Université Paris-Sud

Ecole Doctorale 564 :
Physique en Île-de-France

Laboratoire : CEA Saclay/IRFU/LARSIM

Discipline : Physique Quantique

Note de synthèse

Thèse de doctorat soutenue le 11 décembre 2014 par

Mohamed Issam Ibnouhsein

Corrélations quantiques et structures causales

Cette thèse se situe à l'intersection des études sur les fondements de la théorie quantique (des champs) et de l'information quantique relativiste. Y sont discutées plusieurs problématiques autour de l'imbrication entre les notions de corrélations quantiques et de contrainte causale. Le caractère mathématique des travaux ici présentés est constamment motivé par les questions philosophiques qu'impose la théorie quantique, et il est essentiel d'avoir ces deux types d'investigations à l'esprit si l'on veut acquérir une compréhension adéquate des fondements de la théorie quantique.

Introduction

Les notions de corrélation et de causalité sont depuis longtemps au centre de nombreux débats philosophiques et scientifiques, d'où le parti pris de cette thèse de se restreindre aux définitions opérationnelles de ces notions. Ainsi, une corrélation se définit en termes de probabilités jointes pour les variables observées, tandis que la dépendance causale nécessite une spécification des probabilités conditionnelles pour relier un changement de la variable conditionnante à un changement observable de la distribution de probabilité pour la variable conditionnée. Pourquoi donc relier ces deux notions dans le titre « corrélations quantiques et structures causales » ? Les termes « quantiques » et « structures » sont naturellement cruciaux pour comprendre le sens de cette association.

La relativité restreinte représente le cadre formel de notre compréhension moderne de la notion de structure causale : elle définit à partir d'arguments opérationnels une géométrie des événements où les seules dépendances causales possibles sont les ordres « avant » et « après » pour une séparation de type temps entre les événements, ainsi que l'absence d'influence causale ou non-signalisation dans le cas d'une séparation de type espace. Ces types d'influence causale sont encodés dans une structure géométrique appelée espace de Minkowski. Un des premiers débats mettant en cause la compatibilité de la relativité et de la théorie quantique date du célèbre papier d'Einstein, Podolsky et Rosen de 1935 et qui discute le paradoxe portant leurs noms. Ce dernier peut être résumé de manière moderne comme suit : une paire de photons est produite de telle façon que le spin total vaut 0, i.e. les photons sont intriqués. Supposons maintenant que les deux photons soient arrivés à des laboratoires avec une séparation de type espace. Alors, si une mesure du spin selon un axe x pour le premier donne $+1$, on peut prédire avec certitude qu'une mesure du spin pour l'autre photon selon le même axe donnera -1. EPR dénomment une propriété prédictible avec certitude « élément de réalité » et lui accordent une existence indépendente de l'acte de la mesure. Étant

donné que les photons doivent vérifier la condition de non-signalisation, la relativité affirme que la mesure effectuée sur le premier photon ne peut affecter l'état du second photon. On entend ici par état d'un système toute représentation des probabilités d'obtenir tel ou tel résultat après mesure de telle ou telle observable sur ledit système. Or la formulation d'avant 1935 du principe d'incertitude de Heisenberg affirmait qu'il est impossible de mesurer deux variables conjuguées telles que le spin selon un axe x et le spin selon un axe orthogonal z à cause de la perturbation irréductible de la propriété mesurable par observation du spin selon x par toute tentative de mesurer le spin selon z. L'existence d'une propriété bien définie de spin selon x avant la mesure n'est donc pas explicitement remise en cause, il s'agit simplement d'une « variable cachée ». Revenons à notre expérience. Puisque l'état du deuxième photon ne peut être perturbé par la mesure effectuée sur le premier, on peut donc simultanément mesurer le spin selon z pour ce deuxième photon, et si l'on obtient +1, alors on est certain qu'une mesure du spin selon z pour le premier photon donnerait -1, i.e. le spin selon z du premier photon est un élément de réalité. Mais alors, le premier photon possède simultanément des valeurs bien définies +1 et -1 pour des variables conjuguées telles que le spin selon x et z, en contradiction avec le principe d'incertitude ! Notons qu'EPR n'accordent le statut de variables cachées qu'aux éléments de réalité, une hypothèse encore plus faible que celle sous-jacente à l'explication « par perturbation » du principe d'incertitude.

