :

$$\prod_{k=1}^n (1 - \lambda(t_k) \Delta t) \text{ avec } t_k = k\Delta t \quad (2.5)$$

En prenant le logarithme, et en utilisant l'approximation suggérant que  $\log(1 + x) = x$  pour  $x$  proche de zéro, on peut écrire :

$$\log \left( \prod_{k=1}^n (1 - \lambda(t_k) \Delta t) \right) = \sum_{k=1}^n \log (1 - \lambda(t_k) \Delta t) = - \sum_{k=1}^n \lambda(t_k) \Delta t \longrightarrow \int_0^t \lambda(s) ds \text{ quand } \Delta t \longrightarrow 0$$

De même, lorsque  $\Delta t \longrightarrow 0$ , l'expression de la probabilité de survie en  $t$  devient :

$$\prod_{k=1}^n (1 - \lambda(t_k) \Delta t) \longrightarrow P(\tau > t) = \exp \left[ \int_0^t \lambda(s) ds \right] \quad (2.6)$$

Conditionnellement à l'information disponible en  $t$ , la probabilité de survie en  $T$ , sachant que le défaut n'a pas eu lieu jusqu'en  $t$ , est donnée par :

$$P(P(\tau > T) | \tau > t) = \exp \left[ \int_t^T \lambda(s) ds \right] \quad (2.7)$$

A ce niveau, nous introduisons le taux d'actualisation instantané  $r(t)$ , pour lequel la valeur d'une obligation zéro-coupon, sans risque de défaut, est donnée par :

$$B(t, T) = \exp \left[ \int_t^T r(s) ds \right]$$

Considérons maintenant la valeur à l'instant  $t$  d'une obligation risquée  $D(t, T)$ , de nominal 1\$ et de maturité  $T$ . Ce produit verse 1\$ à maturité ( $T$ ) s'il n'y a pas eu défaut entre 0 et  $T$ , et 0 sinon. La valeur de cette obligation est alors donnée par l'espérance risque-neutre actualisée de sa valeur terminale, soit :

$$\begin{aligned} D(t, T) &= \exp \left[ \int_t^T r(s) ds \right] \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}(\tau \leq T | \tau \geq t)] \\ &= \exp \left[ \int_t^T r(s) ds \right] \exp \left[ \int_t^T \lambda(s) ds \right] = \exp \left[ \int_t^T (r(s) + \lambda(s)) ds \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

En comparant avec l'expression de l'obligation sans risque de défaut, on s'aperçoit que l'effet du risque de défaut se traduit par la modification du taux d'actualisation, i.e. pour tenir compte du risque de défaut, il faut ajouter ainsi un "spread" au taux d'actualisation instantané, qui n'est autre que l'intensité de défaut  $\lambda(t)$ . C'est l'un des résultats principaux de ce type de modélisation. L'intensité de défaut peut être identifiée au spread de crédit de court terme, grandeur observable sur les marchés, c'est ce que affirme Jarrow et Turnbull (1995). Ce résultat montre aussi que le spread de taux observé sur les marchés est dû essentiellement au risque de crédit.

Ayant défini l'intensité de défaut, variable clé des modèles sous forme réduite, la modélisation du risque de défaut selon cette approche s'appuie largement sur la spécification du processus gouvernant cette variable. Il s'agit essentiellement de modéliser le temps de défaut comme étant le temps de premier saut d'un processus de Poisson avec une intensité de défaut aléatoire. Néanmoins d'autres hypothèses peuvent être formulées sur les propriétés gouvernant cette variable.

Dans ce qui suit, nous présentons une sélection de quelques travaux élaborés dans le cadre de cette ligne de recherche.

Comme mentionné ci-dessus un premier modèle a été proposé par Jarrow et Turnbull (1995). Ces auteurs considèrent le défaut engendré par un processus de Poisson homogène, c'est-à-dire avec une intensité constante. Ceci permet de représenter le temps de défaut comme étant une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. De plus, ils suggèrent un taux de recouvrement constant ainsi qu'une indépendance entre l'intensité de défaut, le taux de recouvrement et le taux d'intérêt. Bien que cette modélisation soit très simple, les hypothèses d'une intensité constante et d'un taux de recouvrement constant sont peu réalistes.

Les travaux subséquents se sont attaqués aux insuffisances de l'article fondateur de Jarrow et Turnbull (1995), notamment à l'hypothèse de constance de l'intensité de défaut et du montant du recouvrement. Dans ce cadre, Jarrow, Lando et Turnbull (1997) proposent de modéliser le processus de défaut par un processus de Markov à états finis, les états peuvent représenter les cotations de crédit qu'octroient les agences de rating. Comme la probabilité de faire défaut varie d'un état à l'autre, l'intensité de défaut n'est plus constante



pour des émissions ayant différentes cotations. Dans la même perspective, Duffie et Singleton (1999) proposent un modèle où l'arrivée du défaut ainsi que le taux de recouvrement sont aléatoires.

### 3. Modèles de portefeuilles et modélisation de la dépendance

La littérature qui étudie le risque de crédit dans le cadre des portefeuilles et des produits structurés de crédits, distingue deux catégories de modèles. Les premiers modèles, généralement dénommés les « modèles commerciaux », ont été proposés par des institutions financières privées telles que CreditMetrics, K.M.V, et CreditRisk+. D'autres modèles, développés dans le milieu académique, proposent une généralisation au cas multidimensionnel des modèles structurels ou des modèles sous forme réduite.

**3.1. Les modèles commerciaux.** Alors que les modèles présentés ci-dessus prennent comme cadre d'analyse l'évaluation du risque de crédit pour le cas d'un seul émetteur, les institutions financières sont tenues dans l'obligation de gérer des portefeuilles de crédit de grande dimension, avec des obligations souvent réparties sur différents secteurs et différentes catégories de risque. Une gestion optimale de ces portefeuilles doit permettre de garantir un certain effet de diversification, ceci passe par la quantification de la structure de dépendance des défauts gouvernant ces portefeuilles.

Une première motivation pour le développement des modèles de portefeuille était l'exigence pour les banques, de la part des régulateurs régissant l'accord de Bâle, afin de développer leurs propres modèles internes de mesure de risque. En effet, pour être qualifié de modèle interne de mesure de risque, les régulateurs et la banques doivent être mis en d'accord sur la méthode permettant d'estimer d'une façon appropriée les différents types de risque. Faute de quoi les organismes de contrôle prévoient de mettre en place des pénalités pour les institutions dont les modèles auraient tendance à sous estimer les mesures de risque les plus conventionnelles (la CreditVaR pour le risque de crédit).

Etant donné ces défis, la recherche quantitative s'est beaucoup accentuée au développement des solutions convenables, ce qui a conduit à une genèse de plusieurs logiciels commerciaux proposant chacun une méthodologie pour modéliser les corrélations dans les portefeuilles. Ces différents modèles (logiciels), CreditMetrics, KMV ainsi que CreditRisk+, font appel à des hypothèses sur les corrélations de défaut entre plusieurs émetteurs, que nous allons essayer de passer en revue.

**3.1.1. Le modèle CreditMetrics.** En 1997 la banque américaine JP Morgan, premier acteur sur le marché des dérivés de crédit, lance CreditMetrics, le premier modèle de gestion du risque de crédit. Ceci constitue une continuité de son premier succès RiskMetrics destiné à la gestion du risque de marché, l'objectif essentiel étant d'assurer sa forte notoriété sur un segment de forte croissance pour les banques d'affaires et conseils en gestion de risque.

Le développement de CreditMetrics s'inspire largement de son prédécesseur RiskMetrics dans le sens où il favorise une approche basée sur l'estimation de la distribution du changement de la valeur future du portefeuille

de crédit. Cette estimation est fondée sur l'étude des probabilités de transition des actifs entre classes de notations, ainsi que des corrélations entre ces probabilités.

La méthodologie adoptée dans CreditMetrics procède en quatre étapes. Tout d'abord deux blocs principaux. Le premier bloc est consacré au calcul de la VaR dû au risque de crédit, pour les titres pris individuellement. Le deuxième consiste à prolonger le premier bloc pour aborder la VaR au niveau du portefeuille, dans le but de tenir compte de l'effet de diversification. Ensuite, deux fonctions de support, « Corrélation » et « Expositions », la première est dédiée à la dérivation des probabilités de migration jointe, alors que la deuxième est consacrée à la dérivation des valeurs futures des obligations, viennent pour compléter le processus.

L'élément central dans la procédure de CreditMetrics, est la spécification de la matrice de transition. Ceci dans l'objectif de tenir compte au mieux de l'impact de la migration de la qualité de crédit des émetteurs sur la valeur de leurs obligations. Il s'agit ainsi d'évaluer la valeur des obligations pour les différentes notes de crédit envisageables. Cette évaluation repose sur la structure par terme des obligations zéro coupon correspondante aux différentes classes de rating. Ainsi, connaissant les différentes probabilités de transition, il est possible de dériver la valeur de l'obligation sur l'horizon spécifié et d'estimer ensuite la CreditVaR correspondante.

Pour achever les calculs de la VaR de Crédit au niveau du portefeuille, l'approche CreditMetrics suppose que les corrélations actuelles entre les changements de la qualité de crédit des différents émetteurs sont totalement différentes de zéro. En particulier, les corrélations tendent à être plus fortes pour les entreprises appartenant à la même industrie et elles varient par rapport à l'état de l'économie. De plus, cette approche considère qu'il est peu probable que les probabilités de défauts et les probabilités de migration restent stables sur tous les horizons, d'où la nécessité d'un modèle structurel ayant pour objectif l'association des changements à des variables fondamentales ayant des corrélations stables dans le temps.

Ainsi, le modèle de Merton est utilisé pour déterminer la distribution de défaut. Celui-ci a été prolongé pour inclure les changements des notations. En effet, CreditMetrics représente cette distribution en terme de variable aléatoire gaussienne, qui va jouer le rôle du rating en continu. Le passage d'une classe de rating à une autre est lié au franchissement d'une certaine barrière. Ceci est équivalent à fixer des seuils relatifs aux différentes probabilités de migration. Selon cette logique, CreditMetrics assimile la variable représentant la distribution de défaut au logarithme de la valeur de la firme dans le modèle de Merton ( $\log(V(t))$ ), dans le sens où la probabilité de défaut est donnée par la probabilité que  $V(t)$  franchit un certain seuil à la maturité.

Etant donnée cette représentation des probabilités de migration en terme de seuils, il s'agit ensuite de générer des corrélations entre ces états de rating. L'approche de CreditMetrics propose d'utiliser les corrélations entre les rendements des actions, directement observables sur les marchés boursiers. L'idée la plus simple est d'assembler les variables déjà définies dans un vecteur dont on suppose qu'il suit une loi gaussienne multidimensionnelle, dont la matrice de corrélation est égale à celle des rendements des actions

des émetteurs sur le marché. Notons que le choix des prix d'actions en tant que proxy pour la valeur d'actif de l'entreprise peut affecter l'exactitude de cette approche.

Finalement on peut résumer l'approche de CreditMetrics pour la modélisation de la corrélation de défaut en deux étapes :

- Représenter les probabilités de transition annuelles d'une classe de notation par une variable gaussienne et un ensemble de seuils de franchissement de qualité de notation.
- Coupler ces variables gaussiennes avec une matrice de corrélation calculée à partir des rendements des actions des émetteurs.

Notons que cette façon de créer de la dépendance entre les variables, en les transformant d'abord en variables normales ensuite en les couplant par une matrice de corrélation est l'exemple le plus simple de l'utilisation des « Copules » pour associer les variables aléatoires ; en l'occurrence il s'agit de la Copule Gaussienne. Dans ce cadre, Li (2000) montre que le modèle de CreditMetrics utilise implicitement la copule normale dans la formulation de la corrélation de défaut.

3.1.2. *Le modèle K.M.V.* La principale limite dans l'approche CreditMetrics ne réside pas dans sa méthodologie, jugée très attrayante, mais plutôt dans sa confiance dans les probabilités de transitions basées sur les fréquences de défaut historiques moyennes. En effet, l'exactitude des calculs de CreditMetrics repose sur deux hypothèses discutables. Premièrement, toutes les firmes appartenant à la même classe de rating ont le même taux de défaut. Deuxièmement, le taux de défaut actuel est égal à la moyenne historique des taux de défaut.

Cette vision critiquable présente alors un grand challenge pour K.M.V (Kealhofer, McQuown et Vasicek). En effet, cette vision ne peut être justifiée du fait que les taux de défauts sont continus, alors que les ratings sont ajustés d'une manière discrète, simplement parce que les agences de rating prennent largement le temps pour l'actualisation des notations des entreprises qui ont connu des changements au niveau de leur risque de défaut.

A la différence de CreditMetrics, KMV n'utilise pas les statistiques de Moody's ou de S&P pour déduire les probabilités de défaut, dépendantes uniquement du rating de l'émetteur, mais dérive la probabilité de défaut actuelle « l'EDF : Expected Default Frequency » pour chaque émetteur en se basant sur le modèle de la firme type Merton (1974). Ainsi les probabilités de défaut (PD) sont fonctions de la structure de capital, de la volatilité de rendements des actifs ainsi que de leurs valeurs actuelles.

L'Expected Default Frequency (EDF) avait démontré ses capacités en tant qu'indicateur avancé de défaut, ou au moins de la dégradation de la qualité de crédit des émetteurs. En effet, quand la situation financière commence à se détériorer, l'EDF tend à augmenter rapidement jusqu'au déclenchement du défaut. KMV avait analysé plus de 2000 entreprises américaines qui ont fait défaut ou qui ont fait faillite sur les vingt dernières années. Dans tous les cas, KMV avait montré une augmentation inopinée dans la pente de l'EDF entre 1 et 2 années avant le déclenchement du défaut. Les changements qui touchent les "EDF's" conduisent aussi à anticiper au moins 1 année à l'avance la dégradation ou l'amélioration de la qualité de crédit

émanant des agences de rating. De plus, et contrairement aux statistiques de défaut historiques des agences de rating, les "EDF's" ne sont pas biaisés pour les périodes de grandes ou de faibles taux de défauts. En effet, on peut observer la Distance au Défaut (DD), élément central dans le calcul de l'EDF, diminuer pour des périodes de récession, ou aussi qui augmenter pour des périodes de prospérité caractérisées par des faibles taux de défaut.

Pour modéliser la dépendance KMV dérive les corrélations qui existent entre les actifs, à partir d'un modèle multi-facteurs qui lie les corrélations à des facteurs fondamentaux. En effet, il y a un fort besoin pour diminuer dramatiquement le nombre de corrélations à calculer. Les modèles multi-facteurs réduisent le nombre de corrélations à calculer à ceux existants entre le nombre limité de facteurs communs affectant les rendements des actifs.

Ainsi, Il est supposé que les rendements des actifs des firmes sont générés par un ensemble de facteurs communs, dits aussi facteurs systématiques, ainsi que des facteurs spécifiques. Ces derniers sont soit spécifiques aux firmes, aux pays ou à l'industrie, et ne contribuent pas aux corrélations des rendements des actifs, du fait qu'ils ne sont pas corrélés entre eux et ils ne sont pas corrélés avec l'ensemble de facteurs communs. La corrélation entre les rendements des actifs de deux firmes est expliquée uniquement par l'ensemble de facteurs communs pour toutes les firmes. Seulement les risques associés aux facteurs spécifiques peuvent être diversifiés, alors que la contribution au risque due aux facteurs communs est, au contraire, non diversifiable.

Pour terminer, et en dépit des solutions proposées par KMV pour remédier aux limites de CreditMetrics, d'autres inconvénients sont à signaler. Tout d'abord, comme pour le cas de CreditMetrics, le modèle suppose que la structure par terme des taux d'intérêt est supposée constante, chose qui ignore en quelque sorte la corrélation qui existe entre le risque de marché et le risque de crédit. De plus, lors de la dérivation des "EDF's", KMV utilise des données historiques pour les défauts. Ceci suppose la stationnarité des probabilités de défaut. Une hypothèse qui a été fortement remise en question ces dernières années. Finalement un obstacle d'ordre pratique lié à la structure de capital des sociétés, qui est souvent très complexe, comprenant plusieurs types de dettes à différentes échéances, des titres hybrides et des engagements hors-bilan. La question qui se pose serait alors sur la fixation de la valeur du seuil des actifs en dessous de laquelle la société est considérée en défaut.

3.1.3. *Le modèle CreditRisk+*. Le modèle CreditRisk+ applique une approche actuarielle pour dériver la distribution de perte pour une obligation ou aussi un portefeuille de crédit. Cependant, selon cette approche seulement le risque de crédit est modélisé, et non pas le risque de dégradation « down grade » de la note de crédit. Contrairement à KMV, le risque de défaut n'est plus relié à la structure de capital de la firme. Dans CreditRisk+, il n'y a pas de présomptions faites sur les causes de défaut : un émetteur est soit en défaut avec une probabilité  $P_A$ , ou non avec une probabilité  $(1 - P_A)$ . Il est supposé aussi que :

- Pour un crédit, la probabilité de défaut pour une période donnée, disons 1 mois, est la même pour tous les autres mois.

- Pour un grand nombre d'émetteurs, la probabilité de défaut pour un émetteur particulier est petite, et le nombre de défauts qui se produit sur une période donnée est indépendant de celui qui se produit sur une autre période.

Sous ces hypothèses, le modèle CreditRisk+ modélise la distribution de probabilité pour le nombre de défauts, durant une période de temps (disons 1 année), par une distribution de Poisson :

$$\Pr(n \text{ défauts}) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \quad (3.1)$$

$\mu$  étant le taux moyen de défaut pour une année.

La mise en place du modèle CreditRisk+, pour dériver la distribution de perte en cas de défaut d'un portefeuille, repose sur trois procédures. La première est relative au calcul des fréquences des événements de défaut. Dans ce cadre, et pour corriger les éventuelles sous-estimations des probabilités de défauts générées par la distribution de Poisson, l'approche CreditRisk+ introduit une hypothèse additionnelle suggérant que le taux moyen de défaut est lui-même stochastique caractérisé par une moyenne  $\mu$  et un écart-type  $\sigma_\mu$ . La deuxième procédure concerne la sévérité des pertes. Ainsi, dans le but de calculer la perte en cas de défaut (Loss Given Default : LGD), l'exposition pour chaque émetteur est ajustée par le taux de recouvrement. Ces expositions ajustées, sont supposées exogènes dans le modèle, et elles sont indépendantes du risque de marché ainsi que celui du «Down grade».

La dernière procédure est relative à l'établissement de la distribution de perte proprement dite. Ainsi, le modèle essaye tout d'abord de segmenter les pertes selon des bandes. Le niveau de l'exposition dans chaque bande est fixé arbitrairement. Ce dernier est fonction du nombre de bandes à choisir ainsi que des expositions maximales. Ensuite il s'agit de dériver le nombre de défaut estimé dans chaque bande qui n'est autre que le rapport entre la perte espérée par unité d'exposition et l'exposition commune pour chaque bande. Il faut noter que le modèle CreditRisk+ valorise les expositions de chaque bande comme étant des portefeuilles indépendants. Ceci permet d'obtenir plus facilement une forme analytique de la distribution de perte. En effet, il s'agit du produit des différentes fonctions génératrices de probabilités pour chaque bande, lesquelles sont supposées suivre des distributions de Poisson avec comme seul paramètre le nombre de défaut estimé dans chaque bande.

Nous terminons sur quelques avantages et limites du modèle CreditRisk+. Le modèle présente l'avantage d'être relativement simple à l'implémentation par comparaison avec le modèle CreditMetrics ou encore celui de K.M.V. En effet, du fait que le modèle tient seulement à l'état du défaut, le nombre de variables indispensables pour la mise en place se trouve largement réduit, dans le sens où seulement la probabilité de défaut et l'exposition de chaque émetteur sont nécessaires à estimer. Malgré cet avantage considérable le modèle comporte les mêmes limites que celles de CreditMetrics et de K.M.V, en supposant qu'il n'y a aucune relation entre risque de crédit et risque de marché.

**3.2. Modélisation de la dépendance.** Cette section revient sur les différentes approches qui ont essayé de modéliser la dépendance entre les événements de défauts pour les modèles qui ont été proposés à l'échelle académique.

Alors que les premiers modèles essayant de modéliser le risque de crédit ont délimité leurs analyses au cas individuel, la question qui se pose actuellement concerne la dérivation de la probabilité de défaut de plusieurs firmes durant le même horizon de temps. Les travaux académiques proposés dans cet axe de recherche trônent le domaine de la recherche en finance ces dernières années. Les travaux développés proposent une généralisation au cas multidimensionnel des modèles structurels ou sous forme réduite. Dans ce cadre, Schönbucher (2003) signale quelques propriétés que doit vérifier une approche qui tend à modéliser la dépendance des défauts. Premièrement, le modèle doit être capable de produire des corrélations de défauts avec une magnitude réaliste. Deuxièmement, le modèle doit atteindre son objectif tout ça en laissant les paramètres, introduits pour décrire la structure de dépendance, sous contrôle, sans que le nombre de ces paramètres augmente dramatiquement avec le nombre des firmes. Troisièmement, le modèle doit être un modèle dynamique c'est à dire qu'il doit être capable de modéliser le nombre de défauts ainsi que les temps de défaut. Quatrièmement, il est clair qu'à partir de l'historique des défauts, il y ait des périodes pendant lesquelles les défauts se regroupent (cluster), le modèle doit être capable à reproduire ces périodes.

Dans ce qui suit nous présentons seulement quelques travaux développés dans le cadre de l'approche réduite. La simplicité de cette approche facilite le développement de plusieurs modèles de dépendance, ceci est par comparaison avec l'approche structurelle.

*3.2.1. Modélisation de la dépendance dans le cadre de l'approche réduite.* La littérature consacrée à cette problématique distingue entre deux approches différentes.

La première approche introduit la corrélation à travers les intensités de défaut, en postulant leur dépendance commune à un ensemble de variables d'états. Ces modèles sont dénommés «Conditionally Independant Defaults» (CID). De ce fait, les intensités, ainsi que les temps de défaut qu'ils génèrent, sont indépendantes à moins qu'ils ne sont pas conditionnés à la réalisation des variables d'état. Apparemment, l'inconvénient majeur de ces modèles réside dans les faibles niveaux de corrélations qu'ils génèrent. Deux extensions de l'approche CID essayent d'introduire plus de corrélation des défauts dans les modèles. L'une à travers la possibilité d'introduire des processus de saut joints (Duffie et Singleton (1999)), l'autre postule l'éventualité du déclenchement du défaut à cause des défauts joints (Duffie, Pan et Singleton (2000), Kijima (2000), Kijima et Muromachi (2000)).

La seconde approche, celle liée aux modèles de contagion, concerne les travaux de Davis et Lo (1999) ainsi que ceux de Jarrow et Yu (2001). Cette approche est basée sur l'idée de la contagion de défaut, suggérant que lorsqu'une firme fait défaut, l'intensité de défaut des firmes en jonction tend à augmenter. Dans ces modèles, la dépendance des défauts survient suite

aux liens qui existent entre les firmes. Le défaut de l'une pousse à l'avant la probabilité de défaut des firmes reliées, pouvant causer même leur défaut.

### Les modèles "CID"

Dans les modèles CID, les intensités de défaut sont considérées comme indépendantes, une fois où on fixe la réalisation des variables d'état  $X_t$ . La corrélation de défaut est introduite à travers la dépendance de l'intensité de défaut de chaque firme au vecteur aléatoire  $X_t$ . Un facteur stochastique  $\lambda_{i,t}^*$ , indépendant à travers les firmes, complète la spécification de chaque intensité de défaut.

Ainsi, en considérant  $i = 1, \dots, I$  firmes différentes, ayant respectivement leurs intensités de défaut et leurs temps de défaut  $\lambda_{i,t}$  et  $\tau_i$ . La spécification de l'intensité de défaut est donnée par la relation suivante :

$$\lambda_{i,t} = a_{0,\lambda_{i,t}} + \sum_{j=1}^J a_{j,\lambda_{i,t}} X_{j,t} + \lambda_{i,t}^* \quad (3.2)$$

$X_{j,t}$ ,  $j = 1, \dots, J$  étant le vecteur de variables latentes supposées suivre des processus racine-carré.

Un premier modèle "CID" a été proposé par Duffee (1999), pour lequel il retient un vecteur composé de deux variables latentes  $X_1$  et  $X_2$ . La spécification assignée au taux d'intérêt sans risque de défaut est la suivante :

$$r_t = a_{0,r} + X_{1,t} + X_{2,t}$$

Et la spécification complète de l'intensité de défaut est donnée par l'expression suivante :

$$\lambda_{i,t} = a_{0,\lambda_{i,t}} + a_{1,\lambda_{i,t}} (X_{1,t} - \bar{X}_1) + a_{2,\lambda_{i,t}} (X_{2,t} - \bar{X}_2) + \lambda_{i,t}^* \quad (3.3)$$

$$d\lambda_{i,t}^* = \kappa_i (\theta_i - \lambda_{i,t}^*) dt + \sigma_i \sqrt{\lambda_{i,t}^*} dW_{i,t} \quad (3.4)$$

$W_{1,t}, \dots, W_{I,t}$  sont considérés comme des mouvements Browniens indépendants.

L'intensité de chaque firme  $i$  dépend ainsi en les deux facteurs communs  $X_1$  et  $X_2$ , ainsi que le facteur spécifique  $\lambda_{i,t}^*$ . Dans le modèle de Duffee,  $\lambda_{i,t}^*$  capture la nature stochastique des intensités, tandis que les coefficients  $a_{1,\lambda_{i,t}}$  et  $a_{2,\lambda_{i,t}}$ ,  $i=1, \dots, I$ , capturent les corrélations entre les intensités ainsi qu'entre les intensités et le taux d'intérêt.

Duffee (1999), Driessen (2005) et Zhang (2003), développent et estiment différents modèles CID.

La littérature, relative au sujet de la corrélation des risques de crédit, a beaucoup critiqué l'approche des modèles CID, l'argument est relatif au faible niveau de corrélation de défaut qu'ils génèrent par comparaison avec la corrélation de défaut empirique. Cependant, Yu (2005) suggère que le problème ne réside pas dans l'approche elle-même, mais il est dû au choix fait sur les variables latentes, généralement dicté par la capacité limitée pour un nombre restreint de variables d'états à capturer la corrélation dans la dynamique des changements des intensités de défaut. Yu (2005) considère que, dans le but d'achever sur des niveaux « acceptables » de corrélation observés sur les données empiriques, un modèle CID doit inclure, en plus des variables d'états, l'évolution du marché des obligations « corporate », les obligations d'Etat ainsi qu'une large variante de facteurs industriels.

**Défauts communs/sauts communs : « Joint defaults/joint jumps »**

Duffie et Singleton (1999) proposent deux solutions pour éviter le problème de faible corrélation. L'une suggère la possibilité de « Sauts joints » dans les intensités de défaut, l'autre stipule la possibilité de déclenchement des événements de défaut pouvant causer des défauts joints (voir aussi : Kijima (2000), Kijima et Muromachi (2000)).

Duffie et Singleton développent une approche dans laquelle les firmes montrent des sauts corrélés dans leurs intensités de défaut, en imposant à l'intensité de défaut de chaque firme suivre le processus suivant :

$$d\lambda_{i,t} = \kappa_i (\theta_i - \lambda_{i,t}) dt + dJ_{i,t} \quad (3.5)$$

Ce dernier consiste en un processus de retour à la moyenne déterministe, plus un processus de saut pur  $J_i$  dont l'intensité est distribué selon une v.a de Poisson ayant pour paramètre  $\gamma_i$ , dont la taille du saut suit une loi exponentielle avec comme moyenne  $\mu$  (égale pour toutes les firmes).

Duffie et Singleton (1999) introduisent la corrélation dans les processus de saut des firmes en gardant les caractéristiques des intensités individuelles inchangées. Ils postulent que chaque composante saut des firmes, est composée de deux types de sauts, des sauts joints et des sauts spécifiques (idiosyncratique).

La deuxième alternative considère la possibilité de déclenchement de défauts simultanés suite à des événements communs, pendant lesquels plusieurs émetteurs peuvent faire défaut avec une probabilité positive. Les auteurs considèrent qu'il existe  $m = 1, \dots, M$  événements de crédit communs. Chacun de ces événements est modélisé selon un processus de Poisson avec une intensité  $\lambda_{m,t}^c$ . Etant donné l'occurrence de l'événement de crédit  $m$ , à l'instant  $t$ , chaque firme  $i$  fait défaut avec une probabilité  $p_{m,t}^i$ . En plus des événements de crédit communs, chaque entreprise peut être assujettie à des défauts spécifiques sous forme d'un processus de Poisson ayant une intensité  $\lambda_{i,t}^*$ , indépendante entre les firmes. Par conséquent, l'expression de l'intensité totale de la firme peut être donnée par l'expression suivante :

$$\lambda_{i,t} = \lambda_{i,t}^* + \sum_{m=1}^M p_{m,t}^i \lambda_{m,t}^c \quad (3.6)$$

Les critiques adressées à cette dernière approche, portent essentiellement sur le fait qu'il est irréaliste que plusieurs firmes fassent défaut au même temps. Et surtout que suite à un événement de crédit commun, causant le défaut de quelques émetteurs, l'intensité des défauts des entreprises survivantes reste inchangée. Malgré l'apport théorique relativement attrayant, l'inconvénient majeur de ce type de modélisation est lié à leur mise en place et à leur calibrage par rapport aux données disponibles. La même remarque s'adresse aussi aux modèles de contagion que nous présenterons dans la suite.

**Les modèles de contagion**

Les modèles de contagion peuvent être considérés comme une extension des modèles CID. Ceci passe par l'introduction de deux faits d'ordre empiriques, le premier considère que le défaut d'une entreprise peut déclencher le défaut d'autres firmes qui lui sont reliées, le deuxième suppose que les temps



de défaut se concentrent durant une période de temps donnée, dans laquelle la probabilité de défaut de toutes les entreprises tend à augmenter. Ainsi, la littérature consacrée aux modèles de contagion de défaut distingue entre deux approches : le modèle développé par Davis et Lo (1999) « *infectious defaults* » et le modèle proposé par Jarrow et Yu (2001) « *propensity model* ». Les principales issues à résoudre sont associées aux difficultés de leur calibrage aux prix du marché.

3.2.2. *Modélisation de la dépendance par les fonctions copules.* Alors que l'usage de l'approche par les fonctions copules fait preuve d'une vaste utilisation multidisciplinaire, l'usage le plus fréquent semble être restreint aux applications liées au cadre de la finance. Par ailleurs, favorisée par les enjeux créés par les nouvelles recommandations du nouvel accord de Bâle, et face aux défis occasionnés par le contexte de crise et de multiplication des défaillances des entreprises, l'approche en terme de copule est ainsi la mieux adaptée pour tenir compte de tous les enjeux relatifs à la modélisation de la dépendance entre les événements de défauts.

Ainsi, l'usage de l'approche copules dans le cadre des problématiques liées au risque de crédit trouve son origine dans les travaux de Li (1999). Ce dernier, traitant la corrélation de défauts dans les modèles sous forme réduite, montre que l'approche de CreditMetrics, est équivalente à l'utilisation d'une copule Gaussienne.

Une deuxième approche est celle développée par Shöenbucher et Schubert (2001). A la différence de Li(1999), Shöenbucher et Schubert (2001) ont essayé d'incorporer une dynamique de la dépendance dans un modèle à base d'intensité. Les auteurs appliquent les résultats de cette approche à quelques copules archimédiennes (Clayton, Gumbel), ceci leur permet de dériver la dynamique de la probabilité de survie ainsi que celle du "spread de crédit". Le modèle permet aussi, en cas de défaut d'un émetteur, au "spread de crédit" des autres obligations faisant partie du portefeuille d'augmenter en cas d'une corrélation positive.

#### 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé d'introduire les notions essentielles permettant l'analyse du risque de crédit. Nous avons ainsi rappelé les différents modèles consacrés à l'étude du risque de crédit. Nous avons discuté des approches favorisant la prise en compte de la dépendance des défauts, élément central que nous proposons d'étudier tout au long du reste de cette thèse. En effet, nous envisageons d'étudier l'apport de l'utilisation de l'approche copules dans le cadre des problématiques liées à la mesure du risque et à la mesure de la diversification dédiées aux produits structurés de crédit.

