



**HAL**  
open science

# Éléments finis isogéométriques massifs coque sans verrouillage pour des simulations en mécanique non linéaire des solides

Robin Bouclier

► **To cite this version:**

Robin Bouclier. Éléments finis isogéométriques massifs coque sans verrouillage pour des simulations en mécanique non linéaire des solides. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2014. Français. NNT : 2014ISAL0090 . tel-01149917

**HAL Id: tel-01149917**

**<https://theses.hal.science/tel-01149917>**

Submitted on 7 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

# ÉLÉMENTS FINIS ISOGÉOMÉTRIQUES MASSIFS COQUE SANS VERROUILLAGE POUR DES SIMULATIONS EN MÉCANIQUE NON LINÉAIRE DES SOLIDES

Présentée devant

**l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

**le GRADE DE DOCTEUR**

École doctorale :

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

par

**Robin BOUCLIER**

**Agrégé de mécanique**

Thèse soutenue le 30 septembre 2014 devant la Commission d'examen

### Jury

BATOZ JEAN-LOUIS	Professeur	Président
DE BORST RENÉ	Professeur	Rapporteur
ABED-MERAIM FARID	Professeur	Rapporteur
BISCHOFF MANFRED	Professeur	Examinateur
COHELIN BRUNO	Professeur	Examinateur
LEGAY ANTOINE	Maître de Conférences	Examinateur
COMBESURE ALAIN	Professeur	Directeur de thèse
ELGUEDJ THOMAS	Maître de Conférences	Examinateur

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)



*INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015*

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 65 55 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 <a href="mailto:e2m2@univ-lyon1.fr">e2m2@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a>  Sec : Samia VUILLERMOZ Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>  Sec : Renée EL MELHEM	<b>Mme Sylvie CALABRETTO</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://mega.ec-lyon.fr">http://mega.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/">http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/</a>  Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



À l'heure des remerciements, il s'agit de n'oublier personne tant cette aventure a été formidable et enrichissante sur le plan aussi bien scientifique qu'humain.

Mes premières pensées vont à mes encadrants Alain Combescure et Thomas Elguedj. Je ne les remercierai jamais assez de m'avoir mis dans des conditions idéales pour traiter d'un sujet aussi passionnant. Leur expérience, leur rigueur scientifique, leurs conseils avisés mais aussi leur disponibilité, leur aide permanente, leur sincérité sont autant d'éléments qui m'ont permis de mener à bien et agréablement ce projet. Au travers de leurs qualités, ils m'ont transmis leur passion pour la recherche.

Je souhaite aussi remercier Thomas J. R. Hughes pour m'avoir accueilli au laboratoire ICES à Austin (USA) et m'avoir fait découvrir pendant quelques mois son groupe de travail, avec les grands spécialistes de l'analyse isogéométrique.

Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance à l'ensemble des membres du jury pour avoir eu la gentillesse de m'accorder un peu de leur temps : Jean-Louis Batoz qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ; René de Borst et Farid Abed-Meraim pour leur relecture attentive et minutieuse, et leurs commentaires constructifs ; Manfred Bischoff, pour son œil d'examineur éclairé ; enfin, Bruno Cochelin et Antoine Legay, pour avoir apporté une dimension plus industrielle et une vision plus pratique de mon travail lors de la soutenance de thèse.

Ensuite, je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues et amis du LaMCoS qui, plus ou moins expressifs, plus ou moins festifs, plus ou moins sportifs, mais tous admirables humainement, ont instauré un climat de bonne ambiance au laboratoire. Une pensée particulière pour Clém et Tyty, que j'ai suivis depuis Cachan et sur qui j'ai toujours pu compter. Je pense aussi à Pierrot, Momo, Dav, père Alex, Coco, Did, Yaya, Dam, Nico, Guillermo, K-Koffi, et tous les autres... Ce fut d'ailleurs avec un plaisir immense que je me suis vu recevoir de ces personnes le titre de "docteur marto". Un petit clin d'œil aussi à Aline, Anne et Thibault pour leurs conseils précieux avant la soutenance, ainsi qu'à Isabelle pour son efficacité. De même, je n'oublie pas mes rencontres outre-atlantiques : Martina, Omar, Matthias, Katheryn, Ramsey, Avi et Dominik sans qui, mon séjour à Austin n'aurait pas eu la même saveur. Je n'oublie pas non plus mes amis de Cachan : Cricri, Adri (l'Ardéchois) et Zinc pour avoir toujours été à mes côtés depuis ma scolarité à l'ENS.

Enfin, je suis fier et ému de dédier ce mémoire à ma famille et à mes amis de longue date, plus ou moins éloignés de ce monde de la recherche, qui m'ont fait l'immense joie de leur présence et de leur soutien le jour de la soutenance comme durant toute mon enfance. À mes parents, je suis infiniment reconnaissant pour avoir toujours cru en moi, et m'avoir encouragé et guidé au cours des différentes épreuves de la vie. À mes grands-parents et à ma marraine, je témoigne toute ma gratitude pour leur dévouement et leur soutien inconditionnel. À mon frère et à mes amis de la Yaute : Racaillera frère, le Fabrizio du ski de rando, la Clelia du tour du Mont-Blanc, les Max, Mat, et Flo du scénar scénar, les Sab, Alex, Yannou et Francinou des Chaussettes Rouges, et le Max buddy de toujours, un grand merci pour tous ces petits moments plaisants, forts et riches en émotion passés auprès de vous, et qui m'ont permis de me construire et de me porter jusqu'ici. Et je ne saurais terminer sans une douce pensée pour ma Sopinette chérie, dont la tendresse, la joie de vivre, et le sourire embellissent ma vie de tous les jours.



# Résumé

Avec l'arrivée de l'Analyse IsoGéométrique (IGA), le calcul de coque est devenu possible en utilisant la géométrie exacte pour des maillages grossiers. Pour cela, les polynômes de Lagrange sont remplacés pour l'interpolation par des fonctions NURBS (technologie la plus courante en conception assistée par ordinateur). De plus, ces fonctions possèdent une continuité supérieure ce qui offre une meilleure précision qu'un calcul éléments finis à nombre de degrés de liberté égal. L'IGA a déjà été développée pour les formulations coques. Elle n'a été cependant que très peu étudiée pour les modèles massifs coque. Pourtant, cette deuxième approche est très utilisée par l'ingénieur car elle permet de calculer des structures minces à l'aide d'éléments continus 3D, c'est-à-dire en faisant intervenir uniquement des inconnues en déplacements.

La difficulté en calcul de coque est de faire face au verrouillage qui conduit à une forte dégradation de la convergence de la solution. Le cadre NURBS ne permet pas lui-même de résoudre ce problème. La meilleure efficacité de l'approximation NURBS ne peut donc être atteinte sans le développement de techniques particulières pour supprimer le verrouillage. C'est le but de cette thèse dans le cadre des éléments massifs coque.

Le premier travail a consisté, sur un problème de poutre courbe, à étendre les méthodes sans verrouillage habituelles au contexte NURBS. Deux nouvelles stratégies ont alors été développées pour les NURBS : la première est basée sur une technique d'intégration réduite tandis que la seconde fait appel à une projection  $\bar{B}$ . Le formalisme général des méthodes  $\bar{B}$  semblant plus adapté, c'est celui-ci que nous avons développé ensuite pour les éléments massifs coque. Plus précisément, nous avons mis en place une formulation mixte de laquelle nous avons pu dériver la projection  $\bar{B}$  équivalente. Cette démarche constitue d'un point de vue théorique le résultat principal du travail : une méthode systématique pour construire une projection  $\bar{B}$  consistante est de passer par une formulation mixte.

D'un point de vue mise en œuvre, l'idée principale pour traiter le verrouillage des éléments massifs coque a été de modifier l'interpolation de la moyenne dans l'épaisseur de la coque des composantes du tenseur des contraintes. Un contrôle de hourglass a aussi été ajouté pour stabiliser l'élément dans certaines situations. L'élément obtenu est de bonne qualité pour une interpolation de bas degrés et des maillages grossiers : la version quadratique semble plus précise que des éléments standards NURBS de degré 4. La méthode proposée conduit à une matrice de rigidité globale de petite taille mais pleine. Ce problème est inhérent aux NURBS. Il a pu être limité ici en utilisant une procédure de type moindres carrés locaux pour approcher la projection  $\bar{B}$ .

Finalement, l'élément mixte a été étendu avec succès en non linéaire géométrique ce qui témoigne du potentiel de la méthode pour mener des simulations complexes.

**KEYWORDS:** élément massif coque, analyse isogéométrique, verrouillage, méthode mixte, projection  $\bar{B}$ , intégration réduite, contrôle de hourglass, flambage, non linéaire.





# Abstract

With the introduction of IsoGeometric Analysis (IGA), the calculation of shell has become possible using the exact geometry for coarse meshes. In order to that, Lagrange polynomials are replaced by NURBS functions, the most commonly used technology in Computer-Aided Design, to perform the analysis. In addition, NURBS functions have a higher order of continuity, which leads to higher per-degree-of-freedom accuracy of the shell solution than with classical Finite Elements Analysis (FEA). IGA has now been widely applied in shell formulations. Nevertheless, it has still rarely been studied in the context of solid-shell models. This second shell approach is, however, very useful for engineers, since it enables to calculate thin structures using 3D solid elements, i.e. involving only displacements as degrees of freedom.

The difficulty in shell analysis is to deal with locking which highly deteriorates the convergence of the solution. The NURBS framework does not enable to solve the problem directly. Then, to really benefit from NURBS in shells, specific strategies need to be implemented to answer the locking issue. This is the goal of the thesis in the context of solid-shell elements.

The first work has consisted, on a curved beam problem, in extending the locking-free methods usually encountered in FEA to the NURBS context. From this study, two new strategies for NURBS have emerged : the first one is based on a selective reduced integration technique whereas the second one makes use of a  $\bar{B}$  projection. The global formalism offered by the  $\bar{B}$  method appearing more suitable for NURBS, it has then been investigated for solid-shell elements. More precisely, a mixed formulation has first been elaborated from which, it has been possible to derive the equivalent  $\bar{B}$  projection. From a theoretical point of view, this strategy constitutes the most important result of this work : a systematic method to construct a consistent  $\bar{B}$  projection is to first establish a mixed formulation.

With regards to the implementation, the main idea to treat locking of the solid-shell elements has been to modify the average of the strain and stress components across the thickness of the shell. Hourglass control has also been added to stabilize the element in particular situations. The resulting element is of good quality for low-order approximations and coarse meshes : the quadratic version seems to be more accurate than basic NURBS elements of order 4. The proposed method leads to a global stiffness matrix of small size but full. This problem is inherent in NURBS. It has been limited here by using a local least squares procedure to approach the  $\bar{B}$  projection.

Finally, the mixed element has been successfully extended to geometric non-linearity which reflects the ability of the methodology to be used in complex simulations.

**KEYWORDS:** solid-shell element, isogeometric analysis, locking, mixed method,  $\bar{B}$  projection, reduced integration, hourglass control, buckling, nonlinear.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 L'analyse isogéométrique pour le calcul de coque</b>	<b>5</b>
1.1 L'analyse isogéométrique . . . . .	6
1.1.1 Principe . . . . .	6
1.1.2 Intérêt pour les coques . . . . .	7
1.1.3 Mise en place . . . . .	8
1.2 Le calcul de coque . . . . .	15
1.2.1 Approche modèle de structure . . . . .	16
1.2.2 Approche modèle massif coque . . . . .	22
1.2.3 Problème : traitement du verrouillage . . . . .	24
<b>2 Formulations NURBS sans verrouillage pour la poutre épaisse courbe</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	30
2.2 Mise en évidence du verrouillage . . . . .	30
2.2.1 Poutre courbe de Timoshenko . . . . .	30
2.2.2 Formulation éléments finis NURBS . . . . .	32
2.2.3 Illustration numérique du verrouillage . . . . .	33
2.2.4 Retour sur l'origine du verrouillage . . . . .	36
2.3 Construction d'un élément basé sur une technique d'intégration réduite . .	39
2.3.1 Difficulté de l'approche avec les fonctions NURBS . . . . .	39
2.3.2 Développement d'une stratégie pour des NURBS quadratiques . .	40
2.3.3 Contrôle de hourglass . . . . .	42
2.4 Construction d'un élément basé sur une méthode de projection $\bar{B}$ . . . . .	45
2.4.1 Principe et formulation $\bar{B}$ . . . . .	45
2.4.2 Construction : formulation discrète $\bar{B}$ . . . . .	47
2.5 Construction d'un élément mixte : équivalence avec l'élément $\bar{B}$ . . . . .	50
2.6 Application de la méthode DSG [ECH 10] à l'élément de poutre courbe .	52

2.7	Résultats numériques : comparaison entre les différentes méthodes . . . .	54
2.7.1	Résultats d'une poutre courbe de Timoshenko . . . . .	54
2.7.2	Conclusion des résultats obtenus . . . . .	56
2.7.3	Complément : résultats d'une poutre console avec un angle . . . .	58
2.8	Conclusion résumée . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	L'élément NURBS massif coque standard . . . . .	62
3.2.1	Problème coque de référence . . . . .	62
3.2.2	Formulation éléments finis NURBS . . . . .	63
3.3	Amélioration : construction d'un élément mixte . . . . .	68
3.3.1	Principe de la stratégie . . . . .	68
3.3.2	Formulation : version continue . . . . .	69
3.3.3	Formulation : version discrète . . . . .	70
3.4	Équivalence avec un élément $\bar{B}$ . . . . .	73
3.4.1	Formulation $\bar{B}$ de l'élément . . . . .	73
3.4.2	Comparaison avec une stratégie $\bar{B}$ habituelle . . . . .	75
3.4.3	Réduction du coût de calcul : formulation " $\bar{B}$ locale" . . . . .	76
3.5	Stabilisation de l'élément . . . . .	79
3.5.1	Démarche envisagée . . . . .	79
3.5.2	Identification des modes de hourglass . . . . .	80
3.5.3	Contrôle des modes de hourglass . . . . .	84
3.6	Résultats numériques . . . . .	85
3.6.1	Mise en place . . . . .	86
3.6.2	Application du "shell obstacle course" . . . . .	86
3.6.3	Étude de deux cas tests plus récents ([CHA 98, BAT 00]) . . . . .	98
3.6.4	Contrôle de hourglass : le cylindre pincé avec bords libres . . . . .	105
3.7	Conclusion résumée . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Extension en non linéaire géométrique</b>	<b>109</b>
4.1	Introduction . . . . .	110
4.2	Équations d'équilibre . . . . .	110
4.2.1	Version continue . . . . .	110
4.2.2	Version discrète . . . . .	112
4.3	Matrice tangente : stabilité de l'équilibre . . . . .	113
4.3.1	Version continue . . . . .	113
4.3.2	Version discrète . . . . .	115
4.3.3	Cas du flambage linéaire . . . . .	116
4.4	Résolution de l'équilibre . . . . .	117
4.5	Contrôle des modes de hourglass . . . . .	120
4.5.1	Stabilisation de l'équilibre . . . . .	120
4.5.2	Stabilisation de la matrice tangente . . . . .	121

4.6	Résultats numériques . . . . .	122
4.6.1	Calculs du flambage linéaire de structures . . . . .	123
4.6.2	Calculs en non linéaire géométrique . . . . .	126
4.7	Conclusion résumée . . . . .	138
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>139</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>147</b>
	<b>Annexe C</b>	<b>151</b>
	<b>Annexe D</b>	<b>155</b>
	<b>Annexe E</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>



# Table des figures

1.1	Principe de IGA vs FEA : inversion de la "flèche" isoparamétrique. . . . .	7
1.2	Base de fonctions quadratiques pour un vecteur de nœuds ouvert non-uniforme $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ . . . . .	10
1.3	Exemple de courbe B-Spline quadratique par morceaux. . . . .	11
1.4	Les différents espaces pour le calcul des éléments NURBS. . . . .	14
1.5	Comparaison du raffinement classique $p$ avec le nouveau raffinement $k$ . . . . .	15
1.6	Description de la géométrie et cinématique d'un modèle de structure coque. . . . .	17
1.7	Distribution de la contrainte de cisaillement transversal. . . . .	19
1.8	Comparaison des discrétisations du modèle massif coque avec le modèle de structure coque. . . . .	23
2.1	Description du problème de référence poutre. . . . .	31
2.2	Poutre courbe de Timoshenko avec moment reparté de façon sinusoïdale le long de la poutre. . . . .	34
2.3	Tracé de l'erreur en norme $L^2$ sur $U_{G_3}^h$ en fonction du nombre d'éléments du maillage. . . . .	35
2.4	Influence de l'éclatement de la poutre sur la solution. . . . .	36
2.5	Poutre droite en flexion cisaillement discrétisée avec un élément linéaire. . . . .	37
2.6	Fonctions de forme B-Spline locales pour chaque cas d'élément pour l'approximation quadratique. . . . .	40
2.7	Forme du mode de hourglass dans les éléments quadratiques $C^1/C^0$ et $C^1/C^1$ dû à une intégration sélective avec un unique point de Gauss (en $\xi = 0$ ). . . . .	41
2.8	Forme du mode de hourglass pour un maillage quadratique composé de 5 éléments avec continuité $C^1$ aux nœuds intérieurs. . . . .	42
2.9	La règle d'intégration réduite basée sur les points de Gauss pour des NURBS quadratiques. . . . .	43
2.10	Fonctions de base B-Spline $Q_p/Q_{p-1}$ pour un patch composé de deux éléments quadratiques. . . . .	48
2.11	Convergence des solutions NURBS quadratiques des techniques proposées pour la poutre courbe mince et épaisse. . . . .	55
2.12	Influence de l'éclatement de la poutre sur les solutions NURBS quadratiques des techniques proposées. . . . .	56



2.13	Influence de l'élancement de la poutre sur les solutions NURBS $\bar{B}$ de plus haut ordre. . . . .	56
2.14	Description du problème de la poutre console avec un angle. . . . .	58
2.15	Convergence des solutions NURBS quadratiques des techniques proposées pour la poutre console mince. . . . .	58
3.1	Description du problème de référence coque. . . . .	63
3.2	Principe d'extraction de la membrane sur la flexion : moyenne de la déformation dans l'épaisseur. . . . .	69
3.3	Mise en œuvre avec la moyenne dans l'épaisseur. . . . .	73
3.4	Problème plaque pour visualiser les modes de hourglass. . . . .	81
3.5	Configuration déformée des modes de hourglass pour la plaque. . . . .	82
3.6	Contrôle de hourglass dans l'élément milieu : on cherche à décrire les modes dans le domaine parent associé. . . . .	83
3.7	Toit de Scordelis-Lo. . . . .	87
3.8	Hémisphère pincé. . . . .	88
3.9	Cylindre pincé. . . . .	89
3.10	Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque standard. . . . .	91
3.11	Comparaison des solutions standards modèle massif coque et modèle de structure pour le cylindre pincé. . . . .	92
3.12	Configurations initiales (maillages) et déformées pour l'élément "Mixte 2" sur le "shell obstacle course". . . . .	93
3.13	Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque mixte (ou de manière équivalente par l'élément $\bar{B}$ ). . . . .	94
3.14	Structure des matrices de rigidité globales associées aux éléments. . . . .	95
3.15	Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque $\bar{B}$ local. . . . .	96
3.16	Comparaison des solutions des éléments massifs coque développés dans ce travail avec celle de la stratégie ANS de [CAS 14]. . . . .	97
3.17	Paraboloïde hyperbolique partiellement encastré ( $L/h = 100$ ). . . . .	100
3.18	Convergence du déplacement pour le problème du paraboloïde hyperbolique. . . . .	101
3.19	Convergence en terme d'énergie de déformation pour le problème du paraboloïde hyperbolique. . . . .	103
3.20	Convergence en terme d'énergie de déformation pour le problème de la calotte hémisphérique encastrée. . . . .	104
3.21	Cylindre avec bords libres : description et données du problème. . . . .	105
3.22	Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_z}$ ) pour le cylinder pincé avec bords libres. . . . .	106
3.23	Effet du contrôle de hourglass pour la solution en déplacement du cylindre pincé avec bords libres. . . . .	107

4.1	Flambage : les trois configurations. . . . .	114
4.2	Flambage d'une poutre droite encastree d'un cote et soumise a de la compression de l'autre. . . . .	124
4.3	Convergence de la charge critique de flambage $P_c$ pour la poutre en compression. . . . .	124
4.4	Flambage d'un cylindre infini comprimé par une pression externe. . . . .	125
4.5	Convergence de la charge critique de flambage $P_c$ pour le cylindre comprimé. . . . .	125
4.6	Flambage de l'hémisphère encastree comprimé par une pression externe. . . . .	126
4.7	Convergence de la charge critique de flambage $P_c$ pour l'hémisphère encastree comprimé. . . . .	127
4.8	Hémisphère pincé avec un trou : description et données du problème. . . . .	128
4.9	Configuration déformée (amplitude 1, $ U_{M_x} $ ) pour l'hémisphère pincé avec un trou en fin de calcul non linéaire géométrique avec "Mixte 2 hg" et $8 \times 8$ éléments. . . . .	129
4.10	Courbes chargement-déplacement $F/F_{max} = f(u)$ pour l'hémisphère pincé avec un trou en non linéaire géométrique. . . . .	130
4.11	Comparaison des solutions "Mixte 2 hg" avec les solutions "SLSBEZ 3" de [HOS 13] sur l'hémisphère pincé avec un trou. . . . .	130
4.12	Cylindre avec bords libres étiré : description et données du problème. . . . .	131
4.13	Configurations déformées (amplitude 1, $U_{M_z}$ ) pour le cylindre étiré au cours du calcul non linéaire géométrique avec "Mixte 2 hg" et $8 \times 8$ éléments. . . . .	132
4.14	Courbes chargement-déplacement $F/F_{max} = f(U_{A_z})$ , $F/F_{max} = f(-U_{B_x})$ et $F/F_{max} = f(-U_{C_x})$ pour le cylindre étiré (maillage $8 \times 8$ ) en non linéaire géométrique. . . . .	133
4.15	Comparaison des solutions "Mixte 2 hg" avec les solutions "SLSBEZ 3" de [HOS 13] et "SHB8PS 1" de [ABE 09] sur le cylindre étiré. . . . .	133
4.16	Poutre vrillée : description et données du problème. . . . .	135
4.17	Configurations déformées (amplitude 1, $U_{M_y}$ ) au cours du calcul non linéaire géométrique pour la poutre vrillée avec "Mixte 2" et $8 \times 2$ éléments. . . . .	136
4.18	Courbes chargement-déplacement $F/F_{max} = f(U_{A_y})$ , $F/F_{max} = f(-U_{A_x})$ et $F/F_{max} = f(U_{A_z})$ pour la poutre vrillée (maillage $8 \times 2$ ) en non linéaire géométrique. . . . .	137
4.19	Comparaison des solutions "Mixte 2" avec les solutions "SHB8PS 1" de [ABE 09] sur la poutre vrillée. . . . .	137
4.20	Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_x}$ , amplitude 20) pour l'hémisphère avec un trou pincé. . . . .	158
4.21	Convergence du déplacement pour l'hémisphère avec un trou pincé. . . . .	158
4.22	Construction approchée choisie pour l'hélice avec les fonctions NURBS. . . . .	159
4.23	Approximation choisie de la surface hélicoïdale avec les NURBS. . . . .	160
4.24	Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_y}$ ) pour l'élément "Mixte 2" sur la poutre vrillée. . . . .	160

4.25 Convergence du déplacement pour la poutre vrillée. . . . . 161

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison en terme de précision des différentes méthodes supprimant le verrouillage. . . . .	57
3.1	Valeurs propres de la matrice de rigidité globale condensée de l'élément mixte pour le problème plaque. . . . .	81
3.2	Valeurs propres de la matrice de rigidité globale condensée stabilisée de l'élément mixte pour le problème plaque. . . . .	85
3.3	Comparaison des éléments massifs coque développés dans ce travail avec les éléments finis hiérarchiques de [ECH 13] pour le toit de Scordelis-Lo. . . . .	98
4.1	Comparaison pour l'hémisphère pincé avec un trou : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence. . . . .	129
4.2	Comparaison pour le cylindre étiré : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence. . . . .	134
4.3	Caractéristiques du maillage de convergence du problème du cylindre étiré pour l'élément mixte avec intégration de Gauss classique et réduite. . . . .	135
4.4	Comparaison pour la poutre vrillée : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence. . . . .	138
4.5	Valeurs du délacement pour le toit de Scordelis-Lo. . . . .	155
4.6	Valeurs du déplacement pour l'hémisphère pincé. . . . .	155
4.7	Valeurs ( $\times 10^{-5}$ ) du déplacement pour le cylindre pincé. . . . .	155

## Liste des tableaux

---

# Introduction

Le calcul de structures coques n'a cessé de susciter l'intérêt des chercheurs depuis la naissance du calcul en mécanique. Ceci s'explique certainement par l'importante présence des structures minces dans le monde de l'ingénierie (génie civil, automobile, aérospatial, aéronautique, nucléaire, etc). Aujourd'hui, avec l'émergence de la simulation numérique pour la prédiction d'une part, et l'utilisation accrue de logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) pour la construction d'autre part, il paraît préférable de s'inscrire dans le cadre de l'Analyse IsoGéométrique (IGA) pour le calcul des coques.

Le concept IGA repose sur l'utilisation pour l'analyse par éléments finis des mêmes fonctions que celles qui servent à construire la géométrie des modèles de CAO. Les fonctions NURBS remplacent dès lors les polynômes de Lagrange. Comme la CAO utilise les frontières ou des représentations de surface, l'approche est particulièrement adaptée pour résoudre des problèmes où la géométrie est construite simplement à partir d'une surface, ce qui est le cas des coques. Dans ce cadre, le concept offre la possibilité de traiter conception et analyse avec exactement les mêmes modèles géométriques : l'étape de maillage parfois délicate et coûteuse devient immédiate et la géométrie du modèle de calcul peut être représentée de façon exacte, quelle que soit la finesse du maillage. En plus de l'aspect géométrique, il apparaît que les fonctions NURBS possèdent une continuité de classe supérieure à celle des polynômes de Lagrange. De ce fait, une nouvelle stratégie de raffinement du maillage, dans laquelle non seulement le degré polynomial mais aussi la classe de continuité des fonctions peuvent être augmentés, est possible. Grâce à celle-ci, il est établi de nos jours que le calcul de coque avec des éléments NURBS offre plus de précision pour un même nombre de degrés de liberté que les éléments finis traditionnels.

L'analyse isogéométrique de coque s'est principalement concentrée jusqu'à maintenant sur les modèles de structure coque. Dans ces modèles, seule la surface moyenne de la coque est discrétisée. Cette approche, même si elle est intéressante d'un point de vue réduction du nombre de degrés de liberté, peut présenter des difficultés pour l'ingénieur. Par exemple, il est délicat de coupler ces éléments coques avec des éléments massifs 3D, d'incorporer des relations de comportement 3D générales et d'avoir une information sur le comportement dans l'épaisseur ou encore, de décrire des conditions de contact. Pour répondre à ces questions, une deuxième approche a émergé en éléments finis classiques : elle a donné naissance aux éléments massifs coque. L'idée est de prendre un élément massif continu 3D et de considérer, pour limiter le coût de calcul, une unique couche d'éléments dans l'épaisseur. L'intérêt est de ne faire intervenir que des déplacements aux

nœuds comme degrés de liberté, ce qui facilite l'implémentation pour des simulations complexes. Ainsi, si l'IGA est d'intérêt pour les modèles de structure coque, il paraît tout aussi intéressant d'appliquer le concept aux éléments massifs coque. C'est l'objet de nos travaux : nous souhaitons développer des éléments NURBS massifs coque afin de fournir à l'ingénieur une alternative intéressante pour bénéficier de la supériorité des fonctions NURBS en calcul de coque.

La difficulté principale dans les simulations numériques de coques est de faire face au verrouillage qui se manifeste d'autant plus que la structure est sujette à de la flexion. Il en résulte une sous-estimation de la déformation et une sur-estimation de la contrainte si bien qu'il est nécessaire d'avoir un maillage très fin pour obtenir une approximation correcte. Les éléments NURBS sont, tout comme les éléments finis classiques, sensibles à ce verrouillage. Assez peu de travaux concernant la suppression du verrouillage des coques NURBS ont été publiés à ce jour. La stratégie de base en NURBS consiste à élever le degré d'approximation. Ceci ne fait qu'atténuer le verrouillage sans le résoudre complètement : même les éléments de haut degré n'y sont pas totalement insensibles et la précision dépend de paramètres critiques tels que l'élancement ou la courbure de la coque. De plus, l'élévation d'ordre implique une augmentation du nombre de points d'intégration pour le calcul des intégrales. Ainsi, le coût de calcul augmente et ce, d'autant plus que nous allons vers des simulations non linéaires ce qui est souvent le cas en ingénierie. Par ailleurs, il apparaît que ce sont surtout les NURBS de bas degrés (quadratiques et cubiques) qui sont attractives pour l'analyse. En effet, ces fonctions permettent déjà une grande amélioration de la solution par rapport aux éléments finis classiques et sont capables de générer la plupart des géométries usuelles. Pour ces raisons, la problématique de la thèse se précise comme suit : nous cherchons à construire un élément NURBS massif coque de bas degré performant, c'est-à-dire sans verrouillage.

Le couplage des aspects NURBS et élément massif coque rend le problème du verrouillage très délicat à résoudre. D'une part, le cadre NURBS nécessite que la stratégie employée puisse s'adapter à la continuité supérieure de ces fonctions et à un degré polynomial variable. Cette continuité supérieure implique notamment que la règle d'intégration optimale ne peut s'écrire élément par élément. Utiliser des techniques d'intégration réduite pour supprimer le verrouillage ne semble donc pas aisé avec les NURBS. C'est plutôt des méthodes mixtes ou de déformations assumées qu'il faut envisager mais alors, la façon de construire les contraintes ou les déformations doit être compatible avec la continuité supérieure. Un autre problème, qui semble inhérent au traitement du verrouillage pour ces fonctions plus continues, est la présence d'une matrice de rigidité globale pleine, ce qui augmente le coût de la résolution. D'autre part, comme l'élément massif coque repose sur un modèle 3D complet, toutes les sources de verrouillage de structures minces sont possibles et combinées : verrouillage en cisaillement (transverse et plan), verrouillage en membrane, et verrouillage en pincement. Des stratégies judicieuses d'extraction et de traitement des différentes contributions responsables du verrouillage sont ainsi à implémenter. Pour cela, l'utilisation conjointe de plusieurs méthodes comme en éléments finis classiques avec notamment du contrôle de hourglass est probablement nécessaire.

Pour répondre à la problématique de la thèse, nous procédons comme suit : après un premier chapitre bibliographique précisant le contexte du sujet, les développements apportés s'articulent autour de trois chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à un problème de poutre courbe NURBS. Nous utilisons un modèle de structure classique de type Timoshenko. L'intérêt de commencer par ce problème simplifié est que les contributions responsables du verrouillage sont bien identifiées si bien que seule la première difficulté du sujet est à traiter, à savoir la maîtrise de la continuité supérieure des NURBS. Dans ce cadre, nous cherchons à étendre les méthodes sans verrouillage des éléments finis classiques au contexte NURBS. Nous élaborons une technique d'intégration réduite et une méthode de projection  $\bar{B}$  pour les NURBS. La méthode  $\bar{B}$  semble la plus robuste : elle est équivalente à une méthode mixte et s'applique à tous les types de degré et de continuité des NURBS.

Le troisième chapitre se focalise sur les éléments NURBS massifs coque proprement dits. On se restreint dans ce chapitre au cas de l'élasticité linéaire dans le cadre des petites perturbations. L'objectif est d'étendre la stratégie  $\bar{B}$  implémentée pour la poutre courbe afin de construire un élément NURBS massif coque de bas degré sans verrouillage. La difficulté supplémentaire est d'extraire les nombreuses contributions responsables du verrouillage de l'élément massif coque. Pour cela, nous proposons une stratégie basée sur l'utilisation d'un opérateur moyennant la déformation et la contrainte dans l'épaisseur de la coque. Avec un tel opérateur, il paraît nécessaire de partir d'une formulation mixte pour dériver la projection  $\bar{B}$  mathématiquement bien construite qui peut gérer le verrouillage. Dans un second temps, nous proposons de diminuer la taille de la matrice de raideur qui est pleine avec la méthode de projection  $\bar{B}$  proposée. Pour ce faire, nous pouvons mettre en place une approximation locale de la projection  $\bar{B}$ . Enfin, une procédure de contrôle de hourglass doit être appliquée pour stabiliser l'élément.

Pour finir, le dernier chapitre concerne l'application en non linéaire géométrique de la méthodologie développée. Ceci constitue une première étape pour vérifier le potentiel de l'élément à être utilisé par l'ingénieur dans des simulations complexes. À ce jour, le cadre de l'élasticité est conservé, la non linéarité provient uniquement des grands déplacements et grandes rotations. La méthode pour les petites perturbations étant basée sur une formulation mixte, c'est suivant le formalisme de la méthode mixte que l'extension en non linéaire géométrique est effectuée. Il faut alors construire la matrice tangente mixte de l'élément et proposer une méthode pour contrôler le hourglass en grands déplacements et grandes rotations.

Les performances de l'ensemble des méthodes développées dans ce travail sont évaluées au travers d'expérimentations numériques usuelles et de comparaisons avec d'autres techniques jugées aujourd'hui efficaces dans le domaine. À ce stade de l'étude, nous nous concentrons principalement sur la construction des éléments. Nous cherchons à ce que ces éléments soient utilisables pour l'ingénieur mais nous n'essayons pas ici de les implémenter concrètement et de façon optimale dans des codes éléments finis conventionnels. L'ensemble des développements numériques est réalisé dans un code "maison" faisant appel à du langage de calcul *matlab*.





# Chapitre 1

## L'analyse isogéométrique pour le calcul de coque

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>L'analyse isogéométrique</b>	<b>6</b>
1.1.1	Principe	6
1.1.2	Intérêt pour les coques	7
1.1.3	Mise en place	8
<b>1.2</b>	<b>Le calcul de coque</b>	<b>15</b>
1.2.1	Approche modèle de structure	16
1.2.2	Approche modèle massif coque	22
1.2.3	Problème : traitement du verrouillage	24

---

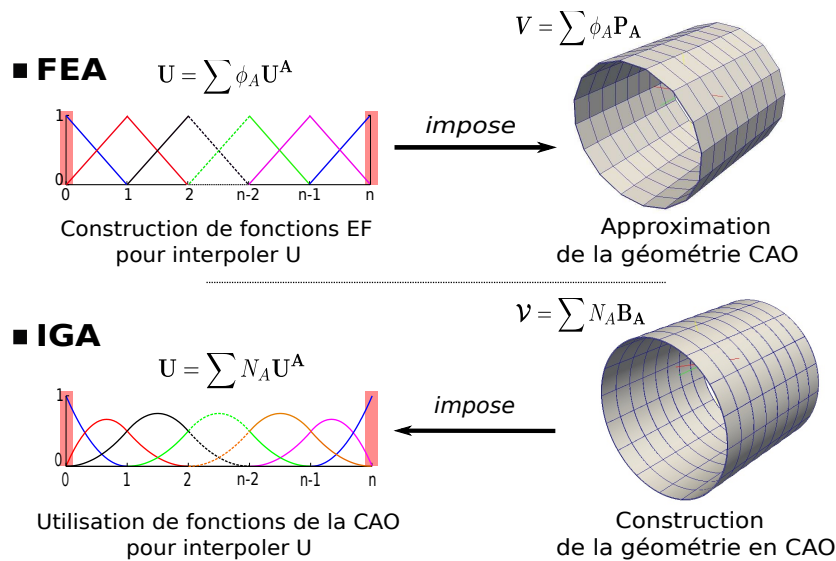
## 1.1 L'analyse isogéométrique

On introduit brièvement dans cette section le contexte de l'analyse isogéométrique. Pour cela, on commence par rappeler les fondements et objectifs premiers de la méthode puis, on justifie son application au calcul de coque. Enfin, on donne quelques détails concernant la construction des fonctions de l'analyse isogéométrique en vue de montrer l'intérêt de l'approche vis-à-vis de l'approche par éléments finis classiques et, pour préciser le cadre dans lequel on va se placer pour l'étude.

### 1.1.1 Principe

L'Analyse IsoGéométrique (IGA) est une approche assez récente qui trouve son origine dans les travaux de Hughes *et al.* [HUG 05] avant d'être détaillée et formalisée dans le livre de Cottrell *et al.* [COT 09]. Dans un contexte de développement de nouveaux outils pour le calcul numérique en ingénierie basée sur la simulation, celle-ci introduit un nouveau paradigme. En effet, la démarche de l'approche est en rupture avec ce qui est fait en Analyse par Éléments Finis classique (FEA). Habituellement, on commence par construire l'espace d'approximation de la solution du problème de mécanique. Pour cela, on utilise des polynômes de type Lagrange qui ont la particularité d'être interpolants aux nœuds du maillage. Ensuite, on invoque le plus souvent la méthode des éléments isoparamétriques pour discrétiser la géométrie du problème. À l'inverse, le concept isogéométrique propose de partir de la géométrie puis d'invoquer le principe des éléments isoparamétriques, c'est-à-dire d'utiliser les mêmes fonctions pour le calcul que celles qui servent à construire la géométrie des modèles de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) (voir figure 1.1 pour l'illustration du concept). En faisant ceci, on ne privilégie plus uniquement le point de vue calcul. L'objectif de l'approche est au contraire d'essayer de combler le vide entre les modèles CAO et FEA. On s'offre désormais la possibilité de traiter conception et calcul avec exactement les mêmes modèles géométriques : les étapes de construction de géométries simplifiées et de génération de maillages souvent fastidieuses en FEA peuvent ainsi devenir évidentes en IGA. L'approximation par facettes de la structure laisse par conséquent place à une représentation exacte de la géométrie quel que soit le raffinement utilisé.

Pour ce faire, les fonctions les plus couramment utilisées sont les Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) (voir, par exemple, Cohen *et al.* [COH 80], Piegl et Tiller [PIE 97], Farin [FAR 01] et Rogers [ROG 00]). Le choix de ces fonctions est certainement dû à leur grande présence dans les logiciels de CAO et du graphisme par ordinateur ainsi qu'à leur facilité de mise en place (algorithme pour les générer et facilité à être raffinées par exemple). Ces fonctions permettent de représenter exactement de nombreuses formes rencontrées dans l'ingénierie, telles que les sections coniques, et donc les cercles, les cylindres, les sphères, les ellipsoïdes, etc. En revanche, on peut remarquer que ces fonctions de la CAO ne permettent pas de générer exactement des hélices ou des surfaces hélicoïdales (cf., par exemple, Letcher et Shook [LET 95]). Aussi, il est important de noter que les NURBS possèdent un aspect structuré si bien que le raffinement local est



**FIGURE 1.1:** Principe de IGA vs FEA : inversion de la "flèche" isoparamétrique.

impossible directement. À cause de ceci, on voit apparaître de plus en plus dans l'IGA les T-splines (voir, par exemple, Scott *et al.* [SCO 12]) et les B-Splines hiérarchiques (cf., par exemple, Vuong *et al.* [VUO 11]), qui constituent simplement des versions des NURBS pour lesquelles le raffinement local est possible. Dans ce travail, on se restreint aux NURBS mais on ne doute pas de l'applicabilité des méthodes développées ici à ces nouvelles techniques de l'IGA. En plus de l'aspect purement géométrique intéressant des fonctions NURBS, il apparaît que celles-ci sont plus riches pour la résolution du problème de mécanique que les fonctions éléments finis classiques. Elles possèdent en fait une continuité de classe supérieure, ce qui permet d'obtenir plus de précision pour un même nombre de degrés de liberté et de robustesse comparé aux éléments finis traditionnels. Sur ce principe, de nombreux travaux ont émergé pour prouver l'efficacité de la méthode dans une multitude de domaines du calcul numérique. On peut citer par exemple : Cottrell *et al.* [COT 06] et Hughes *et al.* [HUG 08] pour le cas de l'analyse vibratoire, Bazilevs *et al.* [BAZ 06] et Zhang *et al.* [ZHA 07] dans le cadre de l'interaction fluide-structure, Bazilevs *et al.* [BAZ 07] pour le cas des écoulements turbulents, Gomez *et al.* [GOM 08] pour les méthodes de champs de phase, Elguedj *et al.* [ELG 07, ELG 14] pour les simulations nonlinéaires de matériaux quasi-incompressibles, Kiendl *et al.* [KIE 09], Benson *et al.* [BEN 10] et Echter et Bischoff [ECH 10] pour le calcul de coque, Schillinger *et al.* [SCH 12] pour les méthodes de frontière immergée, Temizer *et al.* [TEM 11] pour la mécanique du contact et, Wall *et al.* [WAL 08] pour l'optimisation de forme.

### 1.1.2 Intérêt pour les coques

Revenant à la description de la géométrie, un point important à mentionner est que la CAO utilise les frontières ou des représentations de surfaces pour construire des ob-

jets géométriques. Or, la partie calcul nécessite souvent une description volumique de la géométrie. En pratique, le lien direct entre conception et calcul prôné par la méthode ne paraît donc pas si évident. En effet, il paraît encore délicat aujourd'hui avec les NURBS de développer des techniques permettant de passer d'une représentation surfacique à une représentation volumique de façon véritablement automatique. Du côté des spécialistes de la géométrie, de nombreux travaux sont en cours pour répondre à cette problématique. Il semble qu'une approche basée sur une technique de polycube spline (division du volume en une multitude de cubes splines) puisse constituer une voie prometteuse (voir, par exemple, Wang *et al.* [WAN 08a, WAN 08b] et Xia *et al.* [XIA 11]).

Fort de ce constat, il apparaît que l'analyse isogéométrique pourrait être surtout bénéfique aujourd'hui dans le cas des coques. En effet, les coques sont des structures élancées dans deux directions : elles reposent uniquement d'un point de vue géométrique sur la description d'une surface. Le lien direct entre CAO et calcul redevient alors possible. De plus, il est à noter que le comportement de ces structures coques peut être très sensible aux imperfections de géométrie. Par exemple, le flambage dépend grandement de l'amplitude des imperfections de la surface coque (voir Koiter [KOI 60] qui fut l'un des premiers à avoir donné des solutions analytiques ou plus récemment [COT 09] qui a repris l'exemple de Stanley [STA 85]). Une représentation exacte de la surface coque quelle que soit la taille du maillage NURBS constitue dès lors un atout primordial. Ceci explique certainement pourquoi, après les premières contributions déjà citées [KIE 09, BEN 10, ECH 10], les coques isogéométriques ont reçu un si grand intérêt au cours de ces cinq dernières années (voir, par exemple, [KIE 10, ECH 10, BEN 11, BEN 13, DOR 13, ECH 13, HOS 13, BOU 13a, BOU 14, CAR 14, CAS 14]). C'est dans ce contexte que se place le travail de cette thèse.

### 1.1.3 Mise en place

On explique à présent de façon succincte la construction des fonctions NURBS en mettant l'accent sur leur propriété de continuité supérieure ainsi que sur la nouvelle stratégie de raffinement qui en découle. Pour plus de détails, on encourage le lecteur intéressé à consulter les références préalablement citées [COH 80, PIE 97, FAR 01, ROG 00, COT 09] ainsi que Cottrell *et al.* [COT 07] pour un bon aperçu sur la génération de maillage et le raffinement. Aussi, on a reporté dans l'annexe A les points principaux de la technologie NURBS dans l'IGA. Cette annexe offre une vision globale. Elle vise à faciliter la compréhension de la suite du manuscrit pour un lecteur non familier avec l'IGA.

#### 1.1.3.1 Les B-Splines

Les fonctions NURBS sont une généralisation des fonctions B-splines et possèdent par conséquent beaucoup des propriétés des B-splines. Les B-Splines sont des courbes polynomiales par morceaux construites à partir de fonctions B-Splines. L'espace paramétrique des B-Splines est localisé sur des "patches" contrairement aux éléments finis clas-

siques pour lesquels l'élément a sa propre paramétrisation. Les patches peuvent être vus comme des sous-domaines.

**Vecteurs de nœuds** Un *vecteur de nœuds*, en dimension unitaire (1D) dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , noté  $\Xi$ , est un ensemble de coordonnées dans l'espace paramétrique ordonnées de façon croissante :

$$\Xi = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_{e_1}+p+1} \right\}, \quad (1.1)$$

où  $\xi_i \in \mathbb{R}$  est le  $i^{\text{ème}}$  nœud,  $i$  est l'index du nœud,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e_1} + p + 1\}$ ,  $p$  est le degré polynomial de la B-Spline et  $n_{e_1}$  est le nombre de fonctions associées. Les nœuds partitionnent l'espace paramétrique en éléments, et l'intervalle  $[\xi_1, \xi_{n_{e_1}+p+1}]$  forme le *patch*. Plus d'un nœud peut être placé au même endroit dans l'espace paramétrique. Les multiplicités des nœuds ont des implications importantes sur la continuité des fonctions B-Splines associées. Si les nœuds sont également espacés, le vecteur de nœuds est dit *uniforme* et *non-uniforme* autrement. Un vecteur de nœuds dont son premier et dernier nœud ont une multiplicité  $p + 1$  est qualifié d'*ouvert*. Dans ce cas, la base est interpolante aux nœuds frontières de l'intervalle ce qui facilite l'imposition des conditions aux limites. De plus, des vecteurs de nœuds ouverts permettent d'assembler les patches de façon équivalente à l'assemblage des éléments en éléments finis classiques. Par contre, il faut bien noter que la base qui en découle n'est pas, en général, interpolante aux nœuds intérieurs. Dans notre travail, on prendra par souci de simplicité des vecteurs de nœuds ouverts. Aussi, on considérera pour les calculs des structures pouvant être représentées avec un unique patch et, les nœuds seront en principe insérés de façon uniforme lors du raffinement du maillage.

**Fonctions de forme** Les fonctions de base B-spline pour un ordre  $p$  donné sont définies récursivement à partir du vecteur de nœuds en utilisant la formule de Cox-de Boor (cf., par exemple, [COH 80]). On commence avec des fonctions constantes par morceaux ( $p = 0$ ) :

$$M_{i,0}^{e_1}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Puis, on construit pour  $p > 0$ ,

$$M_{i,p}^{e_1}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} M_{i,p-1}^{e_1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} M_{i+1,p-1}^{e_1}(\xi). \quad (1.3)$$

Avec cette formule, on peut remarquer que pour  $p = 0$  et  $p = 1$ , la base de fonctions est identique aux constantes et linéaires par morceaux utilisées classiquement en éléments finis. La plus grande richesse des B-Splines vient à partir de l'ordre 2. Un exemple de base de fonctions quadratiques pour un vecteur de nœuds ouvert non-uniforme est présenté sur la figure 1.2. Une propriété importante des fonctions B-Splines est qu'elles sont de classe de continuité  $C^{p-1}$  aux nœuds intérieurs si celui-ci n'est pas répété. C'est le cas ici aux nœuds de coordonnées paramétriques 1, 2 et 3. Si le nœud à une multiplicité  $m$ , la

continuité est en fait  $C^{p-m}$  à ce nœud. Sur l'exemple, la continuité au nœud tel que  $\xi = 4$  est ainsi  $C^0$ , la multiplicité du nœud étant 2 soit exactement  $p$ . Les fonctions de cette base sont par conséquent interpolantes aux extrémités de l'intervalle et également pour  $\xi = 4$ . Si la multiplicité d'un nœud devient  $p + 1$ , la base est discontinue et le patch est en fait séparé en deux. En vue d'utiliser les propriétés supérieures de ces fonctions, on prendra dans notre travail un degré polynomial au moins égal à 2. Outre cette caractéristique majeure de régularité supérieure, on peut noter comme autres propriétés intéressantes que :

- les fonctions B-Splines formées à partir d'un vecteur de nœuds ouvert constituent une partition de l'unité :  $\sum_{i=1}^{n_{e1}} M_{i,p}^{e1}(\xi) = 1, \forall \xi$  ;
- le support de chaque fonction  $M_{i,p}^{e1}$  est compact et compris dans l'intervalle  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  ;
- chaque fonction de la base est non-négative sur la totalité du domaine de définition :  $M_{i,p}^{e1}(\xi) \geq 0, \forall \xi$ .

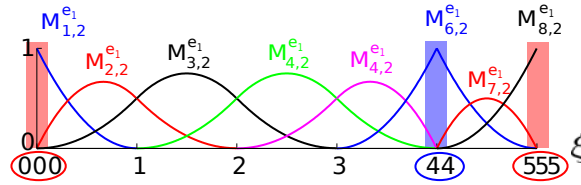


FIGURE 1.2: Base de fonctions quadratiques pour un vecteur de nœuds ouvert non-uniforme  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ .

**Courbes B-Spline** Les courbes B-Splines dans  $\mathbb{R}^d$  sont construites à partir de combinaisons linéaires de fonctions B-Splines. Les coefficients à valeurs vectorielles de la base de fonctions sont appelés *points de contrôle*. Ils sont l'analogue des coordonnées nodales en éléments finis classiques. Cependant, la nature non-interpolante des fonctions de base ne permet pas d'obtenir la même interprétation géométrique des points de contrôle. L'interpolation linéaire par morceaux des points de contrôle forme le *maillage de contrôle* ou *filet de contrôle*. Soit  $n_{e1}$  fonctions  $M_{i,p}^{e1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e1}\}$  et  $n_{e1}$  points de contrôle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e1}\}$ , une *courbe B-Spline* polynomiale par morceaux est définie par :

$$\mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{e1}} M_{i,p}^{e1}(\xi) \mathbf{B}_i. \quad (1.4)$$

Un exemple est proposé sur la figure 1.3 pour la base quadratique présentée précédemment sur la figure 1.2. Plus précisément, la figure 1.3(a) montre la courbe et son filet de contrôle tandis que la figure 1.3(b) présente la courbe et les nœuds du maillage qui la découpent en éléments. On peut remarquer que la courbe est interpolante au premier et dernier points de contrôle ainsi qu'au sixième. Ceci est dû au fait que les fonctions associées sont  $C^0$  aux extrémités et au nœud  $\xi = 4$ . Ailleurs, la continuité de la courbe est  $C^1$  si bien qu'elle ne passe plus par les points de contrôle.

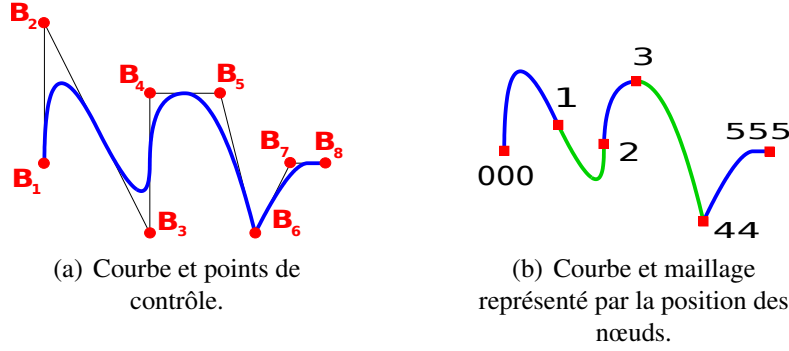


FIGURE 1.3: Exemple de courbe B-Spline quadratique par morceaux.

**Surfaces et solides B-Splines** Pour définir des surfaces B-Splines, il est nécessaire de construire des fonctions B-Splines 2D. Pour cela, il suffit d'utiliser le produit tensoriel qui consiste simplement à multiplier les fonctions B-splines 1D dans les deux directions de l'espace. Ceci signifie qu'en notant  $M_{i,p}^{e_1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e_1}\}$  et  $M_{j,q}^{e_2}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n_{e_2}\}$  les  $n_{e_1}$  et  $n_{e_2}$  fonctions B-splines 1D liées aux vecteurs de nœuds  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_{e_1}+p+1}\}$  et  $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_{e_2}+q+1}\}$  associées aux directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , nous avons au point de contrôle  $\mathbf{B}_A^{2D}$  qui correspond au  $i^{\text{ième}}$  et  $j^{\text{ième}}$  point de contrôle dans les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ ,

$$\bar{N}_A^{2D}(\xi, \eta) = M_{i,p}^{e_1}(\xi)M_{j,q}^{e_2}(\eta). \quad (1.5)$$

On omet volontairement à présent, pour simplifier les notations, les indices  $p$  et  $q$  concernant le degré des fonctions dans les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  respectivement. Avec ces fonctions B-Splines 2D, on peut ensuite construire une surface B-Spline à l'aide des  $n_{2D} = n_{e_1} \times n_{e_2}$  points de contrôle  $\mathbf{B}_A^{2D}$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n_{2D}\}$  :

$$\mathcal{S}(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n_{2D}} \bar{N}_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{B}_A^{2D}. \quad (1.6)$$

De façon analogue, on peut construire des solides B-Splines. Pour cela, il nous faut définir des fonctions B-Splines 3D en utilisant le produit tensoriel. On rajoute alors la dimension  $\mathbf{e}_3$  avec  $M_{k,r}^{e_3}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n_{e_3}\}$  les  $n_{e_3}$  fonctions B-Splines associées provenant du vecteur de nœuds  $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n_{e_3}+r+1}\}$ . Le volume B-Spline s'écrit par conséquent :

$$\mathcal{V}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{3D}} \bar{N}_A^{3D}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_A^{3D}, \quad (1.7)$$

avec cette fois-ci  $n_{3D} = n_{e_1} \times n_{e_2} \times n_{e_3}$  et,  $\bar{N}_A^{3D}(\xi, \eta, \zeta)$  désignant la fonction B-Spline 3D du point de contrôle  $\mathbf{B}_A^{3D}$  correspondant au  $i^{\text{ième}}$ ,  $j^{\text{ième}}$  et  $k^{\text{ième}}$  point de contrôle dans les directions  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ , c'est-à-dire :

$$\bar{N}_A^{3D}(\xi, \eta, \zeta) = M_{i,p}^{e_1}(\xi)M_{j,q}^{e_2}(\eta)M_{k,r}^{e_3}(\zeta). \quad (1.8)$$



**Remarque 1** *On comprend ici l'origine de l'impossibilité du raffinement local avec ces fonctions : l'utilisation du produit tensoriel sur l'ensemble du patch.*

### 1.1.3.2 Les NURBS et leur intégration dans l'IGA

Les entités NURBS dans  $\mathbb{R}^d$  peuvent être interprétées comme des projections rationnelles d'entités B-Splines dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Les courbes NURBS sont par conséquent des courbes rationnelles polynomiales. Il faut noter que lorsque l'on parle de degré pour les courbes NURBS, on veut parler du degré de la B-Spline dont la courbe rationnelle est générée. En particulier, c'est grâce à cette transformation projective qu'une B-Spline quadratique par morceaux dans  $\mathbb{R}^3$  peut être utilisée pour construire exactement un cercle dans  $\mathbb{R}^2$  (cf. [COT 09]). Avec de telles stratégies, toutes les sections coniques peuvent être obtenues exactement par les NURBS.

Pour construire une NURBS, il est donc nécessaire de définir un poids propre à chaque point de contrôle de la NURBS dans  $\mathbb{R}^d$ . Ce poids est une valeur scalaire qui correspond à la coordonnée dans la dimension supplémentaire des points de contrôles ("points projectifs") associés de la B-Spline dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Notons les poids  $w_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e_1}\}$  pour le cas d'une NURBS 1D. Avec ces poids, les fonctions NURBS 1D peuvent se construire directement à partir des fonctions B-Splines  $M_{i,p}^{e_1}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_{e_1}\}$  telles que :

$$N_i^{1D} = \frac{M_{i,p}^{e_1} w_i}{\sum_{i=1}^{n_{e_1}} M_{i,p}^{e_1} w_i}, \quad (1.9)$$

qui représente la  $i^{\text{ième}}$  fonction NURBS 1D. Dans le cas 2D (respectivement 3D), on procède de même en repartant des fonctions B-Splines 2D (resp. 3D) (cf équations (1.5), resp. (1.8)), c'est-à-dire que l'on a :

$$N_A^{2D} = \frac{\bar{N}_A^{2D} w_A^{2D}}{\sum_{A=1}^{n_{2D}} \bar{N}_A^{2D} w_A^{2D}} \quad \left( \text{resp. } N_A^{3D} = \frac{\bar{N}_A^{3D} w_A^{3D}}{\sum_{A=1}^{n_{3D}} \bar{N}_A^{3D} w_A^{3D}} \right), \quad (1.10)$$

$w_A^{2D}$  (resp.  $w_A^{3D}$ ) étant le poids du  $i^{\text{ième}}$  et  $j^{\text{ième}}$  (resp.  $i^{\text{ième}}$ ,  $j^{\text{ième}}$  et  $k^{\text{ième}}$ ) point de contrôle dans les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  (resp.  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ ). Fidèlement à l'utilisation du produit tensoriel, la valeur des poids en multi-dimension s'obtient en multipliant les poids des points de contrôle associés en dimension unitaire. On retrouve pour ces fonctions NURBS la plupart des propriétés des fonctions B-Splines, à savoir la continuité supérieure, la partition de l'unité, le support compact composé de  $p + 1$  éléments et la positivité. Si les poids sont égaux à 1, les NURBS deviennent d'ailleurs des B-Splines. Les surfaces et volumes rationnels se définissent de façon analogue à leurs homologues B-Splines (voir

équations (1.4), (1.6) et (1.7)) en terme de fonctions rationnelles :

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{e1}} N_i^{1D}(\xi) \mathbf{B}_i ; \\ \mathcal{S}(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n_{2D}} N_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{B}_A^{2D} ; \\ \mathcal{V}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{A=1}^{n_{3D}} N_A^{3D}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_A^{3D}. \end{cases} \quad (1.11)$$

En pratique, on détermine à ce niveau la position des points de contrôle ainsi que la valeur des poids associés de sorte à représenter exactement des géométries coniques avec très peu d'éléments. Ensuite, la deuxième phase de l'analyse isogéométrique consiste à invoquer le principe des éléments isoparamétriques pour construire la solution du problème. Si c'est l'approximation du déplacement  $\mathbf{U}^h$  en tout point de la structure que l'on cherche, on l'écrira sous la forme :

$$\mathbf{U}^h = \sum_{A=1}^n N_A \mathbf{U}^A, \quad (1.12)$$

où  $n$  vaut  $n_{e1}$ , ou  $n_{2D}$ , ou  $n_{3D}$  et,  $N_A$  remplace  $N_i^{1D}$ , ou  $N_A^{2D}$ , ou  $N_A^{3D}$  suivant la dimension du problème considéré.  $\mathbf{U}^A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  représentent les degrés de liberté du modèle. On les appelle les *variables de contrôle* car la solution n'est pas, en principe, interpolante au niveau de ceux-ci. Afin de réaliser l'intégration numérique des matrices et vecteurs générés avec les fonctions NURBS, des éléments sont construits à partir des intervalles entre deux nœuds dans l'espace paramétrique :  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  en 1D,  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$  en 2D et  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\zeta_i, \zeta_{i+1}]$  en 3D. Après avoir transporté l'espace physique sur le domaine paramétrique en utilisant la représentation NURBS au niveau d'un patch, on transporte chacun de ces éléments dans l'élément parent à travers une seconde représentation, celle-ci affine, et des règles d'intégration de Gauss usuelles sont utilisées comme en éléments finis classiques. La stratégie habituelle pour calculer numériquement des problèmes de mécanique consiste à prendre  $(p+1)$  points de Gauss par élément pour des fonctions NURBS de degré  $p$ . Cela se généralise en 2D et en 3D : il en faut  $(p+1) \times (q+1)$  en 2D et  $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$  en 3D. Sauf indication contraire, c'est ce que nous ferons dans ce travail. La figure 1.4 illustre la procédure de changement d'espace pour le cas d'un modèle 1D. La géométrie est une courbe NURBS construite à l'aide d'un unique patch. Comme dans cette figure, on choisira dans la suite toujours un espace paramétrique de longueur unitaire (nœud initial à  $\xi = 0$  et nœud final à  $\xi = 1$ ). Le domaine paramétrique devient donc plus précisément isoparamétrique. L'élément parent sera quant à lui constitué de l'intervalle  $[-1, 1]^d$ , où  $d$  est la dimension considérée. Les coordonnées associées à ce domaine seront  $\tilde{\xi}$  en 1D, auquel on ajoute  $\tilde{\eta}$  en 2D, et  $\tilde{\zeta}$  en 3D.

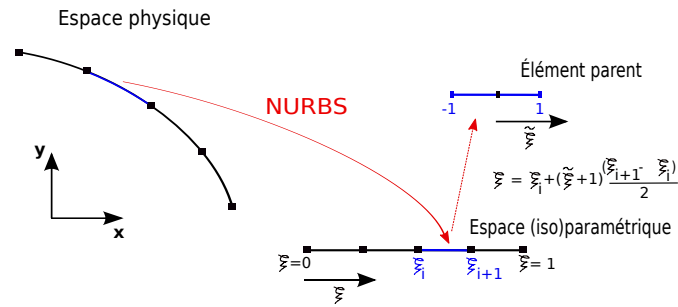


FIGURE 1.4: Les différents espaces pour le calcul des éléments NURBS.

**Remarque 2** Du fait de la continuité supérieure, les règles d'intégration de Gauss ne sont pas optimales pour les NURBS. D'autres stratégies plus adaptées à la situation mais plus complexes (règles d'intégration propres à l'ensemble du patch) ont aussi été élaborées (cf. Hughes et al. [HUG 10] et Auricchio et al. [AUR 12]). Ces dernières ne seront pas envisagées dans ce travail.

### 1.1.3.3 Raffinement $k$ : ordre et continuité supérieurs

Après avoir construit le maillage NURBS grossier permettant de générer exactement la géométrie du problème, on peut le raffiner sans en changer la forme. Pour ceci, deux mécanismes existent : l'insertion de nœuds et l'élévation d'ordre. L'insertion de nœuds permet de retrouver le raffinement  $h$  en FEA. Il consiste à ajouter des nœuds au vecteur de nœuds. Pour être totalement identique au raffinement  $h$ , l'insertion des nœuds doit être effectuée de telle sorte que chaque nœud ait une multiplicité égale au degré polynomial de la base, afin d'assurer une continuité  $C^0$  à chaque nœud. L'élévation d'ordre est quand à elle l'analogue du raffinement  $p$ , elle consiste à augmenter le degré polynomial des fonctions de forme. On peut noter que chaque valeur dans le vecteur de nœuds doit être répétée afin de préserver la discontinuité des dérivées des fonctions dont on élève l'ordre. Si l'on part d'un maillage où toutes les fonctions sont déjà  $C^0$ , cette notion coïncide exactement avec le raffinement  $p$  en FEA. Ces équivalences de raffinement avec les stratégies pour les éléments finis classiques nous montrent que l'IGA englobe en fait FEA. FEA n'est qu'un cas particulier de l'IGA.

Maintenant, une stratégie d'ordre plus élevé est possible du fait de la flexibilité de l'insertion de nœuds et de l'élévation d'ordre. On peut introduire une nouvelle procédure de raffinement dans laquelle le degré polynomial et la continuité des fonctions de forme sont simultanément augmentés. C'est ce que l'on appelle le raffinement  $k$  (cf. [COT 07]). Ceci peut être atteint en appliquant tout d'abord l'élévation d'ordre sur le maillage grossier puis, en pratiquant l'insertion de nœuds (nœuds que l'on prend de multiplicité 1) pour obtenir le maillage fin souhaité. En d'autres termes, une fois le degré voulu obtenu, on rajoute des éléments en maintenant le plus haut degré de continuité des fonctions NURBS, à savoir  $C^{p-1}$  au niveau des nœuds. Un exemple du processus de raffinement  $k$  et sa comparaison avec le raffinement  $p$  classique est présenté sur la figure 1.5. L'exemple concerne

des fonctions B-Splines 1D de degré 2 pour un maillage constitué de trois éléments. Cet exemple montre que le raffinement  $k$  produit moins de fonctions ayant une classe de continuité plus élevée, il en résulte un nombre moindre de degrés de liberté. Ceci est présenté plus en détails dans [HUG 05, COT 09, COT 06, COT 07]. Ce gain explique certainement en grande partie la supériorité de l'approche NURBS vis-à-vis de la méthode éléments finis classiques. De ce fait, c'est cette stratégie de raffinement  $k$  que nous utiliserons dans ce travail.

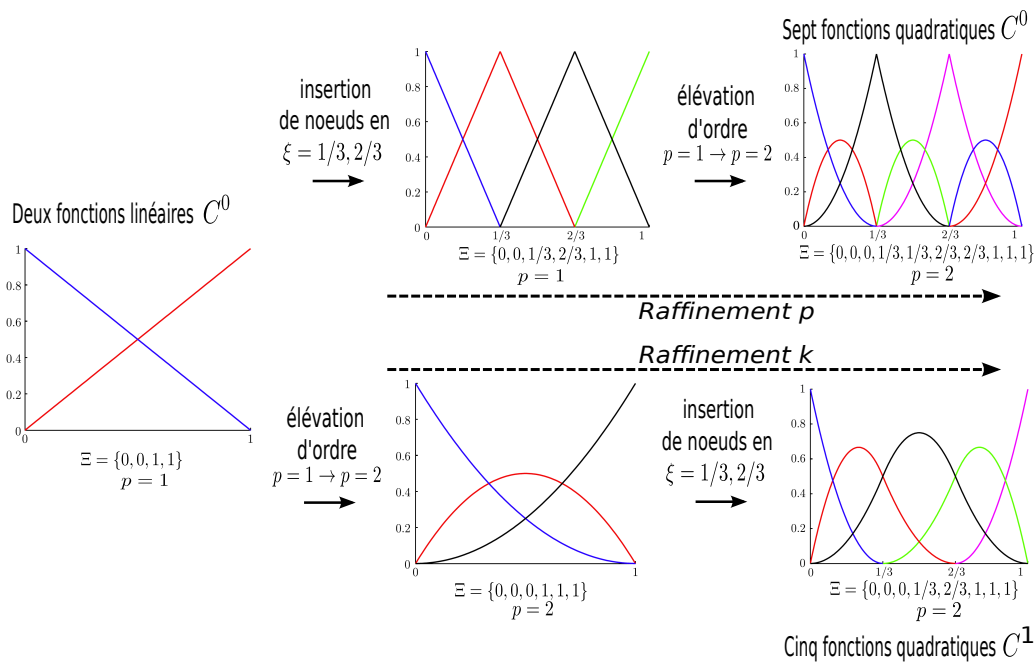


FIGURE 1.5: Comparaison du raffinement classique  $p$  avec le nouveau raffinement  $k$ .

## 1.2 Le calcul de coque

La section précédente nous a permis de comprendre l'importance d'utiliser l'IGA dans les coques aujourd'hui. Pour finir de fixer le contexte de notre travail, il nous faut à présent se focaliser sur le calcul de coque proprement dit. L'objectif ici est de présenter dans les grandes lignes les méthodologies relatives aux coques, les problèmes usuellement rencontrés et les applications existantes dans le contexte NURBS, ceci permettant de justifier le cadre dans lequel nous allons nous placer pour contribuer à l'avancée du domaine. On peut distinguer majoritairement deux approches pour le calcul de structures élancées : l'approche modèle de structure et l'approche modèle massif. Pour chacune de ces approches, il apparaît un phénomène néfaste de verrouillage qui conduit à un ralentissement considérable de la convergence de la solution.

## 1.2.1 Approche modèle de structure

Les premières théories apparues pour résoudre des problèmes de structures élancées consistent à mettre en place un modèle de structure. On commence par présenter ces modèles en se référant aux travaux relatifs à la méthode des élément finis classiques. Ce n'est qu'à la fin de la partie que l'on situe le contexte NURBS de ces techniques.