Cette tension entre la condition de non-signalisation entre les photons et la structure des corrélations quantiques les unissant est à la base de la compréhension moderne de la théorie quantique. En effet, ce n'est qu'après 1935 et la formulation du fameux paradoxe EPR que la portée conceptuelle du principe d'incertitude (qui portait aussi le nom de principe d'indétermination) devint plus claire, poussant Bohr à hisser son principe de complémentarité du statut de simple impossibilité physique de mesurer simultanément des variables conjuguées à une position épistémologique où la définition d'une propriété est confondue avec la production d'un résultat par un appareil de mesure. Durant de nombreuses années, le choix entre l'incomplétude de la théorie quantique, au sens qu'une théorie plus fondamentale à variables locales cachées existe, et l'abandon de toute existence objective des propriétés non mesurées était d'ordre philosophique. Ce n'est qu'en 1967 que les bases d'une vérification scientifique de la validité de l'une ou l'autre option ont été jetées par Bell via la fameuse inégalité portant son nom. L'analyse de cette inégalité et de ses implications conceptuelles constitue le point de départ de cette thèse.

Chapitre 1

Le scenario imaginé par Bell, dont nous analysons une version moderne dans ce premier chapitre, est le même que celui du paradoxe EPR. En formalisant la notion de variable cachée locale, il montre que si le monde est décrit par de telles variables, la moyenne des résultats d'une certaine combinaison d'observables vérifie toujours une inégalité simple qu'il a introduite. Or la théorie quantique prévoit une violation de cette inégalité, phénomène confirmé par les expériences d'Aspect et d'autres durant les années 1980. Il n'existe donc pas de théorie à variables cachées locales qui compléterait la théorie quantique : l'indétermination des propriétés non mesurées est un fait scientifique dont il faudra dorénavant nous accomoder.

Durant cette même période, les premiers protocoles d'information quantique allaient voir le jour, à commencer par le protocole de cryptographie quantique introduit par Bennett et Brassard en 1984. Ce dernier prévoit la possibilité théorique d'une distribution parfaitement secrète d'une clé cryptographique en se basant précisément sur les corrélations quantiques de type EPR pour détecter toute tentative d'espionnage. Suivront d'autres utilisations astucieuses de ce type de corrélations telles que la téléportation des états quantiques, le codage super-dense, etc., ce qui imposa les corrélations de type EPR comme une ressource informationnelle non-locale et non comme une difficulté conceptuelle de la théorie quantique. Restait à identifier précisément à quel type de ressource on avait affaire. Les états quantiques utilisés par EPR et Bell étaient intriqués, mais des états intriqués ne violant pas l'inégalité de Bell et donc simulables par des variables cachées locales ont été rapidement identifiés.

Le domaine de l'information quantique a récemment produit le cadre conceptuel adéquat pour mieux cerner et analyser le ou les types de ressources mises en jeu, à savoir imposer des contraintes opérationnelles sur les partenaires d'un « jeu » dont l'objectif est d'atteindre avec la meilleure probabilité possible une relation donnée entre les résultats de mesures conditionnés par des choix d'appareils de mesures. L'intrication n'est alors plus définie comme la ressource que possède tout état pur non-séparable (dans la représentation par ket) mais plutôt comme la ressource que des partenaires avec une séparation de type espace ne peuvent produire à partir d'états séparables grâce à des opérations locales et la communication de bits classiques. La non-localité est alors définie comme la ressource que ces mêmes partenaires ne peuvent produire à partir d'état séparables en ne partageant qu'une source de bits aléatoires classiques, toute communication leur étant interdite une fois le jeu commencé. L'utilisation de ces ressources quantiques se traduit toujours par une probabilité de gain du jeu plus élevée,

et plusieurs résultats ont été obtenus sur la structure de l'intrication et de la non-localité en utilisant ces méthodes, l'un des plus remarquables étant que tout état intriqué est non-local au sens opérationnel ci-dessus. La maturité des télécommunications classiques a naturellement placé le premier paradigme au centre du débat, et la compréhension complète de la structure des états intriqués est l'un des problèmes ouverts les plus importants de la théorie quantique à l'heure actuelle.