## Un Modèle Actuariel pour la Mesure du Risque au Niveau d'un Portefeuille de Crédit : Une Approche en termes de Copules

### 1. Introduction

En prenant en considération le fait que le risque de crédit peut provenir d'un éventuel défaut ou aussi d'une éventuelle migration dans la qualité de crédit de l'émetteur, en plus d'une spécification sur le processus des taux d'intérêt, le défi est de pouvoir mettre en place un modèle actuariel permettant de quantifier les mesures de risque les plus complexes telles la Value-at-Risk (VaR) ou aussi la Conditional-VaR, au sein des portefeuilles de crédit. Un tel modèle permet de tenir compte à la fois du risque de crédit, à travers la migration de la qualité de crédit, et du risque du marché. Néanmoins, dans le cadre de cette étude on limitera l'analyse à la seule composante du risque de crédit. En effet, le risque de marché est pris ici d'une façon déterministe. On pense alors que la prochaine génération de ces modèles doit viser l'intégration du risque de marché d'une façon stochastique.

Une mesure de risque consistante, surtout pour le cas d'un portefeuille de crédit, doit tenir compte, du mieux possible, de la structure de dépendance se trouvant dans un tel portefeuille. L'une des méthodes les plus reconnues dans la résolution de ce type de problématique est l'adoption d'une approche de copule (Di Clemente Romano (2004)).

Le modèle de risque de crédit que l'on propose s'inscrit dans le cadre des modèles d'intensité et s'inspire largement des modèles proposés par Li (2000), Meneguzzo et Vecchiato (2004) Di Clemente et Romano (2004) ainsi que Masala et al (2007). Ce type de modélisation permet de dépasser les difficultés supportées par les modèles structurels lors de la modélisation de la valeur de la firme.

Ainsi, la contribution majeure de ce travail<sup>1</sup> est l'introduction de la migration de crédit dans le contexte des modèles d'intensité. De plus, la dépendance des défauts est modélisée à travers une approche copule. Ceci étant fait, nous essayons de montrer l'apport d'une telle modélisation pour la quantification des mesures de risques VaR et CVaR. Nous examinons surtout l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle copule sur la fiabilité de ces estimations. Nous analysons cet aspect pour différentes configurations de portefeuilles, matérialisées par la qualité des obligations les composant<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Un papier de recherche a été extrait de ce chapitre. Il est intitulé "*An Actuarial Model for Measuring Risk of Credit Portfolios : A Copula Approach.*"

Il sera soumis à *European Actuarial Journal*.

<sup>2</sup>Ce travail s'inspire largement du travail de Masala, Menzietti et Micocci (2007) «Optimisation of Conditional-VaR in an Actuarial Model for Credit Risk Assuming a

## 2. Méthodologie

En optant pour le cas des modèles d'intensité, comme pour Li (2000), ainsi que Di Clemente et Romano (2004), et en admettant une approche Copule pour la modélisation de la structure de dépendance, notre méthodologie se résume à travers les points suivants :

- Modéliser la structure de dépendance du portefeuille à travers une fonction copule appropriée.
- Utiliser la copule pour générer des scénarios pour les «temps jusqu'au défaut», en adoptant des simulations de type Monte Carlo. Les «temps jusqu'au défaut» ainsi générés auront ainsi une structure de dépendance décrite par la copule sélectionnée.
- Calculer pour chaque scénario la valeur du portefeuille, pour un horizon fixé généralement à une année, en prenant en compte l'effet du changement dans la qualité du crédit (inférée des «temps jusqu'au défaut» simulés) sur la valeur du portefeuille. En comparant cette valeur à celle caractérisée par une stabilité au niveau de la qualité du crédit, on aura ainsi pour chaque scénario la perte qui lui est correspondante.
- On obtient ainsi, pour un nombre de simulations suffisamment grand, la distribution de perte du portefeuille. On calcule ainsi les différentes caractéristiques statistiques (moyenne, variance, quantiles).

Les hypothèses de travail sont les suivantes :

- Le risque de défaut est modélisé en utilisant le «temps jusqu'au défaut» tel qu'introduit par Li (2000), Di Clemente et Romano (2004).
- Le taux de hasard (Hazard rate) est une variable aléatoire qui suit une distribution Gamma.
- Le taux de recouvrement est supposé déterministe.

### 3. Le modèle pour le défaut et la migration de crédit

**3.1. Le modèle pour le défaut.** Le risque de défaut est modélisé selon les modèles d'intensité. Pour ceci nous empruntons des notions comme le «Survival Time» ou le «Time until default», qui figurent principalement dans les travaux de Li (2000). Ces dernières notions évoquent deux variables aléatoires relatives respectivement au «temps de survie» et au «temps jusqu'au défaut». S'intéressant à la deuxième notion, on signale que cette variable est notée  $T_0$  (continue, ne prenant que des valeurs positives et ayant une fonction de densité noté  $f_0(t)$ ).

La fonction de distribution correspondante est  $F_0(t) = \Pr \{T_0 \leq t\}$  avec

$$F_0(t) = \Pr \{T_0 \leq t\} = \int_0^t f_0(u) du \quad (3.1)$$

où  $F_0(0) = 0$  et  $F_0(\infty) = 1$ .

**La fonction de survie  $S(t)$ ,** c'est-à-dire que la probabilité que l'émetteur survive jusqu'au l'horizon de temps  $t$ , est donnée par :

$$S(t) = \Pr \{T_0 \geq t\} = 1 - F_0(t) \quad (3.2)$$

---

Student Copula Dependence Structure». Nous proposons d'étendre le spectre des fonctions copules pour tenir compte de l'impact de l'introduction des copules archimédiennes.

Ainsi on a ( $S(0) = 1$  et  $S(\infty) = 0$ ).

La probabilité de défaut conditionnelle pour l'horizon de temps ( $t; t + \Delta t$ ), étant donné la survie jusqu'au temps  $t$  est :

$$\begin{aligned} \Pr \{t \leq T_0 \leq t + \Delta t \mid T_0 > t\} &= \frac{F_0(t + \Delta t) - F_0(t)}{1 - F_0} & (3.3) \\ &= \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)} \approx -\frac{S'(t)\Delta t}{S(t)} \end{aligned}$$

On notera

$$h(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)},$$

la fonction du taux de hasard ou le «Hazard rate function».

Si on connaît  $h(t)$ , la fonction de survie peut être écrite sous la forme :

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(u)du}$$

et la fonction de distribution est :

$$F_0(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(u)du}$$

La probabilité de survie jusqu'à  $t_2$  conditionnelle à la survie jusqu'à  $t_1$  avec  $t_1 < t_2$  est égale à :

$$\Pr \{t_2 < T_0 \mid T_0 > t_1\} = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u)du} =_{t_2-t_1} p_{t_1} \quad (3.4)$$

De même on a la probabilité de défaut conditionnelle dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , sachant la survie en  $t_1$ .

$$\Pr \{t_1 < T_0 \leq t_2 \mid T_0 > t_1\} = 1 - \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = 1 - e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u)du} =_{t_2-t_1} q_{t_1} \quad (3.5)$$

On note  $q_t$  la probabilité de défaut à 1 année.

On a aussi  $f_0(t) = h(t)s(t)$ . Si  $\tau$  est l'horizon de temps et si on suppose que  $h(t) = h$  pour tout  $t \in [0, t]$ , on a :

$$f_0(t) = he^{-ht}$$

Ainsi «**le temps jusqu'au défaut**» suit une distribution exponentielle avec pour paramètre  $h$  :

$$F_0(t) = 1 - e^{-ht} \quad Et \quad S(t) = e^{-ht} \quad (3.6)$$

Selon cette hypothèse de constance du «**taux de hasard**» ce dernier peut être estimé à partir des probabilités de défaut à 1 année (ou pour d'autres horizons) comme suit :

$${}_s q_t = 1 - e^{-hs} \Rightarrow h = -\frac{\ln(1 - {}_s q_t)}{s} \quad (3.7)$$

ou aussi

$$q_t = 1 - e^{-h} \Rightarrow h = -\ln(1 - q_t) \quad (3.8)$$

A ce niveau, nous mentionnons que la relation qui existe entre la fonction de distribution du "temps de défaut" et le "taux de hasard" nous permet de représenter le processus de défaut en modélisant la fonction de ce dernier. Ceci peut se faire selon 3 méthodes :

- En utilisant les fréquences de défaut publiées par les agences de Rating, et à partir de l'expression précédente, on peut calculer le «taux de hasard» pour chaque année.
- A partir des données du marché. En effet, dans les prix de marché des obligations soumises au risque de défaut, nous avons implicitement une courbe pour le spread de crédit. En supposant une valeur déterministe pour le taux de recouvrement, un spread de crédit implique une valeur pour la probabilité de défaut ainsi que pour le taux de hasard.
- Selon l'approche des modèles structurels, en utilisant la théorie de Merton.

Le choix entre ces 3 approches doit tenir compte de la dépendance qui peut exister entre deux ou plusieurs émetteurs.

L'utilisation de la première approche a été critiquée pour plusieurs raisons. Premièrement, elle est basée sur des données historiques et non pas présentes. Deuxièmement, elle ne suppose pas une hétérogénéité des fréquences de défaut entre émetteurs dans la même classe de rating. Finalement, le défaut et la migration sont souvent instables pour les horizons de temps éloignés. Pour ce qui est de la seconde approche, il s'avère difficile d'introduire la corrélation entre deux ou plusieurs obligations. Ceci revient au fait que l'introduction de la corrélation entre les intensités de défaut, ne peut pas reproduire des niveaux de corrélation réalistes. La dernière approche, basée sur les modèles structurels, reste toujours difficile à mettre en place.

Pour le cas de notre modèle on assume que le «taux de hasard», pour un émetteur donné, dans une classe de rating donnée, est constant chaque année, mais la valeur n'est plus l'espérance des fréquences de défaut historiques pour son classe de rating, mais elle suit une distribution Gamma ayant pour paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et une densité  $u(h_i)$ . En effet, selon cette optique on revient sur la première méthode vu qu'elle est facile à implémenter. Toutefois, pour remédier à son principal défaut, on va essayer de modéliser l'hétérogénéité au niveau des fréquences de défaut entre émetteurs ayant le même rating, en supposant que les probabilités de défaut ne sont plus déterministe mais plutôt stochastiques.

Selon ces hypothèses, notons :

$H_i$  La variable aléatoire pour le «taux de hasard» de l'émetteur  $i$  se trouvant dans la classe de rating  $k$ . Ainsi on a :

$$H_i \sim \text{Gamma}(\alpha_k, \beta_k)$$

$$\Rightarrow u_k(h_i) = \frac{\beta_k^{\alpha_k} e^{-\beta_k h_i} h_i^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)}$$

$$\Gamma(\alpha_k) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha_k - 1} dx$$

$$E(H_i) \equiv \bar{H}_i = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \mu_k; V(H_i) = \frac{\alpha_k}{\beta_k^2} = \sigma_k^2$$

Les paramètres de la distribution Gamma peuvent être estimés avec la méthode de maximum de vraisemblance, ou selon la méthode des moments. Selon la deuxième méthode on a :

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2} \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{\mu_k}{\sigma_k^2}$$

**3.2. La migration de crédit.** Le développement de ce point part de l'idée suggérant que le changement dans la qualité de crédit, pour les obligations individuelles, entre l'instant  $t_0$  et l'horizon de temps, que ce soit l'appréciation «upgrade» ou la dépréciation «down grade» de la qualité de crédit, aura une influence sur la valeur totale de l'exposition.

Ainsi pour modéliser la migration de crédit, on suppose que l'information sur la qualité de crédit peut être inférée à partir du «temps jusqu'au défaut». Une valeur élevée pour ce dernier signifie que le défaut est lointain et indique que l'émetteur est dans une classe de rating favorable, alors qu'une faible valeur indique que le défaut est proche et que l'émetteur doit se trouver dans une classe de rating défavorable.

On obtient ce résultat en fixant  $K$  bandes sur la distribution du «temps jusqu'au défaut». Si  $T_0(i)$  suppose une valeur entre 0 et la première bande (qui est généralement égale à l'horizon du temps), l'émetteur fait défaut, si  $T_0(i)$  prend une valeur entre la première et la deuxième bande on place l'émetteur dans la «mauvaise» classe de rating. En revanche, si cette variable passe les  $K$  bandes avec succès l'émetteur est signalé dans la meilleure classe de rating.

Dans le but de fixer les  $K$  bandes, il nous faut non seulement les probabilités de défaut mais aussi les probabilités de migration vers d'autres classes de rating. En tout, il nous faut toute l'information contenue dans la matrice de transition.

Notons,  $p_{D_i}$  la probabilité qu'un émetteur fasse défaut. Cette probabilité dépend bien sûr du rating initial de l'émetteur. Dans ce contexte, nous avons besoin d'identifier deux bandes  $s_k^{(i)}$  et  $s_{k+1}^{(i)}$ , de telle sorte que la probabilité inconditionnelle que  $T_0(i)$  suppose une valeur dans cette bande est,  $p_{D_i}$  :

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ s_k^{(i)} < T_0^{(i)} < s_{k+1}^{(i)} \right\} &= F_0 \left( s_{k+1}^{(i)} \right) - F_0 \left( s_k^{(i)} \right) \\ &= \left( 1 - e^{-\bar{H}_i(s_{k+1}^{(i)})} \right) - \left( 1 - e^{-\bar{H}_i(s_k^{(i)})} \right) \\ &= e^{-\bar{H}_i(s_k^{(i)})} - e^{-\bar{H}_i(s_{k+1}^{(i)})} = p_{D_i} \end{aligned}$$

Ainsi la première bande (la bande de défaut) est telle que :

$$p_{D_i} = 1 - e^{-\bar{H}_i s_1^{(i)}} \Rightarrow s_1^{(i)} = -\frac{\ln(1 - p_{D_i})}{\bar{H}_i}. \quad (3.9)$$

Evidemment,  $s_1$  correspond à l'horizon de temps.

Pour la deuxième bande on a :

$$\begin{aligned}
p_{1_i} &= e^{-\bar{H}_i s_1^{(i)}} - e^{-\bar{H}_i s_2^{(i)}} = e^{-\bar{H}_i \left[ -\frac{\ln(1-p_{D_i})}{\bar{H}_i} \right]} - e^{-\bar{H}_i s_2^{(i)}} \\
&= 1 - p_{D_i} - e^{-\bar{H}_i s_2^{(i)}} \\
\Rightarrow s_2^{(i)} &= -\frac{\ln(1-p_{D_i}-p_{1_i})}{\bar{H}_i}
\end{aligned}$$

D'une façon générale il s'agit d'identifier  $K + 1$  intervalles pour assigner à l'émetteur une qualité de crédit qui peut être soit "upgrade" ou "down grade" ou de garder la même qualité. de telle sorte que :

$$s_k^{(i)} = -\frac{\ln\left(1 - \sum_{j=k}^K p_{j_i}\right)}{\bar{H}_i} \quad (3.10)$$

#### 4. La distribution de perte

L'évaluation de l'exposition à l'instant  $t$  est conçue comme étant la valeur présente des cash-flows futurs. On suppose que les structures par terme des taux spots et des taux forwards, pour chaque classe de rating, sont bien connues. La même chose pour les vecteurs des cash-flows  $c^{(i)} = (c_1^i, c_2^i, \dots, c_n^i)$  et enfin les maturités  $T_i = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ , pour chaque exposition.

Pour établir la distribution de perte, sur l'horizon choisi, nous devons calculer la valeur des obligations individuelles en utilisant les caractéristiques inférées des simulations réalisées sur les «temps jusqu'au défaut». En effet, partant des résultats concernant la modélisation de la migration du crédit, ces données déterminent la qualité de crédit, conçue comme déterminant majeur de la valeur de l'exposition à la fin de l'horizon du temps. Par la suite, il s'agit de comparer la valeur de l'exposition par rapport à celle où les caractéristiques de l'exposition restent inchangées.

Dans ces conditions, nous aurons les spécifications suivantes :

La valeur de l'exposition individuelle à l'instant  $t_0$  est donnée par :

$$V_{i,t_0} = \sum_{j=1}^T c_j^{(i)} e^{-\delta_K(t_0, t_j)(t_j - t_0)} \quad (4.1)$$

où,  $\delta_K(t_0, t_j)$  représente le taux spot pour l'horizon  $(t_0, t_j)$  pour une exposition ayant un rating  $K$  à  $t_0$ . (On suppose ainsi une valeur déterministe pour la structure par terme des taux forwards, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de risque de marché).

En prenant un horizon de temps d'une année ( $t_0 = 0$  ;  $t_1 = 1$ ), nous avons deux cas de figure. Si l'exposition survit, sa valeur dépend de la structure par terme de taux forward, des ses cash-flows, et de la qualité de crédit prévue à l'instant  $t_1$ ,  $\chi$ .

On aura ainsi :

$$V_{i,1} | s_\chi^{(i)} < T_0^{(i)} < s_{\chi+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^T c_j^{(i)} e^{-\delta_\chi(t_1, t_j)(t_j - t_1)} \quad (4.2)$$

Par contre s'il y a eu défaut, la valeur de l'exposition sera :

$$V_{i,1} | T_0^{(i)} < \tau, R_i = r_i = N_i r_i \quad (4.3)$$

Notons  $y \in \mathbb{R}^m$  le vecteur aléatoire qui représente les aléas qui peuvent affecter la valeur de l'exposition (tel que le "taux de hasard", le "Rating" et éventuellement le "taux de recouvrement").

En plus, si on suppose que la distribution de  $y$  dans  $\mathbb{R}^m$  a pour densité  $p(y)$ , on calcule alors la valeur de l'exposition conditionnelle à  $y$ ,  $V_i(y)$ , et par la suite la perte (ou le gain) :

$$L_i(y) = V_i(y^*) - V_i(y) \quad (4.4)$$

avec  $V_i(y^*)$  la valeur de l'exposition si les caractéristiques de crédit (spécialement le rating) restent inchangées.

Finalement, en prenant en compte le vecteur des allocations existant dans le portefeuille, on évalue la perte totale encourue, définie comme étant la somme des pertes individuelles pondérées par les allocations respectives. On note par  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  le vecteur des allocations pour chaque exposition, et avec  $L(y) = (L_1(y), \dots, L_i(y), \dots, L_n(y))$  le vecteur pour les fonctions de perte des obligations individuelles, on suppose qu'à  $t_0$  :  $x_i = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

La fonction de perte sera :

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^n L_i(y) x_i = L(y)x \quad (4.5)$$

Pour une valeur fixe de  $x$ , la fonction de perte  $L(x, y)$  est une variable aléatoire pour laquelle la distribution dans  $\mathbb{R}$  est induite par la distribution de  $y$ . Toutefois, l'expression de la fonction de densité  $p(y)$  est généralement inconnue. Ainsi, pour déterminer l'allure de la distribution de perte, nous adoptons des simulations de type Monte Carlo. On obtient ainsi un ensemble de vecteur  $y_1, y_2, \dots, y_j$  avec pour probabilité  $\pi_j = 1/j$ ,  $j$  étant le nombre des simulations.

L'objectif principal de la mise en place d'une telle modélisation consiste en la modélisation de la structure de dépendance qui se trouve entre les facteurs de risque. Ceci passe par la modélisation de la fonction de distribution jointe des «temps jusqu'au défaut».

$$F_0(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) = \Pr (T_0^1 \leq t_1, \dots, T_0^i \leq t_i, \dots, T_0^n \leq t_n)$$

Ainsi, et en adoptant un approche copules pour modéliser la structure de dépendance qui lie les facteurs de risque, la procédure que nous adoptons, pour générer la distribution de perte, se fait selon les étapes suivantes :

- Premièrement, on doit fixer les distributions marginales pour chaque émetteur. Comme mentionné ci-dessus, les marginales auront des distributions exponentielles, leurs paramètres étant des variables aléatoires suivant des distributions Gamma.
- Deuxièmement, on génère, n-tuples à partir de la fonction copule sélectionnée, que ce soit Gaussienne, Student, Clayton, ou Gumbel. Chaque n-tuple représente un vecteur de «temps jusqu'au défaut» simulé.
- Pour chaque simulation et pour chaque émetteur, on examine le «temps jusqu'au défaut» :



-) si  $T-u-d < 1$  (horizon) : ceci implique le défaut ; on extrait le taux de recouvrement  $R$  et on calcule ainsi la valeur du crédit en cas du défaut.

-) Si « $T-u-d > 1$ » dépister la nouvelle classe de rating selon les bandes de migration.

– Pour chaque simulation on calcule la valeur du portefeuille.

La fonction de perte sur le portefeuille, dans le scénario  $J$  est :

$$L(x, y_J) = \sum_{i=1}^n L_i(y_J) x_i \quad (4.6)$$

avec  $L_i(y_J)$  la fonction de perte de l'émetteur  $i$  dans le scénario  $J$  :

$$L_i(y_j) = V_i(y^*) - V_i(y_j) \quad (4.7)$$

$V_i(y^*)$  étant la valeur de l'exposition sachant qu'il n'y a pas eu de changements (migration de crédit).

On aura ainsi :

■ **L'Expected Loss : (EL) :**

$$\mu [L(x)] = \frac{\sum_{j=1}^J L(x, y_j)}{J} \quad (4.8)$$

■ **La Variance :**

$$\sigma^2 [L(x)] = \frac{\sum_{j=1}^J (L(x, y_j) - \mu [L(x)])^2}{J} \quad (4.9)$$

■ **La Value-at-Risk (VaR( $\alpha$ )) :**

$$\varsigma_\alpha(x) = QL_\alpha(x), \quad (4.10)$$

Avec  $QL_\alpha(x)$  le quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de perte.

■ **La Conditional-VaR (C-VaR( $\alpha$ )) :**

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{J(1-\alpha)} \sum_{\substack{j=1 \\ L(x, y_j) \geq \varsigma_\alpha(x)}}^J L(x, y_j) = \varsigma_\alpha(x) + \frac{1}{J(1-\alpha)} \sum_{j=1}^J [L(x, y_j) - \varsigma_\alpha(x)]^+ \quad (4.11)$$

## 5. Application

Dans cette section, nous proposons d'appliquer notre méthodologie pour le cas de portefeuilles de crédit fictifs comportant des obligations relatives à des émissions obligataires relevant du marché français et allemand. Notre objectif primordial est de vérifier l'impact d'une mauvaise spécification de la fonction copule modélisant les temps de défaut dans le cadre du processus d'estimation des mesures de risque, telles la Value-at-Risk et la Conditional Value-at-Risk. Nous envisageons aussi d'étudier la sensibilité de cette relation par rapport au rating des obligations composant le portefeuille. En d'autres termes, nous envisageons de vérifier si l'impact d'une mauvaise spécification de la copule est plus important au sein d'un portefeuille dont les obligations sont notées Baa que pour le cas d'un portefeuille dont les obligations sont notées Aaa.

Afin de répondre à cette question, nous avons essayé de constituer des portefeuilles de crédits ayant des profils de notations différents. Toutefois, avant de pouvoir répondre à notre question nous envisageons d'étudier tout d'abord la relation qui peut exister entre le rating des obligations composant le portefeuille de crédit et le choix de la copule modélisant au mieux leurs structures de dépendance. Nous reprenons ainsi, pour le cas des portefeuilles de crédit, une question que nous avons soulevée au chapitre 2, relative à la validation de la relation qui peut se trouver entre le degré de diversification d'un portefeuille et le choix de la fonction copule. En effet, on peut penser que la structure de dépendance d'un portefeuille dont les obligations sont notées Aaa est différente de celle d'un portefeuille dont les obligations sont notées Baa. Nous essayons de vérifier la validité de cette hypothèse dans la section suivante. Ceci étant fait, nous vérifions par la suite l'impact de la mauvaise spécification de la copule sur les mesures de risque étudiées.

**5.1. Description des données.** Dans cette section, nous détaillons les données utilisées lors de cette étude. Nous résumons aussi leurs caractéristiques statistiques. En effet, comme mentionné ci-dessus, notre étude porte sur des données relevant à la fois du marché obligataire français ainsi que de celui du marché allemand. Pour chacun de ces marchés, nous avons composé des portefeuilles de crédit ayant des ratings différents. Nous avons retenu trois classes de rating selon l'échelle de notation proposée par Moody's. Celle-ci comporte sept classes de rating allant de Aaa, pour la classe de rating la plus favorable à Ca-C, pour la classe de rating la plus défavorable. En effet, nous nous intéressons à des obligations dont les ratings sont soit A, Baa ou aussi Ba. Pour chacune des classes de notation, et pour chaque marché, nous avons retenu trois obligations dont nous avons obtenu les caractéristiques propres liées surtout à la valeur nominale, le taux de coupon et la maturité. Ces caractéristiques seront utilisées pour les simulations des distributions des pertes ainsi que pour les estimations des mesures de risque. La liste des obligations pour chaque notation ainsi que leurs caractéristiques propres en terme de valeur nominal, de taux de coupons et de maturité sont résumés dans les tableaux 27 à 31 de l'annexe.

La première étape est de spécifier la structure de dépendance liant les temps de défauts pour chacun des portefeuilles étudiés. A cet égard, nous avons récupéré des données relatives aux séries de rendements de leurs titres de propriété respectifs. En effet, on admet largement que les temps de défauts sont des fonctions croissantes des rendements des actions. Ainsi, on s'attend à ce que plus ces rendements se trouvent dans une phase de tendance favorable, plus le temps de défaut s'éloigne. On admet aussi que les temps de défaut et les rendements des actions auront la même structure de dépendance et par la suite la même copule. Dans les tableaux qui suivent, nous résumons les caractéristiques statistiques des séries de rendements des titres de propriété correspondant à chacune des obligations. Pour chacun de ces titres, nous avons récupéré les séries de rendements hebdomadaires. La période d'étude est ainsi différente d'un marché à l'autre. En effet, sur le marché français l'étude couvre la période allant du 04/08/2008 au 30/06/2014, ce qui donne un échantillon de 306 observations pour les séries de rendements hebdomadaires. Par contre, sur le marché allemand l'échantillon porte sur 370

observations couvrant ainsi la période allant du 04/07/2005 au 30/06/2014. Ce choix se justifie par la disponibilité des données pour l'ensemble des titres retenus dans l'étude qui diffèrent d'un marché à un autre.

Ces caractéristiques montrent surtout le caractère asymétrique des séries de rendements sur les deux marchés français et allemand, une caractéristique commune à l'ensemble des séries de rendements des actifs financiers. Toutefois, on remarque une disparité entre les deux marchés, dans le sens où les séries de rendements des actifs issus du marché allemand sont beaucoup plus asymétriques que celles des actifs issus du marché français. Ceci est d'autant vrai pour le cas des obligations ayant un rating A, pour lesquelles les rendements négatifs extrêmes ainsi que la skewness négative semble être les plus importants.

TAB. 1. Statistiques descriptives : Rating Aaa ; Allemagne

	<b>Bayer AG</b>	<b>Daimler AG</b>	<b>Man SE</b>
<b>Moyenne</b>	0.0040	0.0024	0.0027
<b>Min</b>	-0.4752	-1.1122	-1.0862
<b>Max</b>	0.1401	0.1766	0.1640
<b>Ecart-type</b>	0.0446	0.0726	0.0716
<b>Skewness</b>	-3.3713	-10.0566	-9.8383
<b>Kurtosis</b>	39.3384	156.1862	150.7777
<b>JB Test</b>	$2.0432 \cdot 10^{04}$	$3.5706 \cdot 10^{05}$	$3.3246 \cdot 10^{05}$

TAB. 2. Statistiques descriptives : Rating Baa ; Allemagne

	<b>Deutsche Post AG</b>	<b>Deutsche Telekom</b>	<b>RWE</b>
<b>Moyenne</b>	0.0012	0.0024	-0.0010
<b>Min</b>	-0.8543	-0.5008	-0.5563
<b>Max</b>	0.1452	0.7462	0.1395
<b>Ecart-type</b>	0.0562	0.0562	0.0474
<b>Skewness</b>	-9.7913	4.4304	-4.5403
<b>Kurtosis</b>	150.6386	104.7440	54.7927
<b>JB Test</b>	$3.3179 \cdot 10^{05}$	$1.5602 \cdot 10^{05}$	$4.1359 \cdot 10^{04}$

**5.2. Rating et choix de copule.** Dans cette section, nous essayons d'étudier la relation qui peut se trouver entre la notation des obligations composant le portefeuille de crédit et le choix de la fonction copule ayant modélisé au mieux la structure de dépendance. Pour répondre à cette question, nous avons mené deux types d'analyse. Dans la première analyse nous avons essayé de comparer la dépendance des quantiles qui résulte des portefeuilles dont les obligations sont issues de différentes classes de rating. Les résultats de cette analyse sont donnés dans les figures suivantes. D'après ces

TAB. 3. Statistiques descriptives : Rating Ba ; Allemagne

	<b>RheinMetall AG</b>	<b>ThyssenKrupp AG</b>	<b>Deutsche Luf- thansa</b>
<b>Moyenne</b>	0.0008	0.0012	0.0024
<b>Min</b>	-0.7277	-0.9405	-0.5008
<b>Max</b>	0.1757	0.1840	0.7462
<b>Ecart- type</b>	0.0590	0.0686	0.0562
<b>Skewness</b>	-5.3780	-7.2098	4.4304
<b>Kurtosis</b>	66.6098	100.7247	104.7440
<b>JB Test</b>	6.2255 10 <sup>04</sup>	1.4596 10 <sup>05</sup>	1.5602 10 <sup>05</sup>

TAB. 4. Statistiques descriptives : Rating Aaa ; France

	<b>Schneider Electric</b>	<b>Danone</b>	<b>Suez Environ- nement</b>
<b>Moyenne</b>	0.0032	0.0008	4,41110 <sup>-05</sup>
<b>Min</b>	-0.2610	-0.1560	-0,2513
<b>Max</b>	0.1758	0.0930	0,1631
<b>Ecart- type</b>	0.0517	0.0300	0,0442
<b>Skewness</b>	-0.3289	-0.6163	-0,6574
<b>Kurtosis</b>	5.7506	5.8073	7,5891
<b>JB Test</b>	101.9780	119.8495	290.5646

TAB. 5. Statistiques descriptives : Rating Baa ; France

	<b>Veolia</b>	<b>Bouygues SA</b>	<b>Orange</b>
<b>Moyenne</b>	-0.0020	2,1577 10 <sup>-05</sup>	-8,5404 10 <sup>-05</sup>
<b>Min</b>	-0.3486	-0,2097	-0.1855
<b>Max</b>	0.1978	0,2641	0.1912
<b>Ecart- type</b>	0.0576	0,0524	0.0363
<b>Skewness</b>	-1.1576	0,2379	0.2310
<b>Kurtosis</b>	9.4374	6,7500	7.1184
<b>JB Test</b>	596.7004	182.1896	218.9799

résultats, nous pouvons vérifier l'adéquation de la dépendance des quantiles pour des portefeuilles ayant des obligations dont le rating est Aaa avec celles issues des copules elliptiques (Gaussienne et Student). Ceci est vrai pour le cas des deux marchés considérés. Par contre, pour les portefeuilles dont les obligations ont un rating Ba, la dépendance des quantiles s'ajuste mieux avec celle issue de la copule de Clayton. Ceci est toujours vrai à la fois pour le cas des obligations issues du marché français que celle issues du marché allemand. Ces résultats, étant surtout valables pour le cas des portefeuilles bivariés, semblent confirmer notre hypothèse suggérant la différence de la

TAB. 6. Statistiques descriptives : Rating Ba ; France

	Lafarge	Renault SA	Eutelsat SA
<b>Moyenne</b>	-0.0005	0.0007	0.0016
<b>Min</b>	-0.2611	-0.3783	-0.1793
<b>Max</b>	0.2557	0.2318	0.0909
<b>Ecart-type</b>	0.0582	0.0716	0.0299
<b>Skewness</b>	-0.5750	-0.7375	-1.0657
<b>Kurtosis</b>	6.4762	6.4635	7.7463
<b>JB Test</b>	170.9314	180.6836	345.1483

structure de dépendance selon la classe de rating des obligations composant le portefeuille.

Dans la suite, nous essayons de valider cette suggestion grâce à une analyse basée sur les tests d'adéquation, comparable avec celle menée dans les chapitres précédents. Les résultats de cette analyse sont résumés dans les tableaux qui suivent. D'après ces résultats nous concluons sur la validité de la copule de student pour modéliser la structure de dépendance dans les portefeuilles qui sont composés d'obligations dont le rating est Aaa ou Baa. Ceci est vrai pour les deux marchés français et allemand. Toutefois, les résultats ne sont pas concluants pour les portefeuilles qui ont des obligations dont le rating est Ba. Pour ces portefeuilles, selon l'analyse en termes de dépendance des quantiles, la copule de Clayton semble être un bon compromis. Pour l'ensemble de ces résultats, nous supposons dans la suite, que le vrai modèle copule est celui donné par la copule de Student. Nous analysons ainsi l'impact de ce choix sur les mesures de risque étudiées.