### 1.2.1.1 Généralités

On trouve principalement la théorie de Kirchhoff-Love (cf. Kirchhoff [KIR 50] et Love [LOV 88] pour les premiers travaux) et la théorie de Reissner-Mindlin (voir Reissner [REI 45, REI 47] et Mindlin [MIN 51] pour l'origine). La théorie de Kirchhoff-Love peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin. L'idée de ces approches est de se référer à la surface moyenne seule pour le calcul en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables, de la faible épaisseur de la coque. L'intérêt de ces méthodes est de limiter le nombre de degrés de liberté du modèle de calcul puisque ce n'est plus un volume mais seulement une surface qui est discrétisée.

Pour mieux comprendre, on considère dans le repère global  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  une coque de surface moyenne  $A_{moy}$ , d'épaisseur  $h$  et de longueurs  $L_x$  et  $L_y$  (voir figure 1.6). En pratique,  $L_x$  et  $L_y$  sont assez proches. On écrit pour simplifier  $L_x \approx L_y \approx L$ . Il faut vérifier  $h \ll L$  pour pouvoir parler de coque. On note  $\mathbf{M}$  de coordonnées vectorielles  $x$ ,  $y$ , et  $z$  dans le repère global le vecteur position générant la coque. À chaque point  $\mathbf{M}$ , on associe un point  $\mathbf{G}$  de la surface moyenne tel que

$$\mathbf{GM} = \mathbf{M} - \mathbf{G} = \tilde{z}\mathbf{e}_3. \quad (1.13)$$

$\mathbf{e}_3$  constitue la normale à la surface moyenne et  $\tilde{z} \in [-h/2, h/2]$  est la coordonnée curviligne suivant cette direction. On construit aussi pour obtenir le repère local deux vecteurs tangents  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  à la surface moyenne de sorte que la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  soit orthonormée directe. Les coordonnées curvilignes dans ces directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont notées, respectivement,  $\tilde{x} \in [0, L_x]$  et  $\tilde{y} \in [0, L_y]$ . Les coordonnées paramétriques associées ( $\in [0, 1]$ ) sont  $\xi$  et  $\eta$ . Dans la suite, on parlera "d'épaisseur" pour caractériser la direction  $\mathbf{e}_3$  et de "longueurs" pour caractériser les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . On prendra aussi comme notations dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  pour les composantes d'un champ vectoriel  $\mathbf{V}$  et,  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  et  $\tau_{13}$  pour les composantes d'un champ tensoriel d'ordre 2 symétrique  $\underline{\underline{\tau}}$ . On fera de même dans la base  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  avec les indices  $x$ ,  $y$  et  $z$  à la place de 1, 2 et 3 respectivement. Avec ceci, on peut définir la géométrie de la coque telle que

$$\mathbf{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbf{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{z}\mathbf{e}_3. \quad (1.14)$$

Du fait de la faible épaisseur  $h$  par rapport aux longueurs  $L_x$  et  $L_y$ , le modèle de structure est généralement construit en faisant les hypothèses suivantes :

1. l'hypothèse des sections droites, c'est à dire qu'un segment normal à la surface moyenne non déformée reste droit dans la configuration déformée. On néglige en fait ici le gauchissement de la section ;

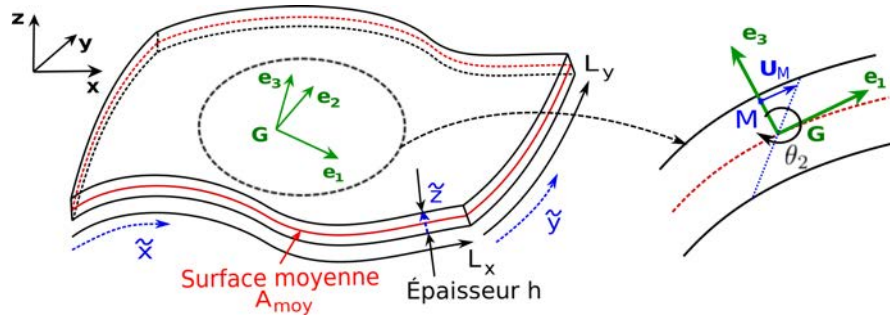


FIGURE 1.6: Description de la géométrie et cinématique d'un modèle de structure coque.

2. l'hypothèse de non variation de l'épaisseur, c'est-à-dire que la déformation normale  $\epsilon_{33}$  est nulle. L'effet poisson dans la direction de l'épaisseur n'est donc pas pris en compte ;
3. l'hypothèse des contraintes planes : dans les relations de comportement, la contrainte normale  $\sigma_{33}$  est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes.

Plus précisément, ce sont ces hypothèses qui sont à la base de la construction du modèle de Reissner-Mindlin. Les hypothèses 1 et 2 impliquent une cinématique simplifiée de la coque : le déplacement  $\mathbf{U}_M$  en  $\mathbf{M}$  peut en effet s'exprimer en fonction du déplacement  $\mathbf{U}_G$  de  $\mathbf{G}$  et de la rotation notée  $\boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2$  de la normale suivant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  (voir, de nouveau, figure 1.6). On écrit :

$$\mathbf{U}_M = \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta} \wedge \tilde{z}\mathbf{e}_3 = \mathbf{U}_G(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{z}\theta_2(\tilde{x}, \tilde{y})\mathbf{e}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{z}\theta_1(\tilde{x}, \tilde{y})\mathbf{e}_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (1.15)$$

où on utilise la notation  $\cdot \wedge \cdot$  pour caractériser le produit vectoriel entre deux vecteurs de l'espace ( $\mathbb{R}^3$ ). On remarque alors qu'il nous suffit de connaître 5 champs scalaires surfaciques (les trois composantes du déplacement de la surface moyenne et les deux composantes de rotation de la normale) pour totalement définir la cinématique de la coque. Dans le cas d'un modèle de Kirchhoff-Love, on rajoute une hypothèse :

4. on néglige le cisaillement transversal, c'est-à-dire que l'on considère au niveau des déformations  $\epsilon_{23} = \epsilon_{13} = 0$ . D'un point de vue cinématique, cela signifie que la normale reste perpendiculaire à la surface moyenne au cours de la déformation de la coque.

Avec cette hypothèse supplémentaire, on peut exprimer les rotations  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en fonction de la dérivée du déplacement de la surface moyenne. Cela permet de se réduire à la recherche de seulement 3 champs scalaires. Cette dernière hypothèse est d'autant plus valable que l'épaisseur de la coque est faible. Habituellement, on considère que la théorie de Kirchhoff-Love s'applique pour une coque mince (c'est-à-dire une coque qui possède un élancement  $L/h > 20$ ) tandis que la théorie de Reissner-Mindlin est plutôt utilisée pour des coques épaisses (soit  $4 \leq L/h \leq 20$ ) même si, cette dernière permet a priori aussi de retrouver les résultats avec le cisaillement transversal quasi nul des coques minces.

### 1.2.1.2 Construction d'un modèle de structure plaque

Nous allons à présent détailler quelque peu la construction du modèle de structure à partir de la cinématique définie dans l'équation (1.15). Pour simplifier l'exposé, on se restreint ici à une géométrie plaque, c'est-à-dire que la surface moyenne est plane si bien que le repère local correspond au repère global. Aussi, on considère le cas basique de l'élasticité linéaire isotrope homogène en petites perturbations. Le modèle de Reissner-Mindlin est détaillé et quelques remarques sont faites concernant le modèle de Kirchhoff-Love. Seulement les ingrédients de base sont donnés. Pour plus d'informations, voir par exemple, Batoz [BAT 90] ou Hughes [HUG 00] (chapitre 5).

Dans le cas des plaques, l'équation (1.15) devient :

$$\begin{Bmatrix} U_{M_x}(x,y,z) \\ U_{M_y}(x,y,z) \\ U_{M_z}(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{G_x}(x,y) \\ U_{G_y}(x,y) \\ U_{G_z}(x,y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_y(x,y) \\ -\theta_x(x,y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Avec ceci, on calcule les déformations. On utilise la notation  $V_{,i}$  pour caractériser la dérivée de  $V$  par rapport à la variable  $i$ . On rappelle que  $\varepsilon_{zz} = 0$  d'après l'hypothèse 2. On peut regrouper les autres composantes de déformation comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{G_{x,x}} \\ U_{G_{y,y}} \\ U_{G_{x,y}} + U_{G_{y,x}} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \varepsilon_m + z\chi_f ;$$

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{G_{z,y}} - \theta_x \\ U_{G_{z,x}} + \theta_y \end{Bmatrix} = \gamma_{ct} ; \quad (1.17)$$

avec  $\varepsilon_m$  les déformations de membrane,  $z\chi_f$  les déformations de flexion et  $\gamma_{ct}$  les déformations de cisaillement transversal. Pour construire les efforts généralisés correspondants à ces déformations, on exprime l'énergie de déformation  $E_d$  du modèle de structure sous la forme suivante :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{A_{moy}} (\varepsilon_m^T \mathbf{N} + \chi_f^T \mathbf{M} + \gamma_{ct}^T \mathbf{T}) dx dy \quad (1.18)$$

On remarque que l'intégrale est réalisée uniquement sur la surface moyenne de la structure.  $\mathbf{N}$  constitue les efforts résultants normaux (ou de membrane),  $\mathbf{M}$  représente les moments de flexion et  $\mathbf{T}$  correspond aux efforts résultants tranchants (ou de cisaillement). À la vue des équations (1.17) et (1.18), ces efforts se définissent en fonctions des composantes du tenseur des contraintes tels que :

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ; \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz ; \quad \mathbf{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz. \quad (1.19)$$

Il nous reste pour finir à écrire la relation de comportement du modèle de structure. Pour cela, on utilise l'hypothèse 3, à savoir le comportement en contraintes planes. On a donc

la relation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

où  $E$  désigne le module de Young du matériau et  $\nu$  son coefficient de Poisson. Ceci permet d'établir les relations  $N = [H_m] \varepsilon_m$  et  $M = [H_f] \chi_f$  avec :

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{h/2} [H] dz \quad \text{et} \quad [H_f] = \int_{-h/2}^{h/2} [H] z^2 dz. \quad (1.21)$$

Pour le cisaillement transversal, on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = [H_\tau] \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [H_\tau] = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \left( \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right). \quad (1.22)$$

$\mu$  est le module de cisaillement du matériau. Ceci mène à la relation  $T = [H_c] \gamma_{ct}$  où :

$$[H_c] = \int_{-h/2}^{h/2} [H_\tau] dz. \quad (1.23)$$

À ce niveau, on peut remarquer qu'à cause de la distribution constante des déformations de cisaillement  $\varepsilon_{yz}$  et  $\varepsilon_{xz}$  dans l'épaisseur (équation (1.17)), les contraintes  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{xz}$  (équation (1.22)) sont incompatibles avec celles obtenues en utilisant un modèle continu 3D complet. La distribution de la contrainte de cisaillement théorique en comparaison avec celle de la plaque est donnée sur la figure 1.7 pour un effort  $T$  (illustration en 1D). En réponse à cette incompatibilité, un facteur de correction  $k$  est habituellement ajouté. En général,  $k$  est déterminé de sorte à obtenir les mêmes énergies de déformation de cisaillement transversal pour la plaque que pour le modèle continu 3D (voir, par exemple, Bolle [BOL 47]). Les résultats des calculs d'énergie ont été reportés en figure 1.7. Pour avoir les mêmes énergies, il faut définir un module de cisaillement modifié pour la plaque égale à  $k\mu$ . On prend ainsi  $k = 5/6$  et la relation de comportement liée au cisaillement devient  $T = k[H_c] \gamma_{ct}$ .

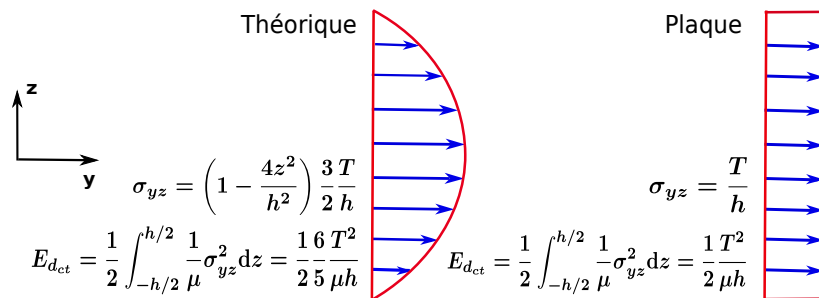


FIGURE 1.7: Distribution de la contrainte de cisaillement transversal.



Avec ces développements, on peut écrire l'équilibre de la structure sous forme variationnelle pour résoudre le problème de la plaque par une méthode éléments finis classiques ou NURBS. Pour cela, on discrétise généralement les champs à rechercher en utilisant le concept isoparamétrique. Si l'on considère que l'on discrétise la surface moyenne à l'aide d'une technologie NURBS (cf. équation (1.11)), les champs solutions se cherchent sous une forme équivalente à celle donnée équation (1.12), c'est-à-dire :

$$\mathbf{U}_G^h = \sum_{A=1}^{n_{2D}} N_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{U}_G^A ; \quad \theta_1^h = \sum_{A=1}^{n_{2D}} N_A^{2D}(\xi, \eta) \theta_1^A ; \quad \theta_2^h = \sum_{A=1}^{n_{2D}} N_A^{2D}(\xi, \eta) \theta_2^A. \quad (1.24)$$

On a donc 5 degrés de liberté par point de contrôle construisant la surface moyenne de la structure élancée.

Dans le cas d'un modèle de Kirchhoff-Love, on rajoute l'hypothèse 4 qui implique que  $\gamma_{ct} = 0$ . Cela signifie que  $U_{G_{z,y}} = \theta_x$  et  $U_{G_{z,x}} = -\theta_y$  (voir équation (1.17)) et que l'énergie de cisaillement est nulle (cf. équation (1.18)). Seul  $\mathbf{U}_G^h$  constitue l'inconnue du modèle, on a trois degrés de liberté par point de contrôle. Maintenant, il faut noter que cela implique des termes de dérivée seconde dans les déformations  $\chi_f$  (voir, de nouveau, équation (1.17)). Il est alors nécessaire d'utiliser des fonctions de continuité au moins  $C^1$  pour garantir la compatibilité de la solution éléments finis. Ceci a toujours été délicat en éléments finis classiques si bien que des méthodes alternatives ont dû être mises en place (imposition des relations de Kirchhoff sous forme discrète, cf. [LYO 77, BAT 80, CRI 83]). En revanche, on peut remarquer avec la section 1.1 que ce point peut être satisfait immédiatement avec l'utilisation des fonctions NURBS.

### 1.2.1.3 Modèles de structure coque

On passe à présent brièvement à l'implémentation pour les coques. Pour un bon aperçu des théories de coque et des formulations numériques, se référer à Bischoff *et al.* [BIS 04]. Pour plus de détails, voir par exemple, Batoz [BAT 92].

La première possibilité pour les coques est de procéder comme pour les plaques dans le repère local de la surface moyenne ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ). Cela signifie que l'on cherche les composantes curvilignes des déplacements et des rotations (c'est-à-dire,  $U_{G_1}, U_{G_2}, U_{G_3}, \theta_1$ , et  $\theta_2$ ) en tout point de coordonnées curvilignes  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . On parle de description curviligne des éléments coques (voir, par exemple, Koiter [KOI 60], Sanders [SAN 63] et, Ashwell et Gallagher [ASH 76] pour le contexte éléments finis classiques). Un point important à noter avec cette description et qu'il faut dériver les vecteurs de la base locale si bien que les courbures de la coque apparaissent explicitement. La description fine des courbures d'une surface coque quelconque impose une discrétisation d'ordre et de continuité élevés ce qui peut poser des problèmes en éléments finis classiques mais semble facilement atteignable avec les fonctions NURBS. On ne rentre pas ici plus dans les détails de cette stratégie : une application pour les NURBS dans le cas simplifié de la poutre courbe fait l'objet du chapitre 2 de ce travail.

La description curviligne est très précise mais assez complexe à mettre en œuvre. Pour simplifier, une autre possibilité réside dans les éléments coques tridimensionnels dégéné-

rés (ou massifs dégénérés). Ceci a notamment été proposé en éléments finis traditionnels par Hughes et Liu [HUG 81a], Bathe et Dvorkin [BAT 83], Hughes [HUG 00] (chapitre 6) et Belytschko *et al.* [BEL 00] (chapitre 9). L'idée de cette seconde stratégie est de discrétiser non seulement la surface moyenne mais aussi la normale à la surface moyenne. Si l'on prend les NURBS de la section 1.1, on approche donc la géométrie de la coque équation (1.14) telle que :

$$\mathbf{M}^h = \sum_{A=1}^{n_{2D}} \left( N_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{B}_A^{2D} + \bar{z} N_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{e}_3^A \right), \quad (1.25)$$

où  $\mathbf{B}_A^{2D}$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n_{2D}\}$  est l'ensemble des points de contrôle permettant de générer la surface moyenne de la coque et,  $\mathbf{e}_3^A$  est la normale à la surface moyenne associée au point de contrôle  $\mathbf{B}_A^{2D}$ . En utilisant le concept isoparamétrique, le champ de déplacement solution équation (1.15) est recherché sous la forme :

$$\mathbf{U}_M^h = \sum_{A=1}^{n_{2D}} \left( N_A^{2D}(\xi, \eta) \mathbf{U}_G^A + \bar{z} N_A^{2D}(\xi, \eta) \theta_2^A \mathbf{e}_1^A - \bar{z} N_A^{2D}(\xi, \eta) \theta_1^A \mathbf{e}_2^A \right), \quad (1.26)$$

avec  $\mathbf{e}_1^A$  et  $\mathbf{e}_2^A$  correspondant aux vecteurs tangents au point de contrôle  $\mathbf{B}_A^{2D}$ . La suite de l'implémentation suit grossièrement la démarche classique de celle d'un élément massif continu standard avec intégration numérique ou explicite suivant l'épaisseur. À noter simplement qu'il faut veiller à se placer dans le repère local pour appliquer la relation de comportement en contraintes planes (afin d'imposer  $\sigma_{33} = 0$ ).

#### 1.2.1.4 Contexte NURBS

Dans le contexte NURBS, déjà un certain nombre de travaux utilisant une approche modèle de structure pour le calcul de coque peuvent être répertoriés depuis ces cinq dernières années. En utilisant le fameux raffinement  $k$ , ces travaux prouvent l'efficacité de la méthode en termes de précision pour des maillages grossiers. On donne dans la suite les contributions majeures. Tout d'abord, la continuité supérieure étant facile à implémenter avec les fonctions de l'IGA, Kiendl *et al.* [KIE 09] ont développé des éléments NURBS de type Kirchhoff-Love avec une description fine des courbures de la coque. Ces auteurs ont aussi proposé une méthode pour connecter des patches [KIE 10] puisque c'est une continuité  $C^0$  et non supérieure que l'on a au bord de ceux-ci. Dans le même temps, Benson *et al.* [BEN 10] se sont davantage concentrés sur des éléments de type Reissner-Mindlin avec une approche coque tridimensionnelle dégénérée. Ces auteurs se sont par la suite intéressés à des éléments de plus faible coût de calcul de type Kirchhoff-Love [BEN 11] avant de mettre en place un couplage [BEN 13] entre ces éléments et les précédents de type Reissner-Mindlin pour palier les problèmes d'imposition de conditions aux limites et d'assemblage de patches. Dornisch *et al.* [DOR 13] ont proposé une façon de décrire exactement la normale à la coque avec les NURBS dans le modèle de Reissner-Mindlin. Finalement, Echter *et al.* [ECH 13] ont construit une famille d'éléments coques hiérarchiques. La famille va de l'élément de type Kirchhoff-Love à trois paramètres similaire

à [KIE 09] jusqu'à un élément de type coque massif à sept paramètres qui permet de prendre en compte la variation d'épaisseur, en passant par un élément de type Reissner-Mindlin à cinq paramètres.

### 1.2.2 Approche modèle massif coque

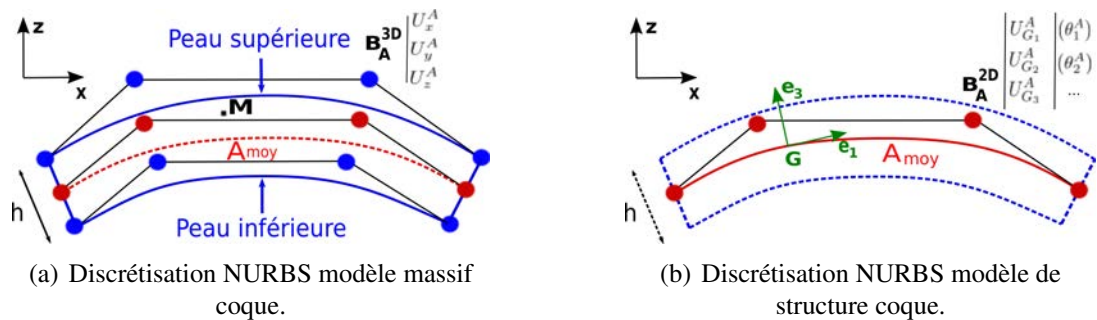
En pratique, même si intéressante d'un point de vue réduction du nombre de degrés de liberté, la mise en place d'un modèle de structure coque basé sur une discrétisation de la surface moyenne seule peut présenter des difficultés. Par exemple, il n'est pas immédiat de coupler ces éléments coques avec des éléments massifs continus 3D, d'incorporer des relations de comportement 3D générales et d'avoir une information sur le comportement dans l'épaisseur ou encore, de décrire des grandes rotations ou des conditions de contact. Une approche modèle massif en éléments finis classiques a par la suite émergé : elle a donné naissance aux éléments communément appelés aujourd'hui *éléments massifs coque* ("solid-shell elements" en anglais). L'objectif de la méthode est simple : coupler les avantages des éléments massifs et des éléments coques. Pour cela, l'idée est de prendre un élément massif continu 3D et de considérer, pour limiter le coût de calcul, une discrétisation de la coque en utilisant une unique couche d'éléments dans l'épaisseur. Ceci implique notamment que les deux peaux extérieures de la coque sont maillées et seulement des degrés de liberté en déplacement sont à considérer. En NURBS, une façon assez simple pour construire la discrétisation des deux peaux extérieures est de déplacer les points de contrôle de la surface moyenne de la coque de plus ou moins une demi-épaisseur suivant la normale à cette surface. C'est cette stratégie qui sera mise en place dans l'ensemble de ce travail. La figure 1.8 illustre la discrétisation d'une coque dans le cas des NURBS pour le modèle massif coque comparativement au modèle de structure coque. Sur cette figure, un degré polynomial de 2 est considéré dans l'épaisseur pour l'élément massif coque. Dans ce cas, on peut noter que les 3, 5 ou 7 degrés de liberté par point de contrôle de la surface moyenne suivant le type des éléments de modèle de structure (respectivement, Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin, ou coque massif) sont à comparer aux 3 degrés de liberté pour chacun des 3 points de contrôle de l'épaisseur, soit aux 9 degrés de liberté dans le cas massif coque. Il y a un nombre de degrés de liberté plus élevé mais cette approche est intéressante pour l'ingénieur car elle est simple à mettre en œuvre. Comme en 3D classique, on recherche la solution en déplacement en tout point  $\mathbf{M}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  de la coque sous une forme équivalente à celle de l'équation (1.12), c'est-à-dire :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h = \sum_{A=1}^{n_{3D}} N_A^{3D}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{U}^A, \quad (1.27)$$

avec  $\zeta$  représentant la coordonnée paramétrique suivant l'épaisseur.

On résout ainsi la plupart des problèmes rencontrés avec un modèle de structure coque. Pour résumer, une liste des principaux avantages de l'approche modèle massif peut être dressée comme suit :

- Les éléments massifs coque offrent la possibilité de modéliser à la fois des structures minces et épaisses tout en ayant directement accès à la variation (déformation)



**FIGURE 1.8:** Comparaison des discrétisations du modèle massif coque avec le modèle de structure coque.

de l'épaisseur. Ceci est intéressant pour des simulations de mise en forme telle que l'emboutissage de matériaux.

- Les cinématiques de type coque avec rotation de la normale pouvant apparaitre complexes sont supprimées ;
- Le couplage avec des éléments massifs devient immédiat (uniquement des déplacements volumiques à coupler, plus de rotations surfaciques) ce qui simplifie le maillage des structures présentant à la fois des parties massives et structurelles ;
- Les éléments massifs coque incorporent des relations de comportement 3D générales ce qui permet d'intégrer immédiatement tous les comportements non linéaires ;
- En non linéaire géométrique, la description des grandes rotations est simple et il n'y a plus besoin d'élaborer des procédures de mise à jour des configurations au cours du calcul (puisque'il n'y a plus de degrés de liberté en rotation impliqués) ;
- La mise en place des conditions de contact est simplifiée du fait de la discrétisation de la peau supérieure et inférieure de la coque.

**Remarque 3** On précise qu'on se limite pour l'étude à des structures minces qui ne dépassent pas un élancement ( $L/h$ ) de 1000. C'est souvent le cas dans le monde de l'ingénierie. Au delà de cette valeur, on est à la limite d'application d'un élément massif coque puisque l'intégration numérique dans l'épaisseur ne devient plus correcte (points d'intégration quasiment confondus dans l'épaisseur). Pour les coques extrêmement minces, il est donc probable qu'un modèle de structure soit plus efficace.

C'est pour toutes ces raisons que ce point de vue a largement été adopté en éléments finis classiques. Après les premiers travaux d'éléments 3D sans degrés de liberté en rotation que l'on peut certainement accorder à Graf *et al.* [GRA 86], Belytschko et Bindeman [BEL 93], Xu et Cai [XU 93], Sze et Ghali [SZE 93] et, Kim et Lee [KIM 93], on peut compter une multitude de versions d'éléments massifs coque au cours de ces dix dernières années (voir, par exemple, Combescure *et al.* [ABE 02, LEG 03, ABE 09] qui utilisent une loi de comportement 3D modifiée et, Alves de Sousa *et al.* [SOU 05a, SOU 06, SOU 07], Klinkel et Wagner [KLI 97], Reese *et al.* [REE 00, WRI 96, REE 07]

et Bassa *et al.* [BAS 12] pour le cas d'une relation de comportement 3D complète). Les éléments qui en découlent sont simples à utiliser pour des simulations complexes et ont la particularité d'être très précis pour un coût de calcul modéré.

Étant plutôt intéressés par la vision ingénieur, c'est cette stratégie que nous allons privilégier dans ce travail. De plus, il apparaît que si l'approche modèle de structure est relativement populaire en IGA, les éléments massifs coque sont beaucoup moins représentés dans le contexte NURBS. En effet, après les premiers travaux de Hughes *et al.* [HUG 05] et Echter et Bischoff [ECH 10] qui ont abordé la question de calculer des structures minces en utilisant plusieurs couches d'éléments massifs 3D dans l'épaisseur, il semble que l'on soit parmi les premiers à avoir véritablement appliqué l'approche éléments massifs coque aux NURBS (cf. Bouclier *et al.* [BOU 13b, BOU 13a, BOU 14]). A présent, d'autres travaux tels que ceux de Cardoso et Cesar de Sa [CAR 14] et Caseiro *et al.* [CAS 14] ont aussi vu le jour. Aussi, il est à noter la contribution de Hosseini *et al.* [HOS 13] qui ont développé un élément isogéométrique quasi-massif coque (dénomination "solid-like shell" en anglais). Ce dernier élément utilise la construction de Parisch [PAR 95]. Il est basé sur la discrétisation de la surface moyenne seulement mais ne possède pas de degrés de liberté en rotation si bien qu'il contient des avantages de la méthode des éléments massifs coque. Plus précisément, 7 degrés de liberté sont attachés à un point de contrôle de la surface moyenne : les six premiers représentent les déplacements de la peau supérieure et inférieure (3 translations  $\times 2$ ) et le dernier rend compte de la variation d'épaisseur. On ne rentre pas plus dans les détails de l'implémentation des éléments massifs coque à ce niveau puisque c'est l'objet de cette thèse. Les chapitres 3 et 4 expliquent la construction des éléments finis NURBS massifs coque que nous avons mis en place afin de bénéficier à la fois de l'approche IGA et de l'approche modèle massif pour le calcul de coque.

### 1.2.3 Problème : traitement du verrouillage

La difficulté principale avec les éléments finis coques est leur sensibilité au verrouillage. Le verrouillage est un phénomène néfaste que l'on peut retrouver dans plusieurs branches des méthodes numériques. Par exemple, en plus du verrouillage propre aux problèmes coques, celui-ci peut apparaître lorsque l'on calcule des structures quasi-incompressibles. Pour une bonne compréhension du verrouillage, on encourage le lecteur intéressé à consulter de nouveau les livres de [HUG 00] (chapitres 4, 5 et 6), [BEL 00] (chapitres 8 et 9), [BAT 90, BAT 92] et [BIS 04]. On utilise en principe cette notion pour dire que numériquement on bloque sur une solution qui n'est pas celle attendue.

#### 1.2.3.1 Le verrouillage dans les coques

En coque, le verrouillage se manifeste d'autant plus que la structure est sujette à de la flexion. En effet, les fonctions d'interpolation peuvent se retrouver incapables de reproduire correctement la flexion sans cisaillement et la flexion sans membrane (ou flexion inextensible) des coques minces. Dans ce cas, des contraintes supplémentaires résultant de

termes erronées de cisaillement et membrane apparaissent et absorbent la majeure partie de l'énergie de déformation alors que c'est justement ces contributions qui devraient être quasiment nulles. En d'autres termes, la solution aura plutôt tendance à se bloquer sur la solution de cisaillement ou de membrane plutôt que décrire le comportement de flexion. Les verrouillages associés sont appelés *verrouillage en cisaillement* et *verrouillage en membrane* respectivement. Il en résulte une sous-estimation de la déformation de la coque et une sur-estimation des contraintes. Pour capter la bonne solution, il est alors nécessaire de mailler extrêmement finement la coque. Une explication plus détaillée du verrouillage sera donnée pour le cas d'une poutre dans le chapitre 2 au travers de calculs de rigidités et de résultats numériques.

Dans notre cas d'élément massif coque, le verrouillage est très présent et très délicat à traiter. Comme l'élément repose sur un modèle 3D complet, toutes les sources de verrouillage de structures minces sont possibles et combinées : on peut avoir non seulement du verrouillage en cisaillement (transverse et plan) et du verrouillage en membrane mais aussi du *verrouillage en pincement* résultant de la déformation dans l'épaisseur. De plus, il apparaît que d'après Elguedj *et al.* [ELG 07] pour les matériaux quasi-incompressibles et Echter et Bischoff [ECH 10] pour les coques, les éléments NURBS soient sujets aux mêmes types de verrouillage que les éléments finis classiques. La construction d'éléments NURBS massifs coque performants ne peut donc se faire sans le développement de stratégies pour gérer ce phénomène néfaste.

### 1.2.3.2 Cadre éléments finis classiques

En éléments finis classiques, le développement de telles stratégies a plus de 40 ans d'histoire. L'idée principale de toutes les méthodes est de modifier les termes relatifs aux énergies de cisaillement et de membrane afin de relâcher les trop nombreuses contraintes imposées par ceux-ci.

**Approximations de plus haut ordre et champs compatibles** On peut par exemple augmenter le degré polynomial des fonctions d'approximation du déplacement (*approximations de plus haut ordre*, cf. [ASH 76, MEC 80, RAN 98]). En particulier, il a pu être montré dans Rank *et al.* [RAN 98] qu'un degré  $p > 6$  est suffisant pour éliminer le verrouillage en cisaillement des plaques minces avec le modèle de Reissner-Mindlin. Une seconde stratégie simple est de prendre un ordre d'approximation différent pour chaque composante de la solution recherchée de sorte que les déformations de cisaillement et de membrane deviennent compatibles (approche des *champs compatibles*, voir [BAB 86, BAB 87, ISH 12]). Le soucis de ces deux méthodes est qu'elles ne font qu'atténuer le verrouillage sans vraiment le faire disparaître.

**Intégration réduite/sélective et méthodes mixtes** Ensuite, parmi les méthodes originales et populaires pour véritablement éliminer le verrouillage, on peut trouver les techniques dites *d'intégration réduite et sélective* (cf. [ZIE 71, PAW 71, HUG 77a, HUG 77b,

FLA 81, STO 82, PRA 82, BEL 84, LIU 84]), qui consistent simplement à intégrer les rigidités avec moins de points d'intégration que nécessaire. Ces méthodes sont intéressantes car elles sont simples à mettre en œuvre et réduisent le coût de calcul. Le point auquel il faut faire attention est qu'elles mènent la plupart du temps à des instabilités traduites par des modes parasites, que l'on appelle *modes de hourglass* ou modes sablier. Ce sont des modes de déformation à énergie quasi-nulle qui vont souvent de pair avec le traitement du verrouillage puisqu'ils résultent d'une "relaxation" trop importante des contraintes de verrouillage. Face à ce problème, Hughes [HUG 77a] a mis en place des règles d'intégration réduite sélective, c'est-à-dire a effectué l'intégration réduite seulement pour les termes de membrane et de cisaillement (les autres termes étant intégrés avec la règle usuelle complète), tandis que Flanagan et Belytschko [FLA 81] ont proposé un contrôle en ajoutant une rigidité artificielle de stabilisation. Alternativement à ces techniques d'intégration réduite et sélective, des éléments basés sur les *méthodes mixtes* ont aussi été envisagés (voir [HER 65, MAL 78, NOO 81, PIA 82, CHE 87, BRE 91]). Le principe de ceux-ci est de rechercher dans le même temps les inconnues cinématiques et statiques. Ceci permet d'avoir des interpolations indépendantes pour les contraintes et déformations ce qui offre plus de flexibilité. Cependant, le choix des espaces d'approximation entre le déplacement et la contrainte ne peut être arbitraire. Il faut vérifier la condition de Ladyzenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) [BRE 91] pour assurer stabilité et convergence optimale. Malkus et Hughes [MAL 78] ont prouvé l'équivalence d'une classe de modèles mixtes avec des éléments à un seul champ (déplacement) intégrés avec des règles d'intégration réduite. Ceci a permis de légitimer les techniques d'intégration réduite et sélective.

**Méthodes des déformations "modifiées"** Plus récemment, le développement d'approches simples, purement en déplacement, qui pourraient simultanément étendre les procédures d'intégration réduite à des cas plus complexes (axisymétrie et anisotropie notamment) tout en atteignant la cohérence théorique des formulations mixtes, a donné naissance à des méthodes de *déformations assumées*, à savoir la *Enhanced Assumed Strain method* (EAS, cf. [SIM 90b, SIM 92, KAS 00]) et l'*Assumed Natural Strain method* (ANS, voir [HUG 81b, DVO 84, BUC 93]), à des méthodes de type *Discrete Shear Gap* (DSG, cf. [BLE 00, KOS 05]) et, à des méthodes de *projections des déformations*  $\bar{B}$  (voir [HUG 80, SOU 96, SOU 05b]). Ces stratégies sont basées sur la modification du lien entre les déplacements et les déformations. L'opérateur de gradient discret diffère de son expression usuelle. Plus précisément, les déformations peuvent être enrichies à l'aide de modes (cf. la méthode des modes incompatibles de Wilson *et al.* [WIL 73] pour l'origine des méthodes EAS), ou imposées sous une forme discrète à l'aide de collocations (ANS et DSG), ou encore projetées sur un espace approprié (méthodes  $\bar{B}$ ). À noter peut-être parmi ces méthodes l'avantage de la procédure  $\bar{B}$  qui offre un formalisme suffisamment général pour être applicable facilement à tout type d'élément (triangles et quadrangles) et quel que soit le degré polynomial. Elle résulte seulement en la construction d'une matrice déformation-déplacement modifiée sans degrés de liberté supplémentaires ou définition de points de collocation.

**Cas des éléments massifs coque** Comme dit dans la section 1.2.2, l'objectif des éléments massifs coque est d'être utilisables pour l'ingénieur. Pour cela, il est important d'avoir un élément de faible coût de calcul c'est pourquoi les chercheurs se sont principalement intéressés à l'élément de plus bas degré possible, c'est-à-dire la brique à 8 nœuds qui est basée sur des fonctions d'interpolation linéaires. Ensuite, pour assurer une bonne précision de l'élément, le verrouillage doit être supprimé. Les sources de verrouillage étant nombreuses et combinées, l'utilisation conjointe de plusieurs stratégies a été nécessaire : la plupart des travaux mettent en place des méthodes de déformations assumées (EAS) couplées avec des schémas d'intégration réduite avec contrôle de Hourglass (voir, de nouveau, [SOU 05a, REE 07, ABE 09, BAS 12]).

### 1.2.3.3 Cadre NURBS

Contrairement aux éléments finis classiques, le développement de méthodes sans verrouillage est assez nouveau avec les fonctions NURBS et encore peu d'applications au calcul de structures coques 3D réelles ont été réalisées. La plupart des stratégies de coque NURBS (cf. encore [KIE 09, KIE 10, BEN 10, BEN 11, BEN 13, DOR 13]) proposent de prendre des approximations de plus haut ordre, chose assez aisée avec les NURBS mais qui ne résout pas totalement le problème du verrouillage. Certainement l'un des premiers travaux pour véritablement répondre à la question avec les NURBS est celui de Elguedj *et al.* [ELG 07]. Ce dernier développe une stratégie de projection des déformations  $\bar{B}$  pour traiter le verrouillage volumétrique des structures quasi-incompressibles. Ensuite, on trouve plusieurs contributions concernant le calcul de poutre : par exemple Echter *et al.* [ECH 10] ont proposé une approche DSG et Beirão da Veiga *et al.* [VEI 12b, AUR 13] ont mis en place une méthode de collocation pendant que nous nous sommes intéressés à des méthodes semblant plus faciles pour l'ingénieur, à savoir des techniques d'intégration réduite et des stratégies de projection  $\bar{B}$  (cf. Bouclier *et al.* [BOU 12] qui sera repris en partie dans le chapitre 2 de ce manuscrit). Des stratégies performantes ont aussi été proposées pour les plaques de type Reissner-Mindlin (on peut citer Beirão da Veiga *et al.* [VEI 12a] pour une méthodologie de type champs compatibles ainsi que Thai *et al.* [THA 12] pour une technique de stabilisation basée sur la modification de la matrice matériau reliée au cisaillement).

Maintenant, si l'on regarde les coques proprement dites avec le point de vue modèle de structure, on s'aperçoit que l'une des seules contributions est celle de Echter *et al.* [ECH 13] avec l'élaboration d'une famille d'éléments hiérarchiques qui a l'intérêt d'être intrinsèquement libre de verrouillage en cisaillement transversal et en pincement. Le reste des verrouillages est ensuite supprimé soit par une approche DSG soit par une méthode mixte. Avec l'approche modèle massif coque, il semble que l'on soit parmi les seuls à avoir essayé de traiter l'ensemble des verrouillages auquel un tel élément NURBS est sujet (cf. [BOU 13b, BOU 13a, BOU 14]). Parallèlement à nos travaux, quelques stratégies surtout efficaces pour le verrouillage en cisaillement ont très récemment émergées. On peut citer par exemple Cardoso et Cesar de Sa [CAR 14] et Caseiro *et al.* [CAS 14] qui ont développé des techniques faisant appel à de la collocation (méthodologie ANS).



### 1.2.3.4 Problématique de la thèse

On insiste sur le fait que la stratégie de base pour les NURBS qui est d'élever le degré a des limites. D'une part l'élévation d'ordre entraîne un coût important puisque le nombre de points d'intégration nécessaire augmente. D'autre part, cette méthode ne permet pas de supprimer complètement le verrouillage : même les éléments de haut degré peuvent rester sensibles à ce phénomène et la précision dépend de paramètres critiques tels que l'élanement ou la courbure de la coque. Pour assurer la robustesse, c'est-à-dire ici la bonne convergence de l'élément quelle que soit la taille du maillage, des stratégies plus évoluées doivent être implémentées. De plus, il est à noter que la plupart des géométries usuelles se représentent exactement avec du NURBS quadratique, ce qui constitue un autre intérêt, au delà du simple coût moindre de calcul, de développer des éléments NURBS de bas degré déjà très précis. Ceci constitue la problématique de la thèse :

**Construire un élément fini isogéométrique NURBS massif coque  
de bas degré performant : gérer efficacement le verrouillage et le hourglass.**

Le formalisme de la stratégie employée doit être suffisamment général pour s'adapter à la continuité supérieure des NURBS. Pour répondre à cette problématique, nous avons mis en place au cours de cette thèse une approche mixte qui s'avère équivalente à une approche  $\bar{B}$ . L'intérêt de cette démarche est qu'elle combine la théorie des méthodes mixtes avec l'aspect plutôt pratique pour l'ingénieur des méthodes  $\bar{B}$ . Toutefois, comme c'est souvent le cas pour ces éléments, des modes de hourglass peuvent apparaître dans certaines situations. Ainsi, des stratégies de stabilisation ont aussi été élaborées. On présente l'ensemble de ces travaux dans les chapitres suivants.

# Chapitre 2

## Cas de la poutre épaisse courbe : extension des méthodes sans verrouillage dans le contexte NURBS

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Mise en évidence du verrouillage</b>	<b>30</b>
2.2.1	Poutre courbe de Timoshenko	30
2.2.2	Formulation éléments finis NURBS	32
2.2.3	Illustration numérique du verrouillage	33
2.2.4	Retour sur l'origine du verrouillage	36
<b>2.3</b>	<b>Construction d'un élément basé sur une technique d'intégration réduite</b>	<b>39</b>
2.3.1	Difficulté de l'approche avec les fonctions NURBS	39
2.3.2	Développement d'une stratégie pour des NURBS quadratiques	40
2.3.3	Contrôle de hourglass	42
<b>2.4</b>	<b>Construction d'un élément basé sur une méthode de projection <math>\bar{B}</math></b>	<b>45</b>
2.4.1	Principe et formulation $\bar{B}$	45
2.4.2	Construction : formulation discrète $\bar{B}$	47
<b>2.5</b>	<b>Construction d'un élément mixte : équivalence avec l'élément <math>\bar{B}</math></b>	<b>50</b>
<b>2.6</b>	<b>Application de la méthode DSG [ECH 10] à l'élément de poutre courbe</b>	<b>52</b>
<b>2.7</b>	<b>Résultats numériques : comparaison entre les différentes méthodes</b>	<b>54</b>
2.7.1	Résultats d'une poutre courbe de Timoshenko	54
2.7.2	Conclusion des résultats obtenus	56
2.7.3	Complément : résultats d'une poutre console avec un angle	58
<b>2.8</b>	<b>Conclusion résumée</b>	<b>59</b>

---

## 2.1 Introduction

Avant de se focaliser sur les coques proprement dites, on s'intéresse dans ce chapitre à un problème simplifié de poutre courbe. On envisage pour la résolution une approche de type modèle de structure avec une description curviligne (voir section 1.2.1). On parle plus précisément de poutre "épaisse" pour signifier que l'on prend en compte le cisaillement transversal. On utilise ainsi un modèle de structure de type Timoshenko qui est le pendant du modèle de Reissner-Mindlin pour les poutres. Le problème étudié est simple mais met en jeu les deux types de verrouillage présents habituellement dans les modèles de structure coque, à savoir celui en cisaillement transversal et en membrane. Afin d'être en mesure de développer des éléments NURBS massifs coque sans verrouillage, il nous a paru souhaitable de commencer par ce cas 1D pour une meilleure compréhension des phénomènes intervenants et mécanismes employés. On va chercher ici à étendre les méthodes sans verrouillage des éléments finis classiques (cf "Cadre éléments finis classiques" de la section 1.2.3) au contexte NURBS. Dans l'idée de développer des stratégies utilisables par l'ingénieur, l'accent sera mis sur les techniques d'intégration réduite et de projection  $\bar{B}$ . La plupart des résultats exposés dans ce chapitre sont repris d'une précédente contribution (cf. [BOU 12]) dans laquelle des compléments peuvent être trouvés.

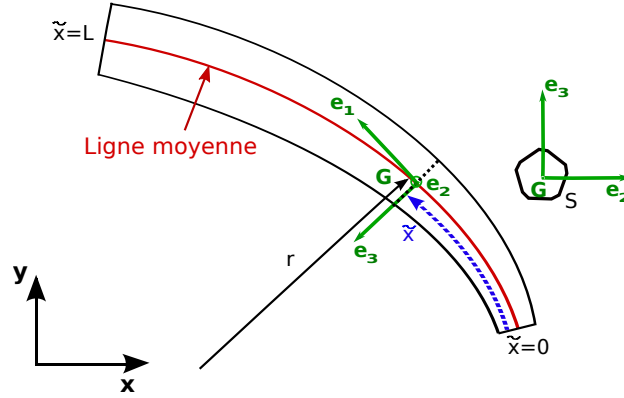
## 2.2 Mise en évidence du verrouillage

On commence par définir précisément le problème étudié. On établit la formulation standard pour le résoudre et on le discrétise au moyen des fonctions NURBS. On met ensuite en évidence le phénomène du verrouillage en montrant et en expliquant son effet sur les calculs numériques.

### 2.2.1 Poutre courbe de Timoshenko

On reprend les notations de la section 1.2.1. Cette fois-ci le modèle de structure est un modèle 1D. On s'intéresse à une poutre courbe sujette à de la flexion, à du cisaillement transversal et à de la membrane. Pour ceci, on considère une poutre de Timoshenko plane dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène isotrope en petites perturbations (voir figure 2.1). Les paramètres géométriques définissant la poutre sont :  $L$  sa longueur,  $\tilde{x}$  son abscisse curviligne,  $\mathbf{G}(\tilde{x})$  le centre de sa section  $S$  dont l'ensemble des positions définit sa ligne moyenne,  $r$  son rayon de courbure,  $\xi = \frac{\tilde{x}}{L}$  sa coordonnée paramétrique et,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  son repère local. On suppose que l'on encastre le bord droit (section en  $\tilde{x} = 0$ ) et que l'on peut modéliser les efforts appliqués sur l'autre bord ( $\tilde{x} = L$ ) comme une force  $\mathbf{F}_L = \{N_L \ 0 \ T_L\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T$  et un moment  $\mathbf{M}_L = \{0 \ M_L \ 0\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T$ . Le long de la ligne moyenne de la poutre, un chargement réparti est aussi imposé pour représenter les actions dans le volume. Il se caractérise par une distribution de force  $\mathbf{f}(\tilde{x}) = \{f_{e_1} \ 0 \ f_{e_3}\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T$  et de moment  $\mathbf{m}(\tilde{x}) = \{0 \ m_{e_2} \ 0\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T$ .

La formulation forte du problème peut s'écrire comme suit : trouver les variables



**FIGURE 2.1:** Description du problème de référence poutre.

cinématiques, à savoir le déplacement de la ligne moyenne  $\mathbf{U}_G(\tilde{x})$  et la rotation de la section  $\boldsymbol{\theta}(\tilde{x})$  ;

$$\mathbf{U}_G(\tilde{x}) = \{U_{G_1}(\tilde{x}) \ 0 \ U_{G_3}(\tilde{x})\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T \quad ; \quad \boldsymbol{\theta}(\tilde{x}) = \{0 \ \theta_2(\tilde{x}) \ 0\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T, \quad (2.1)$$

ainsi que les efforts généralisés, c'est-à-dire la force  $\mathbf{F}(\tilde{x})$  et le moment  $\mathbf{M}(\tilde{x})$  ;

$$\mathbf{F}(\tilde{x}) = \{N(\tilde{x}) \ 0 \ T(\tilde{x})\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T \quad ; \quad \mathbf{M}(\tilde{x}) = \{0 \ M(\tilde{x}) \ 0\}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^T, \quad (2.2)$$

avec  $\tilde{x} \in [0, L]$ , qui vérifient :

– les contraintes cinématiques :

$$\mathbf{U}_G(0) = \mathbf{0} \quad ; \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

– les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{,\tilde{x}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{dans } [0, L] \\ \mathbf{M}_{,\tilde{x}} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0} & \text{dans } [0, L] \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \mathbf{F}(L) = \mathbf{F}_L \\ \mathbf{M}(L) = \mathbf{M}_L \end{cases}, \quad (2.4)$$

– et les relations de comportement :

$$N = E S \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad ; \quad T = \mu S \gamma_{ct} \quad ; \quad M = E I \chi_f, \quad \text{dans } [0, L]. \quad (2.5)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_m$ ,  $\gamma_{ct}$  et  $\chi_f$  sont les déformations de membrane, de cisaillement transversal et de flexion définies telles que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = U_{G_1, \tilde{x}} - \frac{U_{G_3}}{r} \quad ; \quad \gamma_{ct} = \frac{U_{G_1}}{r} + U_{G_3, \tilde{x}} + \theta_2 \quad ; \quad \chi_f = -\theta_{2, \tilde{x}}. \quad (2.6)$$

$E$  et  $\mu$  sont les propriétés du matériau : le module de Young et le module de cisaillement respectivement.  $I$  est le moment quadratique de la section par rapport à  $\mathbf{e}_2$ . Il est à noter que nous ne considérons pas de facteur de correction pour la relation de comportement

liée au cisaillement transversal (cf. équation (2.5)). Comme nous n'allons pas comparer les calculs de poutre à des calculs issus d'un modèle continu 3D complet, ce facteur a en fait peu d'importance ici. Plus précisément, on peut définir l'espace de recherche des déplacements tel que :

$$\mathcal{V} = \left\{ (\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}) \in \left[ [H^1([0, L])]^3 \right]^2 = \left[ [C^0([0, L])]^3 \right]^2, \mathbf{U}_G(0) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0} \right\}, \quad (2.7)$$

ce qui nous permet d'écrire la formulation variationnelle associée du problème : trouver  $(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{V}$  tel que :

$$b((\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}), (\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*)) = l(\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) \quad \forall (\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in \mathcal{V}, \quad (2.8)$$

avec la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $l(\cdot)$  suivantes :

$$\begin{cases} b((\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}), (\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*)) = \int_0^L (ES\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^* + \mu S \boldsymbol{\gamma}_{ct} \boldsymbol{\gamma}_{ct}^* + EI \boldsymbol{\chi}_f \boldsymbol{\chi}_f^*) d\tilde{x}, \\ l(\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) = \int_0^L \mathbf{U}_G^*(\tilde{x})^T \mathbf{f}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^L \boldsymbol{\theta}^*(\tilde{x})^T \mathbf{m}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \mathbf{U}_G^*(L)^T \mathbf{F}_L + \boldsymbol{\theta}^*(L)^T \mathbf{M}_L. \end{cases} \quad (2.9)$$

Les termes en  $ES$  proviennent de l'énergie de membrane, ceux en  $\mu S$  de l'énergie de cisaillement et, ceux en  $EI$  de l'énergie de flexion. La forme  $l(\cdot)$  regroupe quant à elle les termes liés au travail des effort extérieurs.

## 2.2.2 Formulation éléments finis NURBS

On utilise pour la discrétisation des fonctions NURBS 1D (cf. équation (1.9)). Pour simplifier les notations on omet l'exposant "1D", c'est-à-dire que l'on prend  $N_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il nous faut tout d'abord construire la géométrie de la courbe traduisant la ligne moyenne de la poutre. Pour cela, on associe aux fonctions NURBS les points de contrôle  $\mathbf{B}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  de coordonnées  $B_{i_x}$  et  $B_{i_y}$ , dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de sorte que :

$$\mathbf{G} = x(\xi)\mathbf{x} + y(\xi)\mathbf{y} \quad \text{avec} \quad x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi)B_{i_x} \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi)B_{i_y}. \quad (2.10)$$

L'abscisse curviligne  $\tilde{x}$ , le jacobien  $J = \tilde{x}_{,\xi}$  de la transformation entre l'espace paramétrique et l'espace physique (voir figure 1.4) et, le rayon de courbure  $r$  s'expriment tels que :

$$\begin{cases} \tilde{x} = \int_{\xi_0=0}^{\xi_0=\xi} \sqrt{(x_{,\xi_0})^2 + (y_{,\xi_0})^2} d\xi_0 ; \\ J = \tilde{x}_{,\xi} = \sqrt{(x_{,\xi})^2 + (y_{,\xi})^2} ; \\ \frac{1}{r} = \frac{x_{,\xi}y_{,\xi\xi} - y_{,\xi}x_{,\xi\xi}}{J^3}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Ensuite, en utilisant le principe des éléments isoparamétriques, on cherche l'approximation  $(U_{G_1}^h, U_{G_3}^h, \theta_2^h)$  des composantes de déplacement  $(U_{G_1}, U_{G_3}, \theta_2)$  sous la forme :

$$U_{G_1}^h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) U_{G_1}^i ; \quad U_{G_3}^h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) U_{G_3}^i ; \quad \theta_2^h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \theta_2^i, \quad (2.12)$$

avec  $U_{G_1}^i, U_{G_3}^i$  et  $\theta_2^i$  les variables de contrôle de  $(U_{G_1}^h, U_{G_3}^h, \theta_2^h)$ . On note dans la suite  $\{U_{G_1}\}$  le vecteur de composantes  $U_{G_1}^i$  (respectivement  $\{U_{G_3}\}$  pour  $U_{G_3}^i$  et  $\{\theta_2\}$  pour  $\theta_2^i$ ). Le système linéaire à résoudre résultant de la substitution des déplacements équation (2.12) dans la forme faible équation (2.8) peut ainsi s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{13}]^T & [K_{23}]^T & [K_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_{G_1}\} \\ \{U_{G_3}\} \\ \{\theta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

avec, pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} K_{11}^{ij} &= \int_0^L \left( ES N_{i,\tilde{x}} N_{j,\tilde{x}} + \mu S \frac{N_i}{r} \frac{N_j}{r} \right) d\tilde{x}, & K_{22}^{ij} &= \int_0^L \left( ES \frac{N_i}{r} \frac{N_j}{r} + \mu S N_{i,\tilde{x}} N_{j,\tilde{x}} \right) d\tilde{x}, \\ K_{33}^{ij} &= \int_0^L (\mu S N_i N_j + E I N_{i,\tilde{x}} N_{j,\tilde{x}}) d\tilde{x}, & K_{12}^{ij} &= \int_0^L \left( -ES N_{i,\tilde{x}} \frac{N_j}{r} + \mu S \frac{N_i}{r} N_{j,\tilde{x}} \right) d\tilde{x}, \\ K_{13}^{ij} &= \int_0^L \left( \mu S \frac{N_i}{r} N_j \right) d\tilde{x}, & K_{23}^{ij} &= \int_0^L (\mu S N_{i,\tilde{x}} N_j) d\tilde{x}, \\ F_1^i &= \int_0^L f_{e_1} N_i d\tilde{x} + N_L N_i(\tilde{x} = L), & F_2^i &= \int_0^L f_{e_3} N_i d\tilde{x} + T_L N_i(\tilde{x} = L), \\ F_3^i &= \int_0^L m_{e_2} N_i d\tilde{x} + M_L N_i(\tilde{x} = L). \end{aligned}$$

**Remarque 4** Les équations pour une poutre droite sont évidentes avec les développements ci-dessus. Dans ce cas, il suffit de faire tendre  $r$  vers l'infini ce qui fait disparaître les termes en  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r^2}$ .

### 2.2.3 Illustration numérique du verrouillage

Pour les expérimentations numériques, on va envisager le problème de la poutre courbe de Timoshenko schématisé en figure 2.2. La poutre décrit un quart de cercle de rayon  $R = 100$ , elle est de section rectangulaire de largeur  $b = 1$  et d'épaisseur  $h$ , et ses paramètres matériaux sont : module de Young  $E = 10000$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0$  (on rappelle :  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ). On suit pour l'étude la démarche du travail de Echter et Bischoff [ECH 10] qui ont considéré le verrouillage d'une poutre NURBS droite de Timoshenko. On choisit d'encaster la poutre en  $\tilde{x} = 0$  et de la soumettre à un chargement en moment réparti de façon sinusoïdale  $m_{e_2}(\theta_0) = h^3 \sin \theta_0$ , où  $\theta_0 = (\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3)$  est l'angle paramétrant la géométrie ( $d\tilde{x} = r d\theta_0$ ). Ainsi, la sollicitation théorique ne doit comporter que

des déformations de flexion. Si l'élément est sensible au verrouillage, les déformations de cisaillement transversal et de membrane vont empêcher la flexion de se développer. De plus, on divise le chargement par  $h^3$  de sorte à le rendre proportionnel à la raideur de flexion. Par conséquent, les déplacements et la rotation seront indépendants de l'épaisseur ce qui facilitera l'étude pour différents élancements  $R/h$ . La solution exacte peut être calculée analytiquement en utilisant les formules de Bresse [BRE 57]. On obtient :

$$\begin{cases} U_{G_1}^{ex} = -\frac{12R^3}{Eb} \left[ \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{2} (\cos \theta_0 \sin 2\theta_0 - \sin \theta_0 \cos 2\theta_0 - 3 \sin \theta_0) \right] ; \\ U_{G_3}^{ex} = \frac{12R^3}{Eb} \left[ \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{2} (\sin \theta_0 \sin 2\theta_0 + \cos \theta_0 \cos 2\theta_0 - \cos \theta_0) \right] ; \\ \theta_2^{ex} = -\frac{12R^2}{Eb} \sin \theta_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

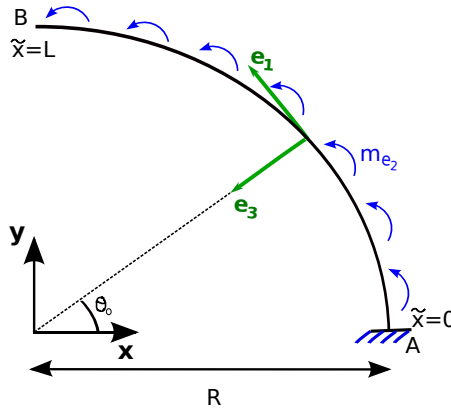


FIGURE 2.2: Poutre courbe de Timoshenko avec moment repartit de façon sinusoïdale le long de la poutre.

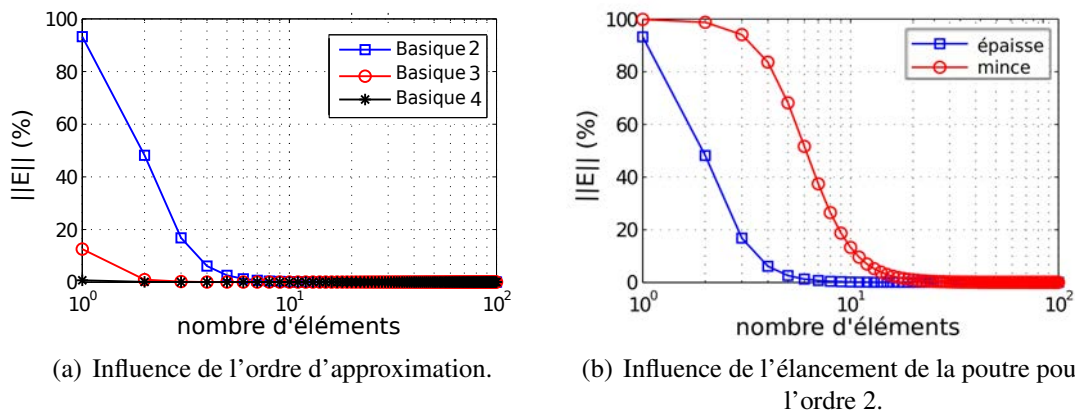
La géométrie de la poutre courbe est exactement représentée au moyen de la technologie NURBS avec un unique élément quadratique. On part du vecteur de nœuds  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$  auquel on associe les points de contrôle  $\mathbf{B}_1 = \{R \ 0\}_{(x,y)}^T$ ,  $\mathbf{B}_2 = \{R \ R\}_{(x,y)}^T$  et  $\mathbf{B}_3 = \{0 \ R\}_{(x,y)}^T$  de poids  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 1/\sqrt{2}$  et  $w_3 = 1$  respectivement puis, on applique la stratégie de raffinement  $k$  pour améliorer la discrétisation tout en gardant la géométrie exacte (cf. section 1.1.3). Évidemment, le rayon de courbure  $r$  en tout point de la ligne moyenne est connu sur cet exemple. Il vaut  $R$  le rayon du quart de cercle. Toutefois, ce rayon de courbure pourrait être calculé numériquement à chaque point de Gauss (cf. équation (2.11)). Pour des fonctions NURBS quadratiques et de plus haut degré, on le retrouve exactement.

Pour mener l'étude, on propose d'observer les résultats relatifs au déplacement normal  $U_{G_3}$ . Évidemment, des tendances similaires pourraient être observées avec les autres composantes de déplacement  $U_{G_1}$  et  $\theta_2$ . Tout d'abord, on étudie la convergence de la solution numérique  $U_{G_3}^h$  le long de la poutre en fonction du nombre d'éléments du maillage (voir

figure 2.3). Pour mesurer la qualité, on calcule l'erreur globale en norme  $L^2$  par rapport à la solution exacte :

$$\|E\| = \frac{\sqrt{\int_0^L (U_{G_3}^{ex} - U_{G_3}^h)^2 d\tilde{x}}}{\sqrt{\int_0^L (U_{G_3}^{ex})^2 d\tilde{x}}}. \quad (2.15)$$

Plus précisément, la figure 2.3(a) concerne les résultats obtenus avec les éléments NURBS d'ordre 2, 3 et 4 (calculés à partir du système équation (2.13)) sur une poutre relativement épaisse ( $R/h = 10$ ). On appelle ces éléments NURBS standards de degré  $p$  : "Basique  $p$ ". Ces éléments sont standards dans le sens où aucun traitement particulier n'est réalisé pour traiter le verrouillage. L'approximation quadratique est ensuite étudiée plus en détails dans la figure 2.3(b) où, en plus de la poutre épaisse ( $R/h = 10$ ), une poutre mince ( $R/h = 100$ ) est calculée. La convergence de la solution semble correcte : on retrouve bien la solution analytique et ce d'autant plus rapidement que l'ordre d'approximation est élevé. Maintenant, pour un ordre donné, on observe que la convergence dépend de l'élancement de la poutre : plus la poutre est élancée, plus il faut d'éléments pour obtenir une approximation satisfaisante de la solution. C'est la manifestation du verrouillage. Pour mieux l'observer, on représente dans la figure 2.4 l'erreur en fonction de l'élancement pour un maillage fixe composé de 5 éléments. On réalise cela pour des NURBS quadratiques, cubiques et quartiques. Le graphe confirme ce que l'on a énoncé plus haut : l'erreur est d'autant plus importante que l'élancement augmente. Cela signifie que le verrouillage est d'autant plus accentué que la poutre est mince. On remarque aussi d'après les courbes que l'élévation d'ordre permet effectivement d'atténuer le phénomène mais sans l'éliminer totalement (le verrouillage apparaît plus loin). L'objectif de développer des éléments insensibles au verrouillage peut dès lors se caractériser clairement sur cet exemple : les éléments doivent permettre de calculer une solution totalement indépendante de l'élancement de la poutre.



**FIGURE 2.3:** Tracé de l'erreur en norme  $L^2$  sur  $U_{G_3}^h$  en fonction du nombre d'éléments du maillage.

**Remarque 5** Concernant les valeurs des paramètres du cas test, aucune unité n'a été



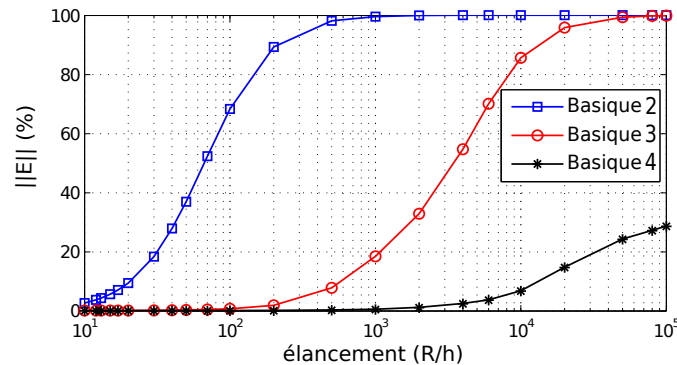


FIGURE 2.4: Influence de l'élanement de la poutre sur la solution.

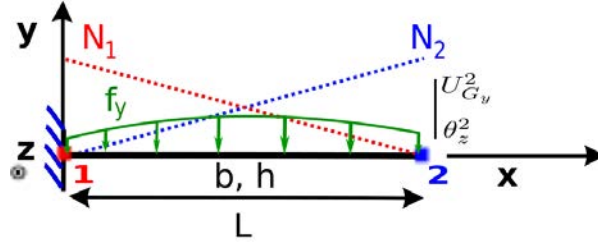
donnée. On a en fait supposé que l'on s'est placé dans le Système International d'unités (SI). Ainsi, aucune modification de valeur n'a été réalisée pour les paramètres en entrée et en sortie de notre code de calcul. Cette démarche sera valable pour l'ensemble des cas test menés dans ce travail.

## 2.2.4 Retour sur l'origine du verrouillage

Comme énoncé en début de section 1.2.3, le verrouillage est lié à l'incapacité des fonctions d'interpolation de reproduire la flexion sans cisaillement et la flexion sans membrane. Plus précisément, ceci signifie que le verrouillage réside dans l'impossibilité pour de la flexion non nulle ( $\chi_f^h \neq 0$ ) d'imposer la membrane nulle ( $\epsilon_m^h = 0$ ) et le cisaillement transversal nul ( $\gamma_{ct}^h = 0$ ) avec le choix d'approximation basique, c'est-à-dire avec des espaces d'approximation identiques pour chacune des composantes de déplacement (voir équation (2.12)). Cette impossibilité d'avoir  $\epsilon_m^h = 0$  et  $\gamma_{ct}^h = 0$  dans toute la structure pour des déplacements  $(U_{G_1}^h, U_{G_3}^h, \theta_2^h)$  non nuls provient de l'incompatibilité de degré dans les termes de déformation de membrane et de cisaillement : on a à la fois besoin des composantes du déplacement et de leur dérivée pour exprimer  $\epsilon_m^h$  et  $\gamma_{ct}^h$ .

Pour montrer le lien entre l'incompatibilité de degré des termes de déformation et le verrouillage, on propose dans ce paragraphe de se restreindre au cas élémentaire du verrouillage d'une poutre droite de Timoshenko discrétisée avec des éléments finis linéaires (voir figure 2.5 pour l'illustration). Ce choix a uniquement été fait pour des raisons de simplicité de calcul des différentes rigidités. Le phénomène mis en évidence dans ce cas simple est tout à fait comparable à celui intervenant dans le cas de la poutre courbe de la figure 2.2 discrétisée avec des NURBS de degré au moins égal à 2. La démarche utilisée pour l'explication ci-après est inspirée de celles communément fournies dans les ouvrages de référence en éléments finis classiques coque (cf., par exemple, [BAT 90], [HUG 00] (chapitre 5) et [BEL 00] (chapitre 9)). La poutre droite envisagée pour les calculs est encastree sur le bord gauche et est soumise à un chargement  $f_y$  impliquant flexion et cisaillement transversal. On prend pour la discrétisation un unique élément. Sa longueur est

$L$  comme la poutre.