À nouveau, l'étude des liens qu'entretiennent les notions de corrélation quantique et de contrainte causale ont à nouveau permis une avancée conceptuelle importante. En effet, s'il est avéré que les corrélations quantiques respectent la condition de non-signalisation dans le scénario EPR, il est naturel de se demander s'il s'agit-il des corrélations les plus fortes à le faire. Autrement dit, peut-on déduire la borne quantique dans l'inégalité de Bell, dite borne de Tsirelson, à partir du respect de la condition de non-signalisation ? Cette question, posée par Popescu et Rohrlich, a reçu une réponse négative. L'introduction des boîtes Popescu-Rohrolich (PR) a fourni un exemple concret de distributions de probabilités (et donc d'états au sens opérationnel évoqué précédemment) généralisant le scénario EPR et respectant la contrainte de non-signalisation, mais qui violent de manière maximale l'inégalité de Bell. L'absence de lien causal entre les particules du scénario EPR, encodée grâce à la notion géométrique de séparation de type espace, est formulée pour les deux parties causalement indépendentes de la boîte PR de manière algébrique. Les boîtes PR constituent une des premières tentatives de reconstructions, même partielles, de la théorie quantique à partir de principes informationnels clairs. Si le principe de non-signalisation n'a pas permis pas de déduire la borne de Tsirelson, et encore moins la structure des corrélations quantiques, d'autres principes ont été formulés qui y parviennent partiellement, le plus abouti à cette date étant le principe de causalité informationnelle que nous détaillons dans ce premier chapitre.

La discussion qui précède a jonglé entre les définitions géométrique et algébrique d'absence d'influence causale entre deux variables et a considéré la structure des corrélations quantiques obéissant à une telle contrainte. La géométrie de l'espace de Minkowski étant bien plus riche, cette analyse n'est probablement pas suffisante. Le formalisme de la théorie algébrique des champs a été construit avec l'idée d'incorporer dans la structure algébrique même des observables quantiques la notion relativiste de localité. Nous détaillons ce formalisme dans le premier chapitre, et notamment comment le théorème de Reeh-Schlieder, au travers des contraintes dites de micro-causalité, impose que tous les états à énergie finie atteignent la violation maximale autorisée par la théorie quantique d'un avatar des inégalités de Bell, les systèmes considérés étant alors des régions d'espace à un instant

fixe.

Chapitre 2

L'incorporation directe du principe de localité dans la théorie quantique mène inévitablement à des états décrivant les régions d'espace fortement corrélées. Le second chapitre s'ouvre sur la discussion d'une approche alternative qui consiste en une inclusion progressive des contraintes d'invariance de Poincaré au scénario EPR.

L'expérience de Bell considère le référentiel des observateurs, dénommés de manière standard Alice et Bob, comme fixe (le mouvement des particules arrivant dans les laboratoires séparés de type espace n'est alors pas important), tandis que le scénario relativiste considère que le référentiel de ces observateurs est lui aussi en mouvement. Par exemple, on peut considérer la situation où du point de vue d'un troisième observateur noté O supposé fixe, Alice et Bob se déplacent selon un axe z tandis que les particules se déplacent en sens opposé selon un axe x avec spin total 0.

Des mesures de spin par Alice et Bob selon l'axe y seront parfaitement anticorrélées indépendamment de leur vitesse selon z et de celle des particules selon x car il n'y a aucun mouvement relativiste selon la direction y. Par contre, si Alice et Bob décident d'effectuer des mesures selon l'axe z, le déplacement selon à la fois x et z de la particule dans leur référentiel commun implique que les résultats de mesure seront affectés par cette vitesse (qui correspond à l'opposé de la vitesse de déplacement commune d'Alice et Bob selon z pour O). En effet, en régime relativiste, la partie « spin » de l'état des particules subit sous l'effet des rotations dites de Wigner une transformation qui dépend de la partie « moment ». Ainsi, le déplacement selon l'axe z de la particule dans le référentiel commun d'Alice et Bob affecte les résultats des mesures de spin selon ce même axe z. Dans le régime non-relativiste, les transformées de Galilée ne couplent pas le spin et le moment, et donc de telles considérations n'entrent pas en jeu.

Que signifie concrètement le terme « affecter » ? Il suffit de décrire ce que « voient » Alice et Bob, i.e. d'expliciter l'état des particules dans leur référentiel. Il faut donc appliquer à l'état des particules dans le référentiel de O la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel commun à Alice et Bob à celui de O. Les calculs montrent que l'état ainsi obtenu produit des résultats de mesures de spin selon z qui ne seront pas parfaitement anticorrélés, mais qu'une rotation spécifique selon y de l'appareil de mesure donnera des résultats parfaitement anticorrélés. Reste à définir un objet mathématique modélisant de manière covariante les résultats de ces

mesures de spin. Le chapitre 2 discute quelques tentatives dans la littérature de définir une observable spin covariante ainsi que l'impossibilité d'une formulation covariante de la notion d'entropie d'intrication. Il s'avère donc que l'on ne peut donner un sens covariant à la notion de corrélation quantique.