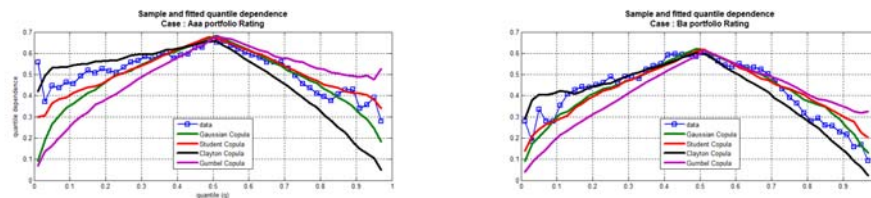


FIG. 1. Dépendance des quantiles : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa Vs Ba ; Allemagne

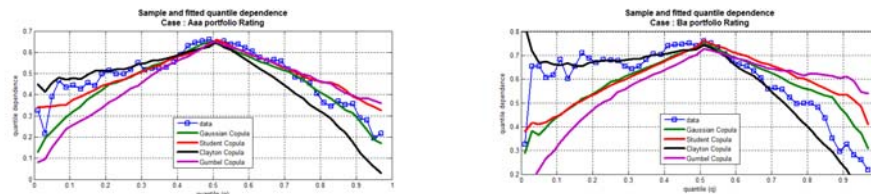


FIG. 2. Dépendance des quantiles : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa Vs Ba ; France

TAB. 7. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa ; Allemagne

		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
Rating		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Aaa	N = 2	0,029	<b>0,028</b>	0,031	0,093
		<i>pf1</i> (0,073)	(0,091)	(0,122)	(0,000)
	<i>pf2</i>	0,027	<b>0,019</b>	0,050	0,055
		(0,115)	(0,390)	(0,007)	(0,002)
		0,025	<b>0,017</b>	0,059	0,024
	<i>pf3</i> (0,174)	(0,571)	(0,007)	(0,219)	
	N = 3	0,039	<b>0,034</b>	0,093	0,143
<i>pf</i> (0,075)		(0,149)	(0,007)	(0,000)	

TAB. 8. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Baa ; Allemagne

		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
Rating		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Baa	N = 2	0,033	<b>0,030</b>	0,042	0,074
		<i>pf1</i> (0,077)	(0,086)	(0,043)	(0,000)
	<i>pf2</i>	<b>0,025</b>	0,025	0,032	0,077
		(0,213)	(0,187)	(0,128)	(0,000)
		0,018	<b>0,018</b>	0,032	0,056
	<i>pf3</i> (0,516)	(0,552)	(0,115)	(0,002)	
	N = 3	0,058	0,058	0,094	0,194
<i>pf</i> (0,005)		(0,004)	(0,005)	(0,000)	

TAB. 9. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Ba ; Allemagne

Rating		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Ba	N = 2 <i>pf1</i>	0,032 (0,059)	<b>0,031</b> (0,067)	0,034 (0,097)	0,101 (0,000)
		0,023 (0,268)	<b>0,022</b> (0,307)	0,029 (0,171)	0,059 (0,002)
		0,021 (0,391)	<b>0,017</b> (0,609)	0,024 (0,307)	0,030 (0,121)
	N = 3 <i>pf</i>	<b>0,049</b> (0,052)	0,047 (0,042)	0,072 (0,009)	0,171 (0,000)

TAB. 10. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Aaa ; France

Rating		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Aaa	N = 2 <i>pf1</i>	0,018 (0,583)	<b>0,013</b> (0,851)	0,063 (0,011)	0,032 (0,093)
		0,027 (0,162)	<b>0,026</b> (0,165)	0,015 (0,765)	0,070 (0,000)
		0,027 (0,112)	<b>0,024</b> (0,172)	0,052 (0,011)	0,088 (0,000)
	N = 3 <i>pf</i>	0,040 (0,149)	<b>0,036</b> (0,168)	0,111 (0,003)	0,167 (0,000)

TAB. 11. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Baa ; France

Rating		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Baa	N = 2 <i>pf1</i>	0,027 (0,134)	<b>0,025</b> (0,144)	0,078 (0,000)	0,087 (0,000)
		0,021 (0,298)	<b>0,016</b> (0,546)	0,129 (0,000)	0,051 (0,005)
	<i>pf2</i>	0,029 (0,122)	<b>0,024</b> (0,193)	0,060 (0,003)	0,069 (0,001)
		N = 3 <i>pf</i>	0,034 (0,286)	<b>0,030</b> (0,321)	0,214 (0,000)

TAB. 12. Test d'adéquation : Portefeuille d'obligations avec un Rating Ba ; France

Rating		Gaussian	Student	Clayton	Gumbel
		$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )	$S_n$ ( <i>pvalue</i> )
Ba	N = 2 <i>pf1</i>	0,041 (0,015)	0,038 (0,011)	0,025 (0,139)	0,124 (0,000)
		0,024 (0,261)	0,018 (0,528)	0,037 (0,067)	0,044 (0,01)
	<i>pf2</i>	0,021 (0,408)	0,018 (0,552)	0,033 (0,111)	0,041 (0,016)
		N = 3 <i>pf</i>	0,058 (0,016)	0,052 (0,017)	0,193 (0,000)



**5.3. Rating, fonctions copules et mesures de risque.** Nous reportons dans cette section les résultats des estimations des mesures de risque, Value-at-Risk et Conditional Value-at-Risk, pour les différents portefeuilles étudiés. Le premier résultat que nous reportons concerne la valeur actuelle et la valeur « Forward » des différentes positions. Ceci est donné dans les tableaux 15 et 16. La valeur actuelle est mentionnée à titre indicatif, et elle est calculée selon la formule de l'équation 4.1, et en utilisant la "structure par terme des taux Spot" donnée dans le tableau 13. La valeur Forward, étant donnée qu'il n'y a pas eu de changements dans la qualité de crédit des émetteurs dont les obligations appartiennent au portefeuille, est calculée selon la formule de l'équation 4.2, et en utilisant la "structure par terme des taux Forward", donnée dans le tableau 14. Cette dernière est utilisée pour établir la distribution de pertes des portefeuilles tel que formulée dans l'équation 4.6.

TAB. 13. Structure par terme des taux Spot

	<b>t(0,1)</b>	<b>t(0,2)</b>	<b>t(0,3)</b>	<b>t(0,4)</b>	<b>t(0,5)</b>	<b>t(0,6)</b>	<b>t(0,7)</b>
<b>Aaa</b>	0.0296	0.0325	0.0371	0.0421	0.0459	0.0465	0.0470
<b>Aa</b>	0.0300	0.0329	0.0376	0.0425	0.0463	0.0470	0.0475
<b>A</b>	0.0306	0.0336	0.0384	0.0437	0.0476	0.0483	0.0488
<b>Baa</b>	0.0354	0.0378	0.0422	0.0472	0.0509	0.0515	0.0520
<b>Ba</b>	0.0488	0.0514	0.0552	0.0614	0.0659	0.0666	0.0671
<b>B</b>	0.0535	0.0561	0.0631	0.0713	0.0761	0.0771	0.0777
<b>Ca-C</b>	0.1415	0.1408	0.1405	0.1338	0.130	0.1293	0.1289

TAB. 14. Structure par terme des taux Forward

	<b>t(1,2)</b>	<b>t(1,3)</b>	<b>t(1,4)</b>	<b>t(1,5)</b>	<b>t(1,6)</b>	<b>t(1,7)</b>	<b>t(1,8)</b>
<b>Aaa</b>	0.0354	0.0409	0.0462	0.0499	0.0499	0.0499	0.0499
<b>Aa</b>	0.0358	0.0413	0.0467	0.0504	0.0504	0.0504	0.0504
<b>A</b>	0.0365	0.0423	0.0481	0.0518	0.0518	0.0518	0.0518
<b>Baa</b>	0.0402	0.0456	0.0512	0.0548	0.0548	0.0548	0.0548
<b>Ba</b>	0.0540	0.0585	0.0656	0.0702	0.0702	0.0702	0.0702
<b>B</b>	0.0587	0.0678	0.0772	0.0818	0.0818	0.0818	0.0818
<b>Ca-C</b>	0.1402	0.1399	0.1313	0.1268	0.1268	0.1268	0.1268

TAB. 15. Valeur actuelle et Valeur forward avec non changement dans la qualité de crédit ; Cas Allemagne

		<b>A</b>	<b>Baa</b>	<b>Ba</b>
Valeur actuelle	$V_{t_0}(y)$	942.167,870	962.169,387	977.044,764
Valeur forward	$V_{t_1}(y^*)$	964.786,849	990.905,511	1.014.694,971

TAB. 16. Valeur actuelle et Valeur forward avec non changement dans la qualité de crédit ; Cas France

		A	Baa	Ba
Valeur	actuelle	933.620,804	969.530,655	976.553,077
$V_{t_0}(y)$				
Valeur	forward	961.915,536	1.000.976,429	1.014.144,797
$V_{t_1}(y^*)$				

L'établissement de la distribution des pertes passe tout d'abord par la définition du taux de recouvrement. Ceci est pris ici d'une façon déterministe, mais il peut être caractérisé aussi d'une manière stochastique comme dans Masala et Menzietti (2007). En se basant sur les statistiques des taux de recouvrement, développées par Carty et Liberman (1996), nous avons retenu la valeur du taux de recouvrement espéré qui est de l'ordre de 0.5113.

L'étape suivante consiste à fixer les bandes retraçant le processus de changement dans la qualité de crédit des émetteurs, étant donné leur rating de départ. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons les résultats développés dans la section 3.2. Il s'agit ainsi de retrouver le "taux de Hasard" moyen ( $\mu_k$ ). Ce dernier est extrapolé à partir des probabilités de défauts à 1 an, incluses dans la matrice de transition développée par l'agence de notation Moody's. Ensuite, et afin de simuler les valeurs du "taux du Hasard", nous avons retrouvé les paramètres des distributions Gamma par la méthode des moments. Ainsi, l'écart-type ( $\sigma_k$ ), pour chaque classe de rating est supposée égale à un quota du "taux du Hasard" moyen, ce quota étant différent d'une classe de rating à une autre ( $\sigma_k/\mu_k$ ). Ces suggestions sont cohérentes avec les analyses statistiques développées dans Gordy (2000). Nous reportons dans le tableau 17, pour chaque classe de rating, les valeurs du "taux du Hasard" moyen, de son écart-type, ainsi que les paramètres des distributions Gamma.

Etant donnés ces résultats, les bandes qui marquerons le changement de la qualité de crédit (Rating) sur la base de la distribution du « temps jusqu'au défaut », ont été calculées en appliquant l'expression de l'équation 3.10 sur les probabilités issues de la matrice de transition présentée dans le tableau 18, ainsi que le vecteur regroupant les «taux de hasard» moyens ( $\mu_{AAA}, \dots, \mu_{Caa-C}$ ). Ces résultats figurent dans le tableau 19.

TAB. 17. Données relatives aux taux de hazard

Rating	$\mu_k$	$\sigma_k$	$\alpha_k$	$\beta_k$	$\sigma_k/\mu_k$
<b>Aaa</b>	0,0001	0,00014	0,5102	5101,79	1.4
<b>Aa</b>	0,0001	0,00013	0,5917	5917,20	1.3
<b>A</b>	0,0001	0,00012	0,6944	6944,40	1.2
<b>Baa</b>	0,0001	0,0001	1,0000	10000	1
<b>Ba</b>	0,0001	0.00008	1,5625	15625	0.8
<b>Ba</b>	0,00449	0.0027	2,7654	615,91	0.6
<b>Caa-C</b>	0,0852	0.0426	4	46,9484	0.5

TAB. 18. Matrice de transition : Source Moody's 2010

Rating initial	Rating Final							
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Défaut
Aaa	75.2	5.94	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00
Aa	0.18	61.19	7.34	0.52	0.01	0.01	0.01	0.00
A	0.09	1.24	75.71	3.98	0.8	0.18	0.01	0.00
Baa	0.09	0.09	0.18	86.45	1.38	0.09	0.09	0.00
Ba	0.09	0.09	0.09	5.57	79.92	4.57	0.01	0.00
B	0.09	0.09	0.09	0.09	5.50	75.87	4.60	0.45
Caa-C	0.09	0.09	0.09	0.09	2.51	12.03	68.92	8.52

TAB. 19. Bandes de Migration pour les "temps jusqu'au défaut"

Rating initial	Rating Final						
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C
Aaa	618,86	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
Aa	11742,84	823,71	56,55	4,00	3,00	2,00	1,00
A	17098,66	16437,18	509,45	99,69	19,71	2,00	1,00
Baa	21433,53	21360,45	21208,47	157,22	18,21	9,60	1,00
Ba	23281,08	23193,24	23106,17	18651,69	470,18	2,00	1,00
B	448,94	447,50	446,08	444,670	368,94	11,54	1,00
Caa-C	30,002	29,872	29,74	29,618	26,421	17,47	1,00

A ce niveau, nous illustrons dans le tableau suivant, à titre d'exemple, l'évolution de la valeur forward du portefeuille dont les obligations sont notées Ba et sont issues du marché français. Etant donné qu'il n'y aura pas de changement dans la qualité de rating des émetteurs, la valeur forward de ce portefeuille est de l'ordre de 1.014.144,797 Euro, pour une valeur actuelle égale à 976.553,077 Euro.

TAB. 20. Valeur forward en t1 pour le portefeuille d'expositions notées Ba ; France

Emetteur	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa-C	Défaut
Lafarge	262036,12	261792,92	261114,6	259606,95	<b>252750,71</b>	247379,89	223594,49	127825
Renault	522277,45	521791,86	520437,41	517427,59	<b>503738,78</b>	493015,17	445539,92	255650
Eutelsat SA	262030,44	261930,14	261679,59	260854,53	<b>257655,32</b>	255374,37	238392,55	127825

Etant donné l'ensemble de ces calculs préliminaires, nous essayons dans la suite de mettre en place les différents algorithmes de simulation des « temps jusqu'au défaut », dont la structure de dépendance est décrite par l'une ou l'autre des fonctions copules sélectionnées. Ainsi, on évalue pour chaque simulation la valeur des différentes obligations en fonction de leurs classes de rating. Celle-ci est déterminée à travers le processus qui décrit les « temps jusqu'au défaut » de chaque émetteur. Ceci nous permet en quelque sorte de calculer la valeur du portefeuille à l'horizon spécifié, ainsi que la perte réalisée. Pour un nombre suffisamment grand de simulations on obtient la distribution de perte du portefeuille. On calcule alors les différentes mesures de risques tels que définies dans la section 4. Les résultats sont présentés dans les tableaux qui suivent.

Nous analysons ces résultats sous l'angle de trois points différents. Dans un premier temps, nous discutons des différences des estimations des mesures de risque selon la classe de rating des obligations composant les portefeuilles. Ainsi, ces résultats montrent que les mesures VaR et CVaR les plus importantes sont enregistrées respectivement pour le cas des portefeuilles de crédit dont les obligations sont notées A, Baa et Baa, ceci étant vrai pour le cas de deux marchés considérés. Un tel résultat peut être expliqué surtout par les caractéristiques statistiques des actifs composant ces portefeuilles. En effet, comme mentionné ci-dessus, les séries de rendements les plus asymétriques sont enregistrées pour les obligations dont le rating est de "A", pour lesquels les rendements négatifs extrêmes ainsi que la skewness négative semblent être les plus importants. Ce résultat peut être dû aussi aux probabilités de transition pour chacune des classes de rating. En effet, selon la matrice de transition, nous vérifions que la classe de rating "A" présente la probabilité de garder la même notation la plus faible, 75,71% contre 86,14% pour la classe de rating "Baa".

Dans un deuxième temps, nous analysons l'impact du choix du modèle copule sur les estimations des mesures de risque. Les résultats des estimations montrent que le modèle copule de Student, malgré adopté comme étant le meilleur modèle ayant modélisé au mieux la structure de dépendance, n'étant pas le modèle qui procure les meilleures estimations des mesures de risque VaR et CVaR. En effet, le modèle utilisant la copule de Clayton, semble être le modèle qui procure les estimations les plus importantes, sur-estimant ainsi celles données à travers l'ensemble des modèles alternatifs. Ceci est vrai pour le cas des deux marchés français et allemand, et surtout pour le niveau de confiance le plus élevé (99%). Notons aussi que l'impact de la surévaluation du modèle copule de Clayton semble être différent d'une classe de rating à l'autre, surtout pour la mesure de risque VaR. Dans la mesure où l'impact de la surévaluation le plus élevée est enregistré pour la classe de rating la plus défavorable, soit "Ba". Dans le même contexte, on peut vérifier que plus la classe de rating est défavorable, plus l'impact de surévaluation de la mesure de risque VaR pour le cas de la copule de Clayton est important.

Pour terminer, notons que l'impact d'une mauvaise spécification du modèle copule est différent selon la mesure de risque. Ainsi, l'impact du choix du modèle copule semble être plus important sur la mesure de risque CVaR

que celle de la VaR, surtout pour les portefeuilles regroupant les obligations ayant les notes de crédit les plus défavorables, soit "Ba".

Ainsi, selon l'ensemble de ces résultats, nous pouvons affirmer l'importance du choix du modèle copule lors du processus d'estimation des mesures de risque au sein des portefeuilles de crédit. En effet, en cas de mauvaise spécification du modèle copule, les erreurs d'estimation peuvent avoir des conséquences importantes, étant donné l'importance des positions détenues dans ces portefeuilles. Dans ce contexte, nous mentionnons que l'impact d'une mauvaise spécification est d'autant plus important pour les portefeuilles dans lesquels sont regroupées les obligations ayant les notations les plus défavorables.

Nous mentionnons finalement que le choix de la meilleure copule, pour modéliser la structure de dépendance dans les portefeuilles de crédit, ici la copule de Student, ne garantit pas les meilleurs résultats d'estimations faites sur les mesures de risque VaR et CVaR. En effet, il nous semble adéquat d'utiliser le modèle de copule de Clayton pour achever au mieux ces estimations. Il reste ensuite de comparer ces estimations aux pertes réelles enregistrées, pour pouvoir juger de l'adéquation des ces mesures avec la réalité des sommes engagées.

TAB. 21. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating A ; Allemagne

	Rating A			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>2,122%</b>	<b>8,709%</b>	<b>12,872%</b>	<b>22,378%</b>
<b>Gaussienne</b>	0	-0,255	0	-0,518
<b>Clayton</b>	0,0835	-0,1448	0	0,0701
<b>Gumbel</b>	0	-0,0142	-0,0387	-1,1674

TAB. 22. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Baa ; Allemagne

	Rating Baa			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>1,683%</b>	<b>5,358%</b>	<b>7,031%</b>	<b>11,037%</b>
<b>Gaussienne</b>	0	-0,0872	-0,0489	-0,1598
<b>Clayton</b>	0	0,1872	0,1128	2,1605
<b>Gumbel</b>	0	-0,1308	-0,0489	-0,5396

TAB. 23. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Ba ; Allemagne

	Rating Ba			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>0,523%</b>	<b>1,231%</b>	<b>1,282%</b>	<b>2,252%</b>
Gaussienne	0	-0,0129	0	0,0570
Clayton	0	0,0537	0,2948	0,5435
Gumbel	0	-0,0254	-0,0254	0,0111

TAB. 24. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating A ; France

	Rating A			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>6,242%</b>	<b>11,987%</b>	<b>15,023%</b>	<b>22,931%</b>
Gaussienne	0,1294	0,1236	0	-0,4969
Clayton	0,1294	0,2943	0,3338	0,7976
Gumbel	-0,3897	-0,3318	-0,7365	-1,1719

TAB. 25. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Baa ; France

	Rating Baa			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>2,675%</b>	<b>7,091%</b>	<b>7,308%</b>	<b>13,818%</b>
Gaussienne	0	-0,0485	0,4041	-0,5651
Clayton	0	0,1915	0,8441	0,5392
Gumbel	0	-0,1972	-0,7727	-1,1402

TAB. 26. VaR et CVaR et différence par rapport au vrai modèle ; Cas d'un portefeuille de Rating Ba ; France

	Rating Ba			
	95%		99%	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR
<b>Vrai Modèle (Student)</b>	<b>0,529%</b>	<b>1,219%</b>	<b>1,586%</b>	<b>2,943%</b>
Gaussienne	0	0,0311	-0,3046	-0,6795
Clayton	0	0,0887	0,3046	0,5937
Gumbel	0	-0,1294	-0,5295	-0,5899

## 6. Conclusion

Dans le cadre de ce travail nous avons essayé de mettre en place un modèle actuariel pour la mesure du risque au niveau des portefeuilles de crédit. En ce sens, et dans le cadre des modèles d'intensité, le modèle proposé permet de prendre en considération la migration de la qualité de crédit des émetteurs. La structure de dépendance est modélisée à travers une approche copule.

L'analyse de cette structure de dépendance selon la qualité des obligations composant les portefeuilles, révèle une grande disparité. Ainsi, la copule de Student semble être adéquate avec la structure de dépendance des portefeuilles comportant des obligations ayant une qualité de crédit (A et Baa selon l'échelle de notation de Moody's), alors que la copule de Clayton semble être un bon compromis pour modéliser la structure de dépendance au sein des portefeuilles composés d'obligations de moins bonnes qualité de crédit (Ba)<sup>3</sup>.

L'analyse de l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle copule sur la validité des estimations des mesures de risque VaR et CVaR, montrent la supériorité des estimations développées sous l'hypothèse d'une copule de Clayton, dépassant ainsi celles trouvées sous l'hypothèse du vrai modèle (Copule de Student). Ceci est en parfaite adéquation avec les résultats trouvés dans le troisième chapitre, et montre bien les capacités de la copule de Clayton dans le cadre des problématiques dédiées aux mesures de risque.

---

<sup>3</sup>Ces résultats découlent de l'analyse de la dépendance des quantiles. Les résultats selon la procédure du Gof test confirment l'adéquation de la copule de Student pour les portefeuilles d'exposition dont le Rating est A et Baa. Cependant elle n'est pas concluante pour les portefeuilles composés d'exposition de moins bonne qualité (Ba).

**7. Annexes**

TAB. 27. Caractéristiques Aaa Rating ; Allemagne

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
Bayer AG	Aaa	250 000	1.25%	4
Daimler AG	Aaa	500 000	1.00%	2
Man SE	Aaa	250 000	2.125%	2

TAB. 28. Caractéristiques Baa Rating ; Allemagne

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
Deutsche Post	Baa	250 000	1.875%	5
Deutsche Telekom	Baa	500 000	3.625%	3
RWE	Baa	250 000	5.75%	6

TAB. 29. Caractéristiques Ba Rating ; Allemagne

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
RheinMetall AG	Ba	250 000	4.00%	3
TheissenKrupp AG	Ba	500 000	4.35%	3
Deutsche Luftahansa	Ba	250 000	6.50%	2

TAB. 30. Caractéristiques Aaa Rating ; France

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
Schneider	Aaa	250 000	3.625%	6
Danone	Aaa	250 000	3.6%	6
Suez Environnement	Aaa	500 000	3.25%	5



TAB. 31. Caractéristiques Baa Rating ; France

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
Veolia	Baa	250 000	5.375%	4
Bouygues	Baa	500 000	4.5%	5
Orange	Baa	250 000	3.125%	5

TAB. 32. Caractéristiques Ba Rating ; France

	Rating	Valeur Nominale	taux de coupon	Maturité
Lafarge	Ba	250 000	4.75%	3
Renault	Ba	500 000	4.625%	3
Eutelsat SA	Ba	250 000	4.5%	2

## A Propos du Score de Diversité

### 1. Introduction

A partir des années 1990, les marchés financiers structurés ont connu une croissance exponentielle,<sup>1</sup> croissance qui peut être liée à certains avantages apparents procurés par des produits tels que les CDO. Un CDO est un instrument financier qui appartient à la classe des "Asset-Backed-Security (ABS)." Plusieurs aspects ont contribué à la réussite de ces produits financiers. D'une part, les institutions financières peuvent réduire leur risque de bilan de crédit par la titrisation des obligations à haut rendement illiquides et de prêts à effet de levier. Les émetteurs de CDO ont été attirés essentiellement par des possibilités d'arbitrage, les revenus de commissions et le potentiel de diversification. D'autre part, les investisseurs peuvent obtenir de meilleurs rendements que ceux disponibles sur des titres plus traditionnels. Ils peuvent bénéficier de la compétence du gestionnaire de CDO, et enfin avoir la possibilité d'être investi dans des fonds de couverture apparemment très diversifiés. Enfin, les autorités réglementaires pouvaient penser tirer avantage de la diversification de la titrisation afin d'obtenir une réduction du risque systémique, assurant ainsi la stabilité du système financier.

Mais la récente crise financière a mis au contraire l'accent sur l'impact de la contagion sur les risques de défaut des produits structurés de crédit. Une question ouverte porte entre autres sur la notion de diversification et sur l'évaluation du risque de concentration au sein du portefeuille collatéral d'un produit structuré de crédit de type CDO. Une première tentative de réponse à cette question a été proposée par Moody's lors de la réalisation de son processus de notation des CDO. Concrètement, Moody's suggère le Score de Diversité (Diversity Score : DS) comme une mesure de la diversification dans le portefeuille collatéral. Cette mesure est utilisée dans la technique d'expansion binomiale de Moody's ("Binomial Expansion Technique : " BET) pour en déduire la probabilité de défaut et donc pour calibrer la perte attendue dans le portefeuille. A ce niveau, la pertinence de cette approche pour évaluer la réalité de défaut dans le marché des CDO peut être remise en question, en particulier en présence d'effets de contagion entre tranches de CDO. En effet, cette méthode suppose essentiellement que la répartition de la perte réelle peut être estimée avec précision à partir de la distribution des pertes d'un portefeuille beaucoup plus simplifié, qui est un portefeuille contenant des actifs seulement indépendants.

---

<sup>1</sup>A titre d'exemple, de 4 milliards de dollars en 1996 à environ 500 milliards en 2006. A noter qu'il est relativement difficile d'estimer la taille des encours des CDOs.

Dans ce chapitre,<sup>2</sup> nous examinons la pertinence de cette approche pour évaluer la réalité des défauts dans le marché des CDO, lorsque les actifs sont dépendants, et ce pour une grande variété de modèles. Parmi eux, nous estimons d'abord l'impact de la fonction de copule choisie pour modéliser la dépendance d'événements de défaut. Pour ce faire, nous suivons la méthodologie considérée par Li (2000), Giesecke (2001), Schönbucher et Schubert (2001) et Jouanin et al. (2001) en examinant deux cas principaux : le premier correspond à la modélisation de la fonction de survie conjointe par les copules de survie des instants de défaut ; la seconde considère des copules pour "corrélér" les variables aléatoires exponentielles qui définissent les seuils utilisés pour définir les temps de défaut. Deuxièmement, nous présentons des modèles de contagion comme dans Errais et al. (2007), Nakagawa (2009) et Yamanaka et al. (2011). Cela nous permet de tenir compte des effets de contagion entre actifs et de mesurer l'impact de ce phénomène sur le score de diversité.

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 2 propose un bref résumé à propos des CDO et sur la notion de score de diversité. La section 3 examine plusieurs approches introduites par Moody's pour la modélisation de score de diversité et plusieurs autres mesures de l'indice de diversité. Nous passons en revue les diverses mesures de diversification utilisés dans la littérature consacrée au risque du portefeuille de crédit. Dans la section 4, nous analysons l'influence des fonctions copules pour modéliser la dépendance des événements de défaut. Enfin, la section 5 présente l'effet de contagion et illustre son impact sur le score de diversité.

---

<sup>2</sup>Deux papiers de recherche ont été extraits de ce chapitre. Le premier intitulé "Credit-Risk Contagion Modelling" sera soumis à *Journal of Economic Surveys*. Le deuxième intitulé "*Modelling Contagion for Credit Derivatives : a Copula Cnalysis*" sera soumis à *Journal of Empirical Finance*.

## 2. Score de diversité et CDOs : Une synthèse

**2.1. CDOs : Un bref aperçu.** Dans ce paragraphe, nous fournissons une brève description des structures de CDO. Le CDO est configuré comme un "Special Purpose Vehicle (SPV)" qui investit dans un portefeuille de titres sous-jacents (appelé "collatéral") dont les gains dépendent en particulier du comportement commun des défauts potentiels. Le portefeuille collatéral d'un CDO est généralement un portefeuille d'obligations de sociétés à rendements élevés, d'obligations souveraines ou d'obligations des marchés émergents. Il peut également être constitué de prêts des banques (CLO) ou, plus récemment, d'autres CDO. La structure des flux de trésorerie de CDO permet de définir la répartition de son revenu et le remboursement du capital affecté sur différentes classes de valeur ayant un ordre précis de priorité pour le remboursement, qui sont communément appelés tranches. Un mécanisme de priorisation est tout simplement un mécanisme de subordination, tel que la tranche "senior" du CDO soit remboursée avant la tranche "mezzanine" elle-même compensée avant la tranche plus risquée ("equity"). L'idée derrière cette subordination est que les pertes de l'intérêt ou du principal de la garantie (le portefeuille collatéral) seront absorbées par la tranche de niveau le plus faible et puis pour les tranches suivantes et ainsi de suite. Le mécanisme de répartition des pertes pour les différentes tranches est appelé cascade. Selon le but de l'émetteur du CDO, on peut distinguer deux grandes catégories de CDO : ceux de bilan et ceux d'arbitrage. Dans un CDO de bilan, le but d'une institution financière est de réduire le besoin en fonds et essentiellement de transférer les risques hors de son bilan. Dans un CDO d'arbitrage, le but est de gérer le mieux possible le compromis entre le coût de financement et le retour sur investissement à haut rendement. Cela signifie que, pour un CDO d'arbitrage, le total des frais et du coût du financement doit être inférieur au rendement des actifs. Selon la façon dont le portefeuille collatéral doit être géré, le CDO peut être de deux types : les valeurs de flux de trésorerie ou de marché. Dans un CDO de flux de trésorerie, le gérant est soumis à des règles strictes lors des opérations de trading. Dans ce cas, l'incertitude relative au versement des flux de trésorerie CDO est liée essentiellement au nombre et aux dates de défaut. En revanche, pour les CDO basés sur le marché des valeurs, le gestionnaire est autorisé à négocier activement les actifs de couverture, ce qui implique que les paiements sont liés aux gains réalisés sur la "marked to market value" du portefeuille collatéral.

Pour un CDO, le niveau de diversification du portefeuille collatéral est un déterminant majeur du risque. Un portefeuille composé de quelques obligations est inutilement risqué, mais en combinant de nombreuses obligations entre elles, le risque de défaut des obligations individuelles est diversifié et s'en trouve réduit. Du fait que les obligations sur un seul secteur industriel ont tendance à faire défaut lorsque l'industrie en question se contracte ou à l'échelle de l'économie en période de récession, les défauts dans un portefeuille sont souvent corrélés. Les tranches senior de CDO sont protégées contre les pertes collatérales jusqu'au niveau de la transaction de subordination. Les premières pertes par défaut sont absorbées par les tranches equity

et mezzanine. Cependant, un grand nombre de défauts dans le portefeuille collatéral peut amener la tranche senior du CDO à subir des pertes.