**FIGURE 2.5:** Poutre droite en flexion cisaillement discrétisée avec un élément linéaire.

Pour ce problème, la formulation variationnelle devient simplement : trouver  $(U_{G_y}, \theta_z) \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\int_0^L (\mu S \gamma_{ct} \gamma_{ct}^* + EI \chi_f \chi_f^*) dx = \int_0^L U_{G_y}^* f_y dx \quad \forall (U_{G_y}^*, \theta_z^*) \in \mathcal{V}, \quad (2.16)$$

avec les déformations de cisaillement transversal et de flexion qui s'expriment comme suit :

$$\gamma_{ct} = U_{G_y,x} - \theta_z \quad ; \quad \chi_f = \theta_{z,x}. \quad (2.17)$$

Ici, seulement le verrouillage en cisaillement transversal est présent : on va voir qu'il est dû à l'incompatibilité de degré des termes  $U_{G_y,x}^h$  et  $\theta_z^h$  dans  $\gamma_{ct}^h$ . Pour la résolution numérique, on utilise les fonctions d'interpolation linéaires :

$$N_1(x) = -\frac{1}{L}x + 1 \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{1}{L}x, \quad (2.18)$$

ce qui nous permet d'aboutir, après prise en compte des conditions aux limites en déplacement par substitution, au système linéaire à résoudre suivant :

$$([K_{ct}] + [K_f]) \begin{Bmatrix} U_{G_y}^2 \\ \theta_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

où  $[K_{ct}]$  est la raideur de cisaillement transversal et  $[K_f]$  la raideur de flexion telles que :

$$[K_{ct}] = \mu S \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \quad ; \quad [K_f] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

En faisant ressortir l'élanement de l'élément, le système peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left( \frac{12\mu}{E} \left( \frac{L}{h} \right)^2 [\tilde{K}_{ct}] + [\tilde{K}_f] \right) \begin{Bmatrix} U_{G_y}^2 \\ \theta_z^2 \end{Bmatrix} = \frac{12L}{Ebh^3} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

avec

$$[\tilde{K}_{ct}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2L} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; \quad [\tilde{K}_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

On remarque que lorsque l'élanement ( $L/h$ ) devient très important, la raideur de cisaillement transversal devient prépondérante par rapport à la raideur de flexion. Ceci reflète bien le fait que la solution associée au cisaillement (de l'ordre de  $[K_{ct}]^{-1}\{F\}$ ) devienne quasiment nulle par rapport à la solution de flexion ( $\approx [K_f]^{-1}\{F\}$ ) pour une poutre mince. Toutefois, un problème numérique peut apparaître dans le cas où  $[\tilde{K}_{ct}]$  est inversible. Au lieu de représenter correctement la flexion, c'est-à-dire de calculer :

$$\begin{Bmatrix} U_{G_y}^2 \\ \theta_z^2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{12\mu}{E} \left( \frac{L}{h} \right)^2 [\tilde{K}_{ct}] + [\tilde{K}_f] \right)^{-1} \frac{12L}{Ebh^3} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

la solution obtenue numériquement peut se bloquer sur la solution en cisaillement transversal :

$$\begin{Bmatrix} U_{G_y}^2 \\ \theta_z^2 \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{\mu bhL} [\tilde{K}_{ct}]^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

C'est ainsi que s'explique le verrouillage en cisaillement transversal. Pour l'éviter, il faut que  $[\tilde{K}_{ct}]$  soit non inversible de sorte à forcer numériquement la prise en compte de la contribution de flexion ( $[\tilde{K}_f]$ ) pour résoudre le système linéaire comme dans l'équation (2.23) et non pas comme dans l'équation (2.24). L'opérateur  $[\tilde{K}_{ct}]$  est non inversible s'il possède au moins une valeur propre nulle. Pour cela, il faut être capable de représenter un cisaillement transversal nul qui ne conduise pas à une solution en déplacement nulle. Ceci n'est pas possible ici puisque :

$$\gamma_{ct}^h = \frac{1}{L} U_{G_y}^2 - \frac{x}{L} \theta_z^2. \quad (2.25)$$

Obtenir  $\gamma_{ct}^h = 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$  impose deux contraintes qui vont inévitablement se traduire par  $U_{G_y}^2 = 0$  et  $\theta_z^2 = 0$ . Cela signifie un rang de 2 pour  $[\tilde{K}_{ct}]$  et par conséquent  $[\tilde{K}_{ct}]$  est inversible. Il y a une contrainte de trop. Il faut alors un maillage suffisamment fin pour que l'élanement de l'élément ( $L/h$ ) ne soit pas trop important afin de limiter le poids de  $(12\mu L^2/Eh^2) \times [\tilde{K}_{ct}]$  par rapport à  $[\tilde{K}_f]$  et ainsi, rendre compte du comportement de flexion (équation (2.21)). Pour éliminer cette contrainte supplémentaire quel que soit le nombre d'éléments du maillage, il est nécessaire d'appliquer les méthodes sans verrouillage de la partie 1.2.3. Par exemple, on peut élever l'ordre d'interpolation pour limiter le ratio contraintes supplémentaires sur nombre de degrés de liberté (approximations de plus haut ordre), choisir un espace d'approximation linéaire pour  $U_{G_y}^h$  et constant par élément pour  $\theta_z^h$  (méthodes des champs compatibles), prendre en compte un unique point d'intégration par élément pour calculer  $\gamma_{ct}^h$  (techniques d'intégration réduite), rechercher dans le même temps que les déplacements un effort de cisaillement constant par

élément (méthodes mixtes) ou encore, rechercher une déformation de cisaillement modifiée constante par élément (méthodes ANS et  $\bar{B}$ ). C'est ce que nous allons tenter de faire dans la suite pour le cas de la poutre courbe calculée avec des fonctions NURBS de degré au moins égal à 2.

**Remarque 6** *Il est à noter que nous n'avons pas envisagé les méthodes de champs compatibles pour la poutre courbe. En effet, il n'est pas possible de trouver directement des espaces d'approximation compatibles respectant à la fois le cisaillement et la membrane (cf. équation (2.6)).*

## 2.3 Construction d'un élément basé sur une technique d'intégration réduite

### 2.3.1 Difficulté de l'approche avec les fonctions NURBS

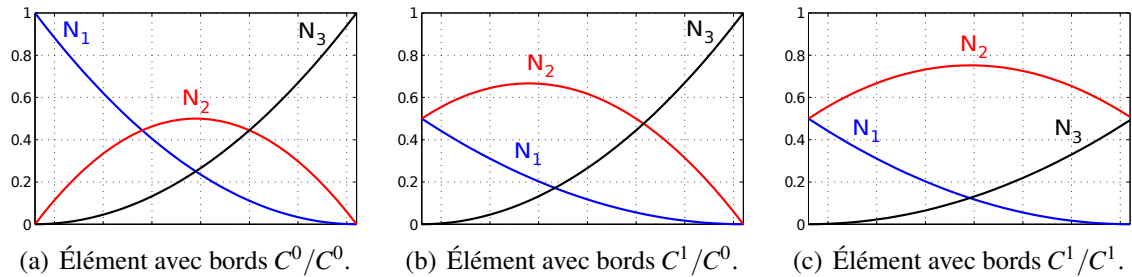
On commence par envisager d'étendre les techniques d'intégration réduite et sélective aux NURBS. La matrice de rigidité globale  $[K]$  du problème de poutre courbe donnée dans l'équation (2.13) peut se ré-arranger telle que :

$$[K] = [K_m] + [K_{ct}] + [K_f], \quad (2.26)$$

où  $[K_m]$ ,  $[K_{ct}]$  et  $[K_f]$  sont construites à partir des énergies de membrane, de cisaillement et de flexion. On rappelle que l'idée de la méthode est de relâcher les trop nombreuses contraintes de membrane et de cisaillement responsables du verrouillage en intégrant les raideurs  $[K_m]$  et  $[K_{ct}]$  avec moins de points d'intégration que nécessaire. Ces méthodes sont donc très attractives pour l'ingénieur car elles résultent en une modification très légère du code et vont avec une réduction du coût de calcul. Ceci explique leur intérêt particulier dans les codes commerciaux (cf. [Liv 07, MAK 95]). Plus précisément, si la règle d'intégration réduite est aussi utilisée pour la raideur  $[K_f]$ , on parlera d'intégration *réduite* alors que si seulement la raideur de membrane et de cisaillement sont intégrées de façon réduite, on dira que l'on fait de l'intégration *sélective*. Pour simplifier, on se place tout d'abord dans le cas de l'intégration sélective.

La difficulté majeure de telles stratégies avec les fonctions NURBS vient du fait que la règle habituelle d'intégration basée sur les points de Gauss n'est pas optimale pour une classe de continuité strictement supérieure à  $C^0$  aux nœuds frontières des éléments du maillage. La règle de Gauss implique plus de points d'intégration que nécessaire dans ce cas, et ce d'autant plus que la continuité des fonctions au travers des nœuds est élevée. Il semble alors que la seule façon de développer des règles d'intégration optimales pour les NURBS soit de raisonner sur l'ensemble du patch qui, moyennant l'utilisation d'un vecteur de nœuds ouvert, est  $C^0$  à sa frontière (cf. Hughes *et al.* [HUG 10]). Cela complexifie l'implémentation car d'une part, il faut en pré-traitement résoudre un problème d'optimisation pour connaître la règle d'intégration optimale du patch et d'autre part, on ne peut plus adopter une démarche élément par élément pour construire les rigidités.

Pour rester intéressant d'un point de vue ingénieur, on propose ici de conserver l'architecture élément par élément du code de calcul et aussi, de conserver une règle d'intégration basée sur les points de Gauss. La difficulté d'établir une règle réduite apparaît dès lors clairement : comment connaître le nombre de points d'intégration à supprimer pour éliminer le verrouillage sans avoir une règle de référence optimale ? Le degré et la continuité devant être pris en compte pour cela, il semble qu'un point clé du problème soit de considérer chaque cas de continuité et de degré des éléments finis NURBS et de définir pour chacun, une règle d'intégration réduite. Une telle démarche paraît envisageable pour des approximations NURBS de bas ordre, car alors peu de cas sont à traiter. En effet, si l'on considère des NURBS quadratiques en 1D, il y a seulement 3 types différents d'éléments (voir figure 2.6). Par contre, pour du NURBS cubique, ce sont 6 cas différents d'éléments qui apparaissent et plus généralement pour un ordre  $p$  quelconque, le nombre de possibilités atteint  $\frac{p(p+1)}{2}$ .



**FIGURE 2.6:** Fonctions de forme B-Spline locales pour chaque cas d'élément pour l'approximation quadratique.

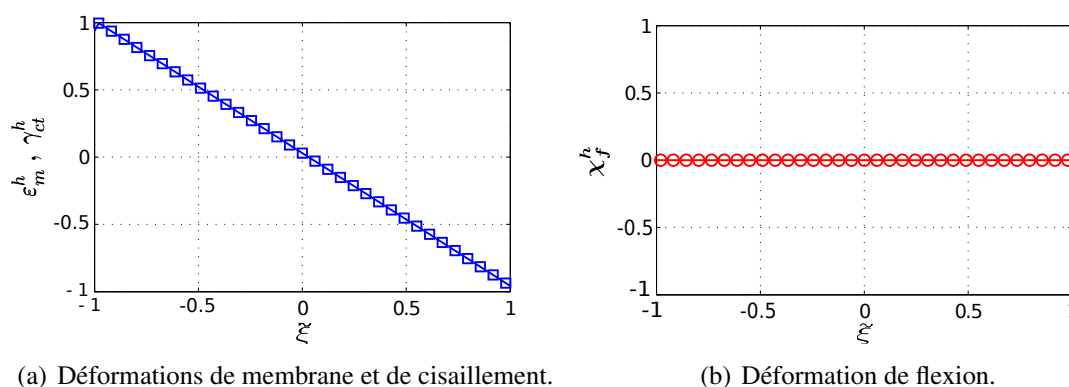
### 2.3.2 Développement d'une stratégie pour des NURBS quadratiques

Pour les raisons évoquées au paragraphe précédent, on se limite ici à des approximations NURBS d'ordre 2. Les cas à traiter sont ainsi les trois éléments représentés sur la figure 2.6. Si nous étions dans le cas éléments finis classiques avec les fonctions de forme habituelles de Lagrange, la règle d'intégration optimale pour intégrer exactement  $[K_m]$  et  $[K_{ct}]$  nécessiterait :

$$n^{Gauss} = \frac{4+2}{2}, \quad (2.27)$$

c'est-à-dire 3 points de Gauss par élément puisque le terme de plus haut degré rencontré est du type  $\int_0^L N_i N_j d\tilde{x}$ , soit de degré 4. Toujours avec cette hypothèse d'éléments finis traditionnels, la règle réduite consisterait à prendre 2 points de Gauss par élément, c'est-à-dire la règle associée à des éléments linéaires. Cela suffirait à supprimer le verrouillage en membrane et en cisaillement. Par conséquent, il semble évident de définir pour l'élément fini NURBS de degré 2 avec deux bords  $C^0$  (cf. figure 2.6(a)), qui mène en fait à une approximation identique à celle de l'élément fini quadratique classique, la même règle réduite. Ensuite, il faut diminuer le nombre de points d'intégration pour les deux

autres éléments NURBS quadratiques de continuité supérieure ( $C^1/C^0$  et  $C^1/C^1$ , cf. figures 2.6(b) et 2.6(c) respectivement). L'utilisation d'un unique point de Gauss pour ces éléments permet de supprimer le verrouillage mais laisse la possibilité à un mode de hourglass de se développer, ce qui génère une instabilité dans le système. Plus précisément, cette instabilité se traduit par une valeur propre quasi nulle de la matrice de rigidité élémentaire qui ne correspond pas à un mouvement de solide rigide. La matrice de rigidité élémentaire possède donc un rang déficient de 1. Le mode de hourglass est le mode propre associé à cette valeur propre quasi nulle. Il s'avère que c'est le même pour l'élément de bords  $C^1/C^0$  et l'élément de bords  $C^1/C^1$ . Sa forme en termes de déformation est représentée sur la figure 2.7 dans le domaine associé à l'élément parent. On comprend alors son origine puisque l'évaluation du mode en seulement  $\xi = 0$  conduit à une déformation de membrane et de cisaillement nulle ce qui l'empêche de produire de l'énergie. Si l'on avait pris deux points de Gauss, il y aurait eu production d'énergie de membrane et de cisaillement et le mode ne se développerait pas. Pour la partie flexion, comme la rigidité est intégrée avec la règle basique pour les NURBS, c'est-à-dire avec  $(p + 1) = 3$  points de Gauss, il est normal de trouver une déformation de flexion du mode de hourglass nulle partout dans l'élément. La contribution de flexion est absente dans le mode de hourglass.



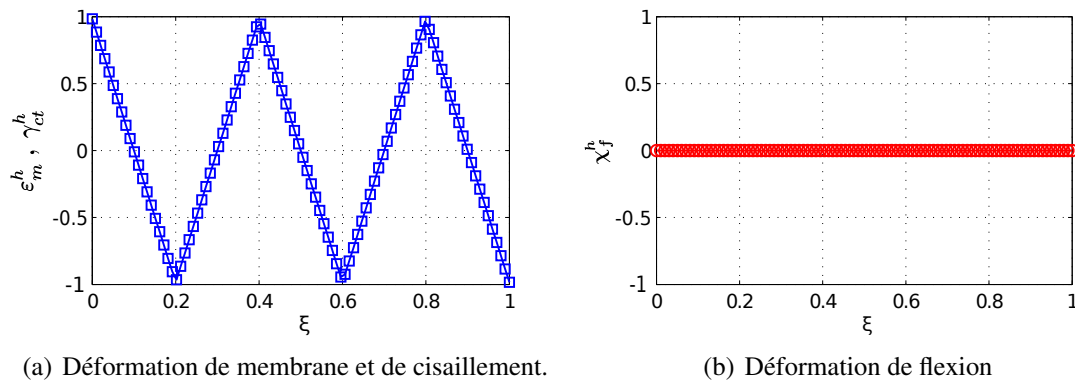
**FIGURE 2.7:** Forme du mode de hourglass dans les éléments quadratiques  $C^1/C^0$  et  $C^1/C^1$  dû à une intégration sélective avec un unique point de Gauss (en  $\xi = 0$ ).

Maintenant, il faut noter que dans le cas de régularité supérieure des NURBS, ce mode de hourglass n'est pas propre à chacun des éléments du maillage. En effet, au niveau d'une frontière  $C^1$ , la déformation sera  $C^0$  si bien que le mode va en quelque sorte se transmettre par continuité entre les deux éléments adjacents au nœud frontière. Fort de ce constat, il apparaît en fait qu'on a la présence d'un unique mode de hourglass continu sur une série d'éléments compris entre deux nœuds  $C^0$  (voir figure 2.8 pour la forme du mode dans le domaine paramétrique pour un patch complet). Par conséquent, le mode de hourglass peut vraisemblablement être éliminé en ajoutant un point de Gauss dans un seul des éléments compris dans une zone délimitée par deux nœuds  $C^0$ . Globalement, la règle réduite qui en découle peut être résumée comme suit :

1. prendre un point de Gauss par élément ;

2. ajouter arbitrairement un point de Gauss dans un élément compris entre deux nœuds de continuité  $C^0$ .

En pratique, on choisit de placer le point de Gauss supplémentaire dans l'élément le plus au centre possible de la zone entre deux nœuds  $C^0$  de sorte qu'il interfère moins avec les frontières de la zone. Il apparaît en fait sur les résultats numériques que la qualité de la solution est meilleure avec un tel choix de positionnement de ce point de Gauss. Pour assurer une bonne compréhension, on complète ces développements en explicitant dans la figure 2.9 la règle d'intégration réduite appliquée à différents maillages. On verra dans la section 2.7 que cette stratégie permet de supprimer complètement le verrouillage tout en maintenant un rang correct pour la matrice de rigidité globale.

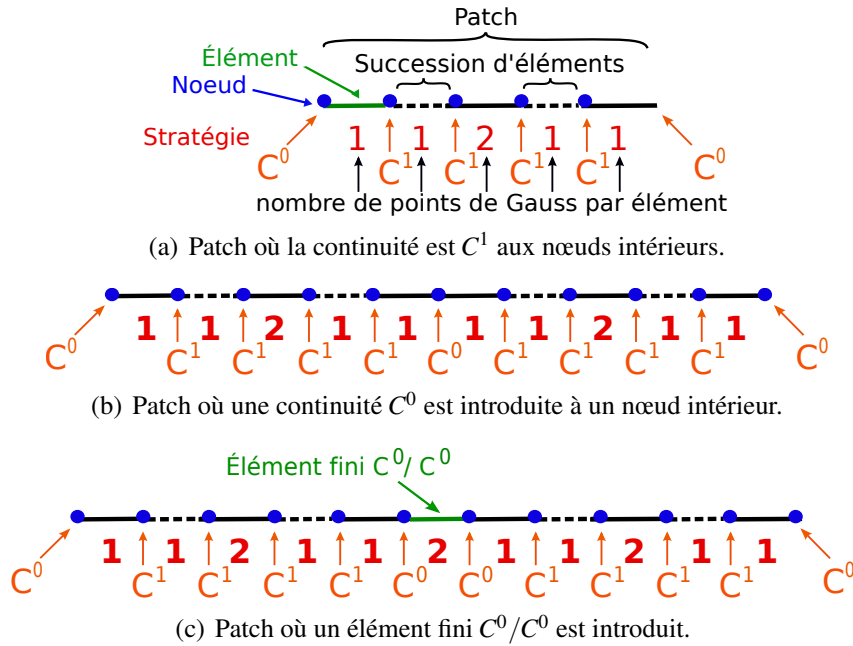


**FIGURE 2.8:** Forme du mode de hourglass pour un maillage quadratique composé de 5 éléments avec continuité  $C^1$  aux nœuds intérieurs.

### 2.3.3 Contrôle de hourglass

Alternativement, on peut suivre la vision de Belytschko *et al.* [FLA 81, BEL 84, LIU 84] pour le contrôle de hourglass. Elle consiste à ajouter une rigidité de stabilisation à la rigidité sous intégrée. Ici, cela signifie qu'à la place de mettre un point d'intégration supplémentaire dans un élément entre deux nœuds  $C^0$ , il nous faut calculer une rigidité élémentaire de stabilisation propre à cet élément.

La construction de cette rigidité de stabilisation est assez courante en éléments finis classiques. Toutefois, peu d'auteurs s'attardent à expliquer clairement l'origine de cette matrice. On tente dans la suite de donner quelques explications. Cette matrice de raideur artificielle doit permettre, lorsque appliquée au champ de déplacement, de fournir une énergie correspondante au mode de hourglass afin d'empêcher l'activation de ce dernier. Il faut par conséquent commencer par déterminer l'énergie propre au mode de hourglass puis, voir comment la générer avec le champ de déplacement. Pour cela, on suppose des déformations modifiées dans l'élément comme la somme des déformations classiques et des déformations dues au mode de hourglass. Les déformations élémentaires classiques



**FIGURE 2.9:** La règle d'intégration réduite basée sur les points de Gauss pour des NURBS quadratiques.

sont notées  $\varepsilon_m^{eh}$ ,  $\gamma_{ct}^{eh}$  et  $\chi_f^{eh}$  et les déformations élémentaires modifiées  $\varepsilon_m^{emodh}$ ,  $\gamma_{ct}^{emodh}$  et  $\chi_f^{emodh}$ . Avec ceci, on peut écrire dans le domaine de l'élément parent :

$$\begin{cases} \varepsilon_m^{emodh}(\tilde{\xi}) = \varepsilon_m^{eh} + a_\varepsilon \tilde{\xi} \\ \gamma_{ct}^{emodh}(\tilde{\xi}) = \gamma_{ct}^{eh} + a_\gamma \tilde{\xi} \\ \chi_f^{emodh}(\tilde{\xi}) = \chi_f^{eh} \end{cases} \quad (2.28)$$

$a_\varepsilon$  et  $a_\gamma$  sont des inconnues supplémentaires qui constituent l'amplitude du mode de hourglass. L'énergie de déformation élémentaire  $E_d^{eh}$  du problème modifié est :

$$E_d^{eh} = \frac{1}{2} \{U^e\}^T [K^e] \{U^e\} + \{a^e\}^T [K_{au}^e] \{U^e\} + \frac{1}{2} \{a^e\}^T [K_{aa}^e] \{a^e\}, \quad (2.29)$$

où l'on a noté :

- $[K^e]$  la matrice élémentaire de  $[K]$  (équation (2.13)) ;
- $\{U^e\}$  le vecteur élémentaire des variables de contrôle  $U_{G_1}^i$ ,  $U_{G_3}^i$  et  $\theta_2^i$  (équation (2.12)) ;
- $\{a^e\} = \{a_\varepsilon \ a_\gamma\}^T$  le vecteur élémentaire de l'amplitude de hourglass.

L'énergie  $E_d^{eh}$  (équation (2.29)) conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} [K^e] & [K_{au}^e]^T \\ [K_{au}^e] & [K_{aa}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{a^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^e\} \\ \{0 \ 0\}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$



avec :

$$[K_{aa}^e] = \begin{bmatrix} \int_{L_e} ES(\tilde{\xi})^2 d\tilde{x} & 0 \\ 0 & \int_{L_e} \mu S(\tilde{\xi})^2 d\tilde{x} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

et :

$$[K_{au}^e] \text{ tel que } [K_{au}^{e_i}] = \begin{bmatrix} \int_{L_e} ESN_{i,\tilde{x}}\tilde{\xi}d\tilde{x}s & - \int_{L_e} ES\frac{N_i}{r}\tilde{\xi}d\tilde{x} & 0 \\ \int_{L_e} \mu S\frac{N_i}{r}\tilde{\xi}d\tilde{x} & \int_{L_e} \mu SN_{i,\tilde{x}}\tilde{\xi}d\tilde{x} & - \int_{L_e} \mu SN_i\tilde{\xi}d\tilde{x} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  $L_e$  est la longueur de l'élément dans lequel le contrôle de hourglass est effectué. Maintenant, pour obtenir la contribution du mode de hourglass dans le champ de déplacement  $\{U^e\}$ , la méthode propose d'ajouter une rigidité  $[K_{stab}^e]$  au système tel que :

$$\begin{bmatrix} [K^e] + [K_{stab}^e] & [K_{au}^e]^T \\ [K_{au}^e] & [K_{aa}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^e\} \\ \{a^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^e\} \\ \{0 \quad 0\}^T \end{Bmatrix}, \quad (2.33)$$

avec

$$[K_{stab}^e] = [K_{au}^e]^T [K_{aa}^e]^{-1} [K_{au}^e], \quad (2.34)$$

de sorte que la solution recherchée dans l'équation (2.33) soit bien associée à celle du problème de départ, c'est-à-dire  $[K^e]\{U^e\} = \{F^e\}$ . L'énergie correspondant au mode de hourglass  $E_{d_{hg}}^{e_h}$ , peut dès lors s'exprimer dans le champ de déplacement telle que :

$$E_{d_{hg}}^{e_h} = \frac{1}{2} \{U^e\}^T [K_{stab}^e] \{U^e\}. \quad (2.35)$$

$[K_{stab}^e]$  constitue la rigidité élémentaire artificielle de stabilisation à ajouter au système sous intégré. Pour ne pas être nulle, elle doit être évaluée soit avec la règle d'intégration complète, soit de façon analytique. Pour simplifier, on utilise dans ce travail la règle d'intégration complète. En pratique, on ajoute devant cette matrice un coefficient de pénalisation  $\mathcal{P}$  afin de pondérer la part de cette énergie artificielle dans l'énergie de déformation du problème. Il faut que l'énergie artificielle soit juste suffisante pour éviter le mode hourglass sans réellement prendre part à l'énergie totale du problème. En fait, une large fourchette de valeurs de  $\mathcal{P}$  permet un contrôle de hourglass efficace (par exemple pour  $\mathcal{P} \in [10^{-3}, 10]$  sur le problème de poutre courbe de la figure 2.2 discrétisée avec 5 éléments). On prendra  $\mathcal{P} = 1$  dans les expérimentations numériques. En conclusion, cette méthode consiste à remplacer la matrice de rigidité élémentaire appropriée par  $[K_m^e] + [K_{ct}^e] + [K_f^e] + \mathcal{P}[K_{stab}^e]$ , où  $[K_m^e]$  et  $[K_{ct}^e]$  sont intégrés avec 1 point de Gauss et,  $[K_f^e]$  et  $[K_{stab}^e]$  sont évalués avec 3 points de Gauss.

**Remarque 7** *Étant donné que pour les NURBS il suffit de faire le contrôle de hourglass dans un seul élément entre deux nœuds de continuité  $C^0$ , le surcôt numérique de la*

stabilisation est faible. Ceci constitue un nouvel avantage par rapport aux éléments finis classiques. En effet en FEA, les fonctions traditionnelles de Lagrange étant  $C^0$  aux bords des éléments, les déformations sont  $C^{-1}$  et ainsi, le contrôle de hourglass doit se faire dans tous les éléments du maillage.

**Remarque 8** On aurait pu envisager pour l'étude de l'intégration réduite plutôt que de l'intégration sélective. Dans ce cas, la contribution de flexion du mode de hourglass n'aurait pas été nulle. Elle aurait été de la même forme que les contributions de membrane et de cisaillement si bien qu'il aurait fallu appliquer exactement le même traitement à  $[K_f]$  qu'à  $[K_m]$  et  $[K_{ct}]$  pour le contrôle de hourglass.

**Remarque 9** Dans le même temps que ce travail [BOU 12], une seconde contribution suite à [HUG 10] concernant des règles d'intégration optimales pour les NURBS a vu le jour. C'est celle de Auricchio et al. [AUR 12] où il est question de développer des règles quasi-optimales en maintenant une architecture élément par élément du code de calcul. Pour cela, de façon analogue à ce qui est fait ici pour le quadratique, chaque cas de continuité et de degré d'élément NURBS est étudié. On pourrait ainsi penser à développer des règles d'intégration réduite en dégénérant ces nouvelles règles quasi-optimales. Pour de l'ordre 2, il ne semble pas que l'on puisse véritablement gagner en efficacité par rapport à la stratégie que nous avons développée. Par contre, une telle démarche pourrait s'avérer efficace pour généraliser la stratégie à des éléments NURBS de plus haut ordre.

## 2.4 Construction d'un élément basé sur une méthode de projection $\bar{B}$

Afin de développer un formalisme plus général adapté à tous types de degré et continuité supérieurs des approximations NURBS et, de faciliter la généralisation en 3D pour le traitement de coque, on envisage à présent d'éliminer le verrouillage au moyen d'une méthode de projection  $\bar{B}$ . Originellement développée en éléments finis classiques par Hughes [HUG 80], la méthode a plus récemment été étendue au cas NURBS pour traiter le verrouillage volumétrique (cf. Elguedj *et al.* [ELG 07]). L'objectif ici est d'adapter la procédure décrite dans [ELG 07] au cas du verrouillage en membrane et en cisaillement de la poutre courbe.

### 2.4.1 Principe et formulation $\bar{B}$

Comme pour l'intégration sélective, on commence par décomposer le système linéaire en faisant ressortir la contribution de membrane ( $ES$ ), cisaillement ( $\mu S$ ) et flexion ( $EI$ ) (voir équation (2.26)). De nouveau, les termes de membrane et de cisaillement vont être modifiés. Pour cela, l'idée cette fois-ci est de projeter les déformations associées ( $\epsilon_m$  et  $\gamma_{ct}$ ) sur une base de dimension inférieure afin de supprimer les contraintes liées au

verrouillage. On précise que pour cette méthode, il n'est plus question de jouer sur les règles d'intégration. Les différentes intégrales rencontrées seront évaluées avec la règle classique pour les NURBS, soit  $(p + 1)$  points de Gauss pour les éléments de degré  $p$ .

On utilise un opérateur de projection linéaire  $\pi$  permettant de construire les déformations de membrane et de cisaillement modifiées :

$$\bar{\varepsilon}_m = \pi(\varepsilon_m) \quad ; \quad \bar{\gamma}_{ct} = \pi(\gamma_{ct}). \quad (2.36)$$

L'énergie potentielle modifiée  $\bar{E}_p$  prenant en compte ces nouvelles déformations s'écrit, avec  $(\mathbf{U}_G, \theta) \in \mathcal{V}$  (équation (2.7)) et  $l(\cdot)$  définie équation (2.9) :

$$\bar{E}_p(\mathbf{U}_G, \theta) = \int_0^L e_d(\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}, \chi_f) d\bar{x} - l(\mathbf{U}_G, \theta), \quad (2.37)$$

où  $e_d$  constitue la densité d'énergie de déformation :

$$e_d(\varepsilon_m, \gamma_{ct}, \chi_f) = \frac{1}{2} (ES\varepsilon_m^2 + \mu S\gamma_{ct}^2 + EI\chi_f^2). \quad (2.38)$$

Comme  $\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}$  (et bien évidemment  $\chi_f$ ) sont des opérateurs linéaires, on peut écrire avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \in \mathcal{V}$  :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m((\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha(\mathbf{U}_G^*, \theta^*)) = \bar{\varepsilon}_m(\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha\bar{\varepsilon}_m(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \\ \bar{\gamma}_{ct}((\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha(\mathbf{U}_G^*, \theta^*)) = \bar{\gamma}_{ct}(\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha\bar{\gamma}_{ct}(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \\ \chi_f((\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha(\mathbf{U}_G^*, \theta^*)) = \chi_f(\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha\chi_f(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \end{cases} \quad (2.39)$$

Ainsi, la dérivée directionnelle de la densité d'énergie de déformation modifiée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_d(\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}, \chi_f((\mathbf{U}_G, \theta) + \alpha(\mathbf{U}_G^*, \theta^*)))}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial e_d(\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}, \chi_f(\mathbf{U}_G, \theta))}{\partial \varepsilon_m} \bar{\varepsilon}_m(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \\ &+ \frac{\partial e_d(\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}, \chi_f(\mathbf{U}_G, \theta))}{\partial \gamma_{ct}} \bar{\gamma}_{ct}(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \\ &+ \frac{\partial e_d(\bar{\varepsilon}_m, \bar{\gamma}_{ct}, \chi_f(\mathbf{U}_G, \theta))}{\partial \chi_f} \chi_f(\mathbf{U}_G^*, \theta^*), \end{aligned} \quad (2.40)$$

ce qui nous permet de définir les efforts généralisés modifiés comme suit :

$$\bar{N} = ES\bar{\varepsilon}_m \quad ; \quad \bar{T} = \mu S\bar{\gamma}_{ct}. \quad (2.41)$$

La minimisation de l'énergie potentielle modifiée (équation (2.37)) peut finalement être menée afin d'obtenir la formulation faible  $\bar{B}$  du problème : trouver  $(\mathbf{U}_G, \theta) \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\bar{b}((\mathbf{U}_G, \theta), (\mathbf{U}_G^*, \theta^*)) = l(\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \quad \forall (\mathbf{U}_G^*, \theta^*) \in \mathcal{V}, \quad (2.42)$$

avec la forme bilinéaire  $\bar{b}(\cdot, \cdot)$  suivante :

$$\bar{b}((\mathbf{U}_G, \theta), (\mathbf{U}_G^*, \theta^*)) = \int_0^L (ES\bar{\varepsilon}_m\bar{\varepsilon}_m^* + \mu S\bar{\gamma}_{ct}\bar{\gamma}_{ct}^* + EI\chi_f\chi_f^*) d\bar{x}. \quad (2.43)$$

## 2.4.2 Construction : formulation discrète $\bar{B}$

Il nous faut à présent définir l'opérateur linéaire de projection  $\pi$ , c'est-à-dire choisir la norme et l'espace de projection qui lui sont associés. Pour cela, on utilise une stratégie similaire à celle de [ELG 07].

Concernant l'espace de projection, on envisage pour interpoler les déformations  $\bar{B}$  des fonctions de degré polynomial  $(p - 1)$  si les déplacements sont recherchés dans un espace de degré  $p$ . Ainsi, si l'on suppose que l'espace des déplacements (de fonctions de base  $(N_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ ) est donné et noté  $Q_p$  (pour un degré polynomial  $p$  des fonctions  $N_i$ ), on choisit l'espace de projection  $Q_{p-1}$  généré par les fonctions de base "tilde"  $((\tilde{N}_i)_{i \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}})$ . Avec les fonctions NURBS, il faut aussi préciser la régularité au travers des différents nœuds du maillage. Sans innovation, on procède comme pour le degré : on considère une classe de continuité de moins aux nœuds intérieurs du patch<sup>1</sup> pour les fonctions  $(\tilde{N}_i)_{i \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}}$  que pour les fonctions  $(N_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ . Ce choix d'espaces  $Q_p/Q_{p-1}$  paraît cohérent vis-à-vis de ce qui est fait habituellement en éléments finis classiques. En effet, dans le cas de fonctions linéaires de type Lagrange pour le déplacement (espace  $Q_1$ ), les déformations projetées sont recherchées constantes dans l'élément et discontinues d'un élément à l'autre (espace  $Q_0$ ), ce qui permet bien d'éliminer la contrainte supplémentaire responsable du verrouillage (cf. section 2.2.4). Si maintenant on fait l'analogie avec les problèmes de structures quasi-incompressibles, on retrouve avec cette stratégie l'élément de la dilatation moyenne de Nagtegaal *et al.* [NAG 74].

La construction de l'espace NURBS de projection  $Q_{p-1}$  est assez aisée à partir de l'espace utilisé pour les déplacements  $Q_p$ . On commence par définir les fonctions B-Spline associées. Le degré polynomial étant connu, il suffit d'établir le vecteur de nœuds pour construire les fonctions (cf section 1.1.3). On note  $\Xi_p$  le vecteur de nœuds correspondant à  $Q_p$  et  $\Xi_{p-1}$  celui associé à  $Q_{p-1}$ . On prend  $p = 2$ . On peut écrire  $\Xi_2$  comme suit :

$$\Xi_2 = \{0, 0, 0, \Xi_{int}, 1, 1, 1\}. \quad (2.44)$$

$\Xi_{int}$  désigne le vecteur des nœuds intérieurs et, pour être ouvert, le 0 et le 1 sont répétés  $2 + 1 = 3$  fois.  $\Xi_1$  associé se définit tout simplement tel que :

$$\Xi_1 = \{0, 0, \Xi_{int}, 1, 1\}. \quad (2.45)$$

La seule modification à apporter est de répéter le 0 et le 1 seulement  $1 + 1 = 2$  fois, ceci afin de maintenir le vecteur de nœuds ouvert tout en permettant une interpolation linéaire. Une illustration est donnée sur la figure 2.10 pour un maillage constitué de deux éléments. Dans le cas des NURBS, il faut ajouter les poids pour définir les fonctions. Ceci est réalisé très simplement en pratique car la plupart des géométries usuelles se représentent exactement avec du NURBS d'ordre 2. Nous ne verrons d'ailleurs que des

1. Une exception peut être faite dans le cas d'une continuité  $C^0$  à un nœud intérieur pour  $p \geq 2$ . Au lieu de considérer des fonctions  $C^{-1}$  pour  $Q_{p-1}$ , on peut garder la continuité  $C^0$  à ce nœud (cf. [ELG 07]). Ceci a peu d'importance sur le résultat final mais peut s'avérer plus simple à implémenter suivant la structure du code de calcul. Dans ce travail, ce n'est pas ce qui est fait : la règle d'une classe de continuité de moins est appliquée dans tous les cas.

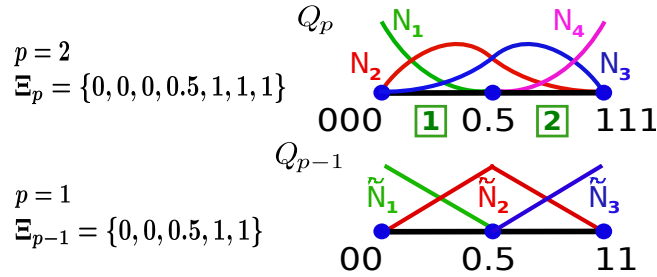
géométries de ce type dans ce travail. Ainsi, pour  $p > 2$  les poids de  $Q_{p-1}$  sont pris tels que permettant de représenter exactement la géométrie de la structure. Pour  $p = 2$ , on a l'espace de projection  $Q_1$ , c'est-à-dire que les fonctions NURBS sont les fonctions B-Spline (poids de 1). Aussi, il est à noter que les fonctions  $N_i$  sont construites dans le domaine paramétrique. On peut donc les écrire comme suit :

$$N_i \circ \psi^{-1}(\tilde{x}), \quad (2.46)$$

où  $\psi$  est la transformation NURBS exacte entre l'espace paramétrique et l'espace physique (voir figure 1.4). On construit la base tilde de la même façon :

$$\tilde{N}_i \circ \psi^{-1}(\tilde{x}). \quad (2.47)$$

Par conséquent, même pour un degré  $p - 1$  de l'espace de projection plus faible que le degré  $p$  minimum permettant de représenter exactement la géométrie, la transformation exacte  $\psi$  (associée au degré  $p$ ) est utilisée. Cela signifie que mêmes les éléments  $\bar{B}$  de bas ordre (typiquement  $Q_2/Q_1$  pour nous) sont isogéométriques.



**FIGURE 2.10:** Fonctions de base B-Spline  $Q_p/Q_{p-1}$  pour un patch composé de deux éléments quadratiques.

Dans le cas discret, l'équation (2.36) devient :

$$\bar{\epsilon}_m^h = \sum_{A=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_A \bar{\epsilon}_m^{A,h} \quad ; \quad \bar{\gamma}_{ct}^h = \sum_{A=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_A \bar{\gamma}_{ct}^{A,h} \quad ; \quad (2.48)$$

où  $\bar{\epsilon}_m^{A,h}$  (respectivement  $\bar{\gamma}_{ct}^{A,h}$ ) est la projection de  $\bar{\epsilon}_m^h$  (resp.  $\bar{\gamma}_{ct}^h$ ) sur  $\tilde{N}_A$ . Pour construire ces projections, on utilise la norme  $L^2$  :

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_m^{A,h} = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} \left( \tilde{N}_B, \bar{\epsilon}_m^h \right)_{[0,L]} = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \tilde{N}_B \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} \\ \bar{\gamma}_{ct}^{A,h} = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} \left( \tilde{N}_B, \bar{\gamma}_{ct}^h \right)_{[0,L]} = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \tilde{N}_B \bar{\gamma}_{ct}^h d\tilde{x} \end{cases} \quad ; \quad (2.49)$$

qui mène finalement à la version discrète des déformation modifiées suivante :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_m^h = \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \sum_{C=1}^n \tilde{N}_A \tilde{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \tilde{N}_B \left( N_{C,\bar{x}} U_{G_1}^C - \frac{N_C}{r} U_{G_3}^C \right) d\bar{x} \\ \bar{\gamma}_s^h = \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \sum_{C=1}^n \tilde{N}_A \tilde{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \tilde{N}_B \left( \frac{N_C}{r} U_{G_1}^C + N_{C,\bar{x}} U_{G_3}^C + N_C \theta_2^C \right) d\bar{x} \end{cases} ; \quad (2.50)$$

où  $[\tilde{M}]$  est une matrice de type "masse" de la base tilde, à savoir :

$$\tilde{M}_{AB} = (\tilde{N}_A, \tilde{N}_B)_{[0,L]} = \int_0^L \tilde{N}_A \tilde{N}_B d\bar{x}. \quad (2.51)$$

Pour obtenir le système linéaire  $\bar{B}$  à résoudre, il ne reste plus qu'à remplacer les expressions de l'équation (2.50) dans la forme bilinéaire  $\bar{b}(\cdot, \cdot)$  (équation (2.42)). Il en découle une matrice de rigidité globale de l'élément  $\bar{B}$  de la forme suivante :

$$[K_{\bar{B}}] = [\bar{K}_m] + [\bar{K}_{ct}] + [K_f], \quad (2.52)$$

avec  $[\bar{K}_m]$  (respectivement  $[\bar{K}_{ct}]$ ) la raideur modifiée associée à  $\bar{\varepsilon}_m^h$  (resp.  $\bar{\gamma}_{ct}^h$ ). La structure de ces matrices de rigidité modifiées est telle que :

$$[\bar{K}_m] = ES [\bar{B}_m]^T [\tilde{M}]^{-1} [\bar{B}_m] \quad ; \quad [\bar{K}_{ct}] = \mu S [\bar{B}_{ct}]^T [\tilde{M}]^{-1} [\bar{B}_{ct}], \quad (2.53)$$

où, si on range les degrés de liberté comme dans l'équation (2.13),

$$[\bar{B}_m] = [[\bar{B}_{m_1}] [\bar{B}_{m_2}] [0]] \quad ; \quad [\bar{B}_{ct}] = [[\bar{B}_{ct_1}] [\bar{B}_{ct_2}] [\bar{B}_{ct_3}]] \quad (2.54)$$

avec, pour  $i \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} \bar{B}_{m_1}^{ij} &= \int_0^L \tilde{N}_i N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & \bar{B}_{m_2}^{ij} &= \int_0^L -\tilde{N}_i \frac{N_j}{r} d\bar{x}, \\ \bar{B}_{ct_1}^{ij} &= \int_0^L \tilde{N}_i \frac{N_j}{r} d\bar{x}, & \bar{B}_{ct_2}^{ij} &= \int_0^L \tilde{N}_i N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & \bar{B}_{ct_3}^{ij} &= \int_0^L \tilde{N}_i N_j d\bar{x}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Il est important de remarquer que la méthode proposée conduit à l'inversion de la matrice  $[\tilde{M}]$  ce qui rend presque tout le temps la matrice de rigidité globale  $[K_{\bar{B}}]$  pleine sur chaque patch. Il semble que ce soit le prix à payer pour avoir une méthode de degré et continuité supérieurs qui supprime efficacement le verrouillage (voir, par exemple, [ELG 07] pour la méthode  $\bar{B}$  et [ECH 10, ECH 13] pour la méthode DSG). Seul le cas éléments finis classiques (c'est-à-dire  $Q_1/Q_0$ ) échappe à la règle puisque alors,  $[\tilde{M}]$  est diagonale. L'ingénieur doit par conséquent prendre quelques précautions quant à l'implémentation : il faut veiller à pouvoir stocker et inverser une matrice pleine. Le coût de calcul reste néanmoins raisonnable dans la plupart des cas car avec une telle méthode, un maillage assez grossier permet déjà d'obtenir une approximation satisfaisante (voir section 2.7 ci-après). Aussi, suivant l'environnement informatique à disposition, on peut

penser pour plus d'efficacité numérique à mettre en place un algorithme itératif de type gradient conjugué au cours duquel seulement des produits matrice-vecteur sont réalisés (sans jamais véritablement construire et inverser la matrice pleine). Ce n'est pas ce qui est fait dans ce travail où est développé un code *matlab* "maison" mais c'est de cette façon qu'avait été réalisé le calcul des éléments  $\bar{B}$  de [ELG 07] dans un code *fortran*. En outre, en se basant sur une précédente contribution [BOU 13a], nous proposerons dans le chapitre 3 (plus précisément en section 3.4.3) un moyen de limiter ce problème de matrice pleine.

**Remarque 10** *La modification de l'opérateur de gradient discret de la formulation purement en déplacement implique des "violations" de la théorie classique de type Galerkin. En fait, les manipulations sur les déformations ne peuvent se faire sans aucunes précautions pour garantir la validité de la formulation et de son implémentation numérique. Pour ceci, il faut se placer dans le cadre plus général de la théorie des méthodes de déformations assumées avec notamment le principe de Hu-Washizu (voir Simo et Hughes [SIM 86]). Il faut tout d'abord vérifier la consistance variationnelle de la formulation, c'est-à-dire que la solution du problème  $\bar{B}$  (équation (2.42)) corresponde bien à la solution du problème de référence (équation (2.8)). Ensuite, un prérequis pour espérer les bonnes propriétés numériques de l'élément (convergence) est de passer le "patch test" d'Irons (voir Bazeley et al. [BAZ 65]). On parle alors d'assurer la consistance numérique de la formulation. On a pu montrer en annexe B que ces deux points sont bien respectés par l'élément  $\bar{B}$  développé ici. Ceci apporte une justification plus théorique des manipulations proposées pour obtenir les déformations  $\bar{B}$ .*

### 2.5 Construction d'un élément mixte : équivalence avec l'élément $\bar{B}$

Même si un peu moins intéressantes pour l'ingénieur car non basées sur une formulation purement en déplacement, les approches de type méthodes mixtes ont aussi été très populaires en éléments finis classiques pour traiter le verrouillage. L'intérêt de ces méthodes est qu'elles possèdent un cadre mathématique bien établi avec notamment la condition LBB [BRE 91] qui permet d'attester clairement de la validité ou non d'une discrétisation. N'étant pas mathématiciens de formation et étant plutôt intéressés par le côté ingénieur, nous ne cherchons pas ici à rentrer plus dans le cadre théorique. Toutefois, l'investigation d'une telle méthode sur le problème de poutre courbe nous a conduit à la construction d'un élément mixte équivalent à l'élément  $\bar{B}$  de la section précédente. Ce point nous semble important à montrer car il offre encore plus de cohérence à la formulation  $\bar{B}$  : d'une part il permet de mieux interpréter les traitements réalisés et d'autre part, il laisse la possibilité aux mathématiciens d'étudier rigoureusement l'exactitude de l'élément.

On montre à présent la façon de retrouver l'élément  $\bar{B}$  de la partie précédente à partir d'une formulation mixte. On reprend les notations introduites en section 2.2. Dans les

méthodes mixtes, les efforts généralisés sont recherchés dans le même temps que les déplacements. Pour traiter le verrouillage ici, c'est plus précisément les efforts normaux et tranchants (liés à la membrane et au cisaillement respectivement) qui vont constituer des inconnues supplémentaires. Comme pour les autres méthodes développées, aucun traitement n'est réalisé pour la flexion : les relations cinématiques et de comportement associées sont supposées exactement satisfaites. Le problème mixte consiste à trouver à la fois  $(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{V}$  et  $(N, T) \in \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est l'espace des efforts défini tel que

$$\mathcal{S} = \left\{ (N, T) \in [L^2(]0, L[)]^2 \right\}, \quad (2.56)$$

qui minimisent sur  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{S}$  la fonctionnelle mixte suivante :

$$E_{p_{mixte}}(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}, N, T) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( EI \chi_f^2 - \frac{N^2}{ES} - \frac{T^2}{\mu S} \right) + N \epsilon_m + T \gamma_{ct} \right] d\bar{x} - l(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}). \quad (2.57)$$

Maintenant, le point clé est le choix des espaces d'approximation pour les efforts. Pour retrouver l'élément  $\bar{B}$ , il suffit de prendre le même espace pour les efforts que celui utilisé pour les déformations projetées (équation (2.50)). En d'autres termes, on choisit  $Q_p$  pour les déplacements et  $Q_{p-1}$  pour les efforts. On écrit donc :

$$U_{G_1}^h = \sum_{i=1}^n N_i U_{G_1}^i ; \quad U_{G_3}^h = \sum_{i=1}^n N_i U_{G_3}^i ; \quad \boldsymbol{\theta}_2^h = \sum_{i=1}^n N_i \boldsymbol{\theta}_2^i ; \quad N^h = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_i a_N^i ; \quad T^h = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_i a_T^i. \quad (2.58)$$

On note le vecteur des inconnues cinématiques  $\{U\} = \left\{ \{U_{G_1}\}^T \{U_{G_3}\}^T \{\boldsymbol{\theta}_2\}^T \right\}^T$  et les deux vecteurs d'inconnues statiques :  $\{a_N\}$  de composantes  $a_N^i$  et  $\{a_T\}$  de composantes  $a_T^i$ . Avec ces approximations (équation (2.58)), la version discrète du problème mixte de fonctionnelle  $E_{p_{mixte}}$  (équation (2.57)) est telle que :

$$\begin{bmatrix} [K_f] & [K_{uN}] & [K_{uT}] \\ [K_{Nu}] & -[K_N] & [0] \\ [K_{Tu}] & [0] & -[K_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{a_N\} \\ \{a_T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (2.59)$$

où, pour  $i \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  :

$$K_N^{ij} = \int_0^L \frac{1}{ES} \tilde{N}_i \tilde{N}_j d\bar{x} ; \quad K_T^{ij} = \int_0^L \frac{1}{\mu S} \tilde{N}_i \tilde{N}_j d\bar{x}, \quad (2.60)$$

et, pour  $i \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$[K_{uN}] = [\bar{B}_m]^T ; \quad [K_{uT}] = [\bar{B}_{ct}]^T, \quad (2.61)$$

avec  $[\bar{B}_m]$  et  $[\bar{B}_{ct}]$  définis équation (2.54). Le système linéaire équation (2.59) peut ensuite être réduit aux seules variables cinématiques en faisant une condensation statique sur toute la structure des inconnues en effort :

$$\begin{cases} [\bar{B}_m] \{U\} - [K_N] \{a_N\} = 0 \Rightarrow \{a_N\} = [K_N]^{-1} [\bar{B}_m] \{U\} \\ [\bar{B}_{ct}] \{U\} - [K_T] \{a_T\} = 0 \Rightarrow \{a_T\} = [K_T]^{-1} [\bar{B}_{ct}] \{U\} \end{cases}; \quad (2.62)$$



ce qui conduit finalement à la matrice de rigidité globale suivante :

$$[K_{mixte}] = [K_f] + [\bar{B}_m]^T [K_N]^{-1} [\bar{B}_m] + [\bar{B}_{ct}]^T [K_T]^{-1} [\bar{B}_{ct}]. \quad (2.63)$$

On peut remarquer à présent que :

$$[K_N]^{-1} = \left( \frac{1}{ES} [\tilde{M}] \right)^{-1} = ES [\tilde{M}]^{-1} \quad ; \quad [K_T]^{-1} = \left( \frac{1}{\mu S} [\tilde{M}] \right)^{-1} = \mu S [\tilde{M}]^{-1}, \quad (2.64)$$

et ainsi  $[K_{mixte}] = [K_{\bar{B}}]$  de l'équation (2.52). On obtient donc exactement la même solution avec l'élément mixte qu'avec l'élément  $\bar{B}$  ce qui nous permet d'établir que les deux formulations sont équivalentes. Cette équivalence donne un sens plus concret aux manipulations effectuées sur les déformations  $\bar{B}$  : cela revient à rechercher des déplacements solutions dans  $Q_p$  tout en imposant les efforts à être dans  $Q_{p-1}$ .

**Remarque 11** *On comprend mieux aussi avec la formulation mixte l'origine d'une matrice de rigidité globale pleine. Celle-ci est liée à la continuité de l'espace  $Q_{p-1}$  qui empêche d'effectuer la condensation statique (équation (2.62)) élément par élément. En effet, pour un espace  $Q_{p-1}$  de continuité au moins  $C^0$ , la condensation doit inévitablement être globale sur l'ensemble du patch ce qui génère une structure matricielle pleine.*

## 2.6 Application de la méthode DSG [ECH 10] à l'élément de poutre courbe

Pour finir l'étude, on envisage la méthode DSG développée par Bletzinger *et al.* [BLE 00] et Koschnick *et al.* [KOS 05] et récemment étendue aux NURBS par [ECH 10] pour traiter le verrouillage en cisaillement transversal de la poutre droite de Timoshenko. Le travail ici consiste donc simplement en l'application de la procédure de [ECH 10] pour traiter, en plus du verrouillage en cisaillement, le verrouillage en membrane présent dans une poutre courbe. Ceci offrira un élément de comparaison aux stratégies d'intégration sélective et  $\bar{B}$  développées. Tout comme  $\bar{B}$ , cette technique DSG appartient aux méthodes de type déformations modifiées : elle repose sur la modification des déformations  $\epsilon_m$  et  $\gamma_{ct}$ . L'intégration numérique est réalisée sans traitement particulier. L'une des particularités de la méthode DSG est qu'elle va faire appel à des techniques de collocation. La procédure pour construire l'approximation des déformations modifiées peut être décomposée en quatre étapes :

**Intégration :** On commence par intégrer les déformations de membrane et de cisaillement pour obtenir la contribution de membrane  $U_{G_1}^{\epsilon^h}$  sur le déplacement normal total  $U_{G_1}^h$  et, la contribution de cisaillement  $U_{G_3}^{\gamma^h}$  sur le déplacement transversal total  $U_{G_3}^h$  :

$$U_{G_1}^{\epsilon^h}(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}_0=0}^{\tilde{x}_0=\tilde{x}} \epsilon_m^h d\tilde{x}_0 \quad ; \quad U_{G_3}^{\gamma^h}(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}_0=0}^{\tilde{x}_0=\tilde{x}} \gamma_{ct}^h d\tilde{x}_0. \quad (2.65)$$

**Collocation :** Pour éliminer la partie parasite des déformations de membrane et de cisaillement, on calcule ensuite le saut discret de membrane  $U_{G_1}^{\varepsilon_i}$  et de cisaillement  $U_{G_3}^{\gamma_i}$  aux points de collocations. Selon [ECH 10], il apparait que les points de collocation pour la poutre droite B-Spline sont les points de contrôle. On généralise ceci dans le cas de la poutre courbe NURBS en prenant l'image dans l'espace physique des abscisses de Greville (voir, par exemple, [PIE 97]). Les abscisses de Greville  $\bar{\xi}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  associées aux  $n$  points de contrôle se définissent en fonctions des coordonnées paramétriques tels que :

$$\bar{\xi}_i = \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p}. \quad (2.66)$$

On note dans la suite leur image  $\bar{x}_i$ . En reprenant le vecteur des inconnues cinématiques  $\{U\} = \left\{ \{U_{G_1}\}^T \{U_{G_3}\}^T \{\theta_2\}^T \right\}^T$ , on a :

$$U_{G_1}^{\varepsilon_i} = \int_0^{\bar{x}_i} \varepsilon_m^h d\bar{x} = [B_m^{DSG^i}] \{U\} ; U_{G_3}^{\gamma_i} = \int_0^{\bar{x}_i} \gamma_{ct}^h d\bar{x} = [B_{ct}^{DSG^i}] \{U\}, \quad (2.67)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne est tel que :

$$[B_m^{DSG^i}] = \left[ \left[ B_{m_1}^{DSG^i} \right] \left[ B_{m_2}^{DSG^i} \right] [0] \right] ; [B_{ct}^{DSG^i}] = \left[ \left[ B_{ct_1}^{DSG^i} \right] \left[ B_{ct_2}^{DSG^i} \right] \left[ B_{ct_3}^{DSG^i} \right] \right], \quad (2.68)$$

avec, pour  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} B_{m_1}^{DSG^{ij}} &= \int_0^{\bar{x}_i} N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & B_{m_2}^{DSG^{ij}} &= \int_0^{\bar{x}_i} -\frac{N_j}{r} d\bar{x}, \\ B_{ct_1}^{DSG^{ij}} &= \int_0^{\bar{x}_i} \frac{N_j}{r} d\bar{x}, & B_{ct_2}^{DSG^{ij}} &= \int_0^{\bar{x}_i} N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & B_{ct_3}^{DSG^{ij}} &= \int_0^{\bar{x}_i} N_j d\bar{x}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

ce qui compose les deux opérateurs linéaires  $[B_m^{DSG}]$  et  $[B_{ct}^{DSG}]$ .

**Interpolation :** Ensuite, on peut construire le "déplacement de membrane" modifié  $U_{G_1}^{\varepsilon_i^{modh}}$  et le "déplacement de cisaillement" modifié  $U_{G_3}^{\gamma_i^{modh}}$  en interpolant les valeurs des sauts discrets de déformations avec les fonctions NURBS sur le patch :

$$U_{G_1}^{\varepsilon_i^{modh}} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{U}_{G_1}^{\varepsilon_i} ; U_{G_3}^{\gamma_i^{modh}} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{U}_{G_3}^{\gamma_i}. \quad (2.70)$$

Il faut bien remarquer que les valeurs  $\hat{U}_{G_1}^{\varepsilon_i}$  et  $\hat{U}_{G_3}^{\gamma_i}$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  constituent des degrés de liberté non-interpolants. Le lien entre  $\hat{U}_{G_1}^{\varepsilon_i}$  (respectivement  $\hat{U}_{G_3}^{\gamma_i}$ ) et  $U_{G_1}^{\varepsilon_i}$  (resp.  $U_{G_3}^{\gamma_i}$ ) de l'équation (2.67) doit donc être fait. On note  $\left\{ U_{G_1}^{\varepsilon} \right\}$ ,  $\left\{ U_{G_3}^{\gamma} \right\}$ ,  $\left\{ \hat{U}_{G_1}^{\varepsilon} \right\}$

et  $\{\hat{U}_{G_3}^\gamma\}$  les vecteurs de composantes  $U_{G_1}^{\varepsilon_i}$ ,  $U_{G_3}^{\gamma_i}$ ,  $\hat{U}_{G_1}^{\varepsilon_i}$  et  $\hat{U}_{G_3}^{\gamma_i}$  respectivement. Pour ceci, on introduit l'opérateur  $[A_{DSG}]$  tel que :

$$\{U_{G_1}^\varepsilon\} = [A_{DSG}] \{\hat{U}_{G_1}^\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \{U_{G_3}^\gamma\} = [A_{DSG}] \{\hat{U}_{G_3}^\gamma\}, \quad (2.71)$$

c'est-à-dire, pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$A_{DSG_{ij}} = N_j(\tilde{x}_i). \quad (2.72)$$

La méthode nécessite par conséquent l'inversion de  $[A_{DSG}]$ , ce qui va générer une matrice de rigidité globale pleine comme pour la projection  $\bar{B}$ .

**Dérivation :** Pour finir, il suffit de dériver  $U_{G_1}^{\varepsilon_{modh}}$  et  $U_{G_3}^{\gamma_{modh}}$  pour établir les déformations modifiées :

$$\varepsilon_m^{modh} = \sum_{i=1}^n N_{i,\tilde{x}} \hat{U}_{G_1}^{\varepsilon_i} ; \quad \gamma_{ct}^{modh} = \sum_{i=1}^n N_{i,\tilde{x}} \hat{U}_{G_3}^{\gamma_i}. \quad (2.73)$$

En résumé, il vient la matrice de rigidité globale DSG suivante :

$$[K_{DSG}] = [K_m^{DSG}] + [K_{ct}^{DSG}] + [K_f], \quad (2.74)$$

avec les raideurs modifiées telles que :

$$\begin{cases} [K_m^{DSG}] = ES [B_m^{DSG}]^T [A_{DSG}]^{-T} [K_t] [A_{DSG}]^{-1} [B_m^{DSG}] \\ [K_{ct}^{DSG}] = \mu S [B_{ct}^{DSG}]^T [A_{DSG}]^{-T} [K_t] [A_{DSG}]^{-1} [B_{ct}^{DSG}] \end{cases}. \quad (2.75)$$

L'opérateur  $[K_t]$  provient de l'étape de dérivation. Il peut être vu comme une matrice de raideur de traction unitaire. Son expression est telle que, pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$K_T^{ij} = \int_0^L N_{i,\tilde{x}} N_{j,\tilde{x}} d\tilde{x}. \quad (2.76)$$

## 2.7 Résultats numériques : comparaison entre les différentes méthodes

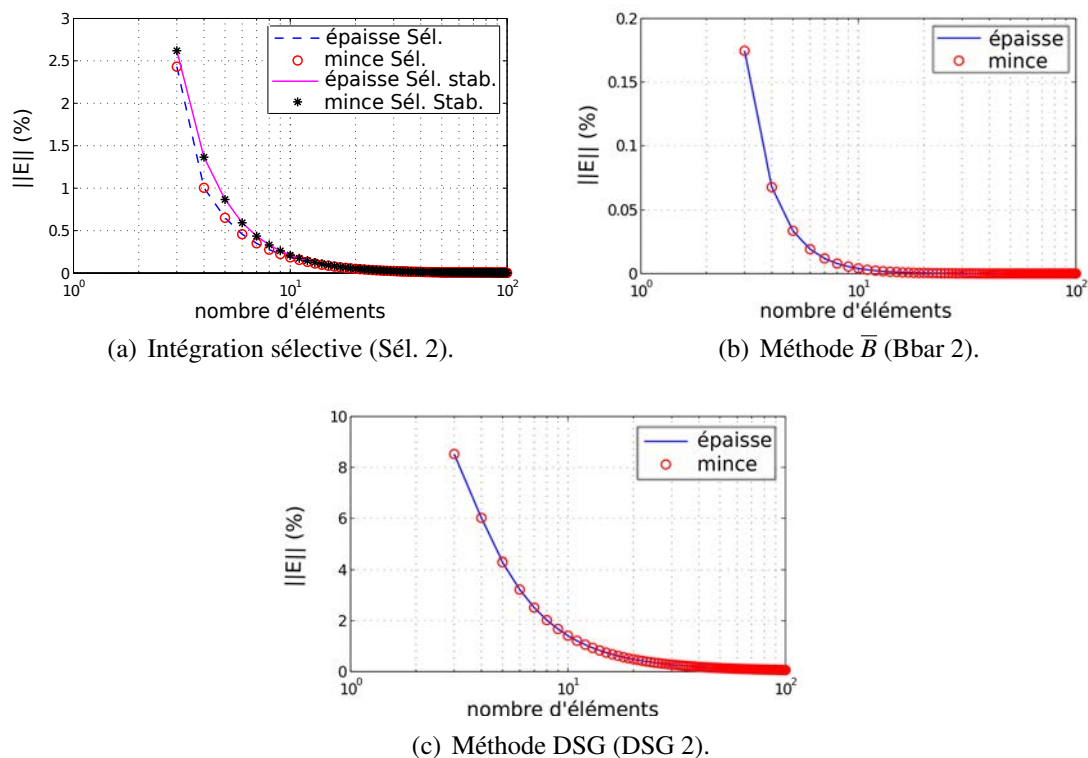
L'objectif à présent est de valider au travers d'expérimentations numériques les méthodologies proposées dans ce travail pour supprimer le verrouillage.

### 2.7.1 Résultats d'une poutre courbe de Timoshenko

On reprend tout d'abord le problème de poutre courbe de la figure 2.2 pour lequel il a été montré la sensibilité au verrouillage des éléments NURBS standards. La même démarche que dans la section 2.2.3 est utilisée pour étudier le comportement des éléments développés. On s'intéresse à l'erreur en norme  $L^2$  sur  $U_{G_3}$  (équation (2.15)) puis on observe :

- la convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments du maillage pour une poutre épaisse ( $R/h = 10$ ) et pour une poutre mince ( $R/h = 100$ ) (voir figure 2.11 pour l'ordre 2 à comparer avec la figure 2.3(b)) ;
- la dépendance de la solution à l'élancement de la poutre pour un maillage fixe composé de 5 éléments (cf. figures 2.12 pour l'ordre 2 et 2.13 pour les ordres supérieurs par rapport à la figure 2.4).

On désigne les éléments comme suit : "Sél. 2" fait appel aux techniques d'intégration sélective pour le NURBS quadratique (cf. section 2.3). Plus précisément, "Sél. 2" est utilisé lorsque le contrôle de hourglass est réalisé par la prise en compte d'un point d'intégration supplémentaire (section 2.3.2, figure 2.9). Dans le cas du calcul d'une raideur de stabilisation (section 2.3.3, équation (2.34)), on complète la désignation si bien que l'élément se note "Sél. stab. 2". "Bbar  $p$ " désigne quant à lui l'élément  $\bar{B} Q_p / Q_{p-1}$  de la section 2.4 et "DSG 2" renvoie à l'élément quadratique construit par la méthode DSG de la section 2.6. Pour comparer, on reporte aussi sur les figures 2.12 et 2.13 les solutions de l'élément NURBS standard. On reprend la notation "Basique  $p$ " de cet élément pour le degré  $p$ . Il est à noter qu'un zoom a été réalisé en bas des figures 2.12(a), 2.12(b), 2.13(a) et 2.13(b) pour faciliter la lecture des niveaux d'erreurs. Pour simplifier la comparaison, les niveaux d'erreur obtenus pour l'ordre 2 pour le maillage composé de 5 éléments sont finalement reportés dans le tableau 2.1.



**FIGURE 2.11:** Convergence des solutions NURBS quadratiques des techniques proposées pour la poutre courbe mince et épaisse.

## 2. Formulations NURBS sans verrouillage pour la poutre épaisse courbe

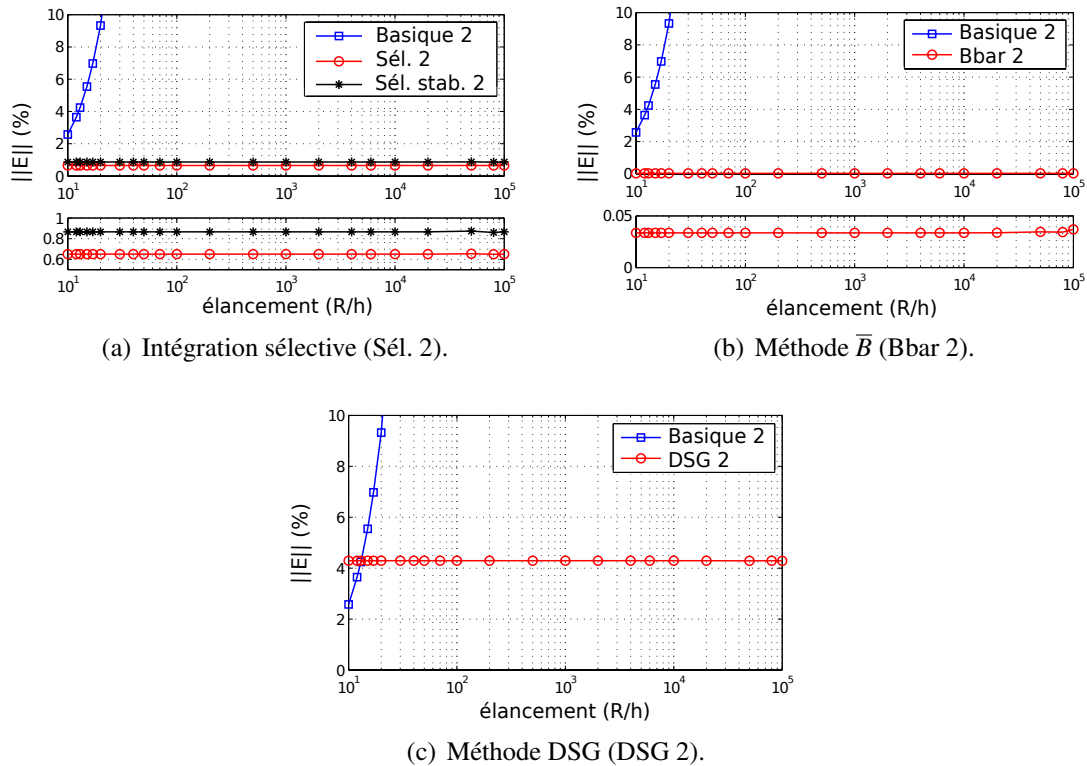


FIGURE 2.12: Influence de l'éclatement de la poutre sur les solutions NURBS quadratiques des techniques proposées.