Dans le cas d'observateurs non inertiels, des difficultés apparaissent à cause de la dépendence du nombre de particules en l'accélération des observateurs : c'est l'effet Unruh. Par ailleurs, la manipulation de l'intrication par des observateurs locaux est problématique étant donné le caractère global des modes de tout champ quantique. Ces difficultés peuvent être partiellement dépassées grâce à l'utilisation des détecteurs de type Unruh-DeWitt, mais les fortes corrélations évoquées précedemment entre degrés de liberté de type espace pour tout état d'énergie finie impliquent une divergence de toutes les mesures d'intrication, et notamment celle de l'entropie d'intrication. Comme tous les systèmes, y compris ceux de basse énergie, sont en dernière instance décrits par des champs quantiques, cette divergence entre en contradiction avec les résultats finis obtenus pour toute mesure d'intrication en théorie quantique des systèmes finis.

Une première contribution de cette thèse est de fournir une méthode de régularisation de cette divergence à basse énergie qui, contrairement à certains travaux récents que nous évoquerons, est indépendente du modèle de détecteur couplé au champ et valable pour tous les états à énergie finie. L'idée générale de cette méthode est de montrer la convergence à basse énergie entre le schéma standard de localisation, i.e. la méthode standard d'association des degrés de libertés du champ à des régions avec séparation de type espace, et le schéma de localisation dit de Newton-Wigner. Le vide étant séparable pour ce dernier à toutes les échelles d'énergie, nous obtenons des résultats finis pour l'entropie d'intrication en régime de basse énergie pour tous les états à énergie finie sans nécessité d'introduire une coupure ultra-violette. Le formalisme ainsi déduit est naturellement équivalent à celui de la théorie quantique des systèmes finis, d'où une transition contrôlée entre la description de l'intrication en théorie quantique des champs et celle de la théorie quantique des systèmes finis. Notons que là encore, les liens forts qui existent entre la notion de corrélation quantique et de structure causale se manifestent. En effet, la séparabilité du vide pour le choix du schéma de localisation de Newton-Wigner est obtenue au prix d'une dynamique non-locale, et donc d'une violation des contraintes de causalité encodées dans la géométrie de l'espace de Minkowski. Tenter de préserver la causalité revient à choisir le schéma de localisation standard, et donc à admettre la divergence des mesures de corrélations. La régularisation de l'entropie d'intrication grâce à la granularité des appareils des mesures fournit un autre éclairage sur ces liens : si l'on se situe à une échelle d'énergie où les éventuelles violations de

la structure relativiste de la causalité sont indétectables, alors les mesures d'intrication fournissent des résultats finis.

L'étape suivante naturelle est de considérer ce qui se passe lorsque l'on tente de régulariser la divergence de l'entropie d'intrication en régime de haute énergie. La dernière section de ce chapitre rappelle partiellement les travaux de Jacobson à propos de la relation « thermodynamique » entre une régularisation à haute énergie de l'entropie d'intrication (avec la condition que la loi de proportionalité de l'entropie et de l'aire ainsi que la relation de Clausius tiennent) et la dynamique de l'espace-temps telle que décrite par l'équation d'Einstein de la relativité générale, autre indice des liens forts qui existent entre la structure des corrélations quantiques et les modèles relativistes de structures causales.

Chapitre 3

Nous avons jusqu'à maintenant passé en revue les difficultés qui peuvent se poser pour la détection et la mesure de l'intrication lorsque l'on incorpore de façon directe ou plus progressive des contraintes causales sous forme de contrainte géométrique, i.e. d'invariance relativiste. Le dernier chapitre de cette thèse s'intéresse à la possibilité de structurer dans un cadre algébrique cohérent les relations causales autres que celle de non-signalisation, approche récemment introduite par Oreshkov & *al.* et qui tente de contourner les difficultés que pose l'ajout de contraintes géométriques à la théorie quantique. La première tentative d'incorporer de manière algébrique des liens causaux complexes au sein de la théorie quantique date des travaux de Deutsch sur les courbes de type temps fermées. Cependant, la dynamique non-unitaire de ces modèles pose problème car elle ouvre la voie à des communications à vitesse supra-lumineuse. Le cadre formel introduit par Oreshkov & *al.* est particulièrement intéressant à cet égard car il préserve la structure linéaire de la théorie quantique. Relaxant la condition d'existence d'une structure causale globale, ce formalisme reproduit toutes les corrélations multipartites que peuvent posséder des partenaires dont les opérations locales sont régies par la théorie quantique. De manière analogue au paradoxe EPR, il est possible de définir un « jeu causal » entre deux partenaires Alice et Bob pour lequel la probabilité de succès possède une borne spécifique si tous les événements locaux tels que le choix d'un appareil de mesure par Alice ou le résultat d'une mesure chez Bob sont ordonnés selon des ordres causaux bien définis ou une mixture de tels ordres causaux. Ce cadre formel prédit l'existence de corrélations qui violent une « inégalité causale », ce qui implique l'impossibilité d'identifier les événements locaux à une série d'événements