**2.2. Définition du score de diversité.** Qu'est-ce qu'un score de diversité? Une mesure, créée par Moody's Investors, pour estimer la diversification dans un portefeuille, en particulier dans le contexte d'un CDO. Sans aucun doute, la méthodologie de notation CDO la plus utilisée est l'approche quantitative proposée par Moody's pour générer les pertes attendues (EL) pour un CDO, qui est appelée "Binomial Expansion Technique (BET)". Nous pouvons nous référer à Cifuentes (1996) pour une première référence sur la notion de BET. La méthode de calcul pour un score de diversification tient compte de la façon dont un portefeuille est diversifié par secteurs. Techniquement parlant, le score de diversité mesure le nombre d'actifs non corrélés qui aurait la même distribution des pertes que le portefeuille actuel d'actifs corrélés. Par exemple, si un portefeuille de 100 actifs a un score de diversité de 50, cela signifie que les 100 actifs corrélés ont la même distribution de perte que les 50 actifs non corrélés. Dans le monde de la finance, un score de diversité est un outil utilisé pour mesurer le degré de diversification qui existe entre un groupe de titres. Quand la diversification augmente, le risque lié à des titres dans son ensemble diminue généralement, si ce score est très important. Le score de diversité est déterminé par la diversité des industries incluses dans un groupe de titres : Un score plus élevé représente un plus grand niveau de diversification. Si la diversité est notable au sein d'un portefeuille de titres, le risque lié aux investissements est moindre. Même si l'un ou même quelques titres peuvent connaître des pertes, la diversité garantit que le portefeuille reste suffisamment protégé dans l'ensemble. Une façon de mesurer le degré de diversité au sein d'un groupe relativement important d'actifs financiers est le score de diversité. Le principal facteur déterminant le score de diversité est l'industrie à partir de laquelle un titre en particulier émane. Considérons par exemple, un investisseur qui dispose de deux actions, l'une issue de l'industrie des technologies et l'autre de l'industrie du détail. En revanche, un deuxième investisseur a deux valeurs technologiques et rien d'autre. Alors que le premier investisseur aurait un score plus élevé puisque son portefeuille est représenté par deux industries différentes, le deuxième investisseur est exposé à un effondrement potentiel dans le secteur de la technologie et son score souffre en conséquence. Tout CDO possédant un bon score est bien diversifié et protégé contre le risque qu'une industrie unique le mette en péril. Cependant, il y a quelques inconvénients à l'utilisation du score de diversité pour mesurer le risque. Le score dépend de l'hypothèse portant sur la corrélation au sein d'une même industrie, qui stipule que les entreprises dans le même secteur industriel ont tendance à évoluer de la même manière et à être exposées aux mêmes risques. En réalité, il y a des moments où la corrélation au sein d'un même secteur industriel est loin d'être parfaite. Pour compliquer les choses encore plus, les entreprises d'industries diverses peuvent parfois exhiber une corrélation significative, ce qui signifie que les risques peuvent être répartis entre les industries.

**2.3. CDOs et diversification du risque de crédit.** La perte attendue d'une tranche de CDO est un concept central dans le processus de notation de Moody's. Pour calculer l'espérance mathématique de la perte dans la tranche considérée, les probabilités de défauts doivent d'abord être calculées. Quand les obligations dans le portefeuille collatéral ont des défauts corrélés, il n'y a pas d'expression simple pour définir les probabilités de défaut. L'approche développée par Moody's est basée sur le fait qu'étant donné qu'une diminution du nombre de d'obligations indépendantes dans un portefeuille jointe à une augmentation de la corrélation de défaut doivent produire un écart-type supérieur, un portefeuille d'obligations corrélées peut être approché par un portefeuille plus petit constitué uniquement d'obligations indépendantes. La question est de savoir comment trouver le bon nombre d'obligations indépendantes pour estimer la distribution des pertes du portefeuille d'origine. Pour un portefeuille d'obligations à défauts corrélés, le score D de diversité de Moody's est le nombre d'obligations hypothétiques avec des défauts indépendants, telles que la distribution des pertes d'un portefeuille de ces obligations se rapproche de la distribution des pertes du portefeuille d'origine. La distribution de probabilité de la perte des obligations hypothétiques est fournie par la loi binomiale avec D obligations indépendantes.

EXEMPLE 1. Prenons l'exemple suivant qui illustre comment la diversification réduit le risque de pertes importantes dans le portefeuille et protège la tranche senior. Dans une structure échantillon de CDO, le portefeuille obligataire sous-jacent est composé de 20 obligations zéro-coupon similaires avec défauts indépendants. Chaque obligation a une probabilité de défaut de 15% et un taux de recouvrement de 50%. Le taux de défaut de 15% correspond approximativement à un taux de défaut de 8 ans cumulé historiquement sur un portefeuille collatéral noté Ba. La taille de la tranche senior correspond à 80% du portefeuille collatéral. Le principe de subordination protège donc les flux de trésorerie de la tranche senior si la perte du portefeuille collatéral est inférieure à 20%. La tranche mezzanine correspond à 15% du portefeuille tandis que la tranche "equity" à 5%. Les scénarios de défaut possibles sont 0 défaut, 1 défaut, 2 défauts, et ainsi de suite jusqu'à 20 défauts possibles. La distribution binomiale donne la probabilité de chaque scénario de défaut. En utilisant ces probabilités et le niveau de subordination retenu, nous pouvons calculer l'espérance mathématique de la perte de la tranche senior et son écart-type. L'espérance mathématique de la perte de la tranche senior pour cette structure de CDO est de 0,005% et l'écart-type de perte est de 0,15%, tandis que pour la tranche mezzanine et la tranches equity elles sont respectivement de 20,2% et 89,3%, et les écarts-types respectifs sont de 22,1% et 24,8%. L'augmentation du nombre d'obligations dans le portefeuille diminue la perte attendue de la tranche senior en diminuant l'écart-type des pertes collatérales.

### 3. Score de diversité et extensions

Dans cette section, nous présentons brièvement les diverses mesures de diversification utilisées dans la littérature consacrée au risque du portefeuille de crédit (voir Fender et Kiff, 2004). Nous rappelons que le score de diversité introduit par Moody's dans le contexte de la méthodologie BET se rapporte au nombre de titres indépendants et homogènes dans un portefeuille "idéal." Plus le score de diversité est faible, plus grande est la concentration au sein du portefeuille. Nous pouvons distinguer trois méthodes pour mesurer la diversification du portefeuille. La première est la méthode utilisée par Moody's pour calculer le score de diversité, la seconde est le nombre équivalent d'actifs (ENA) recommandé par Rouvinez (2003) dans le contexte des CDO à valeur de marché et la troisième est celle développée par Duffie et Garleanu (2003). Nous détaillons successivement ces trois approches.

#### 3.1. Le score de diversité de Moody's.

3.1.1. *La méthodologie BET.* Le point central de la méthodologie de type BET repose sur l'utilisation du score de diversité, un concept qui est détaillé et analysé dans ce qui suit. L'idée maîtresse de cette méthodologie est d'identifier le portefeuille composé de  $N$  titres corrélés et hétérogènes ayant des probabilités de défaut distinctes a priori avec un autre portefeuille hypothétique constitué de  $D$  titres indépendants et homogènes ayant chacun la même probabilité de défaut,  $D$  étant le score de diversité du portefeuille. Une fois que le score de diversité et la probabilité de défaut sont déterminés de manière pertinente, on peut appliquer la formule binomiale pour fournir des approximations pour les scénarios de défaut, étant donné la nature homogène du portefeuille hypothétique.

Le score de diversité est calculé en additionnant chacun des scores de diversité de l'industrie (tels que définis ci-dessous) qui sont calculés comme suit :

(i) Une "moyenne par montant" est calculée à une date quelconque déterminée en divisant le solde impayé total des prêts admissibles à cette date par le nombre des débiteurs sur les prêts admissibles qui ne sont pas encore radiés à cette date. Afin de calculer le score de diversité, tous les débiteurs qui sont affiliés entre eux sont considérés comme un seul débiteur ;

(ii) Un "score équivalent unitaire" est calculé à la date déterminée pour un débiteur d'un prêt admissible en prenant la plus petite des deux valeurs suivantes : 1 et le solde impayé de ce prêt admissible à cette date divisée par la moyenne par montant à cette date ;

(iii) Un "score d'industrie unitaire équivalent agrégé" est alors calculé à une date déterminée suivant la classification de Moody's de chaque industrie en additionnant les scores en unité équivalente à cette date pour chaque débiteur dans cette classification des industries de Moody's ;

(iv) Un "score diversité d'industrie" pour chaque élément de la classification de Moody's est alors établi par référence à la table du score de diversité pour l'industrie connexe globale Equivalent Unit Score. Si le score d'industrie unitaire équivalent agrégé se situe entre deux de ces scores (indiqués

dans le tableau 1), alors le score de diversité d'industrie est le plus faible des deux scores de diversité d'industrie correspondants.

Lors de l'application de sa méthode BET, Moody's calcule d'abord le score de diversité pour le portefeuille collatéral sous-jacent du CDO. A cet effet, tous les crédits au sein du portefeuille sont regroupés par débiteurs / émetteurs et sont alloués au secteur de l'industrie approprié (Moody's distingue 33 types d'industrie). Pour un secteur donné, le notionnel par émetteur et le notionnel total divisé par le nombre d'émetteurs sont calculés. Les rapports de ces deux valeurs pour chaque débiteur (plafonné à 1 pour dissuader les émetteurs de trop se concentrer) sont ensuite additionnés au niveau de chaque secteur de l'industrie. Ces sommes, à leur tour, sont converties en scores de diversité de l'industrie par l'utilisation d'une table qui associe les deux scores sur la base d'une relation concave, en faisant l'hypothèse de "rendements marginaux décroissants" (voir le tableau 1). La somme de tous les scores de la diversité de l'industrie donne alors le score de diversité pour le portefeuille collatéral. Pour un portefeuille collatéral à  $n$  actifs répartis entre les  $m$  secteurs de l'industrie, le score de diversité est donc calculé comme suit :

$$DS = \sum_{k=1}^m G \left[ \sum_{i=1}^{n_k} \min(1, F_i/\bar{F}) \right],$$

avec

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n F_i/n, \text{ (ie, la détention moyenne).}$$

La taille de la  $i$ -ième détention est notée  $F_i$ ,  $n_k$  désigne le nombre d'actifs dans le  $k$ -ième et la fonction  $G[x]$  est définie dans le tableau 1.

TAB. 1. Nombre de firmes et score de diversité de Moody's

$x$	Score de diversité $G[x]$
1	1
2	1.50
3	2.00
4	2.33
5	2.67
6	3.00
7	3.25
8	3.50
9	3.75
10	4.00
>10	évalué cas par cas

Nous allons décrire ici cette méthodologie de manière plus détaillée afin de simplifier la compréhension de ses limites. Notons d'abord que la méthode BET repose sur une hypothèse très réductrice qui est le calcul de la note de diversité. Cette dernière est toujours calculée selon deux voies par Moody's. La première méthode suggère d'utiliser une table afin de faire



correspondre à un nombre d'entreprises dans un secteur donné son score de diversité (voir tableau précédent). Pour la seconde méthode, les scores de diversité ( $DS$ ) sont calculés en utilisant les corrélations, les valeurs nominales et les probabilités de défaut des entités du portefeuille. Dans ce qui suit, nous nous référons à cette deuxième méthode, en étudiant d'abord sa formule analytique puis en la comparant avec d'autres mesures de diversification. La deuxième étape est plus réductrice lors du calcul du facteur de notation moyen pondéré ("Weighted Average Rating Factor" (WARF)). Ce dernier représente la note moyenne du portefeuille. La troisième étape accentue le processus de réduction en agrégeant le WARF et l'échéance du contrat afin de déterminer la probabilité de défaut du portefeuille idéal. Comme les actifs idéalisés sont supposés être indépendants, on peut utiliser la formule binomiale pour calculer les probabilités d'avoir de 0 à  $DS$  défauts dans le portefeuille au cours de la période du contrat. En supposant que  $p$  désigne la probabilité de défaut, la probabilité  $P_k$  d'avoir exactement  $k$  obligations faisant défaut est donnée par la formule suivante :

$$P_k = \binom{DS}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{DS-k}. \quad (3.1)$$

Afin de réduire l'impact des erreurs dues à toutes les hypothèses simplificatrices introduites dans le modèle, il est courant de multiplier la probabilité de défaut  $p$  par un facteur de stress  $\gamma$ . Nous obtenons alors :

$$P_k = \binom{DS}{k} \cdot (\gamma p)^k \cdot (1-\gamma p)^{DS-k}. \quad (3.2)$$

Au final, nous devons utiliser les probabilités évaluées dans l'équation ci-dessus ainsi que le taux de recouvrement pour calculer la perte attendue ( $EL$ ) dans le portefeuille idéal. Supposons que  $R$  désigne le taux de récupération moyen et que  $M$  soit la valeur nominale de chaque obligation idéalisée. La perte attendue est alors donnée par :

$$EL = \sum_{k=0}^{DS} (1-R) \cdot M \cdot P_k. \quad (3.3)$$

3.1.2. *Score de diversité de Moody's : Méthodologie ancienne versus "alternative" méthodologie.* En 2000, Moody's a commencé à utiliser un score de diversité alternatif (ADS) à la place de l'original. Le score est obtenu en faisant correspondre les deux premiers moments, à savoir la moyenne et l'écart type de la distribution des pertes associées au portefeuille collatéral avec celle du portefeuille homogène utilisé dans le cadre du BET (pour plus de détails, voir l'annexe II de Gluck et Remeza 2000, et Kiff, 2004). Nous obtenons les relations suivantes :

$$E(L(T)) = \sum_k (1-R_k) \cdot N_k \cdot p_k, \quad (3.4)$$

$$V(L_i(T)) = (1-R_k)^2 \cdot N_k \cdot p_k \cdot (1-p_k), \quad (3.5)$$

$$V(L(T)) = \sum_k V(L_k(T)) + \sum_{k,l,k \neq l} \rho_{k,l}(T) \sqrt{V(L_k(T)) V(L_{jl}(T))}. \quad (3.6)$$

Il est facile de voir que la variance de la perte augmente avec l'augmentation de corrélation.

Considérons maintenant un portefeuille collatéral avec un nombre  $ADS$  de crédits indépendants et identiquement distribués avec des montants notionnels  $\bar{N}$ , un taux de recouvrement  $\bar{R} = \frac{\sum N_k R_k}{\bar{N} \cdot ADS}$ , et une probabilité de défaut  $\bar{p}$ . Nous devons choisir  $ADS$  et  $\bar{p}$  tels que la perte attendue et inattendue des deux portefeuilles soient égales. La perte attendue du portefeuille et sa variance sont données par :

$$E(\tilde{L}(T)) = (1 - \bar{R}) \cdot \bar{N} \cdot ADS \cdot \bar{p} \quad (3.7)$$

$$V(\tilde{L}(T)) = (1 - \bar{R})^2 \cdot \bar{N}^2 \cdot ADS \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) \quad (3.8)$$

Pour approcher le portefeuille collatéral de crédits d'origine par un portefeuille de crédits indépendants, nous devons déterminer le nombre  $ADS$  et la probabilité de défaut  $\bar{p}$  de telle façon que (3.4) et (3.6) coïncident avec (3.7) et (3.8). La solution de ce système est donnée par :

$$\bar{p} = \frac{\sum_k ((1 - R_k) \cdot N_k \cdot p_k)}{(1 - \bar{R}) \cdot \bar{N} \cdot D}$$

$$ADS = \frac{E(L(T)) [(1 - \bar{R}) \cdot \bar{N} - E(L(T))]}{V(L(T))} \quad (3.9)$$

Comme recommandé par Moody's, le résultat final peut être représenté sous la forme suivante :

$$ADS = \frac{(\sum_{k=1}^n p_l F_k) ((\sum_{k=1}^n q_k F_k))}{\sum \sum \rho_{kl} \sqrt{p_k q_l p_k q_l} F_k F_l} \quad (3.10)$$

Ici le terme  $F_k$  désigne la valeur nominale des obligations  $k$ ,  $p_k$  est sa probabilité de défaut qui découle de sa notation et de la maturité de l'obligation,  $q_k$  est la probabilité de survie et  $\rho_{kl}$  désigne le coefficient de corrélation entre les obligations  $k$  et  $l$ . La dernière formule peut être simplifiée en faisant des hypothèses sur l'uniformité de la taille des montants détenus ( $F_k$  est constant pour tout  $k$ ) et des probabilités de défaut ( $p_k$  est la même pour tous les  $k$ ). En outre, une reformulation peut être obtenue en supposant que toutes les corrélations deux à deux des défauts intra-sectoriels sont égales à  $\rho_{int}$  et que toutes les corrélations deux à deux des défauts inter-sectoriels sont égales à  $\rho_{ext}$ . Sous toutes ces hypothèses, le nombre  $ADS$  est déterminé par la formule suivante :

$$ADS = \frac{n^2}{n + \rho_{ext} \cdot n \cdot (n - 1) + (\rho_{int} - \rho_{ext}) \sum_{l=1}^m n_l (n_l - 1)} \quad (3.11)$$

La nouvelle méthode de calcul des scores de diversité peut maintenant être utilisée pour évaluer les hypothèses de corrélation implicite dans l'approche du score de diversité original de Moody's. Par exemple, un CDO dans lequel toutes les tailles de détention et toutes les probabilités de défaut sont égales possède des scores  $DS$  et  $ADS$  égaux pour une corrélation intra-sectorielle de 20% (et une corrélation inter-sectorielle nulle), si chaque secteur contient 6 titres et 30% si chaque secteur contient 3 titres. Par conséquent, si les portefeuilles sont homogènes, l'ancien score  $DS$  approche le nouveau score  $ADS$  pour les corrélations intra-sectorielles situées dans l'intervalle de 20% à 30%. Cependant, si la corrélation intra-sectorielle réelle est

supérieure à 20%, l'ancienne approche de Moody's court le risque de sous-estimer les pertes attendues et de fournir des surnotations en appliquant un score  $DS$  trop élevé. D'autre part, comme les probabilités conditionnelles de défaut sont dominées si on suppose que la corrélation des défauts est non nulle, les corrélations intra-sectorielles de plus de 20% impliquent des probabilités de défaut conditionnelles intra-sectorielles du même ordre de grandeur. Comme une telle hypothèse semble plutôt conservatrice, le risque d'appliquer des estimations de  $DS$  hors normes peut être limité dans la pratique. En outre, Moody's reconnaît cette lacune dans son approche et aurait probablement pu utiliser l'une de ses autres méthodes lorsque le BET est réputé ne pas produire les résultats appropriés.

**3.2. L'approche de Monte Carlo et la corrélation des actifs versus celles des défauts.** Les méthodes de Monte Carlo (MC) utilisées par les agences de notation se fondent implicitement sur la simulation d'événements de défaut dans un modèle de risque de crédit simplifié "structurel". Fondamentalement, ils supposent qu'un défaut se produit lorsque la valeur des actifs d'un débiteur tombe en dessous de celle de ses passifs. Tous supposent que les changements dans la valeur des actifs du débiteur suivent une distribution log-normale de sorte qu'une "distance" normalisée au «seuil» par défaut ( $DD_i$ ) peut être déduite à partir de la probabilité de défaut ( $PD_i$ ) associé à la note de crédit de l'obligation :  $DD_i = N^{-1}(PD_i)$ , où  $N^{-1}(x)$  est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution normale standard. Pour chaque simulation, des variables aléatoires normales standards (avec des corrélations appropriées entre elles) sont tirées pour chaque obligation dans le portefeuille, qui est censé représenter le changement normalisé dans la valeur des actifs du débiteur à l'horizon approprié, à savoir ( $\Delta X_i$ ). Si  $\Delta X_i < -DD_i$ , un défaut est enregistré et une perte ou un recouvrement est tirée d'une distribution appropriée. Les pertes dues au défaut sont alors accumulées pour les  $n$  actifs dans le portefeuille pour arriver à une perte totale  $L_T$  donnée par :

$$L_T = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{\Delta X_i < -DD_i\}} V_i (1 - RR_i),$$

où  $RR_i$  est le taux de recouvrement sur la  $i$ -ième obligation et  $V_i$  la valeur la  $i$ -ième obligation. La perte sur la  $k$ -ième tranche ( $L_k$ ) est alors définie par la fonction suivante :

$$L_{k,j} = \min \{ \max [L_j - \alpha_{k-1}, 0], \alpha_k - \alpha_{k-1} \},$$

où  $\alpha_{k-1}$  est le niveau de subordination de la  $k$ -ième tranche (ou "point de fixation") et  $\alpha_k$  est le "point de détachement" au-delà duquel les pertes sont absorbées par les tranches supérieures. En d'autres termes, le point de fixation est la valeur totale en cours de toutes les tranches inférieures, où  $(\alpha_k - \alpha_{k-1})$  définit l'"épaisseur" de la tranche (i.e. la capacité d'absorption des pertes de la tranche). Pour simuler les variables normales réduites corrélées, il est important que la corrélation des actifs sous-jacents soit utilisée, par opposition aux corrélations de défaut appliqués à la méthodologie de type BET pour déterminer l'ADS de Moody's. La corrélation entre les deux

événements discrets de défaut est définie comme suit :

$$\rho_{i,j} = \frac{PD_{ij} - PD_i PD_j}{\sqrt{PD_i(1 - PD_i)PD_j(1 - PD_j)}}$$

où  $PD_{ij}$  est la probabilité conjointe de défaut des obligations  $i$  et  $j$ . Dans le cadre du modèle de défaut de structure qui est appliqué aux obligations individuelles,  $PD_{ij}$  doit être égale à la probabilité de la valeur des deux actifs, diminuant tous les deux à la fois plus que leurs distances à leurs défauts respectifs. Ceci nous conduit à l'expression suivante :

$$PD_{ij} = N_2^{-1} (\Delta X_i < -DD_i, \Delta X_j < -DD_j, \rho_{ij}^V),$$

où  $N_2^{-1}$  représente l'inverse de la distribution bidimensionnelle cumulative de la loi normale et  $\rho_{ij}^V$  est la corrélation des actifs. Sur cette base, les corrélations de défaut seront inférieures à celles des corrélations d'actifs, mais augmenteront les probabilités de défaut des actifs individuels respectifs au niveau de 50%PD, puis déclinera de façon symétrique. En conséquence, une corrélation des actifs de 30%, en supposant des PD identiques pour toute paire d'actifs, se traduira par des corrélations de défaut dans une gamme de l'ordre de 4,6% à 19,4%, en fonction des niveaux des PD. Une corrélation de l'actif à 20% correspond à des corrélations de défaut entre 2,41% et 12,8%.

3.2.1. *Comparaison de la méthodologie BET et l'approche Monte Carlo (MC)*. En utilisant les ADS, qui intègrent explicitement les corrélations, il est possible de comparer les performances des approches fondées sur les MC et BET. On peut également comparer les approches de type BET de Moody's et les approches utilisées par Fitch et S & P illustré dans Fender et Kiff (2004). Notons par exemple que pour les grands portefeuilles très homogènes, Moody's utilise une méthode "log-normale", alors qu'il utilise une approche MC pour des portefeuilles synthétiques statiques et pour les portefeuilles de très petites tailles (<15 actifs) ou très hétérogènes. Rappelons que la version la plus simple du BET, tel que discuté ci-dessus, définit la perte attendue (EL) du portefeuille de CDO, comme suit :

$$EL = \sum_{k=1}^{DS} p_k L_k, \text{ où } p_k = \frac{DS!}{k!(DS-k)!} p^k (1-p)^{DS-k}.$$

Le score de diversité est noté  $DS$ ,  $p$  est la probabilité de défaut associée au portefeuille collatéral, et  $L_k$  désigne la perte dans le scénario  $k$ . Lorsque le portefeuille collatéral est jugé assez homogène, cette relation simplifiée est mise en oeuvre. En cas d'hétérogénéité plus marquée, Moody's peut utiliser une version plus élaborée appelée "pari multiple" (MBET) (voir Cifuentes et Wilcox, 1998). Enfin, une nouvelle méthode, appelée «corrélation binomiale», est utilisée pour les CDO de flux de trésorerie adossés à des groupes d'actifs fortement corrélés avec de faibles scores de diversité (voir Witt, 2004).

A titre de simple exemple, Fender et Kiff (2004) évaluent les pertes attendues sur une seule période, pour 10 secteurs, 6 détections par secteurs, sous diverses hypothèses de corrélation et de niveaux de subordination. La taille globale du portefeuille collatéral est supposée être de 600 M \$, soit 60

détentions individuelles de même taille égale à 10 millions de dollars chacune et de même note "BB-" pour l'échelle S&P/Fitch. Sous ces différentes hypothèses, nous obtenons un score de diversité de  $DS = 30$ , ce qui suggère que le portefeuille collatéral du CDO peut être approché approximativement par un portefeuille de 30 titres homogènes et non corrélés.

Notons que les résultats suggèrent que le BET, par rapport aux résultats basés sur MC, calcule avec précision les EL pour des groupes d'actifs homogènes avant que la subordination soit pris en compte, et lorsque les corrélations intra et inter-secteurs sont nulles. Cependant, il semblerait que le BET sous-estime les EL lorsque les actifs collatéraux sont corrélés et que l'amplitude de la sous-estimation soit une fonction croissante du niveau de subordination.

La tendance du BET à sous-estimer la EL de la tranche senior provient du fait que des corrélations de défaut plus élevés se traduisent généralement par des scores de diversité inférieurs. Comme la distribution des pertes ne peut être spécifiée qu'en terme des multiples de  $N/DS$ , où  $N$  est le montant notionnel total, des valeurs inférieures de  $DS$  induisent de plus en plus des formes "en escalier" et des distributions de perte plus approximatives (voir Schönbucher, 2003).

**3.3. Nombre équivalent d'actifs.** Le concept du nombre équivalent d'actifs ("Equivalent Number of Assets", ENA) a été introduit par Rouvinez (2003) comme une mesure de diversification afin d'évaluer l'effet de concentration au sein des CDO. Rouvinez (2003) avance le fait que le score de diversité appliqué dans la méthodologie BET est développé pour le cas des CDO de flux de trésorerie, où le portefeuille collatéral n'est pas soumis à des rebalancements intensifs. Toutefois, lorsque les titres collatéraux sont activement négociés, comme dans le cas des CDO à valeur de marché, les pertes sont principalement dues à des pertes au sein du portefeuille collatéral. Dans un tel contexte, un candidat naturel pour la mesure du score de diversité est le nombre équivalent d'actifs, qui est défini comme le nombre d'actifs identiques d'un portefeuille homogène hypothétique devant se comporter de telle façon qu'il a la même espérance et la même volatilité que celles du portefeuille d'origine. La principale différence avec le score de diversité proposé par Moody's est que, pour l'ENA, les rendements des actifs dans le portefeuille homogène ne sont pas nécessairement indépendants.

Pour calculer la formule de l'ENA, nous avons juste à identifier la volatilité des rendements  $\sigma_{Het}$  du portefeuille hétérogène ayant  $M$  actifs avec la volatilité  $\sigma_{Hom}$  des rendements du portefeuille homogène ayant  $N$  actifs. Sous les hypothèses que tous les actifs ont une volatilité  $\sigma$  identique et une corrélation identique  $\rho$ , le nombre équivalent d'actifs est donné par la formule suivante :

$$N = \frac{\left(\sum_{i=1}^M \omega_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^M \omega_i^2\right)}, \quad (3.12)$$

où  $\omega_i$  désigne la pondération du  $i$ -ième actif dans le portefeuille collatéral.

Comme mentionné par Rouvinez (2003), il est à noter que  $N$  ne dépend pas du choix de la volatilité constante et de la corrélation, ce qui le rend

applicable à de nombreuses classes d'actifs différents et se révèle donc utile pour une large gamme de produits et de portefeuilles.

Un résultat important de l'ENA, "N", est l'occasion d'établir un rapport direct avec la diversité score de Moody "D". En fait, nous avons l'identité suivante, pour la volatilité du portefeuille homogène :

$$\sigma_{Hom}^2 = \sigma^2 \rho \Omega^2 + \sigma^2 (1 - \rho) \frac{\Omega^2}{N} = \sigma^2 \frac{\Omega^2}{D}, \quad (3.13)$$

où  $\Omega = \sum_{i=1}^M \omega_i$  et  $D$  est le score de diversité de Moody's.

Nous obtenons ainsi :

$$D = \left[ \rho + (1 - \rho) \frac{1}{N} \right]^{-1} = \frac{N}{N \cdot \rho + 1 - \rho}. \quad (3.14)$$

Nous pouvons en déduire que l'ENA et le score de diversité sont les mêmes lorsque les actifs sont indépendants ( $\rho = 0$ ), et que ce score de diversité vaut 1 lorsque tous les actifs sont parfaitement corrélés ( $\rho = +1$ ).

**3.4. L'approche de Duffie et Garleanu (2003).** Cette méthode, développée par Duffie et Garleanu (2003), est similaire à celle prévue par Moody's. Le principe est le même : il est de remplacer les  $N$  titres dans le portefeuille d'origine par un portefeuille qui est composé de  $D$  actifs identiques et indépendants ayant la même distribution de perte globale que celle du portefeuille d'origine. Ainsi, toutes les propositions précédentes restent valables. La probabilité de défaut des actifs "idéaux" est à peu près la moyenne des probabilités de défaut du portefeuille initial. Le portefeuille idéal a, sous une certaine mesure de risque, le même risque de perte que le portefeuille initial. Par différence, Duffie et Garleanu (2003) suggèrent de remplacer les probabilités de défaut historiques par celles déduites de la fonction de distribution calculée avec leur modèle d'intensité stochastique. En fait, ils proposent un cadre de modèle de diffusion avec saut relativement simple pour représenter des intensités de défaut corrélés. En identifiant et en calculant les variances de la distribution des pertes pour les deux portefeuilles, le score de diversité "S" est donné par la formule suivante :

$$S = \frac{N \cdot \left( p_{(1)} \cdot E[L_i^2] - p_{(1)}^2 \cdot (E[L_i])^2 \right)}{p_{(1)} \cdot E[L_i^2] + (N - 1) \cdot p_{(2)} \cdot \left( E[L_i]^2 \right) - N \cdot p_{(1)}^2 \cdot (E[L_i])^2}. \quad (3.15)$$

Dans le cas symétrique et étant donné un modèle d'intensité affine,  $L_i$  désigne la perte aléatoire du principal,  $p_{(1)}$  la probabilité marginale de défaut d'une obligation, et  $p_{(2)}$  la probabilité conjointe de défaut d'une paire quelconque d'obligations.

Après calculs, nous aboutissons aux identités suivantes :

$$\begin{aligned} p_{(1)} &= p_1 \\ p_{(2)} &= 2p_1 - p_2 \end{aligned}$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont calculés sur la base du modèle d'intensité stochastique développé par Duffie et Garleanu (2003).

#### 4. Modélisation de la dépendance avec les copules

Dans la lignée des travaux de Duffie et Garlenau (2003), nous pouvons calibrer le score de diversité en utilisant "l'approche par intensité" pour décrire les instants de défaut. Conformément à la méthodologie considérée par Li (2000), Giesecke (2001), et Schönbucher Schubert (2001), Jouanin et al. (2001), Demey et al. (2004) ont examiné la façon d'intégrer la dépendance des défauts dans les modèles de risque de crédit fondés sur la notion d'intensité. Ils examinent deux cas principaux : Le premier correspond à la modélisation de la fonction de survie conjointe par les copules de survie des instants de défaut ; la seconde utilise les copules pour "corrélér" les variables aléatoires exponentielles qui définissent les seuils utilisés pour définir les temps de défaut.

**4.1. Modélisation des défauts avec les processus de Cox.** Les processus de Cox ne sont que des extensions des processus de Poisson. Rappelons qu'un processus de Poisson peut être défini à partir d'une suite de variables indépendantes  $\theta_i$  ayant la même distribution de probabilité  $\mathcal{E}(\lambda)$ , à savoir la loi exponentielle. Introduisons les sommes partielles  $T_n$  de ces variables,

$$T_n = \sum_{i=1}^n \theta_i, \quad (4.1)$$

et le processus  $N$  défini par :

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}}. \quad (4.2)$$

Le processus  $N$  est un processus de Poisson standard avec un paramètre  $\lambda$ . C'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. Pour chaque  $t$ , la distribution de probabilité de  $N_t$  est la distribution de Poisson de paramètre  $\Lambda_t = \lambda t$ , qui est appelé le paramètre d'intensité. Les processus de Cox, également appelés «processus de Poisson doublement stochastiques», sont associés à des intensités aléatoires  $\Lambda_t$ . Celles-ci sont souvent supposées avoir une densité  $(\lambda_t)_t$  définie à partir de la relation suivante :

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds. \quad (4.3)$$

Pour les processus de Cox utilisés dans le risque de crédit, l'instant de défaut est défini par :

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_s ds \geq \theta \right\}, \quad (4.4)$$

où  $\theta$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 et  $(\lambda_s)_s$  est un processus non négatif appelé le processus d'intensité. Dans la relation (4.4),  $\theta$  est considéré comme un seuil puisque  $\tau$  correspond au premier instant pour lequel l'intensité  $\Lambda_t$  est supérieure à  $\theta$ .

Une autre façon d'introduire le temps de défaut associé à un processus de Cox  $N$  est la suivante :

$$\tau = \inf \{ t : N_t > 0 \}.$$

Rappelons quelques propriétés de base concernant ces processus.