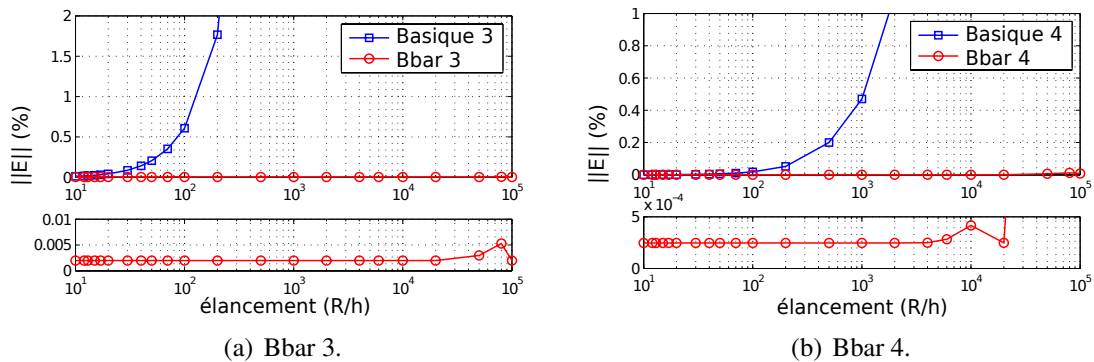


FIGURE 2.13: Influence de l'éclatement de la poutre sur les solutions NURBS  $\bar{B}$  de plus haut ordre.

### 2.7.2 Conclusion des résultats obtenus

Vis-à-vis des résultats obtenus, les conclusions suivantes synthétisant l'efficacité des éléments peuvent être dressées :

Méthodes	Bbar 2	Sél. 2	Sél. stab. 2	DSG 2
$\ E\ $ (%)	0.0336	0.6499	0.8661	4.2901

**TABLE 2.1:** Comparaison en terme de précision des différentes méthodes supprimant le verrouillage.

**Suppression totale du verrouillage :** L'ensemble des méthodes proposées permettent de supprimer totalement le verrouillage. En effet, les solutions deviennent indépendantes de l'éclatement de la poutre : les courbes de convergence de la poutre épaisse sont superposées aux courbes de convergence de la poutre mince (figure 2.11), et aucune variation notable de la solution à maillage fixé n'est à déplorer jusqu'à un éclatement de  $10^5$  (figures 2.12 et 2.13).

**Précision et robustesse de l'élément  $\bar{B}$  :** L'élément  $\bar{B}$  est le plus précis (cf. tableau 2.1) et le plus robuste. Le niveau d'erreur est inférieur quel que soit l'éclatement à celui de l'élément basique pour des poutres épaisses (voir figure 2.12(b)). La stratégie est aussi valable pour les NURBS de plus haut ordre (cf. figure 2.13). Cela signifie que la construction de la projection et le choix des espaces  $Q_p/Q_{p-1}$  semblent être le meilleur traitement pour supprimer seulement les contributions responsables du verrouillage, c'est-à-dire sans modifier le reste de la solution. On rappelle que le prix à payer pour obtenir ces résultats optimaux est l'inversion d'une matrice de rigidité pleine au niveau du patch.

**Approximation simple de l'intégration sélective pour le quadratique :** À l'inverse, il apparaît que l'intégration sélective "relâche" en quelque sorte trop de contraintes si bien que l'on est un peu trop "souple" par rapport à la solution exacte (cf. figures 2.11(a) et 2.12(a)). Ceci est cohérent avec les développements de la section 2.3. La règle d'intégration par les points de Gauss n'étant pas exacte pour les NURBS, une stratégie basée sur cette règle ne peut fournir de résultats optimaux. Par contre, c'est un moyen très simple et de faible coût de supprimer le verrouillage de l'ordre 2. Aussi, on peut noter que l'ajout d'un point d'intégration semble plus efficace pour contrôler le mode de hourglass que l'ajout d'une raideur de stabilisation. Encore une fois, ceci paraît normal puisque la raideur de stabilisation est construite au mieux pour approcher l'énergie du mode de hourglass alors que l'ajout d'un point de Gauss élimine le hourglass intrinsèquement.

**Précision inférieure de la méthode DSG :** L'application de la méthode DSG de [ECH 10] réalisée dans ce travail pour la poutre courbe s'avère être de moins bonne qualité que les autres méthodes développées (voir figures 2.11(c) et 2.12(c)). Les stratégies d'intégration réduite et de projection  $\bar{B}$  apparaissent dès lors tout à fait valables. Toutefois, il est à noter que nous ne sommes pas très familiers avec la méthode DSG si bien que notre application à la poutre courbe, avec notamment le choix des points de collocation, n'est peut-être pas la plus optimale en terme de précision.

### 2.7.3 Complément : résultats d'une poutre console avec un angle

Pour s'assurer de la robustesse des stratégies d'intégration sélective et de projection  $\bar{B}$ , on complète l'étude par le calcul de la poutre console avec un angle de la figure 2.14. L'intérêt de cet exemple est que la géométrie contient une singularité au point A. La continuité de la structure est uniquement  $C^0$  à ce point ce qui oblige les fonctions NURBS à être de même. Pour la construction de l'approximation (qui est plus précisément B-Spline étant donné que la structure consiste en l'assemblage de deux branches de poutre droite), on part d'un maillage composé de deux éléments linéaires classiques : vecteur de nœuds  $\Xi = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$ , points de contrôle  $\mathbf{B}_1 = \{0 \ 0\}_{(x,y)}^T$ ,  $\mathbf{B}_2 = \{L \ 0\}_{(x,y)}^T$  et  $\mathbf{B}_3 = \{0 \ H\}_{(x,y)}^T$  (poids  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ ) puis, on adopte la stratégie de raffinement  $k$  (section 1.1.3) si bien que la continuité  $C^0$  est maintenue en A alors qu'elle atteint  $C^{p-1}$  pour un degré  $p$  aux nœuds intérieurs des deux branches. Par conséquent, la stratégie d'intégration sélective de la section 2.3 consiste à prendre un point de Gauss par élément et, pour contrôler le hourglass, à rajouter 1 point de Gauss dans chacune des branches ou bien, à calculer une raideur de stabilisation propre à un élément de chacune des branches. Pour la méthode  $\bar{B}$ , il est à noter que les fonctions de  $Q_{p-1}$  sont discontinues au nœud correspondant au point A.

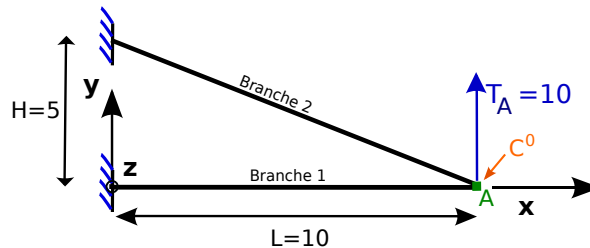


FIGURE 2.14: Description du problème de la poutre console avec un angle.

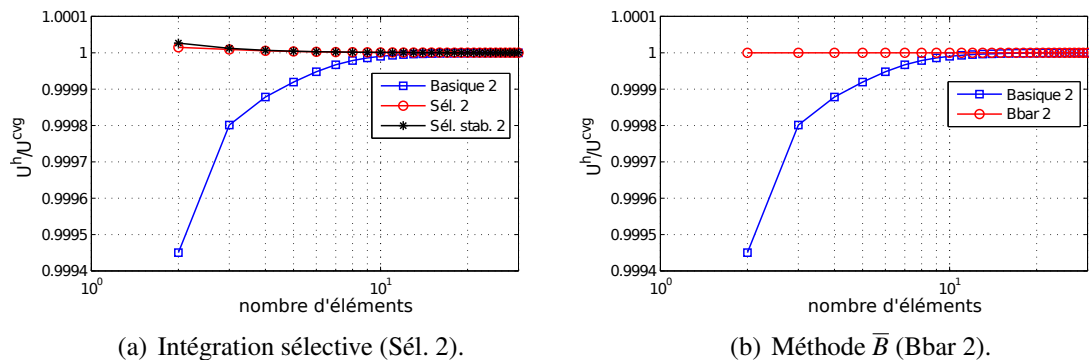


FIGURE 2.15: Convergence des solutions NURBS quadratiques des techniques proposées pour la poutre console mince.

Les paramètres matériaux ainsi que ceux relatifs à la section de la poutre sont les

mêmes que pour la poutre courbe de la figure 2.2. On considère une poutre mince ( $L/h = 100$ ). La poutre est soumise à un effort vertical ponctuel en A ( $T_A = 10$ ) et les deux branches sont encastées aux autres extrémités. La quantité d'intérêt choisie pour l'étude est le déplacement vertical du point A :  $U^h = U_{G_y}^h(A)$ . On s'intéresse aux approximations quadratiques. On obtient à convergence le déplacement  $U^{cvg} = 0.958622$ . Les résultats propres à l'intégration sélective sont présentés en figure 2.15(a) et ceux relatifs à la méthode  $\bar{B}$  en figure 2.15(b). Plus précisément, on trace le rapport  $U^h/U^{cvg}$  en fonction du nombre d'éléments du maillage de chacune des deux branches de la structure. On remarque alors la meilleure précision des éléments développés par rapport à la solution NURBS basique. La solution est d'ailleurs atteinte tout de suite pour la méthode  $\bar{B}$  : il suffit d'un ordre 2 et de deux éléments. Le verrouillage est responsable de la pauvre propriété d'approximation des éléments standards. Il est enlevé par l'implémentation de la stratégie d'intégration sélective ou de projection  $\bar{B}$ . Nos éléments développés s'étendent par conséquent bien au cas de continuité  $C^0$  à l'intérieur d'un patch.

## 2.8 Conclusion résumée

En résumé, les apports du travail réalisé dans ce chapitre peuvent être énoncés succinctement comme suit :

1. Des techniques d'intégration réduite avec du contrôle de hourglass et des stratégies de projection  $\bar{B}$  ont été implémentées dans le cadre NURBS pour supprimer le verrouillage d'une poutre courbe épaisse.
2. L'intégration réduite est facile à implémenter et de faible coût mais se restreint aux NURBS quadratiques tandis que la méthodologie  $\bar{B}$  paraît plus robuste : elle est équivalente à une méthode mixte et s'applique à tout type d'approximation NURBS de degré et de continuité supérieurs.
3. Les deux méthodes sont insensibles au verrouillage et c'est la stratégie  $\bar{B}$  qui semble la plus compétitive car elle conduit au niveau d'erreur le plus faible.



## 2. Formulations NURBS sans verrouillage pour la poutre épaisse courbe

---

## Chapitre 3

# Développement d'un élément NURBS massif coque performant pour l'élasticité en petites perturbations

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>62</b>
<b>3.2</b>	<b>L'élément NURBS massif coque standard</b>	<b>62</b>
3.2.1	Problème coque de référence	62
3.2.2	Formulation éléments finis NURBS	63
<b>3.3</b>	<b>Amélioration : construction d'un élément mixte</b>	<b>68</b>
3.3.1	Principe de la stratégie	68
3.3.2	Formulation : version continue	69
3.3.3	Formulation : version discrète	70
<b>3.4</b>	<b>Équivalence avec un élément <math>\bar{B}</math></b>	<b>73</b>
3.4.1	Formulation $\bar{B}$ de l'élément	73
3.4.2	Comparaison avec une stratégie $\bar{B}$ habituelle	75
3.4.3	Réduction du coût de calcul : formulation " $\bar{B}$ locale"	76
<b>3.5</b>	<b>Stabilisation de l'élément</b>	<b>79</b>
3.5.1	Démarche envisagée	79
3.5.2	Identification des modes de hourglass	80
3.5.3	Contrôle des modes de hourglass	84
<b>3.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>85</b>
3.6.1	Mise en place	86
3.6.2	Application du "shell obstacle course"	86
3.6.3	Étude de deux cas tests plus récents ([CHA 98, BAT 00])	98
3.6.4	Contrôle de hourglass : le cylindre pincé avec bords libres	105
<b>3.7</b>	<b>Conclusion résumée</b>	<b>107</b>

---

## 3.1 Introduction

L'étude du verrouillage d'un modèle NURBS 1D étant effectuée, on dispose à présent de bases suffisantes pour entrer dans le cœur de la thèse, à savoir la construction d'un élément NURBS massif coque performant. L'élément doit combiner les avantages de l'approche IGA (cf. section 1.1) et de l'approche modèle massif coque (voir section 1.2.2) tout en étant insensible au verrouillage (cf. section 1.2.3). On se restreint ici au cadre de la statique en élasticité linéaire homogène isotrope en petites perturbations. Les méthodes  $\bar{B}$  et mixtes paraissant plus robustes et plus précises à la vue du chapitre précédent, ce sont celles-ci que nous allons envisager pour gérer les verrouillages. Plus précisément, on propose de mettre en place de telles stratégies afin de modifier l'interpolation de la moyenne dans l'épaisseur des composantes de déformation et contrainte. Il est délicat d'écrire directement la projection  $\bar{B}$ . Pour y parvenir, on a tout d'abord mis en place une formulation mixte de laquelle on a pu dériver la projection  $\bar{B}$  équivalente. Ensuite, on a tenté de limiter la taille de la matrice de rigidité globale qui est pleine en utilisant une projection dégradée à l'aide des moindres carrés locaux : on peut ainsi rendre locale la projection dans chacun des éléments du maillage. Enfin, on s'est rendu compte qu'il est nécessaire de stabiliser l'élément pour empêcher l'apparition de modes de hourglass dans certaines situations. Les travaux présentés dans ce chapitre sont majoritairement issus de deux précédentes contributions (cf. [BOU 13a] pour la base et [BOU 14] pour le contrôle de hourglass).

## 3.2 L'élément NURBS massif coque standard

Cette section précise le contexte de la recherche et introduit les notations correspondantes. Elle donne la formulation de base NURBS 3D conduisant à l'élément NURBS massif coque standard, c'est-à-dire pour lequel aucun traitement particulier visant à limiter le verrouillage n'est envisagé.

### 3.2.1 Problème coque de référence

On reprend la coque de la figure 1.6 (cf. section 1.2.1) de surface moyenne  $A_{moy}$  et d'épaisseur  $h$ . On étudie son comportement dans le repère global  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Cette fois-ci, tout le volume est discrétisé (voir maintenant figure 3.1). Pour obtenir le volume, on adopte la stratégie de déplacer les points de contrôle de la surface moyenne de plus ou moins une demi-épaisseur suivant la normale à cette surface. Le repère local  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est désormais défini en tout point  $\mathbf{M}$  de la structure. Le domaine occupé par la coque est noté  $\Omega$ . On continue de nommer la coordonnée curviligne parcourant l'épaisseur  $\tilde{z} \in [-h/2, h/2]$  et on reprend  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  comme coordonnées paramétriques ( $\in [0, 1]$ ) associées aux directions  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  respectivement. On utilise pour construire la géométrie une unique couche d'éléments NURBS 3D dans l'épaisseur. Des fonctions NURBS 3D du type de celles de l'équation (1.10) sont donc envisagées. Pour simplifier les notations

on omet l'exposant "3D", c'est-à-dire que l'on prend  $N_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  associés aux points de contrôle  $\mathbf{B}_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  pour définir le vecteur position  $\mathbf{M}$  générant la géométrie :

$$\mathbf{M} = \sum_{A=1}^n N_A(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_A. \quad (3.1)$$

La coque est supposée soumise à un effort volumique  $\mathbf{f}$  dans  $\Omega$  et, on impose un effort surfacique  $\mathbf{F}$  sur le bord  $\Gamma_F$  ainsi qu'un déplacement  $\mathbf{U}^d$  sur le bord  $\Gamma_u$ . Les bords sont tels que  $\Gamma_u \cap \Gamma_F = \emptyset$  et  $\Gamma_u \cup \Gamma_F = \partial\Omega$ . Enfin,  $E$  et  $\nu$  désignent de nouveau le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

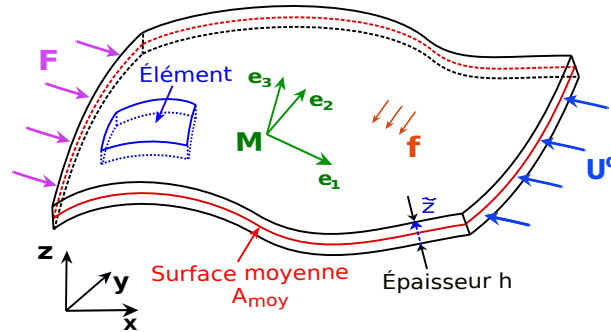


FIGURE 3.1: Description du problème de référence coque.

### 3.2.2 Formulation éléments finis NURBS

L'élément NURBS massif coque repose sur une formulation de type mécanique des milieux continus 3D. L'élément standard est tout simplement issu d'une formulation purement en déplacement.

#### 3.2.2.1 Préliminaire et notations

On suit les notations du chapitre 1. La solution en déplacement  $\mathbf{U}_M$  du problème au point  $\mathbf{M}$  est exprimée dans le repère  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  telle que :

$$\mathbf{U}_M = \{U_{M_x} \ U_{M_y} \ U_{M_z}\}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}^T. \quad (3.2)$$

Ce déplacement est recherché dans l'espace fonctionnel  $\mathcal{U}$  qui se définit avec l'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$  des champs de déplacement tests comme suit :

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{V}_M \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{V}_M|_{\Gamma_u} = \mathbf{U}^d \right\} \quad ; \quad \mathcal{V} = \left\{ \mathbf{V}_M \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{V}_M|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\}. \quad (3.3)$$

On peut dès lors écrire  $l(\mathbf{U}_M)$  correspondant au travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacement  $\mathbf{U}_M$  tel que :

$$l(\mathbf{U}_M) = \int_{\Omega} \mathbf{U}_M^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{U}_M^T \mathbf{F} d\Gamma_F. \quad (3.4)$$

Pour la déformation et la contrainte, on utilise une notation tenseur d'ordre 2 pour les écrire dans les formulations variationnelles en continu. Dans toute la suite du manuscrit, cette notation sera privilégiée dans les paragraphes intitulés "Version continue". Dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , on écrit donc la déformation linéarisée  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_x$  et la contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_x$  telles que :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} ; \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} . \quad (3.5)$$

Pour la partie implémentation, on préfère utiliser une notation de Voigt, c'est-à-dire qu'on les écrit sous forme de vecteurs :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_x = \left\{ \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \sqrt{2}\varepsilon_{xy} & \sqrt{2}\varepsilon_{yz} & \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \right\}^T ; \\ \boldsymbol{\sigma}_x = \left\{ \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sqrt{2}\sigma_{xy} & \sqrt{2}\sigma_{yz} & \sqrt{2}\sigma_{xz} \right\}^T . \end{cases} \quad (3.6)$$

Plutôt que celle des tenseurs, c'est cette notation vectorielle que nous utiliserons dans les paragraphes intitulés "Version discrète" dans la suite du manuscrit. La déformation s'obtient classiquement en fonction du déplacement comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} & ; & & \varepsilon_{yy} &= v_{,y} & ; & & \varepsilon_{zz} &= w_{,z} & ; \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{,y} + v_{,x}) & ; & & \sqrt{2}\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{,z} + w_{,y}) & ; & & \sqrt{2}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{,z} + w_{,x}) . \end{aligned} \quad (3.7)$$

On rappelle qu'une relation de comportement de type élasticité linéaire homogène et isotrope est considérée dans ce chapitre. Pour ceci, une loi de comportement 3D complète est envisagée. On écrit la relation au niveau des tenseurs telle que :  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_x = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_x \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_x$ ,  $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_x$  étant l'opérateur de Hooke. La relation est donnée, avec utilisation de la notation de Voigt (équation (3.6)), par l'introduction de l'opérateur  $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}}$  tel que  $\boldsymbol{\sigma}_x = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}}\boldsymbol{\varepsilon}_x$  qui s'écrit en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{cases} . \quad (3.8)$$

Afin de donner un sens aux déformations et contraintes de la coque (retrouver les contributions de membrane, cisaillement, pincement) et ainsi décrire la coque comme ce qui est fait avec un modèle de structure, on préférera travailler dans le repère local  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Celui-ci est construit à partir de la géométrie NURBS, c'est-à-dire avec les

deux vecteurs tangents  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  :

$$\mathbf{t}_1 = \sum_{A=1}^n \frac{\partial N_A}{\partial \xi} \mathbf{B}_A ; \quad \mathbf{t}_2 = \sum_{A=1}^n \frac{\partial N_A}{\partial \eta} \mathbf{B}_A ; \quad (3.9)$$

et le vecteur normal à la coque  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2. \quad (3.10)$$

On prend ensuite :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} ; \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{\|\mathbf{t}_1\|} ; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 ; \quad (3.11)$$

avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$  habituelle. Dans ce repère, on a les tenseurs de déformation et de contrainte :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \quad (3.12)$$

et les vecteurs associés :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_t = \left\{ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \sqrt{2}\varepsilon_{12} & \sqrt{2}\varepsilon_{23} & \sqrt{2}\varepsilon_{13} \right\}^T ; \\ \boldsymbol{\sigma}_t = \left\{ \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sqrt{2}\sigma_{12} & \sqrt{2}\sigma_{23} & \sqrt{2}\sigma_{13} \right\}^T . \end{cases} \quad (3.13)$$

Ils sont obtenus par changement de base à partir des quantités globales (équations (3.5) ou (3.6)). Cette transformation est notée  $\mathcal{R}$  et est définie au niveau des tenseurs telle que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}_x \underline{\underline{P}} = \mathcal{R} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x \right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}_t = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{\sigma}}_x \underline{\underline{P}} = \mathcal{R} \left( \underline{\underline{\sigma}}_x \right), \quad (3.14)$$

avec la matrice de passage :

$$\underline{\underline{P}} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]. \quad (3.15)$$

On peut aussi exprimer cette relation en utilisant la notation de Voigt (équations (3.6) et (3.13)). Cela revient à calculer l'opérateur :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{21}^2 & P_{31}^2 & \sqrt{2}P_{11}P_{21} & \sqrt{2}P_{21}P_{31} & \sqrt{2}P_{11}P_{31} \\ P_{12}^2 & P_{22}^2 & P_{32}^2 & \sqrt{2}P_{12}P_{22} & \sqrt{2}P_{22}P_{32} & \sqrt{2}P_{12}P_{32} \\ P_{13}^2 & P_{23}^2 & P_{33}^2 & \sqrt{2}P_{13}P_{23} & \sqrt{2}P_{23}P_{33} & \sqrt{2}P_{13}P_{33} \\ \sqrt{2}P_{11}P_{12} & \sqrt{2}P_{22}P_{21} & \sqrt{2}P_{31}P_{32} & (P_{11}P_{22} + P_{21}P_{12}) & (P_{21}P_{32} + P_{31}P_{22}) & (P_{11}P_{32} + P_{31}P_{12}) \\ \sqrt{2}P_{12}P_{13} & \sqrt{2}P_{22}P_{23} & \sqrt{2}P_{32}P_{33} & (P_{12}P_{23} + P_{22}P_{13}) & (P_{22}P_{33} + P_{32}P_{23}) & (P_{12}P_{33} + P_{32}P_{13}) \\ \sqrt{2}P_{11}P_{13} & \sqrt{2}P_{21}P_{23} & \sqrt{2}P_{31}P_{33} & (P_{11}P_{23} + P_{21}P_{13}) & (P_{21}P_{33} + P_{31}P_{23}) & (P_{11}P_{33} + P_{31}P_{13}) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \underline{\underline{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_x$  et  $\boldsymbol{\sigma}_t = \underline{\underline{R}}\boldsymbol{\sigma}_x$ ,  $P_{ij}$  étant le terme de la  $i^{\text{ième}}$  ligne et de la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $\underline{\underline{P}}$ .

**Remarque 12** On retrouve alors que la matrice de comportement est invariante que l'on soit dans le repère global ou local puisque notre matériau est supposé isotrope, c'est-à-dire qu'on a bien :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{R}}, \quad (3.17)$$

ce qui nous permet de vérifier que la densité d'énergie de déformation est inchangée :  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t = \underline{\underline{\varepsilon}}_x^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}_x$ .

### 3.2.2.2 Version continue

Avec tout ceci, la formulation variationnelle du problème de référence s'écrit comme suit : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\mathbf{U}_M^*) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\mathbf{U}_M) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_x d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*) \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad (3.18)$$

ou, de façon strictement équivalente dans le repère local (voir remarque 12) : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}. \quad (3.19)$$

Ici et dans la suite, on utilise la notation  $\cdot : \cdot$  pour désigner le produit doublement contracté entre deux tenseurs d'ordre 2.

### 3.2.2.3 Version discrète

Pour établir la version discrète de la formulation, on utilise le principe des éléments isoparamétriques (cf. équation (1.27) en section 1.2.2). On recherche l'approximation  $\mathbf{U}_M^h$  du champ de déplacement  $\mathbf{U}_M$  sous la forme :

$$\mathbf{U}_M^h = \sum_{A=1}^n N_A(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{U}^A, \quad (3.20)$$

avec  $\mathbf{U}^A = \{U_{M_x}^A, U_{M_y}^A, U_{M_z}^A\}^T$  le vecteur des variables de contrôle de  $\mathbf{U}_M^h$  au point de contrôle  $\mathbf{B}_A$ . L'espace d'approximation associé est noté  $Q_{p,q,r}$  pour des fonctions NURBS  $N_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  de degré polynomial  $p$  en  $\xi$ ,  $q$  en  $\eta$  et  $r$  en  $\zeta$ . L'expression de l'équation (3.20) peut s'écrire sous forme matricielle telle que :

$$\mathbf{U}_M^h = \sum_{A=1}^n \underline{\underline{N}}^A \mathbf{U}^A \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{N}}^A = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 \\ 0 & N_A & 0 \\ 0 & 0 & N_A \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Avec ceci, on peut exprimer les déformations selon l'équation (3.7) et construire l'approximation  $\underline{\varepsilon}_x^h$  de  $\underline{\varepsilon}_x$  :

$$\underline{\varepsilon}_x^h = \sum_{A=1}^n \underline{B}^{LA} \mathbf{U}^A \quad \text{avec} \quad \underline{B}^{LA} = \begin{bmatrix} N_{A,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{A,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{A,z} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,y} & \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,z} & \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,y} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,z} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}N_{A,x} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

ce qui permet, après report dans la formulation faible (équations (3.18) ou (3.19)), d'obtenir le système linéaire à résoudre pour déterminer  $\mathbf{U}_M^h$ . En notant  $\{U\}$  le vecteur regroupant les composantes  $\mathbf{U}^A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$ , le système s'écrit :

$$[K^L] \{U\} = \{F\}, \quad (3.23)$$

où  $[K^L]$  est la matrice de rigidité globale et  $\{F\}$  le vecteur chargement qui se calculent tels que :

$$[K^L] = \int_{\Omega} \underline{B}^{LT} \underline{D} \underline{B}^L d\Omega \quad ; \quad \{F\} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \underline{N}^T \mathbf{F} d\Gamma_F. \quad (3.24)$$

Les opérateurs globaux  $\underline{B}^L$  et  $\underline{N}$  regroupent chacune des contributions nodales  $\underline{B}^{LA}$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $\underline{N}^A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  respectivement :

$$\underline{B}^L = \left[ \underline{B}^{L1} \mid \underline{B}^{L2} \mid \dots \mid \underline{B}^{Ln} \right] \quad ; \quad \underline{N} = \left[ \underline{N}^1 \mid \underline{N}^2 \mid \dots \mid \underline{N}^n \right]. \quad (3.25)$$

Les intégrations numériques sont réalisées classiquement pour les NURBS, c'est-à-dire en utilisant une quadrature de Gauss avec  $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$  points par élément pour des fonctions générant l'espace  $Q_{p,q,r}$  (cf. section 1.1.3). Le système donné dans l'équation (3.23) constitue la version discrète de l'élément NURBS massif coque standard.

Il sera montré en section 3.6 (Résultats numériques) qu'il n'est pas nécessaire pour l'élément massif coque d'élever le degré d'approximation des fonctions dans l'épaisseur au delà de 2. En d'autres termes, des fonctions quadratiques en  $\zeta$  permettent déjà d'atteindre une très bonne précision. Ceci semble cohérent car on retrouve la description classique utilisée pour construire un modèle de structure coque, à savoir la distribution linéaire de la plupart des contraintes et déformations dans l'épaisseur. On se limitera désormais à un degré 2 dans l'épaisseur pour les éléments massifs coque : espace d'approximation  $Q_{p,q,2}$ . L'élément présenté ici possède des performances limitées car il est sujet au verrouillage. Des traitements particuliers vont lui être ajoutés pour le rendre efficace, c'est l'objet des sections suivantes du chapitre.



### 3.3 Amélioration : construction d'un élément mixte

Comme annoncé dans l'introduction (section 3.1), on se propose pour traiter le verrouillage de l'élément massif coque de faire appel aux méthodes de projection  $\bar{B}$  et mixtes dont le potentiel a été souligné dans le chapitre 2. C'est plus précisément le cadre théorique des méthodes mixtes qui nous a permis au départ d'établir une formulation consistante. On présente ici la construction de l'élément mixte associé. On garde pour l'approximation des déplacements l'espace  $Q_{p,q,2}$  et on conserve la règle basique d'intégration des NURBS, soit  $(p+1) \times (q+1) \times 3$  points de Gauss par élément. Ce choix d'espace d'approximation et de règle d'intégration sera celui considéré dans toute la suite du chapitre.

#### 3.3.1 Principe de la stratégie

On s'appuie sur les stratégies  $\bar{B}$  et mixte développées dans le chapitre 2 pour les éléments de poutre courbe (voir sections 2.4 et 2.5). L'idée est de rechercher les termes de déformation responsables du verrouillage (méthode  $\bar{B}$ ), ou bien d'efforts correspondants (méthode mixte), dans un espace de dimension inférieure à celui des déplacements. La difficulté pour le modèle massif coque est d'extraire les contributions responsables du verrouillage. En effet, si pour les poutres il est clair que les verrouillages proviennent directement des composantes de déformation de membrane  $\varepsilon_m$  et de cisaillement transversal  $\gamma_{ct}$  (cf., pour rappel, équation (2.6)), on ne peut pas en dire autant pour les nombreuses sources de verrouillage d'un modèle massif. Il faut dans un premier temps se placer dans le repère local à la coque (travailler avec  $\varepsilon_t$  et  $\sigma_t$  (équation (3.13))) mais ceci ne suffit pas. Par exemple, on s'attend à trouver les contributions de membrane dans les déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  or il est vraisemblable que ces composantes de déformation renferment aussi les contributions de flexion. Il est important de pouvoir extraire de  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  la membrane de la flexion puisque seule la membrane doit être modifiée pour supprimer le verrouillage associé. Pour cela, une idée simple est de prendre la moyenne dans l'épaisseur de la coque des composantes de déformation. Cette stratégie correspond à celle utilisée pour résoudre de façon analytique en mécanique des milieux continus une poutre soumise à de la traction et à de la flexion. En effet dans ce cas, on fait l'hypothèse d'une répartition affine dans l'épaisseur de la déformation longitudinale, la partie constante rend compte de la membrane tandis que la partie linéaire traduit la flexion (voir figure 3.2 pour l'illustration).

Plus généralement, c'est en intégrant les composantes de contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$  et  $\sigma_{13}$  suivant l'épaisseur que sont obtenus les efforts résultants de membrane et de cisaillement d'un modèle de structure (cf., par exemple, équation (1.19) du modèle de plaque de la section 1.2.1). En modèle de structure, ce sont ces efforts qu'il faut modifier pour traiter le verrouillage en membrane et en cisaillement. Ces termes sont reliés à la moyenne dans l'épaisseur des composantes de déformation. Cela justifie la stratégie d'extraction de la membrane proposée en figure 3.2. De plus, il semble que l'on puisse procéder de même pour le cisaillement. Dans le cas massif coque, un verrouillage supplémentaire peut apparaître, celui dû au pincement de la coque c'est-à-

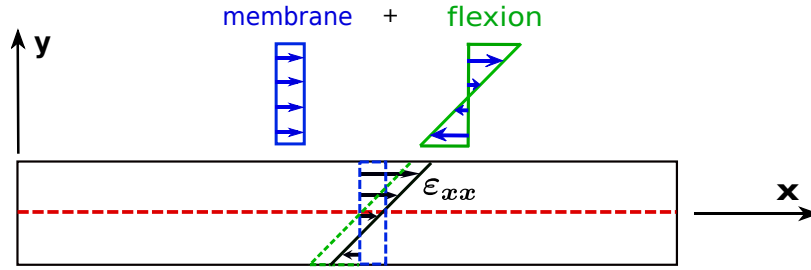


FIGURE 3.2: Principe d'extraction de la membrane sur la flexion : moyenne de la déformation dans l'épaisseur.

dire à  $\sigma_{33}$  et  $\epsilon_{33}$ . Pour palier ce verrouillage de pincement, on peut simplifier la relation de comportement (voir équation (3.8)) de sorte à la rendre quasi-plane (cf., par exemple, [ABE 02, LEG 03, ABE 09]). Toutefois, il est préférable d'un point de vue physique de garder une loi 3D complète. Comme le comportement dans l'épaisseur est fortement lié à la membrane du fait de l'effet Poisson, il paraît légitime de traiter le pincement de façon similaire à la membrane et donc aussi, de façon similaire au cisaillement.

Tout ceci nous permet d'établir la stratégie suivante pour résoudre le verrouillage de l'élément massif coque. Ces verrouillages étant communément attribués à : (i) la membrane ; (ii) le cisaillement (plan et transverse) ; et (iii) le pincement, on propose dans ce travail de modifier à l'aide d'une projection  $\bar{B}$  l'interpolation de la moyenne dans l'épaisseur de (i)  $\epsilon_{11}$  et  $\epsilon_{22}$  ; (ii)  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{23}$  et  $\epsilon_{13}$  ; et (iii)  $\epsilon_{33}$ . Cette idée de prendre la moyenne a initialement été donnée dans [BOU 13b] avant d'avoir été réutilisée dans [BOU 13a]. L'écriture d'une formulation  $\bar{B}$  valable, c'est-à-dire consistante variationnellement et numériquement (cf. remarque 10) ne paraît pas aisée avec les termes de moyenne. Plutôt qu'une stratégie  $\bar{B}$ , c'est en fait une stratégie mixte faisant intervenir la moyenne des composantes de contrainte que nous proposons de mettre en place dans un premier temps.

### 3.3.2 Formulation : version continue

On travaillera désormais toujours dans le repère local  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  pour exprimer les contraintes et les déformations. Dans notre cas d'élément massif 3D, le problème mixte de base consiste à trouver à la fois  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_t \in \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est l'espace des contraintes défini tel que :

$$\mathcal{S} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}_t \in [L^2(\Omega)]^6 \right\}, \quad (3.26)$$

qui minimisent sur  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{S}$  la fonctionnelle mixte suivante :

$$E_{p_{mixte}}(\mathbf{U}_M, \underline{\underline{\sigma}}_t) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_t : \underline{\underline{\epsilon}}_t d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_t : \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_t d\Omega - l(\mathbf{U}_M). \quad (3.27)$$

La minimisation de cette fonctionnelle conduit à l'écriture du problème mixte sous forme faible : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_t \in \mathcal{S}$  tels que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_t^* : \underline{\underline{\varepsilon}}_t d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* : \underline{\underline{\sigma}}_t d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}_t^* : \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_t d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \underline{\underline{\sigma}}_t^* \in \mathcal{S}. \quad (3.28)$$

Afin de faire ressortir les contributions responsables du verrouillage, on propose d'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}}_t = \underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}\perp} + \underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}}, \quad (3.29)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}}$  est la contrainte moyenne dans l'épaisseur et  $\underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}\perp}$  le complément pour obtenir la contrainte. Pour limiter le verrouillage, le point clé de la méthode envisagée est de modifier l'interpolation de  $\underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}}$ . Seule cette contribution constitue donc la partie inconnue en contrainte de la formulation mixte. On la notera dans la suite  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  pour simplifier. La contribution  $\underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}\perp}$  provient quant à elle du déplacement. Elle s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}\perp} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t(\mathbf{U}_M) - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t(\mathbf{U}_M) \right) = \underline{\underline{C}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t \right) \right), \quad (3.30)$$

avec l'opérateur moyenne  $\underline{\underline{MOY}}(\cdot)$  défini comme suit :

$$\underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t \right) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\varepsilon}}_t(\mathbf{U}_M(\tilde{z})) d\tilde{z}. \quad (3.31)$$

Le matériau étant homogène, la relation de comportement est constante dans l'épaisseur c'est pourquoi on peut sortir  $\underline{\underline{C}}$  de l'opérateur moyenne  $\underline{\underline{MOY}}(\cdot)$  dans l'équation (3.30).

On procède de manière analogue pour définir la contrainte virtuelle  $\underline{\underline{\sigma}}_t^*$ , c'est-à-dire que l'on écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_t^* = \underline{\underline{C}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* \right) \right) + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^*. \quad (3.32)$$

Avec ces hypothèses, on peut modifier l'équation (3.28) de sorte à obtenir la formulation faible de l'élément mixte : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \in \mathcal{S}$  tels que :

$$\int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* \right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^* : \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t \right) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^* : \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^* \in \mathcal{S}. \quad (3.33)$$

### 3.3.3 Formulation : version discrète

En tenant compte du fait que l'on recherche l'approximation en déplacement  $\mathbf{U}_M^h$  dans  $Q_{p,q,2}$ , il nous faut à présent définir un espace d'approximation compatible pour l'inconnue en contrainte du problème  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h$ . On procède comme en 1D (voir, encore, sections 2.4

et 2.5). On choisit un degré polynomial de moins pour l'approximation  $\tilde{\sigma}^h$  que pour  $U_M^h$ . Concernant la régularité au travers des différents nœuds du maillage, on prend une classe de continuité de moins. L'approximation  $\tilde{\sigma}$  étant constante dans l'épaisseur, un espace de fonctions constantes en  $\zeta$  suffit pour  $\tilde{\sigma}^h$ . L'espace d'approximation utilisé va donc être  $Q_{p-1,q-1,0}$ . On note  $\tilde{N}_C$ ,  $C \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  les fonctions générant cet espace. On exprime l'approximation  $\tilde{\sigma}^h$  sous forme matricielle telle que :

$$\tilde{\sigma}^h = \sum_{C=1}^{\tilde{n}} \underline{\tilde{N}}^C \tilde{\sigma}^C \quad \text{avec} \quad \underline{\tilde{N}}^C = \begin{bmatrix} \tilde{N}_C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_C \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

$\tilde{\sigma}^C = \{\tilde{\sigma}_{11}^C \ \tilde{\sigma}_{22}^C \ \tilde{\sigma}_{33}^C \ \tilde{\sigma}_{12}^C \ \tilde{\sigma}_{23}^C \ \tilde{\sigma}_{13}^C\}^T$ ,  $C \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  est l'ensemble des composantes du vecteur des variables de contrôle de  $\tilde{\sigma}^h$ . On désigne par  $\{\tilde{\sigma}\}$  le vecteur regroupant l'ensemble de ces composantes. Avec ceci, on peut écrire la version discrète du problème de l'équation (3.33). C'est la version discrète de l'élément mixte. En utilisant le fait que le repère local soit constant dans l'épaisseur de la coque par construction :

$$\mathbf{MOY}(\varepsilon_t^h) = \mathbf{MOY}(\underline{R}\varepsilon_x^h) = \underline{R} \mathbf{MOY}(\varepsilon_x^h), \quad (3.35)$$

et que le matériau soit isotrope (cf remarque 12) :

$$\underline{D} = \underline{R}^T \underline{D} \underline{R} = \underline{R} \underline{D} \underline{R}^T, \quad (3.36)$$

on obtient le système linéaire suivant à résoudre :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}^L] & [K_{\tilde{\sigma}u}^L]^T \\ [K_{\tilde{\sigma}u}^L] & -[K_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}^L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\tilde{\sigma}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.37)$$

avec, en fonction des différents opérateurs introduits dans ce chapitre :

$$\begin{aligned} [K_{uu}^L] &= \int_{\Omega} \left[ \underline{B}^{LT} \underline{D} \underline{B}^L - \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}^L(\tilde{z}) d\tilde{z} \right)^T \underline{D} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}^L(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) \right] d\Omega ; \\ [K_{\tilde{\sigma}u}^L] &= \int_{\Omega} \left[ \underline{\tilde{N}}^T \underline{R} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}^L(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) \right] d\Omega ; \\ [K_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}^L] &= \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D}^{-1} \underline{\tilde{N}} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

L'opérateur  $\underline{\tilde{N}}$  est bien évidemment un opérateur global qui regroupe l'ensemble des contributions  $\underline{\tilde{N}}^C$ ,  $C \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$ .

En pratique, on réalise maintenant une condensation statique des inconnues en contrainte sur l'ensemble de la structure. Ceci réduit le système de l'équation (3.37) aux seules inconnues cinématiques. La condensation statique donne :

$$[K_{\sigma u}^L] \{U\} - [K_{\sigma\sigma}^L] \{\bar{\sigma}\} = \{0\} \Rightarrow \{\bar{\sigma}\} = [K_{\sigma\sigma}^L]^{-1} [K_{\sigma u}^L] \{U\}, \quad (3.39)$$

ce qui conduit à écrire l'équilibre en fonction du déplacement uniquement :

$$[K_{mixte}^L] \{U\} = \{F\} \quad \text{avec} \quad [K_{mixte}^L] = [K_{uu}^L] + [K_{\sigma u}^L]^T [K_{\sigma\sigma}^L]^{-1} [K_{\sigma u}^L]. \quad (3.40)$$

$[K_{mixte}^L]$  est la matrice de rigidité globale condensée de l'élément massif coque mixte. Comme attendu vis-à-vis du chapitre précédent, il s'avère qu'à cause de l'inversion de l'opérateur  $[K_{\sigma\sigma}^L]$ , cette matrice est pleine. Seul le cas d'un espace de contrainte  $Q_{0,0,0}$  échappe à la règle. Il ne nous intéresse pas car il est similaire aux éléments finis classiques.

**Remarque 13** Comme la matrice  $\underline{D}$  est symétrique définie positive et les fonctions NURBS sont positives, l'opérateur  $[K_{\sigma\sigma}^L]$  est symétrique défini positif. Il est donc bien inversible.

**Remarque 14** Nous ne sommes pas obligés de condenser la matrice de rigidité pour résoudre. Suivant l'environnement informatique à notre disposition et les critères d'efficacité fixés, il peut être plus intéressant de garder la structure mixte du système (équation (3.37)) au lieu de celle condensée (équation (3.40)). Toutefois, nous privilégierons pour la présentation l'écriture condensée de l'élément mixte. En plus du fait que cela permet de faire le lien avec les méthodes  $\bar{B}$  (cf. chapitre précédent), deux points nous paraissent justifier ce positionnement : d'une part, cette écriture est plus commode car similaire aux éléments basiques découlant d'une formulation purement en déplacement. D'autre part, il est à noter que la matrice mixte de l'équation (3.37) apparaît souvent mal conditionnée de par sa structure (différence de poids des termes de déplacement et de contrainte), ce qui disparaît avec la version condensée.

**Remarque 15** Une façon simple pour calculer les rigidités  $[K_{uu}^L]$  et  $[K_{\sigma u}^L]$  est de parcourir deux fois les points de Gauss de la structure. Lors de la première boucle, on calcule la moyenne dans l'épaisseur de l'opérateur  $\underline{B}^L$ . Au cours de cette boucle, on associe aux trois points de Gauss selon une même épaisseur la moyenne de  $\underline{B}^L$  correspondante (voir figure 3.3 pour l'illustration). Ensuite, on parcourt une deuxième fois l'ensemble des points de Gauss de la structure en prenant notamment les valeurs des moyennes précédemment calculées pour déterminer les rigidités proprement dites.

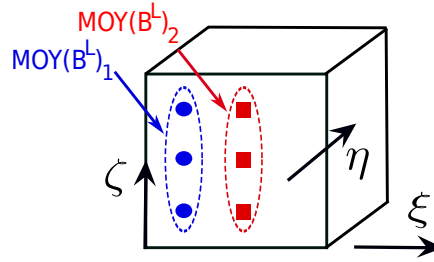


FIGURE 3.3: Mise en œuvre avec la moyenne dans l'épaisseur.

### 3.4 Équivalence avec un élément $\bar{B}$

Comme sous-entendu depuis le début du chapitre, on peut comme en 1D retrouver l'élément massif coque mixte de la section précédente à partir d'une méthode de projection  $\bar{B}$ . On montre ici comment se définit cette projection. Pour cela, il faut que l'élément  $\bar{B}$  construit conduise à une matrice de rigidité strictement identique à celle de l'élément mixte (cf. équation (3.40)). L'équivalence entre élément  $\bar{B}$  et mixte permet de s'assurer de la consistance variationnelle de la projection  $\bar{B}$ . Une telle démarche a déjà été menée en éléments finis classiques : c'est en prouvant l'équivalence avec des méthodes mixtes que les techniques d'intégration réduite sont devenues pertinentes à utiliser (cf. [MAL 78]). Une fois la formulation  $\bar{B}$  consistante établie, on se rendra compte qu'elle n'est pas forcément identique à ce qui est fait habituellement pour construire  $\bar{B}$  et, qu'un traitement  $\bar{B}$  classique peut mener à une formulation non consistante variationnellement. Avec l'élément  $\bar{B}$  construit, on pourra finalement chercher à limiter le coût de calcul en rendant la projection locale à chacun des éléments du maillage ce qui conduira à une matrice de rigidité globale creuse. Ceci constitue le plan de la présente section.

#### 3.4.1 Formulation $\bar{B}$ de l'élément

On suit le formalisme de la section 2.4 pour la construction de l'élément  $\bar{B}$ .

##### 3.4.1.1 Version continue

On commence par considérer un opérateur de projection linéaire  $\pi$  permettant de projeter la moyenne dans l'épaisseur des déformations pour obtenir :

$$\overline{\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t)} = \pi\left(\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t)\right). \quad (3.41)$$

Avec ceci, on postule la formulation faible  $\bar{B}$  suivante : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}_t - \overline{\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^*)} : \underline{\underline{C}} \overline{\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t)} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \overline{\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^*)} : \underline{\underline{C}} \overline{\underline{\underline{MOY}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t)} d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}. \quad (3.42)$$

On va vérifier qu'avec un choix judicieux de l'opérateur  $\pi$ , cette formulation conduit à la même matrice de rigidité que celle de l'élément mixte de la section précédente.

### 3.4.1.2 Version discrète

Pour l'opérateur  $\pi$ , on choisit l'espace de projection  $Q_{p-1,q-1,0}$  (le même espace que celui qui sert à construire  $\tilde{\sigma}^h$  dans la formulation mixte) et on utilise la norme  $L^2$ . D'un point de vue discret, l'équation (3.41) devient donc :

$$\overline{\mathbf{MOY}}(\varepsilon_t^h) = \sum_{C=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_C \overline{\mathbf{MOY}}(\varepsilon_t^h)^C, \quad (3.43)$$

où  $\overline{\mathbf{MOY}}(\varepsilon_t^h)^C$  est la projection de  $\mathbf{MOY}(\varepsilon_t^h)$  sur  $\tilde{N}_C$ . L'expression de la projection vérifie :

$$\overline{\mathbf{MOY}}(\varepsilon_t^h)^C = \sum_{D=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{CD}^{-1} \left( \tilde{N}_D, \mathbf{MOY}(\varepsilon_t^h) \right)_{\Omega} = \sum_{D=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{CD}^{-1} \int_{\Omega} \tilde{N}_D \mathbf{MOY}(\varepsilon_t^h) d\Omega, \quad (3.44)$$

ce qui donne finalement sous forme matricielle (en reprenant bien évidemment l'approximation  $\mathbf{U}_M^h$  de  $\mathbf{U}_M$  dans  $Q_{p,q,2}$ ) :

$$\overline{\mathbf{MOY}}(\varepsilon_t^h) = \underline{\tilde{N}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{R} \left[ \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) \right] d\Omega \{U\}, \quad (3.45)$$

où  $\underline{\tilde{M}}$  s'apparente à la matrice de masse de la base "tilde", à savoir :

$$\underline{\tilde{M}} = \left( \underline{\tilde{N}}, \underline{\tilde{N}} \right)_{\Omega} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{\tilde{N}} d\Omega. \quad (3.46)$$

Le remplacement de la moyenne projetée des déformations (équation (3.45)) dans la formulation faible (équation (3.42)) permet de construire la matrice de rigidité globale  $[K_B^L]$  de l'élément massif coque  $\bar{B}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} [K_B^L] = & \int_{\Omega} \left[ \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} - \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right)^T \underline{D} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) \right] d\Omega + \\ & \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{R} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) d\Omega \right]^T \underline{\tilde{M}}^{-T} \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right] \underline{\tilde{M}}^{-1} \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{R} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{B}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) d\Omega \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

qui s'écrit, en reprenant les opérateurs définis dans l'équation (3.38) :

$$[K_B^L] = [K_{uu}^L] + [K_{\sigma u}^L]^T \underline{\tilde{M}}^{-T} \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right] \underline{\tilde{M}}^{-1} [K_{\sigma u}^L]. \quad (3.48)$$

En remarquant pour finir que :

$$[K_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^L]^{-1} = \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D}^{-1} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right]^{-1} = \underline{\tilde{M}}^{-T} \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right] \underline{\tilde{M}}^{-1}, \quad (3.49)$$

on trouve que  $[K_{\bar{B}}^L] = [K_{mixte}^L]$  (cf. équation (3.40)) d'où l'équivalence de la méthode mixte de la section 3.3 et de la méthode  $\bar{B}$  présentée ici.

**Remarque 16**  $\underline{\tilde{M}}$  étant symétrique,  $\underline{\tilde{M}}^{-1}$  l'est aussi donc on peut écrire  $\underline{\tilde{M}}^{-T} = \underline{\tilde{M}}^{-1}$  dans les équations (3.47), (3.48) et (3.49).

**Remarque 17** L'égalité énoncée dans l'équation (3.49) se montre facilement lorsque l'on passe en écriture indicielle. On voit alors que :

$$\left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D}^{-1} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right] \left( \underline{\tilde{M}}^{-1} \left[ \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{D} \underline{\tilde{N}} d\Omega \right] \underline{\tilde{M}}^{-1} \right) = \underline{I}, \quad (3.50)$$

où  $\underline{I}$  est l'opérateur identité. En effet, ceci devient en écriture indicielle : pour  $(C, E) \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}^2$ ,

$$\sum_{B,A,D=1}^{\tilde{n}} \left( \tilde{N}_C, C_{ijkl}^{-1} \tilde{N}_B \right)_{\Omega} \cdot \left( \tilde{N}_B, \tilde{N}_A \right)_{\Omega}^{-1} \cdot \left( \tilde{N}_A, C_{ijkl} \tilde{N}_D \right)_{\Omega} \cdot \left( \tilde{N}_D, \tilde{N}_E \right)_{\Omega}^{-1}. \quad (3.51)$$

$C_{i,j,k,l}$ ,  $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4$  est la version indicielle de l'opérateur  $\underline{C}$ . Cet opérateur est homogène dans la structure donc on peut le sortir de l'intégrale  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  si bien qu'il se simplifie avec son inverse. La réalisation des produits matriciels permet finalement de conclure la preuve puisque :

$$\sum_{B,A,D=1}^{\tilde{n}} \left( \tilde{N}_C, \tilde{N}_B \right)_{\Omega} \cdot \left( \tilde{N}_B, \tilde{N}_A \right)_{\Omega}^{-1} \cdot \left( \tilde{N}_A, \tilde{N}_D \right)_{\Omega} \cdot \left( \tilde{N}_D, \tilde{N}_E \right)_{\Omega}^{-1} = \sum_{A=1}^{\tilde{n}} \delta_{CA} \cdot \delta_{AE} = \delta_{CE}, \quad (3.52)$$

avec  $\delta$  désignant le symbole de kronecker ( $\delta_{AB} = 1$  si  $A = B$  et 0 sinon).

### 3.4.2 Comparaison avec une stratégie $\bar{B}$ habituelle

Sans connaissance préalable de la formulation mixte, on aurait pu être tenté de proposer une formulation  $\bar{B}$  pour l'élément massif coque comme suit : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\bar{\varepsilon}}_t^{moy*} : \underline{\underline{C}} \underline{\bar{\varepsilon}}_t^{moy} d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*) \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad (3.53)$$

où la projection se définirait tel que :

$$\underline{\bar{\varepsilon}}_t^{moy} = \underline{\varepsilon}_t - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\varepsilon}_t \right) + \overline{\underline{\underline{MOY}}} \left( \underline{\varepsilon}_t \right), \quad (3.54)$$



avec  $\overline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right)$  issu de l'équation (3.41) en continu et (3.45) en discret. Cette formulation que l'on va appeler " $\overline{B}$  habituelle" en comparaison avec l'élément  $\overline{B}$  du paragraphe précédent proviendrait de la minimisation de l'énergie potentielle suivante :

$$\overline{E}_p(\mathbf{U}_M) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{moy} : \underline{\underline{\underline{C}}}\underline{\underline{\varepsilon}}_t^{moy} d\Omega - l(\mathbf{U}_M). \quad (3.55)$$

Procéder ainsi semble certainement être le plus trivial vis-à-vis des développements réalisés en 1D. C'est en fait cette formulation  $\overline{B}$  habituelle qui avait été envisagée en premier lieu pour l'élément massif coque (cf. [BOU 13b]). Plus précisément, on peut remplacer l'expression de l'équation (3.54) dans la forme faible  $\overline{B}$  habituelle (équation (3.53)) pour voir les différences avec la formulation  $\overline{B}$  de l'équation (3.42). Par rapport à la formulation  $\overline{B}$  (équation (3.42)), des termes supplémentaires apparaissent. Ce sont globalement les termes croisés. Ils peuvent être regroupés :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* : \underline{\underline{\underline{C}}}\left(\overline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right) - \underline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right)\right) + \overline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^*\right) : \underline{\underline{\underline{C}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right)\right) \\ + \underline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t^*\right) : \underline{\underline{\underline{C}}}\left(2\underline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right) - \underline{\underline{\varepsilon}}_t - \overline{\underline{\underline{MOY}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_t\right)\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ce sont ces termes qui empêchent la consistance variationnelle de la formulation  $\overline{B}$  habituelle. Il est en fait nécessaire d'écrire la projection  $\overline{B}$  comme dans l'équation (3.42), c'est-à-dire de façon équivalente à la formulation mixte (équation (3.33)), pour s'assurer que la solution recherchée corresponde bien à la solution du problème de départ (équation (3.19)). L'élément  $\overline{B}$  habituel est donc à éviter au profit de l'élément  $\overline{B}$  développé ci-avant. C'est ce que nous ferons dans la suite, il ne sera désormais plus question d'élément  $\overline{B}$  habituel. Des justifications théoriques concernant la consistance variationnelle sont données dans l'annexe C. Aussi, on profite de cette annexe pour montrer la consistance numérique de la méthode proposée, c'est-à-dire de l'élément  $\overline{B}$  équivalent à l'élément mixte.

#### 3.4.3 Réduction du coût de calcul : formulation " $\overline{B}$ locale"

On sait que l'élément NURBS massif coque développé dans ce travail (élément  $\overline{B}$  ou de façon équivalente élément mixte condensé) a le désavantage de posséder une matrice de rigidité globale pleine. Bien que ceci semble récurrent dans les méthodes visant à éliminer le verrouillage NURBS (cf., de nouveau, [ELG 07, ECH 10, ECH 13]), on peut se rendre compte que très peu de travaux pour limiter ce point néfaste ont été publiés à ce jour. On propose ici une stratégie pour palier ce défaut. L'idée est de partir de l'élément  $\overline{B}$  et d'utiliser pour réaliser la projection une méthode des moindres carrés locale (LLSQ) à chacun des éléments du maillage. L'approche LLSQ a tout d'abord été introduite dans Mitchell *et al.* [MIT 11] pour imposer de manière efficace et peu coûteuse des conditions aux limites de Dirichet pour des fonctions NURBS. Par la suite, un développement plus

général et théorique de la méthode LLSQ est apparu dans Govindjee *et al.* [GOV 12]. Cette méthode envisage de considérer une projection non pas globale sur la structure, mais locale à chacun des éléments puis de lisser la solution sur la structure en question, ceci de sorte à approcher la solution projetée globalement sans avoir à inverser une matrice de masse globale qui conduit à un opérateur plein.

L'application dans notre cas de projection  $\bar{B}$  revient simplement à utiliser la procédure LLSQ pour définir un nouvel opérateur de projection  $\pi^e$  permettant d'obtenir une approximation notée  $\overline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t)^E$  de  $\overline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t)$  (voir, pour rappel, équation (3.41)). On part d'une projection locale sur chacun des éléments du maillage. Pour ceci, on note les fonctions de base NURBS locales  $\tilde{N}_m^e$  qui sont la restriction des fonctions de base globales  $\tilde{N}_C$  sur l'élément  $e$  occupant le sous domaine  $\Omega_e$  de  $\Omega$ .  $m$  désigne le numéro local de la fonction. En d'autres termes,  $\tilde{N}_m^e$  vaut  $\tilde{N}_C$  sur  $\Omega_e$  et est nulle ailleurs dans  $\Omega$ . En considérant  $\tilde{n}_e$  le nombre d'éléments du maillage et  $\tilde{n}_m$  le nombre de fonctions locales par élément, la projection de  $\text{MOY}(\underline{\varepsilon}_t^h)$  sur  $\tilde{N}_m^e$  par la norme  $L^2$  s'écrit telle que :

$$\overline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h)_m^e = \sum_{f=1}^{\tilde{n}_e} \sum_{k=1}^{\tilde{n}_m} \left( \tilde{M}_{mk}^{ef} \right)^{-1} \left( \tilde{N}_k^f, \text{MOY}(\underline{\varepsilon}_t^h) \right)_{\Omega_f}, \quad (3.57)$$

où l'on a repris la notation  $(\cdot, \cdot)$  pour le produit scalaire  $L^2$  (cf. équation (3.46)). Cette projection ne requiert plus l'inversion d'une matrice de masse globale mais seulement l'inversion de matrices de masse locales aux éléments. La déformation obtenue est en revanche discontinue sur l'ensemble de la structure puisque chacun des éléments du maillage est traité indépendamment, c'est-à-dire qu'aucun assemblage n'est réalisé. La suite de la procédure LLSQ consiste alors à lisser la déformation de façon non coûteuse en appliquant la moyenne des degrés de liberté locaux partagés à chaque degré de liberté global correspondant. Ceci se fait en introduisant l'opérateur Booléen d'assemblage  $\underline{\underline{A}}$  qui transforme les degrés de liberté locaux :

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_m^e = \{ \varepsilon_{11_m}^e \ \varepsilon_{22_m}^e \ \varepsilon_{33_m}^e \ \varepsilon_{12_m}^e \ \varepsilon_{23_m}^e \ \varepsilon_{13_m}^e \}, \quad (3.58)$$

représentant n'importe quelle déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^h = \sum_{e=1}^{\tilde{n}_e} \sum_{m=1}^{\tilde{n}_m} \underline{\underline{N}}_m^e \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_m^e \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{N}}_m^e = \begin{bmatrix} \tilde{N}_m^e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_m^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_m^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_m^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_m^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\tilde{N}_m^e \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

en degrés de liberté globaux  $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_C$ , où  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t^h = \sum_{C=1}^{\tilde{n}} \underline{\underline{N}}^C \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_C$  (cf. équation (3.34)). L'application de la transformation  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-1} \underline{\underline{A}}$  à la déformation projetée localement (équation (3.57)) permet dès lors de la lisser. Cette opération reste peu coûteuse car  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)$  est diagonale.

Considérant toutes ces notations, on peut finalement écrire sous forme matricielle l'approximation de la projection de la moyenne des déformations dans l'épaisseur (voir, pour rappel, équation (3.45)) sous la forme :

$$\overline{\mathbf{MOY}}(\boldsymbol{\varepsilon}_t^h)^E = \underline{\underline{\tilde{N}}} (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-1} \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{\tilde{M}}}^E)^{-1} \left[ K_{\tilde{\sigma}u}^{EL} \right] \{U\}. \quad (3.60)$$

L'opérateur  $\left[ K_{\tilde{\sigma}q}^{EL} \right]$  et la matrice de masse  $\underline{\underline{\tilde{M}}}^E$  sont reliés à la base "tilde" locale. Ils s'écrivent par bloc, élément par élément, comme suit :

$$\begin{aligned} \left[ K_{\tilde{\sigma}u}^{EL} \right] &= \sum_{e=1}^{\tilde{n}_e} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\tilde{N}}}^{eT} \underline{\underline{R}} \left[ \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{B}}(\tilde{z}) d\tilde{z} \right) \right] d\Omega_e ; \\ \underline{\underline{\tilde{M}}}^E &= \sum_{e=1}^{\tilde{n}_e} \left( \underline{\underline{\tilde{N}}}^e, \underline{\underline{\tilde{N}}}^e \right)_{\Omega_e}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En remplaçant l'expression de l'équation (3.60) dans la formulation faible  $\bar{B}$  (cf. équation (3.42)), on obtient la matrice de rigidité globale  $\left[ K_{\bar{B}}^{EL} \right]$  du problème " $\bar{B}$  local" qui s'écrit, en reprenant  $\left[ K_{uu}^L \right]$  (équation (3.38)) :

$$\begin{aligned} \left[ K_{\bar{B}}^{EL} \right] &= \left[ K_{uu}^L \right] \\ &+ \left[ K_{\tilde{\sigma}u}^{EL} \right]^T (\underline{\underline{\tilde{M}}}^E)^{-T} \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-T} \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{N}}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\tilde{N}}} d\Omega \right] (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-1} \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{\tilde{M}}}^E)^{-1} \left[ K_{\tilde{\sigma}u}^{EL} \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Cette matrice, en plus du fait d'être peu coûteuse à construire puisque l'inversion de  $\underline{\underline{\tilde{M}}}^E$  se fait élément par élément et  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T$  est diagonale, possède une structure creuse ce qui limite le coût de l'inversion numérique. On peut connaître *a priori* sa largeur de bande qui est un peu plus grande que celle d'une matrice de rigidité classique mais reste raisonnable. Par conséquent, il est vraisemblable qu'en plus du coût de calcul moindre, on puisse procéder comme habituellement en éléments finis pour la construction (procédure élément par élément et stockage de la bande seulement) et pour l'inversion (utilisation de solveurs standards). Ceci faciliterait l'implémentation de la stratégie dans des codes éléments finis usuels. Des détails seront donnés en section 3.6 (Résultats numériques) et plus précisément dans la remarque 24. Afin de simplifier les désignations et éviter les confusions, on parlera dans ce qui suit d'élément  $\bar{B}$  local pour l'élément avec application de la procédure LLSQ et on conservera la terminologie élément  $\bar{B}$  pour celui avec la projection globale (cf. équations (3.42) et (3.47)).

**Remarque 18** *La validité théorique de la méthode LLSQ a été prouvée dans [GOV 12]. Plus précisément, il a pu être montré que cette méthode mène à une approximation qui converge vers la solution projetée obtenue en utilisant les moindres carrés globaux. Cela signifie ici que l'on peut s'attendre à ce que  $\overline{\mathbf{MOY}}(\boldsymbol{\varepsilon}_t^h)^E$  (voir équation (3.60)) converge*

vers  $\overline{\text{MOY}}(\varepsilon_t^h)$  (cf. équation (3.45)). La seule modification de l'élément  $\overline{B}$  local par rapport à l'élément  $\overline{B}$  étant le remplacement de  $\overline{\text{MOY}}(\varepsilon_t^h)$  par  $\overline{\text{MOY}}(\varepsilon_t^h)^E$ , il paraît envisageable que tout comme l'élément  $\overline{B}$ , l'élément  $\overline{B}$  local possède les bonnes propriétés mathématiques de consistance variationnelle et consistance numérique. Nous ne cherchons donc pas dans ce travail à prouver rigoureusement ce point. Il semble en tout cas qu'aucun problème n'ait été à déplorer vis-à-vis de ceci dans les expérimentations numériques de la partie 3.6.

## 3.5 Stabilisation de l'élément

Les éléments développés dans ce chapitre semblent vérifier la consistance numérique, c'est-à-dire qu'ils passent le patch test [BAZ 65]. Cette condition est nécessaire pour s'assurer des bonnes propriétés numériques des éléments mais n'est pas suffisante. Il faut aussi vérifier la stabilité de ceux-ci. Ici, on utilise la notion de stabilité comme introduite dans [BEL 00] (chapitre 8), c'est-à-dire que par élément stable on entend que l'élément possède un rang correct ce qui signifie, en d'autres termes, que l'élément n'est pas sujet à du hourglass (voir, pour rappel, section 2.3 et plus précisément sous-section 2.3.2 pour une compréhension du phénomène de hourglass sur un modèle 1D).

### 3.5.1 Démarche envisagée

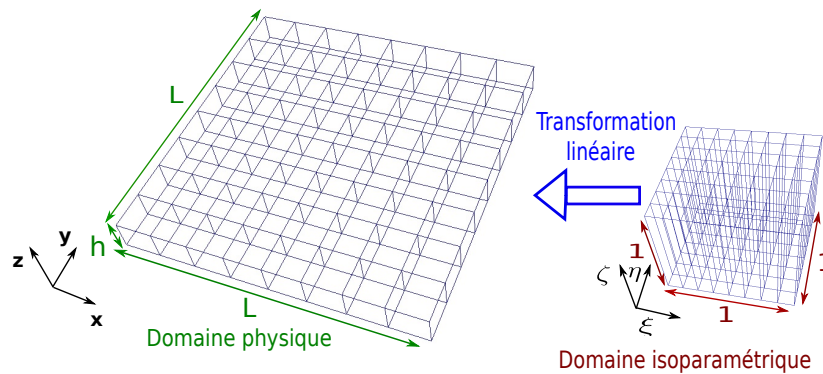
Pour vérifier la stabilité des éléments, on va regarder les valeurs propres des matrices de rigidité associées. En effet, on rappelle que les modes de hourglass sont des modes à énergie quasi nulle qui s'ajoutent aux modes de solide rigide. Ainsi s'ils apparaissent, ils se traduiront par une valeur propre quasi nulle de la matrice de rigidité, cette valeur propre n'étant pas associée à un mode de solide rigide. Nous verrons, en appliquant cette approche, que les éléments développés dans ce chapitre peuvent être sujets à du hourglass suivant les conditions aux limites en déplacement qui sont appliquées au problème de coque. En 3D, ce n'est pas à cause de l'intégration numérique que les modes parasites sont générés mais c'est le choix de la formulation mixte (équation (3.33)), ou  $\overline{B}$  (équation (3.42)), avec l'espace d'approximation pour la moyenne  $Q_{p-1,q-1,0}$ , qui permet à ceux-ci d'apparaître. On propose d'ajouter une rigidité artificielle de stabilisation pour contrôler ces modes (voir section 2.3.3 pour le cas 1D). Pour ceci, on se restreint à un ordre 2 suivant les longueurs ( $p = q = 2$ ). Nous verrons dans la section 3.6 (Résultats numériques) que la restriction quadratique des éléments semble suffisante pour calculer avec une bonne précision la plupart des problèmes de coque usuels. Sur les cas tests envisagés, il s'avère que les éléments développés apparaissent au moins aussi précis avec du degré 2 (en terme de précision pour un nombre de degrés de liberté fixé) que des éléments coques NURBS standards de degré 4. Se limiter à du degré 2 dans les trois directions de l'espace nous paraît dès lors suffisant pour répondre à la problématique de la thèse, à savoir la construction d'éléments NURBS massifs coque performants de bas degré.