causalement ordonnés. Assumer la validité de la théorie quantique à un niveau local n'implique donc pas l'existence d'une structure causale globale de type relativiste, i.e. un événement n'est pas forcément « avant », « après » ou sans lien causal avec un autre, mais peut être dans une « superposition » d'ordres causaux. Au contraire, si l'on assume que les opérations locales sont classiques, alors il est possible d'organiser les événements locaux bipartites au sein d'une structure causale globale.

Procédant par analogie avec les approches informationnelles qui tentent de caractériser la structure des corrélations quantiques vérifiant la condition de non-signalisation, la seconde contribution de cette thèse est de placer les corrélations sans ordre causal défini au sein d'un cadre probabiliste plus général afin de mieux comprendre les liens entre certaines contraintes sur l'ordre des opérations locales et la possibilité d'émergence de telles corrélations, ainsi que tenter de reconstruire à partir de principes clairs les bornes classiques et quantiques associées au jeu causal. Les spécificités du jeu causal font apparaître l'extension du principe de causalité informationnelle comme un candidat naturel à une telle reconstruction. La performance des partenaires dans le jeu telle que mesurée par l'information mutuelle servira d'outil de base à cette approche. Ainsi, une classe de jeux pour lesquels les corrélations causalement ordonnées performent de manière bornée est introduite, et la borne quantique associée au jeu causal initial est déduite d'une telle condition de performance bornée, démontrant ainsi qu'une formulation entropique des contraintes de signalisation imposées par les structures causales ordonnées impose la même limite que la théorie quantique à la probabilité de succès dans le jeu causal. Nous discutons enfin la possibilité de définir d'autres mesures de performance. L'introduction d'une telle mesure alternative, basée sur la 'corrélation maximale de Hirschfeld-Gebelein-Rényi', s'avère en effet plus adaptée aux jeux causaux lorsque l'on tente de discriminer les corrélations classiques et quantiques des corrélations supra-quantiques.

Perspectives

L'exploration dans cette thèse des liens forts qui existent entre les notions de corrélation quantique et de structure causale nous amène à poser des questions plus générales. La granularité des appareils de mesure exploitée lors de la régularisation de l'entropie d'intrication correspondait à une opération d'ordre géométrique car elle se base sur une équivalence à basse énergie entre différentes façons d'affecter les degrés de libertés du champ à des régions d'espace à un instant fixe. Plus généralement, la théorie algébrique des champs est un encodage dans l'algèbre des observables quantiques de la

structure géométrique de l'espace-temps. Cette approche est à la base de plusieurs tentatives d'unification de la théorie quantique et de la relativité générale : l'unification est cherchée au travers d'une « géométrisation » plus importante de la théorie quantique. Nous avons, au fur et à mesure de cette thèse, défendu un point de vue complémentaire : il faut tenter de rendre plus algébrique notre compréhension des structures causales, en commençant par les relations simples de type « avant », « après » et la condition de non-signalisation. Le cadre formel discuté dans le dernier chapitre, lui-même basé sur des suggestions récentes de Hardy, est une première étape.

Cependant, beaucoup de questions demeurent : à quoi correspondent les corrélations quantiques sans ordre causal défini ? Quelles voies explorer pour espérer une implémentation expérimentale de la violation de l'inégalité causale ? Existe-t-il une analogie plus ou moins formelle entre cette ressource et l'intrication ? Des réponses à ces questions permettraient de mieux comprendre la nature des corrélations en jeu, et ainsi d'approfondir encore davantage notre compréhension des liens entretenus par les notions de corrélation quantique et de structure causale.