PROPOSITION 1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$  un espace probabilisé complet et filtré. Considérons une filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$ -adaptée, et un processus continu strictement positif  $(\lambda_t)_t$ . Soit le processus  $(\Lambda_t)_t$  défini par  $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$  et tel que

$\int_0^t \lambda_s ds < \infty$  pour tout  $t \geq 0$  vérifiant  $\Lambda_t = \infty$ . Introduisons la filtration  $\mathcal{H}_t = \sigma \{H_s; s \leq t\}$  du processus de survie  $H_t = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}$  Nous avons alors :

$$\mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \mathbb{P}[\tau > T | \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right).$$

Cela signifie que le processus de défaut  $\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}}$  est exactement le processus de Cox arrêté au temps  $\tau$ .

Considérons le cas des  $I$  firmes pouvant faire défaut. Nous supposons qu'il existe  $I$  processus d'intensité  $(\lambda_t^i)_t$  et  $\Lambda_t^i = \int_0^t \lambda_s^i ds$  qui définissent les temps de défaut correspondants :

$$\tau_i = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_s^i ds \geq \theta_i \right\},$$

où  $\theta_i$  sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes avec un paramètre égal à 1.

Pour modéliser la structure de dépendance des valeurs de défaut des entreprises, nous introduisons des copules à travers deux approches : la première suppose que la copule est définie directement sur les paramètres des instants de défaut eux-mêmes ; la seconde suppose que la copule est définie sur les seuils  $\theta_i$ .

4.1.1. *L'approche en termes de survie.* Soit  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_I)$  le vecteur aléatoire des temps de défaut. Nous allons définir la fonction de survie  $S_i$  de l'instant de défaut  $\tau_i$  comme suit :

$$S_i(t_i) = \mathbb{P}[\tau_i > t_i]. \quad (4.5)$$

La fonction de survie jointe  $S$  définie par le vecteur aléatoire de temps de défaut  $\tau$  est donnée par :

$$S(t_1, \dots, t_I) = \mathbb{P}[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_I > t_I]. \quad (4.6)$$

Lorsque les temps de défaut sont indépendants, on obtient :

$$S(t_1, \dots, t_I) = \prod_{i=1}^I S_i(t_i).$$



Quand ils ne sont pas indépendants, nous utilisons la fonction de copule définie à partir du théorème de Sklar.  $S$  a la représentation suivante :

$$S(t_1, \dots, t_I) = C_S(S_1(t_1), \dots, S_I(t_I)),$$

où  $C_S$  est la fonction copule de survie.

REMARQUE 5. *Comme souligné par Jouanin et al. (2001), la filtration pertinente à prendre en compte maintenant si nous voulons déterminer le prix des titres dans ce cadre des risques de crédit, est la suivante :*

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t.$$

4.1.2. *L'approche en termes de seuil.* Examinons les  $I$  processus d'intensité  $(\lambda_t^i)_t$  qui définissent les temps de défaut correspondants :

$$\tau_i = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_s^i ds \geq \theta_i \right\},$$

Nous modélisons maintenant la dépendance des variables aléatoires  $\theta_i$  à travers une fonction de copule  $C_\theta$ . Soit  $F_{\theta_i}$  les fonctions de répartition des variables aléatoires  $\theta_i$ . La fonction de répartition  $F_\theta$  de la distribution conjointe du vecteur aléatoire  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_I)$  est donnée par :

$$F_\theta(x_1, \dots, x_I) = C_\theta(F_{\theta_1}(x_1), \dots, F_{\theta_I}(x_I)).$$

Rappelons que Schönbucher et Schubert (2001) introduisent le compte à rebours par défaut  $\gamma_s^i$  défini par :

$$\gamma_t^i = \exp \left[ - \int_0^t \lambda_s^i ds \right].$$

Dans ce cadre, nous obtenons :

$$\tau_i = \inf \{ t : \gamma_t^i \leq U_i \}.$$

Par conséquent, en posant  $\theta_i = -\text{Log}[U_i]$ , nous retrouvons le modèle précédent.

REMARQUE 6. *En général,  $\theta$  est supposée être indépendante de  $\mathcal{F}_\infty$ . Dans ce cas, la filtration pertinente est à nouveau donnée par :*

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t.$$

**4.2. Calibrage des copules.** Pour la modélisation des corrélations de survie temporelles, nous supposons d'abord que les processus d'intensité ont été estimés précédemment. Le problème est maintenant le calibrage de la fonction de dépendance stochastique, qui se traduit par le choix de la fonction copule. Pour cela, nous pourrions utiliser les probabilités de défaut historiques. Par exemple, on peut d'abord penser à calibrer la copule en utilisant des corrélations de défaut discrètes :

$$\text{cor} \left( \mathbb{I}_{\{T_i > t\}}, \mathbb{I}_{\{T_j > t\}} \right).$$

Cette méthode présente cependant des inconvénients significatifs parce que les lois marginales sont de Bernoulli (voir Marshall, 1996, pour une

discussion). Plus satisfaisante est l'utilisation des corrélations des temps de survie, qui peut être estimée par l'agrégation des données (Hamilton, James et Webber, 2001). Par exemple, si nous utilisons le modèle précédent, le calibrage des corrélations de temps de survie basé sur une copule normale peut échouer. Par exemple, si nous supposons que  $cor(T_1, T_2)$  est égale à 50%, il n'y a pas de fonction de copule correspondant si les processus d'intensité sont indépendants. Nous pourrions avoir à trouver des méthodes originales basées sur la pratique du marché du crédit plutôt que de répliquer des méthodes statistiques qui ne sont jamais utilisées par les praticiens.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une méthode basée sur le score de diversité de Moody's. Pour déterminer le score de diversité de Moody's, les observations sur la titrisation au sein du marché du crédit peuvent aider à rassembler les informations de manière efficace. En effet, les rendements des différentes tranches de CDO sont exposés au risque de contagion par défaut dans un portefeuille de crédits. Supposons que chaque tranche soit notée selon une technique de développement binomial de Moody's, à savoir

$$\sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \stackrel{Law}{=} \frac{I}{D} \sum_{d=1}^D \mathbb{I}_{\{\tilde{T}_d \leq t\}}$$

où  $\{\mathbb{I}_{\{T_1 \leq t\}}, \dots, \mathbb{I}_{\{T_I \leq t\}}\}$  sont des variables dépendantes de Bernoulli avec les paramètres  $p_i$  et  $\{\mathbb{I}_{\{\tilde{T}_1 \leq t\}}, \dots, \mathbb{I}_{\{\tilde{T}_D \leq t\}}\}$  sont des variables indépendantes de Bernoulli de même paramètre  $p$ . Rappelons que, selon Moody's,  $D$  est calculé pour faire correspondre les deux premiers moments sur des observations empiriques. Ainsi, dans une première étape, il peut sembler tout à fait légitime de calibrer la copule qui relie le choix des seuils au consensus de marché.

Etant donné que la technique de Moody's est basée sur la connaissance de la probabilité de défaut, on doit conditionner les espérances durant la procédure de calibrage. La procédure basée sur les deux premiers moments conduit aux égalités suivantes :

$$Ip = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \right] = \sum_{i=1}^I p_i,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{I^2 p(1 + (D-1)p)}{D} &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^I p_i + 2 \sum_{i < j} C^\theta(1, \dots, p_i, \dots, p_j, 1) \end{aligned}$$

4.2.1. *Le cas de la copule gaussienne.* Ici, on peut remarquer que pour la copule normale (comme pour la plupart des fonctions copules),  $C^\theta(1, \dots, p_i, \dots, p_j, 1)$  avec pour matrice de paramètres  $\rho$  est tout simplement la normale 2-copule  $C^\theta(p_i, p_j)$  avec le paramètre  $\rho_{i,j}$ .

Prenons quelques exemples. Nous supposons d'abord que  $C^\theta$  est une copule normale avec une matrice constante des paramètres  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho & \rho \\ & 1 & \dots & \rho & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \rho \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et que les vecteurs de probabilités de défaut  $p$  est un vecteur constant. Nous examinons maintenant la relation entre le paramètre  $\rho$  et le score de diversité implicite  $D$  calculé. Nous remarquons que le lien entre  $D$ ,  $I$  et  $\rho$  est fortement dépendant de la taille du portefeuille de crédit.

Compte tenu des scores de diversité, nous pouvons calculer le paramètre  $\rho$  implicite de la copule de seuil  $C^\theta$  et comparer le score de diversité avec ceux calculés à partir du modèle de Moody's :

$$D_{Moody's} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8I}}{2}.$$

Nous remarquons que trois éléments influencent le score de diversité : le choix de la copule  $C^\theta$ , les probabilités défaut  $p_i$  et le nombre d'entreprises  $I$ . Afin de comparer les résultats, nous considérons la mesure de concordance à savoir le tau de Kendall. Nous notons que même si les deux copules ont le même tau de Kendall, les scores de diversité peuvent être très différents. Par exemple, si le tau de Kendall est égal à 20%, on obtient  $D = 3,24$  pour la copule de Cook-Johnson tandis que  $D$  vaut 7.31 pour la copule normale. Il provient du fait que  $C(p_i, p_j)$  est égale à 0,729% pour la copule normale alors qu'elle est de 1,581% pour la copule de Cook-Johnson. Si nous utilisons de plus grandes probabilités de défaut ( $p_i > 0.05$ ), la différence entre les scores de diversité est plus petite. Mais si les probabilités de défaillance sont très petites, la différence devient très grande. Par exemple, si le tau de Kendall est égal à 50%,  $D$  est égal à 3,49 et 18,47 dans le cas  $p_i = 0.1\%$ . En effet, ces résultats sont liés à la dépendance de queue inférieure de la fonction de copule  $\lambda_L^\theta$ .

Soit  $\lambda_L^\theta = C^\theta(u, u)/u$  la mesure de dépendance quantile (voir Coles, Currie et Tawn (1999)). Si nous supposons que les probabilités par défaut  $p_i$  sont les mêmes, nous avons la relation suivante :

$$D = \frac{I(1 - p_i)}{(1 - Ip_i) + (I - 1)\lambda_L^\theta(p_i)}.$$

Le cas limite ( $p_i \rightarrow 0$ ) est tel que :

$$D = \frac{I}{1 + (I - 1)\lambda_L^\theta}.$$

Si  $\lambda_L^\theta$  est égal respectivement soit à 0 ou à 1, on retrouve les résultats bien connus :  $D = I$  et  $D = 1$ . Si la taille du portefeuille de crédit est grand ( $I \rightarrow \infty$ ),  $D$  est égal à  $1/\lambda_L^\theta$ . Ces résultats expliquent l'impact du choix de la copule sur les questions d'étalonnage pour les événements de crédit rares (par exemple, pour les obligations notées AAA ou AA). Le choix de la copule normale n'est pas non plus pertinent avec les probabilités de défaut.

Étudions maintenant l'impact des probabilités de défaut. Nous supposons que  $p_i = 5\%$  pour  $i = 1, \dots, I - 1$ , et nous évaluons l'impact de la probabilité de défaut  $p_I$  du dernier émetteur sur le score de diversité  $D$ . Parce que nous avons ici une matrice constante de paramètres pour la copule normale, nous obtenons des résultats compréhensibles. Notons que le minimum n'est pas atteint en  $p_I = 5\%$  parce que  $C^\theta \neq C^S$ .

4.2.2. *Le cas de la copule de Student.* Dans ce qui suit, nous supposons que les portefeuilles sont homogènes en ce qui concerne les probabilités de défaut des émetteurs. L'objectif de cette étude est double : Tout d'abord nous étudions l'impact du choix des fonctions copules sur le calcul du score de diversité. Nous examinons cette relation pour différents niveaux de probabilité de défaut afin de connaître l'impact final de ces deux paramètres sur le score de diversité. Nous travaillons avec deux niveaux de probabilités de défaut ( $p_i = 5\%$  et  $p_i = 0.5\%$ ). Le deuxième objectif de cette étude est de calibrer un modèle qui puisse répliquer les résultats du modèle de Moody's.

Le premier exemple que nous considérons porte sur la comparaison du comportement de deux copules elliptiques à savoir la copule gaussienne de  $C_G(\rho)$  ( $\rho$  est la matrice de corrélation) et la copule de Student  $C_{St}(\nu, \rho)$  ( $\nu$  étant le degré de liberté (ddl) de la copule et  $\rho$  le coefficient de corrélation). Rappelons ici que plus le ddl de la copule de Student est élevé, plus le comportement de celle-ci est proche de celui de la copule gaussienne. L'idée est de tester cette suggestion pour différents portefeuilles ( $I = 2$ ,  $I = 10$ ,  $I = 50$  et  $I = 100$ ).

Dans ce qui suit, nous considérons deux copules de Student avec différents dof :  $\nu = 2$  et  $\nu = 20$ . Dans la figure (1), nous illustrons la relation entre le paramètre  $\rho$  et le score de diversité correspondant  $D$ .

Nous voyons déjà l'impact du choix de la copule pour calculer le score de diversité. Tout d'abord, l'effet est d'autant plus prononcé que la taille du portefeuille est grande. La différence est également prononcée entre la copule gaussienne et la copule de Student pour  $\nu = 2$ . Ceci est principalement dû à la dépendance de queue inférieure de la copule de Student, qui est largement supérieure à la copule gaussienne. Nous rappelons ici que la copule gaussienne ne reconnaît pas une dépendance de queue. Rappelons également que le coefficient de dépendance de queue inférieure, désigné par  $\lambda_L$ , est défini par :

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{C(q, q)}{q}$$

Pour une copule bivariée de Student, nous obtenons :

$$\lambda_L = 2 * t_{\nu+1} \left( -\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{(1+\rho)}} \right)$$

Nous notons également que le comportement asymptotique de la copule de Student est vérifié pour les portefeuilles de petite taille ( $I = 2$ ). Lorsque la taille du portefeuille  $I = 2$ , la copule de Student avec Dof = 20 fournit le même score de diversité que la copule gaussienne, pour les différents niveaux du coefficient de corrélation  $\rho$  (paramètre de copule). Plus la taille du

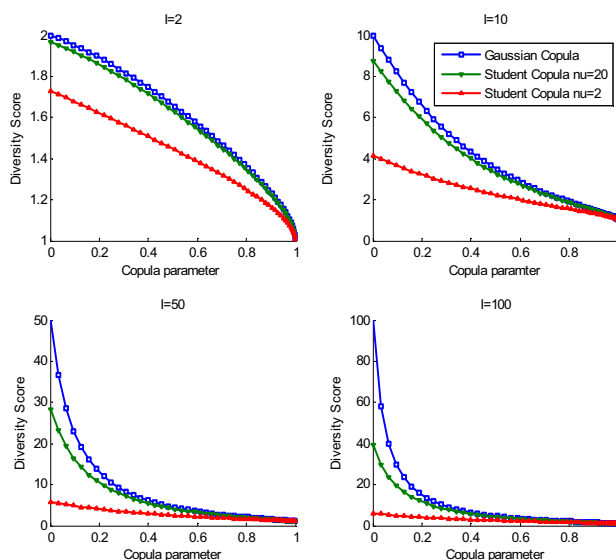


FIG. 1. Score de diversité pour la copule gaussienne et de Student en fonction de Rho

portefeuille est grande, plus la différence est significative, surtout pour de faibles niveaux de corrélation.

4.2.3. *Le cas des copules archimédiennes.* La seconde illustration que nous menons vise à élargir la portée de la comparaison entre plusieurs familles de fonctions copules. À cette fin, nous intégrons deux familles de copules archimédiennes à savoir la copule de Clayton et la copule de Gumbel et nous en étudions l'impact sur le calcul du score de diversité basé sur la mesure correspondant au tau de Kendall. En effet, pour les différents niveaux du tau de Kendall, nous obtenons le paramètre correspondant de la fonction de copule. Ensuite, nous calculons le score de diversité de cette copule. Les résultats sont résumés dans la figure (2) pour différentes tailles de portefeuille ( $I = 10$ ,  $I = 50$  et  $I = 100$ ).

Les résultats confirment l'impact du choix de la fonction de copule sur le calcul du score de diversité. Tout d'abord, il convient de noter que la copule de Gumbel surestime le score de diversité par rapport à celle calculée avec copule de Student ( $\nu = 2$ ). Ceci est expliqué par le fait que la copule Gumbel n'a aucune dépendance de queue inférieure ( $\lambda_L = 0$  et  $\lambda_U = 2 - 2^\theta$ ). La copule de Gumbel sous-estime la probabilité d'événements négatifs extrêmes (allant dans le quadrant inférieur gauche). En fait, à titre d'exemple, nous avons les résultats suivants pour les deux copules de Gumbel et Student, ayant le même tau de Kendall ( $Kendall = 0.1$ ) :

$$C_{Gumbel}(0.05, 0.05) = 0.0037$$

$$C_{Student [\nu=2]}(0.05, 0.05) = 0.0127$$

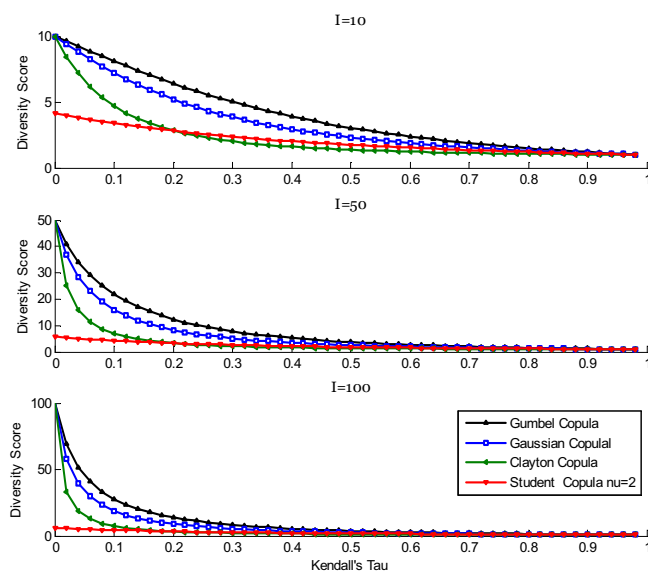


FIG. 2. Score de diversité et copules

La deuxième observation qui s'impose est que l'impact sur le calcul de l'indice de diversité est encore plus fort que la taille du portefeuille est grande et en particulier pour les faibles niveaux du tau de Kendall. Par exemple, pour un niveau du tau de Kendall fixé à 0,05, où la taille du portefeuille est  $I = 10$  nous obtenons  $D_{Gumbel} = 9.0314$  et  $D_{Student [\nu=2]} = 3.7506$ , tandis que, lorsque la taille du portefeuille vaut  $I = 100$ , nous avons  $D_{Gumbel} = 45.8775$  et  $D_{Student [\nu=2]} = 5.1737$ .

Dans la suite de cette illustration, nous avons fixé le niveau de probabilité de défaut  $p_i = 0.5\%$  (ce qui correspond généralement à une note AAA). Cela nous permet d'examiner la sensibilité d'un modèle de copule choisie par rapport à la probabilité de défaut. La figure (3) montre l'impact du choix du modèle de copule sur le calcul de l'indice de diversité pour chaque niveau de probabilité choisi. Notons que la copule de Gumbel a toujours tendance à surestimer le score de diversité par rapport aux autres modèles de copule. Les différences entre les scores calculés ont tendance à augmenter à ce niveau de probabilité de défaut et pour tous les niveaux de la taille du portefeuille. A titre d'exemple, lorsque la taille du portefeuille est  $I = 10$ , nous avons :  $D_{Gumbel} = 9.8072$  et  $D_{Student [\nu=2]} = 3.5103$ , tandis que, lorsque la taille du portefeuille  $I = 100$ , nous avons :  $D_{Gumbel} = 82.2192$  et  $D_{Student [\nu=2]} = 4.6868$ . Ce résultat est principalement dû à la sensibilité de la copule de Gumbel sur le choix de la probabilité de défaut, qui est toujours expliqué par l'absence de dépendance de queue inférieure permettant de traiter ce cas avec de faibles probabilités de défauts. Ce résultat se retrouve dans les chiffres suivants qui illustrent l'impact de la probabilité de défaut sur le score de diversité pour chaque copule sélectionné et pour les deux tailles de portefeuille  $I = 2$  et  $I = 100$ .

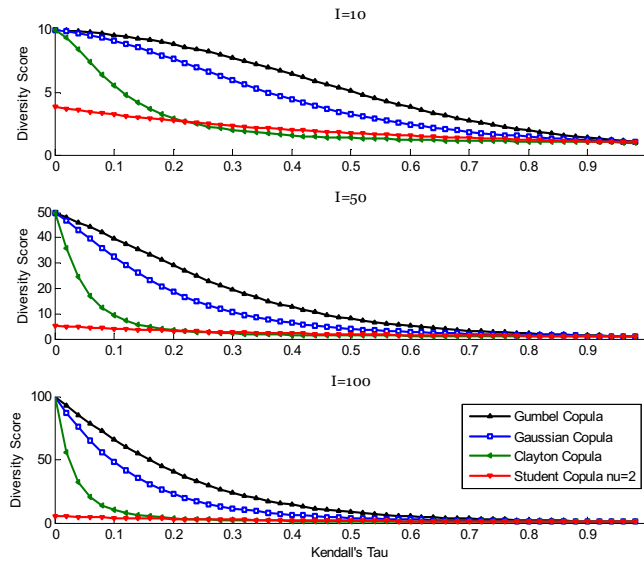


FIG. 3. Score de diversité pour les copules  $\pi_i=0.005$

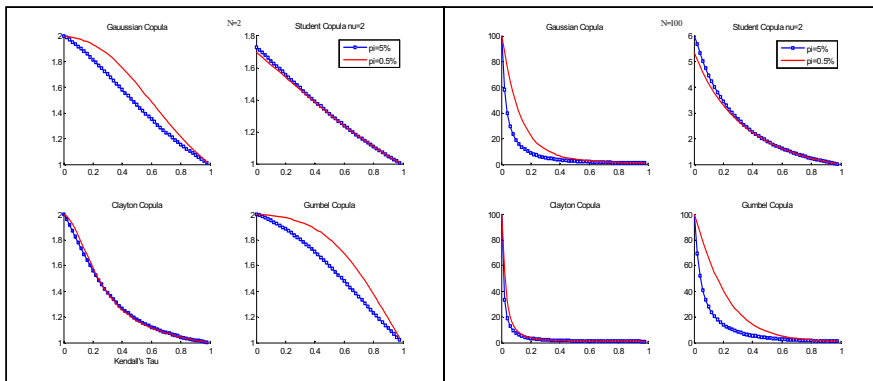


FIG. 4. Impact des probabilités de défaut

La figure (4) montre la sensibilité des deux modèles de copule, à savoir la gaussienne et celle de Gumbel, confrontées avec le choix de la probabilité de défaut. Cela nous laisse à réfléchir sur leur capacité à modéliser le score de diversité comme le suggère le modèle de Moody's. D'un autre côté, la copule de Student et la copule de Clayton présentent la qualité d'être insensible aux probabilités de défaut, indépendamment de la taille du portefeuille sélectionné. Ceci résulte de leurs propriétés d'avoir une moindre dépendance de queue, qui tient compte de leurs événements passés extrêmes (ici la probabilité de défaut). Nous pourrions penser que la condition nécessaire et suffisante pour un modèle de copule permettant de retrouver les mêmes niveaux de score de diversité développé par Moody's, serait de posséder une

dépendance de queue inférieure, ce qui lui permettrait de traiter les cas extrêmes. Cet argument est repris dans la section suivante pour l'étalonnage d'un modèle de copule en fonction de l'approche de Moody's.

### 4.3. Calibrage des copules pour un score de diversité donné.

Dans cette section, nous cherchons à calibrer un modèle de copule de façon à développer le même niveau de score de diversité tel que celui calculé par le modèle de Moody's. Nous commençons par examiner les niveaux de score de diversité donnés par les différents modèles de copule et à les comparer avec ceux donnés par le modèle de Moody's pour différentes tailles de portefeuille. Cela nous permet de distinguer les "meilleures" d'entre eux. Les figures ci-après présentent les résultats de cette étude.

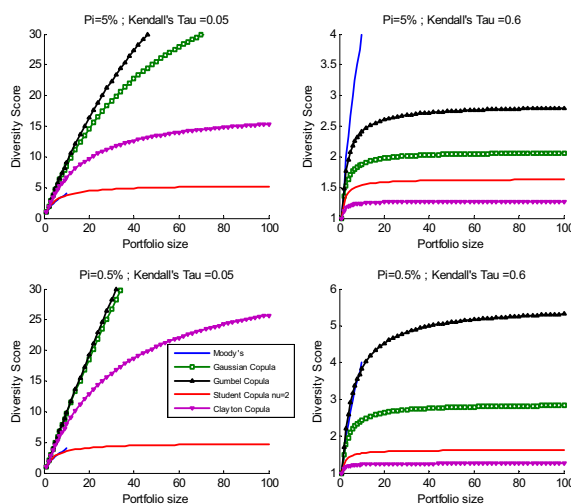


FIG. 5. Scores de diversité et copules versus Moody's (échantillon global)

La dernière figure illustre l'adéquation du modèle de la copule de Student ( $\nu = 2$ ) pour le score de diversité donné par le modèle de Moody's. Nous supposons que ce modèle est un candidat possible pour le modèle de Moody's.

Donc, nous cherchons à calibrer le paramètre de cette copule (ici le coefficient de corrélation). Ainsi, nous obtenons le même niveau de score de diversité.

Nous avons mentionné plus tôt l'importance pour un modèle qui vise à reproduire le même niveau de score de diversité que Moody's, d'avoir une dépendance de queue inférieure.

Par conséquent, une nouvelle approche du problème est d'intégrer le coefficient de dépendance de queue inférieure dans l'équation pour calculer le score de diversité  $D$ . En effet, comme l'a suggéré Jouanin et al. (2001),



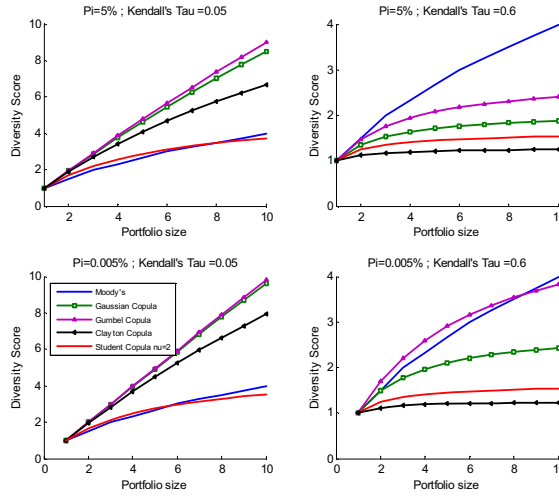


FIG. 6. Scores de diversité versus la forme réduite de Moody's

nous avons :

$$D = \frac{(1 - p) I}{(1 - pI) + (I - 1) \lambda_L^\theta(p)}$$

REMARQUE 7. Dans l'équation précédente, nous constatons que pour un niveau fixe "I", le score de diversité est purement une fonction de la probabilité de défaut p et du coefficient de dépendance de cette queue inférieure  $\lambda_L^\theta(p)$ .

Ainsi, l'idée ici serait d'optimiser les paramètres afin de minimiser la différence entre l'erreur sur le score de diversité calculé avec un modèle supposant une copule de Student ( $\nu=2$ ) et celle de Moody's.

Après l'obtention du coefficient de dépendance de queue inférieure  $\lambda_L^\theta(p)$ , nous pouvons extraire le paramètre implicite  $\rho$  de la copule de Student.

La figure (7) illustre la relation entre les deux paramètres recherchés afin de minimiser la somme des carrés des écarts entre le modèle de la copule de Student et celle de Moody's. Cela nous donne une première idée sur les niveaux des paramètres qui permettent d'optimiser cette fonction.

Les résultats du programme d'optimisation donnent les valeurs optimales suivantes :

$$\lambda_L^\theta(p)^* = 0.1914 \text{ et } p^* = 0.0073$$

Ceci est équivalent à un coefficient de la copule de Student :  $(\nu = 2)$  :  $\rho^* = 0.03$ . Avec ces paramètres, le minimum de la somme des carrés des écarts est d'environ  $SSE = 0.2693$ .

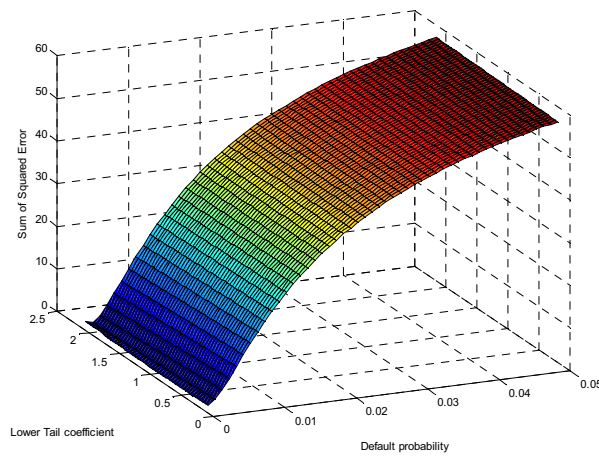


FIG. 7. Somme des carrés des erreurs en  $p$  et queue de distribution inférieure

### 5. La prise en compte des effets de contagion

Les effets de contagion sur les marchés financiers avaient fait l'objet de quelques études avant la crise financière, mais c'est évidemment depuis cette dernière que les travaux sur ce thème se sont intensifiés (voir par exemple : Lang et Stulz, 1992 ; Rochet et Tirole, 1996 ; Allen et Gale, 2000 ; Dornbusch et al., 2000 ; Zhou, 2001 ; Collin-Dufresne et al., 2003 ; Giesecke et Weber, 2006 ; Egloff et Vanini, 2007 ; Jorion et Zhang, 2007 ; Rosch et Winterfeld, 2008).

Dans ce qui suit, nous analysons les effets de contagion dans le cadre des modèles dits "à forme réduite" proposés pour calibrer les spreads de défaut. Ceci se traduit par une certaine dépendance fonctionnelle entre les différentes "intensités" décrivant les survenances respectives des instants de défaut. Nous pouvons citer entre autres les travaux de Azizpour et Giesecke (2008), Lando et Nielsen (2009) prolongeant ceux fondateurs de Hawkes (1971), Hawkes et Oakes (1974). Mentionnons également les articles de Li (2000), Schönbucher et Schubert (2002), Frey et McNeil (2003), Giesecke (2004) pour les modèles de forme réduite avec copules, et ceux de Duffie et Singleton (1999), Delloy et al. (2005), Koopman et al. (2008), Das et al. (2007), Duffie et al. (2009) pour les modèles d'intensité stochastiques.

Bien que cela semble évident pour calibrer la fonction de dépendance entre les intensités à l'aide de CDS ou des prix des obligations avec risque de défaut, les informations utiles et fiables fournies par le marché sur la distribution commune des seuils sont en général trop rares. Voilà pourquoi les praticiens supposent un mécanisme de contagion pré-spécifié qui leur permet de faire face à la question de la probabilité de défaut conjoint. Ces modèles peuvent a priori se baser soit sur l'intuition économique soit sur des arguments statistiques. Pour plus d'informations, les lecteurs intéressés peuvent consulter Davis et Lo (2001, a, b), Avallaneda et Wu (2001).

Dans ce qui suit, nous présentons un modèle financier qui tient compte des effets de contagion des événements de crédit (augmentation ou diminution du score). Pour ce faire, nous introduisons les processus ponctuels marqués multidimensionnels de type "mutual-exciting." Ceci constitue une généralisation de l'intensité "self-exciting" introduite dans Nakagawa (2010, a, b), Yamanaka et al. (2012) et Azizpour et Giesecke (2008).

On considère un ensemble de  $p$  firmes indexées par  $l$ . Supposons que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  soit un espace probabilisé complet. Soit  $(\mathcal{F}_t)_t$  la filtration correspondante pour l'information disponible à tout temps  $t$  durant la période de gestion  $[0, T]$ . Notons par  $i = 1, \dots, m$  les types d'évènement de crédit. Ils représentent toutes les baisses et hausses potentielles de notation qui peuvent survenir lors d'une période de gestion. Pour chaque  $i$ , on considère la série temporelle  $(T_k^i)_k$  correspondant à l'instant où l'évènement  $i$  survient ( $T_k^i$  est la date où le  $k$ -ième évènement de type  $i$  survient).