**Remarque 19** *L'approche envisagée ici pour traiter la stabilité est une approche ingénieur. Plus théoriquement, la présence de ces modes de hourglass signifie qu'il manque quelque chose à la formulation pour être valide d'un point de vue mathématique. Ceci est certainement relié à la fameuse condition LBB [BRE 91] qui ne doit pas être satisfaite par notre élément mixte. Encore une fois, nous ne cherchons pas dans ce travail à établir précisément le cadre théorique. Nous adoptons une vision ingénieur qui nous paraît raisonnable vis-à-vis de ce qui se fait habituellement tout en ayant conscience de cette limite théorique. Cette pratique est courante (voir, par exemple, [ABE 09, SOU 07, REE 07, BAS 12] pour ne citer que des éléments massifs coque). Aussi, on peut remarquer qu'il n'est pas exclu de voir des éléments ne satisfaisant pas la condition LBB extrêmement répandus en mécanique. Certainement le cas le plus marquant est celui de l'élément mixte pression-déplacement  $\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_0$  de [HER 65].*

Pour établir le contrôle de hourglass, on travaille avec l'élément mixte (section 3.3). Le contrôle de hourglass que l'on va proposer s'applique aussi à l'élément  $\bar{B}$  local (section 3.4.3). L'utilisation de la procédure LLSQ pour construire la projection  $\bar{B}$  ne semble pas avoir de répercussion sur la stabilité de l'élément. Ceci va dans le sens de la remarque 18.

#### 3.5.2 Identification des modes de hourglass

La première étape pour contrôler les modes de hourglass est de les identifier. Plus précisément, on va chercher le champ de déformation ou contrainte du mode de hourglass pour pouvoir, par la suite, lui associer une énergie ce qui permettra de le faire disparaître. Pour ce faire, on étudie le problème simplifié d'une plaque d'éclatement 10 (voir figure 3.4). Les longueurs  $L$  valent 100 et l'épaisseur  $h$  est de 10. Concernant les paramètres matériau, on choisit une configuration usuelle ( $E = 200000$  et  $\nu = 0.3$ ). Comme pour les cas tests en 1D, on ne spécifie pas d'unités pour les paramètres. On suppose que l'on se place dans le Système International d'unités (SI) si bien qu'aucune modification de valeurs des paramètres n'est réalisée en entrée et en sortie du calcul (cf. remarque 5). La discrétisation adoptée est de 8 éléments quadratiques par côté avec une continuité  $C^1$  aux nœuds intérieurs. La discrétisation provient donc d'un seul patch et est obtenue avec le raffinement  $k$  (cf. section 1.1.3). C'est ce qui sera fait dans les expérimentations numériques en section 3.6. Dans le cas plus général d'une discrétisation incluant plusieurs patches ou plusieurs zones de frontière  $C^0$ , il faut effectuer le contrôle de hourglass proposé dans la suite dans chacun des patches ou chacune des zones (de manière analogue à ce qui a dû être fait en 1D, cf. figure 2.9). On rappelle que l'on cherche ici à calculer et étudier la matrice de rigidité du problème. La plaque est libre. Cette géométrie de type plaque est choisie pour des raisons de simplicité de visualisation. Elle s'obtient par transformation linéaire dans les trois directions de l'espace à partir des éléments dans le domaine isoparamétrique  $(\xi, \eta, \zeta)$  (cf. figure 3.4 de nouveau). Ainsi, les modes de hourglass dans le domaine physique  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  auront une forme équivalente (moyennant des dilatations) dans le domaine isoparamétrique.



**FIGURE 3.4:** Problème plaque pour visualiser les modes de hourglass.

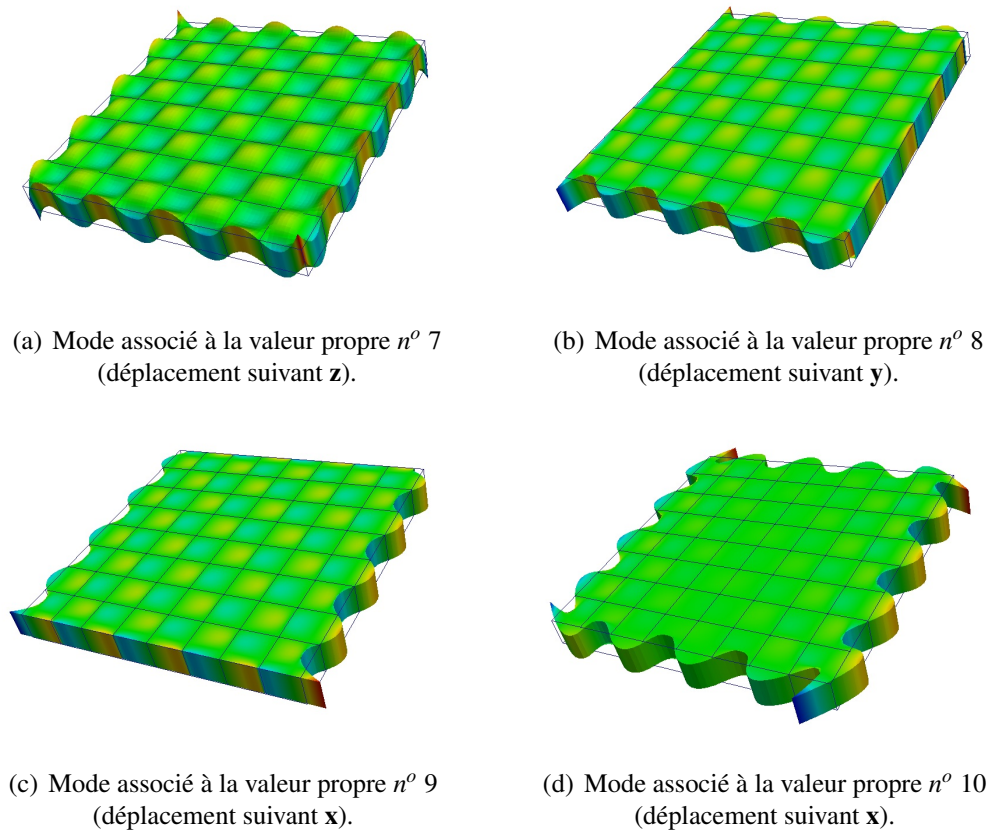
On calcule la matrice de rigidité globale condensée du problème plaque (voir équation (3.40)) puis on détermine ses valeurs propres. Elles sont données dans l'ordre croissant (si mises en valeur absolue) dans le tableau 3.1. Dans ce tableau, "vp" signifie "valeur propre". Comme attendu, les six premières valeurs propres ( $n^o$  : 1 à 6) sont très faibles par rapport aux autres. Les modes associés constituent les mouvements de solide rigide qui sont en pratique bloqués par les conditions aux limites en déplacement. Ensuite, on voit arriver quatre valeurs propres faibles en valeur absolue ( $n^o$  : 7 à 10). Ce sont celles-ci auxquelles on associe les modes de hourglass. Elles impliquent un rang déficient de la matrice de raideur ce qui va générer une instabilité dans le système à résoudre de l'équation (3.40). Autrement dit, cela signifie que l'on a relâché trop de contraintes avec la formulation mixte proposée. Les contraintes responsables du verrouillage sont atténuées, mais dans le même temps, des contraintes supplémentaires sont aussi éliminées, ce qui génère ce problème de rang de la matrice de raideur.

Vp $n^o$	1 à 6	7	8	9	10	11	12	·	900
Valeur vp	$10^{-10}$	-0.0086	-0.0193	-0.0193	-0.0212	538	$1.42 \times 10^3$	·	$7.88 \times 10^6$
Solide rigide	×								
Hourglass		×	×	×	×				

**TABLE 3.1:** Valeurs propres de la matrice de rigidité globale condensée de l'élément mixte pour le problème plaque.

On trace dans la figure 3.5 la configuration déformée des quatre modes de hourglass dans le domaine physique. On observe des oscillations pour la forme des modes. Ceci est caractéristique des modes de hourglass. Si on ne les contrôle pas, la déformée de notre problème coque présentera de la même façon des "bosses" (voir l'exemple numérique du paragraphe 3.6.4). Comme en 1D (cf. figure 2.8(a) de la section 2.3.2), ces modes de hourglass NURBS possèdent une régularité supérieure. Le champ de déplacement est quadratique dans les longueurs et de continuité  $C^1$  aux nœuds intérieurs. Ainsi, plutôt que d'être discontinues comme en éléments finis classiques, la déformation et la contrainte sont  $C^0$  aux bords des éléments si bien que le contrôle de hourglass dans un seul élément

du maillage est suffisant pour faire disparaître le mode parasite associé dans toute la structure. Le contrôle de hourglass se transfère en quelque sorte par continuité d'un élément à l'autre. La régularité supérieure des modes de hourglass est bien visible sur les déformées de la figure 3.5.



**FIGURE 3.5:** Configuration déformée des modes de hourglass pour la plaque.

**Remarque 20** Avec la forme observée des modes de hourglass, on se rend aussi compte que ceux-ci peuvent être éliminés en fonction des conditions aux limites appliquées en déplacement. Par exemple, on remarque qu'il suffirait d'encasturer un côté de la plaque pour les éliminer. Par continuité, le contrôle est ensuite transmis d'un bord à l'autre.

Ainsi, il nous suffit pour pouvoir contrôler ces modes parasites d'identifier leurs formes dans un élément. On préfère ici prendre un élément milieu (voir figure 3.6), c'est-à-dire un élément qui possède 4 bords  $C^1$  (en termes de continuité du déplacement). Les modes sont de formes plus simples dans ces éléments que sur ceux du bord. De plus, pour une meilleure précision dans les calculs, on s'attachera comme dans la section 2.3 à faire le contrôle de hourglass dans un élément situé le plus au centre possible de la structure. Autrement dit, si on a un maillage composé de  $n_1^{\text{el}}$  éléments dans la longueur  $\mathbf{e}_1$  et  $n_2^{\text{el}}$  dans

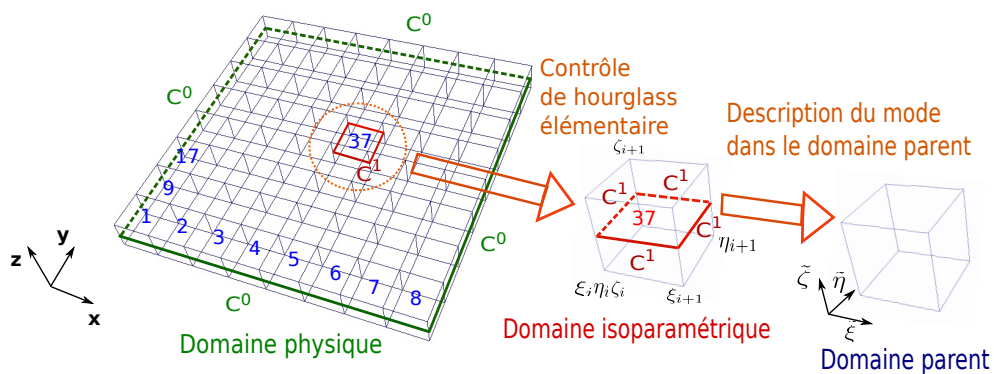
la longueur  $\mathbf{e}_2$ , on fera le contrôle de hourglass dans l'élément de position numérotée  $n_{\text{hg}}^o$  :

$$n_{\text{hg}}^o = n_1^{\text{el}} \times \lfloor n_2^{\text{el}}/2 \rfloor + \lfloor n_1^{\text{el}}/2 \rfloor + 1, \quad (3.63)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière. On s'intéresse donc pour notre cas à la représentation des modes dans l'élément 37. Il est délicat de décrire les modes à partir de la déformée, c'est-à-dire de décrire le champ de déplacement associé. Rappelant que ce que l'on cherche est plus précisément le champ de contrainte ou de déformation du mode, on peut en fait plus simplement profiter de la formulation mixte et obtenir directement la contrainte. Pour cela, on considère la matrice de rigidité élémentaire non condensée de l'élément 37 et on calcule les inconnues de contraintes  $\{\tilde{\sigma}_{\text{hgi}}^e\}$  associées au  $i^{\text{ième}}$  mode de hourglass. Le champ de contrainte correspondant noté  $\tilde{\sigma}_{\text{hgi}}^{\text{e,h}}$  étant linéaire suivant les longueurs et constant dans l'épaisseur (voir équation (3.34)), il est très simple de le définir partout dans l'élément. En se ramenant dans le domaine parent de l'élément  $((\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}) \in [-1; 1]^3)$  permettant de réaliser l'intégration de Gauss (voir, de nouveau, figure 3.6), on peut décrire analytiquement les quatre modes parasites en contrainte comme suit :

$$\tilde{\sigma}_{\text{hg1}}^{\text{e,h}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\sigma}_{\text{hg2}}^{\text{e,h}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\zeta} \\ \tilde{\zeta} \\ 0 \\ -\tilde{\eta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\sigma}_{\text{hg3}}^{\text{e,h}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\eta} \\ \tilde{\eta} \\ 0 \\ \tilde{\xi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\sigma}_{\text{hg4}}^{\text{e,h}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Les numéros 1, 2, 3 et 4 des modes de hourglass correspondent aux numéros 7, 8, 9 et 10, respectivement, des modes propres du tableau 3.1. Ces champs de contraintes semblent bien cohérents avec les déformées montrées en figure 3.5. On va les utiliser pour le contrôle de hourglass.



**FIGURE 3.6:** Contrôle de hourglass dans l'élément milieu : on cherche à décrire les modes dans le domaine parent associé.



### 3.5.3 Contrôle des modes de hourglass

Maintenant que nous avons le champ de contrainte associé au mode de hourglass dans l'élément milieu, il nous faut calculer pour le contrôler une raideur élémentaire de stabilisation  $\left[ K_{stab_i}^{L^e} \right]$  qui produise de l'énergie quand ce  $i^{\text{ième}}$  mode de hourglass est activé. On peut voir que les modes fournis dans l'équation (3.64) produisent de l'énergie pour une formulation classique basée sur les déplacements (cf. équation (3.19)). On rappelle la forme bilinéaire classique :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_t^{h*T} \underline{\underline{D}} \boldsymbol{\varepsilon}_t^h d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t^{h*T} \underline{\underline{D}}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_t^h d\Omega. \quad (3.65)$$

En utilisant celle-ci et la démarche de la section 2.3.3, on écrit la raideur de stabilisation élémentaire sous la forme :

$$\left[ K_{stab_i}^{L^e} \right] = \left[ K_{ua_i}^{L^e} \right] \left[ K_{a_i a_i}^{L^e} \right]^{-1} \left[ K_{a_i u}^{L^e} \right], \quad (3.66)$$

où les différents opérateurs s'expriment tels que :

$$\left[ K_{a_i a_i}^{L^e} \right] = \int_{\Omega_e} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}\mathbf{g}_i}^{e\mathbf{h}T} \underline{\underline{D}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}\mathbf{g}_i}^{e\mathbf{h}} d\Omega_e ; \quad \left[ K_{a_i u}^{L^e} \right] = \int_{\Omega_e} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{h}\mathbf{g}_i}^{e\mathbf{h}T} \underline{\underline{R}} \underline{\underline{B}}^L d\Omega_e ; \quad \left[ K_{ua_i}^{L^e} \right] = \left[ K_{a_i u}^{L^e} \right]^T. \quad (3.67)$$

$\Omega_e$  représente ici le domaine élémentaire de l'élément milieu choisi pour le contrôle. Ces raideurs élémentaires de stabilisation sont ensuite ajoutées à la rigidité globale du système (cf. équation (3.40)). L'équilibre mixte stabilisé s'écrit donc :

$$\left[ K_{mixte}^{L^{stab}} \right] \{U\} = \{F\} \quad \text{avec} \quad \left[ K_{mixte}^{L^{stab}} \right] = \left[ K_{mixte}^L \right] + \sum_{i=1}^4 \mathcal{P}_i \left[ K_{stab_i}^{L^e} \right]. \quad (3.68)$$

où  $(\mathcal{P}_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$  constituent les paramètres de pénalisation de la stabilisation. Ceux-ci peuvent être choisis en relation avec l'amplitude des modes de hourglass à contrôler. L'amplitude  $a_i$  du  $i^{\text{ième}}$  mode peut être retrouvée. Elle se calcule par l'équation :

$$\{a_i\} = \left[ K_{a_i a_i}^{L^e} \right]^{-1} \left[ K_{a_i u}^{L^e} \right] \{U\}, \quad (3.69)$$

où  $\{U\}$  est la solution de l'équilibre stabilisé (équation (3.68)). Comme en 1D, une large fourchette de valeurs de paramètres de pénalisation permet en pratique un contrôle efficace. Sauf indication contraire, on prendra pour simplifier ces coefficients égaux à 1. La matrice de rigidité globale de l'élément massif coque mixte stabilisé  $\left[ K_{mixte}^{L^{stab}} \right]$  (équation (3.68)) possède un rang correct. On regroupe dans le tableau 3.2 les valeurs propres de  $\left[ K_{mixte}^{L^{stab}} \right]$  pour le problème de plaque de départ. On voit que seules les valeurs propres associées aux modes de hourglass sont modifiées. Elles sont à présent positives et suffisamment importantes pour générer un peu d'énergie. L'élément ainsi développé n'est plus sujet aux modes de hourglass.

Évidemment, l'élément  $\bar{B}$  se stabilise de la même manière et une rigidité identique à celle de l'élément mixte stabilisé (équation (3.68)) est obtenue. De plus comme énoncé précédemment, il s'avère que les mêmes observations peuvent être réalisées pour l'élément  $\bar{B}$  local. Cet élément possède aussi 4 modes de hourglass qui peuvent être éliminés avec la stratégie proposée dans cette section. L'équilibre  $\bar{B}$  local stabilisé s'écrit ainsi tel que :

$$\left[ K_{\bar{B}}^{E^{L,stab}} \right] \{U\} = \{F\} \quad \text{avec} \quad \left[ K_{\bar{B}}^{E^{L,stab}} \right] = \left[ K_{\bar{B}}^{E^L} \right] + \sum_{i=1}^4 \mathcal{P}_i \left[ K_{stab_i}^{L^e} \right]. \quad (3.70)$$

**Remarque 21** *Comme nous avons identifié les modes de hourglass sur un élément milieu (élément avec 4 bords  $C^1$ ), le contrôle est valable pour des maillages incluant un tel élément milieu, c'est-à-dire composés d'au moins 3 éléments par côté. Toutefois, on a pu remarquer au cours des expérimentations numériques que ce contrôle s'avère efficace dans la plupart des cas pour des maillages plus grossiers. La forme des modes de hourglass lorsque l'on est sur un élément de bord est en fait assez équivalente à la forme donnée dans l'équation (3.64). Ainsi, on propose de garder la stratégie pour toute taille de maillage : le contrôle de hourglass est réalisé dans l'élément milieu (équation (3.63)).*

**Remarque 22** *On rappelle que pour notre cas de modes parasites, il n'est jamais question d'intégration réduite. Le schéma d'intégration pris est celui classique pour les NURBS comme dit en début de section 3.3. Les modes explicités (équation (3.64)) fournissent donc bien de l'énergie avec la forme bilinéaire de l'équation (3.65).*

Vp $n^o$	1 à 6	7	8	9	10	11	12	·	900
Valeur vp	$10^{-10}$	<b>37</b>	<b>504</b>	<b>556</b>	<b>572</b>	538	$1.42 \times 10^3$	·	$7.88 \times 10^6$
Solide rigide	×								

**TABLE 3.2:** Valeurs propres de la matrice de rigidité globale condensée stabilisée de l'élément mixte pour le problème plaque.

## 3.6 Résultats numériques

Afin d'évaluer les performances des éléments NURBS massifs coque développés dans ce chapitre, les résultats de plusieurs cas tests usuels sont montrés dans cette section. L'objectif est d'évaluer la robustesse et la précision des éléments pour l'élasticité linéaire dans le cadre des petites perturbations. Ceci passe principalement par l'étude de la sensibilité des éléments au verrouillage. Pour cela, on commence par appliquer le fameux "shell obstacle course" proposé et étudié par Belytschko *et al.* [BEL 85] et MacNeal et Harder [MAC 85]. La pertinence de ce "parcours d'obstacle" pour évaluer la performance des éléments en analyse de coque ne fait plus aucun doute aujourd'hui. Ensuite, on propose

de calculer des cas tests plus récents suggérés dans Chapelle et Bathe [CHA 98] et Bathe *et al.* [BAT 00]. On choisit le paraboloïde hyperbolique ainsi que la calotte hémisphérique encastrée qui ont l'intérêt de présenter des situations extrêmes de comportement dominées par la flexion ou la membrane. Enfin, on se rend compte que tous ces problèmes ne sont pas sujets à du hourglass du fait des conditions aux limites en déplacement appliquées. La stabilisation proposée en section 3.5 n'est donc pas nécessaire pour ces cas tests. Pour cela, un dernier problème requérant du contrôle de hourglass est envisagé. C'est celui du cylindre pincé avec bords libres de MacNeal et Harder [MAC 85]. En complément, le lecteur intéressé peut trouver deux cas tests supplémentaires en annexe E : l'hémisphère pincé avec un trou et la poutre vrillée sous chargement hors-plan. Ces problèmes seront repris dans le chapitre 4 en non linéaire géométrique.

#### 3.6.1 Mise en place

Pour la discrétisation, on part d'un patch composé d'un unique élément puis on adopte la stratégie de type raffinement  $k$  (cf. section 1.1.3). La continuité au travers des nœuds intérieurs est donc maximale. Concernant les calculs, on va jusqu'à la convergence de la quantité d'intérêt en utilisant au plus six maillages différents composés de 1, 2, 4, 8, 16 et 32 éléments par côtés (c'est-à-dire suivant  $\xi$  et  $\eta$  simultanément). Au niveau des ordres polynomiaux, on considère des fonctions quadratiques dans l'épaisseur ( $r = 2$ ), et on envisage dans les longueurs  $p$  égale à  $q$  et pouvant prendre comme valeurs 2, 3 et 4. L'élément massif coque standard (section 3.2.2) est noté "Basique", l'élément mixte (section 3.3) équivalent à l'élément  $\bar{B}$  (section 3.4.1) est désigné par "Mixte" et, "Bbar local" fait référence à l'élément  $\bar{B}$  local (section 3.4.3). On ajoute à ces désignations "2" pour du quadratique ( $p = q = 2$ ), "3" pour le cubique ( $p = q = 3$ ), et "4" pour la version quartique ( $p = q = 4$ ). Il reste à spécifier si le contrôle de hourglass est effectué. Cela peut être le cas pour les éléments "Mixte 2" et "Bbar local 2". La version stabilisée de ces éléments s'écrit "Mixte 2 hg" et "Bbar local 2 hg". Enfin, pour s'assurer de la validité de nos simulations, les solutions obtenues sont comparées à des solutions de référence. Celles-ci sont extraites de la littérature éléments finis. Elles sont repérées par la dénomination "Référence".

#### 3.6.2 Application du "shell obstacle course"

Le "shell obstacle course" est plus précisément constitué de trois problèmes de coque : le toit de Scordelis-Lo, l'hémisphère pincé et le cylindre pincé. La structure coque est soumise à des états de contrainte plus ou moins complexes dans ces trois cas tests. On commence par présenter plus en détail les trois problèmes avant de montrer la solution de l'élément "Basique". On met ensuite en évidence l'amélioration des performances avec les éléments "Mixte" et "Bbar local". Ces éléments sont aussi comparés à d'autres techniques publiées aujourd'hui en analyse isogéométrique de coque pour attester de leur efficacité.

### 3.6.2.1 Les trois cas tests

Les trois problèmes, ainsi que les déformées associées à l'élément "Basique 3" pour un maillage de 8 éléments par côté, sont montrés en figures 3.7, 3.8 et 3.9.

**Le toit de Scordelis-Lo** Le toit de Scordelis-Lo est constitué d'une portion de coque cylindrique. Il est fixé au niveau de ses deux sections extrêmes par des diaphragmes rigides (conditions aux limites  $U_{M_x} = U_{M_z} = 0$  sur les surfaces correspondantes) et ses deux bords latéraux sont libres. Grâce aux diaphragmes, les modes de hourglass de l'élément "Mixte" et "Bbar local" ne se développent pas. Leur stabilisation est inutile. On applique à ce toit un chargement réparti simulant la gravité. Avec la symétrie du problème, seul un quart de la géométrie est modélisée (voir figure 3.7(a)). La quantité d'intérêt est le déplacement suivant la verticale au niveau du point milieu du bord latéral. La valeur de référence associée est  $u_{ref} = 0.3024$ . Ce cas a un comportement dominé par la membrane (une part majoritaire de l'énergie est constituée par l'énergie de membrane). De ce fait, il est peu sujet au verrouillage. C'est le plus simple à résoudre numériquement. Toutefois, c'est un problème intéressant pour déterminer la capacité d'un élément à modéliser précisément un état de membrane complexe.

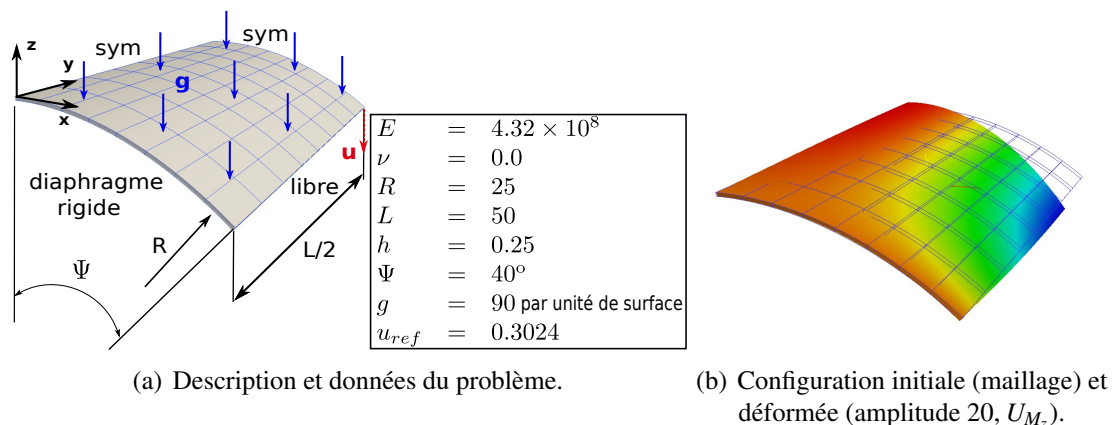


FIGURE 3.7: Toit de Scordelis-Lo.

**L'hémisphère pincé** Dans ce problème, une coque hémisphérique est pincée par l'application de deux forces ponctuelles opposées. L'équateur est libre. Le problème étant de nouveau symétrique, on modélise seulement un quart de la structure et on choisit pour éliminer le mouvement de corps rigides restant, de fixer suivant  $\mathbf{z}$  le point sommet du huitième de sphère (voir figure 3.8(a)). Les conditions aux limites au niveau du sommet du huitième de sphère empêchent aussi ici les modes de hourglass de se développer dans le cas "Mixte" et "Bbar local". Ce problème est sévère en terme de verrouillage : il n'y a presque pas de déformation de membrane. Plus précisément, c'est sa géométrie doublement courbée et son chargement ponctuel qui le rendent très sensible au verrouillage.

### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations

De plus, ce cas test permet de vérifier la faculté d'un élément à supporter des rotations de corps rigides (la normale à la coque tourne quasiment comme un solide rigide). La solution de référence pour ce problème se rapporte au déplacement du point d'application de la force ponctuelle dans la direction de l'effort. Sa valeur est  $u_{ref} = 0.0924$ .

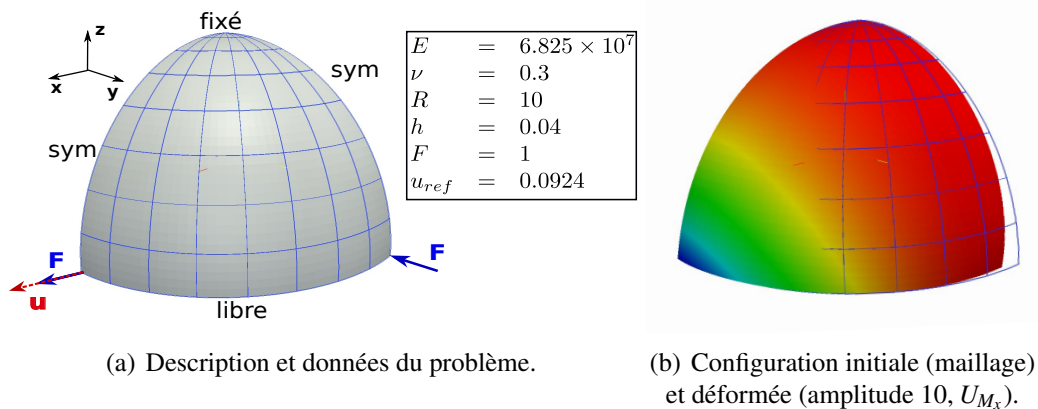


FIGURE 3.8: Hémisphère pincé.

**Le cylindre pincé** Le dernier problème du "shell obstacle course" traite le pincement d'un cylindre. Le cylindre est supporté au niveau de ses deux sections extrêmes par deux diaphragmes et est soumis en son milieu à deux forces ponctuelles opposées. De nouveau, les diaphragmes évitent l'apparition des modes parasites des éléments "Mixte" et "Bbar local". En faisant usage de la symétrie du problème, on se restreint à la modélisation d'un huitième de cylindre (voir figure 3.9(a)). La solution de référence est donnée par le déplacement suivant  $z$  au niveau du point d'application de la force et vaut  $u_{ref} = 1.8248 \times 10^{-5}$ . Le chargement et les conditions aux limites en déplacement appliqués conduisent à une déformation très localisée sous le point d'application de la force. La géométrie courbée et l'effort localisé rendent le problème délicat à résoudre numériquement en terme à la fois de verrouillage et de représentation d'états de membrane complexes.

#### 3.6.2.2 Résultats de l'élément NURBS massif coque standard

La convergence des déplacements pour les éléments "Basique 2", "Basique 3" et "Basique 4" en fonction du nombre de points de contrôle suivant les longueurs, ainsi que les solutions de référence associées, sont montrés pour les trois problèmes du "shell obstacle course" dans la figure 3.10. Globalement, deux points importants sont à noter concernant ces courbes de convergence :

Tout d'abord, les résultats sont indiscernables lorsque l'on augmente le degré d'approximation des fonctions dans l'épaisseur (tests réalisés pour  $r = 3$  et  $r = 4$ ) et lorsque plusieurs couches d'éléments dans l'épaisseur sont envisagées (tests réalisés pour 2, 4 et

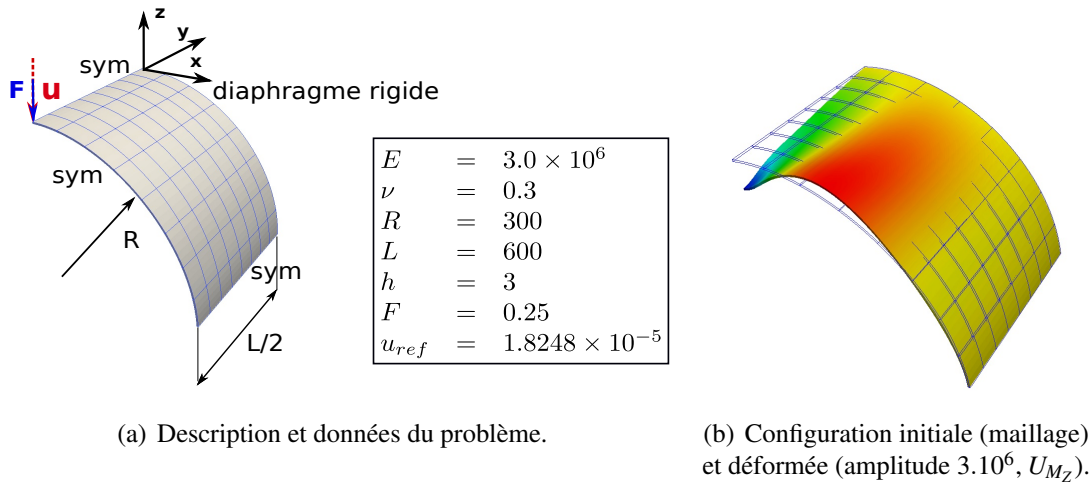


FIGURE 3.9: Cylindre pincé.

10 couches d'éléments). On retrouve ainsi les résultats publiés originaires dans Hughes *et al.* [HUG 05] où les auteurs discrétisent ces problèmes de la même façon mais en utilisant deux éléments dans l'épaisseur. La stratégie élément massif coque proposant une seule couche d'éléments de degré 2 dans l'épaisseur pour résoudre ce type de problème semble par conséquent valide.

Deuxièmement, on peut constater que cet élément "Basique" issu d'une formulation habituelle en déplacement se comporte de façon relativement équivalente aux modèles de structure coque isogéométriques sans aucun traitement particulier si ce n'est d'élever l'ordre. On qualifiera ces éléments de standards. En effet, les solutions obtenues sont assez proches de celles des éléments NURBS coque de Kirchoff-love [KIE 09] ou de Reissner-Mindlin [BEN 10]. À titre d'exemple, on reporte sur la figure 3.11 les solutions des éléments massifs coque "Basique" avec les solutions des éléments modèle de structure "Kiendl" [KIE 09] (cf. figure 3.11(a)) et "Benson" [BEN 10] (voir figure 3.11(b)) obtenues pour le cylindre pincé. Ces éléments isogéométriques standards sont performants lorsqu'on élève le degré d'approximation pour résoudre des problèmes tels que celui du toit de Scordelis-Lo. L'ordre 4 dans les longueurs nous permet d'atteindre directement la bonne solution (voir figure 3.10(a)). En revanche, pour des problèmes plus sensibles au verrouillage comme celui de l'hémisphère ou du cylindre pincés, la convergence demeure lente et ce même pour un ordre d'approximation élevé. Même avec le degré 4, il faut au moins une dizaine d'éléments de chaque côté pour atteindre une bonne précision (cf figures 3.10(b) et 3.10(c)). Nous allons comparer dans la suite les éléments développés dans ce travail aux éléments massifs coque standards. Du fait de la précision équivalente des éléments massifs et modèles de structure coque standards, cette comparaison permettra de vérifier l'apport des méthodes élaborées vis-à-vis des stratégies basiques non seulement pour le modèle massif mais aussi pour les modèles de structure.

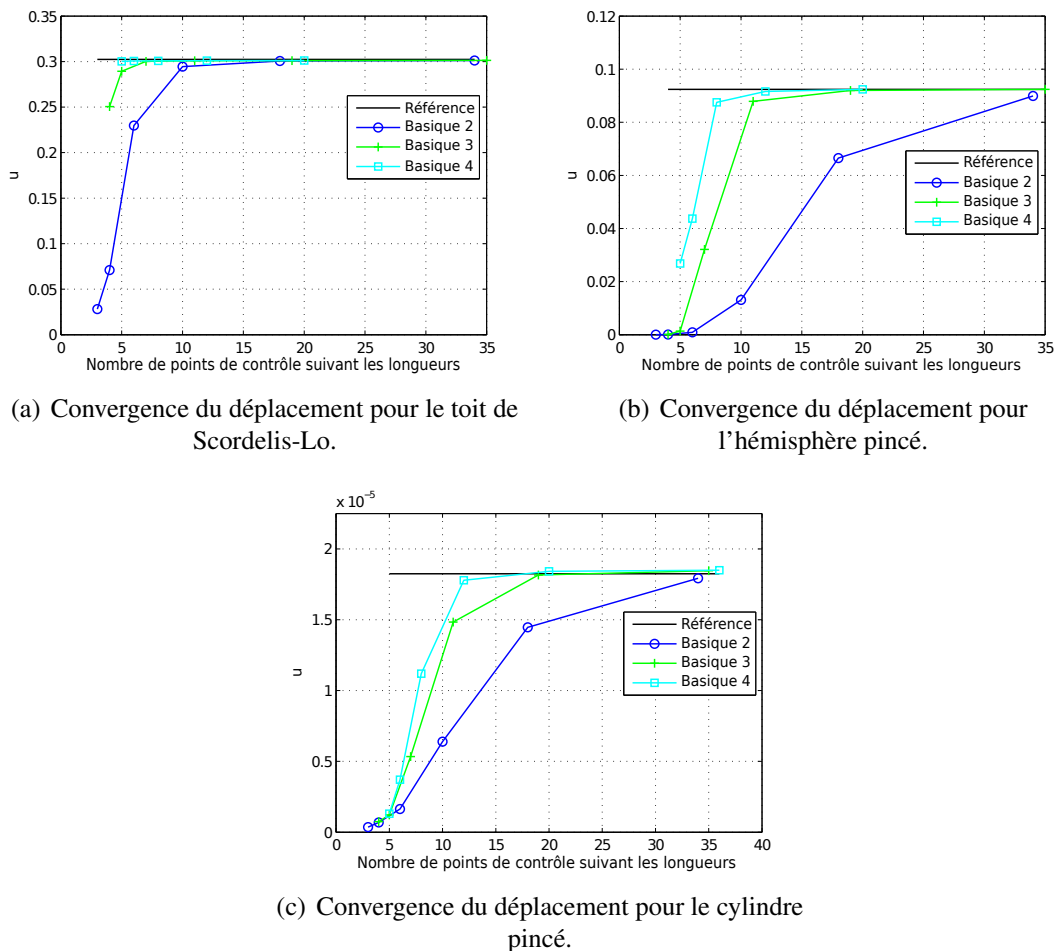
**Remarque 23** *Si l'on peut voir que la solution à convergence est proche de la référence*

pour le toit de Scordelis-Lo et pour l'hémisphère pincé (on obtient 0.3014 pour le toit de Scordelis-Lo et 0.0925 pour l'hémisphère), on peut aussi remarquer que la solution atteinte pour le cylindre pincé paraît un peu plus "souple" que la référence. Avec un degré 4 et 32 éléments par côté, la solution obtenue est en fait  $1.85 \times 10^{-5}$  (contre  $1.8248 \times 10^{-5}$  pour la référence). Ce comportement a déjà été observé dans [HUG 05] qui avait également calculé le "shell obstacle course" avec des éléments NURBS massifs. Selon ces auteurs, ceci pourrait être relié à des effets de cisaillement transversal. En effet, lorsque le nombre d'élément augmente, la surface de l'élément diminue si bien qu'elle peut devenir faible par rapport à l'épaisseur. Ceci rend délicat d'approcher précisément des formulations satisfaisant la contrainte de Kirchhoff (c'est-à-dire, un cisaillement transversal nul). Dans ce cas, le déplacement sous un chargement concentré augmente, et devient très important. Il faut aussi garder en tête qu'un rapport raisonnable entre longueurs et épaisseur de l'élément doit être maintenu. Dans le cas contraire, les points d'intégrations au niveau de la surface de l'élément pourraient être trop proches les uns des autres empêchant ainsi une intégration numérique de qualité.

#### 3.6.2.3 Résultats de l'élément NURBS massif coque mixte ou $\bar{B}$

On montre dans la figure 3.12 les déformées obtenues avec l'élément "Mixte 2", ou de façon équivalente avec l'élément  $\bar{B}$  de degré 2. Les courbes de convergence de cet élément sont quant à elles données en figure 3.13. On rappelle qu'il n'y a pas de hourglass qui se développe sur ces cas tests donc on n'effectue pas la stabilisation de la section 3.5 et l'élément mixte peut être calculé pour tout ordre d'approximation. Afin de faciliter la comparaison avec les solutions basiques, on reporte celles-ci en pointillé sur les mêmes graphes. Plus précisément, des zooms sont réalisés sur les figures 3.13(b), 3.13(d) et 3.13(f) pour mieux observer les solutions de l'élément mixte. Par ailleurs, les valeurs calculées correspondantes sont reportées dans les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 en annexe D.

Les déformées de l'élément "Mixte" semblent cohérentes vis-à-vis de celles obtenues avec l'élément "Basique" (cf. figures 3.7(b), 3.8(b) et 3.9(b)). Avec cet élément, la convergence devient très rapide. Encore une fois, on peut remarquer que la solution atteinte pour le cylindre pincé est un peu plus souple que la référence. Cette fois-ci, les références pour les problèmes sont approchées par le haut (c'est-à-dire avec une raideur qui augmente) et de bons résultats sont obtenus avec aussi peu que 4 ou même 2 éléments par côté. Le gain est d'autant meilleur que nous avons à traiter un problème sujet à du verrouillage (grande amélioration pour le problème de l'hémisphère et du cylindre pincés), ce qui témoigne de la capacité de l'élément mixte ou  $\bar{B}$  à limiter le verrouillage. De plus, il apparaît qu'avec cette stratégie un ordre 2 suffit à obtenir une très bonne précision. En effet, le verrouillage étant vraisemblablement déjà supprimé avec l'ordre 2, il n'est plus nécessaire d'augmenter le degré d'approximation au delà pour le traiter. L'élément mixte de degré 2 s'avère déjà plus précis qu'un élément massif coque basique de degré 4 sur ces cas tests. En fait, même si la stratégie marche ici quelles que soient les valeurs de  $p$  et  $q$ , il semble que l'on puisse se restreindre à prendre l'élément isogéométrique de plus bas degré (c'est-à-dire l'élément de plus bas degré dans les longueurs qui permette de représenter exactement la



**FIGURE 3.10:** Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque standard.

géométrie de la structure considérée). Pour les calculs réalisés dans ce travail et comme majoritairement en ingénierie, c'est le degré 2.

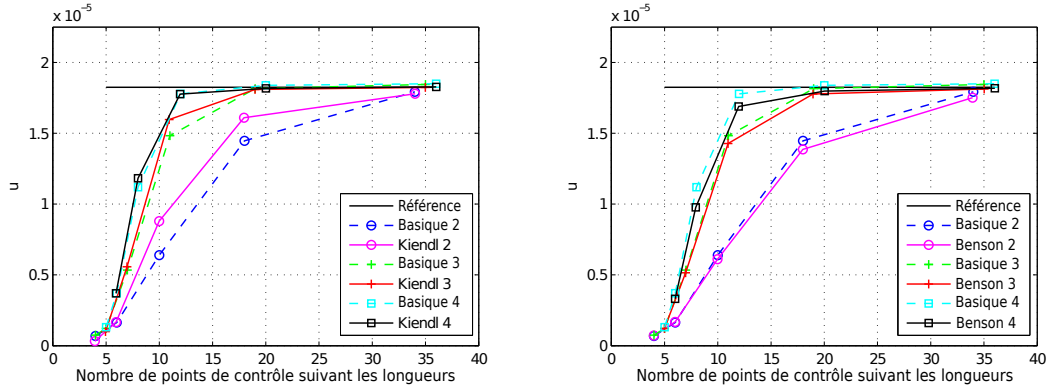
### 3.6.2.4 Résultats de l'élément NURBS massif coque $\bar{B}$ local

On s'intéresse à présent à l'élément "Bbar local". Avant de regarder les courbes de convergence associées, on cherche à visualiser la structure de la matrice de rigidité globale qui en découle. L'objectif ici est de justifier le plus faible coût de l'élément. Plus précisément, on veut vérifier que la matrice de rigidité globale possède une structure creuse et déterminer sa largeur de bande, information qui constitue un indicateur du coût de stockage et de résolution de l'élément. Pour cela, on montre sur la figure 3.14 la structure des matrices de rigidité globales de chacun des éléments développés, c'est-à-dire de :

- $[K^L]$  (équation (3.24)) pour l'élément standard (voir figure 3.14(a)) ;



### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations



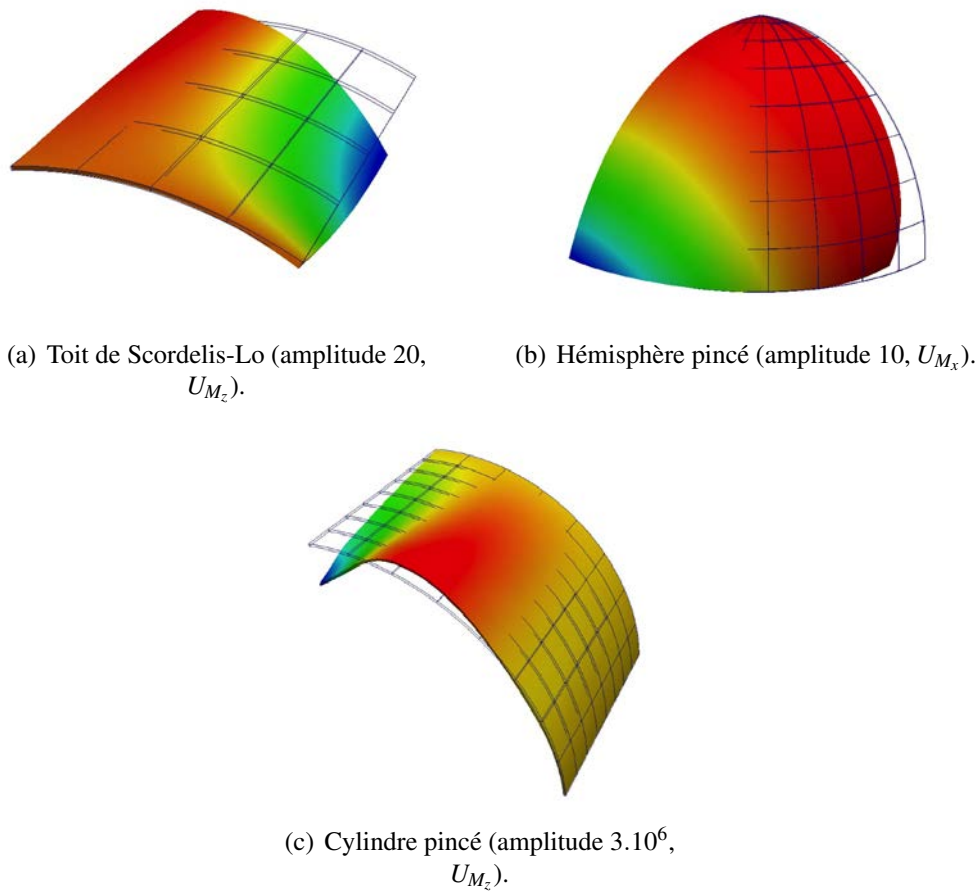
(a) Comparaison avec Kirchhoff-Love [KIE 09]. (b) Comparaison avec Reissner-Mindlin [BEN 10].

**FIGURE 3.11:** Comparaison des solutions standards modèle massif coque et modèle de structure pour le cylindre pincé.

- $[K_{mixte}^L]$  (équation (3.40)) ou  $[K_{\bar{B}}^L]$  (équation (3.48)) pour l'élément mixte ou  $\bar{B}$  (voir figure 3.14(b)) ;
- $[K_{\bar{B}}^{EL}]$  (équation (3.62)) pour l'élément  $\bar{B}$  local (voir figure 3.14(c)).

Le problème du cylindre pincé discrétisé avec un ordre 2 et 10 éléments par côté est considéré pour obtenir ces graphes. De plus, pour simplifier la visualisation, on propose de se placer dans un cas 1D en récupérant uniquement les termes liés à la première coordonnée du déplacement  $U_{M_x}$  suivant la première ligne du maillage dans cette direction. Les valeurs non nulles des matrices sont repérées par un carré noir et les valeurs nulles par un carré blanc. La matrice de rigidité globale associée à l'élément  $\bar{B}$  local possède bien une structure creuse, contrairement à celle de l'élément mixte ou  $\bar{B}$  complet. On peut noter que la largeur de bande de l'élément  $\bar{B}$  local est supérieure à celle de l'élément classique. Plus précisément, il apparaît que sa largeur de bande est égale à  $(2p + 1) + 4(p - 1) = 6p - 3$ , comparée à une largeur de bande classique égale à  $2p + 1$ . Ainsi, il y a toujours un prix à payer par rapport à la stratégie basique (pour un ordre 2 et 3, la largeur de bande est grossièrement le double), mais ceci représente tout de même une amélioration importante vis-à-vis de la matrice pleine typique des méthodes  $\bar{B}$ .

**Remarque 24 (Mise en œuvre)** Dans cette thèse, nous nous concentrons principalement sur la construction des éléments. Nous cherchons à ce que ces éléments soient utilisables pour l'ingénieur mais nous n'essayons pas à ce stade de les implémenter concrètement et de façon optimale dans des codes éléments finis conventionnels. Ainsi,  $[K_{\bar{B}}^{EL}]$  est calculé dans notre code matlab "maison" de la même façon que  $[K_{\bar{B}}^L]$ , c'est-à-dire en exprimant tout d'abord les différents opérateurs sur la structure complète ( $[K_{uu}^L]$ ,  $[K_{\sigma u}^{EL}]$ ,  $\tilde{M}^E$ ,  $\underline{A}$  et  $\int_{\Omega} \tilde{N}^T \underline{D} \tilde{N} d\Omega$ , cf. équation (3.62)) puis, en effectuant les produits et la somme. Néanmoins, on peut remarquer que grâce à la présence d'une bande pour la matrice de rigi-

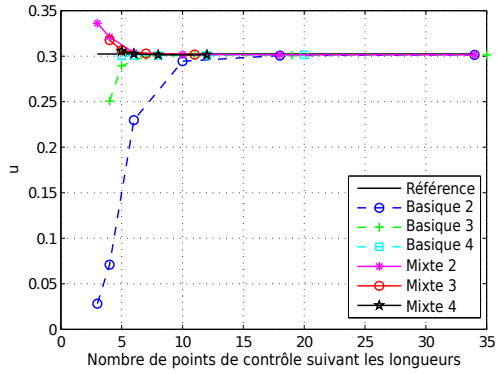


**FIGURE 3.12:** Configurations initiales (maillages) et déformées pour l'élément "Mixte 2" sur le "shell obstacle course".

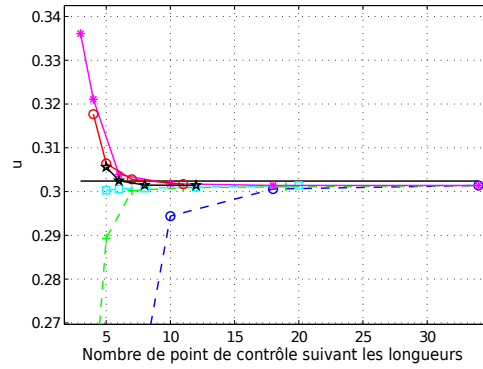
*dité  $\bar{B}$  locale, une procédure habituelle, c'est-à-dire élément par élément, pourrait certainement être utilisée pour construire la matrice. Il faudrait alors étendre la connectivité du maillage pour être en mesure de prendre en compte les fonctions qui sont présentes dans les éléments voisins lorsque l'on calcule la rigidité associée à un élément du maillage. Une telle technique a déjà été utilisée et implémentée en éléments finis classiques. Par exemple, Brunet et Sabourin [BRU 94] et Oñate et Zárata [Oñ 00] l'ont fait pour construire des éléments triangulaires sans rotations de plaque et de coque. Pour ces éléments, les rotations sont calculées à partir des déplacements normaux des éléments voisins à chaque triangle. L'utilisation d'une procédure de ce type devrait faciliter l'implémentation de l'élément  $\bar{B}$  local dans les codes éléments finis usuels.*

En ce qui concerne la précision de l'élément  $\bar{B}$  local, on montre en figure 3.15 les courbes de convergence de l'ordre 2 pour les différents problèmes du "shell obstacle course". Par souci de comparaison, on reporte de nouveau sur les graphes les solutions standards. La solution de l'élément mixte ou  $\bar{B}$  pour l'ordre 2 est de même retracée et

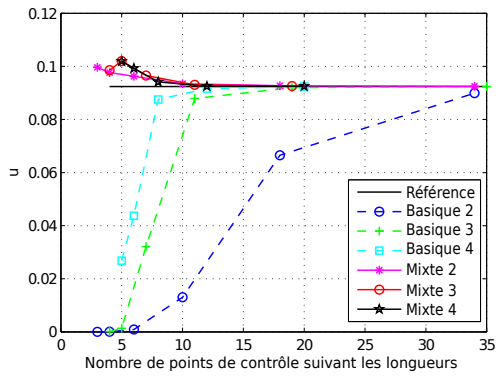
### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations



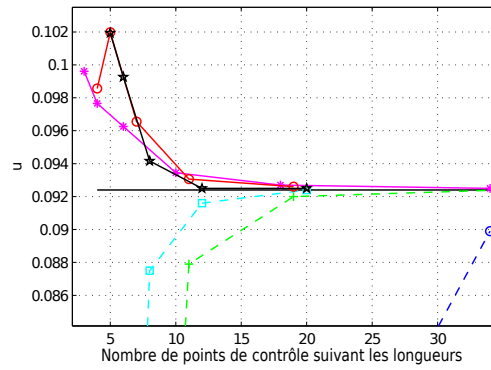
(a) Déplacement pour le toit de Scordelis-Lo.



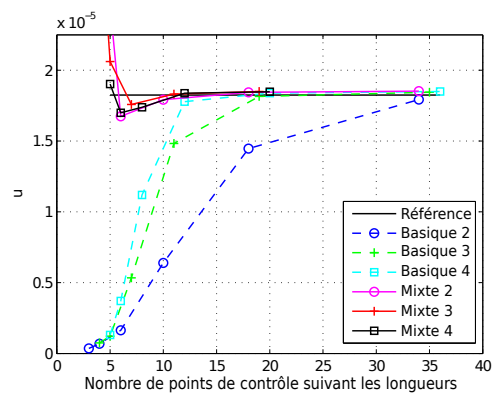
(b) Toit de Scordelis-Lo : zoom.



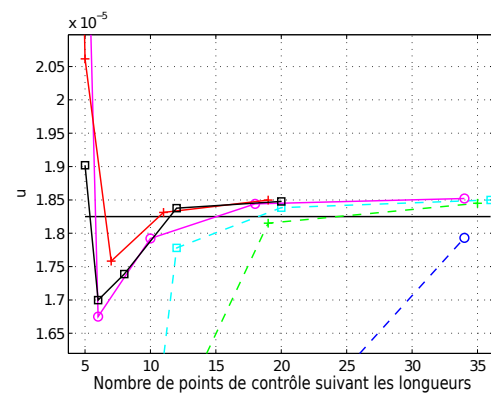
(c) Déplacement pour l'hémisphère pincé.



(d) Hémisphère pincé : zoom.

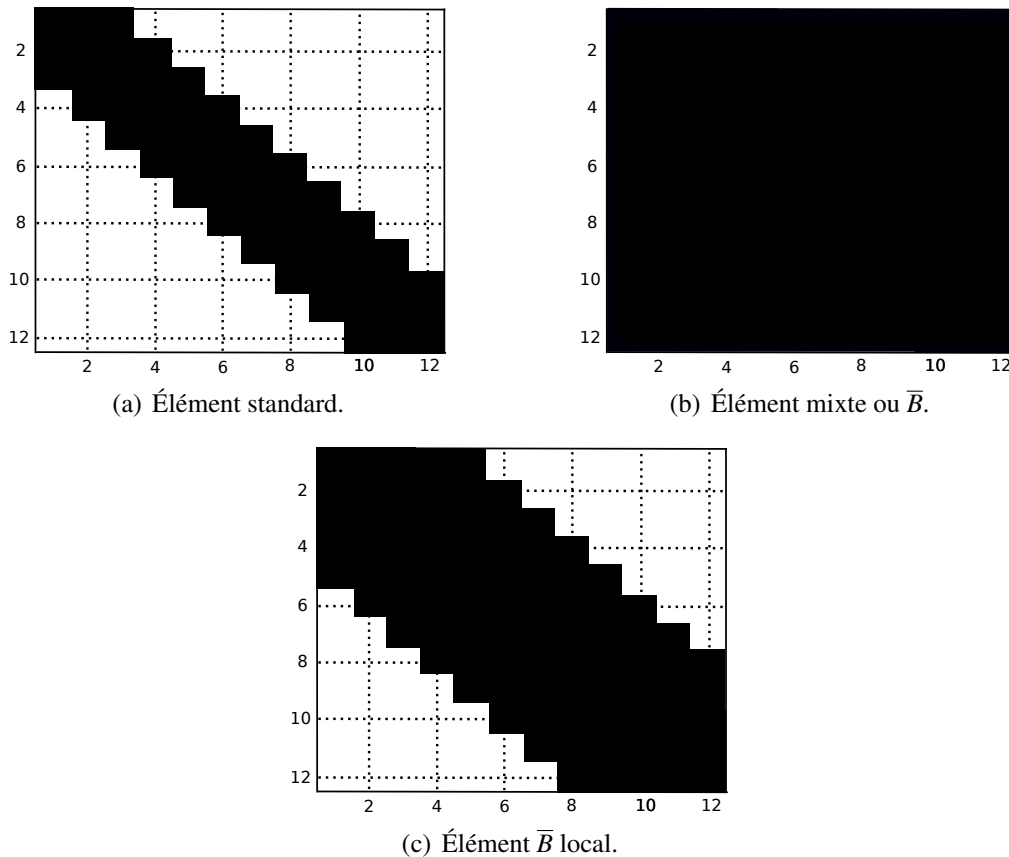


(e) Déplacement pour le cylindre pincé.



(f) Cylindre pincé : zoom.

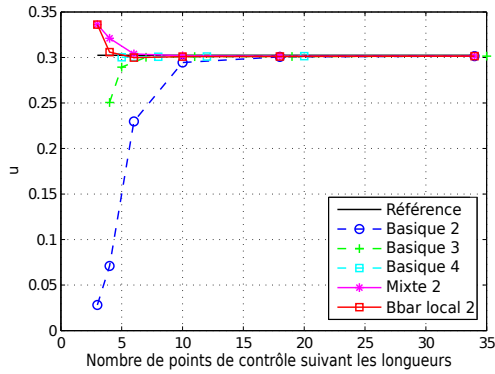
**FIGURE 3.13:** Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque mixte (ou de manière équivalente par l'élément  $\bar{B}$ ).



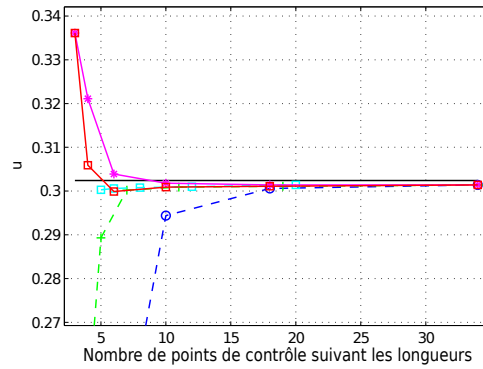
**FIGURE 3.14:** Structure des matrices de rigidité globales associées aux éléments.

des zooms sont effectués (cf. figures 3.15(b), 3.15(d) et 3.15(f)). Le lecteur intéressé peut aussi trouver les valeurs correspondantes dans les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 de l'annexe D. Il apparaît alors que l'élément  $\bar{B}$  local possède une précision assez équivalente à l'élément  $\bar{B}$  pour l'ordre 2. Plus précisément, les solutions sont au départ identiques puisque la projection globale ou LLSQ est la même pour un maillage constitué d'un unique élément, puis la solution  $\bar{B}$  locale s'écarte quelque peu pour 2 voire 4 éléments avant de revenir très proche de la solution  $\bar{B}$ . Cette petite différence de comportement pour de faibles nombres d'éléments du maillage (surtout notable pour des problèmes très sévères tels que celui du cylindre pincé (cf. figure 3.15(e))) s'explique du fait que la projection en utilisant la procédure LLSQ est quelque peu dégradée. Malgré ceci, l'élément  $\bar{B}$  local reste très précis et se comporte beaucoup mieux que l'élément standard : tout comme "Mixte 2", l'élément "Bbar local 2" semble plus précis que "Basique 4". Comme cet élément est en plus d'un faible coût numérique et devrait facilement s'implémenter dans des codes industriels robustes (cf. remarque 24), il constitue d'après nous une alternative très intéressante pour l'ingénieur.

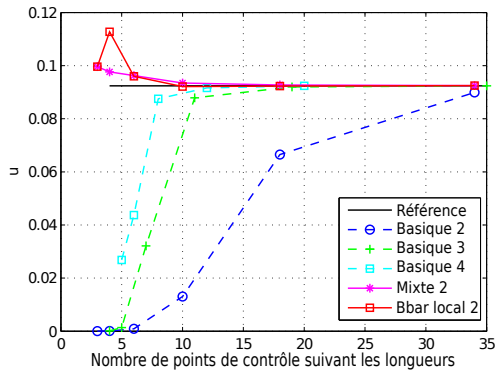
### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations



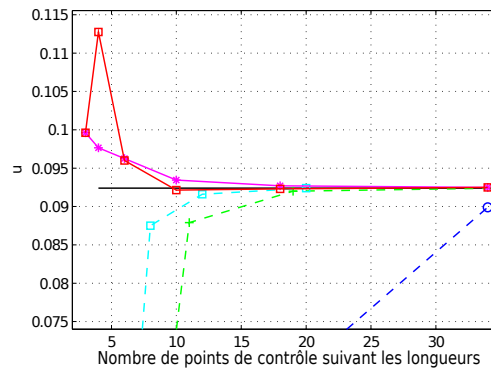
(a) Déplacement pour le toit de Scordelis-Lo.



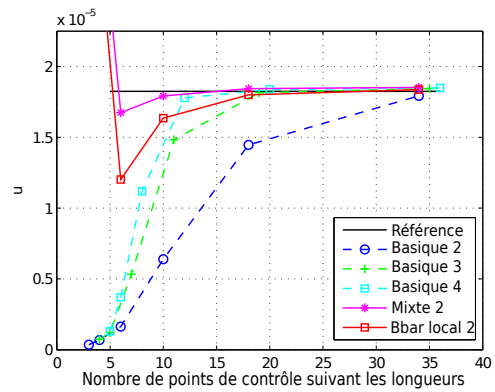
(b) Toit de Scordelis-Lo : zoom.



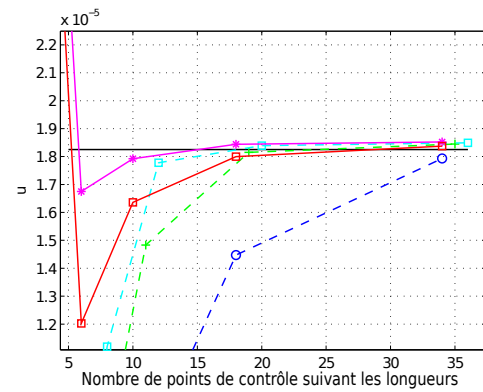
(c) Déplacement pour l'hémisphère pincé.



(d) Hémisphère pincé : zoom.



(e) Déplacement pour le cylindre pincé.

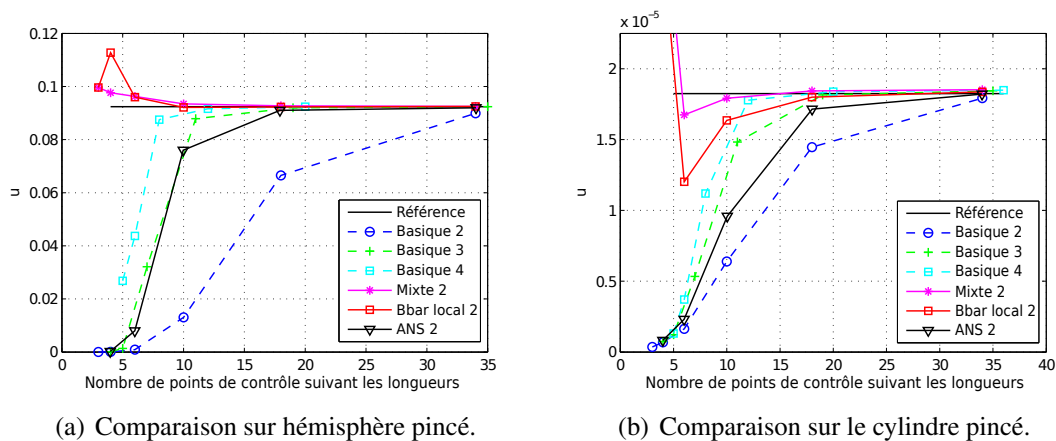


(f) Cylindre pincé : zoom.

**FIGURE 3.15:** Résolution du "shell obstacle course" par l'élément NURBS massif coque  $\bar{B}$  local.

### 3.6.2.5 Comparaison avec d'autres stratégies NURBS coque

Nous cherchons pour finir sur le "shell obstacle course" à comparer les éléments développés dans ce travail avec les autres technologies NURBS coques proposées aujourd'hui dans la littérature. Comme vu dans le chapitre 1 avec plus précisément la section 1.2.3, assez peu de travaux visant à supprimer le verrouillage des éléments NURBS de bas degrés ont été réalisés à ce jour. Les très récents éléments NURBS massifs coque de [CAR 14, CAS 14] apparaissent surtout efficaces pour limiter le verrouillage en cisaillement. Pour un problème quelconque, il semble que la version quadratique de ces éléments se comporte de façon assez équivalente aux éléments coques standards de degré 3. Dans notre cas, on peut penser que nous sommes un peu plus efficace puisque c'est une précision meilleure que du degré 4 basique que nous atteignons sur des problèmes similaires. Pour illustrer ceci, on reporte les solutions "ANS 2" de la stratégie de [CAS 14] de degré 2 pour les problèmes de l'hémisphère et du cylindre pincés sur la figure 3.16. L'absence de traitement particulier visant à gérer le verrouillage en membrane des éléments de [CAR 14, CAS 14] explique sûrement la précision inférieure de ces éléments par rapport à ceux développés ici.



**FIGURE 3.16:** Comparaison des solutions des éléments massifs coque développés dans ce travail avec celle de la stratégie ANS de [CAS 14].

Certainement le travail le plus intéressant aujourd'hui pour gérer tous les verrouillages d'une coque NURBS concerne l'approche modèle de structure avec le développement d'une famille d'éléments finis hiérarchiques [ECH 13]. La famille se compose d'éléments de Kirchhoff-love (noté  $3p$  car possédant 3 paramètres par point de contrôle), d'éléments de Reissner-Mindlin ( $5p$ ) et d'éléments coques massif ( $7p$ ) qui, grâce à la formulation hiérarchique, sont insensibles au verrouillage en cisaillement transversal. Pour éliminer les autres verrouillages, des méthodes DSG ou mixtes sont implémentées dans ces éléments. Les résultats de cette stratégie pour un degré 2 dans les longueurs sur le toit de Scordelis-Lo sont regroupés avec les résultats obtenus par les éléments développés dans ce travail dans le tableau 3.3. Même si le toit de Scordelis-Lo n'est sûrement pas le plus délicat

à résoudre, une comparaison des éléments de cette thèse avec la stratégie de [ECH 13], pour laquelle il a été montré la non sensibilité au verrouillage, nous permettra de mieux se rendre compte si ce que nous proposons est valide pour l'avancée du domaine. Pour obtenir les résultats du tableau 3.3, [ECH 13] avaient discrétisé le toit complet, c'est-à-dire sans utiliser la symétrie. Comme dans ce travail la symétrie a été prise en compte, une comparaison directe n'est pas possible. En effet, notre modèle considère une continuité  $C^0$  au niveau des frontières à partir desquelles la symétrie a été réalisée tandis que dans [ECH 13], c'est une continuité  $C^1$  qui était présente sur ces lignes. Cependant, on propose de faire une comparaison approchée en calculant pour notre modèle réduit, le nombre de points de contrôle suivant les longueurs équivalent qu'aurait le modèle complet. Ce nombre vaut grossièrement  $2n - 1$ ,  $n$  étant le nombre de points de contrôle suivant les longueurs du modèle réduit. C'est ce qui a été fait dans le tableau 3.3.

Points de contrôle suivant les longueurs (pour le modèle complet)	3	5	7	11
Formulation				
Référence	0.3024			
Echter $3p$ 2	0.7679	0.2516	0.2996	0.3003
Echter $5p$ 2	0.7680	0.2517	0.2998	0.3005
Echter $7p$ 2	0.7681	0.2517	0.2999	0.3007
Mixte 2	–	0.3360	0.3211	0.3039
Bbar local 2	–	0.3360	0.3059	0.2998

**TABLE 3.3:** Comparaison des éléments massifs coque développés dans ce travail avec les éléments finis hiérarchiques de [ECH 13] pour le toit de Scordelis-Lo.

On peut voir que les éléments massifs coque développés ici apparaissent d'une précision comparable sur ce problème aux éléments hiérarchiques de [ECH 13]. Évidemment, la comparaison ne peut se faire que dans les grandes lignes et est à nuancer dans le détail puisque deux types différents d'éléments sont mis en place. Pour notre cas de modèle massif, nous avons en réalité 3 points de contrôle dans l'épaisseur pour l'ordre 2 ce qui fait 9 degrés de liberté par point de contrôle suivant les longueurs. À l'inverse, les éléments de [ECH 13] sont issus de modèles de structure, c'est-à-dire que seule la surface moyenne est discrétisée. Ils possèdent par conséquent respectivement 3, 5 et 7 degrés de liberté par point de contrôle suivant les longueurs. Pour rappel, on peut revenir à la figure 1.8 du chapitre 1 qui illustre ce point. La qualité proche des deux stratégies confirme néanmoins l'intérêt en terme de précision pour de bas degrés de nos éléments NURBS massifs coque.

#### 3.6.3 Étude de deux cas tests plus récents ([CHA 98, BAT 00])

Pour compléter l'étude, on envisage à présent les problèmes du paraboloïde hyperbolique partiellement encastré et de la calotte hémisphérique encastrée suggérés dans [CHA 98, BAT 00]. Le paraboloïde hyperbolique possède un comportement quasiment intégralement dominé par la flexion. Il constitue un excellent cas test pour attester de la sensibilité ou non d'un élément au verrouillage. À l'inverse, l'hémisphère encastré

a un comportement dont les effets de membrane sont prépondérants. Par conséquent, ce n'est plus le verrouillage qui est d'intérêt dans ce cas test (même des éléments sujets à du verrouillage en membrane devraient converger de façon modérée) mais, il paraît important de vérifier aussi les éléments sur ce deuxième problème pour attester de leur performance en général.

### 3.6.3.1 Le paraboloïde hyperbolique partiellement encastré

Le problème du paraboloïde hyperbolique partiellement encastré est présenté en figure 3.17. Plus précisément, le problème est décrit dans la figure 3.17(a) et la déformée obtenue par l'élément "Mixte 2" avec un maillage composé de  $2 \times 4$  éléments est montrée dans la figure 3.17(b). La coque se définit par une surface moyenne d'équation :

$$z = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]^2. \quad (3.71)$$

Cette surface peut facilement être construite en partant d'un élément B-spline quadratique. Pour cela, il suffit d'appliquer la stratégie donnée dans [COT 09] (chapitre 2, figure 2.34) qui explique comment construire une courbe B-spline de degré 2. Ici, il faut effectuer la procédure pour les deux côtés de la surface. Il vient les points de contrôle suivants dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

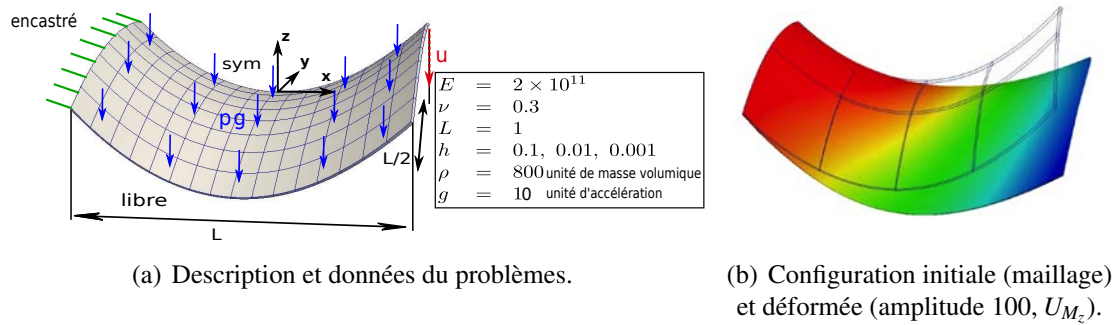
$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \{-L/2 \ -L/2 \ 0\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_2 = \{0 \ -L/2 \ -L/2\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_3 = \{L/2 \ -L/2 \ 0\}^T & ; \\ \mathbf{B}_4 &= \{-L/2 \ -L/4 \ L/4\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_5 = \{0 \ -L/4 \ -L/4\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_6 = \{L/2 \ -L/4 \ L/4\}^T & ; \\ \mathbf{B}_7 &= \{-L/2 \ 0 \ L/4\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_8 = \{0 \ 0 \ -L/4\}^T & ; & \quad \mathbf{B}_9 = \{L/2 \ 0 \ L/4\}^T. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ceux-ci sont d'abord ordonnés suivant la direction  $\mathbf{x}$  puis suivant la direction  $\mathbf{y}$ . La coque est encastrée sur la face en  $x = -L/2$  et est soumise à son poids propre. Du fait de l'encastrement, les modes de hourglass n'apparaissent toujours pas. Ainsi, la stabilisation des éléments "Mixte 2" et "Bbar local 2" n'est pas mise en place ici. En utilisant la symétrie du problème, seule la moitié de la coque peut être modélisée pour le calcul. Pour l'étude, on procède comme dans [BAT 00]. On choisit d'envisager les cas d'épaisseur menant à des élancements  $L/h = 10, 100$  et  $1000$ . Aller vers des coques encore plus minces ne nous semble pas pertinent avec la vision élément massif coque (voir, pour rappel, remarque 3 du chapitre 1). La convergence de la solution est étudiée en terme de déplacements comme dans les cas tests précédents mais aussi ici en terme d'énergie de déformation. Avec l'énergie de déformation, on cherche à justifier la validité d'autres quantités intéressantes pour l'ingénieur, telles que les contraintes et les déformations. Le déplacement d'intérêt est celui selon la verticale en  $x = L/2$  et  $y = 0$ . L'énergie de déformation est une énergie globale à la structure, c'est-à-dire calculée sur l'ensemble de la coque.

Les maillages utilisés pour l'analyse sont générés avec  $N = 1, 2, 4, 8$  et  $16$  éléments suivant le côté  $x = -L/2$  et,  $2N$  éléments suivant l'autre côté ( $y = 0$ ). On s'intéresse aux éléments "Basique 2", "3" et "4" ainsi que "Mixte 2" et "Bbar local 2". Comme il n'y a pas de solution analytique disponible pour ce problème, on prend comme référence (notée  $u_{ref}$  pour le déplacement et  $E_{dref}$  pour l'énergie de déformation) la solution numérique obtenue avec "Basique 4" et  $N = 32$ . On obtient :



### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations



**FIGURE 3.17:** Paraboloid hyperbolic partiellement encastré ( $L/h = 100$ ).

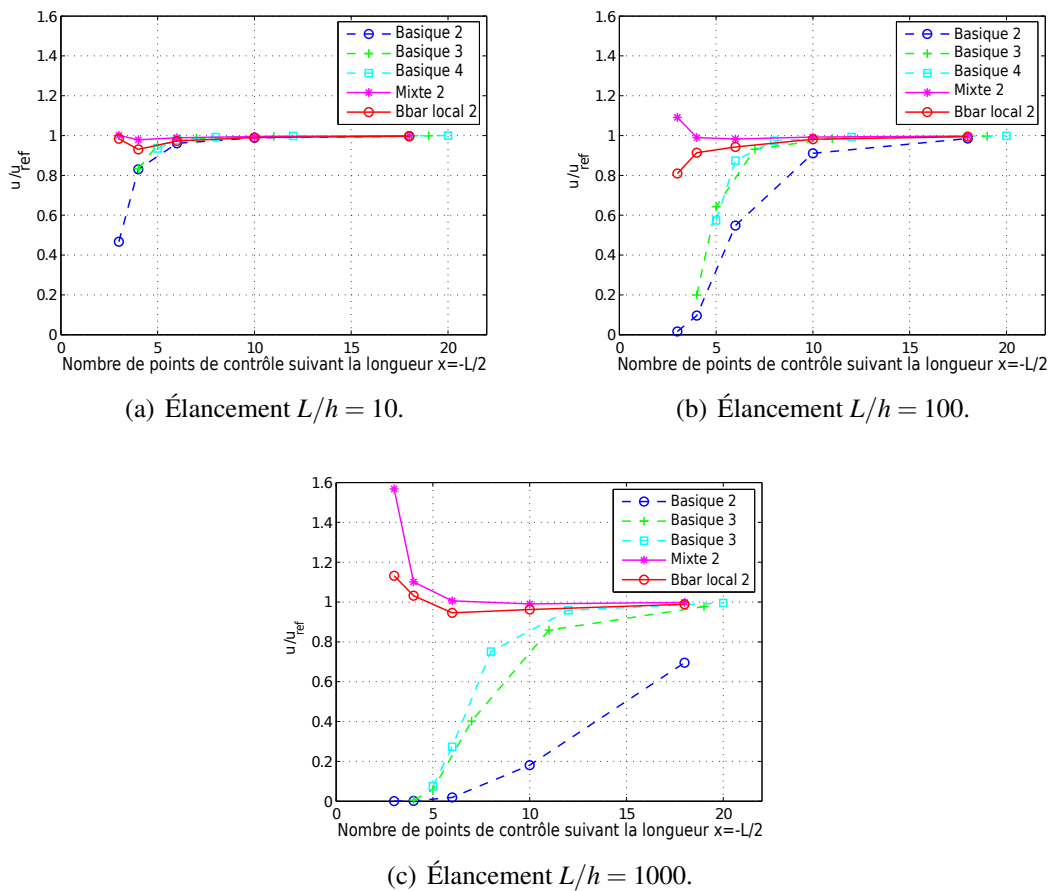
- pour  $L/h = 10$  :  $u_{ref} = 2.2883 \times 10^{-6}$  et  $E_{d_{ref}} = 4.9486 \times 10^{-4}$  ;
- pour  $L/h = 100$  :  $u_{ref} = 9.4767 \times 10^{-5}$  et  $E_{d_{ref}} = 1.6949 \times 10^{-3}$  ;
- pour  $L/h = 1000$  :  $u_{ref} = 6.4952 \times 10^{-3}$  et  $E_{d_{ref}} = 1.1133 \times 10^{-2}$ .

Ces valeurs sont à peine plus grandes que la solution de référence coque de [BAT 00] (environ 1.5 % de différence pour le déplacement). La convergence du déplacement d'intérêt  $u$  est montrée dans la figure 3.18. En fait, c'est le rapport  $u/u_{ref}$  qui est tracé pour mettre à la même échelle les différents graphes. La référence est donc à 1. Ce rapport est représenté en fonction du nombre de points de contrôle suivant la longueur  $x = -L/2$ . Comme attendu, l'élément "Basique" est sensible au verrouillage. Ceci se voit clairement sur "Basique 2" : la convergence devient de plus en plus lente lorsque l'élancement augmente. Même si cette tendance semble s'estomper pour de plus hauts degrés ("Basique 3" et "Basique 4"), une dépendance de la solution à l'élancement reste notable. Au contraire, les allures des courbes associées à "Mixte 2" et "Bbar local 2" apparaissent très similaires pour les différents élancements considérés. Comme vu dans les cas tests précédents, la solution de référence est approchée par le haut et encore plus rapidement que "Basique 4" avec ces stratégies. Ce cas test semble donc confirmer la capacité des méthodes développées dans ce travail à limiter le verrouillage.

Pour mieux se rendre compte de ceci, on observe aussi la convergence de la solution en terme d'énergie de déformation (voir figure 3.19). Pour les approches  $\bar{B}$ , on procède comme dans [ELG 07, BOU 13b], c'est-à-dire que la déformation utilisée est la déformation  $\bar{B}$  projetée. Autrement dit, c'est la forme bilinéaire de l'équation (3.42) qui est considérée ici pour calculer l'énergie. Seulement du degré 2 est envisagé pour l'étude. Les courbes de convergence sont tracées en erreur :

$$|E| = \frac{|E_d^h - E_{d_{ref}}|}{E_{d_{ref}}} \quad (3.73)$$

en échelle normale (figures 3.19(a), 3.19(c) et 3.19(e)) et en échelle log (figures 3.19(b), 3.19(d) et 3.19(f)). L'erreur est représentée en fonction du nombre d'élément  $N$  (figures 3.19(a), 3.19(c) et 3.19(e)) et en fonction de la taille correspondante  $\Delta x$



**FIGURE 3.18:** Convergence du déplacement pour le problème du paraboloïde hyperbolique.

de l'élément (figures 3.19(b), 3.19(d) et 3.19(f)). Pour un élément massif coque donné, les solutions associées aux trois élancements de la coque sont montrées sur le même graphe ("10" est écrit pour  $L/h = 10$ , "100" pour  $L/h = 100$  et "1000" pour  $L/h = 1000$ ).

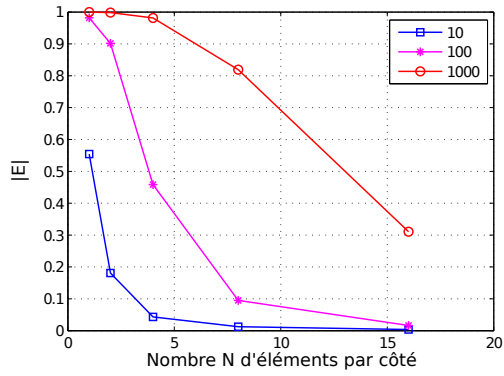
Les résultats en énergie de déformation sont cohérents avec ceux obtenus pour le déplacement. En effet, on voit tout d'abord que contrairement à l'élément "Basique 2" (figure 3.19(a)), les courbes de convergence pour "Mixte 2" et "Bbar local 2" sont proches quel que soit l'élancement et, les erreurs pour les maillages grossiers sont faibles (figures 3.19(c) et 3.19(e)). Plus précisément, on remarque avec les tracés en échelle log que seules les courbes de "Mixte 2" pour  $L/h = 100$  et  $L/h = 1000$  semblent vraiment correspondre lorsque le maillage devient fin (figure 3.19(d)). La courbe de convergence pour  $L/h = 10$  est un peu plus en dessous. En fait, il faut bien voir que la structure est assez épaisse pour le plus petit élancement si bien qu'un modèle massif est tout à fait adapté pour le calcul, d'où certainement la meilleure précision par rapport à des structures plus minces. On observe que les courbes de "Bbar local 2" ne sont pas non plus tout à fait confondues. Ici, il faut rappeler que la projection locale constitue une approximation de la

projection globale. On peut donc s'attendre à ne pas rencontrer un comportement parfait avec cette stratégie. "Mixte 2" et "Bbar local 2" ont un taux de convergence similaire (si on néglige les oscillations dues aux premiers maillages très grossiers). Ce taux de convergence semble aussi se rapprocher de celui de "Basique 2" (voir figure 3.19(b), courbe  $L/h = 10$ ). Par conséquent, on peut conclure ainsi sur la qualité des éléments développés dans cet exemple : ils ont un taux de convergence équivalent à celui des éléments standards, mais ils fournissent des résultats plus précis car ils partent d'un niveau d'erreur plus faible que le standard. Ce comportement a déjà été observé pour le cas des solides quasi-incompressibles dans [ELG 07] où les solutions  $\bar{B}$  menaient à des erreurs inférieures de plusieurs ordres de grandeurs aux solutions basiques sans  $\bar{B}$ .

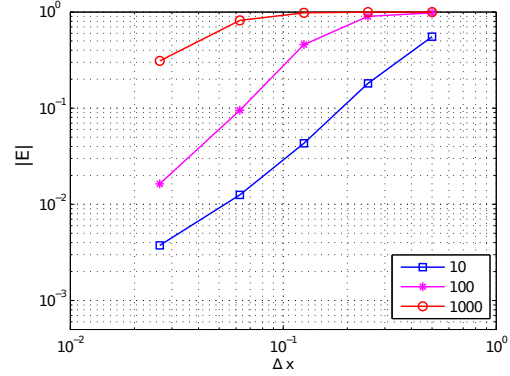
#### 3.6.3.2 La calotte hémisphérique encastrée

Pour simuler la calotte hémisphérique encastrée, on reprend la géométrie de l'hémisphère de la figure 3.8(a). On encastre cette fois-ci celle-ci au niveau de son équateur et on la charge avec une pression distribuée de façon axisymétrique :  $P(\phi) = P_0 h \cos(2\phi)$ , avec  $\phi$  l'angle traduisant la colatitude (pour plus d'information, se reporter à [BAT 00]). Comme précédemment, la symétrie du problème est utilisée pour faire intervenir uniquement le quart de la structure. Aussi, une nouvelle fois les modes de hourglass sont absents du fait de l'encastrement d'où la non utilisation de la stabilisation (section 3.5). On envisage les cas d'élanement  $R/h = 10$ ,  $R/h = 100$  et  $R/h = 1000$ . On reprend des maillages composés d'un même nombre d'éléments par côté : 1, 2, 4, 8 et 16 éléments suivant les longueurs plus précisément. Les paramètres du problèmes sont :  $E = 2 \times 10^{11}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $P_0 = 1 \times 10^6$  et  $R = 1$ . La convergence est directement étudiée en terme d'énergie de déformation pour le degré 2. La référence est prise avec "Basique 4" et 32 éléments par côté. On obtient  $E_{d_{ref}} = 4.29514 \times 10^{-1}$  pour  $R/h = 10$ ,  $E_{d_{ref}} = 6.78557 \times 10^{-2}$  pour  $R/h = 100$  et,  $E_{d_{ref}} = 7.58495 \times 10^{-3}$  pour  $R/h = 1000$ . Ces valeurs sont cohérentes avec [BAT 00]. Les résultats de convergence sont montrés en figure 3.20.

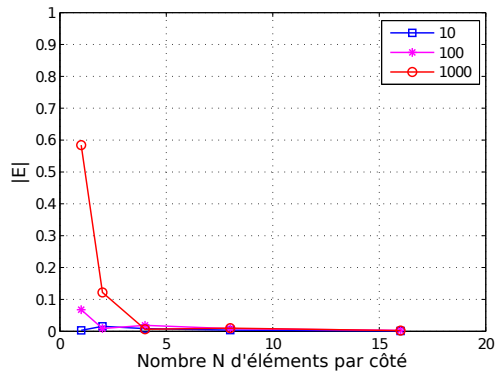
Les résultats de "Basique 2" sont meilleurs sur ce cas test que sur le précédent (voir figure 3.20(a) comparée à figure 3.19(a)). En effet, il semble que la solution "Basique 2" soit déjà assez indépendante de l'élanement sur ce problème. Ceci est dû aux effets de membrane importants qui font que même des éléments sujets à du verrouillage en membrane se comportent relativement bien. On peut observer que les résultats sont encore meilleurs pour les stratégies développées dans ce travail : les courbes de convergence sont plus proches et les niveaux d'erreur légèrement plus bas. De nouveau, il apparaît que le taux de convergence de "Mixte 2" et "Bbar local 2" est assez similaire quel que soit l'élanement et que celui-ci se rapproche du taux de convergence de "Basique 2" pour  $R/h = 10$ . Ainsi, on peut dresser les mêmes conclusions que pour le problème du paraboloïde hyperbolique sauf qu'ici, les éléments standards étant déjà de bonne qualité, l'amélioration des stratégies développées est moins notable.



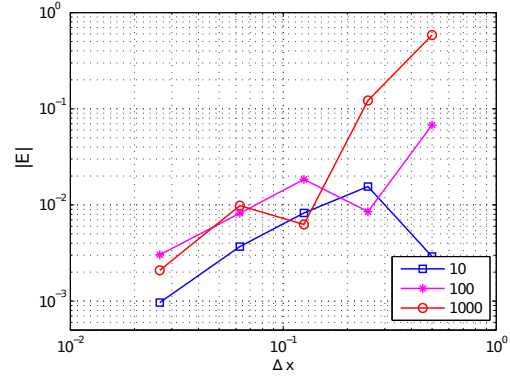
(a) Basique 2.



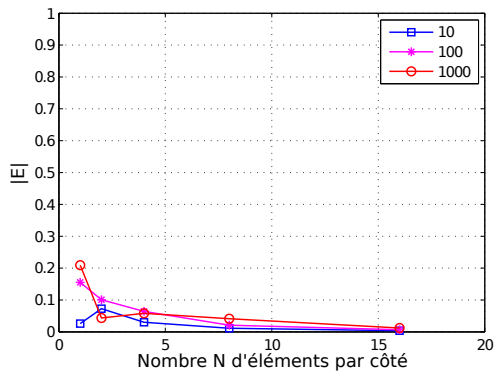
(b) Basique 2 (log).



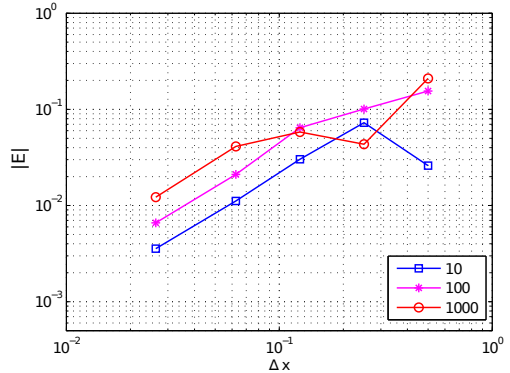
(c) Mixte 2.



(d) Mixte 2 (log).



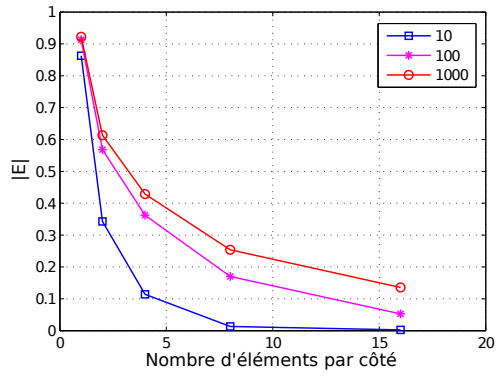
(e) Bbar local 2.



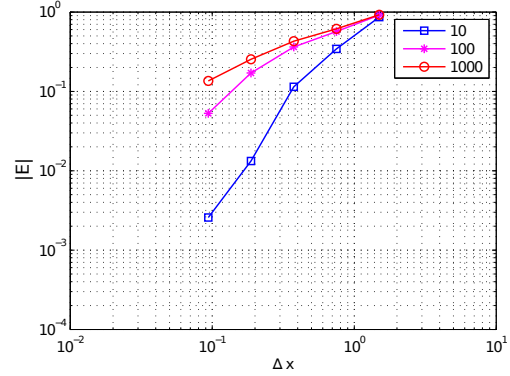
(f) Bbar local 2 (log).

**FIGURE 3.19:** Convergence en terme d'énergie de déformation pour le problème du paraboloïde hyperbolique.

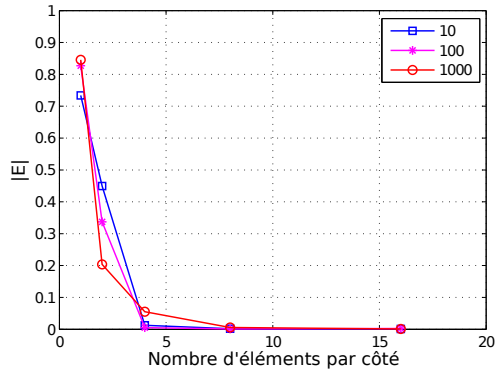
### 3. Élément NURBS massif coque pour l'élasticité en petites perturbations



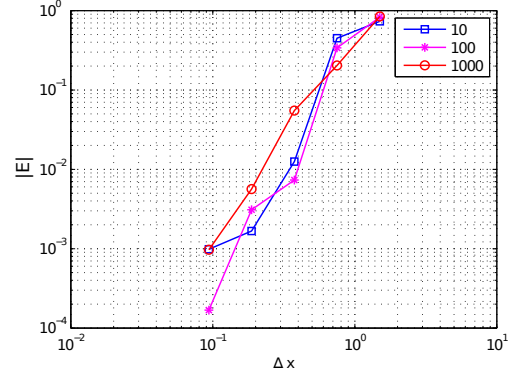
(a) Basique 2.



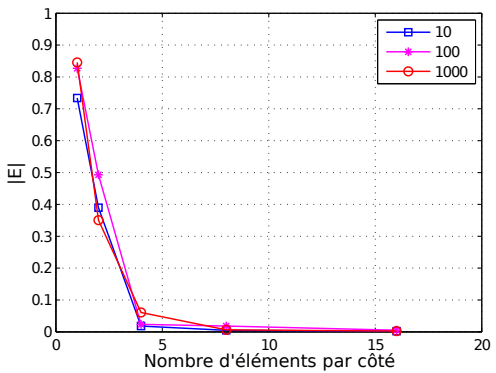
(b) Basique 2 (log).



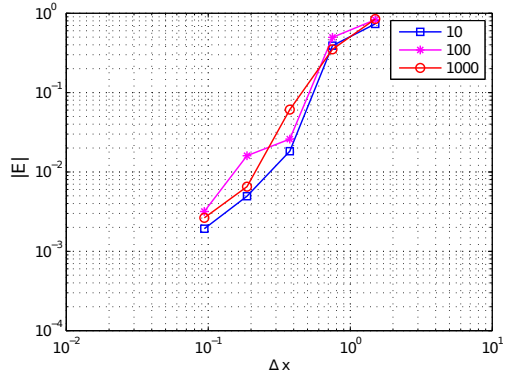
(c) Mixte 2.



(d) Mixte 2 (log).



(e) Bbar local 2.

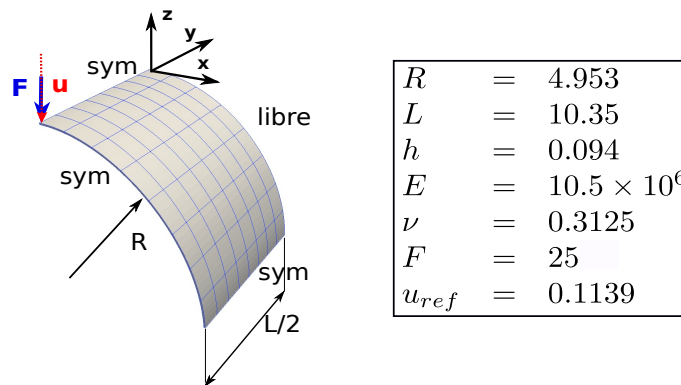


(f) Bbar local 2 (log).

**FIGURE 3.20:** Convergence en terme d'énergie de déformation pour le problème de la calotte hémisphérique encastrée.

### 3.6.4 Contrôle de hourglass : le cylindre pincé avec bords libres

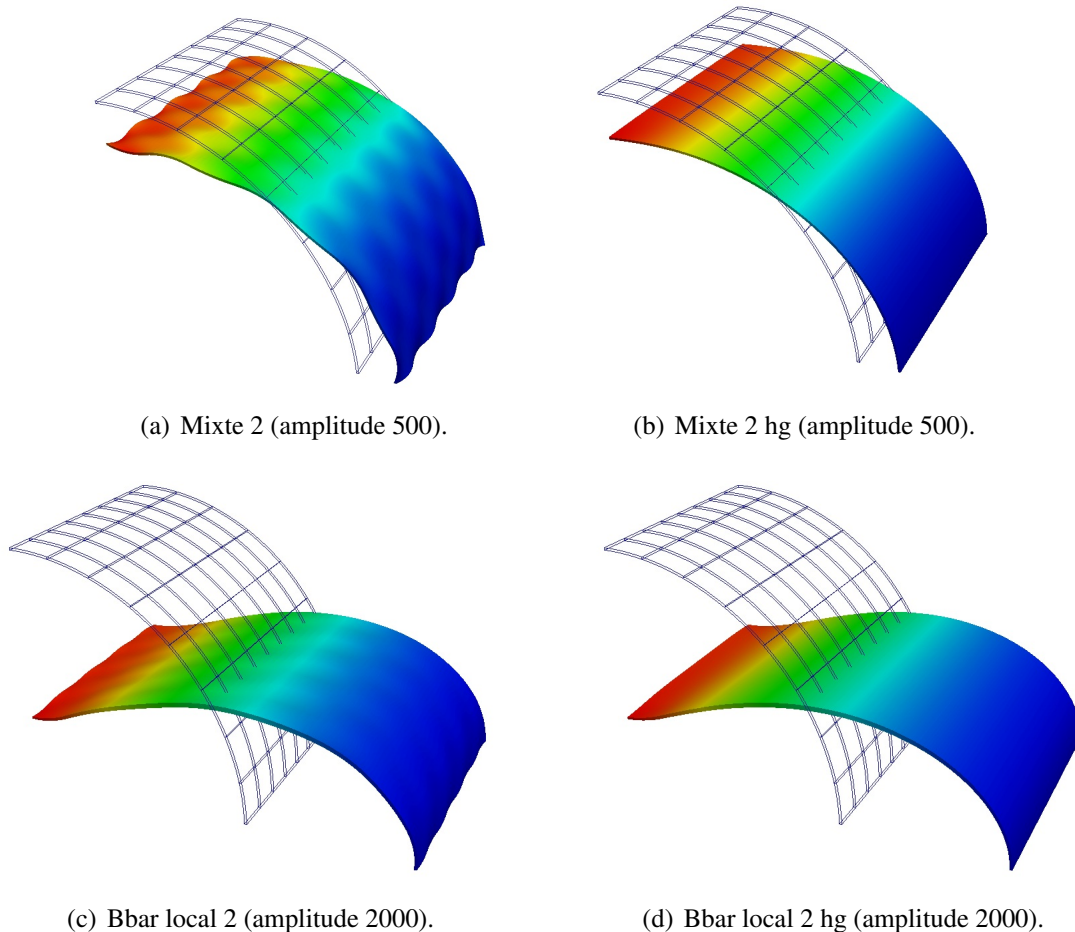
Pour finir, on s'intéresse au cas test du cylindre pincé avec bords libres initialement proposé dans [MAC 85]. Ce problème est très similaire à celui du cylindre pincé du "shell obstacle course" (cf. figure 3.9(a)). La différence ici est que le cylindre n'est plus supporté par des diaphragmes rigides mais est libre au niveau de ses deux sections extrêmes (voir figure 3.21). Les paramètres du problème changent aussi et le déplacement de référence vaut à présent  $u_{ref} = 0.1139$ . Il est accordé dans la littérature que la version avec bords libres est plus facile à résoudre numériquement que la version avec les diaphragmes. La version avec bords libres nous intéresse tout de même ici car, du fait des libertés supplémentaires de mouvements qu'elle implique, les modes de hourglass des éléments "Mixte" et "Bbar local" de la section 3.5 apparaissent. Par ailleurs, si la popularité du problème en linéaire reste modérée, il faut savoir que le même problème existe en non linéaire géométrique et constitue un cas test incontournable. Il est alors nécessaire de pourvoir, dans un premier temps, le résoudre en linéaire. Pour cela, il faut mettre en place pour "Mixte" et "Bbar local" un contrôle de hourglass. Rappelant que le contrôle de hourglass développé dans ce travail est applicable pour du quadratique, on se restreint sur ce cas test aux éléments "Mixte 2 hg" et "Bbar local 2 hg".



**FIGURE 3.21:** Cylindre avec bords libres : description et données du problème.

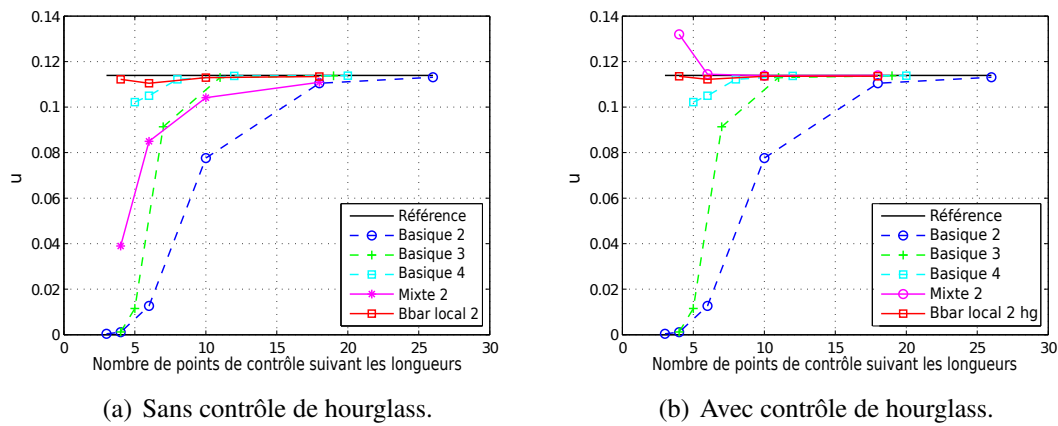
On montre sur la figure 3.22 les déformées obtenues pour l'élément "Mixte 2" (figure 3.22(a)) et pour l'élément "Mixte 2 hg" (figure 3.22(b)) pour un maillage composé de 8 éléments par côté. On voit clairement des oscillations sur la figure 3.22(a) alors que la structure semble parfaitement lisse sur la figure 3.22(b). Ces oscillations sont caractéristiques de la présence de modes de hourglass (voir, pour rappel, leur forme figure 3.5). La stabilisation proposée en section 3.5 semble par conséquent efficace sur ce problème pour l'élément mixte, elle permet de faire disparaître ces oscillations ce qui traduit la suppression des modes de hourglass. Des observations analogues peuvent être effectuées pour l'élément  $\bar{B}$  local (cf. figures 3.22(c) en comparaison avec la figure 3.22(d)). Il est à noter que l'effet des modes de hourglass est moins visible sur ce problème pour "Bbar local 2" que pour "Mixte 2". En effet, il a été nécessaire de prendre un facteur d'échelle de

2000 pour observer ces modes avec "Bbar local 2" (contre 500 pour "Mixte 2"). Toutefois, le contrôle de hourglass apparaît nécessaire pour obtenir une bonne déformée : il est aussi valable pour l'élément "Bbar local".



**FIGURE 3.22:** Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_z}$ ) pour le cylinder pincé avec bords libres.

De plus, on peut observer avec la figure 3.23 concernant la convergence de la solution en déplacement, que ces oscillations peuvent même avoir un effet néfaste sur le déplacement d'intérêt. En effet, la solution "Mixte 2" (figure 3.23(a)) converge nettement moins vite que la solution "Mixte 2 hg" (figure 3.23(b)). Le contrôle de hourglass paraît donc nécessaire et de bonne qualité car il permet de conserver la précision supérieure de l'élément mixte. Pour l'élément  $\bar{B}$  local, l'effet du hourglass sur la solution en déplacement n'est quasiment pas notable ici du fait de la faible contribution des modes. Il existe d'autres cas tests pour lesquels les éléments mixte et  $\bar{B}$  nécessitent du contrôle de hourglass. C'est le cas aussi par exemple de l'hémisphère pincé avec un trou (cf. annexe E).



**FIGURE 3.23:** Effet du contrôle de hourglass pour la solution en déplacement du cylindre pincé avec bords libres.

### 3.7 Conclusion résumée

Pour terminer, on rappelle les points qui, à l'issue de ce chapitre, nous paraissent consister en des avancées du domaine :

1. Une méthode systématique pour construire une projection  $\bar{B}$  consistante est de passer par une formulation mixte.
2. Avec ceci, on a pu modifier l'interpolation de la moyenne dans l'épaisseur de la coque des composantes de contrainte afin de traiter le verrouillage de l'élément massif coque.
3. Il en résulte un élément NURBS de bas degré sans verrouillage très précis (degré 2 meilleur que degré 4 standard).
4. Une méthode " $\bar{B}$  locale" n'impliquant qu'une très faible dégradation de la précision de l'élément développé a permis de préserver une structure creuse de la matrice de rigidité.





# Chapitre 4

## Extension en non linéaire géométrique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>110</b>
<b>4.2</b>	<b>Équations d'équilibre</b>	<b>110</b>
4.2.1	Version continue	110
4.2.2	Version discrète	112
<b>4.3</b>	<b>Matrice tangente : stabilité de l'équilibre</b>	<b>113</b>
4.3.1	Version continue	113
4.3.2	Version discrète	115
4.3.3	Cas du flambage linéaire	116
<b>4.4</b>	<b>Résolution de l'équilibre</b>	<b>117</b>
<b>4.5</b>	<b>Contrôle des modes de hourglass</b>	<b>120</b>
4.5.1	Stabilisation de l'équilibre	120
4.5.2	Stabilisation de la matrice tangente	121
<b>4.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>122</b>
4.6.1	Calculs du flambage linéaire de structures	123
4.6.2	Calculs en non linéaire géométrique	126
<b>4.7</b>	<b>Conclusion résumée</b>	<b>138</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on se place en non linéaire géométrique. On suppose que la coque reste élastique linéaire homogène isotrope mais que celle-ci est cette fois-ci soumise à de grandes rotations et de grands déplacements. L'objectif ici est de construire un élément NURBS massif coque qui conserve, dans ce cadre non linéaire, la bonne précision pour de bas degré et des maillages grossiers des éléments développés en linéaire dans le chapitre 3. L'application des éléments massifs coque au contexte non linéaire paraît primordiale puisque c'est notamment dans ce genre de simulation que ces éléments connaissent un succès important en ingénierie (voir chapitre 1). La méthodologie mise en place pour les petites perturbations est basée sur une formulation mixte. Il semble ainsi qu'il faille partir de la méthode mixte de la section 3.3 et l'étendre en non linéaire géométrique pour gérer efficacement le verrouillage. C'est ce que nous proposons de faire dans ce chapitre. On se restreint à l'extension de l'élément mixte (cf. section 3.3) sans aborder la méthode " $\bar{B}$  locale". Pour ceci, on adopte une stratégie de type Lagrangien total, c'est-à-dire que l'on effectue tous les calculs à partir de la configuration de référence (configuration non déformée). Comme en petites perturbations, on considère pour les déplacements l'espace d'approximation  $Q_{p,q,2}$ . Au départ dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4 suivantes, on ne cherche pas à contrôler les possibles modes de hourglass. Sans ça, on écrit l'équilibre de la structure en non linéaire géométrique puis, on étudie la stabilité de l'équilibre ce qui nous fournit la matrice tangente de l'élément, pour pouvoir finalement donner l'algorithme de résolution du problème non linéaire. Ce n'est qu'ensuite dans la section 4.5 que les principes de la partie 3.5 sont adaptés à la présente situation pour le contrôle des modes de hourglass en non linéaire géométrique. On reprend tout au long du chapitre les notations et définitions introduites dans le chapitre 3. Les travaux exposés ici sont principalement repris d'une précédente contribution (cf. [BOU 14]).

### 4.2 Équations d'équilibre

En non linéaire géométrique, la configuration courante  $\Omega$  évolue au cours du calcul. On ne peut plus la confondre avec la configuration de référence. On va noter la configuration de référence  $\Omega_0$  en comparaison avec la configuration courante  $\Omega$ . L'utilisation d'une approche de type Lagrangien total consiste donc à écrire l'équilibre non linéaire géométrique de la structure dans la configuration  $\Omega_0$ .

#### 4.2.1 Version continue

De façon simple, on peut utiliser la même démarche que dans la section 3.3.2 pour aboutir à l'extension en non linéaire géométrique de la formulation faible du problème mixte (cf., pour rappel, équation (3.33)). La formulation variationnelle mixte traduisant

l'équilibre en non linéaire géométrique devient : trouver  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}} \in \mathcal{S}$  tels que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left[ \underline{\underline{E}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}_t - \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{E}}_t^* \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{E}}_t \right) \right] d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{E}}_t^* \right) : \underline{\underline{\tilde{\Pi}}} d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}^* : \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{E}}_t \right) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}^* : \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\tilde{\Pi}}} d\Omega_0 = l(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^*), \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^* \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}^* \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Comme en petites perturbations, la contrainte et la déformation sont écrites dans le repère local à la coque ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) (cf. figure 3.1).  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t$  et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  sont remplacés par  $\underline{\underline{E}}_t$  et  $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}$  respectivement.  $\underline{\underline{E}}_t$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange et  $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}$  constitue la moyenne dans l'épaisseur du tenseur de Piola-Kirchhoff II. Le travail des efforts extérieurs  $l(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^*)$  est calculé comme dans l'équation (3.4) mais cette fois-ci sur la géométrie de référence  $\Omega_0$ . On retrouve en fait quelque chose de très similaire à ce que l'on avait en petites perturbations. Outre le remplacement de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t$  par  $\underline{\underline{E}}_t$  et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  par  $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}}$ ,  $\int_{\Omega}$  est tout simplement devenu  $\int_{\Omega_0}$ . Ceci paraît tout à fait normal puisque le comportement entre  $\underline{\underline{\sigma}}_t$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t$  du chapitre 3 est le même que le comportement entre  $\underline{\underline{\Pi}}_t$  et  $\underline{\underline{E}}_t$  dans  $\Omega_0$  ici :  $\underline{\underline{\Pi}}_t = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}_t$ . On rappelle que  $\underline{\underline{C}}$  reste supposé homogène dans cette partie et a donc été sorti de l'opérateur  $\underline{\underline{MOY}}(\cdot)$  dans l'équation (4.1).

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange exprimé dans la base locale ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) s'obtient en fonction du champ de déplacement comme suit :

$$\underline{\underline{E}}_t = \mathcal{R} \left( \underline{\underline{E}}_x \right) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}}_x = \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M). \quad (4.2)$$

On reprend la notation  $\mathcal{R}$  pour désigner la transformation de changement de base entre le repère global et local (cf. équation (3.14)) et la notation  $\underline{\underline{\varepsilon}}_x$  pour la déformation linéarisée pour les petites perturbations (voir équation (3.5)).  $\underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M)$  représente la déformation quadratique qui s'exprime en fonction du gradient des déplacements dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  tel que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M) = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^T \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \quad (4.3)$$

ou en indiciel : pour  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ ,

$$\varepsilon_{ij}^Q(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_{Mk}}{\partial x_i} \frac{\partial U_{Mk}}{\partial x_j}. \quad (4.4)$$

La déformation virtuelle  $\underline{\underline{E}}_t^*$  s'écrit quant à elle telle que :

$$\underline{\underline{E}}_t^* = \mathcal{R} \left( \underline{\underline{E}}_x^* \right) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E}}_x^* = \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q(\underline{\underline{\mathbf{U}}}_M, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_M^*). \quad (4.5)$$

## 4.2.2 Version discrète

Comme dans le chapitre 3, on choisit concernant les espaces d'approximation :  $\mathcal{Q}_{p,q,2}$  pour le déplacement  $\mathbf{U}_M^h$  et  $\mathcal{Q}_{p-1,q-1,0}$  pour la contrainte  $\tilde{\Pi}^h$ . On écrit en discret :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t^h(\mathbf{U}_M^h) = \underline{\underline{R}} \left( \underline{\underline{B}}^L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right) \{U\} ; \\ \mathbf{E}_t^{h*} = \underline{\underline{R}} \left( \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right) \{U^*\} ; \\ \tilde{\Pi}^h = \underline{\underline{N}} \{ \tilde{\Pi} \}. \end{cases} \quad (4.6)$$

L'opérateur  $\underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)$  est introduit pour traduire la relation de l'équation (4.3) en discret. Pour calculer cet opérateur, on a besoin de connaître la solution  $\mathbf{U}_M^h$  du problème. C'est de là que vient la non linéarité géométrique. Le système mixte à résoudre, obtenu par substitution des approximations des déformations et contraintes (voir équation (4.6)) dans la forme variationnelle mixte (cf. équation (4.1)), a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] & [K_{u\tilde{\pi}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] \\ [K_{\tilde{\pi}u}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] & - [K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\tilde{\Pi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (4.7)$$

avec, comme expressions des différents opérateurs :

$$\begin{aligned} [K_{uu}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] &= \int_{\Omega_0} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right]^T \underline{\underline{D}} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right] d\Omega_0 \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right] d\tilde{z} \right)^T \underline{\underline{D}} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right] d\tilde{z} \right) d\Omega_0 ; \\ [K_{u\tilde{\pi}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] &= \int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right] d\tilde{z} \right)^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{N}} d\Omega_0 ; \\ [K_{\tilde{\pi}u}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{R}} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_M^h) \right] d\tilde{z} \right) d\Omega_0 ; \\ [K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL}] &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{N}} d\Omega_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour obtenir ceci, il est à noter que les mêmes simplifications que dans la section 3.3.3 on été menées, c'est-à-dire que l'on a utilisé le fait que le repère local soit constant dans l'épaisseur (voir équation (3.35)) et le fait que le matériau soit isotrope (cf. équation (3.36)).

Ensuite, pour être cohérent vis-à-vis des traitements conduits pour les petites perturbations (voir remarque 14), on choisit d'effectuer une condensation statique (cf. équation (3.39)). En non linéaire géométrique, on écrit :

$$[K_{\tilde{\pi}u}^{NL}(\mathbf{U}_M^h)] \{U\} - [K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL}] \{\tilde{\Pi}\} = \{0\}. \quad (4.9)$$

ce qui conduit finalement à la matrice de rigidité globale suivante :

$$\left[ K_{mixte}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] = \left[ K_{uu}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] + \left[ K_{u\tilde{\pi}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \left[ K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL} \right]^{-1} \left[ K_{\tilde{\pi}u}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]. \quad (4.10)$$

Cette matrice, de même que la matrice en petites perturbations (cf. équation (3.40)), est pleine à cause de l'inversion de l'opérateur  $\left[ K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL} \right]$ . Avec ceci, on peut écrire l'équilibre discret en non linéaire géométrique en fonction du déplacement uniquement :

$$\left[ K_{mixte}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \{U\} = \{F\}. \quad (4.11)$$

### 4.3 Matrice tangente : stabilité de l'équilibre

Comme l'équilibre en non linéaire géométrique dépend de la solution du problème  $\mathbf{U}_M^h$ , il va falloir mettre en place un algorithme itératif pour le résoudre. C'est un algorithme de Newton classique qui va être considéré dans ce travail. Pour le mettre en œuvre, il est nécessaire de calculer la matrice tangente associée à l'équation (4.11). C'est l'objet de cette section. Pour cela, on va étudier la stabilité de l'équilibre mixte en non linéaire géométrique. L'intérêt de cette démarche est qu'en plus de fournir la matrice tangente, elle permet d'étudier le flambage de la structure. Le cas du flambage linéaire est particulièrement explicité dans la suite.

#### 4.3.1 Version continue

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, on va chercher s'il existe un deuxième champ de déplacement appartenant à  $\mathcal{U}$  et un deuxième champ de contrainte appartenant à  $\mathcal{S}$  qui vérifient l'équilibre mixte de l'équation (4.1). Si c'est le cas, on aura atteint un équilibre instable de la structure et il se pourra que celle-ci flambe (voir figure 4.1 pour l'illustration). Plus précisément, on va supposer que  $\mathbf{U}_M$  et  $\tilde{\Pi}$  satisfont l'équilibre et on va chercher s'il existe d'autres solutions d'équilibre de la forme  $\mathbf{U}_M + \alpha \mathbf{U}_{M_1}$  (champ virtuel associé  $\mathbf{U}_M^*$ ) et  $\tilde{\Pi} + \alpha \tilde{\Pi}_1$  (champ virtuel associé  $\tilde{\Pi}^*$ ),  $\alpha$  étant un réel que l'on va faire tendre vers 0. Avec ceci, on remarque que  $\mathbf{U}_{M_1}$  appartient à  $\mathcal{V}$ .

On commence par écrire la déformation pour le deuxième champ de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{E}}_t \rightarrow \mathcal{R} \left( \underline{\underline{E}}_x \left( \mathbf{U}_M + \alpha \mathbf{U}_{M_1} \right) \right) ; \\ \text{où } \underline{\underline{E}}_x \left( \mathbf{U}_M + \alpha \mathbf{U}_{M_1} \right) = \underline{\underline{E}}_x \left( \mathbf{U}_M \right) + \alpha \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x \left( \mathbf{U}_{M_1} \right) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q \left( \mathbf{U}_M, \mathbf{U}_{M_1} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}, \mathbf{U}_{M_1} \right) ; \\ \underline{\underline{E}}_t^* \rightarrow \mathcal{R} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x \left( \mathbf{U}_M^* \right) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q \left( \mathbf{U}_M, \mathbf{U}_M^* \right) + \alpha \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}, \mathbf{U}_M^* \right) \right). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Ensuite, la substitution de ces expressions (équation (4.12)) dans la forme variationnelle mixte (équation (4.1)) permet d'écrire l'équilibre en non linéaire géométrique pour les deuxièmes champs  $\mathbf{U}_M + \alpha \mathbf{U}_{M_1}$  et  $\tilde{\Pi} + \alpha \tilde{\Pi}_1$ . Les premiers termes (constants par rapport à

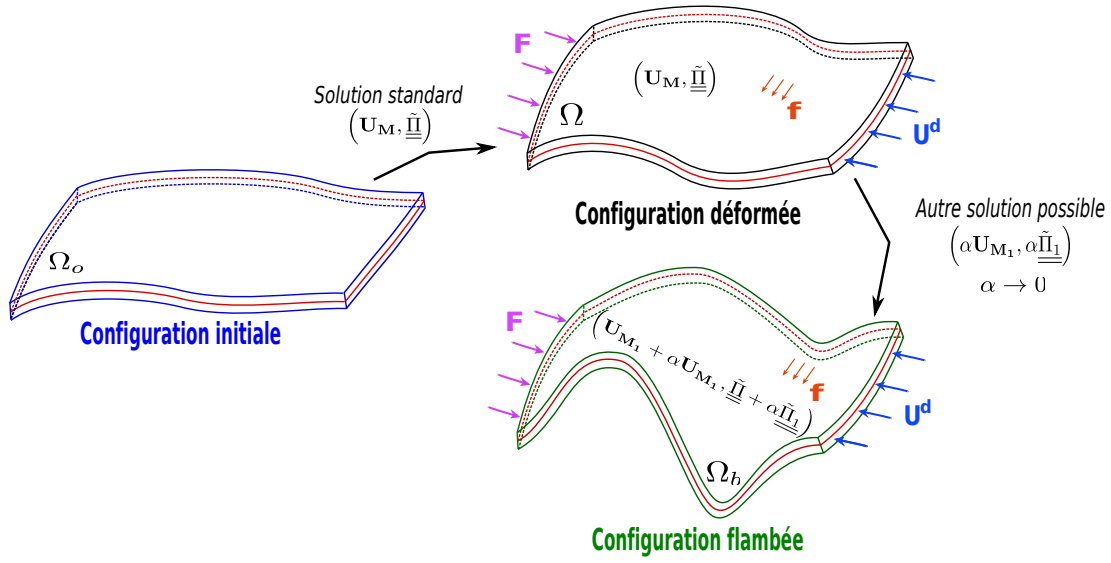


FIGURE 4.1: Flambage : les trois configurations.

$\alpha$  s'annulent puisque  $\underline{U}_M$  et  $\tilde{\Pi}$  sont déjà solutions de l'équation (4.1). Il reste les termes en  $\alpha$  et  $\alpha^2$ . Pour un  $\alpha$  assez petit, il suffit que le terme en  $\alpha$  soit nul pour que l'équilibre mixte soit vérifié pour  $\underline{U}_M + \alpha \underline{U}_{M_1}$  et  $\tilde{\Pi} + \alpha \tilde{\Pi}_1$ . Ceci revient à résoudre pour l'étude de la stabilité de l'équilibre  $(\underline{U}_M, \tilde{\Pi})$  : connaissant  $\underline{U}_M \in \mathcal{U}$  et  $\tilde{\Pi} \in \mathcal{S}$ , trouver  $\underline{U}_{M_1} \in \mathcal{V}$  et  $\tilde{\Pi}_1 \in \mathcal{S}$  tels que :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_{\Omega_o} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_{M_1}, \underline{U}_M^*) : \underline{\underline{C}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_M) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_M) \right] d\Omega_o \right\} \\
 & + \int_{\Omega_o} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_M^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_M^*) \right] : \underline{\underline{C}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_{M_1}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_{M_1}) \right] d\Omega_o \\
 & - \left\{ \int_{\Omega_o} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_{M_1}, \underline{U}_M^*) \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_M) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_M) \right) d\Omega_o \right\} \\
 & + \int_{\Omega_o} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_M^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_M^*) \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_{M_1}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_{M_1}) \right) d\Omega_o \\
 & + \int_{\Omega_o} \mathcal{R} \left( \underline{\underline{MOY}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_M^*) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_M^*) \right] \right) : \tilde{\Pi}_1 d\Omega_o \\
 & + \left\{ \left\{ \int_{\Omega_o} \mathcal{R} \left( \underline{\underline{MOY}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_{M_1}, \underline{U}_M^*) \right] \right) : \tilde{\Pi} d\Omega_o \right\} \right\} \\
 & + \int_{\Omega_o} \tilde{\Pi}^* : \mathcal{R} \left( \underline{\underline{MOY}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x(\underline{U}_{M_1}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\underline{U}_M, \underline{U}_{M_1}) \right] \right) d\Omega_o \\
 & - \int_{\Omega_o} \tilde{\Pi}^* : \underline{\underline{C}}^{-1} \tilde{\Pi}_1 d\Omega_o = 0, \quad \forall \underline{U}_{M_1} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \tilde{\Pi}^* \in \mathcal{S}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

C'est grâce à cette formulation que nous allons établir dans la suite la matrice tangente de l'élément mixte. Déjà, on peut se rendre compte à ce niveau des termes qui vont conduire à la raideur géométrique de la structure. Du fait de la décomposition de la contrainte en deux parties pour l'élément, la raideur géométrique apparaît plus précisément suivant deux termes : le terme en double accolade rouge  $\{\{\cdot\}\}$  caractérise la raideur géométrique de la contrainte moyenne dans l'épaisseur et, le terme en accolade unique bleu  $\{\cdot\}$  est relatif à la raideur géométrique de la partie complémentaire de la moyenne dans l'épaisseur de la contrainte.

### 4.3.2 Version discrète

En pratique,  $\mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h$  et  $\tilde{\mathbf{\Pi}}_1^h$  sont recherchés dans les mêmes espaces que  $\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h$  et  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^h$  :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h = \underline{\underline{N}}\{U_1\} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}_1^h = \underline{\underline{\tilde{N}}}\{\tilde{\Pi}_1\}. \quad (4.14)$$

La version discrète de l'équation (4.13) permettant de les déterminer amène à résoudre le système de la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_{T_{uu}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h, \tilde{\mathbf{\Pi}}^h)] & [K_{T_{u\tilde{\pi}}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] \\ [K_{T_{\tilde{\pi}u}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] & -[K_{T_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}}^{NL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{\tilde{\Pi}_1\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (4.15)$$

avec :

$$[K_{T_{uu}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h, \tilde{\mathbf{\Pi}}^h)] = [K_{T_{uu}}^{1NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] + \{ [K_{T_{uu}}^{2NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] \} + \{ \{ [K_{T_{uu}}^{3NL}(\tilde{\mathbf{\Pi}}^h)] \} \}. \quad (4.16)$$

Les opérateurs classiques s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} [K_{T_{uu}}^{1NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] &= \int_{\Omega_o} [\underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)]^T \underline{\underline{D}} [\underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] d\Omega_o \\ &\quad - \int_{\Omega_o} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [\underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] \right)^T \underline{\underline{D}} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [\underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] \right) d\Omega_o ; \\ [K_{T_{u\tilde{\pi}}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] &= [K_{T_{\tilde{\pi}u}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)]^T = \int_{\Omega_o} \left( \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [\underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL}(\mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h)] \right)^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\tilde{N}}} d\Omega_o ; \\ [K_{T_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}}^{NL}] &= \int_{\Omega_o} \underline{\underline{\tilde{N}}}^T \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{\tilde{N}}} d\Omega_o, \end{aligned} \quad (4.17)$$



et les raideurs géométriques, de nouveau distinguées par une double accolade rouge  $\{\{\cdot\}\}$  et une accolade unique bleu  $\{\cdot\}$  (cf. équation (4.16)), s'obtiennent telles que :

$$\begin{aligned} \{U^*\}^T \left[ K_{Tuu}^{2NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \{U_1\} &= \int_{\Omega_o} \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*} \right) : \underline{\underline{C}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon_x}} \left( \mathbf{U}_M^h \right) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_M^h, \mathbf{U}_M^h \right) \right] d\Omega_o \\ &\quad - \int_{\Omega_o} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*} \right) \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon_x}} \left( \mathbf{U}_M^h \right) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_M^h, \mathbf{U}_M^h \right) \right) d\Omega_o ; \\ \{U^*\}^T \left[ K_{Tuu}^{3NL} \left( \tilde{\Pi}^h \right) \right] \{U_1\} &= \int_{\Omega_o} \mathcal{R} \left( \underline{\underline{MOY}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*} \right) \right] \right) : \tilde{\Pi}^h d\Omega_o. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pour construire ces matrices de raideur géométrique, on procède de manière analogue à ce qui est fait en éléments finis classiques (voir, par exemple, [LEG 03]). De même que pour l'équilibre (équation (4.11)), on mène ensuite dans ce travail une condensation statique pour obtenir la matrice tangente condensée :

$$\left[ K_{T_{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h, \tilde{\Pi}^h \right) \right] = \left[ K_{T_{uu}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h, \tilde{\Pi}^h \right) \right] + \left[ K_{T_{u\tilde{\pi}}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \left[ K_{T_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}}^{NL} \right]^{-1} \left[ K_{T_{\tilde{\pi}u}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]. \quad (4.19)$$

De nouveau, cette matrice possède une structure pleine avec le calcul de  $\left[ K_{T_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}}^{NL} \right]^{-1}$ .

Pour finir, on peut voir que s'il existe un état tel que la matrice tangente définie par l'équation (4.19) soit singulière, on aura bien trouvé un champ de déplacement  $\mathbf{U}_{M_1}^h$  non nul tel que les équations (4.13) et (4.15) soient vérifiées. Ce champ correspond au mode de flambage. Un équilibre instable de la structure est alors atteint.

### 4.3.3 Cas du flambage linéaire

Dans le cas du flambage linéaire, l'instabilité de la structure se produit pour de petites perturbations de la géométrie, c'est-à-dire pour une configuration que l'on peut confondre avec la configuration de référence ( $\Omega_0 = \Omega$ ). Dans ce cas, la contrainte de Piola-Kirchhoff II devient la contrainte de Cauchy (pour l'élément cela revient à dire  $\tilde{\Pi}^h = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h$ ) et le tenseur des déformations de Green Lagrange devient le tenseur des déformations linéarisées ( $\underline{\underline{E}}_t^h = \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h$ ). Ainsi, si la solution en petites perturbations du problème est  $\left( \mathbf{U}_M^h, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h \right)$ , la matrice tangente du cas particulier du flambage linéaire, c'est-à-dire du flambage intervenant pour cette solution d'équilibre en petites perturbations, s'écrit sous la forme :

$$\left[ K_{T_{mixte}}^L \left( \mathbf{U}_M^h, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h \right) \right] = \left\{ \left[ K_{T_{uu}}^{2L} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \right\} + \left\{ \left\{ \left[ K_{T_{uu}}^{3L} \left( \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h \right) \right] \right\} \right\} + \left[ K_{T_{mixte}}^L \right], \quad (4.20)$$

$\left[ K_{T_{mixte}}^L \right]$  est la matrice de rigidité de l'élément en petites perturbations (voir, pour rappel, équation (3.40)).  $\left[ K_{T_{uu}}^{2L} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]$  s'obtient pour le flambage linéaire tel que :

$$\begin{aligned} \{U^*\}^T \left[ K_{T_{uu}}^{2L} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \{U_1\} &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*} \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon_x}} \left( \mathbf{U}_M^h \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon_x}}^Q \left( \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*} \right) \right) : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{MOY}} \left( \underline{\underline{\varepsilon_x}} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.21)$$

C'est la raideur géométrique associée à l'orthogonal de la moyenne des contraintes dans l'épaisseur (d'où l'accolade unique bleu  $\{\cdot\}$  dans l'équation (4.20)).  $\left[ K_{T_{uu}}^{3L}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}^h}) \right]$  est quant à elle mise entre double accolade rouge  $\{\{\cdot\}\}$  car elle constitue la raideur géométrique de la moyenne dans l'épaisseur des contraintes. On la trouve avec la relation suivante :

$$\{U^*\}^T \left[ K_{T_{uu}}^{3L}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}^h}) \right] \{U_1\} = \int_{\Omega} \mathcal{R} \left( \underline{\underline{MOY}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_x^{\mathcal{Q}}(\mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^{h*}) \right] \right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}^h} d\Omega. \quad (4.22)$$

Avec ceci, la charge de flambage linéaire peut s'obtenir en résolvant le problème aux valeurs propres généralisées suivant :

$$\left( \left[ K_{mixte}^L \right] + \lambda \left( \left[ K_{T_{uu}}^{2L}(\mathbf{U}_M^h) \right] + \left[ K_{T_{uu}}^{3L}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}^h}) \right] \right) \right) \{U_1\} = \{0\}. \quad (4.23)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$  constituent les valeurs propres inconnues. D'un point de vue physique, elles correspondent aux coefficients par lesquels il faut multiplier le chargement pour avoir les instabilités. En d'autres termes, multipliées par un effort pris unitaire, elles correspondent aux charges de flambage linéaire. Les vecteurs propres  $\{U_1\}$  associés sont les modes de flambage linéaire correspondants. En pratique, on s'intéresse à la première charge critique pour le dimensionnement de structure, c'est-à-dire à la première valeur propre du problème de l'équation (4.23).

## 4.4 Résolution de l'équilibre

Comme dit précédemment, on met en place pour résoudre l'équation non linéaire (4.11) un algorithme de Newton classique. On choisit de mettre à jour la matrice tangente à chaque itération de l'algorithme afin de pouvoir prendre des pas de chargement relativement grands et conserver tout de même une bonne convergence. Du fait des condensations statiques des différents opérateurs, on peut procéder comme habituellement en éléments finis. On précise ici la mise en œuvre de l'algorithme.

On décompose le chargement en pas de chargement. On considère qu'on connaît l'état d'équilibre à un instant 1 associé à un effort externe :

$$\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = \{F_1\}. \quad (4.24)$$

L'état 1 se caractérise par le déplacement  $\mathbf{U}_{M_1}^h$  et la moyenne dans l'épaisseur de la contrainte de Piola-Kirchhoff II  $\underline{\underline{\tilde{\Pi}}_1^h}$ . On va chercher l'équilibre à un instant 2 associé à l'effort externe  $\mathbf{F}_2^{\text{ext}}$ . Son champ de déplacement  $\mathbf{U}_{M_2}^h$  vérifie l'équation (4.11) :

$$\left[ K_{mixte}^{NL}(\mathbf{U}_{M_2}^h) \right] \{U_2\} = \{F_2\}. \quad (4.25)$$

On peut ensuite obtenir la moyenne dans l'épaisseur de la contrainte pour cet état 2 à partir de l'égalité donnée dans l'équation (4.9) :

$$\{\tilde{\Pi}_2\} = \left[ K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL} \right]^{-1} \left[ K_{\tilde{\pi}u}^{NL}(\mathbf{U}_{M_2}^h) \right] \{U_2\}. \quad (4.26)$$

#### 4. Extension en non linéaire géométrique

---

Aussi, l'équilibre de l'état 2 peut s'écrire comme l'égalité d'une quantité interne  $\mathbf{F}_2^{\text{int}}$  avec les forces externes  $\mathbf{F}_2^{\text{ext}}$  en prenant :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \left[ K_{\text{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_{M_2}^h \right) \right] \{U_2\}. \quad (4.27)$$

On va donc chercher à annuler le résidu  $\mathbf{R}$  pour chaque pas de chargement :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - \mathbf{F}_2^{\text{int}}. \quad (4.28)$$

Pour ce faire, on procède comme suit : on part d'un état non déformé ( $\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = \mathbf{0}$  d'où  $\mathbf{U}_{M_1}^h = 0$  et  $\tilde{\Pi}_1^h = \mathbf{0}$ ), on se définit un pas de chargement  $\Delta \mathbf{F}$  que l'on prend constant et assez faible pour assurer la convergence de l'algorithme avec une précision  $\varepsilon$  et un nombre d'itérations maximum  $nb_{\text{max}}$  puis, on applique la procédure donnée dans l'algorithme 1 pour déterminer l'état correspondant à l'effort maximum  $\mathbf{F}_{\text{max}}^{\text{ext}}$ .