Nous avons :  $\forall i = 1, \dots, m,$

$$0 (= T_0^i) < T_1^i < T_2^i < \dots$$

La suite des instants  $T_k^i$  forme un processus ponctuel adapté à  $\mathcal{F}_t$ , c'est à dire encore que  $(T_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt. Introduisons le processus de comptage correspondant  $N_t^1, \dots, N_t^m$  associé au processus ponctuel  $(T_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Nous supposons que leurs variations quadratiques sont nulles :

$$[N^i, N^j]_t = 0 \text{ p.s. si } i \neq j,$$

Cela signifie que les processus  $N^i$  et  $N^j$  n'ont pas de covariations simultanées presque sûrement.

Si pour chaque évènement de crédit de type  $i$ , nous observons cet évènement simultanément pour plusieurs entreprises, nous devons introduire un nombre variable de ces entreprises. On les désigne par  $\eta_k^i$ . Par conséquent, à chaque moment  $t$ , le nombre total  $L_t^i$  de réalisations des évènements chez toutes les entreprises est donné par :

$$L_t^i = \sum_{k=1}^{N_t^i} \eta_k^i. \quad (5.1)$$

Les processus  $L_t^1, \dots, L_t^m$  sont  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés. Leurs instants de variations sont modélisés par les processus ponctuels  $N_t^1, \dots, N_t^m$ .

REMARQUE 8. Généralement, pour chaque  $i$ , les variables aléatoires  $\eta_k^i$  sont supposées être indépendantes et identiquement distribuées (voir Nakagawa, 2009). Dans ce qui suit, on suppose seulement que, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  et  $i = 1, \dots, m$ , les variables aléatoires  $\eta_k^i$  sont  $\mathcal{F}_{T_k^i}$ -mesurables.

Nous devons définir maintenant le processus d'intensité  $\lambda_t^i$  associé à  $N_t^i$  et la mesure prévisible  $\nu^i(dt, dx)$  du processus  $L_t^i$  qui est un processus strictement positif  $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable. Nous obtenons alors les martingales  $M_t^i$  et  $M_t^{L^i}$  suivantes :

$$\begin{aligned} M_t^i &= N_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds, \\ M_t^{L^i} &= L_t^i - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t x \nu^i(ds, dx). \end{aligned} \quad (5.2)$$

REMARQUE 9. Étant donné que les variables  $\eta_k^i$  sont des variables aléatoires intégrables, nous en déduisons que<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_0^t x \nu^i(ds, dx) = \\ &\sum_{l=1}^p l \sum_{k \geq 0}^{n-1} \int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \frac{G_k^i(ds, l)}{G_k^i([s, \infty[ \times \mathbb{R})} + \int_{T_n^i}^t \frac{G_n^i(ds, l)}{G_n^i([s, \infty[ \times \mathbb{R})} \mathbb{I}_{\{T_n^i < t \leq T_{n+1}^i\}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nous avons aussi :

$$\int_0^t \lambda_s^i ds = \int_0^{+\infty} \int_0^t 1 \nu^i(ds, dx) =$$

<sup>3</sup>En appliquant la formule (8.5) donnée dans l'annexe.

$$\sum_{l=1}^p \sum_{k \geq 0}^{n-1} \int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \frac{G_k^i(ds, l)}{G_k^i([s, \infty[ \times \mathbb{R})} + \int_{T_n^i}^t \frac{G_n^i(ds, l)}{G_n^i([s, \infty[ \times \mathbb{R})} \mathbb{I}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}}. \quad (5.4)$$

Comme dans Nakagawa (2010a, 2010b), nous supposons que les intensités  $\lambda_t^i$  peuvent être modifiées non seulement par les occurrences de l'évènement  $i$  lui-même (l'effet "self exciting") mais peuvent aussi être affectées par des évènements de types différents de  $i$  (correspondant à l'effet "mutual exciting"). En plus, nous introduisons la possibilité que des sous-ensembles donnés d'entreprises et d'évènements influencent les autres sous-ensembles. Par exemple, cette classification peut être liée à la fois aux zones géographiques et aux secteurs d'activité et aussi aux différents types d'évènements qui ont des degrés de gravité différents (phénomène observé durant la crise financière).

Désignons par  $(f_j)_{j=1, \dots, J}$  les différentes classes de firmes et par  $(I_{i_g})_{i_g=1, \dots, \Gamma}$  les différents types d'évènement de crédit. Nous supposons qu'elles forment des partitions respectives de l'ensemble des firmes et de l'ensemble des types d'évènement.

Nous introduisons des vecteurs stochastiques d'état

$$X_t^{f_j, I_{i_g}} = \left( X_t^{f_j, I_{i_g} 1}, \dots, X_t^{f_j, I_{i_g} d^{f_j, I_{i_g}}} \right),$$

qui sont des processus  $d^{f_j, I_{i_g}}$ - dimensionnels contrôlant les intensités de tous les sous-types d'évènements considérés.

Nous supposons que  $X_t^{f_j, I_{i_g}}$  est un processus de changement affine solution de :

$$dX_t^{f_j, I_{i_g}} = (K_0^{f_j, I_{i_g}}(t) + K_1^{f_j, I_{i_g}}(t) \cdot X_t^{f_j, I_{i_g}}) dt + \sum_{i=1, j=1}^{m^{f_j, I_{i_g}}} \Psi^{f_j, I_{i_g}, i} dZ_t^{f_j, I_{i_g}, i} \quad (5.5)$$

$$X_0^{f_j, I_{i_g}} \in \mathbb{R}^d, \quad (5.6)$$

où  $K_0^{f_j, I_{i_g}}(t) \in \mathbb{R}^{d^{f_j, I_{i_g}}}$  et  $K_1^{f_j, I_{i_g}}(t) \in \mathbb{R}^{d^{f_j, I_{i_g}} \times d^{f_j, I_{i_g}}}$  sont des fonctions déterministes,  $\Psi^{f_j, I_{i_g}, i}$  est une matrice diagonale  $d^{f_j, I_{i_g}}$ -dimensionnelle dont les éléments sont strictement positifs et  $Z_t^{f_j, I_{i_g}, i}$  est un vecteur  $d^{f_j, I_{i_g}}$ -dimensionnel dont les éléments sont soit  $L_t^i$  soit  $N_t^i$ . Ces processus peuvent être considérés comme une généralisation des processus d'intensité pour les processus ponctuels de type mutual exciting étudiés dans Hawkes (1971) et dans Nakagawa (2010a).

Nous supposons que chaque intensité de type d'évènement est représentée par une transformation affine de type  $X_t^{f_j, I_{i_g}}$ . Cela implique notamment que, pour chaque  $i = 1, \dots, m$ , l'intensité  $\lambda_t^i$  soit représentée par une expression du type :

$$\lambda_t^i = \Lambda_0^i(t) + \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} \Lambda_1^{f_j, I_{i_g}, i}(t) \cdot X_t^{f_j, I_{i_g}}, \quad (5.7)$$

où  $\Lambda_0^i(t) \in \mathbb{R}$  et  $\Lambda_1^{f_j, I_{i_g}, i} \in \mathbb{R}^{d^{f_j, I_{i_g}}}$  sont des fonctions déterministes (notation :  $x \cdot y$  désigne le produit scalaire de  $x$  et  $y$ ).

Une telle modélisation implique plusieurs propriétés remarquables. Tout d'abord, chaque intensité  $\lambda_t^i$  d'évènement évolue dans le temps entre les instants où se produit l'évènement  $i$  d'une façon déterministe, tandis que l'intensité peut affecter quelques évènements qui surviennent directement par le processus  $Z_t^{f_j, I_{ig}, i}$  et selon le coefficient  $\Lambda_1^{f_j, I_{ig}, i}$  et les composantes des matrices diagonales  $\Psi^{f_j, I_{ig}, i}$ . Par ailleurs, le changement de chaque intensité  $\lambda_t^i$  survient non seulement par la réalisation de l'évènement  $i$  lui-même mais aussi par la survenue d'autres évènements. Ce modèle de changement de notation revêt une forme plus générale que celle de Errais *et al.* (2006) et Nakagawa (2009).

## 6. L'estimation du processus ponctuel modélisant la contagion

Nous examinons ci-après le problème de l'estimation des processus d'intensité. Ce problème a été abordé par de nombreux auteurs et ce dans des contextes très variés. Ces études portent en particulier sur l'estimation des processus ponctuels marqués avec des hypothèses paramétriques spécifiques telles celles concernant les types de dépendance pour les durées successives. Mentionnons à ce sujet la littérature sur les modèles Autoregressive Conditional Duration (ACD) (voir par exemple Engle *et al.*, 1998, 2000 ; Bauwens *et al.*, 2000, 2001, 2003 ; Fernandes *et Grammig*, 2005 ; 2006).

Nous nous intéressons ici tout particulièrement aux processus de Cox (cf Cox, 1955 ; Cox *et Isham*, 1980) et de Hawkes (cf. Hawkes *et al.* , 1971 ; 1973, 1974 ) et à certaines de leurs extensions. Le lecteur intéressé par des applications des processus de Hawkes en finance peut consulter par exemple les travaux de Cacho-Diaz *et al.* (2014), Azizpour *et al.* (2010), Errais *et al.* (2010), Embrechts *et al.* (2011). Cacho-Diaz *et al.* (2014) utilise la méthode des moments généralisés pour estimer les paramètres du modèle de Hawkes. Dans ce qui suit, nous exposons la méthodologie d'estimation basée sur la fonction de vraisemblance.

**6.1. Paramètres de la fonction de vraisemblance dans un processus ponctuel marqué.** On utilise le même argument de changement de mesure que dans Azizpour *et Giesecke* (2008) pour obtenir la fonction de vraisemblance de la contagion du modèle d'intensité d'évènement présenté dans la section précédente.

**PROPOSITION 2.** *Supposons que  $\Lambda^i(X_t)$  soit le processus d'intensité du processus ponctuel  $N_t^i$  associé à la fonction déterministe  $\Lambda^{f_j, I_{ig}, i} : \mathbb{R}^{d^{f_j, I_{ig}}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Le processus  $N_t^i - \int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} \Lambda^{f_j, I_{ig}, i}(X_{s-}^{f_j, I_{ig}}) ds$  est donc une  $(\mathcal{F}_t)$ -martingale pour chaque  $i = 1, \dots, m$ .*

Définissons le processus  $\rho_t^*$  par :

$$\rho_t^* = \exp \left[ \begin{array}{l} - \int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} \log(\Lambda^{f_j, I_{ig}, i}(X_{s-}^{f_j, I_{ig}})) dN_s^i \\ - \int_0^t \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} (1 - \Lambda^{f_j, I_{ig}, i}(X_s^{f_j, I_{ig}})) ds \end{array} \right], \quad (6.1)$$

Supposons que  $\mathbb{E}[\rho_t^*] = 1$  pour chaque  $t \in [0, T]$  (en d'autres mots  $\{\rho_t^*\}_{t \in [0, T]}$  est une vraie martingale sous  $\mathbb{P}$ ). Supposons également que  $\mathbb{P}^*$  soit

une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le processus de densité de Radon-Nikodym de  $\mathbb{P}^*$  par rapport à  $\mathbb{P}$  soit donné par  $\rho_t^*$ . Nous avons alors :

$$\rho_t^* = \mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} / \mathcal{F}_t \right]$$

et  $\rho_t^*$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale.

DÉMONSTRATION. Voir la théorie de Girsanov pour les variables aléatoires (Jacod et Shiryaev 2003) <sup>4</sup>  $\square$

REMARQUE 10. Ceci implique que chaque  $N_t^i$  est un processus standard de Poisson par rapport à la probabilité  $\mathbb{P}^*$  pour chaque  $i$  et  $t < s$ . Nous avons en particulier

$$\mathbb{P}^*(N_s^i - N_t^i = 0 / \mathcal{F}_t) = e^{-(s-t)}.$$

Dans ce qui suit, nous déterminons la fonction de vraisemblance pour notre modèle.

Soit  $(\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i) := \{(\tilde{\tau}_k^i, \tilde{\eta}_k^i)\}_{k=1, \dots, \tilde{N}_T^i}$  un ensemble d'échantillons observés durant la période  $[0, T]$  d'un processus ponctuel marqué  $Z_t^i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Cela signifie que  $(\tilde{\tau}_k^i, \tilde{\eta}_k^i)$  est le  $k$ -ième type d'événement  $i$  qui survient au temps  $\tau_k^i$  avec le nombre correspondant  $\eta_k^i$  des entreprises affectées par l'événement  $i$  au même moment  $\tilde{\tau}_k^i$ .

Désignons par  $\mathcal{L}(\Theta / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m})$  la fonction de vraisemblance de l'ensemble des paramètres  $\Theta$  contenu dans  $(X_t^{f_j, I_{i_g}})_{j, i_g}$ .

Pour  $d\mathbb{P}^* = \rho_T^*(\Theta) d\mathbb{P}_\Theta$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}) &= \mathbb{P}_\Theta(\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}) \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \frac{1}{\rho_T^*(\Theta)} \mid \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m} \right] \mathbb{P}^*(\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}) \\ &= \frac{\mathbb{P}^*(\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m})}{\rho_T^*(\Theta; \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m})} \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'égalité précédente se déduit de la propriété que  $\rho_T^*(\Theta)$  devient apparent si  $\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}$  sont donnés.

On note  $a_i = \mathbb{P}^*(\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m})$ .

Donc nous en déduisons la formule donnant l'expression de la vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}) &= a_i \times 1 / \rho_T^*(\Theta; \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}) \\ &= a_i \exp \left[ \begin{aligned} &\int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma \log(\Lambda^{f_j, I_{i_g} i}(X_{s-}^{f_j, I_{i_g}, \Theta})) dN_s^i \\ &- \int_0^T \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^\Gamma (1 - \Lambda^{f_j, I_{i_g} i}(\tilde{X}_s^{f_j, I_{i_g}, \Theta})) ds \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Une preuve similaire est donnée dans Azizpour et Giesecke (2008) et dans Nakagawa (2009).

$$= \prod_{i=1}^m \exp \left[ \int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} \log(\Lambda^{f_j, I_{i_g} i}(\tilde{X}_s^{f_j, I_{i_g} i, \Theta})) dN_s^i - \int_0^T \sum_{j=1}^J \sum_{i_g=1}^{\Gamma} \Lambda^{f_j, I_{i_g} i}(\tilde{X}_s^{f_j, I_{i_g} i, \Theta}) ds \right] \quad (6.3)$$

Ici  $\tilde{X}_s^{\Theta}$  représente la trajectoire suivie par l'échantillon de  $X$  construit à travers la donnée des  $\{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}^i\}_{i=1, \dots, m}$ .

REMARQUE 11. L'expression précédente implique que si  $\Lambda^{f_j, I_{i_g} i}(\tilde{X}_s^{\Theta})$  dépend uniquement des paramètres des sous-ensembles  $\Theta^{f_j, I_{i_g} i}$  alors chaque ensemble de paramètres  $\Theta^{f_j, I_{i_g} i}$  peut être estimé en utilisant l'estimation du maximum de vraisemblance séparément pour chaque événement de type  $i$ .

**6.2. Prédiction conditionnelle du processus ponctuel marqué avec une intensité affine dans le cas multivarié.** Comme nous l'avons vu, il est utile d'obtenir pour certaines applications une représentation explicite de

$$\mathbb{E} \left[ Z_T^{f_j, I_{i_g} i} / \mathcal{F}_t \right] \quad (0 \leq t \leq T)$$

lorsque  $Z_T^{f_j, I_{i_g} i} = L_t^{f_j, I_{i_g} i}$  ou  $Z_T^{f_j, I_{i_g} i} = N_t^{f_j, I_{i_g} i}$ .

Nous notons qu'en considérant la paire  $(X_t, Z_t)$ , le modèle introduit dans la section précédente remplit les conditions d'un processus de diffusion affine étudié dans Duffie *et al.* (2000). Pour une analyse rigoureuse au sujet de la distribution ainsi que des moments des processus ponctuels, nous devons généralement discuter des caractéristiques de la fonction  $Z_T^{f_j, I_{i_g} i}$ . Comme dans cette étude nous devons disposer de prévisions conditionnelles telles que  $\mathbb{E} \left[ Z_T^{f_j, I_{i_g} i} / \mathcal{F}_t \right]$ , nous mentionnons le résultat suivant.

PROPOSITION 3. On suppose que  $X^{f_j, I_{i_g} i}_t$  est un processus vectoriel de transition affine qui satisfait (5.5) et que le processus de transition  $Z_t^{f_j, I_{i_g} i}$  est donnée par  $\Lambda_0^{f_j, I_{i_g} i}(t) + \Lambda_1^{f_j, I_{i_g} i}(t) \cdot X_t$  pour les fonctions déterministes  $\Lambda_0^{f_j, I_{i_g} i}(t) \in \mathbb{R}$ . De plus, soit  $Y_t^{f_j, I_{i_g} i} = (X_t^{f_j, I_{i_g} i}, Z_t^{f_j, I_{i_g} i})$  et  $\eta_{\text{mean}}^{f_j, I_{i_g} i}$  le vecteur dont les éléments sont les moyennes de l'amplitude des sauts de  $Z_t^i$ .

Par exemple, nous avons :

$$\eta_{\text{mean}}^{f_j, I_{i_g} i} = \sum_{k \geq 1} k P(\eta^{f_j, I_{i_g} i} = k) \text{ si } Z_t^{f_j, I_{i_g} i} = L_t^{f_j, I_{i_g} i}$$

et

$$\eta_{\text{mean}}^{f_j, I_{i_g} i} = 1 \text{ si } Z_t^{f_j, I_{i_g} i} = N_t^{f_j, I_{i_g} i}.$$

Alors, pour chaque  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $T \geq t$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ Z_t^{f_j, I_{i_g} i} / \mathcal{F}_t \right] = A_{z^{f_j, I_{i_g} i}}(t, T) + B_{z^{f_j, I_{i_g} i}}(t, T) \cdot Y_t$$

où  $A_{z^{f_j, I_{i_g} i}}(t, T) \in \mathbb{R}$  et  $B_{z^{f_j, I_{i_g} i}}(t, T) \in \mathbb{R}^{d+m}$  sont données comme suit :

$$B_{z^{f_j, I_{i_g} i}}(t, T) = \exp \left( \int_t^T \begin{bmatrix} {}^t K_1^{f_j, I_{i_g} i}(s) & O_{d \times m} \\ O_{m \times d} & O_{m \times m} \end{bmatrix} \right) e_{d+i}^{f_j, I_{i_g} i} \times$$



$$\exp \left( \int_t^T \sum_{i=1}^m \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_1^{f_j, I_{i_g^i}}(s) \\ O_m \end{pmatrix} \cdot {}_t \eta_{mean}^{f_j, I_{i_g^i}} \right\} \begin{bmatrix} \Psi^{f_j, I_{i_g^i}} & O_{d \times m} \\ O_{m \times d} & U_{m \times m}^i \end{bmatrix} ds \right) e_{d+i}^{f_j, I_{i_g^i}} \quad (6.4)$$

et

$$A_{z^{f_j, I_{i_g^i}}}(t, T) = \int_t^T \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} K_0^{f_j, I_{i_g^i}}(s) \\ O_{m'} \end{pmatrix} \\ + \sum_{i=1}^m \Lambda_0^{f_j, I_{i_g^i}}(s) \cdot \begin{pmatrix} \Psi^{f_j, I_{i_g^i}} & O_{d \times m} \\ O_{m \times d} & U_{m \times m}^i \end{pmatrix} \eta_{mean}^{f_j, I_{i_g^i}} \end{array} \right\} \cdot B_{z^{f_j, I_{i_g^i}}}(s, T) ds \quad (6.5)$$

où  $U_{m \times m}^{f_j, I_{i_g^i}}$  est une matrice diagonale telle que l'élément correspondant à  $Z^{f_j, I_{i_g^i}}$  est égal à un et tous les autres éléments sont égaux à zéro et  $e_k^{f_j, I_{i_g^i}}$  est un vecteur de telle sorte que seul le  $k$ -ième élément est égal à un, tous les autres étant égaux à 0.

DÉMONSTRATION. On se réfère à la proposition A.2 et au corollaire A.3 dans Errais et al. (2010) pour la preuve et la discussion reliée.  $\square$

### 6.3. Exemples.

#### 6.3.1. Exemple 1 Exemple de Nakagawa (2010a).

Supposons que la partition  $(I_{i_g})_{i_g \in \{1, \dots, \Gamma\}}$  des événements de crédit corresponde aux différents événements  $i$  eux-mêmes.

Nous retrouvons alors l'exemple de Nakagawa (2010a). Comme pour chaque événement d'intensité, nous proposons que chaque état de processus  $X_t^j$  ( $i = 1, \dots, m$ ) devienne simplement l'intensité correspondante aux types de l'événement à savoir  $\lambda_t^i = X_t^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Nous supposons que  $X_t = {}^t(X_t^1, \dots, X_t^m)$  satisfait les équations différentielles stochastiques de type affine suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \dots \\ X_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1(c^1 - X_t^1) \\ \dots \\ k^m(c^m - X_t^m) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \xi^{1,j} \\ \dots \\ \xi^{m,j} \end{pmatrix} dL_t^j,$$

où  $k^i, c^i, \{\xi^{i,j}\}_{j=1, \dots, m}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et la valeur initiale  $X_0^i$  sont toutes des constantes strictement positives.

On note que  $X_t^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) peut être représenté comme suit :

$$X_t^i = c^i + e^{-k^i t} (X_0^i - c^i) + \int_0^t e^{-k^i(t-s)} \sum_{j=1}^m \xi^{i,j} dL_s^j. \quad (6.6)$$

Lorsque nous pouvons utiliser la fonction de vraisemblance pour (6.3), celle-ci est donnée par :

$$\mathcal{L}(\{\Theta^i\}_{i=1, \dots, m} / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\}) = \prod_{i=1}^m \exp \left[ \int_0^T \log(\tilde{X}_{s^-}^{i, \Theta^i}) d\tilde{N}_s^j - \int_0^T (\tilde{X}_s^{i, \Theta^i}) ds \right],$$

où  $\tilde{X}_s^{i,\Theta^i}$  est une trajectoire de  $X_t^i$  quand les observations  $(\tilde{\tau}, \tilde{\eta})$  sont données. Ceci implique que chaque ensemble de paramètres  $\Theta^i$  peut être obtenu séparément pour  $i = 1, \dots, m$ .

Nous notons que la maximisation de la fonction Log de vraisemblance  $\mathcal{L}(\Theta^i / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\}) = \log \mathcal{L}(\Theta^i / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\})$  est équivalente à la maximisation du terme suivant :

$$\int_0^T \log(\tilde{X}_{s^-}^{i,\Theta^i}) d\tilde{N}_s^i - \int_0^T (\tilde{X}_s^{i,\Theta^i}) ds.$$

Utilisant (6.7), nous pouvons représenter la fonction objective à maximiser en déterminant le maximum de l'estimateur de vraisemblance de  $\Theta^i$  comme suit :

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^i} \log \left\{ c^i + e^{-k^i \tilde{\tau}_k^i} (X_0^i - c^i) + \sum_{j=1}^m \xi^{i,j} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < \tilde{\tau}_k^i} \tilde{\eta}_p^j e^{-k^i (\tilde{\tau}_k^i - \tilde{\tau}_p^j)} \right\} \\ - c^i T - \frac{X_0^i - c^i}{k^i} (1 - e^{-k^i T}) - \frac{1}{k^i} \sum_{j=1}^m \xi^{i,j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^i} \tilde{\eta}_k^j (1 - e^{-k^i (T - \tilde{\tau}_k^j)})$$

### 6.3.2. Example 2. Différentiation par classes de firme.

Introduisons maintenant la partition  $(f_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$  des firmes et  $(I_{i_g})_{i_g \in \{1, \dots, \Gamma\}}$  la partition des types d'évènements.

Nous supposons également que chaque état de processus  $X_t^{f_j, I_{i_g}^i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) corresponde simplement à l'intensité correspondante aux types de l'évènement à savoir

$$\lambda_t^{f_j, I_{i_g}^i} = X_t^{f_j, I_{i_g}^i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Nous supposons que  $X_t^{F,G} = (X_t^{f_j, I_{i_g}^1}, \dots, X_t^{f_j, I_{i_g}^m})$  satisfait les équations différentielles stochastiques de type affine suivantes :

$$\begin{pmatrix} X_t^{f_j, I_{i_g}^1} \\ \dots \\ X_t^{f_j, I_{i_g}^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 (c^1 - X_t^{f_j, I_{i_g}^1}) \\ \dots \\ k^m (c^m - X_t^{f_j, I_{i_g}^m}) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \xi^{1,j} \\ \dots \\ \xi^{m,j} \end{pmatrix} dL_t^{f_j, I_{i_g}^j},$$

où  $k^{f_j, I_{i_g}^i}, c^{f_j, I_{i_g}^i}, \{\xi^{f_j, I_{i_g}^i, j}\}_{j=1, \dots, m}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et la valeur initiale  $X_0^{f_j, I_{i_g}^i}$  sont toutes des constantes strictement positives.

On note que  $X_t^{f_j, I_{i_g}^i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) peut être représenté comme suit :

$$X_t^{f_j, I_{i_g}^i} = c^{f_j, I_{i_g}^i} + e^{-k^{f_j, I_{i_g}^i} t} (X_0^{f_j, I_{i_g}^i} - c^i) + \int_0^t e^{-k^{f_j, I_{i_g}^i} (t-s)} \sum_{j=1}^m \xi^{f_j, I_{i_g}^i, j} dL_s^{f_j, I_{i_g}^j}. \quad (6.7)$$

Lorsque nous pouvons utiliser la fonction de vraisemblance pour (6.3), celle-ci est donnée par :

$$\mathcal{L}(\{\Theta^{f_j, I_{ig}^i}\}_{i=1, \dots, m} / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\}) = \prod_{i=1}^m \exp \left[ \int_0^T \log(\tilde{X}_{s^-}^{f_j, I_{ig}^i, \Theta^i}) d\tilde{N}_s^j - \int_0^T (\tilde{X}_s^{f_j, I_{ig}^i, \Theta^i}) ds \right],$$

où  $\tilde{X}_s^{i, \Theta^{f_j, I_{ig}^i}}$  est une trajectoire de  $X_t^{f_j, I_{ig}^i}$  quand les observations  $(\tilde{\tau}, \tilde{\eta})$  sont données. Ceci implique que chaque ensemble de paramètres  $\Theta^{f_j, I_{ig}^i}$  peut être obtenu séparément pour  $i = 1, \dots, m$ .

Nous notons que la maximisation de la fonction Log de vraisemblance  $\mathcal{L}(\Theta^{f_j, I_{ig}^i} / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\}) = \log \mathcal{L}(\Theta^{f_j, I_{ig}^i} / \{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}\})$  est équivalente à la maximisation du terme suivant :

$$\int_0^T \log(\tilde{X}_{s^-}^{f_j, I_{ig}^i, \Theta^{f_j, I_{ig}^i}}) d\tilde{N}_s^i - \int_0^T (\tilde{X}_s^{f_j, I_{ig}^i, \Theta^{f_j, I_{ig}^i}}) ds.$$

Utilisant (6.7), nous pouvons représenter la fonction objective à maximiser en déterminant le maximum de l'estimateur de vraisemblance de  $\Theta^{f_j, I_{ig}^i}$  comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\tilde{N}_T^{f_j, I_{ig}^i}} \log \left\{ \begin{aligned} & c^{f_j, I_{ig}^i} + e^{-k^{f_j, I_{ig}^i} \tilde{\tau}_k^{f_j, I_{ig}^i}} (X_0^{f_j, I_{ig}^i} - c^{f_j, I_{ig}^i}) \\ & + \sum_{j=1}^m \xi^{f_j, I_{ig}^i, j} \sum_{\tilde{\tau}_p^j < \tilde{\tau}_k^i} \tilde{\eta}_p^{f_j, I_{ig}^j} e^{-k^{f_j, I_{ig}^i} (\tilde{\tau}_k^{f_j, I_{ig}^i} - \tilde{\tau}_p^{f_j, I_{ig}^j})} \end{aligned} \right\} \\ & - c^{f_j, I_{ig}^i} T - \frac{X_0^{f_j, I_{ig}^i} - c^{f_j, I_{ig}^i}}{k^{f_j, I_{ig}^i}} (1 - e^{-k^{f_j, I_{ig}^i} T}) \\ & - \frac{1}{k^{f_j, I_{ig}^i}} \sum_{j=1}^m \xi^{f_j, I_{ig}^i, j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t^{f_j, I_{ig}^i}} \tilde{\eta}_k^{f_j, I_{ig}^j} (1 - e^{-k^{f_j, I_{ig}^i} (T - \tilde{\tau}_k^{f_j, I_{ig}^j})}). \end{aligned}$$

### 7. Calcul du score de diversité

Dans ce qui suit, nous examinons le score de diversité défini à partir de la recherche d'une relation du type :

$$\sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \stackrel{Law}{=} \frac{I}{D} \sum_{d=1}^D \mathbb{I}_{\{\tilde{T}_d \leq t\}},$$

qui en fait se réduit à l'égalité des espérances et variances, à savoir :

$$Ip = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \right] = \sum_{i=1}^I p_i,$$

et

$$\frac{I^2 p(1 + (D-1)p)}{D} = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \right)^2 \right].$$

Rappelons que, dans le cadre des processus de Cox, nous avons :

$$T_i = \inf \{t : \Lambda_t^i \geq \theta_i\}, \text{ avec } \Lambda_s^i = \int_0^t \lambda_s^i ds.$$

En conséquence, nous en déduisons :

$$p_i = \mathbb{P} \{T_i \leq t\} = 1 - \mathbb{P} \{ \Lambda_t^i < \theta_i \} = \mathbb{E} [\psi_i(t)],$$

avec

$$\psi_i(t) = 1 - e^{-\Lambda_t^i},$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^I p_i + 2 \sum_{i < j}^I \text{cov} \left( \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}, \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} \right)$$

avec

$$\text{cov} \left( \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}, \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} \right) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \times \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} \right] - p_i p_j,$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \times \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} \right] = \mathbb{P} [T_i \leq t \cap T_j \leq t]$$

En adoptant l'approche en termes de seuil, nous obtenons de manière générale :<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [T_1 > t_1, \dots, T_I > t_I] &= \mathbb{P} [\Lambda_{t_1}^1 < \theta_1, \dots, \Lambda_{t_I}^I < \theta_I] \\ &= \mathbb{E} \left[ \widehat{C}(\psi_1(t_1), \dots, \psi_I(t_I)) \right], \end{aligned}$$

et où  $\widehat{C}$  est la fonction copule de survie.

Notons également que, si  $\forall i \ t_i > t$ , alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [T_1 > t_1, \dots, T_I > t_I | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{P} [\Lambda_{t_1}^1 < \theta_1, \dots, \Lambda_{t_I}^I < \theta_I | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} \left[ \widehat{C}(\psi_1(t_1), \dots, \psi_I(t_I)) | \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents, nous obtenons au total un calibrage du score de diversité et des paramètres associés.

<sup>5</sup>Voir par exemple Jeanblanc et al. (2009).

PROPOSITION 4. *Pour les processus de Cox servant à décrire les instants de défaut, le score de diversité  $D$  et la probabilité  $p$  commune de défaut des obligations hypothétiques sont définis pour une durée  $t$  par :*

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mathbb{E}[\psi_i(t)], \\ D &= \frac{I^2 p(1-p)}{A_t - I^2 p}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

avec  $\psi_i(t) = 1 - e^{-\Lambda_t^i}$ , et

$$A_t = \sum_{i=1}^I \mathbb{E}[\psi_i(t)] + 2 \sum_{i < j} \left( \mathbb{E} \left[ \widehat{C}(\psi_1(0), \dots, \psi_i(t_i), \dots, \psi_j(t_j), \dots, \psi_I(0)) \right] - \mathbb{E}[\psi_i(t)] \mathbb{E}[\psi_j(t)] \right).$$

REMARQUE 12. *Les relations précédentes sont établies dans un cadre très général. Pour obtenir des solutions totalement explicites, il est nécessaire d'introduire des hypothèses très simplificatrices sur la dépendance des intensités (voir par exemple le modèle de Jarrow et Yu, 2001). Cependant, à partir des équations ci-dessus, il est relativement aisé de recourir à des simulations de Monte Carlo pour analyser numériquement le score de diversité et la probabilité commune de défaut.*

## 8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence le rôle très important que peuvent jouer les copules pour modéliser les structures de dépendance des instants de défaut des produits de crédit, tant au niveau des instants eux-mêmes qu'au niveau des processus représentant leurs différentes intensités. L'impact du choix de la copule est clairement mis en évidence. Dans ce contexte, nous obtenons une forme quasi-explicite pour le score de diversité de Moody's lorsque celui-ci est déterminé à partir de la technique de développement binomial et en faisant correspondre les deux premiers moments de la valeur du portefeuille d'origine (le collatéral) avec celle d'un portefeuille qui est composé d'actifs identiques et indépendants.