---

**Algorithm 1** Algorithme de résolution de l'équilibre mixte en non linéaire géométrique.

---

**while**  $\mathbf{F}_1^{\text{ext}} \leq \mathbf{F}_{\text{max}}^{\text{ext}} - \Delta \mathbf{F}$  **do**

  Calcul de l'effort extérieur :  $\mathbf{F}_2^{\text{ext}} = \mathbf{F}_1^{\text{ext}} + \Delta \mathbf{F}$  ;

  Initialisation du résidu à zéro :  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  ;

  Initialisation du compteur d'itération :  $n = 0$  ;

  Initialisation de l'incrément de chargement :  $\Delta \mathbf{F}_0 = \Delta \mathbf{F}$

**while**  $n \leq nb_{\text{max}}$  **do**

    Calcul de la matrice tangente (équation (4.19)) de l'état 1 :

$$\left[ K_{\text{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h, \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_1^h \right) \right] ;$$

    Calcul de l'incrément de déplacement :

$$\Delta \mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h = \left( \left[ K_{\text{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h, \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_1^h \right) \right] \right)^{-1} (\Delta \mathbf{F}_0 + \mathbf{R}) ;$$

    Calcul du déplacement de l'état 2 :  $\mathbf{U}_{\mathbf{M}_2}^h = \mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h + \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{M}}^h$  ;

    Calcul de l'effort intérieur de l'état 2 (équation (4.27)) :

$$\mathbf{F}_2^{\text{int}} = \left[ K_{\text{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_{\mathbf{M}_2}^h \right) \right] \{U_2\} ;$$

    Calcul de la contrainte de l'état 2 (équation (4.26)) :

$$\{\tilde{\Pi}_2\} = [K_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}^{NL}]^{-1} \left[ K_{\tilde{\pi}u}^{NL} \left( \mathbf{U}_{\mathbf{M}_2}^h \right) \right] \{U_2\} ;$$

    Calcul du résidu (équation (4.28)) :  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_2^{\text{ext}} - \mathbf{F}_2^{\text{int}}$  ;

    Mise à jour du déplacement et de la partie inconnue en contrainte :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{M}_1}^h = \mathbf{U}_{\mathbf{M}_2}^h ; \quad \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_1^h = \underline{\underline{\tilde{\Pi}}}_2^h ;$$

    Mise à zéro de l'incrément de chargement :  $\Delta \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$  ;

$n = n + 1$  ;

**if**  $\|\mathbf{R}\|_{L_2} / \|\mathbf{F}_2^{\text{ext}}\|_{L_2} < \varepsilon$  **then**

      Break while

**end if**

**end while**

  Stockage de la solution ;

  Mise à jour de l'effort extérieur :  $\mathbf{F}_1^{\text{ext}} = \mathbf{F}_2^{\text{ext}}$  ;

**end while**

---

## 4.5 Contrôle des modes de hourglass

Comme en petites perturbations, l'élément mixte peut être sujet dans certains cas à du hourglass. Il reste ainsi maintenant à stabiliser l'élément en non linéaire géométrique. Pour cela, on va partir de la stratégie proposée pour les petites perturbations (cf. section 3.5). De ce fait, on se restreint à des fonctions quadratiques dans les longueurs ( $p = q = 2$ ) et on cherche à ajouter des raideurs élémentaires artificielles de stabilisation à la matrice de rigidité d'équilibre (voir équation (4.10)) ainsi qu'à la matrice tangente (cf. équation. (4.19)). Pour le contrôle en non linéaire géométrique, on va considérer que la forme des modes de hourglass est identique à celle observée en petites perturbations (voir équation (3.64)). Cette fois-ci, les modes s'expriment en termes de contraintes de Piola-Kirchhoff II : ils s'écrivent tels que :

$$\tilde{\Pi}_{\text{hg1}}^{\text{eh}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\Pi}_{\text{hg2}}^{\text{eh}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} \\ 0 \\ -\tilde{\eta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\Pi}_{\text{hg3}}^{\text{eh}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\eta} \\ \tilde{\eta} \\ 0 \\ \tilde{\xi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\Pi}_{\text{hg4}}^{\text{eh}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

### 4.5.1 Stabilisation de l'équilibre

Dans un premier temps, il faut stabiliser l'équilibre (équation (4.11)). La forme bilinéaire classique utilisée pour faire produire de l'énergie aux modes parasites (voir, pour rappel, équation (3.65)) devient en grandes rotations et grands déplacements :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{E}_t^{\text{h}*T} \underline{\underline{D}} \mathbf{E}_t^{\text{h}} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \Pi_t^{\text{h}*T} \underline{\underline{D}}^{-1} \Pi_t^{\text{h}} d\Omega_0. \quad (4.30)$$

Avec ceci, et en reprenant la démarche de la section 3.5.3, on calcule la raideur élémentaire de stabilisation pour le  $i^{\text{ième}}$  mode de hourglass telle que :

$$\left[ K_{\text{stab}_i}^{\text{NL}^e} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right] = \left[ K_{ua_i}^{\text{NL}^e} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right] \left[ K_{a_i a_i}^{\text{NL}^e} \right]^{-1} \left[ K_{a_i u}^{\text{NL}^e} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right], \quad (4.31)$$

avec les différents opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \left[ K_{ua_i}^{\text{NL}^e} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right] &= \int_{\Omega_{0e}} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{\text{NL}} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right]^T \underline{\underline{R}}^T \tilde{\Pi}_{\text{hg}_i}^{\text{eh}} d\Omega_{0e} ; \\ \left[ K_{a_i u}^{\text{NL}^e} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right] &= \int_{\Omega_{0e}} \tilde{\Pi}_{\text{hg}_i}^{\text{eh}T} \underline{\underline{R}} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \frac{1}{2} \underline{\underline{B}}^{\text{NL}} \left( \mathbf{U}_M^{\text{h}} \right) \right] d\Omega_{0e} ; \\ \left[ K_{a_i a_i}^{\text{NL}^e} \right] &= \int_{\Omega_{0e}} \tilde{\Pi}_{\text{hg}_i}^{\text{eh}T} \underline{\underline{D}}^{-1} \tilde{\Pi}_{\text{hg}_i}^{\text{eh}} d\Omega_{0e}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\Omega_{0_e}$  représente le domaine de l'élément, dans la configuration de référence, dans lequel le contrôle est effectué. On conserve le choix de l'élément milieu (cf. équation (3.63)). L'équilibre en non linéaire géométrique stabilisé s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \left[ K_{mixte}^{NLstab} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \{U\} = \{F\} ; \\ \text{avec } \left[ K_{mixte}^{NLstab} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] = \left[ K_{mixte}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] + \sum_{i=1}^4 \mathcal{P}_i \left[ K_{stab_i}^{NLe} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right], \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $\left[ K_{mixte}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]$  est la matrice de raideur non stabilisée de l'équation (4.10). De nouveau, il semble qu'une large plage de valeurs pour les paramètres de pénalisation  $(\mathcal{P}_i)_{i=1,2,3,4}$  permette un contrôle efficace. Plutôt que de prendre une valeur unitaire comme en petites perturbations, on choisira ici une valeur de 10 pour les expérimentations numériques de la section 4.6. Les déformations étant plus importantes en non linéaire géométrique qu'en petites perturbations, il semble normal d'accorder plus de poids à l'énergie de hourglass pour le contrôle.

Au final, dans le cas d'un contrôle de hourglass nécessaire,  $\left[ K_{mixte}^{NLstab} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]$  remplace  $\left[ K_{mixte}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]$  pour le calcul des forces internes (cf. équation (4.27)). Cette modification doit être réalisée dans l'algorithme de résolution 1. Dans cet algorithme, on calculera aussi à cette étape l'amplitude des modes de hourglass. Celle-ci s'obtient comme dans l'équation (3.69), c'est-à-dire :

$$\{a_i\} = \left[ K_{a_i a_i}^{NLe} \right]^{-1} \left[ K_{a_i u}^{NLe} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \{U\}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (4.34)$$

$\{U\}$  étant solution de l'équilibre stabilisé (équation (4.33)).

## 4.5.2 Stabilisation de la matrice tangente

Dans un second temps, il est nécessaire de stabiliser la matrice tangente pour être en mesure de déterminer l'incrément de déplacement dans l'algorithme 1. Pour cela, on revient sur l'écriture de la stabilité de l'équilibre en non linéaire géométrique (voir section 4.3). Cette fois-ci, l'équilibre à considérer est l'équilibre stabilisé (équation (4.33)). En plus des nouveaux champs de déplacement et contrainte de la forme  $\mathbf{U}_M + \alpha \mathbf{U}_{M1}$  (champ virtuel associé  $\mathbf{U}_M^*$ ) et  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}} + \alpha \tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_1$  (champ virtuel associé  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}}^*$ ), on regarde s'il existe des nouveaux modes de hourglass dont la contrainte élémentaire est de la forme  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{hg_i}^e + \alpha \tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{1hg_i}^e$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (champs tests associés  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{hg_i}^{e*}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) qui vérifient aussi l'équilibre stabilisé.  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{hg_i}^e$  est connu. Il a été calculé au cours de l'équilibre (voir équations (4.33) et (4.34)) : c'est la version continue de  $(a_i \tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{hg_i}^h)$ .  $\tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{1hg_i}^e$  correspond quant à lui à l'inconnue, sa version discrète est de la forme  $(a_{1_i} \tilde{\underline{\underline{\Pi}}}_{hg_i}^h)$ ,  $a_{1_i}$  étant la nouvelle amplitude inconnue de ce  $i^{\text{ième}}$  mode.

En écrivant l'équilibre non linéaire géométrique stabilisé (équation (4.33)) pour ces nouveaux champs, en faisant tendre  $\alpha$  vers zéro, et en prenant donc uniquement en compte le terme en  $\alpha$ , (le terme constant par rapport à  $\alpha$  s'annule puisque  $\mathbf{U}_M, \underline{\tilde{\Pi}}$  et  $\underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^e, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont déjà solutions de l'équilibre stabilisé), on aboutit à une matrice de raideur élémentaire de stabilisation pour le  $i^{\text{ième}}$  mode de la forme :

$$\left[ K_{T_{stab_i}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h, \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} \right) \right] = \left\{ \left[ K_{T_{uu}}^{NL^e} \left( \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} \right) \right] \right\} + \left[ K_{T_{ua_i}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] \left[ K_{T_{a_i a_i}}^{NL^e} \right]^{-1} \left[ K_{T_{a_i u}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]. \quad (4.35)$$

Les opérateurs classiques s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} \left[ K_{T_{ua_i}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right] &= \left[ K_{T_{a_i u}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]^T = \int_{\Omega_{0_e}} \left[ \underline{\underline{B}}^L + \underline{\underline{B}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h \right) \right]^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} d\Omega_{0_e} ; \\ \left[ K_{T_{a_i a_i}}^{NL^e} \right] &= \int_{\Omega_{0_e}} \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h T} \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} d\Omega_{0_e}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

et le terme en accolade unique bleu  $\{ \cdot \}$ , qui correspond à une raideur géométrique de hourglass, se calcule tel que :

$$\{ U^* \}^T \left[ K_{T_{uu}}^{NL^e} \left( \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} \right) \right] \{ U_1 \} = \int_{\Omega_{0_e}} \mathcal{R} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_x^Q \left[ \mathbf{U}_{M_1}^h, \mathbf{U}_M^h \right] \right) : \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} d\Omega_{0_e}. \quad (4.37)$$

Finalement, la matrice tangente stabilisée s'écrit :

$$\left[ K_{T_{mixte}}^{NL^{stab}} \left( \mathbf{U}_M^h, \underline{\tilde{\Pi}}^h, \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} \right) \right] = \left[ K_{T_{mixte}}^{NL} \left( \mathbf{U}_M^h, \underline{\tilde{\Pi}}^h \right) \right] + \sum_{i=1}^4 \mathcal{P}_i \left[ K_{T_{stab_i}}^{NL^e} \left( \mathbf{U}_M^h, \underline{\tilde{\Pi}}_{hg_i}^{e^h} \right) \right], \quad (4.38)$$

en fonction de la matrice tangente non stabilisée de l'équation (4.19). Comme pour la stabilisation de l'équilibre, on prend 10 pour les paramètres  $(\mathcal{P}_i)_{i=1,2,3,4}$ . C'est cette matrice tangente que l'on construit dans le cas d'apparition de modes de hourglass dans l'algorithme 1. Avec cette modification ainsi que celle pour l'équilibre, l'élément mixte est stabilisé pour le non linéaire géométrique.

## 4.6 Résultats numériques

On calcule pour finir un certain nombre de cas tests en non linéaire géométrique. L'objectif est de vérifier l'efficacité de l'extension en grandes rotations et grands déplacements proposée dans ce chapitre pour l'élément mixte. On se restreint à la version quadratique de l'élément mixte. Plus précisément, on envisage tout d'abord des problèmes de flambage de structures en petites perturbations pour s'assurer de la bonne construction de la matrice tangente. Ce n'est qu'ensuite qu'on se focalise sur les grandes rotations et grands déplacements proprement dits. Pour ceux-ci, l'élément mixte sera non seulement comparé aux éléments NURBS massifs coque standards de plus hauts degrés mais aussi, à d'autres techniques éléments finis (NURBS et classique) jugées performantes dans la littérature.

La règle d'intégration envisagée au départ pour les calculs est celle classique pour les NURBS, à savoir l'utilisation de  $(p+1) \times (q+1) \times 3$  points de Gauss par élément pour l'espace d'approximation  $Q_{p,q,2}$ . On verra aussi qu'une deuxième règle impliquant moins de points d'intégration pourra être envisagée pour diminuer le coût de l'élément mixte. Pour la mise en œuvre des calculs, on reprend la démarche du chapitre 3 (voir, plus précisément, section 3.6.1). On part d'un unique élément puis on applique le raffinement  $k$ . Le maillage de la structure composé de  $N$  éléments dans la première longueur (c'est-à-dire suivant  $\xi$ ) et  $M$  éléments dans la deuxième longueur (direction  $\eta$ ) est noté  $N \times M$ . On reprend les désignations "Basique 2, 3, et 4" pour les éléments massifs coque standards, "Mixte 2" ou "Mixte 2 hg" pour l'élément mixte sans ou avec contrôle de hourglass et, "Référence" pour les solutions de références obtenues analytiquement ou à partir de la littérature éléments finis.

## 4.6.1 Calculs du flambage linéaire de structures

Trois cas tests de flambage linéaire de coques sont étudiés. Le problème résolu ici est le problème aux valeurs propres généralisées posé dans l'équation (4.23). Plus précisément, on calcule la première charge critique de flambage. On la note  $P_c$ . On regarde aussi la forme du mode de flambage associé. Les références sont données par des formules analytiques classiques.

### 4.6.1.1 La poutre droite encadrée en compression

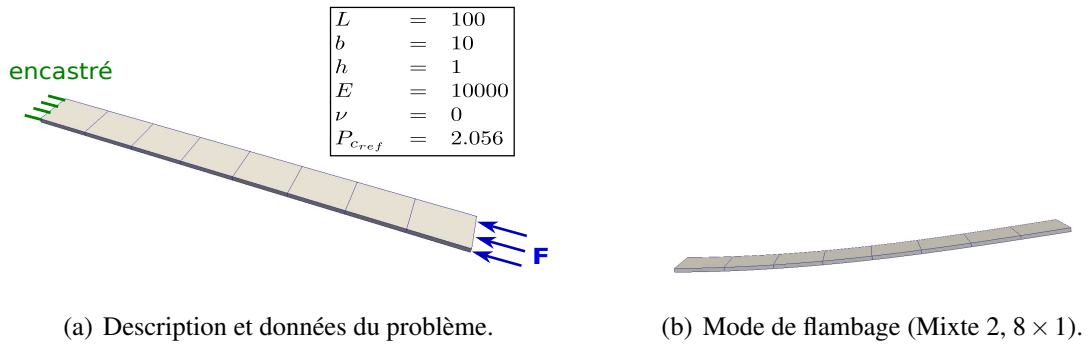
On commence par étudier le problème simple du flambage d'une poutre droite soumise à de la compression. On choisit d'encadrer la poutre à une des deux extrémités, l'autre servant à appliquer l'effort (voir figure 4.2(a)). Le premier mode de flambage obtenu avec l'élément "Mixte 2" pour un maillage  $8 \times 1$  est montré dans la figure 4.2(b). Dû à l'encastrement, il n'est pas nécessaire de stabiliser l'élément mixte. On trace ensuite la convergence de la première charge critique  $P_c$  en fonction du nombre de points de contrôle dans la longueur de la poutre (voir figure 4.3). On considère pour les maillages un unique élément dans la largeur de la poutre. On prend comme référence la charge critique de flambage donnée par la formule d'Euler :

$$P_{c_{ref}} = EI \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 \quad \text{avec} \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.39)$$

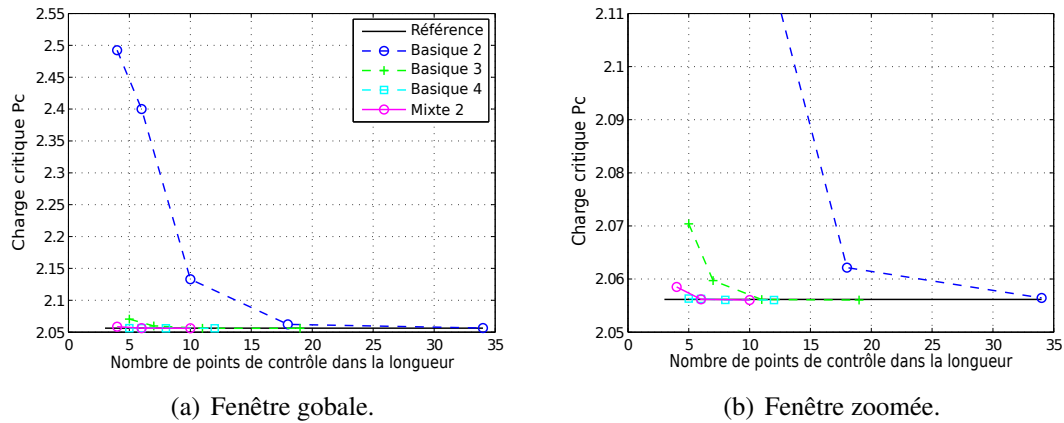
La référence vaut 2.056. C'est bien cette valeur qui est atteinte à convergence pour les éléments massifs coque. La figure 4.3(b) constitue un zoom de la figure 4.3(a) proche de cette solution de référence. On remarque une tendance similaire pour la charge critique à ce qui a pu être observé au niveau des déplacements en petites perturbations dans le chapitre précédent : la stratégie mixte pour l'ordre 2 possède une précision équivalente à la stratégie basique d'ordre 4 pour des maillages grossiers. Les éléments basiques d'ordres inférieurs sont eux sujets à du verrouillage ce qui donne une convergence plus lente de la charge critique de flambage.



#### 4. Extension en non linéaire géométrique



**FIGURE 4.2:** Flambage d'une poutre droite encastree d'un cote et soumise a de la compression de l'autre.



**FIGURE 4.3:** Convergence de la charge critique de flambage  $P_c$  pour la poutre en compression.

#### 4.6.1.2 Le cylindre infini comprimé par une pression externe

Le second problème de flambage linéaire envisagé concerne la compression radiale d'un cylindre infini. Le modèle associé pour le calcul est présenté dans la figure 4.4(a). En profitant de la symétrie du problème, on se restreint à l'étude d'un huitième de cylindre. L'élément mixte est stabilisé (élément "Mixte 2 hg") car les conditions aux limites en déplacement ne permettent pas ici de faire disparaître les modes de hourglass. On montre le premier mode de flambage obtenu avec l'élément mixte pour un maillage  $8 \times 8$  (cf. figure 4.4(b)). La convergence de la première charge critique de flambage associée  $P_c$  est tracée dans la figure 4.5. Un même nombre d'éléments par côté est considéré pour les maillages. On ne considère pas les forces de pression suivieuse dans le modèle. La référence peut se calculer via la formule analytique suivante :

$$P_{Cref} = \frac{E}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{R} \right)^3. \quad (4.40)$$

Il semble que l'on converge avec le modèle et l'utilisation d'éléments massifs coque pour le résoudre vers une solution légèrement inférieure (on trouve 0.00364 contre 0.00366 soit 0.6% de différence). Toujours la même tendance confirmant la supériorité de l'approche mixte en terme de précision est observée. La stratégie mixte conduit à une très bonne précision pour des maillages grossiers vis-à-vis de la stratégie basique d'augmenter l'ordre d'approximation. D'un point de vue quantitatif, l'élément "Mixte 2 hg" apparait encore plus précis que l'élément "Basique 4" pour approcher la charge critique de flambage sur ce problème.

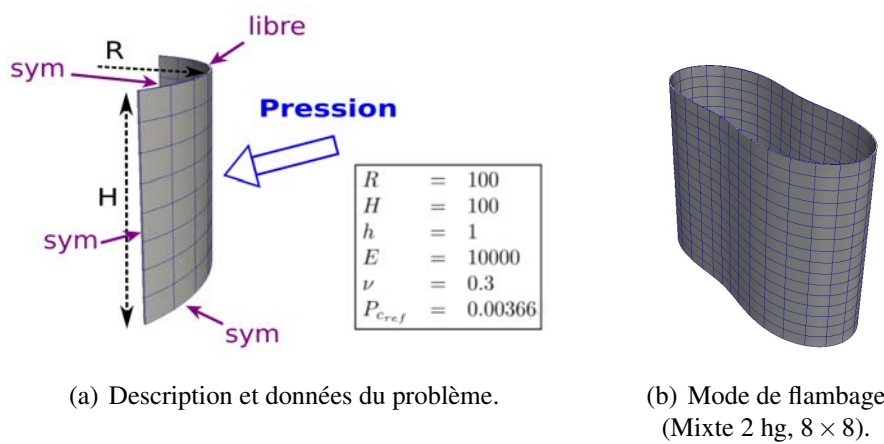


FIGURE 4.4: Flambage d'un cylindre infini comprimé par une pression externe.

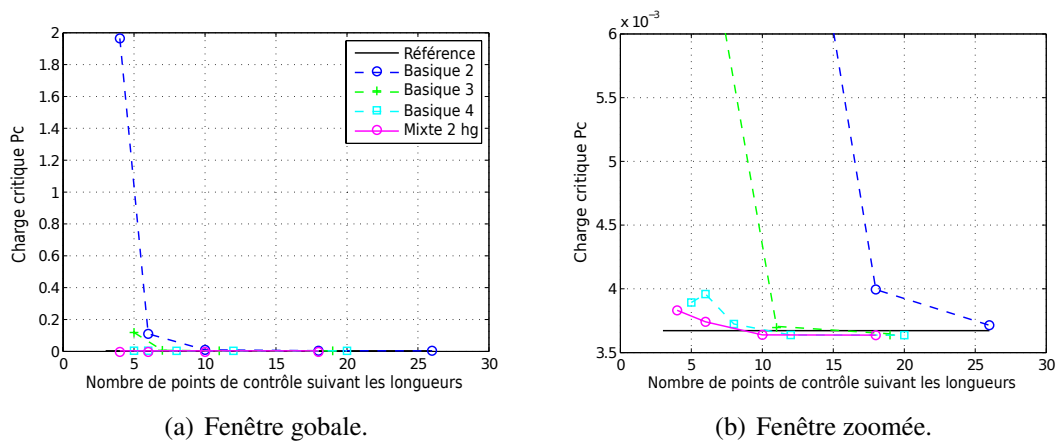


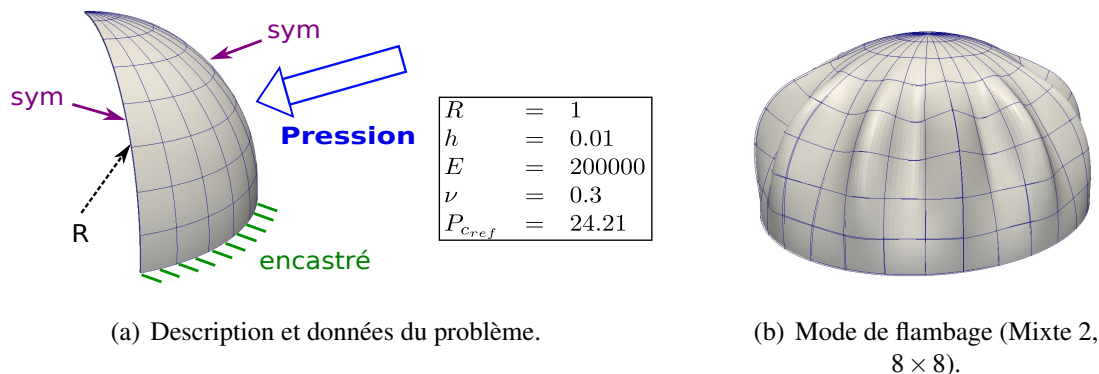
FIGURE 4.5: Convergence de la charge critique de flambage  $P_c$  pour le cylindre comprimé.

#### 4.6.1.3 L'hémisphère encastré comprimé par une pression externe

Pour terminer sur le flambage linéaire, on calcule l'hémisphère encastré comprimé radialement par une pression externe. On utilise la symétrie pour se réduire à l'étude d'un quart du problème (voir figure 4.6(a)). L'encastrement permettant de supprimer les modes de hourglass, l'élément "Mixte 2" suffit. Des maillages composés du même nombre d'éléments dans les deux directions de la surface sphérique sont utilisés pour le calcul. On montre dans la figure 4.6(b) le mode de flambage pour "Mixte 2" et  $8 \times 8$  éléments et la convergence de la charge critique associée est tracée sur la figure 4.7. De nouveau, on néglige les forces de pression suiveuse. La référence peut se calculer avec la formule suivante :

$$P_{ref} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (4.41)$$

La solution atteinte à convergence de notre modèle avec le calcul des éléments massifs coque est 24.08 contre 24.21 en théorie (soit 0.5% de différence). Encore une fois, l'élément mixte d'ordre 2 est très précis et semble se comporter mieux que l'élément basique d'ordre 4 pour l'étude du flambage sur ce problème.

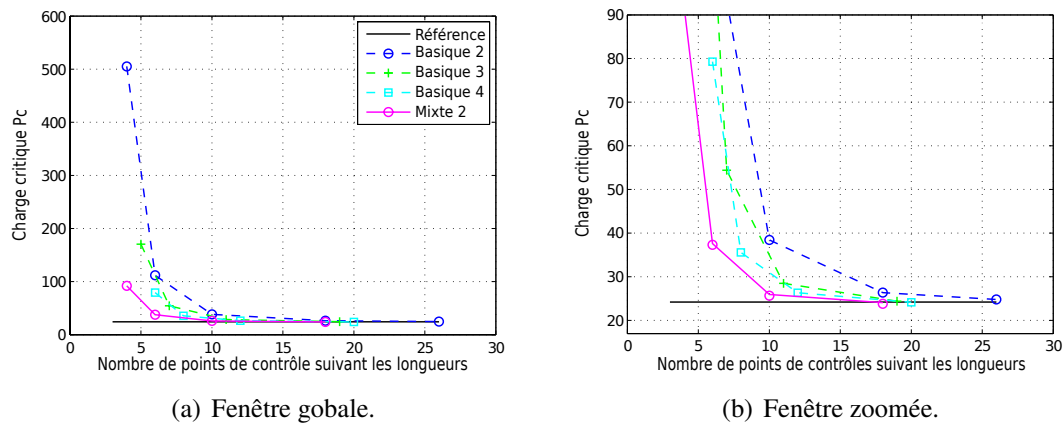


**FIGURE 4.6:** Flambage de l'hémisphère encastré comprimé par une pression externe.

De tels résultats concernant le flambage linéaire nous amènent à penser que la matrice tangente établie dans la section 4.3 est cohérente pour l'élément mixte. Il faut à présent vérifier la mise en place proposée pour l'élément dans le cadre de problèmes véritablement non linéaires géométriques. C'est l'objet de la partie suivante.

#### 4.6.2 Calculs en non linéaire géométrique

Trois cas tests du même type que ceux étudiés dans le cadre des petites perturbations (cf. section 3.6) sont considérés en grandes rotations et grands déplacements. Cette fois-ci, les chargements sont plus intenses d'où la nécessité de se placer en non linéaire géométrique pour résoudre. Pour les calculs, on met en place l'algorithme non linéaire incrémental 1 de la partie 4.4 avec, si besoin, le contrôle de hourglass de la section 4.5. On



**FIGURE 4.7:** Convergence de la charge critique de flambage  $P_c$  pour l'hémisphère encasturé comprimé.

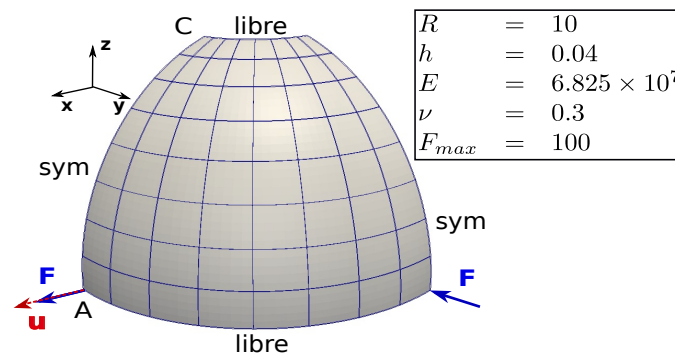
prendra comme paramètres une précision de l'algorithme  $\varepsilon = 10^{-5}$  et un nombre maximum d'itérations  $nb_{max} = 25$ . Le pas de chargement  $\Delta F$  est choisi en fonction du cas test, de sorte qu'il y ait globalement une convergence de l'algorithme en moins de dix d'itérations.

En plus de la comparaison avec les éléments "Basique 2, 3 et 4", nous comparons la fiabilité de la stratégie vis-à-vis de deux autres techniques coques performantes aujourd'hui. Dans le contexte NURBS, on va considérer pour la comparaison l'élément solid-like shell Bézier ("SLSBEZ") de [HOS 13]. En effet, même si cette technique n'a pas pour objectif premier de traiter le verrouillage, elle envisage un modèle quasi massif et cherche à être performante pour des degrés relativement bas. C'est celle qui semble la plus proche de la notre en non linéaire géométrique coque NURBS aujourd'hui. On désigne l'élément cubique qui en découle par "SLSBEZ 3". Dans le contexte éléments finis classiques, on choisit de se comparer à l'élément "SHB8PS" de [ABE 09]. Cet élément est une brique à 8 nœuds qui, même si intégrant une relation de comportement 3D modifiée, apparaît compétitive vis-à-vis des autres techniques éléments finis traditionnels massifs coque. Les fonctions d'interpolation étant linéaires, on note cet élément "SHB8PS 1".

#### 4.6.2.1 L'hémisphère pincé avec un trou

On commence par étudier le problème de l'hémisphère pincé avec un trou (voir figure 4.8). Ce problème est très proche de l'hémisphère pincé traité dans le chapitre précédent en petites perturbations (cf. figure 3.8). Cette fois-ci, la coque hémisphérique possède un trou en son sommet et c'est le point sommet à gauche du quart d'hémisphère (point C sur la figure 4.8) que l'on choisit de fixer suivant  $\mathbf{z}$ . On rappelle que la version en petites perturbations de ce problème existe également et que les résultats correspondants peuvent être trouvés dans l'annexe E. Ce cas test a été beaucoup utilisé en non linéaire pour vérifier l'absence de verrouillage en membrane et la bonne représentation des mouvements

de corps rigides (voir, par exemple parmi les premiers travaux, [SIM 90a, BUE 92]). La charge maximale  $F_{max}$  vaut 100. On prend un pas de chargement  $\Delta F = 5$  pour le calcul. Le contrôle de hourglass de la section 4.5 est effectué pour l'élément mixte puisque des modes de hourglass peuvent apparaître dans ce problème. On va s'intéresser à la courbe du chargement  $F$  en fonction du déplacement  $u$  au cours du calcul. Le déplacement  $u$  est le déplacement concernant le point A suivant la direction de l'effort (cf. figure 4.8 de nouveau). On prend comme référence la solution de l'élément fini traditionnel coque S4R d'ABAQUS avec un maillage  $16 \times 16$  fournie dans [HOS 13].

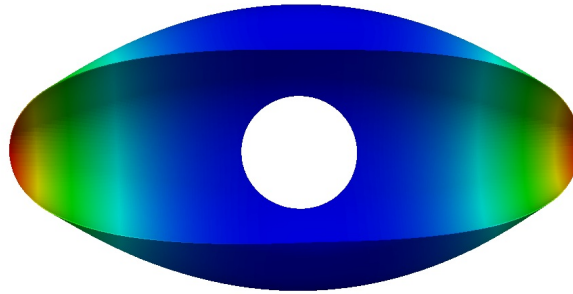


**FIGURE 4.8:** Hémisphère pincé avec un trou : description et données du problème.

La figure 4.9 montre la configuration déformée de l'hémisphère obtenu à la fin du calcul avec l'élément "Mixte 2 hg" et un maillage  $8 \times 8$ . On n'observe pas d'oscillations de la déformée : l'extension du contrôle de hourglass en non linéaire géométrique (section 4.5) semble valide sur ce problème. Ensuite, on présente dans la figure 4.10 les solutions  $F/F_{max} = f(u)$  pour les différents éléments : "Basique 2" (figure 4.10(a)), "Basique 3" (figure 4.10(b)), "Basique 4" (figure 4.10(c)), et "Mixte 2 hg" (figure 4.10(d)). Pour chacun des éléments, les maillages  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , et  $16 \times 16$  sont considérés. On retrouve les mêmes tendances que pour l'étude en petites perturbations et l'étude du flambage linéaire ce qui atteste de la performance de l'élément en non linéaire géométrique sur ce cas test. On constate toujours que :

1. Augmenter le degré pour les éléments basiques permet d'améliorer la solution, mais pour l'ordre 3 et 4, une bonne approximation nécessite tout de même  $16 \times 16$  éléments. Les solutions des maillages plus grossiers sont trop raides à cause du verrouillage.
2. Adopter une stratégie mixte permet d'obtenir une bonne approximation de la solution pour un ordre 2 et un maillage plus grossier ( $4 \times 4$ ). Le verrouillage semble éliminé avec cette stratégie ce qui confère à l'élément mixte développé une très bonne précision pour des maillages très grossiers.

On compare ensuite dans la figure 4.11 les solutions de l'élément "Mixte 2 hg" avec les solutions de l'élément "SLSBEZ 3". Il apparaît qu'un maillage  $16 \times 16$  est nécessaire pour obtenir une solution correcte avec "SLSBEZ 3". Ce maillage est donc à comparer



**FIGURE 4.9:** Configuration déformée (amplitude 1,  $|U_{M_x}|$ ) pour l'hémisphère pincé avec un trou en fin de calcul non linéaire géométrique avec "Mixte 2 hg" et  $8 \times 8$  éléments.

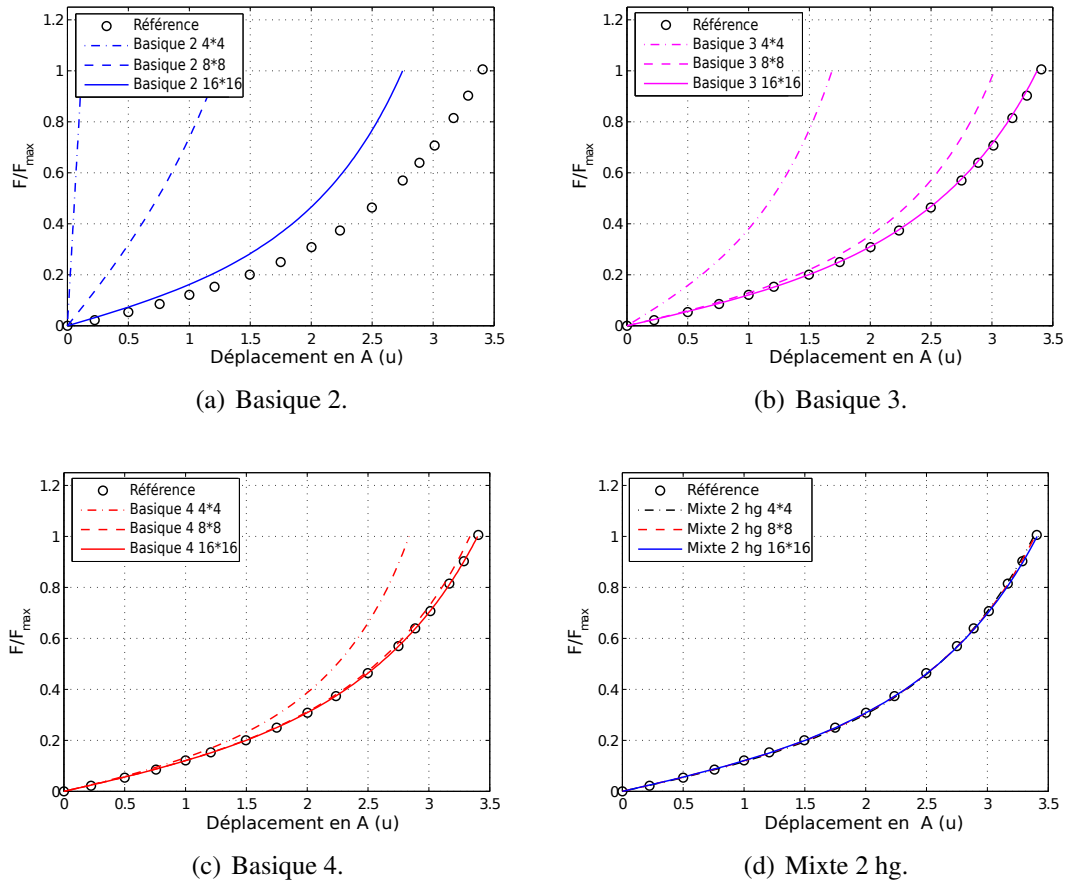
au maillage  $8 \times 8$  (ou même  $4 \times 4$ ) pour "Mixte 2 hg". Ceci est fait dans le tableau 4.1 qui donne le nombre de degrés de liberté (DDLs) et le nombre de points de Gauss (PGs) associés à ces maillages. Ces résultats confirment la performance de l'élément "Mixte 2 hg". On a besoin de beaucoup moins de degrés de liberté et de points de Gauss qu'avec l'élément "SLSBEZ 3" pour atteindre une précision équivalente.

Maillage	SLSBEZ 3 $16 \times 16$	Mixte 2 hg $4 \times 4$	Mixte 2 hg $8 \times 8$
Nombre de DDLs	2527	324	900
Nombre de PGs	4096	432	1728

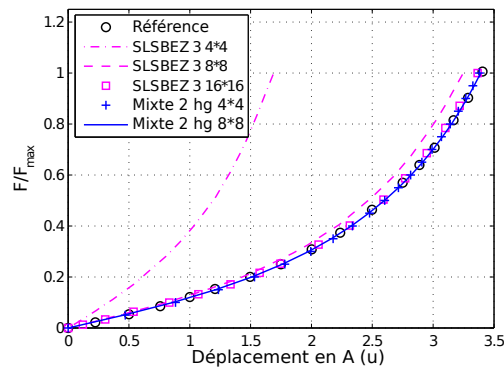
**TABLE 4.1:** Comparaison pour l'hémisphère pincé avec un trou : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence.

**Remarque 25** *Il est à noter que le nombre de degrés de liberté pris en compte pour l'élément mixte renferme uniquement les inconnues en déplacement de la formulation mixte. En effet, comme on choisit d'appliquer une condensation statique dans ce travail, c'est la taille de la matrice condensée qui est importante pour la résolution (cf. équation (4.19)). Le faible nombre de degrés de liberté en déplacement et de points de Gauss de l'élément mixte est un bon indicateur d'efficacité mais il se doit d'être nuancé puisque la matrice condensée est pleine. Pour être plus juste, il faudrait compter le nombre d'opérations nécessaires à la construction et à l'inversion de la matrice de rigidité globale. Ceci dépend de l'algorithme envisagé pour la résolution des systèmes linéaires. Comme dit en section 2.4, si cela est cohérent avec l'environnement informatique à disposition, la mise en place d'un algorithme itératif (de type gradient conjugué) permettrait certainement de contourner le problème de matrice de rigidité pleine. Par ailleurs, peut-être qu'une méthode de type " $\bar{B}$  locale", comme celle établie pour les petites perturbations dans le chapitre précédent (section 3.4.3), pourrait aussi être envisagée en non linéaire géométrique pour conserver une structure creuse de la matrice de raideur globale.*

#### 4. Extension en non linéaire géométrique



**FIGURE 4.10:** Courbes chargement-déplacement  $F/F_{max} = f(u)$  pour l'hémisphère pincé avec un trou en non linéaire géométrique.



**FIGURE 4.11:** Comparaison des solutions "Mixte 2 hg" avec les solutions "SLSBEZ 3" de [HOS 13] sur l'hémisphère pincé avec un trou.

#### 4.6.2.2 L'étirement d'un cylindre avec bords libres

Le deuxième cas test envisagé constitue la version non linéaire du cylindre avec bord libre du chapitre précédent (cf. figure 3.21). La géométrie, les conditions aux limites en déplacement et les paramètres matériaux sont identiques (voir figure 4.12). La différence en non linéaire géométrique provient du chargement. Le cylindre est à présent étiré jusqu'à application d'une charge maximale  $F_{max} = 10000$  pour le huitième de problème. Ce chargement fait subir au cylindre des rotations considérables, combinant des effets de flexion et de membrane, ce qui le rend très délicat à résoudre numériquement. Pour cette raison, ce cas test est devenu très populaire (on peut citer ici [GRU 89, SZE 04] si l'on se réduit uniquement à deux références). Un pas de chargement  $\Delta F = 100$  est considéré pour le calcul. Des modes de hourglass pouvant apparaître, l'élément mixte est stabilisé. Les relations effort  $F$  - déplacements radiaux  $U_{A_z}$ ,  $-U_{B_x}$  et  $-U_{C_x}$  sont intéressantes à montrer au cours du calcul (voir, encore, figure 4.12 pour la localisation des points A, B et C). Pour étudier la convergence, on a considéré les maillages  $8 \times 8$ ,  $16 \times 8$  et  $16 \times 16$ , la première direction  $\xi$  étant la direction circonférentielle et la deuxième  $\eta$  étant la direction longitudinale (figure 4.12). La convergence pour l'élément "Mixte 2 hg" semblant déjà atteinte pour  $8 \times 8$  éléments, on présente uniquement les résultats pour le maillage le plus grossier. La référence donnée dans Sze *et al.* [SZE 04] qui utilisait l'élément coque traditionnel S4R avec notamment des maillages  $24 \times 16$  et  $36 \times 24$  est reprise ici.

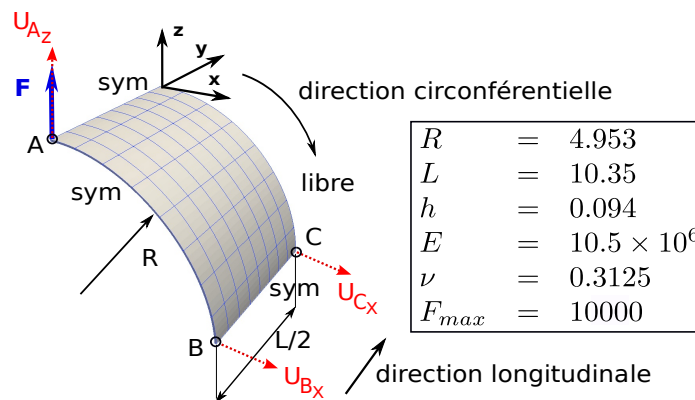
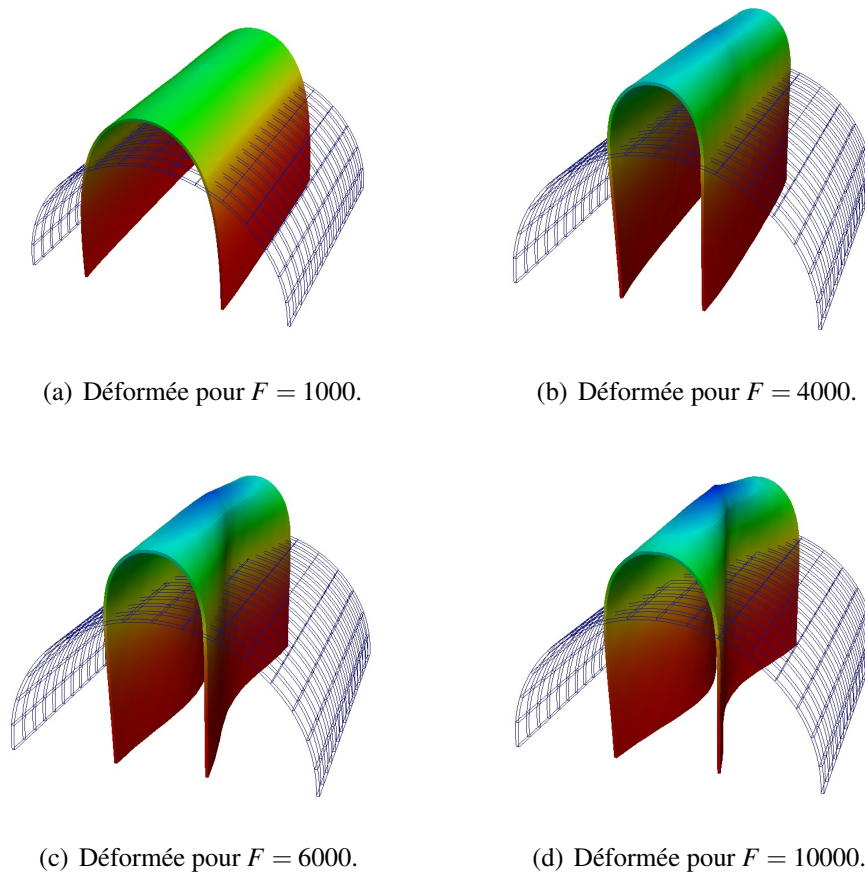


FIGURE 4.12: Cylindre avec bords libres étiré : description et données du problème.

Des configurations déformées au cours du calcul obtenues avec l'élément "Mixte 2 hg" sont montrées dans la figure 4.13 et les courbes effort normalisé-déplacement sont tracées sur la figure 4.14. Concernant le comportement de ce cas test, les résultats révèlent la présence de deux régimes : le premier est dominé par les effets de flexion et est caractérisé par de grands déplacements et de grandes rotations, alors que ce sont principalement des effets de membrane qui sont présents dans le second régime. De plus, on peut noter l'apparition d'un phénomène de pincement du cylindre lorsque le chargement atteint une valeur critique proche de 5000. À cet instant, le point C change son sens de déplacement. D'un point de vue qualité de la solution, on retrouve une précision équiva-

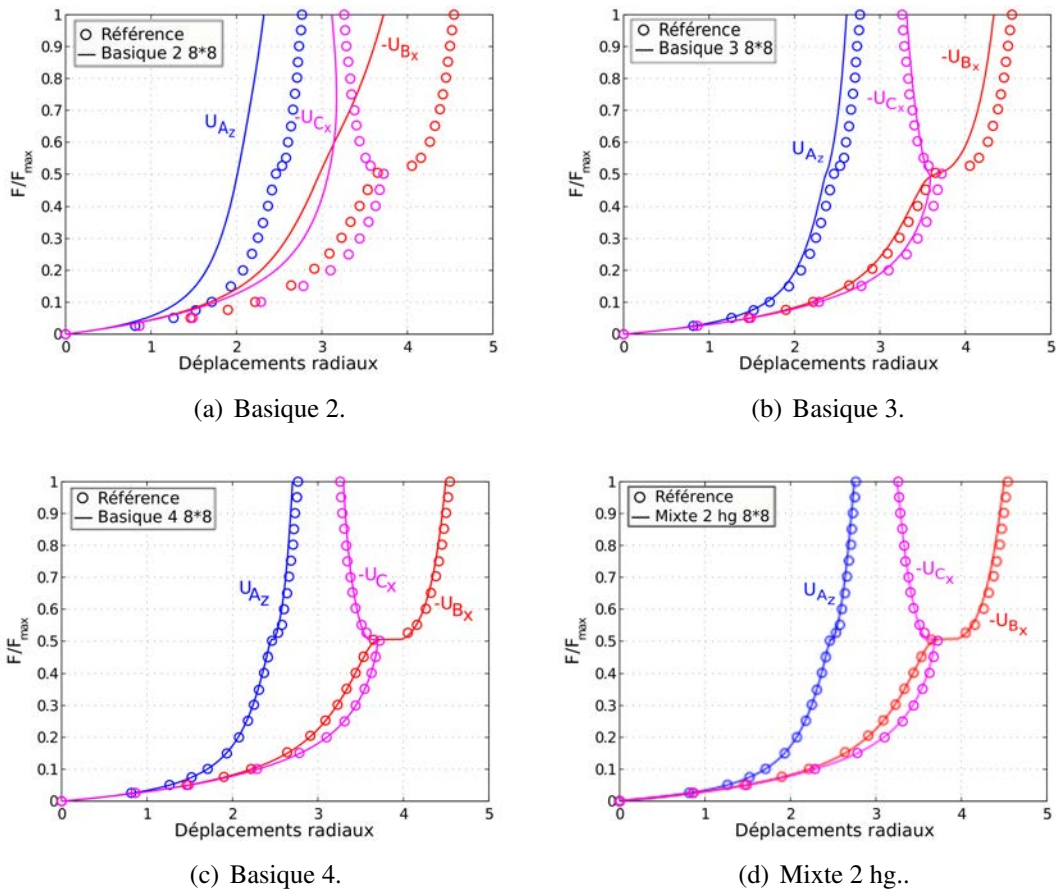


lente pour "Basique 4" et "Mixte 2 hg". Il apparait que pour un maillage  $8 \times 8$  seuls ces deux éléments soient en mesure d'approcher convenablement la solution de référence du problème.

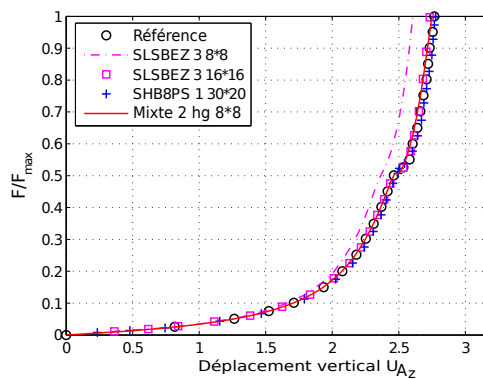


**FIGURE 4.13:** Configurations déformées (amplitude 1,  $U_{M_z}$ ) pour le cylindre étiré au cours du calcul non linéaire géométrique avec "Mixte 2 hg" et  $8 \times 8$  éléments.

Enfin, on compare sur ce problème les résultats de l'élément "Mixte 2 hg" avec ceux des éléments "SLSBEZ 3" et "SHB8PS 1" (voir figure 4.15). Il semble que le maillage de convergence pour "SLSBEZ 3" soit composé de 16 éléments par côté et il est dit dans [ABE 09] qu'un maillage  $30 \times 20$  soit nécessaire pour avoir convergence avec l'élément "SHB8PS 1". Le tableau 4.2 donne les caractéristiques de ces maillages avec celles du maillage  $8 \times 8$  pour l'élément "Mixte 2 hg". De nouveau, on peut constater la compétitivité de l'élément "Mixte 2 hg" vis-à-vis de l'élément "SLSBEZ 3". Ensuite, on peut noter que les stratégies NURBS sont meilleures en terme de nombre de degrés de liberté mais moins intéressantes en terme de nombre de points de Gauss par rapport à la stratégie éléments finis traditionnels. Cette constatation est récurrente dans le domaine. De façon simple, c'est la règle classique de  $(p + 1)$  points de Gauss par élément pour des fonctions de degré  $p$  qui est prise ici pour les NURBS. Or, il est bien connu que cette règle est loin



**FIGURE 4.14:** Courbes chargement-déplacement  $F/F_{max} = f(U_{A_z})$ ,  $F/F_{max} = f(-U_{B_x})$  et  $F/F_{max} = f(-U_{C_x})$  pour le cylindre étiré (maillage  $8 \times 8$ ) en non linéaire géométrique.



**FIGURE 4.15:** Comparaison des solutions "Mixte 2 hg" avec les solutions "SLSBEZ 3" de [HOS 13] et "SHB8PS 1" de [ABE 09] sur le cylindre étiré.

d'être optimale pour des fonctions de continuité supérieure (cf. [HUG 10]).

Maillage	SLSBEZ 3 16 × 16	Mixte 2 hg 8 × 8	SHB8PS 1 30 × 20
Nombre de DDLs	2527	900	3906
Nombre de PGs	4096	1728	1200

**TABLE 4.2:** Comparaison pour le cylindre étiré : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence.

La recherche de règles d'intégration plus optimales et pratiques pour les NURBS semble connaître un intérêt important aujourd'hui en IGA. Notamment, Schillinger *et al.* [SCH 14] se sont très récemment attachés à développer des règles d'intégration plus efficaces pour les NURBS de bas degrés avec l'objectif d'une implémentation aisée dans les codes de calcul. La règle la plus simple de ce travail est certainement la règle dite de Gauss réduite : elle consiste à prendre  $p$  points de Gauss au lieu de  $(p + 1)$  pour des fonctions de degré  $p$ . Pour s'assurer de ne pas rencontrer d'instabilité, il est nécessaire d'après [SCH 14] de considérer un maillage composé d'un nombre suffisant d'éléments (le cas d'un unique élément ou le cas d'une unique ligne d'éléments peut poser des difficultés). Pour avoir une règle générale quelle que soit la taille du maillage, [SCH 14] ont proposé de conserver la règle de Gauss classique pour les éléments de bords. Sans ça, il est à noter que la règle de Gauss réduite avait déjà été utilisée pour des NURBS de degré 2 dans [BEN 11] en modèle de structure coque. La règle semblait bien fonctionner et permettait de limiter considérablement le coût de calcul pour des problèmes non linéaires. La nécessité de prendre un certain nombre d'éléments pour le maillage va dans le sens de notre travail concernant la stabilisation qui fait intervenir un élément milieu (cf. remarque 21). Ainsi, on se propose maintenant d'appliquer la règle de Gauss réduite à notre élément mixte de degré 2. La règle de Gauss réduite est appliquée partout dans la structure (pas de traitement différent des éléments de bords), les cas de maillages très grossiers n'étant pas envisagés. Le nouvel élément obtenu est noté "Mixte 2 hg réd". Il se calcule avec 2 points de Gauss dans chaque direction. L'utilisation de ces 2 points de Gauss uniquement ne devrait pas dégrader la formulation mixte puisque cette règle de 2 points de Gauss est cohérente vis-à-vis des fonctions linéaires qui génèrent l'espace des contraintes. C'est en tout cas ce que l'on observe sur cet exemple : les solutions obtenues sont quasiment identiques à celles calculées avec une intégration classique et aucune instabilité supplémentaire n'est à déplorer. On reporte dans le tableau 4.3 les caractéristiques du maillage  $8 \times 8$  pour le nouvel et l'ancien élément. Le nouvel élément NURBS devient dès lors compétitif vis-à-vis de l'élément fini classique même en terme de nombre de points de Gauss pour une précision équivalente.

#### 4.6.2.3 La poutre vrillée sous chargement hors-plan

Le dernier problème calculé concerne une poutre vrillée encastree à une extrémité et soumise à une charge concentrée hors-plan à l'autre extrémité (voir figure 4.16). Ce problème est bien connu pour évaluer la performance des éléments dans le contexte des

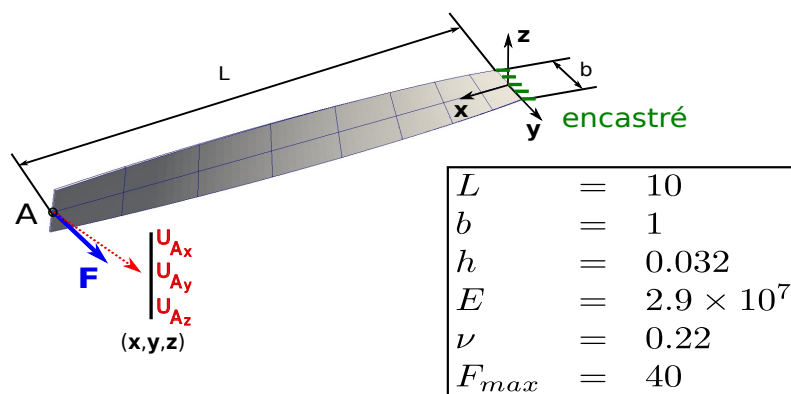
Maillage	Mixte 2 hg $8 \times 8$	Mixte 2 hg réd $8 \times 8$
Nombre de DDLs	900	900
Nombre de PGs	1728	512

**TABLE 4.3:** Caractéristiques du maillage de convergence du problème du cylindre étiré pour l'élément mixte avec intégration de Gauss classique et réduite.

structures vrillées. La distorsion des éléments augmente la sévérité du cas test concernant le verrouillage. Suivant la valeur de l'effort appliqué, le cas test existe en petites perturbations ainsi qu'en non linéaire géométrique. On rappelle que le problème en petites perturbations a été envisagé en complément des cas tests du chapitre 3 et est présenté en annexe E. Ici, c'est la version en grands déplacements et en grandes rotations que l'on cherche à résoudre. Pour cela, une épaisseur  $h = 0.032$  est envisagée et l'effort atteint  $F_{max} = 40$ . La surface moyenne de la structure est définie par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 2\theta L/\pi ; \\ y = s \cos \theta ; \\ z = -s \sin \theta ; \\ \text{avec } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ et } -b/2 \leq s \leq b/2. \end{cases} \quad (4.42)$$

Cette surface est une surface hélicoïdale. Ainsi, on ne peut pas la représenter exactement avec les fonctions NURBS (cf. section 1.1.1). Pour calculer le problème, on propose d'approcher la géométrie à l'aide d'un unique élément NURBS quadratique dans la longueur puis, de conserver cette géométrie au cours du raffinement du maillage NURBS. La construction de la géométrie approchée est expliquée dans l'annexe E. Elle est très proche de la géométrie exacte si bien que les solutions obtenues pour le problème non linéaire sont similaires aux solutions éléments finis habituelles.

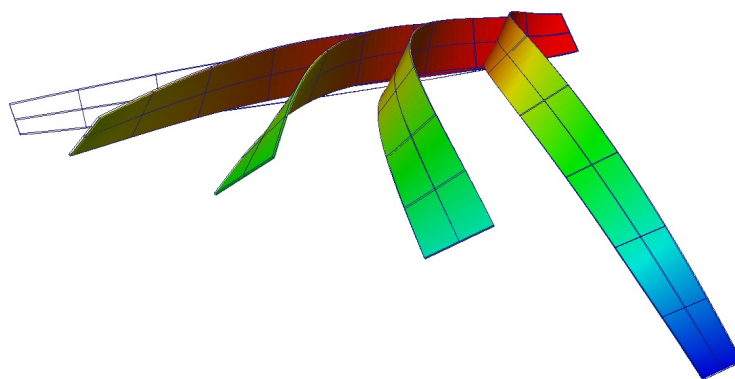


**FIGURE 4.16:** Poutre vrillée : description et données du problème.

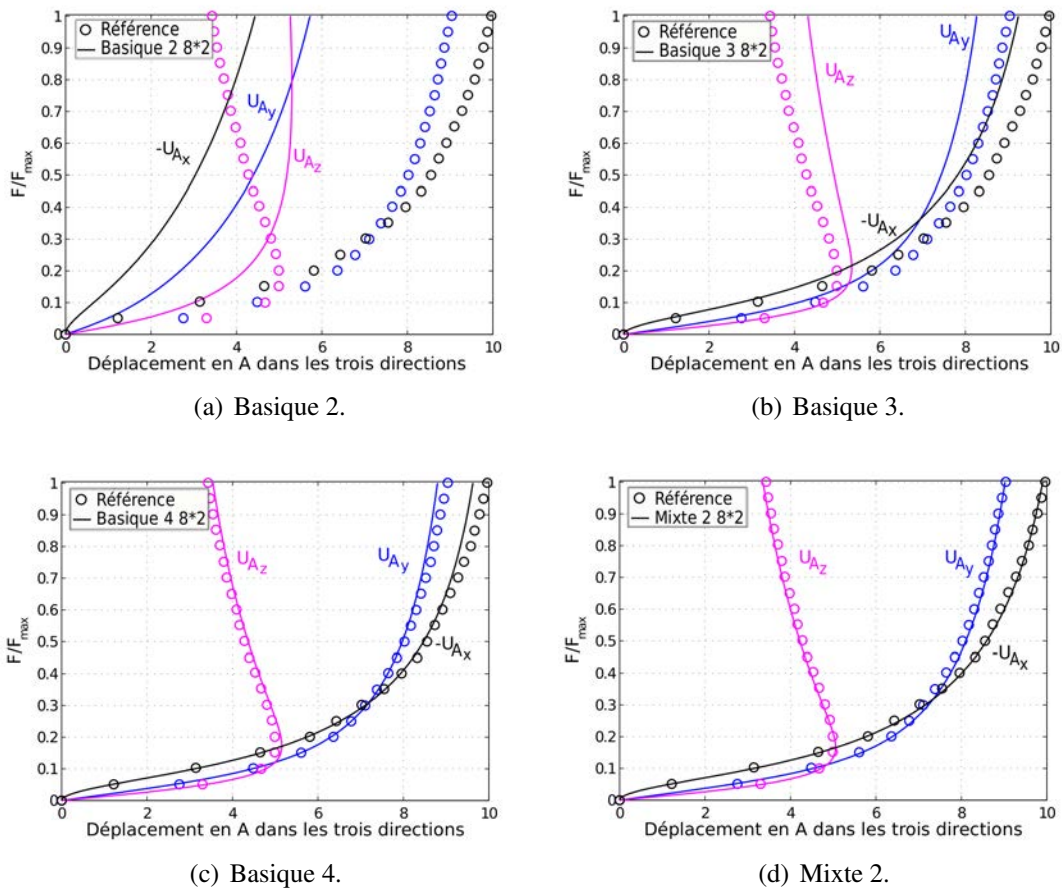
Pour l'étude, on considère l'élément "Mixte 2" car les modes parasites sont bloqués par la présence de l'encastrement. Le pas de chargement pris est  $\Delta F = 1$ . On s'intéresse

aux courbes de l'effort normalisé ( $F/F_{max}$ ) en fonction du déplacement du centre de la section à l'extrémité ( $U_{A_y}$ ,  $-U_{A_x}$  et  $U_{A_z}$ ) (voir, de nouveau, figure 4.16 pour les directions des déplacements). Pour la convergence, les maillages  $4 \times 1$ ,  $8 \times 2$  et  $16 \times 4$  ont été considérés. La convergence étant obtenue pour le maillage  $8 \times 2$  avec l'élément "Mixte 2", on montre les résultats pour ce maillage intermédiaire uniquement. Les solutions sont comparées à la référence donnée dans Smolenski [SMO 99].

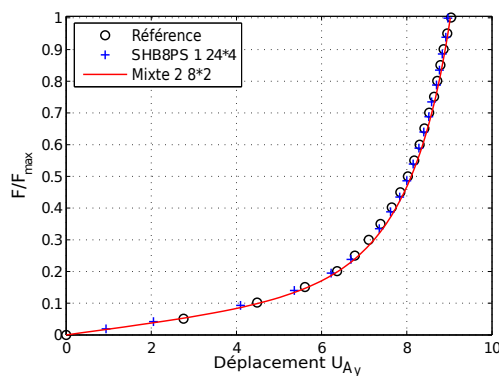
On procède comme pour les deux cas tests précédents pour l'étude. On montre des configurations déformées (voir figure 4.17) pour l'élément mixte puis, on s'intéresse aux réponses effort normalisé-déplacement au cours du calcul pour les éléments basiques d'ordres supérieurs et pour l'élément mixte (voir figure 4.18). On retrouve la performance attendue : l'élément "Mixte 2" semble converger plus rapidement que l'élément basique d'ordre 4 (c'est le seul qui donne une bonne approximation de la solution en fin de calcul avec un maillage  $8 \times 2$ ). Ensuite, on compare l'élément "Mixte 2" à l'élément "SHB8PS 1" (voir figure 4.19). Il était nécessaire de prendre un maillage  $24 \times 4$  pour avoir convergence pour la brique à 8 nœuds. On compare ce maillage au maillage  $8 \times 2$  pour l'élément "Mixte 2" dans le tableau 4.4. De nouveau, la stratégie proposée se comporte mieux d'un point de vue nombre de degrés de liberté. Cependant, il faut améliorer la technique d'intégration NURBS pour concurrencer d'un point de vue nombre de points d'intégration la stratégie traditionnelle éléments massifs coque. Pour ceci, on applique comme dans l'exemple précédent du cylindre la technique d'intégration de Gauss réduite proposée dans [SCH 14]. Encore une fois, aucune instabilité supplémentaire n'a été relevée sur ce cas test avec cette stratégie. La solution associée "Mixte 2 réd" est quasiment identique à la solution "Mixte 2". En revanche, celle-ci s'obtient pour un nombre de points de Gauss équivalent à celui du maillage "SHB8PS 1" (voir de nouveau tableau 4.4), ce qui confirme la compétitivité de l'élément proposé vis-à-vis des stratégies performantes éléments finis classiques.



**FIGURE 4.17:** Configurations déformées (amplitude 1,  $U_{M_y}$ ) au cours du calcul non linéaire géométrique pour la poutre vrillée avec "Mixte 2" et  $8 \times 2$  éléments.



**FIGURE 4.18:** Courbes chargement-déplacement  $F/F_{max} = f(U_{A_y})$ ,  $F/F_{max} = f(-U_{A_x})$  et  $F/F_{max} = f(U_{A_z})$  pour la poutre vrillée (maillage  $8 \times 2$ ) en non linéaire géométrique.



**FIGURE 4.19:** Comparaison des solutions "Mixte 2" avec les solutions "SHB8PS 1" de [ABE 09] sur la poutre vrillée.

Maillage	Mixte 2 8 × 2	Mixte 2 réd 8 × 2	SHB8PS 1 24 × 4
Nombre de DDLs	360	360	750
Nombre de PGs	432	128	192

**TABLE 4.4:** Comparaison pour la poutre vrillée : nombre de DDLs et de PGs pour les différents maillages de convergence.

## 4.7 Conclusion résumée

Dans ce dernier chapitre, l'élément mixte établi précédemment pour les petites perturbations à été étendu en non linéaire géométrique. Le travail réalisé ici consiste ainsi principalement en une application dans le contexte non linéaire des idées plus fondamentales du chapitre précédent. Les points importants à souligner concernant cette application sont les suivants :

1. L'étude de la stabilité de l'équilibre mixte en non linéaire géométrique a permis d'établir la matrice tangente mixte nécessaire à une bonne convergence de l'algorithme de résolution.
2. Une démarche de contrôle de hourglass en repartant de l'étude de la stabilité de l'équilibre a été proposée pour effectuer la stabilisation de l'élément en non linéaire géométrique.
3. L'élément qui en découle conserve ses propriétés intéressantes en non linéaire géométrique : l'élément quadratique paraît plus précis que des éléments de degré 4 standards et semble tout à fait compétitif vis-à-vis des éléments coque NURBS et classiques performants aujourd'hui.

## Conclusions et perspectives

Ce travail s'inscrit dans le contexte de développement de nouveaux éléments finis performants pour le calcul de structures coques. Pour cela, l'idée était d'utiliser l'analyse isogéométrique avec les fonctions NURBS. Plus précisément, comme la technologie NURBS permet de représenter dans la plupart des cas la géométrie exacte de la coque avec peu d'éléments de bas degrés, l'objectif était d'obtenir une bonne approximation de la solution avec un tel maillage NURBS. Nous avons choisi de nous orienter vers la construction d'éléments massifs coque afin de proposer une alternative intéressante à l'ingénieur vis-à-vis des approches purement modèle de structure. Dans l'approche éléments massifs coque, la structure mince est discrétisée en utilisant une unique couche d'éléments massifs continus 3D dans l'épaisseur. Ainsi, les seuls degrés de liberté sont des déplacements. Les cinématiques de coque (souvent compliquées) sont dès lors éliminées et la caractérisation du comportement dans l'épaisseur est directe. L'implémentation pour des simulations complexes est simplifiée. Pour obtenir un élément NURBS massif coque précis pour de bas degrés d'interpolation et des maillages grossiers, il a été nécessaire d'implémenter des techniques particulières pour gérer le verrouillage qui pénalise fortement l'élément.

Avant de s'intéresser aux éléments massifs coque proprement dits, nous avons cherché à étendre les méthodes sans verrouillage classiques dans le cadre NURBS pour supprimer le verrouillage en cisaillement transverse et en membrane d'une poutre courbe de Timoshenko. La question a été de savoir comment modifier les composantes de déformation de cisaillement transverse et de membrane lorsque celles-ci proviennent d'une approximation NURBS. L'étude a conduit à l'émergence de deux nouvelles stratégies pour les NURBS [BOU 12] : la première fait appel à une procédure d'intégration réduite tandis que la seconde consiste en une projection  $\bar{B}$  des déformations.

La technique d'intégration réduite est basée sur une règle de Gauss. Comme les règles de Gauss classiques ne sont pas parfaitement adaptées à la continuité supérieure des NURBS [HUG 10], la méthode se restreint aux fonctions quadratiques pour lesquelles seuls deux cas de continuité sont à traiter :  $C^0$  et  $C^1$ . La règle consiste à prendre un point de Gauss par élément et à ajouter, pour contrôler un mode hourglass, un point de Gauss supplémentaire ou une raideur élémentaire de stabilisation pour un des éléments entre deux nœuds de continuité  $C^0$ . Il en résulte une stratégie attractive car facile à implémenter et de faible coût de calcul. Toutefois, il a pu être montré que cette méthode élimine le verrouillage mais fournit une solution un peu trop souple, c'est-à-dire qui est supérieure



à la solution obtenue dans le cas où il n'y pas de verrouillage. Ceci témoigne de la non optimalité de la règle réduite du fait de l'utilisation des points de Gauss.

À l'inverse, la méthode  $\bar{B}$ , qui est dérivée des travaux de [ELG 07] dans le cadre des structures quasi-incompressibles, fournit un formalisme suffisamment général pour incorporer naturellement tous les types de degré et de continuité des NURBS. La stratégie propose de projeter les déformations sur un espace de degré et de continuité inférieurs de un à celui des déplacements en utilisant la norme  $L_2$ . L'élément  $\bar{B}$  qui en découle apparaît être le plus compétitif : il est le plus robuste et le plus précis. Cependant, le prix à payer est le traitement d'une matrice de raideur globale de petite taille mais pleine. De plus, une autre caractéristique importante de la méthode a pu être établie à l'issue de l'étude : il a pu être montré que la méthode  $\bar{B}$  est équivalente à une méthode mixte, pour laquelle les efforts sont recherchés dans le même espace que les déformations projetées. Ceci justifie la construction de la projection  $\bar{B}$  utilisée dans le cadre NURBS.