## Annexes

**La notion de processus ponctuel marqué.** Dans cette section, nous rappelons les principales définitions et propriétés des processus ponctuels.<sup>6</sup>

*Processus ponctuels marqués.*

Un processus ponctuel marqué est caractérisé par deux suites : La suite  $(T_n)_n$  correspond à la suite des instants (ici, ceux des changements de note) ; la suite  $X_n$  correspond à la valeur à l'instant  $T_n$  (ici, la valeur de la note). La suite  $(T_n, X_n)_n$  constitue un processus ponctuel marqué.

Rappelons la notion de processus d'intensité.<sup>7</sup> On considère la filtration  $\mathcal{F}$  générée par le processus ponctuel marqué. On désigne par  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la tribu des boréliens.

Introduisons les processus  $N_t$  et  $Z_t$  qui définissent respectivement le nombre de sauts et la valeur cumulée du processus ponctuel marqué sur la période de temps  $[0, t]$ . Ils sont donc définis par :

$$N_t = \sum_{T_n \leq t} 1, \quad (8.1)$$

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k. \quad (8.2)$$

**DÉFINITION 10.** *Définissons  $\mu = \mu(\omega; ds; dx)$  la mesure des sauts de  $Z$ . La mesure  $\mu$  est donnée par :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(\omega; (0, t] \times A) = \sum_{T_n \leq t} \mathbb{I}_{X_n \in A}.$$

*Processus d'intensité.*

A partir de la théorie générale des mesures aléatoires, nous savons qu'il existe une mesure  $\nu = \nu(\omega; ds; dx)$  appelée le compensateur de  $\mu$  qui est une mesure prévisible de telle sorte que  $(\mu - \nu)$  est une mesure martingale locale. (en particulier, pour chaque  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$ , le processus  $(\mu(\omega; (0, t] \times A) - \nu(\omega; (0, t] \times A))_t$  est une martingale) (voir par exemple Jacod et Shiryaev (2003) pour les définitions et les propriétés basiques).

**PROPOSITION 5.** *Supposons que  $G_n(dt, dx)$  soit une version régulière de la loi conditionnelle  $(T_{n+1}, X_{n+1})$  par rapport à  $\mathcal{F}_{T_n}$ . Selon Jacod (1975), nous avons :*

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{I}\{T_n < t \leq T_{n+1}\} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty[ \times \mathbb{R})}. \quad (8.3)$$

Notons  $F_n$  une version régulière de la loi conditionnelle de  $T_{n+1}$  par rapport à  $\mathcal{F}_{T_n}$  :

$$F_n(dt) = G_n(dt \times \mathbb{R}).$$

<sup>6</sup>Voir également l'ouvrage de Last et Brandt (1995).

<sup>7</sup>En ce qui concerne les définitions élémentaires et les propriétés de base des processus ponctuels marqués, voir par exemple Bremaud (1981), Last et Brandt (1995) pour les processus ponctuels marqués à valeurs réelles, et Jacod (1975) pour des processus ponctuels marqués multivariés.

Enfin, introduisons le noyau  $K$  de telle sorte que  $K(T_{n+1}, dx)$  soit la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  par rapport à  $\mathcal{F}_{T_n}$  et  $T_{n+1}$ .

*Intégrales par rapport aux mesures de sauts.*

LEMME 1. La filtration  $\mathcal{F}$  étant générée par le processus ponctuel marqué  $(T_n, X_n)$ , tout processus  $H$  prévisible peut être décomposé comme suit :

$$H(\omega, t, x) = \sum_{T_n \leq t} 1_{\llbracket T_n, T_{n+1} \rrbracket} h_n(x) \text{ avec } h_n(x) = h(n; (T_1, X_1); \dots; (T_n, X_n))(x). \quad (8.4)$$

L'intégrale du processus  $H$  par rapport à la variable aléatoire  $\nu$  est donc donnée par :

$$H * \nu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t H(\omega, t, x) \nu(ds, dx) = \quad (8.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k \geq 0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} h(n; (T_1, X_1); \dots; (T_k, X_k))(x) \frac{G_k(ds, dx)}{G_k([s, \infty[ \times \mathbb{R})}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{T_n}^t h(n; (T_1, X_1); \dots; (T_n, X_n))(x) \frac{G_n(ds, dx)}{G_n([s, \infty[ \times \mathbb{R})} \mathbb{1}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}}.$$

Dans ce qui suit, nous rappelons les propriétés de base des processus des points marqués, en particulier la détermination du compensateur prévisible. Nous détaillons quelques cas particuliers.

*Exemples fondamentaux.*

EXEMPLE 2. (*Temps de transaction déterministes*)

C'est le cadre habituel des modèles discrets : les temps de variations des processus sont fixes. Dorénavant les sauts du temps satisferont  $T_n = t_n$  (ils sont déterministes). Nous déduisons que  $\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_n$  où  $\mathcal{F}_n$  est l'information disponible au temps  $t_n$ . Notons que dans ce cas, nous avons :

$$\int \phi(x) \nu(t_n, dx) = \mathbb{E}[\phi(X_n) | \mathcal{F}_{n-1}].$$

EXEMPLE 3. (*Marques indépendantes*)

Ce type de modèle introduit des distributions des temps d'arrivée plus générales par exemple que celles liées aux processus de Lévy. Néanmoins, les amplitudes des variations ne dépendent pas des instants de variations.

Soit  $\bar{\Phi} = (T_n)_n$  un processus ponctuel arbitraire où  $\bar{\Lambda}$  désigne la mesure de l'intensité et  $(X_n)_n$  est une suite i.i.d. de  $\mathcal{X}$ -valeurs des éléments aléatoires avec une distribution  $G$  indépendante de  $\bar{\Phi}$ . Le processus des points marqués  $\Phi = ((T_n, X_n))_n$  est appelé un  $G$ -marquage indépendant de  $\bar{\Phi}$ . Il est relativement facile de vérifier que  $\Phi$  a une mesure d'intensité  $\bar{\Lambda} \otimes G$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} \frac{F_n(dt)}{F_n([t, \infty[)} G(dx).$$

Le cas des processus ponctuels marqués indépendants. Rappelons en particulier la définition d'un processus homogène de Poisson.

Soit  $\bar{\Phi} = (T_n)_n$  le processus homogène de Poisson. Nous avons :

-i) Les nombres aléatoires  $\mathcal{N}(A_1), \dots, \mathcal{N}(A_n)$  sont indépendants pour l'ensemble des mesures disjointes deux à deux  $A_1, \dots, A_n$  (propriété des accroissements indépendants).

-ii) Soit  $A \in \mathcal{B}^+$ . Alors, nous obtenons :

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(A) = k] = \frac{\bar{\Lambda}(A)^k}{k!} e^{-\bar{\Lambda}(A)},$$

où

$$\bar{\Lambda}(A) = \lambda|A|,$$

et  $|A|$  est la mesure de Lebesgue de  $A$ .

Le processus marqué indépendant de Poisson est un processus marqué indépendant défini de telle sorte que la composante de temps est un processus de Poisson homogène. Le processus de taux de rendement est alors un processus de Lévy.

Considérons maintenant des modèles qui permettent de tenir compte des distributions plus générales des durées entre instants d'arrivée consécutifs : ils n'ont plus besoin d'être déterministes ou de suivre des lois exponentielles avec un paramètre constant. En outre, il est possible de corrélérer les variations des cours des actions avec les temps de transactions. Les distributions des durées entre instants d'arrivée consécutifs peuvent aussi être dirigées par un processus donné  $Y$ .

#### EXEMPLE 4. (*Marquage dépendant*)

Un processus ponctuel marqué  $\Phi = ((T_n, X_n))_n$  est appelé une position de marquage dépendante de  $\bar{\Phi} = (T_n)_n$  si  $X_1, \dots, X_n, \dots$  sont conditionnellement indépendants sachant que  $\bar{\Phi}$  et  $\mathbb{P}[X_n | \bar{\Phi}] = G(T_n, dx)$ . Dans ce cas le compensateur  $\bar{\Phi}$  est donné par :

$$\nu(dt, dx) = G(t, dx)\bar{\nu}(dt).$$

Ce qui suit est un cas particulier important :

- *Processus de Poisson marqué* :  $\bar{\Phi}$  est un processus de Poisson avec une mesure d'intensité continue et bornée  $\bar{\Lambda}$  et  $\nu(dt, dx) = G(t, dx)\bar{\Lambda}(dt)$ .

Le processus  $Z_t = \sum_{T_n \leq t} X_n$  est alors un processus de Poisson composé.

Considérons en particulier les processus de Poisson doublement stochastiques ou conditionnels (encore appelés les processus de Cox). Dans ce qui suit, nous considérons un processus ponctuel marqué  $\Phi$  avec un espace marqué  $\mathcal{X}$  adapté à une filtration  $\mathcal{F}_t$  continue à droite donnée. Notons  $\mathcal{N}_t(B)$  le nombre de sauts avec des amplitudes dans la partie  $B$  de  $\mathcal{X}$  durant la période de temps  $[0, t]$ .



$\Phi$  est appelé un  $\mathcal{F}_t$ - processus de Poisson marqué doublement stochastique ("Double Stochastic Poisson Process" DSPP) s'il existe une mesure aléatoire  $\nu$  dans  $[0, T] \times \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{F}_0$ -mesurable de telle sorte que :

$$\mathbb{P}[(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s)(B) = k | \mathcal{F}_s] = \frac{(\nu([s, t] \times B))^k}{k!} e^{-\nu([s, t] \times B)}, \text{ p.s.}$$

REMARQUE 13. *Pour un sous-ensemble  $B$  fixé,  $\mathcal{N}(\cdot \times B)$  est un processus de Poisson doublement stochastique. Ainsi,  $\mathcal{N}(\cdot \times B)$  a des accroissements  $\mathcal{F}_t$ -conditionnement indépendants. Notons que, s'il n'y a pas un temps fixe de discontinuité ( $\nu(\{t\}) = 0$ ) alors ces deux propriétés sont équivalentes. La mesure aléatoire  $\nu$  peut être définie également par la relation :*

$$\nu(dt, dx) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(dt, dx) | \mathcal{F}_0]$$

Le processus de Poisson marqué modulé markovien est un cas particulier de processus de Poisson marqué doublement stochastique :

L'intensité des sauts est dirigée par un processus de Markov  $Y$ . Il est défini de la manière suivante : Il existe une chaîne de Markov  $Y = (Y_t)_t$  avec un nombre fini de sauts dans des intervalles finis. Soit  $\{\lambda_i, i \in \mathcal{Y}\}$  une famille de nombres positifs. Le processus ponctuel  $(T_n)_n$  est appelé un processus de Poisson modulé markovien si la distribution conditionnelle  $\mathbb{P}[\mathcal{N} \in \cdot | Y]$  est  $\mathbb{P}$ -presque égale à la distribution d'un processus de Poisson avec une fonction d'intensité  $t \rightarrow \lambda_{Y_t}$ .

Afin d'avoir un processus de Poisson marqué doublement stochastique, on doit supposer que  $\mathcal{F}_0$  contient  $\mathcal{F}_\infty^Y$ . Nous avons alors :

$$\mathbb{P}[(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s) = k | Y] = \frac{(\int_s^t \lambda_{Y_u} du)^k}{k!} e^{-\int_s^t \lambda_{Y_u} du}.$$

Ainsi, le compensateur de  $\bar{\Phi}$  est donné par :

$$\bar{\nu}(dt) = \lambda_{Y_t} dt.$$

Ce processus peut être interprété comme un processus de Poisson dans un environnement aléatoire. Il est dirigé par le processus de  $Y$ .

Considérons une position dépendante d'un processus marqué avec la structure ci-dessus pour modéliser les instants de sauts. Nous avons alors :

$$\nu(dt, dx) = \lambda_{Y_t} dt G(t, dx)$$

REMARQUE 14. *Si  $Y$  n'est pas observable,  $\mathcal{F}_t$  est la filtration de saut générée par le processus ponctuel marqué lui-même et alors le compensateur  $\nu$  est donné par :*

$$\nu(dt, dx) = \mathbb{E}[\lambda_{Y_t} | \mathcal{F}_{t-}] dt G(t, dx),$$

où  $\mathbb{E}[\lambda_{Y_t} | \mathcal{F}_{t-}]$  désigne une version de la projection visible  $\mathcal{F}$  de  $\lambda_Y$  (voir par exemple Karr, 1991, p. 302). Les probabilités neutres au risque et les prix des options sont alors déterminés par rapport à la filtration  $\mathcal{F}$  et le compensateur est donné par la formule ci-dessus.

EXEMPLE 5. (*Processus semi-markovien*)

Nous introduisons maintenant un modèle où les périodes de variation et les amplitudes de ces variations sont liées par une dépendance markovienne. Soit  $((U_n, X_n))_n$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $]0, \infty] \times \mathcal{X}$  où  $\mathcal{X}$  est au plus un ensemble dénombrable. Pour simplifier la notation, nous supposons dans ce qui suit que  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ .

Supposons que :

$$\mathbb{P}[U_0 \in dt, X_1 = j | X_0] = Q_{X_0 j}^0(dt) : \mathbb{P} - ps.$$

et

$$\mathbb{P}[U_n \in dt, X_{n+1} = i | X_0, U_0, \dots, U_{n-1}, X_n] = Q_{X_n i}(dt)$$

où  $Q_{ij}^0$  et  $Q_{ij}$  sont des mesures finies dans  $]0, \infty]$  pour tout  $(i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  de telle sorte que :

$$\sum_j Q_{ij}^0(]0, \infty]) = 1 \text{ et } \sum_j Q_{ij}(]0, \infty]) = 1.$$

De toute évidence, la distribution conditionnelle de  $(T_{n+1}, X_{n+1})$  sous  $\mathcal{F}_{T_n}$  ne dépend que des valeurs de  $X_n$ .

Alors, la séquence  $((T_n, X_n))_n$  avec  $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$  est appelé un processus semi-markovien (*SMP*) avec un espace d'états  $\mathcal{X}$ , la famille  $Q^0 = \{Q_{ij}^0 / (i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$  est appelée le retard du noyau ("kernel delay") et la famille  $Q = \{Q_{ij} / (i, j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$  est appelé noyau semi-markovien (*SMP*).

Rappelons que si  $\sum_{j \in \mathcal{X}} Q_{ij}^0 = F^0$  et  $\sum_{j \in \mathcal{X}} Q_{ij} = F$  sont indépendents de  $i$  alors le processus semi-markovien est un processus de renouvellement (les files d'attente  $U_i$  sont iid avec une distribution de file d'attente  $F$  et une distribution de délai  $F^0$ ).

Parfois,  $Q_{ij}^0(dt)$  et  $Q_{ij}(dt)$  sont absolument continues par rapport à une mesure finie  $\sigma$ -de  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^+$ . C'est à dire que nous avons :

$$Q_{ij}^0(dt) = q_{ij}^0(t)\gamma(dt) \text{ et } Q_{ij}(dt) = q_{ij}(t)\gamma(dt)$$

Notons  $Q_j^0 = \sum_j Q_{ij}^0$  et  $Q_j = \sum_j Q_{ij}$ . Définissons  $r_i^0(t)$  et  $r_{ij}(t)$  les quantités  $\frac{q_{ij}^0(t)}{Q_i^0[t, \infty]}$  et  $\frac{q_{ij}(t)}{Q_i[t, \infty]}$ .

Par exemple, si pour certains nombres non négatifs  $r(i, j)$  avec  $r(i) = \sum_j r(i, j)$ , nous avons :

$$Q_{ij}(dt) = r(i, j)e^{-r(i)t} dt$$

et  $Q^0 = Q$  alors le processus de saut  $X$  est une chaîne de Markov homogène. Dans ce cas, les coefficients  $r(i, j)$  sont appelés des taux de transition et  $p(i, j) = \frac{r(i, j)}{r(i)}$  désigne la fonction de transition.

De la relation générale qui donne le compensateur  $\nu$  :

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty[ \times \mathcal{X})}$$

Il peut être directement déduit. Le compensateur  $\nu$  est déterminé par :

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t \leq T_1} \frac{Q_{X_0 i}^0(dt)}{Q_{X_0}^0([t, \infty])} + \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} \frac{Q_{X_n j}(dt - T_n)}{\sum_j Q_{X_n j}([t - T_n, \infty])}$$

En particulier si

$$Q_{ij}^0(dt) = q_{ij}^0 \gamma(dt) \text{ et } Q_{ij}(dt) = q_{ij} \gamma(dt)$$

alors

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t \leq T_1} r_{X_0 j}^0(t) \gamma(dt) + \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} r(X_n, j)(t - T_n) \gamma(dt - T_n)$$

et pour le cas plus particulier

$$Q_{ij}^0(dt) = Q_{ij}(dt) = r(i, j) e^{-r(i)t} dt,$$

nous avons :

$$\nu(dt, \{j\}) = 1_{t \leq T_1} r_{X_0 j}^0(t) dt + \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} r(X_n, j)(dt - T_n),$$

Le noyau de transition est alors donné par :

$$K(T_n, j) = \frac{Q_{X_n j}(dt + T_n)}{\sum_k Q_{X_n k}(dt + T_n)}.$$

Comme on peut le voir, la formule donnant l'expression quasi-explicite de la mesure du compensateur  $\nu$ , est tout particulièrement importante, entre autres pour analyser statistiquement les données financières.

Heureusement, ce genre de décomposition peut être par exemple étendu à une filtration  $\mathcal{F}_t$  générée par la filtration de saut et une filtration indépendante et continue (par exemple une filtration brownienne) :

*Si la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$  est générée par le MPP  $\Phi = (T_n, X_n)_n$  et un processus indépendant  $(Y_t)_t$  avec une filtration continue, alors la mesure aléatoire définie par :*

$$\nu(dt, dx) = \sum_{n \geq 0} 1_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} \frac{G_n(dt, dx)}{G_n([t, \infty] \times \mathbb{R})},$$

où  $G_n(dt, dx)$  est une version ordinaire de la distribution conditionnelle de  $(T_{n+1}, X_{n+1})$  par rapport à la filtration de saut générée par  $\Phi$ , est également la mesure compensatrice des sauts sous la filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$ .

## Conclusion Générale

Cette thèse, développée sous forme de sept chapitres, s'efforce d'apporter des réponses nouvelles sur l'utilité de l'approche par les fonctions copules en matière de gestion des risques, d'allocation optimale d'actifs et aussi en matière de diversification des fonds structurés de crédit. Nous nous intéressons essentiellement à l'étude de l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle de copules sur la validité des résultats liés à l'ensemble des problématiques envisagées.

Nos résultats confirment l'utilité de l'approche par les copules. Ils s'inscrivent dans la lignée de travaux précédents, conduisant au consensus en faveur des avantages procurés par l'utilisation des copules dans la modélisation de la structure de dépendance. Néanmoins, nos résultats révèlent aussi l'importance de la bonne spécification du modèle. En effet, nous avons pu démontrer qu'une erreur dans la spécification de la fonction copule, ou aussi lors de la spécification de la dynamique des marginales, peut avoir des conséquences importantes, altérant ainsi la richesse des investisseurs, plus généralement celle des institutions financières, surtout en situation de crise.

C'est pourquoi, dans un premier temps, nous avons mis en avant le problème lié au choix de la fonction copule. Dès lors, étant donnée la panoplie des fonctions copules disponibles, ainsi que la variété des critères de sélection, le choix de la meilleure copule s'avère un problème assez délicat. Pour pouvoir apporter des éléments de réponse à ce problème, nous mettons en relation le choix de la meilleure copule à une caractéristique fondamentale des portefeuilles, celle relative à leurs niveaux de diversification. En effet, nous avons l'intuition que la structure de dépendance d'un portefeuille suffisamment diversifié serait différente de celle d'un portefeuille moins diversifié. Les résultats trouvés corroborent cette hypothèse et prouvent l'adéquation de la copule de Student pour les portefeuilles non diversifiés, concentrés sur un nombre restreint de secteurs. Plus la taille des portefeuilles augmente ( $N > 6$ ), et donc leurs niveaux de diversification, meilleure est l'adéquation de la copule Gaussienne.

Dans un deuxième temps, nous avons mesuré l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle de copules. Pour commencer, nous avons soulevé cette question dans le cadre des problématiques liées aux mesures de risques extrêmes, telles la Value-at-Risk ou aussi l'Expected-Shortfall. Les résultats trouvés confirment l'importance du choix du modèle afin d'assurer les meilleurs résultats d'estimation. Ainsi, une mauvaise spécification dans la dynamique des marginales a plus d'impact que celle de la fonction copule. Nous notons également qu'une erreur dans le modèle impacte plus la mesure de risque « Expected-Shortfall » que celle de la « Value-at-Risk ».

Nous avons tenté ensuite d'examiner la même problématique, relative toujours à l'impact d'une mauvaise spécification du modèle de copules, dans un cadre dédié à l'allocation optimale de portefeuille. A cet égard, nous avons essayé de vérifier le degré de sensibilité des investisseurs, face à une telle situation, en fonction de leurs attitudes envers le risque. Les résultats trouvés attestent d'énormes disparités en fonction de la configuration du fond risqué, et du degré d'aversion au risque des investisseurs. Ainsi, une erreur dans la spécification du modèle copule a moins d'impact sur la richesse finale de l'investisseur dans le cas d'un fond équipondéré (EW), que dans le cas de fonds composés selon, d'une part les recommandations de l'approche moyenne-variance (MV), et d'autre part selon le principe de maximisation du ratio de Sharpe (SRP). Pour ces dernières configurations, l'impact d'une mauvaise spécification des marginales est toujours plus important que celui dû à une mauvaise spécification de la copule. Les résultats trouvés montrent aussi que les investisseurs les moins averses au risque, sont les plus sensibles à ce type de mauvaise spécification du modèle. Notons finalement que l'impact d'une mauvaise spécification de la copule est d'autant plus significatif que l'horizon d'investissement correspond à du long terme. Ceci montre tout l'intérêt de développer le bon modèle de copules permettant ainsi de maximiser au mieux la richesse finale de l'investisseur.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous soulevons les mêmes problématiques, cette fois-ci dans le contexte des produits structurés de crédit. En effet, les modèles existants traitant les problèmes de modélisation de la dépendance de défauts sont loin d'être les plus performants. Ainsi, nous avons essayé d'examiner, dans un premier temps, l'impact d'une mauvaise spécification dans le modèle de copules sur les mesures de risque VaR et CVaR, au niveau des portefeuilles de crédits. L'accent a été mis sur la sensibilité de ces estimations par rapport au niveau de diversification du portefeuille, considéré sous l'angle de la qualité du rating des obligations le composant. Les résultats trouvés suggèrent toujours la sensibilité de la mesure de risque CVaR en cas de mauvaise spécification de la copule. Nous avons pu vérifier aussi que cet impact est d'autant plus important que les portefeuilles sont composés d'obligations dont les probabilités de transition sont les plus importantes.

Dans un deuxième temps, nous abordons la notion de diversification des produits structurés de crédit, particulièrement les CDO's, en remettant en question sa mesure phare, le « Score de Diversité » de Moody's. L'intérêt de cette analyse est notamment de montrer la sensibilité de cette mesure par rapport au choix de la fonction copule, plus particulièrement dans un contexte qui tient compte d'une éventuelle contagion entre les instants de défauts.

Finalement, l'ensemble des résultats de cette thèse permettent de conclure sur l'importance du choix du meilleur modèle de copules. En effet, celui-ci conditionne de manière significative l'estimation des mesures de risque, l'allocation optimale de portefeuille, ainsi que la diversification des produits structurés de crédit. Toutefois, nous constatons que le choix du meilleur modèle de copules, sur la base des tests d'adéquation compatibles, ne permet

pas de garantir toujours les meilleures performances. En effet, nous avons pu vérifier qu'une mauvaise spécification dans le modèle peut occasionner, dans certaines circonstances, des surperformances par rapport au « vrai-modèle ». Ceci remet en cause les tests d'adéquation, développés généralement sur la base d'estimations faites « in-the-sample », et nous laisse envisager de considérer ces tests dans une logique orientée plutôt vers le « out-of-sample ».

## Bibliographie

- [1] Acerbi, C., et Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487-1503.
- [2] Agarwal, V., Naik, et N. Y. (2000). Multi-period performance persistence analysis of hedge funds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(3), 327-342.
- [3] Agarwal, V., et Naik, N. Y. (2004). Risks and portfolio decisions involving hedge funds. *Review of Financial studies*, 17(1), 63-98.
- [4] Allen, F., et D., Gale (2000) : Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108, 1-33.
- [5] Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis, Volume III*. Wiley & Sons, London.
- [6] Alexander, G. J., et Baptista, A. M. (2002). Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection : A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7), 1159-1193.
- [7] Alexander, G. J., et Baptista, A. M. (2004). A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model. *Management Science*, 50(9), 1261-1273.
- [8] Altman, E. (1996). *Corporate bond and commercial loan portfolio analysis*. New York University. S97-12, Salomon Brothers Center, New York.
- [9] Altman, E., et V. Kishore (1996). Almost everything you want to know about recoveries on defaulted securities. *Financial Analyst Journal*. November.
- [10] Altman, E. (1997). *Rating migration of corporate bonds : Comparative results*. New York University, Salomon Center. Working Paper #5-97-3.
- [11] Ang, A., Bekaert, G. (2002). Regime switches in interest rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(2), 163-182.
- [12] Ang, A., Chen, J. (2002). Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63(3), 443-494.
- [13] Artzner, P.F., Delbaen, F., Eber, J. M., et Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *Risk*, 10(11), 68-71.
- [14] Artzner, P. F., Delbaen, F., Eber, J. M., et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- [15] Arzac, E. R., & Bawa, V. S. (1977). Portfolio choice and equilibrium in capital markets with safety-first investors. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 277-288.
- [16] Asarnow, E. (1996). Corporate loans as an asset class. *Journal of Portfolio Management*, Summer, 4, 92-103.
- [17] Avallaneda, M. et Wu, L. (2001) Credit contagion : Pricing cross-country risk in Brady debt markets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4, 921-939.
- [18] Avramov, D., et Wermers, R. (2006). Investing in mutual funds when returns are predictable. *Journal of Financial Economics*, 81(2), 339-377.
- [19] Azizpour S, et Giesecke, K. (2008). Self-exciting corporate defaults contagion versus frailty. Stanford University.
- [20] Azizpour S, et Giesecke, K. (2011). Premia for correlated default risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 358, 1340-1357.

- [21] Bakshi, G., Panayotov, G. (2010). First-passage probability, jump models, and intra-horizon risk. *Journal of Financial Economics*, 95, 20-40.
- [22] Barber, B.M., Odeon, T. (2000). Trading is hazardous to your wealth : The common stock investment performance of individual investors. *Journal of Finance*, 55, 773-806.
- [23] Bares P., Gibson R. et Gyger S. (2002). Hedge Fund Allocation with Survival Uncertainty and Investment Constraints. Working Paper.
- [24] Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., et Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, 19(5), 583-602.
- [25] Barras, L., Scaillet, O., & Wermers, R. (2010). False discoveries in mutual fund performance : Measuring luck in estimated alphas. *The Journal of Finance*, 65(1), 179-216.
- [26] Bartram, S.M., Taylor, S.J., et Wang, Y.H. (2007). The Euro and European financial market dependence. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 51, pp. 1461-1481.
- [27] Bauwens, L, Galli F, P. Giot (2008). The moments of Log-ACD models quantitative and qualitative. *Analysis in Social Sciences*, 2, 1-29.
- [28] Bauwens L, et P. Giot (2000). The logarithmic ACD model : an application to the bid-ask quote process of three NYSE Stocks. *Annales d'Economie et de Statistique*, 60, 117-149.
- [29] Bauwens L, et P. Giot (2001b). Econometric modelling of stock market intraday activity advanced studies in theoretical and applied econometrics. *Kluwer Academic Publishers.vol. 38*.
- [30] Bauwens L, Giot P, Grammig J., D. Veredas (2004). A comparison of financial duration models via density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 20, 589-609.
- [31] Bauwens L, D. Veredas (2004). The stochastic conditional duration model : a latent factor model for the analysis of financial durations. *Journal of Econometrics*, 119(2), 381-412.
- [32] Basel Committe on Banking Supervision (1996). Amendement to Capital Accord to incorporate market risks. Bâle, Janvier 1996.
- [33] Basel Committee on Banking Supervision (2006). Basel II : International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards : A Revised Framework. Bank for International Settlements, Juin 2006.
- [34] Bawa, V. S. (1975). Optimal rules for ordering uncertain prospects. *Journal of Financial Economics*, 2(1), 95-121.
- [35] Bawa, V. S., et Lindenberg, E. B. (1977). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 189-200.
- [36] Beder, S. (1995). VAR : Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*, Sep-Oct,12-24.
- [37] Bekaert, G., et Harvey, C. R. (1997). Emerging equity market volatility. *Journal of Financial economics*, 43(1), 29-77.
- [38] Benartzi, S., Thaler, R. H. (1995). Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle. *The Quarterly Journal of Economics*, 110(1), 73-92.
- [39] Bera, A. K., Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484-512.
- [40] Berg, D. (2009). Copula goodness-of-fit testing : An overview and power comparison. *European Journal of Finance*, Vol. 15, pp. 675-701.
- [41] Berg, D., QUESSY, J. F. (2009). Local Power Analyses of Goodness-of-fit Tests for Copulas. *Scandinavian Journal of Statistics*, 36(3), 389-412.
- [42] Berger, T. (2013). Forecasting value-at-risk using time varying copulas and EVT return distributions. *International Economics*, 133, 93-106.



- [43] Bernouilli, D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. Comentarum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 5, 175-92.
- [44] Black, F., et Cox, J. C. (1976). Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. The Journal of Finance, 31(2), 351-367.
- [45] Black, F., et Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy, 637-654.
- [46] Blanco C., Ihle G (1998). How Good is Your VaR : Using Backtesting to Assess System Performance. Financial Engineering News, 1-2.
- [47] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 31(3), 307-327.
- [48] Bollerslev, T., Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. Econometric reviews, 11(2), 143-172.
- [49] Boston, C. S. F. (1997). CreditRisk+ : A credit risk management framework. Technical document.
- [50] Boudoukh, J., Richardson, M., et Whitelaw, R. (1998). The best of both worlds. Risk, Mai, 11, 64-67.
- [51] Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G., et Roncalli, T. (2000). Copulas for finance : A reading guide and some applications. Technical report, Crédit Lyonnais.
- [52] Brémaud, P. (1980). *Point Processes and Queues. Martingale Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- [53] Brennan, M. J., et Schwartz, E. S. (1980). Analyzing convertible bonds. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 15(04), 907-929.
- [54] Busse, J. A., Goyal, A., et Wahal, S. (2010). Performance and persistence in institutional investment management. The Journal of Finance, 65(2), 765-790.
- [55] Cacho-Diaz, J., Laeven, R. et Sahalia, A., (2014). Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes, forthcoming in the *Journal of Financial Economics*.
- [56] Caillaud, C., et Guegan, D. (2009). Forecasting VaR and Expected Shortfall using dynamical systems : A risk management strategy. Frontiers in finance and economics, 6(1), 26-50.
- [57] Campbell, R., et Huisman, R., et Koedijk, K. (2001). Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework. Journal of Banking & Finance, 25(9), 1789-1804.
- [58] Caporin, M., San Giobbe, C. F., et Associati, G. R. E. T. A. (2003). The trade off between complexity and efficiency of VaR measures : a comparison of RiskMetric and GARCH-type models. (Vol. 3). GRETA, working paper.
- [59] Carhart, M. M. (1997). On persistence in mutual fund performance. The Journal of finance, 52(1), 57-82.
- [60] Chen, X., Fan, Y., et Patton, A. J. (2004). Simple Tests for Models of Dependence Between Multiple Financial Time Series, with Applications to U.S. Equity Returns and Exchange Rates. London Economics Financial Markets Group, Working Paper No. 483, disponible sur SSRN : <http://ssrn.com/abstract=513024> ou <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.513024>.
- [61] Chen, X. et Fan, Y. (2006). Estimation and model selection of semiparametric copula based multivariate dynamic models under copula misspecification. *Journal of Econometrics*, 135, 125-154.
- [62] Cherubini, U., Luciano, E. et Vecchiato, W. (2004). Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons, England.
- [63] Chew, S. H., MacCrimmon, K. R. (1979). Alpha-nu choice theory : A generalization of expected utility theory. University of British Columbia.