Suite à cette étude préliminaire, nous avons été en mesure d'aborder la question de la construction d'éléments NURBS massifs coque sans verrouillage. Pour ces éléments, un loi de comportement 3D complète a été envisagée. Le formalisme général de la méthode  $\bar{B}$  semblant plus adapté, le but était d'étendre celui-ci au cas des éléments massifs coque. Pour cela, il a fallu tout d'abord extraire les contributions responsables des nombreux verrouillages de l'élément massif coque, c'est-à-dire le verrouillage en cisaillement (transverse et plan), le verrouillage en membrane et, le verrouillage en pincement. L'idée a alors été de considérer la moyenne dans l'épaisseur de la coque des composantes du tenseur de déformation et de contrainte [BOU 13b]. Cette idée paraît cohérente vis-à-vis de ce qui serait fait en modèle de structure : les efforts généralisés qui s'avèrent responsables des verrouillages sont construits en faisant l'intégrale des contraintes associées dans l'épaisseur de la coque. Ensuite, la deuxième étape a consisté à écrire la formulation  $\bar{B}$  permettant de modifier l'interpolation de ces contributions. Pour faire cela de façon consistante, nous nous sommes rendu compte qu'il était nécessaire de partir d'une formulation mixte de laquelle nous avons pu dériver la projection  $\bar{B}$  équivalente [BOU 13a]. Cette démarche constitue d'un point de vue théorique le résultat principal du travail : une méthode systématique pour construire une projection  $\bar{B}$  consistante semble être de passer par une formulation mixte. Il est à noter qu'une telle démarche avait été réalisée en éléments finis classiques à la fin des années 70 pour attester de la performance des techniques d'intégration réduite (cf. [MAL 78]). La méthode mixte apparaît ainsi comme la véritable méthodologie à privilégier pour traiter le verrouillage.

D'un point de vue mise en œuvre, il est apparu que l'élément construit conduit à une matrice de rigidité globale pleine et, à l'apparition de modes parasites dans certaines situations. La première caractéristique semble inhérente aux traitements du verrouillage des fonctions NURBS (cf. [ELG 07, ECH 10]) et la deuxième est tout à fait classique en éléments massifs coque (voir [ABE 09, SOU 07, REE 07, BAS 12]). Pour limiter le premier défaut, nous avons proposé d'appliquer une procédure de type moindres carrés locaux [MIT 11, GOV 12] pour rendre locale la projection  $\bar{B}$  à chacun des éléments du maillage [BOU 13a]. Ceci a permis deux améliorations sur la matrice de rigidité globale :

une construction plus simple à réaliser et une structure creuse rendant la résolution plus aisée. Un contrôle de hourglass classique en ajoutant des rigidités artificielles de stabilisation a aussi été effectué pour résoudre le deuxième point [BOU 14]. Du fait de la plus haute continuité des fonctions NURBS, nous avons pu nous limiter au calcul de ces rigidités artificielles dans un seul élément du maillage. Le contrôle de hourglass se transmet ensuite dans toute la structure du fait la continuité des déformations au travers des éléments. La stabilisation est donc peu coûteuse. Nous nous sommes restreint pour celle-ci à la version quadratique de l'élément.

Pour finir, nous avons étendu l'élément en non linéaire géométrique et flambage [BOU 14]. Nous avons conservé la relation de comportement élastique linéaire mais nous nous sommes placés cette fois-ci dans le cas des grands déplacements et grandes rotations. Le but était d'illustrer le potentiel de l'élément à être utilisé par l'ingénieur pour mener des simulations complexes. La méthodologie étant basée sur une formulation mixte, c'est plus précisément l'élément mixte que nous avons traité. Ce dernier travail a principalement consisté en une application dans le contexte non linéaire des notions plus fondamentales établies précédemment. Nous avons ainsi écrit l'équilibre mixte non linéaire, étudié sa stabilité pour dériver la matrice tangente mixte, puis proposé une stratégie pour effectuer le contrôle de hourglass à la fois pour l'équilibre et pour la matrice tangente.

En termes de résultats, il en résulte deux éléments NURBS massifs coque sans verrouillage. Le premier élément est l'élément mixte ou l'élément  $\bar{B}$ . Il fait appel à la méthode mixte ou, de façon équivalente, à la projection  $\bar{B}$  consistante. Le deuxième élément est celui pour lequel la projection  $\bar{B}$  est approchée avec les moindres carrés locaux, il est nommé élément " $\bar{B}$  local". Même si a priori valables pour tout ordre d'approximation, ces éléments se sont avérés surtout efficaces pour du degré 2 dans les trois directions de l'espace. C'est pour cela que la stabilisation des modes de hourglass n'a été réalisée que pour le quadratique. Concernant la direction de l'épaisseur, le degré 2 semble cohérent car nous retrouvons la description classique utilisée pour construire un modèle de structure coque, à savoir la distribution linéaire de la plupart des contraintes et déformations dans l'épaisseur. Concernant les directions des longueurs de la coque, il est apparu que comme le verrouillage était vraisemblablement éliminé pour le degré 2, l'élévation d'ordre n'améliorait pas sensiblement la solution pour des maillages grossiers.

Le premier élément est le plus précis. La méthode " $\bar{B}$  locale" n'implique qu'une très faible dégradation de la précision pour le deuxième élément mais permet de préserver une structure creuse de la matrice de rigidité. La largeur de bande de cette matrice est environ deux fois supérieure à la largeur de bande rencontrée en éléments finis. Ces deux éléments quadratiques sont de meilleure qualité, en terme de précision pour un même nombre de degrés de liberté, que les éléments NURBS coques standards de degré 4 (cf. [KIE 09, BEN 10]). Ils paraissent aussi plus précis que les autres éléments NURBS massifs coque parus très récemment [CAR 14, CAS 14] et se comparent aux éléments purement modèle de structure de [ECH 13], pour lesquels l'insensibilité au verrouillage a été montrée. Seul l'élément mixte a été étendu en non linéaire géométrique. Il conserve dans ce cadre sa

précision supérieure. Il apparaît compétitif vis-à-vis d'autres stratégies NURBS [HOS 13] et classique [ABE 09] jugées aujourd'hui performantes en coque.

L'extension en non linéaire géométrique est intéressante pour l'ingénieur mais pas tout à fait suffisante si l'objectif final est d'implémenter l'élément dans un code de calcul industriel. Pour cela, il resterait à traiter la plasticité à laquelle les structures sont souvent sujettes pour des sollicitations réelles. Pour pouvoir intégrer le comportement élasto-plastique, il faudra certainement repartir de la méthode mixte. Les difficultés seront d'une part d'écrire l'équilibre en faisant clairement ressortir la contrainte mixte et d'autre part, de s'assurer que cette contrainte vérifie à chaque itération la loi d'écoulement plastique. Le premier point implique que le passage à l'élément mixte condensé sera probablement à proscrire, ce qui rendra l'équivalence avec une méthode  $\bar{B}$  délicate. Pour répondre au deuxième point, il faudra vraisemblablement modifier la routine plastique (algorithme du retour radial [SIM 98] (chapitre 3)) pour être capable de prendre en compte en entrée non seulement un incrément de déplacement mais aussi un incrément de contrainte.

Dans l'hypothèse d'un traitement efficace de la plasticité, l'implémentation de l'élément dans un code industriel deviendrait pertinente. Par exemple, on pourrait penser à utiliser les développements proposés dans la suite *Abqnurbs* [ELG 12] pour cela. *Abqnurbs* constitue une nouvelle fonctionnalité du code de calcul *Abaqus*. Il offre la possibilité de définir des routines "élément" (nommées UELMAT) prenant en compte une interpolation NURBS. L'utilisation de telles routines impose d'avoir une construction élément par élément de la matrice de rigidité globale. Ainsi, il semble qu'il soit préférable d'envisager le formalisme mixte sans effectuer la condensation. Il faudra alors vérifier si le code permet de traiter facilement les inconnues supplémentaires en contrainte et si le solveur est adapté à l'inversion de la matrice mixte. Le premier point semble possible avec l'utilisation de plusieurs variables de type température et le deuxième point ne devrait pas poser de problème puisque la matrice, même si non positive, reste symétrique. Une autre stratégie consisterait à utiliser la méthode " $\bar{B}$  locale" qui, moyennant l'utilisation des éléments voisins, devrait pouvoir s'adapter à une construction élément par élément de la matrice de rigidité globale (cf. remarque 24).

Toujours dans l'optique ingénieur mais plus en périphérie du sujet traité, une autre perspective intéressante du travail réalisé concernerait le développement de règles d'intégration efficaces pour les NURBS. Aujourd'hui, l'un des travaux les plus intéressants sur le sujet est certainement celui de [SCH 14]. Dans celui-ci, il a notamment pu être mis en évidence qu'il était possible de diminuer le nombre de points de Gauss mais qu'alors, il était nécessaire de garder une règle classique pour les éléments de bord de sorte à éviter d'éventuelles instabilités. Plutôt que de modifier la règle d'intégration entre les différents éléments du maillage, l'idée serait ici d'appliquer la stratégie de contrôle de hourglass proposée pour effectuer la stabilisation. On peut alors penser que l'on pourra utiliser une règle d'intégration de Gauss fortement réduite dans un patch composé d'une multitude d'éléments massifs 3D et contrôler, dans un seul élément du maillage, les éventuels modes de hourglass pour effectuer la stabilisation dans l'ensemble de la structure. Les éléments finis sous-intégrés avec contrôle de hourglass sont très répandus dans les codes industriels

aujourd'hui (cf., par exemple, l'élément C3D20R de *Abaqus*). Une telle stratégie serait le pendant NURBS des techniques usuelles éléments finis.

Enfin, on peut dégager une dernière perspective du travail réalisé plus axée sur le point de vue théorique étant donné l'utilisation d'une méthode mixte pour la construction de l'élément. Le fait que l'élément soit sujet à du hourglass implique que le traitement proposé pour supprimer le verrouillage n'est pas parfait (voir remarque 19). Ainsi, soit l'opérateur de moyenne est trop large pour extraire les contributions de verrouillage, soit l'espace des contraintes est trop restrictif pour les interpoler. Il pourrait alors être intéressant d'envisager une collaboration avec des mathématiciens afin d'étudier la satisfaction de la condition LBB [BRE 91]. Le but serait de voir si une modification simple de l'opérateur d'extraction ou de l'espace d'approximation permettrait de résoudre le verrouillage sans provoquer d'instabilités.



# Annexe A

## Les points principaux de la technologie NURBS dans l'IGA

### Le maillage physique :

- Il constitue la décomposition de la géométrie réelle.

### Le Patch :

- Il peut être vu comme un sous domaine constitué de plusieurs éléments ;
- Il se définit par des vecteurs de nœuds ouverts ;
- L'espace paramétrique des NURBS est localisé sur le patch ;
- La continuité des fonctions est  $C^0$  au bord du patch ;
- L'assemblage de plusieurs patches se fait comme en FEA.

### L'élément :

- C'est le domaine entre deux nœuds des vecteurs de nœuds ;
- La continuité des fonctions peut atteindre  $C^{p-1}$  au bord des éléments.

### Les Nœuds :

- Ce sont les sommets de l'élément.

### Le maillage de contrôle :

- Ce maillage se définit en faisant l'interpolation linéaire des **points de contrôle** ;
- Le maillage de contrôle ne correspond pas à la géométrie réelle, il apparaît plutôt comme une grille qui la contrôle ;
- Les points de contrôle sont l'équivalent des coordonnées nodales en FEA. Ils ne sont en général pas confondus avec les nœuds du maillage ;
- Les degrés de liberté du modèle sont localisés au niveau des points de contrôle, ce sont les **variables de contrôle**.



# Annexe B

## Cohérence théorique de l'élément poutre NURBS $\bar{B}$

On se place ici dans le cadre théorique des méthodes de déformations assumées [SIM 86] pour montrer la consistance variationnelle et numérique de l'élément poutre NURBS  $\bar{B}$  développé dans le chapitre 2. Les définitions et notations introduites dans le chapitre 2 sont reprises.

### Consistance variationnelle

La justification concernant la consistance variationnelle repose sur l'utilisation du principe plus général à trois champs de Hu-Washizu (voir [WAS 82] pour les fondements et, par exemple, [KAS 00] pour une application de celui-ci). Pour la poutre courbe, ce principe consiste à trouver à la fois les déplacements  $(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{V}$ , les déformations assumées  $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}) \in [L^2(]0, L[)]^2$  et les efforts assumés  $(\tilde{N}, \tilde{T}) \in [L^2(]0, L[)]^2$  tels que :

$$\int_0^L (ES\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^* + \mu S\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}^* + EI\boldsymbol{\chi}_f\boldsymbol{\chi}_f^*) d\tilde{x} + \left[ \int_0^L [\tilde{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_m - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m) + \tilde{T}(\boldsymbol{\gamma}_{ct} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct})] d\tilde{x} \right]^* = l(\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*),$$

$$\forall (\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in \mathcal{V}, \quad \forall (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^*, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}^*) \in [L^2(]0, L[)]^2 \quad \text{et} \quad \forall (\tilde{N}^*, \tilde{T}^*) \in [L^2(]0, L[)]^2.$$
(4.43)

Dans le cas de la projection  $\bar{B}$ , les déformations assumées sont les déformations  $\bar{B}$  (voir équation (2.36)), c'est-à-dire qu'on a  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$  et  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct} = \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}$ . Les efforts assumés sont quant à eux construits avec la relation de comportement :  $\tilde{N} = ES\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$  et  $\tilde{T} = \mu S\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}$  (cf. équation (2.41)). Ainsi, il faut pour assurer la consistance variationnelle de la formulation  $\bar{B}$ , c'est-à-dire pour respecter le principe de Hu-Washizu, que :

$$\int_0^L [\tilde{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_m - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m) + \tilde{T}(\boldsymbol{\gamma}_{ct} - \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct})] d\tilde{x} = 0. \quad (4.44)$$

D'un point de vue physique, cela signifie qu'il faut que les efforts assumés ne travaillent pas dans l'espace orthogonal aux déformations assumées. En effet, si ceci est respecté l'équation (4.43) devient : trouver  $(\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}) \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\int_0^L (ES\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^* + \mu S\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ct}^* + EI\boldsymbol{\chi}_f\boldsymbol{\chi}_f^*) d\tilde{x} = l(\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) \quad \forall (\mathbf{U}_G^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in \mathcal{V}, \quad (4.45)$$



ce qui constitue bien le problème  $\bar{B}$  (cf. équation (2.42)). Avec la stratégie de construction de la projection  $\bar{B}$  (voir section 2.4.2), on peut vérifier que l'équation (4.44) est satisfaite d'un point de vue discret. On rappelle que les déformations  $\bar{B}$  discrètes s'expriment par l'équation (2.50). On travaille sur la contribution de membrane uniquement. Un traitement identique peut être effectué pour la contribution de cisaillement transversal. En reprenant la notation du produit scalaire  $L^2 : (u, v)_{[0,L]} = \int_0^L uv d\tilde{x}$  (cf. équation (2.51)) et en utilisant la relation de comportement, il vient :

$$\int_0^L ES \bar{\epsilon}_m^h (\epsilon_m^h - \bar{\epsilon}_m^h) d\tilde{x} = \int_0^L ES \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_A \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_B, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \quad (4.46)$$

$$\times \left( \epsilon_m^h - \sum_{C,D=1}^{\tilde{n}} \tilde{N}_C \tilde{M}_{CD}^{-1} (\tilde{N}_D, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \right) d\tilde{x}. \quad (4.47)$$

Si maintenant on injecte l'équation (4.46) dans l'équation (4.47) et on sort  $ES$ ,  $\tilde{M}_{AB}^{-1}$  et  $(\tilde{N}_B, \epsilon_m^h)_{[0,L]}$  ( $\forall (A, B) \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}^2$ ) de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^L ES \bar{\epsilon}_m^h (\epsilon_m^h - \bar{\epsilon}_m^h) d\tilde{x} &= ES \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_B, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \\ &\times \left( \int_0^L \tilde{N}_A \epsilon_m^h d\tilde{x} - \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_A, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \int_0^L \tilde{N}_A \tilde{N}_B d\tilde{x} \right) \\ &= ES \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \left( \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_B, \epsilon_m^h)_{[0,L]} (\tilde{N}_A, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_B, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \tilde{M}_{AB}^{-1} (\tilde{N}_A, \epsilon_m^h)_{[0,L]} \tilde{M}_{AB} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

ce qui termine la preuve.

## Consistance numérique

Pour vérifier la consistance numérique de l'élément, il faut vérifier que l'élément passe le patch test [BAZ 65]. Grossièrement, passer le patch test pour un élément signifie qu'il est capable de reproduire des états de déformation constants. Cette propriété est atteinte d'après [SIM 86] lorsque la moyenne des déformations assumées/projetées sur l'ensemble du domaine est égale à la moyenne des déformations usuelles. De nouveau, on envisage seulement la déformation de membrane, des traitements identiques pouvant être réalisés sur la déformation de cisaillement. Pour la démonstration, on multiplie la déformation de membrane projetée (équation (2.50)) par les fonctions de la base tilde

$\tilde{N}_C$ ,  $C \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$  et on intègre sur le domaine. On obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \tilde{N}_C \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} &= \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \int_0^L \tilde{N}_C \tilde{N}_A d\tilde{x} \tilde{M}_{AB}^{-1} \times \int_0^L \tilde{N}_B \epsilon_m^h d\tilde{x} \\
 &= \sum_{A,B=1}^{\tilde{n}} \tilde{M}_{CA} \tilde{M}_{AB}^{-1} \times \int_0^L \tilde{N}_B \epsilon_m^h d\tilde{x} \quad , \\
 &= \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \delta_{CB} \times \int_0^L \tilde{N}_B \epsilon_m^h d\tilde{x}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{CB} = 1$  si  $B = C$  et 0 sinon). L'équation (4.49) se simplifie en :

$$\int_0^L \tilde{N}_C \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} = \int_0^L \tilde{N}_C \epsilon_m^h d\tilde{x}. \tag{4.50}$$

La base tilde est construite à partir d'un vecteur de nœuds ouvert. Les fonctions constituent donc une partition de l'unité. On obtient alors :

$$\sum_{C=1}^{\tilde{n}} \int_0^L \tilde{N}_C \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} = \int_0^L \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} \quad \text{et} \quad \sum_{C=1}^{\tilde{n}} \int_0^L \tilde{N}_C \epsilon_m^h d\tilde{x} = \int_0^L \epsilon_m^h d\tilde{x}, \tag{4.51}$$

d'où, en tenant compte de l'équation (4.50) :

$$\int_0^L \bar{\epsilon}_m^h d\tilde{x} = \int_0^L \epsilon_m^h d\tilde{x}. \tag{4.52}$$

On a donc vérifié la consistance.



# Annexe C

## Cohérence théorique de l'élément NURBS massif coque $\bar{B}$ développé

On justifie ici le cadre théorique de l'élément massif coque  $\bar{B}$  du chapitre 3. Pour cela, on reprend le contexte des méthodes de déformation assumées [SIM 86] et on procède comme pour l'élément poutre NURBS  $\bar{B}$  dans l'annexe B. On ré-utilise les définitions et notations introduites dans le chapitre 3. On commence par justifier la non consistance variationnelle de l'élément massif coque  $\bar{B}$  habituel (voir section 3.4.2). Ensuite, on montre que contrairement à l'élément  $\bar{B}$  habituel, l'élément  $\bar{B}$  développé (cf. section 3.4.1), de par son équivalence avec l'élément mixte (voir section 3.3), est consistant variationnellement. Enfin, on vérifie la consistance numérique de cet élément  $\bar{B}$ .

### Non consistance variationnelle de l'élément $\bar{B}$ habituel

Le principe de Hu-Washizu pour les éléments massifs s'écrit comme suit : trouver le déplacement  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$ , la déformation assumée  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  et la contrainte assumée  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  tels que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t d\Omega + \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t : (\underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t) d\Omega \right]^* = l(\mathbf{U}_M^*), \quad (4.53)$$
$$\forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad \forall \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6 \quad \text{et} \quad \forall \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6.$$

Pour retrouver l'élément  $\bar{B}$  habituel, on définit les champs assumés tels que  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t = \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{moy}$  (voir équation (3.54)) et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t$ . Avec ceci, il faut pour que l'élément soit consistant variationnellement vérifier l'égalité :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t : (\underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t) d\Omega = 0, \quad (4.54)$$

car alors l'équation (4.53) devient : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*) \quad \forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad (4.55)$$

ce qui signifie que le problème  $\bar{B}$  habituel est retrouvé (cf. équation (3.53)) au travers du principe de Hu-Washizu. Ici, on peut montrer que l'équation (4.54) n'est pas satisfaite d'un point de vue discret. En effet, le premier terme de l'équation (4.54) s'écrit en discret comme suit :

$$\int_{\Omega} \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t^{\text{moy}^h*T} \underline{\underline{D}} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h - \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t^{\text{moy}^h} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} - \text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} \right) + \overline{\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} \right)} \right)^T \underline{\underline{D}} \left( \text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right) - \overline{\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right)} \right) d\Omega. \quad (4.56)$$

De manière analogue à ce qui a été fait en 1D dans l'annexe B, on obtient que :

$$\int_{\Omega} \overline{\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} \right)}^T \underline{\underline{D}} \left( \text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right) - \overline{\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right)} \right) d\Omega = 0, \quad (4.57)$$

puisque  $\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right)$  joue le même rôle ici que  $\underline{\underline{\varepsilon}}_m^h$  dans les équations (4.46), (4.47) et (4.48). Ceci n'est pas suffisant car il reste alors le terme :

$$\int_{\Omega} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} - \text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{h*} \right) \right)^T \underline{\underline{D}} \left( \text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right) - \overline{\text{MOY} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^h \right)} \right) d\Omega \quad (4.58)$$

qui n'est pas nul d'où la non vérification de l'égalité (équation (4.54)), ce qui prouve la non consistance variationnelle de l'élément  $\bar{B}$  habituel.

### Consistance variationnelle de l'élément $\bar{B}$

À l'inverse, l'élément  $\bar{B}$  développé (cf. section (3.4.1)) est équivalent à une formulation mixte et doit ainsi vérifier le principe de Hu-Washizu. Le principe de Hu-Washizu est en fait une méthode mixte à trois champs qui généralise les méthodes mixtes à deux champs comme celle que nous utilisons dans ce travail. Pour s'assurer de cela, il faut pour commencer développer l'équation (4.53), c'est-à-dire écrire la variation du deuxième terme de cette équation. Il vient : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$ ,  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  tels que :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* : \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t^* : \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t - \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}_t^* - \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* \right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t d\Omega = l \left( \mathbf{U}_M^* \right), \quad (4.59)$$

$$\forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad \forall \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6 \quad \text{et} \quad \forall \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6.$$

Ensuite, il faut choisir la contrainte assumée  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t$  égale à la contrainte de la formulation mixte  $\underline{\underline{\sigma}}_t = \underline{\underline{\sigma}}_t^{\text{moy}^\perp} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  (cf. équation (3.29)) et il faut calculer la déformation assumée à partir de cette contrainte assumée à l'aide de la relation de comportement :  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t$ . Avec ceci, l'équation (4.59) devient : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$ ,  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  et  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$

tels que :

$$\int_{\Omega} \underline{\tilde{\varepsilon}}_t^* : \underline{\sigma}_t d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\sigma}_t^* : \left( \underline{\varepsilon}_t - \underline{C}^{-1} \underline{\sigma}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \underline{\varepsilon}_t^* - \underline{\tilde{\varepsilon}}_t^* \right) : \underline{\sigma}_t d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad (4.60)$$

$$\forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V}, \quad \forall \underline{\tilde{\varepsilon}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6 \quad \text{et} \quad \forall \underline{\sigma}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6,$$

qui se simplifie en : trouver  $\mathbf{U}_M \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\tilde{\sigma}}_t \in [L^2(\Omega)]^6$  tels que :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_t^* : \left( \underline{\varepsilon}_t - \underline{C}^{-1} \underline{\sigma}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}_t^* : \underline{\sigma}_t d\Omega = l(\mathbf{U}_M^*), \quad (4.61)$$

$$\forall \mathbf{U}_M^* \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \forall \underline{\tilde{\sigma}}_t^* \in [L^2(\Omega)]^6.$$

Cette dernière équation constitue bien la formulation mixte à deux champs utilisée (voir équation (3.28)). Ceci termine la vérification : l'élément  $\bar{B}$  envisagé puisque équivalent à un élément mixte peut s'exprimer à l'aide du principe de Hu-Washizu d'où sa consistance variationnelle.

## Consistance numérique de l'élément $\bar{B}$

Pour notre cas de formulation  $\bar{B}$ , seule une énergie reposant sur les termes de moyenne des déformations dans l'épaisseur est modifiée : remplacement de :

$$\int_{\Omega} \underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t) : \underline{C} \underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t) d\Omega \quad \text{par} \quad \int_{\Omega} \overline{\underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t)} : \overline{\underline{C} \underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t)} d\Omega, \quad (4.62)$$

(cf. équation (3.42)). Ainsi, la vérification de la consistance numérique revient d'après [SIM 86] à s'assurer que les moyennes sur l'ensemble du domaine coque  $\Omega$  de  $\overline{\underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h)}$  et  $\underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h)$  sont égales, c'est-à-dire que :

$$\int_{\Omega} \overline{\underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h)} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h) d\Omega. \quad (4.63)$$

Cela se montre très simplement avec les développements réalisés pour l'élément poutre  $\bar{B}$  en annexe B. En effet, on peut de nouveau remarquer que  $\underline{\text{MOY}}(\underline{\varepsilon}_t^h)$  joue le même rôle ici que  $\underline{\varepsilon}_m^h$  dans les équations (4.49), (4.50), (4.51) et (4.52). Exactement les mêmes traitements peuvent donc lui être effectués ce qui permet de vérifier la consistance numérique de l'élément massif coque  $\bar{B}$ .



## Annexe D

### Tables de valeurs pour le "shell obstacle course"

Pour plus d'information, les valeurs obtenues pour les problèmes du "shell obstacle course" avec les éléments "Mixte 2, 3, 4" et "Bbar local 2" du chapitre 3 (voir, plus précisément figures 3.13 et 3.15) ont été reportées dans les tableaux suivants.

Éléments par côté	1	2	4	8	16	32
Formulation						
Reference	0.3024					
Mixte 2	0.3361	0.3211	0.3039	0.3018	0.3014	0.3014
Mixte 3	0.3177	0.3064	0.3028	0.3017	0.3014	–
Mixte 4	0.3056	0.3025	0.3015	0.3014	0.3014	–
Bbar local 2	0.3361	0.3059	0.2999	0.3009	0.3011	0.3014

**TABLE 4.5:** Valeurs du déplacement pour le toit de Scordelis-Lo.

Éléments par côté	1	2	4	8	16	32
Formulation						
Reference	0.0924					
Mixte 2	0.0996	0.0977	0.0963	0.0934	0.0927	0.0925
Mixte 3	0.0986	0.1019	0.0965	0.0930	0.0926	–
Mixte 4	0.1019	0.0992	0.0941	0.0925	0.0925	–
Bbar local 2	0.0996	0.1127	0.0960	0.0921	0.0923	0.0925

**TABLE 4.6:** Valeurs du déplacement pour l'hémisphère pincé.

Éléments par côté	1	2	4	8	16	32
Formulation						
Reference	1.8248					
Mixte 2	10.0213	3.2309	1.6749	1.7921	1.8440	1.8521
Mixte 3	3.1809	2.0616	1.7582	1.8313	1.8497	–
Mixte 4	1.9021	1.6998	1.7387	1.8376	1.8478	–
Bbar local 2	10.0213	2.8455	1.2026	1.6359	1.7995	1.8372

**TABLE 4.7:** Valeurs ( $\times 10^{-5}$ ) du déplacement pour le cylindre pincé.





# Annexe E

## Deux cas tests supplémentaires coques pour l'élasticité linéaire en petites perturbations

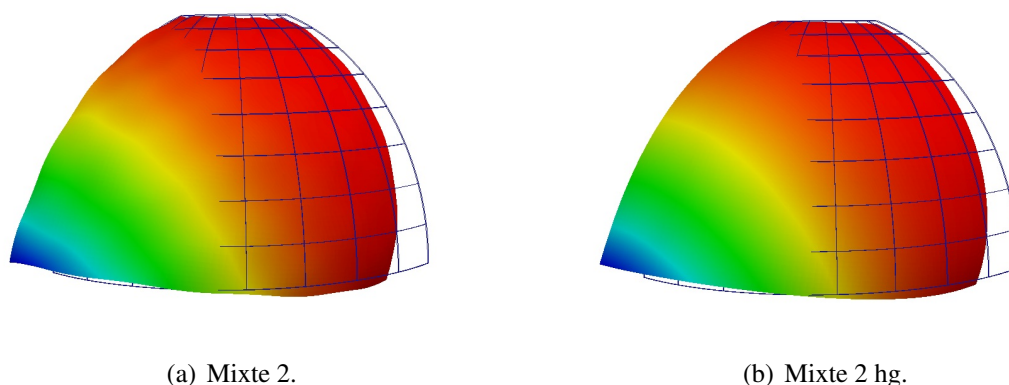
On donne dans cette annexe les résultats relatifs au calcul en petites perturbations de l'hémisphère pincé avec un trou et de la poutre vrillée sous chargement hors-plan. Ces problèmes ont à l'origine été proposés dans [MAC 85] et sont devenus aujourd'hui très populaires en analyse de coque. Ces deux cas tests sont calculés en complément des nombreux problèmes envisagés en petites perturbations dans le chapitre 3. Aussi, ils constituent les versions linéaires de deux des problèmes étudiés pour le non linéaire géométrique dans le chapitre 4. Seul l'élément mixte quadratique sera considéré ici pour l'étude. Il sera comparé aux éléments NURBS massifs coque standards de plus hauts degrés. L'intérêt de chacun des problèmes est le suivant :

**L'hémisphère avec un trou pincé :** l'élément mixte doit être stabilisé car il est sujet à des modes de hourglass.

**La poutre vrillée :** Deux épaisseurs de poutre sont étudiées ce qui permet de mettre en évidence précisément le phénomène de verrouillage.

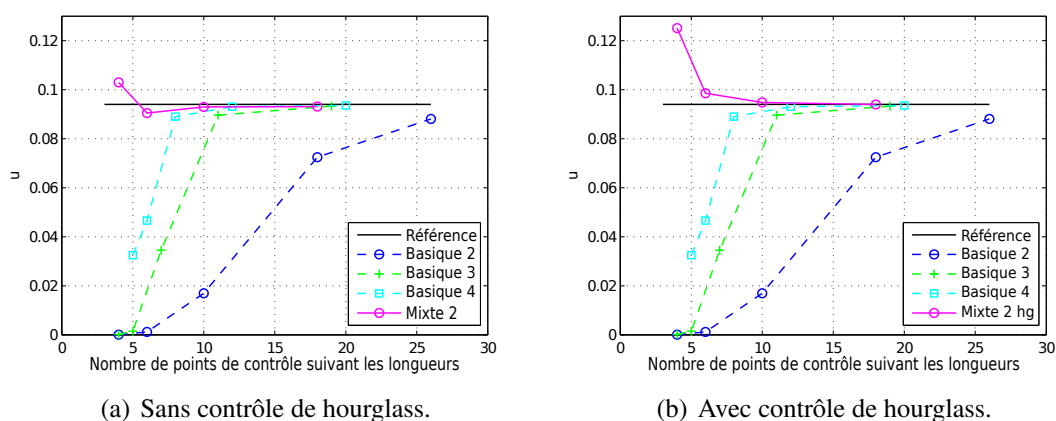
### L'hémisphère pincé avec un trou

Ce problème a été décrit pour le cas non linéaire dans la figure 4.8. En petites perturbations, le cas test est le même sauf que le chargement considéré est  $F = 1$  et la solution de référence associée vaut  $u_{ref} = 0.094$ . L'élément mixte est sujet à des modes de hourglass sur ce problème. On procède donc comme pour le cylindre pincé avec bords libres de la partie 3.6.4 pour l'étude. La figure 4.20 présente la configuration déformée obtenue pour l'élément mixte avec un maillage  $8 \times 8$ . Plus précisément, la figure 4.20(a) est calculée sans contrôle de hourglass (élément "Mixte 2") alors que la figure 4.20(b) est obtenue avec l'élément stabilisé (élément "Mixte 2 hg"). On retrouve la présence d'oscillations sur la déformée associée à "Mixte 2" (oscillations notamment visibles sur le bord du trou au sommet et sur le bord gauche). Ces oscillations disparaissent sur la figure 4.20(b). Ceci confirme l'efficacité de la stratégie adoptée pour le contrôle de hourglass même si sur ce cas test, l'effet néfaste du hourglass semble moins visible que sur le cylindre (cf., pour rappel, figure 3.22).



**FIGURE 4.20:** Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_x}$ , amplitude 20) pour l'hémisphère avec un trou pincé.

On montre ensuite sur la figure 4.21 la convergence du déplacement d'intérêt. Les résultats sont similaires à ceux déjà observés dans ce travail : le verrouillage est fortement atténué avec "Mixte 2" puisque cet élément possède une précision comparable à "Basique 4" pour des maillages grossiers. Par ailleurs, les solutions "Mixte 2" et "Mixte 2 hg" sont assez équivalentes pour ce cas test. Les oscillations dues aux modes de hourglass n'affectent pas véritablement le déplacement d'intérêt  $u$ .



**FIGURE 4.21:** Convergence du déplacement pour l'hémisphère avec un trou pincé.

## La poutre vrillée sous chargement hors-plan

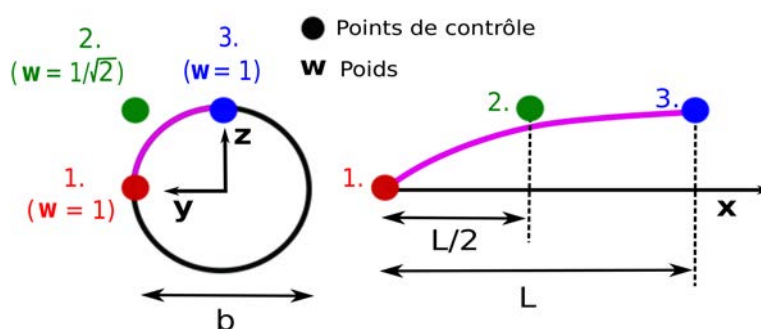
De même, le problème de la poutre vrillée a déjà été décrit pour le cas non linéaire (cf. figure 4.16). Les modifications à apporter pour obtenir le cas test en petites perturbations concernent l'épaisseur et la valeur du chargement. Ici, on calcule une poutre épaisse avec

$h = 0.32$  ainsi qu'une poutre mince où  $h = 0.0032$ . L'effort appliqué est  $F = 1$  et les solutions de référence correspondantes sont :  $U_{A_{y_{ref}}} = 0.00175$  pour  $h = 0.32$  et  $U_{A_{y_{ref}}} = 1296$  pour  $h = 0.0032$ . Grâce à l'encastrement, on rappelle que les modes de hourglass de l'élément mixte n'apparaissent pas. Comme en non linéaire, du fait de l'impossibilité de générer exactement la géométrie avec les NURBS, on va construire une géométrie approchée de la surface moyenne que l'on va garder au cours du raffinement du maillage. On explique dans la suite cette construction.

La géométrie approchée de la surface moyenne que l'on choisit de construire se définit avec un élément NURBS de degré 2 dans la longueur de la poutre et de degré 1 dans la largeur. Les points de contrôle dans  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  sont tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \{0 \quad -b/2 \quad 0\}^T ; \quad \mathbf{B}_2 = \{L/2 \quad -b/2 \quad b/2\}^T ; \quad \mathbf{B}_3 = \{L \quad 0 \quad b/2\}^T ; \\ \mathbf{B}_4 &= \{0 \quad b/2 \quad 0\}^T ; \quad \mathbf{B}_5 = \{L/2 \quad b/2 \quad -b/2\}^T ; \quad \mathbf{B}_6 = \{L \quad 0 \quad -b/2\}^T ; \end{aligned} \quad (4.64)$$

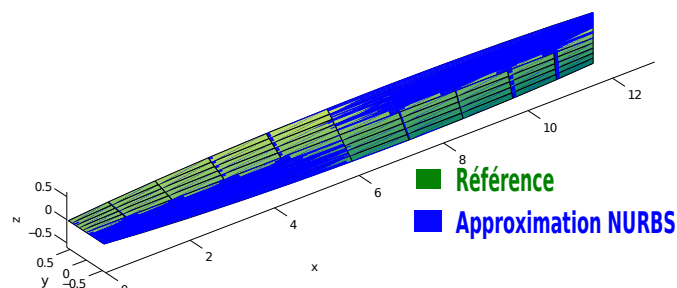
avec les poids associés :  $w_1 = w_3 = w_4 = w_6 = 1$  et  $w_2 = w_5 = 1/\sqrt{2}$ . Les points de contrôle sont d'abord ordonnés dans la longueur de la poutre puis, dans la largeur. Pour illustrer et justifier cette construction, on montre dans la figure 4.22 la méthode choisie pour approcher une hélice. On procède en fait de la même manière que pour construire un quart de cercle, sauf qu'on déplace en plus les points de contrôle dans la longueur.



**FIGURE 4.22:** Construction approchée choisie pour l'hélice avec les fonctions NURBS.

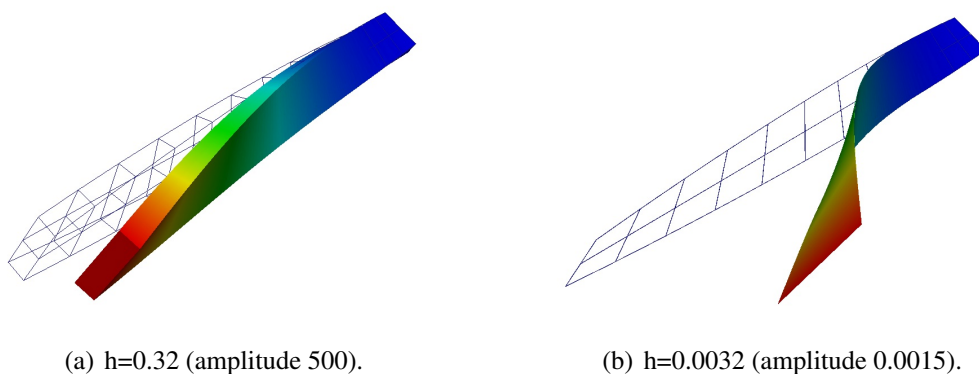
La superposition de la surface moyenne exacte (voir formule (4.42)) et de la surface moyenne approchée (cf. les points de contrôle définis dans l'équation (4.64)) est montrée sur la figure 4.23. On voit que les géométries sont assez proches. Il semble que l'on soit exact aux deux extrémités de la poutre et au milieu. L'erreur ailleurs demeure faible. Si l'on calcule un écart aux sens des moindres carrés entre les deux surfaces moyennes, on obtient 3.8% d'erreur. La géométrie n'étant pas exactement la bonne, le problème résolu est légèrement différent du problème d'origine. Néanmoins, d'un point de vue calcul, le cas test modifié ici est tout aussi intéressant que celui d'origine : les mêmes phénomènes (verrouillage, structures vrillées) sont présents. La solution de convergence obtenue est 0.00181 pour  $h = 0.32$  (contre, on le rappelle, 0.00175 ce qui fait 3.3% de différence avec la solution éléments finis) et, 1357 pour  $h = 0.0032$  (contre 1296 soit 4.7% d'erreur). Ces valeurs ont été obtenues avec l'élément "Basique 4" de notre code de calcul NURBS.

Plutôt que d'utiliser les solutions de [MAC 85], on considère ces nouvelles valeurs comme références dans la suite.



**FIGURE 4.23:** Approximation choisie de la surface hélicoïdale avec les NURBS.

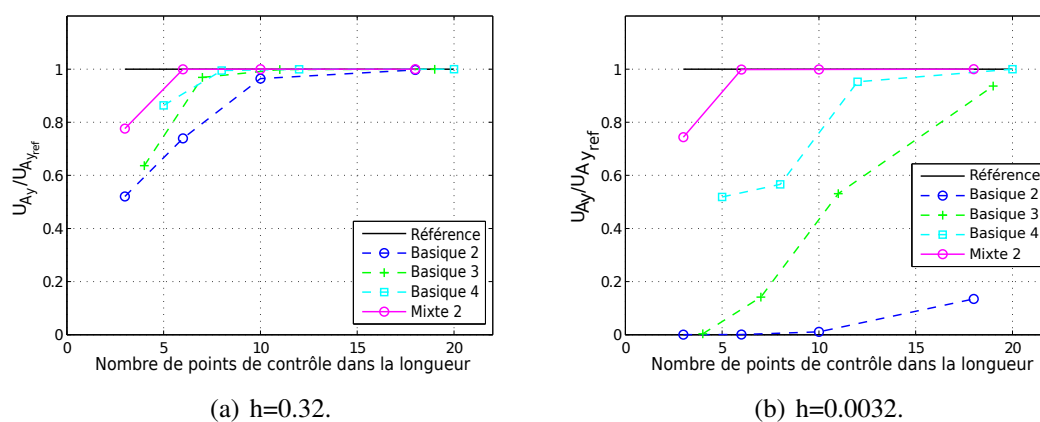
On commence par regarder avec la figure 4.24 les configurations déformées obtenues pour l'élément "Mixte 2" et un maillage  $8 \times 2$ . La poutre épaisse est considérée dans la figure 4.24(a) et la poutre mince en figure 4.24(b). Ensuite, on s'intéresse à la convergence du déplacement d'intérêt en fonction du nombre de points de contrôle dans la longueur de la poutre (voir figure 4.25(a) pour la poutre épaisse et figure 4.25(b) pour la poutre mince). Les maillages envisagés pour les calculs sont :  $1 \times 1$ ,  $4 \times 1$ ,  $8 \times 2$  et  $16 \times 4$ .



(a)  $h=0.32$  (amplitude 500).

(b)  $h=0.0032$  (amplitude 0.0015).

**FIGURE 4.24:** Configurations initiales (maillages) et déformées ( $U_{M_y}$ ) pour l'élément "Mixte 2" sur la poutre vrillée.



**FIGURE 4.25:** Convergence du déplacement pour la poutre vrillée.

Les configurations déformées sont cohérentes : on ne voit pas d'oscillations sur celle-ci car les modes de hourglass sont bloqués par l'encastrement. Les résultats en terme de convergence du déplacement justifient quant à eux la non sensibilité de l'élément mixte au verrouillage. En effet, on peut voir que la solution "Mixte 2" ne change pas en fonction de l'élançement de la poutre alors que les solutions basiques sont bien moins précises lorsque l'on va vers une poutre mince. On retrouve en fait un comportement similaire à celui observé pour le parabolôide hyperbolique (cf. figure 3.18, section 3.6.3). La stratégie développée dans ce travail semble par conséquent aussi valable sur ce dernier cas test envisagé.



# Bibliographie

- [ABE 02] ABED-MERAÏM F., COMBESCURE A.  
SHB8PS – a new adaptive, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers and Structures*, vol. 80, 2002, p. 791-803.
- [ABE 09] ABED-MERAÏM F., COMBESCURE A.  
An improved assumed strain solid-shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic-plastic stability analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 80, 2009, p. 1640-1686.
- [ASH 76] ASHWELL D. G., GALLAGHER R.  
*Finite elements for thin shells and curved members*. Wiley, London, 268 pages, 1976.
- [AUR 12] AURICCHIO F., CALABRO F., HUGHES T. J. R., REALI A., SANGALLI G.  
A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 249-252, 2012, p. 15-27.
- [AUR 13] AURICCHIO F., DA VEIGA L. B., KIENDL J., LOVADINA C., REALI A.  
Locking-free isogeometric collocation methods for spatial Timoshenko rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 263, 2013, p. 113-126.
- [BAB 86] BABU C., PRATHAP G.  
A linear thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, 1986, p. 379-386.
- [BAB 87] BABU C. R., SUBRAMANIAN G., PRATHAP G.  
Mechanics of fields consistency in finite element analysis – a penalty function approach. *Computers and Structures*, vol. 25, 1987, p. 161-173.
- [BAS 12] BASSA B., SABOURIN F., BRUNET M.  
A new nine-node solid-shell finite element using complete 3D constitutive laws. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 92, 2012, p. 589-636.
- [BAT 80] BATOZ J. L., BATHE K. J., HO L. W.  
A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, 1980, p. 1771-1812.
- [BAT 83] BATHE K. J., DVORKIN E.  
Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis. An assessment. *Computers and Structures*, vol. 16, 1983, p. 89-98.



- [BAT 90] BATOZ J. L., DHATT G.  
*Modélisation des structures par éléments finis - Poutres et Plaques*. Volumes 2, Hermès, 483 pages, 1990.
- [BAT 92] BATOZ J. L., DHATT G.  
*Modélisation des structures par éléments finis - Coques*. Volumes 3, Hermès, 564 pages, 1992.
- [BAT 00] BATHE K. J., IOSILEVICH A., CHAPELLE D.  
An evaluation of the MITC shell elements. *Computers and Structures*, vol. 75, 2000, p. 1-30.
- [BAZ 65] BAZELEY G. P., CHEUNG Y. K., IRONS B. M., ZIENKIEWICZ O. C.  
*Triangular elements in plate bending - Conforming and nonconforming solutions*. Proceedings of the first conference on matrix methods in structural mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- [BAZ 06] BAZILEVS Y., CALO V. M., ZHANG Y., HUGHES T. J. R.  
Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics*, vol. 38, 2006, p. 310-322.
- [BAZ 07] BAZILEVS Y., CALO V. M., COTTRELL J. A., HUGHES T. J. R., REALI A., SCOVAZZI G.  
Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2007, page 173–201.
- [BEL 84] BELYTSCHKO T., ONG J. J., LIU W., KENEDY J.  
Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 43, 1984, p. 251-276.
- [BEL 85] BELYTSCHKO T., STOLARSKI H., LIU W., CARPENTER N., ONG J. J.  
Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, 1985, p. 221-258.
- [BEL 93] BELYTSCHKO T., BINDEMAN L. P.  
Assumed strain stabilization of the eight node hexaedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 105, 1993, p. 225-260.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W. K., MORAN B.  
*Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley-Blackwell, 672 pages, 2000.
- [BEN 10] BENSON D. J., BAZILEVS Y., HSU M. C., HUGHES T. J. R.  
Isogeometric shell analysis : The Reissner-Mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 276-289.
- [BEN 11] BENSON D. J., BAZILEVS Y., HSU M. C., HUGHES T. J. R.  
A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 2011, p. 1367-1378.

- [BEN 13] BENSON D. J., HARTMANN S., BAZILEVS Y., HSU M. C., HUGHES T. J. R. Blended isogeometric shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 255, 2013, p. 133-146.
- [BIS 04] BISCHOFF M., WALL W. A., BLETZINGER K. U. *Models and finite elements for thin-walled structures*. in E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes, (Eds.), *Encyclopedia of Computational Mechanics, Solid Structures and Coupled Problems*, vol. 2 (chapter 3), Wiley, 2004.
- [BLE 00] BLETZINGER K. U., BISCHOFF M., RAMM E. A unified approach for shear locking free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers and Structures*, vol. 75, 2000, p. 321-334.
- [BOL 47] BOLLE E. Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique. *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, vol. 73, 1947, p. 281-285 et 293-298.
- [BOU 12] BOUCLIER R., ELGUEDJ T., COMBESCURE A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245-246, 2012, p. 144-162.
- [BOU 13a] BOUCLIER R., ELGUEDJ T., COMBESCURE A. Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements : Mixed formulation and B-bar method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 267, 2013, p. 86-110.
- [BOU 13b] BOUCLIER R., ELGUEDJ T., COMBESCURE A. On the development of NURBS-based isogeometric solid shell elements : 2D problems and preliminary extension to 3D. *Computational Mechanics*, vol. 52, 2013, p. 1085-1112.
- [BOU 14] BOUCLIER R., ELGUEDJ T., COMBESCURE A. An isogeometric locking-free NURBS-based solid-shell element for geometrically nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. submitted, 2014.
- [BRE 57] BRESSE J. A. C. *Cours de mécanique appliquée, Première partie : Résistance des matériaux et stabilité des constructions*. École Impériale des Ponts et Chaussées, Paris, 1857.
- [BRE 91] BREZZI F., FORTIN M. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 350 pages, 1991.
- [BRU 94] BRUNET M., SABOURIN F. Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming. *In Proceedings of the International Conference of Metal Forming Simulation in Industry, II, Kröplin B (Ed.)*, 1994, p. 27-48.
- [BUC 93] BUCALEM M. L., BATHE K. J. Higher-order MITC general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, 1993, p. 3729-3754.

- [BUE 92] BUECHTER N., RAMM E.  
Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 34, 1992, p. 39-59.
- [CAR 14] CARDOSO R. P. R., DE SA J. M. A. C.  
Blending moving least squares techniques with NURBS basis functions for nonlinear isogeometric analysis. *Computational Mechanics*, vol. 53, 2014, p. 1327-1340.
- [CAS 14] CASEIRO J. F., VALENTE R. A. F., REALI A., KIENDL J., AURICCHIO F., DE SOUSA R. J. A.  
On the Assumed Natural Strain Method to alleviate locking in solid-shell NURBS-based finite elements. *Computational Mechanics*, vol. 53, 2014, p. 1341-1353.
- [CHA 98] CHAPELLE D., BATHE K. J.  
Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers and Structures*, vol. 66, 1998, p. 19-36.
- [CHE 87] CHEN W. J., CHEUNG Y.  
A new approach for the hybrid element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, 1987, p. 1697-1709.
- [COH 80] COHEN E., LYCHE T., RIESENFELD R.  
Discrete B-spline and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 14, 1980, p. 87-111.
- [COT 06] COTTRELL J. A., REALI A., BAZILEVS Y., HUGHES T. J. R.  
Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 5257-5296.
- [COT 07] COTTRELL J. A., HUGHES T. J. R., REALI A.  
Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 4160-4183.
- [COT 09] COTTRELL J. A., HUGHES T. J. R., BAZILEVS Y.  
*Isogeometric analysis : Toward Integration of CAD and FEA*. Wiley, 360 pages, 2009.
- [CRI 83] CRISFIELD M. A.  
A four-noded thin plate bending element using shear constraints. A modified version of Lyons' element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 30, 1983, p. 93-120.
- [DOR 13] DORNISCH W., KLINKEL S., SIMEON B.  
Isogeometric Reissner-Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 253, 2013, p. 491-504.
- [DVO 84] DVORKIN E. N., BATHE K. J.  
A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, vol. 1, 1984, p. 77-88.

- [ECH 10] ECHTER R., BISCHOFF M.  
Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 374-382.
- [ECH 13] ECHTER R., OESTERLE B., BISCHOFF M.  
A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 254, 2013, p. 170-180.
- [ELG 07] ELGUEDJ T., BAZILEVS Y., CALO V. M., HUGHES T. J. R.  
B-bar and F-bar projection methods for nearly incompressible linear and nonlinear elasticity and plasticity using higher order NURBS element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2007, p. 5257-5296.
- [ELG 12] ELGUEDJ T., DUVAL A., MAURIN F., AKHRAS H. A.  
*Abaqus User Element implementation of NURBS based Isogeometric Analysis*. presentation at ECCOMAS 2012, <http://abqnurbs.insa-lyon.fr>, 2012.
- [ELG 14] ELGUEDJ T., HUGHES T. J. R.  
Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 268, 2014, p. 388-416.
- [FAR 01] FARIN G.  
*Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*. Fifth Edition, Morgan Kaufmann Publishers, 520 pages, 2001.
- [FLA 81] FLANANGAN D., BELYTSCHKO T.  
A Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 1981, p. 679-706.
- [GOM 08] GOMEZ H., CALO V. M., BAZILEVS Y., HUGHES T. J. R.  
Isogeometric analysis of the Cahn-Hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 4333-4352.
- [GOV 12] GOVINDJEE S., STRAIN J., MITCHELL T. J., TAYLOR R. L.  
Convergence of an efficient local least squares fitting method for bases with compact support. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 213-216, 2012, p. 84-92.
- [GRA 86] GRAF W., CHANG T. Y., SALEEB A. F.  
On the numerical performance of three-dimensional thick shell elements using a hybrid/mixed formulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 2, 1986, p. 357-375.
- [GRU 89] GRUTTMAN F., STEIN E., WRIGGERS P.  
Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations. *Ingenieur-Archiv*, vol. 59, 1989, p. 54-67.
- [HER 65] HERRMANN L. R.  
Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA Journal*, vol. 3, 1965, p. 1896-1900.

- [HOS 13] HOSSEINI S., REMMERS J. J. C., VERHOOSSEL C. V., DE BORST R.  
An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 95, 2013, p. 238-256.
- [HUG 77a] HUGHES T. J. R.  
Equivalence of finite elements for nearly incompressible elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 44, 1977, p. 181-183.
- [HUG 77b] HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L., KANOKNUKULCHAI W.  
A simple and efficient finite element for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, 1977, p. 1529-1543.
- [HUG 80] HUGHES T. J. R.  
Generalization of selective integration procedure to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, 1980, p. 1413-1418.
- [HUG 81a] HUGHES T. J. R., LIU W. K.  
Nonlinear finite element analysis of shells : part I three dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 26, 1981, p. 331-362.
- [HUG 81b] HUGHES T. J. R., TEZDUYAR T. E.  
Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, 1981, p. 587-596.
- [HUG 00] HUGHES T. J. R.  
*The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover, 672 pages, 2000.
- [HUG 05] HUGHES T. J. R., COTTRELL J. A., BAZILEVS Y.  
Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 4135-4195.
- [HUG 08] HUGHES T. J. R., REALI A., SANGALLI G.  
Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation : comparison of p-method finite elements with k-method NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 4104-4124.
- [HUG 10] HUGHES T. J. R., REALI A., SANGALLI G.  
Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 301-313.
- [ISH 12] ISHAQUDDIN M., RAVEENDRANATH P., REDDY J. N.  
Flexure and torsion locking phenomena in out-of-plane deformation Timoshenko curved beam element. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 51, 2012, p. 22-30.
- [KAS 00] KASPER E. P., TAYLOR R. L.  
A mixed-enhanced strain method, Part I : Geometrically linear problems. *Computers and Structures*, vol. 75, 2000, p. 237-250.

- 
- [KIE 09] KIENDL J., BLETZINGER K. U., LINHARD J., WÜCHNER R.  
Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, 2009, p. 3902-3914.
- [KIE 10] KIENDL J., BAZILEVS Y., HSU M. C., WÜCHNER R., BLETZINGER K. U.  
The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 2403-2416.
- [KIM 93] KIM Y. H., LEE S. W.  
A solid element formulation for large deflection analysis of composite shell structures. *Computers and Structures*, vol. 30, 1993, p. 269-274.
- [KIR 50] KIRCHHOFF G.  
Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal für reine angewandte Mathematik*, vol. 40, 1950, p. 51-58.
- [KLI 97] KLINKEL S., WAGNER W.  
A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 4529-4545.
- [KOI 60] KOITER W. T.  
A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proceedings Symposium on Theory of Thin Elastic Shells, North-Holland*, 1960, p. 12-33.
- [KOS 05] KOSCHNICK F., BISCHOFF M., CAMPRUBI N., BLETZINGER K. U.  
The discrete strain gap method and membrane locking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 2444-2463.
- [LEG 03] LEGAY A., COMBESURE A.  
Elastoplastic stability of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, 2003, p. 1299-1322.
- [LET 95] LETCHER J. S., SHOOK M.  
NURBS considered harmful for gridding (Alternative Offered). *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories*, 1995, p. 253-264.
- [LIU 84] LIU W., BELYTSCHKO T.  
Efficient linear and non linear heat conduction with a quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, 1984, p. 931-948.
- [Liv 07] LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION  
*LS-DYNA Keyword User's Manual*. 2007.
- [LOV 88] LOVE A. E. H.  
On the small vibrations and deformations of thin elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 179, 1888, p. 491-ff.
- [LYO 77] LYONS L. P. R.  
A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures. Thèse de doctorat, Imperial college, London, 1977.
-

- [MAC 85] MACNEAL R. H., HARDER R. L.  
A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, 1985, p. 3-20.
- [MAK 95] MAKER B.  
*NIKE3D a non-linear, implicit, three-dimensional finite element code for solid and structural mechanics*. Technical Report UCRL-MA-105268 Rev. 1, Lawrence Livermore National laboratory, University of California, Livermore, 1995.
- [MAL 78] MALKUS D. S., HUGHES T. J. R.  
Mixed finite element methods - Reduced and selective integration techniques : A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 15, 1978, p. 63-81.
- [MEC 80] MECK H. R.  
An accurate polynomial displacement function for finite ring elements. *Computers and Structures*, vol. 11, 1980, p. 265-269.
- [MIN 51] MINDLIN R. D.  
Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, 1951, p. 31-38.
- [MIT 11] MITCHELL T. J., GOVINDJEE S., TAYLOR R. L.  
A method for enforcement of Dirichlet boundary conditions in isogeometric analysis. in : *D. Mueller-Hoeppe, S. Loehnert, S. Reese (Eds.), Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics*, Springer-Verlag, 2011, p. 283-293.
- [NAG 74] NAGTEGAAL J. C., PARK D. M., RICE J. R.  
On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 4, 1974, page 53-177.
- [NOO 81] NOOR A. K., PETERS J. M.  
Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 1981, p. 615-631.
- [Oñ 00] OÑATE E., ZÁRATE F.  
Rotation-free triangular plate and shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, p. 557-603.
- [PAR 95] PARISCH H.  
A continuum-based shell theory for non-linear application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, 1995, p. 1855-1883.
- [PAW 71] PAWSEY S., CLOUGH R.  
Improved numerical integration of thick shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, 1971, p. 575-586.
- [PIA 82] PIAN T. H. H., CHEN D. P.  
Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, 1982, p. 1679-1684.

- [PIE 97] PIEGL L., TILLER W.  
*The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*. Second ed., Springer-Verlag, New York, 646 pages, 1997.
- [PRA 82] PRATHAP G., BHASHYAM G.  
Reduced integration and the shear-flexible beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, 1982, p. 195-210.
- [RAN 98] RANK E., KRAUSE R., PREUSCH K.  
On the accuracy of p-version elements for the Reissner–Mindlin plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, 1998, p. 51-67.
- [REE 00] REESE S., WRIGGERS P., REDDY B. D.  
A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers and Structures*, vol. 75, 2000, p. 291-304.
- [REE 07] REESE S.  
A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, 2007, p. 1671-1716.
- [REI 45] REISSNER E.  
The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, 1945, p. 69-77.
- [REI 47] REISSNER E.  
On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 5, 1947, p. 55-68.
- [ROG 00] ROGERS D. F.  
*An introduction to NURBS : With Historical Perspective*. Morgan Kaufmann, 342 pages, 2000.
- [SAN 63] SANDERS J. L.  
Nonlinear theories for thin shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 21, 1963, p. 21-36.
- [SCH 12] SCHILLINGER D., RUESS M., ZANDER N., BAZILEVS Y., DÜSTER A.  
Small and large deformation analysis with the p- and B-spline versions of the Finite Cell Method. *Computational Mechanics*, vol. 50, 2012, p. 445-478.
- [SCH 14] SCHILLINGER D., HOSSAIN S. J., HUGHES T. J. R.  
*Reduced bezier element quadrature rules for quadratic and cubic splines in isogeometric analysis*. ICES REPORT 14-02, The Institute for Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin, 2014.
- [SCO 12] SCOTT M. A., LI X., SEDERBERG T. W., HUGHES T. J. R.  
Local refinement of analysis-suitable T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 213–216, 2012, p. 206-222.
- [SIM 86] SIMO J. C., HUGHES T. J. R.  
On the variational foundation of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, 1986, page 51–54.



- [SIM 90a] SIMO J. C., FOX D. D., RIFAI M. S.  
On stress resultant geometrically exact shell model, Part III : computational aspects of nonlinear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 79, 1990, p. 21-70.
- [SIM 90b] SIMO J. C., RIFAI M.  
A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, p. 1595-1638.
- [SIM 92] SIMO J. C., ARMERO F.  
Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, 1992, p. 1413-1449.
- [SIM 98] SIMO J. C., HUGHES T. J. R.  
*Computational Inelasticity*. Springer New York, 392 pages, 1998.
- [SMO 99] SMOLENSKI W. M.  
Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 178, 1999, p. 89-113.
- [SOU 96] DE SOUZA NETO E. A., PERIC D., DUTKO M., OWEN D. R. J.  
Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, 1996, page 3277–3296.
- [SOU 05a] DE SOUSA R. J. A., CARDOSO R. P. R., VALENTE R. A. F., YOON J. W., GRACIO J. J.  
A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness : Part I – Geometrically linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2005, p. 952-977.
- [SOU 05b] DE SOUZA NETO E. A., PIRES F. M. A., OWEN D. J. R.  
F-bar based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I : formulation and benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2005, p. 353-383.
- [SOU 06] DE SOUSA R. J. A., CARDOSO R. P. R., VALENTE R. A. F., YOON J. W., GRACIO J. J., NATAL R. M. J.  
A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness : Part II – Non linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, 2006, p. 160-188.
- [SOU 07] DE SOUSA R. J. A., CARDOSO R. P. R., VALENTE R. A. F., YOON J. W., GRACIO J. J.  
On the use of a reduced enhanced solid-shell (RESS) element for sheet forming simulations. *International Journal of Plasticity*, vol. 23, 2007, p. 490-515.

- [STA 85] STANLEY G. M.  
Continuum-based Shell elements. Thèse de doctorat, Division of Applied Mechanics, Stanford University, 1985.
- [STO 82] STOLARSKI H., BELYTSCHKO T.  
Membrane locking and reduced integration for curved element. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 49, 1982, p. 172-178.
- [SZE 93] SZE K. Y., GHALI A.  
Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, 1993, p. 1519-1540.
- [SZE 04] SZE K. Y., LIU X. H., LO S. H.  
Popular Benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, 2004, p. 1551-1569.
- [TEM 11] TEMIZER I., WRIGGERS P., HUGHES T. J. R.  
Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 2011, p. 1100-1112.
- [THA 12] THAI C. H., XUAN H. N., THANH N. N., LE T. H., THOI T. N., RABCZUK T.  
Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, 2012, p. 571-603.
- [VEI 12a] DA VEIGA L. B., BUFFA A., LOVADINA C., MARTINELLI M., SANGALLI G.  
An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 209–212, 2012, p. 45-53.
- [VEI 12b] DA VEIGA L. B., LOVADINA C., REALI A.  
Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 241-244, 2012, p. 38-51.
- [VUO 11] VUONG A. V., GIANNELLI C., JÜTTLER B., SIMEON B.  
A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, 2011, p. 3554-3567.
- [WAL 08] WALL W. A., FRENZEL M. A., CYRON C.  
Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 1976-1988.
- [WAN 08a] WANG H., HE Y., LI X., GU X., QIN H.  
Polycube splines. *Computer Aided Design*, vol. 40, 2008, p. 721-733.
- [WAN 08b] WANG H., JIN M., HE Y., GU X., QIN H.  
User-controllable polycube map for manifold spline construction. *in SPM'08 : Proceedings of ACM solid and physical modeling symposium*, 2008, p. 125-136.

- [WAS 82] WASHIZU K.  
*Variational methods in elasticity and plasticity*. 3rd ed. New York : Pergamon Press, 540 pages, 1982.
- [WIL 73] WILSON E., TAYLOR R., DOHERTY W., GHABOUSSI J.  
Incompatible displacement models (isoparametric finite elements in solid and thick shell structural analysis). *Numerical and computer methods in structural mechanics*. (A 74-17756 06-32) New York, Academic Press, , 1973, p. 43–57.
- [WRI 96] WRIGGERS P., REESE S.  
A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 135, 1996, p. 201-209.
- [XIA 11] XIA J., GARCIA I., HE Y., XIN S., PATOW G.  
Editable polycube map for gpu-based subdivision surfaces. *in Symposium on interactive 3d graphics and games (I3D)*, 2011, p. 151-158.
- [XU 93] XU X., CAI R.  
A new plate shell element of 16 nodes and 40 degrees of freedom by relative displacement method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, 1993, p. 15-20.
- [ZHA 07] ZHANG Y., BAZILEVS Y., GOSWAMI S., BAJAJ C. L., HUGHES T. J. R.  
Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 2943-2959.
- [ZIE 71] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., TOO J. M.  
Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, 1971, p. 275-290.

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : BOUCLIER

DATE de SOUTENANCE : 30 septembre 2014

Prénoms : Robin, Benjamin

TITRE : Éléments finis isogéométriques massifs coque sans verrouillage pour des simulations en mécanique non linéaire des solides

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2014-ISAL-0090

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

#### RÉSUMÉ :

Avec l'arrivée de l'Analyse IsoGéométrique (IGA), le calcul de coque est devenu possible en utilisant la géométrie exacte pour des maillages grossiers. Pour cela, les polynômes de Lagrange sont remplacés par l'interpolation par des fonctions NURBS (technologie la plus courante en conception assistée par ordinateur). De plus, ces fonctions possèdent une continuité supérieure ce qui offre une meilleure précision qu'un calcul éléments finis à nombre de degrés de liberté égal. L'IGA a déjà été développée pour les formulations coques. Elle n'a été cependant que très peu étudiée pour les modèles massifs coque. Pourtant, cette deuxième approche est très utilisée par l'ingénieur car elle permet de calculer des structures minces à l'aide d'éléments continus 3D, c'est-à-dire en faisant intervenir uniquement des inconnues en déplacements.

La difficulté en calcul de coque est de faire face au verrouillage qui conduit à une forte dégradation de la convergence de la solution. Le cadre NURBS ne permet pas lui-même de résoudre ce problème. La meilleure efficacité de l'approximation NURBS ne peut donc être atteinte sans le développement de techniques particulières pour supprimer le verrouillage. C'est le but de cette thèse dans le cadre des éléments massifs coque.

Le premier travail a consisté, sur un problème de poutre courbe, à étendre les méthodes sans verrouillage habituelles au contexte NURBS. Deux nouvelles stratégies ont alors été développées pour les NURBS : la première est basée sur une technique d'intégration réduite tandis que la seconde fait appel à une projection  $\bar{B}$ . Le formalisme général des méthodes  $\bar{B}$  semblant plus adapté, c'est celui-ci que nous avons développé ensuite pour les éléments massifs coque. Plus précisément, nous avons mis en place une formulation mixte de laquelle nous avons pu dériver la projection  $\bar{B}$  équivalente. Cette démarche constitue d'un point de vue théorique le résultat principal du travail : une méthode systématique pour construire une projection  $\bar{B}$  consistante est de passer par une formulation mixte.

D'un point de vue mise en œuvre, l'idée principale pour traiter le verrouillage des éléments massifs coque a été de modifier l'interpolation de la moyenne dans l'épaisseur de la coque des composantes du tenseur des contraintes. Un contrôle de hourglass a aussi été ajouté pour stabiliser l'élément dans certaines situations. L'élément obtenu est de bonne qualité pour une interpolation de bas degrés et des maillages grossiers : la version quadratique semble plus précise que des éléments standards NURBS de degré 4. La méthode proposée conduit à une matrice de rigidité globale de petite taille mais pleine. Ce problème est inhérent aux NURBS. Il a pu être limité ici en utilisant une procédure de type moindres carrés locaux pour approcher la projection  $\bar{B}$ .

Finalement, l'élément mixte a été étendu avec succès en non linéaire géométrique ce qui témoigne du potentiel de la méthode pour mener des simulations complexes.

MOTS-CLÉS : élément massif coque, analyse isogéométrique, verrouillage, méthode mixte, projection  $\bar{B}$ , intégration réduite, contrôle de hourglass, flambage, non linéaire.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Alain COMBESURE

Composition du jury : Jean-Louis BATOZ	René DE BORST
Farid ABED-MERAIM	Manfred BISCHOFF
Bruno COCHELIN	Antoine LEGAY
Alain COMBESURE	Thomas ELGUEDJ