- [64] Chollete, L., Heinen, A., et Valdesogo, A. (2009). Modeling International Financial Returns with a Multivariate Regime-switching Copula. *Journal of Financial Econometrics*, Society for Financial Econometrics, 7(4), 437-480.
- [65] Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International economic review*, 841-862.
- [66] Christoffersen, P.F., Diebold, F.X. et Schuermann, T. (1998). Horizon problems and extreme events in financial risk management. *Economic Policy Review*, 4(3), 109-118.
- [67] Christoffersen, P.F., Diebold, F.X. (2000). How relevant is volatility forecasting for financial risk management ?. *Review of Economics and Statistics*, 82(1), 12-22.
- [68] Cifuentes A, I Efrat, J Gluck et E Murphy, (1999). Buying and selling credit risk : a perspective on credit-linked obligations. In *Credit Derivatives, Risk Books*, pages 112-123.
- [69] Clark P.K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41, 135-155.
- [70] Coles, Currie et Tawn (1999) Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, 2, 339-367.
- [71] Collin-Dufresne, P., Goldstein, R., et J., Helwege (2003). Is credit event risk priced ? Modeling contagion via the updating of belief", DP Haas School, University of California, Berkeley.
- [72] Conine, T. E., Tamarkin, M. J. (1981). On diversification given asymmetry in returns. *The Journal of Finance*, 36(5), 1143-1155.
- [73] Cont, R, Tankov, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Processes*. CRC Press.
- [74] Cox, D.R., Isham, V (1980). *Point Processes*. Chapman and Hall. New York, NY.
- [75] Cox J.C, S.A Ross , Rubinstein M. (1979). Option pricing : a simplified approach. *Journal Financial Economics*. 7 229-263.
- [76] Cremers, K. M., Petajisto, A. (2009). How active is your fund manager ? A new measure that predicts performance. *Review of Financial Studies*, 22(9), 3329-3365.
- [77] Crosbie, P.J et J.R. Bohn, J.R. (2001). *Modeling Default Risk*. KMV, LLC.
- [78] Cvitanic J., Lazrak A., Martellini L. et Zapatero F. (2003). Optimal Allocation to Hedge Funds : An Empirical Analysis. *Quantitative Finance*, 3, 1-12.
- [79] Cvitanic, J., Polimenis, V., Zapatero, F. (2008). Optimal portfolio allocation with higher moments. *Annals of Finance*, 4(1), 1-28.
- [80] Danielsson, J. (2002). The emperor has no clothes : limits to risk modelling. *Journal of Banking and Finance*, 26, 1273-1296.
- [81] Danielsson, J., Zigrand, J. (2006). On time-scaling of risk and the square-root of time rule. *Journal of Banking and Finance*, 30, 2701-2713.
- [82] Das, S., Duffie, D., Kapadia, N. et Saita, L. (2007). Common failings : How corporate defaults are correlated. *Journal of Finance* 62, 93-117.
- [83] Davis, M.H.A. *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London 1993.
- [84] Davis, M. et V. Lo (2001a). Modelling default correlation in bond portfolios. *Modeling Default Correlation in Bond Portfolios"*, in Alexander, C. (ed), *Mastering Risk, Vol 2 : Applications*. Financial Times, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 141-151.
- [85] Davis, M. et Lo, V.(2001b). Infectious Defaults. *Quantitative Finance*, 1, 382-387.
- [86] Delloy, M., Fermanian, J. D., et M., Sbai (2005). Estimation of a reduced form credit portfolio model and extensions to dynamic frailties. DP Bnp Paribas.
- [87] Demey, P., Jouanin, J-F., Roncalli, T. et C. Roget (2004). Maximum likelihood estimate of default correlations. *Risk*, November 2004.
- [88] diBartolomeo, D. (1998) : A review of Moody's methods used to assign credit ratings to collateralized loan obligations. Northfield Information Services.

- [89] Di Clemente, A., et Romano, C. (2004). Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk : A Copula-based Approach\*. *Economic Notes*, 33(3), 325-357.
- [90] Di Clemente, A., Romano, C. (2005). Measuring portfolio Value-at-Risk by a Copula-EVT-based approach. *Studi Economici*, 85, 29-57.
- [91] Diebold, F., Hickman, A., Inoue, A. et Schuermann, T. (1998). Scale models. *Risk*, 11,104-107.
- [92] Diks, C., Panchenko, V., et Van Dijk, D. (2010). Out-of-sample comparison of copula specifications in multivariate density forecasts. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34(9), 1596-1609.
- [93] Dittmar, R. F. (2002). Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross section of equity returns. *The Journal of Finance*, 57(1), 369-403.
- [94] Dornbusch, R., et Park, Y., et S., Claessens (2000). Contagion : Understanding how it spreads. *The World Bank Research Observer*, 15, 177-197.
- [95] Driessen, J. (2005). Is default event risk priced in corporate bonds?. *Review of Financial Studies*, 18(1), 165-195.
- [96] Duffee, G. R. (1999). Estimating the price of default risk. *Review of Financial Studies*, 12(1), 197-226.
- [97] Duffie, D., Eckner, A., Horel, G. et Saita, L. (2009). Frailty correlated default. *Journal of Finance*, 64, 2089-2123.
- [98] Duffie D et N Gârleanu, (2001). Risk and valuation of collateralized debt obligations Draft, September.Moody's Investment Services, The Binomial Expansion Technique, 1997.
- [99] Duffie D, et Lando, D (1997). Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. DP, Stanford University.
- [100] Duffie, D., et Pan, J. (1997). An overview of value at risk. *The Journal of derivatives* 4(3), 7-49.
- [101] Duffie, D., Pan, J., et Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343-1376.
- [102] Duffie D., L. Saita, et Wang, K. (2006). Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics*, vol 83, 3, 635-665.
- [103] Duffie D, et Singleton K. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*,12, 687-720.
- [104] Dungey, M. et B., Gonzales-Hermosillo (2005). Empirical modeling of contagion : A review of methodologies. *Quantitative Finance*, 5, 9-24.
- [105] Dunn, G. (2009). Modelling market risk. UK, FSA.
- [106] Egloff, D., Leippold, M., et P., Vanini (2007). A simple model of credit contagion. *Journal of Banking and Finance*, 31, 2475-2492.
- [107] Elton, E. J., Gruber, M. J. (1995). *Modern portfolio theory and Investment Analysis*. 5 éd, Jhon Wiley & sons. Inc, United States.
- [108] Embrechts, P., Lindskog, F., et McNeil, A.J (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Elsevier, North-Holland.
- [109] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 987-1007.
- [110] Engle, R. F. (2000). The Econometrics of Ultra-High Frequency Data. *Econometrica*, 68, 1-22.
- [111] Engle R. F, J. R. Russell (1998). Autoregressive conditional duration : a new model for irregular spaced transaction data. *Econometrica*, 66, 1127-1162.
- [112] Errais, E., Giesecke, K. et Goldberg, L. (2007) Pricing credit form the top down with affine point processes, Working paper (2007)

- [113] Errais, E., Giesecke, K. et Goldberg, L. (2010). A one point processes and portfolio credit risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 1, 642-665.
- [114] Evans, J.L., S.H. Archer (1968). Diversification and the reduction of dispersion : an empirical analysis. *Journal of Finance*, 23, 761-767.
- [115] Fama, E. F. (1965). Portfolio analysis in a stable Paretian market. *Management science*, 11(3), 404-419.
- [116] Fama, E. F., French, K. R. (2010). Luck versus skill in the cross-section of mutual fund returns. *The Journal of Finance*, 65(5), 1915-1947.
- [117] Fantazzini, D. (2008). Dynamic copula modelling for value at risk. *Frontiers in Finance and Economics*, 5(2), 72-108.
- [118] Favre, L., Galeano, J. A. (2002). Mean-modified value-at-risk optimization with hedge funds. *The Journal of Alternative Investments*, 5(2), 21-25.
- [119] Fender, I. et J. Kiff (2004). CDO rating methodology : Some thoughts on model risk and its implications. BIS Working Papers No 163. Monetary and Economic Department, November.
- [120] Fermanian, J. D. (2005). Goodness-of-fit tests for copulas. *Journal of multivariate analysis*, 95(1), 119-152.
- [121] Fernandes M., J. Grammig (2005). Non-parametric specifications tests for conditional duration models. *Journal of Econometrics*, 127, 35-68.
- [122] Fernandes M., J. Grammig (2006). A family of autoregressive conditional duration models. *Journal of Econometrics*, 130, 1-23.
- [123] Finger, C.C. (2009). VaR Is from Mars, Capital Is from Venus. Research Monthly (Avril), RiskMetrics Group.
- [124] Fishburn, P. C. (1977). Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *The American Economic Review*, 116-126.
- [125] Fitch IBCA (1997). Bank collateralized loan obligations : An overview. December 18.
- [126] Focardi SM, FJ. Fabozzi (2005). An autoregressive conditional duration model of credit-risk contagion. *Journal of Risk Finance*, 6, 208-225.
- [127] Frees, E.,Valdez, E. (1998). Understanding Relationships Using Copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1-25.
- [128] French, K. R. (2008). Presidential address : The cost of active investing. *The Journal of Finance*, 63(4), 1537-1573.
- [129] Frey, F., et J., McNeil (2003). Modeling dependent defaults. *Journal of Risk*, 6, 59-92.
- [130] Friedman, M., Savage, L. J. (1948). The utility analysis of choices involving risk. *The Journal of Political Economy*, 279-304.
- [131] Fung, W., Hsieh, D. A. (2001). The risk in hedge fund strategies : Theory and evidence from trend followers. *Review of Financial studies*, 14(2), 313-341.
- [132] Gagliardini P, C. Gouriéroux, (2005a). Stochastic migration models with application to corporate risk. *Journal of Financial Econometrics*, 3, 188-226.
- [133] Gagliardini P, C. Gouriéroux, (2005b). Migration correlation : definition and efficient estimation. *Journal of Banking and Finance* 29, 865-894.
- [134] Genest, C., MacKay, R. J. (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canadian Journal of Statistics*, 14(2), 145-159.
- [135] Genest, C., Rivest, L.P. (1993). Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1034-1043.
- [136] Genest, C., Quessy, J. F., Rémillard, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33(2), 337-366.

- [137] Genest, C., Rémillard, B. et Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study, *Insurance : Mathematics and economics*, 44(2), 199-213.
- [138] Ghysels E., J. Jasiak (1998). GARCH for irregularly spaced financial data : the ACDGARCH model. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2, 133-149.
- [139] Giesecke, K., (2001). Default and information. Working Paper, Cornell University.
- [140] Giesecke, K. (2004). Correlated default with incomplete information, *Journal of Banking and Finance* 28, 1521-1545.
- [141] Giesecke, K., Longstaff, F. A. , Schaefer, S. et Strebulaev, I. (2011). Corporate bond default risk : A 150-year perspective. *Journal of Financial Economics*. 102(2), 233-250.
- [142] Giesecke, K., et S., Weber (2006). Credit contagion and aggregate losses. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, 741-767.
- [143] Giot, P., Laurent, S. (2004). Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models. *Journal of Empirical Finance*, Vol 11(3), 379-398.
- [144] Glosten, L. R., Jagannathan, R., et Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5), 1779-1801.
- [145] Gluck, J. et H. Remeza (2000). Moody's approach to rating multisector CDOs. Moody's Investor Service.
- [146] Goetzmann, W., Kumar, M. (2008). Equity Portfolio Diversification. *Review of Finance*, 12, 433-463.
- [147] Grammig J., K. O. Maurer (2000). Non-monotonic hazard functions and the autoregressive conditional duration model. *Econometrics Journal*, 3, 16-38.
- [148] Grammig J., M. Wellner (2002). Modeling interdependence of volatility and inter-transaction duration processes. *Journal of Econometrics*, 106, 369-400.
- [149] Guegan, D., Zhang, J. (2010). Change analysis of a dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data. *Quantitative Finance*, 10(4), 421-430.
- [150] Hamilton, D., James, J., et Webber, N. (2001). Copula Methods and the Analysis of Credit Risk. Working paper, Warwick Business School, University of Warwick, Coventry, UK.
- [151] Hand, J., Holthausen, R. et M. Leftwich (1992). The effect of bond rating agency announcements on bond and stock prices. *Journal of Finance*, 47, 733-752.
- [152] Hanoch, G., Levy, H. (1970). Efficient portfolio selection with quadratic and cubic utility. *Journal of Business*, 181-189.
- [153] Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 705-730.
- [154] Harlow, W.V. Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial Analysts Journal*, 28-40.
- [155] Hart, P.E. (1971). Entropy and Other Measures of Concentration. *Journal of the Royal Statistical Society*, 134, 73-85.
- [156] Harvey, C. R., Siddique, A. (2000). Conditional skewness in asset pricing tests. *The Journal of Finance*, 55(3), 1263-1295.
- [157] Hawkes, A. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58, 83-90.
- [158] Hawkes, A., et D. Oakes (1974). A cluster representation of a self-exciting Pprocess. *Journal of Applied Probability*, 11, 493-503.
- [159] He, X. et Gong, P. (2009). Measuring the coupled risks : A copula-based CVaR model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(2), 1066-1080.
- [160] Hendricks, D., Patel, J., et Zeckhauser, R. (1993). Hot hands in mutual funds : Short-run persistence of relative performance, 1974-1988. *The Journal of Finance*, 48(1), 93-130.

- [161] Horvath, J. (1972). Absolute and Relative Measures of Diversification Reconsidered : A Comment. *Kyklos*, 24, 841-843.
- [162] Huffman, S. et D. Ward (1996). The prediction of default of high yield bond issues. *Review of Financial Economics*. 5(1), 75-89.
- [163] Ibbotson, R. G., Kaplan, P. D. (2000). Does asset allocation policy explain 40, 90, or 100 percent of performance?. *Financial Analysts Journal*, 26-33.
- [164] Jacod J.(1975). Multivariate Point Process : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. *Z.Wahrs. verw. Gebiete*. 31 235-253.
- [165] Jacod J. (1977). A general theorem of representation for martingales. *Proceedings of the symposia in pure mathematics*. 31 37-53.
- [166] Jacod J., Shiryaev, A.N. (1987). Limit Theorems for Stochastic Processes. Berlin : Springer-Verlag.
- [167] Jarrow, R. A., et Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *The journal of finance*, 50(1), 53-85.
- [168] Jarrow R. A., Lando, D., et Turnbull, S. M. (1997). A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies*, 10,481-523.
- [169] Jarrow R., et Madan D. (1995). Option pricing using the term structure of interest rates to hedge systematic discontinuities in asset returns. *Mathematical Finance*. 5 311-336.
- [170] Jarrow, R.A. et Yu, F. (2001) : Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *Journal of Finance*, 56,1765-1799.
- [171] Jarrow, R., Zhao, F. (2006). Downside loss aversion and portfolio management. *Management Science*, 52(4), 558-566.
- [172] Jeanblanc, M., Yor, M., Chesney, M. (2009) : *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Finance Textbooks, Springer.
- [173] Joe, H. (1997). Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman & Hall, London.
- [174] Jorion, P. et Zhang, G. (2007). Good and bad credit contagion : Evidence from credit default swaps. *Journal of Financial Economics*, 84(3), 860-883.
- [175] Jondeau, E., Rockinger, M. (2006). Optimal portfolio allocation under higher moments. *European Financial Management*, 12(1), 29-55.
- [176] Jorion, P. (1997). Value at Risk : The New Benchmark for Controlling Market Risk. 3 ème Ed, McGraw-Hill.
- [177] Jouanin, J-F., Rapuch, G., Riboulet, G. et T. Roncalli (2001). Modelling dependence for credit derivatives with copulas. DP Crédit Lyonnais - Groupe de Recherche Opérationnelle- Lyxor Asset Management.
- [178] JP Morgan. (1997). Creditmetrics- Technical Document. Discussion paper, JP Morgan, New York.
- [179] Junker, M., May, A. (2005). Measurement of aggregate risk with copulas. *The Econometrics Journal*, 8(3), 428-454.
- [180] Jurczenko E, Maillet B. and Merlin P. (2005). Hedge Funds Portfolio Selection with Higher-order Moments : A Non-parametric Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Efficient Frontier. Working paper.
- [181] Kacperczyk, M., Damien, P. (2011). Asset allocation under distribution uncertainty. McCombs Research Paper Series No. IROM-01-11 (2011, April 18).
- [182] Kahneman, D., Tversky, A. Prospect theory : An analysis of decision under risk. *Econometrica* : Journal of the Econometric Society, 263-291.
- [183] Kang, B. U., In, F., Kim, G., & Kim, T. S. (2010). A longer look at the asymmetric dependence between hedge funds and the equity market.
- [184] Kang, L. (2011). Asset allocation in a Bayesian copula-GARCH framework : An application to the 'passive funds versus active funds' problem. *Journal of Asset Management*, 12(1), 45-66.

- [185] Karr A.F. (1991). *Point Processes and their Statistical Inference*. Marcel Dekker. New-York.
- [186] Kiff, J (2004). The basic math of default-mode credit loss distributions, manuscript non publié, Bank of Canada, Ottawa.
- [187] Kijima, M. (2000). Valuation of a credit swap of the basket type. *Review of Derivatives Research*, 4(1), 81-97.
- [188] Kijima, M., et Muromachi, Y. (2000). Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type. *Review of Derivatives Research*, 4(1), 55-79.
- [189] Kim, I. J., Ramaswamy, K., et Sundaresan, S. (1993). Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds? : A contingent claims model. *Financial Management*, 117-131.
- [190] K. M. V. Corporation (1993). Credit monitor overview. San Francisco California, 60-66.
- [191] Koopman, S., Lucas, A., et A. Monteiro (2008). The multi-state latent factor intensity model for credit rating transitions. *Journal of Econometrics*, 142, 399-424.
- [192] Kosowski, R., Timmermann, A., Wermers, R., & White, H. (2006). Can mutual fund "stars" really pick stocks? New evidence from a bootstrap analysis. *The Journal of finance*, 61(6), 2551-2595.
- [193] Krokmal, P., Palmquist, J., et Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of Risk*, 4, 43-68.
- [194] Kupiec, P.H.(1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
- [195] Lando, D. et Nielsen, M. S. (2010). Correlation in corporate defaults : Contagion or conditional independence? *Journal of Financial Intermediation*, 19(3), 355-372.
- [196] Lando, D. et Skødeberg; T.. (2002). Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations. *Journal of Banking and Finance*, 26, 423-444.
- [197] Christensen, J. E. Hansen et D. Lando, (2004). Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities. *Journal of Banking and Finance*, 28, 2575-2602.
- [198] Lang, L., et R., Stulz (1992). Contagion and competitive intra-industry effects of bankruptcy announcements. *Journal of Financial Economics*, 32, 45-60.
- [199] Last, G., Brandt, A. (1995). *Marked Point Pprocesses on The Real Line*. Springer-Verlag, Berlin.
- [200] Le Courtois, O., Walter, C. (2012). Concentration des portefeuilles boursiers et asymétrie des distributions de rentabilités d'actifs. *Journal de la Société Française de Statistique*, 153(2), 1-20.
- [201] Ledoit, O., Santa-Clara, P., et Wolf, M. (2003). Flexible multivariate GARCH modeling with an application to international stock markets. *Review of Economics and Statistics*, 85(3), 735-747.
- [202] Longin, F., Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*, 56(2), 649-676.
- [203] Longstaff, F. A., et Schwartz, E. S. (1995). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *The Journal of Finance*, 50(3), 789-819.
- [204] Lopes, L. L. (1987). Between hope and fear : The psychology of risk. *Advances in experimental social psychology*, 20, 255-295.
- [205] Lopez, J. A. (1998). Methods for evaluating value-at-risk estimates (No. 9802). Federal Reserve Bank of New York.
- [206] Li, D.X. (2000). On Default Correlation : A Copula Function Approach. *The Journal of Fixed Income*, 9(4), pp. 43-54.
- [207] Madan D.B., et Milne, F. (1991). Option pricing with V.G. martingale components. *Mathematical Finance* . 14 39-55.
- [208] Mandelbrot B., et Taylor H.M. (1967). On the distribution of stock price differences. *Operations Research*. 11 1057-1062.

- [209] McCarthy, J. et R. Melicher (1988). Analysis of bond rating changes in a portfolio context. *Quarterly Review of Business and Economics*, 27, 69-86.
- [210] McNeil, A. J., Frey, R., et Embrechts, P. (2010). *Quantitative risk management : concepts, techniques, and tools*. Princeton university press.
- [211] Magi, A. (2009). Portfolio choice, behavioral preferences and equity home bias. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 49(2), 501-520.
- [212] Maillet, B et Jurczenko, E (2006). *Multi-moment asset allocation and pricing models*. John Wiley & Sons Eds, (Vol. 399).
- [213] Marfels, C. (1971). Absolute and Relative Measures of Concentration Reconsidered. *Kyklos*, 24, 753-766.
- [214] Markowitz, H. (1960). Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments. *The Journal of Business*, 33(4), 391-393.
- [215] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, American Finance Association, 7(1), 77-91.
- [216] Markowitz, H., Usmen, N. (2003). Diffuse Priors vs. Resampled Frontiers : An Experiment. *Journal of Investment Management* 4th quarter.
- [217] Markwat, T. D., Kole, E., et Van Dijk, D. J. (2009). Time Variation in Asset Return Dependence : Strength or Structure?. In 22nd Australasian Finance and Banking Conference.
- [218] Marshall, MN. (1996). Sampling for qualitative research. *Family Practice*, 13, 522-525.
- [219] Masala, G., Menzietti, M., et Micocci, M. (2007). OPTIMISATION OF CONDITIONAL-VAR IN AN ACTUARIAL MODEL FOR CREDIT RISK ASSUMING A STUDENT COPULA DEPENDENCE STRUCTURE.
- [220] Mashal, R., Naldi, M. (2002). Pricing multiname credit derivatives : heavy tailed hybrid approach. Available at SSRN 296402.
- [221] Mashal, R., Naldi, M., Zeevi, A. (2003). Extreme events and multi-name credit derivatives. *Risk*, 43-54.
- [222] Vaz de Melo Mendes, B., de Souza, M. (2004). Measuring financial risks with copulas. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, 13(1), 27-45.
- [223] Meneguzzo, D., et Vecchiato, W. (2004). Copula sensitivity in collateralized debt obligations and basket default swaps. *Journal of Futures Markets*, 24(1), 37-70.
- [224] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates\*. *The Journal of Finance*, 29(2), 449-470.
- [225] Meucci, A. (2009). Managing diversification. *Risk*, 22, 74-79.
- [226] Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma : is' optimized'optimal?. *Financial Analysts Journal*, 31-42.
- [227] Milevsky, M. A., Posner, S. E. (1998). A theoretical investigation of randomized asset allocation strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5(2), 117-130.
- [228] Mitton, T., Vorkink, K. (2007). Equilibrium underdiversification and the preference for skewness. *Review of Financial Studies*, 20(4), 1255-1288.
- [229] Moody's Investment Services (1997). The Binomial expansion technique.
- [230] Morimoto, T., Kawasaki, Y. (2008). Empirical comparison of multivariate GARCH models for estimation of intraday value at risk. disponible sur SSRN 1090807.
- [231] Nakagawa, H. (2010a). Modeling of contagious rating changes and its application to multi-downgrade protection, *JSIAM Letters*, 2, 65-68.
- [232] Nakagawa, H. (2010b). Analysis of records of credit rating transition with mutually exciting rating-change intensity model. *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics* 20,183-202.
- [233] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : A new approach. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 347-370.



- [234] Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1945). Theory of games and economic behavior. Bull. Amer. Math. Soc, 51(7), 498-504.
- [235] Okimoto, T. (2008). New Evidence of Asymmetric Dependence Structures in International Equity Markets. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 43(3), 787-815.
- [236] Ortobelli, S., Rachev, S. T., et Fabozzi, F. J. (2010). Risk management and dynamic portfolio selection with stable paretian distributions. Journal of Empirical Finance, 17(2), 195-211.
- [237] Pacurar M. (2008). Autoregressive conditional duration models in finance : a survey of the theoretical and empirical literature. *Journal of Economic Surveys*.
- [238] Palaro, H. P., Hotta, L. K. (2006). Using conditional copula to estimate value at risk. Journal of Data Science, 4, 93-115.
- [239] Patton, A.J. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. Journal of Financial Economics, 2, 130-168.
- [240] Patton, A.J. (2009) : Are "market neutral" hedge funds really market neutral?. Revue of Financial Studies, 22, 2495-2530.
- [241] Pearson K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 185, 71-110.
- [242] Pearson, N. D., Smithson, C. (2002). VaR : The state of play. Review of Financial economics, 11(3), 175-189.
- [243] Pogue, T. et R. Soldofsky (1969). What's in a bond rating? Journal of Financial and Quantitative Analysis. 4 (6), 201-28.
- [244] Polkovnichenko, V. (2005). Household portfolio diversification : A case for rank-dependent preferences. Review of Financial Studies, 18(4), 1467-1502.
- [245] Popova I., Morton, D. and Popova E. (2003). Optimal Hedge Fund Allocation with Asymmetric Preferences and Distributions. University of Texas, Working paper.
- [246] Provizionatou, V., Markose, S., et Menkens, O. (2005). Empirical scaling rules for value-at-risk. Universié de l'Essex.
- [247] Prigent J.L. (2001). Option pricing with a general marked point process. *Mathematics of Operations Research*, 2001, Vol. 26, 50-66.
- [248] Pritsker, M. (2006). The hidden dangers of historical simulation. Journal of Banking and Finance, 30(2), 561-582.
- [249] Quiggin, J. (1982). A theory of anticipated utility. Journal of Economic Behavior & Organization, 3(4), 323-343.
- [250] Ricetti, L. (2013). A Copula-GARCH Model for Macro Asset Allocation of a Portfolio with Commodities : an Out-of-Sample Analysis. Empirical Economics, 44(3), 1315-1336.
- [251] RiskMetricsTM. (1996). Technical Document, 4-th Edition, J.P.Morgan, December 1996.
- [252] Rochet, J.-C., et J., Tirole (1996). Interbank lending and systemic risk. *Journal of Money, Credit and Banking*, 28, 733-762.
- [253] Rockafellar, R.T., Uryasev. S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of risk, 2, 21-42.
- [254] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. Journal of Banking & Finance, 26 (7), 1443-1471.
- [255] Rodriguez, J. C. (2007). Measuring financial contagion : A copula approach. Journal of Empirical Finance, 14(3), 401-423.
- [256] Romano, C. (2002). Calibrating and simulating copula functions : An application to the Italian stock market. Working paper n. 12, CIDEM, Universit'a degli Studi di Roma "La Sapienza".
- [257] Rosch, D., et B., Winterfeld (2008). Estimating credit contagion in a standard factor model. *Risk*, Août, 78-82.

- [258] Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics*, 470-472.
- [259] Rosenbluth, G. (1961). Address to 'Round-Table-Gesprach uber Messung der industriellen Konzentration Die Konzentration in der Wirtschaft'. edited by F. Neumark, *Schriften des Vereins fur Socialpolitik*, N.S., 22, 391-394.
- [260] Ross, S. (1976). The arbitrage theory of capital pricing. *Journal of Economic Theory*, 13, 341-360.
- [261] Rouvinez, C. (2003). Diversity scoring for market value CDOs. *Credit Risk - May 2003*.
- [262] Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding of assets. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 431-449.
- [263] Rudin, A. M., Morgan, J. S. (2006). A portfolio diversification index. *The Journal of Portfolio Management*, 32(2), 81-89.
- [264] Santos, A. A., Nogales, F. J., et Ruiz, E. (2013). Comparing univariate and multivariate models to forecast portfolio value-at-risk. *Journal of Financial Econometrics*, 11(2), 400-441.
- [265] Scaillet, O. (2007). Kernel-based goodness-of-fit tests for copulas with fixed smoothing parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(3), 533-543.
- [266] Schewart, G.W. (1989). Why does stock market volatility change over time. *Journal of Finance*, 44, 1115-1153.
- [267] Schönbucher, P., Schubert, D. (2001). Copula-dependent defaults in intensity models. Bonn University, disponible sur SSRN, 301968.
- [268] Schönbucher, P. J. (2003). *Credit derivatives pricing models : models, pricing and implementation*. John Wiley & Sons.
- [269] Schorin C et S Weinrich, 1998 *Collateralized debt obligation handbook*. Working paper, Morgan Stanley Dean Witter.
- [270] Scott, R. C., Horvath, P. A. (1980). On the direction of preference for moments of higher order than the variance. *The Journal of Finance*, 35(4), 915-919.
- [271] Sharpe, W.F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9(2), 277-293.
- [272] Shefrin, H., Statman, M. (2000). Behavioral portfolio theory. *Journal of financial and quantitative analysis*, 35(02), 127-151.
- [273] Schloegel, L., O'Kane, D.. 2005. A note on the large homogenous portfolio approximation with the student-t copula. *Finance Stochastics*, 9, 577-584.
- [274] Simkowitz, M. A., Beedles, W. L. (1978). Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(5), 927-941.
- [275] Sing, F. T., Eng, S. (2000). Asset allocation in a downside risk framework. *Journal of Real Estate Portfolio Management*, 6(3), 213-223.
- [276] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, 229-231.
- [277] Smithson, C., Minton, L. (1996). Value-at-risk. *Risk*, September, 38-39.
- [278] Statman, M. (1987). How many stocks make a diversified portfolio?. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(03), 353-363.
- [279] Statman, M. (2004). The diversification puzzle. *Financial Analysts Journal*, 44-53.
- [280] Stevenson, S. (2001). Emerging markets, downside risk and the asset allocation decision. *Emerging Markets Review*, 2(1), 50-66.
- [281] Stulajter, F. (2009). Comparison of Different Copula Assumptions and Their Application in Portfolio Construction. *Ekonomická revue-Central European Review of Economic Issues*, 12.
- [282] Sun, W., Fan, A., Chen, L. W., Schouwenaars, T., & Albot, M. A. (2006). Optimal rebalancing for institutional portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 32(2), 33-43.

- [283] Thaler, R. H. (1999). Mental accounting matters. *Journal of Behavioral decision making*, 12(3), 183-206.
- [284] Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, 65-86.
- [285] Telser, L. G. (1955). Safety first and hedging. *The Review of Economic Studies*, 1-16.
- [286] Tversky, A., Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and uncertainty*, 5(4), 297-323.
- [287] Wermers, R. (2000). Mutual fund performance : An empirical decomposition into stock-picking talent, style, transactions costs, and expenses. *The Journal of Finance*, 55(4), 1655-1703.
- [288] Witt, G. (2004). Moody's correlated binomial default distribution", Moody's Investors Service Structured Finance Special Report, August.
- [289] Woerheide, W., et Persson, D. (1993). An index of portfolio diversification. *Financial Services Review*, 2(2), 73-85.
- [290] Yamai, Y., Yoshihara, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk under market stress1. BIS (Mars), Volume contains papers presented and papers based on presentations at the Third Joint Central Bank Research Conference on Risk Measurement and Systemic Risk held at the BIS in March 2002.
- [291] Yamanaka S., Sugihira M., et Nakagawa, H. (2012). Modeling of contagious credit events and risk analysis of credit portfolios. *Asian Pacific Financial Markets*. 19(1) :43-62.
- [292] Yu, F. (2005). Default correlation in reduced-form models. disponible sur SSRN, 709523.
- [293] Zakamouline, V. (2014). Portfolio performance evaluation with loss aversion. *Quantitative Finance*, 14(4), 699-710.
- [294] Zhang, F. X. (2003). What Did the Credit Market Expect of Argentina Default ? : Evidence from Default Swap Data (Vol. 3). Division of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board.
- [295] Zhang M. Y., Russell J. R., et Tsay, R. S. (2001). A Nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data. *Journal of Econometrics*, 104, 315-335.49 QASS, Vol. 2 1, 2008, 29-49.
- [296] Zhou, C. (2001).An analysis of default correlation and multiple defaults. *Review of Financial Studies*, 14, 555-576.
- [297] Zimmer, D. M. (2012). The role of copulas in the housing crisis. *Review of Economics and Statistics*, 94(2), 607-620.